

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**

U N I V E R S I T É D E B O U R G O G N E

Les squelettes

Structures d'interaction directe et intuitive avec des formes 3D

 Thomas Delame

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
U N I V E R S I T É D E B O U R G O G N E

N° 4 | 1 | 1

THÈSE présentée par

THOMAS DELAME

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Bourgogne

Spécialité : **Informatique**

Les squelettes

Structures d'interaction directe et intuitive avec des formes 3D

Soutenue publiquement le 19 Septembre 2014 devant le Jury composé de :

MARIE-PAULE CANI	Examinatrice	Professeure à l'université de Grenoble INP
RAPHAËLLE CHÂÎNE	Rapporteur	Professeure à l'Université Claude Bernard Lyon 1
DOMINIQUE FAUDOT	Directrice	Professeure à l'Université de Bourgogne
GÉRALDINE MORIN	Rapporteur	Maître de Conférence à l'Université de Toulouse
CÉLINE ROUDET	Co-Encadrante	Maître de Conférence à l'Université de Bourgogne

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	1
1.1	Les squelettes pour l'interaction directe intuitive	2
1.1.1	Interaction directe	2
1.1.2	Squelette comme MRF	5
1.1.3	Interactions intuitives par les squelettes	10
1.2	Contributions	11
2	État de l'art	17
2.1	Taxinomie des formulations squelettiques	17
2.1.1	Dimension des composantes squelettiques	17
2.1.1.1	Squelettes courbes	18
2.1.1.2	Squelette surface	21
2.1.1.3	Discussion	22
2.1.2	Différentes symétries	22
2.1.2.1	Symétries fondées sur la sphère	23
2.1.2.2	Calcul du centre de l'atome	24
2.1.2.3	Discussion	25
2.1.3	Espace de travail	26
2.1.3.1	Squelettes images	26
2.1.3.2	Squelettes analytiques	27
2.1.3.3	Discussion	27
2.2	Squelettisations	29
2.2.1	Paradigme de calcul des squelettes	29
2.2.2	Semi-continuité de la squelettisation	30
2.2.3	Algorithmes de calculs	31
2.2.3.1	Diagramme de Voronoï et <i>PowerShape</i>	32
2.2.3.2	Bissecteurs et classification des atomes : <i>Medial Scaffold</i> . .	35
2.2.3.3	Contraction de sphères	38
2.2.3.4	Discussion	42

2.3	Sous-problèmes de l'utilisation des squelettes comme MRF	43
2.3.1	Habillage	43
2.3.1.1	Affichage naïf	43
2.3.1.2	Surfaces implicites	44
2.3.1.3	<i>Skin Surfaces</i>	45
2.3.1.4	Utilisation de données additionnelles	46
2.3.1.5	Splatting	48
2.3.1.6	Discussion	48
2.3.2	Régularisation	49
2.3.2.1	Critères locaux d'importance	50
2.3.2.2	Critères globaux d'importance	51
2.3.2.3	Discussion	54
2.3.3	Structure squelettale	55
2.3.3.1	Définitions	55
2.3.3.2	Méthodes d'amélioration	56
3	Habillage d'un squelette	61
3.1	Habillage par arbre octal et projections	61
3.1.1	Voxelliser la géométrie du squelette	61
3.1.1.1	Capturer les détails	63
3.1.1.2	Inconsistance dans une feuille	64
3.1.1.3	Inconsistance entre feuilles voisines	66
3.1.1.4	Invariant	67
3.1.2	Mailler la voxellisation	68
3.1.3	Affiner l'habit par des projections	70
3.1.3.1	Insertion des primitives de migration	70
3.1.3.2	Migration des sommets de l'habit	72
3.1.3.3	Améliorations	73
3.2	Validation et capacité de reconstruction	74
3.2.1	Autres méthodes	74
3.2.2	Protocole	76
3.2.3	Résultats	78
3.2.4	Limitations	83
4	Bruit squelettal	87
4.1	Squelette hiérarchique	87

4.2	Structuration du bruit squelettal	90
4.2.1	Amas	90
4.2.2	Hérissément	93
4.3	Validation	97
4.3.1	Protocole	98
4.3.2	Résultats	99
4.3.3	Limitations	104
5	Structure squelettale	109
5.1	Les bords du squelette	109
5.1.1	Identification par voxellisation	112
5.1.1.1	Voxelliser la structure squelettale	112
5.1.1.2	Bords de la voxellisation	113
5.1.1.3	Résultats	118
5.1.2	Identification par projection dans un plan tangent	120
5.1.2.1	Voisinages géométrique et topologique d'un atome	123
5.1.2.2	Contour du polygone $\mathcal{P}$	125
5.1.2.3	Résultats	127
5.2	Importance calculée grâce aux bords	131
5.2.1	La distance géodésique aux bords comme importance ?	135
5.2.2	Propagation d'une onde destructrice de bords	137
5.2.3	Résultats	139
5.3	Hiérarchisation et meso-squelette	142
5.3.1	Identifier les composantes courbes	143
5.3.2	Processus de hiérarchisation	144
5.3.3	Résultats	146
5.3.3.1	Hiérarchies calculées	147
5.3.3.2	Comparaisons entre le meso-squelette et les squelettes courbes	147
5.3.3.3	Limitations et discussion	152
6	Conclusions et perspectives	155

INTRODUCTION

Par le dessin et le modelage de formes, nous transmettons visuellement des concepts, des émotions ainsi que des histoires. Cependant, peu d'entre nous ont les talents nécessaires pour s'exprimer de cette manière dans l'espace physique. Nous aimerions pouvoir compter sur l'outil informatique, afin de tirer parti du potentiel d'un espace virtuel et pallier ces faibles talents. Pour cela, certaines tâches du domaine de l'informatique graphique doivent être accomplies dans cet espace. La première de ces tâches est visualiser une forme numérique, pour percevoir son apparence. Pour obtenir cette forme, il doit être possible de la créer à moindre effort. Cette forme est ensuite affinée par des interactions simples pour rendre son apparence conforme aux attentes. Une autre des tâches à accomplir dans l'espace virtuel consiste à segmenter une forme en différentes unités sémantiques, appelées **composantes logiques**, pour interagir individuellement avec ces unités. Notamment, grâce aux unités sémantiques, il doit être possible de déformer cette forme, pour modifier localement son apparence, comme par exemple en changer la posture. Pour simplifier les interactions avec la forme, il est intéressant de simplifier d'abord la forme elle-même, en ignorant dynamiquement les détails tout en conservant les caractéristiques principales de la forme : il est alors plus facile de se repérer et d'opérer sur la forme. Enfin, l'animation est une tâche qui, en ajoutant la dimension du temps à la forme, permet de raconter une histoire ou de décrire une évolution. Pour réduire le temps d'interaction et faciliter la prise en main, il est souhaitable que ces tâches s'effectuent avec le maximum d'automatisation et avec le minimum de connaissances pré-requises.

Dans l'espace virtuel, une forme est décrite par un **Modèle de Représentation des Formes (MRF)**. Un tel modèle est une structure de données qui contient les informations nécessaires à la représentation informatique d'une forme. Les MRF répondent plus à des contraintes de précision et de performance que d'interaction intuitive. Faire varier les paramètres du modèle pour modifier la forme est peu naturel : il n'y a pas interaction directe avec la forme. L'utilisateur est alors peu enclin à persévérer pour obtenir des résultats conformes à son intention. L'apprentissage de ces modèles et de leurs paramètres nuit également à l'intérêt d'utiliser l'outil informatique pour s'exprimer par des formes. C'est pourquoi les applications d'interaction avec des formes proposent tout un panel d'opérateurs, de menus et de boîtes de dialogue pour faire l'interface entre les paramètres du modèle et l'utilisateur. Cependant, l'utilisateur doit apprendre ces éléments d'interface pour prédire les résultats d'une interaction. Ces éléments n'interviennent pas naturellement dans le processus mental d'interaction avec une forme, ce qui freine le potentiel créatif. Enfin, malgré son investissement, l'utilisateur n'est pas plus capable de s'exprimer dans cet espace virtuel que dans l'espace physique. L'utilisateur va repousser autant que possible l'usage de ces applications, préférant dessiner ou sculpter une forme. Un fossé s'est donc creusé entre les applications en infographie et le grand public. Ce fossé ne pourra être comblé que par des interactions directes et intuitives avec les formes.

L'objectif de cette thèse était l'étude des possibilités d'application des squelettes. Un *squelette* est une structure mince, centrée en une forme, décrivant la topologie et la géométrie de la forme. Des études psychologiques [Blum 1967, Leyton 1992] et physiologiques [Lee 1998, Hung 2012] ont montré que ces MRF particuliers sont au cœur des processus de pensée se déroulant lors de la compréhension et la reconnaissance des formes. Notamment, le changement de l'apparence d'une forme, suite à une modification de son squelette, est intuitivement compris par l'Homme. Les squelettes pourraient alors être utilisés pour résoudre le problème d'interaction avec les formes. Sous le terme d'interaction, nous regroupons la visualisation, la création, la segmentation, la déformation, la simplification et l'animation de formes. Cette utilisation des squelettes permettrait de dresser un pont entre l'informatique et l'intellect humain, pour réduire le fossé que nous avons constaté. Avant de pouvoir faire du squelette un tel instrument d'interaction, certains points délicats doivent être résolus. Dans ce travail, nous avons listé ces points délicats et nous avons proposé des méthodes pour les résoudre. Le but est un MRF adapté à l'interaction directe et intuitive.

1.1/ LES SQUELETTES POUR L'INTERACTION DIRECTE INTUITIVE

Dans cette section, nous commençons par préciser le concept d'interaction directe. Ce concept est une première étape vers l'interaction naturelle avec des formes. De ce concept, nous en tirons certaines conclusions qui définissent ce que nous appelons l'interaction intuitive. Nous expliquons ensuite pourquoi nous considérons le squelette comme MRF pour l'interaction directe intuitive. Cette utilisation des squelettes implique la résolution de trois problèmes qui sont le cœur de notre travail : l'habillage, la régularisation et la structuration.

1.1.1/ INTERACTION DIRECTE

Considérons l'interaction avec une *forme* du point de vue des principes de l'*Interaction Homme-Machine* (IHM). La manipulation directe est un paradigme d'interaction explicité par Schneiderman lors de l'avènement des premières *Interfaces Utilisateur Graphique* (IUG) : l'utilisateur doit être capable de manipuler directement les objets qui lui sont présentés en utilisant des métaphores inspirées du monde physique [Schneiderman 1983]. Cependant, la manipulation est souvent indirecte dans les IUG : les utilisateurs manipulent des instruments, comme des barres de défilement, des réglettes ou des boîtes de dialogues, qui vont, à leur tour, manipuler les objets d'intérêt, qui sont dans notre cas les formes tridimensionnelles. Beaudouin-Lafon a alors introduit la notion d'interaction instrumentale [Beaudouin-Lafon 2000] et il propose de quantifier l'indirection d'interaction en utilisant trois propriétés des instruments : leur degré d'indirection, leur degré d'intégration et leur degré de compatibilité.

Le degré d'indirection quantifie le décalage spatio-temporel généré par un instrument. Dans notre cas, l'utilisateur doit pouvoir interagir avec la forme à l'endroit où il applique son instrument et la réponse doit être immédiate. Deux métaphores principales existent pour interagir avec un faible degré d'indirection spatiale sur une forme : la métaphore du croquis et la métaphore de modelage (voir la figure 1.1). Avec la première, l'instrument représente un pinceau qui vient ajouter de la couleur sur un canevas. C'est ce que l'on trouve par exemple dans le logiciel historique *Paint* [Microsoft 1985]. Une interaction peut être totalement contrôlée par les tracés du pinceau. Par exemple, en traçant deux traits, l'espace va être modifié afin que le premier trait vienne se superposer sur le second, déformant ainsi la forme. On parle

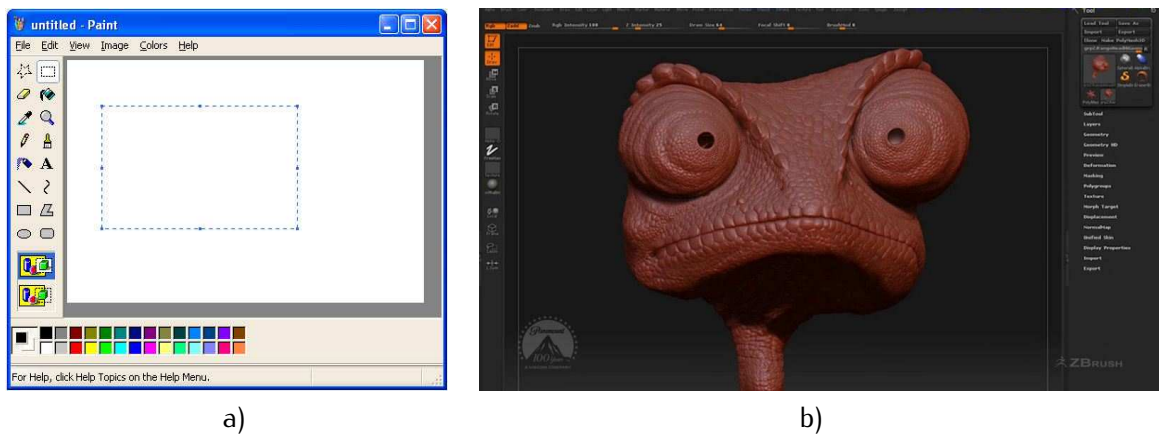


FIGURE 1.1 – Métaphores d'interaction avec des formes ayant un faible degré d'indirection. a) Le logiciel Paint est l'un des premiers exemples de métaphore de croquis où l'outil est un pinceau. b) Le logiciel ZBrush dont les outils simulent le modelage sur de la glaise (cette image est la propriété de l'entreprise Industrial Light & Magic).

alors d'interface contrôlée par l'esquisse (*Sketch-Based Interface* en anglais). Avec la seconde métaphore, l'utilisateur interagit avec sa forme comme si elle était en glaise. C'est une métaphore de plus en plus populaire dans les milieux professionnels, avec par exemple le logiciel ZBrush [Pixologic 1997]. L'indirection temporelle doit être aussi faible que possible afin de proposer à l'utilisateur un retour en temps réel : il peut constater les effets de son interaction immédiatement, pour guider ses prochaines actions. Une interaction est composée, pour ces deux métaphores, de la séquence des positions de l'instrument pour chaque pas de temps. Chaque position entraîne des calculs pour réaliser les changements de la forme induits par l'instrument, puis pour afficher la géométrie de la forme modifiée. Le pas de temps est relativement petit, pour donner l'impression d'une réaction en temps réel : le standard télévisuel Européen considère qu'il est nécessaire d'avoir 25 images par seconde pour obtenir l'illusion d'un mouvement fluide. Ainsi, très peu de temps machine peut être alloué au calcul des résultats de l'interaction et à l'affichage de la forme par pas de temps. Plusieurs niveaux de détails de la forme peuvent être considérés pour calculer une modification grossière de la forme par l'instrument et avoir moins de géométrie à traiter pour l'affichage. À la fin de l'interaction, lorsque l'instrument ne bouge plus, les modifications exactes de la forme sont calculées. Il est donc intéressant de pouvoir simplifier une forme dynamiquement pour réduire l'indirection temporelle.

Le degré d'intégration mesure le rapport entre le nombre de **Degrés de Liberté (DdL)** disponibles dans la partie logique de l'instrument et le nombre de DdL capturés par le périphérique d'entrée. Un fort degré d'intégration signifie que l'utilisateur n'aura pas à faire des allées et venues entre la zone d'édition de sa forme et les différents menus et barres d'outils, par exemple pour changer l'outil affecté à l'instrument ou ses caractéristiques (comme son domaine d'influence et son type d'influence). Ces allées et venues induisent une forte indirection spatiale. Le nombre de va-et-vient peut être réduit en donnant directement accès aux paramètres du MRF, comme dans le logiciel Blender [Blender 1988] (voir la figure 1.2). Dans ce cas, l'utilisateur doit apprendre ce MRF puis l'éditer, paramètre par paramètre.

Le degré de compatibilité mesure la similarité entre l'action physique de l'utilisateur sur l'instrument (dans l'espace moteur, sur le périphérique d'entrée) et la réponse de l'objet (ici la forme dans l'espace virtuel). En règle générale, ce degré de compatibilité est toujours

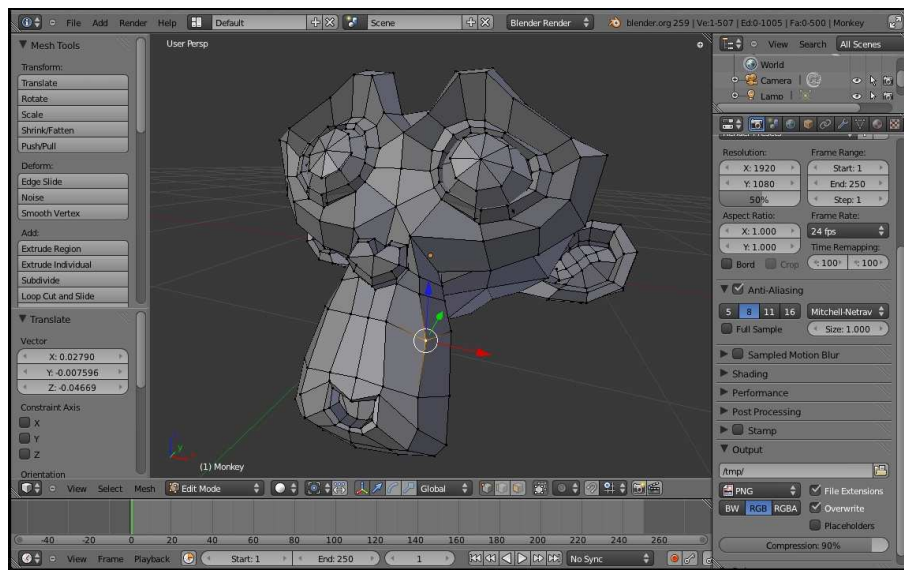
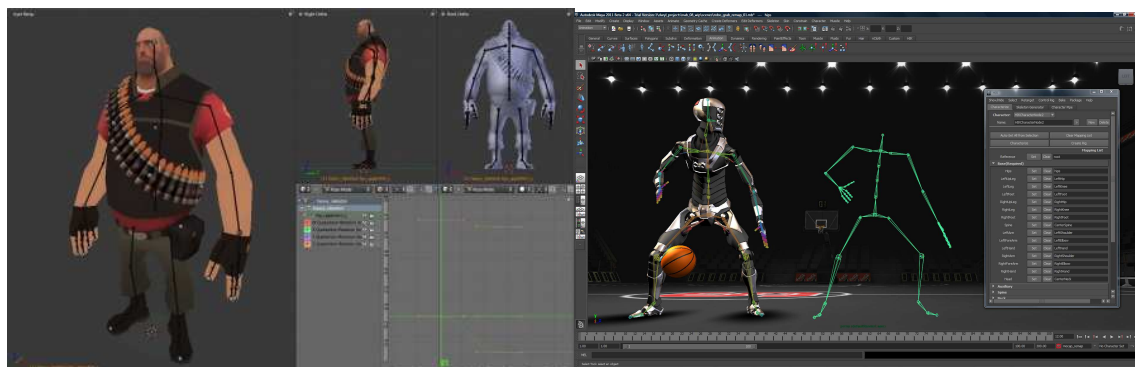


FIGURE 1.2 – Édition des sommets d'un maillage de contrôle d'une surface de subdivision dans le logiciel Blender.



Blender

Maya

FIGURE 1.3 – Utilisation d'un squelette d'animation pour un haut degré de compatibilité dans la modification de pose.

correct dans les différentes applications. Par exemple, afin d'animer une forme, un *squelette d'animation* est créé manuellement dans les logiciels *Maya* [Autodesk 1998] et *Blender* [Blender 1988] (voir la figure 1.3). Bien qu'il en porte le nom, le squelette d'animation est différent des squelettes que nous étudions dans cette thèse : ils ne décrivent ni la topologie, ni la géométrie d'une forme. Chaque élément du squelette d'animation, appelée os, contrôle la position de la partie de la forme qui l'entoure. En appliquant l'instrument sur un os, l'os se déplace dans le plan de vue de la même manière que le périphérique dans l'espace moteur. Le squelette d'animation sert alors de structure d'interaction pour l'animation de la forme. Le seul inconvénient de la méthode est la définition du squelette d'animation : il faut définir l'emplacement des os, leur longueurs, leur articulations et la manière dont ils contrôlent le volume de la forme. Cela nécessite une interaction parfois longue pour construire le squelette d'animation, avant d'avoir une interaction directe à fort degré de compatibilité.

Des principes de l'IHM, nous retenons donc que l'instrument d'interaction doit avoir un faible décalage spatio-temporel, une forte intégration et une forte compatibilité avec le périphérique

d'entrée. Nous en concluons aussi que la structure d'interaction doit être :

- multi-échelle (différentes niveaux de détails), pour la rapidité et la simplicité d'interaction ;
- complète, i.e. qui limite la nécessité d'aller-retour avec d'autres éléments d'interface ;
- intuitive, qui ne nécessite pas d'apprentissage pour prévoir les résultats d'une interaction ;
- automatiquement calculée à partir de la forme, pour éviter un long travail de création manuelle de cette structure.

Comme la forme est décrite par un MRF, c'est ce modèle qui doit permettre de calculer la structure d'interaction. Plutôt que de chercher à calculer une telle structure intuitive à partir d'un MRF, notre approche est d'utiliser directement un MRF intuitif comme une structure d'interaction directe. L'avantage est qu'il serait inutile de faire sans cesse la conversion entre le MRF et la structure d'interaction, pour refléter des modifications de l'un ou l'autre. Pour résoudre le problème de l'interaction, il nous resterait à rendre ce MRF complet et multi-échelle. Nous montrons que cela est possible si l'on considère les squelettes comme MRF. Comme un squelette doit être à l'intérieur d'une forme qu'il représente, les formes représentées sont nécessairement fermées (de sorte à définir un intérieur).

1.1.2/ SQUELETTE COMME MRF

Selon la définition générale, un squelette est un MRF car il décrit la géométrie d'une forme. Comme les formes sont généralement décrites par d'autres modèles, la question se pose de représenter une forme par un squelette. Cette étape est nécessaire pour importer une forme dans un logiciel d'interaction par les squelettes. La conversion, généralement à partir de maillages triangulaires¹, s'appelle la [squelettisation](#). Il existe un grand nombre de formulations des squelettes, chacune avec plusieurs algorithmes de squelettisation (voir les sections 2.1 et 2.2). Pour représenter une forme par un squelette, nous devons choisir le squelette le mieux adapté à une utilisation comme MRF. Pour cela, nous avons introduit trois critères de qualité : la capacité de reconstruction, le taux de bruit squelettal et la structure squelettale. Ces critères vont de pair avec trois opérations nécessaires pour l'interaction intuitive : l'habillage, la régularisation et la structuration des squelettes.

Une des premières fonctionnalités à fournir est la visualisation d'une forme décrite par un squelette. Il est en effet important de pouvoir afficher la géométrie de la forme, contenue dans le squelette, pour rendre compte de son apparence. Habituellement, une forme est visualisée en construisant une approximation de sa surface par un maillage triangulaire. Ce maillage triangulaire peut alors être utilisé comme MRF pour exporter une forme construite par des applications d'interaction par les squelettes vers d'autres applications. Aussi, à l'aide de ce maillage, il est possible de faire appel aux solutions logicielles de mesure de distance entre deux formes [[Aspert 2002](#), [Lavoué 2012](#)]. La distance d entre le maillage de la forme originale et le maillage approchant la géométrie contenue dans le squelette permet d'évaluer la [capacité de reconstruction](#). La capacité de reconstruction exprime la qualité de la géométrie d'une

1. Les autres MRF utilisés possèdent tous une conversion en maillage triangulaire, de sorte que nous pouvons considérer uniquement les maillages triangulaires.

forme capturée par un squelette. Elle varie de manière inversement proportionnelle à la distance d . En mesurant ces capacités de reconstruction, nous pouvons choisir la squelettisation qui convertit le mieux une forme en squelette. De même, avec cette capacité, nous pourrions vérifier les conséquences de la modification du squelette sur l'apparence de la forme, afin de valider nos solutions aux différents sous-problèmes. Comme le squelette est à l'intérieur de la forme, le maillage triangulaire approchant la surface de la forme entoure le squelette comme un habit. C'est pourquoi nous nommons ce maillage l'*habit* et sa construction l'*habillage* (voir la figure 1.4).

Un des problèmes majeurs des squelettes est le *bruit squelettal*. Les éléments constitutifs d'un squelette, que nous appelons *atomes*, ne contribuent pas tous à la description de la forme, alors qu'il s'agit de leur rôle premier. Nous verrons que cela est dû à l'instabilité des calculs pour positionner ces atomes au centre de la forme, afin de respecter la définition générale des squelettes. Certains de ces atomes donnent une apparence hérissée au squelette (voir la figure 1.5) et ajoutent des données géométriques aberrantes. Ce *hérissément* rend plus délicat le traitement du squelette, notamment pour extraire les composantes logiques de la forme, et surprend l'utilisateur avec une apparence de la forme perturbée. Il existe aussi des groupes d'atomes fortement similaires qui pourraient aisément être remplacés par un des atomes de ces groupes, sans perdre aucune information. Nous appelons ces groupes *amas*. Quand on sait qu'il n'est pas rare d'avoir des traitements du squelette en complexité quadratique (le temps de traitement est proportionnel au carré du nombre d'atomes), supprimer le bruit squelettal permet de réduire le degré d'indirection temporelle². Pour ces raisons, il est nécessaire d'avoir une étape de *régularisation* qui supprime ce bruit squelettal, avant d'interagir avec une forme par son squelette. Lorsqu'un squelette a été régularisé, nous parlons de *squelette nettoyé*.

Hormis le bruit squelettal et la capacité de reconstruction, il existe un troisième aspect de la qualité d'un squelette comme MRF. Il s'agit de la *structure squelettale*, dont la première responsabilité est de capturer la topologie de la forme. Elle est constituée de liens entre les atomes qui forment des faces triangulaires [Amenta 2001a, Telea 2012, Jalba 2013]. Il est équivalent de considérer les liens ou les faces puisqu'il est trivial de passer d'un ensemble à un autre. Théoriquement, l'objet constitué de ces faces a la même structure que la forme décrite par le squelette (nous verrons dans la section 2.3.3 qu'ils possèdent le même type d'homotopie), les faces ne s'intersectent pas entre elles et approchent une organisation en courbes et surfaces du squelette, appelées *composantes squelettales*. Par l'expression *composante surface* nous nous référons à une composante squelettale surface, et par *composante courbe* nous désignons une composante squelettale courbe. La réalité est cependant tout autre, comme en atteste la figure 1.6, qui présente différentes structures squelettales de squelettes déjà fortement régularisés. La structure squelettale est en effet très loin d'une organisation en courbes et surfaces : les faces s'intersectent entre elles à tout endroit et des liens, comme des faces, relient des composantes squelettales différentes. Il en résulte un fort chaos, difficile à traiter, rendant la structure squelettale ignorée en pratique. Pourtant, la structure squelettale est d'une aide précieuse comme nous le verrons dans la section 1.1.3. En particulier, nous montrons que pour améliorer la structure squelettale, il est nécessaire d'identifier les composantes squelettales et les bords du squelette, ainsi que de hiérarchiser les atomes en niveaux de détails de la forme. Ces opérations forment ce que nous appelons la structuration du squelette.

Il est à noter que la régularisation se doit d'améliorer également la structure squelettale. En

2. Par exemple, supprimer la moitié des atomes rend un algorithme quadratique quatre fois plus rapide sans avoir à l'optimiser ou le paralléliser.

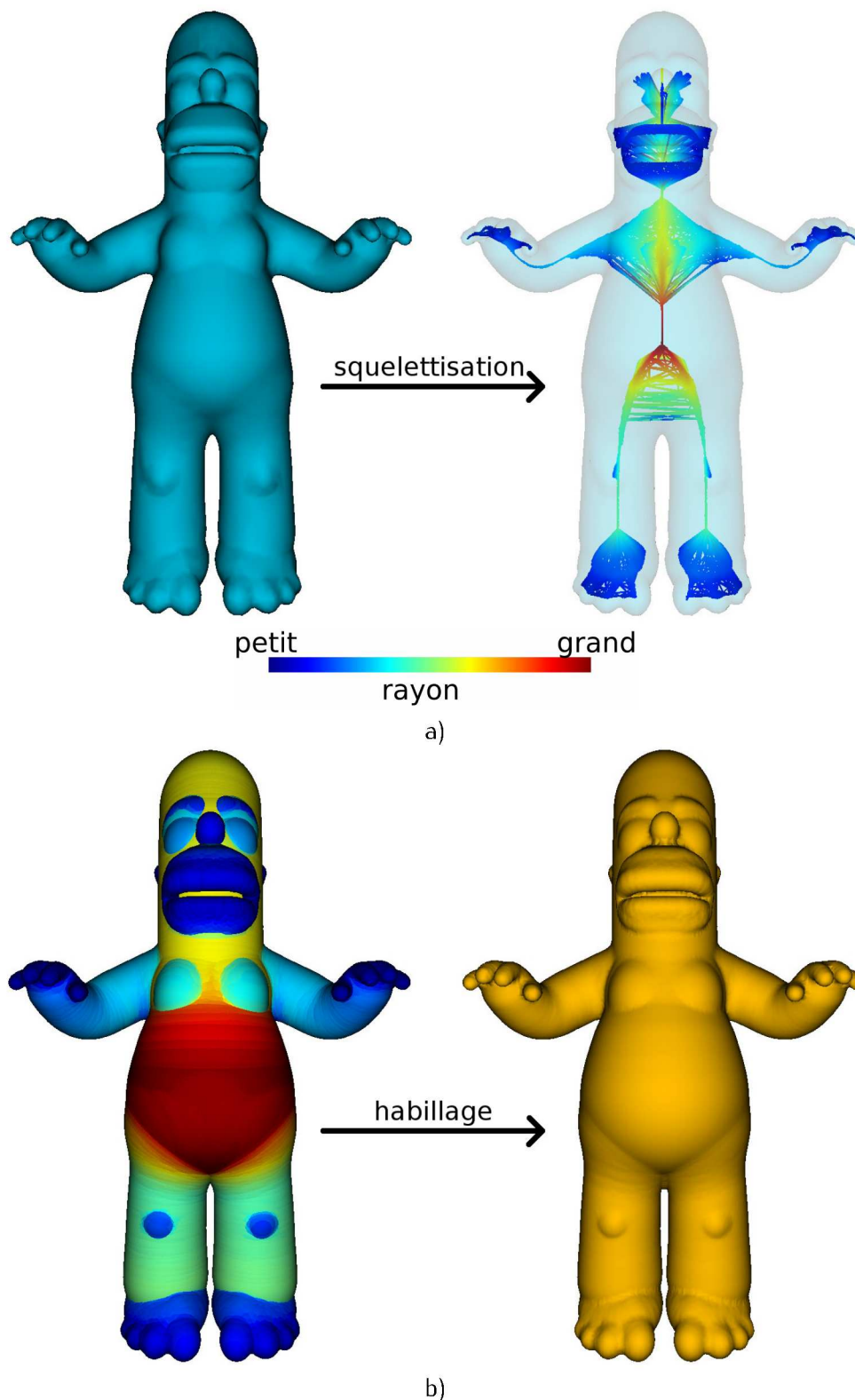


FIGURE 1.4 – Squelettisation et habillage. a) Une forme décrite par un maillage est convertie en squelette pour être manipulée. b) La géométrie de la forme est décrite par un ensemble de sphères que l'habillage converti en maillage pour être utilisée en dehors des applications d'interaction par squelettes. Le code couleur, symbolisant l'épaisseur locale de la forme, sera présenté dans le chapitre 2, en même temps que le squelette choisi pour nos travaux. Sauf mention contraire, toutes les images relatives aux squelettes ont été produites par nos soins, à partir des données obtenues par notre implantation logicielle.

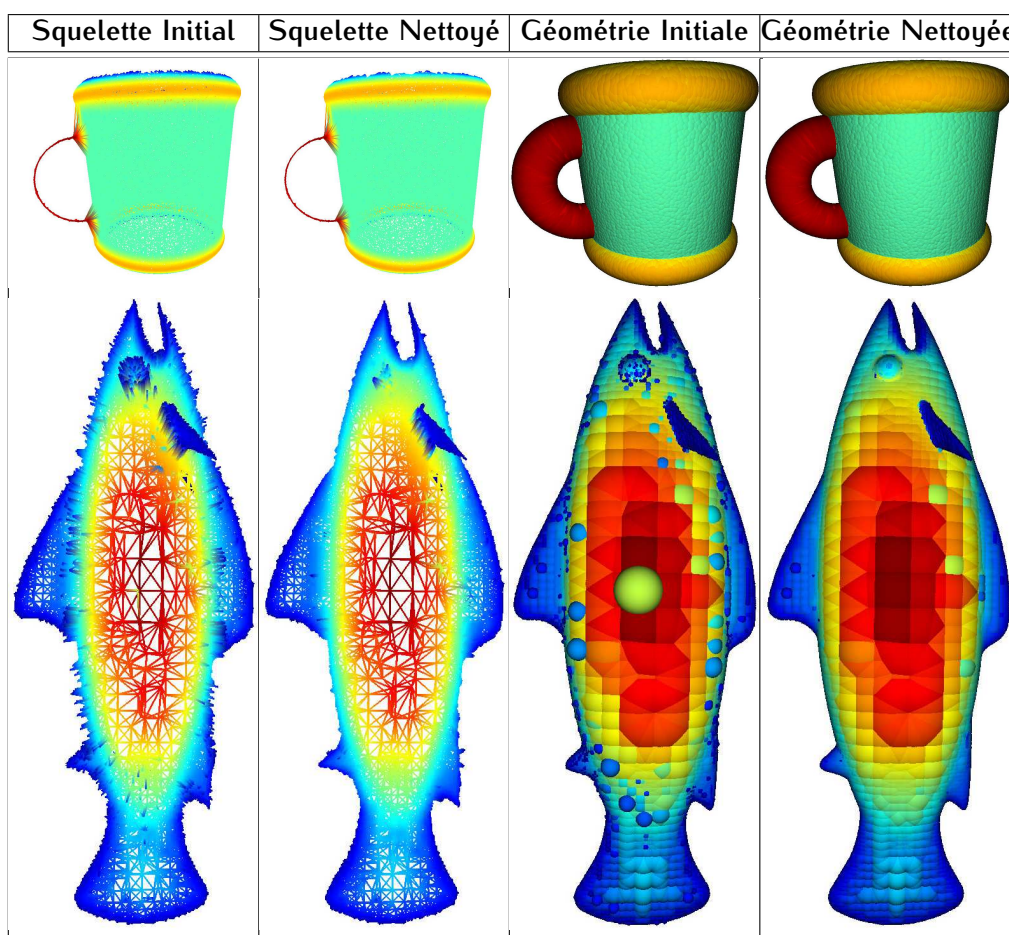


FIGURE 1.5 – Régularisations de squelettes. Pour le modèle cup, 62% des atomes ont été retirés, sans changements notables au niveau du squelette ou de la géométrie. Cela justifie l'inutilité de la majeure partie des atomes du squelette. Quant au modèle fish, 39% des atomes sont retirés, supprimant le hérissément et les données géométriques aberrantes.

effet, supprimer les atomes du bruit peut mener à la perte de la topologie de la forme décrite par le squelette : une composante squelettale peut être brisée en plusieurs autres ou des atomes peuvent se retrouver isolés. La régularisation doit alors réorganiser les liens après chaque suppression d'atome. C'est pour cela que nous parlons également de structuration du bruit (voir le chapitre 4) lorsque nous travaillons sur la régularisation.

La capacité de reconstruction, le taux de bruit squelettal et la structure squelettale sont les trois critères que nous avons retenus pour définir la qualité d'un squelette en tant que MRF. L'objectif de nos travaux n'est pas de créer une nouvelle méthode de squelettisation. Cependant, nous pouvons faire l'analyse de la qualité des squelettes produits par les méthodes existantes, ce qui peut, éventuellement, diriger de nouvelles recherches pour améliorer les squelettisations. La sous-section suivante revient sur la structuration qui permet de transformer le squelette de simple MRF à une structure d'interaction directe et intuitive.

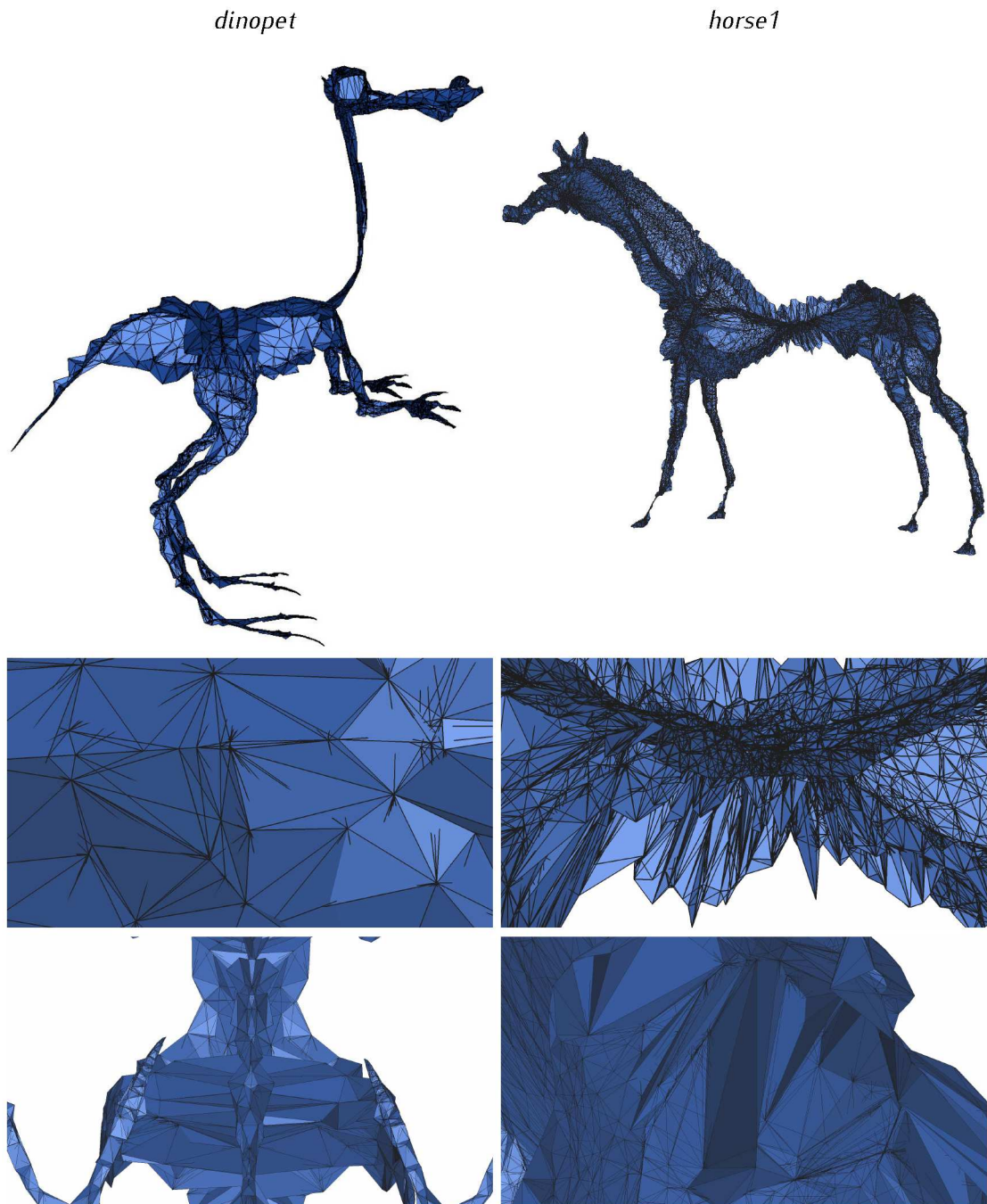


FIGURE 1.6 – Structures squelettiques de squelettes fortement régularisés visualisées par les faces triangulaires (en bleu). Sur ces deux structures, nous pouvons remarquer les intersections entre les faces de même que les faces qui relient deux composantes squelettiques différentes.

1.1.3/ INTERACTIONS INTUITIVES PAR LES SQUELETTES

Du point de vue de l'IHM, les squelettes permettent une interaction directe. Les atomes se trouvent à l'intérieur de la forme et décrivent la géométrie des parties de la forme qui les entourent. En déplaçant un groupe d'atomes dans une direction, nous obtenons une modification de la forme au niveau de ces atomes, dans la même direction. Les squelettes permettent donc un faible degré d'indirection spatiale et un fort degré de similarité. Cependant, les squelettes permettent plus qu'une interaction directe : leurs structures squelettiques rendent possible une interaction intuitive.

Les composantes squelettiques ont visiblement un lien avec les composantes logiques de la forme (voir la figure 1.7). En particulier, les atomes d'une composante squelettique décrivent la géométrie d'une composante logique, qui peut être parfois divisée en sous-composantes logiques (comme les griffes dans la figure 1.7). La segmentation des atomes en composantes squelettiques donne donc accès à une segmentation de la forme. Il serait ainsi possible de n'interagir qu'avec une composante logique simplement en posant le curseur sur la forme : la composante logique serait définie par la composante squelettique de l'atome qui décrit la zone où le curseur se trouve. Nous évitons ainsi un aller-retour entre les menus et la zone d'interaction pour activer un outil de sélection, ainsi que la définition manuelle de la composante logique avec cet outil, puisqu'elle est déjà sélectionnée automatiquement par la position de l'outil au début de l'interaction. Ce genre de mécanisme rend l'interaction plus naturelle : l'utilisateur a l'impression que l'interaction devine ses pensées et peut se concentrer uniquement sur son intention créatrice, sans étape d'apprentissage. Cette fonctionnalité est accessible à condition d'identifier les composantes squelettiques. Pour rendre le squelette encore plus complet, il est possible de changer dynamiquement le contexte de l'instrument d'interaction selon qu'il est positionné à l'intérieur, sur la forme, ou à l'extérieur. C'est ce qui a été proposé pour les formes planes dans [Delame 2011] où l'outil va déformer la forme s'il est placé à l'intérieur en ajoutant de la matière selon sa trajectoire, en retirant de la matière s'il est à l'extérieur et en changeant la posture s'il est sur la forme.

Les détails de surface d'une forme sont capturés par de petites composantes squelettiques rattachées à de plus grandes. En érodant le squelette, i.e. en supprimant itérativement ses bords (la définition est donnée dans la section 2.3.3), les petites composantes squelettiques disparaissent les premières. Ainsi, chaque érosion reflète un niveau de détail différent (voir la figure 1.8). Ces érosions définissent l'importance des atomes quant à leur contribution à décrire la géométrie de la forme. La force du modèle est que même en érodant jusqu'à obtenir uniquement des composantes courbes, les parties caractéristiques de la forme restent décrites par le squelette. À tout niveau de détail, les composantes logiques de la forme sont donc représentées. Aussi, cette érosion permet de simplifier le squelette afin de s'en servir lorsqu'il est de mauvaise qualité (comme le squelette du modèle *armadillo* de la figure 1.8, à cause des nombreux détails de surface qui rendent imprécise la squelettisation). Pour activer ces possibilités, il suffit d'être capable d'identifier les bords du squelette.

Le squelette d'animation présenté dans la section 1.1.1 est une structure d'interaction particulièrement intuitive. L'utilisateur interagit avec cette structure en la déplaçant, ce qui modifie la pose de la forme. En reprenant l'idée de l'érosion dont nous venons de parler, il est possible d'obtenir quelque chose de similaire et automatiquement grâce à une hiérarchie. Chaque érosion définit les atomes érodés comme étant les fils d'atomes non érodés (vers l'intérieur de la forme). En préservant les atomes organisés en courbes de l'érosion, la racine de la hiérarchie est une structure similaire au squelette d'animation. La principale différence est qu'en déplaçant les courbes de cette racine, la forme change automatiquement (alors

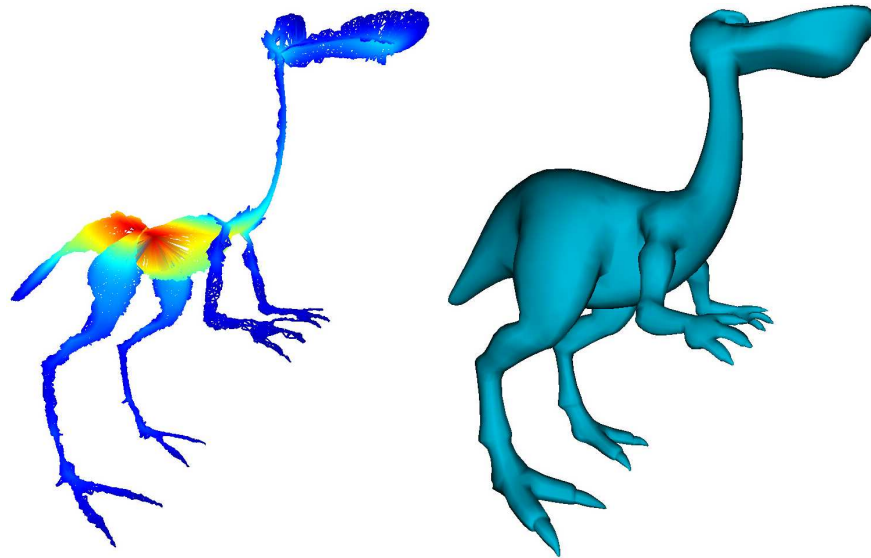


FIGURE 1.7 – Lien entre composantes squelettales et composantes logiques. Le squelette possède une composante par jambe de la forme, une par bras, une pour la queue, une pour le ventre et le dos, une pour le cou, une pour la gueule et une pour la zone des yeux. Ces composantes sont donc associées à une segmentation de la forme en composantes logiques.

qu'un squelette d'animation requiert une méthode pour transférer les modifications vers la forme). Grâce à un squelette ainsi hiérarchisé, le changement de pose et l'animation seraient fortement intuitifs.

Ainsi, pour transformer le squelette d'un simple MRF à une structure d'interaction intuitive, nous devons pouvoir identifier les composantes squelettales et les bords d'un squelette, ainsi que de hiérarchiser les atomes.

1.2/ CONTRIBUTIONS

La thèse est composée de trois grand axes, l'habillage, la régularisation et la structuration. Chacun des axes a pour but d'évaluer un aspect de la qualité du squelette et de l'améliorer. Ainsi, l'habillage s'occupera de la capacité de reconstruction, la régularisation du bruit squelettal et la structuration de la structure squelettale.

Ces axes sont tous interdépendants. L'habillage est nécessaire à la régularisation pour valider que seul le bruit squelettal est retiré, en vérifiant la variation de la capacité de reconstruction. La régularisation réduit la complexité de la structure squelettale, qui permet aux algorithmes de structuration d'arriver à des meilleurs résultats. La structuration, avec son identification des parties caractéristiques de la forme et des composantes squelettales, donnent plus accès à plus d'information pour construire un habit. Ceci forme un premier cycle de dépendance. Il y a un autre cycle de dépendance. L'habillage permet de vérifier la capture des zones caractéristiques de la forme et l'importance des atomes, lors de la structuration. La structuration permet de mieux identifier les détails du bruit squelettal, pour une régularisation plus performante. La régularisation supprime une grande quantité de données inutiles, ce qui ne laisse que des informations pertinentes pour un habillage et le calcul de la capacité de reconstruction.

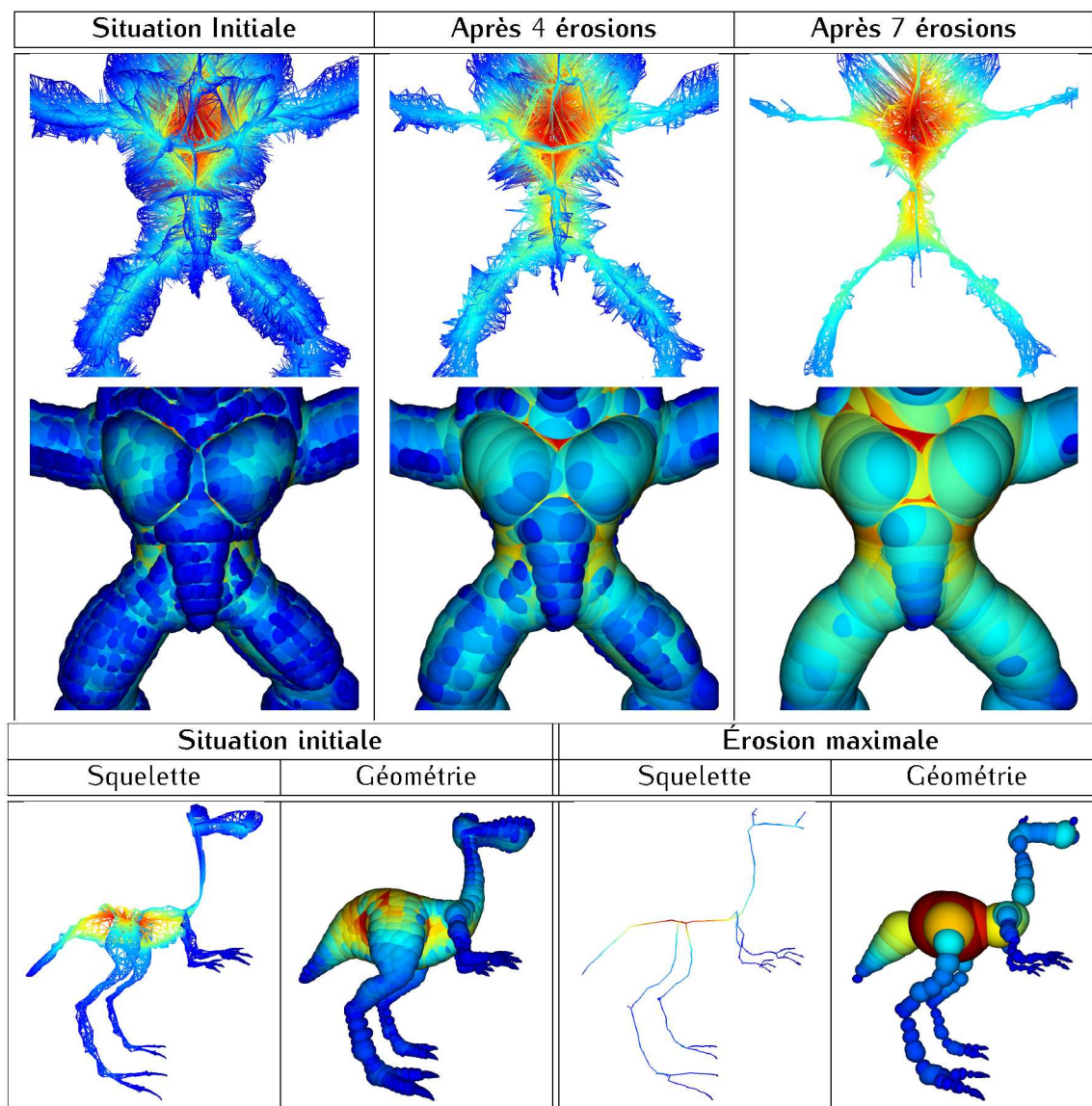


FIGURE 1.8 – Création de plusieurs niveaux de détails par érosion du squelette. Les détails de surface disparaissent peu à peu, mais les caractéristiques principales de la forme restent toujours présentes.

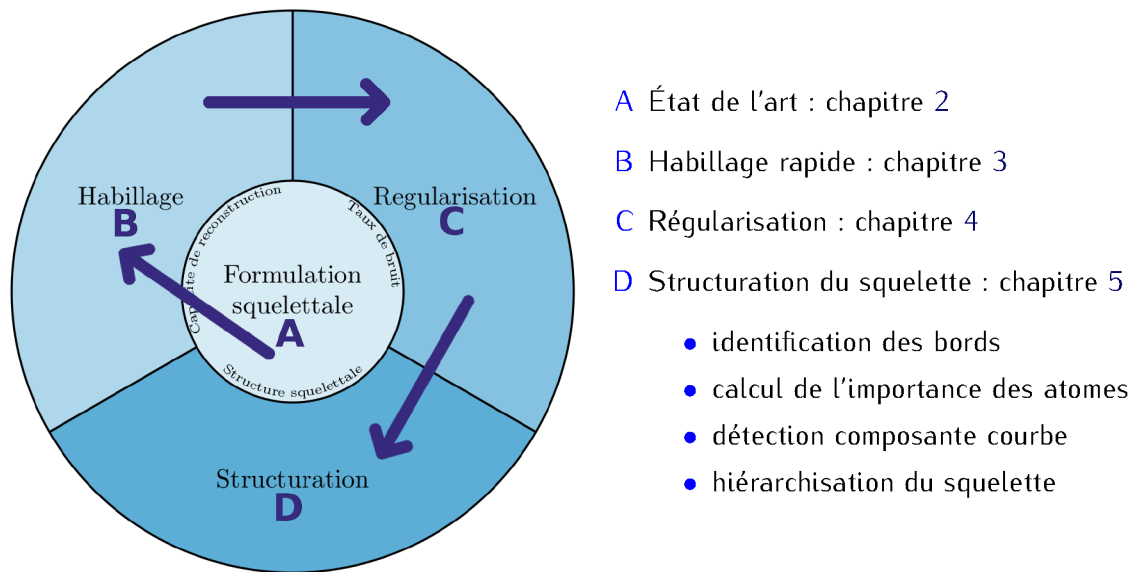


FIGURE 1.9 – Illustration des axes principaux de la thèse et de nos contributions. Le choix d'une formulation squelettale influe directement sur les trois critères de qualité d'un squelette. Elle détermine aussi les données disponibles pour mener à bien les trois opérations majeures de cette thèse. Chacune de ces opérations est dépendante des deux autres. Pour atteindre nos objectifs et résoudre ces dépendances, nous avons choisi une formulation squelettale adaptée, puis nous avons construit un habillage rapide qui s'exécute sur des squelettes non structurés et non régularisés. Ensuite, nous avons développé et validé une régularisation, grâce à la capacité de reconstruction. Enfin, nous avons apporté quatre contributions sur la structuration.

Dans cette section, nous expliquons comment nous avons résolu cette dépendance (voir l'image 1.9). Nous donnons ainsi la liste de nos sept contributions, mais aussi le plan de ce mémoire, car il suit l'ordre dans lequel nous avons résolu les problèmes.

Notre **première contribution** est l'étude de l'ensemble des formulations squelettales dans l'optique de déterminer celle qui est la mieux adaptée à une utilisation comme MRF. En raisonnant sur l'influence des formulations sur les critères de qualité, nous avons choisi la formulation médiane analytique. Dans notre étude, présentée dans le chapitre 2, nous faisons l'analyse des méthodes déjà proposées pour résoudre les trois axes qui nous occupent. Les manques des méthodes existantes justifient l'intérêt que nous avons porté à l'habillage, la régularisation et la structuration dans les chapitres suivants. Un des manques des méthodes existantes est leur forte dépendance à des données additionnelles qui ne sont pas calculables à partir du squelette seul. Ces données sont obtenues lors de la squelettisation, à partir du maillage converti en squelette. Ainsi, quand un squelette est modifié par une interaction, ces données ne peuvent plus être recalculées, car nous ne possédons pas de maillage de la forme modifiée. Dès lors, toutes nos solutions pour répondre aux manques des méthodes actuelles utilisent uniquement les données du squelette. Pour le squelette choisi, ces données sont un ensemble de sphères et de liens entre leurs centres.

Notre **seconde contribution** est une méthode d'habillage qui n'utilise pas la structure squelettale. Les informations en entrée de notre méthode sont donc une union de sphères dont on doit mailler la surface. Notre habillage met en place des techniques pour capturer les détails dans l'habit. Cependant, nous n'avons aucune garantie théorique que les détails soient ef-

fectivement capturés. L'habit obtenu permet non seulement de visualiser la forme, mais aussi de calculer la capacité de reconstruction. Nous utilisons cette capacité de reconstruction, calculée sur les habits de plusieurs méthodes, pour valider et comparer notre méthode d'habillage, plus rapide que les méthodes existantes. La capacité de reconstruction peut aussi être utilisée pour évaluer la géométrie capturée par un squelette, un point important pourtant délaissé dans les actuels. Cette seconde contribution est présentée dans le chapitre 3.

Avec une méthode pour mesurer la capacité de reconstruction d'un squelette, nous avons pu nous consacrer à la régularisation du squelette, qui est notre **troisième contribution**. En effet, une telle opération est censée retirer le bruit squelettal, soit l'ensemble des atomes qui ne contribuent pas à la description de la géométrie de la forme. Une fois ces atomes retirés, la capacité de reconstruction du squelette ne doit pas baisser. En fait, elle doit même augmenter car la disparition du hérissément entraîne la suppression des données géométriques aberrantes. C'est ainsi que nous avons pu valider notre troisième contribution : notre méthode de régularisation présentée dans le chapitre 4. Cette méthode prend en entrée un squelette avec structure squelettale, nettoyé ou non par d'autres régularisations (nous montrons que notre méthode reste efficace sur des squelettes déjà régularisés). Le résultat est un squelette hiérarchique, dont la racine est le squelette nettoyé.

Dans le chapitre 5 nous exposons nos différentes contributions sur la structuration. Si nous possédons une segmentation en composantes squelettale, la structure squelettale pourrait être grandement améliorée. Ces composantes sont théoriquement délimitées par leurs bords et leurs jonctions. Une fois les composantes obtenues, les liens peuvent être réorganisés à l'intérieur de chaque composante, pour rendre la structure squelettale idéale. Notre **quatrième contribution** consiste en deux méthodes d'identification des bords de ces composantes squelettales. Par l'étude du comportement des bords en présence d'un feu de prairie initié aux bords du squelette, nous avons abouti à une nouvelle méthode de calcul de l'importance des atomes, formant notre **cinquième contribution**. Cette importance est croissante avec l'influence d'un atome sur la description des parties caractéristiques de la forme. En particulier, cette importance croît de manière monotone vers l'intérieur du squelette. Ainsi, en tout point de la structure squelettale, la direction de l'intérieur du squelette est celle des importances croissantes. Le principe de calcul de l'importance semble pouvoir être réutilisé pour identifier les jonctions des composantes squelettales, ce qui permettrait de résoudre définitivement le sous-problème de la structure squelettale. Une **sixième contribution**, également présentée dans ce chapitre, permet d'estimer l'épaisseur locale d'une composante squelettale de sorte à identifier les composantes courbes. L'importance que nous calculons possède les propriétés nécessaires à l'obtention d'un squelette courbe, capturant chaque zone caractéristique de la forme, par une contraction des composantes surfaces. En couplant ce processus de contraction au principe de hiérarchisation utilisé dans notre méthode de régularisation, nous obtenons une hiérarchie du squelette en niveaux de détail de la forme. La racine de cette hiérarchie est un squelette courbe, que nous appelons **meso-squelette**, qui permet de contrôler l'ensemble de la géométrie de la forme. Le meso-squelette correspond à la structure d'interaction directe et intuitive que nous cherchions. Cette hiérarchisation est **notre septième et dernière contribution**.

Dans le chapitre 6, nous livrons nos conclusions sur nos sept contributions. Une des deux perspectives majeures de nos travaux concerne un nouvel algorithme complet de squelettisation. Par exemple, notre méthode d'habillage permet de détecter une insuffisance de géométrie capturée par le squelette afin de demander localement la création de nouveaux atomes. Le squelette sera régularisé, restructuré (pour améliorer la structure squelettale) puis hiérarchisé, produisant donc directement un squelette de bonne qualité et adapté à l'in-

teraction directe et intuitive avec les formes. L'autre perspective majeure est l'aboutissement de notre objectif premier : réduire le fossé entre les applications en infographie et le grand public, grâce à notre nouvelle structure d'interaction. Nous parlons donc de segmentation, déformation, simplification, animation et création de formes grâce au meso-squelette.

ÉTAT DE L'ART

INTRODUCTION

Pour une forme tridimensionnelle fermée, il existe une multitude de squelettes possibles, chacun ayant ses propres caractéristiques et ses intérêts. Dans ce chapitre, nous présentons notre étude de ces différents squelettes, sous la forme d'une classification, pour identifier ceux qui sont les mieux adaptés à une utilisation comme MRF. Nous donnons également un état de l'art des méthodes de squelettisation pour obtenir ces squelettes, ainsi qu'un état de l'art des méthodes d'habillage, régularisation et structuration.

2.1/ TAXINOMIE DES FORMULATIONS SQUELETTALES

La définition générale du squelette exprime un concept, qui a été décliné en plusieurs formulations. Chaque formulation propose une manière différente d'aborder le concept afin de lui donner une définition concrète. Nous présentons une analyse de ces formulations grâce à une taxinomie qui possède trois critères de divisions : la dimension des composantes squelettiques (une ou deux dimensions), la symétrie locale utilisée pour centrer le squelette et enfin l'espace dans lequel le squelette est plongé ($\mathbb{Z}^3$ ou $\mathbb{R}^3$).

2.1.1/ DIMENSION DES COMPOSANTES SQUELETTALES

L'élément constitutif d'un squelette est nommé atome. Un atome est un concept qui n'est pas uniformément défini sur la multitude des squelettes. Le seul point commun entre tous les atomes est qu'ils contiennent des données variées et qu'ils ont la charge de décrire la géométrie d'un objet. La donnée commune à tous les atomes est une position dans l'espace. La proximité de ces points forme des voisinages, qui induisent une organisation des atomes (une topologie). Nous utilisons l'expression structure squelettale pour désigner cette organisation des atomes.

Dans la définition générale, un squelette est dit « mince ». Il est communément admis que cela indique que la structure squelettale doit être d'une dimension inférieure à celle de la forme. Dans notre cas, les formes sont de dimension trois, donc la structure squelettale peut être au plus de dimension deux. Certains squelettes interdisent les composantes squelettiques de dimension deux : ils n'ont donc que des composantes courbes et sont appelés les squelettes courbes. D'autres autorisent ces composantes et sont nommés squelettes surfaces.

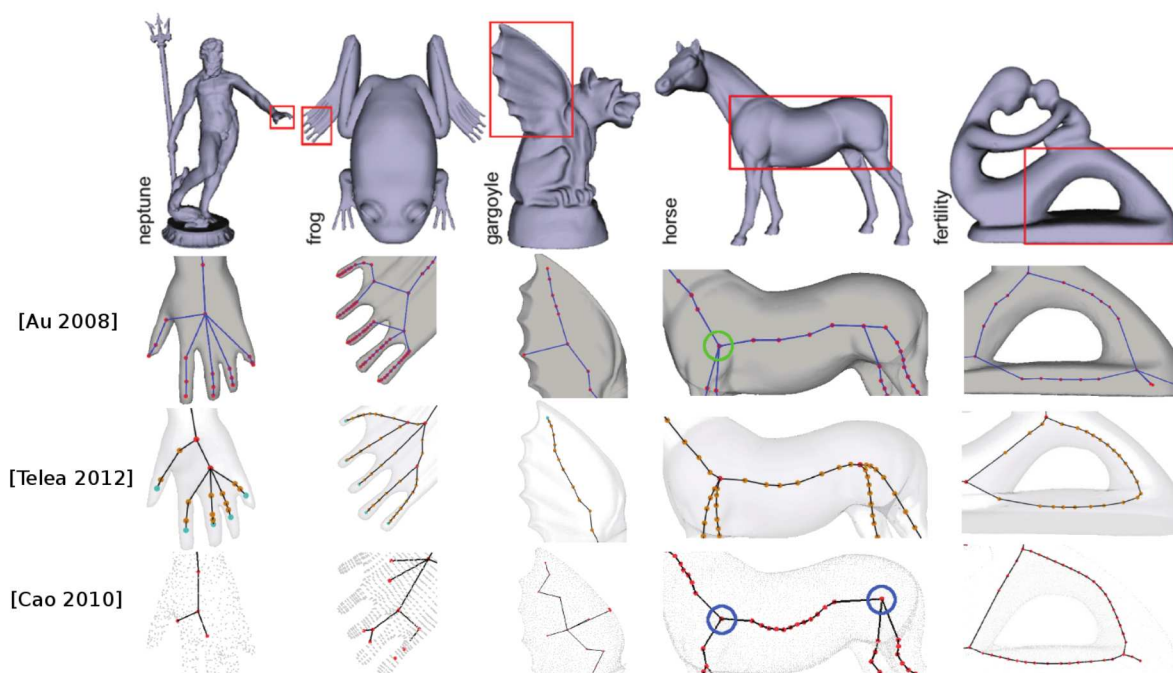


FIGURE 2.1 – *Squelettes courbes obtenus par contraction de la forme ou contraction d'un squelette surface. Sur les mêmes formes (ligne du haut), trois méthodes [Au 2008, Telea 2012, Cao 2010] produisent des squelettes courbes différents. Les images sont tirées de [Sobiecki 2013].*

2.1.1.1/ SQUELETTES COURBES

Dans un squelette courbe, la structure squelettale est composée d'un ensemble de courbes. La plupart des squelettes courbes est définie à l'aide d'un algorithme. Nous parlons alors de **définitions constructives**. Cela a donné naissance à une grande variété de squelettes courbes : un par algorithme. Nous appelons les squelettisations qui produisent des squelettes courbes les **squelettisations courbes**. Un état de l'art des squelettes courbes [Cornea 2007], recense les principaux algorithmes de squelettisation courbe. Nous ne présentons ici que les algorithmes reposant sur des contractions, car nous utiliserons un algorithme similaire dans la section 5.3. Ces contractions s'opèrent au niveau de la forme à squelettiser ou sur le squelette (voir la figure 2.1). Une étude récente [Sobiecki 2013] recense six de ces squelettisations courbes par contraction publiées après [Cornea 2007], afin de compléter cet état de l'art.

Les squelettisations courbes par contraction sont populaires. La raison principale est la très grande rapidité d'exécution de ces méthodes, même sur des objets avec beaucoup de détails. Cet argument prend tout son sens lorsque l'on sait qu'une squelettisation est usuellement une opération lourde, qui freine la mise en application des squelettes.

La contraction de forme se fait itérativement : à chaque étape, elle s'effondre un peu plus sur elle-même. Cela est réalisé en déplaçant vers l'intérieur de la forme soit les sommets d'un maillage représentant la forme, soit un échantillonnage de la surface de la forme. Ainsi, la structure obtenue est de plus en plus mince, jusqu'à obtenir un ensemble de courbes. En réalisant une migration uniforme – les sommets ou les échantillons progressent tous d'une même distance vers l'intérieur lors d'une itération – le résultat est centré dans la forme initiale. Cette squelettisation courbe se retrouve dans [Au 2008] à l'aide d'un maillage triangulaire et

dans [Cao 2010] à l'aide d'un échantillonnage de la surface de la forme.

La première définition formelle d'un squelette courbe [Dey 2006] est récente. Ce squelette est présenté comme la contraction d'un squelette surface, la surface médiane (voir la définition dans la section 2.1.2.2). Comme un squelette surface est par définition, mince et centré, le squelette courbe obtenu l'est également. En effet, il sera situé au « centre » du squelette surface. Tout comme pour la contraction d'une forme, ce centre est calculé par migration. Au lieu de faire migrer les sommets d'un maillage, il s'agit de faire migrer les atomes d'un squelette surface vers l'intérieur du squelette. L'idée a été reprise et améliorée dans [Telea 2012] grâce à la création d'un squelette surface ayant une structure squelettale qui est une 2-variété. La direction de migration des atomes, i.e. l'intérieur du squelette surface, est définie par une induction sur des données additionnelles dépendantes de la forme (obtenues lors de la squelettisation); cette direction permet de grandement optimiser les calculs. Nous verrons dans la section 5.2 une méthode pour définir autrement l'intérieur du squelette sans requérir ces données additionnelles.

Ce type de squelette ne décrit pas suffisamment la géométrie d'un objet pour être un modèle de représentation des formes. Autrement dit, les squelettes courbes possèdent une faible capacité de reconstruction. Cela tient au fait que ces squelettes ont été développés dans un contexte où la forme est connue, pour servir de structure temporaire de calcul. La géométrie capturée par le squelette n'est donc pas un critère de qualité pour les squelettes courbes. Les squelettes courbes sont utilisés pour l'animation, la segmentation et la reconnaissance de formes.

La cinématique inverse est une méthode d'animation où les paramètres, tels que les rotations des articulations du modèle ou les positions des éléments, sont définis par des poses. Le terme inverse renvoie au fait que la cinématique est généralement étudiée à partir de ces paramètres pour déterminer la variation d'une pose. Dans cette méthode, des squelettes courbes sont utilisés pour spécifier les poses d'une forme donnée par un maillage. Les faces de ce maillage sont attachées aux atomes du squelette, de sorte que les faces suivent le déplacement des atomes desquels elles dépendent. Le fait que le squelette contienne peu d'atomes et que ces atomes sont organisés en courbes, simplifient l'interaction avec ce squelette pour modifier la pose. La plupart de ces squelettes sont définis manuellement par un animateur, de même que leur correspondance avec les faces (la correspondance est appelée *skinning* en anglais), en utilisant par exemple le logiciel *Blender* [Blender 1988]. Certaines méthodes tentent de réaliser ces deux opérations automatiquement [Liu 2003]. La nécessité d'une correspondance disparaîtrait si le squelette d'animation était un MRF, soit avec une capacité de reconstruction bien plus élevée.

Les travaux sur la squelettisation courbe mettent souvent en avant les possibilités de segmentation d'un squelette courbe [Li 2001, Au 2008]. Pour cela, les composantes squelettales sont associées aux composantes logiques de la forme : la composante logique est la partie de la forme autour d'une composante. Cette association entre squelette et composantes logiques n'est pas sans rappeler la méthode du *skinning* de l'animation squelettale. La segmentation comme application des squelettes courbes, illustrée par la figure 2.2, tire profit du lien entre les composantes squelettales et les composantes logiques de la forme. Il est intéressant de constater l'existence de ce lien sur les squelettes courbes malgré leur faible capacité de reconstruction. Cependant, la mise en pratique de ce lien requiert l'utilisation d'un MRF additionnel et d'une méthode de correspondance entre ce MRF et le squelette courbe.

La recherche d'un modèle dans une base de données est une action courante en informatique graphique. La base de données contient différentes formes d'intérêt, regroupées en plusieurs

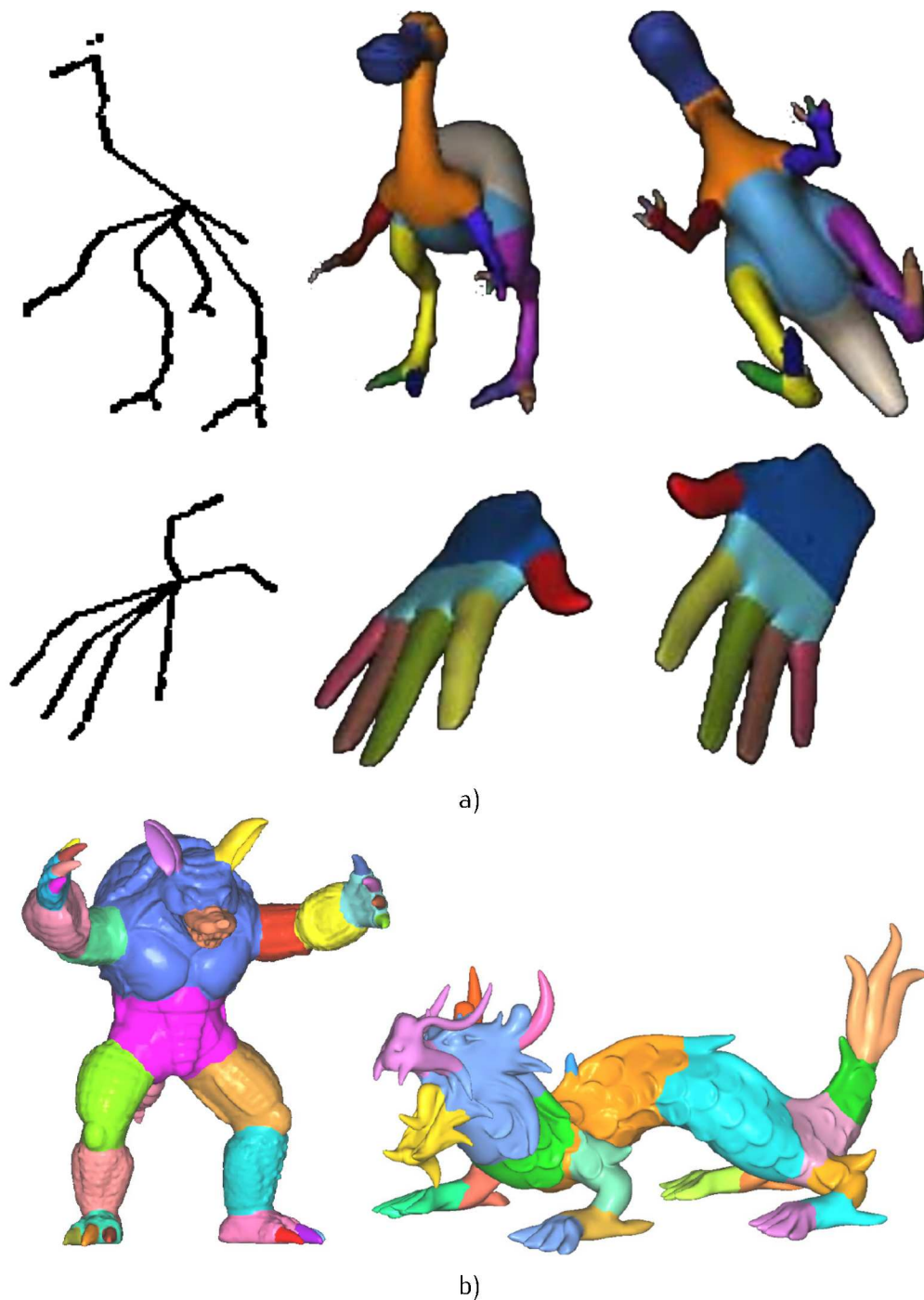


FIGURE 2.2 – Illustration du lien entre composantes courbes et composantes logiques. a) Segmentation de formes grâce aux squelettes courbes calculés par la méthode [Li 2001]. La colonne de gauche représente le squelette et les deux colonnes suivantes montrent les différentes composantes logiques, chacune identifiée par une couleur. b) Segmentation sur d'autres formes grâce aux squelettes produits par [Au 2008]. Les images de cette figure proviennent des deux travaux cités.

classes (par exemple une classe pour les avions, une pour les voitures, une pour les tables...). Pour connaître la classe d'une forme quelconque, le modèle de la base de données le plus proche de la forme est recherché et la forme est mise dans la même classe que ce plus proche modèle. Il est ainsi possible d'indexer une forme : un label correspondant à une classe (un mot décrivant la classe, comme avion, voiture ou table dans notre exemple précédent) est attribué à cette forme. Le lien entre composantes logiques et composantes squelettiques permet de définir ce processus de recherche dans une base de modèles par les squelettes. ce processus établit une correspondance entre le squelette de la requête et les squelettes des modèles de la base de données. Cette correspondance se fait au niveau des composantes squelettiques, i.e. seul l'agencement des composantes squelettiques est considéré, rendant le processus invariant aux changements de poses. Par exemple, si la base de données contient un être humain debout, bras le long du corps et que la requête correspond à un modèle humain avec les bras levés, les squelettes auront la même structure, mais des postures différentes. Dans ce cas l'appariement se fera sans problèmes, car les composantes squelettiques des bras seront mises en correspondance. On retrouve cette application des squelettes courbes dans [Cornea 2005] et dans [Sundar 2003]. De manière surprenante, il a été établi [Shilane 2004] que ce ne sont pas les squelettes à grande capacité de reconstruction qui aident le mieux à apparier les formes. Les squelettes courbes sont, dans ce cas, plus appropriés. Pour expliquer ce phénomène, il faut noter que les squelettes avec une grande capacité de reconstruction ont plus de composantes, dont certaines ne correspondent pas à des composantes logiques de la forme mais à du bruit squelettique. Ce bruit perturbe alors le calcul des correspondances.

Les squelettes courbes ne sont pas des MRF mais des descripteurs ou des outils, utiles à l'analyse et la manipulation des formes. Nous allons voir maintenant les squelettes surfaces, qui ont une capacité de reconstruction plus élevée et sont donc des MRF.

2.1.1.2/ SQUELETTE SURFACE

La formulation la plus populaire des squelettes surfaces a été introduite par Blum [Blum 1967]. Il s'agit de la métaphore du feu de prairie. Supposons qu'une forme soit faite d'un matériau inflammable, propageant idéalement le feu de la même manière dans toutes les directions avec une vitesse unitaire de v . À une date $t_0 = 0$, la surface de la forme est enflammée et le feu se propage vers l'intérieur. Chaque lieu où deux fronts de propagation se rencontrent est la position d'un atome. La position d'un atome est complétée par la distance parcourue par le feu avant d'atteindre cette position. Cette distance est donc égale à $v \times t$ si t est la date où les deux fronts correspondants se sont rencontrés. La position d'un atome est donc un point situé à l'intérieur de la forme qui a au moins deux plus proches points sur la surface de la forme. Notons τ la date à laquelle le dernier atome est ajouté, soit la date à laquelle le feu est éteint (car toute la forme a été brûlée).

La particularité de cette formulation est qu'elle permet de passer de manière réversible du squelette à la forme. Pour comprendre cela, sans entrer dans les détails avec des termes de la topologie, considérons l'opération inverse. Le squelette est plongé dans un matériau inflammable (propageant le feu de la même manière que précédemment). À une date $t_0 = 0$, le squelette est entièrement enflammé et le feu se propage en s'éloignant du squelette. Si on regarde le front du feu à la date $t = \tau$, nous obtenons la forme initiale. Du fait de cette réversibilité, il est établi que ce type de squelette décrit (théoriquement) parfaitement une forme. Il a donc une capacité de reconstruction maximale et est adapté à une utilisation comme MRF. De même, cela tend à prouver qu'il est possible d'habiller ce squelette. Pour des preuves formelles sur cette formulation, nous renvoyons à [Attali 2009].

Ce genre de squelette n'est pas fortement présent en tant que MRF pour des applications en synthèse d'image. La raison est que cette formulation souffre du passage à la pratique : les squelettes produits sont complexes, bruités et sans structure adaptée aux calculs (pour déterminer le voisinage d'un atome par exemple). En l'absence de méthodes pour résoudre ces défauts, l'intérêt pratique de ces squelettes est minime. Nous reviendrons sur ces squelettes dans la section 2.2 pour expliquer comment les calculer.

