EDSP
École Doctorale
Sciences Pratiques

ENS CACHAN

ENSC–2014/509

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Erwan MORICE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine

MÉCANIQUE – GÉNIE MÉCANIQUE – GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse

Fissuration dans les matériaux quasi-fragiles : approche numérique et expérimentale pour la détermination d'un modèle incrémental à variables condensées

Soutenue à Cachan le 28 Mars 2014 devant le jury composé de :

Frédéric Dufour	Professeur, INP Grenoble	Rapporteur
Djimédo Kondo	Professeur, Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
Véronique Doquet	Directrice de Recherche CNRS, Ecole Polytechnique	Examinatrice
Patrick Massin	Directeur de Recherche, EDF R&D	Examinateur
Gilles Perrin	Directeur de Recherche, Areva	Examinateur
Sylvie Pommier	Professeur, ENS de Cachan	Directrice de thèse
Arnaud Delaplace	Ingénieur de recherche, Lafarge	Co-encadrant

LMT-Cachan
ENS Cachan / CNRS / PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et Technologie de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire qui par leur bonne humeur et leur disponibilité ont contribué à rendre ces trois ans agréables.

J'adresse toute ma reconnaissance aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Merci aux rapporteurs : Frédéric Dufour et Djimédo Kondo pour leurs remarques. Merci à Véronique Doquet d'avoir accepté de présider ce jury. Et enfin, merci aux examinateurs : Patrick Massin et Gilles Perrin.

Je souhaite exprimer mes plus sincères remerciements à Sylvie Pommier, qui m'a encadré pendant ces trois années. Sa bonne humeur, sa disponibilité et ses précieux conseils m'ont permis de mener à bien cette thèse, ceci dans les meilleures conditions.

Je souhaite également remercier Arnaud Delaplace pour son soutien et son aide sur les problèmes numériques.

Je garderai de ces trois années au LMT un très bon souvenir, de par la bonne ambiance qui y règne. Je tiens particulièrement à remercier Cécile, Maxime, Renaud, Flavien, Raul, Carole, Pierre G., Pierre M., Pierre B., Jonjonc, Luc, Adrien, Jérémy, Benoit, Stall, Mahmoud, Martin et Boubou.

Enfin, je finis par remercier chaleureusement Elodie ainsi que ma famille qui m'ont toujours soutenu au cours de ces trois années.

Table des matières

Table des matières i

Table des figures iii

Liste des tableaux ix

Introduction 1

1 État de l'art 5
- 1 Les matériaux cimentaires . . . 5
- 2 Représentation de la fissuration et de l'endommagement d'un milieu continu 8
  - 2.1 Modélisation de l'endommagement et de la fissuration . . . 8
- 3 Mécanique Elastique Linéaire de la Rupture . . . 17
  - 3.1 Solution de Westergaard . . . 18
  - 3.2 Appproche en énergie - Critère de Griffith . . . 19
  - 3.3 Dugdale - Barenblatt . . . 20
  - 3.4 Modèle à zone cohésive . . . 21
  - 3.5 XFEM . . . 24
  - 3.6 Embedded FEM . . . 26
  - 3.7 Approche mixte XFEM-endommagement : la TLS (Thick Level Set) . . . 27
- 4 Principe de l'approche choisie . . . 29

2 Modélisation numérique de la fissuration d'un matériau quasi-fragile 31
- 1 Modèles discrets . . . 31
  - 1.1 Le modèle par éléments discrets utilisé - DEAP . . . 34
- 2 Approche condensée . . . 40
  - 2.1 Cinématique du problème . . . 40
  - 2.2 Décomposition du champ de vitesse . . . 41
  - 2.3 Calcul de la base de champ de référence . . . 44
  - 2.4 Caractérisation du champ complémentaire . . . 51
  - 2.5 Evolution des facteurs d'intensité . . . 53
  - 2.6 Influence de la distribution des seuils de rupture . . . 61
  - 2.7 Influence du maillage sur le champ complémentaire . . . 65

2.8 Influence de la densité de particules 67
2.9 Domaine élastique 68
3 Résumé du chapitre 72

3 Essai de fissuration en mode I dans un milieu quasi-fragile 73
1 Etat de l'art sur les essais de fissuration en mode I et mixte I+II dans le béton et le mortier 74
2 Le pilotage d'essai de fissuration 77
3 Le matériau d'étude 77
4 Géométrie de l'éprouvette 78
5 Protocole expérimental 79
5.1 Estimer la position de la pointe de la fissure par corrélation d'images numériques 80
5.2 Estimation du facteur d'intensité des contraintes 81
6 Mesure de la ténacité 82
7 Fissuration par fatigue 85
7.1 Influence du fluage sur la fissuration sous-critique 91
7.2 Discussion 92
8 Approche expérimentale condensée en pointe de fissure 94
9 Résumé du chapitre 104

4 Modélisation 105
1 Modélisation des évolutions des facteurs d'intensité 106
1.1 Choix de modélisation 106
1.2 Modélisation à direction d'écoulement fixe et sans contrainte interne 108
1.3 Modélisation à direction d'écoulement variable et sans contrainte interne 113
1.4 Modélisation avec contraintes internes 117
2 Résumé du chapitre 123

Conclusions et perspectives 125

A Champs expérimentaux et évolutions des facteurs d'intensité 129
1 Taille de maille de 128 pixels 130
2 Taille de maille de 64 pixels 131
3 Taille de maille de 32 pixels 132
4 Taille de maille de 16 pixels 133

Bibliographie 135

Table des figures

1.1 Les différentes échelles du béton et leurs constituants 6
1.2 Courbe expérimentale contrainte-déformation en traction (a) et en compression (b) du béton [Choinska, 2006] 7
1.3 Schéma d'un champ de déplacement unidimensionnel présentant une localisation en noir et son approximation non-locale (a) et du champ de déformation (b) 14
1.4 Représentation des 3 modes de fissuration : ouverture, cisaillement plan, cisaillement anti plan 17
1.5 Représentation de la zone de fissuration dans les matériaux ductiles (gauche) et dans les matériaux quasi-fragiles (droite) ; F= fracture , N = Comportement non-linéaire, L= comportement linéaire 20
1.6 Représentation du modèle de Dugdale (a) et Barenblatt (b) ([Geiß ler et Kaliske, 2010]) 21
1.7 Hypothèses des modèles à zone cohésive ([Geiß ler et Kaliske, 2010]) . . 22
1.8 Choix de représentation de la loi de comportement en traction pour les modèles cohésifs 22
1.9 Tableau récapitulatif de différentes modélisations des zones cohésives ([Shet et Chandra, 2002]) 23
1.10 Tableau récapitulatif de différentes modélisations des zones cohésives (suite) ([Shet et Chandra, 2002]) 24
1.11 Maillage représentant la fissure et les noeuds enrichis avec les fonctions de forme discontinues ([Moës et Belytschko, 2002]) 25
1.12 Représentation de la fissuration dans l'approche à discontinuité forte . . . 27
1.13 Représentation du champ d'endommagement autour de la fissure dans l'approche Thick Level Set ([Moës et al., 2011]) 28
1.14 Fonction représentant l'évolution de l'endommagement 28
1.15 Schéma de l'approche 30

2.1 Représentation des échelles d'observations et des modèles numériques pour des matériaux cohésifs ([D'Addetta, 2004]) 32
2.2 Représentation d'un pavage de Voronoï (a) et de deux cellules de Voronoï voisines (b) 34
2.3 Représentation de la gestion du contact dans le modèle discret 36

2.4 Déformations obtenues en mode I pour une distribution gaussienne de seuil de rupture des liaisons (a) et suivant une loi uniforme (b). Les liaisons brisées sont représentées en bleu. 37
2.5 Maillage avec conditions aux limites en déplacements (en bleu) et plan de la fissure (en rouge) 39
2.6 Conditions aux limites pour les simulations par éléments finis pour obtenir une sollicitation de mode I (a) et de mode II (b) 39
2.7 Repère attaché à la pointe de la fissure 40
2.8 Schéma de la méthode de calcul du champ complémentaire 45
2.9 Champs élastiques en mode I et II suivant les composantes x et y obtenus par la méthode des éléments discrets 46
2.10 Comparaison des dépendances radiales élastiques ($f(r)$) en mode I (bleu) et en mode II (rouge) 47
2.11 Déformation d'un cercle de référence par le champ élastique en mode I (a) et en mode II (b) 48
2.12 Champs complémentaires en mode I et II suivant les composantes x et y . 50
2.13 Comparaison des dépendances radiales ($f(r)$) en mode I (bleu) et en mode II (rouge) 52
2.14 Déformation d'un cercle de référence par le champ complémentaire en mode I (a) et en mode II (b) 53
2.15 Représentation de l'ouverture en pointe de fissure (*CTOD*) par le facteur d'intensité ρ_I du champ complémentaire en mode I 53
2.16 Chargement en mode I en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ (b) 54
2.17 Evolutions des facteurs d'intensité et des erreurs d'approximation en mode I 55
2.18 Chargement en mode II en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ (b) 56
2.19 Evolutions des facteurs d'intensité et des erreurs d'approximation en mode II 57
2.20 Chargement en mode mixte I+II proportionnel en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ (b) 58
2.21 Evolutions des facteurs d'intensité en mode mixte I+II proportionnel . . . 59
2.22 Chargement appliqué en mode mixte I+II non-proportionnel en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ (b) 60
2.23 Evolutions des facteurs d'intensité en mode mixte I+II non proportionnel 61
2.24 Distribution des seuils de rupture entre particules 62
2.25 Distribution des seuils de rupture entre particules 63
2.26 Distribution type Gaussienne, décomposition selon le tirage, 300 par 300 particules 64
2.27 Distribution type Weibull, décomposition selon le tirage, 300 par 300 particules 64

2.28 Distribution de type Weibull inversée, décomposition selon le tirage, 300 par 300 particules 65
2.29 Influence de la distribution du centre des particules sur la forme du champ complémentaire 66
2.30 Influence de la densité de particules sur le champ complémentaire 67
2.31 Surface seuil associée au domaine de non-linéarité pour un seuil de 10% . 71

3.1 Différentes géométries d'éprouvettes communément utilisées pour des essais de fissuration en mode I 75
3.2 Différentes géométries d'éprouvettes communément utilisées pour des essais de fissuration en mode mixte I+II 76
3.3 Schéma du comportement d'un matériau quasi-fragile en compression . . 77
3.4 Géométrie de l'éprouvette 78
3.5 Evolution du facteur d'intensité des contraintes en fonction de l'avancée de la fissure pour une pression imposée constante 79
3.6 Schéma du protocole expérimental pour la prise de photo 80
3.7 Fissure observable sur le champ de déformation ε_{22} obtenu par corrélation d'images numériques 81
3.8 Evolution de la ténacité apparente en fonction du chargement 82
3.9 Evolution de la ténacité apparente en fonction de la longueur de la fissure pour 3 spécimens provenant de la même gâchée 83
3.10 Schéma représentant la zone d'amorçage avec les micro-fissures 84
3.11 Schéma du chargement appliqué lors des essais de fatigue 86
3.12 Evolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles, pour un rapport de charge $R = 0,3$ 87
3.13 Vitesse de fissuration pour différents rapport de charge : (a) $R = 0.1$,(b) $R = 0.3$ et (c) $R = 0.5$ 88
3.14 Evolution du seuil du facteur d'intensité des contraintes ΔK^{th} en fonction du rapport de charge R 89
3.15 Comparaison des vitesses de fissuration en fonction du rapport K_{IMax} sur K_{Ic} 90
3.16 Schéma du chargement appliqué lors de l'essai de fluage 91
3.17 Champ de déformation ε_{22} obtenu par corrélation d'image, deux fissures sont observables. 92
3.18 Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images 97
3.19 Schéma du chargement imposé sur l'éprouvette pour l'observation du comportement en pointe de fissure après arrêt de la fissure au seuil de non propagation par fatigue 97
3.20 Champs de référence complémentaires expérimentaux obtenus par corrélation d'images 98
3.21 Evolution des facteurs d'intensité élastique et complémentaire au cours du temps 99

3.22 Evolution des erreurs $C1$ et $C2$ au cours du temps 100
3.23 Evolution des facteurs d'intensité élastique nominal et complémentaire au cours du temps. La ligne pleine bleue correspond la borne inférieure de la longueur de la fissure et la ligne pointillée à la borne supérieure 101
3.24 Evolution du facteur d'intensité d'écrantage $K_I^{sh} = K_I^{\infty} - \tilde{K}_I$ en fonction du facteur d'intensité non-linéaire ρ_I 102
3.25 Evolution du facteur d'intensité des contraintes nominal et apparent . . . 103

4.1 Schéma des évolutions des facteurs d'intensité sans prise en compte des contraintes internes. En bleu, le comportement endommageable ($f = 0$) et en rouge le comportement élastique ($f < 0$ et $\dot{f} = 0$) 109
4.2 Schéma de l'évolution de la surface seuil pour le modèle à direction d'écoulement fixe. En pointillé rouge, la surface seuil initiale et en trait rouge la surface seuil finale. La flèche bleu représente la direction de chargement et la flèche rouge la direction d'écoulement. 111
4.3 Schéma des chargements en mode mixte I+II proportionnels en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ 111
4.4 Comparaison des évolutions des facteurs d'intensité entre le modèle à direction d'écoulement fixe avec le paramètre identifié en rouge et les simulations par éléments discrets en bleu. 112
4.5 Evolutions des facteurs d'intensité obtenues par le modèle sans contraintes à direction d'écoulement fixe. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle. 113
4.6 Schéma de l'évolution de la surface seuil à direction d'écoulement variable. En pointillé rouge, la surface seuil initiale et en trait rouge la surface seuil finale. La flèche bleu représente la direction de chargement et la flèche rouge la direction d'écoulement. 114
4.7 Comparaison des évolutions des facteurs d'intensité entre le modèle à direction d'écoulement variable avec les paramètres identifiés en rouge et les simulations par éléments discrets en bleu. 115
4.8 Evolutions des facteurs d'intensité obtenus par le modèle sans contrainte interne à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II proportionnel. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle. 115
4.9 Schéma des chargements en mode mixte I+II non-proportionnels en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ 116
4.10 Evolutions des facteurs d'intensité obtenus par le modèle sans contrainte interne et à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II non-proportionnel. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle. 117

4.11 Schéma des évolutions des facteurs d'intensité avec prise en compte des contraintes internes. En bleu, le comportement endommageable ($f = 0$) et en rouge le comportement élastique ($f < 0$ et $\dot{f} = 0$). Les points rouges représentent les contraintes internes sous la forme d'un écart à l'origine lors des décharges. 118
4.12 Schéma de l'évolution de la surface seuil pour le modèle avec contraintes internes. En pointillé rouge, la surface seuil initiale et en trait rouge la surface seuil finale. La flèche bleu représente la direction de chargement et la flèche rouge la direction d'écoulement. Le centre du domaine est représenté par le point rouge. 119
4.13 Evolutions des facteurs d'intensité obtenues par le modèle avec contraintes internes à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II non-proportionnel pour un taux de mixité à $\theta = \pi/4$. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle. 120
4.14 Evolutions des facteurs d'intensité obtenus par le modèle avec contraintes internes à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II non-proportionnel pour un taux de mixité à $\theta = \pi/8$. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle. 121
4.15 Evolutions des facteurs d'intensité obtenus par le modèle avec contraintes internes à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II non-proportionnel pour un taux de mixité à $\theta = 3\pi/8$. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle. 121
4.16 Evolutions des facteurs d'intensité obtenues par le modèle avec contraintes internes à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II proportionnel. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle. 122

A.1 Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images pour une taille de maille de 128 pixels 130
A.2 Evolution du facteur d'intensité du champ complémentaire ρ_I en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une taille de maille de 128 pixels 130
A.3 Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images pour une taille de maille de 64 pixels 131
A.4 Evolution du facteur d'intensité du champ complémentaire ρ_I en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une taille de maille de 64 pixels 131
A.5 Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images pour une taille de maille de 32 pixels 132

A.6 Evolution du facteur d'intensité du champ complémentaire ρ_I en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une taille de maille de 32 pixels 132
A.7 Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images pour une taille de maille de 16 pixels 133
A.8 Evolution du facteur d'intensité du champ complémentaire ρ_I en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une taille de maille de 16 pixels 133

Liste des tableaux

3.1 Composition du mortier pour 1 m^3 d'eau 78
3.2 Valeurs de la ténacité estimée pour trois éprouvettes provenant de la même gâchée 84
3.3 Seuil de fatigue identifié pour différents rapports de charge 89
3.4 Valeurs de la ténacité pour les éprouvettes utilisées pour les essais de fatigue à différents rapports de charge 90

Introduction

Le béton est l'un des matériaux de construction les plus utilisés en France, tout comme dans le monde entier. Le béton présente l'avantage d'un faible coût de production comparé à d'autres matériaux de Génie Civil, et son élaboration est relativement simple.

L'une des principales demandes et l'un des principaux enjeux pour le domaine du génie civil est la capacité à maîtriser la durabilité et l'intégrité de l'existant et des constructions futures. La mise en oeuvre du matériau tend à être optimisée vis à vis des contraintes environnementales et économiques. Une grande partie des structures de grandes ampleurs, telles que les centrales nucléaires, les barrages et les ponts, vieillissent et nécessitent une attention particulière pour veiller à leur maintien et à leur sûreté. La fuite de produits toxiques à travers une paroi en béton fissuré de part en part ou la corrosion des armatures dans un bloc de béton armé demandent une expertise et une analyse locale des risques qui est bien plus onéreuse qu'une simple estimation de résistance globale d'une structure. Pour les études de perméabilité, des valeurs locales relatives à la fissuration doivent être déterminées par des études complémentaires généralement très coûteuses en temps.

La rupture des matériaux quasi-fragiles, tels que les céramiques ou les bétons, peut être représentée schématiquement par la succession des étapes de nucléation et de coalescence de micro-fissures. Le processus de nucléation-coalescence peut se produire dans une structure initialement saine, dans la zone la plus sollicitée de cette structure et conduira alors à la formation d'une macro-fissure. Modéliser ce processus de rupture est un enjeu particulièrement important lorsque l'on s'intéresse à la résistance des structures en béton, en particulier à la prédiction de la perméabilité des structures endommagées.

Différentes approches sont destinées à la description de la rupture des matériaux quasi fragiles :

— les approches phénoménologiques (échelle méso), où l'endommagement est représenté par une variable d'endommagement continue, scalaire ou tensorielle, locale ou non-locale. Ces approches sont utilisées pour leur capacité à représenter toute la richesse du comportement non-linéaire du matériau soumis à des chargements multiaxiaux et variables dans le temps. En revanche, ces approches ne fournissent pas d'informations explicites relatives à la fissuration, telle que l'ouverture d'une fissure et son aire, qui sont requises pour calculer un débit de fuite.

— les modèles discrets (échelle micro), où la microstructure du matériau est explicitement représentée. Ces modèles permettent de tenir compte de l'hétérogénéité du matériau et de représenter explicitement les micro-ruptures élémentaires qui par coalescence conduisent à la fissuration. Néanmoins, ces approches sont coûteuses en temps de calcul, et restent encore hors de portée pour traiter des problèmes tridimensionnels complexes. Par ailleurs, un post-traitement doit être effectué pour distinguer les ruptures élémentaires connectées (fissure) de celles qui ne le sont pas en vue de calculer un débit de fuite
— les modèles basés sur la mécanique de la rupture, décrivant la propagation d'une fissure dans un milieu sain. Ces modèles ont l'avantage de fournir explicitement les éléments permettant de définir la perméabilité d'une structure et de calculer des débits de fuite, mais restent limités à l'élasticité linéaire.

La démarche choisie ici est une vision multi-échelle où chaque approche est utilisée à l'échelle où elle est optimale. Le modèle représentera la fissuration par des grandeurs généralisées, qui seront définies dans le cadre de la mécanique de la rupture. Afin de prendre en compte l'aspect non linéaire de la fissuration dans les matériaux quasi-fragiles, la cinématique usuelle de la mécanique de la rupture est enrichie par l'ajout de degrés de liberté supplémentaires, chargés de représenter la part non linéaire du champ de vitesse. Ces degrés de liberté supplémentaires sont définis comme des facteurs d'intensité de champs cinématiques de référence, qui sont construits par changement d'échelle à partir de simulations à l'aide d'un modèle à éléments discrets ou bien à partir de résultats d'essais. Enfin, le comportement non-linéaire de la structure fissurée est modélisé en employant une démarche analogue à celle qui est utilisée pour établir des lois de comportement avec endommagement continu, c'est-à-dire que l'on formalise dans un cadre thermodynamique, l'évolution des degrés de liberté relatifs aux parts linéaires et non-linéaire de la cinématique en fonction du chargement appliqué. Plus simplement, les degrés de liberté sont ici des facteurs d'intensité de champ cinématique de référence et sont donc des variables non-locales.

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres. Le premier chapitre est une bibliographie sur les différents modèles permettant de représenter la fissuration dans les matériaux quasi-fragiles, tels que le béton ou le mortier. Les bases de la mécanique linéaire de la rupture sont brièvement présentées.

Le deuxième chapitre est consacré au développement de l'approche multi-échelle couplant la méthode des éléments finis, pour obtenir les conditions aux limites de la structure, et la méthode des éléments discrets, permettant de représenter explicitement les phénomènes de fissuration et micro-fissuration.

Le troisième chapitre est dédié à l'étude expérimentale de la fissuration en mode I dans des éprouvettes en mortier. Les essais ont été réalisés sur une machine de compression. Dans ce chapitre, une déclinaison de l'approche utilisée pour exploiter les calculs numériques a été réalisée en se basant sur la mesure des champs de vitesse par corrélation d'images numériques (DIC). Leur exploitation a été conduite avec les mêmes hypothèses que pour le post-traitement des simulations par la méthode des éléments discrets.

Enfin, le dernier chapitre est consacré au développement d'un modèle de comportement élastique endommageable pour la région en pointe de fissure dans le cadre de la mécanique de la rupture. Ce modèle sera utilisé pour modéliser le débit de fuite à travers une fissure dans une structure endommagée soumise à un chargement mécanique cyclique.

Chapitre 1

État de l'art

1 Les matériaux cimentaires

Le béton est un matériau présentant une forte hétérogénéité. La complexité de sa microstructure est d'ailleurs une des causes de son comportement mécanique particulier sous diverses sollicitations, qu'elles soient d'origine thermique, mécanique, hydrique ou chimique. Il est donc nécessaire de connaître au mieux cette microstructure.

Le béton est un mélange de sable, d'eau, de liant hydraulique et de granulats. Le liant hydraulique se forme et durcit par réaction chimique avec de l'eau. Il existe différents types de liants hydrauliques, parmi eux, les ciments, tel que le ciment de Portland et les aluminates, les laitiers de hauts fourneaux, les cendres volantes et les roches volcaniques.

On peut distinguer 3 échelles. A l'échelle du centimètre, il est possible de distinguer les granulats, du sable et de la pâte de ciment durcie. Si l'on observe la pâte de ciment durcie à l'échelle du millimètre ou de la dizaine de microns, le milieu qui apparaissait continu à l'échelle précédente est hétérogène. On y observe de la porosité, du ciment anhydre et des hydrates de ciment. A l'observation au microscope électronique à balayage, les hydrates de ciment apparaissent fortement hétérogènes. De très nombreuses formes d'hydrates sont visibles.

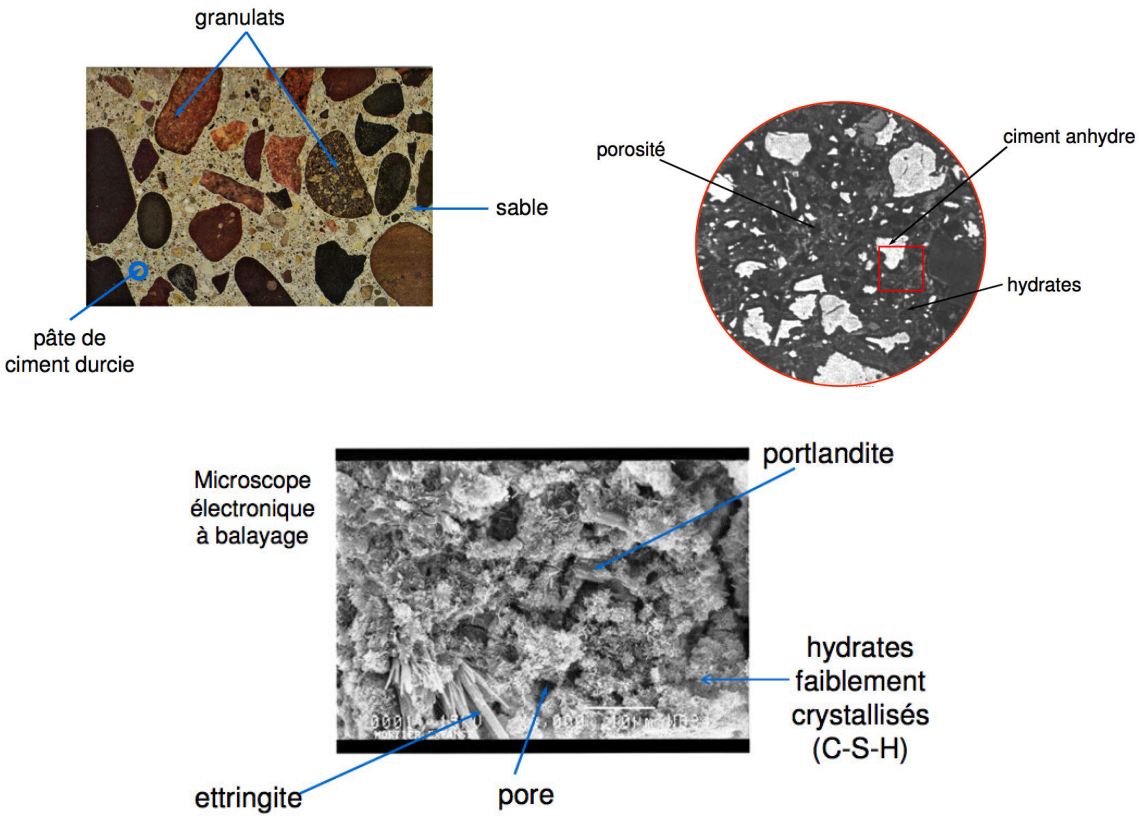


FIGURE 1.1 – Les différentes échelles du béton et leurs constituants

Le béton est un matériau hétérogène, mais surtout multi-échelle et multi-phasique. De plus, il est évolutif, des réactions chimiques d'hydratation ont lieu durant toute la vie du matériau.

Pour caractériser le comportement du béton, il faut se donner une échelle d'étude. Les essais classiques de caractérisation sur des éprouvettes macroscopiques permettent d'identifier le comportement global d'une structure réduite en béton. Ces essais montrent une réponse dissymétrique entre la traction et la compression. La traction est difficile à piloter, du fait de l'apparition du phénomène de retour élastique (*snap-back*) dû au caractère fragile du matériau. Pour identifier les paramètres de traction, on effectue généralement des tests de traction indirecte, tels que des essais de fendage et de flexion 3 points.

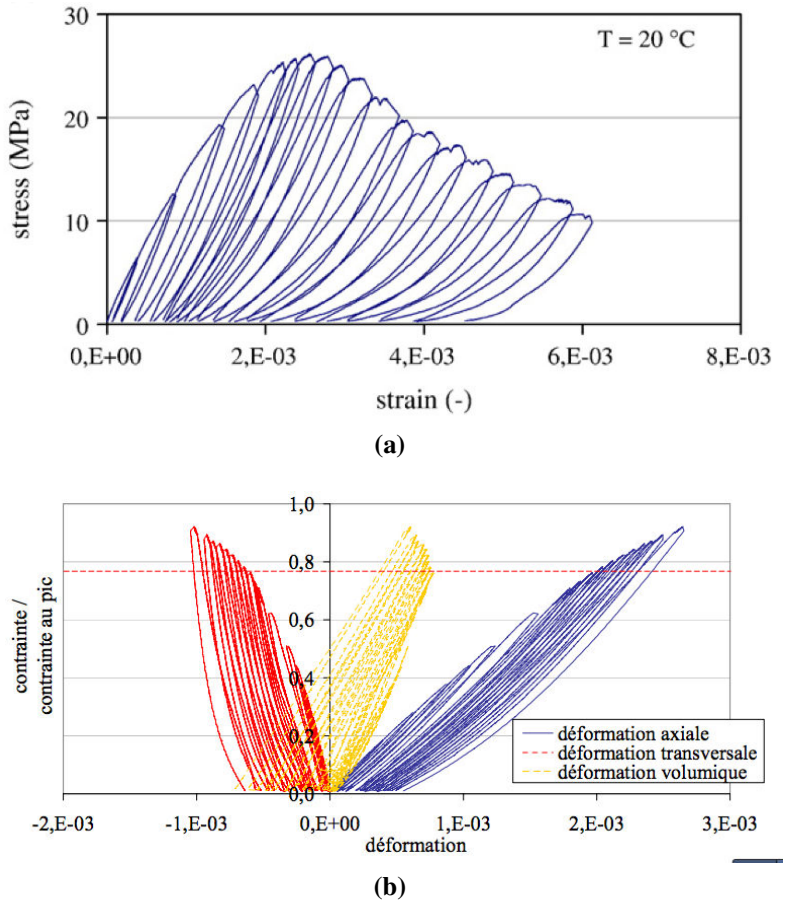


FIGURE 1.2 – Courbe expérimentale contrainte-déformation en traction (a) et en compression (b) du béton [Choinska, 2006]

Lors d'une sollicitation de traction, le pic d'effort est atteint pour une contrainte relativement faible après un régime d'élasticité linéaire. Les non-linéarités se développent dans une zone de fissuration de largeur non nulle avec une microfissuration diffuse autour de la macrofissure. Dans le cas de la compression, trois phases sont discernables. Une première phase linéaire élastique, suivie d'une seconde phase non-linéaire avec un écrouissage positif et une microfissuration diffuse. Dans la dernière phase non-linéaire, la résistance chute et une localisation des déformations est observée.

La zone d'élaboration de l'endommagement (*Process Zone*) définit la zone de localisation diffuse des déformations, formée par une distribution de micro fissures autour de la fissure principale.

Il existe différents moyens d'observation pour suivre la fissuration et l'évolution des micro-fissures. On peut notamment compter sur l'émission acoustique et le contrôle par ultrason, la radiographie et la corrélation d'images numériques.

L'émission acoustique consiste à répertorier les bruits produits par le processus de

dégradation du béton au cours d'un essai. Les émissions acoustiques apparaissent lorsque des ondes élastiques sont produites lors d'une libération d'énergie rapide, provenant principalement de mécanismes de fissuration. Ces ondes se propagent dans le mortier et peuvent être détectées à l'aide de transducteurs piézo-électriques. En utilisant un certain nombre de transducteurs pour suivre l'évolution des événements acoustiques, et en déterminant l'intervalle de temps entre la détection de l'événement par chaque transducteur, la position de l'événement acoustique peut être déterminée en utilisant des techniques de triangulation. Avec des capteurs acoustiques, les signaux des événements acoustiques sont analysés et corrélés à l'apparition de microfissures et macrofissures dans le matériau ([Terrien, 1980, Maji et Shah, 1988, Landis et Shah, 1995, Carpinteri et al., 2006]). A l'aide de multiples capteurs, il est possible de localiser spatialement les événements acoustiques et d'évaluer ainsi la zone d'élaboration des microfissures ([Mihashi et Nomura, 1996, Muralidhara et al., 2010]) . En reliant l'énergie totale accumulée par tous les événements acoustiques, il est possible d'effectuer une comparaison entre l'énergie de fissuration G_f et l'énergie acoustique cumulée observée ([Landis et Baillon, 2002]).

Le contrôle par ultrason consiste à envoyer des ondes dans le matériau et à analyser le spectre obtenu. Les mesures de vitesse de propagation du son dans le béton peuvent être utilisées pour décrire la densité de microfissures ([Mamillan et Bouineau, 1980]). Cette technique permet également d'effectuer une mesure de l'anisotropie du matériau au cours d'un essai.

Les rayons X ont la particularité de traverser la matière et leur absorption est dépendante de la densité du matériau. Cette technique a d'abord été utilisée pour effectuer des radiographies afin de repérer des zones denses en microfissures ([Slate et Olsefski, 1964, Robinson, 1965]). La tomographie a part la suite été utilisée. Elle permet de représenter de manière tri-dimensionnelle le volume de la matière dans la zone d'élaboration des microfissures ([Landis et al., 1999, Otsuka et Date, 2000, Otsuka et al., 2003]).

2 Représentation de la fissuration et de l'endommagement d'un milieu continu

2.1 Modélisation de l'endommagement et de la fissuration

L'endommagement peut être vu comme une détérioration progressive de la matière qui précède la rupture macroscopique. On considère qu'un matériau est sain s'il est dépourvu de fissures et de cavités à l'échelle microscopique. L'état initial du matériau ne peut être défini de manière objective. La théorie de l'endommagement décrit l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure mésoscopique. Cette évolution est souvent accompagnée de déformation permanente. La première modélisation continue de l'endommagement a été proposée par Kachanov ([Kachanov, 1958]) concernant le fluage des métaux sous sollicitation unidimensionnelle. Dans les bétons,

les défauts apparaissent par décohésion entre les agrégats et le ciment et provoquent une micro-fissuration relativement répartie spatialement, au moins à l'initiation.

La mécanique de la rupture ne considère généralement qu'une seule fissure macroscopique, clairement identifiée, en géométrie et en dimension. Généralement, on considère une fissure traversant la structure dont le matériau reste considéré comme continu (non endommagé, en général).

La manière la plus simple de modéliser l'endommagement est d'introduire une ou plusieurs variables scalaires. Mais les défauts qui correspondent à l'endommagement sont le plus souvent orientés par le chargement qui les crée. Les microfissures de fatigue s'orientent perpendiculairement à la plus grande déformation principale positive. Les cavités de fluage peuvent elles aussi être orientées, ce sont alors les joints de grains plus ou moins orthogonaux à la contrainte principale maximale sur lesquelles les cavités se développent préférentiellement et qui vont rompre en premier. Il est donc nécessaire d'utiliser des variables tensorielles pour décrire le caractère directionnel des dommages.

On peut énumérer les différents choix possibles pour modéliser l'endommagement.

2.1.1 Modèle avec une variable d'endommagement scalaire

On peut considérer dans un premier temps le dommage comme isotrope, sans privilégier une orientation. Ainsi pour un matériau initialement anisotrope, on peut définir un potentiel élastique ψ avec une seule variable scalaire d'endommagement D :

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1-D)\underline{\epsilon}^e : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\epsilon}^e \tag{1.1}$$

où $\underline{\underline{\Lambda}}$ est le tenseur des rigidités élastiques initiales du matériau non endommagé. On définit la force thermodynamique associée à l'endommagement par :

$$Y = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial D} = \frac{1}{2}\underline{\epsilon}^e : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\epsilon}^e \tag{1.2}$$

c'est à dire l'énergie élastique du matériau effectif non endommagé.

Un moyen de traduire la propriété d'isotropie de l'endommagement est l'emploi de deux variables scalaires, D et Δ, au lieu d'une seule. La première est associée à la partie d'énergie qui contient la déformation hydrostatique, l'autre à sa partie déviatorique.

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\lambda(1-\Delta){\epsilon^e_{kk}}^2 + \mu(1-D)\epsilon^e_{ij}\epsilon^e_{ij} \tag{1.3}$$

On peut considérer deux variables associées à des directions matérielles prédéfinies. C'est le cas du modèle d'endommagement de [La Borderie, 1991] qui propose un modèle permettant de rendre compte des effets unilatéraux et d'introduire des déformations anélastiques. Par l'introduction de deux variables d'endommagement, la première en traction

D_1 et la seconde en compression D_2, la reprise de raideur est obtenue lors de l'inversion de direction de chargement. La déformation totale ε se décompose alors en une partie élastique ε^e et une partie anélastique ε^{an}, elles sont définies de la façon suivante :

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma^+}{E(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E(1-D_2)} + \frac{\nu}{E}(\sigma - \text{tr}(\sigma)I) \tag{1.4}$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E(1-D_1)}F(\sigma) + \frac{\beta_2 D_2}{E(1-D_2)}I \tag{1.5}$$

avec β_1 et β_2, les paramètres du modèle. σ^- et σ^+ représentent le tenseur des contraintes principales de compression et de traction. Le terme $F(\sigma)$ correspond à la fonction permettant de gérer les effets unilatéraux.

2.1.2 Modèle avec une variable d'endommagement tensorielle

Expérimentalement, la microfissuration observée tend à s'orienter perpendiculairement aux extensions. De par sa nature, un endommagement isotrope ne peut pas décrire cette distinction. L'utilisation d'un tenseur d'ordre 2 est la plus utilisée pour traduire l'anisotropie induite par endommagement dans un matériau initialement isotrope. Elle correspond à la complexité minimale d'une théorie anisotrope. Desmorat ([Desmorat et al., 2007]) propose, dans un cadre thermodynamique, un modèle d'endommagement anisotrope reliant le tenseur des déformations au tenseur des contraintes effectif, défini de la façon suivante :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\tilde{\sigma} - \frac{\nu}{E}tr(\tilde{\sigma})I \tag{1.6}$$

avec pour expression du tenseur des contraintes effectives $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = (H\sigma^d H)^d + \frac{1}{3}\left(\frac{<tr\sigma>}{1-tr(D)} + <tr(\sigma)>\right)I \tag{1.7}$$

avec $H = (I-D)^d$ où $(.)^d$ est l'opérateur déviatorique, I le tenseur d'identité et D le tenseur d'endommagement. Ce type de modèle donne de bons résultats mais reste complexe à implémenter.

2.1.3 Limitations des modèles d'endommagement locaux

La mécanique des milieux continus permet de décrire, à l'échelle macroscopique, les processus hétérogènes qui apparaissent au cours d'un chargement. Elle permet de représenter des instabilités et des phénomènes de localisation, comme les bandes de glissement pour les cristaux, les bandes de cisaillement pour les géo-matériaux ou encore la striction dans les tôles mise en forme. Pour les matériaux quasi-fragiles, l'apparition, la croissance et la coalescence de micro-fissures, qui permettent la formation et la propagation de macro-fissures, amenant potentiellement à la rupture du matériau sont les principaux mécanismes de localisation. Ces mécanismes peuvent être incorporés

dans une théorie continue par l'introduction de variables internes, appelés variables d'endommagement, qui représentent le changement des propriétés du matériau.
Les modèles d'endommagement continu présentent un comportement adoucissant : la capacité à maintenir une charge va décroître pour une déformation plus importante, et la raideur tangente devient négative. Si aucune précaution n'est prise, les simulations numériques montrent une forte dépendance à la taille et à l'orientation de la discrétisation spatiale.

Plusieurs approches ont été développées pour contourner ce manque de la théorie de l'endommagement continu :

- approche en énergie de fissuration : en manipulant les propriétés matériaux en fonction de la taille de l'élément ([Pietruszczak et Mróz, 1981], [de Vree et al., 1995])
- une régularisation visqueuse : prise en compte de l'effet de vitesse dans les relations de comportement ([Needleman, 1988] , [De Borst et Sluys, 1991])
- les modèles continus non-locaux : en introduisant un terme non-local dans les relations de comportement ([Bažant, 1984] , [Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988], [De Borst et al., 1993])
- les modèles à gradient : en ajoutant des termes de déformations d'ordre supérieur
- la théorie des milieux micro-polaires : en utilisant l'ajout de degrés de liberté en rotations([Mühlhaus et Vardoulakis, 1987],[De Borst et Muhlhaus, 1991])

A part les méthodes en énergie de fissuration, qui, bien qu'elles puissent prédire une réponse globale correcte, laissent la largeur de la zone de localisation indéfinie, ces méthodes locales tendent à régulariser la localisation des déformations en ajoutant une échelle interne locale et à limiter ou à contrôler la localisation. La régularisation visqueuse est moins appropriée au comportement des matériaux quasi-fragiles qu'à celle des métaux. Des essais semblent suggérer que les modèles micro-polaires peuvent être employés pour des essais de cisaillement, mais ne semblent pas assez efficaces dans le cas de chargement de traction ([De Borst et Muhlhaus, 1991]).

La présence d'une fissure entraîne un phénomène de localisation extrême des déformations. La fissure est alors considérée comme une instabilité matérielle. On observe un adoucissement par la déformation consécutive à l'endommagement.

Les matériaux quasi-fragiles manifestent un comportement adoucissant, c'est à dire une pente négative dans le diagramme contrainte-déformation, du fait de la micro-fissuration et de la localisation de déformations en une bande étroite, ce qui engendre une dissipation d'énergie. Le comportement du matériau en dehors de cette zone est élastique linéaire. Ce phénomène, observé expérimentalement par de nombreux auteurs ([L'Hermite, 1960, Rusch et Hilsdorf, 1963, Hughes et Chapman, 1966, Evans et Marathe, 1968]), doit être pris en compte pour prédire correctement le comportement du matériau.

Différents auteurs montrent que même en l'absence d'effets d'instabilités géométriques, les phénomènes suivants peuvent apparaître :

— la bifurcation du chemin d'équilibre,
— la perte d'unicité de la solution dans la réponse incrémentale non-linéaire,
— la dépendance des résultats au type de maillage utilisé lors des analyses numériques.

2.1.4 Modèles non-locaux

Pour contrer l'effet de localisation des déformations et des contraintes, des modèles utilisant des variables moyennées spatialement ont été développés, appelés modèles d'endommagement non-locaux. La formulation non-locale en endommagement est une formulation où la quantité spatiale moyennée est l'énergie de dissipation. Dans une forme plus générale, la déformation demeure locale pendant que toutes les variables contrôlant l'adoucissement sont non-locales. La contrainte définie dans la relation de comportement vérifie les équations différentielles d'équilibre et les conditions aux limites dans leur forme classique. De cette manière, aucun mode d'instabilité à énergie nulle n'apparaît.

Les limites de stabilité en statique sont proches de celles obtenues pour le "*Crack Band Model*" ([Bažant et Oh, 1983]), dans lequel la continuité est traitée de façon locale, et la taille minimale de la région d'adoucissement est imposée par un limiteur de localisation.

Le principal défaut du modèle continu local est la prédiction d'une énergie dissipée nulle au niveau de la fissure. Les simulations par éléments finis convergent vers cette réponse avec le raffinement du maillage. Pour remédier à cette situation, un limiteur de localisation est introduit. Sa forme la plus simple est obtenue par imposition d'une borne inférieure à la taille des éléments, comme utilisée dans le modèle de fissuration par bande. L'utilisation de variables non-locales permet un raffinement du maillage arbitraire.

La formulation dans laquelle toutes les variables d'état sont non-locales s'avère compliquée. Elle impose notamment l'ajout d'interfaces et de conditions à ces interfaces, ce qui amène à une formulation non standard des équations d'équilibre, et l'implémentation éléments finis requiert l'imbrication des éléments dans un code.

Une simplification de la formulation a été proposée par Pijaudier-Cabot ([Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987]), il suffit de considérer uniquement l'endommagement comme non-local, tandis que le comportement élastique est traité de manière locale.

L'idée principale pour le traitement de l'adoucissement est que seules les variables induisant l'adoucissement peuvent être considérées comme non-locales, tandis que le

modèle doit être réduit à un modèle local pour la réponse élastique, qui comprend la charge et la décharge. Cette condition peut être vérifiée par une formulation non locale dans laquelle la déformation est locale quand elle est utilisée comme variable thermodynamique. Pour la généralisation non locale, la formulation d'endommagement scalaire peut facilement être adoptée, bien que le même concept peut être implémenté d'une manière similaire dans les modèles d'endommagement anisotrope, dérivée par Mazars et Pijaudier-Cabot ([Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989]) et Ladevèze ([Ladeveze, 1983]). De nombreuses autres théories constitutives peuvent être généralisées dans une forme non-locale, particulièrement celles utilisant un critère de rupture en déformation ou une limite d'élasticité dégradée.

Du fait des interactions entre microfissures, la réponse σ d'un point matériel est censée dépendre non seulement de l'état du point considéré, mais aussi de l'état de son voisinage. Basée sur les premiers modèles non-locaux en élasticité de Kröner ([Kröner, 1967]) et Eringen ([Eringen, 1972]), la définition d'une quantité non locale Y^{nl} s'exprime à partir de sa contrepartie locale Y soumise à une fonction de pondération $g(\xi)$ dans un volume V :

$$Y^{nl} = \frac{1}{V} \int g(\xi) Y(x+\xi) dV \tag{1.8}$$

Ici, $g(\xi)$ représente une certaine fonction de pondération, qui décroit régulièrement en fonction de la distance, par exemple une distribution gaussienne, avec

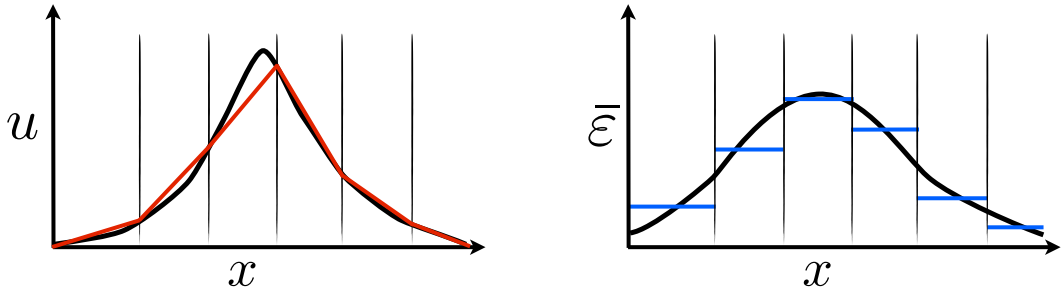
$$\frac{1}{V} \int_V g(\xi) dV = 1 \tag{1.9}$$

Dans la plupart des modèles, l'équation de passage à la non-localité est appliquée au tenseur des déformations, conduisant à sa contrepartie non-locale $\hat{\varepsilon}^{nl}$ de la forme suivante :

$$\hat{\varepsilon}^{nl} = \frac{1}{V} \int_V g(\xi) \varepsilon(x+\xi) dV \tag{1.10}$$

De cette manière, la zone de localisation n'est plus déterminée par la discrétisation spatiale mais par la longueur interne, qui est implicitement introduite à travers le volume utilisé lors du calcul de la variable non locale. A partir d'une certaine taille d'élément, les solutions ne sont plus sensibles ni à la taille du maillage ni à son orientation.

Pour représenter l'effet d'une modélisation non-locale, on se place dans un cas unidimensionnel. Le champ de déplacement montre une localisation forte. Si l'on utilise un modèle non-local, on ne va pas directement travailler avec les grandeurs locales, mais avec leurs grandeurs moyennées.



(a) (b)

FIGURE 1.3 – Schéma d'un champ de déplacement unidimensionnel présentant une localisation en noir et son approximation non-locale (a) et du champ de déformation (b)

L'intérêt des modèles non-locaux se situe dans le fait que les quantités d'intérêts sont moyennées et empêchent ainsi l'apparition de régions où la déformation est infinie et l'énergie dissipée nulle. Le choix de la fonction de support de moyennation et de la longueur interne, définissant le volume de la région moyennée, est donc primordial. Il est aussi important de prendre en compte les surfaces libres lors de la moyennation. Ainsi, doit-on modifier la fonction support proche des surfaces libres, et quid de la fonction support sur les lèvres de la fissure ? Faut-il faire " déborder " la fonction support de part et d'autre de la fissure ou, au contraire, ne considérer qu'un seul bord de la fissure ? Tels sont les choix de modélisation à considérer.

Plus récemment, Giry ([Giry et al., 2011]) propose un modèle non-local intégral en contrainte. Ce modèle considère qu'un point a un potentiel d'interaction avec son voisinage, qui s'exprime comme le facteur de contrainte normé et la longueur caractéristique du matériau. Ce potentiel est évolutif au cours du chargement. La normalisation du facteur de contrainte est définie en fonction des caractéristiques en traction du matériau. De cette manière, l'intensité des interactions entre éléments évolue avec la variation de l'état de contrainte. Cette approche permet de mieux décrire les interactions entre les fonctions de support de moyennation et les surfaces libres.

Une formulation en gradient peut aussi être dérivée de la théorie non locale. Selon Lasry et Belytschko ([Lasry et Belytschko, 1988]), ainsi que Mühlhaus et Aifantis ([Mühlhaus et Alfantis, 1991]), l'intégrale non locale peut être approchée par une équation aux dérivées partielles. Par conséquent, on remplace le tenseur des déformations locales par son expression sous la forme d'une série de Taylor à $\xi = 0$;

$$\varepsilon(x+\xi) = \varepsilon(x)+\nabla\varepsilon(x)\xi+\frac{1}{2!}\nabla^{(2)}\varepsilon(x)\xi^{(2)}+\frac{1}{3!}\nabla^{(3)}\varepsilon(x)\xi^{(3)}+\frac{1}{4!}\nabla^{(4)}\varepsilon(x)\xi^{(4)}+\dots \quad (1.11)$$

Avec $\nabla^{(i)}$ le ième gradient de l'opérateur. La combinaison des équations Eq. 1.10 et Eq.1.11 donne la définition suivante du tenseur non local des déformations :

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon} = \frac{1}{V}\int_V g(\xi)\varepsilon(x)dV + \frac{1}{V}\int_V g(\xi)\nabla\varepsilon(x)\xi dV + \frac{1}{2!V}\int_V g(\xi)\nabla^{(2)}\varepsilon(x)\xi^{(2)}dV + \\ \frac{1}{3!V}\int_V g(\xi)\nabla^{(3)}\varepsilon(x)\xi^{(3)}dV + \frac{1}{4!V}\int_V g(\xi)\nabla^{(4)}\varepsilon(x)\xi^{(4)}dV + \dots\end{aligned} \tag{1.12}$$

Après simplifications et en se limitant à l'ordre 2, le tenseur des déformations est défini par :

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{V}\int_V g(\xi)\varepsilon(x)dV + \frac{1}{2!V}\int_V g(\xi)\nabla^{(2)}\varepsilon(x)\xi^{(2)}dV \tag{1.13}$$

et peut être exprimé en équation aux dérivées partielles :

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon + c\nabla^2\varepsilon \tag{1.14}$$

avec la constante c proportionnelle à une longueur au carré. On explicite ainsi la relation forte qui existe entre les modèles à grandeurs généralisées et les modèles non locaux.

