



UFR Sciences et Techniques
École Doctorale Carnot Pasteur
Université de Franche-Comté

Thèse
Présentée par
Firmin VARESCON

le 11 juin 2014

Calculs explicites en théorie d'Iwasawa

Jury

BELLIARD Jean-Robert (Directeur), Maître de conférences à l'Université de Franche-Comté.

DELAUNAY Christophe, Professeur à l'Université de Franche-Comté.

MAIRE Christian, Professeur à l'Université de Franche-Comté.

ROBLOT Xavier-François (Rapporteur), Maître de conférences à l'Université de Lyon.

STEVENHAGEN Peter (Rapporteur), Professeur à l'Universiteit de Leiden.

VINATIER Stéphane, Maître de Conférences à l'Université de Limoges.

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Jean-Robert Belliard, qui m'a accompagné pendant toute ma thèse. Je le remercie pour toutes les connaissances qu'il m'a apporté ainsi que pour toutes les relectures qu'il a effectué.

Je remercie Francois-Xavier Roblot et Peter Stevenhagen d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je les remercie pour leurs lectures attentive de ma thèse et pour toutes les remarques qu'ils ont effectuées. Je les remercie de s'être déplacé pour faire partie de mon jury de soutenance.

Je suis très reconnaissant envers Christophe Delaunay , Christian Maire, et Stéphane Vinatier d'avoir accepté d'avoir de faire partie de mon jury de soutenance.

Je souhaite remercier Bill Allombert pour l'aide qu'il m'a apporté et sans qui les calculs que j'ai effectué n'auraient pas pu être aussi nombreux.

J'ai également une pensée pour tous les membres du laboratoire de mathématiques de Besançon. C'est avec grand plaisir que j'ai passé 8 années à l'Université de Franche-Comté. Merci à mes co-doctorants avec qui j'ai partagé d'agréables moments.

Je souhaite remercier ma famille et mes amis qui ont cru en moi et qui m'ont soutenu tout au long de mes études.

Table des matières

1	Conjecture de Leopoldt.	13
1.1	Conjecture de Leopoldt et équivalent.	13
1.1.1	Notations générales.	14
1.1.2	Sur les pro- p -complétés.	15
1.1.3	Quelques équivalents à la conjecture.	15
1.2	Groupe de classes de rayon.	16
1.2.1	Conducteur d'une extension.	17
1.2.2	Définition du groupe de classes de rayon.	17
1.3	Test pour vérifier la conjecture de Leopoldt.	23
1.3.1	Propriétés de stabilisation de $\mathcal{A}_{p^n}$	25
1.4	Méthode pour vérifier la conjecture de Leopoldt.	27
1.5	Critère équivalent.	28
2	Calcul de la torsion de $\mathfrak{X}$.	33
2.1	Introduction.	33
2.1.1	Motivation du problème.	35
2.2	Comportement asymptotique de $\mathcal{A}_{p^n}$	36
2.3	Une borne explicite.	40
2.3.1	Le cas quadratique et $p \neq 2$	40
2.3.2	Le cas général.	40
3	Approche heuristique.	43
3.1	Rappels sur les heuristiques de Cohen-Lenstra.	43
3.1.1	Calcul explicite des moyennes.	49
3.2	Comparaison avec les résultats numériques.	50
3.2.1	Résultats numériques.	50
3.3	Explication des résultats numériques.	70
3.3.1	Incidence de la signature du corps.	75

4	Application à la conjecture de Greenberg.	79
4.0.2	Équivalent à la conjecture de Greenberg.	79
4.0.3	Exemple de la conjecture de Greenberg.	80
5	Annexes.	85
5.0.4	Heuristique sur le 9-rang (section 3.3).	85
5.0.5	Tables numériques.	88
5.0.6	Algorithme.	117

Introduction.

Histoire du groupe de classes d'idéaux.

"Il n'est pas possible de décomposer un cube en somme de deux cubes, une puissance quatrième en somme de deux puissances quatrièmes et généralement aucune puissance d'exposant supérieur à 2 en deux puissances de même exposant."

Cette annotation de Pierre Fermat(1601-1665) vers 1637 est devenue l'un des théorèmes les plus célèbres de mathématiques. Il s'énonce aujourd'hui comme suit :

Théorème 0.0.1. *Dès que $n \geq 3$, il n'existe pas d'entiers non nuls x , y et z tels que :*

$$x^n + y^n = z^n$$

Fermat laisse entendre qu'il disposait d'une preuve de ce théorème. Mais en 1659, il propose à Carcavi comme problème de résoudre les cas particuliers $n = 3$ et $n = 4$. Il s'était certainement rendu compte qu'il avait commis une erreur dans la preuve. Ce problème est un problème d'arithmétique donc les calculs doivent se faire dans un anneau. Et Fermat ne pouvait pas savoir que l'anneau dans lequel on fait les calculs n'est pas toujours principal. Si des preuves furent trouvées pour quelques cas particuliers ($n=3$ Euler 1770), une grande avancée est due au mathématicien allemand Ernst Kummer qui introduit la notion d'idéal et démontre le grand théorème de Fermat pour les nombres premiers dont l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ est factoriel. Ce défaut de factorialité est ensuite formalisé par Dedekind en 1876 qui introduit les anneaux de Dedekind et la notion d'idéal fractionnaire. Ceci permet d'exhiber un groupe fini, le groupe de classes d'idéaux, qui mesure le défaut de principalité de l'anneau d'entier. Il existe des algorithmes pour calculer ce groupe. La complexité de ces algorithmes dépasse la capacité des machines

actuelles sauf pour les corps de petit degré. Les travaux de Kummer sur le théorème de Fermat l'amenèrent à développer les lois de réciprocités. Ces notions lui ont permis de démontrer le grand théorème de Fermat pour une certaine catégorie d'exposant. Il faut attendre 1994, pour que Wiles donne une preuve complète de ce théorème [Wil95]. Hilbert reprendra les travaux de Kummer et démontrera l'existence de ce que l'on appelle les corps de Hilbert. C'est en fait l'existence d'une unique extension H de K non ramifiée et telle que $\text{Gal}(H/K)$ est isomorphe au groupe de classes d'idéaux. Ces développements constituent les prémisses de la théorie du corps de classes qui constitue en l'obtention d'informations sur les extensions abéliennes d'un corps de nombres à partir des éléments tirés de ce corps. Tagaki et Artin établissent la théorie du corps de classes pour les corps de nombres. Cette généralisation est appelée loi de réciprocité d'Artin.

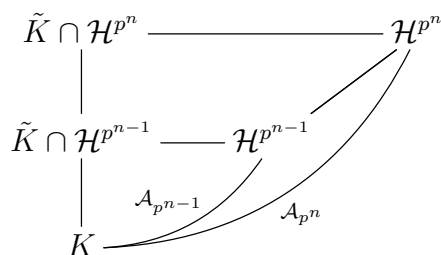
La théorie d'Iwasawa.

Les travaux d'Iwasawa [Iwa73] [Iwa59] l'amènent à développer une théorie qui porte aujourd'hui son nom. Les objets étudiés par la théorie d'Iwasawa sont les $\mathbb{Z}_p$ -extensions d'un corps de nombres (Iwasawa les appelait les Γ -extensions) c'est à dire une extension K_∞ d'un corps de nombres K tel que $\text{Gal}(K_\infty/K) \simeq \mathbb{Z}_p$. La donnée d'une $\mathbb{Z}_p$ -extension est équivalente par la correspondance de Galois à la donnée d'une tour d'extensions $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_\infty$ où $\text{Gal}(K_n/K) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. L'exemple le plus connu est la $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique. Elle est obtenue en ajoutant les racines p^n -ièmes de l'unité à K . Le groupe de Galois $\text{Gal}(K(\zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots, \zeta_{p^n}, \dots)/K)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p \times$ un groupe fini. Donc il existe une sous extension K_∞ de $K(\zeta_p, \zeta_{p^2}, \dots, \zeta_{p^n}, \dots)$ qui est une $\mathbb{Z}_p$ -extension de K . Ainsi, il existe une tour d'extensions $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \dots \subset K_\infty$ tel que $\text{Gal}(K_n/K) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

et $K_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Leopoldt a conjecturé qu'il existait $r_2 + 1$ $\mathbb{Z}_p$ -extensions

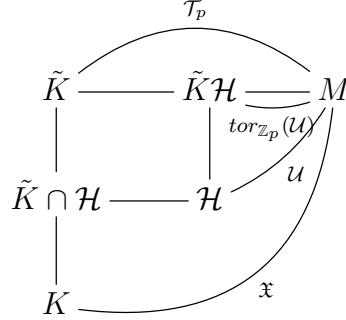
$\mathbb{Z}_p$ -linéairement indépendantes de K , où r_2 est le nombre de plongements complexe de K dans $\mathbb{C}$. Cette conjecture a été étudiée par de nombreux mathématiciens. Une démonstration a été donnée dans le cas abélien suite aux travaux de James Ax [Ax65], et Armand Brumer en 1967 [Bru67]. Dans le cas général, il n'existe pas de démonstration même si d'importantes avancées ont été données par Waldschmidt en 1980 [Wal81]. Dans le premier chapitre de cette thèse, on donnera un algorithme permettant de vérifier la conjecture

de Leopoldt pour un corps de nombres K , et un nombre premier p donnés. On note alors K_n le n -ième étage de l'extension cyclotomique de K , $\tilde{K}$ le compositum des $\mathbb{Z}_p$ -extensions, $\mathcal{H}$ la pro- p extension abélienne non-ramifiée maximale de K , $\mathcal{H}^{p^n}$ le compositum de toutes les p -extensions de K dont le conducteur divise p^n et $\mathcal{A}_{p^n}$ le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$. On peut résumer les notations précédentes dans le diagramme suivant :



La théorie du corps de classes nous permet de calculer $\mathcal{A}_{p^n}$ avec la connaissance des éléments de K sans monter dans les tours de $\mathbb{Z}_p$ -extensions et donc sans calculer des corps de gros degré ce qui dépasserait les capacités de calcul des machines dont on dispose actuellement. Ainsi en étudiant les propriétés de stabilité de $\mathcal{A}_{p^n}$ et notamment si le cardinal du noyau de l'application de $\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ dans $\mathcal{A}_{p^n}$ se stabilise à deux étages successifs, on peut proposer un test pour la conjecture de Leopoldt. En effet, si ce cardinal est égal à p^{r_2+1} à partir d'un certain rang on démontre que le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt pour ce premier p . Le but de la théorie d'Iwasawa est d'étudier les modules d'Iwasawa associés à une $\mathbb{Z}_p$ -extension K_∞ d'un corps de nombres K . Ceci permet d'obtenir des informations arithmétiques sur K . L'un des principaux modules d'Iwasawa est le module $\mathfrak{X}$ qui est le groupe de Galois de la pro- p extension abélienne non ramifiée en dehors de p . Par la formule de Leopoldt, généralisée par Colmez [Col88] l'ordre de ce module est donné par la valuation du résidu en 1 des fonctions L . Le comportement fonctoriel de ce module est meilleur que celui de la p -partie du groupe de classes. Les heuristiques que l'on a développé dans cette thèse incitent à penser que ce module peut être considéré comme un bon analogue p -adique du groupe des classes. On note M la pro- p extension abélienne non ramifiée en dehors de p maximal de K . Via la théorie du corps de classes, on sait que le groupe $\text{Gal}(M/\mathcal{H})$ est isomorphe au quotient $\mathcal{U} := \prod_{v|p} U_v^1 / \bar{U}_K$. La situation entre

les différentes extensions étant résumée par le diagramme suivant :



Dans le deuxième chapitre de cette thèse, on propose une méthode explicite pour calculer la $\mathbb{Z}_p$ -torsion de $\mathfrak{X}$. Afin d'éviter toute ambiguïté, on précise d'emblée que par calcul explicite, on entend *écrire un programme pari-GP calculant $\mathcal{T}_p$, un corps K et un premier p étant donnés*. En effet, en supposant la conjecture de Leopoldt vérifiée, en calculant successivement les $\mathcal{A}_{p^n}$, on pourra en déduire cette torsion. Les résultats du premier chapitre nous donnent un algorithme pour tester la conjecture de Leopoldt. Un programme implémenté sur le logiciel pari-GP permet de déterminer explicitement $\mathcal{T}_p$. Dans le troisième chapitre, on rappelle certains résultats sur les heuristiques de Cohen Leustra [CL84]. Et on confronte les résultats obtenus pour des corps quadratiques, cubiques et quintiques. On donnera ensuite une explication des observations que l'on a fait.

Si l'on note X_n la p -partie du groupe de classes d'idéaux de K_n , alors le théorème d'Iwasawa décrit le comportement du cardinal de X_n pour n assez grand.

Théorème. ([Iwa73]) *Il existe λ , μ et ν tel que $\#(X_n) = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$ pour $n \gg 0$.*

Puisque K_∞/K est la $\mathbb{Z}_p$ -extensions cyclotomique, l'invariant μ est conjecturalement nul. Cette conjecture a été démontrée pour $K/\mathbb{Q}$ abélien par Ferrero et Washington [FW79]. Greenberg a conjecturé que pour les corps totalement réels, l'invariant λ était nul [Gre76]. Dans [KS95] Kraft et Schoof ont démontré :

Théorème. *Les invariant λ associés à la $\mathbb{Z}_3$ -extension pour les corps quadratiques réels $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $0 \leq d \leq 10000$ et $d \not\equiv 1 \pmod{3}$ sont tous égaux à zéro.*

D'autres travaux ont été effectués par Taya [Tay99] qui donnent d'autres exemples de corps cubiques où λ est nul pour $p = 5$ ou 7 . On verra dans le dernier chapitre comment en utilisant le calcul de la torsion de module p -ramifié d'Iwasawa, on peut donner des exemples de corps vérifiant la conjecture de Greenberg. Dans un premier temps, on montrera que la conjecture de Greenberg est vraie pour $p = 5$ les corps quadratiques réels $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d < 1000$ et 5 totalement décomposés dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$ sauf pour huit pour lesquels les calculs que l'on a effectué ne suffisent pas à conclure. Puis on donnera aussi des cas où la conjecture est vérifiée et où la torsion est de p -rang deux.

Chapitre 1

Conjecture de Leopoldt.

1.1 Conjecture de Leopoldt et équivalent.

La conjecture de Leopoldt peut être vue comme un analogue p -adique du théorème de Dirichlet. On présente rapidement ce théorème pour introduire la conjecture de Leopoldt. Pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre IV de [Sam67]. Soit K un corps de nombres de degré n , r_1 (respectivement r_2) le nombre de places réelles (respectivement complexes) de K . On note E le groupe des unités de K . On a n plongements de K dans $\mathbb{C}$, r_1 plongements réels et $2r_2$ plongements complexes qui sont conjugués deux à deux. On regroupe les plongements complexes par paires pour obtenir :

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}, \sigma_{r_1+1}, \bar{\sigma}_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}, \bar{\sigma}_{r_1+r_2},$$

on pose alors :

$$L(x) = (\log(|\sigma_1(x)|), \dots, \log(|\sigma_{r_1+r_2}(x)|))$$

L est appelé le plongement logarithmique de $K^\times$ dans $\mathbb{R}^\times$.

Théorème 1.1.1. (*Dirichlet*)(théorème 1 p.72 [Sam67]) Soit K un corps de nombres, le groupe des unités est isomorphe à $\mathbb{Z}^{r_1+r_2-1} \times G$ où G est le groupe (fini) des racines de l'unité contenues dans K .

Dans le cas p -adique, en fixant un plongement de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}_p$, chaque plongement de K dans $\mathbb{C}$ peut être vu comme un plongement de K dans $\mathbb{C}_p$. On note de la même manière σ_i les plongements de K dans $\mathbb{C}_p$. Soit ϵ_i pour

$1 \leq i \leq r_1 + r_2 - 1$ une base des unités de K modulo les racines de l'unité. On utilise alors le logarithme p -adique pour définir le régulateur p -adique R_p ,

$$R_p = \det(\delta_i \log_p(\sigma_i(\epsilon_j)))_{1 \leq i, j \leq r_1 + r_2 - 1}$$

où $\delta_i = 2$ si σ_i est un plongement complexe et 1 sinon. Pour plus de détails, on pourra consulter [Was82], [Neu99] et [NSW00].

Conjecture 1 (Conjecture de Leopoldt). *Pour tout corps de nombres K et tout nombre premier p , $R_p \neq 0$.*

Jusqu'à présent il n'y a pas de démonstration générale de cette conjecture. Elle est vérifiée dans certains cas.

Théorème 1.1.2. ([Bru67]) *Si $K/\mathbb{Q}$ est une extension abélienne alors la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour tout nombre premier p .*

Cette conjecture est aussi démontrée dans le cas d'une extension abélienne d'un corps quadratique imaginaire. On sait aussi que l'analogue p -adique de la célèbre conjecture de Schanuel ([Lan66] p.30-31) entraîne la conjecture de Leopoldt ([Jau85] Proposition 1 p. 152).

Dans la littérature on peut trouver d'autres formulations de la conjecture de Leopoldt. On rappelle d'abord quelques notations.

1.1.1 Notations générales.

Dans O_K , anneau des entiers de K , l'idéal engendré par p s'écrit comme un produit d'idéaux premiers :

$$(p) = \prod_{v|p} \mathfrak{p}_v^{e_v}.$$

Pour chaque p -place v de K , on fixe une uniformisante π_v dans K_v , v -complété de K . On munit K_v de l'unique valuation prolongeant celle de $\mathbb{Q}_p$, de sorte que $v(p) = 1$ dans K_v et $v(\pi_v) = \frac{1}{e_v}$. On notera en outre $e = \text{Max}\{e_v, v|p\}$.

1.1.2 Sur les pro- p -complétés.

Par définition, le pro- p -complété d'un $\mathbb{Z}$ -module M est la limite projective des quotients M/p^n . Dans le cas où M est de type fini sur $\mathbb{Z}$, cette limite projective est isomorphe au produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$ de M par $\mathbb{Z}_p$. On conviendra de noter $\overline{M}$ le pro- p -complété d'un $\mathbb{Z}$ -module M .

Pour une place v quelconque, $\overline{U}_v$ désignera donc le pro- p -complété du groupe des unités U_v de K_v . On a par conséquent :

$$\overline{U}_v = \begin{cases} U_v^1 & \text{si } v|p \\ \mu_{p^\infty}(K_v) & \text{si } v \nmid p \end{cases},$$

où $\mu_{p^\infty}(K_v)$ est le groupe des racines p -primaires de l'unité contenues dans K_v .

Pour une p -place v et n entier naturel non nul, U_v^n désigne le groupe des unités u de K_v tels que $u \equiv 1[\pi_v^n]$ (compte tenu du fait que $v(p) = 1$, on a $u \in U_v^n \Leftrightarrow v(u - 1) \geq \frac{n}{e_v}$). Pour $n \geq 1$, le groupe U_v^n est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{Z}_p$ -module et est donc pro- p -complet, en d'autres termes $\overline{U}_v^n = U_v^n$.

On considère le plongement des unités de O_K dans $\prod_{v|p} U_v$

$$\begin{aligned} E &\hookrightarrow \prod_{v|p} U_v \\ (\epsilon) &\rightarrow (\epsilon, \dots, \epsilon) \end{aligned}$$

On note alors E_1 l'ensemble des ϵ dont l'image est dans U_v^1 et $\widehat{E}_1$ la fermeture de E_1 dans U_1 .

1.1.3 Quelques équivalents à la conjecture.

Soit $\mathcal{H}$ (respectivement M) la p -extension abélienne maximale de K non-ramifiée (respectivement non-ramifiée en dehors de p). Soit $\tilde{K}$ le compositum des $\mathbb{Z}_p$ -extensions de K . Les $\mathbb{Z}_p$ -extensions sont non-ramifiées en dehors de p donc contenues dans M . On note $\mathfrak{X}$ le groupe de Galois $\text{Gal}(M/K)$.

Théorème 1.1.3. ([NSW00]) *Soit K un corps de nombres et p un nombre premier alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. la conjecture de Leopoldt est vraie pour p et K ;

2. le rang de $\widehat{E_1}$ est $r_1 + r_2 - 1$;
3. le morphisme canonique $E \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \prod_{v|p} \bar{U}_v$ est injectif ;
4. $\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{X} = r_2 + 1$ (ceci est la formulation classique de la conjecture de Leopoldt qui dit que le K a $r_2 + 1$ $\mathbb{Z}_p$ -extensions).
5. $H^2(G_{S_p}(K), \mathbb{Z}_p) = 1$ où G_{S_p} est le groupe de Galois de la pro- p -extension non ramifiée en dehors de p , maximale de K .

On note δ le nombre $r_1 + r_2 - 1 - \text{rang}(\widehat{E_1})$, il est appelé le défaut de Leopoldt et $0 \leq \delta \leq r_1 + r_2 - 1$. Waldschmidt a démontré que δ était en fait inférieur à $\frac{r_1 + r_2 - 1}{2} + 1$ ([Wal81] p.120).

On note $Cl_p(K)$ la p -partie du groupe de classes idéaux de K , alors le module $\mathfrak{X}$ peut être décrit par une suite issue de la théorie du corps de classes :

$$\bar{U}_K \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^1 \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_p(K) \longrightarrow 1, \quad (1.1)$$

L'injectivité à gauche est équivalente à la conjecture de Leopoldt.

Donc en supposant la conjecture vraie pour K et p on obtient la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \bar{U}_K \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^1 \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow Cl_p(K) \longrightarrow 1, \quad (1.2)$$

On commence par quelques rappels sur la théorie du corps de classes qui nous seront utiles par la suite.

1.2 Groupe de classes de rayon.

On rappelle dans cette section la définition du groupe de classes de rayon p^n , via la théorie du corps de classes. On note que le groupe de classes de rayon p^n peut être considéré comme quotient d'un certain groupe d'idéaux (Cf [Gra03] définition 4.4 p. 37).

La théorie globale du corps de classes décrit les extensions abéliennes d'un corps de nombres K . Or on ne considère ici que des p -extensions abéliennes, qui sont décrites par la théorie p -adique du corps de classes ([Jau98]). Cette théorie est en tous points similaire à la théorie globale dans laquelle les corps

locaux K_v^* seraient remplacés par leurs pro- p -complétés. cette théorie est plus simple car l'analogie du groupe de classe d'idèle n'a pas de composante connexe.

La notion de groupe de classes de rayon est fortement liée à celle de conducteur d'une extension. On commence donc cette partie par de brefs rappels sur la notion de conducteur.

1.2.1 Conducteur d'une extension.

La notion de conducteur est une notion locale dans le sens où elle est définie initialement pour une extension locale.

Définition 1.2.1. Le conducteur d'une extension abélienne de corps locaux L_v/K_v est le minimum des entiers c tels que $U_v^c \subset N_{L_v/K_v}(L_v^*)$.

Remarque 1. ([Ser68] chap V, §6, proposition 8 et corollaire 3). En particulier une extension abélienne L_v/K_v est non-ramifiée si et seulement si son conducteur est nul (on rappelle la convention $U_v^0 = U_v$).

Définition 1.2.2. (cf. [Gra03] p. 126 théorème définition 4.1 + lemme 4.2.1 p 127) Le conducteur d'une extension abélienne de corps globaux L/K est l'idéal $\mathfrak{m} = \prod_v \mathfrak{p}_v^{c_v}$, où v parcourt l'ensemble des places finies de K et où c_v est le conducteur de l'extension L_v/K_v .

On note que la définition précédente ne prend pas en compte une éventuelle ramification des places à l'infini. La proposition suivante découle immédiatement de ces définitions :

Proposition 1.2.3. Soit $K \subset L \subset M$ une tour d'extensions de degrés finis, telle que M/K soit abélienne. Alors le conducteur de l'extension L/K divise le conducteur de l'extension M/K .

Démonstration. Cela découle tout simplement du fait que pour toute place v de M , on a $N_{M_v/K_v}(M_v^*) \subset N_{L_v/K_v}(L_v^*)$. $\square$

1.2.2 Définition du groupe de classes de rayon.

Une des formulations de la théorie globale du corps de classes utilise les corps de classes de rayon. La théorie du corps de classes locale établit l'existence d'une correspondance entre les sous-groupes d'indice fini de K_v^* et les

extensions abéliennes de K_v . Dans la théorie globale, le groupe des idèles de K joue un rôle analogue à celui joué par K_v^* dans le cas local. Ce groupe des idèles, noté $\mathcal{I}_K$, est le produit restreint des K_v^* relativement à U_v , v parcourant l'ensemble des places au dessus de p dans K . Un élément de $x \in \mathcal{I}_K$ est la donnée d'un élément $x_v \in \prod_v K_v^*$ tel que x_v soit une unité pour toutes les places, sauf éventuellement un nombre fini.

Définition 1.2.4. On désignera par :

- H l'extension abélienne non-ramifiée maximale de K ,
- H^{p^n} le compositum de toutes les extensions abéliennes de K , dont le conducteur divise p^n ,
- $\mathcal{H}$ la pro- p -extension abélienne non-ramifiée maximale de K ,
- $\mathcal{H}^{p^n}$ le compositum de toutes les p -extensions de K , dont le conducteur divise p^n .
- M la pro- p -extension non ramifiée en dehors de p , maximale de K . Comme dans [Gra82] on dit que M est non ramifiée en dehors des idéaux premiers divisant p . (Les places réelles restent réelles).

De sorte que les groupes de Galois $\text{Gal}(\mathcal{H}/K)$ et $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$ sont isomorphes aux p -parties respectives des groupes $\text{Gal}(H/K)$ et $\text{Gal}(H^{p^n}/K)$.

On rappelle que l'on note $\mathfrak{X} = \text{Gal}(M/K)$.

On énonce maintenant deux lemmes, qui seront fort utiles dans la suite :

Lemme 1.2.5. ([Ser68] page 219). Soit K_v le complété de K pour la valuation v telle que $v(p) = 1$ et $v(\pi_v) = \frac{1}{e_v}$. Alors, si $m > \frac{e_v}{p-1}$, l'application $x \rightarrow x^p$ est un isomorphisme de U_v^m dans $U_v^{m+e_v}$.

Lemme 1.2.6. Soit $K_v \subset L_v \subset M_v$ une tour d'extensions de $\mathbb{Q}_p$, où les extensions sont abéliennes sur $\mathbb{Q}_p$, et telle que l'extension M_v/K_v soit abélienne et l'extension M_v/L_v de degré p . On note $c_{M,v}$ et $c_{L,v}$ les conducteurs respectifs des extensions M_v/K_v et L_v/K_v . Alors, si $c_{L,v} > \frac{e_v}{p-1}$, où e_v désigne l'indice de ramification de p dans l'extension $K_v/\mathbb{Q}_p$, on a :

$$c_{M,v} \leq c_{L,v} + e_v.$$

Démonstration. On remercie Peter Stevenhagen pour la suggestion de cette preuve plus simple que celle que l'on avait proposé initialement.

Comme M_v est une extension de L_v , on a :

$N_{M_v/K_v}(M_v^*) \supset N_{M_v/K_v}(L_v^*) = N_{L_v/K_v}(L_v^*)^p$ or par la définition du conducteur $N_{L_v/K_v}(L_v^*)^p \supset (U_v^{c_{L,v}})^p$ et d'après le lemme précédent $(U_v^{c_{L,v}})^p =$

$U_v^{cL, v+e_v}$, donc $N_{M_v/K_v}(M_v^*) \supset U_v^{cL, v+e_v}$ par définition du conducteur, on obtient le résultat voulu. $\square$

Proposition 1.2.7. (*[Gra03] p 47 corollaire 5.1.1*) *Les suites exactes suivantes, issues de la théorie globale du corps de classes, permettent de caractériser les corps H^{p^n} et H :*

$$1 \longrightarrow K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathcal{I}_K \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow K^* \prod_v U_v \longrightarrow \mathcal{I}_K \longrightarrow \text{Gal}(H/K) \longrightarrow 1$$

v étant les places finies de K .

Le groupe de Galois $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$ sera noté $\mathcal{A}_{p^n}$ et c'est la p -partie du groupe de Galois $\text{Gal}(H^{p^n}/K)$, groupe de classes de rayon p^n de K .

On déduit immédiatement de la définition de $\mathcal{H}^{p^n}$ les propriétés suivantes :

Proposition 1.2.8. *Soit n un entier non-nul :*

- i) *On dispose d'une inclusion naturelle $\mathcal{H}^{p^n} \subset \mathcal{H}^{p^{n+1}}$.*
- ii) *La limite inductive $\varinjlim \mathcal{H}^{p^n}$ est égale à M .*
- iii) *La limite projective $\varprojlim \mathcal{A}_{p^n}$ est égale à $\mathfrak{X}$.*

La suite exacte définissant le groupe de Galois du corps de classes de rayon p^n sur K fait intervenir le groupe des idéles $\mathcal{I}_K$. Or ce groupe étant un produit infini, il est très peu commode à utiliser dès que l'on veut étudier numériquement le corps $\mathcal{H}^{p^n}$. Pour pallier cette difficulté, on va voir que le corps $\mathcal{H}^{p^n}$ peut être défini par une suite exacte analogue à la suite exacte (1.1), définissant le module $\mathfrak{X}$.

Proposition 1.2.9. *Pour n , entier non nul, On note $\tilde{M}$ l'extension maximale de K non ramifiée en dehors de p . les extensions $\tilde{M}$ et H^{p^n} sont reliées entre elles par la suite exacte suivante :*

$$1 \longrightarrow \widehat{U_K^{(p^n)}} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \text{Gal}(\tilde{M}/K) \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1,$$

où $\widehat{U_K^{(p^n)}}$ est la fermeture de $\{u \in U_K \text{ telle que } \forall v|p, u \in U_v^{ne_v}\}$.

Démonstration. Soit T la fermeture de $K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1$ dans $\mathcal{I}_K$, l'extension $\tilde{M}$ est caractérisé par la suite exacte suivante : ([Was82] page 267)

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow \mathcal{I}_K \longrightarrow \text{Gal}(\tilde{M}/K) \longrightarrow 1.$$

Pour tout n les groupes sont fermés dans $\mathcal{I}_K$ donc $T \subset K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}$. De la définition des extensions $\tilde{M}$ et H^{p^n} , on déduit le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & \mathcal{I}_K & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{M}/K) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v} & \longrightarrow & \mathcal{I}_K & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Il découle immédiatement du lemme du serpent que :

$$\ker(\text{Gal}(\tilde{M}/K) \rightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K)) \cong (K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v})/T.$$

On définit alors l'application :

$$\theta : (K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}) \rightarrow (\prod_{v|p} U_v^{ne_v}) / \widehat{U_K^{(p^n)}},$$

en posant pour $k(u_v) \in K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}$: $\theta(k(u_v)) = \overline{(u_v)_{v|p}}$, où $\overline{(u_v)_{v|p}}$ désigne la classe de $(u_v)_{v|p}$ dans $(\prod_{v|p} U_v^{ne_v})/U_K^{(p^n)}$.

On commence par vérifier que l'application θ est bien définie, i.e. que si $k(u_v) = k'(u'_v)$ dans $K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v}$, alors $\theta(k(u_v)) = \theta(k'(u'_v))$. Par définition, $\forall v, k(u_v) = k'(u'_v) \Leftrightarrow i_v(k)u_v = i_v(k')u'_v$, où i_v désigne le plongement de K dans K_v . On en déduit que $\forall v, i_v(k'k^{-1}) \in U_v$ et que $\forall v, v|p, i_v(k'k^{-1}) \in U_v^{ne_v}$. On a donc $k'k^{-1} \in U_K^{(p^n)}$ et $\overline{(u_v)_{v|p}} = \overline{(u'_v)_{v|p}}$. L'application θ est donc bien définie.

Il est clair que $T \subset \ker(\theta)$ et que l'application θ est surjective. On va montrer que $T = \ker(\theta)$. Soit donc $k(u_v) \in \ker(\theta)$, il existe alors $x_m \in U_K^{(p^n)}$ tel que pour tout $v|p$, $u_v = \lim_{m \rightarrow +\infty} (i_v(x_m))$ et on note x la limite de x_m . On considère alors l'élément $x_m(u'_v)$, où $u'_v = 1$, si $v \nmid p$ et $u'_v = i_v(x_m)^{-1}u_v$, si $v \nmid p$.

On a alors $x_m(u'_v) = (u_v) \Rightarrow kx_m(u'_v) = k(u_v)$ et comme $kx_m(u'_v) \in (K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} 1)$, alors on a $kx(u'_v) \in T$, ainsi on a bien $\ker(\theta) \subset T$ et finalement

$$(K^* \prod_{v \nmid p} U_v \prod_{v|p} U_v^{ne_v})/T \simeq (\prod_{v|p} U_v^{ne_v})/\widehat{U_K^{(p^n)}}.$$

La suite exacte

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow \text{Gal}(\tilde{M}/K) \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1 \quad (1.3)$$

en découle. $\square$

Corollaire 1.2.10. *Les extensions $\mathcal{H}^{p^n}$ et M sont reliées entre elles via la suite exacte suivante :*

$$\overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1, \quad (1.4)$$

où $\overline{U}_K^{(p^n)}$ désigne le pro- p -complété de $U_K^{(p^n)}$.

Cette suite exacte est connue, mais pour la commodité du lecteur, on donne la démonstration.

Démonstration. On obtient la suite exacte suivante en considérant la suite pro- p -complétée de la suite exacte de la proposition 1.2.9.

$$\overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1,$$

En effet, on peut couper la suite exacte 1.3 pour obtenir deux suites exactes à trois termes :

$$1 \longrightarrow \widehat{U_K^{(p^n)}} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow I \longrightarrow 1 \quad (1.5)$$

$$1 \longrightarrow I \longrightarrow \text{Gal}(\tilde{M}/K) \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K) \longrightarrow 1 \quad (1.6)$$

où I est l'image de $\prod_{v|p} U_v^{ne_v}$ dans $\text{Gal}(M/K)$.

