UPMC
SORBONNE UNIVERSITÉS

Thèse de Doctorat
de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité
Océanographie, Météorologie et Environnement
(École Doctorale 129 : Sciences de l'Environnement d'Ile de France)

Présentée par
Noé Lahaye

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de thèse

Dynamique, interactions et instabilités de structures cohérentes agéostrophiques dans les modèles en eau peu profonde

Soutenue le 3 octobre 2014
devant le Jury composé de :

Pr. Paul Billant	Rapporteur
Pr. François Bouchut	Examinateur
Pr. Pascale Bouruet-Aubertot	Présidente de Jury
Pr. Xavier Carton	Rapporteur
Pr. Riwal Plougonven	Examinateur
Pr. Vladimir Zeitlin	Directeur de Thèse

Cette thèse a été préparée
au sein du LMD ENS

Laboratoire de Météorologie Dynamique
École Normale Supérieure
24 rue Lhomond
75231 Paris Cedex 05





Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Ecoulements atmoshériques et océaniques à grande échelle 1
1.2 Modélisation mathématique des écoulements à grande échelle 7
1.3 Mouvements équilibrés, interactions ondes-tourbillons 14
1.4 Structures cohérentes agéostrophiques – objet de la thèse 19

2 Instabilités de tourbillons intenses **25**

2.1 Instabilités de tourbillons : généralités, théorie 25
2.2 Instabilités d'anticyclones fortement agéostrophiques 28
2.3 Article : *Centrifugal, barotropic and baroclinic instabilities of isolated ageostrophic anticyclones in the two-layer rotating shallow water model and their nonlinear saturation* 31
2.4 Instabilités dans les cyclones tropicaux 60
2.5 Conclusions 71

3 Structures agéostrophiques multipolaires **73**

3.1 Dipôles et tripôles agéostrophiques dans le modèle RSW à une couche . . . 73
3.2 Article : *Collisions of ageostrophic modons and formation of new types of coherent structures in rotating shallow water model* 76
3.3 Shock Modon : Introduction à l'article 82
3.4 Article : *Shock Modon : a new type of coherent structure in rotating shallow water* 83
3.5 Dipôles et tripôles en RSW 1 couche : résumé 89
3.6 Dipôles agéostrophiques baroclines et tripôles dans le modèle RSW à deux couches 89
3.7 Article : *Existence and properties of ageostrophic modons and coherent tripoles in the two-layer rotating shallow water model on the f-plane* 91
3.8 Résumé et perspectives 127

4 Turbulence d'ondes et de tourbillons **129**
4.1 Notions de turbulence (quasi) bidimensionnelle 129
4.2 Article : *Decaying vortex and wave turbulence in rotating shallow water model, as follows from high-resolution direct numerical simulations* 134
4.3 Discussion et résultats subséquents 148

Conclusions et perspectives **151**

Bibliographie **155**

CHAPITRE 1

Introduction

1.1 Structures cohérentes dans les écoulements atmosphériques et océaniques à grande échelle

Une description rapide des écoulements à grande échelle est ici donnée, en insistant sur les aspects dynamiques qui sont importants dans le contexte général de cette thèse. Ces aspects justifient notamment l'approche que nous employons dans la suite, et constituent le contexte de la formation et de l'existence des structures cohérentes, en particulier des tourbillons.

1.1.1 Description générale des écoulements à grande échelle – motivation de la thèse

Les écoulements atmosphériques et océaniques, à grande échelle, ont de nombreuses caractéristiques en commun. D'un point de vue hydrodynamique, ce sont des écoulements de fluides *stratifiés*, en *rotation* et contenus dans un domaine à *faible rapport d'aspect* (i.e. dont l'extension selon une dimension spatiale, en l'occurence la verticale, est petite par rapport aux deux autres). Ils présentent un gradient vertical de densité, associé à un gradient de température (et, dans l'océan, de salinité). Cette stratification est – en moyenne et à grande échelle – stable, ce qui tend à inhiber les mouvements verticaux. Ils sont également soumis à la pseudo-force de Coriolis associée à la rotation de la Terre. Celle-ci est responsable, conjointement au chauffage radiatif par le rayonnement solaire, de la mise en circulation des masses atmosphériques et océaniques. Physiquement, le paramètre de Coriolis (qui a la dimension d'une fréquence) fait apparaître un taux de rotation typique qui est comparé au taux de rotation des écoulements considérés pour en mesurer la magnitude. Le nombre sans dimension ainsi obtenu est le nombre de Rossby :

$$Ro = \frac{U}{fL},$$

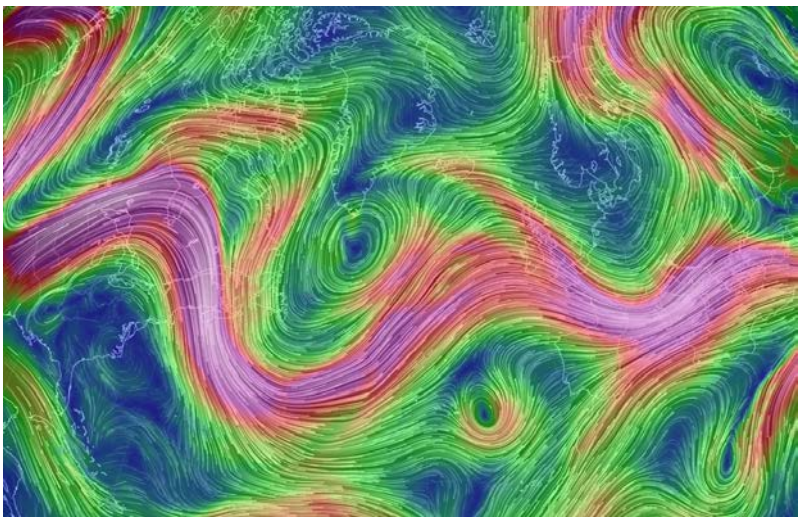


FIGURE 1.1 – Analyse du vent à 250 hPa le 13 Mai 2014 à 15h00 UTC. Visualisation des trajectoires instantannées avec le module du vent en couleurs. Le domaine représenté s'étend du continent nord américain au Moyen Orient. Résolution : T574/L64. Source : GFS/NCEP/US National Weather Service (http ://earth.nullschool.net/).

où U et L sont respectivement la vitesse et l'échelle spatiale typiques de l'écoulement, et f est la valeur du paramètre de Coriolis. La force de Coriolis est à l'origine d'une bidimensionalisation des écoulements géophysiques à faible nombre de Rossby et d'une homogénéisation sur la verticale, phénomène théorisé par Taylor et Proudman en 1917 et connu sous le nom de "théorème de Taylor-Proudman" (la paternité du théorème serait cependant à attribuer à Hough en 1897). Il résulte de ceci les propriétés communes aux écoulements atmosphériques et océaniques à grande échelle d'évoluer dans le plan horizontal et de présenter une faible variation sur la verticale, en première approximation.

Le nombre de Reynolds typique de ces écoulements, comparant les termes inertiels et dissipatifs, est très grand. Si l'on considère, pour l'atmosphère, une estimation basse de la valeur typique du vent de l'ordre de 1 m/s, sur une échelle spatiale de l'ordre de la centaine de kilomètres, on obtient une valeur typique du nombre de Reynolds de $Re^{\mathrm{atm}} \approx 6 \cdot 10^9$ (la viscosité cinématique de l'air vaut environ $16 \cdot 10^{-6} \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$). Une même estimation dans l'océan, avec une vitesse typique de l'ordre de quelques centimètres par seconde sur des longueurs typiques de quelques dizaines de kilomètres, donne $Re^{\mathrm{oc}} \approx 10^8$. Ces valeurs élevées du nombre de Reynolds indiquent que les écoulements sont dans un régime turbulent. Ainsi, une image de la circulation atmosphérique ou océanique s'organisant en un ensemble de jets principalement zonaux et plus ou moins intenses (jet stream, jet polaire dans l'atmosphere et émanations des courants de bord ouest dans l'océan, comme le gulf stream) accompagnés de circulations méridiennes lentes (les cellules de Hadley aux tropiques, de Ferrel aux moyennes latitudes ou les branches de retour des gyres océaniques) ; telle que décrite dans les ouvrages classiques de dynamique des fluides géophysiques (DFG) (e.g. Gill, 1982; Pedlosky, 1987; Vallis, 2006) n'est pas à considérer *stricto sensu* : il s'agit en réalité d'une vision moyennée des écoulements cachant des propriétés diverses et complexes. Les jets sont instables et forment continuellement des méandres (cf. figs. 1.1 et 1.2, cadre de gauche [1]), manifestations des ondes de Rossby circulant sur les gradients de

1. Notons que ces deux figures sont issues de réanalyses (i.e. de simulations numériques corrigées par

vorticité potentielle qu'ils forment. Les flux (chaleur, quantité de mouvement...) associés à ces perturbations de forte amplitude sont l'essence du transport méridien observé sur les moyennes. Dans les océans, un grand nombre de tourbillons cohérents sont présents à des échelles variées (cf. fig. 1.2, cadre de gauche, et section suivante) et participent activement au transport de quantités dynamiques et thermodynamiques (ainsi que d'espèces biologiques). Leur dynamique est complexe : essentiellement non-linéaire, elle implique des interactions entre des échelles diverses, mais également des composantes du mouvement de natures différentes (ondes et tourbillons, cf. section 1.3), d'autant plus qu'ils sont intenses. Cette intensité est caractérisée par un nombre de Rossby élevé, et on parle alors d'écoulement *agéostrophique*, concept qui sera explicité dans la suite de cette introduction. Bon nombre des caractéristiques des tourbillons, qu'ils soient considérés individuellement ou en interaction avec leur environnement – ou d'autres structures – demeurent incomprises.

C'est dans cette problématique que s'inscrit le travail de recherche présenté dans cette thèse : comprendre la dynamique des structures cohérentes agéostrophiques présentes dans les écoulements géophysiques à grande et moyenne échelle.

1.1.2 Tourbillons océaniques

L'origine, la taille et l'intensité des tourbillons océaniques sont diverses (McWilliams, 1985; Olson, 1991; Carton, 2010; Chelton *et al.*, 2011). Il est maintenant bien connu que ces structures sont omniprésentes, que ce soit à l'échelle synoptique ($\sim$ 100 km), à la mésoéchelle ou à la sous-mésoéchelle ($\sim$ 10 km).

Tourbillons synoptiques

La première source historiquement identifiée de ces tourbillons est l'instabilité, barocline ou barotrope, des courants de bord ouest (Flierl *et al.*, 1999). La reconnection des méandres caractéristiques de ces instabilités forme des boucles qui se détachent et donnent naissance à des tourbillons – également appelés *anneaux* lorsqu'ils sont de grande taille – dérivant lentement vers l'ouest ou le sud-ouest sous l'action combinée de l'effet beta-planétaire (le gradient méridien de vorticité planétaire associé à la courbure de celle-ci) et de l'interaction avec le jet. Ce phénomène est particulièrement actif pour les deux grands courants de bord ouest de l'hémisphère nord, le Gulf Stream se détachant de la côte Est des Etats-Unis, et le Kuroshio dans le Pacifique Nord. Il est visible dans le cas du Gulf Stream dans la figure 1.2 (cadre de gauche). Les anomalies de vitesses typiques associées à ces anneaux sont de l'ordre de 1 à 2 m/s et leur rayon typique est de l'ordre de la centaine de kilomètres. Le détachement de tourbillons au niveau de la retroflection de courants est également observé, par exemple au niveau du courant des Aiguilles (au large de l'Afrique du Sud) ou du courant du Brésil Nord (Carton, 2010). Les anneaux provenant de la retroflection du Courant des Aiguilles sont des anticyclones de plus grande taille et légèrement moins intenses que les anneaux du Gulf Stream. Ils dérivent souvent sur de longues périodes en suivant une trajectoire orientée vers le Nord-Ouest dans le bassin Atlantique Sud (cf. figure 1.3). La plupart des tourbillons à l'échelle synoptique ont un maximum d'intensité en surface (*surface-intensified*) ou quelques centaines de mètres en dessous (structures de sub-surface). Leur champ de vitesse décroit généralement avec la profondeur, mais certains sont quasi-barotropes, s'étendant sur l'ensemble de la colonne d'eau.

des observations via une méthode d'assimilation de données) dont la résolution, nécessairement limitée, ne donne pas accès aux structures d'échelle plus petite.

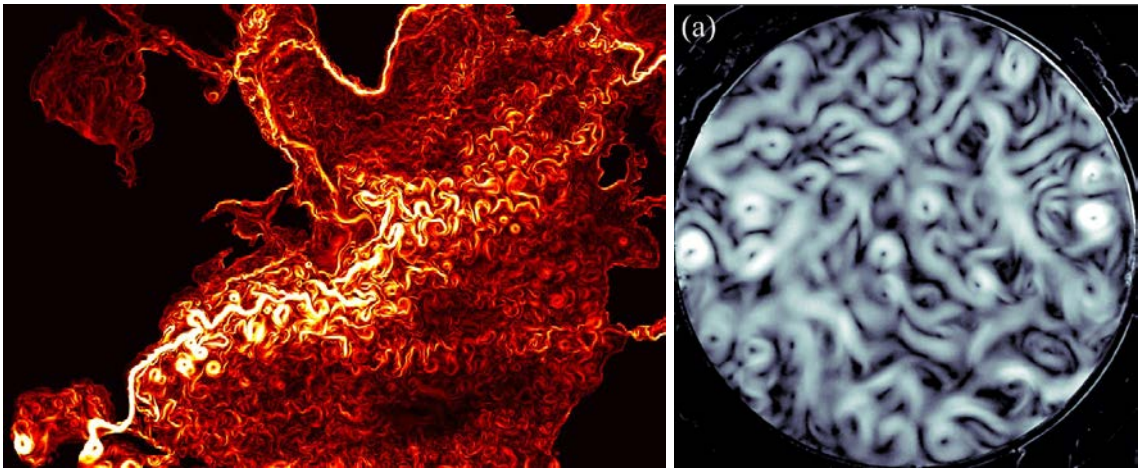


FIGURE 1.2 – Densité d'énergie cinétique en surface simulée par le modèle de circulation océanique HYCOM avec assimilation de données (résolution 1/10° – gauche) et densité d'énergie à basse fréquence dans une expérience de laboratoire en Rotating Shallow Water (Afanasyev et Craig, 2013) (droite).

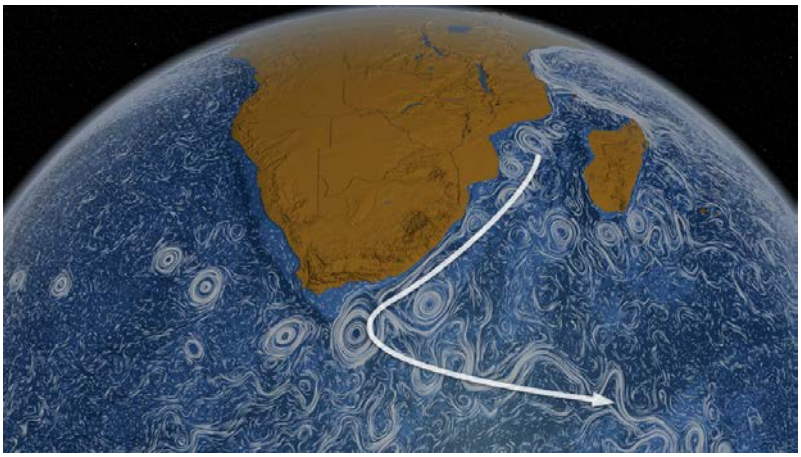


FIGURE 1.3 – Visualisation des courants par insémination de traceurs dans le modèle de circulation générale océanique du MIT intégrant des observations. On y voit la trajectoire du courant des Aiguilles (indiquée par une flèche) et de nombreux tourbillons émis, notamment à l'Ouest et au Nord-Ouest de la zone de rétroflexion. Source : NASA, projet ECCO.



FIGURE 1.4 – Visualisation de l'entraînement de glace de mer (en blanc) par un dipôle de vorticité formé en mer d'Okhotsk. (image satellite, source : (Fedorov et Ginsburg, 1989))

Tourbillons de sous-mésoéchelle

Des tourbillons de plus petite échelle existent aussi, principalement générés par l'instabilité de courants côtiers, ou par l'interaction de courants avec la topographie – par exemple dans le sillage d'îles (ou de monts sous-marins) (Carton, 2010). D'autres scénarios sont envisageables, comme l'interaction entre plusieurs courants et/ou avec un forçage atmosphérique intense, ou encore la déstabilisation de colonnes de convection profonde. Beaucoup de ces tourbillons sont intensifiés en surface (ou juste dessous) et tous ont une décroissance marquée de la vitesse avec la profondeur. La séparation horizontale entre les tourbillons peut aller de l'isolement complet à l'interaction forte, avec éventuellement la formation de multipôles (cf. figure 1.4). Certains sont complètement isolés verticalement et ont une signature en vitesse nulle à la surface. Un exemple désormais classique – et néanmoins toujours étudié – en est les *meddies*, tourbillons en forme de lentille se formant par déstabilisation du courant sous-marin associé à la sortie des eaux de fond du bassin méditerranéen au niveau de Gibraltar. Ces tourbillons de mésoéchelle sont probablement parmi ceux les plus isolés qui soient, et leur processus de déclin, s'il est compris qualitativement, est toujours un sujet actif de recherche.

Impact des tourbillons océaniques

Une caractéristique importante de ces structures est qu'elles renferment une anomalie de température, de salinité et d'espèces biologiques provenant de la région d'appartenance des masses d'eau qu'elles contiennent, en plus de constituer une anomalie d'énergie (cinétique et potentielle). Dans le cas des tourbillons formés par déstabilisation de courant-jets, par exemple, ceux formés au sud du front de température associé au courant contiennent des masses d'eau froide provenant du nord – on parle de *cold core eddies*, et inversement (*warm core eddies*). Par exemple, les tourbillons se détachant du Courant des Aiguilles se propagent en direction du nord-ouest dans l'Atlantique Sud et peuvent parfois atteindre la côte sud-américaine. L'anomalie d'énergie qu'ils contiennent est importante : on estime par

exemple que l'énergie associée à chaque anneau détaché du courant des Aiguilles équivaut à environ 7% du forçage par le vent communiqué à la circulation océanique à grande échelle (Olson et Evans, 1986). De fait, les tourbillons sont un élément clé dans le bilan énergétique de la circulation océanique, notamment pour l'identification des puits d'énergie (Ferrari et Wunsch, 2009), et la compréhension de leur distribution (en terme de taille, d'intensité, de durée de vie, etc.) est toujours imparfaite. Ces structures sont susceptibles d'émettre des ondes internes, notamment par interaction avec la topographie (surtout pour les tourbillons synoptiques, ou près des bords), ou via un mécanisme d'instabilité. Elles peuvent également redistribuer (partiellement ou intégralement) de la quantité de mouvement à leur environnement, par exemple en étant absorbées par un jet – ou un tourbillon de plus grande échelle – ou en se déstabilisant. La compréhension de la stabilité des tourbillons océaniques – associée à leur temps de vie long –, et la connaissance des processus d'instabilité qu'elles peuvent – à l'opposé – subir, présentent encore des zones d'ombre, notamment en ce qui concerne les structures agéostrophiques et/ou de taille inférieure à l'échelle synoptique.

1.1.3 Tourbillons atmosphériques intenses : dépressions synoptiques et cyclones tropicaux

Les tourbillons sont aussi fréquemment observés dans les écoulements atmosphériques, avec des structures différentes. Les perturbations synoptiques des moyennes latitudes se formant suite au déferlement d'ondes de Rossby sur les courant-jets en sont un exemple commun. Les phénomènes de blocages atmosphériques sont souvent associés à une structure dipolaire, piégée dans l'écoulement moyen et presque stationnaire par rapport au sol (e.g. McWilliams, 1980; Butchart *et al.*, 1989), ou à un monopôle de vorticité formé sur un côté du courant-jet et occasionant un blocage "en omega". Des tourbillons cycloniques se détachent parfois des jets, formant des "cutoff lows" qui peuvent être associés à des vents forts en surface. Des cyclones intenses mais de courte durée, appelés dépressions polaires, sont également observés aux hautes latitudes. L'exemple archétype de tourbillons intenses dans l'atmosphère reste néanmoins les cyclones tropicaux (également appelés ouragans ou typhons selon les régions). Ce sont des tourbillons cycloniques intenses qui se forment au dessus des océans chauds dans les régions tropicales. Ils sont constitués d'un coeur chaud, associé à une descente des isentropes et une baisse de la pression de surface en centre, et d'une circulation azimutale intense et principalement axisymétrique, surtout près du centre. Le maximum de vitesse est de l'ordre de quelques dizaines de m/s et entoure l'oeil du cyclone, zone calme et associée à une subsidence lente dont le diamètre typique peut varier de 20 à presque 100 km. Les systèmes convectifs intenses présents dans cette région forment le mur du cyclone (*eyewall* en anglais) où le dégagement de chaleur latente associé à la formation de masses nuageuses (et à la précipitation) alimente la circulation. Une circulation secondaire, convergente en surface (et mettant en jeu des processus complexes dans la couche limite) et divergente en altitude maintient le fort taux d'humidité spécifique vers l'oeil du cyclone et alimente ainsi, à son tour, ce cycle thermodynamique (e.g. Emanuel, 2010; Kepert, 2010). Les nombres de Rossby typiques des cyclones sont très élevés : ils peuvent atteindre des valeurs de l'ordre de 30. Ce sont donc des structures fortement agéostrophiques et intrinsèquement liées aux processus de convection humide, eux mêmes fortement non linéaires. Tous les aspects de la dynamique de ces structures ne sont pas compris et font l'objet d'une recherche particulièrement active.

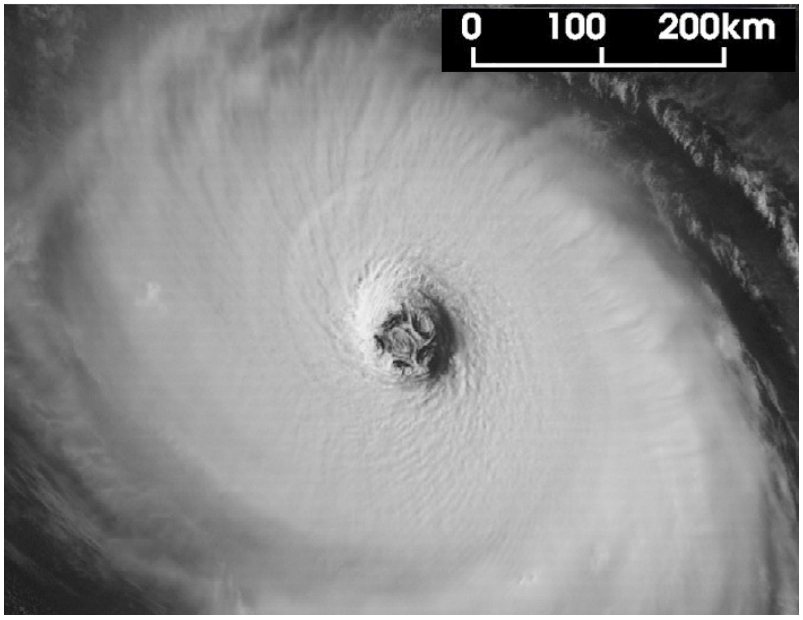


FIGURE 1.5 – Photo satellite (canal visible) de l'ouragan Isabel prise le 12 Septembre 2003. L'oeil et la structure axisymétrique du coeur sont clairement visible sur la photo. Le bord extérieur du mur est associé à la position du maximum de vent azimutal. (Source : NASA earth science office – http ://weather.msfc.nasa.gov)

1.1.4 Approche de la thèse

Tous les processus en jeu dans la dynamique des tourbillons sont complexes, notamment parce qu'ils sont susceptibles d'agir en même temps et de se coupler, et qu'il est souvent difficile de séparer les tourbillons de leur environnement (formé notamment d'autres tourbillons). Une approche utile consiste à simplifier cette dynamique en l'étudiant dans des configurations – et des modèles – idéalisés afin d'en étudier l'essence des processus. Les résultats obtenus n'ont pas pour but la reproduction fidèle de cas réels, mais ils permettent une meilleure compréhension des phénomènes ; par exemple, quel type d'instabilité est susceptible d'agir et quel peut-être son impact, quel est le degré d'attractivité et de stabilité des structures cohérentes susceptibles d'exister, ou encore comment interagissent ces structures entre elles. C'est cette approche qui a été adoptée dans les différents travaux présentés dans cette thèse.

1.2 Modélisation mathématique des écoulements à grande échelle

Nous introduisons dans cette partie les différents modèles utilisés pour décrire les écoulements atmosphériques et océaniques. Les différentes hypothèses et approximations qu'ils incluent sont rappelées, et nous motivons le choix d'utiliser le modèle Rotating Shallow Water (RSW) pour nos études. On donne alors les propriétés importantes de ces modèles et une description rapide du code de simulation numérique utilisé pour les traiter.

1.2.1 Les équations primitives

Les écoulements océaniques et atmosphériques à l'échelle synoptique, c'est à dire lorsque la taille horizontale typique est de l'ordre du rayon de déformation (introduit dans cette partie) et inférieure au rayon de la Terre, sont généralement décrits par un système d'équations appelées *équations primitives*. Elles comprennent une équation d'état (décrivant la thermodynamique du système) et les équations de Navier-Stokes (pour la dynamique) exprimées sur la sphère, en négligeant certains termes associés à la sphéricité et en utilisant les approximations d'hydrostatisme, d'incompressibilité et de Boussinesq (e.g. Pedlosky, 1987; Vallis, 2006). L'approximation hydrostatique consiste à négliger les termes d'advection lagrangienne $(\partial_t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla})$ ainsi que les termes de courbure devant les forces générées par le gradient de pression verticale et la gravité dans l'équation pour la quantité de mouvement radiale (i.e. verticale). L'incompressibilité correspond à la conservation du volume des parcelles fluides au cours de leur mouvement $(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0)$ et réduit l'équation de continuité à la conservation lagrangienne de la densité, tout en filtrant les ondes acoustiques. L'approximation de Boussinesq néglige les effets de variablilité de la densité sauf dans le terme relatif à la flottabilité dans les équations pour la quantité de mouvement. Les termes dits "non traditionnels" (la composante verticale, et les termes impliquant la vitesse verticale dans la composante horizontale de la force de Coriolis ; ainsi que les termes de courbure impliquant la vitesse verticale) sont habituellement negligés [2]. L'accélération centrifuge est absorbée dans la gravité et le fluide est supposé contenu dans une couche mince (devant le rayon de la terre), ce qui permet de remplacer la coordonnée radiale par $R+z$, où R est le rayon de la Terre et $z << R$ l'altitude, et d'approximer les occurences explicites de cette variable (en dehors des dérivées) par la valeur du rayon de la Terre R.

L'approximation du plan tangent permet enfin d'assimiler les coordonnées de la latitude et de la longitude à des coordonnées cartésiennes (la variation maximum en latitude est petite devant le rayon de la Terre) et d'approximer le terme de Coriolis par son développement de Taylor autour de la latitude considérée θ_0, à l'ordre zéro (plan f) ou au premier ordre (plan β) :

$$f \approx f_0 + \beta y \ , \quad f_0 = 2\Omega \sin\theta_0 \ , \quad \beta = (2\Omega\cos\theta_0)/R,$$

où y est la coordonnée méridienne et Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre. Dans l'ensemble des travaux présentés dans cette thèse, c'est l'approximation du plan f qui est utilisée.

Le système d'équations, dans le contexte océanique, s'écrit alors :

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} + f\vec{e_z}\times\vec{v}_h + \vec{\nabla}_h\Phi = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0, \tag{1.2}$$

$$\partial_z\Phi + g\frac{\rho}{\rho_0} = 0 \tag{1.3}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse, ρ est la densité (et ρ_0 une valeur constante de référence), et Φ est le géopotentiel. L'indice h indique que l'on ne considère que les composantes horizontales du vecteur. Ici, et dans l'ensemble du manuscrit, la dérivée temporelle $\frac{d(\cdots)}{dt} \equiv (\partial_t + \vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\cdots)$

2. Leurs effets dynamiques sont néanmoins toujours un sujet d'étude (e.g. Gerkema *et al.*, 2008), notamment pour les écoulements dans les atmosphères profondes.

est la dérivée lagrangienne. Dans le contexte atmosphérique, ces équations exprimées en coordonnées pseudo-hauteur (valables pour les altitudes troposphériques) ont exactement la même forme, mais le géopotentiel est défini différemment et il faut faire le changement de variable $\theta \leftarrow -\rho$, où θ est la température potentielle.

Il est utile d'introduire d'ores et déjà la vorticité potentielle d'Ertel (Ertel, 1942b,a,d,c), quantité introduite initialement par Rossby dans les années 1930 (cf. e.g. l'article de McIntyre (2012b) pour une discussion détaillée et historique sur la vorticité potentielle). Celle-ci est définie, dans le cadre des équations primitives océaniques (1.1)-(1.3) par la relation suivante :

$$q = \frac{\vec{\zeta^a} \cdot \vec{\nabla}\rho}{\rho_0}, \tag{1.4}$$

où $\vec{\zeta^a} = \vec{\nabla} \times \vec{v}_h + f\vec{e_z}$ est la vorticité absolue, et s'écrit dans le contexte atmosphérique :

$$q = \frac{\zeta^a \cdot \vec{\nabla}\theta}{\rho_0}. \tag{1.5}$$

C'est un invariant lagrangien du système, et une grandeur dynamique clé des écoulements à grande échelle, en lien avec les régimes équilibrés pour lesquels elle contient l'ensemble de l'information dynamique (cf. section 1.3). La conservation lagrangienne de la vorticité potentielle est en fait la généralisation à un fluide stratifié et barocline du théorème de circulation de Kelvin, stipulant que la circulation le long d'une ligne matérielle de fluide est conservée au cours de son advection par l'écoulement (e.g. Landau et Lifshitz, 1987) dans le cas d'un fluide barotrope (i.e. dont la densité n'est fonction que de la pression et pas de la troisième variable d'état indépendante). Pour un fluide barocline cette conservation est brisée, mais la circulation le long d'un contour infinitésimal contenu sur une surface isentrope – qui tend vers la composante de la vorticité absolue orienté selon le gradient de température potentielle – est conservée pour un écoulement adiabatique, parce que ce contour reste sur cette surface (étant donné $d\theta/dt = 0$).

Les équations primitives modélisent en (très) bonne approximation les écoulements de fluides géophysiques (au delà de la sous-mésoéchelle notamment). Néanmoins, leur complexité rend leur investigation difficile. Les modèles numériques sont lourds et coûteux en ressources numériques et les sorties peuvent être difficiles à analyser et à comprendre. L'utilisation de modèles simplifiés, se basant sur certaines propriétés des écoulements (en l'occurrence, la stratification et la rotation), permettent de palier ces manquements en fournissant un outil dont l'intégration numérique et l'analyse sont facilitées. Les équations en eau peu profonde en rotation (Rotating Shallow Water) font partie de ces modèles simplifiés. Elles constituent un modèle archétype de la dynamique des fluides géophysiques (e.g. Gill, 1982; Pedlosky, 1987; Vallis, 2006). Des exemples relativement récents – et en lien avec les mécanismes abordés dans cette thèse – de leur utilisation sont l'étude de la formation de tourbillons par instabilité de jets (Poulin et Flierl, 2003) ou de courants côtiers (Gula *et al.*, 2010). Elles permettent également de modéliser avec une bon accord des expériences réalisées en laboratoire (Griffiths et Linden, 1982; Gula et Zeitlin, 2014). On peut notamment se reporter à la figure 1.2 où un écoulement turbulent visualisé dans une expérience en Shallow Water montre clairement des caractéristiques similaires à ce que l'on observe dans les écoulements à grande échelle.

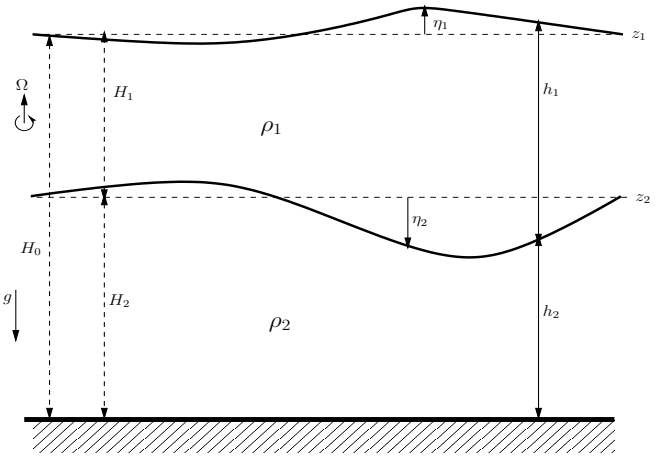


FIGURE 1.6 – Représentation schématique du modèle RSW à deux couches (vue en coupe) dans le cas d'une d'une topographie plane.

1.2.2 Rotating Shallow Water : dérivation et propriétés

Les équations de Saint-Venant en rotation (une autre dénomination – française – de ce même modèle) sont obtenues en moyennant verticalement les équations primitives entre des surfaces matérielles (e.g. Zeitlin, 2007). L'approximation de champ moyen est utilisée au cours de cette dérivation, consistant à négliger les corrélations entre les fluctuations sur la verticale. Une simplification supplémentaire permet de considérer la densité du fluide (moyennée verticalement) comme étant constante par rapport aux coordonnées horizontales et, par conservation, dans le temps. Cette approximation, bien que courante, n'est pas intrinsèque aux modèles en eau peu profonde. Si elle n'est pas faite, on obtient le modèle de Ripa (1993).

Les équations du modèle à n couches s'écrivent :

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} + f\vec{e_z} \times \vec{v}_i = -\frac{\vec{\nabla}\pi_i}{\rho_i}, \tag{1.6}$$

$$\partial_t h_i + \vec{\nabla}(h_i \vec{v}_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{1.7}$$

avec $n-1$ conditions dynamiques aux interfaces :

$$\pi_{i+1} - \pi_i = (\rho_{i+1} - \rho_i)\eta_{i+1}. \tag{1.8}$$

Ici, π_i, h_i et ρ_i sont respectivement la pression, l'épaisseur et la densité dans la couche i, et η_i dénote la déviation de l'interface entre une couche $i-1$ et une couche i. L'indice i est croissant depuis la surface vers le fond. La dissipation peut être introduite dans ce modèle, basiquement sous forme d'un terme visqueux dans l'équation pour la quantité de mouvement, mais également en introduisant des termes d'amortissement – notamment dans l'équation de conservation de la masse. Ils ne sont pas discutés ici, car l'intégralité des travaux contenus dans ce manuscrit utilise les équations inviscides. La représentation schématique de ce modèle est donnée, dans le cas à deux couches, en figure 1.6.

L'équation de conservation de la masse (1.7), conjuguée à l'équation pour la vorticité obtenue en considérant le rotationnel de l'équation pour la quantité de mouvement $\vec{\nabla} \times$ (1.6) :

$$\frac{d^{(i)}(\zeta_i + f)}{dt} + (\zeta_i + f)\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = 0 \ ;$$

permettent d'obtenir l'équation d'invariance lagrangienne de la vorticité potentielle par couche q_i :

$$\frac{d^{(i)}q_i}{dt} = (\partial_t + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla})q_i = 0, \tag{1.9}$$

où

$$q_i = \frac{\zeta_i + f}{h_i}.$$

Cette loi de conservation, nous l'avons déjà discuté dans le cadre des équations primitives (section 1.2.1), est particulièrement importante en dynamique des fluides géophysiques. Tout modèle simplifié de la DFG doit la respecter si l'on veut qu'il constitue une approximation fiable des équations primitives.

Une autre loi de conservation vérifiée par l'écoulement lorsque le système est isolé, ce qui est le cas si l'on considère des conditions aux limites périodiques, ou que l'écoulement est localisé dans l'espace, est l'énergie totale :

$$E = \iint e dx dy = \iint \left(h\frac{|\vec{v}|^2}{2} + g\frac{h^2}{2} \right) dx dy, \tag{1.10}$$

où la densité d'énergie e obéit à l'équation de conservation suivante :

$$\partial_t e + \vec{\nabla} \left(\vec{v} h \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} + gh \right) \right) = 0. \tag{1.11}$$

Les équations RSW peuvent être vues comme décrivant la dynamique de couches de fluides de densité uniforme. C'est cette interprétation qui est adoptée lorsque l'on cherche à modéliser la dynamique océanique avec ce modèle, le saut en densité entre les couches représentant la pycnocline (souvent associée à la thermocline). Une autre vision, plus formelle et plus générale, justifie ce modèle même en l'absence de discontinuité dans le profil de densité. Cette interprétation s'appuie sur l'analogie formelle entre les équations RSW et les équations primitives en coordonnées isentropes (isopycnes dans l'océan), dans lesquelles l'équation pour la quantité de mouvement est bidimensionnelle (pour un écoulement adiabatique). Les équations Shallow Water peuvent alors être obtenues par discrétisation verticale des équations primitives (e.g. Vallis, 2006). Inversement, ces dernières peuvent être vues comme une limite des équations RSW multicouches lorsque le nombre de couches tend vers l'infini. Plus généralement, les modèles RSW peuvent se réécrire en fonction de modes propres verticaux : par exemple, pour le modèle à deux couches, on défini les composantes barotrope et barocline. On peut alors montrer que ces équations décrivent l'évolution des modes verticaux de plus petits nombres d'onde (les n premiers, où n est le nombre de couches) des équations primitives, constituant ainsi une troncature consistante de ces équations (ceci suppose cependant la définition de conditions aux limites sur la coordonnée verticale). Ainsi, le modèle RSW à deux couches modélise l'évolution du mode barotrope et du premier mode barocline des équations primitives.

1.2.3 Schémas numériques pour les équations RSW

Les systèmes d'équations des modèles RSW (1.6)-(1.7) à une ou plusieurs couches, formulés sous forme conservative, sont des systèmes d'équations hyperboliques (sous certaines conditions dans le cas multicouche) quasi-linéaires avec un terme source (le terme de Coriolis et la topographie – le cas échéant). Ceci présente un avantage fort pour leur modélisation

numérique, permettant l'utilisation de schémas numériques spécialement adaptés aux systèmes d'équations hyperboliques (e.g. LeVeque, 2002). En effet, les systèmes hyperboliques quasi-linéaires peuvent être traités par la méthode des caractéristiques (Whitham, 1974), dans laquelle les solutions (de nature propagative – ou ondulatoire) sont exprimées comme étant la propagation de variables de Riemann le long de courbes caractéristiques. Le système d'équations aux dérivées partielles est ainsi ramené à un système d'équations aux dérivées ordinaires. En l'absence de source, les variables de Riemann sont des invariants. Les variables de Riemann s'obtiennent analytiquement dans le cas où les équations sont invariantes par rapport à une translation selon l'une des deux dimensions d'espace (modèle 1.5D). Les systèmes d'équations hyperboliques quasi-linéaires peuvent également donner lieu à la formation de chocs (discontinuités dans les champs), correspondant à l'intersection des courbes caractéristiques en un temps fini (Zeitlin *et al.*, 2003). Ces chocs sont la formulation mathématique, dans les équations de Saint-Venant, des fronts pouvant se former dans les écoulements géophysiques (les perturbations synoptiques sont par exemple associées à la frontogénèse (e.g. Hoskins et Bretherton, 1972)), et qui consistent en une variation abrupte dans l'espace de certains champs, généralement la température et/ou la pression. Les chocs constituent notamment une difficulté pour la simulation numérique des modèles RSW, qui est bien résolue par les méthodes que nous décrivons ici.

Dans la configuration à une seule couche, le système d'équations (1.6)-(1.7) peut se mettre sous la forme conservative suivante :

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + \partial_y(huv) - fhv = 0, \tag{1.12}$$

$$\partial_t(vh) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2 + gh^2/2) + fhu = 0, \tag{1.13}$$

$$\partial_t(h) + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0. \tag{1.14}$$

En l'absence de rotation, ce système d'équations est formellement analogue aux équations d'Euler pour un gaz barotrope compressible bidimensionnel (Landau et Lifshitz, 1987) avec $\pi \propto h^2$ (où π est la pression). Il en découle des propriétés dynamiques communes, notamment la formation de chocs. Ce système d'équations est inconditionnellement hyperbolique : les valeurs des caractéristiques, correspondant à la vitesse de propagation des variables de Riemann, sont réelles. Ces lois de conservations (1.12)-(1.14) sont associées aux conditions de Rankine-Hugoniot qui décrivent l'évolution des quantités dynamiques à travers les chocs. Celles-ci, combinées à la condition d'entropie (définie un peu plus loin), permettent la définition des *solutions faibles* décrivant ces structures. Elles sont dérivées à partir des équations (1.12)-(1.14) (Bouchut *et al.*, 2004, 2009) et sont données ici dans le cas d'une invariance selon la composante y, pour simplifier (on peut généraliser à n'importe quel front rectiligne en opérant une rotation des coordonnées pour ramener l'axe y le long du front) :

$$-s[hu] + [hu^2 + gh^2/2] = 0, \tag{1.15}$$

$$-s[hv] + [huv] = 0, \tag{1.16}$$

$$-s[h] + [hu] = 0, \tag{1.17}$$

où s est la vitesse de propagation de la discontinuité et $[A]$ désigne le saut de la quantité A de part et d'autre de la discontinuité. L'implémentation des termes conservatifs des équations du système avec l'approche des volumes finis les transforme en ces dernières conditions

et permettent, par construction, un bon traitement des discontinuités. Le schéma numérique reconstruit alors les fronts dans les écoulements sur quelques cellules numériques, s'approchant de la forme d'un choc pour lequel la variation serait intégralement comprise entre deux cellules.

Par rapport au modèle à une couche, le cas du modèle à deux couches présente quelques particularités, qui sont valables également pour les modèles à plusieurs couches. Le Sommer *et al.* (2003) ont montré, dans le cas simplifié des équations RSW à deux couches à 1.5 dimension et avec l'approximation du toit rigide, que le discriminant du système sous forme canonique hyperbolique peut être négatif lorsque :

$$(u_2 - u_1)^2 > g(\rho_2 - \rho_1)\sqrt{\frac{h_1}{\rho_1} + \frac{h_2}{\rho_2}}. \tag{1.18}$$

Ceci montre que le système quasi-linéaire contient des valeurs propres (les caractéristiques) imaginaires, ce qui est associé au caractère alors elliptique des équations, qui ne correspondent plus a des solutions propagatives. Ce critère coïncide avec le critère de déclenchement de l'instabilité de cisaillement, analogue de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz dans un modèle à couches. Cette instabilité mène à la formation de rouleaux de petite échelle dont l'axe est à la fois orthogonal à la direction du cisaillement et à celle de l'écoulement, et créer ainsi du mélange au niveau de l'interface – ce qui ne peut pas se réaliser dans les modèles à couches. Cette perte d'hyperbolicité présente un problème pour la modélisation numérique des équations lorsque l'on cherche à utiliser des méthodes basées sur le caractère hyperbolique des équations.

De plus, les conditions de Rankine-Hugoniot associées aux équations ne forment pas un système complet permettant la définition de solutions faibles : les équations pour la quantité de mouvement par couche ne peuvent être mises sous forme conservative à cause des termes croisés entre les épaisseurs des différentes couches, associés aux termes de gradient de pression. Seule une condition sur la quantité de mouvement sommée sur toutes les couches est dérivable. Ainsi, dans le modèle à deux couches, une contrainte supplémentaire est nécessaire pour permettre la fermeture du système (Bouchut et Zeitlin, 2010; Lambaerts *et al.*, 2011b).

Le code de simulation numérique directe que l'on utilise dans cette thèse utilise des méthodes spécialement adaptées aux systèmes hyperboliques (e.g. LeVeque, 2002) (méthodes initialement développées dans le domaine de la dynamique des gaz). Le schéma est décrit dans le cas à une couche par Bouchut (2007), et dans le cas multicouche par Bouchut et Zeitlin (2010). Ces méthodes se basent sur la forme conservative des équations (et donc sur les conditions de Rankine-Hugoniot) et ramènent le problème pour l'estimation des flux numériques (i.e. la version numérique des flux responsables de la variation dans le temps de la quantité correspondante), après discrétisation, à un problème de Riemann. Le solveur de Riemann alors utilisé pour la résolution (approximée) de ces flux est associé à un ensemble de propriétés dont l'adéquation avec la physique du problème en conditionne le choix. La difficulté restante, non négligeable, réside dans le traitement des termes sources (c'est à dire non conservatifs) – à savoir la topographie, le cas échéant, et le terme de Coriolis.

Les propriétés que l'on souhaite être vérifiées par le modèle numérique sont les suivantes :

- Non-négativité de l'épaisseur de(s) couche(s)
- Conservation des états équilibrés (repos, équilibre géostrophique...)

– Respect des inégalités d'entropie

Certains solveurs de Riemann assurent la positivité de l'épaisseur de couche, et permettent également de traiter la vacuité (i.e. l'assèchement : $h = 0$). Ceci est particulièrement intéressant pour étudier la dynamique de courants côtiers ou de courants de gravité, pour lesquels une couche de fluide de densité inférieure (supérieure) placée au dessus (en dessous) est bornée spatialement par des zones d'outcropping (incropping). Le caractère équilibré du modèle implique qu'une solution stationnaire des équations l'est également dans sa version discrétisée. Par exemple, l'état au repos doit rester au repos, ce qui n'est pas évident lorsqu'on introduit une topographie. Les inégalités d'entropie sont des relations de conservation pour certaines quantités (entropies), additionnelles aux équations de base du modèle, qui sont notamment respectées par les solutions faibles des équations et imposent une décroissance de ces quantités à travers les discontinuités. Dans le cas du modèle RSW (inviscide), l'entropie est simplement l'énergie du système, et la condition d'entropie qui lui est associée est la seule source de dissipation par le modèle numérique. Le terme de Coriolis est traité comme une topographie apparente, en figeant la valeur des champs dynamiques (u, v) à un instant donné, et ces termes (topographie et topographie apparente) sont alors pris en compte en adaptant correctement la formulation des flux numériques (cf. Bouchut, 2007).

Enfin, dans le cas multicouche, la méthode de séparation est utilisée (Bouchut et Zeitlin, 2010). Elle permet de traiter chaque couche séparément en utilisant l'algorithme développé pour le modèle à une couche, en formulant les termes non-conservatifs dans le gradient de pression via une topographie apparente et en utilisant une discrétisation qui permet, en plus de vérifier la condition de Rankine-Hugoniot pour la quantité de mouvement totale, d'en définir de nouvelles pour chaque couche et d'obtenir ainsi un ensemble complet nécessaire à la résolution de la propagation des chocs. Notons que cette méthode de séparation implique que le modèle multicouche hérite naturellement des propriétés du modèle à une couche, en particulier la préservation des états stationnaires et la non-négativité de h_i.

1.3 Mouvements équilibrés, interactions ondes-tourbillons

Sont rappelées dans cette section des notions sur les régimes équilibrés dans les écoulements à grande échelle, et sur la séparation dynamique entre les ondes et les tourbillons. Ces notions, valables pour les écoulements à faible nombre de Rossby, constituent une base pour l'interprétation de nos résultats sur la dynamique et les propriétés agéostrophiques des structures cohérentes.

1.3.1 Spectre des perturbations linéaires en Rotating Shallow Water

Dans cette partie, ainsi que pour l'ensemble des travaux présentés dans ce manuscrit, on utilise l'approximation du plan f ($f = f_0 = \text{cste}$). Cette considération est importante notamment en ce qui concerne le spectre des perturbations linéaires : en effet, la variation méridienne de la constante de Coriolis, prise en compte en première approximation dans le plan β, implique l'existence d'ondes de Rossby. De façon plus générale, la conservation de la vorticité potentielle conjuguée à l'effet β favorise les écoulements zonaux (e.g. Vallis, 2006).

La linéarisation des équations de Saint-Venant (1.6)-(1.7) pour une seule couche autour de l'état de repos ($u = v = 0, h = H_0$), valable pour des perturbations de faible amplitude,

conduit au système d'équations suivant :

$$\partial_t u - fv + g\partial_x h = 0, \tag{1.19}$$
$$\partial_t v + fu + g\partial_y h = 0, \tag{1.20}$$
$$\partial_t h + H_0(\partial_x u + \partial_y v) = 0. \tag{1.21}$$

Une analyse en perturbations modales (décomposition des champs en modes de Fourier $\propto e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, ω la pulsation, et i le nombre imaginaire pur de norme unité) de ce système donne deux types (variétés) de modes propres :

- $\omega = 0$: mode stationnaire et à l'équilibre géostrophique, caractérisé par :

$$f\vec{e_z} \times \vec{v} = g\vec{\nabla}h. \tag{1.22}$$

  Cet équilibre entre la force de Coriolis et le gradient de pression est omniprésent dans la dynamique à grande échelle (e.g. Pedlosky, 1987; Vallis, 2006). Le mode correspondant est non divergent, et associé à la partie *vorticale* de l'écoulement.
- $\omega = \pm\sqrt{gH_0|\vec{k}|^2 + f^2}$: modes rapides correspondant aux ondes d'inertie-gravité. La relation de dispersion de ces ondes implique que leur fréquence intrinsèque n'est jamais nulle. Elle est bornée inférieurement (en valeur absolue) par la fréquence de Coriolis. Par ailleurs, la relation de polarisation (la structure du mode propre) montre que ces ondes ne portent pas d'anomalie de vorticité potentielle.

Dans le système à deux couches, le spectre des petites perturbations se décompose de la même manière et les modes propres se divisent en deux catégories supplémentaires : barotrope (mouvement identique dans les deux couches) et barocline (vitesses opposées par couche et forte déviation de l'interface associée). Les ondes d'inertie-gravité barotropes sont similaires à celles présentes dans le modèle à une couche, avec H_0 la hauteur cumulée des deux couches de fluide, tandis que les ondes baroclines ont une vitesse de phase plus lente : $\omega^{\mathrm{bc}} = \pm\sqrt{g'H_{\mathrm{eq}}|\vec{k}|^2 + f^2}$, où $g' = 2g(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ est la gravité réduite et $H_{\mathrm{eq}} = H_1H_2/H_0$ la hauteur équivalente. Les conclusions sur la valeur minimale de la fréquence des ondes et le fait qu'elles ne portent pas d'anomalie de vorticité potentielle persistent, et sont d'ailleurs généralisables aux systèmes à n couches (ainsi qu'aux équations primitives (e.g. Vallis, 2006)).

Les bornes pour les fréquences de chaque variété induisent un découplage entre parties lente et rapide de l'écoulement (la partie lente étant stationnaire), se résumant ici à un découplage ondes/tourbillons. Ceci signifie que ces deux variétés n'interagissent pas dans l'approximation linéaire. C'est un élément important pour la compréhension des sources d'émission d'ondes, plus particulièrement dans le cadre de l'émission spontanée par des écoulements équilibrés (ou quasi-équilibrés) au sens du géostrophisme. Cette séparation dynamique représente également une simplification potentielle de la représentation de l'écoulement. En effet, si elle était généralisable aux équations complètes, on pourrait considérer séparément l'évolution des tourbillons en filtrant les ondes, numériquement et analytiquement, et toute l'information dynamique serait contenue dans la vorticité potentielle. Cette question de séparation dynamique est en lien avec la notion de variété lente dans les équations de la DFG (e.g. McIntyre, 2012a; Vanneste, 2013), et d'inversibilité de la vorticité potentielle (e.g. McIntyre, 2012b) (cf. section 1.3.3).

1.3.2 Dynamique équilibrée

Une autre approche que la linéarisation formelle pour étudier le découplage dynamique entre ondes et tourbillons est le développement asymptotique, basé sur l'existence d'un paramètre petit pilotant la dynamique du problème. Dans les modèles décrivant des écoulements proches de l'équilibre géostrophique, ce paramètre est le nombre de Rossby $Ro = U/fL$. Ces modèles asymptotiques permettent de décrire une dynamique équilibrée, dans laquelle les ondes sont filtrées. Ce genre d'approximation a apporté beaucoup à la compréhension des écoulements à grande échelle et de la dynamique des structures cohérentes. Néanmoins, les écoulements plus intenses (à grand nombre de Rossby) n'obéissent plus à ce formalisme, et les divers aspects de la dynamique agéostrophique restent en grande partie mal compris.

Modèle quasi-géostrophique

En adimensionnant les équations RSW (1.6)-(1.7) par la vitesse typique de l'écoulement U, sa longueur typique L et en considérant une dynamique *lente* $t \to \tau/Rof$ (τ est le *temps lent*) – hypothèse étayée notamment par le fait que les mouvement vorticaux sont, dans l'approximation linéaire, immobiles –, on obtient le système d'équations adimensionnées suivant :

$$Ro\left(\partial_\tau + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \vec{e_z}\times\vec{v} + \frac{\lambda Bu}{Ro}\vec{\nabla}h = 0, \tag{1.23}$$

$$\partial_\tau h + \vec{\nabla}\left((1/\lambda + h)\vec{v}\right) = 0, \tag{1.24}$$

où le nombre de Burger ($Bu = Rd^2/L^2$, avec $Rd = \sqrt{gH_0}/f$ le rayon de déformation) et la déviation typique des interfaces λ ont été introduits. Les régimes proches du géostrophisme correspondent à un nombre de Rossby petit et un rapport $\lambda Bu/Ro \approx 1$. Notamment, le régime quasi-géostrophique (QG) décrit les écoulements dont l'échelle spatiale est de l'ordre du rayon de déformation ($Bu \approx 1$). Les déviations des interfaces (ou isopycnes dans le cas continuement stratifié) sont alors caractérisées par la petitesse du paramètre $\lambda \approx Ro << 1$. Une dérivation rigoureuse des équations QG est possible en effectuant le développement asymptotique pour $Ro \to 0$ (Reznik *et al.*, 2001), qui donne à l'ordre 1 :

$$\frac{d^{(0)}q_{\mathrm{QG}}}{dt} = 0. \tag{1.25}$$

Cette équation traduit la conservation lagrangienne de la vorticité potentielle quasi-géostrophique $q_{\mathrm{QG}} = \Delta\Psi - \Psi/Bu$ en considérant l'advection par le vent géostrophique : $\frac{d^{(0)}\cdots}{dt} = (\partial_\tau + v_{\mathrm{geos}}\cdot\vec{\nabla})\cdots$. Ψ est la fonction de courant, donnée par la pression (via l'équilibre géostrophique) et donc par la hauteur de la surface dans le modèle barotrope. Cette équation est généralisable aux modèles à plusieurs couches, auquel cas on obtient un ensemble d'équations de conservation lagrangienne de la vorticité potentielle par couche ; ainsi que pour un fluide continuement stratifié (e.g. Pedlosky, 1987). Les équations QG sont très couramment utilisées en dynamique des fluides géophysiques (e.g. Pedlosky, 1987; Vallis, 2006) et ont constitué le cadre des premières prévisions météorologiques au début des années 1950 par Charney, Fjörtoft et Von Neumann (Charney *et al.*, 1950). Le fait qu'elles puissent être dérivées de manière systématique à partir des modèles Rotating Shallow Water confirme la pertinence de ces derniers (les équations QG sont plus souvent introduites

de manière heuristique, en regardant les différents ordres de grandeur dans les équations primitives).

D'autres régimes proches du géostrophisme (i.e. pour $Ro \to 0$) existent (e.g. Zeitlin, 2007; Reznik *et al.*, 2001), comme les régimes frontal ($Bu << 1,\ \lambda \approx 1$) et semi-geostrophique, bien adaptés à la description des fronts synoptiques, où des régimes obtenus à partir de développements asymptotiques à des ordres plus élevés.

Attractivité des états équilibrés – lien avec l'ajustement géostrophique

Une des caractéristiques importantes des modèles asymptotiques est l'absence d'ondes d'inertie-gravité [3], qui ont été filtrées par l'introduction du temps lent au cours de l'adimensionnement des équations de base (1.6)-(1.7). Plus généralement, le temps lent peut être introduit explicitement dans le développement asymptotique ($t \to t_0/f + \tau/Rof + \mathcal{O}(Ro^{-2})$), auquel cas le système se décompose, à l'ordre 1, en une équation de Klein-Gordon pour la partie rapide de l'écoulement (les ondes d'inertié-gravité) et l'équation QG pour la partie lente (i.e. moyennée à l'échelle du temps rapide) (Reznik *et al.*, 2001). Cette séparation dynamique est à la base de la théorie de l'ajustement géostrophique : une condition initiale quelconque, qui peut correspondre à un état initialement équilibré et perturbé, s'ajuste vers un état équilibré (quasi-géostrophique) en émettant des ondes d'inertié-gravité. Celles-ci, ayant une dynamique rapide, évacuent le surplus d'énergie associé à la partie non-équilibrée des conditions initiales, jouant ainsi le rôle de puits d'énergie et permettant la relaxation du système vers un état de plus basse énergie. Cette formulation introduit volontairement les concepts de la mécanique hamiltonienne en supposant – abusivement – que les états à l'équilibre géostrophique constituent des minima d'énergie du système vers lequel celui-ci évolue spontanément, ce qui est le cas dans les équations linéarisées (Vallis, 2006). Si cela était vrai pour le système d'équations non linéaires (et non approximées), tout écoulement agéostrophique évoluerait vers un état équilibré en émettant des ondes. De fait, l'ajustement géostrophique incarne l'un des mécanismes bien identifiés pour l'émission d'ondes (Blumen, 1972). Cependant, la validité de ce processus pour des écoulements agéostrophiques n'est pas assurée : on ne sait pas si les écoulements agéostrophiques ont un minimum d'énergie correspondant à un état équilibré, ni quelle peut être la relation d'équilibre qui le décrit. Il y a donc un intérêt, pour mieux comprendre la dynamique agéostrophique, à regarder si des analogues de solutions équilibrées (e.g. quasi-géostrophiques) existent dans un modèle agéostrophique et d'en étudier les propriétés. On sait par ailleurs que le mécanisme d'ajustement géostrophique n'est pas systématique : certains phénomènes comme le piégeage d'ondes (e.g. Zeitlin, 2008) ou l'occurrence d'oscillations quasi-inertielles à décroissance lente (Bouchut *et al.*, 2004) peuvent inhiber cette émission, et certaines structures agéostrophiques montrent une grande cohérence (en ce sens qu'elles ont un temps de vie long et sont stables).

Ceci rend difficile la caractérisation des sources d'ondes dans les écoulements géophysiques en allant à l'encontre de l'idée relativement simple que l'émission est plus forte là où l'écoulement est le plus agéostrophique. Cette question, relevant de la dynamique des fluides géophysiques dans ses aspects les plus fondamentaux, est abordée dans cette thèse sous plusieurs angles.

3. la fonction de courant est d'ailleurs stationnaire dans l'équation (1.25) linéarisée, indiquant qu'il n'y a pas de réponse de type ondulatoire à une perturbation de faible amplitude autour de l'état de repos. Ceci n'est plus vrai dans l'approximation du plan beta, où les ondes de Rossby apparaissent.

1.3.3 Séparation dynamique et émission spontanée d'ondes

Formellement, un écoulement géophysique est dit équilibré si toute l'information sur sa dynamique est contenue dans le champ de vorticité potentielle (McIntyre, 2012a). Le nombre de degrés de liberté est alors considérablement réduit et l'évolution de l'écoulement se réduit à l'équation de conservation lagrangienne de la vorticité potentielle. L'ensemble des autres champs dynamiques est alors obtenu par inversion de la vorticité potentielle, ceci impliquant généralement l'existence d'un équilibre, c'est à dire d'une relation fonctionnelle diagnostique reliant la distribution du champ de masse au champ de vitesse. L'équilibre géostrophique est un exemple d'une telle relation, mais elle n'est pas la seule. Dans une géométrie cylindrique (et pour un écoulement purement azimutal), bien adaptée à l'étude de tourbillons isolés, l'équilibre à considérer devient l'équilibre cyclogéostrophique – également appelé relation de *vent du gradient* – entre la force centrifuge, la (pseudo-)force de Coriolis et le gradient de pression :

$$f v_\theta + \frac{v_\theta^2}{r} = -\partial_r \Phi, \tag{1.26}$$

en reprenant les notations du système d'équations primitives (1.1)-(1.3) adaptées aux coordonnées polaires (r, θ) :$\vec{v} = (u_r \vec{e_r}, v_\theta \vec{e_\theta})$. Une relation d'équilibre plus générale (incluant les équilibres géostrophiques et cyclogéostrophiques) applicable aux écoulements géophysiques a été introduite par Bolin et Charney dans les années 1950. Elle est appelée relation de *Bolin-Charney*, et est donnée par (e.g. McIntyre, 2012a) :

$$\vec{\nabla}_h \cdot (f \vec{\nabla}_h \Psi) = \Delta_h \Phi - 2\mathcal{H}(\Psi), \tag{1.27}$$

ou Ψ est la fonction de courant pour la vitesse horizontale (cet équilibre implique toujours un vent horizontale non-divergent et donc une vitesse verticale nulle) et $\mathcal{H}(\,\cdot\,)$ désigne le déterminant de la matrice hessienne. Il existe également une version généralisée de la relation de Bolin-Charney incluant une faible divergence de la vitesse horizontale.

Le degré d'approximation des relations diagnostiques d'équilibre, l'émission spontanée d'ondes et – plus généralement – l'interaction ondes/écoulement moyen et ondes/tourbillons (ou à l'inverse la séparation dynamique), peuvent être reliés à la notion de variété lente des équations du mouvement (en anglais *slow manifold*) (e.g. Vanneste, 2013, et références incluses). Une variété lente correspond à un sous-espace des phases isolé, de sorte qu'une configuration d'un écoulement initialement contenu dans celui-ci y reste au cours de son évolution ; en l'occurrence une variété lente implique une configuration équilibrée et l'absence d'interaction (et donc d'émission) avec les ondes (variété rapide). L'existence d'une telle variété est conditionnée par l'existence d'une relation d'équilibre exacte telle que la variété serait invariante. Les modèles équilibrés (QG, semi-geostrophique, etc.) correspondent *par construction* à une variété lente – leur espace des phases complet–, conformément au fait que les composantes rapides ont été filtrées au cours de la dérivation. En revanche, l'existence d'une variété lente dans la dynamique complète des écoulements atmosphériques et océaniques, si elle fut l'objet de débats durant quelques décennies, est aujourd'hui une hypothèse exclue (Lorenz, 1992; Ford *et al.*, 2000), y compris dans les équations Shallow Water. Un argument fort pour son exclusion est le mécanisme de Lighthill (1952) pour la radiation d'ondes, hérité de l'acoustique (Zeitlin, 1991) et integré depuis les travaux de Ford en 1994 dans le domaine de la DFG (e.g. Ford *et al.*, 2000). Depuis, motivés notamment par la nécessité de caractériser les sources d'ondes dans les écoulements géophysiques, de nombreux travaux montrent d'autres mécanismes à leur origine (e.g. Bühler et McIntyre,

2005; Vanneste, 2013), sans oublier les processus d'instabilité tels que l'instabilité barocline (O'Sullivan et Dunkerton, 1995; Plougonven et Snyder, 2007; Vanneste, 2013) – instabilité pourtant de nature équilibrée –, où des instabilités fondamentalement agéostrophiques comme l'instabilité centrifuge, abordée en section 2.2. Ainsi, le questionnement initial sur l'existence ou non d'une variété lente des équations pour décrire les écoulements de fluides géophysiques a évolué vers un problème d'estimation du degré de précision des relations diagnostiques d'équilibre selon les configurations. On constate par exemple que ces relations sont souvent vérifiées pour des nombres de Rossby plus grands qu'attendu, ou dans des configurations où la vitesse verticale peut être localement forte (par exemple lors de la formation de fronts), comme reporté en chapitre 3 sur la dynamique de structures cohérentes agéostrophiques. Ainsi parle-t-on aujourd'hui de *quasi-manifold* ou *fuzzy manifold*, prenant en compte la nature intrinsèquement inexacte de l'équilibre (quel qu'il soit) d'un écoulement et traduisant l'évolution de ce dernier autour d'un sous-espace (oscillations associées aux mouvements rapides) avec percolation vers les sous-espaces voisins.

1.4 Structures cohérentes agéostrophiques – objet de la thèse

Après avoir introduit, dans les sections précédentes, les modèles utilisés pour décrire les écoulements à grande échelle et certains processus dynamiques auxquels nous nous intéressons, nous présentons ici ce qui fait l'objet de la thèse : les structures cohérentes agéostrophiques, et plus particulièrement les tourbillons.

