Université Pierre et Marie Curie
École Doctorale de Paris Centre

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : MATHÉMATIQUES

Présentée par

Quentin DUFOUR

Une construction de métriques quaternion-kählériennes à partir du groupe G_2

---

dirigée par Olivier BIQUARD

Soutenue le 2014 devant le jury composé de :

Olivier BIQUARD	École Normale Supérieure	Directeur de thèse
Elisha FALBEL	Université Paris VI	Examinateur
Paul GAUDUCHON	École Polytechnique	Rapporteur
Simon SALAMON	King's College London	Rapporteur

Table des matières

Introduction **5**

1 Les espaces symétriques quaternion-kählériens de type non-compact et leurs bords de Furstenberg 6
- 1.1 Les espaces symétriques quaternion-kählériens 6
- 1.2 Les métriques quaternion-kählériennes au voisinage d'une frontière de Furstenberg 7
- 1.3 Les constructions déjà trouvées 8

2 Généralisation de la construction de Le Brun 10

3 La construction de métriques quaternion-kählériennes à l'aide d'une distribution générique de rang 2 12
- 3.1 L'espace des twisteurs 13
- 3.2 Les courbes twistorielles 14
- 3.3 Les coordonnées distinguées 14
- 3.4 La construction twistorielle inverse 15

I Les géométries paraboliques **18**

1 Sous-algèbres et sous-groupes paraboliques **19**
- 1.1 Sous-algèbres paraboliques 19
- 1.2 Sous-groupes paraboliques 21

2 Géométries paraboliques et structures paraboliques infinitésimales **23**
- 2.1 Géométries paraboliques 24
- 2.2 Structures paraboliques infinitésimales 26
- 2.3 Une géométrie parabolique procure une structure parabolique infinitésimale 29
- 2.4 Construction d'une connexion de Cartan en partant d'une structure parabolique infinitésimale 31

3 Régularité **37**
3.1 Définition de la régularité 37
3.2 Caractérisation de la régularité 39
3.3 Structure parabolique infinitésimale régulière 42

4 Normalisation **45**
4.1 Les premières propriétés de la théorie des connexions de Cartan 45
4.1.1 Propriété fondamentale des fibrés associés à un fibré principal 45
4.1.2 La courbure d'une connexion de Cartan 47
4.1.3 Le fibré tractoriel 49
4.1.4 La dérivation fondamentale 50
4.2 Recherche d'une condition de normalité 53
4.2.1 L'espace affine des connexions de Cartan 53
4.2.2 Codifférentielle et décomposition de Hodge 59
4.2.3 Connexion de Cartan normale et courbure harmonique 65
4.3 Existence et unicité d'une connexion de Cartan 68
4.3.1 Existence d'une connexion de Cartan normale 68
4.3.2 Unicité des connexions de Cartan normales 70

5 Les coordonnées distinguées **73**

II Vers une correspondance entre géométries paraboliques et variétés quaternion-kählériennes **80**

6 Les espaces symétriques quaternion-kählériens de type non-compact **82**
6.1 Les variétés quaternion-kählériennes 82
6.2 Les métriques quaternion-kählériennes aux voisinages des frontières de Furstenberg 83
6.2.1 Les bords de Furstenberg 83
6.2.2 Les métriques au voisinages d'une frontière de Furstenberg 87

7 Des candidats pour être des espaces de twisteurs de variétés quaternion-kählériennes **89**
7.1 Le cas de la géométrie conforme 89
7.2 Les espaces correspondants 91
7.3 Les feuilletages par des géodésiques paraboliques 94
7.4 Les constructions d'un espace de géodésiques paraboliques . . 97

III Construction de métriques quaternion-kälériennes de type $G_2^s/SO(4)$ 106

8 L'espace symétrique quaternion-kählérien $G_2^s/SO(4)$ 107
8.1 Description de l'espace symétrique de type non-compact $G_2^s/SO(4)$ et de ses bords 107
8.2 L'espace quaternion-kählérien $G_2^s/SO(4)$ et son espace des twisteurs 118

9 Construction d'un espace de twisteurs 121
9.1 Schéma de construction de l'espace des twisteurs et des courbes twistorielles 121
9.2 Géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ 122
9.3 Construction de l'espace des twisteurs 124
9.3.1 L'espace $\mathbb{P}(T^{-1}M)$ et sa géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_\emptyset)$ 124
9.3.2 L'espace des twisteurs et sa structure de contact 128
9.3.3 L'espace des twisteurs complexe 132

10 Les courbes rationnelles 138
10.1 Les courbes limites 138
10.1.1 L'équation d'une courbe double dans des coordonnées grassmanniennes 139
10.1.2 L'équation d'une courbe double dans des coordonnées généralisables : les coordonnées distinguées 143
10.2 Déformation des courbes doubles 150
10.2.1 L'espace de déformation d'une courbe double 150
10.2.2 Les courbes déformées sont-elles les courbes recherchées ? 153

11 Construction twistorielle inverse 158
11.1 Stratégie pour la reconstruction de la métrique quaternion-kählérienne 158
11.2 Nos systèmes de coordonnées et la comparaison de notre cas avec le cas modèle 162
11.3 Reconstruction de la métrique quaternion kählérienne 169
11.3.1 La section Θ définit bien le bord $M^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q}$ 169
11.3.2 Une base orthonormée du fibré W 171
11.3.3 Les trois 2-formes sur $\mathcal{Q}$ recherchées 175
11.3.4 La métrique quaternion-kählérienne sur $\mathcal{Q}$ 179

Introduction

En 1955, Berger [Ber55] montre que les seuls groupes d'holonomie possibles pour une variété riemannienne localement irréductible et non-symétrique sont les groupes : $SO(k)$, $U(k)$, $SU(k)$, $Sp(k)$, $Sp(1) \cdot Sp(k)$, G_2 et $Spin(7)$. L'holonomie $SO(k)$ correspond au cas générique, $U(k)$ aux variétés kählériennes, $SU(k)$ aux variétés de Calabi-Yau et $Sp(k)$ aux variétés hyper-kälériennes. Les cas G_2 et $Spin(7)$ n'apparaissent eux que pour des dimensions particulières (respectivement 7 et 8) [Bry87]. Restent alors les variétés quaternion-kählériennes qui sont les variétés riemanniennes dont le groupe d'holonomie est contenu dans $Sp(1) \cdot Sp(n) := Sp(1) \times Sp(n)/\{\pm 1\}$. C'est à cette catégorie que nous nous intéressons. Le théorème principal de cette thèse, que nous préciserons ultérieurement, construit une famille d'éléments de cette catégorie :

Théorème 1 *Soit M une variété analytique réelle de dimension 5 et soit D une distribution analytique réelle, générique de rang 2 sur M (c'est-à-dire une distribution D telle que $\dim([D,D]) = 3$ puis $[D,[D,D]] = TM$), alors un espace quaternion-kählérien $\mathcal{Q}$ de dimension 8 est canoniquement associé à cette distribution.*

Cette construction s'inscrit dans la lignée des constructions de Le Brun [LeB82, LeB89] et de Biquard [Biq00, Biq07] pour lesquelles d'un côté les variétés quaternion-kählériennes construites possèdent un modèle homogène qui est un espace symétrique de type non-compact G/K, et d'un autre côté, les données initiales peuvent s'interpréter comme étant des déformations d'un bord de Furstenberg G/P où P est un sous-groupe parabolique de G (cette interprétation n'est pas décrite dans les articles précédents). Ces constructions nous amènent ainsi à penser qu'il existe une correspondance générale entre des déformations de bords de Furstenberg G/P et des variétés quaternion-kählériennes dont les métriques ont un comportement similaire à la métrique symétrique sur G/K au voisinage de la frontière de Furstenberg associée à G/P. Le théorème énoncé va dans le sens de l'existence d'une telle correspondance. En effet, Cartan montre en 1910 que la donnée d'une distribution

générique de rang 2 sur une variété de dimension 5 est liée au groupe de Lie G_2^s : plus précisément, cette donnée correspond localement à une déformation de l'espace G_2^s/P_1 avec P_1 le sous-groupe parabolique de $G_2^s \subset SO(3,4)$ stabilisant une droite isotrope de $\mathbb{R}^{3,4}$.

1 Les espaces symétriques quaternion-kählériens de type non-compact et leurs bords de Furstenberg

1.1 Les espaces symétriques quaternion-kählériens

Parmi les variétés quaternion-kählériennes se trouvent certains espaces symétriques connus sous les noms d'espaces de Wolf et que nous retrouvons par exemple dans [Bes08, p. 409] : pour chaque groupe de Lie simple complexe $G^{\mathbb{C}}$, il existe un unique espace symétrique quaternion-kählérien G/K avec G le groupe de Lie réel compact associé à $G^{\mathbb{C}}$. Dans notre étude nous nous intéressons aux duaux non-compacts de ces espaces de Wolf : nous trouvons alors dans cette liste, les espaces symétriques de type non-compact $SO(4,k)/SO(4)\times SO(k)$, $SU(2,k)/S(U(2)\times U(k))$, $Sp(1,k)/Sp(1)\times Sp(k)$ pour tout $k>1$, $G_2^s/SO(4)$ et les espaces symétriques correspondant aux autres groupes de Lie exceptionnels.

Une propriété remarquable des ces variétés est que la structure quaternion-kählérienne est reliée à un espace complexe nommé espace des twisteurs [Sal82]. L'espace des twisteurs d'une variété quaternion-kählérienne M apparaît naturellement comme l'espace total du fibré, au dessus de M, des structures presque complexes de M : le point remarquable étant que cette variété de dimension réelle $4k+2$ possède en fait une structure presque complexe intégrable et une structure de contact holomorphe.

Théorème 2 (Salamon) *Il existe une correspondance entre l'ensemble des variétés quaternion-kählériennes (M,g) de dimension $4k$ et l'ensemble des variétés complexes $\mathcal{N}$ de dimension $2k+1$ possédant une structure de contact holomorphe et une famille de courbes rationnelles $\{C_x\}_{x\in M}$ dans $\mathcal{N}$, transverses à la distribution de contact et de fibré normal $2kO(1)$.*

Ainsi pour construire une nouvelle variété quaternion-kählérienne, nous construirons une variété complexe munie d'une structure de contact holomorphe et munie d'une famille de courbes avec les propriétés du théorème précédent. Il nous restera alors à décrire le comportement de notre nouvelle métrique quaternion-kählérienne. Dans notre idée de correspondance entre

des déformations de bords de Furstenberg G/P et des variétés quaternion-kählériennes, le comportement de la métrique obtenue devrait être celui que nous allons décrire au chapitre suivant.

1.2 Les métriques quaternion-kählériennes au voisinage d'une frontière de Furstenberg

Pour ces espaces symétriques de type non-compact G/K, différentes compactifications existent. Ici nous nous intéressons aux frontières de Furstenberg qui sont indexées par les sous-groupes paraboliques de G : une frontière de Furstenberg F, comme nous le verrons au chapitre 6.2, arrive comme l'espace total d'une fibration par un espace symétrique X de rang inférieur à celui de G/K, au dessus d'un espace homogène G/P avec P un sous-groupe parabolique de G

$$X \longrightarrow F \longrightarrow G/P.$$

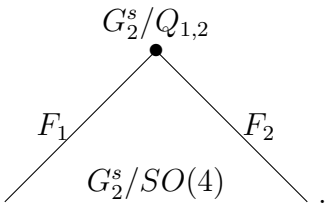
Ainsi pour l'espace symétrique de type non-compact $G_2^s/SO(4)$, comme celui-ci est de rang 2, nous avons trois sous-groupes paraboliques de G_2^s. Nous avons P_1 le sous-groupe parabolique de $G_2^s \subset SO(3,4)$ fixant une droite isotrope, R_2 le sous-groupe parabolique de $G_2^s \subset SO(3,4)$ fixant un plan totalement isotrope et $Q_{1,2}$ le sous-groupe parabolique fixant un plan totalement isotrope et une droite de ce plan. Pour le sous-groupe P_1, la frontière de Furstenberg F_1 est l'espace

$$H^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow F_1 \longrightarrow G/P_1$$

et pour le sous-groupe R_2, la frontière de Furstenberg F_2 est l'espace

$$H^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow F_2 \longrightarrow G/R_2$$

avec $H^2_{\mathbb{R}}$ l'espace hyperbolique réel de dimension 2. Pour le sous-groupe $Q_{1,2}$ la frontière de Furstenberg est simplement l'espace $G_2^s/Q_{1,2}$. L'espace symétrique $G_2^s/SO(4)$ se compactifie donc de la manière suivante :



Les coordonnées polaires de X et de G/K fournissent un isomorphisme

$$F \times A_+^{reg} \simeq G/P \times X^{reg} \times A \longrightarrow (G/K)^{reg}, \tag{1.1}$$

avec A un sous-groupe abélien de P et A_+^{reg} sa partie régulière. Ainsi lorsque nous regardons la métrique standard de l'espace symétrique G/K, dans des coordonnées adaptées à l'isomorphisme précédent alors celle-ci est de la forme

$$g = dr^2 + g_X + \sum_{j=1}^{k} \sinh^2(jr)\gamma_{j,x} \tag{1.2}$$

avec g_X la métrique symétrique de l'espace X et avec $\gamma_{j,x}$ une métrique dépendant du point x de la fibre X et qui est une métrique sur l'espace tangent gradué

$$gr_{-j}(T(G/P)) := (G \times_P \mathfrak{p}^{-j}/\mathfrak{p})/(G \times_P \mathfrak{p}^{-j+1}/\mathfrak{p})$$

avec $\mathfrak{p}^i = \bigoplus_{j \geq i} \mathfrak{p}_j$ et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_{-1} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_k$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ induite par la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$.

1.3 Les constructions déjà trouvées

Les constructions de Le Brun et Biquard [LeB82, LeB89, Biq00, Biq07] possèdent des modèles homogènes pour lesquels la donnée initiale est un espace G/P avec P un sous-groupe parabolique de G et où la métrique reconstruite est la métrique standard de l'espace symétrique de type non-compact G/K. Cela nous permet de réinterpréter leurs constructions à l'aide du formalisme des géométries paraboliques [ČS09]. La donnée initiale de ces constructions n'est plus un espace G/P mais une variété M munie d'une géométrie parabolique de type (G, P), c'est-à-dire munie d'une P-structure compatible avec le crochet de Lie des champs de vecteurs de M. Quant à la métrique construite, celle-ci se comporte comme la métrique modèle proche de la frontière de Furstenberg associée à P.

En 1982 [LeB82], Le Brun montre qu'une variété conforme M, analytique réelle de dimension 3, est l'infini conforme d'une métrique autoduale (c'est l'analogue en dimension 4 d'une métrique quaternion-kählérienne), unique dans un voisinage de M. Notons que cette géométrie initiale sur X est la donnée d'une géométrie parabolique de type $(SO(4,1), P)$ avec P le parabolique fixant une droite isotrope de $\mathbb{R}^{4,1}$. Ce résultat, Le Brun le généralise en 1989 [LeB89, LeB83]. Notant $\mathcal{N}$ l'espace des géodésiques complexes nulles d'une certaine complexification d'une variété M analytique réelle, munie d'une structure conforme $[h]$ de signature $(3, k-1)$, il montre que cette

variété $\mathcal{N}$ est l'espace des twisteurs d'une variété quaternion-kählérienne dont le comportement de la métrique à l'infini est

$$g = \frac{dt^2}{t^2} + g_X + \frac{\gamma_{x,[h]}}{t^2} \tag{1.3}$$

avec g_X la métrique symétrique sur $X := SO(3, k-1)/SO(3) \times SO(k-1)$ et avec $\gamma_{x,[h]}$ une métrique nous redonnant la métrique conforme $[h]$ sur TM à l'infini. Là encore, nous pouvons voir que la donnée initiale sur M correspond à la donnée d'une géométrie parabolique de type $(SO(4,k), P_1)$ avec P_1 le sous-groupe parabolique de $SO(4,k)$ fixant une droite isotrope dans $\mathbb{R}^{4,k}$ et que la frontière de Furstenberg correspondant à ce parabolique est l'espace total de la fibration de $SO(4,k)/P_1$ par X.

En 2000 [Biq00], Biquard montre qu'une variété analytique réelle M de dimension $4k-1$ munie d'une structure de contact quaternionienne (η_1, η_2, η_3) (c'est-à-dire la donnée d'une géométrie parabolique de type $(Sp(1,k), P)$) est le bord d'une variété analytique réelle unique $\mathcal{Q}$ telle que $\mathcal{Q} - M$ admet une métrique quaternion-kählérienne de la forme

$$g = \frac{dt^2}{t^2} + \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}{t^2} + \frac{\gamma}{t} \tag{1.4}$$

vers le bord infini M.

Puis en 2007 [Biq07], Biquard montre qu'une variété CR strictement pseudoconvexe M, analytique réelle de dimension 3, est l'infini conforme d'une métrique autoduale unique définie dans un voisinage de M. Ici la donnée initiale est la donnée d'une géométrie parabolique de type $(SU(2,1), P)$ avec P le sous-groupe parabolique de $SU(2,1)$ fixant une droite isotrope de $\mathbb{C}^3$.

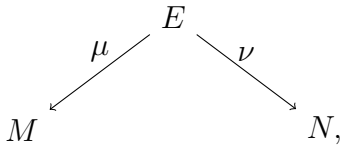
Dans ce dernier cas, l'espace des twisteurs de l'espace symétrique $SU(2,1)/U(2)$ peut se voir dans l'espace des twisteurs du dual compact $SU(3)/U(2)$. Ce dernier est l'espace $SL(3,\mathbb{C})/P^{\mathbb{C}}$ avec P le même sous-groupe parabolique que précédemment. L'objectif pour construire l'espace des twisteurs en partant d'une géométrie parabolique de type $(SU(2,1), P)$ sur une variété M est donc de grossir la variété complexifié $M^{\mathbb{C}}$. Alors que dans le cas d'une géométrie initiale de type $(SO(4,k), P_1)$, l'idée est de retrouver l'espace des twisteurs en mimant la double fibration du cas modèle

$$\begin{array}{ccc} & G/Q_{1,2} & \\ {\scriptstyle \mu}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \nu} \\ G/P_1 & & G/R_2, \end{array}$$

avec $Q_{1,2}$ le sous-groupe parabolique de $SO(4,k)$ fixant un plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^{4,k}$ et une droite de ce plan et avec R_2 le sous-groupe parabolique de $SO(4,k)$ fixant un plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^{4,k}$. L'idée est de mimer cette double fibration parce que dans le modèle, l'espace des twisteurs de $SO(4,k)/SO(4)\times SO(k)$ est inclus dans $SO(4+k,\mathbb{C})/R_2^{\mathbb{C}}$. C'est cette construction faisant appel à différentes géométries paraboliques, que nous allons chercher à généraliser.

2 Généralisation de la construction de Le Brun

Dans la construction de Le Brun, la double filtration du modèle homogène précédemment citée, se généralise pour obtenir le schéma suivant :



avec M la variété initiale possédant une géométrie conforme, $E\subset\mathbb{P}(TM)$ l'espace des directions nulles de TM (pour la structure conforme de M) et N l'espace des géodésiques nulles de M.

Ainsi, pour une variété M munie d'une géométrie parabolique, si nous disposons d'un fibré $E\to M$ sur M pour lequel l'espace total E possède un flot canoniquement relié à la géométrie parabolique de M (pour le cas conforme, il s'agit des flots des géodésiques nulles), alors nous nommerons espace de géodésiques nulles l'espace des flots précédents. La question que nous nous posons est alors de savoir quelles sont les géométries paraboliques sur M qui vont nous fournir un espace de géodésiques nulles N dont le modèle homogène complexifié est un espace de twisteurs d'un espace symétrique quaternion-kählérien.

Notons avant de commencer que certaines géométries paraboliques sont rigides et qu'il n'existe pas de déformation du cas homogène G/P : cette rigidité se lit, comme nous le verrons dans la première partie, sur l'objet algébrique $H^2(\mathfrak{p}_-,\mathfrak{g})$. En effet, si cette cohomologie n'a pas de composante homogène strictement positive alors il n'existe pas de géométrie parabolique régulière de type (G,P) autre que le modèle G/P (la condition de régularité étant une condition essentielle pour que la notion de géométrie parabolique

soit définie sans ambiguïté). Nous n'aurons donc pas d'espoir de trouver de nouvelles constructions avec ces cas là.

Soit G/K un espace symétrique quaternion-kählérien de type non-compact, nous verrons que l'espace des twisteurs de G/K est inclus dans l'espace des twisteurs du dual compact $\tilde{G}/K$ de G/K qui est de la forme $G^{\mathbb{C}}/R^{\mathbb{C}}$ avec R le sous-groupe parabolique de G donnant à G/R une structure de contact. Ainsi partant d'une géométrie parabolique régulière de type (G, P) sur une variété M, avec P un sous-groupe parabolique qui n'est pas le sous-groupe parabolique R de G, l'objectif est comme dans le cas conforme de mimer une double fibration

$$\begin{array}{ccc} & G/Q & \\ {\scriptstyle\mu}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\nu} \\ G/P & & G/R \end{array}$$

avec Q un sous-groupe parabolique de G inclus dans P et R. Nous allons commencer par construire l'espace $E := G/Q$. Cet espace ne sera pas automatiquement muni d'une géométrie parabolique régulière de type (G, Q). Comme cela se détermine de manière algébrique, nous avons ainsi une première restriction algébrique à notre construction. Nous chercherons ensuite un feuilletage de E (par des feuilles de dimension 1 comme dans le cas conforme) mimant dans le cas homogène la fibration $G/Q \to G/R$. Ce feuilletage à notre disposition, nous notons N l'espace des feuilles. En complexifiant cette construction, nous obtenons alors le schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} & E^{\mathbb{C}} & \\ {\scriptstyle\mu}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\nu} \\ M^{\mathbb{C}} & & N^{\mathbb{C}}. \end{array}$$

Là encore l'existence de ce feuilletage n'est pas assuré, mais elle dépend d'une condition algébrique. Ces conditions algébriques, à la construction d'un espace des géodésiques nulles N dont le modèle homogène est G/R, réduiront considérablement les candidats.

Théorème 3 *Les géométries paraboliques*
- *admettant des déformations du cas modèle,*
- *fournissant des espaces de géodésiques nulles N*
- *de sorte que, dans le cas homogène, cet espace N soit la partie réelle d'un espace de twisteurs d'un espace symétrique quaternion-kählérien,*

sont les géométries conformes, les géométries paraboliques de type $(SO(4,3), P_3)$ *où le sous-groupe* P_3 *est le parabolique fixant un* 3*-plan totalement isotrope de* $\mathbb{R}^{4,3}$ *et les géométries paraboliques de type* (G_2^s, P_1) *où le sous-groupe* P_1 *est le parabolique fixant une droite isotrope de* $\mathbb{R}^{3,4}$.

3 La construction de métriques quaternion-kählériennes à l'aide d'une distribution générique de rang 2

Parmi les deux candidats ne correspondant pas à une géométrie conforme, nous allons compléter, dans cette thèse, la construction de variétés quaternion-kählériennes pour des géométries paraboliques initiales de type (G_2^s, P_1).

Théorème 4 *Soit* D *une distribution analytique réelle, générique de rang* 2 *sur une variété analytique réelle* M *de dimension* 5*, alors il existe un fibré en disques ouverts* F *au dessus de* M *(*$X \longrightarrow F \longrightarrow M$*) et une variété* $\mathcal{Q}$ *de dimension* 8 *contenant* F *de sorte que nous disposons d'une métrique quaternion-kählérienne sur un voisinage* W *de* F *dans* $\mathcal{Q}$*.*

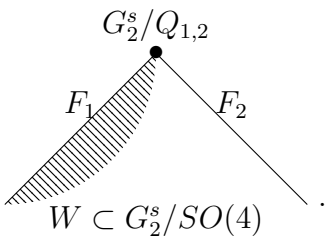
De plus, cette métrique quaternion-kählérienne au voisinage de la frontière F *s'écrit*

$$g = \frac{ds^2}{s^2} + g_X + \frac{\gamma_{1,x}(dx_1, dx_2)}{s} + \frac{dx_3^2}{s^2} + \frac{\gamma_{3,x}(dx_4, dx_5)}{s^3} + h_s$$

avec g_X *la métrique standard de l'espace symétrique hyperbolique* $X = H^2_{\mathbb{R}}$*, avec* $\gamma_{j,x}$ *des métriques dépendant du point* x *de la fibre* X *et qui sont des métriques sur l'espace tangent gradué* $gr(TM)$ *et avec* h_s *s'annulant pour* $s = 0$*.*

En particulier, cela nous permet de retrouver la distribution générique D *sur* M *initiale.*

Dans le modèle homogène, F est la frontière de Furstenberg F_1 et nous retrouvons bien la métrique symétrique de $G_2^s/SO(4)$ au voisinage de F_1 :



Notons que la face F_1 est un fibré en disques ouverts : nous ne retrouvons donc pas la métrique symétrique sur un voisinage de $G_2^s/Q_{1,2}$ (cet espace étant le bord de notre fibré en disques ouvert F_1).

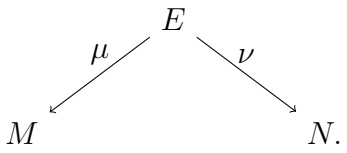
L'écriture sous la forme précédente est intéressante car elle nous permet de comprendre le lien entre une telle métrique et la géométrie parabolique d'un bord. La frontière F correspond à l'hypersurface $s = 0$ et parmi les éléments de cette frontière nous pouvons voir que nous avons les éléments génériques qui explosent en $s^{3/2}$ $(\partial_{x_4}, \partial_{x_5})$. Toutefois dans le noyau H de $s^3 g$, les éléments génériques explosent en s (∂_{x_3}). Regardant alors dans le noyau de $s^2 g|_H$, les éléments génériques explosent en $s^{1/2}$ $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$. Ainsi lorsque s tend vers 0, nous obtenons la distribution $D_x = Vect(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) \subset T_x M$. Quant à la fibre X de $F \to M$, la métrique, sur X, reste lisse au voisinage de F. Nous retrouvons donc graduellement notre fibre X et la métrique standard sur cet espace symétrique, puis la filtration de TM

$$T^{-1}M := D \subset T^{-2}M := [D, D] \subset T^{-3}M = TM,$$

engendrée par la géométrie parabolique sur M : nous obtenons d'abord notre distribution de rang 2, $D = Vect(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ et ensuite $T^{-2}M = Vect(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$. Ici nous n'avons pas besoin de regarder l'allure de la métrique sur la graduation $gr(TM)$ car la donnée géométrique sur M est simplement la filtration précédente.

3.1 L'espace des twisteurs

Soit M une géométrie parabolique régulière de type (G_2^s, P_1) : cela revient simplement à se donner une distribution générique de rang 2 sur M. Alors, d'après le théorème 3, nous disposons d'un espace de feuilles N qui sera de dimension 5, et nous disposons du schéma



Après un travail de complexification de ce schéma, nous montrerons que l'espace $\mathcal{N} := N^{\mathbb{C}}$ est en fait une variété complexe de dimension complexe 5. Dans le schéma précédent, $\mathcal{N}$ ayant pris la place de $G_2^{\mathbb{C}}/R^{\mathbb{C}}$, nous pourrions penser que $\mathcal{N}$ va posséder une structure parabolique de type $(G_2^{\mathbb{C}}, R^{\mathbb{C}})$, mais ce ne sera pas le cas. Nous montrerons cependant que l'espace $\mathcal{N}$ possède une structure de contact.

3.2 Les courbes twistorielles

Pour utiliser la correspondance citée au théorème 2, il nous manque encore les objets important que sont les courbes twistorielles. À ce stade là nous ne disposons sur $\mathcal{N}$ que des courbes $\nu(\mu^{-1}(x))$ pour $x \in M^{\mathbb{C}}$. Or nous verrons que ces courbes sont tangentes à la distribution de contact qu'elles n'ont pas le bon fibré normal et qu'elles peuvent rencontrer le lieu réel $N \subset \mathcal{N}$. Heureusement, nous ne nous attendions pas à avoir ces propriétés pour ces courbes là, qui dans le modèle homogène sont les limites de courbes twistorielles. Nous allons donc déformer ces courbes. Le point crucial est que ces courbes sont des courbes doubles dans $\mathcal{N}$. En effet, le fibré normal des courbes réduites associées à ces courbes est $O(1) \oplus O \oplus O \oplus O$. Déformer de telles courbes ne nous fournirait qu'un espace de dimension 5 alors que l'espace de déformation des courbes doubles C_x est un espace $\mathcal{Q}$ de dimension 8. Cet espace de courbes dans $\mathcal{N}$ en poche, il nous reste à trouver un ouvert de cet espace pour lequel les courbes correspondantes vont vérifier les conditions du théorème 2. Pour trouver un tel ouvert, les données algébriques d'une courbe C_x ne nous suffiront pas. Nous allons donc revenir sur le caractère parabolique de notre donnée initiale, pour trouver cet ouvert.

3.3 Les coordonnées distinguées

La structure parabolique de notre variété initiale M nous permet de choisir des coordonnées au voisinage d'un point x de M qui vont s'approcher au plus près du modèle homogène. Ces coordonnées que nous nommons *coordonnées distinguées*,

$$F \ : \ \mathfrak{p}_- \longrightarrow M$$

sont dans le modèle homogène, les coordonnées données par l'application exponentielle $\mathfrak{p}_- \to G$ composée avec la projection sur l'espace G/P. Nous pouvons ainsi définir naturellement une dilatation parabolique Ψ_t sur un voisinage U de x, donnée par $\Psi_t(y) = t^i y$ pour tout $y \in \mathfrak{p}_{-i}$ avec $i \in \{1, \ldots, k\}$. Nous observons alors, que lorsque nous tirons en arrière la géométrie parabolique de l'espace $\Psi_t(U)$, celle-ci tend vers la géométrie parabolique du modèle homogène. Nous montrerons même dans la première partie, un résultat plus fort :

Théorème 5 *Soit $F : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{p}_- \longrightarrow M$ des coordonnées distinguées de M. Soit ξ_i un champs de vecteurs dans le gradué $gr_i(TM)$ pour $i \in \{-k, \ldots, -1\}$.*

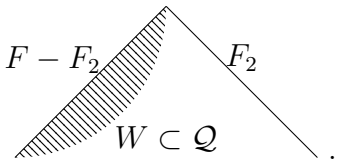
Alors nous avons

$$t^{-i}\Psi_t^* \xi_y = \xi_y^0 + O(t^\beta),$$

lorsque t tend vers 0, avec ξ_y^0 le champ de vecteurs du cas homogène correspondant et avec β qui est égal à l'homogénéité minimale de la courbure de la géométrie parabolique de M.

Comme notre construction de l'espace $\mathcal{N}$ est canonique, cette dilatation sur M va engendrer une dilatation sur $\mathcal{N}$ et nous trouverons un ouvert de courbes répondant aux conditions du théorème 2 en déformant le cas modèle homogène. Utilisant alors la correspondance du théorème 2, nous venons de définir une variété quaternion-kählérienne.

Notons que l'étude du cas homogène nous indiquera que nous n'avons pas de métrique quaternion-kählérienne sur tout l'espace $\mathcal{Q} - M$, où $\mathcal{Q}$ est l'espace de dimension 8 précédemment trouvé. En effet, nous devons éviter dans $\mathcal{Q}$ les rayons provenant des courbes singulières indexées dans le modèle par la frontière de Furstenberg F_2 : notant F le fibré $\mathbb{P}(\mathsf{N}(M \subset \mathcal{Q}))$ au dessus de M, nous obtenons la métrique quaternion-kählérienne sur la partie grisée W



3.4 La construction twistorielle inverse

Nous finirons cette thèse en donnant la construction twistorielle inverse de notre métrique quaternion-kählérienne. Classiquement, nous retrouvons les métriques quaternion-kählériennes de la manière suivante : soit η la forme de contact sur $\mathcal{N}$, notons L le fibré en droite $T\mathcal{N}/\ker(\eta)$, alors $g = \omega_E \omega_H$ avec $H_x = H^0(C_x, L^{1/2})$ (représentant l'action de $Sp(1)$ sur $\mathcal{Q}$), $E_x = H^0(C_x, N_x \otimes L^{-1/2})$ (représentant l'action de $Sp(n)$ sur $\mathcal{Q}$), et ω_H et ω_E des formes symplectiques définies sur H par le wronskien et sur E par $d\eta$. Cependant dans notre cas, la définition de $L^{1/2}$ sur les courbes doubles pose problème. Comme toute l'information que nous disposons repose sur ces courbes doubles indexées par M, il nous faut une autre approche. Nous allons reconstruire notre métrique g à l'aide des trois 2-formes sur $\mathcal{Q}$ associées à une donnée I,J et K de structures presque complexes de $\mathcal{Q}$ vérifiant les relations des quaternions. En effet, la connaissance de ces trois 2-formes $\beta_I = g(I.,.)$, $\beta_J = g(J.,.)$ et $\beta_K = g(K.,.)$ suffisent pour retrouver dans un premier temps par exemple la structure presque complexe I puis ensuite la métrique $g(.,.) = -\beta_I(I.,.)$.

Nous retrouverons alors, localement, la métrique quaternion-kählérienne dans des coordonnées adaptées à l'inclusion de M dans $\mathcal{Q}$. Nous observerons que le comportement de cette métrique est de la forme attendue

$$g = \frac{dt^2}{t^2} + g_X + \frac{\gamma_{1,x}(dx_1, dx_2)}{t} + \frac{dx_3^2}{t^2} + \frac{\gamma_{3,x}(dx_4, dx_5)}{t^3}$$

avec g_X la métrique standard de l'espace symétrique hyperbolique $X = H^2_{\mathbb{R}}$ et avec $\gamma_{j,x}$ des métriques dépendant du point x de la fibre X et qui sont des métriques sur l'espace tangent gradué $gr(TM)$.

La première partie de cette thèse sera dédiée à l'étude des géométries paraboliques. Nous suivrons en grande partie la présentation du livre de Čap et Slovák [ČS09]. Nous commencerons par introduire la notion de géométrie parabolique : nous verrons que deux approches sont possibles, l'une globale et l'autre infinitésimale. Nous montrerons que ces deux approches coïncident dans la plupart des cas lorsque nous imposons une condition de normalité et de régularité à nos géométries. Nous finirons cette première partie en présentant les coordonnées distinguées et en montrant le théorème 5.

Dans la deuxième partie, nous chercherons à généraliser la construction de Le Brun de métriques quaternion-kählériennes à partir d'une géométrie conforme. La première étape consistera à relever une géométrie parabolique régulière $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ de type (G, P) en une géométrie parabolique régulière de type (G, Q) sur $\mathcal{G}/Q$ avec $Q \subset P$. Nous aurons ainsi nos premières restrictions algébriques. Ensuite nous verrons quelles sont les conditions algébriques pour avoir un feuilletage par des flots géodésiques de l'espace $\mathcal{G}/Q$. Finalement, nous listerons les géométries paraboliques pour lesquelles nous avons un tel feuilletage : il nous restera alors deux cas, autre que le cas conforme. Pour le cas d'une géométrie parabolique de type $(SO(4,3), P_3)$, nous verrons que l'espace des feuilles possède une structure de contact. Le dernier cas sera traité dans la dernière partie.

Dans la dernière partie, nous donnerons la construction de métriques quaternion-kählériennes avec pour donnée initiale des géométries paraboliques de type (G_2^s, P_1). Nous commencerons par construire l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ de notre futur espace quaternion-kählérien en appliquant ce que nous aurons vu à la deuxième partie. Nous montrerons que cet espace est une variété complexe de dimension 5 et qu'il possède une structure de contact. Nous nous intéresserons ensuite aux courbes doubles C_x que nous déformerons pour avoir un espace de dimension 8 dans lequel va vivre notre nouvelle variété quaternion-kählérienne qui nous sera donnée en appliquant la correspondance

du théorème 2. L'étude de la construction twistorielle inverse nous fournira alors le théorème principal de cette thèse, le théorème 4.

Partie I

Les géométries paraboliques

Chapitre 1

Sous-algèbres et sous-groupes paraboliques

1.1 Sous-algèbres paraboliques

Dans cette partie, nous allons essentiellement suivre la présentation de Calderbank, Diemer et Souček présente dans l'article [CDS05]. Leur approche diffère de celle de Čap et Slovák [ČS09] uniquement par le fait que Čap et Slovák fixent au préalable une structure de Weyl algébrique.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Notons $\mathfrak{u}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{u}$, un sous-espace de $\mathfrak{g}$, pour la forme de Killing $B(.,.)$.

Définition 6 *Une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est dite parabolique si $\mathfrak{p}^\perp$ est le nilradical de $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire son idéal nilpotent maximal.*

Rappel :
- Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite simple si $\mathfrak{g}$ est non abélienne et ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et lui-même.
- Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite semi-simple si c'est une somme directe d'algèbres de Lie simples. Nous avons l'équivalence suivante : $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing est non dégénérée.
- Le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'idéal résoluble maximal de $\mathfrak{g}$.
- Le nilradical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'idéal nilpotent maximal de $\mathfrak{g}$.
- Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite réductible si elle est la somme directe d'une algèbre de Lie semi-simple et d'une algèbre de Lie abélienne. Nous avons l'équivalence suivante : $\mathfrak{g}$ est réductible si et seulement si son radical est égal à son centre.

Ainsi $\mathfrak{p}_0 := \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp$ est une algèbre de Lie réductible nommée le *facteur de Levi*. Soit $\mathfrak{p}^\perp$, $(\mathfrak{p}^\perp)^2 := [\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{p}^\perp]$, $\ldots$,$(\mathfrak{p}^\perp)^{j+1} := [\mathfrak{p}^\perp, (\mathfrak{p}^\perp)^j]$... la suite centrale

descendante de $\mathfrak{p}^\perp$. Comme $\mathfrak{p}^\perp$ est nilpotent, il existe $k \geq 0$ tel que $(\mathfrak{p}^\perp)^{k+1} = 0$ et $(\mathfrak{p}^\perp)^k \neq 0$. De cette manière $\mathfrak{p}^\perp$ possède une filtration (le cas $k = 0$ correspond à $\mathfrak{p}^\perp = 0$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$) et nous obtenons une filtration de $\mathfrak{g}$ en posant $\mathfrak{g}^j := (\mathfrak{p}^\perp)^j$ et $\mathfrak{g}^{-j-1} := (\mathfrak{g}^j)^\perp$ pour $j \geq 1$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-k} \supset \mathfrak{g}^{-k+1} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{-1} \supset \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{p} \supset \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{p}^\perp \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^k \supset \mathfrak{g}^{k+1} = 0.$$

Cette filtration vérifie $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}$ pour $[\ ,\ ]$ le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$. En effet : par définition $[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{j+1}$ pour tout $j \geq 1$. Puis pour $j \leq -1$, soient $X \in \mathfrak{g}^1$, $Y \in \mathfrak{g}^j$ et $W \in \mathfrak{g}^{-j}$ alors $B([X,Y],W) = B(Y,[W,X]) = 0$ et donc $[X,Y] \in \mathfrak{g}^{j-1}$. Et finalement pour $j = 0$, comme $\mathfrak{p}^\perp$ est un idéal de $\mathfrak{p}$ nous avons directement que $[\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^1] = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^\perp] \subseteq \mathfrak{p}^\perp$. Ainsi pour tout $j \in \{-k, \ldots, k\}$, $[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{j+1}$. Nous obtenons ensuite le résultat par récurrence en utilisant la relation de Jacobi. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est donc une algèbre de Lie filtrée et nous pouvons définir son algèbre de Lie graduée associée :

Définition 7 *L'algèbre de Lie graduée associée à $\mathfrak{g}$ est donnée par*
- *l'algèbre $gr(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{j=-k}^{k} gr_j(\mathfrak{g})$ avec $gr_j(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}^j/\mathfrak{g}^{j+1}$*
- *et le crochet $[\cdot,\cdot]$ défini pour tout $X + \mathfrak{g}^{i+1} \in gr_i(\mathfrak{g})$ et tout $Y + \mathfrak{g}^{j+1} \in gr_j(\mathfrak{g})$ par*

$$[X + \mathfrak{g}^{i+1}, Y + \mathfrak{g}^{j+1}] = [X,Y] + \mathfrak{g}^{i+j+1} \in gr_{i+j}(\mathfrak{g})$$

avec le dernier crochet étant le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$.
Une telle algèbre de Lie est dite $|k|$-graduée.

Notons que $gr(\mathfrak{g})_0$ est le facteur de Levi $\mathfrak{p}_0$.

Un point important des sous-algèbres paraboliques est que les filtrations précédentes sont scindées.

Lemme 8 *Les suites exactes suivantes sont scindées (non canoniquement) :*

$$0 \to \mathfrak{g}^{j+1} \to \mathfrak{g}^j \to gr_j(\mathfrak{g}) \to 0.$$

Ce qui induit un isomorphisme d'algèbre de Lie entre $\mathfrak{g}$ et $gr(\mathfrak{g})$.

Preuve du Lemme

Soit σ une involution de Cartan, c'est-à-dire un automorphisme d'algèbre de Lie $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ vérifiant $\sigma^2 = id$ et $h(x,y) := -B(\sigma(x), y)$ est définie positive. Pour $j \in \{-k, \ldots, k\}$ nous avons alors $\mathfrak{g}_j$ le supplémentaire orthogonal pour h de $\mathfrak{g}^{j+1}$ dans $\mathfrak{g}^j$ qui fournit la section voulue. Montrons que nous avons un isomorphisme d'algèbre de Lie. Soit $x \in \mathfrak{g}^i$ un élément h-orthogonal à $\mathfrak{g}^{i+1}$,

c'est-à-dire $\sigma(x) \in (\mathfrak{g}^{i+1})^{\perp} = g^{-i}$, et soit $y \in \mathfrak{g}^j$ un élément h-orthogonal à $\mathfrak{g}^{j+1}$. Alors $[x,y] \in \mathfrak{g}^{i+j}$ et $\sigma([x,y]) = [\sigma(x), \sigma(y)] \in \mathfrak{g}^{-i-j}$, donc $[x,y]$ est h-orthogonal à $\mathfrak{g}^{i+j+1}$. La section induite par σ donne donc un isomorphisme d'algèbre de Lie entre $\mathfrak{g}$ et $gr(\mathfrak{g})$. □

Un tel isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to gr(\mathfrak{g})$ est appelé *structure algébrique de Weyl*. Une structure algébrique de Weyl n'est pas unique mais ces structures sont bien contrôlées par l'élément de graduation présenté ci-dessous.

Lemme 9 *Il existe un unique élément ϵ_0 dans le centre de $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{\perp}$ tel que $[\epsilon_0, x] = jx$ pour tout $x \in gr_j(\mathfrak{g})$ et tout $j \in \{-k, \ldots, k\}$.*

Définition 10 *Cet élément ϵ_0 est nommé élément de graduation. Nous posons $\mathfrak{w} = \{\epsilon \in \mathfrak{p} : \pi_0(\epsilon) = \epsilon_0\}$ l'ensemble des relevés de ϵ_0 à $\mathfrak{p}$, avec $\pi_0 : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_0$ la projection naturelle.*

Preuve du lemme

Comme $gr(\mathfrak{g})$ est semi-simple, la dérivation $u : x \mapsto jx$ pour $x \in gr_j(\mathfrak{g})$ (i.e. u vérifie $u([x,y]) = [u(x), y] + [x, u(y)]$) doit être intérieure, c'est-à-dire égale à $ad(\epsilon_0)$ pour un $\epsilon_0 \in gr(\mathfrak{g})$ qui est unique car $Z(\mathfrak{g}) = 0$. Puis $[\epsilon_0, \epsilon_0] = 0$ et $[\epsilon_0, x] = 0$ pour tout $x \in gr_0(\mathfrak{g})$ donc ϵ_0 est dans le centre de $gr_0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{p}_0$. □

Les éléments de $\mathfrak{w}$ sont exactement les sections induisant des isomorphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $gr(\mathfrak{g})$: les isomorphismes sont donnés par les décompositions en espaces propres de $ad(\epsilon)$ pour $\epsilon \in \mathfrak{w}$. Nous appellerons donc indifféremment une structure algébrique de Weyl, un élément $\epsilon \in \mathfrak{w}$ ou un isomorphisme $\epsilon : \mathfrak{g} \to gr(\mathfrak{g})$. Cet espace $\mathfrak{w}$ est un espace affine modelé sur $\mathfrak{p}^{\perp}$.

1.2 Sous-groupes paraboliques

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $A \subset \mathfrak{g}$, le normalisateur de A est le sous-groupe $N_G(A) := \{g \in G : Ad(g)(A) \subset A\}$. Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de Lie de $\mathfrak{g}$ alors nous avons le résultat suivant.

Lemme 11 *L'ensemble $P := \bigcap_{i=-k}^{k} N_G(\mathfrak{g}^i)$ est un sous-groupe fermé d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$.*

Preuve du lemme

La sous-algèbre $\mathfrak{g}^i$ est fermée dans $\mathfrak{g}$ donc le normalisateur $N_G(\mathfrak{g}^i)$ est un sous-groupe fermé de G. Comme $Ad(\exp(X)) = e^{ad(X)}$, nous voyons que l'algèbre de Lie de P est $\mathfrak{q} := \{X \in \mathfrak{g} : ad(X)(\mathfrak{g}^i) \subset \mathfrak{g}^i\}$. Or la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est clairement dans la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{q}$. Réciproquement : soit $X \in \mathfrak{q}$, comme $X \in \mathfrak{g}$, il existe $j \in \{-k, \ldots, k\}$ tel que $X \in \mathfrak{g}^j$ et $X \notin \mathfrak{g}^{j+1}$. Alors l'élément de graduation ϵ_0 de $\mathfrak{p}$ agit sur $gr_j(X)$ par l'action adjointe et donne $[\epsilon_0, gr_j(X)] = jgr_j(X) \neq 0$. Si nous prenons un élément de $\epsilon \in \mathfrak{w}$, c'est-à-dire un relevé de ϵ_0 dans $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{p}$, alors $gr_j(ad(X)(\epsilon)) = gr_j([X, \epsilon]) \neq 0$. Le nombre j est donc négatif ou nul car $ad(X)(\epsilon) \in \mathfrak{g}^0$. Ce qui signifie que $X \in \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{p}$. □

Définition 12 *Un sous-groupe parabolique de G et d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est un sous-groupe vivant entre $\bigcap_{i=-k}^{k} N_G(\mathfrak{g}^i)$ et sa composante connexe de l'identité.*

Montrons à présent que la donnée d'une structure algébrique de Weyl produit un relevé du groupe quotient $P_0 := P/\exp(\mathfrak{p}^\perp)$ pour $\Pi_0 : P \to P_0$ avec l'hypothèse supplémentaire que P_0 stabilise l'élément de graduation $\epsilon_0 \in \mathfrak{p}_0$ (ce qui est automatique si P_0 est connexe).

Lemme 13 *Le sous-groupe $\exp(\mathfrak{p}^\perp)$ de P agit librement et transitivement sur $\mathfrak{w}$.*

Preuve du lemme

Soient $\gamma \in \mathfrak{p}^\perp$ et $\epsilon \in \mathfrak{w}$, nous avons $Ad(\exp(\gamma))(\epsilon) = \exp(ad(\gamma))(\epsilon) = \epsilon + [\gamma, \epsilon] + \cdots + \frac{ad^k}{k!}(\gamma)(\epsilon)$. Le résultat est direct lorsque nous savons que $\psi_\epsilon : \gamma \mapsto [\gamma, \epsilon] + \cdots + \frac{ad^k}{k!}(\gamma)(\epsilon)$ est une bijection sur $\mathfrak{p}^\perp$. Or soit $\gamma \in \mathfrak{g}_i$ où $\mathfrak{g}_i$ est l'espace propre de valeur propre i de $ad(\epsilon)$ et $i > 0$ nous avons $\psi_\epsilon(\gamma) = i\gamma + \frac{i^2}{2}\gamma + \cdots + \frac{i^k}{k!}\gamma = (\sum_{n=1}^{k} \frac{i^n}{n!})\gamma$. Il est alors clair que ψ_ϵ est une bijection de $\mathfrak{p}^\perp$ car $\mathfrak{p}^\perp = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathfrak{g}_i$. □

Ainsi le stabilisateur G_0 de $\epsilon \in \mathfrak{w}$ est un sous-groupe de P se projetant de manière isomorphe sur P_0. Ce sous-groupe est nommé *sous-groupe de Levi* et est simplement le groupe $\{g \in P : Ad(g)(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_i \ \forall i \in \{-k, \ldots, k\}\}$.

Chapitre 2

Géométries paraboliques et structures paraboliques infinitésimales

Il existe deux approches de l'idée de géométrie parabolique qui donnent deux définitions différentes mais avec de fort liens. Ces deux notions sont décrites dans le livre de Čap et Slovák [ČS09], nous allons donc reprendre leurs terminologies pour différentier ces deux notions de géométries différentielles :

- La première approche vise à mimer la géométrie globale de l'espace homogène G/P où P est un sous-groupe parabolique de G. Or la particularité d'un espace homogène est que lors d'une étude locale, nous pouvons nous ramener à un point base grâce à l'action à gauche de G sur G/P. Pour retrouver cette particularité, la première approche consiste à se donner une P-fibration principale $\mathcal{G}$ sur M et une connexion de Cartan sur $\mathcal{G}$, objet qui dans le modèle homogène est simplement l'inverse de la fonction $G \times \mathfrak{g} \to TG$ donnée par $(g, X) \mapsto L_X(g)$ avec L_X le champ de vecteurs invariant à gauche sur G vérifiant $L_X(e) = X \in T_eG$.
- La seconde approche consiste à considérer le problème infinitésimalement. C'est-à-dire à se donner les bons objets pour qu'en tout point x de notre variété M, T_xM mime le comportement du tangent $T_e(G/P) = G \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Ces objets sont alors donnés par la filtration de $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ et l'action du Levi sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

La première approche est plus forte que la seconde mais dans la plupart des cas nous obtenons la même chose.

Commençons par traiter la première notion qui selon la terminologie de Čap et Slovák se nomme géométrie parabolique.

2.1 Géométries paraboliques

Commençons par définir les éléments qui vont nous permettre de définir la notion de géométrie parabolique. Pour cela prenons P un groupe de Lie et M une variété.

Définition 14 *Un P-fibré principal est un fibré $p : \mathcal{G} \to M$ muni d'une action de P à droite sur l'espace total $\mathcal{G}$, telle que l'action préserve les fibres de p et soit simple et transitive. Autrement dit, les orbites de l'action de P sont les fibres $\mathcal{G}_x = p^{-1}(x)$ et chacune est isomorphe à P.*

Fixons à présent G est un groupe de Lie semi-simple d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $P \subset G$ un sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ et M une variété muni d'un P-fibré principal $p : \mathcal{G} \to M$.

Définition 15 *Une connexion de Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$, est une 1-forme sur $\mathcal{G}$ à valeur dans $\mathfrak{g}$ vérifiant :*

1. *$(r^h)^*\omega = Ad(h^{-1}) \circ \omega$ pour tout $h \in P$ avec r^h l'action à droite de $h \in P$ sur $\mathcal{G}$,*
2. *$\omega(\zeta_X(u)) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{p}$ avec $\zeta_X(u) = \frac{d}{dt}|_0 r^{\exp(tX)}(u)$ le champ de vecteurs fondamental associé à X,*
3. *$\omega(u) : T_u\mathcal{G} \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme linéaire pour tout $u \in \mathcal{G}$.*

Enfin nous pouvons définir ce qu'est une géométrie parabolique.

Définition 16 *Une géométrie parabolique de type (G, P) sur une variété M est la donnée $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$, d'un P-fibré principal $p : \mathcal{G} \to M$ et d'une connexion de Cartan ω.*

À présent, observons un peu l'espace tangent de M lorsque nous le munissons d'une géométrie parabolique $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$.

Propriété 17 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique sur une variété M. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p} & \longrightarrow & TM \\ [\![u, X + \mathfrak{p}]\!] & \longmapsto & T_u p(\omega(u)^{-1}(X)) \end{array} \tag{2.1.1}$$

est un isomorphisme.

Preuve de la propriété

Soit $(\tilde{u}, u) \in \mathcal{G}^2$ et $(X, \tilde{X}) \in \mathfrak{g}^2$ tels que $[\![u, X + \mathfrak{p}]\!] = [\![\tilde{u}, \tilde{X} + \mathfrak{p}]\!]$, alors il existe $h \in P$ tel que $u = \tilde{u} \cdot h$ et $X + \mathfrak{p} = Ad(h^{-1})(\tilde{X}) + \mathfrak{p}$. Or d'après la P-équivariance de la connexion de Cartan ω (la propriété 1) nous avons

$$\begin{aligned}
T_u p(\omega(u)^{-1}(X)) &= T_u p(\omega(u)^{-1}(X + \mathfrak{p})) \\
&\quad \text{car } \ker(p_*) = \omega^{-1}(\mathfrak{p}) \text{ d'après la propriété 2} \\
&= T_{\tilde{u}\cdot h} p(\omega(\tilde{u} \cdot h)^{-1}(Ad(h^{-1})(\tilde{X}) + \mathfrak{p})) \\
&= T_{\tilde{u}\cdot h} p(T_{\tilde{u}} r^h(\omega(\tilde{u})^{-1}(Ad(h)(Ad(h^{-1})(\tilde{X}))))) \\
&\quad \text{par } P\text{-équivariance de } \omega \\
&= T_{\tilde{u}}(p \circ r^h)(\omega(\tilde{u})^{-1}(\tilde{X})) \\
&= T_{\tilde{u}} p(\omega(\tilde{u})^{-1}(\tilde{X})).
\end{aligned}$$

Notre application est ainsi bien définie et le caractère bijectif provient de la dernière propriété de la connexion de Cartan. □

Nous voyons ainsi que la filtration sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ induit une filtration sur $TM = T^{-k}M \supset T^{-k+1}M \supset \cdots \supset T^{-1}M$ de la manière suivante :

$$T^i M := p_*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)).$$

L'espace cotangent T^*M est égal à $\mathcal{G} \times_P \mathfrak{p}^\perp$ (car $\mathfrak{p}^\perp$ est isomorphe à $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$ par la forme de Killing). C'est donc un fibré en algèbres de Lie nilpotentes et le fibré nilradical du fibré $\mathfrak{p}_M := \mathcal{G} \times_P \mathfrak{p}$. Le quotient $\mathfrak{p}_{M,0} := \mathfrak{p}_M / T^*M = \mathcal{G} \times_P \mathfrak{p}_0$ est alors un fibré en algèbres de Lie réductibles. De plus nous disposons sur le fibré $\mathfrak{p}_{M,0}$ d'une section de graduation canonique E_0 qui n'est autre que $\mathcal{G} \times_P \{\epsilon_0\}$ car $\epsilon_0 \in \mathfrak{p}_0$ est P-invariante. Nous pouvons ainsi à présent définir la notion de structure de Weyl comme précédemment.

Définition 18 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique sur M. Nous définissons une structure de Weyl E sur M comme étant un relevé lisse de la section de graduation E_0 à une section de $\mathfrak{p}_M$.*

Une structure de Weyl revient donc à choisir en chaque point une structure de Weyl algébrique. Une structure de Weyl est alors une section d'un fibré affine $\mathfrak{w}_M := \mathcal{G} \times_P \mathfrak{w}$. Ainsi des structures de Weyl existent toujours et forment un espace affine de direction l'espace des 1-formes de M. Remarquons que cette définition dû à Calderbank, Diemer et Souček s'avère être équivalente à celle de Čap et Slovák qui pour définir une structure de Weyl fixent avant tout une structure de Weyl algébrique.

Remarque 19 *Faisons l'observation importante suivante : une construction (pour un P-module filtré V) faite à partir de la donnée d'une structure algébrique de Weyl procure (pour le fibré associé $\mathcal{G} \times_P V$) une construction faite à partir d'une structure de Weyl. Par exemple une structure algébrique de Weyl procure un isomorphisme $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$, mais une structure de Weyl E est la donnée P-équivariante d'une structure algébrique de Weyl en chaque point de $u \in \mathcal{G}$, donc E fournit lui aussi un isomorphisme, l'isomorphisme $\mathcal{G} \times_P \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathcal{G} \times_P \mathfrak{g})$.*

2.2 Structures paraboliques infinitésimales

Définition 20 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Soit P un sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie associé une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$. Une structure parabolique infinitésimale de type (G, P) sur une variété M est la donnée :*

1. *d'une filtration $TM = T^{-k}M \supset \cdots \supset T^{-1}M$ du fibré tangent de M telle que pour tout $i \in \{-k, \ldots, -1\}$, $\dim(T^iM) = \dim(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{p})$;*
2. *et d'une réduction de la structure de groupe du fibré gradué associé $gr(TM)$ à la structure de groupe $P_0 = P/\exp(\mathfrak{p}^\perp)$ par rapport à l'homomorphisme $Ad : P_0 \to GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$.*

Précisons ce que signifie la deuxième partie de notre définition. Nous définissons de manière naturelle le fibré gradué associé à TM par $gr_i(TM) := T^iM/T^{i+1}M$ pour tout $i \in \{-k, \ldots, -1\}$. Comme pour tout i, $\dim(T^iM) = \dim(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{p})$ nous avons $\dim(gr_i(TM)) = \dim(gr_i(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})) = \dim(gr_i(\mathfrak{g}))$. Nous possédons donc le fibré $\mathcal{P} := GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(TM))$ au dessus de M. Une réduction à la structure de groupe P_0 correspond à la donnée d'un P_0-fibré principal $\mathcal{E}$ et d'une injection $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ respectant l'inclusion $Ad : P_0 \to GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$. Ce qui signifie que pour tout $h \in P_0$ et tout $u \in \mathcal{E}$, $\Phi(u \cdot h) = \Phi(u) \cdot Ad(h)$.

Nous allons voir qu'il existe une définition analogue en terme de 1-forme sur le fibré $\mathcal{E}$, adaptée à la filtration naturelle de l'espace tangent $T\mathcal{E}$. Donnons cette filtration : soit $p_0 : \mathcal{E} \to M$ est un P_0-fibré principal sur M, alors la filtration de TM engendre naturellement une filtration de $T\mathcal{E}$ de la manière suivante : $T^0\mathcal{E} := \ker(p_{0*})$ et $T^i\mathcal{E} := p_0^*(T^iM)$ pour tout $i \in \{-k, \ldots, -1\}$. Par construction $Tp_0 : T\mathcal{E} \to TM$ préserve les filtrations et chaque $T^i\mathcal{E}$ est stable par l'action de P_0 à droite. En effet, soit $u \in \mathcal{E}$, $\xi \in T_u\mathcal{E}$ et $h \in P_0$, $T_{r^h(u)}p_0(\xi \cdot h) = T_{r^h(u)}p_0(T_u r^h(\xi)) = T_u(p_0 \circ r^h)(\xi) = T_u p_0(\xi)$ car $\mathcal{E}$ est un

P_0-fibré principal. Notant $L(A,B)$ l'espace des applications linéaires entre A et B, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Proposition 21 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Soit P un sous-groupe parabolique de G de sous-algèbre parabolique de Lie $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$. Soit M une variété. Alors la donnée d'une structure parabolique infinitésimale $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \Phi : \mathcal{E} \to GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(TM)))$ est équivalente à la donnée :*

1. *d'une filtration $TM = T^{-k}M \supset \cdots \supset T^{-1}M$ du fibré tangent de M telle que pour tout $i \in \{-k, \ldots, -1\}$, $\dim(T^iM) = \dim(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{p})$;*
2. *d'un P_0-fibré principal $p_0 : \mathcal{E} \to M$;*
3. *et d'une collection $\theta = (\theta_{-k}, \ldots, \theta_{-1})$ de sections lisses*

$$\theta_i \in \Gamma(L(T^i\mathcal{E}, gr_i(\mathfrak{g}))),$$

P_0-équivariantes dans le sens où $(r^h)^*\theta_i = Ad(h^{-1}) \circ \theta_i$ pour tout $h \in P_0$ et telles que pour tout $u \in \mathcal{E}$ et tout $i \in \{-k, \ldots, -1\}$, $\ker(\theta_i(u) : T^i_u\mathcal{E} \to gr_i(\mathfrak{g})) = T^{i+1}_u\mathcal{E} \subset T^i_u\mathcal{E}$.

Preuve de la proposition

1) Étant donné les trois derniers points montrons que nous obtenons bien une structure parabolique infinitésimale sur M. Nous possédons déjà la filtration du plan tangent de M et le P_0-fibré principal. Il ne reste donc plus qu'à trouver une inclusion $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{P} = GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(TM))$ respectant $Ad : P_0 \to GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$.

Soit $u \in \mathcal{E}$, $\theta_i(u) : T^i_u\mathcal{E} \to gr_i(\mathfrak{g})$ est de noyau $T^{i+1}_u\mathcal{E}$. Par dimension, cette application linéaire induit donc un isomorphisme $\underline{\theta_i}(u) : T^i_u\mathcal{E}/T^{i+1}_u\mathcal{E} \to gr_i(\mathfrak{g})$. Par ailleurs, p_{0*} préserve les filtrations et définit donc une application $T_up_0 : gr_i(T_u\mathcal{E}) \to gr_i(T_xM)$ avec $x = p_0(u)$ et $i \in \{-k, \ldots, -1\}$. Cette application linéaire surjective est par dimension un isomorphisme. Nous pouvons donc définir l'isomorphisme $\tilde{\theta}_i(u) := \underline{\theta_i}(u) \circ (T_up_0)^{-1} : gr_i(T_xM) \to gr_i(\mathfrak{g})$. La collection $\theta(u) = (\theta_{-k}(u), \ldots, \theta_{-1}(u))$ peut alors être interprétée comme un isomorphisme d'algèbres graduées $\tilde{\theta}(u) : gr(T_xM) \to gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$. Son inverse désigne ainsi un élément de $\mathcal{P}$. Nous obtenons de cette manière $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ définie par $u \mapsto \tilde{\theta}^{-1}(u)$.

Vérifions à présent la P_0-équivariance de Φ. Soit $h \in P_0$ et $u \in \mathcal{E}$ alors $\theta(u \cdot h) = Ad(h^{-1}) \circ \theta(u)$ d'après la propriété de P_0-équivariance des θ_i. Nous avons donc $\theta^{-1}(u \cdot h) = \theta^{-1}(u) \circ Ad(h)$ et finalement $\Phi(u \cdot h) = \Phi(u) \cdot Ad(h)$.

2) Réciproquement, fixons-nous une structure parabolique infinitésimale $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \Phi : \mathcal{E} \to GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(TM)))$ sur M, alors nous

possédons déjà la filtration et le P_0-fibré principal. Il ne nous reste plus qu'à retrouver la collection des 1-formes $\theta = (\theta_{-k}, \ldots, \theta_{-1})$. Soit $x \in M$ et $v \in \mathcal{P}_x$, alors v est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées $v : gr(TM) \to gr(T_xM)$. Notons $q : \mathcal{P} \to M$. Soit $i \in \{-k, \ldots, -1\}$ et $\xi \in T^i_v\mathcal{P} = q^*(T^iM)$, notons $[T_vq(\xi)]_i$ la classe de $T_vq(\xi)$ dans $gr_i(T_xM)$ et posons :

$$\Theta_i(v)(\xi) := v^{-1}([T_vq(\xi)]) \in gr_i(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) = gr_i(\mathfrak{g}).$$

Nous venons de définir une 1-forme $\Theta_i \in \Gamma(L(T^i\mathcal{P}, gr_i(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})))$ lisse, de noyau $\ker(\Theta_i(v)) = T^{i+1}_v\mathcal{P}$ (car si $\xi \in T^i\mathcal{P}$, $[\xi]_i = 0$ est équivalent à $\xi \in T^{i+1}\mathcal{P}$). De plus Θ_i est $GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$-équivariante au sens suivant : soit ψ un élément de $GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$ alors $(r^\psi)^*\Theta_i = \psi^{-1} \circ \Theta_i$. En effet, pour $v \in \mathcal{P}$, $\xi \in T^i_v\mathcal{P}$ et $\psi \in GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$ nous avons

$$\begin{aligned}(r^\psi)^*\Theta_i(v)(\xi) &= \Theta_i(v \circ \psi)((r^\psi)_*\xi) \\ &= \psi^{-1} \circ v^{-1}([T_{v\circ\psi}q(T_vr^\psi(\xi))]_i) \\ &= \psi^{-1} \circ v^{-1}([T_vq(\xi)]_i)\end{aligned}$$

car $q \circ r^\psi = q$.

Posons à présent $\theta_i = \Phi^*\Theta_i$. Par construction des filtrations de $T\mathcal{P}$ et de $T\mathcal{E}$ il est clair que $T\Phi$ préserve ces filtrations : θ_i ainsi défini est donc un élément de $\Gamma(L(T^i\mathcal{E}, gr_i(\mathfrak{g})))$. La 1-forme θ_i est lisse et vérifie $\ker\theta_i = \Phi^*T^{i+1}\mathcal{P} = T^{i+1}\mathcal{E}$. Reste à vérifier la P_0-équivariance. Soit $u \in \mathcal{E}$, $\xi \in T^i_u\mathcal{E}$ et $h \in P_0$ nous avons :

$$\begin{aligned}(r^h)^*\theta_i(u)(\xi) &= (r^h)(\Phi^*\Theta_i)(u)(\xi) \\ &= \Theta_i(\Phi(u \cdot h))(T_{u\cdot h}\Phi(T_ur^h(\xi))) \\ &= \Theta_i(\Phi(u) \cdot Ad(h))(T_u(\Phi \circ r^h)(\xi)) \\ &\quad \text{car } \Phi \text{ respecte } Ad : P_0 \to Gl_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})) \\ &= \Theta_i(\Phi(u) \cdot Ad(h))(T_{\Phi(u)}r^{Ad(h)}(T_u\Phi(\xi)) \\ &= (r^{Ad(h)})^*(\Phi^*\Theta_i)(u)(\xi) \\ &= Ad(h^{-1}) \circ \theta_i(u)(\xi) \\ &\quad \text{par la } Gl_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))\text{-équivariance de } \Theta_i.\end{aligned}$$

□

Tout comme précédemment nous allons observer ce qu'une telle structure implique sur l'espace tangent à M. Notons qu'ici nous n'avons plus un P-fibré principal $\mathcal{G}$ et une connexion de Cartan qui identifie tout $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ à T_xM pour un $x \in M$ fixé, nous avons seulement une collection $\theta = (\theta_{-k}, \ldots, \theta_{-1})$ qui identifie $gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ à $gr(T_xM)$.

Propriété 22 *Soit* $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$ *une structure parabolique infinitésimale sur une variété* M*. Alors pour tout* $i \in \{-k, \dots, -1\}$*, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} \times_{P_0} gr_i(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) & \longrightarrow & gr_i(TM) \\ [\![u, X + \mathfrak{g}^{i+1}]\!] & \longmapsto & [T_u p_0(\theta_i(u)^{-1}(X))]_i \end{array}$$

avec $[Y]_i$ *la classe de* $Y \in T^iM$ *dans* $gr_i(TM)$*, est un isomorphisme.*

Preuve de la propriété

De la même manière qu'avec une connexion de Cartan, grâce aux propriétés analogues des θ_i nous voyons que ces applications sont bien définies et sont même des bijections. □

Nous allons à présent voir qu'une géométrie parabolique induit une structure parabolique infinitésimale de manière canonique.

2.3 Une géométrie parabolique procure une structure parabolique infinitésimale

Munissons-nous d'une géométrie parabolique $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ sur M de type (G, P). Pour montrer que M possède alors une structure parabolique infinitésimale de type (G, P), nous allons explicitement donner notre structure infinitésimale sous la forme $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$ car il nous sera utile, pour la suite, de connaitre l'expression de ces 1-formes θ_i.

Le sous-groupe P agit librement sur $\mathcal{G}$, donc il en va de même pour le sous-groupe normal nilpotent $P^\perp = \exp(\mathfrak{p}^\perp) = \{g \in P : Ad(g)(\mathfrak{g}^i) \subset \mathfrak{g}^{i+1} \ \forall i \in \{-k, \dots, k\}\}$ de P. Nous pouvons alors définir $\mathcal{E}$ par :

$$\mathcal{E} := \mathcal{G}/P^\perp = \mathcal{G} \times_P P/P^\perp. \tag{2.3.1}$$

Nous obtenons ainsi un P_0-fibré principal $p_0 : \mathcal{E} \to M$. Notons $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$ l'application naturelle allant de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{E}$.

Rappelons que nous avons une filtration naturelle de $T\mathcal{G}$, et de TM, donnée par la connexion de Cartan $\omega : T^i\mathcal{G} := \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ pour tout $i \in \{-k, \dots, k\}$ et $T^iM := p_*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i))$ pour tout $i < 0$. Il est alors naturel de définir une filtration de $\mathcal{E}$ de la manière suivante : $T^0\mathcal{E} := \ker(p_{0*})$ et $T^i\mathcal{E} := p_0^*(T^iM) = \pi_*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}^i))$ pour tout $i < 0$. Les applications tangentes entre ces espaces préservent donc bien les filtrations.

La connexion de Cartan nous fournit les isomorphismes suivant :

$$\begin{aligned} T\mathcal{G} &\simeq \mathcal{G}\times\mathfrak{g},\\ T\mathcal{E} &\simeq \mathcal{G}\times_{P^\perp}\mathfrak{g}/\mathfrak{p}^\perp,\\ TM &\simeq \mathcal{G}\times_P\mathfrak{g}/\mathfrak{p}\end{aligned}$$

et les relations équivalentes pour les filtrations : $T^iM \simeq \mathcal{G}\times_P \mathfrak{g}^i/\mathfrak{p}$... Remarquons que $T^0\mathcal{G} = \mathcal{G}\times\mathfrak{p} = \ker(p_*)$, $T^1\mathcal{G} = \mathcal{G}\times\mathfrak{p}^\perp = \ker(\pi_*)$ et $T^0\mathcal{E} = \mathcal{G}\times_{P^\perp}\mathfrak{p} = \ker p_{0*}$.

Retrouvons à présent notre collection $\theta = (\theta_{-k},\dots,\theta_{-1})$ de 1-formes sur la filtration de $T\mathcal{E}$. Pour cela, prenons $u\in\mathcal{G}$, $i\in\{-k,\dots,-1\}$ et $\tilde\xi\in T^i_u\mathcal{G}$. Posons $u_0=\pi(u)\in\mathcal{E}$ et $\xi = T_u\pi(\tilde\xi)\in T_{u_0}\mathcal{E}$. Nous définissons alors $\theta_i(u_0)(\xi)$ comme étant la classe de $\omega(u)(\tilde\xi)$ dans $gr_i(\mathfrak{g})$:

$$\theta_i(u_0)(\xi) = [\omega(u)(\tilde\xi)]_i. \tag{2.3.2}$$

Proposition 23 *Soit $(p:\mathcal{G}\to M,\omega)$ une géométrie parabolique sur une variété M de type (G,P). Alors nous disposons d'une structure parabolique infinitésimale $(p_0:\mathcal{E}\to M,\{T^iM\},\{\theta_i\})$ sur M avec*

$$\mathcal{E} := \mathcal{G}/P^\perp = \mathcal{G}\times_P P/P^\perp \quad et \quad \theta_i(u_0)(\xi) = [\omega(u)(\tilde\xi)]_i$$

pour tout $u_0\in\mathcal{E}$, u dans la fibre de $\pi:\mathcal{G}\to\mathcal{E}$ au dessus de u_0, $\xi\in T^i\mathcal{E}$ et $\tilde\xi\in(T\pi)^{-1}(\xi)$ et avec $[\cdot]_i$ la classe de $\cdot$ dans $gr_i(\mathfrak{g})$.

