Thèse

présentée à

l'Université d'Artois

École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur Lille

pour obtenir le grade de

Docteur de l'université

Spécialité MATHÉMATIQUES

par

Maxime BAILLEUL

Espaces de Banach de séries de Dirichlet et leurs opérateurs de composition

Table des matières

Introduction

Cette thèse constituée de cinq parties distinctes a pour but l'étude de certains espaces de Banach de séries de Dirichlet et de leurs opérateurs de composition. Nous donnons des résultats concernant les espaces de Hardy de séries de Dirichlet puis en se basant sur les espaces classiques du disque unité nous introduisons de nouveaux espaces de type Bergman, ainsi que des espaces de Hardy-Orlicz de séries de Dirichlet. Nous entamons ensuite leur étude.

Dans la première partie de la thèse nous motivons ce travail et rappelons les résultats classiques concernant les espaces de fonctions analytiques sur le disque unité. Nous définissons les espaces de Hardy, de Bergman à poids et les espaces de Hardy-Orlicz. L'idée de cette partie est double : tout d'abord rappeler comment l'on construit les espaces de Bergman à l'aide des espaces de Hardy et les liens entre ces espaces (résultats d'injections notamment), puis nous rappelons les résultats de continuité et de compacité des opérateurs de composition sur ces espaces à l'aide de deux points de vue classiques : les fonctions de comptages de Nevanlinna et les mesures de Carleson.

Concernant les séries de Dirichlet, nous rappelons tout d'abord le principe du point de vue de Bohr : toute série de Dirichlet f peut être vue comme une série de Fourier $D(f)$ sur le polytore infini $\mathbb{T}^\infty$. Cette identification permet de définir la norme d'un élément f de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^p$ ($p \geq 1$) comme la norme de $D(f)$ dans l'espace de Hardy du polytore infini $H^p(\mathbb{T}^\infty)$. En particulier,

$$\mathcal{H}^2 = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}, \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Il est montré dans [4] que les espaces $\mathcal{H}^p$ sont des espaces de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}_{1/2} = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1/2\}$.

Soit $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ une fonction analytique. On définit l'opérateur de composition C_Φ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^p$ par $C_\Phi(f) = f \circ \Phi$, cela a un bien un sens en termes de fonctions analytiques. Le premier résultat concernant l'opérateur de composition C_Φ est le suivant. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions représentables par une série de Dirichlet convergente dans un certain demi-plan.

Théorème (ThB de [22] pour $p = 2$ et [4] pour $p \neq 2$)**.**
Soit $1 \leq p < +\infty$. Si une fonction analytique $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ induit un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}^p$ alors

(i) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où c_0 est en entier naturel et $\varphi \in \mathcal{D}$.

(ii) Φ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 0\}$, toujours noté Φ, tel que $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 \geq 1$ et $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$. De plus C_Φ est une contraction lorsque $c_0 \geq 1$.

La réciproque est vraie si $c_0 \geq 1$ ou si $c_0 = 0$ et que p est un entier pair.

On appelle c_0-symbole une fonction analytique $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ induisant un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}^2$ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$. Remarquons que cette forme particulière est une condition arithmétique permettant à la composée $f \circ \Phi$ d'être développable en série de Dirichlet pour toute série de Dirichlet f.

Concernant la compacité, F. Bayart a défini dans [6] une fonction de comptage associée à l'espace $\mathcal{H}^2$ afin d'obtenir une condition suffisante de compacité pour les c_0-symboles avec $c_0 \geq 1$. Pour $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, la fonction de comptage N_Φ est définie par

$$N_\Phi(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{a \in \mathbb{C}_+ \\ \Phi(a) = s}} \Re(a) & \text{si} \quad s \in \Phi(\mathbb{C}_+), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème obtenu est alors le suivant.

Théorème ([6], Th2)**.** *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Supposons que*

(i) $Im(\varphi)$ est borné dans $\mathbb{C}_+$.

(ii) $N_\Phi(s) = o(\Re(s))$ quand $\Re(s) \to 0$.

Alors C_Φ est compact sur $\mathcal{H}^2$.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'étude de la compacité des opérateurs de composition sur l'espace $\mathcal{H}^2$. En s'inspirant du travail de F. Bayart dans [4] et [6] concernant cet espace et des résultats concernant la norme essentielle des opérateurs de composition dans le cas du disque obtenus par J. Shapiro dans [41], on obtient le résultat suivant où $\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2,e}$ désigne la norme essentielle de l'opérateur de composition C_Φ dans $\mathcal{H}^2$.

Théorème (Théorème 5.4)**.**
Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ tel que $Im(\varphi)$ est borné. Alors

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2,e} \leq \left(2 \sup_{\mathbb{C}_+} |Im(\varphi)| + c_0\right) \limsup_{\Re(s) \to 0} \frac{N_\Phi(s)}{\Re(s)}.$$

Nous obtenons aussi une minoration de cette norme essentielle quand le symbole admet une forme particulière. Remarquons tout d'abord pour cela que d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'application évaluation en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ est bornée sur $\mathcal{H}^2$ et il est facile de voir que le noyau reproduisant K_s associé à s est définie pour $w \in \mathbb{C}_{1/2}$ par

$$K_s(w) = \zeta(\overline{s} + w).$$

Pour tout entier $l \geq 1$, on définit alors K_s^l le produit Eulérien partiel d'ordre l de la fonction Zeta qui a l'avantage d'être défini sur tout le demi-plan droit. On remarque alors que K_s^l reproduit partiellement l'évaluation en s. Pour un entier $n \geq 1$, $p^+(n)$ désigne le plus grand nombre premier divisant n et $(p_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite des nombres premiers.

Théorème (Théorème 5.9)**.**
Soient Φ un c_0-symbole où $c_0 \geq 1$ et $l \geq 1$. Supposons que $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$$

et $c_n = 0$ quand $p^+(n) > p_l$. On a alors

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2,e} \geq \limsup_{\Re(s)\to 0} \frac{\|K^l_{\Phi(s)}\|_{\mathcal{H}^2}}{\|K_s^l\|_{\mathcal{H}^2}}.$$

En particulier, si C_Φ est compact alors

$$\limsup_{\Re(s)\to 0} \frac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0.$$

Tous les résultats concernant la compacité des opérateurs de composition utilisaient la fonction de comptage N_Φ. A l'aide de résultats importants récemment obtenus dans [28], liant fonction de comptage de Nevanlinna et mesures de Carleson dans le cadre du disque unité, nous obtenons le premier résultat liant mesures de Carleson et opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on définit la fenêtre de Carleson centrée en it et de taille h par $H(t,h) := \{s \in \mathbb{C}_+, |s - it| < h\}$. Maintenant, si Φ est un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$, Φ admet des limites radiales : c'est-à-dire $\Phi^*(it) := \lim\limits_{\sigma\to 0^+} \Phi(\sigma + it)$ existe presque partout pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ notée λ. On note alors λ_Φ la mesure image de λ par Φ^* et la fonction de Carleson associée à λ_Φ est alors définie pour tout $h > 0$ par

$$\rho_\Phi(h) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \lambda_\Phi(H(t,h)).$$

Le résultat principal de cette partie est alors le suivant.

Théorème (Théorème 6.2)**.**
Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Il existe $K > 0$, indépendant de Φ, tel que pour tout h assez petit et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{s\in H(t,h/2)} N_\Phi(s) \leq K \cdot \lambda_\Phi\big(H(t, 2c_0 h)\big).$$

En particulier pour h assez petit, on a

$$\sup_{\substack{s\in\mathbb{C}_+ \\ \Re(s)<h/2}} N_\Phi(s) \leq K \cdot \rho_\Phi\big(2c_0 h\big).$$

En corollaire immédiat, on obtient grâce au théorème 5.4 une nouvelle estimation de la norme essentielle et donc une nouvelle condition suffisante de compacité pour C_Φ.

Corollaire (Corollaire 6.3).
Soit Φ un c_0-symbole où $c_0 \geq 1$ tel que $Im(\varphi)$ est borné sur $\mathbb{C}_+$. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2,e} \leq C \limsup_{h \to 0} \frac{\rho_\Phi(h)}{h}.$$

En particulier si $\rho_\Phi(h) = o(h)$ quand $h \to 0$ alors C_Φ est compact sur $\mathcal{H}^2$.

Dans la troisième partie, nous introduisons et étudions les espaces de Bergman à poids de séries de Dirichlet $\mathcal{A}^p_\mu$ en partant d'une remarque assez simple : la norme d'un élément de l'espace de Bergman du disque est égale à l'intégrale des normes dans l'espace de Hardy des dilatées de cet élément. Les séries de Dirichlet convergeant sur des demi-plans, il semble logique de définir ici la norme en utilisant des translatées axiales. Pour $\sigma > 0$ et f une série de Dirichlet, on note f_σ la série de Dirichlet définie par $f_\sigma(s) = f(\sigma + s)$.

Soient $1 \leq p < +\infty$ et μ une mesure de probabilité sur $(0, +\infty)$. Pour P un polynôme de Dirichlet, on pose

$$\|P\|_{\mathcal{A}^p_\mu} = \left(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} \, d\mu(\sigma) \right)^{1/p}.$$

Par définition, l'espace $\mathcal{A}^p_\mu$ est le complété de l'ensemble des polynômes de Dirichlet pour cette norme. A ce stade, il n'est pas clair que ce soit un espace de séries de Dirichlet. Le premier résultat concerne ce point : on montre que l'application évaluation est bornée en tout point $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ sur l'ensemble des polynômes de Dirichlet noté $\mathcal{P}$. On note $\Delta_p(s)$ la norme de l'évaluation en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ sur l'espace $\mathcal{H}^p$ et δ_s l'application évaluation en s.

Théorème (Théorème 7.6).
Soient $p \geq 1$ et μ une mesure de probabilité sur $(0, +\infty)$ telle que $0 \in Supp(\mu)$. Alors l'application évaluation est bornée sur $\mathcal{P} \cap \mathcal{A}^p_\mu$. Elle s'étend donc en un opérateur borné sur $\mathcal{A}^p_\mu$ dont la norme vérifie

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*} \leq \inf_{\eta \in (0, \Re(s) - 1/2)} \left(\frac{\|\Delta_p(\Re(s) - \cdot\,)\|_{L^{p'}([0, \Re(s) - 1/2 - \eta],\, d\mu)}}{\mu([0, \Re(s) - 1/2 - \eta])} \right).$$

On donne donc, par densité, un sens à $f(s)$ pour f appartenant à $\mathcal{A}^p_\mu$ et $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ et on prouve alors :

Théorème (Théorème 7.18).
L'espace $\mathcal{A}^p_\mu$ est un espace de séries de Dirichlet : tout élément $f \in \mathcal{A}^p_\mu$ appartient à $\mathcal{D}$ et son abscisse de convergence uniforme vérifie $\sigma_u(f) \leq 1/2$.

Nous étudions ensuite les liens entre les espaces $\mathcal{A}^p_\mu$ et les $\mathcal{H}^p$. Contrairement au cas du disque où l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ s'injecte dans l'espace de Bergman $B^{2p}(\mathbb{D})$, nous montrons le résultat suivant.

Théorème (Théorème 8.1).
Soit $p > 2$. L'identité de $\mathcal{H}^2$ vers $\mathcal{A}^p$ n'est pas bornée mais l'injection de $\mathcal{H}^2$ vers $\mathcal{A}^2$ est compacte.

Pour montrer ce théorème, on donne des estimations de la norme de puissances paires de translatées de la fonction Zeta dans l'espace $\mathcal{H}^2$, ce qui correspond à considérer des puissances du noyau reproduisant de $\mathcal{H}^2$.

Dans un dernier temps, nous étudions les opérateurs de composition sur les espaces $\mathcal{A}^p_\mu$. Nous obtenons tout d'abord un résultat de continuité.

Théorème (Théorème 9.1)**.**
Soient $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ une fonction analytique de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où $c_0 \geq 1$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. Alors C_Φ est borné sur $\mathcal{A}^p_\mu$ si et seulement si φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.

On obtient aussi une condition nécessaire et une condition suffisante de continuité dans le cas $c_0 = 0$ (Théorème 9.3). Nous généralisons ensuite le travail effectué concernant la compacité de C_Φ sur l'espace $\mathcal{H}^2$ en définissant des fonctions de comptages généralisées. Pour cela nous considérons les mesures de probabilité μ absolument continues sur $(0, +\infty)$ et de densité h. On associe alors à l'espace $\mathcal{A}^p_\mu$ le poids β_h défini pour tout $\sigma > 0$ par

$$\beta_h(\sigma) := \int_0^\sigma (\sigma - u)h(u)\,du = \int_0^\sigma \int_0^t h(u)\,dudt$$

et on donne la définition suivante.

Définition (Définition 9.6)**.**
On définit la fonction de comptage de Nevanlinna associée à une fonction $\beta : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ par

$$N_{\beta,\Phi}(s) = \left\{ \begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{\substack{a \in \mathbb{C}_+ \\ \Phi(a) = s}} \beta(\Re(a)) & si & s \in \Phi(\mathbb{C}_+), \\ 0 & sinon. & \end{array} \right.$$

On prouve alors la proposition suivante qui relie les fonctions de comptage généralisées et la fonction de comptage classique associée à $\mathcal{H}^2$.

Proposition (Proposition 9.7)**.**
Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Pour tout $s \in \mathbb{C}_+$, on a

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) = \int_0^{\Re(s)} N_{\Phi_u}(s)h(u)du$$

où Φ_u est définie par $\Phi_u(s) := \Phi(s + u)$.

Cette proposition nous permet d'obtenir des estimations en utilisant des résultats déjà connus sur la fonction de comptage classique. En utilisant alors une inégalité de Littlewood dans ce contexte (Proposition 9.8) et une formule du type Littlewood-Paley (Théorème 7.25), on obtient :

Théorème (Théorème 9.11)**.**
Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Supposons que $Im(\varphi)$ est borné sur $\mathbb{C}_+$, alors

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{A}^2_\mu,e} \leq \left(2 \sup_{\mathbb{C}_+} |Im(\varphi)| + c_0\right) \times \limsup_{\Re(s)\to 0} \frac{N_{\beta_h,\Phi}(s)}{\beta_h(\Re(s))}.$$

Nous obtenons aussi un résultat analogue pour les mesures de Carleson. Rappelons que λ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{R}$, on pose $\lambda_\mu = \lambda \otimes \mu$ et on note $\lambda_{\mu,\Phi}$ la mesure image de λ_μ par Φ. La fonction de Carleson associée, notée λ_Φ, est alors définie pour tout $h > 0$ par

$$\rho_{\mu,\Phi}(h) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \lambda_{\mu,\Phi}(H(t,h)).$$

Théorème (Théorème 9.26)**.**
Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Il existe $K > 0$ (indépendant de Φ) tel que pour tout ϑ assez petit et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{s\in H(t,\vartheta/2)} N_{\beta_h,\Phi}(s) \leq K \cdot \lambda_{\mu,\Phi}\big(H(t, 2c_0\vartheta)\big).$$

En particulier pour tout ϑ assez petit,

$$\sup_{\substack{s\in\mathbb{C}_+\\ \Re(s)<\vartheta/2}} N_{\beta_h,\Phi}(s) \leq K \cdot \rho_{\mu,\Phi}\big(2c_0\vartheta\big).$$

Corollaire (Corollaire 9.27)**.**
Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ tel que $Im(\varphi)$ est borné sur $\mathbb{C}_+$. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{A}^2_\mu,e} \leq C \limsup_{\vartheta\to 0} \frac{\rho_{\mu,\Phi}(\vartheta)}{\beta_h(\vartheta)}.$$

En particulier si $\rho_{\mu,\Phi}(\vartheta) = o(\beta_h(\vartheta))$ quand $\vartheta \to 0$ alors C_φ est compact sur $\mathcal{A}^2_\mu$.

Nous finissons cette partie en étudiant les opérateurs de composition isométriques et inversibles sur $\mathcal{A}^p_\mu$. Dans le cadre des espaces $\mathcal{H}^p$ (voir [4]), F. Bayart caractérise les opérateurs de compositions inversibles d'une part et ceux qui sont isométriques d'autre part. Dans le cas des espaces $\mathcal{A}^p_\mu$, ces opérateurs sont les mêmes.

Théorème (Théorème 9.31)**.**
Soit $1 \leq p < +\infty$ et Φ un c_0-symbole sur $\mathcal{A}^p_\mu$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) C_Φ est inversible.

(ii) C_Φ est Fredholm.

(iii) C_Φ est une isométrie.

(iv) Φ est une translation verticale : il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{C}_+$, $\Phi(s) = s + i\tau$.

Dans la quatrième partie, nous définissons une autre famille d'espaces de Bergman de séries de Dirichlet : la norme d'un élément f de $\mathcal{H}^p$ étant définie comme la norme de $D(f)$ dans $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, nous définissons alors l'espace $\mathcal{B}^p$ comme l'espace des séries de Dirichlet f telles que $D(f)$ appartient à $B^p(\mathbb{D}^\infty)$, l'espace de Bergman du polydisque infini. En utilisant les propriétés des espaces du polydisque provenant de [15], on obtient alors le résultat suivant.

Théorème (Théorème 11.13)**.**
Soient $p \geq 1$ et $f \in \mathcal{B}^p$. L'abscisse de convergence uniforme de f vérifie $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$. De plus, quand $\Re(w) > \frac{1}{2}$, on a

$$|f(w)| \leq \zeta(2Re(w))^{2/p}\, \|f\|_{\mathcal{B}^p}$$

et

$$\|\delta_w\|_{(\mathcal{B}^p)^*} = \zeta(2Re(w))^{2/p}.$$

Contrairement aux espaces $\mathcal{A}^p_\mu$, les espaces $\mathcal{B}^p$ ont un comportement vis-à-vis des espaces $\mathcal{H}^p$ analogue au cas d'une variable. Pour montrer cela on prouve un résultat d'hypercontractivité (Proposition 12.2).

Théorème (Théorème 12.8)**.**
Soit $p \geq 1$.

(i) L'injection de $\mathcal{H}^p$ vers $\mathcal{B}^{2p}$ est bornée avec norme 1.
Mais,

(ii) l'injection de $\mathcal{H}^p$ vers $\mathcal{B}^p$ n'est pas compacte. En fait, ce n'est même pas un opérateur strictement singulier.

Concernant les opérateurs de composition, nous étudions principalement la continuité. Dans le cadre des espaces $\mathcal{B}^p$ cela semble plus compliqué, on ne peut plus utiliser un outil important valable pour les espaces $\mathcal{H}^p$ et les espaces $\mathcal{A}^p_\mu$: les limites verticales. Nous développons alors la notion de limite verticale généralisée et obtenons en particulier le résultat suivant.

Corollaire (Corollaire 13.7)**.**
Soient Φ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ avec $c_0 \geq 1$ et φ définie pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ par

$$\varphi(s) = c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$$

où les q_j sont multiplicativement indépendants et $c_{q_j} \neq 0$. Alors si $\Re(c_1) \geq |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|$, C_Φ est borné sur $\mathcal{B}^p$ et est une contraction.

Dans la dernière partie nous commençons l'étude des espaces de Hardy-Orlicz $\mathcal{H}^\psi$ définis en suivant la même idée que pour les espaces $\mathcal{H}^p$: $\mathcal{H}^\psi$ est l'espace des séries de Dirichlet f telles que $D(f)$ appartiennent à l'espace de Hardy-Orlicz du polytore infini $H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$. Nous étudions alors ces espaces du polytore infini afin d'obtenir des résultats d'évaluation. Dans le cadre des espaces $\mathcal{H}^{\psi_q}$ ($q \geq 1$) où ψ_q est la fonction d'Orlicz définie pour $x \geq 0$ par $\psi_q(x) = e^{x^q} - 1$, on obtient le résultat suivant.

