Thèse de doctorat de
l'Université Pierre et Marie Curie
Spécialité Sciences de la Terre

ED 398 - Géosciences et Ressources Naturelles

Modélisation numérique de la propagation des failles décrochantes dans la lithosphère

---

Présentée par
Nafissatou Traoré

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Cette thèse sera soutenue le 10/09/2014 devant le jury composé de :

Bertrand Meyer (Pr, UPMC)	Directeur de thèse
Joël Frelat (CR, CNRS)	Co-directeur de thèse
Habibou Maitournam (Pr, ENSTA)	Rapporteur
Geoffrey King (Physicien, IPGP)	Rapporteur
Hélène Dumontet (Pr, UPMC)	Examinatrice
Philippe Huchon (Pr, UPMC)	Examinateur
Corrado Maurini (MC, UPMC)	Invité
Frédérique Rolandone (MC, UMPC)	Invitée

Institut des Sciences de la Terre de Paris
&
Institut Jean Le Rond D'Alembert
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Résumé

La modélisation numérique de la propagation des failles décrochantes est essentielle à notre compréhension du comportement mécanique long terme de la lithosphère. Dans un premier temps, nous avons cherché à reproduire la déformation intersismique autour d'une faille préexistante. Cette modélisation du chargement intersismique a permis de déterminer quelle rhéologie et quel type de chargement, justifiables mécaniquement et géologiquement, étaient nécessaires à l'obtention d'une déformation de surface cohérente avec les mesures géodésiques. Pour un déplacement latéral tel qu'imposé par le mouvement long terme des plaques, il faut imposer une hétérogénéité structurelle à l'aide d'une zone de faible viscosité sous la partie bloquée de la faille. Dans un second temps, nous avons étudié la propagation d'une faille à l'aide de la mécanique de l'endommagement. Cette approche permet de prédire l'évolution de l'endommagement sans prédéterminer le chemin de propagation, et de faire le lien avec la théorie de Griffith. Nous avons amélioré cette approche en introduisant une contrainte tangentielle résiduelle sur la faille qui s'apparente à l'introduction de friction sur les plans de faille, et en permettant l'utilisation, pour la première fois en mécanique de l'endommagement, de méthodes de résolutions mixtes. Ces développements ont permis de décrire dans des cas simples l'évolution d'une faille, ouvrant ainsi la voie à l'utilisation de nouveaux types de modèles de croissance et de propagation des failles.

Abstract

Numerical modelling of strike-slip faults propagation is essential to understand the long-term mechanical behavior of the lithosphere. Firstly, we aim to reproduce the interseismic deformation of a preexisting fault. The modelling of this interseismic regime enables us to determine what rheology and loading, both mechanically and geologically justifiable, are required to obtain a surface deformation that matches the geodetic measurements. When the lateral displacement is due to the long-term plates motion, a structural heterogeneity has to be imposed by the mean of a weak viscous zone beneath the locked fault. Secondly, we study fault propagation by using damage mechanics. This approach allows the prediction of damage evolution, without previously knowing the propagation path, and makes the link with the Griffith's theory. We improve this approach with the introduction of a residual tangential stress on the fault that is similar to fault planes friction, and we use mixed resolution methods, which represents a novelty in damage mechanics. These developments make possible the description of fault evolution for simple cases, and open the way towards the use of new growth and propagation fault models.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Bertrand Meyer et Joël Frelat, mon encadrant, Corrado Maurini, ainsi que Frédérique Rolandonne, pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de ces quatre ans. Leur aide fut précieuse, tant pour la qualité des conseils qu'ils ont su me donner, que pour leurs encouragements sans lesquels ce travail n'aurait pu aboutir.

Je remercie également tous les membres de l'ISTEP et de l'IJLRDA pour leur soutien et leur appui moral et technique. Un grand merci à mes co-bureaux (en particulier Thomas, Samuel, Mathieu, Justine, Leila, Fidel, Jordane et Félicie), ainsi qu'à tous les doctorants, les post-doctorants, les stagiaires, dont j'ai croisé la route (Nico, Alex, Arnaud, Céline, Anne-Cé, Alexis, Cansu, Raja, Valentina, Andrés, et tous les autres...) pour leur bonne humeur (très) communicative, leurs délires de fin de thèse, les petits-dèj', les pauses thé, leurs bons conseils ("commence tôt, tu finiras tôt"), les soirées raclettes, les pizzas, les nanards et les moments passés à Vienne ou à San Francisco !

Un énorme merci enfin à mes proches qui m'ont supportée (dans tous les sens du terme) durant cette épreuve. Merci à ma maman, à ma Mounette et à mon Loulou pour leur amour et leur confiance en moi. Merci à Jean-Mich pour ses encouragements et ses bons petits plats. Merci à ma Fabou, qui a toujours été là pour moi et qui a ensoleillé la fin de ma thèse (gros bisous à mon Nolan adoré). Merci à ma grosse vache pour tous ces câlins. Et un énorme merci à mon doudou qui m'a épaulée au quotidien et m'a aidée à tenir jusqu'au bout avec tout son amour et ses petits soins, je t'aime.

A mon papa.

Table des matières

Résumé **3**

Abstract **5**

Remerciements **7**

Introduction **15**

1 État de l'art et problématique **21**

1.1 Modélisation numérique des failles décrochantes 22

1.1.1 Modèles élastiques 23

1.1.2 Couplage visco-élastique et plasticité de la zone de faille 28

1.1.3 Problématiques de la thèse 30

1.2 Modélisation numérique de la propagation des failles décrochantes 31

1.2.1 Propagation de la rupture sur une faille préexistante 32

1.2.2 Propagation de la faille dans un milieu non fracturé : Mécanique de l'endommagement 32

1.2.2.1 Zone d'endommagement 33

1.2.2.2 Modèles d'endommagement 35

1.2.2.3 L'approche choisie dans cette thèse : l'endommagement comme régularisation de la rupture 37

2 Modélisation de la déformation intersismique à l'aide de la mécanique classique **39**

2.1 Introduction 40

2.2 Article : *"Does interseismic strain localization near strike slip faults result from boundary conditions or rheological structure ?"* 42

3 Modélisation de la propagation des failles à l'aide de la mécanique de l'endommagement 57

3.1 Introduction 58
3.1.1 La rupture fragile et sa régularisation 60
3.1.2 Le modèle d'endommagement 63
3.1.3 Étude unidimensionnelle : Approche générale 66
3.2 Implémentation numérique du modèle de base et application à la barre en traction 76
3.2.1 Implémentation numérique 76
3.2.2 Application à la barre en traction 77
3.3 Modèle mixte pour une fissure en cisaillement 85
3.3.1 Modèle simple pour une fissure en cisaillement 86
3.3.2 Application numérique 87
3.3.3 Modèle mixte pour une fissure en cisaillement 89
3.3.4 Implémentation et application numérique 90
3.4 Modèle avec prise en compte des forces volumiques 92
3.4.1 Approche analytique 93
3.4.2 Application numérique 93
3.5 Modèle avec contrainte tangentielle résiduelle sur la fissure 95
3.5.1 Approche analytique 96
3.5.2 Application numérique 100
3.6 Exemple d'application 102
3.6.1 Modèle 102
3.6.2 Résultats 102
3.6.3 Changement d'échelle 104

Conclusion et perspectives 107

Appendices 111

A Le modèle de dislocation vis 113

A.1 The arctangent equation 113
A.2 Equivalent boundary conditions in the screw dislocation model 116
A.3 The method of images 118

A.3.1 Boundary conditions of the method of images 119

B Rappels et preuves de la mécanique de l'endommagement 121

B.1 Le théorème de Modica-Mortola pour la régularisation de l'énergie de Griffith 121

B.1.1 Le théorème de Modica-Mortola 121

B.1.2 Régularisation intermédiaire 122

B.2 Stabilité des solutions 122

B.2.1 Critère de stabilité 122

B.2.2 Stabilité des solutions homogènes 123

B.3 Résolution du problème d'endommagement : les solutions localisées 124

B.4 Approximation de la solution du modèle avec prise en compte des forces volumiques dans le cas unidimensionnel 125

B.5 Ebauche de la preuve de la propriété de décroissance de la contrainte lorsque l'endommagement maximal croît 127

B.6 Changement d'échelle 129

B.6.1 Méthode 129

B.6.2 Application 129

Liste des Figures 131

Introduction

Le problème de la propagation des grandes failles, et particulièrement des décrochements, s'inscrit dans un débat ancien (e.g. Houseman *et al.*, 1981; England et McKenzie, 1982; Peltzer *et al.*, 1982; Tapponnier *et al.*, 1982) mais toujours d'actualité (e.g. Jackson, 2002; Burov et Watts, 2006; Jackson *et al.*, 2008) sur la rhéologie et le comportement mécanique de la lithosphère continentale. A l'origine, ce débat oppose les tenants d'une lithosphère continentale « fluide » se comportant comme un fluide visqueux sur le long terme aux tenants d'une lithosphère continentale « solide » se comportant à long terme comme un solide élasto-plastique.

Ce questionnement qui mobilise la communauté des sciences de la terre depuis plusieurs décennies s'est nourri des études menées dans la zone de collision Inde-Asie. Pour les uns (e.g. England et Houseman, 1986; Houseman et England, 1986), la lithosphère continentale y est caractérisée par une déformation distribuée associée à un manteau lithosphérique visqueux sans résistance long terme. Les failles, nombreuses et d'égale importance, n'affecteraient que la croûte supérieure sismogénique qui serait la seule enveloppe résistante de la lithosphère. Pour les autres (e.g. Tapponnier *et al.*, 1982; Peltzer et Tapponnier, 1988), quelques grands décrochements qui dominent le champ de déformation régional y découperaient l'ensemble de la lithosphère. Ces grands décrochements se propageraient au sein de la lithosphère continentale et donc du manteau lithosphérique qui contribuerait comme la croûte à la résistance d'ensemble de la lithosphère. Cette propagation permettrait l'extrusion de blocs qui présentent des déformations internes beaucoup plus limitées que le long des failles qui les bordent. Les travaux menés au cours des dernières décennies ont permis d'acquérir de très nombreuses données et de caractériser la cinématique actuelle (mesures GPS) et récente (« instantané géologique holocène » moyennant les vitesses sur les dix derniers milliers d'années) dans la zone de collision Inde-Asie. Si ces travaux ont

permis de caractériser le champ de déformation régional (cinématique GPS ou holocène), ils n'ont pas pour autant clôt le débat, chacun pouvant continuer d'ajuster de manière relativement satisfaisante les données cinématiques les plus récentes aux résultats de modèles pourtant antagonistes (e.g. Avouac et Tapponnier, 1993; Peltzer et Saucier, 1996; England et Molnar, 1997, 2005; Flesch et Bendick, 2012; Calais *et al.*, 2006; Langstaff et Meade, 2013). Les données de cinématique récentes, GPS ou court terme géologique, se sont donc révélées inappropriées pour discriminer ces deux grandes classes de modèles. Des données géologiques à beaucoup plus long terme sur la croissance et l'évolution des failles se sont donc avérées nécessaires.

Les observations indiquant que les grands décrochements peuvent se propager sur plusieurs centaines de kilomètres en quelques millions d'années sont cependant difficiles à réaliser. Elles nécessitent de pouvoir documenter plusieurs décalages d'objets géologiques bien identifiés et précisément datés sur une même faille (e.g., Figure 1 de Meyer et Le Dortz, 2007). Ce n'est pas le cas en Asie où les arguments indiquant que la faille de l'Altyn Tagh s'est propagée vers le Nord sur plusieurs centaines de kilomètres en plusieurs dizaines de millions d'années sont indirects (e.g. Meyer *et al.*, 1998; Métivier *et al.*, 1998). De telles informations sont disponibles dans le cas de la faille Nord Anatolienne qui, associée avec sa conjuguée, la faille Est Anatolienne, permet l'extrusion de l'Anatolie et de l'Egée (Figure 2). L'évolution structurale de la faille Nord Anatolienne est plus facile à contraindre que celle des grandes failles d'Asie. La collision Arabie Eurasie est plus récente que la collision Inde-Asie et le processus d'extrusion s'est développé relativement récemment, au cours des 15 derniers millions d'années. Plusieurs décalages géologiques sont bien contraints et précisément datés car de nombreuses régions traversées par la Faille Nord Antatolienne comportent des sédiments marins miocènes permettant de dater la déformation (Armijo *et al.*, 1999). La faille Nord Anatolienne s'est initiée dans l'Est de la Turquie, dans la région de Karliova, près du front de collision entre Arabie et Eurasie. Le début de son fonctionnement y daterait d'environ 10-15 Ma (Şengör, 1985; Şengör *et al.*, 2005). Elle s'est propagée vers l'ouest, accompagnant l'individualisation du bloc anatolien et le processus d'extrusion de ce bloc vers le bord libre du système, la zone de subduction hellénique (Armijo *et al.*, 1996; Hubert-Ferrari *et al.*, 2003). Une étape clé de cette propagation est très bien documentée dans la région des Dardanelles, là où il y a précisément 5 Ma, la faille Nord Anatolienne pénètre dans le domaine Egéen (Armijo *et al.*, 1999). Cet âge est déterminé par celui de la formation du pli de Ganos, peu avant que ce pli ne commence à être décalé par la faille. Ce pli, actuellement coupé et décalé de 70 ± 5km, s'est formé en moins de 600 000 ans. Selon Armijo *et al.* (1996), l'arrivée de la faille Nord Anatolienne dans l'ouest de l'Egée

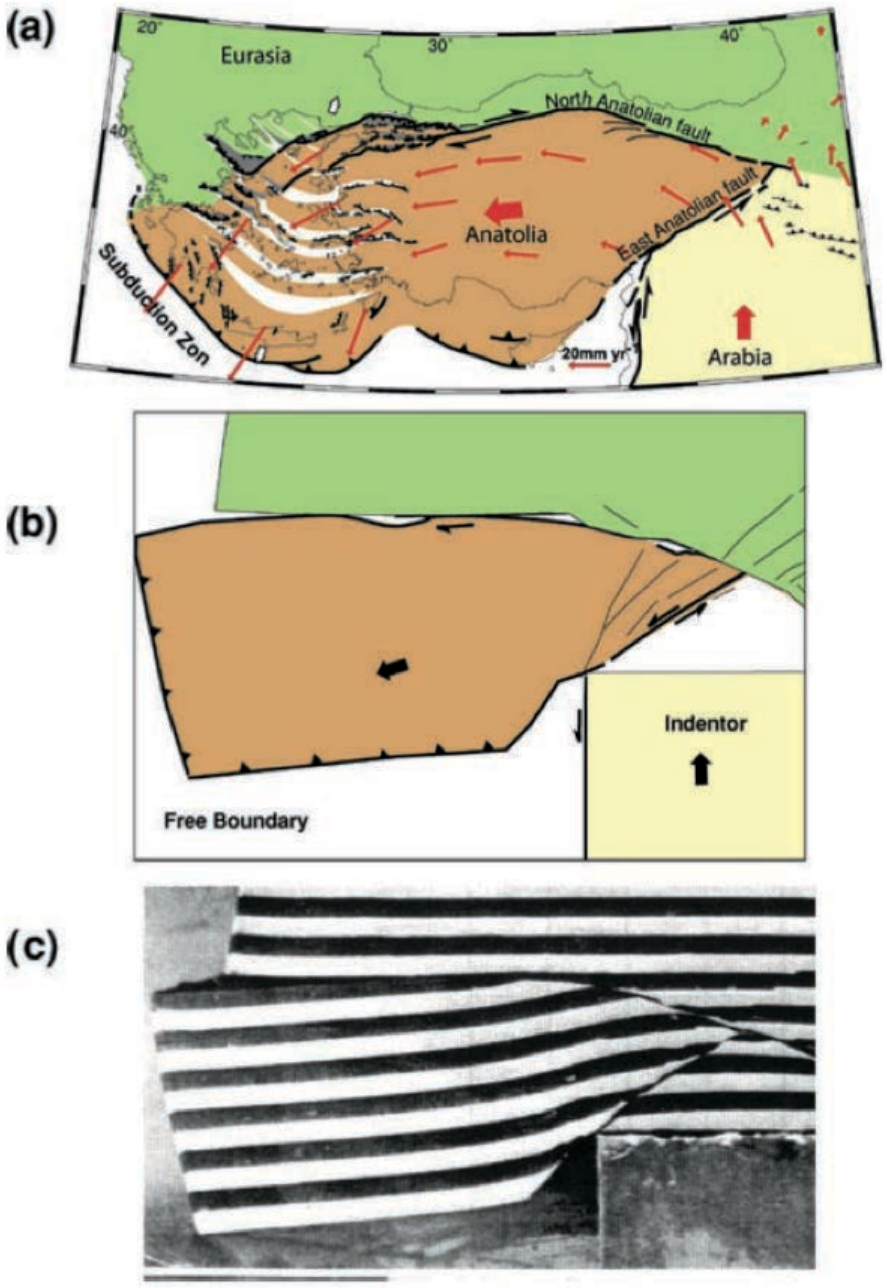


Figure 1: D'après Hubert-Ferrari *et al.* (2002) : (a) Extrusion de l'Anatolie vers la zone de subduction Hellénique le long des failles Nord et Est Anatolienne. Les vecteurs GPS sont représentés par les flèches rouges. Les déplacements sont représentés par rapport à l'Eurasie fixe (Reilinger et al., 1997). (b) Analogie entre l'extrusion de l'Anatolie et les expériences de poinçonnement faites avec de la plasticine par Peltzer et al. (1982). L'indenteur représentant l'Arabie est appliqué à la base et le système est libre de bouger vers le bord libre à l'Ouest représentant la zone de subduction hellénique. Pendant la déformation, une faille décrochante sénestre apparaît à l'Est puis elle est recoupée par une faille décrochante dextre qui se propage vers le bord libre à l'Ouest. (c) Photographie de l'expérience de plasticine.

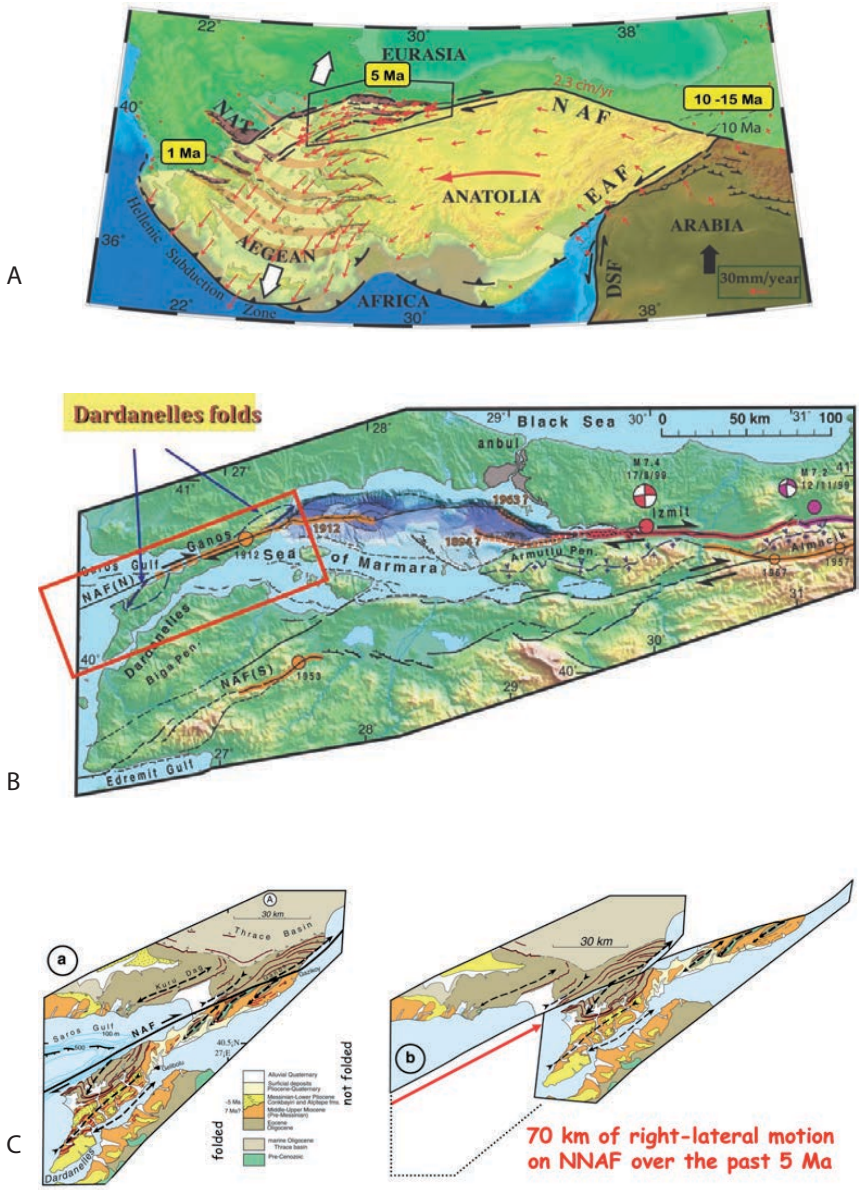


FIGURE 2: D'après Armijo et al., 1999, 2005 et Pondard et al., 2007. (A) Extrusion Anatolienne. Les vecteurs GPS sont représentés par rapport à l'Eurasie fixe (Mc Clusky, 2000). La faille Nord Anatolienne traverse la Turquie d'Est en ouest sur plus de 1000 km. Sa trace linéaire et simple dans l'Est se divise en deux branches principales dans l'Ouest de la Turquie. La mer de Marmara est un pull-apart situé sur un relai extensif le long la branche Nord (NNAF) (B) Cartographie du pull-apart de Marmara. Plusieurs bassins profonds se sont développés entre les tronçons décrochants de Ganos et d'Izmit. Deux décalages géologiques spectaculaires sont indiqués : à l'Est celui de la discordance entre volcanites éocènes entre la péninsule d'Armutlu et le bloc d'Almacik ; à l'ouest, celui du pli de Ganos. (C) Panneau de gauche, carte géologique de la région des Dardanelles soulignant le décalage du pli de Ganos par la branche Nord de la FNA. La série concordante éocène à fini miocène, plissée, est recouverte en discordance par des sédiments transgressifs marins d'âge fini messinien à pliocène. Panneau de droite, effacement de 70 ± 5 km de mouvement dextre sur la faille restaurant la géométrie initiale du pli de Ganos. Selon Melinte Dobrescu et al., 2009 et Karakas, 2013.

qui parachève le découpage du bloc Anatolie-Egée, se fait plus récemment, il y a environ 1 Ma, en association avec la formation récente et rapide du Golfe de Corinthe. Des moteurs et des calendriers différents ont été proposés pour expliquer la formation de la faille Nord Anatolienne (Faccenna *et al.*, 2006) sans pour autant remettre en cause le fait que la faille se soit propagée sur de longues distances au cours des temps géologiques.

Motivations et plan de la thèse

Comprendre, à l'aide de la modélisation numérique, comment un décrochement a pu se propager dans la lithosphère sur de longues distances a été la motivation principale qui a conduit à la réalisation de cette thèse. Nous souhaitions développer un modèle numérique qui permette de déterminer la propagation d'une faille, tout en respectant un cahier des charges très complet :

- le modèle devait reproduire les données de surfaces disponibles,
- il devait être compatible avec les informations géologiques connues sur la structure interne et la rhéologie de la lithosphère,
- les conditions aux limites appliquées devaient être justifiées mécaniquement,
- le code utilisé devait s'appuyé sur une formulation mathématique solide,
- et enfin, la résolution numérique devait être précise et efficace.

Nous nous sommes intéressés alors à la mécanique de l'endommagement, qui, dans la formulation qui est proposée ici, est une branche de la mécanique apparue très récemment avec les travaux de Bourdin *et al.* (2000). Il s'agit d'une forme régularisée de la mécanique de la rupture classique, rigoureuse du point de vue mathématique, et qui, grâce à la régularisation, donne une approche continue des problèmes discontinus de rupture, et permet ainsi d'utiliser des techniques classiques et efficaces de résolution numérique. Mais avant de pouvoir traiter de la propagation, nous voulions déterminer quelle structure du milieu et quelles conditions aux limites était-il judicieux de choisir pour que le modèle soit à la fois compatible avec les observations géologiques et justifié du point de vue mécanique. Pour cela, nous avons utilisé le logiciel Castem2000 (C.E.A / D.M.T / L.A.M.S, 2003), et nous nous sommes placés dans un contexte où les problèmes liés à la modélisation de la rupture n'apparaissent pas, celui de la localisation de la déformation autour d'un décrochement, à l'échelle intersismique.

Le premier chapitre de cette thèse est une étude bibliographique couvrant les domaines de la modélisation numérique des milieux faillés, et de la modélisation numérique de la propagation des failles, afin de dégager les problématiques auxquelles nous tenterons de répondre. Le deuxième chapitre traite, sous la forme d'un article publié, de la modélisa-

tion de la déformation d'un milieu contenant une faille décrochante à l'échelle intersismique. Nous nous sommes attachés dans ce deuxième chapitre à déterminer quelle structure interne, quelle rhéologie de lithosphère et quelles conditions aux limites imposées rendaient possible la localisation de la déformation intersismique, conformément aux observations géodésiques. Enfin, un troisième chapitre concerne la modélisation de la propagation des failles. Ce dernier chapitre présente la formulation en endommagement utilisée ainsi que ses développements qui ont été réalisés pendant cette thèse. Le code développé n'est pour l'instant pas encore applicable à des contextes géologiques complexes, c'est un code 2D et la formulation du problème est quasi-statique, ce qui signifie que le temps n'entre *a priori* pas en jeu. Néanmoins les perspectives de cette approche novatrice sont importantes et seront présentées dans le chapitre *Conclusion et Perspectives*.

Chapitre 1

État de l'art et problématique

Ce premier chapitre présente une synthèse bibliographique consacrée à la modélisation numérique des failles décrochantes et à la modélisation de leur propagation dans la lithosphère. Il introduit les principales définitions et notions qui seront abordées dans ce mémoire. Il présente également les problématiques auxquelles cette thèse tente de répondre et les choix qui ont été faits.

1.1 Modélisation numérique des failles décrochantes

La modélisation numérique est un outil devenu indispensable pour améliorer notre compréhension des phénomènes observés en science de la Terre. Les modèles analogiques (Peltzer et Tapponnier, 1988) ou les expériences en laboratoires (Marone et Kilgore, 1993) apportent des nombreux éléments de réponses sur le comportement des matériaux ou des structures soumises à des sollicitations extérieures. Néanmoins, ils sont intrinsèquement limités pour reproduire les phénomènes étudiés aux échelles de temps et/ou d'espace rencontrées en géologie, et donc dépendants d'une mise à l'échelle délicate pour tester les conditions d'évolution rencontrées dans la nature. Les effets d'échelles sont en effet primordiaux, comme le prouve l'étude des propriétés des roches. Les ordres de grandeur de résistance à la rupture des roches varient de façon significative selon l'échelle de l'étude (Brace et Kohlstedt, 1980; Marone et Kilgore, 1993), ce qui rend très délicat l'extrapolation des résultats obtenus en condition de laboratoire, à des échelles temporelles et spatiales plus grandes.

Ces changements d'échelle et le transfert de résultats expérimentaux obtenus avec des vitesses de déformation très rapides sur des temps très courts font aussi l'objet de discussions pour certains paramètres (par exemple les paramètres élastiques de la croûte) intervenant dans les modélisations numériques. La modélisation numérique présente aussi des difficultés associées à une connaissance parfois limitée de la structure et de la nature de la lithosphère et/ou de son évolution géodynamique. Avant de pouvoir utiliser les modèles numériques élaborés à des fins de simulation et de prévision, il est donc important de pouvoir en tester la validité sur des processus géologiques pour lesquels on dispose du plus grand nombre de données (structure et quantité de déformation finie, données géodésiques, données sismiques,...) contraignantes vis à vis du problème étudié. Ces données permettront de choisir parmi les modèles et d'écarter ceux dont la géométrie, la rhéologie ou les conditions thermo-mécaniques sont en désaccord avec les données géologiques disponibles.

Parmi les objets géologiques modélisables en sciences de la Terre, les failles occupent une place privilégiée, et les failles décrochantes une place particulière. En effet, les nombreuses observables géologiques associés aux failles sont proches de la surface (champ de déformation GPS, distribution de la déformation finie, nature du contact dans la croute supérieure dans les zones actives ; distribution de la déformation et nature de la zone déformée dans la croute inférieure pour les zones de failles inactives et exhumées). La lithosphère étant stratifiée selon la profondeur, les failles normales ou inverses, qui jouent verticalement, ont une géométrie et une cinématique qui donnera peu d'information sur la structure fine (profondeur et rhéologie de chaque couche) de la croûte et de la lithosphère car les

déformations en surface moyennent les effets de ces différentes couches. Au contraire, les failles décrochantes ont une géométrie et une cinématique qui s'enregistre dans un plan orthogonal à la stratification de la lithosphère et leur comportement va donc fortement dépendre de la structure de celle-ci.

1.1.1 Modèles élastiques

Les premiers modèles représentants des failles décrochantes sont issus de la physique des réseaux cristallins, plus précisément de la théorie des dislocations (Volterra, 1907). La faille est assimilée à une dislocation vis se propageant dans un milieu élastique (Weertman et Weertman, 1964; Savage et Burford, 1973). Une dislocation est un glissement localisé d'atomes dans une structure, elle est dite *vis* lorsqu'elle se propage perpendiculairement à la déformation du réseau cristallin (figure 1.1.b). Par analogie, une faille décrochante peut être modélisée par une dislocation vis dont la propagation se ferait dans un plan vertical, et la déformation observée sur un plan horizontal. Etonnamment, la théorie des dislocations a été utilisée à la fois pour modéliser le glissement sur la faille dans la croûte lors d'un séisme et pour déterminer les champs de déformation et de contrainte pendant la période intersismique pendant laquelle il n'y a aucun mouvement sur la portion de la faille affectant la croûte supérieure cassante. Dans le premier contexte, la dislocation est alors vue comme le point source d'un séisme (Okada, 1985, 1992). Les champs de déplacement et de contrainte cosismiques autour de l'hypocentre sont alors donnés par les solutions analytiques d'Okada. Dans le second contexte (Chinnery, 1961; Steketee, 1958), à l'échelle intersismique, ces champs sont évalués sur la surface libre par les solutions de Weertman et Weertman (1964). Lorsqu'une seule dislocation a lieu dans un espace élastique homogène infini, les champs de déplacement et de contrainte sont en effet faciles à calculer (voir l'appendice A). Pour modéliser les failles de la croûte terrestre, il faut cependant considérer un demi espace élastique, avec une surface libre représentant la surface de la Terre. Pour ce faire, la méthode des images a été introduite (Steketee, 1958; Weertman, 1964; Lee, 1987), le champ de déplacement sur une surface libre est équivalent au champ de déplacement sur le plan médiateur du segment constitué par les dislocations source et image. Ce modèle reste simple, au sens où deux paramètres seulement sont nécessaires pour évaluer les champs de déplacement et de contrainte sur le plan médiateur (représentant la surface libre) : la distance entre la dislocation et la surface libre, et la valeur du saut de déplacement imposé par la dislocation, ou de manière équivalente, le déplacement observé aux limites (voir encore l'appendice A pour une démonstration de cette équivalence).

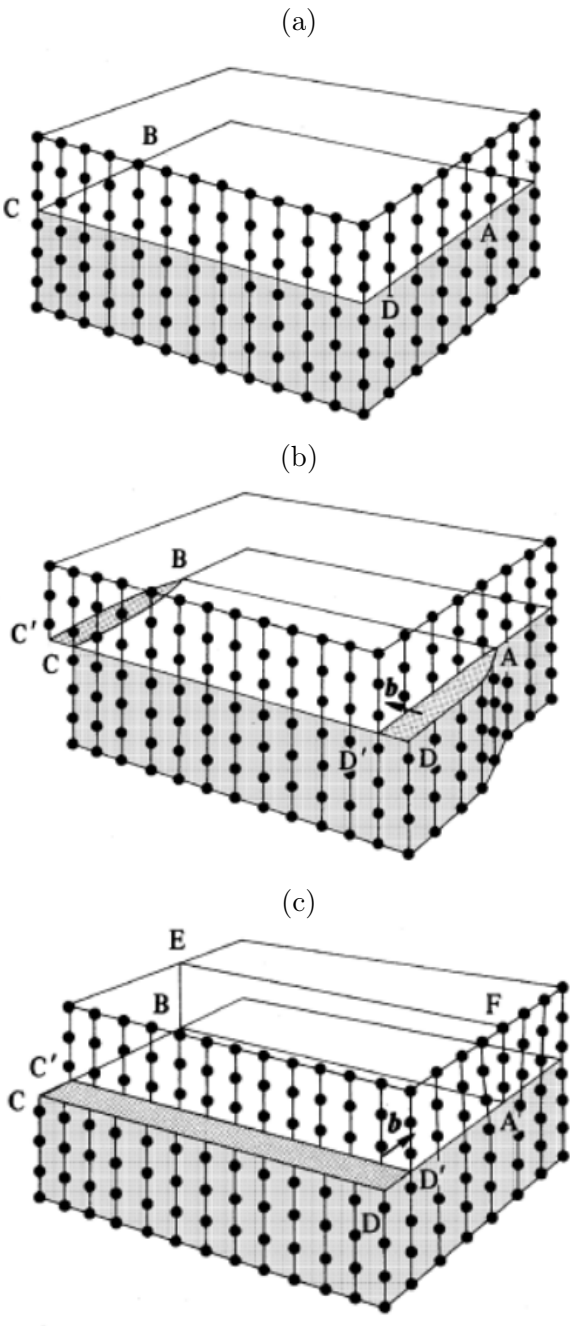


FIGURE 1.1: D'après Mercier et Vergely (1992). Géométrie des dislocations dans un cristal à réseau cubique : (a) réseau sans défaut (b) dislocation vis (c) dislocation coin.

La simplicité de ce modèle théorique, ainsi que le fait que sur cette surface libre, le champ de déplacement calculé corresponde, en première approximation, à celui observé autour des grandes failles lors d'un séisme (e.g. Stein, 2007), ou pendant la période intersismique (e.g. : déformation mesurée par géodésie en forme d'arctangente au travers des décrochantes), explique en grande partie le succès de son application à des problèmes géologiques. Pour ne citer que quelques exemples associés à la modélisation de la vitesse intersismique le long des grands décrochements, Savage et Burford (1973) et Smith-Konter *et al.* (2011) l'appliquèrent au cas de la faille de San Andreas, Al Tarazi *et al.* (2011) au cas de la faille de la Mer Morte et Le Pichon *et al.* (2005) au cas de la faille Nord Anatolienne. Utiliser ce modèle permet en effet, en comparant les déplacements observés en surface par les données de type GPS ou INSAR, et en connaissant la vitesse des plaques (vitesse aux limites du modèle), de retrouver la profondeur de la dislocation supposée (appelée profondeur de blocage), qui, d'après certains auteurs (Smith-Konter *et al.*, 2011; Le Pichon *et al.*, 2005), donne une indication de la profondeur sismogénique. Si la vitesse des blocs séparés par la faille n'est pas connue, ce modèle permet d'obtenir par inversion la vitesse sur la faille et la profondeur de blocage.

D'autres modèles ont également émergé de la théorie des dislocations. C'est le cas par exemple de Savage (1998) qui a discuté de l'introduction d'un autre type de dislocation, les dislocations de type *coin* qui, au contraire des dislocation vis, se propagent parallèlement à la déformation du réseau cristallin (figure 1.1.c). Weertman (1964) et Savage (2006) ont, quant à eux, considéré une distribution continue de dislocations en profondeur, au lieu d'une dislocation discrète, qui permet de prendre en compte la transition entre la partie supérieure où la faille est bloquée et la partie inférieure où la faille glisse à la vitesse des plaques qu'elle sépare. Enfin, Brink *et al.* (1996) et Fay et Humphreys (2005) ont introduit de multiples dislocations vis pour prendre en compte la complexité d'un système de failles, ou les interactions entre les différents segments d'une faille.

Une variante dans l'utilisation des dislocation est donnée par les modèles dits de blocs, en anglais *Block model* (Becker *et al.*, 2005; Meade *et al.*, 2002). Si, à long-terme, le déplacement moyen autour de la faille, correspond au déplacement lointain dû au mouvement des plaques rigides, alors ce déplacement géologique lointain peut être vu comme la somme du déplacement cosismique dû à une dislocation appliquée sur une portion du plan de faille proche de la surface, et du déplacement intersismique, en forme d'arctangente (voir la figure 1.2). Ainsi, pour obtenir le champ de déplacement intersismique, il suffit de soustraire du déplacement géologique lointain (celui des blocs rigides), le dépla-

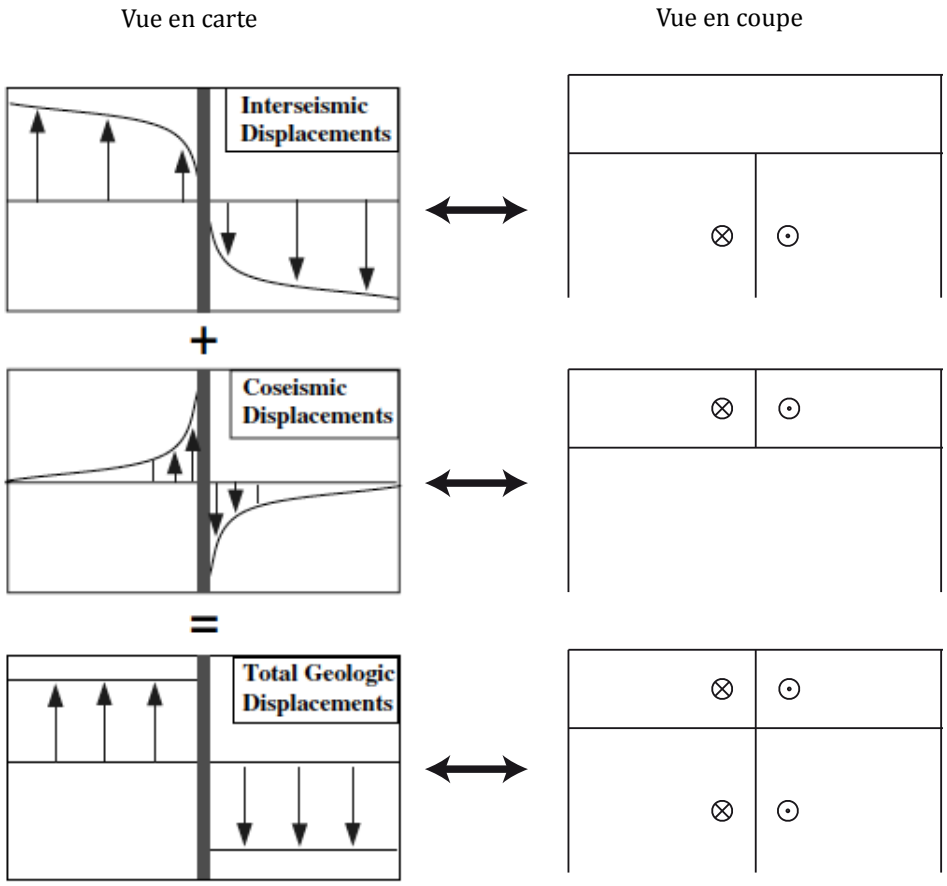


FIGURE 1.2: D'après Meade *et al.* (2002). Le déplacement géologique lointain peut être vu comme la somme du déplacement cosismique dû à une dislocation appliquée sur une portion du plan de faille proche de la surface, et du déplacement intersismique, en forme d'arctangente.

cement cosismique. Cette méthode permet de s'affranchir des problèmes numériques liés à la modélisation de la dislocation intersismique sur une profondeur infinie.

Les différents modèles évoqués se basent tous sur les mêmes hypothèses : le milieu est homogène élastique, et le saut de déplacement sur la faille peut être représenté par une dislocation. Or, ces deux hypothèses sont discutables lorsqu'il s'agit d'étudier les failles géologiques réelles. La première hypothèse peut être en première approximation justifiée lorsque seule la partie supérieure de la croûte est concernée, mais la ductilité des couches de la croûte inférieure et du manteau lithosphèrique font nécessairement envisager de développer des modèles visco-élastiques, homogènes ou hétérogènes.

La deuxième hypothèse, la représentation du glissement sur la faille par une dislocation, est également discutable. D'une part, car elle n'explique pas la cause des séismes, elle ne fait que reproduire le saut de déplacement généré par ces derniers. Et d'autre part, soit la dislocation est discrète (c'est-à-dire ponctuelle), ce qui ne semble pas réaliste, soit elle est continue et dans ce cas la ligne ou la surface de saut est une simple discontinuité du milieu élastique. Comment dans ce cas prendre en compte la nature de la zone de faille ? En effet, cette zone, bien que d'épaisseur fine par rapport aux dimensions de la faille (longueur et largeur et souvent représentées comme un plan de discontinuité d'épaisseur nulle), est une zone de cisaillement qui concentre une déformation plastique (dite aussi déformation finie) importante. Ainsi, si l'on souhaite faire des modèles plus fins, il faut en plus prendre en compte la visco-plasticité de la zone de faille. Une autre façon de faire, qui semble elle aussi raisonnable, est d'introduire de la friction sur les plans représentant la faille, tout en gardant un milieu autour qui soit homogène et élastique.

Enfin, les modèles élastiques basés sur la théorie des dislocations, cherchent, comme dit précédemment, à reproduire l'état de la déformation et des contraintes dans le milieu soit pendant l'intersismique (Chinnery, 1961; Steketee, 1958), soit pendant le cosismique (Okada, 1985). Néanmoins, la prise en compte d'un cycle sismique complet nécessite que la faille glisse pendant le cosismique, puis qu'elle soit bloquée pendant la période intersismique. Dans ce cas, il faut alors "réactiver" périodiquement la dislocation pour tenir compte de ce comportement plus complexe. De nombreux modèles (discutés dans le paragraphe suivant) s'y sont attelés en imposant un glissement périodique aux bords du modèle comme condition aux limites, avec à intervalles réguliers, un glissement lui aussi imposé sur la faille, pour modéliser la période cosismique. Ces limites ont donc très rapidement été prises en compte, et de nouvelles catégories de modèles ont été développées afin d'y remédier.

1.1.2 Couplage visco-élastique et plasticité de la zone de faille

Nur et Mavko (1974), Savage et Prescott (1978), Savage (2000) et Pollitz (2001) ont proposé des solutions analytiques pour généraliser la solution de Weertman et Weertman (1964) à un milieu visco-élastique. Nur et Mavko (1974) a tout d'abord calculé les champs de contraintes et de déplacements générés par une dislocation dans un milieu élastique (appelé *schizosphère*) sous lequel se trouve un milieu visco-élastique (appelé *platosphère*) ayant le comportement idéalisé linéaire de solide de Maxwell. Par la suite Savage et Prescott (1978) ont appliqué les solutions de Nur et Mavko (1974) sur plusieurs cycles sismiques, en "réactivant" la dislocation à intervalle régulier. Les modèles de Johnson *et al.* (2007) et Fulton *et al.* (2010) en sont inspirés, avec le même choix de structure et de rhéologie, ainsi que les conditions en déplacement imposées sur la faille périodiquement.

Alors que ces premiers modèles considèrent un demi-espace infini et que le déplacement n'est imposé que sur la dislocation, Savage (2000) a supposé que la profondeur de la partie visco-élastique était finie, et a imposé, en plus du déplacement sur la faille, un déplacement basal sous la partie visco-élastique. Les travaux antérieurs de Ben-Zion *et al.* (1993) et de Bourne *et al.* (1998) avaient déjà proposés des conditions aux limites similaires (basales) en postulant que le déplacement dans la partie ductile de la croûte inférieure devait entraîner celui de la partie supérieure cassante. Ces modèles présentent l'inconvénient d'imposer un chargement basal de la croute supérieure par l'intermédiaire d'un décollement généralisé et non par un cisaillement vertical appliqué sur les bords latéraux des blocs. Néanmoins, ces modèles tiennent compte du fait que, dans la partie ductile, un saut de déplacement n'a pas de sens physique, et ont donc imposés un déplacement variant graduellement.

Par ailleurs, Pollitz (2001) a proposé un modèle analytique qui donne les solutions pour un milieu de largeur finie (dans le sens perpendiculaire au plan de la faille), et cette fois, le déplacement est également imposé sur les bords latéraux du modèle (en plus du déplacement périodique sur la faille). Un exemple d'application de ce modèle est donné par Segall (2002) pour la faille de San Andreas. Ce type de conditions aux limites a ensuite été largement repris dans les modèles numériques, citons à titre d'exemples Johnson et Segall (2004), Pollitz et Nyst (2005), Hetland et Hager (2005), Hetland et Hager (2006) ou encore Vaghri et Hearn (2012). Imposer le déplacement latéralement présente l'avantage d'être a priori plus réaliste que de l'imposer par un déplacement basal avec une déformation distribuée sur un niveau de décollement généralisé à l'interface croûte supérieure - croûte inférieure. De plus, suffisamment loin de la faille, les plaques ne se déforment pas et fonctionnent comme des blocs rigides, et se déplacent à vitesse constante. Si la taille du

modèle le permet, il est alors très cohérent d'imposer cette vitesse constante aux bords latéraux du modèle, reproduisant la cinématique des deux plaques séparées par une frontière décrochante.

Néanmoins, ces différents modèles imposent également un déplacement périodique sur la faille. De même que pour les modèles de dislocation simples, cette condition, même si elle peut être le reflet des incréments de déplacements engendrés par les séismes qui se succèdent sur les failles, n'apporte pas d'éléments de compréhension sur le mécanisme de déclenchement d'un séisme, ni sur la mécanique associée au fonctionnement long-terme de la faille. Elle reproduit un processus sans donner d'explication quant à sa cause. Les modèles qui ont tenté de s'en affranchir sont rares (citons par exemple Platt *et al.*, 2008). En effet, même lorsque seule la période intersismique est étudiée, imposer les conditions aux limites latéralement sans introduire une variation de rhéologie autour de la zone de faille ne permet pas de reproduire le champ de déplacement observé en surface (Roy et Royden, 2000; Chéry, 2008). En effet, un cisaillement vertical imposé latéralement aux limites d'un modèle de rhéologie homogène ne localise pas la déformation élastique intersismique au voisinage de la faille, contrairement à ce qui est observé par les mesures géodésiques.