Preuve de la proposition

Il nous reste à montrer que ces θ_i sont bien définies et ont les comportements voulus. Fixant le choix de $u\in\mathcal{G}$, soit $\tilde\eta$ un autre relevé de ξ alors $\tilde\xi-\tilde\eta\in\ker(\pi_*)=T^1\mathcal{G}$, c'est-à-dire $\omega(u)(\tilde\xi-\tilde\eta)\in\mathfrak{g}^1$. Nous avons donc bien $[\omega(u)(\tilde\xi)]_i = [\omega(u)(\tilde\eta)]_i$ car $i<0$. Maintenant si nous prenons un autre point $v\in\mathcal{G}$ dans $\pi^{-1}(u_0)$ alors il existe $g\in P^\perp$ tel que $v=u\cdot g$. Or si nous nous munissons d'un relevé $\tilde\xi\in T_u\mathcal{G}$ de $\xi\in T_{u_0}\mathcal{E}$, alors $T_ur^g(\tilde\xi)\in T_{u\cdot g}\mathcal{G}$ est aussi un relevé de ξ, avec r^g l'action à droite de g sur $\mathcal{G}$. L'équivariance de ω donne alors $\omega(u\cdot g)(T_ur^g(\tilde\xi)) = Ad(g^{-1})(\omega(u)(\tilde\xi))$. Ainsi si $\xi\in T^i_{u_0}\mathcal{E}$, $[\omega(u\cdot g)(T_ur^g(\tilde\xi))]_i = [Ad(g^{-1})(\omega(u)(\tilde\xi))]_i = [\omega(u)(\tilde\xi)]_i$ car $Ad(g^{-1})(\mathfrak{g}^i)\subset\mathfrak{g}^{i+1}$. Nos θ_i sont donc bien définies.

Montrons que ces 1-formes sont lisses. Soit σ une section locale de $\pi:\mathcal{G}\to\mathcal{E}$, considérons la fonction lisse $f=[(\sigma^*\omega)|_{T^i\mathcal{E}}]_i$. Par définition, pour tout $u_0\in\mathcal{E}$ et tout $\xi\in T^i_{u_0}\mathcal{E}$ nous avons $f(\xi) = [\omega(\sigma(u_0))(T_{u_0}\sigma(\xi))]_i = \theta_i(\xi)$ car $T_{u_0}\sigma(\xi)$ est un relevé de ξ dans $T_{\sigma(u_0)}\mathcal{G}$. Nos 1-formes θ_i sont donc lisses.

Soit $u_0\in\mathcal{E}$, $i\in\{-k,\dots,-1\}$ et $\xi\in T^i_{u_0}\mathcal{E}$ alors $\theta_i(\xi)=0$ si et seulement s'il existe un relevé $\tilde\xi$ de ξ tel que $\omega(\tilde\xi)\in\mathfrak{g}^{i+1}$, c'est-à-dire si $\tilde\xi\in T^{i+1}\mathcal{G}$. Or ceci est équivalent au fait que $\xi\in T^{i+1}\mathcal{E}=\pi_*(T^{i+1}\mathcal{G})$, donc $\ker(\theta_i)=T^{i+1}\mathcal{E}$.

Enfin vérifions la P_0-équivariance des θ_i. Comme le sous-groupe $P^\perp$ est un sous-groupe normal de P, la projection $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$ est P_0-équivariante. Ainsi pour tout $\xi \in T^i_{u_0}\mathcal{E}$, $\tilde{\xi}$ un relevé de ξ dans $T^i_u\mathcal{G}$ et tout $g \in P_0$ nous avons (en notant r^g les actions à droite de g sur $\mathcal{G}$ et sur $\mathcal{E}$) :

$$\begin{aligned}
\theta_i(u_0 \cdot g)(T_{u_0}r^g(\xi)) &= [\omega(u \cdot g)(T_u r^g(\tilde{\xi}))]_i \quad \text{car } \pi \text{ est } P_0\text{-équivariante} \\
&= [Ad(g^{-1}) \circ \omega(u)(\tilde{\xi})]_i \quad \text{par } P\text{-équivariance de } \omega \\
&= Ad(g^{-1}) \circ [\omega(u)(\tilde{\xi})]_i \quad \text{car } \mathfrak{g} \in P_0 \\
&= Ad(g^{-1}) \circ \theta_i(u_0)(\xi).
\end{aligned}$$

□

Nous avons montré qu'une géométrie parabolique induit bien une structure parabolique infinitésimale. Nous allons à présent montrer une réciproque, c'est-à-dire qu'à partir d'une structure parabolique infinitésimale nous allons reconstruire une connexion de Cartan. Le problème étant, nous allons le voir, que cette construction n'est pas canonique. Il nous restera alors du travail pour établir un théorème d'unicité.

2.4 Construction d'une connexion de Cartan en partant d'une structure parabolique infinitésimale

Donnons-nous, sur une variété M, une structure parabolique infinitésimale $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$. Nous cherchons à construire une connexion de Cartan dont la structure infinitésimale induite est notre structure initiale. Cependant une telle connexion n'est pas unique et notre construction va donc nécessiter un certain nombre de choix.

Pour construire un P-fibré principal $p : \mathcal{G} \to M$ il nous faut une inclusion $i : P_0 \hookrightarrow P$ afin de définir $\mathcal{G}$ par $\mathcal{E} \times_i P$. De plus pour recoller les θ_i entre eux il va nous falloir un isomorphisme $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$. Pour ces deux raisons notre premier choix va être celui d'une structure algébrique de Weyl $\epsilon : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$. Ensuite nous pouvons voir que même recollées, les θ_i ne définissent pas une 1-forme sur $\mathcal{E}$ car il nous manque une 1-forme dans $\Gamma(L(T^0\mathcal{E}, \mathfrak{g}^0))$ (ici se situe le choix fondamental). Nous allons voir que ces deux choix vont être suffisants.

Fixons-nous alors une structure algébrique de Weyl $\epsilon : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$. Cela nous procure ainsi une inclusion $i : P_0 \hookrightarrow P$. Posons $G_0 = i(P_0)$ et définissons

à présent le P-fibré principal $p : \mathcal{G} \to M$ par $\mathcal{G} := \mathcal{E} \times_i P = \mathcal{E} \times_{G_0} P$. Comme nous avons fixé cette structure algébrique de Weyl, utilisons-là complètement, c'est-à-dire qu'en notant $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ associée à notre structure algébrique de Weyl nous considérons les éléments θ_i comme étant à valeur dans $\mathfrak{g}_i$ et non plus dans $gr_i(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$, nous considérons $p_0 : \mathcal{E} \to M$ comme un G_0-fibré principal et non plus comme un P_0-fibré principal etc...

Maintenant choisissons une connexion sur $p_0 : \mathcal{E} \to M$, c'est-à-dire la donnée d'un espace horizontal $H\mathcal{E}$ invariant sous l'action principale de G_0. Notons $\gamma \in \Omega^1(\mathcal{E}, \mathfrak{g}_0)$, la projection sur $V\mathcal{E} = \ker(p_0)$ parallèlement à $H\mathcal{E}$ dans $T\mathcal{E}$. Cette 1-forme peut bien être vue à valeur dans $\mathfrak{g}_0$ car $V\mathcal{E} = \ker(p_0) = T^0\mathcal{E} = \{\zeta_X : X \in \mathfrak{p}_0\}$ avec ζ_X le champ de vecteurs fondamental associé à X. Nous avons donc $\gamma(\zeta_X) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_0$ et l'invariance de $H\mathcal{E}$ se traduit sur γ par une G_0 équivariance : $(r^g)^*\gamma = Ad(g^{-1}) \circ \gamma$ pour tout $\mathfrak{g} \in G_0$.

Posons $H^i\mathcal{E} := T^i\mathcal{E} \cap H\mathcal{E}$ pour tout $i \in \{-k, \ldots, -1\}$. Rappelons que $T^i\mathcal{E}$ est défini par $p_0^*(T^iM)$ lorsque nous nous donnons une structure parabolique infinitésimale. Soit $u_0 \in \mathcal{E}$, l'application $T_{u_0}p_0$ induit un isomorphisme de $H_{u_0} \xrightarrow{\sim} T_xM$ avec $x = p_0(u_0)$. Par construction, cet isomorphisme préserve les filtrations.

Cet espace horizontal ainsi que notre structure algébrique de Weyl nous fournissent des projections canoniques de $T\mathcal{E}$ sur chaque $H^i\mathcal{E}$. Construisons ces projections. Commençons par rappeler que $gr(TM) \simeq \mathcal{E} \times_{G_0} gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$. Ainsi notre structure algébrique de Weyl $\epsilon : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$ induit un isomorphisme $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$, G_0-équivariant (car G_0 est exactement le stabilisateur de $\epsilon \in \mathfrak{w}$) et donc un isomorphisme $\tilde{\Psi} : TM \xrightarrow{\sim} gr(TM)$. Comme Tp_0 respecte les filtrations nous avons même un isomorphisme $\Psi : H\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} gr(H\mathcal{E})$. L'espace tangent $T\mathcal{E}$ se décompose donc comme $T\mathcal{E} = V\mathcal{E} \oplus H\mathcal{E} = V\mathcal{E} \oplus \bigoplus_{j=-k}^{-1} \Psi^{-1}(gr_j(H\mathcal{E}))$. Nous pouvons ainsi naturellement définir les projections annoncées $\pi_i : T\mathcal{E} \to H^i\mathcal{E}$ pour tout $i \in \{-k, \ldots, -1\}$ comme étant les projections sur $H^i\mathcal{E}$ parallèlement à $V\mathcal{E} \oplus \bigoplus_{j<i} \Psi^{-1}(gr_j(H\mathcal{E}))$.

Posons à présent :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\theta_0} & := & \gamma \\ \tilde{\theta_i} & := & \theta_i \circ \pi_i \quad \forall i \in \{-k, \ldots, -1\}. \end{array}$$

Avec notre structure algébrique de Weyl nous pouvons voir ces applications dans $\mathfrak{g}_i$ et ainsi définir pour tout $u_0 \in \mathcal{E}$:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\theta}(u_0) & : & T_{u_0}\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \\ & & \xi & \longmapsto & \sum_{i=0}^{-k} \tilde{\theta}_i(\xi) \end{array}$$

où $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{j=-k}^{-1} \mathfrak{g}_j$.

Proposition 24 *Soit* $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$ *une structure parabolique infinitésimale sur une variété* M*. Fixons en plus une structure algébrique de Weyl* $\epsilon : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$ *qui nous procure ainsi une inclusion* $i : P_0 \hookrightarrow P$ *et fixons une connexion sur* $p_0 : \mathcal{E} \to M$*.*

Alors nous avons un P*-fibré principal sur* M *donné par* $\mathcal{G} := \mathcal{E} \times_i P$ *et la* 1*-forme* $\tilde{\theta}$ *précédemment décrite ce prolonge en une unique connexion de Cartan* ω *sur le* P*-fibré principal* $\mathcal{G}$ *: nous disposons ainsi d'une géométrie parabolique* $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ *sur* M *de type* (G, P)*.*

Preuve de la proposition

Commençons par énoncer le lemme suivant.

Lemme 25 *La* 1*-forme* $\tilde{\theta}$ *est une connexion de Cartan sur* $\mathcal{E}$ *de type* (P^{op}, G_0) *avec* P^{op} *la composante connexe rencontrant* G_0 *de* $\{g \in G : Ad(g)(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_i \ \forall i \in \{-k, \ldots, k\}\}$*.*

Preuve du lemme

Nous avons trois points à vérifier pour voir que $\tilde{\theta}$ est une connexion de Cartan sur $\mathcal{E}$. Soit $u_0 \in \mathcal{E}$, montrons que $\tilde{\theta}(u_0) : T_{u_0} = \mathcal{E} \to \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$ est un isomorphisme. Soit $\xi \in \ker(\tilde{\theta}(u_0))$ alors $\gamma(u_0)(\xi) = 0$ donc $\xi \in H\mathcal{E}$ est un vecteur horizontal. Or sur $H\mathcal{E}$, π_{-k} est égal à l'identité donc $\theta_{-k}(\xi) = 0$ ce qui signifie que $\xi \in T^{-k+1}\mathcal{E}$. Répétons le même argument qui provient de l'observation que sur $H^i\mathcal{E}$, $\pi_i = id$. Nous montrons ainsi que $\xi \in T^0\mathcal{E} = V\mathcal{E}$. Finalement, $\xi \in V\mathcal{E} \cap H\mathcal{E} = \{0\}$. Notre application $\tilde{\theta}$ est alors injective donc isomorphe par dimension.

Montrons ensuite que $\tilde{\theta}$ reproduit les générateurs des champs de vecteurs fondamentaux. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$, le champ de vecteurs fondamental associé à X est $\zeta_X \in T^0\mathcal{E}$. Comme il est dans $T^0\mathcal{E}$, $\tilde{\theta}_i(\zeta_X) = 0$ pour tout $i < 0$. Et par définition de γ, $\tilde{\theta}_0(\zeta_X) = \gamma(\zeta_X) = X$, donc $\tilde{\theta}(\zeta_X) = X$.

Montrons enfin que $\tilde{\theta}$ est G_0-équivariante. Comme G_0 préserve la décomposition $\mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0$, il suffit de vérifier la G_0-équivariance pour γ et pour les $\tilde{\theta}_i$ de manière indépendante. Pour γ cette équivariance est déjà connue. Soit $i \in \{-k, \ldots, -1\}$, $u_0 \in \mathcal{E}$, $\xi \in T_{u_0}\mathcal{E}$ et $g \in G_0$ alors

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_i(u_0 \cdot g)(T_{u_0}r^g(\xi)) &= \theta_i(u_0 \cdot g)(\pi_i(T_{u_0}r^g(\xi))) \\ &= \theta_i(u_0 \cdot g)(T_{u_0}r^g(\pi_i(\xi))) \end{aligned}$$

car comme G_0 préserve la décomposition $\mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0$ et que la structure algébrique de Weyl est G_0-équivariante, l'action de G_0 préserve la décomposition $T\mathcal{E} = V\mathcal{E} \oplus \bigoplus_{j<i} \Psi^{-1}(gr_j(H\mathcal{E}))$ et les projections π_i sont donc

G_0-équivariantes. Reprenons le calcul :

$$\begin{aligned}(r^g)^*\tilde{\theta}_i(u_0)(\xi) &= \theta_i(u_0 \cdot g)(T_{u_0}r^g(\pi_i(\xi))) \\ &= Ad(g^{-1}) \circ \theta_i(u_0)(\pi_i(\xi)) \\ &= Ad(g^{-1}) \circ \tilde{\theta}_i(u_0)(\xi).\end{aligned}$$

La 1-forme $\tilde{\theta} \in \Omega^1(\mathcal{E}, \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0)$ est donc bien une connexion de Cartan. □

Pour enfin obtenir une connexion de Cartan sur $\mathcal{G}$ comme souhaitée, il faut remonter cette géométrie parabolique sur $\mathcal{G} = \mathcal{E} \times_i P$. Pour cela nous allons invoquer la proposition suivante (qui est une version ciblée pour notre problème et non celle plus générale de Čap et Slovák [ČS09, p. 105]).

Lemme 26 *Soient L un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$, $G \subset L$ et $K \subset L$ deux sous-groupes fermés tels que la G-orbite de eK dans L/K soit ouverte. Posons $H = G \cap K$, et $i : H \hookrightarrow K$. Notons $\Phi : G \hookrightarrow L$ et $\alpha = \Phi' : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{l}$. Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan de type (G, H) sur une variété M.*

Alors il existe une unique connexion de Cartan $\omega_\alpha \in \Omega^1(\mathcal{G} \times_i K, \mathfrak{l})$ de type (L, K) telle que $j^*\omega_\alpha = \alpha \circ \omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{l})$ avec $j : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \times_i K$ qui à $u \in \mathcal{G}$ associe la classe de (u, e) dans $\mathcal{G} \times_i K$.

Ce lemme nous dit alors qu'il existe une connexion de Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ caractérisée par $j^*\omega = \tilde{\theta}$ où $j : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{G}$ est l'inclusion $j(u) = [\![(u, e)]\!]$. Pour finir, montrons que cette connexion de Cartan induit bien la structure parabolique infinitésimale initiale. Soit $u_0 \in \mathcal{E}$ et $\xi \in T_{u_0}\mathcal{E}$ alors $j(u_0) \in \mathcal{G}$, $T_{u_0}j(\xi) \in T_{j(u_0)}\mathcal{G}$ et par caractérisation de ω, $\omega(T_{u_0}j(\xi)) = \tilde{\theta}(\xi)$. Or si maintenant $\xi \in T^i\mathcal{E}$ pour un $i < 0$, $\tilde{\theta}(\xi) = \sum_{j \geq i} \theta_j(\pi_j(\xi))$ et donc $[\tilde{\theta}(\xi)]_i = \theta_i(\pi_i(\xi)) = \theta_i(\xi)$. Reste simplement à observer que $[\tilde{\theta}(\xi)]_i = [\omega(T_{u_0}j(\xi))]_i$ définit justement la structure parabolique infinitésimale de ω. □

Pour conclure notre construction de la connexion de Cartan il ne nous reste plus qu'à démontrer le lemme précédent.

Preuve du lemme

Pour étendre notre connexion de Cartan, trois propriétés de $\alpha : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{l}$ sont mises en évidence : elles sont primordiales et apparaissent clairement dans le cas général traité par Čap et Slovák [ČS09, p. 105] . Ces propriétés sont directes dans notre cas et sont les suivantes. Pour tout $h \in H$,

$$\alpha \circ Ad(h) = Ad(i(h)) \circ \alpha. \tag{2.4.1}$$

En effet, comme la G-orbite de eK dans L/K est ouverte, l'application $\Phi : G \hookrightarrow L$ induit un difféomorphisme local $\underline{\Phi} : G/H \to L/K$ et nous avons donc, par nature de l'action adjointe, la relation suivante $Ad(\Phi(h))(\Phi'(X)) = \Phi'(Ad(h)(X))$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Par définition de α, cette relation est exactement celle recherchée. La deuxième propriété souhaitée est que

$$\alpha|_{\mathfrak{h}} = i' : \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}. \tag{2.4.2}$$

Il est clair que nous avons bien cette propriété car $i = \Phi|_H$ et $\alpha = \Phi'$. La troisième propriété est que l'endomorphisme induit par α,

$$\underline{\alpha} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{l}/\mathfrak{k} \text{ est un isomorphisme linéaire,} \tag{2.4.3}$$

ce qui est le cas car $\underline{\alpha} = T_0\underline{\Phi}$.

Ayant rappelées les propriétés utiles à α pour construire notre connexion de Cartan sur $\mathcal{G} \times_i K$, commençons donc cette construction. Notons $q : \mathcal{G} \times_i K \to M$. Soit $u \in \mathcal{G}$, l'espace tangent à $T_{j(u)}(\mathcal{G} \times_i K)$ est engendré par des vecteurs verticaux (c'est-à-dire les éléments de $\ker(q_*)$) et des éléments de $T_u j(T_u\mathcal{G})$: en effet, $q \circ j = p$ donc $T_{j(u)}q(T_u j(T_u\mathcal{G})) = T_u p(T_u\mathcal{G}) = T_{p(u)}M$. Nous définissons alors $\omega_\alpha(j(u))$ par :

$$\omega_\alpha(j(u))(T_u j(\xi) + \zeta_A(j(u))) := \alpha(\omega(u)(\xi)) + A \tag{2.4.4}$$

pour tout $\xi \in T_u\mathcal{G}$ et tout $A \in \mathfrak{k}$ avec ζ_A le champ de vecteurs fondamental engendré par A.

Montrons que $\omega_\alpha(j(u))$ est bien définie de cette manière grâce à la propriété (2.4.2). Si $T_u j(\xi)$ est vertical alors $Tq \circ Tj(\xi) = Tp(\xi) = 0$ donc il existe $X \in \mathfrak{h}$ tel que $\xi = \zeta_X(u)$. Or par définition de j, pour tout $h \in H$, $j(u \cdot h) = j(u) \cdot i(h)$. Posant $h = \exp(tX)$ et différenciant en $t = 0$ nous obtenons $T_u j(\zeta_X(u)) = \zeta_{i'(X)}(j(u))$. Comme $i' = \alpha|_{\mathfrak{h}}$,

$$\omega_\alpha(j(u))(T_u j(\zeta_X(u))) = \alpha(\omega(u)(\zeta_X(u))) = \alpha(X) = i'(X).$$

Ainsi $\omega_\alpha(j(u))$ est bien définie.

À ce stade là, $\omega_\alpha(j(u)) : T_{j(u)}(\mathcal{G} \times_i K) \to \mathfrak{l}$ reproduit les générateurs des champs de vecteurs fondamentaux. Montrons que c'est un isomorphisme. Puis nous prolongerons cette définition à tout $\mathcal{G} \times_i K$ de manière à avoir la dernière propriété manquante pour définir une connexion de Cartan et cette propriété est la K-équivariance. Si $\omega_\alpha(j(u))(T_u j(\xi) + \zeta_A(j(u))) = 0$, alors projetant sur $\mathfrak{l}/\mathfrak{k}$ nous obtenons $0 = \alpha(\omega(u)(\xi)) + \mathfrak{k} = \underline{\alpha}(\omega(u)(\xi) + \mathfrak{h})$. Par la propriété (2.4.3) cela nous assure que $\omega(u)(\xi) = X \in \mathfrak{h}$ c'est-à-dire que $\xi = \zeta_X$. En conclusion $T_u j(\xi) + \zeta_A(j(u))$ est un vecteur vertical. Or par construction $\omega_\alpha(j(u))$ est

injective sur les vecteurs verticaux donc $T_u j(\xi) + \zeta_A(j(u)) = 0$. Nous avons donc bien l'isomorphisme souhaité.

Étendons à présent la définition de ω_α à tout $\mathcal{G} \times_i K$. Soit $k \in K$, $u \in \mathcal{G}$ et $\eta \in T_{j(u)\cdot k}(\mathcal{G} \times_i K)$ posons :

$$\omega_\alpha(j(u)\cdot k)(\eta) := Ad(k^{-1})(\omega_\alpha(j(u))(T_{j(u)} r^{k^{-1}} \eta)). \tag{2.4.5}$$

Montrons que ω_α définie ainsi est bien définie. Soit $(u, \tilde{u}) \in \mathcal{G}^2$ et $(k, \tilde{k}) \in K^2$ tels que $j(u)\cdot k = j(\tilde{u})\cdot \tilde{k}$, alors il existe $h \in H$ tel que $\tilde{u} = u \cdot h$. En effet, $j(u) = j(\tilde{u})\cdot(\tilde{k}k^{-1})$ donc il existe $h \in H$ tel que $\tilde{k}k^{-1} = i(h^{-1})$ et alors $j(u) = j(\tilde{u})\cdot i(h^{-1}) = j(\tilde{u}\cdot h^{-1})$ d'où la conclusion par injectivité de j. Comme nous venons de voir nous avons aussi la relation $\tilde{k} = i(h)k$. Revenant à ω_α nous avons $\omega_\alpha(j(\tilde{u})\cdot\tilde{k})(\eta) = Ad(k^{-1})\circ Ad(i(h)^{-1})(\omega_\alpha(j(u\cdot h))(Tr^{i(h)^{-1}} \circ Tr^{k^{-1}}(\eta)))$. Ainsi ω_α est bien définie si pour tout $\eta \in T_{j(u)}(\mathcal{G} \times_i K)$ nous avons

$$Ad(i(h))(\omega_\alpha(j(u))(\eta)) = \omega_\alpha(j(u\cdot h))(Tr^{i(h)^{-1}}\eta).$$

Or si η est de la forme $\eta = \zeta_A(j(u))$ pour un $A \in \mathfrak{k}$ alors

$$Ad(i(h))(\omega_\alpha(j(u))(\eta)) = Ad(i(h))(A) = \alpha(Ad(h)(A))$$

grâce à la propriété (2.4.1). Et par ailleurs,

$$\omega_\alpha(j(u\cdot h))(Tr^{i(h)^{-1}}\zeta_A(j(u))) = \omega_\alpha(j(u\cdot h))(\zeta_{Ad(h)(A)}(j(u\cdot h)) = \alpha(Ad(h)(A)).$$

Maintenant si η est de la forme $\eta = T_u j(\xi)$ pour un $\xi \in T_u\mathcal{G}$ alors

$$T_{j(u)} r^{i(h)^{-1}}(\eta) = T_u(r^{i(h)^{-1}} \circ j)(\xi) = T_{u\cdot h^{-1}} j(T_u r^{h^{-1}}(\xi)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(j(u))(Tr^{i(h)^{-1}}(\eta)) &= \alpha(\omega(u\cdot h^{-1})(T_u r^{h^{-1}}(\xi))) \\ &= \alpha(Ad(h)(\omega(u)(\xi))) \\ &= Ad(i(h))(\alpha(\omega(u)(\xi))) \end{aligned}$$

grâce à la propriété (2.4.1) et nous obtenons donc bien la relation souhaitée.

La 1-forme ω_α est donc bien définie sur tout $\mathcal{G} \times_i K$. Par construction elle est K-équivariante. Les autres propriétés qui définissent une connexion de Cartan sont vérifiées sur $T_{j(u)}(\mathcal{G} \times_i K)$ puis par équivariance sur tout $T(\mathcal{G} \times_i K)$. □

Avant de continuer sur notre identification entre géométrie parabolique et structure parabolique infinitésimale nous allons définir une notion de régularité. En effet plus tard nous demanderons aux structures paraboliques que nous regarderons de correspondre pleinement à la géométrie graduée de l'espace filtré TM.

Chapitre 3

Régularité

3.1 Définition de la régularité

La régularité est une relation entre les deux données qui définissent une structure parabolique infinitésimale, c'est-à-dire entre la filtration du fibré tangent et la réduction du groupe de structure à P_0. En effet ces deux données engendrent chacune une géométrie graduée sur le fibré tangent de notre variété.

Plus précisément, soit $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$ une structure parabolique infinitésimale sur une variété M, alors nous avons $gr(TM) \simeq \mathcal{E} \times_{P_0} gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$. Via cette identification, le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ induit un crochet

$$\{\ ,\ \} : gr(TM) \times gr(TM) \longrightarrow gr(TM).$$

En effet, l'identification $gr(TM) \simeq \mathcal{E} \times_{P_0} gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ est la suivante : soit $i \in \{-k, \dots, -1\}$,

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & \mathcal{E} \times_{P_0} gr_i(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) & \longrightarrow & gr_i(TM) \\ & & [\![u_0, X + \mathfrak{g}^{i+1}]\!] & \mapsto & [T_{u_0}p_0(\xi)]_i \end{array}$$

avec $\xi \in T_{u_0}\mathcal{E}$ est tel que $\theta_i(\xi) = X + \mathfrak{g}^{i+1}$ et $[\eta]_i$ la classe de $\eta \in T^iM$ dans $gr_i(TM)$. Grâce à la propriété d'équivariance de θ_i cette application est bien définie et comme $\ker(\theta_i) = T^{i+1}\mathcal{E}$ nous avons bien un isomorphisme. À présent, prenons $(i, j) \in \{-k, \dots, -1\}^2$, $x \in M$, $u_0 \in p^{-1}(x)$, $\xi \in gr_i(T_xM)$ et $\eta \in gr_j(T_xM)$ et posons $X \in \mathfrak{g}^i$ et $Y \in \mathfrak{g}^j$ tel que $\Psi^{-1}(\xi) = [(u_0, X + \mathfrak{g}^{i+1})]$ et $\Psi^{-1}(\eta) = [(u_0, Y + \mathfrak{g}^{j+1})]$. Alors le crochet $\{\ ,\ \}$ est défini par

$$\{\xi, \eta\} = \Psi([\![(u_0, [X, Y] + \mathfrak{g}^{i+j+1})]\!]) \in gr_{i+j}(TM)$$

où $[X, Y]$ est le crochet de Lie de X et Y dans $\mathfrak{g}$. Notre crochet $\{\ ,\ \}$ est ainsi bien défini et préserve la graduation, c'est-à-dire $\{gr_i(TM), gr_j(TM)\} \subset$

$gr_{i+j}(TM)$. Cela procure alors à $gr(TM)$ une structure d'algèbre de Lie graduée nilpotente. En résumé nous avons la définition suivante :

Définition 27 *La donnée d'une structure parabolique infinitésimale* $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$ *sur une variété* M *procure une structure d'algèbre de Lie graduée nilpotente à* $gr(TM)$ *avec le crochet de Lie*

$$\begin{array}{rccc} \{\ ,\ \}\ : & gr_i(TM) \times gr_j(TM) & \longrightarrow & gr_{i+j}(TM) \\ & (\llbracket u_0, X + \mathfrak{g}^{i+1} \rrbracket, \llbracket u_0, Y + \mathfrak{g}^{j+1} \rrbracket) & \longmapsto & \llbracket (u_0, [X,Y] + \mathfrak{g}^{i+j+1}) \rrbracket \end{array}$$

pour $[X, Y]$ *le crochet de Lie dans* $\mathfrak{g}$.

Maintenant observons la structure d'algèbre de Lie graduée donnée par la filtration du plan tangent de M. Supposons que le crochet de Lie des champs de vecteurs $[\ ,\ ]$ sur TM est compatible avec la filtration $\{T^iM\}$, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \Gamma(T^iM)$ et tout $\eta \in \Gamma(T^jM)$ alors $[\xi, \eta] \in \Gamma(T^{i+j}M)$. Remarquons que ceci est bien une condition sur la filtration et non sur la variété M qui est fixée. Une variété munie d'une telle filtration est appelée une *variété filtrée*. Notons que cette condition est automatiquement satisfaite si le degré de notre filtration k est inférieure ou égal à 2. Soit $i \in \{-k, \ldots, -1\}$, notons $q_i : T^iM \to gr_i(TM)$ l'application quotient et regardons

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(T^iM) \times \Gamma(T^jM) & \longrightarrow & \Gamma(gr_{i+j}(TM)) \\ (\xi, \eta) & \longmapsto & q_{i+j}([\xi, \eta]). \end{array}$$

Soit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, nous avons $[\xi, f\eta] = (\xi.f)\eta + f[\xi, \eta]$. Or $(\xi.f)\eta \in \Gamma(T^jM) \subset \Gamma(T^{i+j-1}M) \subset \ker(q_{i+j})$ car $i \leq -1$. L'application précédente est donc fonctorielle et induit une application bilinéaire entre fibrés : $T^iM \times T^jM \to gr_{i+j}(TM)$. De plus si $\xi \in T^{i+1}M$ et $\eta \in T^{j+1}M$ alors $[\xi, \eta] \in T^{i+j+2}M \subset T^{i+j+1}M \subset \ker(q_{i+j})$. Notre application bilinéaire descend donc à $gr_i(TM) \times gr_j(TM) \to gr_{i+j}(TM)$. Nous obtenons ainsi un crochet :

$$\mathcal{L} : gr(TM) \times gr(TM) \longrightarrow gr(TM) \tag{3.1.1}$$

compatible avec la graduation. Ce crochet fournit lui aussi une structure d'algèbre de Lie graduée nilpotente à $gr(TM)$. Pour résumer énonçons la définition suivante.

Définition 28
1. *Le crochet de Lie des champs de vecteurs sur* TM *est compatible avec la filtration de* TM *si pour tout* $\xi \in \Gamma(T^iM)$ *et tout* $\eta \in \Gamma(T^jM)$ *nous avons* $[\xi, \eta] \in \Gamma(T^{i+j}M)$.
2. *Si le crochet de Lie des champs de vecteurs sur* TM *est compatible avec la filtration de* TM, *la variété* M *est dite filtrée.*

3. *Si le crochet de Lie des champs de vecteurs sur TM est compatible avec la filtration de TM, alors ce crochet définit un crochet sur $gr(TM)$ nommé crochet de Levi*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L} \ : & gr_i(TM) \times gr_j(TM) & \longrightarrow & gr_{i+j}(TM) \\ & (\xi + T^{i+1}M, \eta + T^{j+1}M) & \longmapsto & [\xi,\eta] + T^{i+j+1}M \end{array}$$

qui procure à $gr(TM)$ une structure d'algèbre de Lie graduée nilpotente.

4. *Les éléments $(gr(T_xM), \mathcal{L}_x)$ sont appelés symboles algébriques de la variété filtrée M.*

Nous pouvons alors définir la notion de compatibilité entre ces deux crochets de Lie, c'est-à-dire la notion de régularité.

Définition 29 *1. Une structure parabolique infinitésimale est dite régulière si le crochet de Lie des champs de vecteurs sur TM est compatible avec la filtration donnée par la structure parabolique et si $\{\ ,\ \} = \mathcal{L}$.*

2. Une géométrie parabolique est dite régulière si sa structure infinitésimale correspondante l'est.

Nous allons à présent caractériser cette notion de régularité.

3.2 Caractérisation de la régularité

Proposition 30 *Soit $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$ une structure parabolique infinitésimale telle que $(M, \{T^iM\})$ soit une variété filtrée, c'est-à-dire que la filtration est compatible avec le crochet de Lie des champs de vecteurs.*

Alors la structure est régulière si et seulement si pour tout $i, j < 0$ tels que $i + j \geq -k$ et pour tout $\xi \in \Gamma(T^i\mathcal{E})$ et tout $\eta \in \Gamma(T^j\mathcal{E})$ nous avons

$$\theta_{i+j}([\xi,\eta]) = \{\theta_i(\xi), \theta_j(\eta)\}$$

avec $[\ ,\ ]$ le crochet de Lie des champs de vecteurs sur $T\mathcal{E}$.

Preuve de la proposition

Si ξ et η sont des relevés de champ de vecteurs $\underline{\xi} \in T^iM$ et $\underline{\eta} \in T^jM$ de M alors $[\xi,\eta]$ est un relevé de $[\underline{\xi},\underline{\eta}]$. Comme $(M, \{T^iM\})$ est une variété filtrée, $[\underline{\xi},\underline{\eta}] \in T^{i+j}M$ et donc $[\xi,\eta] \in T^{i+j}\mathcal{E}$. Pour ξ et η des champs de vecteurs de $\mathcal{E}$ généraux et $u_0 \in \mathcal{E}$ alors la classe de $[\xi,\eta](u_0)$ dans $T_{u_0}\mathcal{E}/T^{i+j}_{u_0}\mathcal{E}$ ne dépend que de $\xi(u_0)$ et $\eta(u_0)$ car $i, j < 0$, donc $\xi(u_0)$ et $\eta(u_0)$ sont dans $T^{i+j}_{u_0}\mathcal{E}$. Finalement $[\xi,\eta] \in \Gamma(T^{i+j}\mathcal{E})$ et $\theta_{i+j}([\xi,\eta])$ a du sens. Du fait que $i, j < 0$

nous en déduisons même plus fortement que $T^i\mathcal{E}$ et $T^j\mathcal{E}$ sont contenus dans $T^{i+j+1}\mathcal{E}$. Ainsi $\theta_{i+j}([\xi,\eta](u_0))$ ne dépend que de $\xi(u_0)$ et de $\eta(u_0)$. Ce point est aussi vrai pour la partie droite de l'égalité recherchée, donc $\theta_{i+j}([\xi,\eta]) = \{\theta_i(\xi),\theta_j(\eta)\}$ pour tout champ de vecteurs ξ et η de $\mathcal{E}$ si et seulement si cette égalité est vérifiée pour des champs de vecteurs ξ et η de $\mathcal{E}$ qui sont des relevés de champ de vecteurs de M, $\underline{\xi} \in T^iM$ et $\underline{\eta} \in T^jM$.

Maintenant avec ξ et η des relevés de champ de vecteurs de M, $\underline{\xi} \in T^iM$ et $\underline{\eta} \in T^jM$, la fonction $\theta_i(\xi)$ représente la section $q_i(\underline{\xi}) \in \Gamma(gr_i(TM))$ et de même pour η (rappelons que q_i est l'application quotient $q_i : T^iM \to gr_i(TM)$). Ainsi la partie droite de l'égalité demandée représente $\{q_i(\underline{\xi}), q_j(\underline{\eta})\}$. Pour la partie gauche, $[\xi,\eta]$ se projette sur $[\underline{\xi},\underline{\eta}]$ et donc $\theta_{i+j}([\xi,\eta])$ représente $q_{i+j}([\underline{\xi},\underline{\eta}])$ qui n'est rien d'autre que $\mathcal{L}(q_i(\underline{\xi}), q_j(\underline{\eta}))$. Ainsi $\theta_{i+j}([\xi,\eta]) = \{\theta_i(\xi),\theta_j(\eta)\}$ pour tout champ de vecteurs ξ et η de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\{q_i(\underline{\xi}), q_j(\underline{\eta})\} = \mathcal{L}(q_i(\underline{\xi}), q_j(\underline{\eta}))$ pour tout champ de vecteurs $\underline{\xi}$ et $\underline{\eta}$ de M. □

Nous allons à présent donner une caractérisation de la notion de régularité d'une géométrie parabolique avec une propriété sur la courbure de la connexion de Cartan correspondante. Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 31 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique et $\epsilon : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$ une structure algébrique de Weyl, c'est-à-dire une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$. Soit $u \in \mathcal{G}$ et $x = p(u) \in M$.*

Alors il existe un voisinage ouvert U de $x \in M$, une section $\sigma : U \to \mathcal{G}$ et un opérateur linéaire d'extension

$$\begin{array}{rcl} T_xM & \longrightarrow & \mathcal{Y}(U) = \{\textit{champ de vecteurs sur } U\} \\ \xi & \longmapsto & \tilde{\xi} \end{array}$$

ayant la propriété suivante : pour tout ξ et η dans T_xM, notons X et Y les uniques éléments dans $\mathfrak{g}_-$ tels que $T_up(\omega(u)^{-1}(X)) = \xi$ et $T_up(\omega(u)^{-1}(Y)) = \eta$ alors

$$[\tilde{\xi},\tilde{\eta}](y) = T_{\sigma(y)}p(\omega(\sigma(y))^{-1}([X,Y] - \kappa(\sigma(y))(X,Y)))$$

où κ est la fonction de courbure de ω.

Avant de commencer la preuve de ce lemme nous allons rappeler la définition de la courbure d'une connexion de Cartan ω. Cette courbure est une 2-forme $K \in \Omega^2(\mathcal{G},\mathfrak{g})$ à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie par $K(\xi,\eta) = d\omega(\xi,\eta) + [\omega(\xi),\omega(\eta)]$ pour tout ξ et η dans $T\mathcal{G}$. Toute l'information de cette courbure est en fait contenue dans la fonction de courbure

$\kappa : \mathcal{G} \to \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ définie par $\kappa(u)(X,Y) := K(\omega(u)^{-1}(X), \omega(u)^{-1}(Y)) = [X,Y] - \omega(u)([\omega(u)^{-1}(X), \omega(u)^{-1}(Y)])$ pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $(X,Y) \in \mathfrak{g}^2$. Nous observerons cette fonction de courbure plus en détail dans le chapitre suivant.

Preuve du lemme

Notons que X et Y sont bien définis car l'égalité $T_u p(\omega(u)^{-1}(X)) = T_u p(\omega(u)^{-1}(\tilde{X}))$ implique $X - \tilde{X} \in \{\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+\} \cap \mathfrak{g}_- = \{0\}$. Soit $Z \in \mathfrak{g}_-$, posons $Fl_t^{\omega^{-1}(Z)}(u) \in \mathcal{G}$ le flot du champ de vecteurs $\omega^{-1}(Z)$: ce flot est bien défini si t est suffisamment petit. Il existe donc un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}_-$ sur lequel l'application $\Phi(Z) := Fl_1^{\omega^{-1}(Z)}(u)$ est bien définie. L'application tangente à $p \circ \Phi$ en $0 \in V$ est alors donnée par $Z \mapsto T_u p(\omega(u)^{-1}(Z))$ qui est un isomorphisme. Ainsi quitte à réduire V, nous pouvons supposer que $\phi := \mathfrak{p} \circ \Phi$ est un difféomorphisme de V dans un voisinage ouvert U de $x \in M$. Posant alors $\sigma := \Phi \circ \phi^{-1} : U \to \mathcal{G}$ nous venons de définir une section locale de $p : \mathcal{G} \to M$. L'application $\sigma(y) \cdot g$ définit ainsi un difféomorphisme de $U \times P \to p^{-1}(U)$.

Soit $\xi \in T_x M$ et X l'élément de $\mathfrak{g}_-$ correspondant, nous définissons un champ de vecteurs $\hat{\xi}$ sur $p^{-1}(U)$ par :

$$\hat{\xi}(\sigma(y) \cdot g) := T_{\sigma(y)} r^g(\omega(\sigma(y))^{-1}(X)) = \omega(\sigma(y) \cdot g)^{-1}(Ad(g^{-1})(X)).$$

Nous posons alors $\tilde{\xi} := Tp(\hat{\xi}) \in \mathcal{Y}(U)$.

Vérifions à présent la condition sur le crochet de Lie. Soit ξ et η dans $T_x M$, le champ de vecteurs $[\hat{\xi}, \hat{\eta}]$ dans $p^{-1}(U)$ est un relevé de $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]$. En particulier cela implique que $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}](y) = T_{\sigma(y)} p([\hat{\xi}, \hat{\eta}](\sigma(y)))$. Ainsi par définition de la fonction de courbure

$$\begin{aligned} [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}](y) &= T_{\sigma(y)} p([\hat{\xi}, \hat{\eta}](\sigma(y))) \\ &= T_{\sigma(y)} p([\omega(\sigma(y))^{-1}(X), \omega(\sigma(y))^{-1}(Y)]) \\ &= T_{\sigma(y)} p(\omega(\sigma(y))^{-1}([X,Y] - \kappa(\sigma(y))(X,Y)). \end{aligned}$$

□

Proposition 32 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique. Notons $K \in \Omega^2(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ la courbure de ω, $\kappa : \mathcal{G} \to \Lambda^2\mathfrak{g}/\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{g}$ sa fonction de courbure et $\{T^i M\}$ la filtration de TM induite par la géométrie parabolique.*

Alors

1. *$(M, \{T^i M\})$ est une variété filtrée si et seulement si pour tout $(i,j) \in \{-k, \ldots, k\}^2$ nous avons $K(T^i\mathcal{G}, T^j\mathcal{G}) \subset \mathfrak{g}^{i+j}$ ce qui est équivalent à pour tout $(i,j) \in \{-k, \ldots, k\}^2$, $\kappa(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j) \subset \mathfrak{g}^{i+j}$;*

2. *la géométrie parabolique est régulière si et seulement si pour tout* $(i,j) \in \{-k,\dots,k\}^2$ *nous avons* $K(T^i\mathcal{G}, T^j\mathcal{G}) \subset \mathfrak{g}^{i+j+1}$ *ce qui est équivalent à pour tout* $(i,j) \in \{-k,\dots,k\}^2$, $\kappa(\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}^j) \subset \mathfrak{g}^{i+j+1}$.

Preuve de la proposition

1) Comme nous l'avons vu pour la construction du crochet de Levi, si $i,j<0$ nous avons que T^iM et T^jM sont des sous-espaces de $T^{i+j+1}M$. Ainsi l'application $\Gamma(T^iM)\times\Gamma(T^iM)\to\Gamma(TM/T^{i+j+1}M)$ définie par $(\xi,\eta)\mapsto[\xi,\eta]$ est fonctorielle et définit alors une application $\Phi_{i,j}: T^iM\times T^jM\to TM/T^{i+j+1}M$. Soit $x\in M$, $u\in\mathcal{G}$ tel que $p(u)=x$, $\xi\in T^i_xM$, $\eta\in T^j_xM$ pour $i,j<0$ et $\epsilon:\mathfrak{g}\xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$ une structure algébrique de Weyl. Alors nous pouvons calculer $\Phi_{i,j}(\xi,\eta)$ grâce au lemme précédent et donc grâce aux champs de vecteurs sur M, $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\eta}$:

$$\Phi_{i,j}(\xi,\eta)=[\tilde{\xi},\tilde{\eta}](x)=T_up(\omega(u)^{-1}([X,Y]-\kappa(u)(X,Y)))$$

avec X et Y les uniques éléments dans $\mathfrak{g}_-$ correspondant à ξ et η ($\mathfrak{g}_-$ étant donné par la structure algébrique de Weyl). Or la compatibilité du crochet avec la filtration est équivalente au fait que pour tout $i,j<0$, $\Phi_{i,j}$ est à valeur dans $T^{i+j}M/T^{i+j+1}M$ c'est-à-dire que pour tout $X\in\mathfrak{g}_i$ et tout $Y\in\mathfrak{g}_j$ nous avons $[X,Y]-\kappa(u)(X,Y)\in\mathfrak{g}^{i+j}$. D'où le premier point de la proposition.

2) Si le crochet est compatible avec la filtration alors par construction de $\Phi_{i,j}$ et par définition de $\mathcal{L}$, avec les mêmes éléments que précédemment, nous avons $q_{i+j}(\Phi_{i,j}(\xi,\eta))=\mathcal{L}(q_i(\xi),q_j(\eta))$ avec $q_k: T^kM\to gr_k(TM)$. Ainsi $\mathcal{L}(q_i(\xi),q_j(\eta))=q_{i+j}(T_up(\omega(u)^{-1}([X,Y]-\kappa(u)(X,Y))))$. Or à présent par définition de $\{\ ,\ \}$, $q_{i+j}(T_up(\omega(u)^{-1}([X,Y])))=\{q_i(\xi),q_j(\eta)\}$. Donc

$$\mathcal{L}(q_i(\xi),q_j(\eta))-\{q_i(\xi),q_j(\eta)\}=-q_{i+j}(T_up(\omega(u)^{-1}(\kappa(u)(X,Y)))).$$

Le deuxième point de notre proposition s'en déduit alors comme pour le premier point. □

3.3 Structure parabolique infinitésimale régulière

Pour finir cette partie nous allons faire la remarque suivante qui est très utile dans la pratique lorsque nous observons une structure parabolique particulière c'est-à-dire relatif à une sous-algèbre parabolique bien connue.

Proposition 33 *La donnée d'une structure parabolique infinitésimale régulière est équivalente à la donnée :*

1. *d'une filtration $\{T^iM\}$ compatible avec le crochet de Lie et telle que le fibré des symboles algébriques $(gr(TM), \mathcal{L})$ est localement trivial et de modèle $(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), \{\ ,\ \})$,*
2. *et d'une réduction de*

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &:= Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(TM)) \\ &= \{f \in GL_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(TM)) : \\ &\qquad \forall (X,Y) \in gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^2\ \mathcal{L}(f(X), f(Y)) = f(\{X,Y\})\}\end{aligned}$$

à P_0 par rapport à $Ad : P_0 \to Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$.

Preuve de la proposition

En se donnant ces deux données nous avons bien une filtration ainsi qu'une réduction au groupe P_0 respectant l'action adjointe, donc une structure parabolique infinitésimale. De plus comme $\mathcal{L} = \{\ ,\ \}$, cette structure est régulière.

Réciproquement, une structure parabolique infinitésimale régulière fournit une filtration dont le symbole algébrique est comme nous le souhaitons d'où le premier point. Une structure parabolique infinitésimale fournit aussi une collection $\theta_i \in \Gamma(L(T^i\mathcal{E}, gr_i(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})))$ avec $i \in \{-k, \dots, -1\}$. Ainsi d'après la proposition 30, $\theta_{i+j}([\xi,\eta]) = \{\theta_i(\xi), \theta_j(\eta)\}$ pour tout $\xi \in T^i\mathcal{E}$ et tout $\eta \in T^j\mathcal{E}$. Reste alors simplement à observer que l'application $\Phi : \mathcal{E} \to Gl_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(TM))$ construit dans la preuve de la proposition 21 est en fait à valeur dans $Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(TM))$. Nous avons donc bien la réduction voulue. □

Ainsi lorsque nous avons affaire à un parabolique $|1|$-gradué (c'est-à-dire $[\mathfrak{p}^\perp, \mathfrak{p}^\perp] = \{0\}$ ou encore $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$) alors la filtration est triviale et toute l'information est contenue dans la réduction. A contrario, si $P_0 = Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$ alors toute l'information est contenue dans la filtration et en particulier dans le symbole algébrique induit par la filtration. C'est le cas par exemple de la géométrie décrite par Cartan de la donnée d'une distribution de rang 2 générique sur une variété de dimension 5 (nous reverrons cet exemple en détail au chapitre 9.2). Cette égalité arrive assez souvent comme nous le montre la proposition suivante que nous trouvons dans Čap et Slovák (proposition 4.3.1 dans [ČS09, p. 427]) :

Proposition 34 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique telle qu'aucun idéal simple n'est inclus dans $\mathfrak{p}_0$.*

1. *Si* $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^0 = 0$ *alors posant* $G = Aut(\mathfrak{g})$*, l'action adjointe induit un isomorphisme* $P_0 \to Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$.
2. *La condition si dessus est vérifiée à moins d'être dans un des quatre cas suivants :*
   (a) *le parabolique est* $|1|$*-gradué ;*
   (b) $gr(\mathfrak{g})$ *possède une graduation de contact complexe ;*
   (c) $\mathfrak{g}$ *est de type* A_l *avec* $l \geq 3$ *et la graduation de* $gr(\mathfrak{g})$ *correspond à* $\Sigma \subset \Delta_+$ *un sous-ensemble d'un système de racines positives tel que* $\Sigma = \{\alpha_i, \alpha_j\}$ *avec* $i < j$ *et* ($i = 1$ *ou* $j = l$)*;*
   (d) $\mathfrak{g}$ *est de type* C_l *avec* $l \geq 2$ *et la graduation correspond à* $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_l\} \subset \Delta_+$.

Cette proposition est donnée à titre indicatif mais la cohomologie $H(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ et sa structure de graduation seront définies plus loin.

Chapitre 4

Normalisation

Nous revenons à présent sur notre problématique d'associer à une structure parabolique infinitésimale, une unique géométrie parabolique. Pour cela, comme pour pouvoir parler de connexion de Levi-Civita pour une métrique, il nous faut une condition de normalisation des connexions de Cartan, autre ici que sans torsion. Jusqu'à présent nous avons pu nous contenter des définitions des connexions de Cartan et de leurs courbures. Cependant, il nous faudra connaitre un peu plus la théorie des connexions de Cartan pour pouvoir parler de normalité. Nous allons donc profiter de cette partie pour plonger un peu plus dans la théorie des connexions de Cartan.

4.1 Les premières propriétés de la théorie des connexions de Cartan

4.1.1 Propriété fondamentale des fibrés associés à un fibré principal

Soit P un groupe de Lie, rappelons qu'un P-fibré principal sur une variété M est un fibré $p : \mathcal{G} \to M$ muni d'une action de P à droite sur l'espace total du fibré $\mathcal{G}$, tels que l'action préserve les fibres de p et soit simple et transitive. Ainsi les orbites de l'action de P sont exactement les fibres $P_x = p^{-1}(x)$. À présent, si nous prenons une variété S munie d'une P-action à gauche alors nous pouvons définir un nouveau fibré sur M de fibres isomorphes à S, que nous nommons *fibré associé*, l'espace $\mathcal{G} \times_P S := \mathcal{G} \times S/P$ où l'action à droite de P sur $\mathcal{G} \times S$ est définie par $(u, s) \cdot g := (u \cdot g, g^{-1} \cdot s)$. Nous noterons $[\![u, s]\!] \in \mathcal{G} \times_P S$ l'orbite de $(u, s) \in \mathcal{G} \times S$. Nous avons alors la proposition fondamentale suivante :

Proposition 35 *Soit $p : \mathcal{G} \to M$ un P-fibré principal sur une variété M, et soit S une variété lisse munie d'une P-action à gauche.*

Alors il y a une correspondance bijective naturelle entre $\Gamma(\mathcal{G} \times_P S)$ les sections s du fibré associé et $C^\infty(\mathcal{G}, S)^P$ les fonctions lisses $f : \mathcal{G} \to S$ qui sont P-équivariante c'est-à-dire telles que $f(u \cdot g) = g^{-1} \cdot f(u)$ pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $g \in P$. La correspondance est donnée par $s(p(u)) = [\![u, f(u)]\!]$ pour tout $u \in \mathcal{G}$.

Preuve de la proposition

Soit $f \in C^\infty(\mathcal{G}, S)^P$, l'équivariance signifie que pour tout $u \in \mathcal{G}$, $[\![u, f(u)]\!]$ ne dépend en fait que de $p(u)$. Nous pouvons donc définir $s : M \to \mathcal{G} \times_P S$ par $s(x) = [\![u, f(u)]\!]$ pour $u \in p^{-1}(x)$. Choisissant une section locale lisse σ de $p : \mathcal{G} \to M$ nous obtenons $s(x) = [\![\sigma(x), f(\sigma(x))]\!]$. Notre section s est donc bien lisse.

Réciproquement, notant $\pi : \mathcal{G} \times_P S \to M$, alors pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $Y \in \pi^{-1}(p(u))$ il existe un unique $y \in S$ tel que $Y = [\![u, y]\!]$. Ainsi si nous prenons $s \in \Gamma(\mathcal{G} \times_P S)$, la fonction $f : \mathcal{G} \to S$ est bien définie par l'équation $s(p(u)) = [\![u, f(u)]\!]$. En prenant des sections lisses comme précédemment nous voyons que f est lisse et que la P-équivariance arrive de la manière suivante : pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $g \in P$ nous avons $s(p(u \cdot g)) = [\![u \cdot g, f(u \cdot g)]\!] = [\![u, (g^{-1})^{-1} \cdot f(u \cdot g)]\!]$, or $s(p(u)) = s(p(u \cdot g))$ donc $f(u) = g \cdot f(u \cdot g)$. □

Soit $p : \mathcal{G} \to M$ un fibré sur une variété M, et soit $u \in \mathcal{G}$ alors un vecteur $\xi \in T_u\mathcal{G}$ est dit *vertical* si $T_u p(\xi) = 0$. De même, une k-forme $\Phi \in \Omega^k(\mathcal{G})$ est dite *horizontale* si pour tout vecteur vertical ξ de $\mathcal{G}$ nous avons $\iota_\xi \Phi = 0$.

Corollaire 36 *Soit $p : \mathcal{G} \to M$ un P-fibré principal sur une variété M, $\rho : P \to GL(V)$ une représentation de P dans un espace vectoriel V.*

Alors pour tout k, l'espace $\Omega^k(M, \mathcal{G} \times_P V)$ des k-formes sur M est en bijection avec l'espace des k-formes sur $\mathcal{G}$ qui sont horizontales et P-équivariantes, c'est-à-dire les k-formes $\Phi \in \Omega^k(\mathcal{G}, V)$ telles que pour tout $g \in P$ nous avons $(r^g)^* \Phi = \rho(g^{-1}) \circ \Phi$.

Preuve du corollaire

Soit $\alpha \in \Omega^k(M, \mathcal{G} \times_P S)$, $u \in \mathcal{G}$, $x = p(u)$ et $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_u\mathcal{G}$ alors il existe un unique élément $\Phi(u)(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in V$ tel que

$$\alpha(p(u))(T_u p(\xi_1), \ldots, T_u p(\xi_k)) = [\![u, \Phi(u)(\xi_1, \ldots, \xi_k)]\!]. \tag{4.1.1}$$

Ceci définit une k-forme $\Phi \in \Omega^k(\mathcal{G}, V)$ qui est clairement horizontale. Soit $g \in P$ alors $p \circ r^g = p$, donc $T_{u\cdot g}p(T_u r^g(\xi_i)) = T_u p(\xi_i)$ et ainsi

$$\begin{aligned}
[\![u \cdot g, \Phi(u \cdot g)(T_u r^g(\xi_1), \ldots, T_u r^g(\xi_k))]\!] &= \alpha(p(u \cdot g))(T_u p(\xi_1), \ldots, T_u p(\xi_k)) \\
&= \alpha(p(u))(T_u p(\xi_1), \ldots, T_u p(\xi_k)) \\
&= [\![u, \Phi(u)(\xi_1, \ldots, \xi_k)]\!],
\end{aligned}$$

d'où la P-équivariance de Φ.

Réciproquement, étant donnée Φ nous définissons α grâce à l'équation (4.1.1) : soit $x \in M$, $\{\xi_i\} \in T_x M$, $u \in p^{-1}(x)$ et $\{\tilde{\xi}_i\} \in T_u\mathcal{G}$ des relèvements de $\{\xi_i\}$, alors nous définissons $\alpha(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ par $\alpha(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = [\![u, \Phi(u)(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_k)]\!]$. Cette définition est indépendante des relèvements choisis, car Φ est horizontale et indépendante du point $u \in p^{-1}(x)$ par P-équivariance de Φ. □

4.1.2 La courbure d'une connexion de Cartan

Définition 37 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan de type (G, P) sur un variété M, c'est-à-dire un P-fibré principal sur M et une connexion de Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G. Nous définissons alors la courbure $K \in \Omega^2(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ de notre connexion de Cartan ω par*

$$K(\xi, \eta) := d\omega(\xi, \eta) + [\omega(\xi), \omega(\eta)]$$

pour tout ξ et η dans $T\mathcal{G}$ et $[\ ,\ ]$ est le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$.

Observons que la connexion de Cartan trivialise $T\mathcal{G} = \mathcal{G} \times \mathfrak{g}$. Ainsi chaque forme différentielle sur $\mathcal{G}$ est déterminée par ses valeurs sur les champs de vecteurs constants $\omega^{-1}(X)$. Ainsi toute l'information sur K est en fait contenue dans la fonction de courbure $\kappa : \mathcal{G} \to \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ définie par

$$\begin{aligned}
\kappa(u)(X, Y) &:= K(\omega(u)^{-1}(X), \omega(u)^{-1}(Y)) \\
&= [X, Y] - \omega(u)([\omega(u)^{-1}(X), \omega(u)^{-1}(Y)])
\end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout X et Y dans $\mathfrak{g}$, la deuxième égalité provenant simplement de la définition de la dérivation de ω. Notons que dans le terme de droite, le premier crochet est le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ tandis que le second est le crochet de Lie des champs de vecteurs sur $T\mathcal{G}$.

Propriété 38 *La forme de courbure $K \in \Omega^2(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ est horizontale. Ainsi la fonction de courbure κ peut être vue comme une fonction $\kappa : \mathcal{G} \to \Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$.*

De plus pour tout $g \in P$ nous avons

1. $(r^g)^* K = Ad(g^{-1}) \circ K$,
2. $\kappa \circ r^g = \lambda(g^{-1}) \circ \kappa$ *où* λ *est le produit tensoriel de l'action de* $\Lambda^2 \underline{Ad}^*$ *sur* $\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$ *et de l'action de* Ad *sur* $\mathfrak{g}$.

Ainsi nous pouvons appliquer le corollaire 4.1.1 et voir la fonction de courbure $\kappa \in C^\infty(\mathcal{G}, \Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g})^P$ comme une 2-forme sur M, $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{G} \times_P \mathfrak{g})$. Après avoir démontré cette propriété nous étudierons donc un peu plus l'espace $\mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}$.

Preuve de la propriété

Soit $X \in \mathfrak{p}$, notons $\zeta_X = \omega^{-1}(X)$ le champ de vecteurs fondamental engendré par X. Ainsi $d \circ \iota_{\zeta_X} \omega = d(X) = 0$. De plus la version infinitésimale de la P-équivariance de ω, $(r^g)^* \omega = Ad(g^{-1}) \circ \omega$, s'écrit $\mathcal{L}_{\zeta_X} \omega = -ad(X) \circ \omega$. Nous avons donc que

$$-ad(X) \circ \omega = \mathcal{L}_{\zeta_X} \omega = \iota_{\zeta_X} \circ d\omega + d \circ \iota_{\zeta_X} \omega = \iota_{\zeta_X} \circ d\omega.$$

Soit $\eta \in T\mathcal{G}$ nous avons alors

$$K(\omega^{-1}(X), \eta) = d\omega(\omega^{-1}(X), \eta) + [X, \omega(\eta)] = -ad(X)(\omega(\eta)) + [X, \omega(\eta)] = 0.$$

Notre 2-forme K est donc bien horizontale.

1) Soit $g \in P$ alors par équivariance de ω et par compatibilité du tiré en arrière avec la différentielle d nous avons :

$$\begin{aligned}
(r^g)^* K &= (r^g)^* \circ d\omega + [(r^g)^* \omega, (r^g)^* \omega] \\
&= d \circ (r^g)^* \omega + [(r^g)^* \omega, (r^g)^* \omega] \\
&= d \circ Ad(g^{-1}) \circ \omega + Ad(g^{-1}) \circ [\omega, \omega] \\
&= Ad(g^{-1}) \circ K.
\end{aligned}$$

2) Soit $g \in P$, $u \in \mathcal{G}$ et X et Y dans $\mathfrak{g}$ alors, par équivariance de ω nous avons

$$\begin{aligned}
\kappa(u \cdot g)(X, Y) &= K(\omega(u \cdot g)^{-1}(X), \omega(u \cdot g)^{-1}(Y)) \\
&= K(Tr^g(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(X))), Tr^g(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(Y)))) \\
&= (r^g)^* K(u)(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(X)), \omega(u)^{-1}(Ad(g)(Y))) \\
&= Ad(g^{-1}) \circ \kappa(u)(Ad(g)(X), Ad(g)(Y)).
\end{aligned}$$

Puis si nous regardons à présent X et Y dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\kappa(u\cdot g)(X,Y) &= Ad(g^{-1})\circ\kappa(u)(\underline{Ad}(g)(X),\underline{Ad}(g)(Y))\\ &= \lambda(g^{-1})\circ\kappa(u)(X,Y).\end{aligned}$$

□

4.1.3 Le fibré tractoriel

Étudions à présent le fibré $\mathcal{A}M := \mathcal{G}\times_P\mathfrak{g}$ nommé le *fibré tractoriel* de la géométrie de Cartan $(p:\mathcal{G}\to M,\omega)$. Avec cette définition en main nous allons voir quelques propriétés de notre fibré tractoriel.

1. L'application quotient $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ fournit une application surjective entre fibrés $\Pi:\mathcal{A}M\to TM$.
2. Notre fibré $\mathcal{A}M$ ainsi défini possède une filtration $\mathcal{A}M=\mathcal{A}^{-k}M\supset\cdots\supset\mathcal{A}^kM$ avec $\mathcal{A}^iM:=\mathcal{G}\times_P\mathfrak{g}^i$. Nous observons que $\mathcal{A}^0M=\mathcal{G}\times_P\mathfrak{p}$ et donc que

   $$\mathcal{A}M/\mathcal{A}^0M=\mathcal{G}\times_P\mathfrak{g}/\mathfrak{p}=TM \tag{4.1.2}$$

   et que

   $$\mathcal{A}^1M=\mathcal{G}\times_P\mathfrak{p}^\perp=\mathcal{G}\times_P(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*=T^*M. \tag{4.1.3}$$

   De cette manière nous obtenons aussi une filtration $\mathcal{A}^1M\supset\cdots\supset\mathcal{A}^kM$ de T^*M. En fait, pour tout $i>0$ et tout $x\in M$ nous avons $\mathcal{A}^i_xM=\{\Phi\in T^*_xM:\Phi(\xi)=0\ \forall\xi\in T_x^{-i+1}M\}$.
3. Nous avons sur $\mathcal{A}M$ un crochet de Lie naturel :

   $$\begin{array}{rccc}\{\ ,\ \}:& \mathcal{A}M\times\mathcal{A}M & \longrightarrow & \mathcal{A}M\\ & (\llbracket u,X\rrbracket,\llbracket u,Y\rrbracket) & \longmapsto & \llbracket u,[X,Y]\rrbracket\end{array}$$

   où $[\ ,\ ]$ est le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$. Ce crochet est bien défini car le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ est P-équivariant. Ce crochet est compatible avec la filtration. Nous obtenons ainsi un crochet sur $gr(\mathcal{A}M)$

   $$\begin{array}{rccc}\{\ ,\ \}:& gr_i(\mathcal{A}M)\times gr_j(\mathcal{A}M) & \longrightarrow & gr_{i+j}(\mathcal{A}M)\\ & (\llbracket u,X+\mathfrak{g}^{i+1}\rrbracket,\llbracket u,Y+\mathfrak{g}^{j+1}\rrbracket) & \longmapsto & \llbracket u,[X,Y]+\mathfrak{g}^{i+j+1}\rrbracket.\end{array}$$

   Notons que ce crochet coïncide avec le crochet $\{\ ,\ \}$ sur $gr(TM)$ décrit à la définition 27. Nous avons aussi au passage défini un crochet de Lie sur T^*M (respectivement sur $gr(T^*M)$) qui donne au fibré T^*M (respectivement au fibré $gr(T^*M)$) une structure de fibré en algèbre de Lie nilpotente (respectivement d'algèbre de Lie nilpotente et graduée).

4. Regardons à présent le fibré gradué $\mathcal{A}M$:

$$\begin{array}{lllll} \text{pour } i<0, & gr_i(\mathcal{A}M) & = & \mathcal{G}\times_P \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1} & = & gr_i(TM), \\ \text{pour } i>0, & gr_i(\mathcal{A}M) & = & \mathcal{G}\times_P \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1} & = & gr_i(T^*M) \\ & & = & gr_{-i}(TM)^*, & & \\ \text{pour } i=0, & gr_0(\mathcal{A}M) & = & \mathcal{G}\times_P \mathfrak{p}_0. & & \end{array}$$

Or l'application adjointe fournit une injection $\mathfrak{p}_0 \to gl(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}))$. Nous pouvons alors voir $gr_0(\mathcal{A}M)$ comme un sous-espace de $End(gr(TM))$. Notons alors $End_0(gr(TM))$ ce sous-espace. Nous avons ainsi

$$gr(\mathcal{A}M) = gr(TM)\oplus End_0(gr(TM))\oplus gr(T^*M). \tag{4.1.4}$$

5. Observons à présent ce que nous n'avons pas : nous n'avons pas de projection canonique $\mathcal{A}M^* \to T^*M$ ni de décomposition $\mathcal{A}M \simeq TM \oplus \mathcal{G}\times_P \mathfrak{p}_0 \oplus T^*M$. Cependant si nous nous donnons une structure de Weyl alors nous possédons une projection $\mathcal{A}M^* \to T^*M$ et un isomorphisme $\mathcal{A}M \simeq TM\oplus\mathcal{G}\times_P\mathfrak{p}_0\oplus T^*M$. En effet, si nous travaillons sur l'algèbre $\mathfrak{g}$, la donnée d'une structure algébrique de Weyl fournit une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-k}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$ et donc naturellement une projection $\mathfrak{g}\to\mathfrak{p}^\perp$ qui est la projection sur $\mathfrak{p}^\perp$ parallèlement à $\mathfrak{g}_{-k}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_0$ et fournit un isomorphisme $\mathfrak{g}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{g}/\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{p}_0\oplus\mathfrak{p}^\perp$ défini par $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}\simeq\mathfrak{g}_{-k}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{p}_0\simeq\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{p}^\perp\simeq\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$. À présent rappelons qu'une structure de Weyl est une donnée P-équivariante de structures algébriques de Weyl en chaque point de $\mathcal{G}$, ainsi la donnée d'une structure de Weyl fournit bien une projection $\mathcal{A}M^*\to T^*M$ et un isomorphisme $\mathcal{A}M\simeq TM\oplus\mathcal{G}\times_P\mathfrak{p}_0\oplus T^*M$.

4.1.4 La dérivation fondamentale

Grâce à la proposition 35 nous disposons d'une dérivation naturelle sur tous les fibrés associés à une géométrie de Cartan qui est nommée dérivation fondamentale par Čap et Slovák [ČS09, p. 86] et dérivation invariante par Calderbank, Diemer et Souček [CDS05, p. 70].

Définition 39 *Soit $(p:\mathcal{G}\to M,\omega)$ une géométrie de Cartan de type (G,P) sur une variété M. Soit V un P-module de fibré vectoriel associé $\mathcal{G}\times_P V$. Alors nous définissons la dérivation fondamentale sur $\mathcal{G}\times_P V$, $\nabla^\omega : C^\infty(\mathcal{G},V)\to C^\infty(\mathcal{G},\mathfrak{g}^*\otimes V)$ par*

$$\nabla^\omega_X f(u) := T_u f(\omega(u)^{-1}(X))$$

pour tout $X\in\mathfrak{g}$, $f\in C^\infty(\mathcal{G},V)$ et tout $u\in\mathcal{G}$.

Cette application est P-équivariante et définit ainsi une application $\nabla^\omega : C^\infty(\mathcal{G}, V)^P \to C^\infty(\mathcal{G}, \mathfrak{g}^* \otimes V)^P$. Utilisant la proposition 35 nous avons alors une dérivation

$$\nabla^\omega : C^\infty(M, \mathcal{G} \times_P V) \longrightarrow C^\infty(M, \mathcal{A}M^* \otimes (\mathcal{G} \times_P V)).$$

Vérifions la P-équivariance de ∇^ω. Soit $g \in P$, $X \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathcal{G}$ et $f \in C^\infty(\mathcal{G}, V)^P$ alors

$$\begin{aligned}
\nabla^\omega \circ r^g(f)(u, X) &= T_{u\cdot g} f(\omega(u \cdot g)^{-1}(X)) \\
&= T_{u\cdot g} f(T_u r^g(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(X)))) \\
&= T_u(f \circ r^g)(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(X))) \\
&= T_u(g^{-1}.f)(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(X))) \\
&= (r^{g^{-1}})^* \nabla^\omega(f)(u, X).
\end{aligned}$$

Observons à présent quelques propriétés de cette dérivation.

Proposition 40 *1. Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan de type (G, P) sur une variété M. Soit V un P-module de fibré vectoriel associé $\mathcal{G} \times_P V$. Soit $f \in C^\infty(\mathcal{G}, V)^P$, $X \in \mathfrak{p}$ et $u \in \mathcal{G}$ alors*

$$(\nabla^\omega_X f)(u) + X \cdot f(u) = 0, \tag{4.1.5}$$

avec le dernier point correspondant à l'action à gauche de $\mathfrak{p}$ sur V. Cette equation signifie que la dérivation fondamentale est triviale verticalement.

Ainsi si P agit trivialement sur V et f est une section de $\mathcal{G} \times_P V$ alors $\nabla^\omega f = df \circ \Pi$ où Π est l'application quotient $\Pi : \mathcal{A}M \to TM$.

2. Soit V_1 et V_2 deux P-modules. Soit $f_1 \in C^\infty(\mathcal{G}, V_1)^P$ et $f_2 \in C^\infty(\mathcal{G}, V_2)^P$ alors

$$\nabla^\omega(f_1 \otimes f_2) = (\nabla^\omega f_1) \otimes f_2 + f_1 \otimes (\nabla^\omega f_2). \tag{4.1.6}$$

3. Nous avons l'identité de Ricci : soit $f \in C^\infty(\mathcal{G}, V)^P$ et X et Y dans $\mathfrak{g}$ alors

$$\nabla^\omega_X(\nabla^\omega_Y f) - \nabla^\omega_Y(\nabla^\omega_X f) = \nabla^\omega_{[X,Y]} f - \nabla^\omega_{\kappa(X,Y)} f \tag{4.1.7}$$

où $\kappa : \mathcal{G} \to \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ est la fonction de courbure de ω.