2.1.5 Modèles à gradients

Une autre réponse aux problèmes de localisation est la formulation de modèles micro-polaires. Pour ces modèles, la cinématique locale est enrichie, permettant ainsi de représenter non seulement la déformation de la structure, mais aussi sa courbure. Par exemple, les modèles à gradients d'ordre supérieur utilisent le gradient de la déformation ou le second gradient du déplacement.

Toupin ([Toupin, 1962]) et Mindlin ([Mindlin, 1964, Mindlin, 1965]) ont développé une théorie élastique linéaire où la densité de l'énergie de déformation ω dépend à la fois du tenseur symétrique des déformations $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ et du second gradient du déplacement $\eta_{ijk} = u_{k,ij}$. La fonction de l'énergie de déformation ω est supposée convexe vis à vis des arguments (ε , η) en chaque point du solide de volume V. L'énergie totale W stockée dans le solide est déterminée par le champ de déplacement $u(x)$ dans V

$$W(u) = \int_V \omega(\varepsilon(u), \eta(u))dV \tag{1.15}$$

avec ε et η les dérivées de u, comme données ci-dessus. L'incrément d'énergie dans le solide dû à une variation arbitraire du déplacement u est

$$\delta W = \int_V (\sigma_{ik}\delta\varepsilon_{jk} + \tau_{ijk}\delta\eta_{ijk})dV \tag{1.16}$$

Ici le tenseur des contraintes est défini comme étant le travail conjugué de ε, de la même façon, le tenseur τ des contraintes "de plus haut degré" est défini comme le travail conjugué de η :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_{ij}} \; ; \; \tau_{ijk} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta_{ijk}} \tag{1.17}$$

En utilisant le théorème de la divergence sur (Eq. 1.17)

$$\delta W = -\int_V [(\sigma_{jk,i} - \tau_{ijk,ij})\delta u_k] dV + \int_S [(\sigma_{jk} - \tau_{ijk,i}) n_j \delta u_k + \tau_{ijk} n_i \delta u_{k,j}] dS \tag{1.18}$$

où S est la surface entourant le volume V. La stationnarité de l'équation intégrale donne la relation d'équilibre :

$$\sigma_{jk,j} - \tau_{ijk,ij} = 0 \tag{1.19}$$

Une difficulté des modèles à gradients, qui n'a pas été résolue à ce jour, est la nécessité de définir les conditions aux limites. Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles dans le calcul de la quantité moyenne, des conditions aux limites sur l'équivalent du tenseur des déformations non locales doivent être spécifiées. Du point de vue mathématique, il est nécessaire de spécifier $\overline{\varepsilon}$ ou sa dérivée normale $\nabla \overline{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$ (avec $\mathbf{n}$ le vecteur normal à la surface) en chaque point des bords dans la configuration considérée. L'autre difficulté est le sens physique de ces conditions aux limites et leurs justifications.

Le problème des conditions aux limites pour le modèle à gradient est le pendant du problème de l'interaction du support de pondération avec les surfaces libres pour les modèles non-locaux.

L'intérêt des modèles non locaux et des modèles à grandeurs généralisées est l'introduction d'une longueur caractéristique, qui va empêcher la localisation. Dans les modèles non locaux, cette longueur interne est introduite à travers le volume utilisé pour le calcul de la variable non locale.

De plus, ces modèles à gradient ou non locaux, fournissent un champ d'endommagement. Ils ne donnent pas directement accès à des informations, comme la longueur et l'ouverture de la fissure, qui sont primordiales pour les problèmes de perméabilité.

Des techniques d'extraction de l'ouverture de fissure et de localisation du front de la fissure à partir de champ d'endommagement ont été développées. On peut notamment citer [Dufour et al., 2012], qui à partir d'une analogie avec un problème de diffusion thermique identifie le trajet de fissuration.

Par un traitement du champ de déformation, Dufour ([Dufour et al., 2008]) propose en comparant les distributions de déformations effectives, provenant d'une part d'un modèle non-local et d'autre part d'un modèle avec une discontinuité forte. Si ces distributions sont suffisamment proches, cela signifie que la variable qui contrôle l'endommagement a atteint une valeur proche de celle d'une "vraie" fissure et il est attendu que la distribution des déformations soit proche de celle d'une discontinuité dans une analyse non locale

régularisée. A partir de ces comparaisons, une amplitude du saut de déplacement et un indicateur d'erreur sont estimés. La qualité de l'ouverture est dépendante de la fonction de poids utilisée dans le modèle non-local.
Au lieu de représenter l'apparition de fissures et leur propagation par un changement ou une modification des paramètres du matériau, on peut aussi utiliser le cadre de la mécanique de la rupture. Cadre dans lequel la fissure est représentée explicitement comme une discontinuité géométrique.

3 Mécanique Elastique Linéaire de la Rupture

Dans le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture, la fissure est supposée localement plane, à front droit, avec une discontinuité franche à l'extrémité. La fissure présente alors un plan de symétrie local. Le mouvement du milieu entourant la fissure peut être décomposé par rapport au plan de symétrie en trois composantes cinématiques élémentaires correspondant aux trois modes de rupture :

— le mode I, appelé "ouverture", il correspond à la partie symétrique du champ de vitesse par rapport au plan de la fissure
— le mode II, appelé "cisaillement plan", il correspond à la partie antisymétrique du champ de vitesse par rapport au plan de la fissure
— le mode III, appelé "cisaillement antiplan ou déchirement", il correspond à la partie antiplane du champ de vitesse normale au plan de la fissure

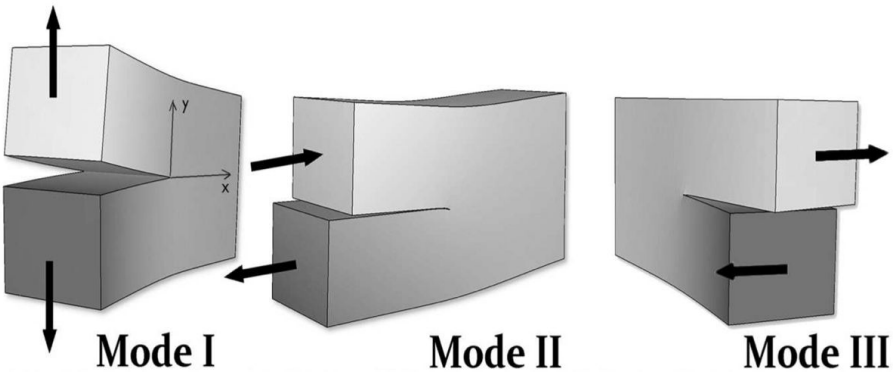


FIGURE 1.4 – Représentation des 3 modes de fissuration : ouverture, cisaillement plan, cisaillement anti plan

Ces trois modes sont définis par symétrie par rapport au plan de la fissure (Fig. 1.4). Il est donc possible de partitionner n'importe quel état de sollicitation en trois modes, même dans un milieu non-linéaire. Les modes étant définis par des relations de symétrie vis-à-vis du plan et du front de la fissure, cela implique également que l'on se place à une échelle où la fissure peut être considérée comme plane à front droit.

3.1 Solution de Westergaard

En élasticité linéaire, tout comme dans un milieu non-linéaire, les champs mécaniques présentent une discontinuité au passage du plan de la fissure et sont continus ailleurs. Cette discontinuité disparaît le long du front de la fissure. Cette discontinuité est à l'origine d'une singularité du champ de déformations et de contraintes au niveau du front de la fissure. Lorsque la distance à l'extrémité de la fissure tend vers 0, les champs de contraintes et de déformations tendent vers l'infini. Westergaard ([Westergaard, 1939]) a produit la solution exacte pour un cas particulier du milieu plan infini bidimensionnel épais soumis à un champ de contrainte uniforme.

Irwin ([Irwin, 1957]) a ensuite fourni le développement exact au premier ordre de la solution de Westergaard et a défini des facteurs d'intensité des contraintes correspondant à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Ces facteurs d'intensité des contraintes viennent caractériser l'intensité de la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure et sont proportionnels à la discontinuité des lèvres de la fissure. Williams ([Williams, 1957]) a par la suite étendue le développement aux ordres supérieurs.

Le champ de déplacement au voisinage de l'extrémité de la fissure quand la distance à cette extrémité tend vers 0 est alors donné par :

$$u(r,\theta) = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{K_i\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \underline{g}_i(\theta) \tag{1.20}$$

Une propriété intéressante de cette solution est qu'elle permet pour chaque mode d'exprimer la solution comme le produit d'un même facteur multiplicatif K_i pour tous les termes du vecteur déplacement et d'une distribution spatiale pour chaque terme.

En élasticité linéaire, la distribution spatiale étant fixe pour chaque mode, les seuls degrés de liberté restants sont les facteurs d'intensité des contraintes. A ces trois facteurs d'intensité, il faudrait rajouter les termes non singuliers, les contraintes T (T_{33}, T_{11} et T_{31}), qui sont généralement négligées pour les fissures longues. Le tenseur des contraintes est alors défini de la façon suivante :

$$\sigma_{ij} = K_I \frac{F_{Iij}(\theta)}{\sqrt{r}} + K_{II} \frac{F_{IIij}(\theta)}{\sqrt{r}} + K_{III} \frac{F_{IIIij}(\theta)}{\sqrt{r}} \tag{1.21}$$

Dans le cadre de la rupture fragile, un critère de propagation lié à une contrainte d'ouverture critique au-delà de laquelle la fissure va se propager ne peut fonctionner, puisque les contraintes tendent vers l'infini en $r = 0$. L'idée d'Irwin ([Irwin, 1957]) est de faire porter le critère sur le facteur d'intensité K_I, qui caractérise l'intensité de la singularité. Il postule donc l'existence d'une valeur critique K_{Ic}, appelée ténacité, caractéristique du matériau, homogène au produit d'une contrainte par la racine carrée d'une longueur telle

que :

$$\begin{aligned} K_I < K_{Ic} \quad &\Rightarrow \text{ pas de propagation} \\ K_I = K_{Ic} \quad &\Rightarrow \text{ propagation possible} \end{aligned}$$

3.2 Appproche en énergie - Critère de Griffith

Une approche en énergie a été proposée par Griffith ([Griffith, 1921]). Cette approche consiste à étudier le bilan des énergies mises en jeu dans le processus d'accroissement de la fissure. On considère un milieu plan fissuré d'épaisseur e dans lequel la fissure croît avec une vitesse linéique $\dot{a}$ ou surfacique $\dot{A} = e\dot{a}$. On peut alors appliquer le premier principe de la thermodynamique et considérer être dans l'hypothèse des petites perturbations. Par rapport au premier principe dans un milieu continu, il faut prendre en compte le fait que la frontière du volume étudié évolue au cours du temps, la fissure fait partie de la frontière du solide. Il faut ajouter le terme supplémentaire $2\gamma\dot{A}$, introduit par Griffith pour prendre en compte la puissance dissipée dans le mécanisme de décohésion, γ étant une constante caractéristique du matériau.

L'énergie disponible lors d'un accroissement de fissure et qui peut être utilisée pour créer ce mécanisme est le taux de restitution d'énergie G. La condition de rupture des milieux élastiques-fragiles par Griffith est alors :

$$G \geq 2\gamma \tag{1.22}$$

Dans les milieux élastiques plans, le taux de restitution d'énergie G est relié directement aux facteurs d'intensité des contraintes K_I,K_{II},K_{III} . En utilisant des intégrales de contour et les équations de Westergaard, on aboutit à la formule d'Irwin :

$$G = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \tag{1.23}$$

avec $E' = E$ en contraintes planes et $E' = \dfrac{E}{1-\nu^2}$ en déformations planes.

L'expérience tend à prouver que la propagation se produit effectivement pour une valeur relativement indépendante de la géométrie et du chargement. Une dispersion de 20% sur la mesure de K_{Ic} est chose courante. Il est donc possible de relier l'énergie de surface γ de Griffith à la ténacité du matériau K_{Ic} dans un cas de déformation plane en mode I par :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{2\gamma E}{1-\nu^2}} \tag{1.24}$$

La mécanique linéaire élastique de la rupture (MELR) est intéressante pour caractériser le comportement élastique du milieu dans le voisinage de la fissure, mais la prédiction

est limitée à proximité de la pointe de la fissure. La MELR permet aux contraintes d'avoir une valeur infinie en pointe de fissure, ce qui n'est pas possible pour un matériau réel. Une zone inélastique d'une certaine taille doit exister autour de la fissure. Pour les matériaux métalliques, on parle de zone plastique. Le milieu est déformé de manière irréversible, les principaux mécanismes sont les glissements de dislocations suivant les plans cristallins du matériau. Dans le béton et le mortier, cette zone contient un grand nombre de micro-fissures. C'est la coalescence de ces micro-fissures qui va permettre la propagation de la fissure principale.

La microfissuration donne un caractère non-linéaire au comportement du matériau endommageable. La taille de la zone d'élaboration de l'endommagement ou "*Process Zone*" est plus grande que pour les métaux. De plus, les métaux présentent un écrouissage, tandis que les matériaux quasi-fragiles présentent de l'adoucissement.

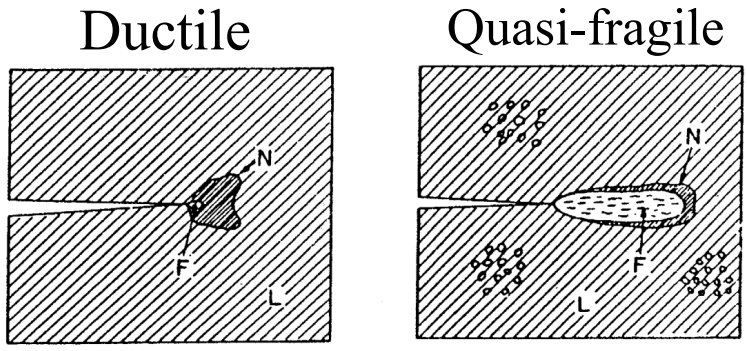


FIGURE 1.5 – Représentation de la zone de fissuration dans les matériaux ductiles (gauche) et dans les matériaux quasi-fragiles (droite) ; F= fracture , N = Comportement non-linéaire, L= comportement linéaire

3.3 Dugdale - Barenblatt

Le modèle de Barenblatt ([Barenblatt, 1962]) est un modèle de fissuration pour un milieu infini contenant une fissure chargée en mode I. Les contraintes prédites par le modèle élastique étant prédites comme infinies, Barenblatt émet l'hypothèse qu'il existe en amont de la pointe a une zone de transition partiellement rompue. Il considère que des forces de cohésion s'exercent encore dans cette zone. Ces forces s'annulent lorsque l'écartement des lèvres de la fissure atteint une valeur critique δ_c, permettant la rupture . Le point a correspond au point où cet écartement est atteint. Par simplification, la force de cohésion est supposée constante par unité de longueur et égale à σ_c, caractéristique du matériau. La longueur de la zone de transition est supposée s'adapter de telle sorte que le facteur d'intensité des contraintes soit nulle en c.

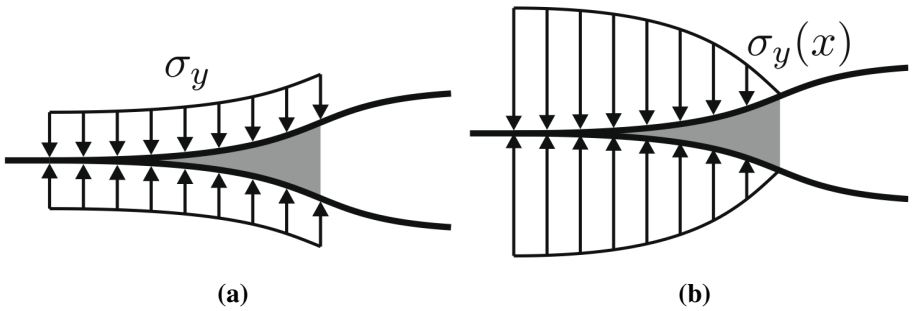


FIGURE 1.6 – Représentation du modèle de Dugdale (a) et Barenblatt (b) ([Geiß ler et Kaliske, 2010])

Dans le modèle de Dugdale (Fig. 1.6a), la zone plastique est en pointe de fissure. La contrainte est égale à la contrainte seuil en pointe de fissure. Le modèle de Barenblatt (Fig. 1.6b) est similaire au modèle de Dugdale, à ceci prêt qu'il suppose que la contrainte de cohésion varie le long des lèvres de la fissure et ne soit pas un champ constant de compression. Cela revient à condenser toute la non-linéarité du comportement qu'elle soit due à l'endommagement ou à la plasticité sur le plan de la fissure. Le fait que la cohésion diminue avec l'ouverture de la fissure peut être interprété comme un endommagement de la matière.

Dans les deux cas, si le problème est auto-similaire, l'accroissement de fissure a/R est constant. Le fait de le condenser sur un plan n'est pas un souci puisque le rapport volume sur surface est contant. Mais dès que l'on considère un cas multi-axial, cette remarque est vraie pour chaque mode de fissuration. En revanche, ce n'est plus vrai si l'on combine les modes. Un modèle cohésif de type Dugdale-Barenblatt pour des chargements multiaxiaux n'est pas possible.

3.4 Modèle à zone cohésive

Partant du principe que les prédictions de la mécanique élastique linéaire de la rupture sont fausses en pointe de la fissure et des modèles de Dugdale et Barenblatt, des modèles d'interfaces cohésives ont été développés. Dans ces modèles, une loi reliant la contrainte à l'ouverture de la fissure est introduite. Cette loi peut prendre diverses formes (Fig.1.8), elle suppose que l'élément a un comportement élastique tant que la contrainte dans l'élément est inférieure à σ_u. Elle considère, une fois cette contrainte atteinte, que la fissure se propage. Quand la fissure s'ouvre, la contrainte n'est pas supposée chuter brutalement à zéro mais décroître progressivement avec l'ouverture de la fissure (Fig. 1.7). La loi cohésive précise comment cet endommagement conduit à la chute de la contrainte.

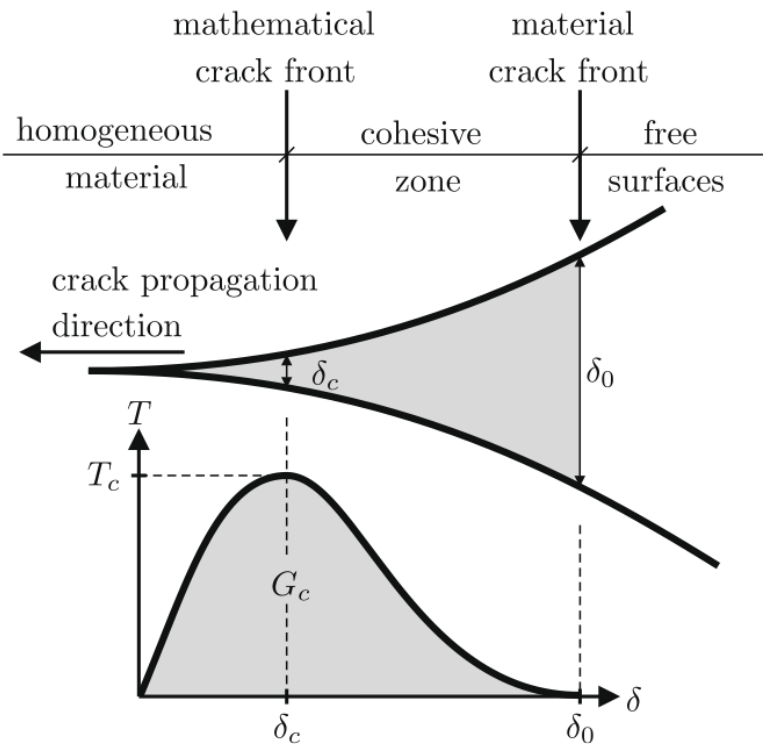


FIGURE 1.7 – Hypothèses des modèles à zone cohésive ([Geiß ler et Kaliske, 2010])

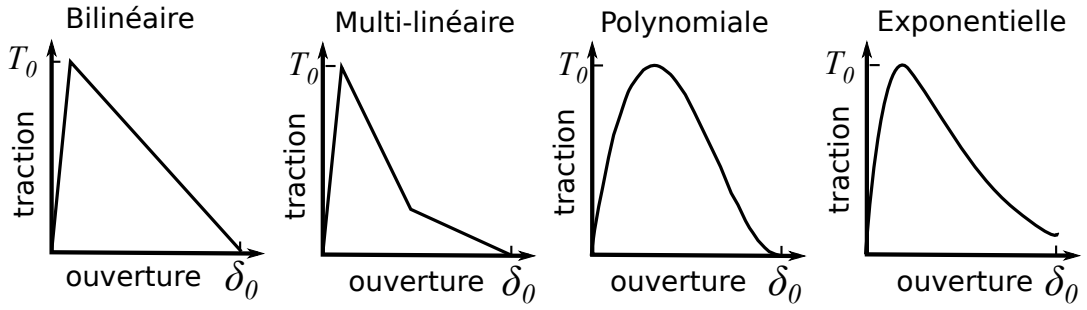


FIGURE 1.8 – Choix de représentation de la loi de comportement en traction pour les modèles cohésifs

Pour la modélisation de chargements en mode mixte I+II, deux cas de figure sont rencontrés dans la littérature. Dans un cas les auteurs considèrent deux lois cohésives indépendantes l'une de l'autre, avec une loi cohésive pour l'ouverture et une deuxième pour le cisaillement/glissement (Needleman ([Needleman, 1987]) Tvergaard & Hutchinson ([Tvergaard et Hutchinson, 1992]), Xu & Needleman ([Xu et Needleman, 1993])). Dans d'autre cas, notamment chez Pardoen ([Pardoen et al., 2005]), Högberg ([Högberg,

2006]), Camacho & Ortiz ([Camacho et Ortiz, 1996]), Geubelle & Baylor ([Geubelle et Baylor, 1998]), Shet & Chandra ([Shet et Chandra, 2002]) et Geißler et Kaliske ([Geiß ler et Kaliske, 2010]), les lois cohésives d'ouverture et de glissement sont couplées. On a ainsi une dépendance de la contrainte ultime en traction, la contrainte ultime en cisaillement, l'ouverture et le glissement de la pointe de la fissure.

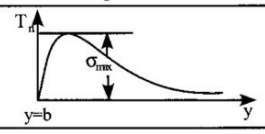
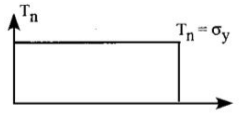
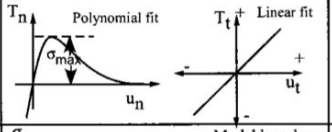
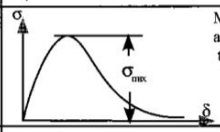
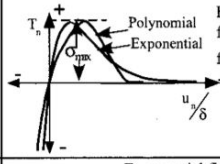
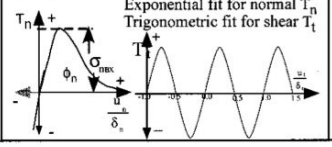
Year and author	Proposed Model	Model parameters	Problem solved	Model constants	Comments
(1) 1959, 1962 Barenblatt [4,5]		$K = \int_0^{t^*} \frac{G_1(t)dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi E T}{1-\nu^2}}$ (ductile) $= \sqrt{\frac{\pi E T_0}{1-\nu^2}}$ (brittle) $T = T_0 + T_1$ T_0 = work of separation for britt. mater. T_1 = work of plastic deformation	Perfectly brittle materials.		The first to propose the cohesive zone concept.
(2) 1960 Dugdale [6]		$\frac{s}{a} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\frac{T}{\sigma_y}\right)$ For small value of T/σ_y $\frac{s}{l} = 1.23\left(\frac{T}{\sigma_y}\right)^2$	Yielding of thin ideal elastic-plastic steel sheets containing slits.	Plastic zone ranges from 0.042 to 0.448 (in.)	Cohesive stress equated to yield stress of material.
(3) 1987 Needleman [16]		ϕ_{sep} = work of separation δ = normalizing parameters σ_{max} = cohesive strength	Particle-matrix decohesion.	$\delta = 10^{-9}$ to 10^{-8}m Cohesive Energy 1 to 10 J/m 2 $\sigma_{max} = 1000 - 1400$MPa $\sigma_y = 350 - 450$MPa	Phenomenological model. predicts normal separation
(4) 1989 Rice & Wang [17]		E_0 = initial Young's modulus h = normalizing parameter σ_{max} = max imum stress α = constant ($\frac{E_0 h}{\alpha^2} = 2\gamma$)	Solute segregation.		Ascending part is equated to E_0 considers normal separation and ignores shear separation.
(5) 1990 Needleman [13]		ϕ_{sep} = work of Separation δ = normalizing parameters σ_{max} = cohesive strength	Particle-matrix decohesion.	$\delta = 10^{-9}$ to 10^{-8}m	Predicts normal separation.
(6) 1990 Needleman [18]		ϕ_n, ϕ_t = work of normal and shear separation δ_n, δ_t = critical displacements σ_{max} = cohesive strength	Decohesion of interface under hydrostatic tension.	$\delta_n = \delta_t = 2 \times 10^{-10}$ to 2×10^{-9} m $J_{IC}/\phi_n = 0.57 \sim 2.59$ $\sigma_{max}/\sigma_0 = 2,3$	Periodic shear traction to model Pieriels shear stress due to slip.

FIGURE 1.9 – Tableau récapitulatif de différentes modélisations des zones cohésives ([Shet et Chandra, 2002])

Dans ces modèles, l'aire sous la courbe, une fois la contrainte σ_u atteinte, représente l'énergie de fissuration G_F, qui comme la contrainte ultime en traction est considérée comme une constante du matériau.

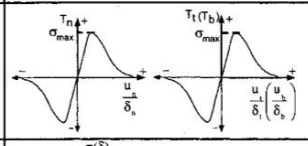
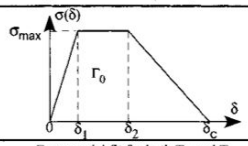
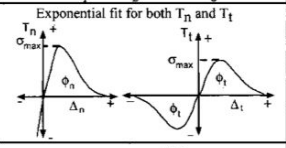
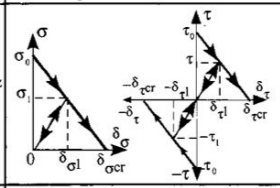
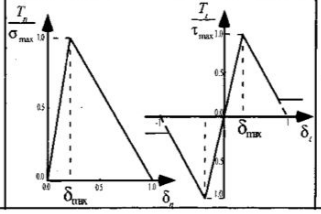
Year and author	Proposed Model	Model parameters	Problem solved	model constants	Comments
(7) 1990 Tvergaard [20]		δ_n, δ_t = critical displacements σ_{max} = cohesive strength	Interfaces of whisker reinforced metal matrix composites	$\delta_n = \delta_t = 1\times10^{-9}$m. E = 60GPa (Young's mod) $\sigma_y/E = 0.005$ $\sigma_{max}/\sigma_y = 5\sim9$	Quadratic Model.
(8) 1992 Tvergaard & Hutchinson [19]		Γ_0 = work of separation. δ_c = critical displacement σ_{max} = peak normal traction/interface strength δ_1, δ_2 = factors governing shape	Crack growth in elasto-plastic material, peeling of adhesive joints	$\Gamma_{ss}/\Gamma_0 = 0\sim10$. ($\Gamma_{ss}$ = Pl wk.), $\delta_2^c/\delta_1^c = 1$ $\sigma_{max}/\sigma_y = 0\sim14$ $\delta_1, \delta_2 = 0.15, 0.5$ $\sigma_y/E = 1/300$	Claims shape of separation law are relatively unimportant.
(9) 1993 Xu & Needleman [14]		ϕ_n = work of normal separation ϕ_t = work of shear separation δ_n, δ_t = critical displacements σ_{max} = cohesive strength	Particle-matrix decohesion	$\delta_n = \delta_t = 2\times10^{-10}$to 2×10^{-9} m	Predicts shear and normal separation.
(10) 1996 Camacho and Ortiz [9]		σ_0, τ_0 = normal and shear stress at fracture initiation $\delta_{\sigma cr}, \delta_{\tau cr}$ = critical normal and shrear opening displacement G_c = fracture energy	Impact	Alumina: σ_0= 400 MPa $\delta_{\sigma r} = 1.7\times10^{-7}$m Steel: $\sigma_0 = 1500$MPa $\delta_{\sigma cr} = 5.43\times10^{-6}$m	Uses additional fracture criterion. Predicts failure by both shear and normal separation in tension and by shear separation in compression.
(11) 1997 Geubelle & Bayler [21]		ϕ_n, ϕ_t = work of normal and tangential separation Δ_n, Δ_t = normal and tangential displacement jump δ_n, δ_t = normal and tangential interface characteristic length	Delamination by low-velocity impact	σ_{max}= E/100 to E/10 critical normal displacement jump $\Delta_n^c = 10^{-3}\sim10^{-4}$m	Bilinear model. Ascending curve can be matched to initial stiffness of the material.

FIGURE 1.10 – Tableau récapitulatif de différentes modélisations des zones cohésives (suite) ([Shet et Chandra, 2002])

Le principal défaut de ces modèles est la difficulté à identifier et à discriminer les différentes lois cohésives proposées dans la littérature vis-à-vis des résultats expérimentaux et à leur donner un sens physique. Un second défaut est que cela force le trajet de fissuration à suivre les frontières entre les éléments prédéfinis, mais cette difficulté peut être levée en associant la méthode cohésive avec la XFEM.

Deux approches sont proposées pour palier l'imposition du trajet de la fissure, méthode des éléments finis étendues (*eXtended Finite Element Method*) et l'approche par discontinuité forte (*Strong Discontinuity Approach*)

3.5 XFEM

L' *eXtended Finite Element Method* est une technique permettant de représenter des discontinuités dans des éléments finis. Le maillage est totalement indépendant de la géométrie et de la position de la discontinuité, ce qui permet de libérer le trajet de fissuration des contraintes du maillage. Les noeuds à proximité de la fissure auront des fonctions de

formes supplémentaires.

L'approximation du champ de déplacement par la méthode des éléments finis s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i \phi_i \tag{1.25}$$

où i est l'ensemble des noeuds du maillage, le déplacement suivant le degré de liberté du noeud u_i est associé au noeud i et à la fonction de forme associée au noeud i. Chaque fonction de forme est définie sur un domaine qui correspond à l'ensemble des éléments connectés au noeud i. Afin de représenter la discontinuité, l'approximation éléments finis est enrichie par deux termes supplémentaires ([Moës et Belytschko, 2002] et [Belytschko et al., 2001]) :

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(f(x)) \tag{1.26}$$

Le premier terme fait intervenir la fonction Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x > 0 \\ +1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \tag{1.27}$$

et $f(x)$ est une fonction de distance (*level set*) "signée" qui détermine si x est d'un côté ou de l'autre de la fissure et à quelle distance. Les noeuds peuvent être encore davantage enrichis pour prendre en compte le phénomène de branchement de la fissure ([Moës et Belytschko, 2002]) ([Belytschko et al., 2001])

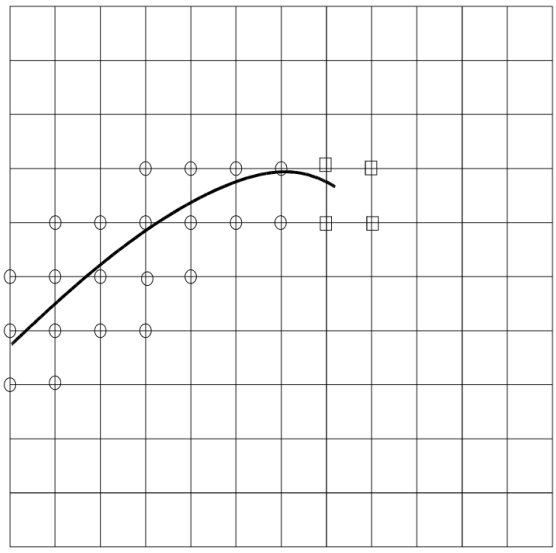


FIGURE 1.11 – Maillage représentant la fissure et les noeuds enrichis avec les fonctions de forme discontinues ([Moës et Belytschko, 2002])

3.6 Embedded FEM

Oliver ([Oliver, 2000]) propose une nouvelle approche basée sur l'analyse en discontinuité forte (ou "*strong discontinuity analysis*"), en considérant les discontinuités cinématiques par l'utilisation de saut dans le champ de déplacement dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Une analyse en discontinuité forte est dédiée à garder la compatibilité des équations de comportement du milieu continu avec la cinématique en discontinuité forte. Pour cela deux conditions sont nécessaires, une cinématique discontinue régularisée associant des discontinuités faibles et fortes, et une loi d'adoucissement régularisée.

Le champ de déplacement u s'exprime alors :

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + H_S[\![u]\!](x,t) \tag{1.28}$$

où $\bar{u}$ correspond à la partie continue et $[\![u]\!]$ à la partie discontinue du champ de déplacement. Les deux champs sont définis sur l'ensemble du domaine. L'idée est que la discontinuité est portée par la fonction Heaviside H_S définie sur la discontinuité, où $H_S(x) = 0$ pour $x < x_S$, sinon $H_S(x) = 1$. On peut à partir de l'expression du champ de déplacement calculer un champ de déformation continue compatible de la façon suivante :

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \bar{u}(x,t)}{\partial x} + H_S \frac{\partial [\![u(x,t)]\!]}{\partial x}}_{\bar{\varepsilon}(x,t)} + \underbrace{\frac{\partial H_S(x)}{\partial x}[\![u]\!](x,t)}_{\delta_S[\![u]\!](x,t)} \tag{1.29}$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}(x,t) + \delta_S[\![u]\!](x,t) \tag{1.30}$$

où $\bar{\varepsilon}(x,t)$ représente la déformation continue, et $\delta_S[\![u]\!](x,t)$ la déformation liée à la discontinuité. Afin de représenter par le même formalisme les discontinuités faibles et fortes, l'expression de δ_S est définie sur une bande de discontinuité S^h de largeur h contenant la discontinuité et approchée par une fonction Dirac régularisée, telle que :

$$\delta_S(x) = \frac{1}{h}\mu_s(x); \quad \mu_s(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in S^h \\ 0 & \forall x \in \Omega / S^h \end{cases} \tag{1.31}$$

Sous cette forme, la définition d'une discontinuité faible est donnée par une valeur de $h \neq 0$, tandis que la discontinuité forte est obtenue pour une largeur h tendant vers 0.

Ce formalisme permet de définir la transition de l'état élastique à l'apparition de la process zone jusqu'à la fissuration (Fig. 1.12). L'apparition de la discontinuité faible d'une bifurcation de la réponse contrainte-déformation résulte en la création d'une bande de localisation de largeur h_B au temps t_B. La formation de la discontinuité forte s'obtient par la réduction de la taille de la discontinuité faible à l'instant t_{SD}. Ainsi, dans l'intervalle de temps entre t_B et t_{SD}, la discontinuité faible apparaît sous la forme d'une bande de localisation puis s'effondre en une discontinuité forte. Au delà du temps t_{SD}, la discontinuité forte se développe.

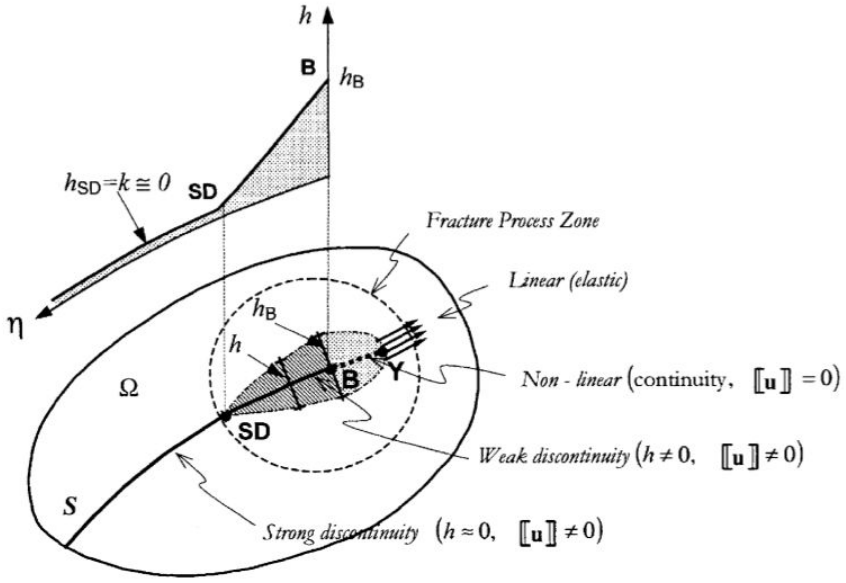


FIGURE 1.12 – Représentation de la fissuration dans l'approche à discontinuité forte

La principale différence entre les méthodes *XFEM* et *EFEM* porte sur la localisation de la discontinuité. Pour la XFEM, la discontinuité est introduite comme fonctions de formes supplémentaires aux noeuds, tandis que pour la méthode EFEM la discontinuité est introduite dans l'élément. Oliver ([Oliver et al., 2006]) a montré que les résultats obtenus par ces deux méthodes sont fortement similaires.

3.7 Approche mixte XFEM-endommagement : la TLS (Thick Level Set)

Moës ([Moës et al., 2011]) et Bernard ([Bernard et al., 2012])) proposent une nouvelle approche couplant l'endommagement et la représentation explicite de la fissure, en introduisant un champ de phase variant entre 0 et 1 pour caractériser la dégradation du matériau dans la zone de transition entre le matériau sain et la fissure (Fig. 1.13). Une nouvelle équation présentant un opérateur laplacien est introduite dans les équations mécaniques, par l'ajout d'une longueur interne.

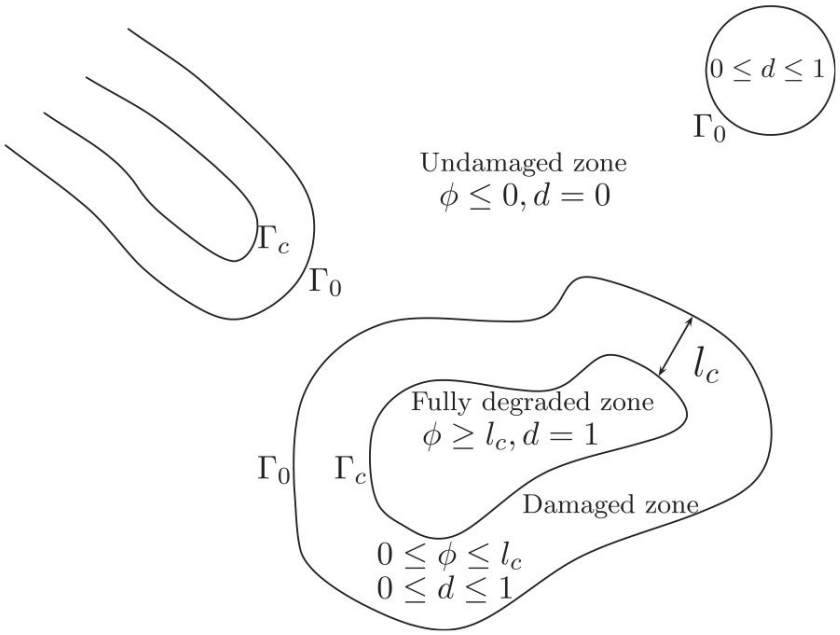


FIGURE 1.13 – Représentation du champ d'endommagement autour de la fissure dans l'approche Thick Level Set ([Moës et al., 2011])

Cette formulation variationnelle est résolue sur l'ensemble du domaine. La fissure est représentée par l'iso-zéro de la level set ϕ, qui est appelé front d'endommagement et qui représente la transition entre le matériau sain et la fissure (Fig. 1.14). La fonction de distance ϕ considère la distance entre un point x et l'iso-zéro du champ de phase ϕ.

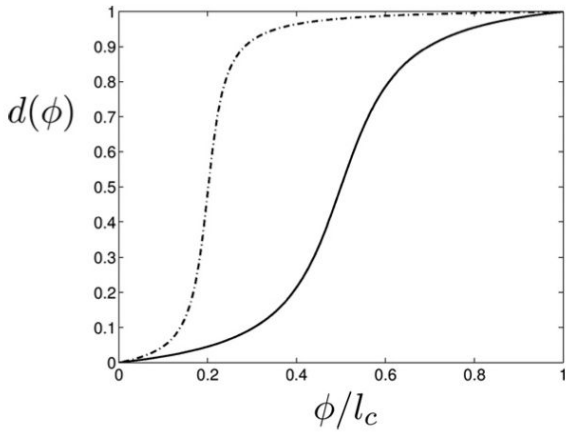


FIGURE 1.14 – Fonction représentant l'évolution de l'endommagement

Dans cette approche, l'endommagement est considéré comme une fonction scalaire

croissante, l'endommagement augmente de 0 vers 1 quand la distance au front ϕ va de 0 vers l_c. De ce fait, la distance minimale entre un point où $d = 0$ et un point où $d = 1$ est l_c, la longueur interne, empêchant ainsi les phénomènes de localisation.
Cette approche est intéressante pour plusieurs raisons. La partie non-locale de l'analyse est limitée aux zones endommagées. La non-localité est automatiquement gérée, sans ajouter de variables ou d'équations supplémentaires. La transition entre l'endommagement et la fissuration est automatique. La longueur interne n'est pas fixée, mais possède une taille minimale, ce qui empêche les phénomènes de localisation. La distribution de l'endommagement est prédéfinie par la relation entre ϕ et d.

4 Principe de l'approche choisie

De nombreux modèles existent pour traiter de l'endommagement et de la fissuration des matériaux quasi-fragiles. Les modèles de la mécanique de l'endommagement continu non-local permettent de représenter la transition du matériau de l'état vierge à la rupture. Mais la description de la fissure et la localisation de la pointe de la fissure ne sont pas explicites et demandent l'utilisation de techniques de post-traitement du champ d'endommagement. Les modèles basés sur la mécanique de la rupture décrivent la fissure et le comportement élastique du matériau, mais le comportement de la zone d'élaboration de l'endommagement et l'interaction entre les micro-fissures et la fissure principale sont absents.

Le choix effectué au cours de cette thèse, est de travailler avec des grandeurs non-locales adaptées au problème. En ce basant sur le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture, on peut considérer que le comportement élastique de la région en pointe de fissure est condensée par l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes. Si les facteurs d'intensité des contraintes permettent de représenter le comportement élastique, il faut leurs associer des champs de vitesse élastique. En se plaçant dans le cadre de l'hypothèse des petites transformations et petites perturbations, on peut considérer que le champ de vitesse peut se décomposer en une partie élastique et une partie non-linéaire. En associant un facteur d'intensité ρ à la partie non-linéaire du champ de vitesse, on peut ainsi observer le comportement de la région en pointe de fissure de manière non-locale par une méthode de changement d'échelle.

De ce fait, nous ne définissons pas de fonction support de pondération ou de longueur interne comme pour les approches non-locales, c'est la cinématique qui nous fournit la description non-locale associée au problème.

Le principe de l'approche est résumé dans la figure 1.15.

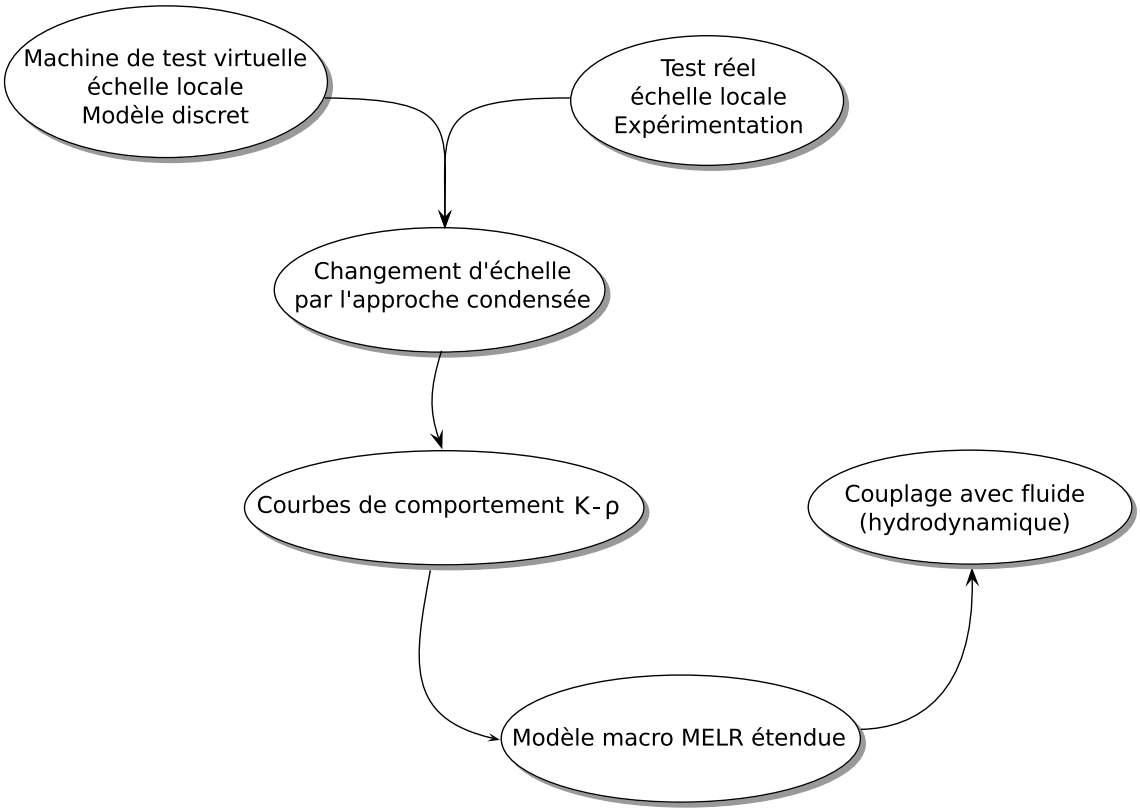


FIGURE 1.15 – Schéma de l'approche

Chapitre 2

Modélisation numérique de la fissuration d'un matériau quasi-fragile

1 Modèles discrets

Les modèles discrets ont été introduits par Cundall ([Cundall et Strack, 1979]) à la fin des années 70 pour la simulation des milieux granulaires, en considérant le matériau comme un assemblage de particules sphériques maintenues par des interactions de type contact et friction de type Mohr-Coulomb. Plus récemment, les modèles discrets ont été étendus pour d'autres matériaux quasi-fragiles, en introduisant un certain nombre de modifications concernant la géométrie des particules, la présence de forces cohésives et de mécanismes représentant la fissuration.

Il existe différentes familles de modèles discrets. Certains modèles comme les modèles atomistiques et les modèles de dynamique moléculaire se placent à l'échelle du nanomètre. Les modèles discrets se placent plutôt à l'échelle du millimètre pour le mortier et à l'échelle du centimètre pour le béton.

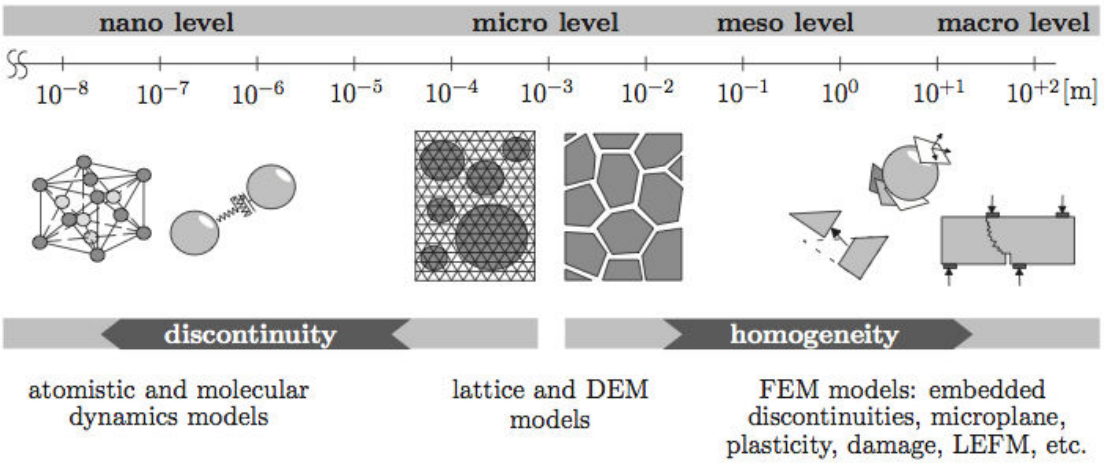


FIGURE 2.1 – Représentation des échelles d'observations et des modèles numériques pour des matériaux cohésifs ([D'Addetta, 2004])

La modélisation du comportement des matériaux hétérogènes fragiles ou quasi-fragiles d'un point de vue mécanique est possible à travers différentes approches :

— classiquement, une approche phénoménologique repose sur une description de la matière comme un matériau continu. Le comportement microscopique du matériau est moyenné à l'échelle macroscopique, et permet de représenter de façon satisfaisante le comportement du matériau à l'échelle de la structure

— une deuxième approche, dite discrète, se base sur une représentation de la micro structure du matériau, et considère celui-ci comme un assemblage de particules pouvant se rompre.