Afin de permettre la localisation de la déformation élastique près de la zone de faille, de nombreux auteurs ont introduits des variations dans la valeur des paramètres rhéologiques. Chéry (2008), Fulton *et al.* (2010) et Vaghri et Hearn (2012) ont proposé une variation de l'épaisseur élastique, justifiée par la présence d'une zone de faiblesse de la croûte élastique (dans le cas de Chéry par exemple, causée par la différence de nature des plaques de part et d'autre de la faille). Vaghri et Hearn (2012) introduisent une zone visqueuse, dans un milieu élastique, sous la zone de faille. Cette zone de faiblesse a également été modélisée par une variation dans les propriétés visqueuses du milieu, avec un milieu dont la viscosité est plus faible sous la zone de faille (Zatman, 2000; Platt *et al.*, 2008; Fay et Humphreys, 2005) et Yamasaki *et al.* (2014). Enfin, suivant le modèle de gouge à rhéologie visco-plastique de Byerlee et Savage (1992) (de type Coulomb), Chéry *et al.* (2001) ont proposé un modèle de zone de faille visco-plastique mais dépendant de la pression lithostatique (de type Drucker-Prager). Il convient de citer également les travaux de Smith et Sandwell (2004), de Hetland et Hager (2005, 2006) ainsi que de Takeuchi et Fialko (2013) qui ont introduit dans leurs modèles numériques des rhéologies complexes (de type Burgers ou tri-visqueux) pour mieux prendre en compte la variation du comportement du milieu au cours de différentes échelles de temps.

Les modèles décrits précédemment font état d'une discontinuité dans un milieu élastique, qui représente les plans de rupture (au sens des mécaniciens) ou plans de faille (au

sens des géologues). Des conditions aux limites peuvent être imposées sur ces plans, comme par exemple des conditions périodiques qui simulent plusieurs cycles sismiques (Hetland et Hager, 2005). Lorsqu'aucune condition n'est imposée sur ces plans, le glissement se fait de manière libre. Weertman (1964) a jugé cette condition non réaliste physiquement, à cause du fait que les surfaces de contact ne sont pas régulières mais présentent des aspérités, il a alors ajouté une force de frottement sur les plans de la faille qui s'oppose au glissement. De la même façon, Roy et Royden (2000) ont imposé un coefficient de glissement frictionnel non nul sur la faille. Comme noté par Roy et Royden (2000), c'est probablement une combinaison de tous ces aspects (variation des paramètres visco-élastiques, friction) qui conduit à la localisation de la déformation.

1.1.3 Problématiques de la thèse

La grande variétés des études évoquées montre que jusqu'à présent, le choix des conditions aux limites et de la rhéologie d'un modèle ne fait pas consensus. De nombreux auteurs travaillant sur le court terme utilisent des conditions aux limites sur la faille afin de reproduire le cycle sismique (e. g. Johnson *et al.*, 2007), ou font l'hypothèse d'une rhéologie faible de la croûte inférieure pour mieux correspondre aux données post-sismiques (e. g. Takeuchi et Fialko, 2013). D'un autre côté, les auteurs privilégiant des conditions aux limites long terme (appliquées loin de la faille) constatent une déformation non localisée, qui ne correspond pas aux données géodésiques (Chéry, 2008).

Dans un premier temps, le travail effectué au cours de cette thèse a été de tenter de réconcilier la modélisation de la déformation intersismique avec l'utilisation de conditions aux limites cohérentes avec le long terme, et mécaniquement justifiées. L'objectif principal était de retrouver en surface, une déformation localisée près de la faille, sans imposer cette localisation au travers de conditions aux limites appliquées sur la faille, qui, même si elles reproduisent le glissement cosismique, n'apportent aucune lumière sur la compréhension de leur cause, et sont inadaptées lorsque seule la période intersismique est étudiée. De même, des conditions aux limites appliquées à la transition cassante-ductile ne paraissent pas plausibles d'un point de vue mécanique, et sont donc mises de côté.

Le choix a donc été fait de considérer uniquement des conditions aux limites sur les bords latéraux du modèles, elles sont justifiées par le fait qu'elles reproduisent alors le déplacement dû au mouvement séculaire des plaques. Ce choix sur les conditions aux limites fait, la détermination de la structure de la lithosphère et de la rhéologie, qui permettent de localiser la déformation observée par les géodésiens, est alors essentielle. Un exemple de mécanisme de localisation simple est alors l'introduction d'une zone de faiblesse dans le

plan de la faille, qui se traduit par une variation latérale de la rhéologie de la lithosphère. Là encore, ce choix doit être justifié par les données géologiques ou géophysiques actuellement disponibles. Le chapitre 2 de ce manuscrit présente, sous forme d'un article publié, la contribution de cette thèse à cette question.

1.2 Modélisation numérique de la propagation des failles décrochantes

La modélisation de la propagation des failles sous l'effet d'un chargement a pour vocation de répondre à deux questions majeures. La première est de comprendre l'histoire du glissement cosismique sur la portion de faille réactivée par un tremblement de terre pendant la rupture sismique (propagation de la rupture sur une faille préexistante), et la seconde, de comprendre comment une faille se propage au sein d'un milieu initialement indemne.

La propagation d'une rupture sismique sur une faille préexistante est correctement appréhendée par les études sismologiques, que ce soit par des études classiques comme pour le tremblement de terre de Kobé (Kikuchi et Kanamori, 1996), ou utilisant des accélérogrammes (Yoshida *et al.*, 1996), ou même par des études géodésiques, comme dans le cas d'enregistrements continus d'une rupture de megathrust (e.g. Sumatra en 2004 par GPS Vigny *et al.*, 2003). La grande variété de données permet de bien cadrer la modélisation de la propagation de la rupture sur une faille préexistante. *A contrario*, la propagation de la faille dans un milieu non fracturé est, quant à elle, plus difficile à modéliser, tandis que la propagation d'une faille décrochante à des échelles de temps géologiques ne l'est toujours pas.

Il est en effet difficile de propager une fissure en mode II (cisaillement), alors que cela est beaucoup plus facile en mode I (ouverture) (voir les études expérimentales de Cox et Scholz, 1988; Moore et Lockner, 1995). Le processus physique supposé lors de la propagation à grande échelle d'une faille en cisaillement, est la création tout d'abord de micro-fissures en mode I (fentes de tension), puis la propagation et la progressive interconnexion de ces micro-fissures, et enfin la formation d'une faille à grande échelle (Scholz, 2002; Dalguer *et al.*, 2003). Ce processus est difficile à modéliser, d'autant plus que les échelles de temps et d'espace peuvent être très étendues (création des micro-fissures sur de échelles spatio-temporelles bien inférieures à la propagation de la faille kilométrique), c'est pourquoi la plupart des travaux de propagation traitent en fait d'un problème de nature différente : la propagation de la rupture sur une faille préexistante.

1.2.1 Propagation de la rupture sur une faille préexistante

Lors d'un séisme, une roche, soumise à des contraintes dépassant le seuil qu'elle peut supporter, se rompt et libère instantanément l'énergie élastique qui s'était accumulée. Il se produit alors un déplacement brutal qui a lieu souvent sur une zone de moindre résistance, sur une faille préexistante par exemple. La propagation de la rupture en sismologie est modélisée de deux façons. D'une part, le glissement cosismique peut être intuitivement appréhendé par les mécanismes de glissement frictionnel dont la propagation est donnée par les lois de frottement. De nombreuses lois de frottement ont été exploitées, des lois de frottement simple, comme le *slip-weakening model* d'Andrews (1976), à des lois de frottements plus complexes, comme les modèles de friction dépendants du taux et de l'état de glissement (*rate- and state- dependent friction*) (Madariaga *et al.*, 1998).

D'autre part, la propagation de la rupture est aussi modélisée à l'aide de la théorie de Griffith (1921), qui donne un critère de propagation des fissures, donc de la création de nouvelles surfaces de rupture, initialement utilisé pour les fissure en mode I. Ce critère est établi à partir de conditions de stabilité et d'équilibre entre les différentes énergies qui entrent en jeu (énergie potentielle et énergie de fissuration), et peut également s'exprimer de façon équivalente en termes de facteurs d'intensité de contrainte (Irwin, 1957). De nombreux travaux se sont basés sur la théorie de Griffith pour modéliser la propagation de la rupture comme par exemple, ceux de Ida (1972) ou plus récemment, ceux de Dalguer *et al.* (2003) qui ont de plus combiné Griffith avec une loi de frottement.

Ces deux approches offrent chacune un critère qui permet de rendre compte de la propagation de la rupture. Néanmoins, pour modéliser cette propagation sur une faille préexistante, le tracé et la géométrie de la faille doivent être connus *a priori*. Que faire lorsque le tracé de la faille est une inconnue du problème ou lorsque l'on ne souhaite pas l'imposer ? D'autre part, le fait que la faille se propage fait apparaître, en outre, des difficultés numériques liées à l'évolution géométrique de la discontinuité. Ce sont ces inconvénients que les modèles présentés dans la section suivante tentent de supprimer.

1.2.2 Propagation de la faille dans un milieu non fracturé : Mécanique de l'endommagement

Pour tenter de déterminer comment une faille se propage au sein d'un milieu initialement indemne, sans hypothèse *a priori* sur le trajet qu'elle emprunte, une nouvelle catégorie de modèles a émergé : les modèles dits *d'endommagement*. Cette catégorie de modèles, s'appuie sur une représentation des imperfections préexistantes au sein des roches, qui, lorsqu'elles sont en densité suffisante, créent une zone de faiblesse et conduisent la faille

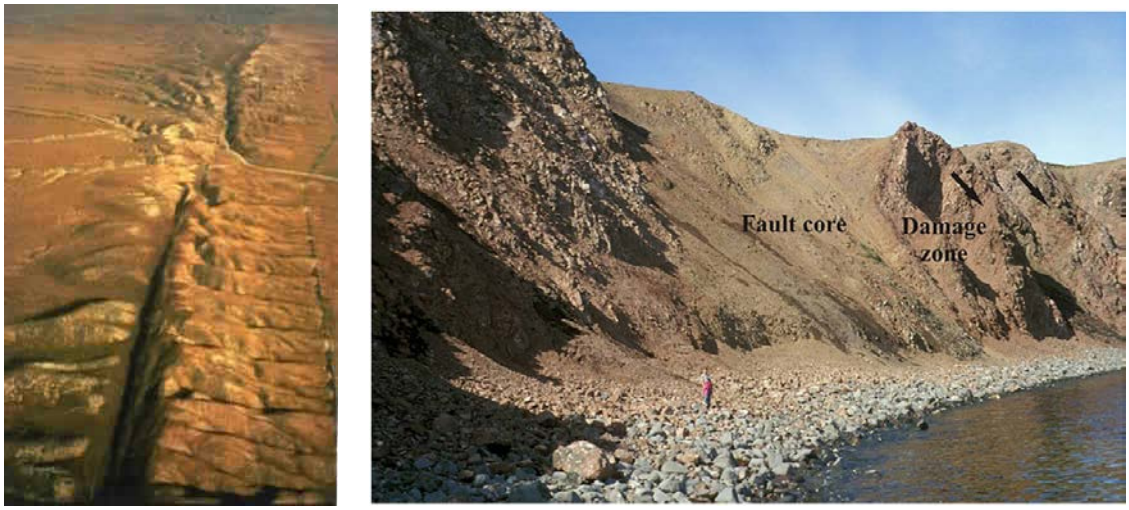


Figure 1.3: A gauche : vue SE le long de la faille de San Andreas. Localisation : plaine de Carrizo, San Luis Obispo County, Californie. (Photo : G.K. Gilbert, U.S. Geological Survey). A droite : D'après Gudmundsson *et al.* (2010), zone de faille et partie de la zone d'endommagement (qui mesure plusieurs centaines de mètres de large) de la faille de Husavik-Flatey, Islande.

à se propager dans cette zone. Ils font apparaître une nouvelle variable, appelée variable d'endommagement, qui mesure la densité de ces imperfections en chaque point du modèle, et qui permet une propagation de la faille au sein de la zone la plus endommagée.

1.2.2.1 Zone d'endommagement

Autour du plan de rupture, se situe une zone d'épaisseur faible par rapport à la dimension du plan, contenant un matériau fortement endommagé et caractérisé par un fort gradient de déformation, avec une densité élevée de micro-failles de tailles nettement inférieures à la faille principale et d'orientation variable par rapport à cette dernière (Faulkner *et al.*, 2011; Mitchell et Faulkner, 2009). C'est au sein de cette zone, appelée *zone d'endommagement*, que la faille (ou zone de faille lorsque la déformation finie est plurikilométrique) s'est localisée (voir les vues de terrain figure 1.3, et le schéma 1.4). Au front de la faille, la zone endommagée est appelée *process zone*, elle est éventuellement plus large que la zone endommagée autour de la faille localisée (Faulkner *et al.*, 2011), et elle est le lieu de la formation de nouveau segment, lorsque la faille se propage (voir la figure 1.5). En dehors de la zone endommagée la densité de micro-failles peut ne pas être nulle, tout en étant homogène. En effet, ce qui caractérise la zone endommagée n'est pas la présence de micro-failles, mais leur densité plus élevée que dans les roches environnantes, comme par exemple pour la faille d'Arima-Takatsuki, qui a produit le tremblement de terre de Kobe,

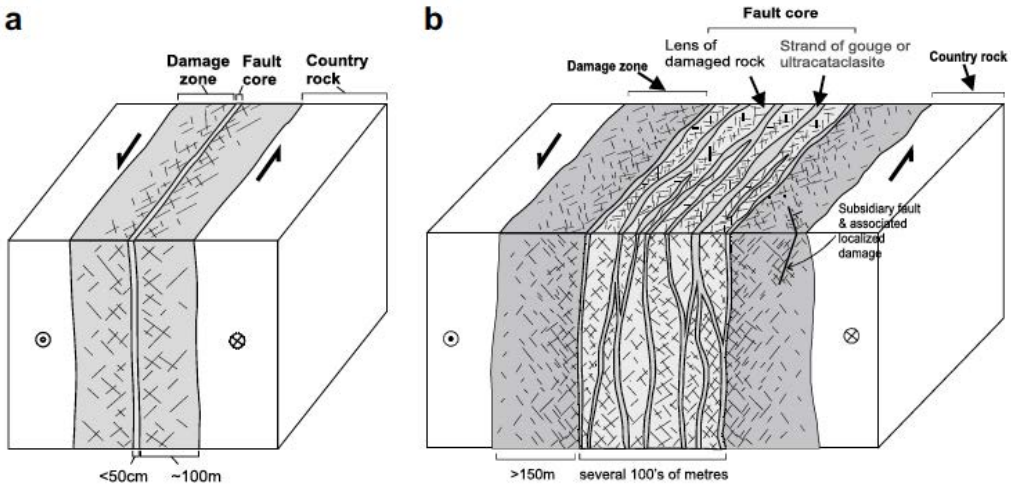


FIGURE 1.4: D'après Mitchell et Faulkner (2009). Structure typique d'une zone de faille décrochante dans une roche quartzofeldspathique, montrant en (a) une zone de faille unique, et en (b) une zone de failles multiples, avec la zone d'endommagement associée.

au Japon, autour de laquelle la densité de micro-failles est non nulle (Lin *et al.*, 2007) (voir la figure 1.6).

Un géologue qui étudie les failles actives sur le terrain décrit ces failles comme une déformation localisée, large de quelques mètres sur de petits décrochements ayant accumulé des rejets horizontaux faibles, à $100 - 200$ mètres sur les grands décrochements cumulant plusieurs dizaines à quelques centaines de kilomètres de rejet (Savage et Brodsky, 2011; Mitchell et Faulkner, 2009). La largeur de la zone endommagée est donc très variable, cette variation est attribuée soit à la taille de la faille principale (Scholz, 2002), ou bien plus fréquemment à la quantité de déplacement sur la faille (Savage et Brodsky, 2011; Faulkner *et al.*, 2011; Mitchell et Faulkner, 2009), la figure 1.7 illustre la relation quasi linéaire pour les déplacements inférieurs au kilomètre, puis quasi constante pour des déplacements plus grands, entre ces deux grandeurs.

Etudiant la déformation, les géodésiens identifient une zone beaucoup plus large que la zone d'endommagement. Cette zone est déformée de manière élastique par le cisaillement des blocs, atteint plusieurs dizaines de kilomètres et nous l'appellerons *zone de localisation de la déformation intersismique*. Au delà de cette zone, la déformation en surface est très faible, non mesurable par GPS, et impossible à discerner dans la géologie, les roches sont assimilées à des matériaux rigides. La largeur de la zone de déformation intersismique est beaucoup plus importante que la largeur de la zone d'endommagement, et *a fortiori* de la zone de faille, dans la croute supérieure. Elle est par contre assez comparable à la largeur des zones décrochantes exhumées décrites dans la croûte inférieure. Ces zones de cisaillement

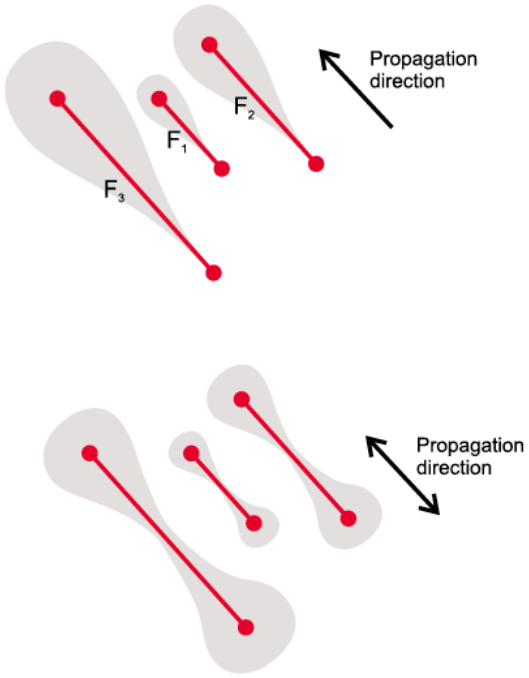


Figure 1.5: D'après Faulkner *et al.* (2011). Le trait rouge représente la faille localisée, la zone grise, représente la zone endommagée. Au front de la faille, la zone endommagée, appelée *process zone*, serait plus large, c'est la zone au sein de laquelle la faille peut se propager.

caractérisent une déformation ductile, distribuée sur quelques dizaines de kilomètres de large. Les géologues y réfèrent en terme de déformation distribuée par opposition aux déformations localisées qu'ils observent sur les failles dans la croûte supérieure.

1.2.2.2 Modèles d'endommagement

Les modèles d'endommagements sont nés de la nécessité de prendre en compte plusieurs phénomènes observables sur les matériaux dégradés (Chaboche, 1987) : d'une part, la non linéairité du comportement de ces matériaux soumis à des déformations, même lorsque celles-ci restent petites, et d'autre part la dépendance des propriétés élastiques des matériaux à leur état d'endommagement. De plus, les expériences (Lockner *et al.*, 1991; Zang *et al.*, 2000) et les observations de terrain Faulkner *et al.* (2011) montrent que lorsqu'une fissure se crée au sein d'une roche, elle est précédée de la formation d'une zone de micro-fissuration d'épaisseur non nulle au sein de laquelle la fissure semble se propager (*process zone*). Enfin, les limites de la théorie de Griffith (singularité en front de fissure, impossibilité de créer une fissure dans un milieu intact ou de prévoir le chemin d'évolution) et le besoin dans certains contextes de tenir compte du rôle de la température (*shear heating*, intrusion magmatique,...) ont fait émerger la nécessité d'une théorie de l'endommagement.

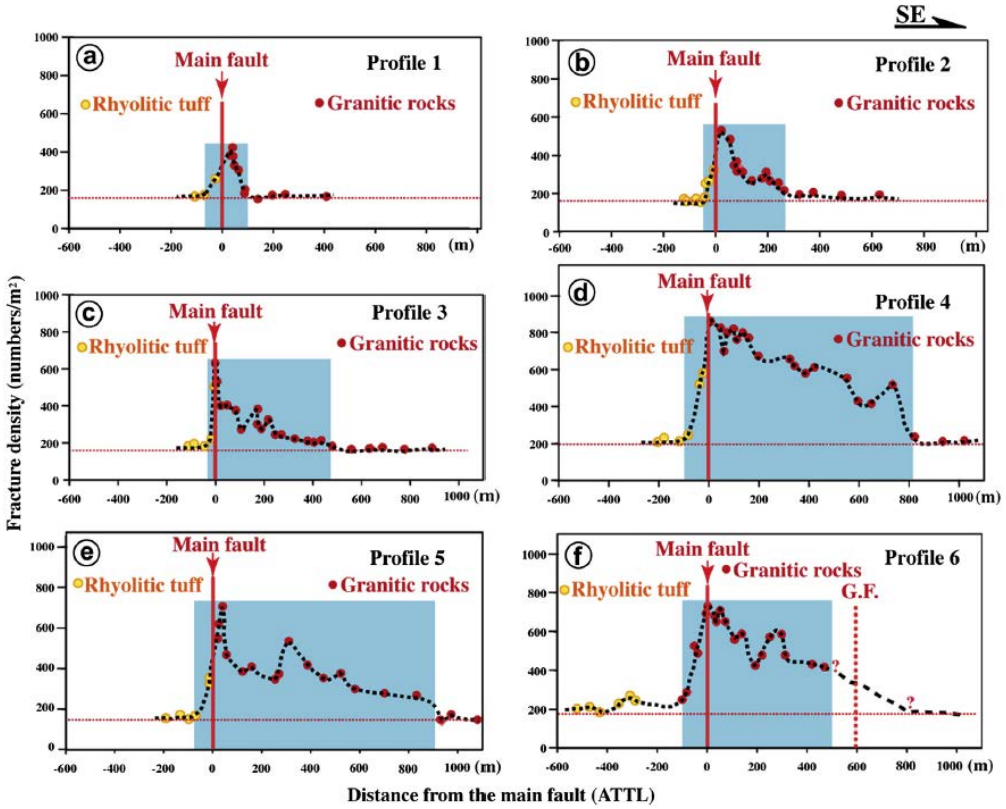


FIGURE 1.6: D'après Lin *et al.* (2007). Le trait rouge représente la faille localisée, la zone grise, représente la zone endommagée. Au front de la faille, la zone endommagée, appelée *process zone*, serait plus large, c'est la zone au sein de laquelle la faille peut se propager.

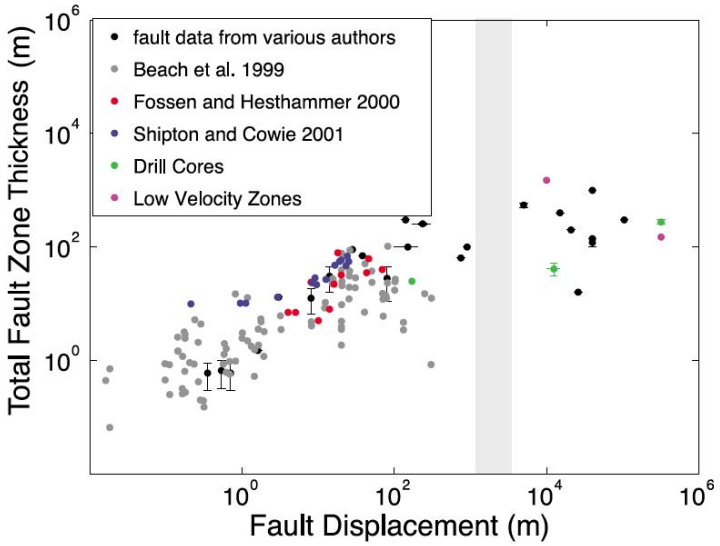


FIGURE 1.7: D'après Savage et Brodsky (2011). Largeur de la zone de faille et de la zone endommagée, en fonction du déplacement sur la faille (données issues d'études sur différentes failles, voir Savage et Brodsky (2011) pour les références).

Lyakhovsky *et al.* (1997) ont donc proposé un modèle d'endommagement appliqué aux matériaux cassants de la lithosphère. Introduisant une nouvelle variable, appelée variable d'endommagement, ce modèle s'appuie d'une part sur la dépendance d'une énergie non linéaire à la variable d'endommagement, et d'autre part sur l'introduction d'un troisième module élastique (les coefficients de Lamé étant les deux premiers) et de la dépendance de ces trois modules à la variable d'endommagement. Cette variable d'endommagement définit un champ scalaire dont la valeur en chaque point est comprise entre 0 (matériau intact) et 1 (matériau totalement endommagé). Elle simule ainsi la perte de rigidité du matériau avec sa dégradation, et lorsqu'une zone est totalement endommagée, elle rend compte de la création (ou de la propagation) de la fissure. En dérivant les potentiels élastiques, il vient alors que le tenseur des contraintes peut être écrit comme une pseudo loi de Hook qui est thermodynamiquement admissible.

Ces modèles permettent à la fois de prendre en compte la non linéarité de leur comportement même à des taux de déformations faibles, et en même temps l'évolution des propriétés élastiques avec l'état d'endommagement des matériaux (Finzi *et al.*, 2013). Par ailleurs, l'augmentation de l'endommagement dans le matériaux permet la dissipation d'une énergie qui empêche les singularités en front de fissure. Les applications sont nombreuses, citons par exemple les travaux de Bercovici et Ricard (2003) pour les matériaux fluides, et dans la continuité des travaux de Lyakhovsky *et al.* (2001), les travaux de Lyakhovsky et Ben-Zion (2009); Karrech *et al.* (2011); Finzi *et al.* (2013) pour les matériaux fragiles.

Néanmoins, ces modèles d'endommagement augmentent la complexité numérique des problèmes et engendrent des difficultés de résolution liée à la localisation de l'endommagement, difficultés qui sont typiques des lois de comportement adoucissantes. Pour remédier à cette localisation de l'endommagement qui occasionne une dépendance forte des résultats au maillage, Lyakhovsky *et al.* (2011) ont d'abord introduit de la viscosité qui régularise en temps le modèle, mais dont la signification physique reste à discuter selon le contexte géologique choisi, et ensuite un quatrième terme non linéaire dans le potentiel élastique qui dépend du gradient de la variable d'endommagement. Mais ces ajouts de termes non linéaires rendent la formulation peu lisible, notamment vis à vis de la conservation de l'ellipticité du modèle qui assure que le problème est bien posé mathématiquement.

1.2.2.3 L'approche choisie dans cette thèse : l'endommagement comme régularisation de la rupture

Le modèle d'endommagement que nous présentons au chapitre 3, basé sur les travaux de Bourdin *et al.* (2000), fait apparaître naturellement une variable d'endommagement à

partir de la mécanique de la rupture classique, et tend mathématiquement vers celle-ci lorsque la taille de la zone endommagée tend vers 0 (Braides, 1998). De la même façon que la théorie de Griffith, il s'appuie sur la minimisation de l'énergie. En ce sens, il peut être vu comme une régularisation de la mécanique de la rupture classique, puisqu'il introduit, en plus de la variable d'endommagement, un paramètre appelé *longueur interne* qui permet de rendre le problème non local en "diffusant" l'endommagement sur une zone de taille définie, et ainsi de s'affranchir des problèmes numériques liés à la dépendance au maillage. On peut montrer que l'énergie dissipée dans une zone de localisation de l'endommagement est équivalente à celle donnée par le modèles de Griffith. Ceci permet de retrouver les résultats de la mécaniques de la rupture classique, et en plus de résoudre des problèmes d'initiation et de description numérique de topologie complexe de fissure (bifurcation, embranchement).

Le paramètre de longueur interne trouve par ailleurs une interprétation naturelle dans l'étude des failles de la lithosphère puisqu'une zone de largeur macroscopique de roche endommagée a été observée de part et d'autre de la zone de faille (Mitchell et Faulkner, 2009). Cette largeur déjà évoquée dans l'introduction de cette section peut en effet tout à fait correspondre à la zone du matériau modélisé dont la valeur de la variable d'endommagement est supérieure à celle du reste du matériau. La zone de faille correspondra alors à la zone dans laquelle la valeur du paramètre d'endommagement est maximum (c'est-à-dire vaut 1).

Le modèle d'endommagement que nous proposons à l'avantage d'offrir un cadre mathématique bien défini à la résolution du problème, sans dépendance des résultats au maillage. De plus, il reste inscrit dans le cadre de l'élasticité linéaire, ce qui permet l'utilisation de solveurs efficaces, tout en permettant une éventuelle généralisation à la viscoélasticité lorsque le cadre géologique rendra cette application nécessaire. Le travail effectué au cours de cette thèse, et présenté au chapitre 3, perfectionne le modèle de Amor *et al.* (2009) en tentant de résoudre les problèmes théoriques (interpénétration de la matière en compression, par exemple) ou numériques (qui sont du même type que les problèmes rencontrés en élasticité quasi incompressible) auxquels il est confronté, et en enrichissant ce modèle pour, par exemple, pouvoir tenir compte de la gravité.

Chapitre 2

Modélisation de la déformation intersismique à l'aide de la mécanique classique

Ce deuxième chapitre présente le travail réalisé sur la modélisation de la déformation intersismique autour des failles décrochantes. Il prend la forme d'un article publié au cours de cette thèse.

2.1 Introduction

Le premier volet de cette thèse est la modélisation numérique de la déformation intersismique autour d'une faille décrochante. Elle a pour but de déterminer quelles conditions aux limites, quelle structure et quelle rhéologie choisir pour que le modèle numérique reproduise au mieux la déformation observée à l'aide des mesures géodésiques.

Les observations géodésiques autour de la plupart des grandes failles décrochantes (comme par exemple Flérit *et al.*, 2004, pour la faille Nord Anatolienne) montrent que la déformation en surface présente une localisation importante dans une zone de quelques kilomètres jusqu'à 20 – 30 km de large autour de la faille. Un modèle analytique aujourd'hui très populaire et couramment utilisé (e.g. Lisowski *et al.*, 1991; Smith-Konter *et al.*, 2011) pour reproduire les données de surface est celui de Savage et Burford (1973) qui présente le champ des vitesses parallèles à la faille, en fonction de la distance à la faille, sous forme d'une arctangente paramétrée par la profondeur de dislocation, appelée *profondeur de blocage* (voir le chapitre 1).

Ce modèle, issu de la théorie des dislocations en milieu élastique (Weertman et Weertman, 1964), présente pourtant des limitations, d'une part il n'apporte pas d'explications quant à l'origine ou la cause de la dislocation, et d'autre part cette dislocation s'exprime en terme de conditions aux limites par un saut de déplacement imposé dans la partie ductile de la lithosphère, ce qui est difficile à justifier mécaniquement. D'autres modèles incorporant de la viscoélasticité (Savage et Prescott, 1978; Pollitz, 2001; Hetland et Hager, 2006; Johnson *et al.*, 2007), bien qu'ayant des comportements plus proches de celui supposé de la lithosphère, souffrent des mêmes défauts concernant la justification des conditions aux limites.

Dans un premier temps, nous avons reproduit numériquement le modèle de Savage et Burford (1973). Les résultats montrent que le modèle analytique de Savage et Burford (1973) ne permet pas de déterminer de manière précise la profondeur de blocage. Or, cette profondeur est souvent interprétée comme représentant la profondeur de la zone sismogénique (Smith-Konter *et al.*, 2011), profondeur qui intervient dans la détermination de la magnitude des séismes attendus dans une région. Ceci a des implications quant à l'évaluation de l'aléa sismique et aux interprétations mécaniques parfois proposées pour interpréter des variations de la profondeur de blocage inversée d'après les données géodésiques.

Dans un second temps, nous avons construit plusieurs modèles qui tentent de reproduire la déformation observée, en se fixant comme objectif d'utiliser des conditions aux limites justifiables par le contexte géodynamique autour de la faille décrochante. Pour modéliser la faille, nous avons introduit un plan vertical discontinuité à partir d'une pro-

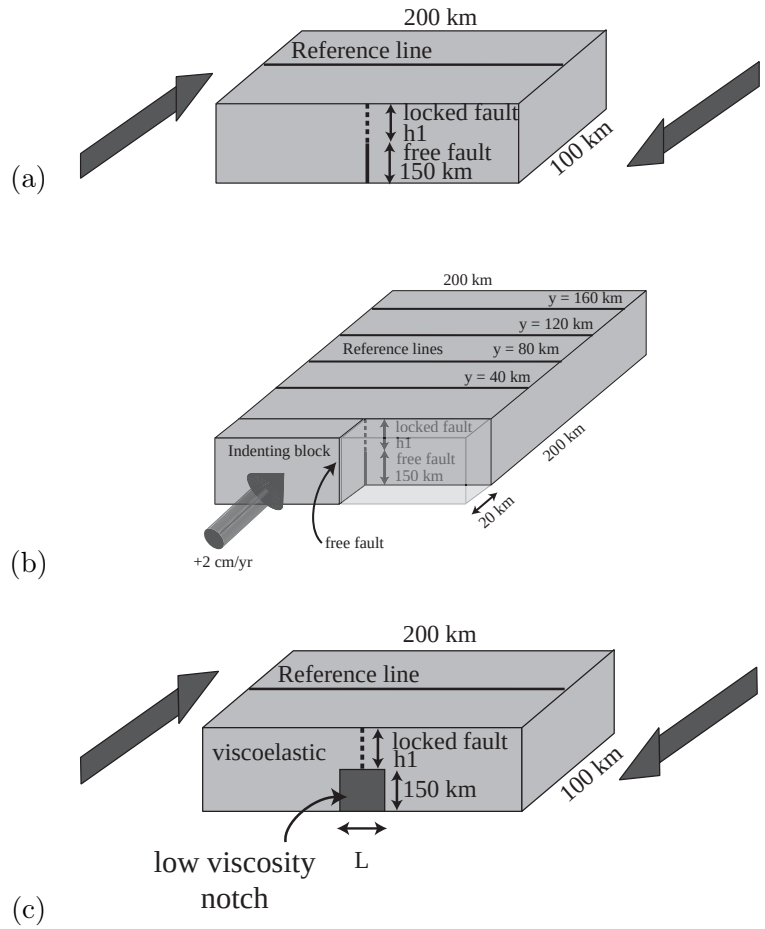


Figure 2.1: Modèles et conditions aux limites : (a) modèle élastique avec vitesses imposées latéralement, (b) modèles avec indenteur et conditions imposées à l'avant de l'indenteur (c) modèle viscoélastique avec un notch de faible viscosité sous la faille et des vitesses imposées latéralement.

fondeur fixée (ce plan est indiqué par la mention *free fault* sur les figures 2.1.a et 2.1.b). Sur ce plan, la faille peut glisser librement, tandis qu'au dessus le milieu est continu, modélisant une absence de faille ou une faille bloquée. L'un de ces modèles est un modèle à rhéologie élastique dont les conditions aux limites sont imposées sur les bords latéraux parallèles au plan de faille (voir figure 2.1.a), il reproduit par exemple le mouvement long terme des plaques tectoniques en imposant la vitesse moyenne des plaques comme vitesse au bord. Ce modèle s'avère inefficace du point de vue de la localisation de la déformation, ce à quoi l'on pouvait s'attendre du fait de la trop grande simplicité du modèle, car il ne reproduit pas l'arctangente observée par GPS.

Afin de reproduire une déformation localisée, un autre modèle proposé est celui de la plaque extrudée par un bloc indenteur (figure 2.1.b), les conditions aux limites sont alors appliquées à l'avant de l'indenteur. Ces conditions se veulent proches de celles observées actuellement autour de la faille Nord Anatolienne, avec une vitesse imposée parallèlement à la faille de 2 cm/an. Enfin, le dernier modèle proposé est celui d'un milieu viscoélastique contenant une zone de faible viscosité, appelée *notch*, sous la faille bloquée. La discontinuité représentant, dans les modèles précédents, une faille dans un milieu cassant est ainsi remplacée par une zone de cisaillement ductile. Les conditions aux limites sont imposées latéralement, reproduisant là encore, le mouvement long terme des plaques (figure 2.1.c). Les résultats obtenus pour ces différents modèles sont exposés dans l'article présenté à la section suivante. Ils montrent que la localisation de la déformation est satisfaisante pour ces deux derniers modèles.

La localisation de la déformation dépend donc fortement du choix des géométries (du modèle et des hétérogénéités) et de conditions aux limites des modèles. Néanmoins, nous avons réussi à proposer des modèles qui soient compatibles avec les observations en surface, et qui soient justifiables géologiquement et mécaniquement.

2.2 Article : *"Does interseismic strain localization near strike slip faults result from boundary conditions or rheological structure ?"*

Geophysical Journal International

Geophys. J. Int. (2014) doi: 10.1093/gji/ggu011

Geophysical Journal International Advance Access published February 11, 2014

Does interseismic strain localization near strike-slip faults result from boundary conditions or rheological structure?

N. Traoré,[1,2] L. Le Pourhiet,[1,2] J. Frelat,[3,4] F. Rolandone[1,2] and B. Meyer[1,2]

[1]*Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris* 06, *UMR* 7193, *ISTEP, F*-75005, *Paris, France. E-mail: traorenafi@gmail.com*
[2]*CNRS, UMR* 7193, *ISTEP, F*-75005, *Paris, France*
[3]*Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris* 06, *UMR* 7190, *IJLRDA, F*-75005, *Paris, France*
[4]*CNRS, UMR* 7190, *IJLRDA, F*-75005, *Paris, France*

Accepted 2014 January 13. Received 2014 January 8; in original form 2012 October 30

SUMMARY

Geodetic observations across most of the major strike-slip faults show an interseismic strain rate, which presents a sharp localization of elastic shear strain in the fault vicinity (20–60 km). The screw dislocation model of Savage & Burford is commonly used to fit these geodetic data and to retrieve the far field velocity and the locking depth. This model is very popular because of its inherent simplicity to derive fault slip rates, and mostly because it predicts locking depths, which are of the same order of magnitude as the base of the seismogenic zone (5–20 km). A first issue with the screw dislocation model is that localization is paradoxically introduced by imposing a step function in the velocity field at a depth where the crust is otherwise recognized to behave following a viscous rheology. A second issue with this model is that it is not consistent with the rheological model of the crust that is valid for both post-seismic (1–10 yr), interseismic (several thousand years) and long-term geodynamic (several thousand to several million years) timescales. Here we use numerical models to study how alternative and more geologically realistic boundary conditions and rheological structures can lead to the localization of elastic strain at the Earth's surface during the interseismic period. We find that simple elastic models resembling the Savage & Burford model but driven by far field plate velocity are inefficient at localizing strain unless this driving velocity is transmitted by a rigid indentor. We also find that models including a weak viscous heterogeneity beneath the fault zone are able to produce appropriate localization of the deformation near the fault. This alternative class of model is shown to be pertinent in regards to the boundary conditions and geological observations along exhumed ductile strike-slip shear zone.

Key words: Numerical approximations and analysis; Creep and deformation; Fault zone rheology; Continental tectonics: strike-slip and transform; Dynamics and mechanics of faulting; Mechanics, theory and modelling.

1 INTRODUCTION

The study of geodetic data across strike-slip fault zones is used for unravelling the geological and mechanical characteristics of these zones, and plays a key role in our understanding of the lithosphere behaviour. Most of the major strike-slip faults, such as the San Andreas Fault (Lyons & Sandwell 2003), the North Anatolian Fault (McClusky *et al.* 2000; Provost *et al.* 2003; Flérit *et al.* 2004) or the Sagaing Fault (Vigny *et al.* 2003) show a surface deformation that presents a strong localization along the fault which corresponds to a steep gradient in fault parallel velocity across the fault.

The Savage & Burford (1973) model is the simplest approach to compute synthetic interseismic velocity field across strike-slip faults that approximates the interseismic velocity, obtained by GPS or InSAR data, across the major faults (Lisowski *et al.* 1991; Smith-Konter *et al.* 2011). This model relies on two geological hypothesis. First, the seismogenic part of the fault of thickness d does not slip during the interseismic period. Secondly, the fault itself extends at depth beneath this so-called locked part of the fault, and accommodates the plate relative motion s in a localized but aseismic manner.

Mechanically, this system is analogous to a screw dislocation in an elastic solid. Considering this screw dislocation occurs in a semi-infinite half-space, Weertman & Weertman (1966) have shown that the velocity v at the surface of this infinite half-space can be described as a function of the distance to the fault x following

$$v = -\frac{s}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{d}\right). \quad (1)$$

© The Authors 2014. Published by Oxford University Press on behalf of The Royal Astronomical Society.

GJI Geodynamics and tectonics

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

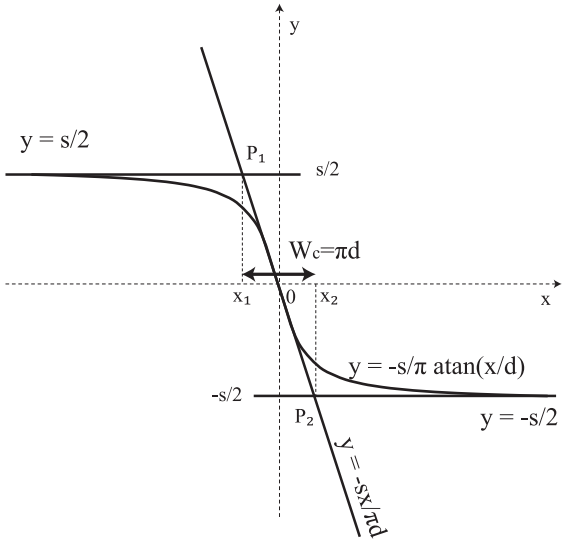


Figure 1. Representation of an arctangent function of parameters d (the locking depth) and s (the total slip rate), and its characteristic lines (the two asymptotes and the tangent at the origin). The localization width of an arctangent function is πd, its characteristic velocity ratio is 100 per cent.

The geodetic observations provide easily two parameters: the far field velocity and the width of the zone where the deformation is mainly localized. In the screw dislocation model, the localization width does not appear explicitly. However, using the method of the tangent described in Appendix A and Fig. 1, we find that this width, W_c is directly proportional to the locking depth d

$$W_c = \pi d, \tag{2}$$

and therefore depends neither on the rheological properties nor on the far field velocity. On the Earth, the observations infer a width of the localization zone ranging between 20 and 60 km, so that the retrieved locking depth d always remains between 5 and 20 km in good agreement with depth distribution of earthquakes along strike-slip fault zones (Miller & Furlong 1988). Moreover, the blocks outside a fault zone are usually assumed to behave rigidly, that is also a characteristic of the screw dislocation model (Appendix A). Together with its simplicity, these two properties of the Savage & Burford (1973) model have largely contributed to its popularity.

Following this approach, other elastic models originating from crystalline physics have been transferred to geological applications. They fall in two categories: the dislocation methods and the backslip methods. On the one hand, the dislocation methods consist in considering one or several dislocations embedded in an elastic material, as Savage (1998) and Le Pichon *et al.* (2005) using edge dislocation models, or Savage (2006) via the introduction of dislocation pileups. Multiple screw dislocations (Brink *et al.* 1996; Fay & Humphreys 2005) have also been used to produce more complex faults system and study the interactions between fault segments. On the other hand, the backslip method consists in subtracting the coseismic slip rate, given by the elastic analytical solution of Okada (1992) for finite dislocation, from the long-term geological stepwise velocities (Bennett *et al.* 1996; Meade *et al.* 2002; Becker *et al.* 2005). All these models assume a discontinuity in the horizontal velocity field at the base of the brittle crust during the interseismic period. The mechanical appropriateness of this particular basal boundary condition is yet questionable.

Imposing the velocity underneath the locked fault geologically implies that the aseismic parts of the crust and the lithosphere impose a basal drag on the brittle crust during the interseismic period. This requires the viscosity of the ductile crust to be large enough to promote a strong viscoelastic coupling between the brittle and ductile crust. Paradoxically, the velocity profile in this part of the viscous crust is assumed to be a step function, requiring the viscosity to be extremely small bellow the locked fault.

In order to study transients in the velocity gradients across a strike-slip fault during the seismic cycle, the Savage & Burford solution was extended for a viscoelastic space by Savage & Prescott (1978), and later by many others (Pollitz 2001; Pollitz & Nyst 2005; Hetland & Hager 2006; Johnson *et al.* 2007) in order to account for more complex vertical layering of the viscoelastic lower layer. However, all these viscoelastic coupling models (e.g. Savage & Lisowski 1998; Savage 2000) share a lot of similarities with the original Savage & Burford model when it comes to the treatment of the elastic upper layer during the interseismic period. This layer is indeed always considered as a horizontally homogeneous elastic layer containing a screw dislocation. The main difference between the original Savage & Burford model and the viscoelastic coupling models is that the amplitude of the displacement discontinuity imposed by a Burgers vector below the elastic layer is depth- and time-dependent and accounts for post-seismic relaxation.

This work focuses on alternative mechanical models that permit strain localization at the surface without imposing it through a Burgers vector located underneath a locked fault. We are not focusing on post-seismic deformations and related transients in the velocity field, instead we aim at finding a model satisfying both the secular interseismic loading and the long-term observations. We therefore assume that our models represent the part of the seismic cycle that is recorded late after the last large earthquake and explore how the choice of the boundary conditions and the rheological structure of the model impacts strain localization at the surface. We have designed alternative models in which both the boundary conditions and rheological structure are geologically and mechanically justified. The resulting surface velocity fields from these alternative models are obtained using the finite element method.

2 NUMERICAL METHODS

2.1 Constitutive equations

The numerical experiments were run with Cast3M (C.E.A/D.M.T/L.A.M.S), a finite element software developed by the CEA, the French Alternative Energies and Atomic Energy Commission. Cast3M permits both the definition of the models (geometry, meshing and rheology) and the solution of the numerical problem.

We consider the continuous problem to find the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ that solves the equilibrium equations, associated with boundary conditions. In linear elasticity, the stress tensor is defined by the generalized Hooke's law:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\epsilon}, \tag{3}$$

where $\boldsymbol{C}$ is the fourth-order rigidity tensor and $\boldsymbol{\epsilon}$ the Cauchy's strain tensor for small deformations defined by $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^t)$, where $\boldsymbol{u}$ is the displacement field. In viscoplasticity, the stress tensor is given by the constitutive equation:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^v), \tag{4}$$

the time derivative of the viscous strain being a function of the stress tensor $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^v = f(\boldsymbol{\sigma})$.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

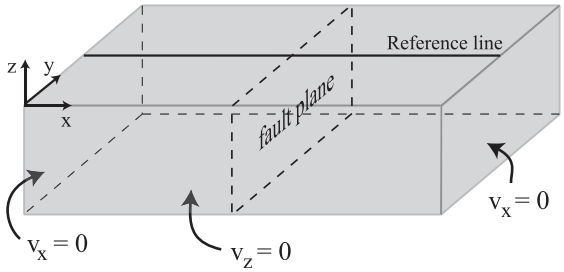


Figure 2. Common boundary conditions of all the numerical models: free slip boundary conditions. The deeper plane is locked in the vertical direction, the lateral sides that are parallel to the fault plane are locked in the perpendicular direction of the fault plane.