4. *Nous avons l'identité de Bianchi : soit ξ_1, ξ_2 et ξ_3 dans $\Gamma(\mathcal{A}M)$, la fonction de courbure $\kappa \in C^\infty(\mathcal{G}, \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g})$ peut être vue comme un élément de $\Gamma(\Lambda^2\mathcal{A}M^* \otimes \mathcal{A}M)$ et alors*
(4.1.8)
$$\sum_{cycl}\{\xi_1, \kappa(\xi_2, \xi_3)\} - \kappa(\{\xi_1, \xi_2\}, \xi_3) + \kappa(\kappa(\xi_1, \xi_2), \xi_3) + (\nabla^\omega_{\xi_1}\kappa)(\xi_2, \xi_3) = 0$$

avec $\{\ ,\ \}$ le crochet de Lie sur $\mathcal{A}M$ vu précédemment et avec la sommation se faisant sur l'ensemble des permutations cycliques de $\{1, 2, 3\}$.

Preuve de la proposition

1) Soit $f \in C^\infty(\mathcal{G}, V)^P$, $X \in \mathfrak{p}$ et $u \in \mathcal{G}$ alors en différenciant la P-invariance de f, $g \cdot (f(u \cdot g)) = f(u)$ pour $g \in P$, en l'identité $id \in P$, nous obtenons exactement $X \cdot (f(u)) + T_u f(\zeta_X(u)) = 0$ ce qui est le résultat recherché.

2) Ce résultat provient simplement de l'égalité $d(f_1 \otimes f_2) = df_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes df_2$.

3) Soit $f \in C^\infty(\mathcal{G}, V)^P$, l'application $\nabla^\omega f : \mathcal{G} \to \mathfrak{g}^* \otimes V$ est une combinaison linéaire d'éléments $f_1 \otimes f_2$ où $f_1 \in C^\infty(\mathcal{G}, \mathfrak{g}^*)^P$ et $f_2 \in C^\infty(\mathcal{G}, V)^P$ ainsi d'après le résultat 2), la dérivée fondamentale de $\nabla^\omega f$ est

$$\begin{aligned}\nabla^\omega_Y(\nabla^\omega_X f) &= \nabla^\omega_Y(Tf(\omega^{-1}(X))) \\ &= Tf(\omega^{-1}(Y) \cdot \omega^{-1}(X)) + T^2 f(\omega^{-1}(Y), \omega^{-1}(X))\end{aligned}$$

pour $(X, Y) \in \mathfrak{g}^2$ et donc

$$\nabla^\omega_X(\nabla^\omega_Y f) - \nabla^\omega_Y(\nabla^\omega_X f) = Tf([\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)]).$$

Par ailleurs, $\omega([\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)]) = -\kappa(X, Y) + [X, Y]$ donc

$$Tf([\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)]) = \nabla^\omega_{[X,Y]-\kappa(X,Y)} f,$$

d'où le résultat.

4) L'expression (4.1.8) est linéaire pour les fonctions lisses sur les arguments ξ_i, nous pouvons donc vérifier notre égalité en un point. L'identité demandée (4.1.8) devient alors

$$\sum_{cycl}[\kappa(X, Y), Z] + \kappa([X, Y], Z) - \kappa(\kappa(X, Y), Z) - (\omega^{-1}(Z) \cdot \kappa)(X, Y) = 0$$

pour tout X, Y, Z dans $\mathfrak{g}$ avec κ vue comme une application $\kappa : \mathcal{G} \to \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$. Remarquons que comme l'évaluation en (X, Y) est une application linéaire nous avons $(\omega^{-1}(Z) \cdot \kappa)(X, Y) = \omega^{-1}(Z) \cdot (\kappa(X, Y))$. Notons $\tilde{X} = \omega^{-1}(X)$, $\tilde{Y} = \omega^{-1}(Y)$ et $\tilde{Z} = \omega^{-1}(Z)$ alors par définition de κ nous avons $\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = -\kappa(X, Y) + [X, Y]$. Regardons à présent $K([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z})$:

$$\begin{aligned} K([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) &= d\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) + [\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]), Z] \\ &= -\tilde{Z} \cdot \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) + [\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot \omega(\tilde{Z}) - \omega([[\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}]) \\ &\quad +[\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]), Z] \\ &= \tilde{Z} \cdot (\kappa(X, Y)) - \tilde{Z} \cdot [X, Y] - \omega([[\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}]) \\ &\quad +[[X, Y], Z] - [\kappa(X, Y), Z] \\ &= \tilde{Z} \cdot (\kappa(X, Y)) - \omega([[\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}]) + [[X, Y], Z] \\ &\quad -[\kappa(X, Y), Z]. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$K([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) = \kappa(\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]), \omega(\tilde{Z})) = \kappa([X, Y], Z) - \kappa(\kappa(X, Y), Z).$$

Puis lorsque nous sommons sur toutes les permutations cycliques nous obtenons

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{cycl} \kappa([X, Y], Z) - \kappa(\kappa(X, Y), Z) - \omega^{-1}(Z) \cdot (\kappa(X, Y)) + [\kappa(X, Y), Z] \\ &\qquad = \textstyle\sum_{cycl} -\omega([[\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}]) + [[X, Y], Z] - = 0 \end{aligned}$$

La dernière égalité provenant des équations de Jacobi et du fait que nous sommons sur les permutations cycliques. □

4.2 Recherche d'une condition de normalité

4.2.1 L'espace affine des connexions de Cartan

L'objectif de cette partie est d'étudier l'ensemble des géométries paraboliques $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ régulières induisant la même structure parabolique infinitésimale. Munissons-nous d'un P-fibré principal $p : \mathcal{G} \to M$ sur une variété M et d'une connexion de Cartan ω sur $\mathcal{G}$ et prenons une autre connexion de Cartan $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ sur ce même fibré. Alors $\Phi = \omega - \tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ vérifie

1. $\omega - \tilde{\omega}(\zeta_X) = 0$ pour tout X dans P avec ζ_X le champ de vecteurs fondamental engendré par X, car ω et $\tilde{\omega}$ reproduisent les champs de vecteurs fondamentaux engendrés par les éléments de P. Ces égalités reviennent à dire que Φ est horizontale.

2. $\Phi = \omega - \tilde{\omega}$ est P-équivariante car ω et $\tilde{\omega}$ le sont.

Ainsi par le corollaire 4.1.1 notre 1-forme ϕ peut être vu comme une 1-forme Φ sur M, $\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)$.

Réciproquement si nous nous donnons $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ une connexion de Cartan et $\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)$ alors Φ peut être vu comme un élément de $\Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ horizontal et P-équivariant. Nous pouvons ainsi définir $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ par $\tilde{\omega} = \omega + \Phi$. Cette 1-forme possède alors la propriété de reproduction des champs de vecteurs fondamentaux engendrés par les éléments de P et la propriété de P-équivariance. Ainsi $\omega + \Phi$ est une connexion de Cartan si et seulement si $(\omega + \Phi)(u) : T_u\mathcal{G} \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme pour tout $u \in \mathcal{G}$.

Observons $\mathbb{V} = \{f \in L(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{g}) : id + f \circ \pi \text{ est un isomorphisme de } \mathfrak{g}\}$ avec π l'application quotient $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Cet espace $\mathbb{V}$ est un voisinage de 0 qui est P-invariant. Nous pouvons alors définir son fibré associé $V := \mathcal{G} \times_P \mathbb{V}$ qui est un sous-fibré de $L(TM, \mathcal{A}M) = \mathcal{G} \times_P L(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$. Or l'ensemble des sections du fibré V est en fait $\Gamma(V) = \{\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M) \subset \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g}) : (\omega + \Phi)(u) : T_u\mathcal{G} \to \mathfrak{g} \text{ est un isomorphisme pour tout } u \in \mathcal{G}\} \subset \Omega^1(M, \mathcal{A}M)$. En effet, soit $u \in \mathcal{G}$ alors $(\omega + \Phi)(u) : T_u\mathcal{G} \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme si et seulement si $(\omega + \Phi) \circ \omega(u)^{-1} = id + \Phi \circ \omega(u)^{-1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est un isomorphisme. Or $\Phi \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ est horizontale et ω reproduit les champs de vecteurs fondamentaux engendrés par les éléments de P, donc $\Phi \circ \omega(u)^{-1}(X + \mathfrak{p}) = \Phi \circ \omega(u)^{-1}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$: l'élément $\Phi \circ \omega(u)^{-1}$ s'écrit alors bien sous la forme $\Phi \circ \omega(u)^{-1} = id + f \circ \pi$ avec $f \in \mathbb{V}$. Nous en concluons que $\tilde{\omega} = \omega + \Phi$ est une connexion de Cartan si et seulement si $\Phi \in \Gamma(V)$.

Remarquons que si $f : \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \to \mathfrak{g}$ est homogène de degré supérieur ou égal à 1, c'est-à-dire si $f(\mathfrak{g}^i/\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{g}^{i+1}$ pour tout $i < 0$, alors $id + f \circ \pi$ est un isomorphisme. En effet, soit $x \in \ker(id + f \circ \pi)$, alors $0 = gr_{-k}(x + f(\pi(x))) = gr_{-k}(x)$ donc $x \in \mathfrak{g}^{-k+1}$ et $gr_{-k+1}(f(\pi(x))) = 0$ car π est homogène de degré 0 et f est homogène de degré 1. Nous avons alors $0 = gr_{-k+1}(x + f(\pi(x))) = gr_{-k+1}(x)$... En rééditant cet argument nous trouvons que $x \in \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{p}$ donc $f(\pi(x)) = 0$ et nous avons $x = 0$. Notre application est donc injective et par dimension bijective. Nous noterons $\Omega^1(M, \mathcal{A}M)^1$ les 1-formes sur M à valeurs dans $\mathcal{A}M$ qui sont homogènes de degrés supérieurs ou égaux à 1, c'est-à-dire $\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)$ telle que $\Phi(T^iM) \subset \mathcal{A}^{i+1}M$ pour tout $i < 0$. Nous avons alors $\Omega^1(M, \mathcal{A}M)^1 \subset \Gamma(V) \subset \Omega(M, \mathcal{A}M)$.

Proposition 41 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan de type (G, P) et soit $\tilde{\omega} \in \Omega(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ une autre connexion de Cartan sur $\mathcal{G}$. Nous posons $\Phi = \tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)$.*

Alors

1. *ω et $\tilde{\omega}$ induisent la même filtration sur TM si et seulement si $\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^0$*

2. ω et $\tilde{\omega}$ induisent la même structure infinitésimale si et seulement si $\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^1$.

Preuve de la proposition

1) Pour $i < 0$, nous posons $T^iM = p_*(T^i\mathcal{G})$ avec $T^i\mathcal{G} := \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$. Ainsi ω et $\tilde{\omega}$ induisent la même filtration sur TM si et seulement si $\tilde{\omega}(T^i\mathcal{G}) \subset \mathfrak{g}^i$ pour tout $i < 0$ ce qui est équivalent à $\Phi(T^i\mathcal{G}) \subset \mathfrak{g}^i$ pour tout $i < 0$. Or $\Phi = \tilde{\omega} - \omega$ s'annule sur $T^0\mathcal{G} = \omega^{-1}(\mathfrak{p})$ donc ω et $\tilde{\omega}$ induisent la même filtration sur TM si et seulement si $\Phi(T^i\mathcal{G}) \subset \mathfrak{g}^i$ pour tout i, c'est-à-dire $\Phi \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ est homogène de degré supérieur ou égal à 0.

2) La deuxième partie est directe lorsque nous nous souvenons de la construction de la structure infinitésimale : soit $i < 0$ et $\xi \in T^iM$, $\theta_i(\xi) = [\omega(\tilde{\xi})]_i$ où $\tilde{\xi} \in T^i\mathcal{G}$ est un relevé de ξ et $[\cdot]_i$ la classe de $\cdot$ dans $gr_i(\mathfrak{g})$. Il est alors clair que ω et $\tilde{\omega}$ induisent la même structure infinitésimale si et seulement si pour tout $\tilde{\xi} \in T^i\mathcal{G}$, $\omega(\tilde{\xi})$ et $\tilde{\omega}(\tilde{\xi})$ ont la même image dans $gr_i(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire si Φ est homogène de degré supérieur ou égal à 1. $\square$

L'espace des connexions de Cartan induisant la même structure infinitésimale que celle de ω est donc un espace affine de direction $\Omega^1(M, \mathcal{A}M)^1$.

Nous allons maintenant observer la relation entre les courbures de deux connexions de Cartan induisant la même structure infinitésimale. L'idée étant de relier la différence de la fonction de courbure $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$ de ω et de celle $\tilde{\kappa}$ de $\tilde{\omega}$ à la différence $\Phi = \tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)$. Nous avons donc besoin pour cela d'une différentielle sur $\Omega^n(M, \mathcal{A}M)$. Commençons donc comme à l'accoutumé par regarder ce qu'il se passe au niveau algébrique. Sur $\Lambda^n\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ nous avons naturellement la différentielle $\partial : \Lambda^n\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \to \Lambda^{n+1}\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ définie par

$$\begin{aligned} \partial\Phi(X_0, \ldots, X_n) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i X_i \cdot \Phi(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Phi([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

où $\hat{X}_i$ signifie l'omission du terme X_i dans Φ. Notre volonté est de définir une différentielle sur $\Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$ qui soit P-équivariante. Mais lorsque nous regardons la définition de la différentielle précédente nous voyons que nous ne pouvons pas définir ∂ de la même manière car le crochet de Lie présent dans la définition est le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ et nous nous n'avons qu'un crochet de Lie sur $gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$. Pour résoudre cette difficulté deux voies sont possibles :

1. Nous ne possédons pas de crochet de Lie sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ mais nous possédons un crochet de Lie sur l'algèbre graduée $gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$. Quitte à fixer une structure algébrique de Weyl nous pouvons définir un crochet sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ et donc une différentielle sur $\Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$. Cependant comme cette structure algébrique de Weyl n'est pas P-invariante, notre différentielle ne va pas être P-équivariante. Tout ce que nous pouvons avoir c'est une P_0-équivariance, ce qui revient à dire qu'il faut se contenter de travailler sur les gradués et que nous ne traitons par ce biais que des propriétés liées à la structure infinitésimale sous-jacente. C'est cette approche dus à Čap et Slovák que nous allons traiter par la suite.
2. Calderbank, Diemer et Souček [CDS05] ne s'arrêtent pas à cette étude. L'opérateur ∂ défini sur $\Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$ grâce à une structure algébrique de Weyl n'est pas seulement P_0-équivariant mais est P^{op}-équivariant. Ils se servent alors de cette information pour construire une différentielle sur $\Omega^n(M, \mathcal{A}M)$ et utilisent la théorie des suites de Bernstein-Gelfand-Gelfand pour étudier cette différentielle.

Ici, nous nous contenterons de regarder ce qu'il se passe au niveau infinitésimal. Pour cela, rappelons un peu quels sont les objets gradués en notre possession. Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan de type (G, P). Alors nous avons une filtration de $T\mathcal{G}$, de TM et de $\mathcal{A}M$ et nous avons donc les espaces gradués associés. Les espaces $L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)$ sont eux aussi naturellement filtrés. En effet,

Définition 42 *Soit m un entier, et $\Phi \in L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)$ alors Φ est dit homogène de degré supérieur ou égal à m si*

$$\Phi(T^{i_1}M, \dots, T^{i_n}M) \subset \mathcal{A}^{i_1+\dots+i_n+m}M$$

pour tout $i_1, \dots, i_n < 0$.

L'espace des ces n-formes homogènes de degré au moins m est noté $L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)^m$.

À présent si $\Phi \in L(TM, \mathcal{A}M)^m$ alors nous pouvons définir une application

$$gr_m(\Phi) : gr(TM) \to gr(\mathcal{A}M)$$

par $gr_m(\Phi)(\xi + T^{i+1}M) = [\Phi(\xi)]_{i+m}$ pour tout $\xi \in T^iM$. Par définition $gr_m(\Phi) = 0$ signifie que Φ est dans $L(TM, \mathcal{A}M)^{m+1}$. Nous avons alors une injection linéaire

$$gr(L(TM, \mathcal{A}M)) \hookrightarrow L(gr(TM), gr(\mathcal{A}M))$$

compatible avec les graduations. Si maintenant nous nous donnons une structure de Weyl alors nous avons des isomorphismes $\phi : TM \to gr(TM)$ et $\psi : \mathcal{A}M \to gr(\mathcal{A}M)$ et donc l'application inverse : si $\Phi \in L(gr(TM), gr(\mathcal{A}M))$ alors $\psi \circ \Phi \circ \phi$ est dans $gr(L(TM, \mathcal{A}M))$ et $gr(\psi \circ \Phi \circ \phi) = \Phi$. Ainsi $gr(L(TM, \mathcal{A}M)) = L(gr(TM), gr(\mathcal{A}M))$. Et de même,

$$gr(L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)) = L(\Lambda^n gr(TM), gr(\mathcal{A}M)) = \mathcal{E} \times_{P_0} L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g})),$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{G}/\exp(\mathfrak{p}^\perp)$: cet espace ne dépend donc que de la structure infinitésimale.

Or sur $L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g}))$ nous avons la différentielle

$$\partial : L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g})) \to L(\Lambda^{n+1} gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g}))$$

définie par :
(4.2.1)

$$\begin{aligned} \partial\Phi(X_0, \ldots, X_n) &= \textstyle\sum_{i=0}^n (-1)^i X_i \cdot \Phi(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Phi(\{X_i, X_j\}, X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

avec X_i dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ et où $\hat{X}_i$ signifie l'omission du terme X_i dans Φ. Remarquons que comme $gr_i(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) = gr_i(\mathfrak{g})$ pour tout $i < 0$, l'action de $gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ sur $gr(\mathfrak{g})$ est bien définie. Avec cette définition de notre différentielle ∂ nous voyons que ∂ est un P_0-homomorphisme, c'est-à-dire qu'elle est P_0-équivariante. Nous pouvons alors définir

$$\partial : gr(L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)) \to gr(L(\Lambda^{n+1} TM, \mathcal{A}M)).$$

Soit $\xi_0, \ldots, \xi_n$ dans $gr(TM)$ et Φ dans $gr(L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M))$ alors
(4.2.2)

$$\begin{aligned} \partial\Phi(\xi_0, \ldots, \xi_n) &= \textstyle\sum_{i=0}^n (-1)^i \{\xi_i, \Phi(\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_n)\} \\ &\quad + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Phi(\{\xi_i, \xi_j\}, \xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_n). \end{aligned}$$

Notons que si Φ est homogène de degré d alors $\partial\Phi$ est aussi homogène et du même degré d.

Proposition 43 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan de type (G, P) régulière. Soit $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ une autre connexion de Cartan sur $\mathcal{G}$ et $\Phi = \tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)$. Si $\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^l$ pour un $l \geq 1$ fixé, alors $\tilde{\kappa} - \kappa : T^i M \times T^j M \to \mathcal{A}^{i+j+l} M$ et la fonction induite $gr_l(\tilde{\kappa} - \kappa) = \partial(gr_l(\Phi))$.*

Preuve de la proposition

Soit $u \in \mathcal{G}$ fixé et $x = p(u)$, alors $\Phi(x) \in L(TM, \mathcal{A}M) = \mathcal{G} \times_P L(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$.

Nous pouvons donc choisir $\phi(u) \in L(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$ tel que pour tout $\xi \in T_xM$ et tout $\tilde{\xi} \in T_u\mathcal{G}$ relevé de ξ, les applications $\phi(u)$ et $\Phi(x)$ sont reliées par $\Phi(\xi) = [\![u, \phi(u)(\omega(u)(\tilde{\xi}) + \mathfrak{p})]\!] \in \mathcal{A}_xM$. En choisissant ϕ de manière lisse nous pouvons voir $\phi : \mathcal{G} \to L(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$ comme un représentant de Φ. Ainsi si $u \in \mathcal{G}$ et $\xi \in T_u\mathcal{G}$ nous avons

$$\tilde{\omega}(u)(\xi) = \omega(u)(\xi) + \phi(u)(\omega(u)(\xi)).$$

En différenciant cette relation nous obtenons

$$d\tilde{\omega}(\xi, \eta) = d\omega(\xi, \eta) + d\phi(\xi)(\omega(\eta)) - d\phi(\eta)(\omega(\xi)) + \phi(d\omega(\xi, \eta)).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}[\tilde{\omega}(\xi), \tilde{\omega}(\eta)] &= [\omega(\xi), \omega(\eta)] + [\phi(\omega(\xi)), \omega(\eta)] + [\omega(\xi), \phi(\omega(\eta))] \\ &\quad + [\phi(\omega(\xi)), \phi(\omega(\eta))].\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{K}(\xi, \eta) - K(\xi, \eta) &= d\phi(\xi)(\omega(\eta)) - d\phi(\eta)(\omega(\xi)) + \phi(d\omega(\xi, \eta)) + \\ &\quad [\phi(\omega(\xi)), \omega(\eta)] + [\omega(\xi), \phi(\omega(\eta))] + [\phi(\omega(\xi)), \phi(\omega(\eta))].\end{aligned}$$

Or ϕ et Φ sont liés par $\Phi(Tp(\xi)) = \omega^{-1}(\phi(\omega(\xi)))$ pour tout $\xi \in T\mathcal{G}$ et $\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^l$ signifie que si $\xi \in T^i\mathcal{G}$ alors $\phi(\omega(\xi)) \in \mathfrak{g}^{i+l}$. De plus si Φ est homogène de degré l, il en est alors de même pour $d\phi(\xi)$ et $d\phi(\eta)$ ainsi si $\xi \in T^i\mathcal{G}$ et $\eta \in T^j\mathcal{G}$ avec $i, j < 0$ alors $d\phi(\xi)(\omega(\eta)) \in \mathfrak{g}^{j+l} \subset \mathfrak{g}^{j+i+l}$ et $d\phi(\eta)(\omega(\xi)) \in \mathfrak{g}^{i+l} \subset \mathfrak{g}^{j+i+l}$. Ajoutons à cela la régularité de ω, nous avons alors $\phi(d\omega(\xi, \eta)) \in \phi(\mathfrak{g}^{i+j}) \subset \mathfrak{g}^{j+i+l}$ car $d\omega(\xi, \eta) = K(\xi, \eta) - [\omega(\xi), \omega(\eta)]$. De plus, $[\phi(\omega(\xi)), \omega(\eta)]$ et $[\omega(\xi), \phi(\omega(\eta))]$ sont dans $\mathfrak{g}^{i+j+l}$ et enfin $[\phi(\omega(\xi)), \phi(\omega(\eta))] \in \mathfrak{g}^{i+j+2l} \subset \mathfrak{g}^{i+j+l}$ car $l > 0$. En résumé, comme $i, j < 0$ et $l > 0$ nous avons $(\tilde{K} - K)(T^i\mathcal{G}, T^j\mathcal{G}) \subset \mathfrak{g}^{i+j+l}$ ce qui signifie que $\tilde{K} - K \in \Omega^2(\mathcal{G}, \mathfrak{g})^l$ et que la classe de $(\tilde{K} - K)(\xi, \eta)$ dans $gr_{i+j+l}(\mathfrak{g})$ coïncide avec la classe de

$$\phi(d\omega(\xi, \eta)) + [\phi(\omega(\xi)), \omega(\eta)] + [\omega(\xi), \phi(\omega(\eta))].$$

Or par régularité, $K \in \Omega^2(\mathcal{G}, \mathfrak{g})^1$ donc $d\omega(\xi, \eta) = K(\xi, \eta) - [\omega(\xi), \omega(\eta)] = -[\omega(\xi), \omega(\eta)]$ modulo $\mathfrak{g}^{i+j+1}$. Ainsi

$$\begin{aligned}gr_{i+j+l}((\tilde{K} - K)(\xi, \eta)) &= gr_{i+j+l}\big(- \phi([\omega(\xi), \omega(\eta)]) + [\phi(\omega(\xi)), \omega(\eta)] \\ &\quad + [\omega(\xi), \phi(\omega(\eta))]\big).\end{aligned}$$

Repassons à présent à Φ et aux fonctions de courbure $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$ et $\tilde{\kappa} \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$. Soit $x \in M$, ξ et η dans T_xM alors $(\tilde{\kappa} - \kappa)(\xi, \eta) =$

$\omega(u)^{-1}((\tilde{K}-K)(\tilde{\xi},\tilde{\eta}))$ pour $u \in p^{-1}(x)$ et $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\eta}$ des relevés dans $T_u\mathcal{G}$ de ξ et η. Ainsi pour tout $\xi \in T^iM$, $\eta \in T^jM$ et $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\eta}$ des relevés dans $T\mathcal{G}$ de ξ et η nous avons

$$\begin{aligned} gr_{i+j+l}((\tilde{\kappa}-\kappa)(\xi,\eta)) &= gr_{i+j+l}\Big(-\omega^{-1}(\phi([\omega(\tilde{\xi}),\omega(\tilde{\eta})])) \\ &\quad +\omega^{-1}([\phi(\omega(\tilde{\xi})),\omega(\tilde{\eta})]) + \omega^{-1}([\omega(\tilde{\xi}),\phi(\omega(\tilde{\eta}))])\Big). \end{aligned}$$

Or $\Phi(Tp(\tilde{\xi})) = \omega^{-1}(\phi(\omega(\tilde{\xi})))$ donc

$$\omega^{-1}(\phi([\omega(\tilde{\xi}),\omega(\tilde{\eta})])) = \Phi(Tp(\omega^{-1}([\omega(\tilde{\xi}),\omega(\tilde{\eta})]))) = \Phi(\{\xi,\eta\})$$

par définition du crochet $\{\ ,\ \}$ sur $gr(TM)$. En faisant de même pour les autres termes nous obtenons alors

$$\begin{aligned} gr_l(\tilde{\kappa}-\kappa)(\xi,\eta) &= -gr_l(\Phi)(\{\xi,\eta\}) - \{\eta, gr_l(\Phi)(\xi)\} + \{\xi, gr_l(\Phi)(\eta)\} \\ &= \partial(gr_l(\Phi))(\xi,\eta). \end{aligned}$$

□

Revenons à présent à notre problématique. Nous recherchons une condition de normalisation pour les géométries paraboliques régulières pour qu'à une structure parabolique régulière infinitésimale soit associée une unique connexion de Cartan. Pour être de nature géométrique, cette condition sur la courbure doit correspondre à la requête d'avoir la courbure à valeur dans un sous-fibré naturel de $\Lambda^2T^*M\otimes\mathcal{A}M$. Nous recherchons donc un P-sous-module de $\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*\otimes\mathfrak{g}$. La proposition précédente semble nous indiquer que si nous passons aux gradués alors changer de connexion de Cartan régulière dans la classe des connexion de Cartan induisant la même structure infinitésimale ne change la courbure que par un terme inclus dans $\mathrm{im}(\partial)$. Il s'agit alors de trouver un P_0-sous-module complémentaire à $\mathrm{im}(\partial)$ dans $\Lambda^2gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*\otimes gr(\mathfrak{g})$. L'idée naturelle est alors de penser au noyau de l'application adjointe pour un produit scalaire donné. Ce sous-espace va en fait nous être fourni grâce à la théorie harmonique de Kostant.

4.2.2 Codifférentielle et décomposition de Hodge

Contrairement à notre différentielle ∂ définie sur $gr(L(\Lambda^n(TM),\mathcal{A}M))$, nous pouvons naturellement définir une codifférentielle sur l'espace non gradué $L(\Lambda^nTM,\mathcal{A}M)$. Utilisant la forme de Killing nous avons les isomorphismes $\mathfrak{g}^*\simeq\mathfrak{g}$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*\simeq\mathfrak{p}^\perp$ qui nous permettent de définir la codifférentielle suivante.

Définition 44 *Nous définissons la codifférentielle de Kostant*

$$\partial^* : \Lambda^{n+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$$

par
(4.2.3)

$$\partial^*(Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} Z_0 \wedge \ldots \wedge \hat{Z}_i \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes [Z_i, A]$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [Z_i, Z_j] \wedge Z_0 \wedge \ldots \wedge \hat{Z}_i \wedge \ldots \wedge \hat{Z}_j \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A$$

pour tout $Z_i \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* = \mathfrak{p}^\perp$ *et tout* $A \in \mathfrak{g}$ *avec* $[\ ,\ ]$ *le crochet de Lie sur* $\mathfrak{g}$ *(ce qui est bien défini car* $\mathfrak{p}^\perp \subset \mathfrak{g}$*).*

Propriété 45 *1. La codifférentielle* ∂^* *préserve la filtration de l'espace* $L(\Lambda^{n+1}\mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$ *et est homogène de degré* 0*.*

2. La codifférentielle ∂^* *est* P*-équivariante.*

Grâce à ces résultats nous avons une application induite

$$gr_0(\partial^*) : L(\Lambda^{n+1} gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g})) \longrightarrow L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g}))$$

qui est P_0-équivariante. Finalement nous pouvons donc définir sur l'espace $L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M) = \mathcal{G} \times_P L(\Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$ et sur l'espace $gr(L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)) = \mathcal{E} \times_{P_0} L(\Lambda^{n+1} gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g}))$ les applications codifférentielles ∂^* (qui restent homogène de degré 0) et $gr_0(\partial^*)$.

Preuve de la propriété

1) Un élément décomposable $Z \otimes A$ de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g} = \mathfrak{p}^\perp \otimes \mathfrak{g}$ avec $Z \in \mathfrak{g}^i$ pour un $i > 0$ et $A \in \mathfrak{g}^j$ pour un $j \in \{-k, \ldots, k\}$, aura une homogénéité $i + j$: soit $X \in \mathfrak{g}^l$ pour $l < 0$ alors

$$\begin{aligned} Z \otimes A(X) &= 0 \text{ si } l \geq -i+1 \text{ c'est-à-dire si } X \in \mathfrak{g}^{-i+1} = (\mathfrak{g}^i)^\perp \\ &\in \mathfrak{g}^j \text{ si } l \leq -i. \end{aligned}$$

L'élément $Z \otimes A$ représente donc une application $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} \to \mathfrak{g}$ qui est $(i+j)$-homogène. De la même manière si pour tout $l \in \{0, \ldots, n\}$ nous avons $K_l \in \mathfrak{g}^{i_l}$ avec $i_l > 0$ et $A \in \mathfrak{g}^j$ pour $j \in \{-k, \ldots, k\}$, alors l'élément $Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A$ représente une application $\Lambda^{n+1}\mathfrak{g}/\mathfrak{p} \to \mathfrak{g}$ homogène de degré $i_0 + \cdots + i_n + j$. Mais alors d'après la définition de ∂^* et le fait que le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ est homogène de degré 0, nous avons que $\partial^*(Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A)$ représente une application $\Lambda^n \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \to \mathfrak{g}$ homogène de degré $i_0 + \cdots + i_n + j$. Ainsi la

codifférentielle ∂^* préserve bien la filtration de $L(\Lambda^{n+1}\mathfrak{g}/\mathfrak{p},\mathfrak{g})$ et est homogène de degré 0.

2) Soit $g \in P$, $Z_0,\ldots,Z_n \in \mathfrak{p}^\perp$ et $A \in \mathfrak{g}$, le sous-groupe P agit sur $Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A$ de la manière suivante :

$$g \cdot (Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A) = Ad(g)(Z_0) \wedge \ldots \wedge Ad(g)(Z_n) \otimes Ad(g)(A).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\partial^*(g \cdot (Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A)) \\
&\quad = \partial^*(Ad(g)(Z_0) \wedge \ldots \wedge Ad(g)(Z_n) \otimes Ad(g)(A)) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} Ad(g)(Z_0) \wedge \ldots \wedge \hat{()}_i \wedge \ldots \wedge Ad(g)(Z_n) \otimes Ad(g)([Z_i, A]) \\
&\quad + \sum_{i<j} \Big(Ad(g)([Z_i, Z_j]) \wedge Ad(g)(Z_0) \wedge \ldots \wedge \hat{()}_i \wedge \ldots \wedge \hat{()}_j \wedge \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots \wedge Ad(g)(Z_n) \Big) \otimes Ad(g)(A) \\
&\quad = g \cdot \partial^*(Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A).
\end{aligned}$$

□

Remarquons que la codifférentielle $gr_0(\partial^*)$ est définie par la même formule

$$\begin{aligned}
gr_0(\partial^*)(Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A) = &\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} Z_0 \wedge \ldots \wedge \hat{Z}_i \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes \{Z_i, A\} \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \{Z_i, Z_j\} \wedge Z_0 \wedge \ldots \wedge \hat{Z}_i \wedge \ldots \wedge \hat{Z}_j \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A
\end{aligned}$$

avec $\{\ ,\ \}$ le crochet de Lie sur $gr(\mathfrak{g})$. De la même manière nous voyons donc que $gr_0(\partial^*)$ est P-équivariante.

Définition 46 *Nous définissons le Laplacien de Kostant par*

$$\square := \partial \circ gr_0(\partial^*) + gr_0(\partial^*) \circ \partial : L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g})) \longrightarrow L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g})).$$

Ce Laplacien est P_0-équivariant et définit alors un Laplacien

$$\square : gr(L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)) \longrightarrow gr(L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)).$$

La P_0-équivariance de $\Box$ provient simplement de celles de ∂ et de $gr_0(\partial^*)$. Dans la partie 3.3.1. du livre de Čap et Slovák [ČS09, p. 340], ceux-ci construisent un produit scalaire de $L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), V)$, avec V une représentation de dimension finie de $gr(\mathfrak{g})$, pour lequel la différentielle ∂ et la codifférentielle $gr_0(\partial^*)$ sont adjoints.

Proposition 47 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et $\epsilon \in \mathfrak{w}$ une structure algébrique de Weyl, c'est-à-dire un relevé dans $\mathfrak{p}$ de l'élément de graduation $\epsilon_0 \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp$. Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ qui en découle. Alors il existe un produit scalaire sur $L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ pour tout n de sorte que les opérateurs $\partial : L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \to L(\Lambda^{n+1} \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ et $gr_0(\partial^*) : L(\Lambda^{n+1} \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \to L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ soient adjoints.*

Preuve de la proposition

Rappelons que pour une involution de Cartan σ sur $\mathfrak{g}$, la forme bilinéaire $h(X, Y) = -B(X, \sigma(Y))$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ avec B la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. Montrons que l'involution σ peut être choisie de sorte qu'elle se restreigne en un isomorphisme linéaire $\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{g}_+ \to \mathfrak{g}_-$ qui est exactement l'isomorphisme entre $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_+^* \simeq \mathfrak{g}_-$ induit par h.

Soit σ une involution de Cartan. Dans une base de $\mathfrak{g}$ adaptée à la décomposition fournie par notre structure algébrique de Weyl, nous voyons clairement que $ad(\epsilon)$ est diagonale et de valeurs propres réelles : ϵ est donc un élément hyperbolique de $\mathfrak{g}$. Nous pouvons alors compléter cet élément pour obtenir une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ commutative formée d'éléments hyperboliques et maximale pour ces propriétés, c'est-à-dire en un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$. Par définition de l'élément de graduation nous avons $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$. Or tout sous-espace de Cartan est conjugué à un sous-espace de Cartan inclus dans $\{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = -X\}$. Ainsi quitte à conjuguer notre involution σ par l'élément adéquat, nous pouvons supposer que $\mathfrak{a} \subset \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = -X\}$ et en particulier $\sigma(\epsilon) = -\epsilon$. De cette manière nous avons $\sigma(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_{-i}$ pour tout $i \in \{-k, \ldots, k\}$ et donc l'isomorphisme précédemment souhaité.

Nous disposons ainsi d'un produit scalaire sur l'espace $L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ pour tout n et l'isomorphisme $\mathcal{F}$ entre $L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$, et $L(\Lambda^n \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}^*)$ induit par ce produit scalaire est donné par la formule

$$(\mathcal{F}(\phi)(Z_1, \ldots, Z_n))(v) = h(v, \phi(\sigma(Z_1), \ldots, \sigma(Z_n))$$

pour $\phi \in L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$, $Z_i \in \mathfrak{g}_+$ et $v \in \mathfrak{g}$. Vérifions que ∂ et $gr_0(\partial^*)$ sont duaux pour ce produit scalaire. Soit $\phi_1 = Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A \in L(\Lambda^{n+1} \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ et

$\phi_2 \in L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ alors

$$\begin{array}{rl} \langle \partial\phi_2, \phi_1 \rangle & = (\mathcal{F}(\partial\phi_2)(Z_0, \ldots, Z_n))(A) \\ & = h(A, \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma(Z_i) \cdot \phi_2(\sigma(Z_0), \ldots, \widehat{\sigma(X_i)}, \ldots, \sigma(Z_n)) \\ + \sum_{i<j} & (-1)^{i+j} \phi_2([\sigma(Z_i), \sigma(Z_j)], \sigma(Z_0), \ldots, \hat{()}_i, \ldots, \hat{()}_j, \ldots, \sigma(Z_n))), \end{array}$$

d'après l'expression (4.2.1). Or

$$\begin{array}{rcl} h(\sigma(X) \cdot Y, Z) & = & -B([\sigma(X), Y], \sigma(Z)) \\ & = & B(Y, [\sigma(X), \sigma(Z)]) \\ & = & B(Y, \sigma(X \cdot Z)) \\ & = & -h(Y, X \cdot Z), \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \langle \partial\phi_2, \phi_1 \rangle & = & \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} h(Z_i \cdot A, \phi_2(\sigma(Z_0), \ldots, \widehat{\sigma(X_i)}, \ldots, \sigma(Z_n))) \\ & + & h\Big(A, \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \phi_2\big([\sigma(Z_i), \sigma(Z_j)], \sigma(Z_0), \ldots, \widehat{\sigma(Z_i)}, \ldots, \\ & & \qquad \ldots, \widehat{\sigma(Z_j)}, \ldots, \sigma(Z_n)\big)\Big) \\ & = & \mathcal{F}(\phi_2)(gr_0(\partial^*)\phi_1) \\ & = & \langle \phi_2, gr_0(\partial^*)\phi_1 \rangle \end{array}$$

d'après l'expression (4.2.3). □

Ainsi nous avons la décomposition de Hodge suivante

Théorème 48 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et $\epsilon \in \mathfrak{w}$ une structure algébrique de Weyl, c'est-à-dire un relevé dans $\mathfrak{p}$ de l'élément de graduation $\epsilon_0 \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^\perp$. Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ qui en découle.*

Alors pour tout $n \geq 0$, nous avons la décomposition de $L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ en somme direct de P_0-sous-modules suivante

$$L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \oplus \ker(\Box) \oplus \mathrm{im}(\partial)$$

avec en plus $\ker(gr_0(\partial^*)) = \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \oplus \ker(\Box)$ *et* $\ker(\partial) = \ker(\Box) \oplus \mathrm{im}(\partial)$.

Preuve du théorème

Soit $\psi \in \ker(gr_0(\partial^*)) \cap \mathrm{im}(\partial)$, alors il existe $\phi \in L(\Lambda^* \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ tel que $\partial\phi = \psi$. Or nous avons $0 = \langle gr_0(\partial^*)\partial\phi, \phi \rangle = \langle \partial\phi, \partial\phi \rangle$ car $\partial\phi = \psi \in \ker(gr_0(\partial^*))$ et donc $\psi = \partial\phi = 0$. Nous en concluons que $\ker(gr_0(\partial^*)) \cap \mathrm{im}(\partial) = \{0\}$. De la même manière nous montrons que $\ker(\partial) \cap \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) = \{0\}$. Comme $\partial^2 = 0$,

$\mathrm{im}(\partial) \subset \ker(\partial)$ et alors $\mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \cap \mathrm{im}(\partial) \subset \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \cap \ker(\partial) = \{0\}$. Soit à présent $\phi \in \ker(\Box)$, alors $\partial \circ gr_0(\partial^*)\phi = -gr_0(\partial^*) \circ \partial\phi \in \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \cap \ker(\partial) = \{0\}$. Donc $gr_0(\partial^*)\phi \in \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \cap \ker(\partial) = \{0\}$ et donc $\phi \in \ker(gr_0(\partial^*))$. De la même manière, $\phi \in \ker(\partial)$ et nous avons $\ker(\Box) \subset \ker(\partial) \cap \ker(gr_0(\partial^*)$. L'inclusion réciproque est directe d'après la définition du Laplacien $\Box$ et nous avons donc l'égalité $\ker(\Box) = \ker(\partial) \cap \ker(gr_0(\partial^*))$. Nous avons alors $\ker(\Box) \cap (\mathrm{im}(\partial) \oplus \mathrm{im}(gr_0(\partial^*))) = \{0\}$ et nous disposons ainsi de la somme directe $\mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \oplus \ker(\Box) \oplus \mathrm{im}(\partial)$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que cet ensemble est l'espace $L(\Lambda^n\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ dans sa totalité.

Notre Laplacien $\Box$ se restreint sur $\mathrm{im}(\partial)$ en un endomorphisme de $\mathrm{im}(\partial)$ qui est bijectif car $\ker(\Box) \cap \mathrm{im}(\partial) = \{0\}$. Notons Q l'inverse de cette fonction. De la même manière la restriction de $\Box$ à $\mathrm{im}(gr_0(\partial^*))$ est un automorphisme de $\mathrm{im}(gr_0(\partial^*))$ dont nous notons R l'inverse. Alors soit $\phi \in L(\Lambda^n\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$, cet élément se décompose comme ceci

$$\phi = Rgr_0(\partial^*)\partial\phi + (\phi - Rgr_0(\partial^*)\partial\phi - Q\partial gr_0(\partial^*)\phi) + Q\partial gr_0(\partial^*)\phi.$$

Or $Rgr_0(\partial^*)\partial\phi \in \mathrm{im}(gr_0(\partial^*))$, $Q\partial gr_0(\partial^*)\phi \in \mathrm{im}(\partial)$ et

$$\Box(\phi - Rgr_0(\partial^*)\partial\phi - Q\partial gr_0(\partial^*)\phi) = \Box\phi - gr_0(\partial^*)\partial\phi - \partial gr_0(\partial^*)\phi = 0.$$

Donc $L(\Lambda^n\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) \subset \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \oplus \ker(\Box) \oplus \mathrm{im}(\partial)$ et nous avons bien la décomposition de Hodge voulue.

Le dernier point vient du fait que $\ker(\partial) \cap \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) = \{0\}$ alors que $\ker(\Box) \oplus \mathrm{im}(\partial) \subset \ker(\partial)$ et les relations analogues pour $gr_0(\partial^*)$. $\Box$

De ce résultat nous déduisons le corollaire suivant

Corollaire 49 *1. Pour tout $n \geq 0$, nous pouvons naturellement identifier le P_0-module cohomologique $H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) := \ker(\partial)/\mathrm{im}(\partial)$ à $\ker(\Box) \subset L(\Lambda^n\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$.*

2. Nous pouvons aussi identifier la cohomologie $H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ à l'homologie $\ker(gr_0(\partial^*))/\mathrm{im}(gr_0(\partial^*))$, ce qui fournit une structure de P-module à $H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. Avec cette structure de P-module, le sous-groupe $\exp(\mathfrak{p}^\perp) \subset P$ agit trivialement sur la cohomologie : cette structure de P-module est donc simplement l'extension triviale de la structure de P_0-module.

Preuve du corollaire

D'après la décomposition de Hodge nous avons directement que

$$H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) := \ker(\partial)/\mathrm{im}(\partial) = \ker(\Box) = \ker(gr_0(\partial^*))/\mathrm{im}(gr_0(\partial^*)).$$

Montrons à présent que l'action de $\exp(\mathfrak{p}^\perp)$ sur la cohomologie est triviale. Soit $Z_1, \ldots, Z_n$ dans $\mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{g}_+$, A dans $\mathfrak{g}$ et $Z_0 \in \mathfrak{g}_j$ pour $j > 0$ alors nous avons

$$\begin{aligned} gr_0(\partial^*)(Z_0 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A) + Z_0 \wedge gr_0(\partial^*)(Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A) \\ &= -Z_1 \wedge \ldots \wedge \otimes\{Z_0, A\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \{Z_0, Z_i\} \wedge \ldots \wedge \hat{Z}_i \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A \\ &= -Z_0 \cdot (Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_n \otimes A). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\phi \in L(\Lambda^n \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ et tout $Z \in \mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{g}_+$ nous avons

$$gr_0(\partial^*)(Z \wedge \phi) = -Z \wedge gr_0(\partial^*)(\phi) - Z \cdot \phi.$$

L'action de Z envoie donc $\ker(gr_0(\partial^*))$ sur $\mathrm{im}(gr_0(\partial^*))$ et ainsi l'action de $Z \in \mathfrak{p}^\perp$ sur

$$\ker(gr_0(\partial^*))/\mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) = H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$$

est triviale. □

4.2.3 Connexion de Cartan normale et courbure harmonique

Après avoir travaillé sur les algèbres de Lie, revenons à nos fibrés TM et $\mathcal{A}M$ en rappelant que

$$\begin{aligned} \Lambda^n T^*M \otimes \mathcal{A}M &= \mathcal{G} \times_P (\Lambda(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}), \\ \text{et} \quad gr(\Lambda^n T^*M \otimes \mathcal{A}M) &= \mathcal{E} \times_{P_0} (\Lambda gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes gr(\mathfrak{g})). \end{aligned}$$

D'après la P_0-équivariance de ∂, nous avons la différentielle

$$\partial : gr(\Lambda^n T^*M \otimes \mathcal{A}M) \longrightarrow gr(\Lambda^{n+1} T^*M \otimes \mathcal{A}M)$$

et d'après la P-équivariance de ∂^* nous avons la codifférentielle

$$\partial^* : \Lambda^{n+1} T^*M \otimes \mathcal{A}M \longrightarrow \Lambda^n T^*M \otimes \mathcal{A}M.$$

Cette dernière se décrit de la manière suivante : soit $\phi_0, \ldots, \phi_n$ dans $\Omega^1(M)$ et s une section de $\mathcal{A}M$ alors nous avons

$$\begin{aligned} \partial^*(\phi_0 \wedge \ldots \wedge \phi_n \otimes s) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \phi_0 \wedge \ldots \wedge \hat{\phi}_i \wedge \ldots \wedge \phi_n \otimes \{\phi, s\} \\ &+ \sum_{i+j} (-1)^{i+j} \{\phi_i, \phi_j\} \wedge \phi_0 \wedge \ldots \wedge \hat{\phi}_i \wedge \ldots \wedge \hat{\phi}_j \wedge \ldots \wedge \phi_n \otimes s \end{aligned}$$

avec $\{\ ,\ \}$ le crochet de Lie sur $\mathcal{A}M$. Notre codifférentielle ∂^* est là encore compatible avec la filtration et même homogène de degré 0 : nous avons alors

$$gr_0(\partial^*) : gr(\Lambda^{n+1}T^*M \otimes \mathcal{A}M) \longrightarrow gr(\Lambda^n T^*M \otimes \mathcal{A}M)$$

qui peut être définie comme la classe de ∂^* dans $gr_0(\Lambda^{n+1}T^*M \otimes \mathcal{A}M \to \Lambda^n T^*M \otimes \mathcal{A}M)$ ou alors comme l'élément correspondant à l'application P_0-équivariante $gr_0(\partial^*) : \Lambda^{n+1} gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes gr(\mathfrak{g}) \to \Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes gr(\mathfrak{g})$, dans les deux cas nous définissons le même objet homogène de degré 0. Enfin nous avons le Laplacien algébrique

$$\Box : L(\Lambda^n gr(T^M), gr(\mathcal{A}M)) \longrightarrow L(\Lambda^n gr(T^M), gr(\mathcal{A}M))$$

défini par $\Box = \partial \circ gr_0(\partial^*) - gr_0(\partial^*) \circ \partial$ qui est comme ∂ et $gr_0(\partial^*)$, homogène de degré 0. Fixons-nous une structure algébrique de Weyl $\epsilon : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$ alors comme dans la partie précédente nous obtenons la décomposition de Hodge suivante

$$L(\Lambda^n gr(T^M), gr(\mathcal{A}M)) = \mathrm{im}(gr_0(\partial^*)) \otimes \ker(\Box) \otimes \mathrm{im}(\partial). \tag{4.2.4}$$

Par construction nous avons la relation suivante : $\ker(\Box) \simeq \mathcal{E} \times_{P_0} H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$.

Remarques 50 *1. Notons qu'il y a une assymétrie entre ∂ et ∂^* car la codifféretielle est définie sur tout $\Lambda^n T^*M \otimes \mathcal{A}M$ alors que la différentielle est définie sur la graduation.*

2. Les fibrés associés $\mathrm{im}(\partial^*) \subset \ker(\partial^*)$ sont des sous-fibrés de l'espace $L(\Lambda^n T^*M, \mathcal{A}M)$. Par le corollaire 49 nous avons que $\exp(\mathfrak{p}^\perp)$ agit trivialement sur $\ker(\partial^*)/\mathrm{im}(\partial^*)$: le quotient $\ker(\partial^*)/\mathrm{im}(\partial^*)$ est donc naturellement associé au fibré principal $\mathcal{E} \to M$

$$\ker(\partial^*)/\mathrm{im}(\partial^*) \simeq \mathcal{E} \times_{P_0} H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \ker(\Box).$$

La décomposition (4.2.4) nous permet alors de définir la condition de normalité de la manière suivante.

Définition 51 *1. Une connexion de Cartan $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ est dite normale si sa fonction de courbure $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$ vérifie $\partial^*(\kappa) = 0$.*

2. Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan normale, notons $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$ sa fonction de courbure. Nous définissons alors la courbure harmonique κ_H comme étant l'image de la fonction de courbure κ dans le fibré $\mathcal{E} \times_{P_0} H^2(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g})) = \ker(\partial^*)/\mathrm{im}(\partial^*)$.

Remarquons ici que le fait que ∂^* soit définie sur $L(\Lambda^n TM, \mathcal{A}M)$ et pas seulement sur les gradués nous permet de définir correctement la condition de normalité qui est effectivement une condition sur la courbure totale κ. Nous obtenons bien la condition que nous recherchions, à savoir une projection sur un supplémentaire de $\mathrm{im}(\partial)$ dans $L(\Lambda^n gr(TM), gr(\mathcal{A}M))$, ce supplémentaire étant $\ker(gr_0(\partial^*)) = gr(\ker(\partial^*))$.

Il est important de noter que dans le cas où notre connexion de Cartan ω est normale alors la fonction de courbure κ et la courbure harmonique κ_H contiennent autant d'information l'une et l'autre. Ceci est un résultat que nous retrouvons avec Calderbank, Diemer et Souček [CDS05] qui utilisent la théorie des suites de Bernstein-Gelfand-Gelfand pour construire un opérateur inverse nous redonnant la courbure κ initiale. Nous allons ici démontrer un résultat plus faible mais suffisant pour nous et présent dans le livre de Čap et Slovák [ČS09, p. 265].

Théorème 52 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan régulière de type (G, P) telle qu'il existe $l > 0$ tel que la fonction de courbure κ soit l-homogène, c'est-à-dire $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)^l$. Alors la section induite $gr_l(\kappa)$ vérifie $\partial(gr_l(\kappa)) = 0$.*

Si la connexion ω est de plus normale alors

$$gr_l(\kappa) \in \ker(\square) \subset L(\Lambda^2 gr(TM), gr(\mathcal{A}M))$$

et si nous notons ϕ l'isomorphisme $\phi : \ker(\square) \xrightarrow{\sim} \ker(\partial^*)/\mathrm{im}(\partial^*)$, alors

$$\phi(gr_l(\kappa)) = (\kappa_H)_l$$

la composante l-homogène de κ_H.

En particulier si ω est normale et régulière $\kappa_H = 0$ est équivalent à $\kappa = 0$.

Preuve du théorème

1) Soit $i_1, i_2, i_3 < 0$ et $\xi_j \in \Gamma(gr_{i_j}(TM))$ pour $j = 1, 2, 3$. Comme $gr_{i_j}(TM) = gr_{i_j}(\mathcal{A}M)$ il existe un représentant $s_j \in \Gamma(\mathcal{A}^{i_j} M)$ représentant ξ_j. Notant $\{\ ,\ \}$ le crochet de Lie sur $\mathcal{A}M$, l'identité de Bianchi (4.1.8) pour la connexion de Cartan ω nous donne :

$$\sum_{cycl} \{\kappa(s_1, s_2), s_3\} + \kappa(\{s_1, s_2\}, s_3) - \kappa(\kappa(s_1, s_2), s_3) - \nabla^\omega_{s_3}(\kappa(s_1, s_2)) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} &\{\kappa(s_1, s_2), s_3\} + \kappa(\{s_1, s_2\}, s_3) \in \Gamma(\mathcal{A}^{i_1+i_2+i_3+l} M), \\ &\kappa(\kappa(s_1, s_2), s_3) \in \Gamma(\mathcal{A}^{i_1+i_2+i_3+2l} M) \subset \Gamma(\mathcal{A}^{i_1+i_2+i_3+l} M) \\ \text{et} \quad &\nabla^\omega_{s_3}(\kappa(s_1, s_2)) \in \Gamma(\mathcal{A}^{i_1+i_2+l}) \subset \Gamma(\mathcal{A}^{i_1+i_2+i_3+l}). \end{aligned}$$

Regardons à présent la classe de la l-graduation de cette égalité. Les deux derniers termes de la somme deviennent nul et nous avons alors

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{cycl} gr_l(\{\kappa(s_1,s_2),s_3\}) + gr_l(\kappa(\{s_1,s_2\},s_3)) \\
&= \sum_{cycl} \{gr_l(\kappa)(\xi_1,\xi_2),\xi_3\} + gr_l(\kappa)(\{\xi_1,\xi_2\},\xi_3) \\
&= \{gr_l(\kappa)(\xi_1,\xi_2),\xi_3\} - \{gr_l(\kappa)(\xi_1,\xi_3),\xi_2\} + \{gr_l(\kappa)(\xi_2,\xi_3),\xi_1\} \\
&\quad + gr_l(\kappa)(\{\xi_1,\xi_2\},\xi_3) - gr_l(\kappa)(\{\xi_1,\xi_3\},\xi_2) + gr_l(\kappa)(\{\xi_2,\xi_3\},\xi_1) \\
&= -\partial(gr_l(\kappa))(\xi_1,\xi_2,\xi_3).
\end{aligned}$$

2) Si à présent ω est en plus normale, $\partial^*(\kappa) = 0$, comme ∂^* est compatible avec l'homogénéité nous avons

$$0 = gr_l(\partial^*(\kappa)) = gr_0(\partial^*)(gr_l(\kappa)).$$

Ainsi $gr_l(\kappa) \in \ker(gr_0(\partial^*)) \cap \ker(\partial) = \ker(\square)$. D'un autre côté, la composante homogène de degré l de κ_H est par construction égale à l'image de $gr_l(\kappa) \in \Gamma(\ker(gr_0(\partial^*)))$ dans $\ker(\partial^*)/\mathrm{im}(\partial^*)$. □

4.3 Existence et unicité d'une connexion de Cartan

Après avoir définie cette notion de normalité d'une connexion de Cartan, nous allons vérifier l'existence d'une connexion de Cartan normale dans la classe des connexions de Cartan régulières définissant la même structure infinitésimale puis vérifier si nous avons bien unicité d'une telle connexion.

4.3.1 Existence d'une connexion de Cartan normale

Proposition 53 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan régulière de type (G,P) et de fonction de courbure $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$.*

Alors il existe une connexion de Cartan $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ normale de sorte que $\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^1$.

En particulier, pour toute connexion de Cartan régulière $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$, il existe une connexion de Cartan normale ayant la même structure infinitésimale que ω.

Preuve de la proposition

Montrons notre résultat par une récurrence finie. L'hypothèse de récurrence pour $l \geq 1$ étant qu'il existe une connexion de Cartan $\tilde{\omega}$ sur $\mathcal{G}$ définissant la même structure infinitésimale que ω et telle que sa fonction de courbure $\tilde{\kappa}$ vérifie $\partial^*(\tilde{\kappa}) \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^l$. Comme $\Omega^1(M, \mathcal{A}M)^n = \{0\}$ pour $n > 2k$, nous aurons $\partial^*(\tilde{\kappa}) = 0$ à partir d'un certain rang, ce qui signifie que nous aurons trouvé notre connexion de Cartan normale.

L'initialisation se fait grâce à la régularité : d'après la proposition 32, la fonction de courbure κ appartient à $\Omega^1(M, \mathcal{A}M)^1$ et par 0-homogénéité de ∂^*, $\partial^*\kappa \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^1$.

Soient $l \geq 1$ et ω une connexion de Cartan régulière telle que $\partial^*(\kappa) \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^l$, montrons qu'il existe une connexion de Cartan $\tilde{\omega}$ avec $\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^l$ telle que sa fonction de courbure $\tilde{\kappa}$ vérifie la relation $\partial^*(\tilde{\kappa}) \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^{l+1}$. Une telle connexion de Cartan $\tilde{\omega}$ possède alors la même structure infinitésimale que ω d'après la proposition 32 car $\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^l \subset \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^1$.

Comme la codifférentielle $\partial^* : \Lambda^2 T^*M \otimes \mathcal{A}M \to T^*M \otimes \mathcal{A}M$ préserve les homogénéités, cette codifférentielle induit une application entre les composantes l-homogène. Or $\partial^*\kappa$ est l-homogène, il existe donc $\phi \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)^l$, c'est-à-dire une 2-forme l-homogène, telle que $\partial^*\phi = \partial^*\kappa$. Ainsi

$$gr_l(\partial^*\kappa) = gr_l(\partial^*\phi) = gr_0(\partial^*)(gr_l(\phi)).$$

L'élément $gr_l(\partial^*)$ appartient ainsi à $\Gamma(\mathrm{im}(gr_0(\partial^*))) \subset L(gr(TM), gr(\mathcal{A}M))$.

Par ailleurs, nous avons $\ker(gr_0(\partial^*)) \oplus \mathrm{im}(\partial) = L(\Lambda^2 gr(TM), gr(\mathcal{A}M))$, d'après la décomposition de Hodge. L'application $gr_0(\partial^*)$ se restreint donc à un isomorphisme $\mathrm{im}(\partial) \to \mathrm{im}(gr_0(\partial^*))$. Nous pouvons ainsi trouver $\Phi \in \Gamma(L(gr(TM), gr(\mathcal{A}M))$ homogène de degré l en chaque point tel que

$$gr_0(\partial^*)(\partial\Phi) = gr_0(\partial^*)(gr_l(\phi)) = gr_l(\partial^*\kappa).$$

Soit $\Psi \in \Gamma(L(TM, \mathcal{A}M))$ l-homogène tel que $gr_l(\Psi) = \Phi$.

$$\begin{aligned} gr_l(\partial^*\tilde{\kappa}) &= gr_l(\partial^*\kappa) + gr_0(\partial^*)(gr_l(\tilde{\kappa} - \kappa)) \\ &= gr_0(\partial^*)(\partial\Phi) - gr_0(\partial^*)(\partial\Phi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $\partial^*\tilde{\kappa} \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^{l+1}$ et notre récurrence est démontrée. □

4.3.2 Unicité des connexions de Cartan normales

Si $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ est une géométrie normale et $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ un automorphisme de P-fibrés principaux recouvrant l'identité sur M. Alors $\Psi^*\omega$ est une connexion de Cartan et Ψ est un isomorphisme de la géométrie $(\mathcal{G}, \Psi^*\omega)$ sur la géométrie $(\mathcal{G}, \omega)$ et la courbure de $\Psi^*\omega$ est $\kappa_{\Psi^*\omega} = \Psi^*\kappa$. Or $\partial^*(\Psi^*\kappa) = \Psi^*(\partial^*\kappa) = 0$, donc la connexion $\Psi^*\omega$ est normale elle aussi. De plus si Ψ est l'identité sur la structure infinitésimale alors $\Psi^*\omega$ induit la même structure infinitésimale que ω. Nous allons voir que modulo une condition sur la cohomologie $H^1(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g}))$ la liberté précédente est la seule possible.

Avant d'énoncer la prochaine proposition, notons que la cohomologie possède elle aussi une graduation. En effet, la différentielle ∂ sur l'espace $L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g}))$ est homogène de degré 0 et procure ainsi une graduation à $H^n(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g})) \subset L(\Lambda^n gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g}))$. Si nous fixons une structure algébrique de Weyl $\epsilon : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(\mathfrak{g})$, nous avons alors une décomposition de $\mathfrak{g}$ sous la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$: nous pouvons ainsi noter $H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$ la cohomologie $H^n(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}), gr(\mathfrak{g}))$. De plus nous avons la décomposition

$$H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}) = \bigoplus_l H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l.$$

Posons alors $H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l := \bigoplus_{m \geq l} H^n(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_m$ l'ensemble des n-formes au moins l-homogènes.

Proposition 54 *Supposons que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l = 0$ pour un certain $l \geq 1$.*

Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie normale et régulière. Soit $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ une autre connexion de Cartan normale telle que $\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})^l$.

Alors il existe un automorphisme de fibrés principaux $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ induisant l'identité sur la structure infinitésimale et vérifiant $\Psi^*\tilde{\omega} = \omega$.

Remarque 55 *La condition $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^l = 0$ est une condition algébrique qui ne dépend pas de la structure algébrique de Weyl choisie.*

Preuve de la proposition

Posons $\Phi = \tilde{\omega} - \omega$. D'après la proposition 43, $\tilde{\kappa} - \kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)^l$ et $gr_l(\tilde{\kappa} - \kappa) = \partial(gr_l(\Phi))$. De plus ω et $\tilde{\omega}$ sont normaux donc $\partial^*(\tilde{\kappa} - \kappa) = 0$ et alors $0 = gr_l(\partial^*(\tilde{\kappa} - \kappa)) = gr_0(\partial^*)(gr_l(\tilde{\kappa} - \kappa))$. Ainsi $gr_l(\tilde{\kappa} - \kappa) \in \mathrm{im}\partial \cap \ker(gr_0(\partial^*)) = \{0\}$ et donc $\partial(gr_l(\Phi)) = 0$. Or comme $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_l = 0$ le fait que $\partial(gr_l(\Phi)) = 0$ implique qu'il existe $\Psi \in \Gamma(\mathcal{A}^l M)$ tel que $\partial(\Psi) = -gr_l(\Phi)$.

Si $l > k$, alors $\mathcal{A}^l M = 0$ et donc $gr_l(\Phi) = 0$ ce qui signifie que Φ est $l+1$-homogène. Par récurrence nous avons que $\Phi \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^{2k+1} = \{0\}$ et donc $\tilde{\omega} = \omega$.

Si maintenant $l \leq k$, l'élément $\Psi \in \Gamma(\mathcal{A}^l M)$ correspond à une fonction $\psi : \mathcal{G} \to \mathfrak{g}^l$ vérifiant la P-équivariance $\psi(u \cdot g) = Ad(g^{-1})(\psi(u))$ pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $g \in P$, grâce à la proposition 35. Posons

$$\begin{array}{rccc} \Delta & : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & & u & \longmapsto & u \cdot \exp(\psi(u)). \end{array}$$

La P-équivariance de ψ implique que pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $g \in P$

$$\begin{aligned} \Delta(u \cdot g) &= (u \cdot g) \cdot \exp(Ad(g^{-1})(\psi(u))) \\ &= u \cdot (gg^{-1} \exp(\psi(u))g) \\ &= \Delta(u) \cdot g. \end{aligned}$$

Cela signifie que Δ est un automorphisme du fibré principal $\mathcal{G}$ recouvrant l'identité sur M. L'application $\Delta^*\tilde{\omega} \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ est ainsi une connexion de Cartan normale. Montrons que $\Delta^*\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})^{l+1}$.

Soit $u \in \mathcal{G}$ et $\xi \in T^i_u\mathcal{G}$ observons

$$\Delta^*\tilde{\omega}(u)(\xi) = \tilde{\omega}(u \cdot \exp(\psi(u))(T_u\Delta(\xi)).$$

Exprimons $\Delta^*\tilde{\omega}$ en fonction de ψ. Soit c une courbe dans $\mathcal{G}$ vérifiant $c(0) = u$ et $\dot{c}(0) = \xi$, alors $\Delta^*\tilde{\omega}(u)(\xi) = \tilde{\omega}(\Delta(u))(\frac{d}{dt}|_0\Delta(c(t)))$. Or posant $f = \exp \circ \psi$ nous avons

$$\Delta(c(t)) = c(t) \cdot (f(u) \cdot ((f(u)^{-1}f(c(t)))) = r^{f(u)^{-1}f(c(t))}(r^{f(u)}(c(t)))$$

et donc

$$\frac{d}{dt}|_0\Delta(c(t)) = T_u r^{f(u)}(\xi) + \zeta_{\frac{d}{dt}|_0 f(u)^{-1}f(c(t))}(r^{f(u)}(u)),$$

où ζ_X est le champ de vecteurs fondamental engendré par X. Posant $Z = \frac{d}{dt}|_0 f(u)^{-1}f(c(t)) \in \mathfrak{g}^l$ nous avons

$$\Delta^*\tilde{\omega}(u)(\xi) = \tilde{\omega}(T_u r^{exp(\psi(u))}(\xi)) + \tilde{\omega}(\zeta_Z(\Delta(u))).$$

Comme $l \geq 1$ nous avons $\mathfrak{g}^l \subset \mathfrak{p}$ et donc

$$\tilde{\omega}(\Delta(u))(T_u r^{exp(\psi(u))}(\xi)) = Ad(\exp(-\psi(u))) \circ \tilde{\omega}(u)(\xi)$$

et $\tilde{\omega}(\zeta_Z(\Delta(u))) = Z \in \mathfrak{g}^l \subset \mathfrak{p}$. Nous avons alors

$$\begin{array}{rcll} \Delta^*\tilde{\omega}(u)(\xi) & = & Ad(\exp(-\psi(u))) \circ \tilde{\omega}(u)(\xi) & \mod \quad \mathfrak{g}^l \subset \mathfrak{g}^{i+l+1} \\ & = & \exp(-ad(\psi(u)))(\tilde{\omega}(u)(\xi)) & \mod \quad \mathfrak{g}^l \\ & = & \tilde{\omega}(u)(\xi) - [\psi(u), \tilde{\omega}(u)(\xi)] & \mod \quad \mathfrak{g}^{i+l+1}. \end{array}$$

Mais $\tilde{\omega}(u)(\xi) = \omega(u)(\xi) + \Phi(u)(\xi)$ avec $\omega(u)(\xi) \in \mathfrak{g}^i$ et $\Phi(u)(\xi) \in \mathfrak{g}^{i+l}$ donc

$$\begin{array}{rcll}(\Delta^*\tilde{\omega} - \omega)(u)(\xi) & = & \Phi(u)(\xi) - [\psi(u), \tilde{\omega}(u)(\xi)] & \mod \mathfrak{g}^{i+l+1} \\ & = & \Phi(u)(\xi) - [\psi(u), \omega(u)(\xi)] & \mod \mathfrak{g}^{i+l+1}.\end{array}$$

Ainsi $\Delta^*\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^l$ et

$$\begin{array}{rcl}gr_{i+l}([\psi(u), \omega(u)(\xi)]) & = & \{gr_l(\psi(u)), gr_i(\omega(u)(\xi))\} \\ & = & -\partial(gr_l(\psi))(gr_i(\omega(u)(\xi)))\end{array}$$

donc $gr_l(\Delta^*\tilde{\omega} - \omega) = gr_l(\Phi) - \partial(gr_l(\psi)) = 0$ ce qui signifie que $\Delta^*\tilde{\omega} - \omega \in \Omega^1(M, \mathcal{A}M)^{l+1}$. Itérant cet argument nous trouvons alors l'automorphisme voulu. □

Dans le cas où $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})_1 \neq 0$ nous n'avons plus l'unicité mais il persiste tout de même un résultat présent dans le livre de Čap et Slovák [ČS09, p. 272] au chapitre 3.1.15. Pour le cas où $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = 0$, l'objectif de ce chapitre est atteint :

Théorème 56 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ et P un sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie associé une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$. Soit $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$ une structure parabolique infinitésimale régulière sur une variété M. Soit $\epsilon : gr(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ une structure algébrique de Weyl : cela induit une inclusion $i : P_0 \hookrightarrow P$. Supposons de plus que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = 0$.*

Alors il existe une unique connexion de Cartan normale et régulière sur $\mathcal{G} := \mathcal{E} \times_i P$ induisant la structure infinitésimale initiale, l'unicité étant compris comme unicité modulo les automorphismes de fibrés principaux $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ induisant l'identité sur la structure infinitésimale.

Preuve du théorème

Partant d'une structure parabolique infinitésimale régulière et d'une structure algébrique de Weyl nous avons construit une connexion de Cartan ω sur $\mathcal{G} := \mathcal{E} \times_i P$ induisant la structure parabolique de départ : cette connexion est donc régulière. Or nous avons vu que dans la classe des connexions de Cartan régulières induisant la même structure infinitésimale que ω, il existe une connexion de Cartan régulière qui est normale. Puis si deux telles connexions existent alors d'après la proposition 4.3.2 et le fait que $H^1(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})^1 = 0$ ces deux connexions s'identifient via un automorphisme de fibré principal $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ induisant l'identité sur la structure infinitésimale. □

Chapitre 5

Les coordonnées distinguées

Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique de type (G, P), nous cherchons des coordonnées de M telles que celles-ci s'approchent au plus près du modèle homogène. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{p}$ celle de P. En nous donnant une structure algébrique de Weyl, nous disposons alors d'une décomposition $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{p} \\ &= \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \mathfrak{g}_k \end{aligned}$$

avec $k \geq 1$. Donnons nous des bases $(f_1^i, \ldots, f_{n_i}^i)$ des sous-espaces $\mathfrak{g}_{-i}$ pour $1 \leq i \leq k$. Et notons $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base de $\mathfrak{p}_-$ obtenue en concaténant les bases précédentes.

Définition 57 *Soit $x_0 \in M$ et $u_0 \in \mathcal{G}_{x_0}$, nous disposons, sur voisinage V de x_0, de coordonnées nommées distinguées*

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathfrak{p}_- & \longrightarrow & U \subset M \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & p \circ \phi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \end{array}$$

avec $\phi(Z) := Fl_1^{\omega^{-1}(Z)}(u_0)$ pour tout $Z \in \mathfrak{p}_-$.

Avec ces coordonnées distinguées vient une section σ du fibré $\mathcal{G} \to M$ définie par

$$\sigma = \phi \circ F^{-1} : V \subset M \longrightarrow \mathcal{G}, \tag{5.0.1}$$

et des champs de vecteurs

$$\xi_i(x) = T_{\sigma(x)} p(\omega(\sigma(x))^{-1}(e_i)) \tag{5.0.2}$$

pour $x \in F(V)$ et $i \in \{1 \ldots, n\}$.

À présent pour comprendre à quel point nous sommes proches du modèle dans ces coordonnées, il nous faut introduire la dilatation parabolique. Dans ces coordonnées cette dilatation parabolique est naturelle et est définie par $\Psi_t = F \circ \Phi_t \circ F^{-1}$ avec

$$\Phi_t(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{n_k}^k) = (t^1 x_1^1, \ldots, t^1 x_{n_1}^1, t^2 x_1^2, \ldots, t^k x_{n_k}^k).$$

Théorème 58 *En notant, ξ_i^0 les champs de vecteurs précédemment définis dans le cas homogène, alors les champs de vecteurs ξ_i pour une géométrie parabolique de type (G, P) quelconque vérifient :*

$$t^{-\alpha(i)} \Psi_t^* \xi_i = \xi_i^0 + O(t^\beta),$$

lorsque t tend vers 0, avec $\alpha(i) < 0$ l'entier vérifiant $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha(i)}$ et avec β qui est égal à l'homogénéité de la fonction de courbure $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$ de ω.