Théorème (Théorème 14.11)**.**
Soient $q \geq 1$ et $f \in \mathcal{H}^{\psi_q}$. Alors $\sigma_b(f) \leq 1/2$ et pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$,

$$|f(s)| \leq \psi_q^{-1}(\zeta(2\Re(s))).$$

Nous obtenons des conditions suffisantes et nécessaires de continuité pour les opérateurs de composition sur ces espaces. En particulier, sur l'espace $\mathcal{H}^{\psi_2}$, on obtient l'équivalence suivante.

Théorème (Théorème 15.7)**.**
Une fonction analytique $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ définit un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}^{\psi_2}$ si et seulement si

(i) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ *où* c_0 *est un entier naturel et* $\varphi \in \mathcal{D}$.

(ii) Φ *admet un prolongement analytique sur* $\mathbb{C}_+$*, toujours noté* Φ*, tel que* $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ *si* $c_0 \geq 1$ *et* $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ *si* $c_0 = 0$*. De plus* C_Φ *est une contraction si* $c_0 \geq 1$.

Dans les deux cas, φ *converge uniformément sur* $\mathbb{C}_\varepsilon$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

Les deux annexes contiennent des remarques volontairement isolées pour ne pas alourdir la lecture de certaines parties de cette thèse. L'une concerne l'évaluation sur des espaces de fonctions analytiques, l'autre différentes preuves possibles pour le lemme 8.2.

Les résultats de cette thèse proviennent en partie des articles suivants.

- *"Some Banach spaces of Dirichlet series"*. M. Bailleul, P. Lefèvre. Soumis pour publication.
- *"Composition operators on weighted Bergman spaces of Dirichlet series"*. M. Bailleul. Soumis pour publication.
- *"Isometric and invertible composition operators on weighted Bergman spaces of Dirichlet series"*. M. Bailleul. Soumis pour publication.

Certains résultats de cette thèse font l'objet d'articles en préparation : en particulier l'étude des multiplicateurs sur les espaces $\mathcal{A}^p_\mu$ et $\mathcal{B}^p$ et les résultats concernant les opérateurs de composition sur les espaces $\mathcal{B}^p$ et sur les espaces $\mathcal{H}^\psi$.

Notations

Ensembles

- ▷ Le tore $\mathbb{T}$ est défini par $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
- ▷ Le polytore infini $\mathbb{T}^\infty$ est défini par $\mathbb{T}^\infty = \{z = (z_1,\ z_2, \cdots),\ |z_i| = 1,\ \forall i \geq 1\}$.
- ▷ Le disque unité $\mathbb{D}$ est défini par $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. $\overline{\mathbb{D}}$ sera le disque unité fermé.
- ▷ Le polydisque infini $\mathbb{D}^\infty$ est défini par $\mathbb{D}^\infty = \{z = (z_1,\ z_2, \cdots),\ |z_i| < 1,\ \forall i \geq 1\}$.
- ▷ Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}_\theta$ est le demi-plan défini par $\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > \theta\}$. On notera $\mathbb{C}_+$ au lieu de $\mathbb{C}_0$.
- ▷ $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers. On notera $\mathbb{P}$ l'ensemble associé.
- ▷ $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Espaces de fonctions et d'opérateurs

Soit $1 \leq p < +\infty$.

- ▷ $L^p(\mathbb{T})$ (resp. $L^p(\mathbb{T}^\infty)$) est l'espace de Lebesgue associé à la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ (resp. $\mathbb{T}^\infty$), notée m (resp. $\widetilde{m}$).
- ▷ $L^p(\mathbb{D})$ (resp. $L^p(\mathbb{D}^\infty)$) est l'espace de Lebesgue associé à la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{D}^\infty$), notée A. (resp. $\widetilde{A}$).
- ▷ $\mathcal{D}$ est l'espace des fonctions représentables par une série de Dirichlet dans un certain demi-plan.
- ▷ $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polynômes de Dirichlet.
- ▷ Si X est un espace de Banach, $B(X)$ (resp. $\mathcal{K}(X)$) est l'ensemble des opérateurs bornés (resp. compacts) sur X.

Mesures

- ▷ λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
- ▷ ds représente la mesure d'aire sur $\mathbb{C}_+$.
- ▷ R est la mesure de probabilité sur $(0,1)^\infty$ définie comme le produit infini des mesures $2r_i dr_i$ sur $(0,1)$.
- ▷ Pour μ_1, μ_2 deux mesures, $\mu_1 \otimes \mu_2$ est la mesure produit.
- ▷ $Supp(\mu)$ désigne le support d'une mesure μ.

Espaces de suites

- ▷ $\mathbb{N}^{(\infty)}$ est l'ensemble des suites d'entiers naturels nulles à partir d'un certain rang.

▷ $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ est l'ensemble des suites d'entiers relatifs nulles à partir d'un certain rang.
▷ Pour $p \in (1, +\infty)$, ℓ_p est l'ensemble des suites complexes $(x_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty.$$

Fonctions classiques

▷ Pour $z \in \mathbb{D}$, on note P_z le noyau de poisson usuel défini pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$ par

$$P_z(\zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{z}\zeta|^2}.$$

▷ Soit $a \in \mathbb{D}$. On note φ_a la fonction définie pour tout $z \in \mathbb{D}$ par

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Rappelons que c'est un automorphisme du disque unité qui est son propre inverse.
▷ ζ, Γ et B sont les fonctions Zeta, Gamma et Beta d'Euler.

Autres

▷ Si f et g sont deux fonctions, $f \lesssim g$ signifie qu'il existe une constante positive C telle que $f \leq Cg$ sur un intervalle qui sera toujours précisé. La même notation sera utilisée pour deux suites (u_n) et (v_n) et signifiera que l'inégalité $u_n \leq Cv_n$ est vraie pour n assez grand. De plus on notera $u_n \approx v_n$ si $u_n \lesssim v_n$ et $v_n \lesssim u_n$.
▷ $\Re(s)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe s.

Première partie

Historique

Introduction

Cette première partie de la thèse rassemble des résultats déjà connus qui seront utilisés dans les parties suivantes, elle est aussi l'occasion de préciser quelques notations. Les preuves de certains de ces résultats seront esquissées dans l'optique de montrer leur impact sur cette thèse et permettre de mieux comprendre certains raisonnements utilisés dans les parties suivantes.

Dans le chapitre 1, nous définissons les espaces classiques de fonctions analytiques sur le disque unité et rappelons les résultats importants concernant leurs opérateurs de composition à l'aide de deux notions importantes : les fonctions de comptage et les mesures de Carleson.

Dans le chapitre 2, nous rappelons la définition des espaces de Orlicz et des espaces de Hardy-Orlicz du disque unité. Nous donnons ensuite certains résultats liés à leurs opérateurs de composition.

Dans le chapitre 3, nous rappelons certains faits sur les séries de Dirichlet et expliquons le principe du point de vue de Bohr.

Dans le chapitre 4, nous définissons les espaces de Hardy de séries de Dirichlet et rappelons les résultats principaux concernant leurs opérateurs de composition.

Chapitre 1

Espaces sur le disque unité et opérateurs de composition

1.1 Espaces de Hardy du disque

Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace de Hardy noté $H^p(\mathbb{D})$ est défini comme l'espace des fonctions analytiques $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/p} < +\infty.$$

Remarquons que pour $0 < r < 1$, si f_r est la dilatée de f par r, c'est-à-dire si $f_r(z) = f(rz)$ pour tout $|z| < 1/r$, alors cette dilatée est une fonction analytique sur un voisinage de $\mathbb{D}$ et appartient donc à l'espace $L^p(\mathbb{T})$. On a alors

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

En particulier si f admet sur $\mathbb{D}$ le développement de Taylor centré en 0 défini pour tout $z \in \mathbb{D}$ par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1.1}$$

alors

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

$H^p(\mathbb{D})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})}$ est un espace de Banach. L'espace $H^\infty(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions analytiques bornées sur le disque unité et sa norme est donnée par la norme infini sur $\mathbb{D}$. Rappelons que d'après le théorème de Fatou (voir [18],Th2.2), pour toute fonction $f \in H^p(\mathbb{D})$,

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$$

existe presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée m sur $\mathbb{T}$, $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ et l'application $f \mapsto f^*$ est une isométrie de $H^p(\mathbb{D})$ dans $L^p(\mathbb{T})$ dont l'image, notée $H^p(\mathbb{T})$, est l'adhérence (préfaible si $p = \infty$) de l'ensemble des polynômes analytiques dans $L^p(\mathbb{T})$. On identifiera par la suite $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$.

1.2 Espaces de Bergman à poids du disque

Soient $1 \leq p < +\infty$ et $\sigma : (0,1) \to (0,+\infty)$ une fonction continue appartenant à $L^1((0,1))$. L'espace de Bergman à poids noté $B^p_\sigma(\mathbb{D})$ est défini comme l'espace des fonctions analytiques $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{B^p_\sigma(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, \sigma(|z|) dA(z) \right)^{1/p} < +\infty$$

où A est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. On a aussi

$$\|f\|_{B^p_\sigma(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \|f_r\|^p_{H^p(\mathbb{T})} \; 2\sigma(r) r dr \right)^{1/p}.$$

En particulier si f a un développement du type (1.1), on a

$$\|f\|_{B^2_\sigma(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \sigma_n \right)^{1/2}$$

où $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ est la suite définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\sigma_n = 2 \int_0^1 r^{2n+1} \sigma(r) dr.$$

$B^p_\sigma(\mathbb{D})$ muni de sa norme $\| \cdot \|_{B^p_\sigma(\mathbb{D})}$ est un espace de Banach.

Exemple 1.1. Pour $\alpha > -1$, on définit la fonction poids σ_α pour tout $r \in (0,1)$ par $\sigma_\alpha(r) = (-2\log(r))^\alpha / \Gamma(\alpha+1)$. On notera alors simplement $B^p_\alpha(\mathbb{D})$ l'espace associé. Pour $p = 2$, le poids associé noté $(\sigma^\alpha_n)_{n \geq 0}$ est défini pour tout $n \geq 0$ par

$$\sigma^\alpha_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}.$$

On remarquera que le cas limite "$\alpha = -1$" correspond à l'espace $H^2(\mathbb{D})$.

Exemple 1.2 (voir [26])**.** Posons $\log_1 = \log$, $e_1 = e$ et pour tout $k \geq 0$, $\log_{k+1} = \log \log_k$ et $e_k = e^{e_k}$. On définit alors pour $p \geq 1$ et tout $r \in (0,1)$,

$$\sigma(r) = \left((1-r^2) \log \left(\frac{e}{1-r^2} \right) \log_2 \left(\frac{e_2}{1-r^2} \right) \cdots \log_p \left(\frac{e_p}{1-r^2} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Alors $\sigma_n \approx 1/\log_p(n)$ pour n assez grand. Dans ce cas, les espaces de Bergman associés sont "plus proches" de l'espace de Hardy que dans l'exemple précédent.

1.3 Injections entre espaces de Bergman et espaces de Hardy

Avec la définition des espaces $B^p(\mathbb{D})$, il est facile de voir que $H^p(\mathbb{T}) \subset B^p(\mathbb{D})$ et que de plus pour tout élément $f \in H^p(\mathbb{D})$ on a $\|f\|_{B^p(\mathbb{D})} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{T})}$. On peut en fait montrer mieux.

Théorème 1.3 ([19])**.** *Soit $p \geq 1$. On a $H^p(\mathbb{T}) \subset B^{2p}(\mathbb{D})$ et pour tout $f \in H^p(\mathbb{T})$,*

$$\|f\|_{B^{2p}(\mathbb{D})} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{T})}.$$

Cette injection n'est par contre, pas compacte.

On trouvera dans [29] des résultats récents concernant cette injection.

1.4 Opérateurs de composition

A Principe

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique et X un espace de Banach de fonctions analytiques sur le disque unité $\mathbb{D}$. Pour toute fonction $f \in X$, $f \circ \varphi$ est définie et analytique sur $\mathbb{D}$. On définit alors l'opérateur C_φ pour toute fonction $f \in X$ par $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$. La question suivante est alors naturelle :

Quel est le lien entre les propriétés géométriques de φ (que l'on appelle le symbole) et les propriétés de l'opérateur C_φ sur X ?

De nombreuses réponses ont été apportées à cette question, en particulier quand $X = H^p(\mathbb{D})$ ou $B^p_\sigma(\mathbb{D})$. Deux excellentes références sont [16] et [42].

Un résultat de base pour l'étude des opérateurs de composition est le suivant.

Proposition 1.4 (Principe de subordination de Littlewood, [16])**.**
Soient $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique telle que $\varphi(0) = 0$ et G une fonction sous-harmonique continue sur $\mathbb{D}$. Alors pour $0 < r < 1$, on a

$$\int_0^{2\pi} G\big(\varphi(re^{it})\big)dt \leq \int_0^{2\pi} G(re^{it})dt.$$

Pour $p \geq 1$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$, $G = |f|^p$ est sous-harmonique et continue sur $\mathbb{D}$ et le principe de subordination de Littlewood implique alors que C_φ est borné sur $H^p(\mathbb{D})$ quand $\varphi(0) = 0$ et que dans ce cas $\|C_\Phi\| \leq 1$. Si $\varphi(0) = a \neq 0$, il suffit de considérer l'automorphisme du disque unité φ_a et remarquer que $C_\varphi = C_{\varphi_a \circ \varphi} C_{\varphi_a^{-1}}$: dans ce cas, $\varphi_a \circ \varphi(0) = 0$ et par conséquent $C_{\varphi_a \circ \varphi}$ est borné, il reste donc à montrer que les opérateurs de composition sont bornés quand le symbole est un automorphisme du disque unité, ce qui se prouve par changement de variable. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 1.5 ([16])**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. C_φ est borné sur $H^p(\mathbb{D})$ et on a*

$$\|C_\Phi\| \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{1/p}.$$

Lorsque σ est un "bon poids" (voir [26], poids de type I), les opérateurs de composition sont aussi bornés sur $B^p_\sigma(\mathbb{D})$. Un argument dont l'idée sera exploitée plus loin permet de prouver cela grâce à la continuité des opérateurs de composition sur $H^p(\mathbb{D})$: soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique telle que $\varphi(0) = 0$. Pour $f \in B^p_\sigma(\mathbb{D})$, on a

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi\|^p_{B^p_\sigma(\mathbb{D})} &= \int_0^1 \|(f \circ \varphi)_r\|^p_{H^p(\mathbb{T})} 2r\sigma(r)dr \\ &= \int_0^1 \|f_r \circ (\varphi_r/r)\|^p_{H^p(\mathbb{T})} 2r\sigma(r)dr. \end{aligned}$$

Maintenant, sachant que $\varphi(0) = 0$, le Lemme de Schwarz implique que φ_r/r est aussi un symbole (fixant toujours 0) pour tout $r \in (0, 1)$. En appliquant le théorème 1.5, on obtient alors

$$\|f \circ \varphi\|^p_{B^p_\sigma(\mathbb{D})} \leq \int_0^1 \|f_r\|^p_{H^p(\mathbb{D})} 2r\sigma(r)dr = \|f\|^p_{B^p_\sigma(\mathbb{D})}$$

et donc C_φ est borné sur $B^p_\sigma(\mathbb{D})$ dès que $\varphi(0) = 0$. Un changement de variable donne le résultat général et c'est à ce moment que des conditions sur le poids sont demandées. Par exemple pour les espaces $B^p_\alpha(\mathbb{D})$, on trouve le résultat suivant.

Théorème 1.6 ([16])**.** *Soient $\alpha > -1$ et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Alors C_φ est borné sur $B^p_\alpha(\mathbb{D})$ et il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que*

$$\|C_\varphi\| \leq C_\alpha \times \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{\frac{2+\alpha}{p}}.$$

B Compacité et fonction de comptage

Nous nous intéressons maintenant à la compacité de l'opérateur C_φ sur un espace X de fonctions analytiques sur le disque unité. Traitons le cas où $X = H^p(\mathbb{D})$ avec $p \geq 1$.

Proposition 1.7. *Soient $1 \leq p < q < +\infty$ et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Alors C_φ est compact sur $H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si C_φ est compact sur $H^q(\mathbb{D})$.*

Il suffit donc d'étudier la compacité de C_φ sur l'espace de Hilbert $H^2(\mathbb{D})$. Une caractérisation a été obtenue par J. Shapiro dans [41] à l'aide de la fonction de comptage de Nevanlinna.

Définition 1.8. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. On définit la fonction de comptage de Nevanlinna N_φ associée à φ par*

$$N_\varphi(w) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{z \in \mathbb{D} \\ \varphi(z) = w}} -\log|z| & si \quad w \in \varphi(\mathbb{D}), \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Les deux résultats suivants sont fondamentaux.

Proposition 1.9 (Inégalité de Littlewood, [33], Th4 ou [30])**.**
Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique telle que $\varphi(0) = 0$. Alors pour tout $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$,

$$N_\varphi(w) \leq -\log|w|.$$

Théorème 1.10 (Théorème de Littlewood-Paley, [16])**.**
Soient $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique et $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors

$$||f \circ \varphi||_2^2 - |f \circ \varphi(0)|^2 = 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w).$$

Ces deux résultats permettent de retrouver la continuité des opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ quand le symbole φ vérifie $\varphi(0) = 0$. En effet pour $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a

$$\begin{aligned} ||f \circ \varphi||^2_{H^2(\mathbb{D})} &= |f \circ \varphi(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\ &= |f(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\ &\leq |f(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 (-\log|w|) dA(w) \\ &= \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})}, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du Théorème de Littlewood-Paley dans le cas où le symbole est l'identité.

Cette preuve motive l'utilisation de la fonction de comptage pour l'étude des opérateurs de composition. En particulier, les propriétés de cette fonction sont aussi très liées à la compacité de C_φ.

Soit H un espace de Hilbert. On définit la norme essentielle d'un opérateur borné T sur H par

$$\|T\|_{H,e} = d(T, \mathcal{K}(H)) = \inf\{\|T - K\|,\ K \in \mathcal{K}(H)\}.$$

Cette norme essentielle est une norme sur l'algèbre de Calkin $B(H)/\mathcal{K}(H)$.

Théorème 1.11 ([41])**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Alors*

$$\|C_\varphi\|_{H^2(\mathbb{D}),e} = \limsup_{|z|\to 1-} \left(\frac{N_\varphi(z)}{-\log|z|}\right)^{1/2}.$$

Corollaire 1.12 ([41])**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) C_φ *est compact sur* $H^2(\mathbb{D})$.

(ii) C_φ *est compact sur* $H^p(\mathbb{D})$ *pour* $p \in [1, +\infty)$.

(iii) $\displaystyle\lim_{|z|\to 1-} \frac{N_\varphi(z)}{-\log|z|} = 0.$

Dans le cas des espaces de Bergman, de nombreux résultats ont été obtenus avec l'aide de fonctions de comptage généralisées, voir par exemple [41] pour les espaces $B^2_\alpha(\mathbb{D})$ et [26] pour des espaces de Hilbert plus généraux.

C Compacité et mesure de Carleson

Les mesures de Carleson apparaissent dans [12] en 1958. Ces mesures permettent de répondre à la question suivante : soit μ une mesure sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$, l'application identité de $H^p(\mathbb{D})$ dans $L^p(\mu)$ est-elle bornée ?

Rappelons quelques notations pour répondre à cette question : soit $\xi \in \mathbb{T}$ et $0 < h < 1$. La fenêtre de Carleson $W(\xi, h)$ centrée en ξ et de taille h est l'ensemble défini par $W(\xi, h) = \{z \in \overline{\mathbb{D}},\ |z| > 1 - h \text{ et } |\arg(z\overline{\xi})| < h\}\cdot$

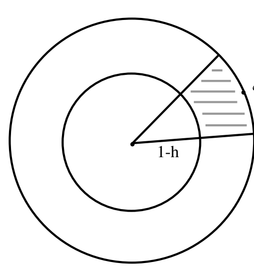

FIGURE 1.1 – $W(\xi, h)$

Théorème 1.13 (Voir par exemple [16]). *Soit μ une mesure finie sur $\overline{\mathbb{D}}$ et $p \geq 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'identité de $H^p(\mathbb{D})$ dans $L^p(\mu)$ est bornée.