On pro- p complète la suite exacte 1.5

$$\overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow I \longrightarrow 1,$$

Pour obtenir la suite avec les pro- p -complétés, on quotiente ces deux suites par p^m et on passe à la limite projective. On regarde ce qu'il se passe en détails pour la suite exacte 1.6, on va vérifier que pour cette unité on a exactitude après la pro- p complétions.

$$\begin{array}{ccccccc}
 I[p^m] & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{M}/K)[p^m] & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m] & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 I & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{M}/K) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Gal}(H^{p^n}/K) & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow p^m & & \downarrow p^m & & \downarrow p^m & & \\
 I & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{M}/K) & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K) & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

où l'on note $I[p^m]$ (respectivement $\text{Gal}(\tilde{M}/K)[p^m]$ et $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$) la p^m torsion de I (respectivement de $\text{Gal}(\tilde{M}/K)$ et de $\text{Gal}(H^{p^n}/K)$).

En utilisant le lemme du serpent on obtient la suite exacte suivante.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & I[p^m] & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{M}/K)[p^m] & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m] & \longrightarrow 1 \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & I/p^m \longrightarrow \text{Gal}(\tilde{M}/K)/p^m \longrightarrow \text{Gal}(H^{p^n}/K)/p^m \longrightarrow 0.
 \end{array} \tag{1.7}$$

Si l'on prend un élément x de $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$ alors on peut trouver un élément y de $\text{Gal}(\tilde{M}/K)$ et $z \in I$ tel que $\varphi(x) = y$ et $z = p^m y$. Et donc l'application δ_m entre $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$ et I/p^m est la multiplication par p^m . En considérant le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m] & \xrightarrow{\delta_m} & I/p^m & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{M}/K)/p^m & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)/p^m & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow \alpha_n & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^{m-1}] & \xrightarrow{\delta_{m-1}} & I/p^{m-1} & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{M}/K)/p^{m-1} & \longrightarrow & \text{Gal}(H^{p^n}/K)/p^{m-1} & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

On veut montrer que l'application α_n entre $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$ et $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^{m-1}]$ qui fait commuter le diagramme est la multiplication par p . On considère x et x' des éléments de $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^m]$ et de $\text{Gal}(H^{p^n}/K)[p^{m-1}]$, on a $\delta_m(x) = p^m x$ et $\delta_{m-1}(x') = p^{m-1} x'$ si l'on prend maintenant x' l'image de x

par α alors $x' = xp$ donc α_n est la multiplication par p . Comme $\text{Gal}(H^{p^n}/K)$ est un groupe fini alors en multipliant successivement par p ces éléments sa p -partie devient triviale. Comme tous les modules sont finis, en passant à la limite projective dans la suite 1.7 on obtient la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \bar{I} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1$$

En utilisant le même procédé pour la première suite exacte on obtient :

$$\bar{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \bar{I} \longrightarrow 1,$$

En recollant maintenant ces deux suites on obtient :

$$\bar{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1,$$

□

Remarque 2. Si le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt pour p alors on a la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \bar{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1,$$

En effet, la conjecture de Leopoldt est équivalente à l'exactitude à gauche pour tout n .

1.3 Test pour vérifier la conjecture de Leopoldt.

Dans cette partie, on expose une méthode pour vérifier la conjecture de Leopoldt pour un nombre premier et un corps de nombres K donnés. L'idée de cette méthode est que la connaissance de $\mathcal{A}_{p^n}$ et $\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ pour $n \gg 0$ permet de calculer le nombre de $\mathbb{Z}_p$ -extensions de K . On commence par regarder sur quelques exemples puis on donnera des arguments théoriques pour justifier cette méthode. Dans le chapitre suivant, on verra que la connaissance de $\mathcal{A}_{p^n}$ permet aussi de déterminer la structure de $\mathcal{T}_p$.

On note $\tilde{K}$, le compositum de toutes les $\mathbb{Z}_p$ -extensions de K et r le $\mathbb{Z}_p$ -rang de $\mathfrak{X}$. La conjecture de Leopoldt prédit que cet entier r est égal à $r_2 + 1$. On

considère le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, dans cet exemple le théorème 1.1.3 donne la conjecture, on peut aussi la vérifier expérimentalement. En utilisant le logiciel pari-GP, on voit que les 3-parties des groupes de classes de rayon 3^n de K pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sont respectivement :

n	$\mathcal{A}_{p^n}$
0	1
1	1
2	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
3	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$
4	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$
5	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/81\mathbb{Z})$

Cet exemple nous invite à penser que la conjecture de Leopoldt est vraie pour K et $p = 3$. En effet, la partie $\mathcal{A}_{p^n}$ qui semble provenir des $\mathbb{Z}_p$ -extensions est de rang 1 (la partie qui grandit à chaque étage) donc le nombre $\mathbb{Z}_p$ serait 1 qui est bien égal à $r_2 + 1$ car ici r_2 vaut 0. La torsion $\mathfrak{X}$ serait alors la partie qui reste stable c'est à dire $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. On va maintenant voir un exemple non abélien. On considère maintenant le corps $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{6})$. On voit que les 5-parties des groupes de classes de rayon 5^n de K pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sont respectivement :

n	$\mathcal{A}_{p^n}$
0	1
1	$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$
2	$(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$
3	$\mathbb{Z}/1(25\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
4	$(\mathbb{Z}/625\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$
5	$(\mathbb{Z}/3215\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/625\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

Ici r_2 est égal à 2. Comme dans l'exemple précédent, on voit que la partie dont les invariants sont multipliés par 5 à chaque étage est de rang 3 ($=r_2+1$) donc la conjecture de Leopoldt semble vraie et la partie de torsion de $\mathfrak{X}$ serait $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Ceci nous amène à nous poser deux questions :

Question 1. Pour $n \gg 0$, le noyau de la surjection canonique $\mathcal{A}_{p^{n+1}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{p^n}$ est-il isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$, où r est le nombre de $\mathbb{Z}_p$ -extensions de K ?

Question 2. Si pour un certain n , le noyau de la surjection canonique $\mathcal{A}_{p^{n+1}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{p^n}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ alors la conjecture de Leopoldt est-elle vérifiée ?

On rappelle que $\tilde{K}$ est le compositum des $\mathbb{Z}_p$ -extensions et $\mathcal{T}_p$ est la $\mathbb{Z}_p$ -torsion de $\mathfrak{X} = \text{Gal}(M/K)$. Les extensions $\mathcal{H}^{p^n}$, M et $\tilde{K}$ sont reliées entre elles suivant le diagramme d'extensions suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{K} & \text{---} & \tilde{K}\mathcal{H}^{p^n} & \text{---} & M \\
 | & & | & & \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} & \text{---} & \mathcal{H}^{p^n} & & \\
 | & & & & \\
 K & & & &
 \end{array}$$

Pour n assez grand, on a $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) \simeq \mathcal{T}_p$, la détermination explicite d'un entier n_0 tel que $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^{n_0}}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n_0}}) \simeq \mathcal{T}_p$ est a priori difficile. Après avoir exposé une méthode qui permet de vérifier si la conjecture de Leopoldt est vraie pour un corps et un premier donnés, on verra que la connaissance, pour $n \geq n_0$, des facteurs invariants des groupes $\mathcal{A}_{p^n}$ et $\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ permet de déterminer ceux de $\mathcal{T}_p$. Puis nous expliquerons comment déterminer explicitement un tel entier n_0 .

1.3.1 Propriétés de stabilisation de $\mathcal{A}_{p^n}$.

L'objectif est ici de démontrer la proposition suivante, qui répond à la première question posée. Pour simplifier on notera $Y_n = \ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n})$.

Proposition 1.3.1. *Pour tout entier n tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en toutes les places au dessus de p dans K , alors $Y_n \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$.*

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.3.2. *Soit p un nombre premier et K un corps de nombres. On considère le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} & \text{---} & \mathcal{H}^{p^n}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}) & \text{---} & \mathcal{H}^{p^{n+1}} \\
 | & & | & & \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} & \text{---} & \mathcal{H}^{p^n} & & \\
 | & & & & \\
 K & & & &
 \end{array} \tag{1.8}$$

Si l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en une place v au-dessus de p alors $c_{n,v} > \frac{e_v}{p-1}$, où $c_{n,v}$ est le conducteur local en v de l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / K$.

Démonstration. Comme $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en v , il existe m tel que $n \geq m \geq 2$, tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{m-1}} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit non-ramifiée en v et tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^m} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en v . Alors le conducteur local $c_{m,v} > (m-1)e_v$ où e_v l'indice de ramification de v dans $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^m} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ or $m \geq 2$ donc $c_{m,v} > (m-1)e_v \geq e_v \geq \frac{e_v}{p-1}$. Puisque le conducteur de l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^m} / K$ divise le conducteur de $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / K$, le résultat suit. $\square$

Remarque 3. Si de plus l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p alors on obtient facilement une minoration de tous les conducteurs locaux. On va voir que la détermination de cette extension permet le calcul de $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X})$.

Démonstration de la proposition. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} & \xrightarrow{\quad} & (\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})\mathcal{H}^p & \xrightarrow{\quad Y_{n-1} \quad} & \mathcal{H}^{p^n} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n-1}} & \xrightarrow{\quad} & (\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n-1}})\mathcal{H}^p & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^{p^{n-1}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^p & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 K & & & &
 \end{array}
 \quad (1.9)$$

$\curvearrowright_{A_{p^{n-1}}}$ $\curvearrowright_{A_{p^n}}$

On note tout d'abord que $\text{Gal}(\tilde{K}/K) = \mathbb{Z}_p^r$.

Il est clair que $Y_n \twoheadrightarrow \text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Or $\text{Gal}(\tilde{K} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$ est un sous $\mathbb{Z}_p$ -module de $\text{Gal}(\tilde{K}/K) = \mathbb{Z}_p^r$ de corang nul, il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}_p^r$. Il existe donc r extensions de $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}$, disons $M_1, M_2, \dots, M_r$, contenues dans $\tilde{K}$ telles que $\text{Gal}(M_i / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\text{Gal}(M_1 \cdots M_r / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$.

Or le conducteur de l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / K$ divise $p^n = \prod_{v|p} \mathfrak{p}_v^{ne_v}$. De plus, l'hypothèse sur $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ et le lemme 1.3.2 assure que l'on peut utiliser le lemme 1.2.6 pour chaque $v \mid p$ et par conséquent le conducteur de l'extension M_i / K divise $\prod_{v|p} \mathfrak{p}_v^{ne_v + e_v} = p^{n+1}$. En d'autres termes, $M_i \subset \mathcal{H}^{p^{n+1}}$

1.4. MÉTHODE POUR VÉRIFIER LA CONJECTURE DE LEOPOLDT.27

pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. La surjection annoncée en découle. $\square$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.3. *On a vu que le cardinal de Y_n est supérieur à p^r . On suppose que l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p , et que le cardinal de Y_n est exactement p^r . Alors $Y_n \simeq \text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$.*

Démonstration. En effet, d'après le diagramme (1.8), on dispose d'une surjection $Y_n \twoheadrightarrow \text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Or on vient de voir que $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$. Ces groupes étant finis et, par hypothèse équipotents, les surjections considérées sont des isomorphismes. $\square$

Théorème 1.3.4. *Si l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p , et que le cardinal de Y_n est exactement p^{r_2+1} alors la conjecture de Leopoldt est vraie pour K et p .*

Démonstration. En effet on sait que $r_2 + 1 \leq r$ et d'après le corollaire 1.3.3 si $\#(Y_n) = p^{r_2+1}$ alors $r \leq r_2 + 1$, et donc égal à $r_2 + 1$, ainsi K vérifie la conjecture de Leopoldt. $\square$

1.4 Méthode pour vérifier la conjecture de Leopoldt.

Dans [BS87], Buchmann et Sands donnent un algorithme qui permet de tester si la conjecture de Leopoldt est vraie pour un corps de nombres et un nombre premier donnés. On donne une autre méthode qui permet aussi de vérifier cette conjecture en utilisant le théorème précédent. Pour $n = 1, 2, \dots$, on calcule successivement $\mathcal{A}_{p^n}$ jusqu'à ce que $\#\mathcal{A}_{p^n} \times p^{r_2+1} = \#\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ et l'on vérifie que l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p . Nous expliquerons dans le chapitre (2.3) comment déterminer un entier à partir duquel l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au-dessus de p . Alors on peut conclure que la conjecture de Leopoldt est vraie pour le corps et le premier considéré. En fait l'algorithme que l'on utilise est le même que celui utilisé dans le chapitre 2 pour calculer la torsion et si cet algorithme s'arrête cela signifie que la conjecture de Leopoldt est vérifiée. On donne cet algorithme en annexes 5.0.6.

Remarque 4. Si un corps ne vérifie pas la conjecture de Leopoldt pour un premier donné alors $\#\mathcal{A}_{p^n} \times p^{r_2+1} < \#\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ pour tout n et donc l'algorithme ne s'arrêtera jamais. Il est donc impossible avec cet algorithme de montrer qu'un corps ne vérifie pas la conjecture de Leopoldt.

Prenons tout de suite un exemple pour expliquer cette méthode. On considère le corps K associé au polynôme irréductible $x^7 - 5x + 1$. Utilisant le logiciel pari-GP, on s'aperçoit que $r_2 = 2$, que les 2-parties des groupes de classes de rayon 2^n de K pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sont respectivement :

n	$\mathcal{A}_{p^n}$
0	1
1	1
2	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
3	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$
4	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
5	$\mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\#\mathcal{A}_{2^3} = 32$ et $\#\mathcal{A}_{2^4} = 256$ ainsi $\#\mathcal{A}_{2^4} = 32 \times 2^3 = \#\mathcal{A}_{2^3} \times 2^{r_2+1}$.

Si toutes les places au dessus de p sont ramifiées (on verra que c'est le cas dans la section 2.3), on peut conclure que ce corps vérifie la conjecture pour $p = 2$.

1.5 Critère équivalent.

On a vu dans la section 1.3 un test pour vérifier la conjecture de Leopoldt (théorème 1.3.4). Dans cette section on donne un lien Y_n et les unités.

Définition 1.5.1. Soit p un nombre premier. On note $U_n = \{x \in O_K, x \equiv 1 \pmod{p^n}\}$.

Lemme 1.5.2. On a la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow U_n/U_{n+1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{[K:\mathbb{Q}]} \rightarrow Y_n \rightarrow 1$$

Démonstration. On considère maintenant la suite suivante que l'on écrit deux fois.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & U_K/U_{n+1} & \longrightarrow & O_K/p^{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{p^{n+1}} \longrightarrow Cl_p(K) \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & U_K/U_n & \longrightarrow & O_K/p^n & \longrightarrow & \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow Cl_p(K) \longrightarrow 1
\end{array}$$

$\parallel$

On cherche maintenant les noyaux de toutes les restrictions entre ces deux suites.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & U_n/U_{n+1} & & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} & & Y_n & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 \longrightarrow & U_K/U_{n+1} & \longrightarrow & O_K/p^{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{p^{n+1}} & \longrightarrow Cl_p(K) \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \parallel \\
 1 \longrightarrow & U_K/U_n & \longrightarrow & O_K/p^n & \longrightarrow & \mathcal{A}_{p^n} & \longrightarrow Cl_p(K) \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 1 & & 1 & & 1 &
 \end{array}$$

On doit juste décrire le noyau de l'application de $O_K/p^{n+1} \rightarrow O_K/p^n$. Ce noyau est p^{n+1}/p^n et est isomorphe à O_K/p . Or O_K est un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang $r_1 + 2r_2$. On obtient donc que le noyau de $O_K/p^{n+1} \rightarrow O_K/p^n$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2}$. On coupe maintenant ce diagramme en deux pour pouvoir appliquer le lemme du serpent.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & U_n/U_{n+1} & & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} & & Z_n & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 \longrightarrow & U_K/U_{n+1} & \longrightarrow & O_K/p^{n+1} & \longrightarrow & I_{n+1} & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 \longrightarrow & U_K/U_n & \longrightarrow & O_K/p^n & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 1 & & 1 & & 1 &
 \end{array}$$

Où I_n est l'image de $O_K/p^n \rightarrow \mathcal{A}_{p^n}$ et est donc aussi le noyau de $\mathcal{A}_{p^n} \rightarrow Cl_p(K)$ et Z_n le noyau de l'application de $I_{n+1} \rightarrow I_n$. La surjectivité de l'application de I_{n+1} et I_n découle direct de celle entre O_K/p^n et O_K/p^{n+1} et du lemme du serpent. Donc d'après le lemme du serpent on a :

$$1 \rightarrow U_n/U_{n+1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} \rightarrow Z_n \rightarrow 1$$

Dans l'autre morceau du diagramme on obtient

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Z_n & & Y_n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & I_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{p^{n+1}} & \longrightarrow & Cl_p(K) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & \mathcal{A}_{p^n} & \longrightarrow & Cl_p(K) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
 \end{array}$$

En utilisant à nouveau le lemme du serpent, on obtient que Z_n et Y_n sont isomorphes. Ainsi on a :

$$1 \rightarrow U_n/U_{n+1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} \rightarrow Y_n \rightarrow 1$$

□

Théorème 1.5.3. *On note $q_n = \#(Y_n)$, la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante.*

Démonstration. On considère l'élévation à la puissance p entre U_n/U_{n+1} et U_{n+1}/U_{n+2} . Soit $x \in U_n$ alors x peut s'écrire $x = 1 + p^n y$ où y est un élément de O_K . Donc :

$$\begin{aligned}
 x^p &= 1 + p^{n+1}y + \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} (p^n y)^k \\
 &= 1 + p^{n+1}y + p^{n+2} \left(\sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} p^{n(k-1)-2} y^k \right).
 \end{aligned}$$

Et donc $x^p \in U_{n+1}$. Si l'on prend $x \in U_n$ et $x \notin U_{n+1}$ comme $y \notin pO_K$ le calcul précédent montre que $x^p \notin U_{n+2}$ donc l'élévation à la puissance p est injective. Ainsi le cardinal de U_n/U_{n+1} croît. En utilisant la suite exacte du lemme 1.5 on peut donc conclure que la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ décroît.

Avec la suite exacte du lemme 1.5 :

$$1 \rightarrow U_n/U_{n+1} \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_1+2r_2} \rightarrow Y_n \rightarrow 1.$$

On s'aperçoit que le cardinal de Y_n dépend de l'indice de U_{n+1} dans U_n . En effet si $\#(Y_n) = p^{r_2+1}$ alors le cardinal de U_n/U_{n+1} est $p^{r_1+r_2-1}$. On retrouve ainsi le lien entre le rang de U_n/U_{n+1} et le fait que du cardinal de $\#(Y_n)$ on puisse déduire la conjecture de Leopoldt. $\square$

En supposant que la conjecture de Leopoldt est vraie et en utilisant l'application d'Artin, on peut démontrer plus rapidement que la suite (q_n) décroît en montrant qu'il existe une surjection de Y_n sur Y_{n+1} .

Proposition 1.5.4. *On suppose que le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt. Alors l'élévation à la puissance p induit, via l'application d'Artin, une surjection de Y_n sur Y_{n+1} pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. Comme le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt, d'après la remarque 2, on peut considérer la suite exacte définissant la p -partie du groupe de classes de rayon p^n :

$$1 \longrightarrow \overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1.$$

On note $\mathcal{Q}_n = \prod_{v|p} U_v^{ne_v} / \overline{U}_K^{(p^n)}$. On a alors $\mathcal{Q}_n = \text{Gal}(M/\mathcal{H}^{p^n})$. Par conséquent $\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1} = Y_n \simeq \text{Gal}(\mathcal{H}^{p^{n+1}}/\mathcal{H}^{p^n})$. Les relations entre toutes ces extensions sont rappelées dans le diagramme qui suit :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} M \\ \left| \begin{array}{c} \mathcal{Q}_{n+1} \left(\begin{array}{c} \mathcal{H}^{p^{n+1}} \\ \left| \begin{array}{c} Y_n \left(\begin{array}{c} \mathcal{H}^{p^n} \\ \left| K \end{array} \right. \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right. \end{array} \end{array} \end{array} \mathcal{Q}_n$$

On rappelle que $\mathcal{Q}_n = \prod_{v|p} U_v^{ne_v} / \overline{U}_K^{(p^n)} = \ker(\mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n})$ et on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+1} & \longrightarrow & \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{p^{n+1}} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_n & \longrightarrow & \mathfrak{X} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1 \end{array}$$

On en déduit que $Y_n = \mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1}$. Or, n non-nul implique trivialement que $n > \frac{1}{p-1}$. L'élévation à la puissance p réalise donc un isomorphisme de $\prod_{v|p} U_v^{ne_v}$ sur $\prod_{v|p} U_v^{ne_v+e_v}$. Cet isomorphisme passe au quotient pour donner une surjection de $\mathcal{Q}_n$ sur $\mathcal{Q}_{n+1}$. On considère finalement le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_n & \longrightarrow & \mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow (\cdot)^p & & \downarrow (\cdot)^p & & \downarrow (\cdot)^p \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+2} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+1} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{n+1}/\mathcal{Q}_{n+2} \longrightarrow 1 \end{array}$$

On déduit du lemme du serpent que la flèche verticale de droite est une surjection de $\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1}$ sur $\mathcal{Q}_{n+1}/\mathcal{Q}_{n+2}$, i.e. de $\ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n})$ sur $\ker(\mathcal{A}_{p^{n+2}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^{n+1}})$. $\square$

Chapitre 2

Calcul de la torsion de $\mathfrak{X}$.

Ce chapitre est issu d'un travail en collaboration avec Frédéric Pitoun ([PV13]).

2.1 Introduction.

Soit p un nombre premier et un corps K de nombres. On désigne par M la pro- p -extension abélienne non-ramifiée en dehors de p , maximale de K . L'objectif de ce chapitre est d'étudier le $\mathbb{Z}_p$ -module $\mathfrak{X} = \text{Gal}(M/K)$ et de déterminer une méthode permettant de calculer effectivement la structure de ce $\mathbb{Z}_p$ -module. Ce module est décrit par la suite exacte suivante, issue de la théorie du corps de classes : ([Gra03] p. 294)

$$\overline{U}_K \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^1 \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \text{Gal}(\mathcal{H}/K) \longrightarrow 1 \quad (2.1)$$

D'après le théorème de structure des $\mathbb{Z}_p$ -modules de type fini, $\mathfrak{X}$ est produit direct d'une partie libre, $\mathbb{Z}_p^r$ et d'une partie de torsion, on rappelle qu'on le note $\mathcal{T}_p$. On s'intéressera dans ce chapitre au calcul explicite de ce module de torsion.

Afin d'éviter toute ambiguïté, on précise d'emblée que par calcul explicite, on entend *écrire un programme pari-GP vérifiant la conjecture de Leopoldt et calculant $\mathcal{T}_p$, pour un corps K et un premier p étant donnés.*

Une approche pour calculer cette torsion peut être la suivante : on note $\tilde{K}$ le compositum de toutes les $\mathbb{Z}_p$ -extensions de K et $\mathcal{H}$ la p -extension abélienne non-ramifiée maximale de K . On sait, via la théorie du corps de classes, que

le groupe $\text{Gal}(M/\mathcal{H})$ est isomorphe au quotient $\mathcal{U} := \prod_{v|p} U_v^1/\overline{U}_K$. Le module de torsion $\mathcal{T}_p$ est alors décrit par la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{T}_p \longrightarrow \text{Gal}(\mathcal{H}\tilde{K}/\tilde{K}) \longrightarrow 1. \quad (2.2)$$

La situation entre les différentes extensions apparaissant dans la suite exacte (2.2) est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{T}_p & & \\ & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\ \tilde{K} & \text{---} & \tilde{K}\mathcal{H} & \text{---} & M \\ & \downarrow & \downarrow & \nearrow & \\ \tilde{K} \cap \mathcal{H} & \text{---} & \mathcal{H} & \nearrow & \\ & \downarrow & & \nearrow & \\ & K & & & \end{array} \quad (2.3)$$

(The diagram shows a commutative structure with nodes $\tilde{K}$, $\tilde{K}\mathcal{H}$, M , $\tilde{K} \cap \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$, and K . Arrows include a top arc labeled $\mathcal{T}_p$, vertical arrows, horizontal arrows, and diagonal arrows labeled $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{U})$ and $\mathcal{U}$.)

Une première idée pour déterminer explicitement $\mathcal{T}_p$ est de calculer les termes extrémaux de la suite exacte (2.2). Mais ce calcul n'est pas toujours aisé car la suite exacte n'étant pas forcément scindée cela ne permet pas toujours d'achever le calcul de la torsion et surtout les termes extrémaux ne sont pas facilement calculables dans certain cas.

On va donc aborder le problème sous un autre angle. Partant du fait que le $\mathbb{Z}_p$ -module $\mathfrak{X}$ est la limite projective des p -parties des groupes de classes de rayon p^n , $\mathcal{A}_{p^n}$, on a étudié les propriétés de stabilisation de ces groupes ainsi que le comportement des facteurs invariants de $\mathcal{A}_{p^n}$ lorsque n croît. De cette étude, on en a déduit une méthode permettant de déterminer explicitement $\mathcal{T}_p$.

Avant d'aborder la partie technique, à savoir le calcul effectif de $\mathcal{T}_p$, on va rappeler quelques résultats qui montrent que la connaissance de $\mathcal{T}_p$ permet d'obtenir de nombreuses informations sur le corps K . Ces motivations étant exposées, on rappellera la définition ainsi que quelques propriétés élémentaires du groupe de classes de rayon p^n .

Une fois la méthode de calcul théoriquement justifiée, on illustrera ce calcul avec quelques cas particuliers et on tentera de donner une explication heuristique aux phénomènes observés.

2.1.1 Motivation du problème.

Le calcul de $\mathcal{T}_p$ permet d'obtenir des informations d'une part sur la p -rationalité du corps K et d'autre part sur la Λ -liberté du module d'Iwasawa non-ramifié en dehors de p , $\mathfrak{X}_\infty$ associé au corps K .

Corps p -rationnels.

On note G_{S_p} , le groupe de Galois de la pro- p -extension, non-ramifiée en dehors de p , maximale de K . On dit que le corps K est p -rationnel si et seulement si le groupe G_{S_p} est libre.

On peut montrer que la liberté de ce groupe est équivalente à la conjecture de Leopoldt et à la trivialité du groupe de cohomologie $H_{cont}^2(G_{S_p}, \mathbb{Z}_p)$. (voir [MNQD90] théorème-définition 2.1 p. 162).

Or ce groupe de cohomologie continu est relié au module $\mathfrak{X}$. En effet, sa $\mathbb{Z}_p$ -torsion est isomorphe au dual de Pontryagin du groupe de cohomologie continu $H_{cont}^2(G_{S_p}, \mathbb{Z}_p)$. En conséquence, pour un corps K donné vérifiant la conjecture de Leopoldt, le calcul de la $\mathbb{Z}_p$ -torsion du groupe de Galois $\mathfrak{X}$ permet de déterminer si le corps considéré est p -rationnel.

Λ -liberté de $\mathfrak{X}_\infty$.

On rappelle brièvement une construction de $\mathfrak{X}_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note K_n le n -ième étage de la $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique de K et M_n la pro- p -extension abélienne non-ramifiée en dehors de p maximale de K_n . La limite inductive des M_n , notée M_∞ , correspond à la pro- p -extension abélienne non-ramifiée en dehors de p maximale de K_∞ . On note $\mathfrak{X}_\infty = \text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$, qui est aussi la limite projective relativement à la restriction des $\mathfrak{X}_n = \text{Gal}(M_n/K_n)$. Le groupe de Galois $\mathfrak{X}_\infty$ est un $\mathbb{Z}_p$ -module sur lequel $\Gamma := \text{Gal}(K_\infty/K)$ opère. Il est donc naturellement muni d'une structure de Λ -module, où Λ désigne l'anneau $\mathbb{Z}_p[[T]]$ des séries formelles en T à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

Si K vérifie la conjecture de Leopoldt, alors le calcul de $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_0)$ permet de déterminer la Λ -liberté de $\mathfrak{X}_\infty$. En effet, la conjecture de Leopoldt est équivalente à $(\mathfrak{X}_\infty)^\Gamma = 1$ et on a $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}((\mathfrak{X}_\infty)_\Gamma) = \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}_0)$, où $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}((\mathfrak{X}_\infty)_\Gamma)$ est la $\mathbb{Z}_p$ torsion des coinvariants de $\mathfrak{X}_\infty$.

2.2 Comportement asymptotique de $\mathcal{A}_{p^n}$.

On suppose maintenant que le corps K vérifie la conjecture de Leopoldt. On note que si le corps K ne vérifie pas la conjecture de Leopoldt l'algorithme que l'on propose ensuite pour calculer la torsion ne s'arrêtera pas. Les exemples étudiés amènent à se poser la question suivante :

Question 3. On suppose que le noyau de la surjection canonique $\mathcal{A}_{p^{n+1}} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{p^n}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. A-t-on

$$\mathcal{T}_p \simeq \text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/\mathcal{H}^{p^n} \cap \tilde{K}) \quad ?$$

Relativement au diagramme qui précède, on note que puisque $\mathfrak{X}$ est un $\mathbb{Z}_p$ -module abélien de type fini, il est produit direct de sa partie libre par sa partie de torsion. En d'autres termes, il existe une extension finie M' de K telle que $\tilde{K}M' = M$ et $\text{Gal}(M'/K) \simeq \mathcal{T}_p$. L'extension M' étant non-ramifiée en dehors de p , on a pour $n \gg 0$: $M' \subset \mathcal{H}^{p^n}$, et par conséquent $\tilde{K}\mathcal{H}^{p^n} = M$.

Il reste maintenant à vérifier que si $Y_{n_0} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ pour un certain n_0 , alors $Y_n \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$. A cette fin, on considère la suite exacte définissant la p -partie du groupe de classes de rayon p^n :

$$1 \longrightarrow \overline{U}_K^{(p^n)} \longrightarrow \prod_{v|p} U_v^{ne_v} \longrightarrow \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{A}_{p^n} \longrightarrow 1,$$

D'après le théorème 1.5.3, la conjecture de Leopoldt entraîne la décroissance du cardinal des Y_n .

Le théorème suivant permet de répondre à la question posée :

Théorème 2.2.1. *On rappelle que Y_n désigne $\ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n})$. Il existe un entier n_0 tel que $Y_{n_0} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. De plus, pour tout entier $n \geq n_0$, le module $\mathcal{Q}_n = \text{Gal}(M/\mathcal{H}^{p^n})$ est $\mathbb{Z}_p$ -libre de rang $r_2 + 1$ et :*

$$Y_n \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}.$$

Démonstration. Le $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini $\mathfrak{X}$ est isomorphe au produit direct de sa torsion et de $\mathbb{Z}_p^{r_2+1}$. Un isomorphisme étant fixé, on peut identifier $\mathbb{Z}_p^{r_2+1}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{X}$ et donc définir, via la théorie de Galois, une extension M' de K telle que $\text{Gal}(M'/K) \simeq \mathcal{T}_p$ et $\tilde{K}M' = M$. Cette extension étant non-ramifiée en dehors de p , il existe un entier n_1 tel que $M' \subset \mathcal{H}^{p^{n_1}}$ et par conséquent $\mathcal{H}^{p^{n_1}}\tilde{K} = M$. De plus pour tout entier $n \geq n_1$, $\text{Gal}(M/\mathcal{H}^{p^n})$

est un sous-module de corang nul de $\text{Gal}(M/M') = \mathbb{Z}_p^{r_2+1}$, par conséquent $\mathcal{Q}_n = \text{Gal}(M/\mathcal{H}^{p^n}) \simeq \mathbb{Z}_p^{r_2+1}$. Le $\mathbb{Z}_p$ -module $\mathcal{Q}_n$ est donc libre de rang $r_2 + 1$. Par ailleurs, on sait qu'il existe un entier n_2 tel que $\ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n})$ se surjecte sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ pour tout entier $n \geq n_2$ (on peut choisir pour n_2 le minimum des entiers n tels que les conducteurs des extensions $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K$ soient supérieurs ou égaux à $\frac{e}{p-1}$ et cela pour toute p -place v).

Enfin, on remarque que puisque l'élévation à la puissance p réalise un isomorphisme entre $U_v^{ne_v}$ et $U_v^{ne_v+e_v}$, le quotient $\mathcal{Q}_n/\mathcal{Q}_{n+1}$, qui est isomorphe à $\ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n})$, est tué par p .

On pose $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$ et on se donne maintenant un entier $n \geq n_0$. Le noyau $\ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n})$ est donc un quotient de $\mathbb{Z}_p^{r_2+1}$, qui se surjecte sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ et qui est tué par p . On a alors nécessairement $\ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. $\square$

On commence par rappeler la définition des facteurs invariants d'un groupe abélien G :

Définition 2.2.2. Étant donné un groupe abélien fini G , il existe une unique suite $a_1, \dots, a_t$ telle que :

- $G \simeq \prod_{i=1}^t \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z}$
- $a_i | a_{i+1}$ pour $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

Les a_i sont appelés facteurs invariants du groupe G et ne dépendent que de la classe d'isomorphisme de G .

On note que contrairement à l'usage, le logiciel pari-GP utilise la convention $a_{i+1} | a_i$ pour des raisons calculatoires.

Si G est un p -groupe, ses facteurs invariants sont des puissances de p . Pour alléger la rédaction de la suite du paragraphe, on introduit la notation suivante :

Notation : Si les facteurs invariants d'un groupe G sont $a_1, \dots, a_t$, on notera $\mathcal{FI}(G) = [a_1, \dots, a_t]$.