The problem has been then discretized using the classical finite element method that leads to solve the linear system

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

or $\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{F}}$ in the viscoplastic case, where $\boldsymbol{K}$ the stiffness matrix and $\boldsymbol{F}$ the force vector that takes into account the displacement loadings as well as the contribution of the viscous deformation term in the viscoplastic case. The plastic yield value is equal to zero that corresponds to the effective viscoelastic case.

The transient state is out of the scope of this paper and we consider the part of the interseismic cycle that is far beyond the coseismic and the post-seismic periods for which one can posit the solution corresponds to a steady state in the viscoelastic case. In order to compare the model with geodetic data, we study the discrete elastic problem in velocity rather than in displacement, assuming a constant strain rate, which is also consistent with our steady-state approximation.

2.2 General description of the numerical models

The geometry chosen is a rectangular box. The Young's modulus of the medium is equal to 10^{10} Pa and the Poisson's ratio is 0.25. All the numerical models presented here share some common boundary conditions (Fig. 2), that is, a zero velocity is imposed on the left and right lateral boundaries in the x direction and for the basal surface in the z direction (free slip conditions). Periodic models have the velocity of the vertical plane at the back of the model that is equal to the velocity of the vertical plane at the front. This type of model can be viewed as a slice of an infinitely long domain in the y direction, where therefore the fault is infinite.

The domain is meshed with elements that are triangular prisms (15 nodes per elements). The mesh is refined in the vicinity of the fault plane, the typical element size near the fault is 0.5 km, and 1 km near the domain boundary. The number of elements in total, for instance for our benchmark, is 65 640, that represents 224 507 nodes. We tested the sensitivity of the models to changes in the number of elements (half the initial number) with no significant results variation.

2.3 Benchmarks

First we compare the analytical solution given by eq. (1) with a benchmark of models built with Cast3M.

The geometry of the benchmark model is given in Fig. 3(a). The benchmark model is 100 km wide in y but boundary conditions are periodic in this direction so that the fault can be considered as infinitely long along strike. The thickness of the locked segment is $h_1 = 12$ km for all the models of the benchmark. The boundary

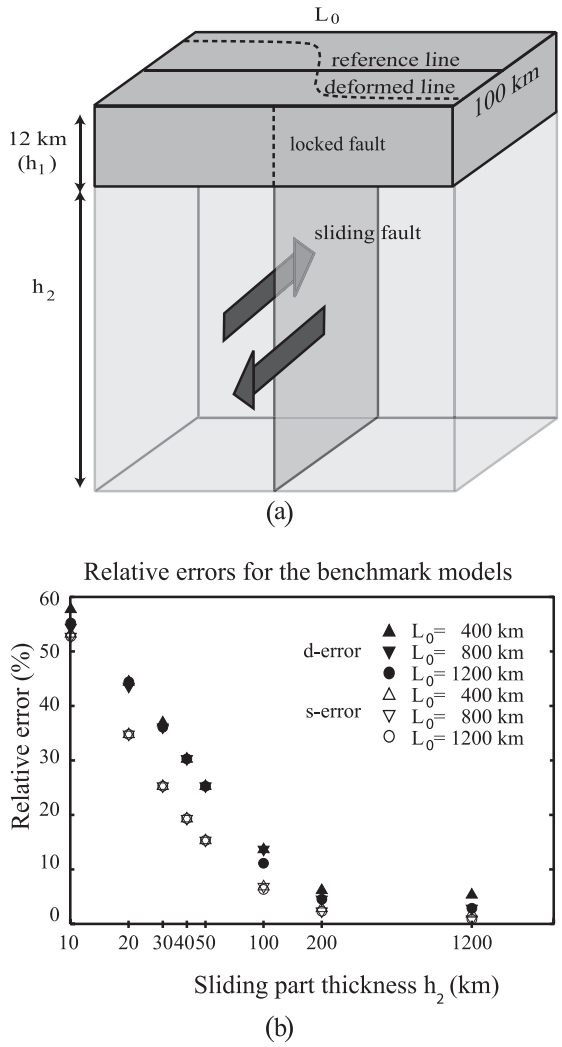


Figure 3. Benchmark models: (a) geometry of the numerical models; (b) relative errors between the numerical input parameters (12 km and 2 cm yr^{-1}) and the parameters retrieved from the analytical solution (d and s) for models varying in width ($L_0 = 400 - 800 - 1200$ km) and in sliding fault thickness ($h_2 = 10 - 20 - 30 - 40 - 50 - 100 - 200 - 1200$ km).

conditions consist of imposing the sliding velocity on the vertical surfaces of the unlocked portion of the fault, with a value of 1 cm yr^{-1} on the left-hand side and -1 cm yr^{-1} on the right-hand side. Between the locked part of the fault where sliding velocity is zero and the lower part of the fault where velocity is ± 1 cm yr^{-1}, there is a point of singularity. In order to obtain a reliable numerical solution, it was necessary to add an intermediate domain of thickness 0.1 km (which is not represented in the figure) where free slip conditions are imposed on the fault plane.

The benchmark consists of 24 simulations for which we systematically varied the thickness of the sliding part of the fault, ($h_2 = 10 - 20 - 30 - 40 - 50 - 100 - 200 - 1200$ km), and the width of the model ($L_0 = 400 - 800 - 1200$ km). The range for the sliding thickness of the fault, h_2, was chosen to cover geologically acceptable values of 10–50 km to a value of 1200 km intended to simulate an infinite half-space. The range for the width of the model, L_0, was chosen to correspond to the extent of typical geodetic data set or to simulate numerically an infinite half-space.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

Table 1. Results of the benchmark: the locking depth (d) and far field velocity (s) retrieved from the best fitting arctangent approximation, the relative errors with respect to the imposed locking depth (12 km) and imposed slip (2 cm yr^{-1}) for different thicknesses h_2 of the steadily sliding fault at depth and different widths L_0 of the model.

Steadily sliding fault thickness h_2 (km)	10	20	30	40	50	100	200	1200
$L_0 = 400$ km								
d (km)	5.1	6.7	7.6	8.4	9.0	10.4	11.3	11.4
s (cm yr^{-1})	0.94	1.31	1.50	1.62	1.70	1.87	1.95	1.97
Depth error (per cent)	57.5	44.2	36.7	30.0	25.0	13.3	5.8	5.0
Slip error (per cent)	53.0	34.5	25.0	19.0	15.0	6.5	2.5	1.5
$L_0 = 800$ km								
d (km)	5.5	6.8	7.7	8.4	9.0	10.4	11.5	11.7
s (cm yr^{-1})	0.95	1.31	1.50	1.62	1.70	1.87	1.96	1.99
Depth error (per cent)	54.2	43.3	35.8	30.0	25.0	13.3	4.2	2.5
Slip error (per cent)	52.5	34.5	25.0	19.0	15.0	6.5	2.0	0.5
$L_0 = 1200$ km								
d (km)	5.4	6.7	7.7	8.4	9.0	10.7	11.5	11.7
s (cm yr^{-1})	0.95	1.31	1.50	1.62	1.70	1.88	1.96	1.99
Depth error (per cent)	55.0	44.2	35.8	30.0	25.0	10.8	4.2	2.5
Slip error (per cent)	52.5	34.5	25.0	19.0	15.0	6.0	2.0	0.5

For all the models, the deformation is observed on a reference line that lies horizontally on the upper free surface, perpendicularly to the fault. The parameter h_1 corresponds to the parameter d in the analytical solution given by eq. (1), and the total imposed velocity (2 cm yr^{-1}) corresponds to the parameter s. Matching the deformed reference line with the arctangent functions defined by eq. (1), we retrieved the values of the parameters d and s which provided the best fit, following the method of least-square regression detailed in Appendix B. Then we computed the relative errors (Fig. 3b) between the numerical input parameters (12 km and 2 cm yr^{-1}) and the parameters retrieved from the analytical solution (d and s) following the formulae $|12 - d|/12$ for the depth error and $|2 - s|/2$ for the slip error.

The results of the benchmark show clearly that the relative error obtained with Cast3M diminishes as the model approaches the dimension of a semi-infinite half-space. The break in the convergence curve occurs as the steady slipping part of the fault approaches 200 km in thickness. The effect of the width of the model produces a rather small error, which corresponds to the residual error for an unlocked slipping fault greater than 200 km in thickness. The model with $L_0 = 1200$ km width and $h_2 = 1200$ km reaches an error of less than 3 per cent, which allows us to conclude that our model is sufficiently well resolved for studying the effects of other geometries and/or different boundary conditions. However, the relative differences between the analytically retrieved locking depth and the locking depth retrieved from the synthetics produced by a more realistic unlocked fault thickness ($h_2 \leq 100$ km) are very large and deserve a discussion.

2.4 The finite space approximation

The differences between the numerical locking depth h_1, being equal to 12 km, and the values of d, retrieved from the analytical solution are given in Table 1 and represented in Fig. 3(b). They display about 2–57.5 per cent of relative error depending on the thickness on which the localized slip is imposed.

For a 400-km-long model, the thickness of the free sliding fault zone, h_2, must be higher than 100 km to get a depth error inferior to 15 per cent and a slip error inferior to 10 per cent. The best fitting arctangent gives a locking depth of 5.1 km for $h_2 = 10$ km and 9 km for $h_2 = 50$ km, instead of the 12 km input in the model, which corresponds to more than 55 per cent of relative error for the former, and to 25 per cent of relative error for the latter. The retrieved slip is 0.94 cm yr^{-1} for the $h_2 = 10$ km model and 1.7 cm yr^{-1} for the $h_2 = 50$ km model, instead of the imposed 2 cm yr^{-1}, which represents a slip relative error of 53–15 per cent. For the 800- and 1200-km-long models, the results are roughly the same, which implies that the numerical models are rather independent of the choice of the width.

In conclusion, it requires to account for a thick zone of localized slip ($\geq$200 km) for the retrieved value of the locking depth to correspond to the actual locking depth imposed in the numerical model. When this critical thickness is not reached, the locking depth retrieved using least-square fitting of the Savage & Burford model are systematically underestimating the locking depth. It is very unlikely that a 200-km discrete plan of localized slip exists under any strike-slip fault on the Earth and we therefore conclude that the locking depths retrieved by fitting geodetic data with the original Savage & Burford model systematically underestimate the actual locking depth of the fault.

2.5 Implication for locking depth assessment

A mechanical definition of the locking depth is the depth extent within the crust, which behaves elastically during the interseismic period. As this portion is loaded, it accumulates elastic strain and therefore potential energy, which is then released during earthquakes. Part of the seismic risk assessment is to evaluate this depth. Based on the rate of loading and the elapsed time since the last earthquake on a segment, it gives an estimate of the seismic moment accumulation M_0 and therefore a raw estimate of the magnitude M_w of the next earthquake.

There are two main ways in evaluating the locking depth. The locking depth may be estimated using the seismogenic zone, that is, the distribution of microseismicity, assuming that this corresponds to the brittle part of the fault. This depth inferred from seismologic data is usually called the seismogenic depth. Alternatively, it is possible to retrieve a geodetic locking depth along each segment of the fault using surface displacement measurements obtained from geodetic data, either GPS or InSAR, across the major faults together with the Savage & Burford (1973) model. The standard approach is

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

Table 2. Locking depth inferred from geodetic data versus locking depth inferred from seismologic data for the North Anatolian Fault, the San Andreas Fault and the Dead Sea Fault.

	NAF	SAF	DSF
Geodetic depth (km)	2–10[a]	9[d]; 2–6[e]; 14[f]; 6[g]	8–15[i]
Seismogenic depth (km)	17[b]; 20[c]	10–20[h]	20–32[j]

[a]From Le Pichon *et al.* (2003).
[b]From Bulut *et al.* (2009).
[c]From Ito (2002).
[d]From Savage & Burford (1973).
[e]From Chinnery (1961).
[f]From Smith-Konter *et al.* (2011).
[g]From Smith-Konter *et al.* (2011), average of the outliers.
[h]From Nazareth & Hauksson (2004) and Lin *et al.* (2007).
[i]From Al Tarazi *et al.* (2011).
[j]From Aldersons *et al.* (2003).

to fix the slip rate to the long-term velocities deduced from various geological studies, and to use the Savage & Burford model to retrieve the locking depth by a least-square fitting approach.

These two approaches in estimating the locking depth are fundamentally very different in their assumptions and therefore should generally reach different results. However, this is not always the case and many studies actually give consistent values using both of these methods to determine the locking depth (Smith-Konter *et al.* 2011). This consistency explains why the seismogenic depth and the geodetic locking depth are sometimes considered as providing the same information.

However, taking a closer look at the outliers in the data, Table 2 shows that, when the estimates clearly disagree, the locking depth inferred from geodetic data systematically underestimates the seismogenic depth as it was predicted by the finite space model. As these underestimations of the depth of the locked zone have been shown to be up to a factor of two in error (Section 2.4), the retrieved geodetic depth should be used carefully, specifically when considering this depth to be representative of that of the seismogenic zone.

This limitation of the original Savage & Burford model was somewhat accounted in the viscoelastic coupling model of Savage & Prescott (1978). In this model, right after the earthquake, the sudden stress change causes the viscoelastic substrate to respond elastically to infinite depth and the retrieved velocity field at the surface, when averaged over the interseismic period, corresponds to the exact Savage & Burford (1973) solution. However, as time goes on during the interseismic period, part of the elastic strain energy is dissipated into permanent plastic deformation at shallower and shallower depth. As a result, long time after the last large earthquake, the elastic part of the viscoelastic lower layer approaches zero and the strain localization at the surface is limited to that of a finite plate as described here.

3 ALTERNATIVE MODELS

3.1 Validation criteria

The alternative set of boundary conditions and initial geometry presented in this study form the basis of idealized models, which serve to help our understanding of the origin of the localization zone. These models were designed to minimize the number of parameters and to reproduce the general shape of geodetic data across strike-slip fault zones. In order to evaluate the first-order pertinency of our numerical models, we wish to find criteria derived from general observations that are simple enough to enable an immediate validation.

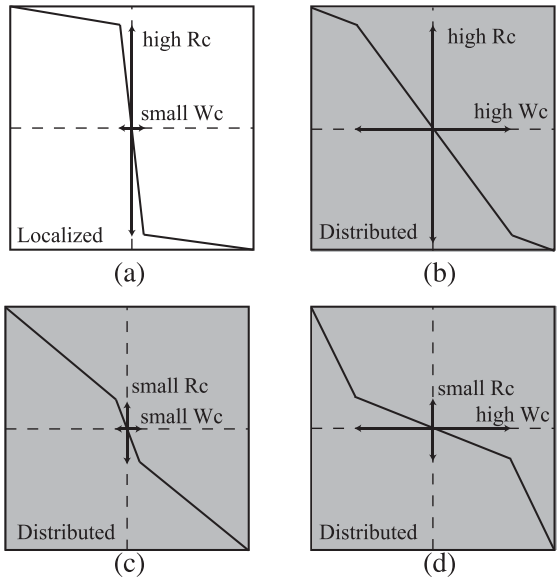


Figure 4. Validation criteria: (a) a localized deformation is characterized by a small characteristic width W_c (the curve is sharp in the fault vicinity) and a high-velocity ratio R_c (the curve is flat outside the fault vicinity). The three other cases represent distributed deformations: (b) a high characteristic width and a high velocity ratio reflect a large deformation zone with a flat field far from the fault; (c) a small characteristic width and a small velocity ratio indicate that the field is sharp in the fault vicinity but the deformation is also accommodated far from the fault; (d) the combination of the two previous defaults (high characteristic width and small velocity ratio) leads to a deformation that is only accommodated far from the fault (geologically unrealistic). In our study, we consider that the deformation is localized when the characteristic widths are between 20 and 60 km and the velocity ratios are higher than 80 per cent of the total far field velocity.

In Appendix A, we define a characteristic width W_c and a characteristic velocity ratio R_c that are used for validation. The characteristic width indicates the width of the central deformation area. A small characteristic width will then give a sharp repartition in the fault vicinity, of type (a) or (c) in Fig. 4. In order to match the geodetic observations, we accept characteristic widths between 20 and 60 km.

The characteristic velocity ratio indicates the ratio of the velocity reached in the central deformation area to the far field velocity. A high characteristic ratio (higher than 80 per cent of the total velocity) reflects then that the velocity reaches an important value in the vicinity of the fault, therefore the velocity outside this area is not increasing significantly to reach the far field velocity and the velocity field shows a flat repartition far from the fault, of type (a) or (b) in Fig. 4. In this case, the medium can be assumed to behave almost rigidly outside the fault area which is concordant with the assumption of plate rigidity within the context of plate tectonics. Low characteristic ratios of type (c) and (d) break this assumption.

Geologically, only a sharp and flat repartition [type (a)] reflects that the deformation is localized around the fault and that the blocks outside the fault zone behave rigidly. The three others types represent distributed deformations that are not observed near strike-slip fault. In the following, a model is considered as valid upon its ability to meet three criteria: (i) the characteristic width W_c must range from 20 to 60 km, (ii) the characteristic velocity ratio R_c must be higher than 80 per cent and (iii) the boundary conditions and the

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

rheological structure must be mechanically consistent with the basic knowledge of long- and short-term rheology of the crust and lithosphere.

3.2 Basal model

Numerous previous studies used basal boundary conditions (Fay & Humphreys 2005), or combined them with lateral boundary conditions (Brink *et al.* 1996; Roy & Royden 2000) to model the interseismic velocity of a strike-slip fault. We perform numerical simulations in order to evaluate how accounting for simple basal boundary conditions impacts the surface deformation in an elastic model. As during the benchmark, we extract the horizontal surface velocity from the simulations, but here we test different locking depths.

The basal model (Model 1) is a rectangular box with two elastic layers. The fault is locked through the whole upper layer, whose depth, h_1, varies from 5 to 20 km. The lower layer is 20 km deep, and the fault can slide freely through this layer. Model 1 is periodic, and the boundary conditions are applied underneath the box, with an opposite velocity field imposed on the left and the right planes (Fig. 5a) of the basal surface.

The shape of the horizontal velocity field at the surface of the model approximates well the arctangent shape, as shown in Figs 5(b) and (c), for $h_1 = 10$ km. The results presented in Table 3 show the values of the localization width evaluated by following the method of tangents described in Appendix A. For $h_1 = 10$ km, the localization zone is about 41.1 km width, which is a reasonable width according to our first criterion. In addition, the velocity becomes almost uniform far from the fault which is shown by a characteristic velocity ratio higher than 98 per cent, the material can be considered then as a rigid block outside the local deformation zone. The model based on basal boundary conditions gives a velocity field that matches two of our validation criteria.

Despite its name, this model is more similar to the original Savage & Burford model than to the basal driven model of Bourne *et al.* (1998). Slip here is indeed applied with a step function imposed horizontally beneath the fault rather than by continuous viscous shearing. This model therefore shares with the original Savage & Burford model a similar limitation, namely the mechanical inconsistency between the ductile rheology of the lower crust and the location at which the step function that produces localization is imposed in the model.

3.3 Lateral model

In order to overcome the previous issue, we choose to implement a simple elastic model that is driven laterally (Model 2). The model is periodic, with opposite velocities imposed on the lateral sides of the box (Fig. 6a). This model is intuitive since it considers that the large-scale motion of the plates is a driving force inducing a motion on both sides of the domain. Because of the nature of these boundary conditions, this kind of model is sensitive to the choice of the width of the model, but not to its thickness. An approach that overcomes this limitation is to impose directly the driving forces on the lateral boundaries, but it would require to invert the values of such forces from the far field velocity field (Pollitz & Nyst 2005). Here we chose to simply apply the far field velocities that are easily deduced from geodetic data, and to ensure that these velocities are applied sufficiently far from the fault (here at a distance of 100 km to the fault).

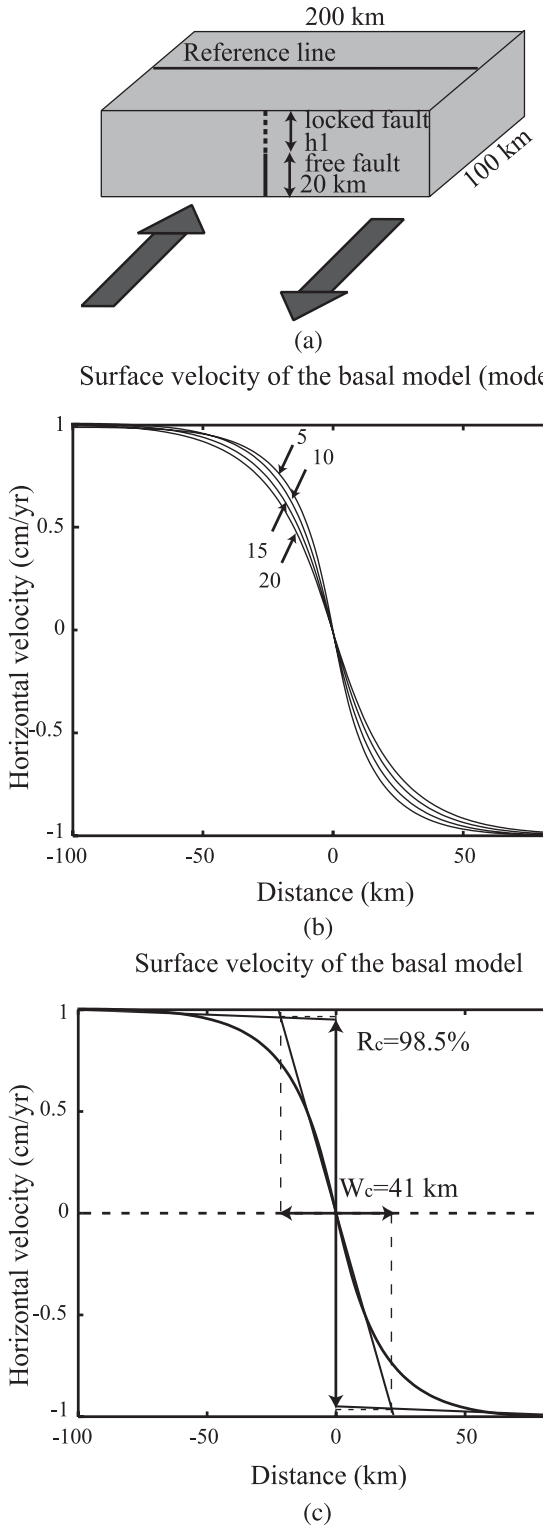


Figure 5. Elastic Model 1: basal boundary conditions. (a) Geometry of model; (b) horizontal velocity of the reference line for the locking depths $h_1 = 5$, 10, 15 and 20 km; (c) horizontal velocity and tangent lines for the locking depth $h_1 = 10$ km, in this case, the localization width is about 41 km and the velocity ratio is 98.5 per cent.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

Table 3. Characteristic width W_c and velocity ratio R_c estimated from the method of tangents for the basal model (Model 1), for different locking depths h_1.

h_1 (km)	5	10	15	20
W_c (km)	35.4	41.1	46.6	51.9
R_c (per cent)	99	98.5	98	97

The geometry of Model 2 is a rectangular box with two distinct layers. The depth of the upper layer, h_1, varies from 5 to 20 km, while the thickness of the lower layer is fixed and equal to 150 km. The fault is locked inside the upper layer but is free to slip inside the lower layer. Model 2 is periodic.

The retrieved surface velocity fields are presented in Fig. 6(b). The deformation is distributed almost linearly across the domain and is not well localized along the fault. Although the localization width is reasonable (W_c is about 52 km for $h_1 = 10$ km), as shown in Fig. 6(c) and Table 4, the characteristic velocity ratio is never higher than 64 per cent, that is compatible with neither a rigid plate-tectonic-type behaviour, nor the geodetic data available on the Earth. Therefore we also tested the case where the fault frictional strength is almost zero, considering a very shallow locked fault of 0.5 km. Even in this case, the distribution is not localized but distributed (the velocity ratio being only 71 per cent).

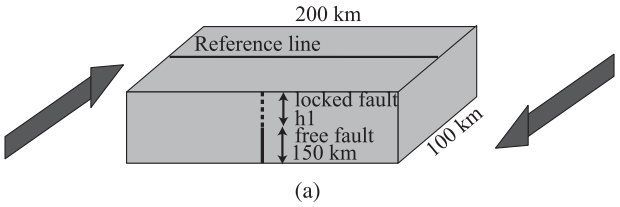
Contrarily to the conclusion of Savage (2000), we find that the solution is radically different whether loading is applied as a displacement at the lateral boundary or from below. This strikingly different conclusion is the result of different modelling approaches. Savage (2000) model is indeed built on the Savage & Prescott (1978) model, that is, using a Burgers vector to load the fault, and then post-processing the stress in the far field or at the base of the lithosphere in the models *a posteriori*. With this semi-analytical approach, strain localization indeed does not depend on where the loading is integrated, it is only the result of applying this load at the tip of the dislocation. Here, we build a screw dislocation model and apply displacement on the boundary of the model (lateral model, Fig. 6) or at the base (basal model, Fig. 5) and find, like Chéry (2008) that when driving stresses are transmitted laterally along the elastic upper layer, the strain hardly localizes self-consistently around a screw dislocation.

3.4 Indentor model

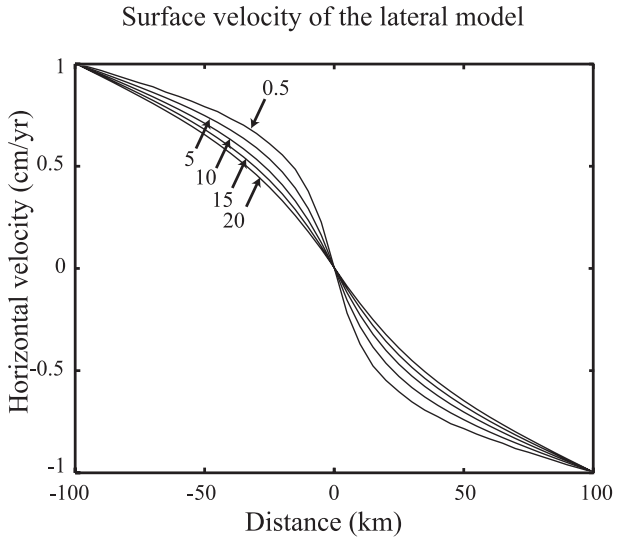
As in the previous models, the indentor model (Model 3) mimics a strike-slip fault, locked down to depth h_1 and free to slip below, embedded inside a box whose base is a square of length 200 km. In this model however, the motion is driven by the extrusion of an indenting block located at the front of the model on the left-hand side. The indentor is 100 km long normal to the fault and 20 km wide in the direction of the fault. A normal velocity of 2 cm yr^{-1} is applied on the indentor front surface, which is perpendicular to the fault plane. In order to ensure the symmetry of the surface velocity field, free slip boundary conditions are applied on the lateral faces of the model (parallel to the fault) and rigid boundary conditions are applied at the front of an elastic block that has been added at the front of the model symmetrically to the indentor (transparent grey block on Fig. 7a).

Contrary to the previous models, the back side of the model is a free surface. As a result, this model is not periodic and the surface velocity depends on the distance to the indentor. To allow quantitative comparison with the previous models, the results presented in Fig. 7(b) show the relative velocities with respect to the axis of the fault.

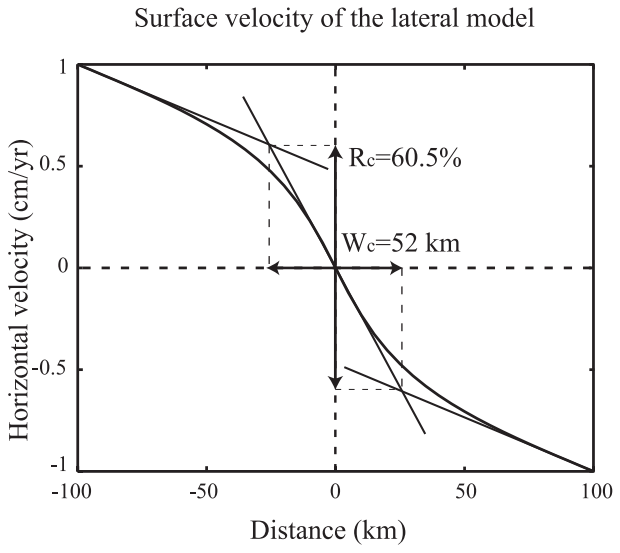
The results in Fig. 7(b) show an appropriate localization of the deformation in the vicinity of the fault and the blocks behave rigidly. For instance, the localization width is about 54 km and the velocity ratio is about 83 per cent (Table 5) at a distance of 40 km from the



(a)



(b)



(c)

Figure 6. Elastic Model 2: laterally driven model. (a) Geometry of the model; (b) horizontal velocity obtained for the locking depths $h_1 = 0.5$, 5, 10, 15 and 20 km; (c) horizontal velocity and tangent lines for the locking depth $h_1 = 10$ km, in this case, the localization width is about 52 km and the velocity ratio is 60.5 per cent.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

Table 4. Characteristic width W_c and velocity ratio R_c estimated from the method of tangents for the laterally driven model (Model 2), for different locking depths h_1.

h_1 (km)	0.5	5	10	15	20
W_c (km)	36.7	43.5	51.7	58.7	64.2
R_c (per cent)	71	64	60.5	58.5	56.5

indenting block, when the depth of the locked fault is 5 km. For a deeper locking depth, the deformation is accommodated over a wider zone (from 65 to 79 km), but is still quite localized (about 80 per cent of the total velocity is reached within the localization zone). The far field velocity decreases with increasing distance from the fault tip (Fig. 7c, from 40 to 160 km) as the deformation is being absorbed elastically by the model along the strike of the fault.

3.5 Viscoelastic notch model

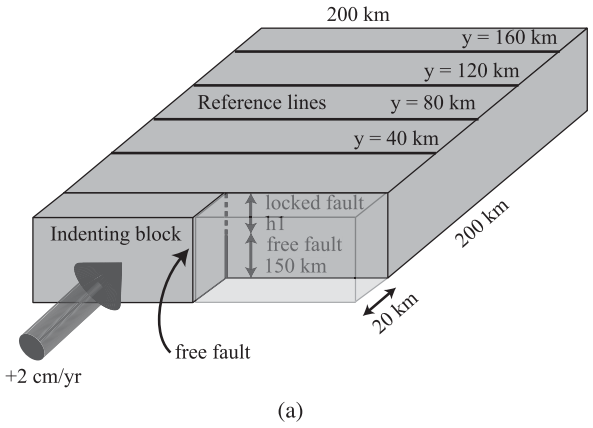
Model 4 is fully viscoelastic, with a rigid part, in which the viscosity is 10^{25} Pa s, surrounding a notch of low viscosity (10^{19} Pa s) in the lower layer (Fig. 8). The model is periodic, that is, it corresponds to an infinite fault, and is formed by a rectangular box that is 200 km long by 100 km wide. As for Model 2, the velocity imposed laterally amounts to 2 cm yr^{-1} and simulates the general plate motion that drags the box on both sides with opposite directions. Contrary to the previous models, the displacement at depth does not take place along a discrete fault. Instead, it is distributed within a broader weak zone, which corresponds to the notch.

Fig. 9 shows the horizontal velocities obtained for several depths of locked fault, with a notch width L of 50 km and a viscosity μ of 10^{19} Pa s. The results, for the locking depths from 5 to 15 km, show a good localization of the deformation near the fault. The localization width is about 63 km for $h_1 = 5$ km and a notch width of 50 km, and the velocity ratio is 87 per cent (Table 6). A shallow notch is therefore more efficient than a deep one to help the localization of the deformation at the surface.

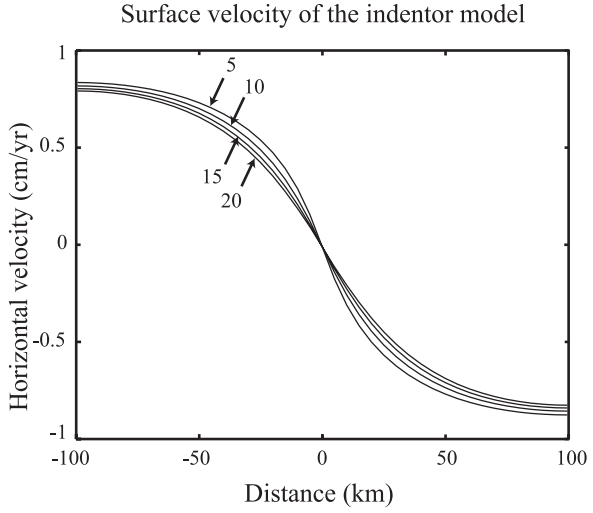
Then, we tested different values of the notch's width L, with a locked fault of thickness $h_1 = 5$ km and a viscosity of 10^{19} Pa s. Fig. 10 shows the surface velocity fields for $L = 10$, 50 and 100 km. Narrow notches ($L < 20$ km) induce a localized deformation within a 30-km-wide zone, but the velocity ratio does not reach 80 per cent (Table 7), which means that the surrounding of the fault zone does not behave rigidly. Wide notches ($L > 50$ km) do not produce localized deformation ($W_c > 60$ km) and tend to result in a linear velocity field when the notch's width tends to the total width of the model.

For L in the range [20, 50] km, the deformation is well localized near the fault in a 30- to 60-km-wide zone, and the velocity inside the localization zone reaches 80 per cent of the far field velocity. Thus, it is the lateral contrast of viscosity in the fault vicinity, with a lower viscosity beneath the fault, that favours the localization.

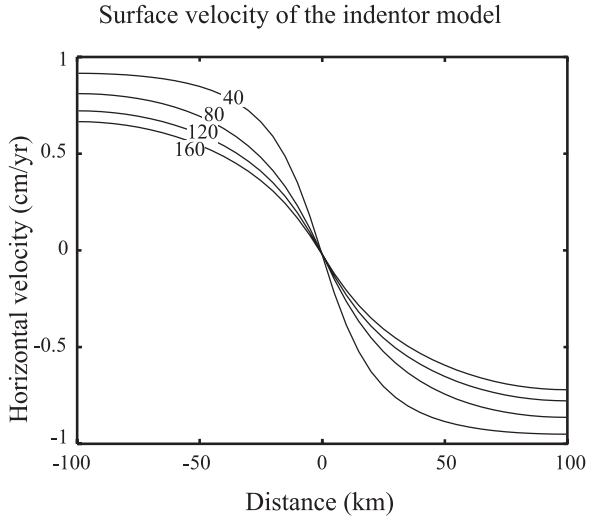
The models obtained by choosing the parameters h_1 in the range [5; 15] km, L in the range [20; 50] km and $\mu = 10^{19}$ Pa s for 10^{25} Pa s outside meet the criterion of a velocity field coherent with the observations, with a sharp gradient near the fault and a rigid blocks behaviour around. It results that the notch width L must be large enough to make the blocks behave rigidly, but small enough to keep a sharp velocity gradient in the fault vicinity. The lateral contrast



(a)



(b)



(c)

Figure 7. Elastic Model 3: indentor model. (a) Geometry of the model; (b) horizontal velocity obtained for the locking depths $h_1 = 5$, 10, 15 and 20 km, at the distance $y = 80$ km from the fault tip; (c) horizontal velocity obtained for the locking depth $h_1 = 5$ km at the distances $y = 40$, 80, 120 and 160 km from the fault tip.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

Table 5. Characteristic width W_c and velocity ratio R_c estimated from the method of tangents for the indentor model (Model 3), for different locking depths h_1.

h_1 (km)	5	10	15	20
W_c (km)	54.2	64.6	72.6	78.5
R_c (per cent)	83	81	79.5	78

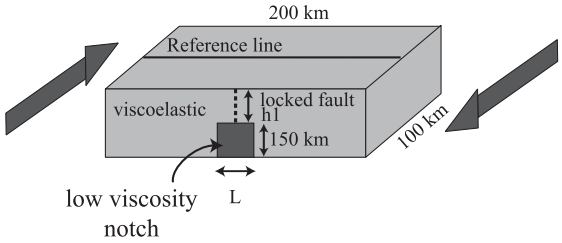


Figure 8. Viscoelastic model (Model 4): horizontal velocity obtained with a notch embedded below the depths $h_1 = 5$–20 km, the notch width is $L = 50$ km and its viscosity is $\mu = 10^{19}$ Pa s. The embedding material is of viscosity 10^{25} Pa s.

of viscosity plays a key role by weakening the fault zone locally and inducing the deformation of the lithosphere around.

This set up is similar to the Zatman (2000) model because it accounts for lateral reduction of the viscosity in the lower crust beneath the fault (Fig. 8), but, contrary to the Zatman (2000) model, we impose that the viscosity outside the notch is high enough for the elastic stress not to be relaxed at the timescale of interseismic deformation. As a result, the elastic stresses are not relaxed at depth on the lateral part of the model and drive a long-term localized

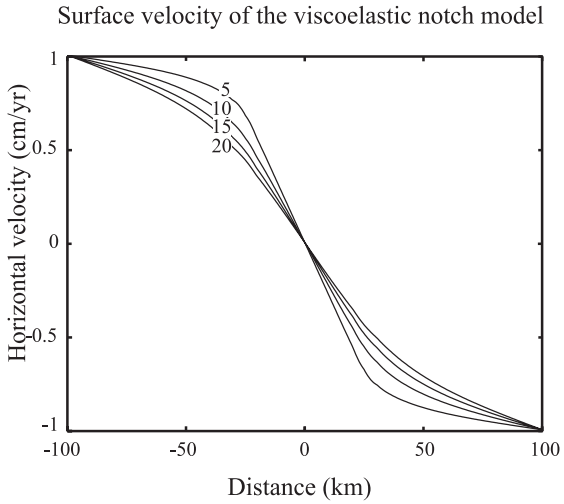


Figure 9. Viscoelastic model: horizontal velocities obtained with the notch widths $L = 10$, 50 and 100 km, the notch is embedded below the depth $h_1 = 5$ km and its viscosity is $\mu = 10^{19}$ Pa s. The embedding material is of viscosity 10^{25} Pa s.

Table 6. Characteristic width W_c and velocity ratio R_c estimated from the method of tangents for the notch model (Model 4) for a notch width $L = 50$ km and when the notch is embedded below different depths h_1.

h_1 (km)	5	10	15	20
W_c (km)	62.7	69.5	74.0	77.6
R_c (per cent)	87	80	74.5	70.5

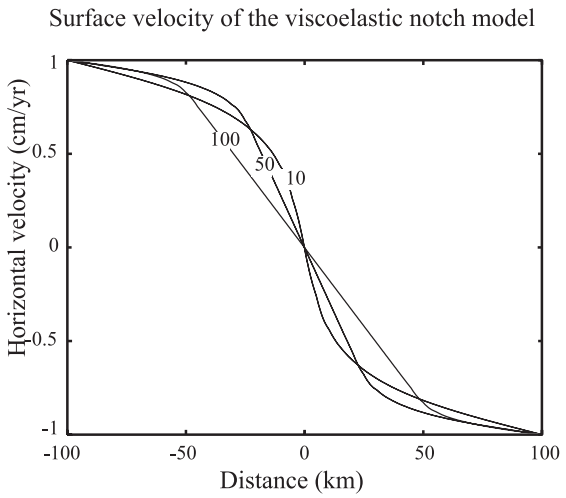


Figure 10. Viscoelastic model: a notch of lower viscosity μ and of width L is embedded inside a viscoelastic box below the depth h_1 down to the depth $h_1 + 150$ km. The boundary conditions are applied laterally.

Table 7. Characteristic width W_c and velocity ratio R_c estimated from the method of tangents for the notch model (Model 4) for different notch widths L and when the notch is embedded below the depth $h_1 = 5$ km.

L (km)	10	20	30	40	50	75	100	150
W_c (km)	30.2	34.5	43.7	53.1	62.7	86.6	110.2	155.5
R_c (per cent)	72.5	78	82	85	87	90.5	92.5	94.5

ductile shear flow beneath the fault zone. The pattern is in the end extremely similar to the Bourne *et al.* (1998) model, except that the viscous shear flow is driven laterally by the strong part of the lithosphere rather than from below. Like Chéry (2008), we find that accounting for a local drop of the elastic thickness of the lithosphere, here through a localized viscous notch, permits strain localization at the surface to be self-consistently driven by stress transmitted along the elastic upper layer.

4 DISCUSSION

4.1 Localization and boundary conditions

To model strain localization around strike-slip faults during the interseismic period, most of the models impose the slip on the fault itself, at depth. This type of loading is inconsistent with the coseismic and long-term effective rheology of the lithosphere. In this contribution, we have tested by the mean of numerical experiments alternative modes of loading and studied specifically how they affect shear localization in the vicinity of strike-slip faults.

We have found that with screw dislocation type models, strain localization only occurs when the velocity applied on one boundary includes a step function. This step function can be imposed either on the basal plane (Model 1) or by an indentor on the lateral boundary (Model 3). However, when the shear is applied by a velocity in the far field in order to mimic intuitively a plate tectonic like loading (Model 2), the elastic deformation is so important over the whole domain that very little localization occurs in the vicinity of the fault zone. With this type of boundary conditions, the deformation is always distributed unless the frictional strength of the fault vanishes, that is, when the locking depth is lower than 1 km. The fact that strongly localized deformation cannot be achieved within a screw dislocation model by far field loading unless the fault is not locked

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

at interseismic timescale raises the question whether these models have a geologically relevant rheological structure.

The indentor models (Model 3) might be meaningful in numbers of geological context, such as the North Anatolian Fault or some of the Tibetan faults where the old and rigid Arabian and Indian plates, respectively, might induce a step function as velocity field on the boundary (Peltzer & Tapponnier 1988; Flérit *et al.* 2004; Socquet *et al.* 2006). However, the elastic screw dislocation models with a step function applied at the base of the upper crust (Model 1) suffer from the same limitation as the original Savage & Burford model. They indeed localize the deformation with a similar pattern as what is observed in nature but they present mechanical incompatibility between the strong viscoelastic coupling that is assumed in order to impose velocity boundary conditions at depth and the infinite velocity gradient assumed to occur on the aseismic part of the fault. This mechanical inconsistency can be eliminated if one assumes that the deepest part of the fault is a thin vertical layer made of either a frictional material with low effective friction, or a low-viscosity material, which is embedded between blocks of stiffer material. In other words, lateral rheological variations must exist at depth beneath the fault.

In order to account for this type of lateral variations, it is possible to design a model (Model 4), which includes a viscous notch beneath the fault. This model is found to be quite efficient to localize the deformation when the notch is shallower than 10 km. The simulations have shown that, for a narrow notch ($<$50 km), most of the deformation is accommodated in the vicinity of the fault. However, when the notch is embedded deeper than 10 km, the elastic deformation becomes predominant over the whole domain and the assumption of rigidity of plates is lost.

One should also note again that in the limit of a very thin notch with an extremely low viscosity, both the notch and the screw dislocation model become equivalent and none of them can actually localize the deformation in the vicinity of the fault zone when subjected to far field loading. Therefore, if one posits that the loading of strike fault is imposed in the far field by plate tectonics, one must admit that this loading is always imposed by an indenting block or that the rheological structure of the crust around strike-slip faults includes a local zone of weakness, which must be of the approximate same width as the zone on which the steep velocity gradient is observed during the interseismic period. This weakness could correspond either to elastic damage in the brittle part of the crust (Chéry 2008) or to a local 5- to 50-km-wide low-viscosity zone in the ductile part of the crust.

4.2 Geological evidence for viscous notch

The only class of models, for which laterally driven boundary conditions lead under some conditions, to a surface velocity field that approaches the geodetic observations, are the models in which we introduce a viscous notch in the brittle crust. As it was already noted by Chéry (2008), Platt *et al.* (2008) and Platt & Becker (2010), the high interseismic strain rate can be explained by the low rigidity of the fault zone. By introducing a notch in the model, we locally lower the integrated elastic strength in the vicinity of the fault. In this paper, we have assumed the presence of this low-viscosity zone and we have provided quantitative limits on the viscosity and the size of such a weak zone in order to reproduce the general shape of geodetic data.

Yet, one may wonder what is the geological meaning or existence of such a weak zone. This discussion focuses on the case of the San Andreas Fault because it is one of the best-documented strike-slip faults. Using numerical modelling, previous studies conclude that significant vertical (Rolandone & Jaupart 2002; Fay & Humphreys 2005) and horizontal (Chéry *et al.* 2001) variations in viscosity provide the strain localization that is observed in the San Andreas Fault vicinity. Strain localization of ductile deformation could be due to the effect of shear heating on the local viscosity (Rolandone & Jaupart 2002), as also modelled by Dayem *et al.* (2009) for the Altyn Tagh Fault zone.

Moreover, magnetotelluric sounding infers the presence of a 40-km-wide low electrical resistivity zone at around 20 km depth beneath the San Andreas Fault, which has been interpreted as marking the presence of hot saline fluid-filled porosity network at depth. (Becken *et al.* 2011). Similarly, shear wave splitting measurements show lateral variation in the vicinity of the San Andreas Fault (Savage *et al.* 2004; Baldock & Stern 2005; Becker *et al.* 2006; Bonnin *et al.* 2010), where the deformation zone was again marking a 40-km-wide high shear strain zone in the mantle. In these studies, the data seem to infer a relatively localized low viscosity zone located beneath the active fault zone.

In the ductile layer, at high stress, grain boundary sliding creep and dynamic grain size reduction (Gueydan *et al.* 2001; Precigout & Gueydan 2009) provide two valid mechanisms to localize strain in zones as narrow as 40 km. In the crust, it is useful to study field analogues of large exhumed strike-slip fault zone to understand how localization operates below the seismogenic crust. Examples of large exhumed strike-slip faults are found in the remnant of the variscan orogeny and in the vicinity of the Himalayas. These strike-slip ductile shear zones all display narrow and elongated domal shape (Leloup *et al.* 1995, for the Red River Fault zone) generally attributed to a transpressional regime. Reconstruction of the thermal history of the rocks exhumed in these fault zones as well as structural geology analysis display that the shear strain is localized within elongated domes of exhumed lower crustal material and gneisses (Denèle 2007 for the Pyrenées; Corsini & Rolland 2009 for the Maures Massif; West & Hubbard 1997 for the Norumbega Fault zone). Similar elongated domes are found in Norway along the exhumed strike-slip segments of the main detachment (Labrousse *et al.* 2004). Recently, 3-D thermo-mechanical models have found that these domes can form self-consistently over a million year timescale within pure strike-slip boundary conditions within the transtensional relay of strike-slip faults (Le Pourhiet *et al.* 2012).

4.3 An example of application to the San Andreas Fault System

Here, we focus on the interseismic velocity distribution across the Carrizo segment of the San Andreas Fault in central California. Different viscoelastic models (Segall 2002; Fulton *et al.* 2010) also chose this segment of the San Andreas Fault and were able to fit the present-day distribution of geodetic data with an appropriate choice of parameters. This segment is chosen because it belongs to the locked portion of the San Andreas Fault system, which last ruptured in the 1857 Fort Tejon earthquake. Therefore, it corresponds to the main assumptions made in our purely interseismic model where the transient effects related to post-seismic relaxation are negligible compared to the interseismic signal.