1.4.1 Structures cohérentes : définitions, propriétés

Il convient de définir ce que l'on entend par *cohérent*, ce terme apparaissant dans de multiple contextes – avec des significations diverses – en physique et en géosciences. Une structure cohérente en dynamique des fluides géophysiques est une structure qui conserve sa forme sur une période longue, généralement parce qu'elle constitue une solution (supposée, en l'absence de forme analytique exacte) du système d'équations dans laquelle elle évolue, quasi-stationnaire dans un repère fixe ou comobile. Leur temps de vie est long devant l'échelle de temps construite à partir de la vitesse d'écoulement du fluide U et de leur taille typique L : $T = L/U$. Ces structures sont généralement localisées dans l'espace.

Les structures cohérentes dans les écoulements géophysiques se décomposent globalement en deux catégories : les jets et les tourbillons (une troisième catégorie peut être considérée, incluant les ondes fortement non linéaires et les solitons). Nous nous intéressons, dans cette thèse, à la deuxième catégorie.

Les tourbillons sont caractérisés par une anomalie localisée de vorticité potentielle (monopôle où multipôle) et des lignes de courant fermées associées à la recirculation du fluide. Ils sont généralement proches de l'équilibre cyclogéostrophique (1.26), voire de l'équilibre géostrophique, ce qui implique que la vitesse verticale et la divergence de vent horizontale sont – sinon nulles – très faibles. Nous nous intéressons cependant aux aspects agéostrophiques qui sont présents lorsque le nombre de Rossby devient grand ($\mathcal{O}(1)$). Ceci peut impliquer un écart à l'état d'équilibre, associé généralement à l'apparition de mouvements verticaux. Ce n'est cependant pas systématique, et caractériser la partie agéostrophique de l'écoulement lorsque le nombre de Rossby augmente constitue une problématique en soi. L'augmentation du nombre de Rossby peut aussi entraîner une instabilité agéostrophique de la structure (des exemples de ce type d'instabilités sont traités dans le chapitre 2). Ces

questions sont, en outre, reliées à la séparation dynamique des écoulements discutée précédemment (section 1.3), car l'augmentation du nombre de Rossby correspond *par définition* à une réduction du rapport entre le temps typique associé aux ondes et celui, inertiel, associé à la partie *lente* de l'écoulement (e.g. Vanneste, 2013).

Nous avons dit que les structures cohérentes peuvent correspondre à des solutions quasi-stationnaires de l'écoulement. Il en découle des relations fonctionnelles entre certaines quantités dynamiques de l'écoulement, qui permettent notamment de déterminer si une structure observée peut être une solution du système (Carton, 2001; Baey et Carton, 2002; Ribstein *et al.*, 2010). Ce type de diagnostique est utilisé dans toute la partie 3, ce pourquoi nous en donnons la dérivation ici (dans l'approximation du plan f). Les équations du modèle RSW à n couches, pour une solution stationnaire dans un repère en translation uniforme à la vitesse $\overrightarrow{V}$ (cela peut être également dérivé pour un repère en rotation) se formulent ainsi :

$$(\zeta_i + f)\vec{e_z} \times \hat{\vec{v}}_i = \vec{\nabla} B_i, \tag{1.28}$$

$$\vec{\nabla}(h_i \hat{\vec{v}}_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{1.29}$$

où l'on a introduit les vitesses dans le repère comobile $\hat{\vec{v}}_i(x - \overline{U}t, y - \overline{V}t) = \vec{v}_i(x, y, t) - \overrightarrow{\overline{V}}$ et la fonction de Bernouilli :

$$B_i = \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{|\hat{\vec{v}}_i|^2}{2} + f\vec{x} \cdot \vec{e_z} \times \overrightarrow{\overline{V}}.$$

L'équation pour la vorticité absolue (obtenue en prenant le rotationnel de l'équation pour la quantité de mouvement) par couche donne :

$$(\hat{\vec{v}}_i \cdot \vec{\nabla})(\zeta_i + f) + (\zeta_i + f)\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{v}}_i = (\hat{\vec{v}}_i \cdot \vec{\nabla})(\zeta_i + f) - q_i(\hat{\vec{v}}_i \cdot \vec{\nabla})h_i = 0,$$

où la première égalité découle de la conservation de la masse par couche (1.29). Alors, en utilisant cette dernière relation et l'équation (1.28), on obtient la relation suivante :

$$\mathcal{J}(q_i, B_i) = 0, \tag{1.30}$$

qui traduit le fait que la fonction de Bernouilli (par couche) est une fonctionnelle de la vorticité potentielle dans les modèles RSW : $B_i = F(q_i)$ (Malanotte-Rizzoli, 1982). La non-divergence de la quantité de mouvement permet également d'introduire une fonction de courant ψ_i telle que $h_i \hat{\vec{v}}_i = \vec{\nabla} \times \psi_i \vec{e_z}$, et l'on peut réécrire l'équation pour la conservation de l'anomalie de vorticité potentielle, dans le repère comobile :

$$\hat{\vec{v}}_i \cdot \vec{\nabla} q_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{J}(\psi_i, q_i) = 0,$$

d'où il vient :

$$q_i = G(\psi_i). \tag{1.31}$$

Ainsi, il existe des relations fonctionnelles entre la vorticité potentielle, la fonction de courant et la fonction de Bernouilli (par couche), pour une solution stationnaire en translation (ou rotation) uniforme. Ces relations sont généralisables au plan β si le repère est en translation le long de l'axe orthogonal au gradient de vorticité planétaire (la rotation est alors exclue, un théorème de nullité du moment angulaire des solutions devant être vérifié dans

ce contexte (Flierl *et al.*, 1983)), mais aussi aux modèles continuement stratifiés vu l'analogie formelle entre ces dernières en coordonnées isentropes et les équations Shallow Water. La dernière relation (1.31) est notamment utilisée pour dériver des solutions exactes dans le cadre des équations QG (cf. sections 3.1 et 3.7.2), grâce à la forme simple (linéaire) de la vorticité potentielle dans ces modèles. Une telle dérivation analytique de ces solutions n'est plus possible dans le modèle RSW (et encore moins dans les équations primitives), où l'expression de la vorticité potentielle est trop complexe et non linéaire. Par ailleurs, cette même relation (1.31) implique que les lignes de courant sont également les trajectoires des parcelles fluides, puisque la vorticité potentielle (conservée au sens lagrangien) y est constante. Ceci est une conséquence du fait que les lignes de courant et les trajectoires sont identiques pour un écoulement stationnaire. En procédant par analogie, tout traceur passif A (i.e. toute quantité conservée au sens de l'invariance lagrangienne $dA/dt = 0$) est relié fonctionnellement à la fonction de courant. Pour des tourbillons isolés, ces lignes sont généralement fermées et forment donc une barrière de transport, le dernier contour délimitant une zone de recirculation dans laquelle le fluide est isolé de l'extérieur. C'est de cette propriété que découle l'intérêt pour ces structures – en océanographie notamment –, dans une problématique de transport.

Un autre critère quantitatif pour la cohérence de structures (vortex) 2D est le critère d'Okubo-Weiss, qui compare le taux d'étirement à la vorticité. Il est donné par

$$Q^{\mathrm{ow}} = \sigma^2 - \zeta^2 \tag{1.32}$$

où $\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}$ est le taux d'étirement dont les deux composantes sont $\sigma_n = \partial_x u - \partial_y v$ et $\sigma_s = \partial_x v + \partial_y u$, respectivement la déformation normale et le cisaillement. Cette quantité correspond en fait aux valeurs propres (λ) du tenseur des gradients de vitesse :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = -\vec{\nabla}\vec{v} \pm \sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}, \tag{1.33}$$

dans lesquelles la divergence est nulle pour un écoulement 2D incompressible. Elle est utilisée notamment pour localiser les zones de filamentation de la vorticité ($Q^{\mathrm{ow}} > 0$), zones où la dissipation d'enstrophie est active dans les écoulements quasi-bidimensionnels (e.g. Louazel et Hua, 2004), ou à l'inverse pour détecter les tourbillons cohérents ($Q^{\mathrm{ow}} < 0$), comme dans nos simulations d'écoulements turbulents rapportées dans le chapitre 4 (section 4.2.4). Une généralisation aux écoulements stratifiés est obtenue en considérant l'équation d'évolution du gradient de vorticité potentielle :

$$\frac{d\vec{\nabla}q}{dt} = -\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{t}}\vec{\nabla}q, \tag{1.34}$$

et en supposant une variation lente du tenseur des gradients de vitesse le long d'une trajectoire lagrangienne (i.e. une évolution quasi-adiabatique de la vorticité potentielle), auquel cas les valeurs propres données dans l'équation (1.33) pilotent l'évolution de $\vec{\nabla}q$. Notons que, même pour des écoulements divergents, la simplicité de la quantité d'Okubo-Weiss (1.32) fait qu'elle est souvent utilisée. De nombreux critères améliorés (plus complexes) ont été développés dans ce contexte de turbulence pour étudier la filamentation et la dynamique de traceurs (e.g. Lapeyre *et al.*, 1999; Haller, 2001).

Enfin, dans ce même contexte de turbulence, il faut noter que la formation et l'existence de tourbillons cohérents dans les écoulements à grande échelle est en lien direct avec

la nature quasi-bidimensionnelle de ces derniers, par extrapolation de la théorie de la turbulence bidimensionnelle incompressible (cf. section 4.1.1). Celle-ci prédit le transfert de l'énergie vers les grandes échelles, et l'on observe la formation de structures cohérentes qui dominent l'écoulement. De nombreux travaux adoptant une approche statistique prédisent l'existence de ces tourbillons à grande échelle (l'exemple le plus connu étant la tache rouge de Jupiter) comme étant des états d'équilibre statistique du système (e.g. la revue de Bouchet et Venaille (2012), et l'article de Warn (1986) dans le modèle Shallow Water). Ces indications permettent d'inférer l'existence et la stabilité des tourbillons cohérents dans les écoulements géophysiques, ce qui s'inscrit pleinement dans le cadre de cette thèse, où l'on s'intéressera aux aspects agéostrophiques de ces structures.

1.4.2 Contenu et organisation du manuscrit

Le travail présenté dans cette thèse concerne donc les structures cohérentes agéostrophiques, en s'intéressant à plusieurs aspects. Ce travail est réalisé en utilisant les modèles Rotating Shallow Water à une et deux couches. L'approche adoptée ici relève de la dynamique des fluides géophysiques : dans un cadre déterminé par les propriétés des fluides auxquels nous nous intéressons, on se propose d'étudier les processus sous-jacents afin de mieux comprendre la dynamique. Précisément, les aspects dynamiques fondamentaux abordés dans le contexte des structures cohérentes sont les suivants :

- Couplage/découplage dynamique entre ondes et tourbillons à grand nombre de Rossby
- Extension des solutions QG aux modèles RSW : effets agéostrophiques
- Stabilité (attractivité) de ces solutions
- Instabilité de structures cohérentes : saturation, reformation de nouvelles structures
- Interactions entre structures cohérentes agéostrophiques :
  - Interactions simples (collisions à deux membres)
  - Evolution collective d'un grand nombre de structures (turbulence)

Ces thématiques, loin d'être exclusives entre elles, se recoupent et sont liées dans bon nombre de situations.

Dans un premier temps, l'instabilité de tourbillons est étudiée (chapitre 2). Après avoir rappelé les différents processus d'instabilité connus pour les tourbillons à petit et grand nombre de Rossby (section 2.1), nous présentons des résultats récents sur l'instabilité de tourbillons anticycloniques intenses (dans un modèle RSW à 2 couches) en section 2.2. Une analyse de stabilité linéaire est réalisée et la saturation non linéaire des instabilités présentes est simulée numériquement. La compétition entre les instabilités centrifuge et barotrope dans ce modèle est étudiée, et l'impact de la stratification et du cisaillement vertical est abordé. Les issues de la saturation non linéaire de ces deux types d'instabilité sont très différentes, notamment en ce qui concerne l'émission d'ondes d'inertie-gravité, mais également dans la redistribution de la vorticité potentielle. Dans certains cas, le système évolue en formant des structures qui n'émettent pas d'ondes (et qui sont celles étudiées dans le chapitre 3), alors qu'une émission continue d'ondes est observée dans d'autres cas.

Ensuite, l'instabilité de cyclones tropicaux est abordée dans un modèle à une couche (section 2.4). La méthodologie est la même (analyse de stabilité linéaire et saturation non linéaire), et une instabilité de type radiative couplant ondes de Rossby vivant sur le gradient de vorticité potentielle du vortex et ondes d'inertie-gravité est retrouvée. Les résultats de

simulations numériques directes sont analysés et discutés, en vue de l'inclusion des effets dynamiques de la convection humide sur l'instabilité du cyclone.

Dans un second temps (chapitre 3), nous nous intéressons à des structures multipolaires observées dans les modèles RSW à une et deux couches. Ces résultats sont, en partie, une généralisation de résultats précédents obtenus sur l'existence de dipôles en RSW une couche (Kizner *et al.*, 2008; Ribstein *et al.*, 2010) et d'autres dans le cadre des équations QG à deux couches (e.g. Larichev et Reznik, 1976; Flierl *et al.*, 1980), en incluant de nouvelles structures (tripôle et modon non linéaire), agéostrophiques et baroclines. Au delà de cette généralisation, nous nous concentrons sur les effets agéostrophiques, notamment l'asymétrie cyclone/anticyclone et l'existence de chocs se formant à l'intérieur de ces structures. Nous montrons que ces structures, en dépit d'un fort degré d'agéostrophisme, se comportent comme des solutions stables et attractives du système, et des expériences d'interactions simples entre des dipôles révèlent une forte prédictabilité de l'évolution de l'écoulement.

Finalement, dans le chapitre 4, des simulations numériques d'écoulements turbulents dans le modèle à une couche sont présentées. Plusieurs types de conditions initiales sont utilisés : d'un côté, le système est initialisé avec un champ aléatoire d'ondes d'inertie-gravité (uniquement) et l'évolution turbulente de cet ensemble d'ondes est étudié. De l'autre, l'ensemble de tourbillons en présence d'ondes est examiné, en utilisant une initialisation correspondant à une distribution gaussienne de la vorticité, ou avec un ensemble de structures cohérentes. Toutes deux mènent à la (re)formation de structures cohérentes dont on étudie les propriétés. La sensibilité aux conditions initiales est ainsi mise en évidence et l'interaction entre les parties lente et rapide de l'écoulement est discutée.

CHAPITRE 2

Instabilités de tourbillons intenses

2.1 Instabilités de tourbillons : généralités, théorie

Deux instabilités affectant les tourbillons fortement agéostrophiques sont abordés dans ce chapitre : l'instabilité centrifuge d'anticyclones intenses, parfois en compétition avec l'instabilité barotrope, et une instabilité mixte barotrope-radiative dans le cas de tourbillons cycloniques. Une introduction sur les instabilités classiques (quasi-géostrophiques) à petits nombres d'onde azimutaux affectant les tourbillons est d'abord donnée, puis chaque instabilité agéostrophique étudiée dans le chapitre est introduite et traitée.

2.1.1 Généralités, instabilités quasi-géostrophiques

Les propriétés de stabilité des tourbillons synoptiques sont étudiées depuis des décennies. Le but initial de ces études était de comprendre la distribution observée des tourbillons, notamment la disparité entre tourbillons cycloniques et tourbillons anticycloniques (e.g. Chelton *et al.*, 2011), ainsi que leur structure, correspondant nécessairement à des configurations stables (à l'inverse, les profils de tourbillons instables ne peuvent pas être observés, par construction). L'enjeu sous-jacent est également d'avoir une estimation théorique de la durée de vie de ces tourbillons, qui peut être de plusieurs mois dans les océans.

Les tourbillons à faible nombre de Rossby ont été abondamment étudiés, que ce soit expérimentalement (e.g. Griffiths et Linden, 1981; Kloosterziel et van Heijst, 1991), dans les modèles quasi-géostrophiques (e.g. Ikeda, 1981; Gent et McWilliams, 1986; Paldor, 1999) ou dans des modèles Shallow Water, en général à nombre de Rossby modéré (Dewar et Killworth, 1995; Katsman *et al.*, 2003; Thivolle-Cazat *et al.*, 2005). Dans les équations QG, on peut dériver un critère *nécessaire* à l'instabilité : pour un tourbillon initialement axisymétrique, le gradient radial de la vorticité potentielle doit changer de signe (e.g. Pedlosky, 1987). Dans le cas barotrope, ce critère est l'extension quasi-géostrophique du critère du point d'inflexion de Rayleigh pour un écoulement plan-parallèle. Une signification physique de ce critère est que ces instabilités peuvent être interprétées comme des résonances (e.g. Sakai, 1989) entre des ondes de Rossby se propageant sur les gradients de vorticité

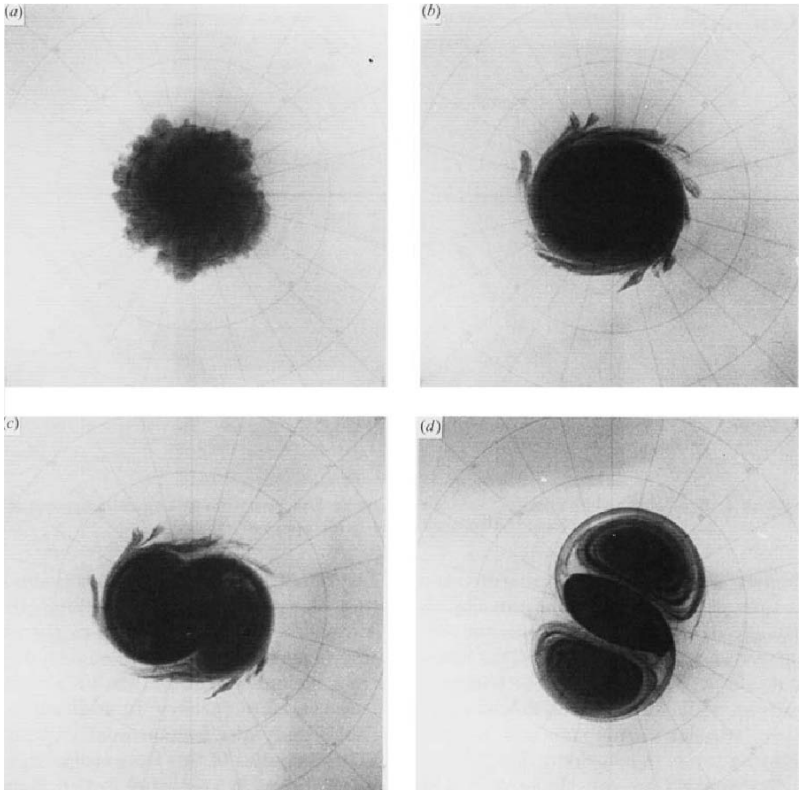


FIGURE 2.1 – Destabilisation d'un cyclone et génération d'un tripôle de vorticité dans une expérience en cuve tournante, visualisée à l'aide d'un colorant. (Source : Kloosterziel et van Heijst, 1991)

potentielle. Le changement de signe de ce gradient dans l'écoulement permet l'existence d'ondes se propageant dans des directions opposées, et la différence entre les vitesses de propagation peut s'annuler par effet Doppler. Sous certaines conditions (e.g. Sakai, 1989), ce blocage des phases est associé à leur amplification mutuelle et l'instabilité se développe. Dans un écoulement purement barotrope, le changement de signe se fait nécessairement dans le plan (r, θ) et l'instabilité en jeu est l'instabilité barotrope. Dans un modèle continuement stratifié où un modèle à couches, ce changement de signe peut se faire dans le plan horizontal (et uniformément sur la verticale, auquel cas l'instabilité est à nouveau barotrope), mais aussi sur la verticale, ce qui conduit à l'instabilité barocline.

Ce mécanisme est applicable aux tourbillons isolés auxquels on s'intéresse, entre autres. Un tourbillon est dit isolé lorsque la circulation qui lui est associée s'annule à un rayon fini. C'est une condition nécessaire pour que l'énergie soit bornée. Par application du théorème de Stokes, le profil de vorticité relative présente un anneau de signe opposé autour du coeur du tourbillon. Ceci implique un changement de signe du gradient radial de vorticité de part et d'autre de cet anneau. Le profil de vorticité potentiel présente les mêmes caractéristiques, même si le rayon auquel le gradient s'annule n'est pas le même que pour la vorticité relative. Ceci se justifie par le fait que le tourbillon est à l'équilibre géostrophique, ou proche de cet équilibre (car la force centrifuge est négligeable), lorsque le nombre de Rossby est petit. Ainsi, les vortex isolés sont potentiellement sujets à ces instabilités équilibrées.

La saturation non linéaire de ces instabilités mène généralement à la destruction du

tourbillon initial et à la formation de multipôles plus ou moins stables (e.g. Kloosterziel et van Heijst, 1991; Carton et McWilliams, 1989; Baey et Carton, 2002; Thivolle-Cazat *et al.*, 2005), en générant de façon transitoire des filaments de vorticité qui sont étirés puis dissipés. Les multipôles sont des structures formées d'un coeur de vorticité de même signe que le coeur du tourbillon initial et entouré de satellites de vorticité de signe opposé. Le nombre de satellites correspond au nombre d'onde angulaire du mode le plus instable. Le seul multipôle réellement stable observé est le tripôle de vorticité, montré en figure 2.1, qui se forme lorsque la perturbation initiale du vortex a un nombre d'onde angulaire $l = 2$ (Carton et McWilliams, 1989; Carton *et al.*, 1989; Carton et Legras, 1994). Des quadrupôles stables ont également été observés dans des simulations numériques des équations d'Euler 2D incompressibles (Morel et Carton, 1994), mais les expériences en laboratoire – entre autres – montrent que cette structure est moins stable que le tripôle. Pour une perturbation de nombre d'onde $l = 2$, lorsque le taux de croissance de l'instabilité est plus grand que dans le cas donnant lieu à la formation du tripôle, le coeur du tourbillon se divise en deux et l'on observe la génération de deux dipôles de vorticité se propageant dans des directions opposées. Dans tous ces cas (formation d'un tripôle ou de dipôles – ou d'un quadrupôle stable), l'écoulement final est constitué de structures quasi-stationnaires dans leur repère comobile, en translation ou en rotation. Cependant, la saturation non linéaire de l'instabilité – surtout pour des perturbations avec $l \geq 3$ – peut aussi évoluer vers une configuration plus désordonnée. Ceci arrive notamment suite à la destabilisation de multipôles à plus de deux satellites, qui peut se faire via la fusion de satellites voisins. L'état saturé consiste alors en un ensemble de dipôles et de monopôles plus ou moins séparés les uns des autres, ou à un tripôle. Dans ces conditions, la dissipation de vorticité par filamentation au cours de la saturation non linéaire est plus importante et s'étend sur une durée plus longue, ce qui est associé à une dissipation forte de l'enstrophie et de l'énergie cinétique de l'écoulement.

2.1.2 Effets agéostrophiques sur les instabilités de tourbillons

Les instabilités de tourbillons ont déjà été étudiées dans des modèles Shallow Water, pour des nombres de Rossby modérés ("faiblement agéostrophique") (e.g. Stegner et Dritschel, 2000; Baey et Carton, 2002), notamment pour caractériser la différence entre les instabilités de cyclones et d'anticyclones. Des conditions de stabilité valables pour des vortex circulaires en RSW multicouche ont été dérivés par Ripa (1989, 1991). Pour un écoulement donné par la vitesse angulaire $V(r)$, la vorticité potentielle $Q(r)$ et l'épaisseur de couche $H(r)$, dans un modèle RSW à une couche avec la surface libre, ces conditions impliquent qu'il existe une constante σ non nulle telle que :

$$\frac{V - \sigma r}{dQ/dr} < 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{(V - \sigma r)^2}{gH} < 1. \tag{2.2}$$

Dans le cas multicouche, la condition (2.1) doit être vérifiée par couche. Elle est un équivalent du critère du point d'inflexion de Rayleigh. La seconde condition (2.2) impose à l'écoulement d'être sous-critique (la vitesse doit être inférieure à celle des ondes d'inertie-gravité) (Ripa, 1989, 1992). Ces conditions sont des critères suffisants pour la stabilité de l'écoulement et leur non respect est une condition nécessaire pour l'instabilité. En revanche, ils n'apportent pas d'information sur le développement de l'instabilité de l'écoulement.

Pour des nombres de Rossby plus importants (correspondant généralement à des structures de plus petite taille, à la méso- ou sous-mésoéchelle – ou, dans l'atmosphère, aux cyclones tropicaux), de nouveaux types d'instabilités, agéostrophiques, apparaissent. Par ailleurs, les propriétés des instabilités QG peuvent être modifiées. Ces deux aspects agéostrophiques des instabilités de tourbillons, dans les écoulements géophysiques, restent relativement peu étudiés. Par exemple, l'instabilité centrifuge est bien connue dans les écoulements 3D non stratifiés et sans rotation, mais son implication dans les écoulements océaniques à méso- et sous-mésoéchelle n'est considérée que depuis peu. Précisément, ce chapitre présente des résultats sur les instabilités de deux types de vortex agéostrophiques, à savoir l'anticyclone isolé et l'anneau de vorticité cyclonique, dans les modèles RSW.

2.2 Instabilités d'anticyclones fortement agéostrophiques

Cette section contient une description de l'instabilité centrifuge, dans le contexte d'écoulements géophysiques, et introduit l'étude que nous présentons dans la section suivante sur les instabilités centrifuge et barotrope de tourbillons anticycloniques intenses.

2.2.1 Instabilité centrifuge dans le fluide stratifié en rotation : état de l'art

L'instabilité centrifuge résulte de l'équilibre instable entre le gradient radial de pression et la force centrifuge. C'est une instabilité tridimensionnelle, qui fut théorisée par Lord Rayleigh (1917) : il dériva, dans le cadre d'un fluide *inviscide* non stratifié confiné entre deux cyclindres coaxiaux en rotation, un critère nécesaire et suffisant pour cette instabilité. Ce critère correspond à une configuration de l'écoulement dans laquelle l'échange de deux anneaux de fluide de rayons voisins conduit à un gain d'énergie pour le système. Il est donné par (e.g. Drazin et Reid, 1981) :

$$\Phi(r) < 0 \ , \quad \Phi = \frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}\left(L^2\right) ,$$

où Φ est le discrimant de Rayleigh et L le moment angulaire. Le développement de l'instabilité centrifuge présente des anneaux de recirculation dans la zone où Φ est négatif, qui permettent la redistribution du moment angulaire pour saturer vers un état d'équilibre marginal (e.g. Kloosterziel *et al.*, 2007).

Un critère d'instabilité étendu aux écoulements de fluide en rotation a été dérivé par Kloosterziel et van Heijst (1991) et s'énonce comme suit :

$$\Phi(r) < 0 \ , \quad \Phi = (2V/r + f)(\omega_z + f) = \frac{L_a \cdot \omega_a}{r^2}, \tag{2.3}$$

où L_a est le moment angulaire absolu et ω_a la vorticité absolue (selon l'axe vertical). Notons quel le déclenchement de l'instabilité, dans le système en rotation, est favorisé dans les tourbillons anticycloniques : le critère d'instabilité est vérifié pour des nombres de Rossby plus petits dans ces derniers que dans les cyclones, à de vorticité potentiel ou de vitesse équivalents (modulo le changement de signe). Ceci ne veut pas dire que les cyclones ne subissent pas l'instabilité centrifuge (à la différence des écoulements plan-parallèles pour lesquels le cisaillement cyclonique ne déclenche jamais l'instabilité inertielle), mais il faut que leur nombre de Rossby soit très élevé, atteignant des valeurs peu plausibles dans les

écoulements océaniques (e.g. Orlandi et Carnevale, 1999). Pour un fluide stratifié, un critère existe et correspond à (2.3) où la vorticité absolue est remplacée par la vorticité potentielle (cf. Kloosterziel *et al.*, 2007, et références incluses). La stratification, dans la limite inviscide, ne modifie que très peu le seuil de déclenchement de l'instabilité centrifuge, notamment parce que celle-ci subit une "catastrophe ultraviolette" : le taux de croissance tend asymptotiquement vers une valeur maximale dans la limite de nombres d'onde verticaux infinis. Ces petites échelles verticales sont faiblement affectées (et, au contraire, favorisées) par la barrière d'énergie potentielle que représente la stratification.

A l'instar de l'instabilité symétrique (ou inertielle), qui est l'analogue de l'instabilité centrifuge pour les jets plan-parallèles dans le domaine en rotation, les mouvements verticaux associés à la saturation de cette instabilité sont agéostrophiques et engendrent l'émission d'ondes internes (Kloosterziel *et al.*, 2007; Plougonven et Zeitlin, 2009). Les mouvements de recirculation à petite échelle et la génération d'ondes entraînent également la dissipation d'énergie cinétique.

Les critères dérivés ci-dessus sont valables pour un écoulement axisymétrique, et bon nombre d'études sur le sujet imposent cette condition d'invariance par rotation. Un critère généralisé pour les perturbations non-axisymétriques a été dérivé par Billant et Gallaire (2005) en utilisant un développement WKBJ pour de grands nombres d'onde verticaux, et montre que le taux de croissance associé aux perturbations non-axisymétriques est toujours plus petit que celui des perturbations symétriques. La même conclusion pour un fluide stratifié et en rotation a été obtenue par Lazar *et al.* (2013b). Cependant, des résultats d'analyse de stabilité linéaire (Smyth et McWilliams, 1998) et d'expériences (Billant *et al.*, 2004) montrent que les modes non-axisymétriques de l'instabilité centrifuge (notamment le mode $l = 1$, où l est le nombre d'onde angulaire) peuvent être prédominants dans certains cas. Ceci est causé par l'action conjuguée de la stratification et de la viscosité. Cette dernière sélectionne les modes de nombre d'onde vertical fini en amortissant les très petites longueurs d'onde. Le taux de croissance de ces modes verticaux est réduit par la stratification, davantage pour le mode angulaire axisymétrique que pour les modes non-axisymétriques (Billant et Gallaire, 2005; Lazar *et al.*, 2013b).

Dans le contexte du jet rectiligne, des études sur l'instabilité inertielle montrent que le mode symétrique n'est pas toujours le plus instable (Stevens et Ciesielski, 1986; Bouchut *et al.*, 2011; Ribstein *et al.*, 2014). Certaines expériences en laboratoire (Kloosterziel et van Heijst, 1991), confirmées par des simulations numériques (Orlandi et Carnevale, 1999) reportent une destabilisation d'anticyclones par instabilité barotrope *après* saturation de l'instabilité centrifuge, ce qui met en avant la coexistence possible entre ces instabilités, et le caractère trop restrictif de l'hypothèse d'axisymétrie. La complexité du développement de ces instabilités, notamment les petites échelles sollicitées, rendent leur integration numérique difficile et coûteuse. Enfin, les effets de la stratification non triviale et du cisaillement vertical sur ces instabilités n'ont jamais été étudiés.

2.2.2 Introduction à l'article

Dans la section suivante, nous présentons les résultats que nous avons obtenus sur les instabilités centrifuge et barotrope d'anticyclones intenses et isolés, en particulier sur les aspects que nous venons d'énoncer, en utilisant un modèle Rotating Shallow Water à deux couches. Malgrès les simplifications contenues dans ce modèle, il capture l'instabilité centrifuge et constitue donc un outil efficace pour étudier les processus fondamentaux en jeu, notamment avec des codes à haute résolution et un coût numérique raisonnable.

Dans un premier temps, une analyse de stabilité linéaire est réalisée et les modes instables sont identifiés. L'impact sur ces modes des différents paramètres de l'écoulement (intensité, taille du vortex, rapport des densités et cisaillement vertical) est étudié et les différents régimes d'instabilité sont délimités. Dans un second temps, la saturation non-linéaire de l'instabilité centrifuge (axisymétrique et non-axisymétrique) est étudiée à l'aide de simulations numériques, et les mécanismes impliqués sont discutés en détail. Enfin, les saturations non linéaires de l'instabilité centrifuge et de l'instabilité barotrope sont comparées, dans un régime où leur taux de croissance linéaires sont comparables. Ces résultats ont été soumis pour publication dans la revue *Journal of Fluid Mechanics*, et le contenu de l'article est inclus ci-après, en anglais.

2.3 Article : *Centrifugal, barotropic and baroclinic instabilities of isolated ageostrophic anticyclones in the two-layer rotating shallow water model and their nonlinear saturation*

Abstract Instabilities of isolated anticyclonic vortices in the 2-layer rotating shallow water model are studied at Rossby numbers up to 2, with the main goal to understand the interplay between the classical centrifugal instability and other ageostrophic instabilities. We find that different types of instabilities with low azimuthal wavenumbers exist, and may compete. In a wide range of parameters an asymmetric version of the standard centrifugal instability has larger growth rate than the latter. The dependence of the instabilities on the parameters of the flow : Rossby and Burger numbers, vertical shear, and the ratios of the layers' thicknesses and densities is investigated. The zones of dominance of each instability are determined in the parameter space. Nonlinear saturation of these instabilities is then studied with the help of a high-resolution finite-volume numerical scheme, by using the unstable modes identified from the linear stability analysis as initial conditions. Differences in nonlinear development of the competing centrifugal and ageostrophic barotropic instabilities are evidenced. A nonlinear mechanism of axial symmetry breaking during the saturation of the centrifugal instability is displayed.

2.3.1 Introduction

Mesoscale and submesoscale eddies (i.e. eddies with typical scales of the order of the Rossby deformation radius and below) are ubiquitous in the ocean (e.g. McWilliams, 1985; Munk *et al.*, 2000), and much effort is dedicated to the analysis of such structures, especially in what concerns their stability. Basically, two different types of vortex configurations have been considered since the early 1980's, namely columnar barotropic or vertically confined ones (the latter modeling surface-intensified eddies and subsurface lenses). Vortices of both types can be studied by means of laboratory experiments or numerical simulations and allow for analytical treatment under some simplifying assumptions. Mesoscale vortices at low Rossby numbers can be unstable with respect to the geostrophically balanced perturbations giving rise to classical barotropic and baroclinic instabilities, as proved by means of numerical linear stability analysis – often in two-layer models (Dewar et Killworth, 1995; Baey et Carton, 2002; Katsman *et al.*, 2003; Benilov, 2003, 2004) – or by analytical stability arguments for specific radial profiles of the vorticity (Ripa, 1992; Ford, 1994). Non-linear saturation of such instabilities is well documented in the framework of quasi-geostrophic (Gent et McWilliams, 1986; Ikeda, 1981) or full two-layer rotating shallow water (RSW) models (Baey et Carton, 2002; Thivolle-Cazat *et al.*, 2005). It has been found that destabilization of barotropic isolated eddies concerns primarily the smaller ones (i.e. with high Burger numbers), while baroclinic instability switches on at low Burger numbers (and for baroclinic vortices). Both generally lead either to the formation of vortex tripoles, or to the vortex breakdown into dipoles.

Besides the geostrophic instabilities, the vortices can experience ageostrophic instabilities when their azimuthal velocity is sufficiently large. These instabilities are much less documented, except for the widely known centrifugal instability of columnar vortices. The first analysis of the centrifugal instability is due to Lord Rayleigh (1917), who found that the angular momentum in a revolving homogeneous fluid must decrease with the radius so-

mewhere in the flow in order for instability to exist. Vortices in the ocean or the atmosphere are subject to stratification and background rotation, which modify this condition (Billant et Gallaire, 2005; Kloosterziel et van Heijst, 1991; Park et Billant, 2013). The influence of stratification on the linear stability of vortices on the f-plane (i.e. at constant Coriolis parameter) was investigated by Gent et McWilliams (1986); Smyth et McWilliams (1998); Potylitsin et Peltier (1998); Lazar *et al.* (2013b), with a general result that the growth rate of the centrifugal instability is reduced when the stratification strengthens, but still remains higher than that of the barotropic or baroclinic instabilities. The studies of the impact of developing centrifugal instability upon intense vortices are relatively rare (Smyth et McWilliams, 1998; Orlandi et Carnevale, 1999; Kloosterziel *et al.*, 2007; Lazar *et al.*, 2013a). A detailed numerical investigation of the nonlinear saturation of this instability in geophysical context was reported only in Kloosterziel *et al.* (2007), as to our knowledge, in the case of a continuously stratified, barotropic and strictly axisymmetric vortex on the f-plane. The reasons for such sparseness in the literature, besides the fact that the importance of the centrifugal instability for geophysical flows was fully realized relatively recently, reside in the numerical cost of the simulations due to the complexity of the flow resulting from the developing instability. It is well known that the centrifugal instability (as well as the inertial one, which is its analog for the plane-parallel flows) exhibits the ultraviolet catastrophe (Smyth et Peltier, 1994; Smyth et McWilliams, 1998), hence the necessity to resolve very fine scales.

Yet, the centrifugal instability does not need a fully three-dimensional flow to be realized, and manifests itself already in the two-layer rotating shallow-water model, like the inertial one (e.g. Zeitlin, 2008). Multi-layer rotating shallow-water models (RSW) are standard conceptual models in geophysical fluid dynamics (Pedlosky, 1987; Vallis, 2006). The technical advantages of these models (which retain, nevertheless, all pertinent features of the full "primitive" equations) are that vertical structure is very coarse and easily controlled, which makes the linear stability analysis relatively simple [1] , and that the model admits powerful high-resolution finite-volume numerical schemes (Bouchut et Zeitlin, 2010) allowing for numerical simulations of nonlinear saturation of the instabilities for long evolution times and at a low computational cost (Bouchut *et al.*, 2011). Because of these advantages, and following previous studies (Dewar et Killworth, 1995; Baey et Carton, 2002; Katsman *et al.*, 2003), we undertake below a detailed analysis of the ageostrophic instabilities of localized vortices and of their nonlinear saturation in the 2-layer RSW model.

It should be emphasized that the two-layer model is a mean-field model obtained from continuously stratified primitive equations by vertical averaging between pairs of material lines - cf. e.g. Zeitlin (2007). In this sense it may be considered as a consistent truncation of the full equations by two lowest vertical eigenmodes : the barotropic and the first baroclinic ones. The model will be used below as the simplest conceptual model where barotropic, baroclinic and centrifugal instabilities of vortices are realized. The recent work on inertial instability, which is a close relative of the centrifugal one, respectively in the 2-layer RSW (Bouchut *et al.*, 2011), and in continuously stratified primitive equations (Ribstein *et al.*, 2014), showed the pertinence of the 2-layer results both in what concerns linear stability analysis and nonlinear saturation. Needless to repeat that the two-layer modeling of the baroclinic instability is routine in geophysical fluid dynamics.

1. The variations of stratification are difficult to include in the linear stability analysis of vortices in continuously stratified fluid, where the strong assumptions of constant stratification and barotropicity are needed to make the mathematical problem separable. We are not aware of such results.

Our main goal is to understand the interplay between the centrifugal instability and other ageostrophic instabilities, as well as their possible competition in different parameter regimes of the flow. Our main motivations are as follows. On the one hand, it is known that non-axisymmetric instabilities co-exist with the axisymmetric centrifugal instability, but it is not known for sure whether the symmetric mode is always the most unstable, as suggested by asymptotic calculations (Billant et Gallaire, 2005), or non-axisymmetric perturbations can be dominant for some configurations of the flow (Smyth et McWilliams, 1998), as it was shown to be the case for the inertial instability (Bouchut *et al.*, 2011; Ribstein *et al.*, 2014). On the other hand, at small Rossby numbers the isolated vortices are subject to the standard barotropic and baroclinic instabilities (Dewar et Killworth, 1995; Baey et Carton, 2002; Katsman *et al.*, 2003; Benilov, 2003, 2004), while the unstable centrifugal modes disappear. So it seems plausible that by increasing the Rossby number the threshold of the centrifugal instability would be reached and the instabilities of different nature would start to compete. Such scenario has been already shown to realize for the inertial instability in Bouchut *et al.* (2011). Besides, the impact of the vertical structure (velocity shear, non-trivial density stratification) upon the ageostrophic instabilities in general, and the centrifugal instability in particular, remains under-investigated. As already said, the 2-layer model is a conceptual model of the instabilities in question allowing their intercomparison in the simplest possible framework, as well as studying their impact on the evolution of the flow at large scales.

The paper is organized as follows : in section 2.3.2 we describe the model, introduce the relevant parameters, present the class of vortex solutions we are working with, and formulate the linear stability problem and its discretized version. In section 2.3.3 we give the results of the linear stability analysis and discuss them. We selected certain unstable modes obtained from the linear stability analysis, which we considered of special interest, and performed numerical simulations of their nonlinear evolution, which are presented in section 2.3.4. We display the evolution of essentially ageostrophic and vertically sheared centrifugal unstable modes (section 2.3.4), and compare it to the saturation of the barotropic instability (section 2.3.4) for a basic flow which is unstable with respect to both instabilities. Discussion and conclusions are presented in section 2.3.5. Appendix 2.3.5 contains the details of the application of the pseudospectral collocation method in cylindrical geometry, which we use for solving the linear stability problem.

2.3.2 The two-layer RSW model, the background flow and the linearized problem

We work with the two-layer rotating shallow water model, which describes the evolution of two layers of fluid of uniform but different densities, under the influence of gravity and background rotation (Coriolis force). The latter is assumed to be uniform (the f-plane approximation), and we use the free-surface upper boundary condition and the flat bottom. The equations of the model in cylindrical coordinates, well-adapted to the study of initially axisymmetric vortices, read :

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} + \left(f + \frac{v_i}{r}\right)\vec{e_z} \times \vec{v}_i = -g\vec{\nabla}(d^{i-1}h_1 + h_2), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \vec{\nabla}(h_i\vec{v}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.5}$$

where $\vec{v}_i = (u_i, v_i)$ is the velocity in layer i (counted from the top), h_i is the thickness of the layer i, g and f are, respectively, the gravity and the Coriolis parameter, and d is the density ratio, $d = \rho_1/\rho_2 < 1$. The Lagrangian derivative is denoted by $\frac{d\cdots}{dt} = \frac{\partial\cdots}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdots$. We also introduce the thickness ratio $\delta = H_1/H_2$ (where H_i denotes the thickness of the i^{th} layer at rest), to be used later on.

A useful for diagnostics quantity is potential vorticity (PV) in each layer

$$Q_i = \frac{f + \vec{e_z}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}_i\right)}{h_i}, \tag{2.6}$$

which is a Lagrangian invariant.

From now on we scale the time by f^{-1}, the space coordinates by the barotropic deformation radius $R_d = \sqrt{gH_0}/f$, where $H_0 = H_1 + H_2$ is the total depth of the fluid, and the velocity by the barotropic gravity-wave velocity $\sqrt{gH_0}$. The non-dimensional departures of thickness from the basic state η_i are introduced, such that $h_i = H_0(\overline{H_i} + \eta_i)$, where $\overline{H_i}$ is the non-dimensional layer thickness corresponding to the background flow. Note that such scaling assumes that Rossby, Burger and Froude numbers are of the order 1, otherwise one should introduce typical lengthscale, velocity and thickness deviation, which will make explicitely appear the Rossby and the Burger number and the magnitude of the thickness deviation in the non-dimensional versions of equations (2.4) - (2.5).

Let us comment on the viscous dissipation which may be be introduced in the momentum equations (2.4). It would be controlled by the Ekman number (e.g. Pedlosky, 1987) $Ek = Ro/Re = \nu/(fL^2)$. For large-scale flows we aim, the Reynolds numbers are huge, and even in the regimes with $Ro = \mathcal{O}(1)$ studied below, these terms are negligeable. Bottom friction is of often use in oceanographic modeling, either linear or quadratic in velocity. The phenomenological values of the corresponding coefficients are very small (corresponding to a vortex decay time of the order of months) and, again, are negligeable for our purposes, although such terms may be easily introduced in the equations of motion, as well as surface (wind) forcing.

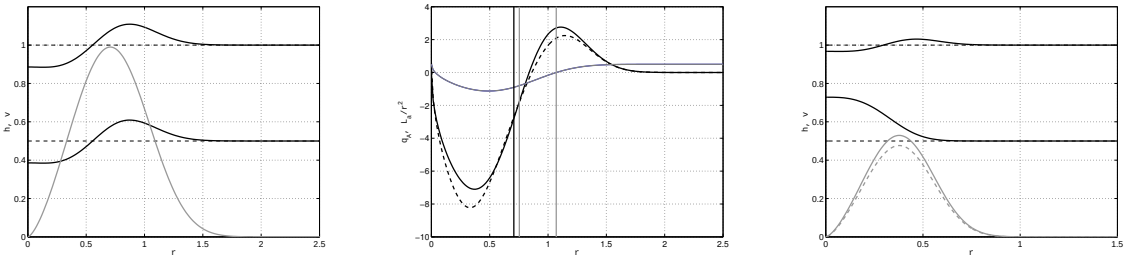
We linearize the equations (2.4), (2.5) about a stationary axisymmetric state, which is an exact solution, provided it is in cyclogeostrophic balance (i.e. a balance between centrifugal, Coriolis and pressure forces). This implies that the radial velocities in both layers are zero and the non-dimensional azimuthal velocities and thicknesses satisfy the relation

$$\overline{V_i}\left(1 + \frac{\overline{V_i}}{r}\right) = -\partial_r(d^{i-1}\overline{H_1} + \overline{H_2}) \ , \quad i = 1, 2. \tag{2.7}$$

In this study we consider a class of isolated vortices (i.e. vortices with the circulation vanishing fast enough away from the center) with non-dimensional velocity profiles given by :

$$\overline{V_i} = \pm\frac{Ro}{\sqrt{Bu}}\kappa^{i-1}{r_\star}^{\alpha/2}e^{-\frac{r_\star^\alpha}{2}+\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \tag{2.8}$$

where the positive sign corresponds to cyclones and the negative one to anticyclones. We call such vortices "α-Gaussian". In (2.8) κ is the ratio of velocities in the deep and surface layers and α is the parameter controlling the horizontal shear. Ro is the upper-layer Rossby number (the maximal absolute velocity in the layer over fL). We call barotropic a vortex with no velocity shear between the layers, i.e. a vortex with $\kappa = 1$. We also introduced $r_\star = r\sqrt{Bu}$, where $Bu = gH_0/(f^2L^2)$ is the barotropic Burger number based on the barotropic



(a) $Bu = 2,\ \kappa = 1$ (b) $Bu = 2,\ \kappa = 1$ (c) $Bu = 7,\ \kappa = 0.9$

FIGURE 2.2 – Vortex profiles (2.8) with $\alpha = 3,\ \delta = 1,\ d = 0.9$ and $Ro = 1.4$. *Left and right panels :* layer thicknesses (black continuous) with indicated values at rest (black dashed). Absolute value of the velocity is superimposed in grey. *Middle panel :* PV anomaly in both layers (black) and absolute angular momentum divided by r^2 (grey). Vertical black and grey lines indicate, respectively, the position of maximum velocity and the zone of negative Rayleigh discriminant. *Upper layer :* continuous ; *Lower layer :* dashed (except for the thicknesses).

deformation radius and the location of the velocity peak L. The baroclinic Burger number, which is defined as $Bu' = R_d'^2/L^2 = g' H_{\rm eq}/f^2 L^2$, depends on the density and aspect ratios through the reduced gravity $g' = g\Delta\rho/\overline{\rho} = g \cdot 2(1-d)/(1+d)$ and the equivalent depth $H_{eq} = H_1 H_2/H_0 = \delta H_0/(1+\delta)^2$. The profiles of the thicknesses corresponding to (2.8) are recovered from (2.7). The velocity profile (2.8) (with a single value of κ) was used in a preceding study (Kloosterziel *et al.*, 2007) of the centrifugal instability of a barotropic vortex with constant stratification. This profile is slightly different from the one often used in the literature (Baey et Carton, 2002; Orlandi et Carnevale, 1999), unless $\alpha = 2$ [2] Examples of vortex profiles with the parameters to be used below are presented in Figure 2.2.

The non-dimensional linearized equations for the perturbation (u_i, v_i, η_i) read :

$$\left(\partial_t + \frac{\overline{V_i}}{r}\partial_\theta\right) u_i - \left(1 + 2\frac{\overline{V_i}}{r}\right) v_i + \partial_r(d^{i-1}\eta_1 + \eta_2) = 0, \tag{2.9}$$

$$\left(\partial_t + \frac{\overline{V_i}}{r}\partial_\theta\right) v_i - \left(1 + \frac{\overline{V_i}}{r} + \partial_r\overline{V_i}\right) u_i + \frac{1}{r}\partial_\theta(d^{i-1}\eta_1 + \eta_2) = 0, \tag{2.10}$$

$$\left(\partial_t + \frac{\overline{V_i}}{r}\partial_\theta\right) \eta_i + \left[\overline{H}_i\partial_r + \frac{\partial_r(r\overline{H}_i)}{r}\right] u_i + \frac{\overline{H}_i}{r}\partial_\theta v_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.11}$$

Looking for normal modes, we apply Fourier transformations in time and azimuthal coordinate : $(u_i, v_i, \eta_i)(r, \theta, t) = (i\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, \tilde{\eta}_i)(r) e^{i(l\theta - \omega t)}$, where l is the discrete azimuthal wavenumber, and ω is the frequency. The system (2.9) - (2.11) can be written, omitting the

2. We should point out here that analyticity of the vorticity profile requires $\alpha = 2$ or $\alpha \geq 4$, otherwise the vorticity has a singular derivative at $r = 0$ (and associated infinite gradient would normally be damped by viscosity, if introduced). In practice, it does not affect the results in what concerns the instability, and numerical simulations of the evolution of such vortices show that they quickly adjust towards a regular shape at the center without altering the dynamics elsewhere.

tildes, in the form :

$$\omega \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \eta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\frac{\overline{V_1}}{r} & 1+2\frac{\overline{V_1}}{r} & -\mathcal{D}_N & 0 & 0 & -\mathcal{D}_N \\ 1+\frac{\overline{V_1}}{r}+\mathcal{D}_N\overline{V_1} & l\frac{\overline{V_1}}{r} & l/r & 0 & 0 & l/r \\ \frac{\mathcal{D}_N(r\overline{H_1})}{r}+\overline{H}_1\mathcal{D}_N & l\frac{\overline{H_1}}{r} & l\frac{\overline{V_1}}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d\mathcal{D}_N & l\frac{\overline{V_2}}{r} & 1+2\frac{\overline{V_2}}{r} & -\mathcal{D}_N \\ 0 & 0 & dl/r & 1+\frac{\overline{V_2}}{r}+\mathcal{D}_N\overline{V_2} & l\frac{\overline{V_2}}{r} & l/r \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathcal{D}_N(r\overline{H_2})}{r}+\overline{H}_2\mathcal{D}_N & l\frac{\overline{H_2}}{r} & l\frac{\overline{V_2}}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \eta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

where $\mathcal{D}_N$ is the operator of differentiation in r which becomes the differentiation matrix when the system is discretized in r over a N-point grid, which is anticipated in the notation. The details of the discretization procedure and setup are given in Appendix 2.3.5.

Boundary condition at $r \to 0$ is vanishing of all of the six variables, except for the axisymmetric perturbation with $l = 0$ for which the condition $\eta_i \to 0$ is replaced by $\partial_r \eta_i \to 0$; and for l=1 where the proper dynamical condition is $u_i = -v_i$. There is no specific condition imposed at infinity, but the numerical method we use implies that the solutions are decaying there, see Appendix 2.3.5. We are not introducing dissipation in the linear stability analysis because, as it will be shown below, the modes we are mostly interesting in have typical growth rates of the order unity and will be not substantially affected by a weak dissipation. These unstable modes correspond to the gravest modes in continuously stratified fluid, and are usually not significantly affected by viscosity (see, e.g. Ribstein *et al.*, 2014). The Ekman damping is not sensible to the spatial structure of the modes, and thus not selective. It will be not considered, for simplicity.

We will be solving the system (2.12) by the collocation method in order to determine the eigenfrequencies $\omega = \omega_r + i\omega_i$ and corresponding eigenvectors. The imaginary part of the eigenvalue $\omega_i \equiv \sigma$ gives the growth rate of the unstable modes.

In the symmetric case, and for a purely barotropic vortex ($\kappa = 1 \Rightarrow \overline{V}_1 = \overline{V}_2 = \overline{V}$) the linear system of equations (2.12) can be reduced, by straightforward elimination of variables, to the following one :

$$(-\omega^2 + \overline{\Phi}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \partial_r \left(\frac{\partial_r}{r} \begin{pmatrix} r\overline{H}_1 u_1 + r\overline{H}_2 u_2 \\ rd\overline{H}_1 u_1 + r\overline{H}_2 u_2 \end{pmatrix} \right), \tag{2.13}$$

where $\overline{\Phi} = 2\overline{L}_a\overline{\zeta}_a/r^2$, $\overline{L}_a = r^2/2 + r\overline{V}$ is the absolute angular momentum, and $\overline{\zeta}_a = 1 + \partial_r(r\overline{V})/r$ the absolute vorticity of the background vortex. From this system one can deduce, following the similar analysis in the case of inertial instability in Bouchut *et al.* (2011), a relation between the frequency ω and the baroclinic and barotropic components of the normal modes, defined as $u_b = u_1 - u_2$ and $u_B = (\overline{H}_1 u_1 + \overline{H}_2 u_2)/\overline{H}_0$, respectively. By multiplying (2.13) by $\overline{H}_{eq} u_b^*$ ($\overline{H}_{eq} = \overline{H}_1\overline{H}_2/(\overline{H}_1 + \overline{H}_2)$) and integrating over the whole domain, supposing that the velocity field vanishes at infinity, i.e. that we are looking for *trapped* modes, we get :

$$\omega^2 = \frac{\int \overline{\Phi} \cdot \overline{H}_{eq} |u_b|^2 dr}{\int \overline{H}_{eq} |u_b|^2 dr} + (1-d) \frac{\int \left[|\partial_r(\overline{H}_{eq} u_b)|^2 + \frac{|\overline{H}_{eq} u_b|^2}{4r^2} \right] dr}{\int \overline{H}_{eq} |u_b|^2 dr} - (1-d) \frac{\int \overline{H}_{eq} u_b^* \partial_r \left(\frac{\partial_r(r\overline{H}_1 u_B)}{r} \right) dr}{\int \overline{H}_{eq} |u_b|^2 dr}. \tag{2.14}$$

The first term in the r.h.s. of this relation has the same sign as $\overline{\Phi}$, and the second term is positive-definite. The third term is not sign-definite, but it is the only one containing the

barotropic velocity u_B, and thus vanishes for purely baroclinic modes. Hence we infer, like in the case of inertial instability (Plougonven et Zeitlin, 2005), that there exist trapped baroclinic modes, such that their frequencies may become imaginary, for sufficiently large negative values of $\overline{\Phi}$. We thus recover the classical Rayleigh condition for the centrifugal instability : $\overline{\Phi} \propto \overline{L}_a \overline{\zeta}_a < 0$, where the last product is the Rayleigh discriminant in our model (cf. Kloosterziel et van Heijst (1991) for the continuously stratified rotating fluid). The estimate (2.14) for the eigenfrequencies will be used below to control the numerical results for the eigenproblem (2.12) at $l = 0$.

2.3.3 Results of the linear stability analysis

We start with a detailed stability analysis of the linearized problem in the longwave sector, i.e. for perturbations with low l. The main motivation for this analysis is to find out which instability is dominant as a function of the vortex parameters. Of particular interest is eventual competition between the barotropic and the centrifugal instability, and the existence of non-axisymmetric unstable modes with similar properties as the centrifugal one, as suggested by previous studies (Billant et Gallaire, 2005; Smyth et McWilliams, 1998; Bouchut *et al.*, 2011). We pay particular attention to the impact of the vertical structure (stratification and vertical shear) on the results. As follows from eq. (2.14), these are the anticyclonic vortices which are prone to centrifugal instability, so we will work with anticyclonic background profiles.

The algebraic system (2.12) is solved with the help of the collocation method, specially adapted for cylindrical geometry and described in Appendix 2.3.5. Similar technique was used previously in Katsman *et al.* (2003) in a study of the linear stability of large-scale ocean vortices. Most of the results of the linear stability analysis below were obtained with $N = 160$ collocation points. Numerical convergence has been checked for selected modes by doubling this resolution. Before giving the details in the subsequent subsections we summarize the main results of the linear stability analysis.

For *barotropic* vortices :

- The standard centrifugal instability is dominant at *high Rossby* ($\gtrsim 0.8$) and *low Burger* ($\lesssim 10$) numbers and for sufficiently *weak stratification* and/or *depth ratio*.
- For *stronger stratification*, the centrifugal mode is not the most unstable anymore, irrespectively of the values of Rossby and Burger numbers. Non-axisymmetric mode with the azimuthal wavenumber $l = 1$ is the most unstable at *high Rossby* and *low Burger* numbers. It has a structure very close to the symmetric centrifugal instability mode.
- Regardless of the stratification strength, at least in the range we investigated, the dominant instability mode at *high Burger* ($\gtrsim 10$) and/or *low Rossby* ($\lesssim 0.7$) numbers is barotropic, with azimuthal wavenumber $l = 2$.
- In between these two domains (*high Ro-low Bu* and *low Ro-large Bu*) the non-axisymmetric l=1 or l=2 unstable modes have the highest growth rates.

For *baroclinic* vortices the vertical shear tends to inhibit both axisymmetric and non-axisymmetric centrifugal instabilities and render the barotropic one dominant.

Barotropic vortices : weakly stratified case : $d = 0.99$

We show in Fig. 2.3 the growth rate of the dominant instabilities in the (Ro, Bu) plane for a barotropic vortex ($\kappa = 1$) with moderate horizonthal shear : $\alpha = 3$. The anticyclonic

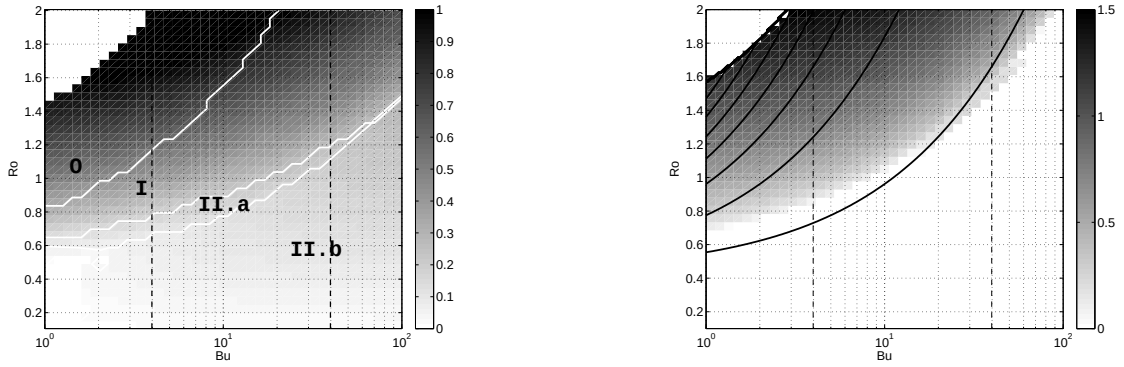
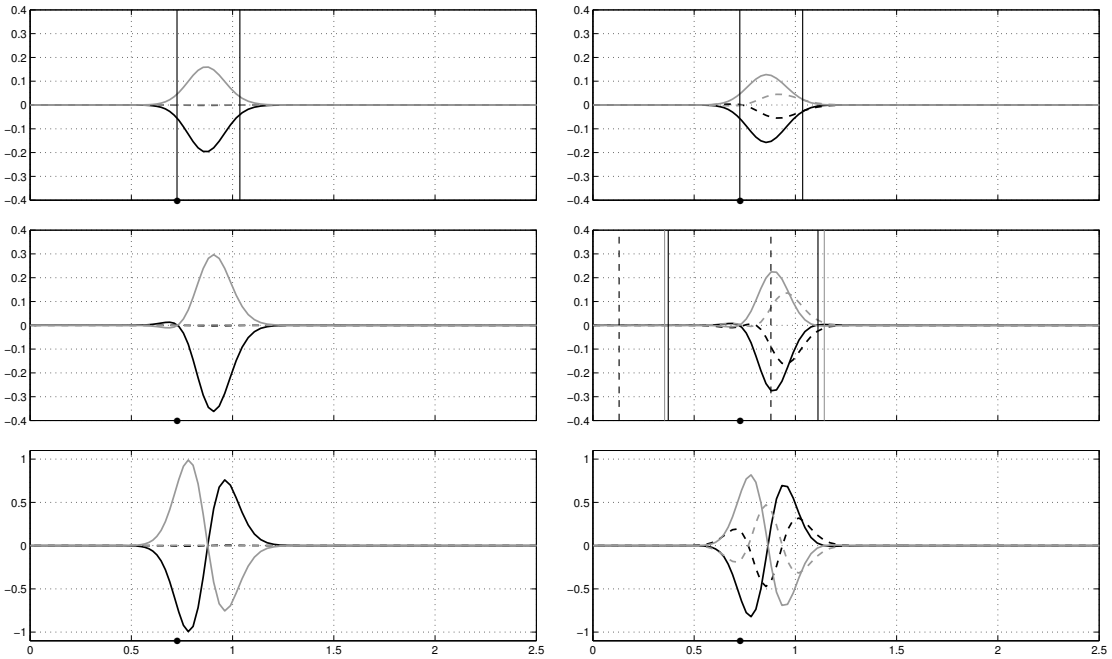


FIGURE 2.3 – Growth rate σ of the most unstable modes of the barotropic vortex with $\alpha = 3$, $d = 0.99$, and $\delta = 1$ as a function of Rossby and barotropic Burger numbers. The baroclinic Burger number is $Bu' \approx Bu/400$. Values of $Bu' = 0.01,\ 0.1$ are marked by black dashed vertical lines. *Left :* most unstable modes in the interval $l \in [0, 4]$ (colour is saturated at 1), with separation lines in white between the regimes with different most unstable mode. O : symmetric centrifugal, l=0 ; I : first asymmetric centrifugal, l=1 ; $II.a$: second asymmetric centrifugal, l=2 ; $II.b$: barotropic, l=2. *Right :* Maximum value of σ for the unstable modes with $l = 0$ (colour), and isopleths (black continuous) of $-\overline{\Phi}$ for the background vortex at 0.1 (lowermost curve) and from 0.5 to 3 (uppermost left curve) at the interval 0.5.

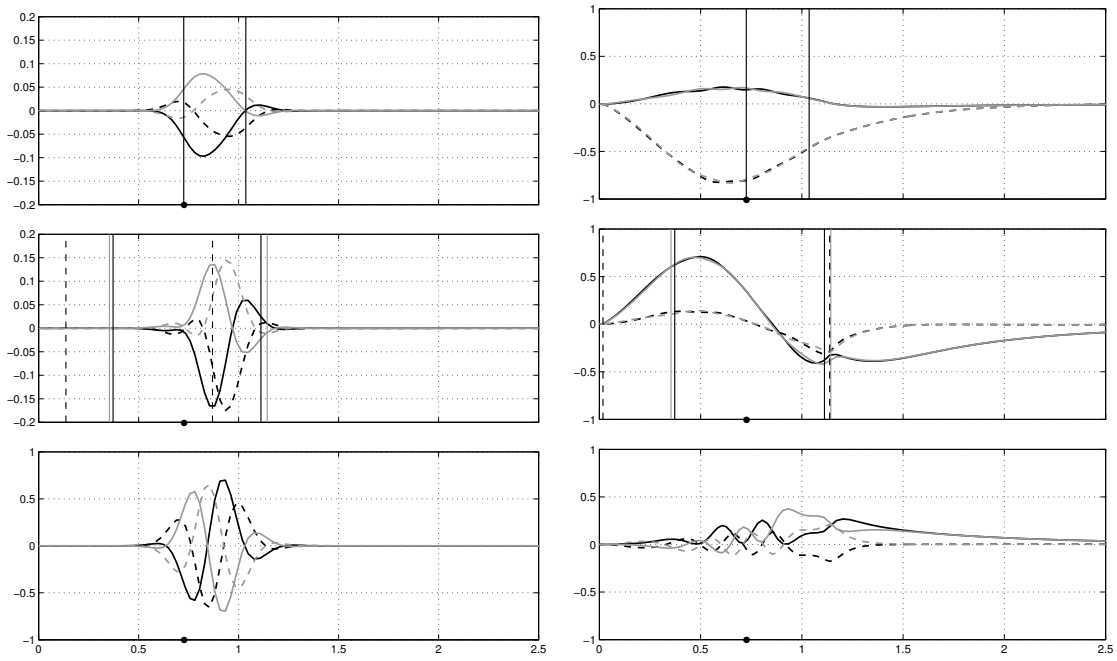
vortex is found to be unstable almost everywhere in the plane. The calculations were performed at $d = 0.99$, $\delta = 1$ and the azimuthal wavenumber l in the range $[0, 4]$.