En pratique, on est en mesure de déterminer les facteurs invariants de $\mathcal{A}_{p^n}$. On va voir dans cette sous-section que la connaissance des facteurs invariants de $\mathcal{A}_{p^n}$ pour $n \gg 0$, combinée à l'utilisation des propriétés de stabilisation de $\mathcal{A}_{p^n}$, permet de déterminer explicitement les facteurs invariants et donc la structure de $\mathcal{T}_p$.

On rappelle que pour $n \gg 0$, $\mathcal{A}_{p^n}$ est isomorphe au produit direct de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$ et de $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}) = \mathcal{T}_p$. On va donc au préalable étudier un peu plus finement la structure de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$.

Proposition 2.2.3. *Soit n_0 tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en toutes les places au-dessus de p et*

$$Y_n \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}.$$

Alors pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\text{Gal}(\tilde{K} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}) = p \text{Gal}(\tilde{K} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}).$$

(on rappelle que $Y_n = \ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n})$).

Démonstration. En vertu du théorème 2.2.1, d'une part le module $\mathcal{Q}_n$ est $\mathbb{Z}_p$ -libre de rang $r_2 + 1$ et d'autre part $Y_n = \mathcal{Q}_n / \mathcal{Q}_{n+1} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. On a alors nécessairement $\mathcal{Q}_{n+1} = p\mathcal{Q}_n$. Considérant alors le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K} & \xrightarrow{\quad} & M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^{p^{n+1}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^{p^n} \\
 \downarrow & & \\
 K & &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{c} \mathcal{Q}_{n+1} \\ \mathcal{Q}_n \end{array} \right\}
 \end{array}$$

on en déduit l'isomorphisme annoncé. $\square$

Corollaire 2.2.4. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n_0}} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en toutes les places au dessus de p et tel que $Y_{n_0} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$. Alors pour tout entier $n \geq n_0$, les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} / K)$ sont égaux aux facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / K)$ multipliés par p .*

Démonstration. En effet, on considère une $\mathbb{Z}_p$ -base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Gal}(\tilde{K} / K)$ adaptée au sous- $\mathbb{Z}_p$ -module $\text{Gal}(\tilde{K} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Il existe alors $p^{a_1}, \dots, p^{a_{r_2+1}}$ tels que $(p^{a_i} e_i)$ soit une $\mathbb{Z}_p$ -base de $\text{Gal}(\tilde{K} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Les p^{a_i} sont alors exactement les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n} / K)$. Or $\text{Gal}(\tilde{K} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}) = p \text{Gal}(\tilde{K} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$, on en déduit donc que $(p^{a_i+1} e_i)$ est une $\mathbb{Z}_p$ -base de $\text{Gal}(\tilde{K} / \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}})$ et donc que les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}} / K)$ sont exactement les p^{a_i+1} . $\square$

Or, puisque que $\mathfrak{X} \simeq \mathbb{Z}_p^{r_2+1} \times \mathcal{T}_p$, le groupe de classes de rayon p^n , $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$, est isomorphe au produit direct des deux p -groupes $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$ et de $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n})$. Les facteurs invariants de $\text{Gal}(\mathcal{H}^{p^n}/K)$ s'obtiennent donc en concaténant les facteurs invariants des deux groupes composant ce produit direct.

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat permettant de déterminer explicitement la structure du p -groupe $\mathcal{T}_p$:

Théorème 2.2.5. *Soit n tel que $Y_n = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1}$ et $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ soit ramifiée en toutes les places au-dessus de p . On suppose d'une part que :*

$$\mathcal{FI}(\mathcal{A}_{p^n}) = [b_1, \dots, b_t, a_1, \dots, a_{r_2+1}]$$

avec $(v_p(b_t)) < (v_p(a_1))$, et d'autre part que :

$$\mathcal{FI}(\mathcal{A}_{p^{n+1}}) = [b_1, \dots, b_t, pa_1, \dots, pa_{r_2+1}].$$

Alors, on a :

$$\mathcal{FI}(\mathcal{T}_p) = [b_1, \dots, b_t].$$

Démonstration. En effet, du fait que :

$$\ker(\mathcal{A}_{p^{n+1}} \rightarrow \mathcal{A}_{p^n}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{r_2+1},$$

on a $\mathcal{A}_{p^i} \simeq \text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}) \times \text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^i}/K)$ pour $i \in \{n, n+1\}$. Or on a vu que les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$ sont exactement égaux à p fois ceux de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/K)$. Par conséquent, si a est un facteur invariant de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$, on a nécessairement $a = pa_i$ ou $a = pb_i$.

Or comme $(v_p(a_1)) > (v_p(b_t))$, aucun des facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$ n'est de la forme pb_i . Les facteurs invariants de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$ sont donc exactement les $pa_1, \dots, pa_{r_2+1}$. Le résultat découle alors du fait que $\mathcal{A}_{p^{n+1}}$ est isomorphe au produit direct de $\mathcal{T}_p$ et de $\text{Gal}(\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^{n+1}}/K)$. $\square$

Remarque 5. Pour pouvoir faire des calculs, il faut que l'on puisse contrôler à partir de quelle étape toutes les places au-dessus de p dans K se ramifient dans l'extension $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^n}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$.

2.3 Une borne explicite.

2.3.1 Le cas quadratique et $p \neq 2$.

Pour $p \neq 2$, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^2} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^{p^2} \\
 \downarrow & & \searrow \\
 K_1 & & \\
 \downarrow & & \\
 \tilde{K} \cap \mathcal{H}^p & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}^p \\
 \downarrow & & \\
 K & &
 \end{array}$$

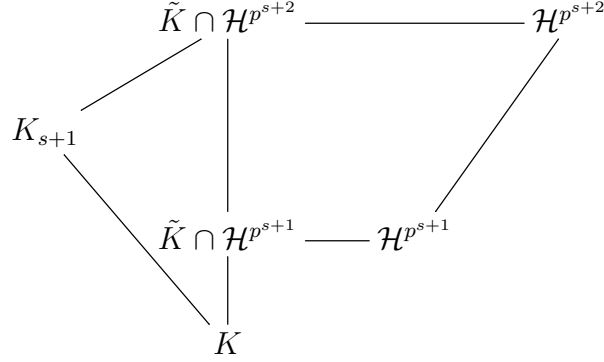
où K_1 est le premier étage de la $\mathbb{Z}_p$ -extension de K .

Les places au-dessus de p sont totalement ramifiées dans $K_1/K(\mu_p)$ donc $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^2}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au dessus de p donc on commence les calculs pour savoir quand $\mathcal{A}_{p^n}$ est stable à partir de $n = 2$.

Exemple 2.3.1. Pour le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-129})$ et $p = 3$, on a $\mathcal{A}_{p^2} = [9, 3, 3]$, $\mathcal{A}_{p^3} = [27, 9, 3]$ et $\mathcal{A}_{p^4} = [81, 27, 3]$. On en déduit donc que la $\mathbb{Z}_p$ -torsion de $\mathfrak{X}$ est exactement $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2.3.2 Le cas général.

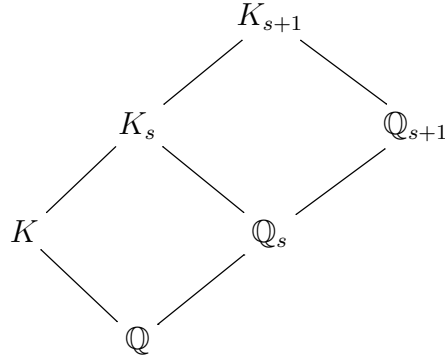
Plus généralement, si on note $e = \max_{v|p} \{e_v\}$ l'indice de ramification de $K/\mathbb{Q}$ et s le maximum des valuations p -adique de e_v , $s = \max_{v|p} \{v_p(e_v)\}$ alors on commence à calculer si $\mathcal{A}_{p^n}$ se stabilise à partir du rang $n = 2 + s$. En effet, si l'on considère le diagramme suivant :



où K_j est le j^{ieme} étage de la $\mathbb{Z}_p$ -extension de K .

On va maintenant justifier le fait que toutes les places au dessus de p sont totalement ramifiées dans K_{s+1}/K_s .

On considère le diagramme suivant :



On rappelle que $\mathbb{Q}_s$ est le s^{ieme} étages de l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. Le degré de ramification en p de $\mathbb{Q}_{s+1}/\mathbb{Q}$ est p^{s+1} tandis que celui de $K/\mathbb{Q}$ est $p^s a$ avec a et p premiers entre eux. Donc l'extension K_{s+1}/K est ramifiée et K_{s+1}/K_s est totalement ramifiée en toutes les places divisant p . Les places au dessus de p sont totalement ramifiées dans K_{s+1}/K_s donc $\tilde{K} \cap \mathcal{H}^{p^s}/\tilde{K} \cap \mathcal{H}^p$ est ramifiée en toutes les places au dessus de p . On commence alors le calcul pour savoir quand $\mathcal{A}_{p^n}$ est stable à partir de $n = s + 2$

Corollaire 2.3.2. *Soit e l'indice de ramification de p dans $K/\mathbb{Q}$ et s la valuation p -adique de e . Soit $n \geq 2 + s$, on suppose d'une part que :*

$$\mathcal{FI}(\mathcal{A}_{p^n}) = [b_1, \dots, a_t, a_1, \dots, a_{r_2+1}]$$

avec $v_p(b_t) < v_p(a_1)$, et d'autre part que :

$$\mathcal{FI}(\mathcal{A}_{p^{n+1}}) = [b_1, \dots, b_t, pa_1, \dots, pa_{r_2+1}].$$

Alors, on a :

$$\mathcal{FI}(\mathcal{T}_p) = [b_1, \dots, b_t].$$

Chapitre 3

Approche heuristique.

On est maintenant en mesure de calculer $\mathcal{T}_p$. L'idée de ce chapitre est d'essayer de donner une explication heuristique des résultats numériques que l'on obtient. Bien évidemment, la principale référence sur le sujet est [CL84], on a aussi utilisé [Del07].

L'idée principale des heuristiques de Cohen-Lenstra peut se vulgariser de la façon suivante : “plus un groupe G possède un gros groupe d'automorphismes, moins il apparaît dans la nature”. On commence par rappeler les principaux résultats que l'on utilisera.

3.1 Rappels sur les heuristiques de Cohen-Lenstra.

Nous rappelons dans cette section les principaux résultats relatifs aux heuristiques de Cohen-Lenstra, que nous utiliserons par la suite. Pour de plus amples informations sur ces résultats, il convient de consulter [CL84].

La $\mathbb{Z}_p$ -torsion de $\mathfrak{X}$ est le groupe de Galois d'une certaine extension de K . Si l'on suppose l'extension $K/\mathbb{Q}$ galoisienne, le module $\mathcal{T}_p$ est alors muni d'une structure de $\mathbb{Z}[\Delta]$ -module, où $\Delta := \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Cependant, si l'on note $N_\Delta = \sum_{\sigma \in \Delta} \sigma$, on a $N_\Delta(\mathcal{T}_p) = 1$, par conséquent $\mathcal{T}_p$ est en fait un $\mathbb{Z}_p[\Delta]/(N_\Delta)$ -module.

Dans le cas où le groupe Δ est cyclique d'ordre premier l , $\mathbb{Z}_p[\Delta]/(1 + \sigma + \dots + \sigma^{o(\Delta)-1})$ est isomorphe à l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta_l)$, que l'on notera O_l .

Dans cette section, on suppose donc que K est une extension cyclique de degré premier l de $\mathbb{Q}$. La $\mathbb{Z}_p$ -torsion de $\mathfrak{X}$ est alors naturellement munie d'une structure de O_l -module.

Dans ce qui suit, on prend O_F l'anneau des entiers d'un corps de nombres et G un O_l -module. Comme O_K , il peut s'écrire de façon non canonique sous

la forme $\bigoplus_{i=1}^q O_K/\mathfrak{a}_i$, où les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux de O_K . Cependant l'idéal de

Fitting $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^q \mathfrak{a}_i$ ne dépend lui que de la classe d'isomorphie de G , considéré

comme O_K -module. Cet invariant, noté $\mathfrak{a}(G)$, peut être considéré comme une généralisation de la notion de cardinal. On a d'ailleurs $N_{\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}(G)) = \#G$.

On va maintenant définir la notion de cardinalité asymptotique pour un ensemble de O_K -module donné. Pour cela, on considère une fonction h , définie sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de O_l -modules (typiquement h sera une fonction caractéristique).

Définition 3.1.1. La moyenne de h est si elle existe la limite lorsque $N \rightarrow \infty$ du quotient :

$$\frac{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{h(G)}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}}{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}}.$$

Elle sera notée $M(h)$ ou encore $M_l(h)$ si l'anneau considéré est O_l .

Où $\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N}$, la somme portant sur les classes d'isomorphie de G .

Dans le cas où h est la fonction caractéristique d'une certaine propriété, on considère l'ensemble des classes d'isomorphie des groupes de cardinal inférieur ou égal à N , le quotient de la définition précédente peut être considéré comme le rapport du cardinal de l'ensemble des groupes vérifiant la propriété h sur le cardinal de l'ensemble total des groupes considérés initialement, chaque classe d'isomorphie étant compté avec la pondération $\frac{1}{\# \text{Aut}_{O_K}(G)}$.

Suivant [CL84], on introduit la notation suivante :

Notation : Étant donné un idéal $\mathfrak{a}$ de O_K , on note :

$$w(\mathfrak{a}) = \sum_{G, \mathfrak{a}(G) = \mathfrak{a}} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_K}(G)}$$

Dans [CL84], Cohen et Lenstra donnent une relation permettant de calculer effectivement $w(\mathfrak{a})$:

Proposition 3.1.2. ([CL84] p.40 corollaire 3.8) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$w(\mathfrak{a}) = \frac{1}{N_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}(\mathfrak{a})} \left(\prod_{\mathfrak{p}^\alpha \parallel \mathfrak{a}} \prod_{k=1}^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{N_{O_l}(\mathfrak{p})^k} \right) \right)^{-1}.$$

La notation $\mathfrak{p}^\alpha \parallel \mathfrak{a}$ signifiant que $\mathfrak{p}^\alpha \mid \mathfrak{a}$ et que $\mathfrak{p}^{\alpha+1} \nmid \mathfrak{a}$.

Par conséquent, la fonction w , définie sur l'ensemble des idéaux de O_K , est multiplicative.

Notation : On note Π_p la fonction caractéristique de l'ensemble des classes d'isomorphismes de groupe, dont la p -partie est non-triviale. On commence par donner un lemme qui nous sera utile pour la démonstration de la proposition suivante. Ce lemme est cité sans démonstration dans [Hal38] et est attribué à Euler sans référence précise. On le retrouve dans [Eul51]. Pour la démonstration on pourra consulter [HW79] (théorème 350 p.280).

Lemme 3.1.3. (Identité due à Euler [Hal38] et [Eul51]) Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \prod_{k=1}^n (1 - x^k)^{-1} = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - x^n)^{-1}$$

Proposition 3.1.4. ([CL84] p. 47 exemple 5.10) On note $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_g$ les p -places de O_l , la moyenne de Π_p existe et on a :

$$M_l(\Pi_p) = 1 - \prod_{i=1}^g \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{kf_i}} \right),$$

où les f_i désignent les degrés des extensions résiduelles $O_l/\mathfrak{p}_i$ sur $\mathbb{F}_p$.

Démonstration.

$$\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{\Pi_p(G)}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)} = \sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)} - \sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N \text{ et } p \nmid \#G} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}$$

Ainsi :

$$\frac{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{\Pi_p(G)}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}}{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}} = 1 - \frac{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N \text{ et } p \nmid \#G} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}}{\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)}}.$$

Nous allons utiliser la multiplicativité de $w(a)$ pour démontrer la convergence de ce quotient. On observe tout d'abord que :

$$\sum_{G, N(\mathfrak{a}(G)) \leq N} \frac{1}{\# \text{Aut}_{O_F}(G)} = \sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a)$$

Pour simplifier la lecture on note :

$$Q_N = \frac{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N \text{ et } p \nmid a} w(a)}{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a)}$$

Par multiplicativité de w , on a :

$$\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a) \leq \sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N \text{ et } p \nmid a} w(a) \sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N} w(\mathfrak{p})$$

Pour $\epsilon > 0$ donné on a :

$$\begin{aligned} Q_N &= \frac{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N \text{ et } p \nmid a} w(a)}{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a)} \\ &= \frac{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N \text{ et } p \nmid a} w(a) \sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N^\epsilon} w(\mathfrak{p})}{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a) \sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N^\epsilon} w(\mathfrak{p})} \end{aligned}$$

3.1. RAPPELS SUR LES HEURISTIQUES DE COHEN-LENSTRA. 47

D'après le lemme 5.3 page 44 de [CL84] $\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq x} w(a) \simeq C_\infty \log(x)$ (où $C_\infty = \kappa \prod_{s \geq 2} \zeta_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}(s)$ et κ le résidu en 1 de la fonction $\zeta_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}$). Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N^{1+\epsilon}} w(a)}{\sum_{a, N(\mathfrak{a}) \leq N} w(a)} = 1 + \epsilon$$

Il nous reste à calculer la limite $\sum_{\mathfrak{p}, N(\mathfrak{p}) \leq N} w(\mathfrak{p})$ quand N tend vers $+\infty$.

On note $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_g$ les places au dessus de p dans K . D'après la proposition 3.1.2 on a :

$$w(\mathfrak{p}_i^k) = \frac{1}{p^{f_i k}} \left(\prod_{a=1}^k \left(1 - \frac{1}{p^{f_i a}} \right) \right)^{-1}$$

Par multiplicité de w , on a $\sum_{\mathfrak{p}, N(p) \leq N} w(p) \leq \prod_{i=1}^g \sum_{k \geq 0} w(\mathfrak{p}_i^k)$, maintenant en posant $N_i = E \left[\frac{\log(N)}{g f_i \log(p)} \right]$ on a $N(\mathfrak{p}_i^k) \leq N^{\frac{1}{g}} \Leftrightarrow k \leq N_i$ et donc

$$\prod_{i=1}^g \sum_{k=0}^{N_i} w(\mathfrak{p}_i^k) \leq \sum_{\mathfrak{p}, N(p) \leq N} w(p) \leq \prod_{i=1}^g \sum_{k \geq 0} w(\mathfrak{p}_i^k)$$

Or quand N tend vers $+\infty$ il en est de même pour N_i donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\mathfrak{p}, N(p) \leq N} w(p) = \prod_{i=1}^g \sum_{k \geq 0} w(\mathfrak{p}_i^k).$$

Or d'après une identité d'Euler 3.1.3 on a :

$$\sum_{k \geq 0} w(\mathfrak{p}_i^k) = \frac{1}{\prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{k f_i}} \right)}.$$

Ainsi Q_N converge vers $\prod_{i=1}^g \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{k f_i}} \right)$, et donc

$$M_l(\Pi_p) = 1 - \prod_{i=1}^g \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{k f_i}} \right)$$

□

Corollaire 3.1.5. *Dans le cas où l'extension K est galoisienne, tous les degrés résiduels sont égaux à f et dans ce cas :*

$$M_l(\Pi_p) = 1 - \left(\prod_{k \geq 1} 1 - \frac{1}{p^{kf}} \right)^g.$$

Remarque 6. Le réel $M_l(\Pi_p)$ est appelé 0-moyenne. Cette notion peut être généralisée par la notion de u -moyenne. L'expression de la u -moyenne est obtenue en remplaçant k par $k + u$ dans l'expression de la proposition 3.1.4

$$M_{l,u}(\Pi_p) = 1 - \prod_{i=1}^g \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{(k+u)f_i}} \right),$$

Soit $\mathcal{K}$ un ensemble de corps de nombres, cyclique de degré l . Soit $K \in \mathcal{K}$ et G la p -partie de son groupe de classes. On suppose que $l \neq p$, alors G est $(\mathbb{Z}[\Delta]/\sum_{\sigma \in \Delta} \sigma)$ -module donc un O_l -module. Pour h une fonction définie sur G , on peut définir :

$$M(h) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{K \in \mathcal{K}, |disc(K)| \leq x} h(G)}{\sum_{K \in \mathcal{K}, |disc(K)| \leq x} 1}.$$

Dans [CL84], Cohen et Lenstra conjecturent :

Conjecture 2. *Pour une fonction "raisonnable" h on a :*

1. (cas quadratique imaginaire) Si $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$ alors $M(h)$ est une 0-moyenne.
2. (cas quadratique réel) Si $r_1 = 2$ et $r_2 = 0$ alors $M(h)$ est une 1-moyenne. (ici $l=2$ et $O_l = \mathbb{Z}$)

Remarque 7. On prendra comme fonction la fonction caractéristique d'une classe d'isomorphisme d'un groupe, par exemple Π_p .

3.1.1 Calcul explicite des moyennes.

Les heuristiques de Cohen-Lenstra conjecturent que la proportion de groupe de classe non-trivial est une 0 et 1-moyennes. On s'intéresse plus en détail au calcul de ces deux moyennes. Puis l'on comparera ces moyennes à la proportion de torsion de $\mathfrak{X}$ non triviale. Ici on s'intéresse aux corps quadratiques $l = 2$ et $f = g = 1$. Donc on obtient :

$$M_{2,u}(\Pi_p) = 1 - \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{(k+u)}} \right),$$

En prenant $u = 0$, on obtient la 0-moyenne :

$$M_{2,0}(\Pi_p) = 1 - \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^k} \right),$$

De même pour $u = 1$, on a :

$$M_{2,1}(\Pi_p) = 1 - \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p^{(k+1)}} \right),$$

Par un calcul rapide on obtient que

$$M_{2,1} = 1 + (M_{2,0} - 1) \frac{p}{p-1}.$$

Si maintenant au lieu de prendre la fonction Π_p , On prend Π_G fonction caractéristique de la classe d'isomorphisme du p -groupe G . Pour obtenir la u -moyenne de la fonction Π_G on multiplie $M_{2,u}$ par $\frac{1}{\#(Aut_{O_l}(G))}$. Pour le calcul $\#(Aut_{O_l}(G))$ on peut regarder [Hal38]. On commence par rappeler quelques notations utilisées dans [Hal38]. On prend G un p -groupe abélien d'ordre p^n . On peut alors l'écrire comme un produit de groupe cyclique $(1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, 3^{\lambda_3}, \dots)$, λ_1 est le nombre de groupe d'ordre p dans les produits, λ_2 le nombre de groupe d'ordre p^2 , et ainsi de suite. On a,

$$n = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots$$

On définit alors

$$\mu_i = \sum_{j \geq i} \lambda_j$$

on a donc $\lambda_i = \mu_i - \mu_{i+1}$

on pose maintenant $f_k(x) = (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)$, et $f_0(x) = 1$

Théorème 3.1.6. ([Hal38] p.127) Si G est un p -groupe abélien alors l'ordre de son groupe d'automorphisme vaut :

$$\#(Aut(G)) = \frac{f_{\lambda_1}(\frac{1}{p})f_{\lambda_2}(\frac{1}{p})f_{\lambda_3}(\frac{1}{p})\dots}{(\frac{1}{p})^{\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\dots}}$$

Regardons sur un exemple comment on calcule l'ordre du groupe d'automorphisme.

Exemple 3.1.7. Prenons $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$, alors $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 1$.

Donc

$$\begin{aligned} \#(Aut(G)) &= \frac{f_2(\frac{1}{3})f_1(\frac{1}{3})}{(\frac{1}{3})^{3^2+1}} \\ &= \frac{(1-\frac{1}{3})^2(1-(\frac{1}{3})^2)}{(\frac{1}{3})^{10}} \\ &= 3^6(3-1)^2(3^2-1) \\ &= 23328. \end{aligned}$$

Maintenant on peut comparer ces moyennes aux résultats numériques que l'on obtient.

3.2 Comparaison avec les résultats numériques.

On a observé que dans le cas des corps totalement réels la proportion de corps dont la torsion de $\mathfrak{X}$ est non triviale était une 0-moyenne. Dans les tableaux que l'on donne dans la suite le 0,00000 signifie que l'on n'a pas rencontré de corps dans ce cas. Pour les cas où les corps étaient peu présents, on a ajouté des chiffres significatifs pour obtenir après avoir arrondi un nombre non nul.

3.2.1 Résultats numériques.

Cas des corps quadratiques réels.

Dans ce cas $O_l = \mathbb{Z}$ et $l = 2$. On observe que dans le cas quadratique réel la proportion de corps dont la $\mathbb{Z}_p$ -torsion est non triviale est une 0-moyenne

et une 1-moyenne pour les corps quadratiques imaginaires. Nous expliquerons en quoi ce phénomène est en accord avec les heuristiques de Cohen-Lenstra dans la section 3.3.

Principe du calcul : Étant donné un entier N , on considère tous les corps quadratiques du type $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec d entier naturel sans facteur carré et $d \leq N$. On obtient ainsi un ensemble $\mathcal{K}_N$ de corps quadratiques. Ensuite, on calcule la proportion de corps appartenant à $\mathcal{K}_N$, pour lesquels la $\mathbb{Z}_p$ -torsion de $\mathfrak{X}$ est non triviale. Cette proportion est notée f_{exp} . On note Π_p la fonction caractéristique de $\mathcal{T}_p$. L'écart $|f_{exp} - M_{2,0}(\Pi_p)|/f_{exp}$ entre f_{exp} et $M_{2,0}(\Pi_p)$ est noté δ . On donne ci-dessous, les tables comportant les résultats obtenus pour $N = 10^6$, $N = 10^7$, $N = 10^8$ et $N = 10^9$.

On note que si l'on considère comme ensemble $\mathcal{K}_N$ l'ensemble des corps du type $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dont le discriminant est inférieur ou égal à N , on obtient des résultats en tous points similaires.

$$N = 10^6$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
3	0,43987	0,48094	0,09336
5	0,23967	0,23209	0,03162
7	0,16320	0,15964	0,02181
11	0,09916	0,09597	0,03222
13	0,08284	0,08104	0,02174
17	0,06228	0,06055	0,02777
19	0,05540	0,05400	0,00140
23	0,04537	0,04445	0,02033
29	0,03375	0,03494	0,02060
31	0,03330	0,03257	0,02199
37	0,02776	0,02718	0,02077
41	0,02499	0,02469	0,01186
43	0,02380	0,02333	0,01953
47	0,02173	0,02140	0,01527

$$N = 10^7$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	$\delta(\acute{E}cart)$
3	0,43987	0,49054	0,11519
5	0,23967	0,23606	0,01507
7	0,16320	0,16134	0,01142
11	0,09916	0,09802	0,01153
13	0,08284	0,08195	0,01072
17	0,06228	0,06164	0,01025
19	0,05540	0,05472	0,01228
23	0,04537	0,04445	0,01005
29	0,03375	0,03529	0,01064
31	0,03330	0,03290	0,01203
37	0,02776	0,02746	0,01087
41	0,02499	0,02479	0,00796
43	0,02380	0,02348	0,01310
47	0,02173	0,02160	0,00603

$$N = 10^8$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	$\delta(\acute{E}cart)$
3	0,43987	0,49697	0,12981
5	0,23967	0,23763	0,00851
7	0,16320	0,16234	0,00531
11	0,09916	0,09858	0,00594
13	0,08284	0,08242	0,00510
17	0,06228	0,06197	0,00499
19	0,05540	0,05517	0,00420
23	0,04537	0,04512	0,00557
29	0,03375	0,03552	0,00436
31	0,03330	0,03315	0,00439
37	0,02776	0,02761	0,00535
41	0,02499	0,02487	0,00475
43	0,02380	0,02367	0,00517
47	0,02173	0,02164	0,00432

$$N = 10^9$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	$\delta(\vec{\text{Écart}})$
3	0,43987	0,50120	0,13942
5	0,23967	0,23854	0,00470
7	0,16320	0,16280	0,00247
11	0,09916	0,09893	0,00243
13	0,08284	0,08266	0,00212
17	0,06228	0,06214	0,00233
19	0,05540	0,05526	0,00260
23	0,04537	0,04527	0,00207
29	0,03375	0,03560	0,00193
31	0,03330	0,03323	0,00219
37	0,02776	0,02770	0,00198
41	0,02499	0,02493	0,00207
43	0,02380	0,02376	0,00152
47	0,02173	0,02168	0,00207

On va maintenant voir la répartition de la torsion en fonction des invariants. On commence par donner une table des fréquences théoriques, puis les fréquences expérimentales pour $N = 10^6$, $N = 10^7$, $N = 10^8$ et $N = 10^9$.

Fréquences théoriques

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,28006	0,01167	0.09335	0,00007	0,00259	0,03112
5	0,19008	0,00158	0.03802	$6*10^{-7}$	0,00025	0,00760
7	0,13947	0,00042	0.01992	$3*10^{-8}$	0,00005	0,00285
11	0,09008	0,00007	0.00819	$5*10^{-10}$	$6*10^{-6}$	0,00074
13	0,07643	0,00004	0.00588	10^{-10}	$2*10^{-6}$	0,00045
17	0,05861	0,00001	0.00345	$9*10^{-12}$	$7*10^{-7}$	0,00020
19	0,05248	$8*10^{-}$	0.00276	$3*10^{-12}$	$4*10^{-7}$	0,00015
23	0,04339	$4*10^{-6}$	0.00189	$6*10^{-13}$	10^{-7}	0,00008
29	0,03444	$*10^{-6}$	0.00119	$7*10^{-14}$	$5*10^{-8}$	0,00004
31	0,03222	$*10^{-6}$	0.00104	$4*10^{-14}$	$3*10^{-8}$	0,00003
37	0,02701	$5*10^{-7}$	0.00073	$8*10^{-15}$	10^{-8}	0,00002
41	0,02438	$4*10^{-7}$	0.00059	$3*10^{-15}$	$8*10^{-9}$	0,00001
43	0,02324	$3*10^{-7}$	0.00054	$2*10^{-15}$	$7*10^{-9}$	0,00001
47	0,02127	$2*10^{-7}$	0.00045	$9*10^{-16}$	$4*10^{-9}$	0,00001

Fréquences expérimentales

 $N = 10^6$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,30587	0,01564	0,10058	0,00004	0,00642	0.03295
5	0,18543	0,00121	0,03634	0,00000	0,00028	0,00711
7	0,13706	0,00031	0,01909	0,00000	0,00005	0,00265
11	0,08717	0,00006	0,00800	0,00000	0,00001	0,00065
13	0,07500	0,00003	0,00558	0,00000	0,00000	0,00039
17	0,05706	0,00001	0,00329	0,00000	0,00000	0,00019
19	0,05124	0,000003	0,00262	0,00000	0,0000	0,00013
23	0,04256	0,00000	0,00181	0,00000	0,00000	0,00008
29	0,03375	0,00000	0,00115	0,00000	0,00000	0,00003
31	0,03158	0,00000	0,00094	0,00000	0,00000	0,00005
37	0,02639	0,00000	0,00077	0,00000	0,00000	0,00002
41	0,02408	0,00000	0,00059	0,00000	0,00000	0,00001
43	0,02280	0,00000	0,00053	0,00000	0,00000	0,00001
47	0,02098	0,00000	0,00040	0,00000	0,00000	0,00001

 $N = 10^7$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,30894	0,01740	0,10197	0,00007	0,00754	0,03374
5	0,18791	0,00142	0,03716	0,0000003	0,00033	0,00734
7	0,13813	0,00038	0,01957	0,00000	0,00005	0,00274
11	0,08912	0,00006	0,00803	0,00000	0,00005	0,00073
13	0,07565	0,00003	0,00578	0,00000	10^{-6}	0,00045
17	0,05802	0,00001	0,00339	0,00000	$8*10^{-7}$	0,00021
19	0,05184	$6*10^{-6}$	0,00273	0,00000	$2*10^{-7}$	0,00013
23	0,04256	$2*10^{-6}$	0,00186	0,00000	0,00000	0,00008
29	0,30894	0,01740	0,00116	0,00000	0,00000	0,03374
31	0,18791	0,00142	0,00101	0,00000	0,00000	0,00734
37	0,03409	0,00000	0,00072	0,00000	0,00000	0,00004
41	0,03185	0,00000	0,00058	0,00000	0,00000	0,00003
43	0,02672	0,00000	0,00053	0,00000	0,00000	0,00002
47	0,02419	0,00000	0,00043	0,00000	0,00000	0,00001

$$N = 10^8$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,31092	0,01882	0,10304	0,00011	0,00824	0,03426
5	0,18875	0,00150	0,03757	$3*10^{-7}$	0,00036	0,00749
7	0,13884	0,00039	0,01974	$2*10^{-8}$	0,00006	0,00283
11	0,08957	0,00007	0,00812	0,00000	$6*10^{-6}$	0,00074
13	0,07606	0,00003	0,00584	0,00000	$2*10^{-6}$	0,00045
17	0,05830	0,00001	0,00344	0,00000	$9*10^{-7}$	0,00020
19	0,05227	$7*10^{-6}$	0,00274	0,00000	$3*10^{-7}$	0,00014
23	0,04315	$3*10^{-6}$	0,00187	0,00000	10^{-7}	0,00008
29	0,03430	10^{-7}	0,00117	0,00000	$2*10^{-8}$	0,00004
31	0,03209	10^{-7}	0,00103	0,00000	$3*10^{-8}$	0,00003
37	0,02686	$4*10^{-7}$	0,00073	0,00000	$3*10^{-8}$	0,00002
41	0,02426	$3*10^{-7}$	0,00059	0,00000	$2*10^{-8}$	0,00001
43	0,02426	$2*10^{-7}$	0,00053	0,00000	0,00000	0,00001
47	0,02313	$2*10^{-7}$	0,00045	0,00000	0,00000	0,00001

$$N = 10^9$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,31224	0,01977	0,10374	0,00013	0,00873	0,03452
5	0,18932	0,00154	0,03779	$5*10^{-7}$	0,00037	0,00755
7	0,13918	0,00041	0,01984	$3*10^{-7}$	0,00007	0,00283
11	0,08989	0,00007	0,00815	0,00000	0,00001	0,00074
13	0,07628	0,00003	0,00586	0,00000	$3*10^{-6}$	0,00045
17	0,05848	0,00001	0,00343	0,00000	$7*10^{-7}$	0,00020
19	0,05235	$7*10^{-6}$	0,00275	0,00000	$4*10^{-7}$	0,00014
23	0,04331	$3*10^{-6}$	0,00188	0,00000	$2*10^{-7}$	0,00008
29	0,03437	$*10^{-6}$	0,00119	0,00000	$4*10^{-8}$	0,00004
31	0,03215	$*10^{-6}$	0,00104	0,00000	$4*10^{-8}$	0,00003
37	0,02695	$5*10^{-7}$	0,00073	0,00000	$2*10^{-8}$	0,00002
41	0,02433	$3*10^{-7}$	0,00059	0,00000	$*10^{-8}$	0,00001
43	0,02433	$3*10^{-7}$	0,00054	0,00000	$*10^{-8}$	0,00001
47	0,02321	$2*10^{-7}$	0,00045	0,00000	$3*10^{-9}$	0,00001

Cas quadratique imaginaire.