Preuve du théorème

Pour démontrer cette proposition nous allons démontrer que nous avons l'égalité

$$\partial_{x_i}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)!} (\mathcal{L}_X)^p(\xi_i^0),$$

en considérant les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ comme fixes, avec $\mathcal{L}_\xi$ la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs ξ et avec $X = \omega(\sigma(x))^{-1}(F^{-1}(x)) = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. L'intérêt de cette formule est que nous connaissons bien le tiré en arrière des champs de vecteurs ∂_{x_i} par rapport à Ψ_t : $\Psi_t^* \partial_{x_i} = \frac{\partial_{x_i}}{t^{-\alpha(i)}}$ avec $\alpha(i) \leq 0$ l'entier vérifiant $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha(i)}$. Ainsi en exprimant tous les ∂_{x_i} en fonction des ξ_i puis en inversant ce système, nous obtiendrons les champs de vecteurs ξ_i comme combinaisons linéaires des ∂_{x_i} avec comme coefficients des séries dont les variables sont les coordonnées x_i : il sera alors aisé d'observer le tiré en arrière de ξ_i par Ψ_t et de le comparer au cas modèle.

Pour cela nous allons utiliser la formule de la dérivée de l'application exponentielle définie par une connexion linéaire donnée par exemple par le théorème 6.5 de [Hel01, p. 36]. Reste alors à révéler la connexion sur M qui nous permettra d'utiliser ce théorème. Avant de continuer, notons λ l'isomorphisme linéaire

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & \mathfrak{p}_- & \longrightarrow & T_{x_0}M \\ & X & \longmapsto & T_{u_0}p(\omega(u_0)^{-1}(X)). \end{array}$$

Lemme 59 *Soit $x_0 \in M$ et $u_0 \in \mathcal{G}_{x_0}$. Alors il existe une connexion linéaire ∇ sur M telle que la fonction exponentielle associée partant de x_0*

dans M est la fonction $F \circ \lambda^{-1}$ et telle que le prolongement parallèle de $\xi \in T_{x_0}M$ dans le voisinage $U \subset M$ de x_0 est le champ de vecteurs $\tilde{\xi} := T_{\sigma(x)}p(\omega(\sigma(x))^{-1}(\lambda^{-1}(\xi)))$.

Preuve du Lemme

Soit x_0 et u_0 comme dans les hypothèses. Définissons dans un premier temps un horizontal $\mathcal{H} \in T\mathcal{G}$ au dessus de $U \subset M$. Notons qu'au dessus de $U \subset M$, le fibré principal $\mathcal{G}$ se décrit par le couple $(x, h) \in U \times P$ via l'application bijective

$$\begin{array}{ccc} U \times P & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ (x, h) & \longmapsto & \sigma(x) \cdot h. \end{array}$$

La connexion de Cartan ω nous fournit alors l'identification

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G} \times_P \mathfrak{p}_- & \longrightarrow & TM \\ [\![\sigma(x) \cdot h, X]\!] & \longmapsto & T_{\sigma(x)}p(\omega(\sigma(x))^{-1}(X)) \\ & & = \; T_{\sigma(x)\cdot h}p(\omega(\sigma(x) \cdot h)^{-1}(Ad(h^{-1})(X))). \end{array}$$

Soit $x \in U \subset M$, $h \in P$ et $X \in \mathfrak{p}_-$ alors définissons le relevé horizontal de $[\![\sigma(x), X]\!]$ au dessus de $\sigma(x) \cdot h \in \mathcal{G}$ par

$$\xi^{hor}(\sigma(x) \cdot h) := \omega(\sigma(x) \cdot h)^{-1}(Ad(h^{-1})(X)) = T_{\sigma(x)}r^h(\omega(\sigma(x))^{-1}(X)).$$

Par P-équivariance de la connexion de Cartan ω, ces relevés horizontaux sont des champs de vecteurs invariants à droite sur le fibré principal $\mathcal{G}$, c'est-à-dire $(r^h)^*\xi^{hor} = \xi^{hor}$ pour tout $h \in P$. D'après [ČS09, p. 38], cela nous définit une connexion principale γ sur $\mathcal{G}$. Appliquant la proposition 1.3.4 de [ČS09, p. 41] au fibré associé $TM \simeq \mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ nous obtenons une connexion linéaire ∇ sur M dont les relevés horizontaux sont donnés par $[\![\xi^{hor}, 0]\!] \in T\mathcal{G} \times_{TP} \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ avec ξ^{hor} le relevé horizontal dans $T\mathcal{G}$ pour la connexion γ.

Soit à présent $\xi \in T_{x_0}M$, notons c la courbe $c(t) := F \circ \lambda^{-1}(t\xi) \in M$ et $\tilde{c}$ la courbe $\tilde{c}(t) := \sigma(c(t)) = Fl_t^{\omega^{-1}(\lambda^{-1}(\xi))}(u_0) \in \sigma(M) \subset \mathcal{G}$. La courbe c est une géodésique de M pour ∇. En effet, comme $c(t) = p(Fl_t^{\omega^{-1}(\lambda^{-1}(\xi))}(u_0))$, nous avons $\dot{c}(t) = T_{\tilde{c}(t)}p(\omega(\tilde{c}(t))^{-1}(\lambda^{-1}(\xi))) = [\![\tilde{c}(t), \lambda^{-1}(\xi)]\!]$ et donc $\ddot{c}(t) = [\![\dot{\tilde{c}}(t), 0]\!] = [\![\omega(\sigma(c(t)))^{-1}(\lambda^{-1}(\xi)), 0]\!]$ est dans la distribution horizontale de TM car $\omega(\sigma(c(t)))^{-1}(\lambda^{-1}(\xi))$ est par définition dans la distribution horizontale de $\mathcal{G}$. La courbe c est donc bien une géodésique pour ∇ et la fonction exponentielle partant de $x_0 \in M$ pour ∇ est la fonction $F \circ \lambda^{-1}$.

Montrons finalement la dernière propriété. Soit $\xi \in T_{x_0}M$ et $x \in U \subset M$ alors x_0 et x sont reliés par la géodésique $c(t) = F(tF^{-1}(x)) = p(\phi(tF^{-1}(x)))$. D'après la proposition 1.3.4 de [ČS09, p. 41], le prolongement parallèle de ξ

le long de c est donnée par $[\![\sigma(c(t)), \lambda^{-1}(\xi)]\!] = T_{\sigma(c(t))}p(\omega(\sigma(c(t)))^{-1}(\lambda^{-1}(\xi)))$. Au dessus de x le prolongement parallèle du vecteur ξ est donc bien l'élément $T_{\sigma(x)}p(\omega(\sigma(x))^{-1}(\lambda^{-1}(\xi)))$. $\square$

Remarque 60 *Nous venons de voir que le choix d'un antécédent $u_0 \in \mathcal{G}_{x_0}$ procure une connexion linéaire sur un voisinage $U \subset M$ de x_0. Maintenant si nous changeons d'antécédent $u \in \mathcal{G}_{x_0}$ alors il existe $h \in P$ tel que $u_0 = u \cdot h$. La connexion induite par u coïncide avec celle induite par u_0 si et seulement si $ad(h)$ stabilise l'algèbre nilpotente $\mathfrak{p}_-$. Une telle connexion est donc en fait fixée par le choix d'une structure algébrique de Weyl $i : P_0 \hookrightarrow P$.*

Démontrons à présent le théorème annoncé. Soit $x \in U \subset M$ et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ alors

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}(x) &= T_{F^{-1}(x)}F(e_i) \\ &= T_{\lambda \circ F^{-1}(x)}(F \circ \lambda^{-1})(\lambda(e_i)) \\ &= T_{\lambda \circ F^{-1}(x)}(Exp_{x_0})(\lambda(e_i)). \end{aligned}$$

Notant $\xi = \lambda \circ F^{-1}(x)$ et $\eta = \lambda(e_i)$ nous disposons des prolongements parallèles, pour la connexion linéaire ∇, $\xi^* = T_{\sigma(y)}p(\omega(\sigma(y))^{-1}(\lambda^{-1}(\xi)))$ et $\eta^* = T_{\sigma(y)}p(\omega(\sigma(y))^{-1}(\lambda^{-1}(\eta)))$ pour $y \in U \subset M$. Remarquons que η^* n'est rien d'autre que le champ de vecteurs ξ_i et que ξ^* est le champ de vecteurs $T_{\sigma(y)}p(\omega(\sigma(y))^{-1}(F^{-1}(x))) = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. D'après le lemme précédent nous pouvons utiliser le théorème 6.5 de [Hel01, p. 36] et nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}(x) &= \textstyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)!}\mathcal{L}^p_{\xi^*}(\eta^*) \\ &= \textstyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)!}\mathcal{L}^p_{x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n}(\xi_i), \end{aligned}$$

avec les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ fixes et avec $\mathcal{L}_\xi$ la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs ξ dans TM.

Or nous connaissons suffisamment les crochets entre les champs de vecteurs ξ_i : d'après le lemme 31, pour $y \in U \subset M$

$$\begin{aligned} [\xi_i, \xi_j](y) &= T_{\sigma(y)}p(\omega(\sigma(y))^{-1}([e_i, e_j] - \kappa(\sigma(y))(e_i, e_j))) \\ &= T_{\sigma(y)}p(\omega(\sigma(y))^{-1}([e_i, e_j])) - T_{\sigma(y)}p(\omega(\sigma(y))(\kappa(\sigma(y))(e_i, e_j))) \\ &= \textstyle\sum_{l=\alpha(i)+\alpha(j)} a^l_{ij}\xi_l + \sum_{k \geq \alpha(i)+\alpha(j)+\beta} b^k_{ij}(y)\xi_k(y) \end{aligned}$$

car $\kappa(\sigma(y))(e_i, e_j) \subset \mathfrak{g}^{\alpha(i)+\alpha(j)+\beta}$, avec $a^l_{ij} \in \mathbb{R}$, b^k_{ij} des fonctions sur M lisses et $[\xi^0_i, \xi^0_j] = \sum_{l=\alpha(i)+\alpha(j)} a^l_{ij}\xi^0_l$ (la restriction sur les indices de cette dernière somme provient du fait que les ξ^0_i sont invariants sous l'action de Ψ_t : $\Psi^*_t\xi^0_i = \frac{\xi^0_i}{t^{\alpha(i)}}$).

Remarque 61 *La suite de notre démonstration est simple. Cependant cette fin de démonstration dans le cas général énoncé devient plus difficile à suivre à cause de notations que nous devons introduire. C'est pour cela que nous trouvons cette fin de démonstration pour l'exemple d'une géométrie parabolique de type* $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ *dans la démonstration de la proposition 115.*

Finissons donc cette démonstration dans le cas d'une géométrie parabolique quelconque. Utilisant l'expression des ∂_{x_i} précédemment trouvée, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1}(x) &= \xi_1 - \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big(\sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{il}^l \xi_l + \sum_{k\geq\alpha(1)+\alpha(i)+\beta} b_{il}^k \xi_k\Big)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big(\sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{il}^l [\xi_j, \xi_l] + \sum_{k\geq\alpha(1)+\alpha(i)+\beta} b_{il}^k [\xi_j, \xi_k]\Big)\Big)\Big) + \dots \\
&= \xi_1 - \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big(\sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{il}^l \xi_l + \sum_{k\geq\alpha(1)+\alpha(i)+\beta} b_{il}^k \xi_k\Big)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{1i}^l \sum_{m=\alpha(j)+\alpha(l)} a_{jl}^m \xi_m \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{1i}^l \sum_{m\geq\alpha(j)+\alpha(l)+\beta} b_{jl}^m \xi_m \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sum_{l\geq\alpha(1)+\alpha(i)+\beta} b_{1i}^l \sum_{m=\alpha(j)+\alpha(l)} a_{jl}^m \xi_m \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \sum_{l\geq\alpha(1)+\alpha(i)+\beta} b_{1i}^l \sum_{m\geq\alpha(j)+\alpha(l)+\beta} b_{jl}^m \xi_m\Big) + \dots .
\end{aligned}$$

Ainsi en appliquant l'action de Ψ_t nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Psi_t^*\partial_{x_1}(x) = \frac{\partial_{x_1}}{t^{-\alpha(1)}} &= \Psi_t^*\xi_1 - \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} t^{-\alpha(i)} x_i \Big(\sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{il}^l \Psi_t^*\xi_l \\
&\quad + \sum_{k\geq\alpha(1)+\alpha(i)+\beta} b_{il}^k \Psi_t^*\xi_k\Big)\Bigg) \\
&\quad + \frac{1}{6}\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n} t^{-\alpha(i)-\alpha(j)} x_i x_j \sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{1i}^l \sum_{m=\alpha(j)+\alpha(l)} a_{jl}^m \Psi_t^*\xi_m \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} t^{-\alpha(i)-\alpha(j)} x_i x_j \sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{1i}^l \sum_{m\geq\alpha(j)+\alpha(l)+\beta} b_{jl}^m \Psi_t^*\xi_m \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} t^{-\alpha(i)-\alpha(j)} x_i x_j \sum_{l\geq\alpha(1)+\alpha(i)+\beta} b_{1i}^l \sum_{m=\alpha(j)+\alpha(l)} a_{jl}^m \Psi_t^*\xi_m \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} t^{-\alpha(i)-\alpha(j)} x_i x_j \sum_{l\geq\alpha(1)+\alpha(i)+\beta} b_{1i}^l \sum_{m\geq\alpha(j)+\alpha(l)+\beta} b_{jl}^m \Psi_t^*\xi_m\Bigg) \\
&\quad + \dots \\
&= \Psi_t^*\xi_1 - \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} t^{-\alpha(i)} x_i \Big(\sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{il}^l \Psi_t^*\xi_l \\
&\quad + O(t^{\alpha(1)+\alpha(i)+\beta})\Big)\Bigg) \\
&\quad + \frac{1}{6}\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n} t^{-\alpha(i)-\alpha(j)} x_i x_j \sum_{l=\alpha(1)+\alpha(i)} a_{1i}^l \sum_{m=\alpha(j)+\alpha(l)} a_{jl}^m \Psi_t^*\xi_m \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} t^{-\alpha(i)-\alpha(j)} x_i x_j O(t^{\alpha(1)+\alpha(i)+\alpha(j)+\beta}) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} t^{-\alpha(i)-\alpha(j)} x_i x_j O(t^{\alpha(1)+\alpha(i)+\alpha(j)+\beta}) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} t^{-\alpha(i)-\alpha(j)} x_i x_j O(t^{\alpha(1)+\alpha(i)+\alpha(j)+2\beta})\Bigg) + \dots \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Psi_t^*(\lambda_1^i \xi_i) + O(t^{\alpha(1)+\beta})
\end{aligned}$$

avec les λ_1^i des polynômes en les variables x_j correspondant au cas modèle homogène :

$$\Psi_t^* \partial_{x_i}^0 = \sum_{i=1}^{n} \Psi_t^*(\lambda_1^i \xi_i^0) = \frac{1}{t^{-\alpha(1)}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_1^i \xi_i^0 \Big).$$

Nous obtenons la même relation pour les autres champs de vecteurs ∂_{x_i}. Inversant alors notre système nous avons

$$\Psi_t^* \xi_i = \sum_{j=1}^{n} \Psi_t^*(\mu_i^j \xi_j) + O(t^{\alpha(i)+\beta})$$

avec les μ_i^j des polynômes en les variables x_k correspondant au cas modèle homogène :

$$\Psi_t^* \xi_i^0 = \sum_{j=1}^{n} \Psi_t^*(\mu_i^j \xi_j^0) = \frac{1}{t^{-\alpha(i)}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \mu_i^j \xi_j^0 \Big).$$

Nous obtenons ainsi le résultat voulu. □

Partie II

Vers une correspondance entre géométries paraboliques et variétés quaternion-kählériennes

L'objectif de cette thèse rappelons le, est de fournir des arguments en faveur de l'existence d'une correspondance entre des géométries paraboliques régulières de type (G/P) et des variétés quaternion-kählériennes dont les métriques se comportent comme la métrique de l'espace symétrique quaternion-kählérien de type non-compact G/K proche de la frontière de Furstenberg associée à P.

Nous commencerons donc cette partie en introduisant les variétés quaternion kählériennes et en étudiant le comportement de la métrique d'un espace symétrique de type non-compact G/K au voisinage d'une frontière de Furstenberg. Ensuite dans la deuxième partie, nous chercherons à généraliser la construction de Le Brun [LeB89] dans laquelle l'espace des twisteurs de la métrique obtenue est l'ensemble des géodésiques nulles d'une géométrie conforme de signature $(3, k)$. Nous établirons alors une liste d'espaces qui sont de bons candidats pour être des espaces de twisteurs d'une variété quaternion-kählérienne.

Chapitre 6

Les espaces symétriques quaternion-kählériens de type non-compact

6.1 Les variétés quaternion-kählériennes

Nous avons vu dans l'introduction qu'une variété quaternion-kählérienne se définit simplement comme étant une variété riemannienne dont le groupe d'holonomie est contenu dans $SP(1) \cdot Sp(n) := Sp(1) \times Sp(n)/\{\pm 1\}$. Parmi cette famille de variété, se trouve les variétés particulières qui sont des espaces symétriques et qui sont connus sous le nom d'espaces de Wolf. Dans notre recherche de correspondance, nous nous intéressons aux duaux non-compacts de ces espace de Wolf : nous trouvons par exemple dans cette liste les espaces symétriques non compacts $SO(4,k)/SO(4) \times SO(k)$, $SU(2,k)/S(U(2) \times U(k))$, $Sp(1,k)/Sp(1) \times Sp(k)$ et $G_2^s/SO(4)$ pour tout $k > 1$, pour lesquelles les métriques quaternion-kählériennes sont les métriques induites par la forme de Killing sur l'algèbre de Lie semi-simple en question.

Avant de passer au caractère symétrique des ces espaces, nous allons parler un peu plus de la propriété d'être quaternion-kählérien. Une définition analogue de celle précédemment vue, d'une variété quaternion-kählérienne est la suivante : une variété riemannienne (M, g) est dite quaternion-kählérienne s'il existe une distribution $H \subset \mathcal{A}(TM)$ localement engendrée par trois structures presque complexes I, J et K vérifiant les relations des quaternions $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ et telle que H soit stable par la dérivée covariante de Levi-Civita ∇^{LC} et respecte l'orientation de M (les trois structures presque complexes provenant de l'action de $Sp(1)$ sur le tangent TM).

Une propriété remarquable des variétés quaternion-kählériennes est que la

structure quaternion-kählérienne est reliée à un espace complexe : la métrique g d'une variété quaternion-kählérienne M^{4n} est codée par une famille de courbes dans une variété complexe et de contact $\mathcal{N}^{2n+1}$ appelée espace des twisteurs. Cet espace apparaît naturellement comme l'espace total du fibré, au dessus de M, par la sphère unité de H (c'est-à-dire par l'ensemble des structures presque complexes $x_I I + x_J J + x_K K$ de M). Le fait remarquable étant que cette variété de dimension réelle $4n+2$ possède en fait une structure presque complexe intégrable et une structure de contact sur cette variété complexe. En 1989 Le Brun dans [LeB89] fournit la construction d'un espace quaternion-kählérien à partir d'un espace des twisteurs :

Théorème 62 (Le Brun) *Soit $\mathcal{N}$ une variété complexe de contact de dimension complexe $2n+1$ avec $n \geq 2$, et soit $\sigma : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ une involution anti-holomorphe sans points fixes et respectant la structure de contact. Posons alors M_σ l'espace des courbes rationnelles σ-invariante dans $\mathcal{N}$ qui sont transverses à la distribution de contact et ont pour fibré normal $2nO(1)$. Alors M_σ est naturellement une variété analytique réelle pseudo-riemannienne de dimension $4n$ et d'holonomie incluse dans $Sp(1) \cdot Sp(l, n-l)$ pour $0 \leq l \leq n$.*

Notons que dans les cas homogènes $M = G/K$ quaternion-kählériens, le groupe d'isotropie K peut s'écrire sous la forme $\tilde{K}Sp(1)$ avec $\tilde{K} \subset Sp(n)$. Ainsi comme nous le voyons dans [Sal82], en choisissant une base standard (I, J, K) de $Sp(1)$ et en notant $U(1) \subset Sp(1)$ le sous-groupe engendré par I alors l'espace des twisteurs de G/K est l'espace homogène $G/\tilde{K}U(1)$.

6.2 Les métriques quaternion-kählériennes aux voisinages des frontières de Furstenberg

Avant d'observer les métriques quaternion-kählériennes aux voisinages des frontières de Furstenberg, nous allons commencer par définir les bords de Furstenberg. Au passage nous allons voir une définition des sous-algèbres paraboliques équivalente à celle de la première partie et que nous utiliserons dans la suite de cette thèse.

6.2.1 Les bords de Furstenberg

Soit $X = G/K$ un espace symétrique de type non-compact avec G un groupe semi-simple et $K \subset G$ un sous-groupe compact maximal. Notons $\mathfrak{g}$

l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{k}$ celle de K. Partant d'un espace symétrique nous avons une involution de Cartan Θ donnant une décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

avec $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \Theta(X) = X\}$ et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \Theta(X) = -X\}$. Avec cet outil supplémentaire les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ se révèlent explicitement de la manière suivante. Choisissons un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, c'est-à-dire un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{p}$, nous avons alors un système de racine $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* : \alpha \neq 0, \quad \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ avec $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a},\ [H, X] = \alpha(H)X\}$, ainsi qu'une décomposition en racine de $\mathfrak{g}$ donnée par l'action adjointe $ad(\mathfrak{a})$ sur $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

avec $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}$ pour $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a},\ [H, X] = 0\}$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Choisissons à présent un sous-ensemble de racines positives $\Phi^+ \subset \Phi$ et notons Δ les racines simples de Φ^+. Maintenant, à un sous-ensemble I de Δ nous allons associer la sous-algèbre $\mathfrak{p}_I$ de $\mathfrak{g}$ suivante : posons $\Phi^I \subset \Phi$ l'ensemble des combinaisons linéaires de I,

$$\mathfrak{a}_I = \textstyle\bigcap_{\alpha \in I} \ker(\alpha) \quad , \quad \mathfrak{a}^I = \mathfrak{a}_I^\perp \cap \mathfrak{a} \quad , \quad \mathfrak{m}_I = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}^I \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^I} \mathfrak{g}_\alpha$$
$$\mathfrak{n}_I = \textstyle\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ - \Phi^I} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathfrak{n}_I^* = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^- - \Phi^I} \mathfrak{g}_\alpha,$$

l'orthogonal étant donné par la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. Nous pouvons à présent définir notre sous-algèbre $\mathfrak{p}_I$ par

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{m}_I \oplus \mathfrak{a}_I \oplus \mathfrak{n}_I.$$

Proposition 63 *Ces sous-algèbres $\mathfrak{p}_I$ sont des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$.*

Preuve de la proposition

L'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{p}_I$ est l'idéal $\mathfrak{n}_I$. Soit à présent $X \in \mathfrak{a}_I$, $Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ avec $\alpha \in \Phi^+ \cup \Phi^I \cup \{0\}$ (ainsi $Y \in \mathfrak{p}_I$), et soit $Z \in \mathfrak{g}_\beta$ avec $\beta \in \Phi^+ - \Phi^I$ (ainsi $Z \in \mathfrak{n}_I$). Alors comme $ad(X)$ préserve la forme de Killing, nous avons

$$0 = B(ad(X)(Y), Z) + B(Y, ad(X)(Z)) = (\alpha(X) + \beta(X))B(Y, Z).$$

Or $\alpha(X) + \beta(X) \neq 0$ car $\alpha(X) \geq 0$ et $\beta(X) > 0$, donc $B(Y, Z) = 0$. Ainsi $\mathfrak{n}_I \subset \mathfrak{p}_I^\perp$ puis nous avons l'égalité par dimension : le nilradical de $\mathfrak{p}_I$ est donc bien $\mathfrak{p}_I^\perp$ ce qui signifie que p_I est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. $\square$

Remarquons que si nous avions fait d'autres choix de systèmes de racines (positives) alors nous aurions trouvé de la même manière d'autres sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ mais isomorphes à celles que nous avons trouvées ici.

Proposition 64 *Soit $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. Alors il existe un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ vivant dans $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \Theta(X) = -X\}$, un système de racines simples positives Δ et un sous-ensemble I de Δ tels que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_I$.*

Preuve de la proposition

Soit $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, prenons $\epsilon \in \mathfrak{q}$ un relevé de l'élément de graduation ϵ_0 associé à $\mathfrak{q}$. Dans une base de $\mathfrak{g}$ adaptée à la décomposition fournie par ce relevé nous voyons clairement que $ad(\epsilon)$ est diagonale et de valeurs propres réelles : ϵ est donc un élément hyperbolique de $\mathfrak{g}$. Nous pouvons alors le compléter pour obtenir une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ commutative formée d'éléments hyperboliques et maximale pour ces propriétés, c'est-à-dire en un sous-espace de Cartan $\tilde{\mathfrak{a}}$. Par définition de l'élément de graduation nous avons $\tilde{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{g}_0$. Or tout sous-espace de Cartan est conjugué à un sous-espace de Cartan inclus dans $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \Theta(X) = -X\}$ avec Θ l'involution de Cartan précédente. Ainsi quitte à conjuguer $\mathfrak{q}$ par l'élément adéquat, nous pouvons supposer que $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. Nous retrouvons alors la construction précédente de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}$ grâce à l'ensemble $\Phi^I := \{\alpha \in \Phi : \alpha(\epsilon) = 0\}$. □

Faisons à présent quelques remarques sur cette définition équivalente. Tout d'abord observons que $\mathfrak{p}_\Delta = \mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est un parabolique minimal.

Observons ensuite que nous retrouvons bien la décomposition graduée de $\mathfrak{g}$ induite par la sous-algèbre $\mathfrak{p}_I$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_{-1} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_k,$$

avec $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m}_I \oplus \mathfrak{a}_I$ et $\mathfrak{p}_i$ étant l'ensemble des $\mathfrak{g}_\alpha$ pour α une racine de poids i dans $\Phi - \Phi_I$. Concrètement une racine β de Φ s'écrit comme une combinaison linéaire des racines simples Δ : $\beta = \Sigma_{\alpha \in \Delta} x_\alpha \alpha$; et une racine de poids i dans $\Phi - \Phi_I$ est une racine β telle que $\Sigma_{\alpha \in \Delta - I} x_\alpha = i$. Comme le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ envoie $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$ sur $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ cette décomposition est clairement graduée.

À présent que nous avons une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_I$ de $\mathfrak{g}$ nous pouvons considérer le sous-groupe parabolique associé

$$P_I := \bigcap_{i=-k}^{k} \{g \in G : Ad(g)(\mathfrak{p}^i) \subset \mathfrak{p}^i\}$$

avec $\mathfrak{p}^i = \bigoplus_{j \geq i} \mathfrak{p}_j$. Nous avons pour ce sous-groupe la décomposition de Langlands $P_I = M_I A_I N_I$ avec $A_I = \exp \mathfrak{a}_I$, $N_I = \exp \mathfrak{n}_I$ et M_I le groupe de Lie correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_I$. Avec cette décomposition apparait un espace symétrique de type non-compact $X_I = M_I/K_I$ avec $K_I = K \cap M_I$ le sous-groupe compact maximal de M_I. Notons $B_I = G/P_I$ ($\simeq K/K_I$) la variété filtrée sous-jacente.

Définition 65 *Les bords de Furstenberg de $X = G/K$ sont définis par*

$$F_I = G/H_I \quad \textit{avec} \quad H_I = K_I A_I N_I \subset P_I.$$

Notre variété F_I est naturellement fibrée de la manière suivante :

$$X_I \longrightarrow F_I \longrightarrow B_I.$$

La compactification de Furstenberg de X est alors

$$\bar{X} = \bigcup_{I \subset \Delta} F_I.$$

Notons que $F_\Delta = X$.

Ces espaces F_I apparaissent comme des bords de la variété symétrique X de la manière suivante. Choisissant $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$ une chambre de Weyl positive et notant $\mathfrak{a}^{reg}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{a}$, le sous-groupe $K_\emptyset$ est égal au centralisateur de $\mathfrak{a}^I$ dans K_I. Ainsi dans les coordonnées polaires ([Hel84, GJT98, p. 186]) nous avons l'isomorphisme $K_I/K_\emptyset \times \mathfrak{a}_+^{I\,reg} \to X_I^{reg}$ donné par $(k, a) \mapsto k \exp(a)$ avec X_I^{reg} un ouvert dense de X_I. Regardant alors dans les coordonnées polaires de G/K, nous avons l'application surjective

$$\begin{array}{ccccc} K \times K_I/K_\emptyset \times \mathfrak{a}_+^{I\,reg} \times \mathfrak{a}_{I+}^{reg} & \simeq & K \times X_I^{reg} \times \mathfrak{a}_{I+}^{reg} & \longrightarrow & X^{reg} \\ & & (k, x, a) & \longmapsto & kx \exp(a) \end{array}$$

qui induit l'isomorphisme

$$F_I \times \mathfrak{a}_{I+}^{reg} \simeq K/K_I \times X_I^{reg} \times \mathfrak{a}_{I+}^{reg} \longrightarrow X^{reg} \tag{6.2.1}$$

avec X^{reg} un ouvert dense de X. Notre élément F_I apparait donc bien comme un bord de X de codimension $r - |I|$ avec r le rang de notre espace symétrique X. Ainsi lorsque $I = \emptyset$, $X_\emptyset$ se réduit à un point et $F_\emptyset = B_\emptyset$ est le bord de Furstenberg maximal. A contrario, lorsque I contient tous les éléments de Δ sauf un, alors A_I est de dimension 1 donc F_I est un vrai bord (au sens classique) de codimension 1 et X_I est de rang $r - 1$.

6.2.2 Les métriques au voisinages d'une frontière de Furstenberg

Nous allons regarder ici comment s'exprime la métrique quaternion kählérienne d'un espace symétrique de type non-compact G/K dans des coordonnées adaptées à l'isomorphisme (1.1). Soit donc G/K un espace symétrique de type non-compact et soit Δ un système de racines simples positives défini comme précédemment. Soit I un sous-ensemble de Δ, nous disposons alors d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_I$. L'espace tangent à G/K est l'espace $G \times_K \mathfrak{m}$, avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ la décomposition de Cartan de notre espace symétrique (notons que nous notons de manière non conventionnel $\mathfrak{m}$ l'espace $\{X \in \mathfrak{g} : \Theta(X) = -X\}$ et non pas $\mathfrak{p}$, pour ne pas confondre cet ensemble avec une sous-algèbre parabolique). Tandis que l'espace tangent à notre bord de Furstenberg $F_I = K/K_I \times X_I$ est $(K \times_{K_I} \mathfrak{q}_I) \times TX_I$ avec $\mathfrak{q}_I$ un supplémentaire de $\mathfrak{k}_I$ dans $\mathfrak{k}$. L' isomorphisme (1.1) nous permet de voir le lien entre ces deux descriptions : au dessus du point $M = kx\exp(a) \in (G/K)^{reg}$ nous avons

$$\dot{M} \in \mathfrak{m} = (Ad(e^{-a}) \circ Ad(x^{-1})(\dot{k}) + \dot{x} + \dot{e^a})_{\mathfrak{m}}$$

car A_I et X_I commutent. À présent, supposons que I soit tout l'ensemble Δ moins un élément, c'est-à-dire que le bord de Furstenberg F_I soit un vrai bord. Comme nous l'avons vu dans la démonstration de la proposition 64, il existe un élément $\epsilon \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_I$ nommé élément de graduation vérifiant $ad(\epsilon)(X) = iX$ pour tout $X \in \mathfrak{p}_i$ et pour tout $i \in \{-k, \dots, k\}$, avec

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_{-1} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_k,$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ précédemment vue et induite par $\mathfrak{p}_I$. A fortiori cet élément $\epsilon \in \mathfrak{a}_I$, car $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_I \oplus \mathfrak{a}^I$ et un élément X de $\mathfrak{a}_I$, tout comme ϵ, vérifie $ad(X)(Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{m}_I$ alors que ce n'est pas le cas pour les éléments de $\mathfrak{a}^I$. Ainsi au dessus du point $M = kx\exp(r\epsilon) \in G/K$, nous avons

$$\dot{M} = \sinh(-ad(r\epsilon))(Ad(x^{-1})(\dot{k})) + (\dot{x})_{\mathfrak{p}} + \dot{e^{r\epsilon}} \in \mathfrak{m}$$

et alors la métrique induite par la forme de Killing sur $\mathfrak{m}$ nous procure une métrique dans nos coordonnées fournies par l'isomorphisme (1.1) de la forme

$$g = dr^2 + g_{X_I} + \sum_{j=1}^{k} \sinh^2(jr)\gamma_{j,x} \tag{6.2.2}$$

avec $\gamma_{j,x}$ une métrique sur l'espace tangent gradué $gr_j(T(G/P_I))$ qui dépend du point x de la fibre X_I et avec g_{X_I} la métrique de l'espace symétrique

X_I induite par la forme de Killing. Je renvoi à l'article [BM06] pour une présentation générale des comportements des métriques proches des bords de Furstenberg et au livre [Biq00, p. 13] pour l'exemple concret de $G/K = Sp(1,n)/Sp(n)$.

Chapitre 7

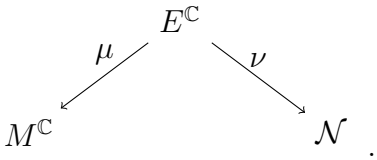
Des candidats pour être des espaces de twisteurs de variétés quaternion-kählériennes

7.1 Le cas de la géométrie conforme

Décrivons brièvement, dans ce chapitre, la construction de métriques quaternion-kählériennes de modèle homogène $SO(4,k)/SO(4)\times SO(k)$ faite par Le Brun ([LeB89, LeB83]) avec $k\geq 2$. Pour cela notons P_1 le sous-groupe parabolique de $SO(4,k)$ fixant une droite isotrope de $\mathbb{R}^{4,k}$. Le groupe de Levi de ce sous-groupe parabolique est $CO(3,k-1)=\mathbb{R}\rtimes SO(3,k-1)$. Et notons $Q_{1,2}$ le sous-groupe parabolique de $SO(4,k)$ fixant un plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^{4,k}$ et une droite de ce plan. La construction de Le Brun débute avec la donnée d'une métrique conforme de signature $(3,k-1)$ sur une variété réelle analytique M de dimension $k+2$ c'est-à-dire qu'elle débute avec la donnée d'une géométrie parabolique régulière analytique de type $(SO(4,k),P_1)$. En effet comme le sous-groupe P_1 est 1-gradué, alors d'après la proposition 33, une géométrie parabolique de type $(SO(4,k),P_1)$ est la donnée d'une réduction au groupe de Levi $CO(3,k-1)$. À partir de là, Le Brun complexifie cette variété M puis définit $E^{\mathbb{C}}$ l'espace des directions complexes nulles de $M^{\mathbb{C}}$. Il s'avère que cet ensemble $E^{\mathbb{C}}$ possède une géométrie parabolique de type $(SO(4+k,\mathbb{C}),Q^{\mathbb{C}}_{1,2})$. En effet, dans le modèle homogène, l'espace tangent à $SO(4,k)/P_1$ au point D est l'espace $D^{\perp}/D$. Or fixer une droite isotrope dans $D^{\perp}/D$ revient à fixer un plan totalement isotrope dans $\mathbb{R}^{4,k}$ contenant D : l'espace des directions nulles de $SO(4,k)/P_1$ est donc l'espace $SO(4,k)/Q_{1,2}$. Ce résultat se généralise au cas d'une géométrie parabolique $(p:\mathcal{G}\to M,\omega)$ de type $(SO(4,k),P_1)$ quelconque et l'ensemble des direc-

tions nulles de M, $E = \mathcal{G} \times_{P_1} P_1/Q_{1,2} = \mathcal{G}/Q_{1,2}$, possède bien une géométrie parabolique de type $(SO(4,k), Q_{1,2})$. Finalement l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ espéré pour utiliser le théorème 62 apparait comme étant l'espace des feuilles du feuilletage de $E^{\mathbb{C}}$ par les relevés des géodésiques nulles complexes de $M^{\mathbb{C}}$: l'espace $\mathcal{N}$ est l'ensemble des géodésiques complexes nulles de $M^{\mathbb{C}}$ et il possède les propriétés du théorème 62 d'après [LeB83]. Il se cache ici deux choses primordiales pour généraliser cette construction : premièrement ce feuilletage, qui ici se comprend facilement, existe et se comprend de manière algébrique (c'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant), et deuxièmement, les propriétés souhaitées pour cet espace des twisteurs $\mathcal{N}$ s'obtiennent si notre géométrie parabolique sur $E^{\mathbb{C}}$ de type $(SO(4+k,\mathbb{C}), Q^{\mathbb{C}}_{1,2})$ est régulière, ce qui impose une restriction algébrique bien évidemment vérifiée ici.

Cette construction se résume par la double fibration



Pour finir les courbes utilisées dans le théorème 62 se trouvent en comprenant dans le modèle ce que deviennent les courbes rationnelles $\pi^{-1}(x)$ lorsque x se rapproche du bord $SO(4,k)/P_1$ dans $SO(4,k)/SO(4) \times SO(k)$ avec $\pi : \mathcal{N} \to SO(4,k)/SO(4) \times SO(k)$. Ainsi en déformant ces courbes limites que nous pouvons définir simplement à l'aide de la géométrie parabolique initiale par $\nu(\mu^{-1}(x))$ pour $x \in M^{\mathbb{C}}$, Le Brun retrouve un espace $\mathcal{Q}$ de dimension $4k$ correspondant à des courbes lisses vérifiant les hypothèses du théorème 62. Ce même théorème fournit alors une métrique quaternion-kählérienne à $\mathcal{Q}$.

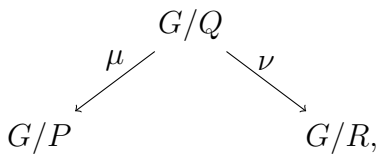
Pour espérer une construction similaire d'un espace des twisteurs précisons les deux outils précédemment utilisés et les restrictions qui apparaissent pour les utiliser.

1. Le premier outil utilisé fut de relever une géométrie parabolique régulière de type (G,P) à une géométrie parabolique régulière de type (G,Q) avec $Q \subset P$. Ceci passe par l'étude des espaces correspondant et cela va nous faire apparaitre des restrictions sur la cohomologie $H^*(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$.

2. Le second point consiste à révéler un feuilletage de $E(= G/Q)$ par des feuilles de dimension 1. Pour qu'un tel feuilletage arrive cela va impliquer une restriction algébrique. De plus, pour que l'espace des

feuilles soit dans le cas homogène l'espace des twisteurs G/R de l'espace symétrique quaternion-kählérien de départ, alors cela implique que $Q \subset R$ et $\dim(G/Q) = \dim(G/R) + 1$.

Dans cette partie nous allons chercher à généraliser la construction précédente d'un espace des géodésiques nulles, c'est-à-dire que nous allons chercher à mimer une double fibration



avec P et Q des sous-groupe paraboliques de G et R le sous-groupe parabolique de G donnant à G/R une structure de contact [ČS09, p. 298](car l'espace des twisteurs de G/K est inclus dans $G^{\mathbb{C}}/R^{\mathbb{C}}$) et avec $G/Q \to G/R$ une fibration dont les fibres sont de dimension 1. Les deux prochains chapitres sont consacrés chacun à une des étapes de cette construction : dans le prochain chapitre nous étudierons comment se relève une géométrie parabolique normale et régulière de type (G, P) en une géométrie parabolique de type (G, Q), puis dans le suivant nous regarderons à quelles conditions nous avons un feuilletage comme précédemment. Dans le dernier chapitre, nous listerons les géométries paraboliques pour lesquelles nous avons une telle construction.

7.2 Les espaces correspondants

Nous allons ici nous intéresser au cas où $Q \subset P$ sont deux sous-groupes paraboliques d'un groupe de Lie semi-simple G. Dans ce cas-là, nous disposons de deux espaces homogènes G/Q et G/P possédant chacun une géométrie parabolique. Les questions que nous allons nous poser concernent les relations entre les géométries paraboliques de type (G, Q) et (G, P). Nous verrons qu'en toute généralité nous ne pouvons pas dire grand chose mais que ces questions sont des questions algébriques qui se règlent au cas par cas. Je renvoie donc à la partie 9.3.1 de cette thèse pour voir l'exemple concret des sous-groupes paraboliques de G_2^s. Nous suivons pour cette partie la présentation de Čap et Slovák [ČS09, p. 99].

Définition 66 *Soit G un groupe de Lie et $Q \subset P \subset G$ deux sous-groupes fermés. Soit $(p : \mathcal{G} \to N, \omega)$ une géométrie de Cartan de type (G, P). Nous définissons l'espace correspondant $\mathcal{C}N$ de N pour $Q \subset P$ comme étant l'espace quotient $\mathcal{G}/Q = \mathcal{G} \times_P P/Q$.*

Nous avons alors les propriétés suivantes :

Propriété 67 *Soit Q un sous-groupe de P et $\mathcal{C}N$ l'espace correspondant à une géométrie de Cartan $(p : \mathcal{G} \to N, \omega)$ de type (G, P) pour ce sous-groupe Q. Alors nous avons :*

1. *L'espace $\mathcal{C}N$ est l'espace total d'un fibré sur N de fibre l'espace homogène P/Q, et il possède une géométrie de Cartan $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}N, \omega)$ de type (G, Q).*

2. *La fonction de courbure κ^N de $(p : \mathcal{G} \to N, \omega)$ et celle $\kappa^{\mathcal{C}N}$ de $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}N, \omega)$ sont reliées de la manière suivante : soit $u \in \mathcal{G}$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$ nous avons*

   $$\kappa^{\mathcal{C}N}(u)(X + \mathfrak{q}, Y + \mathfrak{q}) = \kappa^N(u)(X + \mathfrak{p}, Y + \mathfrak{p}) \tag{7.2.1}$$

   avec $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p}$ les algèbres de Lie de Q et P. Ces deux fonctions de courbure sont donc induites par une même fonction $\mathcal{G} \to L(\Lambda^2\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

3. *Le sous-espace $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ induit une distribution $V\mathcal{C}N := \mathcal{G} \times_Q \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \subset T\mathcal{C}N = \mathcal{G} \times_Q \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$. C'est exactement l'espace vertical de la projection $\mathcal{C}N \to N$. La courbure $\kappa^{\mathcal{C}N}$ de $\mathcal{C}N$ a la propriété que pour toute section ξ de $V\mathcal{C}N$, $\iota_\xi \kappa^{\mathcal{C}N} = 0$.*

Preuve de la Propriété

1. L'espace $\mathcal{C}N$ est le fibré sur N associé à la fibration principale $\mathcal{G}$ et à la fibre P/Q, c'est-à-dire l'espace $\mathcal{G} \times_P P/Q$ d'où la première assertion. Comme P agit librement sur $\mathcal{G}$ il en est de même pour $Q \subset P$. Ainsi la projection naturelle $q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}N = \mathcal{G}/Q$ est un fibré principal de groupe de structure Q. Par définition la connexion de Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ est une trivialisation de $T\mathcal{G}$, P-équivariante vérifiant $\omega(\xi_X) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{p}$ et ξ_X le champ de vecteurs fondamental associé à X. Mais comme Q est un sous-groupe de P, ω reste Q-équivariante et vérifie $\omega(\xi_X) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{q}$. Nous avons donc bien que $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}N, \omega)$ est une géométrie de Cartan de type (G, Q).

2. La forme de courbure $K \in \Omega^2(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ définie par $K(\xi, \eta) = d\omega(\xi, \eta) + [\omega(\xi), \omega(\eta)]$ est donc la même pour les deux géométries en question. Ainsi les deux fonctions de courbure κ^N et $\kappa^{\mathcal{C}N}$ proviennent de la même fonction de courbure $\kappa : \mathcal{G} \to \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$, la première étant vu grâce à la propriété 38 dans $\mathcal{G} \to \Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$ et la deuxième dans $\mathcal{G} \to \Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{q})^* \otimes \mathfrak{g}$, d'où la relation demandée.

3. Comme Q est un sous-groupe de P, nous avons $Ad(h)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ pour tout $h \in Q$. Ainsi l'inclusion $\mathfrak{p}/\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ est Q-invariante et $\mathcal{G} \times_Q \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ est un

sous-fibré lisse de $\mathcal{G} \times_Q \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$. Comme ω définit une connexion de Cartan sur $q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}N$, nous savons, d'après l'isomorphisme (2.1.1), que $\mathcal{G} \times_Q \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ est isomorphe à l'espace tangent $T\mathcal{C}N$ de la manière suivante : $\mathcal{G} \times_Q \mathfrak{g}/\mathfrak{q} \to T\mathcal{C}N$ est donnée par $[\![u, X + \mathfrak{q}]\!] \mapsto T_u q(\omega(u)^{-1}(X))$. Comme l'identification entre TN et $\mathcal{G} \times_P \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ provient elle aussi de la connexion de Cartan ω, nous voyons que la projection $\mathcal{C}N \to N$ correspond à la projection naturelle $\mathfrak{g}/\mathfrak{q} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Ainsi le fibré vertical de $\mathcal{C}N \to N$ correspond au noyau $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{q} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Enfin, soit $[\![u, X+\mathfrak{q}]\!]$ une section de $V\mathcal{C}N = \mathcal{G} \times_Q \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ alors $\kappa^{\mathcal{C}N}(u)(X+\mathfrak{q}, .) = \kappa^N(u)(X+\mathfrak{p}, .) = \kappa^N(u)(\mathfrak{p}, .) = 0$ car la forme de courbure pour la géométrie de N est horizontale d'après la propriété 38. □

La question que nous allons nous poser à présent est de savoir si partant d'une géométrie parabolique régulière (respectivement normale), nous avons que la géométrie parabolique de l'espace correspondant est aussi régulière (respectivement normale). Nous pouvons déjà répondre à cette question pour la notion de normalité.

Proposition 68 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, P un sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ et Q un autre sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ vérifiant $Q \subset P$. Soit à présent $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie de Cartan sur une variété M de type (G, P). Comme nous venons de le voir, la variété $\mathcal{C}M := \mathcal{G}/Q = \mathcal{G} \times_P P/Q$ est naturellement munie d'une géométrie parabolique $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M, \omega)$ de type (G, Q).*

Alors la géométrie de Cartan $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ est normale si et seulement si la géométrie de Cartan $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M, \omega)$ l'est.

Preuve de la proposition

Les fonctions de courbure κ^M de $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ et $\kappa^{\mathcal{C}M}$ de $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M, \omega)$ sont reliées par

$$\kappa^{\mathcal{C}M}(u)(X + \mathfrak{q}, Y + \mathfrak{q}) = \kappa^M(u)(X + \mathfrak{p}, Y + \mathfrak{p})$$

pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ce résultat est direct lorsque nous pensons au fait que ces deux fonctions de courbure proviennent de la même courbure $K \in \Omega^2(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$ qui est P donc Q-horizontale. Ces deux fonctions de courbures sont donc identiques lorsqu'elles sont vu comme fonctions $\mathcal{G} \to \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ et donc comme fonctions $\mathcal{G} \to \Lambda^2\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$: nous avons ici simplement identifié $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$ grâce à la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. La fonction de courbure κ^M est à valeur dans $\Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \otimes \mathfrak{g}$ c'est-à-dire dans $\Lambda^2\mathfrak{p}^\perp \otimes \mathfrak{g} \subset \Lambda^2\mathfrak{q}^\perp \otimes \mathfrak{g}$. Or la codifférentielle de Kostant est la réduction de $\partial^* : \Lambda^2\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ à $\Lambda^2\mathfrak{p}^\perp \otimes \mathfrak{g}$ pour $\mathfrak{p}$ et à

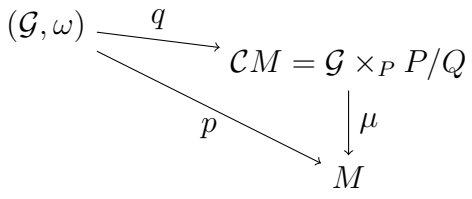
$\Lambda^2\mathfrak{q}^\perp\otimes\mathfrak{g}$ pour $\mathfrak{q}$. Ainsi sur $\Lambda^2\mathfrak{p}^\perp\otimes\mathfrak{g}$ les codifférentielles des deux sous-algèbres coïncident et donc $\partial^*\kappa^{\mathcal{C}M} = \partial^*\kappa^M$. □

Pour la question de la régularité, il n'existe pas de théorème général mais cette question se règle au cas par cas grâce à la caractérisation de la régularité par les fonctions de courbure κ de la proposition 32 et de la relation entre les deux fonctions de courbure en question donnée par l'équation (7.2.1). Si nous ne connaissons pas explicitement notre fonction de courbure initiale κ^N mais que nous connaissons simplement les types de la géométrie parabolique de N et $\mathcal{C}N$ nous pouvons cependant répondre à cette question lorsque la connexion de Cartan est normale grâce au théorème 52 qui relie la première composante non nulle de κ^N à celle de la fonction de courbure harmonique κ_H^N qui vit dans le fibré $\mathcal{E}\times_{P_0} H^2(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g})$ où $\mathcal{E} = \mathcal{G}/P^\perp$. Ce fibré est donc caractérisé par l'objet algébrique et calculable $H^2(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g})$. Afin d'éclairer ceci citons deux exemples aux comportements opposés que nous retrouverons par la suite. Observons le groupe de Lie semi-simple G_2^s et ses trois sous-groupes paraboliques : $P_{\{\alpha_1\}}$ qui fixe une droite isotrope de $\mathbb{R}^{3,4}$, $P_{\{\alpha_2\}}$ qui fixe un 2-plan annulant la 3-forme définissant G_2^s et $P_\emptyset$ fixant une droite isotrope et un tel 2-plan. Alors toute géométrie parabolique normale et régulière sur M de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ se relève en une géométrie normale et régulière sur l'espace correspondant $\mathcal{C}M$ de type $(G_2^s, P_\emptyset)$. A contrario, il n'y a que la géométrie parabolique standard de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_2\}})$ qui se relève en une géométrie normale et régulière sur l'espace correspondant $\mathcal{C}(G_2^s/P_{\{\alpha_2\}})$ de type $(G_2^s, P_\emptyset)$ car la condition de régularité requiert l'annulation de la seule composante non nulle de $H^2(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\{\alpha_2\}}), gr(\mathfrak{g}))$.

7.3 Les feuilletages par des géodésiques paraboliques

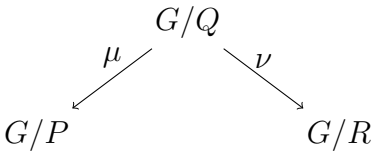
Nous allons ici généraliser la notion de géodésiques nulles du cas de la géométrie conforme. Partant d'une géométrie parabolique régulière $(p : \mathcal{G}\to M, \omega)$ de type (G,P) qui se relève en une géométrie parabolique régulière $(q : \mathcal{G}\to \mathcal{C}M, \omega)$ de type (G,Q) avec $Q\subset P$, nous cherchons alors un feuilletage naturel de $\mathcal{C}M$ dont les feuilles sont de dimension 1. Cette étude effectuée ici dans le cas général sera reprise dans le cas particulier d'une géométrie parabolique initiale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ dans la partie suivante.

Notons μ la projection $\mathcal{C}M = \mathcal{G}\times_P P/Q \to M$, nous avons alors le schéma



Notons $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ correspondant à P et Q. Ces sous-algèbres nous pouvons les comprendre comme dans notre présentation des bords de Furstenberg : soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Δ un système de racines positives alors une sous-algèbre parabolique correspond à un sous-ensemble I de Δ. Pour notre recherche de métrique quaternion-kählérienne, nous allons initialement nous donner des géométries paraboliques de type (G, P) telles que les bords de Furstenberg correspondant à ces paraboliques soient des vrais bords, c'est-à-dire de codimension 1. Ainsi nous pouvons considérer notre parabolique de départ P comme étant de la forme $I_P = \Delta - \{\alpha\}$. Comme $Q \subset P$ nous avons $I_P = I_Q + \tilde{I}$. Ensuite, d'après les restrictions dimensionnelles brièvement évoquées à la fin de l'étude du cas conforme au chapitre 7.1 et que nous détaillerons dans le chapitre suivant, nous pouvons supposer que $\tilde{I}$ est composé d'un unique élément β, c'est-à-dire que $I_Q = \Delta - \{\alpha, \beta\}$.

L'idée du feuilletage de $\mathcal{C}M$ est d'imiter le schéma suivant :



avec R le sous-groupe parabolique de G correspondant au sous-ensemble $I_R = \Delta - \{\beta\}$. Le feuilletage en question correspond aux fibres de ν. Or une fibre de ν est isomorphe à $R/Q \simeq \exp(\mathfrak{g}_{-\alpha})$ avec $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a},\ [H, X] = \alpha(H)X\}$. La manière d'exprimer cette idée est donc de donner un sens à la distribution $q_*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}_{-\alpha}))$. Notons que comme nous cherchons un feuilletage de $\mathcal{C}M$ par des feuilles de dimension 1, cela nous fournit la condition suivante : $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1.

Soit $u \in \mathcal{G}$, posons $c(t) = Fl_t^{\omega^{-1}(e_0)}(u) \in \mathcal{G}$ le flot du champ de vecteurs $\omega^{-1}(e_0)$ avec $e_0 \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$: ce flot est bien défini si t est suffisamment petit. Nous avons ainsi une courbe c telle que $c(0) = u$ et $\omega(c(t))(\dot{c}(t)) = e_0$ pour tout t.

Définition 69 *Ces courbes c, vérifiant que $\omega(c(t))(\dot{c}(t))$ est constant, sont nommées courbes distinguées ou géodésiques paraboliques.*

Regardons à présent les courbes $q(c(t))$ dans $\mathcal{C}M$. Pour obtenir un feuilletage de $\mathcal{C}M$ dont les feuilles sont les images des courbes précédentes, il faut et il suffit qu'en tout point $x \in \mathcal{C}M$, pour tout u et $\tilde{u}$ dans la fibre $\mathcal{G}_x$ les vecteurs correspondants $q_*\dot{c}_u(0) = T_u q(\omega(u)^{-1}(e_0))$ et $q_*\dot{c}_{\tilde{u}}(0) = T_{\tilde{u}} q(\omega(\tilde{u})^{-1}(e_0))$ soient colinéaires. Or soit x, u et $\tilde{u}$ de tels éléments, il existe $g \in Q$ tel que $\tilde{u} = u \cdot g$. Ainsi par Q-équivariance de la connexion de Cartan ω nous avons

$$\begin{aligned} T_{\tilde{u}} q(\dot{c}_{\tilde{u}}(0)) &= T_{u\cdot g} q(\omega(u\cdot g)^{-1}(e_0)) \\ &= T_{u\cdot g} q(T_u r^g(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(e_0)))) \\ &= T_{u\cdot g}(q \circ r^g)(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(e_0))) \\ &= T_u q(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(e_0))) \\ \text{et} \quad T_u q(\dot{c}_u(0)) &= T_u q(\omega(u)^{-1}(e_0)). \end{aligned}$$

Ces deux vecteurs sont donc colinéaires si et seulement si $Ad(g)(e_0)$ et e_0 le sont dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$. L'existence de ce feuilletage est donc simplement une question algébrique.

Proposition 70 *Soit G un groupe de Lie et Δ un système de racines positives. Soit P le sous-groupe parabolique correspondant à un sous-ensemble de racines $\Delta - \{\alpha\}$ et $Q \subset P$ le sous-groupe parabolique correspondant à un sous-ensemble de racines $\Delta - \{\alpha, \beta\}$. Supposons que $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a},\ [H, X] = \alpha(H)X\}$ est de dimension 1. Soit $(p : \mathcal{G} \to N, \omega)$ une géométrie de Cartan de type (G, P).*

Si pour tout élément g de Q nous avons $Ad(g)(\mathfrak{g}_{-\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{q}$ avec $\mathfrak{q}$ l'algèbre de Lie de Q. Alors la variété $\mathcal{C}M = \mathcal{G}/Q$ possède un feuilletage par des feuilles de dimensions 1 donné par $q_*\omega^{-1}(\mathfrak{g}_\alpha)$ avec $q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M = \mathcal{G}/Q$.

Dans le cas particulier, que nous étudierons à la partie suivante, d'une géométrie parabolique initiale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$, l'espace $\mathcal{C}M$ est inclus dans $\mathbb{P}(TM)$. Nous aurons alors une interprétation géométrique de ce feuilletage à la proposition 104.

Si un tel feuilletage existe, nous pouvons alors nous intéresser à l'espace des feuilles N qui sera dans la suite de notre étude l'espace des twisteurs associé à une métrique quaternion-kählérienne. Il est bon de remarquer que cet espace N ne possède pas forcément une géométrie parabolique de type (G, R) comme dans le modèle, mais cet espace a cependant la vertu d'exister. Par exemple, nous verrons à la remarque 81 qu'avec une géométrie parabolique initiale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$, l'espace des twisteurs N ne possède pas de géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_2\}})$ en dehors du cas homogène.

7.4 Les constructions d'un espace de géodésiques paraboliques

Comme nous l'avons déjà précisé, l'objectif ici est de trouver de nouvelles métriques quaternion-kählériennes en se donnant initialement une géométrie parabolique de type (G, P) qui correspond à la géométrie d'un bord de Furstenberg de l'espace symétrique de type non-compact G/K. Or ces espaces symétriques G/K sont connus, d'après [Bes08, p. 409] : ce sont les espaces $SO(4,k)/SO(4)\times SO(k)$, $SU(2,k)/S(U(2)\times U(k))$, $Sp(1,k)/Sp(1)\times Sp(k)$ pour tout $k>1$, et du côté des groupes de Lie exceptionnels ce sont les espaces $G_2^s/SO(4)$, $F_4^{-20}/Sp(3)Sp(1)$, $E_6^2/SU(6)Sp(1)$, $E_7^{-5}/Spin(12)Sp(1)$ et $E_8^{-24}/E_7Sp(1)$ pour lesquelles les métriques quaternion-kählériennes sont les métriques induites par la forme de Killing sur le groupe de Lie semi-simple en question. Pour trouver de telles métriques, nous l'avons annoncé, nous cherchons à reconstruire l'espace des twisteurs associé à une métrique quaternion-kählérienne. Or l'espace des twisteurs associé à un de ces espaces symétriques G/K est un ouvert de l'espace des twisteurs de l'espace symétrique dual compact $\tilde{G}/K$ de G/K. Mais comme nous le voyons dans [ČS09, p. 305], l'espace des twisteurs de ce dual compact est l'espace homogène $G^{\mathbb{C}}/R^{\mathbb{C}}$ avec R le parabolique de G donnant à G/R une structure de contact (un tel parabolique existe et est unique d'après la liste des tels paraboliques [ČS09, p. 298]).

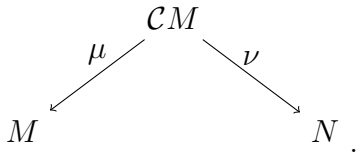
Rappelons à présent le schéma modèle que nous souhaitons imiter pour construire un nouvel espace des twisteurs. Soit G/K un espace symétrique de type non-compact quaternion-kählérien et soit P un sous-groupe parabolique de G tel que le bord de Furstenberg associé à P soit un bord de codimension 1. Notons R le sous-groupe parabolique de G donnant une structure de contact à G/R (et donc le sous-groupe parabolique tel que l'espace des twisteurs de G/K soit inclus dans $G^{\mathbb{C}}/R^{\mathbb{C}}$). Nous cherchons alors à mimer le schéma homogène suivant :

$$\begin{array}{ccc} & G^{\mathbb{C}}/Q^{\mathbb{C}} & \\ {\scriptstyle\mu}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\nu} \\ G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}} & & G^{\mathbb{C}}/R^{\mathbb{C}} \end{array}$$

avec $Q^{\mathbb{C}}$ un sous-groupe parabolique de $G^{\mathbb{C}}$ contenu dans $P^{\mathbb{C}}$ et dans $R^{\mathbb{C}}$.

Partant d'une géométrie parabolique $(p:\mathcal{G}\to M,\omega)$ de type (G,P), nous pouvons définir l'espace correspondant $\mathcal{C}M := \mathcal{G}/Q$ qui possède, d'après la propriété 67, une géométrie parabolique de type (G,Q). Le dernier espace qui dans le modèle est G/R se retrouve comme étant l'espace des feuilles d'un

feuilletage de $\mathcal{C}M$ donné à la proposition 70. Nous obtenons dans le cas où nous avons ce feuilletage le schéma suivant :



En complexifiant M pour que le complexifié $M^{\mathbb{C}}$ est une structure parabolique de type $(G^{\mathbb{C}}, P^{\mathbb{C}})$, nous pouvons alors complexifier tout ce schéma et ainsi obtenir un espace $\mathcal{N}$ qui est un bon candidat pour être un espace des twisteurs d'une métrique quaternion-kählérienne dont le comportement au bord sera celui de la métrique quaternion-kählérienne de G/K proche du bord de Furstenberg associé au parabolique P.

À présent, rappelons les restrictions algébriques présentes pour une construction d'un espace des twisteurs à l'aide des géodésiques paraboliques.

1. La première restriction est que notre géométrie de départ n'est pas la géométrie parabolique de type (G, R).
2. La seconde est dimensionnelle : pour généraliser la construction du cas conforme, nous nous sommes restreint au cas où le feuilletage de $\mathcal{C}M$ est un feuilletage dont les feuilles sont de dimension 1. Ainsi la première condition est que $\dim(R/Q) = 1$.
3. La troisième restriction algébrique arrive lorsque nous désirons construire le feuilletage de $\mathcal{C}M$: d'après la proposition 70 il faut que pour tout élément g de Q nous avons $Ad(g)(\mathfrak{g}_{-\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{q}$ avec $\mathfrak{q}$ l'algèbre de Lie de Q et $I_P = \Delta - \{\alpha\}$.
4. Le dernière restriction apparait lorsque nous cherchons à donner à l'espace des feuilles N une structure de contact. En effet, pour cela il va nous falloir la régularité de la géométrie parabolique de type (G, Q) sur $\mathcal{C}M$ et ceci s'obtient si nous avons les bonnes homogénéités sur la cohomologie $H^2(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g})$. Cette restriction algébrique consiste à assurer qu'une géométrie parabolique régulière de type (G, P) sur M se relève en une géométrie parabolique régulière de type (G, Q) sur $\mathcal{C}M$.

Regardons donc parmi les espaces symétriques de type non-compact quaternion-kählériens et leurs bords de Furstenberg de codimension 1, lesquels répondent aux restrictions précédentes. Nous allons voir que la seule restriction dimensionnelle permet de réduire considérablement les candidats :

Proposition 71 *Les géométries paraboliques à partir desquelles nous avons une construction d'un espace de géodésiques paraboliques qui dans le modèle est l'espace G/R avec R le sous-groupe parabolique de G donnant à G/R une structure de contact, sont les géométries conformes, les géométries paraboliques de type $(SO(4,3), P_3)$ où le sous-groupe P_3 est le parabolique fixant un 3-plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^{4,3}$ et les géométries paraboliques de type (G_2^s, P_1) où le sous-groupe P_1 est le parabolique fixant une droite isotrope de $\mathbb{R}^{4,3}$.*

Preuve de la proposition

1) Dans un premier temps nous allons éliminer tout les candidat qui ne répondent pas à la condition dimensionnelle, puis nous verrons que les restant vérifient bien les autres conditions.

Avec l'espace symétrique $SO(4,k)/SO(4) \times SO(k)$

Pour $SO(4,k)/SO(4) \times SO(k)$ avec $k > 1$, le parabolique R_2 procurant à $SO(4,k)/R_2$ une structure de contact est le parabolique fixant un 2-plan totalement isotrope. Nous avons alors $\dim(SO(4,k)/R_2) = 2k+1$.

Un premier sous-groupe parabolique $Q_{1,2}$ contenu dans R_2 est le parabolique fixant un plan totalement isotrope et une droite de ce plan : ici nous avons bien $\dim(R_2/Q_{1,2}) = 1$. Le sous-groupe P de départ est donc le sous-groupe parabolique fixant une droite isotrope P_1. Remarquons que la construction d'un espace de géodésiques paraboliques pour $P = P_1$ et $Q = Q_{1,2}$ correspond au cas conforme, ce cas-là va donc répondre à toutes les conditions nécessaire.

Un second sous-groupe parabolique $Q_{2,3}$ contenu dans R_2 est le parabolique fixant un 3-plan totalement isotrope et une 2-plan dans ce 3-plan lorsque $k > 2$: nous avons alors $\dim(R_2/Q_{2,3}) = k-2$. Notre condition sur la dimension est respectée si $k = 3$ et alors le sous-groupe P de départ est le sous-groupe parabolique fixant un 3-plan totalement isotrope P_3 dans $\mathbb{R}^{4,3}$. Retenons ce cas-là : nous observerons par la suite qu'il vérifie les autres restrictions.

Un troisième sous-groupe parabolique $Q_{2,4}$ contenu dans R_2 est le parabolique fixant un 4-plan totalement isotrope et une 2-plan dans ce 4-plan lorsque $k > 3$: nous avons alors $\dim(R_2/Q_{2,4}) = 2k-7$. Notre condition sur la dimension est respectée si $k = 4$ et alors le sous-groupe P de départ est le sous-groupe parabolique fixant un 4-plan totalement isotrope P_4 dans $\mathbb{R}^{4,4}$. Notons qu'en observant le diagramme de Satake de $\mathfrak{so}(4,4)$, il apparait que le sous-groupe parabolique P_1 et le sous-groupe parabolique P_4 sont iso-

morphes. Nous ne trouverons donc pas une nouvelle construction mais nous retombons une fois encore sur le cas conforme.

Les autres sous-groupes paraboliques contenu dans R sont strictement contenus dans un des sous-groupes $Q_{i,2}$ et sont donc de dimension trop petit pour pouvoir coller à notre construction.

Avec l'espace symétrique $SU(2,k)/S(U(2)\times U(k))$

Pour $SU(2,k)/S(U(2)\times U(k))$ avec $k>1$, le parabolique R_1 procurant à $SU(2,k)/R_1$ une structure de contact est le parabolique fixant une droite isotrope. Nous avons alors $\dim(SU(2,k)/R_1)=2k+1$.

Ici nous n'avons qu'un sous-groupe parabolique $Q_{1,2}$ contenu dans R_1 , c'est le parabolique fixant un plan totalement isotrope et une droite de ce plan. Nous avons dans ce cas-là, $\dim(R_1/Q_{1,2})=2k-3$. Notre condition sur la dimension est respectée si $k=2$ et alors le sous-groupe P de départ est le sous-groupe parabolique fixant un plan totalement isotrope P_2 dans $\mathbb{C}^{2,2}$. Cependant, la géométrie parabolique de type $(SU(2,2),P_2)$ n'est rien d'autre que la géométrie parabolique de type $SO(4,2)/P_1$ et nous retrouvons le cas conforme.

Avec l'espace symétrique $Sp(1,k)/Sp(1)\times Sp(k)$

Dans ce cas-là, l'histoire est rapide. Comme $Sp(1,k)$ est de rang 1 nous ne pouvons pas trouver deux sous-groupes paraboliques de $Sp(1,k)$ dont l'un est strictement inclus dans l'autre. Nous n'avons donc pas de construction comme celles que nous cherchons.

Avec l'espace symétrique $G_2^s/SO(4)$

Pour $G_2^s/SO(4)$, le parabolique R_2 procurant à G_2^s/R_2 une structure de contact est le parabolique fixant un 2-plan totalement isotrope et annulant la 3-forme définissant G_2^s. Nous avons alors $\dim(G_2^s/R_2)=5$.

Ici nous n'avons qu'un sous-groupe parabolique $Q_{1,2}$ contenu dans R , c'est le parabolique fixant un 2-plan totalement isotrope et annulant la 3-forme définissant G_2^s et fixant une droite de ce plan. Nous avons dans ce cas-là, $\dim(R_2/Q_{1,2})=1$. Notre condition sur la dimension est donc respectée et alors le sous-groupe P de départ est le sous-groupe parabolique fixant une droite isotrope P_1 dans $\mathbb{R}^{4,3}$.

Retenons ce cas-là : nous observerons par la suite qu'il vérifie les autres restrictions.

Avec l'espace symétrique $F_4^{-20}/Sp(3)Sp(1)$

Pour $F_4^{-20}/Sp(3)Sp(1)$, soit R le parabolique procurant à F_4^{-20}/R une structure de contact. Nous avons alors $\dim(R) = 37$. Étant donné un système de racines simples positives Δ de F_4^{-20} alors le sous-groupe parabolique R est un sous-groupe parabolique associé à un ensemble de racines simples $I_R = \Delta - \{\alpha\}$.

Comme F_4^{-20} est de rang 4 nous allons dans un premier temps regarder les dimensions des trois sous-groupes paraboliques associés aux ensembles de racines de la forme $\Delta - \{\alpha, \beta\}$. Or les dimensions de ces trois sous-groupes paraboliques sont 30, 31 et 32. Aucun d'entre eux ne vérifie donc $\dim(R/Q) = 1$. Les autres sous-groupes paraboliques contenu dans R sont strictement contenus dans un des trois sous-groupes précédents et sont donc de dimension trop petit pour pouvoir coller à notre construction.

Nous n'avons donc pas de telle construction pour $F_4^{-20}/Sp(3)Sp(1)$.

Avec l'espace symétrique $E_6^2/SU(6)Sp(1)$

Pour $E_6^2/SU(6)Sp(1)$, soit R le parabolique procurant à E_6^2/R une structure de contact. Nous avons alors $\dim(R) = 57$. Étant donné un système de racines simples positives Δ de E_6^2 alors le sous-groupe parabolique R est un sous-groupe parabolique associé à un ensemble de racines simples $I_R = \Delta - \{\alpha\}$.

Comme E_6^2 est de rang 4 nous allons dans un premier temps regarder les dimensions des trois sous-groupes paraboliques associés aux ensembles de racines de la forme $\Delta - \{\alpha, \beta\}$. Or les dimensions de ces trois sous-groupes paraboliques sont 48, 48 et 45. Aucun d'entre eux ne vérifie donc $\dim(R/Q) = 1$. Les autres sous-groupes paraboliques contenu dans R sont strictement contenus dans un des trois sous-groupes précédents et sont donc de dimension trop petit pour pouvoir coller à notre construction.

Nous n'avons donc pas de telle construction pour $E_6^2/SU(6)Sp(1)$.

Avec l'espace symétrique $E_7^{-5}/Spin(12)Sp(1)$

Pour $E_7^{-5}/Spin(12)Sp(1)$, soit R le parabolique procurant à E_7^{-5}/R une structure de contact. Nous avons alors $\dim(R) = 100$. Étant donné un système de racines simples positives Δ de E_7^{-5} alors le sous-groupe parabolique R est un sous-groupe parabolique associé à un ensemble de racines simples $I_R = \Delta - \{\alpha\}$.