(ii) $\rho_\mu(h) := \sup_{\xi\in\mathbb{T}} \mu\big(W(\xi,h)\big) = O(h)$ quand $h \to 0$.

On appelle ρ_μ la fonction de Carleson associée à μ.
Concernant la compacité, on a le résultat analogue suivant.

Théorème 1.14 (Voir par exemple [16]). *Soit μ une mesure finie sur $\overline{\mathbb{D}}$ et $p \geq 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'identité de $H^p(\mathbb{D})$ dans $L^p(\mu)$ est compacte.

(ii) $\rho_\mu(h) := \sup_{\xi\in\mathbb{T}} \mu\big(W(\xi,h)\big) = o(h)$ quand $h \to 0$.

Le lien avec les opérateurs de composition est le suivant : Soit $p \geq 1$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$, si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction analytique alors

$$\|f \circ \varphi\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|f^*\|_{L^p(\mu_\varphi)}$$

où μ_φ est la mesure-image de la mesure de Lebesgue sur le cercle unité par φ^* la fonction limite radiale de φ (qui existe car $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$). Notons ρ_φ au lieu de ρ_{μ_φ}, on a alors :

Corollaire 1.15. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique et $p \geq 1$. Alors C_φ est compact sur $H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si $\rho_\varphi(h) = o(h)$ quand $h \to 0$.*

Pour la norme essentielle, B.R. Choe a obtenu dans [14] le résultat suivant.

Théorème 1.16 ([14]). *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. On a*

$$\|C_\varphi\|_{H^2(\mathbb{D}),e} \approx \limsup_{h\to 0} \left(\frac{\rho_\varphi(h)}{h}\right)^{1/2}.$$

D Lien entre fonction de comptage et mesure de Carleson

Les théorèmes 1.11 et 1.16 impliquent :

$$\limsup_{|z|\to 1-} \frac{N_\varphi(z)}{-\log|z|} \approx \limsup_{h\to 0} \frac{\rho_\varphi(h)}{h}\cdot$$

Ce résultat a été retrouvé dans [13] sans utiliser explicitement les opérateurs de composition. Cette “égalité” laisse présager un lien entre N_φ et ρ_φ et en effet un lien fort a été prouvé dans [28] : ces deux fonctions sont en fait “équivalentes”. Rappelons que m est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

Théorème 1.17 ([28], Th1.1,).
Il existe une constante universelle $C > 1$ telle que pour toute fonction analytique $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on a

$$\frac{1}{C}\rho_\varphi\left(\frac{h}{C}\right) \leq \sup_{|w|\geq 1-h} N_\varphi(w) \leq C\rho_\varphi(Ch)$$

pour $0 < h < 1$ *assez petit.*
Plus précisément pour tout $\xi \in \mathbb{T}$, *on a*

$$\frac{1}{64} m_\varphi(W(\xi, h/64)) \leq \sup_{w \in W(\xi,h)\cap\mathbb{D}} N_\varphi(w) \leq 196 m_\varphi(W(\xi, 24h))$$

pour $0 < h < (1 - |\varphi(0)|)/16$.

Dans la partie III, on utilisera un résultat analogue que l'on formule avec d'autres fenêtres de Carleson que l'on définit maintenant : soit $\xi \in \mathbb{T}$ et $0 < h < 1$, l'ensemble $S(\xi, h)$ est défini par

$$S(\xi, h) = \{z \in \overline{\mathbb{D}},\ |z - \xi| < h\}.$$

Théorème 1.18 ([28])**.**
Pour tout $\alpha > 1$ *il existe une constante* $C_\alpha > 0$ *telle que pour toute fonction analytique* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, *on a*

$$\frac{1}{C_\alpha} m_\varphi(S(\xi, h)) \leq \sup_{w \in S(\xi,h)\cap\mathbb{D}} N_\varphi(w) \leq C_\alpha m_\varphi(S(\xi, \alpha h))$$

pour $0 < h < (1 - |\varphi(0)|)/\alpha$.

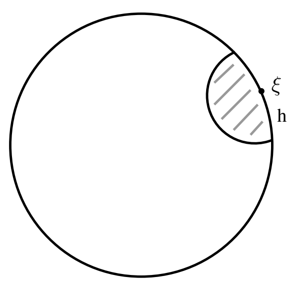

Figure 1.2 – $S(\xi, h)$

Chapitre 2

Espaces de Orlicz et Hardy-Orlicz

2.1 Espaces de Orlicz et conditions de croissance

Nous rappelons dans cette section la définition des espaces de Orlicz qui sont une généralisation des espaces L^p.

Définition 2.1. *On appelle fonction d'Orlicz toute fonction $\psi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ croissante strictement convexe vérifiant $\psi(0) = 0$ et $\psi(\infty) = \infty$.*

Définition 2.2. *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. L'espace de Orlicz $L^\psi(\Omega)$ est l'espace des classes d'équivalences (pour la relation d'égalité presque partout) de fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_\Omega \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mathbb{P} < +\infty.$$

Dans ce cas, pour toute fonction $f \in L^\psi(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^\psi(\Omega)} = \inf\left\{C > 0,\ \int_\Omega \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mathbb{P} \leq 1\right\}.$$

$L^\psi(\Omega)$ muni de cette norme est alors un espace de Banach.

Dans le cas où ψ est définie pour tout $x \in (0, +\infty)$ par $\psi(x) = x^p$ avec $p \geq 1$, on a

$$\int_\Omega \left(\frac{|f|}{C}\right)^p d\mathbb{P} \leq 1 \iff \left(\int_\Omega |f|^p d\mathbb{P}\right)^{1/p} \leq C$$

et donc l'espace $L^\psi(\Omega)$ est exactement l'espace $L^p(\Omega)$.

Définition 2.3. *L'espace de Morse-Transue $M^\psi(\Omega)$ est le sous-espace engendré par $L^\infty(\Omega)$ ou de manière équivalente le sous-espace des fonctions f pour lesquelles l'intégrale précédente est finie pour tout $C > 0$.*

On classe souvent les fonctions d'Orlicz par rapport à leur croissance et il en existe énormément. Nous ne précisons que deux conditions de croissances, celles utilisées par la suite.

Définition 2.4. *Soit ψ une fonction d'Orlicz.*

(i) On dit que ψ satisfait la condition Δ_2 et on note $\psi \in \Delta_2$ si $\psi(2x) \leq C\psi(x)$ pour une certaine constante $C > 1$ et x assez grand.

(ii) On dit que ψ satisfait la condition Δ^2 et on note $\psi \in \Delta^2$ si il existe $\alpha > 1$ tel que $\psi(x)^2 \leq \psi(\alpha x)$ pour x assez grand.

Δ_2 est une condition de croissance modérée, vérifiée notamment dans le cas des espaces L^p. La condition Δ^2 est par contre une condition de croissance rapide, on peut par exemple montrer que si $\psi \in \Delta^2$ alors $\psi(x) \geq e^{x^\beta}$ pour un certain $\beta > 1$ et x assez grand. Les fonctions ψ_q $(q > 1)$ définies par $\psi_q(x) = e^{x^q} - 1$ sont des fonctions d'Orlicz classiques vérifiant Δ^2.

2.2 Espaces de Hardy-Orlicz du disque unité

On trouve dans [27] une étude des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz. Une des motivations de cette étude est le résultat suivant.

Théorème 2.5. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Alors C_φ est compact sur $H^\infty(\mathbb{D})$ si et seulement si $\|\varphi\|_\infty < 1$.*

Ce résultat est faux sur les espaces $H^p(\mathbb{D})$, on a donc une cassure entre ces espaces et $H^\infty(\mathbb{D})$. On se pose alors la question suivante : si l'on considère une fonction d'Orlicz ψ avec une forte condition de croissante, le comportement de l'opérateur de composition sur l'espace associé se rapproche t-il du comportement sur $H^\infty(\mathbb{D})$?

Nous allons maintenant définir ces espaces à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 2.6 ([27], Prop3.1)**.** *Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Pour toute fonction d'Orlicz, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\sup\limits_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_{L^\psi(\mathbb{T})} < +\infty.$

(ii) Il existe $f^* \in L^\psi(\mathbb{T})$ tel que ses coefficients de Fourier $\hat{f}^*(n)$ soient nuls pour tout $n < 0$ et tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}^*(n) z^n.$$

De plus dans ce cas, $\|f^*\|_{L^\psi(\mathbb{T})} = \sup\limits_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_{L^\psi(\mathbb{T})}$.

Définition 2.7 ([27])**.** *Soit ψ une fonction d'Orlicz. L'espace de Hardy-Orlicz $H^\psi(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions analytiques $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telles que l'une des conditions de la proposition précédente soit vérifiée. La norme d'un élément f est alors par définition $\|f\|_{H^\psi(\mathbb{D})} = \|f^*\|_{L^\psi(\mathbb{T})}$.*

Concernant la continuité des opérateurs de composition, la proposition suivante a été prouvée.

Proposition 2.8 ([27], Prop3.12)**.** *Soient $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique et ψ une fonction d'Orlicz. Alors C_φ est borné sur $H^\psi(\mathbb{D})$ et on a*

$$\|C_\varphi\| \leq \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}.$$

Si $\psi \in \Delta^2$, il est montré dans le théorème 3.24 de [27] que C_φ est compact si et seulement si C_φ est faiblement compact sur $H^\psi(\mathbb{D})$ ce qui est aussi vrai sur $H^\infty(\mathbb{D})$, cela répond donc à la motivation initiale.

Pour l'étude de la compacité de C_φ dans le cas Orlicz, on trouve dans [27] le résultat suivant impliquant que les fonctions de Carleson sont ε-homogènes pour tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Théorème 2.9 ([27], Th4.19)**.** *Il existe une constante $k > 0$ telle que pour toute fonction analytique $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on a*

$$m_\varphi(S(\xi, \varepsilon h)) \leq k\varepsilon m_\varphi(S(\xi, h))$$

pour tout $h \in (0, 1 - |\varphi(0)|)$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Notons pour finir que la preuve du Théorème 1.17 utilise de manière importante les espaces d'Orlicz.

Chapitre 3

Séries de Dirichlet et point de vue de Bohr

3.1 Abscisses de convergence

Dans cette thèse, nous considérons les séries de Dirichlet de la forme suivante :

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \quad \text{où } s \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Ces séries font l'objet d'un grand intérêt car elles permettent de faire un lien entre l'analyse complexe et la théorie des nombres. Un des plus beaux exemples de ce lien est par exemple la preuve du théorème de la progression arithmétique due à Dirichlet en 1837.

Deux excellentes références pour l'étude des séries de Dirichlet sont [38] et [43].

Le lemme suivant est le résultat de base concernant la convergence des séries de Dirichlet.

Lemme 3.1 (Voir par exemple [38]). *Supposons que la série (3.1) converge en $s = s_0$. Alors elle converge pour tout s tel que $\Re(s) > \Re(s_0)$, avec convergence uniforme sur chaque cône*

$$S_\theta = \left\{ s \in \mathbb{C},\ \frac{|s - s_0|}{\Re(s - s_0)} \le \frac{1}{\cos(\theta)} \right\}$$

où $0 \le \theta < \pi/2$.

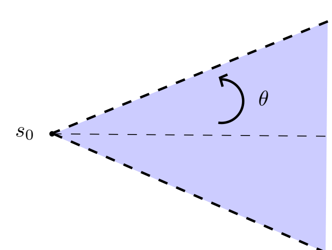

FIGURE 3.1 – S_θ

Définition 3.2. *On note σ_c l'abscisse de convergence simple de la série de Dirichlet (3.1) définie par*

$$\sigma_c = \inf\{a \in \mathbb{R},\ \textit{la série (3.1) est convergente pour } \Re(s) > a\}\cdot$$

Remarque 3.3. $\sigma_c \geq -\infty$ et grâce au lemme 3.1, on sait que si $\Re(s) > \sigma_c$ alors (3.1) converge et si $\Re(s) < \sigma_c$ alors (3.1) diverge.

Exemples 3.4.

(i) La fonction Zeta de Riemann, notée ζ et définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

admet 1 pour abscisse de convergence simple.

(ii) La fonction Zeta alternée de Riemann (appelée aussi fonction êta de Dirichlet), notée η et définie par

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

admet 0 pour abscisse de convergence simple.

Le deuxième exemple est très instructif : on remarque que la fonction Zeta alternée converge absolument sur $\mathbb{C}_1$ mais pas sur $\mathbb{C}_+$ alors que son abscisse de convergence simple vaut 0. Contrairement aux séries entières où il n'y a qu'une seule notion de rayon de convergence, dans le cadre des séries de Dirichlet il est nécessaire de définir différentes abscisses de convergence.

Définition 3.5. *Soit f une série de Dirichlet ayant pour forme (3.1). On définit trois abscisses de convergence par*

$$\begin{aligned}
\sigma_a(f) &= \inf\{a \in \mathbb{R},\ \textit{la série (3.1) converge absolument pour } \Re(s) > a\} \\
&= \textit{abscisse de convergence absolue de } f.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_u(f) &= \inf\{a \in \mathbb{R},\ \textit{la série (3.1) converge uniformément pour } \Re(s) > a\} \\
&= \textit{abscisse de convergence uniforme de } f.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_b(f) &= \inf\{a \in \mathbb{R},\ \textit{la série (3.1) possède une extension analytique bornée pour } \Re(s) > a\} \\
&= \textit{abscisse d'extension bornée de } f.
\end{aligned}$$

Remarque 3.6. On a les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_c \leq \sigma_u \leq \sigma_a \\ \sigma_a \leq \sigma_c + 1. \end{cases}$$

La fonction Zeta alternée nous montre que la deuxième inégalité est optimale.

Concernant $\sigma_b(f)$, un résultat très important dû à Bohr est le suivant :

Théorème 3.7 ([9] ou [38],Th6.2.3)**.**
Soit f une série de Dirichlet, on a $\sigma_b(f) = \sigma_u(f)$.

3.2 Point de vue de Bohr

Dans cette section, nous rappelons un outil essentiel pour l'étude des séries de Dirichlet : le point de vue de Bohr. Notons $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers.

Tout entier $n \geq 2$ admet une décomposition en produit de facteurs premiers et celle-ci est unique (à l'ordre près), il existe donc $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \geq 0$ tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Considérons alors une série de Dirichlet f de la forme (3.1) et la suite $z = (z_1, z_2, \cdots) = (p_1^{-s}, p_2^{-s}, \cdots)$ où $s \in \mathbb{C}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k})^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (p_1^{-s})^{\alpha_1} \cdots (p_k^{-s})^{\alpha_k} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

A chaque série de Dirichlet f de type (3.1), on associe alors une série de Fourier $D(f)$ définie pour tout $z \in \mathbb{T}^\infty$ par

$$D(f)(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k}.$$

Ce point de vue est loin d'être purement formel, on l'utilisera en particulier dans les parties IV et V. Il permet aussi de montrer les deux inégalités suivantes.

Théorème 3.8 (Inégalité de Bohr ([38], Th4.4.1))**.**
Soit f une série de Dirichlet de la forme (3.1) telle que $\sigma_u(f) = 0$. Alors

$$\sum_{n\geq 1} |a_{p_n}| \leq \sup_{s\in\mathbb{C}_+} |f(s)|.$$

Théorème 3.9 ([38], Th4.4.2)**.** *Soit f une série de Dirichlet, on a l'inégalité suivante*

$$\sigma_a(f) \leq \sigma_u(f) + 1/2.$$

Bohr s'est alors posé la question suivante : 1/2 est-il optimal dans l'inégalité précédente ? La réponse est oui et la preuve est ancienne et compliquée (voir [8]). On trouvera aussi dans le chapitre 6 de [38] une reformulation plus récente à l'aide d'ensembles de Sidon qui a fait l'objet d'intenses recherche ces dernières années (voir [17] pour des résultats récents).

3.3 Limites verticales

Commençons cette section par l'identification suivante : $\mathbb{T}^\infty$ peut être vu comme le groupe dual de $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ (muni de la topologie discrète). En effet soit $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, on pose $\chi(1) = 1$ et pour $n \geq 2$, en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, on pose

$$\chi(n) = \chi_1^{\alpha_1} \cdots \chi_k^{\alpha_k}.$$

χ est alors un caractère sur l'ensemble des entiers positifs. En posant $\chi(n^{-1}) = \chi(n)^{-1}$ et par multiplicativité, χ devient alors un caractère sur $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$.

Soit f une série de Dirichlet absolument convergente dans un demi-plan $\mathbb{C}_\theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on définit la série f_τ en posant $f_\tau(s) = f(s + i\tau)$ pour tout $s \in \mathbb{C}_\theta$. D'après le théorème de Montel, pour toute suite de réels $(\tau_n)_{n\geq 1}$, il existe une sous-suite $(\tau_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $(f_{\tau_{n_k}})_{k\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}_\theta$ vers une fonction h. On dit que h est une limite verticale de f.

Pour $n \geq 1$, on note e_n la série de Dirichlet définie pour $s \in \mathbb{C}$ par $\mathrm{e}_n(s) = n^{-s}$.

Lemme 3.10 ([23], Lem2.4)**.** *Soit f une série de Dirichlet du type (3.1) absolument convergente dans un demi-plan $\mathbb{C}_\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$). Alors les limites verticales de f sont de la forme*

$$f_\chi = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \chi(n) \mathrm{e}_n$$

où $\chi \in \mathbb{T}^\infty$.

Chapitre 4

Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$ et opérateurs de composition

4.1 L'espace de Hardy $\mathcal{H}^2$

L'espace de Hardy $\mathcal{H}^2$ a été défini dans [23] afin de résoudre un problème associé à certaines bases de Riesz de l'espace $L^2((0,1))$.

Définition 4.1. *L'espace $\mathcal{H}^2$ est l'espace des séries de Dirichlet à coefficients de carré-sommable, c'est à dire : $f \in \mathcal{H}^2 \iff f$ est de la forme (3.1) et $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$. Dans ce cas, on pose*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

$(\mathcal{H}^2, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^2})$ est alors un espace de Hilbert où le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{H}^2$ est celui des suites de coefficients de ces éléments dans ℓ_2.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre facilement que l'abscisse de convergence absolue d'un élément de $\mathcal{H}^2$ est inférieure ou égale à $1/2$ et cette borne est optimale, il suffit en effet de considérer la série de Dirichlet f définie par

$$f = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}_n}{\log(n)n^{1/2}}.$$

Elle appartient à $\mathcal{H}^2$ et diverge en $s = 1/2$.

L'application évaluation en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ étant bornée, d'après le théorème de Riesz il existe $K_s \in \mathcal{H}^2$ tel que pour tout $f \in \mathcal{H}^2$,

$$f(s) = < f, K_s > \cdot$$

Il est alors facile de voir que pour tout s, $w \in \mathbb{C}_{1/2}$,

$$K_s(w) = \zeta(\overline{s} + w).$$

De plus, la suite $(\mathrm{e}_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}^2$.

4.2 Espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$

F. Bayart a introduit dans [4] les espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$ $(1 \leq p < +\infty)$ de séries de Dirichlet qui généralisent l'espace $\mathcal{H}^2$. Rappelons que sur les espaces $H^p(\mathbb{D})$, la norme est donnée par intégration sur des cercles, il semble ici naturel compte-tenu des domaines de convergence des séries de Dirichlet qui sont des demi-plans, d'intégrer sur des droites. Posons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de Dirichlet considérons $P \in \mathcal{P}$. Alors

$$\|P\|_{\mathcal{H}^p} := \left(\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |P(it)|^p dt \right)^{1/p}.$$

La théorie des fonctions presque périodiques de Bohr (voir [10]) justifie que $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^p}$ est bien une norme sur $\mathcal{P}$.