Qualitative agreement is found with the value given by the Rayleigh criterion, as the zone of dominant symmetric centrifugal instability on the right panel of Fig. 2.3 coincides with the zone of strongest negative $\overline{\Phi}$. As follows from the left panel of Fig. 2.3, the overall highest growth rates correspond to the axisymmetric centrifugal instability. The structure of the corresponding most unstable mode at given values of the vortex parameters is presented in the left panel of Fig. 2.4. As expected, its amplitude is radially confined in the zone where the Rayleigh discriminant is negative (Kloosterziel *et al.*, 2007). The mode is trapped, and it is essentially baroclinic (i.e. with opposite velocities layerwise and strong deviation of the interface), and ageostrophic. This structure is in perfect agreement with what follows from the analysis of the general expression (2.14). We also show in Figure 2.4 the structure of the second most unstable mode which has an azimuthal wave number $l = 1$ for the same vortex parameters. Strong similarities between the two modes appear : the asymmetric l=1 mode is clearly trapped in the same zone given by the Rayleigh criterion, and is baroclinic and ageostrophic. We may, thus, infer that the two modes correspond to symmetric and asymmetric versions of the same centrifugal instability. For this reason and by further arguments to come up below, this mode will be referred to as an *asymmetric centrifugal instability* from now on. We should emphasize that, unlike its symmetric counterpart, the l=1 centrifugal mode is propagating in the azimuthal direction. It has a critical radius (the radius r_c at which the phase speed is equal to the background flow velocity) which does not coincide with the location where PV gradient of the vortex vanishes (even when the growth rate goes to zero), see Fig. 2.4. The standard mechanism of the classical baroclinic instability is the resonance between Rossby waves, which implies



(a) $l = 0$ (b) $l = 1$

FIGURE 2.4 – Structure (amplitude as a function of the radius) of the l=0 and l=1 modes of the centrifugal instability at $Ro = 1.2,\ Bu = 2,\ \delta = 1,\ \kappa = 1$ and $d = 0.99$. The growth rates of the modes are 0.76 and 0.73, respectively. *First row :* radial velocity u, with two vertical lines indicating the boundaries of the area where the Rayleigh discriminant is negative. *Second row :* azimuthal velocity v, with vertical lines indicating the radius where PV gradient vanishes (black/grey continuous in the upper/lower layer) and the location of the critical radius r_c (black dashed, if appropriate). *Third row :* thickness deviation η. Continuous : real part, dashed : imaginary part, black : upper layer, grey : lower layer. Bullets on the x-axes indicate the location of the velocity maximum in the background flow : $r_{\max} = Bu^{-1/2}$.



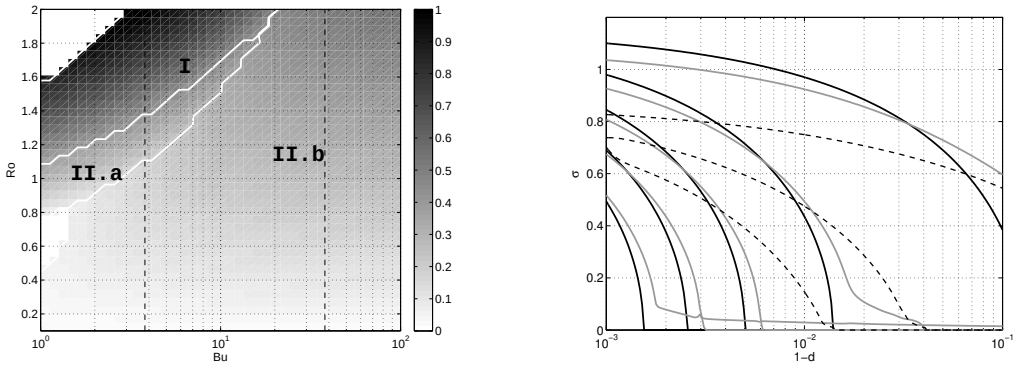
(a) $l = 2$, centrifugal (b) $l = 2$, barotropic

FIGURE 2.5 – Structure of the most unstable (left) and unstable barotropic (right) modes with azimuthal wavenumber $l = 2$ of a vortex with $Ro = 1.2,\ Bu = 2,\ \delta = \kappa = 1,\ \alpha = 3$, and $d = 0.99$. The growth rates are 0.6 and 0.1, respectively. Same legend as in Figure 2.4.

that the potential vorticity gradient must vanish at the critical radius in the limit of vanishing growth rate (i.e. for the neutral waves undergoing phase locking, see Iga (1999); Lin (1945)). Thus, the asymmetric centrifugal mode can not be directly related to the classical baroclinic instability, being apparently its ageostrophic generalization.

For larger Burger and/or lower Rossby numbers, the second azimuthal mode corresponding to another instability becomes dominant, cf. Fig. 2.3. Its structure is presented on the right panel of Fig. 2.5. Note that the velocity field of this mode is quasi-barotropic (i.e. the velocies in the upper and the lower layer are very close). Growth rates associated with this instability are weaker and increase with the Burger number, opposite to the centrifugal modes. This mode is almost geostrophically balanced beyond the radius corresponding to the maximum velocity of the background vortex, and has a critical level located at a radius where the potential vorticity gradient vanishes, see Fig. 2.5. This allows us to interpret this unstable mode as a resonance between two non-singular Rossby waves, the condition of existence of a neutral wave $Q'(r_c) = 0$ (Lin, 1945) being fulfilled, and hence we identify this mode as an ageostrophic version of the classical barotropic instability. Furthermore, when the Rossby number decreases, this mode clearly evolves toward the well known pattern of the quasi-geostrophic barotropic instability (the velocity field verifies the geostrophic balance almost everywhere, not shown). For baroclinic Burger numbers greater than one (and thus out of the range covered here), the standard baroclinic instability arises.

On the lower Burger/higher Rossby side of the zone of the dominant barotropic instability we find a strip where the most unstable mode has also the azimuthal wavenumber $l = 2$ (cf. Fig. 2.3, left panel), but a different structure. As visible in the left panel of Fig.



(a) σ vs Bu, Ro ; $d = 0.9$ (b) σ vs. $1 - d$; $Bu = 2,\ Ro = 1.4$

FIGURE 2.6 – *Left panel :* same as in Figure 2.3 but for $d = 0.9$. Vertical black dashed lines stand for $Bu' = 0.1$ and 1, from left to right. *Right panel :* evolution of the growth rate of the most unstable modes as a function of $1 - d$. Black continuous : $l = 0$, grey : $l = 1$, black dashed : $l = 2$. l=3 and weakly unstable l=2 modes are not shown. The number of nodes in the radial profile of the eigenvector decreases as the growth rate increases at fixed value of d.

2.5 where this mode is displayed, its radial and vertical structure (trapped in the same zone, baroclinic) is similar to that of the centrifugal instability modes with $l = 0$ and $l = 1$. We thus identify this unstable mode as a second asymmetric centrifugal one with azimuthal wave number $l = 2$. The phase speeds of all these modes are roughly equal and lie in the range : $-1.2 < \omega/l < -0.6$ for the parameters of Fig. 2.3, left panel, while the phase speed of the barotropic instability mode is roughly proportional to the (negative) Rossby number and ranges between -1 and 0.

Barotropic vortices : increasing stratification

In order to study the impact of stratification on the results obtained in the previous subsection we repeat the analysis with decreasing d. We show in the left panel of Fig. 2.6 the growth rates of the dominant instabilities in the (Ro, Bu) plane for a barotropic vortex with $\alpha = 3$, $\delta = 1$ and $d = 0.9$. In sharp contrast with the weakly stratified case, the symmetric centrifugal mode is never the most unstable, albeit its growth rate is close to the one of the leading first azimuthal mode (not shown). This result parallels the recent findings on inertial instability of a Bickley jet in the two-layer shallow water model (Bouchut *et al.*, 2011), where it was shown that asymmetric inertial instability dominates the symmetric one. Similar results hold in a large range of vertical wavenumbers in the full three-dimensional primitive equations (Stevens et Ciesielski, 1986; Arobone et Sarkar, 2012; Ribstein *et al.*, 2014). For strongly stratified vortices analogous result was found in Smyth et McWilliams (1998).

As follows from the right panel of Fig. 2.6, the growth rates of the centrifugal instability modes decrease as the stratification increases. The symmetric mode is more strongly affected by the density ratio, with its growth rate decreasing faster, hence there is a specific value of the density ratio for which the asymmetric centrifugal mode with l=1 becomes dominant. The above-mentioned dependence is consistent with previous results obtained

in the framework of continuously stratified fluid (Smyth et McWilliams, 1998; Billant et Gallaire, 2005; Kloosterziel *et al.*, 2007), where it was found that the classical centrifugal instability is more active at weak stratifications. It can be explained by the fact that the centrifugal instability generates overturning motions in the vertical (r, z)-plane which are inhibited by stratification. The barotropic instability mode is not sensitive to stratification, which implies that the area in the (Ro, Bu) plane where centrifugal modes are dominant is reduced. This is confirmed by comparison of the left panels of Figs. 2.3 and 2.6.

As follows from Fig. 2.6, right panel, the number of unstable modes increases with decreasing stratification. The extra axisymmetric modes with $l = 0$ are higher radial modes of the centrifugal instability with an increasing number of nodes, as expected from the analytic treatment of the symmetric centrifugal instability [3]. We checked that these modes satisfy the integral relation for the growth rate (2.14). The interesting fact is that asymmetric modes of centrifugal instability with more nodes also arise.

It is worth mentioning that the radial extent of the centrifugal modes extends as the stratification strengthens, especially for the larger azimuthal wave numbers (not shown).

Barotropic vortices : the impact of the thickness ratio

In this subsection we investigate the impact of the ratio of the layer thicknesses. We show in Figure 2.7 the variation of the growth rates of different azimuthal modes with $\delta = H_1/H_2$ for fixed values of Rossby and Burger numbers, at $d = 0.9$ and $\alpha = 3$.

One sees in the Figure that the growth rate of the centrifugal modes increases as δ decreases, the lower the azimuthal wavenumber the stronger increase. Thus, for very low values of the thickness ratio the symmetric mode becomes dominant. In the two-layer model, the fact that symmetric modes are more unstable for lower δ may be considered as selection of higher vertical wavenumber by the instability, well-known for centrifugal and inertial instabilities. The vertical structure of the centrifugal modes is clearly surface-intensified as the surface layer thins down, which supports this hypothesis. We observe that the barotropic component of such modes remains very weak, with $\overline{H}_1 u_1 \approx -\overline{H}_2 u_2$. Contrary to the centrifugally unstable modes, the growth rate of the unstable mode of the barotropic instability is not very sensitive to the thickness ratio.

Impact of the vertical shear : baroclinic vortices

Although the barotropic background vortex flows of the previous subsections are most natural for studying the centrifugal instability, which is our primary goal, the model allows for easy incorporation of the baroclinicity of the background flow. We sketch in this subsection the dependence of the stability results on the vertical shear of the background vortex (2.8), which is controlled by the ratio of the maximal velocities in the layers $\kappa = V_2/V_1$. The evolution of the growth rates of different unstable modes with κ is shown in Fig. 2.8. Note that $\kappa = 1$ corresponds to the barotropic vortex studied in the previous subsections. The results are presented for a larger value of the Burger number $Bu = 7$, because of drying of the upper layer at low Burger numbers.

3. This may be done, following Le Sommer *et al.* (2003) by imposing, for simplicity, a rigid lid in the two-layer model and reducing the system to a Schrödinger equation where the anticyclonic shear plays the role of the potential. It follows that unstable trapped modes with more nodes and lower growth rates emerge as the potential well deepens.

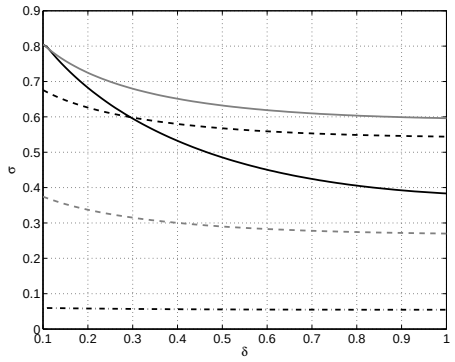


FIGURE 2.7 – Evolution of the growth rate of the unstable modes of a barotropic vortex with $Ro = 1.4$ and $Bu = 2$ as a function of δ. *Black continuous :* l=0 centrifugal mode. *Grey continuous :* l=1 centrifugal mode. *Black dashed :* l=2 centrifugal mode. *Black dash-dotted :* l=2 barotropic mode. *Grey dashed :* l=3 centrifugal mode.

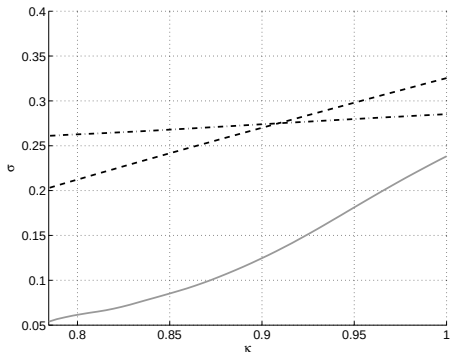


FIGURE 2.8 – Evolution of the growth rate of the unstable modes of a vortex with $Ro = 1.4$, $Bu = 7$, $\delta = 1$ and $d = 0.9$ as a function of κ. Same legend as in Fig. 2.7.

For the parameters of the Figure, the vortex is stable with respect to symmetric centrifugal instability. We see that the growth rates of all unstable modes decrease with the vertical shear, and that both centrifugal ones with $l = 1$ and $l = 2$ are more sensitive to the vertical shear than the barotropic mode with l=2. A swap between dominant instabilities takes place around $\kappa = 0.91$, with barotropic instability becoming the leading one. This fact confirms that the centrifugal instability is most relevant for the barotropic vortices. We should emphasize that the barotropic mode develops a weak vertical shear for $\kappa < 1$ (not shown), thus it would be more appropriate to call it mixed (barotropic-baroclinic). However, the velocities remain mainly colinear layerwise and the background vortex is far from the standard baroclinic configuration – generally, confined in one layer – in which the baroclinic instability is usually studied, hence we keep the name "barotropic".

These results show the sensibility of the stability properties to the vertical structure of the background vortex, and give a rather complicated picture of interchanges between different instabilities, already in the simplest two-layer configuration. Although the growth rates of the centrifugal instability are the highest among all we observed, we found that depending on the vertical structure, they may correspond to symmetric or to asymmetric variants of the instability. Moreover, for vortices with sufficient vertical shear the centrifugal instability may be overcome by the ageostrophic barotropic instability. In practice, this means that a good knowledge of the vertical structure of the flow, besides its Rossby and Burger numbers, is needed in order to understand what processes account for its instability.

2.3.4 Nonlinear saturation of the instabilities of anticyclonic vortices

In this section we describe the nonlinear development of the above-identified linearly unstable modes. We have established in the previous section that in the long-wave sector, the ageostrophic α-Gaussian vortices are unstable with respect to symmetric and asymmetric centrifugal and barotropic instabilities. Each of them can be dominant, depending on the vertical structure of the vortex. Because of differences in the structure of the unstable modes, one can expect different patterns of nonlinear development of these instabilities. Moreover, even if it is the standard symmetric centrifugal instability which is dominant, the vortex can remain unstable with respect to the barotropic instability after the saturation of this latter, and thus undergo a secondary saturation stage, like what was observed for inertially unstable jets (Ribstein *et al.*, 2014). We check these expectations in the numerical experiments presented below. We use a high-resolution well-balanced finite-volume scheme (Bouchut et Zeitlin, 2010) initialized with an α-Gaussian vortex with superimposed unstable mode found from the linear stability analysis with a rather weak amplitude : the maximum of thickness perturbation about 10% of the deviation of layer thicknesses in the vortex with respect to the state of rest. In this way, the vortex is forced to destabilize through the chosen mode, even if it is more unstable with respect to other ones. We introduce sponges, which are represented by Neuman boundary conditions, at the boundaries of the computational domain, in order to prevent the inertia-gravity waves emitted in course of evolution to come back. The correspondence of the linear stability and numerical simulations results serves to benchmark the numerical scheme. It is checked by comparing the growth rate of the perturbation at initial stages of simulations, measured by the mean absolute value of the upper-layer pressure anomaly (or by the energy of the perturbation), with the growth rate obtained from the linear stability analysis. We were always finding a good agreement between the two, for all of the instabilities in question which means that the differences in boundary conditions in linear stability analysis and direct numerical

simulation are inessential for strongly localized unstable modes we are interested in.

Saturation of symmetric and asymmetric centrifugal instabilities

We first present the results of the nonlinear development of the centrifugal instability for the two values of the azimuthal wavenumber corresponding to the highest growth rates, $l = 0$ and $l = 1$. As is known, in three-dimensional continuously stratified fluid the evolving centrifugal instability gives rise to overturning motions in the vertical plane, redistributing the angular momentum, enhancing dissipation, and leading to emission of inertia-gravity waves. These processes lead to homogenization of the flow in the zone of initial instability (i.e. where the Rayleigh discriminant is negative), and to a marginally stable vortex profile, as was shown in Kloosterziel *et al.* (2007) for strictly axisymmetric configurations. The mean flow stayed *a fortiori* monopolar in course of its destabilization in this study. It remains unknown how this behavior changes if the strict axisymmetry constraint is relaxed.

Although, by construction of the the two-layer model by vertical averaging, the overturning motions are not accessible, the intense vertical shears and related strong baroclinic divergence are well detectable. As was checked on multiple examples with our numerical code (e.g. Bouchut *et al.*, 2011), the Kelvin-Helmholtz-like instabilities associated with strong vertical shear and, *in fine* with overturning, are accounted for by the hyperbolicity loss of the flow in the corresponding locations. The numerical scheme has a very satisfactory behaviour under such conditions (Bouchut et Zeitlin, 2010) : non-hyperbolic regions, once appeared, remain spatially confined and eventually vanish, and the related strong gradients are wiped out by enhanced numerical dissipation in these locations, as it should be for the authentic Kelvin-Helmholtz instability.

The hyperbolicity loss, thus, can be regarded as a proxy for overturning motions and vertical mixing. The corresponding regions of the flow are the main zones of energy dissipation (see below). Furthermore, the numerical scheme is based on the conservative form of the equations (2.4), (2.5) and is conserving exactly the mass layerwise, together with the total momentum. Good conservation of the potential vorticity is always observed, albeit it is not explicitly built in the code. The total mass conservation has been checked in all numerical simulations we present. The relative departure of the mass averaged over all numerical cells is about 10^{-4} at $t = 100\ f^{-1}$ and is mainly due to the imperfect sponges when high amplitude waves reache the boundaries. If periodic boundary conditions are used, this value falls to 10^{-14}. We should also emphasize that, in spite of its two-dimensional character, the model does give access to vertical velocity, which is propotional to the horizontal convergence, by construction.

The simulations described below have been performed with the following vortex parameters : $\delta = 1$, $\kappa = 1$, $d = 0.9$ and $\alpha = 3$. The Rossby and Burger numbers are respectively 1.5 and 2, and the growth rates of the unstable modes used for initializations are 0.55 for the l=0, and 0.7 for the l=1 mode, for this choice of parameters. In all simulations, we did not observe a formation of a new stable vortex, as a result of the nonlinear saturation. For initializations with both l=0 and l=1 modes of the centrifugal instability the initial vortex totally breaks down. It rapidly develops strong vertical shears (the baroclinic component of velocity grows and rapidly exceeds the phase velocity of the baroclinic waves), while the barotropic velocity weakens.

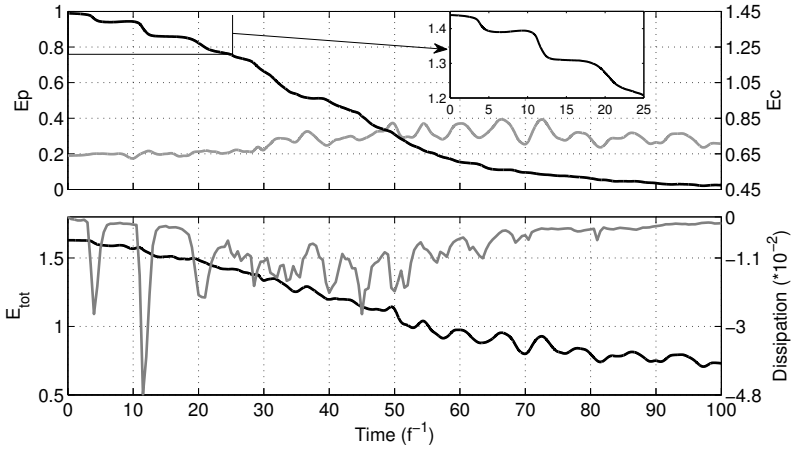


FIGURE 2.9 – Saturation of the axisymmetric centrifugal instability. *Upper frame :* the kinetic (black, right axis) and the anomaly of potential (grey, left axis) energy ; *lower frame :* total energy anomaly (black, left axis) and dissipation calculated cell-wise and summed over all cells – grey, right axis.

Nonlinear saturation of the symmetric centrifugal instability The classical symmetric centrifugal instability is the one for which high-resolution numerical simulations of the saturation exist in the full three-dimensional configuration, yet under the constraint of strict axisymmetry (Kloosterziel *et al.*, 2007) or neutral stratification (Orlandi et Carnevale, 1999). They predict the flow to become marginally stable with $L_a.\zeta_a \geq 0$ everywhere. The evolution of initially symmetric perturbation with $l = 0$ which we observe in the 2-layer model confirms this scenario at initial stages. The flow remains globally axisymmetric until $t \approx 5$. As follows from Fig. 2.9, where we present the evolution of the energy, the dissipation is already active at this stage of the saturation. Fig. 2.10, where we present the distributions of the divergence and of both components of the baroclinic velocity, shows that the zone of hyperbolicity loss is axisymmetric. Typical small-scale structures, characteristic for the saturation of the centrifugal and inertial instabilities, are visible in the figure and are associated with major part of the energy dissipation. One can nevertheless infer a weak l=4 modulation (e.g. in the magnitude of the ripples visible in the baroclinic divergence field), which can be traced back to the very beginning of the simulation and is, most probably, due to discretization errors.

It is to be emphasized that the evolution of the flow at this stage, which corresponds to the first significant drop of energy at $t \approx 5$, cf. the upper panel of Fig. 2.9, follows the scenario of (Kloosterziel *et al.*, 2007), as the flow re-stabilizes with respect to the Rayleigh criterion, as follows from Fig. 2.11. This can be considered as a benchmark of our numerical code.

Yet, the quasi-axisymmetric evolution does not last. A sharp front (shock) with corresponding jump of radial velocity is formed close to the inner boundary of the non-hyperbolic zone, as shown in Fig. 2.12. This front propagates inwards while losing its axial symmetry, as can be seen from Fig. 2.13

Although the quadrupolar perturbation with $l = 4$ of this inner front in the present simulation is probably triggered by the above-mentioned discretization errors [4], the insta-

4. we should emphasize that discretization errors of representing a circle with a Cartesian grid are

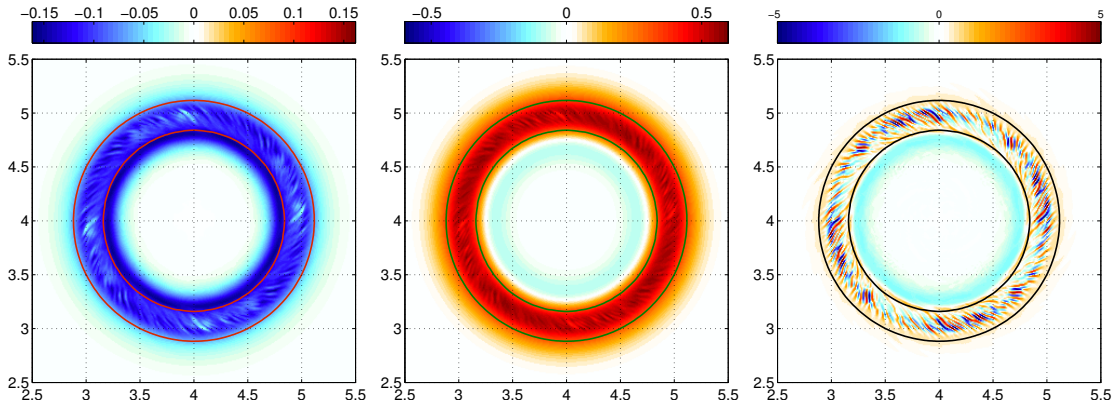


FIGURE 2.10 – Snapshots of the radial (left) and azimuthal (middle) baroclinic velocities, and of the baroclinic divergence during the nonlinear saturation of the axisymmetric instability at $t = 3.5\ f^{-1}$. Non-hyperbolic zones are confined in the annulus between thin contours.

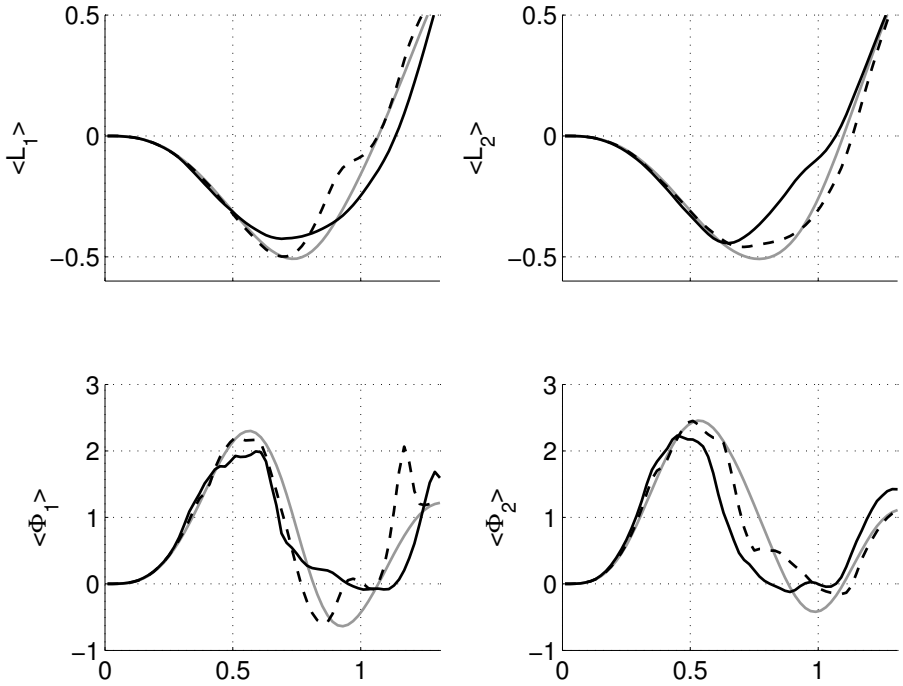


FIGURE 2.11 – Evolution of the azimuthal averages of the angular momentum (upper row) and Rayleigh discriminant (lower row) in the upper (left column) and lower (right column) layers, during the nonlinear saturation of the axisymmetric centrifugal instability. Different curves correspond to $t = 0\ f^{-1}$ (grey), $t = 8\ f^{-1}$ after the first hyperbolicity loss episode (black dashed), and $t = 18\ f^{-1}$ after the second one (black continuous).

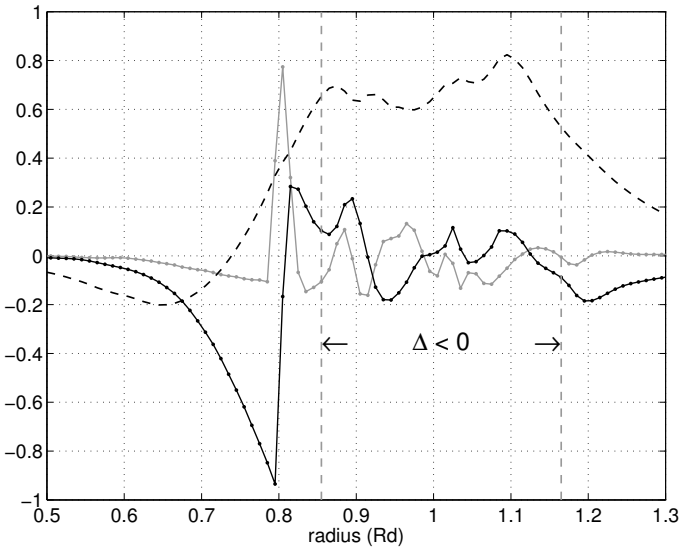


FIGURE 2.12 – Saturation of the axisymmetric centrifugal instability : radial distribution of the radial and azimuthal components of the baroclinic velocity, and of its divergence, at a given polar angle at $t = 4.5\ f^{-1}$.

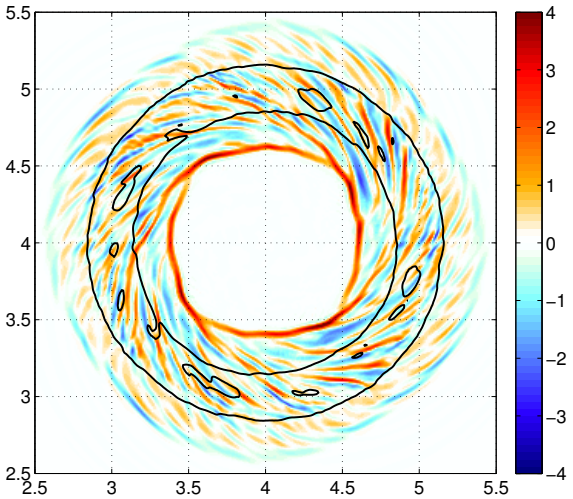


FIGURE 2.13 – Saturation of the axisymmetric centrifugal instability : divergence of the baroclinic velocity at $t = 6\ f^{-1}$. The contour of high divergence corresponds to the inward-propagating front. Thin black lines delimit the zone of hyperbolicity loss.

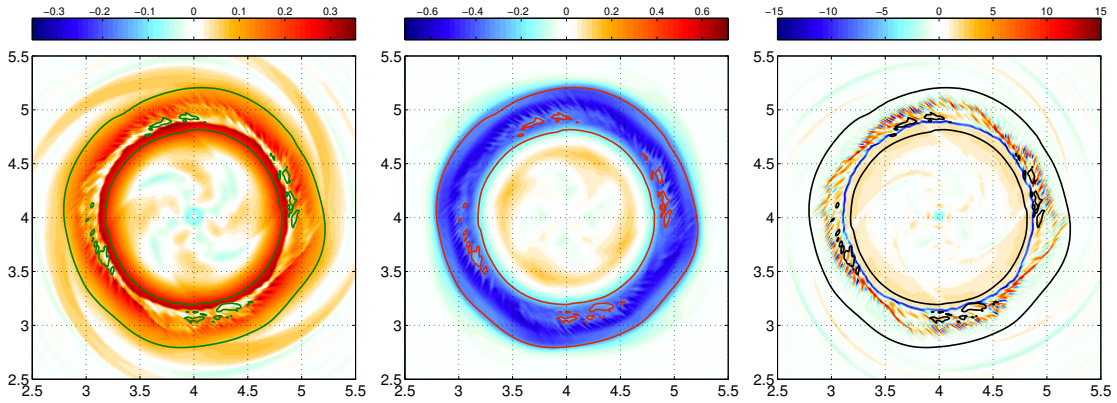


FIGURE 2.14 – Same as in Fig. 2.10 but at the beginning of the second hyperbolicity loss episode, at $t = 11.5\ f^{-1}$

bility of axisymmetric concentric shocks propagating towards the center with respect to non-axisymmetric perturbation is universal, cf. Whitham (1974). So, subject to any non-axisymmetric noise, the front will loose its axial symmetry, and hence the phenomenon we observe is generic.

The second significant drop of energy at $t \approx 11$ is related to the reappearance of a non-hyperbolic zone and generation of a new sharp front close to its inner boundary, as shown in Fig. 2.14.

As follows from the Figure, the flow evolves on the background of the l=4 structure in the inner core inherited from the preceding stage. It is worth mentioning that non-stationary perturbation due to this inner quadrupolar strature is instantaneously transmitted to the outer boundary of the non-hyperbolic zone, where it leads to emission of the inertia-gravity waves with the same azimuthal structure. Such behavior is fully consistent with the elliptic nature of the non-hyperbolic zone, where the speed of a signal is infinite, and thus confirms that the numerical scheme is consisistent with underlying physics. The origin of the second dissipation burst is due to the fact that the structure of the centrifugally unstable mode, cf. Fig. 2.4, with its strong shear in radial velocity, is not wiped out during the first dissipation burst, and recreates the conditions of the hyperbolicity loss.

The loss of axisymmetry of the vortex in course of evolution of the axisymmetric centrifugal instability is clearly seen in Figure 2.15, where we present the results of the Fourier-analysis of pressure and velocity perturbation in the upper layer. The growth of l=4 mode eventually leads to the formation of four cyclonic satellites of the main anticyclonic vortex, which subsequently merge pairwise (see the dominance of the l=2 mode in the Fourier analysis in Figure 2.15, starting at $t \approx 25$). Thus, after the stage of strong local mixing, wave emission and energy dissipation, the flow reorganizes itself, with a weak conversion from kinetic to potential energy, cf. Fig. 2.9, right panel, into a barotropic tripolar vortex with anticyclonic core which persists from about $t = 40$ for several tens of inertial periods. This tripole is shown in Figure 2.16. It is not steady : the whole structure rotates rather steadily about the center, but the distance between the core and the satellites oscillates in time, the core being alternatively closer to one or another satellite. It finally splits into a barotropic dipole that slowly goes away from a remaining cyclonic monopole. The flow is still highly energetic, with strong baroclinic shear and associated transient hyberbolicity-

universal, unless polar coordinates are used, which would complexify substantially the numerical scheme

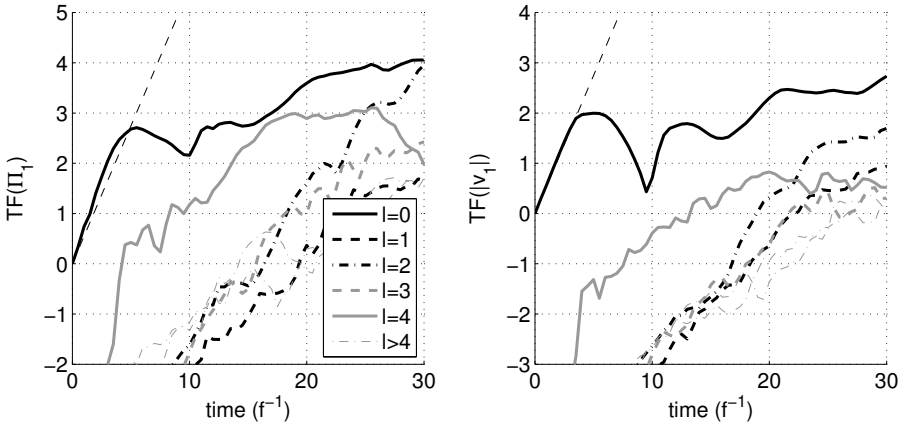


FIGURE 2.15 – Logarithm of the normalized amplitude of the first seven Fourier modes of the upper-layer pressure (*left panel) and velocity (*right panel*)* perturbations in the course of the evolution of the l=0-centrifugal instability. The thin black dashed line represents the growth predicted by the linear stability analysis. The burst of l=4 mode is clearly seen. Its initial amplitude is very small and consistent with the values of discretization errors, and its growth is delayed in time which confirms its relation to the secondary structures appearing in course of evolution.

loss patches. Emission of high-amplitude baroclinic waves continues until the end of the simulation (t = 100), and kinetic energy is being steadily dissipated (cf. Fig. 2.9). The evacuation of the waves from the numerical domain by the Neumann boundary conditions is not perfect and produces spurious oscillations of the potential energy which are reflected in the total energy evolution. However, the numerical dissipation cellwise summed over all cells inside the numerical domain is negative, as visible in the lower frame of the right panel of Fig. 2.9.

One has to be careful in interpreting these results. Indeed, it is obvious that, because of hyperbolicity loss, the results should be sensitive to the resolution. We checked the numerical convergence by making three different numerical experiments with grid-cell sizes varying between 0.01 R_d and 0.0275 R_d. The saturation process does not change significantly with resolution, only the smallest-scale patterns being modified, as expected. Yet, the rate of the process changes (the formation of the cyclonic satellites occurs slightly later with the coarser resolution), so we do not achieve the numerical convergence, strictly speaking. Nevertheless, the impact of the small-scale processes is sufficiently well resolved to trust the global evolution of the flow we observe. As we explained above, the mechanism of the observed loss of axial symmetry during the simulation is due to the universal property of destabilization of the concentric inward propagating front. Although its l=4 structure is, most probably, due to discretization errors, the mechanism of axial symmetry loss is generic. We should mention that appearance of l=4 noise is inherent to projection of circular structures onto rectangular grid and, thus, will appear in any numerical scheme which uses the latter.

Nonlinear saturation of the asymmetric centrifugal instability The nonlinear development of the asymmetric l=1 centrifugal instability exhibits some similarity with the saturation of the symmetric mode, although the end result of the evolution is different.

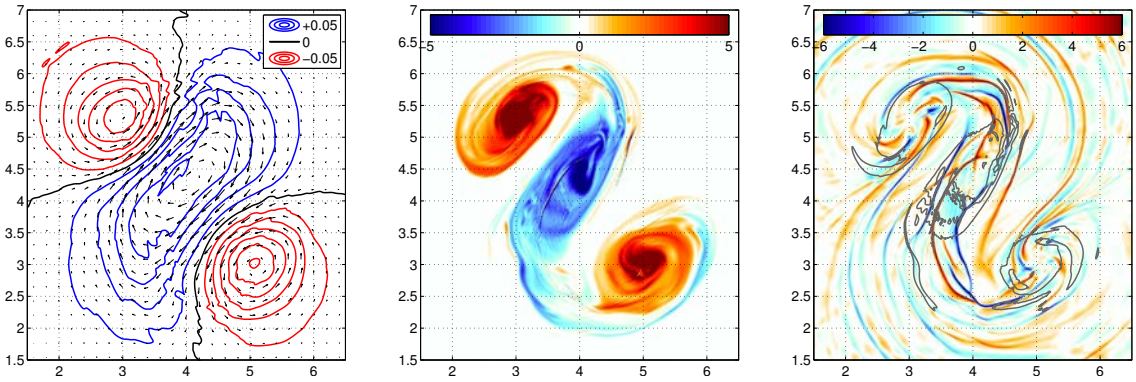
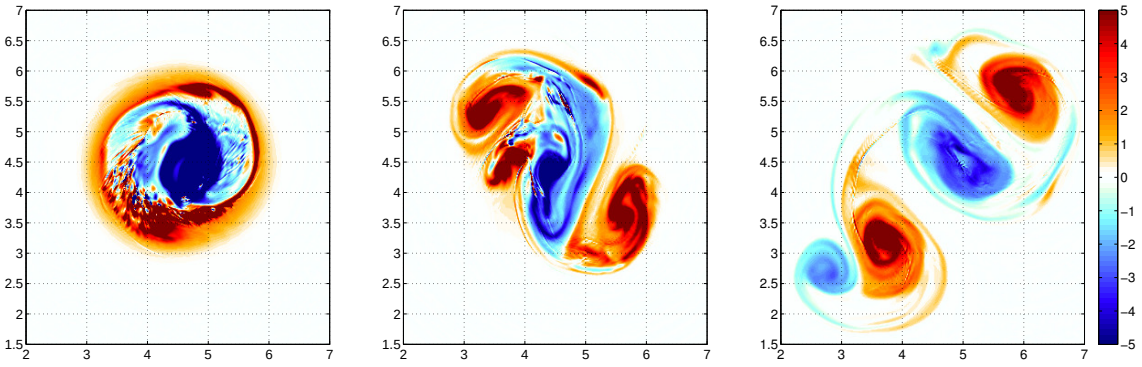


FIGURE 2.16 – Barotropic tripole formed after nonlinear saturation of the symmetric centrifugal instability at $t = 60\ f^{-1}$. *Left panel :* Pressure in layer 1 and superimposed barotropic velocity field. *Middle panel :* potential vorticity anomaly in layer 1. Colours are saturated at ± 5 (maximum values reach 8). These two fields are similar in the lower layer (not shown). *Right panel :* baroclinic divergence (colours saturated at ± 6) with PV anomaly ± 1 isolines in grey superimposed in order to visualise the vortex tripole.

We show snapshots of the evolution of PV in the upper layer (it evolves qualitatively in the same way in the lower layer) in Fig. 2.17. The zone of high shear, associated hyperbolicity loss and strong mixing and dissipation also forms, but is now clearly non-axisymmetric, enhanced at either side of the vortex and rotating with it, as shown in Fig. 2.18. It is reflected by a mixing zone in the PV anomaly pattern which roughly coincides with a zone of very low value of the thickness of the corresponding layer, close to incropping. This is visible at $t = 10$ in Fig. 2.17, on the lower-left side of the anticyclonic core and in Fig. 2.18, where the high values of the thickness of the lower layer (i.e. the deviation of the interface) are associated with very low values of the upper-layer thickness (the deviation of the free-surface being weak). Unlike the l=0 destabilization (see the inset in Fig. 2.9), there are no "bursts" of dissipation (not shown). The original vortex deforms more and more, and finally splits into a well-formed barotropic dipole (upper right corner of the right panel of Fig. 2.17), plus a cyclone with a weak anticyclonic satellite (lower left corner ; the anticyclone is even weaker in the lower layer). This vortex breaking occurs slightly earlier than the satellite formation in case of saturating symmetric instability. After $t = 50$, the cyclone of the asymmetric dipole remains close to the other dipole, and the anticyclonic monopole stays in the vicinity of this tripolar-like structure. The simulation stops before we can say whether such structure is robust or not. For both $l = 0$ and $l = 1$ saturations the energy balance is comparable : total amount of kinetic energy dissipated at the end of the simulation ($t = 100\ f^{-1}$) accounts for about 70% of the initial value, which is obviously considerable. This amount is almost insensitive to the numerical resolution (it varies from 67% to 70% for the range of cell sizes we used). We note however that the dissipated kinetic energy is larger for the l=1 destabilization at the intermediate time $t = 50$ ($\sim 60\%$ versus $\sim 50\%$), in agreement with the fact that the vortex breaking occurs earlier than in the l=0 case and that the growth rate of the initial perturbation is larger.

In addition, we simulated the nonlinear development of the asymmetric centrifugal instability with the unstable l=1 mode for a vortex with smoother horizontal profile : $\alpha = 2$. It corresponds to the classical Gaussian vortex profile, which has been extensively used in the literature on oceanic vortex modeling (e.g. Baey et Carton, 2002; Smyth et



(a) t=10 (b) t=20 (c) t=40

FIGURE 2.17 – Snapshots of PV anomaly in the upper layer during the nonlinear saturation of the l=1 centrifugal instability. Colours are saturated at the maximal values indicated on the color-bar for better visibility.

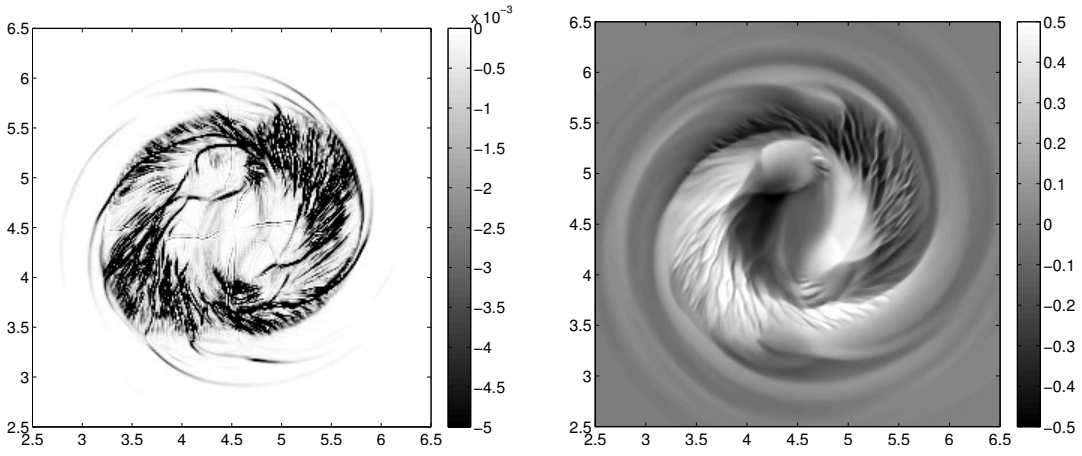


FIGURE 2.18 – Numerical dissipation (*left panel*) and lower-layer thickness anomaly (*right panel*) during the nonlinear saturation of the l=1 centrifugal instability, at $t = 10$. Colours are saturated at the maximal values indicated on the color-bars. High values of the lower-layer thickness anomaly are associated with low values of the upper one, and vice versa. The axes are different with respect to Fig. 2.17 for better visibility.

McWilliams, 1998; Benilov, 2003, 2004). As follows from the linear stability analysis above, the instabilities are weaker when the horizontal shear decreases, and the vortex is no longer unstable with respect to symmetric perturbations at the same values of the parameters δ, κ and d, whereas the l=1 mode is still unstable with the growth rate $\sigma = 0.52$. The nonlinear evolution of such vortex (not shown) is different with respect to what is observed for the $\alpha = 3$ vortex. Instead of rapidly splitting into a dipole and a monopole, the ring of positive vorticity surrounding the anticyclonic core steadily reorganizes into two cyclonic satellites (although the hyperbolicity loss, wave emission and local thinning of the layers are still observed) , the final state consisting of a barotropic tripole with an anticyclonic core – which is similar to the nonlinear saturation of the l=0 mode for $\alpha = 3$. However, baroclinic wave emission is weaker in this case, hyperbolicity-loss events are rare and less intense, and only 25% of the kinetic energy is dissipated at $t = 100$ (20% at $t = 50$), that is less than half of the corresponding amount in the simulations with $\alpha = 3$ presented above.

Comparison of the saturation of centrifugal and barotropic instabilities

As shown by the linear stability analysis, centrifugal instabilities rapidly disappear when the Burger number increases at fixed Rossby numbers $Ro \in [0, 2]$, or when the Rossby number decreases. On the other hand, ageostrophic barotropic and baroclinic (which appears for even larger Burger numbers than those presented) instabilities arise. Our linear stability analysis revealed that l=2 barotropic instability is dominant in the major part of the explored Ro, Bu, δ, κ domain in this case. As is known, nonlinear saturation of the barotropic instability, for moderate Rossby numbers, leads to formation of either a vortex tripole, or a pair of vortex dipoles, without production of significant vertical shear, and weak emission of inertia-gravity waves (see, e.g. Baey et Carton, 2002). On the other hand, as we have seen in subsection 2.3.4, the centrifugal instability is associated with strong vertical shears and wave emission.

We thus seek to quantify the differencies between the nonlinear saturation of the two instabilities. For this purpose, we selected the unstable modes of a vortex with $Ro = 1.4,\ Bu = 7,\ \alpha = 3,\ d = 0.9$ and $\delta = \kappa = 1$. For these values of parameters the most unstable mode is the l=2 centrifugal ($\sigma = 0.33$), the second one is the l=2 barotropic ($\sigma = 0.29$) and the less unstable one of the three is the l=1 centrifugal ($\sigma = 0.24$). So the asymmetric centrifugal and the barotropic unstable modes have the same azimuthal structure and close growth rates, and their respective saturations are interesting to compare.

First of all, we found that the end results of the nonlinear development of the two instabilities are different. The most unstable centrifugal mode evolves into a stable tripole, while the barotropically unstable one gives dipoles (at first barotropic, and then baroclinic ones, see below). However, during the formation of the tripole by the evolving asymmetric centrifugal instability a saddle point almost forms in the anticyclonic core, which is thus close to splitting (probably into two dipoles – see Arai et Yamagata (1994)), but the vortex finally comes back to a tripolar form, as shown in Fig. 2.19. Such event induces a strong stretching of the anticyclone associated with the vorticity shear which continues once the tripole has formed. The final structure seems to be stable (the simulation ends at $t = 140$) but the magnitude of the vortex, as mesured by the integral of the absolute value of the PV anomaly, decreases significantly (see Fig. 2.20, left panel). This contrasts the case of the development of the barotropic instability, which is shown in Fig. 2.21 : in this case the splitting of the initial vortex in two barotropic dipoles occurs around $t = 20$ and we observe a small rise in the integral of the negative PV anomaly (see Fig. 2.20, middle panel) while

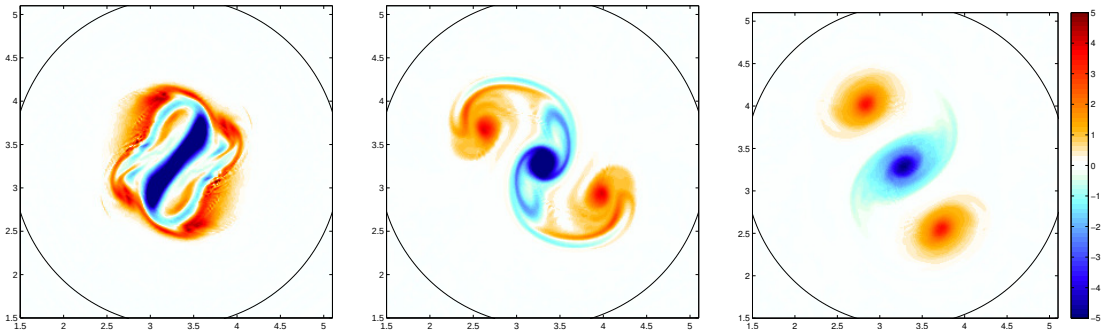


FIGURE 2.19 – Evolution of the PV anomaly in the upper layer during the nonlinear saturation of the l=2 centrifugal instability with $Ro = 1.4$ and $Bu = 7$, at $t = 24$ (*left panel*), 48 (*middle panel*) and 100 f^{-1} (*right panel*). Lower layer PV anomaly is qualitatively similar. Black circle with the radius $\approx 1.9R_d$ indicates the zone of confinement of the PV anomaly and is used for the diagnostic of wave emission – see below.

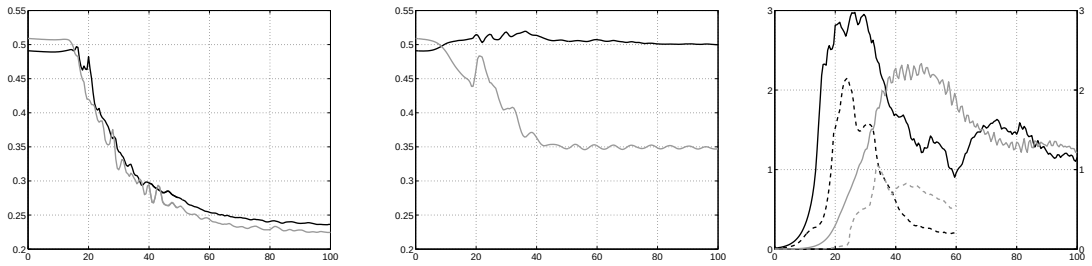


FIGURE 2.20 – Normalized integral of the positive (black) and negative (grey) potential vorticity anomalies (summed over the two layers) as a function of time for the l=2 centrifugal (*left panel*) and l=2 barotropic (*middle panel*) instabilities. Curves from the simulations of the initial destabilization and the subsequent evolution calculated in a refreshed numerical domain, in order to eliminate spurious reflexions of high-amplitude waves by the boundaries, are superimposed for the centrifugal instability. *Right panel :* Comparison of the magnitude of the baroclinic divergence inside (black, right axis) and outside (grey, left axis) a circle of radius ≈ 1.9 R_d for the l=2 centrifugal (continuous) and barotropic (dashed) instabilities.

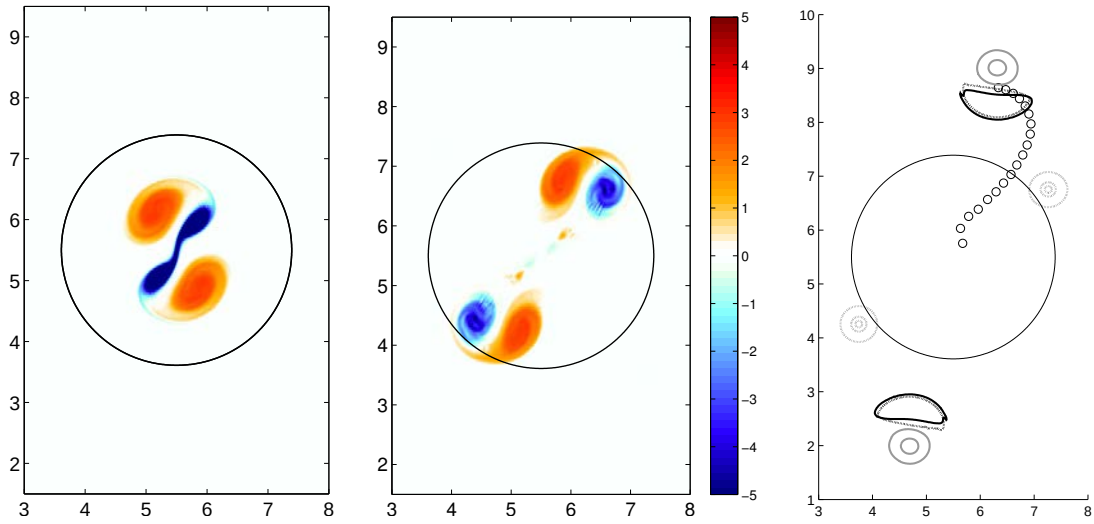


FIGURE 2.21 – Evolution of the PV anomaly during nonlinear saturation of the barotropic instability for the anticyclone with $Ro = 1.4$ and $Bu = 7$. *Left and middle panels :* upper layer PV anomaly at $t = 18$ and 30. Up to $t \approx 30$ the lower-layer PV anomaly is similar. *Right panel :* PV anomaly in the upper (continuous) and lower (dotted) layers at $t = 70$, with negative values in grey and positive ones in black, at the interval 1 starting from 0.5 in non-dimensional terms. Previous positions of one of the the upper-layer dipoles at time interval 3 are indicated by circles. Black circle indicates the zone of confinement of the PV anomaly in the centrifugal instability case, cf. Fig. 2.19.

the overall dissipation of the anticyclonic PV anomaly is weaker than in the case of the centrifugal instabilities. The positive (cyclonic) PV anomaly is approximately conserved. The barotropic dipoles are not stable : after ejection of the lower anticyclonic vortex, the dipoles become essentially baroclinic (two-layer cyclone plus upper-layer anticyclone). Such "rider" modon was reported in the 2-layer shallow water model by Lahaye et Zeitlin (2012b). The first-stage barotropic and subsequent baroclinic dipoles do not dissipate PV, while the tripole does (through weak but continuous filamentation of the patches). The kinetic energy of the flow exhibits roughly the same behaviour (not shown)

There is, thus, a net difference between the nonlinear development of the l=2 centrifugal and barotropic instabilities, as regards the redistribution of PV. The latter instability acts to drive away the initial PV anomalies, while the former leads to the formation of a barotropic tripole which stays at the initial location.

The evolution of the baroclinic divergence field also exhibits striking differences, as shown in the right panel of Fig. 2.20 where we compute the square root of the square of divergence integrated over the domain $\sqrt{\iint (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2 dxdy}$ inside and outside a circle delimiting the initial vortex (and the resulting tripole in the centrifugal case, see Fig. 2.19). As the initial vortex is essentially ageostrophic, the associated divergence field may correspond to emission of outgoing inertia-gravity waves, or may be proper to the vortex. The two cases may be distinguished by comparing the signal inside and outside the vortex boundary. A persistent emission of large-amplitude inertia gravity waves is observed during nonlinear saturation of the centrifugal instability, as in the cases with $Bu = 2$ shown previously. As is clear from Figure 2.20, the waves emitted in the zone of confinement of the PV anomaly

propagate outside in this case. As concerns the barotropic instability, the intensity of the divergence is clearly weaker than for the centrifugal instability. The radiation of waves is triggered at $t \approx 20$ and lasts up to $t \approx 28$, when the waves go out of the vortex boundary, which corresponds to the increase (decrease) of the signal in the outer (inner) zone starting at $t \approx 24$. The secondary peak in the signal in the outer zone ($t \approx 32$) is associated with the boundary crossing by the secondary dipoles (see Fig. 2.21). Once the dipoles have formed, they have an attached divergence field, without wave radiation (not shown). Thus the generation of vertical motions and waves is more important and persisting in the case of the centrifugal instability, whereas it is localised in time for the barotropic one. This is natural, since the former is known to generate overturning motions and waves, whereas the latter is rather bidimensional (as is clearly visible in the radial structure of the modes, see Fig. 2.5). We should stress that the above-established differences in the saturation of the instabilities, which can compete, render predictions of the end states of vortex destabilization highly sensitive to initial conditions and parameters.

2.3.5 Summary and discussion

We performed a detailed linear stability analysis of essentially ageostrophic anticyclonic two-layer vortices with respect to long-wave azimuthal perturbations, and fully nonlinear numerical simulations of the saturation of thus identified instabilities.

The linear stability analysis shows that for sufficiently weak stratification the symmetric centrifugal instability is dominant for high Rossby and low Burger numbers. At lower Rossby or larger Burger numbers the unstable modes with higher wavenumbers ($l = 1, 2$ with our parameters) become dominant. They are non-axisymmetric forms of the classical axisymmetric centrifugal instability. For even higher Burger numbers and/or lower Rossby numbers there is a swap in the instabilities and the (ageostrophic) barotropic instability with azimuthal wave number $l = 2$ becomes dominant. We found that increasing stratification tends to weaken the centrifugal instabilities, especially the symmetric one ; which eventually disappears, while the whole domain of centrifugal instability diminishes in favor of the barotropic one in the $Ro - Bu$ plane. Vertical shear (= baroclinicity) of the vortex has roughly the same effect.

Our main findings, thus, are that in a wide range of parameters the classical symmetric centrifugal instability is dominated by its asymmetric counterpart, that both symmetric and asymmetric instabilities are dominated by the (ageostrophic) barotropic one for sufficiently stratified and/or vertically sheared vortices, and that the details of the vertical structure are crucial to determine which instability is the leading one.

The asymmetric extension of the classical centrifugal instability may seem counterintuitive : indeed the initial physical argument invoked to explain the centrifugal instability (conservation of the total angular momentum through exchange of rings of fluids, e.g. Lord Rayleigh (1917); Drazin et Reid (1981)) is not directly transposable to asymmetric perturbations. Yet, we show that the modes that we identified as corresponding to asymmetric centrifugal instability are very close, both in structure and in the way of their nonlinear saturation, to the classical modes of centrifugal instability. We should stress that the results obtained by the WKBJ method for continuously stratified vortices (Billant et Gallaire, 2005) have already provided a link between asymmetric and symmetric modes, and that similar results (Bouchut *et al.*, 2011; Stevens et Ciesielski, 1986) were obtained on inertial instability, which is the counterpart of the centrifugal instability for plane-parallel flows.

Our simulations of the nonlinear saturation of centrifugal instability revealed both expected and new features. Indeed, while the classical picture of kinetic energy dissipation through overturning motions (albeit not explicitely resolved in this model) was reproduced, as well as the recovery of the marginal stability according to the Rayleigh criterion, at some intermediate stage of the evolution, as was predicted by Kloosterziel *et al.* (2007), the end state was never axisymmetric, unlike Kloosterziel *et al.* (2007) and Lazar *et al.* (2013a). We observed that in course of nonlinear evolution of the symmetric centrifugal instability the axial symmetry is broken, leading to the formation of either a barotropic tripole or a dipole plus an isolated monopole. We identified an essentially nonlinear mechanism of such symmetry breaking, related to the instability of the front forming at the inner boundary of the mixing zone and propagating inwards.

The asymmetric centrifugal and barotropic instability modes with the same azimuthal wavenumber and vortex parameters evolve differently, the latter leading to the formation of a pair of counter-propagating dipoles while the former gives rise to a quasi-stationary barotropic tripole. Saturation of the barotropic instability leads to weaker energy and potential vorticity dissipation and inertia-gravity wave emission, and smaller amplitudes of the baroclinic divergence field for the resulting structures. We should stress the difference between the two scenarios of saturation which is important for applications : while in the first one the potential vorticity anomalies stay at the same location, they are evacuated by propagating dipoles in the second one. Thus, a small change of the background vortex parameters can produce a switch from one scenario to another, with an obvious impact upon predictability.

Thus, our main conclusion is that two-layer ageostrophic anticyclonic vortices are subject to both barotropic and centrifugal instabilities, the latter not necessarily symmetric. These instabilities may compete, each of them leading to its proper saturation pattern. The symmetric instability generally loses symmetry in course of nonlinear saturation. Both the character of the dominant instability and the scenario of its nonlinear saturation crucially depend on the vertical structure (shear and stratification) of the flow.

Let us finally comment on the relation of our results to the development of the instabilities in a configuration with step-wise profile of stratification in fully three-dimensional rotating continuously stratified primitive equations model. As we already mentioned in the Introduction, the problem becomes unseparable, and thus very complex in what concerns the linear stability analysis. We are not aware of such results, nor of corresponding high-resolution direct numerical simulations, which are also difficult to realize due to coexistence of very different vertical scales in the problem from the very beginning. Laboratory experiments with quasi-two layer flows at high Rossby numbers, e.g. Flór *et al.* (2011) may give a key, but the results there are contaminated by ageostrophic instabilities due to the presence of boundaries and related Kelvin waves. Yet, in what concerns the baroclinic ageostrophic Rossby-Kelvin instabilities, the 2-layer model gives a reliable description of what is observed in laboratory experiments (Flór *et al.*, 2011; Gula et Zeitlin, 2014). We can argue that the results presented above are relevant for the development of gravest modes of the instability, while small-scale modes will be damped by viscosity, like it was observed for the inertial instability in (Ribstein *et al.*, 2014), but such scenario is to be confirmed by further studies.

Acknowledgement : This work was supported by the French ANR grant SVEMO. The authors are grateful to F. Bouchut for helpful discussions of the numerical simulations and

to the anonymous reviewer who drew their attention to the interpretation of the evolution of the quadrupolar mode. N.L. is grateful to M. Jardak for help with collocation methods.

Appendix : Collocation method in cyclindrical geometry

For solving the linear stability problem we use the pseudo-spectral collocation method. Collocation methods rely on interpolation at selected points using an ad-hoc orthogonal set of basis functions, with the remainder of the interpolation being strictly zero at the grid points. Chebyshev polynomials are routinely used in order to avoid the Runge phenomenon (spurious oscillations growing in amplitude with the resolution) when interpolating non periodic functions on a finite non-dimensional interval $[-1, 1]$ (e.g. Trefethen, 2000; Boyd, 2001). However, the cylindrical geometry of the problem treated in the present paper suggests the use of a basis on the interval $[0, \infty]$. We choose the orthogonal rational functions on a semi-infinite interval TL_n introduced in Boyd (1987). They are obtained by applying an algebraic mapping from $[-1, 1]$ to $[0, \infty]$ to Chebyshev polynomials (we recall that Chebyshev polynomials themselves are the images of the terms of a Fourier cosine series under the mapping $x = cos(t)$), and are defined by :

$$TL_n(r) = T_n(x) = \cos(nt), \tag{2.15}$$

where $t \in [0, \pi]$ is the argument of the cosines, $x \in [-1, 1]$ the argument of the ordinary Chebyshev polynomials T_n and $r \in [0, +\infty]$ the argument of the new basis functions. The three arguments are related by :

$$r \equiv L\frac{1+x}{1-x} \equiv L\cot^2(t/2), \tag{2.16}$$

where L is a constant map parameter. In practice, half of the grid points are within the interval $[0, L]$, and the grid is being refined at $r \to 0$, while the intervals increase for large r. This is appropriate, considering that we expect our solutions to decay at infinity. An advantage of this method, as discussed in Boyd (2001), is that the boundary condition at the upper endpoint of the domain (i.e. infinity) becomes "natural", or "behavioral". This means that the series (the numerical solution) will automatically be bounded at infinity with no need to prescibe any value, following the boundedness of the basis functions there. This is true, in particular, when the differential equation(s) is singular at infinity, although a general theorem is lacking. A drawback of this choice of basis functions is that oscillating functions decaying slowly (not exponentially) at infinity, although not excluded, are poorly resolved : the error becomes large at $r \to \infty$ because the interval between a pair of grid points becomes larger than the wavelength. Solutions to this problem would be either to use the radiation conditions or a modified basis (Boyd, 1987, 2001). Taking into account that we are mostly interested in the modes trapped in the vortex, which are responsible for the centrifugal instability and have order-one growth rates, we do not seek to accurately resolve the modes corresponding to radiative-type instabilities (Le Dizès et Billant, 2009), which usually have lower growth rates.