La principale différence entre les modèles discrets et la méthode des éléments finis est que le matériau est représenté comme un ensemble de particules discontinues et sans maillage au sens strict du terme. Le milieu est modélisé par un nombre fini de particules finies qui interagissent entre elles. Cela signifie que la méthode des éléments discrets est basée sur une discrétisation physique du milieu. Il faut définir une table de connectivité des particules et la loi régissant leurs interactions, où les éléments discrets représentent des objets physiques. La plupart des matériaux et des systèmes sont discrets à partir d'une certaine échelle (granulats, sable, ...) . Il est admis que les matériaux tels que le béton et la terre soient souvent traités comme des matériaux continus, bien qu'ils soient un assemblage de grains à l'échelle locale. Les approches continues utilisées dans la description par éléments finis sont correctes lorsque la micro-structure a une dimension beaucoup plus petite que l'objet considéré, comme c'est le cas pour les structures. Dès lors que l'échelle d'intérêt est similaire à l'échelle de discrétisation, les modèles continus classiques ne sont plus aptes à reproduire correctement les phénomènes associés au comportement du matériau discontinu comme la localisation des déformations

lors de l'amorçage de la fissure. Dans les matériaux polycristallins, on peut très bien considérer appliquer la mécanique des milieux continus à l'intérieur de chaque grain, les difficultés sont alors de définir le comportement à associer aux interfaces entre grains et l'identification des différents paramètres de leur comportement.

C'est à cette échelle que les modèles discrets sont intéressants et c'est la raison pour laquelle ils ont été développés.

Un modèle par éléments discrets a été utilisé comme machine de test virtuelle, car la reproductibilité des essais sur des matériaux quasi-fragiles endommagés est difficile. L'endommagement ne peut généralement pas être réduit à une variable scalaire. L'orientation des micro-fissures affecte la raideur dans une direction privilégiée, perpendiculaire aux lèvres de la fissure. Prendre en considération l'endommagement anisotrope dans les modèles phénoménologiques est envisageable, mais l'identification des modèles correspondants en respectant l'endommagement anisotrope n'est pas une tâche facile, dûe en général au nombre limité de résultats expérimentaux. De plus, la mise en place de tests de traction sur des échantillons endommagés, composés de matériaux hétérogènes quasi-fragiles est une opération plutôt délicate.

Un protocole, basé sur l'utilisation de modèles par éléments discrets, en tant que machine d'essai virtuelle, a été proposé ([Delaplace, 2009]). Dans ces modèles par éléments discrets, les fissures et l'orientation de ces fissures sont naturellement décrites par des connexions brisées entre particules. Cette démarche permet d'explorer par simulations numériques des chargements qui seraient pour le moins difficiles à mettre en œuvre expérimentalement. Une telle approche ne va pas remplacer la partie expérimentale, mais va permettre de guider la construction de modèles en hiérarchisant les effets à prendre en compte.

On peut distinguer les modèles discrets en trois catégories, les modèles particulaires à base de sphères, les "*Lattice Models*" et les modèles particulaires à base de polyèdres.

Les modèles particulaires à base de sphères ([Donzé et Magnier, 1995], [Potyondy et Cundall, 2004]) sont les modèles les plus proches des travaux précurseurs de Cundall & Strack ([Cundall et Strack, 1979]). Du fait de leur géométrie, ces modèles présentent une grande efficacité d'un point de vue numérique, notamment pour la gestion du contact.

Les "lattice models" ([Schlangen et Garboczi, 1997], [Van Mier et al., 2002], [Cusatis et al., 2003]) représentent le matériau par un assemblage de poutres pouvant rompre. La représentation par un treillis de poutre est là aussi un avantage du point de vue numérique. Cependant, les limites sont la gestion de la masse pour les problèmes en dynamique, et la prise en compte de la refermeture des fissures, via la gestion du contact, pour les sollicitations complexes et alternées.

Les modèles particulaires à base de polyèdres ([Kun et Herrmann, 1996], [D'Addetta, 2004], [Bolander Jr et Hong, 2002], [Delaplace et Desmorat, 2007]) se basent sur une discrétisation du milieu par un pavage, généralement de Voronoï. La facilité de génération du maillage, la gestion de l'hétérogénéité et la couverture complète du milieu sont les principaux avantages de ces méthodes. Le fait d'utiliser des polyèdres vient complexifier la description des particules, il faut conserver en mémoire le centre de la particule mais également la position des sommets de la particule, et cela tout au long du calcul. Il faut également une recherche pour le contact, à savoir quels sommets et segments de polyèdres sont en contact et calculer la direction de l'effort de contact.

Le choix a été fait d'utiliser un modèle appartenant à la dernière catégorie.

1.1 Le modèle par éléments discrets utilisé - DEAP

Le maillage repose sur une représentation du matériau par un assemblage de particules indéformables, obtenu par un pavage de Voronoï de la surface à mailler. L'obtention de ce pavage peut être résumé de la manière suivante :

— génération d'une grille à mailles carrées sur la surface
— génération aléatoire des points à l'intérieur de chaque maille
— calcul de la triangulation de Delaunay et assemblage des points
— calcul des polygones de Voronoï, dual de la triangulation de Delaunay

La densité et la forme du maillage sont déterminées pendant les deux premières étapes. La densité des mailles et de la grille détermine le nombre de particules servant au maillage. L'aléa du maillage est contrôlé par la génération aléatoire des points dans chaque maille. Le principal avantage de ce type de maillage est que pour un nombre suffisant de particules, on obtient un milieu élastique isotrope caractérisé par deux constantes d'élasticité.

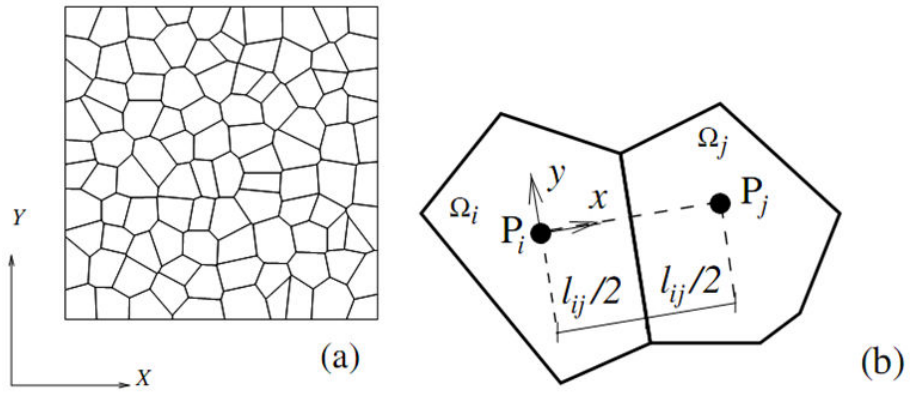


FIGURE 2.2 – Représentation d'un pavage de Voronoï (a) et de deux cellules de Voronoï voisines (b)

1.1.1 Forces de cohésion

Le pavage de Voronoï attribue à chaque particule un certain nombre de voisins. Les matériaux considérés impliquent la présence initiale de forces de cohésion entre deux particules voisines. Le choix qui a été fait pour cette modélisation est de représenter ces efforts de cohésion par des poutres reliant le centre des particules.

À chaque particule i sont associés trois degrés de liberté, notés par la suite (u_i,v_i,θ_i), o u_i est le déplacement suivant l'axe horizontal Ox, v_i est le déplacement suivant l'axe vertical Oy, θ_i est la rotation autour de l'axe Oz.

Pour une liaison entre deux particules i et j, on définit une poutre dont la matrice de raideur K_{ij} est :

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{E_p A_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & -\frac{E_p A_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^3} & 6\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^2} & 0 & -12\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^3} & -6\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^2} \\ 0 & 6\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^2} & 4\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}} & 0 & -6\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^2} & -2\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}} \\ -\frac{E_p A_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & \frac{E_p A_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^3} & -6\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^2} & 0 & 12\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^3} & 6\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^2} \\ 0 & -6\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^2} & -4\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 6\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}^2} & 2\frac{E_p I_{ij}}{l_{ij}} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

où l_{ij} est la longueur de la poutre, A_{ij} sa section et I_{ij} le moment quadratique de la poutre suivant l'axe Oz. Il est à noter que le module d'Young des poutres et le terme $64\pi I_{ij}/(A_{ij}^2)$ sont communs à toutes les poutres. Ils sont identifiés afin de retrouver le comportement élastique du matériau recherché.

Les poutres géométriquement linéaires sont suffisantes pour la plupart des problèmes traités. La cinématique de poutres pouvant gérer les grandes déformations permet d'aborder des problèmes plus complexes, comme les phénomènes d'écaillage (un agrégat de particules, relié par des poutres, se détache de la structure principale et subit de grandes rotations) ou les phénomènes de grande rotation en pointe de macro-fissure (la structure principale se casse en deux parties, suite à la propagation d'une macro-fissure).

1.1.2 Gestion du contact

Dès lors que la liaison cohésive entre deux particules est rompue, deux comportements non-linéaires sont introduits, le contact et la friction. La non-linéarité introduite par le contact est liée à deux sources. Premièrement, du fait du caractère unilatéral du contact, l'effort de contact passe d'une valeur nulle à une valeur finie, lorsqu'un recouvrement est détecté entre deux particules déconnectées. Deuxièmement, il est impossible de relier linéairement l'effort de contact et les déplacements respectifs des particules en contact, car les particules sont polygonales. Il est donc nécessaire de permettre le recouvrement

afin de prendre en compte les déformations induites par le contact. Les relations de comportement de contact, comme celles de cohésion, sont fondées sur la théorie des poutres.

Le principe est le suivant. On utilise un algorithme de détection de contact de type [O'Rourke et al., 1982] . On cherche les deux points d'intersection des deux particules et le polygone de recouvrement formé par la superposition des particules. On vient ensuite définir un modèle d'une poutre d'Euler-Bernouilli de la forme ES/L, où L est la distance entre les deux centres des particules en contact et S la section de la poutre étant prise comme la largeur du segment d'intersection (P1-P2 sur la Fig. 2.3) multiplié par une largeur unitaire. La direction de l'effort de contact est donnée par la normale au segment d'intersection. Le point d'application de l'effort est le centre d'inertie du polygone d'intersection (en gris sur le schéma). On vient ensuite reporter cet effort aux centres des particules en contact.

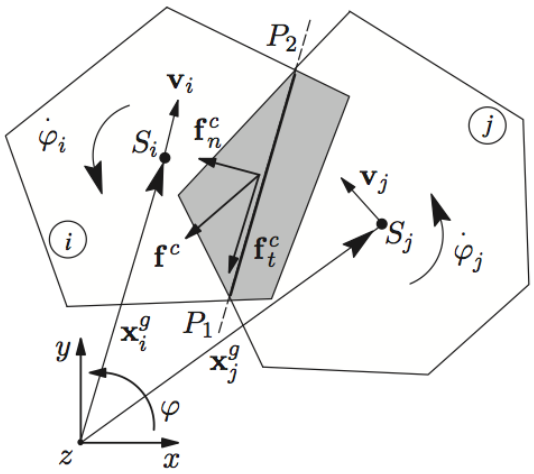


FIGURE 2.3 – Représentation de la gestion du contact dans le modèle discret

Considérons deux particules i et j en contact, S_r leur surface de recouvrement, L_c la largeur de la zone de contact et l_c la longueur caractéristique à la longueur de la poutre reliant i à j. Les actions de j sur i s'écrivent :

$$F_{c,ij} = \begin{cases} F_{N,ij} = -\frac{ES_{r,ij}}{l_{c,ij}} \\ F_{T,ij} = min\left(\frac{EI_{ij}}{l_{c,ij}^3}[(u_{c,ij} - u_{c,ji} - \delta u_{s,ij}].t_{ij}, \mu F_{N,ij}\right) \\ M_{Z,ij} = O_iC \wedge (F_{N,ij}.n_{ij} + F_{T,ij}.t_{ij}) \end{cases} \tag{2.2}$$

où F_N, F_T et M_Z sont les efforts normaux et tangents, et le moment de contact. u_c et δu_s sont respectivement les déplacements cumulés tangents et le glissement relatif tangent entre les deux particules depuis l'apparition du contact.

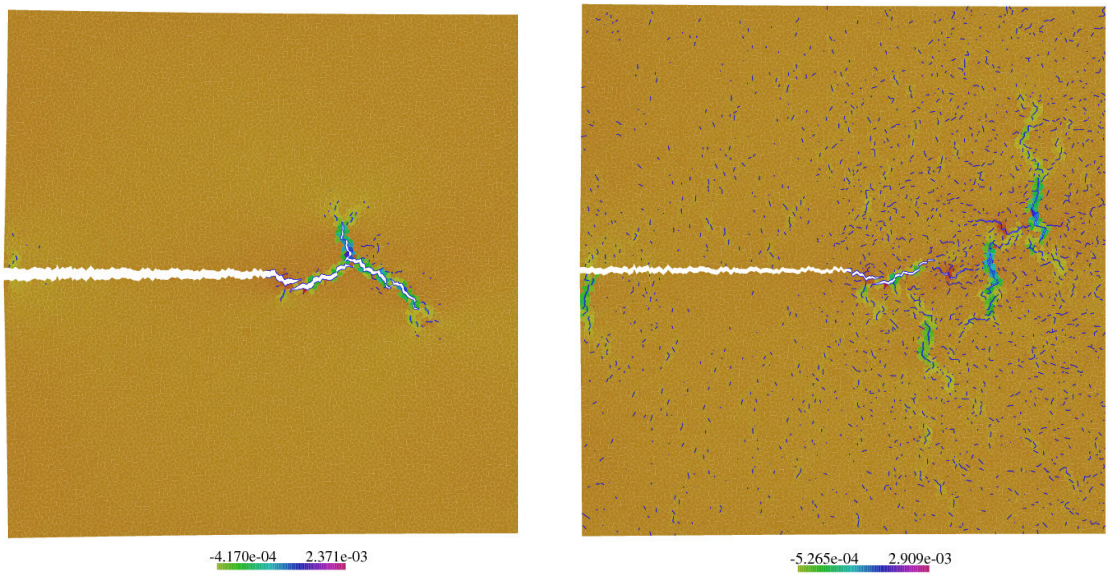
1.1.3 Critère de rupture

Le comportement non linéaire global du matériau est obtenu en considérant une réponse élastique fragile locale pour les poutres et une distribution statistique des seuils de rupture qui permet d'obtenir une rupture distribuée. Les liaisons entre particules étant modélisées par des poutres, on utilise, pour une poutre ij, le critère de rupture suivant :

$$P_{ij} = \left(\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{ij}^{cr}}\right)^2 + \left(\frac{|\psi_i - \psi_j|}{\psi_{ij}^{cr}}\right)^2 \geq 1$$

où ε_{ij} est la déformée de la poutre, ψ_i la rotation de la particule i et ψ_j la rotation de la particule j. Le seuil d'élongation ε_{ij}^{cr} et le seuil de rotation ψ_{ij}^{cr} sont deux variables aléatoires. L'élongation et la flexion sont les deux mécanismes contribuant à la rupture des poutres.

Les distributions des seuils de rupture ont un effet très important sur la distribution de l'endommagement, représenté ici par les microfissures. Si l'on considère deux distributions avec le même écart type, on obtient un endommagement localisé avec quelques microfissures entourant la fissure principale (Fig. 2.4a). Tandis qu'une distribution uniforme fournit un endommagement fortement diffus (Fig. 2.4a).



(a) **(b)**

FIGURE 2.4 – Déformations obtenues en mode I pour une distribution gaussienne de seuil de rupture des liaisons (a) et suivant une loi uniforme (b). Les liaisons brisées sont représentées en bleu.

Le choix de la distribution des seuils de rupture et de ses caractéristiques (écart-type,

variance, valeur minimale et valeur maximale) entraine une réponse globale et un endommagement particulier.

1.1.4 Algorithme de résolution

L'analyse du problème est effectuée en statique, le problème consiste donc en la résolution du système d'équations :

$$\mathbf{K}\underline{u} = \underline{f} \tag{2.3}$$

Un algorithme de prédiction élastique ([Rots et al., 2006]) est utilisé pour suivre le trajet de chargement. Le chargement désiré est appliqué, puis la poutre pour laquelle le critère de rupture est atteint en premier est recherchée puis retirée. Cette recherche est répétée tant qu'un critère de rupture est atteint.

Ce choix est justifiable dans le cas d'une propagation stable de fissure. L'algorithme s'écrit :

Itération k

1. application d'un chargement élastique f^{el}
2. calcul de u^{el} par une méthode de résolution itérative
3. calcul de α_{min} tel que :

$$\mathbf{K}^{k+1} = \mathbf{K}^{k} - \mathbf{L}_{ij}^{T}\mathbf{K}_{ij}\mathbf{L}_{ij}$$

4. stockage du couple $(\alpha_{min}\mathbf{u}^{el}, \alpha_{min}\mathbf{f}^{el})$
5. modification de la matrice de raideur par

$$\mathbf{K}^{k+1} = \mathbf{K}^{k} - \mathbf{L}_{ij}^{T}\mathbf{K}_{ij}\mathbf{L}_{ij}$$

   où $\mathbf{L}_{ij}$ est la matrice de connectivité de l'élément ij.

6. Fin itération k

1.1.5 Conditions aux limites et chargement

La simulation est pilotée en facteur d'intensité des contraintes nominales (K^{∞}). En effet, le modèle par éléments discrets nous permet de piloter le chargement soit en force, soit en déplacement. Le choix retenu est d'imposer le champ de déplacement issu de simulations par éléments finis en mécanique élastique linéaire de la rupture sur des frontières du modèle discret (Fig. 2.5).

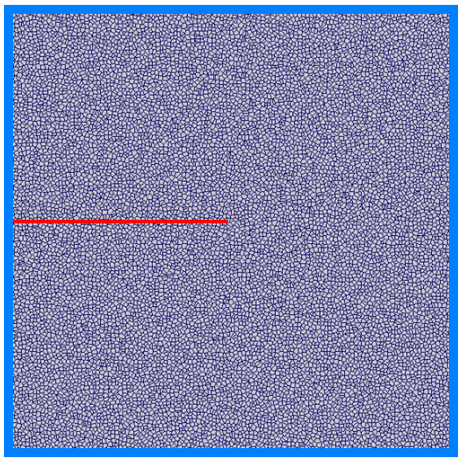
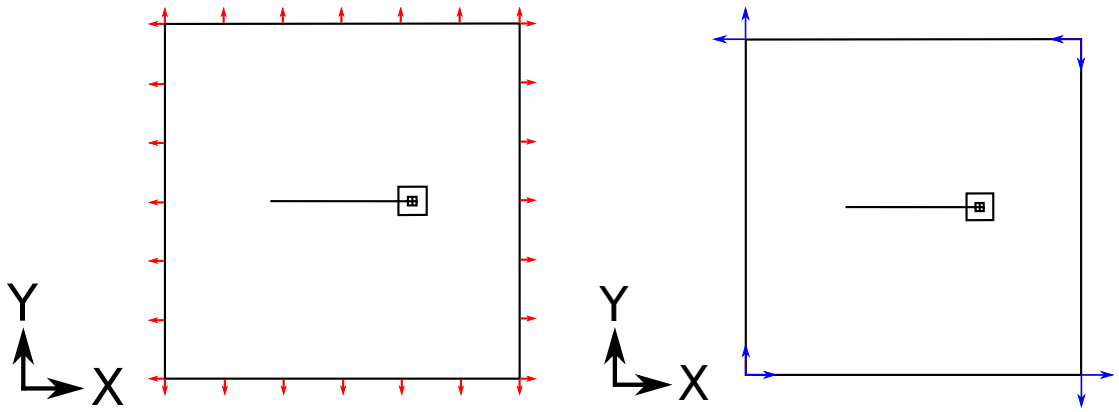


FIGURE 2.5 – Maillage avec conditions aux limites en déplacements (en bleu) et plan de la fissure (en rouge)

Ces simulations correspondent aux réponses d'une structure où se trouve une fissure en son centre de longueur $a = 100mm$. La zone d'intérêt est un carré centré sur la pointe de la fissure de longueur 12 mm. Le champ de déplacement est ensuite extrait de la zone d'intérêt pour être ensuite interpolé au centre des particules formant le bord du modèle discret. Les conditions de chargement des calculs éléments finis correspondent à des sollicitations de mode I (Fig. 2.6a) ou de mode II (Fig. 2.6b).



(a) mode I **(b)** mode II

FIGURE 2.6 – Conditions aux limites pour les simulations par éléments finis pour obtenir une sollicitation de mode I (a) et de mode II (b)

Pour simuler la fissure, toutes les liaisons entre cellules de Voronoï appartenant au plan de fissure sont enlevées avant le calcul. Le maillage et les conditions aux limites sont représentés sur la figure Fig. 2.5.

2 Approche condensée

A l'aide d'une méthode de partitionnement des champs de vitesse en pointe de fissure couplée à une méthode d'analyse en composantes principales (POD), on condense l'évolution du champ cinématique autour de l'extrémité de la fissure, soumise à un chargement complexe, en une évolution d'un petit nombre de degrés de liberté.

Au lieu d'utiliser classiquement les champs de la Mécanique Elastique Linéaire de la Rupture pour représenter le champ de vitesse, des champs complémentaires viennent enrichir la cinématique en pointe de fissure pour prendre en compte la micro-fissuration et l'endommagement diffus. Comme dans la MELR, ces champs sont exprimés comme le produit d'un facteur d'intensité et d'une fonction de forme. Dans des conditions de chargement en mode mixte I+II, le comportement en pointe de fissure est ainsi caractérisé par 4 facteurs d'intensité, un linéaire et un non-linéaire pour chaque mode. Le modèle par éléments discrets est utilisé pour simuler les évolutions du champ de vitesse. Elles sont ensuite post-traitées afin de générer les évolutions de ces facteurs d'intensité pour différentes conditions de chargements.

2.1 Cinématique du problème

La fissure est modélisée localement par un plan et un front, qui rendent possible la définition d'un système de coordonnées locales R_T attaché au plan et au front de la fissure. Le champ de vitesse au point P dans la région en pointe de fissure peut alors être calculé de la façon suivante :

$$v(P,t)_{R_0} = \underbrace{v(T,t)_{R_0} + \omega(R_T/R_0) \wedge \underline{TP}}_{propagation} + \underbrace{v(P,t)_{R_T}}_{comportement} \tag{2.4}$$

où R_0 est le repère du modèle. Dans cette équation, la première partie découle de la croissance de la fissure et de sa déviation, tandis que la seconde partie $v(P,t)_{R_T}$ est le champ de vitesse relatif au repère attaché à la pointe de la fissure T. Pour alléger l'écriture, $v(P,t)_{R_T}$ sera noté $v(P,t)$ par la suite.

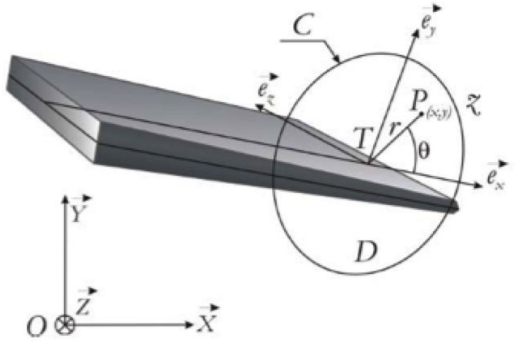


FIGURE 2.7 – Repère attaché à la pointe de la fissure

Le mode I étant symétrique et le mode II antisymétrique respectivement au plan de fissuration et au front de fissure, $v(P,t)$ est partitionné suivant des composantes en mode I et en mode II :

$$\underline{v}(P,t)|_T = \underline{v}_I(P,t) + \underline{v}_{II}(P,t) \tag{2.5}$$

où les composantes de mode I et II sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} v_{Ix}(x,y) &= \frac{v_x(x,y) + v_x(x,-y)}{2} \qquad & v_{IIx}(x,y) &= \frac{v_x(x,y) - v_x(x,-y)}{2} \\ v_{Iy}(x,y) &= \frac{v_y(x,y) - v_y(x,-y)}{2} \qquad & v_{IIy}(x,y) &= \frac{v_y(x,y) + v_y(x,-y)}{2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ceci suppose que l'échelle de représentation est telle que la fissure puisse être localement représentée comme plane à front droit.

Soit un point $\underline{x}(x,y)$ dans un système de coordonnées local attaché au front d'une fissure. Nous cherchons à déterminer une forme simplifiée du déplacement de ce point connaissant le chargement appliqué à la fissure. L'objectif est de réduire le nombre de degrés de liberté du problème afin que l'outil de simulation final conduise à des temps de calcul réalistes vis-à-vis du problème industriel posé.

En mécanique élastique linéaire de la rupture, on obtient les champs de déplacement dans la région à l'extrémité de la fissure en effectuant un développement asymptotique vis-à-vis de la distance r à cette extrémité. Le premier terme de ce développement s'exprime comme le produit du facteur d'intensité des contraintes, variable au cours du temps, et d'un champ de référence qui ne dépend que des coordonnées du point considéré par rapport à l'extrémité de la fissure. Ainsi, au premier ordre, seul le facteur d'intensité des contraintes K_I est variable au cours du temps. Les critères de fissuration pourront donc être écrits en fonction de K_I qui devient le seul degré de liberté du problème.

On souhaite étendre cette démarche au cas de la fissuration quasi-fragile. Pour cela on cherche à représenter le champ de déplacement dans la région de l'extrémité de la fissure comme suit :

$$u(\underline{x},t) = \sum_j a_j(t) u_j(\underline{x}) \tag{2.7}$$

où, $u_j(\underline{x})$ est une base de champs spatiaux, tandis que $a_j(t)$ sont les paramètres temporels du problème utilisés comme facteurs d'intensité des champs $u_j(\underline{x})$. Ces paramètres temporels seront les degrés de liberté du problème et pourront ensuite être employés dans un critère de fissuration.

2.2 Décomposition du champ de vitesse

La transformée de Karhunen-Loeve ([Karhunen, 1947]) est une méthode employée pour la construction d'une décomposition orthogonale d'une quantité qui varie à la fois

dans le temps et l'espace. Le principe est d'extraire de ce signal les éléments dont l'évolution dans le temps est spatialement corrélée. Cette méthode est très efficace et est utilisée dans un large domaine d'application. On considère le déplacement U d'un ensemble de points N pour un nombre k de pas de temps. La matrice de données spatio-temporelles V et la matrice d'auto-corrélation spatiale C sont construites de la manière suivante :

$$V = \begin{bmatrix} U(n=1,t=1) & \cdots & U(n=1,t=k) \\ \vdots & & \vdots \\ U(n=N,t=1) & \cdots & U(n=N,t=k) \end{bmatrix}, \quad C = V.V^T \tag{2.8}$$

Les vecteurs propres de la matrice C, normalisés et notés F_k, permettent de construire une base orthogonale de champs spatiaux. Ces vecteurs propres sont rangés dans l'ordre décroissant de leur valeur propre associée. La matrice spatio-temporelle V est projetée sur cette base pour déterminer un ensemble de coefficients temporels A_k. Ceci permet de construire la décomposition orthogonale de Karhunen-Loeve de V :

$$A_k = V^T.F_k \quad \text{et} \quad V = \sum_{k=1}^{N} A_k F_k \tag{2.9}$$

Cette décomposition est exacte, mais le but de cette décomposition est d'obtenir une approximation $\tilde{V}$ de V. Ce qui peut être fait en conservant uniquement les h premiers modes de la décomposition. La solution approchée $\tilde{V}$ et son erreur sont alors calculées de la façon suivante :

$$\tilde{V} = \sum_{k=1}^{h} A_k F_k \quad \text{et} \quad erreur = \sqrt{\frac{\sum_{i,k}(V_{ik} - \tilde{V}_{ik})^2}{\sum_{i,k}(V_{ik})^2}} \tag{2.10}$$

Cette méthode peut aussi être appliquée à des champs et permettre ainsi d'approcher l'évolution d'un champ par sa décomposition orthogonale propre : $\underline{u}(\underline{x},t) = a(t)\underline{f}(\underline{x})$. Les vecteurs propres sont orthogonaux, ce qui, compte tenu du fait que C est la matrice d'auto-corrélation du mouvement, correspond au fait que les F_k sont une base de mouvement dont le produit de corrélation spatiale est nul, ou **cinématiquement indépendants**.

2.2.1 Reconstruction des vecteurs propres spatiaux à partir des vecteurs propres temporels et des valeurs propres par la décomposition en valeurs singulières

Pour les problèmes à très grand nombre de degrés de liberté spatiaux et à nombre de pas de temps faible, il peut être intéressant d'utiliser la matrice d'auto-corrélation temporelle pour reconstruire les vecteurs propres spatiaux. Dans le cas où l'on a un très grand nombre de degré de liberté spatiaux et un nombre plus faible de pas de temps, il est beaucoup plus rapide de calculer les vecteurs propres temporels et les valeurs propres pour ensuite reconstruire les vecteurs propres spatiaux que de les calculer de manière directe. En effet, les matrices d'auto-corrélation spatiale et d'auto-corrélation temporelle possèdent les mêmes valeurs propres. Il est donc possible de reconstruire les vecteurs

propres spatiaux associés aux valeurs propres.

Soit V une matrice $m \times n$ dont les composants sont réels ou complexes. Alors il existe une factorisation de la forme :

$$V = B\Sigma D^T \tag{2.11}$$

avec B une matrice unitaire de $m \times m$, Σ une matrice $m \times n$, dont les termes diagonaux sont des réels positifs ou nuls et tous les autres nuls, et D^T est la matrice transposée de D, qui est une matrice unitaire de $n \times n$.

Les matrices B et D contiennent chacune un ensemble de vecteurs de base orthonormée pour V. La matrice Σ contient les valeurs singulières de V.

Considérons maintenant, que la matrice V est notre matrice du mouvement. On peut alors exprimer la matrice d'auto-corrélation temporelle C et la matrice d'auto-corrélation spatiale M comme suit :

$$C = VV^T = (B\Sigma D^T)(B\Sigma D^T)^T = B(\Sigma\Sigma^T)B^T = B\Sigma^2 B^T \tag{2.12}$$

$$M = V^T V = (B\Sigma D^T)^T(B\Sigma D^T) = D(\Sigma^T\Sigma)D^T = D\Sigma^2 D^T \tag{2.13}$$

Le côté droit de ces relations décrit la décomposition en valeurs propres du côté gauche. Ainsi, le carré du module de chaque valeur singulière non-nulle de M est égal au module de la valeur propre non-nulle correspondante de $V^T V$ et de VV^T. En outre, les colonnes de B (vecteurs singuliers à gauche) sont les vecteurs propres pour VV^T, et les colonnes de D (vecteurs singuliers à droite) sont les vecteurs propres de $V^T V$.

On considère par la suite que la matrice B est composée de l'ensemble des vecteurs propres spatiaux ψ, stockés de la façon suivante :

$$B = \{\psi_1, \ldots, \psi_T\} \tag{2.14}$$

et que la matrice D contient l'ensemble des vecteurs propres temporels φ :

$$D = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_T\} \tag{2.15}$$

Il est ainsi possible de calculer le $k^{\text{ième}}$ vecteur propre spatial de la matrice d'auto-corrélation spatiale D à partir du $k^{\text{ième}}$ vecteur propre de la matrice d'auto-corrélation temporelle C, de la façon suivante :

$$\psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{i=1}^{T} \varphi_k(i).V_i \tag{2.16}$$

où V_i correspond à la i-ème colonne de la matrice de corrélation spatiotemporelle.

2.3 Calcul de la base de champ de référence

L'identification des champs de référence complémentaires a lieu en plusieurs étapes. Tout d'abord, on effectue un calcul élastique par mode de fissuration avec le modèle par éléments discrets, dans lequel toutes les liaisons entre particules sont considérées comme incassables. Le champ de vitesse obtenu est post-traité à partir des considérations de symétrie et d'antisymétrie du champ de déplacement par rapport au plan et au front de fissuration. On obtient ainsi une base de champs de référence élastiques sans endommagement pour le mode I et le mode II, noté u_e^I et u_e^{II}.

La deuxième étape est d'approcher le champ de vitesse en pointe de fissure par une somme de produits entre des fonctions de l'espace et des facteurs d'intensité dépendants du temps. Pour chaque mode de rupture, une fonction spatiale élastique linéaire est introduite en accord avec le cadre de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (MELR). Des fonctions spatiales supplémentaires sont construites afin de porter le comportement non-linéaire dans la *Fracture Process Zone* induite par la présence de micro-fissures.

Pour cette étape, un second calcul est fait avec le modèle par éléments discrets, dans lequel on permet la rupture des liaisons. On applique à présent une rampe de chargement à vitesse constante. On commence par projeter le champ élastique de référence sur le champ de vitesse pour obtenir le facteur d'intensité des contraintes $\tilde{K}_I$ (réciproquement $\tilde{K}_{II}$). On utilise ensuite le résidu de cette projection v_{res}^I et v_{res}^{II} pour tous les incréments de temps. Les résidus de la projection des champs élastiques sont définis de la façon suivante :

$$v_{res}^I(\underline{x},t) = v^I(\underline{x},t) - \dot{\tilde{K}}_I(t).u_e^I(\underline{x}) \tag{2.17}$$

$$v_{res}^{II}(\underline{x},t) = v^{II}(\underline{x},t) - \dot{\tilde{K}}_{II}(t).u_e^{II}(\underline{x}) \tag{2.18}$$

On stocke ensuite ces résultats sous forme matricielle, puis on vient extraire le vecteur propre spatial associé à la plus grande valeur propre. Ce vecteur propre spatial correspond au champ de déplacement ayant le plus grand poids dans le résidu de la projection du champ de vitesse sur les champs élastiques de référence .

Cette approche se base sur le cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture. La solution élastique est choisie pour être la première base de champs de référence. Pour cela, un calcul élastique par mode de fissuration est effectué en imposant un déplacement sur le bord du domaine correspondant à un facteur d'intensité des contraintes nominal égal à $1MPa\sqrt{m}$.

De cette manière, en projetant le champ de vitesse sur la base de champs élastiques de référence, on obtient le facteur d'intensité des contraintes appliqué. Une fois la base de champs élastiques construite, on effectue des calculs par la méthode des éléments discrets en autorisant la rupture des liaisons entre particules voisines. Un chargement monotone est appliqué par mode de fissuration. Pour chaque mode, le résidu de cette projection

est ensuite traité pour en extraire la partie principale portant le caractère "non-linéaire" localisé de la zone d'élaboration des micro-fissures.

Le principe du calcul de la base de champs de référence est résumé dans la figure 2.8.

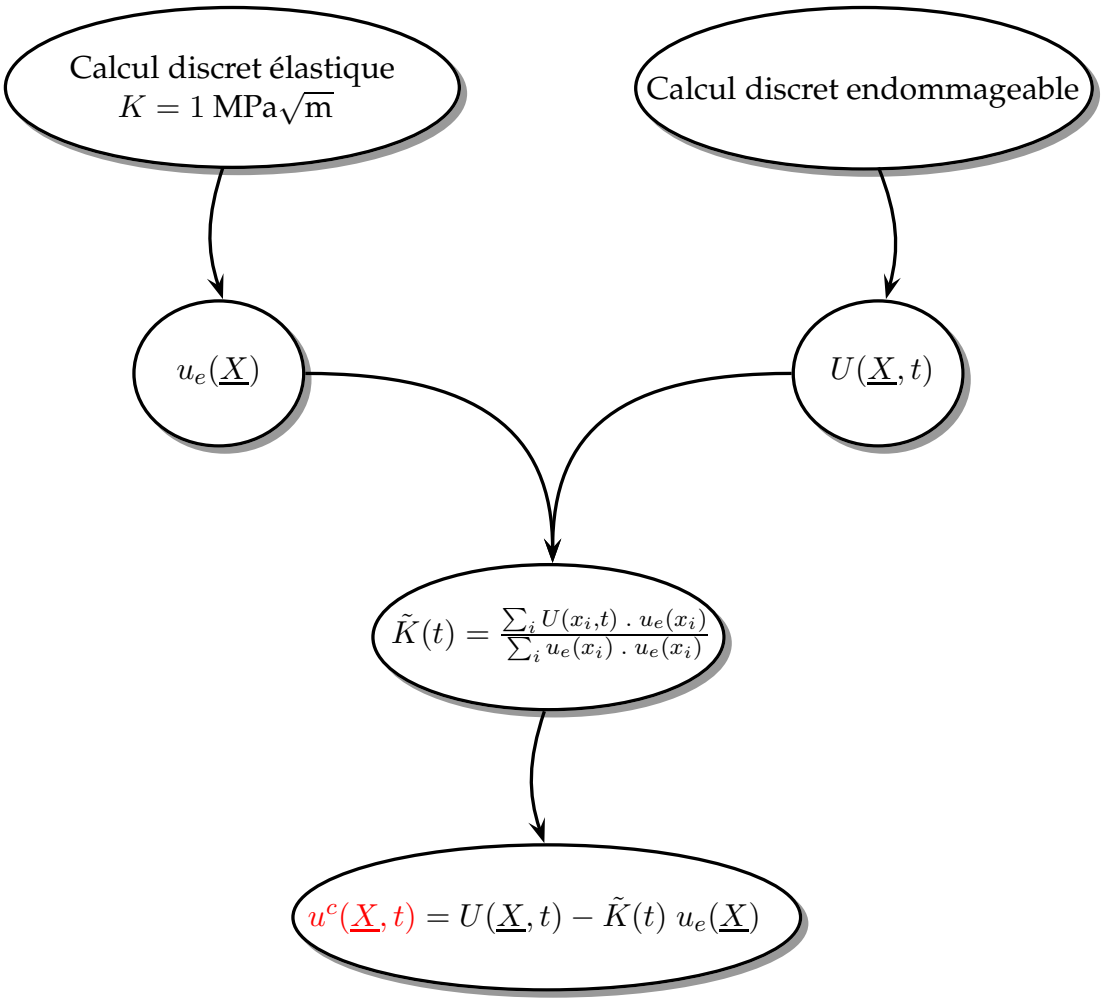


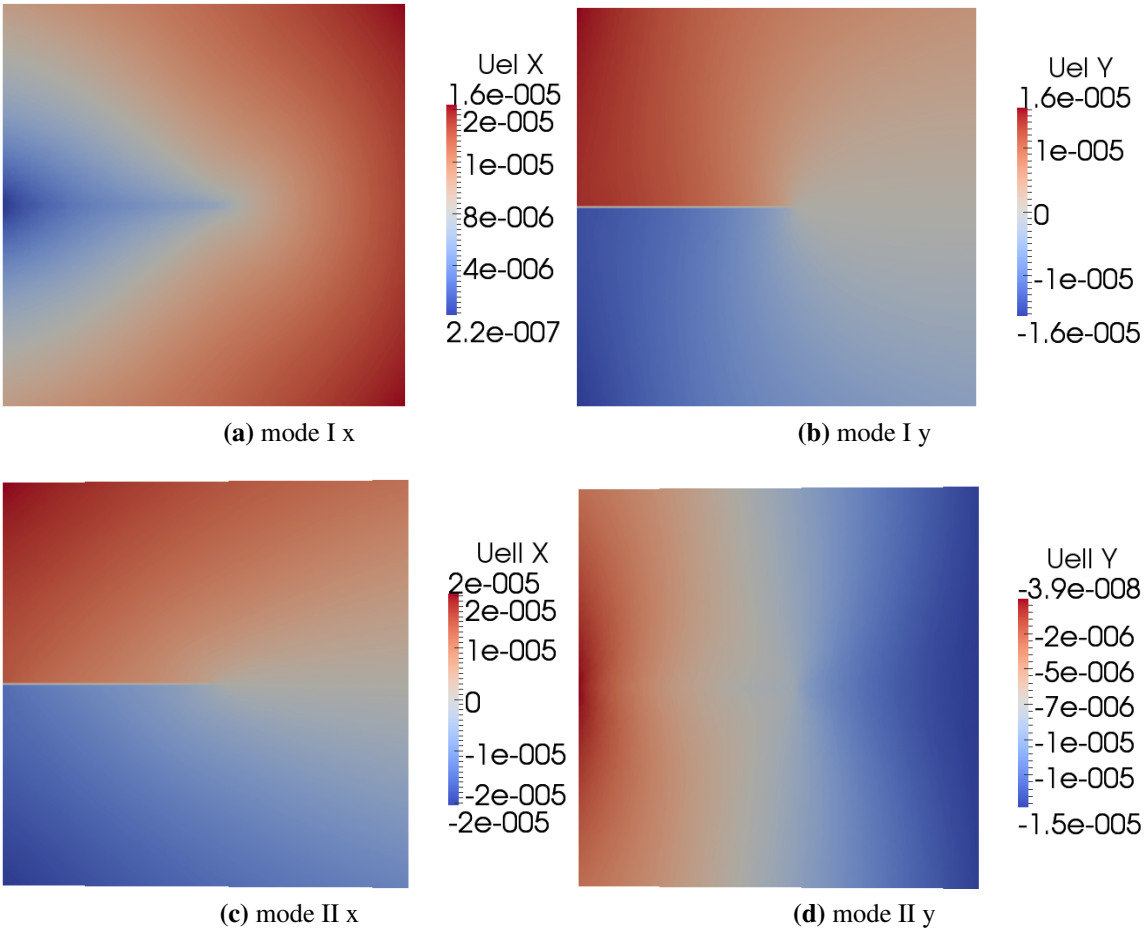
FIGURE 2.8 – Schéma de la méthode de calcul du champ complémentaire

2.3.1 Champs de référence élastiques

Pour obtenir la base de champs de référence élastiques, on utilise le modèle par éléments discrets avec simplement un comportement poutre entre deux particules voisines. Deux calculs sont utilisés pour construire cette base, un premier correspondant à une sollicitation de mode I avec un facteur d'intensité des contraintes K_I valant $1MPa\sqrt{m}$, et un second correspondant à une sollicitation de mode II avec un facteur d'intensité des contraintes K_{II} valant $1MPa\sqrt{m}$.

Le champ de déplacement obtenu est ensuite partitionné suivant l'équation Eq. 2.6 et est considéré comme le champ élastique de référence du mode de sollicitation.

Les champs obtenus sont présentés sur la figure 2.9.



(a) mode I x **(b)** mode I y

(c) mode II x **(d)** mode II y

FIGURE 2.9 – Champs élastiques en mode I et II suivant les composantes x et y obtenus par la méthode des éléments discrets

On peut ensuite vérifier que la forme radiale du champs obéit bien au cadre de la mécanique élastique linéaire de la rupture, c'est-à-dire en étant de la forme racine de r.

Pour cela, on procède à une décomposition du champ de déplacement en un produit d'un champ scalaire $f(r)$ dépendant uniquement de la distance à la pointe de la fissure et d'un champ vectoriel $\underline{g}(\theta)$ dépendant uniquement de la position angulaire par rapport au front de la fissure.

Le champ de référence $\underline{u_e}$ est alors décomposé de la façon suivante :

$$\underline{u_e}(r,\theta) = f(r).\underline{g}(\theta) \tag{2.19}$$

Pour obtenir les dépendances radiales et angulaires, on utilise la décomposition en composantes principales ou *POD*. Cet algorithme est également utilisé pour la décomposition du champ de vitesse en un produit de fonction dépendant uniquement du temps et d'une fonction dépendant uniquement de l'espace.

Les dépendances radiales des champs de référence élastiques sont présentées sur la figure 2.10. On observe que les dépendances radiales du mode I et du mode II suivent bien une forme racine.

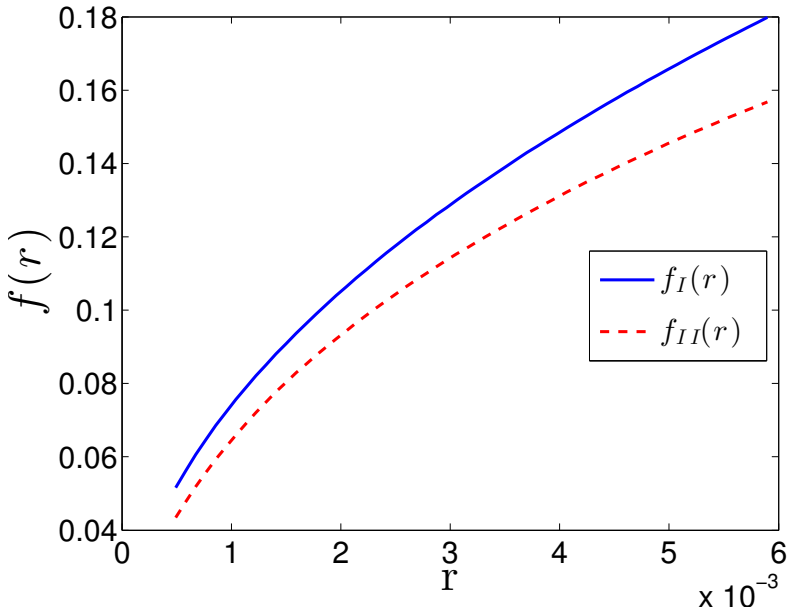


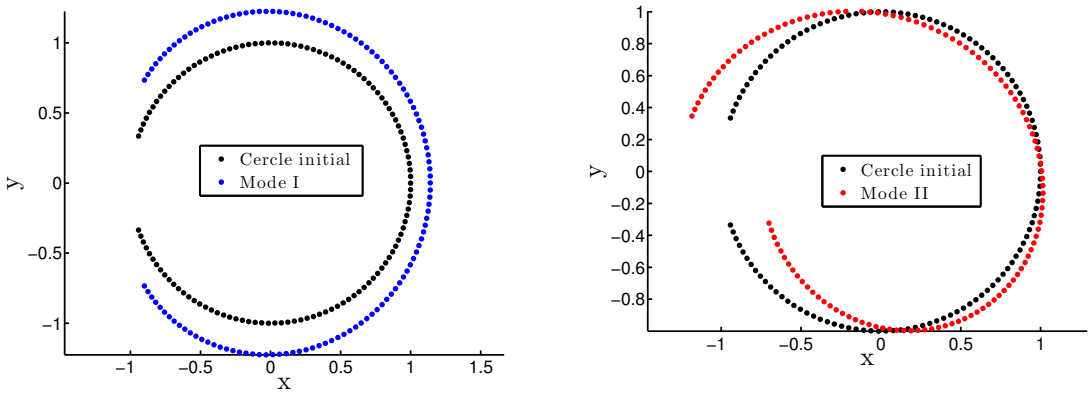
FIGURE 2.10 – Comparaison des dépendances radiales élastiques ($f(r)$) en mode I (bleu) et en mode II (rouge)

Afin de visualiser la dépendance angulaire des champs de référence élastiques. On considère un cercle initial, ici tracé en noir, puis on considère le cercle se déformer par la dépendance angulaire $\underline{g}(\theta)$. On définit le cercle initial, suivant :

$$x = 1cos(\theta) \tag{2.20}$$
$$y = 1sin(\theta) \tag{2.21}$$

et le cercle déformé par un facteur d'amplification α de la façon suivante :

$$x = (1 + \alpha g_x(\theta))cos(\theta) \tag{2.22}$$
$$y = (1 + \alpha g_y(\theta))sin(\theta) \tag{2.23}$$



(a) mode I **(b)** mode II

FIGURE 2.11 – Déformation d'un cercle de référence par le champ élastique en mode I (a) et en mode II (b)

La décomposition du champ élastique en r et en θ montre que la *POD* peut être utilisée pour caractériser des champs spatiaux.

2.3.2 Champs complémentaires numériques en mode I et II

Pour l'obtention des deux champs complémentaires, le modèle par élément discret est soumis à des chargements de mode I ou de mode II. Les connexions entre particules sont désormais autorisées à se rompre. La solution $v(P,t)$ d'un chargement monotone calculée en utilisant la méthode des éléments discrets est post-traitée par un algorithme de décomposition orthogonale. Le champ de vitesse est une première fois projeté sur la base de champs de référence élastiques linéaires. La projection sur u_e^I (respectivement u_e^{II}) est appelé $\dot{\tilde{K}}_I$ (respectivement $\dot{\tilde{K}}_{II}$), elle peut varier légèrement du taux du facteur d'intensité des contraintes nominal $\dot{K}_I^\infty$ (resp. $\dot{K}_{II}^\infty$). En effet, deux types de contraintes peuvent engendrer des réponses "linéaires élastiques", le champ de contrainte macroscopique et le champ de contrainte résiduelle (interne), qui peut apparaître, par exemple, par l'effet d'écran des micro-fissures autour de la zone d'endommagement.

$$\dot{\tilde{K}}_I = \frac{\int_{r=0}^{r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} v(P,t).u_e^I(P) r dr d\theta}{\int_{r=0}^{r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} u_e^I(P).u_e^I(P) r dr d\theta} \tag{2.24}$$

Le résidu peut alors être calculé :

$$v^{res}(P,t) = v(P,t) - \dot{\tilde{K}}_I.u_e^I(P) \tag{2.25}$$

Le résidu peut être décomposé en une somme de produits de champs spatiaux, orthogonaux entre eux, et de leurs facteurs d'intensité en utilisant une transformée de Karhunen-

Loeve. On conserve uniquement le premier terme u_c^I de cette décomposition pour chaque mode.

$$v^{res}(P,t) = \sum_{m=1}^{m_0} \dot{a}_m(t).u^m(P) \tag{2.26}$$

On suppose que les champs de références élastiques u_e^I et u_e^{II}, ainsi que les deux champs additionnels u_c^I et u_c^{II} peuvent être utilisés pour représenter tout type de chargement. On approche alors le champ de vitesse par :

$$v(P,t) \approx \tilde{v}(P,t) = \dot{\tilde{K}}_I(t).u_e^I(P) + \dot{\tilde{K}}_{II}(t).u_e^{II}(P) + \dot{\rho}_I(t).u_c^I(P) + \dot{\rho}_{II}(t).u_c^{II}(P) \tag{2.27}$$

Cette hypothèse est valide seulement si la zone d'élaboration de l'endommagement est confinée à l'intérieur d'un volume élastique qui contrôle et limite le mouvement à l'intérieur de cette zone. La transformée de Karhunen-Loeve a été choisie, car elle utilise une matrice d'auto-corrélation du mouvement. En d'autres mots, elle partitionne le mouvement à l'intérieur de la zone de process en des mouvements non-corrélés ou indépendants. De ce fait, les facteurs d'intensité représentent les degrés de libertés indépendants de la zone d'élaboration de l'endommagement.