2.1.1.3/ DISCUSSION

Les travaux sur les squelettes courbes ou les squelettes surfaces ne présentent pas de comparaisons quantitatives. Les résultats consistent en une série d'images avec la forme squelettisée en transparence et le squelette au centre. Ce genre de contrôle visuel ne permet pas de conclure sur la qualité du squelette, que ce soit au niveau de sa capacité de reconstruction, de sa quantité de bruit ou de la clarté de sa structure squelettale.

Les squelettes courbes sont plus faciles à manipuler que les squelettes surfaces. Il serait donc plus aisé de clarifier, structurer et segmenter un squelette courbe. Cependant, nous remarquons qu'un squelette courbe ne peut être un modèle de représentation des formes pour des formes tridimensionnelles. Utiliser un squelette courbe pour nos applications nécessiterait une structure additionnelle pour représenter la forme. Pour traduire des modifications sur le squelette ou sur la représentation de la forme, des conversions entre les deux modèles sont nécessaires. Or ces conversions ne sont ni triviales, ni exactes. À cause de l'inexactitude des conversions, les deux modèles peuvent diverger des résultats attendus, par accumulation d'erreur. Nous choisissons donc de nous affranchir du modèle additionnel en utilisant les squelettes surfaces.

Afin de bénéficier des avantages d'un squelette courbe malgré la nécessité d'utiliser un squelette surface, notre choix s'est accompagné d'une idée originale : une hiérarchie sera construite à partir du squelette surface. Cette construction s'appuie sur des critères d'importance des atomes. Plus l'importance considérée est élevée, plus les atomes ayant au minimum cette importance sont proches d'une organisation en courbes. Ainsi, la partie la plus importante du squelette surface sera donc un squelette courbe. Cette *superstructure* confère les avantages des squelettes courbes, sans perdre la capacité clef d'un squelette à être un modèle de représentation des formes.

2.1.2/ DIFFÉRENTES SYMÉTRIES

La seconde division de notre taxinomie concerne la nature de la symétrie locale utilisée pour définir la position des atomes. Un point p est considéré comme étant au centre de la forme s'il existe deux éléments A et B sur la surface de cette forme tels que les distances $\|p - A\|$ et $\|p - B\|$ soient égales. Dans ce cas, A et B sont dits symétriques par rapport à p , et la forme est localement symétrique en p . Pour deux éléments A et B , il existe une infinité de points centrés. Par exemple pour la distance euclidienne, ces points centrés sont sur le plan bissecteur. Chaque formulation sélectionne un seul centre par paire d'éléments de la surface, chaque algorithme de squelettisation définit comment déterminer la paire d'éléments A et B .

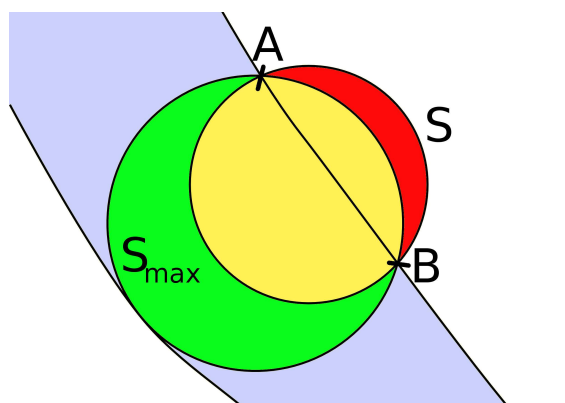


FIGURE 2.3 – Différentes sphères intérieures tangentes aux points A et B de la surface de la forme. La sphère maximale S_{max} (en vert) capture plus de géométrie locale qu'une autre sphère S (en rouge). De plus, une sphère non maximale contient plus de volume n'appartenant pas à l'objet que S_{max} .

2.1.2.1/ SYMÉTRIES FONDÉES SUR LA SPHÈRE

En règle générale, les positions des atomes sont calculées à l'aide d'une sphère. Rien n'exclut l'utilisation d'autres primitives géométriques pour la détermination du centre d'une forme. Par exemple, il est possible d'utiliser des ellipsoïdes [Banégas 2001]. Ces autres primitives comportent moins de symétries que la sphère, ce qui rend les calculs plus complexes, sans apporter de réels avantages. Il reste donc commun et pratique de ne considérer que la sphère pour les formulations de squelette surface. Cette sphère devient la donnée élémentaire de la description géométrique de la forme par le squelette.

Pour positionner les atomes, on considère toujours, à notre connaissance, des éléments A et B de la surface de la forme. Pour des représentations dans $\mathbb{R}^3$, ces points A et B seront généralement les sommets d'un maillage ou un échantillonnage choisi de la surface. Une fois ces points A et B déterminés, il reste à y faire passer une sphère, qui puisse capturer au mieux la géométrie de la forme au voisinage de ces deux points. Pour que le centre de symétrie soit pertinent pour le squelette, il convient de prendre des points A et B proches l'un de l'autre (voir la notion d'un ϵ -échantillonnage [Ruppert 1993], rappelée dans la section 2.2.3.1).

Il existe plusieurs sphères intérieures¹ passant par deux points A et B (voir la figure 2.3) mais une seule sphère intérieure maximale tangente. Une telle sphère, notée S_{max} , ne peut avoir un rayon plus grand sous peine de plus être intérieure, même si son centre est déplacé (en prenant soin qu'elle reste tangente à A et B). Une sphère S non maximale capture moins de géométrie de la forme que S_{max} car le volume de la forme contenu dans S est plus petit que celui contenu dans S_{max} . En pratique, les sphères utilisées pour calculer le centre de la forme « sortent » de la forme : une partie du volume qu'elles délimitent n'appartient pas à la forme (voir les renflements de la figure 2.3). Ce renflement est plus petit dans le cas d'une sphère maximale. Ainsi, considérer des sphères non maximales conduirait à des squelettes contenant plus d'atomes pour capturer la forme (car chaque sphère capture moins de volume de la forme) et accentuerait le problème des renflements dans l'habillage (voir la section 2.3.1).

1. Une sphère est dite intérieure quand la majorité de son volume est situé à l'intérieur de la forme

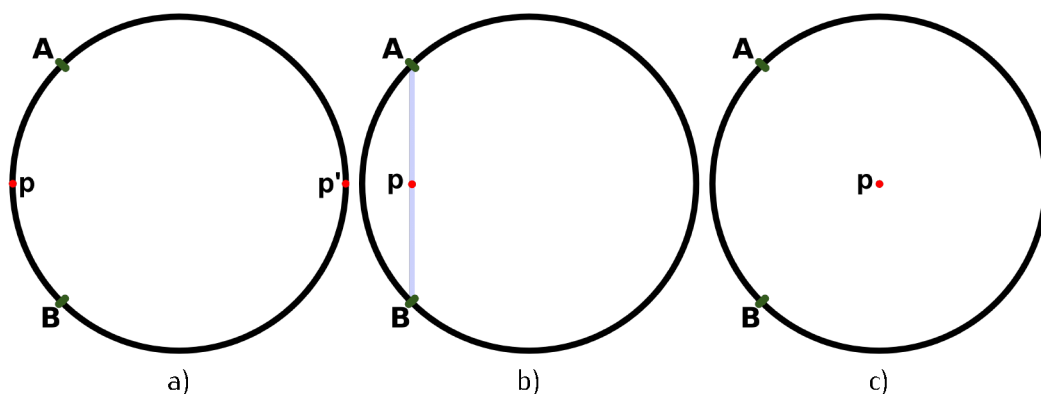


FIGURE 2.4 – Illustration des différents centres possibles pour un atome calculé à l'aide d'une sphère intérieure maximale tangente aux points A et B de la surface de la forme. a) Formulation PISA avec un centre sur l'arc $\widehat{AB}$. b) Formulation du point milieu avec un centre au milieu de la corde $[AB]$. c) Formulation médiane avec un centre au centre de la sphère maximale tangente.

2.1.2.2/ CALCUL DU CENTRE DE L'ATOME

Dans la littérature, nous notons trois manières de calculer la position d'un atome d'un squelette surface à l'aide d'une sphère intérieure maximale tangente à deux points A et B de la surface de la forme. Il s'agit des formulations *PISA* [Leyton 1988], qui est l'acronyme de *Process Inferring Symmetry Analysis* (que l'on peut traduire par analyse des symétries pour déduire des processus [de déformation]), du point milieu [Brady 1984], et médiane [Blum 1967] (voir la figure 2.4 pour une illustration en deux dimensions de ces trois formulations). Seule la dernière formulation est utilisée dans des applications en synthèse d'images.

Le squelette *PISA* est défini par Leyton [Leyton 1988] pour capturer les lieux d'applications d'opérateurs de déformations, ayant sculpté l'apparence de la forme, à partir d'un cercle. Dans ses travaux, Leyton caractérise les formes (en deux dimensions) par la séquence de leurs extrema de courbures, maxima et minima, accompagnés de leurs signes (courbure positive pour une avancée de la forme vers l'extérieur). Ce squelette positionne l'atome au milieu de l'arc $\widehat{AB}$, de sorte qu'un axe se termine sur un extrema de courbure de la forme [Leyton 1988, Leyton 1992]. Ce contact entre le squelette et la forme est intéressant, car il permet d'identifier des points clés de la forme, utiles pour sa segmentation. De plus, les atomes qui sont au contact des extrema de courbure sont les bords du squelette, ce qui résoudrait le problème d'identification des bords. Cependant, il n'existe aucun algorithme de calcul de ce squelette, à cause des lacunes d'une théorie inadaptée à la pratique (voir la section 2.1.2.3).

Une autre formulation place l'atome au milieu de la corde $[AB]$. Il s'agit du squelette *MidPoint Locus* [Brady 1984], ou squelette du point milieu. Ce squelette a été mis en avant pour sa stabilité face aux perturbations de la surface de la forme. Pour une petite variation de surface de la forme, nous nous attendons à une faible variation du squelette. Nous expliquerons en quoi cela est important dans la section 2.2.2. Cependant, les algorithmes de squelettisation produisent des squelettes fortement différents pour des faibles variations de surface de la forme. Les modifications du squelette en réponse à ces faibles modifications se trouvent principalement dans le bruit squelettal. Malgré l'avantage du squelette du point milieu face à cette instabilité, la formulation n'est pas utilisée et très rarement retrouvée dans la littérature

(nous donnons des raisons à cette absence dans la section 2.1.2.3).

La formulation médiane, la plus usitée, propose de placer l'atome au centre de la sphère maximale. Cela correspond au squelette introduit par Blum [Blum 1967]. L'atome de la formulation médiane est donc une sphère, associée à d'autres informations (comme des connexions avec d'autres atomes pour former la structure squelettale). La formulation médiane, de par sa popularité, possède beaucoup de synonymes avec par exemple la surface médiane, l'ensemble médian ou encore l'axe médian. Parfois certains travaux font des distinctions entre des termes considérés comme équivalents par d'autres. D'autres travaux utilisent le mot squelette comme synonyme de la formulation médiane, considérant cette formulation comme l'unique squelette possible. Nous avons déjà vu qu'il existe une multitude de squelettes et que la formulation médiane n'en est qu'une parmi d'autres. Il est donc nécessaire de toujours préciser quelle formulation est utilisée dans un travail sur les squelettes.

2.1.2.3/ DISCUSSION

Le squelette *PISA* est mal défini et nous expliquons pourquoi avec un exemple en deux dimensions. Pour un cercle maximal tangent aux points A et B d'un contour, il existe deux arcs $\widehat{AB}$, ce qui donne donc deux atomes. Lorsque ce cercle maximal se déplace tout en restant tangent à la forme en au moins deux points, les deux milieux des arcs vont tracer deux courbes distinctes. Ce problème persiste en trois dimensions, à la différence près qu'il existe une infinité d'arcs $\widehat{AB}$ sur une sphère. Une autre lacune de cette formulation est l'absence de donnée géométrique associée à l'atome. Un tel squelette souffre donc des inconvénients des squelettes courbes (faible capacité de reconstruction) et des squelettes surfaces (complexité de la structure squelettale). Bien qu'intéressante, de par le lien entre les extrema de courbure et les bords du squelette, nous ne pouvons pas considérer cette formulation pour une mise en pratique. Cela nécessitera alors un travail de définition pour poser clairement ce qu'est un bord pour un squelette (voir la section 2.2.3.2 pour une définition théorique d'un bord ou la section 2.3.3 pour notre définition). Nous verrons dans le chapitre 5 en quoi ces bords sont importants pour résoudre le problème de la structure squelettale.

La formulation du point milieu a été motivée pour réduire le bruit squelettal en déplaçant les atomes sur les cordes des points de contacts. Pour des sphères maximales tangentes à plus de deux points, il y a plus d'un atome inséré dans le squelette car il y a plus d'une corde. Ces atomes sont alors tous associés à la même donnée géométrique, ce qui introduit une redondance. De plus, le bruit squelettal n'est réduit que visuellement : les données géométriques restent les mêmes, mais l'amplitude visuelle des changements du squelette en réponse à une faible variation de la forme est diminuée. L'intérêt de prendre le milieu de la corde plutôt que le centre de la sphère est donc nul. Cette formulation reste une tentative de correction du principal inconvénient de la formulation médiane : le bruit squelettal.

La formulation médiane possède des propriétés intéressantes, notamment le fait que ce squelette soit homotopiquement équivalent à l'objet qu'il décrit [Lieutier 2003] (nous expliquons ce terme dans la section 2.3.3). C'est un squelette théoriquement bien défini, qui est intuitivement compris. Nous choisissons donc cette formulation pour nos travaux. Un atome peut alors être vu à partir d'ici comme une sphère intérieure maximale tangente à la forme décrite par le squelette.

2.1.3/ ESPACE DE TRAVAIL

Plus nous descendons dans notre arbre de classification, plus nous nous éloignons du point de vue théorique des squelettes (les formulations) pour nous rapprocher du point de vue pratique. Si une formulation considère des grandeurs, telles que des positions, à valeur dans $\mathbb{R}$, nous parlons de *formulation continue*. De même, si une formulation utilise des grandeurs à valeur dans $\mathbb{Z}$, nous parlons de *formulation discrète*. Dans le cadre de cette thèse, les squelettes sont destinés à être utilisés pour l'interaction avec des formes, soit à l'intérieur d'un système informatique. À l'intérieur d'un tel système, toute donnée est discrète : les valeurs d'une donnée sont dénombrables (et en général finies). En pratique, un squelette sera donc toujours discret. C'est pourquoi certains travaux sur les algorithmes de squelettisation [Miklos 2010b] parlent de squelettes discrets alors que la formulation utilisée est continue.

Afin d'éviter des confusions et marquer la différence entre la théorie et la pratique nous utilisons d'autres termes que continu et discret pour les squelettes. Lorsque la formulation utilisée est continue, le squelette est plongé dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et il est appelé *squelette analytique*. Lorsque la formulation considérée est discrète, le squelette est plongé dans l'espace $\mathbb{Z}^3$, les calculs s'effectuent sur des voxels (des éléments discrets de volume) et nous parlons de *squelette image*.

2.1.3.1/ SQUELETES IMAGES

Dans le cas des squelettes images, les positions des éléments du squelette ou de la forme sont des triplets de $\mathbb{Z}^3$, appelés *voxels* car ce sont des éléments de volume (bien souvent des cubes). Ces squelettes sont populaires dans des domaines où les données sont déjà représentées dans cet espace. Ainsi, pour des applications à l'imagerie médicale, les squelettes images sont utilisés, comme dans [Ward 2008, Ma 1996], car les différents appareils d'imagerie fournissent des résultats dans $\mathbb{Z}^3$.

Certains calculs sont difficilement réalisables sur des squelettes analytiques. Dans ces cas-ci, les squelettes images sont utilisés afin d'effectuer les calculs plus simplement. Par exemple, dans [Reniers 2008] les auteurs cherchent à calculer, pour chaque atome a , le plus court chemin géodésique entre les points A et B de la surface de la forme qui sont sur la sphère de a . Pour faciliter les calculs, les auteurs ont choisi d'utiliser un squelette image.

Comme pour les squelettes analytiques, les squelettes images utilisent la donnée d'une distance qui définit les rayons des sphères. Lorsque cette distance est la distance euclidienne, les squelettes images sont également appelés squelettes euclidiens [Hesselink 2008, Postolski 2013] et constituent la majeure partie des squelettes images.

Pour calculer un squelette image, nous avons identifié deux grandes classes d'algorithmes : l'amincissement et les champs/cartes de distance. L'amincissement, également appelé érosion, consiste à supprimer itérativement des voxels [Palágyi 1999, Pudney 1998]. Cette suppression simule la progression du feu de prairie sur un ensemble de voxels. Les voxels à la frontière (en surface de l'ensemble de voxels) sont d'abord identifiés, puis tous retirés. Un des points délicat de cette méthode est le critère d'arrêt : quand ne pas supprimer un voxel frontière ? L'idée est de conserver des voxels qui sont critiques pour la préservation de la connectivité du résultat, afin d'éviter le morcellement du squelette en plusieurs composantes non reliées. Un traitement parallélisé des voxels a été proposé dans [Ma 1996], cependant sans aucune donnée sur un éventuel gain mémoire ou temporel pour conclure sur son efficacité.

Les cartes de distances reposent sur un opérateur communément utilisé pour l'étude des squelettes, nommé la transformée de distance $\mathcal{DT}_{\partial\mathcal{F},d}$. Cet opérateur donne la plus courte distance (avec la métrique d) entre un point et la surface d'une forme ($\partial\mathcal{F}$) :

$$\mathcal{DT}_{\partial\mathcal{F},d}(x) = \min_{y \in \mathcal{F}} d(x, y).$$

Supposons qu'un voxel x de la forme soit la position d'un atome et soit r le rayon de la sphère correspondant à cet atome. Si $r > \mathcal{DT}_{\partial\mathcal{F},d}$, la sphère associée ne serait plus à l'intérieur. Si $r < \mathcal{DT}_{\partial\mathcal{F},d}$, alors la sphère ne serait plus tangente à la surface de l'objet, car le point le plus proche de cette surface est à une distance $\mathcal{DT}_{\partial\mathcal{F},d}$. Ainsi nous avons $r = \mathcal{DT}_{\partial\mathcal{F},d}$. Une carte de distance donne la valeur de la transformée de distance pour tout voxel de l'objet. La squelettisation se fait en cherchant les maxima locaux de la carte de distance [Hesselink 2008, Wan 2001, Telea 2002]. Pour expliquer simplement l'existence de ces maxima, remarquons que pour un voxel x qui est la position d'un atome, la distance $\mathcal{DT}_{\partial\mathcal{F},d}(x)$ est réalisée par au moins deux voxels y_1 et y_2 à la frontière de la forme. Les valeurs de la carte de distance dans les directions de y_1 et y_2 sont plus petites que celle de x , car ce sont les directions des plus proches voxels de la surface. Un maxima local de la carte de distance représente un pic local de la transformée de distance.

2.1.3.2/ SQUELETTES ANALYTIQUES

Dans le cas des squelettes analytiques, les positions sont à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Il en résulte une grande précision des résultats, mais également une forte instabilité. Il est rarement possible d'utiliser toute la surface $\partial\mathcal{F}$ de la forme pour les calculs de squelettes analytiques. Il a été établi que ce n'est possible que pour une forme définie par un ensemble d'inégalités polynomiales (voir la section 2.2.1). On parle dans ce cas de forme semi-algébrique. Sinon, il est nécessaire de travailler sur un échantillonnage de sa surface. Ce échantillonnage peut-être structuré en un maillage polygonal, auquel cas on travail sur les sommets. Il en résulte une première approximation de la forme et donc du squelette obtenu, qui n'existe pas pour les squelettes images.

Les calculs de squelettes analytiques reprennent les idées utilisées pour les squelettes images. Certaines méthodes vont simuler un amincissement de la forme à l'aide d'équations aux dérivées partielles [Kimia 1995], pour appliquer le principe d'érosion vu précédemment. Ce genre de méthode est souvent appelée *évolution de surface*, lorsque le squelette produit est analytique. D'autres méthodes reposent sur l'analogie du feu de prairie (voir la section 2.1.1.2) et cherchent les points à l'intérieur de la forme qui ont au moins deux plus proches points sur $\partial\mathcal{F}$. Ces méthodes sont l'équivalent des techniques de carte de distance. Pour trouver ces points intérieurs, il est possible d'utiliser des bissectrices [de Oliveira 2003, Culver 1999] ou des diagrammes de Voronoï [Amenta 2000b]. Nous reviendrons en détails sur ces techniques dans la section 2.2.

2.1.3.3/ DISCUSSION

Un squelette image a une capacité de reconstruction totale : toute la forme peut être reconstituée par le squelette. Cela s'explique par la possibilité d'avoir un atome de rayon 1, qui est équivalent à un voxel. Ces atomes-voxels se trouvent près de la surface de l'objet, pour capturer tous les détails de surface de l'objet. Ils forment en règle générale des atomes isolés ou des groupes d'atomes isolés du squelette principal (voir la figure 2.5). Il est nécessaire de

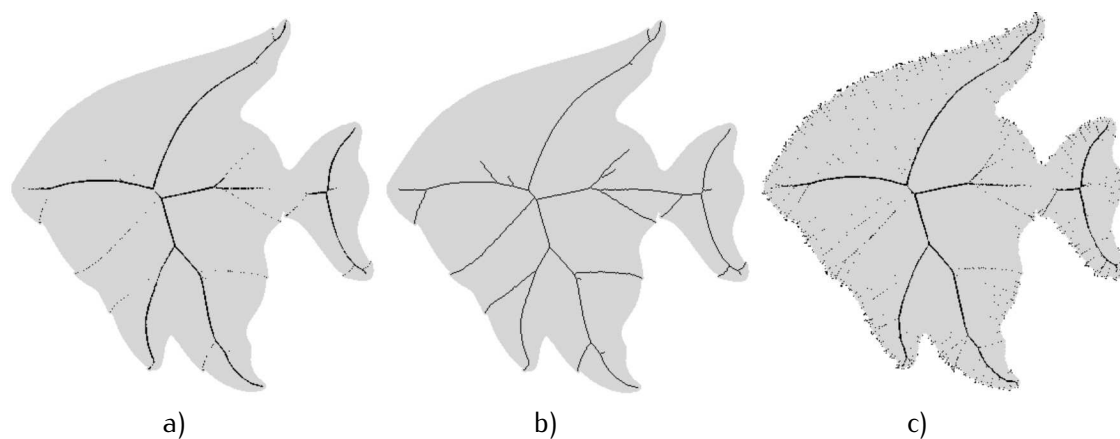


FIGURE 2.5 – *Squelettes images pour des formes planes. a) La forme (en gris) accompagnée de son squelette euclidien (qui présente de nombreux atomes isolés). b) Amélioration du squelette euclidien pour éviter les atomes isolés et donc améliorer la structure squelettale. c) La forme a subi une faible modification de surface, entraînant des modifications importantes du squelette euclidien. Images tirées de [Postolski 2013].*

filtrer ces atomes [Postolski 2013] pour obtenir un squelette qui a la même topologie que la forme à décrire, ce qui réduit la capacité de reconstruction du squelette image. De plus, si la forme $\mathcal{F}$ à décrire se trouve dans l'espace $\mathbb{R}^3$, comme c'est généralement le cas pour l'animation, il faut le convertir en un ensemble de voxels pour utiliser les squelettes images. Cette conversion conduit à une approximation, qui diminue d'autant plus la capacité du squelette image à reconstruire $\mathcal{F}$. La capacité de reconstruction n'est donc pas un argument d'utilisation préférentielle d'un squelette image par rapport à un squelette analytique.

L'instabilité est souvent reprochée aux squelettes analytiques. Cela signifie qu'une faible modification de surface de la forme conduit à des squelettes très différents. Cependant, cette instabilité se retrouve également chez les squelettes images (voir la figure 2.5 c)). Par conséquent, l'instabilité n'est pas un critère de choix entre les squelettes images et analytiques. Cette instabilité se matérialise par le bruit squelettal, qu'il faut supprimer de ces deux types de squelettes.

Le défi principal des squelettes images est la complexité algorithmique, tel qu'illustré par [Sobiecki 2013]. La conversion d'un maillage en un ensemble de voxels, de même que le calcul du squelette image à partir de cet ensemble, nécessite bien plus de mémoire et de temps machine que pour un squelette analytique. Par exemple, une implantation hautement parallélisée de [Reniers 2008] calcule en 15 minutes le squelette image du modèle *dragon* (voir la figure 2.2 b)), converti grâce à une grille spatiale de 700^3 voxels, alors que les implantations de [Au 2008] ou [Telea 2012] produisent un squelette analytique en moins d'une minute à partir du maillage original (463 000 faces). La consommation mémoire d'un squelette analytique est de l'ordre de $O(n^2)$ pour un échantillonnage à n points de la surface de la forme, alors qu'elle est de $O(n^3)$ pour un squelette image d'un volume de n^3 voxels [Sud 2006]. Pourtant, les résolutions utilisées pour les squelettes images sont loin de fournir une précision à hauteur de celle des squelettes analytiques. L'intérêt des squelettes images est la simplicité de la connectivité entre les atomes (voir la section 5.1.1). En effet, dans $\mathbb{Z}^3$, le voisinage est défini sur la grille spatiale, rendant les configurations de voisinages d'un atome sur le squelette finies et dénombrables.

Nous souhaitons construire un MRF qui nous permette d'interagir aisément avec les formes

en trois dimensions, notamment pour les animer et les déformer. Dans l'espace $\mathbb{Z}^3$, nous ne disposons pas d'une grande précision pour déplacer les formes : il n'est pas possible d'avoir une translation d'un demi voxel par exemple. De même, les rotations, pour changer la pose d'un modèle articulé, sont un problème insoluble dans cet espace. Ainsi, à cause du manque de précision de l'espace $\mathbb{Z}^3$, des coûts en mémoire et en temps de calcul d'un squelette image, nous choisissons les squelettes analytiques pour réaliser nos objectifs. En faisant ce choix, nous acceptons de résoudre la complexité du voisinage d'un atome, bien plus simple pour un squelette image qu'un squelette analytique (nous proposerons deux solutions dans la section 5.1). À partir de ce point, nous désignons par *squelette* la surface médiane analytique (correspondant au MRF retenu).

2.2/ SQUELETTISATIONS

Nous avons choisi la formulation médiane analytique pour réaliser nos objectifs, à savoir pour représenter une forme par un squelette, ainsi que la visualiser, l'animer, la modifier, la segmenter, la simplifier. Cette formulation nous sert de base pour construire notre modèle de squelette. Dans cette section, nous présentons les squelettisations pour obtenir ce type de squelette en particulier. Nous commençons par expliquer les paradigmes de calcul utilisées dans les algorithmes de squelettisation. Nous étudions ensuite la continuité de l'opération de squelettisation, propriété importante pour justifier les paradigmes de calcul. Enfin, nous complétons notre taxinomie avec un aperçu des techniques majeures de squelettisation qui nous intéressent.

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, nous donnons ici la liste des méthodes de squelettisations que nous analysons ainsi que les différentes sections où nous en expliquons le fonctionnement. Nous commencerons par la squelettisation par diagramme de Voronoï dans la section 2.2.3.1. Dans cette même section nous verrons les extensions de cette squelettisation avec les méthodes *Powershape* [Amenta 2001a], *Scale Axis* [Miklos 2010b] et λ -Axis [Chazal 2004]. Nous verrons ensuite la collection de méthode *Medial Scaffold* [Leymarie 2003, Leymarie 2007] dans la section 2.2.3.2. Enfin nous parlerons dans la section 2.2.3.3 d'un nouveau type de squelettisation, beaucoup plus rapide (mais sans structure squelettale) qui repose sur la contraction des sphères [Ma 2012].

2.2.1/ PARADIGME DE CALCUL DES SQUELETES

Est-il possible d'obtenir les squelettes exacts d'une forme ? Il a été établi [Attali 2009] qu'un squelette exact ne saurait être obtenu que pour une forme semi-algébrique. Une telle forme est décrite par un ensemble d'inéquations polynomiales. Par exemple la boule unité est une forme semi-algébrique car elle est définie par l'inéquation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. La conversion d'une forme quelconque en une forme semi-algébrique, pour utiliser la squelettisation exacte, induit une approximation de la géométrie. Ainsi, le squelette exact produit ne serait qu'une approximation du squelette exact de la forme originale. Enfin, un algorithme de squelettisation exacte sur les formes semi-algébriques n'est pas encore connu. Le calcul du squelette exact de toute forme est donc une utopie.

La squelettisation doit se contenter d'une approximation du squelette exact. L'approximation peut être introduite à deux niveaux, ce qui constitue les deux paradigmes utilisés dans les squelettisations (voir la figure 2.6). Premièrement, on peut s'intéresser à une structure proche du squelette exact, qui est calculable à partir de toute forme. C'est la méthode retenue pour la

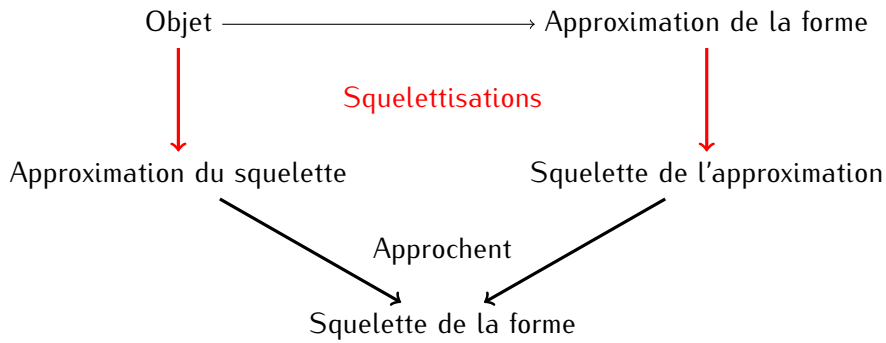


FIGURE 2.6 – *Paradigmes d'approximation du squelette d'une forme. Un paradigme va produire le squelette exact d'une approximation de la forme, tandis que l'autre produira une approximation du squelette exact à partir de la forme.*

majorité des squelettes courbes, pour lesquels la structure est définie par un algorithme (voir la section 2.1.1.1). Deuxièmement, il est possible de calculer le squelette exact, non pas de la forme mais d'une approximation de cette forme (pour laquelle on sait calculer le squelette). Les squelettisations qui produisent notre squelette procèdent de cette manière. Dans ce cas, il est possible d'utiliser la définition théorique des squelettes de la formulation médiane pour démontrer des propriétés sur la squelettisation. C'est ainsi que la semi-continuité de la squelettisation a été établie, ce que nous expliquons dans la sous-section suivante.

2.2.2/ SEMI-CONTINUITÉ DE LA SQUELETTISATION

La squelettisation est une application qui associe un squelette à une forme. C'est une opération importante dans le cadre de notre travail pour deux raisons. Premièrement, elle convertit un MRF vers notre modèle squelettal, pour importer des formes dans nos applications. Deuxièmement, elle permet de connaître temporairement les deux modèles, typiquement un maillage et notre squelette en même temps. Par exemple, lorsque nous souhaitons évaluer notre méthode d'habillage dans le chapitre 3, nous pouvons comparer l'habit produit à partir du squelette seul au maillage utilisé par la squelettisation, pour mesurer la distance entre les deux.

La squelettisation reprend le second paradigme présenté dans la section 2.2.1. Une forme $\mathcal{A}$ est approchée par une forme $\mathcal{B}$, pour laquelle il est possible de calculer le squelette exact $\mathcal{S}_B$. Afin d'obtenir un résultat $\mathcal{S}_B$, proche du squelette exact $\mathcal{S}_A$, la forme $\mathcal{B}$ est choisie voisine de $\mathcal{A}$. Ce paradigme suppose que la squelettisation soit continue : une petite distance entre deux formes mène à une petite distance entre les squelettes calculés pour ces deux formes. Mais est-ce le cas ?

Quand on squelettise deux formes très proches au sens de la distance de Hausdorff, les résultats sont visuellement très différents. La distance de Hausdorff d_{max} entre deux formes X et Y est définie par : $d_{max} = \max\{\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\|, \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|\}$. Ainsi, la squelettisation n'est pas continue [Attali 2009].

Cependant, elle est semi-continue pour cette même distance. Formellement, cela signifie que pour toute forme $\mathcal{A}$ et pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour toute forme $\mathcal{B}$ avec $d_{max}(\mathcal{A}^c, \mathcal{B}^c) < \epsilon$, nous avons $d_{max}(\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B) < \delta$, où $\mathcal{A}^c$ dénote le complémentaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi pour toute forme $\mathcal{B}$ suffisamment proche de $\mathcal{A}$, le squelette de $\mathcal{A}$ se trouve dans

une enveloppe parallèle de $\mathcal{S}_B$, arbitrairement fine. Une telle enveloppe entoure $\mathcal{S}_B$: tout élément dans cette enveloppe est à une distance de $\mathcal{S}_B$ inférieure à une constante. Ainsi, il peut exister – et en règle générale il existe – des éléments du squelette $\mathcal{S}_B$ qui sont éloignés du squelette de $\mathcal{A}$. Ces éléments appartiennent à ce que nous appelons dans cette thèse le *bruit squelettal* (en particulier le hérissément, voir le chapitre 4) et doivent être isolés. Il est à remarquer que $\mathcal{S}_B$ se trouve également dans une enveloppe parallèle arbitrairement fine de $\mathcal{S}_A$. La conséquence de cette remarque est que plus la forme $\mathcal{B}$ est proche de $\mathcal{A}$, plus l'amplitude du bruit squelettal est réduite.

Une squelettisation doit donc s'assurer de construire une forme $\mathcal{B}$ suffisamment proche de la forme $\mathcal{A}$ afin d'obtenir des résultats corrects. Typiquement, $\mathcal{B}$ est un échantillonnage de la surface de $\mathcal{A}$. Pour obtenir une bonne approximation de $\mathcal{A}$, un grand nombre d'échantillons sont utilisés. Comme les squelettisations produisent un nombre d'atomes proportionnel au nombre d'échantillons, les squelettes contiennent donc un nombre important d'atomes. Cependant, cette manière de s'assurer d'avoir un squelette proche du squelette exact produit des résultats dont la complexité est sans lien direct avec la capacité de reconstruction (nous le verrons dans le chapitre 4, les amas sont de plus en plus présents et le hérissément ne disparaît pas mais diminue en amplitude). À notre connaissance, il n'existe pas de manière optimale de choisir les échantillons pour une forte capacité de reconstruction.

Une squelettisation doit aussi traiter les atomes non pertinents qui gravitent autour du squelette. Ces atomes proviennent en majeure partie de la semi-continuité de la squelettisation, et doivent être retirés. C'est pourquoi les différentes méthodes de squelettisation se terminent par une étape de filtrage, afin de rendre le résultat plus proche du squelette exact de $\mathcal{A}$. Les principaux filtres seront vus en détail dans la section 2.3.2. La sous-section suivante introduit les principaux algorithmes de squelettisation.

2.2.3/ ALGORITHMES DE CALCULS

Calculer un squelette $\mathcal{S}$ pour une forme $\mathcal{F}$ tridimensionnelle complexe demeure une tâche difficile. Parmi les défis d'une telle opération, nous trouvons :

- l'extraction d'un squelette précis, pour servir de MRF,
- la suppression du bruit squelettal (aussi appelée la *régularisation* du squelette),
- l'obtention d'une structure de maillage entre les atomes, pour faciliter la manipulation du squelette ultérieurement.

De nombreux algorithmes d'extraction existent, chacun portant un regard différent sur ces difficultés. Nous avons choisi d'en présenter ici seulement trois : le *Power Shape* [Amenta 2001a] qui s'appuie sur les diagrammes de Voronoï, le *Medial Scaffold* [Leymarie 2001] utilisant une classification des atomes et enfin une technique récente de contraction de boule [Ma 2012]. Ces trois algorithmes sont fortement représentatifs des méthodes de squelettisation, car ce sont les algorithmes les plus utilisés des trois classes majeures de squelettisation. Il en existe bien sûr d'autres, fondés sur des théories différentes (les lecteurs intéressés pourront se référer à [Siddiqi 2008]).

2.2.3.1/ DIAGRAMME DE VORONOÏ ET *PowerShape*

Nous commençons par définir le diagramme de Voronoï d'un ensemble $\mathcal{P} = \{p_i\}$ de points l'espace $\mathbb{R}^3$. On appelle région (ou cellule) de Voronoï $\mathcal{V}or(p_i)$ associée au point p_i l'ensemble des points plus proches de p_i que de tout autre élément de $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{V}or(p_i) = \{q \in \mathbb{R}^3 : \forall j \neq i, \|q - p_i\| < \|q - p_j\|\}.$$

Le diagramme de Voronoï de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des cellules $\mathcal{V}or(p_i)$. Remarquons qu'une face du diagramme $H(p_i, p_j)$, qui correspond à l'intersection $H(p_i, p_j)$ des cellules $\mathcal{V}or(p_i)$ et $\mathcal{V}or(p_j)$, est la surface contenant les points à égale distance de p_i et p_j . La face $H(p_i, p_j)$ est donc incluse dans le plan bissecteur de p_i et p_j .

La tétraédrisation de Delaunay de $\mathcal{P}$, notée $\text{DELAUNAY}(\mathcal{P})$ est une tétraédrisation qui vérifie la propriété suivante : aucun point de $\mathcal{P}$ ne se trouve dans une sphère circonscrite à un des tétraèdres. Cette tétraédrisation est le dual du diagramme de Voronoï :

- un sommet du diagramme (appelé sommet de Voronoï) est le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre de $\text{DELAUNAY}(\mathcal{P})$,
- une arête du diagramme est associée à un triangle de $\text{DELAUNAY}(\mathcal{P})$
- une face du diagramme $H(p_i, p_j)$ est associée à l'arête (p_i, p_j) de $\text{DELAUNAY}(\mathcal{P})$
- une cellule $\mathcal{V}or(p_i)$ est associée au sommet p_i de $\text{DELAUNAY}(\mathcal{P})$

Dans la majorité des cas, la surface de la forme à squelettiser est approchée par un échantillonnage $\mathcal{P}$. Les algorithmes de squelettisation reposent alors sur un diagramme de Voronoï de $\mathcal{P}$ [Dey 2003, Amenta 2001a, Miklos 2010b]. Les faces de Voronoï sont les points de l'espace qui ont deux plus proches échantillons. En prenant l'intersection de ces faces avec l'intérieur de la forme, nous obtenons le squelette de l'échantillonnage $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, qui approche le squelette exact $\mathcal{S}_*$.

Une variante de la méthode propose d'approcher la surface par un assemblage de polyèdre [Etzion 2002]. La définition des cellules de Voronoï est alors adaptée aux polyèdres, en posant pour un polyèdre p et un point q : $\|q - p\| = \min_{s \in p} (\|q - s\|)$. Rien n'indique comment choisir l'échantillonnage de la surface pour obtenir un résultat proche du squelette exact. Utiliser les polyèdres permet d'éviter ce problème non résolu. Cependant, cette technique est bien plus gourmande en temps d'exécution. De plus, l'obtention du diagramme exact reste un défi dans les concavités ou les régions à haute courbure, à cause de la complexité des calculs des cellules dans ces cas.

Dans l'espace $\mathbb{R}^2$, les sommets de Voronoï à l'intérieur de la forme convergent vers le squelette exact $\mathcal{S}_*$ lorsque la densité de l'échantillonnage $\mathcal{P}$ tend vers l'infini [Brandt 1994]. Ce résultat a été généralisé en dimension trois [Goldak 1991], ce qui a popularisé l'usage des diagrammes de Voronoï dans la squelettisation. Cependant cette généralisation a été un peu précipitée, car elle ignore les sommets de Voronoï très proches de la surface [Amenta 2000b], qui ne convergent pas vers le squelette exact de la forme. Ces sommets de Voronoï sont associés à des tétraèdres de Delaunay très plats, donc à des échantillons quasi-coplanaires. Ces tétraèdres plats sont présents à n'importe quelle densité finie d'échantillonnage. Les atomes du squelette engendrés par ces sommets de Voronoï font partie du bruit squelettal. Ils sont reconnaissables par l'apparence hérissée qu'ils donnent au squelette, quand ce squelette est

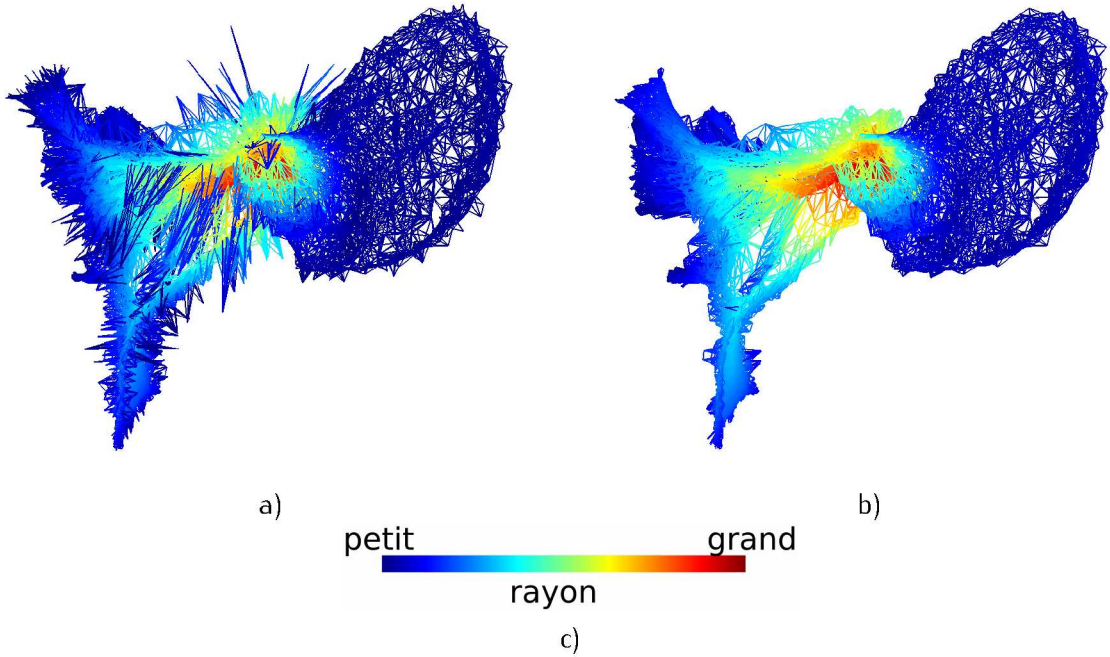


FIGURE 2.7 – Hérissément du squelette causé majoritairement par les tétraèdres plats dans la tétraèdrisation de Delaunay. a) Hérissément sur un de nos squelettes. b) Squelette sans hérissément, grâce au filtrage du bruit squelettal que nous présenterons dans le chapitre 4. c) Code couleur utilisé pour visualiser les rayons des atomes, lorsque nous affichons nos squelettes.

visualisé en affichant les positions des atomes (voir la figure 2.7 a) pour une illustration de cette apparence).

La squelettisation avec régularisation λ -Axis [Chazal 2004] utilise les diagrammes de Voronoï. Nous utiliserons cette squelettisation dans le chapitre 4 pour comparer notre méthode de régularisation. Plus de détails sur la régularisation par filtrage de la squelettisation λ -Axis sont disponibles dans la section 2.3.2.1.

Pour éviter ce hérissément, [Amenta 2000b] propose d’effectuer un filtrage sur les sommets de Voronoï, en ne conservant que les *pôles* intérieurs. Un pôle intérieur v^+ est le sommet de Voronoï d’une cellule $\mathcal{V}or(p_i)$ tel que :

- il est à l’intérieur de la forme,
- $\forall v \neq v^+$ sommet de Voronoï de la cellule $\mathcal{V}or(p_i)$: $\|v - p_i\| < \|v^+ - p_i\|$ ou v est à l’extérieur de la forme.

Une définition similaire existe pour un pôle extérieur v^- .

Pour un squelette exact S_* , la distance entre un point s de la surface de la forme $\partial\mathcal{F}$ et la position de l’atome le plus proche de s s’appelle la distance caractéristique locale de s [Ruppert 1993], notée $LFS(s)$ (pour *Local Feature Size*). On dit que $\mathcal{P}$ est un ϵ -échantillonnage si, pour tout point de la surface, il existe un échantillon qui est au pire à une distance ϵ fois plus petite que la distance caractéristique en ce point. Autrement dit,

$\mathcal{P}$ est un ϵ -échantillonnage de $\partial\mathcal{F}$ si :

$$\forall s \in \partial\mathcal{F}, \exists p \in \mathcal{P} : \|p - s\| < \epsilon \cdot LFS(s).$$

Il est établi [Amenta 2001b] que lorsque ϵ tend vers 0, les pôles intérieurs convergent vers $\mathcal{S}_*$. Remarquons qu'une valeur ϵ tendant vers 0 correspond à une densité d'échantillonnage qui tend vers l'infini. Les atomes du squelette $\mathcal{S}$ sont obtenus en considérant les sphères polaires intérieures. Une sphère polaire intérieure (respectivement extérieure) est associée à un pôle intérieur (respectivement extérieur) v d'une cellule de Voronoï $\text{Vor}(p_i)$; elle est centrée sur v et a un rayon égal à la distance $\|v - p_i\|$.

Pour connecter les atomes entre eux et obtenir une structure squelettale qui converge vers la structure squelettale théorique [Amenta 2001b], une extension des diagrammes de Voronoï aux sphères est utilisée. Cette extension est appelée *Power Diagram*, dual de la tétraédrisation régulière. Pour deux sphères S_1 et S_2 , de centres c_1 et c_2 , et de rayons r_1 et r_2 , la métrique utilisée dans ce nouveau diagramme est : $\|S_1 - S_2\| = \|c_1 - c_2\|^2 - r_1^2 - r_2^2$. Après obtention des sphères polaires, leur *Power Diagram* est calculé. Les atomes sont connectés entre eux lorsque les sphères polaires intérieures associées appartiennent à des cellules voisines dans le *Power Diagram*.

Cette théorie est utilisée dans un algorithme [Amenta 2001a] qui produit une approximation de la surface de la forme (connue uniquement par l'échantillonnage $\mathcal{P}$), appelée le *Power Crust*, ainsi qu'une approximation du squelette, appelée le *Power Shape*. C'est le premier algorithme à réaliser un squelette analytique qui est une approximation du squelette exact avec des garanties de convergence (en 3D), tant au niveau de la position des atomes que de la structure squelettale. Il est à remarquer que le *Power Shape* contient des tétraèdres même si en théorie le squelette ne contient aucun élément de volume. Aussi, malgré l'utilisation des pôles, le hérissément du squelette ne disparaît pas totalement.

Les principaux inconvénients de cette technique sont la complexité temporelle et la qualité de l'échantillonnage nécessaire. Calculer un diagramme de Voronoï d'un échantillonnage à n points en dimension trois a une complexité algorithmique de $O(n^2 + n \log n)$, ce qui n'est pas anodin. De plus, le calcul du *Power Diagram* est en pratique bien plus long encore que celui du diagramme de Voronoï. Dans l'attente d'un algorithme parallèle pour calculer ces deux diagrammes, cette squelettisation demeurera une opération coûteuse. Les hypothèses utilisées dans [Amenta 2001a] pour obtenir un bon résultat, supposent que $\mathcal{P}$ est un ϵ -échantillonnage, avec $\epsilon < 0.1$. Il est impossible de vérifier cette hypothèse car on ne peut qu'estimer la valeur ϵ . En effet, pour calculer ϵ , il est nécessaire de connaître le squelette exact, or il est nécessaire de connaître ϵ pour calculer une approximation du squelette exact.

L'algorithme du *Scale Axis* est une autre squelettisation qui repose sur les diagrammes de Voronoï. S'agissant également d'une méthode de régularisation, nous présenterons les détails de cet algorithme dans la section 2.3.2.2, ainsi qu'une critique de ses défauts. Cette méthode revient à appliquer deux fois l'algorithme du *Power Shape*, dont un sans avoir à calculer le *Power Diagram*. Ainsi, deux diagrammes de Voronoï et un *Power Diagram* sont nécessaires. Ces calculs se font sur plus de données, car les échantillons sont bien plus nombreux dans une squelettisation *Scale Axis* et que le nombre d'atome croît avec le nombre d'échantillons de la forme utilisés. Ainsi un squelette *Scale Axis* est plus long à obtenir qu'un squelette *Power Shape*. Nous comparerons la qualité de ces deux squelettes dans les chapitres 3 et 4, grâce à la capacité de reconstruction et le taux de bruit squelettal.

2.2.3.2/ BISSECTEURS ET CLASSIFICATION DES ATOMES : *Medial Scaffold*

L'autre manière traditionnelle de calculer précisément les positions des atomes utilise les bissecteurs [Culver 1999, de Oliveira 2003]. Tout comme pour les diagrammes de Voronoï, la surface de la forme est approchée par un ensemble de points $\mathcal{P} = \{p_i\}$ (ou un ensemble de triangles). Pour p_i et p_j de $\mathcal{P}$, le bissecteur $B(p_i, p_j)$ est la surface équidistante de ces deux éléments : $B(p_i, p_j) = \{p \in \mathbb{R}^3 : d(p, p_i) = d(p, p_j)\}$.

La méthode des bissecteurs commence par calculer l'ensemble des $B(p_i, p_j)$ pour chaque paire d'éléments de $\mathcal{P}$. La majorité des bissecteurs est ensuite élaguée, en retirant toutes les parties de $B(p_i, p_j)$ qui sont plus proches de $p_k \in \mathcal{P}$, tel que $p_k \neq p_i$ et $p_k \neq p_j$ (p_i et p_j sont appelées les sources du bissecteur). Ainsi, l'ensemble des bissecteurs est réduit à $(H(p_i, p_j))_{i,j}$ où : $H(p_i, p_j) = \{p \in \mathbb{R}^3 : d(p, p_i) = d(p, p_j) = r_{i,j} \text{ et } \forall k \neq i, j, d(p, p_k) > r_{i,j}\}$. Autrement dit, $\bigcup H(p_i, p_j)$ est l'ensemble des points ayant au moins deux plus proches points sur la surface de la forme à squelettiser, ou encore l'ensemble des faces du diagramme de Voronoï de $\mathcal{P}$ (voir la section 2.2.3.1). Un atome du squelette est centré sur un point $p \in H(p_i, p_j) \cap \mathcal{F}$ avec un rayon égal à $r_{i,j}$.

La méthode des bissecteurs souffre de la même complexité algorithmique que les diagrammes de Voronoï : elle nécessite une grande quantité de temps pour produire un résultat. Ce temps d'exécution est d'autant plus difficilement accepté que la majeure partie des bissecteurs est supprimée. Aussi, ces deux méthodes se concentrent sur l'obtention des atomes, délaissant la structure squelettale. Comme nous l'avons annoncé dans le chapitre 1, cette structure est pourtant nécessaire à l'utilisation pratique du squelette. Ce point de vue est également partagé dans un ensemble de travaux [Leymarie 2001, Leymarie 2003, Leymarie 2007] que nous désignons par *Medial Scaffold* (échafaudage de la surface médiane en Français), qui est aussi le nom donné par les auteurs au squelette produit (ou *Shock Scaffold*). L'idée clef du *Medial Scaffold* est la classification des sources des bissecteurs et des atomes.

La majeure partie des bissecteurs est élaguée, de sorte que certains bissecteurs disparaissent totalement. En deux dimensions, une méthode [Tek 1998, Tek 2003] considère uniquement les bissecteurs nécessaires en utilisant une méthode de flux. Le type de flux en question est celui induit par le feu de prairie dans la formulation de Blum [Blum 1967]. Une caractéristique intéressante de ce flux est qu'il permet, en théorie, de calculer des propriétés qualitatives du squelette [Blum 1978, Tek 2003], comme déterminer si un atome fait partie d'un bord. L'algorithme du *Medial Scaffold* choisit spécifiquement les sources de ce flux, appelées sources des chocs, de sorte que seule une portion des bissecteurs est effectivement calculée. Lorsque deux ondes de propagation de ce flux se rencontrent / s'entrechoquent, nous obtenons le centre d'un atome (aussi appelé choc). Cette méthode a été ensuite étendue en trois dimensions [Leymarie 2003]. Elle est censée combiner tous les avantages des autres squelettisations sans en avoir les inconvénients, avec par exemple la précision des méthodes des diagrammes de Voronoï et des bissecteurs sans leur grande complexité algorithmique. Pour rester clairs, nous ne donnerons pas les détails complets de la méthode, notamment comment choisir les sources, comment propager le flux à partir de ces sources et les différentes discrétisations nécessaires. Nous renvoyons aux différentes références accompagnant nos explications si le lecteur désire des approfondissements.

La méthode résultante [Leymarie 2001, Leymarie 2003, Leymarie 2007] produit le *Medial Scaffold*, qui est une organisation du squelette en un *hypergraphe* (voir la figure 2.8 pour un exemple). Un hypergraphe est un graphe avec des liens particuliers qui connectent un nombre quelconque de nœuds. De tels liens sont nommés *hyperliens*. Dans le *Medial Scaffold*, les

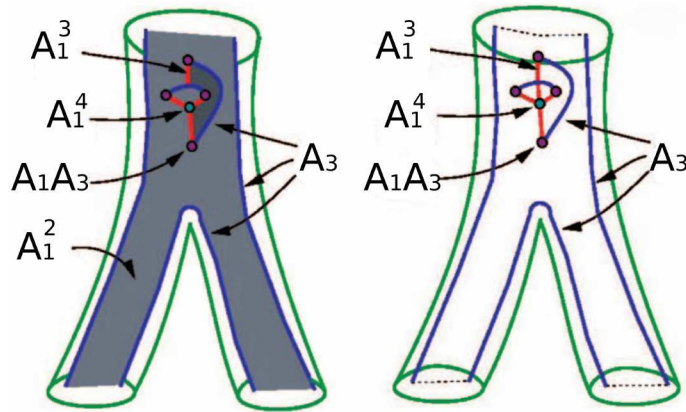


FIGURE 2.8 – Classification des atomes utilisée dans l'algorithme du Medial Scaffold. Les cinq classes d'atomes selon les ordres de contact des sphères est représenté sur l'hypergraphe complet (à gauche) et uniquement le graphe (à droite) (image adaptée de [Leymarie 2007]).

nœuds sont des atomes particuliers (que nous verrons plus loin dans cette section), les liens sont des segments de courbes entre deux nœuds et les hyperliens sont des morceaux de surfaces délimités par les nœuds (on peut se représenter les hyperliens comme des surfaces, tout simplement). Le terme *Medial Scaffold* dans ces travaux peut désigner à la fois l'hypergraphe complet, et donc un squelette structuré, ou juste le graphe (sans les hyperliens). L'hypergraphe propose une forme de hiérarchie : un sous-ensemble d'atomes particuliers, les nœuds, donnent accès aux autres atomes, appartenant aux composantes surfaces décrites par les hyperliens. Mais cette hiérarchie ne repose pas sur la contribution des atomes à la description de la forme, de sorte que son utilité est incertaine.

Tous les travaux du *Medial Scaffold* reposent sur la classification des sphères tangentes [Giblin 2000, Giblin 2004] à la surface de la forme décrite². La classification s'intéresse à deux caractéristiques des sphères tangentes. La première est le nombre de contacts entre la sphère et la surface, dénoté n . La seconde est l'ordre de contact de cette sphère avec la surface : 0 pour un contact simple, 1 quand la sphère est osculatrice à la surface et 2 pour une sphère osculatrice qui est tangente à la surface en une ligne de crête. Point particulier dans les notations de ces travaux, si l'ordre de contact est $k + 1$, la sphère est caractérisée par le nombre k . Une sphère à n contacts d'ordre $k + 1$ appartient à la classe notée A_k^n .

Les études montrent [Leymarie 2001] qu'il existe cinq catégories d'atomes selon cette classification, dont voici les caractéristiques (voir la figure 2.8) :

1. atome de contact A_1^2 , que nous appellerons **atome régulier**. La position de cet atome se trouve au sein d'une composante surface, appelée feuille dans le cas du *Medial Scaffold*.
2. atome de contact A_3^1 ou A_3 , que nous appellerons **atome bord**. La sphère correspondante touche $\partial\mathcal{F}$ en une ligne de crête. Les atomes de cette classe sont organisés en courbes (dites courbes A_3).
3. atome de contact A_1^3 , que nous appellerons **atome jonction**. La position de cet atome se situe à l'intersection d'au moins trois feuilles du squelette. Ce type d'atome est localement organisé en courbe (dite courbe A_1^3).

2. Même si ce n'est pas explicitement écrit dans ces travaux, il s'agit bien sûr d'une approximation des sphères tangentes à la surface. Les ordres de contacts sont eux-aussi calculés par des approximations.

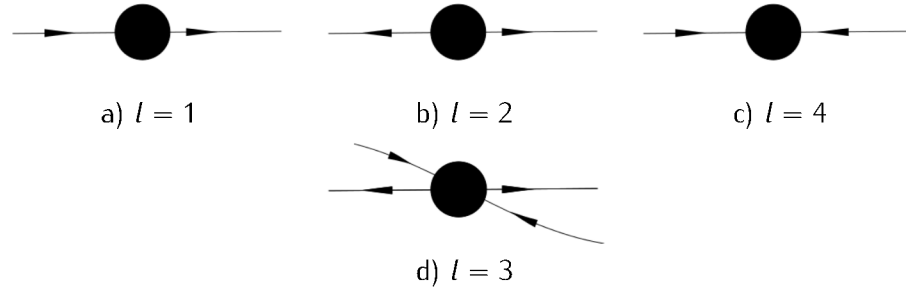


FIGURE 2.9 – Typologies du flux au niveau des atomes (points noirs) du Medial Scaffold. La direction du flux défini sur les bissectrices est indiquée par les flèches. a) b) et c) présentent les typologies 1, 2 et 4 dans le cas d'un atome ayant un type de contact A_1^3 ou A_3 . d) Un atome relais, $l = 3$, dans le cas d'un contact A_1^4 .

4. atome de contact $A_1^1 A_3^1$ ou $A_1 A_3$, avec un contact d'ordre 0 et un contact d'ordre 2. Cet atome peu fréquent se trouve à l'intersection d'une courbe A_3 et d'une courbe A_1^3 .
5. atome de contact A_1^4 . Cet atome, également peu fréquent, se situe à l'intersection de six feuilles. Nous considérons que cet atome est une jonction, tout comme l'atome de contact A_1^3 .

Le type de contact des atomes est complété par une typologie l du flux induit par le feu de paire [Giblin 2004]. Ce flux est un champ vectoriel indiquant la direction des rayons croissants des sphères maximales. Il est défini sur les bissecteurs, qui sont reliés aux atomes³. La typologie l qualifie le flux au niveau d'un atome, selon les directions des rayons croissants sur ses liens (voir la figure 2.9). Pour un atome appartenant à une courbe A_1^3 ou A_3 , si les directions des flux sur ses deux liens sont de même sens, l'atome a une typologie $l = 1$ (figure 2.9 a)). Lorsque tous les liens d'un atome ont des flux avec des directions qui s'éloignent d'un atome, la typologie est $l = 2$ (l'atome est source de flux). À l'inverse, lorsque toutes les directions des flux sur les liens pointent vers l'atome, la typologie est $l = 4$ (l'atome est un puits du flux). Dans le cas d'un atome n'appartenant pas à une courbe A_1^3 ou A_3 , il est possible que l'atome ne soit ni source, ni puits (figure 2.9 d)); la typologie est dans ce cas $l = 3$ (l'atome est un relais du flux). La notation $A_k^n - l$ représente un atome dont la sphère a un contact de type A_k^n avec un flux de typologie l . Selon les types de contacts, toutes les typologies de flux ne sont pas possibles pour des atomes [Leymarie 2003]. Nous présentons dans la table 2.1 les classes existantes pour des atomes (compte tenu de la complexité de la théorie, nous nous permettons d'ignorer, dans nos explications, les cas dégénérés dans cette classification).

À l'aide de cette classification complète, nous pouvons maintenant préciser l'organisation de l'hypergraphe du Medial Scaffold. Les atomes de type A_1^4 , $A_1 A_3$, $A_1^3 - 2$ et $A_3 - 2$ correspondent aux nœuds de l'hypergraphe, dit nœuds médians. Les courbes A_1^3 et A_3 (dits liens médians) sont les liens. Et enfin les atomes $A_1^2 - 1$, $A_3 - 1$ et $A_1^3 - 1$ sont les hyperliens (surfaces) du Medial Scaffold. La figure 2.10 présente les graphes calculés sur des modèles non synthétiques [Leymarie 2007]. Les auteurs affirment que les détails du nez, des sourcils et des pommettes sont clairement capturés par ces graphes. Selon eux, la méthode produit des

3. Cela n'est jamais explicitement dit, car les travaux sur le Medial Scaffold sont toujours présentés du point de vue théorique.

Chocs	$l = 1$	Source	Relais	Puits
Régulier	$A_1^2 - 1$	$A_1^2 - 2$	$A_1^2 - 3$	$A_1^2 - 4$
Bord	$A_3 - 1$	$A_3 - 2$	$A_3 - 3$	$A_3 - 4$
A_1^3	$A_1^3 - 1$	$A_1^3 - 2$	$A_1^3 - 1$	$A_1^3 - 4$
$A_1 A_3$	–	$A_1 A_3 - 2$	$A_1 A_3 - 3$	$A_1 A_3 - 4$
A_1^4	–	–	$A_1^4 - 2$ $A_1^4 - 3$	$A_1^4 - 4$

TABLE 2.1 – Classification des chocs selon la nature du contact et le type de flux (adapté de [Leymarie 2007]).

graphes similaires pour des modèles proches (voir figure 2.10 c, d) et e)), ce qui permettrait une utilisation en reconnaissance de formes et prouverait la stabilité de cette squelettisation.

La squelettisation du *Medial Scaffold* a été continuellement améliorée, afin de réduire encore le temps de calcul induit par les bissecteurs inutiles. Cependant, il n'existe aucune comparaison des temps de calcul avec d'autres squelettisations. Dans une version récente, les auteurs annoncent seulement une complexité temporelle constatée de l'ordre de $O(n)$ pour un calcul sur n échantillons de la surface de la forme [Leymarie 2007]. Nous avons fait un test sur le modèle *Horse* avec la squelettisation du *Power Shape* : le squelette est produit en six fois moins de temps que pour le *Medial Scaffold* (110 secondes d'après [Leymarie 2007] pour le *Medial Scaffold*, contre 18 secondes pour le *Power Shape*). Malgré les objectifs de la méthode, la squelettisation du *Medial Scaffold* n'est pas plus rapide que les autres méthodes.

Il n'en est pas fait explicitement mention dans les travaux, mais la méthode du *Medial Scaffold* fait face à des problèmes d'échantillonnage, tout comme le *Power Shape*. En effet, une grille est utilisée pour tous les calculs, que ce soit pour obtenir des points sources dans le calcul des bissecteurs ou pour réaliser la propagation du flux. Dans certains travaux sur le *Medial Scaffold*, l'espace de travail est même $\mathbb{Z}^3$ (le squelette est donc image). De plus, aucune mesure de la capacité de reconstruction de ces squelettes n'est disponible, ce qui nous laisse dans l'incapacité de conclure sur leur précision.

Le seul avantage de cette méthode, selon nous, est la classification des atomes du squelette en bords et en jonctions. En particulier, les bords et les jonctions sont bien définis, grâce aux notions de contact entre les sphères et la forme squelettisée. Cependant, ces définitions sont théoriques et ne sont pas faciles à appréhender, encore moins à appliquer.

2.2.3.3/ CONTRACTION DE SPHÈRES

Nous avons vu deux grands types de squelettisation. Le problème récurrent de ces méthodes est leur complexité algorithmique. Des travaux récents, utilisant une contraction de sphères, résolvent ce problème d'une manière inégalée [Ma 2012]. La surface $\partial\mathcal{F}$ est échantillonnée par une collection de points accompagnés de normales $\mathcal{P} = ((p_i, n_i)_i)$, afin de connaître les normales orientées vers l'extérieur au niveau des échantillons⁴. L'idée générale est très simple : pour tout point $(p_i, n_i) \in \mathcal{P}$, une large⁵ sphère tangente à p_i située à l'intérieur de la forme est créée. L'algorithme va réduire itérativement cette sphère, tout en conservant sa

4. Nous rappelons que les squelettes sont définis sur des formes fermées, i.e. définissant un intérieur. Sur de telles formes, il existe donc une et une seule normale orientée vers l'extérieur en tout point de la surface.

5. Les auteurs proposent de prendre aléatoirement un point $q \in \mathcal{P}$ tel que $q \neq p$, puis de choisir le rayon initial de sorte que p et q soient sur la sphère

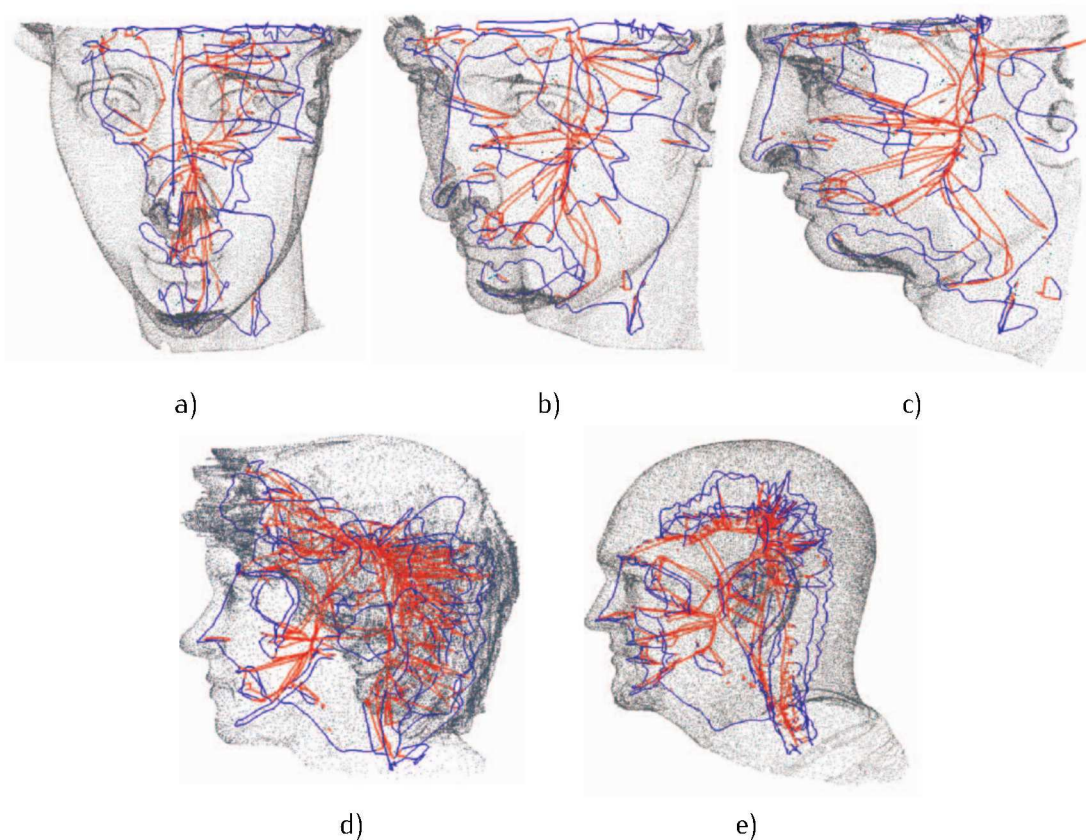


FIGURE 2.10 – Medial Scaffold calculés dans [Leymarie 2007]. a) b) et c) présentent trois vues du graphe obtenu sur le modèle de David [Levoy 2000]. La comparaison est faite avec un modèle de tête féminine d) et masculine e). Les courbes bleues symbolisent les liens médians que nous appelons bords dans nos travaux (contact A_3 dans la théorie du Medial Scaffold), et celles en rouges indiquent ce que nous appelons jonctions (contact A_1^3). Les images sont tirées de [Leymarie 2007]

tangence avec p_i , jusqu'à ce quelle ne contienne plus aucun élément de $\mathcal{P}$. La sphère sera donc maximale tangente intérieure, donnant lieu à un atome du squelette.

Le point clef de la méthode est l'indépendance des calculs : aucun résultat obtenu sur le point $(p_i, n_i) \in \mathcal{P}$ n'est nécessaire au traitement d'un autre point $(p_j, n_j) \in \mathcal{P}$. Ainsi, le traitement de chaque point peut se faire en parallèle. Grâce aux architectures hautement parallèles des processeurs graphiques, les traitements sont alors facilement répartis sur chaque unité de calcul du processeur graphique. C'est ce qu'on appelle le calcul générique sur processeur graphique ou *General-Purpose Processing on Graphics Processing Units* (GPGPU), par opposition aux calculs spécialisés de synthèse d'image (tâche historique des processeurs graphiques).

Hormis la rapidité d'exécution, la méthode de contraction de sphères [Ma 2012] présente le même avantage que les pôles du diagramme de Voronoï : la convergence du squelette vers le squelette exact est garantie lorsque la densité d'échantillonnage augmente.

La première limitation de ce nouveau type d'algorithme est la nécessité d'avoir des normales orientées. Cependant, ces normales sont accessibles sur bien des modèles, que ce soit des maillages polygonaux, des surfaces implicites ou même des données brutes obtenues par

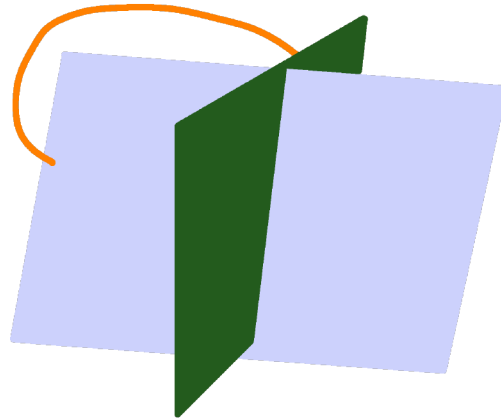


FIGURE 2.11 – Illustration de la structure squelettale théorique comme ensemble de 2-variétés qui s'intersectent. Deux composantes squelettiques surfaces, en bleu et en vert s'intersectent. Une composante squelette courbe, en orange, a une de ses extrémités sur la composante bleue et l'autre sur la composante verte. À supposer que nous possédions un échantillonnage dense et précis de ces composantes squelettiques, la reconstruction des 2-variétés est loin d'être triviale.

mesures laser⁶. De plus, dans les cas où ces normales ne sont pas directement disponibles, il est possible de les approcher par des méthodes de reconstruction de surface à partir du nuage de points [Hoppe 1992, Zhou 2008]. Il est à noter que ces méthodes n'obtiennent pas de bonnes estimations de la normale lorsqu'il n'y a pas assez d'échantillons ou au niveau des arêtes vives. Cependant, ces cas précis sont des problèmes ouverts pour tous les autres algorithmes de squelettisation.

La seconde limitation de cette méthode de contraction de sphères est l'absence de structure squelettale dans le résultat. En effet, seuls les atomes sont calculés, aucun lien entre les atomes n'est ajouté au squelette. Ce point particulier, même s'il n'est pas gênant pour certaines applications des squelettes (comme l'extraction des points caractéristiques d'un nuage de points [Dey 2001] ou la planification de mouvement [Holleman 2000]), est un problème pour l'interaction avec les formes.

Construire la structure squelettale à partir de l'ensemble des atomes n'est pas trivial. Un squelette ne vérifie pas l'hypothèse d'une surface fermée sans auto-intersection, requise dans bien des travaux de reconstruction [Hoppe 1992, Amenta 2000a, Kazhdan 2006]. En effet, le squelette est composé de plusieurs 2-variétés qui s'intersectent entre-elles (plus de détail sur ces variétés sont donnés dans la section 2.3.3, voir la figure 2.11 pour une illustration de la structure squelettale). Cette absence de structure a fait l'objet d'une extension qui connecte les atomes entre eux [Telea 2012, Jalba 2013], par deux méthodes différentes. Ces deux méthodes, que nous présentons par la suite, supposent que la forme à squelettiser soit un maillage triangulaire (voir la figure 2.12).

La première méthode est appelée reconstruction de Delaunay, d'abord présentée dans [Telea 2012] puis avec une variante légèrement modifiée dans [Jalba 2013]. Pour chaque triangle T du maillage de la forme, les atomes $A(T)$ tangents aux sommets de T sont collectés. Afin de trianguler les atomes de $A(T)$ et construire la structure squelettale, les centres des atomes sont d'abord projetés dans le plan de T . Ensuite, les projections sont triangu-

6. Les mesures laser sont maintenant capables de fournir une estimation de la normale en plus de la position.

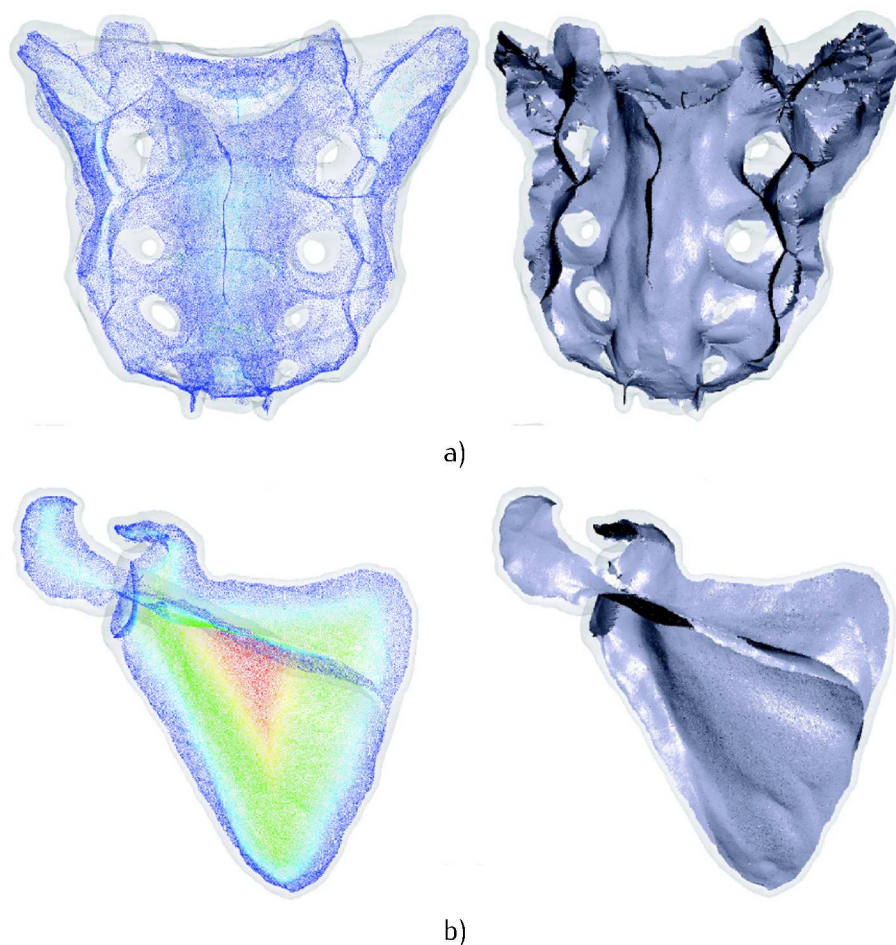


FIGURE 2.12 – Squelettes obtenus par contraction de sphères (à gauche) et reconstruction de la structure squelettale (à droite). a) Résultat pour la squelettisation d'un maillage de l'os du sacrum et b) pour un maillage de l'omoplate. Le code couleur utilisé symbolise l'importance des atomes calculée par la fonction MGF (voir la section 2.3.3).

Les images sont tirées de [Jalba 2013].

lées grâce à une technique [Shewchuk 1996] qui utilise les triangulations de Delaunay, d'où le nom de la méthode de reconstruction. Cette triangulation planaire est projetée sur les positions des atomes de $A(T)$. La triangulation du squelette ainsi construite se comporte normalement à proximité des jonctions entre les composantes squelettiques, i.e. il n'y pas plus de liaisons entre différentes composantes squelettiques que pour d'autres algorithmes (comme le *Power Shape*). Cependant, cette extension produit des trous au sein de la structure squelettale.

La seconde méthode, appelée reconstruction par variétés [Jalba 2013] répond au problème des trous causés par la reconstruction de Delaunay. La première étape consiste à grouper les atomes par composante squelettale. Pour cette étape, les vecteurs caractéristiques d'un atome sont utilisés : ce sont les vecteurs $\overrightarrow{cp_1}$ et $\overrightarrow{cp_2}$, dirigés vers les sommets du maillage, p_1 et p_2 , se trouvant sur la sphère de centre c associée à cet atome. Soit une petite sphère $v_\epsilon(s)$ de rayon ϵ autour de la position d'un atome s . Cette sphère, de par les atomes qu'elle contient, est en relation avec un ou plusieurs petits voisinages de la surface de la forme squelettisée [Pizer 2003] : un atome bord est associé à un de ces voisinages, deux pour un

atome régulier et trois ou plus pour une jonction⁷. Lorsque cette sphère $v_\epsilon(s)$ est placée autour d'une jonction, les vecteurs caractéristiques des atomes contenus dans la sphère, varient fortement, car plus de deux voisinages de la forme sont décrits par ces atomes. Les atomes sont alors groupés par une agglutination qui est stoppée lorsqu'une jonction est détectée, ce qui fournit une approximation des composantes squelettiques.

La méthode de reconstruction par variétés se poursuit par une étape de maillage des composantes squelettiques. Ce maillage est construit de manière incrémentale grâce à un algorithme de sphère pivot [Bernardini 1999] (voir [Jalba 2013] pour plus de détails sur l'obtention pratique du maillage). Cette méthode de reconstruction permet une segmentation du squelette en composantes squelettiques. Cependant, le squelette n'est pas complètement connecté du fait que les jonctions sont exclues des groupements d'atomes.

En conclusion, la méthode de contraction des sphères permet d'obtenir des atomes d'une grande précision, en un temps record. Cependant, ces squelettes sont déconnectés et deux extensions tentent de remédier à ce problème. La première, reconstruction de Delaunay, produit des trous au sein du squelette. De même, lors d'une discussion avec les auteurs, nous avons appris que le résultat n'est pas composé de plusieurs variétés (une par composante squelettique), mais d'une seule. La structure squelettique ressemble alors à une sorte de maillage écrasé qui couvre totalement le squelette. Cela est acceptable pour une visualisation du squelette, mais bien moins pour une utilisation de cette structure dans les applications que nous visons. La seconde extension, reconstruction par variété, supprime le problème des trous au sein des composantes squelettiques, mais produit un maillage par composante squelettique, laissant de larges espaces entre ces composantes. Si nous utilisons une telle structure squelettique, nous serions dans l'incapacité de transmettre une modification d'une composante logique à une autre lors de nos interactions avec la forme.