Principe de calcul. Même principe que pour les corps quadratiques réels : on remplace $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ par $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

$$N = 10^6$$

p	$M_{2,1}(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0.42235	0,90115	1.21734
3	0.15981	0,23983	0.50073
5	0,04958	0,04585	0.00989
7	0,02374	0,02309	0,00374
11	0,00908	0,00855	0,00416
13	0,00641	0,00609	0,00360
17	0,00368	0,00343	0,00445
19	0,00292	0.00267	0,0589
23	0,00198	0,00175	0,00510
29	0,00123	000107	0,00916
31	0,00108	0,00089	0,00929
37	0,00075	0,00064	0,00813
41	0,00061	0,00052	0,00982
43	0,00055	0,00048	0,00998
47	0,00046	0,00035	0,01626

$$N = 10^7$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,42235	0,91677	1.17062
3	0,15981	0,24810	0,55244
5	0,04958	0,04788	0,03439
7	0,02374	0,02347	0,01130
11	0,00908	0,00880	0,03103
13	0,00641	0,00623	0,02721
17	0,00368	0,0356	0,03239
19	0,00292	0,00282	0,03455
23	0,00198	0,00187	0,05281
29	0,00123	0,00118	0,04054
31	0,00108	0,00102	0,05364
37	0,00075	0,00071	0,04885
41	0,00061	0,00058	0,04339
43	0,00055	0,00053	0,04697
47	0,00046	0,00042	0,10130

$$N = 10^8$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,42235	0,92792	1,19703
3	0,15981	0,25351	0.58630
5	0,04958	0,04862	0,01940
7	0,02374	0,02358	0,00671
11	0,00908	0,00898	0,01103
13	0,00641	0,00634	0,01103
17	0,00368	0,00363	0,01157
19	0,00292	0,00288	0,01381
23	0,00198	0,00194	0,01722
29	0,00123	0,00121	0,01644
31	0,00108	0,00104	0,01817
37	0,00075	0,00073	0,02685
41	0,00061	0,00060	0,01627
43	0,00055	0,00054	0,02454
47	0,00046	0,00045	0,03522

$$N = 10^9$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,42235	0,93650	1.12734
3	0,15981	0,25718	0,60926
5	0,04958	0,04909	0,00989
7	0,02374	0,02365	0,00374
11	0,00908	0,00905	0,00416
13	0,00641	0,00638	0,00360
17	0,00368	0,00365	0,00445
19	0,00292	0,00291	0,00589
23	0,00198	0,00197	0,00510
29	0,00123	0,00122	0,00916
31	0,00108	0,00107	0,00929
37	0,00075	0,00074	0,00813
41	0,00061	0,00060	0,00982
43	0,00055	0,00055	0,00998
47	0,00046	0,00046	0,01626

De même que pour les corps quadriques réels, on va maintenant voir la répartition de la torsion en fonction des invariants. On commence par donner une table des fréquences théoriques, puis les fréquences expérimentales pour $N = 10^6$, $N = 10^7$, $N = 10^8$ et $N = 10^9$.

Fréquences théoriques

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,14003	0,00194	0,01556	0,000004	0,00014	0,00173
5	0,04752	0,00008	0,00190	$6 * 10^{-9}$	0,000003	0,00008
7	0,02324	0,00001	0,00047	10^{-10}	$2 * 10^{-7}$	0,00001
11	0,00901	$6 * 10^{-7}$	0,00007	$4 * 10^{-13}$	$5 * 10^{-9}$	$6 * 10^{-7}$
13	0,00637	$2 * 10^{-7}$	0,00004	$5 * 10^{-14}$	10^{-9}	$2 * 10^{-7}$
17	0,00366	$4 * 10^{-11}$	0,00001	$2 * 10^{-15}$	10^{-10}	$4 * 10^{-8}$
19	0,00292	$2 * 10^{-8}$	$8 * 10^{-6}$	$5 * 10^{-16}$	$6 * 10^{-11}$	$2 * 10^{-8}$
23	0,00197	$7 * 10^{-9}$	$4 * 10^{-6}$	$5 * 10^{-17}$	10^{-11}	$7 * 10^{-9}$
29	0,00123	$2 * 10^{-9}$	10^{-6}	$3 * 10^{-18}$	$2 * 10^{-12}$	$2 * 10^{-9}$
31	0,00107	$* 10^{-9}$	10^{-6}	10^{-18}	10^{-12}	$* 10^{-9}$
37	0,00075	$4 * 10^{-10}$	$5 * 10^{-7}$	$2 * 10^{-19}$	$3 * 10^{-13}$	$4 * 10^{-10}$
41	0,00061	$2 * 10^{-10}$	$4 * 10^{-7}$	$5 * 10^{-20}$	10^{-13}	$2 * 10^{-10}$
43	0,00055	$2 * 10^{-11}$	$3 * 10^{-7}$	$3 * 10^{-20}$	$9 * 10^{-14}$	$2 * 10^{-10}$
47	0,00046	$9 * 10^{-11}$	$2 * 10^{-7}$	10^{-20}	$4 * 10^{-14}$	$9 * 10^{-11}$

Fréquences expérimentales

 $N = 10^6$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,21019	0,00373	0,02264	0,00000	0,00053	0,00245
5	0,04409	0,00006	0,00165	0,00000	0,00000	0,00005
7	0,02272	$5 \cdot 10^{-6}$	0,00036	0,00000	0,00000	0,000003
11	0,00850	0,00000	0,00005	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00607	0,00000	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00343	0,00000	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00267	0,00000	$3 \cdot 10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00175	0,00000	$3 \cdot 10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00107	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00089	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00064	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00052	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00048	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00035	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

 $N = 10^7$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,21607	0,00493	0,02342	0,00000	0,00069	0,00260
5	0,04597	0,00007	0,00179	0,00000	0,00000	0,00006
7	0,02302	0,00001	0,00044	0,00000	0,00000	0,00001
11	0,00874	0,00000	0,00006	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00620	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00355	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00282	0,00000	$4 \cdot 10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00187	0,00000	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00118	0,00000	$2 \cdot 10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00102	0,00000	$3 \cdot 10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00071	0,00000	$2 \cdot 10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00058	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00053	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00042	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

$$N = 10^8$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,21982	0,00573	0,02405	0,00001	0,00082	0,00265
5	0,04663	0,00007	0,00185	0,00000	0,000003	0,00007
7	0,02311	0,00001	0,00046	0,00000	$5*10^{-8}$	0,00001
11	0,00892	$6*10^{-7}$	0,00007	0,00000	0,00000	$3*10^{-7}$
13	0,00630	$2*10^{-7}$	0,00003	0,00000	0,00000	$7*10^{-8}$
17	0,00362	$2*10^{-8}$	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00288	0,00000	$6*10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00194	0,00000	$2*10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00121	0,00000	$9*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00104	0,00000	$4*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00073	0,00000	$3*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00060	0,00000	$*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00054	0,00000	$2*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00045	0,00000	$5*10^{-8}$	0,00000	0,00000	0,00000

$$N = 10^9$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,22236	0,00630	0,02444	0,00001	0,00091	0,00270
5	0,04706	0,00007	0,00188	$5*10^{-9}$	0,000003	0,00007
7	0,02316	0,00001	0,00047	0,00000	$2*10^{-7}$	0,00001
11	0,00897	$6*10^{-7}$	0,00007	0,00000	$7*10^{-9}$	$5*10^{-7}$
13	0,00635	$2*10^{-7}$	0,00004	0,00000	0,00000	10^{-7}
17	0,00365	$4*10^{-8}$	0,00001	0,00000	0,00000	10^{-8}
19	0,00290	$2*10^{-8}$	$7*10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00196	$7*10^{-9}$	$3*10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00122	0,00000	$*10^{-6}$	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00106	0,00000	$8*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00074	0,00000	$4*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00060	0,00000	$3*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00055	$2*10^{-9}$	$2*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00045	0,00000	$*10^{-7}$	0,00000	0,00000	0,00000

Cas des corps cubiques.

Dans ce cas $O_l = \mathbb{Z}[j]$ et $l = 3$.

Principe du premier calcul : Grâce au programme de Belabas ([Bel97]), on calcule les corps cubiques dont le discriminant est compris entre 0 et N . On calcule alors la proportion de corps dont la torsion est non triviale.

$$N = 10^6$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,85081	0,19634
3	0,43987	0,46489	0,05687
5	0,23967	0,23117	0,03545
7	0,16320	0,15921	0,02446
11	0,09917	0,09670	0,02485
13	0,08284	0,08207	0,00927
17	0,06228	0,06249	0,00334
19	0,05540	0,05654	0,02053
23	0,04537	0,04527	0,00207
29	0,03567	0,03443	0,03475
31	0,03330	0,03229	0,03031
37	0,02776	0,02722	0,01950
41	0,02499	0,02551	0,02112
43	0,02380	0,02256	0,05179
47	0,02173	0,02165	0,00372

$$N = 10^7$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,86801	0,22052
3	0,43987	0,48970	0,11327
5	0,23967	0,23555	0,01718
7	0,16320	0,16170	0,00920
11	0,09917	0,09886	0,00314
13	0,08284	0,08258	0,00308
17	0,06228	0,06290	0,00988
19	0,05540	0,05520	0,00355
23	0,04537	0,04498	0,00862
29	0,03567	0,03544	0,00646
31	0,03330	0,03310	0,00590
37	0,02776	0,02752	0,00839
41	0,02499	0,02522	0,00923
43	0,02380	0,02371	0,00380
47	0,02173	0,02168	0,00216

$$N = 10^8$$

p	$M_{2,0}(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,87768	0,23412
3	0,43987	0,50299	0,14348
5	0,23967	0,23717	0,01041
7	0,16320	0,16254	0,00409
11	0,09917	0,09897	0,00199
13	0,08284	0,08270	0,00164
17	0,06228	0,06227	0,00017
19	0,05540	0,05534	0,00115
23	0,04537	0,04526	0,00236
29	0,03567	0,03551	0,00461
31	0,03330	0,03312	0,00525
37	0,02776	0,02764	0,00413
41	0,02499	0,02487	0,00452
43	0,02380	0,02377	0,00092
47	0,02173	0,02166	0,000321

$$N = 10^9$$

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,88357	0,24240
3	0,43987	0,51187	0,16367
5	0,23967	0,23845	0,00510
7	0,16320	0,16289	0,00194
11	0,09917	0,09906	0,00107
13	0,08284	0,08278	0,00075
17	0,06228	0,06229	0,00017
19	0,05540	0,05531	0,00160
23	0,04537	0,04536	0,00008
29	0,03567	0,03564	0,00075
31	0,03330	0,03325	0,00138
37	0,02776	0,02774	0,00066
41	0,02499	0,02496	0,00110
43	0,02380	0,02377	0,00128
47	0,02173	0,02171	0,00068

On va maintenant voir la répartition de la torsion en fonction des invariants. On commence par donner une table des fréquences théoriques, puis les fréquences expérimentales pour $N = 10^6$, $N = 10^7$, $N = 10^8$ et $N = 10^9$.

Fréquences théoriques

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,28882	0,048137	0,14441	0,00258	0,01203	0,07221
3	0,28006	0,01167	0,09335	0,00007	0,00259	0,03112
5	0,19008	0,00158	0,03802	$6*10^{-7}$	0,00025	0,00760
7	0,13947	0,00042	0,01992	$3*10^{-8}$	0,00005	0,00285
11	0,09008	0,00007	0,00819	$5*10^{-10}$	$6*10^{-6}$	0,00074
13	0,07643	0,00004	0,00588	$*10^{-10}$	$2*10^{-6}$	0,00045
17	0,05861	0,00001	0,00345	$*10^{-12}$	$7*10^{-7}$	0,00020
19	0,05248	$8*10^{-6}$	0,00276	$3*10^{-12}$	$4*10^{-7}$	0,00015
23	0,04339	$4*10^{-6}$	0,00189	$6*10^{-13}$	$2*10^{-7}$	0,00008
29	0,03444	10^{-6}	0,00119	$7*10^{-14}$	$5*10^{-8}$	0,00004
31	0,03222	10^{-6}	0,00104	$4*10^{-14}$	$3*10^{-8}$	0,00003
37	0,02701	$5*10^{-7}$	0,00073	$8*10^{-15}$	10^{-8}	0,00002
41	0,02438	$4*10^{-7}$	0,00059	$3*10^{-15}$	$8*10^{-9}$	0,00001
43	0,02324	$3*10^{-7}$	0,00054	$2*10^{-15}$	$7*10^{-9}$	0,00001
47	0,02127	$2*10^{-7}$	0,00045	$9*10^{-16}$	$4*10^{-9}$	0,00001

 $N = 10^6$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,30703	0,09449	0,15540	0,00266	0,06639	0,07449
3	0,29822	0,01364	0,09678	0,00004	0,00559	0,03147
5	0,18249	0,00093	0,03802	0,00000	0,00022	0,00771
7	0,13709	0,00040	0,01852	0,00000	0,00009	0,00273
11	0,08753	0,00011	0,00817	0,00000	0,00004	0,00081
13	0,07555	0,00005	0,00599	0,00000	0,00002	0,00044
17	0,05857	0,00000	0,00364	0,00000	0,00000	0,00026
19	0,03535	0,00000	0,00280	0,00000	0,00000	0,00007
23	0,04319	0,00000	0,00200	0,00000	0,00000	0,00007
29	0,03317	0,00002	0,00119	0,00000	0,00000	0,00005
31	0,03119	0,00000	0,00108	0,00000	0,00000	0,00002
37	0,02647	0,00000	0,00073	0,00000	0,00000	0,00002
41	0,02493	0,00000	0,00059	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,02211	0,00000	0,00044	0,00000	0,00000	0,00002
47	0,02126	0,00000	0,00038	0,00000	0,00000	0,00000

$N = 10^7$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,29035	0,10160	0,15366	0,00507	0,07604	0,07255
3	0,30661	0,01762	0,10266	0,00013	0,00743	0,03399
5	0,18715	0,00127	0,03743	0,00000	0,00030	0,00758
7	0,13816	0,00041	0,01967	0,00000	0,00007	0,00288
11	0,08990	0,00007	0,00808	0,00000	0,00001	0,00070
13	0,07608	0,00004	0,00593	0,00000	0,00001	0,00049
17	0,05921	0,00002	0,00343	0,00000	0,00000	0,00023
19	0,05233	0,00001	0,00273	0,00000	0,00000	0,00013
23	0,04304	0,00001	0,00187	0,00000	0,00000	0,00006
29	0,03417	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00123	0,00000	0,00000	0,00004
31	0,03199	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00108	0,00000	0,00000	0,00003
37	0,02682	0,00000	0,00069	0,00000	0,00000	0,00002
41	0,02462	$3 \cdot 10^{-6}$	0,00058	0,00000	0,00000	0,00001
43	0,02320	0,00000	0,00049	0,00000	0,00000	0,00002
47	0,02123	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00045	0,00000	0,00000	0,00001

 $N = 10^8$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,27715	0,10559	0,14789	0,00702	0,00007	0,07157
3	0,31488	0,02277	0,10534	0,00029	0,01017	0,03507
5	0,18920	0,00153	0,03782	0,00000	0,00037	0,00755
7	0,13919	0,00041	0,01990	0,00000	0,00007	0,00284
11	0,08998	0,00007	0,00819	0,00000	0,00001	0,00074
13	0,07638	0,00003	0,00587	0,00000	$3 \cdot 10^{-6}$	0,00045
17	0,05861	0,00001	0,00345	0,00000	$9 \cdot 10^{-7}$	0,00021
19	0,05239	0,00001	0,00276	0,00000	$3 \cdot 10^{-7}$	0,00014
23	0,04338	$4 \cdot 10^{-6}$	0,00189	0,00000	10^{-7}	0,00008
29	0,03441	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00119	0,00000	10^{-7}	0,00004
31	0,03217	$9 \cdot 10^{-7}$	0,00104	0,00000	$2 \cdot 10^{-8}$	0,00003
37	0,02699	$4 \cdot 10^{-7}$	0,00073	0,00000	$6 \cdot 10^{-8}$	0,00002
41	0,02435	$5 \cdot 10^{-7}$	0,00059	0,00000	0,00000	0,00001
43	0,02322	$2 \cdot 10^{-7}$	0,00054	0,00000	0,00000	0,00002
47	0,02123	$3 \cdot 10^{-7}$	0,00045	0,00000	0,00000	0,00001

$$N = 10^9$$

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,26826	0,10815	0,14486	0,00866	0,08671	0,07051
3	0,31488	0,02277	0,10534	0,00029	0,01017	0,03507
5	0,18920	0,00153	0,03782	0,00000	0,00037	0,00755
7	0,13919	0,00041	0,01990	0,00000	0,00007	0,00284
11	0,08998	0,00007	0,00819	0,00000	0,00001	0,00074
13	0,07638	0,00003	0,00587	0,00000	$3 \cdot 10^{-6}$	0,00045
17	0,05861	0,00001	0,00345	0,00000	$9 \cdot 10^{-7}$	0,00021
19	0,05239	0,00001	0,00276	0,00000	$3 \cdot 10^{-7}$	0,00014
23	0,04338	$4 \cdot 10^{-7}$	0,00189	0,00000	10^{-7}	0,00008
29	0,03441	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00119	0,00000	10^{-7}	0,00004
31	0,03217	$9 \cdot 10^{-7}$	0,00104	0,00000	$2 \cdot 10^{-8}$	0,00003
37	0,02699	$4 \cdot 10^{-7}$	0,00073	0,00000	$6 \cdot 10^{-7}$	0,00002
41	0,02435	$5 \cdot 10^{-7}$	0,00059	0,00000	0,00000	0,00001
43	0,02322	$2 \cdot 10^{-7}$	0,00054	0,00000	0,00000	0,00002
47	0,02123	$3 \cdot 10^{-7}$	0,00045	0,00000	0,00000	0,00001

Extensions de degré 5.

Principe de calcul. On utilise ici les tables de corps de nombres disponibles sur le site dédié à pari-GP [PAR13]. On considère les 22740 corps de nombres de degré 5 et de signature $(5, 0)$ dont le discriminant est inférieur à $2 \cdot 10^7$.

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	δ
2	0,71118	0,88821	0,24894
3	0,43987	0,42836	0,02617
5	0,23967	0,22995	0,04056
7	0,16320	0,16016	0,01867
11	0,09916	0,09745	0,01732
13	0,08284	0,08478	0,02350
17	0,06228	0,06288	0,00966
19	0,05540	0,05616	0,01363
23	0,04537	0,04648	0,02454
29	0,03567	0,03549	0,00515
31	0,03330	0,03276	0,01613
37	0,02776	0,02770	0,00191
41	0,02499	0,02344	0,06189
43	0,02380	0,02392	0,00529
47	0,02173	0,02001	0,07918

p \ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
2	0,30717	0,12084	0,14723	0,00510	0,07520	0,07040
3	0,28096	0,00721	0,09077	0,00000	0,00290	0,03008
5	0,18391	0,00088	0,03659	0,00000	0,00018	0,00699
7	0,13531	0,00048	0,02097	0,00000	0,00009	0,00290
11	0,08808	0,00018	0,00831	0,00000	0,00000	0,00084
13	0,07823	0,00004	0,00589	0,00000	0,00004	0,00053
17	0,05897	0,00001	0,00356	0,00000	0,00000	0,00022
19	0,05286	0,00004	0,00290	0,00000	0,00000	0,00035
23	0,04445	0,00000	0,00189	0,00000	0,00000	0,00004
29	0,03408	0,00000	0,00141	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,03179	0,00000	0,00092	0,00000	0,00000	0,00004
37	0,02700	0,00000	0,00065	0,00000	0,00000	0,00004
41	0,02265	0,00000	0,00075	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00235	0,00000	0,00040	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,01957	0,00000	0,00044	0,00000	0,00000	0,00000

3.3 Explication des résultats numériques.

On a remarqué dans les tables de la section 3.2.1 que pour des corps totalement réels la proportion f_{exp} était une 0-moyenne et 1-moyenne dans le cas quadratique imaginaire. On remarque que pour $p = 2, 3$ le défaut est très grand et augmente avec le nombre de corps considéré. Dans cette section, on va tenter d'expliquer ces phénomènes. On commence par rappeler un résultat de Gras ([Gra82] p.94-97). Soit K un corps de nombres, on note $k = K(\mu_p)$ et ω l'idempotent associé au caractère représentant l'action de $\text{Gal}(k/K)$ sur μ_p .

Théorème 3.3.1. (*Corollaire 1 p. 96 [Gra82]*). *Soit p un nombre premier, $p \neq 2$. Si $\mu_p \not\subset K$ alors la torsion de $\mathfrak{X}$ est triviale si et seulement si aucun idéal de k au dessus de p n'est totalement décomposé et si $(Cl_k)^\omega$ est triviale, où Cl_k est le groupe de classe de k .*

Si $p > 3$ alors $\mu_p \not\subset K$ et l'indice de ramification de p dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ est $p - 1$ donc chaque idéal de K se ramifie dans k . Ainsi les idéaux au dessus de p ne sont pas totalement décomposés dans k/K ainsi la torsion de $\mathfrak{X}$ est triviale si et seulement si $(Cl_K)^\omega$ est triviale. Alors pour un corps totalement réel le calcul de cette torsion est ramené au calcul d'un groupe de classe d'un corps quadratique imaginaire. Ceci justifie l'utilisation d'une 0-moyenne d'après les heuristiques de Cohen-Lenstra [CL84]. De même pour les corps quadratiques réels la remarque de Gras ([Gra82] p. 96-97) justifie l'utilisation 1-moyenne. Pour le cas $p = 2$ la théorie des genres explique que la proportion f_{exp} tend vers 1 lorsque que l'on fait tendre la borne du discriminant vers l'infini. Enfin pour $p = 3$, les idéaux au dessus de p dans K peuvent être totalement décomposés dans k et ainsi la torsion est non triviale. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & k = K(\zeta_p) & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) & & \mathbb{Q}(\sqrt{-3d}) \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & \mathbb{Q} &
 \end{array}$$

Dans le cas des corps quadratiques réels, l'idéal au dessus de p dans K est totalement décomposés dans k , si $d \equiv 6 \pmod{9}$. En effet, 3 est ramifiée

dans l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ car 3 divise d et 3 est totalement composé dans l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{-d}{3}})/\mathbb{Q}$ car $\frac{-d}{3} \equiv 1 \pmod{3}$ ainsi comme $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})(\zeta_3)$ le compositum de ces deux extensions l'idéal au dessus de p est totalement décomposé dans l'extension k/K . En considérant que pour $d \equiv 6 \pmod{9}$ c'est à dire un huitième des corps considérés la torsion était non triviale et que les autres suivaient les heuristiques, on introduit alors une nouvelle moyenne $M'_2(\Pi_3) = M_{2,0}(\Pi_3) \times \frac{7}{8} + \frac{1}{8}$, dans les cas réels on obtient alors :

N	$M'_2(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
10^6	0,50989	0,48094	0,05678
10^7	0,50989	0,49054	0,03794
10^8	0,50989	0,49697	0,02533
10^9	0,50809	0,50120	0,01704

Si on refait le même calcul en excluant les $d \equiv 6 \pmod{9}$, on obtient alors le résultat suivant :

N	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
10^6	0,43987	0,40679	0,07521
10^7	0,43987	0,41776	0,05027
10^8	0,43987	0,42511	0,03356
10^9	0,43987	0,42995	0,02257

On s'est ensuite intéressé au 9-rang de la torsion dans le cas où $d \equiv 6 \pmod{9}$.

Heuristique sur le 9-rang dans le cas où $d \equiv 6 \pmod{9}$.

On calcule la torsion pour des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec $d \equiv 6 \pmod{9}$, $0 < d \leq N$ en accord avec ce qui précède nous avons trouvé qu'elle était toujours non triviale. On s'est alors intéressé au 9-rang de cette torsion. On calcule la torsion des corps considérés et l'on a trié en fonction des invariants.

Pour tous les corps que l'on a pris, on savait que la torsion allait être non triviale. Si maintenant on prend une autre moyenne $M''(\Pi) = M(\Pi)/M_3(\Pi)$. En effet, $M''(\Pi)$ est la probabilité que le 9 rang soit non nul sachant que la torsion est non triviale. C'est pour cela que l'on divise par $M_3(\Pi)$ la probabilité que la torsion soit non triviale.

$$N = 10^7$$

fréquences invariants	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
(p)	0.63669	0,58360	0,08338
(p, p)	0.02653	0,07983	2,00929
(p^2)	0.21223	0,19004	0,10457
(p, p, p)	0,00011	0,00053	3,63135
(p^2, p)	0,01179	0,03406	1,88901
(p^3)	0,07074	0,06242	0,11765
(p, p, p, p)	10^{-7}	0,00000	1,00000
(p^2, p, p)	0,00005	0,00025	3,62867
(p^2, p^2)	0.00033	0,00086	1,61568
(p^3, p)	0.00393	0,01128	1,86982
(p^4)	0.02358	0,02062	0,12543
(p, p, p, p, p)	$3*10^{-12}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p)	$3*10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p)	0,00002	0,000009	0,49374
(p^3, p, p)	0,00002	0,00009	4,13493
(p^3, p^2)	0,00015	0,00036	1,44994
(p^4, p)	0,00131	0,00380	1,90397
(p^5)	0,00786	0,00677	0,13849
(p, p, p, p, p, p)	$2*10^{-17}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p)	10^{-13}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p)	10^{-9}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2)	10^{-8}	0,00000	1,00000
(p^3, p, p, p)	10^{-8}	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p)	$9*10^{-7}$	$3*10^{-6}$	1,92908
(p^3, p^3)	0,00001	0,00001	1,12147
(p^4, p, p)	0,00001	0,00002	2,68847
(p^4, p^2)	0,00005	0,00012	1,49514
(p^5, p)	0,00044	0,00121	1,77841
(p^6)	0,00262	0,00230	0,12208

(p, p, p, p, p, p, p)	$9*10^{-24}$	0,0000	1,00000
(p^2, p, p, p, p, p)	$3*10^{-18}$	0,0000	1,00000
(p^2, p^2, p, p, p)	$2*10^{-16}$	0,0000	1,00000
(p^2, p^2, p^2, p)	$4*10^{-12}$	0,0000	1,00000
(p^3, p, p, p, p)	$4*10^{-11}$	0,0000	1,00000
(p^3, p^2, p, p)	$5*10^{-10}$	0,0000	1,00000
(p^3, p^2, p^2)	$3*10^{-9}$	0,0000	1,00000
(p^3, p^3, p)	$2*10^{-8}$	0,0000	1,00000
(p^4, p, p, p)	$3*10^{-9}$	0,0000	1,00000
(p^4, p^2, p)	$3*10^{-7}$	10^{-6}	3,39362
(p^4, p^3)	$2*10^{-6}$	$4*10^{-6}$	1,19681
(p^5, p, p)	$2*10^{-6}$	$9*10^{-6}$	3,55635
(p^5, p^2)	0,00002	0,00003	1,03408
(p^6, p)	0,00015	0,00043	1,92908
(p^7)	0,00087	0,0074	0,15020
Total avec p^2 qui divise un invariant	0,33617	0,33546	0.00211

Les tableaux pour $N = 10^8$ et $N = 10^9$ sont en annexes 5.0.4.

Extensions cycliques de degré 5.

Principe de calcul : On va ici utiliser les tables de corps de nombres disponibles sur le site dédié au logiciel pari-GP. On a considéré les 22740 premiers corps de nombres de degré 5 dont les discriminants sont inférieurs à $2*10^7$ et de signature $(5, 0)$, figurant dans ces tables. Ici encore, le module $\mathfrak{X}$ n'est a priori qu'un $\mathbb{Z}$ -module et les résultats que l'on obtient semblent être en adéquation avec les heuristiques énoncés précédemment.

p	$M_2(\Pi_p)$	f_{exp}	$\delta(\acute{E}cart)$
3	0,43987	0,42836	0,01151
5	0,23967	0,22995	0,00972
7	0,16320	0,16016	0,00304
11	0,09916	0,09745	0,00171
13	0,08284	0,08478	0,00194
17	0,06228	0,06288	0,00060
19	0,05540	0,05616	0,00076
23	0,04537	0,04648	0,00111
29	0,03567	0,03549	0,00018
31	0,03330	0,03276	0,00054
37	0,02776	0,02770	0,00006
41	0,02499	0,02344	0,00155
43	0,02380	0,02392	0,00012
47	0,02173	0,02001	0,00172

Répartition en fonction des invariants.

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,28096	0,00721	0,09077	0,00000	0,00290	0,03008
5	0,18391	0,00088	0,03659	0,00717	0,00000	0,00000
7	0,13531	0,00048	0,02097	0,00299	0,00000	0,00000
11	0,08808	0,00018	0,00831	0,00084	0,00000	0,00000
13	0,07823	0,00004	0,00589	0,00057	0,00000	0,00000
17	0,05897	0,00001	0,00356	0,00021	0,00000	0,00000
19	0,05286	0,00004	0,00290	0,00035	0,00000	0,00000
23	0,04445	0,00000	0,00189	0,00004	0,00000	0,00000
29	0,03408	0,00000	0,00141	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,03179	0,00000	0,00092	0,00004	0,00000	0,00000
37	0,02700	0,00000	0,00065	0,00004	0,00000	0,00000
41	0,02265	0,00000	0,00075	0,00040	0,00000	0,00000
43	0,00235	0,00000	0,00040	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,01957	0,00000	0,00044	0,00000	0,00000	0,00000

3.3.1 Incidence de la signature du corps.

Pour l'instant, on n'a effectué que des calculs pour des corps de signatures constantes ou sans se préoccuper de celles-ci. Dans cette section, on étudie l'incidence de la signature du corps sur la fréquence d'apparition du module $\mathcal{T}_p$. En utilisant les tables de nombres disponibles sur le site dédié à pari-GP, on a calculé les fréquences d'apparition de $\mathcal{T}_p$ pour des corps de nombres de degré 3 et 5, dont les signatures sont respectivement $(1, 1)$ et $(3, 3)$ d'une part et $(1, 2)$, $(3, 1)$ d'autre part. Les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux ci-dessous. On tentera ensuite d'interpréter les résultats obtenus.

Cas des corps de degré 3.

Fréquence pour les corps cubiques de signature $(1, 1)$.

p	$f_{exp}(1, 1)$
3	0,23427
5	0,04526
7	0,02205
11	0,00865
13	0,00624
17	0,00356
19	0,00289
23	0,00201
29	0,00120
31	0,00101
37	0,00073
41	0,00059
43	0,00056
47	0,00048

Répartition en fonctions des invariants pour les corps cubiques et de signature (1,1).

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,20534	0,00419	0,02156	0,00001	0,00241	0,01135
5	0,04336	0,00003	0,00181	0,00000	0,00000	0,00152
7	0,02162	0,00000	0,00043	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00856	0,00000	0,00006	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,000621	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00355	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00288	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00200	0,00000	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00120	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00101	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00073	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00059	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00056	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00048	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Cas des corps de degré 5 :

p	$f_{exp}(1, 2)$	$f_{exp}(3, 1)$	$f_{exp}(5, 0)$
3	0,12613	0,15639	0,42837
5	0,00686	0,03435	0,22995
7	0,00262	0,02065	0,16016
11	0,00103	0,00963	0,09745
13	0,00024	0,00509	0,08478
17	0,00021	0,00333	0,06288
19	0,00017	0,00287	0,05616
23	0,00003	0,00269	0,04648
29	0,00000	0,00139	0,03549
31	0,00000	0,00139	0,03276
37	0,00000	0,00083	0,02770
41	0,00000	0,00037	0,02344
43	0,00000	0,00056	0,02392
47	0,00000	0,00056	0,02001

Répartition pour les corps de degré 5 et de signature (1,2).

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,12206	0,00145	0,00248	0,00000	0,00003	0,00007
5	0,00679	0,00000	0,00007	0,00000	0,00000	0,00000
7	0,00259	0,00000	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00103	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00024	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00021	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00017	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Répartition pour les corps de degré 5 et de signature (3,1).

$p \backslash$ invariants	(p)	(p, p)	(p^2)	(p, p, p)	(p^2, p)	(p^3)
3	0,14009	0,00204	0,01259	0,00000	0,00000	0,00167
5	0,03287	0,00000	0,00139	0,00000	0,00000	0,00000
7	0,02028	0,00000	0,00028	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,00963	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
13	0,00509	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00333	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00287	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
23	0,00269	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
29	0,00139	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
31	0,00139	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
37	0,00083	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
41	0,00037	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
43	0,00056	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
47	0,00056	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

On observe que comme pour les corps quadratiques imaginaires pour les corps n'ayant qu'une seule place complexe la fréquence obtenue est proche de la 1-moyenne de Π_p .

p	$M_{2,1}(\Pi_p)$	$f_{exp}(1, 1)$	$f_{exp}(2, 1)$
3	0.15981	0,23427	0,15639
5	0,04958	0,04526	0,03435
7	0,02374	0,02205	0,02065
11	0,00908	0,00865	0,00963
13	0,00641	0,00624	0,00509
17	0,00368	0,00356	0,00333
19	0,00292	0,00289	0,00287
23	0,00198	0,00201	0,00269
29	0,00123	0,00120	0,00139
31	0,00108	0,00101	0,00139
37	0,00075	0,00073	0,00083
41	0,00061	0,00059	0,00037
43	0,00055	0,00056	0,00056
47	0,00046	0,00048	0,00056

Les résultats numériques obtenus précédemment semblent en accord avec les heuristiques de Cohen-Lenstra [CL84].