Avec cette hypothèse, l'évolution des quatre facteurs d'intensité $\left(\dot{\tilde{K}}_I, \dot{\tilde{K}}_{II}, \dot{\rho}_I, \dot{\rho}_{II}\right)$ des quatre champs de référence $\left(u_e^I(P)), u_e^{II}(P), u_c^I(P), u_c^{II}(P)\right)$ est une mesure condensée du comportement non-linéaire de la zone d'élaboration de l'endommagement. Afin de vérifier la qualité et la pertinence de cette hypothèse, l'erreur associée à l'approximation du champ de vitesse est calculée à chaque pas de temps.

On peut ainsi définir le champ de vitesse de manière réduite sur une base orthogonale de champs spatiaux de référence $\left(u_e^I, u_e^{II}, u_c^I, u_c^{II}\right)$, définis a priori pour un matériau donné. La projection sur cette base du champ de vitesse $v(P,t)$, est obtenue pour n'importe quelle séquence de chargement. Le taux de chargement du facteur d'intensité du mode I linéaire élastique, $\dot{\tilde{K}}_I$ (respectivement $\dot{\tilde{K}}_{II}$), est extrait d'après l'équation Eq. 2.24. Ce taux est donné en $MPa\sqrt{m}.s^{-1}$ et est très proche du taux du facteur d'intensité des contraintes nominales $\dot{K}_I$. On procède de la manière suivante pour extraire le taux du facteur d'intensité du champ complémentaire en mode I (respectivement en mode II) :

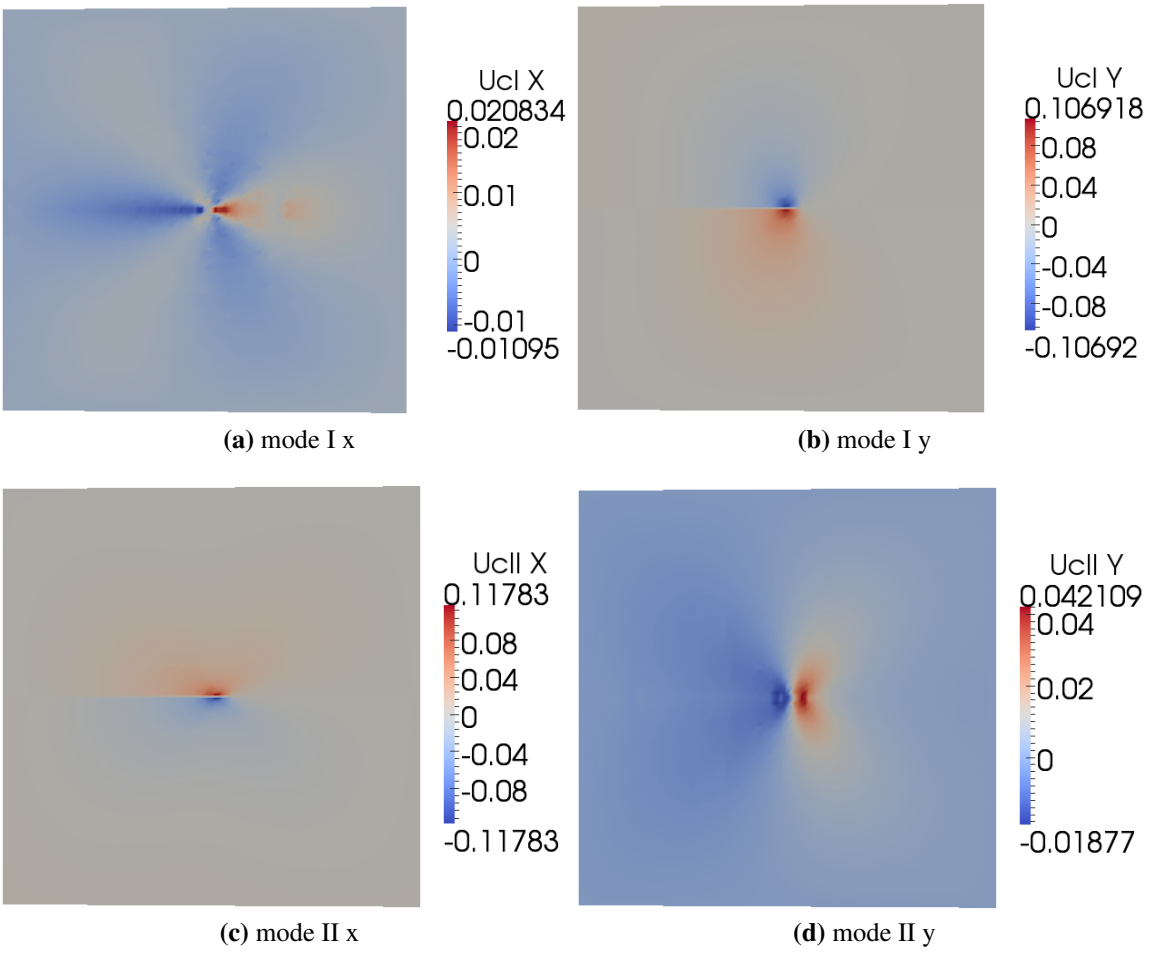
$$\dot{\rho_I} = \frac{\int_{r=0}^{r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} v(P,t).u_c^I(P) r dr d\theta}{\int_{r=0}^{r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} u_c^I(P).u_c^I(P) r dr d\theta} \tag{2.28}$$

$$\dot{\rho_{II}} = \frac{\int_{r=0}^{r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} v(P,t).u_c^{II}(P) r dr d\theta}{\int_{r=0}^{r_{max}} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} u_c^{II}(P).u_c^{II}(P) r dr d\theta} \tag{2.29}$$

Une fois que les quatre facteurs d'intensité sont extraits, on peut exprimer de manière approchée le champ de vitesse en pointe de fissure :

$$v(P,t) = \dot{\tilde{K}}_I(t).u_e^I(P) + \dot{\rho}_I(t).u_c^I(P) + \dot{\tilde{K}}_{II}(t).u_e^{II}(P) + \dot{\rho}_{II}(t).u_c^{II}(P) \tag{2.30}$$

On peut observer les champs complémentaires identifiés en mode I et en mode II.



(a) mode I x **(b)** mode I y

(c) mode II x **(d)** mode II y

FIGURE 2.12 – Champs complémentaires en mode I et II suivant les composantes x et y

On remarque que la composante en y du champ complémentaire u_c^I en mode I est fortement localisée en pointe de fissure, et que son amplitude décroît très fortement avec la distance de la pointe de la fissure. En mode II, on observe la même allure sur la composante x du champ complémentaire u_c^{II}.

2.3.3 Choix du fenêtrage temporel

Un champ complémentaire peut être obtenu pour n'importe quelle matrice de corrélation spatio-temporelle, mais il faut s'assurer que nos hypothèses, telles que la pointe de fissure fixe et une zone d'élaboration de l'endommagement confinée dans un milieu élastique, soient respectées. Une méthode simple consiste à calculer entre deux pas de temps la différence entre le champ complémentaire u_c calculé suivant la méthode de la POD et l'écart en déplacement u_{ie}^{1pt}où l'on vient retirer la partie élastique.

2.4 Caractérisation du champ complémentaire

Il est nécessaire de quantifier la discontinuité en déplacement aux lèvres de la fissure. On souhaite adimensionner le facteur d'intensité du champ complémentaire par la discontinuité en déplacement en $r = 0$. Pour cela, il faut pouvoir observer la dépendance radiale du champ complémentaire, séparément de la dépendance angulaire. Le champ complémentaire étant issu d'un problème auto-similaire, ces deux dépendances ne devraient pas être corrélées. On projette le champ complémentaire sur un maillage régulier dans un plan polaire, on aura ainsi le même nombre d'éléments pour un r donné quelque soit la position angulaire et inversement.

On commence par construire la matrice λ où l'on vient stocker sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} u_r(r_1,\theta_1) & \dots & u_r(r_1,\theta_n) \\ u_\theta(r_1,\theta_1) & \dots & u_\theta(r_1,\theta_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & u_r(r_i,\theta_j) & \vdots \\ \vdots & u_\theta(r_i,\theta_j) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_r(r_m,\theta_1) & \dots & u_r(r_m,\theta_n) \\ u_\theta(r_m,\theta_1) & \dots & u_\theta(r_m,\theta_n) \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Pour obtenir la dépendance radiale commune $f(r)$ au déplacement u_r et u_θ, on calcule le vecteur propre associé à la valeur propre la plus grande de la matrice d'auto-corrélation radiale $\Lambda^T\Lambda$. Pour obtenir les dépendances angulaires $g_r(\theta)$ et $g_\theta(\theta)$, on cherche le vecteur propre associé à la valeur propre la plus grande de la matrice d'auto-corrélation radiale $\Lambda\Lambda^T$. On obtient alors un vecteur comportant g_r et g_θ, l'organisation de ce vecteur dépendra du choix de stockage de la matrice Λ.

2.4.1 Adimensionnement du champ complémentaire u_c

Pour donner un sens plus physique aux facteurs d'intensité des champs complémentaires, le choix a été fait d'adimensionner les facteurs d'intensité par le déplacement des lèvres en $r = 0$. Ce facteur d'adimensionnement est calculé numériquement, à partir des champs complémentaires obtenus lors des simulations en mode I et en mode II. En mode I, il correspond à l'écartement Δy des lèvres de la fissure en $r = 0$, et à l'écartement des lèvres Δx pour le mode II en $r = 0$.

Etant donnée la configuration du système dans lequel on se place, qui a une géométrie auto-similaire, la solution est, elle aussi, auto-similaire. En effet, quelle que soit l'échelle à laquelle on se place pour représenter la fissure, la géométrie reste inchangée. Le champ complémentaire est donc lui aussi auto-similaire tant qu'il reste confiné dans une région élastique. On peut donc considérer que le champ complémentaire peut s'exprimer comme

le produit d'une fonction d'échelle et d'une distribution spatiale.

$$\underline{u_c}(r,\theta) = f(r).\underline{g}(\theta) \tag{2.32}$$

La discontinuité du champ complémentaire, sur $g_r(\theta)$ pour le mode I et sur $g_\theta(\theta)$ pour le mode II, doit être interpolée pour nous donner le facteur d'adimensionnement du champ complémentaire du mode de fissuration donné.

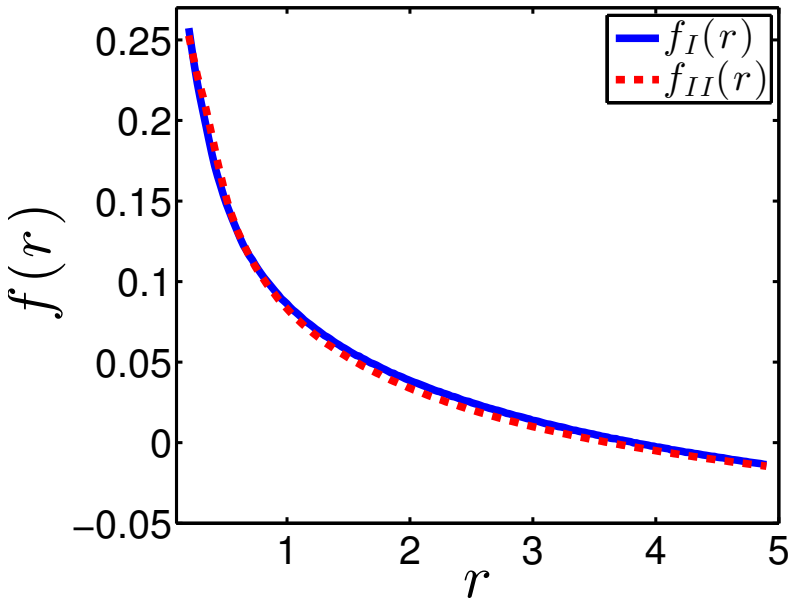
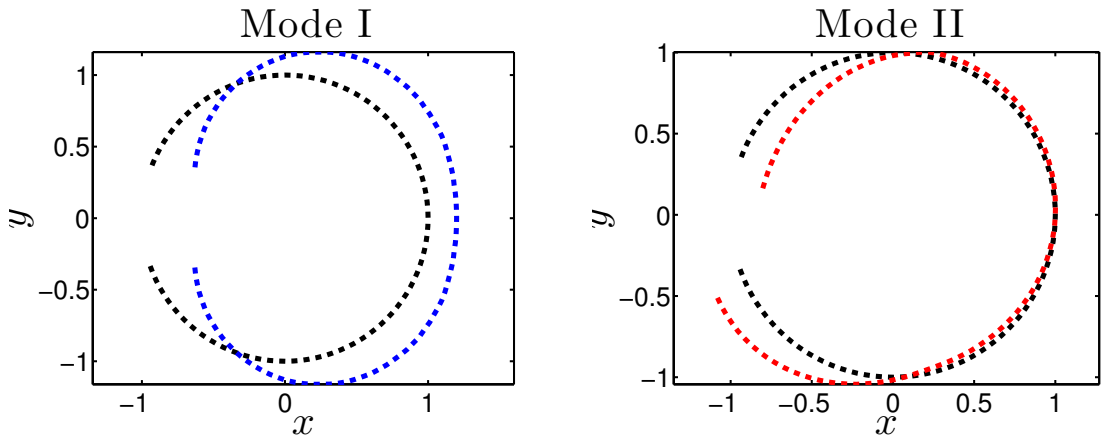


FIGURE 2.13 – Comparaison des dépendances radiales ($f(r)$) en mode I (bleu) et en mode II (rouge)



(a) mode I **(b)** mode II

FIGURE 2.14 – Déformation d'un cercle de référence par le champ complémentaire en mode I (a) et en mode II (b)

2.5 Evolution des facteurs d'intensité

On utilise le modèle par éléments discrets comme machine d'essai virtuel afin d'observer la réponse d'un milieu quasi-fragile lors de sollicitations de mode I, de mode II et de mode mixte, qu'elles soient proportionnelles ou non. Le facteur d'intensité du champ complémentaire représente l'ouverture en pointe de fissure. En mode I, ρ_I correspond au *Crack Tip Opening Displacement* (ou *CTOD*) et en mode II, ρ_{II} correspond au *Crack Tip Sliding Displacement* (*CTSD*).

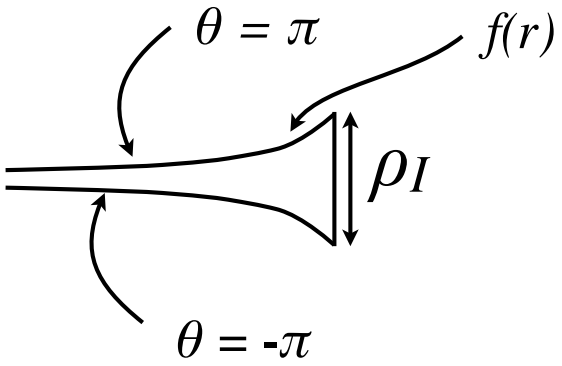
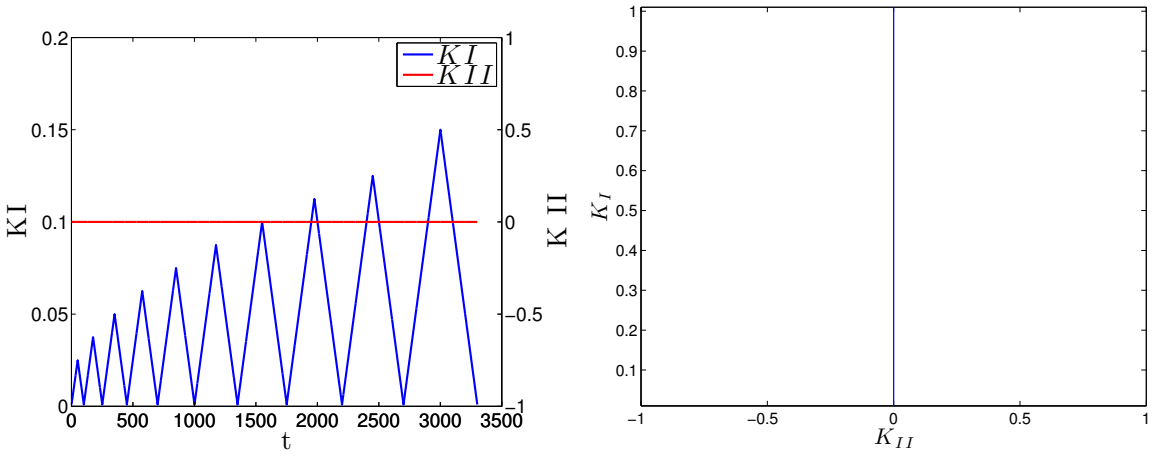


FIGURE 2.15 – Représentation de l'ouverture en pointe de fissure (*CTOD*) par le facteur d'intensité ρ_I du champ complémentaire en mode I

2.5.1 Sous sollicitations de mode I

Afin d'évaluer la pertinence d'une approche condensée de la fissuration dans un milieu quasi-fragile, on applique dans un premier temps un chargement cyclique en mode I. On cherche ainsi à solliciter la fissuration et la micro-fissuration liée à l'ouverture de la fissure. Le chargement utilisé est présenté sur les figures suivantes (Fig. 2.16).



(a) $K_I(t)$ et $K_{II}(t)$ **(b)** $K_I(K_{II})$

FIGURE 2.16 – Chargement en mode I en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ (b)

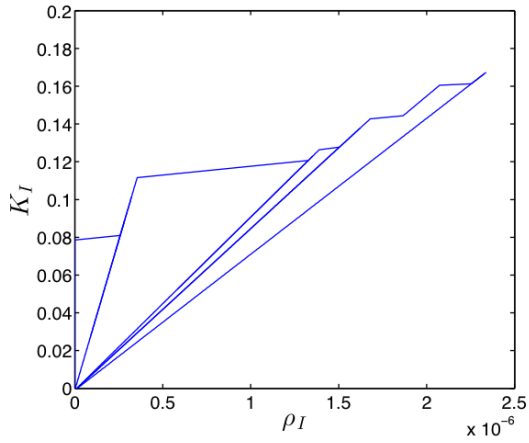
On observe comment évoluent les facteurs d'intensité des champs de référence élastiques et complémentaires de mode I, ainsi que l'erreur associée à une représentation purement élastique et celle associée à une représentation par un champ élastique et un champ complémentaire.

L'erreur $C1R$ associée à une représentation purement élastique est définie de la façon suivante :

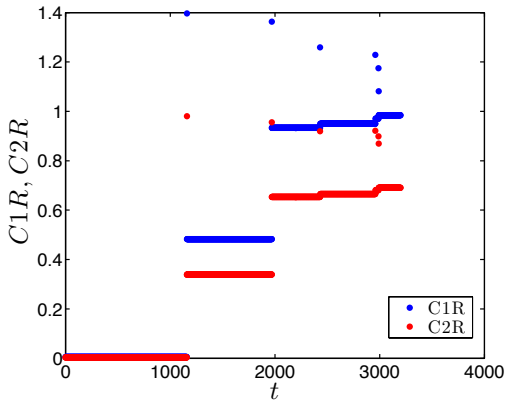
$$C1R(t) = \sqrt{\frac{\underline{v}(\underline{x},t) - \dot{\tilde{K}}_I(t).\underline{u}_e^I(\underline{x}) - \dot{\tilde{K}}_{II}(t).\underline{u}_e^{II}(\underline{x})}{\underline{v}(\underline{x},t).\underline{v}(\underline{x},t)}} \tag{2.33}$$

L'erreur $C2R$ associée à une représentation non linéaire s'écrit :

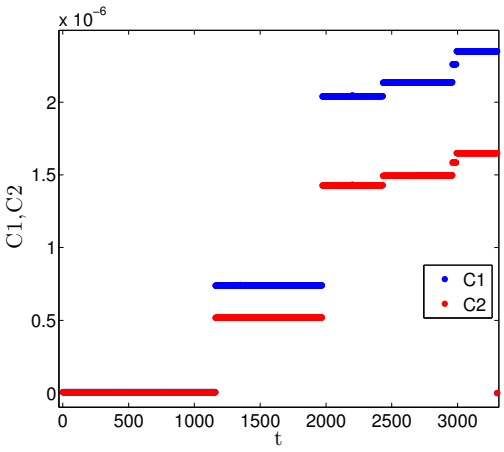
$$C2R(t) = \sqrt{\frac{\underline{v}(\underline{x},t) - \dot{\tilde{K}}_I(t).\underline{u}_e^I(\underline{x}) - \dot{\tilde{K}}_{II}(t).\underline{u}_e^{II}(\underline{x}) - \dot{\rho}_I(t).\underline{u}_c^I(\underline{x}) - \dot{\rho}_{II}(t).\underline{u}_c^{II}(\underline{x})}{\underline{v}(\underline{x},t).\underline{v}(\underline{x},t)}} \tag{2.34}$$



(a) $K_I(\rho_I)$



(b) C1R-C2R



(c) C1-C2

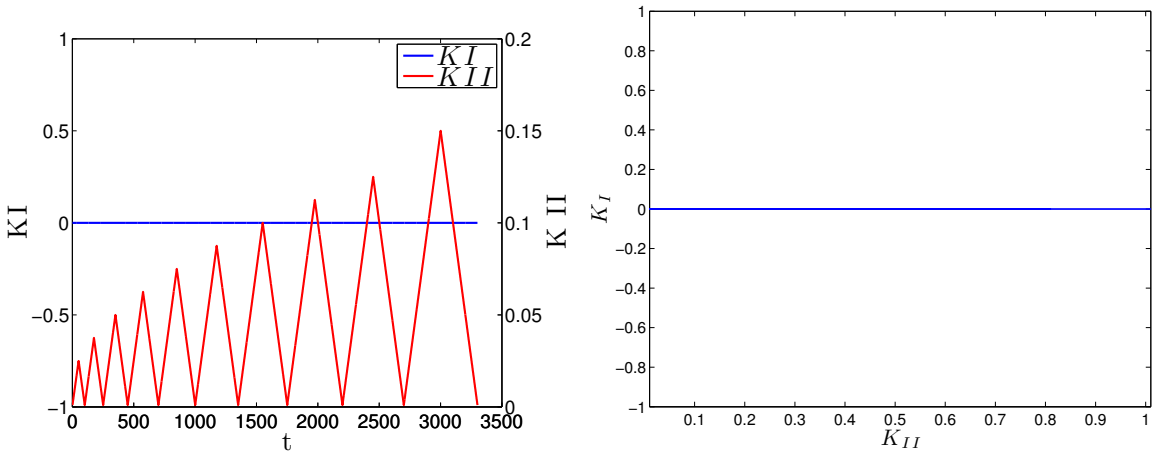
FIGURE 2.17 – Evolutions des facteurs d'intensité et des erreurs d'approximation en mode I

On observe une réponse non-linéaire sur la courbe $K_I(\rho_I)$ (Fig. 2.17a). Une courbe enveloppe semble se détacher, les pentes des charges et des décharges diminuent avec l'évolution de l'endommagement du matériau. De plus, ces pentes semblent toutes passer par l'origine.

On observe que l'approximation $C2R$ du champ de vitesse par un champ élastique et un champ complémentaire diminue l'erreur de manière notable par rapport à l'approximation simple par un champ élastique $C1R$ (Fig. 2.17b). L'erreur atteint des pics à certain pas de temps, notamment sur les maxima des cycles, elle correspond également aux différents sauts que l'on voit sur les évolutions des facteurs d'intensité ρ_I.

2.5.2 Sous sollicitations de mode II

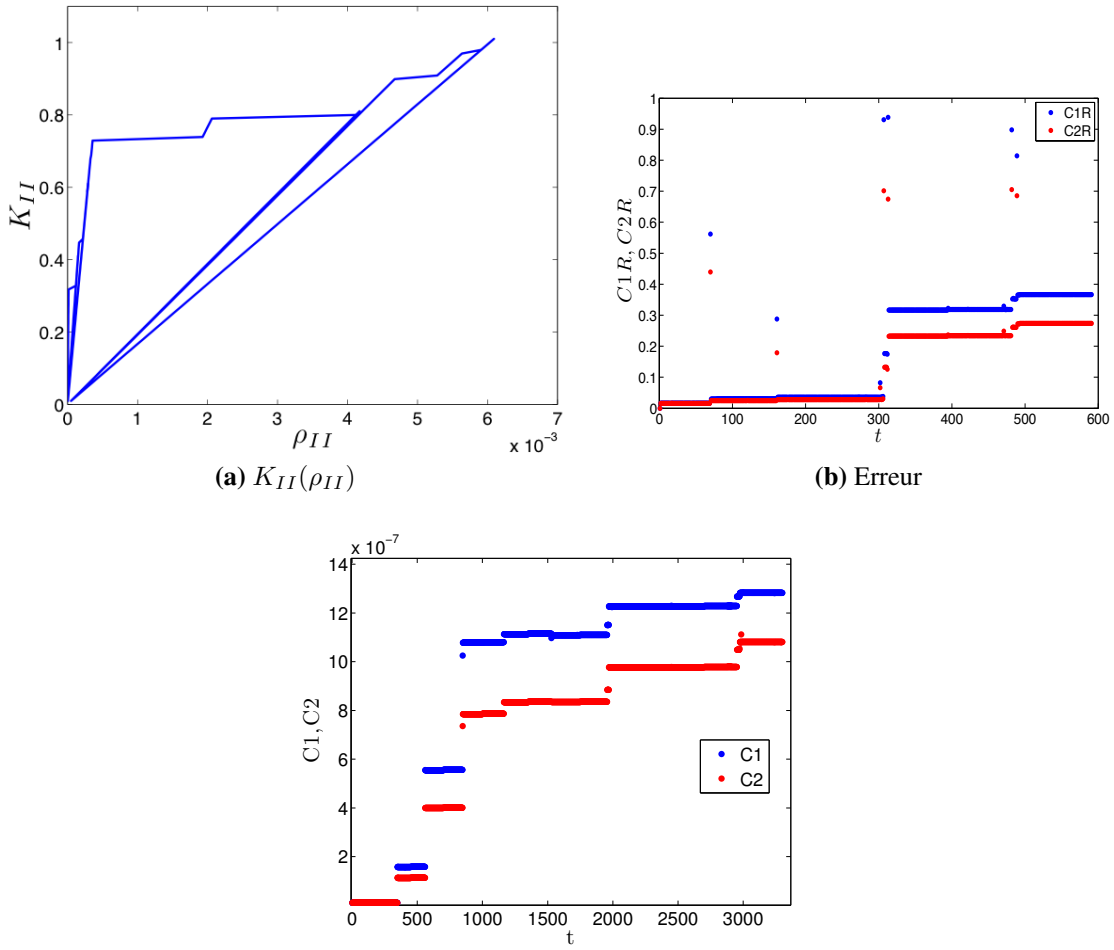
On sollicite ensuite le modèle par éléments discrets lors de sollicitations cycliques de mode II. On cherche à observer le comportement du modèle lorsque la fissure est soumise à un chargement de cisaillement. Le chargement appliqué est présenté sur la Fig. 2.18.



(a) $K_I(t)$ et $K_{II}(t)$ **(b)** $K_I(K_{II})$

FIGURE 2.18 – Chargement en mode II en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ (b)

Pour évaluer l'intérêt d'une approche condensée lors d'une sollicitation de mode II, on regarde comment évoluent les facteurs d'intensité des champs de référence élastique et complémentaire de mode II, ainsi que l'erreur associée à une représentation purement élastique $C1R$ et celle associée à une représentation par un champ élastique et un champ complémentaire $C2R$.



(a) $K_{II}(\rho_{II})$

(b) Erreur

(c) Erreur

FIGURE 2.19 – Evolutions des facteurs d'intensité et des erreurs d'approximation en mode II

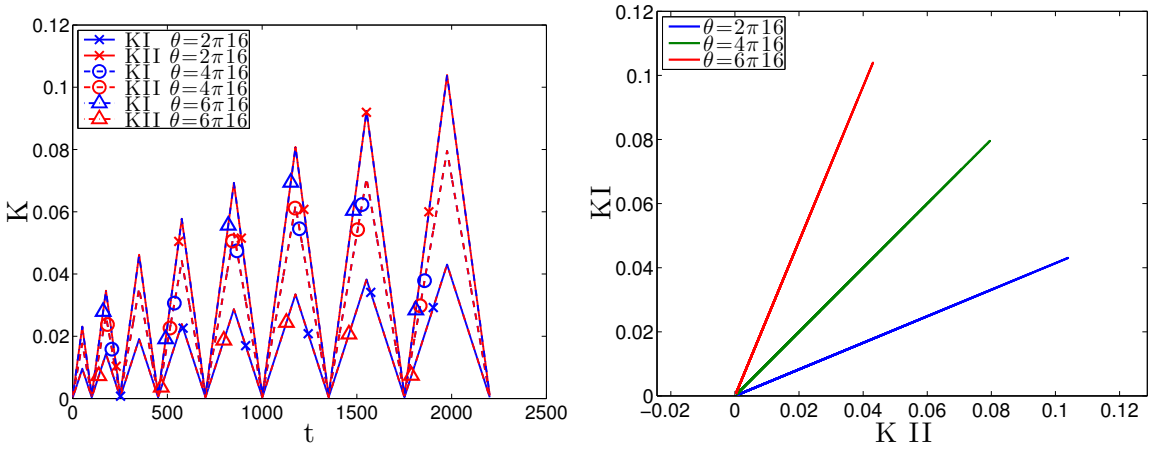
Lorsque l'on regarde les évolutions $K_{II}(\rho_{II})$ (Fig. 2.19a), on observe un comportement similaire à celles de mode I. Une réponse non-linéaire pouvant être résumée par une courbe enveloppe et des pentes de charges et de décharges diminuant avec l'endommagement. On observe également que l'erreur associée à une approximation du champ de vitesse par un champ élastique et un champ complémentaire est bien plus faible que celle faite par une représentation purement élastique (Fig. 2.19b). On observe également que l'erreur augmente par paliers. L'apparition de ces paliers est fortement corrélée avec les fortes augmentations de ρ_{II}.

2.5.3 Sous sollicitations de mode mixte I+II proportionnel

L'approche apparaissant comme pertinente lors de chargement d'ouverture et de cisaillement de la fissure, on souhaite désormais observer la réponse du modèle discret lors d'un chargement cyclique de mode mixte. Dans un premier temps, on applique un chargement de mode mixte proportionnel (Fig. 2.20). Les simulations en mode mixte proportionnel ont été réalisées avec les mêmes amplitudes équivalentes en facteur d'intensité des contraintes (Fig. 2.20b). On a donc :

$$K_I = A\cos(\theta)f(t) \tag{2.35}$$
$$K_{II} = A\sin(\theta)f(t) \tag{2.36}$$

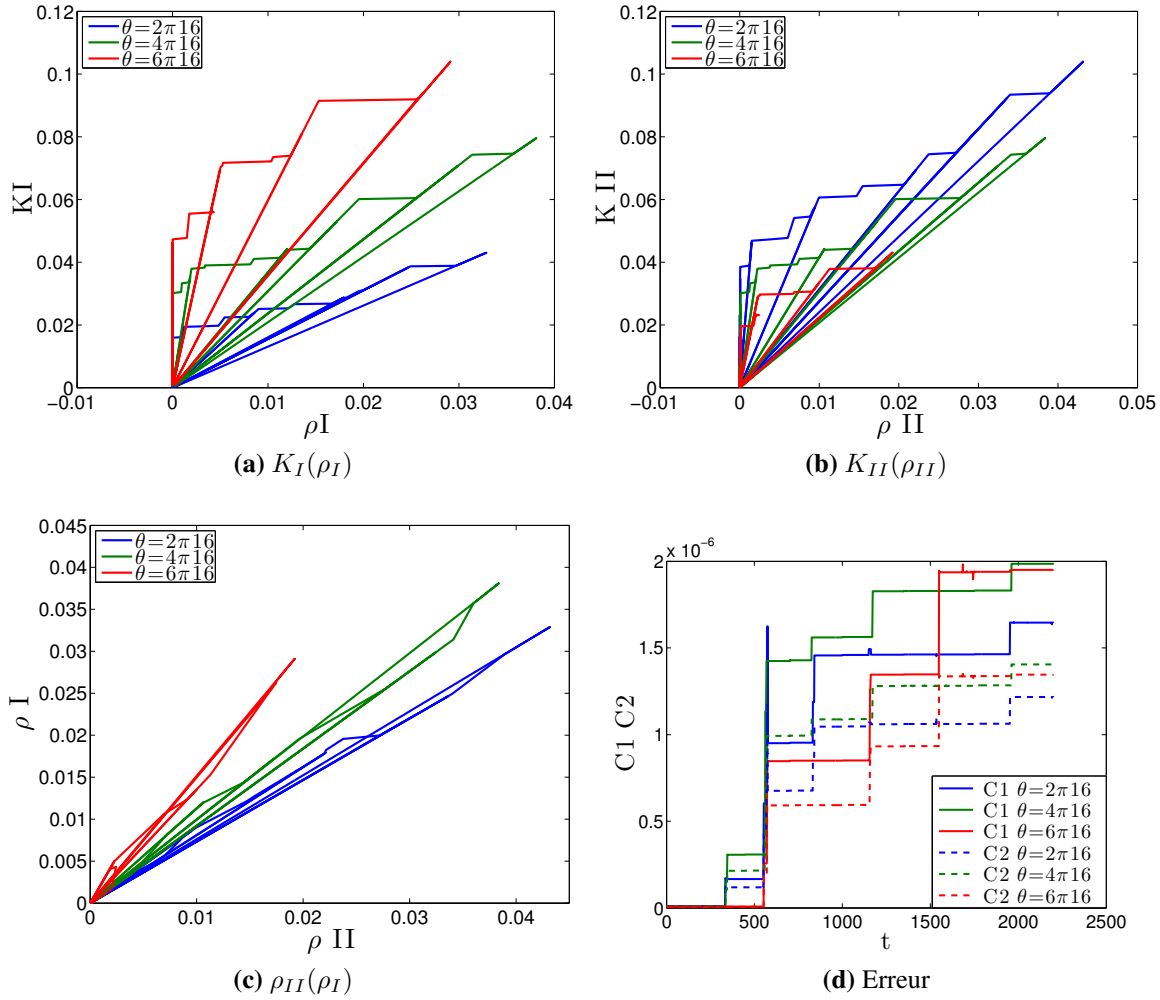
Cela afin de pouvoir comparer les évolutions des facteurs d'intensité des champs complémentaires.



(a) $K_I(t)$ et $K_{II}(t)$ **(b)** $K_I(K_{II})$

FIGURE 2.20 – Chargement en mode mixte I+II proportionnel en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ (b)

Pour évaluer l'intérêt d'une approche condensée, nous allons regarder l'évolution des différents facteurs d'intensité des champs de référence ainsi que l'évolution de l'erreur associée à la représentation du champ de vitesse par un champ élastique et un champ complémentaire pour chaque mode de sollicitation.



(a) $K_I(\rho_I)$ **(b)** $K_{II}(\rho_{II})$

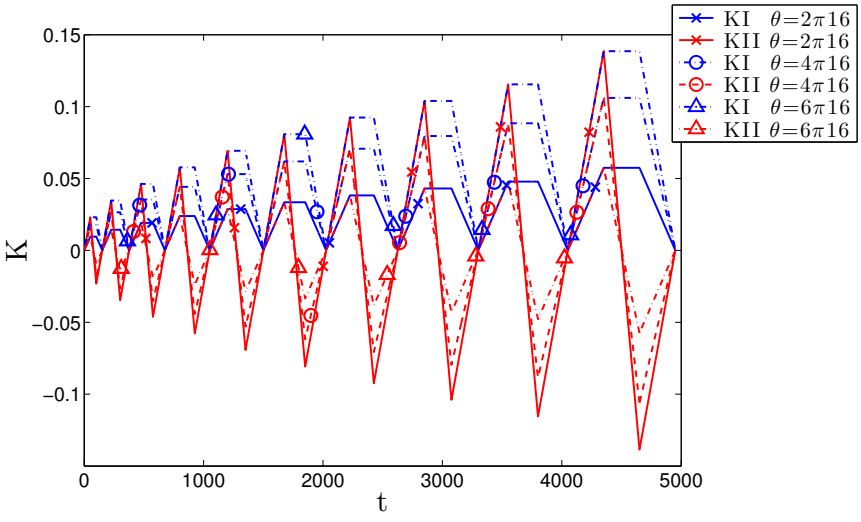
(c) $\rho_{II}(\rho_I)$ **(d)** Erreur

FIGURE 2.21 – Evolutions des facteurs d'intensité en mode mixte I+II proportionnel

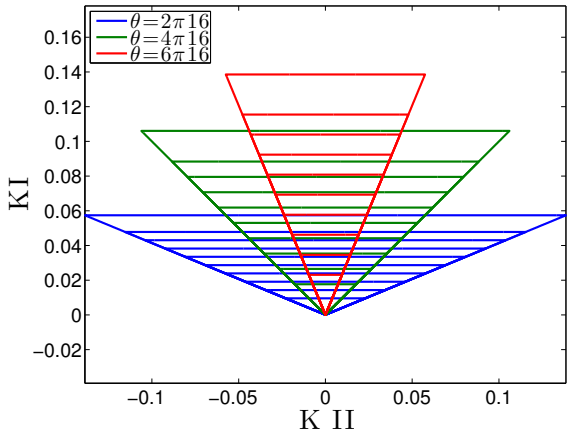
On observe que les évolutions $K_I(\rho_I)$ et $K_{II}(\rho_{II})$ sont similaires à celles obtenues lors de sollicitations de mode I ou de mode II. On observe que les évolutions $K_I(\rho_I)$ sont plus importantes pour les sollicitations avec une forte proportion de mode I, et inversement pour le mode II. On observe également que dans les 3 cas de chargements présentés, l'erreur associée à la représentation du champ de vitesse en pointe de fissure par des champs élastiques et des champs complémentaires est invariablement inférieure à l'erreur associée à une représentation simplement élastique du champ de vitesse en pointe de fissure et reste toujours très faible.

2.5.4 Sous sollicitations de mode mixte I+II non-proportionnel

On cherche désormais à observer la réponse du modèle discret dans le cas plus intéressants des sollicitations de mode mixte I+II non-proportionnel. Le chargement appliqué pour les simulations en mode mixte I+II non proportionnel est présenté sur la Fig. 2.22.



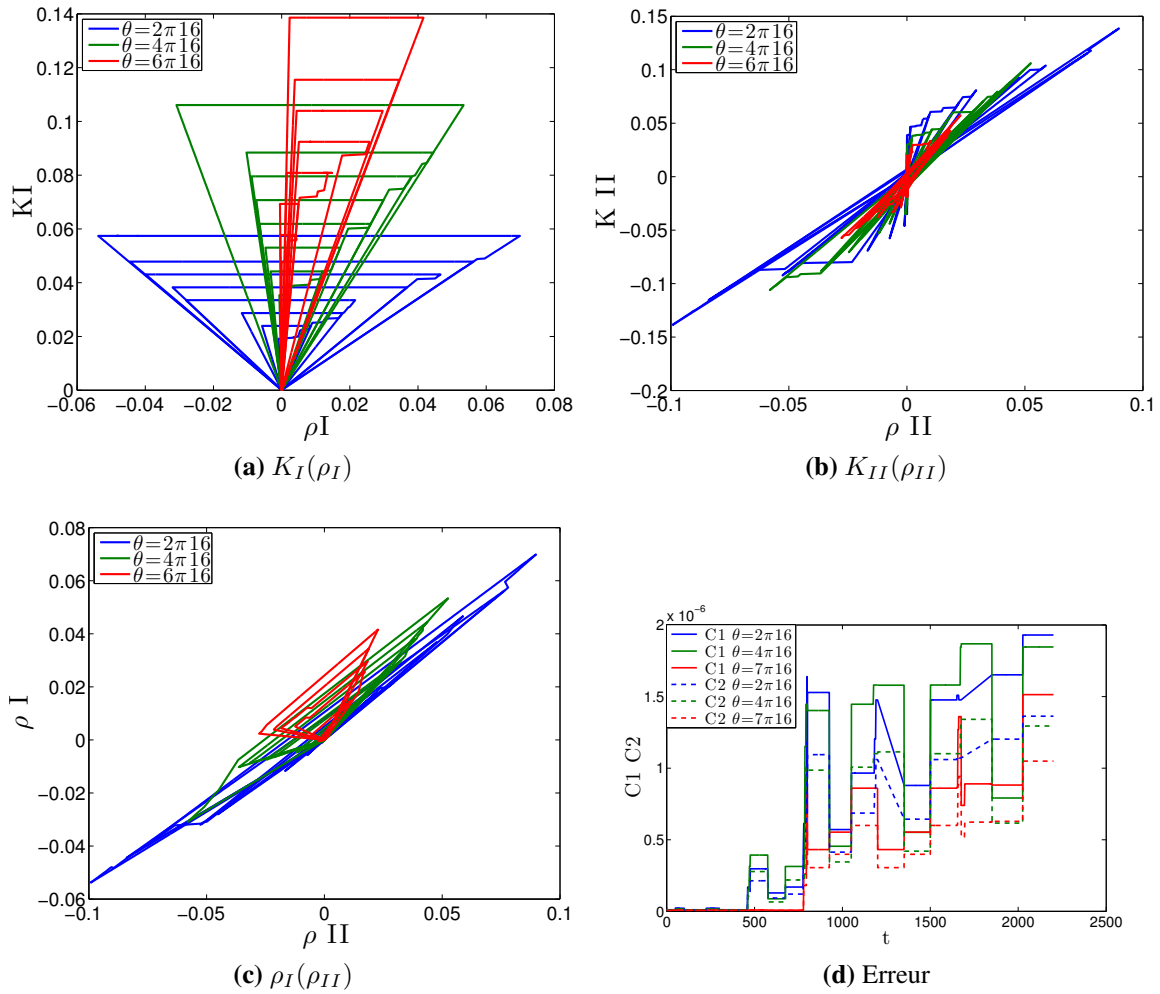
(a) $K_I(t)$ et $K_{II}(t)$



(b) $K_I(K_{II})$

FIGURE 2.22 – Chargement appliqué en mode mixte I+II non-proportionnel en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$ (b)

Afin d'observer la réponse du modèle discret à des sollicitations de mode mixte I+II non-proportionnel, on considère les évolutions des facteurs d'intensité et l'évolution de l'erreur $C2$ associée à une approximation du champ de vitesse en pointe de fissure par un champ élastique et un champ complémentaire par mode de fissuration et l'évolution de l'erreur $C1$ associée à une approximation élastique du champ de vitesse en pointe de fissure.



(a) $K_I(\rho_I)$ **(b)** $K_{II}(\rho_{II})$

(c) $\rho_I(\rho_{II})$ **(d)** Erreur

FIGURE 2.23 – Evolutions des facteurs d'intensité en mode mixte I+II non proportionnel

On observe un couplage entre les évolutions de $K_I(\rho_I)$ et $K_{II}(\rho_{II})$. Lorsque le chargement de mode I est maintenu, et que le chargement de mode II est inversé progressivement, on observe une diminution de ρ_I et ceci pour les différents taux de mixité de chargement appliqué. L'erreur $C2$ est inférieure à l'erreur $C1$, quel que soit le taux de mixité appliqué. On observe néanmoins une différence par rapport aux simulations précédentes, il n'y a plus une évolution progressive par paliers croissants mais une succession de paliers à différents niveaux d'erreurs.

2.6 Influence de la distribution des seuils de rupture

Afin d'étudier la sensibilité du champ complémentaire aux paramètres du modèle par éléments discrets, la distribution des seuils de rupture des particules a été modifiée et le champ complémentaire identifié pour plusieurs types de distribution ayant la même médiane et le même écart-type. Trois types de distributions ont été utilisés, une

distribution de type Weibull où la majeure partie des seuils seront au-dessus de la valeur médiane, une distribution de Weibull, où la majeure partie des seuils sont en dessous de cette valeur médiane, et une distribution de type gaussienne, où la répartition est symétrique de part et d'autre de la valeur médiane.

On va chercher à observer la sensibilité à différents paramètres :

— l'effet de la forme de la distribution à même caractéristique de distribution,
— l'effet du tirage à même distribution
— l'effet du maillage à même distribution

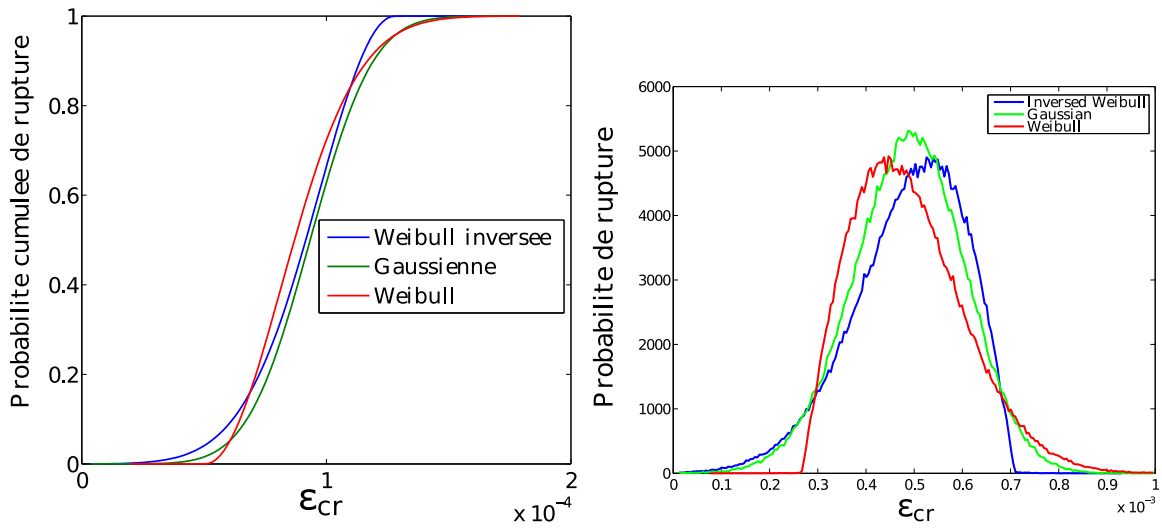
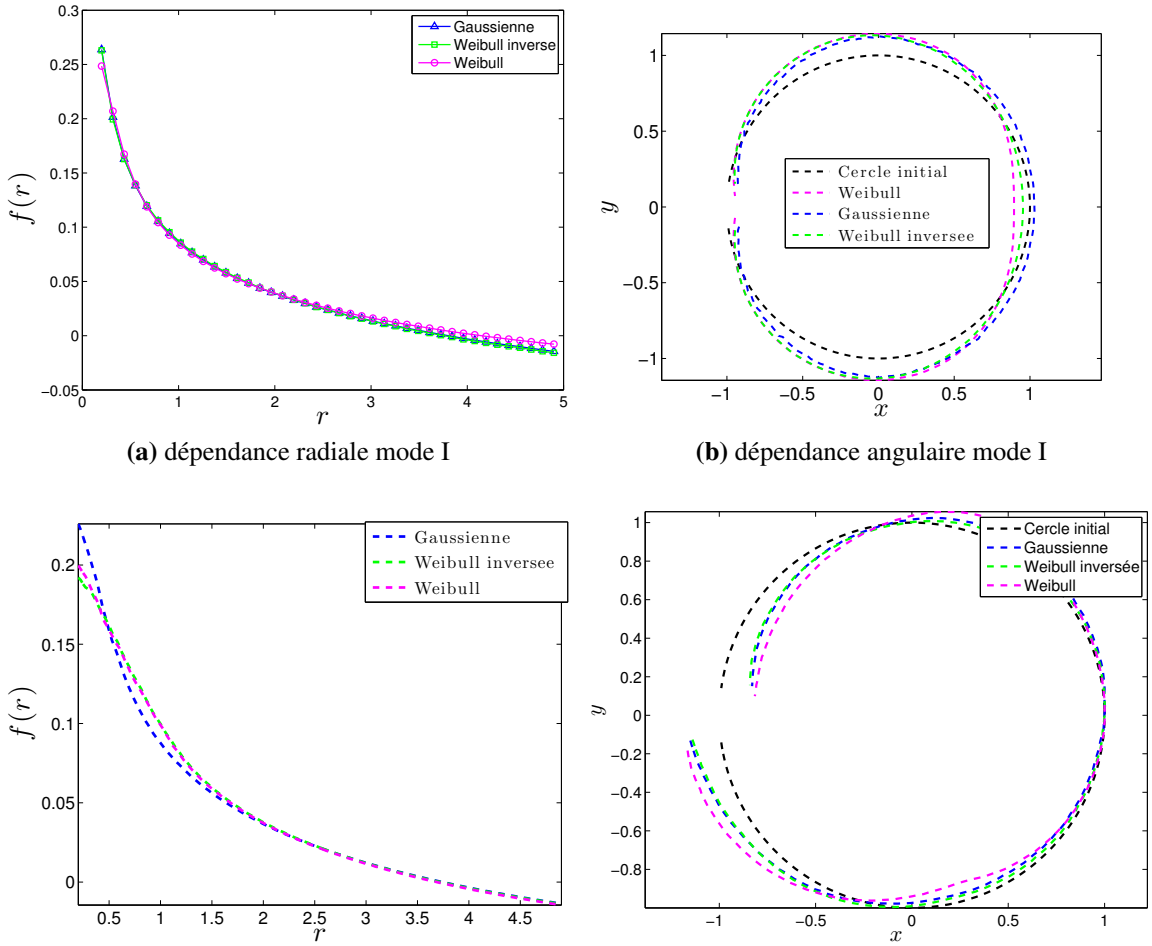


FIGURE 2.24 – Distribution des seuils de rupture entre particules

Ces trois distributions représentent donc plusieurs types de matériaux, avec un grand nombre de liens faibles, un grand nombre de liaisons plus résistantes, et une répartition égale entre liaisons faibles et liaisons fortes.