2.2.3.4/ DISCUSSION

Pour les squelettes calculés à partir des diagrammes de Voronoï, comme le *Power-Shape* [Amenta 2001a], il est aisé de trouver une implantation logicielle ou d'en implanter une. Ces squelettes sont dotés d'une structure squelettique et les positions des atomes sont précises. Nous utilisons ces squelettisations pour obtenir des squelettes à manipuler dans nos applications.

La classification des atomes proposée dans les travaux sur le *Medial Scaffold* est intéressante. Cependant, nous doutons de son utilité d'un point de vue pratique. Les auteurs affirment que l'hypergraphe fournit une organisation hiérarchique du squelette, qui rend ce dernier utile pour l'analyse des formes, l'animation ou encore la reconnaissance des formes. Nous n'avons pas ce sentiment lorsque nous observons les résultats obtenus sur des modèles non synthétiques, comme par exemple ceux présentés dans [Leymarie 2007] illustrés dans la figure 2.10. La méthode du *Medial Scaffold* est fortement complexe, avec de nombreuses approximations à prendre en compte, et sans implantation logicielle disponible. Les temps d'exécution annoncés sont notablement plus longs que des méthodes plus simples. Nous considérons donc le *Medial Scaffold* pour des comparaisons théoriques uniquement.

La méthode de contraction des sphères [Ma 2012] et ses extensions qui reconstruisent la structure squelettique [Telea 2012, Jalba 2013] semblent prometteuses, mais ces travaux ont été publiés à la fin de cette thèse. Nous n'en avons donc pas tenu compte dans notre démarche.

7. Cette définition des bords et des jonctions, plus simple que celles utilisées dans le *Medial Scaffold*, correspondent à notre conception des bords et jonctions d'un squelette (voir le chapitre 5 et la section 2.3.3)

2.3/ SOUS-PROBLÈMES DE L'UTILISATION DES SQUELETTES COMME MRF

Le squelette que nous avons choisi est le squelette actuellement le mieux adapté à une utilisation comme MRF. Cependant, certains problèmes, concernant sa qualité, doivent être résolus pour une utilisation pratique : capacité de reconstruction à mesurer par une méthode d'habillage rapide, bruit squelettal qui nécessite une régularisation et structure squelettale qui demande une réorganisation. Nous passons en revue dans cette section l'état de l'art sur ces différents problèmes.

2.3.1/ HABILLAGE

La première application est la visualisation de la forme grâce à un squelette. Pour cela, il est nécessaire de traiter les données géométriques contenues dans le squelette, sous la forme de sphères. Cette visualisation se fait par la construction d'un maillage nommé habit. Nous pouvons ainsi mesurer la distance entre la forme originale et l'habit pour évaluer la capacité de reconstruction du squelette. Cette capacité est importante pour choisir un algorithme de squelettisation pour nos squelettes et aussi pour valider nos différents algorithmes. Cependant, cette construction de l'habit (appelée habillage) est loin d'être évidente.

Il est important de comprendre que l'habit $\mathcal{H}$ représente une approximation de la forme $\mathcal{F}$ squelettisée. En effet, la squelettisation n'est pas exacte, donc les données géométriques du squelette ne sont pas suffisantes pour une reconstruction totale. Pour calculer la capacité de reconstruction ou visualiser la forme décrite par le squelette, il s'agit d'utiliser au maximum les données du squelette pour palier cette approximation. Nous avons identifié cinq catégories de méthodes d'habillage : l'affichage naïf des sphères, l'utilisation de surfaces implicites, la *Skin Surface*, l'exploitation de données additionnelles fortement dépendantes de la forme et enfin, la technique du *Splatting*. L'affichage naïf et le *Splatting* ne produisent pas de maillage (mais une collection de sphères ou une image), mais sont populaires pour cette visualisation ou pour évaluer visuellement la capacité de reconstruction.

2.3.1.1/ AFFICHAGE NAÏF

Lors d'un affichage naïf, les sphères associées aux atomes de $\mathcal{S}$ sont directement affichées sans aucun autre traitement. Malgré l'extrême simplicité d'une telle méthode, le coût est fortement prohibitif. En effet, pour un squelette à n atomes, il est nécessaire d'afficher n sphères. L'affichage d'une sphère se fait en divisant sa surface en $2 \cdot p \times m + 2 \cdot m$ triangles grâce à p parallèles et m méridiens. En prenant un nombre modeste de parallèles et méridiens, comme $m = p = 16$, cela représente $544 \cdot n$ triangles à afficher pour visualiser la forme. Si on considère un squelette obtenu par un algorithme du *PowerShape* sur le modèle *Armadillo* (52k triangles), nous avons $n = 25\,890$ atomes. Ainsi l'affichage des sphères nécessite 14 084 160 triangles. Avec un tel nombre de triangles, l'affichage naïf est difficilement interactif.

Un problème récurrent avec ce genre d'affichage est l'apparition renflements et de discontinuités des normales, à cause de la modélisation de la forme par un ensemble fini de sphères (voir la figure 2.13). Nous utilisons également le terme de renflements pour nommer ces motifs. De plus, cette méthode ne produit pas de maillage de la surface de l'union des sphères mais un maillage par sphère. Ce point particulier est gênant pour le calcul de la capacité de reconstruction, dont nous avons besoin pour mesurer la qualité d'un squelette en tant que MRF. Cependant, ce genre de méthode peut être utilisé pour la production d'images ou pour

des tests, lorsque le temps de calcul n'est pas une contrainte. Dans ce cas, il est possible d'utiliser des logiciels de rendu par lancer de rayons, comme *POV-Ray* [POV-Ray 1992].

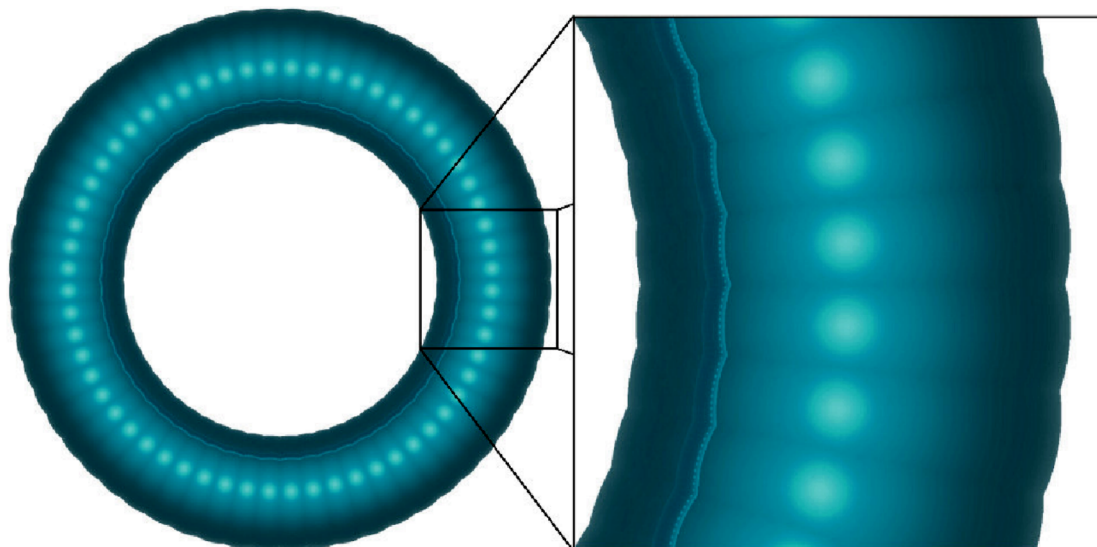


FIGURE 2.13 – Habillage par affichage naïf des sphères du squelette d'un tore. Des discontinuités de normales et les renflements sont visibles.

2.3.1.2/ SURFACES IMPLICITES

Une surface implicite est définie comme la solution d'une équation implicite, i.e. de la forme $F(x, y, z) = Iso$, avec F une fonction scalaire appelée la fonction potentiel et Iso une constante nommée iso-valeur. Une telle surface peut-être vue comme la surface de niveau du champ scalaire (l'ensemble des positions de l'espace où le champ est égal à Iso), d'où le nom d'iso-surface aussi donné à une surface implicite. Ce sont des définitions vectorielles⁸ très employées dans la génération d'images de synthèse, notamment pour les films d'animation des grands studios.

La particularité des surfaces implicites est qu'elles permettent, de par leur définition, de mélanger différents objets représentés par des iso-surfaces. Cela est utilisé par exemple pour animer des liquides comme l'écoulement d'une rivière ou de la lave. Pour mélanger un objet défini par $F_1(x, y, z) \geq Iso$ à un autre objet défini par $F_2(x, y, z) \geq Iso$, nous pouvons regarder l'objet correspondant à $F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) \geq Iso$. Les surfaces implicites ont donc le potentiel de réduire les renflements qui apparaissent dans un affichage naïf et d'adoucir les variations de normales. Une manière simple de les appliquer pour l'habillage est de voir chaque atome comme un blob [Blinn 1982] (de l'anglais *BLinn OBjects*). Il est aussi possible de considérer des fonctions à base radiale centrées sur les positions des atomes [Samožino 2006]. Enfin, pour un meilleur contrôle de l'habillage, des fonctions plus complexes peuvent être utilisées, comme des fonctions anisotropes [Rigaudiere 1999] (ces fonctions se comportent différemment selon la direction étudiée).

8. Cela signifie qu'il est possible de travailler à un niveau de précision arbitraire sur la surface. Le terme provient des images vectorielles, dépourvues de matrices de couleurs, qui permettent un redimensionnement à n'importe quelle échelle, sans perdre en qualité.

Parmi les surfaces implicites, citons les surfaces implicites à squelette [Rigaudiere 2000]. Ce squelette, que nous appelons ici squelette implicite S^* pour le distinguer d'une surface médiane analytique, constitue la source géométrique du potentiel : chacun de ses éléments émet un potentiel dans toutes les directions, dont la valeur décroît avec la distance. La valeur $F(p)$ du potentiel en un point p est alors calculée en sommant les potentiels f émis par tous les éléments e du squelette : $F(p) = \int_{e \in S^*} f(\|p - e\|)\rho(e)$, avec ρ une fonction scalaire qui permet de contrôler l'épaisseur locale autour de S^* .

Un habillage peut être réalisé par une surface implicite, en établissant un lien entre S et S^* [Pizaine 2011]. Cependant, passer d'un modèle à un autre se fait au prix d'approximations. Dans [Bernhardt 2008], un squelette est calculé pour servir de base à la construction d'un squelette implicite, afin de modéliser une forme sculptée par l'utilisateur. La surface implicite définie par ce squelette implicite est parfois fortement différente de la forme à décrire : perte de détails, modification de l'épaisseur locale et mélange de différentes composantes logiques. De même, convertir une surface implicite en un squelette nécessite un échantillonnage de bonne qualité (voir la section 2.2), notamment pour capturer les détails et la topologie de la surface.

Pour mailler une surface implicite (voir par exemple la méthode du *Marching Square* [Lorensen 1987], aussi appelé *Marching Cube* en trois dimensions), la fonction potentiel est évaluée sur une grille spatiale. Une mauvaise résolution de cette grille spatiale entraîne la disparition d'un détail ou la fusion de deux parties de la forme. Pour éviter ces problèmes, il est possible d'augmenter la résolution de la grille. Cependant, l'évaluation de la fonction potentiel en un point de l'espace passe par le calcul pour tous les éléments implicites (blobs, fonction à base radiale ou portion de squelette implicite) d'expressions mathématiques non triviales. L'augmentation de la résolution de la grille d'échantillonnage allonge donc fortement le temps de calcul du maillage.

Les mélanges non désirés des éléments implicites causent des variations de l'épaisseur locale, l'absorption des détails et la fusion de différentes composantes logiques de l'objet décrit par la surface implicite. Il existe des méthodes pour contrôler ce mélange [Gourmel 2013, Zanni 2014]. Définir les paramètres adéquats pour chaque modèle requiert l'intervention de l'utilisateur. De plus, le temps de calcul du maillage, déjà élevé pour les surfaces implicites, s'en trouve encore allongé.

Enfin, les surfaces implicites permettraient de résoudre le problème des discontinuités de normales et des renflements dont nous parlions dans la section 2.3.1.1. À l'aide d'une structure squelettale idéale, nous pouvons définir des mélanges pertinents entre des primitives voisines, de sorte à rendre totalement lisse l'habit, sans aucune discontinuité. Cela peut se faire à l'aide de primitives surfaciques, définies par les triangles reliant les centres des atomes ou à l'aide de primitives linéiques définies par les liens entre les atomes. Cependant, comme nous l'avons annoncé en introduction, la structure squelettale est loin d'être idéale. Par conséquent, il est plus que délicat d'utiliser des primitives implicites autres que ponctuelles (définies aux centres des atomes). Alors, sans connaissances a priori, nous ne pouvons résoudre le problème des discontinuités par un habillage implicite pour tous les squelettes.

2.3.1.3/ *Skin Surfaces*

Une méthode naïve pour mailler la surface de l'union des sphères consisterait à mailler chaque sphère individuellement, puis de fusionner itérativement les maillages avec l'habit. Initialement l'habit est vide. À chaque étape, l'intersection entre le maillage d'une sphère

et l'habit est calculée, afin d'être maillée par la suite. Cette façon de faire est extrêmement coûteuse en temps de calcul. Pour obtenir ce maillage de l'union des sphères beaucoup plus efficacement, il est possible d'avoir recours aux *Skin Surfaces*⁹.

Cette surface, introduite dans [Edelsbrunner 1999], est définie par un ensemble $\mathcal{W}$ de points pondérés et d'un facteur de réduction κ . L'ensemble de points $\mathcal{W} = ((p_i, w_i))_i$ peut être vu comme une collection de sphères centrées en p_i , de rayon $r_i = \sqrt{w_i}$. Si le facteur κ est égal à un, la *Skin Surface* est exactement la surface de l'union des sphères. Lorsque ce facteur est différent de un, il contrôle l'épaisseur locale de la surface : pour $\kappa > 1$ la surface contiendra l'union des sphères, alors que pour $\kappa < 1$ c'est l'union des sphères qui contiendra la surface (pour plus de détail sur l'influence du facteur de réduction, nous renvoyons à [Edelsbrunner 1999]). En diminuant κ , la surface tend vers la continuité C^1 et la réduction de la forme supprime les renflements observés dans la section 2.3.1.1.

Le maillage de la *Skin Surface* est réalisé par un algorithme [Kruithof 2005] qui s'appuie sur les triangulations de Delaunay. Il est disponible dans CGAL [CGAL 1996], où une implantation optimisée s'occupe du cas qui nous intéresse, i.e. $\kappa = 1$ pour calculer l'habit. Cependant, la qualité de l'habit n'est pas à la hauteur de nos attentes. Beaucoup de faces s'intersectent entre elles et de nombreux triangles dégénérés sont présents, ce qui produit des artefacts (voir la figure 2.14). Le constat reste le même en diminuant la valeur de κ : les détails disparaissent alors que les artefacts sont très faiblement régularisés.

Le nombre de sommets dans les habits ainsi construits est très important, sans lien direct avec la quantité de détails du modèle. En effet, le nombre de sommets est toujours de l'ordre du carré du nombre de sphères dont il faut mailler l'union. Pour une telle quantité de sommets et un tel temps de calcul, on pourrait s'attendre à une meilleure qualité visuelle.

2.3.1.4/ UTILISATION DE DONNÉES ADDITIONNELLES

Dans les méthodes d'habillage précédentes, $\mathcal{H}$ est défini comme la surface de l'union des sphères de $\mathcal{S}$. Cette définition s'appuie sur les données géométriques contenues dans un squelette sous forme de sphères et des résultats théoriques sur la convergence des algorithmes de squelettisation vers le squelette exact. En effet, le squelette exact permet de reconstruire parfaitement la forme décrite. Cependant, il n'est pas trivial de construire un tel habit $\mathcal{H}$ à partir des sphères seules. C'est pourquoi $\mathcal{H}$ peut être défini en utilisant d'autres données que les sphères. Nous présenterons ici l'habillage d'un *Medial Scaffold* (voir la section 2.2.3.2).

Dans [Yushkevich 2003] l'habillage est réalisé en produisant, à partir du squelette, un habit décrit par une B-Spline cubique. La condition pour qu'une telle méthode puisse être appliquée est de disposer d'une structure squelettale qui forme un maillage quadrangulaire. Les liens entre atomes forment les arêtes de ce maillage. Chaque lien est adjacent à au plus deux faces. Cela impose que le squelette ne contienne aucune jonction (les liens seraient adjacents à au moins trois faces dans le cas d'une jonction), donc qu'il ne contienne qu'une seule composante squelettale. Des données additionnelles sont ajoutées aux atomes, comme des angles et des repères locaux, calculées à partir de la forme à squelettiser (donc calculées lors de la squelettisation). Un ensemble de contraintes sur la surface B-Spline est établi grâce aux atomes ainsi étendus. En résolvant ces contraintes, la surface B-Spline est obtenue, et l'habillage terminé. La qualité de cet habit est difficile à évaluer car il n'existe aucune donnée sur l'erreur d'approximation de la forme par $\mathcal{H}$.

9. Cette expression signifie en français « surface peau ». Tout comme pour l'expression *Power Shape*, il n'est pas facile d'employer la version française dans un texte. Nous aurons donc recours à un anglicisme.

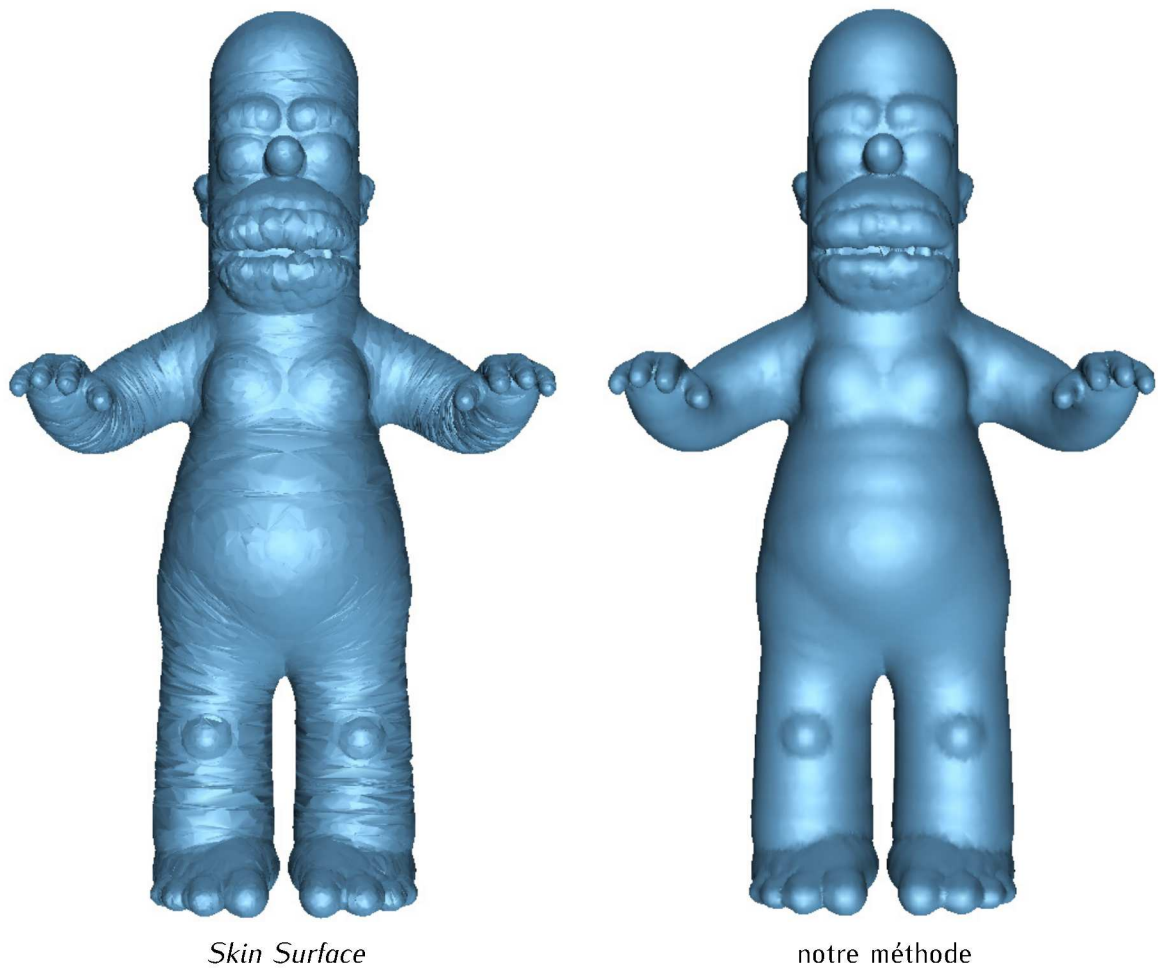


FIGURE 2.14 – Comparaison de l'habillage par Skin Surface avec notre méthode (voir le chapitre 3). La Skin Surface présente de nombreux artefacts, donnant une apparence « chiffonnée » à la forme. L'habit obtenu par notre méthode possède ici trois fois moins de sommets et est produit 2.8 fois plus rapidement.

Les données additionnelles sont obtenues à partir de la forme à décrire. Sans la forme, il n'est donc pas possible de recalculer ces données. Ainsi, si le squelette est modifié, il n'est plus possible de l'habiller car les données additionnelles doivent être mises à jour pour refléter ces modifications. De plus, cette méthode n'est applicable que sur des formes très simples : celles dont les squelettes ne contiennent qu'une seule composante squelettale (une ellipsoïde par exemple). Enfin, l'obtention d'une structure squelettale quadrangulaire ne peut se faire que manuellement : un utilisateur place les atomes et les relie pour former des faces quadrangulaires. Les limitations de cet habillage sont incompatibles avec notre objectif, à savoir l'interaction avec les formes en utilisant les squelettes comme MRF. Les données nécessaires à un habillage doivent être accessibles à partir du squelette seul et tout squelette doit pouvoir être habillé.

2.3.1.5/ SPLATTING

La visualisation d'un modèle tridimensionnel peut être vue comme la projection de ce modèle sur une surface, comme un écran d'ordinateur. Cet écran est une matrice de couleurs, dont les éléments sont des *pixels* (de l'anglais *Picture Element*, soit élément d'image). Les couleurs, à travers leurs variations spatiales, nous font percevoir la profondeur de la scène, dimension manquante au support de visualisation. À l'aide d'une image, il nous est donc possible de visualiser une forme selon un point de vue particulier. Ainsi, si seule l'apparence de l'habit selon un point de vue est requise, l'habillage peut se contenter de construire cette image, au lieu de calculer et mailler l'union des sphères du squelette.

Selon le point de vue considéré, toutes les sphères ne sont pas visibles, ce qui réduit le nombre des sphères à prendre en compte pour produire l'image en question. De même, toutes les parties des sphères visibles ne contribuent pas à la modification des *pixels* (certains points sont cachés si l'objet n'est pas transparent). Les calculs sont ainsi grandement optimisés. Bien que simplifié dans nos explications, ce processus illustre le principe général de la méthode de *Splatting* ou d'épilage [Rusinkiewicz 2000].

Cette méthode peut être couplée aux capacités des *GPU* pour accélérer la production de l'image. Ainsi, des implantations massivement parallèles sont possibles (voir celle décrite dans [Jalba 2013]). Le temps d'exécution en devient si faible que recalculer la visualisation de l'habit selon un point de vue à chaque boucle de rendu peu être envisagé. De plus, les renflements et les discontinuités de normales que l'on note en utilisant une union de sphères peuvent être réduits grâce à des techniques de traitement d'image. Mais lorsque le niveau de détails requis pour la visualisation devient important (par exemple après un agrandissement sur une zone d'intérêt), les creux et les discontinuités sont à nouveau visibles (voir le chapitre 3).

Bien sûr cette méthode ne nous permet pas de résoudre le problème du calcul de la capacité de reconstruction. Elle ne peut être utilisée que pour la visualisation et pour l'estimation visuelle de cette capacité.

2.3.1.6/ DISCUSSION

Nous avons besoin d'un habillage pour visualiser une forme représentée par un squelette. Cet habillage doit utiliser uniquement les données du squelette ou calculables à partir du squelette. L'habillage se fait communément en considérant la surface de l'union des sphères du squelette. Un tel procédé, bien que motivé par la convergence du squelette vers le squelette exact, laisse apparaître des artefacts sous forme de discontinuités de normales et des renflements.

L'habillage construit un maillage, qui est une représentation par les bords de cette union de sphères. Ce maillage peut ensuite être utilisé pour :

1. mesurer la distance avec la forme (que nous avons utilisée pour calculer le squelette), afin d'évaluer la qualité de la méthode d'habillage et la qualité du squelette à travers sa capacité de reconstruction
2. mesurer la distance avec une habit obtenu après une modification du squelette (par exemple suppression du bruit, amélioration de la structure squelettale), afin de certifier que cette modification n'a pas entraîné une détérioration de la forme décrite par le squelette.

L'habillage revêt donc une importance cruciale, car il permet d'effectuer ces mesures et de valider les travaux sur les squelettes. Cependant, il est très rare de voir de telles mesures. En effet, les squelettes sont la plupart du temps évalués visuellement, sans aucune mesure de qualité permettant de contrôler la géométrie capturée. De plus, un grand nombre de travaux préfèrent utiliser un algorithme de reconstruction de surface à partir d'un échantillonnage de l'union des sphères plutôt que de résoudre le problème de l'habillage.

C'est pourquoi nous disposons uniquement de deux méthodes de comparaison : l'algorithme de maillage *Skin Surface* [Kruithof 2005] (produisant des artefacts visuels pour un grand nombre d'éléments, en un temps non négligeable) et un habillage implicite qui produit un habit d'une bonne qualité visuelle mais en un temps bien trop long pour être utilisé dans une optique d'évaluation rapide de la géométrie capturée par un squelette¹⁰. Le chapitre 3 propose notre solution pour améliorer l'habillage : bonne qualité visuelle de l'habit et un temps de calcul plus court.

Lorsque les mesures de distance entre l'habit et d'autres formes ne sont pas nécessaires, nous pouvons utiliser une méthode qui ne produit pas de maillage (voir Section 2.3.1.5). Cette méthode nous sert principalement à visualiser des données calculées sur les atomes, comme les rayons ou l'importance (voir la section 5.2) et évaluer visuellement des modifications du squelette (par exemple pour montrer l'amélioration de la géométrie contenue dans un squelette par suppression du bruit squelettal dans le chapitre 4).

2.3.2/ RÉGULARISATION

La régularisation et la simplification (du squelette ou de la forme) sont liées à la notion d'importance des atomes. Le bruit squelettal est défini comme l'ensemble des éléments d'un squelette qui ne contribuent pas à la description de l'objet. Cette absence de contribution peut être d'ordre topologique, par exemple une liaison entre atomes qui n'améliore pas l'approximation faite de la structure du squelette exact. Mais en règle générale, cette absence de contribution est surtout d'ordre géométrique. Plus un atome contribue à l'apparence, plus les parties qu'il décrit sont caractéristiques de la forme, plus il est dit important à la description de cette forme. La simplification d'une forme se fait en supprimant des détails, c'est-à-dire des parties moins importantes que d'autres. Ainsi, en choisissant un seuil sur les mesures d'importance des atomes, on peut procéder à une élimination du bruit squelettal lorsque le seuil a une faible valeur ou à une simplification de la forme lorsque le seuil est plus élevé [Shaked 1998].

Le problème reste de savoir comment définir cette contribution à l'apparence, pour identifier l'importance d'un atome. La contribution d'un atome n'est pas en lien direct avec la capacité de reconstruction. Un atome peut apporter très peu de volume à l'union des autres sphères du squelette (donc faire très peu varier la capacité de reconstruction) tout en étant important (en le retirant, un trou peu apparaître dans l'union de sphères par exemple). Les critères d'importance reposent sur des hypothèses de ce qui caractérise la contribution d'un atome à l'apparence d'une forme, sans définition formelle. Nous proposons une classification de ces critères d'importance en deux catégories : les critères locaux et les critères globaux. La

10. L'habillage implicite aurait sa place dans un processus de rendu final de la forme décrite par un squelette, comme le font les studios d'animation. L'usage de fermes de serveurs est alors nécessaire. En effet, les Studio *Pixar* pour leur film *Monstres Academy* atteignent une moyenne de 29h de calculs pour le rendu d'une image, sur 24 000 cœurs (unités parallèles)

distinction entre les deux catégories est parfois délicate. Nous présentons quelques-uns de ces deux types de critères dans cette sous-section.

2.3.2.1/ CRITÈRES LOCAUX D'IMPORTANCE

Un critère local ne permet pas de distinguer deux configurations d'atomes qui sont localement similaires mais globalement différentes. Par exemple, si le critère d'importance est la valeur du rayon d'un atome : deux atomes de même rayon représentent des cas localement similaires. Pourtant si un atome appartient à une composante surface de forte densité, il peut être retiré sans perte de géométrie ou de topologie. Néanmoins, si un atome appartient à une composante courbe de faible densité, il ne peut pas être retiré sans perdre la topologie de la forme ni des données géométriques importantes. Ainsi, un filtrage sur des critères locaux peut briser le squelette en plusieurs composantes connexes. Reconnecter la structure nécessite un travail supplémentaire [Pizer 2003, Sud 2005], qui est moins intuitif.

L'algorithme du *Power Shape*, que nous avons présenté dans la section 2.2.3.1, repose sur un critère d'importance des sommets de Voronoï intérieurs. Un atome (pôle intérieur) est le sommet de Voronoï d'une cellule $Vor(p)$ qui est à l'intérieur et le plus éloigné de l'échantillon p . C'est donc un critère local de distance à la surface. L'idée est la suivante : plus un atome est proche de la surface, plus il a un rayon faible et donc moins il est important pour l'apparence de la forme. De plus, le bruit squelettal est souvent observé à proximité de la surface, par rapport au squelette nettoyé. Cependant, le bruit squelettal demeure même après ce filtrage (nous en ferons la démonstration dans le chapitre 4). Des atomes peuvent être proches de la surface sans appartenir au bruit squelettal, comme les atomes qui décrivent des détails de surface. Par conséquent, supprimer tous les atomes proches de la surface pour régulariser un squelette induit une perte de détails. La distance de l'atome à la surface ne constitue par une mesure d'importance suffisante.

Lors de la squelettisation, un ensemble $\mathcal{E}$ d'échantillons proches les uns des autres peut décrire soit une portion lisse de la forme, soit un détail de cette forme. Dans le cas où $\mathcal{E}$ représente une portion lisse, les sphères produites par $\mathcal{E}$ ne capturent aucun détail¹¹ et apparaissent à cause de la discrétisation nécessaire à la mise en pratique. Pour une squelettisation qui utilise les diagrammes de Voronoï, ce cas survient lorsqu'un tétraèdre de Delaunay est très plat (voir la section 2.2.3.1). Les sphères ajoutées donnent naissance au hérissément caractéristique du bruit squelettal (voir la figure 2.7). Au contraire, si $\mathcal{E}$ capture un détail, on observe souvent que les sphères créées par cet ensemble touchent au moins un autre échantillon $e \notin \mathcal{E}$ tel que la distance $d(e, \mathcal{E})$ soit importante.

Cette observation est utilisée dans une méthode de squelettisation [Chazal 2004] qui produit un squelette nommé λ -Axis à partir des sommets de Voronoï et d'une étape de filtrage de ces sommets. Le critère d'importance de ce méthode mesure le rayon de la plus petite sphère contenant les échantillons utilisés dans le calcul d'un sommet de Voronoï (au nombre de 4 dans le cas où le domaine de travail est $\mathbb{R}^3$). Nous donnons une illustration de ce critère dans la figure 2.15. Tous les sommets de Voronoï ayant une importance plus petite qu'une constante, notée λ (d'où le nom du squelette), sont retirés. Cette mesure est également appelée *weak feature size*. L'augmentation de la valeur seuil λ supprime simultanément du bruit squelettal et des détails (nous le montrons dans le chapitre 4). Ce critère ne donne donc pas toujours des valeurs d'importance plus petites pour le bruit squelettal que pour les détails.

11. La géométrie de cette zone lisse est capturée par des sphères qui sont tangentes à des échantillons placés de part et d'autre de la surface.

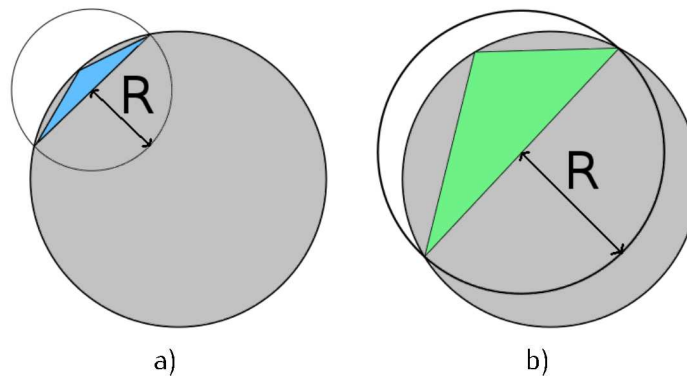


FIGURE 2.15 – Critère d'importance utilisé dans la squelettisation λ -Axis en deux dimensions. Les triangles de couleurs représentent les triangles de Delaunay connectant trois échantillons. Le sommet de Voronoï associé produit le cercle représenté en gris. La valeur λ du rayon du cercle contenant les échantillons est plus petite en a) qu'en b). L'importance calculée avec cette méthode indique que l'atome du cas a) est moins important que celui du cas b).

Si on agrandit l'espace de travail contenant la forme, en multipliant toutes les coordonnées spatiales par 100 par exemple, les résultats seront fortement différents de ceux obtenus dans l'espace de départ, pour la même valeur de λ . Le critère est donc sensible à une variation d'échelle. Pour fixer une valeur convenable de λ , il faut d'abord estimer l'échelle (par exemple avec la boîte englobante), qui sera différente pour chaque forme.

La sensibilité aux variations d'échelle est souvent reprochée aux critères locaux d'importance. Il existe un critère local [Dey 2003] qui est malgré tout insensible à ces variations. Il utilise des angles et des ratios, deux grandeurs qui ne sont pas influencées par l'échelle. De même que pour le λ -Axis et le *Power Shape*, cette méthode s'accompagne d'une garantie de convergence de la squelettisation en considérant le filtrage associé à ce critère d'importance, lorsque le nombre d'atomes tend vers l'infini. Cependant, la structure du squelette est ignorée par ce critère, ce qui, pour un nombre fini d'atomes, mène à l'apparition de nombreux trous après le filtrage, induisant des pertes de géométrie et de topologie (voir la figure 2.16). Avec ce critère, les importances des détails et du bruit squelettal ne sont pas différenciées.

2.3.2.2/ CRITÈRES GLOBAUX D'IMPORTANCE

L'importance des critères locaux ne distingue pas le bruit squelettal des détails et ne fournit pas de contrôle pour éviter la division du squelette en plusieurs composantes connexes ou l'apparition de trous dans la géométrie. C'est pourquoi les critères globaux ont petit à petit remplacé ces critères locaux. L'idée principale des critères globaux repose sur la définition d'une importance qui augmente de manière monotone à partir des bords du squelette vers l'intérieur. L'importance d'un atome peut être vue comme sa centricité¹² : plus un atome est « centré sur le squelette », plus il est important. Cette définition de l'importance, qui commence à se répandre, correspond à ce que nous avons observé expérimentalement lors d'études sur la compréhension des formes.

12. Attention, il ne faut pas considérer que l'importance augmente seulement avec la distance au bord, sinon elle ne serait plus croissante monotone vers l'intérieur du squelette. Nous y reviendrons dans la section 5.2

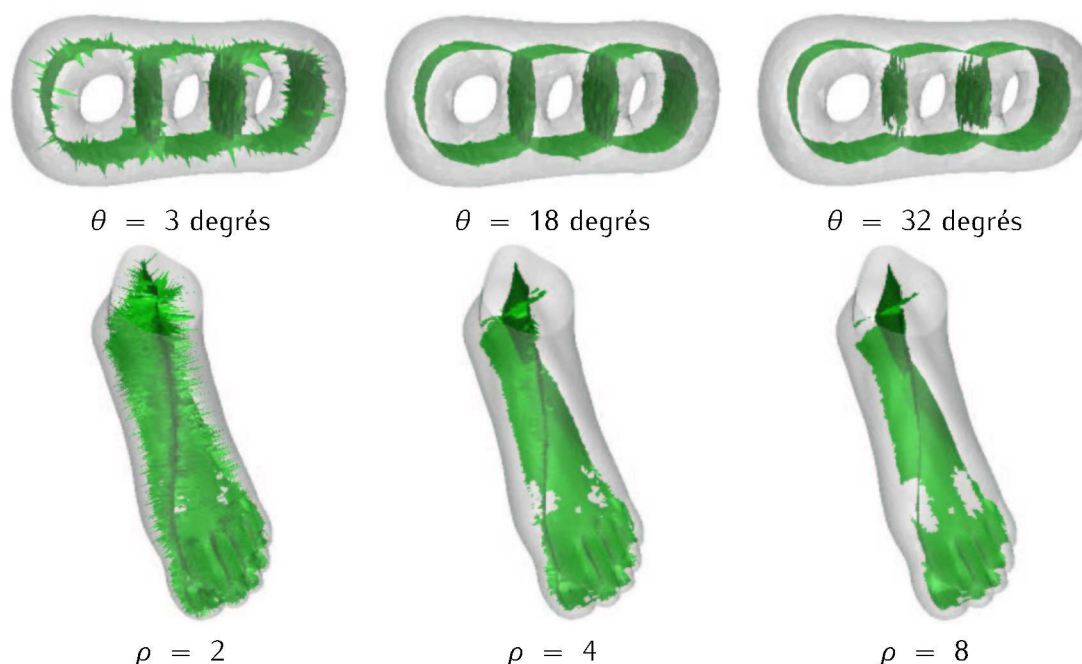


FIGURE 2.16 – Effets de la variation des paramètres de l'importance locale utilisée dans [Dey 2003]. La première ligne montre les modifications entraînées par une augmentation de la valeur seuil sur les angles et la seconde ligne montrent les effets d'une augmentation du seuil sur les ratios. Dans les deux cas, nous voyons le hérissément se réduire ainsi qu'une perte progressive des données. Les images sont tirées de [Dey 2003].

Un algorithme de squelettisation, produisant un squelette nommé le *Scale Axis*¹³, reprend le principe général du *Power Shape* avec plusieurs modifications notables [Miklos 2010b] que nous présentons en partie. La forme à squelettiser est connue par un maillage, qui est d'abord remaillé puis échantillonné par la technique décrite dans [Boissonnat 2005], jusqu'à ce que l'échantillonnage satisfasse une tolérance d'approximation δ . Cette première étape permet d'avoir un échantillonnage contenant plus de points, avec une densité plus homogène. Par l'algorithme du *Power Shape*, les sphères polaires de cet échantillonnage sont extraites. Ces sphères polaires sont agrandies en multipliant leurs rayons par un facteur s . L'union de ces sphères agrandies est alors squelettisée par la méthode du *Power Shape*. Le résultat est ensuite filtré par un critère d'importance sur les angles, très similaire à celui présenté dans [Dey 2003] (voir dernier paragraphe de la section 2.3.2.1), puis les sphères du squelette sont réduites en divisant leurs rayons par s . Sous quelques hypothèses sur le paramètre s , l'algorithme garantit une convergence du résultat vers le squelette exact [Giesen 2009]. Le critère global d'importance nouvellement introduit dans ces travaux est en quelque sorte caché dans le paramètre s . Lors de l'agrandissement, les atomes de faible importance vont se retrouver à l'intérieur d'une union de sphères plus importantes. Ainsi, ils ne contribueront pas à la production d'atomes dans le résultat final (pour plus de détails, voir la théorie introduite dans [Giesen 2009]). Les atomes du squelette final peuvent être vus comme ayant une importance supérieure à s .

13. Si le lecteur s'interroge sur la présence répétitive du mot *Axis*, ou axe en français, dans les noms de squelettes, elle provient des premiers travaux sur les squelettes [Blum 1967] dans le plan. Les squelettes étaient alors composés uniquement de courbes et appelés *Medial Axes* ou axes médians en français. Cette terminologie a été reprise dans le cadre des travaux en 3D, malgré la confusion possible entre les squelettes surfaces et les squelettes courbes.

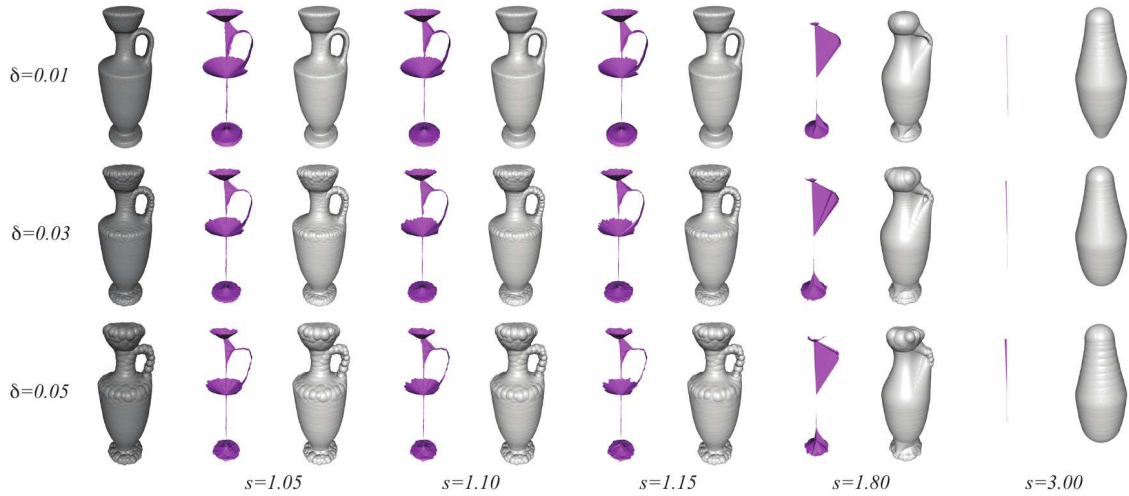


FIGURE 2.17 – *Simplification de forme (en gris clair) et régularisation du squelette (en violet) par la méthode du Scale Axis. Les différentes images, tirées de [Miklos 2010b], montrent les effets des deux paramètres de la méthode : δ pour l'échantillonnage du maillage à squelettiser et s pour le seuil de filtrage.*

Les squelettes produits par la méthode du *Scale Axis* donnent l'impression d'être moins bruités et plus réguliers que des *Power Shape* (voir la figure 2.17). Cependant, en regardant de plus près, nous constatons que le bruit est toujours présent : le hérissément a une amplitude plus faible. Un autre point notable est la forte densité d'atomes dans les squelettes, par rapport au *Power Shape*, alors que la capacité de reconstruction n'augmente pas. Pire encore, la capacité de reconstruction chute sur certains modèles, à cause de sphères aberrantes qui apparaissent à cause de l'agrandissement des sphères (nous le montrons dans le chapitre 4). Aussi, la topologie du résultat peut changer fortement selon les valeurs du paramètre s . Enfin, comme illustré dans [Jalba 2013], de nombreux trous peuvent survenir dans les squelettes, des morceaux de composantes surfaces disparaissent parfois et des liens non pertinents entre deux composantes s'établissent. En conclusion, l'apport de cette méthode est remis en cause par rapport au *Power Shape* : la qualité d'un squelette comme MRF chute selon ses trois aspects (capacité de reconstruction, bruit squelettal et structure squelettale).

Un autre critère d'importance repose sur la fonction géodésique médiane (*Medial Geodesic Function*), introduite pour l'obtention d'un squelette courbe, au moment de la première définition formelle de ces squelettes [Dey 2006]. Plaçons-nous dans le cas théorique d'un squelette exact et soit x un atome régulier d'un tel squelette. Alors, la fonction géodésique médiane *MGF* évaluée en x est égale au plus court chemin sur la surface de la forme, entre les deux points caractéristiques de x . Les valeurs de la fonction *MGF* croissent à partir des bords vers l'intérieur du squelette. C'est la raison pour laquelle elle est utilisée, pour calculer le squelette courbe comme étant le centre (maxima locaux de la fonction *MGF*) du squelette surface.

La fonction *MGF* a ensuite été étendue [Reniers 2008] afin d'assigner à un atome la quantité de surface de la forme à décrire qui lui est associée, ou de manière équivalente, qui « s'effondre » sur l'atome lors d'un processus de contraction de maillage (voir la section 2.1.1.1). Le calcul pratique de cette quantité n'est résolue que dans le cas où l'objet est de genre zéro, en faisant usage de voxels pour la calculer.

La fonction *MGF* et son extension [Reniers 2008], ont une définition intuitive : elles associent

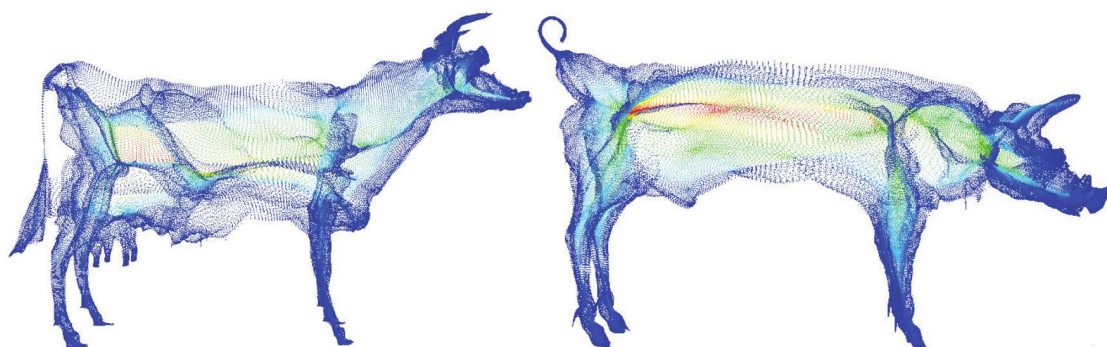


FIGURE 2.18 – Importance globale calculée par la fonction MGF. Ces deux images, tirées de [Jalba 2013], représentent des squelettes non connectés pour lesquels on a calculé les importances des atomes : l'importance va de très faible (représentée en bleu), à très élevée (représentée en rouge).

la quantité de surface affectée à un atome. Ainsi, un atome associé à une faible mesure correspond à de petits détails et un atome associé à une grande mesure correspond à des détails de grande échelle. Son calcul n'est cependant pas rapide, surtout lors d'une squelettisation qui est relativement coûteuse en temps. Récemment, un algorithme [Jalba 2013] propose de calculer ces mesures sur un squelette non connecté en des temps acceptables (similaires aux temps nécessaires pour calculer les squelettes sans structure squelettale, par un algorithme de *Power Shape*). Nous illustrons ces valeurs d'importance dans la figure 2.18.

2.3.2.3/ DISCUSSION

Chacun des critères locaux présentés est motivé par une observation différente, menant à des importances différentes. Ces critères attribuent des importances qui sont parfois plus élevées pour le bruit squelettal que pour les détails. Un filtrage sur ces importances pour la régularisation ou la simplification mène souvent à des résultats inattendus, si les paramètres ne sont pas optimisés pour chaque modèle. Les critères globaux semblent être une voie plus prometteuse, notamment parce qu'un critère global est moins à même de fortement perturber la structure squelettale. En effet, les critères locaux divisent souvent la structure squelettale en plusieurs composantes connexes ou laissent apparaître des trous.

Le critère global d'importance utilisé dans la production du squelette *Scale Axis* [Miklos 2010b] présente malgré tout certains de ces inconvénients. De plus, l'importance selon ce critère ne peut pas être utilisée en dehors de la squelettisation, car elle n'est pas explicitement calculée. Par exemple, un affichage progressif de la forme décrite par un squelette ou la simplification de la forme pour faciliter les interactions est impossible en utilisant cette importance. La fonction géodésique médiane correspond plus à nos besoins. Cependant, ce critère, comme tous les critères d'importance, est calculé au cours d'une squelettisation, en faisant usage de la forme. Ceci limite son utilisation pratique pour autre chose qu'une squelettisation.

Nous remarquons que les variations de la capacité de reconstruction du squelette lors de la modification du seuil ne sont pas mesurées. Une conséquence immédiate de cette absence est l'impossibilité de valider un algorithme de régularisation, car rien n'indique que seul le bruit squelettal est retiré. Ces mesures pourraient aussi permettre de comparer quantitativement deux critères d'importance afin de choisir le plus efficace.

Pour éviter de donner une importance plus faible aux détails qu'au bruit squelettal, nous préférons séparer la régularisation de la simplification. Nous verrons donc d'abord dans le chapitre 4 une méthode pour identifier ce bruit squelettal comme étant l'ensemble des atomes qui sont inutiles à la description de la forme. Puis dans le chapitre 5, nous proposons une méthode de calcul d'une importance monotone croissante vers l'intérieur du squelette (donc une importance globale similaire à la fonction géodésique médiane). Bien sûr, ces deux méthodes sont applicables sur tout squelette, sans nécessiter de données calculables à partir d'un autre MRF.

2.3.3/ STRUCTURE SQUELETTALE

Nous l'avons vu en introduction, la structure squelettale permet de faire du squelette une structure d'interaction intuitive avec les formes. En particulier, grâce à elle, il est possible de segmenter la forme, de la déformer, de l'animer, de la hiérarchiser et de la simplifier. Maintenant que le squelette est clairement défini, nous commençons par donner plus de précisions sur la structure squelettale. Ensuite, nous passerons en revue les quelques méthodes qui s'attachent à résoudre le problème de la structure squelettale.

2.3.3.1/ DÉFINITIONS

Théoriquement, les positions des atomes sont organisées en courbes et surfaces, appelées composantes squelettiques. Cette organisation est en pratique approchée par un ensemble de liens entre les positions des atomes. Ces liens sont obtenus par les triangles lors de la squelettisation, que ce soit les triangles reliant les atomes dans la tétraédrisation régulière dans l'algorithme du *Power Shape* [Amenta 2001a], ceux de la triangulation de Delaunay dans la méthode de reconstruction de Delaunay [Telea 2012], ou encore ceux de la triangulation obtenue par l'algorithme de sphère pivot dans la reconstruction par variété [Jalba 2013]. Comme ces trois algorithmes sont les seuls à construire une structure squelettale, il est équivalent de considérer les liens ou les faces triangulaires. Cette structure squelettale converge vers l'organisation théorique quand le nombre d'atomes tend vers l'infini. C'est hélas la seule garantie sur la structure squelettale. Pour un nombre fini d'atomes, cette structure est très difficile à manipuler, car elle ne respecte aucune règle.

Le squelette et la forme sont homotopiquement équivalents [Lieutier 2003], ou encore de même type d'homotopie. Pour expliquer cette relation, commençons par introduire la notion d'homotopie entre deux fonctions continues γ_0 et γ_1 d'un espace X dans un espace Y . Ces deux fonctions sont homotopes, d'homotopie H , si H est une fonction continue de $X \times [0, 1]$ dans Y telle que l'application qui à $x \in X$ associe $H(x, 0)$ est égale à γ_0 et celle qui à $x \in X$ associe $H(x, 1)$ est égale à γ_1 . Cela signifie que l'on peut passer continûment d'une fonction à une autre (voir l'exemple de la figure 2.19). L'équivalence homotopique entre le squelette et la forme indique qu'il existe deux applications continues $\gamma_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$ et $\gamma_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ telles que $\gamma_{\mathcal{S}} \circ \gamma_{\mathcal{F}}$ est homotope à $id_{\mathcal{F}}$ et $\gamma_{\mathcal{F}} \circ \gamma_{\mathcal{S}}$ est homotope à $id_{\mathcal{S}}$. Simplement, cela nous indique que le squelette et la forme sont connectés de la même manière, ou encore qu'ils possèdent la même structure de « branchement ».

Un squelette est composé de plusieurs composantes squelettiques. Comme le squelette et la forme sont homotopiquement équivalents, le squelette d'une forme connexe doit être également connexe. Les composantes squelettiques sont donc connectées entre elles. Les lieux où

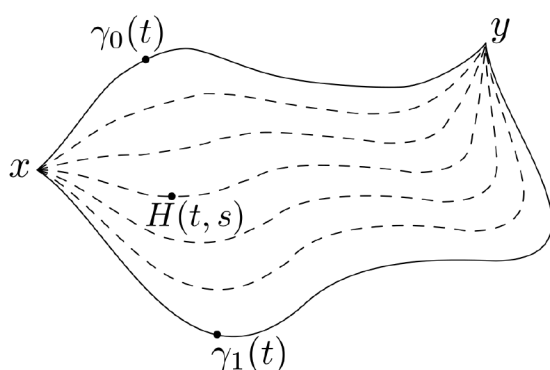


FIGURE 2.19 – Fonctions homotopes $\gamma_0, \gamma_1 : [x, y] \mapsto \mathbb{R}$. L'homotopie $H : [0, 1]^2 \mapsto \mathbb{R}$ permet de passer continûment de la fonction γ_0 à la fonction γ_1 .

deux composantes connexes se connectent s'appellent les jonctions. Les atomes qui ont leur position au niveau de jonctions sont nommés **atomes jonctions**.

Les composantes squelettiques sont des 2-variétés à bord. Une 2-variété est une surface (une courbe est considérée comme une surface dégénérée) telle que chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à un disque ouvert : on peut passer du voisinage à un disque ouvert par un homéomorphisme (application bijective continue, dont la réciproque est également continue). Autrement dit, tout voisinage d'un point d'une 2-variété ressemble localement à un disque. Pour une 2-variété à bord, certains points ont des voisinages homéomorphes à un demi-disque fermé. Ces points particuliers sont appelés les bords de la variété. Prenons par exemple une sphère, qui est une 2-variété. Si nous coupons cette sphère en deux suivant un plan, nous obtenons deux 2-variétés à bord, dont les bords sont au niveau du plan de coupe.

Nous définissons les bords du squelette comme étant les bords des composantes squelettiques auxquels nous retirons les jonctions de ces composantes. Les composantes courbes sont considérées comme bords également. Ce choix nous permet de définir simplement l'importance des atomes à partir des bords dans la section 5.2. D'une manière similaire, les bords du squelette sont les positions des atomes sur la structure squelettique qui ont soit un voisinage homéomorphe à un demi-disque fermé, soit homéomorphe à un intervalle fermé. Afin de bien saisir cette notion de bord, nous donnons une définition constructive pour les identifier visuellement (voir la figure 2.20) :

1. détacher les composantes squelettiques au niveau des jonctions,
2. aplatir chaque composante dans un plan quelconque, de manière à éviter des intersections de la composante avec elle-même dans ce plan
3. détourner au crayon les contours des différentes composantes aplanies
4. gommer les parties des contours qui correspondent aux jonctions entre les composantes,
5. en réassemblant les composantes squelettiques, les bords sont marqués par le crayon.

2.3.3.2/ MÉTHODES D'AMÉLIORATION

Les méthodes qui tentent d'améliorer l'organisation des atomes dans un squelette, soit la structure squelettique, ne sont pas nombreuses. Idéalement on souhaiterait que la structure

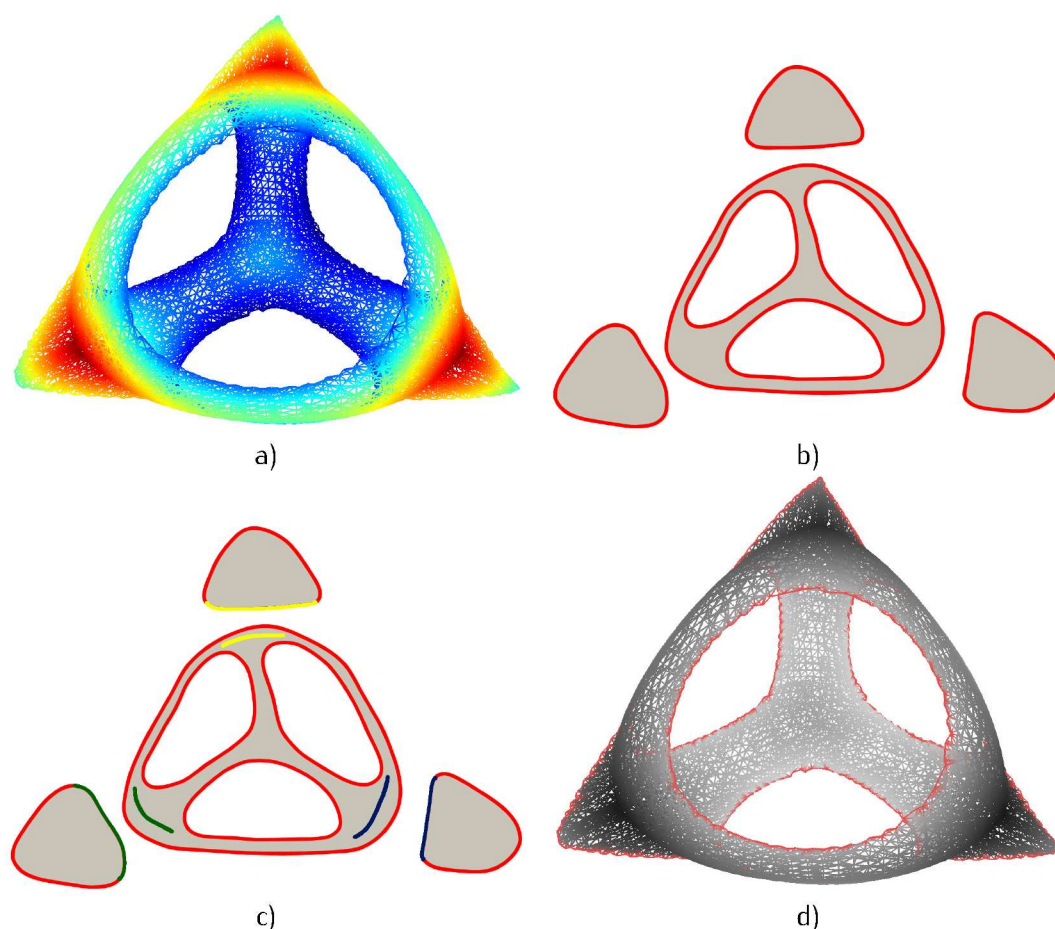


FIGURE 2.20 – Définition constructive des bords du squelette. a) Squelette dont les bords sont à identifier. b) Résultat après les étapes 1, 2 et 3 de la définition constructive des bords de la section. c) Identification des jonctions entre les composantes surfaces, en jaune, vert et bleu. Ces jonctions sont retirés des contours marqués. d) Étape 5 de la définition, donnant en rouge ce que nous appelons les bords du squelette.

squelettale soit un maillage régulier hormis aux bords et aux jonctions du squelette, que les faces ne s'intersectent jamais entre elles, qu'aucune arête relie deux atomes non jonctions de deux composantes squelettiques différentes, et qu'une hiérarchie permette d'accéder à différents niveaux de détail de la forme. Obtenir cette structure c'est résoudre le problème de la structure squelettale. Pour cela, il est nécessaire d'identifier les bords, les jonctions, les composantes squelettiques, de déterminer l'importance des atomes et de hiérarchiser le squelette.

À notre connaissance, il n'existe qu'une méthode d'identification des bords du squelette. Il s'agit de la squelettisation *Medial Scaffold* [Leymarie 2001, Leymarie 2003, Leymarie 2007], qui pose les atomes bords comme ceux dont les sphères sont osculatrices à la forme en une ligne de crête. Cette méthode propose aussi une identification des jonctions du squelette. L'utilité de ces bords et de ces jonctions n'a cependant toujours pas été démontrée. En effet, si les bords et les jonctions sont connus, il devrait être possible de segmenter le squelette en composantes squelettiques, mais une telle segmentation n'a jamais été présentée. L'utilité de ces bords est notamment tellement remise en question, que lorsqu'ils sont nécessaires dans [Telea 2012] pour calculer une importance des atomes, les auteurs préfèrent s'affranchir du problème en utilisant des données additionnelles pour approcher le résultat. Aussi, la

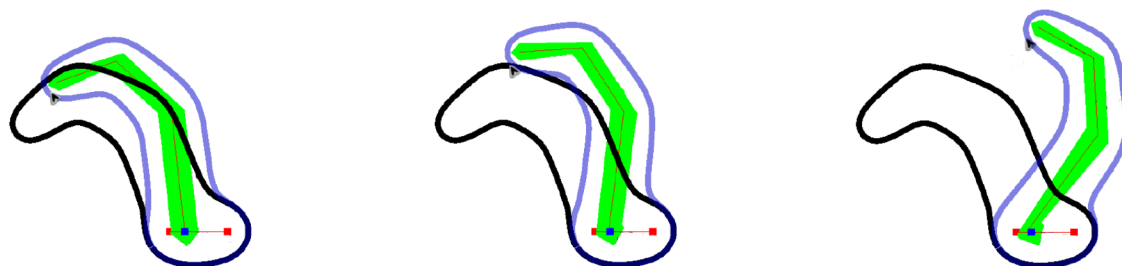


FIGURE 2.21 – Utilisation de la structure squelettale en 2D pour déformer un objet par son squelette. En appliquant des équations de déformation des matériaux sur la structure squelettale, il est possible de déformer intuitivement la forme par son squelette (les images sont tirées de [Delame 2011]).

méthode d'identification des bords et jonctions du *Medial Scaffold* a un domaine d'application limité, car elle prend obligatoirement place lors de la squelettisation. Nous proposons deux méthodes d'identifications des bords dans la section 5.1, que nous appliquons dans les sections 5.2 et 5.3 afin d'en démontrer l'utilité. Nous livrerons aussi quelques pistes pour étendre nos travaux et identifier les jonctions ainsi que les composantes squelettiques.

Une segmentation des composantes squelettiques, réalisée grâce à des angles dits de « séparation » [Sud 2005] a été proposée. Ces angles, obtenus à partir d'informations uniquement disponibles lors d'une squelettisation, permettent d'estimer l'emplacement des jonctions entre les composantes squelettiques. Une méthode similaire est utilisée dans la méthode de reconstruction de la structure squelettique par variété [Jalba 2013] (voir la section 2.2.3.3). Cependant les jonctions elles-mêmes restent floues, de sorte qu'il ne serait pas possible de transmettre les effets d'une interaction d'une composante à une autre, voisine.

Les critères globaux d'importance qui calculent une importance qui croît de manière monotone vers l'intérieur du squelette (voir la section 2.3.2.2) correspondent à nos besoins pour simplifier le squelette ainsi que la forme. Cependant, ces méthodes sont à nouveaux impossibles à appliquer en dehors d'une squelettisation. Nous proposons une importance similaire, indépendante de toute squelettisation dans la section 5.2, ce qui résout l'unique faiblesse de ce type d'importance des atomes.

Il n'existe aucune méthode de hiérarchisation des atomes selon leur contribution à la description des parties caractéristiques de la forme. Cependant, les squelettisations courbes permettent d'extraire des squelettes que l'on peut considérer comme les racines de ces hiérarchies d'importance. Sur de telles racines, il serait possible d'utiliser des équations de déformation des matériaux pour modifier directement et intuitivement la posture de la forme comme dans [Delame 2011]. En effet, en transmettant les modifications de la racine aux atomes moins importants grâce à la hiérarchie, la forme changerait automatiquement de posture rien qu'en déplaçant la position de l'outil. Nous construisons une telle hiérarchie dans la section 5.3.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé une étude des squelettes orientée vers leur utilisation en tant que MRF. Ce travail constitue notre première contribution, sachant qu'une telle étude générale des squelettes sous cet angle n'a jamais été abordée. Nous avons classifié, analysé

et comparé l'ensemble des formulations squelettiques de l'état de l'art, afin de justifier et choisir la formulation la plus à même de réaliser nos différents objectifs. Le squelette est alors l'ensemble des sphères intérieures maximales tangentes à la surface de la forme, dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Nous avons mis l'accent sur la différence entre un squelette théorique (tel que défini précédemment) et un squelette pratique (répondant à des contraintes de discrétisation et de calculabilité). Nous avons mis en évidence les lacunes des méthodes tentant de résoudre le problème de la qualité de ces squelettes, qualité qui est nécessaire à l'utilisation des squelettes comme structures d'interaction intuitives. Les chapitres suivants répondent à ces manques : une méthode d'habillage rapide pour évaluer la capacité de reconstruction, une méthode de régularisation pour supprimer le bruit squelettal et différents algorithmes sur la structure squelettale comme une avancée majeure vers sa réorganisation.

HABILLAGE D'UN SQUELETTE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode d'habillage. L'habit produit permet de visualiser la forme décrite par un squelette et de mesurer la capacité de reconstruction de ce squelette. Nous pouvons alors valider qualitativement et quantitativement des méthodes qui modifient un squelette. Notre habillage utilise les arbres octaux pour construire une voxelisation adaptative de la géométrie contenue dans un squelette. Cette géométrie est donnée par un ensemble de primitives géométriques calculées à partir des atomes. En maillant la voxellisation, nous obtenons simplement et rapidement un premier habit. Cet habit est ensuite affiné par des projections orthogonales sur des primitives dites de migration, aussi calculées à partir des atomes, afin de donner à l'habit une apparence plus lisse. La liberté dans la définition des primitives géométriques et de migration rend notre méthode modulable. Nous en proposons un exemple en utilisant des primitives de migration autres que les sphères, afin de réduire les renflements d'une modélisation de forme par un nombre fini de sphères. Après avoir détaillé notre méthode d'habillage, nous la validons en comparant les résultats à ceux produits par d'autres méthodes. Les résultats de cette validation permettent également d'étudier la qualité des squelettes issus de différentes squelettisations.

3.1/ HABILLAGE PAR ARBRE OCTAL ET PROJECTIONS

Dans cette première section nous présentons notre méthode d'habillage, qui est une amélioration du travail que nous avons présenté dans [Delame 2012]. Les trois étapes de cette méthode sont illustrées par la figure 3.1 : voxelliser la géométrie du squelette, mailler cette voxellisation, puis affiner le maillage par des projections.

3.1.1/ VOXELLISER LA GÉOMÉTRIE DU SQUELETTE

Dans le cas le plus simple, la géométrie contenue dans un squelette prend la forme d'un ensemble de sphères dont l'union approche la surface de l'objet squelettisé. Identifier et mailler efficacement la surface de cette union n'est pas aisé : par où commencer et comment procéder ? La solution généralement admise dans ce cas est une discrétisation du volume de l'union afin de simplifier le problème. À partir de cette discrétisation, une première approximation de la surface est construite. Cette approximation est par la suite améliorée. On retrouve cette

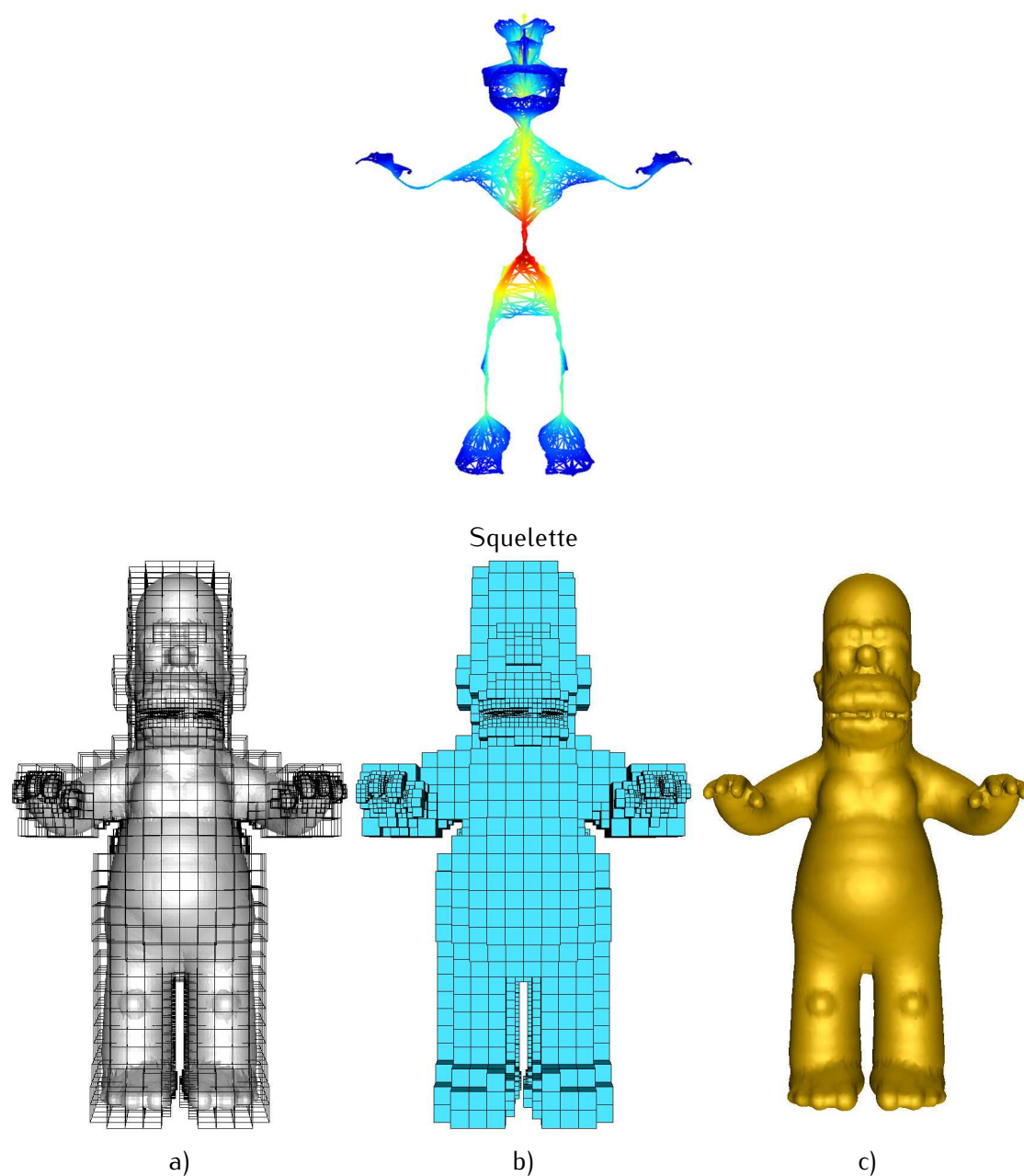


FIGURE 3.1 – Étapes de notre méthode d'habillage. a) Voxellisation de la géométrie contenue dans un squelette par un arbre octal. b) Maillage de cette voxellisation. c) Projection des sommets pour affiner le maillage.

manière de faire dans la méthode du *Skin Surface* [Kruithof 2005] où les auteurs ont recours à une tétraédrisation de l'union.

Nous suivons le même principe, en choisissant d'utiliser une voxellisation comme discrétisation. Ceci nous permet de travailler temporairement dans l'espace $\mathbb{Z}^3$, pour bénéficier de la simplicité de cet espace, par rapport à l'union des sphères dans $\mathbb{R}^3$. Cette voxellisation peut être obtenue rapidement par la construction d'un arbre octal. Chaque cellule de cet arbre occupe un volume délimité par un octant, qui dans notre cas prend la forme d'un cube. Lorsque l'octant d'une cellule intersecte¹ au moins une primitive, la cellule est dite active. Nous construisons notre voxellisation en créant une cellule racine dont l'octant englobe toutes les primitives et en divisant successivement les cellules actives. Les feuilles actives forment alors la voxellisation. Les axes des octants coïncident avec les axes obtenues lors d'une analyse en composantes principales des positions des atomes du squelette. Ainsi, l'habit produit est invariant par transformation rigide du squelette.

Un autre intérêt de l'utilisation d'un arbre octal est lié à la troisième étape de notre méthode : l'affinage de l'habit (voir la section 3.1.3). Il est en effet possible de connaître efficacement les primitives à proximité d'un point p que l'on veut projeter sur l'union de ces primitives. Pour cela, nous cherchons, grâce à la hiérarchie d'un arbre octal, la feuille active contenant p ou la plus proche de p , pour trouver les primitives qui intersectent son octant (en pratique, chaque cellule contient une liste de ces primitives). La troisième étape peut donc se faire très rapidement avec un arbre octal.

Enfin, pour utiliser un arbre octal, il suffit de fournir un test d'intersection entre une primitive et un octant. Ceci nous permet de construire une méthode générale, qui peut s'adapter à des squelettes construits à l'aide d'autres primitives que la sphère pour capturer la géométrie de la forme.

Afin d'obtenir une voxellisation approchant convenablement l'union des primitives, nous utilisons trois critères : capture de détails dans la voxellisation, évitement de la présence de deux composantes logiques de la forme dans un même voxel, et évitement de la présence de deux composantes logiques dans des voxels voisins. Les deux derniers critères résolvent le problème des mélanges indésirables dont nous avons parlé dans la section 2.3.1.2. En effet, si nous autorisons des voxels avec ces configurations, en maillant la voxellisation dans la seconde étape (voir la section 3.1.2), les composantes logiques seraient jointes au niveau de ces voxels. Nous appelons ces configurations des inconsistances. Lorsqu'un des critères de subdivision n'est pas satisfait sur une feuille active, elle est subdivisée. Nous imposons aussi un invariant sur les feuilles, qui facilitent leurs traitements dans les autres étapes de la méthode. Les feuilles qui invalident cet invariant sont également subdivisées. Les critères sont tels qu'au bout d'un nombre fini de subdivisions, toutes les feuilles de l'arbre octal vérifient les critères : la subdivision s'arrête.

3.1.1.1/ CAPTURER LES DÉTAILS

Nous ne pouvons identifier les détails d'une forme uniquement à l'aide de l'union des primitives. Ce problème pourrait être résolu à l'aide d'une structure squelettale idéale. Cependant, pour obtenir une telle structure squelettale, il faut notamment supprimer le bruit squelettal, par une méthode qui ne peut être validée qu'avec des mesures de la capacité de reconstruction. Or ces mesures nécessitent un habillage précis, et donc l'identification des détails. Afin

1. Nous considérons qu'il y a intersection entre l'octant $\mathcal{O}$ et la primitive $\mathcal{P}$ si l'intersection $\mathcal{O} \cap \mathcal{P}$ est non vide.

de briser ce cercle de dépendances, nous proposons une première approche, qui pourra être fortement améliorée à l'aide de nos résultats sur la structure squelettale (les résultats de la section 5.3 permettent d'identifier les détails et les cavités).

Chaque cellule possède une profondeur. Elle est de 0 pour la racine et augmente de un à chaque subdivision (une fille d'une cellule de profondeur n a une profondeur $n + 1$). Si toutes les feuilles de l'arbre octal sont à une profondeur d , un voxel aura une dimension de $l_d = 2^{-n} \times l_0$, avec l_0 la longueur d'un côté de l'octant de la racine. Ainsi, tout détail d'un ordre de grandeur supérieur à l_d sera capturé par la voxellisation. Notre premier critère de subdivision s'assure que toute cellule de profondeur inférieure à d soit subdivisée.

Dans notre implantation, l'utilisateur peut définir d en donnant une longueur l qui correspond au niveau de détail qu'il souhaite obtenir. La profondeur d est alors la plus petite profondeur telle que $l_d \leq l$. Lorsqu'aucun niveau de détail est fourni, nous prenons $l = 0.25 \times r_{median}$, avec r_{median} la médiane des rayons des atomes du squelette. Cette définition a été choisie expérimentalement afin d'offrir un bon compromis entre la rapidité de la méthode et la capture des caractéristiques principales de la forme décrite par un squelette (voir la figure 3.2). L'idée est que r_{median} donne une vue générale du niveau de détail de la géométrie d'un squelette. Pour capturer efficacement plus de détails, par exemple pour un rendu de qualité de la forme ou pour une mesure de la capacité de reconstruction, nous recommandons d'augmenter la profondeur minimale. En particulier, pour obtenir des mesures plus précises des capacités de reconstruction, nous choisissons $l = 0.125 \times r_{median}$. Même avec cette nouvelle profondeur minimale, nous restons en moyenne plus rapide que les autres méthodes d'habillage (voir la figure 3.19).

Pour optimiser le calcul de l'arbre octal, nous commençons par subdiviser la racine. Les huit cellules filles de la racine sont ensuite traitées sur huit fils d'exécution différents (donc en parallèle), qui vont subdiviser récursivement les cellules jusqu'à la profondeur minimale fixée. La création de l'arbre octal se poursuit séquentiellement à l'aide des deux autres critères de subdivision. Les feuilles sont analysées une seule fois, en les parcourant par ordre croissant de profondeur. Ce détail est important, car pour valider l'invariant lorsqu'on analyse une feuille de profondeur n , il est nécessaire de subdiviser une feuille de profondeur $n - 2$ (voir la section 3.1.1.4). Lorsqu'une feuille de profondeur inférieure à la profondeur courante est ainsi créée, il faut parcourir en priorité, pour éviter d'avoir des inconsistances ou des configurations où l'invariant est faux.

3.1.1.2/ INCONSISTANCE DANS UNE FEUILLE

Déterminer le nombre de composantes logiques dans une cellule grâce aux primitives n'est pas aisé. Aussi, les différents niveaux de détail d'une forme viennent compliquer la tâche : par exemple, deux composantes logiques représentent certes deux doigts, mais ces deux doigts appartiennent à la même main, donc la même composante logique d'un autre niveau de détail. Pourtant il est nécessaire de s'assurer que chaque voxel (donc chaque cellule feuille de l'arbre octal) contient seulement une composante logique. Pour en comprendre la raison, supposons qu'un voxel contienne des éléments de surface de deux doigts d'une main. Lorsque ce voxel sera maillé, les faces correspondantes lieront définitivement ces deux doigts entre eux. Ainsi, même après les projections pour améliorer l'apparence de l'habit, ces deux doigts seront mélangés dans l'habit.