On définit alors l'espace $\mathcal{H}^p$ comme le complété de $\mathcal{P}$ pour $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^p}$. Pour obtenir des propriétés des espaces $\mathcal{H}^p$, F. Bayart a utilisé le point de vue de Bohr afin d'identifier ces espaces avec des espaces du polytore infini. Faisons quelques rappels sur ces espaces (voir [15] pour plus de détails).

Soit $1 \leq p < \infty$. $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est l'ensemble des fonctions F de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$ (muni de $\widetilde{m}$) telles que les coefficients de Fourier $\hat{F}(n)$ soient nuls pour $n \in \mathbb{Z}^{(\infty)} \setminus \mathbb{N}^{(\infty)}$. En un sens, ce sont les fonctions "analytiques" de $L^p(\mathbb{T}^\infty)$. L'espace $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ est aussi le complété de l'ensemble des polynômes analytiques $D(\mathcal{P})$. Le résultat suivant est crucial.

Théorème 4.2 ([15], Th8.1)**.** *Soit $1 \leq p < +\infty$. L'application évaluation au point $z \in \mathbb{D}^\infty$ définie intialement sur $D(\mathcal{P})$ s'étend continûment à $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ si et seulement si $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. Dans ce cas, pour $F \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$ et $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$,*

$$|F(z)|^p \leq \frac{\|F\|^p_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}}{\prod_{k=1}^{+\infty}(1 - |z_k|^2)}$$

et F est analytique sur $\mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$.

Pour $P \in \mathcal{P}$, $D(P)$ est un élément de $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ et d'après le lemme 3 de [4], on a

$$\|P\|_{\mathcal{H}^p} = \|D(P)\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}.$$

La preuve repose sur des éléments de théorie ergodique, on utilisera ces mêmes éléments dans les parties IV et V. Une conséquence directe est alors :

Théorème 4.3 ([4], Th2)**.** *$D : \mathcal{P} \to H^p(\mathbb{T}^\infty)$ s'étend en un isomorphisme isométrique de $\mathcal{H}^p$ sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$.*

Tout élément de $\mathcal{H}^p$ est ainsi représentable par une série de Dirichlet et pour $p = 2$ nous retrouvons l'espace $\mathcal{H}^2$ déjà défini.

La question de la convergence des séries de Dirichlet dans ces espaces $\mathcal{H}^p$ se pose alors. A l'aide du théorème 4.2 et de l'identification entre $\mathcal{H}^p$ et $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, le résultat suivant est alors obtenu :

Théorème 4.4 ([4],Th3)**.** *Soient $1 \leq p < +\infty$ et $f \in \mathcal{H}^p$. Alors $\sigma_b(f) \leq 1/2$ et si $\Re(w) > 1/2$,*

$$|f(w)|^p \leq \|f\|_{\mathcal{H}^p}^p \zeta(2\Re(w)).$$

De plus si l'on note δ_w l'application évaluation au point $w \in \mathbb{C}_{1/2}$, alors $\|\delta_w\|_{(\mathcal{H}^p)^*} = \zeta(2\Re(w))^{1/p}$.

Ainsi les espaces $\mathcal{H}^p$ sont des espaces de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$ et F. Bayart a montré que ce domaine était optimal (voir la remarque suivant le Corollaire 3.5 dans [5]).

Concernant les limites verticales des éléments de $\mathcal{H}^p$, on a la propriété suivante qui sera très utile pour l'étude des opérateurs de composition.

Théorème 4.5 ([5], Th2.11)**.** *Soient $1 \leq p < +\infty$ et $f \in \mathcal{H}^p$. Alors pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ (par rapport à $\widetilde{m}$), f_χ converge sur $\mathbb{C}_+$.*

Le résultat suivant sera aussi très utile par la suite.

Lemme 4.6 ([6])**.** *Soient η une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ et f de la forme (3.1). Alors*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_\chi(it)|^2 d\eta(t) d\widetilde{m}(\chi).$$

Comment définir maintenant l'espace $\mathcal{H}^\infty$? Suivons le même raisonnement : $H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ est l'espace des fonctions $F \in L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ telles que $\hat{F}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}^{(\infty)} \setminus \mathbb{N}^{(\infty)}$. On définit alors $\mathcal{H}^\infty$ comme le sous-espace de $\mathcal{H}^1$ vérifiant $D(\mathcal{H}^\infty) = H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Le théorème suivant est alors assez déconcertant.

Théorème 4.7 ([5], Th2.7)**.**

(i) $\mathcal{H}^\infty$ est l'ensemble des fonctions analytiques bornées dans $\mathbb{C}_+$ représentables par une série de Dirichlet convergente dans un demi-plan.

(ii) $\mathcal{H}^\infty$ est l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{H}^p$ pour $1 \leq p < +\infty$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions m définies sur $\mathbb{C}_{1/2}$ telles que $mf \in \mathcal{H}^p$ dès que $f \in \mathcal{H}^p$.

Une fonction de $\mathcal{H}^\infty$ est donc définie sur $\mathbb{C}_+$ alors que les fonctions de $\mathcal{H}^p$ sont elles définies sur $\mathbb{C}_{1/2}$. Il y a donc une frontière à traverser pour passer des espaces $\mathcal{H}^p$ à $\mathcal{H}^\infty$. Remarquons que d'après le théorème 4.5, les limites verticales d'éléments de $\mathcal{H}^p$ sont définies sur $\mathbb{C}_+$ presque partout et vont permettre, parfois, de traverser cette frontière.

Par ailleurs, l'étude des espaces de Hardy-Orlicz de séries de Dirichlet donne l'espoir de mieux comprendre le passage de cette frontière (voir partie V).

4.3 Opérateurs de composition sur les espaces $\mathcal{H}^p$

A Continuité des opérateurs de composition

Soit $1 \leq p < +\infty$. Les éléments de $\mathcal{H}^p$ étant des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$, on considère une fonction analytique $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ et pour $f \in \mathcal{H}^p$, on pose $C_\Phi(f) = f \circ \Phi$. Le principal résultat concernant la continuité de C_Φ est le théorème suivant. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions représentables par une série de Dirichlet dans un certain demi-plan.

Théorème 4.8 (ThB de [22] pour $p = 2$ et [4] pour $p \neq 2$)**.**
Soit $1 \leq p < +\infty$. Si une fonction analytique $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ définit un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}^p$ alors

(i) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où c_0 est en entier naturel et $\varphi \in \mathcal{D}$.

(ii) Φ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}_+$, toujours noté Φ, tel que $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 \geq 1$ et $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$.
De plus C_Φ est une contraction si $c_0 \geq 1$.

La réciproque est vraie si $c_0 \geq 1$ ou si $c_0 = 0$ et que p est un entier pair.

Précisons que la condition (i) est une condition arithmétique et que la condition (ii) est une condition de norme.

On appellera désormais c_0-symbole toute fonction analytique Φ de la forme précédente induisant un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}^2$.

Il existe en fait un renforcement de ce théorème nous donnant une indication supplémentaire sur φ. C'est une conséquence du résultat suivant.

Théorème 4.9 (Th3.1 de [39])**.** *Suppons que ψ est une fonction analytique sans zéros dans $\mathbb{C}_+$ telle que le conjugué harmonique de* $\log(|\psi|)$ *soit borné dans $\mathbb{C}_+$. Si ψ peut être représentée par une série de Dirichlet convergente sur un demi-plan $\mathbb{C}_{\sigma_0}$ alors la série de Dirichlet est uniformément convergente sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Ce résultat permet d'affirmer que dans l'équivalence précédente, φ est en fait uniformément convergente sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et que de plus $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ quand $c_0 \geq 1$ et $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$. Une conséquence forte utile est le lemme suivant.

Lemme 4.10 ("Lemme de Schwarz")**.**
Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Alors pour tout $\sigma > 0$, $\Phi(\mathbb{C}_\sigma) \subset \mathbb{C}_\sigma$ et le symbole $\widetilde{\Phi}$ définie par $\widetilde{\Phi}(s) = \Phi(\sigma + s) - \sigma$ induit donc un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}^p$ ($p \geq 1$), avec norme plus petite que 1.

Démonstration. Soit $\sigma > 0$ et $s \in \mathbb{C}_\sigma$. On a

$$\Re(\Phi(s)) = c_0 \Re(s) + \Re(\varphi(s)) > c_0 \Re(s) > \sigma$$

car $c_0 \geq 1$ et $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. La fin de l'énoncé du théorème est alors une conséquence immédiate du théorème 4.8. $\square$

B Compacité et fonction de comptage

Pour étudier la compacité des opérateurs de composition, F. Bayart a introduit comme dans le cas du disque unité une fonction de comptage.

Définition 4.11. *Soit $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ une fonction analytique. La fonction de comptage associée à Φ est définie par*

$$N_\Phi(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{a \in \mathbb{C}_+ \\ \Phi(a) = s}} \Re(a) & \text{si} \quad s \in \Phi(\mathbb{C}_+), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A priori, N_Φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Remarquons que $\Re(a)$ correspond à la distance de a au bord de $\mathbb{C}_+$. Cette définition est aussi justifiée par le résultat suivant.

Proposition 4.12 (Formule de Littlewood-Paley, [6], Prop2)**.**
Soit η une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathcal{H}^2$, on a

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 = |f(+\infty)|^2 + 4 \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \sigma |f_\chi'(\sigma + it)|^2 \, d\eta(t) d\sigma d\widetilde{m}(\chi),$$

$f(+\infty)$ étant égal à a_1 si f est de la forme (3.1).

La condition suffisante suivante a alors été obtenue.

Théorème 4.13 ([6], Th2)**.** *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Supposons que*

(i) $Im(\varphi)$ est borné dans $\mathbb{C}_+$.

(ii) $N_\Phi(s) = o(\Re(s))$ quand $\Re(s) \to 0$.

Alors C_Φ est compact sur $\mathcal{H}^2$.

Dans le théorème précédent, le fait que $c_0 \geq 1$ est crucial. Comme condition nécessaire, on a le résultat suivant.

Théorème 4.14 ([6], Th3)**.** *Soient $l \geq 1$ et Φ un c_0-symbole. On suppose que les coefficients c_n sont nuls si le plus grand nombre premier dans la décomposition de n, noté $p^+(n)$, est strictement plus grand que p_l. Alors si C_Φ est compact sur $\mathcal{H}^2$, on a*

(i) $\displaystyle\lim_{\Re(s)\to 0} \frac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0$ *si* $c_0 \geq 1$.

(ii) $\displaystyle\lim_{\Re(s)\to 0} \Re(s)^l \zeta(2\Re(\Phi(s))) = 0$ *si* $c_0 = 0$.

Malheuresement aucune condition nécessaire et suffisante n'existe dans le cadre général. On donnera plus tard une telle condition dans un cas particulier. On notera aussi que l'on ne sait pas si la compacité de C_Φ sur $\mathcal{H}^2$ est équivalente à la compacité sur $\mathcal{H}^p$ pour $p \geq 1$.

Pour finir ce chapitre, signalons que l'on trouve dans [39] de nombreux résultats récents concernant les opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$. En particulier, des estimations concernant les nombres d'approximation de C_Φ sont données et on trouvera des exemples d'opérateurs de composition compacts et/ou dans les classes de Schaten S_p.

Deuxième partie

Opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^2$

Introduction

Dans cette seconde partie nous donnons quelques résultats nouveaux concernant la compacité des opérateurs de composition sur l'espace $\mathcal{H}^2$.

Dans le premier chapitre, nous donnons des estimations de la norme essentielle à l'aide de la fonction de comptage et des noyaux reproduisants.

Dans le second chapitre, nous définissons la notion de mesure de Carleson pour l'espace $\mathcal{H}^2$ et obtenons une majoration de la fonction de comptage par une fonction de Carleson grâce au théorème 1.17. Ainsi une nouvelle condition suffisante de compacité est obtenue grâce à une condition de type Carleson. Nous étudions aussi l'homogénéité de la fonction de Carleson dans ce cadre.

Chapitre 5

Compacité et fonction de comptage

Le but de ce chapitre est de donner des estimations de la norme essentielle de C_Φ sur $\mathcal{H}^2$.
Avant d'énoncer le théorème principal, nous avons besoin de rappeler certaines propriétés du symbole.

5.1 Propriétés de Φ et de ses limites verticales

Soit Φ un c_0-symbole. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, on définit l'application Φ_τ par $\Phi_\tau(s) = c_0 s + \varphi(s + i\tau)$. Alors si $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, la fonction Φ_χ definie par

$$\Phi_\chi(s) = c_0 s + \varphi_\chi(s)$$

est une limite verticale de $(\Phi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$.

En particulier si $c_0 \geq 1$, nous savons que $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ et cette propriété reste vraie pour toutes les limites verticales (voir la proposition 4.1 de [22] en utilisant le fait que φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$). On a donc $\Phi_\chi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ pour tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$.

Si $f \in \mathcal{H}^2$ et Φ est un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$, $f \circ \Phi \in \mathcal{H}^2$ et d'après le théorème 4.5, $(f \circ \Phi)_\chi$ converge sur $\mathbb{C}_+$ pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ (par rapport à $\widetilde{m}$). D'après la proposition 4.3 de [22], on a alors pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$,

$$(f \circ \Phi)_\chi(s) = f_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi(s). \tag{5.1}$$

Mais c_0 étant supérieur ou égal à 1, $\Phi_\chi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ et $f_{\chi^{c_0}}$ converge sur $\mathbb{C}_+$ pour presque tout χ (l'application $\chi \to \chi^{c_0}$ preserve la mesure) et finalement l'égalité (5.1) est vraie pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ et tout $s \in \mathbb{C}_+$.

Intéressons nous maintenant au lien entre les propriétés de N_{Φ_χ} et celles de N_Φ. Cette étude a déjà été commencée dans [6]. Les deux prochains résultats sont donc essentiellement une reformulation de résultats déjà obtenus par F. Bayart.

Proposition 5.1. *Soient $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ et $\Phi_k : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ où $k \geq 0$, des fonctions analytiques. Supposons que $(\Phi_k)_{k \geq 0}$ converge uniformément vers Φ sur tout compact de $\mathbb{C}_+$, alors pour tout $s \in \mathbb{C}_+$,*

$$N_\Phi(s) \leq \liminf_{k \to +\infty} N_{\Phi_k}(s).$$

Démonstration. Fixons $s \in \Phi(\mathbb{C}_+)$ (si $s \notin \Phi(\mathbb{C}_+)$, le résultat est évident) et $\varepsilon > 0$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}_+$ satisfaisant $\Phi(a_i) = s$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\delta > 0$ tel que $n\delta < \varepsilon$. $(\Phi_k)_{k\geq 0}$ converge uniformément vers Φ sur tout compact de $\mathbb{C}_+$ et en particulier sur chaque disque ouvert $D(a_i, \delta)$ de centre a_i et de rayon δ. Par le lemme d'Hurwitz, il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $k \geq K$, $s \in \Phi_k(D(a_i, \delta))$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Fixons maintenant $k \geq K$, il existe $a_1^k \in D(a_1, \delta)$, ... , $a_n^k \in D(a_n, \delta)$ tels que $\Phi(a_i^k) = s$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a alors

$$\Re(a_1^k) + \cdots + \Re(a_n^k) \geq \Re(a_1) + \cdots + \Re(a_n) - n\delta$$

et donc

$$\begin{aligned} \Re(a_1) + \cdots + \Re(a_n) &\leq n\delta + \Re(a_1^k) + \cdots + \Re(a_n^k) \\ &\leq \varepsilon + N_{\Phi_k}(s). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $k \geq K$,

$$\Re(a_1) + \cdots + \Re(a_n) \leq \varepsilon + \liminf_{k\to+\infty} N_{\Phi_k}(s)$$

et puisque n et ε sont arbitraires, le résultat est prouvé. $\square$

Corollaire 5.2. *Soit Φ un c_0-symbole où $c_0 \geq 1$. Supposons que*

$$\sup_{\Re(s)>0} \frac{N_\Phi(s)}{\Re(s)} = C < +\infty,$$

alors

$$\sup_{\chi\in\mathbb{T}^\infty} \sup_{\Re(s)>0} \frac{N_{\Phi_\chi}(s)}{\Re(s)} = C.$$

Démonstration. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, il est facile de voir que $N_{\Phi_\tau}(s) = N_\Phi(s+ic_0\tau)$. Par conséquent

$$\sup_{\Re(s)>0} \frac{N_{\Phi_\tau}(s)}{\Re(s)} = C.$$

Maintenant pour $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, Φ_χ est la limite verticale d'une suite $(\Phi_{\tau_n})_{n\geq 0}$ où $(\tau_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ et alors par la proposition précédente

$$\sup_{\Re(s)>0} \frac{N_{\Phi_\chi}(s)}{\Re(s)} \leq C$$

et donc

$$\sup_{\chi\in\mathbb{T}^\infty} \sup_{\Re(s)>0} \frac{N_{\Phi_\chi}(s)}{\Re(s)} \leq C.$$

On obtient l'égalité en remarquant que $\Phi = \Phi_\chi$ avec $\chi = (1, 1, \cdots)$. $\square$

Remarque 5.3. Dans le corollaire précédent, on peut considèrer la borne supérieure uniquement sur une bande du type $\{s \in \mathbb{C}_+, \Re(s) < \theta\}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

5.2 Théorème principal

Théorème 5.4. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ tel que $Im(\varphi)$ est borné. Alors*

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2,e} \leq \left(2\sup_{\mathbb{C}_+}|Im(\varphi)| + c_0\right)\limsup_{\Re(s)\to 0}\frac{N_\Phi(s)}{\Re(s)}.$$

En corollaire, on retrouve le théorème 4.13. Pour obtenir ce résultat, on suit l'idée de J. Shapiro dans [41] qui a permis d'obtenir le théorème 1.11.