The differentiation matrix used in (2.12) is obtained from the classical Chebyshev differentiation matrix (e.g. Trefethen, 2000) through the relation :

$$\mathcal{D}_N^{(r)} = \frac{(1-x)^2}{2L} \cdot \mathcal{D}_N^{(x)}. \tag{2.17}$$

Numerical resolution of the eigenproblem (2.12) gives rise to proper eigenmodes but also to numerical spurious modes and to singular modes (due to the presence of critical levels) with discontinuities. We thus apply a gradient limiter to the solution obtained, requiring the physically relevant eigenvectors to belong to the C^1 class. Practically, we check that jumps in the eigenfunction (or in its derivative) are not larger than the amplitude itself in the neighbouring points by introducing a truncation parameter, the same for the derivatives of the eigenvectors. Most of the spurious modes are thus removed through this procedure, although some of them persist. When such singular modes accumulate with increasing resolution (generally with the location of the critical level slightly varying), they are considered as belonging to the continuous spectrum (cf. Iga, 1999) and are not taken into account. Otherwise, numerical convergence is checked and the mode is considered as being physically relevant. In addition, modes with amplitudes growing far away from the center, or at $r \to 0$ (in which case they are generally discontinuous at $r = 0$ because of the boundary condition) are removed.

2.4 Instabilités dans les cyclones tropicaux

Une instabilité affectant les cyclones tropicaux est abordée dans cette partie. En raison de nombres de Rossby typiques très élevés, cette instabilité est couplée à des ondes d'inertie-gravité. Son impact est de participer à un cycle de (ré)intensification du cyclone.

2.4.1 Instabilité du coeur du cyclone : motivations et approche

Les nombres de Rossby typiques des cyclones tropicaux sont très élevés, en raison d'une augmentation rapide des vents avec le rayon au niveau du coeur du cyclone. Pour des cyclones intenses (de catégorie 3 ou 4), le rayon du maximum de vent (RMW) est de l'ordre de 20 à 50 km et la vitesse angulaire maximum peut atteindre 40 à 60 m/s. Le nombre de Rossby ainsi dérivé, pour une valeur du paramètre de Coriolis $f = 5 \cdot 10^{-5}$ (correspondant à une latitude d'environ 20°), varie alors de 10 à 40. Cette valeur élevée est également associée à de très fortes valeurs de la vorticité relative, qui peut atteindre $\approx 100f$. La distribution verticale du vent dans un cyclone est principalement barotrope, et le nombre de Froude calculé par rapport à la vitesse des ondes d'inertie-gravité barotropes $Fr = V_{\max}/\sqrt{gH_0} = Ro/\sqrt{Bu}$ (avec H_0 la hauteur de la troposhère) est de l'ordre de 10^{-1}, et reste donc petit. A partir de ces paramètres, on comprend que le mécanisme de Lighthill pour l'émission d'ondes par un vortex (Lighthill, 1952; Zeitlin, 1991; Ford, 1994) peut avoir lieu.

Le profil de vent, au niveau du coeur du cyclone, varie de la rotation solide ($V \propto r$, $\zeta =$ const.) à un profil en forme de "U". La décroissance au-delà du coeur du cyclone est lente (en $1/r$, avec $\zeta \approx 0$). La structure d'un cyclone est donc fortement localisée en un sens, notamment parce que la vorticité relative atteint des valeurs très importantes proche du centre, mais l'anomalie de vent qu'il engendre est étendue. Différents profils paramétriques permettant d'approximer avec un minimum de paramètres les profils de vent (ainsi que de pression) des cyclones ont été proposés (e.g. Holland, 1980; Willoughby *et al.*, 2006; Wood *et al.*, 2013). Ils incluent notamment cette disparité entre variation rapide au centre et décroissance lente au loin, et les différents profils de vent possibles au centre du cyclone.

Cette dernière propriété est ce qui nous intéresse en particulier. En effet, un profil de vent en rotation solide est associé à une valeur constante de la vorticité relative. La décroissance en $1/r$ au delà du rayon de maximum de vent entraîne une vorticité relative nulle. Le profil de vorticité est alors monotone décroissant (et, dans le cas où le profil n'est pas lissé au niveau du RMW correspondant à la transition $V \propto r \rightarrow V \propto 1/r$, correspond à un profil de Rankine). Par extension, le profil de vorticité potentielle est également monotone décroissant. En revanche, si le profil de vitesse est "en forme de U", alors la distribution de vorticité relative (et par extension, de vorticité potentielle) consiste en un anneau de forte valeur de vorticité relative entourant un monopole de plus faible valeur. Le profil n'est alors plus monotone mais présente un changement de signe du gradient radial de vorticité. Il vient que ce type de profil peut être instable, par le mécanisme classique d'instabilité barotrope (cf. 2.1). Cette instabilité va conduire à une redistribution de la vorticité potentielle et à une modification du champ de vent : en particulier, si le système évolue de manière à reformer un profil monotone de vorticité (avec le maximum au centre), l'anomalie de vent va augmenter vers le centre du cyclone. Ceci, associé à un creusement de la dépression au centre, peut constituer un mécanisme de réintensification des cyclone (e.g. Kepert, 2010). Cette instabilité est également responsable de la formation de motifs en forme d'étoile de mer parfois observés dans l'oeil de cyclones (cf. Figure 1.5).

L'une des premières études théoriques sur ce mécanisme a été réalisée par Schubert *et al.* (1999) (voir également Kossin et Schubert, 2001; Hendricks *et al.*, 2009), dans un modèle barotrope non-divergent. D'autres études sur ce type d'instabilités ont été réalisées depuis, notamment par modélisation numérique dans des modèles plus complexes (3D, non-hydrostatiques, avec une paramétrisation de la couche limite et de la précipitation) (e.g. Kwon et Frank, 2005, 2008; Hodyss et Nolan, 2008; Hendricks *et al.*, 2009). La littérature sur les instabilités radiatives, par couplage d'ondes de Rossby et d'ondes d'inertie-gravité est vaste (e.g. Ford, 1994; Plougonven et Zeitlin, 2002; Schecter et Montgomery, 2006; Hodyss et Nolan, 2008; Le Dizès et Billant, 2009), mais concerne presque exclusivement les profils de vorticité monotones (ne mettant en jeu qu'un seul mode de Rossby). La connaissance du mécanisme de destabilisation de l'anneau de vorticité en présence d'ondes d'inertie-gravité (formant une instabilité dite "mixte"), dans le cadre linéaire et non linéaire, reste imparfaite, et l'impact de la convection humide sur la saturation non linéaire de cette instabilité n'a jamais été étudiée en soi (i.e. séparément des autres effets non-adiabatiques), notamment dans un modèle simplifié permettant une analyse détaillée des processus en jeu. La seule étude – à notre connaissance – se focalisant sur l'impact de l'humidité sur ces instabilités a été faite par Schecter et Montgomery (2007), dans un modèle continuement stratifié avec une paramétrisation de l'effet de l'humidité via une réduction de la stabilité statique, et dans la limite de faibles perturbations.

Dans cette partie, nous étudions donc l'instabilité de l'anneau de vorticité pour des profils typiques de cyclones tropicaux dans un modèle RSW une couche. Nous nous focalisons sur les ondes d'inertie-gravité qui sont associées à cette instabilité. L'instabilité "purement" radiative (concernant le profil de PV monotone) est ici écartée. Ces résultats sont préliminaires, confirmant en partie et enrichissant des résultats de travaux précédents, dans l'optique d'une étude plus complète (et innovante) à venir. Une analyse de stabilité linéaire est réalisée dans un premier temps. La saturation non linéaire des modes instables trouvés est ensuite étudiée à l'aide de simulations numériques directes.

2.4.2 Analyse de stabilité linéaire

Formulation du problème

On part des équations RSW à une couche en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \left(f + \frac{v}{r}\right) \vec{e_z} \times \vec{v} + g\vec{\nabla}h = 0, \tag{2.18}$$

$$\partial_t h + \frac{1}{r}\left[\partial_r(rhu) + \partial_\theta(hv)\right] = 0, \tag{2.19}$$

où $\vec{v} = (u\vec{e_r}, v\vec{e_\theta})$ est le vecteur vitesse et la dérivée lagrangienne est donnée, dans ce système de coordonnées, par : $\frac{d(\cdots)}{dt} = (\partial_t + u\partial_r + \frac{v}{r}\partial_\theta)(\cdots)$. On adimensionne ces équations en introduisant le temps typique de rotation du vortex $L/V_{\max}$, la longueur (correspondant au RMW) $L = r|_{V_{\max}}$ et la vitesse $V_{\max}$ correspondant à sa valeur maximum au sein du cyclone. On introduit provisoirement la valeur typique de déviation de la surface libre telle que $h \to H_0(1 + \lambda h)$.

Pour la solution axisymétrique que nous étudions, donnée par $(U = 0, V(r), H(r))$, l'équilibre cyclogéostrophique s'écrit, en variables adimensionnées :

$$\left(Ro^{-1} + \frac{V}{r}\right) V = \frac{\lambda}{Fr^2}\frac{dH(r)}{dr},$$

où le nombre de Rossby introduit est défini globalement, $Ro \equiv Ro^{\text{glob}} = V_{\max}/fL$. Vu les paramètres typiques pour un cyclone tropical ($Ro \gtrsim 10,\ Bu \gtrsim 10^4$), le terme centrifuge dans cette équation est dominant et on a $\lambda \sim Fr^2$. Le système d'équations (2.18)-(2.19) se réécrit alors :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \left(Ro^{-1} + \frac{v}{r}\right) \vec{e_z} \times \vec{v} + \vec{\nabla} h = 0, \tag{2.20}$$

$$\partial_t h + \vec{\nabla}[(Fr^{-2} + h)\vec{v}] = 0. \tag{2.21}$$

On procède alors à la linéarisation autour du profil de vorticité de base (à l'équilibre cyclogéostrophique), comme pour l'instabilité de l'anticyclone (section 2.3.2), et on réalise une décomposition des perturbations en modes de Fourier de nombre d'onde angulaire l et de pulsation ω :

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})(r, \theta, t) = (iu_0, v_0, h_0)(r) e^{-i(l\theta - \omega t)}.$$

La dépendance radiale est conservée explicitement (vu la dépendance en r du système d'équations et du profil de vorticité). Le système d'équations aux valeurs propres obtenu est alors écrit, sous forme matricielle :

$$\omega \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\overline{\Omega} & (Ro^{-1} + 2\overline{V}/r) & -\mathcal{D}_N \\ \partial_r \overline{V} + \overline{V}/r + Ro^{-1} & l\overline{\Omega} & l/r \\ \frac{Fr^{-2} + d(r\overline{H})/dr}{r} + (Fr^{-2} + \overline{H})\mathcal{D}_N & \frac{Fr^{-2} + \overline{H}}{r} l & l\overline{\Omega} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ h_0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

On a introduit ici le taux de rotation du vortex de base $\overline{\Omega} = \overline{V}/r$, et l'opérateur de différentiation radiale $\mathcal{D}_N$.

Nous résolvons ce système à l'aide de la méthode de collocation adaptée aux coordonnées polaires expliquée en section 2.3.5. Les conditions aux limites sont les mêmes que pour le problème précédent (section 2.3.2) : elles sont imposées par la non-singularité des solutions en $r = 0$, et par la méthode de résolution qui implique leur décroissance à l'infini (cf. section 2.3.5).

Clairement, le problème (2.22) est contrôlé par le profil de vorticité (et les nombres de Burger – ou Froude – et de Rossby qui lui correspondent), ce que nous discutons ci-dessous.

Choix du profil de vorticité

On choisit d'utiliser un profile de vorticité constant "par morceaux" et lissé, qui contient peu de paramètres. On définit deux zones de vorticité relative : une au centre et l'autre formant un anneau autour de la première. Entre ces zones, on utilise un polynome de Hermite du troisième degré, donné par :

$$P(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3\ ,\quad P(0) = 1,\ P(1) = 0$$

pour éliminer la discontinuité de la dérivée entre les différentes zones. Enfin, la circulation est bornée par l'ajout d'une troisième zone étendue dans laquelle la vorticité relative est négative et de faible amplitude. En pratique, on définit un rayon maximal auquel la circulation doit s'annuler, puis on calcul la valeur de la vorticité dans cette troisième zone en fonction de la circulation engendrée par les deux zones de vorticité positive. Ce rayon maximum sera donné par la taille du domaine numérique dans lequel on souhaite simuler la saturation non linéaire des modes obtenus. Au cours de l'analyse de stabilité linéaire, il

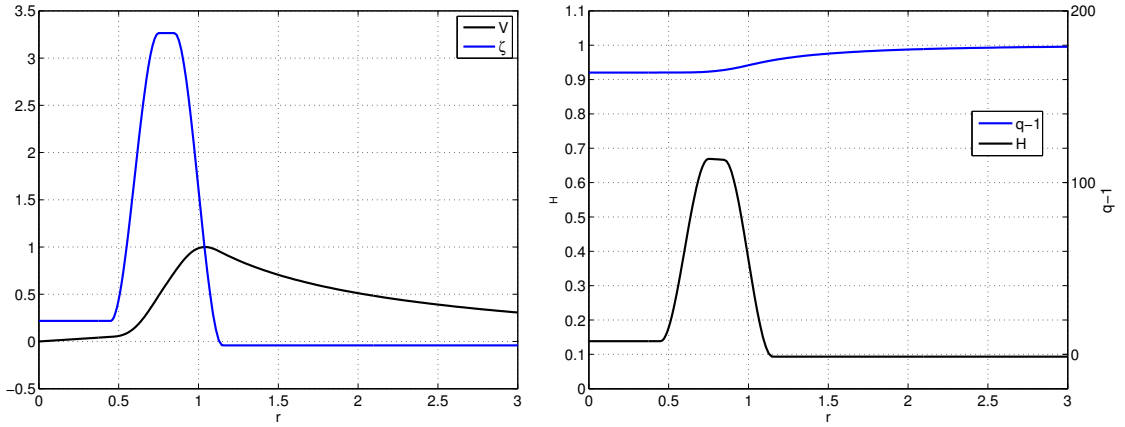


FIGURE 2.22 – Profil typique pour un cyclone de catégorie 3, avec les paramètres donnés dans le tableau 2.1. La vitesse et la vorticité relative (cadre de gauche) sont données dans l'adimensionnement utilisé pour le système d'équations (2.20)-(2.21), tandis que la hauteur de fluide et l'anomalie de vorticité potentielle (cadre de droite) sont adimensionnés par leur valeur au repos (H_0 et f/H_0).

peut être augmenté pour vérifier que la convergence numérique n'est pas affectée par cet artifice – ce qui est fait, et concluant.

Les paramètres associés à ce type de profil sont les suivants :

- Nombre de Rossby : on définit un nombre de Rossby local Ro^{loc}, donné par le maximum de vorticité relative (c'est à dire la valeur choisie dans l'anneau de vorticité) divisé par le paramètre de Coriolis.
- Nombre de Burger, qui définit le rapport entre le rayon de déformation et le rayon extérieur R_{ext} du maximum de vorticité (le tout au carré). Ce dernier rayon correspond également au rayon du maximum de vent. Il est choisi grand (10^4), en accord avec les profils typiques des cyclones tropicaux, et ne varie pas.
- Le rayon du bord intérieur R_{int} de l'anneau de vorticité. Il est donné en fonction du rayon du bord extérieur et varie donc entre 0 et 1. Ce rayon détermine la largeur de l'anneau de vorticité.
- La pente des zones de transition, mesurées par leur demi-largeur d. Pour diminuer le nombre de paramètres, la pente est la même de part et d'autre de l'anneau de vorticité. La zone extérieure de vorticité négative a une transition très lente (de demi-largeur d_3, localisée en $r = R_3$) à son bord extérieur.

Les nombres de Froude et de Rossby (global), apparaissant explicitement dans notre système d'équations adimensionnées, sont alors calculés *a posteriori* à partir du champ de vitesse résultant de l'intégration du profil de vorticité. Enfin, le champ de hauteur de la couche h est calculé en appliquant l'équilibre cyclogéostrophique à partir de ce champ de vitesse. Un exemple typique de profil de vorticité et de vitesse est donné en figure 2.22.

On effectue l'analyse de stabilité linéaire pour deux types de profils, correspondant respectivement à des cyclones de catégorie 1 et 3. Les paramètres corespondant à ces profils sont donnés dans le tableau 2.1. La dépendance par rapport aux paramètres est étudiée en faisant varier un seul des paramètres à la fois à partir d'un profil donné.

Type	$\zeta 1/\zeta 2$	$\zeta_2/f = Ro^{\text{loc}}$	R_{int}	d	Ro^{glob}	Fr	R_3	d_3
Cat. 1	7/66	66	0.65	0.13	18	≈ 0.2	5	4.5
Cat. 3	7/105	105	0.6	0.15	32	≈ 0.3	5	4.5

TABLE 2.1 – Valeurs des paramètres utilisés pour la définition des profils de vorticité

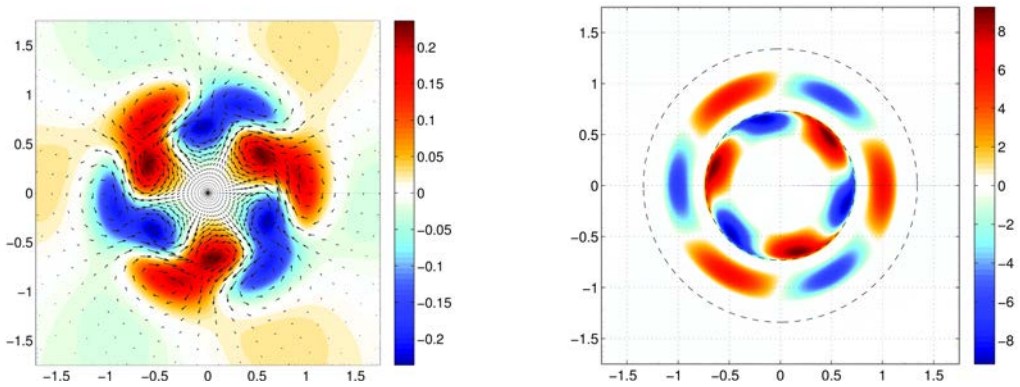


FIGURE 2.23 – Représentation de la structure du mode le plus instable pour le cyclone de catégorie 3. A gauche : champ de pression (couleurs) et de vitesse (vecteurs). A droite : champ de vorticité relative. Les cercles tiretés représentent les niveaux critiques. Les amplitudes sont normalisées par le maximum d'amplitude des champs du mode considéré. (Ici, $\max(|V|) \simeq 0.8$.)

Structure et taux de croissance des modes instables

Les modes les plus instables, pour les deux types de profils de cyclones que nous étudions, sont les modes de nombre d'onde angulaire $l = 3$ et $l = 4$. La structure du mode le plus instable pour le cyclone de catégorie 3 avec les paramètres donnés dans le tableau 2.1 est donné en figure 2.23. On reconnait une structure équilibrée (au sens du géostrophisme), avec une circulation cyclonique autour des anomalies de pression négatives et anticycloniques autour des anomalies positives, associées à un motif de vorticité de forte amplitude. Les zones de vorticité sont localisées au niveau des rayons extérieur ($r = 1$) et intérieur ($r = 0.6$) de l'anneau de vorticité, ce qui confirme que ce mode instable correspond à la résonance entre deux ondes de Rossby se propageant sur les gradients de vorticité potentielle.

Le taux de croissance adimensionné de ces modes est $\sigma = 0.23$, ce qui correspond à un temps typique de croissance de l'ordre de quelques heures. Le mode le plus instable trouvé dans l'analyse du cyclone de catégorie 1 possède fondamentalement la même structure et le taux de croissance adimensionné est très proche ($\sigma = 0.3$). Par ailleurs, en faisant varier le nombre de Rossby à partir du profil du cyclone de catégorie 3, de $Ro^{\text{loc}} = 105$ à $Ro^{\text{loc}} = 20$, nous avons trouvé une variation relative des taux de croissance des deux modes les plus instables de l'ordre de 10^{-2}. Ceci signifie que le taux de croissance dimensionnel est directement proportionnel au nombre de Rossby du cyclone.

La figure 2.24 montre l'évolution des taux de croissance des deux modes les plus instables en fonction de la pente du profil de vorticité aux niveaux des rayons intérieur et extérieur de l'anneau, et de la largeur de ce dernier. Notons que le nombre de Rossby glo-

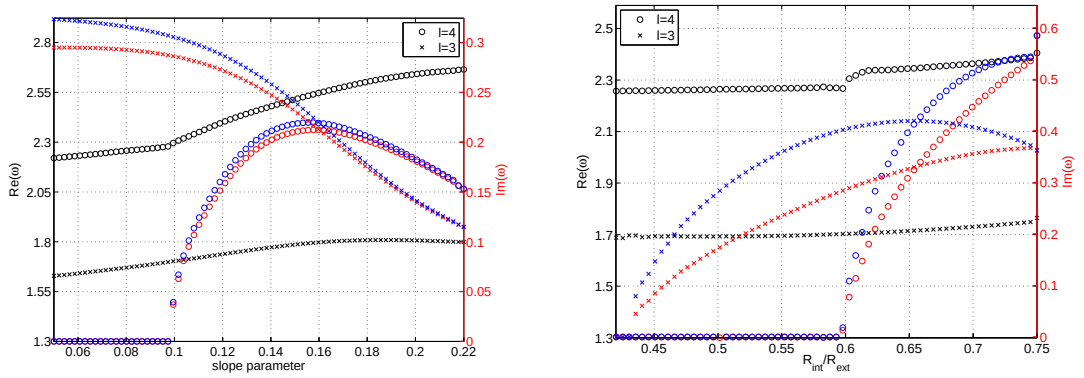


FIGURE 2.24 – Evolution du taux de croissance des 2 modes les plus instables en fonction de la demi-largeur d des transitions dans le profil de vorticité (cadre de gauche) et de la valeur du rayon intérieur de l'anneau de vorticité (R_{int} – cadre de droite). Les autres paramètres du vortex correspondent au cyclone de catégorie 3 et sont donnés dans le tableau 2.1, sauf pour le cadre de droite où le paramètre de la pente des transitions est fixé à 0.1 au lieu de 0.15. Noir : partie réelle de la pulsation. Rouge : taux de croissance. Bleu : taux de croissance "corrigé" par le nombre de Rossby.

bal varie (puisque l'on fixe le nombre de Rossby local pour initialiser le profil), notamment lorsque le rayon de l'anneau de vorticité varie. Pour pouvoir discuter la valeur du taux de croissance indépendamment du nombre de Rossby, ont ajoute (en bleu) l'évolution des taux de croissance multipliés par le ratio $Ro^{\text{glob}}/Ro^{\text{glob}}_{\text{pmax}}$, où $Ro^{\text{glob}}_{\text{pmax}}$ est la valeur du nombre de Rossby global pour le profil correspondant à la valeur maximale du paramètre en abcisse.

L'effet global de l'augmentation de la largeur de l'anneau, en partie compensée par l'augmentation du nombre de Rossby, et de diminuer la valeur du taux de croissance des modes instables. (Il a été vérifié qu'il n'y a pas d'autres modes qui aparaissent et deviennent dominant.) Ceci s'explique par le fait que les perturbations associées aux ondes de Rossby, localisées sur les gradient de vorticité (et donc d'extension radiale limitée), sont de plus en plus séparées lorsque la largeur de l'anneau augmente. Leur interaction mutuelle décroit en conséquence. L'impact de la pente est plus complexe : alors que l'augmentation de la pente (i.e. la diminution de d) annule le taux de croissance du mode instable $l = 4$ (après avoir atteint un maximum précédé d'une croissance), le taux du croissance du mode $l = 3$ augmente continuement.

Caractérisation des ondes dans les modes

Les modes obtenus par analyse de stabilité linéaire correspondent aux modes instables présents dans un modèle barotrope incompressible (i.e. dans les équations d'Euler 2D incompressibles) (Schubert *et al.*, 1999). Cependant, ils contiennent une signature en divergence. Celle-ci atteint des valeurs normalisées de l'ordre de 10^{-1} dans la zone interne au rayon critique extérieur (cf. fig. 2.23) dans certains cas, en fonction du profil du cyclone et du nombre d'onde angulaire. A l'extérieur de ce rayon critique, et du motif de vorticité associé au mode instable, un signal typique d'ondes d'inertie-gravité est visible, avec une amplitude faible. Ce motif est montré dans la figure 2.25 dans le cas du mode le plus instable ($l = 3$) du cyclone de catégorie 3.

Le champ de divergence, au coeur du cyclone, est erratique : il présente des disconti-

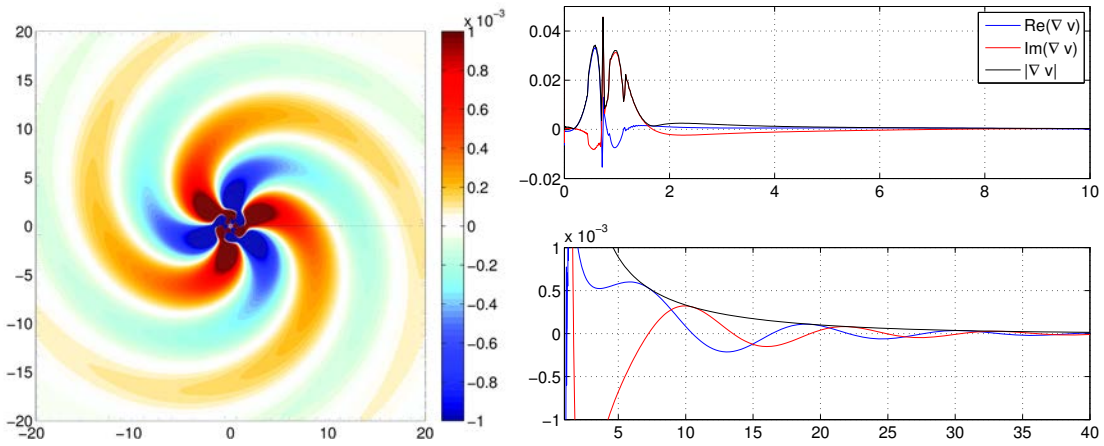


FIGURE 2.25 – Représentation du champ de divergence pour le mode le plus instable $l = 3$ du cyclone de catégorie 3. Cadre de gauche : Représentation 2D (couleurs saturées à 10^{-3}). On voit notamment la structure en spirale due à l'advection de ces ondes par l'écoulement cyclonique du vortex, et la différence de motif très marquée près du centre, dans la zone d'instabilité barotrope. Cadre de droite : représentation de la divergence des modes propres (partie réelle, partie imaginaire et valeur absolue) en fonction du rayon, avec différents zooms.

nuités. Les deux principaux pics visibles coincident avec la position des niveaux critiques. Il faut préciser que les détails de la structure du champ de divergence dans cette zone convergent lentement avec la résolution : le motif observé n'est stable qu'à partir d'un grand nombre de points de collocation $N \geq 300$. Ceci reflète en partie seulement la convergence de la résolution numérique du problème. En effet, les valeurs propres convergent rapidement ($N \geq 100$). Nous associons cette sensibilité de la structures des modes au caractère mal conditionné de la matrice du problème (2.22), mais la différentiation supplémentaire pour obtenir le champ de divergence constitue évidemment une source supplémentaire d'erreur : la structure des champs h, u et v change peu avec la résolution. L'amplitude du champ de divergence montre une décroissance régulière à partir d'un certain rayon, en accord avec la structure des ondes d'inertie-gravité : leur expression est donnée, à l'état de repos et en coordonnées polaires, par les fonctions de Bessel du premier type (e.g. Landau et Lifshitz, 1987; Montgomery et Lu, 1997) dont la décroissance est en $1/\sqrt{r}$. La structure de cette partie extérieure du champ de divergence – notamment son amplitude – ne varie pas avec la résolution. Une comparaison de l'amplitude des modes d'inertie-gravité entre les différents profils montre qu'elle augmente avec le nombre de Rossby : typiquement d'un ordre de grandeur lorsque le nombre de Rossby global double (de 15 à 35).

2.4.3 Saturation non linéaire des instabilités

La saturation non linéaire de l'instabilité de l'anneau de vorticité est étudiée à l'aide de simulations numériques directes. La méthode est la même que dans l'étude sur l'instabilité d'anticyclones isolés (section 2.3.4). On utilise comme conditions initiales le profil de vorticité utilisé pour l'analyse de stabilité linéaire, auquel on superpose une perturbation correspondant au mode instable calculé. D'autres simulations partant de perturbations aléatoires (à l'équilibre géostrophique) de l'anneau de vorticité sont également réalisées

pour confirmer les processus observés dans cette première classe de simulations.

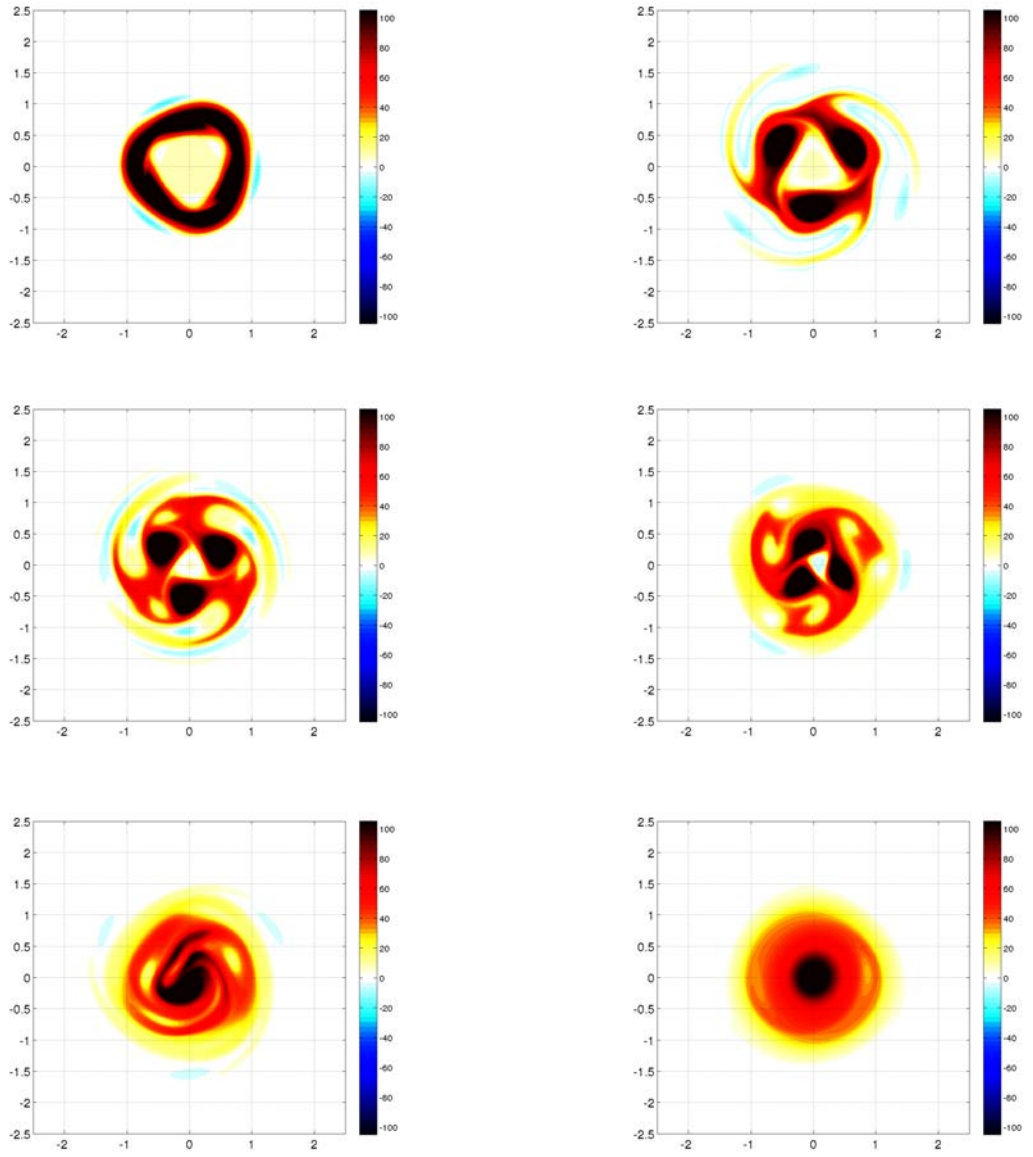
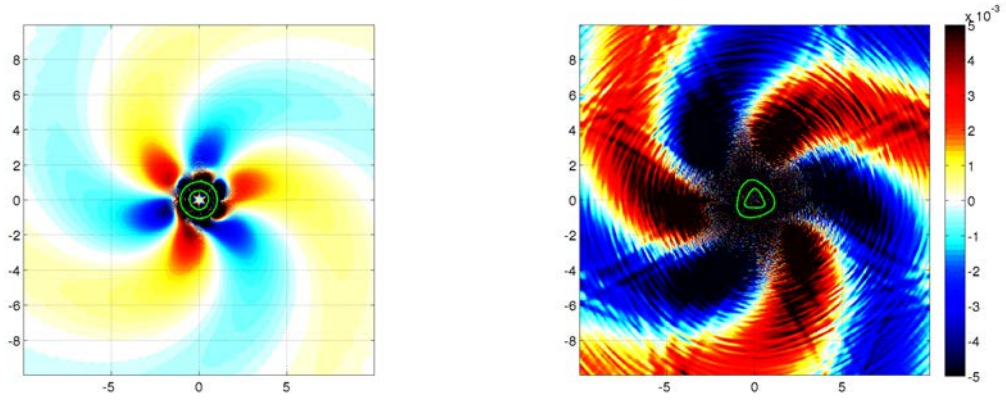


FIGURE 2.26 – Evolution de l'anomalie de vorticité potentielle au cours de la saturation non linéaire de l'instabilité du cyclone tropical de catégorie. Mode le plus instable : $l = 3$. De gauche à droite et de haut en bas : $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ et $4\ f^{-1}$. Une petite portion seulement du domaine numérique est montrée. Les coordonnées spatiales sont adimensionnée par la taille typique du vortex, et la vorticité potentielle est adimensionnée par f/H_0.

La taille du domaine de calcul (adimensionné par la taille typique du cyclone) est de 20×20 et la résolution utilisée est 801×801. Les forts gradients de PV, d'une part, nous intiment d'utiliser une réolution très grande pour simuler correctement l'évolution de l'anneau de vorticité. Si la structure était localisée, et que les instabilités n'étaient pas associés à l'émission d'ondes, on pourrait alors utiliser un domaine numérique relativement petit,

qui serait valable tant que les champs resteraient non perturbés au niveau des bords du domaine. Mais les instabilités présentes sont radiatives, et la décroissance de la circulation associée au cyclone est lente, ce qui implique l'utilisation d'un domaine suffisamment grand. Les conditions aux limites de Neumann sont imposées pour absorber – dans une certaine mesure – les ondes émises.

L'évolution de l'anomalie de vorticité potentielle au cours de la saturation non linéaire de l'instabilité est montrée dans la figure 2.26. L'amplitude de la perturbation initiale est faible : la valeur maximale du rapport des maxima d'amplitude de la perturbation et du profil de base, pour le module de la vitesse, est de l'ordre de 10^{-1}. La perturbation est néanmoins visible sur le champ de PV à $t = 0$. Des disques de forte anomalie de vorticité positive se forment le long de l'anneau et sont séparés les uns des autres par des zones de vorticité moins forte. Ces disques vont par la suite fusionner (vers $t = 200\ f^{-1}$) et conduire à la redistribition de la vorticité potentielle vers un profil monotone (monopôle). Un enroulement de filaments de vorticité potentiel est visible à $t = 0.5\ f^{-1}$ et $t = 1\ f^{-1}$ au voisinage du rayon critique extérieur associé au profil initial non perturbé ($r \approx 1.3$).



(a) $t = 0\ f^{-1}$ (b) $t = 0.4\ f^{-1}$

FIGURE 2.27 – Comparaison du champ de divergence initial et au cours du développement de l'instabilité (à $t \simeq \pi/\sigma$), pour une perturbation initiale très petite. La barre de couleur est valable pour les deux cadres, pour faciliter la comparaison. Les lignes vertes sont des isocontours de vorticité potentielle (adimensionnées par f/H_0) à la valeur Ro^{loc}. Ils permettent de visualiser les bords de l'anneau de vorticité.

Le motif de divergence associé au développement de l'instabilité est donné en figure 2.27 et est comparé aux conditions initiales. Il est clair que la saturation de l'instabilité mène à une amplification des ondes d'inertie-gravité. Cette valeur de l'amplification atteint rapidement une saturation (sur une durée de l'ordre du temps typique de croissance de l'instabilité) avec une amplitude de la divergence de l'ordre de 10^{-2} au voisinage du rayon critique extérieur. Par la suite, l'amplitude du champ de divergence fluctue et s'atténue lentement. Cette saturation a été testée en réalisant une simulation non-linéaire dans laquelle l'amplitude de la perturbation initiale est plus faible (d'un facteur 5). L'amplitude maximum des ondes, à saturation, n'est pas modifiée par ce changement d'amplitude de la perturbation initiale. Il apparait également des oscillations à petite échelle, dont l'origine est inconnue. On note cependant que le motif de divergence proche de l'anneau du cyclone montre des oscillations, probablement numériques, de petite longueurs d'onde

(de l'ordre de quelques points de grille). Ces oscillations sont cependant alignées avec la grille et ont donc une géométrie carrée, par projection de l'écoulement axisymétrique sur la grille numérique cartésienne. Les oscillations observées dans le champ lointain sont, elles, axisymétriques, et des tests doivent être effectués pour déterminer si elles sont d'origine physique ou numérique.

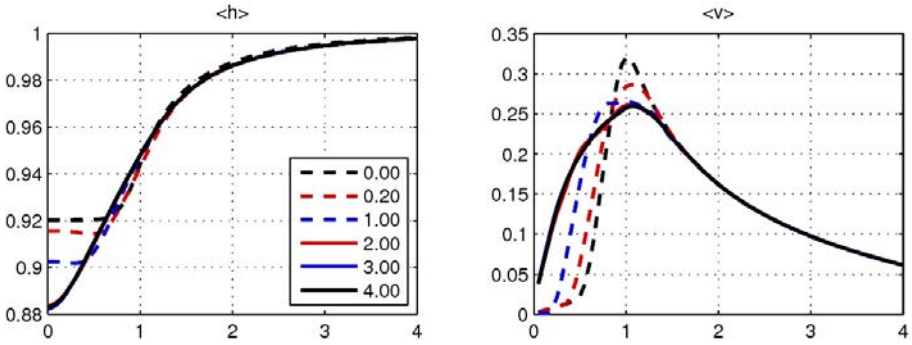


FIGURE 2.28 – Evolution de la moyenne angulaire de la hauteur de la couche de fluide (géopotentiel) (gauche) et de la vitesse azimutale (droite) au cours de la destabilisation du cyclone de catégorie 3. Chaque courbe correspond à un instant différent, donné dans la légende (en unités f^{-1}).

La redistribution de la vorticité potentielle est associée à une redistribution du champ de vent et à une creusement de la dépression au centre du cyclone, comme illustré dans la figure 2.28. C'est ce processus qui est susceptible de jouer un rôle dans le cycle de réintensification des cyclones. La valeur du maximum de vitesse est diminuée au niveau du RMW mais augmentée à l'intérieur de celui-ci (dans le coeur du cyclone). Les effets non-adiabatiques associés à la circulation secondaire et à la convection humide, vont alors permettre une réintensification des vents au niveau du mur, ce qui conduira finalement à une augmentation de la circulation.

2.4.4 Résumé de l'instabilité de cyclones tropicaux – Perspectives

Nous avons trouvé les modes (linéairement) instables de l'anneau de vorticité constituant certains coeurs de cyclones tropicaux, dans un modèle en eau peu profonde. La nature de l'instabilité associée est une instabilité barotrope, qui est couplée à des ondes d'inertie-gravité se propageant vers l'extérieur. L'amplitude de ces ondes est faible. La saturation non-linéaire de l'instabilité de l'anneau de vorticité conduit à une redistribution de celui-ci en un monopôle de vorticité monotone (décroissant avec le rayon), redistribution associée à une modification de la distribution de vent azimutal et une amplification du minimum de pression au centre du cyclone. Les valeurs de la divergence au sein du coeur du cyclone sont petites, mais pas négligeables (de l'ordre de 10^{-1} f).

Ces résultats posent une base pour étudier l'impact dynamique des processus humides (via le dépot de chaleur latente associé à la convection précipitante). La vitesse verticale associée à la divergence du vent horizontal au niveau du coeur du cyclone va modifier la distribution des cellules de convection (initialement réparties selon un anneau, constituant le mur du cyclone), et cette convection va en retour modifier le développement de l'instabilité. L'émission d'ondes d'inertie-gravité sera également affectée par la convection humide. Une étude de ces mécanismes utilisant un modèle simplifié de la dynamique atmosphérique

incluant les effets de la convection humide (Bouchut *et al.*, 2009; Lambaerts *et al.*, 2011a) devrait être réalisée dans un futur proche.

2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié les instabilités de tourbillons anticycloniques isolés et de tourbillons cycloniques (avec un profil de vorticité en anneau), toutes deux dans un contexte agéostrophique, associé à des nombres de Rossby très grands. Une analyse de stabilité linéaire nous a permis de dégager les différents modes instables et leur sensibilité aux paramètres de l'écoulement. La saturation non linéaire des instabilités correspondant à ces modes a ensuite été simulée numériquement à haute résolution. Le caractère agéostrophique de ces instabilités consiste en la génération de mouvements non-équilibrés, typiquement associés à de fortes valeurs de la divergence horizontale – qui est un proxy pour la vitesse verticale dans les modèles RSW – à la génération d'ondes d'inertie-gravité, et à la formation éventuelle de fronts.

L'instabilité centrifuge de tourbillons anticycloniques isolés apparaît pour les grands nombres de Rossby. Elle est également favorisée par la grandeur de la taille du tourbillon. Cette instabilité est typiquement agéostrophique, et sa saturation entraîne l'émission d'ondes de gravité de forte amplitude et la formation de fronts dans l'écoulement. En particulier, nous avons mis en évidence un mécanisme de brisure de la symétrie initiale de l'écoulement, par la destabilisation d'un front concentrique se propageant vers l'intérieur du vortex. Les ondes et les fronts sont responsables d'une forte dissipation d'énergie cinétique. La saturation de cette instabilité entraîne, dans un premier temps, une redistribution du moment angulaire et de la vorticité potentielle vers un profil marginalement stable selon le critère de Rayleigh pour l'instabilité centrifuge. Cependant, cette structure transitoire se destabilise systématiquement et conduit à une réorganisation de la structure initialement monopolaire en un ensemble de multipôles et de monopôles séparés.

L'instabilité centrifuge peut également être non axisymétrique. Nous avons montré que ces modes (typiquement avec des nombres d'onde angulaires $l = 1$ et $l = 2$) peuvent être les modes les plus instables, notamment lorsque le nombre de Rossby diminue ou le nombre de Burger augmente par rapport au domaine de l'instabilité centrifuge axisymétrique. Le taux de croissance des instabilités centrifuges diminue lorsque la stratification ou le cisaillement vertical de l'anticyclone augmente, d'autant plus que le nombre d'onde considéré est petit, favorisant ainsi la prédominance des modes centrifuges asymétriques. La saturation non linéaire des instabilités centrifuges non axisymétriques a des propriétés similaires à celle de l'instabilité centrifuge classique, si ce n'est que la symétrie initiale de la perturbation est conservée.

Enfin, nous avons mis en évidence la compétition possible entre l'instabilité barotrope (agéostrophique) et l'instabilité centrifuge asymétrique, pour des valeurs intermédiaires des nombres de Rossby et de Burger. Les saturations non linéaires de ces deux instabilités sont très différentes : l'émission d'ondes dans le cas de l'instabilité centrifuge est intense et persistante, tandis que celle associée à l'instabilité barotrope est d'amplitude moindre et localisée dans le temps. De plus, le développement de l'instabilité barotrope relaxe vers des structures dipolaires stables et non radiatives, tandis que le mode centrifuge donne lieu à un tripôle (stable également) émettant continuellement des ondes d'inertie-gravité. Ces différences émergent à partir d'un même anticyclone où seule la perturbation change, ce qui témoigne d'une grande sensibilité de l'écoulement aux conditions initiales.

Dans le cadre de cyclones tropicaux, une analyse de stabilité linéaire nous a permis de dégager les modes instables, consistant en une instabilité barotrope de l'anneau de vorticité couplée à des ondes d'inertie-gravité de faible amplitude. L'impact de l'intensité du gradient de vorticité sur les bords de l'anneau, d'une part, et de la largeur de cet anneau, d'autre part, a été étudié. Les simulations numériques de la saturation non linéaire de cette instabilité ont montré un processus de redistribution des profils de vorticité, de vent et de pression, qui est possiblement associé à un mécanisme de réintensification présent dans les cyclones tropicaux. Elles ont également permis de quantifier l'émission d'ondes par cette instabilité, qui est présente mais de faible amplitude.

CHAPITRE 3

Structures agéostrophiques multipolaires

3.1 Dipôles et tripôles agéostrophiques dans le modèle RSW à une couche

On peut considérer que l'origine des études sur les dipôles de vorticité dans les écoulement (quasi) bidimensionnels remonte au dipôle de Lamb-Chaplygin (Lamb, 1932). Cette structure est une solution exacte des équations d'Euler bidimensionnelles pour un fluide incompressible et consiste en un dipôle de vorticité contenu dans un cercle de rayon fini. La solution est en mouvement de translation rectiligne et uniforme sous l'effet de l'interaction des deux pôles de vorticité (de signes opposés), et elle est stationnaire dans le repère comobile. Il est connu que le dipôle de vorticité est robuste et peut se former au sein d'écoulements bidimensionnels turbulents (e.g. Couder et Basdevant, 1986).

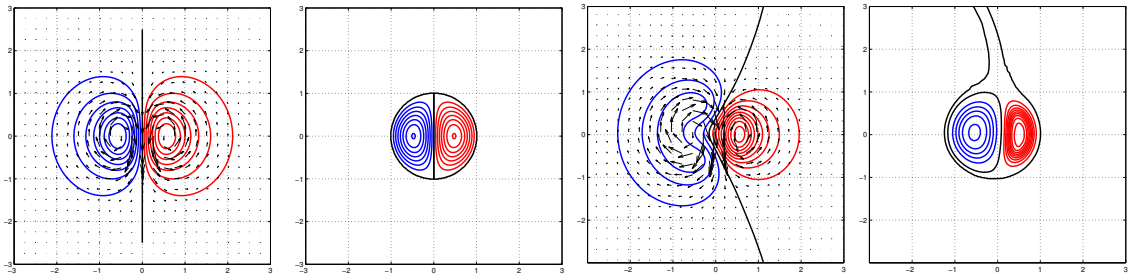
3.1.1 Modon QG : dérivation succinte

Du fait de l'analogie formelle entre les équations d'Euler 2D incompressibles et quasi-géostrophiques (barotropes), la dérivation de la solution exacte dipolaire dans ces dernières est évidente et existe dans la littérature depuis le milieu des années 70, dans le cadre des approximations du plan f (Kamenkovich et Reznik, 1978) ou β (Stern, 1975; Larichev et Reznik, 1976). On redonne ici la dérivation de cette solution.

L'équation de base à considérer est donc l'équation QG barotrope (1.25), que l'on peut réécrire pour une solution stationnaire se propageant à vitesse uniforme c selon l'axe $\vec{e_x}$:

$$\mathcal{J}(\Psi + cy, \Delta\Psi - \Lambda^2\Psi) = 0. \tag{3.1}$$

Cette équation traduit une relation fonctionelle entre la fonction de courant considérée dans le repère comobile et la vorticité potentielle linéarisée. La solution de type "modon" est obtenue en considérant une relation linéaire entre ces deux quantités, qui diffère selon que l'on se place à l'intérieur d'un cercle de rayon unité (appelé *séparatrice*) ou à l'extérieur. Dans le dernier cas, puisque l'on cherche une solution localisée, la vorticité potentielle est



(a) Ψ – QG (b) q_{QG} – QG (c) $h - H0$ – RSW (d) $q - 1$ – RSW

FIGURE 3.1 – Comparaison du champ d'anomalie de pression (Ψ en QG, $h - H_0$ en RSW, grandeurs adimensionnées) avec le champ de vitesse superposé, et d'anomalie de vorticité potentielle entre la solution dipolaire QG et la solution agéostrophique dans le modèle RSW obtenue par simulations numériques. Isolignes données à interval ± 0.04 pour la pression/hauteur (adimensionnées respectivement par gH_0 et H_0) et ± 0.5 pour l'anomalie de PV (adimensionnée par $f/H0$). Rouge :cyclone, bleu : anticyclone, noir :anomalie nulle. Paramètres du modon : $Ro = 0.2, Bu = \Lambda^{-2} = 1$.

imposée nulle. La solution dipolaire est alors obtenue, après séparation des variables en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\Psi = \begin{cases} -\frac{K_1(\Lambda r)}{K_1(\Lambda)} \sin\theta & , \ r \geq 1 \\ \left[\frac{\Lambda^2}{\Pi^2}\frac{J_1(\Pi r)}{J_1(\Pi)} - r\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Pi^2}\right)\right]\sin\theta & , \ r < 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ici, J_1 et K_1 désignent les fonctions de Bessel et Bessel modifiée, $\Pi = \sqrt{A^2 - \Lambda^2}$ où $-A^2$ est le coefficient de proportionalité entre la PV est la fonction de courant dans le repère comobile à l'interieur de la séparatrice, déterminé par les conditions de raccordement à la séparatrice qui assurent la continuité de la solution et de sa première dérivée.

3.1.2 Modon RSW : preuves d'existence, propriétés

Si la connaissance de la solution dipolaire dans les équations QG découle naturellement de la solution de Lamb-Chaplygin, l'existence de ce type de solution dans le modèle RSW restait incertaine. En effet, la compressibilité de l'écoulement dans ce dernier et l'existence d'ondes d'inertie-gravité qui y est associée peuvent avoir un impact fort sur les solutions possibles dans ce domaine, les ondes représentant un moyen d'évacuer de l'énergie pour une perturbation localisée (ce qui est observé dans le cas de l'ajustement géostrophique, cf. section 1.3). Si un équivalent du modon QG existe dans les équations RSW, en connaître les propriétés et surtout les différences par rapport à la solution QG représente un gain dans la connaissance des écoulements géophysiques agéostrophiques. Ainsi, une solution semi-analytique a été proposée par Kizner *et al.* (2008) et une solution stable a été observée dans des simulations numériques par Ribstein *et al.* (2010). Le modon agéostrophique obtenu par ajustement de la solution QG dans les équations RSW présente une forte asymétrie cyclone/anticyclone, les champs de pression et d'anomalie de vorticité potentielle associés à l'anticyclone étant plus étendus dans l'espace (cf. Fig. 3.1), et la trajectoire du modon étant curviligne – inclinée du côté du pôle anticyclonique.

Le modon obtenu porte un quadrupôle de divergence stationnaire dans le repère comobile. Cependant, et malgré un nombre de Rossby relativement élevé (et un maximum

de valeur absolue de la vorticité relative et de l'anomalie de vorticité potentielle de l'ordre de 4 f/H_0), le dipôle est une structure cohérente : la fonction de Bernouilli dans le repère comobile est fonction de la vorticité potentielle, caractéristique d'un écoulement stationnaire (cf. section 1.4), et évolue sur une longue durée (devant le temps "de retournement" typique qui lui est associé L/U où L est la taille typique du modon et U la vitesse typique sur son axe). Il n'y a pas d'émission d'ondes d'inertie-gravité observée durant son évolution, signe d'une séparation dynamique entre ondes et tourbillons dans un contexte pourtant agéostrophique.

Pour tester la stabilité du modon et les effets de la compressibilité du modèle sur sa dynamique, des expériences numérique mettant en jeu des collisions frontales ont été réalisées. L'issue de ces collisions est la formation de nouveaux dipôles après échange de partenaire (Ribstein *et al.*, 2010), sans destruction des structures. Il n'y a pas d'émission d'ondes associée à cette collision et l'énergie est conservée (la seule modification du bilan énergétique est un transfert transitoire d'énergie potentielle en énergie cinétique), de telle sorte que la collision peut-être qualifiée de *quasi-élastique*.

3.1.3 Multipôles agéostrophiques barotropes

Dans un second temps, des simulations numériques de collisions frontales et orthogonales avec différents paramètres d'impact (la distance entre les axes de propagation propres à chaque modon au moment de la collision) ont été réalisées. Ce travail, qui a été publié dans le journal *Physics of Fluids* (Lahaye et Zeitlin, 2011), est inclu dans la section suivante (en anglais, le texte correspondant à la version publiée remise en forme conformément au présent manuscrit). Les résultats principaux sont résumés ici.

Dans le cadre des collisions frontales, et selon la valeur du paramètre d'impact, trois types de situations ont été observés :

- La collision élastique, avec échange de partenaire,
- La fusion d'anticyclone donnant lieu à un tripôle de vorticité,
- La collision inélastique avec destruction partielle des pôles de vorticité.

La fusion d'anticyclone (qui se produit lorsque les modons se rencontrent par leur pôle anticyclonique) donne lieu à une nouvelle structure cohérente et agéostrophique du modèle RSW. Il est constitué d'un coeur anticyclonique et de deux satellites cycloniques, et la structure possède une rotation d'ensemble dans le sens anticyclonique. Dans la configuration opposée où les structures se rencontrent par leur pôle cyclonique, aucune formation de tripôle n'a été observée. Ainsi, la structure tripolaire formée d'un coeur cyclonique et de deux satellites anticycloniques n'a pas été observée dans ces simulations numériques, ce qui constitue une manifestation évidente de l'asymétrie cyclone/anticyclone qui existe dans le modèle RSW.

Dans de nombreux cas de collisions perpendiculaires, la formation d'un nouveau type de dipôle, appelé “modon non linéaire”, a été observé. Cette structure se caractérise par une distance accrue entre les deux pôles de vorticité, engendrant une réduction de sa vitesse de propagation. Il est à noter qu'elle est l'équivalent agéostrophique du modon non linéaire proposé dans les équations d'Euler 2D incompressibles (e.g. Kizner et Khvoles, 2004c) lorsque l'on considère une relation entre vorticité et fonction de courant qui n'est plus linéaire, à l'intérieur d'une séparatrice elliptique – ce qui est à l'origine du nom.

3.2 Article : *Collisions of ageostrophic modons and formation of new types of coherent structures in rotating shallow water model*

[N. Lahaye and V. Zeitlin, *Phys. Fluids*, 23 :061703 :1–4, 2011]

Abstract :

We study collisions of recently discovered ageostrophic modons in rotating shallow water model at different values of impact parameter and find that two new types of coherent vortex structures may be formed during this process : "nonlinear" modons, i.e. coherent dipoles with essentially nonlinear scatter plot, and coherent tripoles. Both are known for incompressible 2D Euler equations, but were not reported in the "compressible" shallow water model. Inelastic scattering with strong filamentation and shearing is also possible. Surprisingly, the strongly nonlinear process of coherent structure formation leads to almost no emission of inertia-gravity waves.

The modon (dipolar steady-moving vortex) solutions of the quasi-geostrophic equation on the f - plane are known in geophysical fluid dynamics for decades (Kamenkovich et Reznik, 1978). Quasi-geostrophic equation being an asymptotic limit of rotating shallow water (RSW) equations at vanishing Rossby numbers, a natural question arises about existence of modons in the full model at finite Rossby numbers. Such ageostrophic modons will be called AGM, and quasigeostrophic modons will be called QGM below. Recently, a theoretical AGM solution of RSW equations was proposed by Kizner *et al.* (2008), and numerical AGM, with slightly different properties, was obtained by Ribstein *et al.* (2010) by adjustment of the QGM initial configuration in the full RSW. Let us remind that for steady moving structures the Bernoulli function and potential vorticity (PV) are functionally dependent (Malanotte-Rizzoli, 1982), which should be reflected by the corresponding scatter plot. The scatter plot for AGM was obtained by Ribstein *et al.* (2010), and is almost linear. It was also found by Ribstein *et al.* (2010) that frontal collision of two AGM was quasi-elastic, with an exchange of anticyclonic partners.

In the present work we present results of a thorough investigation of the AGM collisions at different impact parameters. Several hundreds of numerical experiments with frontal and lateral collisions were performed. The main result is a discovery of coherent ageostrophic tripoles (T) and dipoles of a new kind ("nonlinear" AGM, NAGM). Three main classes of head-on collisions were observed, depending on the impact parameter :

- 2 AGM $\rightarrow$ 2 AGM , quasi-elastic with partner exchange,
- 2 AGM $\rightarrow$ 2 NAGM, quasi -elastic
- 2 AGM $\rightarrow$ 1 T, inelastic with fusion of anticyclones

The last two were observed only when the anticyclonic partners of the AGMs hit each other - see below.

Lateral collisions typically produce strong filamentation and shearing, and result mostly in non-stationary states. In certain cases one AGM and one NAGM result from such collisions.

The simulations were initialized as follows : 1) AGM were obtained by "ageostrophic" adjustment of QGM in the full RSW model, as in (Ribstein *et al.*, 2010) ; 2) a portion of the computational domain containing AGM was cut-off and pasted twice into initial

configuration at different positions/orientations. Typical Rossby numbers of thus obtained AGM were $0.2 \div 0.4$. The numerical scheme was the same as in (Ribstein *et al.*, 2010), i.e. high-resolution finite-volume and well-balanced (Bouchut, 2007). It is to be stressed that in all simulations presented below the colliding AGM are identical, the only change is in the impact parameter.

We will present below only the typical cases of nonlinear dipole and tripole formation, a description of 2 AGM $\rightarrow$ 2 AGM scattering with partner exchange, may be found in (Ribstein *et al.*, 2010).

2 AGM $\rightarrow$ 2 NAGM collisions :

The initial and the late stages of a typical AGM $\rightarrow$ NAGM collision are presented in Fig. 3.2. One can see the formation of dipoles, which keep their coherence, with much larger distance between the centers of cyclonic and anticyclonic vorticity, as compared to AGM.

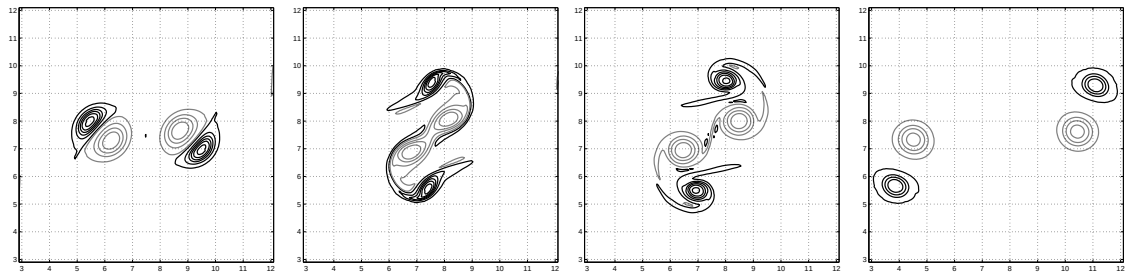


FIGURE 3.2 – Evolution of the PV anomaly during the 2 AGM $\rightarrow$ 2 NAGM collision. From left to right : $t = 18,\ 34,\ 40\ 100$. Time is mesured in units of f^{-1}, where f is the Coriolis parameter, and PV contours are represented at the interval 0.5, starting from the values ± 0.1 (resp., black (+) and grey (-)) in non-dimensional units of $\frac{f}{H_0}$, where H_0 is the non-perturbed fluid depth.

Evolution of the energy of the system during the collision is presented in Fig. 3.3, as well as the evolution of the energy dissipation. (We remind that the numerical scheme integrates the RSW equations in the conservative form, (cf. Bouchut, 2007), and has no explicit dissipation. The numerical dissipation is calculated as the departure of the discrete energy balance in each grid cell summed over all cells. The built-in property of the code is that dissipation is positive cell-wise). Both the peak of dissipation and the strong transfer from kinetic to potential energy correspond to the period of temporal fusion of the anticyclonic vortices, cf. Fig. 3.2, second panel.

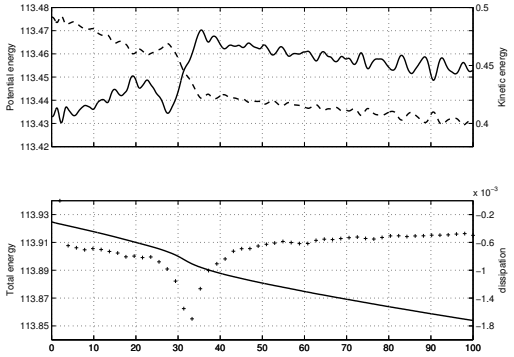


FIGURE 3.3 – Upper panel : kinetic (dashed) and potential (continuous) energy during the 2 AGM → 2 NAGM collision ; lower panel : total energy (continuous) and the dissipation (crosses).

The distribution of the pressure, with superimposed velocity field, and of the PV in the resulting NAGM are presented in Fig. 3.4.

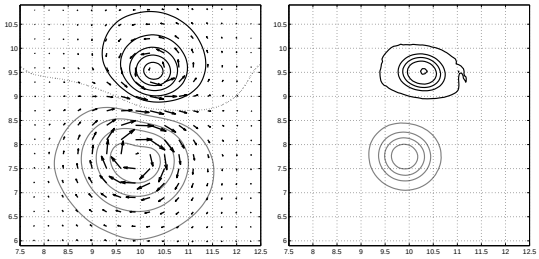


FIGURE 3.4 – Isobars with superimposed velocity field (left) and PV anomaly (right) of the NAGM of Fig. 3.2 at $t = 80$. Isobars at the interval 0.04, PV from ± 0.1 at the interval 0.5. Thin dotted line on the left panel indicates the zero of the pressure anomaly.

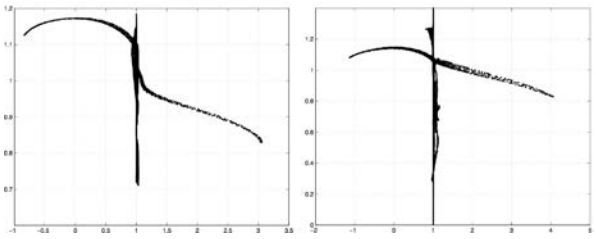


FIGURE 3.5 – Left panel : Bernoulli function vs PV for the NAGM : the curve is far from linearity, which explains the name. Right panel : typical scatter plot for AGM.

Scatter plot for NAGM is given in Fig. 3.5, as compared to the typical scatter plot for an AGM. A surprising fact observed during the simulations was the absence of inertia-gravity wave (IGW) emission during the collision and formation of NAGM. We should remind that the colliding AGM themselves were obtained by (a)geostrophic adjustment of QG modons accompanied by a net IGW emission clearly seen in the divergence field (Ribstein *et al.*, 2010). In Fig. 3.6 we present the divergence field associated to the NAGM shortly (10 inertial periods) after its formation. It is weak, and has a quadrupolar structure with a very weak signs of IGW at its extremities. IGW are quasi-inexistent on the earlier snapshots either (not shown). The weakness of the divergence pattern associated to NAGM is consistent with its almost balanced velocity field, cf. the left panel of Fig. 3.4. Yet its global Rossby number calculated with the peak velocity gives 0.2, and the local Rossby number calculated with the peak relative vorticity is 1.6, which is somewhat lower than the values for original AGM (0.4 and 2, respectively), but still non-negligeable.

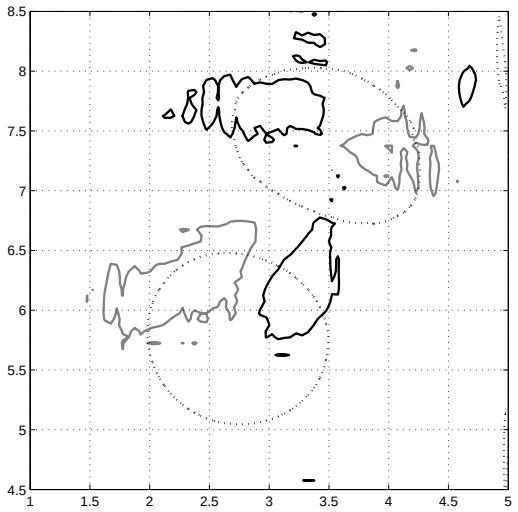


FIGURE 3.6 – Divergence field of the NAGM : contours of ± 0.01, resp. grey (+) and black (-), are shown, the maximum value being close to this one. An isoline of PV anomaly of |0.1| is superimposed to visualize the vortex.

2 AGM → T collisions :

The initial and late stages of a typical 2 AGM → T collision are presented in Fig. 3.7. The behavior of energy and dissipation during the 2 AGM → T collision is given in Fig.