Nous proposons ici une méthode originale pour déterminer si deux primitives géométriques a et b , qui intersectent une feuille c , appartiennent à la même composante logique. Pour cela

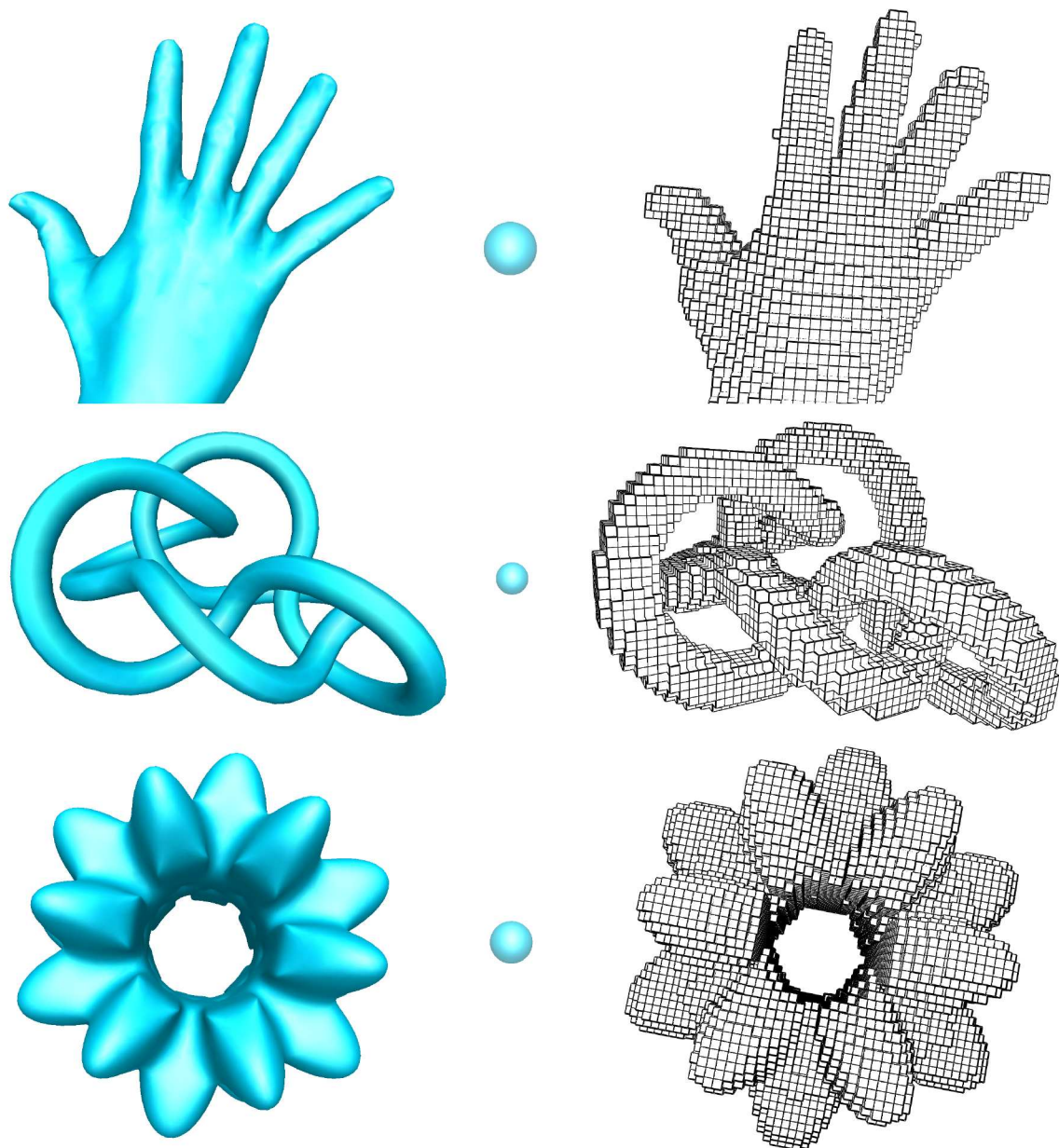


FIGURE 3.2 – Critère de capture des détails. Colonne de gauche : formes squelettisées, à approcher par nos habits. Colonne centrale : sphères de rayon r_{median} , donnant une estimation du niveau de détail. Colonne de droite : voxelisations obtenues en utilisant uniquement ce critère de subdivision.

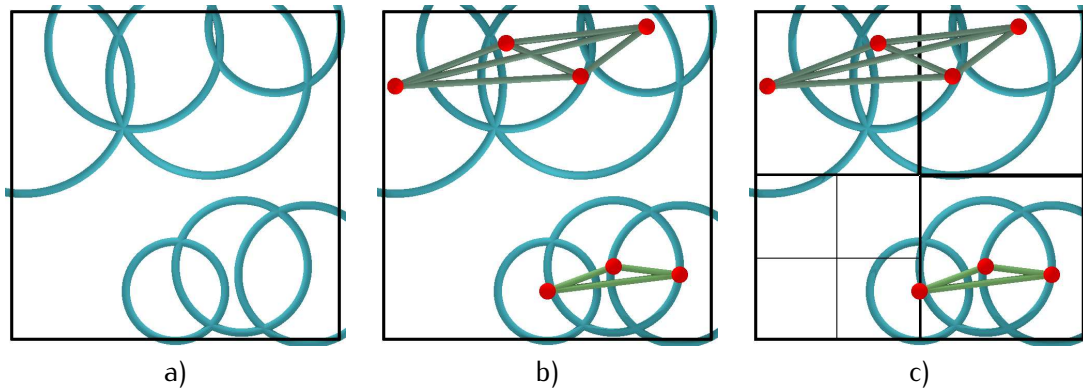


FIGURE 3.3 – Détection d'une inconsistance à l'intérieur d'une feuille. a) 7 sphères intersectent une feuille. b) Ces sphères créent une inconsistance : le graphe induit par la relation d'intersection a deux composantes connexes. c) Après deux étapes de subdivision, aucune feuille n'est inconsistante.

nous cherchons s'il existe une séquence $p_0 = a, p_1, \dots, p_n, p_{n+1} = b$ de primitives qui intersectent c avec $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_i$ intersecte p_{i+1} . Nous appelons une telle séquence un chemin d'intersection entre les primitives a et b . Si un tel chemin existe, alors a et b font partie de la même composante logique selon le niveau de détail défini par l'octant de la cellule c .

Pour s'assurer que toutes les primitives d'une feuille appartiennent à la même composante logique selon notre définition, nous construisons un graphe. Les noeuds de ce graphe sont les primitives en question et une arête relie deux noeuds si les primitives correspondantes s'intersectent. Si ce graphe a une seule composante connexe, alors il existe toujours un chemin d'intersection entre deux primitives, ce qui signifie que toutes les primitives font partie de la même composante logique selon le niveau de détail de la cellule. Ainsi, lorsque ce graphe a plus d'une composante connexe, la feuille est subdivisée (voir la figure 3.3).

3.1.1.3/ INCONSISTANCE ENTRE FEUILLES VOISINES

Reprenons l'exemple des deux doigts d'une main. Le premier doigt est dans un voxel bord² v_1 , et le second dans un voxel bord v_2 . Supposons que ces deux voxels soient voisins, c'est-à-dire que les cubes correspondants partagent au moins un sommet (c'est la 26-connexité de l'espace $\mathbb{Z}^3$). Lors du maillage de la voxellisation, certaines faces produites par l'octant de v_1 seront adjacentes à d'autres produites par v_2 . Nous aurons à nouveau un mélange des deux doigts dans l'habit, qu'il sera impossible à corriger à l'aide des projections. Cette situation correspond à une inconsistance entre deux feuilles voisines.

Lorsqu'une feuille c est testée pour détecter une inconsistance avec une de ses voisines, nous regardons si les deux cellules ont aucune primitive en commun (donc qui intersecte les deux cellules) et qu'aucune primitive de c intersecte une primitive de la voisine. Dans ce cas, les deux cellules seront subdivisées (voir la figure 3.4).

Les deux critères d'inconsistance sont une première contribution pour l'obtention d'un habit ayant le même type d'homotopie que le squelette ou pour éviter les mélanges entre deux

2. Un voxel bord est un voxel à la surface de la voxellisation : il n'est pas à l'intérieur de l'ensemble des voxels et peut donc être vu.

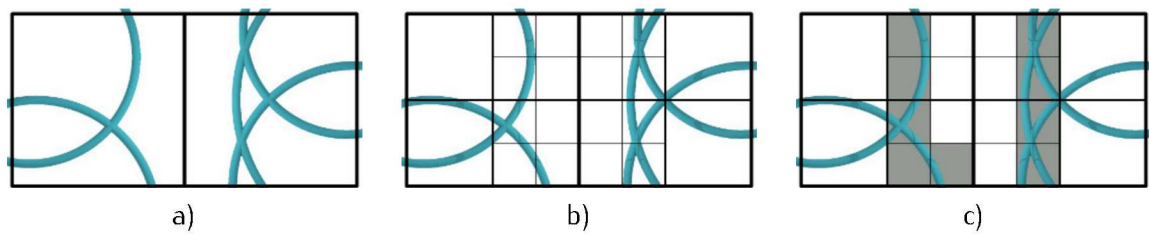


FIGURE 3.4 – Détection d'une inconsistance entre cellules voisines. a) Deux cellules ont des ensembles de primitives d'approximation disjoints, l'habit présenterait un mélange entre ces deux parties de la forme si rien est fait. b) Après deux étapes de subdivision, le critère de consistance avec les voisins est valide grâce aux feuilles inactives insérées entre ces deux ensembles. c) Lorsque les voxels bords (en gris) formés par les feuilles actives sont maillés, l'habit ne présentera pas de mélange.

composantes logiques. Cependant, rien ne garantit, pour le moment, que ça soit toujours le cas (voir la section 3.2.4). Nous verrons dans la section 5.3 un sous-ensemble du squelette qui capture toutes les composantes logiques de la forme. En fait, ce sous-ensemble décrit une version contractée de la forme sans perdre de parties caractéristiques. Les primitives géométriques de ce sous-ensemble du squelette permettraient d'obtenir plus efficacement et plus sûrement une voxellisation adéquate pour fournir un premier habit de topologie correcte. Notamment, ce sous-ensemble permet d'identifier les cycles dans la forme et donc de s'assurer de capturer des petits trous dans la forme (une des limitations de notre habillage que nous verrons dans la section 3.2.4).

3.1.1.4/ INVARIANT

À cause des critères de subdivision, les feuilles de l'arbre octal sont à des profondeurs différentes. Les feuilles actives forment la voxellisation que nous aurons à mailler dans la section 3.1.2. Les faces du maillage obtenu sont un sous ensemble des faces des octants des feuilles actives. Pour connecter ensemble ces faces, nous devons détecter si elles sont adjacentes. Cela est le cas pour deux faces associées à la même feuille ou pour des faces appartenant à deux feuilles actives adjacentes. Détecter si deux feuilles actives sont adjacentes est délicat à cause des multiples profondeurs pour les feuilles. Pour simplifier cette détection, nous imposons que deux feuilles actives adjacentes c et c' , ont des profondeurs n et n' telles que : $n = n'$ ou $n' = n \pm 1$. Ainsi, les feuilles actives adjacentes de c ne peuvent exister que sur trois profondeurs. Cette règle forme notre invariant.

Soit une cellule c , de profondeur n , nouvellement subdivisée par un des critères présentés précédemment. Ses filles actives, feuilles de profondeur $n + 1$, ont peut-être des feuilles actives adjacentes $\mathcal{A}$ de profondeur $n - 1$, ce qui invalide notre invariant. Afin de restaurer l'invariant, nous subdivisons toutes les feuilles de $\mathcal{A}$ (voir la figure 3.5).

Cet invariant est aussi utilisé dans la construction d'un arbre octal pour limiter la variation des tailles des faces du maillage de la voxellisation [Borouchaki 1998]. En effet, deux voxels adjacents ont la même taille ou l'un a une taille deux fois plus petite que l'autre. Ainsi, deux faces adjacentes dans le maillage de la voxellisation ont des tailles qui diffèrent au plus d'un facteur deux. Une faible variation locale dans les tailles des faces permet un meilleur comportement des algorithmes d'illumination pour donner une apparence homogène à la forme.

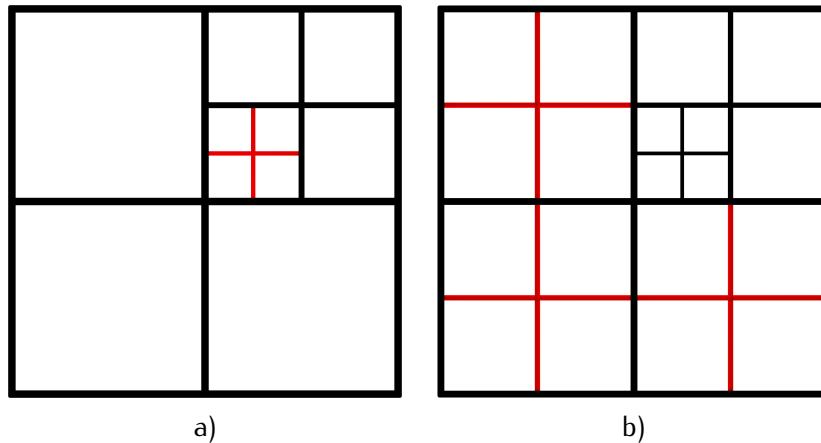


FIGURE 3.5 – Validation de l'invariant sur l'arbre octal. a) Supposons que l'on subdivise une cellule c de profondeur n . Les nouvelles feuilles, en rouge, invalident notre invariant, car sont adjacentes à des feuilles de niveau $n - 1$. b) Les trois feuilles adjacentes à c du niveau $n - 1$ sont subdivisées pour restaurer l'invariant.

3.1.2/ MAILLER LA VOXELLISATION

Les feuilles actives de l'arbre octal forment la voxellisation de l'union des primitives géométriques. En maillant la surface de cette voxellisation, nous obtenons un premier habit, grossier, qu'il sera possible d'affiner dans la troisième étape de notre méthode. Pour mailler cette surface, nous devons extraire les faces frontières de l'arbre octal (voir la figure 3.6). Une face frontière est un sous-ensemble d'une des six faces d'un octant d'une feuille active, sous-ensemble qui n'est partagé par aucune face d'un autre octant de feuille active. Nous identifions la face d'un octant par la direction de sa normale orientée vers l'extérieur, soit l'une de six directions suivantes : X^+ , X^- , Y^+ , Y^- , Z^+ , Z^- .

Comme illustré par la figure 3.6, une face f d'un octant de feuille c active de profondeur n ne doit pas toujours être entièrement considérée pour construire une face frontière (en rouge dans la figure). Ce cas est caractérisé par au moins une feuille active de profondeur $n + 1$, qui est adjacente à f . Dans ce cas, nous prenons les faces f' , incluses dans f , des feuilles inactives adjacentes à c , après avoir changé leurs orientations (si f' est une face Y^+ , nous la réorientons de manière à ce que sa normale soit dans la direction Y^-). Il n'est pas recommandé d'ajouter toutes les faces frontières de cette manière, même celles qui correspondent à la totalité d'une face d'octant de feuille active. En effet, rien ne garantit l'existence de faces f' de feuilles inactives. Aussi, en supposant qu'il existe quatre faces f' incluses dans f , nous ajouterions quatre faces à l'habit au lieu d'une. L'habit aurait alors un nombre de faces non lié au niveau de détail de la forme, ce qui alourdirait inutilement la manipulation et le stockage de l'habit (nous verrons que c'est un problème des habits obtenus par l'algorithme du *Skin Surface* dans la section 3.2.3).

Pour identifier les faces frontières, nous parcourons les feuilles de l'arbre octal dans l'ordre croissant des profondeurs. Supposons que la feuille courante, notée c , soit de profondeur n et que nous cherchions à extraire une face frontière à partir d'une face f de son octant. Une face frontière est ajoutée dans quatre cas (voir la figure 3.7) :

1. c est active et f est partagée par une feuille inactive de profondeur n ; f est la face frontière ajoutée à l'habit

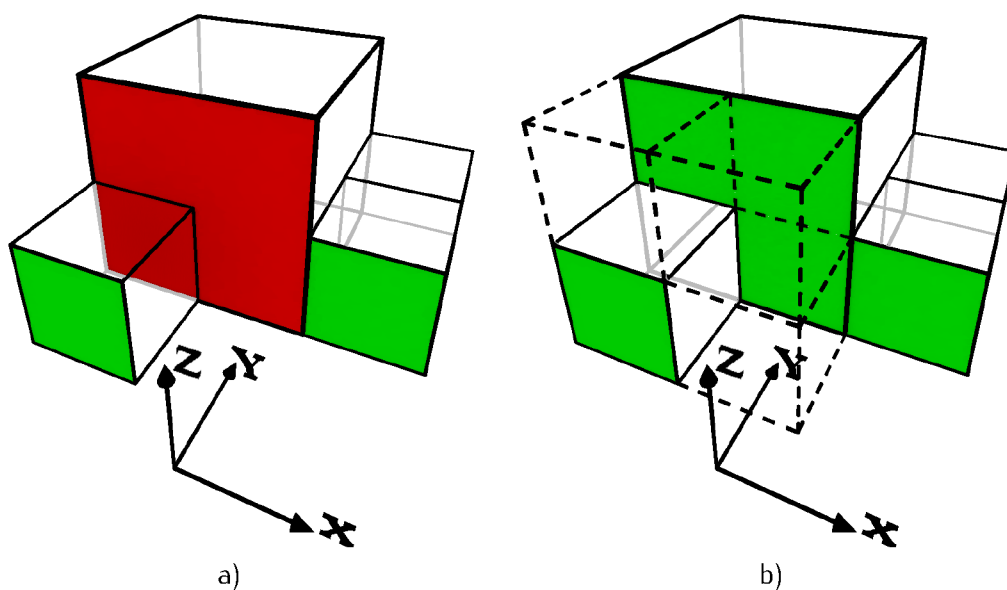


FIGURE 3.6 – Faces frontières d'un arbre octal orientées suivant Y^- . a) Si nous considérons toutes les faces ainsi orientées des octants des feuilles actives (lignes pleines), nous obtenons une face (en rouge) qui est partiellement cachée par une autre feuille active. b) Pour résoudre le problème, il faut considérer les faces orientées suivant Y^+ des octants des feuilles inactives (en pointillés) qui sont incluses dans cette face rouge.

2. c est active et f est incluse dans une face d'un octant de feuille inactive de profondeur $n - 1$; f est une face frontière
3. c est active et f n'est partagée ou incluse dans aucune autre face d'octant (cela arrive lorsque c est au bord de l'octant de la racine); f est ajoutée à l'habit
4. c est inactive et f est incluse dans une face d'un octant de feuille active de profondeur $n - 1$; f est ajoutée à l'habit après avoir changé son orientation.

Une fois que toutes les faces frontières des six directions sont ajoutées, nous obtenons un premier habit. Cet habit capture au mieux l'allure générale de la forme décrite par un squelette

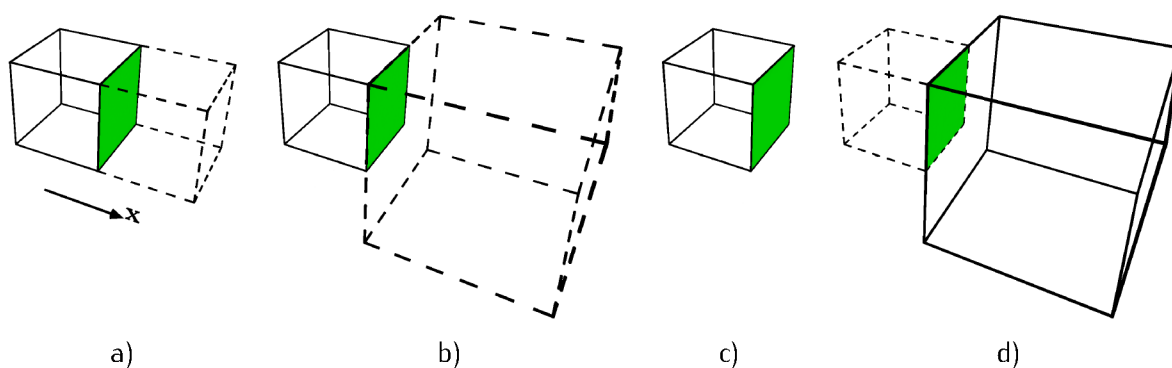


FIGURE 3.7 – Illustration des quatre configurations d'ajout d'une face X^+ d'une feuille pour former une face frontière de l'arbre octal. Dans le cas d), l'orientation de la face est changée avant d'être ajoutée au maillage.

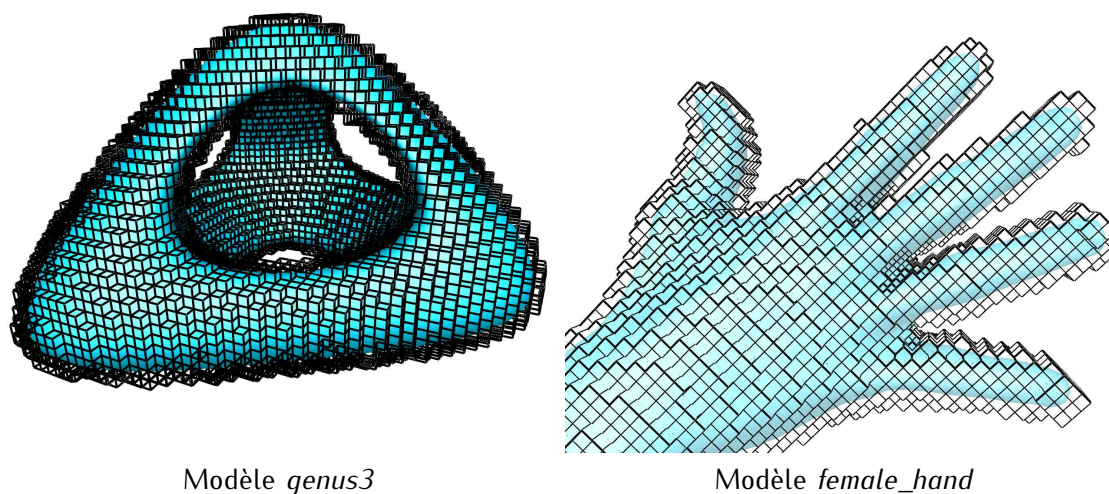


FIGURE 3.8 – Premiers habits obtenus en maillant les voxellisations. Ces habits (en noir avec faces transparentes) sont les résultats de notre première approximation de la forme décrite par en squelette (la forme squelettisée est représentée en bleu). Les différents critères dans la construction de l'arbre octal permettent d'éviter des mélanges indésirables et ainsi fournir une bonne approximation de la forme originale.

sans avoir recours à la structure squelettale (voir la figure 3.8). La troisième et dernière étape de notre méthode va affiner cet habit pour lui donner une apparence plus lisse et capturer les détails de surface.

3.1.3/ AFFINER L'HABIT PAR DES PROJECTIONS

L'habit est, pour le moment, le maillage de la voxellisation des primitives géométriques. Notre dernière étape affine ce résultat par des projections grâce aux primitives de migration. Nous commençons par expliquer pourquoi nous utilisons un autre ensemble que les primitives géométriques et comment nous les insérons dans l'arbre octal. Nous montrons ensuite comment nous réalisons les projections des sommets de l'habit, ce qui lui donne une apparence lisse et capture les détails de surface. Enfin, nous parlons d'une méthode d'ajout local de faces pour améliorer l'habit.

3.1.3.1/ INSERTION DES PRIMITIVES DE MIGRATION

Les primitives de migrations sont les primitives utilisées dans cette dernière étape de notre méthode. Elles servent pour les projections orthogonales des sommets de l'habit afin de raffiner l'apparence de l'habit. L'ensemble des primitives de migration peut être différent de celui des primitives géométriques. Cette différence sert à accélérer la construction de l'arbre octal, représentant la majeure partie du temps d'exécution de notre méthode. En effet, les tests d'intersection des primitives géométriques avec les octants et la vérification des critères de subdivisions sont effectués un grand nombre de fois, en un temps directement proportionnel au nombre de primitives géométriques des cellules concernées. Nous avons donc tout intérêt à limiter le nombre de primitives géométriques en prenant uniquement celles qui sont nécessaires à la construction d'une voxellisation adaptée. Nous conseillons de prendre les sphères des atomes les plus importants (avec l'importance calculée dans la

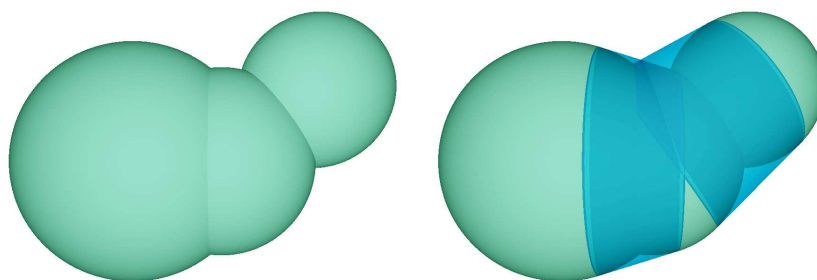


FIGURE 3.9 – Ajout d'un cône ou d'un cylindre pour recouvrir chaque renflement causé par deux sphères des primitives de migration qui s'intersectent.

section 5.2 ou directement les atomes du meso-squelette, détaillé dans la section 5.3), ou tout simplement les sphères du squelette nettoyé (par la méthode de suppression du bruit squelettal du chapitre 4). En considérant d'autres primitives uniquement pour les projections, nous maintenons un faible temps de calcul de la voxellisation tout en permettant l'utilisation de primitives complexes pour affiner l'habit.

Pour ces primitives de migration, nous avons ajouté des cônes et des cylindres, afin d'observer les effets sur les renflements caractéristiques d'une union finie de sphères. Pour chaque couple de sphères faisant partie des primitives de migration qui s'intersectent, nous ajoutons un cône ou un cylindre (si les sphères ont les mêmes rayons) pour recouvrir le renflement (voir la figure 3.9). Il est envisageable d'utiliser des primitives encore plus complexes pour une meilleure apparence de l'habit. Par exemple, nous pouvons construire des fonctions implicites dans chaque feuille de l'arbre octal, pour réduire les renflements tout en rendant l'habit vectoriel³. Cependant, comme nous l'avons dit dans la section 2.3.1.2, une telle utilisation des surfaces implicites nécessite une structure squelettale fiable pour définir des primitives implicites linéiques ou surfaciques pertinentes. Il nous faut donc résoudre le problème de la structuration avant de pouvoir améliorer l'apparence de l'habit.

Les primitives de migration doivent être disponibles pour les projections que nous effectuons dans cette troisième étape. Nous comptons en effet, comme indiqué au début de la section 3.1.1, projeter un point p sur l'union des primitives de migration en cherchant la feuille active c contenant p ou la plus proche de p (si p n'est dans aucune feuille active). Le point p sera projeté alors orthogonalement (voir la section 3.1.3.2) sur l'union des primitives de migration qui intersectent l'octant de c . Il est donc nécessaire d'ajouter les primitives de migration dans les feuilles de l'arbre octal, si elles n'ont pas été utilisées dans les primitives géométriques.

Nous réalisons l'insertion de ces primitives en parallèle de la construction de l'arbre octal et du maillage de la voxellisation. La parallélisation est possible car ces deux étapes ne requièrent pas les primitives de migration. Nous accordons un soin particulier à ne pas insérer ces primitives dans les feuilles de l'arbre octal avant que la construction de l'arbre ne soit terminée. En effet, si nous ajoutons des primitives dans des feuilles, ces feuilles peuvent être ensuite subdivisées. Le nombre de primitives à l'intérieur des cellules va donc augmenter, ce qui va fortement ralentir la construction de l'arbre octal. L'intérêt d'une parallélisation serait alors remis en cause, car nous aurions un gain de temps négatif.

Nous insérons donc les primitives additionnelles dans les cellules actives jusqu'à atteindre

3. Pour rappel, cela signifie qu'il est possible de travailler la surface de l'habit à une précision arbitraire, tout en restant lisse dans ce cas.

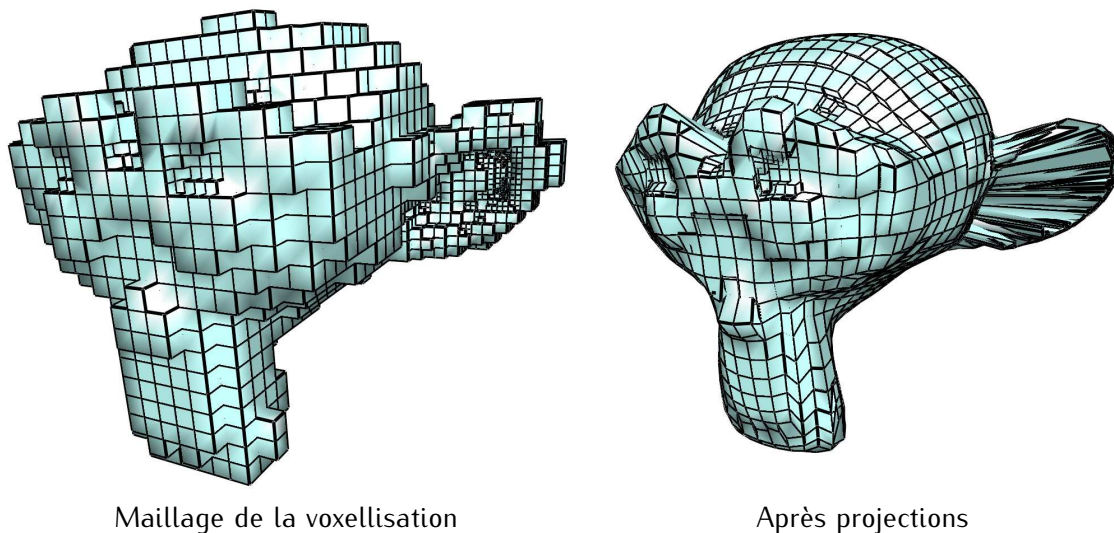


FIGURE 3.10 – Résultats de la projection des sommets de l'habit sans utiliser le dual du maillage de la voxellisation.

les cellules qui ont des feuilles actives pour filles. Une fois ces cellules atteintes, nous les conservons dans une liste, afin d'observer si l'une d'entre elles se retrouve avec toutes ses filles actives subdivisées. Si ce cas survient, nous retirons la cellule de la liste puis nous poursuivons le processus avec ses filles. Lorsque l'arbre octal est totalement construit, un signal est envoyé au processus d'insertion des primitives additionnelles. Le processus insère alors les primitives additionnelles dans toutes les cellules actives. Ainsi, grâce au traitement parallèle et à l'utilisation de la hiérarchie spatiale de l'arbre octal, nous obtenons à un coût quasi-nul, toutes les primitives de migration dans les feuilles actives. Ceci permet également d'effectuer les projections avec un temps de calcul très faible.

3.1.3.2/ MIGRATION DES SOMMETS DE L'HABIT

Avant de projeter les sommets de l'habit sur les primitives de migration, nous allons modifier quelque peu l'habit pour améliorer les résultats. Afin de bien comprendre l'importance de cette opération, nous montrons dans la figure 3.10 le résultat des projections sur l'habit actuel. Les faces de l'habit sont « écrasées » sur l'union des primitives de migration, avec des auto-intersections du maillage et une forte variation de la taille des faces. Aussi, lorsque l'on recherche la feuille active contenant le point p ou celle qui est la plus proche de p , nous pouvons obtenir des résultats imprévus si p est un sommet d'un octant de feuille active (voir au niveau de l'oreille sur la figure 3.10).

Pour éviter ces problèmes, nous utilisons le dual de ce maillage (voir la figure 3.11) :

- un sommet du dual est positionné au centre d'une face du primal,
- une arête e du dual est associée à deux faces f_1 et f_2 adjacentes du primal, les extrémités de e sont les centres des faces f_1 et f_2 ,
- une face f du dual est associée à un sommet v du primal, les sommets de f sont les centres des faces du primal incidentes à v .

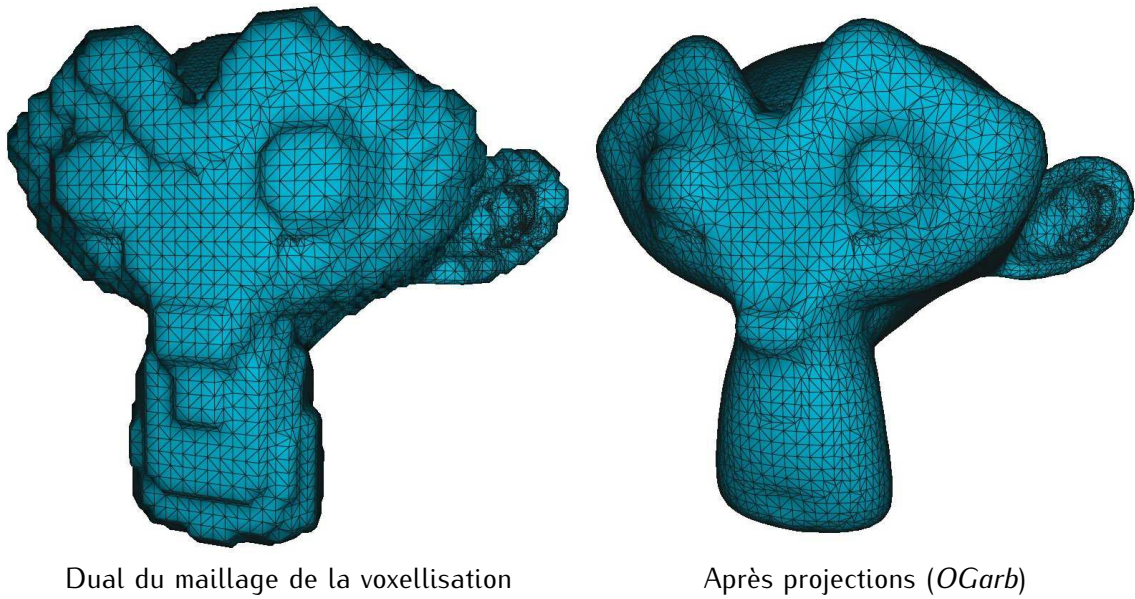


FIGURE 3.11 – Résultats de la projection des sommets de l'habit sur le dual du maillage de la voxellisation. L'image de droite illustre le résultat de notre méthode complète d'habillage, que nous appelons *OGarb*.

Lorsqu'une face du dual a plus de trois sommets, nous la divisons en triangles, afin d'obtenir un maillage triangulaire. Le maillage dual permet d'une part d'adoucir les angles vifs et de répartir plus uniformément les sommets de l'habit au dessus des primitives de migration. Ainsi, les auto-intersections disparaissent et nous retrouvons une faible variation locale de la taille des faces dans le résultat. D'autre part, nous facilitons la recherche de la cellule contenant un sommet ou la plus proche de ce sommet, supprimant les résultats imprévus que l'on rencontre en projetant les sommets du primal (le maillage de la voxellisation). En effet, les sommets du maillage dual sont au centre des faces du primal. Donc, chaque sommet de l'habit est sur une face de l'octant d'une seule feuille active.

Soit un sommet v du dual qui est placé en p . Le point p se situe à l'intérieur d'une seule feuille active c . Nous projetons p orthogonalement sur chaque primitive qui intersecte l'octant de c . Parmi toutes ces projections, nous prenons celle qui se trouve le plus proche du point p . En réalisant ceci pour chaque sommet du dual, nous obtenons le résultat présenté par l'image de droite dans la figure 3.11. Nous avons essayé d'autres types de projection et de sélection du meilleur candidat parmi les projections. Cependant, cette méthode du plus proche projeté orthogonal donne de meilleurs résultats sur tous les squelettes que nous avons testés.

3.1.3.3/ AMÉLIORATIONS

Les résultats obtenus par ce raffinage sont en règle générale très satisfaisants (voir la section 3.2.3). Cependant, nous avons noté une limitation au niveau des jointures entre deux composantes logiques qui sont faiblement espacées l'une de l'autre. Dans cette situation, des longues arêtes peuvent exister dans l'habit, entre ces deux composantes logiques, ce qui perturbe l'apparence de la forme visualisée par l'habit. Pour éviter cela, nous mesurons pour chaque arête e de l'habit, la distance ϵ entre le milieu p de e et l'union des primitives géométriques (voir la figure 3.12). Si cette distance est supérieure à un seuil de tolérance $\epsilon_{\max}$, nous

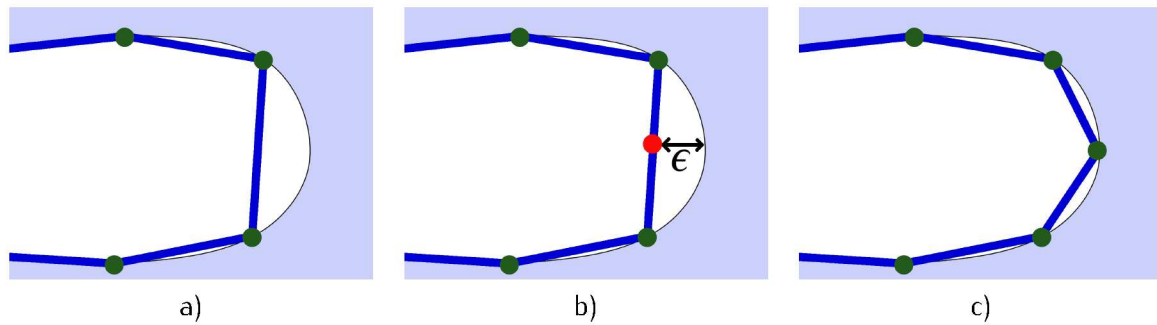


FIGURE 3.12 – Amélioration de l'habit par mesure de l'écart entre les milieux d'arêtes et les primitives de migration. a) Les arêtes du maillage (en bleu) approchent la surface de l'union des primitives de migration. b) Le milieu d'une arête (en rouge) est trop éloigné des primitives de migration. c) Nous divisons cette arête et nous projetons le nouveau sommet sur les primitives.

divisons l'arête en p et nous remplaçons les faces adjacentes à e par quatre faces ayant p pour sommet. Le sommet p est ensuite projeté vers l'union des primitives de migration. Il est à remarquer que la projection est déjà connue, car elle a été utilisée pour calculer la distance entre p et les primitives de migration. Ce traitement peut également être effectué sur plusieurs fils d'exécution, de sorte à réduire son impact sur le temps de calcul de l'habit.

Si après un premier traitement des arêtes, il reste des milieux d'arêtes qui ont une distance ϵ supérieure au seuil, nous continuons ce traitement sur les nouvelles arêtes. Pour un meilleur contrôle du temps d'exécution, nous utilisons un nombre maximal $I_{\max}$ d'itérations du traitement. En effet, l'utilisateur de notre méthode peut imposer un seuil $\epsilon_{\max}$ bien trop petit (car il n'a aucune idée de l'erreur commise par l'habillage). Le processus va alors itérer un grand nombre de fois, jusqu'à consommer toute la mémoire disponible sur la station de travail. Aucun habit ne pourra alors être produit, car l'application sera stoppée. En définissant $I_{\max}$, il est possible d'éviter cette situation (nous utilisons par exemple $I_{\max} = 5$).

3.2/ VALIDATION ET CAPACITÉ DE RECONSTRUCTION

Il n'est pas facile de valider une méthode d'habillage. Comparer visuellement les résultats aux unions de sphères n'est pas suffisamment objectif pour permettre de conclure sur la qualité de l'habillage. De plus, les unions de sphères présentent les renflements qui ne sont pas désirés : un bon habit supprime ces renflements, mais augmente alors sa distance à la surface de l'union de sphères. Avant de préciser notre protocole de validation, nous introduisons les autres méthodes avec lesquelles nous nous comparons. Nous analysons ensuite les résultats pour valider notre habillage, en terme de rapidité et de capture de la géométrie contenue dans un squelette. Nous faisons également un point sur les limitations actuelles de notre habillage.

3.2.1/ AUTRES MÉTHODES

Nous utilisons trois autres méthodes d'habillage pour comparer et valider nos résultats : celle du *Skin Surface*, un habillage implicite et une implantation du *Splatting* (voir la section 2.3.1 pour une introduction sur ces différents types de méthodes). Pour distinguer notre habillage

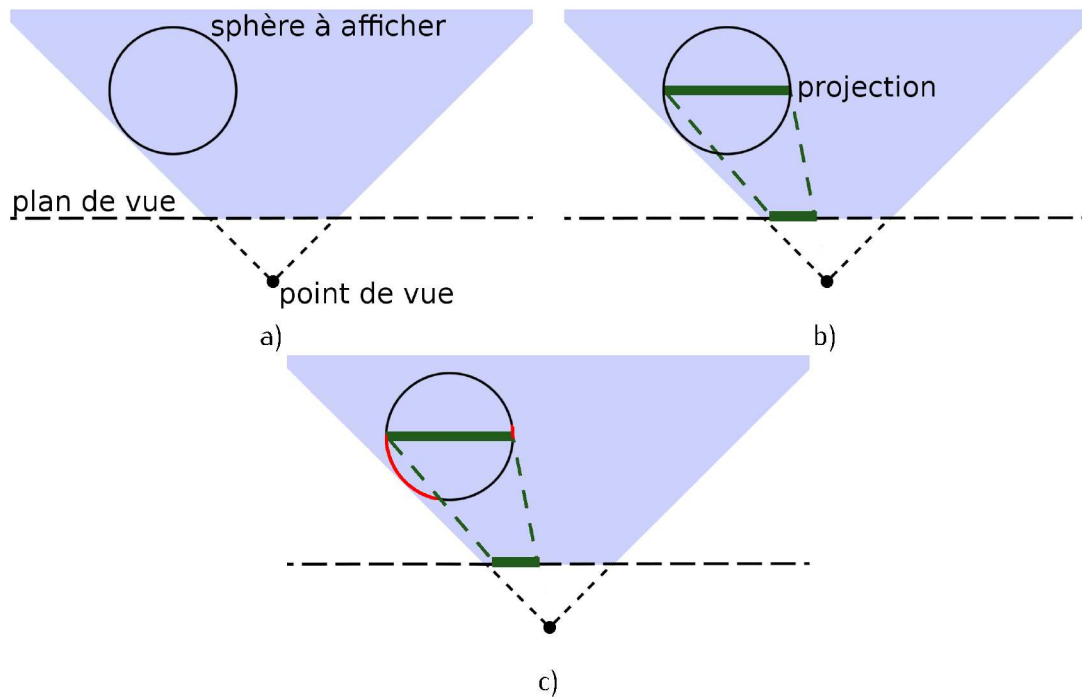


FIGURE 3.13 – Erreur d'approximation dans les techniques de Splatting. a) Une sphère est à projeter dans le plan de vue selon un point de vue défini. b) La projection se fait en positionnant une texture dans le plan de vue. c) Comme cette sphère n'est pas centrée dans le plan de vue, nous ne devrions pas voir la partie rouge à gauche de la sphère, mais nous devrions voir la partie à droite.

de ces méthodes, nous lui donnons le nom d'*OGarb*, pour *Octree Garbing* (habillage par arbre octal en français).

Pour le *Skin Surface*, nous utilisons l'implantation de la librairie CGAL. Nous prenons une valeur $\kappa = 1$ pour mailler l'union de sphères, ainsi que des valeurs plus faibles de κ car le résultat est alors sensé supprimer les renflements et améliorer la continuité de surface.

Notre implantation du *Splatting* diffère des implantations que l'on retrouve dans [Rusinkiewicz 2000, Jalba 2013]. Cette différence s'explique par une erreur d'approximation faite par ces implantations qui perturbe l'apparence de l'union des sphères lorsqu'il y a une faible densité de sphères ou que le point de vue est proche de la surface (voir la figure 3.13). Simplement, la technique utilise une texture carrée représentant la carte d'élévation d'une sphère, pour projeter chaque sphère dans le plan de vue. Cependant, cette projection ne donne pas un résultat parfait : une partie de la sphère projetée dans le plan ne devrait pas apparaître, alors qu'une autre zone de la sphère est manquante dans la projection. Avec cette erreur, les sphères donnent l'impression de se déplacer lorsque le point de vue change. Il est alors difficile d'en faire abstraction pour une évaluation visuelle de cet habillage et la comparaison avec d'autres habits.

Pour éviter ce problème d'approximation, notre implantation du *Splatting* repose sur la notion appelée imposteur en synthèse d'image. La technique, décrite dans [McKesson 2012], est une variante du lancer de rayons, dans le cas simple des sphères. Comme cette implantation est sur le GPU, l'obtention d'une visualisation de l'union des sphères est très rapide (le temps constaté sur nos modèles est au maximum de l'ordre de la demi-seconde). À part le fait que cet habillage ne produit pas de maillage, l'inconvénient de cette technique est qu'elle ne permet pas d'utiliser d'autres primitives que les sphères, pour améliorer l'apparence de la

forme décrite par le squelette.

Pour notre habillage implicite, nous utilisons une fonction potentiel F définie par $F(p) = \|p - c\| - r$, où c est le centre de la plus proche sphère de p et r le rayon de cette sphère. Pour optimiser les calculs, notre implantation repose sur l'utilisation d'une forme- α ⁴ [Edelsbrunner 1994, Bernardini 1997] à l'aide de la librairie CGAL. La production de l'habit se fait par le mailleur de CGAL, qui évite la perte de détail et améliore l'apparence visuelle par rapport à un algorithme simple du *Marching Cube*, à travers divers critères de qualité. Pour utiliser une fonction potentiel plus complexe afin de mieux contrôler l'habillage implicite (en particulier les fonctions anisotropes [Rigaudiere 1999, Rigaudiere 2000]), nous manquons de connaissances a priori sur l'apparence de la forme afin de paramétrer ces fonctions. De plus, la structure squelettale n'est pas exploitable pour mettre en place efficacement ces fonctions. Par conséquent, la fonction potentiel que nous avons choisie risque de présenter de forts renflements lorsque la densité d'atomes est faible.

3.2.2/ PROTOCOLE

Nous validons notre habillage par deux types de comparaisons avec les autres méthodes : *i*) des comparaisons quantitatives, qui prouvent la justesse de nos résultats grâce à des mesures, *ii*) des comparaisons qualitatives qui évaluent visuellement l'aspect des résultats par rapport à ce qui est attendu. Les comparaisons quantitatives sont celles qui ne sont habituellement pas prises en compte dans les travaux sur l'habillage. Pour ces comparaisons quantitatives, nous avons retenu trois mesures :

1. la capacité de reconstruction grâce à plusieurs distances entre l'habit et la forme originale,
2. le nombre de sommets dans l'habit
3. le temps d'exécution de la méthode.

Nous estimons la capacité de reconstruction d'un squelette en prenant l'opposé de la distance entre un habit de ce squelette et la forme originale. Cette mesure n'a du sens que pour la comparer avec celle obtenue sur le même squelette mais avec un habit différent. En effet, il ne faut pas oublier que la squelettisation ne produit pas un squelette exact : la géométrie contenue dans un squelette ne permet de reconstruire qu'une approximation de la forme originale. Ainsi à l'aide des seules capacités de reconstruction, il n'est pas possible d'identifier quels types de formes un habillage est capable de reconstruire correctement.

Pour effectuer les mesures de capacité de reconstruction, nous utilisons la distance *Root-Mean-Square* (RMS), plus adaptée que la distance de Hausdorff pour comparer des formes. En effet, la distance de Hausdorff mesure la distance maximum entre deux formes et donc ne somme pas les erreurs locales. Par conséquent, si une forme A est identique à une seconde B hormis en un point où elle est éloignée d'une distance d , la distance de Hausdorff sera plus grande que si A avait tous ses points à une distance $\frac{d}{2}$ de B . La distance RMS correspond à la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne entre l'habit et la forme originale. Cette distance est calculée grâce au logiciel *MESH* [Aspert 2002]. Nous utilisons également la distance dite psycho-visuelle (qui traduit les différences perçues par

4. Lorsqu'une forme- α est définie sur des points pondérés, elle permet d'approcher la surface d'une union de sphères par une approximation linéaire

l'œil) MSDM2 [Lavoué 2011], calculée grâce au logiciel *MEPP* [Lavoué 2012]. Cependant, les habits produits par l'algorithme du *Skin Surface* ne permettent pas d'obtenir une mesure symétrique⁵. Aussi, pour cette dernière distance, le logiciel semble rentrer dans une boucle infinie sur certains de nos habits : aucun résultat n'est fourni après plus d'une heure de calcul, alors qu'une réponse est obtenue en cinq minutes pour des maillages ayant plus de sommets. Pour ces raisons, nous ne pouvons utiliser la distance MSDM2 que ponctuellement, d'où la nécessité d'une comparaison qualitative visuelle.

Plus un habit contient de sommets, plus il est censé capturer la géométrie de la forme décrite par un squelette. Par conséquent, la capacité de reconstruction doit augmenter avec le nombre de sommets dans un habit. Comme l'habillage implicite, le *Skin Surface* et notre méthode produisent des habits avec des nombres de sommets différents, nous ne pouvons pas considérer la capacité de reconstruction seule. Il faut considérer les capacités de reconstruction relativement aux nombres de sommets. Par exemple, supposons qu'une méthode *A* produise un habit qui a une capacité de reconstruction un peu plus élevée que celle d'un habit construit par une méthode *B*. Si l'habit obtenu par *A* possède dix fois plus de sommets que celui obtenu par *B*, il ne faut pas conclure que *A* réalise un meilleur habit que *B*. Dans ce cas, l'habit produit par *A* doit contenir une grande quantité de sommets inutiles. Ceci signifie que la méthode *A* est incapable de s'adapter localement à la géométrie pour n'ajouter que les sommets nécessaires.

Les temps de calcul permettent d'évaluer l'efficacité d'une méthode d'habillage à produire un habit de qualité. Ils permettent aussi de s'affranchir du problème des jeux de paramètres dans l'exécution des différentes méthodes. En effet, avec des paramètres différents, il est possible que la capacité de reconstruction obtenue soit plus élevée sur un squelette particulier. Pour nous éviter une recherche de paramètres optimaux pour chaque squelette et chaque méthode, nous comparons la capacité de reconstruction relativement aux temps d'exécution. L'habillage implicite est cependant bien trop long. Sur certains squelettes, nous avons attendu plus d'une semaine, parfois plus d'un mois. Aussi, sur les squelettes où l'habillage est relativement « rapide », comme sur le modèle *horse1*, notre habillage donne un résultat en 186 fois moins de temps pour exactement la même capacité de reconstruction. Nous ignorons donc les temps de l'habillage implicite, car cette méthode n'a pas été construite pour être rapide.

Nous utilisons un ensemble de vingt-sept formes, squelettisées par deux algorithmes de squelettisation. Le premier est le *Power Shape* (voir la section 2.2.3.1), dont nous avons fait une implantation précise grâce à la librairie CGAL. Le second est le *Scale Axis* (voir la section 2.3.2.2), disponible dans le logiciel MESECINA [Miklos 2010a], avec les paramètres recommandés dans [Miklos 2010b]. Cependant, pour cette seconde squelettisation, nous ne présentons pas tous les résultats. En effet, la squelettisation produit des squelettes de mauvaise qualité sur certaines formes, avec de nombreuses sphères aberrantes et des détails qui disparaissent (nous en reparlerons dans la section 4.3.2). Les capacités de reconstruction des habits sur ces squelettes sont donc perturbées et il n'est pas aisé de valider notre habillage avec ces résultats. Aussi, l'algorithme du *Skin Surface* devient extrêmement long sur ces squelettes, sans parler de l'habillage implicite. Il est donc difficile et très coûteux de s'approprier tous les habits pour ces squelettes. Nous utiliserons donc les squelettes *Power Shape* pour notre validation générale et nous proposerons quelques résultats sur les

5. Tout comme la distance de Hausdorff, la distance MSDM2 est symétrique : il y a une distance de l'habit vers la forme originale, puis de la forme originale vers l'habit. Seule la distance de l'habit vers la forme peut-être calculée par *MEPP*. Après une discussion avec les auteurs, nous savons que cela est causé par l'incapacité de la librairie CGAL à calculer une structure temporaire, un arbre AABB, pour la topologie des maillages produits par l'algorithme du *Skin Surface*.

Modèles		Atomes	OGarb			Skin Surface			Implicite	
			RMS	Sommets	Temps	RMS	Sommets	Temps	RMS	Sommets
1	armadillo	25890	9.36	35336	4.51	4.34	705046	56.01	4.26	27127
2	baby	4902	8.61	25294	2.34	7.15	142241	7.87	7.44	14150
3	bimba	8836	23.90	35708	4.80	7.42	231555	17.39	7.46	40146
4	boy	8263	8.12	33274	4.98	11.40	228601	14.39	7.45	26394
5	bumpy torus	15804	7.45	21192	1.33	6.53	447056	26.11	6.05	42061
6	bunny	25918	15.12	9659	1.54	24.25	682810	52.23	11.62	23215
7	cup	4356	18.52	17926	0.54	13.75	150478	5.90	14.89	47769
8	dinopet	4355	17.75	29381	2.65	13.88	128125	7.23	13.88	128125
9	egea	8264	15.15	3560	0.50	4.84	219122	17.81	5.19	34271
10	eight	679	33.48	1808	0.05	25.21	21356	0.85	34.27	20934
11	ellipsoid	3459	2.05	2550	0.58	2.84	73133	3.64	2.59	32261
12	female hand	2432	136.50	5837	0.22	166.36	68554	3.93	137.01	15790
13	fish	13461	32.26	50250	2.27	32.89	355494	20.46	32.89	355489
14	genus3	6549	8.30	12013	0.59	5.63	182733	8.69	6.25	24817
15	hand1	25947	8.00	10820	2.28	1.88	680572	40.11	1.59	13090
16	hand3	4543	9.02	10241	0.61	7.62	128240	7.10	8.04	30227
17	hand4	8398	26.06	7387	0.57	39.57	229068	12.13	24.89	19774
18	homer	4971	11.80	11910	1.16	10.15	142740	8.25	4.97	19711
19	horse1	19864	11.64	5627	1.18	11.76	514842	35.64	6.16	11997
20	horse2	2309	35.50	7991	0.42	29.99	65193	4.14	30.77	17927
21	maxplanck	7382	103.71	3126	0.50	147.00	194610	15.39	107.31	32135
22	monkey	7591	18.98	10811	1.02	15.96	206843	13.67	15.96	206843
23	noeud2	928	34.30	11456	0.17	28.77	41574	1.62	33.29	22409
24	round-octa	14260	1.30	4512	4.54	0.32	367303	23.50	0.51	49702
25	sphere	3221	2.01	5136	12.33	2.06	74183	6.63	2.00	181250
26	torus	1015	17.18	2816	0.14	13.42	25445	1.80	17.25	19414
27	venus	694	230.78	1859	0.06	214.38	18528	1.21	231.45	20325

TABLE 3.1 – Mesures pour les comparaisons quantitatives des habillages des squelettes Power Shape. Les distances RMS sont données à une échelle de 10^{-4} de la diagonale de la boîte englobante de la forme originale. Voir la figure 3.14 pour une illustration graphique.

squelettes *Scale Axis* pour mettre en évidence les problèmes liés à ces squelettes.

3.2.3/ RÉSULTATS

Nous commençons par valider quantitativement notre habillage en montrant qu'il construit, à partir des données géométriques du squelette, un maillage proche de la forme originale, plus rapidement que les autres méthodes et avec bien moins de sommets. Pour cela nous renvoyons aux données de la table 3.1 obtenues sur les squelettes *Power Shape*, traduites graphiquement dans la figure 3.14. Les distances RMS entre les formes et les habits sont similaires pour les trois méthodes. Ceci signifie que nous capturons autant de géométrie que les autres méthodes, selon cette distance. Ces erreurs sont pourtant obtenues sur nos habits avec bien moins de sommets et beaucoup plus rapidement. Le dernier graphique de la figure 3.14 indique même que la complexité expérimentale de notre méthode est indépendante du nombre d'atomes dans le squelette. Ces mesures montrent également que l'algorithme du *Skin Surface* construit des habits avec un nombre de sommets sans lien avec leurs niveaux de détails (même capacité de reconstruction que nos habits mais avec beaucoup plus de sommets).

La validation de notre méthode est confirmée visuellement. Nous avons vérifié que nos habits approchent correctement l'union des sphères d'un squelette, grâce à notre méthode de

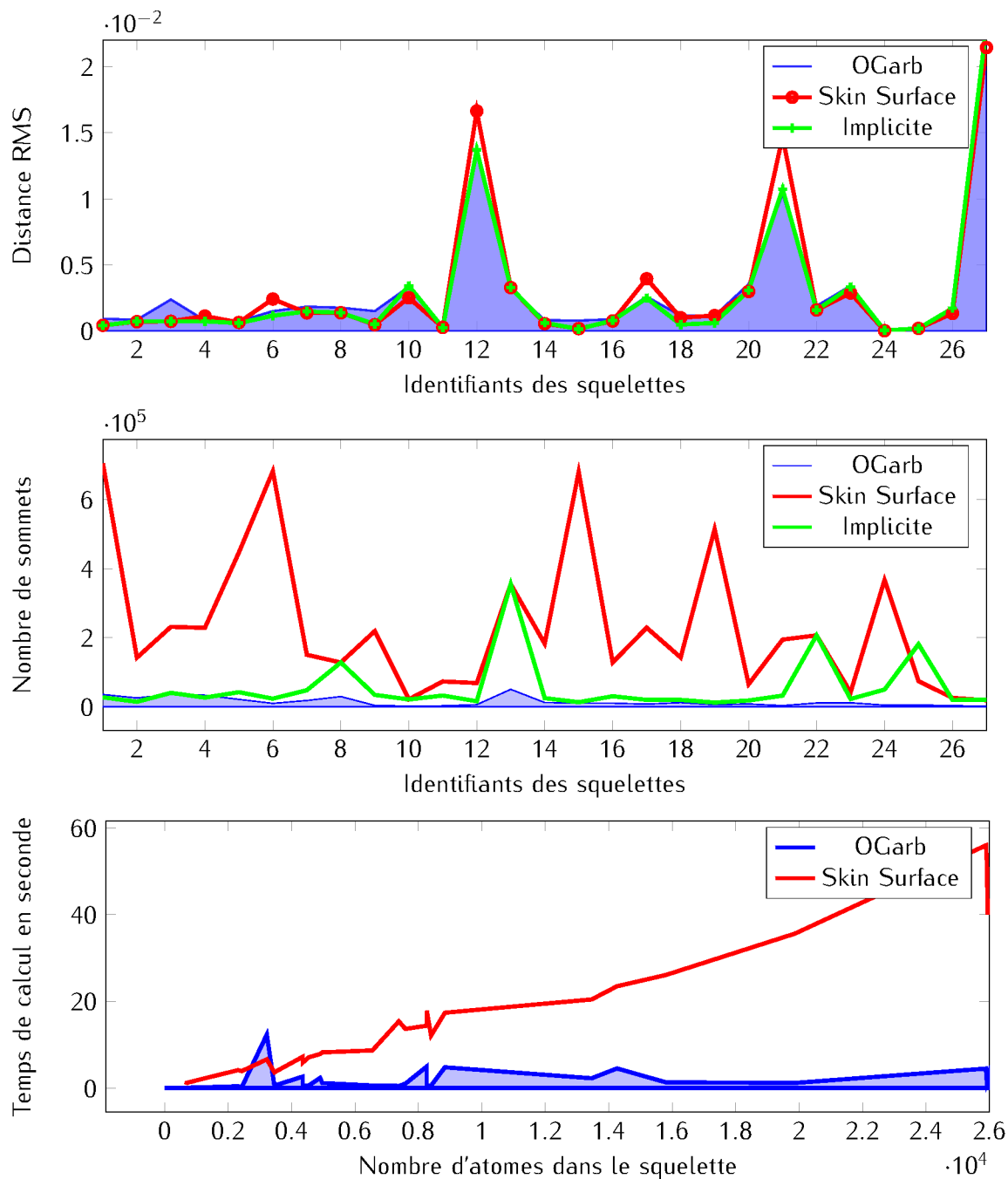


FIGURE 3.14 – Interprétations graphiques des données de la table 3.1. Les indices en abscisse des deux premiers graphiques correspondent aux identifiants des formes dans la table.

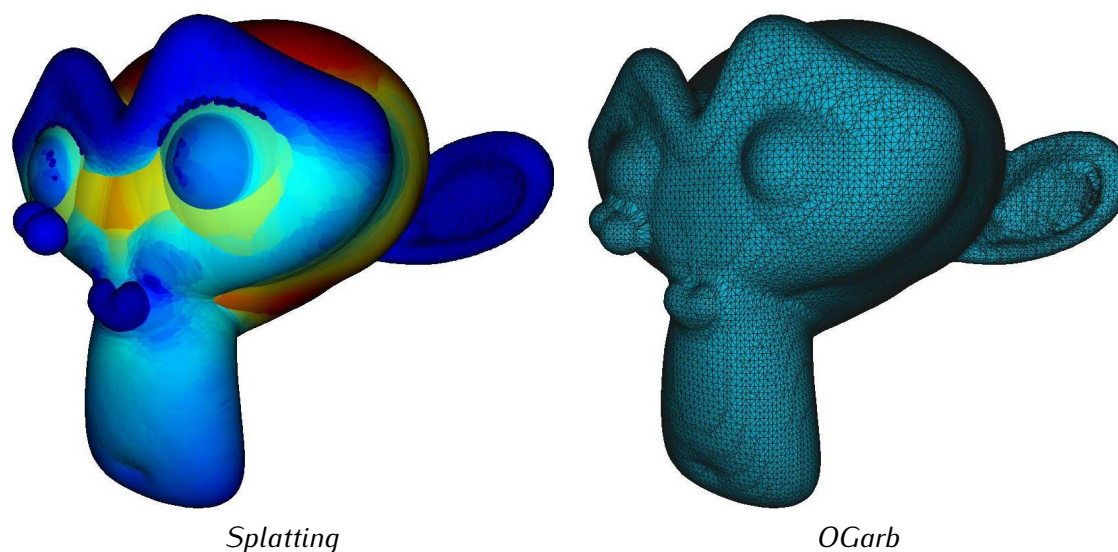


FIGURE 3.15 – Approximation de l'union des sphères d'un squelette par notre habillage sur un squelette *Scale Axis*. Le code couleur utilisé pour le splatting est celui qui indique les rayons des sphères. Ce modèle illustre le problème de qualité des squelettes *Scale Axis*, avec deux sphères aberrantes au niveau de l'œil droit.

Splatting (voir les figures 3.15 et 3.16). Une comparaison visuelle entre nos résultats et ceux de l'algorithme *Skin Surface* (voir la section 2.3.1.3) permet d'affirmer que nos habits ont une apparence visuelle bien plus agréable (voir l'exemple de la figure 3.17). Nous avons essayé de lisser les résultats du *Skin Surface* en diminuant le paramètre κ , mais les habits de cette méthode deviennent lissés pour des valeurs de κ qui causent la disparition des détails et un changement majeur de l'épaisseur de la forme. Enfin, les apparences de nos habits sont très proches de ceux obtenus par l'habillage implicite (voir la figure 3.18). La qualité de l'apparence de nos habits est également confirmée par les mesures de distance MSDM2. Par exemple pour le modèle *bumpy torus*, nous obtenons une distance de 0.36705 contre 0.30010 pour l'habillage implicite et 0.65524 pour la mesure non symétrique du *Skin Surface*. Cela signifie que la distance psycho-visuelle entre la forme originale et notre habit est similaire à celle d'un habillage implicite, alors que le *Skin Surface* est fortement différent de la forme originale.

Nous évaluons la qualité de la squelettisation *Scale Axis* par rapport à celle du *Power Shape*, en comparant les distances RMS entre les formes originales et habits obtenus par notre méthode d'habillage (voir la table 3.2). Le constat est sans appel, hormis pour un modèle où la distance RMS est deux fois plus petite pour le *Scale Axis* (avec 29.5 fois plus d'atomes), la capacité de reconstruction du *Power Shape* est largement meilleure. Ce résultat est d'autant plus important quand on voit le nombre disproportionné d'atomes dans les squelettes *Scale Axis*. Aussi, ces squelettes sont construits en un temps bien supérieurs à celui d'un algorithme *Power Shape*. Ce temps s'explique par les étapes supplémentaires sensées améliorer la qualité du squelette, mais aussi par l'exécution de deux algorithmes *Power Shape* sur un grand nombre d'échantillons. Ainsi, malgré la popularité de cet algorithme, le *Scale Axis* produit des squelettes qui sont de mauvaise qualité quant à une utilisation comme MRF.

Nous remarquons qu'en l'absence de nouveaux critères de subdivision pour capturer les détails, la valeur par défaut du paramètre l (longueur maximale du côté de l'octant d'une feuille active), n'est pas toujours suffisante pour capturer tous les détails. Nous avons donc refait les

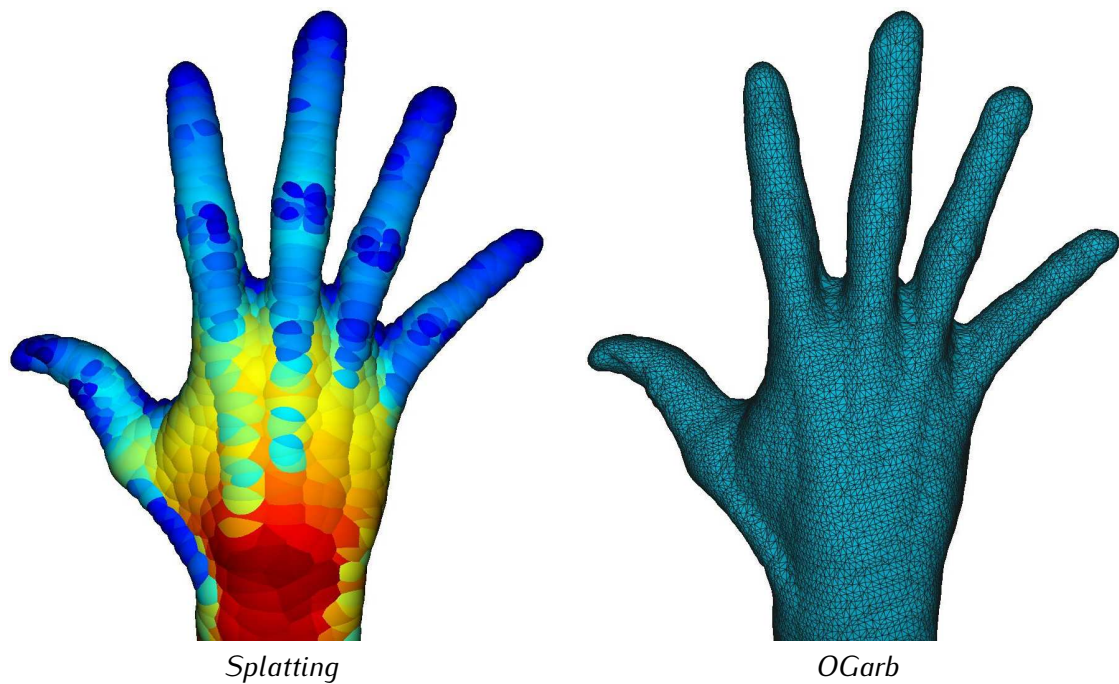


FIGURE 3.16 – Approximation de l'union des sphères d'un squelette par notre habillage sur un squelette Power Shape. Les critères de subdivision dans la construction de l'arbre octal permettent d'éviter des mélanges entre les doigts.

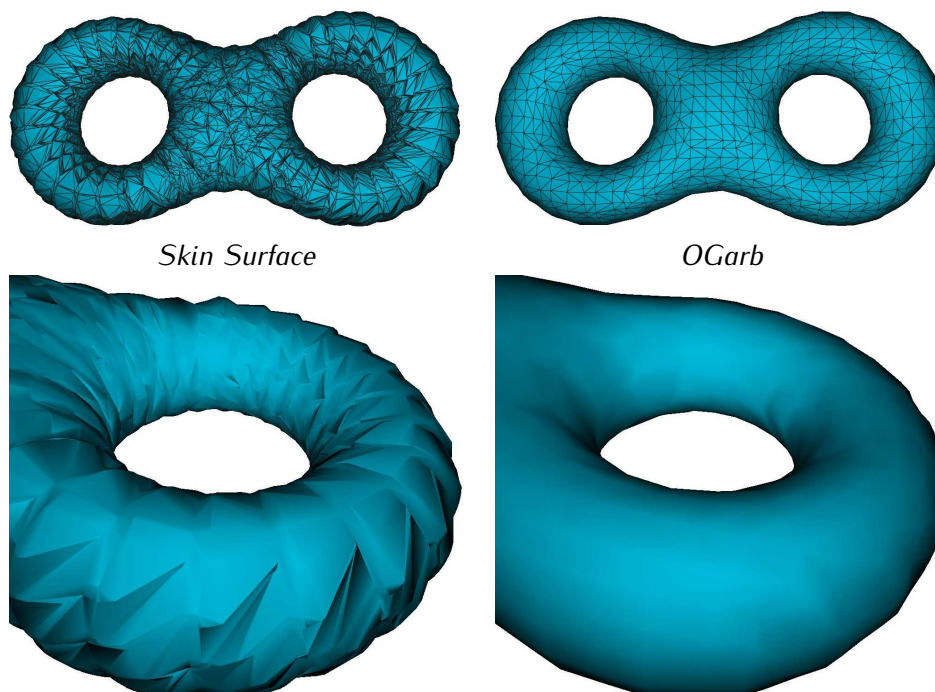


FIGURE 3.17 – Comparaison qualitative entre l'algorithme du Skin Surface et notre méthode. La taille des triangles de l'habit Skin Surface, ainsi que les nombreuses auto-intersections, lui donnent une apparence « chiffonnée ». Notre habit, avec 11 fois moins de sommets et produit 17 fois plus rapidement, présente une apparence plus agréable.

Modèles	<i>Power Shape</i>			<i>Scale Axis</i>		
	Atomes	Sommets	RMS	Atomes	Sommets	RMS
armadillo	25 890	35 336	9.36	68 257	34 786	43.95
baby	4 902	25 294	8.61	40 168	16 330	40.91
bimba	8 836	35 708	23.90	95 315	4 463	80.15
boy	8 263	33 274	8.12	63 687	35 975	39.24
bumpy_torus	15 804	21 192	7.45	185 508	6 790	56.14
bunny	25 918	9 659	15.12	75 194	9 548	83.62
cup	4 356	17 926	18.52	242 314	17 414	33.14
dinopet	4 355	29 381	17.75	63 742	25 347	42.94
egea	8 264	3 560	15.15	43 487	3 526	130.18
eight	679	1 808	33.48	58 022	1 808	55.89
ellipsoid	3 459	2 550	2.05	76 590	2 760	161.56
female_hand	2 432	5 837	136.50	56 081	15 182	544.04
fish	13 462	50 250	32.26	75 631	4 704	35.63
genus3	6 549	12 013	8.30	162 262	12 206	48.54
hand1	25 947	10 820	8.00	105 905	22 045	56.73
hand3	4 543	10 241	9.02	92 792	1 638 738	53.39
hand4	8 398	7 387	26.06	81 873	8 296	32.13
homer	4 971	11 910	11.80	51 785	15 752	64.48
horse1	19 864	5 627	11.64	68 616	6 759	53.33
horse2	2 309	7 991	35.50	70 891	22 494	52.01
maxplanck	7 382	3 126	103.71	38 987	17 243	524.68
monkey	7 591	10 811	18.98	64 823	4 015	115.09
noeud2	928	11 456	34.30	57 387	10 974	17.76
round-octa	14 260	4 512	1.30	?	?	?
sphere	3 221	5 136	2.01	?	?	?
torus	1 014	2 816	17.18	27 568	2 864	65.79
venus	694	1 859	230.78	49 365	3 203	534.90

TABLE 3.2 – Comparaison de la qualité de la géométrie capturée par les squelettes Power Shape et Skin Surface. L'absence de mesures pour les squelettes Skin Surface des modèles round-octa et sphere est due à une erreur de segmentation du logiciel MESECINA lors de la squelettisation.

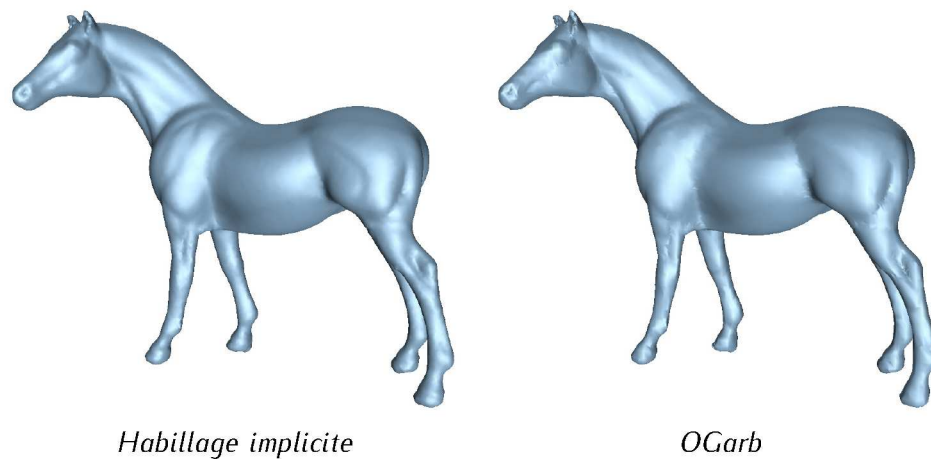


FIGURE 3.18 – Comparaison qualitative entre l'habillage implicite et notre méthode pour un squelette Power Shape. Malgré un plus faible nombre de sommets et un temps d'exécution bien plus faible, notre méthode produit des habits à la hauteur de ceux de l'habillage implicite. Les faibles différences entre les deux habits, au niveau de l'épaule, la gorge et la cuisse, s'expliquent par l'étape de remaillage dans l'habillage implicite qui marque mieux ces détails que notre habit (notre habillage n'a pas d'étape de remaillage).

mesures sur nos habits après avoir divisé par deux cette longueur (donc $l = 0.125 \times r_{median}$). Cela signifie que la profondeur minimale des feuilles actives est augmentée d'une unité. Les critères de subdivisions peuvent ensuite détecter des inconsistances, ce qui augmente à nouveau la profondeur des feuilles actives. Nous notons $OGarb^*$ cette méthode pour la différencier de celle avec le paramètre par défaut. Les résultats, illustrés par la figure 3.19, montrent que cette méthode est toujours plus rapide que les autres, avec une faible dépendance au nombre d'atomes dans le squelette, tout en produisant des maillages avec peu de sommets. L'élément contre-intuitif de ces résultats est la faible variation de la distance RMS, alors que visuellement les détails sont plus présents (voir la figure 3.20). Cette amélioration visuelle est également reflétée par la distance MSDM2 : pour le squelette *Power Shape* du modèle *bunny*, nous passons d'une erreur psycho-visuelle de 0.41429 avec la méthode *OGarb*, à une erreur de 0.31505 pour *OGarb^** (nous obtenons la même erreur que l'habit implicite). La distance RMS n'est donc pas suffisante pour juger de la qualité d'un habit ou la capture des détails par cet habit. Cependant, en l'absence d'une distance psycho-visuelle que nous pouvons calculer sur tous les habits, nous continuons d'utiliser la distance RMS, en la couplant à une étude visuelle.

Il nous reste à illustrer les capacités de notre algorithme à améliorer l'apparence de l'habit. Pour cela, nous ajoutons des cônes et des cylindres dans les primitives de migration, comme expliqué dans la section 3.1.3.1. Malgré une faible densité d'atomes, cette méthode permet de réduire efficacement les renflements (voir l'image 3.21).

3.2.4/ LIMITATIONS

Notre méthode présente certaines limitations. La première est relative aux difficultés de représenter des modèles avec des arêtes vives ou des portions planes par un squelette. En effet, ces zones nécessitent une forte densité d'atomes pour être capturée correctement. Notre méthode ne propose aucune solution pour combler ce manque des squelettes. Ainsi, pour des

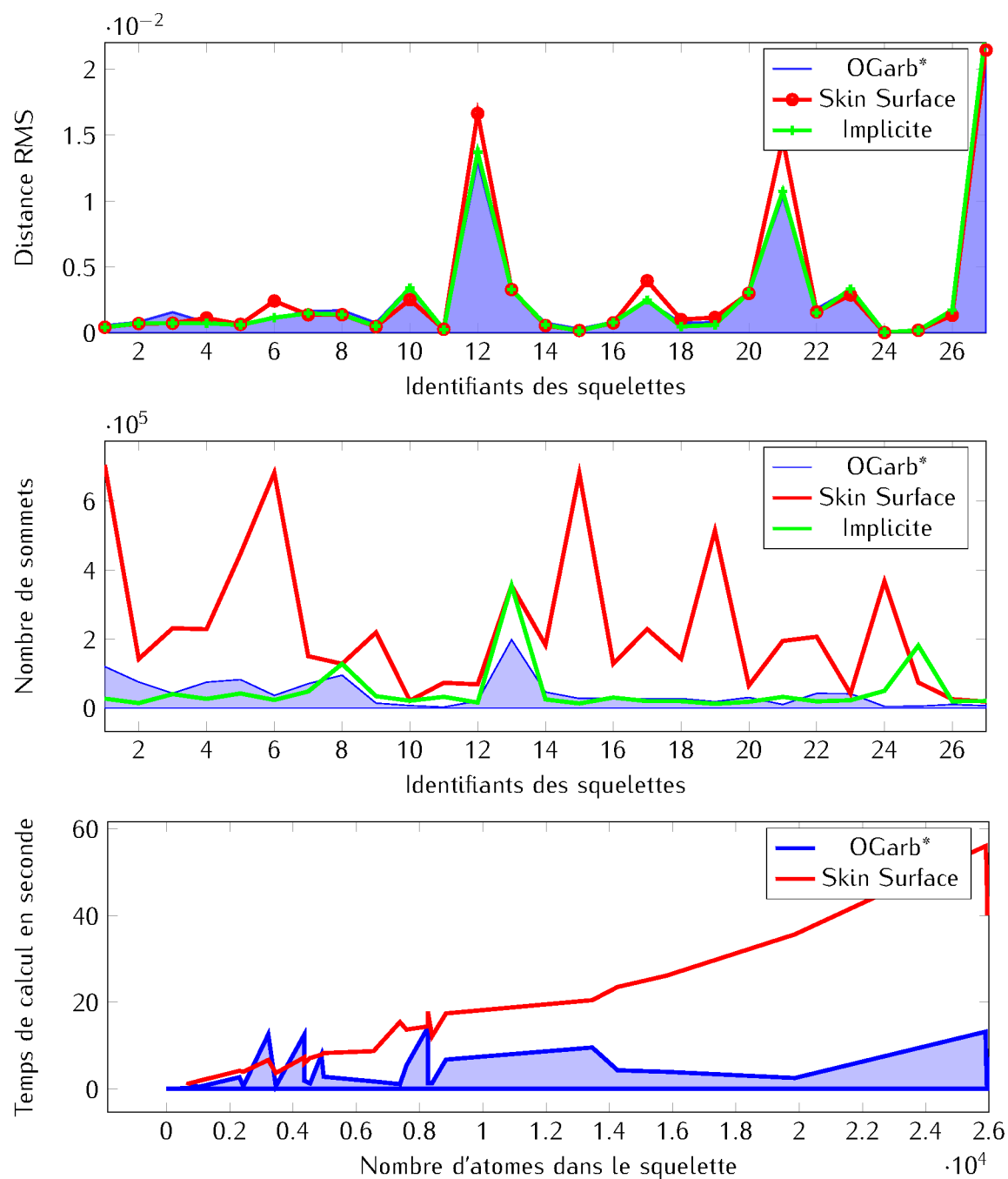


FIGURE 3.19 – Interprétations graphiques des comparaisons quantitatives avec la méthode OGarb*.