(a) dépendance radiale mode I

(b) dépendance angulaire mode I

(c) dépendance radiale mode II

(d) dépendance angulaire mode II

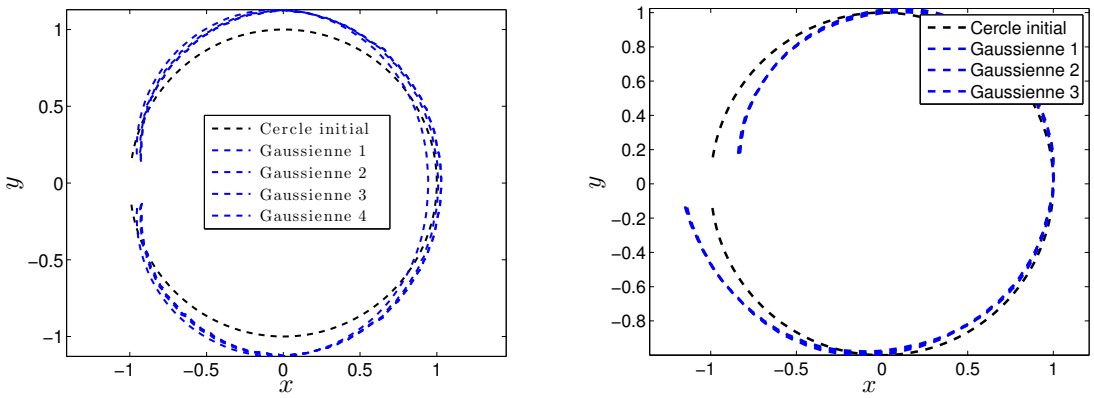
FIGURE 2.25 – Distribution des seuils de rupture entre particules

Pour chacune de ces distributions, le champ complémentaire a été identifié. Une décomposition en (r, θ) a été effectuée pour chacun de ces champs complémentaires pour observer l'influence de la distribution sur la dépendance radiale $f(r)$ et sur la dépendance angulaire $\underline{g}(\theta)$.

On observe que la dépendance radiale n'est pas affectée par le changement de distribution des seuils de rupture des particules. La dépendance angulaire est légèrement différente en mode I, surtout en $\theta = 0$, ce qui est probablement dû à une micro-fissuration à très courte distance de la pointe de la fissure ou à une avancée de la pointe de la fissure. L'important est que la discontinuité en $\theta = -\pi$ et $\theta = \pi$ ne soit que très peu perturbée avec la distribution des seuils de rupture des particules. L'influence de la distribution des seuils de rupture des particules est encore moins importante pour le champ complémentaire en mode II.

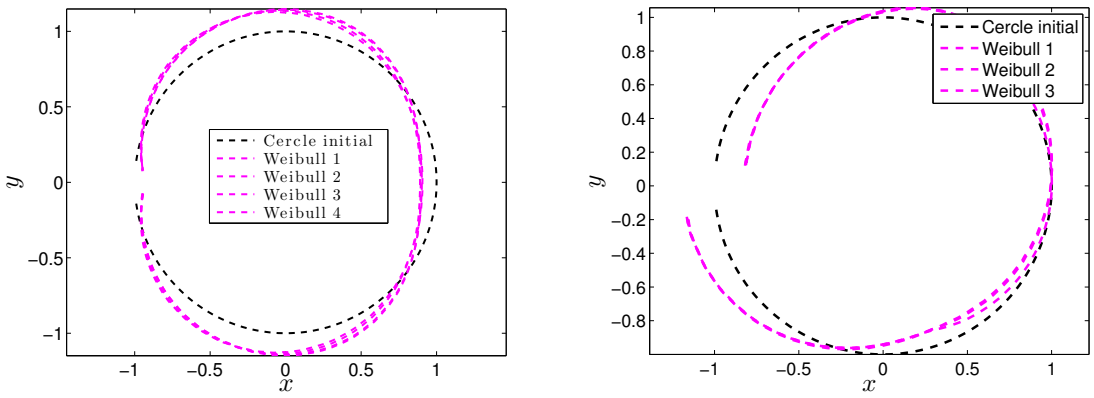
Une légère variation de la forme du champ complémentaire est normale, car la distribution des seuils de rupture des particules influence directement les paramètres matériaux localement en pointe de fissure.

Si l'on regarde la dispersion entre plusieurs tirages suivant la même la loi de probabilité, on observe qu'il n'y a que très peu de différences entre les champs complémentaires.



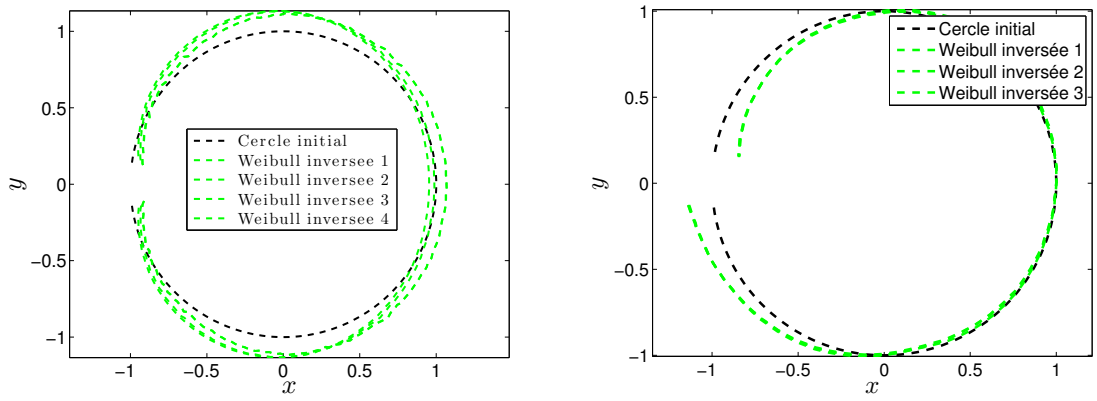
(a) Mode I **(b)** Mode II

FIGURE 2.26 – Distribution type Gaussienne, décomposition selon le tirage, 300 par 300 particules



(a) Mode I **(b)** Mode II

FIGURE 2.27 – Distribution type Weibull, décomposition selon le tirage, 300 par 300 particules



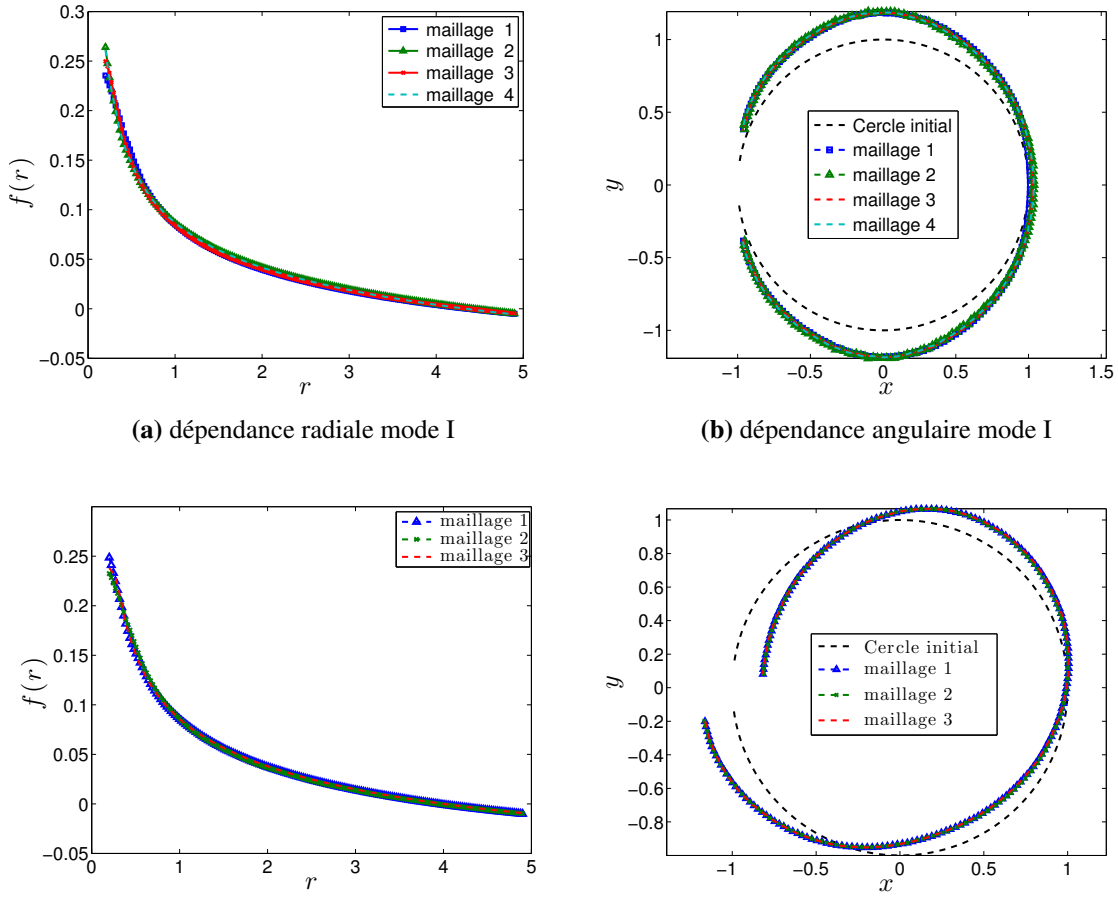
(a) Mode I **(b)** Mode II

FIGURE 2.28 – Distribution de type Weibull inversée, décomposition selon le tirage, 300 par 300 particules

On observe sur les trois distributions présentées ici, une forte robustesse de la méthode vis-à-vis du tirage.

2.7 Influence du maillage sur le champ complémentaire

La sensibilité au maillage est un défaut récurrent dans les approches locales, les approches non-locales s'en affranchissant par l'introduction d'une longueur caractéristique. Il est donc important de vérifier la sensibilité du champ complémentaire au maillage. Une première étude a été faite en gardant la même taille de maille, mais en générant différents diagrammes de Voronoï. En conservant la même distribution des seuils de rupture des particules, la modification de la distribution spatiale des centres des particules et donc de leurs connexions sera la seule source de modification.



(a) dépendance radiale mode I

(b) dépendance angulaire mode I

(c) dépendance radiale mode II

(d) dépendance angulaire mode II

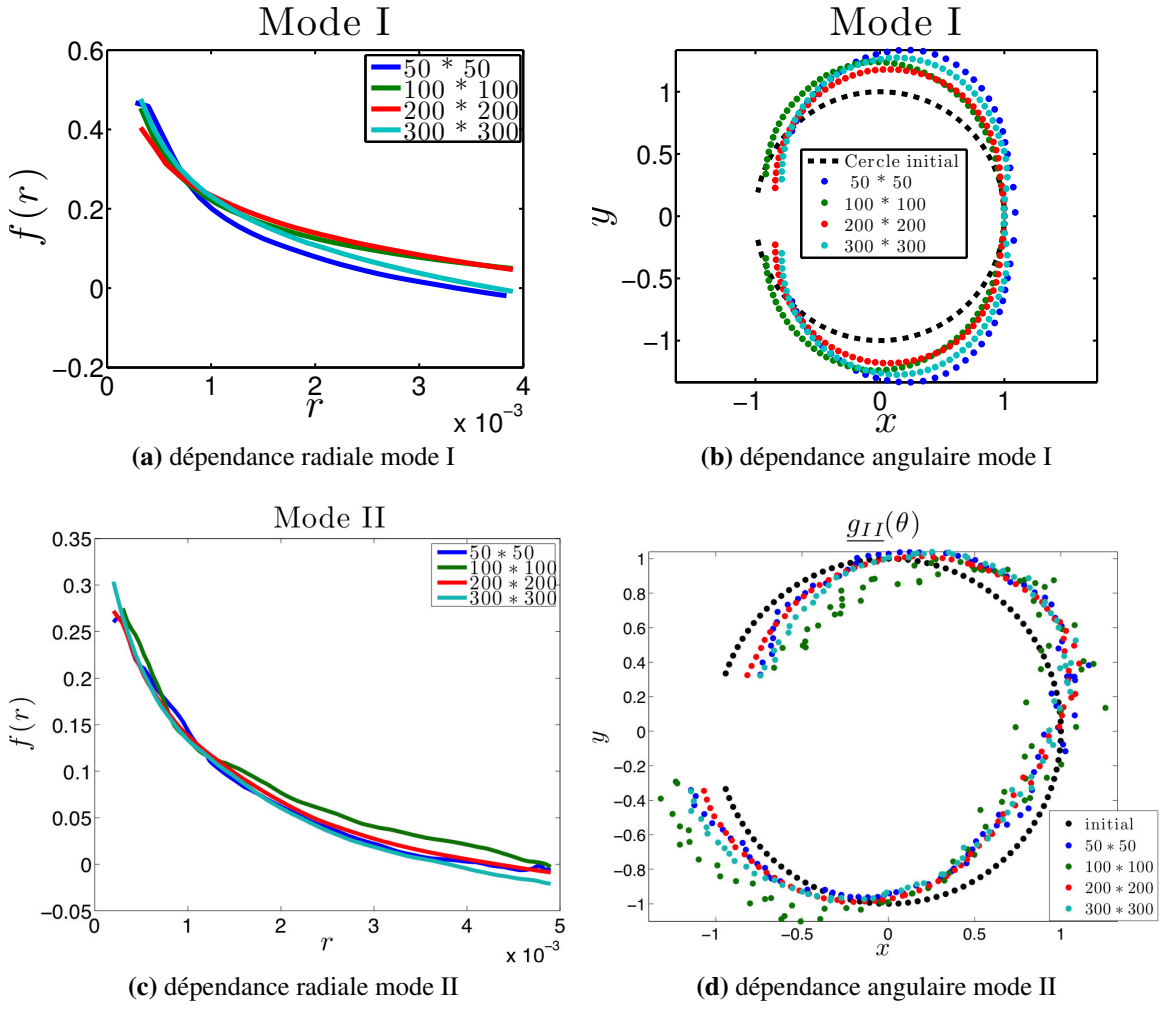
FIGURE 2.29 – Influence de la distribution du centre des particules sur la forme du champ complémentaire

De la même façon que pour la sensibilité à la distribution des seuils de rupture entre particules, les champs complémentaires sont identifiés pour chaque maillage et pour chaque mode. On observe que la différence est négligeable entre les différents champs complémentaires que ce soit en mode I ou en mode II.

Cette indépendance était attendue, car notre approche est quelque peu similaire aux approches non locales, vu que l'on considère l'évolution du champ de vitesse en pointe de fissure comme la superposition de plusieurs champs de référence. C'est uniquement leurs intensités qui sont dépendantes du chargement.

2.8 Influence de la densité de particules

Afin d'observer l'influence de la densité de particules sur le champ complémentaire, des simulations ont été effectuées avec des densités de maillage variant de 50 par 50 particules à 300 par 300 particules.



(a) dépendance radiale mode I

(b) dépendance angulaire mode I

(c) dépendance radiale mode II

(d) dépendance angulaire mode II

FIGURE 2.30 – Influence de la densité de particules sur le champ complémentaire

La densité de particules dans le modèle n'a pas d'effet significatif sur le champ complémentaire. Les différences observables sont liées aux discrétisations angulaires et radiales choisies lors de l'identification des champs complémentaires.

2.9 Domaine élastique

Pour déterminer le domaine élastique, on utilise comme indicateur l'écart entre l'erreur $C1R$, obtenue à partir de l'approximation élastique du champ de vitesse, et l'erreur $C2R$, obtenue à partir de l'approximation élastique et complémentaire du champ de vitesse.

La différence des erreurs relatives est un indicateur global, qui permet de montrer l'instant à partir duquel une cinématique enrichie est nécessaire pour obtenir une meilleure représentation du comportement en pointe de fissure.

En simulant plusieurs cas de chargements à différents taux de mixité, on peut obtenir une cartographie du domaine élastique dans l'espace $K_I - K_{II}$, en se donnant par exemple un seuil d'erreur pour $C1R - C2R$ de 10%.

Si l'on prend l'hypothèse de déformations planes le long du front de fissure, le champ de déplacement en pointe de fissure s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\frac{\theta}{2}(\kappa - cos(\theta)) + \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\frac{\theta}{2}(2 + \kappa + cos(\theta)) \\ u_y &= \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\frac{\theta}{2}(\kappa - cos(\theta)) + \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\frac{\theta}{2}(2 - \kappa - cos(\theta)) \\ u_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

μ et κ sont les coefficients de Lamé. Ils sont reliés au module d'Young E et au coefficient de Poisson ν par :

$$\begin{array}{l} \mu = \frac{E}{2(1+\mu)} \\ \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad \text{en contraintes planes,} \quad \kappa = 3 - 4\nu \quad \text{en déformation plane} \end{array} \tag{2.38}$$

Pour une rotation d'angle θ, on détermine alors le champ de déplacement en coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

et on calcule également le tenseur des déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_z}{r}\right) \\ \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) & \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{z}\right) \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_z}{r}\right) & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{z}\right) & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{z} \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, le tenseur des contraintes est lié au tenseur des déformations par la loi de Hooke :

$$\sigma = \lambda Tr(\varepsilon)\underline{\underline{1}} + 2\mu\varepsilon \tag{2.41}$$

On peut alors calculer la densité w_D d'énergie élastique de déformation de cisaillement qui s'exprime de la façon suivante :

$$w_D = Tr\left(\sigma^D \varepsilon^D\right) \quad \text{avec} \quad \sigma^D = \sigma - \frac{1}{3}Tr(\sigma).\underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \varepsilon^D = \varepsilon - \frac{1}{3}Tr(\varepsilon).\underline{\underline{I}} \tag{2.42}$$

On peut définir la densité d'énergie w comme étant la superposition de deux densités d'énergie, la densité d'énergie de cisaillement w_D et la densité d'énergie de changement de volume w_{vol}. L'énergie de cisaillement élastique U par unité de longueur en front de fissure se calcule à partir de la densité d'énergie de cisaillement w_D intégrée sur un disque de rayon δ entourant la pointe de la fissure.

$$U(K_I, K_{II}) = \int_{r=0}^{r=\delta} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \frac{1}{2} Tr(\underline{\underline{\sigma}}^D.\underline{\underline{\varepsilon}}^D) r dr d\theta \tag{2.43}$$

Les contraintes σ_x^D, σ_y^D et σ_z^D n'entrainent aucun changement de volume, si on les définit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p + \sigma_x^D \\ \sigma_y &= p + \sigma_y^D \\ \sigma_z &= p + \sigma_z^D \end{aligned} \tag{2.44}$$

De manière analogue au critère de Von Mises, on postule que la limite du domaine de validité de l'approche correspond à un seuil en énergie élastique de cisaillement critique notée U_c. On suppose que l'énergie seuil du domaine de validité pour un chargement multiaxial quelconque est la même que pour un chargement uniaxial. On peut donc définir ce seuil U_c à partir du facteur d'intensité des contraintes seuil du domaine de validité en mode I, noté K_{Is}. L'expression de U_c est alors :

$$U_c = U(K_{Is}, 0, 0) \tag{2.45}$$

Par conséquent, le critère définissant le domaine de validité de l'approche s'écrit :

$$U(K_I, K_{II}) = U(K_{Is}, 0) \rightarrow \quad \textit{Bord du domaine de validité} \tag{2.46}$$

Après développement et simplification, ce critère peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left(\frac{K_I}{K_{Is}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIs}}\right)^2 = 1 \rightarrow \quad \textit{Bord du domaine de validité} \tag{2.47}$$

où le terme K_{IIs} est défini en fonction de K_{Is} par l'équation suivante :

$$\frac{K_I^2}{K_{IY}^2} + \frac{K_{II}^2(19 - 16\nu + 16\nu^2)}{K_{Is}^2(7 - 16\nu + 16\nu^2)} = 1 \tag{2.48}$$

On peut aussi utiliser d'autres densités d'énergie afin de définir le seuil du domaine de validité. Dans ce cas là, l'équation définissant K_{IIs} à partir de K_{Is} est modifiée.

La densité d'énergie de déformation correspond à la variation de volume égale au travail des contraintes sur les 3 axes.

$$w_{vol} = 3(\frac{1}{2}\varepsilon_p p) \tag{2.49}$$

où la déformation ε_p a pour équation

$$\varepsilon_p = \frac{1}{E}(1-2\nu)p \tag{2.50}$$

on obtient alors pour l'énergie de changement de volume :

$$w_{vol} = \frac{3}{2E}(1-2\nu)p^2 = \frac{1}{6}(1-2\nu)(Tr(\sigma)^2) \tag{2.51}$$

En intégrant cette densité d'énergie sur un disque de rayon δ puis en simplifiant l'expression, on obtient l'équation suivante pour le domaine de validité de l'approche :

$$\frac{K_I^2}{K_{Is}^2} + \frac{K_{II}^2(-9+8\nu)}{K_{Is}^2(-5+8\nu)} = 1 \tag{2.52}$$

On peut également utiliser le critère de Marigo et Francfort ([Francfort et Marigo, 1998]), où l'on considère l'énergie totale du système, en autorisant les sauts de taille de fissures et les sauts de déplacements au sein du matériau. Ce critère généralise le critère de Griffith pour englober l'amorçage et la propagation de fissure.

En considérant un critère en iso énergie élastique totale, soit plus simplement, w :

$$w = \frac{1}{2}Tr(\sigma.\varepsilon) \tag{2.53}$$

En intégrant sur un disque de rayon δ puis en simplifiant, on obtient comme équation pour le domaine de validité :

$$\frac{K_I^2}{K_{Is}^2} + \frac{K_{II}^2}{K_{Is}^2} = 1 \tag{2.54}$$

On cherche alors la meilleur approximation du domaine de validité par une ellipse. Le rapport entre le grand axe et le petit axe de l'ellipse permet de définir si l'énergie de cisaillement, l'énergie élastique totale ou un mélange de ces deux densités d'énergie qui convient le mieux pour représenter le domaine de validité. Les résultats de simulations pour différents taux de mixité ainsi que les formes correspondant aux critères d'énergie de changement de volume, d'énergie de cisaillement et d'énergie totale sont reportés sur la figure 2.31.

On observe que les surfaces correspondantes aux critères en énergie totale et en énergie de cisaillement ne correspondent pas aux résultats obtenus par la méthode des éléments discrets pour différents taux de mixité. Le critère en énergie de changement de volume parait le plus adéquat à représenter la limite du domaine d'élasticité.

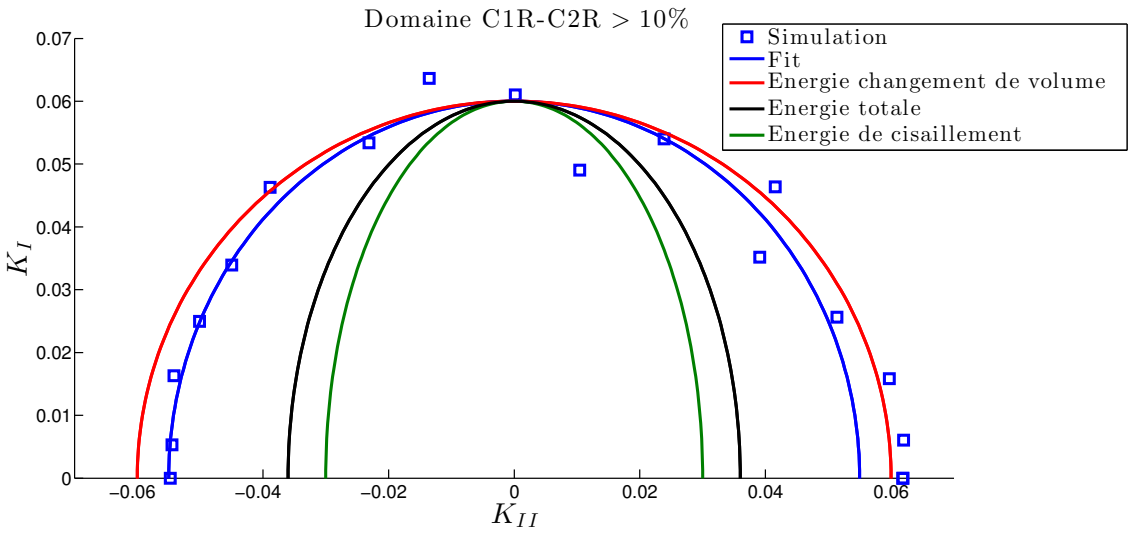


FIGURE 2.31 – Surface seuil associée au domaine de non-linéarité pour un seuil de 10%

3 Résumé du chapitre

L'enjeu de ce chapitre était de regarder la faisabilité d'un modèle condensé du comportement en mode mixte de la région en pointe de fissure dans un milieu quasi-fragile du point de vue numérique. Pour simuler le comportement en fissuration d'un matériau quasi-fragile, la méthode des éléments discrets a été choisie. Le modèle représente l'hétérogénéité du béton par un assemblage de particules de Voronoï. La nature quasi-fragile du matériau est donnée par des liaisons de type poutre élastique fragile entre deux particules voisines avec un critère en rupture dépendant de l'élongation et de la différence de rotation des centres des particules. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle permet de représenter explicitement la micro-fissuration et la fissuration.

Le principe consiste à ne retenir des simulations par éléments discrets qu'un très faible nombre d'informations nécessaires pour pouvoir analyser le comportement de la process zone. Pour cela, on se donne une approximation cinématique, le champ de vitesse en pointe de fissure est partitionné par mode de fissuration, et chaque mode comporte une composante élastique et une composante complémentaire. Chaque composante est le produit d'une fonction spatiale, définie a priori et d'un facteur d'intensité, dépendant du temps. A chaque pas de temps, par projection du champ de vitesse sur la base de champs, on calcule les facteurs d'intensité et les erreurs associées à cette représentation simplifiée de la cinématique en pointe de fissure. Le comportement en pointe de fissure peut alors être analysé par l'évolution de quatre facteurs d'intensité des quatre champs de référence.

L'identification des champs complémentaires, représentatifs de la contribution des microfissures sur la fissure principale en fonction du mode sollicité, est réalisée en extrayant le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre du résidu de la projection du champ de vitesse sur le champ de référence. Cette identification semble robuste, les champs complémentaires obtenus pour différentes générations de maillage, différentes densités de particules et différentes formes de densité de seuils de rupture sont similaires et reproductibles.

Chapitre 3

Essai de fissuration en mode I dans un milieu quasi-fragile

Ce chapitre porte sur la campagne expérimentale menée au cours de cette thèse. Une procédure permettant de mesurer la ténacité du matériau de manière répétée sur la même éprouvette est présentée. Des essais de fissuration par fatigue et des mesures de seuils de fatigue sont présentés. L'objectif de ce chapitre est de montrer la sensibilité des matériaux quasi-fragiles à la fatigue et au rapport de charge.
Une méthode expérimentale est également proposée pour mesurer la réponse cyclique de la zone d'élaboration de l'endommagement en pointe de fissure dans du mortier.

1 Etat de l'art sur les essais de fissuration en mode I et mixte I+II dans le béton et le mortier

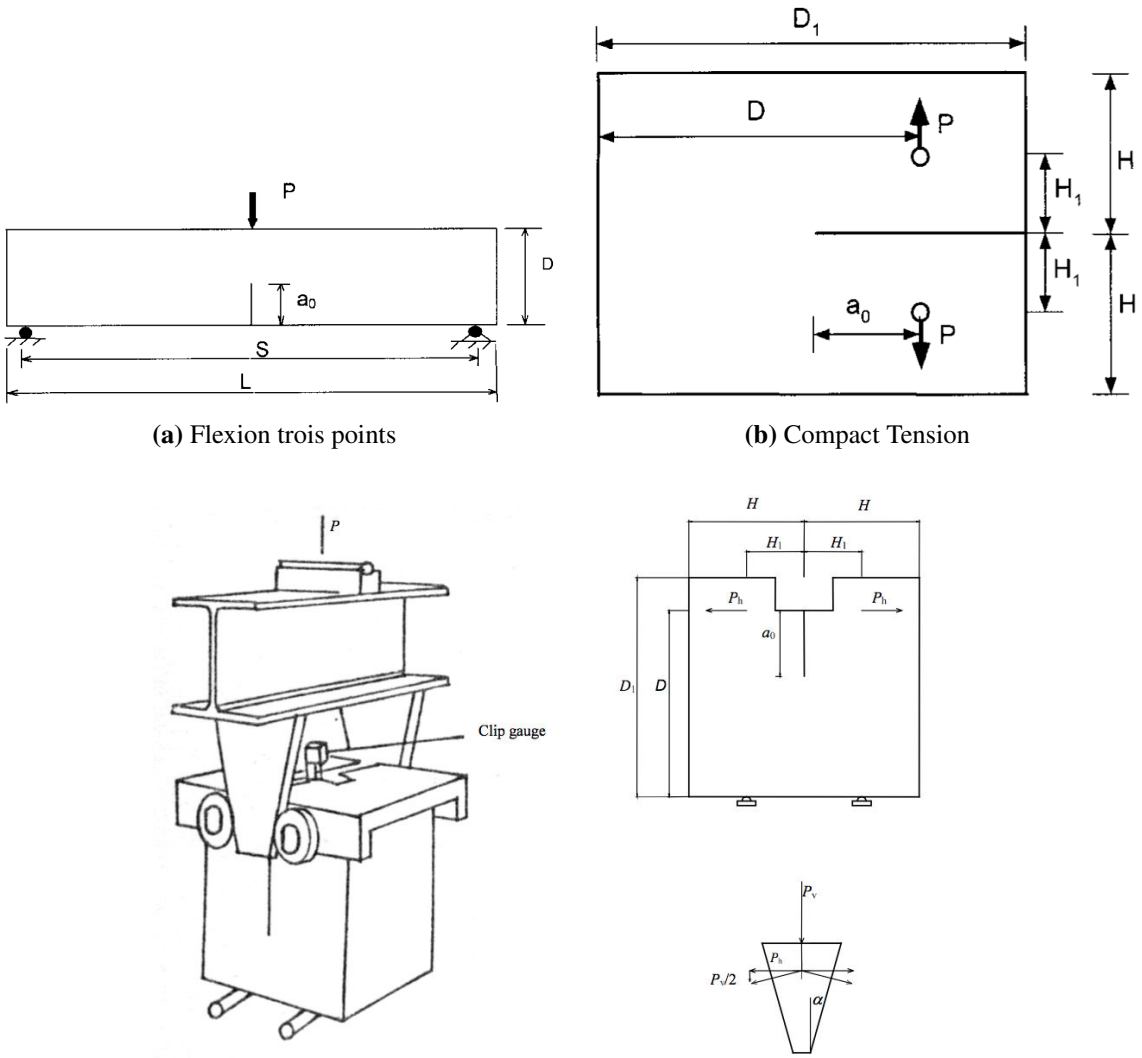
Le béton est un matériau hétérogène qui est intrinsèquement plein de défauts, tels que les pores et les fissures de retrait. Les mécanismes de rupture par fatigue dans le mortier ou le béton peuvent être divisés en trois étapes distinctes. La première étape fait intervenir les régions faibles dans le béton ou le mortier, qui sont appelées site d'initiation. La seconde étape est caractérisée par la croissance lente et progressive de défauts jusqu'à une taille critique. Cette seconde étape est généralement appelée la micro-fissuration. Dans la dernière phase, quand un nombre suffisant de fissures instables s'est formé, une fissure macroscopique et continue se développe, amenant potentiellement à la rupture. La propagation de la fissure peut elle aussi être divisée en deux étapes, un premier stage de ralentissement, où la vitesse de fissuration décroît au fur et à mesure qu'elle se propage et un deuxième stage où il y a une augmentation progressive de la vitesse de fissuration jusqu'à rupture ([Kolluru et al., 2000] et [Lee et Barr, 2004]).

Une hypothèse souvent rencontrée dans la littérature ([Hsu, 1984, Lee et Barr, 2004]) est que différents régimes de sollicitations vont amener à différents mécanismes de rupture dans le béton. Pour la fatigue à faible nombre de cycle, le mécanisme dominant est la formation de fissures dans le mortier conduisant à réseau de fissures connectées (fissuration intergranulaire). Tandis que la fatigue à grand nombre de cycle produit de la fissuration intragranulaire dans un processus lent et progressif.

De nombreux essais de fissuration en mode I ont été effectués sur des matériaux cimentaires. La flexion 3 points et la flexion 4 points sur éprouvettes entaillées sont parmi les montages les plus répandus. Les éprouvettes de *Compact Tension*, où l'on vient directement écarter les lèvres de la fissure, sont beaucoup moins utilisées pour caractériser les matériaux cimentaires que pour les matériaux métalliques.

L'une des principales raisons est la très faible résistance en traction des matériaux cimentaires. Il faut solliciter une région de l'éprouvette de manière indirecte.

Afin de contrôler plus précisément la fissuration en mode I, un montage appelé *Wedge Splitting Test* est utilisé sur de courtes poutres entaillées. Grâce à un système de roulement, le vérin vient directement écarter les lèvres de la fissure, et une jauge mesurant l'écartement mixte des lèvres (*Crack Mouth Opening Displacement*) est utilisée.



(a) Flexion trois points

(b) Compact Tension

(c) Wedge Splitting Test

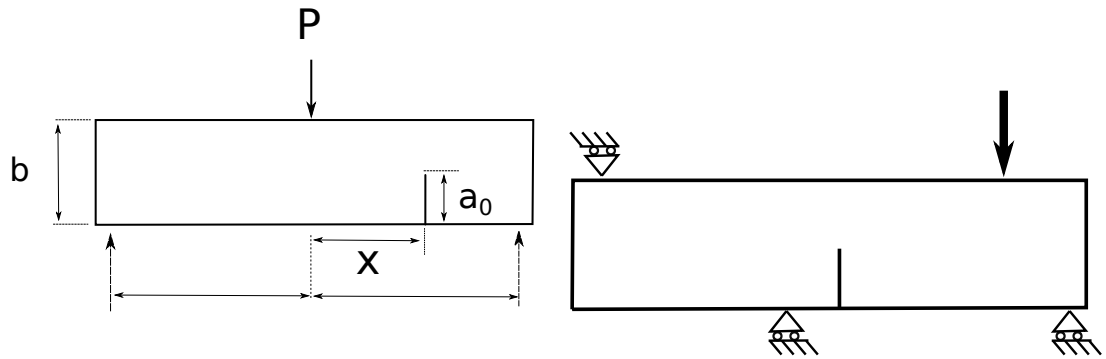
FIGURE 3.1 – Différentes géométries d'éprouvettes communément utilisées pour des essais de fissuration en mode I

On peut aussi citer l'essai de fendage, où l'on vient comprimer un cylindre. Ce montage est généralement utilisé pour caractériser indirectement la résistance en traction du matériau. Si l'éprouvette présente une entaille en son centre, on peut solliciter la fissure suivant différents taux de mixité en fonction de l'orientation de l'entaille par rapport à l'axe de chargement. Une variante consiste à utiliser des cubes entaillés ([Ince, 2012]).

Pour les essais de fissuration en mode mixte, différentes géométries sont utilisées

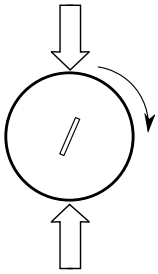
dans la littérature. De nombreux essais utilisent des poutres entaillées en flexion 3 points avec l'entaille décentrée ou des poutres en flexion 4 points avec des appuis asymétriques, de type Iocipescu ([Jenq et Shah, 1985], [Gálvez et al., 1998]). Avec ce type d'éprouvette, la fissure est sollicitée dans un premier temps suivant un chargement mixte. Puis la fissure s'oriente dans le plan des contraintes maximales principales afin de se propager en mode I.

Une campagne expérimentale de fissuration pour des trajets de chargement en mode I+II, proportionnel et non-proportionnel, sur des éprouvettes avec double entaille a été effectuée par Nooru-Mohamed ([Van Mier et Nooru-Mohamed, 1990, Nooru-Mohamed, 1992, Nooru-Mohamed et al., 1993]). Ces résultats expérimentaux sont utilisés comme cas de validation pour de nombreux modèles de rupture pour les matériaux quasi-fragiles, que ce soit pour les modèles d'endommagement anisotrope ([Sellier et Bary, 2002, Desmorat et al., 2007]), les modèles discrets ([Schlangen et Garboczi, 1997, Van Mier et al., 2002]), les modèles à zone cohésive ([Ruiz et al., 2001]) ou les modèles de type XFEM ([Meschke et Dumstorff, 2007]).

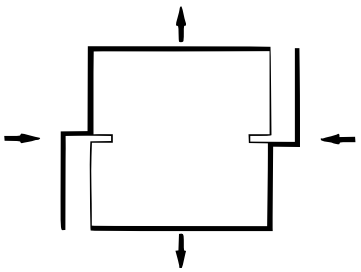


(a) Flexion trois points asymétrique

(b) Flexion 4 points asymétrique



(c) Essai de fendage avec rotation



(d) Montage de Nooru-Mohamed

FIGURE 3.2 – Différentes géométries d'éprouvettes communément utilisées pour des essais de fissuration en mode mixte I+II

2 Le pilotage d'essai de fissuration

Les matériaux quasi-fragiles présentent un comportement non-linéaire lors de cycles de traction, qui provient, en plus d'autres sources, de la nucléation, de la croissance et de la coalescence des micro-fissures. Les propriétés élastiques initiales du matériau (partie 1) se détériorent à cause de la nucléation de micro-fissures (partie 2) jusqu'à un point critique où la déformation et la localisation de l'endommagement apparaissent (partie 3). La perte des propriétés élastiques due aux micro-fissures peut être déterminée lors du début d'une phase de décharge (partie 4). Après la décharge, des déformations permanentes persistent et une reprise partielle de la rigidité est observée (partie 5), qui peut être expliquée en partie par la refermeture des micro-fissures et le frottement de ces micro-fissures.

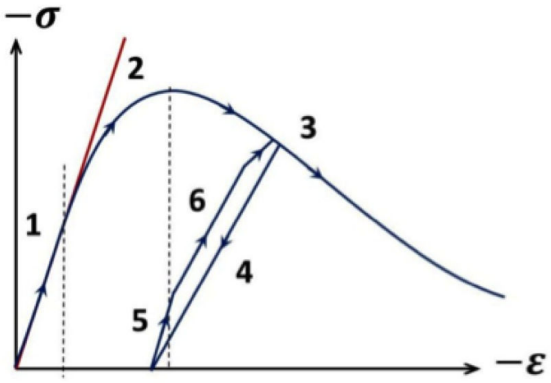


FIGURE 3.3 – Schéma du comportement d'un matériau quasi-fragile en compression

A l'intérieur de la zone d'élaboration de l'endommagement en pointe de fissure, le même ensemble de phénomènes se produit. Différentes approches ont été développées qui décrivent les propriétés de fissuration d'un matériau quasi-fragile à partir d'un modèle de comportement continu endommageable.

Pour cela une approche non-locale est nécessaire. En effet, la représentation des contraintes et des déformations comme quantités locales devient fortement dépendantes de la géométrie une fois la localisation des déformations apparue (soit au-delà de l'étape 2 sur la Fig.3.3). Or, c'est précisément le comportement du matériau identifié une fois la localisation de la déformation activée qui est le plus représentatif pour le problème de fissuration. Puisqu'en pointe de fissure, le champ de déformation est *géométriquement* localisé par nature.

3 Le matériau d'étude

Le matériau utilisé pour la campagne expérimentale est un mortier dont les propriétés mécaniques et leur variabilité ont déjà été évaluées. Il est constitué d'un mortier de type

CEM1 52,2 provenant d' HOLCIM, de sable normalisé ISO 679 ayant une granulométrie de 0/2, c'est-à-dire une taille de grain comprise entre 80 μm et 2 mm, et avec un rapport eau sur ciment de 0,46. La composition du mortier pour un 1 m^3 d'eau est donnée dans le tableau 3.1.

Sable (kg)	Eau (kg)	Ciment (kg)
1342	294	631

TABLE 3.1 – Composition du mortier pour 1 m^3 d'eau

Pour chaque gâchée, une période d'au minimum 28 jours à été respectée entre la coulée et l'utilisation de l'éprouvette, pour permettre au mortier d'atteindre ses propriétés optimales.

4 Géométrie de l'éprouvette

Pour réaliser des essais de fissuration, une éprouvette parallélépipèdique a été sollicitée en compression uniaxiale (Fig. 3.4). La poutre possède un trou circulaire traversant en son centre qui induit une concentration de contraintes de traction aux deux pôles du trou lors d'un chargement de compression. La contrainte de traction décroît avec l'éloignement du trou avant de disparaître.

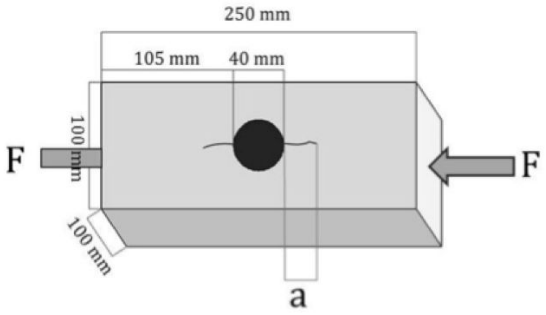


FIGURE 3.4 – Géométrie de l'éprouvette

L'évolution du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une double fissure coplanaire initiée aux deux pôles du cylindre a été déterminée par des simulations éléments finis dans un cadre linéaire élastique (Fig. 3.5).

Le facteur d'intensité des contraintes décroît avec la longueur de la fissure $\boldsymbol{a}$, d'une distance de $\boldsymbol{a}$ =2 mm à $\boldsymbol{a}$ = 50 mm. Au-delà de $\boldsymbol{a}$ =50 mm la pente de la courbe change et le facteur d'intensité des contraintes augmente. La propagation de la fissure est donc stable entre $\boldsymbol{a}$ =2 mm et $\boldsymbol{a}$ =50 mm .

La décroissance du facteur d'intensité des contraintes nominal avec la longueur de la fissure est utile, car, pour différents niveaux de compression, la fissure est arrêtée quand

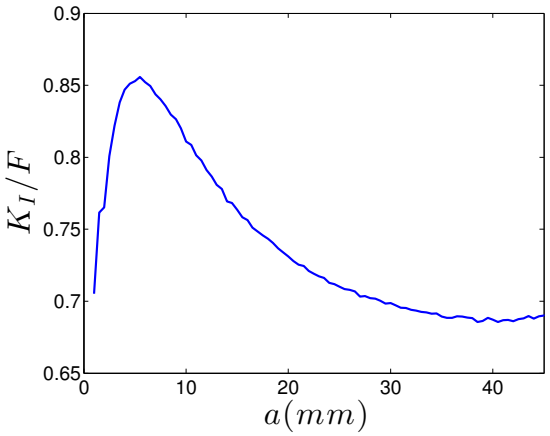


FIGURE 3.5 – Evolution du facteur d'intensité des contraintes en fonction de l'avancée de la fissure pour une pression imposée constante

la longueur de la fissure est telle que le facteur d'intensité des contraintes nominal K_I^∞ est juste en dessous de la ténacité K_{Ic}.

La longueur de la fissure est déterminée par corrélation d'image numérique. L'évolution de $K_I^\infty(a)$ est déterminée par des simulations par éléments finis en élasticité linéaire, permettant de déterminer la ténacité K_{Ic} à partir de la longueur de la fissure arrêtée a.

Cette géométrie permet également d'effectuer des mesures répétées de la ténacité sur le même échantillon. De plus, la pente dK_I^∞/da est suffisamment faible pour que l'incertitude liée à la mesure de la longueur de la fissure arrêtée ***a*** corresponde à une très faible incertitude sur la valeur mesurée de la ténacité K_{Ic}.

5 Protocole expérimental

La première phase de chaque essai est commune. Une fois que l'alignement de l'éprouvette est vérifié et que les conditions de prises de vues ont été déterminées, une première photo à l'état initial est prise. On effectue ensuite une rampe en effort avec un palier tous les 1kN. Au cours de chaque palier, une photo est prise. Le protocole de prise de photos est résumé sur la figure 3.6.

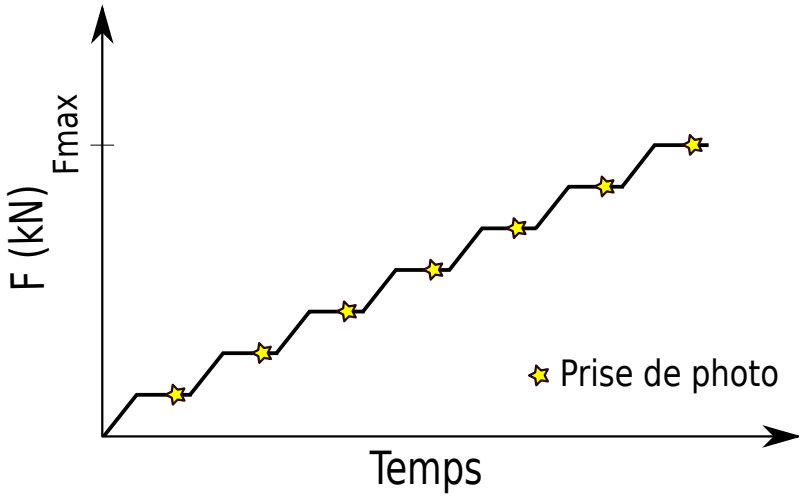


FIGURE 3.6 – Schéma du protocole expérimental pour la prise de photo

5.1 Estimer la position de la pointe de la fissure par corrélation d'images numériques

On cherche à estimer entre deux prises de photos la position de la pointe de la fissure afin de d'évaluer la longueur de la fissure.

La corrélation d'images numériques est utilisée pour déterminer la position de la pointe de la fissure. Cette technique permet de récupérer les champs de déplacements entre une image de référence et une image déformée ([Sutton et al., 1983]).

On considère le niveau de gris de l'image de référence f et de l'image déformée g, on peut écrire la conservation du niveau de gris, pourvu que d'autres mécanismes ne modifient pas le niveau de gris :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{g}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x})) \tag{3.1}$$

avec $\underline{u}(\underline{x})$ le déplacement du solide. La détermination de $\underline{u}(\underline{x})$ se fait par la minimisation de :

$$\eta^2 = \iint_\Omega \left[\underline{g}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x})) - \underline{f}(\underline{x})\right]^2 d\underline{x} \tag{3.2}$$

où Ω est la région d'intérêt.

Le champ de déplacement obtenu et ses dérivées permettent d'observer la présence de fissures (Fig. 3.7).

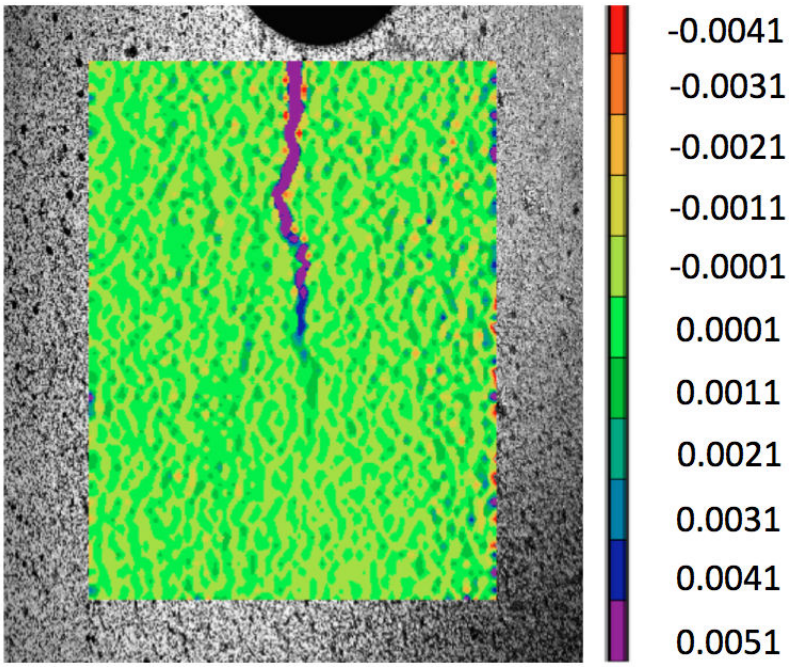


FIGURE 3.7 – Fissure observable sur le champ de déformation ε_{22} obtenu par corrélation d'images numériques

Une analyse par post-traitement du champ de déplacement est ensuite réalisée pour estimer la position de la pointe de fissure. Cette méthode ([Roux et Hild, 2006, Mathieu et al., 2012]) consiste à projeter la série de Williams ([Williams, 1957]), donnant le développement du champ de déplacement d'une fissure droite à front droit, et de minimiser le résidu de cette projection.

L'estimation de la pointe de la fissure dans un matériau cimentaire est accompagnée par différentes complexités. La première est que le champ de déplacement est de très petite amplitude, du fait de module d'Young et de l'amplitude des contraintes appliquées, le bruit de mesure va donc avoir un fort impact sur le champ de déplacement. De plus, le trajet de fissuration à la surface de l'éprouvette n'est pas rectiligne, elle est souvent tortueuse, l'identification du trajet de la fissure n'en sera que plus compliquée.

5.2 Estimation du facteur d'intensité des contraintes

Une fois la position de la pointe de la fissure estimée, on reporte la longueur de la fissure dans une simulation éléments finis. On effectue un calcul élastique avec la géométrie fissurée, et comme chargement une pression correspondant à l'effort appliqué, on en déduit le facteur d'intensité des contraintes correspondant. L'intérêt est qu'à partir de l'incertitude sur la longueur de la fissure a, on peut ainsi facilement définir une incertitude sur le facteur d'intensité des contraintes K_I.