Chapitre 4

Application à la conjecture de Greenberg.

On note X_n le p -sous groupe de Sylow du groupe de classe de K_n où K_n est le n -ème étages de l'extension cyclotomique. Alors il existe deux entiers λ et μ dépendants seulement de K et p , tel que pour n assez grand $\#(X_n) = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$ [Iwa73]. Il est conjecturé dans le cas totalement réel que $\#A_n$ est bornée donc λ et μ sont nuls. Ceci est démontré pour μ dans les cas abélien voir [FW79], mais pour λ rien ou presque n'a été démontré. De célèbres travaux sur la conjecture de Greenberg sont dûs à Kraft et Schoof [KS95] qui démontrent pour les corps quadratiques réels $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec $d < 10000$, $d \not\equiv 1 \pmod{3}$ et $p = 3$ que λ est nul. Ils utilisent une approche algorithmique. Ils démontrent que si $\#X_n = \#X_{n+1}$ alors pour tout $m \geq n$, $\#X_n = \#X_m$. Ensuite pour chaque corps, ils montrent par un calcul qu'un tel n existe et ainsi que la conjecture de Greenberg est vérifiée. Cette méthode ne peut pas être utilisée pour obtenir des résultats plus généraux sur la conjecture de Greenberg. Depuis d'autres mathématiciens notamment Fukuda et Taya entre autres, ont donné des autres exemples où la conjecture de Greenberg est vérifiée [FT95] [Tay99].

4.0.2 Équivalent à la conjecture de Greenberg.

On note D_n le p sous groupe de Sylow du groupe des classes engendrés par les places au dessus de p dans K_n .

Théorème 4.0.2. ([Tay99] Théorème 2 p.173)

Soit K un corps de nombre abélien sur $\mathbb{Q}$ totalement réel et soit p un

nombre premier impair totalement décomposé dans $K/\mathbb{Q}$. Alors la conjecture de Greenberg est vérifiée si et seulement si pour n assez grand :

$$\#D_n = \#\mathcal{T}_p$$

Pour une autre démonstration de ce résultat on peut consulter [BNQD05].

Remarque 8. Si l'égalité $\#D_n = \#\mathcal{T}_p$ a lieu pour un entier n alors celle-ci est vrai pour tous les entiers suivants. En effet $\#D_n$ est croissant et majoré par $\#\mathcal{T}_p$.

4.0.3 Exemple de la conjecture de Greenberg.

Dans cette section, on a donné des exemples de corps quadratiques réels vérifiant la conjecture de Greenberg. On utilise le critère énoncé précédemment. Pour un corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ donné, on calcule le sous-groupe du groupe de classes d'idéaux engendré par les places au dessus de p . On peut calculer le cardinal de sa p -partie et le comparer à celui de la torsion. La torsion sera calculée en utilisant l'algorithme. Le problème de cette méthode c'est que pour calculer $\#D_n$, il faut monter dans l'extension cyclotomique et donc calculer des corps de grand degré c'est pour cela que l'on se limite à l'étage 0 et 1 pour faire ces calculs, pour éviter les trop grands degrés. Dans le tableau ci-dessous, on donne les résultats seulement lorsque la torsion est non triviale pour $p = 5$.

d	$\#(D_0)$	$\#(D_1)$	$\#(\mathcal{T}_p)$
39	1	5	5
51	1	5	5
69	5	5	5
89	25	25	25
109	5	5	5
114	1	5	5
134	5	5	5
139	25	25	25
161	5	5	5
186	1	1	5
191	25	25	25
211	5	5	5
214	5	5	5
241	5	5	5
259	1	1	5
271	5	5	5

d	$\#(D_0)$	$\#(D_1)$	$\#(\mathcal{T}_p)$
314	1	5	5
326	1	5	5
366	1	5	5
401	5	5	5
426	1	5	5
434	1	1	25
439	5	5	5
466	1	5	5
489	5	5	5
499	5	5	5
501	5	5	5
509	5	5	5
514	1	1	25
519	1	5	5
526	5	5	5
534	1	1	5
541	5	5	5
574	1	5	5
581	5	5	5
589	25	25	25
606	1	1	125
626	1	5	5
629	1	5	5
634	1	1	125
674	1	5	5
699	1	1	5
719	5	5	5
734	5	5	5
761	1	5	5
789	5	5	5
791	1	1	5
869	5	5	5
874	5	5	5
881	5	5	5
966	1	5	5

La conjecture de Greenberg est donc vraie pour les corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec $d \leq 1000$ sauf pour 9 cas ($d=186,259,434,514,534,606,634,699,791$) où l'on ne peut pas conclure. Il faudrait calculer $\#(D_2)$ et si on ne peut toujours pas conclure alors il faut calculer $\#(D_3)$ et ainsi de suite mais cela reviendrait à calculer un corps de degré 50. Ce qui est très lourd en calcul.

Pour tous les cas que l'on a étudié pour le moment, la torsion était de rang 1. On donne des exemples de corps quadratiques pour $p = 5$ où la torsion est de rang supérieur à deux. On donnera des exemples où la conjecture de Greenberg est vérifiée.

d	$\#(D_0)$	$\#(D_1)$	invariants de la torsion $\mathcal{T}_p$
22621	5	25	[5,5]
47751	5	25	[5,5]
105854	5	25	[5,5]
126159	5	25	[5,5]
141994	5	25	[5,5]
178149	5	25	[5,5]
196914	25	75	[25,5]
244641	5	25	[5,5]
304391	5	25	[5,5]
308491	5	25	[5,5]
319499	5	25	[5,5]
336589	5	25	[5,5]
344674	5	25	[5,5]
370699	5	25	[5,5]
371149	5	25	[5,5]
405461	5	25	[5,5]
414934	5	25	[5,5]
440791	5	25	[5,5]
441974	5	25	[5,5]
487591	5	25	[5,5]
511051	5	25	[5,5]

d	$\#(D_0)$	$\#(D_1)$	invariants de la torsion $\mathcal{T}_p$
526874	5	25	[5,5]
544314	5	25	[5,5]
576646	5	25	[5,5]
622931	5	25	[5,5]
624779	5	25	[5,5]
628951	5	25	[5,5]
661639	5	25	[5,5]
689879	5	25	[5,5]
694194	5	25	[5,5]
712601	5	25	[5,5]
715186	5	25	[5,5]
738251	5	25	[5,5]
745499	5	25	[5,5]
766031	5	25	[5,5]
765139	5	25	[5,5]
775254	5	25	[5,5]
823074	5	25	[5,5]
825974	5	25	[5,5]
835149	5	25	[5,5]
849859	5	25	[5,5]
852789	5	25	[5,5]
857939	5	25	[5,5]
886451	5	25	[5,5]
890834	5	25	[5,5]
933626	5	25	[5,5]
993631	5	25	[5,5]

Chapitre 5

Annexes.

5.0.4 Heuristique sur le 9-rang (section 3.3).

$$N = 10^8$$

fréquences invariants	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
(p)	0.63669	0,57564	0,09589
(p, p)	0.02653	0,08426	2,17629
(p^2)	0.21223	0,18861	0,11128
(p, p, p)	0,00011	0,00072	5,39223
(p^2, p)	0,01179	0,03665	2,10830
(p^3)	0,07074	0,06260	0,11516
(p, p, p, p)	10^{-7}	$*10^{-7}$	1,50721
(p^2, p, p)	0,00005	0,00033	5,07999
(p^2, p^2)	0.00033	0,00095	1,89535
(p^3, p)	0.00393	0,01216	2,09444
(p^4)	0.02358	0,02085	0,11516
(p, p, p, p, p)	$3 * 10^{-12}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p)	$3 * 10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p)	0,00002	0,00001	0,26230
(p^3, p, p)	0,00006	0,00011	1,81519
(p^3, p^2)	0,00015	0,00041	5,11856
(p^4, p)	0,00131	0,00406	2,10197
(p^5)	0,00786	0,00692	0,12012

invariants \ fréquences	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
(p, p, p, p, p, p)	$2 * 10^{-17}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p)	10^{-13}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p)	10^{-9}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2)	10^{-8}	0,00000	1,00000
(p^3, p, p, p)	10^{-8}	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p)	$9 * 10^{-7}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^3)	0,00001	0,00001	3,68656
(p^4, p, p)	0,00001	0,00004	0,56219
(p^4, p^2)	0,00005	0,00014	7,44557
(p^5, p)	0,00044	0,00134	0,06160
(p^6)	0,00262	0,00229	0,95751
(p, p, p, p, p, p, p)	$9 * 10^{-24}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p, p)	$3 * 10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p, p)	$2 * 10^{-16}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2, p)	$4 * 10^{-12}$	0,00000	1,00000
(p^3, p, p, p, p)	$4 * 10^{-11}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p, p)	$5 * 10^{-10}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p^2)	$3 * 10^{-9}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^3, p)	$2 * 10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^4, p, p, p)	$3 * 10^{-9}$	0,00000	1,00000
(p^4, p^2, p)	$3 * 10^{-7}$	3,39362	5,15111
(p^4, p^3)	$2 * 10^{-6}$	0,000004	1,48973
(p^5, p, p)	$2 * 10^{-6}$	0,00001	4,20729
(p^5, p^2)	0,00002	0,00003	1,70942
(p^6, p)	0,00015	0,00043	3,05190
(p^7)	0,00087	0,00074	0,11118
Total avec p^2 qui divise un invariant	0,33617	0,33876	0,00770

$$N = 10^9$$

fréquences invariants	$M_{2,0}(\Pi)$	f_{exp}	δ
(p)	0.63669	0,57065	0,10373
(p, p)	0.02653	0,08719	2,28657
(p^2)	0.21223	0,18789	0,11471
(p, p, p)	0,00011	0,00089	6,82378
(p^2, p)	0,01179	0,03827	2,24622
(p^3)	0,07074	0,06253	0,11614
(p, p, p, p)	10^{-7}	$2*10^{-7}$	2,26082
(p^2, p, p)	0,000025	0,00042	6,61831
(p^2, p^2)	0.00033	0,00102	2,12321
(p^3, p)	0.00393	0,01272	2,23575
(p^4)	0.02358	0,02081	0,11732
(p, p, p, p, p)	$3*10^{-12}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p)	$3*10^{-8}$	$2*10^{-7}$	7,12337
(p^2, p^2, p)	0,00002	0,00001	0,19793
(p^3, p, p)	0,00002	0,00014	6,55346
(p^3, p^2)	0,00015	0,00045	2,09997
(p^4, p)	0,00131	0,00422	2,22186
(p^5)	0,00786	0,00693	0,11876

invariants \ fréquences	$M_{2,0}(\Pi_3)$	f_{exp}	δ
(p, p, p, p, p, p)	$2*10^{-17}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p)	10^{-13}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p)	10^{-9}	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2)	10^{-8}	$4*10^{-8}$	5,85410
(p^3, p, p, p)	10^{-8}	$*10^{-7}$	5,09253
(p^3, p^2, p)	$9*10^{-7}$	0,00001	6,30811
(p^3, p^3)	0,00001	0,00001	0,88041
(p^4, p, p)	0,00001	0,00005	6,48114
(p^4, p^2)	0,00005	0,00015	8,29990
(p^5, p)	0,00044	0,00140	0,03332
(p^6)	0,00262	0,00230	0,12213
(p, p, p, p, p, p, p)	$9*10^{-24}$	0,00000	1,00000
(p^2, p, p, p, p, p)	$3*10^{-18}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p, p, p)	$2*10^{-16}$	0,00000	1,00000
(p^2, p^2, p^2, p)	$4*10^{-15}$	0,00000	1,00000
(p^3, p, p, p, p)	$4*10^{-11}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p, p)	$5*10^{-10}$	0,00000	1,00000
(p^3, p^2, p^2)	$3*10^{-9}$	0,00000	6,38133
$(p^3, p^3, p)2$	$*10^{-8}$	0,00000	6,38133
(p^4, p, p, p)	$2*10^{-8}$	0,00000	1,00000
(p^4, p^2, p)	$3*10^{-7}$	$2*10^{-6}$	5,63441
(p^4, p^3)	$2*10^{-6}$	$5*10^{-6}$	2,03894
(p^5, p, p)	$2*10^{-6}$	0,00001	6,17955
(p^5, p^2)	0,00002	0,00005	1,99582
(p^6, p)	0,00015	0,00046	3,19122
(p^7)	0,00087	0,00077	0,012342
Total avec p^2 qui divise un invariant	0,33617	0,34062	0.01323

5.0.5 Tables numériques.

La table suivante classe les corps quadratiques réels $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ pour $d \leq 10^4$ en fonction de $\mathcal{T}_3$.

	d
$\mathcal{T}_3 = 1$	2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 30, 31, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 46, 47, 53, 55, 57, 59, 61, 65, 66, 70, 71, 73, 86, 89, 91, 94, 95, 97, 101, 102, 107, 110, 111, 115, 118, 119, 127, 129, 130, 133, 134, 138, 143, 145, 146, 149, 154, 155, 157, 158, 161, 163, 165, 166, 167, 170, 174, 178, 185, 187, 190, 191, 193, 194, 197, 201, 203, 205, 209, 210, 211, 214, 215, 217, 218, 219, 221, 226, 227, 230, 233, 237, 239, 241, 246, 255, 259, 262, 263, 265, 266, 269, 273, 274, 277, 278, 282, 283, 286, 290, 291, 293, 298, 299, 301, 302, 305, 307, 309, 311, 313, 317, 319, 329, 334, 335, 341, 345, 349, 355, 358, 362, 365, 367, 370, 371, 373, 374, 377, 379, 381, 382, 383, 385, 389, 390, 394, 395, 398, 399, 403, 407, 409, 413, 415, 419, 421, 422, 426, 430, 433, 434, 435, 437, 439, 442, 445, 446, 451, 453, 455, 458, 462, 463, 466, 467, 470, 478, 481, 482, 485, 487, 489, 491, 493, 498, 499, 503, 509, 514, 517, 523, 526, 527, 530, 534, 535, 538, 541, 542, 543, 545, 547, 551, 553, 554, 557, 559, 561, 562, 565, 566, 569, 570, 577, 579, 583, 586, 587, 589, 590, 593, 595, 598, 601, 602, 613, 614, 615, 617, 619, 622, 623, 629, 631, 641, 643, 646, 649, 651, 655, 658, 661, 665, 669, 670, 671, 673, 677, 678, 682, 685, 687, 689, 691, 695, 698, 701, 703, 705, 706, 707, 709, 710, 713, 714, 715, 718, 721, 734, 737, 739, 742, 746, 749, 755, 757, 758, 759, 763, 766, 769, 770, 777, 778, 779, 781, 793, 794, 795, 797, 799, 803, 805, 809, 811, 813, 814, 815, 817, 818, 821, 823, 826, 827, 829, 830, 835, 838, 853, 857, 859, 862, 863, 869, 881, 883, 885, 889, 890, 893, 901, 902, 903, 905, 907, 910, 911, 913, 914, 917, 919, 922, 923, 930, 937, 938, 939, 941, 943, 946, 947, 949, 955, 957, 958, 959, 962, 966, 967, 970, 971, 973, 974, 977, 982, 983, 986, 989, 991, 995, 998, 1001, 1003, 1007, 1011, 1015, 1018, 1019, 1021, 1022, 1030, 1033, 1037, 1038, 1039, 1042, 1045, 1047, 1049, 1054, 1055, 1057, 1061, 1063, 1065, 1066, 1067, 1069, 1070, 1073, 1079, 1081, 1082, 1085, 1087, 1093, 1094, 1097, 1099, 1105, 1106, 1109, 1111, 1115, 1119, 1121, 1123, 1130, 1133, 1138, 1141, 1145, 1146, 1147, 1151, 1154, 1155, 1159, 1163, 1166, 1169, 1173, 1174, 1177, 1178, 1182, 1186, 1187, 1189, 1190, 1193, 1198, 1199, 1201, 1202, 1207, 1209, 1214, 1218, 1219, 1226, 1227, 1231, 1234, 1235, 1243, 1245, 1247, 1253, 1254, 1255, 1259, 1262, 1263, 1265, 1267, 1270, 1271, 1273, 1279, 1281, 1282, 1285, 1286, 1289, 1291, 1301, 1303, 1306, 1309, 1310, 1313, 1315, 1321, 1326, 1327, 1334, 1335, 1337, 1343, 1346, 1349, 1351, 1354, 1355, 1357, 1358, 1361, 1362, 1363, 1366, 1370, 1371, 1378, 1379, 1381, 1382, 1387, 1389, 1391, 1393, 1394, 1398, 1402, 1403, 1405, 1407, 1409, 1411, 1414, 1417, 1418,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	1423, 1426, 1427, 1434, 1435, 1438, 1439, 1441, 1442, 1443, 1447, 1451, 1457, 1459, 1461, 1465, 1466, 1469, 1471, 1474, 1481, 1483, 1487, 1490, 1493, 1502, 1505, 1506, 1510, 1513, 1514, 1515, 1517, 1526, 1531, 1533, 1534, 1535, 1537, 1538, 1542, 1543, 1547, 1549, 1553, 1558, 1559, 1561, 1562, 1565, 1569, 1570, 1571, 1574, 1577, 1582, 1583, 1586, 1589, 1591, 1594, 1597, 1598, 1601, 1605, 1606, 1607, 1610, 1613, 1614, 1615, 1618, 1621, 1622, 1623, 1630, 1631, 1633, 1634, 1637, 1643, 1651, 1657, 1658, 1659, 1661, 1667, 1673, 1677, 1679, 1686, 1687, 1693, 1697, 1702, 1703, 1705, 1706, 1709, 1711, 1713, 1717, 1718, 1721, 1722, 1723, 1729, 1730, 1731, 1733, 1739, 1741, 1742, 1747, 1749, 1751, 1754, 1757, 1759, 1762, 1763, 1766, 1767, 1774, 1777, 1778, 1783, 1785, 1786, 1789, 1790, 1794, 1798, 1799, 1801, 1802, 1803, 1807, 1814, 1817, 1819, 1821, 1822, 1823, 1826, 1829, 1831, 1835, 1837, 1839, 1843, 1846, 1853, 1857, 1861, 1873, 1874, 1877, 1879, 1883, 1885, 1886, 1889, 1891, 1893, 1895, 1898, 1902, 1906, 1909, 1913, 1915, 1918, 1919, 1927, 1930, 1931, 1933, 1938, 1939, 1942, 1943, 1947, 1949, 1955, 1958, 1961, 1963, 1967, 1969, 1970, 1974, 1978, 1979, 1981, 1985, 1990, 1991, 1997, 1999, 2001, 2002, 2003, 2011, 2014, 2017, 2018, 2033, 2038, 2039, 2041, 2047, 2051, 2053, 2054, 2062, 2063, 2065, 2066, 2069, 2071, 2073, 2077, 2081, 2082, 2086, 2087, 2090, 2091, 2093, 2095, 2098, 2102, 2105, 2109, 2111, 2113, 2117, 2119, 2127, 2131, 2134, 2135, 2138, 2141, 2145, 2147, 2159, 2162, 2163, 2165, 2171, 2173, 2174, 2179, 2181, 2182, 2183, 2189, 2191, 2195, 2198, 2199, 2203, 2206, 2217, 2218, 2222, 2226, 2227, 2231, 2234, 2235, 2237, 2239, 2242, 2243, 2245, 2249, 2257, 2258, 2261, 2262, 2269, 2271, 2273, 2279, 2282, 2287, 2289, 2290, 2291, 2293, 2294, 2297, 2302, 2305, 2306, 2307, 2309, 2311, 2315, 2317, 2323, 2327, 2334, 2335, 2338, 2341, 2342, 2343, 2345, 2347, 2351, 2353, 2357, 2359, 2361, 2365, 2370, 2377, 2378, 2379, 2381, 2383, 2386, 2389, 2393, 2395, 2397, 2398, 2399, 2402, 2407, 2414, 2415, 2417, 2422, 2426, 2433, 2434, 2435, 2437, 2443, 2446, 2447, 2449, 2455, 2458, 2461, 2462, 2465, 2467, 2471, 2474, 2477, 2479, 2482, 2483, 2485, 2486, 2487, 2489, 2491, 2494, 2497, 2498, 2501, 2503, 2506, 2509, 2513, 2514, 2531, 2533, 2534, 2537, 2542, 2545, 2546, 2551, 2558, 2559, 2563, 2566, 2567, 2569, 2577, 2578, 2581, 2582, 2585, 2586, 2590, 2591, 2594, 2595, 2599, 2602, 2603, 2605, 2606, 2613, 2615, 2617, 2618, 2621, 2622, 2626, 2631, 2633, 2639, 2641, 2642, 2647, 2651, 2653, 2654, 2665, 2667, 2669, 2671, 2674, 2681, 2683, 2685, 2686, 2687, 2689, 2690, 2693, 2698, 2699, 2702, 2710, 2717, 2722, 2723, 2729, 2730, 2731, 2734, 2741, 2746, 2749, 2757, 2761, 2765, 2773, 2774, 2779,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	2782, 2785, 2795, 2797, 2798, 2802, 2803, 2806, 2810, 2811, 2813, 2815, 2818, 2827, 2829, 2830, 2834, 2837, 2838, 2839, 2843, 2845, 2846, 2849, 2851, 2854, 2858, 2861, 2863, 2865, 2866, 2869, 2870, 2874, 2878, 2879, 2881, 2882, 2887, 2893, 2897, 2899, 2901, 2905, 2906, 2909, 2911, 2923, 2927, 2930, 2933, 2935, 2937, 2938, 2939, 2945, 2946, 2953, 2954, 2957, 2959, 2963, 2965, 2966, 2969, 2973, 2974, 2977, 2978, 2982, 2983, 2990, 2991, 2998, 2999, 3002, 3009, 3013, 3017, 3018, 3019, 3022, 3026, 3027, 3029, 3031, 3034, 3037, 3043, 3045, 3046, 3049, 3055, 3058, 3061, 3063, 3065, 3070, 3073, 3074, 3077, 3079, 3081, 3083, 3085, 3086, 3089, 3091, 3095, 3097, 3098, 3101, 3103, 3106, 3107, 3109, 3110, 3113, 3115, 3117, 3118, 3121, 3122, 3127, 3131, 3134, 3135, 3139, 3143, 3145, 3149, 3151, 3153, 3154, 3161, 3162, 3167, 3169, 3170, 3171, 3178, 3181, 3182, 3189, 3191, 3193, 3197, 3198, 3202, 3203, 3206, 3214, 3215, 3217, 3218, 3223, 3227, 3230, 3233, 3238, 3239, 3243, 3245, 3247, 3251, 3253, 3257, 3262, 3263, 3265, 3266, 3269, 3271, 3278, 3279, 3286, 3289, 3293, 3295, 3298, 3299, 3301, 3302, 3306, 3310, 3313, 3314, 3315, 3317, 3319, 3322, 3329, 3331, 3333, 3334, 3335, 3341, 3342, 3343, 3346, 3347, 3349, 3351, 3358, 3359, 3361, 3365, 3367, 3369, 3370, 3373, 3374, 3377, 3378, 3379, 3382, 3385, 3386, 3387, 3389, 3395, 3398, 3401, 3403, 3406, 3407, 3409, 3413, 3415, 3418, 3421, 3427, 3431, 3433, 3434, 3439, 3443, 3445, 3455, 3457, 3458, 3459, 3463, 3466, 3473, 3477, 3487, 3491, 3494, 3495, 3497, 3499, 3503, 3505, 3506, 3511, 3513, 3515, 3518, 3521, 3523, 3526, 3529, 3530, 3533, 3535, 3538, 3539, 3541, 3542, 3545, 3547, 3553, 3554, 3557, 3559, 3562, 3563, 3565, 3566, 3567, 3578, 3581, 3583, 3585, 3586, 3587, 3589, 3593, 3595, 3598, 3599, 3601, 3603, 3605, 3607, 3611, 3613, 3614, 3617, 3622, 3623, 3629, 3631, 3634, 3635, 3638, 3639, 3643, 3646, 3649, 3653, 3655, 3658, 3659, 3661, 3671, 3679, 3682, 3683, 3686, 3689, 3691, 3694, 3695, 3697, 3707, 3710, 3711, 3715, 3729, 3730, 3731, 3733, 3734, 3738, 3742, 3743, 3746, 3747, 3749, 3754, 3758, 3761, 3763, 3766, 3767, 3770, 3779, 3782, 3783, 3785, 3790, 3793, 3794, 3797, 3802, 3805, 3809, 3810, 3811, 3814, 3815, 3817, 3818, 3819, 3821, 3823, 3827, 3829, 3833, 3835, 3837, 3838, 3839, 3841, 3845, 3851, 3854, 3857, 3862, 3865, 3866, 3874, 3878, 3882, 3883, 3886, 3890, 3893, 3901, 3902, 3905, 3907, 3909, 3910, 3913, 3914, 3917, 3919, 3923, 3926, 3929, 3935, 3938, 3943, 3946, 3947, 3949, 3953, 3954, 3959, 3961, 3974, 3977, 3982, 3985, 3986, 3991, 3994, 3995, 3998, 3999, 4003, 4006, 4009, 4010, 4013, 4015, 4017, 4019, 4022, 4026, 4027, 4030, 4033, 4035, 4039, 4042, 4043,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	4045, 4049, 4051, 4054, 4057, 4058, 4062, 4063, 4066, 4069, 4070, 4071, 4082, 4085, 4090, 4091, 4097, 4102, 4105, 4109, 4111, 4115, 4117, 4118, 4121, 4123, 4127, 4129, 4130, 4133, 4134, 4135, 4138, 4139, 4143, 4147, 4153, 4154, 4157, 4161, 4166, 4170, 4174, 4178, 4179, 4181, 4183, 4186, 4187, 4189, 4190, 4195, 4198, 4201, 4206, 4213, 4223, 4229, 4231, 4233, 4234, 4242, 4243, 4246, 4249, 4251, 4253, 4255, 4258, 4259, 4261, 4262, 4267, 4270, 4271, 4273, 4274, 4277, 4278, 4282, 4287, 4289, 4291, 4298, 4303, 4305, 4309, 4313, 4314, 4318, 4321, 4322, 4323, 4327, 4330, 4331, 4333, 4334, 4337, 4341, 4342, 4343, 4351, 4354, 4357, 4358, 4359, 4363, 4369, 4370, 4373, 4377, 4378, 4379, 4381, 4385, 4386, 4387, 4390, 4393, 4395, 4397, 4403, 4405, 4413, 4414, 4415, 4417, 4421, 4422, 4423, 4426, 4429, 4430, 4431, 4433, 4435, 4438, 4439, 4441, 4442, 4445, 4449, 4454, 4458, 4466, 4467, 4474, 4483, 4485, 4487, 4490, 4494, 4495, 4499, 4501, 4502, 4505, 4510, 4514, 4517, 4521, 4522, 4523, 4530, 4531, 4538, 4539, 4541, 4543, 4546, 4547, 4549, 4559, 4561, 4562, 4565, 4566, 4567, 4570, 4571, 4573, 4574, 4577, 4579, 4582, 4583, 4585, 4586, 4589, 4591, 4593, 4595, 4601, 4602, 4607, 4609, 4610, 4611, 4619, 4621, 4622, 4627, 4629, 4630, 4631, 4633, 4634, 4637, 4638, 4639, 4645, 4658, 4663, 4665, 4666, 4669, 4673, 4678, 4679, 4683, 4685, 4690, 4691, 4694, 4697, 4702, 4703, 4705, 4709, 4710, 4714, 4715, 4717, 4723, 4726, 4730, 4733, 4735, 4738, 4739, 4746, 4747, 4751, 4757, 4759, 4762, 4763, 4769, 4773, 4774, 4777, 4781, 4782, 4786, 4787, 4790, 4791, 4793, 4795, 4798, 4799, 4801, 4807, 4810, 4811, 4813, 4814, 4818, 4819, 4827, 4829, 4834, 4835, 4843, 4847, 4849, 4858, 4859, 4861, 4862, 4871, 4873, 4874, 4877, 4879, 4881, 4882, 4883, 4885, 4890, 4891, 4894, 4895, 4897, 4898, 4899, 4906, 4909, 4917, 4918, 4919, 4921, 4922, 4926, 4930, 4931, 4935, 4937, 4942, 4943, 4946, 4951, 4953, 4955, 4957, 4958, 4962, 4967, 4971, 4978, 4979, 4981, 4987, 4989, 4990, 4991, 4993, 4999, 5002, 5003, 5006, 5007, 5009, 5014, 5015, 5017, 5023, 5027, 5030, 5033, 5034, 5035, 5038, 5045, 5051, 5057, 5065, 5066, 5069, 5071, 5074, 5077, 5078, 5079, 5086, 5087, 5090, 5093, 5097, 5101, 5105, 5106, 5107, 5115, 5117, 5119, 5122, 5126, 5129, 5133, 5135, 5138, 5142, 5146, 5147, 5151, 5153, 5155, 5158, 5159, 5162, 5165, 5167, 5169, 5170, 5171, 5174, 5191, 5195, 5197, 5198, 5201, 5205, 5209, 5213, 5214, 5215, 5219, 5222, 5223, 5227, 5231, 5233, 5241, 5242, 5245, 5246, 5251, 5254, 5257, 5258, 5259, 5267, 5269, 5270, 5273, 5278, 5279, 5282, 5287, 5293, 5294, 5295, 5299, 5305, 5306, 5311, 5313, 5314, 5315, 5317, 5318, 5322, 5323, 5326, 5330, 5335, 5338, 5342, 5345, 5349, 5354, 5357, 5358, 5359, 5362, 5363, 5366, 5367, 5371,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	5374, 5377, 5378, 5385, 5387, 5389, 5393, 5394, 5395, 5398, 5399, 5401, 5402, 5403, 5410, 5413, 5414, 5417, 5423, 5426, 5430, 5435, 5443, 5446, 5447, 5449, 5457, 5459, 5462, 5465, 5466, 5467, 5470, 5473, 5474, 5482, 5483, 5485, 5486, 5489, 5493, 5495, 5498, 5501, 5507, 5509, 5518, 5519, 5531, 5534, 5538, 5539, 5543, 5545, 5546, 5549, 5551, 5554, 5555, 5561, 5563, 5565, 5569, 5570, 5573, 5574, 5581, 5582, 5583, 5585, 5587, 5590, 5591, 5593, 5594, 5597, 5601, 5602, 5603, 5605, 5610, 5614, 5615, 5626, 5627, 5630, 5633, 5638, 5641, 5645, 5651, 5653, 5654, 5655, 5657, 5662, 5663, 5665, 5671, 5673, 5677, 5678, 5686, 5689, 5691, 5693, 5695, 5699, 5701, 5705, 5707, 5709, 5710, 5711, 5713, 5717, 5718, 5723, 5726, 5727, 5729, 5731, 5735, 5737, 5743, 5747, 5753, 5754, 5755, 5758, 5759, 5762, 5763, 5765, 5767, 5770, 5771, 5773, 5774, 5777, 5779, 5783, 5785, 5789, 5790, 5794, 5795, 5797, 5806, 5807, 5809, 5813, 5817, 5818, 5826, 5827, 5830, 5833, 5834, 5835, 5837, 5839, 5842, 5845, 5849, 5851, 5854, 5855, 5857, 5862, 5863, 5866, 5867, 5869, 5871, 5873, 5879, 5881, 5882, 5885, 5890, 5891, 5893, 5894, 5899, 5906, 5907, 5909, 5911, 5914, 5917, 5921, 5923, 5926, 5927, 5935, 5939, 5942, 5943, 5945, 5947, 5953, 5957, 5959, 5961, 5962, 5963, 5965, 5966, 5969, 5974, 5977, 5983, 5986, 5987, 5989, 5990, 5995, 5998, 5999, 6002, 6005, 6006, 6007, 6010, 6013, 6014, 6015, 6019, 6022, 6023, 6033, 6034, 6035, 6037, 6041, 6046, 6049, 6059, 6062, 6065, 6067, 6070, 6071, 6073, 6074, 6077, 6078, 6079, 6083, 6085, 6086, 6087, 6089, 6095, 6097, 6098, 6101, 6103, 6105, 6107, 6109, 6110, 6113, 6115, 6118, 6119, 6121, 6122, 6123, 6127, 6130, 6131, 6134, 6139, 6142, 6143, 6145, 6149, 6154, 6155, 6157, 6158, 6161, 6163, 6170, 6173, 6177, 6178, 6179, 6181, 6182, 6190, 6191, 6194, 6197, 6203, 6205, 6206, 6211, 6214, 6215, 6221, 6222, 6226, 6227, 6229, 6230, 6231, 6233, 6235, 6239, 6245, 6247, 6249, 6251, 6257, 6259, 6262, 6263, 6266, 6267, 6269, 6274, 6278, 6281, 6285, 6287, 6290, 6293, 6298, 6299, 6301, 6303, 6313, 6314, 6317, 6319, 6322, 6329, 6330, 6331, 6337, 6339, 6341, 6343, 6346, 6347, 6349, 6353, 6357, 6361, 6362, 6365, 6367, 6371, 6373, 6377, 6379, 6382, 6383, 6386, 6389, 6391, 6393, 6395, 6397, 6402, 6406, 6409, 6410, 6411, 6415, 6418, 6429, 6433, 6434, 6437, 6438, 6439, 6442, 6443, 6445, 6446, 6447, 6449, 6454, 6455, 6457, 6458, 6463, 6466, 6467, 6469, 6470, 6473, 6474, 6479, 6481, 6485, 6487, 6491, 6493, 6497, 6503, 6509, 6510, 6511, 6518, 6519, 6521, 6523, 6526, 6527, 6533, 6537, 6538, 6539, 6541, 6542, 6545, 6546, 6551, 6553, 6554, 6569, 6574, 6577, 6578, 6581, 6582, 6583, 6586, 6587, 6589, 6590, 6595, 6598, 6599, 6605, 6607, 6609, 6611, 6613, 6614, 6617, 6618, 6619, 6622, 6629, 6634,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	6635, 6638, 6641, 6643, 6645, 6646, 6649, 6653, 6654, 6659, 6661, 6662, 6665, 6671, 6673, 6674, 6677, 6679, 6682, 6683, 6689, 6690, 6695, 6697, 6698, 6699, 6701, 6706, 6709, 6710, 6715, 6717, 6718, 6721, 6726, 6733, 6734, 6735, 6742, 6743, 6745, 6749, 6753, 6755, 6757, 6763, 6767, 6773, 6778, 6779, 6781, 6787, 6789, 6793, 6802, 6803, 6805, 6814, 6815, 6818, 6821, 6823, 6826, 6827, 6829, 6833, 6838, 6839, 6841, 6842, 6843, 6851, 6853, 6857, 6861, 6862, 6865, 6866, 6870, 6874, 6878, 6879, 6881, 6883, 6886, 6893, 6895, 6898, 6902, 6905, 6906, 6910, 6911, 6914, 6917, 6919, 6923, 6926, 6931, 6933, 6935, 6937, 6941, 6942, 6946, 6947, 6953, 6959, 6961, 6967, 6969, 6970, 6971, 6973, 6978, 6982, 6983, 6986, 6987, 6989, 6991, 6994, 6998, 7003, 7005, 7009, 7010, 7013, 7015, 7021, 7022, 7027, 7030, 7033, 7034, 7037, 7039, 7041, 7042, 7043, 7045, 7046, 7049, 7054, 7059, 7063, 7067, 7069, 7070, 7073, 7077, 7079, 7081, 7082, 7085, 7086, 7090, 7093, 7095, 7099, 7102, 7106, 7111, 7113, 7114, 7121, 7122, 7123, 7127, 7129, 7130, 7131, 7135, 7138, 7141, 7145, 7147, 7149, 7151, 7153, 7158, 7159, 7162, 7163, 7165, 7166, 7167, 7171, 7174, 7178, 7181, 7185, 7186, 7194, 7195, 7199, 7202, 7205, 7207, 7211, 7213, 7217, 7219, 7221, 7222, 7223, 7230, 7237, 7238, 7241, 7243, 7255, 7257, 7258, 7261, 7265, 7266, 7271, 7274, 7277, 7282, 7283, 7285, 7286, 7289, 7291, 7293, 7297, 7298, 7302, 7306, 7313, 7318, 7322, 7327, 7330, 7331, 7333, 7334, 7337, 7338, 7339, 7342, 7343, 7345, 7346, 7347, 7351, 7354, 7358, 7361, 7363, 7365, 7366, 7373, 7378, 7379, 7382, 7385, 7390, 7391, 7394, 7397, 7401, 7402, 7405, 7409, 7410, 7419, 7421, 7426, 7427, 7430, 7433, 7435, 7439, 7454, 7457, 7463, 7477, 7482, 7483, 7486, 7489, 7490, 7491, 7493, 7498, 7499, 7501, 7505, 7507, 7510, 7511, 7517, 7518, 7519, 7523, 7526, 7527, 7529, 7531, 7534, 7535, 7538, 7541, 7547, 7549, 7553, 7555, 7558, 7561, 7562, 7563, 7565, 7570, 7571, 7577, 7579, 7585, 7586, 7589, 7594, 7597, 7599, 7606, 7609, 7613, 7615, 7617, 7618, 7622, 7626, 7627, 7631, 7637, 7645, 7646, 7651, 7653, 7654, 7657, 7661, 7662, 7667, 7669, 7670, 7681, 7682, 7685, 7687, 7697, 7706, 7707, 7714, 7715, 7717, 7718, 7723, 7727, 7729, 7730, 7733, 7734, 7735, 7738, 7739, 7741, 7751, 7754, 7759, 7761, 7762, 7763, 7765, 7766, 7771, 7777, 7778, 7781, 7783, 7786, 7787, 7789, 7790, 7793, 7795, 7799, 7801, 7805, 7806, 7807, 7810, 7811, 7814, 7815, 7817, 7819, 7823, 7826, 7833, 7834, 7837, 7838, 7841, 7842, 7843, 7847, 7849, 7851, 7853, 7855, 7859, 7861, 7862, 7867, 7869, 7871, 7874, 7877, 7882, 7885, 7894, 7895, 7898, 7901, 7907, 7909, 7913, 7914, 7915, 7918, 7922, 7923, 7927, 7931, 7934, 7945, 7946, 7949, 7963, 7966, 7967, 7970, 7973, 7977, 7979, 7982, 7990, 7993, 7995,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	8002, 8006, 8009, 8013, 8014, 8021, 8022, 8023, 8031, 8035, 8038, 8039, 8042, 8045, 8047, 8049, 8053, 8054, 8058, 8059, 8062, 8063, 8065, 8074, 8077, 8081, 8083, 8086, 8089, 8117, 8119, 8121, 8122, 8123, 8126, 8129, 8131, 8135, 8138, 8141, 8143, 8146, 8147, 8149, 8153, 8157, 8159, 8161, 8162, 8165, 8166, 8167, 8174, 8177, 8179, 8182, 8185, 8186, 8189, 8191, 8193, 8195, 8197, 8198, 8201, 8202, 8207, 8210, 8211, 8215, 8218, 8219, 8221, 8222, 8229, 8230, 8231, 8233, 8234, 8238, 8242, 8243, 8246, 8249, 8254, 8257, 8258, 8261, 8263, 8265, 8270, 8273, 8278, 8283, 8287, 8290, 8291, 8293, 8294, 8302, 8309, 8311, 8314, 8315, 8317, 8318, 8319, 8321, 8323, 8326, 8327, 8329, 8337, 8338, 8341, 8342, 8346, 8353, 8355, 8357, 8362, 8366, 8369, 8371, 8377, 8383, 8386, 8387, 8390, 8393, 8395, 8398, 8401, 8407, 8414, 8419, 8431, 8435, 8437, 8441, 8445, 8446, 8454, 8455, 8458, 8459, 8461, 8462, 8463, 8467, 8471, 8473, 8474, 8479, 8481, 8482, 8483, 8485, 8490, 8491, 8494, 8495, 8497, 8498, 8499, 8501, 8506, 8507, 8509, 8513, 8515, 8517, 8521, 8527, 8534, 8535, 8537, 8542, 8549, 8551, 8553, 8554, 8557, 8562, 8567, 8570, 8571, 8573, 8578, 8579, 8582, 8587, 8589, 8590, 8593, 8594, 8598, 8602, 8605, 8606, 8607, 8611, 8614, 8617, 8618, 8621, 8627, 8629, 8630, 8634, 8635, 8638, 8639, 8642, 8643, 8645, 8647, 8651, 8653, 8657, 8661, 8662, 8666, 8669, 8671, 8674, 8677, 8678, 8679, 8681, 8683, 8686, 8687, 8693, 8695, 8697, 8698, 8701, 8705, 8707, 8710, 8714, 8717, 8719, 8723, 8726, 8734, 8741, 8746, 8747, 8749, 8751, 8753, 8767, 8773, 8774, 8777, 8778, 8779, 8783, 8787, 8791, 8794, 8795, 8797, 8798, 8801, 8805, 8810, 8818, 8819, 8822, 8823, 8827, 8830, 8831, 8834, 8839, 8841, 8842, 8843, 8845, 8846, 8849, 8851, 8857, 8858, 8861, 8866, 8867, 8873, 8877, 8878, 8879, 8886, 8887, 8891, 8895, 8897, 8902, 8903, 8906, 8911, 8913, 8914, 8915, 8917, 8921, 8923, 8926, 8927, 8929, 8935, 8938, 8939, 8941, 8942, 8945, 8947, 8949, 8953, 8962, 8963, 8966, 8971, 8977, 8981, 8983, 8985, 8986, 8987, 8990, 9001, 9003, 9005, 9010, 9011, 9013, 9014, 9021, 9023, 9026, 9030, 9031, 9035, 9037, 9038, 9039, 9041, 9043, 9053, 9055, 9057, 9059, 9061, 9066, 9067, 9070, 9074, 9077, 9079, 9083, 9085, 9091, 9093, 9102, 9106, 9107, 9109, 9113, 9119, 9121, 9122, 9127, 9131, 9134, 9138, 9139, 9142, 9143, 9147, 9157, 9161, 9166, 9173, 9174, 9178, 9179, 9182, 9185, 9187, 9190, 9193, 9201, 9203, 9205, 9210, 9214, 9221, 9227, 9229, 9233, 9235, 9237, 9239, 9241, 9242, 9246, 9247, 9253, 9254, 9255, 9257, 9259, 9262, 9265, 9269, 9271, 9273, 9283, 9289, 9291, 9299, 9302, 9307, 9309, 9313, 9318, 9329, 9331, 9334, 9335, 9337, 9338, 9341, 9343, 9346, 9347, 9353, 9354,