Proposition 5.5 ([41], Prop5.1)**.** *Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert H et $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite d'opérateurs compacts auto-adjoints sur H. Posons $R_n = I - K_n$ et supposons que $\|R_n\| = 1$ pour tout $n \geq 1$ et que $(R_n)_{n\geq 1}$ converge ponctuellement vers 0. Alors*

$$\|T\|_{H,e} = \lim_{n\to+\infty}\|TR_n\|.$$

Preuve du théorème 5.4. Pour $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{H}^2$ de la forme (3.1), on pose

$$\begin{cases} K_n(f) &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \\ R_n(f) &= (I - K_n)(f) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k e_k. \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, K_n est un opérateur compact auto-adjoint sur $\mathcal{H}^2$ avec norme 1 car K_n est une projection sur un sous-espace de dimension finie. Chaque opérateur R_n est aussi de norme 1 pour la même raison et (R_n) converge clairement ponctuellement vers 0. D'après la proposition 5.5 on a alors

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2,e} = \lim_{n\to+\infty}\|C_\Phi R_n\| = \lim_{n\to+\infty}\left\{\sup_{\|f\|_{\mathcal{H}^2}\leq 1}\|C_\Phi(R_n(f))\|_{\mathcal{H}^2}\right\}.$$

On considère $\Omega = (0, +\infty) \times (0, 1)$ muni de la mesure d'aire. En appliquant la formule de Littlewood-Paley sur $\mathcal{H}^2$ (Proposition 4.12) avec η la mesure de Lebesgue normalisée sur $(0, 1)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|C_\Phi(R_n(f))\|^2_{\mathcal{H}^2} &= |R_n(f)\circ\Phi(+\infty)|^2 \\ &+ 4\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_\Omega \Re(s)|(R_n(f)\circ\Phi)'_\chi(s)|^2\, ds d\widetilde{m}(\chi). \end{aligned}$$

Notons que $R_n(f)\circ\Phi(+\infty) = 0$ pour tout $n \geq 2$ car $c_0 \geq 1$ et donc $\Phi(+\infty) = +\infty$. Maintenant, on sait que $(R_n(f)\circ\Phi)_\chi = R_n(f)_{\chi^{c_0}}\circ\Phi_\chi$ sur $\mathbb{C}_+$ pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ (par rapport à $\widetilde{m}$), donc

$$\|C_\Phi(R_n(f))\|^2_{\mathcal{H}^2} = 4\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_\Omega \Re(s)|R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(\Phi_\chi(s))|^2|\Phi'_\chi(s)|^2\, ds d\widetilde{m}(\chi).$$

On effectue alors le changement de variables $w = \Phi_\chi(s)$. Bien sur Φ_χ n'est pas nécessairement injective mais on peut tout de même utiliser une formule de changement de variable "généralisée" utilisant la fonction de comptage (voir [21] par exemple). On obtient alors

$$\iint_\Omega |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(\Phi_\chi(s))|^2|\Phi'_\chi(s)|^2\Re(s)\, ds = \iint_{\Phi_\chi(\Omega)} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\Phi_\chi}(s)\, ds.$$

$Im(\varphi)$ est borné, il existe donc $A > 0$ tel que $|Im(\varphi)| < A$. La même inégalité est vraie pour φ_χ pour tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ au lieu de φ : en effet φ_χ est une limite verticale de φ et les translatées de φ ont évidemment les mêmes propriétés de bornitude que φ. Maintenant $s \in \Omega$ implique $Im(s) \in (0,1)$ et comme $w = \Phi_\chi(s)$, $Im(w) = c_0 Im(s) + Im(\varphi_\chi(s))$ et donc $Im(w) \in [-A, A + c_0]$. Finalement si on note $Q = (0, +\infty) \times (-A, A + c_0)$ que l'on munit encore de la mesure d'aire, on a

$$\int_\Omega |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(\Phi_\chi(s))|^2 |\Phi'_\chi(s)|^2 \Re(s)\, ds \leq \iint_Q |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\Phi_\chi}(s)\, ds.$$

Fixons maintenant $\theta > 0$. On note $Q = Q_\theta \cup \tilde{Q}_\theta$ où $Q_\theta = (0, \theta) \times (-A, A + c_0)$ et $\tilde{Q}_\theta = (\theta, +\infty) \times (-A, A + c_0)$. Nous allons découper l'intégrale précédente en deux parties. Soit γ_θ défini par

$$\gamma_\theta = \sup_{\chi \in \mathbb{T}^\infty} \left\{ \sup_{0 < Re(s) < \theta} \frac{N_{\Phi_\chi}(s)}{\Re(s)} \right\} = \sup_{0 < Re(s) < \theta} \frac{N_\Phi(s)}{\Re(s)}.$$

La deuxième égalité étant vraie grâce au corollaire 5.2. On a

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\Phi_\chi}(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi) \leq \gamma_\theta \int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 \Re(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} &\sup_{\|f\|_{\mathcal{H}^2} \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\Phi_\chi}(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi) \right\} \\ &\leq \gamma_\theta \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}^2} \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 \Re(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi) \right\} \\ &\leq \gamma_\theta \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}^2} \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{Q_\theta} |f'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 \Re(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi) \right\}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est justifiée par le fait que si f est dans la boule unité de $\mathcal{H}^2$, $R_n(f)$ aussi et on prend donc la borne supérieure sur un ensemble plus grand. Finalement, en utilisant une fois de plus la formule de Littlewood-Paley avec cette fois-ci la mesure de Lebesgue normalisée sur $(-A, A + c_0)$ et le fait que l'application $\chi \to \chi^{c_0}$ preserve la mesure, on obtient

$$\sup_{\|f\|_{\mathcal{H}^2} \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\Phi_\chi}(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi) \right\} \leq (2A + c_0)\gamma_\theta.$$

Maintenant nous obtenons une majoration de la deuxième intégrale. D'après la proposition 3 de [6] (qui est un analogue de l'inégalité de Littlewood dans le cadre des espaces de séries de Dirichlet), on a pour tout $s \in \mathbb{C}_+$,

$$N_\Phi(s) \leq \frac{\Re(s)}{c_0}.$$

Cette inégalité est vraie pour tout c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ et en particulier pour les limites verticales Φ_χ. On a alors

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{\tilde{Q_\theta}} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\Phi_\chi}(s)\, dsd\widetilde{m}(\chi) \leq \int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{\tilde{Q_\theta}} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 \frac{\Re(s)}{c_0}\, dsd\widetilde{m}(\chi) \tag{5.2}$$

Maintenant pour $\sigma > 0$, d'après le lemme 4.6 appliqué à f'_σ pour tout élément $f \in \mathcal{H}^2$ de la forme (3.1) et pour toute mesure de probabilité η sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f'_\chi(\sigma + it)|^2 d\eta(t) d\widetilde{m}(\chi) = \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 k^{-2\sigma} log^2(k).$$

Grâce à ce lemme et à (5.2), on a

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_{\tilde{Q_\theta}} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\Phi_\chi}(s)\, dsd\widetilde{m}(\chi) \leq \frac{2A + c_0}{c_0} \int_\theta^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sigma |a_k|^2 k^{-2\sigma} log^2(k) d\sigma.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $K = K_\theta > 0$ tel que pour $k \geq K$,

$$\int_\theta^{+\infty} \sigma k^{-2\sigma} log^2(k) d\sigma \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq K$, on obtient alors

$$\frac{2A + c_0}{c_0} \int_\theta^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sigma |a_k|^2 k^{-2\sigma} log^2(k) d\sigma \leq \frac{2A + c_0}{c_0} \times \varepsilon$$

car nous travaillons avec des fonctions de $\mathcal{H}^2$ avec norme plus petite que 1. Maintenant en sommant les deux intégrales, on obtient que pour $n \geq K$,

$$\|C_\Phi R_n\| \leq (2A + c_0)\gamma_\theta + \frac{2A + c_0}{c_0} \times \varepsilon.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2, e} &= \lim_{n \to +\infty} \|C_\Phi R_n\| \\ &\leq (2A + c_0)\gamma_\theta + \frac{2A + c_0}{c_0} \times \varepsilon \end{aligned}$$

et puisque ε et θ sont arbitraires, on obtient le résultat. $\square$

5.3 Condition nécessaire de compacité

Dans cette section, nous obtenons une minoration de la norme essentielle pour certains symboles. Dans le cas du disque unité et pour $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, l'idée est d'appliquer à l'adjoint de C_φ la famille des noyaux reproduisants $(k_a)_{a \in \mathbb{D}}$: en effet il est facile de voir que $C^*_\varphi(k_a) = k_{\varphi(a)}$ et il suffit ensuite de faire tendre a vers le bord du disque.

Dans le cas des séries de Dirichlet, les noyaux reproduisants K_s associés à $\mathcal{H}^2$ en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ sont définis pour tout $w \in \mathbb{C}_{1/2}$ par

$$K_s(w) = \zeta(\overline{s} + w).$$

Ces noyaux ont un sens uniquement pour $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ et non pour $s \in \mathbb{C}_+$. Pour parer à ce problème, F. Bayart a introduit dans [6] des noyaux reproduisants partiels définis sur $\mathbb{C}_+$.

Définition 5.6. *Soient $s \in \mathbb{C}_+$ et $l \geq 1$. On définit le noyau reproduisant partiel d'ordre l sur $\mathcal{H}^2$ en $s \in \mathbb{C}_+$ pour tout $w \in \mathbb{C}_+$ par*

$$K_s^l(w) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p^+(n) \leq p_l}} n^{-\overline{s}-w} = \prod_{i=1}^{l} (1 - p_i^{-\overline{s}-w})^{-1}.$$

Lorsque le symbole est lui aussi "partiel", son adjoint agit de manière assez simple sur la famille des noyaux reproduisants partiels.

Proposition 5.7 ([6], Prop5)**.** *Soient Φ un c_0-symbole où $c_0 \geq 1$ et $l \geq 1$. Supposons que Φ soit de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ quand $p^+(n) > p_l$. Alors $C_\Phi^*(K_s^l) = K_{\Phi(s)}^l$.*

Lemme 5.8. *Sur la boule unité $B_{\mathcal{H}^2}$ de $\mathcal{H}^2$, la topologie faible coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur tout demi plan de la forme $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$).*

Démonstration. Soit $(f_n) \subset B_{\mathcal{H}^2}$ une suite convergeant faiblement vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$,

$$|f_n(s)| \leq \zeta(1+2\varepsilon)^{1/2} \|f_n\|_{\mathcal{H}^2}$$

et donc la suite (f_n) est uniformément bornée sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$. D'après le théorème de Montel pour les séries de Dirichlet bornées (voir [6], Lem18), il existe une sous-suite qui converge uniformément sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$. Il suffit maintenant de montrer que 0 est l'unique valeur d'adhérence mais l'application évaluation étant bornée et (f_n) convergeant faiblement vers 0, c'est bien le cas.

Réciproquement soit $(f_n) \subset B_{\mathcal{H}^2}$ qui converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il existe au moins une sous-suite qui converge faiblement vers $f \in \mathcal{H}^2$. Mais l'application évaluation est bornée pour $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ et (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc $f = 0$. La seule valeur d'adhérence est nulle donc (f_n) converge faiblement vers 0. $\square$

Théorème 5.9. *Soient Φ un c_0-symbole où $c_0 \geq 1$ et $l \geq 1$. Supposons que Φ soit de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ quand $p^+(n) > p_l$. On a alors*

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2, e} \geq \limsup_{\Re(s) \to 0} \frac{\|K_{\Phi(s)}^l\|_{\mathcal{H}^2}}{\|K_s^l\|_{\mathcal{H}^2}}.$$

En particulier si C_Φ est compact,

$$\limsup_{\Re(s) \to 0} \frac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0.$$

En corollaire, on retrouve le théorème 4.14.

Démonstration. Soit $l \geq 1$. Pour $s, w \in \mathbb{C}_+$, on pose

$$k_s(w) = \frac{K_s^l(w)}{\|K_s^l\|_{\mathcal{H}^2}}.$$

La famille (k_s) est contenue dans $B_{\mathcal{H}^2}$ et converge uniformément, quand s tend vers 0, vers 0 sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$: en effet

$$\lim_{\Re(s)\to 0} \|K_s^l\|_{\mathcal{H}^2} = \lim_{\Re(s)\to 0} \left(\prod_{i=1}^{l} \left(1 - p_i^{-2\Re(s)}\right)^{-1} \right)^{1/2} = +\infty$$

et pour tout $w \in \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$,

$$|K_s^l(w)| \leq \prod_{i=1}^{l} \left(1 - p_i^{-1/2-\varepsilon}\right)^{-1} < +\infty.$$

Soit $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^2)$. Alors $K^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^2)$ aussi et par le lemme précédent (k_s) converge faiblement vers 0 donc $K^*(k_s)$ converge en norme vers 0. Alors

$$\|C_\Phi - K\| = \|C_\Phi^* - K^*\| \geq \|C_\Phi^*(k_s) - K^*(k_s)\|_{\mathcal{H}^2} \geq \|C_\Phi^*(k_s)\|_{\mathcal{H}^2} - \|K^*(k_s)\|_{\mathcal{H}^2}$$

et alors

$$\|C_\Phi - K\| \geq \limsup_{\Re(s)\to 0} \|C_\Phi^*(k_s)\|_{\mathcal{H}^2}.$$

L'inégalité étant vraie pour tout $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^2)$, on obtient

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2,e} \geq \limsup_{\Re(s)\to 0} \|C_\Phi^*(k_s)\|_{\mathcal{H}^2}.$$

Maintenant grâce à la proposition 5.7,

$$\|C_\Phi^*(k_s)\|_{\mathcal{H}^2} = \frac{\|K_{\Phi(s)}^l\|_{\mathcal{H}^2}}{\|K_s^l\|_{\mathcal{H}^2}}.$$

Pour la deuxième partie du théorème, il suffit de remarquer que

$$\frac{\|K_{\Phi(s)}^l\|_{\mathcal{H}^2}}{\|K_s^l\|_{\mathcal{H}^2}} = \left(\prod_{i=1}^{l} \frac{1 - p_i^{-2\Re(s)}}{1 - p_i^{-2\Re(\Phi(s))}} \right)^{1/2}$$

et de donner un équivalent de chaque terme quand $\Re(s)$ tend vers 0. □

On peut maintenant obtenir dans un cas particulier un critère de compacité.

Définition 5.10. *Soient $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ une fonction analytique et $k \in \mathbb{N}$. On dit que Φ est $k-$valente si pour tout $w \in \mathbb{C}_+$, il existe au plus k solutions à l'équation $\Phi(s) = w$. Si Φ est $k-$valente pour un certain $k \in \mathbb{N}$ alors on dit que Φ est fini-valente.*

Théorème 5.11. *Soient $l \geq 1$ et Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ si $p^+(n) > p_l$. Supposons que $Im(\varphi)$ est borné et que Φ est fini-valente. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) C_Φ *est compact* $\mathcal{H}^2$.

(ii) $\lim\limits_{\Re(s)\to 0} \dfrac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0.$

(iii) $N_\Phi(s) = o(\Re(s))$ *quand* $\Re(s)$ *tend vers* 0.

Démonstration. La seule implication qu'il nous reste à prouver est $(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit $\varepsilon > 0$, on sait que

$$\lim_{\Re(s)\to 0} \frac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0.$$

Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\Re(s) < \varepsilon \Re(\Phi(s))$$

dès que $\Re(s) < \delta$. Par le "lemme de Schwarz" (Lemme 4.10), si $\Phi(a) = s$ et $\Re(s) < \delta$ alors $\Re(a) < \delta$ aussi. Par conséquent pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ tel que $\Re(s) < \delta$, on a

$$\begin{aligned} N_\Phi(s) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} \Re(a) \\ &\leq \varepsilon \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} \Re(\Phi(a)) \\ &= \varepsilon \Re(s) \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} 1 \\ &\leq k\varepsilon\Re(s) \end{aligned}$$

car Φ est $k-$valente pour un certain $k \geq 1$. On a donc bien $N_\Phi(s) = o(\Re(s))$ quand $\Re(s) \to 0$. $\square$

Chapitre 6

Mesures de Carleson

6.1 Comparaison avec la fonction de comptage

Dans cette section, nous proposons une définition des fonctions de Carleson associées à l'espace $\mathcal{H}^2$ puis nous généralisons le théorème 1.17 en majorant la fonction de comptage d'un symbole Φ par sa fonction de Carleson associée. Par conséquent, on obtient une nouvelle majoration de la norme essentielle de C_Φ et donc une nouvelle condition suffisante de compacité.

Si Φ est un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$, il est montré dans [4] que Φ admet des limites radiales, c'est-à-dire

$$\Phi^*(it) := \lim_{\sigma \to 0^+} \Phi(\sigma + it)$$

existe λ-presque partout où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Notation. *Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On définit la fenêtre de Carleson centrée en it et de taille h par $H(t,h) := \{s \in \mathbb{C}_+,\ |s - it| < h\}$.*

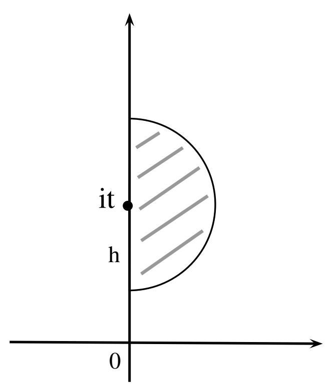

FIGURE 6.1 – $H(t,h)$

Définition 6.1. *On note λ_Φ la mesure image de λ par Φ^*, c'est-à-dire pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}_+$,*

$$\lambda_\Phi(\Omega) := \lambda(\{t \in \mathbb{R}, \Phi^*(it) \in \Omega\}).$$

La fonction de Carleson associée à λ_Φ est alors définie pour tout $h > 0$ par

$$\rho_\Phi(h) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \lambda_\Phi(H(t,h)).$$

Théorème 6.2. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Il existe $K > 0$, indépendant de Φ, tel que pour tout h assez petit et tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\sup_{s\in H(t,h/2)} N_\Phi(s) \leq K \cdot \lambda_\Phi\big(H(t, 2c_0h)\big).$$

En particulier pour h assez petit, on a

$$\sup_{\substack{s\in\mathbb{C}_+\\ \Re(s)<h/2}} N_\Phi(s) \leq K \cdot \rho_\Phi\big(2c_0h\big).$$

Avant de démontrer ce théorème, signalons le corollaire suivant.

Corollaire 6.3. *Soit Φ un c_0-symbole où $c_0 \geq 1$ tel que $Im(\varphi)$ est borné sur $\mathbb{C}_+$. Alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2,e} \leq C \limsup_{h\to 0} \frac{\rho_\Phi(h)}{h}\cdot$$

En particulier si $\rho_\Phi(h) = o(h)$ quand $h \to 0$ alors C_φ est compact sur $\mathcal{H}^2$.

Démonstration du Corollaire 6.3. Soit $s \in \mathbb{C}_+$, assez proche de l'axe imaginaire, on a d'après le théorème 6.2,

$$N_\Phi(s) \leq \sup_{s'\in H(Im(s),2\Re(s))} N_\Phi(s') \leq K \cdot \rho_\Phi\big(8c_0\Re(s)\big)$$

et donc

$$\frac{N_\Phi(s)}{\Re(s)} \leq 8c_0K \cdot \frac{\rho_\Phi\big(8c_0\Re(s)\big)}{8c_0\Re(s)}$$

ce qui nous donne le résultat. □

L'argument clé dans la preuve du théorème 6.2 est l'utilisation du théorème 1.17.

Démonstration du Théorème 6.2.

▷ Tout d'abord montrons le résultat pour $t = 0$.

Nous allons utiliser la famille de fonctions $(\psi_\xi)_{\xi>0}$ où ψ_ξ est définie par

$$\left\{\begin{array}{cccc} \psi_\xi : & \mathbb{C}_+ & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & s & \longmapsto & \dfrac{s-\xi}{s+\xi}. \end{array}\right.$$

Fait : Pour tout $h > 0$, $H(0, h/2) \subset \psi_{c_0\xi}^{-1}(S(-1, h/\xi))$.

Prouvons ce fait :

$$s \in \psi_{c_0\xi}^{-1}(S(-1,h/\xi)) \quad\Leftrightarrow\quad \psi_{c_0\xi}(s) \in S(-1,h/\xi) \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{s-c_0\xi}{s+c_0\xi}+1\right| < \frac{h}{\xi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{2s}{s+c_0\xi}\right| < \frac{h}{\xi} \quad\Leftrightarrow\quad |s| < \frac{h}{2}\left|\frac{s+c_0\xi}{\xi}\right|.$$

Maintenant si $s \in H(0, h/2)$ alors $|s| < \frac{h}{2}$ et il suffit de remarquer que pour tout $\xi > 0$,

$$\frac{|s + c_0\xi|}{\xi} \geq \frac{\Re(s + c_0\xi)}{\xi} \geq c_0 \geq 1.$$

Le fait est donc prouvé.