We use the geodetic data of the Carrizo segment (USGS public data) to infer the best parameters for our viscoelastic notch model. Fig. 11 presents the GPS fault parallel velocity components given by the stations placed in a 75-km-wide band southeast of Cholame, perpendicularly to the fault direction. The best prediction of our

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

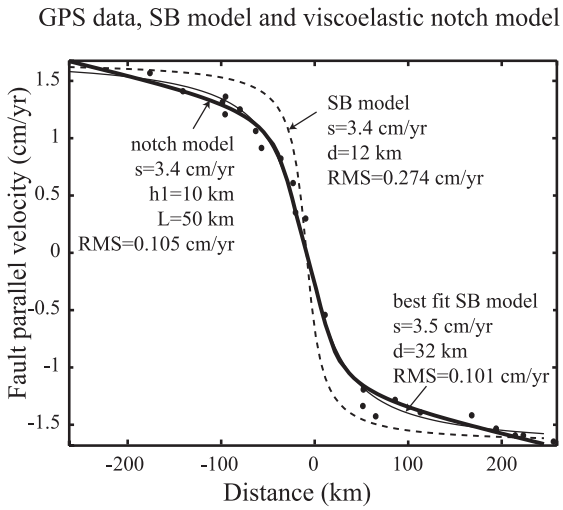


Figure 11. Fault parallel velocity field of the Carrizo segment of the SAF: GPS velocities gathered from USGS public data (solid dots), velocity fields given by the Savage & Burford model with a locking depth $d = 32$ km and a total slip $s = 3.5\,\mathrm{cm\,yr^{-1}}$ for the best fit (dashed line) and with a locking depth $d = 12$ km and a total slip $s = 3.4\,\mathrm{cm\,yr^{-1}}$ for the average central California parameters (solid thin line) and velocity field given by the viscoelastic notch model when the notch is embedded below the depth $h_1 = 10$ km, its viscosity is $\mu = 10^{19}$ Pa s and its width is $L = 50$ km, the embedding block is of viscosity 10^{25} Pa s (solid thick line).

notch model provides a 10-km locking depth and a 50-km-wide viscoelastic notch, with a reasonable rms misfit ($0.105\,\mathrm{cm\,yr^{-1}}$).

The geodetic data are also overlaid by two solutions of the standard and widely used Savage & Burford model. One, obtained using a locking depth of 12 km and a slip rate of $3.4\,\mathrm{cm\,yr^{-1}}$, leads to an rms misfit of $0.274\,\mathrm{cm\,yr^{-1}}$. The second curve is the best fitting arctangent in the sense of least-square regression and is obtained for an unrealistic locking depth of 32 km, that might be underestimated according to our previous conclusions of Section 2.4. If one assumes the locking depth reflects the seismogenic depth, this underestimation leads to depths that have no geological meaning.

Finally, the viscoelastic notch model is shown to reproduce the signal around locked faults system with a similar rms misfit than the best fitting arctangent of the Savage & Burford model, except that it predicts a more realistic locking depth.

5 CONCLUSIONS

This contribution questions the geological relevance of the boundary conditions imposed in the Savage & Burford (1973) model to reproduce the general form of the velocities observed in the geodetic data. This model and other more complex numerical models, which account for multiple faults (e.g., Brink *et al.* 1996), always impose the localization of the deformation at the surface by imposing a step function in the velocity in the ductile crust. Different boundary conditions for which the loading is applied on the resistant part of the crust have therefore been tested by the mean of numerical modelling.

Indentor-type models are found to allow strain to be localized around strike-slip faults because, as in the Savage & Burford (1973) model, a step function is imposed in the boundary conditions. However, these provide a limited understanding of the origin of the strain localization.

In order to localize the strain using far field laterally driven boundary conditions, it is necessary to introduce a local mechanical heterogeneity in the crust. Chéry (2008) approach consisted in reducing the effective elastic thickness of the crust by dropping the elastic coefficients, we instead introduce a viscous notch at the base of the fault. The notch model constitutes a possible alternative model to the screw dislocation model because (i) it provides an acceptable fit to the geodetic data, (ii) it is compatible with long-term deformation along strike-slip faults and (iii) its geometry and boundary conditions are justified by geophysical and geological evidences. The notch model has the advantage over the screw dislocation models and the indentor models, because it does not produce unrealistic displacement profiles (step function) at the brittle ductile transition.

However, as was pointed out in the discussion, the screw dislocation model is similar to a notch model in the limit where the notch becomes extremely thin and weak. Therefore, the screw dislocation model remains a valid first approximation to retrieve far field velocity from GPS data. Nevertheless, using the Savage & Burford (1973) model to estimate the locking depth from geodetic data has been shown to be problematic. The locking depth retrieved with this approach systematically underestimates the effective depth of locking with up to 50 per cent error, because the finite thickness of the sliding part of the fault is neglected. As a result, seismic moment rates and earthquake magnitudes estimated from geodetic locking depths are probably systematically underestimating the risk assessment.

ACKNOWLEDGEMENTS

We acknowledge funding from Émergence-UPMC-2010 research program, and two anonymous reviewers for their constructive comments and suggestions. We thank the USGS for giving access to their GPS data and the CEA for providing the software Cast3M.

REFERENCES

Al Tarazi, E., Rajab, J.A., Gomez, F., Cochran, W., Jaafar, R. & Ferry, M., 2011. GPS measurements of near-field deformation along the southern Dead Sea Fault System, *Geochem. Geophys. Geosyst.,* **12,** doi:10.1029/2011GC003736.

Aldersons, F., Ben-Avraham, Z., Hofstetter, A., Kissling, E. & Al-Yazjeen, T., 2003. Lower-crustal strength under the Dead Sea basin from local earthquake data and rheological modeling, *Earth planet. Sci. Lett.,* **214,** 129–142.

Baldock, G. & Stern, T., 2005. Width of mantle deformation across a continental transform: evidence from upper mantle (Pn) seismic anisotropy measurements, *Geology,* **33,** 741–744.

Becken, M., Ritter, O., Bedrosian, P.A. & Weckmann, U., 2011. Correlation between deep fluids, tremor and creep along the central San Andreas Fault, *Nature,* **480,** doi:10.1038/nature10609.

Becker, T.W., Hardebeck, J.L. & Anderson, G., 2005. Constraints on fault slip rates of the southern California plate boundary from GPS velocity and stress inversions, *Geophys. J. Int.,* **160,** 634–650.

Becker, T.W., Schulte-Pelkum, V., Blackman, D.L., Kellogg, J.B. & O'Connell, R.J., 2006. Mantle flow under the western United States from shear wave splitting, *Earth planet. Sci. Lett.,* **247,** doi:10.1016/j.epsl.2006.05.010.

Bennett, R.A., Rodi, W. & Reilinger, R.E., 1996. Global Positioning System constraints on fault slip rates in southern California and northern Baja, Mexico, *J. geophys. Res.,* **101,** 21 943–21 960.

Bonnin, M., Barruol, G. & Bokelmann, G.H.R., 2010. Uppermantle deformation beneath the North American-Pacific Plate boundary in California from SKS splitting, *J. geophys. Res.,* **115,** doi:10.1029/2009JB006438.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

Bourne, S.J., England, P.C. & Parsons, B., 1998. The motion of crustal blocks driven by flow of the lower lithosphere and implications for slip rates of continental strike-slip faults, *Nature,* **391,** 655–659.

Brink, U.S.T., Katzman, R. & Lin, J., 1996. Three-dimensional models of deformation near strike-slip faults, *J. geophys. Res.,* **101,** 16 205–16 220.

Bulut, F., Bohnhoff, M., Ellsworth, W.L., Aktar, M. & Dresen, G., 2009. Microseismicity at the North Anatolian Fault in the Sea of Marmara offshore Istanbul, NW Turkey. USGS Staff -Published Research Paper 393.

C.E.A/D.M.T/L.A.M.S, 2003. 'CASTEM2000'. Available at: www-cast3m.cea.fr, last accessed January 2014.

Chéry, J., 2008. Geodetic strain across the San Andreas fault reflects elastic plate thickness variations (rather than fault slip rate), *Earth planet. Sci. Lett.,* **269,** 352–365.

Chéry, J., Zoback, M.D. & Hassani, R., 2001. An integrated mechanical model of the San Andreas fault in central and northern California, *J. geophys. Res.,* **106,** 22 051–22 066.

Chinnery, M.A., 1961. The deformation of the ground around surface faults, *Bull. seism. Soc. Am.,* **51,** 355–372.

Corsini, M. & Rolland, Y., 2009. Late evolution of the southern European Variscan belt: exhumation of the lower crust in a context of oblique convergence, *C. R. Geosci.,* **341,** 214–223.

Dayem, K., Houseman, G. & Molnar, P., 2009. Localization of shear along a lithospheric strength discontinuity: application of a continuous deformation model to the boundary between Tibet and the Tarim Basin, *Tectonics,* **28,** doi:10.1029/2008TC002264.

Denèle, Y., 2007. Formation des dômes gneissiques hercyniens dans les Pyrénées: exemple du massif de l'Aston-Hospitalet, *PhD thesis,* Université Toulouse III Paul Sabatier, France.

Fay, N.P. & Humphreys, E.D., 2005. Fault slip rates, effects of elastic heterogeneity on geodetic data, and the strength of the lower crust in the Salton Trough region, southern California, *J. geophys. Res.,* **110,** doi:10.1029/2004JB003548.

Flérit, F., Armijo, R., King, G. & Meyer, B., 2004. The mechanical interaction between the propagating North Anatolian Fault and the back-arc extension in the Aegean, *Earth planet. Sci. Lett.,* **224,** 347–362.

Fulton, P., Schmalzle, G., Harris, R. & Dixon, T., 2010. Reconciling patterns of interseismic strain accumulation with thermal observations across the Carrizo segment of the San Andreas Fault, *Earth planet. Sci. Lett.,* **300,** doi:10.1016/j.epsl.2010.10.024.

Gueydan, F., Leroy, Y.M. & Jolivet, L., 2001. Grain-size-sensitive flow and shear-stress enhancement at the brittle-ductile transition of the continental crust, *Int. J. Earth Sciences,* **90,** 181–196.

Hetland, E. & Hager, B., 2006. Interseismic strain accumulation: spin-up, cycle invariance, and irregular rupture sequences, *Geochem., Geophys., Geosyst.,* **7**(5), doi:10.1029/2005GC001087.

Ito, A., 2002. Aftershock activity of the 1999 Izmit, Turkey, earthquake revealed from microearthquake observations, *Bull. seism. Soc. Am.,* **92,** 418–427.

Johnson, K.M., Hilley, G.E. & Bürgmann, R., 2007. Influence of lithosphere viscosity structure on estimates of fault slip rate in the Mojave region of the San Andreas Fault system, *J. geophys. Res.,* **112,** doi:10.1029/2006JB004842.

Labrousse, L., Jolivet, L., Andersen, T.B., Agard, P., Hebert, R., Maluski, H. & Schärer, U., 2004. Pressure-temperature-time deformation history of the exhumation of ultra-high pressure rocks in the Western Gneiss Region, Norway, in *Gneiss Domes in Orogeny,* Vol. 380, pp. 155–183, eds Whitney, D.L., Teyssier, C. & Siddoway, C.S., Spec. Pap. Geol. Soc. Am.

Le Pichon, X., Chamot-Rooke, N. & Rangin, C., 2003. The North Anatolian fault in the Sea of Marmara, *J. geophys. Res.,* **108,** doi:10.1029/2002JB001862.

Le Pichon, X., Kreemer, C. & Chamot-Rooke, N., 2005. Asymmetry in elastic properties and the evolution of large continental strike-slip faults, *J. geophys. Res.,* **110,** doi:10.1029/2004JB003343.

Le Pourhiet, L., Huet, B., May, D.A., Labrousse, L. & Jolivet, L., 2012. Kinematic interpretation of the 3D shapes of metamorphic core complexes, *Geochem. Geophys. Geosyst.,* **13,** doi:10.1029/2012GC004271.

Leloup, P.H. *et al.*, 1995. The Ailao Shan-Red River shear zone (Yunnan, China), Tertiary transform boundary of Indochina, *Tectonophysics,* **251,** 3–84.

Lin, G., Shearer, P. & Hauksson, E., 2007. Applying a three dimensional velocity model, waveform cross correlation, and cluster analysis to locate Southern California seismicity from 1981 to 2005, *J. geophys. Res.,* **112,** doi:10.1029/2007JB0044986.

Lisowski, M., Savage, J.C. & Prescott, W.H., 1991. The velocity field along the San Andreas Fault in Central and Southern California, *J. geophys. Res.,* **96,** 8369–8389.

Lyons, S. & Sandwell, D., 2003. Fault creep along the southern San Andreas from interferometric synthetic aperture radar, permanent scatterers, and stacking, *J. geophys. Res.,* **108,** doi:10.1029/2002JB001831.

McClusky, S. *et al.*, 2000. Global Positioning System constraints on plate kinematics and dynamics in the eastern Mediterranean and Caucasus, *J. Geophys. Res.,* **105,** 5695–5719.

Meade, B.J., Hager, B.H., McClusky, S.C., Reilinger, R.E., Ergintav, S., Lenk, O., Barka, A. & Ozener, H., 2002. Estimates of seismic potential in the Marmara sea region from block models of secular deformation constrained by global positioning system measurements, *Bull. seism. Soc. Am.,* **92,** 208–215.

Miller, C.K. & Furlong, K.P., 1988. Thermal-mechanical controls on seismicity depth distributions in the San Andreas Fault Zone, *Geophys. Res. Lett.,* **15,** 1429–1432.

Nazareth, J.J. & Hauksson, E., 2004. The seismogenic thickness of the southern California crust, *Bull. seism. Soc. Amer.,* **94,** 940–960.

Okada, Y., 1992. internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space, *Bull. seism. Soc. Am.,* **82,** 1018–1040.

Peltzer, G. & Tapponnier, P., 1988. Formation and evolution of strike-slip faults, rifts, and basins during the India-Asia collision: an experimental approach, *J. geophys. Res.,* **93,** 15 085–15 117.

Platt, J.P. & Becker, T.W., 2010. Where is the real transform boundary in California? *Geochem. Geophys. Geosyst.,* **11,** doi:10.1029/2010GC003060.

Platt, J.B., Kaus, B.J.P. & Becker, T.W., 2008. The mechanics of continental transforms: an alternative approach with applications to the San Andreas system and the tectonics of California, *Earth planet. Sci. Lett.,* **274,** doi:10.1016/j.epsl.2008.07.052.

Pollitz, F.F., 2001. Viscoelastic shear zone model of a strike-slip earthquake cycle, *J. geophys. Res.,* **106**(B11), 26 541–26 560.

Pollitz, F.F. & Nyst, M., 2005. A physical model for strain accumulation in the San Francisco Bay region, *Geophys. J. Int.,* **160**(1), 303–318.

Precigout, J. & Gueydan, F., 2009. Mantle weakening and strain localization: implications for the long-term strength of the continental lithosphere, *Geology,* **37,** 147–150.

Provost, A.-S., Chery, J. & Hassani, R., 2003. 3D mechanical modeling of the GPS velocity field along the North Anatolian fault, *Earth planet. Sci. Lett.,* **209,** 361–377.

Rolandone, F. & Jaupart, C., 2002. The distributions of slip rate and ductile deformation in a strike-slip shear zone, *Geophys. J. Int.,* **148,** 179–192.

Roy, M. & Royden, L.H., 2000. Crustal rheology and faulting at strike-slip plate boundaries: 2. Effects of lower crustal flow, *J. geophys. Res.,* **105**(B3), 5599–5613.

Savage, J.C., 1998. Displacement field for an edge dislocation in a layered half-space, *J. geophys. Res.,* **103,** 2439–2446.

Savage, J.C., 2000. Viscoelastic-coupling model for earthquake cycle driven from below, *J. geophys. Res.,* **105,** 25 525–25 532.

Savage, J.C., 2006. Dislocation pileup as a representation of strain accumulation on a strike-slip fault, *J. geophys. Res.,* **111,** B04405, doi:10.1029/2005JB004021.

Savage, J.C. & Burford, R.O., 1973. Geodetic determination of relative plate motion in Central California, *J. geophys. Res.,* **78,** 832–844.

Savage, J.C. & Lisowski, M., 1998. Viscoelastic coupling model of the San Andreas Fault along the big bend, Southern California, *J. geophys. Res.,* **103,** 7281–7292.

Savage, J.C. & Prescott, W.H., 1978. Asthenosphere readjustment and the earthquake cycle, *J. geophys. Res.,* **83,** 3369–3376.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

Savage, J.C., Fischer, K.M. & Hall, C.E., 2004. Strain modelling, seismic anisotropy and coupling at strike-slip boundaries: applications in New Zealand and the San Andreas fault, *Geol. Soc. Spec. Publ.,* **227**, 9–39.

Segall, P., 2002. Integrating geologic and geodetic estimates of slip rate on the San Andreas Fault system, *Int. Geol. Rev.,* **44,** 62–82.

Smith-Konter, B.R., Sandwell, D.T. & Shearer, P., 2011. Locking depths estimated from geodesy and seismology along the San Andreas Fault System: implications for seismic moment release, *J. geophys. Res.,* **116,** doi:10.1029/2010JB008117.

Socquet, A., Vigny, C., Chamot-Rooke, N., Simons, W., Rangin, C. & Ambrosius, B., 2006. India and Sunda plates motion and deformation along their boundary in Myanmar determined by GPS, *J. geophys. Res.,* **111,** doi:10.1029/2005JB003877.

Vigny, C., Socquet, A., Rangin, C., Chamot-Rooke, N., Pubellier, M., Bouin, M.-N., Bertrand, G. & Becker, M., 2003. Present-day crustal deformation around Sagaing fault, Myanmar, *J. geophys. Res.,* **108,** doi:10.1029/2002JB001999.

Weertman, J. & Weertman, J.R., 1966. *Elementary Dislocation Theory,* The Macmillan Company.

West, D.P. & Hubbard, M.S., 1997. Progressive localization of deformation during exhumation of a major strike-slip shear zone: Norumbega fault zone, south-central Maine, USA, *Tectonophysics,* **273,** 185–201.

Zatman, S., 2000. On steady rate coupling between an elastic upper crust and a viscous interior, *Geophys. Res. Lett.,* **27,** 2421–2424.

APPENDIX A: THE CHARACTERISTIC WIDTH AND THE VELOCITY RATIO

Some elementary mathematics can be used to retrieve the characteristic width and the characteristic velocity ratio. On the fault parallel velocity field, three lines of interest can be identified: two asymptotes when $|x| \to \infty$ and the tangent line at the origin (Fig. 1). The tangent line crosses the two asymptotes at two points P_1 and P_2. If the equation describing the asymptotes are of the form $y = a_1x + b_1$ and $y = a_2x + b_2$, respectively, and the tangent line is of the form $y = a_0x + b_0$, the components of P_1 and P_2 are $(x_1 = (b_0 - b_1)/(a_1 - a_0)$, $y_1 = a_1x_1 + b_1)$ and $(x_2 = (b_2 - b_0)/(a_0 - a_2)$, $y_2 = a_2x_2 + b_2)$. We define the characteristic width W_c by

$$W_c = |x_2 - x_1| = \left| \frac{b_2 - b_0}{a_0 - a_2} - \frac{b_0 - b_1}{a_1 - a_0} \right|, \tag{A1}$$

and the characteristic velocity ratio R_c by

$$R_c = \frac{|y_2 - y_1|}{2v^f} \times 100 = \frac{\left| a_2 \frac{b_2 - b_0}{a_0 - a_2} + b_2 - a_1 \frac{b_0 - b_1}{a_1 - a_0} - b_1 \right|}{2v^f} \times 100, \tag{A2}$$

where v^f is the far field velocity.

Considering the case of an arctangent function, of the form $y = -s/\pi \arctan(x/d)$, the tangent line at the origin is of the form $y = -sx/\pi d$ and crosses the two horizontal asymptotes at $y = s/2$ and $y = -s/2$, respectively. Inserting $a_0 = -s/\pi d$, $b_1 = s/2$ and $b_2 = -s/2$ and $b_0 = a_1 = a_2 = 0$ into eqs (A1) and (A2), we can conclude that the characteristic width is given by

$$W_c = \pi d, \tag{A3}$$

and that the characteristic ratio is given by

$$R_c = 100 \text{ per cent}. \tag{A4}$$

We regard numerical models to be appropriate, when W_c ranges from 20 to 60 km, and when R_c ranges from 80 to 100 per cent. The combination of these two criteria ensures that the deformation is accommodated locally around the fault zone, and that the blocks outside this zone can be considered as rigid bodies. The arctangent function fulfills the first criterion for d in the range 6–19 km, the second criterion being always true.

APPENDIX B: THE LEAST-SQUARE REGRESSION

The least-square regression method, used in order to choose the best fitting arctangent, is detailed here. Considering a reference line, lying at the surface of the numerical models perpendicularly to the fault plane, this line is discretized into a set of N points $x_1, \ldots, x_N$. The deformation of this reference line, in the direction Oy that is parallel to the fault, is represented by a vector, V^{num}, whose components are the velocities of the N points, v_i^{num}, $i \in \{1, \ldots, N\}$, extracted from the numerical simulations.

Let's call $V^{\text{atan}} = (v_i^{\text{atan}})_{i \in \{1,N\}}$ the interpolation of the function defined by eq. (1) on the discrete set $\{x_1, \ldots, x_N\}$, that is,

$$v_i^{\text{atan}} = -\frac{s^{\text{atan}}}{\pi} \arctan\left(\frac{x_i}{d^{\text{atan}}}\right) \quad \forall i \in \{1, N\}. \tag{B1}$$

The goal of the method is to find the parameters s^{atan} and d^{atan} that have to be input in the N equations above so as to minimize the quadratic error between the vector V^{num} and the vector V^{atan} given by

$$e_q = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(v_i^{\text{num}} - v_i^{\text{atan}}\right)^2}. \tag{B2}$$

We perform the calculation over a rectangular range of values for the couple $(s^{\text{atan}}, d^{\text{atan}})$ and retrieve the best possible couple that minimizes the error e_q.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ by guest on February 12, 2014

Chapitre 3

Modélisation de la propagation des failles à l'aide de la mécanique de l'endommagement

Ce troisième chapitre traite de la mécanique de l'endommagement comme approche possible dans la modélisation de la propagation de failles. La section 1 résume l'état des connaissances de l'approche mécanique de l'endommagement. La section 2 présente l'implémentation numérique utilisée dans la thèse. Les sections 3, 4 et 5 exposent les développements théoriques et numériques, qui sont nouveaux pour la mécanique de l'endommagement, effectués au cours de cette thèse. La section 6 offre un exemple d'application, qui, bien que basique, permet d'entrevoir le potentiel de cette approche pour des applications dans le contexte de la géologie.

3.1 Introduction

La mécanique de la rupture classique, basée sur la théorie de Griffith (1921), permet de déterminer un critère de propagation de la faille à partir de conditions de stabilité et d'équilibre entre l'énergie potentielle et l'énergie de fissuration. Cependant, l'approche proposée par Griffith ne permet pas de prévoir l'évolution du trajet de la faille, ni les branchements éventuels. Pour y remédier Francfort et Marigo (1998) ont généralisé le modèle de Griffith au cas où le trajet de la faille est une inconnue du problème, ce type de problème est appelé un problème de discontinuité libre. Dans un autre contexte (la segmentation d'image), Ambrosio et Tortorelli (1990) se sont attachés à régulariser ce type de problème, et Bourdin *et al.* (2000) ont appliqué cette régularisation au contexte de la mécanique de la rupture. Pham *et al.* (2011) ont ensuite introduit une interprétation en terme d'endommagement qui s'appuie sur une représentation des imperfections préexistantes au sein des roches, qui, lorsqu'elles sont en densité suffisante, créent une zone de faiblesse et conduisent la faille à se propager dans cette zone.

Cette notion existe également dans les travaux de Karrech *et al.* (2011); Lyakhovsky *et al.* (2001); Lyakhovsky et Ben-Zion (2009). Leurs objectifs étaient, premièrement, de rendre compte du comportement non-linéaire des matériaux endommagés, même lorsque les déformations sont petites, deuxièmement, de prendre en compte la dépendance des propriétés élastiques des matériaux à l'endommagement, et troisièmement, d'obtenir une relation contrainte-déformation qui soit thermodynamiquement admissible. Pour ce faire, ils ont ajouté un terme non-linéaire dans l'énergie de déformation élastique, à l'aide d'un troisième module élastique (les coefficients de Lame étant les deux premiers), et fait dépendre les modules élastiques de la variable d'endommagement. Néanmoins, les travaux de Lyakhovsky *et al.* (2001) restent des modèles d'endommagement locaux et rendent le problème mathématique difficile à résoudre car mal posé. La localisation de l'endommagement cause une perte d'ellipticité du système d'équations différentielles, et engendre, numériquement, une forte dépendance des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale (taille et orientation des mailles).

Le modèle d'endommagement sur lequel nous nous sommes basés (Bourdin *et al.*, 2000, 2008; Pham *et al.*, 2011; Pham et Marigo, 2012), et que nous avons étendu, fait apparaître naturellement une variable d'endommagement à partir de la mécanique de la rupture classique, et tend mathématiquement vers ce dernier lorsque la taille de la zone endommagée tend vers 0 (Braides, 1998). De plus, en régularisant le modèle de Griffith, il introduit, en plus d'un champ d'endommagement, un paramètre appelé *longueur interne*

qui permet de rendre le modèle non local, et ainsi de s'affranchir des problèmes numériques liés à la dépendance au maillage (Pham, 2010).

Ce modèle est donc solide du point de vu des mathématiques, efficace du point de vu numérique, mais, de part sa très récente mise en œuvre, il reste encore à développer sur de nombreux points avant de pouvoir l'appliquer concrètement à des cas géologiques réalistes. En particulier, la prise en compte du temps, primordiale pour les applications géologiques, est problématique dans de nombreux cas exposés où la propagation de la fissure se fait de manière brutale (en un seul pas de temps). L'interprétation du temps cinématique n'est possible que lors d'une propagation lente de la fissure (sur plusieurs pas de temps cinématiques) et il n'est alors défini qu'en tant que fonction de l'évolution du chargement, le problème est quasi-statique et *rate-independant*.

D'autre part, l'un des enjeux actuels de ce modèle d'endommagement non local, est de mieux intégrer les effets de la compression dans le modèle. En effet le modèle régularisé de Bourdin *et al.* (2000, 2008) se comporte de manière symétrique en traction et en compression. Dès lors, des solutions non physiques apparaissent, du fait de l'interpénétration du matériau fissuré en compression. Récemment, plusieurs auteurs (Del Piero *et al.*, 2007; Lancioni et Royer-Carfagni, 2009; Amor *et al.*, 2009; Miehe *et al.*, 2010) ont proposés des modèles qui rétablissent le comportement asymétrique en traction et en compression, ou bien qui permettent à la fissure de se propager uniquement en mode II (en cisaillement) lorsqu'elle est en compression. Cette modification repose sur la décomposition du tenseur des déformations en sa partie isotrope et sa partie déviatorique, dans laquelle, seule la partie déviatorique est affectée par l'endommagement. Cela pose cependant une nouvelle difficulté numérique puisque la partie déviatorique de l'énergie élastique peut alors devenir extrêmement petite devant la partie sphérique dans la zone endommagée.

Dans un premier temps, nous introduisons le modèle d'endommagement comme modèle régularisé de la rupture, et nous résumons les solutions et les propriétés obtenues dans le cadre unidimensionnel (voir aussi, pour plus de détails, les travaux de Amor, 2008). Dans la section 3.2, nous présentons l'implémentation numérique telle qu'elle est faite dans le code créé par C. Maurini et auquel cette thèse a contribué au développement. Dans un deuxième temps, nous avons développé un modèle de fissure en cisaillement issu du modèle de Lancioni et Royer-Carfagni (2009). Afin de remédier aux problèmes numériques liés à la décomposition du tenseur des déformations en sa partie isotrope et sa partie déviatorique, nous avons utilisé une formulation dite *mixte* qui s'inspire des modèles mixtes utilisés en élasticité à la limite incompressible (Hughes, 2012). Ce développement fait l'objet de la section 3.3. Par ailleurs, les forces volumiques pouvant intervenir dans les problèmes géo-

logiques, telles que la gravité, ont également été prises en compte à l'aide de l'ajout d'un terme, dans l'énergie à minimiser, dépendant du chargement volumique et de l'état d'endommagement. Ce modèle est appliqué dans la partie 3.4. Un dernier enjeu auquel nous nous sommes attaqué est celui prendre en compte les phénomènes de dissipation liés au comportement frictionnel dans la zone endommagée. Suivant Ambrosio *et al.* (2012), nous avons introduit une énergie plastique de surface, correspondant à la résistance en cisaillement exercée par le glissement de la fissure. La section 3.5 présente la modélisation des forces de frottements sur la fissure. Enfin, un exemple d'application simple mais offrant la particularité de permettre l'observation à la fois une évolution lente de la propagation d'une fissure, et l'apparition d'une deuxième branche dans le chemin de propagation, est proposée à la section 3.6.

3.1.1 La rupture fragile et sa régularisation

La fonctionnelle de Griffith

Considérons un matériau occupant un domaine Ω de dimension n. On appelle $\partial\Omega$ son bord, et on considère que celui-ci est régulier. Soit Γ la fissure de Ω, celle-ci est de dimension $n-1$ (un ensemble de points de discontinuité en dimension 1, une courbe en dimension 2, et une surface en dimension 3). Pour un chargement donné, on souhaite déterminer le champ de déplacement $\mathbf{u}$ à l'intérieur du domaine Ω, ainsi que l'évolution de la fissure Γ. On suppose que le matériau se comporte de façon élastique et on se place dans le cadre quasi-statique, c'est-à-dire que le système est considéré comme étant à l'état d'équilibre à chaque instant. Les déformations sont supposées rester petites, ainsi le tenseur (de deuxième orde) des déformations linéarisées se réduit au gradient symétrisé du déplacement

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\nabla}^T(\mathbf{u})). \tag{3.1}$$

En l'absence de forces extérieures, l'approche proposée par Francfort et Marigo (1998) pour déterminer les inconnues $\mathbf{u}$ et Γ se base sur la minimisation d'une fonctionnelle, l'énergie de Griffith, définie par

$$\mathscr{F}(\mathbf{u}, \Gamma) = \int_{\Omega\setminus\Gamma} W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}))\mathrm{dx} + G_c\mathscr{H}^{n-1}(\Gamma). \tag{3.2}$$

Le premier terme représente l'énergie élastique emmagasinée par le matériau Ω, W étant la densité d'énergie élastique, qui s'écrit dans le cas linéaire

$$W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \tag{3.3}$$

où $\mathbf{E}$ est le tenseur d'ordre 4 de rigidité élastique, qui se réduit au module d'Young en dimension 1.

Le deuxième terme de l'équation (3.2) est une énergie de surface dissipée par la fissure. Cette énergie est proportionnelle à la mesure de Hausdorff de la fissure Γ, notée $\mathscr{H}^{n-1}(\Gamma)$, (c'est le nombre de points de discontinuité en dimension 1, la longueur de la fissure en dimension 2, et son aire en dimension 3). Le coefficient de proportionnalité G_c est le taux de restitution d'énergie critique du matériau qui est déterminé expérimentalement. Par ailleurs on remarque que l'énergie de surface est indépendante de la valeur du saut de $\mathbf{u}$ sur l'ensemble fissuré, seule compte la mesure de la fissure Γ et les caractéristiques du matériau.

Le problème d'évolution

Le problème d'évolution de la fissure Γ doit prendre en compte le fait que la dissipation d'énergie entraîne pour la fissure l'impossibilité de "guérir", c'est-à-dire que la mesure de la fissure ne peut pas décroître dans le temps, ce faisant l'évolution de Γ est irréversible. L'ensemble des états de fissuration admissibles, à un instant donné, est donc l'ensemble des états de fissuration qui contiennent l'état de fissuration à l'instant précédent.

Nous pouvons dès lors écrire le problème d'évolution défini par la recherche de minimiseurs pour (3.2). Cela revient alors à trouver, à chaque instant t, $\mathbf{u}$ appartenant à $\mathscr{U}(\Gamma)$, et Γ appartenant à $\mathscr{G}$, tels que

$$\mathscr{F}(\mathbf{u},\Gamma) = \min_{\mathbf{v}\in\mathscr{U}(\Gamma),\Delta\in\mathscr{G}} \mathscr{F}(\mathbf{v},\Delta). \tag{3.4}$$

où $\mathscr{U}(\Gamma)$ représente l'ensemble des champs de déplacement admissibles à l'instant t, ces champs pouvant être discontinus sur Γ (il peut y avoir un saut du déplacement sur la fissure), et $\mathscr{G}$ représente l'ensemble des états de fissuration vérifiant la condition d'irréversibilité à l'instant t.

Résoudre le problème d'évolution consiste ainsi à déterminer le champ de déplacement $\mathbf{u}$ et l'état de fissuration Γ admissibles qui minimisent l'énergie totale du système. Ce type de problème d'évolution, ayant pour inconnue un champ $\mathbf{u}$ et un ensemble de discontinuité Γ, est plus généralement appelé un problème de *discontinuité libre*.

L'existence de minimiseurs de la fonctionnelle (3.2) est un résultat théorique important du fait de la nature non convexe du problème et du manque de régularité des objets $\mathbf{u}$ et Γ et demande de positionner le problème dans un cadre fonctionnel adapté (De-Giorgi *et al.*, 1989). La mise en œuvre numérique de la recherche de minimiseurs de ce problème est difficilement réalisable en utilisant les méthodes aux éléments finis classiques ou étendues.

En effet, elle doit considérer toutes les surfaces de discontinuité admissibles, et déterminer en même temps tous les champs de déplacement discontinus possibles sur ces surfaces. Une approche permettant de contourner cette difficulté consiste en la régularisation de la fonctionnelle (3.2) à l'aide de modèles d'endommagement non locaux.

Régularisation de la fonctionnelle de Griffith

Une régularisation possible de la fonctionnelle (3.2) a été introduite par Ambrosio (1990) dans le contexte de la segmentation d'image faisant intervenir des problèmes similaires de discontinuité libre (Mumford et Shah, 1989). Il s'agit d'une généralisation du théorème de Modica-Mortola (Modica et Mortola, 1977), redétaillé en annexe B.1, qui repose sur la minimisation d'une fonctionnelle intermédiaire qui converge, de manière très particulière, vers le problème initial de discontinuité libre. Cette convergence particulière est la *Gamma-convergence* qui a la propriété de faire de la limite d'une suite de minimiseurs de la fonctionnelle régularisée, un minimiseur de la fonctionnelle non régularisée. Cette propriété fondamentale rend ainsi ce type de convergence très appropriée pour les problèmes de minimisations.

L'approche, inspirée de Modica et Mortola (1977) et développée par Ambrosio (1990) consiste en l'introduction d'une variable α suffisamment régulière [1], interprétée comme un champ d'endommagement (Amor *et al.*, 2009), et d'un paramètre réel l, interprété comme une longueur interne (Amor *et al.*, 2009), qui vont permettre de régulariser la fonctionnelle de Griffith (3.2) sous la forme d'une fonctionnelle elliptique

$$\mathscr{E}(\mathbf{u},\alpha) = \int_\Omega W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}),\alpha)\mathrm{dx} + \frac{G_c}{4C_v}\int_\Omega \left(l|\nabla\alpha|^2 + \frac{w_1(\alpha)}{l}\right)\mathrm{dx}. \tag{3.5}$$

Le premier terme est l'énergie élastique emmagasinée par le matériau Ω, W est la densité d'énergie élastique, qui dépend maintenant de la variable α, et qui s'écrit dans le cas linéaire (où $\mathbf{E}$ est le tenseur de rigidité dépendant de α)

$$W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}),\alpha) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}). \tag{3.6}$$

Le deuxième terme de l'équation (3.5) est l'énergie de surface dissipée par la fissure, C_v est une constante de normalisation, et w_1 une fonction entrant dans la définition de la densité volumique d'énergie dissipée.

Les travaux de Modica et Mortola (1977), de Mumford et Shah (1989) et de Braides (1998) permettent de conclure qu'alors la fonctionnelle régularisée (3.5) Gamma-converge

1. Plus précisément dans $H^1(\Omega;[0,1])$

vers la fonctionnelle de Griffith (3.2) lorsque les fonctions $\mathbf{E}$ et w_1 sont positives, continûment différentiables sur $[0;1]$, lorsque $\mathbf{E}$ est croissante et w_1 est décroissante, et lorsque C_v est telle que l'énergie de fissuration décrite par le modèle d'endommagement soit égale à celle décrite par la théorie de Griffith :

$$\frac{G_c}{4C_v}\int_\Omega \left(l|\nabla\alpha|^2 + \frac{w_1(\alpha)}{l}\right) \mathrm{dx} = G_c \mathscr{H}^{n-1}(\Gamma). \tag{3.7}$$

3.1.2 Le modèle d'endommagement

Formulation du problème d'évolution quasi-statique

En vue des applications numériques [2], nous nous concentrons ici sur le problème incrémental, c'est-à-dire obtenu après discrétisation du temps. La variable continue t est donc remplacée par une suite finie de temps $(t_i)_{i=0..N}$ qui représente le temps numérique. Le chargement en déplacement imposé sur $\partial\Omega^D$ sera alors paramétré par le temps numérique.

Les espaces des champs de déplacement et d'endommagement admissibles étant définis par

$$\mathscr{U}_i = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^n : \mathbf{u} = \mathbf{U}_i \text{ sur } \partial\Omega^D\} \tag{3.8}$$

$$\mathscr{A}_i = \{\alpha \in H^1(\Omega) : \alpha_{i-1} \leq \alpha \leq 1\}, \tag{3.9}$$

le problème discret d'évolution s'écrit alors ainsi : trouver, à chaque instant t_i,$(\mathbf{u},\alpha) \in \mathscr{U}_i \times \mathscr{A}_i$, tels que

$$\mathscr{E}(\mathbf{u},\alpha) = \min_{(\mathbf{v},\beta)\in\mathscr{U}_i\times\mathscr{A}_i} \mathscr{E}(\mathbf{v},\beta) \tag{3.10}$$

Cette condition de minimalité [3] s'écrit alors comme un problème de minimisation sous contrainte (l'irréversibilité), dont les conditions d'optimalité du premier ordre sont les suivantes : trouver, à chaque instant t_i, $(\mathbf{u},\alpha) \in \mathscr{U}_i\times\mathscr{A}_i$ tels que, pour tout $(\mathbf{v},\beta) \in \mathscr{U}_i\times\mathscr{A}_i$, on ait

$$\begin{cases} \mathscr{E}'(\mathbf{u},\alpha)(\mathbf{v}) = 0 \\ \mathscr{E}'(\mathbf{u},\alpha)(\beta-\alpha) \geq 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

2. et également parce que le problème en temps continu soulève des difficultés techniques qui dépassent le cadre de cette étude.

3. La condition de minimalité est exprimée ici sous une forme globale, ce qui est le cas lorsque la fonctionnelle est convexe. En générale, la recherche de minima locaux sera suffisante, on dira alors que le couple $(\mathbf{u},\alpha)$ est un minimum local, si on ne peut pas trouver dans un voisinage de $(\mathbf{u},\alpha)$ un couple $(\mathbf{v},\beta)$ admissible d'énergie moindre.

où les dérivées s'entendent ici au sens de Gâteaux [4], *i.e.*

$$\mathscr{E}'(\mathbf{u},\alpha)(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{E}(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})\mathrm{dx}, \tag{3.14}$$

et

$$\mathscr{E}'(\mathbf{u},\alpha)(\beta) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}'(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})^2 + \frac{G_c}{2C_v}l\nabla\alpha\nabla\beta + \frac{G_c}{4C_v l}w_1'(\alpha)\beta\right)\mathrm{dx}. \tag{3.15}$$

Conditions d'optimalité

Les inégalités variationnelles données ci-dessus permettent, à l'aide des outils de calculs des variations classiques, d'obtenir des conditions d'optimalité qui serviront à construire les solutions.

Considérons tout d'abord la dérivée par rapport à $\mathbf{u}$ dans la direction $\mathbf{v}$ à α fixé (3.14). Après une intégration par partie, on trouve, pour tout $\mathbf{v}$,

$$\mathscr{E}'(\mathbf{u},\alpha)(\mathbf{v}) = -\int_\Omega \mathbf{div}\left(\mathbf{E}(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\right)\cdot\mathbf{v}\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega}(\mathbf{E}(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n})\mathbf{v}\mathrm{d}\gamma = 0. \tag{3.16}$$

On a alors l'égalité pour tout $\mathbf{v}$

$$\int_\Omega \mathbf{div}\left(\mathbf{E}(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\right)\cdot\mathbf{v}\mathrm{dx} = 0, \tag{3.17}$$

avec la condition au bord

$$\mathbf{E}(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.18}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure au bord $\partial\Omega$.

On définit alors la contrainte

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}),} \tag{3.19}$$

ce qui amène à résoudre, à α fixé, l'*équation d'équilibre*

$$\boxed{\mathbf{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = 0,} \tag{3.20}$$

4. Par définition, la dérivée au sens de Gâteaux de $\mathscr{E}$ dans la direction $\mathbf{u}$ s'écrit

$$\mathscr{E}'(\mathbf{u},\alpha)(\mathbf{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\mathscr{E}(\mathbf{u}+h\mathbf{v},\alpha) - \mathscr{E}(\mathbf{u},\alpha)\right). \tag{3.12}$$

de même dans la direction α on a

$$\mathscr{E}'(\mathbf{u},\alpha)(\beta) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\mathscr{E}(\mathbf{u},\alpha+h\beta) - \mathscr{E}(\mathbf{u},\alpha)\right). \tag{3.13}$$

avec la condition de Neumann nulle au bord

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega^N,} \tag{3.21}$$

Ou le bord du domaine est partionné en une partie sur laquelle s'applique les conditions de Dirichlet sur le déplacement et une autre sur laquelle s'applique la condition de Neuman $\partial\Omega = \partial\Omega^D \cup \partial\Omega^N$.

Considérons maintenant la dérivée par rapport à α dans la direction β à $\mathbf{u}$ fixé (3.15). En intégrant par partie on trouve, pour tout $\beta \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathscr{E}'(\mathbf{u}, \alpha)(\beta) = \int_\Omega \left(-\frac{\mathbf{S}'(\alpha)}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{G_c}{4C_v} \left(-2l\Delta\alpha + \frac{w_1'(\alpha)}{l} \right) \right) \beta \mathrm{dx} \\ + \int_{\partial\Omega} \frac{G_c l}{2C_v} (\nabla\alpha \cdot \mathbf{n}) \beta \mathrm{d}\gamma \end{aligned} \tag{3.22}$$

où l'on a introduit le tenseur de souplesse $\mathbf{S}$ comme étant l'inverse du tenseur de rigidité $\mathbf{E}$ [5].

L'équation (3.22) donne en général une inégalité, appelée *critère d'endommagement*

$$\boxed{-\tfrac{\boldsymbol{\sigma}^2}{2}\mathbf{S}'(\alpha) - \tfrac{G_c}{2C_v} l\Delta\alpha + \tfrac{G_c}{4C_v l} w_1'(\alpha) \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega,} \tag{3.23}$$

et la positivité des termes de bord entraîne les conditions aux limites de type Neumann sur l'endommagement c'est-à-dire

$$\boxed{\nabla\alpha \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\alpha^N.} \tag{3.24}$$

De plus, l'inégalité sur l'énergie (3.22) devient une égalité lorsque $\beta = \alpha - \alpha_{i-1}$ (Allaire, 2005), et alors on a

$$\boxed{(\alpha - \alpha_{i-1}) \left(-\tfrac{\boldsymbol{\sigma}^2}{2}\mathbf{S}'(\alpha) - \tfrac{G_c}{2C_v} l\Delta\alpha + \tfrac{G_c}{4C_v l} w_1'(\alpha) \right) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega} \tag{3.25}$$

avec les conditions aux limites

$$\boxed{(\alpha - \alpha_{i-1}) \nabla\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\alpha^N.} \tag{3.26}$$

Ainsi, l'endommagement ne peut augmenter ($\alpha - \alpha_{i-1} > 0$) que si le critère d'endommagement est atteint, c'est-à-dire si le critère (3.23) est une égalité. Cet ensemble de conditions (3.23)–(3.26) sont appelées les conditions de *Kuhn-Tucker*.

5. On a alors $\mathbf{S}'(\alpha) = -\frac{\mathbf{E}'(\alpha)}{\mathbf{E}^2(\alpha)}$.

3.1.3 Étude unidimensionnelle : Approche générale

L'objectif de cette section est de déterminer les propriétés génériques du modèle d'endommagement, dans le cadre unidimensionnel. Dans ce cadre, nous allons pouvoir résoudre analytiquement les équations d'évolution, expliciter les solutions et déterminer les valeurs critiques qui renseignent sur les différentes phases de l'évolution du matériau.

Considérons à présent le cas unidimensionnel de la barre en traction définie sur $\Omega = [0; L]$. La barre est constituée d'un matériau homogène dont les propriétés sont données par les fonctions E (ou S) et w_1 qui doivent être positives, continûment dérivables sur $[0\,;1]$. En plus des propriétés précédentes, nous aimerions que les fonctions E et w_1 vérifient des propriétés de régularité et d'écrouissage qui caractérisent le comportement du matériau.

Propriétés du matériau

Tout d'abord on souhaite s'assurer que la rigidité décroît avec l'endommagement (assouplissement) et s'annule lorsque l'endommagement est maximal, ainsi E doit être positive, décroissante et doit s'annuler en 1. De plus, la dissipation d'énergie ne peut se faire que lorsque l'endommagement est non nul, et elle croît avec ce dernier. Ceci implique que w_1 soit positive, croissante et s'annule en 0.

Enfin, on se restreint à étudier des matériaux qui s'adoucissent en contrainte. Cette propriété signifie que σ est une fonction décroissante de α. Nous verrons plus loin (équation (3.59)) que cela revient à dire que la fonction $\alpha \to w_1'(\alpha)/S'(\alpha)$ est décroissante.