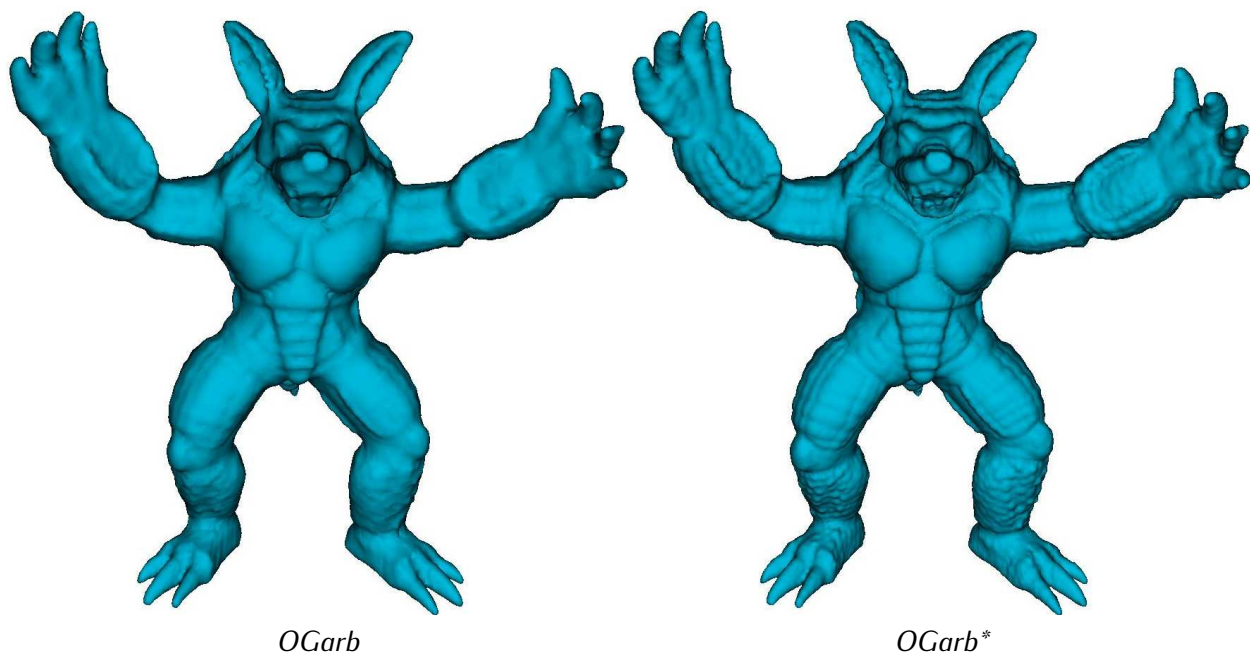


FIGURE 3.20 – Amélioration de la capture des détails en diminuant la longueur maximale du côté d'un octant d'une feuille active.

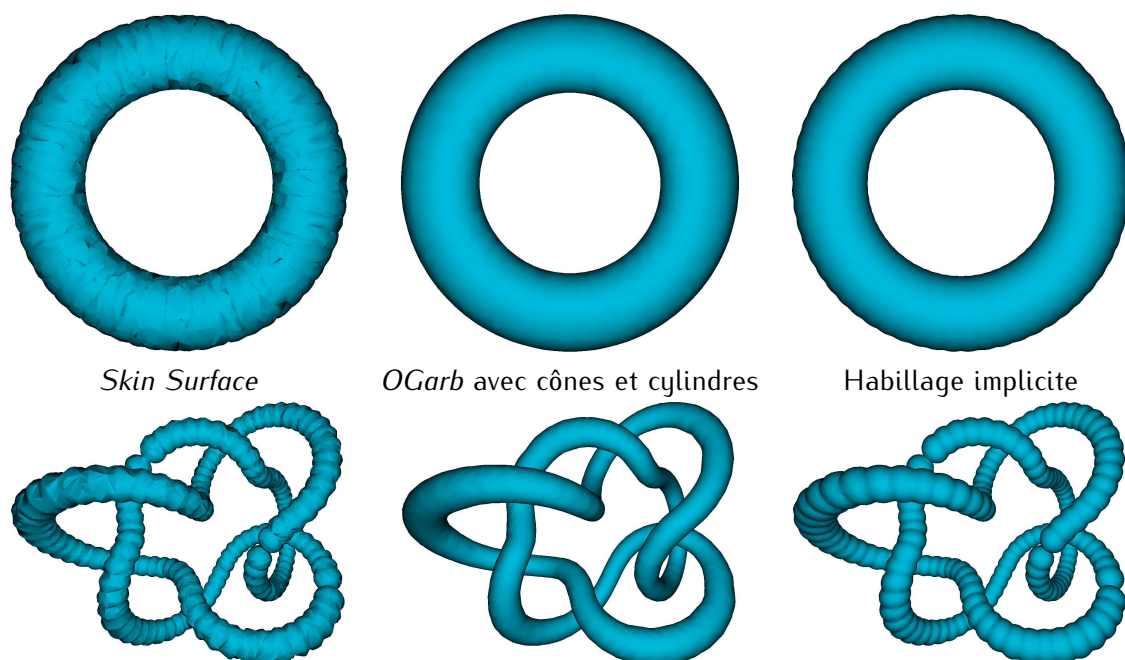


FIGURE 3.21 – Amélioration de l'apparence des habits par l'utilisation de cônes et de cylindres comme primitives de migration, par rapport aux méthodes existantes.

squelettes obtenus à partir de modèles présentant ces arêtes vives et ces portions planes, nos habits présenteront toujours une plus grande erreur d'approximation de la forme originale.

La seconde limitation est la détection automatique des détails. La solution actuelle utilise des paramètres qu'il faut définir manuellement, comme une distance maximale entre le milieu d'une arête et les primitives de migration (voir la section 3.1.3.3) ou la profondeur minimale des feuilles actives de l'arbre octal. L'autre inconvénient de ces paramètres est qu'ils peuvent augmenter fortement le nombre de sommets dans l'habit pour capturer ces détails. Cependant, les habits que nous construisons possèdent quand même moins de sommets que les autres méthodes. Aussi, certains mélanges peuvent ne pas être détectés par les critères d'inconsistance, à cause d'une trop faible profondeur des feuilles actives dans l'arbre octal. Ainsi, des petites cavités de la forme peuvent être comblées et des composantes logiques fines peuvent être mélangées. Pour résoudre cette limitation, il nous faudrait une structure squelettale robuste et claire. C'est une telle structure que les chapitres suivants construisent. Il serait donc possible, en utilisant nos résultats sur la structure squelettale de capturer automatiquement et localement les détails.

La dernière limitation concerne la faible continuité des raccords entre les cônes, les cylindres et les sphères. Les renflements disparaissent, mais en regardant de très près, nous pouvons reconnaître les intersections entre les différentes primitives. Pour un affichage en haute définition, cela donne des artefacts visuels au niveau de ces raccords. Nous pensons utiliser la liberté offerte dans la définition des primitives de migration pour résoudre cette limitation. En particulier, nous proposons de considérer des surfaces implicites, en faisant usage des sommets des octants de l'arbre octal comme grille d'évaluation de la fonction potentiel. En effet, comme l'arbre octal est construit pour éviter les mélanges indésirables, le principal inconvénient des fonctions implicites serait contourné tout en résolvant le problème de continuité de l'habit.

CONCLUSION

L'habillage était un pré-requis nécessaire à la réalisation de nos objectifs. Nous en avons besoin pour visualiser la forme décrite par un squelette, ainsi que pour évaluer sa capacité de reconstruction. Certaines méthodes existantes nécessitent des données supplémentaires, impossibles à obtenir à partir du squelette seul. D'autres méthodes prennent bien trop de temps pour construire un résultat, ce qui les rend inadaptées pour une visualisation d'une forme dans une application ou pour obtenir une estimation de la capacité de reconstruction. Notre habillage par arbre octal construit rapidement un habit de qualité et est applicable sur tout squelette (la structure squelettale n'est pas requise). La généralité de la méthode rend possible l'utilisation de primitives variées pour définir l'habit. Nous avons montré expérimentalement comment se servir de cette particularité afin de supprimer les renflements de l'union de sphères, à l'aide de cônes et de cylindres. Cette méthode est une avancée vers l'utilisation efficace des squelettes en synthèse d'image. Elle permet aussi de tester la qualité de la géométrie capturée par un squelette, afin d'améliorer un processus de squelettisation ou de comparer différentes approches. Nous avons notamment établi que la squelettisation *Scale Axis* produit des squelettes avec des capacités de reconstruction plus faibles que ceux obtenus par un algorithme *Power Shape*. Ce résultat indique qu'il est préférable d'utiliser les squelettes *Power Shape* pour des applications directes et intuitives.

BRUIT SQUELETTAL

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présentons notre méthode de régularisation du squelette. Les amas et le hérissément sont identifiés grâce à une caractérisation des configurations de bruit squelettal. Pour les amas, nous détectons les zones où la sphère d'un atome n'ajoute qu'une infime quantité de volume à la sphère d'un autre atome. Pour identifier le hérissément, nous prenons en compte la position relative d'un atome par rapports aux positions de ses atomes liés. Ces critères ne reposent pas sur la notion d'importance globale ou locale des atomes. Nous évitons ainsi le problème récurrent des autres méthodes qui suppriment des détails à la place du bruit, car elles donnent une plus grande importance aux atomes du bruit qu'aux atomes décrivant les détails de la forme. Nous utilisons un modèle de squelette hiérarchique, pour isoler les différents types de bruit des autres atomes. Ce modèle sera également utilisé dans le chapitre suivant pour capturer les niveaux de détails de la forme. Nous commençons par présenter ce modèle hiérarchique, puis nous détaillons notre méthode de régularisation. Nous finissons ce chapitre par une validation de notre méthode, grâce à des mesures de capacité de reconstruction. Les résultats de cette validation permettent d'étudier un second aspect de la qualité d'un squelette : son taux de bruit.

4.1/ SQUELETTE HIÉRARCHIQUE

Pour pallier l'absence d'organisation utile des atomes d'un squelette, nous avons eu l'idée de construire un modèle de squelette hiérarchique. C'est un squelette avec deux types de liens entre les atomes. D'une part nous avons les [liens topologiques](#) qui forment les composantes squelettiques, associées aux composantes logiques de la forme. D'autre part, nous avons les [liens hiérarchiques](#), qui définissent des niveaux de détail du squelette. Chaque niveau de détail du squelette reflète un niveau de détail de la forme. Ces niveaux de détails sont matérialisés par des nombres entiers, appelés [rangs](#), affectés aux atomes. Le principe général de ces niveaux, que nous verrons dans le chapitre 5, est d'obtenir progressivement un squelette courbe lorsque l'on augmente la valeur du rang minimal considéré. Grâce à ce modèle, nous pouvons bénéficier de tous les avantages des squelettes courbes (il est plus facile de les clarifier, structurer, segmenter et manipuler qu'un squelette surface), sans les inconvénients (capacité de reconstruction trop faible). Nous définissons notre modèle en donnant les différentes règles qu'il respecte, au niveau des atomes et des deux types de liens.

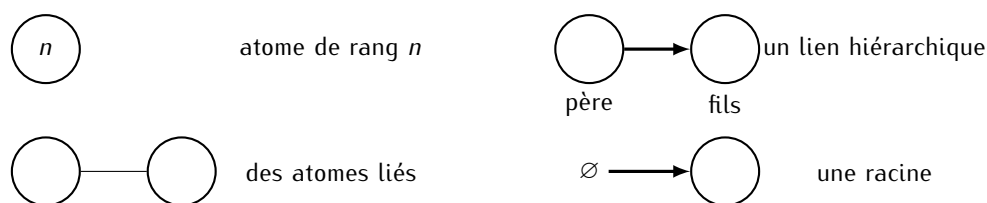


FIGURE 4.1 – Schématisation des éléments de notre modèle de squelette hiérarchique. Les atomes sont les nœuds d'un graphe qui porte deux types de liens : des liens topologiques entre voisins et des liens hiérarchiques entre un père et ses fils. Nous annotons les nœuds avec le rang de l'atome.

Le rang d'un atome reflète son importance dans le squelette et l'importance de la géométrie de la forme qu'il capture. Ainsi, plus le rang d'un atome est élevé, plus il est utile à l'interaction avec la forme par le squelette. En particulier, les rangs 0 et 1 correspondent aux deux types de bruit squelettal que nous identifions dans ce chapitre. Nous parlons également de bruit de type 0 (les amas) et de type 1 (le hérississement). Le squelette formé par les atomes ayant un rang au moins égal à 2 est exempt de tout bruit squelettal. Les atomes de rang plus élevés seront identifiés par la méthode présentée dans la section 5.3. Utiliser des nombres entiers donne des niveaux de détails discrets pour le squelette et la forme décrite. Cette discrétisation nous permet de définir une organisation entre les différents types de liens, pour travailler à différentes échelles, que ce soit sur le squelette ou la forme, sans calculs supplémentaires. Lorsqu'un lien topologique¹ relie deux atomes $a \sim b$, les atomes a et b sont appelés **atomes liés**. Un lien hiérarchique $b \rightarrow a$ définit un père b et un fils a . Si un atome n'a pas de père, il est dit **atome racine** du squelette. Les atomes racines du squelette hiérarchique forment ce que nous appelons le **squelette racine**. Sinon, ils font partie des **sous-atomes**. La figure 4.1 illustre ce vocabulaire en introduisant notre schématisation des éléments du modèle.

Le squelette hiérarchique est construit rang par rang. Nous commençons par donner un rang de 0 à tous les atomes. Nous identifions les atomes les moins importants et nous en faisons des sous-atomes par des liens hiérarchiques. Les autres atomes accèdent au rang 1. Nous poursuivons le processus sur le squelette racine, soit les atomes de rang 1 dans ce cas. Nous continuons jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'identifier d'atomes moins importants parmi les racines du squelette. Chaque étape du processus produit ce que nous appelons une n -hiérarchie (voir l'illustration d'une 2-hiérarchie dans la figure 4.2). Une n -hiérarchie est une organisation du squelette hiérarchique qui respecte certaines règles, afin de faciliter la construction de la hiérarchie complète ainsi que sa manipulation. Voici les trois règles d'une n -hiérarchie :

1. un atome racine est de rang n ,
2. un sous-atome a un rang inférieur à celui de son père.
3. un lien ne peut exister qu'entre deux atomes de même rang,

Les règles *i)* et *ii)* sont plutôt intuitives, compte-tenu du lien entre l'importance d'un atome et son rang. La dernière règle simplifie la manipulation des liens. En effet, chaque étape du processus de hiérarchisation va soit isoler le bruit de type n des autres atomes (qui

1. Comme l'autre type de lien est appelé lien hiérarchique, nous pouvons utiliser seulement le mot lien pour parler des liens topologiques

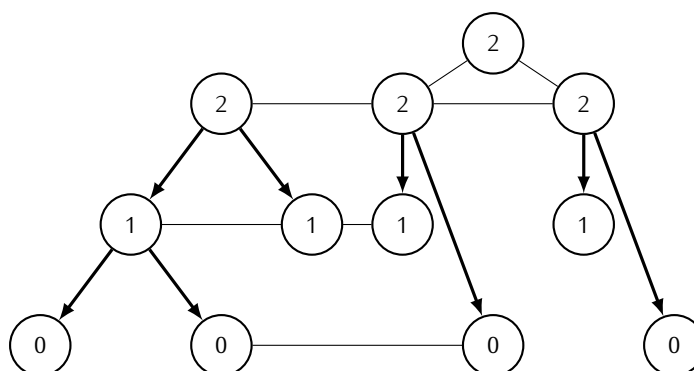


FIGURE 4.2 – Schéma d'une 2-hiérarchie.

deviendront des racines de rang $n + 1$), soit amincir le squelette racine (ceci sera expliqué plus en détail dans le chapitre 5). Dans le premier cas, un atome du bruit de type n ne peut plus perturber la structure squelettale au niveau d'un atome plus important (de rang $m > n$). Dans l'autre cas, la disparition des liens avec les atomes qui demeurent au rang n permet de réduire la structure squelettale, ce qui réalise l'amincissement du squelette.

Lors du passage d'une n -hiérarchie à partir d'une $(n + 1)$ -hiérarchie, il n'est pas toujours possible de respecter les règles *i*) et *iii*) de la définition d'une n -hiérarchie. Supposons qu'une racine a de rang n soit identifiée comme moins importante que les autres racines. Cet atome a va être placé comme le fils d'une autre racine b . La règle *ii*) impose que b ait un rang supérieur à a . Dans notre cas, le nouveau rang de b doit être $n + 1$. Nous avons alors simultanément des racines de rang n et d'autres de rang $n + 1$, ce qui invalide la règle *i*). Afin de ne pas briser le squelette en plusieurs morceaux, les liens autour de b sont réorganisés. Nous appelons absorption, notée $a \triangleright b$, l'ensemble de ces opérations menées sur a et b . Après une absorption, l'atome b peut être lié à des racines de rang n , ce qui contredit la règle *iii*) car b est de rang $n + 1$. C'est pourquoi nous relâchons les contraintes d'une $(n + 1)$ -hiérarchie lors du passage d'une n -hiérarchie à une $(n + 1)$ -hiérarchie. Le squelette hiérarchique devient un squelette n -consistant (voir la figure 4.3). Un tel squelette vérifie les trois règles suivantes :

1. un atome racine est de rang n ou $n + 1$,
2. un sous-atome a un rang inférieur à celui de son père
3. un lien ne peut relier que deux racines ou deux atomes de même rang.

Remarquons qu'une n -hiérarchie et une $n + 1$ -hiérarchie sont toutes deux n -consistantes.

Pour passer d'un squelette n -consistant à une $(n + 1)$ -hiérarchie, nous réalisons la promotion des racines de rang n . Cette opération consiste en l'incrémement du rang d'un atome et la suppression des liens avec des sous-atomes. La figure 4.3 est le résultat de la promotion d'un atome de rang 2 (le plus à gauche sur le schéma) de la 2-hiérarchie de la figure 4.2.

La structuration du rang n , c'est-à-dire le passage d'une n -hiérarchie à une $(n + 1)$ -hiérarchie repose sur la définition de l'importance utilisée pour le rang n . Une structuration doit fournir un moyen d'identifier les atomes de rang définitif n et aussi donner le détail d'une absorption. La section suivante définit la structuration des rangs 0 et 1, afin d'isoler les amas et le hérissément des autres atomes d'un squelette.

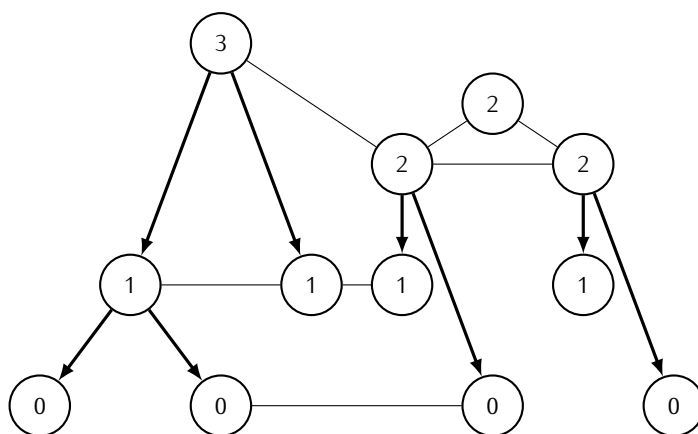


FIGURE 4.3 – Schéma d'un squelette 3-consistant.

4.2/ STRUCTURATION DU BRUIT SQUELETTAL

Dans notre étude des squelettes, nous avons remarqué deux types de bruit squelettal. Le premier correspond à des atomes organisés en amas dont les positions et les rayons sont similaires. Par conséquent, tout atome d'un amas sauf un peut être ignoré sans perdre d'information sur la forme décrite par le squelette. Ces atomes sont isolés grâce à la structuration du rang 0. Le second est composé d'atomes dont les positions sont excentrées par rapport aux atomes auxquels ils sont liés. Ces atomes excentrés donnent une apparence hérissée au squelette (ce qui perturbe son traitement) et ajoutent des données géométriques aberrantes. Pour simplifier le squelette et améliorer sa capacité de reconstruction, nous isolons les atomes du hérississement en réalisant la structuration du rang 1. Nous expliquons dans cette section comment réaliser ces deux structururations.

4.2.1/ AMAS

Prenons les squelettes de formes simples, comme ceux du tore et de la sphère. Pour ces formes, nous connaissons les squelettes exacts. Les atomes théoriques décrivant un tore sont organisés en un cercle et ont tous les mêmes rayons. Pour une sphère, le squelette théorique est réduit à un atome. Observons maintenant les squelettes pratiques obtenus par squelettisation de ces formes, à l'aide de l'algorithme du *Power Shape*. La figure 4.4 illustre le cas du tore. Les atomes sont visiblement organisés en cercle, et leurs rayons sont tous très proches. Cependant, le nombre d'atomes est surprenant : il y a 1014 atomes alors qu'il n'est possible de distinguer que 60 centres d'atomes. En analysant les données d'un tel squelette, nous remarquons que les centres des atomes sont dans 60 très petites zones spatiales. Le constat est le même pour le squelette de la sphère : nous avons 3 221 atomes dans une zone spatiale très réduite. Ces deux cas simples illustrent la présence d'amas dans les squelettes : ce sont des groupes d'atomes quasiment identiques (l'erreur sur les positions et les rayons est de l'ordre de la précision machine). Pourquoi semble-t-il avoir une duplication des atomes dans ces squelettes ?

Les squelettisations qui produisent les squelettes que nous étudions dans cette thèse sont toutes équivalentes. Leurs différences se trouvent dans la méthode de calcul des sphères maximales tangentes à un ensemble de points. Sans perdre de généralité, nous considérons que ces squelettes sont produits grâce aux diagrammes de Voronoï et leurs duals, les

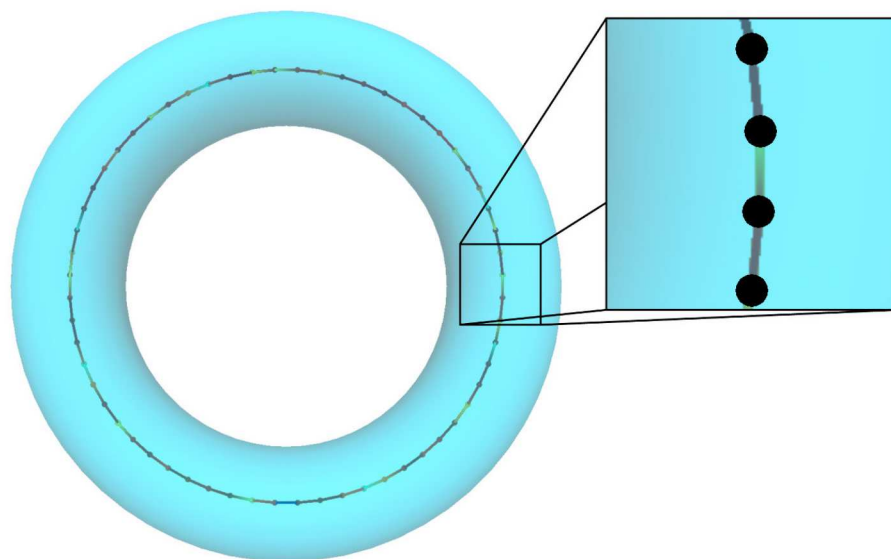


FIGURE 4.4 – Présence d'amas sur le squelette d'un tore. Ce squelette contient 60 amas, de sorte que 94% des atomes sont inutiles. Le plan de vue rapproché contient 68 atomes alors que seuls 4 sont perçus.

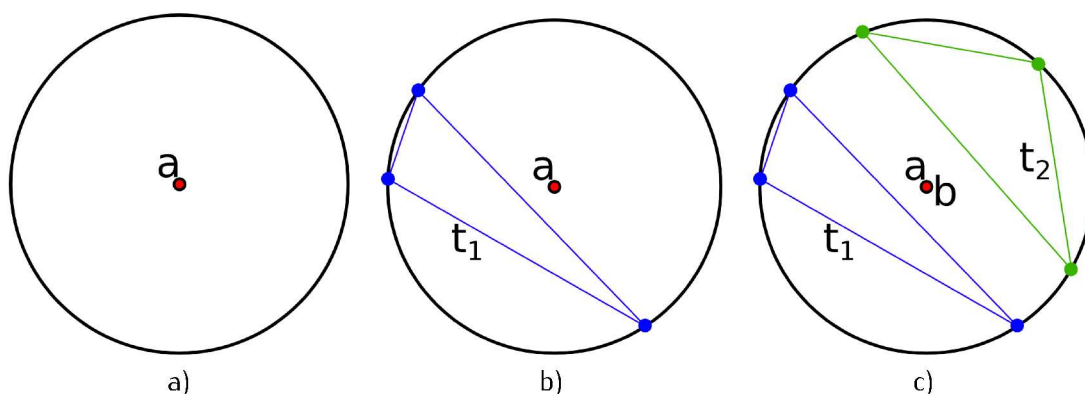


FIGURE 4.5 – Configuration menant à l'apparition d'amas dans les squelettes. a) Un atome a , avec sa sphère et son centre. b) Cet atome est créé par la sphère circonscrite au tétraèdre de Delaunay t_1 . c) Un tétraèdre t_2 a également ses sommets sur cette sphère circonscrite. Ce tétraèdre ajoute un autre atome b , identique à a .

tétraédrisations de Delaunay (voir la section 2.2.3.1). Un atome a est associé à un tétraèdre de Delaunay t_1 (voir la figure 4.5). Cet atome est défini par la sphère circonscrite aux sommets de t_1 . Supposons maintenant qu'il existe un tétraèdre t_2 dont les sommets sont sur cette sphère circonscrite. Ce tétraèdre insère dans le squelette un atome identique à a , d'où la duplication des atomes et l'apparition d'amas. Cette configuration est rencontrée lorsque la forme à squelettiser est localement sphérique. Les échantillons de la surface de la forme dans cette zone vont donner plusieurs tétraèdres de Delaunay dont les sommets sont co-sphériques.

Comme les atomes au sein d'un amas sont la duplication d'un seul atome théorique, chaque atome ajoute la même information que les autres atomes de cet amas. Des travaux tentent de réduire les amas à un atome lors de la squelettisation. Par exemple, l'algorithme utilisé dans [Tam 2003] fusionne deux sommets de Voronoï (centres des sphères circonscrites aux

tétraèdres de Delaunay) qui sont proches et dont les tétraèdres de Delaunay partagent une face. Cependant, il n'y a pas de garantie que la recherche de ces faces permette de réduire complètement les amas. Il n'y a pas de mesure de la variation de la capacité de reconstruction, pour prouver que seuls les amas sont retirés. Enfin, ce genre de méthode est dépendant de la squelettisation utilisée. Nous proposons une méthode de réduction des amas qui repose sur l'analyse du volume ajouté par une sphère à une autre. Nous montrons dans la section 4.3.2 que la capacité de reconstruction est inchangée par cette méthode.

Soient deux atomes a et b appartenant au même amas. Les centres et les rayons de ces atomes sont quasi-identiques. À cause de cette forte proximité des centres, les deux sphères de ces atomes s'intersectent. Le volume $\mathcal{V}_{a \setminus b}$ ajouté par la sphère de a à l'union des sphères de a et b est donc très faible. En particulier, ce volume est faible par rapport au volume $\mathcal{V}_b$ de la sphère de b . Un test $\text{ESTDANSAMAS}(a, b, \kappa)$, présenté dans l'algorithme 1, détecte si l'atome a appartient au même amas que l'atome b . Le paramètre κ définit le minimum de volume relatif qu'un atome doit apporter à son union avec un autre atome. Utiliser une telle mesure relative de volume permet d'avoir un critère insensible à une variation d'échelle, tout en s'adaptant à la localité (le volume d'une sphère est une fonction du diamètre, ce diamètre donne une estimation de l'épaisseur locale de la forme au niveau de l'atome). Avec une valeur $\kappa = 0.005$, nous observons une forte réduction du nombre d'atomes, sans perte de détails ni modifications perceptibles de la structure squelettale (voir la section 4.3.2).

Algorithme 1 Test d'appartenance d'un atome a à un amas contenant b .

```

1: fonction ESTDANSAMAS( $a, b, \kappa$ )
2:    $S_a \leftarrow$  Sphère de l'atome  $a$ 
3:    $S_b \leftarrow$  Sphère de l'atome  $b$ 
4:   renvoyer  $S_a$  intersecte  $S_b$  et  $(\mathcal{V}_{S_a \setminus S_b} < \kappa \cdot \mathcal{V}_{S_b}$  ou  $\mathcal{V}_{S_b \setminus S_a} < \kappa \cdot \mathcal{V}_{S_a})$ 
5: fin fonction
```

La structuration des amas, c'est-à-dire des atomes de rang 0, est très simple. Nous commençons par identifier tous les amas. Pour cela nous appliquons l'algorithme 2. Pour chaque amas, nous choisissons un atome b (par exemple le premier de la liste d'atomes dans cet amas) et nous réalisons les absorptions $a \triangleright_0 b$ pour tout autre atome a de cet amas. Cette absorption supprime tous les liens entre a et d'autres atomes, après les avoir transmis à b ². Après la promotion des racines de rang 0, nous obtenons une 1-hiérarchie dont les racines ne contiennent aucun amas.

Algorithme 2 Construction de la liste des amas d'un squelette $\mathcal{S}$.

```

1: fonction CONSTRUIRELISTEAMAS( $\mathcal{S}, \kappa$ )
2:    $\mathcal{L} \leftarrow \emptyset$  ▷ chaque élément de  $\mathcal{L}$  est une liste d'atomes dans un amas
3:   pour tout  $a \in \mathcal{S}$  faire
4:      $\text{dansUnAmas} \leftarrow \text{faux}$ 
5:     pour tout  $l \in \mathcal{L}$  faire
6:       si  $\text{dansUnAmas}$  est faux et  $\exists b \in l$  tel que  $\text{ESTDANSAMAS}(a, b, \kappa)$  est vrai alors
7:          $\text{dansUnAmas} \leftarrow \text{vrai}$ 
8:          $l \leftarrow l \cup \{a\}$ 
9:       fin si
10:    fin pour
11:    si  $\text{dansUnAmas}$  est faux alors
12:       $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{\{a\}\}$ 
13:    fin si
14:  fin pour
15:  pour tout  $l \in \mathcal{L}$  faire
16:    si  $l$  ne contient qu'un seul élément alors
17:       $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \setminus l$ 
18:    fin si
19:  fin pour
20:  renvoyer  $\mathcal{L}$ 
21: fin fonction

```

Il est à remarquer que nous n'analysons pas les liens entre atomes pour structurer les amas. La raison est double. Premièrement, les liens ne sont pas des éléments caractéristiques d'une configuration d'un amas, ce qui est prouvé par les résultats corrects obtenus par la structuration actuelle. Deuxièmement, les algorithmes de squelettisation qui construisent une structure squelettale à partir d'une triangulation régulière [Amenta 2001a, Miklos 2010b], produisent des atomes isolés au sein des amas. Ce sont des atomes qui sont ignorés de la triangulation régulière car il n'est pas possible de construire des tétraèdres réguliers ayant leurs centres pour sommets. Ces atomes sont donc sans liens, car les liens entre atomes sont définis par les arêtes de la tétraédrisation régulière (voir les sections 2.2.3.1 et 2.20). En ignorant les liens entre atomes et en transmettant tous les liens de l'atome fils à l'atome père dans une absorption, nous faisons disparaître les atomes isolés d'un squelette.

4.2.2/ HÉRISSEMENT

Le hérissément est le type de bruit le plus connu et le plus reconnaissable des squelettes. Il est constitué d'un ensemble d'atomes dont les positions sont excentrées par rapport à celles de

2. Cela signifie que pour tout atome c lié à a , b sera également lié à c après l'absorption.

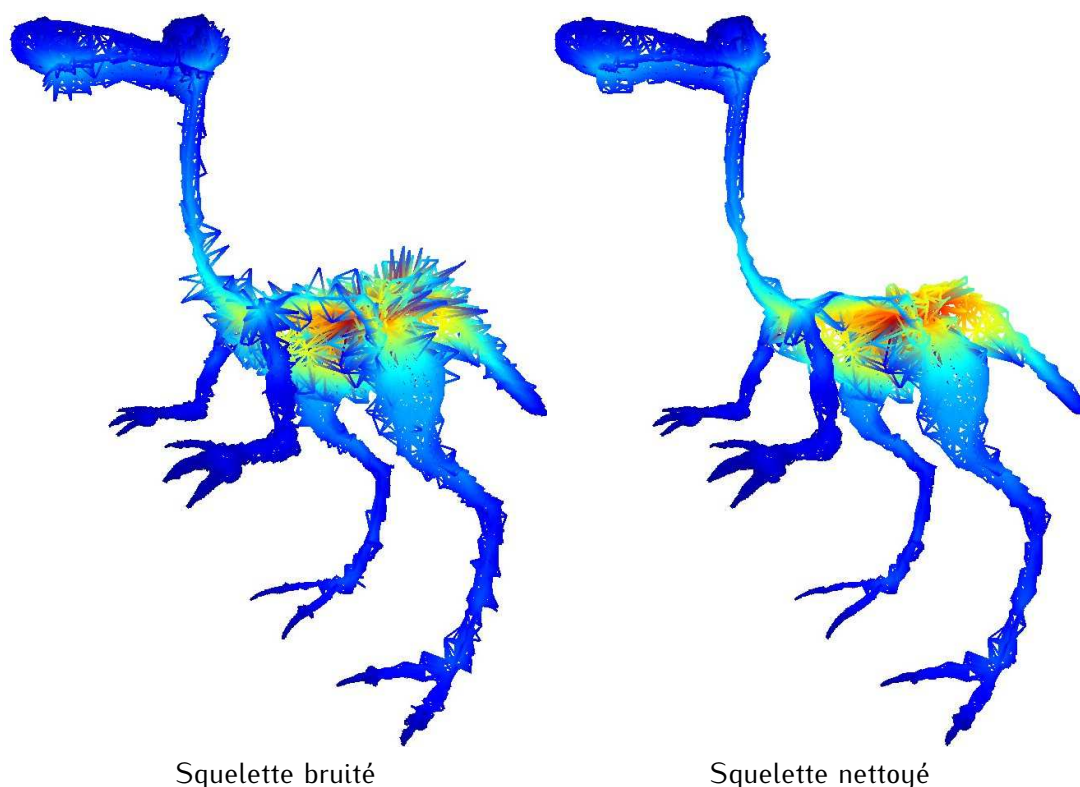


FIGURE 4.6 – Hérissément d'un squelette obtenu par diagramme de Voronoï sans utiliser les pôles. Un tel squelette a un hérissément de forte amplitude, ce qui permet de mieux visualiser ce type de bruit. Notre structuration du hérissément permet d'obtenir un squelette nettoyé en ne considérant que les racines de la 2-hiérarchie.

leurs atomes liés³. Nous présentons dans la figure 4.6 un exemple de ce hérissément. Dans cette figure, nous donnons aussi notre squelette nettoyé. Il est donc possible de réaliser cette tâche seulement à l'aide des sphères et des liens, en dehors de tout processus de squelettisation.

Il est important de supprimer les atomes du hérissément, non seulement à cause de la forte perturbation de la structure squelettale qu'ils engendrent, mais également parce qu'ils dégradent la capacité de reconstruction. En effet, les atomes du hérissément ajoutent de petites sphères en surface de la forme, ailleurs qu'au niveau des détails de surface.

Pourquoi le hérissément apparaît dans le squelette après une squelettisation ? Afin d'en expliquer la présence, nous reprenons le cas d'une squelettisation qui utilise un diagramme de Voronoï. Ce diagramme de Voronoï est calculé sur un échantillonnage fini de la surface de la forme à squelettiser. Soit un sommet de Voronoï v associé à un tétraèdre de Delaunay T , dont les sommets sont proches les uns des autres (voir la figure 4.7). Cette configuration crée un atome avec une petite sphère qui peut soit capturer un détail de surface, soit une zone lisse de la surface. Dans le dernier cas, l'atome appartient au hérissément, sans que v ou T permettent de savoir s'il s'agit ou non d'un atome décrivant du détail de surface.

Face à l'impossibilité de faire la différence entre les deux cas, les méthodes de régularisation suppriment tout atome ayant cette configuration. Pour détecter cette configuration de tétraèdre T avec des sommets proches, la méthode du λ -Axis propose de chercher les tétraèdres

3. Le hérissément n'a pas de définition formelle. Il s'agit d'un bruit uniquement défini par son apparence.

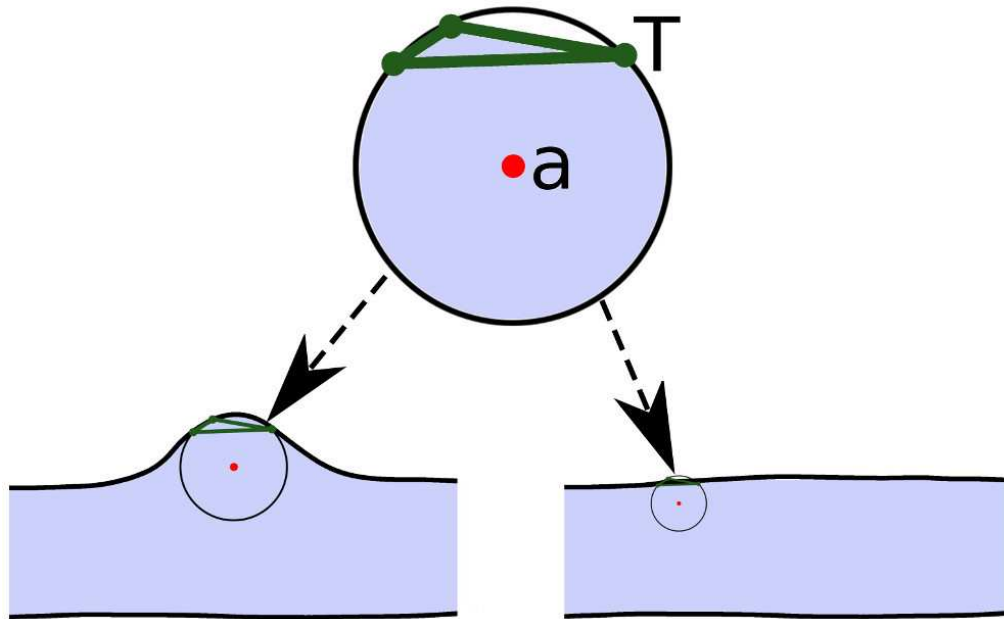


FIGURE 4.7 – Configuration d'un atome a pouvant aussi bien capturer un détail de surface que créer un atome du hérississement. Pour une squelettisation qui s'appuie sur les diagrammes de Voronoï, un tel atome est engendré par un tétraèdre de Delaunay T dont les sommets sont très proches.

dont les sommets sont inclus dans une sphère de rayon au plus λ (voir la section 2.3.2.1 et la figure 2.15). La méthode du *Power Shape* remarque que, quand les sommets sont très proches pour un tétraèdre de Delaunay, ce tétraèdre est très plat. C'est ce qui a motivé la définition des pôles [Amenta 2001a] (voir la section 2.2.3.1).

Nous poussons plus loin l'observation de ces configurations en nous concentrant uniquement sur le squelette. Les atomes liés à un atome a du hérississement ont leurs positions situées dans un cône très étroit, ce qui traduit l'apparence caractéristique de ces atomes sur la structure squelettale. Ces atomes liés ont des rayons plus grands que a , car leurs centres sont plus éloignés de la surface de la forme décrite par le squelette. Une telle configuration se retrouve également en terminaison de fines composantes squelettiques, comme par exemple celles des doigts de la figure 4.9. La seule différence entre ces deux situations est la longueur du motif : la longueur d'une érosion des atomes excentrés est plus courte dans le cas du hérississement (voir la figure 4.8). Il est donc important de tenir compte de la longueur du motif dans notre structuration, sous peine de voir des détails disparaître du squelette nettoyé en les rognant progressivement.

Comme les positions des atomes liés à un atome a du hérississement sont dans un cône étroit, la position d'un tel atome est excentrée par rapport à celles des atomes liés. Nous construisons alors un test d'identification des atomes du hérississement en détectant si un atome a a une position excentrée par rapport à ses atomes liés. Plutôt que calculer entièrement le cône puis de comparer la valeur de l'angle α à une valeur seuil, nous procédons à l'aide d'une sphère $S(a)$. Cette sphère est la sphère minimale englobante contenant les positions des atomes liés à a . Lorsque la position de a est à l'extérieur de $S(a)$, nous considérons que nous avons un atome excentré, soit un atome du hérississement. L'algorithme 3 donne le détail de notre identification d'un atome du hérississement, en précisant le cas où a est lié à un seul

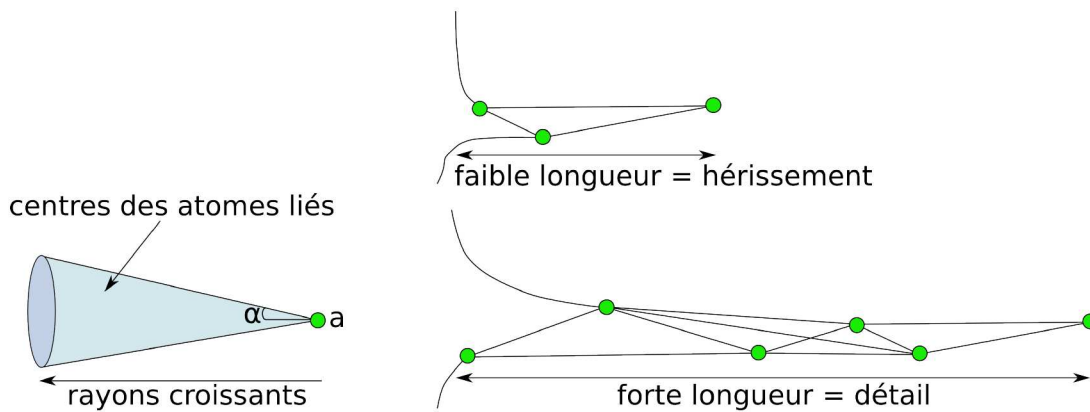


FIGURE 4.8 – Motif caractéristique d'un atome a du hérissément. Les positions des atomes liés à a sont dans un cône étroit, c'est-à-dire un cône avec un petit angle α . La distinction entre hérissément et atomes de détails se fait par la longueur du motif.

atome. En effet, la sphère $S(a)$ est mal définie lorsque a est lié à moins de deux atomes. Comme nous avons résolu le cas des atomes isolés lors de la structuration des amas, il nous reste à gérer le cas d'un atome lié à un seul autre atome.

Algorithme 3 Test d'excentricité d'un atome a par rapport aux positions de ses atomes liés.

```

1: fonction ESTEXCENTRÉ( $a$ )
2:   si  $a$  a plus de deux atomes liés alors
3:      $S \leftarrow$  sphère minimal englobante de  $\{\text{POSITION}(b), a \frown b\}$ 
4:     renvoyer  $a \notin S$ 
5:   sinon  $\triangleright a$  seulement lié à un atome  $b$ 
6:     renvoyer nombre d'atomes liés à  $b < 3$ 
7:   fin si
8: fin fonction

```

Parmi les racines de la 1-hiérarchie obtenue précédemment, nous identifions les atomes qui sont excentrés. Pour chaque atome a excentré, il nous faut trouver un atome b pour réaliser l'absorption $a \triangleright_1 b$. Remarquons que si nous prenons n'importe quel atome b lié à a , nous réduisons les fines composantes squelettiques, comme illustré par la figure 4.9 b). En effet, comme nous ne tenons pas compte de la longueur du motif dans notre identification des atomes excentrés, rien n'empêche la disparition de ces composantes. La solution est alors de choisir avec soin l'atome b pour stopper cette disparition : nous choisissons l'atome racine de rang 1 lié à a qui a le plus grand rayon. S'il n'existe aucun atome racine lié de rang 1, a n'est pas absorbé. Ceci a deux conséquences. Premièrement, comme b a un plus grand rayon, l'absorption réduit l'amplitude du hérissément (il est absorbé vers la partie « stable » du squelette). Deuxièmement, cela limite l'absorption d'une fine composante de détail, car à partir d'une certaine longueur absorbée, il ne sera plus possible de trouver des atomes liés de rang 1 (voir la figure 4.9). Comme la densité d'atomes est plus élevée dans une fine composante de détail que pour le hérissément, l'absorption est plus vite limitée dans le cas d'une composante de détail.

Le détail de l'absorption des atomes excentrés est donné par la schématisation de la figure 4.10. Lorsque toutes les absorptions ont été réalisées, nous obtenons, après la promotion des racines de rang 1, une 2-hiérarchie. Le squelette formé par les racines de cette

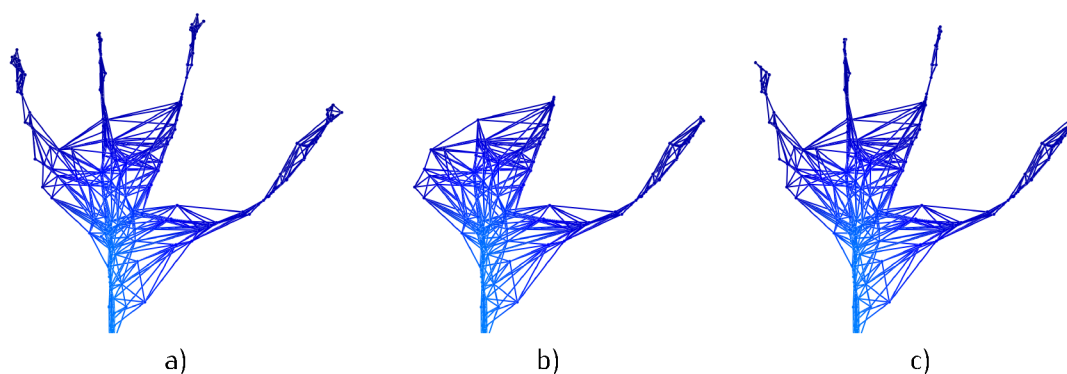


FIGURE 4.9 – Importance du choix d'un atome père b pour réaliser l'absorption d'un atome excentré a . a) Squelette initial. b) Squelette nettoyé quand b est choisi parmi tous les atomes liés à a . c) Squelette nettoyé quand b est choisi seulement parmi les atomes liés de rang 1.

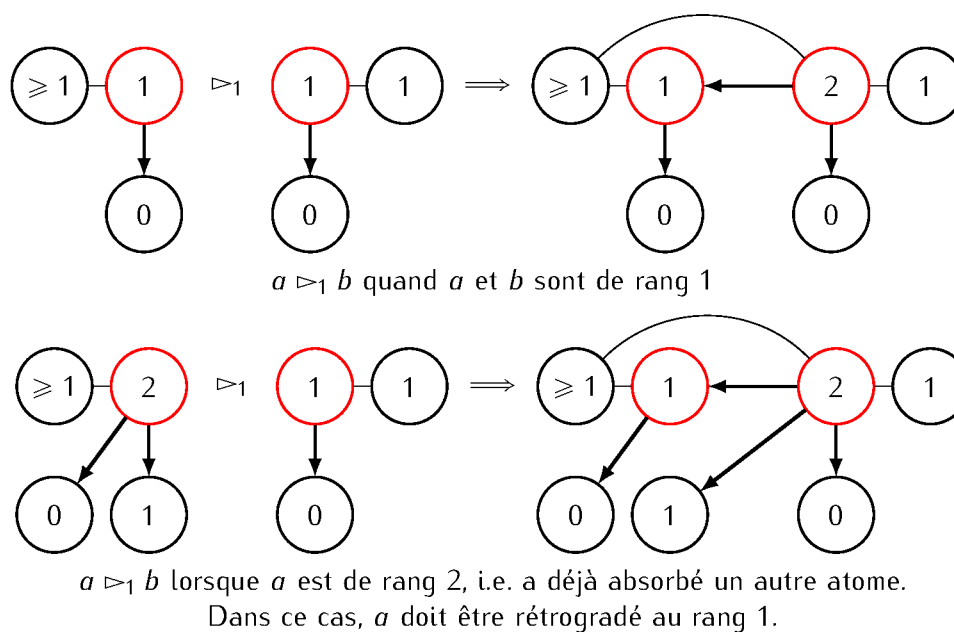


FIGURE 4.10 – Définition schématique de l'absorption $a \triangleright_1 b$ d'un atome du hérisssement a par un atome racine b . Les atomes a et b sont représentés en rouge, avec a à gauche et b à droite. Ces schémas montrent la réorganisation des liens topologiques et hiérarchiques pour toutes les configurations possibles.

2—hiérarchie ne contient plus d'amas et très peu d'atomes du hérisssement. Nous montrons dans la section suivante que seul le bruit squelettal a été retiré, ce qui fait du squelette racine notre squelette nettoyé.

4.3/ VALIDATION

Dans cette section, nous validons les résultats de notre méthode de régularisation. Nous comparons également ces résultats avec ceux produits par d'autres méthodes, afin de démontrer l'efficacité et l'intérêt de notre méthode. Pour cela, nous commençons par donner notre

protocole d'expérimentation. Ce protocole permet une évaluation et une comparaison chiffrée des différents squelettes nettoyés, ce qui nous guide dans l'interprétation des résultats. Nous terminons cette section par les limitations de notre méthode.

4.3.1/ PROTOCOLE

Pour valider notre méthode de régularisation, il suffit de montrer que nos résultats sont obtenus en retirant uniquement du bruit squelettal. Pour cela, nous pouvons comparer les capacités de reconstruction des squelettes initiaux avec celles des squelettes racines produits par notre méthode. Si la capacité de reconstruction ne diminue pas, nous prouvons que seul le bruit squelettal est supprimé, car par définition il est constitué d'atomes qui ne décrivent pas la géométrie de la forme. Nous mesurons la capacité de reconstruction d'un squelette par la formule $C_{RMS} = 1 - \frac{1}{L}d_{RMS}$, avec d_{RMS} la distance RMS entre l'habit du squelette (construit par la méthode du chapitre 4) et la forme originale, et L la diagonale de la boîte englobante de la forme. Diviser par L permet de normaliser la distance d_{RMS} et la soustraction à un sert à avoir une capacité de reconstruction plus intuitive : ainsi une reconstruction totale correspond à $C_{RMS} = 1$. Nous utilisons uniquement les sphères comme primitive de migration dans l'habillage, afin de ne pas masquer la perte de géométrie engendrée par la suppression d'un atome. En effet, en ajoutant des cônes ou des cylindres, il est possible de couvrir le volume occupé par la sphère d'un atome supprimé. Dans ce cas, la capacité de reconstruction ne chute pas, même si l'atome supprimé ajoute des détails importants.

Nous avons vu dans la section 3.2.3 que la capacité de reconstruction mesurée par la distance RMS pouvait être parfois contre-intuitive. Comme ici la géométrie du squelette racine est un sous-ensemble des sphères du squelette initial, nous proposons de compléter nos mesures avec l'aire $\mathcal{A}$ et le volume $\mathcal{V}$ de cette union de sphères. Nous réalisons ces mesures avec le logiciel VORLUME [Cazals 2011]. Les variations d'aire et de volume doivent être nulles lorsque nous retirons uniquement les amas (soit les atomes de rang 0). Cependant, l'aire et le volume varient après la suppression du hérissément, car ces atomes ajoutent des données géométriques, même si ces données ne décrivent pas la forme. Nous utilisons alors une évaluation visuelle du squelette et de l'union des sphères pour vérifier que : *i*) le hérissément disparaît du squelette et *ii*) les petites sphères aberrantes sont retirées de l'union des sphères. La capacité de reconstruction C_{RMS} , l'aire $\mathcal{A}$, le volume $\mathcal{V}$ et l'observation visuelle permettent de vérifier que seul le bruit squelettal est retiré par une méthode de régularisation.

Les méthodes existantes de régularisation sont mises en œuvre au sein d'un processus de squelettisation, car elles utilisent des données qui ne sont calculables qu'à partir de la forme. Or cette forme est accessible uniquement lors de la squelettisation : après la squelettisation, seul le squelette est connu lorsque le squelette est utilisé comme un MRF. Notre méthode s'affranchit de cette contrainte majeure, elle est donc indépendante de toute squelettisation. Ainsi, les données initiales de notre méthode (un squelette) et des méthodes existantes (une forme) sont différentes. Ceci nécessite d'adapter le protocole d'expérimentation pour pouvoir interpréter les résultats et comparer les méthodes. Nous avons vu dans la section 2.3.2 que les régularisations des méthodes existantes se faisaient par filtrage selon des critères d'importance locale ou globale. Nous choisissons donc de nous comparer à des méthodes pour chacune de ces deux catégories, avec un protocole adapté à chaque méthode.

Dans la catégorie des critères d'importance locale, nous avons les régularisations effectuées par les squelettisations λ -Axis [Chazal 2004] et *Power Shape* [Amenta 2001a]. Pour comparer notre méthode au squelette λ -Axis, noté $S_\lambda(\alpha)$, nous créons un squelette dit de Voronoï, noté

S_{Vor} . Les atomes de ce squelette sont obtenus en considérant tous les sommets de Voronoï qui sont à l'intérieur de la forme. Comme notre méthode de régularisation nécessite une structure squelettale (pour le hérisssement), nous dotons le squelette S_{Vor} d'une telle structure en construisant une tétraédrisation régulière de tous les sommets de Voronoï. Chaque atome de S_{Vor} , généré par un sommet intérieur de Voronoï v , contient une valeur λ qui correspond au rayon de la sphère minimale englobant les quatre sommets du tétraèdre de Delaunay dual de v (nous renvoyons à notre description de la méthode du λ -Axis de la section 2.3.2.1). Nous créons une 2-hiérarchie à partir du squelette de Voronoï, et nous notons S_{Vor}^* le squelette formé par les racines. Nous calculons la valeur α de sorte que le squelette $S_\lambda(\alpha)$, obtenu en filtrant tous les atomes qui ont une valeur $\lambda < \alpha$, ait le même nombre d'atomes que S_{Vor}^* . La comparaison entre notre méthode et celle du λ -Axis peut alors se faire simplement par la mesure de capacité de reconstruction, de l'aire et du volume de l'union des sphères. En effet, nous appliquons les régularisations sur les mêmes données initiales et nous avons des squelettes avec le même nombre d'atomes.

Pour nous comparer à la méthode de régularisation utilisée dans le *Power Shape*, il n'est pas possible de modifier les paramètres afin d'obtenir le même nombre d'atomes sur les mêmes données initiales. Nous proposons alors de vérifier la quantité de bruit squelettal que notre méthode peut retirer d'un squelette *Power Shape*. Pour cela, nous mesurons la variation de la capacité de reconstruction, de l'aire et du volume de l'union des sphères, entre le *Power Shape* S_{Pow} et la racine de la 2-hiérarchie, notée S_{Pow}^* , construite par notre méthode sur S_{Pow} . En vérifiant que seul le bruit squelettal est retiré de S_{Pow} pour obtenir S_{Pow}^* , nous prouvons l'efficacité de notre méthode face à la méthode du *Power Shape*. Aussi, nous pouvons évaluer la qualité d'un squelette *Power Shape* en mesurant le taux de bruit $\mathcal{B}$. Ce taux est égal au rapport entre le nombre d'atomes de rang 0 et 1 dans la 2-hiérarchie et le nombre total d'atomes.

Dans la catégorie des critères d'importance globale, nous utilisons la squelettisation *Scale Axis* [Miklos 2010b]. Cette squelettisation fait intervenir des étapes intermédiaires mal documentées et donc difficiles à reproduire et contrôler pour une comparaison pertinente sur les mêmes données initiales. Pour nous comparer à la méthode de régularisation qu'elle utilise, nous procédons de la même manière que précédemment : nous évaluons la quantité de bruit squelettal que notre méthode peut retirer des squelettes *Scale Axis*, notés S_{Scale} . Cette manière de procéder permet également de poursuivre l'analyse de la qualité de ces squelettes, que nous avons commencée dans la section 3.2.3. Le squelette racine construit par notre méthode sur ce squelette est noté S_{Scale}^* .

Pour calculer les squelettes, nous prenons les vingt-sept formes utilisées dans la validation de notre méthode d'habillage. Les squelettes *Power Shape* et *Scale Axis* sont produits suivant la manière décrite dans la section 3.2.2.

4.3.2/ RÉSULTATS

Les tables 4.1, 4.2 et 4.3 présentent les mesures obtenues en suivant le protocole de la section 4.3.1. Les colonnes relatives aux 2-hiérarchies produites par notre méthode sont divisées selon les rangs considérés pour les atomes. La colonne « rang 0 » indique le nombre d'atomes de rang 0, soit les atomes des amas. La colonne « rang ≥ 1 » précise les mesures sur des squelettes où les amas sont ignorés. Enfin, les colonnes S_{Vor}^* , S_{Pow}^* et S_{Scale}^* , correspondent aux squelettes obtenus en ne considérant que les racines du squelette hiérarchique (soit en

	S_{Vor}					S_{λ}	2-hiérarchie							
	#Atomes	$\mathcal{V}$	$\mathcal{A}$	C_{RMS}	$B(\%)$		C_{RMS}	rang 0		rang ≥ 1			S_{Vor}^*	
								#Atomes	$\mathcal{V}$	$\mathcal{A}$	C_{RMS}	#Atomes	C_{RMS}	
armadillo	87392	5.68	0.37	0.9987	25	0.9991	2047	85345	5.68	0.37	0.9987	65450	0.9993	
baby	16361	2.50	0.13	0.9979	17	0.9979	670	15691	2.50	0.13	0.9979	13442	0.9989	
bimba	30040	8.84	1.23	0.9979	22	0.9987	1176	28864	8.84	1.23	0.9979	23136	0.9988	
boy	27323	2.24	0.09	0.9987	20	0.9979	1219	26104	2.24	0.09	0.9987	21613	0.9991	
bumpy-torus	55315	14.95	1.65	0.9985	18	0.9988	2371	52944	14.95	1.65	0.9985	45098	0.9992	
bunny	88559	7.16	0.93	0.9980	28	0.9981	3333	85226	7.16	0.93	0.9980	63535	0.9988	
cup	18051	11.88	0.76	0.9974	7	0.9981	770	17281	11.88	0.76	0.9974	16710	0.9978	
dinopet	13220	3.97	0.22	0.9969	16	0.9969	683	12537	3.90	0.22	0.9969	10980	0.9979	
egea	27564	8.86	1.83	0.9980	31	0.9988	962	26602	8.86	1.83	0.9980	18870	0.9993	
eight	2688	4.54	0.37	0.9938	17	0.9944	186	2502	4.54	0.37	0.9938	2230	0.9958	
ellipsoid	12352	6.18	1.32	0.9996	33	0.9997	2295	10057	6.18	1.32	0.9996	8171	0.9997	
female-hand	8338	3.26	0.20	0.9880	20	0.9874	274	8064	3.26	0.20	0.9878	6654	0.9877	
fish	40259	2.13	0.09	0.9958	39	0.9958	10772	29487	1.73	0.08	0.9958	24204	0.9967	
genus3	21840	8.54	0.75	0.9984	11	0.9990	846	20994	8.54	0.75	0.9984	19356	0.9990	
hand1	91921	4.38	0.36	0.9994	25	0.9997	9609	82312	4.38	0.36	0.9994	68606	0.9998	
hand3	15847	3.68	0.22	0.9977	22	0.9984	652	15195	3.68	0.22	0.9977	12322	0.9988	
hand4	30688	3.73	0.20	0.9963	21	0.9964	2024	28664	3.73	0.20	0.9963	24122	0.9979	
homer	20456	3.77	0.25	0.9958	29	0.9960	2105	18351	3.77	0.25	0.9958	14338	0.9987	
horse1	67208	4.28	0.33	0.9989	26	0.9990	4598	62610	4.28	0.33	0.9989	49633	0.9992	
horse2	7558	5.17	0.36	0.9952	21	0.9956	497	7061	5.17	0.36	0.9952	5897	0.9963	
maxplanck	24730	6.42	1.04	0.9903	30	0.9898	976	23754	6.42	1.04	0.9903	17287	0.9900	
monkey	25527	6.01	0.82	0.9975	19	0.9976	1138	24389	5.96	0.81	0.9976	20524	0.9981	
noeud2	4217	6.96	0.27	0.9959	41	0.9963	1700	2517	6.96	0.27	0.9959	2449	0.9960	
round-octa	45602	27.34	6.86	0.9999	69	0.9998	22751	22851	10.25	3.00	0.9999	13939	0.9999	
sphere	9576	12.61	4.21	0.9998	99	0.9998	9531	45	12.59	4.20	0.9998	3	0.9998	
torus	3188	7.44	0.70	0.9944	88	0.9982	2570	618	7.44	0.70	0.9944	380	0.9966	
venus	2256	5.33	0.65	0.9768	20	0.9772	57	2199	5.33	0.65	0.9768	1794	0.9797	

TABLE 4.1 – Mesures pour la comparaison de notre méthode avec la régularisation utilisée par la squelettisation λ -Axis. Étudions la première ligne qui concerne le squelette de Voronoï du modèle armadillo. Ce squelette a 87 392 atomes, une capacité de reconstruction de 0.9987 et son union de sphères a un volume de 5.68 pour une aire de 0.37 selon le logiciel VorLUME. Notre méthode retire 2 047 atomes des amas et les atomes de rang au moins égal à 1 (soit 85 545 atomes) forment une union de sphères avec la même aire, le même volume et la même capacité de reconstruction que précédemment. Une fois le hérissément supprimé, nous obtenons une capacité de reconstruction de 0.9993 avec seulement 65 450 atomes (25% des atomes sont supprimés). Avec le même nombre d'atomes que notre squelette nettoyé, le squelette λ -Axis a une capacité de reconstruction de 0.9991.

ignorant les atomes du bruit squelettal). Nous commençons par valider notre méthode avant de comparer nos résultats aux autres méthodes.

Intéressons-nous aux atomes de rang 0, c'est-à-dire les amas. Par définition, l'union des sphères ne doit pas être modifiée lorsqu'on ignore les atomes de rang 0. Les valeurs indiquent que c'est globalement le cas sur les trois types de squelettes considérés, sauf pour les mesures bleues. Le logiciel VorLUME affirme pour ces valeurs en bleu que l'aire $\mathcal{A}$ ou le volume $\mathcal{V}$ de l'union de sphères sont modifiées lorsque nous ignorons les atomes de rang 0. Pourtant, la variation de la capacité de reconstruction est nulle dans ce cas, même si le volume de l'union des sphères indiqué par VorLUME est divisé par deux (voir les lignes correspondant au modèle *round-octa* dans les tables 4.1 et 4.2). Il y a donc une incohérence dans les mesures pour les squelettes des valeurs bleues. Visuellement, aucune différence n'est perceptible entre les unions des sphères de ces squelettes. L'incohérence est donc due au logiciel VorLUME. Ce logiciel n'est pas suffisamment robuste pour effectuer des mesures précises sur ces squelettes. Nous pensons que cela est lié au fait qu'il n'ait pas été testé sur des modèles ayant une telle densité de sphères (selon [Cazals 2009], les tests ont été faits sur des modèles générés à la main ou sur des modèles de molécules). Grâce à la combinaison des mesures d'aire, de volume, de capacité de reconstruction et d'observations visuelles, nous validons notre méthode

	S_{Pow}						2-hiérarchie						
	#Atomes	$\mathcal{V}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{C}_{RMS}$	B(%)		rang 0	rang ≥ 1				S_{Pow}^*	
								#Atomes	#Atomes	$\mathcal{V}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{C}_{RMS}$	#Atomes
armadillo	25890	5.17	0.37	0.9994	18		219	25671	5.17	0.37	0.9994	21197	0.9994
baby	4902	2.32	0.12	0.9992	7		93	4809	2.32	0.12	0.9992	4535	0.9992
bimba	8836	8.19	1.21	0.9990	12		98	8738	8.19	1.21	0.9990	7744	0.9991
boy	8263	2.14	0.09	0.9992	9		142	8121	2.14	0.09	0.9992	7489	0.9992
bumpy-torus	15804	14.30	1.62	0.9994	3		182	15622	14.30	1.62	0.9993	15326	0.9993
bunny	25918	6.69	0.92	0.9989	20		279	25639	6.69	0.92	0.9989	20609	0.9989
cup	4356	11.81	0.73	0.9984	4		211	4145	11.81	0.73	0.9984	4145	0.9984
dinopet	4355	3.62	0.21	0.9983	8		171	4184	3.60	0.21	0.9983	3996	0.9983
egea	8264	8.17	1.80	0.9994	25		61	8203	8.17	1.80	0.9994	6176	0.9994
eight	679	4.29	0.35	0.9966	7		54	625	4.29	0.35	0.9966	625	0.9966
ellipsoid	3459	6.17	1.32	0.9997	6		209	3250	6.17	1.32	0.9997	3241	0.9997
female-hand	2432	2.93	0.19	0.9872	4		56	2376	2.93	0.19	0.9870	2311	0.9871
fish	13462	1.89	0.09	0.9968	25		3073	10389	1.66	0.08	0.9968	9972	0.9968
genus3	6549	8.21	0.74	0.9993	1		80	6469	8.21	0.74	0.9993	6457	0.9993
hand1	25947	4.30	0.35	0.9998	5		808	25139	4.30	0.35	0.9998	24540	0.9998
hand3	4543	3.43	0.22	0.9991	9		108	4435	3.43	0.22	0.9991	4126	0.9991
hand4	8398	3.60	0.19	0.9975	4		234	8164	3.60	0.19	0.9975	8008	0.9975
homer	4971	3.31	0.23	0.9993	14		372	4599	3.31	0.23	0.9993	4265	0.9994
horse1	19864	4.13	0.32	0.9992	12		455	19409	4.13	0.32	0.9992	17458	0.9992
horse2	2309	4.70	0.33	0.9968	13		117	2192	4.70	0.33	0.9968	2002	0.9970
maxplanck	7382	6.02	1.02	0.9897	23		94	7288	6.02	1.02	0.9897	5666	0.9898
monkey	7591	5.88	0.83	0.9982	8		177	7414	5.70	0.81	0.9982	6922	0.9982
noeud2	928	6.70	0.25	0.9966	79		736	192	6.70	0.25	0.9966	192	0.9966
round-octa	14260	22.29	5.49	1.0000	49		7000	7260	10.24	3.00	1.0000	7220	1.0000
sphere	3221	12.59	4.20	0.9998	99		3220	1	12.59	4.20	0.9998	1	0.9998
torus	1014	6.46	0.65	0.9982	94		954	60	6.46	0.65	0.9982	60	0.9982
venus	694	4.89	0.62	0.9776	9		9	685	4.89	0.62	0.9777	625	0.9778

TABLE 4.2 – Mesures pour la comparaison de notre méthode avec la régularisation utilisée par la squelettisation Power Shape. La lecture d'une ligne de cette table est similaire à celle de la table 4.1.

	$\mathcal{S}_{Scale}$					2—hiérarchie						
	#Atomes	$\mathcal{V}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{C}_{RMS}$	B(%)	#Atomes	rang ≥ 1				$\mathcal{S}_{Scale}^*$	
							#Atomes	$\mathcal{V}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{C}_{RMS}$	#Atomes	$\mathcal{C}_{RMS}$
armadillo	68257	5.15	0.41	0.9956	41	23227	45030	5.15	0.41	0.9956	40007	0.9957
	40168	2.44	0.14	0.9960	47	17759	22409	2.44	0.14	0.9960	21134	0.9960
	95315	8.17	1.36	0.9923	46	39469	55846	8.16	1.36	0.9923	51170	0.9923
	63687	2.22	0.11	0.9961	47	27672	36015	2.22	0.11	0.9962	33623	0.9962
	185508	14.55	1.80	0.9956	46	81585	103923	14.55	1.80	0.9956	99210	0.9956
	75194	6.84	1.04	0.9918	45	30673	44521	6.84	1.04	0.9918	41315	0.9918
	242314	11.53	0.79	0.9970	62	148582	93732	11.52	0.79	0.9970	90823	0.9970
	63742	3.54	0.23	0.9958	44	25553	38189	3.53	0.23	0.9958	35131	0.9958
	43487	8.53	2.08	0.9869	47	17953	25534	8.53	2.08	0.9869	22897	0.9869
	58022	4.33	0.38	0.9941	55	31454	26568	4.33	0.38	0.9942	26013	0.9942
ellipsoid	76590	6.93	1.59	0.9835	78	60006	16584	6.91	1.58	0.9835	16308	0.9835
female-hand	56081	4.81	0.33	0.9486	49	25618	30463	4.81	0.33	0.9486	28586	0.9486
fish	75631	1.65	0.08	0.9964	46	34639	40992	1.65	0.08	0.9964	40135	0.9964
genus3	162262	8.44	0.83	0.9951	48	77556	84706	8.43	0.83	0.9951	83644	0.9951
hand1	105905	4.52	0.40	0.9944	50	52016	53889	4.52	0.40	0.9944	52022	0.9944
hand3	92792	3.62	0.24	0.9947	50	44817	47975	3.62	0.24	0.9947	46172	0.9951
hand4	81873	3.74	0.22	0.9968	50	40221	41652	3.74	0.22	0.9968	40806	0.9968
homer	51785	3.50	0.27	0.9937	57	27989	23796	3.50	0.27	0.9938	22168	0.9938
horse1	68616	4.33	0.37	0.9947	47	29685	38931	4.33	0.37	0.9947	36336	0.9947
horse2	70891	4.39	0.36	0.9949	44	27416	43475	4.39	0.36	0.9949	39034	0.9949
maxplanck	38987	9.37	1.46	0.9501	45	14844	24143	9.36	1.46	0.9502	21242	0.9535
monkey	64823	5.99	0.94	0.9889	48	29489	35334	5.98	0.94	0.9889	33636	0.9890
noeud2	57387	6.12	0.23	0.9981	66	30738	26649	6.12	0.23	0.9981	19350	0.9981
torus	27568	6.87	0.75	0.9932	96	26246	1322	6.87	0.75	0.9933	967	0.9933
venus	49365	7.45	0.86	0.9501	51	22346	27019	7.45	0.86	0.9501	24115	0.9557

TABLE 4.3 – Mesures pour la comparaison de notre méthode avec la régularisation utilisée par la squelettisation Scale Axis. Les formes round-octa et sphere ne sont pas présentes dans ces mesures, car le logiciel MESECINA échoue à produire des squelettes pour ces modèles. La lecture d'une ligne de cette table est similaire à celle de la table 4.1.

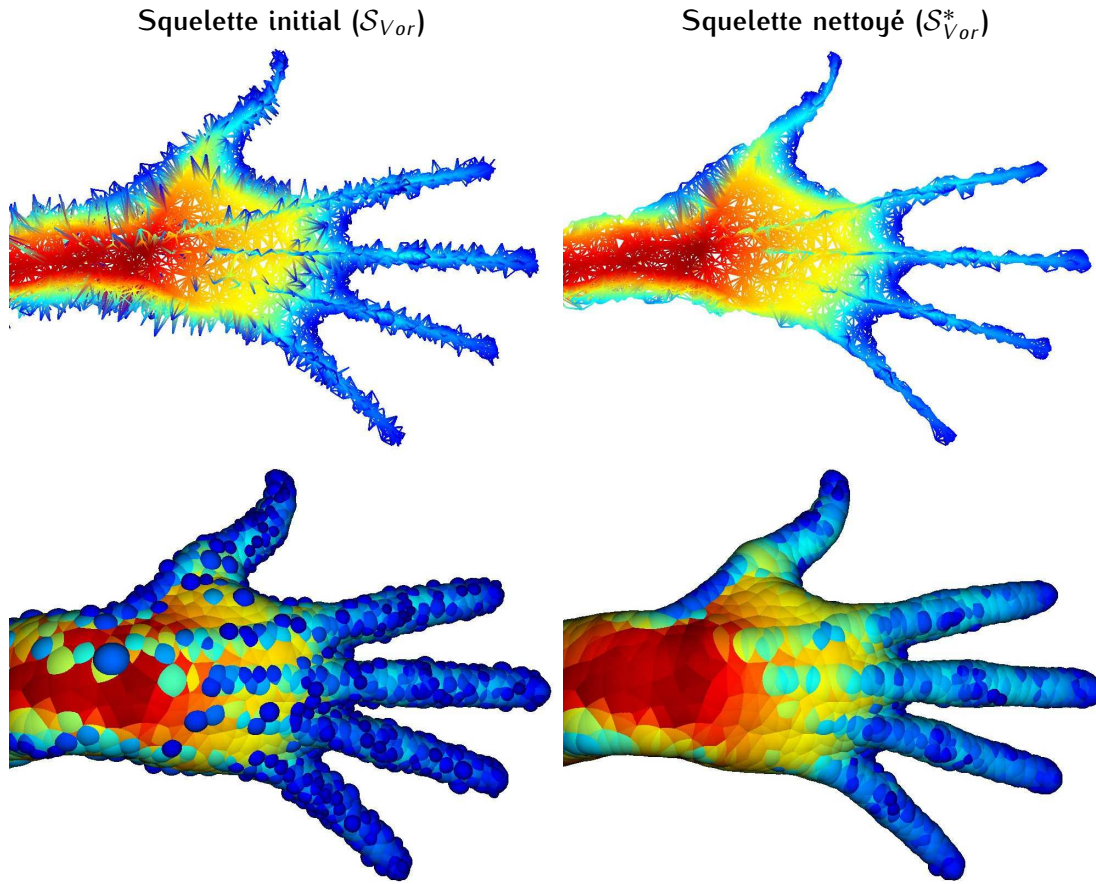


FIGURE 4.11 – Résultats de notre régularisation sur le squelette de Voronoï du modèle female-hand. La capacité de reconstruction mesurée par la distance RMS diminue de 0.0003 sur notre squelette nettoyé. Pourtant, le hérissément disparaît, ce qui supprime les petites sphères (en bleu) qui ajoutent des données géométriques n'appartenant pas à la forme.

d'identification des amas.

Passons maintenant aux atomes de rang 1 pour valider notre suppression du hérissément. Si ces atomes correspondent bien au hérissément, la capacité de reconstruction du squelette nettoyé doit être supérieure ou égale à celle obtenue en considérant également les atomes de rang 1. Les tables 4.1, 4.2 et 4.3 indiquent que c'est le cas sauf pour deux modèles dans la table 4.1 (valeurs rouges). Visuellement, sur les modèles où la capacité de reconstruction diminue, nous ne percevons pas de disparition des détails. Comme le montre la figure 4.11, le hérissément est bien supprimé, de même que les sphères aberrantes à la surface de l'union des sphères. Ces deux cas sur soixante-dix-neuf squelettes semblent être liés à la limitation de la distance RMS pour mesurer les capacités de reconstruction, comme nous l'avons évoqué dans la section 3.2.3. Notre identification et suppression du hérissément est donc validée. Ainsi, la racine de la 2-hiérarchie produite par notre méthode correspond bien à un squelette nettoyé : seul le bruit squelettal a été retiré.

Nous comparons maintenant nos résultats à ceux des trois autres méthodes pour justifier l'efficacité et l'intérêt de notre méthode. Commençons par la méthode du λ -Axis. Sur seulement trois modèles sur vingt-sept (mesures en vert dans la table 4.1), notre squelette nettoyé S_{Vor}^* a une capacité de reconstruction inférieure à celle du squelette λ -Axis. Mais dans ces trois

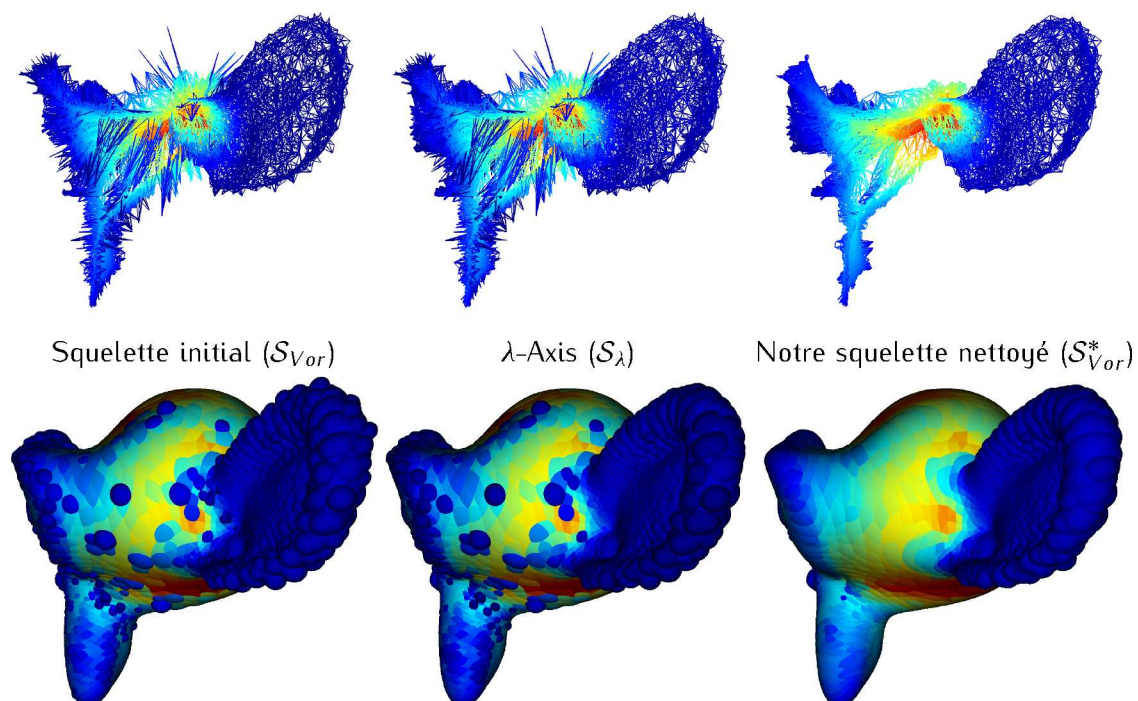


FIGURE 4.12 – Comparaison visuelle de la régularisation d'un squelette de Voronoï par le procédé utilisé dans l'algorithme du λ -Axis et notre méthode. La structure squelettale est présentée sur la ligne du haut et l'union de sphères sur la ligne de bas. Alors que rien ne semble changer après la régularisation du λ -Axis, notre méthode supprime une majeure partie du hérissément, ce qui se perçoit aussi au niveau de la disparition des sphères aberrantes (en bleu sur le côté du crâne).

cas, la capacité de reconstruction de notre squelette nettoyé est quand même meilleure que la capacité de reconstruction du squelette de Voronoï (squelette original). Selon ces mesures, notre méthode semble meilleure que la méthode du λ -Axis dans la majorité des cas. Visuellement, l'efficacité de notre méthode est plus marquante (voir la figure 4.12). Alors que la suppression du hérissément est remise en question par la méthode du λ -Axis, que ce soit au niveau du squelette ou des sphères aberrantes, notre méthode supprime effectivement ce hérissément. Ceci signifie que la méthode du λ -Axis ne supprime pas que le bruit squelettal, et par conséquent des détails (voir la figure 4.13).