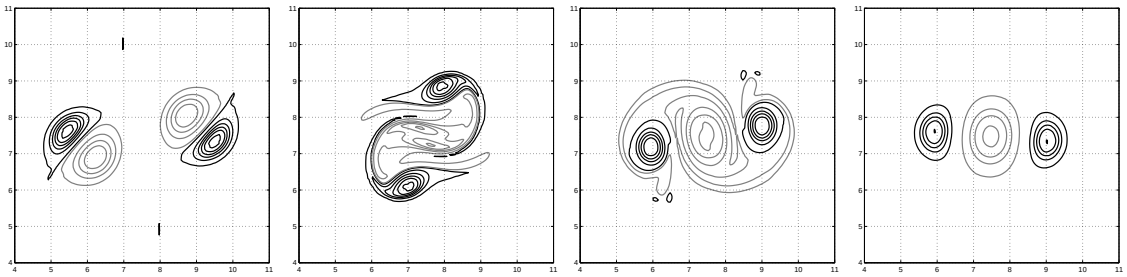


FIGURE 3.7 – Evolution of the PV anomaly during the 2 AGM → T collision. From left to right : $t = 18,\ 34,\ 50$ and 100. Same conventions as in Fig. 3.2

3.8. Again, the maximum of dissipation and a significant transfer from kinetic to potential energy correspond to the moment of initial fusion of anticyclonic vortices.

The pressure, velocity and the PV fields of the resulting vortex are presented in Fig. 3.9. The tripole keeps its coherence, which is confirmed by the scatter plot of Fig. 3.10, for several hundreds of inertial periods and slowly rotates (not shown).

As in the NAGM case the tripole is almost balanced, although its Rossby number is not negligeable (0.25 for the global, and 1.9 for the local one, respectively, as estimated just after the tripole formation). It is also accompanied by a divergence pattern, presented in Fig. 3.11, with a very weak IGW emission.

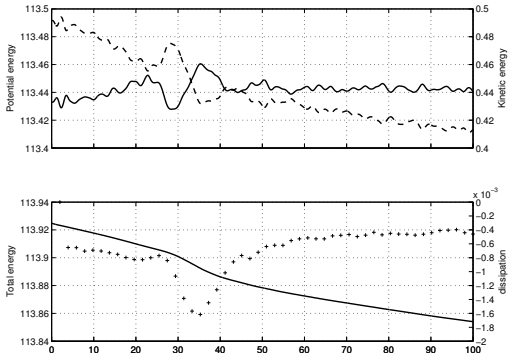


FIGURE 3.8 – Upper panel : kinetic (dashed) and potential (continuous) energy during the 2 AGM → T collision ; lower panel : total energy (continuous) and the dissipation (crosses).

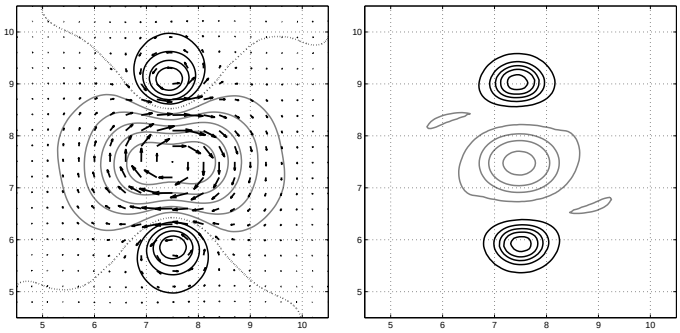


FIGURE 3.9 – Isobars with superimposed velocity field (left) and PV anomaly (right) of the tripole. Isobars at the interval 0.04, PV from ±0.1 at the interval 0.5. Thin dotted line on the left panel indicates the zero of the pressure anomaly.

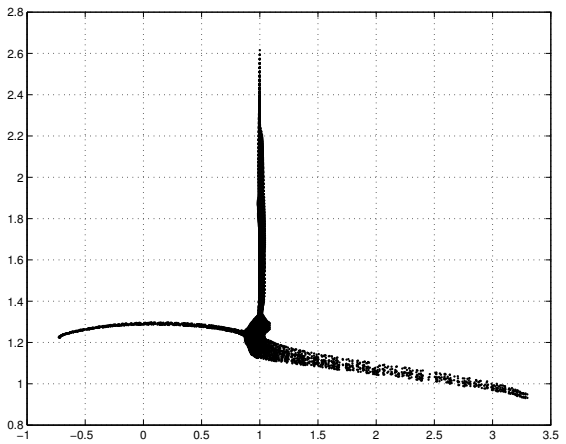


FIGURE 3.10 – Bernoulli function vs PV for the tripole at $t = 76$.

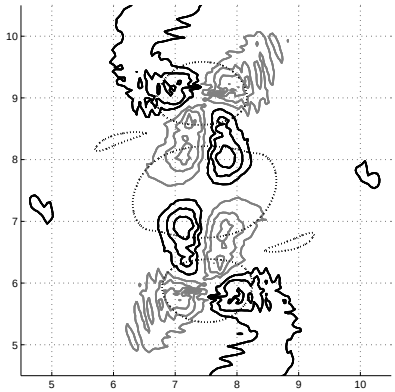


FIGURE 3.11 – Divergence field of the tripole : contours with values from ± 0.01 to ± 0.03 are shown. An isoline of PV anomaly of |0.1| is superimposed to visualize the vortex.

Discussion

Thus, we have shown that collisions of AGM produce nonlinear ageostrophic dipoles and tripoles. Both are known in the context of 2D Euler equations (Hesthaven *et al.*, 1995), (Kizner et Khvoles, 2004b) and, by extension, are expected in the QG equation. Yet, we observe them in full "compressible" RSW simulations, starting from definitely ageostrophic initial conditions. The degree of ageostrophy of these coherent structures is less than that of initial ones. For example, the peak absolute value of divergence in AGM before collisions is ≈ 0.1, while it is ten times less for the NAGM. So one may speak of a "strange" geostrophic adjustment without IGW emission, which is one of the most striking features of our simulations. It should be mentioned that both nonlinear dipoles and tripoles maintain their coherence for hundreds of inertial periods, slowly becoming more and more geostrophic, mostly due to dissipation, but also by a very weak IGW emission, not shown. For example, the peak local Rossby number (peak relative vorticity divided by f) of NAGM after 200 inertial periods is ≈ 0.7, the same as that of the tripole after 1000 inertial periods.

Acknowledgements : This work was supported by the French ANR grant SVEMO. We are grateful to B. Ribstein for his help at the initial stage of this work.

3.3 Shock Modon : Introduction à l'article

Les solutions multipolaires obtenues dans les études précédentes sont des exemples de structures cohérentes agéostrophiques stables du modèle RSW. La séparation dynamique entre ondes et tourbillons dans ce contexte est étonnament robuste et joue en faveur de la longévité des structures, puisque celles-ci évoluent ainsi dans un contexte où il n'existe pas de puit d'énergie. La séparation dynamique étant une caractéristique des écoulements à faible nombre de Rossby, il est intuitif de penser que le comportement de ces structures serait fortement affecté si l'on augmente le nombre de Rossby. Notamment, en augmentant le nombre de Rossby à nombre de Burger fixe, on augmente le nombre de Froude (équivalent au nombre de Mach dans ce modèle) $Fr = Ro/\sqrt{Bu} = U/\sqrt{gH_0}$. Lorsque celui-ci atteint l'unité, l'écoulement change de régime et devient supersonique (la vitesse typique de l'écoulement est supérieure à la vitesse de propagation des ondes).

L'étude de l'ajustement de la solution QG telle que réalisée dans les travaux de Ribstein *et al.* (2010) et présenté dans la section 3.1.2 est donc répétée à plus grand nombre de Rossby, et la structure obtenue est étudiée. Curieusement, le découplage entre ondes et tourbillons est persistant, malgré l'apparition d'un ressaut hydraulique sur l'axe du dipôle. Suivant les expériences numériques de collisions avec différents paramètres d'impact présentées dans la section précédente (3.2 et article associé (Lahaye et Zeitlin, 2011)), la stabilité du dipôle avec un choc ("shock-modon") est confirmée et un tripôle contenant deux ressauts hydrauliques – sur chaque jet contenu entre le coeur et un satellite – est obtenu. Ces résultats ont été publiés dans *Physical Review Letters* (Lahaye et Zeitlin, 2012c), et le contenu de l'article correspondant est inclu ci-après, en anglais.

3.4 Article : *Shock Modon : a new type of coherent structure in rotating shallow water*

[N. Lahaye and V. Zeitlin, *Phys. Rev. Lett.*, 108 :044502, 2012]

Abstract : We show that a new type of coherent structure, a shock-modon, exists in rotating shallow water model at large Rossby numbers. It is a combination of an asymmetric vortex dipole with a stationary hydraulic jump. The structure is long-living, despite the energy dissipation by the hydraulic jump, and moving along a circular path. Collisions of shock-modons can be elastic, or lead to formation of shock-tripoles.

Rotating shallow water (RSW) is a standard conceptual model in geophysical fluid dynamics (Pedlosky, 1987). It is also relevant for various astrophysical applications, such as dynamics of the solar tachocline (Gilman, 2000) and dynamics of the accretion disks (Umurhan, 2008). It should be also reminded that the well-known quasigeostrophic (QG) model for large-scale oceanic and atmospheric motions (Pedlosky, 1987), which follows from the RSW equations in the limit of small Rossby numbers ($Ro = \frac{U}{fL}$, where U and L are respectively typical velocity and length scales and f is the Coriolis parameter), is equivalent to the Hasegawa-Mima equation (Mima et Hasegawa, 1978) for drift waves in plasma.

The famous modon (dipolar steady-moving localized vortex) solutions of the QG equation are long-known (Larichev et Reznik, 1976). (Note that so-called beta-plane version of the QG equation - where the meridional gradient of the Coriolis force is taken into account - was used in this paper, although the so-called f-plane constant Coriolis parameter version of the modon is also known (Kamenkovich et Reznik, 1978).) Quasigeostrophic equation being an asymptotic limit of RSW equations, a natural question arises about existence of modons in the full model at finite Rossby numbers. Recently, such ageostrophic modon solution of the RSW equations was obtained theoretically (Kizner *et al.*, 2008), and found numerically (Ribstein *et al.*, 2010) by relaxation of the QG modon which was taken as initial configuration in the full RSW model. For initial configurations with sufficiently small Rossby numbers the QG modon did not change, while for large Rossby numbers (typically 0.2) it evolved towards cyclone - anticyclone asymmetric ageostrophic coherent structure (let us recall that QG modon is a perfectly symmetric dipole).

In the present work we report a discovery of an essentially ageostrophic modon ($Ro = 0.4$) which is bound to a hydraulic jump (shock) situated at its center. This structure is essentially asymmetric, preserves coherence for a long time (compared to the turnover period of each vortex component), and moves along a circular path. Such "shock-modon" appears as a result of relaxation of the QG modon with large Ro. As in our previous papers on ageostrophic modons (Ribstein *et al.*, 2010), (Lahaye et Zeitlin, 2011) we work with a new-generation finite-volume code for RSW equations, which is well-balanced (i.e. preserves equilibrium solutions) and entropy-satisfying (i.e. guarantees the energy decrease across shocks) (Bouchut, 2007). The spatial resolution is 0.025 in units of the deformation radius $\mathrm{Rd} = \sqrt{gH_0}/f$ (g is gravity and H_0 is unperturbed thickness), which is sufficient to perform a correct investigation of fine-scale structures, like shocks.

It should be kept in mind that RSW equations are equivalent to the equations of dynamics of a barotropic gas in the presence of Coriolis force in two dimensions with two components of velocity $\mathbf{v} = (u, v)$ and thickness h as dynamical variables. The invariant

characteristic of the vortex is potential vorticity (PV) $q = \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v}) + f}{h}$, or its anomaly with respect to the background value $q - f/H_0$.

The initial stages of the adjustment of a QG modon with large Ro are presented in Fig. 3.12 (pressure), and Fig. 3.13 (potential vorticity). Only a part of the computational domain is shown, the full size being 20×20 Rd^2, and Neumann (sponge) boundary conditions are used. Unlike more "gentle" relaxation observed for smaller Rossby numbers (Ribstein *et al.*, 2010), where the initial dipole was adjusting to the new equilibrium shape by emitting inertia-gravity waves and ejecting weak cyclonic PV filaments, one sees here a massive initial ejection of cyclonic PV advected by the anticyclone (see Fig. 3.13 at $t = 6$), and emission of large-amplitude waves (visible in Fig. 3.12 at $t = 6$), mostly absorbed by the sponges. This transient process leads to an asymmetric dipole, together with an isolated cyclone, which keep their coherence. At $t = 40$, the monopolar cyclone is removed from the computational domain and boundary conditions are replaced with energetically neutral periodic ones, in order to follow the proper evolution of the dipole.

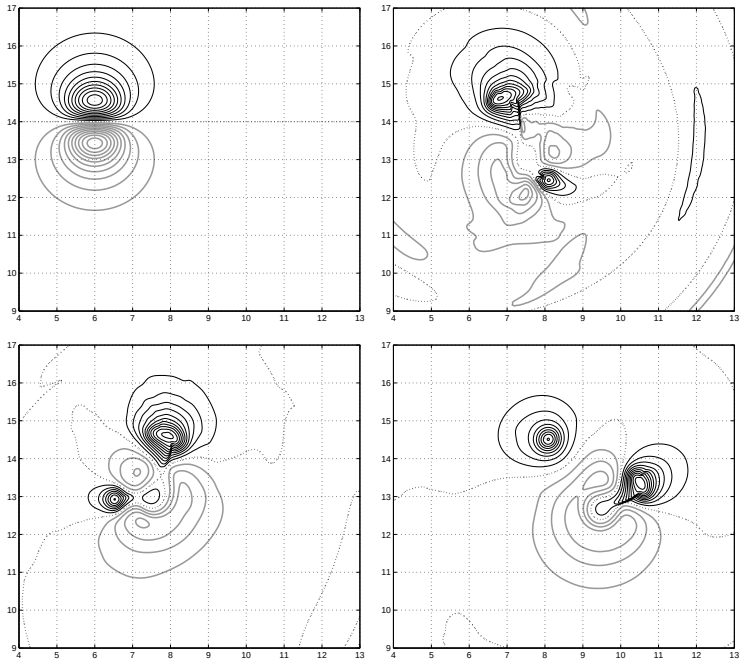


FIGURE 3.12 – Evolution of thickness during relaxation of the QG modon with $Ro = 0.4$. From left to right and top to bottom : $t = 0,\ 6,\ 12$ and 24 (units of f^{-1}). Thickness anomaly is given at the interval 0.06 in units of H_0. Black : cyclone (depression), gray : anticyclone. Thin dotted line indicates zero thickness anomaly.

The distributions of thickness/velocity, PV and divergence for the resulting dipolar vortex at $t = 46$ are given in Fig. 3.14. One clearly sees the hydraulic jump both in the thickness distribution (left panel), and in the divergence field (right panel). This is confirmed by Fig. 3.15, where we plot the profiles of thickness, divergence, and modulus of velocity along the dipole's axis. A typical hydraulic jump, with velocity decreasing and thickness increasing across the jump, is recognizable in the Figure (the mean flow is from right to left). We recall that inertia-gravity waves are equivalent to sound waves, following the above-mentioned gas dynamics analogy. Their typical velocity is of order $\sqrt{gH_0}$, so

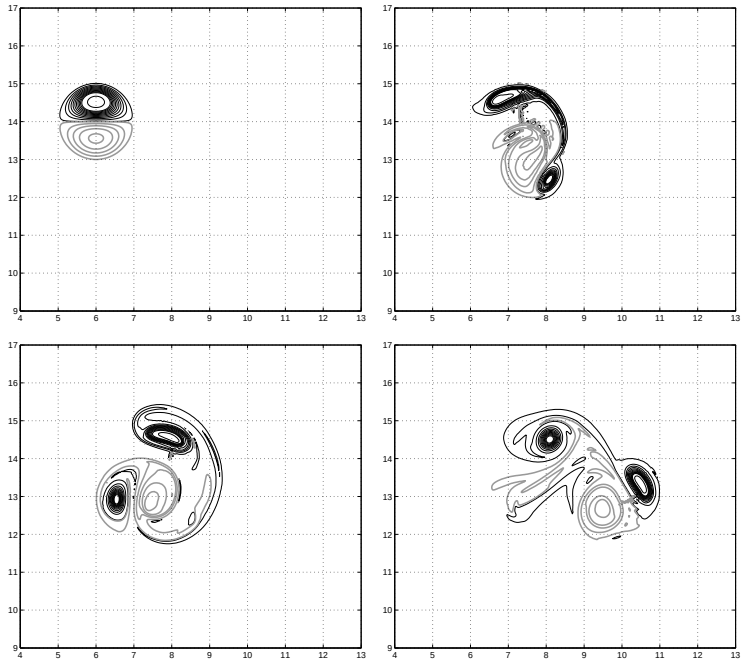


FIGURE 3.13 – Evolution of the PV anomaly corresponding to Fig. 3.12. Values from ± 0.1 (resp. in black (+) and gray (-)) at the interval 1 up to 10.1 and then at the interval 5 (suitable for cyclone only), in units of $\frac{f}{H_0}$.

that the hydraulic jump corresponds to the transition from transcritical (maximal Froude number $1.1 \div 1.2$) to subcrital flow.

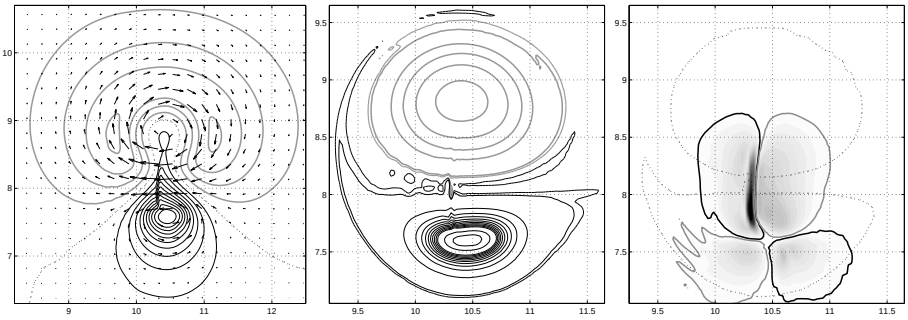


FIGURE 3.14 – Isobars with superimposed velocity field (left), PV anomaly (middle), and divergence (right) of the modon at $t = 46$. Same legend as in Figs. 3.12 and 3.13 for the left and middle panels. Thin lines are added at values ± 0.5 for the PV anomaly. Thin black dotted lines in the right panel indicate PV anomaly $q_A = \pm 0.1$ contours roughly corresponding to the dipole's edge. Absolute value of divergence in units of f : levels of gray from 0.1 (white) to 4 (black) ; Limits of convergence (divergence) zones : black (gray) contours.

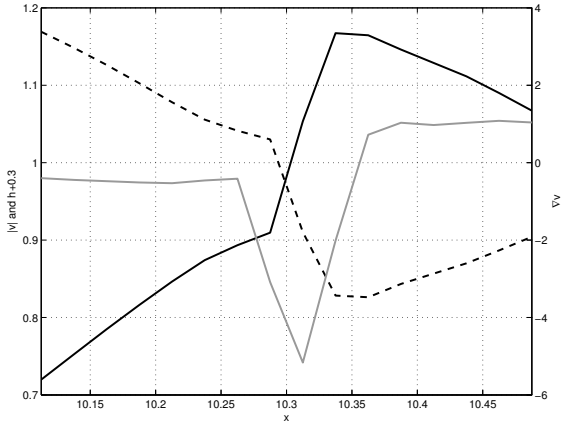


FIGURE 3.15 – $|\mathbf{v}|/\sqrt{gH_0}$ (Froude number) - black, thickness $h + 0.3$ (dashed), and divergence $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (gray) profiles along the modon's axis at $t = 46$.

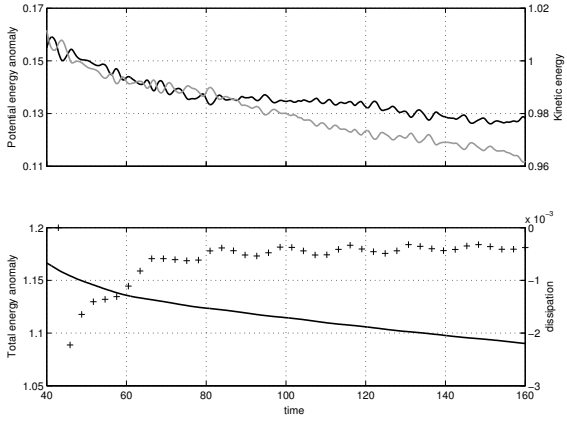


FIGURE 3.16 – Upper panel : kinetic (gray) and potential (black) energy during the evolution of shock-modon. Lower panel : total energy (continuous) and energy dissipation (crosses).

Evolution of the energy of the system is presented in Fig. 3.16 together with the evolution of the energy dissipation, both in non-dimensional units. We recall that the numerical scheme integrates the RSW equations in the conservative form, (cf. Bouchut, 2007), and has no explicit dissipation. The numerical dissipation is calculated as the departure of the discrete energy balance in each grid cell summed over all cells. The built-in property of the code is that dissipation is positive cell-wise and that energy decreases across the shocks.

The shock vanishes after ≈ 70 inertial periods, which is correlated with the stabilisation of the dissipation rate (see Fig. 3.16, lower panel). The well-formed modon persists for a long time afterwards (not less than 460 inertial periods), slowly losing intensity and moving along an almost perfect circular path (cf Fig. 3.17). The characteristics of this modon are similar to those observed for the modons at smaller Rossby number in (Ribstein *et al.*, 2010). During this time, and despite the absence of hydraulic jump, the maximal Froude number remains very close to 1. It decreases from 1.2 at $t = 40$ to 0.95 at $t = 460$. The slow energy decrease (cf. Fig. 3.16) is due to numerical dissipation. No wave radiation was observed at this stage.

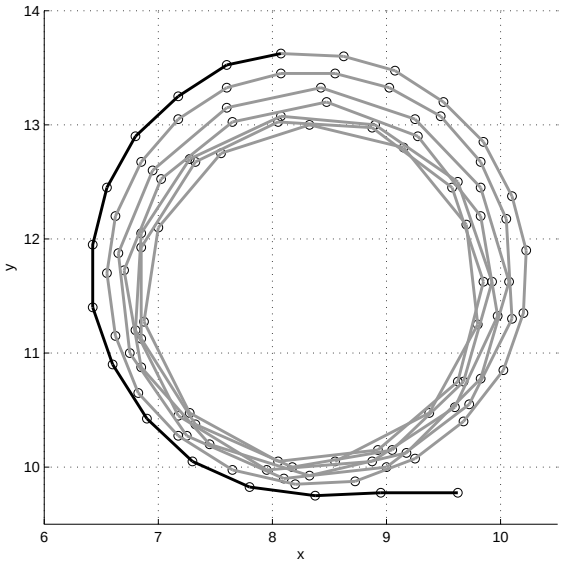


FIGURE 3.17 – Modon trajectory from $t = 40$ to $t = 460$. Color switches from black to gray when the shock vanishes. Time interval : 5.

Let us recall that for steady moving structures in RSW the Bernoulli function : $B = \frac{1}{2}(u-\overline{U})^2 + \frac{1}{2}(v-\overline{V})^2 + gh + \overline{U}fy - \overline{V}fx$, where $(\overline{U}, \overline{V})$ is the velocity of the structure, and PV are functionally dependent (Malanotte-Rizzoli, 1982), which should be reflected in the corresponding scatter plot. Such plot for the shock-modon is presented in Fig. 3.18.

As compared to the scatter plots for ageostrophic modons at smaller Rossby numbers (Ribstein *et al.*, 2010), this one is less sharp, especially in the cyclonic (positive PV) part. This is explained by the presence of the hydraulic jump which is situated mostly in the cyclonic part of the dipole, cf. Fig. 3.14, left panel. B inherits the jump in h, while the jump in PV is possible only if B varies along the shock (e.g. if the latter is curved (Lighthill, 1978)). The signature of the shock in PV is negligeable, and for each value of PV a range of values of B within the jump appears. Another source of the spread are uncertainties in computed Bernouilli function, especially when the trajectory is curved, as above. Nevertheless, the scatter plot is sharp enough to assert, together with the long life-time, the coherence of the shock-modon.

To test the robustness of the shock-modons, we performed a number of simulations

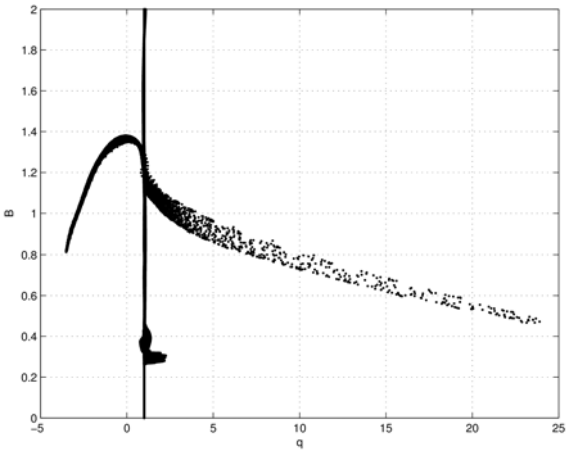


FIGURE 3.18 – Bernoulli function vs PV for the shock-modon at $t = 46$.

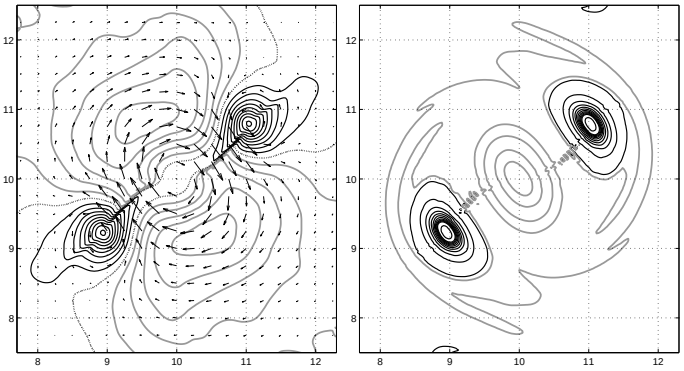


FIGURE 3.19 – Isobars with superimposed velocity field (left) and potential vorticity anomaly (right) of the "shock-tripole" formed after collision of two shock-modons. Same legend as in Figs. 3.12 and 3.13.

of their collisions, similar to our previous sudy (Lahaye et Zeitlin, 2011). They show that shock-modons undergo frontal collisions forming either a new pair of shock-modons after partner exhange, or a "shock-tripole" with a fusion of anticylonic vortices. The latter contains two hydraulic jumps situated between the anticyclonic core and cyclonic satellites (cf. Fig. 3.19).

Thus, geostrophic modons with large Rossby number in rotating shallow water evolve towards a new quasi-steady coherent structure, shock-modon which is a combination of an asymmetric vortex dipole and a hydraulic jump. The structure is dissipative, like the hydraulic jump (shock) itself, yet long-living and robust with respect to the interactions with other vortices, as follows from the preliminary study of their collisions. Collisions of shock-modons can also produce other coherent shock-vortices, like a tripole, indicating that shock-vortex structures are universal at large Rossby numbers in rotating shallow water. We expect that this kind of solutions will be relevant for astrophysical generalisations of the model mentioned above.

Acknowledgements : This work was supported by the French ANR grant SVEMO.

3.5 Dipôles et tripôles en RSW 1 couche : résumé

L'existence et les propriétés de structures multipolaires (modons et tripôles) dans un modèle Rotating Shallow Water à une couche ont été étudiées. L'agéostrophie des structures, dans ce modèle (faiblement) compressible, entraîne une asymétrie cyclone/anticyclone qui n'est – par construction – pas présente dans le modèle Quasi-Géostrophique. Elle se manifeste par un pôle cyclonique plus compacte, avec un maximum d'anomalie de vorticité potentielle et un minimum d'anomalie de hauteur de couche plus prononcé, tandis que le pôle anticyclonique est plus étendu dans l'espace et contient une circulation plus importante. De plus, la collision frontale de ces structures peut mener à la formation d'un tripôle à coeur anticyclonique, tandis qu'aucun tripôle à coeur cyclonique n'a été observé.

A plus grand nombre de Rossby, des structures analogues aux dipôles et tripôles agéostrophiques précédemment étudiés existent et peuvent contenir un choc (ressaut hydraulique associé à un nombre de Froude localement supérieur à 1) sur leur(s) axe(s) de maximum de vitesse. Un résultat important de ces travaux est l'absence de génération d'ondes par ces strutures fortement agéostrophiques, même lorsqu'un choc y est présent ou lorsqu'elles interagissent entre elles, dans un état transitoirement hors d'équilibre, au cours de collisions notamment.

Les collisions élastiques que peuvent subir les modons témoignent d'une attractivité de ces solutions et d'une prédictabilité – dans une certaine mesure – de l'écoulement. Ces propriétés sont analogues aux systèmes intégrables et aux solutions de type solitons, dans lesquels l'évolution du système est entièrement connue à partir des conditions initiales qui se décomposent sur l'ensemble des solutions du système.

3.6 Dipôles agéostrophiques baroclines et tripôles dans le modèle RSW à deux couches

Les résultats précédents concernant les structures cohérentes dans le modèle RSW à une couche apportent de nombreuses informations sur la dynamique des tourbillons agéostrophiques barotropes. Par construction, les effets de la baroclinicité (cisaillement vertical de la vitesse, stratification) ne sont pas pris en compte dans le modèle à une couche. Les structures océaniques (et atmosphériques) ne sont généralement pas barotropes mais présentent une variation selon la coordonnée verticale. La plupart des tourbillons océaniques de grande échelle sont plus intenses en surface et leur champ de vitesse décroît avec la profondeur. A plus petite échelle (méso et sous-méso échelles), il existe également des structures dites "de sub-surface" dont le maximum de vitesse est localisé sous la surface (de l'ordre de quelques centaines de mètres). Les effets baroclines sont donc inhérents à la dynamique des fluides géophysiques. Pour cette raison, il est utile d'étudier les propriétés de multipôles agéostrophiques baroclines, et le modèle le plus simple permettant cette analyse est le modèle Rotating Shallow Water à deux couches. L'attention est notamment portée sur la modification (ou la confirmation) des résultats précédents en ce qui concerne l'asymétrie cyclone/anticyclone, le découplage dynamique entre ondes et tourbillons et l'existence – et le cas échéant, les propriétés – de solutions agéostrophiques baroclines. Par exemple, les ondes d'inertie-gravité baroclines ont une fréquence propre plus petite que les ondes barotropes, ce qui a pour conséquence de réduire le trou spectral (comme discuté en section 1.3.1), et l'on s'attend à ce que cela modifie la dynamique des dipôles, en particulier au cours de collisions, et à grand nombre de Rossby.

Dans un premier temps, les solutions analytiques sont dérivées dans le modèle QG à deux couches, *avec la surface libre*. Deux types de solutions (barotrope et barocline) sont trouvés et sont utilisés comme conditions initiales dans des simulations numériques directes des équations RSW à deux couches (avec la surface libre également). Plusieurs types de solutions dipolaires sont obtenues dans ce modèle et leurs propriétés sont étudiées. Enfin, des tripôles et des modons non linéaires sont obtenus à l'issue de simulations de collisions.

Ce travail sur les modons et tripôles en RSW 2 couches a été publié dans la revue *"Journal of Fluid Mechanics"* (Lahaye et Zeitlin, 2012b). Le contenu de cette publication est inclus ci-après, en anglais.

3.7 Article : *Existence and properties of ageostrophic modons and coherent tripoles in the two-layer rotating shallow water model on the f-plane*

[N. Lahaye and V. Zeitlin, *J. Fluid Mech.*, 706 :71–107, 2012]

Abstract : We study formation and properties of new coherent structures : the ageostrophic modons in the two-layer rotating shallow water model. The ageostrophic modons are obtained by "ageostrophic adjustment" of the exact modon solutions of the two-layer quasigeostrophic equations with the free surface, which are used to initialize the full two-layer shallow-water model. Numerical simulations are performed using a well-balanced high-resolution finite-volume numerical scheme. For large enough Rossby numbers, the initial configurations undergo ageostrophic adjustment towards asymmetric ageostrophic quasi-stationary coherent dipoles. This process is accompanied by substantial emission of inertia-gravity waves. The resulting dipole is shown to be robust and survives frontal collisions. It contains captured inertia-gravity waves and, for higher Rossby numbers and weak stratification, carries a (baroclinic) hydraulic jump at its axis. For stronger stratifications and high enough Rossby numbers "rider" coherent structures appear as a result of adjustment, with a monopole in one layer and a dipole in another. Other types of ageostrophic coherent structures, such as two-layer tripoles and two-layer modons with nonlinear scatter plot, result from the collisions of ageostrophic modons. They are shown to be long-living and robust, and to capture waves.

3.7.1 Introduction

Flows in the ocean and the atmosphere are stratified and subject to rotation. As is well known, fast rotation corresponding to small Rossby numbers (Ro), leads to effective bidimensionalization of the flow, and the dynamics in this limit at synoptic scales, comparable to the Rossby deformation radius, is well described by the quasigeostrophic (QG) equations on the tangent plane (Pedlosky, 1987). QG dynamics is essentially the vortex dynamics following directly from the potential vorticity (PV) conservation. Vortex structures are ubiquitous in geophysical flows and a number of exact vortex solutions is known in the QG framework. They can be monopolar, dipolar or multipolar. A famous one is the modon, a steady-moving symmetric vortex dipole. Steady dipoles are traditionally associated with atmospheric blocking phases (McWilliams, 1980; Haines, 1989). They commonly appear through destabilization of vortex sheets or isolated monopolar vortices (Couder et Basdevant, 1986; Carton, 2001; Baey et Carton, 2002). A corresponding exact solution of the *barotropic* QG equations was obtained long ago both on the β-plane (Larichev et Reznik, 1976) and on the f-plane (Kamenkovich et Reznik, 1978). A generalization of these solutions to the simplest *baroclinic* model, the two-layer QG equations with the rigid lid was later obtained by Flierl *et al.* (1980), giving several families of solutions with different baroclinic and barotropic components.

The barotropic QG model being a small Rossby number limit of the rotating shallow water (RSW) equations, a question arises about corresponding *ageostrophic* solutions in the full parent model. Such solutions were first obtained semi-analytically by Kizner *et al.* (2008) and then numerically by Ribstein *et al.* (2010), by relaxation of the QG-modon configuration in the RSW equations on the f-plane. For high enough Ro the QG modon

emits inertia-gravity waves (IGW) and adjusts to an asymmetric ageostrophic steady dipole, the ageostrophic modon (AGM) ("ageostrophic adjustment"). These results provide an example of the so-called *spontaneous imbalance* which is of importance e.g. for understanding non-orographic sources of IGW. A related issue is wave capture by the dipoles (Bühler et McIntyre, 2005; Snyder *et al.*, 2007). Although the dispersion relation of IGW in the RSW model is not of the form allowing the wave-capture mechanism, it was recently found that RSW modons at high enough *Ro* may be carrying a shock wave (hydraulic jump) (Lahaye et Zeitlin, 2012c). It was also found that ageostrophic modons in the RSW model undergo three types of collisions : quasi-elastic ones with an exchange of partners and formation of either a pair of modons of the same kind, or of the so-called nonlinear (in the sense of their scatter plot) modons with larger inter-vortex distance, and inelastic ones which, in particular, produce steady vortex tripoles (Lahaye et Zeitlin, 2011).

A natural question arises whether a baroclinic counterpart of the ageostrophic modon exists, and if yes, whether it possesses similar peculiar properties. In this paper, we provide a positive answer to these questions. As in Flierl *et al.* (1980) we choose the simplest two-layer baroclinic model, but for the reason explained below we relax the rigid lid boundary condition and work with free-surface flows. This is why, even in the QG case, we have to re-derive the baroclinic modon solutions by generalizing the results of Flierl *et al.* (1980). In order to get the ageostrophic modons, we use the "ageostrophic" adjustment process, like in Ribstein *et al.* (2010), starting from thus derived QG solutions. Once the ageostrophic baroclinic modons are obtained we use the same technique as in Lahaye et Zeitlin (2011) to generate other two-layer multipoles : the baroclinic tripole (T) and the baroclinic nonlinear ageostrophic modon (NAGM).

We use a high-resolution finite-volume numerical scheme developed recently for 2-layer RSW equations (Bouchut et Zeitlin, 2010) with a free surface. The scheme does not allow the rigid-lid upper boundary condition. It is weakly dissipative, shock-capturing and entropy satisfying (i.e. ensures the energy decrease across shock, if any), and well-balanced (preserves geostrophic equilibria).

We show that adjustment of an initial balanced dipolar perturbation leads to several types of ageostrophic (quasi-)steady structures, depending on initial parameters. We investigate and quantify, with detailed diagnostics, both baroclinic and barotropic parts of the resulting structures, show that they capture IGW and, like in the one-layer model, may contain a baroclinic hydraulic jump in the inter-vortex region at large enough Rossby numbers for certain classes of initial conditions.

We should emphasize that besides the conceptual importance of showing existence of the whole new classes of essentially ageostrophic coherent structures with highly non-trivial collision properties in the two-layer model, which is a standard model for analyzing the effects of baroclinicity in the atmosphere and ocean, the structures we found may play a role in transport and mixing, and in establishing routes to dissipation in the ocean, by interacting with each other or topography, cf. e.g. Hogg *et al.* (2011). Dipolar vortex structures in the ocean may be produced by various mechanisms reported in literature, e.g. by instabilities of monopolar vortices (Baey et Carton, 2002), by evolution of von Karman vortex streets behind the obstacles (Couder et Basdevant, 1986), or by the instabilities of coastal currents (Gula *et al.*, 2010).

The paper is organized as follows : in section 3.7.2 we briefly derive the QG model with the free surface, and the baroclinic modon solutions used for initialization of our simulations. In section 3.7.3 we present results of DNS of the adjustment of such solutions

at high Rossby numbers, and describe the different kinds of steady dipoles we obtain. Different values of parameters (stratification, depth ratio and Rossby number) are used and their impact is discussed. We then present in section 3.7.4 a numerical investigation of frontal and lateral collisions of typical two-layer AGMs. Under some conditions, they lead to formation of new coherent structures : baroclinic tripoles and nonlinear modons. Their properties are also investigated. Section 3.7.5 contains summary and conclusions.

3.7.2 Steady dipolar solutions of the two-layer quasigeostrophic equations with a free surface

Reminder of the two-layer RSW model and derivation of the corresponding QG equations

The standard form of the two-layer RSW equations on the f-plane is :

$$\partial_t \vec{v}_i + (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_i + f\hat{z} \times \vec{v}_i = -\frac{\vec{\nabla}\pi_i}{\rho_i}, \tag{3.3}$$

$$\partial_t h_i + \vec{\nabla}(\vec{v}_i h_i) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.4}$$

with the dynamical boundary conditions at the interface and the free surface :

$$\pi_2 - \pi_1 = g(\rho_2 - \rho_1)h_2, \tag{3.5}$$

$$\pi_1 - \pi_0 = g(\rho_1 - \rho_0)(h_1 + h_2). \tag{3.6}$$

Here, $\vec{v}_i$, π_i and h_i are respectively the velocity, the hydrostatic pressure and the thickness in/of the i$^{\text{th}}$ layer, π_0 being the external pressure, f is the (constant) Coriolis parameter, $\hat{z}$ is the unit vector in the vertical direction (upwards, with the origin of the coordinates system at the bottom), g is gravity, and ρ_i is the constant density of the layer i. Our convention is that the layer 2 is the the lower one. The external pressure is assumed constant and the associated density negligible, $\rho_0 \to 0$. We define the interface displacement $\eta_2 = h_2 - H_2$, where H_2 is the thickness of the layer two at rest, and the free surface displacement $\eta_1 = h_1 + h_2 - H_0$, where $H_0 = H_1 + H_2$ is the total thickness at rest. Linearization of the above equations about the rest state leads to the barotropic and baroclinic (or internal) IGW solutions, with the following dispersion relations :

$$\omega_{\text{bt}} = \sqrt{gH_0|\vec{k}|^2 + f}, \tag{3.7}$$

$$\omega_{\text{bc}} = \sqrt{NgH_{\text{eq}}|\vec{k}|^2 + f}, \tag{3.8}$$

where H_{eq} is the equivalent height $H_{\text{eq}} = H_1H_2/H_0$, Ng is the reduced gravity with $N = 2\Delta\rho/(\rho_1 + \rho_2)$ and $\vec{k}$ is the wave vector. ω_{bt} and ω_{bc} denote the barotropic and the baroclinic angular frequencies, respectively. The potential vorticities (PV)

$$q_i = \frac{\zeta_i + f}{h_i}, \quad i = 1, 2, \tag{3.9}$$

and their anomalies $q_{A_i} = q_i - f/H_i$ are layerwise Lagrangian invariants. Here, ζ_i is the relative vorticity $\zeta_i = \hat{z} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}_i$. For steady-moving solutions of the equations (3.3 - 3.5), the Bernouilli function in each layer

$$B_i = \frac{\tilde{u_i}^2 + \tilde{v_i}^2}{2} + \frac{\pi_i}{\rho_i} + \overline{u_i} f y - \overline{v_i} f x, \tag{3.10}$$

where the overbar means the translation speed of the structure and the tilde denotes departure of the total velocity from this value, is functionally related to the corresponding PV (Malanotte-Rizzoli, 1982) .

We derive now the corresponding QG equations. The difference with the classical QG model (e.g. Pedlosky, 1970) is that we do not assume a rigid lid upper boundary condition in the model, i.e. the barotropic radius deformation is no longer considered as infinite. Let us recall that the QG equations express the Lagrangian conservation of PV at the next to the leading order of the asymptotic expansion in small Rossby number. We choose to work with nondimensional variables :

$$u = Uu^*, \quad (x, y) = L \times (x^*, y^*), \quad t = \frac{L}{U} t^*, \tag{3.11}$$

$$\pi_i = \rho_i U L f \pi_i^*, \tag{3.12}$$

$$h_1 = H_0(F_1^{-1} + \lambda(\eta_1^* - \eta_2^*)), \tag{3.13}$$

$$h_2 = H_0(F_2^{-1} + \lambda\eta_2^*). \tag{3.14}$$

Here, U, L and λ are typical scales for velocity, length and non-dimensional surface and interface displacements $\Delta H/H_0$, and $F_i = H_0/H_i$. The Rossby number is then defined as $Ro = U/(fL)$. Stars indicate that the variables are dimensionless. They are subsequently omitted, and the layerwise conservation of PV nondimensionalized by f/H_i reads :

$$Ro\frac{d_1}{dt}\left[\frac{Ro\zeta_1 + 1}{F_1^{-1} + \lambda(\eta_1 - \eta_2)}\right] = 0, \tag{3.15}$$

$$Ro\frac{d_2}{dt}\left[\frac{Ro\zeta_2 + 1}{F_2^{-1} + \lambda\eta_2}\right] = 0. \tag{3.16}$$

At the leading order in Rossby number and small associated surface and interface displacements ($Ro \sim \lambda \ll 1$), by introducing the nondimensional streamfunctions $\Psi_i = \pi_i^*$ suggested by the geostrophic balance $\hat{z} \times \vec{v}_i = -\vec{\nabla}\Psi_i$, we obtain the two-layer QG equations on the f-plane :

$$\frac{d_1^{(0)}}{dt}\left[\Delta\Psi_1 + \frac{F_1}{1-d}(\Psi_2 - \Psi_1)\right] = 0, \tag{3.17}$$

$$\frac{d_2^{(0)}}{dt}\left[\Delta\Psi_2 - \frac{\delta F_1}{1-d}(\Psi_2 - d\Psi_1)\right] = 0. \tag{3.18}$$

Here and below d is the density ratio $\rho_1/\rho_2 < 1$, $\delta = H_1/H_2$ is the depth ratio, hence $F_2 = \delta F_1$, and $\frac{d_i^{(0)}}{dt} = \partial_t + \mathcal{J}(\Psi_i, \cdots)$ is the quasigeostrophic advective derivative where $\mathcal{J}(A, B) = \partial_x A \partial_y B - \partial_y A \partial_x B$. Expressions in brackets are the quasigeostrophic PVs in each layer, corresponding, in fact, to the PV anomalies. Note that these equations differ from the classical ones with a rigid lid, cf. Flierl *et al.* (1980), by the presence of the density ratio d in front of Ψ_1 in the second term of the equation for the second layer (all others appearances of this parameter may be removed by rescaling either the parameter F_1 or the length scale).

The two-layer free-surface QG modon

We will derive the QG modon solutions of the equations (3.17 - 3.18) by generalizing the method of Flierl *et al.* (1980). We look for a solution steady moving at a constant speed

c, which we choose to be along the x-axis, without loss of generality. The streamfunctions depend on $x - ct$ and y only, and we write the QG equations in the form :

$$\mathcal{J}\left(\Psi_1 + cy, \Delta\Psi_1 + \frac{F_1}{1-d}(\Psi_2 - \Psi_1)\right) = 0, \tag{3.19}$$

$$\mathcal{J}\left(\Psi_2 + cy, \Delta\Psi_2 - \frac{\delta F_1}{1-d}(\Psi_2 - d\Psi_1)\right) = 0, \tag{3.20}$$

which means that the co-moving streamfunctions $\Psi_i + cy$ and the quasigeostrophic PVs of the layers are functionally related, i.e.

$$\Delta\Psi_1 + \frac{F_1}{1-d}(\Psi_2 - \Psi_1) = G_1(\Psi_1 + cy), \tag{3.21}$$

$$\Delta\Psi_2 - \frac{\delta F_1}{1-d}(\Psi_2 - d\Psi_1) = G_2(\Psi_2 + cy), \tag{3.22}$$

where $G_i(z)$ are *a priori* arbitrary functions. Below we make the assumption that they are linear. Note that there is no obligation for G_i to be unique over the whole domain. The only physical condition to be imposed is that Ψ_i together with their first derivative are continuous everywhere. We divide the whole f-plane into interior and exterior domains separated by a circle of radius a, which will be considered as the size of the modon. We use below the superscripts "int" and "ext" for the interior and the exterior domains, respectively. We further constrain the quasigeostrophic PV to be zero in the exterior domain.

Solution in the exterior domain We are looking for a localized solution, i.e. $\Psi_i \to 0$ when $r \to \infty$. It then follows from eqs. (3.21 - 3.22) that $G_i^{\text{ext}}(z) = 0$. We transform the system to the normal form by introducing the new variables $T_j^{\text{ext}} = \Psi_1^{\text{ext}} + \beta_j \Psi_2^{\text{ext}}$, which yields :

$$\Delta T_j - \frac{q_j^2}{a^2} T_j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{3.23}$$

where the constants q_j obey the following equalities :

$$\frac{q_j^2}{a^2} = -\frac{F_1}{\beta_j}\frac{1 - \beta_j\delta}{1-d} = F_1\frac{1 - d\beta_j\delta}{1-d}, \quad j = 1, 2. \tag{3.24}$$

Writing them in a matrix form yields :

$$\begin{pmatrix} \frac{q_j^2}{a^2} - \frac{F_1\delta}{1-d} & \frac{F_1}{1-d} \\ \frac{F_1 d\delta}{1-d} & \frac{q_j^2}{a^2} - \frac{F_1}{1-d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_j \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{3.25}$$

Solution for β is guaranteed if the determinant is zero, that is :

$$\frac{q_j^2}{a^2} = \frac{F_1}{2(1-d)}\left(1 + \delta \pm \sqrt{(1-\delta)^2 + 4\delta d}\right), \quad j = 1, 2. \tag{3.26}$$

Hence :

$$\beta_j = \frac{1}{2\delta d}\left(1 - \delta \mp \sqrt{(1-\delta)^2 + 4\delta d}\right), \quad j = 1, 2. \tag{3.27}$$

Note that because of $0 \leq d \leq 1$, the constants q_j and β_j are real. Furthermore, they only depend on the depth and density ratios, and not on the Rossby nor Burger numbers

($Bu = (Rd/a)^2$, with Rd the barotropic deformation radius defined as $Rd = \sqrt{gH_0}/f$). Moreover, from eq. (3.24) we get a relation between the β_j which reads :

$$(\beta_1 - \beta_2)\delta d = \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}, \Rightarrow \beta_1\beta_2 = -\frac{1}{\delta d}. \tag{3.28}$$

Thus, taking one or another root for the β_j amounts to a simple permutation.

After separation of variables in polar coordinates (r, θ) and retaining only the first angular mode, as we are seeking for a dipolar solution decreasing in r, we get for the exterior solution :

$$T_j = A_j K_1\left(\frac{q_j}{a} r\right) \sin\theta, \tag{3.29}$$

where K_1 is the first order modified Bessel function and the constants A_j will be determined by matching with the interior solution (see 3.7.2 below).

Solution in the interior domain We choose $G_i(x)$ to be linear :

$$G_i(z) = -S_i z + Q_i \tag{3.30}$$

where S_i and Q_i are constants, to be consistent with the other formulae. We write the interior equations in normal form by defining the variables $T_j^{\text{int}} = \Psi_1^{\text{int}} + \alpha_j \Psi_2^{\text{int}}$:

$$\Delta T_j + \frac{k_j^2}{a^2} T_j = -(S_1 + \alpha_j S_2)\, c\, r \sin(\theta) + Q_1 + \alpha_j Q_2, \quad j = 1, 2\,, \tag{3.31}$$

where the constants k_j obey the equalities :

$$\frac{k_j^2}{a^2} T_j = F_1 \frac{1 - \alpha_j \delta}{1 - d} \Psi_2 - F_1 \frac{1 - d\alpha_j \delta}{1 - d} \Psi_1 + S_1 \Psi_1 + \alpha_j S_2 \Psi_2, \quad j = 1, 2\,, \tag{3.32}$$

and the same equation as eq. (3.28) holds, namely :

$$\alpha_1 \alpha_2 = -\frac{1}{\delta d}. \tag{3.33}$$

In the same way as for the exterior domain, equations (3.32) may be written in a matrix form. The determinant of the matrix should be zero, which gives :

$$\frac{k_j^2}{a^2} = \frac{S_1 + S_2}{2} - F_1 \frac{\delta + 1}{2(1 - d)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{F_1(1 - \delta)}{1 - d} + S_2 - S_1\right)^2 + 4\delta d \left(\frac{F_1}{1 - d}\right)^2}; \tag{3.34}$$

and

$$\alpha_j = \frac{1 - d}{F_1 \delta d} \left[\frac{S_2 - S_1}{2} + \frac{F_1(1 - \delta)}{2(1 - d)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{F_1(1 - \delta)}{1 - d} + S_2 - S_1\right)^2 + 4\delta d \left(\frac{F_1}{1 - d}\right)^2} \right]. \tag{3.35}$$

As to the sign of the constants k_j^2, there may be negative roots, which switches the form of the solutions of the Bessel equation (3.31) from oscillatory to exponential (i.e. from ordinary to modified Bessel functions). To avoid a singularity at $r = 0$, we have to retain the modified Bessel function of the first kind $I_n(r)$ in the interior domain. Streamfunctions being a combination of T_j, having one of the two k_j^2 negative is allowed. On the other hand,

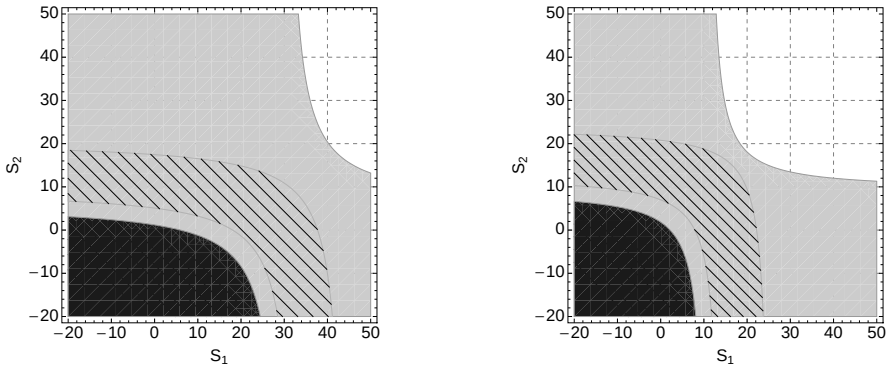


FIGURE 3.20 – Signs of $(k_j/a)^2$ in the (S_1, S_2) space for $\delta = 0.2$ (left) and $\delta = 0.85$ (right). Black zone : both k_1 and k_2 are imaginary. Grey zone : only k_1 (or k_2) is imaginary. Dashed zone shows that the value of $J_1(k_1)$ (that is at the circle of radius a) is between its first maximum and zero, which indicates where the solutions for S_1 and S_2 lie.

k_1^2 and k_2^2 should not be both negative because the solution would not be dipolar anymore and, moreover, the matching conditions for the first derivative could not be satisfied except for the trivial case of the flow at rest. Solutions for $k_{1,2}^2(S_1, S_2)$ are presented in Fig. 3.20, showing that there exist solutions with non-negative k_j^2.

Thus, in the interior domain, the solution is given by :

$$T_j = \frac{Q_1 + \alpha_j Q_2}{k_j^2/a^2} + \left[B_j J_1\left(\frac{k_j}{a} r\right) - \left(\frac{S_1 + \alpha_j S_2}{k_j^2/a^2}\right) cr \right] \sin\theta, \quad j = 1, 2 \tag{3.36}$$

with yet unknown constant B_j. If k_2 is imaginary one should replace $B_2 J_1\left(\frac{k_2}{a} r\right)$ by $B_2 I_1\left(\left|\frac{k_2}{a}\right| r\right)$, with purely imaginary B_2.

Matching conditions At this stage we have eight constants which remain unknown : A_j, B_j, S_j and Q_j. Because we split the whole plane into two subdomains, we must constrain the streamfunctions and the velocities to be continuous across the boundary between the domains. Thus the streamfunctions must satisfy the following matching conditions :

$$\Psi_i^{\text{int}}\big|_{r=a} = \Psi_i^{\text{ext}}\big|_{r=a}, \quad i = 1, 2. \tag{3.37}$$

$$\left.\frac{\partial \Psi_i^{\text{int}}}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial \Psi_i^{\text{ext}}}{\partial r}\right|_{r=a}, \quad i = 1, 2. \tag{3.38}$$

The continuity of radial velocities is ensured by the continuity of the streamfunctions themselves, as follows from their dependence on θ. We choose to solve the problem with these matching conditions expressed in terms of T_j in the interior domain, i.e.

$$T_j^{\text{int}}\big|_{r=a} = \Psi_1^{\text{ext}}\big|_{r=a} + \alpha_j \, \Psi_2^{\text{ext}}\big|_{r=a}, \tag{3.39}$$

$$\left.\frac{\partial T_j^{\text{int}}}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial \Psi_1^{\text{ext}}}{\partial r}\right|_{r=a} + \alpha_j \left.\frac{\partial \Psi_2^{\text{ext}}}{\partial r}\right|_{r=a}, \quad j = 1, 2. \tag{3.40}$$

It follows immediately from the first relation and eq. (3.36) that we must have $Q_1+\alpha_j Q_2 = 0$, because the exterior streamfunction has no constant in θ component. The matching conditions for the streamfunctions and their radial derivatives give, using the recursion formulae for Bessel functions (cf. Abramowitz et Stegun, 1964) :

$$B_j J_1(k_j) - \frac{S_1+\alpha_j S_2}{k_j^2/a^2} ca = \frac{(\beta_2-\alpha_j)A_1K_1(q_1)+(\alpha_j-\beta_1)A_2K_1(q_2)}{\beta_2-\beta_1}, \tag{3.41}$$

$$B_j k_j J_2(k_j) = \frac{(\beta_2-\alpha_j)A_1q_1K_2(q_1)+(\alpha_j-\beta_1)A_2q_2K_2(q_2)}{\beta_2-\beta_1}, \quad j=1,2. \tag{3.42}$$

When k_2 is purely imaginary, we replace $B_2K_2J_2(k_2)$ by $iB_2I_2(|k_2|)$.

We must also specify whether the dividing contour $r=a$ is a streamline or not. For each layer, if the circle $r=a$ is a streamline then the streamfunction is constant along it. In the opposite case, the matching conditions enforce the relation between the quasigeostrophic potential vorticity and the comoving streamfunction to be the same in both the exterior and interior domains, i.e. $S_j = 0$, and an exponential shape. Therefore, to have a nontrivial solution at least in one of the layers the dividing contour should be a streamline there. Below we will consider the two cases :

- $r=a$ is a streamline in both layers : $S_j \neq 0$
- $r=a$ is a streamline only in the first (upper) layer : $S_2 = 0$

We call the two corresponding solutions *quasi-barotropic* and *baroclinic* ones, as we will see below that their velocity fields are mostly so. The third possible case corresponding to $r=a$ being a streamline only in the second (lower) layer will not be treated, although this does not mean a loss of generality because this case corresponds to a permutation of the layers with respect to the second case above, with corresponding rescalings of F_1 and F_2.

Quasi-barotropic modon : $G_2(\Psi_2+cy) \neq 0$ In this case, the following relations for the exterior streamfunctions hold :

$$\Psi_1|_{r=a} + ca\sin(\theta) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta_2A_1K_1(q_1)-\beta_1A_2K_1(q_2)}{\beta_2-\beta_1} + ca = 0. \tag{3.43}$$

$$\Psi_2|_{r=a} + ca\sin(\theta) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{A_2K_1(q_2)-A_1K_1(q_1)}{\beta_2-\beta_1} + ca = 0. \tag{3.44}$$

giving the values of Aj :

$$A_1 = -\frac{ca(1+\beta_1)}{K_1(q_1)} \quad ; \qquad A_2 = -\frac{ca(1+\beta_2)}{K_1(q_2)}. \tag{3.45}$$

Hence the exterior streamfunctions are fully determined, and their amplitudes are proportional to the ratio $Ro/Bu = ca$. Then, the constants k_j and α_j are expressed in terms of (S_1, S_2) by eq. (3.34 - 3.35) and we just have to solve the set of equations (3.41 - 3.42) which is nonlinear in terms of S_j but linear in terms of B_j. For this purpose we write it in the form :

$$\mathcal{M}_j \begin{pmatrix} B_j \\ ca \end{pmatrix} = 0, \quad j=1,2$$

where $\mathcal{M}_j$ are matrices containing unknowns S_j :

$$\mathcal{M}_j = \begin{pmatrix} J_1(k_j) & \frac{S_1+\alpha_jS_2}{k_j^2/a^2} + \frac{(\beta_2-\alpha_j)A_1K_1(q_1)+(\alpha_j-\beta_1)A_2K_1(q_2)}{\beta_2-\beta_1} \\ k_jJ_2(k_j) & \frac{(\beta_2-\alpha_j)A_1q_1K_2(q_1)+(\alpha_j-\beta_1)A_2q_2K_2(q_2)}{\beta_2-\beta_1} \end{pmatrix},$$

which are determined from the solvability condition $\det(\mathcal{M}) = 0$ using a standard iterative Newton algorithm.

Baroclinic modon : $G_2(\Psi_2 + cy) = 0$ In this case, we have $S_2 = 0$. In the first layer, the condition that the streamfunction must be constant at $r = a$, and thus relation (3.43), still hold. From eqs. (3.32) and (3.41 - 3.42) we can derive two other equations for S_1, A_1 and A_2 :

$$k_j J_2(k_j)\left[\left(1+\alpha_j+\frac{\alpha_j\delta F_1}{k_j^2/a^2}\right)ca+\frac{(\beta_2-\alpha_j)A_1K_1(q_1)+(\alpha_j-\beta_1)A_2K_1(q_2)}{\beta_2-\beta_1}\right] - J_1(k_j)\frac{(\beta_2-\alpha_j)A_1q_1K_2(q_1)+(\alpha_j-\beta_1)A_2q_2K_2(q_2)}{\beta_2-\beta_1}=0,\quad j=1,2 \tag{3.46}$$

We can then write eqs. (3.43) and (3.46) in a matrix form :

$$\mathcal{M}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ca(\beta_2-\beta_1)\end{pmatrix}=0 \tag{3.47}$$

where the matrix elements $\mathcal{M}_{a,b}$ do not contain the ratio $Ro/Bu = ca$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1,1} &= (\alpha_1-\beta_2)q_1K_2(q_1)J_1(k_1)+(\beta_2-\alpha_1)K_1(q_1)k_1J_2(k_1),\\
\mathcal{M}_{1,2} &= (\beta_1-\alpha_1)q_2K_2(q_2)J_1(k_1)+(\alpha_1-\beta_1)K_1(q_2)k_1J_2(k_1),\\
\mathcal{M}_{1,3} &= \left(1+\alpha_1+\frac{\alpha_1\delta F_1}{k_1^2/a^2}\right)k_1J_2(k_1),\\
\mathcal{M}_{2,1} &= (\alpha_2-\beta_2)q_1K_2(q_1)J_1(k_2)+(\beta_2-\alpha_2)K_1(q_1)k_2J_2(k_2),\\
\mathcal{M}_{2,2} &= (\beta_1-\alpha_2)q_2K_2(q_2)J_1(k_2)+(\alpha_2-\beta_1)K_1(q_2)k_2J_2(k_2),\\
\mathcal{M}_{2,3} &= \left(1+\alpha_2+\frac{\alpha_2\delta F_1}{k_2^2/a^2}\right)k_2J_2(k_2),\\
\mathcal{M}_{3,1} &= \beta_2K_1(q_1),\\
\mathcal{M}_{3,2} &= -\beta_1K_1(q_2),\\
\mathcal{M}_{3,3} &= 1.
\end{aligned}$$

Thus, S_1 follows from solving $\det(\mathcal{M}) = 0$, and A_1, A_2 are then computed from the linear system (3.47). The constants B_j are deduced from eq. (3.41) or (3.42), and the full problem is thus solved.

The pressure fields and associated velocities for both quasi-barotropic and baroclinic modons with initial gobal Rossby number $Ro = 0.2$ (see below for definition) and Burger number $Bu = 1$, which is the value used in all the simulations presented in this paper, are given in Fig. 3.21. Here and below, pressure is measured in units of $\rho_i g H_0$. Throughout the paper, $x-$ and $y-$ axes in the Figures stand for the (x, y) plane unless otherwise stated, and are given in units of Rd. One may see that velocity fields are rather the same in both layers for the quasi-barotropic modon, whereas for the baroclinic modon the velocity in the lower layer is much weaker, in agreement with zero potential vorticity anomaly in the second layer (note the difference of scales in the second and fourth panels of the figure). If one compares the norms of the maxima of the nondimensional barotropic and

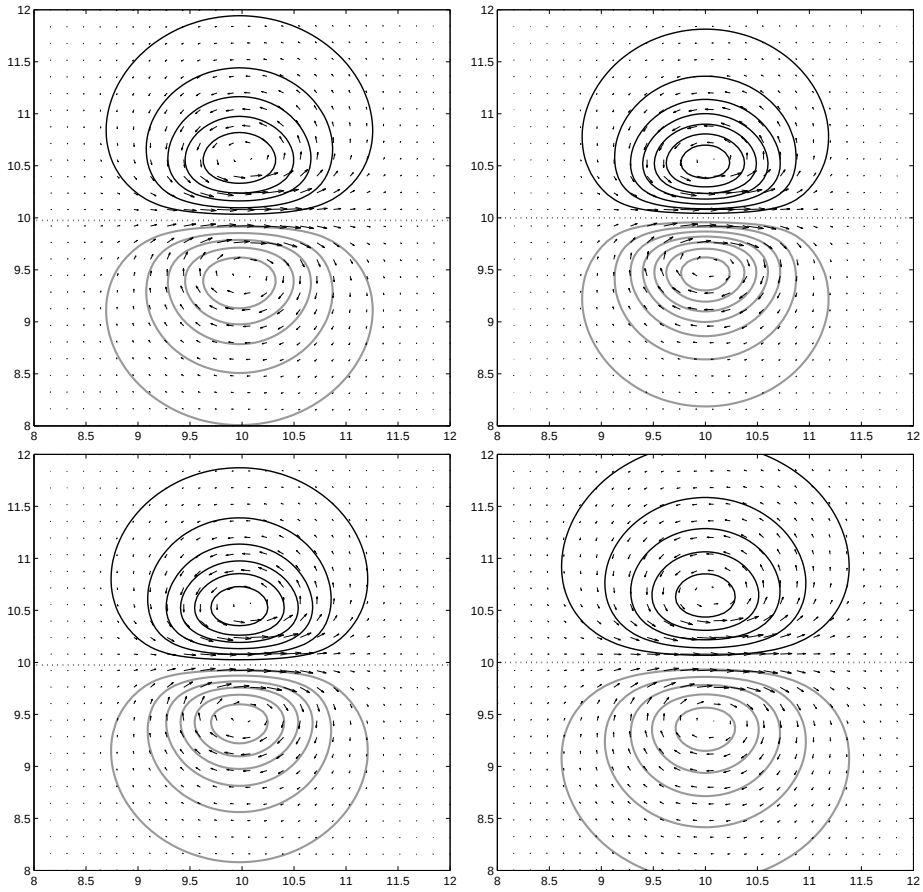


FIGURE 3.21 – Pressure fields in the upper (up) and lower (down) layers for the quasi-barotropic (left) and baroclinic (right) QG modon solutions with $c = 0.2$, $a = 1$, $d = 0.8$ and $\delta = 0.85$, with superimposed velocity fields. Here and below : black corresponds to cyclones (depression), gray to anticyclones, dotted line indicates zero pressure anomaly. Contour interval is ± 0.01 for the barotropic modon and the upper layer of the baroclinic one, and ± 0.006 for the lower layer.

baroclinic velocities for the quasi-barotropic and, respectively, the baroclinic modon with $Ro = 0.2$, $\delta = 0.85$ and $d = 0.8$ one gets 0.18 and 0.03 for the former, and 0.16 and 0.15 for the latter.