Comme E_7^{-5} est de rang 4 nous allons dans un premier temps regarder les dimensions des trois sous-groupes paraboliques associés aux ensembles de racines de la forme $\Delta - \{\alpha, \beta\}$. Or les dimensions de ces trois sous-groupes

paraboliques sont 87, 89 et 82. Aucun d'entre eux ne vérifie donc $\dim(R/Q) = 1$. Les autres sous-groupes paraboliques contenu dans R sont strictement contenus dans un des trois sous-groupes précédents et sont donc de dimension trop petit pour pouvoir coller à notre construction.

Nous n'avons donc pas de telle construction pour $E_7^{-5}/Spin(12)Sp(1)$.

Avec l'espace symétrique $E_8^{-24}/E_7Sp(1)$

Pour $E_8^{-24}/E_7Sp(1)$, soit R le parabolique procurant à E_8^{-24}/R une structure de contact. Nous avons alors $\dim(R) = 191$. Étant donné un système de racines simples positives Δ de E_8^{-24} alors le sous-groupe parabolique R est un sous-groupe parabolique associé à un ensemble de racines simples $I_R = \Delta - \{\alpha\}$.

Comme E_8^{-24} est de rang 4 nous allons dans un premier temps regarder les dimensions des trois sous-groupes paraboliques associés aux ensembles de racines de la forme $\Delta - \{\alpha, \beta\}$. Or les dimensions de ces trois sous-groupes paraboliques sont 158, 164 et 149. Aucun d'entre eux ne vérifie donc $\dim(R/Q) = 1$. Les autres sous-groupes paraboliques contenu dans R sont strictement contenus dans un des trois sous-groupes précédents et sont donc de dimension trop petit pour pouvoir coller à notre construction.

Nous n'avons donc pas de telle construction pour $E_8^{-24}/E_7Sp(1)$.

2) Regardons à présent si les géométries paraboliques conformes, celles de type (G_2^s, P_1) et celles de type $(SO(4,3), P_3)$ vérifient les autres conditions. Le cas conforme étant celui que nous avons cherché à généraliser, il va bien entendu vérifier toutes les conditions imposées. Le cas des géométries paraboliques de type (G_2^s, P_1) va être abordé en profondeur dans la partie suivante : en particulier, ces géométries vérifient les conditions imposées. Reste alors le cas des géométries paraboliques de type $(SO(4,3), P_3)$.

Lemme 72 *Pour une géométrie parabolique initiale régulière de type $(SO(4,3), P_3)$, la troisième restriction à une construction d'un espace de géodésiques paraboliques comme recherchée, est vérifiée.*

Preuve du lemme

Soit

$$\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \\ \alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3\}$$

un système de racines positives de $\mathfrak{so}(4,3)$ et notons $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ un système de racines simples positives, alors le sous-groupe parabolique P_3 correspond à l'ensemble des racines simples $I_{P_3} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ et le sous-groupe

parabolique R_2 donnant à $SO(4,3)/R_2$ une structure parabolique correspond à l'ensemble des racines simples $I_{R_2} = \{\alpha_1, \alpha_3\}$. Le sous-groupe parabolique $Q_{2,3}$ correspond donc lui au sous-ensemble de racines simples $I_{Q_{2,3}} = \{\alpha_1\}$. Donnons à présent les trois décompositions de $\mathfrak{so}(4,3)$ correspondant à ces trois paraboliques :

$$\begin{array}{lrcl}
\text{pour } I_{Q_{2,3}} = \{\alpha_1\} & \mathfrak{so}(4,3) & = & \mathfrak{q}_{-4} \oplus \mathfrak{q}_{-3} \oplus \mathfrak{q}_{-2} \oplus \mathfrak{q}_{-1} \oplus \mathfrak{q}_0 \oplus \mathfrak{q}_1 \\
& & & \oplus \mathfrak{q}_2 \oplus \mathfrak{q}_3 \oplus \mathfrak{q}_4, \\
\text{pour } I_{P_3} = \{\alpha_1, \alpha_2\} & \mathfrak{so}(4,3) & = & \mathfrak{p}_{-2} \oplus \mathfrak{p}_{-1} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2, \\
\text{pour } I_{R_2} = \{\alpha_1, \alpha_3\} & \mathfrak{so}(4,3) & = & \mathfrak{r}_{-2} \oplus \mathfrak{r}_{-1} \oplus \mathfrak{r}_0 \oplus \mathfrak{r}_1 \oplus \mathfrak{r}_2,
\end{array}$$

avec

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathfrak{q}_0 & = & \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1}, & \mathfrak{q}_1 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, \\
\mathfrak{q}_2 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_2+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & \mathfrak{q}_3 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2+2\alpha_3}, \\
\mathfrak{q}_4 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}, & & & \\
\mathfrak{p}_0 & = & \mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, & & & \\
\mathfrak{p}_1 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & & & \\
\mathfrak{p}_2 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_2+2\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}, & & & \\
\mathfrak{r}_0 & = & \mathfrak{g}_{-\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_3}, & \mathfrak{r}_2 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3}. \\
\mathfrak{r}_1 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2+2\alpha_3} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3}, & & &
\end{array}$$

et $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a},\ [H,X] = \alpha(H)X\}$.

Nous allons ainsi pouvoir vérifier la condition algébrique permettant d'avoir un feuilletage sur l'espace $\mathcal{C}M := \mathcal{G}/Q_{2,3}$ pour $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique de type $(SO(3,4), P_3)$ sur une variété M. Soit $g = \exp(n) \in Q_{2,3}$ et soit $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha_3} \subset \mathfrak{q}_{-1}$ (rappelons que $\mathfrak{g}_{-\alpha_3}$ est de dimension 1), alors nous avons $Ad(\exp(n))(X) = \exp(ad(n))(X)$. Ainsi, notant $\mathfrak{q}^i := \bigoplus_{j \geq i} \mathfrak{q}_j$,

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n \in \mathfrak{q}^1, & [n,X] \in \mathfrak{q}^0 = \mathfrak{q} \\
& \text{donc } [n,[n,X]] \in \mathfrak{q}^1 \subset \mathfrak{q} \ldots \\
& \text{ainsi } Ad(\exp(n))(X) = X + Y_0 \quad \text{avec } Y_0 \in \mathfrak{q}, \\
\text{si } n \in \mathfrak{g}_{\alpha_1} \subset \mathfrak{q}_0, & [n,X] \in \mathfrak{g}_{\alpha_1-\alpha_3} = \{0\} \\
& \text{ainsi } Ad(\exp(n))(X) = X, \\
\text{si } n \in \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{q}_0, & [n,X] \in \mathfrak{g}_{-\alpha_3} \\
& \text{donc } [n,[n,X]] \in \mathfrak{g}_{-\alpha_3} \ldots \\
& \text{ainsi } Ad(\exp(n))(X) = X + Y_1 \\
& \text{avec } Y_1 \text{ colinéaire à } X, \\
\text{si } n \in \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \subset \mathfrak{q}_0, & [n,X] \in \mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_3} = \{0\} \\
& \text{ainsi } Ad(\exp(n))(X) = X.
\end{array}$$

La troisième restriction précédemment citée est donc vérifiée. □

Nous pouvons ainsi construire un espace de géodésiques paraboliques N. Révélons à présent sa structure de contact. Dans le cas homogène, l'espace N est l'espace homogène $SO(3,4)/R_2$. Or la distribution de contact associée à cet espace homogène est donnée par la distribution $T^{-1}N$ de cet espace qui provient de $\mathfrak{r}_{-1}$. Dans le modèle, la connexion de Cartan associée à chaque géométrie parabolique rencontrée est toujours la même, c'est-à-dire l'inverse de la fonction exponentielle sur G_2^s. Ainsi comme $\mathfrak{q}^{-3} = \mathfrak{r}^{-1}$, il est direct de voir que la première distribution précédemment citée $T^{-1}N$ est égale à $\nu_*(T^{-3}\mathcal{C}M)$ avec $\nu : \mathcal{C}M \to N$ et la distribution $T^{-3}\mathcal{C}M$ provenant de $\mathfrak{q}^{-3}$. De la même manière, dans le cas général, notons D la distribution $\nu_*(T^{-3}\mathcal{C}M) = \nu_*(q_*(\omega^{-1}(\mathfrak{q}^{-3}))) \subset T(N)$. C'est une distribution de rang 6 car $\ker(\nu_*) \subset T^{-3}\mathcal{C}M$ est de dimension 7.

Reste à voir que cette distribution est non-intégrable. Or la distribution $T^{-3}\mathcal{C}M$ n'est pas intégrable pour le crochet de Lie $\mathcal{L}$ engendré par le crochet de Lie sur $\mathfrak{so}(4,3)$. Ainsi si la géométrie parabolique de $\mathcal{C}M$ de type $(SO(4,3), Q_{2,3})$ est régulière, alors ce crochet de Lie $\mathcal{L}$ coïncide avec le crochet de Lie des champs de vecteurs sur $\mathcal{C}M$ et la distribution $T^{-3}\mathcal{C}M$ n'est pas intégrable pour le crochet de Lie des champs de vecteurs.

Lemme 73 *L'espace des N ainsi construit possède une structure de contact.*

Preuve du lemme

Il ne nous reste qu'à vérifier que la géométrie parabolique sur $\mathcal{C}M$ de type $(SO(4,3), Q_{2,3})$ est régulière si la géométrie parabolique initiale sur M de type $(SO(4,3), P_3)$ l'est. Soit M munie d'une géométrie parabolique régulière et normale de type $(SO(4,3), P_3)$ alors d'après la proposition 67 et la proposition 68, l'espace $\mathcal{C}M$ possède une géométrie parabolique normale de type $(SO(4,3), Q_{2,3})$. Comme la géométrie parabolique de M est régulière, par la proposition 32 nous avons que la fonction de courbure κ^M de ω est 1-homogène c'est-à-dire $\kappa^M \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)^1$.

Nous allons ensuite appliquer le théorème 52, mais pour que cela soit utile, il faut connaitre un peu mieux la cohomologie $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{so}(4,3))$: d'après l'algorithme de Šilhan [Šil03], $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{so}(4,3))_i = 0$ pour tout $i \neq 3$ et dans notre décomposition en racines de $\mathfrak{so}(4,3)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}(4,3) \;=\; & \mathfrak{g}_{-3\alpha_1-2\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-3\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \\ & \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_1+2\alpha_2},\end{aligned}$$

la cohomologie $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{so}(4,3))_3$ homogène de degré 3 correspond à une application $\mathfrak{g}_{-\alpha_3} \times \mathfrak{g}_{-\alpha_2-2\alpha_3} \to \mathfrak{g}_{-\alpha_2}$.

Utilisons à présent le théorème 52 : comme la cohomologie $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{so}(4,3))_i$ est nulle pour tout $i \neq 3$ nous en concluons que la fonction de courbure $\kappa^M \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)^3$. À présent montrons que la géométrie $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M, \omega)$ est régulière. Pour cela, d'après la proposition 32, il faut et il suffit de voir que la fonction de courbure $\kappa^{\mathcal{C}M} : \mathcal{G} \to L(\Lambda^2\mathfrak{so}(4,3)/\mathfrak{q}, \mathfrak{so}(4,3))$ est 1-homogène avec $\mathfrak{q}$ l'algèbre de Lie associée à $Q_{2,3}$. Rappelons la relation entre κ^M et $\kappa^{\mathcal{C}M}$:

$$\kappa^{\mathcal{C}M}(u)(X + \mathfrak{q}, Y + \mathfrak{q}) = \kappa^M(u)(X + \mathfrak{p}, Y + \mathfrak{p})$$

pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $X, Y \in \mathfrak{so}(4,3)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-1}) \subset \kappa^M(\mathfrak{g}_{-\alpha_3}, \mathfrak{g}_{-\alpha_3}) = \{0\} \subset \mathfrak{q}^{-1} = \mathfrak{q}^{-1-1+1} \\
&\kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-2}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}_{-1}) \subset \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}^{-2} = \mathfrak{q}^{-1-2+1} \\
&\kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-3}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}^{-2}) \subset \mathfrak{p}^0 \subset \mathfrak{q}^{-3} = \mathfrak{q}^{-1-3+1} \\
&\kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-2}, \mathfrak{q}_{-2}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}_{-1}) \subset \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}^{-3} = \mathfrak{q}^{-2-2+1}
\end{aligned}$$

car κ^M est 3-homogène. Pour les autres cas, nous avons $\kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j) \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{q}^{-4} \subset \mathfrak{q}^{i+j+1}$ car $i + j + 1 \leq -4$. Nous en déduisons que $\kappa^{\mathcal{C}M}$ est bien 1-homogène c'est-à-dire que la géométrie parabolique $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M, \omega)$ est régulière lorsque la géométrie $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ l'est. □ □

Partie III

Construction de métriques quaternion-kälériennes de type $G_2^s/SO(4)$

Chapitre 8

L'espace symétrique quaternion-kählérien $G_2^s/SO(4)$

8.1 Description de l'espace symétrique de type non-compact $G_2^s/SO(4)$ et de ses bords

Dans cette partie nous allons définir le groupe exceptionnel de type non-compact G_2^s et ses sous-groupes paraboliques P_i. Puis nous comprendrons géométriquement les espaces homogènes G_2^s/P_i et enfin les bords de Furstenberg de notre espace symétrique quaternion-kählérien $G_2^s/SO(4)$. Nous profiterons de ce chapitre pour définir les notations que nous utiliserons dans la suite de cette thèse.

Définissons le groupe de Lie G_2^s à l'aide de la 3-forme :

$$\Phi = \omega^{123} - \omega^{145} - \omega^{167} - \omega^{246} + \omega^{257} + \omega^{347} + \omega^{356},$$

avec $\omega^{ijk} = e_i^* \wedge e_j^* \wedge e_k^*$ et $(e_1, \ldots, e_7)$ une base de $\mathbb{R}^7$. Le groupe de Lie exceptionnel G_2^s est alors défini par

$$G_2^s = \{g \in GL_7(\mathbb{R}) : g^*\Phi = \Phi\}.$$

Remarquons que cette 3-forme fournit une forme quadratique $b(.,.)$ sur $\mathbb{R}^7$ de signature $(3,4)$:

$$\begin{aligned}\tilde{b}(x,y) &= \frac{1}{6}(\iota_x\Phi) \wedge (\iota_y\Phi) \wedge \Phi \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7)\omega^{1234567} \\ &= b(x,y)\omega^{1234567}.\end{aligned}$$

Or si un élément de $GL_7(\mathbb{R})$ stabilise la 3-forme Φ, il stabilise aussi la métrique b. Le groupe de Lie G_2^s est donc un sous-groupe de $SO(3,4)$. Introduisons dès à présent le changement de coordonnées :

$$\begin{array}{ccccc} \epsilon_1 = \frac{e_1+e_6}{\sqrt{2}}, & \epsilon_2 = \frac{e_2+e_5}{\sqrt{2}}, & \epsilon_3 = \frac{e_3+e_4}{\sqrt{2}}, & \epsilon_4 = e_7 \\ \epsilon_5 = \frac{e_3-e_4}{\sqrt{2}}, & \epsilon_6 = \frac{e_2-e_5}{\sqrt{2}}, & \epsilon_7 = \frac{e_1-e_6}{\sqrt{2}}. & \end{array}$$

Ce changement de variable à priori peu naturel le devient lorsque nous observons la décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ donnée par un système de racines. Dans cette nouvelle base de $\mathbb{R}^7$ la forme quadratique b s'écrit :

$$\begin{pmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & -1 & & & \\ & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{pmatrix},$$

et la 3-forme s'écrit :

$$\Phi = -\sqrt{2}\alpha^{156} + \sqrt{2}\alpha^{237} - \alpha^{147} + \alpha^{345} + \alpha^{246}.$$

Enfin l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G_2^s s'écrit dans cette base

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} a+b & c & d & \sqrt{2}e & f & g & 0 \\ h & a & k & -\sqrt{2}d & -e & 0 & -g \\ l & m & b & \sqrt{2}c & 0 & e & -f \\ \sqrt{2}n & -\sqrt{2}l & \sqrt{2}h & 0 & \sqrt{2}c & -\sqrt{2}d & \sqrt{2}e \\ p & -n & 0 & \sqrt{2}h & -b & -k & -d \\ q & 0 & n & -\sqrt{2}l & -m & -a & -c \\ 0 & -q & -p & \sqrt{2}n & -l & -h & -a-b \end{pmatrix}.$$

Choisissons la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ correspondant à la décomposition de $\mathfrak{g}$ en éléments symétriques ($\mathfrak{p}$) et en éléments antisymétriques ($\mathfrak{k}$). Choisissons naturellement le sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ constitué des matrices diagonales de $\mathfrak{g}$ et le système de racines simples positives Δ constitué des racines :

$$\begin{array}{rccc} \alpha_1 : & \mathfrak{a} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & D(a,b) & \longmapsto & a-b \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \alpha_2 : & \mathfrak{a} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & D(a,b) & \longmapsto & b \end{array}$$

avec $D(a,b) \in \mathfrak{a}$ l'élément diagonale de $\mathfrak{g}$ caractérisé par les coordonnées (a,b). Notre décomposition en racines $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ est alors donnée par $\mathfrak{m} = 0$ et

$$\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & k & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & -k & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g}_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & c & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & \sqrt{2}c & & & \\ & & & 0 & \sqrt{2}c & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & -c \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d & & & & & \\ & 0 & & -\sqrt{2}d & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & \\ & & & 0 & & -\sqrt{2}d & & \\ & & & & 0 & & -d & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & \end{pmatrix},$$

$$g_{\alpha_1+2\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e & & & & \\ & 0 & & & -e & & & \\ & & 0 & & & e & & \\ & & & 0 & & & \sqrt{2}e & \\ & & & & 0 & & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & \end{pmatrix},$$

$$g_{\alpha_1+3\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & f & & & \\ & 0 & & & & 0 & & \\ & & 0 & & & & -f & \\ & & & 0 & & & 0 & \\ & & & & 0 & & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{g}_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & & \\ & 0 & & & & & -g & \\ & & 0 & & & & 0 & \\ & & & 0 & & & 0 & \\ & & & & 0 & & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & \end{pmatrix}.$$

Ces choix faits, nous voyons alors apparaitre quatre sous-algèbres paraboliques correspondant au choix I de zéro, d'un ou de deux éléments de Δ. Les sous-algèbres paraboliques ainsi obtenus sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\emptyset &= \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+3\alpha_2} \\ &\quad \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+3\alpha_2}, \\ \mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}} &= \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_\emptyset, \\ \mathfrak{p}_{\{\alpha_2\}} &= \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_\emptyset, \\ \mathfrak{p}_\Delta &= \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

En regardant les poids des racines dans $\Phi - \Phi_I$ dans les trois différents cas (non triviaux), nous obtenons trois graduations de $\mathfrak{g}$:
(8.1.1)

$$\begin{array}{lll} \text{pour } I = \emptyset & \mathfrak{g} = & \mathfrak{q}_{-5} \oplus \mathfrak{q}_{-4} \oplus \mathfrak{q}_{-3} \oplus \mathfrak{q}_{-2} \oplus \mathfrak{q}_{-1} \oplus \mathfrak{q}_0 \oplus \mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{q}_2 \\ & & \oplus \mathfrak{q}_3 \oplus \mathfrak{q}_4 \oplus \mathfrak{q}_5, \\ \text{pour } I = \{\alpha_1\} & \mathfrak{g} = & \mathfrak{p}_{-3} \oplus \mathfrak{p}_{-2} \oplus \mathfrak{p}_{-1} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3, \\ \text{pour } I = \{\alpha_2\} & \mathfrak{g} = & \mathfrak{r}_{-2} \oplus \mathfrak{r}_{-1} \oplus \mathfrak{r}_0 \oplus \mathfrak{r}_1 \oplus \mathfrak{r}_2, \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{q}_0 = \mathfrak{a}, & & \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}, & & \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2}, \\ \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, & & \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{g}_{\alpha_1+3\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+3\alpha_2}, \\ \mathfrak{q}_3 = \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2}, & & \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}, \\ \mathfrak{q}_4 = \mathfrak{g}_{\alpha_1+3\alpha_2}, & & \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+3\alpha_2} \\ \mathfrak{q}_5 = \mathfrak{g}_{2\alpha_1+3\alpha_2}, & & \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{g}_{2\alpha_1+3\alpha_2}. \\ \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1}, & & \end{array}$$

Décrivons à présent les espaces homogènes associés à G_2^s.

Proposition 74 *1. L'espace symétrique $G_2^s/SO(4)$ peut être vu comme l'ensemble des 4-plans négatifs de $\mathbb{R}^{3,4}$ sur lesquels la 3-forme Φ s'annule :*

$$G_2^s/SO(4) = \{Q \quad 4\text{-}plan \subset \mathbb{R}^{3,4} : b|_Q \text{ est négatif et } \Phi|_Q = 0\}.$$

2. Les espaces homogènes correspondant aux trois sous-groupes paraboliques se comprennent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} G_2^s/P_{\{\alpha_1\}} &= \{D \subset \mathbb{R}^{3,4} : D \text{ est une droite isotrope}\} \\ &= \{E \quad 3\text{-}plan \subset \mathbb{R}^{3,4} : \\ &\qquad E \text{ est totalement isotrope et } \Phi|_E = 0\}, \end{aligned}$$

la dernière identification étant donnée par $E = \ker(\iota_D\Phi)$
$= \{y \in \mathbb{R}^{3,4} : \iota_y(\iota_D\Phi) = 0\}$;

$$G_2^s/P_{\{\alpha_2\}} = \{P \quad 2\text{-}plan \subset \mathbb{R}^{3,4} : \iota_P\Phi = 0\}$$

avec $\iota_P\Phi = 0$ signifiant que pour tout $x, y \in P$, la 1-forme $\iota_x(\iota_y\Phi) = 0$;

$$\begin{aligned} \text{et } \ G_2^s/P_\emptyset &= \{(D, P) : D^1 \subset P^2 \subset \mathbb{R}^{3,4} \text{ et } \iota_P\Phi = 0\} \\ &= \{(P, E) : P^2 \subset E^3 \subset \mathbb{R}^{3,4}, \\ &\qquad E \text{ est totalement isotrope et } \Phi|_E = 0\}. \end{aligned}$$

Notons qu'un 2-plan P annulant la 3-forme Φ est un 2-plan totalement isotrope.

3. *Enfin les bords de Furstenberg se caractérisent ainsi :*

$$\begin{aligned} G_2^s/H_{\{\alpha_1\}} &= \{(D,[h]) : D \text{ est une droite isotrope de } \mathbb{R}^{3,4} \\ &\qquad\qquad \text{et } [h] \text{ métrique conforme sur } \ker(\iota_D\Phi)/D\} \\ G_2^s/H_{\{\alpha_2\}} &= \{(P,H) : P \quad 2\text{-plan} \subset \mathbb{R}^{3,4} \text{ vérifiant } \iota_P\Phi = 0 \\ &\qquad\qquad \text{et } H \quad 2\text{-plan négatif} \subset P^\perp/P\} \\ G_2^s/H_\emptyset &= G_2^s/P_\emptyset. \end{aligned}$$

Remarques 75 *1. Notons qu'avec ces descriptions les bords de Furstenberg sont bien des bords, c'est-à-dire que partant d'un point de notre espace symétrique (d'un 4-plan) et suivant un chemin dans cet espace symétrique allant vers un des bords, nous devons pouvoir retrouver le 4-plan limite. Pour $F_{\{\alpha_1\}} = G_2^s/H_{\{\alpha_1\}}$ et $F_\emptyset = G_2^s/P_\emptyset$, le 4-plan limite va être donné par $(\ker(\iota_D\Phi))^\perp$ et pour $F_{\{\alpha_2\}} = G_2^s/H_{\{\alpha_2\}}$ il sera donné par la somme directe $P \oplus H$.*

2. Avec ces descriptions, il apparait clairement que l'espace $G_2^s/P_\emptyset$ est l'espace total du fibré en droite au dessus de $G_2^s/P_{\{\alpha_1\}}$ pour lequel la fibre au dessus d'une droite D isotrope correspond à une droite $\tilde{D}$ dans l'espace $\ker(\iota_D\Phi)/D$: le 2-plan engendré par D et $\tilde{D}$ constituant le 2-plan apparaissant dans la description de $G_2^s/P_\emptyset$.

Passons à présent à la démonstration de cette proposition.

Preuve de la proposition

Commençons par démontrer qu'un 2-plan P annulant la 3-forme Φ est totalement isotrope. Pour cela il suffit de voir que pour tout $x \in \mathbb{R}^{3,4}$,

$$\ker(\iota_x\Phi) = x\mathbb{R} \text{ si et seulement si } b(x,x) \neq 0. \tag{8.1.2}$$

En effet si ce résultat est vérifié, soit $x \in P$, comme P annule Φ nous avons l'inclusion $P \subset \ker(\iota_x\Phi)$ donc $\dim(\ker(\iota_x\Phi))) \geq 2$ et grâce à la relation (8.1.2), $b(x,x) = 0$. Montrons donc le résultat (8.1.2). Soit $x = \sum x_i e_i \in \mathbb{R}^{3,4} - \{0\}$ fixé et soit $y \in \mathbb{R}^{3,4}$, l'égalité $\iota_y(\iota_x\Phi) = 0$ correspond au système à sept équations, d'inconnue $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$, suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & x_5 & -x_4 & x_7 & -x_6 \\ x_3 & 0 & -x_1 & x_6 & -x_7 & -x_4 & x_5 \\ -x_2 & x_1 & 0 & -x_7 & -x_6 & x_5 & x_4 \\ x_5 & x_6 & -x_7 & 0 & -x_1 & -x_2 & x_3 \\ -x_4 & -x_7 & -x_6 & x_1 & 0 & x_3 & x_2 \\ x_7 & -x_4 & x_5 & x_2 & -x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_6 & x_5 & x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = 0. \tag{8.1.3}$$

Remarquons que le déterminant de la matrice précédente est nul car x est naturellement dans le noyau de $\iota_x\Phi$. Le résultat découle ensuite du fait que l'ensemble des déterminants des matrices extraites de taille 6×6 de la matrice précédente est l'ensemble $\{x_i x_j b(x,x)\}_{1\leq i,j\leq 7}$.

1. Comme G_2^s stabilise la 3-forme Φ et la métrique b, il est clair que G_2^s agit sur l'espace $A := \{Q \quad 4\text{-plan} \subset \mathbb{R}^{3,4} : b|_Q \text{ est négatif et } \Phi|_Q = 0\}$. La transitivité de l'action elle n'est pas immédiate. Pour la voir nous allons comprendre comment choisir un 4-plan Q pour qu'il appartienne à A. Cela nous amènera à comprendre comment nous pouvons compléter une base orthonormé de ce 4-plan Q en une base de $\mathbb{R}^{3,4}$ sur laquelle la métrique b et la 3-forme Φ s'écrivent de la même manière que dans la base initiale. Ce résultat obtenu nous aurons donc montré que l'action est transitive car la matrice de changement de base entre les deux bases citées sera un élément de G_2^s envoyant le 4-plan engendré par $\{e_4, e_5, e_6, e_7\}$ sur Q.

Lemme 76 *1. Soit X et Y de norme -1 et formant une base orthogonale d'un 2-plan négatif de $\mathbb{R}^{3,4}$ et soit Z un élément de norme -1 dans $\{X, Y, \mathtt{P}(X,Y)\}^\perp$ avec $\mathtt{P}$ la 2-forme à valeur dans $\mathbb{R}^{3,4}$, G_2^s-équivariante, définie par la formule $b(\mathtt{P}(x,y),z) = \Phi(x,y,z)$ pour tout $x,y,z \in \mathbb{R}^{3,4}$. Alors ces trois éléments définissent un unique 4-plan Q négatif et sur lequel la 3-forme Φ s'annule :*

$$\begin{aligned} Q &= Vect\big(X_4, X_5, X_6, X_7 := -\mathtt{P}(\mathtt{P}(X_4, X_5), X_6))\big) \\ &= \{\mathtt{P}(X_4, X_5), \mathtt{P}(X_4, X_6), \mathtt{P}(X_5, X_6)\}^\perp. \end{aligned}$$

2. Nous définissons ainsi tous les 4-plans négatifs sur lesquels Φ s'annule.

3. Soit Q un 4-plan négatif sur lequel s'annule la 3-forme Φ, alors une base de Q se complète en une base f de $\mathbb{R}^{3,4}$ de sorte que la matrice de passage de la base canonique $(e_1, \ldots, e_7)$ dans la base f appartienne à G_2^s.

Preuve du lemme

Le premier outil pour montrer ces résultat est la 2-forme $\mathtt{P}$. Grâce à la formule $b(\mathtt{P}(x,y),z) = \Phi(x,y,z)$, $\mathtt{P}$ s'exprime explicitement dans notre base initiale $(e_1, \ldots, e_7)$ et il est alors aisé de vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul les trois propriétés suivantes que nous trouvons dans [Bry87] : pour

tout $x, y, z \in \mathbb{R}^{3,4}$,

$$b(\mathtt{P}(x,y),\mathtt{P}(x,z)) = b(x,x)b(y,z) - b(x,y)b(x,z); \tag{8.1.4}$$

$$\mathtt{P}(x,\mathtt{P}(x,y)) = -b(x,x)y + b(x,y)x; \tag{8.1.5}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{P}(x,\mathtt{P}(y,\mathtt{P}(x,z))) &= b(x,x)\mathtt{P}(y,z) + b(x,z)\mathtt{P}(x,y)\\ &\quad - 2b(x,y)\mathtt{P}(x,z) - \Phi(x,y,z)x.\end{aligned} \tag{8.1.6}$$

1) Voici à présent comment trouver un 4-plan Q négatif et annulant la 3-forme Φ. Soit $(X_4, X_5) \in (\mathbb{R}^{3,4})^2$ une base orthonormée d'un plan négatif de $\mathbb{R}^{3,4}$ (le choix des indices X_4 et X_5 correspond au fait que ces vecteurs auront les comportements des vecteurs e_4 et e_5 du 4-plan de référence $Vect(e_4, e_5, e_6, e_7)$). La 1-forme $\iota_{X_5}(\iota_{X_4}\Phi)$ est non nulle d'après la relation (8.1.2) car $b(X_4, X_4) = -1$. L'élément $\mathtt{P}(X_4, X_5)$ est donc non nul et d'après l'égalité (8.1.4), $b(\mathtt{P}(X_4, X_5), \mathtt{P}(X_4, X_5)) = 1$, ce qui nous assure que $\mathtt{P}(X_4, X_5)$ n'est pas inclus dans le plan négatif engendré par X_4 et X_5. Nous pouvons ainsi observer l'espace de dimension 4 et de signature $(2, 2)$, $F = \{X_4, X_5, \mathtt{P}(X_4, X_5)\}^{\perp}$. Choisissons à présent un vecteur X_6 négatif de norme -1 dans F et posons

$$Q = Vect\big(X_4, X_5, X_6, X_7 := -\mathtt{P}(\mathtt{P}(X_4, X_5), X_6))\big).$$

D'après la formule (8.1.4), $b(X_7, X_7) = -1$. Puis d'après la formule (8.1.6) nous avons

$$\begin{aligned}\mathtt{P}(X_4, X_7) &= -b(X_4, X_4)\mathtt{P}(X_5, X_6) + b(X_4, X_5)\mathtt{P}(X_5, X_6)\\ &\quad - 2b(X_4, X_6)\mathtt{P}(X_4, X_5) + \Phi(X_4, X_5, X_6)\\ &= -\mathtt{P}(X_5, X_6).\end{aligned}$$

Et de même nous montrons que $\mathtt{P}(X_5, X_7) = -\mathtt{P}(X_4, X_6)$ et $\mathtt{P}(X_6, X_7) = \mathtt{P}(X_4, X_5)$. Avec ces propriétés et la formule (8.1.5) mise sous la forme $b(x, y)^2 = b(x, x)b(y, y) - b(\mathtt{P}(x, y), \mathtt{P}(x, y))$ nous obtenons que Q ainsi défini est négatif :

$$\begin{aligned}b(X_4, X_7) &= b(X_4, X_4)b(X_7, X_7) - b(\mathtt{P}(X_4, X_7), \mathtt{P}(X_4, X_7))\\ &= 1 - b(\mathtt{P}(X_5, X_6), \mathtt{P}(X_5, X_6))\\ &= 1 - (b(X_5, X_5)b(X_6, X_6) - b(X_5, X_6)^2) = 0,\end{aligned}$$

et il en est de même pour $b(X_5, X_7)$ et $b(X_6, X_7)$. Nous avons aussi gratuitement que Q annule Φ car

$$\Phi(X_4, X_5, X_7) = b(\mathtt{P}(X_4, X_5), X_7) = b(\mathtt{P}(X_6, X_7), X_7) = \Phi(X_6, X_7, X_7) = 0,$$

et il en est de même pour $\Phi(X_4, X_6, X_7)$ et $\Phi(X_5, X_6, X_7)$. Notons que grâce à l'égalité (8.1.4), les trois vecteurs $\mathtt{P}(X_4, X_5), \mathtt{P}(X_4, X_6)$ et $\mathtt{P}(X_5, X_6)$ forment une famille orthogonale et donc libre : l'espace

$$\tilde{Q} := \{\mathtt{P}(X_4, X_5), \mathtt{P}(X_4, X_6), \mathtt{P}(X_5, X_6)\}^{\perp}$$

est donc un espace de dimension 4 et c'est justement notre 4-plan Q (l'inclusion $Q \subset \tilde{Q}$ provenant simplement du fait que Q annule Φ). Or la définition de $\tilde{Q}(= Q)$ ne favorise aucun des trois vecteurs X_4, X_5 et X_6, donc ceux-ci définissent bien un unique 4-plan négatif sur lequel Φ s'annule.

2) Ajoutons que tous les tels 4-plans se définissent ainsi. En effet, soit Q un tel 4-plan , nous pouvons choisir X_4 et X_5 dans Q de normes -1 et orthogonaux. Alors $Q \subset \ker(\iota_{X_5}(\iota_{X_4}\Phi)) = \mathtt{P}(X_4, X_5)^{\perp}$ car Q annule Φ et nous pouvons donc choisir $X_6 \in Q \cap \{X_4, X_5\}^{\perp}$.

3) Soit Q un tel 4-plan et soit (f_4, f_5, f_6, f_7) une base de Q orthogonal et formée d'éléments de norme -1. Alors f_6 appartient bien à $\{f_4, f_5, \mathtt{P}(f_4, f_6)\}^{\perp}$ car $Q \subset \mathtt{P}(f_4, f_5)^{\perp}$. Et f_7 est uniquement déterminé comme élément de norme -1 de la droite $Q \cap \{f_4, f_5, f_6\}^{\perp}$ donc par unicité c'est bien l'élément $-\mathtt{P}(\mathtt{P}(f_4, f_5), f_6)$. Nous retrouvons ainsi les éléments $X_4, \ldots, X_7$ précédemment décrit. Notre nouvelle base de $\mathbb{R}^{3,4}$ annoncée est alors

$$(f_1 := -\mathtt{P}(f_4, f_5), f_2 := -\mathtt{P}(f_4, f_6), f_3 := \mathtt{P}(f_5, f_6), f_4, f_5, f_6, f_7).$$

Dans cette base b et Φ s'écrivent de la même manière que dans la base initiale $(e_1, \ldots, e_7)$, d'où le résultat souhaité. □

Reprenons notre démonstration de la première partie de la proposition précédente. Soit Q un élément de A défini par trois vecteur X_4, X_5 et X_6. Alors

$$\begin{aligned}&(X_1 := -\mathtt{P}(X_4, X_5), X_2 := -\mathtt{P}(X_4, X_6), X_3 := \mathtt{P}(X_5, X_6),\\ &X_4, X_5, X_6, X_7 := -\mathtt{P}(\mathtt{P}(X_4, X_5), X_6))\end{aligned}$$

est une base de $\mathbb{R}^{3,4}$ dans laquelle b et Φ s'écrivent de la même manière que dans la base initiale. Nous venons donc de construire un élément de G_2^s reliant $Vect(e_4, e_5, e_6, e_7)$ à $Q = Vect(X_4, X_5, X_6, X_7)$. De plus dans cette description il est clair que le stabilisateur de Q correspond aux différents choix des trois vecteurs X_4, X_5, X_6 définissant le même 4-plan Q, c'est-à-dire que, comme X_7 est uniquement défini à l'aide de ces trois vecteurs, le stabilisateur correspond aux différents choix d'une base orthonormée de Q. Le quotient $G_2^s/SO(4)$ s'identifie donc bien à $A := \{Q \quad 4\text{-plan} \subset \mathbb{R}^{3,4} : b|_Q \text{ est négatif et } \Phi|_Q = 0\}$.

2. Comme $G_2^s \subset SO(3,4)$, G_2^s agit naturellement sur l'ensemble des droites isotropes de $\mathbb{R}^{3,4}$ et cette action est transitive. En effet, soit D une droite isotrope, un élément de D peut s'écrire sous la forme X_1+X_4 avec $b(X_1)=1$, $b(X_4)=-1$ et $b(X_1,X_4)=0$. Nous retrouvons alors notre 2-plan négatif $Vect\{X_4, X_5 := \mathtt{P}(X_1,X_4)\}$ à partir duquel nous avons construit une base de $\mathbb{R}^{3,4}$ dans laquelle b et Φ s'écrivent de la même manière que dans la base initiale : nous venons donc de décrire un élément de G_2^s reliant la droite isotrope $(e_1+e_4)\mathbb{R}$ à D. Maintenant si un élément g de G_2^s stabilise la droite isotrope ϵ_1 alors dans la base $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_7)$

$$g = \exp\begin{pmatrix} a+b & c & d & \sqrt{2}e & f & g & 0 \\ & a & k & -\sqrt{2}d & -e & 0 & -g \\ & m & b & \sqrt{2}c & 0 & e & -f \\ & & & 0 & \sqrt{2}c & -\sqrt{2}d & \sqrt{2}e \\ & & & & -b & -k & -d \\ & & & & -m & -a & -c \\ & & & & & & -a-b \end{pmatrix} \in P_{\{\alpha_1\}}.$$

Ainsi $G_2^s/P_{\{\alpha_1\}}$ est l'ensemble des droites isotropes de $\mathbb{R}^{3,4}$.

Pour obtenir la deuxième interprétation de $G_2^s/P_{\{\alpha_1\}}$, il faut comprendre l'identification entre une droite isotrope et un 3-plan totalement isotrope annulant Φ. Soit D une droite isotrope de $\mathbb{R}^{3,4}$, alors d'après la relation (8.1.2) $\dim(\ker(\iota_D\Phi))) \geq 2$. En poussant le calcul du rang du système (8.1.3) nous trouvons que dans le cas où x est isotrope, le noyau $\ker(\iota_x\Phi)$ est de dimension 3 et constitue un espace totalement isotrope. Le fait que $\ker(\iota_D\Phi)$ annule la 3-forme Φ est direct car soit $x \in D - \{0\}$ nous pouvons compléter x en une base (x,y,z) de $\ker(\iota_D\Phi)$ et alors $\Phi(x,y,z)=0$ car $y \in \ker(\iota_D\Phi)$. Réciproquement, soit E un 3-plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^{3,4}$ annulant Φ, et soit (x_1,x_2,x_3) une base de E. Si $\mathtt{P}(x_1,x_2) = \mathtt{P}(x_1,x_3) = 0$ cela signifie que $\ker(\iota_{x_1}\Phi) = E$ et nous avons fini. Sinon nous pouvons supposer que $\mathtt{P}(x_1,x_2) \neq 0$. D'après l'égalité (8.1.5), nous avons alors $\mathtt{P}(x_1,\mathtt{P}(x_1,x_2)) = \mathtt{P}(x_2,\mathtt{P}(x_1,x_2)) = 0$. Si maintenant $\mathtt{P}(x_3,\mathtt{P}(x_1,x_2)) = 0$, alors l'espace $E \subset \ker(\iota_{\mathtt{P}(x_1,x_2)}\Phi)$ et ce dernier espace est de dimension 3 car $\mathtt{P}(x_1,x_2)$ est isotrope d'où l'égalité $E = \ker(\iota_{\mathtt{P}(x_1,x_2)}\Phi)$ avec implicitement $\mathtt{P}(x_1,x_2) \in E$. Sinon grâce à l'égalité (8.1.5), $\mathtt{P}(x_3,\mathtt{P}(x_3,\mathtt{P}(x_1,x_2))) = 0$ puis grâce à la propriété (8.1.6) qui utilise le fait que $\Phi|_E = 0$ nous avons $\mathtt{P}(x_1,\mathtt{P}(x_3,\mathtt{P}(x_1,x_2))) = \mathtt{P}(x_2,\mathtt{P}(x_3,\mathtt{P}(x_1,x_2))) = 0$. Comme précédemment, nous concluons donc que $\ker(\iota_{\mathtt{P}(x_3,\mathtt{P}(x_1,x_2))}\Phi) = E$ ce qui achève la réciproque. Notons qu'il existe des 3-plans totalement isotropes mais n'annulant pas la 3-forme Φ comme le 3-plan $Vect(\epsilon_1,\epsilon_5,\epsilon_6)$.

Le groupe G_2^s agit naturellement sur l'ensemble des 2-plans totalement isotropes annulant Φ et cette action est transitive. En effet, soit P un 2-plan totalement isotrope et annulant Φ, il est alors contenu dans un 3-plan totalement isotrope et annulant Φ : en prenant $x \in P$, $P \subset \ker(\iota_x\Phi)$. Par transitivité de l'action de G_2^s sur les tels 3-plans nous pouvons nous restreindre au 3-plan $Vect(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \ker(\iota_{\epsilon_1}\Phi)$. Comme $\epsilon_1 \in P$, le plan P a pour base $(\epsilon_1, a\epsilon_2 + b\epsilon_3)$ avec $a^2 + b^2 = 1$. L'élément de G_2^s

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & a & -b & & & & & \\ & b & a & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & a & b & & \\ & & & & -b & a & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in P_{\{\alpha_1\}}$$

envoie alors le 2-plan totalement isotrope et annulant Φ, $Vect(\epsilon_1, \epsilon_2)$ sur P. Maintenant si un élément g de G_2^s stabilise le plan $Vect(\epsilon_1, \epsilon_2)$ alors dans la base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_7)$

$$g = \exp \begin{pmatrix} a+b & c & d & \sqrt{2}e & f & g & 0 \\ h & a & k & -\sqrt{2}d & -e & 0 & -g \\ & & b & \sqrt{2}c & 0 & e & -f \\ & & \sqrt{2}h & 0 & \sqrt{2}c & -\sqrt{2}d & \sqrt{2}e \\ & & & \sqrt{2}h & -b & -k & -d \\ & & & & & -a & -c \\ & & & & & -h & -a-b \end{pmatrix} \in P_{\{\alpha_2\}}.$$

Ainsi $G_2^s/P_{\{\alpha_2\}}$ est l'ensemble des 2-plans totalement isotropes de $\mathbb{R}^{3,4}$ annulant Φ.

3. Pour comprendre les bords $F_{\{\alpha_i\}} = G_2^s/H_{\{\alpha_i\}}$, il suffit de comprendre les fibres $X_{\{\alpha_i\}} = M_{\{\alpha_i\}}/K_{\{\alpha_i\}}$ où $M_{\{\alpha_i\}}$ est le sous-groupe de $P_{\{\alpha_i\}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_{\{\alpha_i\}} = \mathfrak{a}^{\{\alpha_i\}} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ et $K_{\{\alpha_i\}} = M_{\{\alpha_i\}} \cap SO(4)$. Or

$$M_{\{\alpha_1\}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & A & & & \\ & & 1 & & \\ & & & I\,{}^tA^{-1}I & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Il apparait ainsi que $X_{\{\alpha_1\}}$ est l'espace hyperbolique $SL(2)/SO(2)$ et que $SL(2)$ agit naturellement sur $Vect(\epsilon_2, \epsilon_3) \simeq \ker(\iota_{\epsilon_1}\Phi)/\epsilon_1$. Un élément de la

fibre $X_{\{\alpha_1\}}$ au dessus d'une droite isotrope D correspond donc bien à une métrique conforme sur $\ker(\iota_D\Phi)/D$.

Pour le bord $F_{\{\alpha_2\}}$,

$$M_{\{\alpha_2\}} = \begin{pmatrix} A & & \\ & \Omega & \\ & & I\,{}^tA^{-1}I \end{pmatrix},$$

avec $A \in SL(2,\mathbb{R})$ et $\Omega \in SO(1,2)$ uniquement déterminé par A. Comme précédemment nous voyons que la fibre $X_{\{\alpha_2\}}$ au dessus d'un 2-plan P correspond à une métrique conforme sur P. Cependant, avec cette description il n'est pas évident de savoir comment nous retrouvons un 4-plan à partir d'un point du bord $F_{\{\alpha_2\}}$ (un chemin dans $G_2^s/SO(4)$ allant vers le bord $F_{\{\alpha_2\}}$ est une suite de 4-plans et a donc pour limite un 4-plan). Pour comprendre comment retrouver ce 4-plan, cherchons à mieux comprendre l'action de Ω sur $P^\perp/P$. Commençons par observer de plus près la bijection entre $SL(2)$ et $SO(1,2)$:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto \Omega = \begin{pmatrix} x^2 & \sqrt{2}xy & y^2 \\ \sqrt{2}xz & xt+yz & \sqrt{2}ty \\ z^2 & \sqrt{2}tz & t^2 \end{pmatrix}.$$

Effectuons à présent dans $Vect(\epsilon_3,\epsilon_4,\epsilon_5)$ le changement de base $e_3 = \frac{\epsilon_3+\epsilon_5}{\sqrt{2}}$, $e_4 = \epsilon_4$ et $e_5 = \frac{\epsilon_3-\epsilon_5}{\sqrt{2}}$ afin que Ω s'exprime dans une base sur laquelle la métrique s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. Alors Ω s'écrit

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{2} & xy+tz & \frac{x^2-y^2+z^2-t^2}{2} \\ xz+tz & xt+yz & xz-ty \\ \frac{x^2+y^2-z^2-t^2}{2} & xy-tz & \frac{x^2-y^2-z^2+t^2}{2} \end{pmatrix},$$

et l'application bijective $SL(2) \to SO(1,2)$ se restreint sur $SO(2)$ en une bijection de $SO(2)$ dans $SO(2)$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \longmapsto \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Finalement cette description de $X_{\{\alpha_2\}}$ nous amène à comprendre un élément de la fibre $X_{\{\alpha_2\}}$ au dessus d'un 2-plan totalement isotrope annulant Φ comme étant un 2-plan négatif de $P^\perp/P$. □

8.2 L'espace quaternion-kählérien $G_2^s/SO(4)$ et son espace des twisteurs

À présent décrivons l'espace des twisteurs de notre variété symétrique $G_2^s/SO(4)$. Pour les espaces symétriques compacts, là encore, les espaces des twisteurs ne sont pas mystérieux et nous pouvons trouver par exemple dans Čap et Slovák [ČS09, p. 305] que l'espace des twisteurs correspondant à l'espace symétrique $G_2/SO(4)$ est l'espace homogène complexe muni de la structure de contact, c'est-à-dire l'espace $G_2^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_2\}}$. Pour notre espace de type non-compact $G_2^s/SO(4)$, nous pouvons voir son espace des twisteurs plongé dans l'espace des twisteurs de son espace symétrique compact dual $G_2/SO(4)$:

Proposition 77 *L'espace des twisteurs associé à $G_2^s/SO(4)$ est l'espace G_2^s-homogène :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} & := & G_2^s/U(2) \\ & = & \{P \quad 2\text{-}plan \subset \mathbb{C}^7 : \iota_P\Phi = 0 \text{ } et \text{ } \Pi(P) \text{ } est \text{ } un \text{ } 4\text{-}plan \text{ } négatif\} \\ & \subset & G_2^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_2\}}, \end{array}$$

avec Π la projection réelle et $\iota_P\Phi = 0$ signifiant que pour tout $x, y \in P$, la 1-forme $\iota_x(\iota_y\Phi)$ est nulle.

Remarquons avant tout que si nous avons un 2-plan $P \subset \mathbb{C}^7$ vérifiant $\iota_P\Phi = 0$ et tel que sa projection réelle soit un 4-plan négatif de $\mathbb{R}^{3,4}$, alors la 3-forme Φ est nulle sur cette projection $Q := \Pi(P)$. En effet, soit $(u_1 := x_1 + iy_1, u_2 := x_2 + iy_2)$ une base de P et $(Re(u_1), Im(u_1), Re(u_2), Im(u_2)) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ la base de Q associée. Si Φ n'est pas nulle sur Q alors quitte à permuter les indices et à multiplier les vecteurs u_k par i nous pouvons supposer que $\Phi(x_1, y_1, x_2) \neq 0$. Mais alors $\Phi(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_1 - iy_1) = -2\Phi(x_1, y_1, y_2) + 2i\Phi(x_1, y_1, x_2)$ qui est non nul car Φ est une 3-forme réelle et $\Phi(x_1, y_1, x_2) \neq 0$. Nous arrivons donc à une contradiction car $\Phi(u_1, u_2, .) = 0$ et nous en déduisons la remarque souhaitée. Ainsi l'espace décrit dans le théorème fibre bien au dessus de l'espace symétrique $G_2^s/SO(4)$ et une fibre se décrit de la manière suivante : une fibre au dessus d'un 4-plan $Q \in G_2^s/SO(4)$ est l'ensemble des 2-plans P annulant la 3-forme Φ tel que $P \subset Q \otimes \mathbb{C}$.

Preuve de la Proposition

Comme nous l'avons vu l'espace des twisteurs de G/K se retrouve concrètement d'après Salamon [Sal82] comme l'espace homogène pour lequel nous remplaçons le $Sp(1)$ inclus dans K par $U(1)$. Or ici $K = SO(4) = Sp(1)Sp(1)$

et l'espace des twisteurs est donc l'espace homogène $G_2^s/U(2)$. Notons A l'espace $\{P \quad 2\text{-plan} \subset \mathbb{C}^7 : \iota_P\Phi = 0$ et $\Pi(P)$ est un 4-plan négatif$\}$. Le groupe réel G_2^s agit bien sur A, car pour $M \in G_2^s$ nous avons $\Pi \circ M = M \circ \Pi$. Montrons à présent la transitivité de l'action de G_2^s sur A. Comme G_2^s agit transitivement sur l'espace des 4-plans négatifs sur lesquels la 3-forme Φ s'annule, nous pouvons grâce à la remarque précédente nous ramener à l'étude de la transitivité du sous-groupe $SO(4)$ (qui est le sous-groupe fixant un tel 4-plan) sur l'ensemble des 2-plans de $\mathbb{C}^7$ annulant Φ et dont la projection réelle est le 4-plan négatif sur lequel la 3-forme Φ s'annule, $Vect(e_4, e_5, e_6, e_7)$. Soit à présent P un 2-plan annulant Φ et dont la projection réelle est aussi $Vect(e_4, e_5, e_6, e_7)$. Il existe donc $x \in P \subset Vect_{\mathbb{C}}(e_4, e_5, e_6, e_7)$ tel que $\Pi(x) = e_4$. Cet élément x s'écrit $x = e_4 + ide_4 + iae_5 + ibe_6 + ice_7$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Rappelons que comme P annule la 3-forme Φ, l'élément $x \in P$ est isotrope ce qui se caractérise par les égalités $d = 0$ et $a^2+b^2+c^2 = 1$. Or cet élément de P suffit à caractériser P. En effet, comme la métrique induite $b(.,.)$ par Φ n'est pas dégénérée sur le 4-plan $Vect_{\mathbb{C}}(e_4, e_5, e_6, e_7)$ qui contient P, ce 4-plan ne peut pas contenir le 3-plan totalement isotrope $\ker(\iota_x\Phi)$ et P est donc égal à $\ker(\iota_x\Phi) \cap Vect_{\mathbb{C}}(e_4, e_5, e_6, e_7)$. À présent en complétant la base $((1, 0, 0, 0), (0, a, b, c))$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ nous obtenons un élément de $SO(4)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a & * & * \\ & b & * & * \\ & c & * & * \end{pmatrix}$$

qui vu dans la base (e_4, e_5, e_6, e_7) envoie le 2-plan $(e_4 + ie_5, e_6 - ie_7)$ sur le 2-plan annulant la 3-forme Φ, demeurant dans $Vect_{\mathbb{C}}(e_4, e_5, e_6, e_7)$ et caractérisé par le vecteur $e_4 + i(ae_5 + be_6 + ce_7)$. L'action de $SO(4)$ sur l'ensemble des 2-plans de $\mathbb{C}^7$ annulant Φ et dont la projection réelle est un 4-plan fixé, négatif et sur lequel la 3-forme Φ s'annule, est ainsi transitive. L'action de G_2^s sur A est donc transitive.

À présent soit $M \in G_2^s$ stabilisant un 2-plan $P \subset \mathbb{C}^7$ vérifiant $\iota_P\Phi = 0$ et tel que sa projection réelle soit un 4-plan négatif de $\mathbb{R}^{3,4}$ et soit (u_1, u_2) une base de P alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{C}^4$ tel que $M(u_1) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ et $M(u_2) = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$. Ainsi dans la base $(Re(u_1), Im(u_1), Re(u_2), Im(u_2))$ de $\Pi(P)$ l'élément M s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} Re(\lambda_1) & Im(\lambda_1) & Re(\mu_1) & Im(\mu_1) \\ -Im(\lambda_1) & Re(\lambda_1) & -Im(\mu_1) & Re(\mu_1) \\ Re(\lambda_2) & Im(\lambda_2) & Re(\mu_2) & Im(\mu_2) \\ -Im(\lambda_2) & Re(\lambda_2) & -Im(\mu_2) & Re(\mu_2) \end{pmatrix}.$$

Regardons à présent ce que signifie le fait que $M|_{\Pi(P)} \in SO(4)$ (car M fixe P donc fixe le 4-plan négatif $\Pi(P)$). Les colonnes de la matrice précédente sont de norme 1 signifient que $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$ et que $|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 = 1$. Notons (X_1, X_2, Y_1, Y_2) les colonnes de la matrice précédente. Nous avons gratuitement les égalités $X_1.X_2 = Y_1.Y_2 = 0$. Enfin les égalités $X_1.Y_1 = 0$, $X_1.Y_2 = 0$, $X_2.Y_1 = 0$ et $X_2.Y_2 = 0$ sont équivalentes au système

$$\begin{cases} Re(\lambda_1)Re(\mu_1) + Im(\lambda_1)Im(\mu_1) + Re(\lambda_2)Re(\mu_2) + Im(\lambda_2)Im(\mu_2) = 0 \\ Re(\lambda_1)Im(\mu_1) - Im(\lambda_1)Re(\mu_1) + Re(\lambda_2)Im(\mu_2) - Im(\lambda_2)Re(\mu_2) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \lambda_1\bar{\mu_1} + \lambda_2\bar{\mu_2} = 0.$$

Finalement, $M|_{\Pi(P)} \in SO(4)$ signifie que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \in U(2).$$

L'ensemble des éléments de G_2^s stabilisant P est donc isomorphe à $U(2)$ et nous avons bien le résultat voulu. □

Chapitre 9

Construction d'un espace de twisteurs

9.1 Schéma de construction de l'espace des twisteurs et des courbes twistorielles

Commençons par l'observation suivante. Lorsque dans l'espace symétrique $G_2^s/SO(4)$ nous suivons un chemin allant vers un point $\ker(\iota_D\Phi)^\perp$ de $F_{\{\alpha_1\}}$, alors regardant les courbes dans $G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}}$ correspondantes il apparait clairement que ces courbes tendent vers $\{P \in G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}} : P \subset (\ker(\iota_D\Phi))^\perp\}$ qui n'est autre que l'espace des 2-plans de $\ker(\iota_D\Phi)$. Ainsi à un point de l'espace homogène parabolique $G_2^s/P_{\{\alpha_1\}}$ est associé une courbe, dans une variété complexe de contact, qui est voisine (limite) des courbes citées dans le théorème 62. Voici donc comment nous allons procéder dans la suite de cette partie pour construire localement un espace quaternion-kählérien à partir d'une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ sur une variété M. En s'inspirant de la double fibration dans le modèle

$$\begin{array}{ccc} & G_2^{\mathbb{C}}/P_{\emptyset}^{\mathbb{C}} & \\ {\scriptstyle\mu}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\nu} \\ G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_1\}}^{\mathbb{C}} & & G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}} \end{array},$$

nous allons, partant d'une variété M munie d'une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$, montrer que l'espace $\mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}})$ (après une certaine complexification de M) possède une géométrie parabolique de type $(G_2^{\mathbb{C}}, P_{\emptyset}^{\mathbb{C}})$ comme cela nous est suggérée par la remarque 75. Nous définirons ensuite

l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ comme étant l'espace des feuilles d'un certain feuilletage de $\mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}})$. Cet espace des twisteurs $\mathcal{N}$ n'aura pas, dans le cas non-modèle, de géométrie parabolique de type $(G_2^{\mathbb{C}}, P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_2\}})$ mais il aura les propriétés nécessaires pour nous donner une métrique quaternion-kählerienne. Nous aurons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}}) & \\ {\scriptstyle\mu}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\nu} \\ M^{\mathbb{C}} & & \mathcal{N} \end{array} .$$

L'idée est ensuite de déformer les courbes $\nu(\mu^{-1}(x)) = \{P \in G_2^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_2\}} : P \subset (\ker(\iota_x\Phi))^{\perp}\}$ pour $x \in G_2^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}$, afin d'obtenir les courbes nécessaires pour évoquer le théorème de Le Brun 62. Le point délicat, et qui n'apparait pas encore à ce stade, est que les courbes limites $\nu(\mu^{-1}(x))$ du modèle sont en fait doubles, c'est-à-dire qu'elles s'écrivent localement $v_1^2 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$ dans des coordonnées de $G_2^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_2\}}$.

9.2 Géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$

Afin de généraliser le schéma ci-dessus, la première chose à faire est de comprendre la géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$. L'objet algébrique $H^1(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})^0$, avec $\mathfrak{p}_- = \mathfrak{n}$ donnée par la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{-3} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}}$, est nul comme nous le dit la proposition 34, c'est-à-dire que la cohomologie $H^1(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})$ n'a pas de composante d'homogénéité strictement positive. D'après ce que nous avons dit précédemment, cela nous indique qu'à une structure parabolique infinitésimale régulière est associée une unique connexion de Cartan normale et régulière. Ainsi nous pouvons définir la géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ par la donnée d'une structure parabolique infinitésimale régulière : c'est-à-dire par la donnée d'une filtration et d'une réduction d'un $Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}}))$-fibré principal au sous-groupe de Levi P_0. Or dans notre cas présent, $Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}})) = GL(\mathfrak{p}_{-1})$, car pour (f_{-1}, f_{-2}) une base de $\mathfrak{p}_{-1}$, la famille $(f_{-1}, f_{-2}, [f_{-1}, f_{-2}], [f_{-1}, [f_{-1}, f_{-2}]], [f_{-2}, [f_{-1}, f_{-2}]])$ est une base de $\mathfrak{p}_-$ adaptée à la décomposition $\mathfrak{p}_- = \mathfrak{p}_{-1} \oplus \mathfrak{p}_{-2} \oplus \mathfrak{p}_{-3}$. Ainsi un élément de $GL(\mathfrak{p}_{-1})$ définit bien de manière unique un élément de $Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}}))$. Nous avons alors $Aut_{gr}(gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}})) = Gl(2, \mathbb{R}) = P_0$ et une structure parabolique régulière de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ correspond à la seule donnée d'une filtration compatible avec le crochet de Lie et de symbole algébrique $(\mathfrak{p}_-, \{\ ,\ \})$. D'où la proposition :

Proposition 78 *Une structure parabolique régulière de type* $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ *sur une variété* M *est la donnée d'une distribution* H *de dimension* 2 *générique, c'est-à-dire telle que l'espace* $H + [H, H]$ *soit de dimension* 3 *et l'espace* $H + [H, H] + [H, [H, H]]$ *soit de dimension* 5 *et donc l'espace total* TM.

Montrons concrètement comment à partir de cette distribution de dimension 2 générique, nous pouvons retrouver la structure parabolique infinitésimale $(p_0 : \mathcal{E} \to M, \{T^iM\}, \{\theta_i\})$. Soit H une distribution de dimension 2 sur M et générique. Ce dernier point fournit par définition une filtration $T^{-3}M \supset T^{-2}M \supset T^{-1}M$ à la variété M : $T^{-1}M := H$, $T^{-2}M := H + [H, H]$ et $T^{-3}M = TM$. Nous avons aussi naturellement le $(Aut_{gr}(\mathfrak{p}_-) =)P_0$-fibré principal $\mathcal{E} := GL(\mathfrak{p}_{-1}, H)$. Reste alors à fournir les 1-formes $\{\theta_i\}_{i=1,\dots,3}$. Soit $u \in \mathcal{E}$, u est un isomorphisme $\mathfrak{p}_{-1} \xrightarrow{\sim} H_{p_0(u)}$. Soit $\xi \in (T_u p_0)^{-1}(H_{p_0(u)}) = T_u^{-1}\mathcal{E}$ nous définissons alors $\theta_{-1} \in \Gamma(L(T^{-1}\mathcal{E}, \mathfrak{p}_{-1}))$ par

$$\theta_{-1}(u)(\xi) := u^{-1}(T_u p_0(\xi)). \tag{9.2.1}$$

À présent notons que si ϕ est un isomorphisme $\mathfrak{p}_{-1} \xrightarrow{\sim} H_x$ pour $x \in M$ alors la composition

$$\mathfrak{p}_{-2} \xrightarrow{([\ ,\ ])^{-1}} \Lambda^2\mathfrak{p}_{-1} \xrightarrow{\Lambda^2\phi} \Lambda^2 H_x \xrightarrow{\mathcal{L}} gr_{-2}(T_xM)$$

définit un isomorphisme linéaire $\tilde{\phi} : \mathfrak{p}_{-2} \xrightarrow{\sim} gr_{-2}(T_xM)$ vérifiant $\tilde{\phi}([X, Y]) = \mathcal{L}_x(\phi(X), \phi(Y))$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{p}_{-1}$. Ainsi soit $u \in \mathcal{E}$, posant $x := p_0(u)$, notons $\tilde{u} : \mathfrak{p}_{-2} \xrightarrow{\sim} gr_{-2}(T_xM)$ l'isomorphisme linéaire introduit juste avant. Soit $\xi \in T_u^{-2}\mathcal{E}$ nous définissons alors $\theta_{-2} \in \Gamma(L(T^{-2}\mathcal{E}, \mathfrak{p}_{-2}))$ par

$$\theta_{-2}(u)(\xi) := \tilde{u}^{-1}(T_u p_0(\xi) + H_x). \tag{9.2.2}$$

Enfin comme précédemment, si ϕ est un isomorphisme $\mathfrak{p}_{-1} \to H_x$ pour $x \in M$ alors la composition

$$\mathfrak{p}_{-3} \xrightarrow{([\ ,\ ])^{-1}} \mathfrak{p}_{-1} \otimes \mathfrak{p}_{-2} \xrightarrow{\phi\otimes\tilde{\phi}} H_x \otimes gr_{-2}(T_xM) \xrightarrow{\mathcal{L}} gr_{-3}(T_xM)$$

définit un isomorphisme linéaire $\hat{\phi} : \mathfrak{p}_{-3} \to gr_{-3}(T_xM)$ vérifiant

$$\hat{\phi}([X, [Y, Z]]) = \mathcal{L}_x(\phi(X), \mathcal{L}_x(\phi(Y), \phi(Z)))$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{p}_{-1}$. Ainsi soit $u \in \mathcal{E}$, posant $x := p_0(u)$, notons $\hat{u} : \mathfrak{p}_{-3} \xrightarrow{\sim} gr_{-3}(T_xM)$ l'isomorphisme linéaire introduit juste avant. Soit $\xi \in T_u^{-3}\mathcal{E}$ nous définissons alors $\theta_{-3} \in \Gamma(L(T^{-3}\mathcal{E}, \mathfrak{p}_{-3}))$ par

$$\theta_{-3}(u)(\xi) := \hat{u}^{-1}(T_u p_0(\xi) + T_x^{-2}M). \tag{9.2.3}$$

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que les 1-formes $\{\theta_i\}_{i=1,\dots,3}$ possèdent les propriétés attendues. Par définitions des $\{\theta_i\}_{i=1,\dots,3}$, si $\xi \in \ker(\theta_i)$ alors $T_u p_0(\xi) \in T^{i+1}M$ c'est-à-dire $\xi \in T^{i+1}\mathcal{E}$. Quand aux P_0-équivariances des θ_i, celles-ci proviennent simplement du fait que $p_0 \circ r^g = p_0$ pour tout g dans P_0 et de l'équivariance du crochet de Lie sur $gr(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$.

À présent et pour la suite de cet article nous nous fixons une variété M munie d'une géométrie parabolique régulière et normale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ que nous pouvons voir simplement comme une distribution de dimension 2 générique $T^{-1}M$ mais aussi comme une connexion de Cartan sur un $P_{\{\alpha_1\}}$-fibré principal $\mathcal{G} \to M$, $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$.

9.3 Construction de l'espace des twisteurs

9.3.1 L'espace $\mathbb{P}(T^{-1}M)$ et sa géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_\emptyset)$

D'après la définition et les propriétés des espaces correspondants données au chapitre 7.2, partant d'une géométrie parabolique $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ nous avons directement l'espace correspondant $\mathcal{C}M$ par rapport au sous-groupe $P_\emptyset \subset P_{\{\alpha_1\}}$ qui possède une géométrie parabolique $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M, \omega)$ de type $(G_2^s, P_\emptyset)$. Dans un premier temps nous allons commencer par retrouver cet espace $\mathcal{C}M := \mathcal{G}/P_\emptyset$ de manière géométrique.

Proposition 79 *Soit M une variété possédant une géométrie parabolique $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ alors l'espace $\mathbb{P}(T^{-1}M)$ est difféomorphe à l'espace $\mathcal{G}/P_\emptyset$ et possède donc une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_\emptyset)$.*

Preuve de la proposition

Soit M une variété munie d'une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$, c'est-à-dire munie d'un $P_{\{\alpha_1\}}$-fibré principal $p : \mathcal{G} \to M$ et d'une connexion de Cartan $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$, alors comme nous l'avons déjà vu au chapitre 2.1, nous avons l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{P_{\{\alpha_1\}}} \mathbb{P}(\mathfrak{p}_{-1}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(T^{-1}M) \\ [\![u, X]\!] & \longmapsto & [T_u p(\omega(u)^{-1}(X))], \end{array}$$

les crochets représentant la classe projective des éléments à l'intérieur. Soit à présent la droite $\mathfrak{g}_{-\alpha_2}$ de $\mathfrak{p}_{-1}$ et $e_0 \in \mathfrak{g}_{-\alpha_2} - \{0\}$, nous pouvons alors définir

$$\begin{array}{ccccccc} q : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \times_{P_{\{\alpha_1\}}} \mathbb{P}(\mathfrak{p}_{-1}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(T^{-1}M) \\ & u & \longmapsto & [\![u, [e_0]]\!] & \longmapsto & [T_u p(\omega(u)^{-1}(e_0))]. \end{array}$$

Posons maintenant $Q \subset P_{\{\alpha_1\}}$ le stabilisateur de $[e_0]$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}}$, c'est-à-dire $Q = \{g \in P_{\{\alpha_1\}} : Ad(g)(e_0) \in [e_0] \oplus \mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}}\}$: notons que ce stabilisateur nous le connaissons, c'est le sous-groupe parabolique $P_\emptyset$. L'application $q : \mathcal{G} \to \mathbb{P}(T^{-1}M)$ passe au quotient par Q en un difféomorphisme $q : \mathcal{G}/Q \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(T^{-1}M)$. En effet, soit $u \in \mathcal{G}$ et $g \in Q$, alors par $P_{\{\alpha_1\}}$-équivariance de ω,

$$\begin{aligned} q(u \cdot g) &= [T_{u\cdot g}p(\omega(u \cdot g)^{-1}(e_0))] \\ &= [T_{u\cdot g}p(T_u r^g(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(e_0))))] \\ &= [T_u(p \circ r^g)(\omega(u)^{-1}(e_0))] \\ &= q(u), \end{aligned}$$

car comme $g \in Q \subset P_{\{\alpha_1\}}$, $p \circ r^g = p$. L'application $q : \mathcal{G} \to \mathbb{P}(T^{-1}M)$ descend donc bien en une application $q : \mathcal{G}/Q \to \mathbb{P}(T^{-1}M)$. Soit à présent $u \in \mathcal{G}$ et $g \in P_{\{\alpha_1\}}$. Dans le calcul précédent, nous n'avons plus $Ad(g)(e_0) = e_0$, mais nous avons encore $p \circ r^g = p$ ainsi $q(u \cdot g) = [\![u \cdot g, [e_0]]\!] = [\![u, g \cdot [e_0]]\!]$. Observons maintenant que l'espace des droites de $\mathfrak{p}_{-1}$ est exactement l'espace $\{[g \cdot e_0] + \mathfrak{p} : g \in P_{\{\alpha_1\}}/Q\}$. Les éléments de $P_{\{\alpha_1\}}$

$$\exp(\mathfrak{g}_{\alpha_1}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & k & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & -k & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: g_k$$

représentent toutes les classes de $P_{\{\alpha_1\}}/Q$ et les actions de ces g_k sur $e_0 \in \mathfrak{g}_{-\alpha_2}$

$$Ad(g_k)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & \sqrt{2} & & & \\ & & & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -k & & & & \\ & 0 & 0 & \sqrt{2}k & & & \\ & & 0 & \sqrt{2} & & & \\ & & & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}k & \\ & & & & 0 & 0 & k \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

décrivent toutes les droites de $\mathfrak{p}_{-1} = \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2}$. Ceci nous fournit donc la surjectivité (et l'injectivité) de l'application $q : \mathcal{G}/Q \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(T^{-1}M)$.

Remarquons que nous avons choisi la droite $\mathfrak{g}_{-\alpha_2} \subset \mathfrak{p}_{-1}$ pour que le sous-groupe Q défini comme le stabilisateur de $\mathfrak{g}_{-\alpha_2}$ soit notre sous-groupe parabolique $P_\emptyset$. Nous pouvons donc nous demander si l'espace $\mathbb{P}(T^{-1}M)$

possède une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_\emptyset)$. C'est naturellement le cas : le $P_\emptyset$-fibré principal nous l'avons déjà décrit, c'est $q : \mathcal{G} \to \mathbb{P}(T^{-1}M)$, quant à la connexion de Cartan c'est la même connexion $\omega \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathfrak{g})$. Reste cependant à vérifier la $P_\emptyset$-équivariance de ω et le fait que ω redonne les champs de vecteurs fondamentaux engendrés par $P_\emptyset$ ce qui est naturellement le cas car ces propriétés nous les avons pour $P_{\{\alpha_1\}} \supset P_\emptyset$. □

La question que nous allons à présent nous poser est de savoir si la structure parabolique de $\mathbb{P}(T^{-1}M)$ est régulière et normale lorsque la géométrie parabolique de M l'est. La normalité est donnée par la proposition 68. Pour la question de la régularité, il n'existe pas de tel théorème : pour remonter une géométrie régulière de manière à obtenir une géométrie régulière il faut parfois annuler des applications $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_k$ que nous trouvons dans la cohomologie $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})$. En effet pour répondre à cette question de la régularité de la géométrie de type (G, Q) nous utilisons essentiellement le théorème 52 qui va nous aider à voir si la courbure $\kappa^{\mathcal{C}M} \in \Omega^2(\mathcal{C}M, \mathcal{AC}M)$ est bien 1-homogène c'est-à-dire si $\kappa^{\mathcal{C}M} \in \Omega^2(\mathcal{C}M, \mathcal{AC}M)^1$, cette propriété étant d'après la proposition 32 exactement la propriété d'être régulière.