Finalement, on obtient l'ensemble des conditions sur E, S et w_1

$$\text{Elasticité positive :} \quad E(1) = 0,\ E(\alpha) > 0,\ S(\alpha) > 0; \tag{3.27}$$

$$\text{Assouplissement :} \quad E'(\alpha) < 0,\ S'(\alpha) > 0; \tag{3.28}$$

$$\text{Dissipation :} \quad w_1(0) = 0,\ w_1(\alpha) > 0,\ w'(\alpha) \geq 0; \tag{3.29}$$

$$\text{Adoucissement en contrainte :} \quad \alpha \to \tfrac{w_1'(\alpha)}{S'(\alpha)} \text{ décroissante.} \tag{3.30}$$

Dans les applications nous choisirons la fonction E, qui vérifie les conditions précédentes, telle que

$$\boxed{E(\alpha) = E_0(1-\alpha)^2.} \tag{3.31}$$

Pour la fonction w_1, plusieurs choix sont possibles. On considère par la suite les 2 cas suivants : les matériaux de type 1

$$\boxed{w_1(\alpha) = \alpha} \tag{3.32}$$

ou bien les matériaux de type 2 :

$$\boxed{w_1(\alpha) = \alpha^2.} \tag{3.33}$$

Ces choix permettent de considérer un problème quadratique en α.

Conditions aux limites

On suppose, que la barre est bloquée en $x = 0$ et soumise, en chaque instant t_i, noté t pour alléger l'écriture, à un déplacement $U = tL$ en $x = L$. L'endommagement dans la barre vérifie les conditions de type Neumann nulles au bord du domaine, et l'endommagement est irréversible. A l'instant initial, le déplacement et l'endommagement sont nuls, ce qui donne finalement les conditions aux limites suivantes :

$$\text{Conditions aux bords (déplacement) :} \quad u(0) = 0,\ u(L) = U = tL, \tag{3.34}$$

$$\text{Conditions initiales (déplacement) :} \quad u_0(x) = 0 \text{ sur } \Omega, \tag{3.35}$$

$$\text{Conditions aux bords (endommagement) :} \quad \alpha'(0) = \alpha'(L) = 0, \tag{3.36}$$

$$\text{Conditions initiales (endommagement) :} \quad \alpha_0(x) = 0 \text{ sur } \Omega, \tag{3.37}$$

$$\text{Irréversibilité de l'endommagement :} \quad \alpha(x) \geq \alpha_{i-1}(x) \text{ sur } \Omega. \tag{3.38}$$

Résolution du problème en déplacement

L'énergie de Griffith régularisée s'écrit maintenant

$$\mathscr{E}(u, \alpha) = \int_0^L \frac{1}{2} E(\alpha(x)) u'(x)^2 \mathrm{d}x + \frac{G_c}{4C_v} \int_0^L \left(l\alpha'(x)^2 + \frac{w_1(\alpha(x))}{l} \right) \mathrm{d}x, \tag{3.39}$$

d'où découle l'équation d'équilibre à l'instant t, lorsque α est fixé,

$$\sigma'(x) = \big(E(\alpha(x))u'(x)\big)' = 0 \text{ sur } \Omega. \tag{3.40}$$

Ainsi, la contrainte est uniforme le long de la barre à chaque instant, et vaut, en utilisant les conditions aux limites (3.34)

$$\sigma = tL \frac{1}{\int_0^L S(\alpha(x)\mathrm{d}x}, \tag{3.41}$$

avec $S(\alpha) = E^{-1}(\alpha)$, et le déplacement dans la barre est donc donné explicitement à chaque instant par

$$u(x) = tL \frac{\int_0^x S(\alpha(y)\mathrm{d}y}{\int_0^L S(\alpha(x)\mathrm{d}x}. \tag{3.42}$$

Il reste à résoudre le problème d'endommagement qui se ramène, sous les conditions (3.36)−(3.38), au critère d'endommagement

$$-\frac{\sigma^2}{2}S'(\alpha) - \frac{G_c}{2C_v}l\alpha'' + \frac{G_c}{4C_v l}w_1'(\alpha) \geq 0 \text{ sur } \Omega \tag{3.43}$$

ou à la condition de complémentarité

$$(\alpha - \alpha_{i-1})\left(-\frac{\sigma^2}{2}S'(\alpha) - \frac{G_c}{2C_v}l\alpha'' + \frac{G_c}{4C_v l}w_1'(\alpha)\right) = 0 \text{ sur } \Omega. \tag{3.44}$$

Nous allons étudier maintenant les deux catégories de solutions possibles : les solutions homogènes et les solutions localisées.

Résolution du problème d'endommagement : les solutions homogènes

Les solutions homogènes sont définies comme étant les solutions pour lesquelles la déformation et l'endommagement sont uniformes dans la barre à chaque instant. Lorsque l'endommagement est uniforme, c'est-à-dire α est indépendant de x, le déplacement solution (3.42) se simplifie en

$$u(x) = tx, \tag{3.45}$$

le paramètre de chargement t donne alors la déformation homogène de la barre

$$\epsilon = u' = t. \tag{3.46}$$

L'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\boxed{(u(x), \alpha(x)) = (tx, \alpha).} \tag{3.47}$$

De plus, la contrainte est elle aussi uniforme, et on a la relation

$$\boxed{\sigma(x) = tE(\alpha).} \tag{3.48}$$

Le critère d'endommagement devient ensuite $(\alpha''(x) = 0)$

$$\frac{t^2}{2}E'(\alpha) + \frac{G_c}{4C_v l}w_1'(\alpha) \geq 0 \text{ sur } \Omega, \tag{3.49}$$

et l'équilibre d'énergie se traduit par

$$(\alpha - \alpha_{i-1})\left(\frac{t^2}{2}E'(\alpha) + \frac{G_c}{4C_v l}w_1'(\alpha)\right) = 0 \text{ sur } \Omega. \tag{3.50}$$

Phase élastique homogène A l'instant initial l'endommagement est nul, lorsque t augmente, et tant que le critère d'endommagement n'est pas atteint (inégalité stricte dans (3.49)), l'endommagement reste donc constant et nul dans toute la barre

$$\boxed{\alpha = 0.} \tag{3.51}$$

Cette phase est appelée la *phase élastique*, on a alors la relation contrainte-déformation

$$\boxed{\sigma = tE(0) = tE_0.} \tag{3.52}$$

La limite de cette phase est atteinte lorsque le critère d'endommagement devient nul, *i.e.* lorsque

$$t_e = \sqrt{-\frac{G_c}{2C_v l}\frac{w_1'(0)}{E'(0)}}. \tag{3.53}$$

La contrainte vaut alors la contrainte élastique

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{G_c}{2C_v l}\frac{w_1'(0)}{S'(0)}}, \tag{3.54}$$

et le déplacement en bout de barre vaut

$$U_e = L\sqrt{-\frac{G_c}{2C_v l}\frac{w_1'(0)}{E'(0)}}. \tag{3.55}$$

En appliquant ces résultats aux cas où les fonctions E et w_1 sont définies par (3.31) et (3.32) (matériau de type 1) ou par (3.33) (matériau de type 2), on obtient respectivement

$$\boxed{t_e = \sqrt{\frac{G_c}{4C_v l E_0}}, \qquad \sigma_e = \sqrt{\frac{G_c E_0}{4C_v l}}} \tag{3.56}$$

et

$$\boxed{t_e = 0, \qquad \sigma_e = 0} \tag{3.57}$$

Ainsi, le choix d'un matériau suivant la propriété (3.32) conduit à l'existence d'une phase élastique, tandis que le choix d'un matériau suivant la propriété (3.33) conduit à son inexistence.

Phase endommagée homogène A partir de $t \geq t_e$, le critère d'endommagement est atteint (*i.e.* devient une égalité) et α peut croître tout en restant homogène. Cette phase est appelée *phase endommagée*. La variable d'endommagement est alors solution, à chaque

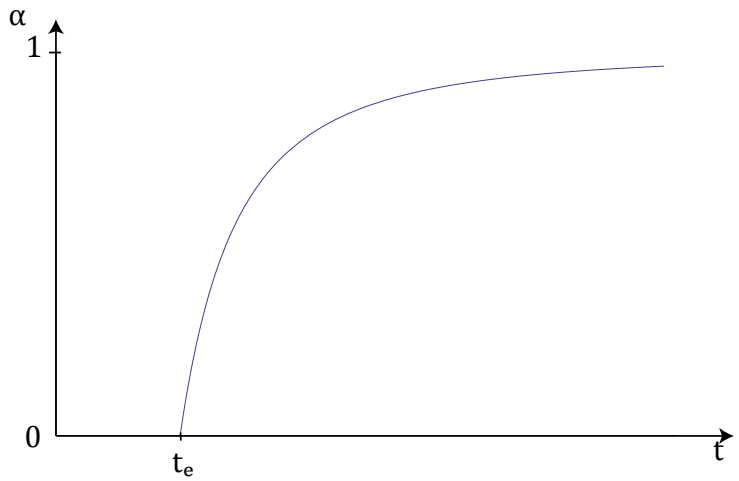


FIGURE 3.1: Endommagement homogène en fonction de la déformation pour le matériau de type 1

instant t, de l'équation

$$\frac{t^2}{2}E'(\alpha) + \frac{G_c}{4C_v l}w_1'(\alpha) = 0, \tag{3.58}$$

et la contrainte dans la barre vaut [6]

$$\sigma = E(\alpha)t = \sqrt{\frac{G_c}{2C_v l}\frac{w_1'(\alpha)}{S'(\alpha)}}, \tag{3.59}$$

Remarquons, que pour un matériau qui s'adoucit en contrainte, la contrainte étant décroissante en α, son maximum est atteint pour un endommagement nul, et vaut donc la limite élastique

$$\sigma_M = \sigma_e. \tag{3.60}$$

En faisant le choix d'un matériau suivant la propriété (3.32) (de type 1), on obtient la solution homogène pour l'endommagement ($t \geq t_e$), représentée à la figure 3.1,

$$\boxed{\alpha = 1 - \frac{G_c}{4C_v l E_0}\frac{1}{t^2},} \tag{3.61}$$

avec la contrainte homogène

$$\boxed{\sigma = \frac{G_c^2}{16C_v^2 l^2 E_0}\frac{1}{t^3}.} \tag{3.62}$$

La relation contrainte-déformation, représentée à la figure 3.2, montre bien une phase élastique suivie d'une phase adoucissante.

6. Ainsi, la contrainte est une fonction décroissante de α lorsque $\alpha \to \frac{w_1'(\alpha)}{S'(\alpha)}$ est décroissante. On retrouve bien ici la propriété d'adoucissement en contrainte que nous avions énoncées dans les équations (3.30).

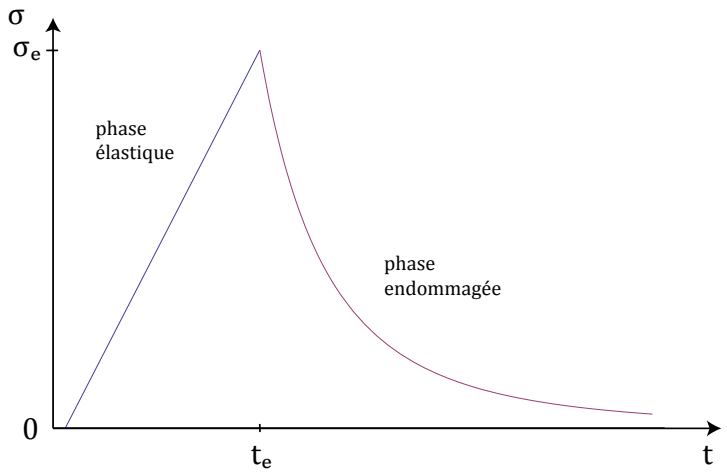


Figure 3.2: Relation contrainte-déformation pour le matériau de type 1

Pour un matériau suivant la propriété (3.33) (de type 2), on trouve la solution homogène, représentée à la figure 3.3

$$\boxed{\alpha = \frac{2C_v l E_0 t^2}{G_c + 2C_v l E_0 t^2},} \tag{3.63}$$

avec la contrainte homogène, représentée à la figure 3.4,

$$\boxed{\sigma = E_0 \left(\frac{G_c}{G_c + 2C_v l E_0 t^2}\right)^2 t.} \tag{3.64}$$

La relation contrainte-déformation montre cette fois une première phase durcissante, suivie d'une phase adoucissante commune au matériau de type 1. On peut déterminer la contrainte maximum pour un matériau suivant la propriété (3.33), en dérivant la relation précédente, on obtient le chargement critique

$$\boxed{t_c = \sqrt{\frac{G_c}{6C_v l E_0}}} \tag{3.65}$$

et la contrainte critique

$$\boxed{\sigma_c = \frac{9}{16}\sqrt{\frac{G_c E_0}{6C_v l}}.} \tag{3.66}$$

Résolution du problème d'endommagement : les solutions localisées

Dans cette section, seuls les principaux résultats sont énoncés, les preuves établies par Amor (2008) sont rappelées en annexe.

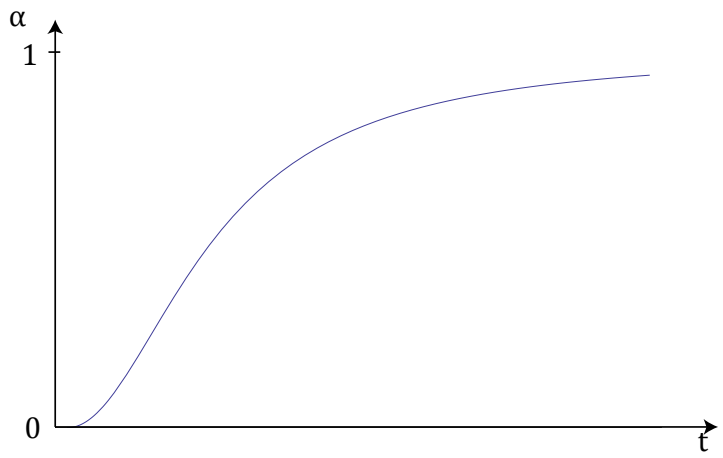


FIGURE 3.3: Endommagement homogène en fonction de la déformation pour le matériau de type 2

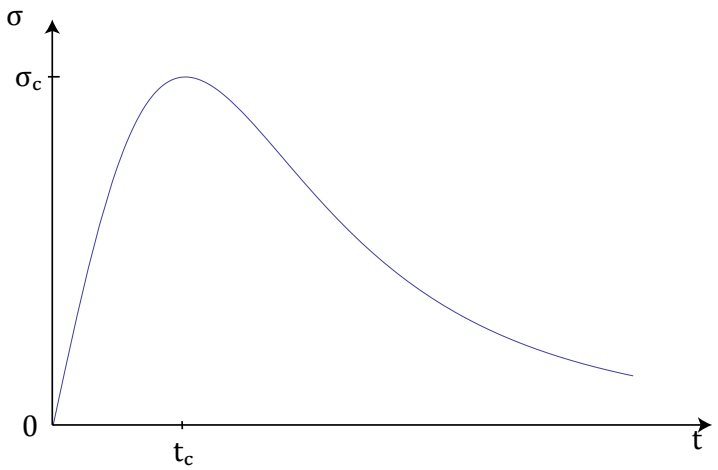


FIGURE 3.4: Relation contrainte-déformation pour le matériau de type 2

Lorsque l'endommagement homogène n'est pas (ou n'est plus) une solution stable, alors il se localise quelque part dans la barre. C'est la deuxième catégorie de solutions possibles. Supposons qu'une solution localisée se développe à partir de l'instant t_0 après une phase élastique ou endommagée homogène. L'endommagement observé juste avant l'initialisation de la localisation est uniforme dans la barre et est noté α_0 ($\alpha_0 = 0$ si la localisation se met en place après une phase élastique, $\alpha_0 > 0$ sinon).

Appelons $D =]x_0 - d, x_0 + d[:= \{x \in \Omega : \alpha(x) > \alpha_0\}$ la partie de la barre ou l'endommagement se localise. Sur D, α vérifie l'équation

$$\alpha'^2(x) = -\frac{2C_v\sigma^2}{lG_c}\left(S(\alpha(x)) - S(\alpha_0)\right) + \frac{w_1(\alpha(x)) - w_1(\alpha_0)}{l^2} =: H(\sigma, \alpha(x)), \tag{3.67}$$

i.e. α est solution du problème différentiel

$$\boxed{\begin{cases} H(\sigma, \alpha(x)) \geq 0 \\ \alpha'(x) = \pm\sqrt{H(\sigma, \alpha(x))} \end{cases}} \tag{3.68}$$

où σ est fixé et est donné par (3.41).

On montre que, sur D, la solution α est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = x_0$, et que α atteint donc son maximum en x_0. Ce maximum est noté $\alpha_M := \alpha(x_0)$ et il est solution de l'équation

$$H(\sigma, \alpha_M) = 0. \tag{3.69}$$

Lien avec la rupture et constante de normalisation En notant σ_0 la contrainte initiale à la phase de localisation (qui donne l'endommagement initial α_0), on peut montrer que la contrainte décroit de σ_0 à 0 si et seulement si l'endommagement maximal α_M croît de α_0 à 1.

Le cas de l'annulation de la contrainte, lorsque α_M tend vers 1, est très important, il représente l'équivalent de la rupture dans la structure pour la théorie de Griffith. On peut alors déterminer la valeur de la constante de normalisation C_v, en supposant que le nombre de fissure dans la structure vaut 1. Ainsi, l'équation de normalisation (3.7) devient

$$C_v = \frac{1}{4}\int_D \left(l\alpha'(x)^2 + \frac{w_1(\alpha(x))}{l}\right) \mathrm{dx}. \tag{3.70}$$

Le critère d'endommagement (3.67), lorsque la contrainte s'annule, donne alors

$$\alpha'(x)^2 = \frac{w_1(\alpha(x))}{l^2} \tag{3.71}$$

on trouve alors

$$\boxed{C_v = 2/3} \tag{3.72}$$

pour un matériau de type 1 (propriété (3.32)), et

$$\boxed{C_v = 1/2} \tag{3.73}$$

pour un matériau de type 2 (propriété (3.33)).

Localisation de la zone d'endommagement La demi-largeur de la zone d'endommagement localisé est déterminée en intégrant l'équation différentielle (3.68) entre $x_0 - d$ et x_0.

En choisissant des matériaux suivant la propriété (3.32), en supposant de plus que la localisation a lieu juste après la phase élastique ($\alpha_0 = 0$), et que l'endommagement maximum vaille 1 ($\alpha_M = 1$, il y a donc eu rupture et la contrainte a chuté à 0), on trouve

$$d = 2l. \tag{3.74}$$

La largeur totale de la zone d'endommagement est donc égale à $4l$ pour ces matériaux.

Pour les matériaux suivant la propriété (3.33), la zone d'endommagement n'est pas localisée dans une zone de largeur finie.

profil d'endommagement A l'aide d'une résolution numérique du problème différentiel (3.68), il est possible d'obtenir les profils d'endommagement dans le cadre général. Cependant, pour des matériaux vérifiant les propriétés précédemment choisies, et en supposant que la localisation a lieu juste après la phase élastique ($\alpha_0 = 0$), et que la contrainte homogène est nulle (rupture), on peut expliciter les solutions. Pour un matériau de type 1 (propriété (3.32)), l'endommagement se déduit de l'équation (3.68), intégrée sur la zone $[x_0 - d; x]$ avec la condition de continuité $\alpha(x_0 - d) = 0$, le profil d'endommagement sur la demi-zone de localisation est alors

$$\boxed{\alpha(x) = \tfrac{1}{4l^2}(x - x_0 + d)^2 \qquad \text{sur} \quad [x_0 - d; x_0],} \tag{3.75}$$

le profil complet est symétrique par rapport à la droite $x = x_0$, il est représenté sur la figure 3.5.

Pour un matériau de type 2 (propriété (3.33)), en intégrant l'équation (3.68) sur $[x; x_0]$ avec la condition $\alpha(x_0) = 1$, on obtient le profil d'endommagement sur la demi-

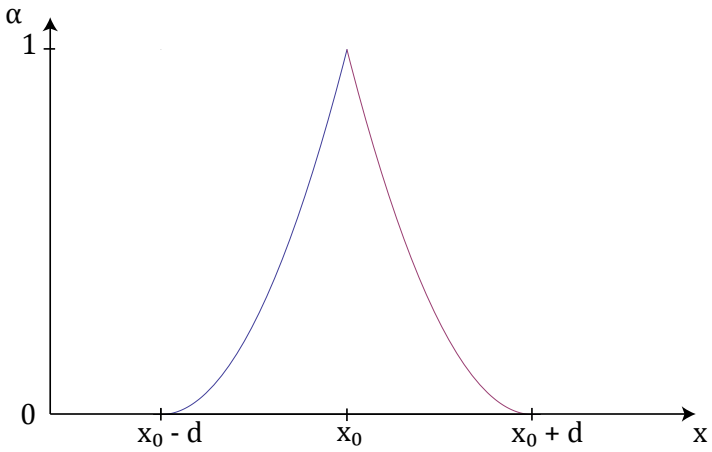


Figure 3.5: Profil d'endommagement pour le matériau de type 1

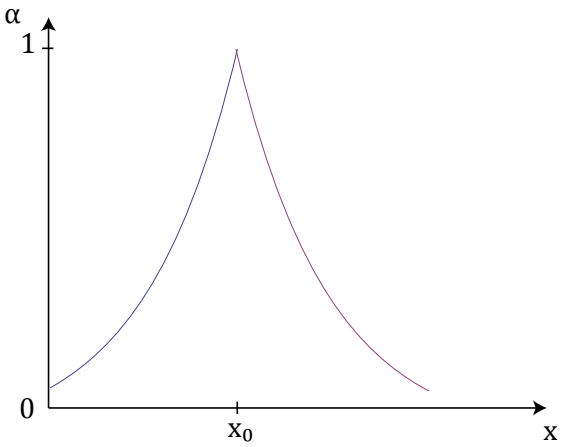


Figure 3.6: Profil d'endommagement pour le matériau de type 2

barre $[0; x_0]$

$$\boxed{\alpha(x) = \mathrm{e}^{(x-x_0)/l} \qquad \text{sur} \quad [0; x_0].} \tag{3.76}$$

Le profil complet est symétrique par rapport à la droite $x = x_0$, il est représenté sur la figure 3.6.

3.2 Implémentation numérique du modèle de base et application à la barre en traction

3.2.1 Implémentation numérique

L'implémentation a été réalisée au sein du code VARFRAC_FENICS, créé par C. Maurini, qui est un ensemble de classe python utilisant notamment le logiciel Fenics (Logg *et al.*, 2012), et dont cette thèse a contribué au développement.

L'énergie à minimiser qui est implémentée est la suivante :

$$\mathscr{E}(u,\alpha) = \int_0^L \frac{1}{2} E_0 \left((1-\alpha(x))^2 + k_{res}\right) u'(x)^2 \mathrm{d}x + \frac{G_c}{4C_v} \int_0^L \left(l\alpha'(x)^2 + \frac{w_1(\alpha(x))}{l} \right) \mathrm{d}x. \tag{3.77}$$

Elle a subie une légère modification par rapport à l'énergie (3.39), puisque le paramètre $k_{res} > 0$ a été ajouté à la partie élastique. Ce paramètre est une rigidité résiduelle numérique qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème en déplacement, et empêche que la matrice associée soit singulière. L'influence de ce paramètre sera étudiée ultérieurement.

Algorithme de minimisation alternée

Cette énergie n'est pas convexe en le couple (u, α), mais cependant elle l'est en chacune des deux variables séparément : à u fixé, l'énergie est convexe en α, et à α fixé, l'énergie est convexe en u. Autrement dit, en fixant l'une des variables, le problème devient linéaire par rapport à la seconde, et la résolution numérique en est facilitée.

L'algorithme de minimisation que nous utilisons est donc un algorithme de minimisation alternée. Il consiste en une succession de minimisation par rapport à chaque variable, jusqu'à convergence [7]. L'algorithme de minimisation est alors :

1. Initialisation à l'instant t_i : $(u_i^0, \alpha_i^0) = (u^0, \alpha^0)$
2. Itération sur $k \geq 1$, tant que $Erreur < tol$:
   (a) à α_i^{k-1} fixé, résolution de $u_i^k = \arg\min_u \mathscr{E}(u, \alpha_i^{k-1})$
   (b) à u_i^k fixé, résolution, sous la contrainte $\alpha_i^k \geq \alpha_{i-1}$, de $\alpha_i^k = \arg\min_\alpha \mathscr{E}(u_i^k, \alpha)$
   (c) calcul de l'erreur sur l'endommagement $Erreur = \|\alpha_i^k - \alpha_i^{k-1}\|_\infty$

La tolérance est choisie à 10^{-5} dans nos applications numériques.

7. La convergence de cette méthode de minimisation n'est pas prouvée. Cependant, il s'agit d'un algorithme de descente (voir Amor (2008)), qui nous assure donc la convergence de la méthode vers une solution stationnaire.

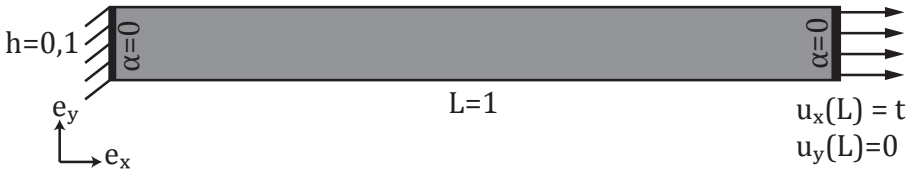


Figure 3.7: Représentation de la barre et des conditions aux limites

Le résolution du problème en déplacement se fait par un solveur linéraire résolvant le problème variationnel par éléments finis. La résolution du problème d'endommagement se fait par contre à l'aide d'un solveur particulier (nous avons utilisé TAO, Munson *et al.* (2012), disponible dans les librairies Fenics), à cause de l'irréversibilité de l'endommagement qui contraint le problème de minimisation.

3.2.2 Application à la barre en traction

Pour tester le code, et afin de mieux comprendre les deux mécanismes d'endommagement possibles, déterminés analytiquement (endommagement homogène et endommagement localisé), nous avons réalisé l'application du problème de barre en traction.

Choix des paramètres et des conditions aux limites

Une barre rectangulaire, représentée figure 3.7, est soumise a un déplacement contrôlé croissant, à son extrémité droite. Elle est encastrée à son extrémité gauche, et ses autres bords sont libres. Afin que l'endommagement se localise à l'intérieur de la barre, il est imposé nul sur les bords sur lequel un déplacement est imposé (à droite et à gauche).

La variable t représente le temps cinématique des simulations, c'est-à-dire le chargement imposé. Le pas de temps doit être suffisamment fin pour respecter l'hypothèse de cadre quasi-statique, il est choisi égal à 0.05, le temps final de la simulation étant $t_f = 3$.

Une analyse dimensionnelle montre que l'énergie peut être adimensionnée en choisissant un paramètre d'échelle u_0 tel que $u_0 = \sqrt{\frac{LG_c}{E_0}}$ et en imposant alors le déplacement t/u_0 en bout de barre. Cela signifie que, dans les applications numériques, seuls le rapport l/L, la rigidité résiduelle k_{res} et le coefficient de Poisson ν influencent le résultat des simulations.

La barre est de longueur $L = 1$ et de largeur $h = 0.1$. Elle est maillée à l'aide d'éléments triangulaires à 3 noeuds, les fonctions interpolantes sont linéaires (P1), la longueur



FIGURE 3.8: Déplacement selon x dans la barre à $t = 3$ pour les matériaux de type 1

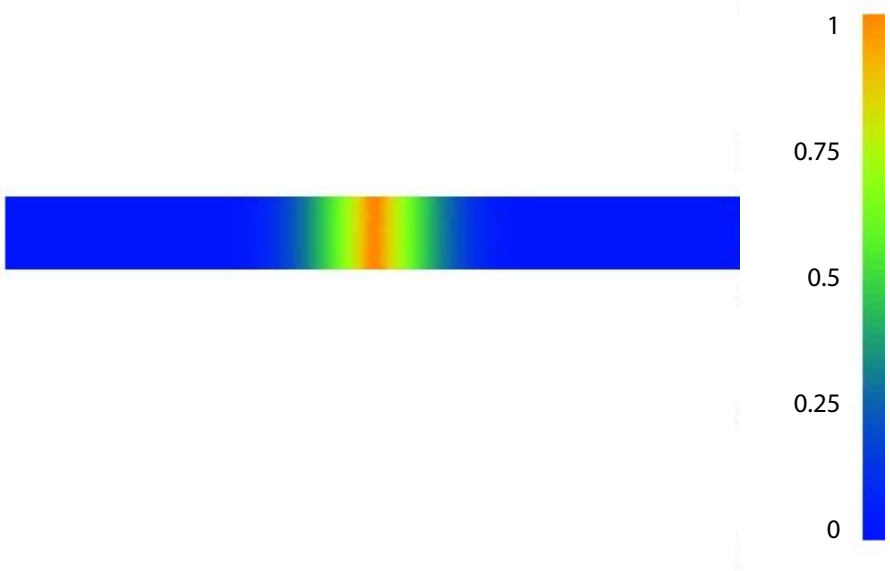


FIGURE 3.9: Endommagement dans la barre à $t = 3$ pour les matériaux de type 1

caractéristique des éléments est 0.01. Le matériau est purement élastique endommageable et a les caractéristiques adimensionnées [8] suivantes :

- $E = 1$,
- $\nu = 0.3$,
- $G_c = 1$.

Enfin, les paramètres l et k_{res} sont choisis ainsi :

- $l = 0.1$,
- $k_{res} = 10^{-5}$.

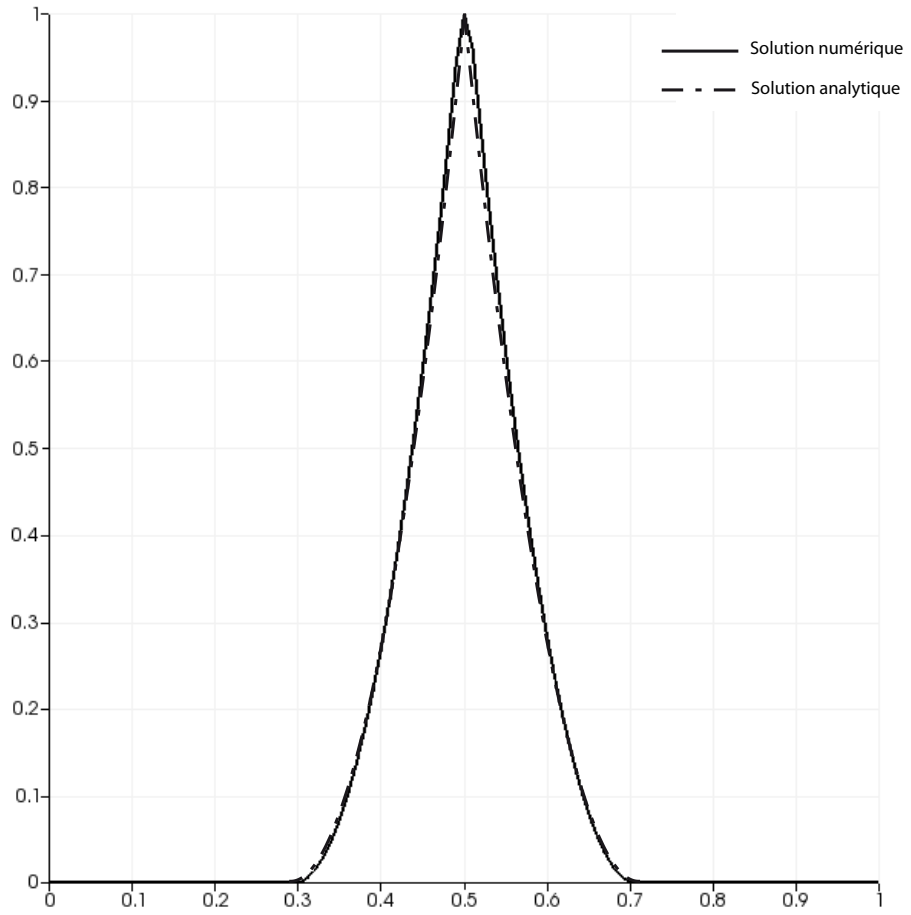


Figure 3.10: Profil d'endommagement sur la droite $y = 0.05$ à $t = 3$ pour les matériaux de type 1

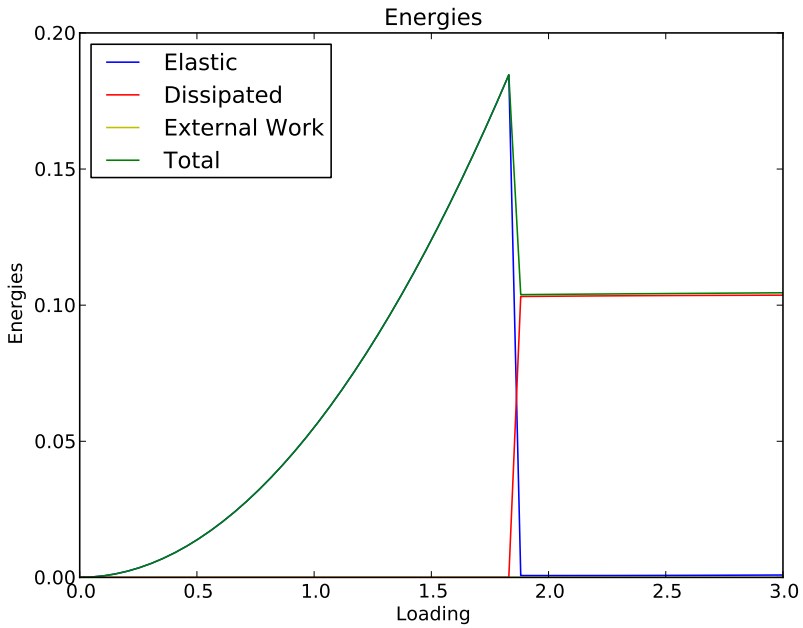


FIGURE 3.11: Courbes d'énergies obtenues pour les matériaux de type 1

Résultats numériques pour les matériau de type 1

La figure 3.8 présente le déplacement final (à $t = 3$) dans la barre et la figure 3.9 présente l'endommagement. Le profil d'endommagement obtenu sur la droite $y = 0.05$ est donné figure 3.10, il est superposé à la solution analytique obtenue figure 3.5. L'endommagement est localisé au milieu de la barre, et a atteint la valeur 1, ce qui signifie qu'il y a eu rupture. De plus, on constate que la largeur de la zone endommagée correspond bien à celle déterminée analytiquement, à savoir $2d = 4l = 0.4$.

Les courbes d'énergies sont données figure 3.11, elles montrent bien une énergie élastique quadratique, qui chute pour la charge critique $t \approx 1.9$, tandis que l'énergie dissipée devient significative pour le même chargement. Cette limite élastique a été correctement prédite par l'étude analytique (équation 3.56) et on remarque que l'endommagement s'est localisé juste après la phase élastique. La phase endommagée homogène n'a en effet pas pu se développer numériquement, à cause des conditions aux limites d'endommagement nul qui ont été imposées.

La valeur de l'énergie dissipée correspond également bien à celle déterminée analytiquement, puisqu'elle doit être égale à G_c multiplié par la mesure de la fissure (pour être cohérente avec la théorie de Griffith), ce qui est presque le cas car la fissure a pour longueur la hauteur de la barre, à savoir 0.1, et l'énergie dissipée à $t = 3$ vaut $1.037.10^{-1}$.

8. Pour retrouver les valeurs dimensionnées, on peut par exemple utiliser les relations (3.56) et (3.66).

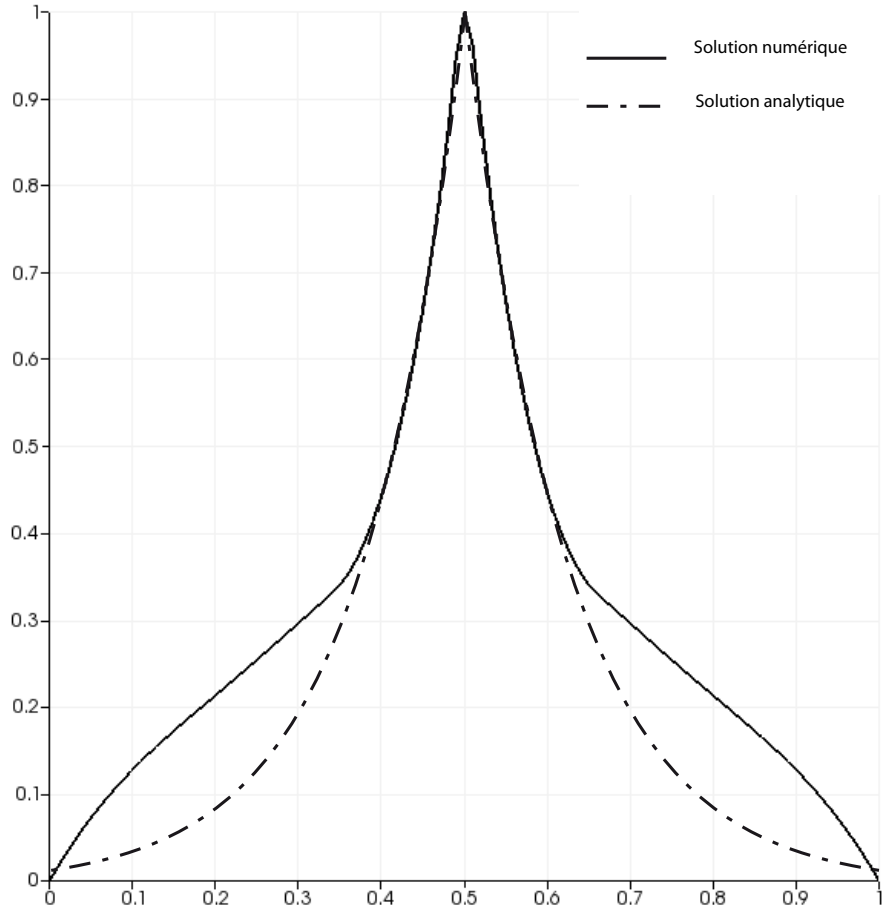


Figure 3.12: Profil d'endommagement sur la droite $y = 0.05$ à $t = 3$ pour les matériaux de type 2

L'erreur constatée correspond à l'utilisation d'éléments triangulaires. Bourdin *et al.* (2008) ont montré que l'énergie dissipée était surestimée d'un facteur $1 + h/4l$, ce qui correspond dans le cas qui est présenté ici, à une erreur de 1.025%. Pour réduire cette erreur, il faudrait que cette longueur caractéristique soit nettement inférieure à l, ce qui nécessiterait des maillages extrêmement fins puisque l doit déjà être choisi très petit devant L.

Résultats numériques pour les matériau de type 2

Pour les matériaux de type 2, l'endommagement dans la barre est représenté sur la figure 3.12. Le profil est assez différent du profil obtenu pour les matériaux de type 1, et correspond, à l'intérieur de la zone centrale de localisation, à celui obtenu analytiquement (représenté en pointillés). En dehors, les conditions aux limites que nous avons imposées sur l'endommagement (nulles aux bords droit et gauche) entraînent l'impossibilité pour l'endommagement de prendre les valeurs non nulles qu'il aurait dû prendre aux bords (en raison de la phase d'endommagement homogène précédant la phase de localisation).

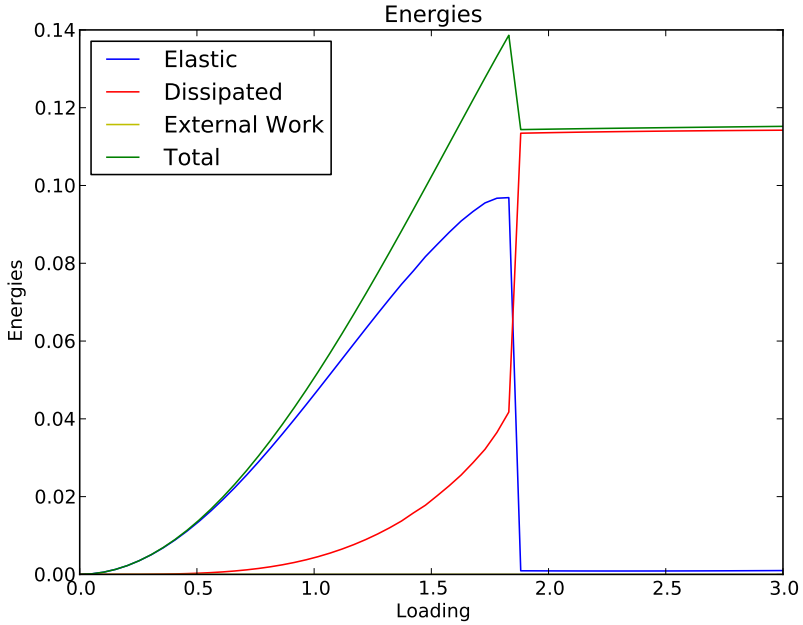


FIGURE 3.13: Courbes d'énergies pour les matériaux de type 2

A cause de l'irréversibilité, l'endommagement va se localiser là où les valeurs deviennent supérieures aux valeurs prises par la solution non localisée (zone centrale), et à l'extérieur, les valeurs resteront celles de la solution non localisée.

Les courbes d'énergies, représentées sur la figure 3.13, sont également différentes de celles obtenues pour les matériaux de type 1, l'énergie élastique n'est pas quadratique et l'énergie dissipée devient non nulle bien avant la rupture, ce qui correspond à la phase endommagée homogène pour le modèle théorique (mais qui n'est pas homogène dans la simulation numérique compte tenu des conditions aux limites). La charge critique, d'environ $t \approx 1.8$, est cohérente avec la valeur théorique (équation (3.65)).

Influence de la longueur interne

Afin d'étudier l'influence de la longueur interne l, des simulations avec $l = 0.2$ et $l = 0.05$ ont été réalisées. La figure 3.14 montre les différents champs et profils d'endommagement obtenus, et la figure 3.15 montre les différentes courbes d'énergies obtenues. On constate que la largeur de la zone d'endommagement est toujours proportionnelle à la longueur interne (0.8 pour $l = 0.2$ et 0.2 pour $l = 0.05$), et que l'énergie élastique chute toujours aux chargements prédits par la limite élastique donnée à l'équation (3.56).

La longueur interne est donc un paramètre qu'il est primordial de bien choisir. Une longueur interne trop grande est en effet préjudiciable dans la mesure où le modèle s'éloigne

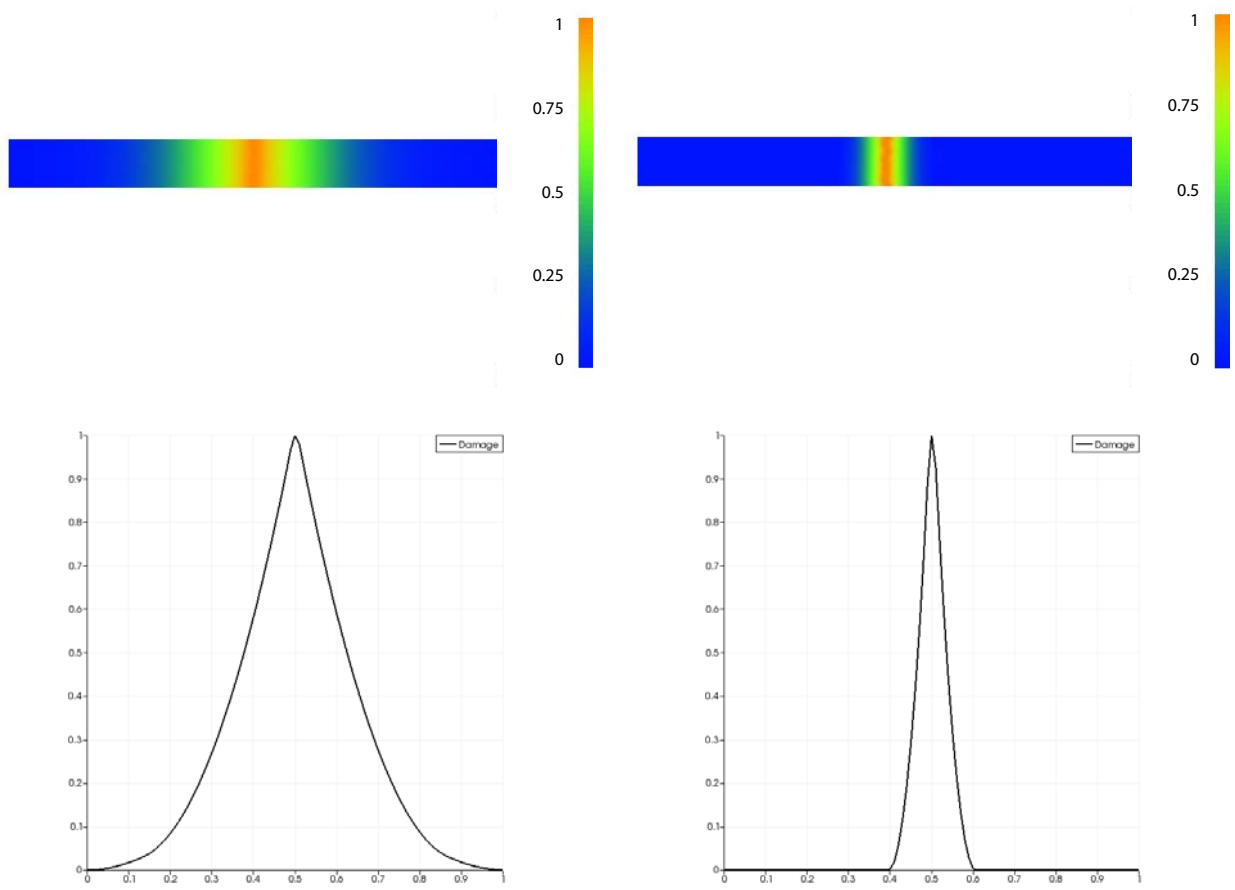


FIGURE 3.14: Endommagement dans la barre pour $l = 0.2$ (à gauche) et $l = 0.05$ (à droite)

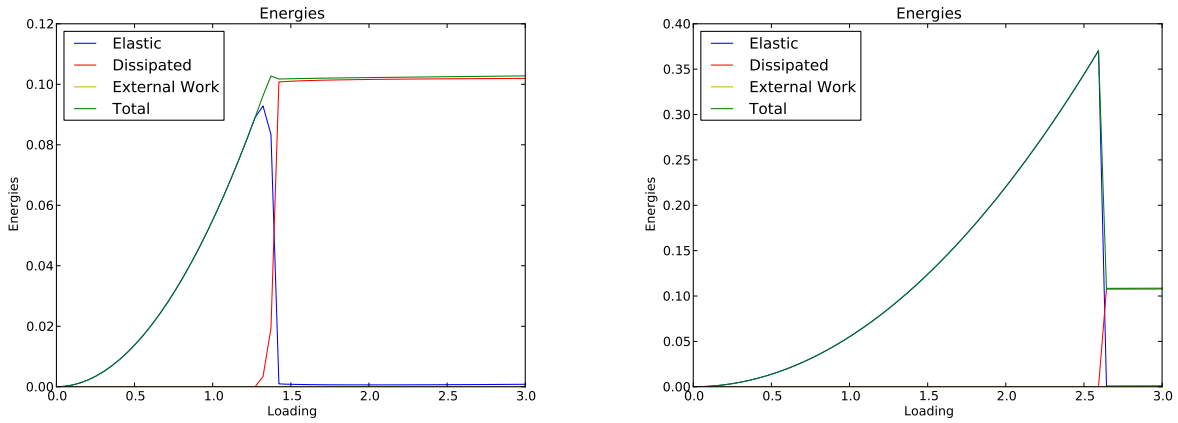


FIGURE 3.15: Courbes d'énergies obtenues pour $l = 0.2$ (à gauche) et $l = 0.05$ (à droite)

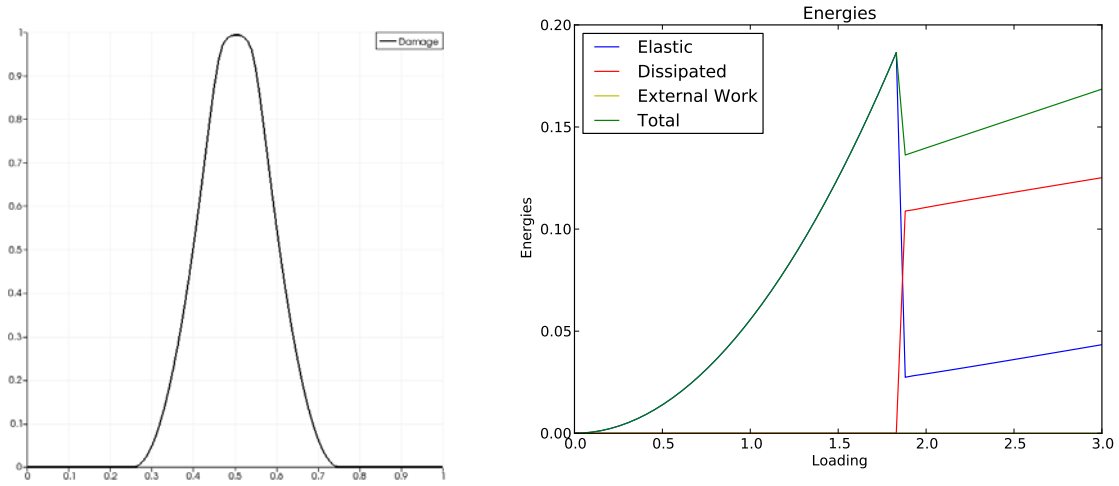


FIGURE 3.16: Profil d'endommagement et courbes d'énergies obtenues pour $k_{res} = 10^{-2}$

alors beaucoup de la limite théorique du modèle de Griffith. Le résultat est donc une solution qui peut s'avérer très différente de la solution donnée par la mécanique de la rupture classique, c'est ce que nous obtenons pour $l = 0.2$ par exemple. *A contrario*, si la longueur interne est trop petite, le maillage doit alors est construit très finement, ce qui a un coût en terme de temps de calcul. Par ailleurs, la longueur interne peut être également considérée comme un paramètre physique du matériau, et non seulement comme un paramètre numérique, auquel cas elle doit être choisie en accord avec les données expérimentales. Une façon de la déterminer est par exemple d'utiliser les relations (3.56) et (3.66) la reliant aux paramètres du matériau (la contrainte critique, le module d'Young et la ténacité).