3.7.3 Ageostrophic adjustement of the two-layer QG modons

Thus we have obtained the modon solutions for the two-layer QG model with a free surface. QG equations being an asymptotic limit of the full two-layer RSW model at low Rossby number, a question arises of how such solutions would evolve if used to initialize the parent model. Such analysis has already been reported in the framework of the one-layer RSW (Ribstein *et al.*, 2010; Lahaye et Zeitlin, 2012c), with a result that an "ageostrophic adjustment" of the initial balanced configuration towards an asymmetric dipole takes place by IGW emission. The resulting ageostrophic modon was moving along a curved path, the trajectory being bended toward the stronger anticyclonic pole. One of the purposes of our investigation below is to find whether such scenario holds in the presence of baroclinicity

in the two-layer model, and if yes, what is the impact of the stratification over the process. We thus performed a number of numerical simulations with the RSW model initialized with the exact solutions of the QG equations obtained above. We take the solutions at large Rossby numbers. A distinction is to be kept in mind between global and local Rossby numbers. The first one is defined with the global velocity of the structure and its length scale defined as the distance between the two vorticity extrema. In particular, for the QG solution it is given by the ratio of the translation speed of the comobile frame and the typical lengthscale : $Ro = c/(fa)$. The second one is defined (layerwise) as the ratio of the maximum (or minimum) relative and planetary vorticities, that is as the dimensionless relative vorticity. We performed a first set of adjustment experiments at global Rossby number $Ro \sim 0.2$, and a second one at an even larger global Rossby number $Ro \sim 0.4$. The maximal local Rossby numbers (whatever the layer and the sign of vorticity) are 0.8 and 2.8, respectively.

We worked with two different values of depth ratio $\delta = 0.2$ and $\delta = 0.85$. The former corresponds roughly to typical oceanic values and the latter to a typical atmospheric value which is usually assumed to be close to 1. (We did not choose precisely 1 because, as is well-known, it corresponds to a degenerate case in the two-layer model.) The density ratio d is taken, unless otherwise stated, to be $d = 0.8$. We recall that in the QG model in its standard form it is assumed that $d \to 1$. We should, however, stay well away of unity in numerical simulations to avoid degeneracy.

Adjustment at Rossby number $Ro = 0.2$

We start with the adjustment of quasi-barotropic and baroclinic modons with the parameters $\delta = 0.85,\ d = 0.8,\ Ro = 0.2$. It is worth noting that the baroclinic solution does not exist for such parameters d and Ro and the depth ratio $\delta = 0.2$, because the high deviation of the interface associated with baroclinicity leads to outcropping (thickness taking zero values), which is out of our scope here. Results for the quasi-barotropic modon with $\delta = 0.2$ are not shown here as they are very similar to those with $\delta = 0.85$.

Quasi-barotropic modon The pressure and the PV anomalies (PVA) fields during the evolution of the initial QG-modon perturbation are presented in Figs. 3.22 and 3.23.

The evolution starts by emission of internal (baroclinic) and barotropic inertia-gravity waves, with a net signature in the velocity divergence fields, as shown in Fig. 3.24. Here and below, PVA and divergence fields are measured in units of f/H_i and f, respectively. The typical phase velocities are respectively 0.2 and 1 (in units of $\sqrt{gH_0}$), in good agreement with theoretical values which are given by $\sqrt{NgH_{\rm eq}} \approx 0.22$ and $\sqrt{gH_0} = 1$. A weak filamentation of cyclonic vorticity at the rear of the dipole is visible at $t = 88$, which is a typical feature of the vortex dipole evolution (see Ribstein *et al.*, 2010; Meleshko et van Heijst, 1994; Van Heijst et Flór, 1989), together with a weak decrease of the vorticity in the cyclonic core. The latter is related to the higher gradients in the cyclonic core (as compared to the anticyclone), which leads to a higher numerical diffusivity.

One sees a quadrupolar pattern appearing in the barotropic divergence field inside the dipole. This is easily explained by the first order correction in the QG asymptotic expansion which yields (for a steady flow) : $\vec{\nabla}\vec{v}_i^{(1)} = \mathcal{J}(\Psi_i + cy, \Delta\Psi_i)$. For the zeroth order dipolar solution this ageostrophic correction gives a quadrupolar angular dependence of the divergence fields $\propto Ro^2 \sin(2\theta)$. Indeed, this pattern was already present in the one-layer

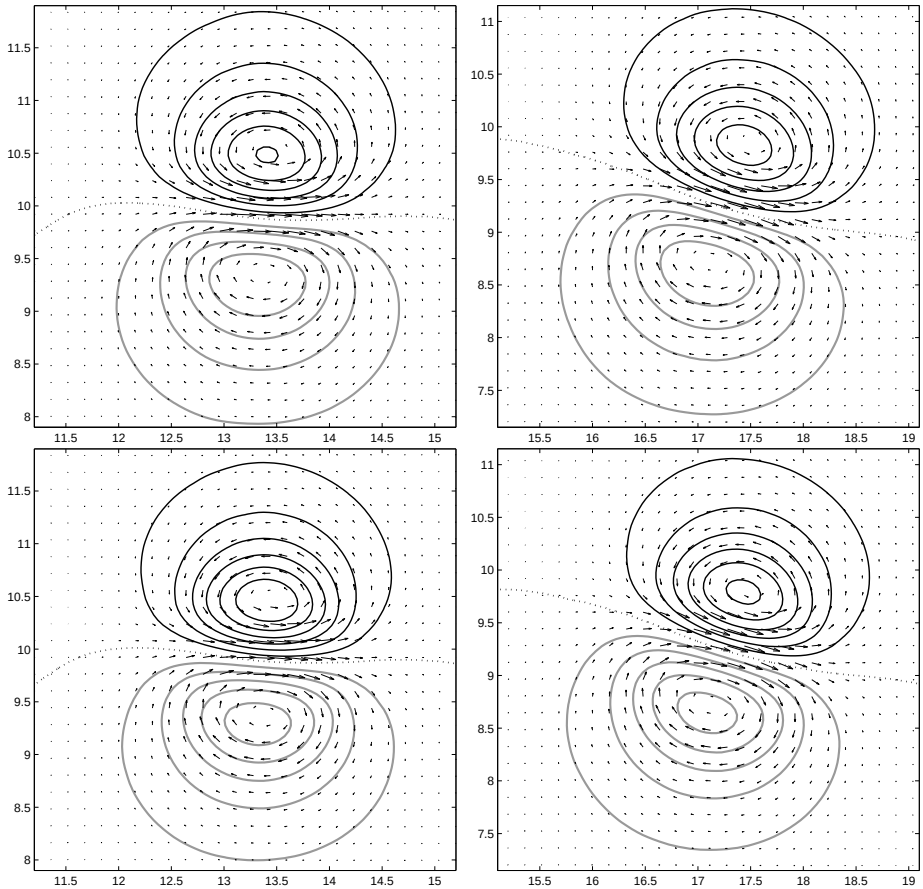


FIGURE 3.22 – Pressure with superimposed velocity in the first (up) and second (down) layer at $t = 88$ (left) and $t = 200$ (right) during the adjustment of the quasi-barotropic modon with initial $Ro = 0.2$. Contours are given at the interval 0.01.

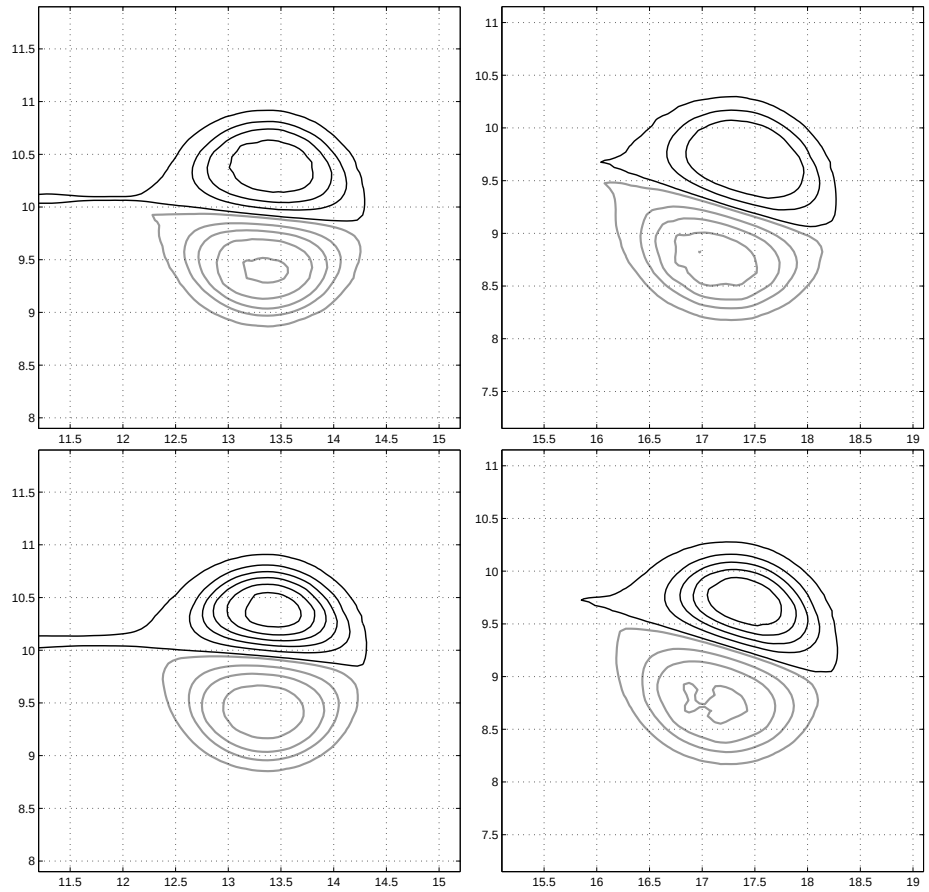


FIGURE 3.23 – PVA contours corresponding to Fig. 3.22, at the interval ± 0.2 starting at value ± 0.04 in the upper layer and ± 0.3 from ± 0.06 in the lower layer. Here and below : Black : cyclone (positive anomaly). Gray : anticyclone.

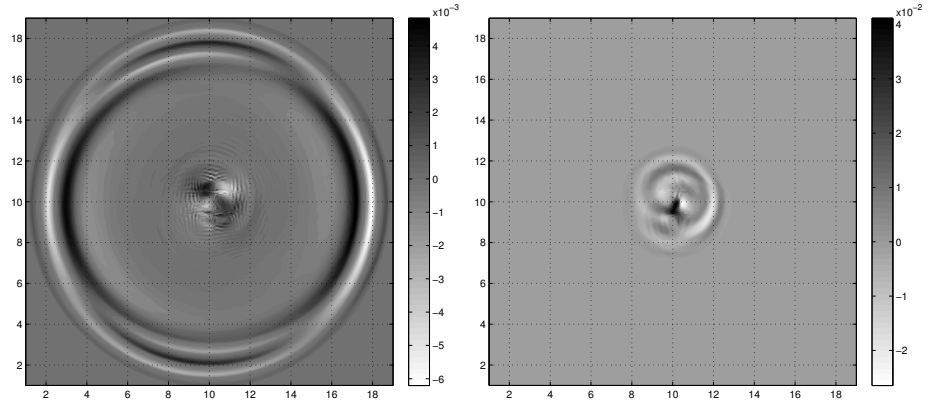


FIGURE 3.24 – Barotropic (left) and baroclinic (right) velocity convergence fields at $t = 8$ for the adjustment of the quasi-barotropic modon with initial $Ro = 0.2$.

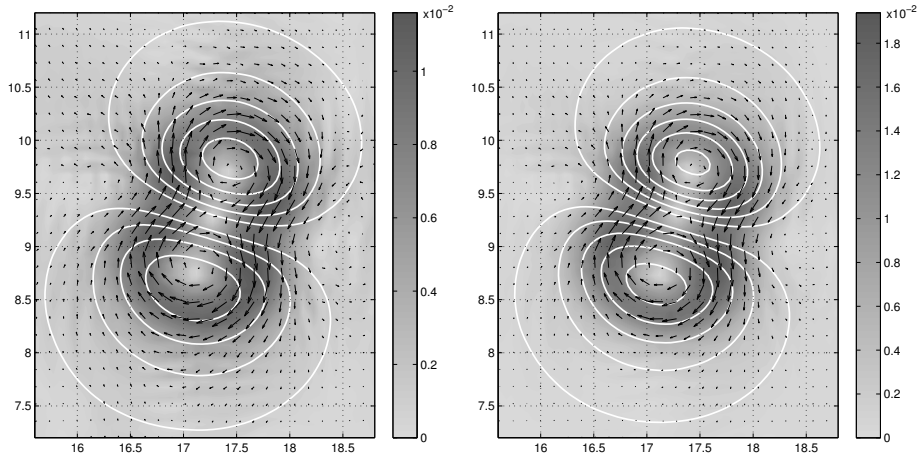


FIGURE 3.25 – Ageostrophic circulation of the quasi-barotropic AGM with initial $Ro = 0.2$ and $t = 200$. Left : upper layer, right : lower layer. Pressure anomaly is superimposed (white contours), at the interval ± 0.01.

ageostrophic modon obtained in Ribstein *et al.* (2010). Its amplitude is very weak (of the order $5 \cdot 10^{-3}$). Small-scale oscillations are also visible in this figure, and are also present in the baroclinic divergence (not visible in Fig. 3.24, due to the choice of scales). We believe that they are very weak IGW produced by discretization errors. (Their typical wavelength is about four times the grid size dx and they persist all over the simulation, whatever the solver we used - a variety of solvers is available for the code, cf. Bouchut (2007). Since the computed phase speed both for the barotropic and baroclinic components corresponds to the baroclinic phase speed ($\sqrt{NgH_{\rm eq}}$), we believe that only the baroclinic component is physically relevant.) Their amplitude and associated wave momentum are very small, so that the impact upon the modon evolution is negligible.

Typical nondimensional divergence value is 0.01 (or slightly lower in the upper layer) at $t = 20$ and decreases slowly until $t = 200$ (end of the simulation). It is in a good agreement with the first-order correction to the QG approximation, since the typical pressure anomaly is of order 0.05, which would give a typical divergence value of order 10^{-2} for $Ro \sim 0.2$.

We estimate the degree of ageostrophy of the dipole by subtracting the geostrophic wind from the velocity field, i.e. : $\vec{v}_i^a = \vec{v}_i - \hat{z} \times \vec{\nabla}\pi_i$. Ageostrophic circulation is shown in Fig. 3.25. It exhibits a global anticyclonic structure with a stagnation point at the center of the dipole. Such pattern may be related to the cyclostrophic balance, with higher values in the regions with higher curvature of the streamlines (i.e. at the outer edges of each vorticity pole). As part of the pressure gradient is due to cyclostrophy, the geostrophic circulation is overestimated, while the pressure extrema are underestimated, leading to residual negative circulation. This may partially explain the evolution of the pressure extrema (minimum negative value increases while maximum positive one decreases), as the circulation of the modon is approximately conserved (and the initial velocity is diagnosed from the geostrophic balance, not the cyclogeostrophic one). However, the ageostrophic motion across the dipole axis up- and downstream of the stagnation point is obviously out of the cyclogeostrophic balance. Typical ratio of ageostrophic upon geostrophic velocities is 0.1 for the Rossby number of 0.2.

The life-time of the resulting ageostrophic modon is long, in spite of numerical dissi-

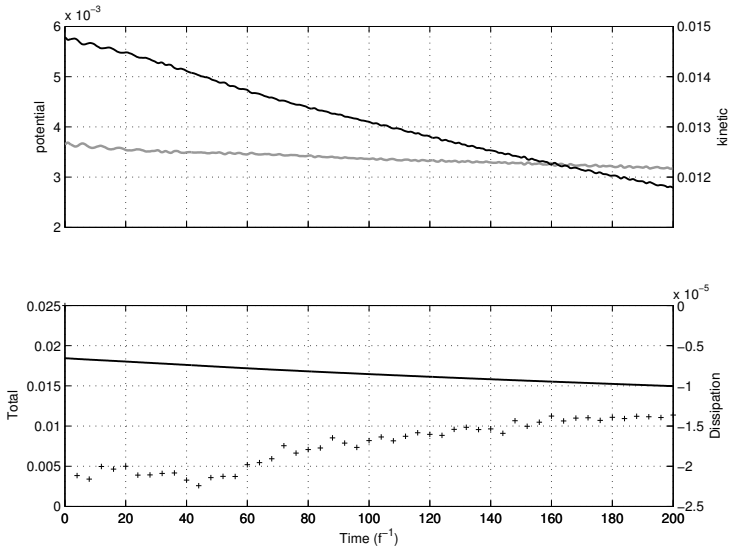


FIGURE 3.26 – Energy evolution during the adjustment of the quasi-barotropic modon with initial $Ro = 0.2$. Upper panel : kinetic energy (black, right y-axis) and potential energy anomaly (gray, left y-axis) over the whole domain. Lower panel : total (continuous line) energy anomaly and dissipation rate (crosses).

pation. Simulation ends at $t = 200$ but the dipole is likely to persist over several hundreds of inertial periods. The energy anomaly decreases by 20% over the 200 inertial periods of calculation, mainly in its kinetic part, see Fig. 3.26. (Energy anomaly density is $e_{\rm tot} = e_c + e_p - \sum_{i=1,2} \rho_i g H_i^2/2 - \rho_1 g H_1 H_2$; here and below, energy density is measured in units of $\rho_i h_i f^2 R d^2$ with normalisation $\rho_2 = 1$.) This decrease is associated with the local Rossby number (local relative vorticity) trend from 0.7 down to 0.5 throughout the simulation. The scatter plots of the Bernouilli function vs potential vorticity in both layers (see Fig. 3.27) highlight a high degree of coherence of the modon. Two kinds of lines appear in the scatter plots : vertical ones corresponding to the ambient fluid with constant PV, and the well-defined curves corresponding to the dipole itself. These latter are almost linear, as for the classical QG modon solutions.

Baroclinic modon We recall that the baroclinic modon solution exists only for $\delta = 0.85$. The linearized potential vorticity is strictly zero in the lower layer in this case, and thus the PVA amplitude in layer two is expected to remain very low during the evolution of the dipolar perturbation. Indeed the maximum PVA value in layer two remains below $0.1 \cdot f/H_2$ during the whole simulation, which is less than 5% of the typical upper PVA values. Evolution of the pressure and potential vorticity fields is given in Fig. 3.28 at an advanced stage when the modon is already readjusted.

The adjustment of the initial perturbation is similar to the quasi-barotropic modon, with emission of IGW, filamentation and symmetry loss ; to save space we do not show it here. However, it should be emphasized that the amplitude of the emitted baroclinic waves is at least twice larger than that of the waves emitted during the quasi-barotropic adjustment, while the typical amplitude of the emitted barotropic waves remains weak. This is not surprising in the sense that formal linearisation of the complete equations gives rise to a splitting between barotropic and baroclinic components, with no interaction between

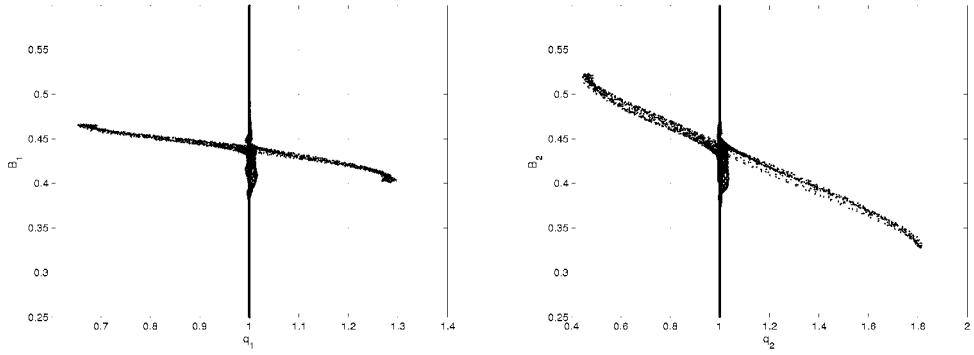


FIGURE 3.27 – Scatter plots $B-PV$ (left : upper layer, right : lower layer) for the adjusted quasi-barotropic AGM with initial $Ro = 0.2$ at $t = 180$. q_1, q_2, B_1 and B_2 are the PV and the Bernouilli functions in respective layers.

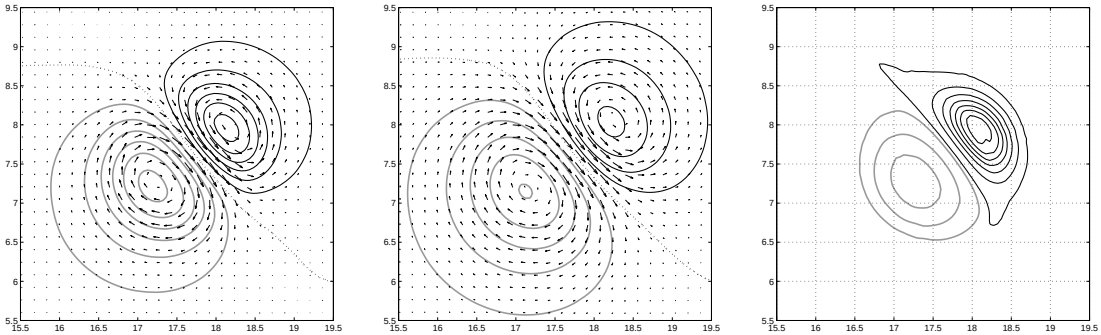


FIGURE 3.28 – Pressure anomaly with superimposed velocity fields in the upper (left panel) and lower (second panel) layers, and the PVA (right panel) in the upper layer for the adjusted baroclinic AGM with initial $Ro = 0.2$ at $t = 252$. Contours are given at the interval 0.1 in the upper layer, 0.06 in the lower one for the pressure anomalies and 0.6 starting from ± 0.12 for the potential vorticity anomaly.

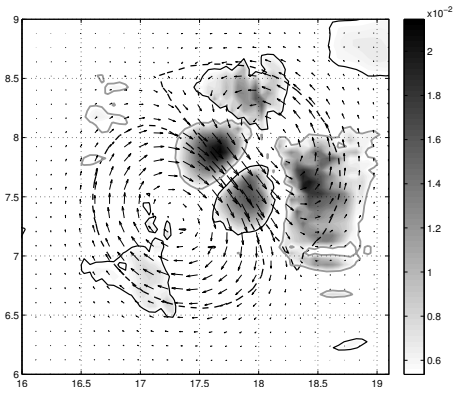


FIGURE 3.29 – Baroclinic velocity divergence at $t = 252$ with superimposed velocity field for the adjusted AGM. Absolute value of the divergence in levels of gray, from 0.25 (white) to 1 (black) times the maximum value $2.2 \cdot 10^{-2}$; convergence (divergence) zones delimited by black (gray) continuous lines. PVA contour at 0.1 is added in dashed line for localization of the dipole's edges.

them at the lowest order. The baroclinic divergence forms a net quadrupolar pattern of considerable amplitude centered at the cyclonic pole (see Fig. 3.29), while the barotropic divergence associated with the dipole remains very weak (comparable with surrounding noise, not shown).

The baroclinic adjustment produces a more pronounced cyclone-anticyclone asymmetry than the quasi-barotropic one, as visible in the PVA graph at $t = 252$ in Fig. 3.28. Indeed, the anticyclonic circulation is getting larger than the cyclonic one in both simulations (see Fig. 3.30), but this process is enhanced for the baroclinic modon (as seen either in the first-layer or in the baroclinic component - not shown). To compute the circulation of the vortex, we integrate the relative vorticity over the cells where the PVA is higher (in absolute value) than a truncation value q_c which is chosen to be 0.15 : $\Gamma_\pm = \int \zeta_i H(\pm q_{A_i} - q_c) dxdy$, where $H(\,\cdot\,)$ is the Heaviside function. This difference can be understood in terms of the local Rossby number which is higher in the upper layer in the case of the baroclinic adjustment (most of the circulation is confined within this layer) than in each of the layers for the quasi-barotropic initial perturbation, cf. Fig. 3.30. Note also that looking at the evolution of the baroclinic and barotropic circulations (defined polewise with the help of the PVA in the upper layer) reveals that the baroclinic component changes more than the barotropic one for both quasi-barotropic and baroclinic initial conditions (not shown).

Resumé of the adjustment of quasi-barotropic and baroclinic QG modons at $Ro = 0.2$ Thus, we showed that the two-layer QG modons evolve toward new coherent dipoles in the full RSW model, with characteristic ageostrophic features such as the presence of a quadrupolar divergence pattern and a net cyclone/anticyclone asymmetry with the anticyclone being more spread in area and stronger (in the sense of larger circulation) than the peak-shaped cyclones. This latter feature is highlighted in Figure 3.30 where it is clear that the maximum of relative vorticity is higher in the cyclones while the anticyclonic circulation is stronger than the cyclonic one, in agreement with the curvature of the trajectory of the dipole (see Fig. 3.31).

Another feature of the two-layer modons is the reduced global velocity of the structure,

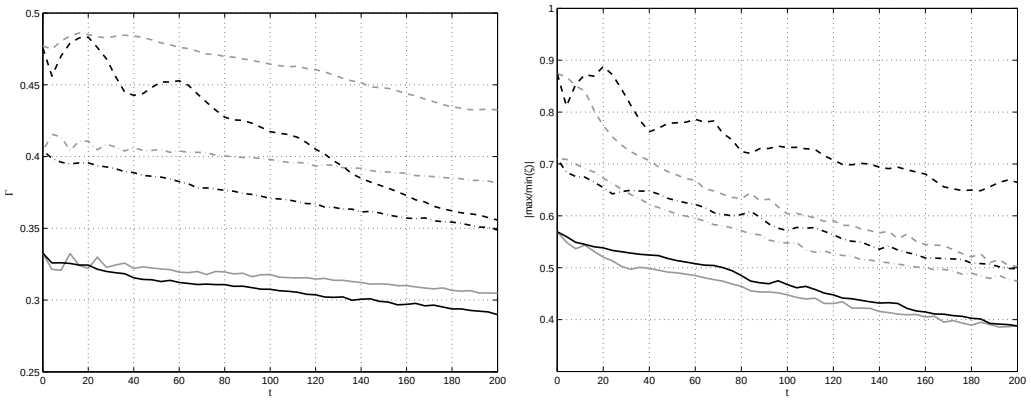


FIGURE 3.30 – Evolution of the AGM circulations (left panel) and of the relative vorticity extrema (local Rossby number - right panel) of the modons with initial $Ro = 0.2$. Continuous lines : quasi-barotropic modon, upper layer. Dashed-dotted lines : quasi-barotropic modon, lower layer. Dashed lines : baroclinic modon, upper layer. Gray : anticyclonic circulation/local Ro, black : cyclonic one.

as compared to the velocity of the QG modons $c = Ro \cdot f \cdot a = 0.2$. Indeed, the displacement velocities of the quasi-barotropic and baroclinic dipoles are respectively 0.035 and 0.03, that is less than a half of the quasigeostrophic one. This has been already observed in the one-layer model (Ribstein *et al.*, 2010), but the effect is stronger here (the reduction observed was about 75% in the one-layer model with the same Rossby and Burger numbers). At the same time the asymmetry is weaker, as compared to the one-layer counterpart, and the divergence field mainly follows from the QG theory. Trajectories of the quasi-barotropic and baroclinic modons are shown in Fig. 3.31. They are less curved than the one-layer ageostrophic modon one.

Adjustment at Rossby number $Ro = 0.4$

Weakly stratified case An interesting question is how the scenario of the ageostrophic adjustment changes with increasing Rossby number. We are particularly motivated here by our previous finding of combined shock-modon solutions in one-layer RSW (Lahaye et Zeitlin, 2012c). We, thus, increase the global Rossby number, which is fixed now at $Ro = 0.4$. The baroclinic QG modon solution is not allowed for this value of the Rossby number and the chosen values of parameters (δ, d). Hence, we will concentrate on the evolution of the quasi-barotropic QG modon with $\delta = 0.85$ and $d = 0.8$, i.e. weak stratification. Because of the emergence of small-scale dynamical processes during the simulation, the resolution is doubled below as compared to the previous cases : $dx = dy = 0.025$ Rd. The evolution of the pressure and PVA fields is presented in Figs. 3.32 and 3.33.

The adjustment of the modon is quite similar to the $Ro = 0.2$ case, in what concerns the emission of IGWs, cf. Fig. 3.34, filamentation and modification of the spatial structure of PV. Its propagation speed is also diminished with respect to the initial quasigeostrophic modon decreasing from 0.15 down to 0.05 over the second hundred of inertial periods (the simulation ends at $t = 200$). However, the amplitude of the emitted waves is much (an order of magnitude) higher, and the barotropic and baroclinic divergences of the waves reach the values of, respectively, 0.15 and 1. We can also see a complex divergence structure inside

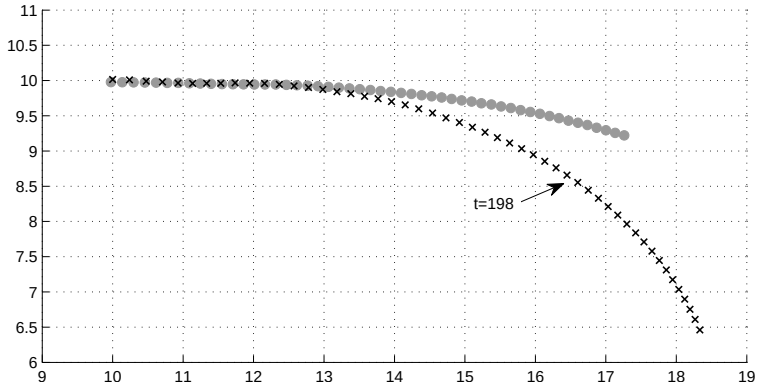


FIGURE 3.31 – Trajectories of the quasi-barotropic (filled circles) and baroclinic (crosses) modons. Time interval is 4 for the quasi-barotropic modon and 6 for the baroclinic one, and simulations end at $t = 200$ and $t = 300$, respectively. The arrow indicates the position of the baroclinic modon at the time corresponding to the end of simulation with the quasi-barotropic one.

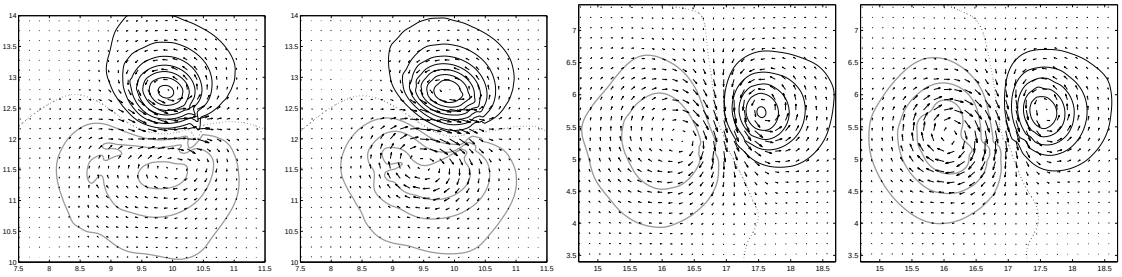


FIGURE 3.32 – Isobars with superimposed velocity fields for the adjusted AGM with initial $Ro = 0.4$ and $d = 0.8$ at $t = 40$ (left) and $t = 200$ (right). 1st and 3rd panels : upper layer ; 2nd and 4th panels : lower layer. Contour interval : 0.04.

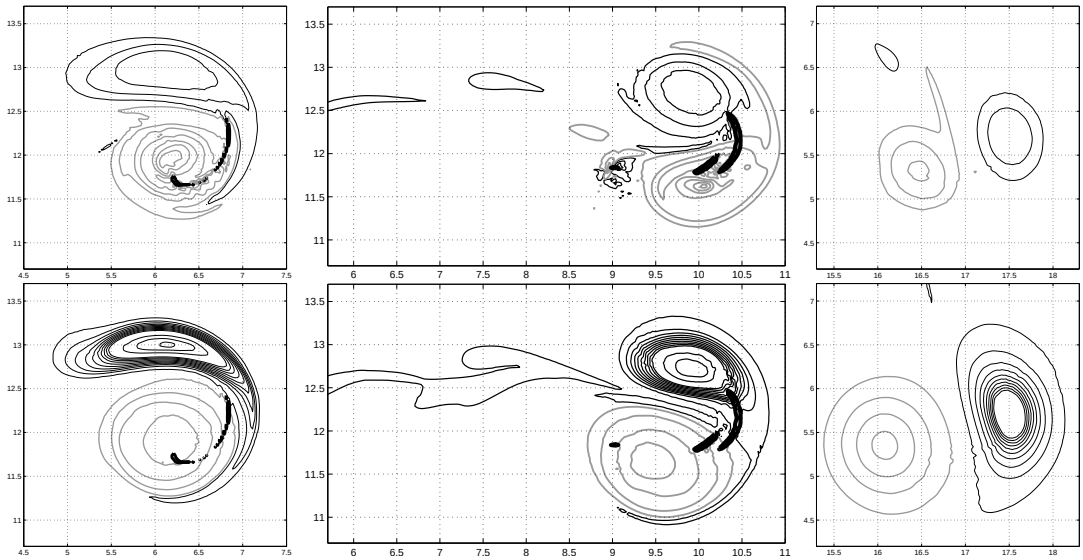


FIGURE 3.33 – PVA contours for the AGM with initial $Ro = 0.4$ and $d = 0.8$. From left to right : $t = 8,\ 40$ (initial adjustment with shock formation) and 200 (ending stage). First row : layer 1 ; second row : layer 2. Contours at interval 1 from ± 0.2 to 9.2 for both layers, and 5 from ± 15 (applicable to cyclone only). Contour for dissipation higher than $7.5 \cdot 10^{-3}$ is superimposed, to visualize the shock, in thick black line.

the dipole with even higher values in Fig. 3.34.

The high-divergence strips inside the dipole are actually associated with a shock, which emerges due to high transonic velocity values at the axis of the dipole at such Rossby numbers. Indeed, we recall that the typical phase velocities of the barotropic and baroclinic IGW are, respectively, 1 and 0.22, to be compared with the maxima of the modulus of the flow velocity in order to estimate the characteristic Froude number $Fr = U/c_0$. As follows from the left panel of Fig. 3.35, the "baroclinic" Froude number is larger than 1 over the whole simulation, and the flow is transonic in the baroclinic sector. Note that the baroclinic Froude number greatly increases during the first stage of the adjustment starting from 0.51 for the QG solution.

The right panel of Figure 3.35 exhibits a typical shock with a peak in the derivative of the velocity and a strong local variation of the layer thicknesses. However, this jump is almost indistinguisheable in the pressure fields, cf. Fig. 3.32. This is explained by the expression of these latter in terms of the thicknesses of the layers :

$$\Psi_1 \propto h_1 + h_2,\ \Psi_2 \propto dh_1 + h_2$$

which shows that the shock may be cancelled in the pressure field of a layer if the jumps of the thicknesses cancel each other . The amplitude of the jump in pressure in another layer is then the jump of the thickness with a factor $(1-d)$, which is small as the stratification is weak. Therefore we have here a *baroclinic shock*, the thickness variations being of opposite sign layerwise (as well as the velocity ones), and the signature in the barotropic field being much weaker than in the baroclinic field (by a factor of 20, cf. Fig. 3.35, right panel). The baroclinic (or *internal*) hydraulic jump in two-layer models has been subject to numerous studies starting from Benton (1954) and Yih et Guha (1955). Criteria of the shock formation derived in these works are based upon layerwise “local” Froude numbers,

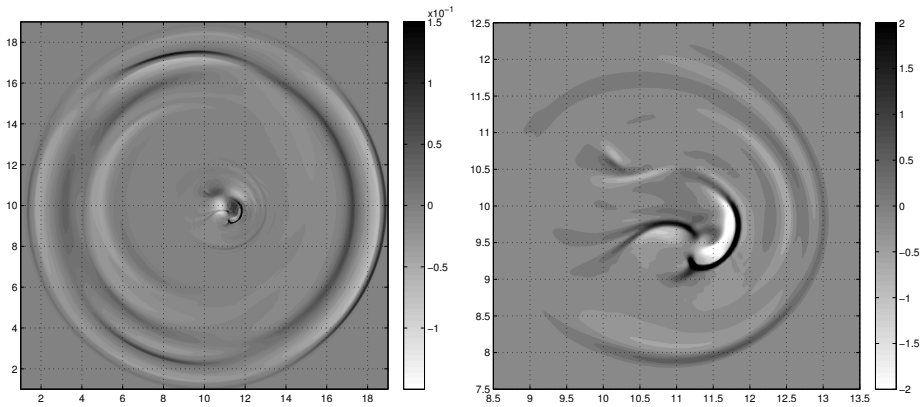


FIGURE 3.34 – Barotropic (left) and baroclinic (right) velocity divergence fields for the adjustment of the quasi-barotropic QG modon with initial $Ro = 0.4$ at $t = 8$. Highest represented values are 0.15 for the barotropic field and 2 for the baroclinic one, while the true maxima reach, respectively, 0.27 and 7.5.

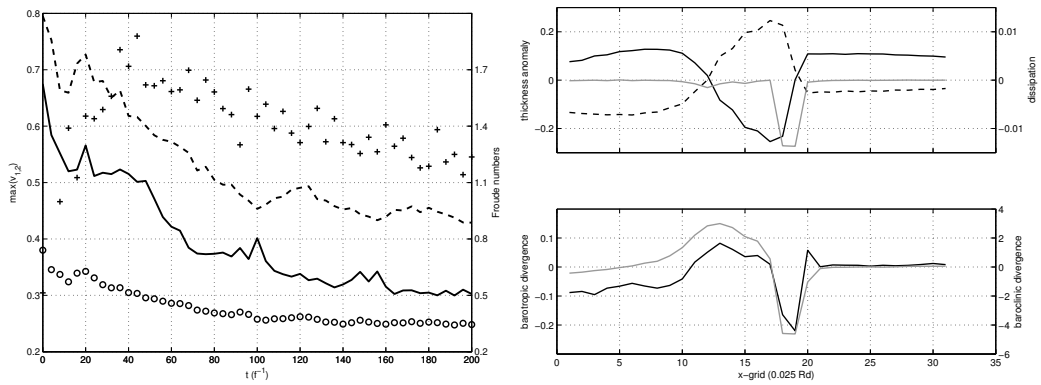


FIGURE 3.35 – Left panel : maximum of the modulus of velocity in the upper (continuous) and lower (dashed) layers (values at the left y-axis), and barotropic (circles) and baroclinic (crosses) Froude numbers (values at the right y-axis). Right upper panel : profiles of the thickness of the upper (black solid line) and lower (black dashed line) layers together with the dissipation (gray) along the dipole's axis at $t = 40$. Right lower panel : barotropic (black) and baroclinic (gray) divergence profiles.

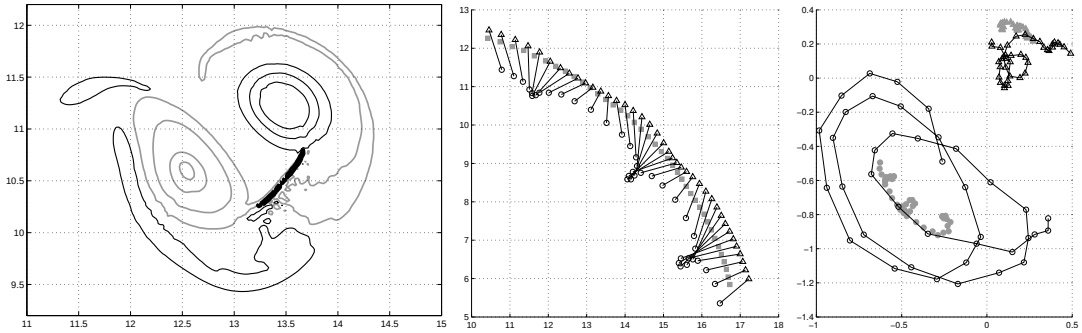


FIGURE 3.36 – Left panel : PVA contours in the upper layer at $t = 88$ and the zone of strong dissipation. Same conventions as in Fig. 3.33. Middle panel : evolution of the position of the barycentres of PVA from $t = 50$ (upper left) to $t = 200$ (lower right). Triangles : upper cyclone, circles : upper anticyclone, gray filled squares : lower total PVA barycentre. Right panel : displacement of the cyclonic (triangles) and anticyclonic (circles) upper (black, empty) and lower (gray, filled) barycentres with respect to the lower total one (thus in $(0, 0)$) from $t = 50$ to $t = 200$. Simulation with initial $Ro = 0.4$, $d = 0.8$.

defined as $|\vec{v}_i|/\sqrt{gh_i}$ (see also Armi (1986)). The shock formation we observe is consistent with these criteria.

It should be reminded that the conservation laws of the two-layer shallow-water model are insufficient to completely fix the Rankine-Hugoniot conditions across the shock, in contradistinction with the one-layer RSW model. Hence, some closure hypothesis is necessary to obtain the shock conditions, as have been discussed in many studies, see e.g. Klemp *et al.* (1994); Montgomery et Moodie (2001); Jiang et Smith (2001); Holland *et al.* (2002). This, together with possible hyperbolicity loss, which we do not encounter in the present simulations, explains the difficulty of constructing reliable numerical schemes for the two-layer RSW equations (Castro *et al.*, 2004) . We recall that the Rankine-Hugoniot conditions consistent with our numerical scheme are momentum conservation layerwise (Bouchut et Zeitlin, 2010).

Despite the weak effect of the shock upon the pressure fields, the dynamical impact of the hydraulic jump is not negligible. It is well known that PVA appears behind a shock, associated to the variation of the Bernouilli function jump along the shock (and, thereby, of the energy dissipation), see Pratt (1983); Schar et Smith (1993). In the present simulation, the shock is a source of dipolar PVA in the upper layer, as follows from Figure 3.36, left panel. Thus created "extra" cyclonic vorticity is being advected around the anticyclonic pole and coming back along the dipole axis, subject to vortex stretching. This extra vorticity produces oscillations of the upper-layer anticyclone about its equilibrium position, cf. Fig. 3.36. It is visible that the barycenter of the negative PVA in the upper layer, which is defined as $\frac{\int \vec{r}|q_{A_i}|H(|q_{A_i}|-0.1)dxdy}{\int |q_{A_i}|H(|q_{A_i}|-0.1)dxdy}$, moves along a quasi-elliptic path with respect to the lower anticyclone's center. The anticyclonic PVA due to the shock is also advected by the cyclonic core, but the latter experiences almost no oscillations, probably because of the higher interface deviation in the cyclonic pole leading to a stronger inter-layer coupling.

Filamentation of vorticity due to this complex process leads to strong attenuation of PVA in the upper layer, as visible in the last panels of Fig. 3.33, together with a decrease in the energy anomaly (mostly in its kinetic component) of 40% over the 200 inertial periods of simulation, which is twice that of the simulation with $Ro = 0.2$ (not shown). Energy

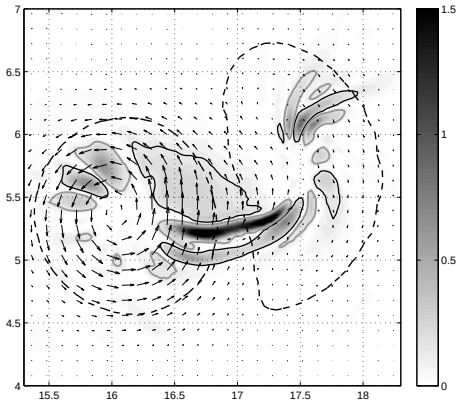


FIGURE 3.37 – Absolute value of the baroclinic divergence field with superimposed velocity for the adjusted AGM with initial $Ro = 0.4$, in levels of gray. Limits of convergence (divergence) zones are indicated by black (gray) contours, at the value 0.15. PVA contour at 0.1 is added in dashed black line.

dissipation is also enhanced by the shock itself, as follows from the Fig. 3.35.

However, the modon stabilizes in the course of its evolution, with no more PV created by the shock which has lost intensity, and becomes a quasi-steady structure (it is not steady since the upper anticyclone undergoes weak quasi-periodic oscillations). The distribution of the baroclinic divergence of the thus adjusted modon at $t = 200$ is given in Fig. 3.37. The barotropic divergence is weak, on the level of surrounding noise, and not shown. One clearly sees the shock with an associated high value 1.5 of nondimensional divergence, and a signature of baroclinic captured waves at the exterior edges of the cyclone and anticyclone. The appearence of such "wave capture" in rotating shallow water is curious, as the dispersion of the baroclinic IGWs here is weak, unlike continuously stratified flows, and the wave-capture mechanism as introduced in Bühler et McIntyre (2005) is not transposable. Nevertheless the IGW signature inside the dipole is similar to that observed for continuously stratified dipoles (Snyder *et al.*, 2007).

Strongly stratified case As we have seen above, the weak signature in the pressure field of the shock inside the dipole at high Ro is due to the weak stratification, i.e. high (close to 1) value of the parameter d. We now present results of the adjustment of the quasi-barotropic modon at Rossby number $Ro = 0.4$ with a lower value of the density ratio $d = 0.6$.

The initial QG modon is very close to the one with $d = 0.8$. A coarser resolution is sufficient in this case ($dx = dy = 0.05$ Rd). We present in Fig. 3.38 the evolution of the PVA fields and their end state in Fig. 3.39. The adjustment is rather different as compared to the previous case. In addition to the strong filamentation, the upper dipole turns around its fellow cyclone and its antycyclonic part is mostly ejected at the end of the rotation. During this process the lower dipole is slightly distorted, but then recovers the usual shape. It drives the structure out of the initial location, leaving the ejected upper-layer anticyclone behind. The final two-layer modon consists of a dipole in the lower layer together with a cyclonic monopole situated at the position of the cyclone in the initial upper-layer dipole. It is similar to the "rider" structures discussed in the literature in the two-layer QG model (Flierl *et al.*, 1980) and to the "triton" obtained by Verron et Sokolovskiy (2002) in the

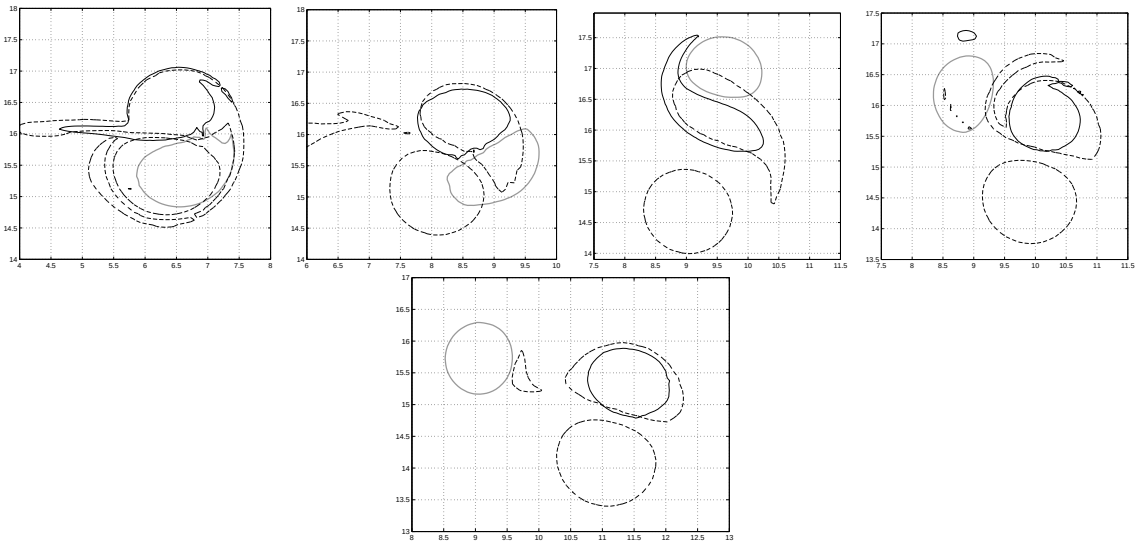


FIGURE 3.38 – PVA evolution for the adjustment of the modon with initial $Ro = 0.4$ and $d = 0.6$. Contours correspond to $\mathrm{PVA}_i = \pm 0.15 f/H_i$, in dotted black line for the lower layer and continuous black and gray lines for, respectively, the cyclone and the anticyclone in the upper layer. From left to right and up to down : $t = 20,\ 40,\ 60,\ 80$ and 100.

studies of ensembles of hetons - point vortex solutions of two-layer QG equations, cf. Gryanik *et al.* (2006).

As visible in Fig. 3.40, the upper layer contains a weak anticyclonic circulation associated with a small pressure anomaly. The result of the ejection of the upper anticyclone is that the shock at the dipole axis disappears. (It is resolution-dependent : with higher resolutions the shock is weakened but persists. This does not affect the reorganisation of the vortex, which is our main emphasis here.) Maximum values of the divergence are indeed reduced to 0.3 for the baroclinic component and 0.03 for the barotropic one, and typical barotropic and baroclinic Froude numbers are now respectively 0.35 and 0.9. The impact of the upper anticyclone ejection is highlighted by the evolution of the maxima of velocity and velocity divergence in the layers presented in Fig. 3.41 for two values of d.

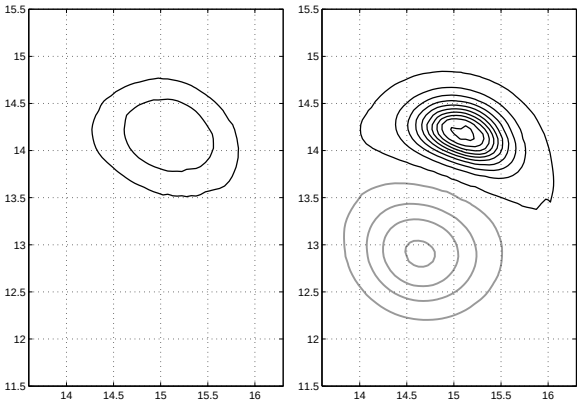


FIGURE 3.39 – PVA in the upper (left) and lower (right) layer for the modon with initial $Ro = 0.4$ and $d = 0.6$ at $t = 160$. Same conventions as in Fig. 3.33.

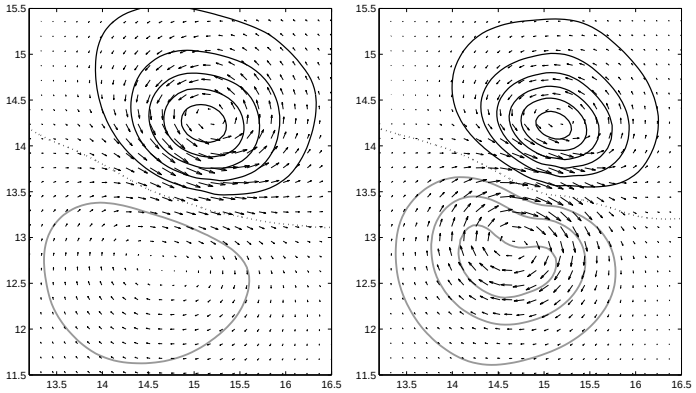


FIGURE 3.40 – Pressure anomaly and velocity fields in the upper (left) and lower (right) layers for the adjusted modon with initial $Ro = 0.4$ and $d = 0.6$ at $t = 160$. Same conventions as in Fig. 3.32.

Note that for the sake of comparison the figure shows simulations with the same resolution (the coarser one, i.e. $dx = dy = 0.05\ R_d$) for both d. With this resolution the shock in the $d = 0.8$ case is weaker than presented above, and almost vanishes at $t \approx 140$, which is why the values of Froude numbers and divergence extrema are rather low at the end of the simulation. It is clear from the Figure that the divergence extrema are highly reduced in the $d = 0.6$ case which leads to approximatively constant velocity maxima (consistent with the absence of dissipative shock), whereas the velocities for $d = 0.8$ undergo a slight but continuous decrease. The same holds for the energy dissipation, which is higher when the hydraulic jump is present, with higher peak values associated with the shock (cf. Fig. 3.35). Total energy anomaly over the 200 inertial periods is reduced by 30% in the case with no shock ($d = 0.6$), whereas it is reduced by 45% with a shock ($d = 0.8$) at the same resolution (not shown). Evolution of barotropic and baroclinic Froude numbers is given in Figure 3.41. We conclude that, even if the velocities are higher in the $d = 0.6$ case, Froude numbers are lower than in the case of $d = 0.8$, after the upper anticyclone was ejected ($t = 60$).

The divergence field presented in Fig. 3.42 shows a net wave signature with higher wave numbers and amplitudes along the dipole's axis, and lower ones at the exterior edges of the poles. Note that the baroclinic divergence amplitude is greatly reduced as compared to the ageostrophic modon with a shock. The scatter plot of the equilibrium state of the "rider" modon shows that it is a (quasi-)steady coherent structure, see Fig. 3.43.

Preliminary discussion of the adjustment experiments

We thus found coherent ageostrophic dipoles in the two-layer shallow water model at large enough Rossby numbers. Such structures were already known in the QG models but were not reported in the full "compressible" shallow water model, to our knowledge, except for simulations in the the two-layer model with a rigid lid where dipoles (and tripoles, see below) were observed at the late stages of the evolution of the unstable isolated vortex in cyclo-geostrophic balance (Baey et Carton, 2002). For relatively low $Ro = 0.2$ we found the basic processes and properties of the modons similar to those in the one-layer model, namely :

– QG modons adjust to ageostrophic ones by emission of inertia-gravity waves,

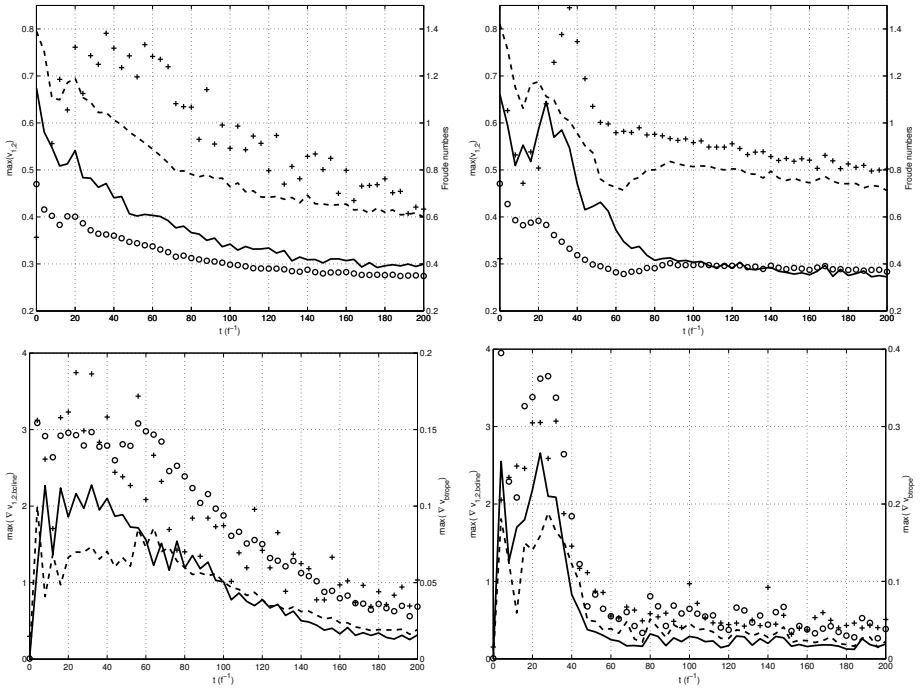


FIGURE 3.41 – Evolution of the velocity maxima (up) and of the divergence maxima (down) for the $d = 0.8$ case (left) and the $d = 0.6$ case (right) at $Ro = 0.4$. Same conventions as in Fig. 3.35, left panel.

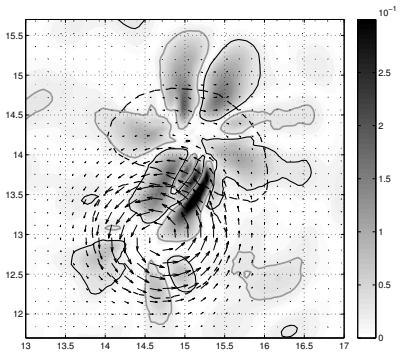


FIGURE 3.42 – Baroclinic divergence field with superimposed velocity for the "rider" modon with initial $Ro = 0.4$ and $d = 0.6$ at $t = 160$. Same conventions as in Fig. 3.37.

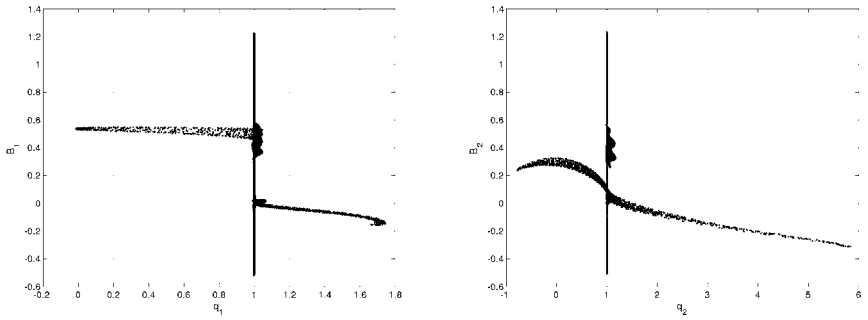


FIGURE 3.43 – Scatter plots B vs. PV in the upper (left) and lower (right) layers for the "rider" modon with initial $Ro = 0.4$ and $d = 0.6$ at $t = 180$. Same conventions as in Fig. 3.27. Left branch of the scatter plot in the upper layer corresponds to the ejected anticyclone which stays at its initial position.

.

- cyclone-anticyclone symmetry is destroyed during this process, resulting in peak-shaped cyclone and spreaded anticyclone,
- the resulting modons are moving along the curved paths with lower than the QG modons velocity,
- a quadrupolar pattern of divergence is associated to the modons.

Yet, increasing the Rossby number leads to drastic changes in the adjustment process due to emergence of a baroclinic hydraulic jump situated at the dipole's axis where the flow becomes transonic. We, thus, get a new baroclinic shock-modon coherent structure generalizing the one-layer shock-modon (Lahaye et Zeitlin, 2012c). With decreasing the density ratio of the layers, the adjustment process undergoes a qualitative change at high Ro, with a vortex reorganization and formation of the coherent "rider" structure (monopole in the upper and dipole in the lower layer). These new features at large Rossby number come with a net increase of the ratio of the maximal values of ageostrophic to geostrophic velocity. Indeed, this ratio was of the order 10^{-1} in the simulation with initial $Ro = 0.2$, whereas it exceeds 1 for the baroclinic component in the simulations with $Ro = 0.4$ (and reaches 0.5 for the barotropic one, with the best resolution we used). The highly ageostrophic processes emerge together with an apparent baroclinic wave capture, although the standard wave-capture mechanism should not work in shallow water.

3.7.4 Collisions of the ageostrophic modons : multipoles in the two-layer RSW model

Scattering of quasi-barotropic modons

Following our approach to one-layer modons, we proceed with simulations of collisions of the ageostrophic modons found above. As in the one-layer case, we hope to find in this way new coherent structures in two-layer rotating shallow water. We have seen above that the ageostrophic modons with $Ro = 0.2$ are, in fact, weakly ageostrophic. Their collisions resemble those of QG modons studied in literature (e.g. Van Heijst et Flór, 1989) and are not presented in this subsection. We will thus present only the results of collisions between two essentially ageostrophic modons with initial $Ro = 0.4$. In previous studies with one-layer model it was found that the AGMs survive frontal collision forming two

Colliding modons	*Ro* (global)	Configuration		Outcome	section
		Orientation	I.P.		
Quasi-barotropic	0.4	180°	0	2 AGMs	3.7.4
Quasi-barotropic	0.4	180°	2	Tripole	3.7.4
Quasi-barotropic	0.4	90°	–	AGM + NAGM	3.7.4
Baroclinic	0.2, 0.3	180°	0	2 AGMs	3.7.4
Baroclinic	0.2, 0.3	180°	2	Tripole	3.7.4
Baroclinic	0.2, 0.3	90°	–	AGM + NAGM	3.7.4

TABLE 3.1 – Configuration of collisions of ageostrophic modons (I.P. : nondimensional Impact Parameter)

AGM after exchange of partners (Ribstein *et al.*, 2010). Afterwards, we found that other collisions may produce new kinds of multipoles in the RSW model : the tripole (T) and the nonlinear ageostrophic modon (NAGM) (Lahaye et Zeitlin, 2011). The former consists of an anticyclonic core with two cyclonic satellites, while the latter is a dipole with a reduced global Rossby number, because of larger distance between the two vorticity cores, and essentially nonlinear scatter plot of B vs PV (cf. Hesthaven *et al.*, 1995). Recently, we presented similar results for shock-modons with $Ro = 0.4$ (transonic one-layer AGM with a hydraulic jump) whose collisions lead to formation of a shock- tripole (Lahaye et Zeitlin, 2012c). Guided by our previous experience, we performed the collission experiments with above-described two-layer modons with similar results, leading to discovery of new types of ageostrophic coherent structures in the two-layer model.

The resolution in these experiments was chosen to be $dx = dy = 0.05$ Rd. The collisions are initialized by cutting the adjusted modon from the previous simulations with $\delta = 0.85$ and $d = 0.8$ at $t = 100$ and then pasting it twice in a new domain at orientations 0° and 180° (except for 2 AGM $\rightarrow$ AGM + NAGM collision, where the orientation angle is 90°, see subsection 3.7.4 below) at different values of the impact parameter (the distance between the axes of the colliding modons). The collisions we studied are summarized in Table 3.1.

2 AGM $\rightarrow$ 2 AGM collision We show in Figs. 3.44 and 3.45 the evolution of the pressure and PVA fields during a typical head-on collision of two modons. We show the fields in the lower layer, their evolution in the upper layer being similar.

It is clear from the figures that modons relax towards their initial shape after scattering. The dissipation rate of the kinetic energy is slightly reduced when the collision occurs (around $t = 50$) (cf. Fig. 3.46), as opposed to the behaviour of the potential energy anomaly. Their variation thus cancel each other, and the total energy is rather well-conserved (the overall energy anomaly loss is 24% for 200 inertial periods computing). Actually, the energy dissipation is only attributable to the intrinsic dissipation by the modons themselves (the average dissipation rate is the same as that of the free modon evolution, without any scattering) and not to the collision, which therefore can be considered as a quasi-elastic process.

Almost no wave radiation is observed during the collision (not shown). This surprising feature was already observed in the one-layer model, and may be explained as follows : in spite of the important ageostrophic component of the modon, the fields evolve slowly with respect to the fast time-scale of the waves. However, the low group velocity of the internal waves together with the strong fine-scale component contained into the shock could have

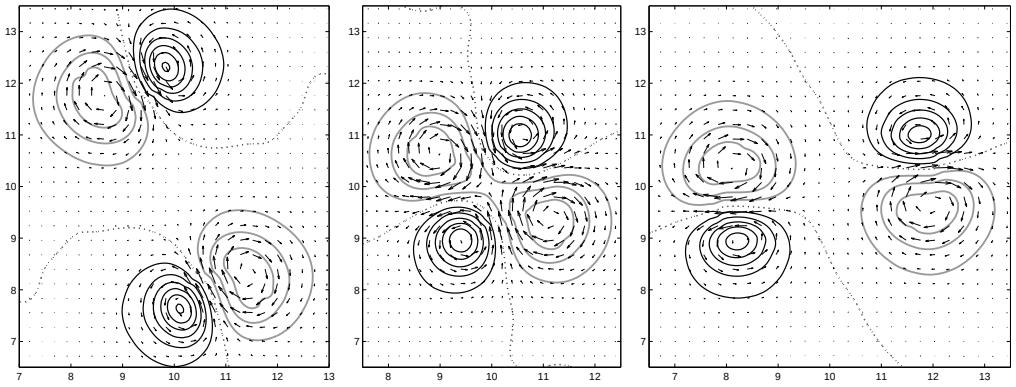


FIGURE 3.44 – Evolution of the lower layer pressure field with superimposed velocity for a collision of two quasi-barotropic AGMs. From left to right : $t = 24,\ 48$ and 68. Same conventions as in Fig. 3.32.