Soit $h > 0$ et $s \in H(0, h/2)$. Alors $w_\xi := \psi_{c_0\xi}(s) \in S(-1, h/\xi)$. Supposons que $s \in \Phi(\mathbb{C}_+)$ (si ce n'est pas le cas il n'y a rien à prouver) et soient $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{C}_+$ tels que $\Phi(s_i) = s$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pour $\xi > 0$, on définit l'application $\Theta_\xi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ par $\Theta_\xi = \psi_{c_0\xi} \circ \Phi \circ \psi_\xi^{-1}$. On remarque que $\Theta_\xi(\psi_\xi(s_i)) = \psi_{c_0\xi}(\Phi(s_i)) = \psi_{c_0\xi}(s) = w_\xi$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} \log(1/|\psi_\xi(s_i)|) \leq N_{\Theta_\xi}(w_\xi).$$

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\log(1/|\psi_\xi(s_i)|) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{|s_i|^2 + 2\xi\Re(s_i) + \xi^2}{|s_i|^2 - 2\xi\Re(s_i) + \xi^2}\right| = \frac{1}{2}\log\left|1 + \frac{4\xi\Re(s_i)}{|s_i|^2 - 2\xi\Re(s_i) + \xi^2}\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour ξ assez grand et $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$2(1-\varepsilon)\frac{\Re(s_i)}{\xi} \leq \log(1/|\psi_\xi(s_i)|).$$

Par conséquent

$$2(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\frac{\Re(s_i)}{\xi} \leq N_{\Theta_\xi}(w_\xi).$$

D'après le théorème 1.18 avec $\alpha = 2$ et en rappelant que $w_\xi \in S(-1, h/\xi)$ pour tout $\xi > 0$, il existe donc une constante $C_2 > 0$ telle que

$$N_{\Theta_\xi}(w_\xi) \leq C_2 m_{\Theta_\xi}(S(-1, 2h/\xi))$$

pour tout h tel que $0 < h/\xi < (1 - |\Theta_\xi(0)|)/2$. Remarquons que

$$\Theta_\xi(0) = \psi_{c_0\xi}(\Phi(\xi)) = \frac{\varphi(\xi)}{2c_0\xi + \varphi(\xi)}$$

et cette quantité tend vers 0 quand ξ tend vers $+\infty$. On pose

$$m_0 = \inf_{\xi > 1} \xi(1 - |\Theta_\xi(0)|)/2 > 0.$$

Il est clair que $m_0 \leq 1/2$. On notera que $m_0 = m_0(\varphi) = m_0(\varphi(\,\cdot\, + i\tau))$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ (cette remarque sera utile dans la deuxième partie de la preuve). Quand $h < m_0$, on obtient finalement

$$N_{\Theta_\xi}(w_\xi) \leq C_2 m_{\Theta_\xi}(S(-1, 2h/\xi)).$$

Or

$$\begin{aligned} m_{\Theta_\xi}(S(-1,2h/\xi)) &= m(\{\eta\in\mathbb{T}, \Theta_\xi(\eta)\in S(-1,2h/\xi)\}) \\ &= m(\{\eta\in\mathbb{T}, \psi_{c_0\xi}\circ\Phi^*\circ\psi_\xi^{-1}(\eta)\in S(-1,2h/\xi)\}) \\ &= \int_{\{\psi_{c_0\xi}\circ\Phi^*\circ\psi_\xi^{-1}(e^{i\theta})\in S(-1,2h/\xi)\})} \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

On effectue maintenant le changement de variables $iu=\psi_\xi^{-1}(e^{i\theta})$,

$$\begin{aligned} m_{\Theta_\xi}(S(-1,2h/\xi)) &= \int_{\{\Phi^*(iu)\in\psi_{c_0\xi}^{-1}(S(-1,2h/\xi))\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du \\ &= \int_{\left\{|\Phi^*(iu)|<h\frac{|\Phi^*(iu)+c_0\xi|}{\xi}\right\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du. \end{aligned}$$

Alors pour $\xi>1$ assez grand on obtient

$$2(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^n \frac{\Re(s_i)}{\xi} \leq C_2 \int_{\left\{|\Phi^*(iu)|<h\frac{|\Phi^*(iu)+c_0\xi|}{\xi}\right\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du$$

et donc

$$2(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^n \Re(s_i) \leq C_2 \int_{\left\{|\Phi^*(iu)|<h\frac{|\Phi^*(iu)+c_0\xi|}{\xi}\right\}} \frac{du}{\pi}.$$

Mais si $|\Phi^*(iu)|<h\frac{|\Phi^*(iu)+c_0\xi|}{\xi}$ alors $|\Phi^*(iu)|<\frac{c_0h}{(1-h/\xi)}<\frac{c_0h}{(1-h)}<2c_0h$ puisque $h<m_0\leq 1/2$. Par conséquent

$$2(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^n \Re(s_i)\leq C_2\lambda_\Phi(H(0,2c_0h)).$$

Puisque n est arbitraire, on obtient

$$2(1-\varepsilon)N_\Phi(s)\leq C_2\lambda_\Phi(H(0,2c_0h)).$$

pour tout $\varepsilon>0$ et le résultat est donc prouvé quand $t=0$.

$\triangleright$ On prouve maintenant le résultat quand $t\neq 0$.
On a

$$\sup_{s\in H(c_0t,h/2)} N_\Phi(s) = \sup_{s\in H(0,h/2)} N_\Phi(s+ic_0t).$$

Mais si $\tilde\Phi(s):=c_0s+\varphi(s+it)=\Phi(s+it)-ic_ot$, on obtient pour $s\in H(0,h/2)$,

$$\begin{aligned} N_\Phi(s+ic_0t) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+\\ \Phi(a)=s+ic_0t}} \Re(a) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+\\ c_0(a-it)+\varphi(it+a-it)=s}} \Re(a-it) \\ &= \sum_{\substack{a'\in\mathbb{C}_+\\ \tilde\Phi(a')=s}} \Re(a') &= N_{\tilde\Phi}(s). \end{aligned}$$

En appliquant le résultat de la première étape de la preuve à $\tilde\Phi$, on obtient

$$\sup_{s\in H(0,h/2)} N_\Phi(s+ic_0t) = \sup_{s\in H(0,h/2)} N_{\tilde\Phi}(s)\leq K\lambda_{\tilde\Phi}(H(0,2c_0h))$$

pour h assez petit ($h \leq m_0$). Maintenant il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
\lambda_{\tilde{\Phi}}(H(0,2c_0h)) &= \lambda(\{t' \in \mathbb{R},\, \tilde{\Phi}^*(it') \in H(0,2c_0h)\}) \\
&= \lambda(\{t' \in \mathbb{R},\, |\Phi^*(it+it') - ic_0t| < 2c_0h\}) \\
&= \lambda(\{t'' \in \mathbb{R},\, |\Phi^*(it'') - ic_0t| < 2c_0h\}) \\
&= \lambda_\Phi(H(c_0t, 2c_0h)).
\end{aligned}$$

□

6.2 Homogénéité des fonctions de Carleson

Dans cette section nous prouvons l'analogue du théorème 2.9dans le cadre de l'espace $\mathcal{H}^2$. Nous utiliserons le même type de raisonnement que dans la preuve du Théorème 6.2.

Proposition 6.4. *Il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout c_0-symbole Φ avec $c_0 \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\lambda_\Phi(H(t,\varepsilon h)) \leq k\varepsilon\lambda_\Phi(H(t,c_0h))$$

pour tout h assez petit et tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Démonstration. On garde les mêmes notations que celles de la preuve du théorème 6.2. Il suffit ici aussi de faire la preuve dans le cas où $t = 0$. Pour $h < m_0$, et pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ on a d'après le théorème 2.9,

$$m_{\Theta_\xi}\left(S\left(-1, \frac{h\varepsilon}{\xi}\right)\right) \leq k\varepsilon m_{\Theta_\xi}\left(S\left(-1, \frac{h}{\xi}\right)\right).$$

Par changement de variables, on obtient donc

$$\int_{\{\Phi^*(iu) \in \Psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,\varepsilon h/\xi))\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du \leq k\varepsilon \int_{\{\Phi^*(iu) \in \Psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,h/\xi))\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du$$

ou encore

$$\int_{\{\Phi^*(iu) \in \Psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,\varepsilon h/\xi))\}} \frac{\xi^2}{\xi^2+u^2}du \leq k\varepsilon \int_{\{\Phi^*(iu) \in \Psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,h/\xi))\}} \frac{\xi^2}{\xi^2+u^2}du.$$

Maintenant, on a déjà montré que pour tout $s \in \mathbb{C}_+$,

$$s \in \psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,h/\xi)) \Leftrightarrow |s| < \frac{h}{2}\left|\frac{s+c_0\xi}{\xi}\right|.$$

Ce résultat implique que les fonctions indicatrices de $\psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,h/\xi))$ tendent vers la fonction indicatrice de $H(0,c_0h/2)$ quand ξ tend vers $+\infty$. Pour conclure, il suffit donc d'appliquer le lemme de Fatou sur le terme gauche de l'inégalité et le théorème de convergence dominée sur le terme droit pour obtenir le résultat (dans le cas où le terme droit de l'inégalité souhaitée est fini, dans l'autre cas il n'y a rien à prouver). □

On peut en fait montrer un résultat légèrement différent : dans [34], on trouve une notion de mesure de Carleson différente qui permet d'obtenir des résultats sur les multiplicateurs de certains espaces de Hilbert de séries de Dirichlet.

Définition 6.5. *Une mesure borélienne η sur $\mathbb{R}$ est une mesure de Carleson s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathcal{P}$,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |P(it)|^2 d\eta(t) \leq C\|P\|^2_{\mathcal{H}^2}.$$

La proposition suivante prouve alors l'homogénéité des mesures de Carleson dans ce cadre.

Proposition 6.6. *Il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout c_0-symbole Φ avec $c_0 \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbf{1}_{H(t,\varepsilon h/2)}(\Phi^*(it))dt \leq k\varepsilon \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbf{1}_{H(t,2c_0h/3)}(\Phi^*(it))dt$$

pour tout h assez petit et tout $\varepsilon \in (0, 1)$.

Démonstration. Gardons les mêmes notations que précédemment et prouvons le résultat pour $t = 0$. On a pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$ et $h < m_0$,

$$\int_{\{\Phi^*(iu)\in\Psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,\varepsilon h/\xi))\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du \leq k\varepsilon \int_{\{\Phi^*(iu)\in\Psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,h/\xi))\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du.$$

Concernant la première intégrale, on a déjà montré que pour tout $h > 0$, $H(0, h/2) \subset \psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1, h/\xi))$. En appliquant cela à εh, on a

$$\int_{\{\Phi^*(iu)\in H(0,\varepsilon h/2)\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)} \leq \int_{\{\Phi^*(iu)\in\Psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1,\varepsilon h/\xi))\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}.$$

Pour la deuxième intégrale, on a déjà montré que pour tout $s \in \mathbb{C}_+$,

$$s \in \psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1, h/\xi)) \Leftrightarrow |s| < \frac{h}{2}\left|\frac{s + c_0\xi}{\xi}\right|.$$

Donc si $\Phi^*(iu) \in \psi^{-1}_{c_0\xi}(S(-1, h/\xi))$, on a

$$|\Phi^*(iu)| \leq \frac{c_0h/2}{1 - h/2\xi} \leq \frac{c_0h/2}{1 - h/2} \leq \frac{2c_0h}{3}$$

pour $\xi > 1$ et $h \leq m_0 \leq 1/2$. On peut donc majorer la deuxième intégrale et obtenir finalement

$$\int_{\{\Phi^*(iu)\in H(0,\varepsilon h/2)\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du \leq k\varepsilon \int_{\{\Phi^*(iu)\in H(0,2c_0h/3)\}} \frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du.$$

Maintenant d'après la remarque (7.5) de [22], la mesure de probabilité

$$\frac{\xi}{\pi(\xi^2+u^2)}du$$

quand $\xi \to +\infty$ "tend de la même manière" que la mesure de Lebesgue normalisée sur $[-T, T]$ quand T tend vers $+\infty$. Par conséquent

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbf{1}_{H(0,\varepsilon h/2)}(\Phi^*(it))dt \leq k\varepsilon \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbf{1}_{H(0,2c_0h/3)}(\Phi^*(it))dt.$$

□

Troisième partie

Espaces de Bergman $\mathcal{A}_{\mu}^{p}$ et opérateurs de composition

Introduction

Les espaces de Hardy $\mathcal{H}^p$ définis, une question naturelle est alors la suivante : comment définir des espaces de Bergman de séries de Dirichlet ?

Par analogie avec le disque unité où la norme d'un élément de l'espace de Bergman est obtenue par intégration sur des cercles concentriques, il semble ici naturel d'intégrer sur des droites parallèles à l'axe des ordonnées.

Soit P un polynôme de Dirichlet. Pour $\sigma > 0$, on pose $T_\sigma(P)(s) = P(\sigma + s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$. On notera aussi P_σ au lieu de $T_\sigma(P)$. On a alors le résultat suivant.

Lemme 6.7. *Soit P un polynôme de Dirichlet. Alors*

$$\|P\|_{\mathcal{H}^p} = \sup_{\sigma>0} \|P_\sigma\|_{\mathcal{H}^p}.$$

Démonstration. L'inégalité $\|P_\sigma\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|P\|_{\mathcal{H}^p}$ pour tout $\sigma > 0$ provient du théorème 10 de [5]. L'égalité s'obtient avec le théorème de convergence dominée. □

En utilisant le même schéma de construction que les espaces de Bergman du disque unité, une définition possible est alors la suivante : soient μ une mesure de probabilité sur $(0, +\infty)$ et P un polynôme de Dirichlet, on pose

$$\|P\|_{\mathcal{A}^p_\mu} = \left(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|_{\mathcal{H}^p} \, d\mu(\sigma) \right)^{1/p}.$$

Par complétion on obtient alors un espace de Banach. On retrouve pour $p = 2$ des espaces déjà étudiés dans [34]. Le but de cette partie est de répondre au questions suivantes :

(i) Les éléments de $\mathcal{A}^p_\mu$ peuvent-ils être vus comme des séries de Dirichlet ?

(ii) Quelles sont les propriétés de ces espaces ?

(iii) Quels sont les liens entres $\mathcal{A}^p_\mu$ et $\mathcal{H}^p$?

(iv) Que peut-on dire de la continuité et de la compacité des opérateurs de composition sur ces espaces ?

(v) Que sont les multiplicateurs sur ces espaces ?

Chapitre 7

Espaces de Bergman $\mathcal{A}_\mu^p$

7.1 Application évaluation sur $\mathcal{A}_\mu^p$

Définition 7.1. *Soient $p \geq 1$ et μ une mesure de probabilité vérifiant $0 \in Supp(\mu)$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on pose*

$$\|P\|_{\mathcal{A}_\mu^p} = \left(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|_{\mathcal{H}^p}^p \, d\mu(\sigma) \right)^{1/p}.$$

$\mathcal{A}_\mu^p$ est défini comme le complété de $\mathcal{P}$ pour la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{A}_\mu^p}$.

Dans la définition, on a supposé $0 \in Supp(\mu)$. Nous allons justifier cette hypothèse technique en étudiant pour commencer le cas $p = 2$.

Soit f un élément de $\mathcal{A}_\mu^2$ de la forme (3.1). On a

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\mu^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 w_n \right)^{1/2}$$

où pour tout $n \geq 1$,

$$w_n = \int_0^{+\infty} n^{-2\sigma} d\mu(\sigma).$$

Exemples 7.2. Soit $\alpha > -1$. On note μ_α la mesure de probabilité définie sur $(0, +\infty)$ par

$$d\mu_\alpha(\sigma) = \frac{2^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sigma^\alpha e^{-2\sigma} d\sigma.$$

On note alors l'espace associé $\mathcal{A}_\alpha^2$ au lieu de $\mathcal{A}_{\mu_\alpha}^2$ et le poids correspondant (w_n^α). Alors pour tout $n \geq 1$, on a

$$w_n^\alpha = \frac{1}{(\log(n) + 1)^{\alpha+1}}.$$

On notera aussi $\mathcal{A}_\alpha^p$ au lieu de $\mathcal{A}_{\mu_\alpha}^p$ pour tout $p \geq 1$.

L'hypothèse technique $0 \in Supp(\mu)$ est justifiée par l'équation (1.4) de [34] que l'on rappelle ici sous forme de lemme.

Lemme 7.3. *Soit μ une mesure de probabilité sur $(0,+\infty)$ vérifiant $0 \in Supp(\mu)$. La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et décroit moins vite que toute puissance négative de n, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,*

$$w_n > cn^{-\varepsilon}.$$

Ce lemme bien que simple est d'une grande utilité dans la suite, nous donnons donc une preuve de celui-ci.

Démonstration. La suite est clairement décroissante. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} n^\varepsilon w_n &= \int_0^{+\infty} n^{\varepsilon - 2\sigma} d\mu(\sigma) \\ &\geq \int_0^{\varepsilon/2} n^{\varepsilon-2\sigma} d\mu(\sigma) \\ &\geq \mu((0,\varepsilon/2)). \end{aligned}$$

0 étant dans le support de la mesure, il suffit de choisir $c = \mu((0,\varepsilon/2)) > 0$. □

Avec ce résultat on peut montrer que $\mathcal{A}^2_\mu$ est alors un espace de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$. En effet soit $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ et $f \in \mathcal{A}^2_\mu$ de la forme (3.1), on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| n^{-\Re(s)} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-2\Re(s)}}{w_n} \right)^{1/2} \times \|f\|_{\mathcal{A}^2_\mu}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Choissisons maintenant $\varepsilon > 0$ tel que $2\Re(s) - \varepsilon > 1$, d'après le lemme précédent il existe alors $c > 0$ tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-2\Re(s)}}{w_n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{cn^{2\Re(s)-\varepsilon}} < +\infty.$$

On vient donc de montrer que l'application évaluation en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ est bornée sur $\mathcal{A}^2_\mu$. De plus $\mathbb{C}_{1/2}$ est un domaine maximal, en effet les applications f_ε définies par $f_\varepsilon(s) = \zeta(1/2 + s + \varepsilon)$ appartiennent à $\mathcal{A}^2_\mu$ (il suffit d'utiliser le lemme) et ont un pôle en $1/2 - \varepsilon$.

L'application évaluation étant bornée en chaque point de $\mathbb{C}_{1/2}$ pour les espaces $\mathcal{A}^2_\mu$, on peut considérer le noyau reproduisant en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ défini pour tout $w \in \mathbb{C}_{1/2}$ par

$$K_\mu(s,w) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-w-\overline{s}}}{w_n}.$$

On a alors $\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^2_\mu)^*} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-2\sigma}}{w_n} \right)^{1/2}$ pour tout $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_{1/2}$.

Exemple 7.4. Dans le cas des espaces $\mathcal{A}^2_\alpha$ avec $\alpha > -1$, on a pour tout s, $w \in \mathbb{C}_{1/2}$,

$$K_{\mu_\alpha}(s,w) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n)+1)^{\alpha+1} n^{-\overline{s}-w}.$$

Dans ce cas si $\Re(s)$ tend vers 1/2, on a

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^2_\alpha)^*} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n)+1)^{\alpha+1} n^{-2\Re(s)} \sim \frac{\Gamma(2+\alpha)}{(2\Re(s)-1)^{2+\alpha}}.$$

L'équivalence étant justifiée par exemple par le Lemme 3.1 de [36].

Nous nous intéressons maintenant à l'évaluation sur les espaces $\mathcal{A}^p_\mu$. L'évaluation est un outil crucial pour la compréhension des espaces de fonctions (analytiques). Contrairement au cas du disque unité, on ne peut pas utiliser des propriétés de factorisation afin d'utiliser des puissances de fonctions. On développe donc une autre méthode qui nous donnera le bon comportement de la norme de l'évaluation près de l'axe critique $\Re(s) = 1/2$. De plus, on va distinguer le comportement de l'évaluation selon que le coefficient constant s'annule ou non, ce qui nous sera utile par la suite.

Définition 7.5.

Soit $\mathcal{H}^p_\infty$ le sous-espace de $\mathcal{H}^p$ des fonctions dont la valuation est au moins 1, c'est-à-dire l'espace des séries de Dirichlet de la forme (3.1) dont le coefficient constant a_1 s'annule (notons que a_1 est en fait la valeur à l'infini de la fonction, ce qui explique la notation).

Soit $\mathcal{A}^p_{\mu,\infty}$ le sous-espace de $\mathcal{A}^p_\mu$ des fonctions dont la valuation est au moins 1. Dans le cas particulier de la mesure μ_α, on le note $\mathcal{A}^p_{\alpha,\infty}$. Enfin, quand $\alpha = 0$, on utilise simplement la notation $\mathcal{A}^p_\infty$.

Sur les espaces $\mathcal{H}^p$ (resp. $\mathcal{H}^p_\infty$), on définit $\Delta_p(s)$ (resp. $\Delta_{p,\infty}(s)$) comme la norme de l'évaluation au point $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. On rappelle que d'après le théorème 4.4, on a $\Delta_p(s) = \zeta(2\Re(s))^{1/p}$.