	d
$\mathcal{T}_3=1$	9358, 9361, 9362, 9363, 9365, 9367, 9371, 9373, 9374, 9377, 9383, 9385, 9390, 9391, 9395, 9398, 9399, 9401, 9403, 9406, 9407, 9415, 9417, 9418, 9421, 9422, 9434, 9435, 9439, 9442, 9446, 9453, 9461, 9462, 9466, 9469, 9470, 9473, 9478, 9481, 9482, 9485, 9487, 9490, 9491, 9493, 9497, 9498, 9502, 9503, 9505, 9509, 9511, 9515, 9518, 9529, 9533, 9534, 9535, 9539, 9541, 9542, 9547, 9553, 9554, 9557, 9561, 9566, 9569, 9571, 9574, 9577, 9579, 9581, 9587, 9593, 9595, 9597, 9598, 9599, 9601, 9605, 9607, 9613, 9614, 9617, 9622, 9623, 9626, 9629, 9631, 9637, 9638, 9641, 9642, 9643, 9646, 9647, 9651, 9655, 9658, 9661, 9662, 9665, 9667, 9670, 9671, 9673, 9674, 9677, 9678, 9682, 9683, 9685, 9686, 9687, 9694, 9695, 9697, 9698, 9701, 9703, 9706, 9707, 9709, 9713, 9715, 9719, 9723, 9730, 9731, 9733, 9737, 9739, 9741, 9742, 9743, 9746, 9755, 9758, 9759, 9767, 9770, 9773, 9781, 9782, 9786, 9787, 9791, 9793, 9806, 9809, 9818, 9821, 9829, 9831, 9835, 9838, 9839, 9841, 9842, 9847, 9851, 9853, 9857, 9858, 9859, 9862, 9863, 9866, 9877, 9878, 9881, 9883, 9885, 9887, 9889, 9894, 9899, 9901, 9903, 9911, 9917, 9919, 9923, 9931, 9934, 9935, 9938, 9943, 9946, 9953, 9955, 9957, 9959, 9961, 9962, 9965, 9966, 9967, 9970, 9973, 9974, 9977, 9979, 9983, 9986, 9989, 9991, 9994, 9997
$\mathcal{T}_3=[3]$	6, 15, 33, 43, 51, 58, 62, 69, 77, 78, 82, 83, 85, 87, 93, 103, 106, 109, 113, 114, 131, 139, 142, 151, 159, 173, 177, 179, 181, 186, 199, 202, 213, 223, 229, 231, 235, 249, 253, 254, 267, 281, 285, 287, 295, 310, 318, 322, 323, 327, 330, 331, 337, 346, 347, 357, 366, 386, , 391, 393, 397, 401, 402, 406, 411, 418, 427, 429, 438, 443, 449, 454, 457, 461, 465, 469, 473, 483, 497, 501, 502, 505, 510, 515, 518, 533, 537, 546, 555, 563, 571, 573, 574, 581, 582, 591, 597, 606, 607, 609, , 618, 626, 627, 633, 635, 642, 645, 653, 659, 662, 663, 667, 679, 694, , 697, 699, 743, 745, 751, 753, 754, 761, 762, 771, 773, 785, 786, 787, 789, 790, 791, 798, 802, 807, 822, 834, 839, 843, 849, 851, 858, 865, 866, 870, 871, 879, 886, 887, 894, 895, 897, 898, 899, 921, 926, 929, 934, 935, 942, 951, 953, 965, 978, 979, 985, 987, 994, 997, 1002, 1005, 1010, 1023, 1034, 1041, 1043, 1059, 1074, 1077, 1090, 1091, 1101, 1102, 1103, 1110, 1113, 1114, 1118, 1126, 1137, 1149, 1153, 1157, 1158, 1162, 1171, 1181, 1185, 1191, 1194, 1195, 1211, 1217, 1221, 1222, 1229, 1230, 1237, 1241, 1249, 1261, 1266, 1277, 1283, 1290, 1293, 1294, 1295, 1297, 1298, 1299, 1302, 1307, 1317, 1318, 1329, 1333, 1338, 1342, 1345, 1347, 1353, 1365, 1373, 1385, 1397, 1399, 1406, 1410, 1415, 1419, 1437, 1454, 1455, 1462, 1463, 1473, 1482, 1486, 1489, 1491, 1495, 1497, 1498, 1499, 1501, 1522, 1523, 1529, 1545, 1555, 1563, 1567, 1578, 1579, 1581, 1585, 1590, 1595, 1603,

	d
$\mathcal{T}_3=[3]$	1609, 1619, 1626, 1627, 1635, 1639, 1642, 1645, 1646, 1649, 1653, 1662, 1663, 1669, 1670, 1671, 1685, 1689, 1695, 1698, 1699, 1707, 1726, 1727, 1735, 1738, 1743, 1745, 1753, 1758, 1765, 1769, 1770, 1771, 1779, 1787, 1793, 1795, 1810, 1834, 1838, 1842, 1847, 1858, 1869, 1870, 1878, 1897, 1903, 1907, 1921, 1929, 1934, 1937, 1941, 1945, 1954, 1957, 1965, 1973, 1982, 1983, 1986, 1987, 1993, 1994, 1995, 2005, 2010, 2013, 2015, 2019, 2022, 2026, 2027, 2029, 2030, 2031, 2035, 2037, 2042, 2045, 2046, 2067, 2074, 2078, 2083, 2085, 2089, 2101, 2103, 2114, 2118, 2121, 2122, 2123, 2126, 2129, 2130, 2143, 2146, 2154, 2155, 2157, 2158, 2167, 2170, 2177, 2185, 2190, 2193, 2194, 2202, 2207, 2210, 2211, 2213, 2215, 2219, 2238, 2251, 2253, 2255, 2265, 2270, 2274, 2281, 2283, 2285, 2298, 2301, 2314, 2318, 2321, 2326, 2329, 2330, 2333, 2337, 2346, 2354, 2363, 2369, 2371, 2373, 2382, 2387, 2390, 2391, 2409, 2411, 2413, 2419, 2427, 2429, 2431, 2438, 2441, 2442, 2451, 2453, 2454, 2459, 2463, 2469, 2505, 2510, 2515, 2517, 2522, 2526, 2530, 2539, 2543, 2549, 2553, 2555, 2557, 2561, 2562, 2570, 2571, 2573, 2579, 2598, 2607, 2609, 2623, 2627, 2630, 2634, 2635, 2638, 2643, 2657, 2661, 2663, 2666, 2670, 2677, 2679, 2694, 2703, 2705, 2706, 2707, 2713, 2715, 2719, 2721, 2733, 2735, 2737, 2739, 2742, 2751, 2755, 2758, 2766, 2767, 2769, 2770, 2789, 2791, 2814, 2819, 2821, 2823, 2831, 2841, 2847, 2855, 2857, 2859, 2867, 2877, 2886, 2895, 2902, 2903, 2921, 2926, 2929, 2931, 2941, 2942, 2949, 2955, 2958, 2962, 2967, 2971, 2981, 2987, 2993, 2995, 3001, 3003, 3005, 3010, 3011, 3014, 3030, 3035, 3039, 3041, 3047, 3053, 3054, 3057, 3062, 3067, 3071, 3093, 3094, 3099, 3111, 3129, 3130, 3142, 3155, 3158, 3163, 3165, 3166, 3173, 3183, 3190, 3199, 3201, 3207, 3209, 3210, 3219, 3221, 3226, 3229, 3235, 3241, 3242, 3246, 3255, 3261, 3270, 3273, 3274, 3277, 3281, 3287, 3290, 3297, 3305, 3307, 3309, 3318, 3323, 3326, 3337, 3338, 3353, 3354, 3355, 3363, 3371, 3383, 3394, 3397, 3399, 3405, 3417, 3423, 3426, 3435, 3437, 3441, 3442, 3449, 3453, 3461, 3462, 3467, 3469, 3470, 3478, 3482, 3486, 3490, 3493, 3498, 3502, 3507, 3514, 3517, 3522, 3534, 3543, 3558, 3561, 3569, 3570, 3571, 3574, 3590, 3594, 3597, 3602, 3615, 3633, 3637, 3641, 3642, 3647, 3651, 3657, 3662, 3670, 3674, 3687, 3693, 3701, 3702, 3705, 3706, 3709, 3713, 3722, 3723, 3727, 3737, 3745, 3755, 3759, 3777, 3781, 3787, 3795, 3799, 3801, 3803, 3806, 3813, 3826, 3831, 3842, 3846, 3847, 3855, 3858, 3859, 3863, 3869, 3873, 3877, 3881, 3885, 3889, 3891, 3894,

	d
$\mathcal{T}_3=[3]$	3898, 3899, 3903, 3911, 3921, 3922, 3927, 3930, 3931, 3937, 3939, 3945, 3963, 3965, 3966, 3967, 3970, 3983, 3990, 3997, 4001, 4002, 4029, 4034, 4037, 4038, 4047, 4053, 4055, 4061, 4073, 4074, 4078, 4079, 4083, 4087, 4089, 4098, 4099, 4103, 4106, 4119, 4141, 4145, 4146, 4155, 4163, 4169, 4171, 4177, 4182, 4191, 4193, 4202, 4207, 4209, 4210, 4215, 4217, 4219, 4222, 4237, 4238, 4245, 4247, 4254, 4265, 4286, 4290, 4306, 4310, 4315, 4317, 4319, 4326, 4339, 4345, 4349, 4355, 4366, 4367, 4371, 4382, 4389, 4398, 4399, 4407, 4447, 4462, 4463, 4465, 4469, 4470, 4471, 4478, 4479, 4481, 4486, 4497, 4498, 4503, 4506, 4507, 4511, 4515, 4519, 4529, 4533, 4542, 4551, 4553, 4558, 4569, 4578, 4597, 4603, 4605, 4613, 4614, 4646, 4647, 4649, 4654, 4659, 4670, 4674, 4677, 4681, 4682, 4686, 4687, 4695, 4699, 4701, 4706, 4711, 4713, 4721, 4742, 4745, 4754, 4755, 4765, 4766, 4767, 4771, 4783, 4785, 4789, 4803, 4809, 4817, 4821, 4830, 4831, 4837, 4838, 4839, 4841, 4845, 4846, 4853, 4854, 4863, 4865, 4866, 4867, 4870, 4886, 4889, 4893, 4903, 4907, 4911, 4915, 4929, 4933, 4934, 4938, 4945, 4947, 4965, 4970, 4982, 4985, 4994, 4997, 5001, 5005, 5011, 5018, 5019, 5026, 5029, 5037, 5039, 5042, 5053, 5055, 5059, 5061, 5063, 5081, 5083, 5089, 5091, 5099, 5102, 5113, 5118, 5123, 5127, 5131, 5134, 5137, 5141, 5143, 5149, 5154, 5161, 5163, 5173, 5177, 5181, 5182, 5183, 5185, 5186, 5187, 5189, 5190, 5199, 5206, 5207, 5210, 5217, 5218, 5221, 5230, 5234, 5235, 5249, 5255, 5261, 5262, 5263, 5271, 5277, 5289, 5297, 5298, 5307, 5309, 5331, 5333, 5334, 5339, 5343, 5347, 5351, 5353, 5361, 5365, 5370, 5379, 5381, 5383, 5386, 5397, 5406, 5407, 5419, 5421, 5422, 5431, 5437, 5438, 5441, 5442, 5451, 5453, 5455, 5458, 5469, 5471, 5478, 5487, 5494, 5497, 5502, 5503, 5505, 5506, 5510, 5522, 5523, 5527, 5529, 5530, 5541, 5557, 5558, 5559, 5567, 5578, 5579, 5599, 5609, 5617, 5619, 5621, 5622, 5629, 5637, 5642, 5646, 5649, 5666, 5669, 5674, 5681, 5683, 5694, 5698, 5702, 5703, 5719, 5721, 5730, 5734, 5738, 5739, 5745, 5749, 5761, 5781, 5791, 5798, 5799, 5801, 5802, 5803, 5810, 5815, 5821, 5838, 5843, 5861, 5865, 5870, 5874, 5883, 5898, 5902, 5910, 5918, 5930, 5933, 5934, 5937, 5938, 5941, 5946, 5955, 5970, 5981, 5997, 6001, 6009, 6011, 6017, 6018, 6029, 6031, 6038, 6042, 6047, 6053, 6055, 6058, 6061, 6063, 6081, 6082, 6090, 6091, 6094, 6114, 6117, 6133, 6135, 6151, 6159, 6166, 6167, 6169, 6186, 6187, 6193, 6195, 6198, 6202, 6207, 6217, 6218, 6234, 6238, 6242, 6258, 6261, 6265, 6270, 6271, 6277, 6279, 6286, 6289, 6294,

	d
$\mathcal{T}_3=[3]$	6295, 6297, 6306, 6307, 6310, 6311, 6315, 6326, 6334, 6342, 6351, 6355, 6359, 6366, 6369, 6374, 6385, 6401, 6403, 6405, 6427, 6430, 6441, 6451, 6459, 6461, 6465, 6477, 6478, 6482, 6483, 6490, 6494, 6499, 6501, 6502, 6514, 6522, 6530, 6547, 6571, 6585, 6593, 6601, 6621, 6623, 6626, 6630, 6663, 6666, 6667, 6670, 6685, 6686, 6691, 6702, 6703, 6707, 6711, 6719, 6729, 6730, 6731, 6737, 6747, 6758, 6761, 6765, 6766, 6770, 6771, 6774, 6782, 6783, 6785, 6797, 6798, 6799, 6801, 6806, 6807, 6835, 6837, 6846, 6854, 6855, 6863, 6869, 6871, 6882, 6887, 6890, 6891, 6899, 6901, 6907, 6913, 6915, 6918, 6934, 6938, 6945, 6949, 6954, 6965, 6977, 6979, 6981, 6985, 6995, 6997, 6999, 7014, 7017, 7019, 7023, 7026, 7035, 7051, 7055, 7057, 7058, 7061, 7062, 7066, 7071, 7087, 7089, 7091, 7094, 7103, 7109, 7115, 7117, 7118, 7126, 7133, 7134, 7142, 7143, 7157, 7161, 7169, 7170, 7183, 7187, 7189, 7193, 7198, 7201, 7210, 7229, 7231, 7233, 7234, 7235, 7239, 7247, 7251, 7259, 7262, 7270, 7273, 7278, 7294, 7303, 7307, 7309, 7314, 7315, 7319, 7321, 7323, 7329, 7349, 7355, 7369, 7370, 7374, 7377, 7383, 7386, 7387, 7393, 7395, 7403, 7413, 7418, 7422, 7423, 7431, 7437, 7445, 7451, 7453, 7455, 7466, 7469, 7471, 7473, 7474, 7485, 7487, 7495, 7503, 7509, 7513, 7521, 7522, 7530, 7537, 7539, 7543, 7545, 7554, 7557, 7559, 7567, 7582, 7590, 7591, 7593, 7598, 7601, 7602, 7603, 7607, 7610, 7611, 7619, 7621, 7629, 7633, 7634, 7639, 7643, 7647, 7649, 7658, 7663, 7666, 7671, 7673, 7678, 7689, 7690, 7691, 7694, 7698, 7701, 7702, 7703, 7705, 7709, 7710, 7721, 7737, 7743, 7746, 7747, 7755, 7757, 7769, 7779, 7797, 7802, 7818, 7827, 7829, 7831, 7835, 7845, 7846, 7863, 7870, 7878, 7879, 7883, 7886, 7887, 7890, 7897, 7899, 7905, 7906, 7910, 7917, 7919, 7930, 7939, 7953, 7957, 7958, 7961, 7962, 7978, 7981, 7989, 7994, 7998, 7999, 8003, 8005, 8011, 8017, 8018, 8026, 8027, 8029, 8030, 8034, 8041, 8043, 8051, 8057, 8066, 8067, 8070, 8071, 8078, 8090, 8094, 8095, 8097, 8099, 8101, 8102, 8103, 8105, 8106, 8110, 8133, 8137, 8142, 8151, 8155, 8158, 8169, 8171, 8173, 8178, 8194, 8203, 8206, 8209, 8213, 8223, 8227, 8237, 8245, 8251, 8255, 8266, 8267, 8274, 8282, 8285, 8295, 8297, 8299, 8301, 8305, 8306, 8322, 8331, 8333, 8345, 8354, 8358, 8359, 8363, 8365, 8373, 8382, 8385, 8394, 8402, 8409, 8411, 8417, 8418, 8422, 8426, 8429, 8430, 8434, 8439, 8447, 8449, 8453, 8489, 8493, 8502, 8503, 8510, 8511,

	d
$\mathcal{T}_3=[3]$	8518, 8519, 8522, 8529, 8530, 8533, 8539, 8545, 8546, 8558, 8565, 8566, 8569, 8583, 8597, 8599, 8601, 8603, 8615, 8626, 8633, 8641, 8654, 8663, 8682, 8689, 8690, 8691, 8706, 8709, 8711, 8715, 8718, 8729, 8731, 8733, 8738, 8742, 8743, 8755, 8758, 8759, 8762, 8765, 8769, 8770, 8781, 8782, 8786, 8789, 8799, 8803, 8806, 8807, 8814, 8815, 8817, 8826, 8837, 8853, 8854, 8855, 8871, 8881, 8885, 8889, 8890, 8893, 8894, 8898, 8905, 8907, 8933, 8934, 8943, 8961, 8970, 8979, 8989, 8995, 8998, 8999, 9006, 9015, 9017, 9019, 9029, 9033, 9034, 9042, 9046, 9047, 9049, 9051, 9058, 9069, 9073, 9078, 9082, 9086, 9089, 9094, 9095, 9097, 9098, 9101, 9103, 9105, 9110, 9118, 9123, 9129, 9130, 9137, 9141, 9145, 9149, 9151, 9154, 9155, 9158, 9159, 9167, 9169, 9170, 9177, 9183, 9191, 9197, 9199, 9202, 9206, 9211, 9215, 9218, 9219, 9222, 9223, 9226, 9230, 9231, 9238, 9249, 9263, 9267, 9277, 9278, 9282, 9285, 9287, 9293, 9301, 9305, 9311, 9314, 9319, 9321, 9322, 9330, 9339, 9345, 9349, 9355, 9366, 9370, 9379, 9381, 9382, 9413, 9419, 9426, 9427, 9430, 9431, 9445, 9449, 9454, 9458, 9467, 9471, 9474, 9479, 9489, 9494, 9499, 9501, 9507, 9510, 9514, 9517, 9519, 9521, 9523, 9526, 9530, 9538, 9543, 9545, 9546, 9551, 9562, 9563, 9565, 9570, 9573, 9586, 9590, 9602, 9609, 9611, 9615, 9635, 9645, 9663, 9669, 9681, 9689, 9690, 9705, 9710, 9714, 9721, 9722, 9726, 9727, 9735, 9753, 9757, 9762, 9763, 9766, 9769, 9771, 9778, 9779, 9785, 9789, 9794, 9797, 9798, 9803, 9807, 9815, 9817, 9822, 9823, 9827, 9830, 9833, 9834, 9845, 9861, 9867, 9869, 9871, 9874, 9886, 9890, 9893, 9902, 9905, 9907, 9910, 9913, 9914, 9915, 9921, 9930, 9933, 9937, 9939, 9941, 9942, 9949, 9969, 9978, 9985, 9987, 9993, 9995

	d
$\mathcal{T}_3=[3,3]$	717, 1383, 1714, 1887, 1901, 2229, 2230, 2263, 2445, 2787, 2913, 3667, 3678, 3714, 3786, 4094, 4151, 4299, 4722, 4910, 4983, 5667, 5811, 5901, 5982, 6162, 6185, 6243, 6414, 6515, 6657, 6873, 6963, 6990, 7269, 7310, 7311, 7655, 7726, 8079, 8241, 8457, 9062, 9258, 9357, 9447, 9618, 9790, 9897, 9926
$\mathcal{T}_3=[9]$	29, 42, 67, 74, 79, 137, 141, 182, 183, 195, 222, 238, 251, 258, 271, 303, 314, 321, 326, 353, 359, 417, 447, 471, 479, 494, 506, 521, 611, 638, 647, 654, 674, 690, 723, 727, 731, 741, 767, 782, 806, 831, 842, 861, 874, 877, 878, 906, 933, 969, 993, 1006, 1009, 1013, 1027, 1031, 1046, 1051, 1086, 1117, 1122, 1129, 1135, 1139, 1165, 1167, 1223, 1238, 1239, 1246, 1258, 1311, 1322, 1367, 1374, 1401, 1429, 1430, 1433, 1446, 1477, 1478, 1479, 1507, 1509, 1527, 1541, 1554, 1654, 1655, 1678, 1691, 1781, 1806, 1811, 1830, 1833, 1855, 1894, 1910, 1914, 1946, 1951, 1959, 1977, 2006, 2021, 2049, 2055, 2059, 2094, 2137, 2139, 2161, 2186, 2201, 2221, 2246, 2247, 2266, 2267, 2319, 2355, 2374, 2405, 2406, 2410, 2418, 2470, 2473, 2478, 2481, 2490, 2518, 2521, 2554, 2587, 2593, 2611, 2629, 2649, 2658, 2678, 2697, 2714, 2726, 2743, 2753, 2759, 2771, 2777, 2778, 2794, 2801, 2805, 2807, 2822, 2833, 2885, 2894, 2910, 2915, 2919, 2947, 2951, 2985, 2986, 2994, 3007, 3059, 3066, 3082, 3090, 3102, 3119, 3126, 3138, 3147, 3157, 3187, 3194, 3205, 3237, 3254, 3282, 3311, 3327, 3345, 3414, 3419, 3422, 3446, 3454, 3471, 3527, 3531, 3551, 3579, 3621, 3665, 3669, 3677, 3685, 3719, 3739, 3741, 3765, 3769, 3774, 3778, 3791, 3830, 3849, 3853, 3895, 3941, 3955, 3957, 3958, 3962, 3973, 3979, 3981, 4007, 4011, 4021, 4031, 4065, 4081, 4093, 4101, 4110, 4137, 4142, 4162, 4197, 4211, 4226, 4269, 4281, 4283, 4285, 4295, 4297, 4301, 4346, 4353, 4362, 4391, 4402, 4406, 4409, 4411, 4434, 4443, 4451, 4453, 4493, 4513, 4526, 4534, 4535, 4537, 4555, 4587, 4594, 4615, 4641, 4642, 4643, 4651, 4657, 4667, 4718, 4727, 4731, 4737, 4741, 4749, 4758, 4823, 4826, 4855, 4939, 4954, 4963, 4966, 4973, 5010, 5062, 5095, 5098, 5109, 5110, 5114, 5178, 5179, 5237, 5266, 5285, 5286, 5291, 5303, 5327, 5369, 5405, 5411, 5434, 5461, 5477, 5513, 5521, 5533, 5542, 5595, 5611, 5613, 5623, 5631, 5647, 5658, 5659, 5682, 5722, 5741, 5786, 5822, 5846, 5847, 5853, 5858, 5878, 5889, 5897, 5905, 5951, 5954, 5971, 5973, 5991, 6043, 6045, 6054, 6126, 6141, 6199, 6209, 6213, 6283, 6305, 6333, 6335, 6338, 6387, 6394, 6421, 6486, 6495, 6505, 6506, 6513, 6531, 6594, 6602, 6610, 6631, 6637, 6639, 6693, 6739, 6746, 6751, 6754, 6769, 6790, 6791, 6794, 6809, 6810, 6817, 6819, 6830, 6834, 6847, 6922, 6927, 6943, 7031, 7053, 7097, 7107, 7190, 7206, 7215, 7226, 7246, 7253, 7279, 7295, 7305, 7341, 7357, 7359, 7411, 7415, 7429, 7449, 7458, 7478, 7494, 7566, 7573, 7574, 7583, 7630, 7635, 7638, 7642, 7665, 7699, 7711, 7745, 7753, 7798, 7809, 7813, 7822, 7858, 7873, 7891, 7926, 7933, 7937, 7941, 7951,

	d
$\mathcal{T}_3=[9]$	7955, 7959, 7969, 7971, 7985, 7991, 7997, 8007, 8033, 8069, 8093, 8098, 8111, 8113, 8114, 8115, 8130, 8170, 8187, 8205, 8239, 8259, 8269, 8277, 8279, 8286, 8367, 8389, 8399, 8403, 8421, 8423, 8438, 8443, 8486, 8531, 8538, 8547, 8561, 8563, 8574, 8581, 8585, 8609, 8610, 8637, 8646, 8655, 8659, 8699, 8737, 8763, 8785, 8813, 8835, 8859, 8863, 8870, 8882, 8899, 8909, 8931, 8951, 8958, 8965, 9002, 9007, 9022, 9071, 9087, 9111, 9115, 9133, 9186, 9194, 9209, 9213, 9217, 9266, 9281, 9286, 9290, 9294, 9298, 9303, 9323, 9326, 9327, 9389, 9393, 9394, 9397, 9402, 9410, 9411, 9429, 9433, 9437, 9443, 9451, 9455, 9463, 9465, 9582, 9589, 9591, 9606, 9619, 9649, 9654, 9691, 9699, 9717, 9718, 9734, 9749, 9795, 9805, 9813, 9865, 9870, 9879, 9895, 9906, 9929, 9958
$\mathcal{T}_3=[3,9]$	2659, 2917, 2922, 3023, 3291, 3867, 4227, 4279, 4778, 4974, 5073, 5253, 5919, 6378, 6567, 6738, 7006, 7773, 7954, 8061, 8374, 8713, 9578, 9998
$\mathcal{T}_3 = [27]$	105, 247, 257, 339, 354, 410, 431, 511, 519, 599, 610, 634, 681, 683, 730, 733, 854, 1131, 1142, 1203, 1257, 1319, 1330, 1339, 1390, 1453, 1511, 1518, 1546, 1641, 1761, 1841, 1851, 1865, 1866, 1871, 1882, 1905, 1966, 2099, 2110, 2149, 2233, 2278, 2310, 2339, 2423, 2495, 2519, 2589, 2614, 2711, 2747, 2914, 2918, 3021, 3137, 3390, 3410, 3451, 3485, 3606, 3619, 3666, 3673, 3934, 3989, 4126, 4159, 4173, 4199, 4294, 4427, 4461, 4618, 4623, 4661, 4822, 4857, 4902, 4927, 4969, 5111, 5302, 5321, 5429, 5433, 5479, 5511, 5639, 5685, 5690, 5714, 5903, 5979, 6026, 6051, 6099, 6146, 6153, 6302, 6323, 6398, 6407, 6423, 6431, 6535, 6555, 6562, 6563, 6565, 6573, 6603, 6658, 6681, 6722, 6951, 6955, 7078, 7177, 7214, 7367, 7414, 7417, 7441, 7446, 7459, 7674, 7679, 7719, 7770, 7782, 7854, 7881, 7903, 8139, 8247, 8335, 8339, 8347, 8378, 8413, 8465, 8555, 8623, 8702, 8727, 8754, 8790, 8809, 8821, 8922, 8930, 8969, 8974, 8994, 8997, 9165, 9181, 9483, 9527, 9627, 9659, 9745, 9754, 9777, 9799, 9811, 9814, 9843, 9854, 9951
$\mathcal{T}_3 = [81]$	122, 123, 206, 719, 915, 3391, 6189, 6549, 6558, 7481, 9195, 9634
$\mathcal{T}_3 = [3, 81]$	5793, 6559, 7179.
$\mathcal{T}_3 = [243]$	1095, 1867, 1923, 5515, 7242, 7249, 7462, 8665, 8735, 9676.
$\mathcal{T}_3 = [729]$	1213, 5226,
$\mathcal{T}_3 = [2187]$	474