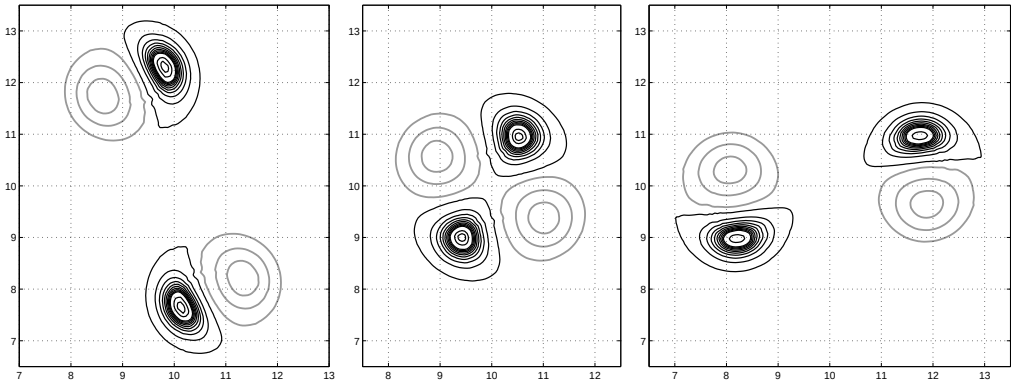


FIGURE 3.45 – Evolution of the lower layer PVA corresponding to Fig. 3.44. From left to right : $t = 24,\ 48$ and 68. Same conventions as in Fig. 3.33.

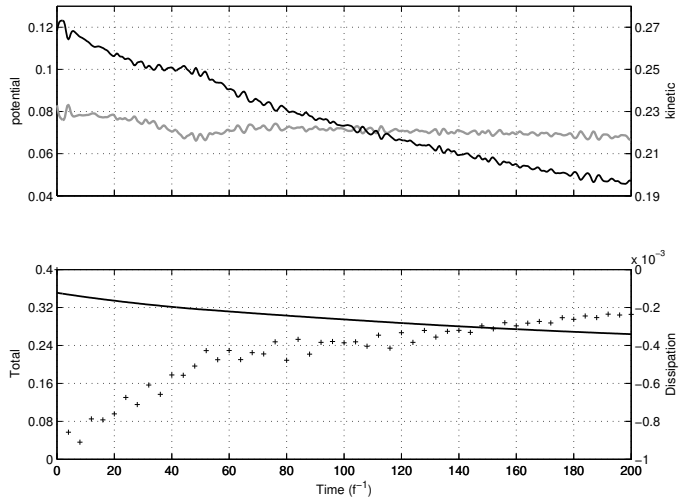


FIGURE 3.46 – Evolution of the energy of the system during the 2AGM → 2AGM collision. Same conventions as in Fig. 3.26.

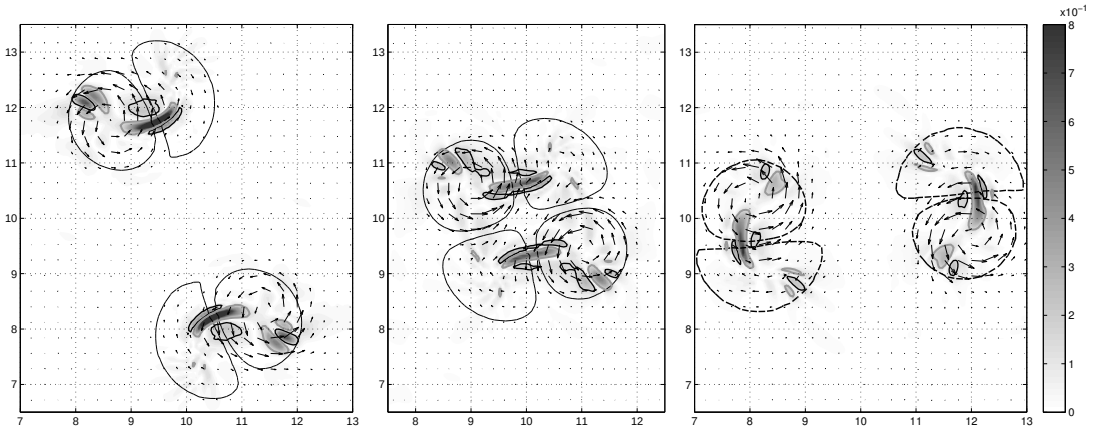


FIGURE 3.47 – Evolution of the baroclinic divergence field with superimposed velocity during the 2AGM → 2AGM collision. From left to right : $t = 24$, 48 and 68. Same conventions as in the Fig. 3.37 with the maximum of represented values at 0.8. Maximal absolute values decrease from 1.3 at $t = 24$ to 0.84 at $t = 68$.

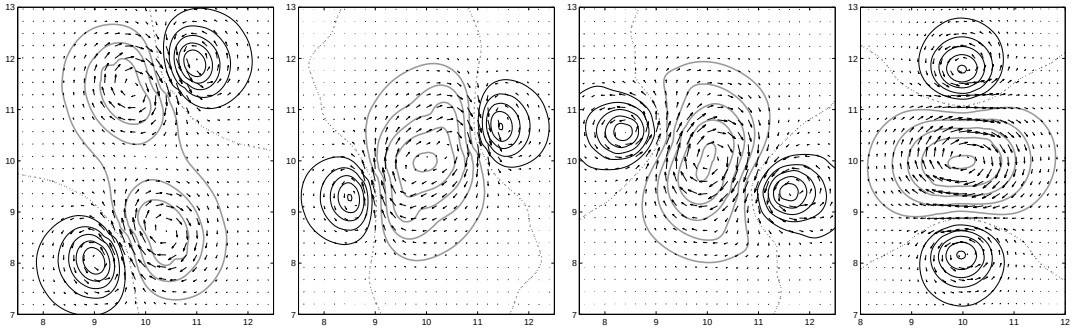


FIGURE 3.48 – Evolution of the pressure anomaly with superimposed velocity fields during the merging of the anticyclones and ageostrophic tripole formation. From left to right : $t = 30$, 45, 60 and 100. Same conventions as in Fig. 3.32.

lead to a wave emission.

The hydraulic jump reforms at the axes of the newly-born modons, see. Fig 3.47, which was double-checked by a higher-resolution simulation. As suggested by our work on shock-modons in the 1-layer model (Lahaye et Zeitlin, 2012c), the outcome of the collision is expected to be similar for a wide range of shock intensities.

2 AGM → T collision At larger impact parameter, when the AGM hit each other by their anticyclones, a coherent tripole forms. Evolution of the pressure and PVA fields in the lower layer are given, respectively, in Figs. 3.48 and 3.49.

One can see that the anticyclones merge, forming a large anticyclonic core with two cyclonic satellites at the same axis. We recognize here a tripolar vortex well known in non-rotating quasi-bidimensional flows, see e.g. van Heijst et Kloosterziel (1989); Kizner et Khvoles (2004a). Yet the tripole is ageostrophic in our simulations. Once again, only a very weak wave emission is present in the velocity divergence fields (not shown). During the fusion, important patches of anticyclonic vorticity are stretched by the cyclones and

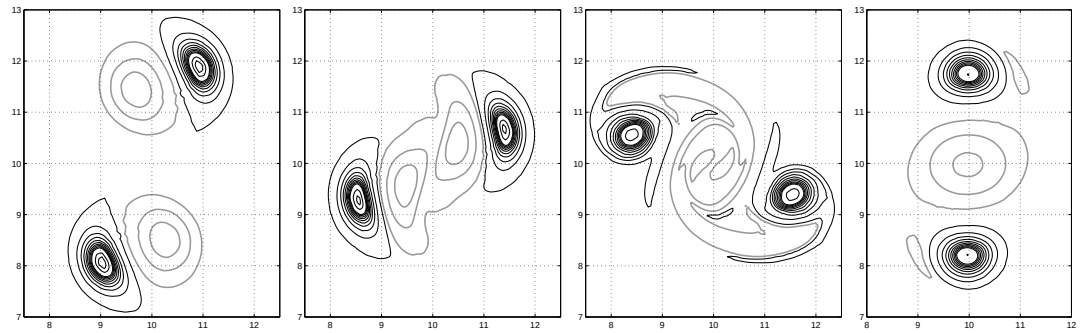


FIGURE 3.49 – Evolution of the PVA field corresponding to Fig. 3.48. From left to right : $t = 30$, 45, 60 and 100. Same conventions as in Fig.3.33.

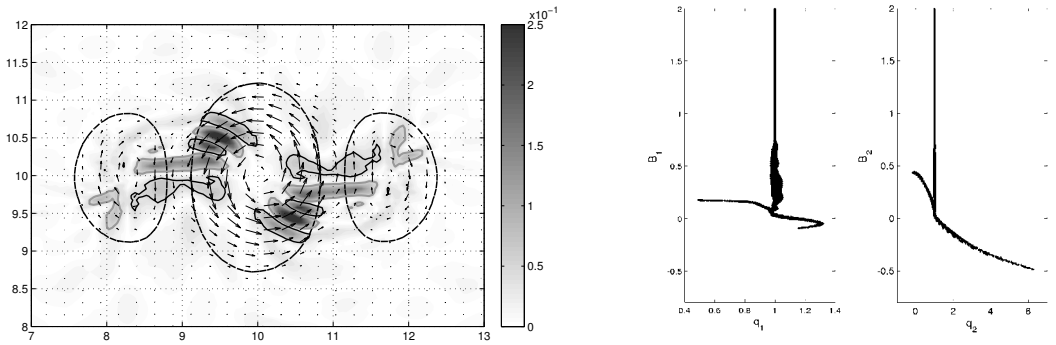


FIGURE 3.50 – Baroclinic velocity field with associated divergence for the ageostrophic tripole at $t = 150$ (left panel - same conventions as in Fig. 3.37 with saturation value 0.25). Right panel : scatter plots B vs. PVA in the upper and lower layers, at $t = 195$ (same conventions as in Fig. 3.27).

vice-versa, leading to some dissipation of (mainly anticyclonic) PV. However, the local Rossby number increases and reaches a value of 2.5 during the fusion, and remains high (greater than 1) for the adjusted tripole. The tripole is a coherent structure. We present the baroclinic velocity fields with associated divergence together with the scatter plots of the Bernoulli function vs PV in Fig. 3.50. A clear wave signature with high divergence values is visible in the baroclinic component, which looks like two wave-packets captured within each jet between the core and the satellites. The barotropic divergence exhibits two weak quadrupoles centred over each cyclonic satellite (not shown). Their amplitudes are three times higher than the one of the ambient barotropic waves (generated by the adjustment of the initial dipole and the numerical adjustment due to initialization of the collision) at $t = 100$ and twice higher at $t = 200$. The tripole is long-living (the collision simulation runs over 400 inertial periods). The ratio of ageostrophic and geostrophic typical velocities is, respectively, 0.3 and more than 1 for the barotropic and baroclinic components. It seems to be consistent with the cyclogeostrophic balance, in agreement with the very low amplitude of the large scale divergence pattern. Thus, as visible in the baroclinic divergence (Fig. 3.50, left panel), the strongly unbalanced flow component resides in captured waves and remains embedded into the tripole until the end of the simulation.

Typical velocities in the upper and lower layers at $t = 100$ are 0.25 and 0.35, and typical

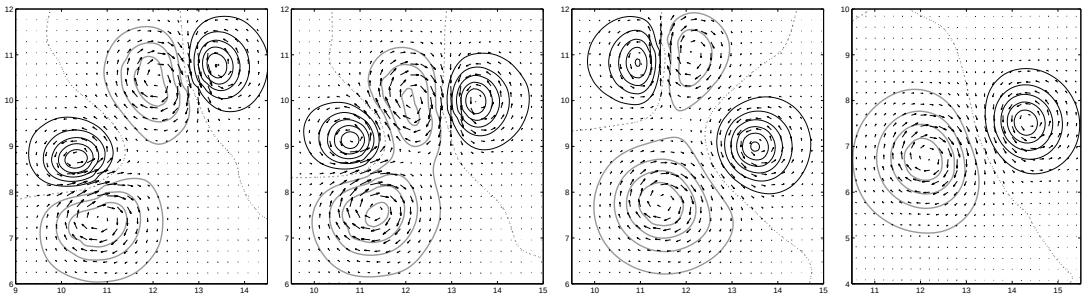


FIGURE 3.51 – Evolution of the pressure anomaly with superimposed velocity field for the AGM → NAGM collision. From left to right : $t = 40$, 52, 76 and 152. Same conventions as in Fig. 3.32.

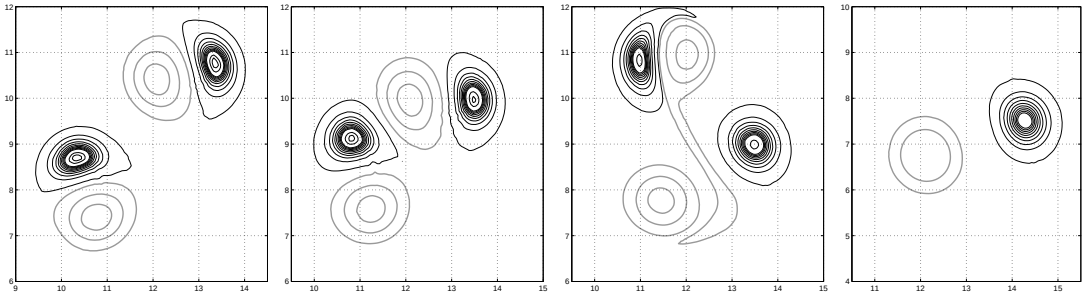


FIGURE 3.52 – Evolution of the potential vorticity anomaly for the AGM → NAGM collision. From left to right : $t = 40$, 52, 76 and 152. Same conventions as in Fig. 3.33.

barotropic and baroclinic Froude numbers, respectively, are 0.3 and 0.7. Thus the flow is subcritical and the hydraulic jumps are absent, which may be deduced from the patterns of the divergence and layer thicknesses, and from the absence of noticeable dissipation which would occur in the presence of discontinuities. The scatter plot shown in Figure 3.50, right panel, exhibits a strongly nonlinear relation between the Bernouilli function and PVA and highlights the coherence of the tripole.

2 AGM → AGM + NAGM collision Another kind of collision is the lateral one with incoming modons' axes at approximatively right angle. It is known that in purely bidimensional non-rotating hydrodynamics, a strictly perpendicular collision of vortex dipoles leads to a dipole and a nonlinear dipole (Couder et Basdevant, 1986). This kind of collision is presented below, with the lower-layer pressure and PVA in Figs. 3.51 and 3.52, respectively.

One sees that a new AGM is formed and goes away upward in the graph. During the collision, the action of two remaining vortices (that is, the former partners of the vortices now bound into a new AGM) slightly compress the new modon and pulls out some anticyclonic vorticity. The weak anticyclonic patch thus pulled away from the AGM is then stretched and dissipated (see. Fig. 3.52). This lack of anticyclonic vorticity in the AGM is afterwards balanced by filamentation of the cyclonic vorticity (not shown) at its rear, in a similar way as during the initial adjustment for $Ro = 0.2$. On the other hand, the remaining vortices of opposite sign form a new dipole with a higher distance between the two vorticity extrema. This is the nonlinear ageostrophic modon (NAGM). Once again,

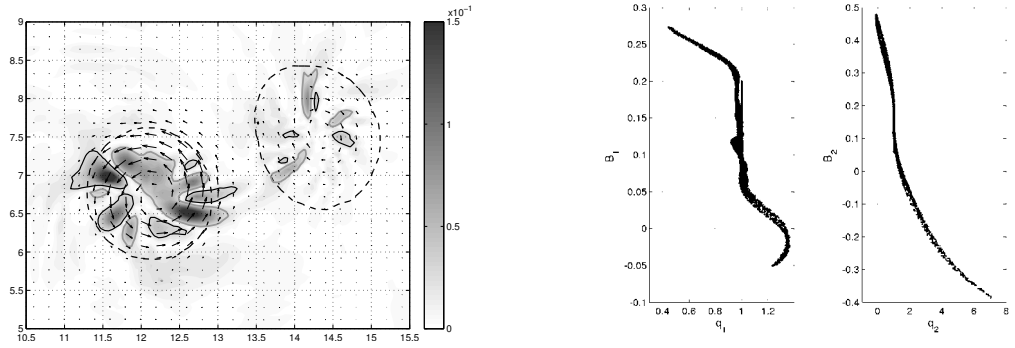


FIGURE 3.53 – Baroclinic divergence with superimposed velocity field at $t = 152$ (left, with same conventions as in Fig. 3.37), and scatter plots (two right panels) at $t = 180$ (same conventions as in Fig. 3.27), for a typical two-layer NAGM. True maximum value for the divergence is 0.3.

there is almost no wave emission during the collision.

The resulting NAGM is characterised by lower local and global Rossby numbers, in agreement with lower typical velocities (0.2 and 0.3 in the upper and lower layers). This is associated with a decrease of the kinetic energy of the system compensated by an increase of the potential energy (not shown). Indeed typical pressure anomalies for the NAGM are stronger, and their spatial extension (as well as that of the thickness anomalies) is higher than for the AGM (compare Fig. 3.51 between $t = 40$ and $t = 152$). It contains a strongly asymmetric baroclinic component (the maximum baroclinic velocity is 0.14 and the barotropic one is 0.25), with a visible wave signature (see Fig. 3.53) over each pole, with higher amplitude in the (more intense) anticyclone. This structure is coherent, as is clear from the scatter plot. Like for its known bidimensional counterpart, it has a strongly nonlinear shape, which is at the origin of the name (Hesthaven *et al.*, 1995; Kizner et Khvoles, 2004b).

Frontal scattering of baroclinic modons

The above-presented results on the scattering of quasi-barotropic modons are not very different from what occurs in the barotropic one-layer model (Lahaye et Zeitlin, 2011) and (Lahaye et Zeitlin, 2012c), which is due to the almost barotropic character of ageostrophic modons. The main difference are trapped waves which appear in the baroclinic component in the two-layer case. Obviously, the baroclinic component itself is a totally new feature in the two-layer model.

On the other hand, the baroclinic modons have clearly different vertical structure, which is why we expect different results for their collisions. We thus take the baroclinic modons with initial $Ro = 0.2$, $\delta = 0.85$ and $d = 0.8$ and follow the same procedure as for the quasi-barotropic modons to study frontal collisions. It is worth noting that the baroclinic modon is far from the configuration with an infinite depth / infinite density of the lower layer, which would correspond to a passive lower layer, and hence reduced-gravity effective one-layer model. Indeed we have seen that the lower-layer circulation is non zero, albeit weak. Hence we are dealing with a truly baroclinic modon and not a reduced-gravity one-layer one.

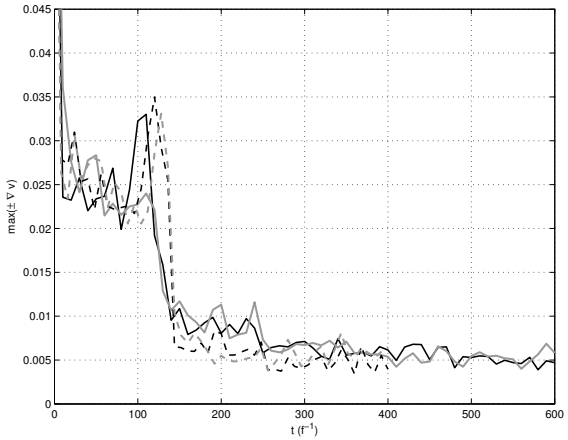


FIGURE 3.54 – Evolution of the divergence extrema during the 2AGM → T (solid) and the 2AGM → AGM + NAGM (dashed) baroclinic collision with initial $Ro = 0.2$ (initial AGMs collide at $t \approx 110$). Convergence (divergence) in black (gray).

Three kinds of collisions were performed, along the same lines as in the quasi-barotropic case above. We have found that despite the differences in their structure, as compared to one-layer or two-layer quasi-barotropic AGM, the baroclinic modons also survive collisions, leading to either a pair of baroclinic modons after partner exchange when the impact parameter is close to zero, or to a baroclinic tripole or NAGM when the modons encounter each other, respectively, on their anticyclone sides or at perpendicular paths (not shown).

Yet some differences exist, as compared to the quasi-barotropic modons collisions. Because the Rossby number is smaller in the baroclinic case, the Froude numbers (both baroclinic and barotropic) remain less than one. Hence, no shock waves embedded into the resulting structures are observed. It then appears that the formation of the tripole, or of the NAGM, occurs with a sharp decrease of the upper-layer divergence. The resulting divergence pattern consists of two weak quadrupoles centred over each cyclonic satellite in the upper layer, as concerns the tripole, and a very weak quadrupole over the cyclone for the NAGM. This feature is shown for the tripole formation in Figs. 3.54 and 3.55. The lower-layer divergence remains very low during the simulations. Typical values of the divergence extrema decrease from 0.03 down to 0.01 for the tripole and 0.005 for the NAGM. Yet the amplitude of the waves emitted through these processes is very small. A weak tripole is forming in the lower layer with vorticity poles of opposite sign compared to the upper ones. Nevertheless, typical values of thus created lower layer PVA remain very low (the ratio of typical values of upper to lower layer PVAs is about 20).

We also undertook simulations with baroclinic modons at higher Rossby number ≈ 0.3 (see Fig. 3.55 for the tripole). Actually, the initial QG dipole was computed with $Ro = 0.25$, then afterwards the velocity fields was amplified (by a factor 1.2 or so) in order to get a higher Rossby number. This allowed us to get a baroclinic modon with rather large Rossby number, and without outcropping. Results for both the adjustment and the scattering of such baroclinic modons are rather the same, besides the divergence field which is obviously stronger as the modon becomes more ageostrophic.

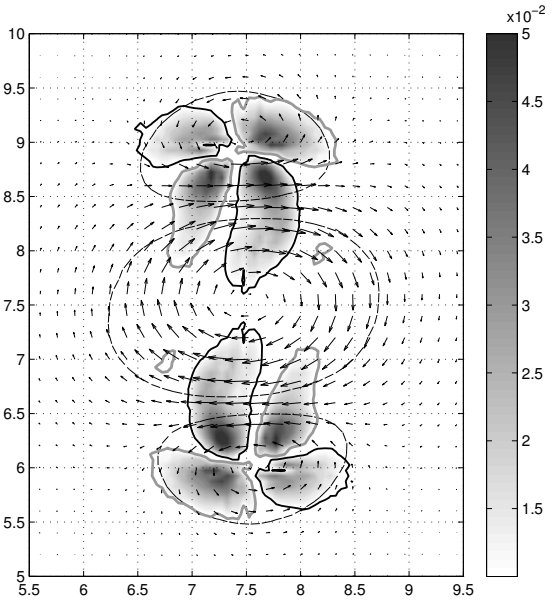


FIGURE 3.55 – Layer one divergence with superimposed PVA contour at 0.1 and velocity for the tripole with initial $Ro = 0.3$ at $t = 256$. Same conventions as in Fig. 3.29 with limiting values [0.01 0.05].

3.7.5 Conclusions

Thus, we have constructed two classes of exact steady-moving symmetric dipolar solutions of the quasigeostrophic limit of the two-layer rotating shallow water equations with a free surface, and showed that they fall into two classes : quasi-barotropic and baroclinic. While the first may be thought of as a direct generalisation of the barotropic modons in the one-layer rotating shallow water, the second is proper to the two-layer system. We used them both, with moderate Rossby numbers and certain reasonable values of depth and density ratios for the fluid layers, for initialization of the numerical simulations of the full two-layer rotating shallow water model with well-balanced shock-capturing code, and showed that both adjust to new ageostrophic asymmetric steady dipoles, similar to what happens in the barotropic one-layer rotating shallow water model. These results indicate the existence of steady ageostrophic solutions of the two-layer rotating shallow water equations and give an example of "spontaneous imbalance". The baroclinic and the barotropic velocity fields, though, behave differently for two classes of solutions during such adjustment. These differences are quantified.

An increase in Rossby number changes the scenario of adjustment leading to the appearence of baroclinic hydraulic jumps inside the dipoles (although only quasi-barotropic modons exist for the highest value of the Rossby number $Ro = 0.4$ we used) . Depending on the density ratio they lead to new coherent structures, shock-modons : the modons with incorporated shock, for weak stratification ; or "riders" : monopoles in the upper layer driven by dipoles in the lower layer, for strong stratification. The ageostrophic component of the flow of these new structures is strong, with a signature of wave capture at the edges, besides the shock in the middle. Yet, the inertia-gravity wave emission is practically nonexistent during the collision process.

As in the one-layer rotating shallow water, the collisions between the ageostrophic

modons may be either quasi-elastic, or produce new coherent structures : ageostrophic tripoles and so-called nonlinear dipoles with strongly curved scatter plot. This conclusion holds both for moderate and high Rossby-number colliding modons, with embedded shocks in the last case.

It should be stressed that production of tripoles and nonlinear dipoles by colliding symmetric dipoles is well-documented in the literature in the framework of the incompressible two-dimensional Euler equations (or equivalent QG equations on the f-plane). It is, however, rather surprising that baroclinicity and compressibility do not essentially affect these processes, even when colliding dipoles contain embedded shocks. In the case of quasi-elastic scattering with partner exchange these shocks re-form inside the exiting dipoles.

Acknowledgements : This work was supported by the French ANR grant "SVEMO". The help of F. Bouchut with the numerical code is gratefully acknowledged.

3.8 Résumé et perspectives

Dans ce chapitre, la dynamique de structures multipolaires agéostrophiques barotropes et baroclines a été étudiée.

Les propriétés importantes dégagées dans les modèles à une et deux couches sont similaires. Cependant, les phénomènes de capture d'ondes ou de formation d'un front (ou choc) au sein des structures apparaissent pour des nombres de Rossby moins élevés dans le modèle barocline, ce qui est en accord avec la réduction du *gap* spectral par rapport au modèle barotrope. La modification de l'anomalie de vorticité potentielle générée par le front reste faible et ne destabilise pas les structures observées. Dans certains cas, cette modification est même inexistante. Par ailleurs, une plus grande variétée de structures cohérentes a été obtenue en RSW deux couches.

Les structures tourbillonaires observées montrent une forte attractivité, ce qui indique qu'elles constituent probablement des solutions stables du système et donc des minima d'énergie. Ceci a été montré, en particulier, par des simulations numériques mettant en jeu des interactions simples entre des dipôles, à savoir des collisions à deux membres. L'issue la plus fréquente est la reformation de ces dipôles via un processus quasi-élastique avec échange de partenaires, ou bien la formation d'autres structures cohérentes. Même lorsque le nombre de Rossby est grand, l'émission d'ondes d'inertie-gravité observée est negligeable et le système évolue manifestement dans une dynamique "équilibrée", au sens large. Les résultats obtenus ici montrent que ces états à l'équilibre "agéostrophique" constituent des minima d'énergie du système. Il est intéressant d'extrapoler ces résultats à la dynamique d'un ensemble de plusieurs structures cohérentes en interaction, qui peut correspondre au stade final de l'évolution d'un écoulement turbulent en l'absence de forçage. Nos résultats montrent (i) que l'évolution d'un tel système ne conduira vraisemblablement pas à la génération substantielle d'ondes d'inertie-gravité, écartant ainsi ce mécanisme en tant que possible source de dissipation et de mélange, et (ii) que l'on peut anticiper la reformation de structures cohérentes à l'issue de l'évolution de ce système, généralisant ainsi les résultats connus sur la turbulence quasi-bidimensionnelle aux écoulements agéostrophiques.

Ce résultat d'absence d'émission d'ondes d'inertie-gravité est robuste, même pour des nombres de Rossby grands, associés à des nombre de Froude supérieurs à l'unité, pour lesquels la formation de chocs au sein des structures a été observée. Plus généralement, le phénomène d'ondes capturées *au sein* des structures est intriguant. En effet, un tel processus (*wave-capture*, en anglais) est connu dans les équations primitives (Bühler et McIntyre, 2005) et a également été étudié au sein d'un dipôle de vorticité dans ces équations par Plougonven et Snyder (2007). Néanmoins, le mécanisme impliqué dans ce phénomène dépend de la relation de dispersion des ondes et n'est pas valable dans les équations RSW du fait de la faible dispersion des ondes courtes dans ce modèle. Les ondes piégées observées ont une longueur d'onde courte et une amplitude importante, participant ainsi à la dissipation d'énergie au sein même de la structure. La formation de fronts est associée à une dissipation d'énergie plus importante.

Suivant les travaux de Snyder *et al.* (2007, 2009), il pourrait être intéressant d'étudier en détail les caractéristiques de ces ondes en regardant, par exemple, les perturbations linéaires autour du dipôle observé. Un autre type d'analyse à mener consisterait à effectuer une séparation dynamique approximative des parties équilibrée et non-équilibrée de l'écoulement, en utilisant une relation d'équilibre plus générale que l'équilibre géostrophique. Une analyse simple de la partie équilibrée au sens du géostrophisme est en effet donnée dans la

section 3.7.3 et montre une déviation dans les zones de forte courbure, associée à la force centrifuge. L'utilisation d'une relation incluant notamment des corrections divergentes (e.g. la relation de Charney-Bolin généralisée) peut permettre une meilleure visualisation des caractéristiques dynamiques de la partie agéostrophique de l'écoulement.

CHAPITRE 4

Turbulence d'ondes et de tourbillons

4.1 Notions de turbulence (quasi) bidimensionnelle

4.1.1 Turbulence bidimensionnelle incompressible

Les écoulements atmosphériques et océaniques à grande échelle, de par leur nature intrinsèquement turbulente et quasi-bidimensionnelle (dans le plan horizontale par l'action conjuguée de la rotation, la stratification et le faible rapport d'aspect, cf. section 1.1), ont constitué une motivation forte pour l'étude de la turbulence bidimensionnelle depuis des décennies. Par ailleurs, les caractéristiques phénoménologiques et théoriques de la turbulence à deux dimensions sont singulièrement différentes de celles des écoulements tridimensionnels, singularité qui est à l'origine d'un intérêt fort pour ce problème en soi, de sorte que la turbulence bidimensionnelle est peu à peu devenu une discipline distincte. Au delà de l'intérêt théorique, la turbulence bidimensionnelle présente l'avantage d'être plus facile à simuler numériquement (le nombre de degrés de liberté du système est plus petit) et à étudier expérimentalement (e.g. Tabeling, 2002; Kellay et Goldburg, 2002). Ces expériences consistent principalement en des écoulements confinés dans des films minces (obtenus grâce à des solutions contenant des tensioactifs – les bulles de savons en étant l'exemple archétype, (e.g. Couder et Basdevant, 1986)), ou bien des écoulements de fluide ferromagnétique forcés par un champ électromagnétique.

L'absence de "vortex stretching" – l'amplification d'un filament de vorticité par élongation le long de son axe dans les équations d'Euler 3D – dans les écoulements bidimensionnels est associée au fait que la vorticité ($\zeta = \partial_x v - \partial_y u$, i.e. sa composante verticale pour un écoulement 2D) est un invariant lagrangien en l'absence de dissipation :

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla})\zeta = 0, \tag{4.1}$$

d'où l'existence d'une constante du mouvement appelée *enstrophie* :

$$Z = \frac{1}{A} \iint_A \zeta^2 d^2\vec{r}. \tag{4.2}$$

Les écoulements turbulents 3D se caractérisent par une cascade directe de l'énergie, c'est à dire un transfert par triades résonantes entre les modes vorticaux ers les petites échelles. Cette cascade est associée à un spectre de puissance en $k^{-5/3}$, initialement introduit par Kolmogorov en 1941 et basé sur l'homogénéïté et l'isotropie de l'écoulement. Dans l'espace physique, ce transfert vers les petites échelles est justement associé à l'étirement longitudinal des filaments de vorticité qui concentre (par conservation du moment angulaire et du volume) la vitesse dans un rayon plus petit, jusqu'à atteindre l'échelle où la viscosité va dissiper l'énergie associée. En l'absence de vortex stretching, ce processus n'existe pas dans les écoulements incompressibles 2D. Il existe deux cascades dans ces derniers (Kraichnan, 1967), associés aux deux invariants que constituent l'énergie et l'enstrophie : une cascade inverse d'énergie, associée à un spectre de puissance en $k^{-5/3}$ avec un flux spectral d'énergie négatif – et donc un transfert de l'énergie vers les grandes échelles ; et une cascade directe d'enstrophie, dont le spectre caractéristique [1] est en k^{-3}. L'évolution des écoulements 2D consiste donc généralement en la formation de tourbillons de plus en plus grand par fusion de tourbillons, générant dans leur entourage de la filamentation de vorticité par distorsion de petites structures environnante. La littérature à ce sujet est extrêmement vaste et nous ne citerons que les travaux de McWilliams (1984) qui adopte une approche de dynamicien des fluides géophysiques, et la revue récente de Boffetta et Ecke (2012). Les tourbillons ainsi créés sont des structures cohérentes (un tourbillon axisymétrique est une solution du système) qui inhibent le phénomène de cascade inverse de l'énergie (McWilliams, 1990). En effet, la filamentation de vorticité est associée à une dissipation, tandis que les tourbillons concentrent de fortes valeurs de vorticité (en valeur absolue). La distribution de cette dernière dévie alors de la gaussianité : en particulier, le moment normalisé d'ordre 4 – appelé *Kurtosis* – est supérieur à celui correspondant à une distribution gaussienne, indiquant des fortes valeurs "plus fréquentes" que pour cette dernière. Ceci caractérise ce qui est appelé *intermittence* en turbulence. La cohérence de l'écoulement entraîne une raréfaction des triades résonantes associées à la cascade inverse de l'énergie (McWilliams, 1990), d'où l'inhibition de cette dernière. Les spectres associés à ces régimes cohérents ont une pente plus raide que k^{-3}.

L'état final du système est généralement constitué de quelques tourbillons cohérents bien séparés les uns des autres ; parfois seulement deux tourbillons de vorticité de signe opposée (la circulation totale est ainsi maintenue nulle), lorsque la taille du domaine est petite (par rapport à l'échelle typique de la condition initiale).

4.1.2 Turbulence quasi-2D : fluides géophysiques

La modélisation des écoulements géophysiques par les équations d'Euler 2D incompressibles est une approche satisfaisante pour obtenir une description globale, valable à grande échelle. Les conséquences des résultats énoncés précédemment sur la phénoménologie de la turbulence 2D sont les suivantes :

– La formation de structures cohérentes est un élément important pour le transport de quantités dynamiques, thermodynamiques, chimiques et biologiques, notamment dans les océans (cf. sections 1.1 et 1.4). Dans l'atmosphère, les phénomènes de blocage ont un impact météorologique important aux moyennes latitudes, en maintenant un

1. on peut montrer que ce spectre est associé à des phénomènes non-locaux qui brisent les hypothèses permettant sa dérivation. Kraichnan (Kraichnan, 1967) montra que cette non-localité conduit à un spectre modifié en $\log(k/k_0)k^{-3}$.

même régime de temps sur une longue période (au delà de la semaine), ce qui peut générer des épisodes de froid ou des vagues de chaleur.

– Le mécanisme de dissipation d'énergie par viscosité moléculaire intervient à très petite échelle. Dans le cadre des équations de Navier-Stokes 3D, cette échelle est appelée échelle de Kolmogorov est associée à un nombre de Reynolds *local* de l'ordre de l'unité, et le rapport du l'echelle de Kolmogorov sur la taille typique des grandes structures est donné par $Re^{-3/4}$. S'il est vrai que les écoulements géophysiques sont tridimensionnels à très petite échelle, il manque un mécanisme permettant de transférer l'énergie de l'écoulement vers ces petites échelles. L'apport d'énergie étant continu, qu'il s'agisse du forçage par le vent pour les océans ou le flux radiatif incident pour l'atmosphère, il existe nécessairement un puit d'énergie qui maintient l'équilibre global de ce système. Or, l'énergie tend à s'accumuler aux grandes échelles. Les différents mécanismes identifiés pour la retransmettre aux petites échelles sont les instabilités des écoulements, l'interaction avec la topographie et la génération d'ondes de gravité (souvent associée à l'un ou l'autre des deux précédents mécanismes – cf. chapitre 2 et section 1.3).

Les équations d'Euler 2D incompressibles sont invariantes par addition d'un terme de Coriolis constant. En effet, ces équations s'écrivent, en notation tensorielle :

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i + \partial_i P = 0, \tag{4.3}$$

$$\partial_i v_i = 0, \tag{4.4}$$

où les indices i, j dénotent les composantes et P est la pression. On peut également les réécrire en une équation pronostique pour la vorticité et une équation diagnostique pour la pression :

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\partial_t + v_i \partial_i)\zeta = 0, \tag{4.5}$$

$$\Delta P = \partial_i v_j \partial_j u_i. \tag{4.6}$$

L'ajout du terme de Coriolis ne change que cette dernière équation (4.6), ce qui n'altère pas la dynamique du système. Or, dans les écoulements géophysiques, la force de Coriolis et la stratification sont responsables de l'existence d'une longueur intrinsèque, le rayon de déformation de Rossby (cf. section 1.1). La présence de cette longueur constitue une différence importante, et a motivé l'utilisation des équations quasi-géostrophiques pour l'étude de la turbulence géophysique quasi 2D (e.g. Charney, 1971; Cushman-Roisin et Tang, 1990). Ces dernières sont formellement analogues aux équations d'Euler 2D : en particulier, la conservation lagrangienne de la vorticité potentielle permet de définir une enstrophie et donc la prédiction de deux régimes de cascade. En revanche, l'existence du rayon de déformation entraîne une relation différente entre la vorticité potentielle (analogue à la vorticité dans les équations d'Euler) et la vitesse – ou la fonction de courant (e.g. Zeitlin, 2007). En effet, la fonction de courant Ψ associée à une anomalie de vorticité localisée (typiquement pour un point-vortex : $\zeta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$) dans les équations d'Euler décroit comme le logarithme de la distance à la perturbation $|\vec{r} - \vec{r}_0|$:

$$\Delta\Psi(\vec{r}) = \zeta(\vec{r}) \quad \xrightarrow[\zeta(\vec{r}) \to \delta(\vec{r}_0)]{} \quad \Psi(\vec{r} - \vec{r}_0) \propto \log|\vec{r} - \vec{r}_0|. \tag{4.7}$$

Dans les équations QG, cette anomalie (de vorticité potentielle, notée ici q_A) est associée à une fonction de courant qui est proportionnelle à $K_0(r/R_d)$, où K_0 est la fonction de

Bessel modifiée du second type et R_d le rayon de déformation :

$$\left(\Delta - \frac{1}{R_d^2}\right)\Psi(\vec{r}) = q_A(\vec{r}) \quad \xrightarrow[q_A(\vec{r})\to\delta(\vec{r}_0)]{} \quad \Psi(\vec{r}-\vec{r}_0) \propto K_0\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{R_d}\right). \tag{4.8}$$

La fonction K_0 a un comportement asymptotique logarithmique pour de petites valeurs de son argument, et une décroissance exponentielle pour de larges valeurs. Il en résulte un effet d'écrantage : des perturbations de vorticité potentielle localisées (par exemple des vortex) suffisamment séparés – de l'ordre de quelques R_d – *n'interagissent pas*. Cet effet est susceptible de jouer un rôle important dans l'évolution d'un écoulement turbulent en inhibant la cascade inverse d'énergie, et en contrôlant la taille typique des tourbillons cohérents finalement formés.

Le modèle QG constitue ainsi, de par la présence du rayon de déformation, une meilleure représentation des écoulements géophysiques turbulents par rapport aux équations d'Euler 2D incompressibles.

4.1.3 Turbulence en Rotating Shallow Water : introduction à l'article

Les équations QG présentent une symétrie par rapport au signe de la vorticité potentielle, alors que la dynamique des tourbillons observés dans les océans et l'atmosphère montre une asymétrie cyclone/anticyclone (e.g. Chelton *et al.*, 2011), dont l'origine est majoritairement dynamique, bien que les effets physiques et thermodynamiques y jouent également un rôle. Les équations RSW ne contienne pas cette symétrie – qui provient de l'hypothèse d'écoulement à l'équilibre géostrophique inhérente aux modèles QG (cf. section 1.3.2) – et permettent ainsi de caractériser l'asymétrie, coinjointement aux effets agéostrophiques pris en compte dans le modèle.

Les écoulements géophysiques contiennent également une composante rapide associée aux ondes d'inertie-gravité (cf. sections 1.1 et 1.3), qui sont filtrées dans les modèles équilibrés. L'évolution d'un champ d'ondes aléatoire constitue un problème en soi dans de nombreux systèmes physiques (e.g. Nazarenko, 2011). Le modèle RSW permet l'inclusion de cette composante dynamique (cf. section 1.3), et plusieurs théories existent pour la dynamique d'un ensemble d'ondes d'inertie-gravité dans les équations RSW (cf. section 4.2.1 et (Falkovich et Medvedev, 1992; Zeitlin, 2005)). Au delà de cette problématique, l'utilisation du modèle RSW nous permet d'étudier la turbulence d'ondes et de tourbillons et les interactions éventuelles entre ces deux composantes.

Nous présentons donc dans la suite une étude de la turbulence d'ondes et de tourbillons dans un modèle RSW à une couche. Y sont présentés des résultats de simulations numériques concernant la turbulence de tourbillons (avec la présence d'ondes) et d'ondes (sans tourbillons). L'approche originale de cette étude réside dans l'utilisation de deux types de conditions initiales radicalement différentes pour la turbulence de tourbillons. Le premier consiste en un champ de vorticité aléatoire, à l'équilibre géostrophique et suivant un spectre de puissance imposé. Il s'agit de conditions initiales fréquemment utilisées pour l'étude de la turbulence en déclin. Le second type, en revanche, est un ensemble de modons (obtenus en partie 3.1) disposés avec des orientations différentes. Ces structures sont cohérentes et agéostrophiques (la distribution de la vorticité n'est pas gaussienne), et l'état initial de l'écoulement est très différent de ce qui est obtenu avec une distribution aléatoire de la vorticité – qui plus est à l'équilibre géostrophique. Ceci permet notamment de discuter l'impact des conditions initiales sur l'évolution du système. La cohérence de l'écoulement

et l'impact du rayon de déformation sur la formation de structures cohérentes, l'asymétrie cyclone/anticyclone et la dynamique des ondes sont ainsi discutées. Ces résultats ont donné lieu à une publication dans le journal *"Physics of Fluids"* (Lahaye et Zeitlin, 2012a). Le contenu de cet article est inclus, en anglais, dans la section suivante.

4.2 Article : *Decaying vortex and wave turbulence in rotating shallow water model, as follows from high-resolution direct numerical simulations*

[N. Lahaye and V. Zeitlin, *Phys. Fluids*, 24(11) :115106 :1–13, 2012]

Abstract : We report results of direct numerical simulations of decaying turbulence in an inviscid rotating shallow water model. We use a new-generation high-resolution well-balanced shock-capturing finite-volume scheme with several types of initializations : "classical" ones with random velocity and/or height fields, or an initialization with randomly oriented coherent vortex dipoles. Together with "full" turbulence simulations we also perform pure wave-turbulence ones, starting from an initial random wave field of small amplitude with zero potential vorticity anomaly and a given initial spectrum. Statistical properties of the rotating shallow water turbulence, as well as the development of coherent structures and their interactions are studied in detail. For all "full" turbulence simulations we find a tendency to form coherent structures with clear cyclone-anticyclone asymmetry and very steep energy spectra, with exponents close to -6. We also observe a decorrelation of the vortex and wave fields in time, even at significant Rossby numbers. However, we do not observe a universal power law in the evolution of coherent vortices, predicted by the "universal decay" theory for the 2D turbulence. A clear sensitivity to the initial conditions is thus established. For wave-turbulence simulations we observe a tendency to form very steep spectra different from the predictions of the so-called weak turbulence, and of both the turbulence of cusped nonlinear waves and the shock turbulence.

4.2.1 Introduction

As is well known, at large scales the dynamics of the atmosphere and the oceans is quasi two-dimensional, due to the effects of stratification and rotation inhibiting vertical motions. This is one of the main motivations of the long-lasting studies of two-dimensional incompressible turbulence. A great number of works on this topic are available in literature (see e.g. the review (Tabeling, 2002)). If the plane of motion rotates uniformly, the equations of motion of two-dimensional incompressible fluid remain the same, up to a change of variables. Yet, the background rotation induces, among others, the appearance of an intrinsic length scale, the Rossby deformation radius, in the primitive equations of the atmosphere and the ocean, which is expected to inhibit the inverse energy cascade process. This is why the two-dimensional quasi-geostrophic (QG) model, where the deformation radius explicitly appears, is more appropriate for studying the turbulence of large-scale oceanic and atmospheric flows (Larichev et McWilliams, 1991; Cushman-Roisin et Tang, 1990). In turn, the QG model is an asymptotic limit at small Rossby numbers of the rotating shallow water (RSW) model, which is a standard conceptual model of (barotropic) dynamics of the oceans and the atmosphere at synoptic scales, e.g. (Gill, 1982). RSW allows for rudimentary vortex-stretching (compressibility) and inertia-gravity waves (IGW), which are filtered out in the QG models. The model incorporates in a rather simple way both major actors of the dynamics of the atmosphere and the oceans, vortices and waves, and their interactions. While the vortex modes are *balanced* (in the sense of geostrophic balance) at small Rossby numbers, the IGW are essentially *unbalanced*. It is natural to use this model for studies of the geophysical fluid turbulence, and in particular of the role of

the interactions of balanced and unbalanced components of the flow. Yet, the number of works in this direction is rather scarce.

Farge et Sadourny (1989) simulated the evolution of the forced wave-vortex RSW turbulence using a pseudo-spectral code. They obtained power spectra following a k^{-4} law. They also argued that at large scales (i.e. larger than the Rossby deformation radius) the cascade processes may be inhibited, resulting in a $k^{-7/3}$ power law. Later, Yuan et Hamilton (1994) performed a detailed analysis of the energy transfer between balanced and unbalanced modes in the same type of simulations and observed a k^{-3} power spectrum, fairly similar to what is expected in the enstrophy cascade regime of two-dimensional turbulence. Polvani *et al.* (1994) performed simulations of decaying RSW turbulence and reported the emergence of a cyclone-anticyclone asymmetry during the evolution of an initial Gaussian random-phase vorticity field. These papers are, to our knowledge, the state of the art of the simulations of rotating shallow water turbulence.

Independently, there exist theoretical predictions for energy spectra of weakly and strongly nonlinear waves in the RSW model. Thus, the model was exploited in the studies of the so-called weak turbulence of IGW (Falkovich et Medvedev, 1992), where equilibrium energy spectra in $k^{-8/3}$, corresponding to the constant energy flux through the spectrum and $k^{-7/3}$, corresponding to constant wave-action flux, were calculated from the solutions of a kinetic equation obtained for small-amplitude random-phase waves interacting through quartet resonances. A specific class of exact solutions — stationary essentially nonlinear waves with a limiting cusp-shape profile — are known in the RSW model, with a prediction for the energy spectrum in k^{-4} for an ensemble of such waves (Shrira, 1986). At the same time, shallow water equations being equivalent to those of barotropic two-dimensional gas, shocks (hydraulic jumps) are inherent in the model. Predictions for energy spectrum in k^{-2} of the turbulence produced by an ensemble of random shocks were made by Kuznetsov (2004). Neither wave-turbulence nor shock turbulence theories were ever confronted with numerical simulations, to our knowledge.

Yet, new high-resolution numerical tools became available recently for the RSW equations, the so-called well-balanced entropy-satisfying finite-volume schemes (Bouchut, 2007). These numerical schemes are based upon the conservative form of the equations, and thus respect the conservation laws. They maintain the states of geostrophic equilibrium, on the one hand, and on the other hand, are shock-capturing, with guaranteed energy decrease across the shocks ("entropy-satisfying" property). These schemes, thus, resolve well both the vortex and the wave component of the flow, including shocks, and are natural to apply for simulations of decaying RSW turbulence. Among other applications, such schemes were used to investigate the properties of coherent quasi-stationary vortex structures in the RSW model, and a whole zoo of such structures is now known (Kizner *et al.*, 2008; Lahaye et Zeitlin, 2011). This gives an opportunity of alternative, with respect to the standard random-field one, initializations of the simulations of decaying turbulence by random ensembles of coherent structures, and thus of testing the sensitivity of the results to initialization.

Below we report the results of numerical experiments on decaying RSW turbulence with the new well-balanced entropy-satisfying finite-volume scheme and different types of initializations : the traditional for turbulence simulations ones, with random velocity and pressure fields, and the "non-traditional" ones, with randomly oriented coherent dipoles, where the individual dipole fields are imported from previous numerical experiments. We also report the simulations of the wave turbulence initialized by an ensemble of IGW with

random phases and given initial energy spectrum. No explicit dissipation is introduced in the code. The dissipation is purely numerical, weak and localized in the zones of strong gradients, as was confirmed by numerous tests of the code.

The paper is organized as follows. In section 4.2.2, we give a description of the initial conditions used in the simulations. In section 4.2.3 we discuss the general behavior of the decaying vortex flows, and in section 4.2.4 the impact of the initial conditions on the evolution of the flow. We compare the results of our experiments on wave turbulence with existing theoretical predictions in section 4.2.5. Section 4.2.6 contains summary and discussion.

4.2.2 Initializations

We start by recalling the equations of the RSW model and introducing notation and important dynamical quantities. The RSW equations on the $f-$plane, where the latitudinal variation of the Coriolis parameter is neglected, read :

$$\begin{aligned} (\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)u - fv + g\partial_x h &= 0, \\ (\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)v + fu + g\partial_y h &= 0, \\ \partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Here u and v are the $x-$ and $y-$components of the velocity, h is the thickness of the shallow water layer, H_0 is its unperturbed value, $f = const$ is the Coriolis parameter, and g is gravity. The important quantity is the potential vorticity (PV) :

$$q = \frac{\zeta + f}{h}, \tag{4.10}$$

where $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$ is the relative vorticity. The PV is a Lagrangian invariant in the absence of dissipation. It's anomaly is defined as $q_A = q - f/H_0$. The model possesses an intrinsic length scale, the Rossby deformation radius $Rd = \frac{\sqrt{gH_0}}{f}$. The Rossby number $Ro = \frac{U}{fL}$ characterizes the intensity of the vortex motion, where U and L are typical velocity and size of the vortex. The energy of the system is the sum of kinetic and potential energies, and is given, up to a constant density, by

$$E = \int\int dxdy \left(h\frac{u^2+v^2}{2} + g\frac{h^2}{2} \right). \tag{4.11}$$

Our numerical scheme integrates the equations (4.9) rewritten in the conservative form, with the choice of numerical fluxes which maintains the balanced states and ensures the energy decrease across the shocks (Bouchut, 2007). For all the simulations presented in the paper we used periodic boundary conditions.

Four different types of initializations of numerical simulations are used in this work. One is devoted to the study of pure wave turbulence, and consists of an ensemble of random-phase IGWs in the wavenumber range $4 < K < 400$ (here and below, $K = k/2\pi$, with k the modulus of the wave-vector), and the initial energy spectrum in k^{-2} or k^{-3}. The amplitudes of the waves are small, of the order of 10^{-3} in non-dimensional terms, and taken as solutions of the equations (4.9) linearized about the state of rest. By construction, the PV anomaly of such configuration is identically zero. The numerical domain is $(0.4\ Rd)^2$, with a resolution 1000×1000. Higher resolution and, thus, a smaller domain are necessary in this case in order to resolve the small-scale part of the wave spectrum.

Type	Label	Initial anomalies	Ro	$\frac{\max(\lvert\zeta_0\rvert)}{f}$	Bu	Mean energy anomaly	$< \Omega_0 >$
Coherent-structure	C1	all fields	0.1	0.7	0.16	$1.6 \cdot 10^{-3}$	0.03
	C2	all fields	0.3	3.5	0.16	$2.4 \cdot 10^{-2}$	0.43
	C3	all fields	0.6	6.5	0.16	$5.5 \cdot 10^{-2}$	1.12
Random-value cell-wise	P1	height field only	0.07	0.3	2	$5.1 \cdot 10^{-3}$	0.01
	P2	velocity field only	0.25	1.6	1.6	$4.1 \cdot 10^{-3}$	0.47
	P3	all fields	0.25	2.5	1.6	$4.1 \cdot 10^{-3}$	0.48
Spectral bump ($m = 25$)	B1	all fields	0.1	1.5	2.5	$6 \cdot 10^{-4}$	0.21
	B2	all fields	0.45	5	2.5	$4 \cdot 10^{-3}$	1.37
	B3	all fields	1	9	2.5	$1.6 \cdot 10^{-2}$	5.73
Spreaded spectral bump ($m = 8$)	B4	all fields	0.5	7	2.5	$7.4 \cdot 10^{-3}$	16.98

TABLE 4.1 – Initial conditions for different runs

Vortex turbulence simulations are initialized either with an ensemble of randomly oriented coherent structures with strongly correlated velocity and pressure (height) fields, or using a randomly distributed vorticity field. For coherent-structure initializations, we used a 8×8 ensemble of so-called ageostrophic modons. These latter are obtained by adjustment in the full RSW model of an initial perturbation corresponding to the exact analytic dipolar solution of the QG equations (Ribstein *et al.*, 2010). In finite time, a steady-moving quasi-stationary state is reached in this way. It was demonstrated (Ribstein *et al.*, 2010; Lahaye et Zeitlin, 2011) that such modon is robust and long-living. The calculational domain in the simulations with coherent-structure initialization has the size $(32\ Rd)^2$, while the grid size is $dx = dy = 0.05\ Rd$. This method of initialization is essentially different from what is used in most of the studies of (quasi) two-dimensional turbulence. The initial state is not in geostrophic, but in ageostrophic balance. The divergence field associated to each dipole has a characteristic quadrupolar form (Lahaye et Zeitlin, 2011; Ribstein *et al.*, 2010). These simulations are referred to by labels C1 to C3.

For the sake of comparison, we also undertook numerical simulations with initial random fields. This was done by either computing a random value of the height anomaly field in each cell of a ten-times coarser grid (labels P1 to P3), or by initializing the height anomaly field with imposed energy spectrum of the form $\frac{k^{m/2}}{(k+k_0)^m}$, where k_0 is a characteristic wavenumber corresponding to the maximum of the energy density and m is a "spread" constant (this shape of the energy spectrum is described as a "spectral bump" below), and random phases of the Fourier modes, with subsequent inverse Fourier transform (labels B1 to B4). The velocity field is then initialized using the geostrophic wind relation and above-defined height field. Thus, the initial state is balanced. It is to be emphasized that although the divergence field is absent at $t = 0$, it appears in the form of random IGW through the inital geostrophic adjustment process due to discretization errors and because the geostrophic flow is not a stationary solution of the RSW equations (in other words, the

initial time derivative of the divergence is not zero). Numerical domain for the simulations with this kind of initial conditions is $(16\ Rd)^2$ with $dx = dy = 0.04\ Rd$ and $(8\ Rd)^2$ with $dx = dy \sim 0.0156\ Rd$ for the latter.

Note that the calculational domains are smaller in the random initializations than in the coherent-structure ones, because of the presence of smaller scales in the initial fields. Indeed, the typical length scale of the initial configuration is chosen to be smaller than the Rossby deformation radius, in order to check the influence of the latter on the energy cascade. Note also that the shape of the energy spectrum for the initial conditions with cell-wise random height anomaly peaks at a value corresponding to the sub-grid size, with a k^2 slope [2] for smaller wavenumbers.

Various runs for the "full" (vortex + wave) turbulence are summarized in Table 4.1. These runs are named simply "vortex turbulence" below, to distinguish them from purely wave turbulence to be discussed in section 4.2.5. They are arranged according to the type of initial conditions, global and local initial Rossby numbers, and the typical initial length scale given via the Burger number $Bu = (Rd/L)^2$.

The local initial Rossby number here is the ratio of the maximal absolute value of initial relative vorticity estimated from its value and trend just after the initial adjustment, and the planetary vorticity : ζ_0/f . The global Rossby number is defined either as the maximum value of the modulus of the velocity divided by f and multiplied by the energy centroid, or as the mean absolute value of the vorticity divided by f. We recall that the centroid of energy is defined as $\langle k \rangle = \int kE(k)\,dk / \int E(k)\,dk$. Also given for each initial configuration are the mean energy anomaly and the enstrophy, defined by $\Omega = \int\int h{q_A}^2 dxdy$. One sees from the Table that, because of the coherent distribution of vorticity, close Rossby numbers for coherent and random initial conditions are not associated with mean energies of the same order. Throughout the paper, we will mainly rely on the results from the runs C2 (a coherent-structure initialization), B2 (a random one with a Rossby number close to C2) and B3 (a random one with initial mean energy close to C2). One sees that the initial mean enstrophy is much greater in the run B3. However, it rapidly decreases and, after a few tens of inertial periods, reaches rather the same value as in the run B2. The vorticity fields corresponding to the different types of initialization are shown in Figure 4.1. Here and below, the length scale is nondimensionalized by the Rossby deformation radius, while the time and the vorticity are given in nondimensional units of f^{-1} and f, respectively.

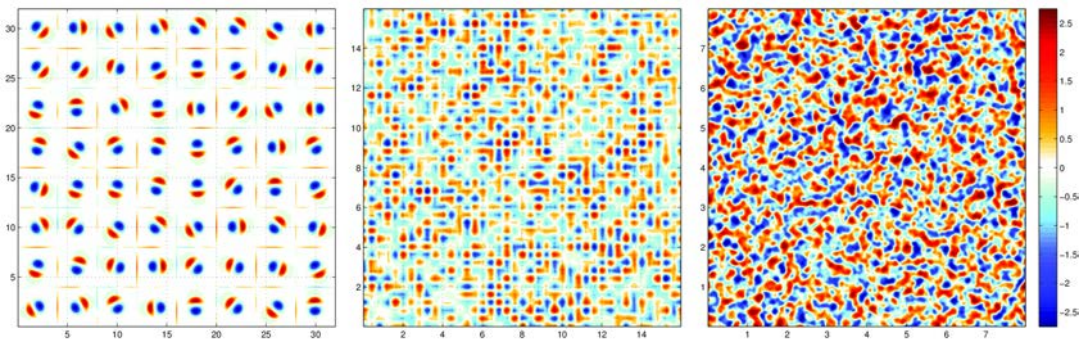


FIGURE 4.1 – Initial vorticity fields for runs C2 (left), P3 (middle) and B2 (right).

2. The white noise corresponding to the potential energy spectrum gives a purple noise for the kinetic energy, with our procedure

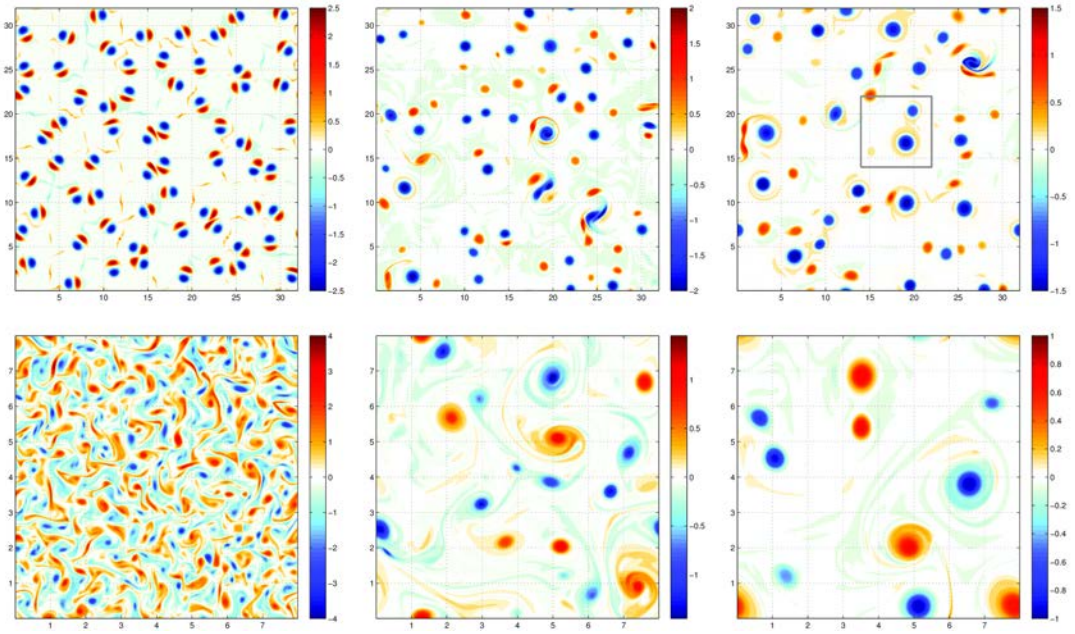


FIGURE 4.2 – Evolution of the vorticity field (in units of f) for runs C2 (up) and B2 (down) at $t = 10$ (left), 250 (middle) and 500/750 (top/bottom). The green square in the upper right panel gives the size of the domain for runs B.

4.2.3 General features of the evolution of the vortex system

Here we recapitulate the common features of the evolution of freely decaying vortex turbulence, as observed in our numerical simulations. We will rely on the runs B2, B3 and C2, which are typical for the evolution of an initially overall random field and a random-dipole one, respectively. Unless otherwise mentioned, these results are general in their class. The evolution of the vorticity field is visualized in Fig. 4.2. One sees the formation of larger coherent vortex monopoles through mergers and filamentation of vorticity, which are of common knowledge in the two-dimensional turbulence. Yet, we should stress that they are obtained here with a compressible model. The evolution of the energy of the system (in units of $\rho g H_0^2$), which is presented in Fig. 4.3 exhibits a transfer from the kinetic energy, which is dominant as expected in vortex dynamics, to the potential energy. This may be associated with the formation of coherent structures with stronger and wider surface deviations. It is to be emphasized that the relative energy dissipation rate $(\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial t})$ is rather weak, of the order 10^{-4}, and is a little higher for the random initial conditions due to the presence of small scales and high wavenumber IGW emission, enhancing the numerical diffusion.

Thus we see that different initializations produce qualitatively similar states at the late stages, although the mechanisms involved are clearly different : on the one hand, we have complex interactions between modons, with collisions and fusions of vortices. On the other hand, coherent structures emerge from a chaotic flow through organization of the vorticity field and inverse energy cascade. The vorticity field at the late stages consists of an ensemble of near-axisymmetric well-separated vortex monopoles (Fig. 4.2, right panels). Note that for the simulations with coherent initializations (like the run C2 presented here), the late stages exhibit a clear cyclone-anticyclone asymmetry in favor of

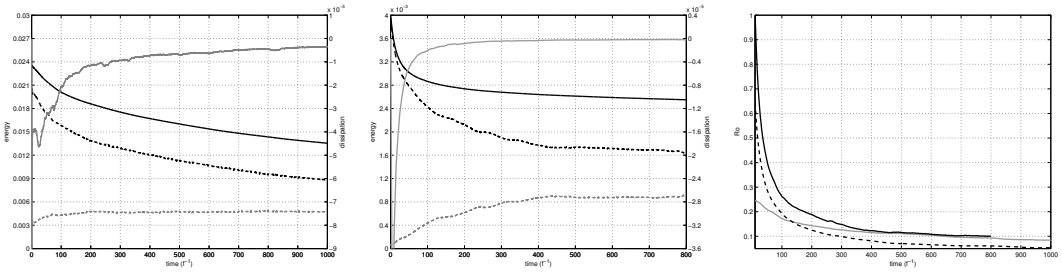


FIGURE 4.3 – Evolution of the mean energy for runs C2 (left) and B2 (middle). Black continuous : total energy anomaly, black dashed : kinetic energy, gray dashed : potential energy anomaly, gray continuous : dissipation, calculated as the departure of the discrete energy balance in each grid cell averaged over all cells. Right panel : evolution of the Rossby numbers computed using the mean of the absolute value of the vorticity for runs C2 (continuous gray), B2 (dashed black) and B3 (continuous black).