Comparons maintenant notre méthode aux régularisations utilisées par les squelettisations *Power Shape* et *Scale Axis*. Les tables 4.2 et 4.3 indiquent que notre méthode supprime uniquement des atomes du bruit squelettal sur ces squelettes. En effet, la capacité de reconstruction des squelettes nettoyés est supérieure ou égale à la capacité de reconstruction des squelettes initiaux. Observons la classification des atomes des squelettes *Power Shape* et *Scale Axis* en amas, hérissément et racines, illustrée par la figure 4.14. Cette classification montre que 21% en moyenne des atomes sont inutiles dans le *Power Shape* et 52.2% dans le *Scale Axis*. Ainsi, même sur des squelettes déjà régularisés, notre méthode peut retirer sans conséquences une quantité importante d'atomes. Cela prouve l'efficacité de notre solution au problème du bruit squelettal. Ces résultats remettent aussi en question l'utilisation pratique des squelettes *Scale Axis*. En effet, non seulement ces squelettes ont une capacité de reconstruction parfois bien inférieure à celle des squelettes *Power Shape*, à cause de la

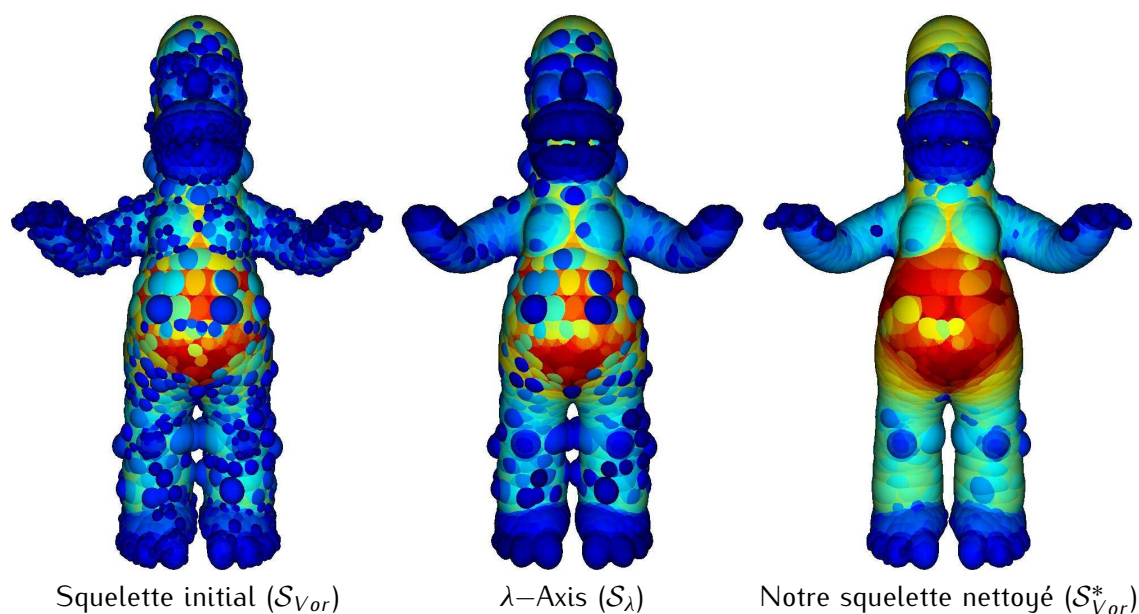


FIGURE 4.13 – Mise en évidence de la disparition des détails et de la faible efficacité de la régularisation d'un squelette de Voronoï par le procédé utilisé dans l'algorithme du λ -Axis par rapport à notre méthode. Les sphères aberrantes demeurent mais les mains disparaissent après la régularisation du λ -Axis, alors que notre méthode conserve les détails tout en améliorant l'apparence de la forme décrite par le squelette.

disparition de détails ou de sphères aberrantes (un exemple est donné dans la figure 4.15), mais plus de la moitié des atomes de ces squelettes sont inutiles (complexité des squelettes non justifiée).

4.3.3/ LIMITATIONS

Il y a deux limitations à notre méthode. La première est due à la difficulté de distinguer la configuration d'un atome du hérissément avec celle d'un atome qui capture les détails. Lorsque l'une de ces configurations est détectée, nous avons choisi de ne pas absorber l'atome s'il n'est pas possible de trouver une racine liée de rang 1 (voir la figure 4.9). Ainsi, les détails ne disparaissent pas du squelette nettoyé, comme c'est le cas pour les autres méthodes. Cependant, notre méthode peut laisser quelques atomes du hérissément. Pour résoudre cette limitation, il est nécessaire de construire une meilleure caractérisation des atomes du hérissément, sans doute en considérant plus de données que les positions des atomes liés.

La seconde limitation est liée à la valeur de l'unique paramètre κ de notre méthode. Pour $\kappa = 0.005$, les amas disparaissent sans déplorer la moindre perte de détail. Cependant, pour des plus grandes valeurs, comme $\kappa = 0.05$, nous observons la disparition de petites composantes squelettiques lors de la structuration des amas. De plus, avec une telle valeur de κ , le résultat devient dépendant de l'atome sélectionné au sein d'un amas pour être le représentant unique de cet amas. Pour toutes les stratégies de sélection expérimentées (l'atome au plus grand rayon, l'atome le plus à l'intérieur, le plus à l'extérieur, le plus centré) nous remarquons une perte de détail ou une variation de la géométrie contenue dans le squelette. Nous recommandons alors de conserver la valeur $\kappa = 0.005$ pour utiliser notre méthode de structuration des amas.

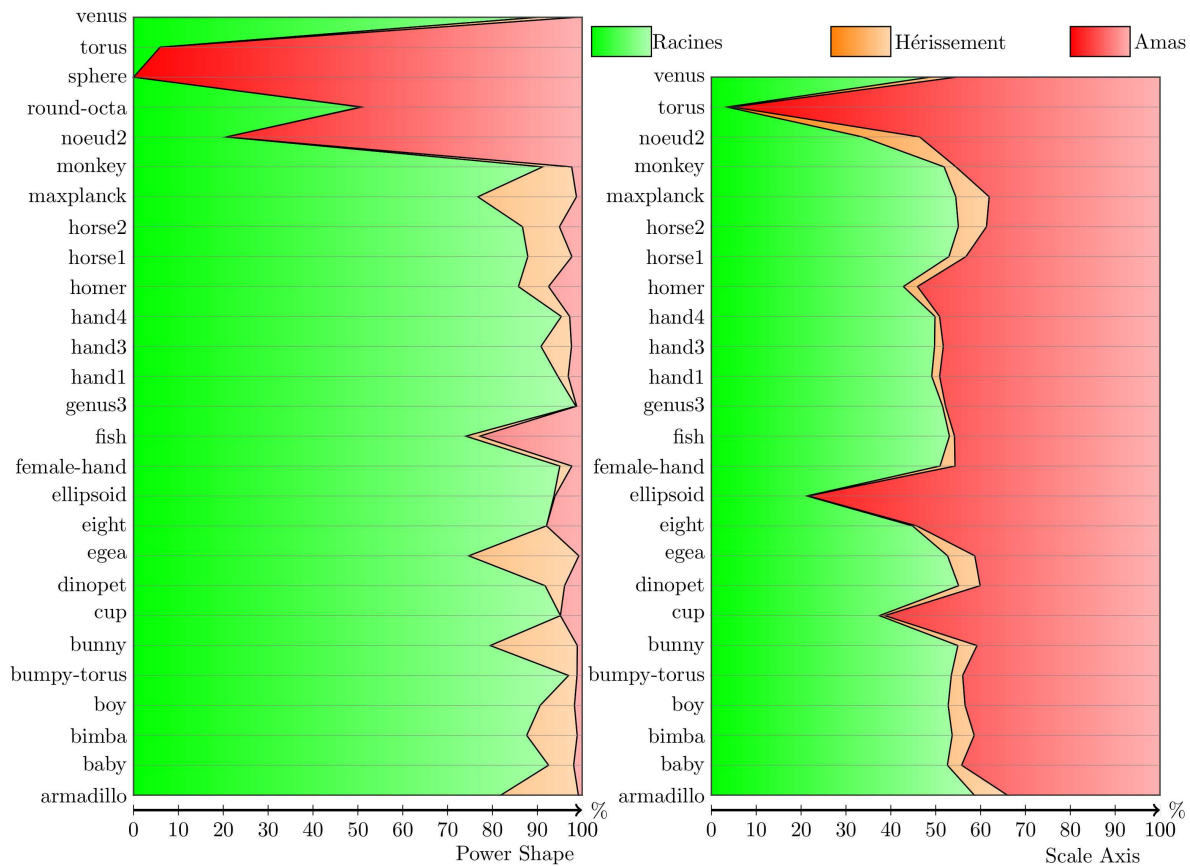


FIGURE 4.14 – Analyse du bruit squelettal contenu dans les squelettes Power Shape et Scale Axis. Les graphiques représentent le pourcentage d'atomes appartenant aux amas (en rouge) et au hérissément (en orange), identifiés par notre méthode. Les zones vertes correspondent aux atomes utiles à la description d'une forme dans les squelettes.

Notre méthode nécessite une structure squelettale. Un squelette sans structure squelettale perd beaucoup de son intérêt, à cause du lien entre composantes squelettales et composantes logiques. Sans cette structure, il n'est pas possible d'utiliser le potentiel intuitif d'un squelette. De plus, il est aisé de calculer cette structure squelettale lors d'une squelettisation [Amenta 2001a, Telea 2012, Jalba 2013]. Nous ne considérons donc pas la nécessité d'une structure squelettale comme une limitation de notre méthode de régularisation.

CONCLUSION

Les squelettes contiennent deux types d'atomes qui ne décrivent pas la géométrie de la forme. Le premier type, appelé amas, correspond à la duplication d'un atome théorique à cause de l'imprécision d'une squelettisation. Chaque copie de cet atome théorique ajoute la même donnée géométrique que toutes les autres, ce qui en fait un atome inutile. Le second type est lié à la difficulté de faire la distinction entre une partie lisse de la forme et un détail de surface lors de la squelettisation. Des atomes ajoutent alors des petites sphères en une zone où la forme squelettisée est lisse. Ces atomes donnent une apparence hérissée à la structure squelettale et sont nommés atomes du hérissément. Ces deux types d'atomes sont alors inutiles à la description d'une forme par un squelette : il s'agit du bruit squelettal.

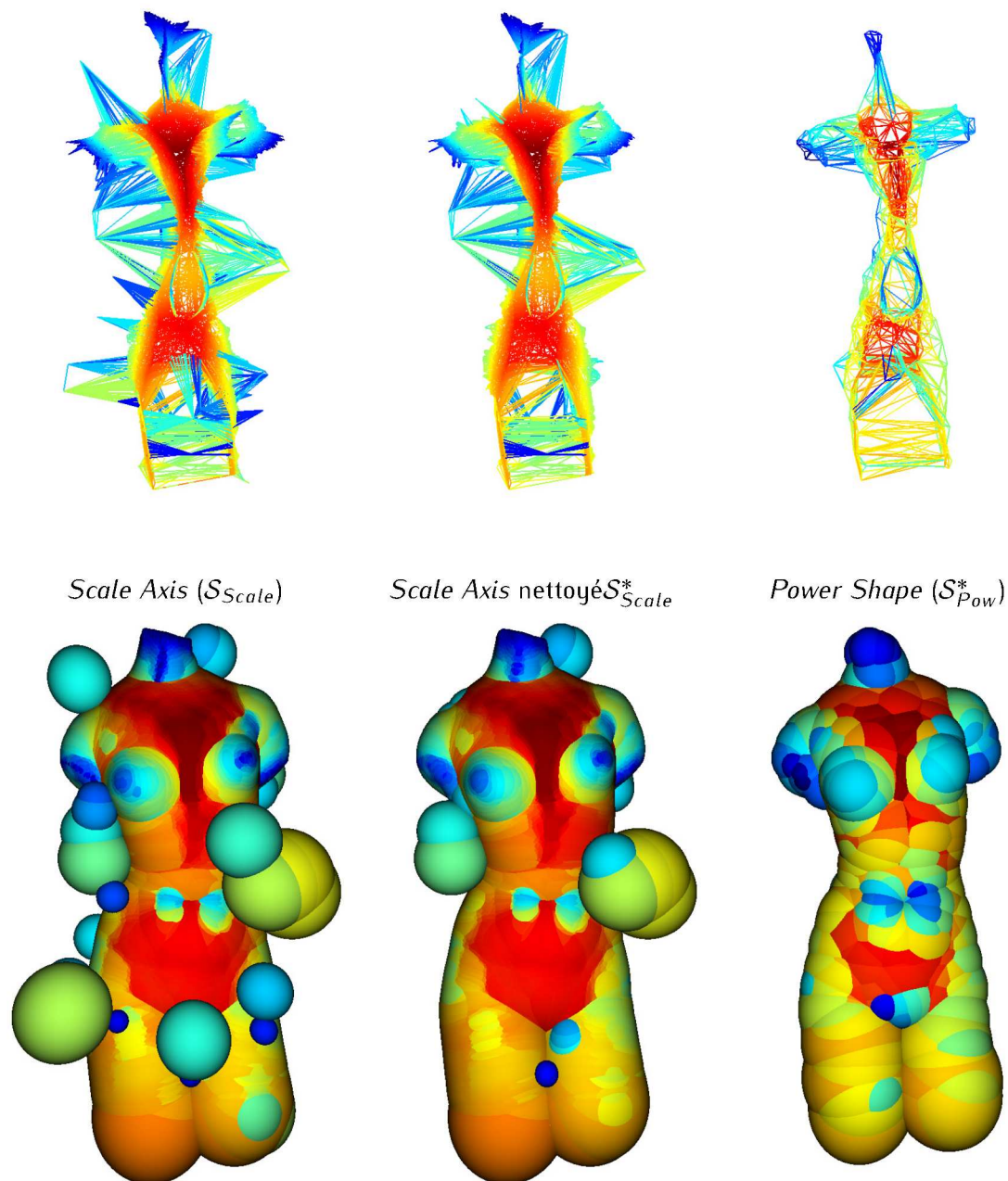


FIGURE 4.15 – Illustration de la faible qualité d'un squelette Scale Axis sur le modèle venus. La ligne du haut présente les structures squelettiques et celle du bas les unions de sphères. Malgré une régularisation complexe, un temps de calcul nettement plus long et un bien plus grand nombre d'atomes, le squelette Scale Axis capture moins bien la géométrie qu'un squelette Power Shape et possède 51% d'atomes inutiles. Même sur un squelette de cette faible qualité, notre méthode réduit le bruit squelettal.

Supprimer le bruit squelettal permet de réduire la complexité d'un squelette et d'améliorer sa capacité de reconstruction. Les méthodes qui suppriment le bruit squelettal procèdent en calculant l'importance d'un atome. Si cet atome a une importance inférieure à un seuil, les méthodes existantes le retirent. Ces méthodes ne font cependant pas toujours la différence entre un atome du bruit squelettal et un atome qui décrit un détail de la forme. En effet, l'importance calculée sur un atome de détail est parfois plus faible qu'un atome qui est inutile à la description de la forme. Il s'ensuit une disparition des détails alors que le bruit squelettal demeure. De plus, ces méthodes prennent toutes place à l'intérieur d'un algorithme de squelettisation, car elles requièrent des données qui ne peuvent être calculées qu'à partir de la forme. Enfin, ces méthodes ignorent, pour la plupart, la présence des amas.

Dans ce chapitre, nous avons proposé une identification du bruit squelettal grâce à des critères qui analysent la configuration locale d'un atome. Nous regardons le volume que la sphère d'un atome ajoute à celle d'un autre atome pour détecter les amas et nous cherchons les atomes dont les positions sont excentrées par rapport à celles de leurs atomes liés pour le hérissément. En n'utilisant pas de critère d'importance pour effectuer cette identification, nous permettons la suppression du bruit squelettal sans perte de détails. Ceci a été prouvé par des comparaisons chiffrées entre les squelettes initiaux et les squelettes nettoyés par notre méthode : la capacité de reconstruction reste la même ou augmente. Nous retirons un bruit squelettal correspondant à 21% des atomes d'un squelette *Power Shape* et 52.2% des atomes d'un squelette *Scale Axis*. Ces valeurs montrent l'efficacité de notre méthode sur ces squelettes déjà nettoyés par des méthodes existantes. Ces valeurs montrent aussi que les squelettes *Scale Axis* sont plus bruités que les squelettes *Power Shape*. Enfin, comme la majorité de ces atomes inutiles fait partie des amas, cela justifie l'intérêt que nous avons porté à ce type de bruit souvent ignoré.

Nous avons présenté un modèle de squelette hiérarchique, ainsi que les opérations de structuration par rang. Ces opérations de structuration nous ont permis d'isoler le bruit squelettal des atomes qui décrivent la géométrie du squelette. Dans le chapitre suivant, nous poursuivons l'utilisation de ce modèle, en proposant d'autres opérations de structuration qui construisent un squelette multi-échelle.

STRUCTURE SQUELETTALE

INTRODUCTION

Nous pouvons maintenant habiller et nettoyer un squelette de manière efficace. Un squelette peut donc être utilisé comme un MRF. Cependant, la structure squelettale actuelle ne permet toujours pas d'exploiter toutes les possibilités de ce modèle. Ce problème freine l'utilisation d'un squelette pour des interactions directes et intuitives avec des formes. Dans les chapitres précédents, nous avons mis en évidence la nécessité d'identifier les composantes squelettiques d'un squelette, d'identifier ses bords et de le hiérarchiser de sorte que sa racine soit un squelette courbe. Pour réaliser ces tâches, nous ne disposons que des liens entre atomes qui ne suivent aucune règle et un ensemble de sphères. Dans ce chapitre, nous commençons par proposer deux méthodes qui identifient les bords d'un squelette : l'une par voxellisation de la structure squelettale et l'autre par projection dans un plan. Nous construisons, grâce à ces bords, un algorithme de feu de prairie qui ne peut pas se propager d'une composante squelettale à une autre. Les dates où ce feu rencontre les positions des atomes fournissent une importance des atomes qui croît de manière monotone vers l'intérieur du squelette. Ces dates permettent également des premiers résultats sur la détection des jonctions entre les composantes squelettiques. Cette importance nous permet de hiérarchiser le squelette, en reprenant le modèle hiérarchique du chapitre précédent. La hiérarchisation se fait en contractant les composantes du squelette, jusqu'à obtenir un squelette courbe : le meso-squelette. Chaque partie caractéristique de la forme ou du squelette est associée à une courbe du meso-squelette. À terme, nous pourrions obtenir les composantes squelettiques, que ce soit avec notre identification des bords et des jonctions du squelette, ou en développant les courbes du meso-squelette en composantes squelettiques grâce à la hiérarchie. Il sera alors possible de réorganiser les liens entre atomes pour obtenir une structure squelettale idéale.

5.1/ LES BORDS DU SQUELETTE

Toute notre approche du problème de la structure squelettale repose sur l'identification des bords du squelette. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, les bords sont les positions des atomes n'ayant pas de voisinage, sur la structure squelettale, homéomorphe à un disque ouvert (voir la définition de la section 2.20). Pour identifier les bords, nous devons donc être en mesure d'identifier le voisinage d'un atome et de détecter s'il est homéomorphe à un disque ouvert. Comment calculer cela alors que nous ne connaissons qu'une approximation des composantes squelettiques sous forme de liens ne suivant aucune règle ?

Nous savons que la structure squelettale converge, lorsque le nombre d'atomes augmente, vers l'organisation théorique des positions des atomes en courbes et surfaces [Amenta 2001b].

En particulier, les faces $\mathcal{F}$ formées par les cycles minimaux dans la structure squelettale convergent vers un assemblage de 2-variétés à bords (nous avons donné la définition d'une 2-variété à bords dans la section 2.20). Dans un tel cycle d'atomes $\mathcal{C} = \{(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, a_0)\}$, a_i et a_j sont liés si et seulement si $(a_i, a_j) \in \mathcal{C}$ (le cycle est dit sans corde), et $\forall i \neq j$ nous avons $a_i \neq a_j$ (le cycle est dit élémentaire). Pour identifier les bords, nous cherchons à extraire localement ces 2-variétés à bords à partir des faces $\mathcal{F}$ ¹. Cependant, ces faces forment une soupe de polygones, avec de très nombreuses intersections entre elles, et certaines faces ont des sommets sur différentes composantes squelettiques. Ce constat est rarement fait sur la structure squelettale, car il faut regarder attentivement la configuration des faces. C'est pourquoi le chaos de la structure squelettale est sous-estimé. Afin de bien comprendre la difficulté, nous renvoyons aux sections 2.3.3 et 1.1.2, ainsi qu'à la figure 5.1, qui illustre ce problème avec des exemples simples. Ainsi, même s'il semble aisé d'identifier visuellement les 2-variétés à bords grâce à $\mathcal{F}$, les informations à notre disposition ne le permettent pas directement. Il s'agit alors d'extraire de ces informations une organisation idéale des positions des atomes, afin de calculer les bords du squelette. Pour cela, nous proposons deux méthodes : en utilisant une voxellisation de la structure squelettale ou en la projetant dans un plan tangent.

La voxellisation de la structure squelettale permet d'obtenir une autre discrétisation des composantes squelettiques. L'intérêt par rapport aux faces formées par les cycles minimaux est que nous obtenons directement une structure squelettale organisée en courbes et en surfaces, grâce aux voxels. Aussi, dans l'espace $\mathbb{Z}^3$ des voxels, la connexité définit simplement le voisinage d'un élément de la structure squelettale. Nous choisissons la 26-connexité, car elle offre un bon compromis entre le nombre de directions possibles et le nombre de configurations de voisinages. Deux voxels sont alors voisins s'ils ont au moins un sommet commun. Les positions du squelette exact se trouvent à une distance maximale ϵ de la structure squelettale. La semi-continuité de la squelettisation [Attali 2009] nous indique que ϵ diminue lorsque le nombre d'atomes augmente. La valeur ϵ diminue d'autant plus en supprimant le hérissément de la structure squelettale, grâce à la technique présentée dans le chapitre 4. Expérimentalement, pour des formes dont on connaît le squelette exact, ϵ est très faible par rapport au rayon maximal des atomes. La voxellisation représente un volume dans lequel est contenue la structure squelettale. Si la taille des voxels est d'un ordre de grandeur supérieur à ϵ , cette voxellisation contiendra également la structure squelettale théorique. La voxellisation du squelette théorique serait donc la même² que celle du squelette pratique. Ainsi, à l'aide d'une voxellisation de la structure squelettale, nous obtenons des courbes et des surfaces dans l'espace $\mathbb{Z}^3$, qui sont très proches des composantes squelettiques théoriques dans ce même espace.

Nous avons noté que localement, l'œil humain reconstruisait des courbes et des surfaces à partir des faces formées par les cycles minimaux. Cela atteste d'une capacité à fusionner les différentes faces pour construire visuellement un voisinage. Dès lors, il nous est possible de percevoir les bords du squelette. Nous avons cherché à construire une méthode fondée sur ce processus. Fusionner correctement les faces dans l'espace $\mathbb{R}^3$ nous semblait impossible, à cause de l'absence d'organisation de ces faces. Nous avons alors remarqué qu'un voisinage, très local, d'une position p sur la structure squelettale (théorique ou pratique) est un plan. Pour la structure squelettale théorique, ce plan correspond au plan tangent à la structure squelettale en p . Notre idée est d'approcher ce plan tangent en pratique, puis d'y projeter

1. Comme les liens entre atomes et les faces $\mathcal{F}$ sont équivalents, nous désignerons sous l'expression *structure squelettale* l'un ou l'autre.

2. En conservant bien sûr la même grille plongée dans $\mathbb{R}^3$

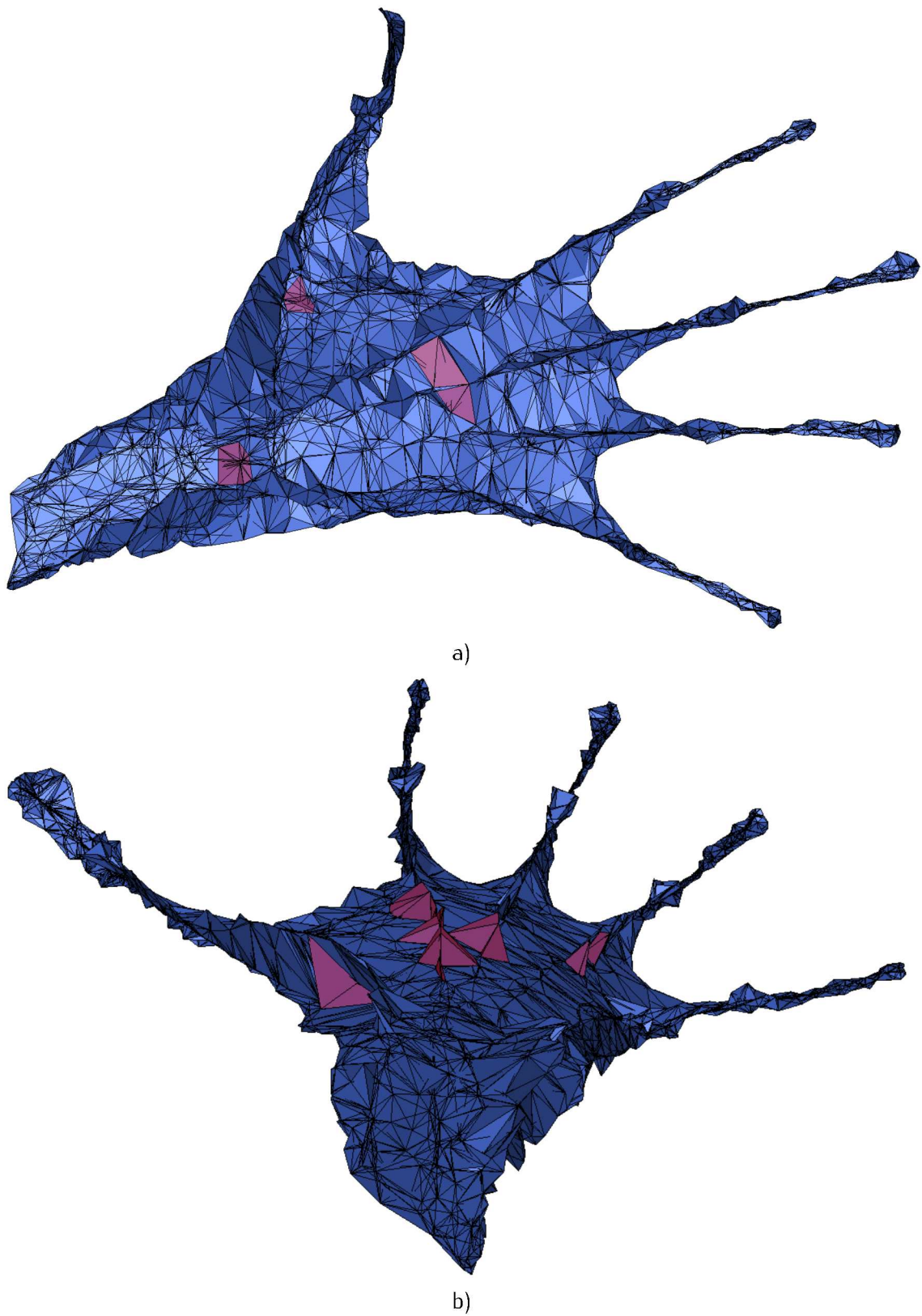


FIGURE 5.1 – Union des faces formées par les cycles minimaux dans la structure squelettale. Les faces en rouge indiquent des exemples a) d'intersections entre les faces et b) de faces reliant différentes composantes squelettiques.

les faces. En effet, dans ce plan il est beaucoup plus aisé de fusionner les faces pour former un voisinage de p et de repérer si ce voisinage est homéomorphe à un disque ouvert.

5.1.1/ IDENTIFICATION PAR VOXELLISATION

La voxellisation de la structure squelettale permet d'obtenir les courbes et les surfaces des composantes squelettiques dans l'espace $\mathbb{Z}^3$, sous la forme d'un ensemble de voxels. Comme la structure squelettale a le même type d'homotopie que la forme (voir la définition dans la section 2.20), l'ensemble de voxels doit avoir le même type d'homotopie que la forme. En particulier, il ne doit pas avoir de trous dans l'ensemble de voxels là où il n'y a pas de cavité dans la forme. Nous nous en assurons lors de notre étape de conversion de la structure squelettale en voxels. Le résultat est alors considéré comme la structure squelettale du squelette exact dans $\mathbb{Z}^3$. Nous appliquons ensuite sur cette voxellisation la définition des bords du squelette afin de les calculer.

5.1.1.1/ VOXELLISER LA STRUCTURE SQUELETTALE

Supposons que nous modifions quelque peu le squelette et que nous avons besoin de recalculer les bords. Si les bords changent à l'intérieur d'une zone n'ayant pas subi de modifications, les propriétés du squelette utilisant les bords (comme l'importance des atomes) vont changer dans cette zone. L'utilisateur sera alors surpris par une interaction différente avec la forme dans une zone qu'il n'a pas modifiée. Pour éviter des résultats contre-intuitifs, les bords doivent changer uniquement dans les zones modifiées. Par conséquent, deux structures squelettiques similaires doivent avoir des voxellisations similaires. La voxellisation peut fortement changer si on modifie l'orientation de l'espace $\mathbb{Z}^3$: la grille ne sera pas alignée sur les mêmes axes et la discrétisation sera donc différente, même si la structure squelettale n'a pas changée. C'est pourquoi nous devons orienter l'espace $\mathbb{Z}^3$ de sorte que deux structures squelettiques proches aient des orientations proches. Nous avons alors choisi d'utiliser les axes principaux des positions des atomes pour orienter cet espace.

Pour produire la voxellisation de la structure squelettale, nous construisons un arbre octal. Cela nous permet d'avoir un traitement rapide, grâce à la hiérarchisation spatiale, tout en restant simple. L'octant de la racine est donc orienté suivant les axes principaux des positions des atomes. Cet octant est suffisamment grand pour contenir toutes les positions des atomes. Les cellules de l'arbre octal sont itérativement subdivisées jusqu'à atteindre une profondeur fixée, tant que leur octant intersectent³ des données géométriques qui modélisent la structure squelettale. Lorsque l'octant d'une cellule intersecte des données géométriques, la cellule est dite active et ces données géométriques sont stockées à l'intérieur de la cellule. Les octants des cellules feuilles actives forment la voxellisation de la structure squelettale.

Nous devons choisir des données géométriques pour modéliser la structure squelettale. Ces données seront utilisées lors de la subdivision des cellules. Nous utilisons bien sûr les positions des atomes ainsi que les segments formés par les liens entre les atomes. Cependant, ces données doivent aussi permettre d'obtenir le même type d'homotopie que la forme, sinon le résultat n'est pas une discrétisation correcte de la structure squelettale. En particulier, nous devons éviter d'avoir des trous au sein de composantes surfaces ou encore des cavités entourées de voxels, si la forme – ou la structure squelettale – ne présente pas ce genre de

3. Pour éviter toute confusion, nous précisons ce que nous entendons par intersection. Une donnée géométrique D intersecte l'octant d'une cellule c si $D \cap \text{Octant}(c) \neq \emptyset$

configurations. Considérer uniquement les positions et les liens produirait alors ces trous : la voxellisation serait une discrétisation du graphe dont les nœuds sont les positions des atomes et les arêtes sont les liens entre les atomes. Nous prenons donc en compte les faces formées par les cycles minimaux dans la structure squelettale. Généralement, les liens entre atomes sont issus d'une triangulation des positions des atomes [Amenta 2001a, Telea 2012, Jalba 2013]. Les faces formées par les cycles minimaux sont alors les triangles donnés par les positions de tout triplet d'atomes deux à deux liés. Quatre de ces triangles peuvent former un tétraèdre : nous avons un quadruplet d'atomes (a, b, c, d) , tel que $a \frown b$ ⁴, $b \frown c$, $c \frown a$, $a \frown d$, $b \frown d$, $c \frown d$. Le volume à l'intérieur de ce tétraèdre n'est modélisé par aucune donnée géométrique. Cela peut donner lieu à une cavité dans la voxellisation, si les voxels ont une taille plus petite qu'un tel tétraèdre. C'est pourquoi nous considérons également ces tétraèdres en tant que données géométriques.

Le temps de calcul du test d'intersection entre un octant et une donnée géométrique n'est pas le même selon le type de la donnée. Dans l'ordre croissant des temps de calculs, nous avons le point, le segment, le triangle et le tétraèdre. Remarquons que si un point est à l'intérieur d'un octant, tout segment, triangle ou tétraèdre ayant ce point pour sommet intersecte également l'octant en question. Si un segment intersecte un octant, il en est de même pour les triangles et les tétraèdres ayant ce segment pour arête, et si un triangle intersecte un octant, tout tétraèdre ayant ce triangle pour face l'intersecte aussi. Ces relations entre les données géométriques permettent d'optimiser grandement la construction de la voxellisation. La figure 5.2 présente un exemple de voxellisation obtenue pour une structure squelettale.

5.1.1.2/ BORDS DE LA VOXELLISATION

Nous possédons une structure squelettale dans l'espace $\mathbb{Z}^3$ très proche de la structure squelettale exacte dans ce même espace. En particulier, l'ensemble de voxels est composé de courbes et de surfaces. Nous appliquons la définition des bords du squelette pour segmenter cette structure squelettale en voxels bords et voxels intérieurs. Les résultats de cette segmentation sont transférés au squelette analytique en donnant à un atome le label du voxel qui contient sa position. Ainsi, un atome bord est un atome dont la position est dans un voxel bord.

D'après la définition des bords du squelette, un voxel bord v est un voxel ayant soit un voisinage homéomorphe à un demi-disque fermé, soit homéomorphe à un intervalle fermé (sur une courbe). Les voisinages sont définis par la distance induite par la connexité que nous utilisons (la 26-connexité). Cette distance est la distance de Tchebychev d_{max} : $d_{max}(p, q) = \max \|p_i - q_i\|$. Nous utilisons les boules fermées centrées en v comme base de voisinage du voxel v . Une telle boule de rayon $r > 0$ ⁵ est donnée par l'équation : $\mathcal{B}(v)_r = \{\text{voxel } p : d_{max}(p, v) \leq r\}$. En particulier, les 26 voxels voisins de v sont les voxels à une distance de 1, soit les voxels sur la sphère unité centrée en v .

La principale difficulté est de détecter si le voisinage $\mathcal{V}$ d'un voxel v est homéomorphe à un demi-disque fermé. Notre raisonnement est le suivant : si $\mathcal{V}$ est homéomorphe à un demi-disque fermé, tout voisinage contenu dans $\mathcal{V}$ le sera également (voir l'exemple illustré par la figure 5.3). Aussi, lorsque $\mathcal{V}$ n'est ni homéomorphe à un demi-disque, ni homéomorphe à un intervalle fermé (une portion de courbe), tout voisinage contenant $\mathcal{V}$ ne l'est pas non plus.

4. Nous rappelons que la notation $a \frown b$ signifie que les deux atomes sont liés par un lien topologique.

5. Si nous considérons $r = 0$, le singleton $\{v\}$ serait un voisinage. Un tel singleton est homéomorphe à un disque ouvert. Par conséquent, aucun voxel ne serait un bord.

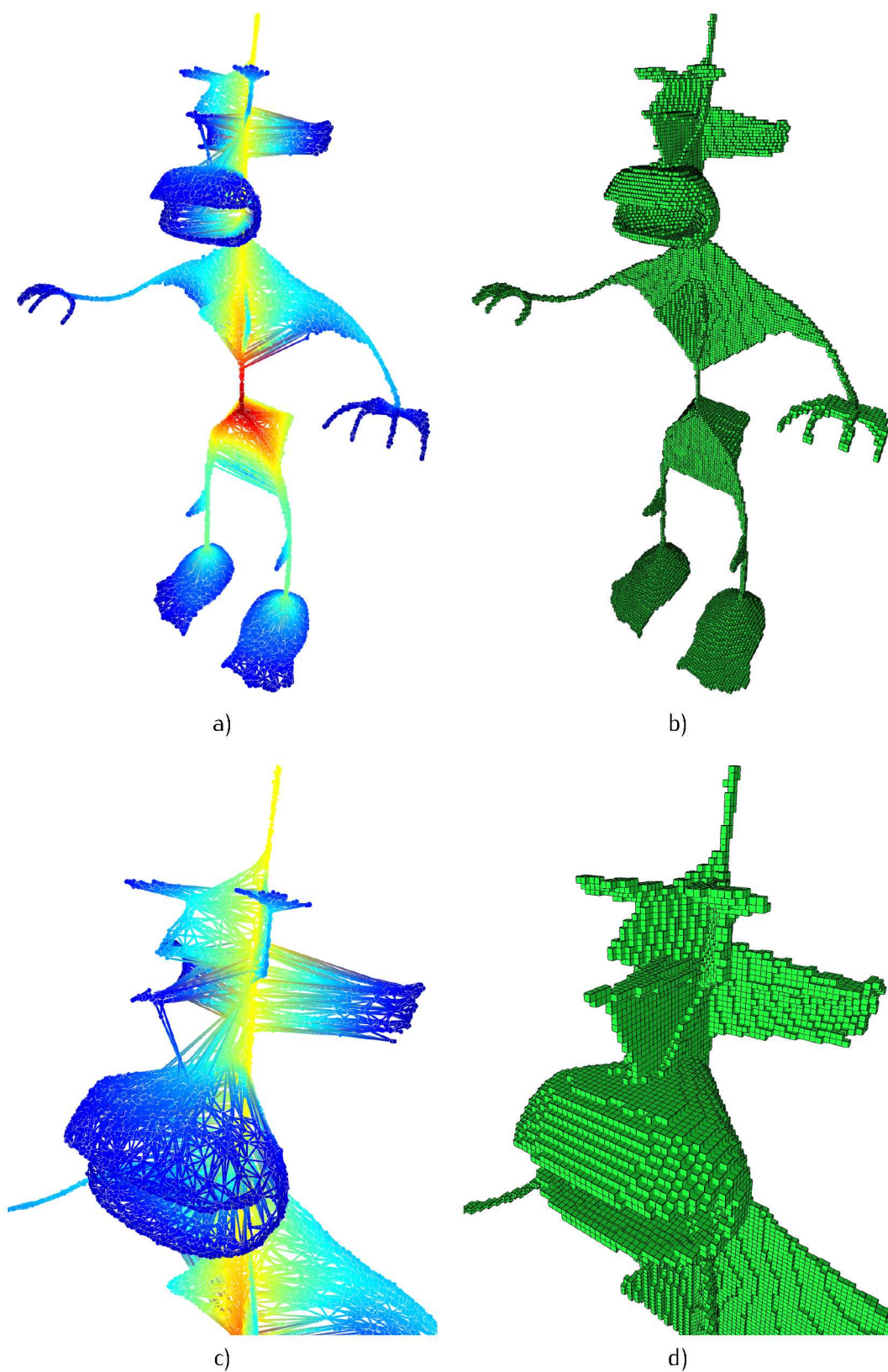


FIGURE 5.2 – Exemple de voxellisation d'une structure squelettale. a) Le squelette original. b) Sa voxellisation. c) et d) présentent un agrandissement respectivement du squelette et de la voxellisation au niveau de la tête. Dans le squelette, un espace vide apparaît au niveau du nez. Cependant, il existe un large triangle reliant des atomes de la bouche, du nez et du centre de la tête. C'est pourquoi il y a des voxels dans cette zone.

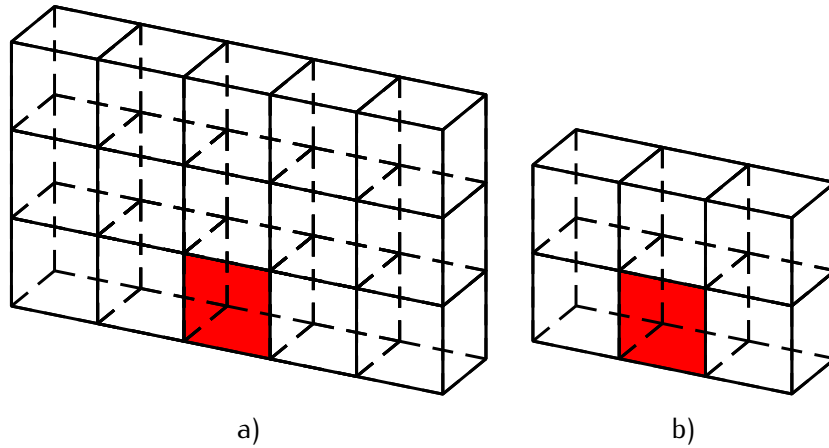


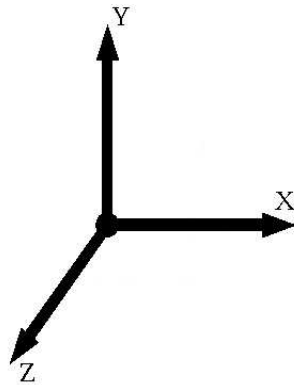
FIGURE 5.3 – Illustration d'une configuration de voxel bord. Le voxel bord v (en rouge) appartient à un ensemble de $n \times m \times 1$ voxels. a) Son voisinage, défini par la boule fermée de rayon 2, est homéomorphe à un demi-disque fermé. b) C'est aussi le cas pour son voisinage défini par la boule fermée de rayon 1, qui est un sous-ensemble du voisinage précédent.

Ainsi, nous pouvons nous concentrer sur les plus petits voisinages, soit regarder les voxels dans la boule unité. Le problème revient alors à analyser la configuration du voisinage $\mathcal{V}$, contenant au plus 27 voxels, pour détecter s'il est homéomorphe à un demi-disque fermé ou à un intervalle fermé.

Nous avons tenté de formaliser les configurations de $\mathcal{V}$ correspondant à un voxel bord. Cependant, les différentes méthodes n'étaient ni intuitives, ni concluantes. Nous nous sommes donc ramenés à un cas idéal : tous les voxels sont dans un même plan (comme dans la figure 5.3). Nous projetons les voxels de $\mathcal{V}$ dans les trois plans passant par v et orthogonaux à un des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^3$, notée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Pour expliciter ces projections, supposons que nous regardions la projection dans le plan orthogonal au vecteur $\vec{e}_x$. Un voxel $v + b \cdot \vec{e}_y + c \cdot \vec{e}_z$, avec $\{b, c\} \in \{-1, 0, 1\}^2$, fait partie de la projection dans le plan s'il existe un voxel $v + a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y + c \cdot \vec{e}_z$ dans la structure squelettale, avec $a \in \{-1, 0, 1\}$. Remarquons que le voxel v appartient toujours au plan. Dans un plan, seule une configuration homéomorphe à un disque (contenant 9 voxels distincts) ne correspond pas à un bord. S'il existe au moins un plan avec une configuration de bord, nous considérons que le voxel est un bord (voir la figure 5.4).

Bien que très simple, ce procédé fournit des résultats corrects (voir la figure 5.7 a) et c)), mais lorsque l'épaisseur locale de la structure squelettale est de plusieurs voxels, il arrive que les voxels contenus dans la boule unité ne soient plus suffisants pour analyser correctement le voisinage. Certains voxels sont alors détectés comme bords à cause du manque d'information lors de la détection : nous obtenons des faux positifs. La figure 5.5 illustre une de ces configurations de faux positif. Nous regardons 8 emplacements additionnels par projection pour traiter correctement ces configurations de voisinage. Pour le plan orthogonal à $\vec{e}_i$ (voir la figure 5.6), ces 8 emplacements sont sous la forme $v \pm 2 \cdot \vec{e}_i \pm \vec{e}_j \pm \vec{e}_k$. Nous notons $\mathcal{A}_i$ les voxels contenus dans ces emplacements pour le plan orthogonal $\vec{e}_i$.

Pour tester si v est un bord dans le plan orthogonal à $\vec{e}_i$, nous cherchons s'il est possible d'obtenir, par projection des voxels de $\mathcal{V} \cup \mathcal{A}_i$, une configuration homéomorphe à un disque. S'il n'est pas possible d'obtenir une telle configuration, v est un bord suivant ce plan. Expérimentalement, nous avons remarqué qu'il suffisait de considérer un seul voxel de $\mathcal{A}_i$ pour



	Voisinage	Suivant (Ox)	Projections Suivant (Oy)	Suivant (Oz)
a)				
b)				
c)				
d)				

FIGURE 5.4 – Analyse de la configuration du voisinage d'un voxel v (en rouge) par projection pour détecter un bord. Seuls les voisinages b) et c) correspondent à des voxels bords selon notre méthode. La repère présenté dans cette figure donne l'orientation du repère pour tous nos schéma sur les voxels de ce chapitre.

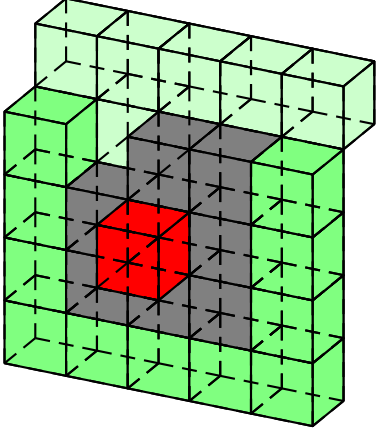
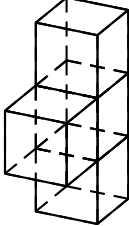
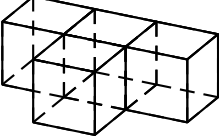
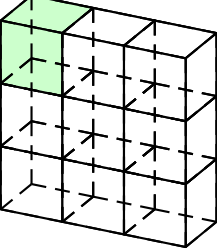
Voisinage	Projections		
	Suivant (Ox)	Suivant (Oy)	Suivant (Oz)
			

FIGURE 5.5 – Une configuration de faux positif dans la détection des bords. Si nous considérons uniquement les voxels de la sphère unité, le voxel v (en rouge) est détecté comme étant un bord, même s'il est en plein milieu d'une surface. Nous résolvons ce problème en considérant certains voxels de la sphère de rayon 2 (en vert). La projection suivant (Oz) est alors un disque : v n'est donc plus un bord.

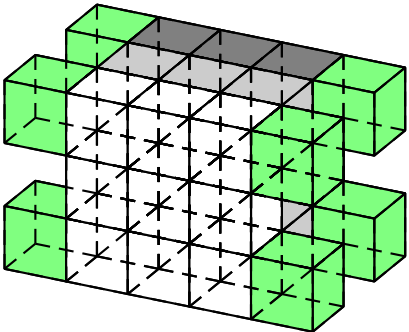
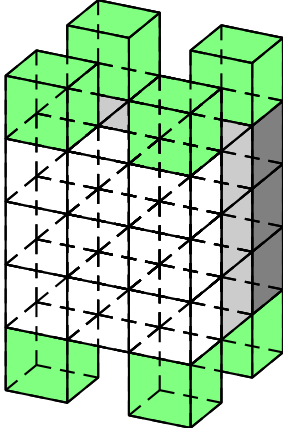
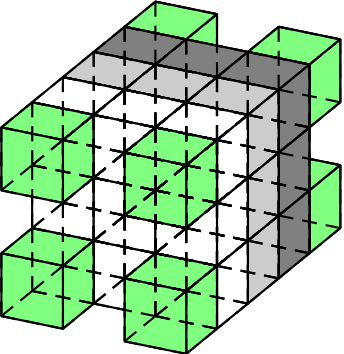
Suivant (Ox)	Projections	
	Suivant (Oy)	Suivant (Oz)
		

FIGURE 5.6 – Voxels considérés par projection pour la détection des bords sans faux positifs. Pour chaque projection, 8 emplacements additionnels (en vert) sont considérés en plus de ceux dans la boule unité.

résoudre le problème des configurations de faux positifs. Cette remarque est importante car lorsque plus d'un voxel de $\mathcal{A}_i$ doit être utilisé pour obtenir une configuration homéomorphe à un disque, certains voxels bords ne sont plus identifiés comme tels. Ainsi, nous autorisons l'utilisation d'au plus un voxel de $\mathcal{A}_i$ pour former le disque unité dans le plan. Le voxel v est un bord s'il existe au moins un plan dans lequel il est impossible de former le disque unité par projection. Nous obtenons alors une identification des bords de la structure squelettale dans l'espace $\mathbb{Z}^3$ sans faux positifs (voir les images b) et d) de la figure 5.7).

5.1.1.3/ RÉSULTATS

À défaut de posséder une autre méthode d'identification des bords du squelette, nous ne pouvons pas valider quantitativement nos résultats. Il existe une méthode de segmentation des surfaces discrètes [Malandain 1993] qui pourrait produire une détection des bords de la structure squelettale dans l'espace $\mathbb{Z}^3$. Nous n'avons eu connaissance de cette méthode qu'après la rédaction de ce mémoire ; il est prévu de réaliser une implantation logicielle de cette méthode pour l'utiliser dans la détection de bords et comparer les résultats avec notre approche. Dans ce contexte, nous avons choisi d'observer visuellement les résultats de notre méthode sur des squelettes de vingt-sept formes. Ces squelettes sont issus des méthodes de squelettisation *Power Shape* et *Scale Axis*, nettoyés par la méthode présentée au chapitre 4.

Pour nos expérimentations, nous avons choisi une taille de voxel inférieure à $\frac{r_{max}}{16}$, avec r_{max} le rayon maximal des atomes du squelette. Lors de la construction de notre arbre octal, nous définissons la profondeur maximale comme la plus petite profondeur où les octants ont un côté inférieur à $\frac{r_{max}}{16}$. Cette profondeur permet un bon compromis entre le nombre de voxels (influençant directement le temps de calcul de la détection des bords du squelette) et la qualité de la voxellisation (ensemble de voxels visuellement très proche de l'organisation en courbes et surfaces des positions des atomes). Avec cette taille de voxel, nous notons une forte proximité des bords obtenus sur les deux types de squelettes, malgré la variation de la densité des atomes entre ces deux types. C'est utile pour l'obtention de bords similaires sur différents squelettes d'une même forme. Cependant, nous verrons que cela ne s'applique qu'aux résultats sur la structure squelettale dans $\mathbb{Z}^3$, soit pour des squelettes images (voir les squelettes images dans la section 2.1.3.1).

Sur l'ensemble de voxels, l'identification des bords est visuellement correcte (voir les images a) et c) de la figure 5.8). L'usage des emplacements de voxels additionnels permet d'éviter les faux positifs dans l'identification des bords. Cela rend les résultats beaucoup plus fiables pour le calcul d'une importance des atomes croissant de manière monotone vers l'intérieur du squelette. En effet, le feu de prairie que nous utiliserons pour calculer cette importance commencera aussi à partir de ces faux positifs, propageant vers l'intérieur du squelette une erreur sur la date où le feu rencontre la position d'un atome.

Les atomes bords détectés (ayant leur position dans un voxel bord) sont en règle générale satisfaisants. L'inconvénient majeur de cette méthode est sa dépendance à une voxellisation et en particulier le transfert du résultat sur la voxellisation vers le squelette analytique. Il est possible d'avoir des voxels bords qui ne contiennent aucune position d'atome. Cela est par exemple le cas dans le cercle de l'image d) de la figure 5.8, qui survient lorsque seuls des segments, des triangles ou des tétraèdres intersectent les voxels. Les bords sur le squelette peuvent alors être clairsemés, selon la configuration des positions d'atomes dans les voxels bords. Une solution pourrait être de regarder les liens qui intersectent les voxels bords et d'identifier comme bords les atomes dont les positions sont reliés par ces liens. Cependant, à

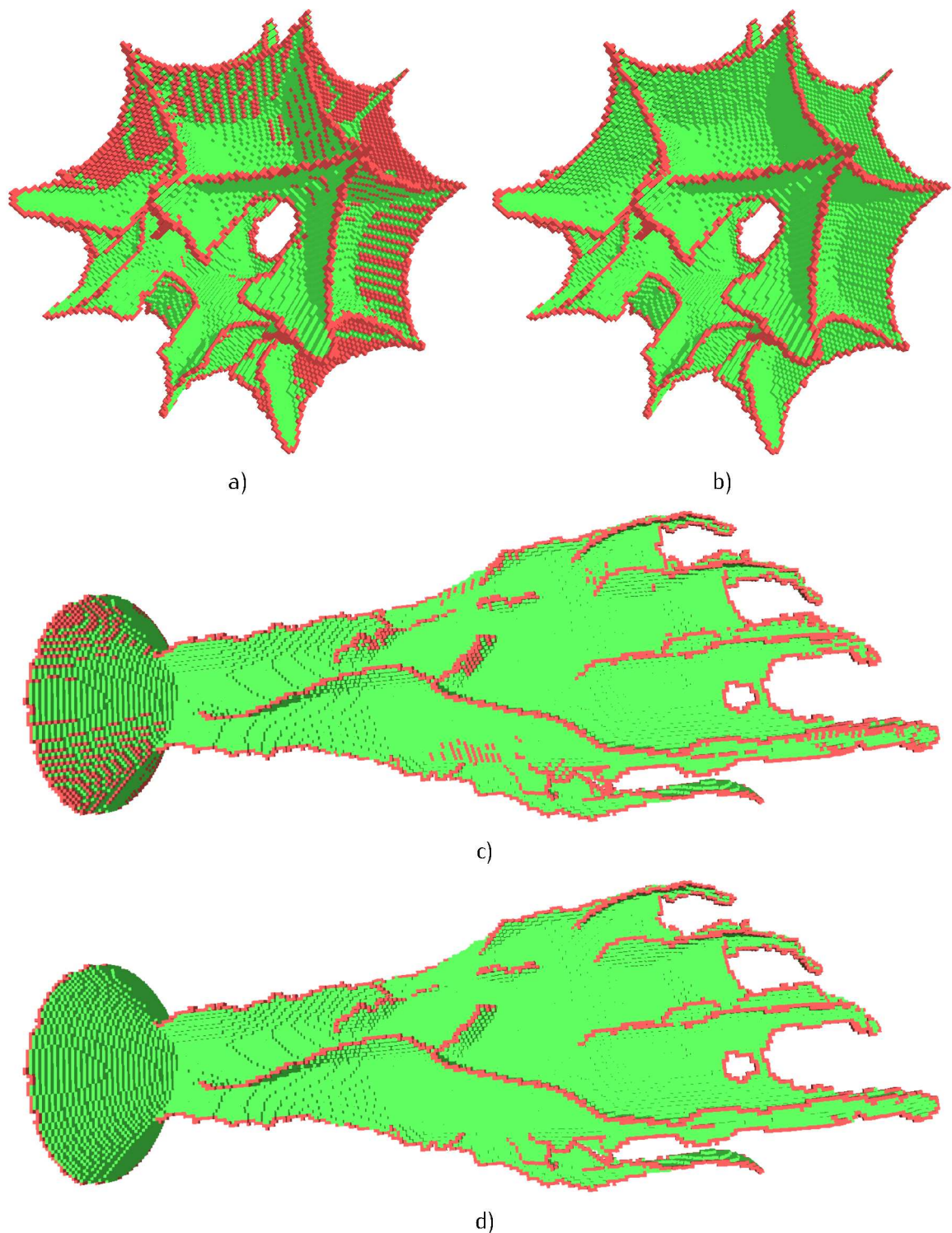


FIGURE 5.7 – Suppression des faux positifs dans l'identification des voxels bords (en rouge). Les résultats en a) et c) présentent un grand nombre de voxels identifiés comme bords alors qu'ils n'en sont pas. b,d) En considérant un voxel additionnel hors de la boule unité par projection, ces faux positifs disparaissent.

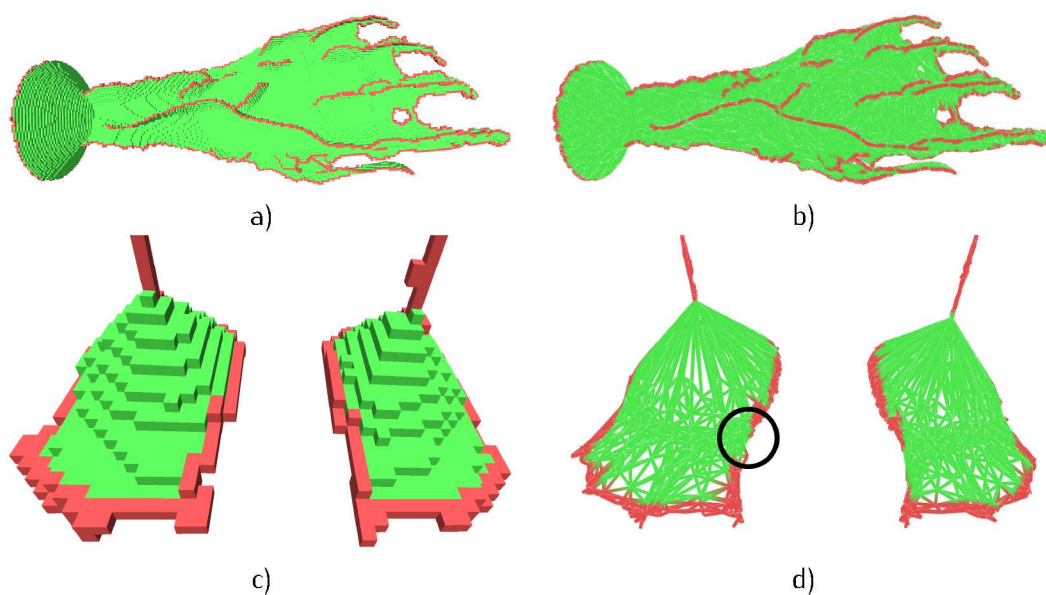


FIGURE 5.8 – Résultats de l'identification des bords du squelette grâce à une voxellisation. a,c) Voxellisations utilisées. b,d) Atomes bords.

cause du grand chaos au niveau des liens, les résultats sur le squelette analytique seraient peu pertinents. En effet, un atome au niveau du bord peut être lié avec un atome relativement éloigné du bord. Si ce lien intersecte un voxel bord, alors l'atome éloigné sera identifié comme bord également. Un autre problème survient lorsque plusieurs atomes ont leur position au sein du même voxel. Dans ce cas, on obtient de larges bandes d'atomes bords sur le squelette (voir l'image d) de la figure 5.8). Selon l'utilisation des bords du squelette, ces bandes de bords et ces trous dans les bords, peuvent être indésirables. Par exemple, pour le calcul de l'importance, tous les atomes de ces larges bandes auraient la même importance (une importance de 0 dans ce cas). Cela nous gênerait pour identifier le meso-squelette, car nous obtiendrions des composantes surfaces lors de la hiérarchisation (plus de détails dans les sections 5.2 et 5.3).

Trouver une voxellisation qui discrétise correctement la structure squelettale théorique, tout en s'assurant d'avoir une seule position d'atome dans tous les voxels bords, nous semble irréalisable. Ainsi, ce problème de transfert des résultats au squelette analytique existerait toujours. C'est pourquoi nous recommandons l'usage de cette méthode sur les squelettes images uniquement. Pour les squelettes analytiques, nous conseillons d'utiliser notre seconde méthode d'identification des bords, qui repose sur la projection dans un plan tangent.

5.1.2/ IDENTIFICATION PAR PROJECTION DANS UN PLAN TANGENT

Dans la précédente méthode, des plans nous ont permis d'analyser simplement la configuration d'un voisinage, afin de détecter les bords du squelette. Aussi, des plans tangents jouent un rôle dans la perception des bords à partir de la structure squelettale (voir la figure 5.9). Ces plans tangents sont utilisés afin de reconstruire localement des courbes et des surfaces approchées par les faces de la structure squelettale. Notre seconde méthode s'appuie alors sur ces plans tangents, pour simplifier localement la configuration des faces et identifier les bords d'une manière similaire au processus visuel.

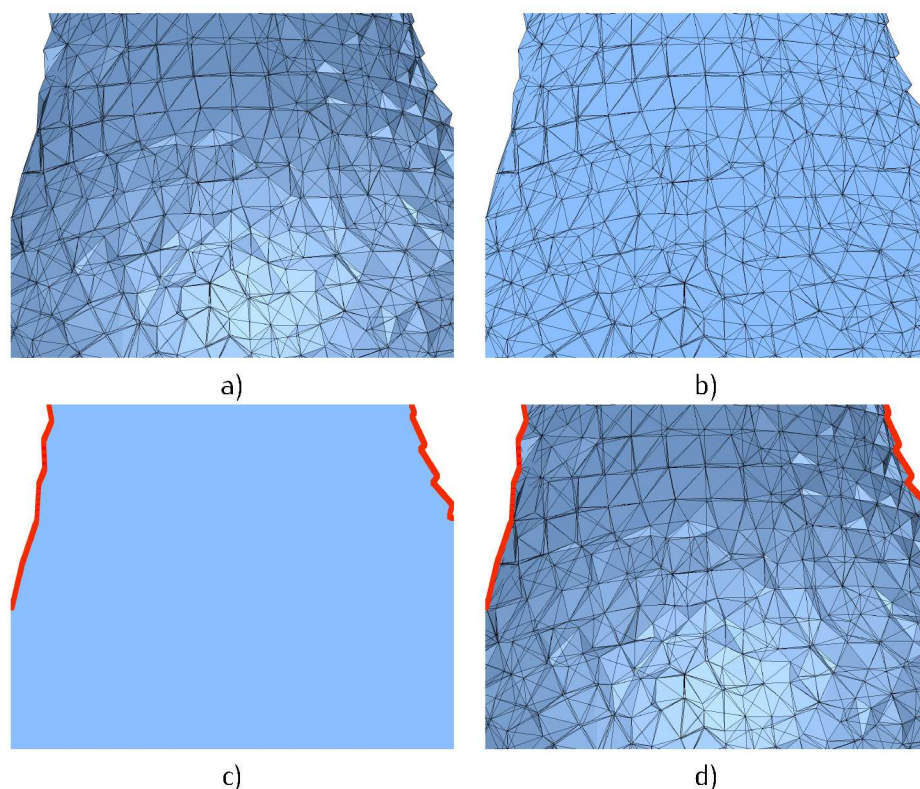


FIGURE 5.9 – Illustration du processus de perception visuelle des bords du squelette. a) Faces formées par les cycles minimaux de la structure squelettale. b) Localement, ces faces donnent l'illusion d'une surface plane. c) Dans le plan de la surface, les bords du squelette seraient les contours (en rouge) de la surface. d) Ces bords sont reprojétés sur la structure squelettale.

Supposons que nous connaissions un voisinage $\mathcal{V}$ d'un atome a de position p sur la structure squelettale. Nous proposons de projeter dans un plan les faces ayant pour sommets uniquement des positions d'atomes dans $\mathcal{V}$. Le plan en question est une approximation du plan tangent à la structure squelettale au niveau de p . Notre hypothèse est que a est un bord si et seulement si p appartient au contour du polygone $\mathcal{P}$ formé par l'union des faces projetées dans le plan. Dans le cas d'un bord, $\mathcal{P}$ correspond à la définition intuitive d'un voisinage homéomorphe à une demi-disque fermé.

Pour réaliser une implantation logicielle et valider notre hypothèse, il faut définir le voisinage d'un atome sur la structure squelettale et le plan tangent à utiliser pour la projection. Le plan tangent est calculé par l'extraction des axes principaux de l'ensemble $\mathcal{E} = \{\text{POSITION}(a)\} \cup \{\text{POSITION}(b) : a \frown b\}$. Si $\mathcal{E}$ ne contient pas suffisamment de points pour calculer les axes principaux (il faut au moins trois points), nous utilisons les positions des atomes de $\mathcal{V}$. Il est important d'utiliser en priorité les atomes liés pour calculer les axes principaux. En effet, utiliser les atomes du voisinage peut mener à une situation où le plan calculé n'est plus tangent en p , ce qui masque le fait que l'atome a soit un bord (voir la figure 5.10). Le voisinage $\mathcal{V}$ doit lui aussi être choisi avec soin pour détecter correctement les bords. Par exemple, si trop peu d'atomes font partie du voisinage, un atome peut être faussement identifié comme étant un bord, car certaines faces ne sont pas considérées (voir le cas simple de la figure 5.11).

Pour choisir le voisinage, nous construisons d'abord un voisinage géométrique de l'atome a :

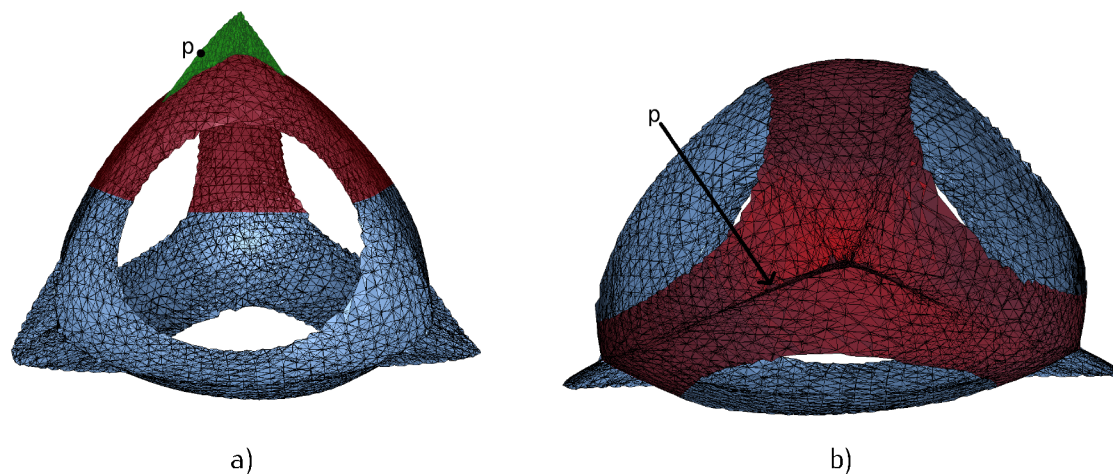


FIGURE 5.10 – Effets de l'utilisation des atomes du voisinage pour extraire les axes principaux de leurs positions et calculer le plan tangent. a) La position p de l'atome a est au bord d'une petite composante squelettale (en vert). Le voisinage est constitué de la structure squelettale représentée en vert et en rouge. b) Le plan tangent calculé est orthogonal à l'axe de vue de cette image. Le point p est donc à l'intérieur du polygone $\mathcal{P}$ formé par la projection du voisinage dans ce plan. Pour ce plan et ce voisinage, l'atome a n'est pas un bord.

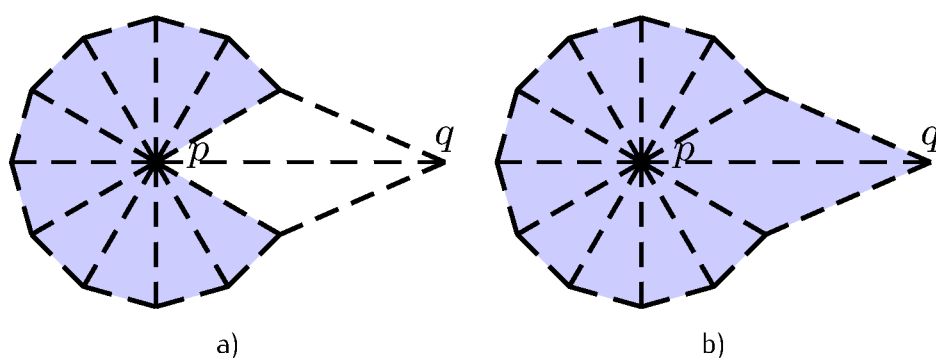


FIGURE 5.11 – Effets de l'utilisation d'un trop petit voisinage pour détecter si l'atome a est un bord. Les liens entre atomes sont représentés en pointillés. a) Premier voisinage qui ignore l'atome de position q . Après projection, la position p de a est sur le contour du polygone $\mathcal{P}$: a est un bord. b) Second voisinage qui inclut l'atome de position q . Ce voisinage place p à l'intérieur de $\mathcal{P}$: a n'est pas un bord.

un ensemble d'atomes qui capturent la géométrie de la forme autour de a . En considérant la restriction de la structure squelettale aux positions des atomes de ce voisinage géométrique, nous obtenons un voisinage topologique de l'atome. Ce voisinage topologique correspond au voisinage $\mathcal{V}$ que nous cherchons. Nous montrons que le voisinage ainsi défini est adapté à l'identification des bords.

5.1.2.1/ VOISINAGES GÉOMÉTRIQUE ET TOPOLOGIQUE D'UN ATOME

Notre hypothèse sur la configuration des bords nécessite de définir un voisinage sur la structure squelettale, que nous appelons **voisinage topologique**. À cause de la complexité de la structure squelettale, définir ce type de voisinage n'est pas aisé. De plus, nous avons vu qu'une taille inadaptée du voisinage topologique pouvait fausser les résultats dans l'identification des bords. Pour résoudre ces difficultés, nous nous sommes d'abord intéressés au **voisinage géométrique**. Un tel voisinage capture l'apparence locale de la forme autour de l'atome a . Pour construire ce voisinage, il suffit de raisonner sur les sphères des atomes. Une fois ce voisinage obtenu, nous utilisons le lien entre les composantes logiques et les composantes squelettales pour définir le voisinage topologique : nous prenons la restriction de la structure squelettale aux atomes du voisinage géométrique. Nous nous attendons à ce que le voisinage topologique ainsi obtenu soit adapté à nos besoins. Bien que ces deux voisinages représentent des choses différentes, il est trivial de passer de l'un à l'autre. Nous pouvons ainsi utiliser seulement le terme de voisinage pour se référer à l'un d'eux.

Supposons que l'atome a contribue à la description d'une partie de la tête d'un personnage. Un voisinage géométrique de cet atome peut avoir différentes tailles. Lorsque la taille de ce voisinage augmente, les atomes sont ajoutés de sorte à capturer une géométrie de moins en moins locale. Les composantes logiques de la forme sont représentées de proche en proche, en augmentant progressivement la distance géodésique à la partie de la tête décrite par a . Les atomes de la tête sont donc d'abord ajoutés, puis le cou et le torse, ensuite les bras et enfin les mains. Cet ordre est important, sinon nous pouvons obtenir un voisinage géométrique contenant des atomes qui décrivent des parties disjointes de la forme (par exemple, ajouter les atomes des mains avant ceux de la tête).

Dans notre exemple, il n'est certainement pas nécessaire de considérer les mains du personnage pour étudier la géométrie locale de la tête. De plus, il est possible qu'après projection dans le plan tangent, la position p soit à l'intérieur d'une face de la structure squelettale des mains (voir la figure 5.12). Il est donc nécessaire de limiter la taille du voisinage afin d'éviter cette situation. L'idéal serait de ne considérer que des atomes décrivant la même composante logique que a . Dans le chapitre 3, nous avons utilisé l'intersection entre les sphères de deux atomes pour s'assurer que ces deux atomes appartiennent à la même composante logique. Nous rappelons que dans ce chapitre 3, nous ne possédions pas une segmentation en composantes logiques, mais que les résultats étaient satisfaisants. En effet, cette méthode simple nous permettait d'éviter des mélanges indésirables entre différentes composantes logiques dans l'habit. Nous utilisons le même principe ici en ne considérant que des atomes dont les sphères intersectent celle de a .

La taille du voisinage influence directement le temps de calcul pour détecter les bords. Ce calcul sera notamment répété un grand nombre de fois lors de l'obtention de l'importance des atomes, dans la section 5.2. Pour construire des applications interactives, nous avons tout intérêt à réduire au maximum le temps de calcul, en ajustant la taille du voisinage. Nous ajoutons alors une limite sur la distance entre la position d'un atome du voisinage et p . Dans

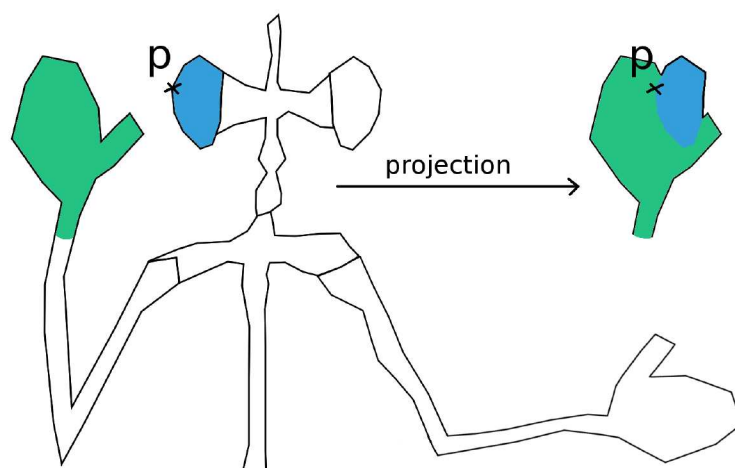


FIGURE 5.12 – Problème du mélange des composantes squelettiques dans le plan lorsque l'atome a est un bord. Le voisinage considéré contient les atomes de l'oreille (en bleu) et d'une partie de la main (en vert). Lorsque les faces de ce voisinage sont projetées dans le plan, la position p de a se retrouve à l'intérieur du polygone : a n'est pas détecté comme étant un bord.

les zones de faible épaisseur locale, les composantes squelettiques ont une faible épaisseur⁶. Dans ces zones, la limite de distance doit être suffisamment faible pour ne pas considérer trop d'atomes appartenant à d'autres composantes squelettiques. Pour adapter la limite de distance à l'épaisseur locale de la forme, nous utilisons le rayon de l'atome a : un atome du voisinage géométrique doit avoir sa position à une distance de p inférieure à $\kappa \cdot \text{RAYON}(a)$. Le paramètre $\kappa \geq 0$ contrôle la taille du voisinage alors que $\text{RAYON}(a)$ représente l'épaisseur locale de la forme.

À cause de la variation de la densité des atomes dans un squelette, il est possible qu'une valeur de κ , adaptée à la majorité des atomes dans la majorité des squelettes, soit telle que $\kappa \cdot \text{RAYON}(a)$ conduise à la situation d'un voisinage trop petit, comme dans l'image 5.11 a). Nous avons rencontré ce cas lorsque localement la densité d'atomes est beaucoup plus faible qu'ailleurs sur un squelette. Pour éviter cette situation, nous étendons notre voisinage aux atomes qui sont liés à ceux qui sont déjà contenus dans le voisinage. Après toutes ces remarques, notre voisinage géométrique de l'atome a est défini comme l'ensemble des atomes s tels que :

1. il existe un atome s' lié à s ,
2. les sphères de s' et a s'intersectent
3. $\|\text{POSITION}(s') - \text{POSITION}(a)\| < \kappa \cdot \text{RAYON}(a)$.

Comme le montre la figure 5.13, les voisinages géométrique et topologique correspondent à ce que nous cherchions pour tester notre hypothèse sur les configurations d'atomes bords. Nous pouvons déjà remarquer visuellement que l'hypothèse semble valide. En effet, l'atome a a sa position p sur le contour de $\mathcal{P}$ uniquement quand a est un bord du squelette, et ce pour toutes les valeurs non nulles de κ . Pour valider définitivement notre hypothèse et obtenir une

6. Toute composante squelettique doit être incluse dans l'union des sphères de ses atomes, car le squelette est intérieur. Ainsi, l'épaisseur locale d'une composante est limitée par l'épaisseur locale de la forme.

identification automatique des bords du squelette, il nous reste à construire une méthode qui détecte si l'atome a a sa position sur le contour de $\mathcal{P}$.

5.1.2.2/ CONTOUR DU POLYGONE $\mathcal{P}$

Nous possédons un graphe planaire $\mathcal{G}_\kappa(a)$ qui correspond à la projection des positions des atomes du voisinage de a dans le plan tangent ainsi que les liens entre ces atomes. Le polygone $\mathcal{P}$ est défini par l'union des faces formées par les cycles minimaux dans ce graphe. Pour identifier les bords, nous avons besoin de détecter si la position p de a est sur le contour de $\mathcal{P}$. Remarquons que si p n'est pas sur le contour, alors il est à l'intérieur de l'une des faces formées par les cycles minimaux de $\mathcal{G}_\kappa(a)$. Ainsi, a est un bord si p n'est à l'intérieur d'aucune de ces faces. Nous ne procéderons cependant pas de cette manière pour deux raisons. La première est liée à la précision de calcul nécessaire pour distinguer si un point appartient au contour d'une face ou à l'intérieur d'une face. Obtenir cette précision, par exemple en utilisant le noyau géométrique à prédicat exact de la librairie CGAL [CGAL 1996], induit un très fort coût en temps de calcul. Or, la détection de bord est une méthode que nous comptons appliquer un très grand nombre de fois dans des applications interactives. Nous préférons alors éviter cette méthode chronophage. La seconde raison concerne les informations qui nous sont accessibles si nous possédons le contour fermé $\mathcal{C}$ du polygone $\mathcal{P}$.