Influence de la rigidité résiduelle

La figure 3.16 (à droite) présente les courbes d'énergies obtenues avec la rigidité résiduelle $k_{res} = 10^{-2}$, elle est à comparer avec la figure 3.11 qui correspond à une rigidité résiduelle de 10^{-5}. Les énergies dissipée et élastique continuent de croître après la rupture, lorsque la rigidité résiduelle vaut 10^{-2}. D'autre part, l'endommagement présenté à la figure 3.16 (à gauche) montre qu'il est moins localisé (la largeur de la zone endommagée est d'environ 0,5) et présente une forme arrondie assez différente de celle obtenue pour $k_{res} = 10^{-5}$ (figure 3.10).

La rigidité résiduelle est donc un paramètre numérique fondamental, car il assure l'existence et l'unicité de la solution du problème de minimisation en déplacement, cependant il doit être choisi avec pertinence, car alors un choix de valeur trop élevée polluerait alors la solution obtenue en surestimant les énergies.

Conclusion

Les applications numériques effectuées ont permis de vérifier la validité du modèle d'endommagement, ainsi que le rôle des différents paramètres. Par la suite, le modèle de matériau de type 1 sera choisi, car il permet, une bonne adéquation des résultats numériques avec le modèle. De plus, ce type de modèle offre un comportement qui correspond à celui des matériaux fortement cassant, avec une limite élastique non nulle et un comportement adoucissant en contrainte.

3.3 Modèle mixte pour une fissure en cisaillement

La formulation précédente de l'énergie régularisée est malheureusement inadaptée aux problèmes en compression ou en cisaillement. En effet, rien n'interdit dans l'approche précédente l'interpénétration de matière puisque le comportement du système est symétrique en traction et en compression : l'ouverture en traction se traduisant par une interpénétration de la matière entourant la fissure en compression.

Ce comportement n'est pas raisonnable en mécanique de la rupture, et plusieurs modèles ont été développés afin de prendre en compte la non-interpénétration de la matière. Lemaitre et Chaboche (1978) utilisèrent une décomposition de l'énergie en une partie liée à la traction, et l'autre à la compression. De fait, l'endommagement est également décomposé en deux variables distinctes, ce qui est difficile à interpréter physiquement. Del Piero *et al.* (2007) préférèrent pénaliser les déformations volumiques importantes, cette méthode présentant le comportement asymétrique désiré entre la traction et la compression mais induisant, en compression, un endommagement diffus qui ne converge pas vers une fissure bien définie dans l'espace. Lancioni et Royer-Carfagni (2009), puis Amor *et al.* (2009), ont modifié la formulation de l'énergie sur la base de sa décomposition en une partie sphérique et une partie déviatorique. Ce modèle est symétrique pour la traction et la compression, mais il empêche la matière de s'interpénétrer en imposant un contact cisaillant sur les lèvres de la fissure, ainsi ce modèle n'est valable que pour une fissure en mode II. Les résultats numériques sont réalistes puisqu'ils mettent en place l'endommagement dans une bande de cisaillement localisée.

Cependant, ce dernier modèle présente d'importants problèmes numériques dans la zone où l'endommagement se localise. Afin de tenter d'y remédier, nous avons développé, à partir de ce dernier modèle, un modèle dit *mixte* qui fait intervenir la pression comme nouvelle inconnue. Dans un premier temps, le modèle de Lancioni et Royer-Carfagni (2009)

est rappelé brièvement ainsi que ces limites, puis nous présentons le modèle mixte que nous avons développé.

3.3.1 Modèle simple pour une fissure en cisaillement

Rappelons brièvement le modèle de Lancioni et Royer-Carfagni (2009) pour une fissure en cisaillement. Cette approche est basée sur la décomposition orthogonale du tenseur symétrique des déformations en parties sphérique et déviatorique, qui, en dimension quelconque, s'écrit

$$\epsilon = \epsilon^S + \epsilon^D, \qquad \epsilon^S = \frac{\mathrm{tr}\epsilon}{n} I_n, \qquad \epsilon^D = \epsilon - \epsilon^S, \tag{3.78}$$

et celle du tenseur des contraintes s'écrit

$$\sigma = \sigma^S + \sigma^D, \qquad \sigma^S = \frac{\mathrm{tr}\sigma}{n} I_n, \qquad \sigma^D = \sigma - \sigma^S, \tag{3.79}$$

où n est la dimension de l'espace, et I_n le tenseur identité.

Pour un matériau élastique isotrope, la relation contrainte-déformation est donnée par

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \mathrm{tr}\epsilon I_n, \tag{3.80}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau. La densité d'énergie élastique s'écrit donc

$$\frac{1}{2}\sigma \cdot \epsilon = \frac{1}{2}\kappa(\mathrm{tr}\epsilon)^2 + \mu\epsilon^D \cdot \epsilon^D \tag{3.81}$$

avec le module de compressibilité du matériau

$$\kappa = \lambda + \frac{2\mu}{n}. \tag{3.82}$$

L'endommagement est ensuite appliqué uniquement sur la partie déviatorique de l'énergie qui devient

$$\mathscr{E}(u,\alpha) = \int \left(E(\alpha)\mu\epsilon^D \cdot \epsilon^D + \frac{1}{2}\kappa(\mathrm{tr}\epsilon)^2 + \frac{G_c}{4C_v}\left(l\alpha'^2 + \frac{w_1(\alpha)}{l} \right) \right) \mathrm{d}x. \tag{3.83}$$

ainsi la partie sphérique de l'énergie élastique n'est pas affectée par l'endommagement, et une augmentation de l'énergie de dissipation surfacique ne peut être compensée que par une diminution de l'énergie élastique déviatorique.

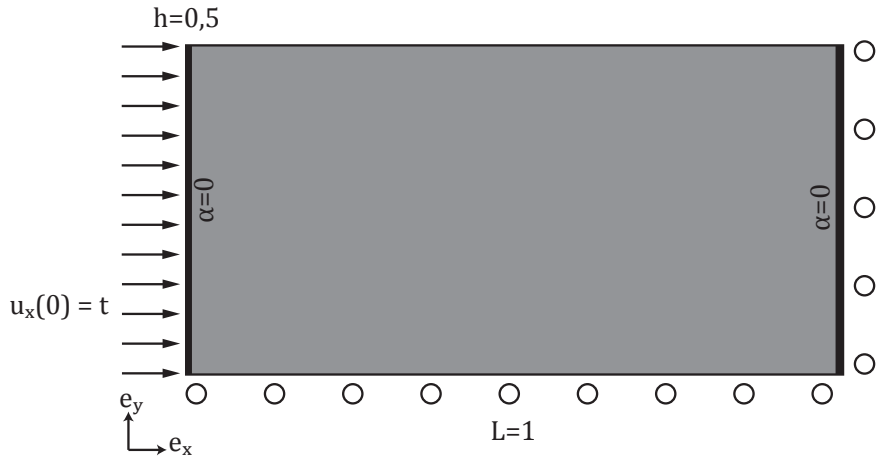


Figure 3.17: Représentation de la plaque et des conditions aux limites

3.3.2 Application numérique

Ce modèle est appliqué numériquement au cas d'une plaque en compression. Les dimensions de la plaque sont $L = 1$ et $h = 0.5$, elle est soumise sur son bord gauche à un déplacement selon x en compression paramétré par la variable t, sur son bord droit à un déplacement nul selon x, et sur le bord du bas, le déplacement est nul selon y. Ces conditions aux limites sont représentées figure 3.17. Les paramètres utilisés ont les valeurs suivantes : $E = 1$, $G_c = 1$, $\nu = 0.3$, $l = 0.02$, $k_{res} = 10^{-7}$, la longueur caractéristique des éléments du maillage est 0.005, et le pas de temps vaut 0.05.

La figure 3.19 présente le champ d'endommagement obtenu avec le modèle en cisaillement. La largeur de la zone endommagée se révèle être bien supérieure à la valeur théorique $4l = 0.08$, elle est d'environ 1.2. D'autre part, les courbes d'énergies représentées sur la figure 3.20 montrent que l'énergie dissipée continue légèrement de croître après la rupture, ce qui reflète le fait que le zone d'endommagement continue de s'élargir. Cette énergie dissipée prend par ailleurs une valeur très éloignée de celle prédite par le modèle, puisqu'elle vaut environ 1.8 à $t = 8$ au lieu de $G_c \times Longueur(\Gamma)$ c'est-à-dire 1.2.

L'erreur qui est observée est un problème d'ordre numérique et non théorique. En effet, cette formulation induit de forts contrastes entre les valeurs prises par les parties sphérique et déviatorique de l'énergie. La partie sphérique reste finie, tandis que la partie déviatorique devient très petite dans la zone endommagée, ce qui produit des problèmes numériques importants, dûs en partie au fait que les même fonctions de forme interpolent les parties sphériques et déviatoriques. Par ailleurs, les matrices de rigidité sont mal conditionnées pour ce type de problème.

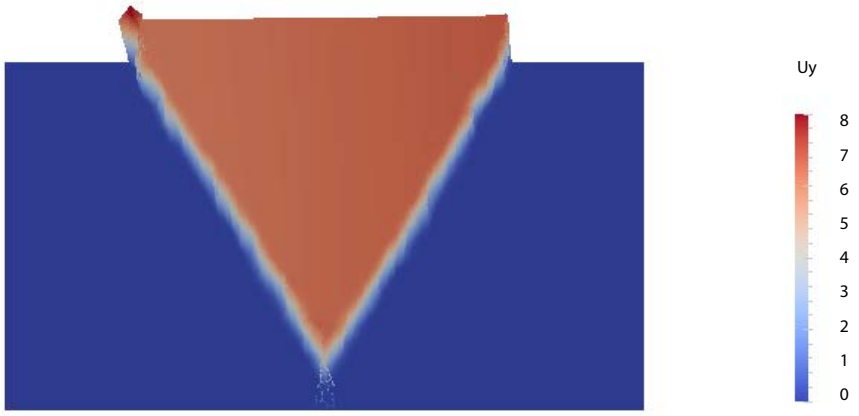


FIGURE 3.18: Déplacement selon y sur la plaque déformée pour la plaque en compression avec le modèle de fissure en cisaillement

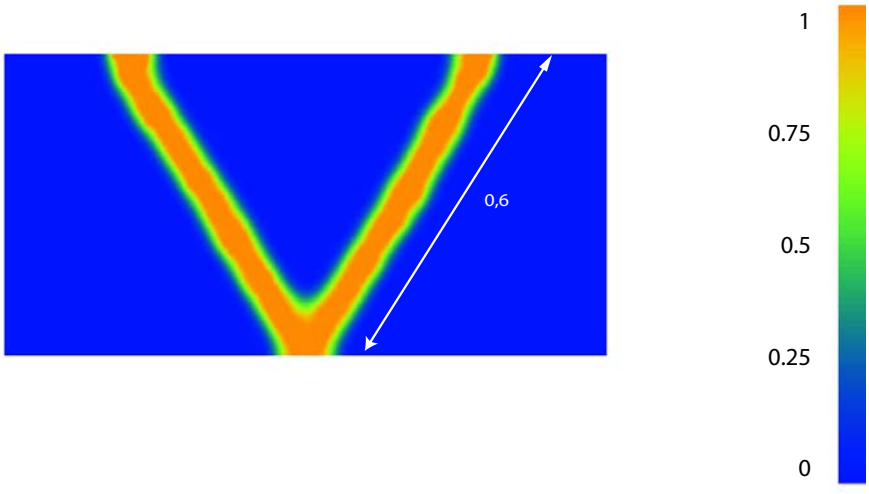


FIGURE 3.19: Champ d'endommagement pour la plaque en compression avec le modèle de fissure en cisaillement

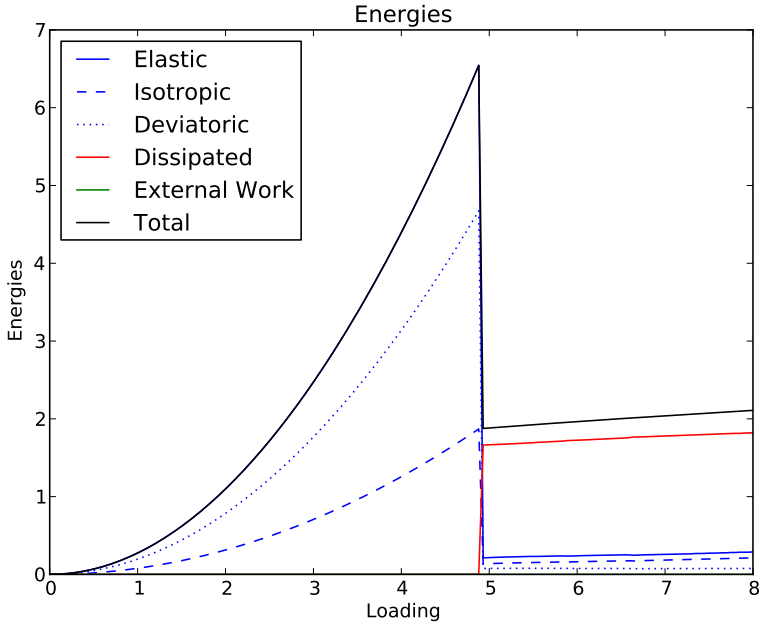


Figure 3.20: Courbes d'énergies pour la plaque en compression avec le modèle de fissure en cisaillement

3.3.3 Modèle mixte pour une fissure en cisaillement

Pour remédier aux problèmes numériques rencontrés avec la formulation précédente, nous nous inspirons de la formulation mixte développée pour le problème d'élasticité à la limite incompressible. La formulation mixte découple les parties sphérique et déviatorique, et permet l'utilisation de fonctions de forme différentes, ce qui limitera les blocages numériques.

Pour un matériau élastique isotrope quasi incompressible, le tenseur des contraintes σ est composé d'un terme borné $2\mu\epsilon$ plus un terme très grand devant le terme borné $\lambda \mathrm{tr}\epsilon I_n$ puisque $\lambda \to \infty$ (le coefficient de Poisson ν tendant alors vers 0.5). Ainsi, les problèmes numériques observés à la limite incompressible sont du même type que ceux qui apparaissent dans la décomposition de l'énergie en une partie sphérique qui reste bornée, et en une partie déviatorique qui, portant l'endommagement, devient très petite dans la zone de fissuration.

La formulation mixte consiste à définir une nouvelle inconnue, la pression p, et à découpler le problème selon les trois inconnues u, p et α. On pose

$$p = \kappa \mathrm{tr}\epsilon = \kappa \mathrm{div} u, \tag{3.84}$$

la partie sphérique du tenseur des contraintes vaut alors $\sigma^S = pI_n$, et la densité d'énergie élastique se réécrit

$$\frac{1}{2}\sigma \cdot \epsilon = \mu \epsilon^D \cdot \epsilon^D + \frac{p^2}{2\kappa}. \tag{3.85}$$

La formulation mixte de l'énergie à minimiser s'obtient par la méthode des multiplicateurs de Lagrange : on ajoute le terme $r(\mathrm{div}u - p/\kappa)$ dans l'énergie, où r est un réel appelé multiplicateur de Lagrange, ce qui donne

$$\mathscr{E}(u,p,\alpha) = \int \left(E(\alpha)\mu\epsilon^D \cdot \epsilon^D + \frac{p^2}{2\kappa} + r(\mathrm{div}u - \frac{p}{\kappa}) + \frac{G_c}{4C_v}\left(l\alpha'^2 + \frac{w_1(\alpha)}{l} \right) \right) \mathrm{d}x. \tag{3.86}$$

La dérivée dans la direction p de l'énergie vaut

$$\mathscr{E}'(u,p,\alpha)(q) = \int \left(\frac{pq}{\kappa} - \frac{rq}{\kappa} \right) \mathrm{d}x, \tag{3.87}$$

cette dérivée devant s'annuler, on obtient finalement la valeur $r = p$, et l'énergie s'écrit finalement

$$\mathscr{E}(u,p,\alpha) = \int \left(E(\alpha)\mu\epsilon^D \cdot \epsilon^D - \frac{p^2}{2\kappa} + p\mathrm{div}u + \frac{G_c}{4C_v}\left(l\alpha'^2 + \frac{w_1(\alpha)}{l} \right) \right) \mathrm{d}x, \tag{3.88}$$

et les conditions de stationnarité de l'énergie s'écrivent :

$$\mathscr{E}'(u,p,\alpha)(v) = \int \left(2E(\alpha)\mu\epsilon^D(u) \cdot \epsilon^D(v) + p\mathrm{div}v \right) \mathrm{d}x = 0 \quad \forall\ v, \tag{3.89}$$

$$\mathscr{E}'(u,p,\alpha)(q) = \int \left(-\frac{p}{\kappa} + \mathrm{div}u \right) q\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\ q, \tag{3.90}$$

et

$$\mathscr{E}'(u,p,\alpha)(\beta) = \int \left(E'(\alpha)\mu\epsilon^D \cdot \epsilon^D - \frac{G_c}{4C_v}\left(2l\alpha'' - \frac{w_1'(\alpha)}{l} \right) \right) \beta\mathrm{d}x \geq 0 \quad \forall\ \beta. \tag{3.91}$$

3.3.4 Implémentation et application numérique

En s'inspirant des formulations mixtes fréquemment utilisées en mécanique des fluides, les champs de déplacement et de pression sont déterminés simultanément comme les minimiseurs de la dérivée mixte dans la direction (v,q), dans un espace mixte. Cet espace contient les champs de déplacement et de pression qui doivent être interpolés à l'aide de fonctions de base quadratiques pour le déplacement, et linéaires pour la pression, ce dernier champ étant la divergence du déplacement. Ainsi, les éléments utilisés sont dorénavant des éléments triangulaires à 6 noeuds (P2) pour l'interpolation du champ de déplacement. L'endommagement reste, quant à lui, interpolé par des fonctions linéaires (P1).

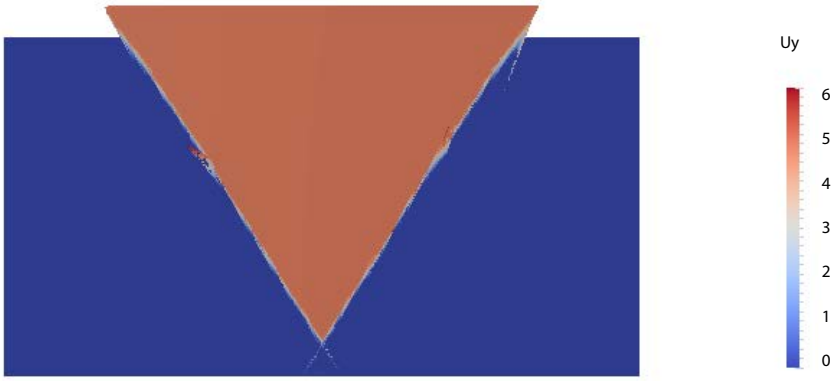


Figure 3.21: Déplacement selon y sur la plaque déformée pour la plaque en compression avec le modèle mixte de fissure en cisaillement

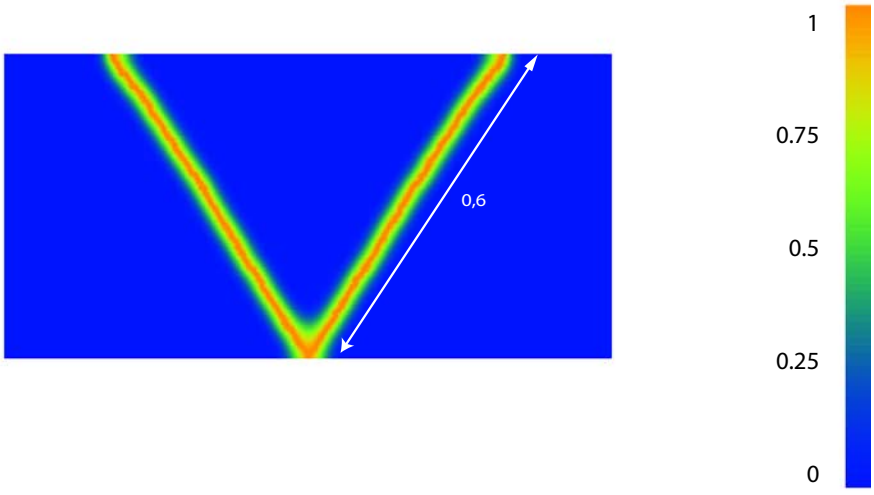


Figure 3.22: Champ d'endommagement pour la plaque en compression avec le modèle mixte de fissure en cisaillement

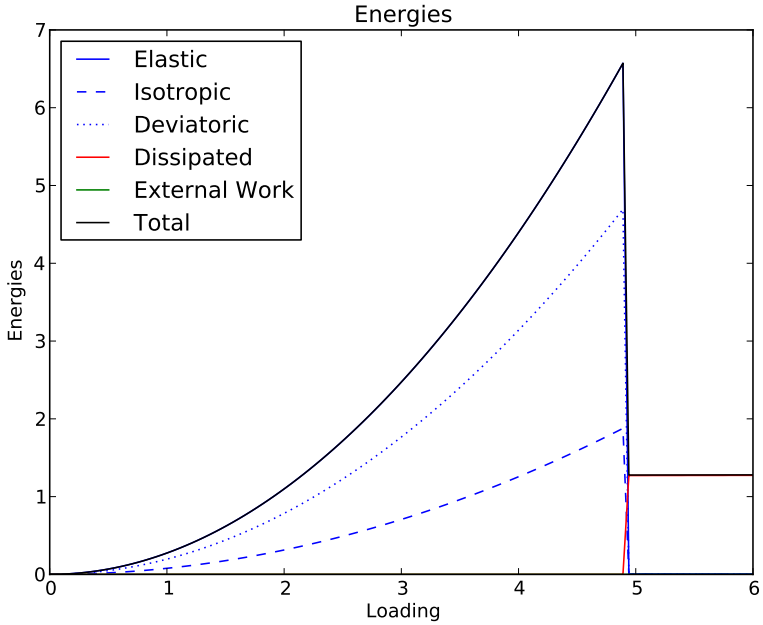


FIGURE 3.23: Courbes d'énergies pour la plaque en compression avec le modèle mixte de fissure en cisaillement

Ce modèle a été appliqué à l'exemple de la plaque en compression, avec les mêmes paramètres que ceux définis à la section précédente. La figure 3.22 montre cette fois un endommagement qui reste localisé dans une zone de largeur $4l$. D'autre part, les courbes d'énergies présentées sur la figure 3.23 montrent que l'énergie dissipée reste constante après la rupture. Sa valeur à $t = 6$ est 1.273, ce qui correspond bien [9] à $G_c \times Longueur(\Gamma)$, puisque la fissure a pour longueur 1.2.

3.4 Modèle avec prise en compte des forces volumiques

La prise en compte d'un chargement volumique dans le modèle d'endommagement est un élément important pour une future utilisation du modèle à des applications géologiques. Dans un premier temps, nous exposons brièvement les difficultés apportées par la prise en considération du chargement volumique dans le modèle analytique, avant de présenter une application numérique au modèle de plaque en compression.

9. à l'erreur de $1 + h/4l = 1.0625\%$ près due à l'utilisation d'élements triangulaires (Bourdin *et al.*, 2008)

3.4.1 Approche analytique

Supposons qu'une force b s'applique le long de la barre, on introduit alors le terme $B(\alpha)u$ dans l'énergie à minimiser. La dépendance du terme volumique à α est une question non triviale. On peut se demander en effet si l'endommagement n'affecterait pas, par exemple, la densité du matériau, et dans ce cas de quelle façon le chargement dépendrait de la variable α. Nous n'apporterons pas de réponse à cette question qui dépasse le cadre de cette thèse, néanmoins nous avons testé l'hypothèse de dépendance en choisissant $B(\alpha) = (1-\alpha)^2 b$, où b est une constante, puis l'hypothèse d'indépendance du chargement $B(\alpha) = b$. L'énergie s'écrit alors dans le cadre général :

$$\mathscr{E}(u,\alpha) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} E(\alpha(x)) u'(x)^2 + \frac{G_c}{4C_v} \left(l\alpha'(x)^2 + \frac{w_1(\alpha(x))}{l} \right) - B(\alpha)u(x) \right) \mathrm{d}x. \quad (3.92)$$

L'équation d'équilibre, pour $x \in [0, L]$, est alors

$$\sigma'(x) + B(\alpha) = 0, \quad (3.93)$$

avec la contrainte, qui ici n'est plus constante, définie par

$$\sigma(x) = E(\alpha(x)) u'(x). \quad (3.94)$$

A cause du fait que σ ne soit plus constante, et de la présence du dernier terme qui contient $u(x)$, il n'est pas possible de procéder comme dans l'approche générale pour trouver les solutions analytiques (u, α).

3.4.2 Application numérique

Analyse dimensionnelle Pour déterminer un ordre de grandeur du chargement volumique b, il est possible d'effectuer une analyse dimensionnelle de l'énergie. On peut montrer que l'on peut se ramener à une énergie adimensionnée en divisant l'énergie dimensionnée par $Eu_0^2 L^{n-2}$, où n est la dimension de l'espace et u_0 un paramètre d'échelle qui peut être choisi tel que $u_0^2 = G_c L/E$. L'énergie du chargement volumique est alors adimensionnée en utilisant un chargement caractéristique $b_0 = \sqrt{EG_c/L^3}$.

Influence du chargement volumique Différentes valeurs du paramètre b ont été testées, de 0.01 à 1. On observe, figure 3.24, des réponses en endommagement très variables selon la valeur de b, et selon la dépendance ou non en α. Lorsque b tend vers 0, la réponse est similaire à celle obtenue à la section précédente (sans chargement volumique). Mais les

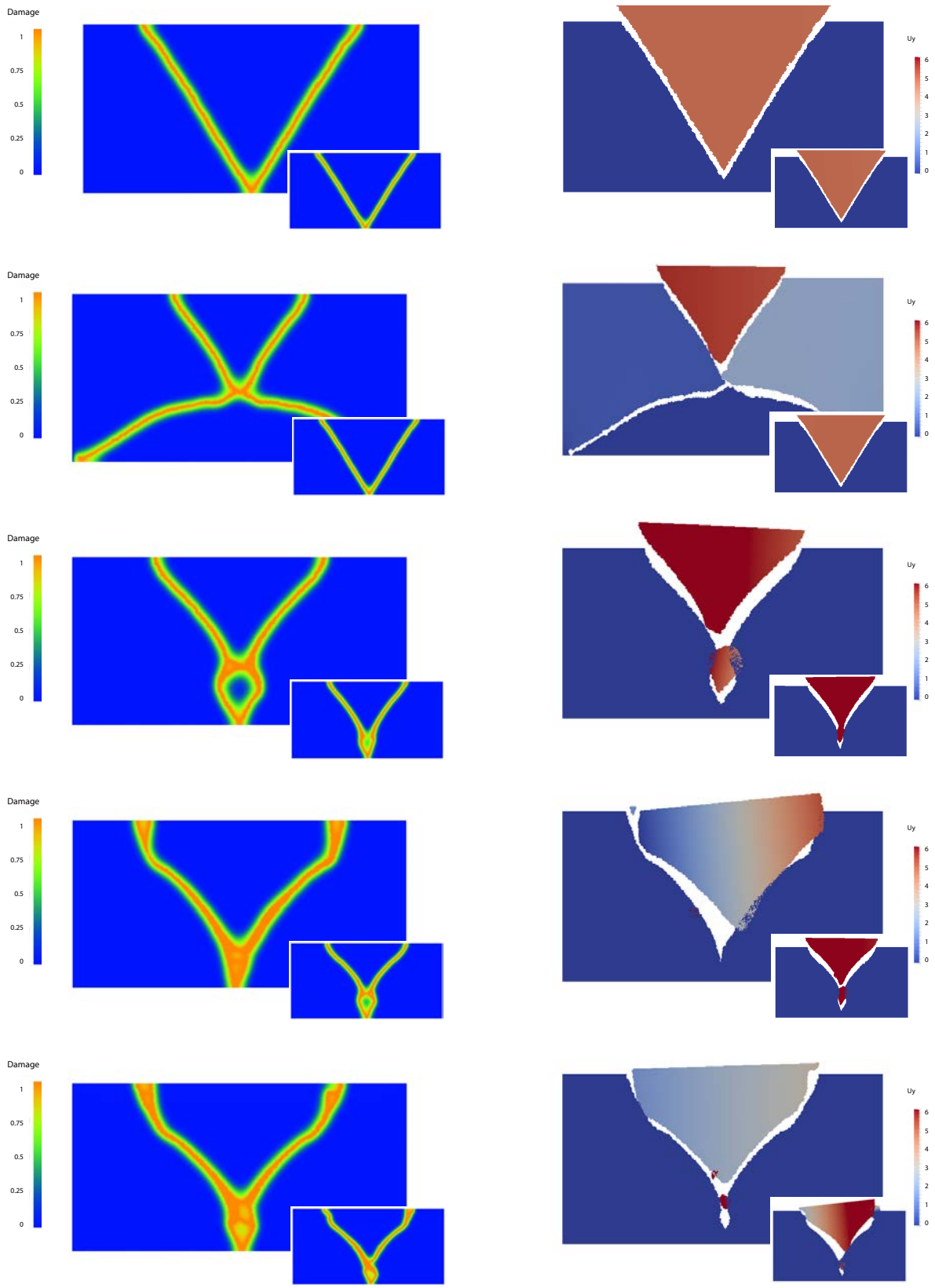


FIGURE 3.24: Champ d'endommagement (à gauche) et déplacement selon y sur la déformée (à droite), lorsque $B(\alpha) = (1-\alpha)^2 b$ (grandes vignettes) et $B(\alpha) = b$ (petites vignettes), avec b prenant les valeurs 0.01, 0.02, 0.2, 0.5 et 1 (de haut en bas) à $t = 6$.

réponses se différencient dès $b = 0.02$, ce qui signifie que le modèle est sensible à la valeur du chargement volumique appliqué, et à la dépendance de ce terme à l'endommagement. Lorsque le terme volumique dépend de α, la valeur $b = 0.2$ marque une transition entre la réponse d'endommagement à quatre branches observée pour $b = 0.02$ et les réponses d'endommagement en forme de fourche observée pour $b = 0.5$ et $b = 1$. Cette transition à quatre branches n'existe pas lorsque le chargement volumique est indépendant de α. Enfin, la valeur $b = 1$ marque la limite de validité numérique du code, au delà, les réponses observées semblent être sujettes à des erreurs numériques.

Finalement, la valeur de b a un impact significatif sur la réponse obtenue, ainsi que la dépendance ou non du terme correspondant au chargement volumique vis à vis de l'endommagement. Ce lien reste à creuser, au cours de travaux futurs, ainsi que l'amélioration de la prise en compte par le code de valeurs de grandes valeurs de b.

3.5 Modèle avec contrainte tangentielle résiduelle sur la fissure

Afin de prendre en compte les phénomènes dissipatifs qui correspondent aux microfrottements dans la zone endommagée, on introduit dans l'énergie à minimiser un terme dissipatif. On suppose donc que la barre est soumise à une force supplémentaire : une force résiduelle de frottement. Cette force est choisie proportionnelle à une contrainte seuil σ_c ainsi qu'à une fonction de l'endommagement $\alpha \to w_2(\alpha)$ croissante, qui s'annule lorsque l'endommagement est nul. L'énergie à minimiser est alors de la forme

$$\mathscr{E}(u,\alpha) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} E(\alpha(x)) u'(x)^2 + \frac{G_c}{4C_v} \left(l\alpha'(x)^2 + \frac{w_1(\alpha(x))}{l} \right) + \sigma_c w_2(\alpha) u'(x) \right) \mathrm{d}x. \tag{3.95}$$

Pour plus de lisibilité, cette équation est adimensionnée à l'aide du changement de variable $\hat{x} = x/l$ et en posant $\hat{u}(\hat{x}) = u(x)/u_0$, $\hat{\alpha}(\hat{x}) = \alpha(x)$ et $A(\hat{\alpha}) = E(\alpha)/E_0$. On a alors $\hat{u}'(\hat{x}) = lu'(x)/u_0$, $\hat{\alpha}'(\hat{x}) = l\alpha'(x)$ et

$$\mathscr{E}(\hat{u},\hat{\alpha}) = \int_0^{L/l} \left(\frac{u_0^2 E_0}{2l} A(\hat{\alpha}(\hat{x})) \hat{u}'(\hat{x})^2 + \frac{G_c}{4C_v} \left(\hat{\alpha}'(\hat{x})^2 + w_1(\hat{\alpha}(\hat{x})) \right) + \sigma_c u_0 w_2(\hat{\alpha}) \hat{u}'(\hat{x}) \right) \mathrm{d}\hat{x}. \tag{3.96}$$

Enfin, en divisant par $\frac{G_c}{4C_v}$, en choisissant u_0 tel que $\frac{4C_v u_0^2 E_0}{G_c l} = 1$ et en notant $\sigma_0 = \frac{4C_v \sigma_c u_0}{G_c}$, on trouve l'énergie adimensionnée $\mathscr{A}(u,\alpha)$ (en notant de nouveau les variables sans les

chapeaux)

$$\mathscr{A}(u,\alpha) = \int_0^{L/l} \left(\frac{1}{2} A(\alpha(x)) u'(x)^2 + \alpha'(x)^2 + w_1(\alpha(x)) + \sigma_0 w_2(\alpha) u'(x) \right) \mathrm{d}x. \tag{3.97}$$

La dérivation dans la direction u donne alors la contrainte constante dans la barre

$$\sigma = A(\alpha(x))u'(x) + \sigma_0 w_2(\alpha(x)), \qquad \forall x \in \left[0, \frac{L}{l}\right], \tag{3.98}$$

et la dérivation dans la direction α donne le critère d'endommagement

$$\frac{1}{2} A'(\alpha(x)) u'^2(x) + w_1'(\alpha(x)) + \sigma_0 w_2'(\alpha(x)) u'(x) - 2\alpha''(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \left[0, \frac{L}{l}\right]. \tag{3.99}$$

3.5.1 Approche analytique

Cherchons dans un premier temps les solutions homogènes du type $(u(x), \alpha(x)) = (tx, \alpha)$. Les dérivées premières et secondes de l'endommagement s'annulent et on trouve la contrainte homogène

$$\boxed{\sigma = A(\alpha)t + \sigma_0 w_2(\alpha),} \tag{3.100}$$

et le critère d'endommagement devient

$$\frac{1}{2} A'(\alpha) t^2 + w_1'(\alpha) + \sigma_0 w_2'(\alpha) t \geq 0. \tag{3.101}$$

Solutions homogènes : Phase élastique

Lorsque l'endommagement est initialement nul partout dans la barre, et puisque w_2 s'annule en 0 par hypothèse, la contrainte vaut alors

$$\sigma = A(0)t, \tag{3.102}$$

et le critère d'endommagement devient

$$\frac{1}{2} A'(0) t^2 + w_1'(0) + \sigma_0 w_2'(0) t \geq 0. \tag{3.103}$$

L'inégalité est vérifiée tant que

$$t \leq t_e := \frac{\sigma_0 w_2'(0) + \sqrt{\sigma_0^2 w_2'^2(0) - 2A'(0) w_1'(0)}}{-A'(0)}. \tag{3.104}$$

A l'issue de la phase élastique, la contrainte dans la barre vaut alors

$$\sigma_e := -\frac{A(0)}{A'(0)}\left(\sigma_0 w_2'(0) + \sqrt{\sigma_0^2 w_2'^2(0) - 2A'(0)w_1'(0)}\right). \tag{3.105}$$

Remarquons que, sous les hypothèses supplémentaires

$$\begin{cases} A'(0) \geq -2 \\ A(0) \geq 1 \\ w_2'(0) \geq 1 \end{cases} \tag{3.106}$$

on trouve

$$\sigma_e \geq \sigma_0. \tag{3.107}$$

Démonstration : *En effet, puisque* $-2A'(0)w_1'(0)$ *est positif, on a*

$$\sqrt{\sigma_0^2 w_2'^2(0) - 2A'(0)w_1'(0)} \geq \sigma_0 w_2'(0) \tag{3.108}$$

d'où

$$-\frac{A(0)}{A'(0)}\left(\sigma_0 w_2'(0) + \sqrt{\sigma_0^2 w_2'^2(0) - 2A'(0)w_1'(0)}\right) \geq -2\frac{A(0)}{A'(0)}\sigma_0 w_2'(0) \geq \sigma_0. \tag{3.109}$$

Solutions homogènes : Phase endommagée

Lorsque la solution élastique n'est plus une solution admissible, l'endommagement peut commencer à croître tout en restant homogène. Le critère devient alors une égalité

$$\frac{1}{2}A'(\alpha)t^2 + w_1'(\alpha) + \sigma_0 w_2'(\alpha)t = 0. \tag{3.110}$$

On peut exprimer la variable t en fonction de la variable α

$$t = \frac{\sigma_0 w_2'(\alpha) + \sqrt{\sigma_0^2 w_2'^2(\alpha) - 2A'(\alpha)w_1'(\alpha)}}{-A'(\alpha)}, \tag{3.111}$$

d'où l'expression de la contrainte

$$\sigma = -\frac{A(\alpha)}{A'(\alpha)}\left(\sigma_0 w_2'(\alpha) + \sqrt{\sigma_0^2 w_2'^2(\alpha) - 2A'(\alpha)w_1'(\alpha)}\right) + \sigma_0 w_2(\alpha), \tag{3.112}$$

Sous l'hypothèse d'un matériau adoucissant en contrainte, la contrainte est une fonction décroissante de l'endommagement. Ceci implique que sa valeur maximale est atteinte au début de la phase endommagée, c'est-à-dire lorsqu'elle vaut σ_e. De plus, sous certaines hypothèses supplémentaires sur w_2, nous avons démontré que σ décroît de σ_e à σ_0 si et seulement si α_M croît de 0 à 1 (voir l'annexe B.5).

Solutions localisées

Lorsque les solutions homogènes deviennent instables, l'endommagement se localise. Supposons qu'il se localise dans une zone D de largeur $2d$ centrée autour de x_0, dans un premier temps après une phase élastique.

D'après l'équation d'équilibre (3.98) et puisque σ est indépendant de x, alors en multipliant l'équation (3.99) par $\alpha'(x)$ non nul sur D, et en intégrant de $x_0 - d$ à x on obtient l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par α

$$\alpha'^2(x) = -\frac{1}{2}S(\alpha(x))(\sigma - \sigma_0 w_2(\alpha(x)))^2 + \frac{\sigma^2}{2} + w_1(\alpha(x)) =: H(\sigma, \sigma_0, \alpha(x)). \tag{3.113}$$

Il s'agit donc de trouver α tel que

$$\begin{cases} H(\sigma, \sigma_0, \alpha(x)) \geq 0 \\ \alpha'(x) = \pm\sqrt{H(\sigma, \sigma_0, \alpha(x))}. \end{cases} \tag{3.114}$$

De la même façon que lors de l'approche générale (Sec. 3.1.3), l'endommagement est alors solution implicite de l'équation

$$|x_0 - x| = \int_{\alpha(x)}^{\alpha_M} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{H(\sigma, \sigma_0, \beta)}}, \tag{3.115}$$

où α_M est le maximum d'endommagement atteint au point x_0, solution de

$$H(\sigma, \sigma_0, \alpha_M) = 0. \tag{3.116}$$

Choix de la fonction w_2

On souhaite maintenant trouver les fonctions w_2 telles que lorsque la contrainte tende vers la valeur σ_0, la solution soit la même que la solution localisée dans le cas sans contrainte résiduelle lorsque la contrainte tend vers 0. Ceci nous assure la cohérence du modèle avec contrainte résiduelle par rapport au modèle sans contrainte résiduelle, au moment où la barre se rompt ($\alpha_M = 1$).

D'après (3.67), la fonction H de la section 3.1.3, dans le cas sans contrainte résiduelle, tend vers $w_1(\alpha)$ lorsque σ tend vers 0 après la phase élastique. Or, dans notre cas avec contrainte résiduelle, on a

$$H(\sigma_0, \sigma_0, \alpha) = -\frac{1}{2}S(\alpha)(\sigma_0 - \sigma_0 w_2(\alpha))^2 + \frac{\sigma_0^2}{2} + w_1(\alpha). \tag{3.117}$$

Il faut donc que

$$-\frac{1}{2}S(\alpha)(\sigma_0 - \sigma_0 w_2(\alpha))^2 + \frac{\sigma_0^2}{2} = 0 \tag{3.118}$$

c'est-à-dire que

$$w_2(\alpha) = 1 \pm \sqrt{A(\alpha)}. \tag{3.119}$$

En prenant en compte l'hypothèse selon laquelle w_2 est une fonction croissante de α (alors que A est décroissante), on aboutit au choix

$$w_2(\alpha) = 1 - \sqrt{A(\alpha)}. \tag{3.120}$$

Ce choix est compatible avec les hypothèses (3.106) et celles données en annexe B.5 sous la condition $w_2'(0) = 1$.

Résultats

Enonçons finalement les résultats pour le choix d'un matériau suivant les propriétés $E(\alpha) = E_0(1-\alpha)^2$ (3.31) et $w_1(\alpha) = \alpha$ (3.32) : w_2 s'écrit alors

$$w_2(\alpha) = \sigma_c \alpha. \tag{3.121}$$

Les valeurs critiques de la phase élastique sont données par

$$t_e = \frac{\sigma_c + \sqrt{\sigma_c^2 + \frac{G_c E_0}{C_v l}}}{2E_0}, \qquad \sigma_e = \frac{1}{2}\left(\sigma_c + \sqrt{\sigma_c^2 + \frac{G_c E_0}{C_v l}}\right). \tag{3.122}$$

Et lors de la phase localisée, α et σ vérifient

$$\alpha(t) = 1 - \frac{\sigma_c}{E_0 t} - \frac{G_c}{4C_v l E_0 t^2} \tag{3.123}$$

et

$$\sigma(t) = \frac{G_c \sigma_c}{4C_v l E_0 t^2} + \left(\frac{G_c}{4C_v l}\right)^2 \frac{1}{E_0 t^3} + \sigma_c. \tag{3.124}$$

La figure 3.25 montre la relation contrainte déformation définie par l'équation (3.124), sur

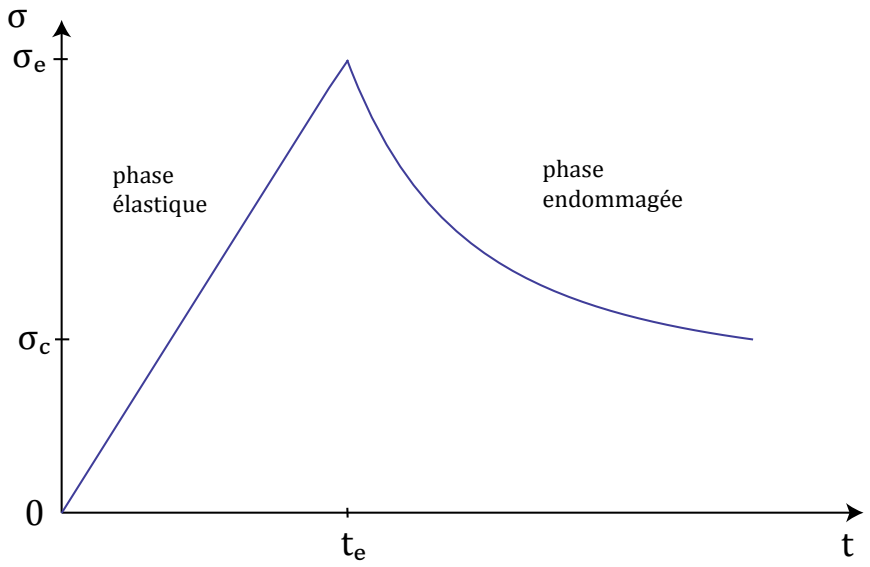


FIGURE 3.25: Relation contrainte déformation pour le modèle avec contrainte tangentielle résiduelle non nulle

laquelle on peut observer la décroissance de σ de σ_e à σ_c lors de la phase endommagée.