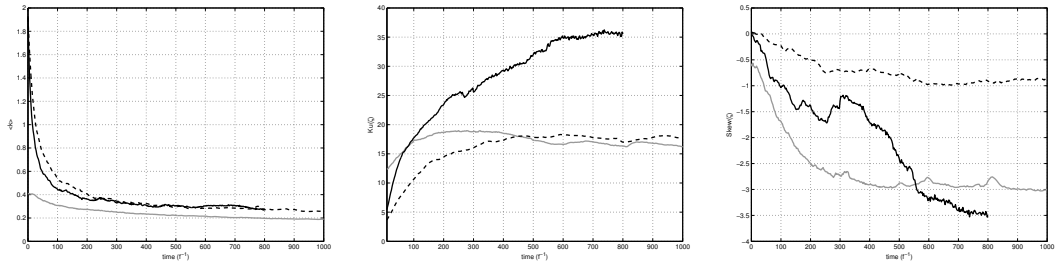


FIGURE 4.4 – Evolution of the centroid of energy (left), the kurtosis (middle) and the skewness (right) of the vorticity for runs B2 (black dashed), B3 (black continuous) and C2 (gray).

anticyclones, in the sense that they are in greater number and are more axisymmetric than the cyclones. This is in accordance with the cyclone-anticyclone asymmetry already observed by (Polvani *et al.*, 1994; Cushman-Roisin et Tang, 1990). Such property is specific to the shallow water dynamics at high Rossby numbers (in our case for $Ro > 0.1$), while pure two-dimensional incompressible Euler equations are cyclone-anticyclone symmetric. Evidence of this asymmetry is manifest in the evolution of the skewness (the normalized third order moment) of the vorticity, as visible in Fig. 4.4.

The evolution of the centroid of energy and the kurtosis (the normalized fourth order moment) of the vorticity are also presented in this Figure (first two panels). It is clear that the emergence/strengthening of coherent structures is associated with the decrease of the energy centroid, which may be considered as an evidence of the inverse energy cascade. One may see a more or less distinct saturation of these quantities, which is a manifestation of the inhibition of the cascade processes due to the coherent structures, as explained by McWilliams (1990), and to the impact of the finite deformation radius [3]. Indeed the typical size of the vortices at this stage is of the order of Rd, and looking at the evolution of the vortex ensemble we see that neighboring vortices of the same sign practically do not merge, or produce a great amount of vorticity filaments. This is due either to the instability of

3. The notions of direct/inverse energy cascade are more appropriate in the context of forced turbulence. Following Polvani *et al.* (1994), we use it in a broader sense to describe the energy transfer towards smaller/larger scales.

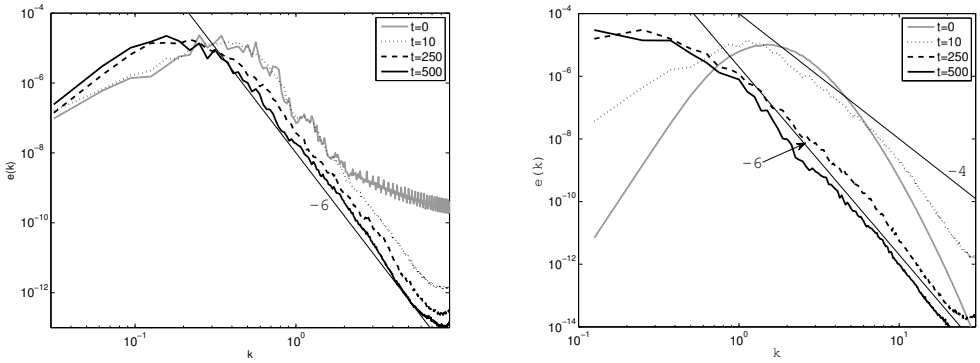


FIGURE 4.5 – Energy spectrum at $t = 0$ (gray), 10 (black dotted), 250 (black dashed) and 500 (black continuous) for runs C2 (left) and B2 (right).

larger vortices, or to the screen effect of the finite deformation radius. We see however that the run with coherent initial conditions exhibits larger structures, of the order of 2 *Rd*.

The energy spectra exhibit a maximum at the location in the k- space fairly corresponding to the centroid of energy, and a steep slope beyond it with a power law estimated at k^{-6}, see Fig. 4.5. As compared to the well-known enstrophy cascade power law k^{-3}, it is much steeper. We have to stress, however, that the evolution of the system with random initial conditions, cf. the right panel of Fig. 4.5, goes through an "inertial regime", corresponding to a period of active cascade processes, during which the spectrum exhibits a slope close to k^{-4}.

Finally, we note that the divergence field at the end of the simulations has no correlation with the vorticity field, nor with the modulus of its gradient (not shown), being a random wave field of rather weak magnitude (of order 10^{-2}, in units of f). As already mentioned above, the initial divergence field for the ensemble of modons is driven by the vorticity, each vortex dipole bearing a quadrupole of divergence (Ribstein *et al.*, 2010). The correlation of the divergence and vorticity disappears in course of evolution, as the modons are destroyed. We thus have an indication of the wave-vortex decoupling. This might seem not surprizing in view of relatively small global Rossby numbers at the late stages, cf. Fig. 4.3, right panel. Indeed, wave-vortex decoupling (splitting) may be proved in the RSW model at low *Ro* (Reznik *et al.*, 2001). Yet, the local Rossby numbers remain high (greater than 1) at the late stages of the simulation (cf. Fig. 4.2, right panels).

4.2.4 Impact of the initial conditions

As already stated, one of the goals of the present work is to study the influence of the initial conditions on the evolution of RSW turbulence and, thus, a degree of universality of the latter. In order to quantify the vortex system we applied a vortex census method (Weiss, 1991; McWilliams, 1984). It is based on the Okubo-Weiss criterion which compares the rotation and the strain rates : $Q = \zeta^2 - \sigma^2$, with $\sigma = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}$ where $\sigma_n = \partial_x u - \partial_y v$ and $\sigma_s = \partial_x v + \partial_y u$ are respectively the normal and shear strains. A simply-connected domain where this quantity is positive and the mean vorticity is greater than some fixed threshold is considered as a coherent vortex. The proper value of the dimensionless threshold is of the order of the initial global Rossby number of the flow for coherent-vortex initializations and, for simulations with random initializations, the global Rossby number at the beginning of

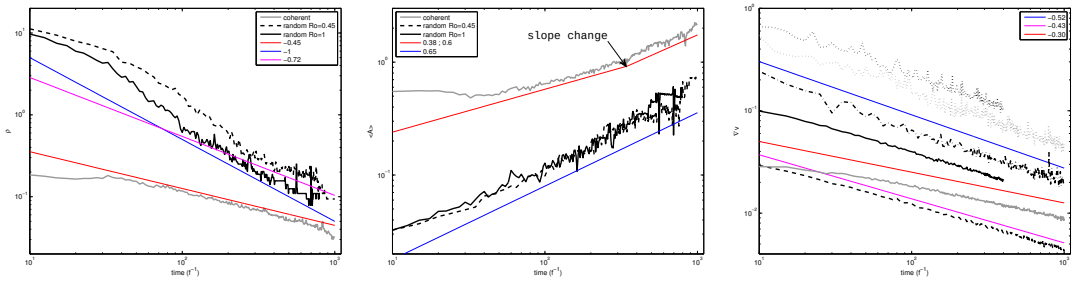


FIGURE 4.6 – Evolution of the vortex density (left) and the mean vortex area (middle) for the runs B2 (black dashed), B3 (black continuous) and C2 (gray). Right panel : evolution of the mean (continuous and dashed lines, same conventions as for the two left panels) and the maximum absolute value of the divergence (B2 : black dash-dotted, B3 : black dotted, C2 : gray dotted).

the inertial regime, once the initial adjustment with strong energy dissipation ended (cf. Fig. 4.3, middle panel). Theoretical predictions for the decay law of purely two-dimensional decaying turbulence, under assumptions of self-similarity and conservation of both the kinetic energy and the extrema of the vorticity, were derived by Carnevale *et al.* (1991). Such scaling laws were observed in laboratory (Hansen *et al.*, 1998) and numerical (Weiss et McWilliams, 1993; Carnevale *et al.*, 1991) experiments, showing power laws with typical exponents — most often, for the vortex density — in the range $[0.71 - 0.75]$ (note that the theory does not predict the value of this coefficient). Yet, the universality of this scaling is not totally clear in the 2D turbulence (van Bokhoven *et al.*, 2007).

In Figure 4.6 we show the evolution of the vortex density ρ, defined as a number of coherent vortices per unit area, and the normalized mean area of the vortices $< A >$ defined as the total area occupied by coherent vortices divided by the number of vortices and normalized by the area of the domain, as observed in the runs B2, B3 and C2. The scaling exponents found in all of our simulations are summarized in Table 4.2.

The evolution of the ensemble of vortices roughly follows power laws, at least once the coherent vortices have emerged, but the relations between the exponents of the different quantities do not follow the universal decay theory, and vary from one run to another. We observe a change in the slope of different quantities in time. For random initializations only the later times, when the vortex census method works properly, are relevant because at earlier stages the flow is not coherent enough to allow for a clear separation between the vortices. For these reasons, one should discard the values obtained for the run B4, which exhibits distinct vortices only at the very end of the simulation (simulation time here is less than for the run B2). However, in the simulations with coherent initializations (runs C2 and C3) or with a random initialization at large Rossby number (run B3), there is a more or less distinct change in the slope within the range of time when the flow is organized into well-defined coherent vortices. The values of the scaling factors obtained for the different runs are very different, and only one of them (run B2) corresponds to the classical values observed in two-dimensional models, whereas one could expect such behavior in experiments with low Rossby number, i.e. close to QG dynamics. It is to be stressed that the change in the slopes of the decay laws is intriguing, and especially the fact that it does not affect all the quantities. We, thus, have a clear indication that universal decay theory does not apply. Such absence of a universal scaling behavior in the RSW

Run	$<\zeta>_c$	ρ	$<A>$	A	$<\Omega>$	$<\lvert\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\rvert>$	accuracy
C1	0.2	~ 0	0.3	0.1	0	-0.3	low
C2	0.25	-0.45	0.38 ; 0.6	-0.14 ; 0.08	-0.55	-0.3	good
C3	0.34	-0.42 ; -0.65	~ 0.45	0 ; 0.1	-0.57	~ 0	good
P1	0.05	NA	NA	NA	NA	-0.35	low
P2	0.1	~ -1.4	~ 0.7	NA	-0.8	-0.5	medium
P3	0.1	-1.0	0.6	-0.45	-0.8	-0.53	good
B1	0.1	-0.5	NA	-0.5	-0.8	-0.6	medium
B2	0.2	-0.72	0.65	-0.2	-0.6	-0.43	good
B3	0.4	-1.0	0.6	-0.75	-0.62	-0.45	good
B4	0.2	-1.4	0.65	-0.75	-0.8	-0.45	medium

TABLE 4.2 – Power laws of integral quantities as a function of time, during the "inertial regime". $<\zeta>_c$ is the minimal mean vorticity to take a vorticity patch into account, and ρ, $<A>$ and A are respectively the vortex density and the mean and total area of the vortices, and $<\Omega>$ the mean enstrophy of the flow. The "accuracy" row is an indication of whether the vortex census method allows or not to clearly identify the coherent vortices. Two numbers in a row mean a change of slope.

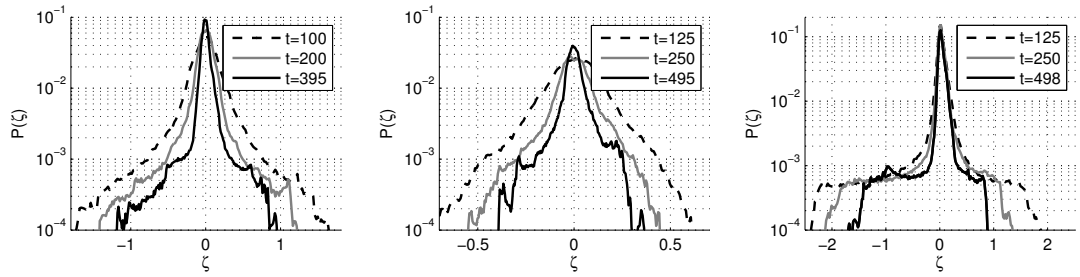


FIGURE 4.7 – Evolution of the probability distribution function of vorticity for runs B2 (left), P3 (middle) and C2 (right).

turbulence is in agreement with the form of the probability density distribution of vorticity presented in Fig. 4.7, which clearly varies from one to another type of initialization, and evolves in time without tending to a universal shape.

The lack of universality and the observed sensitivity of the decaying RSW turbulence to initial conditions is globally explained by the presence of infinity of conservation laws in the RSW system, related to Lagrangian conservation of PV. (This consideration is also valid for 2D and QG turbulence). In the inviscid limit the whole phase-space of the system is foliated into subspaces of constant integrals and the motion is confined to a subspace defined by initial conditions. It is reasonable to think that at small dissipation this foliation still constrains the motion, although this argument cannot be made quantitative at the present stage.

Besides the vortex component of the flow, we also looked at the decay of the divergence field (Fig. 4.6, right panel). Once again, we observe a contradictory behavior : well defined power laws, but strongly varying exponents. While earlier we mentioned indications of wave-vortex decoupling, this result points in the opposite direction, since different initial vortex configurations lead to different power laws for the decay of divergence. This means that one should be cautious in interpreting the results in view of complexity of the

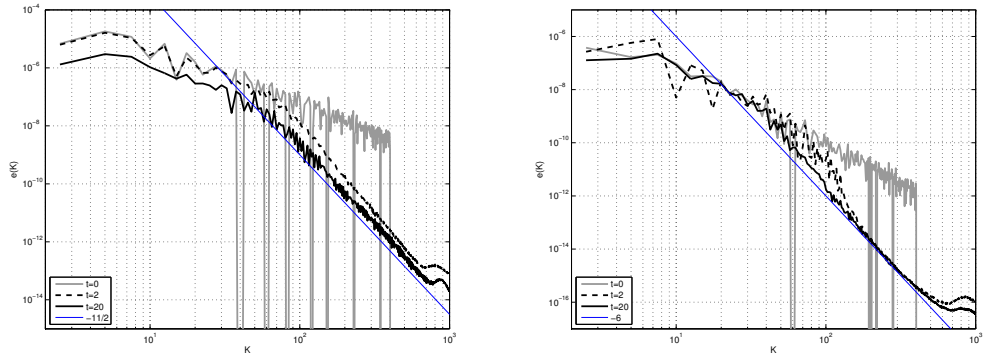


FIGURE 4.8 – Evolution of the energy spectra for the simulations of wave turbulence with initial spectra in k^{-2} (left) and k^{-3} (right).

interactions between the vortical and the divergent components of the flow.

4.2.5 Evolution of a random wave field without vortex component

The weakly nonlinear wave turbulence theory is based on the transfer of energy through nonlinear resonant interactions among random-phase waves. In the context of inertia-gravity waves, the four-wave resonances lead in the asymptotic limit of large wavenumbers (i.e. weakly dispersive range) to the power spectra in $k^{-8/3}$ (constant energy flux) and $k^{-7/3}$ (constant wave action flux) predicted in (Falkovich et Medvedev, 1992). These spectra correspond to exact solutions of the kinetic equation established under assumption of small wave amplitudes and quasi-Gaussian statistics. At higher wave amplitudes wave-breaking and shock formation inevitably take place in the RSW model, which is a typical example of a hyperbolic system with characteristic weak solutions. Gentler spectra in k^{-2} are obtained (Kuznetsov, 2004) for ensembles of random shocks. Strong nonlinearity may manifest itself differently in the RSW, as exact nonlinear stationary plane-wave solutions are known to exist in this model with limiting Λ-cusp crests at strong nonlinearities (Shrira, 1986). For random ensembles of such waves the predicted by Shrira (1986) energy spectra are in k^{-4}. A general theory of the spectra produced by self-similar distributions of Λ - crest plane waves was developed by Belcher et Vassilicos (1997), with predicted spectra in k^{-5+D} with positive D (typically, $D = 1$). For the wave-crest ridges of fractal dimension D the energy spectrum is predicted to be k^{-3-D}, with $0 < D < 2$, (see Nazarenko *et al.*, 2010) and references therein.

Motivated by these theoretical predictions, and mostly by the weak turbulence theory, we simulated the evolution of an initial random Gaussian IGW field of weak amplitude in the RSW model. The maximum initial amplitude (of the longest wave) is $3.5 \cdot 10^{-3}$ and the mean absolute value of the non-dimensional surface elevation is 10^{-3}. We present in Fig. 4.8 the evolution of the wavespectrum up to $t = 20/f$.

As visible in the figure, the distinguishable slopes we obtain exhibit a power law close to k^{-6}, far steeper than all the power laws predicted by the theory. Moreover, we see that the large-scale component hardly evolves throughout the simulation, whereas the small-scale one adjusts quickly towards this steep slope. Explanations of such discrepancies between all theoretical predictions and our results may rely on the finite size of the domain. As shown by, e.g. Nazarenko (2006); L'vov et Nazarenko (2010), the discrete resonance processes,

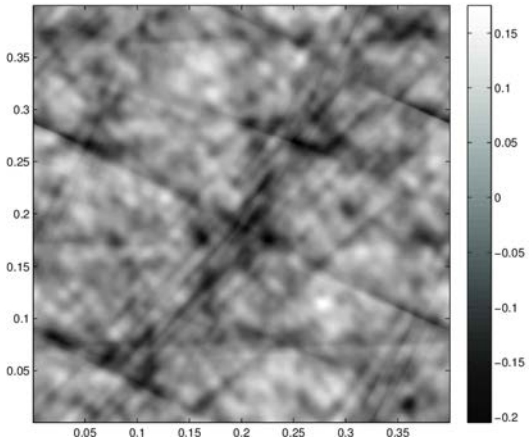


FIGURE 4.9 – Divergence field at $t = 10$ for a random IGW initialization.

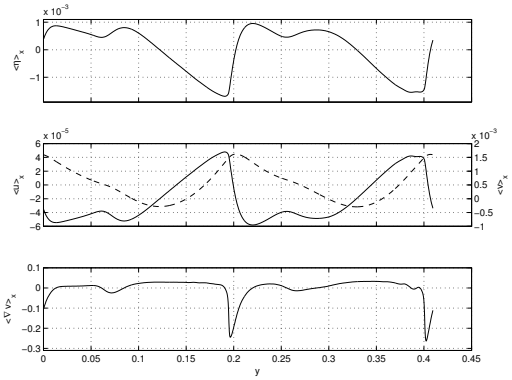


FIGURE 4.10 – Height (upper panel), cross-shock (v) and along-shock (u) velocities (middle panel, resp. in continuous and dashed lines) and divergence (lower panel) spatially averaged along a moving line of strong convergence.

lead to weaker magnitude of the collision integral and to a sandpile behavior of the system, leading to steeper spectra. Yet, no theoretical prediction along these lines for the RSW model is available, to our knowledge. The peculiarity of the RSW model is that if, by finite-size effects leading to sparser resonant quartets, the exchange of energy of some waves with the rest of the spectrum is suppressed, these waves will eventually break down and form shocks. (As shown by Zeitlin *et al.* (2003), rotation does not prevent breaking in RSW). This is what we observed in the simulations by studying the evolution of the divergence field. The divergence field of a typical simulation displayed in Fig. 4.9 at $t = 10/f$ shows the coexistence of long breaking waves represented by the straight convergence fronts (breaking zone is characterized by high and concentrated values of convergence), and a "soup" of shorter non-breaking waves at this stage of evolution. By considering the images at subsequent times we check that the convergence fronts move with the phase velocity of IGW with corresponding wavelength (not shown). A spatial mean along one of such waves is presented in Fig. 4.10 and clearly exhibits wave-breaking. This behavior is typical for all wave-turbulence simulations we performed. Therefore, apparently due to the finite-size effects, the longest waves of the initial spectrum do not exchange enough energy with other

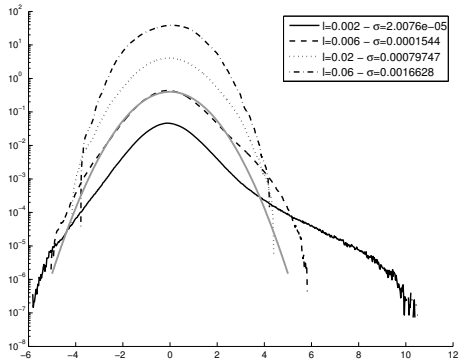


FIGURE 4.11 – Normalized probability distribution function of the second order increment of the height deviation at different separations averaged over one inertial period (five data outputs). Gaussian distribution is superimposed in grey. Curves are shifted vertically at equal intervals for clarity.

parts of the spectrum, and break. They are not numerous enough to produce the shock turbulence. Yet, as coherent structures they contribute to the non-Gaussianity of the wave field. To check this, and also to detect the characteristic assymmetry due to the Λ - crest waves, (cf. Nazarenko *et al.*, 2010), we present in Fig. 4.11 the probability distribution function of the increments of the height deviation. As seen in the figure, a pronounced non-Gaussian tail is observed at the positive side at small separations, decreasing with separation. We should stress that a non-Gaussian tail at *negative* side is typical for cusp-shaped waves (Nazarenko *et al.*, 2010). These latter, thus, should be discarded in our simulations. The observed tail is, most probably, due to the shocks, cf. Fig. 4.10.

4.2.6 Summary and discussion

Thus, our numerical simulations with a new high-resolution finite-volume scheme for decaying vortex turbulence both with classical, random field, and new, coherent-dipole, initializations confirmed the previous results on coherent structure formation and pronounced cyclone-anticyclone asymmetry, which were checked with different diagnostics. Dynamical influence of the finite deformation radius was observed, as well as decoupling of vortex and wave components of the flow. The simulations also displayed sensitivity to initial conditions and lack of universality in the behavior of integral characteristics of the flow in time, although power-law decays were systematically observed. Very steep energy spectra close to k^{-6} arise in the simulations independently of initializations, most probably due to the dominance of coherent vortices in the flow.

For pure wave turbulence, initialized with a random-phase wave-field with identically zero potential vorticity anomaly, we also observe very steep spectra with exponents between -5 and -6, which can not be explained by either of existing theories (weak turbulence, shock turbulence, nonlinear cusp-crest wave turbulence). We observe that the longest and higher-amplitude waves of initial spectrum propagate quasi-freely and break, while shorter waves adjust to the steep equilibrium spectrum. We interpret these observations as due to influence of the finite-size effects. We see no manifestation of the cusp-crest nonlinear waves in the simulations. An increase of the calculational domain and wider initial spectrum of waves would help to clarify the finite-size effects, but we should emphasize that our

simulations are already very costly : typical calculational time for a wave-turbulence run was 1200 hours on a 2.3 GHz processor ; the timestep was $5 \cdot 10^{-5}\ f^{-1} \sim 11$ seconds.

To summarize, we observe clear signs of non-universality in the decaying vortex-wave turbulence in rotating shallow water, and steep spectra incompatible with any existing theory in the pure wave turbulence.

Acknowledgements : This work was supported by the French ANR grant SVEMO. We thank F. Bouchut for help with numerical code, and G. Lapeyre and J.-M. Redondo for discussions. V.Z. gratefully acknowledges useful discussions with V. Shrira and C. Vassilicos.

4.3 Discussion et résultats subséquents

Ce chapitre a présenté des résultats concernant plusieurs aspects de la turbulence en déclin dans un modèle RSW barotrope à l'aide de simulations numériques directes.

D'une part, la turbulence d'ondes en déclin a été étudiée en utilisant des conditions initiales contenant uniquement des ondes d'inertie-gravité, et avec une anomalie de vorticité potentielle strictement nulle. L'évolution ainsi simulée ne correspond à aucune des prédictions théoriques existantes sur la turbulence d'ondes. Des spectres raides ont été trouvés, manifestement associés à l'absence de régime de cascade et à la formation de chocs par les ondes de plus grande échelle présentes dans ce domaine. Nous supposons que l'absence d'interaction entre les ondes de plus petite échelle est associée à la taille du domaine numérique ("effets de taille finie"). Il est également possible que les résonances à quatre ondes dans ce modèle (dans le cadre de la turbulence faible) aient un temps typique d'interaction trop lent pour permettre un transfert conséquent d'énergie, notamment par rapport au temps typique de développement des non linéarités (déferlement) par les ondes.

Récemment, la turbulence d'ondes a été étudiée par Augier et Lindborg (2014) dans le modèle Shallow Water avec et sans rotation, en utilisant un schéma numérique approximant les équations pour un champ d'ondes, i.e. avec une vorticité faible. La résolution – fixant le rapport entre la taille du domaine et les plus petites longueurs d'ondes résolues – est plus importante dans ces simulations, et le système est forcé et dissipé, ce qui constitue une différence importante par rapport à notre étude. Dans ce contexte, la formation de chocs a également été observée, et le spectre de puissance associé correspond aux predictions théoriques pour un écoulement dominé par un ensemble de chocs.

D'autre part, la turbulence de tourbillons agéostrophiques a été regardée dans des séries de simulations numériques avec deux classes de conditions initiales, l'une correspondant à une distribution de vorticité gaussienne, l'autre à un écoulement à fort degré de cohérence. La formation de structures cohérentes avec une forte asymétrie cyclone/anticyclone (en faveur des anticyclones) a été confirmée, et constitue une manifestation notoire de l'agéostrophie du système. Pour expliquer cette préférence en faveur des anticyclones, Polvani *et al.* (1994) ont proposé un argument s'appuyant sur la variabilité du rayon de déformation dans l'espace. En effet, une définition locale du rayon de déformation montre qu'il est plus grand dans les anticyclones, en accord avec l'anomalie positive de déviation de la surface libre dans ces structures. Ceci entraîne une portée d'interaction plus grande, puisque le taux de décroissance du champ de vitesse associé à une perturbation de vorticité potentielle (eq. 4.8) est déterminé par la valeur du rayon de déformation.

Une sensibilité aux conditions initiales a été observée, notamment via la conservation approximative de la distribution de la vorticité, et de la vorticité potentielle, au cours du temps. Les conclusions sur le découplage dynamique entre ondes et tourbillons sont plus nuancées : le champ d'ondes évolue librement et suit une loi de déclin autosimilaire, mais nous avons remarqué que le taux de déclin dépend des conditions vorticales de l'écoulement, quand bien même cette dernière composante ne semble pas suivre une loi de décroissance bien définie.

Etant donnés ces résultats, une perspective intéressante serait de travailler sur une séparation, nécessairement approximative (cf. section 1.3), de l'écoulement en une partie

équilibrée (au sens plus large que celui donné par l'équilibre géostrophique, cf. section 1.3) et une partie non équilibrée. Ceci permettrait une meilleure compréhension du découplage entre ondes et tourbillons, ainsi qu'une comparaison directe avec les structures cohérentes utilisées comme conditions initiales dans certaines simulations de ce chapitre et présentées dans le chapitre 3. Les résultats obtenus sur ces structures (cf. résumé correspondant, section 3.8) pourraient alors être généralisés. Cependant, ce type de séparation dynamique est difficile à réaliser et constitue, en soi, une des questions ouvertes de la DFG. En revanche, l'application d'une relation d'équilibre sur l'écoulement permettrait une comparaison avec des résultats d'expériences de laboratoire, notamment celles utilisant depuis peu une méthode de visualisation par altimétrie à haute résolution (Afanasyev et Craig, 2013), qui nécessitent elles-mêmes une relation d'équilibre pour diagnostiquer le champ de vitesse.

Enfin, réaliser un ensemble de simulations sondant les paramètres de l'écoulement (nombres de Burger, Rossby et Froude) pour discuter la dépendance des effets agéostrophiques à ces paramètres, en les comparant notamment à des expériences de laboratoire et à des simulations dans des modèles équilibrés (QG, surface QG, etc.), permettrait de conclure avec plus de certitudes sur ces questions.

Conclusions et perspectives

L'objet de cette thèse est la compréhension de la dynamique, des interactions et des propriétés des structures cohérentes agéostrophiques, dans des modèles simplifiés des écoulements de fluides géophysiques à grande échelle : les modèles Rotating Shallow Water. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés aux structures tourbillonaires : vortex isolés, structures multipolaires et ensemble de tourbillons. Les résultats principaux sont résumés ici.

Existence de structures cohérentes agéostrophiques dans les modèles RSW

- Des dipôles et des tripôles de vorticité agéostrophiques, barotropes et baroclines, ont été systématiquement observés dans des simulations numériques à haute résolution avec des conditions initiales variées. Ces structures, connues dans le cadre des équations d'Euler bidimensionnels incompressibles, et – par extension – dans les modèles quasi-géostrophiques, sont ainsi généralisées à un contexte incluant la compressibilité (horizontale).
- Les expériences numériques réalisées indiquent que ces multipôles sont des solutions stables des équations RSW. Notamment :
  - Ces structures sont quasi-stationnaires et ont un temps de vie long.
  - Lorsque l'état du système est écarté de ces solutions (e.g. lors de collisions), il évolue de manière à les reformer.
  - Leur formation est observée à l'issue de la destabilisation d'anticyclones agéostrophiques.
  - Les tourbillons cohérents émergent spontanément d'un système turbulent à grand nombre de Rossby. La compressibilité de l'écoulement n'empêche pas leur formation. En revanche, l'existence du rayon de déformation borne leur taille typique maximale.
- L'agéostrophie de l'écoulement (nombre de Rossby grand) est systématiquement associé à une asymétrie cyclone/anticyclone. Les cyclones sont moins étendus dans l'espace mais sont associés à une anomalie de pression de plus grande amplitude. Dans un écoulement turbulent, ils sont trouvés en moins grand nombre et sont moins axisymétriques que les anticyclones.

Ces résultats montrent que, à l'instar de l'équilibre géostrophique dans les équations linéarisées, des minima d'énergie correspondant à des structures cohérentes stables existent dans les équations complètes. On présume alors, à défaut de pouvoir le prouver analytiquement, que ces structures observées sont des solutions des équations de Saint-Venant en rotation.

(Dé)couplage dynamique ondes-tourbillons

- Les structures cohérentes stables n'émettent pas d'ondes d'inertie-gravité. Ceci est une caractéristique omniprésente de nos simulations numériques, même lorsque le nombre de Rossby de l'écoulement est très grand, ou en présence de fronts.
- La rétroaction de ces derniers sur l'écoulement est faible, voire inexistante. En particulier, ils n'entraînent pas la destabilisation des structures cohérentes observées. Par ailleurs, les expériences de turbulence montrent un découplage entre ondes et tourbillons, pour des nombres de Rossby grands.
- En revanche, un mécanisme complexe de capture d'ondes par les structures cohérentes a été observé. Ces ondes ne sont jamais libérées vers l'extérieur, même lorsque ces structures sont écartées de leur état d'équilibre – notamment au cours de collisions.
- Un ressaut hydraulique stationnaire peut se former au sein des structures tourbillonaires à grand nombre de Froude. Sa dynamique est totalement pilotée par l'écoulement associé à ces dernières et, étonnament, la rétroaction de ce front sur cet écoulement est négligeable.

En résumé, dans des configurations stables, la dynamique des ondes est pilotée par les structures tourbillonaires et leur rétroaction est faible, même pour des nombres de Rossby conséquents.

Instabilités agéostrophiques de tourbillons

A l'opposé des configurations stables énoncées ci-dessus, ces instabilités constituent une source importante d'ondes et de mouvements agéostrophiques, en particulier associés à des zones de forte divergence.

- l'instabilité centrifuge "classique", présente lorsque les nombres de Rossby et de Burger sont respectivement grands et petits (de l'ordre de 1), possède un équivalent non-axisymétrique qui devient dominant lorsque le nombre de Rossby diminue et/ou le nombre de Burger augmente. Le taux de croissance de ces modes asymétriques croît avec la stratification et le cisaillement vertical.
- Ces instabilités centrifuges entrent en compétition avec l'instabilité barotrope agéostrophique lorsque le nombre de Rossby diminue et/ou le nombre de Burger augmente.
- Les simulations numériques à haute résolution montrent que la structure monopolaire du vortex initial est systématiquement détruite au cours de la saturation non linéaire de ces instabilités.
- Le développement non linéaire de l'instabilité centrifuge engendre une émission d'ondes de forte amplitude et la formation de fronts. A conditions initiales équivalentes, ces mouvements agéostrophiques sont nettement moins prononcés lorsque l'instabilité barotrope domine l'évolution de l'écoulement, ce qui montre une forte sensibilité aux conditions initiales.
- L'instabilité de l'anneau de vorticité de cyclones tropicaux est intrinsèquement radiative, résultant de l'interaction entre les modes de Rossby localisés sur l'anneau de vorticité et les modes d'inertie-gravité se propageant vers l'extérieur du cyclone. La

saturation non linéaire de cette instabilité engendre une instensification du tourbillon par redistribution de la vorticité potentielle vers le centre.

Plusieurs questions peuvent être formulées à l'issue de ces travaux. L'utilisation de modèles plus complexes constitueraient une avancée dans la compréhension des détails de certains processus que nous avons dégagés. Ceci est vrai en particulier pour l'instabilité centrifuge, dont le développement dans un mileu continuement stratifié avec une structure verticale de l'écoulement et une stratification non triviales n'a pas été étudié. Nous avons observé, toujours dans le cadre de l'instabilité centrifuge, la destabilisation d'un front concentrique. La destabilisation de ces fronts – qui peuvent se former également au cours de l'évolution d'autres instabilités – est également un sujet à explorer, en tant qu'instabilité secondaire de l'écoulement.

Par ailleurs, la non-universalité mise en évidence dans nos simulations d'écoulements turbulents et la sensibilité aux conditions initiales reste une problématique pleinement ouverte, même dans les écoulements 2D incompressibles.

Les observations de collisions quasi-élastiques entre modons dans le modèle RSW, la stabilité de ces structures et la prédactibilité de l'écoulement associé, sont des arguments forts en faveur de l'integrabilité de ces équations. Cette dernière question, ainsi que la séparation dynamique entre ondes et partie équilibrée et la définition d'une variété lente dans les écoulements à grande échelle, restent des questions fondamentales non résolues de la dynamique des fluides géophysiques.

Bibliographie

M. Abramowitz et I. Stegun : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover publications, NY, 1964. ISBN 0-486-61272-4.

Y.D. Afanasyev et J.D.C. Craig : Rotating shallow water turbulence : Experiments with altimetry. *Phys. Fluids*, 25(10), 2013.

M. Arai et T. Yamagata : Asymmetric evolution of eddies in rotating shallow water. *Chaos*, 4(2):163–175, 1994.

L. Armi : The hydraulics of two flowing layers with different densities. *J. Fluid Mech.*, 163:27–58, 1986.

E. Arobone et S. Sarkar : Evolution of a stratified rotating shear layer with horizontal shear. part i. linear stability. *J. Fluid M.*, 703:29–48, 2012. ISSN 1469-7645.

P. Augier et E. Lindborg : Wave energy cascade in forced-dissipative one-layer shallow-water flows. *Submitted to : J. Fluid Mech.*, 2014.

J.M. Baey et X. Carton : Vortex multipoles in two-layer rotating shallow-water flows. *J. Fluid Mech.*, 460:151–1753, 2002.

S. E. Belcher et J.C. Vassilicos : Breaking waves and the equilibrium range of wind-wave spectra. *J. Fluid Mech.*, 342:377–401, 1997.

E.S. Benilov : Instability of quasi-geostrophic vortices in a two-layer ocean with a thin upper layer. *J. Fluid Mech.*, 475:303–331, 2003. ISSN 1469-7645.

E.S. Benilov : Stability of vortices in a two-layer ocean with uniform potential vorticity in the lower layer. *J. Fluid Mech.*, 502:207–232, 2004. ISSN 1469-7645.

G.S. Benton : The occurence of critical flow and hydraulic jumps in a multi-layered fluid system. *J. Met.*, 10:139–150, 1954.

P. Billant, A. Colette et J.-M. Chomaz : Instabilities of a vortex pair in a stratified and rotating fluid. *In Proceedings of the 21st International Congress of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Varsovie*, Aug. 2004.

P. Billant et F. Gallaire : Generalized Rayleigh criterion for non-axisymmetric centrifugal instabilities. *J. Fluid Mech.*, 542:365–379, 2005. ISSN 1469-7645.

W. Blumen : Geostrophic adjustment. *Rev. Geophys.*, 10(2):485–528, 1972. ISSN 1944-9208.

G. Boffetta et R.E. Ecke : Two-dimensional turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 44 (1):427–451, 2012.

F. Bouchet et A. Venaille : Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows. *Phys. Rep.*, 515(5):227 – 295, 2012. ISSN 0370-1573.

F. Bouchut : Efficient numerical finite-volume schemes for shallow-water models. *In Nonlinear dynamics of Rotating Shallow Water : Methods and Advances*, volume 2 de *Edited Series on Advances in Nonlinear Science and Complexity*, chapitre 4, pages 189–256. Elsevier, 2007.

F. Bouchut, J. Lambaerts, G. Lapeyre et V. Zeitlin : Fronts and nonlinear waves in a simplified shallow-water model of the atmosphere with moisture and convection. *Phys. Fluids*, 21(11), 2009.

F. Bouchut, J. LeSommer et V. Zeitlin : Frontal geostrophic adjustment and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. part 2. high-resolution numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 514:35–63, 2004. ISSN 1469-7645.

F. Bouchut, B. Ribstein et V. Zeitlin : Inertial, barotropic, and baroclinic instabilities of the bickley jet in two-layer rotating shallow water model. *Physics of Fluids*, 23(12): 126601–22, 2011.

F. Bouchut et V. Zeitlin : A robust well-balanced scheme for multi-layer shallow water equations. *Disc. Cont. Dyn. Syst.*, 13(4):739–758, 2010.

J.P. Boyd : Orthogonal rational functions on a semi-infinite interval. *Journal of Computational Physics*, 70(1):63 – 88, 1987. ISSN 0021-9991.

J.P. Boyd : *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover, New York, 2001.

N. Butchart, K. Haines et J. Marshall : A theoretical and diagnostic study of solitary waves and atmospheric blocking. *J. Atmos. Sci.*, 13(46):2063–2078, 1989.

O. Bühler et M.E. McIntyre : Wave capture and wave-vortex duality. *J. Fluid Mech.*, 534:67–95, 2005.

G.F. Carnevale, J.C. McWilliams, Y. Pomeau, J.B. Weiss et W.R. Young : Evolution of vortex statistics in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 66:2735–2737, 1991.

X. Carton : Hydrodynamical modeling of oceanic vortices. *Surveys in Geophysics*, 22:179–263, 2001.

X. Carton : Oceanic vortices. *In* J.-B. Flór, éditeur : *Fronts, Waves and Vortices in Geophysical Flows*, volume 805 de *Lect. Notes Phys.* Springer, 2010. ISBN 978-3-642-11586-8.

X. Carton et B. Legras : The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows. *J. Fluid Mech.*, 267:53–82, 5 1994. ISSN 1469-7645.

X.J. Carton, G.R. Flierl et L.M. Polvani : The generation of tripoles from unstable axisymmetric isolated vortex structures. *EPL*, 9(4):339, 1989.

X.J. Carton et J.C. McWilliams : Barotropic and baroclinic instabilities of axisymmetric vortices in a quasigeostrophic model. *In* J.C.J. Nihoul et B.M. Jamart, éditeurs : *Mesoscale/Synoptic Coherent structures in Geophysical Turbulence*, volume 50 de *Elsevier Oceanography Series*, pages 225 – 244. Elsevier, 1989.

M.J. Castro, J.A. García-Rodríguez, J.M. González-Vida, J. Macías, C. Parés et M.E. Vázquez-Cendón : Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry. *J. Comp. Phys.*, 195(1):202 – 235, 2004. ISSN 0021-9991.

J.G. Charney : Geostrophic turbulence. 28:1087–1095, 1971.

J.G. Charney, R. Fjörtoft et J. Von Neumann : Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 2(4):237–254, 1950. ISSN 2153-3490.

D.B. Chelton, M.G. Schlax et R.M. Samelson : Global observations of nonlinear mesoscale eddies. *Progr. Oceanogr.*, 91(2):167 – 216, 2011. ISSN 0079-6611.

Y. Couder et C. Basdevant : Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, 173:225–251, 1986.

B. Cushman-Roisin et B. Tang : Geostrophic turbulence and emergence of eddies beyond the radius of deformation. *J. Phys. Oceanogr.*, 20:97–113, 1990.

W.K. Dewar et P.D. Killworth : On the stability of oceanic rings. *J. Phys. Oceanogr.*, 25:1467–1487, 1995.

P.G. Drazin et W.H. Reid : *Hydrodynamic Stability.* Cambridge University Press, 1981. ISBN 9780521525411.

K. Emanuel : *Tropical Cyclone Energetics and Structure*, pages 165–192. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521183925.

H. Ertel : Ein neuer hydrodynamischer erhaltungssatz. *Die Naturwiss. (Berlin)*, 30:543–544, 1942a.

H. Ertel : Ein neuer hydrodynamischer wirberlsatz. *Meteorol. Z. (Braunschweig)*, 59:277–281, 1942b.

H. Ertel : Über das verhältnis des neuen hydrodynamischen wirbelsatzes zum zirkulationssatz von V. Bjerkness. *Meteorol. Z. (Braunschweig)*, 59:385–387, 1942c.

H. Ertel : Über hydrodynamische wirbelsätze. *Physik. Z. (Leipzig)*, 43:526–529, 1942d.

G. E. Falkovich et S.B. Medvedev : Kolmogorov-like spectrum for turbulence of inertial-gravity waves. *EPL*, 19(4):279, 1992.

M. Farge et R. Sadourny : Wave-vortex dynamics in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, 206:433–462, 1989.

K.N. Fedorov et A.I. Ginsburg : Mushroom-like currents (vortex dipoles) : One of the most widespread forms of non-stationary coherent motions in the ocean. *In* J.C.J. Nihoul et B.M. Jamart, éditeurs : *Mesoscale/Synoptic Coherent structures in Geophysical Turbulence*, volume 50 de *Elsevier Oceanography Series*, pages 1–14. Elsevier, 1989.

R. Ferrari et C. Wunsch : Ocean circulation kinetic energy : Reservoirs, sources, and sinks. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 41(1):253–282, 2009.

G.R. Flierl, X. Carton et C. Messager : Vortex formation by unstable oceanic jets. *In European Series in Applied and Industrial Mathematics*, volume 7, pages 135–150, Paris, 1999. SIAM.

G.R. Flierl, V.D. Larichev, J.C. McWilliams et G.M. Reznik : The dynamics of baroclinic and barotropic solitary eddies. *Dyn. Atmos. Oceans*, 5:1–41, 1980.

G.R. Flierl, M.E. Stern et J.A. Whitehead : The physical significance of modons : Laboratory experiments and general integral constraints. *Dyn. Atmos. Oceans*, 7(4):233 – 263, 1983. ISSN 0377-0265.

J.-B. Flór, H. Scolan et J. Gula : Frontal instabilities and waves in a differentially rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 685:532–542, 2011. ISSN 1469-7645.

R. Ford : The instability of an axisymmetric vortex with monotonic potential vorticity in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, 280:303–334, 1994. ISSN 1469-7645.

R. Ford, M.E. McIntyre et W.A. Norton : Balance and the slow quasimanifold : Some explicit results. *J. Atmos. Sci.*, 57:1236–1254, 2000.

P.R. Gent et J.C. McWilliams : The instability of barotropic circular vortices. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 24:209–233, 1986.

T. Gerkema, J.T.F. Zimmerman, L.R.M. Maas et H. van Haren : Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation. *Rev. Geophys.*, 46 (2):1–33, 2008. ISSN 1944-9208.

A. Gill : *Atmosphere-Ocean Dynamics*. London : Academic press, 1982.

P. Gilman : Magnetohydrodynamic 'shallow water' equations for the solar tachocline. *Astrophys. J. Lett.*, 544:L79–, 2000.

R.W. Griffiths et P.F. Linden : The stability of vortices in a rotating, stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 105:283–316, 4 1981. ISSN 1469-7645.

R.W. Griffiths et P.F. Linden : Part i : Dennsity-driven boundary currents. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 19:159–187, 1982.

V.M. Gryanik, M.A. Sokolovskiy et J. Verron : Dynamics of heton-like vortices. *Regul. Chaotic Dyn.*, 11(3):383–434, 2006.

J. Gula et V. Zeitlin : Instabilities of shallow-water flows with vertical shear in the rotating annulus. *In Modeling Atmospheric and Oceanic Fluid Flows : Insights From Laboratory Experiments*. AGU book series, 2014. ISBN 978-1-118-85593-5.

J. Gula, V. Zeitlin et F. Bouchut : Instabilities of buoyancy-driven coastal currents and their nonlinear evolution in the two-layer rotating shallow water model. part 2. active lower layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 665:209–237, 2010.

K. Haines : Baroclinic modons as prototypes for atmospheric blocking. *J. Atmos. Sci.*, 46:3202–3218, 1989.

G. Haller : Lagrangian structures and the rate of strain in a partition of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 13(11), 2001.

A.E. Hansen, D. Marteau et P. Tabeling : Two-dimensional turbulence and dispersion in a freely decaying system. *Phys. Rev. E*, 58:7261–7271, 1998.

E.A. Hendricks, W.H. Schubert, R.K. Taft, H. Wang et J.P. Kossin : Life cycles of hurricane-like vorticity rings. *J. Atmos. Sci.*, 66:705–722, 2009.

J.S. Hesthaven, J.P. Lynov, A.H. Nielsen, J. Juul Rasmussen, M.R. Schmidt, E.G. Shapiro et S.K. Turitsyn : Dynamics of a nonlinear dipole vortex. *Phys. Fluids*, 7:2220–2229, 1995.

D. Hodyss et D.S. Nolan : The rossby-inertia-buoyancy instability in baroclinic vortices. *Phys. Fluids*, 20(9), 2008.

A.M. Hogg, W.K. Dewar, P. Berloff et M.L. Ward : Kelvin wave hydraulic control induced by interactions between vortices and topography. *J. Fluid Mech.*, 687:194–208, 2011.

D.M. Holland, R.R Rosales, D. Stefanica et E.G. Tabak : Internal hydraulic jumps and mixing in two-layer flows. *J. Fluid Mech.*, 470:63–83, 2002.

G.J. Holland : An analytic model of the wind and pressure profiles in hurricanes. *Mon. Wea. Rev.*, 108:1212–1218, 1980.

B.J. Hoskins et F.P. Bretherton : Atmospheric frontogenesis models : Mathematical formulation and solution. *J. Atmos. Sci.*, 29:11–37, 1972.

K. Iga : Critical layer instability as a resonance between a non-singular mode and continuous modes. *Fluid Dyn. Res.*, 25(2):63–86, 1999.

M. Ikeda : Instability and splitting of mesoscale rings using a two-layer quasi-geostrophic model on a f-plane. *J. Phys. Oceanogr.*, 11:987–998, 1981.

Q. Jiang et R.B. Smith : Ideal shocks in 2-layer flow. part 2 : Under a passive layer. *Tellus A*, 53:146–167, 2001.

V.M. Kamenkovich et G.M. Reznik : *in Fizika okeana. V.2. Gidrodinamika okeana (in Russian)*. Nauka, Moscow, 1978.

C.A. Katsman, P.C.F. Van Der Vaart, H.A. Dijkstra et W.P.M. De Ruijet : Stability of multilayer ocean vortices : a parameter study including realistic Gulf Stream and agulhas rings. *J. Pys. Oceanogr.*, 33:1197–1218, 2003.

H. Kellay et W.I. Goldburg : Two-dimensional turbulence : a review of some recent experiments. *Rep. Prog. Phys.*, 65(5):845–894, 2002.

J.D. Kepert : *Tropical Cyclone Structure and Dynamics*, volume 4 de *Asia-Pacific Weather and Climate*, chapitre 1, pages 3–53. World Scientific, 2010. ISBN 978-981-4293-48-8.

Z. Kizner et R. Khvoles : The tripole vortex : Experimental evidence and explicit solutions. *Phys. Rev. E*, 70:016307, 2004a.

Z. Kizner et R. Khvoles : Two variations on the theme of lamb-chaplygin : Supersmooth dipole and rotating multipoles. *Regul. Chaotic Dyn.*, 9:509–518, 2004b.

Z. Kizner et R. Khvoles : Two variations on the theme of lamb–chaplygin : supersmooth dipole and rotating multipoles. *R. & C. Dynamics*, 9:509–518, 2004c.

Z. Kizner, G.M. Reznik, B. Fridman, R. Khvoles et J. McWilliams : Shallow-water modons on the f-plane. *J. Fluid Mech.*, 603:305–329, 2008.

J.B. Klemp, R. Rotunno et W.C. Skamarock : On the dynamics of gravity currents in a channel. *J. Fluid Mech.*, 269:169–198, 1994.

R.C. Kloosterziel, G.F. Carnevale et P. Orlandi : Inertial instability in rotating and stratified fluids : barotropic vortices. *J. Fluid Mech.*, 583:379–412, 2007. ISSN 1469-7645.

R.C. Kloosterziel et G.J.F. van Heijst : An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 223:1–24, 1991. ISSN 1469-7645.

J.P. Kossin et W.H. Schubert : Mesovortices, polygonal flow patterns, and rapid pressure falls in hurricane-like vortices. *J. Atmos. Sci.*, 58:2196–2209, 2001.

R.H. Kraichnan : Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10:1417–1423, 1967.

E. Kuznetsov : Turbulence spectra generated by singularities. *JETP Letters*, 80:83–89, 2004. ISSN 0021-3640. 10.1134/1.1804214.

Y.C. Kwon et W.M. Frank : Dynamic intabilities of simulated hurricane-like vortices and their impact on the core structure of hurricanes. part i : Dry experiments. *J. Atmos. Sci.*, 62:3955–3973, 2005.

Y.C. Kwon et W.M. Frank : Dynamic intabilities of simulated hurricane-like vortices and their impact on the core structure of hurricanes. part ii : Moist experiments. *J. Atmos. Sci.*, 65:106–122, 2008.

N. Lahaye et V. Zeitlin : Collisions of ageostrophic modons and formation of new types of coherent structures in rotating shallow water model. *Phys. Fluids*, 23:061703–1–061703–4, 2011.

N. Lahaye et V. Zeitlin : Decaying vortex and wave turbulence in rotating shallow water model, as follows from high-resolution direct numerical simulations. *Phys. Fluids*, 24(11):115106 :1–13, 2012a.

N. Lahaye et V. Zeitlin : Existence and properties of ageostrophic modons and coherent tripoles in the two-layer rotating shallow water model on the f-plane. *J. Fluid Mech.*, 706:71–107, 2012b.

N. Lahaye et V. Zeitlin : Shock modon : A new type of coherent structure in rotating shallow water. *Phys. Rev. Lett.*, 108:044502, 2012c.

H. Lamb : *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.

J. Lambaerts, G. Lapeyre et V. Zeitlin : Moist versus dry barotropic instability in a shallow-water model of the atmosphere with moist convection. *J. Atmos. Sci.*, 68:1234–1252, 2011a.

J. Lambaerts, G. Lapeyre, V. Zeitlin et F. Bouchut : Simplified two-layer models of precipitating atmosphere and their properties. *Phys. Fluids*, 23(4):046603, 2011b.

L.D. Landau et E.M. Lifshitz : *Fluid Mechanics*, volume 6 de *Course of theoretical physics*. Butterworth-Heinemann, 2 édition, 1987. ISBN 0750627670.

G. Lapeyre, P. Klein et B.L. Hua : Does the tracer gradient vector align with the strain eigenvectors in 2d turbulence ? *Phys. Fluids*, 11(12), 1999.

V. Larichev et G.M. Reznik : Two-dimensional solitary rossby waves. *Dokl. Acad. Sci., USSR*, 231:1077–1080, 1976.

V.D. Larichev et J.C. McWilliams : Weakly decaying turbulence in an equivalent-barotropic fluid. *Phys. Fluids A*, 3(5):938–950, 1991.

A. Lazar, A. Stegner, R. Caldeira, C. Dong, H. Didelle et S. Viboud : Inertial instability of intense stratified anticyclones. part 2. laboratory experiments. *J. Fluid Mech.*, 732:485–509, 2013a. ISSN 1469-7645.

A. Lazar, A. Stegner et E. Heifetz : Inertial instability of intense stratified anticyclones. part 1. generalized stability criterion. *J. Fluid Mech.*, 732:457–484, 2013b. ISSN 1469-7645.

S. Le Dizès et P. Billant : Radiative instability in stratified vortices. *Phys. Fluids*, 21 (9):1–8, 2009.

J. Le Sommer, S.B. Medvedev, R. Plougonven et V. Zeitlin : Singularity formation during relaxation of jets and fronts toward the state of geostrophic equilibrium. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 8(3–4):415 – 442, 2003. ISSN 1007-5704.

R.J. LeVeque : *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521009249.

M.J. Lighthill : On sound generated aerodynamically. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A 211:564–587, 1952.

M.J. Lighthill : *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.

C.C. Lin : On the stability of two-dimensional parallel flows. *Quart. Appl. Math.*, 3:117–142, 218–234, 1945.

O.M. Lord Rayleigh : On the dynamics of revolving fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 93:148–154, 1917.

E.N. Lorenz : The slow manifold – what is it ? *J. Atmos. Sci*, 49(24):2449 – 2451, 1992.

S. Louazel et B.L. Hua : Vortex erosion in a shallow-water model. *Phys. Fluids*, 16(8), 2004.

V.S. L'vov et S. Nazarenko : Discrete and mesoscopic regimes of finite-size wave turbulence. *Phys. Rev. E*, 82:056322, 2010.

P. Malanotte-Rizzoli : Planetary solitary waves in geophysical flows. *Adv. Geophys..*, 24:147–224, 1982.

M.E. McIntyre : Balanced flow. *In* G. North, F. Zhang et J. Pyle, éditeurs : *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*. Elsevier, 2012a.

M.E. McIntyre : Potential vorticity. *In* G. North, F. Zhang et J. Pyle, éditeurs : *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*. Elsevier, 2012b.

J. C. McWilliams : The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 146:21–43, 1984.

J. C. McWilliams : A demonstration of the suppression of turbulent cascades by coherent vortices in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, 2(4):547–552, 1990.

J.C. McWilliams : An application of equivalent modons to atmospheric blocking. *Dyn. Atm. Oceans*, 5(1):43 – 66, 1980. ISSN 0377-0265.

J.C. McWilliams : Submesoscale, coherent vortices in the ocean. *Rev. Geophys.*, 23 (2):165–182, 1985. ISSN 1944-9208.

V.V. Meleshko et G.J.F. van Heijst : On chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, 272:157–182, 1994.

K. Mima et A. Hasegawa : Nonlinear instability of electromagnetic drift waves. *Phys. Fluids*, 21:87–, 1978.

M.T. Montgomery et C. Lu : Free waves on barotropic vortices. part i : Eigenmode structure. *J. Atmos. Sci.*, 54:1868–1885, 1997.

P.J. Montgomery et T.B. Moodie : On the number of conserved quantities for the two-layer shallow-water equations. *Studies Appl. Math.*, 106(2):229–259, 2001. ISSN 1467-9590.

Y.G. Morel et X.J. Carton : Multipolar vortices in two-dimensional incompressible flows. *J. Fluid Mech.*, 267:23–51, 5 1994. ISSN 1469-7645.

W. Munk, L. Armi, K. Fischer et F. Zachariasen : Spirals on the sea. *Proc. Roy. Soc. London*, 456(1997):1217–1280, 2000.

S. Nazarenko : Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence. *J. Stat. Mech.*, 2006(02):L02002, 2006.

S. Nazarenko : *Wave Turbulence*, volume 825 de *Lect. Notes Phys.* Springer, 2011. ISBN 978-3-642-15942-8.

S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland et P. Denissenko : Statistics of surface gravity wave turbulence in the space and time domains. *J. Fluid Mech.*, 642:395–420, 2010.

D.B. Olson : Rings in the ocean. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 19(1):283–311, 1991.

D.B. Olson et R.J. Evans : Rings of the agulhas. *Deep-Sea Res.*, 33:27–42, 1986.

P. Orlandi et G. F. Carnevale : Evolution of isolated vortices in a rotating fluid of finite depth. *J. Fluid Mech.*, 381:239–269, 1999. ISSN 1469-7645.

D. O'Sullivan et T.J. Dunkerton : Generation of inertia-gravity waves in a simulated life cycle of baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, 52(21):3695 – 3716, 1995.

N. Paldor : Linear instability of barotropic submesoscale coherent vortices observed in the ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, 29:1442–1452, 1999.

J. Park et P. Billant : Instabilities and waves on a columnar vortex in a strongly stratified and rotating fluid. *Phys. Fluids*, 25(8):086601, 2013.

J. Pedlosky : Finite-amplitude baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, 27:15–30, 1970.

J. Pedlosky : *Geophysical Fluid Dynamics*. New York : Springer, 1987.

R. Plougonven et C. Snyder : Inertia-gravity waves spontaneously generated by jets and fronts. part i : Different baroclinic life cycles. *J. Atmos. Sci.*, 64:2502 – 2520, 2007.

R. Plougonven et V. Zeitlin : Internal gravity wave emission from a pancake vortex : An example of wave–vortex interaction in strongly stratified flows. *Phys. Fluids*, 14(3), 2002.

R. Plougonven et V. Zeitlin : Lagrangian approach to geostrophic adjustment of frontal anomalies in a stratified fluid. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 99(2):101–135, 2005.

R. Plougonven et V. Zeitlin : Nonlinear development of inertial instability in a barotropic shear. *Phys. Fluids*, 21(10):–, 2009.

L. M. Polvani, J.C. McWilliams, M.A. Spall et R. Ford : The coherent structures of shallow-water turbulence : Deformation-radius effects, cyclone/anticyclone asymmetry and gravity-wave generation. *Chaos*, 4(2):177–186, 1994.

P.G. Potylitsin et W.R. Peltier : Stratification effects on the stability of columnar vortices on the f-plane. *J. Fluid Mech.*, 355:45–79, 1998. ISSN 1469-7645.

F.J. Poulin et G.R. Flierl : The nonlinear evolution of barotropically unstable jets. *J. Phys. Oceanogr.*, 33:2173–2192, 2003.

L.J. Pratt : On inertial flow over topography. part 1. semigeostrophic adjustment to an obstacle. *J. Fluid Mech.*, 131:195–218, 1983.

G.M. Reznik, V. Zeitlin et M. Ben Jelloul : Nonlinear theory of geostrophic adjustment. part 1. rotating shallow-water model. *J. Fluid Mech.*, 445:93–120, 2001.

B. Ribstein, J. Gula et V. Zeitlin : (A)geostrophic adjustment of dipolar perturbations, formation of coherent structures and their properties, as follows from high-resolution numerical simulations with rotating shallow water model. *Phys. Fluids*, 22:116603–1–116603–14, 2010.

B. Ribstein, R. Plougonven et V. Zeitlin : Inertial vs baroclinic instability of the bickley jet in continuously stratified rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 2014.

P. Ripa : On the stability of ocean vortices. *In* J.C.J. Nihoul et B.M. Jamart, éditeurs : *Mesoscale/Synoptic Coherent structures in Geophysical Turbulence*, volume 50 de *Elsevier Oceanography Series*, pages 167–179. Elsevier, 1989.

P. Ripa : General stability conditions for a multi-layer model. *J. Fluid Mech.*, 222:119–137, 1991.

P. Ripa : Instability of a solid-body rotating vortex in a two-layer model. *J. Fluid Mech.*, 242:395–417, 1992. ISSN 1469-7645.

P. Ripa : Conservation laws for primitive equations models with inhomogeneous layers. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 70(1-4):85–111, 1993.

S. Sakai : Rossby-kelvin instability : a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between rossby waves and gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 202:149–176, 5 1989. ISSN 1469-7645.

C. Schar et R.B. Smith : Shallow-water flow past isolated topography. part 1 : Vorticity production and wake formation. *J. Atmos. Sci.*, 50(10):1373–1400, 1993.

D.A. Schecter et M.T. Montgomery : Conditions that inhibit the sontaneous radiation of spiral inertia-gravity waves from an intense mesoscale cyclone. *J. Atmos. Sci.*, 63:435–456, 2006.

D.A. Schecter et M.T. Montgomery : Waves in a cloudy vortex. *J. Atmos. Sci.*, 64:314–337, 2007.

W.H. Schubert, M.T. Montgomery, R.K. Taft, T.A. Guinn, S.R. Fulton, J.P. Kossin et J.P. Edwards : Polygonale eyewalls, asymmetric eye contraction, and potential vorticity mixing in hurricanes. *J. Atmos. Sci.*, 56:1197–1223, 1999.

V. I. Shrira : On long strongly nonlinear waves in a rotating ocean. *Izvestiya Atm. Oceanic Phys.*, 22(4), 1986.

W.D. Smyth et J.C. McWilliams : Instability of an axisymmetric vortex in a stably stratified, rotating environment. *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, 11(3-4):305–322, 1998. ISSN 0935-4964.

W.D. Smyth et W.R. Peltier : Three-dimensionalization of barotropic vortices on the f-plane. *J. Fluid Mech.*, 265:25–64, 1994. ISSN 1469-7645.

C. Snyder, D.J. Muraki, R. Plougonven et F. Zhang : Inertia-gravity waves generated within a dipole vortex. *J. Atmos. Sci.*, 64(12):4417–4431, 2007.

C. Snyder, R. Plougonven et D.J. Muraki : Mechanisms for spontaneous gravity wave generation within a dipole vortex. *J. Atmos. Sci.*, 66:3464–3478, 2009.

A. Stegner et D.G. Dritschel : A numerical investigation of the stability of isolated shallow water vortices. *J. Phys. Oceanogr.*, 30:2562–2573, 2000.

M.E. Stern : Minimal properties of planetary eddies. *J. Mar. Res*, 33:1–13, 1975.

D.E. Stevens et P.E. Ciesielski : Inertial instability of horizontally sheared flow away from the equator. *JAS*, 43(23):2845–2856, 1986.

P. Tabeling : Two-dimensional turbulence : a physicist approach. *Physics Reports*, 362 (1):1 – 62, 2002. ISSN 0370-1573.

E. Thivolle-Cazat, J. Sommeria et M. Galmiche : Baroclinic instability of two-layer vortices in laboratory experiments. *J. Fluid Mech.*, 544:69–97, 2005. ISSN 1469-7645.

L.N. Trefethen : *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM, 2000.

O. Umurhan : A shallow-water theory for annular sections of keplerian disks. *Astronomy and Astrophysics*, 489:953–962, 2008.

G. K. Vallis : *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. 2006.

L.J.A. van Bokhoven, R.R. Trieling, H.J.H. Clercx et G.J.F. van Heijst : Influence of initial conditions on decaying two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 19(4):046601, 2007.

G.J.F. Van Heijst et J.-B. Flór : Dipole formation and collisions in a stratified fluid. *Nature*, 340:212–215, 1989.

G.J.F. van Heijst et R.C. Kloosterziel : Tripolar vortices in a rotating fluid. *Nature*, 338:569–571, 1989.

J. Vanneste : Balance and spontaneous wave generation in geophysical flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 45(1):147–172, 2013.

J. Verron et M.A. Sokolovskiy : Dynamics of triangular two-layer vortex structures with zero total intensity. *Regul. Chaotic Dyn.*, 7(4):435–472, 2002.

T. Warn : Statistical mechanical equilibria of the shallow water equations. *Tellus A*, 38A (1):1–11, 1986. ISSN 1600-0870.

J. B. Weiss et J.C. McWilliams : Temporal scaling behavior of decaying two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A*, 5(3):608–621, 1993.

J.B. Weiss : The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. *Physica D*, 48(2-3):273 – 294, 1991. ISSN 0167-2789.

G.B. Whitham : *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, New York, 1974.

H.E. Willoughby, R.W.R. Darling et M.E. Rahn : Parametric representation of the primary hurricane vortex. part ii : A new family of sectionally continuous profiles. *Mon. Wea. Rev.*, 134:1102–1120, 2006.

V.T. Wood, L.W. White, H.E. Willoughby et D.P. Jorgensen : A new parametric tropical cyclone tangential wind profile model. *Mon. Wea. Rev.*, 141:1884–1909, 2013.

S. Yih et C.R. Guha : Hydraulic jump in a fluid system of two layers. *Tellus*, 7:358–366, 1955.

L. Yuan et K. Hamilton : Equilibrium dynamics in a forced-dissipative f-plane shallow-water system. *J. Fluid Mech.*, 280:369–394, 1994.

V. Zeitlin : On the backreaction of acoustic radiation for distributed two-dimensional vortex structures. *Phys. Fluids A*, 3(6):1677–1680, 1991.

V. Zeitlin : Wave turbulence with applications to atmospheric and oceanic waves. *In* R. Grimshaw, éditeur : *Nonlinear Waves in Fluids : Recent Advances and Modern Applications*, volume 483 de *CISM International Centre for Mechanical Sciences*. Springer, 2005. ISBN 978-3-211-25259-8.

V. Zeitlin : Introduction : Fundamentals of rotating shallow water model in the geophysical fluid dynamics perspective. *In Nonlinear dynamics of Rotating Shallow Water : Methods and Advances*, chapitre 1. Elsevier, 2007.

V. Zeitlin : Decoupling of balanced and unbalanced motions and inertia-gravity wave emission : small vs large rossby numbers. *J. Atmos. Sci.*, 65:3528–3542, 2008.

V. Zeitlin, S. B. Medvedev et R. Plougonven : Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. part 1. theory. *J. Fluid Mech.*, 481:269–290, 2003.