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 41, 43, 46, 47, 55, 57, 58, 59, 61, 65, 66, 67, 71, 74, 77, 78, 79, 83, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95, 97, 101, 102, 103, 105, 106, 110, 111, 113, 118, 119, 122, 123, 129, 131, 133, 137, 138, 141, 142, 145, 146, 149, 151, 154, 157, 158, 159, 163, 165, 166, 167, 170, 173, 174, 177, 178, 179, 181, 182, 187, 190, 193, 194, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 206, 209, 210, 213, 215, 218, 219, 221, 222, 223, 226, 227, 229, 230, 231, 233, 235, 237, 239, 246, 247, 249, 251, 253, 254, 255, 258, 262, 263, 265, 266, 267, 269, 273, 274, 277, 281, 282, 283, 285, 286, 290, 291, 293, 299, 301, 302, 303, 305, 307, 309, 310, 311, 313, 317, 318, 319, 321, 322, 323, 327, 329, 330, 331, 334, 335, 337, 339, 341, 345, 346, 347, 349, 353, 354, 355, 357, 358, 359, 362, 365, 367, 370, 371, 373, 374, 377, 379, 381, 383, 385, 386, 389, 390, 391, 393, 394, 395, 397, 398, 399, 402, 403, 406, 409, 410, 411, 413, 415, 417, 418, 419, 421, 429, 431, 435, 437, 438, 442, 443, 445, 446, 447, 449, 451, 454, 455, 458, 461, 462, 463, 465, 469, 470, 471, 474, 478, 479, 481, 482, 483, 485, 487, 491, 493, 494, 498, 503, 505, 506, 510, 511, 515, 517, 518, 521, 527, 530, 533, 535, 538, 542, 545, 546, 547, 551, 553, 554, 555, 557, 559, 561, 562, 563, 565, 566, 569, 570, 571, 573, 577, 579, 582, 583, 586, 590, 591, 593, 595, 598, 599, 601, 607, 609, 610, 611, 613, 614, 618, 619, 631, 633, 638, 641, 642, 643, 646, 647, 649, 651, 653, 654, 655, 658, 659, 661, 663, 665, 667, 669, 670, 671, 677, 678, 679, 681, 682, 683, 685, 689, 690, 691, 694, 695, 697, 698, 701, 703, 705, 706, 707, 709, 710, 713, 714, 715, 717, 718, 721, 723, 730, 731, 733, 737, 739, 741, 742, 743, 746, 749, 751, 754, 755, 757, 758, 759, 762, 763, 766, 769, 770, 771, 773, 777, 778, 779, 781, 782, 785, 786, 787, 790, 793, 794, 797, 799, 802, 803, 805, 806, 807, 809, 811, 813, 814, 815, 818, 821, 822, 823, 826, 827, 829, 830, 831, 834, 835, 838, 839, 842, 843, 849, 851, 853, 854, 858, 859, 861, 862, 863, 865, 866, 870, 871, 877, 878, 879, 883, 885, 886, 887, 889, 890, 894, 895, 897, 898, 899, 901, 902, 903, 905, 906, 907, 910, 911, 913, 914, 915, 917, 919, 921, 926, 929, 930, 934, 937, 938, 939, 941, 942, 946, 949, 951, 953, 957, 958, 959, 962, 965, 967, 969, 970, 971, 973, 974, 977, 979, 985, 986, 987, 989, 991, 993, 994, 997, 998, 1001, 1002, 1003, 1005, 1006, 1007, 1009, 1010, 1011, 1013, 1015, 1018, 1019, 1021, 1022, 1023, 1027, 1030, 1033, 1034, 1037, 1038, 1039, 1043, 1045, 1046, 1047, 1049, 1054, 1055, 1057, 1059, 1061, 1063, 1066, 1067, 1069, 1070, 1073, 1077, 1081, 1082, 1085, 1090, 1091, 1094, 1095, 1097, 1099, 1101, 1102, 1103, 1105, 1106, 1109, 1114, 1117, 1119, 1121, 1122, 1123, 1129, 1130, 1131, 1138, 1139, 1141, 1142,
$\mathcal{T}_5 = 1$	

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	1145, 1146, 1147, 1149, 1151, 1153, 1154, 1155, 1158, 1159, 1162, 1163, 1165, 1166, 1167, 1169, 1171, 1174, 1177, 1178, 1181, 1186, 1189, 1190, 1193, 1195, 1198, 1199, 1201, 1202, 1203, 1205, 1207, 1209, 1211, 1217, 1218, 1219, 1221, 1222, 1223, 1227, 1229, 1230, 1234, 1235, 1237, 1239, 1241, 1245, 1246, 1249, 1253, 1254, 1255, 1257, 1258, 1259, 1263, 1266, 1270, 1271, 1273, 1277, 1282, 1283, 1286, 1290, 1291, 1294, 1295, 1297, 1298, 1299, 1302, 1303, 1306, 1307, 1309, 1310, 1311, 1315, 1318, 1319, 1322, 1326, 1329, 1330, 1333, 1334, 1337, 1342, 1343, 1345, 1346, 1347, 1349, 1353, 1354, 1355, 1357, 1358, 1361, 1362, 1363, 1365, 1367, 1370, 1371, 1373, 1374, 1378, 1379, 1381, 1383, 1385, 1387, 1390, 1391, 1394, 1397, 1399, 1401, 1403, 1409, 1411, 1414, 1415, 1417, 1418, 1419, 1423, 1430, 1433, 1435, 1437, 1438, 1439, 1442, 1446, 1447, 1451, 1453, 1454, 1455, 1457, 1459, 1462, 1463, 1466, 1469, 1471, 1473, 1474, 1477, 1478, 1481, 1482, 1483, 1487, 1489, 1491, 1495, 1497, 1498, 1499, 1501, 1502, 1505, 1506, 1507, 1509, 1510, 1511, 1513, 1514, 1515, 1517, 1522, 1523, 1526, 1527, 1533, 1534, 1537, 1538, 1541, 1542, 1543, 1545, 1546, 1547, 1549, 1551, 1553, 1554, 1555, 1558, 1559, 1561, 1562, 1563, 1567, 1569, 1570, 1571, 1574, 1578, 1579, 1581, 1582, 1583, 1585, 1589, 1590, 1591, 1594, 1595, 1598, 1599, 1601, 1603, 1605, 1606, 1607, 1609, 1610, 1613, 1614, 1615, 1618, 1619, 1622, 1623, 1626, 1627, 1630, 1634, 1635, 1639, 1642, 1643, 1645, 1646, 1649, 1651, 1653, 1654, 1655, 1657, 1659, 1661, 1667, 1669, 1670, 1671, 1673, 1677, 1678, 1679, 1685, 1687, 1689, 1691, 1693, 1695, 1697, 1698, 1703, 1705, 1706, 1707, 1709, 1711, 1714, 1718, 1721, 1722, 1726, 1727, 1729, 1730, 1733, 1739, 1742, 1743, 1745, 1747, 1749, 1751, 1753, 1757, 1759, 1763, 1765, 1767, 1769, 1770, 1771, 1774, 1778, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1793, 1794, 1795, 1799, 1801, 1802, 1806, 1807, 1810, 1811, 1814, 1819, 1821, 1822, 1823, 1826, 1830, 1831, 1833, 1835, 1837, 1839, 1841, 1842, 1843, 1846, 1847, 1855, 1857, 1858, 1865, 1866, 1867, 1869, 1870, 1871, 1873, 1877, 1878, 1879, 1882, 1883, 1885, 1886, 1887, 1889, 1893, 1894, 1895, 1901, 1902, 1903, 1905, 1906, 1909, 1910, 1915, 1918, 1919, 1923, 1927, 1929, 1930, 1931, 1933, 1934, 1937, 1939, 1941, 1942, 1945, 1946, 1947, 1949, 1951, 1954, 1957, 1958, 1961, 1963, 1965, 1967, 1970, 1973, 1974, 1977, 1978, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1991, 1993, 1994, 1995, 1997, 2001, 2005, 2006, 2010, 2011, 2013, 2015, 2017, 2018, 2019, 2021, 2022, 2026, 2029, 2030, 2035, 2037, 2039, 2041, 2042, 2045, 2046, 2047, 2049, 2051, 2053, 2054, 2055, 2059, 2062, 2063, 2065, 2066, 2067, 2069, 2071,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	2073, 2074, 2077, 2078, 2082, 2085, 2086, 2087, 2089, 2090, 2091, 2093, 2094, 2095, 2098, 2099, 2102, 2103, 2105, 2109, 2110, 2113, 2114, 2117, 2118, 2121, 2123, 2126, 2127, 2129, 2131, 2134, 2137, 2138, 2139, 2141, 2143, 2145, 2146, 2147, 2149, 2154, 2155, 2159, 2161, 2162, 2163, 2165, 2167, 2170, 2173, 2174, 2177, 2179, 2181, 2182, 2183, 2185, 2186, 2191, 2193, 2194, 2195, 2198, 2199, 2201, 2202, 2203, 2206, 2207, 2210, 2211, 2213, 2215, 2217, 2218, 2219, 2221, 2222, 2226, 2227, 2229, 2231, 2233, 2235, 2237, 2238, 2239, 2242, 2245, 2246, 2247, 2249, 2251, 2253, 2255, 2258, 2261, 2265, 2266, 2267, 2269, 2270, 2271, 2273, 2274, 2278, 2281, 2282, 2283, 2289, 2291, 2293, 2294, 2297, 2298, 2301, 2302, 2305, 2306, 2309, 2310, 2311, 2314, 2315, 2317, 2318, 2319, 2321, 2327, 2329, 2330, 2333, 2337, 2338, 2339, 2341, 2343, 2346, 2347, 2351, 2353, 2354, 2357, 2361, 2363, 2365, 2369, 2370, 2371, 2373, 2374, 2377, 2378, 2379, 2381, 2382, 2383, 2387, 2389, 2390, 2393, 2398, 2402, 2405, 2407, 2409, 2410, 2413, 2414, 2415, 2417, 2418, 2419, 2422, 2423, 2426, 2427, 2429, 2431, 2433, 2434, 2435, 2437, 2441, 2442, 2443, 2445, 2446, 2447, 2449, 2451, 2453, 2454, 2455, 2458, 2461, 2462, 2463, 2465, 2467, 2469, 2470, 2473, 2474, 2477, 2478, 2479, 2481, 2482, 2483, 2485, 2486, 2487, 2489, 2491, 2494, 2497, 2506, 2507, 2509, 2514, 2515, 2517, 2518, 2519, 2521, 2526, 2530, 2531, 2534, 2537, 2539, 2542, 2543, 2549, 2551, 2553, 2554, 2555, 2559, 2561, 2562, 2563, 2567, 2569, 2570, 2581, 2582, 2585, 2586, 2587, 2589, 2590, 2591, 2593, 2594, 2595, 2598, 2603, 2605, 2606, 2607, 2611, 2613, 2614, 2615, 2617, 2618, 2621, 2622, 2623, 2626, 2627, 2629, 2630, 2631, 2633, 2635, 2638, 2639, 2641, 2642, 2643, 2647, 2649, 2651, 2653, 2658, 2659, 2663, 2665, 2666, 2669, 2670, 2674, 2677, 2678, 2679, 2681, 2685, 2686, 2689, 2690, 2693, 2697, 2699, 2701, 2702, 2703, 2705, 2706, 2707, 2710, 2711, 2713, 2714, 2715, 2717, 2719, 2721, 2722, 2726, 2729, 2730, 2733, 2734, 2735, 2737, 2742, 2747, 2749, 2751, 2753, 2755, 2757, 2758, 2759, 2761, 2762, 2765, 2766, 2767, 2769, 2771, 2773, 2774, 2777, 2778, 2779, 2782, 2785, 2786, 2787, 2789, 2791, 2794, 2797, 2798, 2801, 2802, 2805, 2806, 2807, 2810, 2811, 2813, 2814, 2815, 2818, 2819, 2821, 2823, 2827, 2830, 2831, 2833, 2834, 2837, 2838, 2839, 2841, 2845, 2846, 2847, 2849, 2854, 2855, 2857, 2858, 2859, 2861, 2863, 2865, 2866, 2867, 2869, 2874, 2879, 2881, 2882, 2887, 2893, 2894, 2895, 2897, 2899, 2901, 2902, 2903, 2906, 2909, 2910, 2913, 2914, 2915, 2917, 2918, 2919, 2921, 2922, 2926, 2927, 2929, 2930, 2933, 2937, 2938, 2939, 2941, 2942, 2945, 2946, 2947, 2949, 2951, 2953, 2954, 2957, 2958,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	2959, 2962, 2963, 2965, 2967, 2969, 2971, 2974, 2977, 2978, 2981, 2982, 2985, 2987, 2990, 2995, 2998, 2999, 3001, 3002, 3003, 3005, 3007, 3009, 3010, 3011, 3013, 3014, 3017, 3018, 3019, 3021, 3022, 3023, 3026, 3027, 3029, 3030, 3031, 3034, 3035, 3037, 3043, 3045, 3046, 3047, 3049, 3053, 3057, 3058, 3061, 3062, 3063, 3065, 3066, 3067, 3070, 3071, 3073, 3074, 3079, 3081, 3083, 3085, 3086, 3089, 3090, 3091, 3093, 3094, 3095, 3097, 3098, 3099, 3102, 3103, 3106, 3107, 3109, 3110, 3113, 3115, 3117, 3118, 3119, 3122, 3126, 3127, 3131, 3133, 3135, 3137, 3139, 3142, 3143, 3147, 3149, 3151, 3153, 3154, 3157, 3158, 3161, 3162, 3163, 3167, 3170, 3171, 3173, 3178, 3187, 3189, 3190, 3191, 3197, 3198, 3199, 3201, 3203, 3205, 3207, 3209, 3210, 3214, 3217, 3218, 3219, 3221, 3223, 3227, 3229, 3230, 3233, 3235, 3237, 3239, 3241, 3242, 3243, 3245, 3247, 3254, 3255, 3257, 3259, 3261, 3262, 3263, 3265, 3266, 3271, 3273, 3274, 3278, 3279, 3282, 3286, 3287, 3290, 3291, 3293, 3295, 3298, 3301, 3302, 3305, 3306, 3309, 3310, 3313, 3314, 3315, 3317, 3318, 3319, 3326, 3327, 3329, 3331, 3333, 3334, 3335, 3338, 3341, 3342, 3343, 3345, 3346, 3351, 3353, 3354, 3355, 3358, 3359, 3361, 3363, 3365, 3367, 3370, 3371, 3373, 3377, 3382, 3383, 3385, 3386, 3387, 3389, 3394, 3397, 3399, 3401, 3406, 3407, 3410, 3414, 3418, 3419, 3421, 3422, 3423, 3426, 3427, 3431, 3433, 3434, 3435, 3437, 3439, 3441, 3442, 3443, 3446, 3449, 3454, 3455, 3457, 3458, 3459, 3461, 3462, 3463, 3466, 3467, 3470, 3473, 3477, 3478, 3485, 3486, 3487, 3489, 3490, 3491, 3493, 3494, 3495, 3498, 3502, 3503, 3505, 3511, 3513, 3514, 3515, 3517, 3518, 3521, 3522, 3523, 3527, 3529, 3530, 3531, 3533, 3534, 3535, 3538, 3539, 3542, 3545, 3547, 3551, 3553, 3557, 3558, 3559, 3561, 3562, 3563, 3565, 3566, 3567, 3570, 3571, 3578, 3579, 3581, 3583, 3586, 3587, 3589, 3590, 3594, 3595, 3597, 3602, 3603, 3605, 3606, 3607, 3611, 3613, 3614, 3615, 3617, 3619, 3621, 3622, 3623, 3629, 3631, 3633, 3634, 3635, 3637, 3638, 3641, 3646, 3647, 3649, 3651, 3655, 3657, 3658, 3659, 3662, 3665, 3667, 3669, 3671, 3674, 3677, 3678, 3679, 3682, 3683, 3685, 3686, 3689, 3693, 3695, 3701, 3702, 3706, 3707, 3710, 3711, 3714, 3719, 3723, 3727, 3729, 3730, 3731, 3733, 3734, 3737, 3738, 3739, 3741, 3742, 3745, 3746, 3747, 3749, 3754, 3755, 3758, 3759, 3761, 3763, 3766, 3767, 3769, 3774, 3777, 3778, 3779, 3781, 3785, 3787, 3791, 3793, 3794, 3797, 3801, 3802, 3803, 3805, 3806, 3809, 3810, 3811, 3813, 3817, 3818, 3819, 3821, 3823, 3826, 3827, 3831, 3833, 3835, 3837, 3838, 3839, 3841, 3842, 3845, 3846, 3847, 3849, 3851, 3853, 3854, 3855, 3857, 3858, 3859, 3862, 3865, 3867, 3869, 3873, 3874, 3877, 3881, 3882,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	3883, 3885, 3886, 3889, 3890, 3891, 3893, 3894, 3895, 3899, 3901, 3903, 3909, 3910, 3913, 3914, 3917, 3918, 3921, 3922, 3923, 3926, 3929, 3930, 3934, 3935, 3937, 3938, 3939, 3941, 3943, 3945, 3946, 3949, 3953, 3954, 3955, 3957, 3958, 3962, 3963, 3965, 3973, 3974, 3977, 3979, 3982, 3983, 3985, 3990, 3991, 3994, 3995, 3998, 4001, 4002, 4003, 4006, 4007, 4009, 4010, 4011, 4013, 4015, 4017, 4019, 4021, 4022, 4026, 4027, 4030, 4031, 4033, 4034, 4035, 4037, 4038, 4039, 4042, 4043, 4049, 4051, 4053, 4054, 4055, 4057, 4062, 4063, 4065, 4066, 4069, 4071, 4073, 4074, 4079, 4081, 4082, 4083, 4085, 4087, 4089, 4090, 4091, 4093, 4094, 4098, 4099, 4101, 4102, 4103, 4105, 4106, 4111, 4115, 4117, 4118, 4119, 4121, 4123, 4127, 4130, 4133, 4134, 4135, 4137, 4138, 4141, 4142, 4143, 4145, 4146, 4147, 4153, 4154, 4155, 4159, 4161, 4162, 4163, 4166, 4170, 4173, 4177, 4178, 4179, 4181, 4183, 4186, 4187, 4190, 4191, 4193, 4198, 4199, 4201, 4206, 4207, 4209, 4215, 4217, 4218, 4219, 4222, 4223, 4226, 4227, 4229, 4231, 4233, 4237, 4238, 4241, 4242, 4245, 4246, 4247, 4249, 4251, 4253, 4254, 4258, 4259, 4261, 4262, 4265, 4267, 4269, 4270, 4273, 4274, 4277, 4278, 4279, 4283, 4285, 4286, 4289, 4290, 4291, 4294, 4295, 4297, 4298, 4299, 4301, 4303, 4306, 4307, 4309, 4310, 4313, 4314, 4315, 4317, 4318, 4322, 4326, 4327, 4330, 4331, 4333, 4337, 4339, 4341, 4343, 4345, 4351, 4354, 4355, 4362, 4363, 4366, 4367, 4369, 4370, 4371, 4373, 4377, 4378, 4379, 4381, 4385, 4386, 4387, 4389, 4390, 4391, 4393, 4395, 4397, 4398, 4403, 4406, 4407, 4409, 4411, 4413, 4414, 4415, 4417, 4421, 4422, 4423, 4426, 4429, 4430, 4431, 4433, 4438, 4439, 4442, 4443, 4449, 4451, 4453, 4454, 4457, 4458, 4462, 4463, 4465, 4466, 4467, 4469, 4470, 4471, 4474, 4478, 4479, 4481, 4483, 4485, 4486, 4490, 4493, 4495, 4497, 4498, 4501, 4502, 4503, 4505, 4507, 4510, 4511, 4514, 4517, 4519, 4523, 4529, 4530, 4534, 4535, 4537, 4538, 4539, 4541, 4542, 4543, 4546, 4547, 4549, 4551, 4558, 4559, 4561, 4562, 4565, 4570, 4574, 4577, 4578, 4579, 4583, 4587, 4589, 4593, 4595, 4597, 4601, 4602, 4603, 4607, 4609, 4611, 4613, 4614, 4615, 4618, 4621, 4623, 4627, 4629, 4633, 4634, 4638, 4639, 4641, 4645, 4646, 4647, 4649, 4651, 4654, 4657, 4658, 4659, 4661, 4663, 4665, 4666, 4667, 4669, 4670, 4673, 4674, 4678, 4679, 4681, 4682, 4683, 4686, 4687, 4690, 4691, 4694, 4699, 4701, 4702, 4703, 4705, 4706, 4710, 4711, 4713, 4714, 4715, 4717, 4722, 4723, 4726, 4729, 4733, 4735, 4737, 4739, 4741, 4742, 4746, 4747, 4749, 4751, 4755, 4758, 4759, 4762, 4765, 4766, 4769, 4771, 4773, 4774, 4777, 4778, 4781, 4782, 4783, 4787, 4790, 4791, 4793, 4795, 4798, 4799, 4801, 4803, 4807, 4809, 4810, 4811,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	4813, 4814, 4818, 4821, 4822, 4826, 4827, 4829, 4830, 4831, 4834, 4835, 4837, 4838, 4839, 4841, 4845, 4847, 4853, 4854, 4855, 4857, 4858, 4859, 4862, 4863, 4866, 4870, 4871, 4874, 4877, 4879, 4881, 4882, 4883, 4885, 4886, 4890, 4891, 4893, 4894, 4895, 4898, 4899, 4902, 4907, 4909, 4910, 4911, 4915, 4917, 4918, 4919, 4922, 4926, 4927, 4929, 4931, 4933, 4935, 4937, 4938, 4939, 4943, 4945, 4946, 4947, 4951, 4953, 4954, 4955, 4958, 4963, 4965, 4966, 4967, 4969, 4970, 4971, 4973, 4974, 4978, 4982, 4983, 4987, 4989, 4990, 4994, 4997, 4999, 5002, 5003, 5005, 5006, 5007, 5009, 5010, 5011, 5014, 5017, 5018, 5019, 5021, 5023, 5027, 5029, 5033, 5034, 5037, 5038, 5039, 5042, 5045, 5053, 5055, 5057, 5059, 5061, 5062, 5063, 5065, 5069, 5073, 5078, 5079, 5083, 5086, 5091, 5093, 5095, 5097, 5098, 5099, 5101, 5105, 5106, 5109, 5110, 5111, 5113, 5114, 5115, 5117, 5118, 5122, 5123, 5126, 5127, 5131, 5133, 5134, 5135, 5137, 5141, 5142, 5143, 5146, 5147, 5149, 5151, 5153, 5154, 5155, 5158, 5159, 5161, 5162, 5163, 5165, 5167, 5169, 5171, 5178, 5179, 5181, 5182, 5183, 5186, 5187, 5189, 5190, 5191, 5195, 5197, 5199, 5201, 5205, 5206, 5209, 5210, 5213, 5214, 5215, 5217, 5221, 5222, 5226, 5227, 5230, 5231, 5234, 5235, 5237, 5242, 5245, 5246, 5249, 5251, 5253, 5255, 5257, 5258, 5261, 5262, 5263, 5266, 5267, 5270, 5271, 5273, 5277, 5279, 5281, 5282, 5285, 5286, 5287, 5289, 5293, 5294, 5298, 5299, 5302, 5303, 5305, 5306, 5309, 5311, 5313, 5314, 5317, 5318, 5321, 5322, 5323, 5326, 5327, 5330, 5331, 5333, 5334, 5335, 5338, 5339, 5343, 5349, 5351, 5354, 5357, 5358, 5359, 5363, 5366, 5367, 5369, 5370, 5371, 5377, 5378, 5379, 5381, 5383, 5386, 5387, 5394, 5395, 5397, 5398, 5399, 5401, 5402, 5403, 5405, 5407, 5410, 5413, 5414, 5417, 5421, 5422, 5423, 5426, 5429, 5430, 5431, 5433, 5434, 5435, 5437, 5438, 5441, 5442, 5443, 5446, 5447, 5451, 5453, 5455, 5459, 5462, 5465, 5466, 5467, 5469, 5470, 5473, 5477, 5478, 5479, 5483, 5486, 5489, 5494, 5495, 5498, 5503, 5505, 5506, 5509, 5510, 5511, 5513, 5514, 5515, 5518, 5519, 5522, 5523, 5529, 5534, 5538, 5541, 5542, 5543, 5545, 5546, 5549, 5551, 5554, 5555, 5559, 5561, 5563, 5567, 5573, 5579, 5581, 5582, 5585, 5587, 5590, 5591, 5593, 5594, 5597, 5599, 5601, 5603, 5609, 5614, 5617, 5633, 5638, 5639, 5641, 5642, 5646, 5647, 5649, 5653, 5658, 5662, 5665, 5666, 5667, 5669, 5671, 5673, 5674, 5677, 5678, 5681, 5682, 5683, 5686, 5689, 5690, 5691, 5694, 5695, 5698, 5699, 5701, 5702, 5703, 5705, 5707, 5709, 5713, 5714, 5717, 5719, 5721, 5722, 5723, 5726, 5727, 5729, 5730, 5731, 5734, 5735, 5737, 5738, 5739, 5741, 5743, 5747, 5749,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	5754, 5755, 5757, 5758, 5759, 5761, 5762, 5763, 5765, 5767, 5770, 5771, 5773, 5779, 5781, 5783, 5785, 5786, 5790, 5791, 5793, 5794, 5795, 5798, 5799, 5801, 5802, 5803, 5806, 5807, 5810, 5811, 5813, 5815, 5817, 5818, 5821, 5822, 5827, 5829, 5830, 5833, 5834, 5835, 5837, 5838, 5839, 5842, 5843, 5846, 5847, 5849, 5853, 5854, 5855, 5857, 5862, 5865, 5866, 5867, 5870, 5871, 5873, 5874, 5878, 5879, 5881, 5882, 5883, 5885, 5889, 5890, 5891, 5893, 5894, 5897, 5898, 5899, 5901, 5902, 5903, 5905, 5906, 5909, 5910, 5914, 5917, 5918, 5919, 5921, 5923, 5926, 5930, 5933, 5934, 5935, 5937, 5938, 5939, 5941, 5942, 5943, 5945, 5946, 5947, 5951, 5953, 5954, 5955, 5959, 5962, 5963, 5966, 5969, 5970, 5973, 5974, 5979, 5981, 5982, 5983, 5986, 5987, 5991, 5993, 5995, 5998, 5999, 6005, 6006, 6007, 6010, 6011, 6013, 6014, 6018, 6019, 6022, 6023, 6026, 6029, 6033, 6034, 6035, 6038, 6041, 6042, 6045, 6046, 6047, 6049, 6053, 6054, 6055, 6058, 6059, 6061, 6063, 6065, 6067, 6070, 6077, 6079, 6081, 6082, 6083, 6086, 6090, 6091, 6094, 6095, 6098, 6099, 6101, 6103, 6105, 6106, 6109, 6110, 6115, 6118, 6119, 6121, 6122, 6126, 6127, 6130, 6131, 6133, 6134, 6135, 6139, 6141, 6142, 6143, 6145, 6146, 6153, 6154, 6158, 6159, 6161, 6162, 6163, 6166, 6169, 6170, 6173, 6177, 6178, 6179, 6181, 6182, 6185, 6186, 6189, 6191, 6194, 6195, 6197, 6198, 6199, 6203, 6205, 6207, 6211, 6213, 6214, 6215, 6217, 6218, 6226, 6227, 6229, 6230, 6233, 6234, 6235, 6238, 6242, 6243, 6245, 6247, 6249, 6251, 6254, 6257, 6261, 6262, 6263, 6267, 6269, 6271, 6274, 6277, 6278, 6281, 6285, 6286, 6287, 6289, 6290, 6293, 6295, 6297, 6298, 6299, 6301, 6302, 6303, 6305, 6306, 6307, 6310, 6311, 6313, 6314, 6315, 6317, 6322, 6326, 6329, 6330, 6331, 6334, 6335, 6338, 6339, 6341, 6342, 6343, 6346, 6347, 6349, 6351, 6353, 6355, 6359, 6361, 6367, 6369, 6371, 6373, 6374, 6377, 6378, 6379, 6382, 6383, 6385, 6387, 6389, 6393, 6394, 6397, 6398, 6401, 6402, 6403, 6405, 6406, 6409, 6410, 6411, 6414, 6415, 6418, 6421, 6423, 6429, 6430, 6433, 6434, 6439, 6441, 6442, 6443, 6445, 6446, 6447, 6449, 6454, 6457, 6458, 6459, 6463, 6465, 6466, 6469, 6473, 6477, 6478, 6479, 6482, 6483, 6485, 6486, 6487, 6490, 6491, 6493, 6494, 6495, 6499, 6502, 6503, 6505, 6506, 6509, 6510, 6511, 6513, 6514, 6515, 6518, 6519, 6521, 6522, 6523, 6527, 6529, 6530, 6531, 6533, 6535, 6537, 6539, 6541, 6542, 6545, 6546, 6549, 6551, 6553, 6555, 6557, 6558, 6559, 6562, 6565, 6569, 6571, 6573, 6577, 6578, 6581, 6582, 6583, 6585, 6586, 6589, 6590, 6593, 6594, 6595, 6598, 6599, 6601, 6602, 6603, 6605, 6607, 6609, 6610, 6611, 6613, 6614, 6617, 6618, 6619, 6621, 6623, 6626, 6630, 6631, 6634, 6637, 6643, 6645, 6646, 6653, 6654, 6657, 6658, 6659, 6661, 6663, 6665, 6667, 6670, 6671,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	6673, 6679, 6681, 6683, 6685, 6686, 6690, 6693, 6694, 6695, 6699, 6701, 6702, 6703, 6709, 6711, 6715, 6717, 6718, 6721, 6722, 6729, 6730, 6731, 6733, 6735, 6737, 6738, 6739, 6742, 6745, 6746, 6749, 6751, 6753, 6754, 6755, 6757, 6758, 6763, 6765, 6766, 6767, 6769, 6771, 6773, 6774, 6778, 6781, 6785, 6787, 6789, 6790, 6791, 6793, 6794, 6797, 6798, 6802, 6803, 6805, 6806, 6807, 6809, 6810, 6815, 6817, 6818, 6821, 6823, 6826, 6827, 6829, 6833, 6834, 6835, 6838, 6839, 6841, 6842, 6843, 6846, 6847, 6851, 6855, 6857, 6861, 6862, 6865, 6869, 6870, 6873, 6874, 6878, 6879, 6881, 6882, 6883, 6886, 6890, 6893, 6898, 6899, 6901, 6902, 6905, 6906, 6907, 6910, 6911, 6913, 6914, 6915, 6918, 6919, 6922, 6923, 6926, 6927, 6931, 6933, 6934, 6935, 6938, 6941, 6942, 6946, 6947, 6951, 6954, 6955, 6961, 6963, 6965, 6970, 6971, 6973, 6974, 6977, 6978, 6979, 6981, 6982, 6983, 6985, 6986, 6987, 6989, 6990, 6991, 6995, 6997, 6998, 6999, 7001, 7003, 7006, 7010, 7013, 7014, 7015, 7017, 7021, 7026, 7030, 7031, 7033, 7035, 7039, 7042, 7043, 7045, 7046, 7051, 7053, 7054, 7055, 7058, 7059, 7061, 7062, 7063, 7066, 7070, 7073, 7077, 7078, 7079, 7081, 7082, 7085, 7086, 7087, 7089, 7090, 7093, 7095, 7097, 7099, 7102, 7103, 7106, 7107, 7109, 7114, 7115, 7117, 7118, 7121, 7122, 7123, 7126, 7127, 7130, 7131, 7133, 7134, 7135, 7138, 7141, 7142, 7143, 7145, 7147, 7149, 7151, 7153, 7157, 7158, 7159, 7161, 7162, 7163, 7165, 7166, 7167, 7169, 7174, 7177, 7178, 7179, 7181, 7183, 7185, 7187, 7189, 7190, 7193, 7194, 7195, 7197, 7198, 7199, 7201, 7202, 7205, 7206, 7207, 7210, 7211, 7213, 7214, 7215, 7217, 7219, 7222, 7223, 7226, 7230, 7233, 7234, 7235, 7237, 7238, 7239, 7241, 7242, 7243, 7246, 7247, 7249, 7251, 7257, 7258, 7259, 7261, 7262, 7265, 7266, 7269, 7270, 7273, 7274, 7277, 7278, 7279, 7283, 7285, 7286, 7287, 7289, 7291, 7293, 7294, 7295, 7297, 7298, 7303, 7305, 7309, 7310, 7311, 7313, 7314, 7315, 7318, 7319, 7321, 7322, 7323, 7329, 7333, 7334, 7337, 7338, 7341, 7342, 7343, 7345, 7346, 7349, 7351, 7355, 7357, 7358, 7359, 7363, 7365, 7366, 7367, 7369, 7370, 7373, 7377, 7378, 7379, 7382, 7383, 7385, 7386, 7387, 7393, 7395, 7397, 7402, 7403, 7405, 7409, 7410, 7411, 7413, 7417, 7418, 7419, 7421, 7422, 7423, 7427, 7429, 7430, 7431, 7433, 7435, 7437, 7438, 7441, 7445, 7446, 7447, 7449, 7453, 7454, 7455, 7457, 7458, 7462, 7463, 7466, 7469, 7471, 7473, 7474, 7477, 7478, 7482, 7485, 7487, 7490, 7491, 7493, 7494, 7495, 7498, 7499, 7501, 7505, 7507, 7509, 7510, 7511, 7517, 7518, 7519, 7521, 7522, 7523, 7527, 7529, 7531, 7534, 7535, 7537, 7538, 7541, 7543, 7549, 7553, 7554, 7557, 7558, 7559, 7562, 7563, 7565, 7566, 7567, 7573, 7577, 7579, 7582,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	7583, 7585, 7589, 7593, 7594, 7597, 7598, 7599, 7601, 7602, 7603, 7606, 7607, 7609, 7610, 7613, 7615, 7617, 7618, 7619, 7621, 7622, 7626, 7629, 7630, 7631, 7633, 7635, 7637, 7638, 7639, 7642, 7643, 7645, 7646, 7647, 7649, 7651, 7657, 7661, 7662, 7663, 7666, 7667, 7669, 7670, 7671, 7673, 7678, 7679, 7681, 7682, 7683, 7685, 7687, 7690, 7691, 7694, 7697, 7698, 7699, 7701, 7702, 7703, 7706, 7707, 7709, 7710, 7711, 7714, 7715, 7718, 7719, 7723, 7726, 7727, 7729, 7733, 7735, 7737, 7738, 7741, 7745, 7747, 7751, 7753, 7754, 7755, 7757, 7759, 7761, 7763, 7765, 7766, 7769, 7770, 7771, 7773, 7777, 7778, 7779, 7781, 7782, 7783, 7786, 7787, 7790, 7795, 7797, 7798, 7799, 7802, 7805, 7806, 7807, 7809, 7810, 7813, 7814, 7815, 7818, 7819, 7826, 7827, 7831, 7834, 7835, 7837, 7838, 7841, 7843, 7845, 7846, 7849, 7851, 7853, 7854, 7858, 7859, 7863, 7867, 7869, 7870, 7873, 7874, 7877, 7878, 7879, 7881, 7882, 7885, 7886, 7887, 7890, 7891, 7894, 7898, 7899, 7901, 7903, 7905, 7906, 7907, 7909, 7913, 7914, 7915, 7917, 7919, 7922, 7923, 7926, 7927, 7930, 7931, 7934, 7937, 7939, 7945, 7946, 7951, 7953, 7954, 7955, 7957, 7958, 7959, 7962, 7966, 7969, 7970, 7971, 7973, 7977, 7978, 7981, 7982, 7989, 7990, 7991, 7994, 7995, 7998, 7999, 8003, 8005, 8006, 8007, 8011, 8014, 8015, 8017, 8018, 8029, 8030, 8031, 8033, 8034, 8035, 8038, 8039, 8041, 8042, 8043, 8045, 8051, 8053, 8054, 8058, 8059, 8061, 8062, 8063, 8065, 8066, 8069, 8070, 8077, 8079, 8081, 8083, 8086, 8087, 8089, 8090, 8093, 8094, 8095, 8097, 8098, 8101, 8103, 8105, 8106, 8110, 8111, 8113, 8115, 8117, 8122, 8123, 8126, 8130, 8131, 8133, 8135, 8137, 8138, 8139, 8142, 8143, 8146, 8147, 8149, 8151, 8153, 8157, 8158, 8159, 8161, 8162, 8165, 8166, 8169, 8170, 8171, 8173, 8174, 8177, 8179, 8185, 8186, 8187, 8189, 8191, 8193, 8194, 8195, 8197, 8198, 8202, 8203, 8205, 8206, 8210, 8211, 8213, 8215, 8218, 8221, 8222, 8223, 8227, 8229, 8230, 8231, 8233, 8234, 8237, 8238, 8239, 8241, 8242, 8243, 8245, 8246, 8247, 8249, 8251, 8254, 8255, 8257, 8258, 8259, 8263, 8265, 8266, 8267, 8269, 8274, 8277, 8278, 8279, 8283, 8285, 8287, 8290, 8291, 8293, 8295, 8297, 8299, 8301, 8302, 8305, 8306, 8310, 8313, 8314, 8315, 8318, 8322, 8326, 8327, 8329, 8333, 8335, 8337, 8338, 8342, 8345, 8346, 8347, 8351, 8353, 8354, 8355, 8357, 8358, 8359, 8362, 8363, 8365, 8367, 8369, 8371, 8373, 8374, 8377, 8378, 8382, 8385, 8386, 8387, 8390, 8393, 8394, 8395, 8398, 8399, 8402, 8407, 8409, 8411, 8418, 8421, 8422, 8423, 8426, 8429, 8430, 8431, 8434, 8435, 8437, 8439, 8441, 8443, 8445, 8447, 8453, 8454, 8455, 8457, 8458, 8461, 8463, 8465, 8466, 8467, 8473, 8474, 8481, 8485, 8486, 8489, 8490, 8491, 8493, 8494,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	8495, 8498, 8499, 8507, 8510, 8511, 8513, 8515, 8517, 8518, 8519, 8521, 8522, 8527, 8529, 8530, 8531, 8533, 8534, 8535, 8537, 8538, 8542, 8543, 8545, 8547, 8549, 8551, 8553, 8554, 8555, 8557, 8558, 8561, 8565, 8567, 8570, 8571, 8573, 8574, 8578, 8581, 8582, 8583, 8585, 8587, 8590, 8593, 8598, 8601, 8602, 8603, 8606, 8609, 8610, 8611, 8614, 8615, 8617, 8618, 8621, 8623, 8626, 8627, 8629, 8630, 8633, 8635, 8637, 8641, 8642, 8643, 8645, 8646, 8647, 8654, 8655, 8657, 8659, 8661, 8662, 8665, 8666, 8669, 8671, 8674, 8677, 8678, 8679, 8681, 8682, 8683, 8686, 8691, 8697, 8699, 8701, 8702, 8705, 8706, 8710, 8711, 8713, 8714, 8715, 8717, 8719, 8723, 8726, 8727, 8729, 8731, 8733, 8734, 8735, 8737, 8741, 8743, 8745, 8747, 8749, 8751, 8753, 8754, 8755, 8758, 8759, 8761, 8762, 8765, 8767, 8769, 8770, 8773, 8774, 8777, 8778, 8779, 8781, 8782, 8783, 8786, 8787, 8791, 8795, 8797, 8798, 8799, 8801, 8805, 8807, 8809, 8810, 8813, 8814, 8815, 8817, 8818, 8819, 8821, 8822, 8827, 8830, 8831, 8834, 8835, 8837, 8839, 8841, 8842, 8846, 8849, 8851, 8853, 8854, 8855, 8857, 8858, 8859, 8861, 8862, 8863, 8866, 8867, 8870, 8871, 8873, 8879, 8882, 8885, 8887, 8889, 8890, 8891, 8894, 8897, 8899, 8902, 8903, 8905, 8906, 8907, 8909, 8911, 8913, 8917, 8921, 8922, 8927, 8929, 8930, 8931, 8933, 8934, 8935, 8939, 8941, 8943, 8945, 8947, 8949, 8951, 8953, 8958, 8961, 8962, 8963, 8965, 8969, 8970, 8971, 8974, 8977, 8979, 8981, 8983, 8985, 8986, 8987, 8990, 8997, 8999, 9001, 9002, 9005, 9007, 9010, 9011, 9014, 9015, 9017, 9019, 9021, 9022, 9023, 9026, 9029, 9030, 9031, 9033, 9034, 9035, 9037, 9038, 9039, 9041, 9042, 9043, 9046, 9049, 9051, 9053, 9055, 9061, 9062, 9066, 9067, 9069, 9070, 9071, 9073, 9074, 9077, 9078, 9079, 9082, 9085, 9086, 9087, 9089, 9091, 9093, 9094, 9095, 9097, 9098, 9101, 9103, 9105, 9106, 9107, 9109, 9110, 9111, 9113, 9115, 9118, 9119, 9121, 9122, 9123, 9127, 9129, 9130, 9131, 9133, 9134, 9137, 9139, 9141, 9142, 9143, 9146, 9149, 9151, 9155, 9158, 9159, 9165, 9167, 9169, 9174, 9177, 9178, 9179, 9182, 9183, 9186, 9190, 9191, 9193, 9194, 9195, 9197, 9199, 9201, 9202, 9205, 9209, 9210, 9211, 9213, 9215, 9217, 9218, 9219, 9221, 9222, 9223, 9226, 9227, 9231, 9233, 9237, 9238, 9239, 9241, 9242, 9246, 9249, 9253, 9254, 9255, 9257, 9259, 9262, 9263, 9266, 9267, 9269, 9271, 9273, 9274, 9277, 9278, 9281, 9282, 9283, 9285, 9286, 9287, 9289, 9290, 9291, 9293, 9298, 9299, 9301, 9302, 9303, 9305, 9307, 9311, 9314, 9318, 9319, 9327, 9329, 9330, 9334, 9335, 9337, 9338, 9339, 9341, 9343, 9345, 9346, 9347, 9349, 9353, 9354, 9355, 9361, 9362, 9363, 9365, 9366, 9370, 9377, 9379, 9381, 9382, 9383, 9385, 9389, 9390, 9391, 9394, 9395, 9397, 9401, 9402, 9406, 9407, 9413, 9415, 9417, 9418, 9421, 9422, 9426, 9427, 9429, 9430, 9435, 9437, 9439, 9442, 9445, 9447, 9451,