Théorème 7.6. *Soit $p \geq 1$ et μ une mesure de probabilité sur $(0,+\infty)$ telle que $0 \in Supp(\mu)$. Alors l'application évaluation est bornée sur $\mathcal{P} \cap \mathcal{A}^p_\mu$ (resp. sur $\mathcal{P} \cap \mathcal{A}^p_{\mu,\infty}$) pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. Elle s'étend donc en un opérateur borné sur $\mathcal{A}^p_\mu$ (resp. sur $\mathcal{A}^p_{\mu,\infty}$) dont la norme vérifie*

(i) $\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*} \leq \inf_{\eta \in (0,\Re(s)-1/2)} \left(\frac{\|\Delta_p(\Re(s) - \cdot)\|_{L^{p'}([0,\Re(s)-1/2-\eta],\, d\mu)}}{\mu([0,\Re(s)-1/2-\eta])} \right).$

(ii) $\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_{\mu,\infty})^*} \leq \inf_{\eta \in (0,\Re(s)-1/2)} \left(\frac{\|\Delta_{p,\infty}(\Re(s) - \cdot)\|_{L^{p'}([0,\Re(s)-1/2-\eta],\, d\mu)}}{\mu([0,\Re(s)-1/2-\eta])} \right).$

Remarque 7.7. Dans la preuve du théorème, nous allons utiliser le fait que la norme dans $\mathcal{A}^p_\mu$ est invariante par translation verticale : pour tout $f \in \mathcal{A}^p_\mu$ et $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu} = \|f(\cdot + i\tau)\|_{\mathcal{A}^p_\mu}.$$

Par densité, il suffit de montrer cela pour les polynômes et étant donnée la définition de la norme pour un polynôme il suffit que le résultat soit vrai sur $\mathcal{H}^p$. Or on sait que pour tout $P \in \mathcal{P}$,

$$\|P\|_{\mathcal{H}^p} = \|D(P)\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}.$$

Il est facile de voir qu'une translation verticale correspond à une rotation sur $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ qui est muni de sa mesure de Haar sur $\mathbb{T}^\infty$, d'où le résultat.

Démonstration. On donne la preuve du point (i) puisque la preuve de (ii) est quasiment identique.

Fixons η dans $(0, \Re(s) - 1/2)$. On peut supposer $s = \sigma \in (1/2, +\infty)$ grâce à l'invariance de la norme dans $\mathcal{A}^p_\mu$ vis-à-vis de la translation verticale. Pour $P \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon \in (0, \sigma - 1/2)$, on a

$$P(\sigma) = P_\varepsilon(\sigma - \varepsilon).$$

On utilise alors la continuité de l'application évaluation sur $\mathcal{H}^p$: pour tout $\varepsilon \in (0, \sigma - 1/2)$, on obtient

$$|P(\sigma)| \leq \Delta_p(\sigma - \varepsilon) \|P_\varepsilon\|_{\mathcal{H}^p}.$$

Puis par intégration sur $(0, \sigma - 1/2 - \eta)$,

$$\mu([0, \sigma - 1/2 - \eta])|P(\sigma)| \leq \int_0^{\sigma - 1/2 - \eta} \Delta_p(\sigma - \varepsilon) \|P_\varepsilon\|_{\mathcal{H}^p} \, d\mu(\varepsilon),$$

et par l'inégalité de Hölder,

$$\mu([0, \sigma - 1/2 - \eta])|P(\sigma)| \leq \|P\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \times \|\Delta_p(\sigma - \cdot\,)\|_{L^{p'}([0, \sigma - 1/2 - \eta], d\mu)}\,.$$

Puisque $\eta \in (0, \Re(s) - 1/2)$ est arbitraire, le résultat est prouvé. $\square$

Corollaire 7.8. *Soient $p \geq 1$ et $\alpha > -1$.*

(i) L'application évaluation est bornée sur $\mathcal{A}^p_\alpha$ pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ et il existe une constante positive $c_{p,\alpha}$ telle que pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$,

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*} \leq c_{p,\alpha} \left(\frac{\Re(s)}{2\Re(s) - 1} \right)^{(2+\alpha)/p}.$$

(ii) L'application évaluation est bornée sur $\mathcal{A}^p_{\alpha,\infty}$ pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ et il existe une constante positive $c'_{p,\alpha}$ telle que pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$,

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_{\alpha,\infty})^*} \leq \frac{c'_{p,\alpha}}{(2\Re(s) - 1)^{(2+\alpha)/p}}.$$

Démonstration. Dans cette preuve nous allons utiliser que pour $x > 1$, $\zeta(x) \leq \dfrac{x}{x-1}$ et nous allons adopter la notation suivante : $A \lesssim B$ signifie qu'il existe une constante c dépendant uniquement de p et α telle que $A \leq cB$.

Fixons $s = \sigma \in (1/2, +\infty)$ et $\eta \in (0, \sigma - 1/2)$. Rappelons que la mesure μ_α est définie par

$$d\mu_\alpha(\sigma) = \frac{2^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \sigma^\alpha e^{-2\sigma} \, d\sigma.$$

Il est alors facile de voir qu'il existe une constante C_α dépendant uniquement de α telle que pour tout $A > 0$,

$$\mu_\alpha([0,A]) \geq C_\alpha \min\big(1, A^{\alpha+1}\big).$$

$\triangleright$ Commençons par prouver (i).

On considère tout d'abord le cas $p=1$. On choisit $\eta = (\sigma - 1/2)/2$, puisque

$$\sup_{\varepsilon\in[0,\,(\sigma-1/2)/2]} |\zeta(2\sigma - 2\,\varepsilon)| = \zeta(\sigma+1/2) \leq \frac{2\sigma+1}{2\sigma-1}$$

la conclusion provient du théorème précédent.

Supposons maintenant $p>1$ et $p\neq 2$ (on connait déjà le comportement de l'évaluation dans le cas $p=2$). On a

$$\int_0^{\sigma-1/2-\eta} \zeta(2\sigma-2\varepsilon)^{p'/p}\,d\mu_\alpha(\varepsilon) \lesssim (2\sigma)^{p'/p}\int_0^{\sigma-1/2-\eta} \frac{\varepsilon^\alpha}{(2\sigma-2\varepsilon-1)^{p'/p}} e^{-2\varepsilon}\,d\varepsilon. \tag{7.1}$$

On distingue maintenant deux cas selon que $p>2$ ou $2>p>1$.

Supposons que $p>2$: l'intégrale précédente converge pour $\eta=0$ et est majorée par

$$\begin{aligned}\int_0^{\sigma-1/2}\frac{\varepsilon^\alpha}{(2\sigma-2\varepsilon-1)^{p'/p}}\,d\varepsilon &= \frac{1}{(2\sigma-1)^{p'/p}}\times\int_0^{\sigma-1/2}\frac{\varepsilon^\alpha}{\big(1-(2\varepsilon)/(2\sigma-1)\big)^{p'/p}}\,d\varepsilon\\ &= \frac{(2\sigma-1)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(2\sigma-1)^{p'/p}}\times\int_0^1 t^\alpha(1-t)^{-p'/p}\,dt\end{aligned}$$

avec $t=\dfrac{2\varepsilon}{2\sigma-1}\cdot$ Par (7.1) on obtient alors

$$\int_0^{\sigma-1/2-\eta}\zeta(2\sigma-2\varepsilon)^{p'/p}\,d\mu_\alpha(\varepsilon)\lesssim(2\sigma)^{p'/p}\frac{B(\alpha+1,1-p'/p)}{(2\sigma-1)^{(p'/p)-\alpha-1}}.$$

Finalement en choisissant $\eta=0$ dans le théorème 7.6, on obtient

$$\|\delta_\sigma\|_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*}\lesssim\left(\frac{B(\alpha+1,1-p'/p)}{(2\sigma-1)^{(p'/p)-\alpha-1}}\right)^{1/p'}\times\frac{(2\sigma)^{1/p}}{\min\big(1,(\sigma-1/2)^{\alpha+1}\big)}.$$

Cette estimation est bonne quand σ est proche de $1/2$. Il nous reste donc à regarder le comportement asymptotique. Revenons donc à l'intégrale et considérons $\sigma\geq1$, on a

$$\int_0^{\sigma-1/2}\zeta(2\sigma-2\varepsilon)^{p'/p}\,d\mu_\alpha(\varepsilon)\leq\int_0^{\sigma-1}\sup_{x\geq2}|\zeta(x)|^{p'/p}\,d\mu_\alpha(\varepsilon)+\int_{\sigma-1}^{\sigma-1/2}\zeta(2\sigma-2\varepsilon)^{p'/p}\,d\mu_\alpha(\varepsilon).$$

La première intégrale est uniformément bornée par rapport à σ et la deuxième est majorée par

$$\int_{\sigma-1}^{\sigma-1/2}\frac{\varepsilon^\alpha(2\sigma)^{p'/p}}{(2\sigma-2\varepsilon-1)^{p'/p}}e^{-2\varepsilon}\,d\varepsilon\lesssim\sigma^{\alpha+p'/p}e^{-2\sigma}\int_0^1\frac{1}{u^{p'/p}}\,du\lesssim1.$$

Cela prouve que la norme de l'évaluation est uniformément bornée quand $\sigma>1$. En rassemblant les deux raisonnements, (i) est alors prouvé quand $p>2$.

Maintenant si $1 < p < 2$, on a $p'/p > 1$ et on ne peut donc pas choisir $\eta = 0$ car l'intégrale (7.1) ne converge pas. En fait, il suffit de choisir $\eta = (\sigma - 1/2)/2$. On conclut alors de la même manière.

$\triangleright$ Prouvons maintenant (ii). On a clairement $\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_{\alpha,\infty})^*} \leq \|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*}$, la conclusion de (ii) quand la partie réelle de s est bornée par 1 provient donc de (i).

Il suffit de regarder le comportement quand $\sigma > 1$ et cela dépend du comportement asymptotique de $\Delta_{p,\infty}$:

$$\Delta_{p,\infty}(s) \leq \frac{1}{\Re(s) - 1}.$$

En effet, pour tout $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}^p_\infty \subset \mathcal{H}^1_\infty$ et pour tout $s \in \mathbb{C}_1$,

$$f(s) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{\widetilde{\zeta}(s+it)} f(it) dt.$$

où $\widetilde{\zeta}(z) = \zeta(z) - 1$. Donc

$$|f(s)| \leq \|\widetilde{\zeta}_\sigma\|_{\mathcal{H}^\infty} \|f\|_{\mathcal{H}^1} \leq \frac{1}{\sigma - 1} \|f\|_{\mathcal{H}^p}.$$

Maintenant la suite de la preuve se fait comme dans (i). □

Remarques 7.9.

(i) Précisons pourquoi ce résultat est optimal dans beaucoup de cas : le comportement de $\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*}$ autour de l'axe critique $\sigma = 1/2$ ne peut pas être une puissance $\dfrac{\Re(s)}{2\Re(s) - 1}$ meilleure que $(2+\alpha)/p$. En effet, soit $\sigma > 1/2$, on aimerait utiliser la fonction $(\zeta_\sigma)^{2/p}$. On peut en fait définir ζ^q (où $q > 0$) grâce au produit eulérien :

$$\zeta^q(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left[\frac{1}{1 - p^{-z}}\right]^q.$$

En fait on travaille d'abord avec F une somme partielle de $(\zeta_\sigma)^{2/p}$, on obtient

$$|F(\sigma)|^p \leq \|\delta_\sigma\|^p_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*} \|F\|^p_{\mathcal{A}^p_\alpha} \lesssim \|\delta_\sigma\|^p_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*} \int_0^{+\infty} \|(F_\varepsilon)\|^p_{\mathcal{H}^p} \varepsilon^\alpha e^{-2\varepsilon}\, d\varepsilon$$

car F est polynôme de Dirichlet. Maintenant si on suppose $p > 1$, on sait (voir [1]) que $(\mathrm{e}_n)_{n \geq 1}$ est une base de Schauder de $\mathcal{H}^p$ donc il existe une constante $c_p > 0$ telle que

$$|F(\sigma)|^p \lesssim c_p \|\delta_\sigma\|^p_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*} \int_0^{+\infty} \|\zeta^{2/p}_{\sigma+\varepsilon}\|^p_{\mathcal{H}^p} \varepsilon^\alpha \exp(-2\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Mais

$$\|(\zeta_{\sigma+\varepsilon})^{2/p}\|^p_{\mathcal{H}^p} = \|\zeta_{\sigma+\varepsilon}\|^2_{\mathcal{H}^2} = \zeta(2\sigma + 2\varepsilon)$$

et on obtient (puisque F est une somme partielle arbitraire de $\zeta^{2/p}_\sigma$) :

$$|\zeta(2\sigma)|^2 \lesssim \|\delta_\sigma\|^p_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{-2\sigma}}{(1 + \ln(n))^{\alpha+1}}.$$

Quand $\alpha < 0$, on obtient $|\zeta(2\sigma)|^2 \lesssim \|\delta_\sigma\|^p_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*}(2\sigma-1)^\alpha$ donc

$$\frac{1}{(2\sigma-1)^{(2+\alpha)}} \lesssim \|\delta_\sigma\|^p_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*}$$

ce qui prouve l'optimalité, en un sens très fort : la majoration dans (i) du Corollaire 7.8 est en fait aussi, à constante près, une minoration.

Quand $\alpha \geq 0$, on a

$$\frac{1}{(2\sigma-1)^{(2+\alpha)}|\log(2\sigma-1)|} \lesssim \|\delta_\sigma\|^p_{(\mathcal{A}^p_\alpha)^*}$$

ce qui prouve que l'on ne peut pas obtenir une meilleure puissance que $(2+\alpha)/p$ dans (i) du Corollaire 7.8.

(ii) Soient $\sigma > 1/2$ et $\mu = \mu_\alpha$, On a déjà montré que le noyau reproduisant en σ est défini pour tout $w \in \mathbb{C}_{1/2}$ par

$$K_{\mu_\alpha}(\sigma, w) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1+\log(n))^{\alpha+1}n^{-\sigma-w}.$$

Alors

$$K_{\mu_\alpha}(\sigma,\sigma) \leq \|\delta_\sigma\|_{(\mathcal{A}^2_\alpha)^*}\|K_{\mu_\alpha}(\sigma,\,\cdot\,)\|_{\mathcal{A}^2_\alpha}$$

et par la propriété reproduisante du noyau

$$K_{\mu_\alpha}(\sigma,\sigma)^{1/2} \leq \|\delta_\sigma\|_{(\mathcal{A}^2_\alpha)^*}.$$

L'autre inégalité étant déjà connue on a alors

$$\|\delta_\sigma\|_{(\mathcal{A}^2_\alpha)^*} = K_{\mu_\alpha}(\sigma,\sigma)^{1/2}$$

et notre résultat est alors optimal quand $p = 2$ (voir l'exemple 7.4).

(iii) Avec les mêmes notations, on a

$$K_{\mu_\alpha}(\sigma,\sigma)^2 \leq \|\delta_\sigma\|_{(\mathcal{A}^1_\alpha)^*}\|K_{\mu_\alpha}(\sigma,\,\cdot\,)^2\|_{\mathcal{A}^1_\alpha} = \|\delta_\sigma\|_{(\mathcal{A}^1_\alpha)^*}\|K_{\mu_\alpha}(\sigma,\,\cdot\,)\|^2_{\mathcal{A}^2_\alpha}.$$

En utilisant à nouveau la propriété reproduisante du noyau, on a

$$K_{\mu_\alpha}(\sigma,\sigma) \leq \|\delta_\sigma\|_{(\mathcal{A}^1_\alpha)^*}.$$

On conclut comme dans (ii) et le résultat est donc optimal quand $p = 1$.

(iv) Dans (i), on a utilisé que $(\mathrm{e}_n)_{n\geq 1}$ était une base de Schauder de $\mathcal{H}^p$ quand $p > 1$. Le résultat est encore vrai sur $\mathcal{A}^p_\mu$ quand $p > 1$ par intégration et densité des polynômes de Dirichlet : il suffit d'utiliser le Théorème $I.2$ de [32].

On peut en fait obtenir une majoration précise dans le cas particulier des entiers pairs : dans ce cas la constante trouvée est 1. Cela provient d'une méthode générale sur des espaces de fonctions analytiques qui sera detaillée dans l'annexe A.

Proposition 7.10. *Soit p un entier pair et μ une mesure de probabilité telle que $0 \in Supp(\mu)$.*

(i) Pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ *on a*

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*} \leq \|\delta_s\|^{2/p}_{(\mathcal{A}^2_\mu)^*}.$$

En particulier,

(ii) pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ *on a*

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p)^*} \leq \Big((\zeta - \zeta')(2\Re(s))\Big)^{1/p} \sim \frac{1}{(2\Re(s)-1)^{2/p}} \quad \textit{quand } \Re(s) \to 1/2.$$

Les espaces de Bergman étant maintenant définis, des espaces de Dirichlet y sont naturellement associés.

Définition 7.11. *Soient* $p \geq 1$ *et* μ *une mesure de probabilité sur* $(0, +\infty)$*. On définit l'espace de Dirichlet* $\mathcal{D}^p_\mu$ *comme l'espace des séries de Dirichlet* f *telles que*

$$\|f\|^p_{\mathcal{D}^p_\mu} := |f(+\infty)|^p + \|f'\|^p_{\mathcal{A}^p_\mu} < +\infty.$$

Théorème 7.12. *Soient* $p \geq 1$ *et* μ *une mesure de probabilité sur* $(0, +\infty)$*. Pour tout* $s \in \mathbb{C}_{1/2}$*, on a*

$$|f(s)| \leq 2^{1/p'} \max\left(1, \int_{\Re(s)}^{+\infty} \|\delta_t\|_{(\mathcal{A}^p_{\mu,\infty})^*} dt\right) \times \|f\|_{\mathcal{D}^p_\mu}.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose $s = \sigma \in (1/2, +\infty)$. On a

$$|f(\sigma) - f(+\infty)| = \left|\int_\sigma^{+\infty} f'(t)dt\right| \leq \int_\sigma^{+\infty} |f'(t)|dt \leq \int_\sigma^{+\infty} \|\delta_t\|_{(\mathcal{A}^p_{\mu,\infty})^*} dt \times \|f'\|_{\mathcal{A}^p_{\mu,\infty}}$$

puisque le coefficient de f' s'annule, c'est-à-dire $f' \in \mathcal{A}^p_{\mu,\infty}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} |f(\sigma)| &\leq |f(+\infty)| + \int_\sigma^{+\infty} \|\delta_t\|_{(\mathcal{A}^p_{\mu,\infty})^*} dt \times \|f'\|_{\mathcal{A}^p_{\mu,\infty}} \\ &\leq \left(1 + \Big(\int_\sigma^{+\infty} \|\delta_t\|_{(\mathcal{A}^p_{\mu,\infty})^*} dt\Big)^{p'}\right)^{1/p'} \times \Big(|f(+\infty)|^p + \|f'\|^p_{\mathcal{A}^p_{\mu,\infty}}\Big)^{1/p} \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Hölder. Maintenant il suffit de remarquer que

$$\left(1 + \Big(\int_\sigma^{+\infty} \|\delta_t\|_{(\mathcal{A}^p_{\mu,\infty})^*} dt\Big)^{p'}\right)^{1/p'} \leq 2^{1/p'} max\left(1, \int_{\Re(s)}^{+\infty} \|\delta_t\|_{(\mathcal{A}^p_{\mu,\infty})^*} dt\right).$$

$\square$

Notation. *Pour tout* $\alpha > -1$*, on note* $\mathcal{D}^p_\alpha$ *au lieu de* $\mathcal{D}^p_{\mu_\alpha}$*.*

Corollaire 7.13. *Soient* $\alpha > -1$ *et* $p \geq 1$*. Il existe* $c_{p,\alpha} > 0$ *tel que pour tout* $s \in \mathbb{C}_{1/2}$*, on a*

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{D}^p_\alpha)^*} \leq \begin{cases} c_{p,\alpha} \dfrac{1}{(2\Re(s)-1)^{\frac{(2+\alpha)}{p}-1}} & \textit{si } \alpha \neq p-2. \\ \\ c_{p,\alpha} \log(2\Re(s)-1) & \textit{si } \alpha = p-2. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 7.12 et le corollaire 7.8. □

Faisons maintenant une petite disgression : les preuves des théorèmes 7.6 et 7.12 sont basées sur le fait que l'on travaille avec des espaces de Bergman à poids axiaux. La même idée de raisonnement peut alors être adaptée dans le cas des espaces de Bergman du disque unité munis de poids radiaux.