Proposition 80 *Soit M une variété possédant une géométrie parabolique régulière et normale $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ alors l'espace $\mathbb{P}(T^{-1}M)$ possède une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_\emptyset)$ qui est régulière et normale.*

Preuve de la proposition

Soit M munie d'une géométrie parabolique régulière et normale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ alors d'après la proposition précédente et la proposition 68, l'espace $\mathcal{C}M := \mathbb{P}(T^{-1}M)$ possède une géométrie parabolique normale de type $(G_2^s, P_\emptyset)$. Comme la géométrie parabolique de M est régulière, par la proposition 32 nous avons que la fonction de courbure κ^M de ω est 1-homogène c'est-à-dire $\kappa^M \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)^1$.

Nous allons ensuite appliquer le théorème 52, mais pour que cela soit utile, il faut connaitre un peu mieux la cohomologie $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})$: d'après l'algorithme de Šilhan [Šil03], $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})_i = 0$ pour tout $i \neq 4$ et dans notre décomposition en racines de $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} \;=\; & \mathfrak{g}_{-3\alpha_2-2\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-3\alpha_2-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha_2-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \\ & \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_2+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_2+\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{3\alpha_2+2\alpha_1},\end{aligned}$$

la cohomologie $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})_4$ homogène de degré 4 correspond à une application $\mathfrak{g}_{-\alpha_2} \times \mathfrak{g}_{-3\alpha_2-\alpha_1} \to \mathfrak{g}_{-\alpha_1}$.

Rappelons les relations entre la décomposition de $\mathfrak{g}$ par rapport à la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}}$ et celle donnée par $\mathfrak{p}_\emptyset$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{pour } \mathfrak{p}_\emptyset & \mathfrak{g} & = & \mathfrak{q}_{-5} \oplus \mathfrak{q}_{-4} \oplus \mathfrak{q}_{-3} \oplus \mathfrak{q}_{-2} \oplus \mathfrak{q}_{-1} \oplus \mathfrak{q}_0 \oplus \mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{q}_2 \\ & & & \oplus \mathfrak{q}_3 \oplus \mathfrak{q}_4 \oplus \mathfrak{q}_5, \\ \text{pour } \mathfrak{p}_{\{\alpha_1\}} & \mathfrak{g} & = & \mathfrak{p}_{-3} \oplus \mathfrak{p}_{-2} \oplus \mathfrak{p}_{-1} \oplus \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3, \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{lllllllll} \mathfrak{q}_0 & = & \mathfrak{a}, & \mathfrak{q}_1 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2}, & \mathfrak{q}_2 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ \mathfrak{q}_3 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2}, & \mathfrak{q}_4 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1+3\alpha_2}, & \mathfrak{q}_5 & = & \mathfrak{g}_{2\alpha_1+3\alpha_2}, \\ \mathfrak{p}_0 & = & \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1}, & \mathfrak{p}_1 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2}, & \mathfrak{p}_2 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1+2\alpha_2}, \\ \mathfrak{p}_3 & = & \mathfrak{g}_{\alpha_1+3\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha_1+3\alpha_2}. & & & & & & \end{array}$$

Utilisons à présent le théorème 52 : comme la cohomologie $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})_i$ est nulle pour tout $i \neq 4$, nous en concluons que la fonction de courbure $\kappa^M \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)^4$. Montrons alors que la géométrie $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M := \mathbb{P}(T^{-1}M), \omega)$ est régulière. Pour cela, d'après la proposition 32, il faut et il suffit de voir que la fonction de courbure $\kappa^{\mathcal{C}M} : \mathcal{G} \to L(\Lambda^2\mathfrak{g}/\mathfrak{q}, \mathfrak{g})$ est 1-homogène avec $\mathfrak{q}$ l'algèbre de Lie associée à $P_\emptyset$. Rappelons la relation entre κ^M et $\kappa^{\mathcal{C}M}$:

$$\kappa^{\mathcal{C}M}(u)(X + \mathfrak{q}, Y + \mathfrak{q}) = \kappa^M(u)(X + \mathfrak{p}, Y + \mathfrak{p})$$

pour tout $u \in \mathcal{G}$ et tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ainsi

$$\begin{array}{l} \kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-1}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}_{-1}) \subset \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{q}^{-1} = \mathfrak{q}^{-1-1+1} \\ \kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-2}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}_{-1}) \subset \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{q}^{-2} = \mathfrak{q}^{-1-2+1} \\ \kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-3}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}^{-2}) \subset \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}^{-3} = \mathfrak{q}^{-1-3+1} \\ \kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-1}, \mathfrak{q}_{-4}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}^{-3}) \subset \mathfrak{p}^0 \subset \mathfrak{q}^{-4} = \mathfrak{q}^{-1-4+1} \\ \kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-2}, \mathfrak{q}_{-2}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}_{-1}) \subset \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{q}^{-3} = \mathfrak{q}^{-2-2+1} \\ \kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_{-2}, \mathfrak{q}_{-3}) \subset \kappa^M(\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{p}_{-2}) \subset \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}^{-4} = \mathfrak{q}^{-2-3+1} \end{array}$$

car κ^M est 4-homogène. Pour les autres cas, nous avons $\kappa^{\mathcal{C}M}(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j) \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{q}^{-5} \subset \mathfrak{q}^{i+j+1}$ car $i + j + 1 \leq -5$. Nous en déduisons que $\kappa^{\mathcal{C}M}$ est bien 1-homogène c'est-à-dire que la géométrie parabolique $(q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M := \mathbb{P}(T^{-1}M), \omega)$ est régulière lorsque la géométrie $(p : \mathfrak{g} \to M, \omega)$ l'est.

□

Remarque 81 *L'espace $\mathcal{C}M = \mathbb{P}(T^{-1}M)$ est un espace correspondant à une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_2\}})$ si et seulement si la géométrie parabolique initiale est la géométrie de Klein $G_2^s/P_{\{\alpha_1\}}$. En effet,*

pour que l'espace $\mathcal{C}M$ soit un espace correspondant à une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_2\}})$ il faut, d'après la proposition 67, que pour tout $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha_2}$, $\iota_X \kappa^M = \iota_X \kappa^{\mathcal{C}M} = 0$ ce qui implique l'annulation du seul terme potentiellement non nul $\mathfrak{g}_{-\alpha_2} \times \mathfrak{g}_{-3\alpha_2-\alpha_1} \to \mathfrak{g}_{-\alpha_1}$ de la courbure harmonique $\kappa_H^M \in \mathcal{E} \times_{P_0} H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})$ associée à la courbure κ^M. Il faut donc que M soit un ouvert de l'espace homogène $G_2^s/P_{\{\alpha_1\}}$ pour que $\mathcal{C}M = \mathbb{P}(T^{-1}M)$ soit l'espace correspondant d'une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_2\}})$ (ce qui est clairement le cas dans le cas modèle).

Dans la suite de cette thèse nous allons construire l'espace des twisteurs qui dans le modèle n'est rien d'autre que $G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}}$, cependant d'après ce que nous venons de voir, nous n'avons aucune raison d'avoir encore une structure parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_2\}})$ sur cet espace. Heureusement, nous n'en demandons pas autant à l'espace des twisteurs.

Pour la suite de cette thèse nous noterons E l'espace total $\mathbb{P}(T^{-1}M)$.

9.3.2 L'espace des twisteurs et sa structure de contact

Passons à présent à la construction locale de l'espace des twisteurs qui apparaitra comme l'espace des feuilles d'un feuilletage de $E = \mathbb{P}(T^{-1}M)$. Comme dans le modèle

$$\begin{array}{ccc} & G_2^s/P_\emptyset & \\ {\scriptstyle\mu}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\nu} \\ G_2^s/P_{\{\alpha_1\}} & & G_2^s/P_{\{\alpha_2\}} \end{array},$$

les feuilles que nous recherchons sont les fibres de ν qui sont isomorphes à $P_{\{\alpha_2\}}/P_\emptyset \simeq \exp(\mathfrak{g}_{-\alpha_2})$, nous cherchons un feuilletage de E donné par $\mathfrak{g}_{-\alpha_2}$.

Proposition 82 *Il existe un feuilletage sur $E = \mathbb{P}(T^{-1}M)$ dont les feuilles sont de dimension 1 et sont données par $q_*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}_{-\alpha_2}))$ avec $q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}M = \mathcal{G}/P_\emptyset$.*

Preuve de la proposition

Donnons deux preuves à cette proposition : la première étant une application directe de la proposition générale 70, et la deuxième, plus géométrique, utilisant le fait que $\mathcal{C}M = \mathbb{P}(T^{-1}M)$.

1) D'après la proposition 70, il nous suffit de vérifier la relation algébrique suivante : pour tout $g \in P_\emptyset$ nous avons $Ad(g)(\mathfrak{g}_{-\alpha_2}) \subset \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{p}_\emptyset$. Soit e_0

un élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha_2} \subset \mathfrak{p}_{-1}$ et soit $Y \in \mathfrak{q} = \mathfrak{p}_\emptyset$, alors $Ad(\exp(Y))(e_0) = \exp(ad(Y)(e_0))$. Ainsi, notant $\mathfrak{p}^i := \bigoplus_{j \geq i} \mathfrak{p}_j$, comme $\dim(\mathfrak{g}_{-\alpha_2}) = 1$,

si $Y \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{q}$,	$[Y, e_0] \in \mathfrak{g}_{-\alpha_2}$ donc $[Y,[Y,e_0]] \in \mathfrak{g}_{-\alpha_2} \dots$ ainsi $Ad(\exp(Y))(e_0) = e_0 + Y_0$ avec Y_0 colinéaire à e_0,	
si $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha_1} \subset \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{q}$,	$[Y, e_0] = 0$ ainsi $Ad(\exp(Y))(e_0) = e_0$	,
si $Y \in \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{q}$,	$[Y, e_0] \in \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}$ donc $[Y,[Y,e_0]] \in \mathfrak{p}^3 \subset \mathfrak{q}$ et $[Y,[Y,[Y,e_0]]] = 0$ ainsi $Ad(\exp(Y))(e_0) = e_0 + Y_1$	avec $Y_1 \in \mathfrak{q}$,
si $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{q}$,	$[Y, e_0] \in \mathfrak{g}_{\alpha_1} \subset \mathfrak{p}^0 \cap \mathfrak{q}$ donc $[Y,[Y,e_0]] = 0$ ainsi $Ad(\exp(Y))(e_0) = e_0 + Y_2$	avec $Y_2 \in \mathfrak{q}$,
si $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha_2} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{q}$,	$[Y, e_0] \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ donc $[Y,[Y,e_0]] \in \mathfrak{g}_{\alpha_2} \subset \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}$ et $[Y,[Y,[Y,e_0]]] = 0$ ainsi $Ad(\exp(Y))(e_0) = e_0 + Y_3$	avec $Y_3 \in \mathfrak{q}$.

Nous obtenons bien de cette manière un feuilletage de la variété $\mathbb{P}(T^{-1}M)$.

Remarque 83 *Avant de poursuivre notons le fait suivant : soit c une courbe de $\mathcal{G}$ vérifiant $\omega(c(t))(\dot{c}(t)) = e_0$ pour tout t, alors la courbe $T_{c(t)}q(\dot{c}(t))$ dans le tangent de $\mathbb{P}(T^{-1}M)$ est un relevé de la courbe $T_{c(t)}p(\dot{c}(t)) \in q(c(t))$. En effet, soit $\mu : \mathbb{P}(T^{-1}M) \to M$ nous avons $T_{q(c(t))}\mu(T_{c(t)}q(\dot{c}(t))) = T_{c(t)}p(\dot{c}(t)) \in q(c(t))$.*

Le feuilletage de E ainsi obtenu est donc dirigé par des relevés tautologiques $q_*\dot{c}(t) \in T(\mathbb{P}(TM))$ des vecteurs $q(c(t)) \in \mathbb{P}(TM)$. Nous verrons à la proposition 104 que nous pouvons définir des horizontaux à la fibration $\mu : E = \mathbb{P}(T^{-1}M) \to M$ de sorte que nos relevés tautologiques soient horizontaux.

2) Une autre manière de révéler ce feuilletage est la suivante. Il y a un autre point de vue pour comprendre les vecteurs $\dot{c}(0)$ issus des flots $Fl_t^{\omega^{-1}(e_0)}(u) \in \mathcal{G}$ utilisés pour la démonstration de la proposition 70 : le vecteur $\dot{c}(0)$ est caractérisé par le fait que pour X un élément de la droite $q(c(0)) = [X] \in \mathbb{P}(T^{-1}M)$, il existe un unique vecteur $\tilde{X} \in T_{c(0)}\mathcal{G}$ tel que $T_{c(0)}p(\tilde{X}) = X$ et $\omega(c(0))(\tilde{X}) \in \mathfrak{p}_-$, et ce vecteur est alors colinéaire à $\dot{c}(0)$.

L'existence est assurée par le fait que $\mathbb{P}(T^{-1}M) = p_*(\omega^{-1}(\mathfrak{p}_{-1}))$ par définition et l'unicité par le fait que $\ker(p_*) = \omega^{-1}(\mathfrak{p})$. Quand au vecteur $\tilde{X}$, il est bien colinéaire à $\dot{c}(0)$ car $[X] = q(c(0)) = [\![c(0), [e_0]]\!] = [T_{c(0)}p(\omega(c(0))^{-1}(e_0))] = [T_{c(0)}p(\dot{c}(0))]$: il existe donc un scalaire λ tel que $X = \lambda T_{c(0)}p(\dot{c}(0))$ et $\omega(c(0))(\lambda\dot{c}(0)) = \lambda e_0 \in \mathfrak{p}_{-1}$ d'où la conclusion $\tilde{X} = \lambda\dot{c}(0)$ grâce à l'unicité précédente.

Montrons à présent grâce à cette caractérisation qu'à un point $[X] \in \mathbb{P}(T^{-1}M)$ est associé une unique direction dans le tangent de $\mathbb{P}(T^{-1}M)$. Cela suffit pour obtenir un feuilletage de $\mathbb{P}(T^{-1}M)$ car choisissant un champ de vecteurs suivant ces directions (comme par exemple $q_*(\dot{c}(t))$: ce choix peux donc se faire de manière lisse), ce dernier est intégrable car de dimension 1 et nous obtenons ainsi notre feuilletage. Soit $[X] \in \mathbb{P}(T^{-1}M)$, $X \in [X]$ non nul et $u \in \mathcal{G}_{[X]}$, alors nous avons l'unique élément $\tilde{X} \in T_u\mathcal{G}$ vérifiant $T_up(\tilde{X}) = X$ et $\omega(u)(\tilde{X}) \in \mathfrak{p}_{-1}$. Ainsi nous avons au dessus de $[X] \in \mathbb{P}(T^{-1}M)$ la direction donnée par $T_uq(\tilde{X})$: si nous choisissons un autre vecteurs $Y \in [X]$ il existe alors un scalaire λ tel que $Y = \lambda X$ et $T_uq(\tilde{Y}) = T_uq(\lambda\tilde{X}) = \lambda T_uq(\tilde{X})$ et la direction donnée par $T_uq(\tilde{X})$ est donc indépendante du choix du vecteur X dans la droite $[X]$. Maintenant si $\hat{u}$ est un autre élément de la fibre $\mathcal{G}_{[X]}$, il existe alors $g \in Q$ tel que $\hat{u} = u \cdot g$. Notant la dépendance en $u \in \mathcal{G}_{[X]}$ pour le vecteur $\tilde{X}$ par $\tilde{X}_u$, pour tout $g \in Q$ nous avons

$$\begin{aligned} T_{\hat{u}}q(T_ur^g(\tilde{X}_u)) &= T_u(q \circ r^g)(\tilde{X}_u) \\ &= T_uq(\tilde{X}_u). \end{aligned}$$

À présent si $g \in P_0 \cap Q$ alors $\omega(u \cdot g)(T_ur^g(\tilde{X}_u)) = Ad(g^{-1})(\omega(u)(\tilde{X}_u) \in \mathfrak{p}_{-1}$ car $\omega(u)(\tilde{X}_u) \in \mathfrak{p}_{-1}$ et $g \in P_0$ et donc par unicité $\tilde{X}_{u\cdot g} = T_ur^g(\tilde{X}_u)$. Nous en concluons que

$$\text{si} \quad g \in P_0 \cap Q \quad \text{alors} \quad T_{u\cdot g}q(\tilde{X}_{u\cdot g}) = T_uq(\tilde{X}_u).$$

Si maintenant $n \in \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}$,

$$\begin{aligned} \omega(u \cdot e^n)(T_ur^{e^n}(\tilde{X}_u)) &= Ad(e^{-n})(\omega(u)(\tilde{X}_u)) \\ &= \omega(u)(\tilde{X}_u) + [n, \omega(u)(\tilde{X}_u)] \quad mod \quad \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{X}_{u\cdot e^n} = T_ur^{e^n}(\tilde{X}_u) + \omega(u \cdot e^n)^{-1}([n, \omega(u)(\tilde{X}_u]) + \xi$ avec $\xi \in \ker(q_*) = \omega^{-1}(\mathfrak{q})$. Or si $n \in \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{q}$ alors $[n, \omega(u)(\tilde{X}_u)] \in \mathfrak{p}^1 \subset \mathfrak{q}$ et donc $T_{u\cdot e^n}q(\omega(u \cdot e^n)^{-1}([n, \omega(u)(\tilde{X}_u)])) = 0$. Ainsi,

$$\text{si} \quad n \in \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{q} \quad \text{alors} \quad T_{u\cdot e^n}q(\tilde{X}_{u\cdot e^n}) = T_uq(\tilde{X}_u).$$

Reste le cas où $n \in \mathfrak{p}_1$: nous avons alors $[n, \omega(u)(\tilde{X}_u)] \in \mathfrak{p}_0$ mais comme $\mathfrak{p}_0$ n'est pas inclus dans $\mathfrak{q}$, le vecteur $Z := T_{u\cdot e^n}q(\omega(u\cdot e^n)^{-1}([n, \omega(u)(\tilde{X}_u)]))$ n'est

à priori pas nul mais est un vecteur vertical de la fibration $\mathbb{P}(T^{-1}M) \to M$. Son action infinitésimale sur la fibre de $\mathbb{P}(T^{-1}M) = \mathcal{G} \times_P \mathbb{P}(\mathfrak{p}_{-1})$ au point $[X]$ est caractérisée par l'action adjointe $ad([n, \omega(u)(\tilde{X}_u)])$ sur $\omega(u)(\tilde{X}_u)$. Ainsi les vecteurs $T_{u\cdot e^n} q(\tilde{X}_{u\cdot e^n}) = T_u q(\tilde{X}_u + Z)$ et $T_u q(\tilde{X}_u)$ sont colinéaires si et seulement si nous avons la relation algébrique

$$[[n, X], X] \in X\mathbb{C} \text{ pour tout } n \in \mathfrak{p}_1 \text{ et } X \in \mathfrak{p}_{-1}, \tag{9.3.1}$$

ce qui est bien le cas.

□

Muni de ce feuilletage nous pouvons à présent définir l'espace des twisteurs réel :

Définition 84 *L'espace des twisteurs N est défini comme étant l'espace des feuilles du feuilletage de E précédent.*

Proposition 85 *Cet espace des twisteurs N est une variété et possède une structure de contact.*

Preuve de la proposition

Pour voir que N est une variété il suffit de remarquer que la démonstration de la proposition 87 à venir s'adapte au cas réel.

Révélons à présent la structure de contact de l'espace des twisteurs N. Là encore pour comprendre ce que nous faisons, nous regardons dans le modèle où l'espace des twisteurs n'est rien d'autre que l'espace homogène $G_2^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_2\}}$. Or la distribution de contact associée à cet espace homogène est donnée par la distribution $T^{-1}N$ de cet espace qui provient de $\mathfrak{r}_{-1} = \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-2\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-3\alpha_2} \subset \mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{r}_{-1}$ défini par la relation (8.1.1). Dans le modèle, la connexion de Cartan associée à chaque géométrie parabolique rencontrée est toujours la même, c'est-à-dire l'inverse de la fonction exponentielle sur G_2^s, il est alors direct de voir que la première distribution précédemment citée $T^{-1}N$ est égale à $\nu_*(T^{-4}(\mathbb{P}(T^{-1}M)))$ avec $\nu : \mathbb{P}(T^{-1}M) \to N$ et la distribution $T^{-4}(\mathbb{P}(T^{-1}M))$ provenant de $\mathfrak{q}^{-4} = \mathfrak{g}_{-\alpha_1-3\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-2\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}_{\{\alpha_2\}}$. De la même manière, dans le cas général, notons D la distribution $\nu_*(T^{-4}(\mathbb{P}(T^{-1}M))) = \nu_*(q_*(\omega^{-1}(\mathfrak{g}^{-4}))) \subset T(N)$. C'est une distribution de rang 4 car $\ker(\nu_*) \subset T^{-4}(\mathbb{P}(T^{-1}M))$ est de dimension 5. Reste simplement à voir que cette distribution est non-intégrable ce qui est direct car $T^{-4}(\mathbb{P}(T^{-1}M))$ ne l'est pas : en effet, la distribution $T^{-4}(\mathbb{P}(T^{-1}M))$ n'est pas intégrable pour le crochet de Lie $\mathcal{L}$ engendré par le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ et comme la géométrie parabolique de $\mathbb{P}(T^{-1}M)$ de type

$(G_2^s, P_\emptyset)$ est régulière, ce crochet de Lie $\mathcal{L}$ coïncide avec le crochet de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{P}(T^{-1}M)$. □

Remarque 86 *L'espace N que nous venons localement de construire est un espace réel de dimension 5. Ce n'est donc pas l'espace des twisteurs attendu que nous voulions de dimension complexe 5. Comme dans la construction de Le Brun, nous allons devoir passer par une complexification de l'espace de départ M.*

9.3.3 L'espace des twisteurs complexe

Pour obtenir ce dernier espace, il nous faut reprendre la construction précédente en complexifiant notre variété de départ M. Supposons pour cela que M soit une variété analytique réelle. Chaque système de coordonnées $U \subset \mathbb{R}^5$ (pour $(\phi^{-1}(U), \phi)$ une carte de M) peut être élargi en un voisinage $U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^5$ et comme les changements de coordonnées sont des fonctions analytiques nous pouvons recoller les cartes élargies pour former d'après Bruhat et Whitney [WB59] une variété complexe $M^{\mathbb{C}}$ munie d'une conjugaison complexe $\tau : M^{\mathbb{C}} \to M^{\mathbb{C}}$ pour laquelle l'ensemble des points fixes est la variété M. De plus cette variété complexe est uniquement déterminée par le germe de M. L'espace tangent à cette variété complexe vérifie $TM^{\mathbb{C}}|_M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et nous avons ainsi notre distribution $T^{-1}M$ de dimension 2 qui se prolonge en une distribution $T^{-1}M^{\mathbb{C}}$ de dimension complexe 2 sur $M^{\mathbb{C}}$ et qui reste générique au sens où $[T^{-1}M^{\mathbb{C}}, T^{-1}M^{\mathbb{C}}]$ est de dimension complexe 3 et $[T^{-1}M^{\mathbb{C}}, [T^{-1}M^{\mathbb{C}}, T^{-1}M^{\mathbb{C}}]] = TM^{\mathbb{C}}$. Après complexification nous obtenons donc bien une variété complexe $M^{\mathbb{C}}$ munie d'une structure parabolique régulière de type $(G_2^{\mathbb{C}}, P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}})$.

Reprenant notre construction de l'espace des twisteurs pour la variété complexe $M^{\mathbb{C}}$, nous voyons que la construction du feuilletage de $E^{\mathbb{C}} := \mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}})$ se fait de la même manière que dans le cas réel et nous pouvons alors définir localement l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ comme étant l'espace des feuilles de ce feuilletage.

Proposition 87 *L'espace $\mathcal{N}$ est une variété complexe rendant l'application $\nu : E^{\mathbb{C}} \to \mathcal{N}$ holomorphe et est muni d'une structure réelle $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ dont l'ensemble des points fixes est N.*

Pour démontrer cette proposition, nous allons utiliser le théorème de Le Brun [LeB83, p. 219] disant que l'espace des géodésiques complexes nulles d'une variété complexe munie d'une connexion conforme holomorphe est une variété complexe. Nous pensons à ce théorème grâce au lemme suivant.

Lemme 88 *Soit $M^{\mathbb{C}}$ une variété munie d'une géométrie parabolique de type $(G_2^{\mathbb{C}}, P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}})$ alors la variété $M^{\mathbb{C}}$ possède une géométrie parabolique de type $(SO(7,\mathbb{C}), P^{\mathbb{C}})$ avec $P^{\mathbb{C}}$ le parabolique de $SO(7,\mathbb{C})$ fixant la droite isotrope ϵ_1, c'est-à-dire que $M^{\mathbb{C}}$ possède une structure conforme holomorphe.*

Preuve du lemme

Nous allons donner deux démonstrations de ce lemme : la première utilisant le formalisme des géométries paraboliques et la seconde plus explicite, s'appuie sur la proposition [LeB83, p. 214] nous disant que la donnée d'une structure conforme sur M est équivalente à la donnée du fibré en cône des directions isotropes.

1) Une variété munie d'une géométrie parabolique de type $(G_2^{\mathbb{C}}, P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}})$ possède automatiquement une géométrie parabolique de type $(SO(7,\mathbb{C}), P^{\mathbb{C}})$ avec $P^{\mathbb{C}}$ le parabolique de $SO(7,\mathbb{C})$ fixant la droite isotrope ϵ_1. En effet, d'après la proposition 26, comme $P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}} = G_2^{\mathbb{C}} \cap P^{\mathbb{C}}$, nous avons une unique connexion de Cartan $\omega_\beta \in \Omega^1(\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \times_{P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}} P^{\mathbb{C}}, \mathfrak{so}(7,\mathbb{C}))$ de type $(SO(7,\mathbb{C}), P^{\mathbb{C}})$ vérifiant $j^*\omega_\beta = \beta \circ \omega \in \Omega^1(\mathcal{G}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{so}(7,\mathbb{C}))$ avec $j : \mathcal{G}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{G}^{\mathbb{C}} \times_{P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}} P^{\mathbb{C}}$ qui à $u \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ associe la classe de (u, e) dans $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \times_{P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}} P^{\mathbb{C}}$ et β la dérivée de l'inclusion $G_2^{\mathbb{C}} \hookrightarrow SO(7,\mathbb{C})$.

Or une géométrie parabolique de type $(SO(7,\mathbb{C}), P^{\mathbb{C}})$ ne procure pas de filtration à $M^{\mathbb{C}}$ car l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de $P^{\mathbb{C}}$ est $|1|$-graduée. Le donnée d'une structure parabolique infinitésimale de type $(SO(7,\mathbb{C}), P^{\mathbb{C}})$ se réduit donc à la donnée d'une réduction de la structure de groupe du fibré $TM^{\mathbb{C}}$ à la structure de groupe $P_0^{\mathbb{C}} = P^{\mathbb{C}}/\exp(\mathfrak{p}^\perp) = CO(5,\mathbb{C})$ par rapport à l'homomorphisme $Ad : CO(5,\mathbb{C}) \to GL(\mathfrak{so}(7,\mathbb{C})/\mathfrak{p})$: ce qui correspond à la donnée d'une structure conforme holomorphe sur $M^{\mathbb{C}}$.

2) D'après la proposition [LeB83, p. 214], il nous suffit de donner le fibré holomorphe des directions nulles pour avoir le résultat énoncé. Donnons-nous une variété complexe $M^{\mathbb{C}}$ munie d'une structure parabolique $(p : \mathcal{G} \to M^{\mathbb{C}}, \omega)$ de type $(G_2^{\mathbb{C}}, P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}})$. Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$, exprimons les directions isotropes attendues. Pour cela, nous allons donner la forme quadratique naturelle sur $T_xM^{\mathbb{C}}$ associé à un point u dans la fibre $\mathcal{G}_x$ puis nous verrons que deux telles formes h_u et $h_{\tilde{u}}$, pour u et $\tilde{u}$ dans $\mathcal{G}_x$, sont proportionnelles. Soit donc $u \in \mathcal{G}_x$ et ξ et η dans $T_xM^{\mathbb{C}}$ alors, comme nous l'avons déjà vu, il existe un unique couple $(\tilde{\xi}_u, \tilde{\eta}_u) \in T_u\mathcal{G} \times T_u\mathcal{G}$ tel que $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\eta}$ sont des relevés de ξ et η, et tel que $\omega(u)(\tilde{\xi}_u)$ et $\omega(u)(\tilde{\eta}_u)$ soient dans $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_-$. Notant q la métrique sur $\mathfrak{n}$ donnée

par la matrice

$$J = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & -1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

nous avons la forme quadratique sur T_xM, dépendant de u, suivante :

$$h_u(\xi, \eta) := q(\omega(u)(\tilde{\xi}_u), \omega(u)(\tilde{\eta}_u)).$$

Maintenant si nous prenons un autre élément $\tilde{u}$ de la fibre $\mathcal{G}_x$, alors il existe $g \in P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}} \subset P^{\mathbb{C}}$ tel que $\tilde{u} = u \cdot g$. L'élément g s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a & Z & 0 \\ 0 & \Omega & -J\,{}^tZ \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

avec Z une matrice ligne de taille 5, $\Omega \in \mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ c'est-à-dire vérifiant $J\Omega = -{}^t\Omega J$ et $a \in \mathbb{C}$. L'élément g agit sur $\mathfrak{n}$ via l'action adjointe suivie de la projection sur $\mathfrak{n}$ par rapport à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{p}$: $g \cdot X = pr_{\mathfrak{n}}(Ad(g)(X)) = a^{-1}\Omega X$ pour

$$X = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \tilde{X} & & \\ 0 & -{}^t\tilde{X}J & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}.$$

Remarquons que l'élément $\omega(u \cdot g)^{-1}(g^{-1} \cdot X)$ est un relevé de $T_up(\omega(u)(X))$. En effet,

$$\begin{aligned} T_{u\cdot g}p(\omega(u \cdot g)^{-1}(g^{-1} \cdot X)) &= T_{u\cdot g}p(T_ur^g(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(g^{-1} \cdot X)))) \\ &\quad \text{par équivariance de } \omega \\ &= T_up(\omega(u)^{-1}(Ad(g)((id - pr_{\mathfrak{p}}) \circ Ad(g^{-1}) \cdot X))) \\ &= T_up(\omega(u)^{-1}(X)) \\ &\quad -T_up(\omega(u)^{-1}(Ad(g)(pr_{\mathfrak{p}} \circ Ad(g^{-1}) \cdot X))) \\ &= T_up(\omega(u)^{-1}(X)) \end{aligned}$$

car $Ad(g)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ et $p_*(\omega^{-1}(\mathfrak{p})) = 0$. Nous avons donc par unicité que $\tilde{\xi}_{u\cdot g} = \omega(u \cdot g)^{-1}(g^{-1} \cdot \omega(u)(\tilde{\xi}_u))$. Ainsi q définit sur $T_xM^{\mathbb{C}}$ la forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned} h_{\tilde{u}}(\xi, \eta) &:= q(\omega(\tilde{u})(\tilde{\xi}_{\tilde{u}}), \omega(\tilde{u})(\tilde{\eta}_{\tilde{u}})) \\ &= q(g^{-1} \cdot \omega(u)(\tilde{\xi}_u), g^{-1} \cdot \omega(u)(\tilde{\eta}_u)) \\ &= q(a\Omega^{-1}\omega(u)(\tilde{\xi}_u), a\Omega^{-1}\omega(u)(\tilde{\eta}_u)) \\ &= a^2q(\omega(u)(\tilde{\xi}_u), \omega(u)(\tilde{\eta}_u)) \\ &= a^2h_u(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Ainsi au dessus d'un point $x \in M^{\mathbb{C}}$, l'ensemble des directions nulles $\{[v] \in \mathbb{P}(TM^{\mathbb{C}}) : h_u(v,v) = 0, u \in \mathcal{G}_x\}$ est bien défini. Nous disposons ainsi d'un fibré en cône isotrope C. Montrons que ce fibré est holomorphe. Soit $x_0 \in M^{\mathbb{C}}$ et $u_0 \in \mathcal{G}_{x_0}$, d'après ce que nous verrons au chapitre 11.2, nous avons sur un voisinage U_{x_0} de x_0 dans $M^{\mathbb{C}}$ une section σ de $p : \mathcal{G} \to M^{\mathbb{C}}$ qui nous permet de définir les champs de vecteurs $\xi_i := T_{\sigma(x)}p(\omega(\sigma(x))^{-1}(f_i)))$ avec $(f_1, \ldots, f_5)$ la base de $\mathfrak{p}_-$ correspondant à la base dans laquelle est donnée la matrice J précédente. Ainsi nous avons une trivialisation de C au dessus de U_{x_0} donnée par

$$\begin{array}{rccc} \phi_{x_0} & : & U_{x_0} \times Q & \longrightarrow & C \\ & & (x, [X_1 : \ldots : X_5]) & \longmapsto & (x, [X_1\xi_1 + \ldots + X_5\xi_5]) \end{array}$$

avec $Q = \{[z_1 : \ldots : z_5] \in \mathbb{P}^4 : 2z_1z_5 + 2z_2z_4 - z_3^2 = 0\}$. Maintenant si nous nous donnons un autre point $y_0 \in M^{\mathbb{C}}$ nous avons de même une section s sur un voisinage U_{y_0} de y_0 dans $M^{\mathbb{C}}$ et une trivialisation au dessus de U_{y_0} donnée par

$$\begin{array}{rccc} \phi_{y_0} & : & U_{y_0} \times Q & \longrightarrow & C \\ & & (y, [Y_1 : \ldots : Y_5]) & \longmapsto & (y, [Y_1\eta_1 + \ldots + Y_5\eta_5]) \end{array}$$

avec $\eta_i := T_{s(y)}p(\omega(s(y))^{-1}(f_i)))$. À présent, si l'ensemble $U_{x_0} \cap U_{y_0}$ est non vide, pour $z \in U_{x_0} \cap U_{y_0}$ il existe un unique $g(z) \in P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}$ tel que $\sigma(z) = s(z) \cdot g(z)$. Nous pouvons ainsi relier les champs de vecteurs ξ_i aux champs de vecteurs η_i comme ceci :

$$\begin{array}{rcl} \xi_i(z) & = & T_{s(z)\cdot g(z)}p(\omega(s(z) \cdot g(z))^{-1}(f_i)) \\ & = & T_{s(z)\cdot g(z)}p(Tr^{g(z)}(\omega(s(z))^{-1}(Ad(g(z))(f_i)))) \\ & = & T_{s(z)}p(\omega(s(z))^{-1}(Ad(g(z))(f_i))) \end{array}$$

et les champs de vecteurs ξ_i sont donc des combinaisons linéaires des η_j avec pour coefficients des fonctions holomorphes des éléments de $g(z)$. Comme la fonction $g : U_{x_0} \cap U_{y_0} \to P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}$ est holomorphe, il en va alors de même pour $\phi_{y_0}^{-1} \circ \phi_{x_0}$ et notre fibré en cône est holomorphe. □

Possédant une structure conforme holomorphe sur $M^{\mathbb{C}}$ nous pouvons alors parler de géodésiques complexes nulles au sens de [LeB83, p. 211].

Lemme 89 *Une feuille du feuilletage de $E^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}})$ se projette sur $M^{\mathbb{C}}$ en une géodésique complexe nulle.*

Preuve du Lemme

D'après le démonstration du lemme précédent il suffit de voir que la

distribution générique $T^{-1}M^{\mathbb{C}}$ est incluse dans le fibré des cônes isotropes. Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$ et $u \in \mathcal{G}_x$, par définition, $T_x^{-1}M^{\mathbb{C}} = T_u p(\omega(u)(\mathfrak{p}_{-1}))$. Ainsi d'après la démonstration précédente, $T_x^{-1}M^{\mathbb{C}}$ est dans le cône isotrope si et seulement si $\mathfrak{p}_{-1}$ est dans le cône isotrope de la forme quadratique q définie par la matrice

$$J = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & -1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Comme dans la base $(\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6)$ choisie pour exprimer J nous avons $\mathfrak{p}_{-1} = Vect(\epsilon_1, \epsilon_2)$, nous avons le résultat voulu. □

Preuve de la Proposition

D'après le théorème de Le Brun [LeB83, p. 219], l'espace des géodésiques nulles $\tilde{\mathcal{N}}$ de $M^{\mathbb{C}}$ est un espace complexe de dimension 7 rendant l'application $\tilde{\nu} : \mathcal{D} \to \tilde{\mathcal{N}}$ holomorphe, avec $\mathcal{D}$ l'ensemble des directions nulles de $M^{\mathbb{C}}$. Remarquons que $E^{\mathbb{C}}$ est une sous-variété complexe de $\mathcal{D}$ et que $\nu = \tilde{\nu}|_{E^{\mathbb{C}}}$. L'espace $\mathcal{N}$ est dons un sous-espace de $\tilde{\mathcal{N}}$. Le point maintenant est de voir que les cartes construites par Le Brun pour $\tilde{\mathcal{N}}$ se restreignent en un atlas de variété complexe pour $\mathcal{N}$. Regardant la démonstration du théorème [LeB83, p. 219], nous observons que Le Brun décrit des cartes (ϕ, W) de $\mathcal{D}$ telles que $\phi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}^7 \times \mathbb{C}$ et notant $r : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^7$ la projection sur les 7 premiers termes, les homéomorphismes

$$\tilde{\nu} \circ (r \circ \phi)^{-1} : r \circ \phi(W) \subset \mathbb{C}^7 \to \tilde{\nu}(W) \subset \tilde{\mathcal{N}}$$

procurent à $\tilde{\mathcal{N}}$ un atlas de variété complexe. Les géodésiques nulles étant décrites dans les cartes de $\mathcal{D}$ par $I_z = (r \circ \phi)^{-1}(z)$, cet atlas de variété complexe se restreint sur la sous-variété complexe $E^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{D}$ en un atlas de variété complexe avec pour cartes $\psi : W \cap E^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}$. Alors, notant $q : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^5$ la projection sur les 5 premiers termes, l'atlas donné par les homéomorphismes $\nu \circ (q \circ \psi)^{-1} : q \circ \psi(W \cap E^{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{C}^5 \to \nu(W \cap E^{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{N}$ donne une structure de variété complexe à $\mathcal{N}$ rendant holomorphe l'application $\nu : E^{\mathbb{C}} \to \mathcal{N}$. La structure réelle provient simplement du fait que ces arguments fonctionnent encore pour les variétés réelles sous-jacentes.

□

Enfin la structure de contact qui provient de la même manière de la

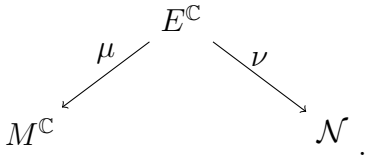
géométrie parabolique régulière de type $(G_2^{\mathbb{C}}, P_{\emptyset}^{\mathbb{C}})$ de $\mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}})$ est à nouveau bien définie sur $\mathcal{N}$ et elle respecte la structure réelle.

Chapitre 10

Les courbes rationnelles

10.1 Les courbes limites

Nous avons en notre possession l'espace complexe $\mathcal{N}$ de dimension 5 muni d'une structure réelle et d'une structure de contact respectant la structure réelle. C'est dans cet espace que nous allons chercher les courbes codant notre future métrique quaternion-kählérienne. Comme nous avons pu le voir avec le modèle, à ce stade de notre construction nous disposons uniquement de courbes voisines à celles que nous recherchons qui sont les courbes $\nu(\mu^{-1}(x))$ pour tout $x \in M^{\mathbb{C}}$ avec



Ces courbes peuvent rencontrer le lieu réel N (si $x \in M$) et sont tangentes à la structure de contact (car l'espace vertical $\ker(\mu_*)$ est inclus dans $T^{-1}(E^{\mathbb{C}}) \subset T^{-4}(E^{\mathbb{C}})$) et elles n'ont pas le fibré normal souhaité. Cependant nous ne nous attendions pas à avoir les propriétés du théorème 62 avec les courbes $\nu(\mu^{-1}(x))$ qui sont les courbes limites de celles recherchées. Pour retrouver les bonnes courbes pour appliquer le théorème 62 nous allons déformer les courbes $\nu(\mu^{-1}(x))$. Pour faire cela il nous faut d'abord mieux comprendre le cas homogène.

Étude du cas modèle

L'objectif de ce chapitre est de mieux comprendre les courbes $\nu(\mu^{-1}(x)) \subset \mathcal{N}_0$ que j'annonce doubles. Pour cela nous allons regarder un chemin $c(t)$ dans

$G_2^s/SO(4)$ allant vers le bord $G_2^s/H_{\{\alpha_1\}}$ et observer l'équation des courbes $C_{c(t)} \subset \mathcal{N}$ correspondantes et surtout l'équation de la courbe limite. Comme les espaces $M_0^{\mathbb{C}} = G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_1\}}^{\mathbb{C}}$, $E_0^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(T^{-1}M_0^{\mathbb{C}}) = G_2^{\mathbb{C}}/P_{\emptyset}^{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{N}_0 = G_2^s/U(2) \subset G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}}$ sont tous les trois contenus dans des variétés grassmanniennes nous allons disposer de coordonnées grassmanniennes. Par la suite nous noterons d'un indice 0 tous les espaces et les outils de la géométrie homogène modèle.

10.1.1 L'équation d'une courbe double dans des coordonnées grassmanniennes

L'objectif ici est d'observer ce que deviennent les courbes lisses dans $\mathcal{N}_0$ correspondant à un chemin dans $G_2^{\mathbb{C}}/SO(4,\mathbb{C})$ allant vers un point D du bord $M_0^{\mathbb{C}}$, et d'observer que la courbe limite dans $\mathcal{N}_0$ correspondant au point D est une courbe double.

Par homogénéité des espaces homogènes en questions, nous pouvons étudier le cas particulier où le point $D \in M_0^{\mathbb{C}}$ est la droite isotrope $D := \epsilon_1 = \frac{e_1+e_6}{2}$.

Définition 90 *Dans un voisinage $U \subset M_0^{\mathbb{C}}$ de la droite isotrope $\epsilon_1 = \frac{e_1+e_6}{2}$ nous avons les coordonnées grassmanniennes*

$$\begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{C}^5 & \longrightarrow & M_0^{\mathbb{C}} \\ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) & \longmapsto & \epsilon_1 + x_1\epsilon_2 + x_2\epsilon_3 + \sqrt{2}x_3\epsilon_4 + x_4\epsilon_5 \\ & & +x_5\epsilon_6 + (x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4)\epsilon_7. \end{array} \tag{10.1.1}$$

Le 4-plan associé à la droite isotrope ϵ_1 est le 4-plan $(\ker(\iota_{\epsilon_1}\Phi))^\perp = Vect(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4)$. Celui associé à la droite $D_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}$ est le 4-plan

$$\begin{aligned} Q_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)} &= (\ker(\iota_{\epsilon_1}\Phi))^\perp \\ &= Vect(\ \epsilon_1 + x_1\epsilon_2 + x_2\epsilon_3 + \sqrt{2}x_3\epsilon_4 + x_4\epsilon_5 + x_5\epsilon_6 \\ &\quad +(x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4)\epsilon_7, \\ &\quad \epsilon_2 - \sqrt{2}x_2\epsilon_4 - (x_3 + x_1x_2)\epsilon_5 + x_2^2\epsilon_6 - (x_5 + x_2x_3)\epsilon_7, \\ &\quad \epsilon_3 + \sqrt{2}x_1\epsilon_4 + x_1^2\epsilon_5 + (x_3 - x_1x_2)\epsilon_6 + (-x_4 + x_1x_3)\epsilon_7, \\ &\quad \epsilon_4 + \sqrt{2}x_1\epsilon_5 - \sqrt{2}x_2\epsilon_6 + \sqrt{2}x_3\epsilon_7\ \ ) \\ &= Vect(\ \epsilon_1 + (x_4 - x_1x_3)\epsilon_5 + (x_5 + x_2x_3)\epsilon_6 - x_3^2\epsilon_7, \\ &\quad \epsilon_2 + (-x_3 + x_1x_2)\epsilon_5 - x_2^2\epsilon_6 + (-x_5 + x_2x_3)\epsilon_7, \\ &\quad \epsilon_3 - x_1^2\epsilon_5 + (x_3 + x_1x_2)\epsilon_6 - (x_4 + x_1x_3)\epsilon_7, \\ &\quad \epsilon_4 + \sqrt{2}x_1\epsilon_5 - \sqrt{2}x_2\epsilon_6 + \sqrt{2}x_3\epsilon_7\ \ ). \end{aligned}$$

Définition 91 *Au voisinage du 4-plan $(\ker(\iota_{\epsilon_1}\Phi))^\perp = Vect(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4) \in G_2^{\mathbb{C}}/SO(4,\mathbb{C})$ nous avons les coordonnées grassmanniennes respectant le bord*

$G_2^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}$ *suivantes :*
(10.1.2)

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{U} \subset \mathbb{C}^8 & \longrightarrow & G_2^{\mathbb{C}}/SO(4,\mathbb{C}) \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{array}{rrrr}
[\ \epsilon_1+ & (x_4 - x_1x_3)\epsilon_5+ & & (x_5 + x_2x_3)\epsilon_6 \\
& + (-x_3^2 + a^2 - bc & +2ax_1x_2 + bx_2^2 + cx_1^2)\epsilon_7\ ] \\
\wedge[\ \epsilon_2+ & (a - x_3 + x_1x_2)\epsilon_5+ & & (c - x_2^2)\epsilon_6 \\
& + (-x_5 & +x_2x_3 - 2ax_2 - 2cx_1)\epsilon_7\ ] \\
\wedge[\ \epsilon_3+ & (b - x_1^2)\epsilon_5+ & & (a + x_3 + x_1x_2)\epsilon_6 \\
& + (-x_4 & -x_1x_3 - 2ax_1 - 2bx_2)\epsilon_7\ ] \\
\wedge[\ \epsilon_4+ & (\sqrt{2}x_1)\epsilon_5+ & & (-\sqrt{2}x_2)\epsilon_6 \\
& & & + (\sqrt{2}x_3)\epsilon_7\ ].
\end{array}
\end{array}$$

Remarquons que si nous fixons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5$, au voisinage de $(x, 0, 0, 0)$ le 4-plan $Q_{(x,a,b,c)}$ est non dégénéré pour la forme quadratique $b(.,.)$ si et seulement si $a^2 - bc \neq 0$. En effet,

$$q|_{Q_{(x,a,b,c)}} =$$
$$\begin{pmatrix}
-x_3^2 + a^2 - bc + 2ax_1x_2 \\ +bx_2^2 + cx_1^2 & x_2x_3 - ax_2 - cx_1 & -x_1x_3 - ax_1 - bx_2 & \frac{x_3}{\sqrt{2}} \\
x_2x_3 - ax_2 - cx_1 & c - x_2^2 & a + x_1x_2 & -\frac{x_2}{\sqrt{2}} \\
-x_1x_3 - ax_1 - bx_2 & a + x_1x_2 & b - x_1^2 & \frac{x_1}{\sqrt{2}} \\
\frac{x_3}{\sqrt{2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{2}} & \frac{x_1}{\sqrt{2}} & -1
\end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut $(a^2 - bc)(2a^2 - 2bc + 2ax_1x_2 + bx_1^2 + cx_1^2 - x_3^2)/2$. Les coordonnées a, b, c sont donc bien des coordonnées normales au bord $G_2^{\mathbb{C}}/H^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}$.

Enfin un voisinage du 2-plan $Vect(\epsilon_1, \epsilon_2)$ dans $G_2^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_2\}}$ se décrit par

$$\tilde{P} = Vect(\epsilon_1 + a\epsilon_3 + b\epsilon_4 + c\epsilon_5 + d\epsilon_6 + e\epsilon_7, \epsilon_2 + f\epsilon_3 + g\epsilon_4 + h\epsilon_5 + j\epsilon_6 + k\epsilon_7\ \ )$$

avec

$$b = -\sqrt{2}h, \quad g = -\sqrt{2}a, \quad e = h^2 - ac, \quad j = a^2 - hf, \quad k = -d + ah - cf.$$

Définition 92 *Au voisinage du plan $Vect(\epsilon_1, \epsilon_2)$ dans $G_2^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_2\}}$, nous avons les coordonnées grassmanniennes*
(10.1.3)

$$\begin{array}{rcl}
(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) & \longmapsto & Vect(\ \ \epsilon_1 + y_1\epsilon_3 + \sqrt{2}y_2\epsilon_4 + y_3\epsilon_5 \\
& & +y_4\epsilon_6 + (y_2^2 - y_1y_3)\epsilon_7, \\
& & \ \epsilon_2 + y_5\epsilon_3 - \sqrt{2}y_1\epsilon_4 - y_2\epsilon_5 \\
& & +(y_1^2 + y_2y_5)\epsilon_6 + (-y_4 - y_1y_2 - y_3y_5)\epsilon_7\ \ ).
\end{array}$$

À présent soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5$, nous avons le chemin $c(t) = Q_{(x,ta_0,tb_0,tc_0)}$ d'éléments de $G_2^{\mathbb{C}}/SO(4,\mathbb{C})$, avec $a_0^2 - b_0c_0 \neq 0$, et de limite $c(0) = Q_{(x,0,0,0)} = (\ker(\iota_{D_{(x)}}\Phi))^{\perp}$.

Proposition 93 *Lorsque t tend vers 0 les courbes $C_t := \{P \in G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}} : P \subset c(t)\}$ tendent vers la courbe d'équation*

$$C_{D_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}} := \begin{cases} y_2 = x_3 - x_1x_2 + x_1^2y_5 + 2x_1y_1, \\ y_3 = x_4 - x_1x_3 - x_1^2y_1 + 2x_1y_2, \\ y_4 = x_5 + x_2x_3 + (x_3 + x_1x_2)y_1 - 2x_2y_2, \\ (y_1 + x_1y_5 - x_2)^2 = 0. \end{cases}$$

Preuve de la proposition

Regardons l'équation des fibres au dessus de ce chemin dans l'espace comprenant l'espace des twisteurs $G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}} \supset G_2^s/U(2)$. Soit $\tilde{P}$ dans un voisinage de $P \in G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}}$ donnée par les coordonnées $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ alors (10.1.4)

$$\tilde{P} \subset Q_{(x,ta_0,tb_0,tc_0)} \iff \begin{cases} y_3 - y_1(tb_0 - x_1^2) - 2x_1y_2 = x_4 - x_1x_3, \\ y_4 - y_1(ta_0 + x_3 + x_1x_2) + 2x_2y_2 = x_5 + x_2x_3, \\ y_2^2 - y_1y_3 + y_1(x_4 + x_1x_3 + 2ta_0x_1 + 2tb_0x_2) \\ -2x_3y_2 = -x_3^2 + t^2(a_0^2 - b_0c_0) + 2ta_0x_1x_2 \\ +tb_0x_2^2 + tc_0x_1^2, \\ -y_2 - y_5(tb_0 - x_1^2) + 2x_1y_1 = ta_0 - x_3 + x_1x_2, \\ y_1^2 + y_2y_5 - y_5(ta_0 - x_3 + x_1x_2) - 2x_2y_1 \\ = tc_0 - x_2^2, \\ -y_4 - y_1y_2 - y_3y_5 + 2x_3y_1 \\ +y_5(x_4 + x_1x_3 + 2ta_0x_1 + 2tb_0x_2) \\ = -x_5 + x_2x_3 - 2ta_0x_2 - 2tc_0x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_2 = x_3 - x_1x_2 - ta_0 + (x_1^2 - tb_0)y_5 + 2x_1y_1, \\ y_3 = x_4 - x_1x_3 + (tb_0 - x_1^2)y_1 + 2x_1y_2, \\ y_4 = x_5 + x_2x_3 + (ta_0 + x_3 + x_1x_2)y_1 - 2x_2y_2, \\ (y_1 + x_1y_5 - x_2)^2 = t(b_0y_5^2 + 2a_0y_5 + c_0). \end{cases}$$

Ainsi lorsque t tend vers 0 nous trouvons bien l'équation annoncée. □

En particulier la courbe $\nu(\mu^{-1}(\epsilon_1))$ a pour équation

$$C_{\epsilon_1} := \begin{cases} y_2 = y_3 = y_4 = 0 \\ y_1^2 = 0. \end{cases} \tag{10.1.5}$$

Cette courbe ne correspond pas à la courbe régulière $C_{\epsilon_1}^{red}$ d'équation $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ mais elle correspond à la courbe $C_{\epsilon_1}^{red}$ doublée dans la

direction donnée par la coordonnée y_1. De telles courbes se nomment ribbon [BE95] : les propriétés de ces courbes qui vont nous intéresser sont que le faisceau idéal $\mathcal{L}$ de C^{red} dans C vérifie $\mathcal{L}^2 = 0$, que $\mathcal{L}$ est un fibré en droite sur C^{red} et que nous avons la suite exacte

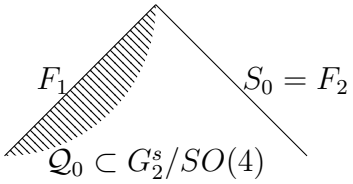
$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow O_C \longrightarrow O_{C^{red}} \longrightarrow 0. \tag{10.1.6}$$

Proposition 94 *Au voisinage de la courbe double $C_{\epsilon_1} := \{y_2 = y_3 = y_4 = 0,\ y_1^2 = 0\} \subset \mathcal{N}_0$ nous avons*

1. *un espace de dimension 5 de courbes doubles correspondant au courbes $C_D = \nu(\mu^{-1}(D))$ pour $D \in M_0^{\mathbb{C}}$ au voisinage de ϵ_1,*

2. *un espace S_0 de dimension 7 de courbes singulières correspondant au courbes $C_{D_1}^{red} \cup C_{D_2}^{red}$ avec D_1 et D_2 dans $M_0^{\mathbb{C}}$ tels que $C_{D_1}^{red}$ et $C_{D_2}^{red}$ s'interceptent en un point de $\mathcal{N}_0$,*

3. *et un espace $\mathcal{Q}_0$ de dimension 8 de courbes régulières.*



Preuve de la Proposition

D'après l'équation (10.1.4) des courbes en questions, au dessus d'un point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b, c) \in G_2^{\mathbb{C}}/SO(4, \mathbb{C})$ la nature de la courbe se lit sur l'équation $(y_1 + x_1y_5 - x_2)^2 = by_5^2 + 2ay_5 + c$. Si $a = b = c = 0$ alors l'équation devient $(y_1+x_1y_5-x_2)^2 = 0$ et cela correspond à une courbe double. Maintenant si $a^2 - bc \neq 0$ alors l'équation $(y_1 + x_1y_5 - x_2)^2 = by_5^2 + 2ay_5 + c$ est non dégénérée et la courbe correspondante est régulière. Reste à observer le cas où $a^2 - bc = 0$. Notons dans un premier temps que l'ensemble des points de $G_2^{\mathbb{C}}/SO(4, \mathbb{C})$ vérifiant $a^2 - bc = 0$ est de dimension 7. Ensuite lorsque $a^2 - bc = 0$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'équation précédente devient $(y_1 + x_1y_5 - x_2)^2 = b(y_5 + a/b)^2$ si $b \neq 0$ et $(y_1 + x_1y_5 - x_2)^2 = c$ si $b = 0$. L'équation de la courbe $C_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c)}$ avec $b \neq 0$ et en prenant β vérifiant

$\beta^2 = b$, devient

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y_1 + (x_1 - \beta)y_5 - (x_2 + a/\beta) = 0, \\ y_2 = x_3 - x_1x_2 + a + (x_1^2 - b)y_5 + 2x_1y_1, \\ y_3 = x_4 - x_1x_3 + (b - x_1^2)y_1 + 2x_1y_2, \\ y_4 = x_5 + x_2x_3 + (a + x_3 + x_1x_2)y_1 - 2x_2y_2, \end{array}\right. \\ \text{ou} \\ \left\{\begin{array}{l} y_1 + (x_1 + \beta)y_5 - (x_2 - a/\beta) = 0, \\ y_2 = x_3 - x_1x_2 + a + (x_1^2 - b)y_5 + 2x_1y_1, \\ y_3 = x_4 - x_1x_3 + (b - x_1^2)y_1 + 2x_1y_2, \\ y_4 = x_5 + x_2x_3 + (a + x_3 + x_1x_2)y_1 - 2x_2y_2, \end{array}\right. \end{array}\right. \iff C_{D_1}^{red} \cup C_{D_2}^{red}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & (x_1 - \beta, x_2 + a/\beta, x_3 + 2a + \beta x_2 + x_1 a/\beta, \\ & & x_4 + 3ax_1 + x_1x_2\beta + x_1^2 a/\beta + \beta x_3 + bx_2 + 2a\beta, \\ & & x_5 - 3ax_2 - x_1x_2 a/\beta - \beta x_2^2 + x_3 a/\beta + x_1 a^2/\beta) \\ \text{et} \quad D_2 & = & (x_1 + \beta, x_2 - a/\beta, x_3 + 2a - \beta x_2 - x_1 a/\beta, \\ & & x_4 + 3ax_1 - x_1x_2\beta - x_1^2 a/\beta - \beta x_3 + bx_2 - 2a\beta, \\ & & x_5 - 3ax_2 + x_1x_2 a/\beta + \beta x_2^2 - x_3 a/\beta - x_1 a^2/\beta) \end{array}$$

D'où l'énoncé de la proposition. □

Remarque 95 *Par homogénéité des espaces considérés, cette proposition est valable pour n'importe quel point $D \in M_0^{\mathbb{C}}$ et pas seulement pour $D = \epsilon_1$.*

Ce qui nous importe à présent c'est de déterminer la direction dans laquelle nous doublons les courbes $\nu(\mu^{-1}(x))$ et donc de déterminer le faisceau idéal $\mathcal{L}$. Nous allons profiter de la présentation de la réponse à cette question pour introduire des coordonnées de M_0^C, $E_0^{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{N}_0$ qui seront généralisable à toute donnée initiale de géométrie parabolique régulière et normale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$.

10.1.2 L'équation d'une courbe double dans des coordonnées généralisables : les coordonnées distinguées

Toujours en travaillant sur le cas homogène, introduisons les coordonnées que nous retrouverons plus tard lorsque nous étudierons des géométries paraboliques régulières et normales de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ quelconques. Soit $x_0 \in M^{\mathbb{C}}$

une droite isotrope, soit $u_0 \in p^{-1}(x)$ et soit $Z \in \mathfrak{p}_-$ alors, comme dans la démonstration du lemme 30, en posant $Fl_t^{\omega^{-1}(Z)}(u_0) \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ le flot du champ de vecteurs $\omega^{-1}(Z)$ nous avons l'existence d'un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{p}_-$ sur lequel l'application $\phi : V \to \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ donnée par $\phi(Z) := Fl_1^{\omega^{-1}(Z)}(u_0)$ est bien définie. Posons

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & \sqrt{2} & 0 & & & \\ & & & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f_4 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & & 0 & & & & \\ 0 & & & 0 & & & \\ 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 1 & & 0 & & & & & \\ & -\sqrt{2} & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & -\sqrt{2} & & 0 & & \\ & & & & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & & 0 & & & & & \\ 0 & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ 1 & & & & & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & & 0 & & & & \\ \sqrt{2} & & & 0 & & & \\ & -1 & & & 0 & & \\ & & 1 & & & 0 & \\ & & & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Définition 96 *Nous obtenons de cette manière des coordonnées, nommées coordonnées distinguées, au voisinage de x_0 données par*

(10.1.7)

$$\begin{array}{rccc} F : & V \subset \mathbb{C}^5 & \longrightarrow & M^{\mathbb{C}} \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & \longmapsto & p \circ \phi(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5) \end{array}$$

Remarquons que dans le cas homogène $Fl_1^{\omega_0^{-1}(Z)}(id) = \exp(Z)$. Or

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ x_1 & 0 & & & & & \\ x_2 & 0 & 0 & & & & \\ \sqrt{2}x_3 & -\sqrt{2}x_2 & \sqrt{2}x_1 & 0 & & & \\ x_4 & -x_3 & 0 & \sqrt{2}x_1 & 0 & & \\ x_5 & 0 & x_3 & -\sqrt{2}x_2 & 0 & 0 & \\ 0 & -x_5 & -x_4 & \sqrt{2}x_3 & -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ x_1 & 1 & & & & & \\ x_2 & 0 & 1 & & & & \\ \sqrt{2}x_3 & -\sqrt{2}x_2 & \sqrt{2}x_1 & 1 & & & \\ x_4 + \frac{x_1x_3}{2} & -x_3 - x_1x_2 & x_1^2 & \sqrt{2}x_1 & 1 & & \\ x_5 - \frac{x_2x_3}{2} & x_2^2 & x_3 - x_1x_2 & -\sqrt{2}x_2 & 0 & 1 & \\ x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4 & -x_5 - \frac{x_2x_3}{2} & -x_4 + \frac{x_1x_3}{2} & \sqrt{2}x_3 & -x_2 & -x_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi un voisinage de la droite isotrope ϵ_1 dans $M_0^{\mathbb{C}} = G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_1\}}^{\mathbb{C}}$ se décrit dans ces coordonnées par

$$\epsilon_1 + x_1\epsilon_2 + x_2\epsilon_3 + \sqrt{2}x_3\epsilon_4 + (x_4 + \frac{x_1x_3}{2})\epsilon_5 + (x_5 - \frac{x_2x_3}{2})\epsilon_6 + (x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4)\epsilon_7.$$

Là encore, comme dans la démonstration du lemme 30, nous pouvons définir une section locale de $M^{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ par

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & F(V) \subset M^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{\mathbb{C}} \\ & x & \longmapsto & \phi \circ F^{-1}(x). \end{array} \tag{10.1.8}$$

Définissons pour $i \in \{1, \ldots, 5\}$, les champs de vecteurs sur $F(V)$ suivant

$$\xi_i(x) = T_{\sigma(x)}p(\omega(\sigma(x))^{-1}(f_i)). \tag{10.1.9}$$

La distribution de dimension 2, $T^{-1}M^{\mathbb{C}}$, est la distribution engendrée par ξ_1 et ξ_2.

Définition 97 *Nous avons sur un voisinage $\tilde{V}$ de la fibre $\mathbb{P}(T_{x_0}^{-1}M^{\mathbb{C}})$ dans $\mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}})$ les coordonnées*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} \subset \mathbb{C}^6 & \longrightarrow & \mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}}) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \zeta) & \longmapsto & ((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \xi_1 + \zeta\xi_2). \end{array} \tag{10.1.10}$$

Nous allons à présent comprendre ces coordonnées de manière géométrique dans le cas homogène. Supposons $x_0 = \epsilon_1$. Soit $D = \epsilon_1 + x_1\epsilon_2 + x_2\epsilon_3 + \sqrt{2}x_3\epsilon_4 + (x_4 + \frac{x_1x_3}{2})\epsilon_5 + (x_5 - \frac{x_2x_3}{2})\epsilon_6 + (x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4)\epsilon_7$ une droite isotrope dans le voisinage V de ϵ_1 et (D, ζ) un point de $\tilde{V} \subset \mathbb{P}(T^{-1}M_0^{\mathbb{C}})$. Notons alors $h = h_\zeta$ l'élément de $P^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}}$ suivant

$$h_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & \zeta & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & -\zeta & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.1.11}$$

Alors nous avons un antécédent de (D, ζ) par l'application surjective

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{P}(T^{-1}M) \\ & u & \longmapsto & [T_u p(\omega(u)^{-1}(f_1))] \end{array}$$

qui est l'élément

$$u := \sigma(D) \cdot h = \exp(x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 + x_5f_5) \cdot h =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ x_1 & 1 & & & & & \\ x_2 & \zeta & 1 & & & & \\ \sqrt{2}x_3 & \sqrt{2}(-x_2 + x_1\zeta) & \sqrt{2}x_1 & 1 & & & \\ x_4 + \frac{x_1x_3}{2} & -x_3 - x_1x_2 + x_1^2\zeta & x_1^2 & \sqrt{2}x_1 & 1 & & \\ x_5 - \frac{x_2x_3}{2} & x_2^2 + x_3\zeta - x_1x_2\zeta & x_3 - x_1x_2 & -\sqrt{2}x_2 & -\zeta & 1 & \\ x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4 & -x_5 - \frac{x_2x_3}{2} - x_4\zeta + \frac{x_1x_3\zeta}{2} & -x_4 + \frac{x_1x_3}{2} & \sqrt{2}x_3 & -x_2 + x_1\zeta & -x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl} q(u) = [T_u p(\omega(u)^{-1}(f_1))] & = & [T_u p(T_{\sigma(D)} r^h(\omega(\sigma(D))^{-1}(Ad(h)(f_1))))] \\ & = & [T_{\sigma(D)}(p \circ r^h)(\omega(\sigma(D))^{-1}(f_1 + \zeta f_2))] \\ & = & [T_{\sigma(D)} p(\omega(\sigma(D))^{-1}(f_1 + \zeta f_2))] \\ & = & [\xi_1 + \zeta\xi_2](D) = (D, \zeta). \end{array} \tag{10.1.12}$$

Nous avons alors la description suivante

Propriété 98 *Le point (D, ζ) de $\mathbb{P}(T^{-1}M_0^{\mathbb{C}})$ au voisinage de $x_0 = \epsilon_1$, correspond au point (D, P) de $G_2^{\mathbb{C}}/P_\emptyset^{\mathbb{C}}$ avec*

$$\begin{array}{rcl} D & = & \epsilon_1 + x_1\epsilon_2 + x_2\epsilon_3 + \sqrt{2}x_3\epsilon_4 + (x_4 + \frac{x_1x_3}{2})\epsilon_5 + (x_5 - \frac{x_2x_3}{2})\epsilon_6 \\ & & +(x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4)\epsilon_7, \\ et\ P & = & Vect(\ D\ ,\ \epsilon_2 + \zeta\epsilon_3 + (-x_2 + x_1\zeta)\epsilon_4 + (-x_3 - x_1x_2 + x_1^2)\epsilon_5 \\ & & +(x_2^2 + x_3\zeta - x_1x_2\zeta)\epsilon_6 + (-x_5 - \frac{x_2x_3}{2} - x_4\zeta + \frac{x_1x_3\zeta}{2})\epsilon_7\ ). \end{array}$$

Définition 99 *L'identification de $\mathcal{N}_0$ avec l'espace $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,\zeta) \in \tilde{V} : x_1 = 0\}$ sur un voisinage $\hat{V}$ de la courbe $\nu(\mu^{-1}(x_0))$, nous fournit des coordonnées (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) sur $\hat{V}$.*

Ces coordonnées, lorsque $x_0 = \epsilon_1$, sont reliées aux coordonnées grassmanniennes (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) définies par l'application (10.1.3) de la manière suivante. Soit P dans $\mathcal{N}_0$ de coordonnées (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5), ce 2-plan est celui fournit par le point $(0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$ de $\mathbb{P}(T^{-1}M_0^{\mathbb{C}})$ c'est-à-dire le 2-plan

$$\begin{array}{rl} P & = Vect(\ \epsilon_1 + u_1\epsilon_3 + \sqrt{2}u_2\epsilon_4 + u_3\epsilon_5 + (u_4 - \frac{u_1u_2}{2})\epsilon_6 + (u_2^2 - u_1u_3)\epsilon_7\ , \\ & \epsilon_2 + u_5\epsilon_3 - u_1\epsilon_4 + -u_2\epsilon_5 + (u_1^2 + u_2u_5)\epsilon_6 + (-u_4 - \frac{u_1u_2}{2} - u_3u_5)\epsilon_7\ ). \end{array}$$

Propriété 100 *Les coordonnées précédentes de $\mathcal{N}_0$ pour $x_0 = \epsilon_1$ et les coordonnées grassmanniennes définies par l'application (10.1.3) sont reliées par*

$$y_1 = u_1,\quad y_2 = u_2,\quad y_3 = u_3,\quad y_4 = u_4 - \frac{u_1u_2}{2}\quad et\quad y_5 = u_5.$$

Regardons maintenant dans les coordonnées (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) l'équation d'un courbe réduite C_x^{red} dans $\hat{U} \subset \mathcal{N}_0$. Pour cela prenons $(D_x,\zeta) \in \tilde{U}$ et suivons la feuille passant par ce point pour aller jusqu'au point de la feuille $(D'_{x'},\zeta')$ vérifiant $x'_1 = 0$. Dans le modèle et pour $x_0 = \epsilon_1$, il est plus facile de trouver la droite D' : il suffit de trouver une droite de

$$\begin{array}{rcl} P & = & Vect(\ \epsilon_1 + x_1\epsilon_2 + x_2\epsilon_3 + \sqrt{2}x_3\epsilon_4 + (x_4 + \frac{x_1x_3}{2})\epsilon_5 + (x_5 - \frac{x_2x_3}{2})\epsilon_6 \\ & + & (x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4)\epsilon_7\ , \\ & & \epsilon_2 + \zeta\epsilon_3 + (-x_2 + x_1\zeta)\epsilon_4 + (-x_3 - x_1x_2 + x_1^2)\epsilon_5 \\ & + & (x_2^2 + x_3\zeta - x_1x_2\zeta)\epsilon_6 + (-x_5 - \frac{x_2x_3}{2} - x_4\zeta + \frac{x_1x_3\zeta}{2})\epsilon_7\ ). \end{array}$$

de la forme $\epsilon_1 + X_3\epsilon_3 + \sqrt{2}X_4\epsilon_4 + X_5\epsilon_5 + X_6\epsilon_6 + X_7\epsilon_7$. Cette droite est la droite

$$\begin{array}{rcl} D_0 & = & \epsilon_1 + (x_2 - x_1\zeta)\epsilon_3 + \sqrt{2}(x_3 + x_1x_2 - x_1^2\zeta)\epsilon_4 \\ & + & (x_4 + \frac{3}{2}x_1x_3 + x_1^2x_2 - x_1^3\zeta)\epsilon_5 \\ & + & (x_5 - \frac{x_2x_3}{2} - x_1x_2^2 - x_1x_3\zeta + x_1^2x_2\zeta)\epsilon_6 \\ & + & (x_3^2 - x_1x_5 - x_2x_4 + x_1x_5 + \frac{x_1x_2x_3}{2} + x_1x_4\zeta - \frac{x_1^2x_3\zeta}{2})\epsilon_7. \end{array}$$

La courbe réduite $C^{red}_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}$ dans $\hat{V} \subset \mathcal{N}_0$ se décrit ainsi dans les coordonnées (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) par

$$\begin{array}{l} \{\ \ (x_2 - x_1\zeta, x_3 + x_1x_2 - x_1^2\zeta, x_4 + \frac{3}{2}x_1x_3 + x_1^2x_2 - x_1^3\zeta, \\ \quad x_5 - \frac{x_1x_2^2}{2} - \frac{3}{2}x_1x_3\zeta + \frac{x_1^3\zeta^2}{2}, \zeta) : \zeta \in \hat{\mathbb{C}}\ \ \} \end{array}$$

et dans les coordonnées $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ par

$$\{ \quad (x_2 - x_1\zeta, x_3 + x_1x_2 - x_1^2\zeta, x_4 + \tfrac{3}{2}x_1x_3 + x_1^2x_2 - x_1^3\zeta, \\ x_5 - x_1x_2^2 - x_1x_3\zeta - \tfrac{x_2x_3}{2} + x_1^2x_2\zeta, \zeta) : \zeta \in \hat{\mathbb{C}} \quad \}.$$

Or nous sommes capable de donner les équations non réduites de ces courbes dans les coordonnées grassmanniennes $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ et donc dans les coordonnées $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$:

Propriété 101 *Pour x dans le voisinage de x_0 dans $M_0^{\mathbb{C}}$, l'équation non réduite de la courbe C_x dans les coordonnées $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est*

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_1 - x_2 + x_1u_5)^2 = 0, \\ u_2 = x_3 + x_1x_2 - x_1^2u_5, \\ u_3 = x_4 + \frac{3}{2}x_1x_3 + x_1^2x_2 - x_1^3u_5, \\ u_4 = x_5 - x_1x_2^2 - x_1x_3u_5 - \frac{x_2x_3}{2} + x_1^2x_2u_5. \end{array} \right. \tag{10.1.13}$$

Preuve de la propriété

Dans le cas où $x_0 = \epsilon_1$ le résultat est direct et vient de l'équation connue dans les coordonnées $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Pour le cas général où x_0 est un point quelconque de $M_0^{\mathbb{C}}$, je renvoie à la démonstration de la proposition 117 où nous obtiendrons l'équation (11.2.2) qui est cette même équation dans le cas plus général d'une géométrie parabolique initiale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ non homogène. □

Ainsi dans $\mathcal{N}_0$ au dessus de la courbe réduite C_x^{red}, l'idéal $(u_1 - x_2 + x_1u_5)\mathbb{C}[u_5]$ correspond au déplacement de la droite isotrope D_x dans la direction $\xi_2 - \zeta\xi_1$. Cela signifie que le fibré conormal de $C_x^{red} \simeq \{\xi_1 + \zeta\xi_2, \zeta \in \hat{\mathbb{C}}\}$ dans C_x correspond au fibré $(\widetilde{H^{-1}E_0^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*)})^*$ au dessus de la fibre $\mu^{-1}(x) = {E_0^{\mathbb{C}}}_x$ avec $H^{-1}E_0^{\mathbb{C}} = \widetilde{Vect}(\xi_1, \xi_2)$ le relevé horizontal de $T_x^{-1}M_0^{\mathbb{C}}$ dans $T_{\mu^{-1}(x)}E_0^{\mathbb{C}}$ et $\ker(\nu_*) = (\widetilde{\xi_1 + \zeta\xi_2})\mathbb{C}$ (les tildes correspondant aux relevés horizontaux fixés par $x \in M^{\mathbb{C}}$ et donnés par la remarque 103). De plus, par définition des filtrations $TE_0^{\mathbb{C}} = T^{-5}E_0^{\mathbb{C}} \supset \cdots \supset T^{-1}E_0^{\mathbb{C}}$ et $TM_0^{\mathbb{C}} = T^{-3}M_0^{\mathbb{C}} \supset \cdots \supset T^{-1}M_0^{\mathbb{C}}$ il apparait clairement que $H^{-1}E_0^{\mathbb{C}} \simeq T^{-2}E_0^{\mathbb{C}}/\ker(\mu_*)$. Notre courbe est donc un ribbon dont le fibré conormal de C_x^{red} dans C_x est le fibré $(\nu_*(T^{-2}E_0^{\mathbb{C}}/\ker(\mu_*)))^*$ au dessus de la courbe C_x^{red}. Nous avons ainsi par homogénéité la proposition suivante :

Proposition 102 *Soit $D \in M_0^{\mathbb{C}}$ une droite isotrope et $Q(t)$ un chemin dans $G_2^{\mathbb{C}}/SO(4, \mathbb{C})$ ayant pour point limite D (les éléments $Q(t)$ étant des 4-plans). Notons $C_{Q(t)} := \{P \in G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}} : P \subset Q(t)\}$ les courbes régulières dans*

$G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}}$ associées aux points $Q(t)$ de $G_2^{\mathbb{C}}/SO(4,\mathbb{C})$. Alors la courbe limite C_D des courbes régulières $C_{Q(t)}$ dans $G_2^{\mathbb{C}}/P_{\{\alpha_2\}}^{\mathbb{C}}$ est un ribbon dont le fibré conormal de C_D^{red} dans C_D est le fibré $(\nu_*(T^{-2}E_0^{\mathbb{C}}/\ker(\mu_*)))^*$ au dessus de la courbe C_D^{red}.