Supposons que nous possédons ce contour $\mathcal{C} = \{c_1, c_1, \dots, c_n\}$. Les sommets c_i sont donnés dans le sens trigonométriques. Ils correspondent soit à la projection de la position d'un atome dans le plan tangent, soit à l'intersection entre deux arêtes du plan formées par la projection des liens dans ce plan. Chaque sommet du contour est adjacent à deux autres sommets, de manière à fermer le contour. Prenons le cas où a est un bord. Il existe alors $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que c_j soit positionné en p . En utilisant le vecteur $\vec{n}_j = \overrightarrow{c_j c_{j-1}} + \overrightarrow{c_j c_{j+1}}$, nous pouvons obtenir la direction qui indique l'intérieur du squelette. Dans les zones concaves du polygone, nous pouvons avoir n_j dirigé vers l'extérieur du polygone. Comme les sommets sont parcourus dans le sens trigonométrique, nous détectons ce cas en regardant si $\vec{n}_j \cdot x \cdot \overrightarrow{c_j c_{j-1}} \cdot y - \vec{n}_j \cdot y \cdot \overrightarrow{c_j c_{j-1}} \cdot x$ est négatif. Dans ce cas, la direction qui indique l'intérieur du squelette est $-\vec{n}_j$. Posséder cette direction nous a aidés, notamment, dans nos premières expérimentations sur la hiérarchie et l'importance.

Comme autre exemple d'utilisation du contour, nous citons la segmentation des bords en composantes connexes. Pour obtenir une telle composante, nous construisons la suite d'ensembles d'atomes bords $(\mathcal{U}_n)$, avec $\mathcal{U}_0 = \{a_0\}$ où a_0 est un atome bord ne faisant pas encore partie d'une composante connexe. À chaque étape, nous ajoutons à l'ensemble $\mathcal{U}_n$ un atome bord $a_{n+1} \notin \mathcal{U}_n$, lié à un atome $a_i \in \mathcal{U}_n$. Lorsqu'il n'est plus possible d'ajouter d'atome à un ensemble $\mathcal{U}_n$, cet ensemble contient les atomes d'une nouvelle composante connexe. Cependant, il est possible que deux atomes bords, visuellement très proches, ne soient pas liés (voir la figure 5.14). Ce cas survient à cause des liens qui ne suivent aucune règle et conduisent à plusieurs composantes connexes très proches. Nous aimerions grouper ces composantes connexes morcelées en une seule. Pour cela, au lieu de ne regarder uniquement les liens d'un atome bord $a \in \mathcal{U}_n$, nous utilisons également les sommets du contour. Supposons que c_i soit le sommet du contour associé à a . Nous cherchons les deux premiers sommets du contour autour de c_i qui correspondent à un atome bord. Si l'un des atomes bords associés à ces deux sommets n'est pas présent dans $a \in \mathcal{U}_n$, nous l'ajoutons pour former $\mathcal{U}_{n+1}$.

Ainsi, pour détecter les bords et pour travailler sur la structure squelettale, il est intéressant de calculer le contour du polygone. Plutôt que de calculer complètement le polygone $\mathcal{P}$

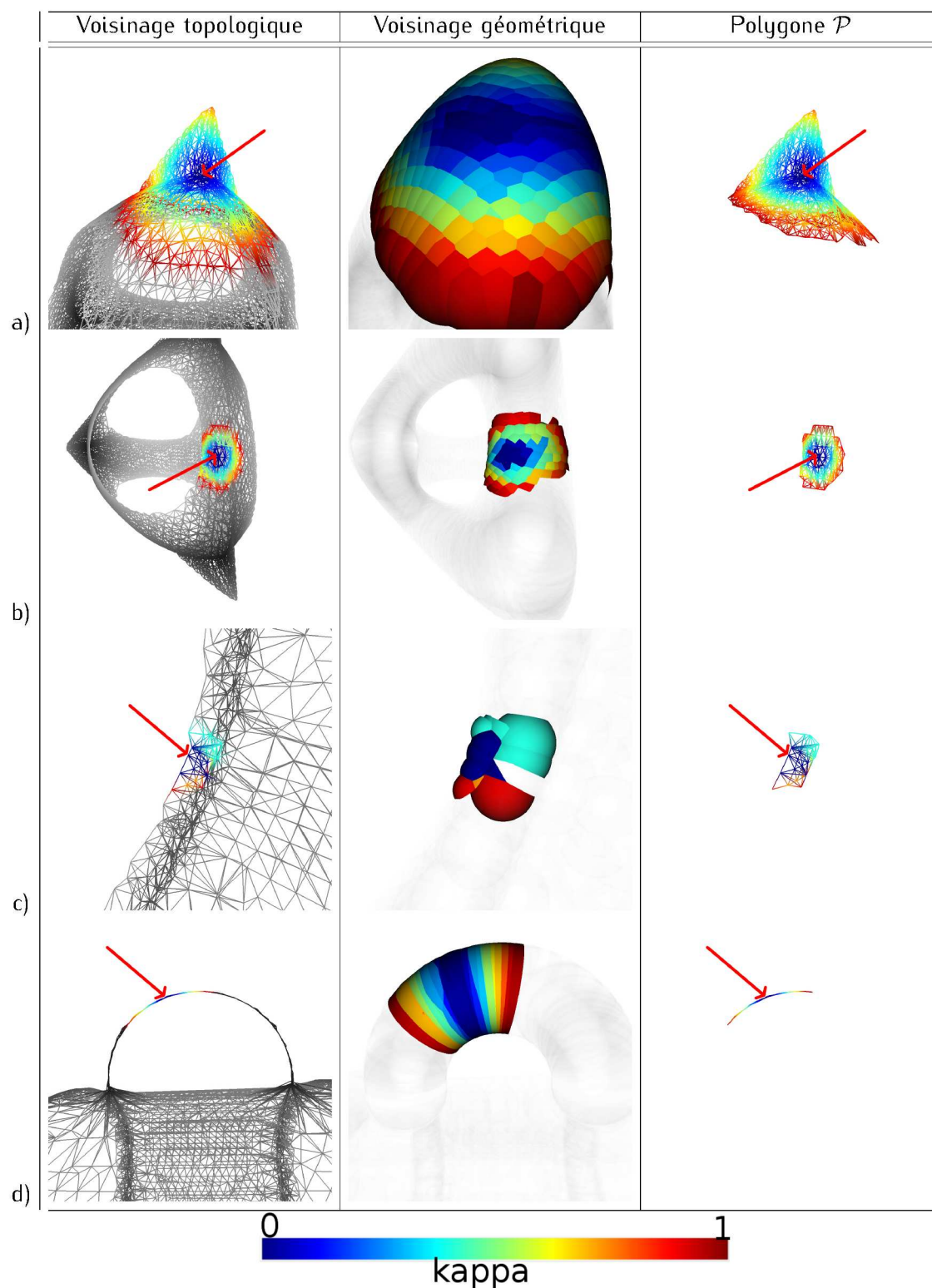


FIGURE 5.13 – Illustration des voisinages géométriques et topologiques dans différents cas. La flèche rouge indique la position de l'atome a . Pour le polygone $\mathcal{P}$, nous affichons uniquement les liens entre atomes projetés dans le plan tangent. a) Jonction entre deux composantes surfaces. b) Intérieur d'une composante surface. c) Bord d'une composante surface. d) Composante courbe.

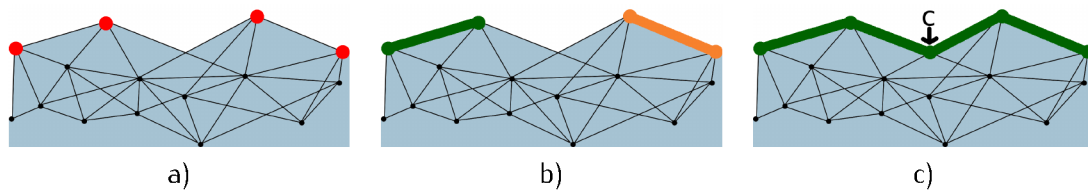


FIGURE 5.14 – Utilisation du contour du polygone $\mathcal{P}$ pour segmenter les bords en composantes connexes. a) La structure squelettale (en bleu) et quatre atomes bords (en rouge). b) En utilisant seulement les liens (en noir), on obtient deux composantes connexes (en vert et orange), même si les deux atomes bords du centre sont visuellement très proches. c) Dans le contour de $\mathcal{P}$, il est possible de circuler entre ces deux atomes du centre en passant par un sommet c , représentant l'intersection des liens avec ces deux atomes. Grâce à ce sommet, il est possible d'identifier une seule composante connexe dans cette situation.

pour obtenir son contour, nous utilisons uniquement le graphe. Nous extrayons le contour en parcourant les sommets extérieurs du graphe dans le sens trigonométrique. Ce procédé est illustré par l'algorithme 4 et la figure 5.15. Pour rendre robuste cet algorithme à la réalité des squelettes, nous avons pris en charge séparément les cas où les intersections entre arêtes du graphe interviennent au niveau d'un sommet dans notre implantation logicielle. En effet, une telle intersection intervient assez souvent et conduit, si elle n'est pas traitée, à deux sommets consécutifs du contour ayant la même position. Alors, lorsque le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{c[k-1]c[k]}$ est recalculé pour servir de direction de référence pour les angles orientés, nous obtenons le vecteur nul. Il s'ensuit des comportements non prévus : l'algorithme va utiliser les sommets à l'intérieur du polygone puis, en règle générale, boucler infiniment.

5.1.2.3/ RÉSULTATS

Pour valider notre hypothèse, sur la caractérisation des atomes bords par projection de voisinage dans un plan tangent, nous avons reproduit les tests de la section 5.1.1.3. Nous avons donc appliqué notre méthode sur les squelettes issus des squelettisations *Power-Shape* et *Scale Axis* sur vingt-sept formes. Ces squelettes ont également été nettoyés pour faciliter l'observation visuelle des résultats. Nous avons utilisé une valeur de $\kappa = 0.3$ sur l'ensemble des squelettes.

Visuellement, les bords sont correctement identifiés, comme le montre la figure 5.16. Sur des composantes régulières (image d)) ou de petites composantes correspondant à du détail de surface (image b)), les bords sont bien détectés. Les jonctions entre les composantes surfaces sont ignorées (image a) et d)), même si elles se trouvent aux bords des composantes surfaces, ce qui est cohérent avec notre définition des bords du squelette. Après avoir vérifié sur les cinquante-quatre squelettes (deux types de squelettes pour chacune des vingt-sept formes) que tous les bords étaient bien détectés, sans faux positifs, nous avons validé, empiriquement, notre hypothèse. Cette hypothèse sera plus fortement validée dans les sections suivantes, quand nous utiliserons les bords détectés par notre méthode. Bien que notre approche soit fortement différente afin d'extraire les bords directement à partir de la structure squelettale, nous retrouvons expérimentalement la définition des bords donnée dans les travaux sur le *Medial Scaffold* [Leymarie 2001] (voir la section 2.3.3). En effet, en affichant l'union des sphères du squelette, on remarque que les atomes bords viennent marquer les zones autour des lignes de crête de l'objet (image e)).

Algorithme 4 Extraction du contour du polygone $\mathcal{P}$ à partir du graphe $\mathcal{G}_\kappa(a)$. Les cas mis en commentaires correspondent aux images de la figure 5.15, et les angles orientés sont à valeur dans $[0, 2\pi]$.

```

1: fonction CONTOUR( $\mathcal{G}_\kappa(a) = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ )
2:    $c[0] \leftarrow$  sommet de  $\mathcal{N}$  le plus en haut à gauche ▷ cas a)
3:    $ouvert \leftarrow \text{vrai}$ 
4:    $\vec{r} \leftarrow \overrightarrow{(0, 1)}$ 
5:    $k \leftarrow 0$ 
6:   tant que  $ouvert$  faire
7:      $v \leftarrow \arg \min_{s \text{ lié à } c[k]} \text{angle}(\vec{r}, \overrightarrow{c[k]s})$  ▷ cas b,f,g)
8:      $intersections = \text{CONSTRUIREINTERSECTIONS}(\mathcal{E}, c[k], v)$ 
9:      $k \leftarrow k + 1$ 
10:    si  $intersections \neq \emptyset$  alors ▷ cas f)
11:       $l \leftarrow ((s_1, s_2), i) \in intersections$  tel que  $i$  soit le plus près de  $c[k - 1]$ 
12:       $v \leftarrow \text{AJOUTERINTERSECTION}(\mathcal{N}, \mathcal{E}, l, c[k - 1], v)$ 
13:    fin si
14:     $c[k] = v$  ▷ cas c,d,e)
15:     $\vec{r} \leftarrow \overrightarrow{c[k - 1]c[k]}$ 
16:    si  $intersections = \emptyset$  alors
17:       $ouvert \leftarrow \text{ESTOUVERT}(c, k)$ 
18:    fin si
19:  fin tant que
20:   $c \leftarrow c \setminus \{c[k], c[k - 1]\}$ 
21:  renvoyer  $c$  ▷ cas i)
22: fin fonction

23: fonction CONSTRUIREINTERSECTIONS( $\mathcal{E}, a, b$ )
24:    $intersections \leftarrow \emptyset$ 
25:   pour tout  $(s_1, s_2) \in \mathcal{E}$  qui intersecte  $[a, b]$  en  $i$  faire
26:     si  $s_1 \neq a$  et  $s_2 \neq a$  et  $s_1 \neq b$  et  $s_2 \neq b$  alors
27:        $intersections = intersections \cup ((s_1, s_2), i)$ 
28:     fin si
29:   fin pour
30:   renvoyer  $intersections$ 
31: fin fonction

32: fonction AJOUTERINTERSECTION( $\mathcal{N}, \mathcal{E}, l = ((s_1, s_2), i), a, b$ )
33:    $nouveau \leftarrow$  nœud positionné en  $i$ 
34:    $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \cup \{nouveau\}$ 
35:    $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \setminus \{(s_1, s_2), (a, b)\}$ 
36:    $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup \{(nouveau, s_1), (nouveau, s_2), (nouveau, a), (nouveau, b)\}$ 
37:   renvoyer  $nouveau$ 
38: fin fonction

39: fonction ESTOUVERT( $c, k$ )
40:   renvoyer  $k > 2$  et  $c[0] = c[k - 1]$  et  $c[1] = c[k]$ 
41: fin fonction

```

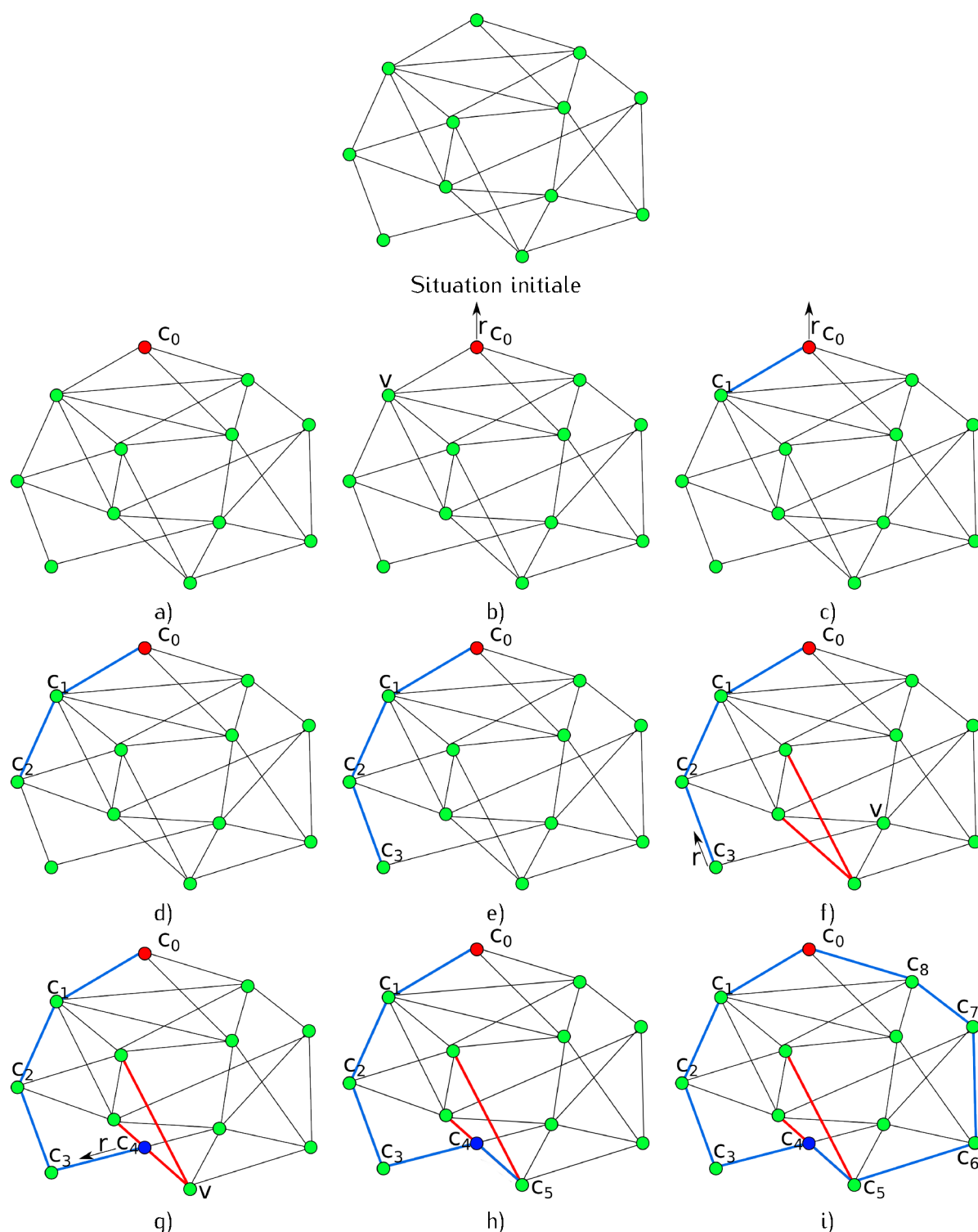


FIGURE 5.15 – Étapes de l'algorithme d'extraction du contour (en bleu) de $\mathcal{P}$ à partir du graphe $\mathcal{G}_\kappa(a)$. a) Nous commençons par ajouter le sommet c_0 le plus en haut à gauche. b) Pour extraire le contour dans le sens direct, nous utilisons une direction de référence $(0,1)$. c,d,e) L'algorithme se poursuit tant que l'arête entre le sommet courant et le sommet suivant n'est pas intersectée. f) Il y a ici des intersections avec deux arêtes (en rouge). Nous considérons l'arête qui a son intersection la plus proche du sommet courant. g) Nous insérons un nouveau sommet au niveau de l'intersection et nous réorganisons les arêtes. h) L'algorithme se poursuit avec ici aucune intersection d'arête. i) Résultat lorsque le contour est bouclé.

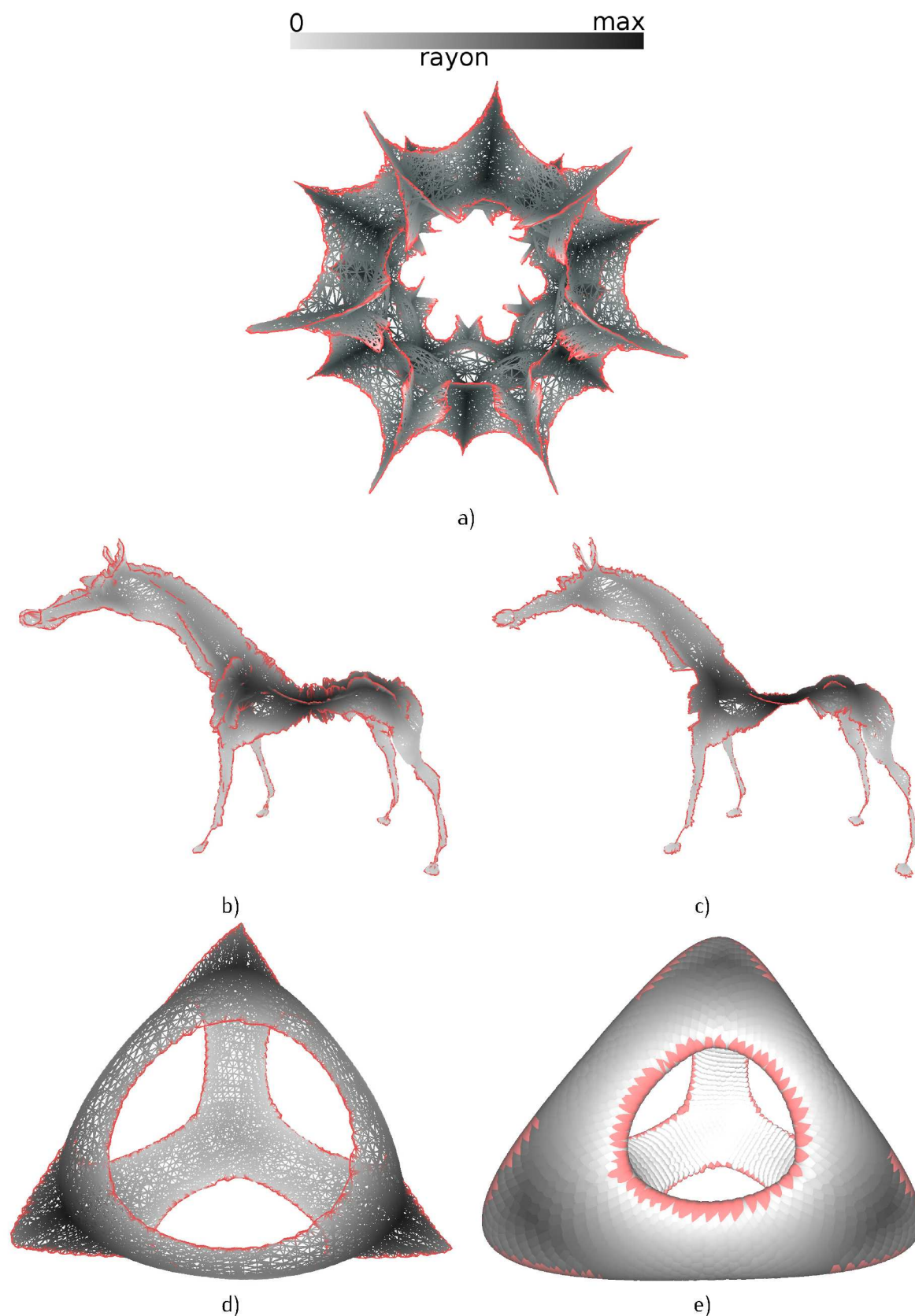


FIGURE 5.16 – Identification des bords (en rouge) du squelette par projection du voisinage dans le plan tangent. a) Un modèle avec de nombreuses jonctions de composantes surfaces. b) Power Shape du modèle horse1. c) Scale Axis du modèle horse1. d) genus3, un modèle régulier avec trois petites composantes surfaces liées à une quatrième, plus grande. e) Splatting des bords du modèle genus3.

Notre méthode possède un seul paramètre. Nous nous sommes intéressés à son influence sur les résultats. Si nous prenons $\kappa = 0$, le voisinage d'un atome a est constitué de lui-même et des atomes qui lui sont liés. Avec cette valeur, tous les atomes de tous les squelettes sont détectés comme bords. Ces résultats ne sont pas surprenants, car ils confirment notre point de vue sur les atomes liés : l'organisation des liens est telle que les atomes liés ne sont pas pertinents pour analyser la géométrie ou la topologie locale d'un atome. Pour une grande valeur de ce paramètre, par exemple $\kappa = 2$, les voisinages comportent beaucoup d'atomes. Cela est surtout le cas pour les squelettes issus de la squelettisation *Scale Axis*, qui sont très denses. Un voisinage avec beaucoup d'atomes accroît le risque d'avoir un atome bord de position p ignoré car p se retrouve à l'intérieur d'une face appartenant à une autre composante squelettale (voir l'exemple de la figure 5.12). Ce cas survient lorsque l'atome est au bord d'une petite composante surface liée à une autre, plus grande (voir la figure 5.17). Le paramètre κ agit alors comme un filtre : en augmentant sa valeur, nous ignorons les bords des petites composantes surfaces greffées sur des composantes surfaces plus grandes. Ce fait est intéressant car de telles petites composantes surfaces correspondent à du bruit ou des détails de surface, qui perturbent souvent des algorithmes utilisant la structure squelettale. Sur les squelettes sans petites composantes surfaces, comme pour le modèle *genus3*, nous n'obtenons aucune modification des bords pour $\kappa \in [0.1, 2.0]$.

En nous appuyant sur nos observations visuelles, nous recommandons l'usage de notre méthode avec un paramètre $\kappa \in [0.1, 0.3]$. Les valeurs de cet intervalle permettent de petits voisinages et donc une forte rapidité de la méthode. En effet, dans l'attente d'une implantation massivement parallèle de la méthode, les temps de calculs augmentent rapidement avec la valeur de κ (voir la table 5.1 et son illustration graphique 5.18). De grandes valeurs de κ ralentiraient ainsi considérablement une application. Sur les squelettes *Scale Axis*, les temps d'exécution sont si importants que nous n'avons pas testé notre méthode avec de grandes valeurs de κ pour comparer ces temps. Ces temps sur les squelettes *Scale Axis* semblent incompatibles avec une application interactive, sans parallélisation massive de notre implantation logicielle. Cependant, l'intérêt de la forte densité d'atomes de ces squelettes, cause de ces temps, n'a toujours pas été justifiée (voir les chapitres 3 et 4). L'autre avantage des valeurs de κ dans l'intervalle que nous recommandons, est l'identification complète des bords. Nous avons appliqué notre méthode sur les squelettes avec différentes valeurs de cet intervalle et nous n'avons pas noté l'omission des bords d'une petite composante squelettale.

À défaut d'une autre méthode d'identification des bords, nous ne pouvons pas valider notre méthode par des comparaisons quantitatives. Alors, pour compléter notre validation visuelle, nous renvoyons aux applications que nous présentons dans les prochaines sections, qui utilisent les bords. Ces applications démontrent l'utilité des bords identifiés par notre méthode, tout en établissant la robustesse de la méthode. La première application que nous présentons est le calcul d'une importance des atomes. Nos méthodes de calcul de l'importance et de l'identification des bords sont, à notre connaissance, les premières méthodes qui n'utilisent pas d'autres données que les sphères et la structure squelettale. Munis des bords et de l'importance, nous pouvons travailler sur la structure squelettale afin de la rendre utile pour des interactions intuitives par les squelettes.

5.2/ IMPORTANCE CALCULÉE GRÂCE AUX BORDS

L'importance est une propriété des atomes d'un squelette qui permet d'analyser leurs contributions à la description de la forme. Nous nous intéressons en particulier à une importance

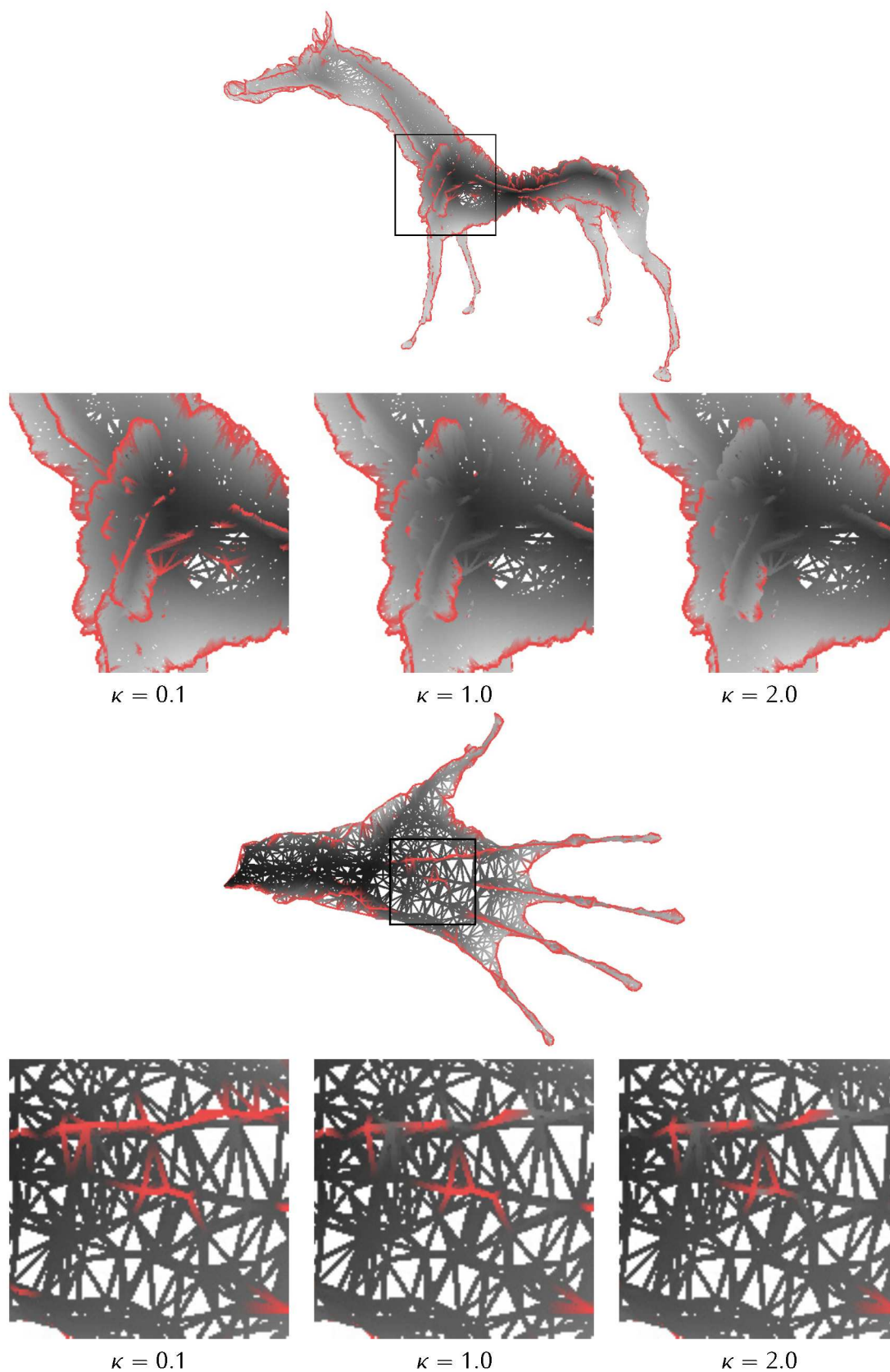


FIGURE 5.17 – Effets de la variation du paramètre κ sur l'identification des bords des petites composantes squelettiques surfaces. Ces petites composantes squelettiques sont associées au bruit squelettal et aux détails de surface.

Modèle	Atomes	Power Shape				
		Temps (en s)				
		$\kappa = 0.1$	$\kappa = 0.2$	$\kappa = 0.3$	$\kappa = 0.5$	$\kappa = 1.0$
sphere	1	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
torus	60	0.018	0.002	0.002	0.003	0.003
noeud2	192	0.006	0.006	0.006	0.006	0.007
eight	625	0.022	0.022	0.026	0.036	0.083
venus	625	0.031	0.043	0.065	0.098	0.285
horse2	2002	0.084	0.105	0.227	0.396	0.938
female-hand	2311	0.070	0.076	0.103	0.197	0.616
ellipsoid	3241	0.213	0.772	2.329	9.486	60.075
dinopet	3996	0.197	0.237	0.238	0.424	1.213
hand3	4126	0.144	0.219	0.340	0.670	1.823
cup	4145	0.122	0.122	0.140	0.183	0.320
homer	4265	0.329	0.504	0.769	1.544	6.079
baby	4902	0.160	0.290	0.438	0.835	3.237
maxplanck	5666	0.811	3.808	10.139	33.814	123.999
egea	6176	0.806	2.553	6.810	24.610	148.893
genus3	6457	0.251	0.438	0.733	1.842	7.111
monkey	6922	0.344	0.780	1.425	3.699	22.977
round-octa	7220	2.577	11.961	39.014	228.966	2801.443
boy	7489	0.468	0.863	1.523	3.900	16.057
bimba	7744	0.611	1.499	3.305	11.444	66.125
hand4	8008	0.356	0.524	0.739	1.262	3.312
fish	9972	0.705	0.930	1.056	2.141	7.010
bumpy-torus	15326	1.183	1.568	2.408	4.350	15.677
horse1	17458	2.781	8.216	22.652	73.811	331.988
bunny	20609	3.559	8.134	17.336	61.708	547.554
hand1	24540	3.714	11.139	16.412	60.585	492.921
armadillo	25890	2.891	3.923	7.421	22.659	153.088

TABLE 5.1 – Temps de calcul des bords sur des squelettes Power Shape nettoyés. L'implantation logicielle a été exécutée sur un processeur à huit cœurs Intel(R) Core(TM) i7-3720QM CPU @ 2.60GHz.

qui croît de manière monotone vers l'intérieur du squelette. En retirant les atomes de faible importance, il est possible de simplifier la forme, tout en gardant ses caractéristiques principales : les détails sont retirés les premiers, puis la forme perd de son épaisseur. Cela permet également de simplifier le squelette, en retirant les petites composantes squelettiques, puis en contractant les composantes surfaces vers des composantes courbes. C'est d'ailleurs pour calculer des squelettes courbes à partir de squelettes surfaces que ce type d'importance a été introduite [Dey 2006] (voir la section 2.3.2.2). Nous reprendrons ce processus dans la section 5.3 pour poursuivre la création d'un modèle hiérarchique, initiée dans le chapitre 4.

Pour que la simplification du squelette par l'importance fournisse une structure ayant le même type d'homotopie que la forme, l'importance doit croître de manière monotone vers l'intérieur du squelette. Du fait de son utilité première, i.e. la squelettisation courbe, la forme originale a toujours été disponible pour calculer une telle importance. Les méthodes connues [Dey 2006, Reniers 2008, Telea 2012] qui calculent cette importance font alors un

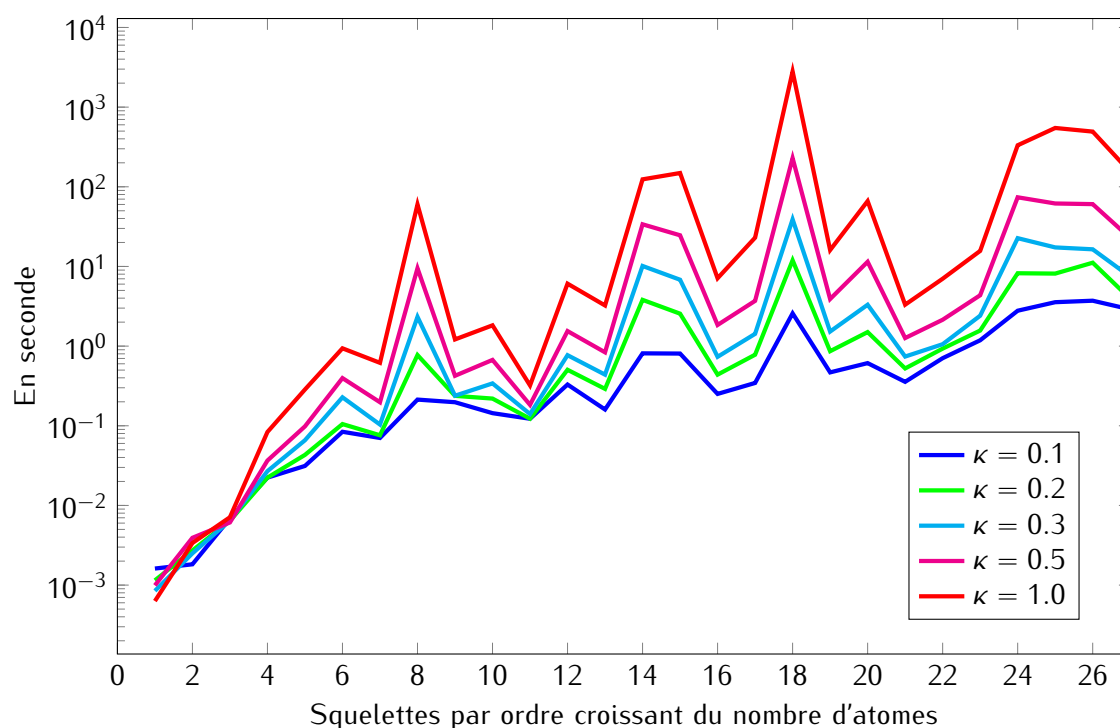


FIGURE 5.18 – Graphique des temps de calculs de la table 5.1

usage de données obtenues grâce à la forme, impossibles à mettre à jour à partir du squelette seul.

Nous souhaitons étendre le domaine d'application de l'importance aux interactions intuitives. Munis de l'importance, nous serions capables, par exemple, de dynamiquement simplifier une forme. Pour une telle forme simplifiée, le squelette se rapprocherait d'un squelette courbe. Nous l'avons signalé dans la section 2.1.1, un squelette courbe serait plus facile à manipuler qu'un squelette surface. Nous pourrions alors changer la pose de la forme ou encore la segmenter plus aisément, malgré la structure squelettale actuelle. Cependant, dans notre contexte, nous ne pouvons utiliser les techniques existantes de calcul d'importance pour l'obtenir (voir la fonction géodésique médiane [Dey 2006] et son extension [Reniers 2008], dont nous avons parlé dans la section 2.3.2.2). Il nous faut une approche différente.

Comme l'importance croît vers l'intérieur du squelette, elle augmente avec la distance géodésique aux bords. Une telle distance peut être approchée par un feu de prairie initié aux bords : la date à laquelle le feu rencontre la position d'un atome donne la distance géodésique entre cet atome et les bords. La distance géodésique pourrait alors nous fournir cette nouvelle approche dont nous avons besoin. En effet, elle est entièrement calculable à partir des données à notre disposition. Cependant, l'importance obtenue ne croît pas de manière monotone vers l'intérieur. Nous commençons par illustrer ce problème avant de proposer notre solution. Cette solution repose sur un fait intéressant que nous avons remarqué lors de la propagation du feu de prairie d'une composante surface à une autre.

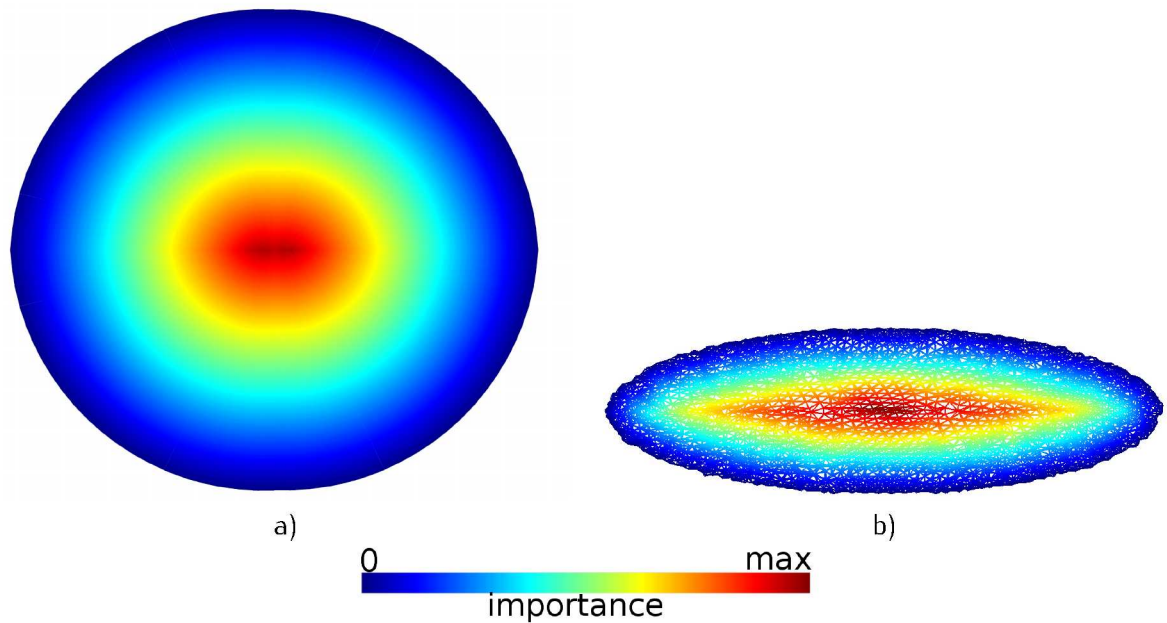


FIGURE 5.19 – La distance géodésique aux bords comme importance pour les squelettes à une seule composante squelettale. a) Illustration de la distance géodésique aux bords d'une 2-variété à bord. b) Application au squelette par un feu de prairie.

5.2.1/ LA DISTANCE GÉODÉSIQUE AUX BORDS COMME IMPORTANCE ?

Prenons un squelette avec une seule composante squelettale surface, comme dans la figure 5.19. Supposons que ce squelette soit fait d'un matériau inflammable, propageant idéalement le feu de la même manière dans toutes les directions, avec une vitesse v constante. À la date $t_0 = 0$, ce feu est initié au niveau des bords du squelette. Le feu de prairie se propage alors vers l'intérieur du squelette. À la date t , le feu atteint la position p de l'atome α , après avoir parcouru une distance de $v \cdot t$. En utilisant cette distance comme importance, nous obtenons une importance monotone croissante sur un squelette à une composante, facile à calculer (voir l'image b) de la figure 5.19).

Cette définition de l'importance par la distance géodésique ne donne pas une importance monotone dans tous les cas (voir la figure 5.20). En effet, lorsque le squelette possède des jonctions entre des composantes surfaces (ou, cas plus rare, quand une composante courbe est reliée à l'intérieur d'une composante surface), le feu se transmet d'une composante à une autre. Du fait de cette transmission, la distance géodésique peut être plus faible au niveau de la jonction que plus près des bords. L'importance ainsi définie ne sera pas monotone : si on se déplace des bords vers l'intérieur de la composante, l'importance va augmenter puis diminuer. Si nous avons autorisé les jonctions entre les composantes dans la définition des bords du squelette, le phénomène aurait été encore plus visible.

Une importance non monotone ne permet pas l'extraction d'un squelette courbe [Dey 2006]. En effet, l'importance calculée admet des minima locaux, ce qui n'est pas autorisé par la théorie de la squelettisation courbe par importance. Simplement, cela impliquerait que la structure obtenue par une telle importance ne soit pas un squelette. Premièrement, la structure ne serait pas centrée, ce qui aura des conséquences au niveau de la géométrie qu'elle capture, notamment pour des applications de simplification de la forme. Deuxièmement, la structure ne capturera pas correctement la topologie de la forme : elle aura un type d'homotopie différent

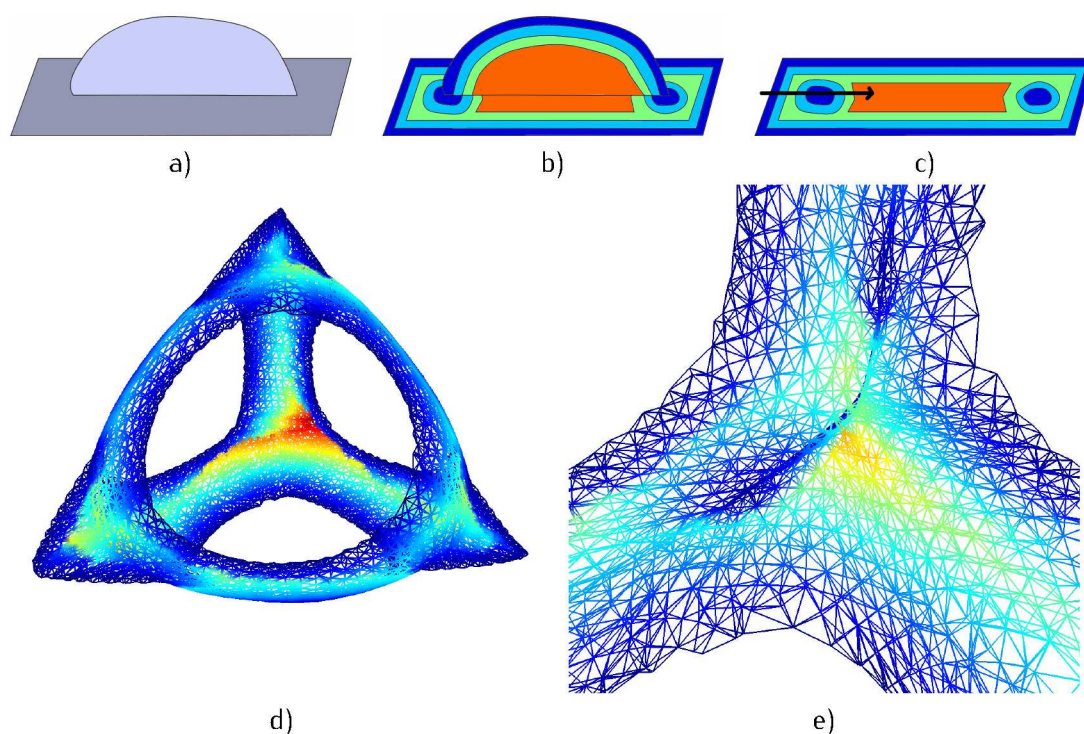


FIGURE 5.20 – Problème avec l'importance définie par la distance géodésique aux bords dans le cas d'une jonction entre deux composantes surfaces. a) Les deux composantes surfaces du squelette. b) Importance calculée. c) L'importance sur le chemin repéré par la flèche dirigée vers l'intérieur du squelette ne croît pas de manière monotone. d) Résultats de cette importance sur le squelette du modèle genus3. e) Agrandissement au niveau d'une jonction.

de celui du squelette surface, qui lui est le même que celui de la forme. Les courbes de la structure ne seraient alors pas associées à des composantes logiques de la forme. Si nous construisions des interactions avec la forme grâce aux courbes de cette structure, le résultat ne serait pas conforme aux attentes de l'utilisateur, car sans lien avec la perception visuelle de la forme.

La distance géodésique aux bords ne donne pas une importance correcte lorsque le squelette a des jonctions entre des composantes. Or, en règle générale, un squelette possède plusieurs de ces jonctions, ce qui rend cette importance inadaptée à la majorité des cas. Si nous pouvions empêcher la transmission du feu d'une composante à une autre, ce problème disparaîtrait et nous obtiendrions l'importance que nous cherchons. Cependant, comment réaliser cela alors que nous ne connaissons ni les composantes squelettes, ni les jonctions entre les composantes? Grâce à l'observation de la propagation du feu de prairie sur la structure squelettale, nous avons pourtant trouvé un moyen d'éviter la transmission d'une composante à une autre, sans avoir besoin de connaître les composantes, par les bords du squelette. Cela nous permet de calculer l'importance, tout en démontrant l'utilité des bords obtenus par notre méthode de la section 5.1 ainsi que la robustesse de notre méthode d'identification des bords.

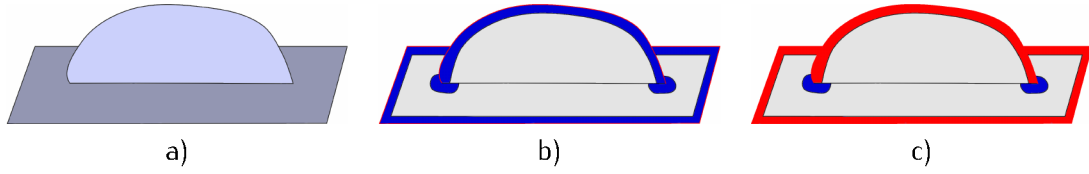


FIGURE 5.21 – Première étape de la propagation de l'onde destructrice. a) Structure squelettale étudiée. b) Voisinage $\mathcal{V}_0$ (en bleu) de l'onde à t_0 . c) L'onde doit être seulement transmise à un sous-ensemble de $\mathcal{V}_0$, qui correspond aux nouveaux bords (en rouge). Cela empêche la transmission de l'onde d'une composante à une autre.

5.2.2/ PROPAGATION D'UNE ONDE DESTRUCTRICE DE BORDS

La propagation d'un feu de prairie donne une importance inadaptée à nos besoins, car le feu se transmet partout de la même manière, notamment d'une composante à une autre. Ce genre de transmission doit être interdit pour obtenir une importance monotone croissante. Nous avons donc besoin d'une onde, initiée aux bords à la date $t_0 = 0$, qui se propage sur la structure squelettale à la même vitesse v dans toutes les directions, qui ne peut pas être transmise d'une composante à une autre. La distance parcourue par une telle onde sur la structure squelettale nous donnerait une importance qui croît de manière monotone vers l'intérieur du squelette.

Pour interdire la transmission d'une composante à une autre, regardons le cas représenté par la figure 5.21. L'onde est initiée aux bords du squelette, illustrés par le contour noir dans l'image 5.21 a). La distance parcourue par l'onde est alors de 0, ce qui correspond à l'importance des bords. Supposons que l'onde soit destructrice : les liens qu'elle rencontre ou les atomes dont elle a déjà atteint les positions disparaissent du squelette. Ainsi, à la date t_0 , les bords $\mathcal{B}$ du squelette n'existent plus. Ces bords évoluent au cours de la propagation de l'onde. Nous parlons alors de bords du squelette pour une date t : $\mathcal{B}_t$. Soit ϵ la date à laquelle les prochains atomes sont simultanément atteints par l'onde. Ces atomes, en bleu dans l'image 5.21 b), sont à une distance $v \cdot \epsilon$ de l'ensemble $\mathcal{B}$. Ils forment donc un sous-ensemble de $\mathcal{V}_0 = \{a : \exists b \in \mathcal{B}, \|\text{POSITION}(a) - \text{POSITION}(b)\| = v \cdot \epsilon\}$. Prenons un atome de $\mathcal{V}_0$ qui ne soit pas un nouveau bord, i.e. $a \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{B}_\epsilon$. Un tel atome est dans une des zones bleu de l'image 5.21 c). Cela signifie que la position de a est à l'intérieur d'une composante surface C . Si la composante C était celle de l'atome b (un atome de $\mathcal{B}$ à une distance $v \cdot \epsilon$ de a), alors a serait un bord à la date ϵ car a fait partie des premiers atomes simultanément atteint par l'onde après les éléments de $\mathcal{B}$ (il n'admettrait pas de voisinage homéomorphe à un disque ouvert). Nous en concluons que C n'est pas la même composante que celle de l'atome b : si nous considérons cet atome a , nous aurions une transmission de l'onde d'une composante à une autre. Ainsi, pour éviter que l'onde ne soit transmise à d'autres composantes squelettiques lorsqu'elle atteint un atome à la date t , nous interdisons la propagation à des atomes qui n'appartiennent pas à $\mathcal{B}_t$.

Grâce à notre méthode d'identification des bords à partir de la structure squelettale seule, nous pouvons calculer une importance monotone croissante par propagation d'une onde destructrice. Notre calcul, présenté par l'algorithme 5, tient compte de la complexité de la structure squelettale pour obtenir des résultats corrects. Par exemple, il considère la transmission de l'onde d'un atome à un autre, sans que ces atomes soient liés. En effet, lorsqu'un atome a est détruit, la disparition des liens avec a transforme des atomes en bords sans que ceux-ci soient liés à a (voir la figure 5.22).

Algorithme 5 Calcul de l'importance des atomes du squelette $\mathcal{S}$ par propagation d'onde.

```

1: fonction CALCULIMPORTANCE( $\mathcal{S}, \kappa$ )
2:   Front  $\leftarrow$  INITIALISEONDE( $\mathcal{S}, \kappa$ )
3:   tant que Front  $\neq \emptyset$  faire
4:     Atome  $\leftarrow \arg \min_{a \in \text{Front}} \text{IMPORTANCE}(a)$ 
5:     ICourante  $\leftarrow \text{IMPORTANCE}(\text{Atome})$ 
6:     Front  $\leftarrow (\text{Front} \setminus \{\text{Atome}\}) \cup \text{TRANSMETTREONDE}(\text{Atome}, \kappa, \text{ICourante})$ 
7:   fin tant que
8: fin fonction

9: fonction INITIALISEONDE( $\mathcal{S}, \kappa$ )
10:   $\mathcal{V}_0 \leftarrow \emptyset$ 
11:   $\mathcal{B} \leftarrow$  Bords de  $\mathcal{S}$  calculés avec le paramètre  $\kappa$   $\triangleright$  voir la section 5.1.2
12:  pour tout  $a \in \mathcal{B}$  faire
13:     $\mathcal{V}_0 \leftarrow \mathcal{V}_0 \cup \{b \in \mathcal{S} : a \frown b \text{ et } b \notin \mathcal{B}\}$ 
14:     $\text{IMPORTANCE}(a) \leftarrow 0$ 
15:    marquer  $a$  comme détruit
16:  fin pour
17:  pour tout  $a \in \mathcal{V}_0$  faire
18:    si ESTUNBORD( $a, \kappa$ ) alors  $\triangleright$  Cette fonction ignore les atomes détruits
19:      Front  $\leftarrow \text{Front} \cup \{a\}$ 
20:       $\text{IMPORTANCE}(a) \leftarrow \min_{b \in \mathcal{B}} \|\text{POSITION}(a) - \text{POSITION}(b)\|$ 
21:    fin si
22:  fin pour
23:  pour tout  $a \in \mathcal{S} \setminus \{\mathcal{B} \cup \text{Front}\}$  faire
24:     $\text{IMPORTANCE}(a) \leftarrow -1$ 
25:  fin pour
26:  renvoyer Front
27: fin fonction

28: fonction TRANSMETTREONDE( $\text{Atome}, \kappa, \text{ICourante}$ )
29:  marquer Atome comme détruit
30:   $\mathcal{N} \leftarrow \emptyset$   $\triangleright$  Nouveaux atomes atteints par l'onde
31:  pour tout atome non détruit  $a$  lié à Atome faire
32:    si  $\text{IMPORTANCE}(a) \geq 0$  alors
33:       $\text{IMPORTANCE}(a) \leftarrow \min\{\text{IMPORTANCE}(a), \text{ICourante} + \|\text{POSITION}(\text{Atome}) - \text{POSITION}(a)\|\}$ 
34:    fin si
35:  fin pour
36:  pour tout atome non détruit  $a$  faire
37:    si  $a$  est dans le voisinage de taille  $\kappa$  de Atome et ESTUNBORD( $a, \kappa$ ) alors
38:      pour tout atome détruit  $b$  lié à  $a$  faire
39:         $i = \text{IMPORTANCE}(b) + \|\text{POSITION}(a) - \text{POSITION}(b)\|$ 
40:        si  $i \geq \text{ICourante}$  et ( $\text{IMPORTANCE}(a) < 0$  ou  $\text{IMPORTANCE}(a) > i$ ) alors
41:           $\text{IMPORTANCE}(a) \leftarrow i$ 
42:        fin si
43:      fin pour
44:      si  $\text{IMPORTANCE}(a) < 0$  alors
45:         $\text{IMPORTANCE}(a) \leftarrow \text{ICourante} + \|\text{POSITION}(\text{Atome}) - \text{POSITION}(a)\|$ 
46:      fin si
47:       $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \cup \{a\}$ 
48:    fin si
49:  fin pour
50:  renvoyer  $\mathcal{N}$ 
51: fin fonction

```

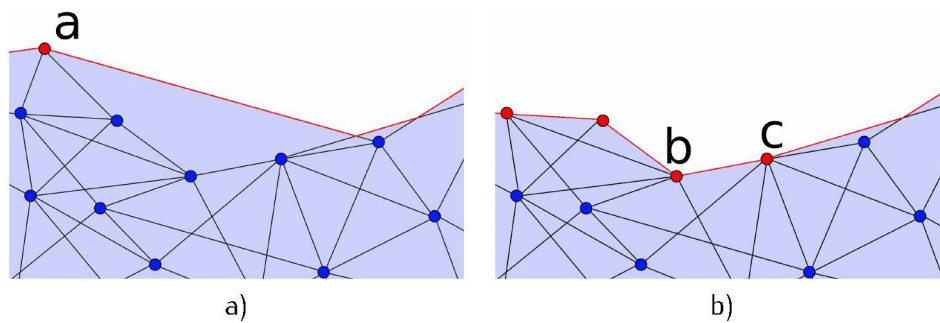


FIGURE 5.22 – Évolution du front d’onde (en rouge) sur la structure squelettale. a) L’atome *a* est actuellement détruit par l’onde. b) L’onde se propage aux nouveaux atomes bords du squelette. Parmi ces nouveaux bords, certains atomes comme *b* et *c* n’étaient pas liés à *a* avant sa destruction.

5.2.3/ RÉSULTATS

La notion d’intérieur du squelette est perceptive, difficilement calculable. Pour valider notre importance qui doit croître de manière monotone vers l’intérieur du squelette, nous devons à nouveau nous reposer sur une observation visuelle des résultats sur les squelettes *Power Shape* et *Scale Axis* de nos vingt-sept formes. Nous visualisons l’importance des atomes grâce à un code couleur pour les positions des atomes et des liens entre les atomes (voir la figure 5.23). Nous constatons sur les deux squelettes de chaque modèle, que l’importance croît bien de manière monotone vers l’intérieur. La méthode de propagation de l’onde grâce aux bords par l’algorithme 5 évite la transmission indésirable de l’importance d’une composante squelettale à une autre, même si nous ne connaissons ni les composantes, ni les jonctions entre ces composantes. Par exemple, les images a) et c) de la figure 5.23 montrent bien que la propagation de l’onde est stoppée au niveau de la composante conique en bas, ou des petites composantes de détails qui décrivent les veines de la main. Malgré l’absence de données autres que les atomes et les liens entre atomes, nous retrouvons les mêmes résultats que les travaux qui extraient un squelette courbe grâce à l’importance (voir l’image tirée de [Jalba 2013] de la figure 2.18).

L’importance des atomes est également visualisée sur la forme décrite grâce à notre technique de *splatting* (voir le chapitre 3). Les détails d’une forme apparaissent en bleu foncé, couleur correspondant aux faibles importances dans notre code couleur. Cela est visible par exemple au niveau des muscles du cou du cheval, des veines de la main et de l’œil du poisson (voir dans l’ordre les images f), a) et b) de la figure 5.23). Les atomes de forte importance correspondent aux zones de forte centricité dans les travaux sur la squelettisation courbe [Dey 2006, Telea 2012]. Nous retrouvons aussi ce résultat grâce à la visualisation de l’importance sur la forme et le squelette : plus un atome est au centre du squelette, plus son importance est élevée.

Dans nos expérimentations, nous avons utilisé des valeurs de κ dans l’intervalle recommandé dans la section 5.1.2.3, à savoir $[0.1, 0.3]$. En effet, comme notre méthode s’appuie fortement sur l’identification des bords, il est primordial d’utiliser les paramètres optimaux pour une détection précise de ces bords. Sur la majorité des modèles, nous ne notons pas de différence dans les résultats pour diverses valeurs de κ . Cependant, nous remarquons que pour des jonctions entre composantes surfaces avec une faible densité d’atomes, l’importance calculée peut être non monotone lorsque κ est grand. En effet, ces cas correspondent aux configurations

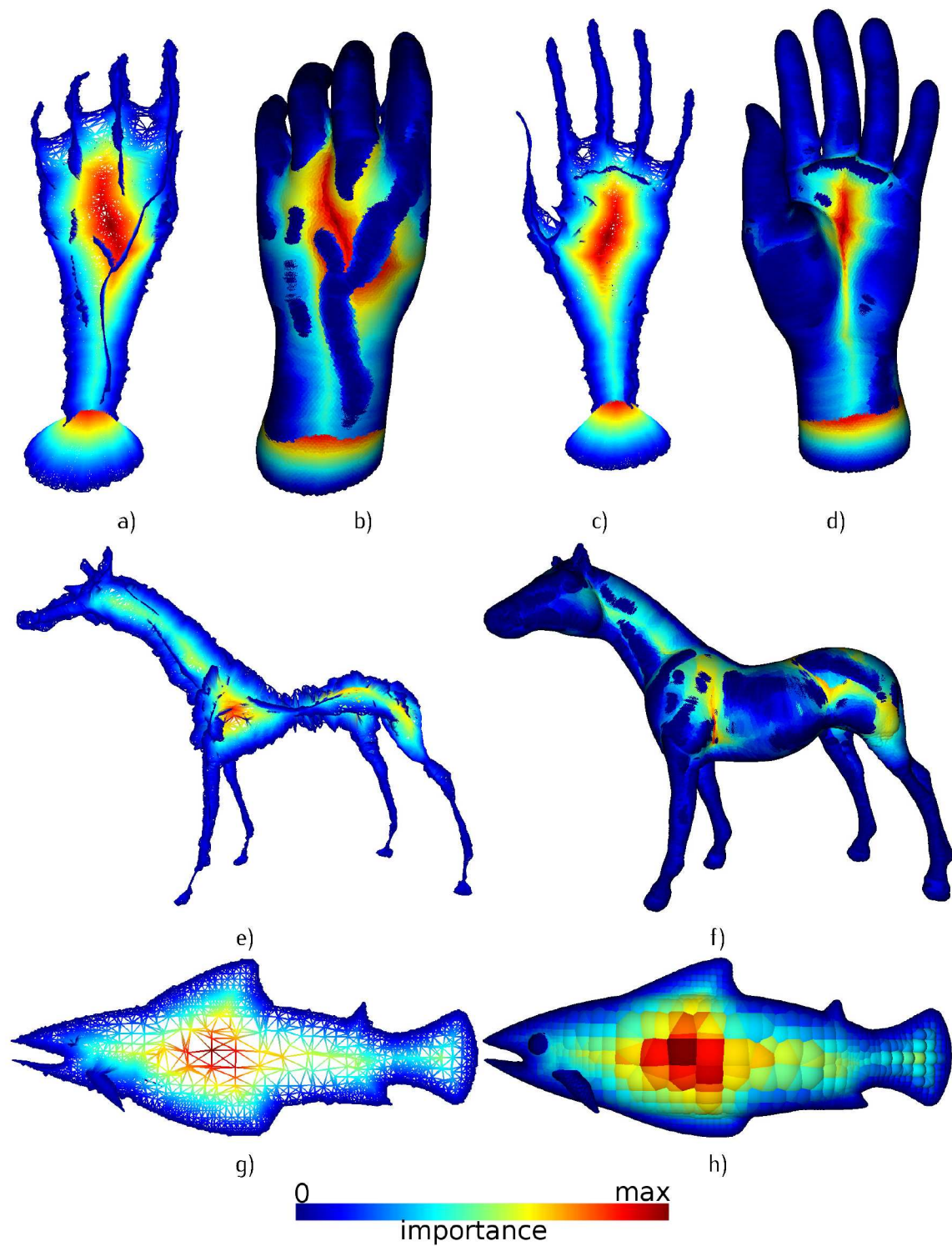


FIGURE 5.23 – Visualisation de l'importance calculée par notre méthode sur la structure squelettale et la forme.

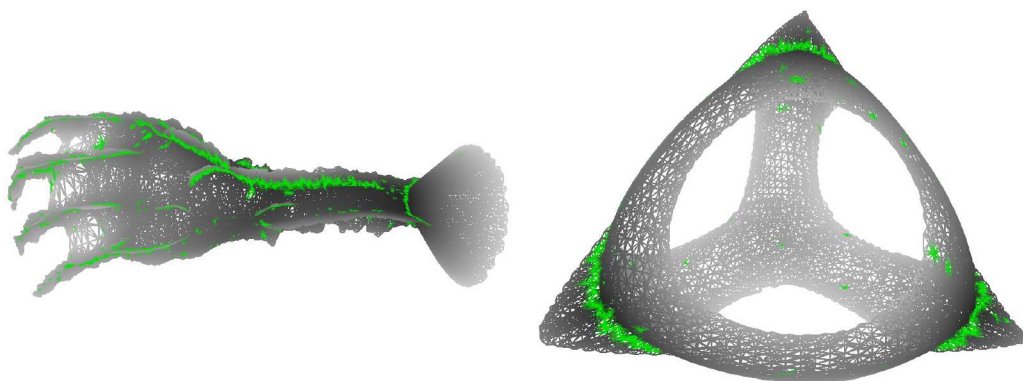


FIGURE 5.24 – Illustration de notre expérimentation sur l'identification des jonctions grâce aux sauts dans l'importance.

de bords qui nécessitent un petit voisinage pour être identifié. Si ces bords sont ignorés dans la détection, l'onde se propage d'une composante à une autre et la date de rencontre entre l'onde et un atome donne alors une mauvaise valeur d'importance. Pour une valeur de $\kappa = 0.1$, nous n'avons noté aucun problème sur les cinquante-quatre squelettes. C'est pourquoi nous recommandons cette valeur pour appliquer notre méthode.

Comme l'onde ne se transmet pas d'une composante à une autre, l'importance subit une forte variation locale au niveau des jonctions entre ces composantes. Nous pensons qu'il est possible d'exploiter ce fait pour détecter les jonctions entre les composantes surfaces. Nous avons conduit une première expérimentation pour identifier les jonctions à partir de l'importance : nous cherchons les atomes a liés à un atome b , avec $\text{IMPORTANCE}(a) < \text{IMPORTANCE}(b)$ et $\text{IMPORTANCE}(a) + \|\text{POSITION}(a) - \text{POSITION}(b)\| + \epsilon < \text{IMPORTANCE}(b)$ ⁷. Le paramètre $\epsilon > 0$ traduit le fait que l'onde ne se propage pas uniquement suivant les liens, ce qui implique que l'importance d'un atome n'est pas toujours égale à l'importance d'un atome lié plus la distance avec cet atome lié. La figure 5.24 illustre les résultats de cette première expérimentation. Nous identifions bien les jonctions, mais avec beaucoup de faux positifs. Ces faux positifs sont dûs à la spécificité de la méthode de propagation de l'onde, définie par l'algorithme 5, pour calculer une importance correcte malgré des liens sans organisation. Nous cherchons actuellement un critère de détection des jonctions mieux adapté à la propagation de l'onde pour éviter ces faux positifs. À l'aide des bords et de ces jonctions, nous serions capables d'identifier les composantes squelettiques. Ceci permettrait tout d'abord une segmentation de l'objet décrit en composantes logiques grâce à ces composantes squelettiques. Nous pourrions alors contraindre une interaction sur une composante logique de la forme en particulier, en limitant cette interaction à une composante squelettique. Aussi, à l'aide des composantes squelettiques, il serait possible de réorganiser les liens. Pour cela nous procéderions composante par composante. Nous retirerions ensuite les liens entre deux composantes différentes en un lieu qui n'est pas une jonction, et nous obtiendrions une structure squelettique proche de la structure idéale.

Le résultat de notre calcul d'importance correspond visuellement à la définition d'une importance qui croît de manière monotone vers l'intérieur du squelette. Ce résultat est obtenu par une application intensive de la fonction `ESTUNBORD` qui implémente notre méthode de la section 5.1.2. Nous pensons que si la détection des bords n'était pas suffisamment robuste, l'importance serait mal calculée à cause de cette utilisation intensive. En effet, si un

7. Comme l'importance est une distance, cette formule est homogène.

atome n'était pas correctement détecté comme bord, l'onde ne lui serait pas transmise, et il posséderait une importance localement plus élevée que la normale. Visuellement, ce cas serait facilement repérable, par une position avec une couleur trop différente de ses voisins. De même, si un atome était faussement identifié comme un bord, nous aurions une importance non monotone, ce qui serait très visible également. Les résultats sur l'importance sont toujours corrects, malgré la forte complexité de la structure squelettale et la multitude de configurations testées pour identifier les bords. Les résultats sur l'importance valident la correction et la robustesse de notre méthode d'identification des bords par plan tangent.

Il est à remarquer que nous utilisons les rayons des atomes uniquement pour calculer automatiquement des voisinages adaptés à l'épaisseur locale. Nous ignorons donc une partie des informations à notre disposition pour réaliser des tâches qui nécessitent des informations supplémentaires dans les méthodes existantes. Même si nous n'avons pas encore rencontré de cas mettant en évidence ce manque d'information, nous pensons qu'une amélioration de la méthode pourrait passer par la considération des rayons. Aussi, pour appliquer notre méthode aux applications interactives, il est nécessaire de l'optimiser et de la paralléliser massivement. En effet, les temps d'exécution actuels peuvent prendre jusqu'à une heure, ce qui est bien évidemment trop pour une application interactive.

Dans ce chapitre, nous avons commencé à résoudre le problème de la structure squelettale en identifiant les bords du squelette et en calculant une importance des atomes qui croît de manière monotone vers l'intérieur du squelette. Ces deux caractéristiques permettent d'analyser la structure squelettale et d'exploiter le potentiel des squelettes. La prochaine section montre une application importante pour l'interaction intuitive avec les formes : la hiérarchisation du squelette.

5.3/ HIÉRARCHISATION ET MESO-SQUELETTE

Notre approche pour construire un instrument d'interaction directe et intuitive est d'extraire un squelette courbe à partir du squelette. Ce squelette courbe, nommé meso-squelette, est la racine d'une hiérarchie du squelette, qui capture différents niveaux de détails de la forme. Tout comme la squelettisation courbe à partir d'un squelette surface, notre hiérarchisation s'appuie sur la contraction du squelette vers l'intérieur, soit dans la direction des importances croissantes. Chaque niveau de la hiérarchie correspond à une étape de la contraction, réalisée par des absorptions (voir le modèle de structuration introduit dans le chapitre 4). Simplifier la forme ou le squelette revient alors à considérer un rang minimum dans la hiérarchie. En particulier, le meso-squelette, qui est constitué des atomes les plus importants, capture toutes les caractéristiques principales de la forme. Ce meso-squelette doit nous permettre de simplifier, segmenter, animer et structurer le squelette, soit tous les avantages des squelettes courbes. Comme il permet de contrôler la totalité du squelette surface, par la structure hiérarchique, le meso-squelette n'a aucun des inconvénients des squelettes courbes.

Les composantes courbes ne doivent pas subir le même traitement que les composantes surfaces lors de la contraction du squelette. Ces composantes courbes décrivent des régions d'apparence tubulaire, ayant typiquement deux jonctions de type courbe-surface (par exemple les bras et les jambes d'un personnage) ou une seule jonction avec une autre composante (détails terminaux comme les doigts, le nez, les oreilles). En contractant ces composantes courbes, il est fort probable qu'elles ne soient pas représentées dans le meso-squelette. En effet, ces courbes seront peu à peu érodées avant de disparaître totalement. De même, lorsqu'une composante surface se contracte, certaines parties deviennent localement courbes. Si nous ne

les identifications pas, elles disparaîtront également du meso-squelette. En l'absence d'un traitement particulier des composantes courbes, la contraction ne conservera que les cycles du squelette (nous en faisons la démonstration dans la section 5.3.3.1 avec la figure 5.29). Nous commençons donc cette section en présentant notre méthode d'identification des composantes courbes, pour ne pas contracter ces composantes et extraire un meso-squelette adapté aux interactions que nous visons.

5.3.1/ IDENTIFIER LES COMPOSANTES COURBES

Les atomes des composantes squelettiques ne sont que très rarement organisées en courbes, c'est-à-dire une chaîne d'atomes a liés à deux atomes b et c , tels que b et c ne sont pas liés. Il est aussi peu fiable de supposer que les composantes squelettiques vont prendre cette organisation lors de la contraction du squelette. Pourtant, l'œil humain comprend certaines parties du squelette comme étant organisées en courbes. Ces parties correspondent aux zones contiguës de faible épaisseur locale sur la structure squelettique. L'épaisseur locale joue le rôle du niveau de détail auquel une composante est analysée pour détecter si elle est courbe. Ainsi, au lieu de rechercher les chaînes d'atomes, nous proposons d'identifier les composantes courbes grâce à l'épaisseur locale.

Soit un atome a appartenant à une composante courbe du squelette. Nous avons remarqué que l'épaisseur locale du squelette au niveau de a correspond au diamètre du cercle minimum entourant la structure squelettique. Plutôt que de réaliser une optimisation pour trouver ce cercle minimum, nous proposons de chercher le cercle minimum entourant la structure squelettique dans la section transversale. Dans le plan de coupe, le problème revient à calculer le cercle minimum englobant un ensemble de points $\mathcal{I}$: ces points sont les intersections des liens de la structure squelettique avec le plan. Ce plan passe par la position de a . Pour le définir complètement, il nous reste à calculer sa normale. Nous proposons de prendre cette normale comme étant le premier axe principal des positions du voisinage géométrique de a avec $\kappa = 0.1$. Le choix de la valeur κ est justifié par l'extraction d'un repère local correctement aligné sur les données pour cette valeur et donc d'un plan de coupe adéquat.

Supposons que le plan de coupe intersecte la structure squelettique au niveau d'une autre composante squelettique que celle de a . Si nous considérons tous les liens pour construire l'ensemble $\mathcal{I}$, le cercle minimum englobe alors ces deux composantes squelettiques. Son diamètre serait donc sans rapport avec l'épaisseur locale en a . Ainsi, nous devons choisir avec soin les liens à prendre en compte. Le voisinage topologique que nous avons utilisé dans la section 5.1.2 satisfait nos besoins. Le dernier point à préciser est la valeur du paramètre κ pour ce voisinage. Une valeur trop faible donnerait une faible épaisseur locale à des atomes appartenant à de larges composantes surfaces, car trop peu d'atomes de la même composante seraient considérés et donc trop peu de liens intersecteraient le plan. Cela poserait problème pour identifier les composantes courbes et pour contrôler l'exécution de la hiérarchisation. Nous prenons alors une très grande valeur de κ . Comme toutes nos formes sont contenues dans la sphère unité, nous avons pour tous atomes a et b : $\|\text{POSITION}(a) - \text{POSITION}(b)\| < 2$. Ceci implique qu'un atome c dans le voisinage topologique de a est lié à un atome b qui vérifie : $\|\text{POSITION}(a) - \text{POSITION}(b)\| < \kappa \cdot \text{RAYON}(a) < 2$. Nous prenons donc $\kappa = \frac{2.0}{\text{RAYON}(a)}$ pour obtenir une bonne approximation de l'épaisseur locale.

Les atomes ayant une épaisseur locale inférieure à un seuil l correspondent aux composantes courbes. La valeur du seuil correspond au niveau de détail auquel nous analysons la structure squelettique. Comme toutes nos méthodes d'analyse de la structure squelettique, ce procédé est

simple mais donne de très bons résultats (voir la figure 5.25). Les parties du squelette ainsi identifiées par cette méthode correspondent aux composantes courbes, entre deux jonctions, mais également aux petites composantes terminales (une seule jonction), comme les doigts ou le nez du modèle *homer* de la figure 5.25.

Nous remarquons que la méthode n'est plus aussi précise lorsqu'elle est appliquée en un atome fortement éloigné des bords. Ce type d'atome appartient à une composante surface et le squelette a une forte épaisseur locale à son niveau. Cette limitation est due à notre définition de l'épaisseur par le diamètre d'un cercle qui ne s'étend pas correctement aux composantes surfaces. Sans améliorations, ni système de correction des valeurs aberrantes, nous ne recommandons pas cette technique pour calculer l'épaisseur locale en tout point de la structure squelettale. Cependant, ce problème n'est pas gênant pour la détection des composantes courbes, car par définition, ce sont les endroits avec une faible épaisseur locale, là où la méthode est précise.

Pour identifier les composantes courbes, nous avons également testé la méthode utilisée dans [Telea 2012]. Dans cette méthode, les aires des triangles formés par les liens entre un atome et ses atomes liés sont sommées. Quand la somme est inférieure à une valeur seuil, l'atome est considéré comme appartenant à une composante courbe. Les résultats n'étaient pas concluants sur nos squelettes, à cause de la structure squelettale. Par exemple, les positions des sommets ne sont pas répartis de façon homogène. Ainsi, au cœur d'une composante surface, il peut y avoir des triangles avec de petites arêtes, qui donnent une faible aire. Aussi, au sein d'une composante courbe, des triangles très allongés peuvent apparaître, ajoutant une forte quantité à l'aire totale. La segmentation en composantes courbes comportait donc beaucoup d'erreurs. Nous pensons que les résultats présentés dans [Telea 2012] avec cette méthode sont dépendants des squelettes utilisés. Ces squelettes sont obtenus par la nouvelle méthode de squelettisation par contraction de sphères [Ma 2012] avec un grand nombre d'échantillons de la forme. Ils ont une très forte densité d'atomes, ce qui réduit l'impact de l'apparence des triangles sur l'aire totale.

5.3.2/ PROCESSUS DE HIÉRARCHISATION

Notre méthode de hiérarchisation n'est pas encore définitive. Nous faisons face à des problèmes induits par la qualité des squelettes obtenus par les méthodes de squelettisation *Power Shape* et *Scale Axis*. En attendant de trouver un moyen simple pour exploiter les données disponibles dans ces squelettes et de finaliser nos algorithmes, nous présentons ici notre processus actuel de hiérarchisation. Bien qu'issus de recherches en cours, nos premiers résultats (voir la section 5.3.3) obtenus avec ce processus valident notre approche générale de la structure squelettale et motivent de futurs travaux sur le sujet.

La hiérarchisation débute avec un squelette nettoyé par la méthode du chapitre 4, soit une 2—hiérarchie. Chaque étape du processus contracte une n —hiérarchie pour former une $(n + 1)$ —hiérarchie. Pour cela, nous travaillons sur la liste des atomes racines du squelette, triée dans l'ordre des importances croissantes. Une étape commence par l'identification des bords et des courbes du squelette actuel parmi les atomes de cette liste. En absorbant les bords des n —hiérarchies successives, nous créons plusieurs niveaux dans la hiérarchie. Cela nous permet d'avoir autant de niveaux de détails pour l'interaction ou l'affichage de la forme, plutôt qu'un seul niveau faisant la transition directe entre le squelette et le meso-squelette. Comme nous cherchons à obtenir un squelette constitué de courbes, nous verrouillons les atomes identifiés comme tels au début de l'étape : ces atomes ne seront jamais absorbés et

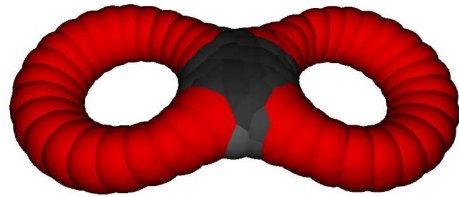
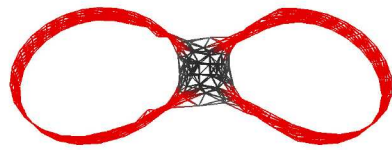
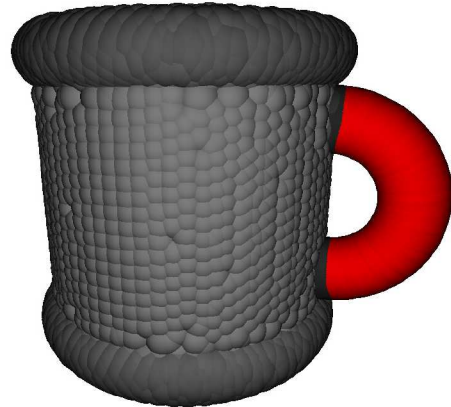
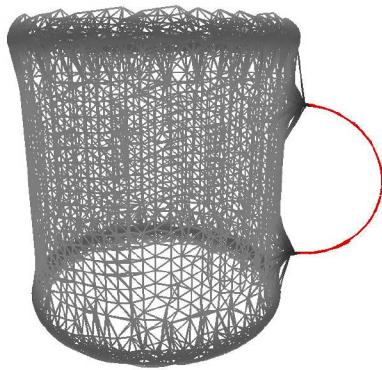
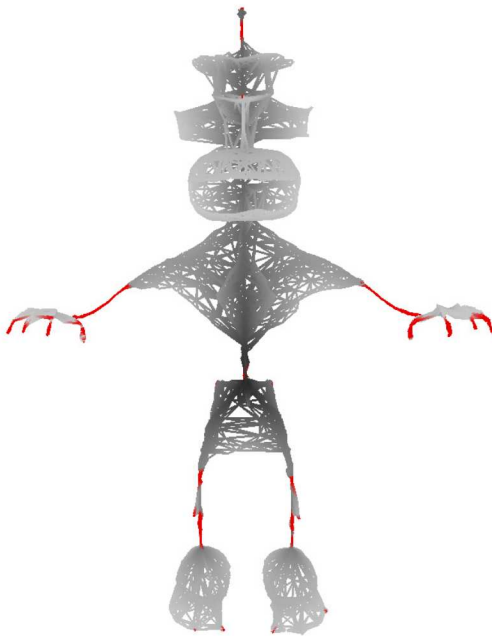
Modèle *eight* avec $l = 0.2$ Modèle *cup* avec $l = 0.02$ Modèle *homer* avec $l = 0.01$

FIGURE 5.25 – Extraction des composantes courbes des squelettes en utilisant différentes seuils l de l'épaisseur locale. Il est à noter que le second squelette représente une tasse dont le fond a été retiré.