	d
$\mathcal{T}_5 = 1$	9453, 9455, 9458, 9461, 9462, 9465, 9466, 9469, 9470, 9473, 9478, 9479, 9481, 9482, 9483, 9485, 9487, 9489, 9490, 9493, 9498, 9499, 9501, 9502, 9503, 9505, 9507, 9509, 9510, 9511, 9515, 9517, 9519, 9521, 9523, 9526, 9527, 9529, 9530, 9534, 9541, 9542, 9545, 9546, 9547, 9551, 9554, 9557, 9561, 9562, 9563, 9566, 9569, 9571, 9579, 9581, 9586, 9587, 9589, 9590, 9591, 9593, 9595, 9597, 9599, 9601, 9602, 9605, 9606, 9607, 9609, 9614, 9617, 9618, 9619, 9622, 9623, 9626, 9629, 9634, 9635, 9637, 9638, 9643, 9645, 9646, 9647, 9649, 9651, 9654, 9655, 9658, 9661, 9662, 9663, 9665, 9667, 9671, 9673, 9677, 9678, 9679, 9681, 9682, 9683, 9686, 9687, 9689, 9691, 9694, 9695, 9697, 9698, 9703, 9706, 9707, 9710, 9713, 9714, 9715, 9717, 9718, 9723, 9726, 9727, 9730, 9733, 9734, 9735, 9737, 9739, 9741, 9743, 9746, 9749, 9753, 9754, 9755, 9758, 9759, 9761, 9762, 9763, 9766, 9767, 9769, 9771, 9773, 9777, 9778, 9779, 9781, 9782, 9786, 9787, 9789, 9790, 9791, 9793, 9794, 9795, 9798, 9805, 9806, 9807, 9809, 9811, 9813, 9815, 9817, 9818, 9821, 9822, 9823, 9827, 9830, 9831, 9833, 9834, 9835, 9838, 9839, 9842, 9843, 9845, 9851, 9853, 9854, 9857, 9858, 9859, 9862, 9863, 9866, 9867, 9869, 9870, 9874, 9877, 9878, 9879, 9881, 9883, 9887, 9889, 9890, 9893, 9894, 9897, 9899, 9901, 9903, 9905, 9906, 9907, 9910, 9913, 9914, 9915, 9917, 9919, 9921, 9923, 9926, 9929, 9930, 9931, 9934, 9935, 9937, 9938, 9939, 9941, 9943, 9946, 9953, 9955, 9957, 9959, 9961, 9962, 9965, 9967, 9969, 9970, 9973, 9974, 9977, 9978, 9979, 9983, 9985, 9986, 9987, 9991, 9994, 9997
$\mathcal{T}_5 = [5]$	38, 39, 42, 51, 53, 69, 70, 82, 107, 109, 114, 115, 127, 130, 134, 143, 155, 161, 183, 185, 186, 202, 211, 214, 238, 241, 257, 259, 271, 278, 287, 298, 314, 326, 366, 382, 401, 407, 422, 426, 430, 433, 439, 453, 457, 466, 467, 473, 489, 497, 499, 501, 502, 509, 519, 523, 526, 534, 537, 541, 543, 574, 581, 587, 615, 623, 626, 627, 629, 635, 645, 662, 673, 674, 687, 699, 719, 727, 734, 745, 753, 761, 767, 789, 791, 795, 798, 817, 857, 869, 874, 881, 893, 922, 923, 933, 935, 943, 947, 966, 978, 983, 995, 1031, 1041, 1042, 1065, 1074, 1079, 1086, 1087, 1093, 1110, 1113, 1115, 1118, 1126, 1133, 1135, 1137, 1173, 1182, 1187, 1191, 1213, 1214, 1226, 1231, 1238, 1261, 1262, 1265, 1267, 1281, 1289, 1293, 1301, 1313, 1321,

	d
$\mathcal{T}_5 = [5]$	1327, 1335, 1339, 1351, 1366, 1382, 1389, 1393, 1402, 1405, 1406, 1407, 1410, 1426, 1427, 1429, 1434, 1441, 1443, 1461, 1465, 1479, 1486, 1490, 1493, 1518, 1529, 1531, 1577, 1586, 1597, 1631, 1637, 1658, 1662, 1663, 1686, 1699, 1702, 1713, 1717, 1738, 1741, 1754, 1758, 1761, 1762, 1766, 1777, 1786, 1790, 1797, 1798, 1803, 1817, 1829, 1834, 1838, 1851, 1853, 1861, 1874, 1891, 1897, 1898, 1907, 1913, 1914, 1943, 1955, 1959, 1966, 1969, 1982, 1990, 1999, 2002, 2003, 2027, 2031, 2033, 2038, 2081, 2083, 2101, 2111, 2119, 2130, 2135, 2153, 2157, 2171, 2189, 2190, 2230, 2234, 2243, 2257, 2262, 2263, 2279, 2285, 2290, 2307, 2323, 2334, 2335, 2345, 2355, 2359, 2362, 2386, 2391, 2397, 2406, 2438, 2459, 2471, 2490, 2495, 2498, 2501, 2503, 2505, 2510, 2513, 2522, 2533, 2545, 2546, 2557, 2558, 2566, 2573, 2577, 2578, 2579, 2599, 2602, 2609, 2634, 2654, 2657, 2667, 2671, 2683, 2694, 2723, 2739, 2741, 2743, 2746, 2770, 2795, 2803, 2822, 2829, 2851, 2877, 2878, 2885, 2886, 2911, 2923, 2931, 2935, 2983, 2986, 2991, 2994, 3054, 3059, 3082, 3111, 3121, 3129, 3134, 3138, 3145, 3155, 3165, 3166, 3181, 3182, 3183, 3193, 3194, 3202, 3206, 3215, 3226, 3238, 3246, 3270, 3277, 3281, 3297, 3299, 3311, 3322, 3323, 3337, 3347, 3369, 3374, 3378, 3379, 3390, 3391, 3395, 3398, 3403, 3405, 3409, 3413, 3415, 3417, 3445, 3451, 3453, 3469, 3471, 3482, 3499, 3506, 3507, 3526, 3541, 3543, 3554, 3569, 3574, 3585, 3593, 3598, 3599, 3601, 3639, 3642, 3643, 3653, 3666, 3670, 3687, 3691, 3694, 3697, 3705, 3709, 3713, 3722, 3743, 3765, 3770, 3782, 3783, 3790, 3795, 3799, 3814, 3815, 3829, 3830, 3863, 3866, 3878, 3898, 3902, 3911, 3919, 3931, 3947, 3959, 3961, 3966, 3967, 3970, 3981, 3989, 3997, 3999, 4029, 4045, 4058, 4070, 4078, 4097, 4109, 4110, 4129, 4151, 4169, 4171, 4174, 4182, 4189, 4195, 4197, 4210, 4211, 4234, 4243, 4255, 4271, 4281, 4282, 4305, 4319, 4321, 4323, 4334, 4342, 4346, 4353, 4358, 4359, 4402, 4405, 4427, 4434, 4435, 4445, 4447, 4461, 4487, 4494, 4499, 4513, 4515, 4521, 4526, 4533, 4553, 4555, 4566, 4567, 4569, 4571, 4582, 4585, 4591, 4605, 4610, 4619, 4622, 4630, 4631, 4637, 4642, 4643, 4677, 4685, 4697, 4718, 4727, 4730, 4731, 4738, 4754, 4757, 4763, 4767, 4785, 4786, 4789, 4794, 4819, 4843, 4846, 4861, 4865, 4867, 4873, 4889, 4897, 4906, 4921, 4930, 4957, 4962, 4979, 4981, 4985, 4991, 4993, 5001, 5015, 5030, 5035, 5051, 5066, 5071, 5074, 5077, 5081, 5087, 5089, 5090, 5107, 5119, 5138, 5173, 5174, 5185, 5198, 5207, 5218,

	d
$\mathcal{T}_5 = [5]$	5219, 5223, 5233, 5241, 5254, 5269, 5278, 5291, 5295, 5297, 5307, 5342, 5345, 5347, 5353, 5361, 5362, 5365, 5374, 5385, 5389, 5393, 5406, 5411, 5419, 5449, 5457, 5458, 5461, 5471, 5474, 5482, 5487, 5493, 5497, 5501, 5502, 5507, 5521, 5527, 5530, 5531, 5533, 5539, 5557, 5558, 5565, 5569, 5570, 5574, 5578, 5583, 5595, 5602, 5605, 5606, 5610, 5611, 5613, 5619, 5621, 5622, 5623, 5626, 5627, 5629, 5637, 5645, 5651, 5654, 5655, 5659, 5663, 5685, 5693, 5710, 5711, 5718, 5753, 5777, 5789, 5797, 5809, 5826, 5858, 5863, 5869, 5907, 5911, 5927, 5957, 5961, 5965, 5971, 5977, 5990, 5997, 6002, 6009, 6015, 6017, 6031, 6037, 6043, 6062, 6071, 6073, 6074, 6078, 6085, 6087, 6089, 6113, 6114, 6117, 6149, 6151, 6157, 6167, 6187, 6190, 6193, 6202, 6209, 6222, 6231, 6239, 6258, 6259, 6265, 6266, 6270, 6279, 6294, 6319, 6323, 6333, 6337, 6357, 6362, 6365, 6386, 6395, 6407, 6431, 6437, 6438, 6455, 6467, 6470, 6474, 6481, 6497, 6501, 6526, 6538, 6554, 6587, 6622, 6629, 6635, 6638, 6639, 6649, 6662, 6666, 6674, 6677, 6682, 6689, 6691, 6698, 6706, 6710, 6719, 6726, 6734, 6743, 6747, 6761, 6779, 6782, 6783, 6799, 6814, 6819, 6837, 6853, 6854, 6863, 6866, 6871, 6887, 6891, 6895, 6917, 6937, 6943, 6949, 6953, 6959, 6967, 6969, 6994, 7005, 7009, 7019, 7022, 7023, 7027, 7034, 7037, 7041, 7049, 7057, 7067, 7091, 7094, 7111, 7113, 7129, 7170, 7186, 7221, 7229, 7231, 7253, 7255, 7271, 7302, 7306, 7307, 7327, 7330, 7331, 7347, 7354, 7361, 7390, 7391, 7394, 7401, 7414, 7415, 7439, 7451, 7459, 7465, 7467, 7481, 7486, 7489, 7503, 7526, 7530, 7539, 7545, 7547, 7555, 7561, 7570, 7571, 7574, 7586, 7591, 7611, 7627, 7634, 7655, 7658, 7665, 7674, 7689, 7705, 7717, 7721, 7730, 7734, 7739, 7743, 7746, 7762, 7789, 7793, 7811, 7817, 7822, 7823, 7829, 7833, 7855, 7861, 7862, 7871, 7883, 7895, 7897, 7941, 7949, 7961, 7963, 7967, 7979, 7985, 7993, 7997, 8002, 8013, 8021, 8022, 8023, 8026, 8027, 8047, 8049, 8057, 8067, 8071, 8078, 8099, 8102, 8114, 8121, 8155, 8178, 8182, 8201, 8207, 8209, 8261, 8270, 8273, 8286, 8294, 8309, 8311, 8319, 8321, 8323, 8331, 8339, 8341, 8366, 8383, 8389, 8391, 8403, 8413, 8414, 8419, 8438, 8446, 8449, 8459, 8462, 8471, 8479, 8482, 8483, 8497, 8501, 8502, 8506, 8509, 8539, 8546, 8562, 8566, 8579, 8589, 8594, 8597, 8599, 8605, 8607, 8634, 8653, 8663, 8687, 8689, 8698, 8707, 8718, 8738, 8746, 8763, 8785, 8794, 8803, 8806, 8823, 8826, 8845, 8877, 8881, 8893, 8895, 8898, 8914, 8923, 8926, 8938, 8966, 8994, 8995, 8998, 9006, 9057, 9083, 9102, 9145, 9147, 9154, 9161, 9173, 9203, 9206, 9214, 9229, 9235, 9258, 9265, 9294, 9309, 9313, 9321, 9322, 9323, 9326, 9331, 9357, 9358, 9371, 9373, 9374, 9393, 9398, 9399, 9403, 9410,

	d
$\mathcal{T}_5 = [5]$	9411, 9419, 9431, 9433, 9434, 9443, 9446, 9449, 9463, 9467, 9471, 9474, 9491, 9494, 9514, 9518, 9533, 9535, 9539, 9543, 9553, 9565, 9573, 9574, 9577, 9578, 9582, 9598, 9611, 9613, 9627, 9631, 9641, 9642, 9659, 9669, 9670, 9674, 9685, 9690, 9701, 9705, 9709, 9719, 9721, 9722, 9731, 9742, 9745, 9757, 9785, 9797, 9799, 9803, 9814, 9829, 9847, 9861, 9865, 9871, 9885, 9886, 9895, 9911, 9933, 9942, 9949, 9951, 9958, 9982, 9989, 9993, 9995, 9998
$\mathcal{T}_5 = [5, 5]$	1111, 4357, 9166.
$\mathcal{T}_5 = [25]$	62, 73, 89, 139, 191, 295, 427, 434, 514, 589, 597, 602, 617, 622, 955, 982, 1051, 1157, 1185, 1194, 1243, 1247, 1279, 1285, 1317, 1338, 1398, 1535, 1565, 1621, 1633, 1723, 1731, 1735, 1921, 1938, 1986, 2014, 2158, 2287, 2326, 2399, 2411, 2571, 2661, 2687, 2698, 2731, 2843, 2870, 2905, 2955, 2966, 2973, 2993, 3039, 3041, 3077, 3101, 3130, 3169, 3269, 3289, 3307, 3349, 3497, 3661, 3673, 3715, 3786, 3905, 3907, 3927, 4047, 4061, 4139, 4157, 4202, 4349, 4382, 4399, 4441, 4522, 4531, 4573, 4586, 4594, 4695, 4709, 4721, 4745, 4823, 4849, 4903, 4942, 5026, 5102, 5170, 5177, 5259, 5315, 5615, 5630, 5631, 5657, 5774, 5851, 5989, 6001, 6051, 6155, 6206, 6221, 6283, 6391, 6451, 6461, 6547, 6574, 6697, 6707, 6770, 6801, 6830, 7069, 7071, 7282, 7339, 7374, 7426, 7483, 7590, 7653, 7801, 7847, 7910, 7918, 7933, 8074, 8119, 8141, 8167, 8219, 8317, 8401, 8417, 8503, 8563, 8569, 8638, 8639, 8651, 8690, 8693, 8695, 8742, 8789, 8790, 8878, 8886, 8915, 8942, 8989, 9003, 9013, 9058, 9157, 9170, 9181, 9185, 9187, 9247, 9367, 9454, 9497, 9538, 9570, 9615, 9699, 9841, 9902, 9966.
$\mathcal{T}_5 = [125]$	217, 606, 634, 2342, 2395, 3055, 3251, 3253, 3986, 4287, 4506, 4934, 5129, 5745, 5861, 6097, 6107, 6123, 6366, 6567, 6641, 6945, 7171, 7513, 7654, 7842, 8009, 8282, 8709, 9047, 9059, 9138, 9230, 9770
$\mathcal{T}_5 = [625]$	1641, 2122, 4126, 4213, 4817, 5485, 5845, 6427, 6563, 8129, 8843.

5.0.6 Algorithme.

L'algorithme suivant permet de calcul le torsion pour un corps de nombres et un premier donné.

```

torclass(K,p)={
local(a,r2,n,h1,h2,H2,g,P,e);
a=0;
e=1;
P=idealfactor(K,p);\
for(i=1,matsize(P)[1], e=max(e,P[i,2]));
n=2+valuation(e,p);
r2=K.sign[2];
H2=bnrinit(K,p\^n);
h2=H2.clgp;
while(a==0, h1=h2;H2=bnrinit(K,p\^(n+1));h2=H2.clgp;
    if(#(h1[2])>$r2 && #(h2[2])==#(h1[2]),u1=vector(#(h1[2]));
        u2=vector(#(h2[2]));
        for(b=1,r2+1,u1[b]=valuation(h1[2][b],p)+1;
            u2[b]=valuation(h2[2][b],p));
        if(#(h1[2])>r2+1,for(t=r2+2,#(h1[2]),u1[t]=valuation(h1[2][t],p);
            u2[t]=valuation(h2[2][t],p)));
        if(u1==u2,if(#(u2)==r2+1,a=1;inv=[],if(u1[r2+1]>u1[r2+2]+1,a=1;
            inv=vector(#(h2[2])-r2-1);for(b=r2+2,#(h2[2]),inv[b-r2-1]=valuation(h2[2][b],p),n++))
            ,n++))
        ,n++));
g=\#(inv);
inva=[];
if(g>0,for(i=1,g,if(inv[i]<>0,inva=concat(inva,p^inv[i]))));
if(#(inva)>0,ordre=prod(a=1,matsize(inva)[2],inva[a]),ordre=0);
return([ordre,inva]);
}

```


Bibliographie

- [Ax65] James AX – « On the units of an algebraic number field », *Illinois J. Math.* **9** (1965), p. 584–589.
- [Bel97] Karim BELABAS – « A fast algorithm to compute cubic fields », *Math. Comp.* **115** (1997), no. 66, p. 1213–1237.
- [BNQD05] Jean-Robert BELLIARD et Thong NGUYEN QUANG DO – « On modified circular units and annihilation of real classes », *Nagoya Math. J.* **177** (2005), p. 77–115.
- [Bru67] Armand BRUMER – « On the units of algebraic number fields », *Mathematika* **14** (1967), p. 121–124.
- [BS87] Johannes BUCHMANN et Jonathan W. SANDS – « An algorithm for testing Leopoldt’s conjecture », *J. Number Theory* **27** (1987), no. 1, p. 92–105.
- [CL84] Henri COHEN et Hendrik W. Jr. LENSTRA – « Heuristics on class groups of number fields », Number theory, Noordwijkerhout 1983 (Noordwijkerhout, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1068, Springer, 1984, p. 33–62.
- [Coh00] Henri COHEN – *Advanced topics in computational number theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 193, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Col88] Pierre COLMEZ – « Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta p -adiques », *Invent. Math.* **91** (1988), no. 2, p. 371–389.
- [Del07] Christophe DELAUNAY – « Heuristics on class groups and on Tate-Shafarevich groups : the magic of the Cohen-Lenstra heuristics », Ranks of elliptic curves and random matrix theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 341, Cambridge Univ. Press, 2007, p. 323–340.

- [Eul51] Leonhard EULER – « Observationes analyticae variae de combinationibus », *Commentarii academiae scientiarum imperialis* **E158** (1751), p. 64–93.
- [FT95] Takashi FUKUDA et Hisao TAYA – « The Iwasawa λ -invariants of $\mathbf{Z}_p$ -extensions of real quadratic fields », *Acta Arith.* **69** (1995), no. 3, p. 277–292.
- [FW79] Bruce FERRERO et Lawrence C. WASHINGTON – « The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields », *Ann. of Math.* (2) **109** (1979), no. 2, p. 377–395.
- [Gra82] Georges GRAS – « Groupe de galois de la p -extension abélienne p -ramifiée maximale d’un corps de nombres », *J. Reine Angew. Math* **333** (1982), p. 86–132.
- [Gra03] — , *Class field theory*, 2003.
- [Gre76] Ralph GREENBERG – « On the Iwasawa invariants of totally real number fields », *Amer. J. Math.* **98** (1976), no. 1, p. 263–284.
- [Hal38] P. HALL – « A partition formula connected with Abelian groups », *Comment. Math. Helv.* **11** (1938), no. 1, p. 126–129.
- [HW79] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT – *An introduction to the theory of numbers*, fifth éd., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
- [Iwa59] Kenkichi IWASAWA – « On Γ -extensions of algebraic number fields », *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), p. 183–226.
- [Iwa73] — , « On $\mathbf{Z}_l$ -extensions of algebraic number fields », *Ann. of Math.* (2) **98** (1973), p. 246–326.
- [Jau85] Jean-François JAULENT – « Sur l’indépendance l -adique de nombres algébriques », *J. Number Theory* **20** (1985), no. 2, p. 149–158.
- [Jau98] — , « Théorie l -adique globale du corps de classes », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **10** (1998), no. 2, p. 355–397.
- [KS95] James S. KRAFT et René SCHOOF – « Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields », *Compositio Math.* **97** (1995), p. 135–155, Special issue in honour of Frans Oort.
- [Lan66] Serge LANG – *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.

- [Lan94] — , *Algebraic number theory*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 110, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [MNQD90] Abbas MOVAHHEDI et Thong NGUYEN-QUANG-DO – « Sur l'arithmétique des corps de nombres p -rationnels », Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88, Progr. Math., vol. 81, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 155–200.
- [Neu99] Jürgen NEUKIRCH – *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.
- [Neu13] — , *Class field theory*, Springer, Heidelberg, 2013, The Bonn lectures, edited and with a foreword by Alexander Schmidt, Translated from the 1967 German original by F. Lemmermeyer and W. Snyder, Language editor : A. Rosenschon.
- [NSW00] Jürgen NEUKIRCH, Alexander SCHMIDT et Kay WINGBERG – *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [PAR13] The PARI Group – Bordeaux, *Pari/gp, version 2.6.0*, 2013, available from <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>.
- [PV13] Frédéric PITOUN et Firmin VARESCON – « Computing the torsion of the p -ramified module. », *arXiv :1302.3099*, à paraître dans *Mathematics of computation*. (2013).
- [Sam67] Pierre SAMUEL – *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1967.
- [Ser68] Jean-Pierre SERRE – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [Tay99] Hisao TAYA – « On p -adic L -functions and $\mathbf{Z}_p$ -extensions of certain real abelian number fields », *J. Number Theory* **75** (1999), no. 2, p. 170–184.
- [Wal81] Michel WALDSCHMIDT – « Transcendance et exponentielles en plusieurs variables », *Invent. Math.* **63** (1981), no. 1, p. 97–127.

- [Was82] Lawrence C. WASHINGTON – *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Wil95] Andrew WILES – « Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem », *Ann. of Math. (2)* **141** (1995), no. 3, p. 443–551.