Finissons ce chapitre avec la remarque suivante.

Remarque 103 *Les coordonnées distinguées nous fournissent des horizontaux pour la fibration $\mu : E^{\mathbb{C}} \to M^{\mathbb{C}}$. En effet soit $x \in M^{\mathbb{C}}$, $\xi \in T_xM^{\mathbb{C}}$ et $[X](=[\xi_1+\zeta\xi_2]) \in E_x^{\mathbb{C}}$ alors il existe un unique élément $h(=h_\zeta) \in \exp(\mathfrak{g}_{-\alpha_1}) \subset P_\emptyset^{\mathbb{C}}$ tel que $q(\sigma(x)\cdot h) = [X]$ (car nous l'avons vu $P_{\{\alpha_1\}}^{\mathbb{C}}/P_\emptyset^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{g}_{-\alpha_1}$). Nous pouvons ainsi définir le vecteur horizontal*

$$\tilde{\xi} := T_{\sigma(x)\cdot h}q(T_{\sigma(x)}r^h(T_x\sigma(\xi))) \in T_{q(\sigma(x)\cdot h)}E^{\mathbb{C}}$$

qui est bien un relevé de ξ car

$$\begin{aligned} T_{q(\sigma(x)\cdot h)}\mu(\tilde{\xi}) &= T_{\sigma(x)\cdot h}p(T_{\sigma(x)}r^g(T_x\sigma(\xi))) \\ &= T_{\sigma(x)}(p\circ r^h)(T_x\sigma(\xi)) \\ &= T_{\sigma(x)}p(T_x\sigma(\xi)) \\ &= \xi. \end{aligned}$$

Notons que si $[X](=[\xi_1+\zeta\xi_2]) \in E_{x_0}^{\mathbb{C}}$ nous avons $h = h_\zeta$ d'après l'égalité (10.1.12) et alors la feuille de $E^{\mathbb{C}}$ passant par ce point $[X]$ est dirigée par le relevé horizontal

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi_1+\zeta\xi_2} &:= T_{u_0\cdot h_\zeta}q(T_{u_0}r^{h_\zeta}(T_{x_0}\sigma(\xi_1+\zeta\xi_2))) \\ &= T_{u_0\cdot h_\zeta}q(T_{u_0}r^{h_\zeta}(\omega(u_0)^{-1}(f_1+\zeta f_2))) \\ &= T_{u_0\cdot h_\zeta}q(\omega(u_0\cdot h_\zeta)^{-1}(Ad(h_\zeta^{-1})(f_1+\zeta f_2))) \\ &= T_{u_0\cdot h_\zeta}q(\omega(u_0\cdot h_\zeta)^{-1}(f_1)). \end{aligned}$$

Ainsi sur la fibre $E_{x_0}^{\mathbb{C}}$ les directions du feuilletage de $E^{\mathbb{C}}$ sont données par les relevés horizontaux tautologiques $([\xi_1+\zeta\xi_2], \widetilde{\xi_1+\zeta\xi_2}) \in T_{[\xi_1+\zeta\xi_2]}E^{\mathbb{C}}$.

Nous obtenons alors la proposition suivante :

Proposition 104 *1. Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$ et $u \in p^{-1}(x) \subset \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$, notons V le sous ensemble de $M^{\mathbb{C}}$ sur lequel sont définies les coordonnées distinguées (10.1.7), alors nous disposons naturellement d'un relevé horizontal $HE^{\mathbb{C}} \subset TE^{\mathbb{C}}$ de $TM^{\mathbb{C}}$ au dessus de V.*

2. Les directions tangentes au feuilletage de $E^{\mathbb{C}}$ précédemment construit, sont données par les relevés horizontaux tautologiques

$$([\xi_1+\zeta\xi_2], \widetilde{\xi_1+\zeta\xi_2}) \in H_{[\xi_1+\zeta\xi_2]}E^{\mathbb{C}} \subset T_{[\xi_1+\zeta\xi_2]}E^{\mathbb{C}}.$$

10.2 Déformation des courbes doubles

10.2.1 L'espace de déformation d'une courbe double

Étant donnée une géométrie parabolique régulière et normale initiale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ nous allons considérer les courbes $C_x := \nu(\mu^{-1}(x)) \subset \mathcal{N}$ pour $x \in M^{\mathbb{C}}$ comme étant des ribbons de fibrés conormaux $(\nu_*(T^{-2}E^{\mathbb{C}}/\ker(\mu_*)))^*$ au dessus des courbes réduites C_x^{red}. Ce sont ces courbes doubles que nous souhaitons déformer pour mimer le comportement du modèle. Ce qui nous intéresse c'est l'espace de déformation de telles courbes et en particulier, parmi celui-ci, un ouvert sur lequel les courbes vont vérifier les hypothèses du théorème 62. L'existence et la dimension de l'espace de déformation d'une courbe sont usuellement données par le théorème de Kodaira [Kod62] et donc par la connaissance de la cohomologie du fibré normal à cette courbe. L'histoire reste la même dans notre cas, seulement pour connaitre la cohomologie du faisceau normal $\mathcal{Y}$ sur la courbe non-réduite C_x nous allons avoir besoin de la connaissance du fibré normal de la courbe réduite C_x^{red} dans $\mathcal{N}$ et du fibré conormal $(\nu_*(T^{-2}E^{\mathbb{C}}/\ker(\mu_*)))^*$.

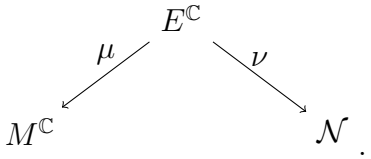
Proposition 105 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique régulière de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ et soit $x \in M^{\mathbb{C}}$.*

Alors

1. *le fibré normal Y de la courbe réduite C_x^{red} dans $\mathcal{N}$ est $O(1)\oplus O\oplus O\oplus O$,*
2. *le fibré conormal $Z_x := (\nu_*(T^{-2}E^{\mathbb{C}}/\ker(\mu_*)))^*$ de C_x^{red} dans C_x est $O(-1)$.*

Preuve de la Proposition

Rappelons que nous avons le diagramme suivant :



Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$, le fibré normal à la courbe $C_x = \nu(\mu^{-1}(x))$ dans $\mathcal{N}$ s'identifie au fibré $TE^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*) \oplus \ker(\nu_*)$ au dessus de $E_x^{\mathbb{C}}$. Or comme nous l'avons vu dans la remarque 103, fixant un $u \in \mathcal{G}_x$ nous avons localement un horizontal $HE^{\mathbb{C}} \simeq TM^{\mathbb{C}}$ pour la fibration $\mu : E^{\mathbb{C}} \to M^{\mathbb{C}}$ pour lequel la distribution $\ker(\nu_*)$ au dessus de $E_x^{\mathbb{C}}$ est incluse dans ce relevé horizontal. Ainsi notre fibré normal Y s'identifie à $HE^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*)$ sur $E_x^{\mathbb{C}}$. À présent, notons que d'après la construction du feuilletage de $E^{\mathbb{C}}$ et des définitions des filtrations

$TE^{\mathbb{C}} = T^{-5}E^{\mathbb{C}} \supset \cdots \supset T^{-1}E^{\mathbb{C}}$ et $TM^{\mathbb{C}} = T^{-3}M^{\mathbb{C}} \supset \cdots \supset T^{-1}M^{\mathbb{C}}$, nous avons que $\ker(\nu_*) \subset T^{-2}E^{\mathbb{C}} \cap HE^{\mathbb{C}} = H^{-1}E^{\mathbb{C}}$ avec $H^{-1}E^{\mathbb{C}}$ le relevé horizontal de $T^{-1}M^{\mathbb{C}}$ dans $TE^{\mathbb{C}}$. Ainsi $H^{-1}E^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*)$ s'injecte dans $HE^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*)$ et nous avons la suite exacte au dessus de $E_x^{\mathbb{C}}$

$$0 \longrightarrow H^{-1}E^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*) \longrightarrow Y = HE^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*) \longrightarrow HE^{\mathbb{C}}/H^{-1}E^{\mathbb{C}} \longrightarrow 0.$$

Or le fibré $H^{-1}E^{\mathbb{C}}$ est trivial sur $E_x^{\mathbb{C}}$ et d'après la remarque 103 le fibré $\ker(\nu_*)$ sur $E^{\mathbb{C}}$ est le fibré tautologique $O(-1)$. Donc le fibré $H^{-1}E^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*)$ est le fibré $O(1)$. Remarquons que $H^{-1}E^{\mathbb{C}}/\ker(\nu_*) \simeq T^{-2}E^{\mathbb{C}}/\ker(\mu_*) \oplus \ker(\nu_*) \simeq Z^*$ et donc que $Z = O(-1)$. D'un autre côté le fibré $HE^{\mathbb{C}}/H^{-1}E^{\mathbb{C}}$ est lui aussi trivial et nous avons donc la suite exacte sur $E_x^{\mathbb{C}}$

$$0 \longrightarrow O(1) \longrightarrow Y \longrightarrow O \oplus O \oplus O \longrightarrow 0.$$

Maintenant comme le fibré normal Y se décompose en $O(a) \oplus O(b) \oplus O(c) \oplus O(d)$ avec $a+b+c+d = 1$ nous avons que Y est le fibré $O(1) \oplus O \oplus O \oplus O$ au dessus de C_x^{red}. □

Cela va nous permettre de calculer les dimensions des cohomologies du faisceau normal $\mathcal{Y}$ sur C et ainsi d'obtenir la proposition suivante.

Proposition 106 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique régulière analytique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ et soit $x \in M^{\mathbb{C}}$.*

Alors l'espace de déformation de la courbe double C_x dans $\mathcal{N}$ est une variété complexe $\mathcal{Q}$ de dimension 8 et le sous-espace $\mathcal{Q}_\tau \subset \mathcal{Q}$ des courbes τ-invariante (τ étant la structure réelle de $\mathcal{N}$) est une variété réelle-analytique non vide de dimension 8.

Preuve de la Proposition

D'après la proposition précédente, le caractère double de notre courbe $C = C_x$ se décrit par la suite exacte de faisceaux au dessus de C

$$0 \longrightarrow O_{C^{red}}(-1) \longrightarrow O_C \longrightarrow O_{C^{red}} \longrightarrow 0.$$

Notant à présent $\mathcal{I}_C$ (respectivement $\mathcal{I}_{C^{red}}$) l'idéal de C (respectivement de C^{red}), le faisceau $(\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)^*$ est localement libre sur O_C : nous pouvons donc tensoriser la suite exacte précédente par $\otimes_{O_C}(\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)^*$ et nous obtenons la suite exacte au dessus de C

$$0 \longrightarrow O_{C^{red}}(-1) \otimes_{O_C} (\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)^* \longrightarrow (\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)^* \longrightarrow O_{C^{red}} \otimes_{O_C} (\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)^* \longrightarrow 0.$$

Or le faisceau $\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2$ est le dual du faisceau normal $\mathcal{Y}$ recherché. Notant $\mathcal{X}$ le faisceau $O_{C^{red}} \otimes_{O_C} (\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)^*$ nous avons la suite exacte sur C

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \otimes_{O_{C^{red}}} O_{C^{red}}(-1) \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow 0. \tag{10.2.1}$$

Nous allons à présent relier $\mathcal{X}$ au fibré normal Y de la courbe réduite C^{red}. Comme C est une courbe double nous avons $\mathcal{I}_{C^{red}}^2 \hookrightarrow \mathcal{I}_C$. Nous avons donc la suite exacte sur C^{red}

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{C^{red}}^2/\mathcal{I}_C\mathcal{I}_{C^{red}} = Z^2 \longrightarrow \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C\mathcal{I}_{C^{red}} \longrightarrow \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C^{red}}^2 \longrightarrow 0.$$

Nous avons aussi l'inclusion $\mathcal{I}_C \hookrightarrow \mathcal{I}_{C^{red}}$ qui nous donne la suite exacte sur C^{red}

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C^{red}}^2 \longrightarrow \mathcal{I}_{C^{red}}/\mathcal{I}_{C^{red}}^2 \longrightarrow \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C^{red}} = Z \longrightarrow 0.$$

Concaténant ces deux suites exactes nous obtenons sur C^{red} la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z^2 \longrightarrow \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C\mathcal{I}_{C^{red}} = \mathcal{I}_C|_{C^{red}} \longrightarrow \mathcal{I}_{C^{red}}/\mathcal{I}_{C^{red}}^2 = \mathcal{I}_{C^{red}}|_{C^{red}} \longrightarrow Z \longrightarrow 0.$$

Finalement nous reconnaissons le dual du fibré normal de la courbe réduite $Y^* = \mathcal{I}_{C^{red}}/\mathcal{I}_{C^{red}}^2$ et notre fibré $\mathcal{X}^* = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C\mathcal{I}_{C^{red}}$. Nous avons donc sur la courbe réduite C^{red} la suite exacte

$$0 \longrightarrow O(1) \longrightarrow Y \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow O(2) \longrightarrow 0.$$

Mais comme $O \longrightarrow O(1) \longrightarrow Y \longrightarrow O \oplus O \oplus O \longrightarrow 0$, nous avons les suites exactes sur C^{red}

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow O_{C^{red}} \oplus O_{C^{red}} \oplus O_{C^{red}} \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow O_{C^{red}}(2) \longrightarrow 0, \\ \text{et}\quad &0 \longrightarrow O_{C^{red}}(-1) \oplus O_{C^{red}}(-1) \oplus O_{C^{red}}(-1) \longrightarrow \mathcal{X} \otimes_{O_{C^{red}}} O_{C^{red}}(-1) \\ &\longrightarrow O_{C^{red}}(1) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Cela nous permet de connaitre la cohomologie de $\mathcal{X}$ sur la courbe réduite C^{red}, mais d'après le lemme 2.10. du livre d'Hartshorne [Har77, p. 209], comme C^{red} est un fermé de C, la cohomologie de $\mathcal{X}$ sur la courbe réduite C^{red} est la même que la cohomologie de $\mathcal{X}$ vu comme faisceau sur la courbe non réduite C. Ainsi

$$\begin{aligned} &\dim(H^0(\mathcal{X}, O_C)) = 6, \qquad \dim(H^0(\mathcal{X} \otimes_{O_{C^{red}}} O_{C^{red}}(-1), O_C)) = 2, \\ &\dim(H^1(\mathcal{X}, O_C)) = 0 \quad \text{et} \quad \dim(H^1(\mathcal{X} \otimes_{O_{C^{red}}} O_{C^{red}}(-1), O_C)) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 107 *D'après l'article de Bayer et Eisenbud [BE95] il apparait dans notre cas qu'il n'existe qu'une seule manière de doubler la courbe C^{red} suivant Z celle qui donne un split ribbon. Or dans ce cas-là, il existe une rétraction $r : C \to C^{red}$ et donc une section de $\mathcal{I}_C \hookrightarrow \mathcal{I}_{C^{red}}$. Cette section nous fournit alors une section de $\mathcal{I}_C|_{C^{red}} \to \mathcal{I}_{C^{red}}|_{C^{red}}$, mais comme $O \oplus O \oplus O \hookrightarrow \mathcal{I}_{C^{red}}|_{C^{red}}$ nous en concluons que $O \oplus O \oplus O$ est inclus dans $\mathcal{I}_C|_{C^{red}} = \mathcal{X}^*$ et donc que $\mathcal{X} = O(2) \oplus O \oplus O \oplus O$.*

Ainsi la suite exacte longue sur C correspondant à la suite exacte courte (10.2.1) est

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{X} \otimes_{O_{C^{red}}} O_{C^{red}}(-1), O_C) \longrightarrow H^0(\mathcal{Y}, O_C) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, O_C) \longrightarrow 0$$
$$\longrightarrow H^1(\mathcal{Y}, O_C) \longrightarrow 0.$$

Nous avons donc $H^1(\mathcal{Y}, O_C) = 0$ et $\dim(H^0(\mathcal{Y}, O_C)) = 8$. Ainsi comme $H^1(\mathcal{Y}, O_C) = 0$ l'espace des déformations est une variété complexe de dimension $\dim(H^0(\mathcal{Y}, O_C)) = 8$. Et l'espace $\mathcal{Q}_\tau$ est non vide car pour $x_0 \in M$ la courbe C_x est τ invariante. □

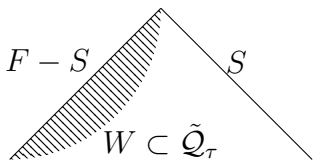
10.2.2 Les courbes déformées sont-elles les courbes recherchées ?

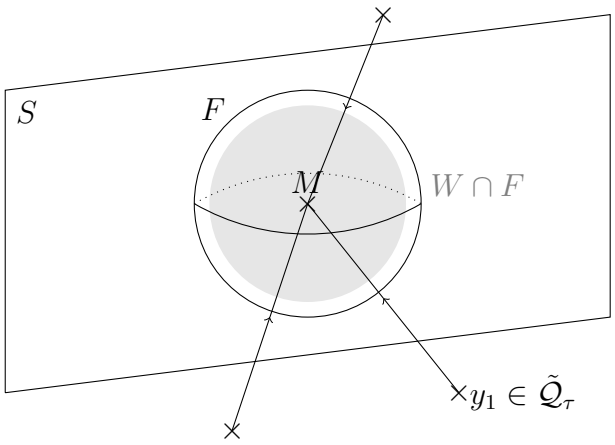
À présent notre objectif est de trouver un ouvert de $\mathcal{Q}$ sur lequel les courbes déformées sont des courbes lisses de fibré normal $4O(1)$ pour pouvoir appliquer le théorème 62 et ainsi obtenir le théorème principal de cette thèse. Comme $M^{\mathbb{C}}$ est inclus dans $\mathcal{Q}$ nous pouvons considérer l'éclatement $\tilde{\mathcal{Q}}$ de $\mathcal{Q}$ le long de $M^{\mathbb{C}}$. Notons τ la structure réelle de l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}_\tau$ l'espace des courbes de $\mathcal{Q}$ qui sont τ-invariantes et $\mathsf{N}(M \subset \mathcal{Q}_\tau)$ le fibré normal de M dans $\mathcal{Q}_\tau$.

Théorème 108 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique régulière analytique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$. Soit $x \in M$ et $[y] \in \mathbb{P}(\mathsf{N}_x(M \subset \mathcal{Q}_\tau)) - S = F_x - S$ un point du bord $F = \mathbb{P}(\mathsf{N}(M \subset \mathcal{Q}_\tau)) \subset \tilde{\mathcal{Q}}_\tau$ en dehors des directions S décrites plus loin à la définition 111 (donnant des courbes potentiellement singulières).*

Alors il existe un voisinage W de $[y]$ dans $\tilde{\mathcal{Q}}_\tau$ tel que l'espace $W \subset (\tilde{\mathcal{Q}}_\tau - F)$ est naturellement une variété réelle-analytique quaternion-kählérienne de dimension 8.

Remarque 109 *Nous n'avons pas directement notre métrique quaternion-kählérienne sur $\mathcal{Q}_\tau - M = \tilde{\mathcal{Q}}_\tau - F$ car nous devons éviter dans $\mathcal{Q}_\tau$ les rayons provenant des courbes singulières indexées dans le modèle par le bord F_2 et que nous avons notés ici S.*





Cherchons donc un ouvert de $\mathcal{Q}$ sur lequel les courbes déformées sont des courbes lisses de fibré normal $4O(1)$. Or, avec simplement les données algébriques du fibré normal de la courbe réduite et du fibré conormal de C^{red} dans C, nous ne pouvons assurer l'existence d'un tel ouvert. En effet, regardons l'espace ambiant $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ et la courbe double donnée dans l'ouvert $\{[1 : z_1 : z_2] \times [1 : z_3 : z_4 : z_5] : z \in \mathbb{C}^5\}$ de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ par

$$C : z_1^2 = z_3 = z_4 = z_5 = 0.$$

Alors la courbe réduite a pour fibré normal $\mathbb{C}^2/O(-1)\oplus\mathbb{C}^3 = O(1)\oplus O\oplus O\oplus O$ et le fibré conormal de C^{red} dans C est $O(-1)$. Mais dans $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ la courbe C se déforme en une courbe

$$\tilde{C} = \{[z_0 : z_1 : z_2] : z_1^2 + az_1z_2 + bz_2^2 + cz_1z_0 + dz_2z_0 + ez_0^2 = 0\} \times \{x\},$$

avec x un point de $\mathbb{P}^3$ et $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{C}^5$. Ainsi si la forme quadratique $z_1^2 + az_1z_2 + bz_2^2 + cz_1z_0 + dz_2z_0 + ez_0^2$ est non dégénérée nous obtenons une courbe régulière de fibré normal $O(4) \oplus O \oplus O \oplus O$.

Pour révéler un tel ouvert de courbes lisses nous allons utiliser la géométrie parabolique de la variété de l'ensemble des courbes doubles $M^{\mathbb{C}}$. Soit $x_0 \in M^{\mathbb{C}}$ et soit $u_0 \in \mathcal{G}_x^{\mathbb{C}}$ alors les flots des champs de vecteurs $\omega^{-1}(X)$ sur $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ nous procurent sur un voisinage de x_0 les coordonnées distinguées (10.1.7)

$$\begin{array}{rccc} F : & V \subset \mathbb{C}^5 & \longrightarrow & M_0^{\mathbb{C}} \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & \longmapsto & p \circ \phi(x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 + x_5f_5) \end{array}$$

avec $\phi(X) := Fl_1^{\omega^{-1}(X)}(u_0)$. Dans ces coordonnées nous pouvons naturellement définir la dilatation parabolique par $\Psi_t = F \circ \Phi_t \circ F^{-1}$ avec

$$\Phi_t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (tx_1, tx_2, t^2x_3, t^3x_4, t^3x_5). \tag{10.2.2}$$

Soit $U := F(V)$, notons $U_t := \Psi_t(U)$ et considérons $B_t := \Psi_t^*(U_t, \omega) = (U, \Psi^*\omega)$ l'espace U vu avec la géométrie parabolique de U_t tirée sur U. Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 110 *L'espace $B_t = (U, \Psi^*\omega)$ tend vers la géométrie parabolique homogène lorsque t tend vers* 0.

Preuve de la proposition

Pour voir ceci il faut comprendre ce que devient la distribution de rang 2 sur $\Phi_t^* U_t$. Rappelons qu'avec ces coordonnées distinguées vient aussi une section locale σ de $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \to M^{\mathbb{C}}$ qui nous permet de définir les champs de vecteurs $\xi_i = T_{\sigma(x)}p(\omega(\sigma(x))^{-1}(f_i))$ pour $i \in \{1, \dots, 5\}$. Ainsi d'après la définition de la filtration $TM_0^{\mathbb{C}} = T^{-3}M_0^{\mathbb{C}} \supset \cdots \supset T^{-1}M_0^{\mathbb{C}}$ nous avons

$$T^{-1}M_0^{\mathbb{C}} = Vect(\xi_1, \xi_2), \quad T^{-2}M_0^{\mathbb{C}} = Vect(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$
$$\text{et} \quad T^{-3}M_0^{\mathbb{C}} = Vect(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5).$$

Or d'après la proposition 115 vu au chapitre 11.2 de cette thèse, les champs de vecteurs $t\Psi_t^*\xi_i$ tendent vers les champs de vecteurs du cas modèle ξ_i^0 pour $i \in \{1, 2\}$. La distribution de rang 2 définissant la géométrie parabolique de type $(G_2^{\mathbb{C}}, P_{\{\alpha_1\}}^{\mathbb{C}})$, sur $\Phi_t^* U_t$ tend donc bien vers la géométrie du cas modèle homogène. □

Notre construction d'un espace des twisteurs nous fournit donc un espace des twisteurs $\mathcal{N}_t$ correspondant à la géométrie parabolique de B_t. Or l'application $\Psi_t : B_t \xrightarrow{\sim} U_t$ induit naturellement une application $\tilde{\Psi}_t : \mathcal{N}_t \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_t$ où $\tilde{U}_t$ est un voisinage de la courbe $C_{x_0} \subset \mathcal{N}$ de plus en plus petit. Et l'espace $\mathcal{N}_t$ tend vers un ouvert de l'espace des twisteurs du modèle $\mathcal{N}_0$ lorsque t tend vers 0. De la même manière l'espace de déformation $\mathcal{Q}_t$ de la courbe C_{x_0} dans $\mathcal{N}_t$ tend vers l'espace de déformation $\mathcal{Q}_0$ de la courbe C_{x_0} dans $\mathcal{N}_0$ et l'application $\tilde{\Psi}_t : \mathcal{N}_t \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_t$ induit naturellement une application $\hat{\Psi}_t : \mathcal{Q}_t \xrightarrow{\sim} \hat{U}_t$ où $\hat{U}_t$ est un voisinage de $x_0 \in \mathcal{Q}$ de plus en plus petit. Ainsi soit $y \in \mathcal{Q}_0$ proche de x_0, alors $C_y \subset \mathcal{N}_0$ se déforme dans $\mathcal{N}_t$ en $C_y^t = C_{y_t}$ pour $y_t \in \mathcal{Q}_t$.

Définition 111 *Notant $\mathsf{N}_{x_0}(M^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q})$ le fibré normal de $M^{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{Q}$ au point x_0, nous définissons le sous-espace S de $\mathbb{P}(\mathsf{N}_x(M^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q}))$ comme étant composé des directions données par les suites $\hat{\Psi}_t(y_1)$ pour $y \in \mathcal{Q}_0$ proche de x_0 et dans l'espace de dimension 7 décrit à la proposition 94, c'est-à-dire tel que $C_y \subset \mathcal{N}_0$ soit une courbe singulière.*

Nous pouvons alors énoncer le lemme suivant :

Lemme 112 *Soit $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ une géométrie parabolique régulière analytique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$. Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$, $[y] \in \mathbb{P}(\mathsf{N}_x(M^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q})) - S$ et $y \in [y]$. Alors il existe $t > 0$ tel que pour tout point $\hat{\Psi}_t(y_1)$ dans $\mathcal{Q}$, les courbes $C_{\hat{\Psi}_t(y)}$ sont régulières, de fibré normal $4O(1)$ et transverses à la structure de contact de $\mathcal{N}$.*

De plus il existe un voisinage W dans $\mathcal{Q}$ du point $[y]$ du bord $\mathbb{P}(\mathsf{N}_x(M^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q})) = F_{1x}$ tel que pour tout $z \in W - (W \cap F_1)$ la courbe $C_z \subset \mathcal{N}$ soit régulière de fibré normal $4O(1)$ et transverse à la structure de contact de $\mathcal{N}$. Cependant le voisinage W ne contient pas tout F_{1x}.

Preuve du lemme

D'après la proposition 94, considérons donc $y \in \mathcal{Q}_0$ proche de x_0 et tel que $C_y \subset \mathcal{N}_0$ soit une courbe régulière et donc de fibré normal $4O(1)$ et transverse à la structure de contact η_0. Alors $C_y \subset \mathcal{N}_0$ se déforme dans $\mathcal{N}_t$ en $C_y^t = C_{y_t}$ pour $y_t \in \mathcal{Q}_t$. Comme les conditions de fibré normal égal à $4O(1)$ et de transversalité envers la structure de contact sont des conditions ouvertes, il existe un rang t_y tel que pour tout $t \leq t_y$ la courbe $C_{y_t} \subset \mathcal{N}_t$ soit de fibré normal $4O(1)$ et soit transverse à η_t. Appliquant ensuite la dilatation $\tilde{\Psi}_t$ à ces courbes nous avons que les courbes $\tilde{\Psi}_t(C_{y_t}) = C_{\hat{\Psi}_t(y_1)} \subset \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}$ vérifient les conditions précédentes. Ainsi si nous prenons une famille compacte de directions dans Q_0 partant de x_0 nous pouvons choisir le même t_y pour toutes les directions y. Cependant nous demandons à $y \in \mathcal{Q}_0$ de correspondre à une courbe régulière or l'ensemble de ces points dans $\mathcal{Q}_0$ ne constitue pas un voisinage ouvert de x_0 car nous avons dans le voisinage de $x_0 \in \mathcal{Q}_0$ un espace de dimension 7 paramétrant des courbes singulières dans $\mathcal{N}_0$. Nous devons donc choisir ce compact K dans l'ensemble des droites du fibré normal $\mathbb{P}(N_{x_0}(M_0^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q}_0)) = F^{\mathbb{C}}_{\{\alpha_1\}_{x_0}}$ en évitant les directions donnant des courbes singulières, c'est-à-dire les directions normales donnée par les coordonnées $(0, 0, 0, 0, 0, a, b, c)$ de $\mathcal{Q}_0$ vérifiant $a^2 - bc = 0$ d'après la proposition 94. Notons enfin que ce raisonnement est valable pour tout $x_0 \in M^{\mathbb{C}}$, ainsi si nous prenons le même compact K pour tout x dans un voisinage compact de x_0 nous pouvons prendre le même t pour tout les x et nous obtenons le lemme énoncé. □

Nous pouvons à présent démontrer notre théorème.

Preuve du Théorème

Soit $x \in M$ d'après le lemme précédent nous avons un sous-espace $\mathcal{W} \subset \mathcal{Q}$ correspondant à des courbes régulières de $\mathcal{N}$, de fibré normal $4O(1)$ et transverse à la structure de contact de $\mathcal{N}$. Rappelons que nous notons $\mathcal{Q}_\tau$

l'espace non vide de dimension réelle 8 représentant les courbes τ-invariante. Ainsi les éléments de $\mathcal{Q}_\tau \cap \mathcal{W} = W$ représentent des courbes τ-invariantes de fibré normal $4O(1)$ et transverses à la structure de contact. Il ne manque à ces courbes que la propriété de ne pas rencontrer la structure réelle $N \subset \mathcal{N}$ pour pouvoir appliquer le théorème 62. Or cette condition est une condition ouverte, donc en s'approchant comme précédemment du cas modèle et quitte à réduire notre domaine W, nous pouvons montrer cette propriété sur tout W. Enfin comme la structure réelle de $\mathcal{N}$ respecte la structure de contact de $\mathcal{N}$, le théorème 62 d'inversion de la construction de Salamon nous dit que $W \subset \mathcal{Q}_\tau$ est naturellement une variété réelle-analytique pseudo-riemannienne de dimension 8 et d'holonomie incluse dans $Sp(1) \cdot Sp(l, 4-l)$ pour un $l \in \{0, \ldots, 4\}$. La positivité de la métrique sur W vient une fois encore de la positivité de la métrique dans le cas modèle car la construction de la métrique dépend analytiquement des courbes déformées. $\square$

Chapitre 11

Construction twistorielle inverse

11.1 Stratégie pour la reconstruction de la métrique quaternion-kählérienne

Partant d'une géométrie parabolique régulière analytique $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ nous avons construit un espace des twisteurs $\mathcal{N}$ muni d'une structure réelle $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ et d'une structure de contact η à valeurs dans le fibré en droite $L = T\mathcal{N}/\ker(\eta)$. Nous avons vu que cet espace possède naturellement une famille de courbes paramétrées par une variété $\mathcal{Q}$ de dimension 8 dans laquelle nous pouvons voir notre variété de dimension 5 de départ complexifiée $M^{\mathbb{C}}$ comme bordant un sous-ensemble de $\mathcal{Q}$ correspondant à des courbes lisses de fibrés normaux $4O(1)$. Dans ces conditions, l'espace $\mathcal{Q}_\tau$ des courbes τ-invariantes est alors muni d'une métrique quaternion-kählérienne g d'après le théorème de construction twistorielle inverse 108. Notre objectif est à présent de retrouver grâce à notre métrique g la structure parabolique de M, c'est-à-dire la distribution $T^{-1}M$, lorsque nous voyons M dans $\mathcal{Q}_\tau$. Pour cela nous allons commencer par reconstruire notre métrique g sur $\mathcal{Q}$.

Propriété 113 *Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$, alors le fibré $L = T\mathcal{N}/\ker(\eta)$ restreint à la courbe réduite C_x^{red} est le fibré en droite $O_{C_x^{red}}(1)$.*

Or d'après [BE95] les fibrés en droites sur notre courbe double C_x sont caractérisés par leurs restrictions à la courbe réduite C_x^{red} et par le fibré conormal Y_x de C_x^{red} dans C_x. Ainsi nous pouvons naturellement définir notre fibré L sur C_x par

$$0 \longrightarrow L_{C_x^{red}} \otimes Y_x \longrightarrow L|_{C_x} \longrightarrow L_{C_x^{red}} \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$0 \longrightarrow O_{C_x^{red}} \longrightarrow L|_{C_x} \longrightarrow O_{C_x^{red}}(1) \longrightarrow 0. \tag{11.1.1}$$

Remarquons que sur les courbes régulière C_y pour $y \in \mathcal{Q} - M^{\mathbb{C}}$, comme celles-ci sont transverses à la structure de contact, nous avons $L_{C_y} = TC_y = O_{C_y}(2)$. La propriété précédente n'est alors pas choquante car lorsque nous regardons le fibré $O_{\mathbb{P}^2}(1)$ restreint à la courbe réduite d'une courbe double $C : z_1^2 = 0$ dans $\mathbb{P}^2$, nous obtenons par la formule d'adjonction le fibré $O_{C^{red}}(1)$, alors que sa restriction sur une déformation régulière $\tilde{C} : z_1^2 + az_2^2 + bz_3^2 + cz_1z_2 + dz_1z_3 + ez_2z_3 = 0$ devient le fibré $O_{\tilde{C}}(2)$ par la formule d'adjonction.

Preuve de la Propriété

Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$, par définition de la structure de contact sur $\mathcal{N}$, le fibré $L = T\mathcal{N}/\ker(\eta)$ au dessus de C_x^{red} s'identifie au fibré $TE^{\mathbb{C}}/T^{-4}E^{\mathbb{C}}$ au dessus de la courbe $\mu^{-1}(x)$. Soit $u \in p^{-1}(x)$, à l'aide des coordonnées distinguées fixées par ce u nous pouvons définir une section $\sigma : U \subset M^{\mathbb{C}} \to \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$ et des champs de vecteurs $\xi_i = T_{\sigma(x)}p(\omega(\sigma(x))^{-1}(f_i))$ vérifiant $T^{-1}M^{\mathbb{C}} = Vect(\xi_1, \xi_2)$, $T^{-2}M^{\mathbb{C}} = Vect(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ et $TM^{\mathbb{C}} = Vect(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$. Puis grâce à la remarque 103, nous avons un espace horizontal pour la fibration $\mu : E^{\mathbb{C}} \to M^{\mathbb{C}}$ et donc des relevés horizontaux $\tilde{\xi}_i$ des ξ_i. Soit $[X] = [\xi_1 + \zeta\xi_2]$ un élément de $\mu^{-1}(x) = E_x^{\mathbb{C}}$, alors l'élément $h \in \exp(\mathfrak{g}_{-\alpha_1})$ vérifiant $q(u \cdot h) = [X]$ (c'est-à-dire l'élément $h \in \exp(\mathfrak{g}_{-\alpha_1})$ définissant l'horizontal $H_{[X]}E^{\mathbb{C}}$ d'après la remarque 103) est l'élément $h = h_\zeta$ défini par l'égalité (10.1.11) et nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_1([X]) &= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(Ad(h_\zeta^{-1})(f_1))) \\
&= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(f_1 - \zeta f_2)) \\
\tilde{\xi}_2([X]) &= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(Ad(h_\zeta^{-1})(f_2))) \\
&= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(f_2)) \\
\tilde{\xi}_3([X]) &= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(Ad(h_\zeta^{-1})(f_3))) \\
&= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(f_3)) \\
[\tilde{\xi}_3, \tilde{X} = \widetilde{\xi_1 + \zeta\xi_2}]([X]) &= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(Ad(h_\zeta^{-1})([f_3, f_1 + \zeta f_2] \\
&\quad -\kappa(u \cdot h_\zeta)(f_3, f_1 + \zeta f_2)))) \\
&= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(Ad(h_\zeta^{-1})(-3f_4 + 3\zeta f_5))) + \xi_Y \\
&= T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(-3f_4)) + \xi_Y
\end{aligned}$$

avec $\xi_Y = T_{u\cdot h_\zeta} q(\omega(u \cdot h_\zeta)^{-1}(Ad(h_\zeta^{-1})(-\kappa(u \cdot h_\zeta)(f_3, f_1 + \zeta f_2))))$. Or κ est homogène de degré 4, nous avons alors que $Y := \kappa(u \cdot h_\zeta)(f_3, f_1 + \zeta f_2) \in \mathfrak{p}^{-2-1+4} = \mathfrak{p}^1$. Ainsi $Ad(h_\zeta^{-1})(Y) \in \mathfrak{p}^0$ et même mieux $Ad(h_\zeta^{-1})(Y) \in \mathfrak{g}^0$ et donc $\xi_Y = 0$.

Des égalités précédentes nous déduisons que

$$T^{-4}_{[X]}E^{\mathbb{C}} = \ker(\mu_*) \oplus Vect(\tilde{\xi_1}, \tilde{\xi_2}, \tilde{\xi_3}, [\tilde{\xi_3}, \tilde{X}]).$$

Le fibré $L = T\mathcal{N}/\ker(\eta)$ au dessus de C_x^{red} s'identifie alors à $HE^{\mathbb{C}}/H^{-2}E^{\mathbb{C}} \oplus F$ au dessus de la courbe $\mu^{-1}(x)$ avec $HE^{\mathbb{C}}$ le fibré horizontal précédemment cité, $H^{-2}E^{\mathbb{C}}$ le relevé horizontal de $T^{-2}M^{\mathbb{C}}$ et F le fibré en droite donné par $[\tilde{\xi_3}, \tilde{X}]$ au dessus de $[X]$. Au dessus de $E_x^{\mathbb{C}}$ les fibrés horizontaux $HE^{\mathbb{C}}$ et $H^{-2}E^{\mathbb{C}}$ sont triviaux alors que le fibré F est isomorphe au fibré trivial donnée par $\tilde{X}$ au dessus de $[X]$. Ainsi notre fibré en droite L au dessus de C_x^{red} est le fibré $5O/(3O \oplus O(-1)) = O(1)$. □

Cette propriété va déterminer notre stratégie. En effet, dans la construction twistorielle inverse nous obtenons habituellement la métrique g par $g = \omega_E \omega_H$ avec $H_x = H^0(C_x, L^{1/2})$ (représentant l'action de $Sp(1)$ sur $\mathcal{Q}$), $E_x = H^0(C_x, N_x \otimes L^{-1/2})$ (représentant l'action de $Sp(n)$ sur $\mathcal{Q}$), et ω_H et ω_E des formes symplectiques définies sur H par le wronskien et sur E par $d\eta$. Cependant comme L est de degré 1 sur les courbes réduites C_x^{red} pour $x \in M^{\mathbb{C}}$ la définition de $L^{1/2}$ sur les courbes doubles pose problème : les fibrés H et E sur $\mathcal{Q}$ ne sont pas bien définis au dessus de $M^{\mathbb{C}}$. Cependant, comme le fait Olivier Biquard dans [Biq07], nous pouvons retrouver notre métrique g à l'aide des trois 2-formes sur $\mathcal{Q}$ associées à une donnée I,J et K de structures presque complexes de $\mathcal{Q}$ vérifiant les relations des quaternions. La connaissance de ces trois 2-formes $\beta_I = g(I.,.)$, $\beta_J = g(J.,.)$ et $\beta_K = g(K.,.)$ suffisent pour retrouver dans un premier temps par exemple la structure presque complexe I puis alors la métrique $g(.,.) = -\beta_I(I.,.)$. Or trois telles 2-formes se retrouvent de la manière suivante : la forme symplectique ω_H sur H procure une métrique Υ sur la fibration $Sym^2(H) \simeq H^0(C_x, L)$ de rang 3 à valeurs dans $[H^0(C_x, \Omega^1_{C_x} \otimes L)]^2$; d'après [Sal82] l'espace des twisteurs est l'espace total de l'ensemble des éléments normés de $Sym^2(H)$ mais comme l'espace des twisteurs peut se comprendre comme étant l'espace total des structures presque complexes sur $\mathcal{Q}$ alors une base orthonormée (b_I, b_J, b_K) de $Sym^2(H)$ pour cette métrique Υ est liée à la donnée de trois structures presque complexes (I, J, K) et donc à la donnée de trois 2-formes comme nous les recherchons. Dans [Sal82] il apparait que ce lien entre un élément normé b de $Sym^2(H)$ et une 2-forme β sur $\mathcal{Q}$ est donnée par $\beta = \omega_E \otimes b \in \Lambda^2(E^* \otimes H^*) = \Lambda^2\mathcal{Q}^*$. Nous retrouvons alors nos 2-formes recherchées en projetant $d\eta$ sur notre base (b_I, b_J, b_K) c'est-à-dire en posant $\beta_I := \Upsilon(d\eta, b_I)$.

Considérons alors le fibré en droite au dessus de $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{L}_y = H^0(C_y, \Omega^1_{C_y} \otimes L). \tag{11.1.2}$$

Au dessus de $y \in \mathcal{Q} - M^{\mathbb{C}}$, $L|_{C_y} = O_{C_y}(2)$ et $\Omega^1_{C_y} = (TC_y)^* = O_{C_y}(-2)$ donc le fibré $\mathcal{L}$ au dessus de y est bien une droite. Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$, d'après le théorème 5.1. de [BE95], le fibré $\Omega^1_{C_x}$ est donnée par la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{C_x^{red}}(-2) \longrightarrow \Omega^1_{C_x} \longrightarrow O_{C_x^{red}}(-1) \longrightarrow 0.$$

Ainsi le fibré $\Omega^1_{C_x} \otimes L$ est bien défini au dessus d'une courbe double C_x et ce fibré est caractérisé par la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{C_x^{red}}(-1) \longrightarrow \Omega^1_{C_x} \otimes L \longrightarrow O_{C_x^{red}} \longrightarrow 0.$$

De la suite exacte longue engendrée par la suite exacte ci-dessus, nous obtenons que $h^0(C_x, \Omega^1_{C_x} \otimes L) = 1$ et donc $\mathcal{L}_x$ est bien une droite.

Remarquons à présent qu'au dessus de $y \in \mathcal{Q} - M^{\mathbb{C}}$ la forme de contact η, restreinte à la courbe C_y, définit un élément $\Theta_y \in \mathcal{L}_y$. Soit $x \in M^{\mathbb{C}}$, la courbe réduite C_x^{red} est tangente à la distribution de contact $\ker(\eta)$ car $\ker(\mu_*) \subset T^{-4}E^{\mathbb{C}}$. Nous pouvons donc prolonger Θ au dessus de $M^{\mathbb{C}}$ par zéro et nous obtenons ainsi une section Θ de $\mathcal{L}$. Nous verrons plus tard au lemme 119 que Θ est transverse à $M^{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{Q}$ et nous permet donc de retrouver $M^{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{Q}$.

Définissons maintenant le fibré W de rang 3 sur $\mathcal{Q}$ par $W_x = H^0(C_x, L)$ (qui est, au dessus de $\mathcal{Q} - M^{\mathbb{C}}$, le fibré $Sym^2(H^0(C_x, L^{1/2}))$). Remarquons qu'au dessus de $M^{\mathbb{C}}$, W est bien un fibré de rang 3 d'après la suite exacte (11.1.1). Or l'espace $H^0(\mathbb{P}^1, O(2))(\simeq Sym^2(H^0(\mathbb{P}^1, O(1)))$ est muni d'une métrique canonique $\Upsilon(= \omega_H \otimes \omega_H)$, définie par

$$\Upsilon(u, v) = ud^2v + vd^2u - dudv \in H^0(\mathbb{P}^1, (\Omega^1_{\mathbb{P}^1})^2 \otimes L^2) \simeq \mathbb{C}. \tag{11.1.3}$$

Concrètement, si nous avons une coordonnée z sur $\mathbb{P}^1$ et si les sections u et v sont données par $u = a + bz + cz^2$ et $v = a' + b'z + c'z^2$ alors Υ s'écrit

$$\Upsilon(u, v) = (2(ac' + a'c) - bb')dz^2. \tag{11.1.4}$$

Le fibré W est donc muni d'une métrique Υ à valeur dans $\mathcal{L}^2$ (plus tard au lemme 121 nous comprendrons plus en détail le comportement de Υ sur le bord $M^{\mathbb{C}}$). L'élément $\Theta^{-2}\Upsilon$ est ainsi une métrique sur W.

Nous réalisons ensuite W_y comme l'espace des 2-formes sur $H^0(C_y, \mathsf{N}_y)$, avec N_y le fibré normal de la courbe C_y dans $\mathcal{N}$, de la manière suivante : si $y \in \mathcal{Q} - M^{\mathbb{C}}$, la courbe C_y est alors transverse à la distribution de contact $\ker(\eta)$, donc le fibré normal N_y s'identifie à $\ker(\eta)$ et $d\eta$ est bien défini sur N_y. Nous disposons ainsi d'une 2-forme β sur $\mathcal{Q} - M^{\mathbb{C}}$, à valeurs dans W, définie par

$$\beta : \Lambda^2 H^0(C_y, \mathsf{N}_y) \xrightarrow{d\eta} W_y.$$

Choisissant alors une base orthonormale locale (b_1, b_2, b_3) de W nous disposons des trois 2-formes locales sur $\mathcal{Q}$

$$\beta_i := \Theta^{-2}\Upsilon(\beta, b_i). \tag{11.1.5}$$

La connaissance de ces trois 2-formes suffit à caractériser la métrique g. En effet, ces trois 2-formes sont reliées à g à l'aide de trois structures presque complexe I_1, I_2 et I_3 vérifiant la relation des quaternions $I_1I_2I_3 = -1$ (ou $I_1I_2I_3 = 1$) par $\beta_i(X,Y) = g(I_iX, Y)$ pour tout $X, Y \in T\mathcal{Q}$. Ainsi la connaissance de β_2 et de β_3 permet de déterminer la structure presque complexe I_1 comme étant l'unique endomorphisme I_1 vérifiant $\beta_2(I_1X, Y) = g(I_2I_1X, Y) = -\beta_2(X,Y)$ (ou $\beta_2(X,Y)$) pour tout $X, Y \in T\mathcal{Q}$. Nous retrouvons alors g par la relation $g(X,Y) = -\beta_1(I_1X, Y)$. Remarquons qu'à priori nous ne savons pas si $I_1I_2I_3$ est égal à 1 ou -1 : nous ne retrouvons donc g qu'à un facteur ± 1 près ce qui sera suffisant pour lire la géométrie parabolique sur la métrique g du bord $M^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q}$. Notons que ce facteur ± 1 est légitime car nous n'avons pas pris en compte l'orientation de $\mathcal{Q}$ pour retrouver la métrique g.

11.2 Nos systèmes de coordonnées et la comparaison de notre cas avec le cas modèle

Donnons à présent le système de coordonnées avec lequel nous allons travailler qui est celui du chapitre 10.1.2. Soit $x_0 \in M^{\mathbb{C}}$ et $u_0 \in \mathcal{G}^{\mathbb{C}}_{x_0}$, nous disposons alors au voisinage de x_0 des coordonnées distinguées

$$\begin{array}{rccc} F : & V \subset \mathbb{C}^5 & \longrightarrow & M_0^{\mathbb{C}} \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & \longmapsto & p \circ \phi(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5) \end{array}$$

avec $\phi(Z) := Fl_1^{\omega^{-1}(Z)}(u_0)$ pour tout $Z \in \mathfrak{p}_-$. Avec ces coordonnées distinguées vient une section σ du fibré $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \to M^{\mathbb{C}}$ définie par $\sigma = \phi \circ F^{-1}$, et des champs de vecteurs $\xi_i(x) = T_{\sigma(x)}p(\omega(\sigma(x))^{-1}(f_i))$ pour $x \in F(V)$ vérifiant $T^{-1}M^{\mathbb{C}} = Vect(\xi_1, \xi_2)$, $T^{-2}M^{\mathbb{C}} = Vect(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ et $Vect(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) = TM^{\mathbb{C}}$. Nous pouvons alors définir des coordonnées de $E^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(T^{-1}M^{\mathbb{C}})$ au dessus de $F(V)$ par

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} \subset \mathbb{C}^6 & \longrightarrow & \mathbb{P}(T^{-1}M_0^{\mathbb{C}}) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \zeta) & \longmapsto & ((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \xi_1 + \zeta\xi_2). \end{array}$$

Or comme nous l'avons vu, l'espace $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \zeta) \in \tilde{V} : x_1 = 0\}$ s'identifie à un voisinage de la courbe C_{x_0} dans $\mathcal{N}$. Ceci nous fournit alors

des coordonnées $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de $\mathcal{N}$ au voisinage de C_{x_0} et la courbe double C_{x_0} a pour équation dans ces coordonnées

$$C_{x_0} : u_1^2 = u_2 = u_3 = u_4 = 0.$$

Dans le cas modèle nous avons :

Proposition 114 *Dans le cas modèle les champs de vecteurs ξ_i^0 précédemment définis vérifient :*

$$\begin{array}{rcl}
\xi_1^0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & \partial_{x_1} - x_2\partial_{x_3} + (-\frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2)\partial_{x_4} + \frac{1}{2}x_2^2\partial_{x_5} \\
\xi_2^0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & \partial_{x_2} + x_1\partial_{x_3} + \frac{1}{2}x_1^2\partial_{x_4} + (\frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2)\partial_{x_5} \\
\xi_3^0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & \partial_{x_3} + \frac{3}{2}x_1\partial_{x_4} - \frac{3}{2}x_2\partial_{x_5} \\
\xi_4^0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & \partial_{x_4} \\
\xi_5^0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & \partial_{x_5}
\end{array}$$

avec $\partial_{x_i}(x) = T_{F^{-1}(x)}F(\partial_{f_i})$.

Preuve de la Proposition

Il s'agit ici de relier les deux bases de champs de vecteurs $(\xi_i^0)_{1\leq i\leq 5}$ et $(\partial_{x_i})_{1\leq i\leq 5}$ en un point $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ voisin de x_0. Or

$$\begin{array}{rcl}
\xi_i^0(x) & = & T_{\sigma(x)}p_0(\omega_0(\sigma(x))^{-1}(f_i)) \\
\text{et } \partial_{x_i}(x) & = & T_{\sigma(x)}p_0(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_i})).
\end{array}$$

Nous souhaitons donc comparer les éléments $\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_i}))$ aux éléments f_i dans $\mathfrak{g}$. Or dans le modèle, nous reconnaissons ces derniers éléments

$$\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_i})) = T_{\phi(F^{-1}(x))}\lambda_{\phi(F^{-1}(x))^{-1}}(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_i})),$$

avec $\lambda_g : G \to G$ la multiplication à gauche, comme étant les dérivées logarithmiques à gauche de $\phi : \mathfrak{g} \to G$ suivant ∂_{f_i} :

$$\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_i})) = \delta(\Phi)(F^{-1}(x))(\partial_{f_i})$$

avec δ la dérivée logarithmique à gauche. À présent, par homogénéité du modèle nous pouvons supposer que $x_0 = P_{\{\alpha_1\}}$ et $u_0 = id \in G$. Ainsi ϕ est simplement la fonction exponentielle. Mais la dérivée logarithmique à gauche de l'exponentielle est bien connue [ČS09, p. 561] ou [KPS93, p. 39] : soit $X \in \mathfrak{g}$ l'application $\delta(\exp)(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est définie par

$$\delta(\exp)(X) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)!}(adX)^p.$$

Nous avons alors

$$\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_i})) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)!}(ad(F^{-1}(x)))^p(f_i).$$

Comme $F^{-1}(x)$ et les f_i sont dans la sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{p}_-$ la somme précédente est finie et nous obtenons

$$\begin{array}{rcl}
\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_1})) & = & f_1 + x_2 f_3 + (\frac{3}{2}x_3 - x_1x_2)f_4 + x_2^2 f_5, \\
\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_2})) & = & f_2 - x_1 f_3 + x_1^2 f_4 - (\frac{3}{2}x_3 + x_1x_2)f_5, \\
\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_3})) & = & f_3 - \frac{3}{2}x_1 f_4 + \frac{3}{2}x_2 f_5, \\
\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_4})) & = & f_4, \\
\omega_0(\sigma(x))(T_{F^{-1}(x)}\phi(\partial_{f_5})) & = & f_5,
\end{array}$$

et donc

$$\begin{array}{rcl}
\partial_{x_1}(x) & = & \xi_1^0 + x_2\xi_3^0 + (\frac{3}{2}x_3 - x_1x_2)\xi_4^0 + x_2^2\xi_5^0, \\
\partial_{x_2}(x) & = & \xi_2^0 - x_1\xi_3^0 + x_1^2\xi_4^0 - (\frac{3}{2}x_3 + x_1x_2)\xi_5^0, \\
\partial_{x_3}(x) & = & \xi_3^0 - \frac{3}{2}x_1\xi_4^0 + \frac{3}{2}x_2\xi_5^0, \\
\partial_{x_4}(x) & = & \xi_4^0, \\
\partial_{x_5}(x) & = & \xi_5^0.
\end{array}$$

Inversant alors ce système nous obtenons le résultat souhaité. □

Remarquons que dans le modèle tout est explicite : nous aurions pu calculer ξ_i^0 directement car la connexion de Cartan ω_0 est explicite : $\omega_0(g)(\xi) = T_g\lambda_{g^{-1}}(\xi)$. L'approche que nous avons adoptée permet de révéler le lien entre nos champs de vecteurs à l'aide du crochet de Lie sur $M_0^{\mathbb{C}}$:

$$\partial_{x_i}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)!}(\mathcal{L}_X)^p(\xi_i^0), \tag{11.2.1}$$

en considérant les coordonnées $(x_1, \ldots, x_5)$ comme fixes, avec $\mathcal{L}_\xi$ la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs ξ et avec $X = \omega(\sigma(x))^{-1}(F^{-1}(x)) = x_1\xi_1^0 + x_2\xi_2^0 + x_3\xi_3^0 + x_4\xi_4^0 + x_5\xi_5^0$ et .

Rappelons que nous avons une dilatation Ψ_t qui à un élément de V, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ associe l'élément $(tx_1, tx_2, t^2x_3, t^3x_4, t^3x_5)$. Nous allons nous servir de cette dilatation pour exprimer à quel ordre une géométrie parabolique régulière et normale de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ est proche de la géométrie modèle. Pour cela, il nous suffit de répondre à cette question pour les champs de vecteurs ξ_1 et ξ_2 qui engendre la distribution $T^{-1}M$ car $T^{-1}M$ définit la géométrie parabolique de M.

Proposition 115 *Dans le cas général les champs de vecteurs ξ_i précédemment définis vérifient :*

$$\begin{array}{rrcl} & \Psi_t^*\xi_1 & = & \frac{\xi_1^0}{t} + o(t^2), \\ & \Psi_t^*\xi_2 & = & \frac{\xi_2^0}{t} + o(t^2), \\ & \Psi_t^*\xi_3 & = & \frac{\xi_3^0}{t^2} + o(t), \\ & \Psi_t^*\xi_4 & = & \frac{\xi_4^0}{t^3} + o(1) \\ et & \Psi_t^*\xi_5 & = & \frac{\xi_5^0}{t^3} + o(1) \end{array}$$

lorsque t tend vers 0.

Preuve de la proposition

Cette proposition est une application du théorème 58. Dans notre cas d'une géométrie parabolique régulière et normale $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ la fonction de courbure $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$ de ω est 4-homogène d'après le théorème 52 et le fait que la cohomologie $H^2(\mathfrak{p}_-, \mathfrak{g})_i$ est nulle pour tout $i \neq 4$. En appliquant le théorème 58 nous avons directement la proposition souhaitée.

Cependant reprenons la fin de la démonstration du théorème 58 qui se comprend mieux sur un exemple, qui ici est celui d'une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$. La première partie de la démonstration, que nous n'allons pas redémontrer ici, consiste à montrer que nous avons la relation (11.2.1) dans le cas général d'une géométrie parabolique de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ quelconque.

Or nous connaissons suffisamment les crochets entre les champs de vecteurs ξ_i : d'après le lemme 31, pour $y \in U \subset M$

$$[\xi_i, \xi_j](y) = T_{\sigma(y)}p(\omega(\sigma(y))^{-1}([f_i, f_j] - \kappa(\sigma(y))(f_i, f_j))).$$

Ainsi comme la fonction de courbure $\kappa \in \Omega^2(M, \mathcal{A}M)$ est 4-homogène, nous avons

$$\begin{array}{rclrclrcl} [\xi_1,\xi_2](y) & = & 2\xi_3, & [\xi_1,\xi_3](y) & = & 3\xi_4, & [\xi_1,\xi_4](y) & = & 0, \\ [\xi_1,\xi_5](y) & = & 0, & [\xi_2,\xi_3](y) & = & -3\xi_5, & [\xi_2,\xi_4](y) & = & 0, \\ [\xi_2,\xi_5](y) & = & 0, & [\xi_3,\xi_4](y) & = & a\xi_1 + b\xi_2, & [\xi_3,\xi_5](y) & = & c\xi_1 + d\xi_2, \\ [\xi_4,\xi_5](y) & = & e\xi_1 + & f\xi_2 + g\xi_3, & & & & & \end{array}$$

avec a, b, c, d, e, f, g des fonctions lisses sur M. Nous retrouvons alors les relations présentes dans la démonstration de la proposition précédente à un ordre 4 près, c'est-à-dire que nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} \partial_{x_1}(x) & = & \xi_1 - \frac{1}{2}\Big(- 2x_2\xi_3 - 3x_3\xi_4\Big) + \frac{1}{6}\Big(- 6x_2x_1\xi_4 + 6x_2^2\xi_5 \\ & & +2x_2x_4(a\xi_1 + b\xi_2) + 2x_2x_5(c\xi_1 + d\xi_2) - 3x_3^2(a\xi_1 + b\xi_2) \\ & & +3x_3x_5(e\xi_1 + f\xi_2 + g\xi_3)\Big) + \ldots \end{array}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Psi_t^*\partial_{x_1}(x) = \tfrac{1}{t}\partial_{x_1} &= (1+O(t^4))\Psi_t^*\xi_1 + O(t^4)\Psi_t^*\xi_2 + (tx_2+O(t^5))\Psi_t^*\xi_3 \\
&\quad +(t^2(\tfrac{3}{2}x_3 - x_1x_2)+O(t^6))\Psi_t^*\xi_4 + (t^2x_2^2+O(t^6))\Psi_t^*\xi_5, \\
\Psi_t^*\partial_{x_2}(x) = \tfrac{1}{t}\partial_{x_2} &= O(t^4)\Psi_t^*\xi_1 + (1+O(t^4))\Psi_t^*\xi_2 + (-x_1t+O(t^5))\Psi_t^*\xi_3 \\
&\quad +(t^2x_1^2+O(t^6))\xi_4 + (-t^2(\tfrac{3}{2}x_3 + x_1x_2)+O(t^6))\xi_5, \\
\Psi_t^*\partial_{x_3}(x) = \tfrac{1}{t^2}\partial_{x_3} &= O(t^3)\Psi_t^*\xi_1 + O(t^3)\Psi_t^*\xi_2 + (1+O(t^4))\Psi_t^*\xi_3 \\
&\quad +(-\tfrac{3}{2}tx_1+O(t^3))\Psi_t^*\xi_4 + (\tfrac{3}{2}tx_2+O(t^3))\Psi_t^*\xi_5, \\
\Psi_t^*\partial_{x_4}(x) = \tfrac{1}{t^3}\partial_{x_4} &= O(t^2)\Psi_t^*\xi_1 + O(t^2)\Psi_t^*\xi_2 + O(t^3)\Psi_t^*\xi_3 \\
&\quad +(1+O(t^4))\Psi_t^*\xi_4 + O(t^4)\Psi_t^*\xi_5, \\
\Psi_t^*\partial_{x_5}(x) = \tfrac{1}{t^3}\partial_{x_5} &= O(t^2)\Psi_t^*\xi_1 + O(t^2)\Psi_t^*\xi_2 + O(t^3)\Psi_t^*\xi_3 \\
&\quad +O(t^4)\Psi_t^*\xi_4 + (1+O(t^4))\Psi_t^*\xi_5.
\end{aligned}$$

Inversant alors ce système nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Psi_t^*\xi_1(x) &= \tfrac{1}{t}\Big(\partial_{x_1} - x_2\partial_{x_3} + (-\tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2)\partial_{x_4} + \tfrac{1}{2}x_2^2\partial_{x_5}\Big) + O(t^3) \\
\Psi_t^*\xi_2(x) &= \tfrac{1}{t}\Big(\partial_{x_2} + x_1\partial_{x_3} + \tfrac{1}{2}x_1^2\partial_{x_4} + (\tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2)\partial_{x_5}\Big) + O(t^3) \\
\Psi_t^*\xi_3(x) &= \tfrac{1}{t^2}\Big(\partial_{x_3} + \tfrac{3}{2}x_1\partial_{x_4} - \tfrac{3}{2}x_2\partial_{x_5}\Big) + O(t^2) \\
\Psi_t^*\xi_4(x) &= \tfrac{1}{t^3}\partial_{x_4} + O(t) \\
\Psi_t^*\xi_5(x) &= \tfrac{1}{t^3}\partial_{x_5} + O(t)
\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. □

Ainsi le champ de vecteur ξ_1 est donnée par

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (1+f_1(x))\partial_{x_1} + f_2(x)\partial_{x_2} + (-x_2+f_3(x))\partial_{x_3} \\
&\quad +(-\tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 + f_4(x))\partial_{x_4} + (\tfrac{1}{2}x_2^2 + f_5(x))\partial_{x_5}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Psi_t^*f_1(x) &= f_1(\Psi_t(x)) = o(t^3), \\
\Psi_t^*f_2(x) &= f_2(\Psi_t(x)) = o(t^3), \\
\Psi_t^*f_3(x) &= f_3(\Psi_t(x)) = o(t^4), \\
\Psi_t^*f_4(x) &= f_4(\Psi_t(x)) = o(t^5), \\
\Psi_t^*f_5(x) &= f_5(\Psi_t(x)) = o(t^5).
\end{aligned}$$

Remarque 116 *Pour des notations plus aérées adoptons dès à présent la notation $o(t^i)$ pour indiquer un élément qui sous l'effet de la dilatation Ψ_t de $M^{\mathbb{C}}$ (ou $\tilde{\Psi}_t$ de $\mathcal{N}$ ou $\hat{\Psi}_t$ de $\mathcal{Q}$) est négligeable par rapport à t^3. Comme $\psi_t(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (tx_1, tx_2, t^2x_3, t^3x_4, t^3x_5)$ dans $M^{\mathbb{C}}$ l'égalité précédente s'écrit*

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (1+o(t^3))\partial_{x_1} + o(t^3)\partial_{x_2} + (-x_2+o(t^4))\partial_{x_3} \\
&\quad +(-\tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 + o(t^5))\partial_{x_4} + (\tfrac{1}{2}x_2^2 + o(t^5))\partial_{x_5} \\
&= \partial_{x_1} - x_2\partial_{x_3} + (-\tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2)\partial_{x_4} + \tfrac{1}{2}x_2^2\partial_{x_5} + o(t^2).
\end{aligned}$$

Retrouvons à présent dans nos coordonnées $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de $\mathcal{N}$ les équations des courbes déformées.

Proposition 117 *Les déformations de la courbe double C_{x_0} dans $\mathcal{N}$ sont données par les équations*

$$C_{(x,a,b,c)} : \begin{cases} (u_1 + x_1u_5 - x_2 + o(t^4))^2 = bu_5^2 + 2au_5 + c, \\ u_2 = x_3 - x_1x_2 - a + (x_1^2 - b)u_5 + 2x_1u_1 + o(t^5), \\ u_3 = x_4 - \frac{1}{2}x_1x_3 + (b - x_1^2)u_1 + 2x_1u_2 + o(t^6), \\ u_4 - \frac{u_1u_2}{2} = x_5 + \frac{1}{2}x_2x_3 + (a + x_3 + x_1x_2)u_1 - 2x_2u_2 + o(t^6), \end{cases}$$

pour (x, a, b, c) dans un ouvert de $\mathbb{C}^8$.