6 Mesure de la ténacité

Un premier essai de compression monotone a été effectué pour déterminer la valeur de la ténacité. Pour identifier le K_{Ic}, on utilise la corrélation d'image afin de repérer la pointe de la fissure, puis on calcule à partir de simulations par éléments finis, la valeur du facteur d'intensité des contraintes K_I pour cette avancée de fissure.

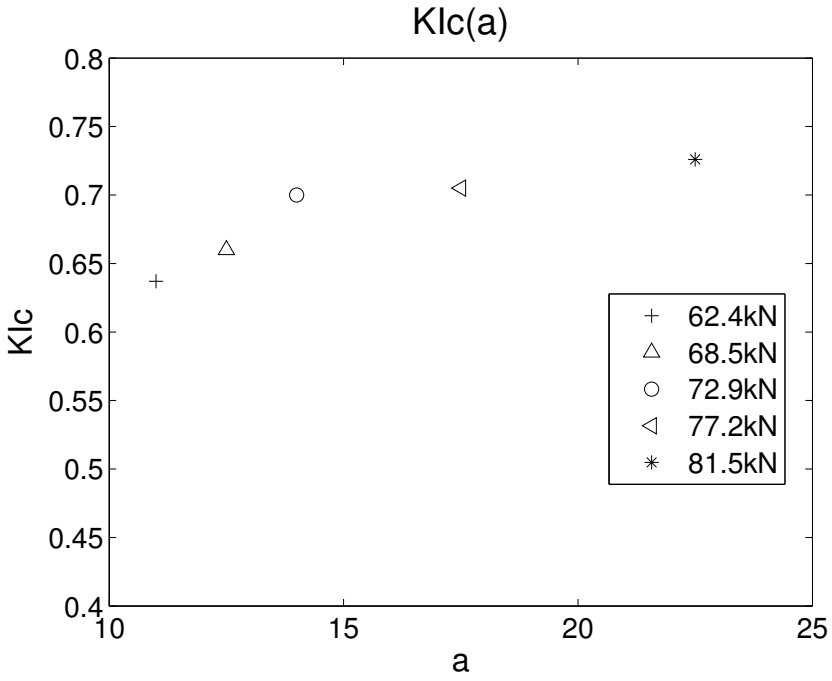


FIGURE 3.8 – Evolution de la ténacité apparente en fonction du chargement

Sur la figure 3.8, on observe que la ténacité augmente pour une longueur de fissure comprise entre 2 et 8 mm avant de se stabiliser vers $K_{Ic} = 0,72MPa\sqrt{m}$.

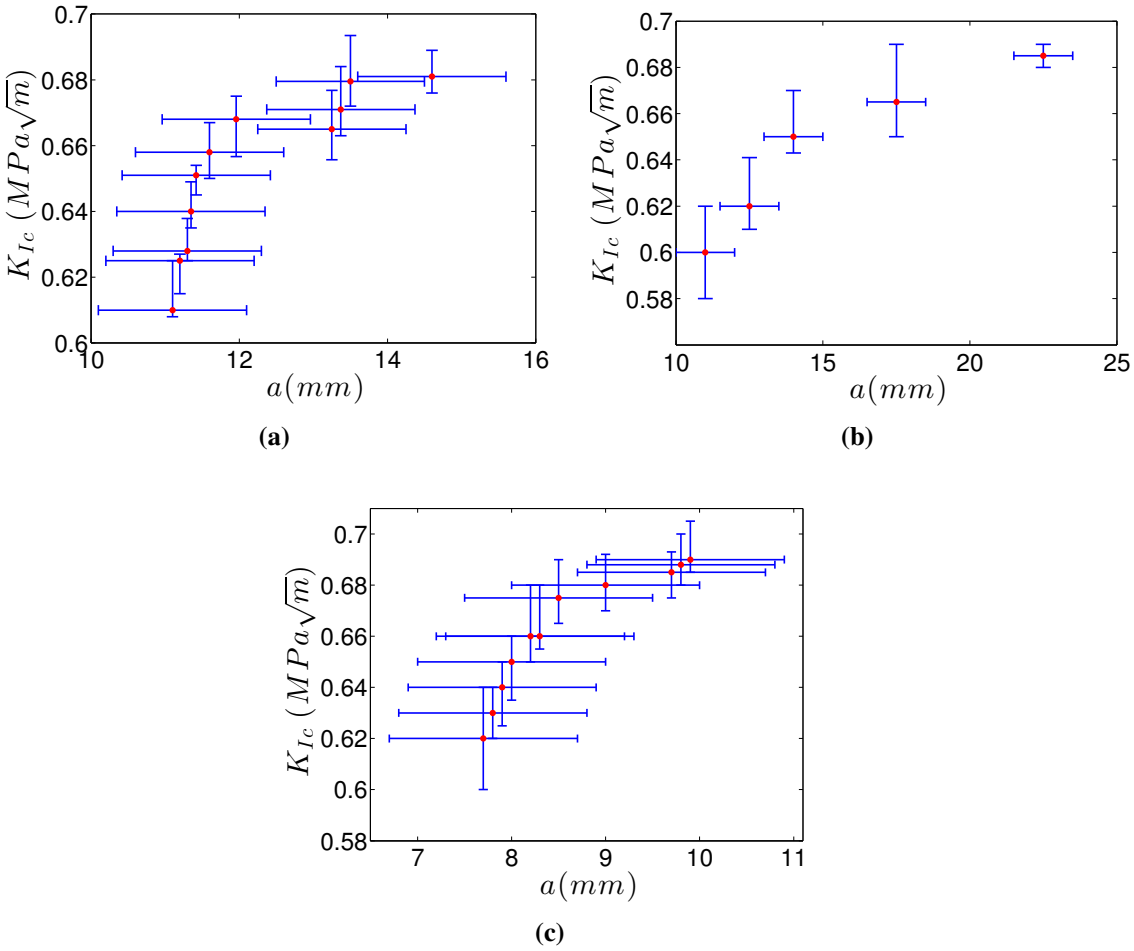


FIGURE 3.9 – Evolution de la ténacité apparente en fonction de la longueur de la fissure pour 3 spécimens provenant de la même gâchée

On observe sur les figures Fig. 3.9b, Fig.3.9a et Fig.3.9c que la ténacité semble se stabiliser à partir d'une longueur de fissure comprise entre 15 et 20 mm. Il est intéressant de noter que l'incertitude associée à la mesure de la longueur de la fissure est une limite supérieure. L'incertitude est surestimée de façon à garantir les résultats de mesure de K_{Ic} dans tous les cas. Il est aussi intéressant de noter que pour ces trois éprouvettes provenant de la même gâchée, la ténacité observée après stabilisation correspond dans les trois cas à une valeur de $K_{Ic} = 0,68MPa\sqrt{m} \pm 0,02MPa\sqrt{m}$ (Tab. 3.2).

Eprouvette	A	B	C
$K_{Ic} \quad en \quad MPa\sqrt{m}$	0,682 $\pm$ 0,015	0,685 $\pm$ 0,01	0,688 $\pm$ 0,018

TABLE 3.2 – Valeurs de la ténacité estimée pour trois éprouvettes provenant de la même gâchée

Cette valeur bien que proche de celle observée sur un échantillon provenant d'une gâchée précédente (Fig.3.8) est néanmoins différente que celle observée pour la figure 3.9. On observe une différence de quelques 5 centièmes de $MPa\sqrt{m}$.

Deux informations importantes sont à retenir de ces analyses, la ténacité évolue avant de se stabiliser et est variable entre deux gâchées. On observe également qu'il faut respecter une distance d'environ 15 mm entre le site d'amorçage de la fissure et la pointe de la fissure pour que la valeur de la ténacité soit stabilisée.

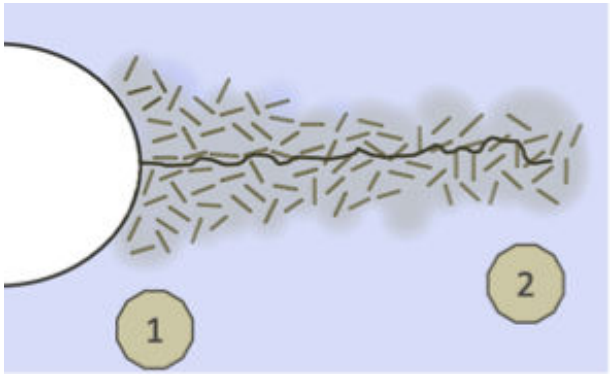


FIGURE 3.10 – Schéma représentant la zone d'amorçage avec les micro-fissures

Une cause possible permettant d'expliquer cette distance est le besoin de se dégager de la zone d'initiation, potentiellement riche en micro-fissures. En effet, lors de l'initiation de la fissure, un grand nombre de micro-fissures est créé. Afin de s'assurer que la fissure ne s'arrête que pour la valeur de K_{Ic} du facteur d'intensité des contraintes, il faut s'assurer de propager dans un régime stationnaire en dehors de la zone d'initiation et se situer dans une région où les micro-fissures ne sont présentes que pour permettre la propagation (Fig. 3.10).

A partir des courbes $K_I(a)$, on peut considérer qu'il faut propager d'au moins 15 mm pour se défaire de la zone d'endommagement générée par l'initiation de la fissure.

Cette distance où le K_{Ic} n'est pas constant nous indique aussi que la process zone n'avait pas encore sa taille nominale.

L'augmentation observée de la ténacité est supposée être associée au développement de l'endommagement le long des lèvres de la fissure qui produit un effet d'écrantage sur la fissure principale. L'avancée de la fissure nécessaire à la mesure d'une valeur stabilisée en K_{Ic} doit être supérieure au diamètre de la zone endommagée au lieu d'amorçage de façon à ce que K_{Ic} soit caractéristique de la propagation de la fissure et non de l'amorçage de la fissure.

Les valeurs de ténacité obtenues expérimentalement semblent être en accord avec la littérature. Dans [Leung et Li, 1989], la valeur de la ténacité varie en fonction de la taille de l'échantillon entre 0,3 et 2,4 $MPa\sqrt{m}$. Pour une taille d'éprouvette correspondant à celle utilisée lors de nos essais, on obtient une valeur aux alentours de 0,8 $MPa\sqrt{m}$. Prokopski et Langier ([Prokopski et Langier, 2000]) montrent que la ténacité dépend du ratio eau sur ciment et observent pour le béton, des variations de ténacité comprises entre 3,3 et 1,7 $MPa\sqrt{m}$ pour des rapports eau sur ciment entre 0,33 et 0,63. En utilisant des éprouvettes cylindriques entaillées soumises à un chargement de torsion,Wang ([Wang et al., 2010]) obtiennent des valeurs de ténacité comprises entre 0,33 et 0,37 $MPa\sqrt{m}$ pour un mortier ayant une résistance à la compression de $f_c = 34,45$ *MPa*. Xu et Reinhardt ([Xu et Reinhardt, 1999a, Xu et Reinhardt, 1999b, Xu et Reinhardt, 1999c]) estiment la valeur de la ténacité provenant de deux campagnes d'essais de flexion trois points. Les valeurs obtenues sont comprises entre 0,695$\pm$ 0,161 $MPa\sqrt{m}$ et 0,873 $\pm$ 0,196 $MPa\sqrt{m}$. [Xu et al., 2003] comparent la valeur estimée de la ténacité pour un mélange de béton. Deux montages ont été utilisés, des essais de flexion trois points et des essais de *Wedge Splitting Test* (WST). Ils estiment la valeur moyenne de la ténacité pour les essais de flexion trois points à $0,6597 \pm 0,1184$ $MPa\sqrt{m}$, et à $0,6218 \pm 0,1308$ $MPa\sqrt{m}$ pour les essais WST.

Ces derniers résultats sont extrêmement proches de ceux que nous avons obtenus ici, en revanche l'incertitude est bien plus faible dans nos essais.

7 Fissuration par fatigue

Pour chaque essai de fissuration, le protocole expérimental est le suivant (Fig. 3.11). Premièrement, on estime la valeur de la ténacité au cours d'une rampe de chargement avec pauses pour prendre des photos. La rampe de chargement continue tant que la valeur de la ténacité n'est pas stabilisée.

Une fois la valeur de la ténacité stabilisée, une photo est prise à l'effort maximum F_{max}, puis une autre à l'effort minimum F_{min} du chargement de fatigue. Ensuite, cent cycles de fatigue sont appliqués, puis un palier en effort à la valeur F_{max} au cours duquel une photo est prise, s'en suit un palier en effort à la valeur F_{min} et une photo. Cette opération est effectuée jusqu'à atteindre 10 000 cycles de fatigue. Une fois les 10 000 cycles atteints, 1000 cycles de fatigue sont appliqués entre les prises de photos.

La fin de l'essai est déterminée après une durée de 48 heures sans détection de propagation de la fissure.

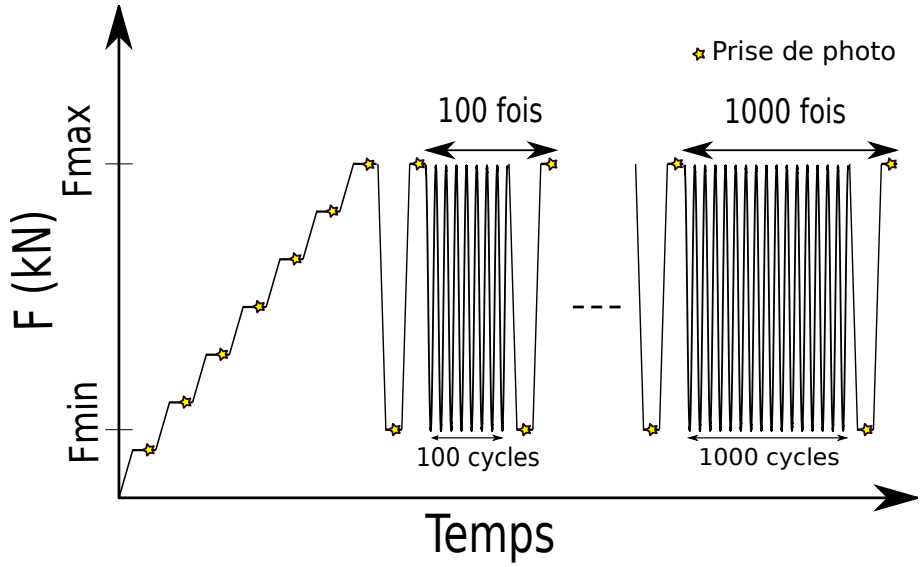


FIGURE 3.11 – Schéma du chargement appliqué lors des essais de fatigue

La valeur maximale appliquée pour déterminer la ténacité est $F_{max} = 70kN$. Une fois que la ténacité a atteint sa valeur de saturation, l'échantillon est ensuite soumis aux cycles de fatigue. Le rapport de charge R définit le ratio $\frac{F_{min}}{F_{max}}$. Trois essais de fatigue ont été réalisés pour des rapports de charge correspondant à $R = 0,1$, $R = 0,3$ et $R = 0,5$. Chacun de ces essais a été effectué à une fréquence de 5 Hz.

Pour chaque essai, la propagation de la fissure est non-linéaire. Des sauts dans la longueur de la fissure mesurée en surface apparaissent à différents instants. La détection de la pointe de la fissure est uniquement possible sur une face de l'éprouvette. Il est possible que des agrégats sur le front de la fissure ou que des effets tridimensionnels modifient localement le champ de contraintes, modifiant ainsi la propagation de la fissure. La durée d'un essai varie de 7 jours à 10 jours pour un nombre de cycles compris entre 1 et 3 millions de cycles, pour ne plus pouvoir observer de propagation de la fissure. Une courbe $a(N)$ est présentée pour une éprouvette sollicitée à un rapport de charge $R = 0,3$ à une fréquence de 5 Hz.

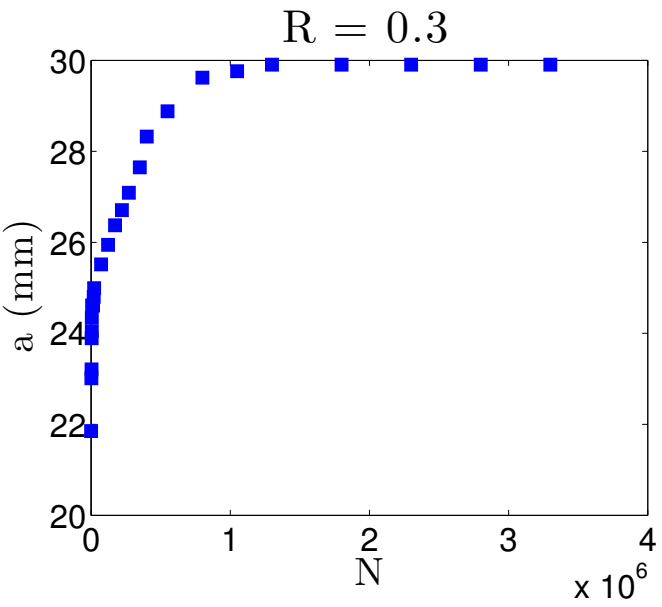
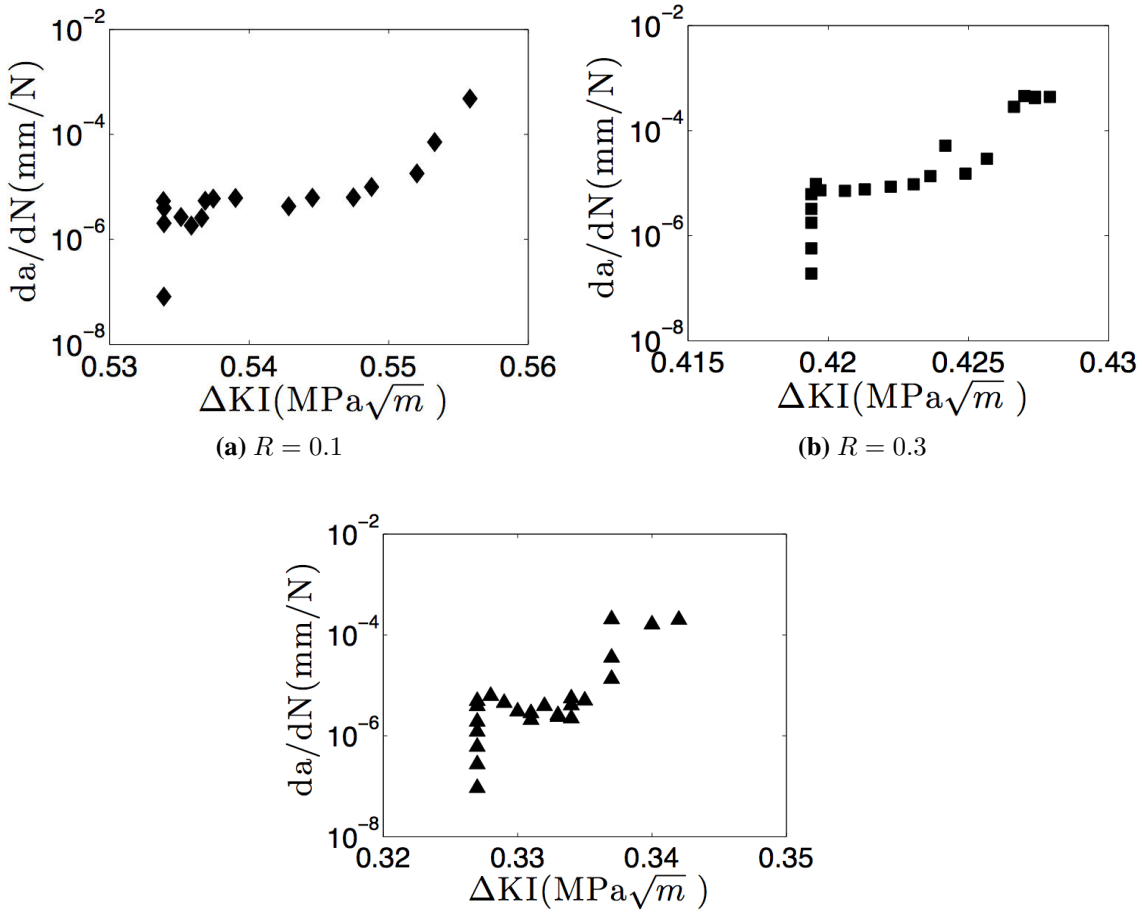


FIGURE 3.12 – Evolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles, pour un rapport de charge $R = 0,3$

Les courbes d'avancées de fissure par cycle da/dN en fonction de l'écart en facteur d'intensité des contraintes à F_{max} et F_{min} ΔK sont tracées sur la figure 3.13.



(a) $R = 0.1$

(b) $R = 0.3$

(c) $R = 0.5$

FIGURE 3.13 – Vitesse de fissuration pour différents rapport de charge : (a) $R = 0.1$,(b) $R = 0.3$ et (c) $R = 0.5$

On observe sur chaque graphe, trois phases distinctes. La première est une pente pratiquement verticale où la vitesse de fissuration par cycle est très faible, voire quasi nulle. C'est à partir de ce moment que la propagation de la fissure n'est plus détectée expérimentalement. La valeur de ΔK pour laquelle la dernière avancée de fissure est détectée est appelée seuil de fissuration par fatigue ΔK^{th}. Cette valeur est bien inférieure à la valeur de la ténacité. On observe pour chaque essai une valeur de ΔK^{th} différente, donc une dépendance de la fissuration par fatigue au rapport de charge. L'ensemble des résultats est résumé dans le tableau 3.3.

R	0,1	0,3	0,5
ΔK^{th} en $MPa\sqrt{m}$	0,53 $\pm$ 0,01	0,42 $\pm$ 0,01	0,32 $\pm$ 0,01

TABLE 3.3 – Seuil de fatigue identifié pour différents rapports de charge

La seconde phase est linéaire, elle correspond à la phase stable de la fissuration. Enfin la dernière phase est non-linéaire, elle correspond à la fatigue instable, une fois dans ce domaine, la fissure se propage jusqu'à rupture.

Si l'on trace le seuil de fissuration par fatigue ΔK^{th} obtenu expérimentalement en fonction du rapport de charge appliqué, les résultats s'alignent sur une droite qui tend vers $\Delta K^{th} = 0$ pour $R = 1$.

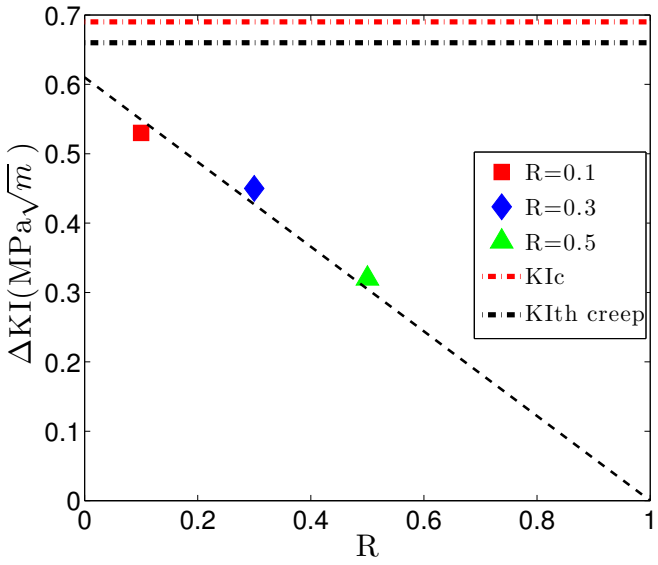


FIGURE 3.14 – Evolution du seuil du facteur d'intensité des contraintes ΔK^{th} en fonction du rapport de charge R

Pour comparer les courbes d'avancée de la pointe de la fissure par cycle, le choix a été fait d'utiliser le rapport K_I^{max}/K_{Ic}. En effet, deux des trois éprouvettes, celle de $R = 0,3$ et celle de $R = 0,1$, proviennent d'une gâchée plus récente et la ténacité observée sur ces dernières est légèrement plus faible que celle observée lors de l'essai de fatigue à $R = 0,5$. Les valeurs de ténacité pour chacune des éprouvettes sont répertoriées dans le tableau 3.4.

R	0,1	0,3	0,5
K_{Ic} en $MPa\sqrt{m}$	0,65 $\pm$ 0,015	0,64 $\pm$ 0,02	0,69 $\pm$ 0,014

TABLE 3.4 – Valeurs de la ténacité pour les éprouvettes utilisées pour les essais de fatigue à différents rapports de charge

Si l'on trace les avancées de pointe de fissure par cycle en fonction de la valeur maximale en K_I^∞ appliquée divisée par la ténacité, on obtient la figure 3.15. Les courbes tendent à se superposer dans la première phase, puis les paliers où la vitesse de fissuration par cycle est stable sont plus importants pour les rapports de charge plus élevés.

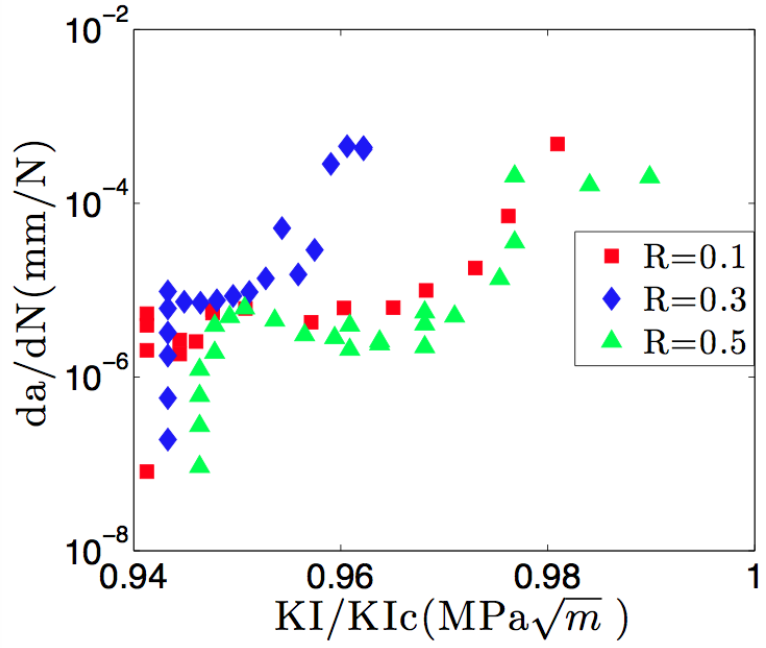


FIGURE 3.15 – Comparaison des vitesses de fissuration en fonction du rapport K_{IMax} sur K_{Ic}

Pour chaque essai de fissuration par fatigue, un plateau est observé sur la courbe $da/dN(\Delta K)$, ce qui est caractéristique d'un couplage entre la fissuration par fatigue et le fluage.

Afin de caractériser ce couplage, un essai combinant une première phase de fluage suivi d'une phase de fatigue a été réalisé.

7.1 Influence du fluage sur la fissuration sous-critique

Pour distinguer la contribution du fluage de celle de la fatigue à la fissuration sous critique, une éprouvette a été sollicitée à pression constante sur une période de 15 jours correspondant globalement à une période d'essai de fissuration par fatigue. La pression exercée correspond à l'effort pour lequel la valeur de la ténacité est stabilisée. S'ensuit une seconde période où l'éprouvette est ensuite soumise à un chargement cyclique de rapport de charge $R = 0,1$.

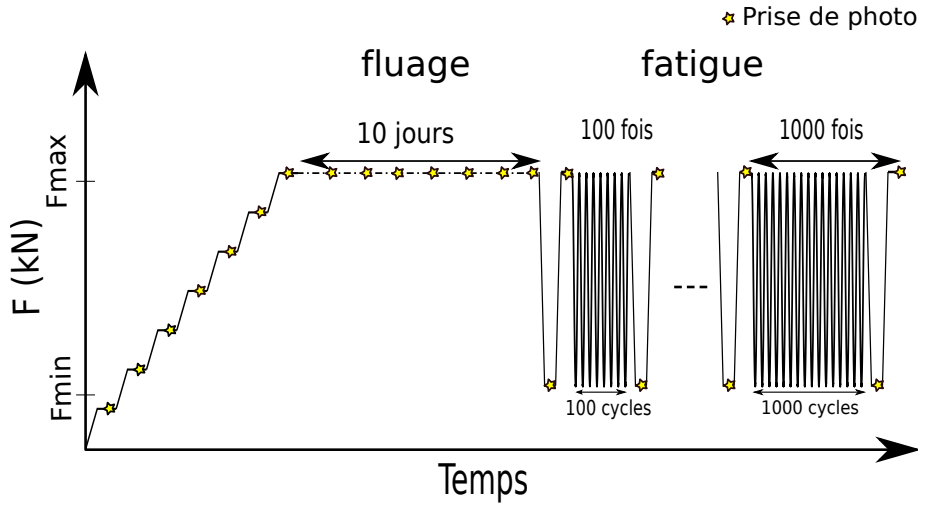


FIGURE 3.16 – Schéma du chargement appliqué lors de l'essai de fluage

Lors du fluage, la propagation et l'arrêt de la fissure sont observés. La période durant laquelle aucune avancée de fissure n'a pu être déterminée est de 36 heures. Cela correspond à une avancée de fissure inférieure à $10^{-6} mm.h^{-1}$. Un seuil de fissuration par fluage K_{Ith}^{creep} peut être déterminé à partir de la longueur de la fissure arrêtée. On obtient une valeur de $0,66 MPa\sqrt{m}$ pour K_{Ith}^{creep}.

Une fois la période de fluage écoulée, une sollicitation cyclique est appliquée. La propagation de la fissure, qui s'était arrêtée lors du fluage, est observée. On observe aussi l'apparition d'une seconde fissure à proximité de la fissure principale (Fig. 3.17). La propagation des deux fissures est ensuite complexe, l'une avance rapidement et l'autre s'arrête puis inversement. Du fait des deux fissures l'évaluation du facteur d'intensité des contraintes est discutable, la distance entre les deux pointes de fissure n'est que d'une dizaine de millimètres.

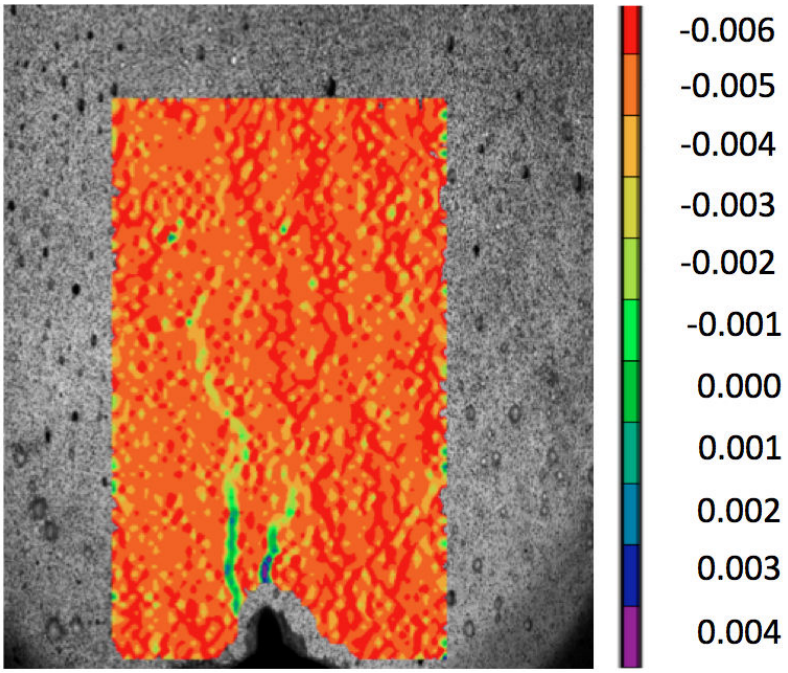


FIGURE 3.17 – Champ de déformation ε_{22} obtenu par corrélation d'image, deux fissures sont observables.

Bien que l'analyse du seuil de fatigue après fluage soit compromise par l'apparition d'une seconde fissure, cet essai aura permis de caractériser l'influence du fluage sur la fissuration par fatigue. Le fluage produit bien une fissuration sous-critique, mais le seuil de fissuration par fluage est bien au-dessus de valeur en K_I pour laquelle les fissures se propagent en fatigue lors des différents essais de fissuration. Les seuils de fissuration par fatigue semblent donc ne pas être couplés au fluage.

En effet, si l'on utilise une interpolation linéaire sur la figure 3.14, on obtient pour un rapport de charge $R = 0$, une valeur de ΔK_{th} de l'ordre de $0,61MPa\sqrt{m}$, qui reste donc inférieure au seuil de fluage déterminé expérimentalement à $0,66MPa\sqrt{m}$.

7.2 Discussion

Ces différents essais ont permis de faire ressortir plusieurs points importants sur le comportement du mortier. Concernant la ténacité, la ténacité du matériau évolue avec la propagation, avant de se stabiliser pour une longueur de propagation d'environ 15mm. Plusieurs hypothèses sont envisageables. La région où apparaît la fissure étant supposée dense en micro-fissures, ces micro-fissures peuvent créer un effet d'écran sur la fissure principale, ce qui peut modifier les conditions de stabilisation de la propagation stable de la fissure. Elle devrait ainsi se propager de manière suffisante pour se dégager de la zone d'amorçage de la fissure. Une seconde hypothèse est que la zone d'élaboration de

l'endommagement a besoin de se stabiliser, nécessitant une distribution de micro-fissures particulière en pointe de fissure.

Les résultats expérimentaux tendent à montrer la reproductibilité des mesures de ténacité sur les éprouvettes d'une même gâchée. La dispersion des valeurs de ténacité entre deux gâchées est estimée expérimentalement à quelques pour cent (ici 4 %), ce qui est largement supérieur à l'incertitude de mesure et néanmoins assez faible vis-à-vis de la valeur de K_{Ic}.

Concernant la fatigue, les résultats expérimentaux du comportement en fatigue du mortier montrent une dépendance au rapport de charge. Les évolutions da/dN se superposent au niveau du seuil si l'on considère la valeur maximale de K_I divisée par la valeur de la ténacité K_{Ic} déterminée expérimentalement, ce qui nous a alerté sur un possible effet du fluage. Cet effet a été testé, et les résultats expérimentaux montrent que la fatigue a une portée plus importante que le fluage.

Il a été montré que l'hygrométrie avait un fort effet sur la fissuration des roches ([Nara et al., 2011]). Afin de distinguer l'effet de la température et celui de l'hygrométrie, des essais de fissuration sous atmosphère contrôlée ont été réalisés sur trois types de roches (Kushiro Sandstone, Berea Sandstone, Shirahama Sandstone). Les résultats expérimentaux montrent un fort effet de l'hygrométrie et un faible effet de la température sur la fissuration dans les roches. La vitesse de propagation augmente et le facteur d'intensité des contraintes diminue quand le taux d'humidité augmente et que la température est maintenue constante. Suivant le type de roche utilisé, la diminution du facteur d'intensité des contraintes est comprise entre 20 et 50 %. L'augmentation de la vitesse de fissuration est comprise entre 5 à 6 ordres de grandeur pour la *Berea Sandstone* et 9 à 10 ordres de grandeur pour la *Shirahama Sandstone* et la *Kushiro Sandstone* lorsque le taux d'humidité est triplé à température constante.

On remarque que les conditions atmosphériques d'essai, et notamment l'hygrométrie, ont un fort effet sur la fissuration par fatigue dans la roche. Les différences observées sur les courbes $da/dN(\Delta K)$ et de mesure de ténacité pourraient en partie être expliquées par des conditions de pression, température et hygrométrie différentes lors des essais.

Une seconde origine susceptible d'expliquer ces différences est les conditions de curée, c'est-à-dire les conditions dans lesquelles les éprouvettes ont été conservées entre le gâchage et l'utilisation des éprouvettes. Du fait de conditions de séchage différentes, l'état du matériau sera différent et pourra présenter avant l'essai des fissures de retrait plus ou moins importantes.

8 Approche expérimentale condensée en pointe de fissure

L'étude est ensuite axée sur la caractérisation expérimentale de la réponse non-linéaire de la zone d'élaboration de l'endommagement en pointe de fissure à partir d'une approche non-locale. De nombreuses approches non-locales ont été proposées dans la littérature. Dans [Moës et al., 2011] par exemple, les auteurs supposent que la distribution de l'endommagement est explicitement définie par une fonction de distance. Dans cette partie, une analyse, que l'on peut classer dans la même catégorie, est faite, excepté que la fonction de pondération n'est pas donnée *a priori*, mais directement déterminée expérimentalement.

La méthode expérimentale dérive d'une technique qui a été utilisée pour analyser la plasticité en pointe de fissure dans les métaux ([Pommier et al., 2009, Decreuse et al., 2012, Fremy et al., 2012]) utilisant le champ de vitesse mesuré expérimentalement par corrélation d'image ou en utilisant des simulations éléments finis en mode I ou en mode mixte I+II.

Cette technique est basée sur les hypothèses suivantes :

— la "process zone" est supposée être complètement confinée dans un milieu linéaire élastique. Cette contrainte limite, de manière drastique, le nombre de degrés de liberté nécessaires pour caractériser la réponse non linéaire de la "process zone" en pointe de fissure,

— deuxièmement, la géométrie de la fissure est autosimilaire par rapport à la pointe de la fissure, et de ce fait le champ de vitesse est localement autosimilaire, c'est à dire, qu'il puisse être le produit d'un facteur d'intensité (un degré de liberté) et d'une distribution spatiale autosimilaire,

— troisièmement, par un simple renversement de la direction de chargement, il est toujours possible d'obtenir, au moins transitoirement, un comportement linéaire élastique du matériau au sein de la "process zone". Cela implique que les réponses linéaires et non-linéaires sont deux phénomènes indépendants qui peuvent être caractérisés indépendamment et qui sont caractérisés indépendamment par leur facteur d'intensité (degré de liberté) et une distribution spatiale autosimilaire,

— enfin, le champ de déplacement à chaque intervalle de temps dt dans le système de coordonnées local attaché au plan et au front de la fissure est supposé être la superposition de :
  - un champ de déplacement relatif à la réponse linéaire élastique de la "process zone", en considérant l'état d'endommagement courant, caractérisé par le facteur d'intensité $d\tilde{K}_I$. Ce terme étant défini comme la somme de la contribution du facteur d'intensité nominal dK_I^{∞} et de l'effet d'écran de la "process zone" sur la fissure principale dK_I^{sh}, caractérisé par $\tilde{K}_I - dK_I^{\infty}$,

- un champ de déplacement relatif au comportement non-linéaire de la process zone, caractérisé par le facteur d'intensité $d\rho_I$.

Le champ de vitesse en mode I à proximité de la pointe de la fissure peut alors être approché par :

$$\underline{v}(P,t) = \dot{\hat{K}}_I(t)\underline{u}_I^e(P) + \dot{\rho}_I(t)\underline{u}_I^{pz}(P) \tag{3.3}$$

Dans l'équation Eq.3.3, $\underline{u}_I^e(P)$ et $\underline{u}_I^{pz}(P)$ sont deux champs de référence relatifs au comportement élastique de la macro-fissure et de la "process zone", qui décrivent la distribution spatiale autour du front de la fissure et qui sont utilisés comme fonction de pondération pour approcher le champ de vitesse en pointe de fissure.

L'objectif principal de ces essais est de déterminer ces deux fonctions de pondération $\underline{u}_I^e(P)$ $\underline{u}_I^{pz}(P)$ ainsi que l'évolution de l'endommagement, c'est à dire l'évolution de ρ_I au cours de cycles de fatigue en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal K_I^∞.

Pour cette étude, un échantillon pour lequel la propagation a atteint le seuil de propagation ΔK_{th} est utilisé. L'éprouvette prise pour étudier la fissuration par fatigue à un rapport de charge $R = 0,5$ est utilisée pour l'étude expérimentale de l'approche condensée en pointe de fissure.

Dans cette analyse, seul le comportement en mode I a été observé. Avant toute autre chose, il est important de signaler que le facteur d'intensité des contraintes nominal est déterminé dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture, en utilisant le chargement de compression appliqué sur l'éprouvette, la longueur de la fissure déterminée par la corrélation d'images numériques, le calcul de structures en élasticité linéaire.

L'échantillon est chargé cycliquement et le signal du chargement en effort est utilisé pour déclencher la prise d'images de façon à avoir 11 images par charge et par décharge. La pointe de la fissure est localisée une première fois et les images sont ensuite recentrées afin de placer la pointe de la fissure au centre de l'image et le plan de fissuration au milieu. Cette opération revient à enlever les mouvements de corps rigide du champ de déplacement total. Ensuite, le champ de déplacement relatif au référentiel attaché à la pointe et au plan de la fissure est extrait de la séquence d'images. Il est ensuite partitionné en composantes de mode I et de mode II en utilisant des considérations géométriques simples :

$$\underline{v}(P,t) = v_I(x,y,t) + v_{II}(x,y,t) \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} 2v_{Ix} = v_x(x,y,t) + v_x(x,-y,t) \\ 2v_{Iy} = v_y(x,y,t) - v_y(x,-y,t) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} 2v_{IIx} = v_x(x,y,t) - v_x(x,-y,t) \\ 2v_{IIy} = v_y(x,y,t) + v_y(x,-y,t) \end{cases} \tag{3.6}$$

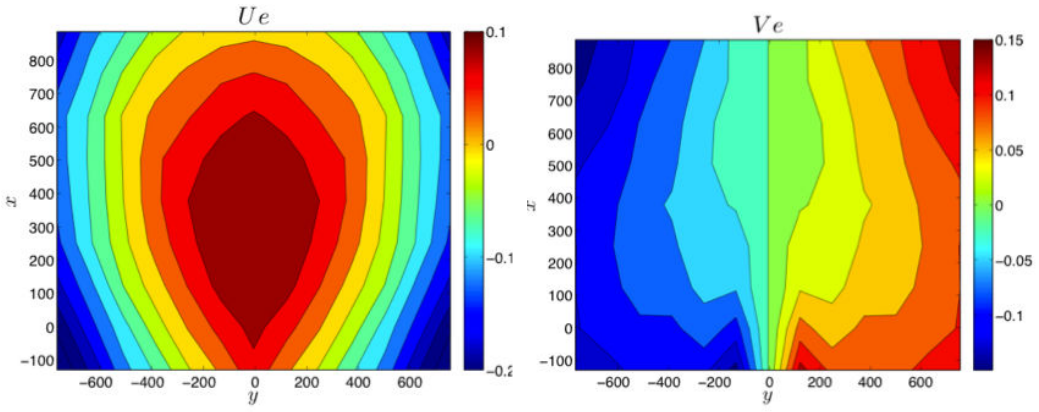
Il est ensuite vérifié que les composantes de mode II du champ de déplacement sont négligeables par rapport aux composantes de mode I. Les composantes de mode I sont ensuite partitionnées en deux termes (Eq. 3.3). La première caractérise le champ de déplacement de la fissure macroscopique, en considérant l'effet du chargement nominal et l'effet d'écran de la process zone, et la seconde caractérise le comportement non-linéaire de la "process zone". Pour cela, il est nécessaire de construire deux champs de référence $\underline{u}^e(P)$ et $\underline{u}^{pz}(P)$ qui seront utilisés pour approcher le champ de vitesse en utilisant l'équation Eq. 3.3.

Afin d'identifier le champ de référence élastique, trois cycles sont appliqués avec une amplitude de chargement correspondant à celle appliquée après arrêt de la fissure au seuil de non propagation en fatigue, soit $F_{min} = 35kN$ et $F_{max} = 70kN$.

Pour chaque cycle, onze images ont été prises durant la phase de charge et celle de décharge. Ces images ont ensuite été post-traitées par la corrélation d'images ([Mathieu et al., 2012], [Besnard et al., 2006]) pour déterminer le champ de déplacement $d\underline{u}(P, dt)^{DIC}$ associé à chaque couple d'images. La fissure étant arrêtée, la "process zone" est supposée se comporter essentiellement de manière élastique. Dans ce cas, pour chaque incrément de temps dt, l'approximation Eq.3.3 se réduit à :

$$d\underline{u}(P, dt)^{DIC} = dK_I^{\infty}(dt)\underline{u}^e(P) \tag{3.7}$$

La variation du facteur d'intensité des contraintes nominal dK_I^{∞} entre deux images est calculée à partir de l'incrément en effort dF_{max} appliqué sur l'éprouvette et sur la fissure arrêtée. Cela permet de déterminer $\underline{u}^e(P)$ pour chaque couple d'images en utilisant l'équation 3.7. Finalement, afin de limiter les erreurs de mesures et le bruit sur le champ élastique, le champ de référence élastique $\underline{u}^e(P)$ est calculé à partir de la moyenne des champs déterminés pour chaque rampe de charge et de décharge au cours des trois premiers cycles.



(a) Ue **(b)** Ve

FIGURE 3.18 – Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images

Les deux composantes du champ de référence élastique sont représentées sur la figure 3.18. L'intensité de la composante V_e normale au plan de la fissure est discontinue le long des lèvres de la fissure et symétrique.

Une fois le champ de référence élastique identifié expérimentalement, l'échantillon subit ensuite un chargement cyclique à valeur moyenne constante au-delà du seuil de fatigue, afin d'avoir une réponse non-linéaire de la "process-zone". Le chargement au cours de l'analyse du comportement en pointe de fissure est représenté sur la figure 3.19.

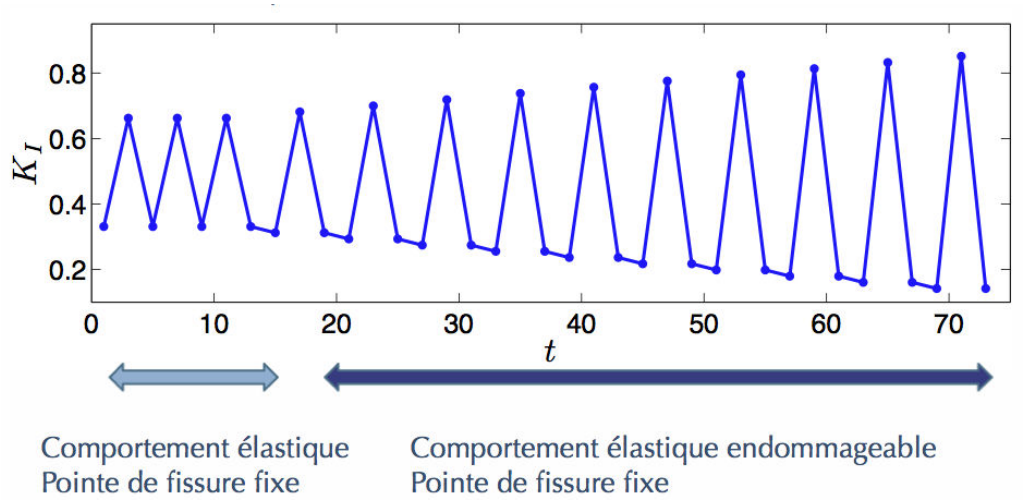


FIGURE 3.19 – Schéma du chargement imposé sur l'éprouvette pour l'observation du comportement en pointe de fissure après arrêt de la fissure au seuil de non propagation par fatigue

Pour chaque charge et décharge, onze images sont prises et le champ de déplacement entre deux images est déterminé par corrélation d'images numériques. Le champ de déplacement est ensuite partitionné en composantes de mode I et de mode II, en considérant la position de la pointe de la fissure identifiée lors du seuil de fatigue. La composante de mode I est ensuite projetée sur le champ de référence élastique de mode I $\underline{u}^e(P)$:

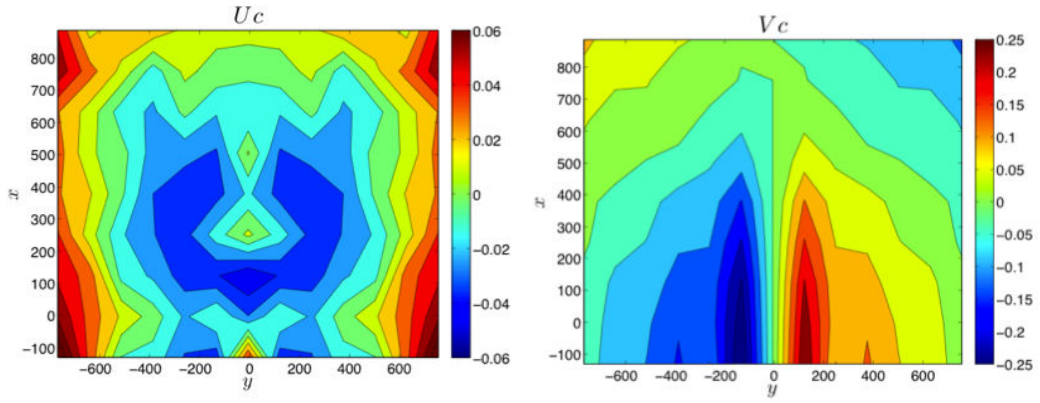
$$d\tilde{K}_I(t) = \frac{\sum_{P\in D} d\underline{u}^{DIC}(P,dt).\underline{u}^e(P)}{\sum_{P\in D} \underline{u}^e(P).\underline{u}^e(P)} \tag{3.8}$$

Le résidu de cette projection Eq. 3.8 est ensuite déterminé pour chaque pas de temps :

$$d\underline{u}^{res}(P,t) = d\underline{u}^{DIC}(P,t) - d\tilde{K}_I(t).\underline{u}^e(P) \tag{3.9}$$

Afin de construire le champ de référence $\underline{u}^{pz}$ qui caractérise le comportement de la process zone, la transformée de Karhunen-Loeve est utilisée.