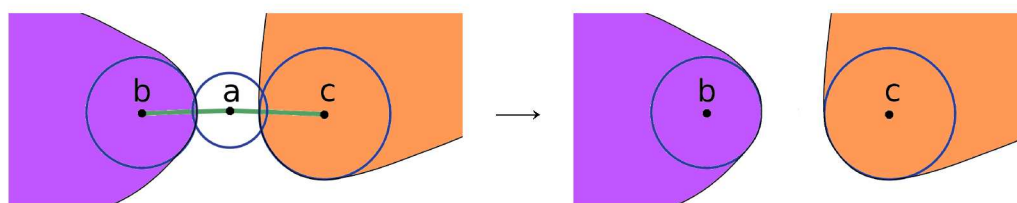


FIGURE 5.26 – Nécessité de la règle CONTRAINT2. À cause de CONTRAINT1, le lien avec c n'est pas transmis à b lors de l'absorption $a \triangleright b$, car leurs sphères (en bleu) ne s'intersectent pas. Il en résulte que les deux composantes (en violet et orange) du squelette ne sont plus connexes. En autorisant cette absorption, nous ne conservons pas le type d'homotopie du squelette : le meso-squelette serait composé de plusieurs composantes connexes.

seront donc présents dans le meso-squelette. Une étape de la hiérarchisation se termine par la promotion des racines de rang n pour obtenir une $(n + 1)$ -hiérarchie (voir la fin de la section 4.1).

Soit a un atome bord n'appartenant pas à une composante courbe lors de l'étape qui construit la $(n + 1)$ -hiérarchie à partir de la n -hiérarchie. Cet atome doit être absorbé vers l'intérieur du squelette. Pour cela, nous cherchons son atome lié b de plus grande importance. Comme l'importance croît de manière monotone vers l'intérieur, nous sommes assurés de prendre b dans la direction de l'intérieur. Nous réalisons alors l'absorption $a \triangleright b$. En plus de s'assurer du respect de la définition d'un squelette n -consistant (définition donnée dans la section 4.1), l'absorption doit réorganiser les liens afin de conserver le type d'homotopie du squelette. Une partie des liens de a doit alors être transmise à b . En transmettant tous les liens, nous aurions des liens entre atomes relativement espacés, après quelques absorptions. Les liens du meso-squelette, soit après un très grand nombre d'absorptions, seraient très peu pertinents : un atome du sommet de la tête pourrait être connecté à un atome du pouce de la main gauche. Pour éviter cette incohérence, nous utilisons notre méthode de décision de l'appartenance de deux atomes à la même composante logique : nous interdisons la création de tout lien entre deux atomes qui ne s'intersectent pas. Nous notons cette règle CONTRAINT1.

Avec cette règle, il est possible que le nombre de composantes connexes du squelette augmente. Ce cas survient pour une absorption $a \triangleright b$, quand a est le seul atome reliant la composante contenant b à la composante d'un atome c lié à a , tel que les sphères de b et c ne s'intersectent pas (voir la figure 5.26). Comme nous désirons conserver le type d'homotopie du squelette, ce genre d'absorption doit être interdit, ce qui forme notre seconde règle CONTRAINT2. S'il n'existe pas d'absorption autorisée pour l'atome a , nous ne faisons rien et passons à l'atome suivant de la liste. Cela signifie qu'il est possible de parcourir entièrement la liste sans verrouiller ou absorber d'atomes. Nous interrompons le processus de hiérarchisation quand un parcours de la liste se fait sans modification du squelette.

5.3.3/ RÉSULTATS

Nous proposons ici une analyse des résultats obtenus par ces recherches en cours sur la hiérarchisation. Pour cela nous montrons les hiérarchies obtenues sur différents modèles. Nous comparons ensuite les racines de ces hiérarchies, c'est-à-dire nos meso-squelettes, avec les squelettes courbes calculées par différents algorithmes récents. Enfin, nous listons et nous commentons les limitations actuelles de notre méthode.

5.3.3.1/ HIÉRARCHIES CALCULÉES

Commençons par étudier les résultats sur le modèle *armadillo*, illustrés par la figure 5.27. Ce modèle est très complexe, à cause de la multitude de petites composantes squelettiques qui décrivent les différentes plaques d'armure. L'interaction directe à travers ce squelette semble mal-aisée. Par contre, le meso-squelette que nous obtenons pour ce squelette paraît beaucoup plus adapté à l'interaction directe intuitive. Chacune de ses courbes est associée à une composante logique de la forme (en considérant les atomes de ces courbes ainsi que tous leurs fils). Les composantes des plaques d'armure, qui nous posaient problème dans le squelette, sont absorbées dès les premiers niveaux de la hiérarchie. Elles sont donc absentes du meso-squelette qui peut servir de structure d'interaction. En déplaçant les courbes du meso-squelette, ces détails bougeraient automatiquement avec la composante logique : l'utilisateur n'aura ni à identifier lui-même les détails, ni à définir une correspondance entre la structure d'interaction et ces détails. Visuellement, nous pouvons constater le respect et les conséquences des règles CONTRAINTE1 et CONTRAINTE2. L'union des sphères du meso-squelette a une seule composante connexe et deux atomes de composantes logiques éloignées ne sont jamais liés entre eux. Ces premiers résultats illustrent également une de nos limitations actuelles : le meso-squelette contient quelques arêtes indésirables. Nous reviendrons sur ces limitations dans la section 5.3.3.3.

Le processus de hiérarchisation est illustré par la figure 5.28, qui retrace l'obtention de la hiérarchie du squelette du modèle *dinopet*. La hiérarchisation se fait bien par la contraction des composantes squelettiques vers l'intérieur du squelette, comme nous l'avons annoncé. On peut voir sur cette figure le verrouillage des composantes courbes, au niveau de la queue, des bras et des jambes. Toutes les caractéristiques principales de la forme sont présentes à chaque rang de la hiérarchie. En particulier, le meso-squelette contient la géométrie minimale pour décrire chaque aspect de la forme. Aussi, le meso-squelette semble à nouveau parfaitement adapté à l'interaction intuitive avec la forme. Ceci valide notre approche pour résoudre le problème de la structure squelettique dans l'optique d'utiliser les squelettes pour l'interaction avec des formes.

Nous parlions en introduction de cette section de la nécessité de verrouiller les composantes courbes lors de la hiérarchisation. Notre argument était que ne pas verrouiller ces composantes conduirait à leur érosion jusqu'à extraire les cycles du squelette (et de la forme). Nous en faisons la démonstration en ne les verrouillant pas lors de la hiérarchisation du modèle *cup* (voir la figure 5.29). Nous obtenons une structure squelettique composée de deux courbes, indiquant les « trous » de la forme (et donc qu'elle est de genre deux). Ce résultat est intéressant pour faire l'analyse de la forme décrite par le squelette. En particulier, nous pouvons utiliser cette détection des cycles pour identifier les cavités lors de l'habillage. En effet, la capture de ces cavités est une des limitations de notre méthode d'habillage (nous utilisons une profondeur maximale dans la construction de l'arbre octal afin de capturer toutes les cavités d'un ordre de grandeur inférieur à la taille d'un octant de cette profondeur).

5.3.3.2/ COMPARAISONS ENTRE LE MESO-SQUELETTE ET LES SQUELETTES COURBES

Nous annonçons dans la section 2.1.1 que les squelettes courbes étaient mieux adaptés à une utilisation comme structure d'interaction. Pour évaluer le potentiel de notre meso-squelette dans les interactions intuitives, nous le comparons à d'autres squelettes courbes. Pour comparer correctement les résultats, il est important de différencier le contexte de ces

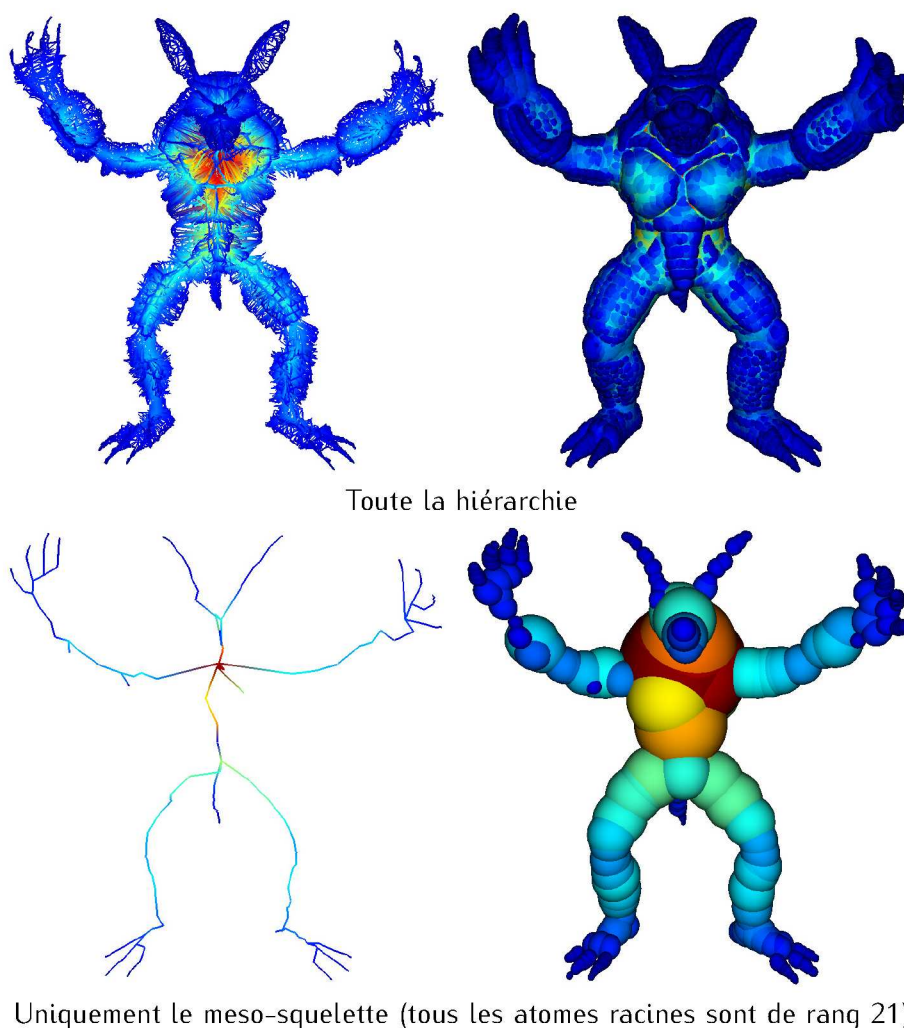


FIGURE 5.27 – Résultats de la hiérarchisation sur le modèle armadillo. Le squelette est fortement complexe, à cause de tous les détails de surface qui décrivent les plaques d'armure. Cependant, le meso-squelette, bien plus simple, permet une manipulation directe efficace de la forme : chaque courbe est associée à une composante logique. Le code couleur utilisé est celui des rayons d'atomes.

méthodes avec notre hiérarchisation. En particulier, ces méthodes ont plus de données à exploiter et moins de contraintes.

Dans les méthodes de squelettisation courbe, la forme à décrire est toujours disponible, bien souvent sous la forme d'un maillage triangulaire. Ces méthodes peuvent alors, par exemple, contracter directement la forme pour obtenir le squelette courbe [Au 2008] ou utiliser le maillage pour calculer des données spécifiques, comme les chemins géodésiques sur la forme [Reniers 2008, Telea 2012]. Ces méthodes de squelettisation disposent donc de données supplémentaires qui les dirigent au mieux dans le processus d'extraction du squelette courbe. Comme nous l'avons expliqué tout au long de ce mémoire, ces données sont incompatibles avec notre objectif.

En plus de la contrainte d'utiliser uniquement les données du squelette, nous cherchons également à capturer les zones caractéristiques de la forme. Aussi, nous imposons que l'union des sphères du meso-squelette conserve une seule composante connexe. La géométrie

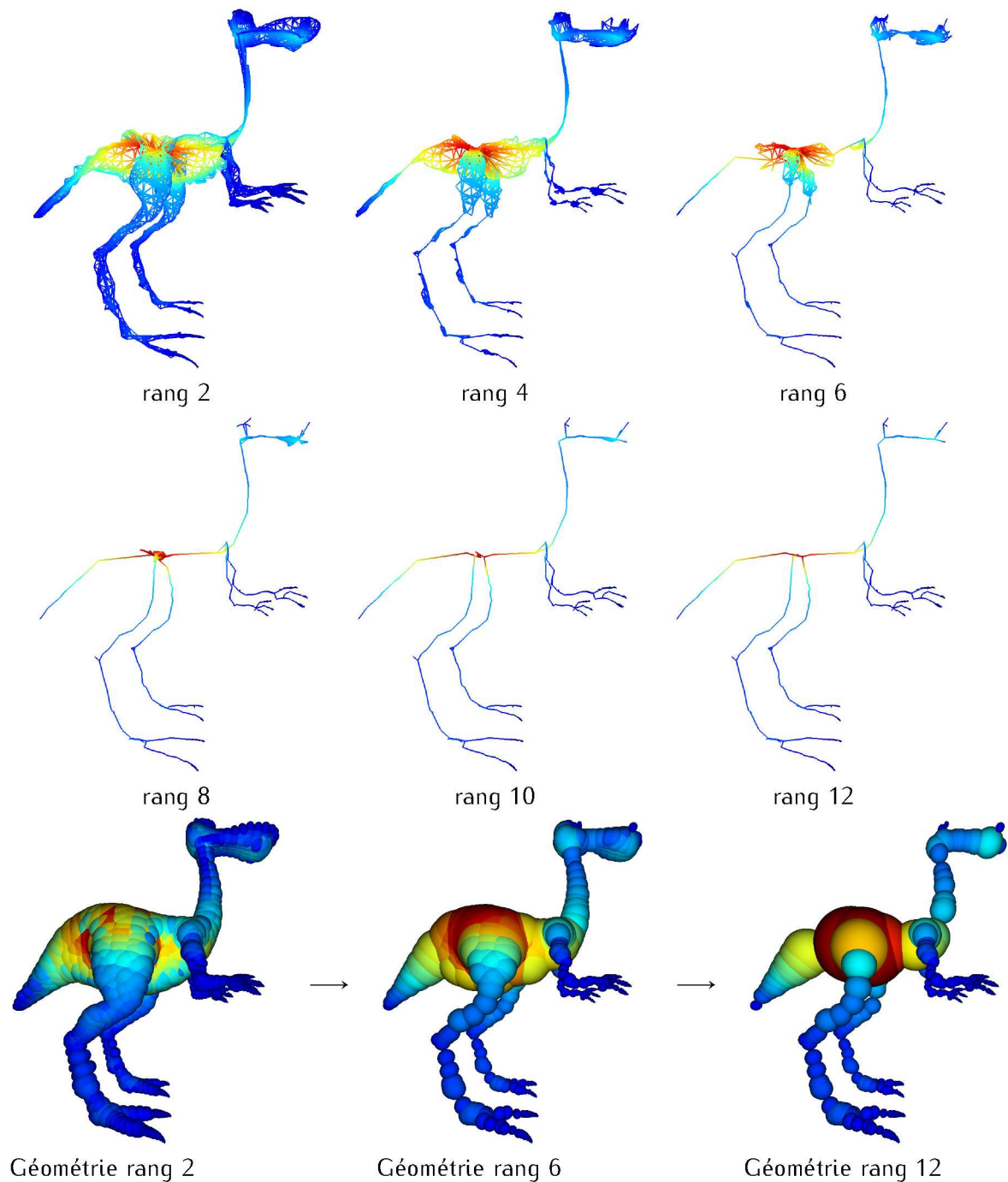


FIGURE 5.28 – Hiérarchisation du squelette du modèle dinopet. Le rang indique le rang des racines du squelette en cours de hiérarchisation. Un rang de n correspond donc au squelette après $n - 2$ contractions (la hiérarchisation débute avec un squelette de rang 2).

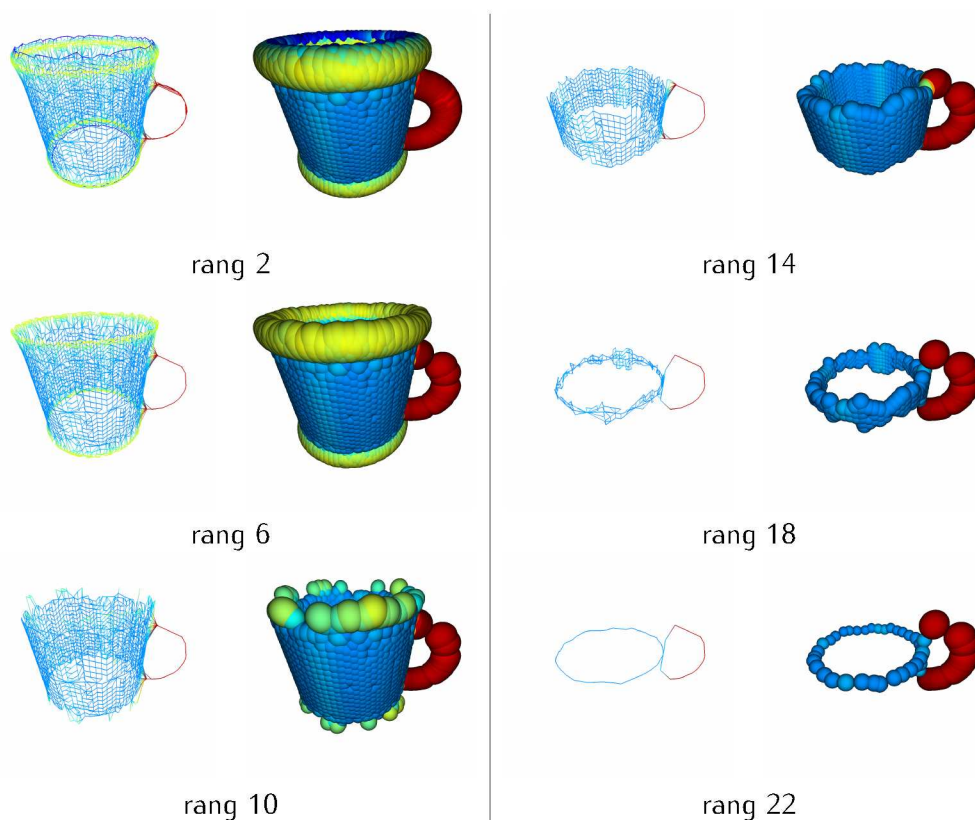


FIGURE 5.29 – Analyse de la topologie de la forme cup et son squelette par hiérarchisation sans verrouillage des composantes courbes. Le meso-squelette (rang 22) est composé de deux cycles, ce qui indique que la forme est de genre 2. Le résultat avec verrouillage est donné dans la figure 5.34.

capturée par le squelette courbe n'est pas un critère de qualité de la squelettisation courbe, c'est pourquoi elle n'est jamais illustrée dans les différents travaux. Les squelettes de ces méthodes souffrent alors moins de notre problème de branches indésirables présentes dans le meso-squelette. En effet, cette limitation survient à cause de la difficulté de concilier les contraintes supplémentaires de notre méthode (voir la section 5.3.3.3). Ainsi, la méthode illustrée dans [Telea 2012] déplace des atomes dans l'espace pour faciliter la contraction du squelette, sans se soucier des impacts sur la modification de la géométrie capturée. De plus, certaines méthodes de squelettisation utilisent une étape additionnelle, absente de la notre, pour retirer ces branches indésirables ou supprimer les dernières organisations en surface (par exemple, les auteurs de [Au 2008] appellent cette étape la « chirurgie de connectivité »).

Cette différence des contextes étant explicitée, commençons par comparer nos résultats avec la première squelettisation courbe à utiliser la notion d'importance, sous la forme de la fonction géodésique médiane [Dey 2006] (voir la section 2.3.2.2 pour la définition de cette fonction). Nous présentons dans la figure 5.30 nos résultats sur le même modèle avec un point de vue similaire. Les seules différences notables entre les deux squelettes sont la présence de trois arêtes indésirables dans notre résultat et des composantes courbes moins régulières. Ces différences s'expliquent par la différence de contexte dont nous parlions précédemment. Ainsi, en calculant directement l'importance sur le squelette, notre meso-squelette est de la même qualité qu'une méthode qui utilise la forme : il est centré dans la forme, de même type d'homotopie, et chaque partie importante de la forme est associée à une de ses composantes.

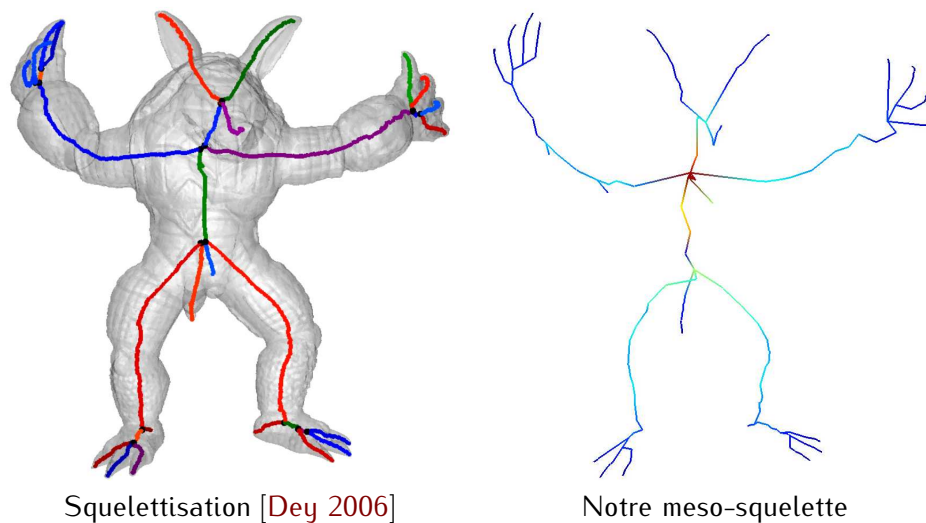


FIGURE 5.30 – Comparaison de notre meso-squelette avec le squelette courbe extrait par le calcul d’une importance à l’aide de la forme dans la méthode [Dey 2006]. Les différences entre les deux squelettes s’expliquent par les étapes supplémentaires dans [Dey 2006] qui permettent de lisser l’apparence des courbes et de retirer des branches indésirables.

Toujours dans la catégorie des squelettisations courbe par importance, nous nous sommes comparés aux méthodes qui extraient le squelette courbe à partir du squelette surface [Reniers 2008, Telea 2012]. Pour cela, nous avons présenté nos résultats sur deux modèles, *female_hand* et *horse1*, également utilisés dans ces travaux (voir la figure 5.31). À nouveau, les résultats sont de la même qualité, malgré les contraintes additionnelles et la plus faible quantité de données à notre disposition. Des données en quantité d’autant plus faible que nos squelettes surfaces contiennent bien moins d’éléments que ceux des méthodes comparées. Nous soulevons cependant la question de la pertinence de la courbe reliant le centre de la main à l’index dans notre meso-squelette. Cette courbe est excentrée par rapport au squelette surface. Elle est le résultat de nos contraintes additionnelles. En effet, en supprimant ces contraintes, cette courbe se rapproche du centre de la main, mais d’autres problèmes surviennent ailleurs.

Dans les travaux de squelettisation courbe par contraction de maillage [Au 2008], une comparaison est faite avec plusieurs autres algorithmes. Le premier est une méthode qui utilise les graphes de Reeb, définis grâce à la sélection de points-clefs par l’utilisateur [Aujay 2007]. Les trois autres algorithmes sont des variantes d’une méthode géométrique proposée dans [Cornea 2007], travaillant sur un champ potentiel, un champ de distance et sur l’érosion de la forme. Nous avons utilisé cette comparaison afin de l’étendre à notre méthode (voir la figure 5.32). Les contraintes additionnelles, qui causent certaines de nos limitations, nous permettent toutefois d’obtenir un résultat de bonne qualité, à la vue de ces autres méthodes. En effet, comme le meso-squelette est un sous-ensemble du squelette surface, nous ne sortons pas de la forme comme le résultat de la méthode [Aujay 2007]. Aussi, nous avons bien moins de branches indésirables que les calculs par champ de distance et érosion de la méthode [Cornea 2007]. Enfin, en l’absence d’étape de nettoyage des branches du meso-squelette, notre résultat est aussi clair que celui de la variante du champ potentiel de la méthode [Cornea 2007] et de la méthode [Au 2008].

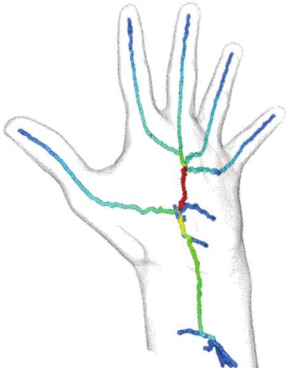
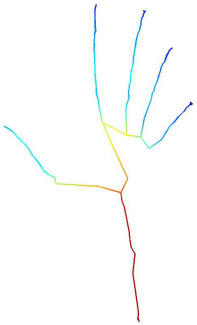
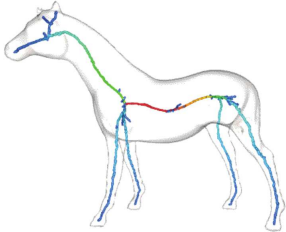
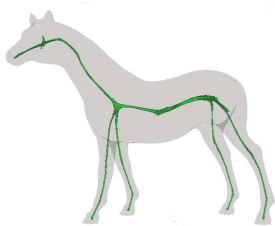
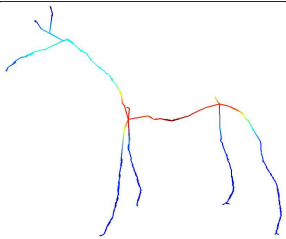
[Reniers 2008]	[Telea 2012]	Notre méthode
		
197 245 atomes initiaux	3,2 millions de voxels initiaux	2 311 atomes initiaux
		
données initiales inconnues	4,9 millions de voxels initiaux	17 458 atomes initiaux

FIGURE 5.31 – Comparaison de nos meso-squelettes avec les squelettes courbes extraits par contraction de squelettes surfaces dans les méthodes [Reniers 2008] et [Telea 2012].

5.3.3.3/ LIMITATIONS ET DISCUSSION

Notre méthode actuelle souffre de deux limitations : la non-disparition de branches indésirables et la présence de composantes surfaces dans le meso-squelette. Les branches indésirables surviennent à cause de la détection des composantes courbes sur une structure squelette à densité d'atomes variable (voir la figure 5.33). Par rapport à leurs atomes liés, certains atomes sont très proches des bords du squelette lors d'une étape de la hiérarchisation. Lorsque les bords sont absorbés, ces atomes sont identifiés comme faisant partie des composantes courbes et sont verrouillés. À cause des différentes contraintes, ces atomes vont devenir les extrémités de courbes dans le meso-squelette, ce qui produit les branches indésirables (voir la figure 5.34). Nous cherchons un moyen d'éliminer cette situation en changeant l'ordre des opérations dans le processus de hiérarchisation. Nous voulons également expérimenter notre méthode sur les squelettes obtenus par contraction de sphères (voir la section 2.2.3.3), qui pourraient avoir une densité d'atomes plus régulière.

La seconde limitation concerne l'existence de composantes surfaces dans le meso-squelette. Ce cas survient lorsque les contraintes interdisent l'absorption des atomes appartenant à ces composantes. Par exemple, un atome peut être le seul lien entre deux parties de la forme, son absorption conduisant à l'augmentation du nombre de composantes connexes de l'union des sphères (et l'habillage produira une visualisation avec plusieurs objets distincts). Nous cherchons une solution à cette limitation également en changeant l'ordre des calculs dans la hiérarchisation. Nous envisageons aussi la création d'atomes, pour satisfaire localement les contraintes, ce qui permet plus d'absorptions et donc la disparition des composantes surfaces. Enfin, pour ces deux limitations, nous considérons la suppression de certains liens non nécessaires. Ces suppressions pourraient relâcher le nombre de contraintes pour mener

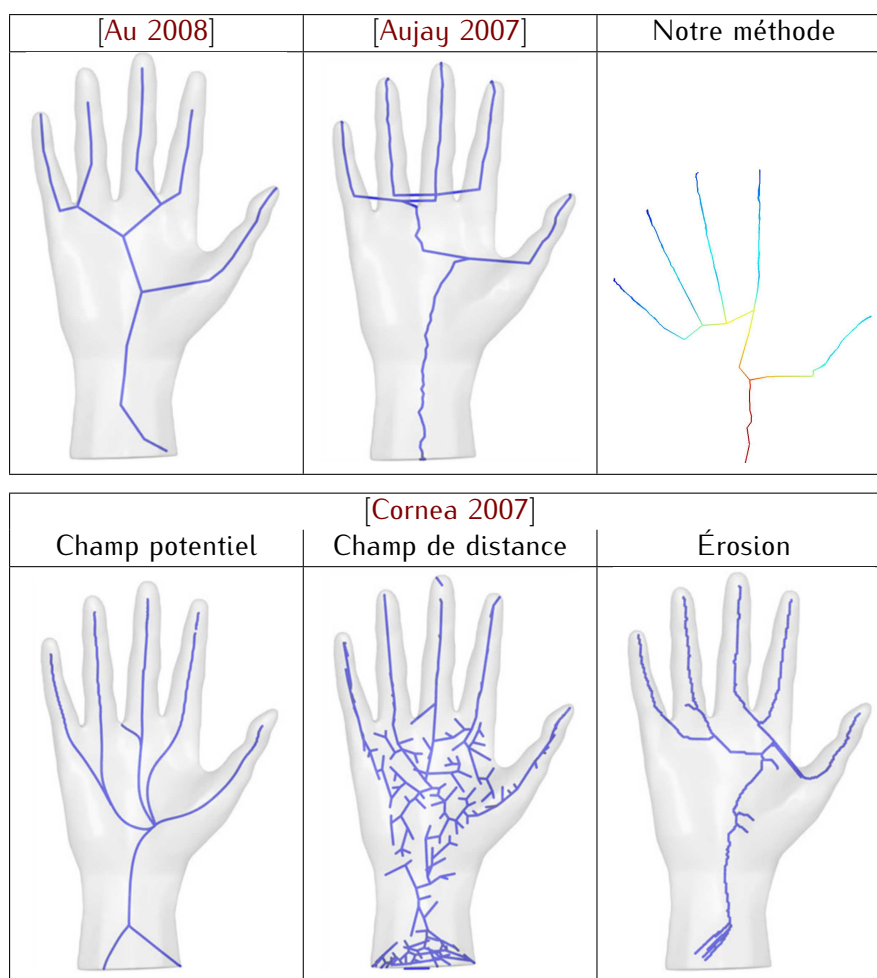


FIGURE 5.32 – Comparaison de notre meso-squelette pour un modèle de main aux squelettes courbes extraits par les méthodes [Au 2008], [Aujay 2007] et [Cornea 2007].

à de meilleurs résultats.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons travaillé sur la structure squelettale afin de pouvoir utiliser le squelette comme un instrument d'interaction directe et intuitive. Nous avons identifié les bords, calculé l'importance des atomes, identifié les composantes courbes et hiérarchisé le squelette, sans aucune autre donnée que les sphères et les liens entre atomes. Ces méthodes sont donc suffisamment générales pour être appliquées sur tout squelette, quelque soit la squelettisation utilisée pour calculer le squelette. Il semble possible, à partir de la hiérarchie, de segmenter le squelette en composantes squelettiques. De même, en poursuivant nos premiers travaux sur l'identification des jonctions, nous pourrions également obtenir ces composantes squelettiques. Dès lors, nous serons capables de segmenter la forme grâce à ces composantes et également de contrôler un processus de réorganisation des liens, composante par composante. Ainsi, le problème de la structure squelettale serait complètement résolu.

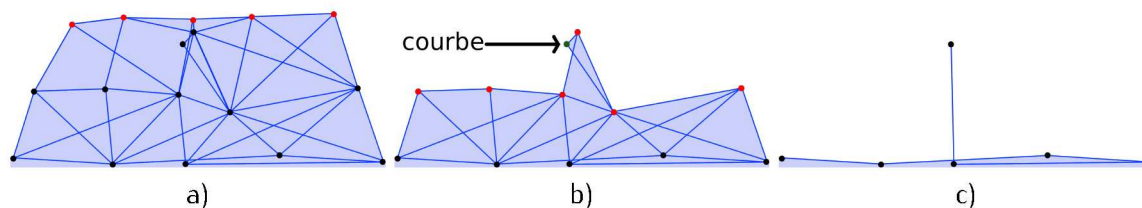


FIGURE 5.33 – Création d'une branche indésirable dans le meso-squelette. a) Quelques atomes sont bien plus proches des bords (en rouge) que leurs voisins. b) Une fois les bords absorbés, l'un de ces atomes peut être détecté comme appartenant à une courbe. c) Lorsque la hiérarchisation continue, cet atome demeure car verrouillé, et crée une branche indésirable.

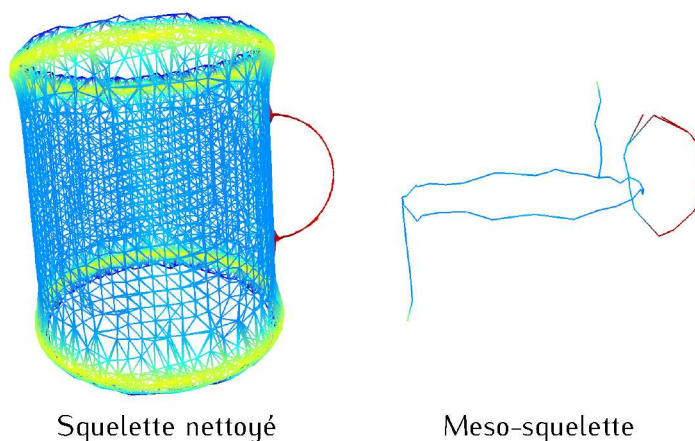


FIGURE 5.34 – Présence de branches indésirables dans le meso-squelette du modèle cup. Les deux branches indésirables sont causées par la présence de deux configurations similaires à celui illustré par la figure 5.33.

Le meso-squelette et la hiérarchie peuvent fortement améliorer notre méthode d'habillage rapide du chapitre 3. Par exemple il est possible d'identifier les détails et les cavités d'une forme, ce qui résout les limitations actuelles de notre habillage. De plus, en utilisant uniquement les sphères des atomes du meso-squelette comme primitives géométriques, la construction de l'arbre octal (étape représentant la majorité du temps d'exécution de notre habillage) se ferait beaucoup plus rapidement.

La structure squelettale, avec notamment le calcul de la hiérarchie et sa racine, le meso-squelette, était le dernier pré-requis au développement de méthodes d'interactions intuitives avec les formes par les squelettes. Nos résultats ouvrent donc des perspectives dans les applications dont nous parlions en introduction, à savoir : la simplification, la segmentation, la déformation, l'animation et la création de formes.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La thématique centrale de cette thèse était l'étude des possibilités des squelettes dans des applications graphiques. Les squelettes sont des MRF théoriques, dont le lien avec les formes qu'ils décrivent est intuitivement compris : les effets d'une modification d'un squelette sur la forme semblent naturels. Cette particularité nous a conduit à considérer les squelettes comme structure d'interaction avec les formes 3D, en visant les applications de segmentation, création, déformation, simplification et animation de formes. Une telle utilisation des squelettes permet de se passer d'une structure supplémentaire, que ce soit pour représenter la forme ou interagir avec. Ainsi, nous évitons la difficulté de maintenir une cohérence entre un MRF et une structure d'interaction, tout en ayant des interactions simples.

Pour mener à une telle utilisation des squelettes, nous avons commencé par formuler le concept d'interaction directe et intuitive avec les formes. Notre analyse de la notion d'interaction directe nous a poussé à chercher une structure d'interaction multi-échelle, complète, intuitive et automatique. En posant le squelette comme MRF et structure d'interaction, les deux derniers points sont déjà validés, à condition de construire des méthodes qui nécessitent uniquement les données du squelette. Ensuite, nous avons étudié la qualité d'un squelette quant à une utilisation comme MRF. Nous avons caractérisé cette qualité par trois aspects : la capacité de reconstruction, le bruit squelettal et la structure squelettale. L'évaluation et l'amélioration des deux premiers aspects requièrent une méthode d'habillage et une méthode de régularisation. Pour l'interaction intuitive avec des formes par un squelette, nous avons mis l'accent sur l'importance de l'amélioration de la structure squelettale. En particulier, cette amélioration passe par l'identification des bords et des composantes squelettales d'un squelette, ainsi que par la hiérarchisation des atomes. Cette amélioration permet aussi d'obtenir une interaction directe, en rendant la structure d'interaction multi-échelle et complète.

Dans le chapitre 2, nous nous sommes consacrés à l'analyse des différentes formulations squelettales. Il s'est avéré qu'aucun squelette n'était complètement adapté à nos besoins. En donnant des priorités à nos besoins, nous avons choisi de nous concentrer sur la formulation médiane analytique, car c'est la formulation la plus à même de représenter en pratique une forme. Dans ce chapitre, nous avons également analysé les méthodes existantes d'habillage, de régularisation et d'amélioration de la structure squelettale. Nous avons alors constaté qu'une utilisation des squelettes comme MRF n'était pas encore possible. Toutes les méthodes existantes reposent sur des données dépendantes de la forme, qui ne peuvent pas être calculées à partir du squelette. Aussi, l'habillage et la capacité de reconstruction n'ont jamais été étudiés dans cette optique. Les méthodes de régularisation suppriment les détails tout en laissant du bruit squelettal. Enfin, les seuls travaux applicables sur la structure squelettale sont ceux qui permettent de construire une telle structure lors d'une squelettisation. Nous nous sommes donc proposés de résoudre ces manques afin de pouvoir appliquer les

squelettes aux interactions directes et intuitives.

Dans le chapitre 3, nous avons proposé une méthode d'habillage rapide, qui produit un habit de bonne qualité. Avec un tel habit, nous pouvons visualiser la forme décrite par un squelette, sans artefacts. Nous pouvons également exporter cette forme vers un maillage pour être utilisée dans d'autres applications que celles que nous proposons de développer. Enfin, cet habit nous permet d'évaluer la capacité de reconstruction d'un squelette. En étudiant ces capacités, nous en avons conclu que les squelettes *Power Shape* décrivaient mieux la géométrie d'une forme que les squelettes *Scale Axis*. Ce résultat montre l'importance d'effectuer autant que possible des comparaisons chiffrées sur les squelettes. En effet, en visualisant seulement les structures squelettiques, les squelettes *Scale Axis* semblent meilleurs. Pourtant, la visualisation de la géométrie, de même que nos mesures, montrent que les squelettes *Scale Axis* ignorent des détails et contiennent plus de géométrie aberrante.

Dans le chapitre 4, nous avons décrit notre méthode de régularisation du squelette. Les méthodes existantes construisent un critère d'importance des atomes pour identifier le bruit squelettal. Les atomes avec une faible importance sont ensuite supprimés par ces méthodes. En procédant ainsi, certains détails ont une importance plus faible que les atomes du bruit squelettal. Les détails sont alors supprimés alors que le bruit reste. Notre approche sépare les concepts d'importance des atomes et de bruit squelettal, afin d'éviter ce problème. Dans ce chapitre, nous avons identifié le bruit squelettal grâce à des méthodes géométriques. Nous avons également prouvé expérimentalement que seul le bruit squelettal est supprimé alors que les détails restent dans le squelette. Une telle preuve n'a, à notre connaissance, jamais été faite dans les travaux précédents sur la régularisation. Nous avons également mesuré le taux de bruit des squelettes *Power Shape* et *Scale Axis*. Il est apparu, à nouveau, que les squelettes *Scale Axis* sont de moins bonne qualité, puisqu'en moyenne 52.2% des atomes peuvent être supprimés tout en améliorant la capacité de reconstruction, contre 21% pour les squelettes *Power Shape*. Compte-tenu de la faible capacité de reconstruction pour un grand nombre d'atomes, du haut taux de bruit et de leurs longs temps de calculs, les squelettes *Scale Axis* semblent inadaptés à une utilisation pratique comme MRF.

Dans le chapitre 5, nous avons amélioré la structure squelettique, afin de pouvoir enfin utiliser les squelettes comme MRF et instrument d'interaction directe et intuitive. Nous avons construit une méthode d'identification des bords et une méthode de calcul d'une importance des atomes qui croît de manière monotone vers l'intérieur du squelette. Ces méthodes sont les premières à réaliser ces tâches sans nécessiter d'autres données que des sphères et une structure squelettique usuelle. Nos premières expérimentations montrent qu'il est possible de réutiliser le principe de ces méthodes pour identifier les jonctions entre les composantes squelettiques. Nous serions alors capables de segmenter le squelette en composantes squelettiques sans avoir à réorganiser d'abord les liens chaotiques de la structure squelettique. Poursuivre le développement de notre méthode d'identification des jonctions permettrait de résoudre définitivement le problème de la structure squelettique. Grâce à une technique d'identification des composantes courbe, nous proposons dans ce chapitre une méthode pour hiérarchiser le squelette. Chaque niveau de la hiérarchie reflète un niveau de détail de la forme et du squelette. La racine de cette hiérarchie, le meso-squelette, est un squelette courbe qui capture toutes les parties caractéristiques de la forme. Notre squelette hiérarchique est un MRF que nous pouvons utiliser comme structure d'interaction directe et intuitive.

Notre travail représente une avancée dans l'utilisation des squelettes dans les applications graphiques. Nous avons fait du squelette un MRF pratique alors qu'il n'était jusqu'à présent qu'un MRF théorique. Pour se faire, nous avons supprimé la dépendance des squelettes aux

données additionnelles qui nécessitent de connaître à chaque instant un maillage de la forme. Aussi, nos solutions originales au problème de la structure squelettale, permettent d'exploiter pleinement le potentiel des squelettes. Ceci ouvre une perspective sur les interactions directes et intuitives. La simplification d'une forme se fait tout simplement en considérant un rang minimal dans notre modèle hiérarchique. La segmentation d'une forme est réalisée en utilisant soit les composantes courbes du meso-squelette couplées à la hiérarchie, soit les composantes squelettiques obtenues en poursuivant notre méthode d'identification des jonctions. En propageant des contraintes le long de notre structure squelettale améliorée, il est possible de diriger des processus d'animation (grâce à l'animation squelettale) et de déformation (comme nous l'expliquions dans la section 1.1.3). La création de forme nécessite cependant des travaux additionnels sur le squelette : comment ajouter de la géométrie à un squelette ?

Ce point particulier rejoint une deuxième perspective de notre travail : l'amélioration des méthodes de squelettisation. En effet, l'ajout de géométrie à un squelette se fait en ajoutant des atomes, ce qui correspond à une squelettisation partielle. Nous proposons quelques pistes pour réaliser cela. Tout d'abord, nous pensons que l'avenir de la squelettisation passe par les méthodes massivement parallèles comme la méthode de contraction des sphères [Ma 2012]. Comme cette méthode obtient rapidement des atomes, nous pouvons réaliser des calculs complexes pour améliorer le squelette produit, sans que la durée totale de calcul soit plus longue que les squelettisations *Power Shape* ou *Scale Axis*. Ensuite, nous construisons une voxelisation de la forme à squelettiser. Nous pourrions alors appliquer localement notre méthode d'habillage, pour mesurer la distance entre cet habit par morceaux et la forme. Si la distance est trop grande, il est possible de raffiner localement l'algorithme de squelettisation, pour obtenir sur demande de nouveaux atomes. Aussi, lorsque du bruit squelettique est détecté, il est immédiatement supprimé. Pour accélérer la méthode il faut s'assurer de l'indépendance des calculs, afin d'avoir une exécution parallèle. Pour cela, il faut notamment repenser les algorithmes de construction de structure squelettale, qui reposent tous sur une tétraèdrisation ou une triangulation. En effet, ces structures doivent être calculées séquentiellement, ce qui représente la majeure partie du temps d'exécution des squelettisations actuelles. Alternative-ment, nous pouvons appliquer la méthode de contraction des sphères sur un échantillonnage à forte densité de la forme, puis supprimer des atomes en vérifiant que la capacité de reconstruction ne diminue pas. Nous aurions ainsi un squelette qui capture tous les détails d'une forme, rapidement, sans avoir un nombre d'atomes démesuré. Enfin, nous pouvons réorganiser la structure squelettale, grâce à nos travaux sur le sujet. En utilisant notre approche des squelettes et la forme, nous obtiendrions ainsi directement un squelette d'une grande qualité.

BIBLIOGRAPHIE

- [Amenta 2000a] N. Amenta, S. Choi, T. K. Dey et N. Leekha. *A Simple Algorithm for Homeomorphic Surface Reconstruction*. In Proceedings of the Sixteenth Annual Symposium on Computational Geometry, SCG '00, pages 213–222, New York, NY, USA, 2000. ACM.
- [Amenta 2000b] Nina Amenta et Ravi Krishna Kolluri. *Accurate and Efficient Unions of Balls*. In In Proc. 16th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom, pages 119–128, 2000.
- [Amenta 2001a] Nina Amenta, Sunghee Choi et Ravi Krishna Kolluri. *The power crust*. In 6th ACM symposium on Solid modeling and applications, pages 249–266, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [Amenta 2001b] Nina Amenta, Sunghee Choi et Ravi Krishna Kolluri. *The Power Crust, Unions of Balls, and the Medial Axis Transform*. Computational Geometry : Theory and Applications, vol. 19, no. 2-3, pages 127–153, 2001.
- [Aspert 2002] N. Aspert, D. Santa-Cruz et T. Ebrahimi. *MESH : Measuring Errors between Surfaces using the Hausdorff Distance*. In IEEE International Conference on Multimedia and Expo, volume I, pages 705 – 708, 2002.
- [Attali 2009] Dominique Attali, Jean-Daniel Boissonnat et Herbert Edelsbrunner. *Stability and Computation of Medial Axes : a State-of-the-Art Report*. In T. Möller, B. Hamann et R. Russell, éditeurs, Mathematical Foundations of Scientific Visualization, Computer Graphics, and Massive Data Exploration, Mathematics and Visualization, pages 109–125. Springer-Verlag, 2009. Département Images et Signal ACM, SIAM.
- [Au 2008] Oscar Kin-Chung Au, Chiew-Lan Tai, Hung-Kuo Chu, Daniel Cohen-Or et Tong-Yee Lee. *Skeleton Extraction by Mesh Contraction*. ACM Trans. Graph., vol. 27, no. 3, pages 44 :1–44 :10, Août 2008.
- [Aujay 2007] Grégoire Aujay, Franck Hétroy, Francis Lazarus et Christine Depraz. *Harmonic Skeleton for Realistic Character Animation*. In Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, SCA '07, pages 151–160, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2007. Eurographics Association.
- [Autodesk 1998] Autodesk. *Maya*, 1998. <http://www.autodesk.fr/maya>.
- [Banégas 2001] Frederic Banégas, Marc Jaeger, Dominique Michelucci et M. Roelens. *The Ellipsoidal Skeleton in Medical Applications*. In Proceedings of the Sixth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, SMA '01, pages 30–38, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [Beaudouin-Lafon 2000] Michel Beaudouin-Lafon. *Instrumental Interaction : An Interaction Model for Designing post-WIMP User Interfaces*. In Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems, CHI '00, pages 446–453, New York, NY, USA, 2000. ACM.

- [Bernardini 1997] Fausto Bernardini et Chandrajit L. Bajaj. *Sampling and Reconstructing Manifolds Using Alpha-Shapes*. In In Proc. 9th Canad. Conf. Comput. Geom, page pages, 1997.
- [Bernardini 1999] F. Bernardini, J. Mittleman, H. Rushmeier, C. Silva et Gabriel Taubin. *The ball-pivoting algorithm for surface reconstruction*. Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on, vol. 5, no. 4, pages 349–359, 1999.
- [Bernhardt 2008] Adrien Bernhardt, Adeline Pihuit, Marie-Paule Cani et Loic Barthe. *Matisse : Painting 2D regions for Modeling Free-Form Shapes*. In Christine Alvarado et Marie-Paule Cani, éditeurs, Eurographics Workshop on Sketch-Based Interfaces and Modeling (SBIM), pages 57–64, Annecy, France, june 2008.
- [Blender 1988] Blender. *Blender Foundation*, 1988. <http://www.blender.org>.
- [Blinn 1982] James F. Blinn. *A Generalization of Algebraic Surface Drawing*. ACM Trans. Graph., vol. 1, no. 3, pages 235–256, Juillet 1982.
- [Blum 1967] Harry Blum. *A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape*. In Models for the Perception of Speech and Visual Form, pages 362–380. MIT Press, Cambridge, 1967.
- [Blum 1978] Harry Blum et Roger N. Nagel. *Shape description using weighted symmetric axis features*. Pattern Recognition, vol. 10, no. 3, pages 167 – 180, 1978.
- [Boissonnat 2005] Jean-Daniel Boissonnat et Y. Oudot Steve. *Provably good sampling and meshing of surfaces*. Graphical Models, vol. 67, pages 405–451, 2005.
- [Borouchaki 1998] Houman Borouchaki, Frederic Hecht, Pascal et J. Frey. *Mesh Gradation Control*. In Int. J. Numer. Methods Eng, pages 131–141, 1998.
- [Brady 1984] M. J. Brady et H. Asada. *Smooth Local Symmetries and Their Implementations*. International Journal of Robotic Research, 1984.
- [Brandt 1994] J.W. Brandt. *Convergence and Continuity Criteria for Discrete Approximations of the Continuous Planar Skeleton*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding, vol. 59, no. 1, pages 116 – 124, 1994.
- [Cao 2010] Junjie Cao, Andrea Tagliasacchi, Matt Olson, Hao Zhang et Zhinxun Su. *Point Cloud Skeletons via Laplacian Based Contraction*. In Proceedings of the 2010 Shape Modeling International Conference, SMI '10, pages 187–197, Washington, DC, USA, 2010. IEEE Computer Society.
- [Cazals 2009] Frederic Cazals, Kanhere Harshad et Sebastien Lorient. *Computing the Volume of a Union of Balls : a Certified Algorithm*. Rapport de recherche RR-7013, INRIA, 2009.
- [Cazals 2011] Frederic Cazals, Harshad Kanhere et Sébastien Lorient. *Computing the Volume of a Union of Balls : A Certified Algorithm*. ACM Trans. Math. Softw., vol. 38, no. 1, pages 3 :1–3 :20, Décembre 2011.
- [CGAL 1996] CGAL. *CGAL, Computational Geometry Algorithms Library*, 1996. <http://www.cgal.org>.

- [Chazal 2004] F. Chazal et R. Soufflet. *Stability and Finiteness Properties of Medial Axis and Skeleton*. Journal of Dynamical and Control Systems, vol. 10, no. 2, pages 149–170, Avril 2004.
- [Cornea 2005] Nicu D. Cornea, M. Fatih Demirci, Deborah Silver, Ali Shokoufandeh, Sven J. Dickinson et Paul B. Kantor. *3D Object Retrieval Using Many-to-many Matching of Curve Skeletons*. In Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications 2005, SMI '05, pages 368–373, Washington, DC, USA, 2005. IEEE Computer Society.
- [Cornea 2007] Nicu D. Cornea, Deborah Silver et Patrick Min. *Curve-Skeleton Properties, Applications, and Algorithms*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 13, pages 530–548, 2007.
- [Culver 1999] Tim Culver, John Keyser et Dinesh Manocha. *Accurate computation of the medial axis of a polyhedron*. In Proceedings of the fifth ACM symposium on Solid modeling and applications, SMA '99, pages 179–190, New York, NY, USA, 1999. ACM.
- [de Oliveira 2003] João Batista S. de Oliveira et Luiz Henrique de Figueiredo. *Robust Approximation of Offsets, Bisectors, and Medial Axes of Plane Curves*. Reliable Computing, pages 161–175, 2003.
- [Delame 2011] T. Delame, J. C. Léon, M. P. Cani et R. Blanch. *Gesture-based design of 2d contours : an alternative to sketching ?* In Proc. of the Eighth Eurographics Symposium on Sketch-Based Interfaces and Modeling, SBIM '11, pages 63–70, 2011.
- [Delame 2012] T. Delame, C. Roudet et D. Faudot. *From A Medial Surface To A Mesh*. Computer Graphics Forum, vol. 31, no. 5, pages 1637–1646, 2012.
- [Dey 2001] Tamal K. Dey, Joachim Giesen et James Hudson. *Decimating Samples for Mesh Simplification*. In Proc. 13th Canadian Conf. Comput. Geom, pages 85–88, 2001.
- [Dey 2003] Tamal K. Dey et Wulue Zhao. *Approximating the Medial Axis from the Voronoi Diagram with a Convergence Guarantee*. Algorithmica, vol. 38, no. 1, pages 179–200, Octobre 2003.
- [Dey 2006] Tamal K. Dey et Jian Sun. *Defining and computing curve-skeletons with medial geodesic function*. In Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing, SGP '06, pages 143–152, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2006. Eurographics Association.
- [Edelsbrunner 1994] Herbert Edelsbrunner et Ernst P. Mücke. *Three-dimensional Alpha Shapes*. ACM Trans. Graph., vol. 13, no. 1, pages 43–72, Janvier 1994.
- [Edelsbrunner 1999] H. Edelsbrunner. *Deformable Smooth Surface Design*. Discrete & Computational Geometry, vol. 21, no. 1, pages 87–115, 1999.
- [Etzion 2002] Michal Etzion et Ari Rappoport. *Computing Voronoi skeletons of a 3-D polyhedron by space subdivision*. COMPUTATIONAL GEOMETRY : THEORY AND APPLICATIONS, vol. 21, pages 87–120, 2002.
- [Giblin 2000] P. Giblin et B.B. Kimia. *A formal classification of 3D medial axis points and their local geometry*. In Computer Vision and Pattern Recognition, 2000. Proceedings. IEEE Conference on, volume 1, pages 566–573 vol.1, 2000.

- [Giblin 2004] Peter Giblin et Benjamin B. Kimia. *A Formal Classification of 3D Medial Axis Points and Their Local Geometry*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 26, no. 2, pages 238–251, Janvier 2004.
- [Giesen 2009] Joachim Giesen, Balint Miklos, Mark Pauly et Camille Wormser. *The scale axis transform*. In 25th annual symposium on Computational geometry, pages 106–115, New York, NY, USA, 2009. ACM.
- [Goldak 1991] John A. Goldak, Xinhua Yu, Alan Knight et Lingxian Dong. *Constructing Discrete Medial Axis of 3-D Objects*. International Journal of Computational Geometry and Applications, vol. 01, no. 03, pages 327–339, 1991.
- [Gourmel 2013] Olivier Gourmel, Loïc Barthe, Marie-Paule Cani, Bryan Wyvill, Adrien Bernhardt, Mathias Paulin et Herbert Grasberger. *A Gradient-Based Implicit Blend*. ACM Transactions on Graphics, vol. 32, no. 2, 2013.
- [Hesselink 2008] Wim H. Hesselink et Jos B.T.M. Roerdink. *Euclidean Skeletons of Digital Image and Volume Data in Linear Time by the Integer Medial Axis Transform*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 30, no. 12, pages 2204–2217, 2008.
- [Holleman 2000] C. Holleman et E.E. Kavradi. *A framework for using the workspace medial axis in PRM planners*. In Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on, volume 2, pages 1408–1413 vol.2, 2000.
- [Hoppe 1992] Hugues Hoppe, Tony DeRose, Tom Duchamp, John McDonald et Werner Stuetzle. *Surface Reconstruction from Unorganized Points*. SIGGRAPH Comput. Graph., vol. 26, no. 2, pages 71–78, Juillet 1992.
- [Hung 2012] Chia-Chun Hung, Eric T Carlson et Charles E Connor. *Medial axis shape coding in macaque inferotemporal cortex*. Neuron, vol. 74, no. 6, pages 1099–1113, 2012.
- [Jalba 2013] Andrei C. Jalba, Jacek Kustra et Alexandru C. Telea. *Surface and Curve Skeletonization of Large 3D Models on the GPU*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, vol. 35, no. 6, pages 1495–1508, 2013.
- [Kazhdan 2006] Michael Kazhdan, Matthew Bolitho et Hugues Hoppe. *Poisson Surface Reconstruction*. In Proceedings of the Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing, SGP '06, pages 61–70, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2006. Eurographics Association.
- [Kimia 1995] Benjamin B. Kimia, Allen R. Tannenbaum et Steven W. Zucker. *Shapes, Shocks, and Deformations I : The Components of Two-Dimensional Shape and the Reaction-Diffusion Space*. International Journal of Computer Vision, vol. 15, pages 189–224, 1995.
- [Kruithof 2005] N.G.H. Kruithof et G. Vegter. *Meshing skin surfaces with certified topology*. In Computer Aided Design and Computer Graphics, 2005. Ninth International Conference on, pages 6 pp.–, 2005.
- [Lavoué 2011] Guillaume Lavoué. *A Multiscale Metric for 3D Mesh Visual Quality Assessment*. Comput. Graph. Forum, vol. 30, no. 5, pages 1427–1437, 2011.

- [Lavoué 2012] Guillaume Lavoué, Martial Tola et Florent Dupont. *MEPP - 3D Mesh Processing Platform*. In GRAPP/IVAPP'12, pages 206–210, 2012.
- [Lee 1998] T. S. Lee, D. Mumford, R. Romero et V. A. F. Lamme. *The role of the primary visual cortex in higher-level vision*. Vision Research, vol. 38, pages 2429–2454, 1998.
- [Levoy 2000] Marc Levoy, Kari Pulli, Brian Curless, Szymon Rusinkiewicz, David Koller, Lucas Pereira, Matt Ginzton, Sean Anderson, James Davis, Jeremy Ginsberg, Jonathan Shade et Duane Fulk. *The Digital Michelangelo Project : 3D Scanning of Large Statues*. In Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH '00, pages 131–144, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [Leymarie 2001] Frederic F. Leymarie et Benjamin B. Kimia. *The Shock Scaffold for Representing 3D Shape*. In In Proc. of 4th International Workshop on Visual Form (IWVF4, pages 216–229. Springer-Verlag, 2001.
- [Leymarie 2003] F.F. Leymarie et B.B. Kimia. *Computation of the shock scaffold for unorganized point clouds in 3D*. In Computer Vision and Pattern Recognition, 2003. Proceedings. 2003 IEEE Computer Society Conference on, volume 1, pages I-821–I-827 vol.1, 2003.
- [Leymarie 2007] F.F. Leymarie et B.B. Kimia. *The Medial Scaffold of 3D Unorganized Point Clouds*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, vol. 29, no. 2, pages 313–330, 2007.
- [Leyton 1988] M. Leyton. *A Process Grammar for Shape*. AI Journal, vol. 34, no. 2, pages 213–247, mar 1988.
- [Leyton 1992] Michael Leyton. Symmetry, causality, mind. Cambridge, Mass. MIT Press, 1992. A Bradford book.
- [Li 2001] Xuetao Li, Tong Wing Woon, Tiow Seng Tan et Zhiyong Huang. *Decomposing polygon meshes for interactive applications*. In Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics, I3D '01, pages 35–42, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [Lieutier 2003] André Lieutier. *Any Open Bounded Subset of R^n Has the Same Homotopy Type Than Its Medial Axis*. In Proceedings of the Eighth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, SM '03, pages 65–75, New York, NY, USA, 2003. ACM.
- [Liu 2003] Pin-Chou Liu, Fu-Che Wu, Wan-Chun Ma, Rung-Huei Liang et Ming Ouhyoung. *Automatic Animation Skeleton Construction Using Repulsive Force Field*. In Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, pages 409–413. IEEE Computer Society, 2003.
- [Lorensen 1987] William E. Lorensen et Harvey E. Cline. *Marching cubes : A high resolution 3D surface construction algorithm*. SIGGRAPH Comput. Graph., vol. 21, no. 4, pages 163–169, Août 1987.
- [Ma 1996] C. Min Ma et Milan Sonka. *A fully parallel 3D thinning algorithm and its applications*. Comput. Vis. Image Underst., vol. 64, pages 420–433, November 1996.
- [Ma 2012] Jaehwan Ma, Sang Won Bae et Sunghee Choi. *3D medial axis point approximation using nearest neighbors and the normal field*. The Visual Computer, vol. 28, no. 1, pages 7–19, 2012.

- [Malandain 1993] Grégoire Malandain, Gilles Bertrand et Nicholas Ayache. *Topological segmentation of discrete surfaces*. International Journal of Computer Vision, vol. 10, no. 2, pages 183–197, 1993.
- [McKesson 2012] Jason L. McKesson. Learning modern 3d graphics programming. Arcsynthesis.org, 2012.
- [Microsoft 1985] Microsoft. *Paint*, 1985. <http://windows.microsoft.com/fr-FR/windows7/products/features/paint>.
- [Miklos 2010a] Balint Miklos. *Mesecina*, 2010. <https://code.google.com/p/mesecina/>.
- [Miklos 2010b] Balint Miklos, Joachim Giesen et Mark Pauly. *Discrete scale axis representations for 3D geometry*. ACM Trans. Graph., vol. 29, 2010.
- [Palágyi 1999] Kálmán Palágyi et Attila Kuba. *Directional 3D Thinning Using 8 Subiterations*. In Gilles Bertrand, Michel Couprie et Laurent Perroton, éditeurs, Discrete Geometry for Computer Imagery, volume 1568 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 325–336. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [Pixologic 1997] Pixologic. *ZBrush*, 1997. <http://pixologic.com/zbrush/>.
- [Pizaine 2011] Guillaume Pizaine, Elsa D. Angelini, Isabelle Bloch et Shérif Makram-Ebeid. *Vessel geometry modeling and segmentation using convolution surfaces and an implicit medial axis*. In ISBI, pages 1421–1424, 2011.
- [Pizer 2003] StephenM. Pizer, Kaleem Siddiqi, Gabor Székely, JamesN. Damon et StevenW. Zucker. *Multiscale Medial Loci and Their Properties*. International Journal of Computer Vision, vol. 55, no. 2–3, pages 155–179, 2003.
- [Postolski 2013] Michal Postolski, Michel Couprie et Marcin Janasewski. *Scale Filtered Euclidean Medial Axis*. In Belen Medrano Rocio Gonzalez-Diaz Maria-Jose Jimenez, éditeur, Discrete Geometry for Computer Imagery, volume 7749 of *Lecture notes in computer science*, pages 360–371, Espagne, Mars 2013. Springer.
- [POV-Ray 1992] POV-Ray. *Persistence Of Vision Raytracer*, 1992.
- [Pudney 1998] Chris Pudney. *Distance-ordered Homotopic Thinning : A Skeletonization Algorithm for 3D Digital Images*. Comput. Vis. Image Underst., vol. 72, no. 3, pages 404–413, Décembre 1998.
- [Reniers 2008] Dennie Reniers, Jarke van Wijk et Alexandru Telea. *Computing Multiscale Curve and Surface Skeletons of Genus 0 Shapes Using a Global Importance Measure*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 14, no. 2, pages 355–368, Mars 2008.
- [Rigaudiere 1999] Dominique Rigaudiere, Gilles Gesquière et Dominique Faudot. *Nouvelles primitives implicites pour la modélisation par squelettes*. Rev. Int. de CFAO et d'infographie, vol. 14, no. 1, pages 9–29, 1999.
- [Rigaudiere 2000] Dominique Rigaudiere, Gilles Gesquière et Dominique Faudot. *Shape Modeling with Skeleton Based Implicit Primitives*. In GraphiCon'2000, pages 174–178, 2000.

- [Ruppert 1993] Jim Ruppert. *A New and Simple Algorithm for Quality 2-dimensional Mesh Generation*. In Proceedings of the Fourth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA '93, pages 83–92, Philadelphia, PA, USA, 1993. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Rusinkiewicz 2000] Szymon Rusinkiewicz et Marc Levoy. *QSplat : a multiresolution point rendering system for large meshes*. In Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '00, pages 343–352, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [Samozino 2006] M. Samozino, M. Alexa, P. Alliez et M. Yvinec. *Reconstruction with Voronoi centered radial basis functions*. In Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing, SGP '06, pages 51–60. Eurographics Association, 2006.
- [Shaked 1998] Doron Shaked et Alfred M. Bruckstein. *Pruning Medial Axes*. Comput. Vis. Image Underst., vol. 69, no. 2, pages 156–169, Février 1998.
- [Shewchuk 1996] Jonathan Richard Shewchuk. *Triangle : Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator*. In Selected Papers from the Workshop on Applied Computational Geometry, Towards Geometric Engineering, FCRC '96/WACG '96, pages 203–222, London, UK, UK, 1996. Springer-Verlag.
- [Shilane 2004] Philip Shilane, Patrick Min, Michael Kazhdan et Thomas Funkhouser. *The Princeton Shape Benchmark*. In Shape Modeling International, Juin 2004.
- [Shneiderman 1983] Ben Shneiderman. *Direct manipulation : a step beyond programming languages*. Computer, pages 57–69, 1983.
- [Siddiqi 2008] Kaleem Siddiqi et Stephen Pizer. *Medial representations : Mathematics, algorithms and applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st édition, 2008.
- [Sobiecki 2013] André Sobiecki, Haluk C. Yasan, Andrei C. Jalba et Alexandru Telea. *Qualitative Comparison of Contraction-Based Curve Skeletonization Methods*. In ISMM, pages 425–439, 2013.
- [Sud 2005] Avneesh Sud, Mark Foskey et Dinesh Manocha. *Homotopy-preserving Medial Axis Simplification*. In Proceedings of the 2005 ACM Symposium on Solid and Physical Modeling, SPM '05, pages 39–50, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [Sud 2006] Avneesh Sud. *Efficient Computation of Discrete Voronoi Diagram and Homotopy-preserving Simplified Medial Axis of a Three-dimensional Polyhedron*. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC, USA, 2006. AAI3239281.
- [Sundar 2003] H. Sundar, D. Silver, N. Gagvani et S. Dickinson. *Skeleton Based Shape Matching and Retrieval*. In Proceedings of the Shape Modeling International 2003, SMI '03, pages 130–, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.
- [Tam 2003] Roger Tam et Wolfgang Heidrich. *Shape Simplification Based on the Medial Axis Transform*. In 14th IEEE Visualization 2003 (VIS'03), pages 63–, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.
- [Tek 1998] H. Tek et B.B. Kimia. *Curve Evolution, Wave Propagation, And Mathematical Morphology*. In OF COMP. IMA. and VISION, pages 115–126. Kluwer Acad, 1998.

- [Tek 2003] Hüseyin Tek et Benjamin B. Kimia. *Symmetry Maps of Free-Form Curve Segments via Wave Propagation*. Int. J. Comput. Vision, vol. 54, no. 1-3, pages 35–81, Août 2003.
- [Telea 2002] Ru Telea et Jarke J. Van Wijk. *An augmented fast marching method for computing skeletons and centerlines*. In in Proc. of the Symposium on Data Visualisation (VisSym'02), pages 251–259, 2002.
- [Telea 2012] Alexandru Telea et Andrei Jalba. *Computing Curve Skeletons from Medial Surfaces of 3D Shapes*. In TPCG, pages 99–106, 2012.
- [Wan 2001] M. Wan, F. Dachille et A. Kaufman. *Distance-field based skeletons for virtual navigation*. In Visualization, 2001. VIS '01. Proceedings, pages 239–560, 2001.
- [Ward 2008] Aaron Ward et Ghassan Hamarneh. *GMAT : The Groupwise Medial Axis Transform for Fuzzy Skeletonization and Intelligent Pruning*. Rapport technique TR 2008-07, School of Computing Science, Simon Fraser University, Burnaby, BC, Canada, March 2008.
- [Yushkevich 2003] Paul Yushkevich, P. Thomas Fletcher, Sarang Joshi, Andrew Thall et Stephen M. Pizer. *Continuous medial representations for geometric object modeling*. In 2D and 3D, Image and Vision Computing, pages 17–27, 2003.
- [Zanni 2014] Cédric Zanni, Marie-Paule Cani et Michael Gleicher. *N-ary implicit blends with topology control*. Computers and Graphics, Octobre 2014.
- [Zhou 2008] Kun Zhou, Qiming Hou, Rui Wang et Baining Guo. *Real-time KD-tree Construction on Graphics Hardware*. ACM Trans. Graph., vol. 27, no. 5, pages 126 :1–126 :11, Décembre 2008.

GLOSSAIRE

- **2-variété** : type de surface dont chaque point a un voisinage homéomorphe à un disque ouvert. Autrement dit, tout voisinage d'un point ressemble localement à un disque.
- $\partial\mathcal{F}$: surface de la forme utilisée par l'algorithme de squelettisation afin de produire un squelette.
- **amas** : ensemble d'atomes fortement similaires qui peuvent être remplacé par l'un d'entre eux sans perdre d'information sur la forme.
- **atome** : élément constitutif d'un squelette, porteur des données géométriques de la forme décrite. Dans nos travaux, un atome peut-être assimilé à une approximation d'une sphère maximale intérieure tangente forme décrite par le squelette. Le centre ou la position d'un atome est alors le centre de cette sphère.
- **atome bord** : atome dont la position est un bord du squelette.
- **atome jonction** : atome dont la position est située au niveau de jonctions entre composantes squelettiques.
- **atome lié** : un atome a est lié à un atome b lorsqu'il existe un lien topologique, noté $a \sim b$, entre ces deux atomes.
- **atome racine** : racine du squelette hiérarchique. Il s'agit donc d'un atome qui n'a pas de père.
- **atome régulier** : atome dont la position est à l'intérieure d'une composante surface.
- **bords du squelette** : bords des composantes squelettiques privées des jonctions entre ces composantes.
- **bruit squelettal** : ensemble d'atomes ne contribuant pas à la description de la géométrie de la forme. Ces atomes sont repartis en amas et en hérissément..
- **capacité de reconstruction** : mesure de la géométrie d'une forme capturée par un squelette. L'apparence de la forme obtenue par habillage du squelette est d'autant meilleure que la capacité de reconstruction est élevée.
- **composante courbe** : composante squelettique dont les atomes ont organisés en courbe.
- **composante logique** : unité sémantique d'une forme, par exemple les mains, les bras, le torse, les jambes et la tête pour un personnage.
- **composante squelettique** : courbe ou surface de la structure squelettique théorique.
- **composante surface** : composante squelettique dont les atomes ont organisés en surface.
- **définition constructive** : définition d'une structure comme le résultat d'une méthode de calcul ou d'un algorithme.
- **forme** : objet tridimensionnel fermé, de façon à définir un intérieur, avec lequel nous voulons interagir dans un système informatique. La forme est notée $\mathcal{F}$.
- **formulation continue** : définition théorique d'un squelette où les grandeurs sont à valeur dans $\mathbb{R}$.

- **formulation discrète** : définition théorique d'un squelette où les grandeurs sont à valeur dans $\mathbb{Z}$.
- **habillage** : construction d'un habit à partir du squelette.
- **habit** : maillage triangulaire approchant la surface d'une forme décrite par un squelette. L'habit de la forme est noté $\mathcal{H}$.
- **hérissément** : ensemble d'atomes qui donnent une apparence hérissée au squelette et dont les données géométriques perturbent l'apparence de la forme.
- **lien hiérarchique** : c'est un lien $b \rightarrow a$ qui relie un atome fils a à un atome père b . Ces liens permettent de construire un squelette hiérarchique.
- **lien topologique** : c'est un lien $a \sim b$ qui relie les positions des atomes a et b . Les liens topologiques créent la structure squelettale. Nous utilisons aussi le terme lien pour désigner un lien topologique.
- **meso-squelette** : squelette courbe qui est la racine d'une hiérarchisation par importance des atomes du squelette. Chaque composante courbe du meso-squelette décrit et contrôle une unité sémantique de la forme, ce qui en fait une structure d'interaction directe et intuitive.
- **rang** : niveau d'un atome dans le modèle hiérarchique du squelette. Le rang d'un atome reflète son importance dans le squelette, ainsi que l'importance de la géométrie de la forme qu'il capture.
- **regularisation** : suppression des atomes appartenant au bruit squelettal.
- **sous-atome** : atome a qui n'est pas une racine. Il existe alors un atome b tel que $b \rightarrow a$.
- **squelette** : la définition générale est structure mince, centrée dans une forme, décrivant la topologie et la géométrie de cette forme. Dans nos travaux, le squelette désigne la surface médiane analytique, un squelette surface bien défini et ayant une forte capacité de reconstruction. Le squelette de la forme est noté $\mathcal{S}$.
- **squelette analytique** : squelette pratique issue d'une formulation continue.
- **squelette image** : squelette pratique issue d'une formulation discrète.
- **squelette nettoyé** : squelette dont le bruit squelettal a été retiré, par une étape de régularisation.
- **squelette racine** : squelette constitué des atomes racines du modèle hiérarchique.
- **squelettisation** : conversion d'une forme connue par un modèle de représentation des formes (en général un maillage triangulaire) vers un squelette.
- **squelettisation courbe** : squelettisation qui produit un squelette courbe.
- **structure squelettale** : liens topologiques entre atomes ou faces triangulaires formées par ces liens, qui approchent l'organisation théorique d'un squelette en courbe et surfaces.
- **voisinage géométrique** : ensemble d'atomes qui décrivent l'apparence locale d'une forme autour d'un atome d'intérêt.
- **voisinage topologique** : configuration locale de la structure squelettale autour de la position d'un atome d'intérêt.

ACRONYMES

- **DdL** : Degrés de Liberté.
- **GPGPU** : *General-Purpose Processing on Graphics Processing Units.*
- **GPU** : *Graphics Processing Units.*
- **IHM** : Interaction Homme-Machine.
- **IUG** : Interfaces Utilisateur Graphique.
- **MRF** : Modèle de Représentation des Formes.
- **RMS** : *Root-Mean-Square.*

Résumé :

Dans les applications graphiques qui permettent de créer des formes, les interactions sont peu naturelles. L'utilisateur va repousser autant que possible l'usage de ces applications, préférant dessiner ou sculpter une forme. Pour combler ce fossé qui se creuse entre l'outil informatique et le grand public, nous nous tournons vers les squelettes. Ce sont des modèles intuitifs de représentation des formes que nous proposons d'utiliser comme structure d'interaction directe et intuitive. Tous les squelettes souffrent d'un problème de qualité quant à une utilisation comme modèle de représentation des formes, que ce soit au niveau de la géométrie qu'ils capturent, leur quantité de bruit ou encore l'absence d'organisation utile de leurs éléments. De plus, certaines fonctionnalités nécessaires des squelettes ne sont que partiellement résolues, et ceci grâce à des données additionnelles calculées à partir de la forme lors de la squelettisation. Ainsi, lorsque le squelette est modifié par une interaction, nous sommes dans l'incapacité de mettre à jour ces données et d'utiliser ces fonctionnalités. Grâce à une observation des squelettes en pratique, nous avons construit un ensemble de solutions algorithmiques à ces problèmes. Nous faisons un usage optimal des données contenues dans le squelette pour visualiser la forme décrite par le squelette, supprimer le bruit squelettal et structurer les éléments du squelette. Avec nos méthodes, nous construisons le meso-squelette, une structure hiérarchique qui capture et contrôle toutes les zones caractéristiques d'une forme. Le meso-squelette est adapté pour servir de structure d'interaction directe et intuitive, ce qui permet de combler le fossé dont nous faisons mention. Aussi, nos travaux peuvent diriger de nouvelles recherches pour améliorer les méthodes de squelettisation et ainsi produire des squelettes qui sont des modèles de représentation des formes de bonne qualité.

Mots-clés : squelette, habillage, bruit, bords, importance, hiérarchie

Abstract:

The interactions in shape creation graphic applications are far from natural. The user tends to avoid as much as possible such applications and prefer sketching or modeling his/her shape. To bridge this widening gap between computer and general public, we focus on skeletons. They are intuitive shape representation models that we propose to use as direct and intuitive interaction structures. All skeletons suffer from very low quality as shape representation models, concerning the geometry of the shape they capture, the quantity of skeletal noise they contain or the lack of useful organization of their elements. Moreover, some functionalities that must be granted to skeletons are only partially solved. Those solutions make use of additional data computed thanks to the shape during the skeletonization. Thus, when the skeleton is modified by an interaction, we cannot update those data to make use of such functionalities. Thanks to a practical observation of skeletons, we built a set of algorithmic solutions to those problems. We make an optimal use of skeleton data to visualize the shape described by a skeleton, to remove skeletal noise and to structure skeleton elements. With our methods, we build the meso-skeleton, a hierarchical structure that captures and controls all characteristic parts of a shape. The meso-skeleton is adapted to be used as a direct and intuitive interaction structure, which allows us to bridge the gap aforementioned. Also, our work can lead to further researches to enhance skeletonization techniques and thus produce skeletons that are good quality shape representation models.

Keywords: skeleton, garbing, noise, boundaries, importance, hierarchy