3.5.2 Application numérique

Le modèle d'endommagement avec contrainte tangentielle résiduelle a été appliqué au cas de plaque en compression, dont les conditions aux bords sont celles choisies dans la section précédente (voir la figure 3.17). Les paramètres de matériau restent identiques à ceux choisis dans la section précédente, seul le nouveau paramètre σ_c est introduit, il est choisi égal à 0.5. Les champs de déplacement (figure 3.26) et d'endommagement sont similaires à ceux obtenus pour le modèle mixte sans contrainte tangentielle résiduelle (figures 3.21 et 3.22).

Les courbes d'énergies, présentées figure 3.27, montre que l'énergie dissipée par l'endommagement reste constante à $G_c \times Longueur(\Gamma)$, c'est-à-dire environ 1.2, conformément au modèle sans contrainte résiduelle. Par contre, l'énergie dissipée par la contrainte tangentielle sur la fissure est non nulle, et on retrouve bien que l'énergie dissipée par le glissement plastique continue de croître linéairement après la rupture. Il s'agit là du comportement espéré, c'est-à-dire qu'une force résiduelle apparaît après la rupture, pour continuer à dissiper une énergie liée au glissement sur la fissure, et qui s'apparente à une force de frottement résiduelle de type plasticité.

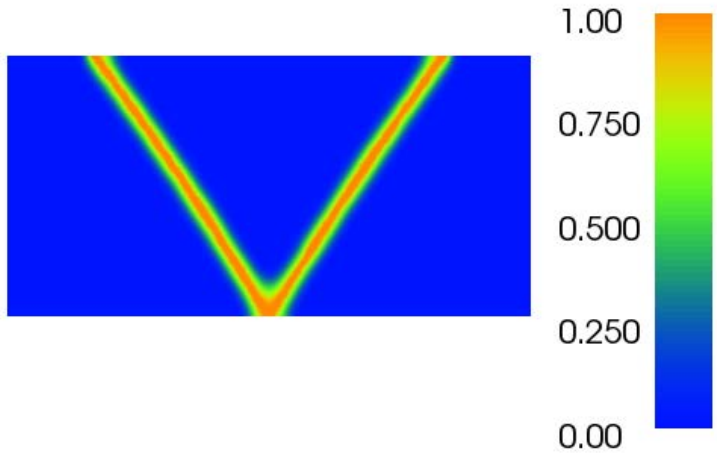


Figure 3.26: Champ d'endommagement pour la plaque avec le modèle avec contrainte résiduelle avec $\sigma_c = 0.5$

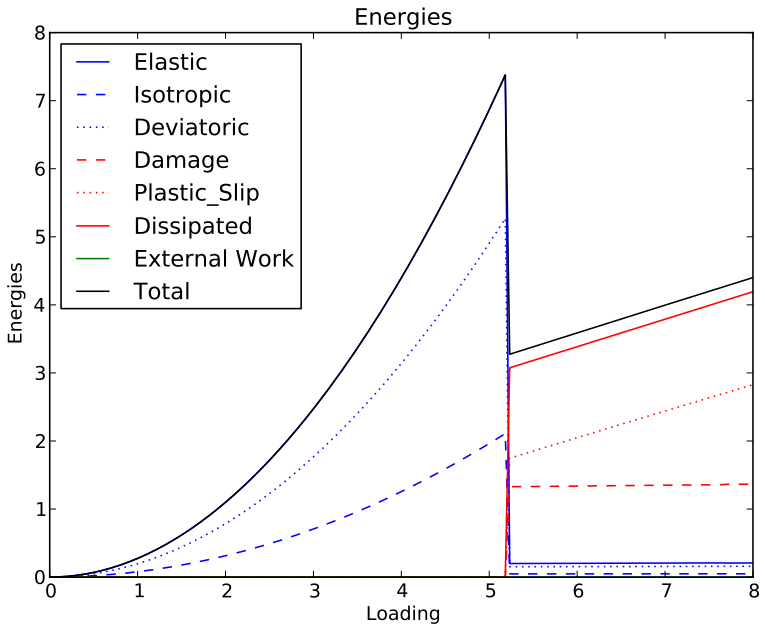


Figure 3.27: Courbes d'énergies pour la plaque avec le modèle avec contrainte résiduelle avec $\sigma_c = 0.5$

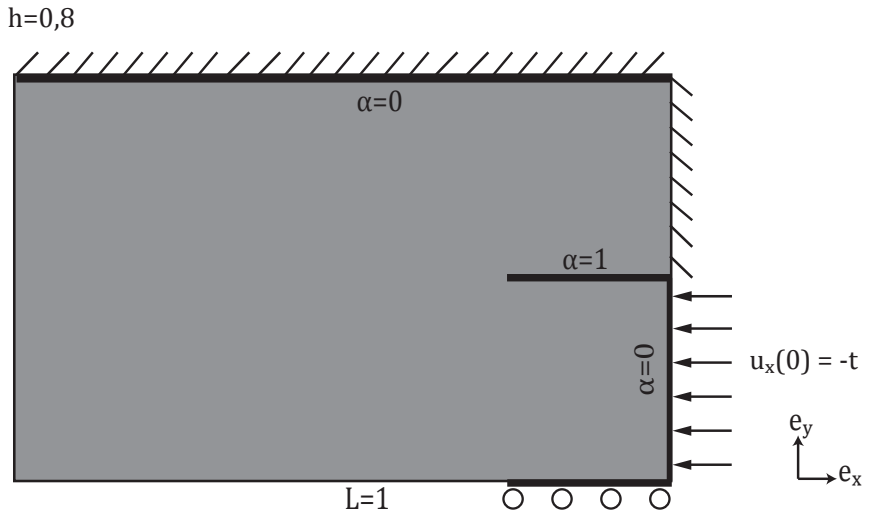


FIGURE 3.28: Conditions aux limites imposées sur la plaque avec fissure à l'instant initial

3.6 Exemple d'application

3.6.1 Modèle

L'exemple présenté dans cette section est celui d'une plaque contenant une fissure à l'état initial, et soumise à un déplacement parallèle à la fissure, donc une fissure en mode II. Les conditions aux limites sont présentées sur la figure 3.28.

Les paramètres choisis pour l'application numérique sont :

- $L = 1$ m,
- $l = 0.02$ m,
- $E = 10^5$ Pa,
- $G_c = 10$ J/m^2.

De plus, la simulation est effectuée jusqu'au temps final $t^f = 0.6$ avec 120 pas de temps (soit un pas de temps de 0.005). Rappelons que ce temps est un temps numérique sans signification physique autre que celle donnée par le chargement imposée par la condition à la limite. Ainsi, le déplacement final imposé est de 0.6 m.

3.6.2 Résultats

Le champ d'endommagement obtenu à l'état final est présenté sur la figure 3.29, et les courbes d'énergie sur la figure 3.30. La fissure se propage cette fois de façon progressive de $t = 0.15$ à $t = 0.51$. Le trajet de propagation présente un embranchement, la fissure se développe en partant du front de la fissure initiale, à la fois vers le haut et vers le bas de la plaque.

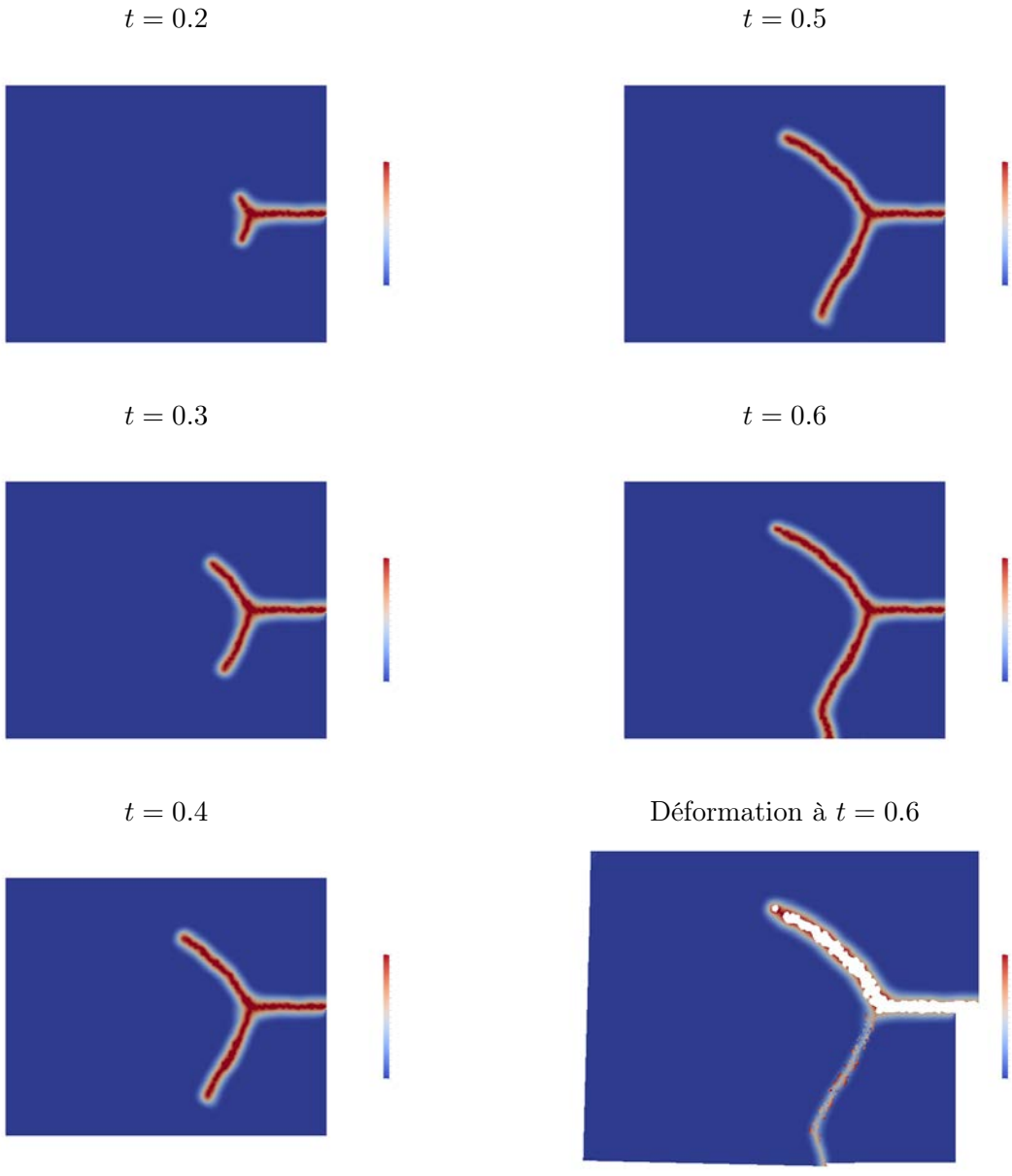


Figure 3.29: Champ d'endommagement pour la plaque avec fissure à l'instant initial

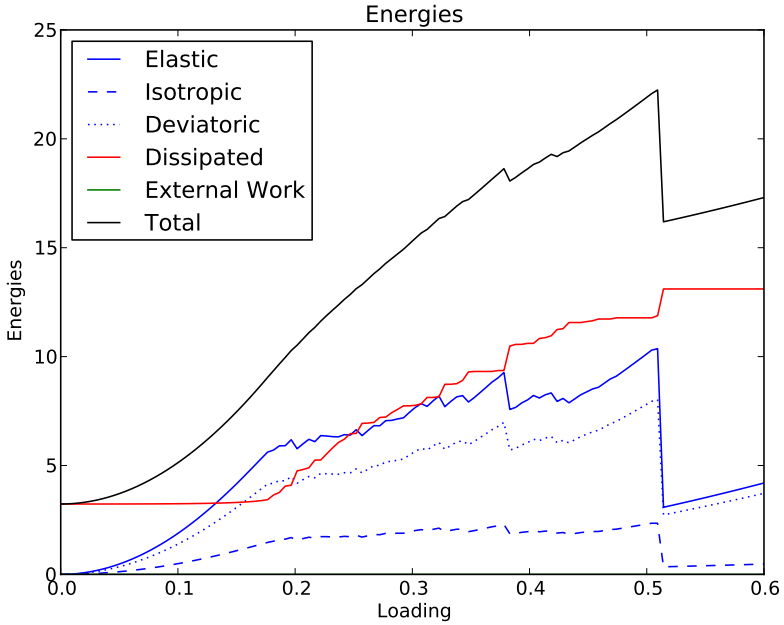


FIGURE 3.30: Courbes d'énergies pour la plaque avec fissure à l'instant initial

La longueur de la fissure haute mesure environ 0.45 m, et celle de la partie basse environ 0.5 m. Ces longueurs ajoutées à la longueur de la fissure initiale (0.25 m), donnent une longueur totale de fissure d'environ 1.2 m. On retrouve bien, sur la courbe d'énergie dissipée, une valeur finale d'environ $G_c \times Longueur(\Gamma) \approx 12$ J.

Il est possible de déterminer les vitesses relatives moyennes de chaque branche de la fissure par rapport à la vitesse du chargement imposé. La fissure haute s'est propagée sur 0.45 m sur une durée (numérique) de 0.35, tandis que le déplacement imposé total est de 0.6 m sur 0.6 unité de temps. La fissure haute s'est donc propagée 1.3 fois plus vite que la vitesse du chargement. De la même façon, on trouve que la fissure basse s'est propagée 1.4 fois plus vite que la vitesse du chargement.

3.6.3 Changement d'échelle

Afin de se ramener à l'échelle d'une grande faille, il est possible d'effectuer un changement d'échelle à l'aide de la méthode donnée dans l'annexe B.6. En choisissant les paramètres d'échelle adimensionnés :

- $x_0 = 10^5$,
- $E_0 = 10^{10}$,
- $u_0 = 10^5$,

on obtient les paramètres à la nouvelle échelle

- $L = 100$ km,
- $l = 2$ km,
- $E = 10^{10}$ Pa,
- $G_c = 10^{10}$ J/m^2,

et le déplacement final imposé vaut 60 km.

L'équation (3.56) permet en dimension 1 de déterminer les valeurs critiques élastiques (chargement et contrainte). Nous supposons qu'en dimension 2, l'équation (3.56) donne un ordre de grandeur des valeurs élastiques critiques, qui sont alors :

- $U_e \approx 1$ km,
- $\sigma_e \approx 10^8$ Pa.

On peut choisir également la vitesse du chargement aux limites, par exemple une vitesse de 2 cm/an. On trouve alors que, pour arriver à un déplacement final, le long de la faille, de 60 km, le temps final de la simulation doit être de 3 Ma, avec le pas de temps de 2500 ans. La vitesse moyenne de propagation de la fissure haute est alors d'environ 2.6 cm/an et celle de la propagation de la fissure basse d'environ 2.8 cm/an.

Conclusion et perspectives

L'objectif initial de cette thèse était de développer un modèle de propagation de faille permettant de tester les observations géologiques suggérant que les décrochements se propagent sur de grandes échelles spatiales et temporelles, au sein de la lithosphère continentale.

Nous avons, dans un premier temps, cherché à produire un modèle de faille 3D rendant compte du chargement intersismique d'une faille décrochante en utilisant le code de calcul Cast3M, logiciel de simulation numérique utilisé en mécanique des structures. Ceci a conduit à dégager, parmi l'ensemble des rhéologies et des conditions aux limites possibles, lesquelles sont adéquates à la localisation de la déformation intersismique bien imagée par les mesures géodésiques. Nous nous sommes donc attachés à reproduire la déformation de surface, observée par GPS au travers des grands décrochements, à l'aide d'une description géométrique la plus réaliste possible, tout en privilégiant des conditions aux limites cohérentes avec le long terme et apportant des éléments de réponse quant à l'origine de la localisation. Je suis parvenue à la conclusion que, pour obtenir une localisation satisfaisante de la déformation, tout en appliquant des conditions aux bords latéraux du modèle (mouvement lointain des plaques dominant), il fallait imposer une hétérogénéité structurelle à l'aide d'une zone de faible viscosité sous la partie bloquée de la faille, dans la croute supérieure cassante, lors de la période intersismique. Cette zone de faible viscosité, dans la croûte inférieure ductile et le manteau lithosphérique, est par ailleurs justifiable par des données géologiques et géophysiques existantes. Ce chapitre a mis en lumière l'importance du choix des conditions aux limites, en plus d'une géométrie et d'une rhéologie cohérentes avec les observations géologiques disponibles, dans la modélisation de la déformation autour d'une faille préexistante active. L'article résumant ce travail, publié au Geophysical Journal International, démontre par ailleurs que la profondeur de blocage déterminée avec

une précision illusoire par la méthode classiquement utilisée pour déduire le couple vitesse de faille - profondeur de blocage, à partir des données GPS, sous estime très significativement la profondeur de blocage réelle. Nombre de conclusions mécaniques formulées sur la base de faibles variations de la profondeur de blocage déterminée par cette méthode classique sont donc sujettes à caution, tout comme son utilisation l'est pour l'évaluation de l'aléa sismique.

Pour étudier la propagation de la faille dans un milieu préfracturé, nous avons souhaité sortir du cadre de la mécanique de la rupture traditionnelle. L'objectif, de développer un modèle de propagation d'un grand décrochement lithosphérique en 3D, reste encore hors de portée. La mécanique des solides traditionnelle réclame une formulation d'un critère de propagation, d'une loi de propagation, et d'un trajet de propagation. Cela aurait pu être partiellement fait dans le cas de la lithosphère continentale mais aurait nécessité de nouveaux développements numériques lourds, obérant la possibilité de développer une approche plus originale. Nous avons donc préféré utiliser la théorie de l'endommagement régularisant la mécanique de la rupture. Les modèles impliqués sont à la fois plus riches et plus simples de formulation.

Le travail présenté au chapitre 3 propose cette approche nouvelle de la modélisation de la propagation d'une faille dans un milieu sain (homogène préfracturé ou non). Cette approche, qui prend en compte l'endommagement sans prédéterminer la zone dans laquelle la faille va se propager, permet de faire le lien avec la théorie de Griffith. Ce lien permet d'obtenir des résultats cohérents avec ceux de Griffith, en particulier l'énergie dissipée qui tend vers l'énergie de Griffith. De plus, elle est rigoureuse mathématiquement et permet l'utilisation de méthodes numériques efficaces grâce à la régularisation. En outre, comme il s'agit d'une approche non locale, les résultats sont indépendants de la finesse du maillage. D'autre part, le fait que le trajet de la faille ne soit pas imposé a priori, permet l'apparition de branchement ou de bifurcation dans le trajet. Enfin, lors d'une propagation lente, c'est à dire lors d'une propagation sur plusieurs pas de temps numérique, le temps cinématique peut être interprété en temps réel, si la vitesse de chargement est connue. C'est un atout majeur pour la modélisation des phénomènes géologiques pour lesquels les échelles de temps et d'espace sont fondamentales.

L'introduction d'une contrainte tangentielle résiduelle sur la fissure et l'introduction de méthodes de résolutions dites mixtes sont les nouveaux développements de cette approche réalisés au cours de cette thèse. Le premier développement, l'introduction d'une contrainte tangentielle qui s'apparente à l'introduction de friction sur les plans de faille, permet dissiper de l'énergie sur la faille, et ainsi d'obtenir un comportement qui est plus

proche du comportement attendu lors de la propagation. Le second est un développement important du fait de la nature de certains problèmes rencontrés lors de la résolution numérique. Ces développements sont similaires à ceux rencontrés en mécanique des fluides, dont les méthodes mixtes sont issues. L'existence des méthodes mixtes n'est donc pas nouvelle, mais leur utilisation en mécanique de l'endommagement l'est. Ces travaux constituent un aspect novateur pour la géologie comme pour la mécanique.

Les développements futurs de ce travail de thèse sont nombreux. Du point de vue numérique, tout d'abord, il reste à modifier le code pour pouvoir l'utiliser en 3 dimensions. Il faut également permettre de prendre en compte l'hétérogénéité des paramètres dans le milieu, où encore améliorer la prise en compte du chargement volumique. Du point de vue théorique, la prise en compte de la viscosité serait un développement envisageable et permettrait d'autres applications à la géologie. De nombreuses autres perspectives se trouveraient également dans l'introduction d'autres critères, comme par exemple le critère de Mohr Coulomb, pour lequel il faudra faire dépendre de manière judicieuse les parties sphérique et déviatorique de l'énergie de la variable d'endommagement, ou le critère de Drucker Prager qui induit un comportement dépendant de la pression hydrostatique (lithostatique pour les géologues). Par ailleurs, il reste également à introduire dans le code, la distinction entre le comportement en traction et en compression, les résultats présentés jusqu'à présent étant valables pour le cisaillement en compression. Pour finir, les valeurs de paramètres de la modélisation (G_c, ténacité indiquant le seuil de rupture ; l longueur interne définissant le gradient de l'endommagement) doivent être déterminés avec précision. Or ces valeurs dépendent de l'échelle des phénomènes observés, il est donc difficile de les déterminer expérimentalement aux grandes échelles de temps et d'espace impliquées dans les phénomènes géologiques long terme. Il faudrait donc les déterminer en s'appuyant sur les quelques données de terrain existantes.

L'introduction des modèles d'endommagement exposés, en vue d'une application à des problèmes géologiques, est donc une approche originale et prometteuse et constitue l'aspect le plus novateur de cette thèse. La grande force de ces modèles réside dans leur rigueur mathématique qui permet d'établir des résultats d'existence et d'unicité de solution souvent non démontrées dans d'autres modèles d'endommagement. Pour un mécanicien théoricien, à l'instar d'un géophysicien, tout modèle qui reproduit de manière satisfaisante des observations n'est pas nécessairement acceptable.

Nous sommes persuadés que l'aspect mathématiquement rigoureux de ces modèles peut susciter l'intérêt d'une communauté qui étudie des problèmes beaucoup plus complexes que ceux que nous avons présentés, et dont les besoins en méthodes fiables et efficaces

sont grands. La prise en compte de la complexité de l'objet à modéliser (lithosphère continentale multistratifiée, préfracturée, inhomogène et soumise à des chargements complexes) reste à faire ; nous espérons néanmoins que le travail réalisé aux cours de ces quelques années de recherche, aura contribué à apporter une pierre à l'édifice, et aura ouvert une voie nouvelle et prometteuse.

Appendices

Le modèle de dislocation vis

The main results of the screw dislocation model (Weertman et Weertman, 1964) are recalled here. In the first part, we recall the proof of the arctangent equation, in the second part, we show the equivalence between basal conditions, far field conditions and boundary conditions applied on the fault itself.

A.1 The arctangent equation

Considering an elastic media filling the whole space, a screw dislocation embedded in this media is characterized by a burgers vector $\mathbf{b}$ parallel to the direction of the dislocation and that measures the jump of the dislocation. Here we choose to consider the constant slip rate of each fault plane $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{b}}/2$, instead of the burgers vector, to characterized the dislocation in geological terms. An orthonormal basis $(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ is chosen such as the dislocation line lies along the axis Oy, and such as the jump of the dislocation is not zero across the half plane $\{x = 0, z \leq 0\}$, which means that the limit half plane $\{x = 0^+, z < 0\}$ slides at a rate $-s$ and the limit half plane $\{x = 0^-, z < 0\}$ slides at a rate $+s$ in the Oy direction (see Fig. A.1).

For all points of coordinates (x, y, z), we can evaluate the velocity $\mathbf{v}$ due to the dislocation. Assuming that the dislocation is uniform and infinitely long in the direction Oy (anti-plane case), the velocity takes the form

$$\mathbf{v} = v(x, z)\mathbf{e_y}, \tag{A.1}$$

that is to say that the velocity vector is horizontal in the Oy direction, but its value does not depend on the y component.

Moreover, for all points belonging to one of the sliding half planes the velocity vector must be equal to $+\mathbf{s}$ or $-\mathbf{s}$ (depending on the plane). Then we have the following conditions

$$\begin{cases} v(0^+, z < 0) = -s \\ v(0^-, z < 0) = s. \end{cases} \tag{A.2}$$

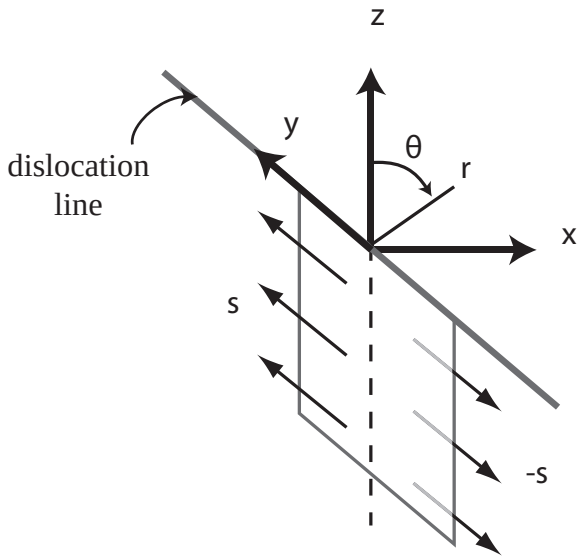


FIGURE A.1: The screw dislocation model : a screw dislocation is embedded in a full elastic space, the half plane $\{x = 0^+, z < 0\}$ slides of a vector $-\mathbf{s}$ and the half plane $\{x = 0^-, z < 0\}$ slides of a vector $-\mathbf{s}$. The solution is investigated in the half space $z > 0$.

In a strictly equivalent way, it is also possible to write the velocity of any point in the cylindrical coordinate system (r, θ, y) and we can choose the corresponding system of equations to move from cylindrical to cartesian system

$$\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = y \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{A.3}$$

where $r \in \mathbf{R}^+$ and $\theta \in]-\pi, \pi[$. In this system, the velocity of any point can be written

$$\mathbf{v} = v(r, \theta)\mathbf{e_y} \tag{A.4}$$

and the velocity on the sliding half planes implies the conditions

$$\begin{cases} v(r, \pi) = -s \\ v(r, -\pi) = s. \end{cases} \tag{A.5}$$

In order to determine the general value of the velocity $v(x, z)$, in the steady state case, the equilibrium equation has to be solved

$$\Delta v(x, z) = \frac{\partial^2 v(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, z)}{\partial z^2} = 0 \tag{A.6}$$

which is also equivalent to find $v(r,\theta)$ such as

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0. \tag{A.7}$$

This equation admits an infinite number of solutions, called the harmonic solutions. The simplest solution that matches the conditions (A.5) is the θ-linear function

$$v(r,\theta) = -\frac{s}{\pi}\theta \tag{A.8}$$

that can be expressed with cartesian components, for all (x,y,z) in the half space $z \geq 0$ (or equivalently for all $r \in \mathbf{R}^+$ and $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$)

$$v(x,z) = -\frac{s}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{z}\right). \tag{A.9}$$

For all (x,y,z) in the whole space, a mathematical solution also exists

$$v(x,z) = -\frac{2s}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{z+\sqrt{x^2+z^2}}\right) \tag{A.10}$$

and this solution coincides with the previous equation in the half space $z \geq 0$.

Note that we can also write, from Eq. A.9, the displacement field due to a screw dislocation characterized by a burgers vector $\mathbf{b}$ (remind that $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{b}}/2$) for all (x,y,z) in the half space $z \geq 0$

$$\mathbf{u}(x,z) = -\frac{b}{2\pi}\arctan\left(\frac{x}{z}\right)\mathbf{e_y} \tag{A.11}$$

and for all (x,y,z) in the whole space

$$\mathbf{u}(x,z) = -\frac{b}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{z+\sqrt{x^2+z^2}}\right)\mathbf{e_y}. \tag{A.12}$$

The stress components can be deduced from the generalized Hooke's law for an isotropic material

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda \mathrm{tr}\epsilon \mathbf{I} \tag{A.13}$$

with ϵ the linearized strain tensor ($\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u})$), and λ and μ the Lame parameters. Remarking that $\mathrm{tr}\epsilon = 0$ yields

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = -\frac{\mu b}{2\pi}\frac{z}{x^2+z^2} \\ \sigma_{yz} = \frac{\mu b}{2\pi}\frac{x}{x^2+z^2} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0. \end{cases} \tag{A.14}$$

A.2 Equivalent boundary conditions in the screw dislocation model

In the Weertman's model, the boundary conditions are applied on the fault plane itself. Here we show that this is mathematically equivalent to impose the basal or far field boundary conditions.

Considering only the linear solution of the cylindrical equilibrium equation, different boundary conditions can be imposed. The natural ones imposed by the dislocation are the conditions (A.5) that are represented in Fig. A.2(a). But in numerical models, these conditions require to consider the full space and to impose a velocity discontinuity across the surface $\{x = 0, z \leq 0\}$. In order to make numerical modelling easier, one can look for other boundary conditions that are equivalent.

Firstly, one can note that the solution (A.8) also verifies the conditions

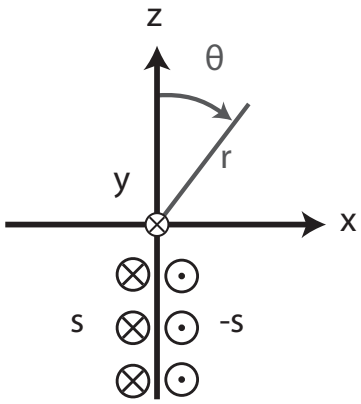
$$\begin{cases} v(r, \pi/2) = v(x > 0, 0) = -s/2 \\ v(r, -\pi/2) = v(x < 0, 0) = s/2, \end{cases} \tag{A.15}$$

and that these conditions are sufficient to retrieve the linear solution (A.8) from the equilibrium solution, so the conditions (A.15) are strictly equivalent to the natural conditions (A.5). Since we are interested only in the velocity in the half space $z \geq 0$, it becomes possible to restrict the problem to this half space, and then the surface $z = 0$ becomes the basal boundary of the model. Here these boundary conditions are, for this reason, called basal conditions (see Fig. A.2b).

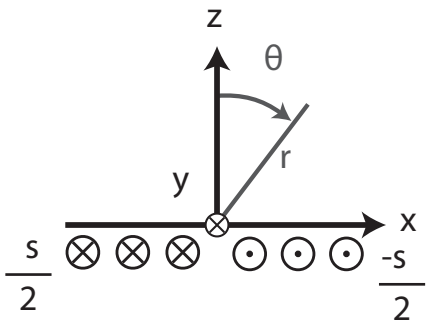
From the conditions (A.15), it is immediate to see that the solution (A.8) also verifies the conditions

$$\begin{cases} v(r, \theta \to \pi/2) = v(x \to \infty, z) = -s/2 \\ v(r, \theta \to -\pi/2) = v(x \to -\infty, z) = s/2, \end{cases} \tag{A.16}$$

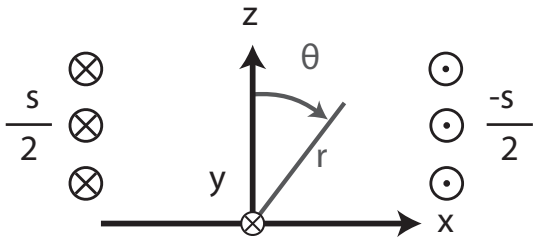
and these conditions are sufficient to retrieve the linear solution (A.8) from the equilibrium equation too. The conditions (A.16) are then strictly equivalent to the conditions (A.15) and (A.5) . Nevertheless, these conditions have a different physical interpretation since they correspond to the case $x \to \pm\infty$ in cartesian coordinates. It is then equivalent to consider the half space $z \geq 0$ and to impose the velocity to be equal to $\mp s/2$ at the limit $x \to \pm\infty$. These conditions are called here far field or lateral boundary conditions since they are applied vertically, far from the dislocation (see Fig. A.2c).



a. Boundary conditions on the fault planes



b. Basal boundary conditions



c. Far field or lateral bondary conditions

Figure A.2: In order to evaluate the velocity above the dislocation (half space $z \geq 0$), it is equivalent to consider (a) a full space in which the displacement is equal to $-\mathbf{s}$ on the half plane $\{x = 0^+, z < 0\}$ and to $\mathbf{s}$ on the half plane $\{x = 0^-, z < 0\}$, or (b) a half space $z \geq 0$ in which the displacement is equal to $-\mathbf{s}/2$ on the half plane $\{x > 0, z = 0\}$ and to $\mathbf{s}/2$ on the half plane $\{x < 0, z = 0\}$, or (c) a half space $z \geq 0$ in which the displacement tends to $-\mathbf{s}/2$ when $x \to \infty$ and to $\mathbf{s}/2$ when $x \to -\infty$.

A.3 The method of images

Considering now a dislocation parallel to a planar free surface. The condition of free surface leads to the requirement that $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$ and $\sigma_{zz} = 0$ at the free surface. The method of electrostatic images may be used (Weertman, 1964) by introducing an imaginary screw dislocation of the same strength and opposite sign at the mirror position outside the solid.

We consider two symmetric screw dislocations along the lines $\{x = 0, z = d\}$ and $\{x = 0, z = -d\}$. The source dislocation (lying at $\{x = 0, z = -d\}$) is characterized by a burgers vector $\mathbf{b}/2$ and the image dislocation (lying at $\{x = 0, z = d\}$) is characterized by a burgers vector $-\mathbf{b}/2$. By a judicious choice of frame, we can deduce from Eq. A.14 that the stress components of the source dislocation lying at $\{x = 0, z = -d\}$ are

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = -\frac{\mu b}{4\pi} \frac{z+d}{x^2+(z+d)^2} \\ \sigma_{yz} = \frac{\mu b}{4\pi} \frac{x}{x^2+(z+d)^2} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0, \end{cases} \tag{A.17}$$

and that the stress components of the image dislocation lying at $\{x = 0, z = d\}$ are

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \frac{\mu b}{4\pi} \frac{z-d}{x^2+(z-d)^2} \\ \sigma_{yz} = -\frac{\mu b}{4\pi} \frac{x}{x^2+(z-d)^2} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0. \end{cases} \tag{A.18}$$

The xy-component of the total stress field is then equal to

$$\sigma_{xy} = \frac{\mu b}{4\pi} \frac{z-d}{x^2+(z-d)^2} - \frac{\mu b}{4\pi} \frac{z+d}{x^2+(z+d)^2}, \tag{A.19}$$

while, the yz-component of the total stress field is equal to

$$\sigma_{yz} = -\frac{\mu b}{4\pi} \frac{x}{x^2+(z-d)^2} + \frac{\mu b}{4\pi} \frac{x}{x^2+(z+d)^2}. \tag{A.20}$$

that becomes zero on the plane $z = 0$.

We can deduce now the total displacement field thanks to Eq. A.13 with the help of Eq. A.12

$$u(x,z) = \frac{b}{2\pi} \left(\arctan\left(\frac{x}{z-d+\sqrt{x^2+(z-d)^2}} \right) - \arctan\left(\frac{x}{z+d+\sqrt{x^2+(z+d)^2}} \right) \right) \tag{A.21}$$

that gives exactly, on the plane $z = 0$,

$$u(x) = -\frac{b}{2\pi} \arctan\left(\frac{x}{d}\right) \tag{A.22}$$

Finally the image problem is equivalent to the free surface problem, since in the image problem, the surface $z = 0$ meets the criteria of a free surface with a tangential stress that has been removed. The displacement field of the free surface problem is then assumed to be given by Eq. A.21, in particular on the free surface it matches Eq. A.22.

A.3.1 Boundary conditions of the method of images

The superposition principle has been implicitly used in the method of images for building the analytical solution. This principle states that the total stress field as well as the total displacement field are simply the sum of the two contributions of the source and the image dislocations. It also implies that the boundary conditions are added, so we have to check the values of the displacement on the boundaries.

On the planes $\{x > 0, z = -d\}$, $\{x < 0, z = -d\}$, $\{x > 0, z = d\}$ and $\{x < 0, z = d\}$ we deduce from Eq. A.21 the following limits

$$\begin{cases} u(x > 0, z \to -d^+) = -\frac{b}{8} - \frac{b}{4\pi} \arctan\left(\frac{x}{2d}\right) \\ u(x < 0, z \to -d^+) = \frac{b}{8} - \frac{b}{4\pi} \arctan\left(\frac{x}{2d}\right) \\ u(x > 0, z \to d^-) = -\frac{b}{8} - \frac{b}{4\pi} \arctan\left(\frac{x}{2d}\right) \\ u(x < 0, z \to d^-) = \frac{b}{8} - \frac{b}{4\pi} \arctan\left(\frac{x}{2d}\right) \end{cases} \tag{A.23}$$

It is clear that these conditions do not fit the basal boundary conditions that we can observe in the problem of the singular screw dislocation in a full space (see Eq. A.15). The image problem, as well as the free surface problem, are not therefore equivalent to the singular screw dislocation in a full space.

On the planes $\{x \to 0, z = -d\}$ and $\{x \to 0, z = d\}$, Eq. A.21 yields

$$\begin{cases} u(x \to 0^+, z < -d) = -\frac{b}{4} \\ u(x \to 0^-, z < -d) = \frac{b}{4} \\ u(x \to 0^+, z > d) = -\frac{b}{4} \\ u(x \to 0^-, z > d) = \frac{b}{4} \end{cases} \tag{A.24}$$

and the limits $x \to \infty$ and $x \to -\infty$ give

$$\begin{cases} u(x \to \infty) = -\frac{b}{4} \\ u(x \to -\infty) = \frac{b}{4}. \end{cases} \tag{A.25}$$

but these last boundary conditions are not sufficient to find the solution A.21, since they give only two conditions instead of four, then the problem has not a unique solution anymore.

Finally, the natural boundary conditions are respected, and the far field conditions are still valid, whereas the basal conditions have changed.

Rappels et preuves de la mécanique de l'endommagement

B.1 Le théorème de Modica-Mortola pour la régularisation de l'énergie de Griffith

B.1.1 Le théorème de Modica-Mortola

Considérons tout d'abord la fonctionnelle (dite de Cahn-Hilliard)

$$CH_\eta(\alpha) = \eta \int_\Omega |\nabla \alpha|^2 \mathrm{dx} + \frac{1}{4\eta} \int_\Omega \alpha^2 (1-\alpha)^2 \mathrm{dx}. \tag{B.1}$$

Le théorème de Modica-Mortola (Modica et Mortola (1977)) affirme que, si pour tout η petit, α_η minimise CH_η, alors il existe un ensemble A de Ω tel que A soit de caractéristique[1] la limite de α_η et tel que A soit de mesure de Hausdorff minimale. Ainsi CH_η converge au sens de la Γ-convergence, lorsque η tend vers 0, vers $\mathscr{H}^{n-1}(A)$, la mesure de Hausdorff de l'ensemble A.

Cette formulation à l'avantage de permettre une interprétation mécanique de la variable α et du paramètre η. En effet, la fonctionnelle de Cahn-Hilliard évalue naturellement à η fixé, la mesure du domaine où α est différent de 0 et de 1, et où le gradient de α est non nul. De plus, lorsque η est de plus en plus petit, le gradient de α est autorisé à être plus important tandis les valeurs différentes de 0 et de 1 pour α sont fortement pénalisées, ce qui correspond bien à faire tendre α vers la fonction caractéristique de A. Lorsque l'ensemble A considéré correspond à l'ensemble de discontinuité S_u, la variable α peut ainsi être interprétée comme une variable qui évalue l'endommagement dans le domaine Ω, c'est-à-dire qui vaut 1 sur l'ensemble fissuré S_u, qui est à fort gradient dans une petite zone de taille caractéristique η autour de S_u, et qui est nulle en dehors.

1. χ_A est la fonction caractéristique de A si pour tour $x \in \Omega$, $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon.

B.1.2 Régularisation intermédiaire

Considérons maintenant le problème minimisation d'une fonctionnelle du type

$$\int_{\Omega\backslash\Gamma} |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathrm{dx} + \mathscr{H}^{n-1}(\Gamma). \tag{B.2}$$

Il s'agit là encore d'un problème de minimisation du couple ($\mathbf{u}$, Γ) où $\mathbf{u}$ appartient à $(H^1(\Omega\backslash\Gamma))^n$ et Γ est fermé. Mais, on peut se ramener comme précédemment, à un problème sur la seule inconnue $\mathbf{u}$ dans $(SBD(\mathbb{R}^n))^n$, de la fonctionnelle de Mumford-Shah

$$MS(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathrm{dx} + \mathscr{H}^{n-1}(S_u) \tag{B.3}$$

où S_u est l'espace singulier de $\mathbf{u}$.

L'approche, inspirée de Modica et Mortola (1977) et développée par Ambrosio (1990) consiste en l'introduction d'une variable α dans $H^1(\Omega; [0,1])$, appelée champ d'endommagement, et d'un paramètre réel l, appelé longueur interne, qui vont permettre de régulariser MS sous la forme d'une fonctionnelle elliptique

$$AT_l(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 (1-\alpha)^2 \mathrm{dx} + \int_{\Omega} \left(l|\nabla \alpha|^2 + \frac{\alpha^2}{4l} \right) \mathrm{dx}. \tag{B.4}$$

Remarquons que le terme $(1-\alpha)^2$ est mis en facteur du gradient du déplacement. Ainsi la minimisation de l'énergie dans les régions à fort gradient de déplacement est assurée par un endommagement qui tend vers 1 dans ces régions. En d'autres termes, le domaine d'endommagement maximal correspond au domaine de singularité du déplacement. D'autre part, on a toujours une pénalisation des valeurs de α non nulles grâce au dernier terme de l'équation (B.4), et lorsque la longueur interne tend vers 0, c'est-à-dire très localement autour de la zone de singularité, les forts gradients d'endommagement sont autorisés.

B.2 Stabilité des solutions

B.2.1 Critère de stabilité

Les équations (3.19)–(3.21) et (3.23)–(3.26) permettent de trouver les états $(\mathbf{u}, \alpha)$ qui minimisent l'énergie. La solution du problème de minimisation vérifie les conditions de stationnarité de l'énergie, cependant, la solution n'est pas unique puisque le problème est non-convexe. Il faut donc trouver des critères permettant de discriminer les solutions acceptables de l'ensemble des solutions.

Tout d'abord, l'irréversibilité de l'endommagement implique que la solution $(\mathbf{u}, \alpha)$ doit être un minimum *unilatéral*, c'est-à-dire qu'il ne doit pas exister, dans un voisinage de $(\mathbf{u}, \alpha)$ un couple $(\mathbf{v}, \beta)$ admissible, avec $\beta \geq \alpha$, ayant une énergie moindre.

D'autre part, les conditions de stabilité du deuxième ordre des états d'équilibre ainsi déterminés peut fournir également un critère de sélection. Afin d'étudier cette stabilité, il convient de faire le développement de Taylor à l'ordre 2 de l'énergie [2]autour d'une position d'équilibre $(\mathbf{u}, \alpha)$, avec h suffisamment petit

$$0 \leq \mathscr{E}(\mathbf{u} + h\mathbf{v}, \alpha + h\beta) - \mathscr{E}(\mathbf{u}, \alpha) = h\mathscr{E}'(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v}, \beta) + \frac{h^2}{2}\mathscr{E}''(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v}, \beta) + o(h^2) \quad \text{(B.6)}$$

Lorsque le critère d'endommagement (3.23) n'est pas atteint (*i.e.* est une stricte inégalité) alors la dérivée première est strictement positive, et l'état d'équilibre déterminé $(\mathbf{u}, \alpha)$ est stable. Lorsque le critère d'endommagement est atteint, la dérivée première de l'énergie est nulle, et il faut alors imposer la positivité de la dérivée seconde, ce qui assure la convexité locale de l'énergie et la stabilité de l'état d'équilibre.

B.2.2 Stabilité des solutions homogènes

Tant que le critère d'endommagement n'est pas atteint (phase élastique), la dérivée première de l'énergie est strictement positive, et les solutions sont donc des états d'équilibre stables.

Lorsque le critère d'endommagement est atteint (phase endommagée), la dérivée première de l'énergie s'annule, et la stabilité des solutions est donnée par la positivité de la dérivée seconde qui s'écrit, pour des états d'équilibre homogènes (tx, α),

$$\begin{aligned}\mathscr{E}''(u, \alpha)(v, \beta) = &\int_0^L E(\alpha) v'^2 \mathrm{d}x + 2\int_0^L E'(\alpha) t v' \beta \mathrm{d}x + \int_0^L 2G_c l \beta'^2 \mathrm{d}x \\ &+ \int_0^L \left(\frac{1}{2}E''(\alpha)t^2 + \frac{G_c}{l}w_1''(\alpha)\right)\beta^2 \mathrm{d}x\end{aligned} \quad \text{(B.7)}$$

ce qui se réécrit, avec $S''(\alpha) = -\frac{E''(\alpha)}{E^2(\alpha)} + 2\frac{E'^2(\alpha)}{E^3(\alpha)}$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}''(u, \alpha)(v, \beta) = &\int_0^L E(\alpha)\left(v' + \frac{E'(\alpha)}{E(\alpha)}t\beta\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^L 2G_c l \beta'^2 \mathrm{d}x \\ &- \int_0^L \left(\frac{\sigma^2}{2}S''(\alpha) - \frac{G_c}{l}w_1''(\alpha)\right)\beta^2 \mathrm{d}x\end{aligned} \quad \text{(B.8)}$$

2. Où la dérivée seconde est définie par

$$\mathscr{E}''(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v}, \beta) = \mathscr{E}''(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v})(\mathbf{v}) + 2\mathscr{E}''(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v})(\beta) + \mathscr{E}''(\mathbf{u}, \alpha)(\beta)(\beta). \quad \text{(B.5)}$$

Les deux premiers termes sont positifs, le troisième est négatif et peut introduire une instabilité. Le signe de la dérivée peut être déterminé grâce au coefficient de Rayleigh

$$R(v,\beta) = \frac{\int_0^L E(\alpha)\left(v' + \frac{E'(\alpha)}{E(\alpha)}t\beta\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^L 2G_c l\beta'^2 \mathrm{d}x}{\int_0^L \left(\frac{\sigma^2}{2}S''(\alpha) - \frac{G_c}{l}w_1''(\alpha)\right)\beta^2 \mathrm{d}x}. \tag{B.9}$$

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est que

$$\min_{(v,\beta)\in\mathscr{U}\times\mathscr{A}} R(v,\beta) \geq 1. \tag{B.10}$$

Le calcul de ce minimum est détaillé dans Amor *et al.* (2009), nous n'en rappelons ici que le résultat : l'état d'équilibre est stable si et seulement si la longueur de la barre L vérifie l'inégalité

$$\frac{L^2}{l^2} \leq \frac{2^3\pi^2 S'(\alpha)^5 w_1'(\alpha)^2}{S(\alpha)^2(S''(\alpha)w_1'(\alpha) - S'(\alpha)w_1''(\alpha))^3}. \tag{B.11}$$

Ainsi, pour des grandes valeurs du rapport L/l, la solution endommagée homogène sera un état d'équilibre instable et ne sera pas observée. Le champ d'endommagement va alors se localiser dans des zones de taille de l'ordre de l. Pour des faibles valeurs du rapport L/l, la solution endommagée homogène peut commencer par être stable, mais si le chargement continue d'augmenter, alors on peut montrer que la valeur critique donnée par le terme de droite de (B.11) finira par devenir plus petite que le rapport L^2/l^2, et la solution endommagée homogène deviendra instable.