La transformée de Karhunen-Loeve est une méthode de décomposition propre orthogonale, qui permet de faire ressortir les déplacements indépendants ou faiblement corrélés. Appliquée sur une matrice spatio-temporelle, où à chaque colonne est assigné le champ de déplacement à l'instant t, et à chaque ligne la valeur du résidu $d\underline{u}^{pz}(P,t)$ au point P au cours du temps, la matrice d'auto-corrélation spatiale est ainsi définie. Le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de cette matrice correspond au champ de référence $\underline{u}^{pz}(P)$ à un facteur multiplicateur près. Les deux composantes du champ de référence $\underline{u}^{pz}(P)$ sont représentées sur la figure 3.20.



(a) Uc **(b)** Vc

FIGURE 3.20 – Champs de référence complémentaires expérimentaux obtenus par corrélation d'images

Une fois le champ de référence complémentaire $\underline{u}^{pz}(P)$ construit, la variation du facteur d'intensité complémentaire $d\rho_I$ entre deux pas de temps est calculée de la façon

suivante :

$$d\rho_I(t) = \frac{\sum_{P\in D} d\underline{u}^{DIC}(P,dt).\underline{u}^c(P)}{\sum_{P\in D} \underline{u}^c(P).\underline{u}^c(P)} \tag{3.10}$$

L'évolution de $\rho_I(t)$ au cours du chargement est tracée sur la figure 3.21. Durant les premiers cycles pour lesquels l'amplitude correspond à celle utilisée lors de la détermination du seuil de fatigue, la valeur de $\rho_I(t)$ reste négligeable. On observe ensuite que la valeur moyenne et l'amplitude de $\rho_I(t)$ augmentent avec l'amplitude du chargement.

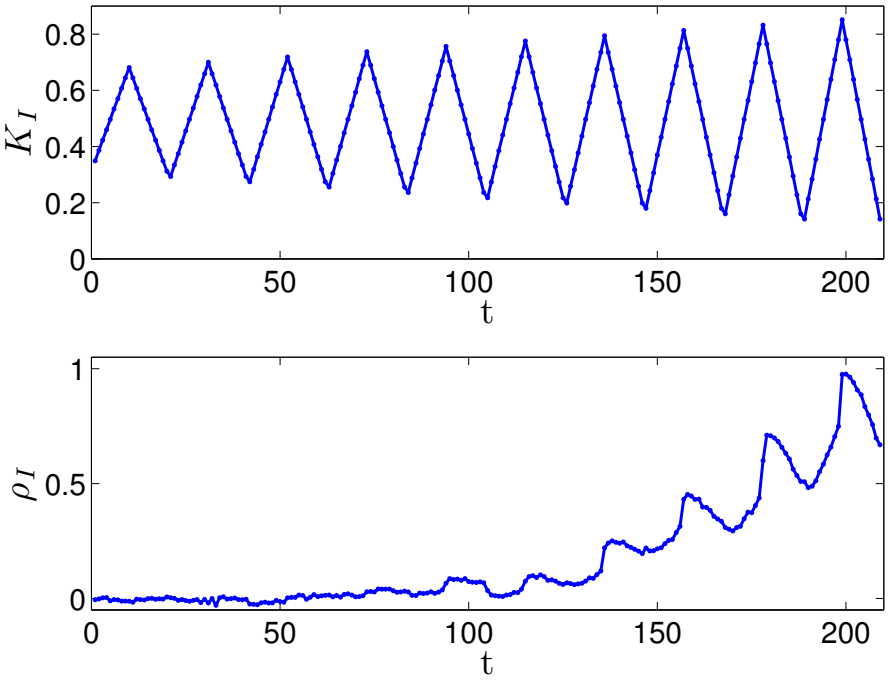


FIGURE 3.21 – Evolution des facteurs d'intensité élastique et complémentaire au cours du temps

L'erreur $C_{2R}(t)$ associée à l'approximation du champ mesuré $d\underline{u}^{DIC}(P,t)$ par Eq.3.3 s'exprime selon :

$$C_{2R}(t) = \frac{\sqrt{\sum_{P\in D}\left(d\underline{u}^{DIC}(P,dt) - d\tilde{K}_I(t).\underline{u}^e(P) - d\rho_I(t).\underline{u}^{pz}(P)\right)^2}}{\sqrt{\sum_{P\in D}\left(d\underline{u}^{DIC}(P,dt)\right)^2}} \tag{3.11}$$

L'erreur associée à l'approximation élastique linéaire de $d\underline{u}^{DIC}(P,t)$ est calculée de la façon suivante :

$$C_{1R}(t) = \frac{\sqrt{\sum_{P\in D}\left(d\underline{u}^{DIC}(P,dt) - d\tilde{K}_I(t).\underline{u}^e(P)\right)^2}}{\sqrt{\sum_{P\in D}\left(d\underline{u}^{DIC}(P,dt)\right)^2}} \tag{3.12}$$

L'évolution de ces deux erreurs mesurées au cours de l'essai est tracée sur la figure 3.22.

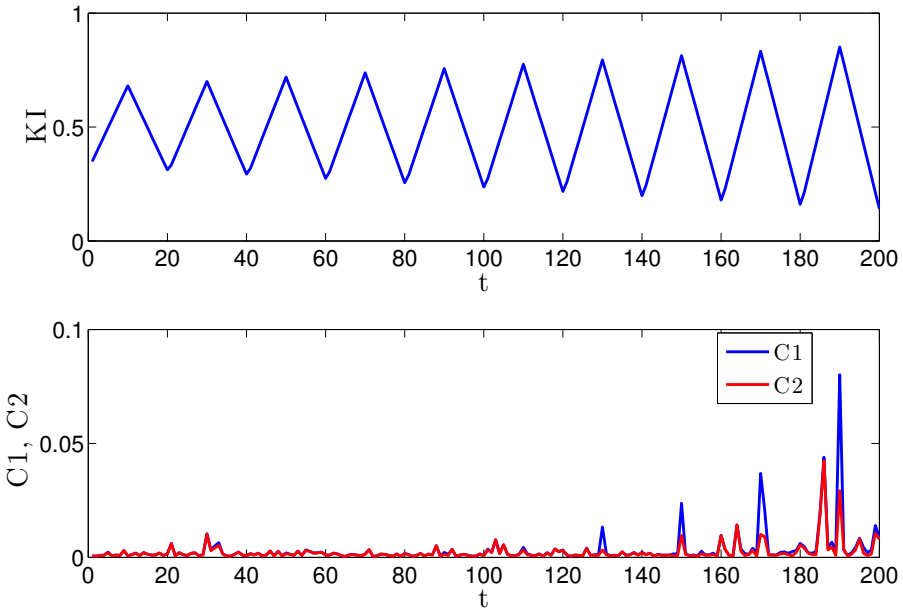


FIGURE 3.22 – Evolution des erreurs $C1$ et $C2$ au cours du temps

On observe que l'erreur reste petite, en dessous de 10%, et qu'à certain pas de temps l'erreur $C_{1R}(t)$ associée à l'approximation élastique est bien au-dessus de celle associée à l'approximation non-linéaire $C_{2R}(t)$, indiquant la présence de l'endommagement au cours de ces pas de temps.

Cette analyse permet de tracer la réponse non-linéaire de la process zone en pointe de fissure. Le facteur d'intensité des contraintes nominal K_I^∞ appliqué pendant la fatigue est tracé en fonction du facteur d'intensité ρ_I qui caractérise le comportement non-linéaire de la process zone.

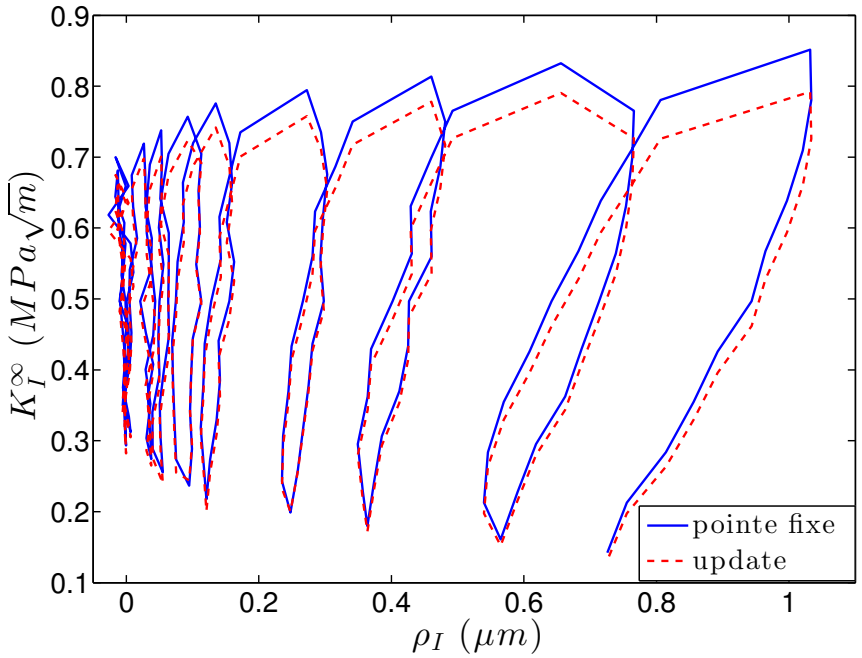


FIGURE 3.23 – Evolution des facteurs d'intensité élastique nominal et complémentaire au cours du temps. La ligne pleine bleue correspond la borne inférieure de la longueur de la fissure et la ligne pointillée à la borne supérieure

Du fait que la fissure se propage au cours de la fatigue, l'analyse complète a été répétée pour deux longueurs de fissure possible, la première correspond à la limite inférieure où l'on considère la longueur de la fissure comme étant celle avant la propagation par fatigue, et la seconde où l'on considère que la longueur de la fissure à la fin de la propagation par fatigue, sera la borne supérieure. La position de la pointe de la fissure ne semble pas modifier de façon significative l'évolution des facteurs d'intensité (Fig.3.23).

L'évolution est analogue à celle d'un matériau quasi-fragile non fissuré. Dans un premier temps, la courbe est verticale, et ensuite la pente décroît quand le degré d'endommagement augmente. Un déplacement permanent est aussi observé, ce qui tend à dire qu'il provient du frottement entre les faces des micro-fissures.

Il est important de noter que le champ de référence $\underline{u}^{pz}(P)$ déterminé au cours de cet essai a une composante normale au plan de la fissure qui est discontinue le long des lèvres de la fissure. Du fait que la portion du champ de déplacement associé à la "process zone" dans l'équation Eq. 3.3 est approchée par $d\rho_I(t).\underline{u}^{pz}(P)$, la discontinuité est directement proportionnelle à $d\rho_I(t)$. En d'autres mots, $d\rho_I(t)$ mesure aussi l'évolution de l'ouverture en pointe de la fissure (*Crack Tip Opening Displacement* ou CTOD) au cours de la fatigue.

Les résultats tracés sur la figure 3.23 indiquent que le CTOD augmente de manière significative au cours des cycles de fatigue. On observe également que le facteur d'intensité des contraintes maximales appliquées K_I^∞ au cours des cycles de fatigue est nettement supérieur à la ténacité. Ce résultat a été soigneusement vérifié. Les cycles de fatigue peuvent permettre de nucléer une densité de micro-fissures plus importante à l'intérieur de la proces zone, augmentant ainsi l'effet d'écran sur la fissure principale et expliquant cette augmentation apparente de la résistance à la fissuration du matériau.

L'effet d'écran des micro-fissures peut être corrélé au comportement non-linéaire de la process zone. La différence entre le facteur d'intensité des contraintes nominal K_I^∞ et le facteur d'intensité élastique vu par la fissure $\tilde{K}_I$ exprime le facteur d'intensité d'écrantage. L'évolution du facteur d'intensité d'écrantage est tracée en fonction de l'évolution du facteur d'intensité non-linéaire ρ_I. Il apparaît que le facteur d'intensité non-linéaire est linéairement dépendant du facteur d'intensité d'écrantage, comme le montre la figure 3.24.

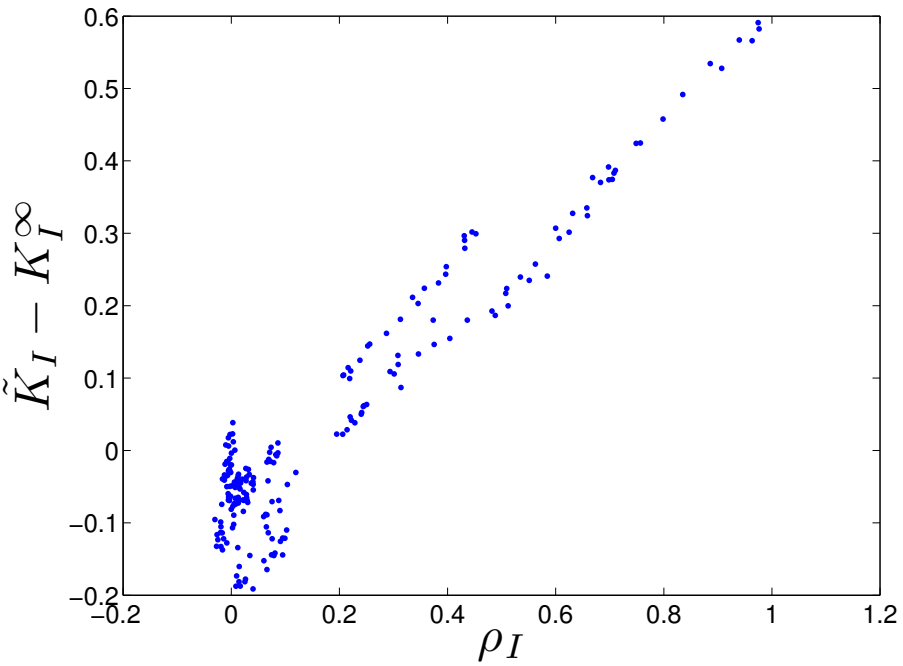


FIGURE 3.24 – Evolution du facteur d'intensité d'écrantage $K_I^{sh} = K_I^\infty - \tilde{K}_I$ en fonction du facteur d'intensité non-linéaire ρ_I

L'évolution des facteurs d'intensité des contraintes nominal et apparent sont tracés sur la figure 3.25. Le facteur d'intensité des contraintes apparent comprend l'effet des contraintes à distance et des contraintes internes, notamment par l'effet d'écran des micro-fissures.

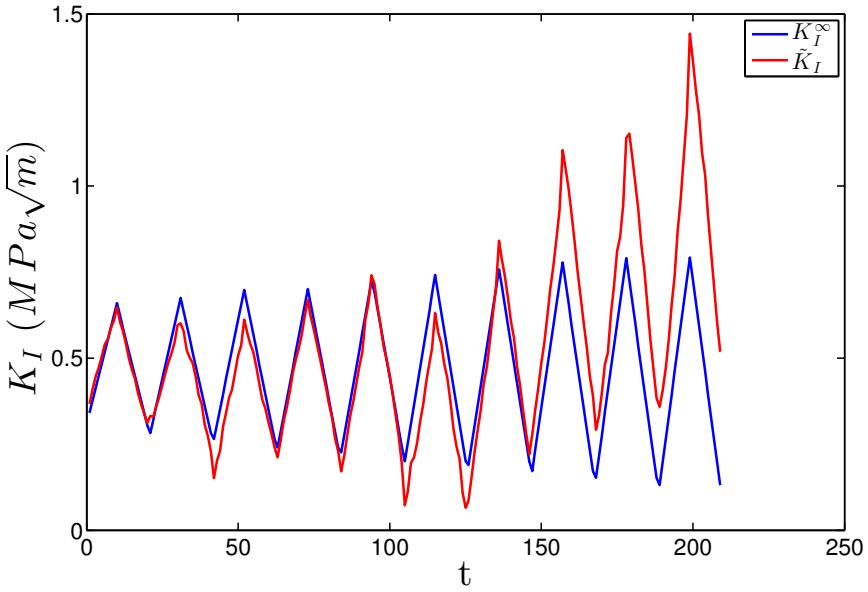


FIGURE 3.25 – Evolution du facteur d'intensité des contraintes nominal et apparent

Il est clair que sur la Fig.3.25 le facteur d'intensité des contraintes apparent $\tilde{K}_I$ (déterminé à partir du champ de référence) est vraiment différent du facteur d'intensité des contraintes nominal K_I^∞ (calculé à partir de l'effort imposé) dès que le degré d'endommagement autour de la pointe de la fissure devient significatif, indiquant un fort effet d'écran.

9 Résumé du chapitre

Des essais de fissuration en mode I ont été présentés. La géométrie de l'éprouvette permet d'effectuer plusieurs mesures successives de la ténacité sur un même spécimen. Une méthodologie est proposée afin d'estimer la ténacité du matériau. Les résultats montrent que la ténacité augmente lorsque la fissure se propage sur une dizaine de millimètres puis se stabilise.

Les essais de fissuration par fatigue montrent une dépendance au rapport de charge. Une éprouvette a été soumise à un essai de fluage dans un premier temps, puis à un essai de fatigue. La propagation observée lors de ces deux phases nous permet de montrer que la fissuration par fatigue a une portée plus importante que la fissuration par fluage. Les vitesses de fissuration par fatigue semblent être de l'ordre de $10^{-8}m/N$ pour les différents rapports de charges.

L'approche condensée a été appliquée sur des champs de déplacements provenant de la corrélation d'images numériques. Le champ complémentaire de mode I est proche du champ complémentaire obtenu numériquement par la méthode des éléments discrets, ce qui tend à montrer que le choix de représenter la fissuration du mortier par la méthode des éléments discrets est légitime. L'évolution des facteurs des champs complémentaires montre une forte non-linéarité et un stockage de contraintes internes. Les évolutions des facteurs d'intensité des contraintes nominal et apparent et l'évolution du facteur d'intensité du champ complémentaire montrent également que les micro-fissures provoquent un fort effet d'écran sur la fissure principale.

Chapitre 4

Modélisation

Ce quatrième chapitre porte sur la modélisation du comportement cyclique non-linéaire de la zone d'élaboration de l'endommagement. Cette modélisation se traduit par la recherche de lois d'évolution pour des facteurs d'intensité en mode mixte, une surface seuil et une règle d'écoulement sont définies. Les évolutions des facteurs d'intensité sont ensuite comparées aux simulations par éléments discrets. Les lois d'évolution sont ensuite enrichies afin de rendre compte des différentes observations et d'améliorer la réponse du modèle.

Les simulations et les résultats expérimentaux montrent que l'approche condensée en pointe de fissure permet de représenter l'évolution du comportement de la région en pointe de fissure. Plusieurs éléments nous permettent d'affirmer que la représentation du champ de vitesse par la superposition du produit de champs de référence élastiques par leurs facteurs d'intensité élastiques et par le produit de champs complémentaires par leurs facteurs d'intensité est un choix valable. Parmi ces indicateurs, l'évolution de l'erreur $C1$ obtenue par une approche du champ de vitesse purement élastique et de l'erreur $C2$ obtenue par une approche du champ de vitesse par des champs élastiques et complémentaires, nous permettent de justifier le choix de l'approche à variables condensées.

La première partie de chapitre portera sur la modélisation des évolutions des facteurs d'intensité en mode mixte I+II. Dans une seconde partie, une utilisation du modèle à variables condensées pour un problème d'écoulement à travers une paroi fissurée chargée cycliquement est présentée.

Les modèles de comportement de la zone d'élaboration traite généralement de l'apparition de la zone d'élaboration de l'endommagement et de son évolution. Il faut ainsi traiter la transition d'un comportement global (pré-pic) à des phénomènes localisés (post-pic), avec la nécessité d'introduire une longueur interne pour définir la localisation des déformations. Or, dans notre cas, la localisation est déjà présente, on ne traite ici que la propagation.

1 Modélisation des évolutions des facteurs d'intensité

1.1 Choix de modélisation

Les courbes $K(\rho)$ obtenues expérimentalement et par la méthode des éléments discrets ont des caractéristiques similaires, à savoir une phase linéaire élastique lors des décharges et également lors des charges dans un domaine déjà exploré. On observe également que la courbe enveloppe est monotone croissante avec une diminution du coefficient directeur des pentes lors de décharges successives. On voit également l'apparition de ρ résiduel dans les simulations avec contact et frottement, lors des essais.

Le choix de la variable représentant l'endommagement est important pour la capacité du modèle à représenter les évolutions des facteurs d'intensité. Le choix de la variable est dicté en partie par la représentation du champ de vitesse pour un référentiel attaché au front de fissure.

$$\underline{v}(\underline{x},t) = \sum_i \dot{K}_i(t)\underline{u}_i^e(\underline{x}) + \dot{\rho}_i(t)\underline{u}_i^c(\underline{x}) \tag{4.1}$$

La variable cinématique ρ_i n'est pas une variable d'état qualifiant l'endommagement, car l'endommagement de la structure peut ne pas évoluer alors même que ρ_i varie, par

exemple, lors d'une charge-décharge élastique.

On définira donc une variable D_I pour l'endommagement et on cherche à déterminer la relation entre ρ_I, D_I et K_I.

Comme on fait l'hypothèse de base que D_I représente l'endommagement, au sens d'une vision de la densité de microfissures, la propagation de la fissure macroscopique représentée par da/dt est une fraction de la création de microfissures dD/dt.

Par conséquent :
— D et a sont des grandeurs homogènes exprimées en surface d'aire fissurée par mètre de longueur de front,
— les variables thermodynamiques conjuguées de D et de a sont homogènes entre elles :
  - $G_I = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I)^2$ pour le mode I - associée à D_I
  - $G_{II} = \frac{1-\nu^2}{E}(K_{II})^2$ pour le mode II - associée à D_{II}
  - $G = G_I + G_{II}$ - associée à a
— le produit du taux d'endommagement par sa variable thermodynamique conjuguée est une puissance par unité de longueur de front et nous ferons l'hypothèse des milieux standards généralisés : le potentiel de dissipation est une fonction de l'indice d'endommagement,
— l'expression de ρ_I en fonction de D_I doit être telle que ces deux grandeurs ont bien la même unité, le m^2/m.

Avec l'approche retenue ici, on qualifie donc le degré d'endommagement de manière non-locale, par la variable D_I en utilisant le facteur d'intensité des contraintes K_I (vision non-locale des contraintes) et ρ_I, le facteur d'intensité du champ complémentaire du mouvement lors d'une phase de charge-décharge, au cours de laquelle aucune irréversibilité ne se produit (vision non-locale de la part du mouvement de la structure fissurée provenant de la présence des microfissures).

Lorsque l'endommagement ne varie pas, alors la pente K_I/ρ_I est une constante. Lorsque D_I est nul, ρ_I est nul. Lorsque D_I augmente, la pente K_I/ρ_I diminue, et réciproquement.

On peut donc en déduire que l'index d'endommagement est relié au rapport ρ/K :

$$D_I = g(\frac{\rho_I}{K_I}) \tag{4.2}$$

où g est une fonction à définir telle que $g(0) = 0$. L'unité de D et de ρ_I est le mètre et celle de K_I le $MPa\sqrt{m}$. L'ensemble de ces considérations permet de postuler que :

$$D_I = C\frac{\rho_I^2}{K_I^2} \tag{4.3}$$

où C est une constante dont l'unité est le MPa^2.

Par ailleurs, on observe que la courbe enveloppe en chargement monotone, au cours duquel l'endommagement se produit est de type :

$$K_I = a_m\sqrt{\rho_I} + b_m \tag{4.4}$$

Pour trouver la constante C, on peut décider de définir conventionnellement que $D_I = 1$ lorsque $K_I = K_{Ic}$, en négligeant b_m, dont on déduit :

$$D_{Ic} = 1 = C\frac{\rho_{Ic}^2}{K_{Ic}^2} = \frac{C}{a_m^2} \tag{4.5}$$

$$C = a_m^2 \tag{4.6}$$

Par conséquent, on obtient pour l'expression de D_I :

$$D_I = a_m^2\frac{\rho_I^2}{K_I^2} \tag{4.7}$$

Dans cette section, trois modèles sont présentés allant d'une représentation simplifiée des évolutions des facteurs d'intensité à la prise en compte des contraintes internes induites par l'histoire du chargement en mode I et en mode II.

1.2 Modélisation à direction d'écoulement fixe et sans contrainte interne

Dans un premier temps, l'endommagement en mode I , D_I, est porté par l'évolution de la quantité d'intérêt K_I. La fonction critère est définie à partir de l'énergie totale de déformation élastique en mode mixte par analogie au critère de Marigo. On suppose que l'énergie totale critique en mode mixte est égale à l'énergie totale en mode I uniquement (Eq. 4.8).

$$E_{TC}(K_{Is}, K_{II} = 0) = E_{TC}(K_I, K_{II}) \tag{4.8}$$

On peut définir une valeur seuil d'énergie critique en mode I G_{IS}, qui est reliée au facteur d'intensité des contraintes seuil par :

$$G_{IS} = \frac{1-\nu^2}{E}K_{IS}^2 \tag{4.9}$$

De plus, si l'on considère un critère en énergie de déformation totale, il existe également une valeur seuil en facteur d'intensité des contraintes de mode II K_{IIS}. La relation entre K_{IS} et K_{IIS} est obtenue à partir de la définition de l'énergie de déformation totale :

$$K_{IIS} = BK_{IS} \quad \text{avec} \quad B = \frac{5-8*\nu}{9-8*\nu} \approx 0,67 \tag{4.10}$$

Si on utilisait plutôt, comme l'indique les résultats de simulation (page 71 Fig. 2.31 l'énergie de changement de volume, alors B serait égale à 1.

On considère également que la relation entre K_{IS} et K_{IIS} reste vraie au cours du temps. La fonction critère s'écrit sous la forme suivante :

$$f = \frac{G_I}{G_{IS}} + \frac{G_{II}}{G_{IIS}} - 1 \tag{4.11}$$

$$f = \left(\frac{K_I}{K_{IS}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIS}}\right)^2 - 1 = 0 \tag{4.12}$$

On considère un comportement élastique tant que $f < 0$, et un comportement endommageable lorsque $f = 0$ et $df = 0$. Or, si $f = 0$, la règle de normalité impose :

$$df = (dK_I^2 - dK_{IS}^2)\frac{1-\nu^2}{E} \tag{4.13}$$

L'évolution des facteurs d'intensité est représentée sur la figure 4.1

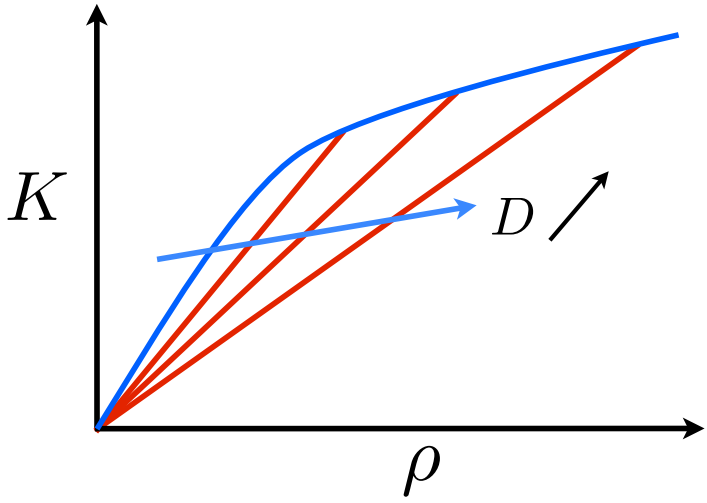


FIGURE 4.1 – Schéma des évolutions des facteurs d'intensité sans prise en compte des contraintes internes. En bleu, le comportement endommageable ($f = 0$) et en rouge le comportement élastique ($f < 0$ et $\dot{f} = 0$)

En mode I et sans considérer de contraintes internes, on peut approcher df par :

$$df = (2K_I dK_I - 2K_{IS} dK_{IS})\frac{1-\nu^2}{E} = 0 \tag{4.14}$$

On a donc :

$$dK_{IS} = dK_I \frac{K_I}{K_{IS}} \tag{4.15}$$

on peut alors calculer la dilatation de la surface seuil $d\lambda$ à partir de :

$$dK_{IS} = f^{\theta}(d\lambda) \tag{4.16}$$

G_I étant la force thermodynamique conjuguée de la variable d'endommagement D_I, et du fait que l'on se place dans le cadre des matériaux standards généralisés, on peut écrire :

$$\underline{\dot{D}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{G}} = \dot{\lambda} \underline{v} \tag{4.17}$$

avec $\underline{v}$ le vecteur portant la direction de l'écoulement et définit par :

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{IS}} \\ \frac{1}{G_{IIS}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\underline{v}\| = 1 \tag{4.18}$$

On peut ainsi calculer l'incrément d'endommagement à partir de :

$$\begin{pmatrix} dD_I \\ dD_{II} \end{pmatrix} = d\lambda \underline{v} \tag{4.19}$$

Or $\underline{\dot{D}} = \dot{\lambda}\underline{v}$ et $\|\underline{v}\| = 1$, donc le produit $\underline{\dot{D}}.\underline{\dot{D}}$ est égal à $\dot{\lambda}^2$. On peut alors définir un endommagement équivalent D_{eq} égal à $d\lambda$.

L'incrément d'endommagement équivalent est défini par :

$$\dot{D}_{eq} = \sqrt{\dot{D}_I^2 + \dot{D}_{II}^2} \tag{4.20}$$

Si l'on combine les équations 4.7 et 4.20, on obtient la relation suivante entre D_{eq} et dK_{IS} :

$$dK_{Is} = \frac{1}{2} a_m^2 \frac{dD_{eq}}{K_{IS}} \tag{4.21}$$

Dans un premier temps, on considère que la direction d'écoulement reste constante au cours du temps, c'est à dire que pour tout G_{Is}, G_{IIs} soit définie de la façon suivante :

$$G_{IIs} = B^2 G_{Is} \tag{4.22}$$

Il n'existe alors que deux directions d'écoulement, une pour $G_{II} < 0$ et une autre pour $G_{II} > 0$.

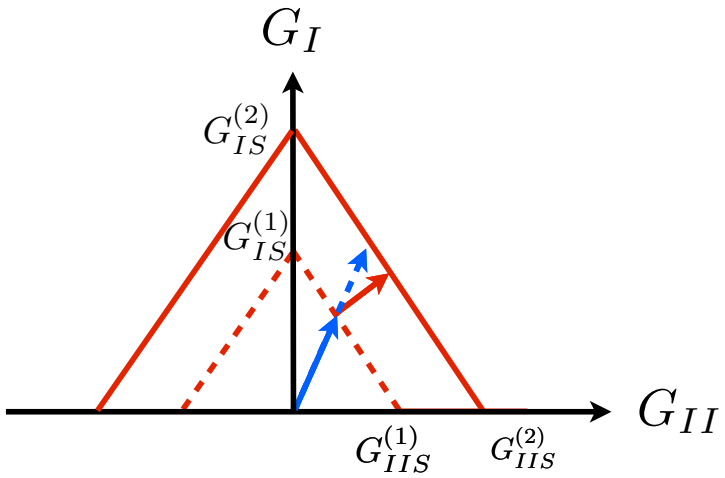
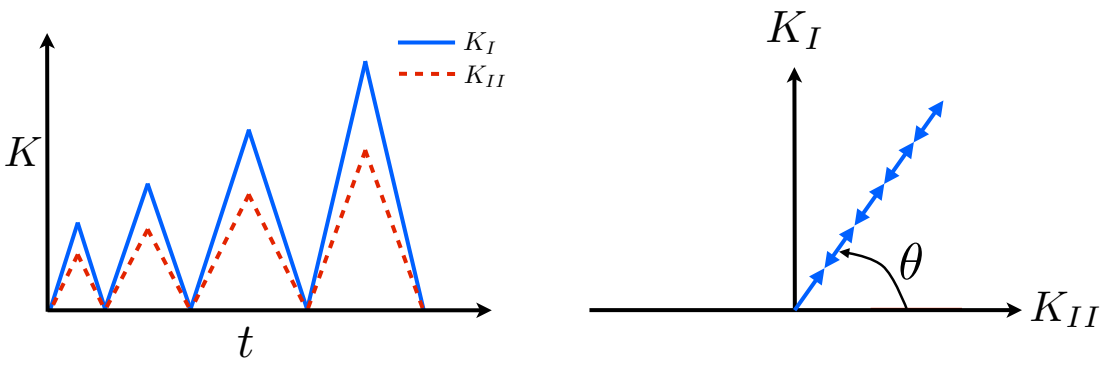


FIGURE 4.2 – Schéma de l'évolution de la surface seuil pour le modèle à direction d'écoulement fixe. En pointillé rouge, la surface seuil initiale et en trait rouge la surface seuil finale. La flèche bleu représente la direction de chargement et la flèche rouge la direction d'écoulement.

Afin de comparer les évolutions des facteurs d'intensité générées par le modèle à celles obtenues par la méthode des éléments discrets, différents chargements en mode mixte I+II proportionnels ont été définis. On définit ici le taux de mixité θ comme l'angle formé par la direction de chargement dans l'espace $K_I(K_{II})$, comme représenté sur la figure 4.3.



(a) $K_I(t)$ et $K_{II}(t)$ **(b)** $K_I(K_{II})$

FIGURE 4.3 – Schéma des chargements en mode mixte I+II proportionnels en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$

1.2.1 Identification

L'identification du paramètre B est effectuée sur la simulation pour $\theta = \pi/4$ en minimisant la distance entre l'enveloppe des courbes $K(\rho)$ simulée et prédite.

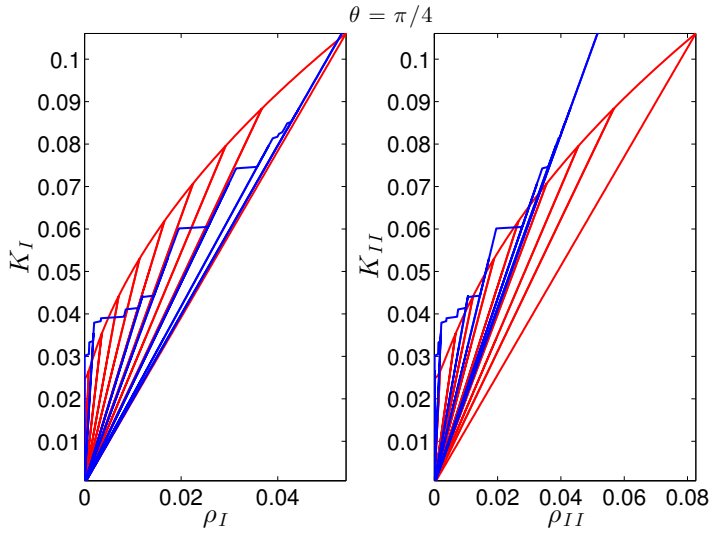
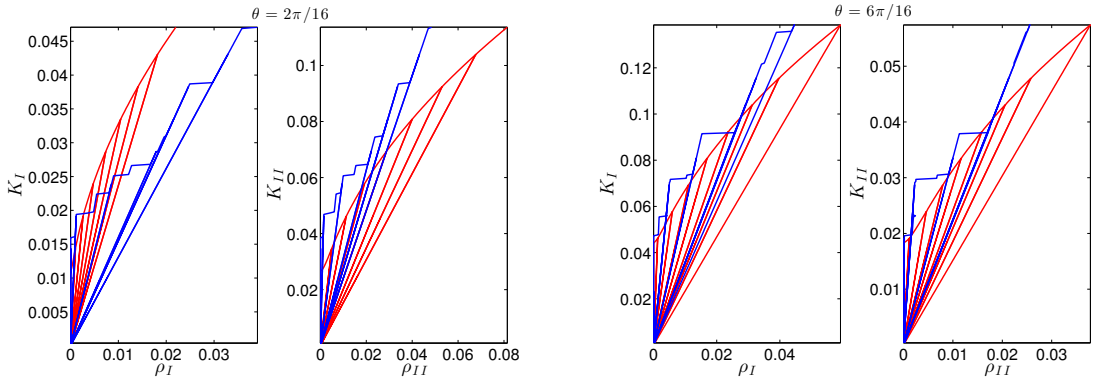


FIGURE 4.4 – Comparaison des évolutions des facteurs d'intensité entre le modèle à direction d'écoulement fixe avec le paramètre identifié en rouge et les simulations par éléments discrets en bleu.

1.2.2 Validation

Les prédictions du modèle sont ensuite confrontées aux résultats des simulations par éléments discrets pour différents taux de mixité.



(a) $\theta = \pi/8$ **(b)** $\theta = 3\pi/8$

FIGURE 4.5 – Evolutions des facteurs d'intensité obtenues par le modèle sans contraintes à direction d'écoulement fixe. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle.

On observe que l'allure générale est respectée, mais que ρ_{II} est fortement surestimé pour les cas de chargements avec une portion importante de mode II. On observe également que la valeur de ρ_I est surestimée pour les taux de mixité supérieurs à $\pi/4$ et sous-estimée pour les valeurs de $\theta < \pi/4$, ce qui indiquerait une mauvaise estimation du changement de forme de la surface seuil dans les cas de chargement autres que celui pour lequel le paramètre du modèle a été identifié.

1.3 Modélisation à direction d'écoulement variable et sans contrainte interne

Afin de corriger cette surestimation de ρ_{II}, il a été choisi de faire évoluer de façon indépendante le seuil G_{IIs} du seuil G_{Is}. La direction du vecteur d'écoulement peut ainsi évoluer au cours du temps, ce qui permet de mieux représenter les évolutions obtenues pour les chargements non-proportionnels. La valeur initiale de G_{IIs} est définie à partir de l'expression de l'énergie libre.

On suppose alors que la forme de la surface seuil n'est pas fixée, mais évolue au cours de l'endommagement.

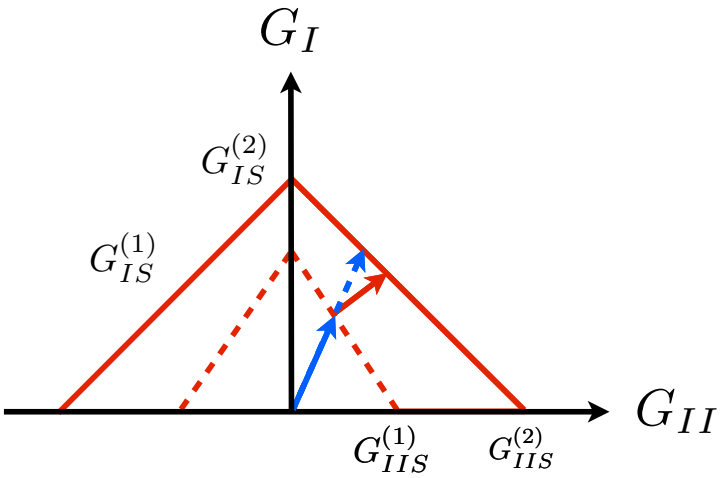


FIGURE 4.6 – Schéma de l'évolution de la surface seuil à direction d'écoulement variable. En pointillé rouge, la surface seuil initiale et en trait rouge la surface seuil finale. La flèche bleu représente la direction de chargement et la flèche rouge la direction d'écoulement.

1.3.1 Identification

Le paramètres B est identifié sur l'enveloppe de la courbe $K_I(\rho_I)$ et le paramètre C sur l'enveloppe de la courbe $K_{II}(\rho_{II})$. Le déplacement de la surface seuil dépendant directement du produit entre B et C, l'identification de ces deux paramètres est effectuée simultanément. On obtient alors de meilleurs résultats lors de chargements proportionnels, que ce soit en terme de ρ_I ou de ρ_{II}.

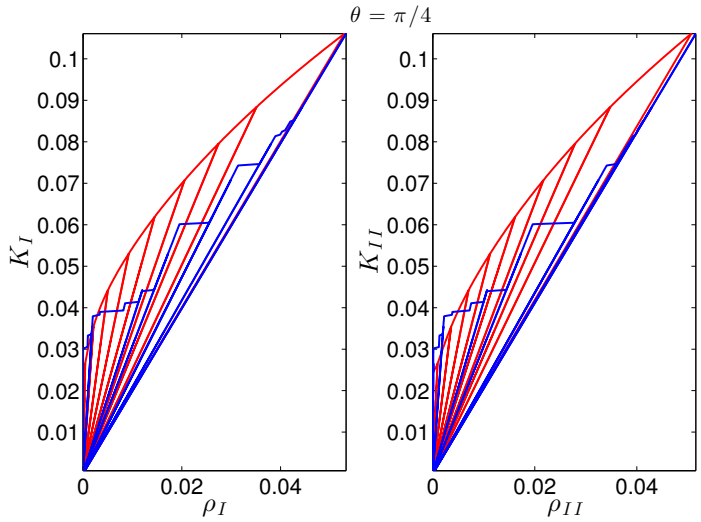
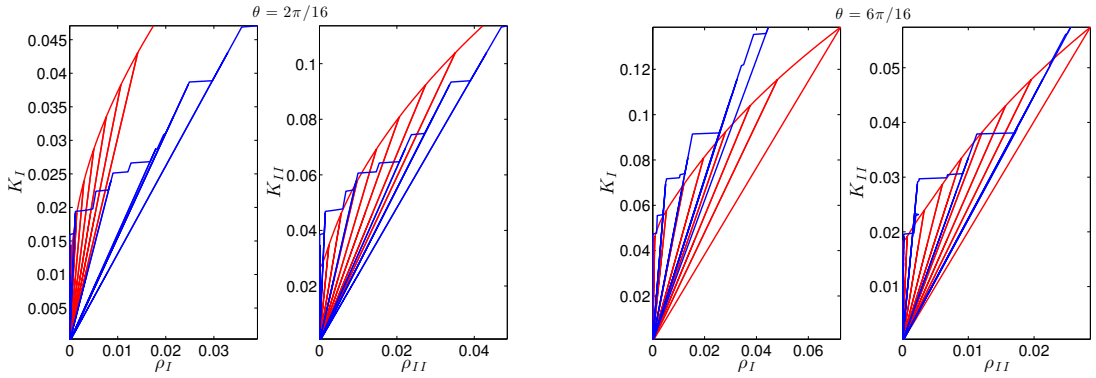


FIGURE 4.7 – Comparaison des évolutions des facteurs d'intensité entre le modèle à direction d'écoulement variable avec les paramètres identifiés en rouge et les simulations par éléments discrets en bleu.

1.3.2 Validation

On utilise ensuite les paramètres identifiés sur un cas de chargement mixte proportionnel (Fig. 4.7) pour prédire les évolutions des facteurs d'intensité pour d'autres taux de mixité (Fig. 4.8).



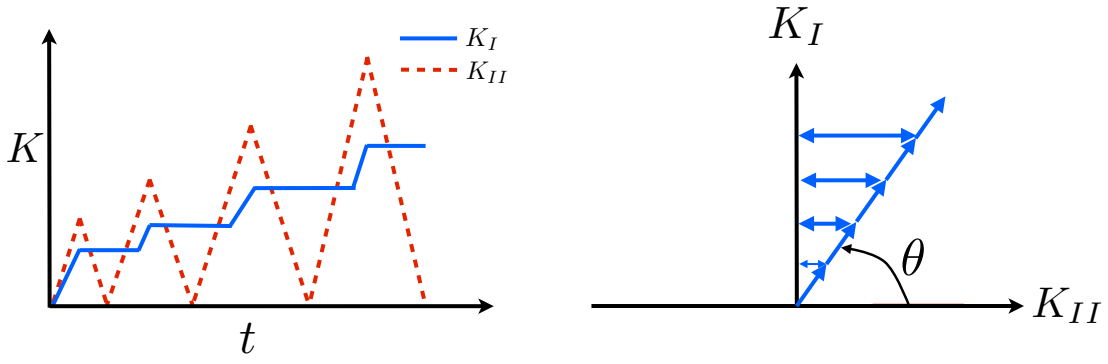
(a) $\theta = \pi/8$ **(b)** $\theta = 3\pi/8$

FIGURE 4.8 – Evolutions des facteurs d'intensité obtenus par le modèle sans contrainte interne à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II proportionnel. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle.

On observe une meilleure représentation des évolutions des facteurs d'intensité en prenant en compte une direction d'écoulement variable. En utilisant un autre critère basée sur l'énergie de changement de volume, la valeur de B serait également fixée. Or on observe qu'il faut une évolution de la direction d'écoulement pour représenter correctement le comportement en mode mixte proportionnel.

L'intérêt de la démarche est de permettre de prédire le couplage non linéaire entre les deux modes lors de sollicitations mixte I+II non-proportionnelles. On compare donc le modèle aux simulations sur des trajets de chargements non-proportionnels.

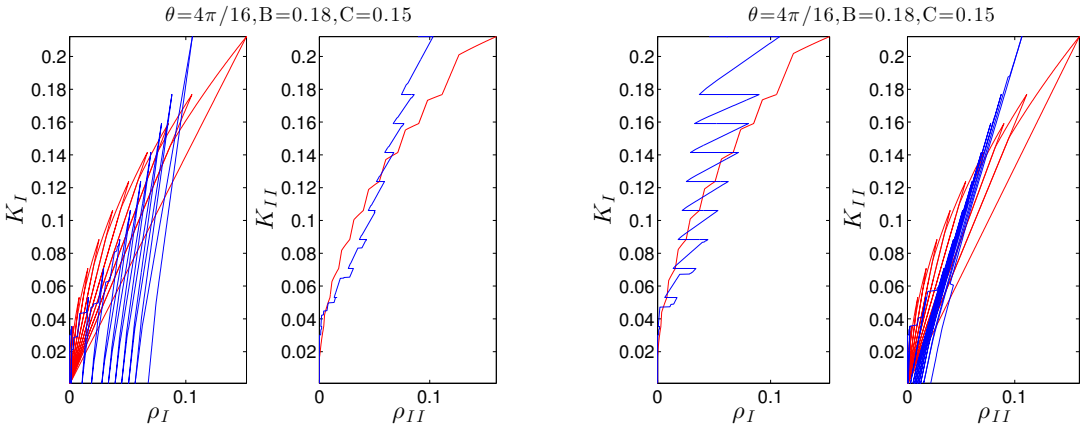
Pour ces cas de chargements non-proportionnels, une charge est appliquée à un niveau de mixité donné, puis la sollicitation de mode II est maintenue pendant que la sollicitation de mode I est progressivement annulée puis ramenée à sa valeur maximale, et ceci de manière répétée (Fig. 4.9).



(a) $K_I(t)$ et $K_{II}(t)$ **(b)** $K_I(K_{II})$

FIGURE 4.9 – Schéma des chargements en mode mixte I+II non-proportionnels en fonction du temps (a) et dans l'espace $K_I(K_{II})$

Les évolutions des facteurs d'intensité obtenues sont alors complexes, avec la présence de ρ résiduel pour la composante qui est annulée et une diminution de ρ pour la composante maintenue.



(a) Décharge Mode I **(b)** Décharge Mode II

FIGURE 4.10 – Evolutions des facteurs d'intensité obtenus par le modèle sans contrainte interne et à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II non-proportionnel. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle.

Lors de sollicitations de mode mixte I+II non-proportionnels, le modèle ne suffit pas pour représenter les évolutions des facteurs d'intensités.

1.4 Modélisation avec contraintes internes

On observe sur les trajets non-proportionnels l'apparition de ρ_I et de ρ_{II} résiduels, ce qui implique la présence de contraintes internes. On considère ici que les contraintes internes proviennent du frottement entre les lèvres des microfissures et des effets de blocage.

L'expression des variables conjuguées au facteur d'intensité des contraintes en mode I et en mode II est modifiée afin de prendre en compte les contraintes internes :

$$G_I = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I - K_{IX})^2 \tag{4.23}$$

$$G_{II} = \frac{1-\nu^2}{E}(K_{II} - K_{IIX})^2 \tag{4.24}$$

où K_{IX} et K_{IIX} représentent les contraintes internes de mode I et de mode II.

La fonction critère s'écrit alors :

$$f = \left(\frac{K_I - K_{IX}}{K_{IS}}\right)^2 + \left(\frac{K_I - K_{IX}}{K_{IS}}\right)^2 - 1 \tag{4.25}$$

Les contraintes internes étant directement reliées à la densité de microfissures dans la région en pointe de fissure. La loi d'évolution des contraintes internes est proportionnelle

à la création de microfissures. On souhaite désormais représenter l'évolution des facteurs d'intensité avec une modélisation des contraintes internes qui se traduit par la présence de ρ résiduel, comme représenté sur la figure 4.11.

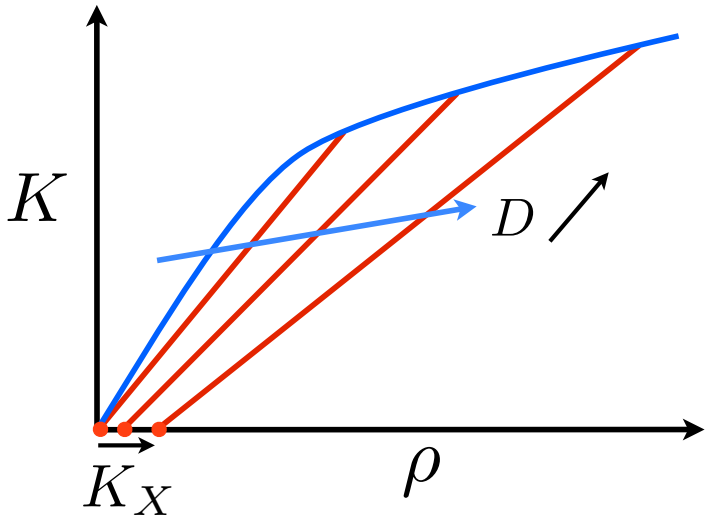


FIGURE 4.11 – Schéma des évolutions des facteurs d'intensité avec prise en compte des contraintes internes. En bleu, le comportement endommageable ($f = 0$) et en rouge le comportement élastique ($f < 0$ et $\dot{f} = 0$). Les points rouges représentent les contraintes internes sous la forme d'un écart à l'origine lors des décharges.