Preuve de la proposition

Commençons par regarder ce que devient l'équation d'une courbe double dans $\mathcal{N}$ dans le cas général. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ dans le voisinage de $x_0 \in M^{\mathbb{C}}$, la courbe C_x dans $\mathcal{N}$ est la courbe $\nu(\mu^{-1}(x))$ doublée dans la direction $\nu_*(H^{-1}E^{\mathbb{C}}/\ker(\mu_*))$ avec $H^{-1}E^{\mathbb{C}}$ le relevé horizontal de $T^{-1}M^{\mathbb{C}}$ dans $TE^{\mathbb{C}}$ donné à l'aide de la section σ par la remarque 103. Soit $(x, \zeta) \in \mu^{-1}(x)$ alors nous trouvons $\nu(x, \zeta)$ en suivant la feuille contenant ce point jusqu'au sous espace $\{(0, x_2, x_3, x_4, x_5, \zeta)\} \subset E^{\mathbb{C}}$. Intégrons donc le champ de vecteurs $\tilde{\xi}_1 + \zeta\tilde{\xi}_2$ partant du point (x, ζ), avec $\tilde{\xi}_i$ le relevé horizontal de ξ_i défini par $\tilde{\xi}_i(x, \zeta) := T_{\sigma(x)\cdot h}q(T_{\sigma(x)}r^h(T_x\sigma(\xi_i))) \in T_{q(\sigma(x)\cdot h)}E^{\mathbb{C}}$. Or d'après les deux propositions précédentes

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1 + \zeta\tilde{\xi}_2 &= (1 + o(t^3))\partial_{x_1} + (\zeta + o(t^3))\partial_{x_2} + (-x_2 + x_1\zeta + o(t^4))\partial_{x_3} \\ &\quad +(-\tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 + \tfrac{1}{2}x_1^2\zeta + o(t^5))\partial_{x_4} \\ &\quad +(\tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{3}{2}x_3\zeta - \tfrac{1}{2}x_1x_2\zeta + o(t^5))\partial_{x_5} \\ &= \partial_{x_1} + \zeta\partial_{x_2} + (-x_2 + x_1\zeta)\partial_{x_3} + (-\tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 + \tfrac{1}{2}x_1^2\zeta)\partial_{x_4} \\ &\quad +(\tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{3}{2}x_3\zeta - \tfrac{1}{2}x_1x_2\zeta)\partial_{x_5} + o(t^2). \end{aligned}$$

Notant c le chemin suivi sur notre feuille nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} c(s) &= (x_1 + s + o(t^4), x_2 + \zeta s + o(t^4), x_3 - x_2s + x_1\zeta s + o(t^5), \\ &\quad x_4 - \tfrac{3}{2}x_3s + \tfrac{1}{2}x_2s^2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2s - \tfrac{1}{2}x_1\zeta s^2 + \tfrac{1}{2}x_1^2\zeta s + o(t^6), \\ &\quad x_5 + \tfrac{3}{2}x_3\zeta s + \tfrac{1}{2}x_2^2s - \tfrac{1}{2}x_2\zeta s^2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2\zeta s + \tfrac{1}{2}x_1\zeta^2s^2 + o(t^6)) \end{aligned}$$

car s est d'ordre 1 et donc

$$\begin{aligned} c(-x_1) &= (o(t^4), x_2 - \zeta x_1 + o(t^4), x_3 + x_1x_2 - x_1^2\zeta + o(t^5), \\ &\quad x_4 + \tfrac{3}{2}x_1x_3 + x_1^2x_2 - x_1^3\zeta + o(t^6), \\ &\quad x_5 - \tfrac{3}{2}x_1x_3\zeta - \tfrac{1}{2}x_1x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_1^3\zeta^2 + o(t^6)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\nu(x,\zeta) &= (x_2-\zeta x_1+o(t^4), x_3+x_1x_2-x_1^2\zeta+o(t^5), x_4+\tfrac{3}{2}x_1x_3+x_1^2x_2\\ &\quad -x_1^3\zeta+o(t^6), x_5-\tfrac{3}{2}x_1x_3\zeta-\tfrac{1}{2}x_1x_2^2+\tfrac{1}{2}x_1^3\zeta^2+o(t^6),\zeta)\end{aligned}$$

dans les coordonnées (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) de $\mathcal{N}$ et l'équation de la courbe double C_x est

$$C_x : \begin{cases} (u_1-x_2+x_1u_5+o(t^4))^2=0\\ u_2=x_3+x_1x_2-x_1^2u_5+o(t^5)\\ u_3=x_4+\frac{3}{2}x_1x_3+x_1^2x_2-x_1^3u_5+o(t^6)\\ u_4=x_5-\frac{3}{2}x_1x_3u_5-\frac{1}{2}x_1x_2^2+\frac{1}{2}x_1^3u_5^2+o(t^6)\end{cases} \tag{11.2.2}$$

Rappelons que la dilatation Ψ_t sur $M^{\mathbb{C}}$ engendre une dilatation $\tilde{\Psi}_t$ sur $\mathcal{N}$ qui dans les coordonnées (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) s'écrit $\tilde{\Psi}_t(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)=(tu_1,t^2u_2,t^3u_3,t^3u_4,u_5)$. Avec ce qui précède, il apparait que l'espace $\mathcal{N}_t$, défini dans le chapitre 10.2.2, coïncide avec le modèle $\mathcal{N}_0$ jusqu'à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_t^* C_x : &\begin{cases} (tu_1-tx_2+tx_1u_5+o(t^4))^2=0\\ t^2u_2=t^2(x_3+x_1x_2-x_1^2u_5)+o(t^5)\\ t^3u_3=t^3(x_4+\frac{3}{2}x_1x_3+x_1^2x_2-x_1^3u_5)+o(t^6)\\ t^3u_4=t^3(x_5-\frac{3}{2}x_1x_3u_5-\frac{1}{2}x_1x_2^2+\frac{1}{2}x_1^3u_5^2)+o(t^6)\end{cases}\\ \iff &\begin{cases} (u_1-tx_2+tx_1u_5)^2=0+o(t^3)\\ u_2=x_3+x_1x_2-x_1^2u_5+o(t^3)\\ u_3=x_4+\frac{3}{2}x_1x_3+x_1^2x_2-x_1^3u_5+o(t^3)\\ u_4=x_5-\frac{3}{2}x_1x_3u_5-\frac{1}{2}x_1x_2^2+\frac{1}{2}x_1^3u_5^2+o(t^3).\end{cases}\end{aligned}$$

Cette coïncidence jusqu'à l'ordre 3 et l'étude du cas modèle effectué au chapitre 10.1 et en particulier les équations des courbes lisses (10.1.4), nous donnent la proposition souhaitée. □

Nous avons ainsi les coordonnées $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c)$ de $\mathcal{Q}$ et la dilatation Ψ_t engendre une dilatation $\hat{\Psi}_t$ sur $\mathcal{Q}$ qui s'exprime dans ces coordonnées par

$$\hat{\Psi}_t(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c)=(tx_1,tx_2,t^2x_3,t^3x_4,t^3x_5,t^2a,t^2b,t^2c).$$

Nous sommes à présent armés pour reconstruire notre métrique quaternion-kählérienne.

11.3 Reconstruction de la métrique quaternion kählérienne

11.3.1 La section Θ définit bien le bord $M^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{Q}$

Commençons par donner la forme de contact η de $\mathcal{N}$ dans les coordonnées $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. Pour cela rappelons que $\ker(\eta) = \nu_*(T^{-4}E^{\mathbb{C}})$. Or dans la démonstration de la propriété 113 nous avons vu que $T^{-4}E^{\mathbb{C}}(:= q_*(\omega^{-1}(Vect(f_1, f_2, f_3, f_4)) \oplus \ker(\mu_*))$ au dessus du point $[\xi_1 + \zeta\xi_2]$ était engendré par $\ker(\mu_*) = \mathbb{C}\partial_\zeta$, $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$, $\tilde{\xi}_3$ et $[\tilde{\xi}_3, \widetilde{\xi_1 + \zeta\xi_2}]$. Calculons alors l'image par ν_* de ces champs de vecteurs. D'après l'équation (11.2.2)

$$\begin{aligned}
\nu_*(\partial_{x_1}) &= (-u_5 + o(t^3))\partial_{u_1} + (x_2 - 2x_1u_5 + o(t^4))\partial_{u_2} \\
&\quad +(\tfrac{3}{2}x_3 + 2x_1x_2 - 3x_1^2u_5 + o(t^5))\partial_{u_3} \\
&\quad +(-\tfrac{3}{2}x_3u_5 - \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{3}{2}x_1^2u_5^2 + o(t^5))\partial_{u_4} \\
&= -u_5\partial_{u_1} + (x_2 - 2x_1u_5)\partial_{u_2} + (\tfrac{3}{2}x_3 + 2x_1x_2 - 3x_1^2u_5)\partial_{u_3} \\
&\quad +(-\tfrac{3}{2}x_3u_5 - \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{3}{2}x_1^2u_5^2)\partial_{u_4} + o(t^2), \\
\nu_*(\partial_{x_2}) &= \partial_{u_1} + x_1\partial_{u_2} + x_1^2\partial_{u_3} - x_1x_2\partial_{u_4} + o(t^2), \\
\nu_*(\partial_{x_3}) &= \partial_{u_2} + \tfrac{3}{2}x_1\partial_{u_3} - \tfrac{3}{2}x_1u_5\partial_{u_4} + o(t), \\
\nu_*(\partial_{x_4}) &= \partial_{u_3} + o(1), \\
\nu_*(\partial_{x_5}) &= \partial_{u_4} + o(1), \\
\nu_*(\partial_\zeta) &= -x_1\partial_{u_1} - x_1^2\partial_{u_2} - x_1^3\partial_{u_3} + (-\tfrac{3}{2}x_1x_3 + x_1^3u_5)\partial_{u_4} + \partial_{u_5} + o(t^3).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\nu_*(\tilde{\xi}_2) &= \nu_*\partial_{x_2} + x_1\nu_*\partial_{x_3} + \tfrac{1}{2}x_1^2\nu_*\partial_{x_4} + (\tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_2)\nu_*\partial_{x_5} + o(t^2) \\
&= \partial_{u_1} + 2x_1\partial_{u_2} + 3x_1^2\partial_{u_3} + \tfrac{3}{2}(x_3 - x_1x_2 - x_1^2u_5)\partial_{u_4} + o(t^2), \\
\nu_*(\tilde{\xi}_1) &= -u_5\nu_*(\tilde{\xi}_2), \\
\nu_*(\tilde{\xi}_3) &= \partial_{u_2} + 3x_1\partial_{u_3} + \tfrac{3}{2}(-x_1u_5 - x_2)\partial_{u_4} + o(t),
\end{aligned}$$

et

$$\nu_*([\tilde{\xi}_3, \widetilde{\xi_1 + \zeta\xi_2}]) = \nu_*(-3\partial_{x_4} + 3\zeta\partial_{x_5} + o(1)) = -3\partial_{u_3} + 3u_5\partial_{u_4} + o(1).$$

Nous avons alors sur la courbe double $C_x \subset \mathcal{N}$

$$\begin{aligned}
\ker(\eta) &:= Vect(\ \nu_*(\partial_\zeta), \nu_*(\tilde{\xi}_2), \nu_*(\tilde{\xi}_3), \nu_*([\tilde{\xi}_3, \widetilde{\xi_1 + \zeta\xi_2}])\ ) \\
&= Vect(\ \partial_{u_3} - u_5\partial_{u_4} + o(1)\ ,\ \partial_{u_2} + \tfrac{3}{2}(-x_2 + x_1u_5)\partial_{u_4} + o(t), \\
&\qquad \partial_{u_1} + \tfrac{3}{2}(x_3 + x_1x_2 - x_1^2u_5)\partial_{u_4} + o(t^2)\ ,\ \partial_{u_5} + +o(t^3)\ ) \\
&= Vect(\ \partial_{u_3} - u_5\partial_{u_4} + o(1)\ ,\ \partial_{u_2} - \tfrac{3}{2}u_1\partial_{u_4} + o(t), \\
&\qquad \partial_{u_1} + \tfrac{3}{2}u_2\partial_{u_4} + o(t^2)\ ,\ \partial_{u_5} + o(t^3)\ ).
\end{aligned}$$

Ainsi sur la courbe double C_x la forme de contact est donnée par

$$\begin{aligned}\eta &:= (-\tfrac{3}{2}u_2 + o(t^5))du_1 + (\tfrac{3}{2}u_1 + o(t^4))du_2 + (u_5 + o(t^3))du_3 \\ &\quad +o(t^6)du_5 + du_4 \\ &= -\tfrac{3}{2}u_2du_1 + \tfrac{3}{2}u_1du_2 + u_5du_3 + du_4 + o(t^6).\end{aligned}$$

Comme les courbes doubles recouvrent un voisinage de la courbe double C_{x_0} dans $\mathcal{N}$, nous pouvons définir la forme de contacte comme précédemment sur tout ce voisinage.

Propriété 118 *Dans les coordonnées $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de $\mathcal{N}$ la forme de contact de $\mathcal{N}$ est donnée par*

$$\eta = -\frac{3}{2}u_2du_1 + \frac{3}{2}u_1du_2 + u_5du_3 + du_4 + o(t^6). \tag{11.3.1}$$

Fixons à présent une trivialisation de $\mathcal{L}$. Il sera commode pour la suite de choisir la section particulière $\frac{du_5}{u_1} \otimes 1$ de $\Omega^1_{C_{x_0}} \otimes L$ sur C_{x_0} que nous étendons en une trivialisation $l : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ dans un voisinage de x_0 dans $\mathcal{Q}$. Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 119 *La section Θ est transverse à $M^{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{Q}$.*

Preuve du Lemme

Soit (x, a, b, c) un point de $\mathcal{Q}$. L'équation de la courbe $C_{(x,a,b,c)} \in \mathcal{N}$ est

$$C_{(x,a,b,c)} : \begin{cases} (u_1 + x_1u_5 - x_2)^2 = bu_5^2 + 2au_5 + c + o(t^5), \\ u_2 = x_3 - x_1x_2 - a + (x_1^2 - b)u_5 + 2x_1u_1 + o(t^5), \\ u_3 = x_4 - \frac{1}{2}x_1x_3 + (b - x_1^2)u_1 + 2x_1u_2 + o(t^6), \\ u_4 - \frac{u_1u_2}{2} = x_5 + \frac{1}{2}x_2x_3 + (a + x_3 + x_1x_2)u_1 - 2x_2u_2 + o(t^6), \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (u_1 + x_1u_5 - x_2)(du_1 + x_1du_5) = (bu_5 + a)du_5 + o(t^5), \\ du_2 = (x_1^2 - b)du_5 + 2x_1du_1 + o(t^5), \\ du_3 = (b - x_1^2)du_1 + 2x_1du_2 + o(t^6), \\ du_4 - \frac{u_2du_1}{2} - \frac{u_1du_2}{2} = (a + x_3 + x_1x_2)du_1 - 2x_2du_2 + o(t^6). \end{cases}$$

Ainsi la forme de contact η restreinte à cette courbe vaut

$$\begin{aligned}
\Theta(x,a,b,c) &= \eta|_{C_{(x,a,b,c)}} \\
&= -\tfrac{3}{2}u_2du_1+\tfrac{3}{2}u_1du_2+u_5du_3+du_4+o(t^6) \\
&= -\tfrac{3}{2}u_2du_1+\tfrac{3}{2}u_1du_2+u_5((b-x_1^2)du_1+2x_1du_2) \\
&\quad +\tfrac{u_2du_1}{2}+\tfrac{u_1du_2}{2}+(a+x_3+x_1x_2)du_1-2x_2du_2+o(t^6) \\
&= (-u_2+a+x_3+x_1x_2+bu_5-x_1^2u_5)du_1 \\
&\quad +(2u_1-2x_2+2x_1u_5)((x_1^2-b)du_5+2x_1du_1)+o(t^6) \\
&= 2(u_1-x_2+x_1u_5)(x_1^2-b)du_5+2(a-x_1x_2+x_1^2u_5+bu_5 \\
&\quad +x_1u_1)du_1+o(t^6) \\
&= 2[(u_1-x_2+x_1u_5)(x_1^2-b)du_5+(a+bu_5)du_1+x_1(u_1-x_2 \\
&\quad +x_1u_5)du_1]+o(t^6) \\
&= 2[-b(u_1-x_2+x_1u_5)du_5+x_1(bu_5+a)du_5+(a+bu_5)du_1] \\
&\quad +o(t^6) \\
&= 2\big[(a+bu_5)^2-b(u_1-x_2+x_1u_5)^2+x_1(bu_5+a)(u_1-x_2 \\
&\quad +x_1u_5)\big]\tfrac{du_5}{u_1-x_2+x_1u_5}+o(t^6) \\
&= 2[a^2-bc+x_1(bu_5+a)(u_1-x_2+x_1u_5)]\tfrac{du_5}{u_1-x_2+x_1u_5}+o(t^6).
\end{aligned}$$

Or $2[a^2-bc+x_1(bu_5+a)(u_1-x_2+x_1u_5)]$ est non nul si a et b sont non nuls. La section Θ est donc transverse à $M^{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{Q}$. □

Remarque 120 *Pour nos chemins favoris :* $Q(s) := (0, sa_0, sb_0, sc_0)$ *dans* $\mathcal{Q}$ *avec* $\Delta_0 := a_0^2 - b_0c_0 \neq 0$*, nous avons*

$$l\Theta(Q(s)) = 2s^2\Delta_0 + o(s^{\frac{7}{2}}).$$

11.3.2 Une base orthonormée du fibré W

Pour retrouver la géométrie parabolique de M, c'est-à-dire la distribution générique $T^{-1}M$ nous allons pour tout point de M retrouver la distribution $T_x^{-1}M$ grâce à la métrique sur $\mathcal{Q}$. Or soit $x_0 \in M$ fixé, pour retrouver la distribution $T_{x_0}^{-1}M$ la connaissance de la métrique sur un chemin $Q(s) := (0, sa_0, sb_0, sc_0)$ dans $\mathcal{Q}$ comme précédemment défini, va être suffisant. Fixons alors les notations que nous utiliserons par la suite. Notons Q le chemin dans $\mathcal{Q}$ donnée par $Q(s) := (0, a = sa_0, b = sb_0, c = sc_0)$ avec $\Delta_0 := a_0^2 - b_0c_0 \neq 0$. Notons $\Delta := s^2\Delta_0$ et δ une racine de Δ.

Cherchons à présent nos trois 2-formes décrivant la structure quaternion-kählérienne de $\mathcal{Q}$. Pour cela il nous faut comprendre la métrique Υ sur le fibré W au dessus de notre chemin $Q(s)$.

Lemme 121 *La métrique Υ sur W au dessus de notre chemin $Q(s)$, à valeurs dans $\mathcal{L}^2$, satisfait*

$$l^2\Upsilon(t+ru_1+su_5, t'+r'u_1+s'u_5) = (-css'+a(st'+s't)-btt')-\frac{l\Theta}{2}rr'+o((l\Theta)^{\frac{7}{4}}).$$

Preuve du Lemme

D'après l'article [BE95], une section du fibré L au dessus de la courbe double C_{x_0} s'écrit $x + yu_1$ avec x une section de $L|_{C^{red}_{x_0}} = O_{C^{red}_{x_0}}(1)$ et y une section de $L|_{C^{red}_{x_0}} \otimes Y_{x_0} = O_{C^{red}_{x_0}}$. Un élément de $H^0(C_{x_0}, L)$ s'écrit donc sous la forme $x + yu_1 + zu_5$.

Dans $\mathbb{P}^2 = \{[z_1 : z_2 : z_3]\}$ notons $\tilde{C}_{a,b,c}$ les courbes d'équations

$$z_1^2 = bz_2^2 + 2az_2z_3 + cz_3^2.$$

Regardant cette équation dans la carte $U_3 := \{[z_1 : z_2 : 1]\}$ et regardant les équations des courbes $C_{(0,a,b,c)}$ dans $\mathcal{N}$, nous observons que nous disposons d'une famille de morphismes $f_{a,b,c} : \tilde{C}_{a,b,c} \to C_{(0,a,b,c)} \subset \mathcal{N}$ tels que dans les coordonnées $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de $\mathcal{N}$ nous avons

$$\begin{array}{rrcl} & f_{a,b,c}(z_1) & = & (z_1 + o(t^4), -a + o(t^5), bz_1 + o(t^6), \frac{a}{2}z_1 + o(t^6), o(t^3)) \\ \text{et} & f_{a,b,c}(z_2) & = & (f(z_2) + o(t^4), -a - bz_2 + o(t^5), bf(z_2) + o(t^6), \\ & & & \frac{a-bz_2}{2}f(z_2) + o(t^6), z_2 + o(t^3)), \end{array}$$

avec $f(z_2)$ vérifiant $f^2(z_2) = bz_2^2 + 2az_2 + c$; c'est-à-dire que l'image de la coordonnée z_1 (respectivement z_2) correspond à la coordonnée $f(z_1) = u_1 + o(t)$ (respectivement $f(z_2) = u_5 + o(1)$). Soit σ une section de L au dessus de C_{x_0} nous obtenons alors une section $\tilde{\sigma} = \sigma \circ f_0$ du fibré f_0^*L au dessus de $\tilde{C}_{0,0,0}$ qui est le fibré au dessus de la courbe double $\tilde{C}_{0,0,0} \subset \mathbb{P}^2$ caractérisé par

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1}(1) \otimes O_{\mathbb{P}^1}(-1) = O_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f_0^*L \longrightarrow O_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow 0.$$

Or d'après l'article [BE95], une section du fibré f_0^*L au dessus de la courbe double $\tilde{C}_0$ s'écrit $r + sz_1$ avec r une section de $f_0^*L|_{\tilde{C}_0^{red}} = O_{\mathbb{P}^1}(1)$ et s une section de $f_0^*L|_{\tilde{C}_0^{red}} \otimes O_{\mathbb{P}^1}(-1) = O_{\mathbb{P}^1}$. Un élément de $H^0(\tilde{C}_0, f_0^*L)$ s'écrit alors sous la forme $rz_1+sz_2+tz_3$ dans la carte $\mathbb{P}^2$. Notre section $\tilde{\sigma}$ s'écrit donc sous la forme $\tilde{\sigma} = rz_1+sz_2+tz_3$ et correspond à une section de $O_{\mathbb{P}^2}(1)$. Supposons $c \neq 0$ (sinon $a \neq 0$ et nous pouvons donner une autre paramétrisation que celle qui arrive et en effectuant les mêmes calculs que ceux qui vont suivre nous retrouvons le même résultat final : nous nous limitons donc au cas où

$c \neq 0$) et notons γ une racine de c. Nous pouvons alors paramétré la courbe $\tilde{C}_{a,b,c}$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \tilde{C}_{a,b,c} \subset \mathbb{P}^2 \\ [u,v] & \longmapsto & [\gamma uv : (u^2-v^2)\frac{c}{2\delta} : \frac{\delta-a}{2\delta}u^2 + \frac{a+\delta}{2\delta}v^2], \end{array}$$

avec δ une racine de $\Delta = a^2 - bc$ que nous souhaitons non nul pour que les courbes $\tilde{C}_{a,b,c}$ soient régulières. La section $\tilde{\sigma}$ de $O_{\mathbb{P}^2}(1)$ induit alors sur $\tilde{C}_{a,b,c}$ la section de $O_{\tilde{C}_{a,b,c}}(2)$

$$\begin{array}{rcl} \hat{\sigma} & = & r\gamma uv + s(u^2-v^2)\frac{c}{2\delta} + t(\frac{\delta-a}{2\delta}u^2 + \frac{a+\delta}{2\delta}v^2) \\ & = & \frac{sc+t(\delta-a)}{2\delta}u^2 + r\gamma uv + \frac{-sc+t(\delta+a)}{2\delta}v^2 \\ & = & Au^2 + Buv + Cv^2, \end{array}$$

avec $A = \frac{sc+t(\delta-a)}{2\delta}$, $B = r\gamma$ et $C = \frac{-sc+t(\delta+a)}{2\delta}$. D'après la formule (11.1.3) nous avons

$$\begin{array}{l} \Upsilon(\ \ Au^2+Buv+Cv^2, A'u^2+B'uv+C'v^2\ \ ) \\ = (Au^2+Buv+Cv^2)(2A'du^2+2B'dudv+C'dv^2) \\ \quad +(A'u^2+B'uv+C'v^2)(2Adu^2+2Bdudv+Cdv^2) \\ \quad -(2Audu+Budv+Bvdu+2Cvdv)(2A'udu+B'udv+B'vdu+C'vdv) \\ = du^2[v^2(2A'C+2AC'-BB')] + dudv[2uv(-2A'C-2AC'+BB')] \\ \quad +dv^2[u^2(2A'C+2AC'-BB')] \\ = (2(A'C+AC')-BB')(v^2du^2-2uvdudv+u^2dv^2) \\ = (2(A'C+AC')-BB')(vdu-udv)^2. \end{array}$$

Ainsi dans $\mathbb{P}^2$

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon(\hat{\sigma},\hat{\sigma}') & = & [\frac{1}{2\Delta}((sc+t(\delta-a))(-s'c+t'(\delta+a)) \\ & & +(s'c+t'(\delta-a))(-sc+t(\delta+a))) - crr'] * (vdu-udv)^2 \\ & = & [\frac{1}{\Delta}(-c^2ss' + ac(st'+s't) + (\Delta-a^2)tt') - crr'](vdu-udv)^2 \\ & = & [\frac{c}{\Delta}(-css' + a(st'+s't) - btt') - crr'](vdu-udv)^2. \end{array}$$

Reste à voir que dans la carte $U_3 := \{[z_1 : z_2 : 1]\}$, nous avons $\frac{\delta-a}{2\delta}u^2 + \frac{a+\delta}{2\delta}v^2 = 1$, donc

$$u(\delta-a)du + v(a+\delta)dv = 0$$

et

$$\begin{array}{rcl} dz_2 & = & \frac{c}{\delta}(udu - vdv) \\ & = & \frac{c}{\delta}(1+\frac{\delta-a}{\delta+a})udu \\ & = & \frac{2c}{\delta+a}udu. \end{array}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} vdu - udv &= (v + \tfrac{u^2}{v}\tfrac{\delta - a}{a+\delta})du \\ &= (v^2(a+\delta) + u^2(\delta - a))\tfrac{du}{v(a+\delta)} \\ &= \tfrac{2\delta}{v(a+\delta)}du \\ &= \tfrac{2\delta\gamma}{z_1(a+\delta)}udu \\ &= \tfrac{\delta}{\gamma z_1}dz_2. \end{aligned}$$

Ainsi dans $\mathbb{P}^2$

$$\begin{aligned} \Upsilon(\hat{\sigma}, \hat{\sigma}') &= [\tfrac{c}{\Delta}(-css' + a(st' + s't) - btt') - crr']\tfrac{\Delta}{c}(\tfrac{dz_2}{z_1})^2 \\ &= [(-css' + a(st' + s't) - btt') - \Delta rr'](\tfrac{dz_2}{z_1})^2. \end{aligned}$$

Revenant à $\mathcal{N}$, une section $\sigma = ru_1 + su_5 + t$ de L au dessus de la courbe double C_{x_0} induit une section $\hat{\sigma} \circ f_{a,b,c}^{-1} = ru_1 + su_5 + t$ de L au dessus de $C_{(0,a,b,c)}$ et

$$\begin{aligned} l^2\Upsilon(ru_1 + su_5 + t, r'u_1 + s'u_5 + t') &= \big(-css' + a(st' + s't) - btt'\big) \\ &\quad -\tfrac{l\Theta}{2}rr' + o((l\Theta)^{\frac{7}{4}}). \end{aligned}$$

□

Ainsi nous avons notre métrique $\Theta^{-2}\Upsilon$ sur W au dessus de notre chemin $Q(s)$ qui s'écrit

$$\Theta^{-2}\Upsilon(ru_1 + su_5 + t, r'u_1 + s'u_5 + t') = \tfrac{-css' + a(st' + s't) - btt'}{4\Delta^2} - \tfrac{rr'}{4\Delta} + o(\Delta^{-\frac{1}{4}}).$$

Supposons $c \neq 0$ alors une base orthonormée de W au dessus de notre chemin $Q(s)$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} b_1 &= 2i\delta u_1 + o(t^6); \\ b_2 &= \tfrac{2\delta}{\gamma}(c + au_5) + o(t^6); \\ b_3 &= \tfrac{2\Delta}{i\gamma}u_5 + o(t^6), \end{aligned} \tag{11.3.2}$$

avec γ une racine de c et avec $o(t^3)$ comprenant $u_1, \gamma, a, b, c, \delta, , \Delta...$ (u_5 ayant un poids nul ; u_1, γ ayant un poids linéaire t ; a, b, c, δ, u_2 ayant un poids quadratique t^2 ; u_3, u_4 ayant un poids t^3 ; Δ ayant un poids t^4).

Si maintenant $b \neq 0$ alors une base orthonormée de W au dessus de notre chemin $Q(s)$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \hat{b}_1 &= 2i\delta u_1 + o(t^6); \\ \hat{b}_2 &= \tfrac{2\delta}{\beta}(a + bu_5) + o(t^6); \\ \hat{b}_3 &= \tfrac{2\Delta}{i\beta} + o(t^6), \end{aligned}$$

avec β une racine de b.

Enfin si $c = 0$ et $b = 0$ alors $a \neq 0$ et nous disposons de la base orthonormé de W au dessus de notre chemin $Q(s)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{b}_1 & = & 2i\delta u_1 + o(t^6); \\ \tilde{b}_2 & = & \frac{\sqrt{2}\Delta}{\alpha}(1+u_5) + o(t^6); \\ \tilde{b}_3 & = & \frac{\sqrt{2}\Delta}{i\alpha}(1-u_5) + o(t^6), \end{array}$$

avec α une racine de a.

Les calculs de la métrique dans ces trois cas vont nous fournir le même résultat final, nous pouvons donc supposer pour la rédaction que $c \neq 0$ et ainsi nous travaillerons avec la première base citée.

11.3.3 Les trois 2-formes sur $\mathcal{Q}$ recherchées

Observons à présent la 2-forme $d\eta$ sur les fibrés normaux N_y aux courbes $C_{(0,a,b,c)} \subset \mathcal{N}$ où les courbes $C_{(0,a,b,c)}$ correspondent à notre chemin $Q(s)$ dans $\mathcal{Q}$. Comme la courbe double C_{x_0} est legendrienne pour η la forme $d\eta$ n'est pas bien définie sur le fibré normal de C_{x_0}. Cependant pour $\sigma, \tilde{\sigma} \in H^0(C_{x_0}, \mathsf{N}_{x_0})$,

$$\Theta d\eta(\sigma, \tilde{\sigma}) = \eta \wedge d\eta(\sigma, \tilde{\sigma}) \in H^0(C_{x_0}, \Omega^1_{C_{x_0}} \otimes L^2) = \mathcal{L}_{x_0} \otimes W_{x_0}$$

est bien défini. Observons alors $\eta \wedge d\eta$ sur les fibrés normaux N_y aux courbes $C_{(0,a,b,c)} \subset \mathcal{N}$. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} \eta \wedge d\eta & = & \big(-\frac{3}{2}u_2 du_1 + \frac{3}{2}u_1 du_2 + u_5 du_3 + du_4 + o(t^6)\big) \\ & & \wedge\big(3du_1 du_2 - du_3 du_5 + o(t^6)\big) \\ & = & \frac{3}{2}u_2 du_1 du_3 du_5 - \frac{3}{2}u_1 du_2 du_3 du_5 + 3u_5 du_1 du_2 du_4 + du_1 du_2 du_3 \\ & & +3du_3 du_4 du_5 + o(t^9). \end{array}$$

Fixons à présent une base des sections $H^0(C_{(0,a,b,c)}, \mathsf{N}_{(0,a,b,c)})$: prenons la base constituée des variations suivant $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b$ et c des courbes

$$C_{(x,a,b,c)} : \left\{ \begin{array}{l} (u_1 + x_1 u_5 - x_2)^2 = bu_5^2 + 2au_5 + c + o(t^5), \\ u_2 = x_3 - x_1 x_2 - a + (x_1^2 - b)u_5 + 2x_1 u_1 + o(t^5), \\ u_3 = x_4 - \frac{1}{2}x_1 x_3 + (b - x_1^2)u_1 + 2x_1 u_2 + o(t^6), \\ u_4 - \frac{u_1 u_2}{2} = x_5 + \frac{1}{2}x_2 x_3 + (a + x_3 + x_1 x_2)u_1 - 2x_2 u_2 + o(t^6) \end{array} \right.$$

au dessus de la courbe

$$C_{(0,a,b,c)} : \left\{ \begin{array}{l} u_1^2 = bu_5^2 + 2au_5 + c + o(t^5), \\ u_2 = -a - bu_5 + o(t^5), \\ u_3 = bu_1 + o(t^6), \\ u_4 - \frac{u_1 u_2}{2} = au_1 + o(t^6). \end{array} \right.$$

Nous obtenons ainsi les sections

$$\begin{aligned}
s_1(=\partial_{x_1}|_{C_{(0,a,b,c)}}) &= (-u_5+o(t^3))\partial_{u_1}+(2u_1+o(t^4))\partial_{u_2}+(2u_2-bu_5\\
&\quad +o(t^5))\partial_{u_3}+(-(a+\tfrac{1}{2}u_2)u_5+u_1^2+o(t^5))\partial_{u_4};\\
&= -u_5\partial_{u_1}+2u_1\partial_{u_2}+(2u_2-bu_5)\partial_{u_3}\\
&\quad +(-(a+\tfrac{1}{2}u_2)u_5+u_1^2)\partial_{u_4}+o(t^2);\\
s_2(=\partial_{x_2}|_{C_{(0,a,b,c)}}) &= \partial_{u_1}+b\partial_{u_3}+(a-\tfrac{3}{2}u_2)\partial_{u_4}+o(t^2);\\
s_3(=\partial_{x_3}|_{C_{(0,a,b,c)}}) &= \partial_{u_2}+\tfrac{3}{2}u_1\partial_{u_4}+o(t);\\
s_4(=\partial_{x_4}|_{C_{(0,a,b,c)}}) &= \partial_{u_3}+o(1);\\
s_5(=\partial_{x_5}|_{C_{(0,a,b,c)}}) &= \partial_{u_4}+o(1);\\
s_6(=\partial_a|_{C_{(0,a,b,c)}}) &= \tfrac{u_5}{u_1}\partial_{u_1}-\partial_{u_2}+b\tfrac{u_5}{u_1}\partial_{u_3}+(\tfrac{1}{2}u_1+(a+\tfrac{u_2}{2})\tfrac{u_5}{u_1})\partial_{u_4}+o(t);\\
s_7(=\partial_b|_{C_{(0,a,b,c)}}) &= \tfrac{u_5^2}{2u_1}\partial_{u_1}-u_5\partial_{u_2}+(u_1+b\tfrac{u_5^2}{2u_1})\partial_{u_3}\\
&\quad +(-\tfrac{u_1u_5}{2}+(a+\tfrac{u_2}{2})\tfrac{u_5^2}{2u_1})\partial_{u_4}+o(t);\\
s_8(=\partial_c|_{C_{(0,a,b,c)}}) &= \tfrac{1}{2u_1}\partial_{u_1}+b\tfrac{1}{2u_1}\partial_{u_3}+((a+\tfrac{u_2}{2})\tfrac{1}{2u_1})\partial_{u_4}+o(t).
\end{aligned}$$

Comme nous somme sur la courbe $C_{(0,a,b,c)}$ nous pouvons simplifier et obtenir en oubliant les $o(t^i)$ pour une lecture plus aisée (il faut juste penser que chaque coefficient est multiplié par $(1+o(t^3))$)

(11.3.3)

$$\begin{aligned}
s_1 &= -u_5\partial_{u_1}+2u_1\partial_{u_2}+(-2a-3bu_5)\partial_{u_3}+(\tfrac{3}{2}bu_5^2+\tfrac{3}{2}au_5+c)\partial_{u_4};\\
s_2 &= \partial_{u_1}+b\partial_{u_3}+(\tfrac{5}{2}a+\tfrac{3}{2}bu_5)\partial_{u_4};\\
s_3 &= \partial_{u_2}+\tfrac{3}{2}u_1\partial_{u_4};\\
s_4 &= \partial_{u_3};\\
s_5 &= \partial_{u_4};\\
s_6 &= \tfrac{u_5}{u_1}\partial_{u_1}-\partial_{u_2}+b\tfrac{u_5}{u_1}\partial_{u_3}+\tfrac{3au_5+c}{2u_1}\partial_{u_4};\\
s_7 &= \tfrac{u_5^2}{2u_1}\partial_{u_1}-u_5\partial_{u_2}+(u_1+b\tfrac{u_5^2}{2u_1})\partial_{u_3}+(-\tfrac{3}{2}bu_5^2-\tfrac{3}{2}au_5-c)\tfrac{u_5}{2u_1}\partial_{u_4};\\
s_8 &= \tfrac{1}{2u_1}\partial_{u_1}+b\tfrac{1}{2u_1}\partial_{u_3}+\tfrac{a-bu_5}{4u_1}\partial_{u_4}.
\end{aligned}$$

De plus au dessus de $C_{(0,a,b,c)}$ nous avons

(11.3.4)

$$\begin{aligned}
du_1 &= (a+bu_5)\tfrac{du_5}{u_1}+o(t^4)\\
du_2 &= -bdu_5+o(t^5)\\
du_3 &= b(a+bu_5)\tfrac{du_5}{u_1}+o(t^6)\\
du_4 &= (-b^2u_5^2-abu_5+\tfrac{a^2-bc}{2})\tfrac{du_5}{u_1}+o(t^6).
\end{aligned}$$

Ainsi comme $\Theta\beta(s_i,s_j)=\eta\wedge d\eta(s_i,s_j)|_{C_{(0,a,b,c)}}$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\Theta\beta(s_1,s_2) &= [\quad 4\Delta u_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^7),\\
\Theta\beta(s_1,s_3) &= [\quad 6\Delta u_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^6),\\
\Theta\beta(s_1,s_4) &= [\quad -4cu_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_1,s_5) &= [\quad 4au_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_1,s_6) &= [\quad 8ac \quad +(6a^2+2bc)u_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^6),\\
\Theta\beta(s_1,s_7) &= [\quad -4c^2 \quad -4acu_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^6),\\
\Theta\beta(s_1,s_8) &= [\quad -2(a^2+bc) \quad -4abu_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^6),\\
\Theta\beta(s_2,s_3) &= [\quad -6\Delta \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^7),\\
\Theta\beta(s_2,s_4) &= [\quad -4au_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_2,s_5) &= [\quad 4bu_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_2,s_6) &= [\quad 6a^2+2bc \quad +8abu_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^6),\\
\Theta\beta(s_2,s_7) &= [\quad -4ac \quad -2(a^2+bc)u_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^6),\\
\Theta\beta(s_2,s_8) &= [\quad -4ab \quad -4b^2u_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^6),\\
\Theta\beta(s_3,s_4) &= [\quad -3c \quad -3au_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^4),\\
\Theta\beta(s_3,s_5) &= [\quad 3a \quad +3bu_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^4),\\
\Theta\beta(s_3,s_6) &= [\quad 6au_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_3,s_7) &= [\quad -3cu_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_3,s_8) &= [\quad -3bu_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_4,s_5) &= [\quad u_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^3),\\
\Theta\beta(s_4,s_6) &= [\quad -c \quad +3au_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^4),\\
\Theta\beta(s_4,s_7) &= [\quad -2cu_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^4),\\
\Theta\beta(s_4,s_8) &= [\quad a \quad -bu_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^4),\\
\Theta\beta(s_5,s_6) &= [\quad 3a \quad -bu_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^4),\\
\Theta\beta(s_5,s_7) &= [\quad -c \quad +au_5 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^4),\\
\Theta\beta(s_5,s_8) &= [\quad -2b \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^4),\\
\Theta\beta(s_6,s_7) &= [\quad cu_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_6,s_8) &= [\quad -bu_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5),\\
\Theta\beta(s_7,s_8) &= [\quad au_1 \quad]\tfrac{du_5}{u_1} + o(t^5).
\end{aligned}
$$

La 2-forme β à valeurs dans le fibré W est donc la 2-forme

$$\begin{aligned}
l\Theta\beta &= [\ 8acs^1\wedge s^6 - 4c^2s^1\wedge s^7 - 2(a^2+bc)s^1\wedge s^8 - 6\Delta s^2\wedge s^3 \\
&\quad +(6a^2+2bc)s^2\wedge s^6 - 4acs^2\wedge s^7 - 4abs^2\wedge s^8 - 3cs^3\wedge s^4 \\
&\quad +3as^3\wedge s^5 - cs^4\wedge s^6 + as^4\wedge s^8 + 3as^5\wedge s^6 - cs^5\wedge s^7 \\
&\quad -2bs^5\wedge s^8\ ] \\
&+ [\ 4\Delta s^1\wedge s^2 - 4cs^1\wedge s^4 + 4as^1\wedge s^5 - 4as^2\wedge s^4 + 4bs^2\wedge s^5 \\
&\quad +6as^3\wedge s^6 - 3cs^3\wedge s^7 - 3bs^3\wedge s^8 + cs^6\wedge s^7 - bs^6\wedge s^8 \\
&\quad +as^7\wedge s^8 + s^4\wedge s^5\ ]u_1 \\
&+ [\ 6\Delta s^1\wedge s^3 + (6a^2+2bc)s^1\wedge s^6 - 4acs^1\wedge s^7 - 4abs^1\wedge s^8 \\
&\quad +8abs^2\wedge s^6 - 2(a^2+bc)s^2\wedge s^7 - 4b^2s^2\wedge s^8 - 3as^3\wedge s^4 \\
&\quad +3bs^3\wedge s^5 + 3as^4\wedge s^6 - 2cs^4\wedge s^7 - bs^4\wedge s^8 - bs^5\wedge s^6 \\
&\quad +as^5\wedge s^7\ ]u_5 \\
&= B_1 + B_2u_1 + B_3u_5.
\end{aligned}$$

où chaque coefficient est facteur d'un terme $(1+o(t^3))$.

Nous disposons alors des trois 2-formes sur $H^0(C_y,\mathsf{N}_y)\simeq T\mathcal{Q}$ (là encore, chaque coefficient est facteur d'un terme $(1+o(t^3))$)

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \Theta^{-2}\Upsilon(\beta,b_1) \\
&= -\tfrac{1}{4\Delta}2i\delta\tfrac{1}{2\Delta}B_2 \\
&= -\tfrac{i}{4\delta\Delta}[4\Delta s^1\wedge s^2 - 4cs^1\wedge s^4 + 4as^1\wedge s^5 - 4as^2\wedge s^4 + 4bs^2\wedge s^5 \\
&\quad +6as^3\wedge s^6 - 3cs^3\wedge s^7 - 3bs^3\wedge s^8 + cs^6\wedge s^7 - bs^6\wedge s^8 + as^7\wedge s^8 \\
&\quad +s^4\wedge s^5]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \Theta^{-2}\Upsilon(\beta,b_2) \\
&= \tfrac{1}{4\Delta^2}\tfrac{2\delta}{\gamma}\tfrac{1}{2\Delta}[-c(aB_3)+a(aB_1+cB_3)-b(cB_1)] \\
&= \tfrac{1}{4\gamma\delta\Delta^2}[\Delta B_1] \\
&= \tfrac{1}{4\gamma\delta\Delta}[8acs^1\wedge s^6 - 4c^2s^1\wedge s^7 - 2(a^2+bc)s^1\wedge s^8 - 6\Delta s^2\wedge s^3 \\
&\quad +(6a^2+2bc)s^2\wedge s^6 - 4acs^2\wedge s^7 - 4abs^2\wedge s^8 - 3cs^3\wedge s^4 + 3as^3\wedge s^5 \\
&\quad -cs^4\wedge s^6 + as^4\wedge s^8 + 3as^5\wedge s^6 - cs^5\wedge s^7 - 2bs^5\wedge s^8]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \Theta^{-2}\Upsilon(\beta,b_3) \\
&= \tfrac{1}{4\Delta^2}\tfrac{2\Delta}{i\gamma}\tfrac{1}{2\Delta}[-cB_3+aB_1] \\
&= -\tfrac{i}{4\gamma\Delta^2}[-6c\Delta s^1\wedge s^3 + 2c\Delta s^1\wedge s^6 - 2a\Delta s^1\wedge s^8 - 6a\Delta s^2\wedge s^3 \\
&\quad +6a\Delta s^2\wedge s^6 - 2c\Delta s^2\wedge s^7 - 4b\Delta s^2\wedge s^8 + 3\Delta s^3\wedge s^5 - 4acs^4\wedge s^6 \\
&\quad +2c^2s^4\wedge s^7 + (a^2+bc)s^4\wedge s^8 + (3a^2+bc)s^5\wedge s^6 - 2acs^5\wedge s^7 \\
&\quad -2abs^5\wedge s^8].
\end{aligned}$$

11.3.4 La métrique quaternion-kählérienne sur $\mathcal{Q}$

À présent, avec β_2 et β_3 retrouvons la structure presque complexe I_1 associée à β_1 via la métrique sur $\mathcal{Q}$: $g(I_1X,Y)=\beta_1(X,Y)$ pour tout $X,Y\in T\mathcal{Q}$. Pour cela déterminons l'endomorphisme I_1 vérifiant

$$\beta_2(I_1X,Y)=g(I_2I_1X,Y)=g(-I_3X,Y)=-\beta_3(X,Y)$$

pour tout $X,Y\in T\mathcal{Q}\simeq H^0(C_y,\mathsf{N}_y)$. Notant $I_1(s_j)=x_{ij}s_i$ et $[-cB_3+aB_1](s_j,s_i)=y_{ij}$ alors les relations

$$4\gamma\delta\Delta\beta_2(I_1s_j,s_i)=-4\gamma\delta\Delta\beta_3(s_j,s_i)=4\gamma\delta\Delta\frac{i}{4\gamma\Delta^2}[-cB_3+aB_1](s_j,s_i)=\frac{i}{\delta}y_{ij}$$

pour $1\leq i,j\leq 8$, s'écrivent sous la forme suivante :

$$A\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\x_{3j}\\x_{4j}\\x_{5j}\\x_{6j}\\x_{7j}\\x_{8j}\end{pmatrix}=\frac{i}{\delta}\begin{pmatrix}y_{1j}\\y_{2j}\\y_{3j}\\y_{4j}\\y_{5j}\\y_{6j}\\y_{7j}\\y_{8j}\end{pmatrix}$$

pour $1\leq j\leq 8$, avec A la matrice

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8ac & 4c^2 & 2(a^2+bc)\\
0 & 0 & 6\Delta & 0 & 0 & -(6a^2+2bc) & 4ac & 4ab\\
0 & -6\Delta & 0 & 3c & -3a & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -3c & 0 & 0 & c & 0 & -a\\
0 & 0 & 3a & 0 & 0 & -3a & c & 2b\\
8ac & 6a^2+2bc & 0 & -c & 3a & 0 & 0 & 0\\
-4c^2 & -4ac & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0\\
-2(a^2+bc) & -4ab & 0 & a & -2b & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

En inversant cette matrice nous obtenons la matrice

$$\frac{1}{c\Delta}\begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{a}{12} & 0 & 0 & \frac{a}{12} & \frac{b}{3} & -\frac{c}{6}\\
0 & 0 & -\frac{c}{12} & 0 & 0 & -\frac{c}{4} & -\frac{a}{2} & 0\\
-\frac{a}{12} & \frac{c}{12} & 0 & -\frac{\Delta}{6} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{\Delta}{6} & 0 & 0 & \frac{a^2+3bc}{6} & \frac{2ab}{3} & \frac{2ac}{3}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2ac}{3} & \frac{3a^2-bc}{3} & \frac{2c^2}{3}\\
-\frac{a}{12} & \frac{c}{4} & 0 & -\frac{a^2+3bc}{6} & -\frac{2ac}{3} & 0 & 0 & 0\\
-\frac{b}{3} & \frac{a}{2} & 0 & -\frac{2ab}{3} & -\frac{3a^2-bc}{3} & 0 & 0 & 0\\
\frac{c}{6} & 0 & 0 & -\frac{2ac}{3} & -\frac{2c^2}{3} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Rappelons que pour nos calcul nous avons supposé que $c \neq 0$, ainsi il est légitime de diviser par c. Comme $(y_{ij})_{1\leq i,j\leq 8}$ est la matrice de la 2-forme $4i\gamma\Delta^2\beta_3$, les y_{ij} sont connus et nous permettent alors de déterminer les x_{ij}, c'est-à-dire la matrice I_1 exprimée dans la base $(s_i)_{1\leq i\leq 8}$:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ia}{\delta} & \frac{ic}{2\delta} & \frac{ib}{2\delta} \\ -2i\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ia}{\delta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{ic}{2\delta} & \frac{ib}{2\delta} \\ 0 & 0 & -\frac{ib}{\delta} & 0 & 0 & \frac{ib}{\delta} & -\frac{ia}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ic}{\delta} & 0 & 0 & -\frac{ic}{\delta} & 0 & \frac{ia}{\delta} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors le long de notre chemin $Q(s)$ dans $\mathcal{Q}$ donnée par $Q(s) := (0, a = sa_0, b = sb_0, c = sc_0)$, la métrique quaternion-kählérienne

$$\begin{aligned} \pm g = \beta_1(I_1.,.) = &-2\frac{c\,ds_1^2 + 2a\,ds_1ds_2 + b\,ds_2^2}{\Delta} + \frac{3}{2}\frac{ds_3^2}{\Delta} \\ &+ \frac{c\,ds_4^2 - 2a\,ds_4ds_5 + b\,ds_5^2}{2\Delta^2} - \frac{ds_1ds_5 + ds_2ds_4}{\Delta} \\ &- \frac{(3a^2+bc)\,ds_6^2}{2\Delta^2} + \frac{2ac\,ds_6ds_7}{\Delta^2} + \frac{2ab\,ds_6ds_8}{\Delta^2} \\ &- \frac{c^2\,ds_7^2}{2\Delta^2} - \frac{(a^2+bc)\,ds_7ds_8}{2\Delta^2} - \frac{b^2\,ds_8^2}{2\Delta^2} \end{aligned} \tag{11.3.5}$$

avec chaque facteur multiplié par $(1 + o(t^3))$. Rappelons que notre métrique nous l'obtenons à un facteur multiplicatif ± 1 près car nous ne savons pas si la base (b_1, b_2, b_3) est directe ou non.

Notons que dans le cas modèle, nous n'avons pas les facteurs $(1 + o(t^3))$. Nous devrions donc retrouver avec le calcul précédent la métrique quaternion-kählérienne symétrique sur $G_2^s/SO(4)$ proche de la frontière de Furstenberg $F_{\{\alpha_1\}}$.

Proposition 122 *Pour le modèle homogène $G_2^s/SO(4)$, dans les coordonnées (1.1) donnée par l'isomorphisme*

$$\begin{array}{rcccc} F_{\{\alpha_1\}} \times \mathfrak{a}_{\{\alpha_1\}}^{reg}{}_+ \simeq & K/K_{\{\alpha_1\}} \times X_{\{\alpha_1\}}^{reg} \times \mathfrak{a}_{\{\alpha_1\}}^{reg}{}_+ & \longrightarrow & (G_2^s/SO(4))^{reg} \\ & (l, x, \rho H) & \longmapsto & lxe^{\rho H}, \end{array}$$

avec $K = SO(4)$ *et*

$$H := \begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & -2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}_{\{\alpha_1\}},$$

la métrique symétrique est donnée, lorsque ρ *tend vers l'infini, par*

$$\begin{aligned} g_0 \underset{\rho\to\infty}{\sim} \; & 3d\rho^2 + g_{X_{\{\alpha_1\}}} + 3e^{2\rho}\Big(\gamma\, dc^2 + 2\alpha\, dcdd + \beta\, dd^2\Big) \\ & + 3e^{4\rho}\, de^2 + e^{6\rho}\Big(\gamma\, df^2 - 2\alpha\, df dg + \beta\, dg^2\Big). \end{aligned}$$

avec α, β, γ *paramétrant un point de* $X^{reg}_{\{\alpha_1\}}$ *et avec* $g_{X_{\{\alpha_1\}}}$ *la métrique standard sur l'espace symétrique* $X_{\{\alpha_1\}}$.

Preuve de la proposition

Nous reprenons ici les notations du chapitre 6.2 sur les bords de Furstenberg. Nous avons l'isomorphisme (6.2.1)

$$\begin{array}{ccc} K/K_{\{\alpha_1\}} \times X^{reg}_{\{\alpha_1\}} \times \mathfrak{a}^{\,reg}_{\{\alpha_1\}_+} & \longrightarrow & (G_2^s/SO(4))^{reg} \\ (l, x, \rho H) & \longmapsto & lxe^{\rho H}. \end{array}$$

Notons $\mathfrak{m}$ l'ensemble, dans la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, composé des matrices symétriques de $\mathfrak{g}$. Alors le lien entre l'espace tangent $G_2^s \times_{SO(4)} \mathfrak{m}$ et l'espace tangent de $K/K_{\{\alpha_1\}} \times X^{reg}_{\{\alpha_1\}} \times \mathfrak{a}^{\,reg}_{\{\alpha_1\}_+}$, au dessus du point $lxe^{\rho H}$ de $G_2^s/SO(4)$, est donnée par

$$(\dot{l} \in \mathfrak{q}, \dot{x} \in \mathfrak{m}_X, \dot{e^{\rho H}} \in \mathfrak{a}_{\{\alpha_1\}}) \longrightarrow \big(Ad(e^{-\rho H}) \circ Ad(x)(\dot{l})\big)_{\mathfrak{m}} + \dot{x} + \dot{e^{\rho H}} \in \mathfrak{m}$$

avec $\mathfrak{q}$ un supplémentaire de $\mathfrak{k}_\emptyset$ dans $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{m}_X$ l'ensemble des matrices symétriques de l'algèbre de Lie de $M_{\{\alpha_1\}}$ ($X_{\{\alpha_1\}} = M_{\{\alpha_1\}}/K_{\{\alpha_1\}}$). Ainsi soit

$$\dot{l} = \begin{pmatrix} 0 & c & d & \sqrt{2}e & f & g & 0 \\ -c & 0 & 0 & -\sqrt{2}d & -e & 0 & -g \\ -d & 0 & 0 & \sqrt{2}c & 0 & e & -f \\ -\sqrt{2}e & \sqrt{2}c & -\sqrt{2}d & 0 & \sqrt{2}c & -\sqrt{2}d & \sqrt{2}e \\ -f & e & 0 & -\sqrt{2}d & 0 & 0 & -d \\ -g & 0 & -e & \sqrt{2}c & 0 & 0 & -c \\ 0 & g & f & -\sqrt{2}e & d & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{q}$$

et

$$x = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & x & y & & & & \\ & y & z & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & x & -y & \\ & & & & -y & z & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in X_{\{\alpha_1\}}$$

avec $xz - y^2 = 1$, alors

$$(Ad(e^{-\rho H}) \circ Ad(x)(\dot{l}))_{\mathfrak{m}} = \left(Ad(e^{-\rho H}) \begin{pmatrix} 0 & C & D & \sqrt{2}E & F & G & 0 \\ -\tilde{C} & 0 & 0 & -\sqrt{2}D & -E & 0 & -G \\ -\tilde{D} & 0 & 0 & \sqrt{2}C & 0 & E & -F \\ -\sqrt{2}\tilde{E} & \sqrt{2}\tilde{C} & -\sqrt{2}\tilde{D} & 0 & \sqrt{2}C & -\sqrt{2}D & \sqrt{2}E \\ -\tilde{F} & \tilde{E} & 0 & -\sqrt{2}\tilde{D} & 0 & 0 & -D \\ -\tilde{G} & 0 & -\tilde{E} & \sqrt{2}\tilde{C} & 0 & 0 & -C \\ 0 & \tilde{G} & \tilde{F} & -\sqrt{2}\tilde{E} & \tilde{D} & \tilde{C} & 0 \end{pmatrix} \right)_{\mathfrak{m}}$$

avec

$$\begin{array}{lllllllll} C & = & xc + yd, & & E & = & e, & F & = & xf - yg, \\ D & = & yc + zd, & & & & & G & = & -yf + zg, \\ \tilde{C} & = & zc - yd, & & \tilde{E} & = & e, & \tilde{F} & = & zf + yg, \\ \tilde{D} & = & -yc + xd, & & & & & \tilde{G} & = & yf + xg. \end{array}$$

Nous avons donc

$$(Ad(e^{-\rho H}) \circ Ad(x)(\dot{l}))_{\mathfrak{m}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & Ce^{-\rho} & De^{-\rho} & \sqrt{2}Ee^{-2\rho} & Fe^{-3\rho} & Ge^{-3\rho} & 0 \\ -\tilde{C}e^{\rho} & & & & & & \\ -\tilde{D}e^{\rho} & & & & & & \\ -\sqrt{2}\tilde{E}e^{2\rho} & & & & & & \\ -\tilde{F}e^{3\rho} & & & & & & \\ -\tilde{G}e^{3\rho} & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \right)_{\mathfrak{m}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \hat{C} & \hat{D} & \sqrt{2}\hat{E} & \hat{F} & \hat{G} & 0 \\ \hat{C} & & & & & & \\ \hat{D} & & & & & & \\ \sqrt{2}\hat{E} & & & & & & \\ \hat{F} & & & & & & \\ \hat{G} & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}\hat{C} &=& \frac{(xe^{-\rho}-ze^{\rho})c+(e^{\rho}+e^{-\rho})yd}{2}, & \hat{E} &=& e, & \hat{F} &=& \frac{(xe^{-3\rho}-ze^{3\rho})f-(e^{3\rho}+e^{-3\rho})yg}{2}, \\ \hat{D} &=& \frac{(e^{\rho}+e^{-\rho})yc+(ze^{-\rho}-xe^{\rho})d}{2}, & & & & \hat{G} &=& \frac{-(e^{3\rho}+e^{-3\rho})yf+(ze^{-3\rho}-xe^{3\rho})g}{2}. \end{array}$$

La métrique donnée par la forme de Killing sur $\mathfrak{m}$ s'écrit alors dans les coordonnées adaptées à l'isomorphisme (6.2.1), lorsque ρ tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} g_0 = \; & 3d\rho^2 + g_{X_{\{\alpha_1\}}} + 3(d\hat{C}^2 + d\hat{D}^2) + 3d\hat{E}^2 + (d\hat{F}^2 + d\hat{G}^2) \\ \underset{\rho\to\infty}{\sim} \; & 3d\rho^2 + g_{X_{\{\alpha_1\}}} + 3e^{2\rho}\Big((z^2+y^2)\,dc^2 - 2(x+z)y\,dcdd + (x^2+y^2)\,dd^2\Big) \\ & +3e^{4\rho}\,de^2 + e^{6\rho}\Big((z^2+y^2)\,df^2 + 2(x+z)y\,df\,dg + (x^2+y^2)\,dg^2\Big). \end{aligned}$$

□

Remarque 123 *Remarquons quand posant $s = e^{-2\rho}$, $\alpha = -(x+z)y$, $\beta = (x^2+y^2)$ et $\gamma = (z^2+y^2)$ nous obtenons, lorsque s tend vers 0, la métrique g sous la forme :*

$$\begin{aligned} g_0 \underset{\rho\to\infty}{\sim} \; & \frac{3}{4}\frac{ds^2}{s^2} + g_{X_{\{\alpha_1\}}} \\ & + \; 3\frac{\gamma\,dc^2 + 2\alpha\,dcdd + \beta\,dd^2}{s} + 3\frac{de^2}{s^2} + \frac{\gamma\,df^2 - 2\alpha\,df\,dg + \beta\,dg^2}{s^3}. \end{aligned}$$

Notons qu'alors $\alpha^2 - \beta\gamma = 2xzy^2 - x^2z^2 - y^4 = -(xz-y^2)^2 = -1$.

À présent, effectuons quelques changements de coordonnées pour exprimer notre métrique g (11.3.5) sous la forme de la remarque précédente. Avec le changement de base

$$\begin{cases} \tilde{s}_4 = s_4 + as_1 + bs_2 \\ \tilde{s}_5 = s_5 + cs_1 + as_2 \end{cases}$$

nous obtenons que la portion de la métrique g, mettant en relation les élé-

ments du bord infini ds_1, ds_2, ds_3, $d\tilde{s}_4$ et $d\tilde{s}_5$, s'écrit

$$
\begin{aligned}
&-2\frac{c\,ds_1^2+2a\,ds_1ds_2+b\,ds_2^2}{\Delta}+\frac{3}{2}\frac{ds_3^2}{\Delta}\\
&+\frac{c\,ds_4^2-2a\,ds_4ds_5+b\,ds_5^2}{2\Delta^2}-\frac{ds_1ds_5+ds_2ds_4}{\Delta}\\
=&-2\frac{c\,ds_1^2+2a\,ds_1ds_2+b\,ds_2^2}{\Delta}+\frac{3}{2}\frac{ds_3^2}{\Delta}+\frac{c(d\tilde{s}_4-a\,ds_1-b\,ds_2)^2}{2\Delta^2}\\
&+\frac{-2a\,(d\tilde{s}_4-a\,ds_1-b\,ds_2)(d\tilde{s}_5-c\,ds_1-a\,ds_2)+b(d\tilde{s}_5-c\,ds_1-a\,ds_2)^2}{2\Delta^2}\\
&-\frac{ds_1(d\tilde{s}_5-c\,ds_1-a\,ds_2)+ds_2(d\tilde{s}_4-a\,ds_1-b\,ds_2)}{\Delta}\\
=&ds_1^2\left(\frac{-2c}{\Delta}+\frac{ca^2-2ca^2+bc^2}{2\Delta^2}+\frac{c}{\Delta}\right)+ds_2^2\left(\frac{-2b}{\Delta}+\frac{cb^2-2a^2b+a^2b}{2\Delta^2}+\frac{b}{\Delta}\right)\\
&+ds_1ds_2\left(\frac{-4a}{\Delta}+\frac{2abc-2a^3-2abc+2abc}{2\Delta^2}+\frac{a+a}{\Delta}\right)+\frac{3}{2}\frac{ds_3^2}{\Delta}+d\tilde{s}_4^2\frac{c}{2\Delta^2}\\
&+d\tilde{s}_4d\tilde{s}_5\frac{-2a}{2\Delta^2}+d\tilde{s}_5^2\frac{b}{2\Delta^2}+ds_1d\tilde{s}_4\left(\frac{-2ac+2ac}{2\Delta^2}\right)+ds_2d\tilde{s}_5\left(\frac{2ab-2ab}{2\Delta^2}\right)\\
&+ds_1d\tilde{s}_5\left(\frac{2a^2-2bc}{2\Delta^2}-\frac{1}{\Delta}\right)+ds_2d\tilde{s}_4\left(\frac{-2bc+2a^2}{2\Delta}-\frac{1}{\Delta}\right)\\
=&\frac{3}{2}\frac{-c\,ds_1^2-2a\,ds_1ds_2-b\,ds_2^2}{\Delta}+\frac{3}{2}\frac{ds_3^2}{\Delta}+\frac{1}{2}\frac{c\,d\tilde{s}_4^2-2a,d\tilde{s}_4d\tilde{s}_5+b\,d\tilde{s}_5^2}{\Delta^2}.
\end{aligned}
$$

Ensuite notons q la partie de la métrique g mettant en relation les éléments normaux ds_6, ds_7 et ds_8

$$
\begin{aligned}
q \;:=\; & -\tfrac{(3a^2+bc)}{2\Delta^2}ds_6^2+\tfrac{2ac}{\Delta^2}ds_6ds_7+\tfrac{2ab}{\Delta^2}ds_6ds_8\\
& -\tfrac{c^2}{2\Delta^2}ds_7^2-\tfrac{(a^2+bc)}{2\Delta^2}ds_7ds_8-\tfrac{b^2}{2\Delta^2}ds_8^2.
\end{aligned}
$$

Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
q-\frac{ds_6^2-ds_7ds_8}{2\Delta}=&\frac{-4a^2\,ds_6^2}{2\Delta^2}+\frac{2ac\,ds_6ds_7}{\Delta^2}+\frac{2ab\,ds_6ds_8}{\Delta^2}-\frac{c^2\,ds_7^2}{2\Delta^2}\\
&-\frac{2bc\,ds_7ds_8}{2\Delta^2}-\frac{b^2\,ds_8^2}{2\Delta^2}\\
=&\frac{-\left(2ads_6-cds_7+-bds_8\right)^2}{2\Delta^2}\\
=&\frac{d\Delta^2}{2\Delta^2}
\end{aligned}
$$

avec $\Delta=a^2-bc=s_6^2-s_7s_8$ car $a=s_6$, $b=s_7$ et $c=s_8$. Au final, notre

métrique g (11.3.5) s'écrit dans la base $(s_1, s_2, s_3, \tilde{s}_4, \tilde{s}_5, s_6, s_7, s_8)$:

$$\begin{aligned}\pm g =&\frac{d\Delta^2}{2\Delta^2} + \frac{ds_6^2 - ds_7 ds_8}{2\Delta}\\ &\frac{3}{2}\frac{-c\,ds_1^2 - 2a\,ds_1 ds_2 - b\,ds_2^2}{\Delta} + \frac{3}{2}\frac{ds_3^2}{\Delta} + \frac{1}{2}\frac{c\,d\tilde{s}_4^2 - 2a\,d\tilde{s}_4 d\tilde{s}_5 + b\,d\tilde{s}_5^2}{\Delta^2}\end{aligned}$$

avec chaque facteur multiplié par $(1 + o(t^3))$. Rappelons enfin que $\Delta = s^2\Delta_0$ sur notre chemin $Q(s)$ est relié à t via $t^2 = s$. Notre métrique g s'écrit alors sur notre chemin $Q(s)$

$$\begin{aligned}\pm g \;=& 2\frac{ds^2}{s^2} + \frac{ds_6^2 - ds_7 ds_8}{2\Delta_0 s^2} + \frac{3}{2\Delta_0}\frac{-c_0\,ds_1^2 - 2a_0\,ds_1 ds_2 - b_0\,ds_2^2}{s}\\ &+ \frac{3}{2\Delta_0}\frac{ds_3^2}{s^2} + \frac{1}{2\Delta_0^2}\frac{c_0\,d\tilde{s}_4^2 - 2a_0\,d\tilde{s}_4 d\tilde{s}_5 + b_0\,d\tilde{s}_5^2}{s^3} + o(t^3)\end{aligned}$$

avec les éléments s_1 et s_2 de l'ordre t, les éléments s, s_3, s_6, s_7 et s_8 de l'ordre t^2 et les éléments $\tilde{s}_4$ et $\tilde{s}_5$ de l'ordre t^3. Quitte à modifier s, nous pouvons supposer $\Delta_0 = -1$ et alors en posant $s_6 = a = s * a_0$, $s_7 = b = s * b_0$ et $s_8 = c = s * c_0$, nous avons

$$\begin{aligned}\pm g \;=& \frac{3}{2}\frac{ds^2}{s^2} - \frac{da_0^2 - db_0 dc_0}{2} - \frac{(2da_0 - c_0\,db_0 - b_0\,dc_0)ds}{2s}\\ &- \frac{3}{2}\frac{-c_0\,ds_1^2 - 2a_0\,ds_1 ds_2 - b_0\,ds_2^2}{s} + \frac{3}{2}\frac{ds_3^2}{s^2}\\ &+ \frac{1}{2}\frac{c_0\,d\tilde{s}_4^2 - 2a_0\,d\tilde{s}_4 d\tilde{s}_5 + b_0\,d\tilde{s}_5^2}{s^3} + o(t^3).\end{aligned}$$

Or $2da_0 - c_0\,db_0 - b_0\,dc_0 = 0$ car $a_0^2 - b_0c_0 = -1$ et la métrique

$$-da_0^2 + db_0 dc_0$$

est la métrique standard de l'espace symétrique hyperbolique $\mathcal{H} := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a_0^2 - b_0c_0 = -1\} \simeq X_{\{\alpha_1\}}$. Ainsi nous obtenons notre métrique sous la forme suivante :

Proposition 124 *Notre métrique g, au voisinage de la frontière $F - S \subset \mathbb{P}(\mathsf{N}(M \subset \mathcal{Q}_\tau)) \subset \tilde{\mathcal{Q}}_\tau$, s'écrit*

$$\begin{aligned}\pm 2g \;=& 3\frac{ds^2}{s^2} + g_{X_{\{\alpha_1\}}} + 3\frac{c_0\,ds_1^2 + 2a_0\,ds_1 ds_2 + b_0\,ds_2^2}{s}\\ &+ 3\frac{ds_3^2}{s^2} + \frac{c_0\,d\tilde{s}_4^2 - 2a_0\,d\tilde{s}_4 d\tilde{s}_5 + b_0\,d\tilde{s}_5^2}{s^3} + o(t^3)\end{aligned} \tag{11.3.6}$$

avec les éléments a_0, b_0 et c_0 de l'ordre t^0, s_1 et s_2 de l'ordre t, les éléments s et s_3 de l'ordre t^2 et les éléments $\tilde{s}_4$ et $\tilde{s}_5$ de l'ordre t^3 et avec $g_{X_{\{\alpha_1\}}}$ la métrique symétrique sur $X_{\{\alpha_1\}}$.

Remarque 125 *Nous retrouvons bien de manière algébrique la forme attendue à la remarque 123 avec* $\alpha = a_0$, $\beta = b_0$ *et* $\gamma = c_0$.

Finalement, en regardant le noyau de la limite de $s^3 g$ lorsque s tend vers 0, nous obtenons $\ker(s^3 g) = Vect(s_1, s_2, s_3, s) \oplus TX_{\{\alpha_1\}}$. Puis regardant le noyau de $s^2 g|_{\ker(s^3 g)}$, nous trouvons que $\ker(s^2 g|_{\ker(s^3 g)}) = Vect(s_1, s_2) \oplus TX_{\{\alpha_1\}}$. Or à la limite lorsque $s = 0$ les sections s_1 et s_2 correspondent aux vecteurs $\partial_{x_1}(x_0) = \xi_1(x_0)$ et $\partial_{x_2}(x_0) = \xi_2(x_0)$ de $T_{x_0}M$. Nous retrouvons ainsi l'espace $T^{-1}_{x_0}M = Vect(\partial_{x_1}(x_0), \partial_{x_2}(x_0))$. Cette étude étant effectuée pour n'importe quel point base x_0 nous retrouvons ainsi la distribution $T^{-1}M$ et donc la géométrie parabolique initiale de M. Ainsi la métrique quaternion-kählérienne donnée par une géométrie parabolique régulière de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$ dans le théorème 108 est différente de la métrique donnée par une autre géométrie parabolique régulière de type $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$. Nous pouvons ainsi compléter le théorème d'existence 108 par le théorème suivant :

Théorème 126 *Soit* $(p : \mathcal{G} \to M, \omega)$ *une géométrie parabolique régulière analytique de type* $(G_2^s, P_{\{\alpha_1\}})$. *Si nous notons* $(\mathcal{Q}^\omega_\tau, g^\omega)$ *l'espace quaternion-kählérien de dimension* 8 *dont un bord est* M, *donné par le théorème 108.*

Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{géométrie parabolique} \\ \textit{régulière analytique} \\ \textit{de type } (G_2^s, P_{\{\alpha_1\}}) \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{espace quaternion-kählérien} \\ \textit{de dimension } 8 \\ \textit{avec un bord de type } (G_2^s, P_{\{\alpha_1\}}) \end{array} \right\} \\ (p : \mathcal{G} \to M, \omega) & \longmapsto & (\mathcal{Q}^\omega_\tau, g^\omega) \end{array}$$

est injective.

Bibliographie

[BE95] D. Bayer and D. Eisenbud. Ribbons and their canonical embeddings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(3) :719–756, 1995.

[Ber55] M. Berger. Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 83 :279–330, 1955.

[Bes08] A. Besse. *Einstein manifolds*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.

[Biq00] O. Biquard. *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*, volume 265 of *Astérisque*. 2000.

[Biq07] O. Biquard. Sur les variétés CR de dimension 3 et les twisteurs. *Ann. Inst. Fourier*, 57(4) :1161–1180, 2007.

[BM06] O. Biquard and R. Mazzeo. Parabolic geometries as conformal infinities of Einstein metrics. *Arch. Math. (Brno)*, 42(suppl.) :85–104, 2006.

[Bry87] R. L. Bryant. Metrics with exceptional holonomy. *Ann. of Math. (2)*, 126(3) :525–576, 1987.

[CDS05] D.M.J. Calderbank, T. Diemer, and V. Souček. Ricci-corrected derivatives and invariant differential operators. *Differential Geom. Appl.*, 23(2) :149–175, 2005.

[ČS09] A. Čap and J. Slovák. *Parabolic geometries I*, volume 154 of *Mathematical Surveys and Monographs*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009. Background and general theory.

[GJT98] Y. Guivarc'h, L. Ji, and J.C. Taylor. *Compactifications of symmetric spaces*, volume 156 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics.

[Hel84] S. Helgason. *Groups and geometric analysis*, volume 113 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. In-

tegral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.

[Hel01] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.

[Kod62] K. Kodaira. A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 75 :146–162, 1962.

[KPS93] I. Kolář, W. M. Peter, and J. Slovák. *Natural operations in differential geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[LeB82] C. LeBrun. $\mathcal{H}$-space with cosmological constant. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 380(1778) :171–185, 1982.

[LeB83] C. LeBrun. Spaces of complex null geodesics in complex-riemannian geometry. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278(1) :209–231, July 1983.

[LeB89] C. LeBrun. Quaternionic-Kähler manifolds and conformal geometry. *Math. Ann.*, 284(3) :353–376, 1989.

[Sal82] S. Salamon. Quaternionic kähler manifolds. *Invent. Math.*, 67(1) :143–171, 1982.

[Šil03] J. Šilhan. Algorithmic computations of Lie algebras cohomologies. In *Proceedings of the 22nd Winter School "Geometry and Physics" (Srní, 2002)*, number 71, pages 191–197, 2003.

[WB59] H. Whitney and F. Bruhat. Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels. *Comment. Math. Helv.*, 33 :132–160, 1959.