B.3 Résolution du problème d'endommagement : les solutions localisées

Nous mettons dans cette section les preuves des résultats énoncés à la section 3.1.3

Supposons qu'une solution localisée se développe à partir de l'instant t_0 après une phase élastique ou endommagée homogène. L'endommagement observé juste avant l'initialisation de la localisation est uniforme dans la barre et est noté α_0 ($\alpha_0 = 0$ si la localisation se met en place après une phase élastique, $\alpha_0 > 0$ sinon). Appelons $D =]x_0 - d, x_0 + d[:= \{x \in \Omega : \alpha(x) > \alpha_0\}$ la partie de la barre ou l'endommagement se localise.

D'après (3.36) on a les conditions aux limites suivantes

$$\alpha'(x_0 - d) = \alpha'(x_0 + d) = 0 \tag{B.12}$$

et par continuité avec le reste de la barre endommagée uniformément, on impose

$$\alpha(x_0 - d) = \alpha(x_0 + d) = \alpha_0. \tag{B.13}$$

Puisque le critère d'endommagement est atteint sur D, l'égalité issue de (3.43) est vérifiée

$$-\frac{\sigma^2}{2}S'(\alpha) - \frac{G_c}{2C_v}l\alpha'' + \frac{G_c}{4C_v l}w_1'(\alpha) = 0. \tag{B.14}$$

On peut multiplier par α', non nul partout, et intégrer l'égalité précédente entre $x_0 - d$ et x pour trouver

$$-\frac{\sigma^2}{2}\left(S(\alpha) - S(\alpha_0)\right) - \frac{G_c}{4C_v}l\alpha'^2 + \frac{G_c}{4C_v l}(w_1(\alpha) - w_1(\alpha_0)) = 0. \tag{B.15}$$

D'où, sur D, α vérifie l'équation

$$\alpha'^2(x) = -\frac{2C_v\sigma^2}{lG_c}\left(S(\alpha(x)) - S(\alpha_0)\right) + \frac{w_1(\alpha(x)) - w_1(\alpha_0)}{l^2} =: H(\sigma, \alpha(x)), \tag{B.16}$$

i.e. α est solution du problème différentiel (3.68).

En intégrant l'équation différentielle entre x et x_0, et en utilisant le changement de variable $\beta = \alpha(x)$, on obtient $\alpha(x)$ comme solution implicite de l'équation

$$|x_0 - x| = \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x_0)} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{H(\sigma, \beta)}}. \tag{B.17}$$

B.4 Approximation de la solution du modèle avec prise en compte des forces volumiques dans le cas unidimensionnel

Dans cette section nous essayons d'obtenir, dans un cadre analytique simple, une approximation de la solution du modèle d'endommagement avec prise en compte des forces volumiques (voir section 3.4). Pour cela, commençons par adimensionner l'énergie en posant $\hat{x} = x/l$, $\hat{u}(\hat{x}) = u(x)/u_0$, $\hat{\sigma}(\hat{x}) = \sigma(x)/\sigma_0$ et $\hat{\alpha}(\hat{x}) = \alpha(x)$. On obtient alors l'énergie

$$\mathscr{E}(\hat{u}, \hat{\alpha}) = \int_0^{L/l} \left(\frac{u_0^2 E_0}{2l} A(\hat{\alpha}(\hat{x}))\hat{u}'(\hat{x})^2 + \frac{G_c}{4C_v}\left(\hat{\alpha}'(\hat{x})^2 + w_1(\hat{\alpha}(\hat{x}))\right) - lbu_0(1 - \hat{\alpha}(\hat{x}))^2\hat{u}(\hat{x}) \right) \mathrm{d}x. \tag{B.18}$$

En divisant par $\frac{G_c}{4C_v}$ et en choisissant u_0 tel que $\frac{4C_v u_0^2 E_0}{lG_c} = 1$, on obtient l'énergie adimensionnée

$$\mathscr{A}(\hat{u},\hat{\alpha}) = \int_0^{L/l} \left(\frac{1}{2} A(\hat{\alpha}(\hat{x}))\hat{u}'(\hat{x})^2 + \hat{\alpha}'(\hat{x})^2 + w_1(\hat{\alpha}(\hat{x})) - \frac{4C_v lbu_0}{G_c}(1-\hat{\alpha}(\hat{x}))^2\hat{u}(\hat{x}) \right) \mathrm{d}\hat{x}. \tag{B.19}$$

La dérivée dans la direction $\hat{\alpha}$ donne le critère d'endommagement

$$-\frac{1}{2}S'(\hat{\alpha}(\hat{x}))\hat{\sigma}^2(\hat{x}) - 2\hat{\alpha}''(\hat{x}) + w_1'(\hat{\alpha}(\hat{x})) + 8\frac{C_v lbu_0}{G_c}(1-\alpha(x))u(x) \geq 0, \qquad \forall \hat{x} \in [0, L/l]. \tag{B.20}$$

et celle dans la direction $\hat{u}$ donne l'équation d'équilibre

$$\hat{\sigma}'(\hat{x}) + \frac{4C_v lbu_0}{G_c}(1-\hat{\alpha}(\hat{x}))^2 = 0, \tag{B.21}$$

avec la contrainte qui est définie par

$$\hat{\sigma}(\hat{x}) = A(\hat{\alpha}(\hat{x}))\hat{u}'(\hat{x}). \tag{B.22}$$

Or

$$A(\hat{\alpha}(\hat{x}))\hat{u}'(\hat{x}) = \frac{l}{u_0 E_0}E(\alpha(x))u'(x) = \frac{4C_v u_0}{G_c}\sigma(x), \tag{B.23}$$

et puisque $\hat{\sigma}(\hat{x}) = \sigma(x)/\sigma_0$, la contraint σ_0 doit vérifier la relation

$$\sigma_0 = \frac{G_c}{4C_v u_0} \tag{B.24}$$

le critère d'endommagement devient alors

$$-\frac{1}{2}S'(\hat{\alpha}(\hat{x}))\hat{\sigma}^2(\hat{x}) - 2\hat{\alpha}''(\hat{x}) + w_1'(\hat{\alpha}(\hat{x})) + 2\frac{lb}{\sigma_0}(1-\alpha(x))u(x) \geq 0, \qquad \forall \hat{x} \in [0, L/l], \tag{B.25}$$

et l'équation d'équilibre se réécrit

$$\hat{\sigma}'(\hat{x}) + (1-\hat{\alpha}(\hat{x}))^2\frac{lb}{\sigma_0} = 0, \qquad \forall \hat{x} \in [0, L/l]. \tag{B.26}$$

On choisit alors σ_0 de sorte qu'elle soit proportionnelle à la contrainte seuil de fissuration, c'est-à-dire

$$\sigma_0 \sim bL, \tag{B.27}$$

le critère d'endommagement est alors équivalent à

$$-\frac{1}{2}S'(\hat{\alpha}(\hat{x}))\hat{\sigma}^2(\hat{x}) - 2\hat{\alpha}''(\hat{x}) + w_1'(\hat{\alpha}(\hat{x})) + 2\frac{l}{L}(1-\alpha(x))u(x) \geq 0, \qquad \forall \hat{x} \in [0, L/l], \tag{B.28}$$

et l'équation d'équilibre

$$\hat{\sigma}'(\hat{x}) + (1 - \hat{\alpha}(\hat{x}))^2 \frac{l}{L} = 0, \qquad \forall \hat{x} \in [0, L/l]. \tag{B.29}$$

Lorsque $l << L$, le critère d'endommagement et l'équation d'équilibre se ramènent à ceux obtenus pour le problème sans chargement volumique, dont on connait les solutions analytiques.

Sous réserve que la longueur interne l soit suffisamment petite devant la longueur de la barre L, alors le problème est équivalent au problème sans chargement volumique, et les solutions sont, en première approximation, équivalentes aux solutions du problème sans chargement volumique.

B.5 Ebauche de la preuve de la propriété de décroissance de la contrainte lorsque l'endommagement maximal croît

Nous souhaitons montrer à présent que, sous les hypothèses supplémentaires

$$\begin{cases} w_2(1) = 1 \\ w_2(\alpha) \leq \frac{S(\alpha)-1}{S(\alpha)} \qquad \forall \alpha \in [0,1] \end{cases} \tag{B.30}$$

on a le résultat suivant

σ décroît de σ_e à σ_0 si et seulement si α_M croît de 0 à 1.

• *A la fin de la phase élastique, la contrainte prend la valeur σ_e alors que l'endommagement est nul dans la barre. La contrainte étant une fonction décroissante de l'endommagement, elle va décroître en partant de σ_e lorsque α_M devient strictement positif.*

• *Montrons que la contrainte est une fonction décroissante de l'endommagement maximal. Supposons deux états de contraintes* σ_1 *et* σ_2 *tels que* $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_e$*, alors on a pour tout* $\beta > 0$*, sous l'hypothèse* (B.30)

$$\begin{aligned} H(\sigma_1, \sigma_0, \beta) - H(\sigma_2, \sigma_0, \beta) &= -\frac{1}{2}(S(\beta) - 1)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + S(\beta)\sigma_0 w_2(\beta)(\sigma_1 - \sigma_2) \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)\left(-(S(\beta) - 1)\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + S(\beta)\sigma_0 w_2(\beta)\right) \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{B.31}$$

en particulier pour β *valant l'endommagement maximal pour l'état de contrainte* σ_2

$$H(\sigma_1, \sigma_0, \alpha_M(\sigma_2)) > H(\sigma_2, \sigma_0, \alpha_M(\sigma_2)). \tag{B.32}$$

Or

$$H(\sigma, \sigma_0, \beta) > 0 \Leftrightarrow 0 < \beta < \alpha_M(\sigma), \qquad \forall(\sigma, \beta), \tag{B.33}$$

et

$$H(\sigma, \sigma_0, \alpha_M(\sigma)) = 0 \qquad \forall\sigma. \tag{B.34}$$

D'où

$$H(\sigma_1, \sigma_0, \alpha_M(\sigma_2)) > H(\sigma_2, \sigma_0, \alpha_M(\sigma_2)) = 0 \tag{B.35}$$

et $0 < \alpha_M(\sigma_2) < \alpha_M(\sigma_1)$. • *Montrons que* $\lim_{\alpha\to 1}\sigma_m = \sigma_0$*, où* σ_m *est la plus petite valeur possible prise par la contrainte. Exprimons* H *sous la forme d'un polynôme du second degré en* σ*.*

$$0 \leq H(\sigma, \sigma_0, \alpha) = \sigma^2\frac{1 - S(\alpha)}{2} + S(\alpha)\sigma_0 w_2(\alpha)\sigma - \frac{1}{2}S(\alpha)\sigma_0^2 w_2(\alpha)^2 + w_1(\alpha) \tag{B.36}$$

dont le discriminant s'écrit

$$\Delta = S(\alpha)\sigma_0^2 w_2(\alpha)^2 + 2(S(\alpha) - 1)w_1(\alpha) > 0. \tag{B.37}$$

L'inéquation $0 \leq H(\sigma, \sigma_0, \alpha)$ *est donc vérifiée pour tout* $\sigma \geq \sigma_m$ *où* σ_m *est défini par*

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{S(\alpha)\sigma_0 w_2(\alpha) + \sqrt{S(\alpha)\sigma_0^2 w_2(\alpha)^2 + 2(S(\alpha) - 1)w_1(\alpha)}}{S(\alpha) - 1} \\ &= \frac{S(\alpha)}{S(\alpha) - 1}\sigma_0 w_2(\alpha) + \sqrt{A(\alpha)}\sqrt{\left(\frac{S(\alpha)}{S(\alpha) - 1}\sigma_0 w_2(\alpha)\right)^2 + 2\frac{S(\alpha)}{S(\alpha) - 1}\sigma_0 w_2(\alpha)w_1(\alpha)} \end{aligned} \tag{B.38}$$

et puisque $\frac{S(\alpha)}{S(\alpha)-1} = \frac{1}{1-A(\alpha)} = 1$ *et* $A(1) = 0$ *on trouve que* $\lim_{\alpha\to 1}\sigma_m = \sigma_0 w_2(1) = \sigma_0$.

B.6 Changement d'échelle

B.6.1 Méthode

Les paramètres définissant la structure sont :

- la longueur caractéristique de la structure L,
- la longueur interne l,
- le module d'Young E,
- la ténacité G_c.

De plus, deux valeurs critiques renseignent sur l'évolution de la structure :

- le chargement critique U_e,
- la contrainte critique σ_e.

Dans le cas de la dimension 1 et pour un matériau de type 1, nous rappelons les relations suivantes (3.56) :

$$U_e \sim L\sqrt{\frac{G_c}{lE}}, \qquad \sigma_e \sim \sqrt{\frac{G_c E}{l}}. \tag{B.39}$$

Pour mettre à l'échelle les paramètres, il faut introduire des paramètres sans dimension x_0, E_0, G_0, u_0 et σ_0 tels que :

- $\hat{L} = L/x_0$,
- $\hat{l} = l/x_0$,
- $\hat{E} = E/E_0$,
- $\hat{G}_c = G_c/G_0$,
- $\hat{U}_e = U_e/u_0$,
- $\hat{\sigma}_e = \sigma_e/\sigma_0$

Le déplacement est mis à l'échelle en posant $\hat{u} = u/u_0$ et l'endommagement $\hat{\alpha} = \alpha$, l'énergie peut alors être factorisée par $Eu_0^2 x_0^{n-2}$ (où n est la dimension de la structure) :

$$\mathscr{E}(\hat{u}, \hat{\alpha}) = u_0^2 E_0 x_0^{n-2} \left(\int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{2} A(\hat{\alpha}(\hat{x})) \hat{\epsilon}(\hat{u}(\hat{x})) \cdot \hat{\epsilon}(\hat{u}(\hat{x})) \mathrm{d}\hat{x} + \frac{G_0 x_0}{u_0^2 E_0} \int_{\hat{\Omega}} \hat{l} \nabla\hat{\alpha}(\hat{x}) \cdot \nabla\hat{\alpha}(\hat{x}) + \frac{w_1(\hat{\alpha}(\hat{x}))}{\hat{l}} \mathrm{d}\hat{x} \right) \tag{B.40}$$

En choisissant u_0 tel que

$$u_0^2 = \frac{G_0 x_0}{E_0} \tag{B.41}$$

et en divisant l'énergie par $u_0^2 E_0 x_0^{n-2}$ on obtient l'énergie adimensionnée.

B.6.2 Application

Lors des applications numériques précédentes, les paramètres de référence choisis étaient :

- $\hat{L} = 1$ m,
- $\hat{l} = 0.02$ m,
- $\hat{E} = 1$ Pa,
- $\hat{G}_c = 1$ J/m^2,

ce qui impliquait, d'après (3.56)

- $\hat{U}_e \sim 10$ m,
- $\hat{\sigma}_e \sim 10$ Pa.

En choisissant les paramètres d'échelle tels que :

- $x_0 = 10^5$,
- $E_0 = 10^{10}$,
- $G_0 = 10^9$

on déduit de la relation (B.41) que $u_0 = 10^2$. Finalement on obtient les valeurs dimensionnées à l'échelle souhaitée :

- $L = 100$ km,
- $l = 200$ m,
- $E = 10^{10}$ Pa,
- $G_c = 10^9$ J/m^2,
- $U_e = 1$ km,
- $\sigma_e \sim 10^8$ Pa.

Table des figures

1 D'après Hubert-Ferrari *et al.* (2002) : (a) Extrusion de l'Anatolie vers la zone de subduction Hellénique le long des failles Nord et Est Anatolienne. Les vecteurs GPS sont représentés par les flèches rouges. Les déplacements sont représentés par rapport à l'Eurasie fixe (Reilinger et al., 1997). (b) Analogie entre l'extrusion de l'Anatolie et les expériences de poinçonnement faites avec de la plasticine par Peltzer et al. (1982). L'indenteur représentant l'Arabie est appliqué à la base et le système est libre de bouger vers le bord libre à l'Ouest représentant la zone de subduction hellénique. Pendant la déformation, une faille décrochante sénestre apparaît à l'Est puis elle est recoupée par une faille décrochante dextre qui se propage vers le bord libre à l'Ouest. (c) Photographie de l'expérience de plasticine. 17

2 D'après Armijo et al., 1999, 2005 et Pondard et al., 2007. (A) Extrusion Anatolienne. Les vecteurs GPS sont représentés par rapport à l'Eurasie fixe (Mc Clusky, 2000). La faille Nord Anatolienne traverse la Turquie d'Est en ouest sur plus de 1000 km. Sa trace linéaire et simple dans l'Est se divise en deux branches principales dans l'Ouest de la Turquie. La mer de Marmara est un pull-apart situé sur un relai extensif le long la branche Nord (NNAF) (B) Cartographie du pull-apart de Marmara. Plusieurs bassins profonds se sont développés entre les tronçons décrochants de Ganos et d'Izmit. Deux décalages géologiques spectaculaires sont indiqués : à l'Est celui de la discordance entre volcanites éocènes entre la péninsule d'Armutlu et le bloc d'Almacik ; à l'ouest, celui du pli de Ganos. (C) Panneau de gauche, carte géologique de la région des Dardanelles soulignant le décalage du pli de Ganos par la branche Nord de la FNA. La série concordante éocène à fini miocène, plissée, est recouverte en discordance par des sédiments transgressifs marins d'âge fini messinien à pliocène. Panneau de droite, effacement de 70 ± 5 km de mouvement dextre sur la faille restaurant la géométrie initiale du pli de Ganos. Selon Melinte Dobrescu et al., 2009 et Karakas, 2013. . . . 18

1.1 D'après Mercier et Vergely (1992). Géométrie des dislocations dans un cristal à réseau cubique : (a) réseau sans défaut (b) dislocation vis (c) dislocation coin. 24

1.2 D'après Meade *et al.* (2002). Le déplacement géologique lointain peut être vu comme la somme du déplacement cosismique dû à une dislocation appliquée sur une portion du plan de faille proche de la surface, et du déplacement intersismique, en forme d'arctangente. 26

1.3 A gauche : vue SE le long de la faille de San Andreas. Localisation : plaine de Carrizo, San Luis Obispo County, Californie. (Photo : G.K. Gilbert, U.S. Geological Survey). A droite : D'après Gudmundsson *et al.* (2010), zone de faille et partie de la zone d'endommagement (qui mesure plusieurs centaines de mètres de large) de la faille de Husavik-Flatey, Islande. 33

1.4 D'après Mitchell et Faulkner (2009). Structure typique d'une zone de faille décrochante dans une roche quartzofeldspathique, montrant en (a) une zone de faille unique, et en (b) une zone de failles multiples, avec la zone d'endommagement associée. 34

1.5 D'après Faulkner *et al.* (2011). Le trait rouge représente la faille localisée, la zone grise, représente la zone endommagée. Au front de la faille, la zone endommagée, appelée *process zone*, serait plus large, c'est la zone au sein de laquelle la faille peut se propager. 35
1.6 D'après Lin *et al.* (2007). Le trait rouge représente la faille localisée, la zone grise, représente la zone endommagée. Au front de la faille, la zone endommagée, appelée *process zone*, serait plus large, c'est la zone au sein de laquelle la faille peut se propager. 36
1.7 D'après Savage et Brodsky (2011). Largeur de la zone de faille et de la zone endommagée, en fonction du déplacement sur la faille (données issues d'études sur différentes failles, voir Savage et Brodsky (2011) pour les références). 36

2.1 Modèles et conditions aux limites : (a) modèle élastique avec vitesses imposées latéralement, (b) modèles avec indenteur et conditions imposées à l'avant de l'indenteur (c) modèle viscoélastique avec un notch de faible viscosité sous la faille et des vitesses imposées latéralement. 41

3.1 Endommagement homogène en fonction de la déformation pour le matériau de type 1 70
3.2 Relation contrainte-déformation pour le matériau de type 1 71
3.3 Endommagement homogène en fonction de la déformation pour le matériau de type 2 72
3.4 Relation contrainte-déformation pour le matériau de type 2 72
3.5 Profil d'endommagement pour le matériau de type 1 75
3.6 Profil d'endommagement pour le matériau de type 2 75
3.7 Représentation de la barre et des conditions aux limites 77
3.8 Déplacement selon x dans la barre à $t = 3$ pour les matériaux de type 1 . . 78
3.9 Endommagement dans la barre à $t = 3$ pour les matériaux de type 1 78
3.10 Profil d'endommagement sur la droite $y = 0.05$ à $t = 3$ pour les matériaux de type 1 79
3.11 Courbes d'énergies obtenues pour les matériaux de type 1 80
3.12 Profil d'endommagement sur la droite $y = 0.05$ à $t = 3$ pour les matériaux de type 2 81
3.13 Courbes d'énergies pour les matériaux de type 2 82
3.14 Endommagement dans la barre pour $l = 0.2$ (à gauche) et $l = 0.05$ (à droite) 83

3.15 Courbes d'énergies obtenues pour $l = 0.2$ (à gauche) et $l = 0.05$ (à droite) . 83
3.16 Profil d'endommagement et courbes d'énergies obtenues pour $k_{res} = 10^{-2}$. 84
3.17 Représentation de la plaque et des conditions aux limites 87
3.18 Déplacement selon y sur la plaque déformée pour la plaque en compression avec le modèle de fissure en cisaillement 88
3.19 Champ d'endommagement pour la plaque en compression avec le modèle de fissure en cisaillement 88
3.20 Courbes d'énergies pour la plaque en compression avec le modèle de fissure en cisaillement 89
3.21 Déplacement selon y sur la plaque déformée pour la plaque en compression avec le modèle mixte de fissure en cisaillement 91
3.22 Champ d'endommagement pour la plaque en compression avec le modèle mixte de fissure en cisaillement 91
3.23 Courbes d'énergies pour la plaque en compression avec le modèle mixte de fissure en cisaillement 92
3.24 Champ d'endommagement (à gauche) et déplacement selon y sur la déformée (à droite), lorsque $B(\alpha) = (1-\alpha)^2 b$ (grandes vignettes) et $B(\alpha) = b$ (petites vignettes), avec b prenant les valeurs 0.01, 0.02, 0.2, 0.5 et 1 (de haut en bas) à $t = 6$. 94
3.25 Relation contrainte déformation pour le modèle avec contrainte tangentielle résiduelle non nulle 100
3.26 Champ d'endommagement pour la plaque avec le modèle avec contrainte résiduelle avec $\sigma_c = 0.5$ 101
3.27 Courbes d'énergies pour la plaque avec le modèle avec contrainte résiduelle avec $\sigma_c = 0.5$ 101
3.28 Conditions aux limites imposées sur la plaque avec fissure à l'instant initial 102
3.29 Champ d'endommagement pour la plaque avec fissure à l'instant initial . . . 103
3.30 Courbes d'énergies pour la plaque avec fissure à l'instant initial 104

A.1 The screw dislocation model : a screw dislocation is embedded in a full elastic space, the half plane $\{x = 0^+, z < 0\}$ slides of a vector $-\mathbf{s}$ and the half plane $\{x = 0^-, z < 0\}$ slides of a vector $-\mathbf{s}$. The solution is investigated in the half space $z > 0$. 114

A.2 In order to evaluate the velocity above the dislocation (half space $z \geq 0$), it is equivalent to consider (a) a full space in which the displacement is equal to $-\mathbf{s}$ on the half plane $\{x = 0^+, z < 0\}$ and to $\mathbf{s}$ on the half plane $\{x = 0^-, z < 0\}$, or (b) a half space $z \geq 0$ in which the displacement is equal to $-\mathbf{s}/2$ on the half plane $\{x > 0, z = 0\}$ and to $\mathbf{s}/2$ on the half plane $\{x < 0, z = 0\}$, or (c) a half space $z \geq 0$ in which the displacement tends to $-\mathbf{s}/2$ when $x \to \infty$ and to $\mathbf{s}/2$ when $x \to -\infty$. 117

Bibliographie

Al Tarazi E., Rajab J. A., Gomez F., Cochran W., Jaafar R. et Ferry M., 2011. GPS measurements of near-field deformation along the southern Dead Sea Fault System, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 12. doi :10.1029/2011GC003736.

Allaire G., 2005. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, Editions Ecole Polytechnique.

Ambrosio L., 1990. Existence theory for a new class of variational problems, *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 111, pp. 291–322.

Ambrosio L., Lemenant A. et Royer-Carfagni G., 2012. A variational model for plastic slip and its regularization via gamma-convergence, *J. Elas.* doi 10.1007/s10659-012-9390-5.

Ambrosio L. et Tortorelli V., 1990. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via gamma-convergence, *Comm. Pure Appl. Math*, 43, pp. 999–1036.

Amor H., 2008. *Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris via des modèles non-locaux d'endommagement : étude théorique et mise en œuvre numérique*, Thèse de doctorat, Université Paris XIII.

Amor H., Marigo J.-J. et Maurini C., 2009. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments, *J. Mech. Phys. Solids.* doi :10.1016/j.jmps.2009.04.011.

Andrews D., 1976. Rupture propagation with finite stress in antiplane strain, *Journal of Geophysical Research*, 81(20), pp. 3575–3582.

Armijo R., Meyer B., Hubert A. et Barka A., 1999. Westward propagation of the north anatolian fault into the northern aegean : Timing and kinematics, *Geology*, 27(3), pp. 267–270.

Armijo R., Meyer B., King G., Rigo A. et Papanastassiou D., 1996. Quaternary evolution of the corinth rift and its implications for the late cenozoic evolution of the aegean, *Geophysical Journal International*, 126(1), pp. 11–53.

Avouac J.-P. et Tapponnier P., 1993. Kinematic model of active deformation in central asia, *Geophysical Research Letters*, 20(10), pp. 895–898.

Becker T. W., Hardebeck J. L. et Anderson G., 2005. Constraints on fault slip rates of the southern California plate boundary from GPS velocity and stress inversions, *Geophys. J. Int.*, 160, pp. 634–650. doi :10.1111/j.1365-246X.2004.02528.x.

Ben-Zion Y., Rice J. R. et Dmowska R., 1993. Interaction of the san andreas fault creeping segment with adjacent great rupture zones and earthquake recurrence at parkfield, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 98(B2), pp. 2135–2144.

Bercovici D. et Ricard Y., 2003. Energetics of a two-phase model of lithospheric damage, shear localization and plate-boundary formation, *Geophysical Journal International*, 152 (3), pp. 581–596.

Bourdin B., Francfort G. et Marigo J.-J., 2000. Numerical experiments in revisited brittle fracture, *J. Mech. Phys. Solids*, 48, pp. 797–826.

Bourdin G., Francfort B. et Marigo J.-J., 2008. The variational approach to fracture, *J. Elas*, 91, pp. 5–148.

Bourne S. J., England P. C. et Parsons B., 1998. The motion of crustal blocks driven by flow of the lower lithosphere and implications for slip rates of continental strike-slip faults, *Nature*, 391, pp. 655–659.

Brace W. F. et Kohlstedt D. L., 1980. Limits on lithospheric stress imposed by laboratory experiments, *J. Geophys. Res.*, 85, pp. 6248–6252. doi :10.1029/JB085iB11p06248.

Braides A., 1998. *Approximation of free-discontinuity problems*, Springer, Berlin.

Brink U. S. T., Katzman R. et Lin J., July 1996. Three-dimensional models of deformation near strike-slip faults, *J. Geophys. Res.*, 101, pp. 16,205–16,220.

Burov E. et Watts A. B., 2006. The long-term strength of continental lithosphere : "jelly-sandwich" or "crème-brulé" ?, *GSA Today*, 16, pp. 4–10.

Byerlee J. D. et Savage J. C., December 1992. Coulomb plasticity within the fault zone, *J. Geophys. Res.*, 19, pp. 2341–2344.

Calais E., Dong L., Wang M., Shen Z. et Vergnolle M., 2006. Continental deformation in asia from a combined gps solution, *Geophysical Research Letters*, 33(24).

C.E.A / D.M.T / L.A.M.S , 2003. *CASTEM2000*, www-cast3m.cea.fr.

Chaboche J., 1987. Continuum damage mechanics : present state and future trends, *Nuclear Engineering and Design*, 105(1), pp. 19–33.

Chéry J., 2008. Geodetic strain across the San Andreas fault reflects elastic plate thickness variations (rather than fault slip rate), *Earth Planet. Sci. Lett.*, 269, pp. 352–365. doi :10.1016/j.epsl.2008.01.046.

Chéry J., Zoback M. D. et Hassani R., 2001. An integrated mechanical model of the San Andreas fault in central and northern California, *J. Geophys. Res.*, 106, pp. 22051–22066.

Chinnery M. A., 1961. The deformation of the ground around surface faults, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 51, pp. 355–372.

Cox S. et Scholz C., 1988. On the formation and growth of faults : An experimental study, *Journal of Structural Geology*, 10(4), pp. 413–430.

Dalguer L., Irikura K. et Riera J., 2003. Simulation of tensile crack generation by three-dimensional dynamic shear rupture propagation during an earthquake, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 108(B3).

De-Giorgi E., Carriero M. et Leaci A., 1989. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set, *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 108, pp. 195–218.

Del Piero G., Lancioni G. et March R., 2007. A variational model for fracture mechanics : numerical experiments, *J. Mech. Phys. Solids*, 55, pp. 2513–2537.

England P. et Houseman G., 1986. Finite strain calculations of continental deformation : 2. comparison with the india-asia collision zone, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 91(B3), pp. 3664–3676.

England P. et McKenzie D., 1982. A thin viscous sheet model for continental deformation, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 70(2), pp. 295–321.

England P. et Molnar P., 1997. The field of crustal velocity in asia calculated from quaternary rates of slip on faults, *Geophysical Journal International*, 130(3), pp. 551–582.

England P. et Molnar P., 2005. Late quaternary to decadal velocity fields in asia, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 110(B12).

Faccenna C., Bellier O., Martinod J., Piromallo C. et Regard V., 2006. Slab detachment beneath eastern anatolia : A possible cause for the formation of the north anatolian fault, *Earth and Planetary Science Letters*, 242(1), pp. 85–97.

Faulkner D. R., Mitchell T. M., Jensen E. et Cembrano J., May 2011. Scaling of fault damage zones with displacement and the implications for fault growth processes, *J. Geophys. Res.*, 116. doi :10.1029/2010JB007788.

Fay N. P. et Humphreys E. D., 2005. Fault slip rates, effects of elastic heterogeneity on geodetic data, and the strength of the lower crust in the Salton Trough region, southern California, *J. Geophys. Res.*, 110. doi :10.1029/2004JB003548.

Finzi Y., Muhlhaus H., Gross L. et Amirbekyan A., 2013. Shear band formation in numerical simulations applying a continuum damage rheology model, *Pure Appl. Geophys*, 170, pp. 13–25. doi :10.1007/s00024-012-0463-y.

Flérit F., Armijo R., King G. et Meyer B., 2004. The mechanical interaction between the propagating north anatolian fault and the back-arc extension in the aegean, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 224, pp. 347–362. doi :10.1016/j.epsl.2004.05.028.

Flesch L. et Bendick R., 2012. The relationship between surface kinematics and deformation of the whole lithosphere, *Geology*, 40, pp. 711–714. doi : 10.1130/G33269.1.

Francfort G. et Marigo J.-J., 1998. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids*, 46, pp. 1319–1342.

Fulton P., Schmalzle G., Harris R. et Dixon T., 2010. Reconciling patterns of interseismic strain accumulation with thermal observations across the carrizo segment of the san andreas fault, *Earth Planet. Sci. Lett.* doi :10.1016/j.epsl.2010.10.024.

Griffith A., 1921. The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221, pp. 163–198.

Gudmundsson A., Simmenes T. H., Larsen B. et Philipp S. L., 2010. Effects of internal structure and local stresses on fracture propagation, deflection, and arrest in fault zones, *Journal of Structural Geology*, 32(11), pp. 1643–1655.

Hetland E. et Hager B., 2005. Postseismic and interseismic displacements near a strike-slip fault : A two-dimensional theory for general linear viscoelastic rheologies, *J. Geophys. Res.*, 110(B10), pp. B10401.

Hetland E. et Hager B., 2006. Interseismic strain accumulation : Spin-up, cycle invariance, and irregular rupture sequences, *Geochem., Geophys., Geosyst.*, 7(5).

Houseman G. et England P., 1986. Finite strain calculations of continental deformation : 1. method and general results for convergent zones, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 91(B3), pp. 3651–3663.

Houseman G. A., McKenzie D. P. et Molnar P., 1981. Convective instability of a thickened boundary layer and its relevance for the thermal evolution of continental convergent belts, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 86(B7), pp. 6115–6132.

Hubert-Ferrari A., Armijo R., King G., Meyer B. et Barka A., 2002. Morphology, displacement, and slip rates along the north anatolian fault, turkey, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 107(B10).

Hubert-Ferrari A., King G., Manighetti I., Armijo R., Meyer B. et Tapponnier P., 2003. Long-term elasticity in the continental lithosphere ; modelling the aden ridge propagation and the anatolian extrusion process, *Geophysical Journal International*, 153 (1), pp. 111–132.

Hughes T. J., 2012. *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*, Courier Dover Publications.

Ida Y., 1972. Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and griffith's specific surface energy, *Journal of Geophysical Research*, 77(20), pp. 3796–3805.

Irwin G. R., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *J. appl. Mech.*

Jackson J., 2002. Strength of the continental lithosphere : time to abandon the jelly sandwich ?, *GSA today*, 12(9), pp. 4–9.

Jackson J. A., McKenzie D. P., Priestley K. F. et Emerson B., 2008. New views on the structure and rheology of the lithosphere, *Journal of the Geological Society*, 165, pp. 453 – 465.

Johnson K. M., Hilley G. E. et Bürgmann R., 2007. Influence of lithosphere viscosity structure on estimates of fault slip rate in the Mojave region of the San Andreas fault system, *J. geophys. Res.*, 112(B07408). doi :10.1029/2006JB004842.

Johnson K. M. et Segall P., 2004. Viscoelastic earthquake cycle models with deep stress-driven creep along the San Andreas fault system, *J. Geophys. Res.*, 109. doi :10.1029/2004JB003096.

Karrech A., Regenauer-Lieb K. et Poulet T., 2011. Continuum damage mechanics for the lithosphere, *J. Geophys. Res.*, 116. doi :10.1029/2010JB007501.

Kikuchi M. et Kanamori H., 1996. Rupture process of the kobe, japan, earthquake of jan. 17. 1995, determined from teleseismic body waves, *Journal of Physics of the Earth*, 44(5), pp. 429–436.

Lancioni G. et Royer-Carfagni G., 2009. The variational approach to fracture mechanics. a practical application to the french pantheon in paris, *J. Elasticity*, 95, pp. 1–30.

Langstaff M. A. et Meade B. J., 2013. Edge-driven mechanical microplate models of strike-slip faulting in the tibetan plateau, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 118(7), pp. 3809–3819.

Le Pichon X., Kreemer C. et Chamot-Rooke N., 2005. Asymmetry in elastic properties and the evolution of large continental strike-slip faults, *J. Geophys. Res.*, 110. doi :10.1029/2004JB003343.

Lee S., 1987. The image force on the screw dislocation around a crack of finite size, *Engineering Fracture Mechanics*, 27, pp. 539–545.

Lemaitre J. et Chaboche J., 1978. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement, *Journal de Mécanique Appliquée*, 2, pp. 317–365.

Lin G., Shearer P. et Hauksson E., 2007. Applying a three dimensional velocity model, waveform cross correlation, and cluster analysis to locate Southern California seismicity from 1981 to 2005, *J. Geophys. Res.*, 112. doi :10.1029/2007JB0044986.

Lisowski M., Savage J. C. et Prescott W. H., May 1991. The velocity field along the San Andreas Fault in Central and Southern California, *J. Geophys. Res.*, 96, pp. 8369–8389.

Lockner D., Byerlee J., Kuksenko V., Ponomarev A. et Sidorin A., 1991. Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite, *Nature*, 350(6313), pp. 39–42.

Logg A., Mardal K.-A., Wells G. N. et others , 2012. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, Springer. ISBN 978-3-642-23098-1.

Lyakhovsky V. et Ben-Zion Y., 2009. Evolving geometrical and material properties of fault zones in a damage rheology model, *Geochem. Geophys. Geosyst.*, 10. doi :10.1029/2009GC002543.

Lyakhovsky V., Ben-Zion Y. et Agnon A., 1997. Distributed damage, faulting, and friction, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 102(B12), pp. 27635–27649.

Lyakhovsky V., Ben-Zion Y. et Agnon A., March 2001. Earthquake cycle, fault zones, and seismicity patterns in a rheologically layered lithosphere, *J. Geophys. Res.*, 106, pp. 4103–4120.

Lyakhovsky V., Hamiel Y. et Ben-Zion Y., 2011. A non-local visco-elastic damage model and dynamic fracturing, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(9), pp. 1752–1776.

Madariaga R., Olsen K. et Archuleta R., 1998. Modeling dynamic rupture in a 3d earthquake fault model, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(5), pp. 1182–1197.

Marone C. et Kilgore B., 1993. Scaling of the critical slip distance for seismic faulting with shear strain in fault zones, *Nature*.

Meade B. J., Hager B. H., McClusky S. C., Reilinger R. E., Ergintav S., Lenk O., Barka A. et Ozener H., 2002. Estimates of seismic potential in the marmara sea region from block models of secular deformation constrained by global positioning system measurements, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 92, pp. 208–215.

Mercier J. et Vergely P., 1992. *Téctonique*, Dunod, Paris.

Métivier F., Gaudemer Y., Tapponnier P. et Meyer B., 1998. Northeastward growth of the tibet plateau deduced from balanced reconstruction of two depositional areas : The qaidam and hexi corridor basins, china, *Tectonics*, 17(6), pp. 823–842.

Meyer B. et Le Dortz K., 2007. Strike-slip kinematics in central and eastern iran : Estimating fault slip-rates averaged over the holocene, *Tectonics*, 26(5).

Meyer B., Tapponnier P., Bourjot L., Metivier F., Gaudemer Y., Peltzer G., Shunmin G. et Zhitai C., 1998. Crustal thickening in gansu-qinghai, lithospheric mantle subduction, and oblique, strike-slip controlled growth of the tibet plateau, *Geophysical Journal International*, 135(1), pp. 1–47.

Miehe C., Hofacker M. et Welschinger F., 2010. A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 199, pp. 2765–2778. doi :10.1016/j.cma.2010.04.011.

Mitchell T. et Faulkner D., 2009. The nature and origin of off-fault damage surrounding strike-slip fault zones with a wide range of displacements : A field study from the atacama fault system, northern chile, *Journal of Structural Geology*, 31, pp. 802–816. doi :10.1016/j.jsg.2009.05.002.

Modica L. et Mortola S., 1977. Il limite nella-convergenza di una famiglia di funzionali ellittici, boll, *Math. Ital., A*, 14.

Moore D. et Lockner D., 1995. The role of microcracking in shear-fracture propagation in granite, *Journal of Structural Geology*, 17(1), pp. 95–114.

Mumford D. et Shah J., 1989. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems, *Comm. on Pure and App. Math.*, 42.

Munson T., Sarich J., Wild S., Benson S. et McInnes L. C., 2012. *TAO 2.1 Users Manual*, Argonne National Laboratory.

Nur A. et Mavko G., 1974. Postseismic viscoelastic rebound, *Science*, 183(4121), pp. 204–206.

Okada Y., August 1985. surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 75, pp. 1135–1154.

Okada Y., April 1992. internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 82, pp. 1018–1040.

Peltzer G. et Saucier F., 1996. Present-day kinematics of asia derived from geologic fault rates, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 101(B12), pp. 27943–27956.

Peltzer G. et Tapponnier P., 1988. formation and evolution of strike-slip faults, rifts, and basins during the India-Asia collision : an experimental approach, *J. Geophys. Res.*, 93, pp. 15085–15117.

Peltzer G., Tapponnier P. et Cobbold P., 1982. Les grands décrochements de l'est asiatique, évolution dans le temps et comparaison avec un modele expérimental, *Cr Acad. Sci. Paris*, 294, pp. 1341–1348.

Pham K., 2010. *Construction et analyse de modèles d'endommagement à gradient*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

Pham K., Amor H., Marigo J.-J. et Maurini C., 2011. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture, *International Journal of Damage Mechanics*, 20. doi :10.1177/1056789510386852.

Pham K. et Marigo J.-J., 2012. Damage localization and rupture with gradient damage models, *Fracture and Structural Integrity*, 19, pp. 5–19. doi : 10.3221/IGF-ESIS.19.01.

Platt J. B., Kaus B. J. P. et Becker T. W., 2008. The mechanics of continental transforms : An alternative approach with applications to the San Andreas system and the tectonics of California, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 274, pp. 380Ñ1§71. doi :10.1016/j.epsl.2008.07.052.

Pollitz F. F., 2001. Viscoelastic shear zone model of a strike-slip earthquake cycle, *Journal of Geophysical Research*, 106(B11), pp. 26541–26560.

Pollitz F. F. et Nyst M., 2005. A physical model for strain accumulation in the san francisco bay region, *Geophys. J. Int.*, 160(1), pp. 303–318.

Roy M. et Royden L. H., 2000. Crustal rheology and faulting at strike-slip plate boundaries : 2. effects of lower crustal flow, *J. Geophys. Res.*, 105(B3), pp. 5599–5613.

Savage J. C., February 1998. Displacement field for an edge dislocation in a layered half-space, *J. Geophys. Res.*, 103, pp. 2439–2446.

Savage J. C., 2000. Viscoelastic-coupling model for earthquake cycle driven from below, *J. Geophys. Res.*, 105, pp. 25525–25532.

Savage J. C., 2006. Dislocation pileup as a representation of strain accumulation on a strike-slip fault, *J. Geophys. Res.*, 111. B04405, doi :10.1029/2005JB004021.

Savage H. M. et Brodsky E. E., 2011. Collateral damage : Evolution with displacement of fracture distribution and secondary fault strands in fault damage zones, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 116(B3).

Savage J. C. et Burford R. O., February 1973. Geodetic determination of relative plate motion in Central California, *J. Geophys. Res.*, 78, pp. 832–844.

Savage J. C. et Prescott W. H., 1978. Asthenosphere readjustment and the earthquake cycle, *J. Geophys. Res.*, 83, pp. 3369–3376.

Scholz C. H., 2002. *The mechanics of earthquakes and faulting*, Cambridge university press.

Segall P., 2002. Integrating geologic and geodetic estimates of slip rate on the San Andreas fault system, *Int. Geol. Rev.*, 44, pp. 62–82.

Şengör A., 1985. Strike-slip faulting and related basin formation in zones of tectonic escape : Turkey as a case study.

Şengör A., Tüysüz O., Imren C., Sakinç M., Eyidogan H., Görür N., Le Pichon X. et Rangin C., 2005. The north anatolian fault : A new look, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 33, pp. 37–112.

Smith B. et Sandwell D., 2004. A three-dimensional semianalytic viscoelastic model for time-dependent analyses of the earthquake cycle, *J. Geophys. Res.*, 109. doi :10.1029/2004JB003185.

Smith-Konter B. R., Sandwell D. T. et Shearer P., 2011. Locking depths estimated from geodesy and seismology along the San Andreas Fault System : Implications for seismic moment release, *J. Geophys. Res.*, 116. doi :10.1029/2010JB008117.

Stein R. S., 2007. *Earthquake Rate Model 2.2 of the 2007 Working Group for California Earthquake Probabilities, Appendix D, Magnitude-area Relationships*, US Geological Survey.

Steketee J. A., 1958. On volterra's dislocations in a semi-infinite elastic medium, *Canadian Journal of Physics*, 36, pp. 192–205.

Takeuchi C. S. et Fialko Y., 2013. On the effects of thermally weakened ductile shear zones on postseismic deformation, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 118 (12), pp. 6295–6310.

Tapponnier P., Peltzer G., Le Dain A., Armijo R. et Cobbold P., 1982. Propagating extrusion tectonics in asia : New insights from simple experiments with plasticine, *Geology*, 10(12), pp. 611–616.

Vaghri A. et Hearn E. H., 2012. Can lateral viscosity contrasts explain asymmetric interseismic deformation around strike-slip faults ?, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 102(2), pp. 490–503.

Vigny C., Socquet A., Rangin C., Chamot-Rooke N., Pubellier M., Bouin M.-N., Bertrand G. et Becker M., 2003. Present-day crustal deformation around Sagaing fault, Myanmar, *J. Geophys. Res.*, 108, pp. 2533. doi :10.1029/2002JB001999.

Volterra V., 1907. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 24, pp. 401–517.

Weertman J., August 1964. Continuum distribution of dislocations on fault with finite friction, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 54, pp. 1035–1058.

Weertman J. et Weertman J. R., 1964. *Elementary dislocation theory*, The Macmillan company, New York.

Yamasaki T., Wright T. J. et Houseman G. A., 2014. Weak ductile shear zone beneath a major strike-slip fault : Inferences from earthquake cycle model constrained by geodetic observations of the western north anatolian fault zone, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*.

Yoshida S., Koketsu K., Shibazaki B., Sagiya T., Kato T. et Yoshida Y., 1996. Joint inversion of near- and far-field waveforms and geodetic data for the rupture process of the 1995 kobe earthquake, *JOURNAL OF PHYSICS OF THE EARTH*, 44, pp. 437–454.

Zang A., Wagner F. C., Stanchits S., Janssen C. et Dresen G., 2000. Fracture process zone in granite, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 105 (B10), pp. 23651–23661.

Zatman S., August 2000. On steady rate coupling between an elastic upper crust and a viscous interior, *Geophys. Res. Lett.*, 27, pp. 2421–2424.