Si l'on considère, dans un premier temps, que les contraintes internes de mode I sont issues uniquement du frottement dû aux microfissures créées en mode I, et inversement pour le mode II, on peut relier l'évolution des contraintes internes à l'évolution de l'index d'endommagement de chaque mode.

$$dK_{IX} = a_{I1} dD_I \tag{4.26}$$
$$dK_{IIX} = a_{II2} dD_{II} \tag{4.27}$$

Les contraintes représentées ici par le centre du domaine élastique vont grandement modifier les évolutions des facteurs d'intensité. Du fait que le centre du domaine peut désormais se déplacer, la direction d'écoulement évoluera, ce qui conduit à une représentation du comportement de la surface seuil plus complexe (Fig. 4.12).

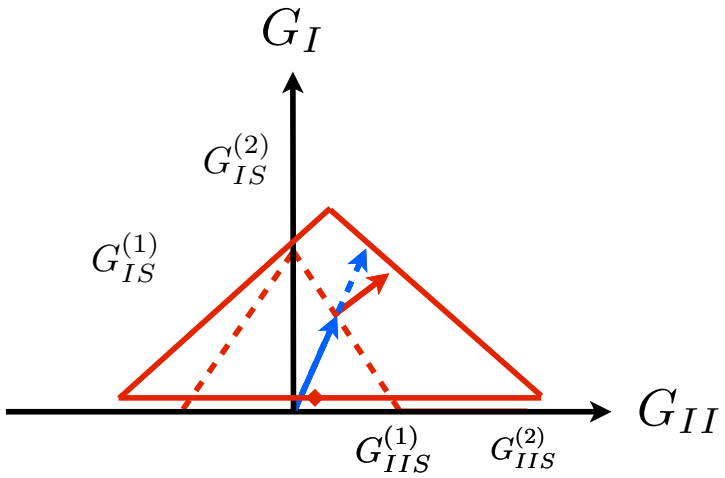
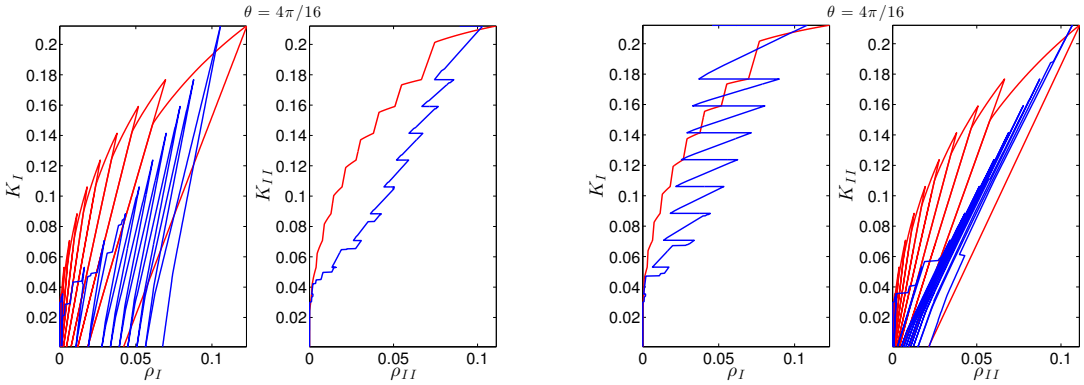


FIGURE 4.12 – Schéma de l'évolution de la surface seuil pour le modèle avec contraintes internes. En pointillé rouge, la surface seuil initiale et en trait rouge la surface seuil finale. La flèche bleu représente la direction de chargement et la flèche rouge la direction d'écoulement. Le centre du domaine est représenté par le point rouge.

1.4.1 Identification

On identifie dans un premier temps les paramètres B et C sur les enveloppes des courbes $K(\rho)$ tel que précédemment, puis séparément le paramètre $aI1$ sur la courbe $K_I(\rho_I)$ lors des décharges de mode I, et le paramètre $aII2$ sur la courbe $K_{II}(\rho_{II})$ lors des décharges de mode II.

On cherche ensuite à minimiser la distance entre les courbes enveloppes en prenant en compte les paramètres $aI1$ et $aII2$. Cette minimisation est couplée à une minimisation sur $aI1$ et $aII2$. Les paramètres identifiés permettent de représenter de manière satisfaisante les évolutions des facteurs d'intensité. Les évolutions du modèle pour les valeurs identifiées sont comparées aux simulations sur la figure 4.13.



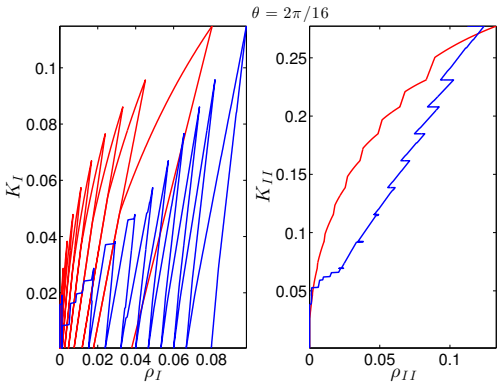
(a) Décharge Mode I **(b)** Décharge Mode II

FIGURE 4.13 – Evolutions des facteurs d'intensité obtenues par le modèle avec contraintes internes à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II non-proportionnel pour un taux de mixité à $\theta = \pi/4$. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle.

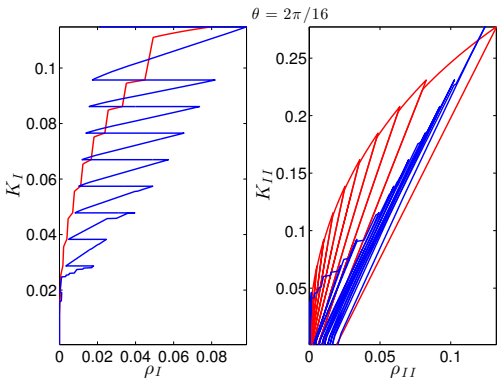
On observe alors une amélioration dans la représentation des évolutions lors de chargements non-proportionnels (Fig. 4.14).

1.4.2 Validation

On compare ensuite les prédictions du modèle avec prise en compte des contraintes internes à d'autres taux de mixité (Fig. 4.14 et Fig. 4.15).

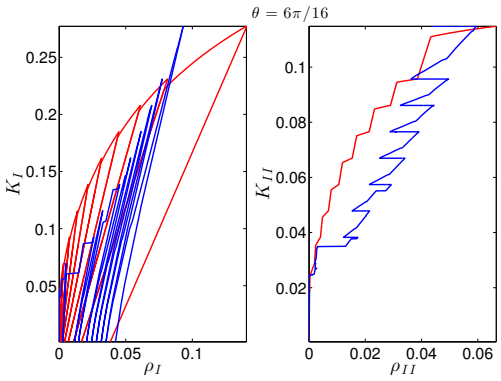


(a) Décharge Mode I

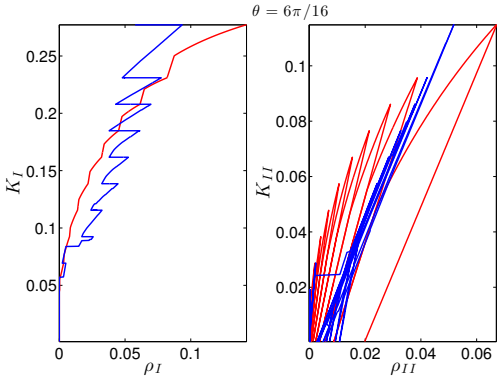


(b) Décharge Mode II

FIGURE 4.14 – Evolutions des facteurs d'intensité obtenus par le modèle avec contraintes internes à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II non-proportionnel pour un taux de mixité à $\theta = \pi/8$. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle.



(a) Décharge Mode I



(b) Décharge Mode II

FIGURE 4.15 – Evolutions des facteurs d'intensité obtenus par le modèle avec contraintes internes à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II non-proportionnel pour un taux de mixité à $\theta = 3\pi/8$. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle.

La tendance des évolutions des facteurs d'intensité est représentée par le modèle prenant en compte les contraintes internes. Par contre, ces dernières sont sur-estimées pour les chargements ayant une composante plus importante en mode I et sous-estimées

pour les chargements ayant une composante plus importante en mode II.

Le modèle est ensuite utilisé pour prédire les évolutions des facteurs d'intensité lors de chargements mixtes proportionnels (Fig. 4.16).

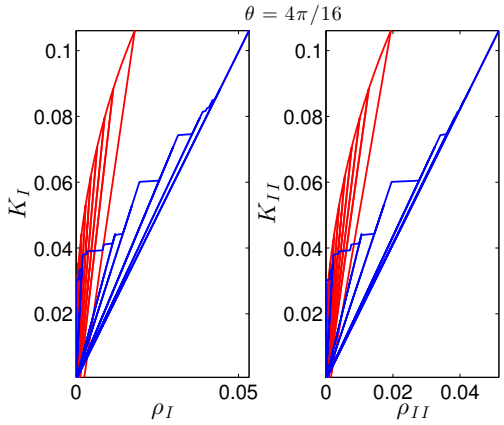


FIGURE 4.16 – Evolutions des facteurs d'intensité obtenues par le modèle avec contraintes internes à direction d'écoulement variable sous chargement de mode mixte I+II proportionnel. En bleu, les évolutions obtenues par la méthode des éléments discrets et en rouge les évolutions prédites par le modèle.

La prise en compte des contraintes internes vient perturber les évolutions prédites par le modèle lors de sollicitations proportionnelles. On observe une sous-estimation notable du niveau de ρ atteint et l'apparition de contraintes internes lors des décharges alors que les simulations par éléments discrets n'en montrent pas.

Une solution serait de contrer la création de contraintes internes de mode I par une relation entre l'incrément dD_{II} d'endommagement de mode II et dK_{XI} et inversement pour les contraintes internes de mode II.

Le modèle nous permet de prédire qualitativement les évolutions des facteurs d'intensité des contraintes lors de trajets de chargements de mode mixte I+II non-proportionnels. Il est clair qu'une amélioration des prédictions est nécessaire notamment lors des trajets proportionnels si l'on prend en compte les contraintes internes.

Deux pistes sont envisageables. La première serait une évolution non-linéaire des contraintes internes en fonction du niveau d'endommagement. La seconde serait qu'un couplage des contraintes internes intervienne et modifie leurs évolutions.

2 Résumé du chapitre

Un modèle de comportement de la région entourant la pointe de la fissure est proposé. Une variable d'endommagement par mode est définie à partir d'un rapport du facteur d'intensité du champ complémentaire sur le facteur d'intensité du champ élastique. On associe à ces deux variables d'endommagement un potentiel thermodynamique. En se basant sur le cadre des milieux standards généralisés, une loi d'écoulement est définie.

Un enrichissement progressif du modèle est présenté afin de mieux représenter les évolutions des facteurs d'intensité obtenues lors des simulations par éléments discrets. Il a été montré que pour représenter les évolutions des facteurs d'intensité lors de chargements en mode mixte proportionnel, il est important d'introduire une direction d'écoulement variable. Les prédictions du modèle sont alors en accord avec les simulations par éléments discrets lors de chargements proportionnels, mais ne permettent pas de rendre compte des évolutions obtenues lors de chargements non-proportionnels.

En introduisant les contraintes internes dans le modèle, définies à partir du niveau d'endommagement dans le mode considéré, les prédictions du modèle permettent de rendre compte des évolutions des facteurs d'intensité obtenues lors des simulations par éléments discrets pour des chargements de mode mixte non-proportionnels. Une sur-estimation des facteurs d'intensité ρ_I et ρ_{II} est néanmoins observée lors de chargements proportionnels. Un couplage des contraintes internes ou une évolution non-linéaire des contraintes internes en fonction du niveau d'endommagement serait nécessaire pour mieux représenter les évolutions des facteurs d'intensité.

Conclusions et perspectives

L'objet de cette thèse est l'étude du comportement de la région entourant l'extrémité d'une fissure sollicité en mode mixte I+II dans un matériau quasi-fragile.

Dans un premier temps, le matériau est modélisé par la méthode des éléments discrets afin de pouvoir simuler le comportement quasi-fragile du béton/mortier en mode mixte I+II. Les modèles discrets permettent de le représenter par un réseau de particules indéformables reliées entre elles par des poutres élastiques fragiles. Le caractère quasi-fragile est obtenu par une distribution des seuils de rupture des poutres grâce à une fonction seuil combinant un critère en élongation et un critère en flexion. Les modèles discrets permettent entre autres de représenter naturellement la fissuration.

Une démarche a été mise en place pour étudier le comportement quasi-fragile de la région entourant la pointe de la fissure par des calculs numériques par la méthode des éléments discrets. Le principe consiste à ne retenir qu'un faible nombre d'informations pour pouvoir analyser le comportement de la région fissurée. Pour cela, une approximation de la cinématique du problème est réalisée. Le champ de vitesse est partitionné en modes de fissuration et chaque mode comporte une composante élastique et une composante complémentaire. Chaque composante est le produit d'un champ spatial de référence, défini *a priori*, et d'un facteur d'intensité dépendant du temps. De plus, les champs de références élastiques et complémentaires peuvent être décomposés par le produit d'une fonction dépendant de la distance à la pointe de la fissure et d'une distribution angulaire. Les champs complémentaires ont un caractère évanescent, leur intensité décroît exponentiellement avec la distance au front de la fissure. Leur dépendance angulaire n'est pas dépendante de la distribution des seuils de rupture utilisés lors des simulations par la méthode des éléments discrets. Cette approche s'est montrée indépendante au maillage et à la distribution des seuils de rupture. Des simulations en mode mixte I+II proportionnels et non-proportionnels montrent un couplage entre les évolutions des facteurs d'intensité des différents modes de fissuration.

Des essais de fissuration par fatigue en mode I ont été réalisés. Une éprouvette parallélépipédique trouée en son centre présentant un gradient de contraintes a permis d'effectuer des essais de fissuration dans un régime stable. Cette géométrie permet d'effectuer des mesures répétées de la ténacité sur une même éprouvette et de s'affranchir ainsi de l'aléas du. Une méthodologie est proposée afin d'estimer la ténacité du matériau.

Les résultats montrent que la ténacité du matériau augmente lorsque la fissure se propage sur une dizaine de millimètres puis se stabilise. Les essais ont permis de déterminer les seuils de fissuration par fatigue et la ténacité du matériau avec une précision importante. Une dépendance de la fissuration par fatigue au rapport de charge a été observée. Les courbes de vitesse de propagation par fatigue présentent un plateau, alertant sur un couplage potentiel entre fatigue et fluage. Une éprouvette sollicitée en fluage puis sollicitée par fatigue a permis cependant de montrer que la fissuration par fatigue a une portée plus importante que la fissuration par fluage.

Une analyse expérimentale de la région en pointe de fissure a été réalisée sur une éprouvette ayant été sollicitée par fatigue et pour laquelle l'arrêt de la fissure a été observé. Des mesures optiques ont permis d'acquérir les champs de déplacement en pointe de fissure par corrélation d'images. Il a ainsi été possible de construire la base de champs de référence et de projeter le champ de vitesse mesuré expérimentalement sur cette base. Les évolutions des facteurs d'intensité complémentaires montrent une forte non-linéarité et des déformations permanentes. Les évolutions des facteurs d'intensité montrent que la présence des micro-fissures provoque un fort effet d'écran sur la fissure principale.

Un modèle de comportement basé sur l'évolution des facteurs d'intensité et de leurs potentiels thermodynamiques associés est proposé. Une surface seuil et une règle d'écoulement sont définies. Il permet de représenter le comportement de la région entourant la pointe de la fissure lors de chargements de mode mixte I+II.

Ce travail ouvre diverses perspectives. Il serait intéressant d'utiliser l'approche expérimentale sur des essais de fissuration de mode mixte I+II et d'observer les effets de chargements proportionnels et non-proportionnels sur les facteurs d'intensité.

Une seconde perspective est d'utiliser les résultats expérimentaux pour identifier les paramètres du modèle par éléments discrets. Un algorithme de calibration des distributions des seuils de rupture à partir de simulations par éléments finis a été proposé ([Oliver-Leblond et al., 2013]). Le calibrage des distributions des seuils de rupture à partir des champs de déplacements obtenus par corrélations d'images serait un avantage indéniable pour assurer une représentation plus réaliste de la fissuration et de la micro-fissuration dans les simulations par éléments discrets.

A partir de la base de champs de référence et des évolutions des facteurs d'intensité, il est envisageable de modéliser les déplacements des lèvres de la fissure au cours d'un chargement. On pourrait utiliser le déplacement des lèvres de la fissure pour évaluer le débit de fuite à travers la fissure par un calcul éléments finis. Il est également possible d'effectuer des mesures expérimentales de débits de fuites sur les éprouvettes trouées.

Un modèle de comportement de la région en pointe de fissure a été proposé. Il serait

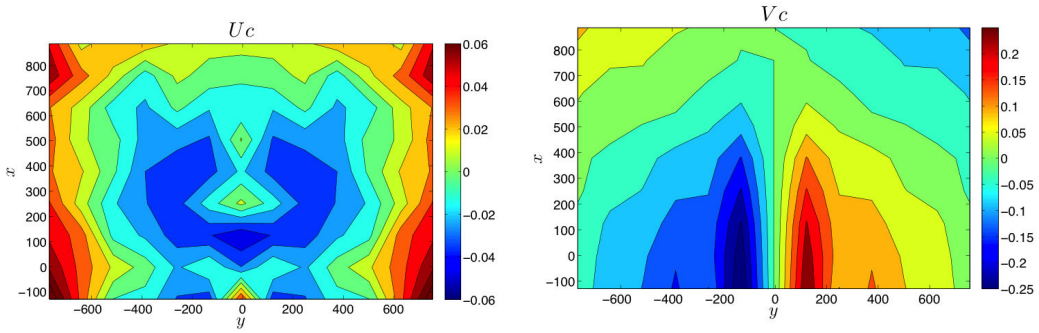
intéressant d'identifier une loi de propagation, qui nous permettrait d'estimer l'avancée de la fissure en fonction de l'état d'endommagement.

Enfin, il est possible d'utiliser les dépendances radiales des champs complémentaires et les évolutions des facteurs d'intensité pour justifier en partie la distribution de l'endommagement et la longueur d'interaction pour la méthode *TLS* ([Moës et al., 2011]).

Annexe A

Champs expérimentaux et évolutions des facteurs d'intensité

1 Taille de maille de 128 pixels



(a) Ue **(b)** Ve

FIGURE A.1 – Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images pour une taille de maille de 128 pixels

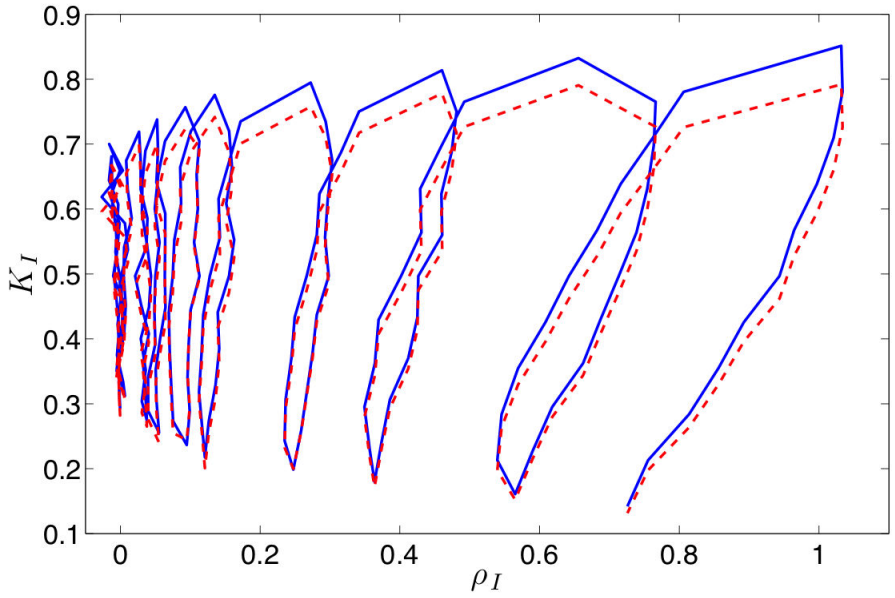
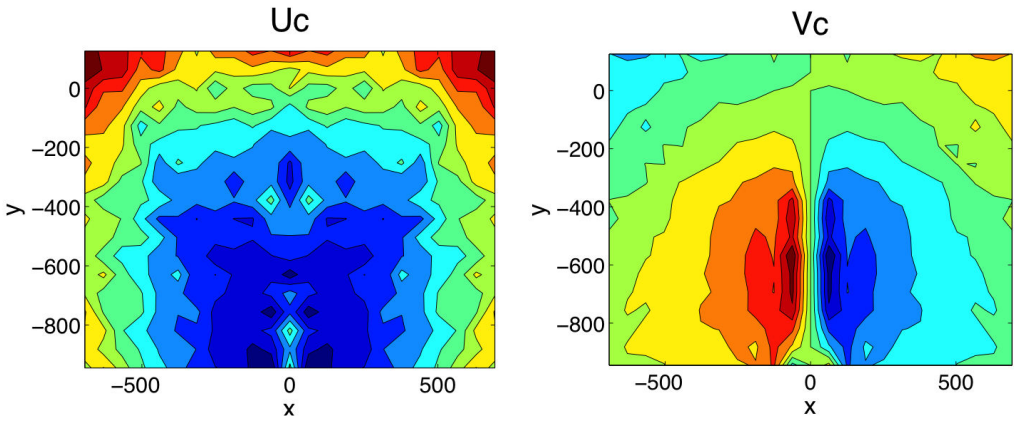


FIGURE A.2 – Evolution du facteur d'intensité du champ complémentaire ρ_I en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une taille de maille de 128 pixels

2 Taille de maille de 64 pixels



(a) Ue **(b)** Ve

FIGURE A.3 – Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images pour une taille de maille de 64 pixels

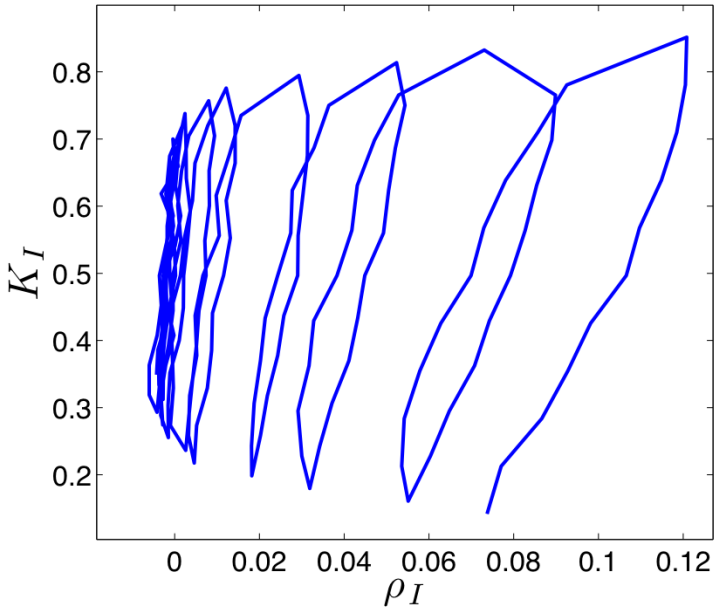
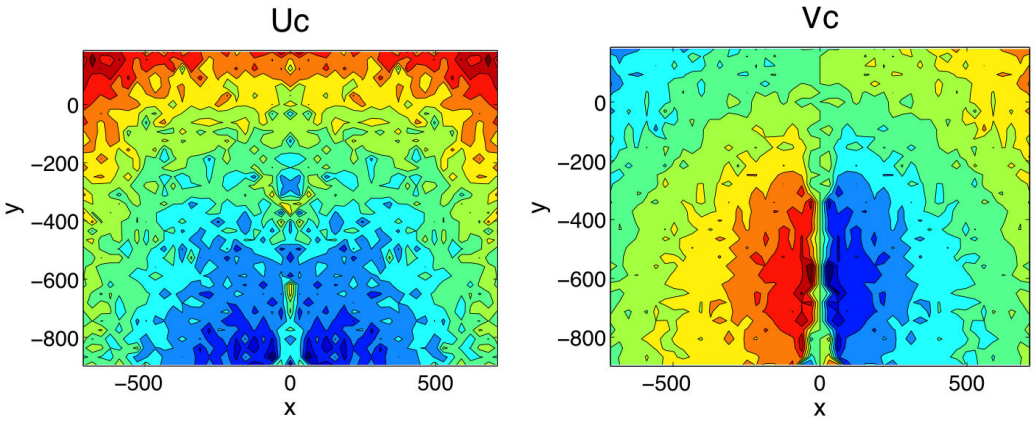


FIGURE A.4 – Evolution du facteur d'intensité du champ complémentaire ρ_I en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une taille de maille de 64 pixels

3 Taille de maille de 32 pixels



(a) Ue **(b)** Ve

FIGURE A.5 – Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images pour une taille de maille de 32 pixels

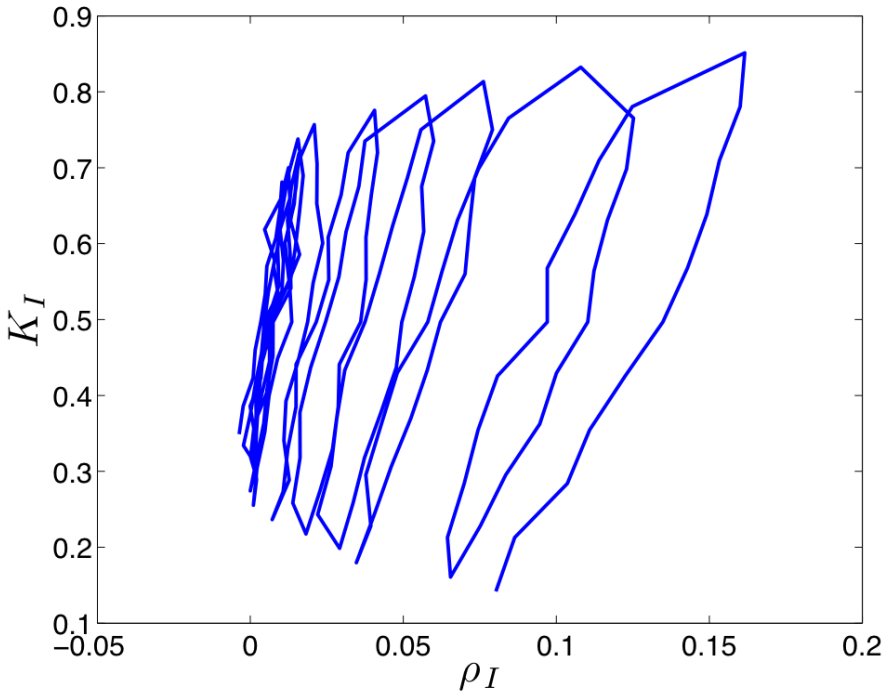
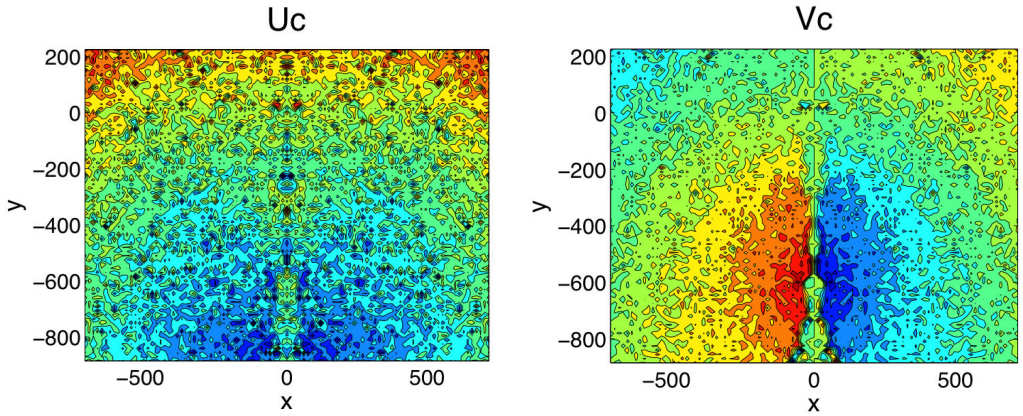


FIGURE A.6 – Evolution du facteur d'intensité du champ complémentaire ρ_I en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une taille de maille de 32 pixels

4 Taille de maille de 16 pixels



(a) Ue **(b)** Ve

FIGURE A.7 – Champs de référence élastique expérimentaux obtenus par corrélation d'images pour une taille de maille de 16 pixels

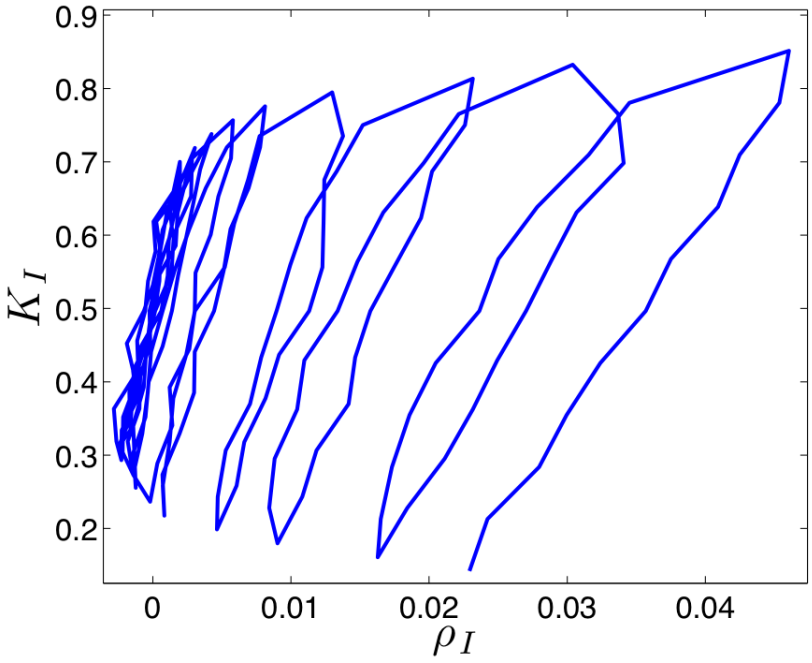


FIGURE A.8 – Evolution du facteur d'intensité du champ complémentaire ρ_I en fonction du facteur d'intensité des contraintes nominal pour une taille de maille de 16 pixels

Bibliographie

[Barenblatt, 1962] BARENBLATT, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Advances in applied mechanics, 7(1):55–129.

[Bažant et Oh, 1983] BAŽANT, Z. et OH, B. H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. Matériaux et Construction, 16(3):155–177.

[Bažant, 1984] BAŽANT, Z. P. (1984). Size effect in blunt fracture : concrete, rock, metal. Journal of Engineering Mechanics, 110(4):518–535.

[Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988] BAZANT, Z. P. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. Journal of Applied Mechanics, 55(2):287–293.

[Belytschko et al., 2001] BELYTSCHKO, T., MOES, N., USUI, S. et PARIMI, C. (2001). Arbitrary discontinuities in finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50:993–1013.

[Bernard et al., 2012] BERNARD, P., MOËS, N. et CHEVAUGEON, N. (2012). Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 233-236:11–27.

[Besnard et al., 2006] BESNARD, G., HILD, F. et ROUX, S. (2006). "Finite-Element" Displacement Fields Analysis from Digital Images : Application to Portevin–Le Châtelier Bands. Experimental Mechanics, 46(6):789–803.

[Bolander Jr et Hong, 2002] BOLANDER JR, J. E. et HONG, G. S. (2002). Rigid-body-spring network modeling of prestressed concrete members. ACI Structural Journal, 99(5).

[Camacho et Ortiz, 1996] CAMACHO, G. T. et ORTIZ, M. (1996). Computational modelling of impact damage in brittle materials. International Journal of Solids and Structures, 33(20–22):2899–2938.

[Carpinteri et al., 2006] CARPINTERI, A., LACIDOGNA, G. et NICCOLINI, G. (2006). Critical Behaviour in Concrete Structures and Damage Localization by Acoustic Emission. Key Engineering Materials, 312:305–310.

[Choinska, 2006] CHOINSKA, M. (2006). Effets de la température, du chargement mécanique et de leurs intéractions sur la perméabilité du béton de structure. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.

[Cundall et Strack, 1979] CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. Géotechnique, 29(1):47–65.

[Cusatis et al., 2003] CUSATIS, G., BAŽANT, Z. et CEDOLIN, L. (2003). Confinement-Shear Lattice Model for Concrete Damage in Tension and Compression : I. Theory. Journal of Engineering Mechanics, 129(12):1439–1448.

[D'Addetta, 2004] D'ADDETTA, G. A. (2004). Discrete Models for Cohesive Frictional Materials. Thèse de doctorat, University of Stuttgart.

[De Borst et Muhlhaus, 1991] DE BORST, R. et MUHLHAUS, H.-B. (1991). Continuum models for discontinuous media. In Proc. Int. RILEM/ESIS Conf. on Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics, pages 601–618.

[De Borst et Sluys, 1991] DE BORST, R. et SLUYS, L. J. (1991). Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 90(1):805–827.

[De Borst et al., 1993] DE BORST, R., SLUYS, L. J., MUHLHAUS, H.-B. et PAMIN, J. (1993). Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. Engineering computations, 10(2):99–121.

[de Vree et al., 1995] de VREE, J. H. P., BREKELMANS, W. A. M. et van GILS, M. A. J. (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. Computers & Structures, 55(4):581–588.

[Decreuse et al., 2012] DECREUSE, P. Y., POMMIER, S., PONCELET, M. et RAKA, B. (2012). A novel approach to model mixed mode plasticity at crack tip and crack growth. Experimental validations using velocity fields from digital image correlation. International Journal of Fatigue, 42(0):271–283.

[Delaplace, 2009] DELAPLACE, A. (2009). Tensile damage response from discrete element virtual testing Discrete model. Geomechanics and Geoengineering, 4(1):79–89.

[Delaplace et Desmorat, 2007] DELAPLACE, A. et DESMORAT, R. (2007). Discrete 3D model as complimentary numerical testing for anisotropic damage. International Journal of Fracture, 148(2):115–128.

[Desmorat et al., 2007] DESMORAT, R., GATUINGT, F. et RAGUENEAU, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. Engineering Fracture Mechanics, 74(10):1539–1560.

[Donzé et Magnier, 1995] DONZÉ, F. et MAGNIER, S.-A. (1995). Formulation of a 3-D numerical model of brittle behaviour. Geophysical Journal International, 122(3):790–802.

[Dufour et al., 2012] DUFOUR, F., LEGRAIN, G., PIJAUDIER-CABOT, G. et HUERTA, A. (2012). Estimation of crack opening from a two-dimensional continuum-based fi nite element computation. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 36:1813–1830.

[Dufour et al., 2008] DUFOUR, F., PIJAUDIER-CABOT, G., CHOINSKA, M. et HUERTA, A. (2008). Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. Computers & Concrete, 5(4):375–388.

[Eringen, 1972] ERINGEN, A. (1972). Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. International Journal of Engineering Science, 10(5):425–435.

[Evans et Marathe, 1968] EVANS, R. H. et MARATHE, M. S. (1968). Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension. Matériaux et Construction, 1(1):61–64.

[Francfort et Marigo, 1998] FRANCFORT, G. A. et MARIGO, J.-J. (1998). Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46(8):1319–1342.

[Fremy et al., 2012] FREMY, F., POMMIER, S., GALENNE, E. et COURTIN, S. (2012). A scaling approach to model history effects in fatigue crack growth under mixed mode I+II+III loading conditions for a 316L stainless steel. International Journal of Fatigue, 42(0):207–216.

[Gálvez et al., 1998] GÁLVEZ, J. C., ELICES, M., GUINEA, G. V. et PLANAS, J. (1998). Mixed Mode Fracture of Concrete under Proportional and Nonproportional Loading. International Journal of Fracture, 94(3):267–284.

[Geiß ler et Kaliske, 2010] GEISS LER, G. et KALISKE, M. (2010). Time-dependent cohesive zone modelling for discrete fracture simulation. Engineering Fracture Mechanics, 77(1):153–169.

[Geubelle et Baylor, 1998] GEUBELLE, P. H. et BAYLOR, J. S. (1998). Impact-induced delamination of composites : a 2D simulation. Composites Part B : Engineering, 29(5): 589–602.

[Giry et al., 2011] GIRY, C., DUFOUR, F. et MAZARS, J. (2011). Stress-based nonlocal damage model. International Journal of Solids and Structures, 48(25–26):3431–3443.

[Griffith, 1921] GRIFFITH, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character, 221:163–198.

[Högberg, 2006] HÖGBERG, J. L. (2006). Mixed mode cohesive law. International Journal of Fracture, 141(3-4):549–559.

[Hsu, 1984] HSU, T. T. C. (1984). Fatigue and microcracking of concrete. Matériaux et Constructions, 17(1):51–54.

[Hughes et Chapman, 1966] HUGHES, B. P. et CHAPMAN, G. P. (1966). The complete stress-strain curve for concrete in direct tension. Matls & Structures, Res & Testing/Fr/.

[Ince, 2012] INCE, R. (2012). Determination of concrete fracture parameters based on peak-load method with diagonal split-tension cubes. Engineering Fracture Mechanics, 82(0):100–114.

[Irwin, 1957] IRWIN, G. R. (1957). Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. J. Appl. Mech.

[Jenq et Shah, 1985] JENQ, Y. et SHAH, S. (1985). Two Parameter Fracture Model for Concrete. Journal of Engineering Mechanics, 111(10):1227–1241.

[Kachanov, 1958] KACHANOV, L. M. (1958). Time of rupture process under creep conditions. Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk., 23:26–31.

[Karhunen, 1947] KARHUNEN, K. (1947). Uber lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. Mat.-Phys., 37:1–70.

[Kolluru et al., 2000] KOLLURU, S. V., O'NEIL, E. F., POPOVICS, J. S. et SHAH, S. P. (2000). Crack propagation in flexural fatigue of concrete. Journal of Engineering Mechanics, 126(9):891–898.

[Kröner, 1967] KRÖNER, E. (1967). Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. International Journal of Solids and Structures, 3(5):731–742.

[Kun et Herrmann, 1996] KUN, F. et HERRMANN, H. J. (1996). A study of fragmentation processes using a discrete element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 138(1–4):3–18.

[La Borderie, 1991] LA BORDERIE, C. (1991). Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton = Crack closure effect in continuum damage mechanics : Modelling and application to concrete structure analysis. Thèse de doctorat, Université de Paris 6.

[Ladeveze, 1983] LADEVEZE, P. (1983). On an anisotropic damage theory. Proc. CNRS Int. Coll, 351:355–363.

[Landis et Baillon, 2002] LANDIS, E. N. et BAILLON, L. (2002). Experiments to Relate Acoustic Emission Energy to Fracture Energy of Concrete. Journal of Engineering Mechanics, 128(June):698–702.

[Landis et al., 1999] LANDIS, E. N., NAGY, E. N., KEANE, D. T. et NAGY, G. (1999). Technique to measure 3D work-of-fracture of concrete in compression. Journal of Engineering Mechanics, 125(6):599–605.

[Landis et Shah, 1995] LANDIS, E. N. et SHAH, S. P. (1995). The influence of microcracking on the mechanical behavior of cement based materials. Advanced Cement Based Materials, 2(3):105–118.

[Lasry et Belytschko, 1988] LASRY, D. et BELYTSCHKO, T. (1988). Localization limiters in transient problems. International Journal of Solids and Structures, 24(6):581–597.

[Lee et Barr, 2004] LEE, M. et BARR, B. (2004). An overview of the fatigue behaviour of plain and fibre reinforced concrete. Cement and Concrete Composites, 26(4):299–305.

[Leung et Li, 1989] LEUNG, C. K. Y. et LI, V. C. (1989). Determination of fracture toughness parameter of quasi-brittle materials with laboratory-size specimens. Journal of Materials Science, 24(3):854–862.

[L'Hermite, 1960] L'HERMITE, R. (1960). What do we know about plastic deformation and creep of concrete ? Waterways Experiment Station.

[Maji et Shah, 1988] MAJI, A. et SHAH, S. P. (1988). Process Zone in Acoustic-Emission -Measurements in Concrete. Expermimental Mechanics, pages 27–33.

[Mamillan et Bouineau, 1980] MAMILLAN, M. et BOUINEAU, A. (1980). Nouvelles applications des mesures de vitesse du son aux matériaux de construction. Annales de l'Institut technique du batiment et des travaux publiques, (382):137–147.

[Mathieu et al., 2012] MATHIEU, F., HILD, F. et ROUX, S. (2012). Identification of a crack propagation law by digital image correlation. International Journal of Fatigue, 36(1):146–154.

[Mazars et Pijaudier-Cabot, 1989] MAZARS, J. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1989). Continuum Damage Theory - Application to Concrete. Journal of Engineering Mechanics, 115(2):345–365.

[Meschke et Dumstorff, 2007] MESCHKE, G. et DUMSTORFF, P. (2007). Energy-based modeling of cohesive and cohesionless cracks via X-FEM. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(21–24):2338–2357.

[Mihashi et Nomura, 1996] MIHASHI, H. et NOMURA, N. (1996). Correlation between characteristics of fracture process zone and tension-softening properties of concrete. Nuclear Engineering and Design, 165:359–376.

[Mindlin, 1964] MINDLIN, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 16(1):51–78.

[Mindlin, 1965] MINDLIN, R. D. (1965). Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. International Journal of Solids and Structures, 1(4):417–438.

[Moës et Belytschko, 2002] MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. Engineering Fracture Mechanics, 69:813–833.

[Moës et al., 2011] MOËS, N., STOLZ, C., BERNARD, P. et CHEVAUGEON, N. (2011). A level set based model for damage growth : The thick level set approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 86:358–380.

[Mühlhaus et Alfantis, 1991] MÜHLHAUS, H. B. et ALFANTIS, E. C. (1991). A variational principle for gradient plasticity. International Journal of Solids and Structures, 28(7):845–857.

[Mühlhaus et Vardoulakis, 1987] MÜHLHAUS, H. B. et VARDOULAKIS, I. (1987). The thickness of shear bands in granular materials. Géotechnique, 37(3):271–283.

[Muralidhara et al., 2010] MURALIDHARA, S., PRASAD, B. K. R., ESKANDARI, H. et KARIHALOO, B. L. (2010). Fracture process zone size and true fracture energy of concrete using acoustic emission. Construction and Building Materials, 24(4):479–486.

[Nara et al., 2011] NARA, Y., MORIMOTO, K., YONEDA, T., HIROYOSHI, N. et KANEKO, K. (2011). Effects of humidity and temperature on subcritical crack growth in sandstone. International Journal of Solids and Structures, 48(7-8):1130–1140.

[Needleman, 1987] NEEDLEMAN, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. Journal of applied mechanics, 54(3):525–531.

[Needleman, 1988] NEEDLEMAN, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 67(1):69–85.

[Nooru-Mohamed, 1992] NOORU-MOHAMED, M. B. (1992). Mixed-mode fracture of concrete : an experimental approach. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Delft.

[Nooru-Mohamed et al., 1993] NOORU-MOHAMED, M. B., SCHLANGEN, E. et van MIER, J. G. M. (1993). Experimental and numerical study on the behavior of concrete subjected to biaxial tension and shear. Advanced Cement Based Materials, 1(1):22–37.

[Oliver, 2000] OLIVER, J. (2000). On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. International Journal of Solids and Structures, 37(48-50):7207–7229.

[Oliver et al., 2006] OLIVER, J., HUESPE, A. E. et SÁNCHEZ, P. J. (2006). A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities : E-FEM vs X-FEM. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(37–40):4732–4752.

[Oliver-Leblond et al., 2013] OLIVER-LEBLOND, C., DELAPLACE, A., RAGUENEAU, F. et RICHARD, B. (2013). Non-intrusive global/local analysis for the study of fine cracking. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 37(8):973–992.

[O'Rourke et al., 1982] O'ROURKE, J., CHIEN, C.-B., OLSON, T. et NADDOR, D. (1982). A new linear algorithm for intersecting convex polygons. Computer Graphics and Image Processing, 19(4):384–391.

[Otsuka et Date, 2000] OTSUKA, K. et DATE, H. (2000). Fracture process zone in concrete tension specimen. Engineering Fracture Mechanics, 65(2-3):111–131.

[Otsuka et al., 2003] OTSUKA, K., MIHASHI, H., KIYOTA, M., MORI, S. et KAWAMATA, A. (2003). Observation of Multiple Cracking in Hybrid FRCC at Micro and Meso Levels. Journal of Advanced Concrete Technology, 1(3):291–298.

[Pardoen et al., 2005] PARDOEN, T., FERRACIN, T., LANDIS, C. M. et DELANNAY, F. (2005). Constraint effects in adhesive joint fracture. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53(9):1951–1983.

[Pietruszczak et Mróz, 1981] PIETRUSZCZAK, S. et MRÓZ, Z. (1981). Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17(3):327–334.

[Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987] PIJAUDIER-CABOT, G. et BAZANT, Z. P. (1987). Nonlocal damage theory. Journal of Engineering Mechanics, 113(10):1512–1533.

[Pommier et al., 2009] POMMIER, S., LOPEZ-CRESPO, P. et DECREUSE, P. Y. (2009). A multi-scale approach to condense the cyclic elastic-plastic behaviour of the crack tip region into an extended constitutive model. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 32(11):899–915.

[Potyondy et Cundall, 2004] POTYONDY, D. O. et CUNDALL, P. A. (2004). A bonded-particle model for rock. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 41(8):1329–1364.

[Prokopski et Langier, 2000] PROKOPSKI, G. et LANGIER, B. (2000). Effect of water cement ratio and silica fume addition on the fracture toughness and morphology of fractured surfaces of gravel concretes. Cement and Concrete Research, 30(9):1427–1433.

[Robinson, 1965] ROBINSON, S. R. (1965). Methods of detecting the formation and propagation of microcracks in concrete. In Proceedings of the International Conference The Structure of concrete, London.

[Rots et al., 2006] ROTS, J. G., INVERNIZZI, S. et BELLETTI, B. (2006). Saw-tooth softening/stiffening - a stable computational procedure for RC structures. Computers & Concrete, 3:213–233.

[Roux et Hild, 2006] ROUX, S. et HILD, F. (2006). Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. International Journal of Fracture, 140(1-4):141–157.

[Ruiz et al., 2001] RUIZ, G., PANDOLFI, A. et ORTIZ, M. (2001). Three-dimensional cohesive modeling of dynamic mixed-mode fracture. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 52(12):97–120.

[Rusch et Hilsdorf, 1963] RUSCH, H. et HILSDORF, H. (1963). Deformation characteristics of concrete under axial tension. Voruntersuchungen, Bericht, 44.

[Schlangen et Garboczi, 1997] SCHLANGEN, E. et GARBOCZI, E. J. (1997). Fracture simulations of concrete using lattice models : Computational aspects. Engineering Fracture Mechanics, 57(2–3):319–332.

[Sellier et Bary, 2002] SELLIER, A. et BARY, B. (2002). Coupled damage tensors and weakest link theory for the description of crack induced anisotropy in concrete. Engineering Fracture Mechanics, 69(17):1925–1939.

[Shet et Chandra, 2002] SHET, C. et CHANDRA, N. (2002). Analysis of Energy Balance When Using Cohesive Zone Models to Simulate Fracture Processes. Journal of Engineering Materials and Technology, 124:440.

[Slate et Olsefski, 1964] SLATE, F. O. et OLSEFSKI, S. (1964). X-rays for study of internal structure and microcracking of concrete. ACI Proceedings, v60:575–578.

[Sutton et al., 1983] SUTTON, M. A., WOLTERS, W. J., PETERS, W. H., RANSON, W. F. et MCNEILL, S. R. (1983). Determination of displacements using an improved digital correlation method. Image and Vision Computing, 1(3):133–139.

[Terrien, 1980] TERRIEN, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées, (115).

[Toupin, 1962] TOUPIN, R. A. (1962). Elastic materials with couple-stresses. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 11(1):385–414.

[Tvergaard et Hutchinson, 1992] TVERGAARD, V. et HUTCHINSON, J. W. (1992). The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 40(6):1377–1397.

[Van Mier et Nooru-Mohamed, 1990] VAN MIER, J. G. M. et NOORU-MOHAMED, M. B. (1990). Geometrical and structural aspects of concrete fracture. Engineering Fracture Mechanics, 35(4–5):617–628.

[Van Mier et al., 2002] VAN MIER, J. G. M., VAN VLIET, M. R. A. et WANG, T. K. (2002). Fracture mechanisms in particle composites : statistical aspects in lattice type analysis. Mechanics of Materials, 34(11):705–724.

[Wang et al., 2010] WANG, J. J.-A., LIU, K. C. et NAUS, D. (2010). A new test method for determining the fracture toughness of concrete materials. Cement and Concrete Research, 40(3):497–499.

[Westergaard, 1939] WESTERGAARD, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. Journal of Applied Mechanics, pages 49–53.

[Williams, 1957] WILLIAMS, M. L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. Journal of applied mechanics, 24(1):109–114.

[Xu et Reinhardt, 1999a] XU, S. et REINHARDT, H. W. (1999a). Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture , Part I : Experimental investigation of crack propagation. International Journal of Fracture, 98:111–149.

[Xu et Reinhardt, 1999b] XU, S. et REINHARDT, H. W. (1999b). Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture , Part II : Analytical evaluating and practical measuring methods for three-point bending notched beams. International Journal of Fracture, (98):151–177.

[Xu et Reinhardt, 1999c] XU, S. et REINHARDT, H. W. (1999c). Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture , Part III : Compact tension specimens and wedge splitting specimens. International Journal of Fracture, 98:179–193.

[Xu et al., 2003] XU, S., REINHARDT, H. W. et ZHAO, Y. (2003). Comparison between the Double-K Fracture Model and the Two Parameter Fracture Model. Otto-Graf-Journal, 14:131–158.

[Xu et Needleman, 1993] XU, X. P. et NEEDLEMAN, A. (1993). Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 1(2):111.