D'après [16], on sait que l'application évaluation en $z \in \mathbb{D}$ est bornée sur les espaces $H^p(\mathbb{D})$ et on a pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\|\delta_z\|_{(H^p(\mathbb{D}))^*} = \frac{1}{(1-|z|^2)^{1/p}}.$$

Théorème 7.14. *Soient $p \geq 1$ et $\sigma : [0,1) \to (0,+\infty)$ une fonction continue appartenant à $L^1((0,1))$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a*

$$\|\delta_z\|_{(B^p_\sigma(\mathbb{D}))^*} \leq \inf_{\eta \in (0,1-|z|)} \left(\frac{\|r \to (1-(|z|/r)^2)^{-1/p}\|_{L^{p'}([|z|+\eta,\,1],\,\sigma(r)dr)}}{S([|z|+\eta,\,1])} \right)$$

où $S(I) = \displaystyle\int_I \sigma(r)dr$ pour tout intervalle ouvert $I \subset (0,\,1)$.

Exemple 7.15. Si $\sigma \equiv 1$, c'est-à-dire dans le cas de l'espace de Bergman classique du disque unité $B^p(\mathbb{D})$, on retrouve alors que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\|\delta_z\|_{(B^p(\mathbb{D}))^*} \lesssim \frac{1}{(1-|z|^2)^{2/p}}.$$

On pourrait évidemment faire de même pour les espaces de Dirichlet du disque unité.

7.2 $\mathcal{A}^p_\mu$ comme espace de séries de Dirichlet

Les résultats de la précédente section nous permettent de définir, pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$, la valeur de $f \in \mathcal{A}^p_\mu$ en s par $\delta_s(f)$. Bien sûr, cela coïncide avec la définition usuelle si f est un polynôme de Dirichlet ou quand $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{A}^p_\mu$. On souhaite maintenant montrer mieux : on va prouver que $\mathcal{A}^p_\mu$ est bien un espace de séries de Dirichlet.

On a tout d'abord besoin du résultat suivant.

Lemme 7.16. *Soit $\varepsilon > 0$ et μ une mesure de probabilité sur $(0,+\infty)$. Alors*

$$\begin{array}{cccc} T_\varepsilon & : & \mathcal{P} \cap \mathcal{A}^1_\mu & \longrightarrow & \mathcal{A}^2_\mu \\ & & f & \longmapsto & f_\varepsilon \end{array}$$

est borné.
On peut donc l'étendre en un opérateur borné (toujours noté T_ε) de $\mathcal{A}^1_\mu$ vers $\mathcal{A}^2_\mu$.

Dans la preuve, nous allons utiliser une suite de poids légèrement différente.

Définition 7.17. *Soit μ une mesure de probabilité sur $(0,+\infty)$ telle que $0 \in Supp(\mu)$. On pose pour tout $n \geq 1$,*

$$\widetilde{w}_n := \int_0^{+\infty} n^{-\sigma} d\mu(\sigma).$$

Démonstration du lemme 7.16. Nous introduisons 3 opérateurs.

Tout d'abord définissons $S_1 : \mathcal{P} \cap \mathcal{A}^1_\mu \to \mathcal{H}^1$ par

$$S_1\left(\sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}_n\right) := \sum_{n=1}^{N} a_n \widetilde{w}_n \mathrm{e}_n.$$

S_1 est borné car pour tout polynôme de Dirichlet,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \widetilde{w}_n \mathrm{e}_n\right\|_{\mathcal{H}^1} &= \int_{\mathbb{T}^\infty} \left|\sum_{n=1}^{N} a_n \widetilde{w}_n z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k}\right| d\widetilde{m}(z) \\
&= \int_{\mathbb{T}^\infty} \left|\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k}\, d\mu(\sigma)\right| d\widetilde{m}(z) \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{T}^\infty} \left|\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k}\right| d\widetilde{m}(z) d\mu(\sigma) \\
&= \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n \mathrm{e}_n\right\|_{\mathcal{A}^1_\mu}.
\end{aligned}$$

Par densité, cette opérateur s'étend en un opérateur borné (toujours noté S_1).

Définissons maintenant $S_2 : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^2$ par

$$S_2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathrm{e}_n\right) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n n^{-\varepsilon}}{\sqrt{\widetilde{w}_n}} \mathrm{e}_n.$$

S_2 est borné car $T_{\varepsilon/2} : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^2$ est borné (voir théorème 10 de [5]) et parce que, comme dans le lemme 7.3, on peut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\widetilde{w}_n > Cn^{-\varepsilon}$.

Le troisième opérateur $S_3 : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{A}^2_\mu$ est défini par

$$S_3\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathrm{e}_n\right) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\widetilde{w}_n}} \mathrm{e}_n.$$

S_3 est borné car pour tout $n \geq 1$, $w_n \leq \widetilde{w}_n$.

Par composition, $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est borné et coïncide clairement avec T_ε. □

On peut maintenant affirmer que l'on travaille bien avec un espace de séries de Dirichlet.

Théorème 7.18. *L'espace $\mathcal{A}^p_\mu$ est un espace de séries de Dirichlet : tout élément $f \in \mathcal{A}^p_\mu$ appartient à $\mathcal{D}$ et vérifie $\sigma_u(f) \leq 1/2$.*

Démonstration. C'est évident si $p \geq 2$ car dans ce cas $\mathcal{A}^p_\mu \subset \mathcal{A}^2_\mu$. Quand $1 \leq p < 2$, puisque $\mathcal{A}^p_\mu \subset \mathcal{A}^1_\mu$, on a juste à prouver la conclusion du théorème dans le cas $p = 1$, mais cela provient du théorème précédent. En effet fixons $f \in \mathcal{A}^1_\mu$, $\alpha > 1/2$ et $\varepsilon = \alpha - 1/2 > 0$. La fonction $T_\varepsilon(f)$ appartient à $\mathcal{A}^2_\mu$, on peut donc écrire pour tout $z \in \mathbb{C}_{1/2}$,

$$T_\varepsilon(f)(z) = \sum_{n\geq 1} a_n^{(\varepsilon)}\, n^{-z}.$$

D'autre part, f est la limite d'une suite de polynômes $(P_k)_{k\geq 0}$ relativement à l'espace $\mathcal{A}^1_\mu$. La continuité de T_ε implique que $T_\varepsilon(f)$ est la limite de $\big(P_k(\varepsilon + \cdot)\big)_{k\geq 0}$ relativement à la norme de $\mathcal{A}^2_\mu$. En utilisant la continuité de l'application évaluation en $z+\varepsilon$ et en z, on obtient

$$f(z+\varepsilon) = \lim_{k\to+\infty} P_k(\varepsilon + z) = \lim_{k\to+\infty} T_\varepsilon\big(P_k\big)(z) = T_\varepsilon(f)(z) = \sum_{n\geq 1} a_n^{(\varepsilon)}\, n^{-z}.$$

En particulier, pour tout $s \in \mathbb{C}_\alpha$, on a (avec $z = s - \varepsilon \in \mathbb{C}_{1/2}$),

$$f(s) = \sum_{n\geq 1} \big(a_n^{(\varepsilon)} n^{\varepsilon}\big)\, n^{-s}.$$

En fait les coefficients ne dépendent pas de ε (par unicité du développement en série de Dirichlet). Puisque $\alpha > 1/2$ est arbitraire, on obtient la conclusion. □

Les résultats de cette section impliquent immédiatement la proposition suivante.

Proposition 7.19. *Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\begin{array}{cccc} T_\varepsilon & : & \mathcal{A}^1_\mu & \longrightarrow & \mathcal{A}^2_\mu \\ & & f & \longmapsto & f_\varepsilon \end{array}$$

est bien défini et borné.
Rappelons que $f_\varepsilon(s) = f(s+\varepsilon) = \delta_{s+\varepsilon}(f)$.

Il semble clair que $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{A}^p_\mu$ pour tout $p \geq 1$ et toute mesure de probabilité μ. Le théorème suivant précise ce fait et nous donne la manière de calculer la norme dans $\mathcal{A}^p_\mu$ pour des fonctions plus générales que les polynômes de Dirichlet.

Théorème 7.20. *Soient $p \geq 1$ et μ une mesure de probabilité telle que $0 \in Supp(\mu)$.*

(i) $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{A}^p_\mu$ et, pour tout $f \in \mathcal{H}^p$, on a $\|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^p}$.

(ii) Pour tout $f \in \mathcal{H}^p$, on a $\|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu} = \Big(\int_0^{+\infty} \|f_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p}\, d\mu(\sigma)\Big)^{1/p}$.

(iii) Pour tout $f \in \mathcal{A}^p_\mu$, on a $\|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu} = \lim_{c\to 0^+} \|f_c\|_{\mathcal{A}^p_\mu}$.

Démonstration. Pour tout polynôme de Dirichlet f, on a $\|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^p}$, puisque μ est une mesure de probabilité et que $\|f\|_{\mathcal{H}^p} = \sup_{c>0} \|f_c\|_{\mathcal{H}^p}$. Maintenant, (dans le même esprit que la preuve du Théorème 7.18) un argument de densité, combiné avec la continuité de l'application évaluation, nous permet d'obtenir (i).

Soit $f \in \mathcal{H}^p$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un polynôme de Dirichlet P tel que $\|f - P\|_{\mathcal{H}^p} < \varepsilon$. Par la première assertion, $\|f - P\|_{\mathcal{A}^p_\mu} < \varepsilon$ et alors

$$\|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \varepsilon + \|P\|_{\mathcal{A}^p_\mu} = \varepsilon + \Big(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} d\mu(\sigma)\Big)^{1/p}$$

$$\leq \varepsilon + \Big(\int_0^{+\infty} \|P_\sigma - f_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} d\mu(\sigma)\Big)^{1/p} + \Big(\int_0^{+\infty} \|f_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} d\mu(\sigma)\Big)^{1/p}.$$

Maintenant, T_σ est une contraction sur $\mathcal{H}^p$ pour tout $\sigma > 0$ et donc

$$\|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq 2\varepsilon + \Big(\int_0^{+\infty} \|f_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} d\mu(\sigma)\Big)^{1/p}.$$

De la même manière on obtient la minoration et donc la deuxième assertion.

Pour la troisième assertion, on va utiliser que T_c est une contraction sur $\mathcal{A}^p_\mu$ pour tout $c > 0$: comme dans la première assertion, il suffit de vérifier cela sur les polynômes de Dirichlet mais dans ce cas c'est clair par la définition de la norme pour les polynômes de Dirichlet et le fait que T_c est une contraction sur $\mathcal{H}^p$. Maintenant, soient $f \in \mathcal{A}^p_\mu$ et $\varepsilon, c > 0$. Il existe P un polynôme de Dirichlet tel que $\|f - P\|_{\mathcal{A}^p_\mu} < \varepsilon$, alors

$$\|f - f_c\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \|f - P\|_{\mathcal{A}^p_\mu} + \|P - P_c\|_{\mathcal{A}^p_\mu} + \|P_c - f_c\|_{\mathcal{A}^p_\mu}$$

$$\leq 2\|f - P\|_{\mathcal{A}^p_\mu} + \|P - P_c\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq 2\varepsilon + \|P - P_c\|_{\mathcal{A}^p_\mu}$$

et d'après le théorème de convergence dominée $\|P - P_c\|_{\mathcal{A}^p_\mu}$ tend vers 0 quand c tend vers 0 et donc le résultat est prouvé. $\square$

7.3 Une formule du type Littlewood-Paley

On a déjà vu dans la partie II l'importance de la formule du type Littlewood-Paley pour l'étude de la compacité des opérateurs de composition. Le but de cette section est d'étudier les limites verticales des éléments de $\mathcal{A}^p_\mu$ et d'obtenir une formule de Littlewood-Paley pour $\mathcal{A}^2_\mu$. Pour cela nous allons utiliser le résultat suivant.

Lemme 7.21 ("Théorème de Menchoff"[35])**.**
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ un espace probabilisé et (Φ_n) une suite orthonormale de $L^2(\Omega)$. Alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|^2 \log^2(n) < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \Phi_n \textit{ converge } \nu - \textit{presque partout.}$$

Proposition 7.22. *Soit $p \geq 1$, μ une mesure de probabilité sur $(0, +\infty)$ telle que $0 \in supp(\mu)$ et soit $f \in \mathcal{A}^p_\mu$ ou $\mathcal{D}^p_\mu$. Pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, f_χ converge sur $\mathbb{C}_+$.*

Remarque 7.23. Il suffit de donner la preuve dans le cas des espaces de Bergman. En effet si f appartient à $\mathcal{D}^p_\mu$ alors $f' \in \mathcal{A}^p_\mu$ et donc f'_χ convergera sur $\mathbb{C}_+$ pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ et par conséquent f_χ aussi.

Démonstration de la proposition 7.22. Tout d'abord prouvons le résultat quand $p = 2$. Soient $f \in \mathcal{A}_\mu^2$ de la forme (3.1) et $c_n := a_n n^{-\sigma - it}$ où $\sigma > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Clairement $(\chi(n))$ est une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{T}^\infty)$. On a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|^2 \log^2(n) = \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|^2 w_n \left(\frac{\log^2(n)}{n^{2\sigma} w_n} \right) \cdot$$

D'après le lemme 7.3, il existe une constante $C > 0$ telle que $w_n \geq C n^{-\sigma}$ pour tout $n \geq 1$, donc

$$\frac{\log^2(n)}{n^{2\sigma} w_n} \leq \frac{\log^2(n)}{C n^\sigma} \cdot$$

Le terme droit de l'inégalité précédente est clairement borné et donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|^2 \log^2(n) < +\infty.$$

D'après le Théorème de Menchoff on obtient alors le résultat pour $p = 2$.

On montre maintenant le résultat quand $p \neq 2$. Par inclusion des espaces $\mathcal{A}_\mu^p$, il suffit de montrer le résultat pour $p = 1$.

Soit $f \in \mathcal{A}_\mu^1$. Par la proposition 7.19, $f_\varepsilon \in \mathcal{A}_\mu^2$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ et presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ $(f_\varepsilon)_\chi$ converge sur $\mathbb{C}_+$. En particulier, pour tout $n \geq 1$, pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, $(f_{1/n})_\chi$ converge sur $\mathbb{C}_+$. Pour tout $n \geq 1$, on définit l'ensemble borélien A_n par

$$A_n = \{\chi \in \mathbb{T}^\infty, (f_{1/n})_\chi \text{ converge sur } \mathbb{C}_+\} \cdot$$

Par Théorème de limite monotone on a alors

$$\widetilde{m}(\{\chi \in \mathbb{T}^\infty, \forall n \geq 1, \, (f_{1/n})_\chi \text{ converge sur } \mathbb{C}_+\}) = \lim_{n \to +\infty} \widetilde{m}(A_n) = 1.$$

Bien sûr si $(f_{1/n})_\chi$ converge sur $\mathbb{C}_+$ pour tout $n \geq 1$, f_χ converge sur $\mathbb{C}_+$ et on obtient donc le résultat. $\square$

On suit maintenant les idées de [26] dans le cas du disque unité. On considère le cas des espaces de Bergman $\mathcal{A}_\mu^2$ avec $d\mu(\sigma) = h(\sigma) d\sigma$ où $h \geq 0$, $\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} = 1$ et $0 \in Supp(f)$. Soit w_h le poids associé, on a alors pour tout $n \geq 1$,

$$w_h(n) = \int_0^{+\infty} n^{-2\sigma} h(\sigma) d\sigma.$$

Pour $\sigma > 0$, on pose

$$\beta_h(\sigma) := \int_0^\sigma (\sigma - u) h(u) \, du = \int_0^\sigma \int_0^t h(u) \, du dt.$$

Remarque 7.24. Remarquons que pour tout $\sigma > 0$, $0 \leq \beta_h(\sigma) \leq \sigma$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$,

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \beta_h(\sigma) n^{-2\sigma} = 0.$$

Si h est continue, on peut calculer les deux premières dérivées de β_h : pour tout $\sigma > 0$, on a

$$\begin{cases} \beta_h'(\sigma) = \displaystyle\int_0^\sigma h(u)du, \\ \beta_h''(\sigma) = h(\sigma). \end{cases}$$

Théorème 7.25. *["Formule de Littlewood-Paley"]*
Soit η une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}_\mu} = |f(+\infty)|^2 + 4\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \beta_h(\sigma)|f_\chi'(\sigma+it)|^2\,d\eta(t)d\sigma d\widetilde{m}(\chi).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{A}^2_\mu$ de la forme (3.1), le lemme 4.6 appliqué à f_σ' pour $\sigma > 0$ donne

$$\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_{\mathbb{R}} |f_\chi'(\sigma+it)|^2 d\eta(t)d\widetilde{m}(\chi) = \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma}\log^2(n).$$

On multiplie maintenant par $\beta_h(\sigma)$ et on intègre sur $\mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{T}^\infty}\int_{\mathbb{R}} \beta_h(\sigma)|f_\chi'(\sigma+it)|^2 d\eta(t)d\widetilde{m}(\chi)d\sigma = \sum_{n=2}^{+\infty}|a_n|^2\log^2(n)\int_0^{+\infty} n^{-2\sigma}\beta_h(\sigma)d\sigma.$$

Maintenant il suffit de prouver que pour tout $n \geq 1$,

$$w_h(n) = 4\log^2(n)\int_0^{+\infty} n^{-2\sigma}\beta_h(\sigma)d\sigma.$$

Mais par définition on a

$$w_h(n) = \int_0^{+\infty} h(\sigma)n^{-2\sigma}d\sigma.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} w_h(n) &= \left[\int_0^\sigma h(u)\,du \times n^{-2\sigma}\right]_0^{+\infty} + 2\log(n)\int_0^{+\infty}\int_0^\sigma h(u)\,du \times n^{-2\sigma}d\sigma \\ &= \left[\beta_h'(\sigma)\times n^{-2\sigma}\right]_0^{+\infty} + 2\log(n)\int_0^{+\infty}\beta_h'(\sigma)\times n^{-2\sigma}d\sigma. \end{aligned}$$

Mais on sait que $\beta_h'(\sigma) \to 0$ quand $\sigma \to 0$ (car $h \in L^1(\mathbb{R}_+)$) et $\beta_h'(\sigma) \to \|h\|_1$ quand $\sigma \to +\infty$. On a donc

$$w_h(n) = 2\log(n)\int_0^{+\infty}\beta_h'(\sigma)\times n^{-2\sigma}d\sigma.$$

En effectuant une deuxième intégration par parties, on obtient finalement

$$w_h(n) = 4\log^2(n)\int_0^{+\infty} n^{-2\sigma}\beta_h(\sigma)d\sigma.$$

□

Exemple 7.26. Soient $\alpha > -1$ et $f \in \mathcal{A}^2_\alpha$, on a $\beta_h(\sigma) \approx \sigma^{\alpha+2}$ quand σ est petit. Alors

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}^2_\alpha} \approx |f(+\infty)|^2 + \frac{2^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+3)} \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \sigma^{\alpha+2} |f'_\chi(\sigma+it)|^2 \, d\eta(t) d\sigma d\widetilde{m}(\chi).$$

Dans le cas des espaces de Dirichlet, on obtient le résultat suivant.

Proposition 7.27. *Soit η une mesure de probabilité sur $(0,+\infty)$ telle que $0 \in supp(\mu)$. Alors pour $f \in \mathcal{D}^2_\mu$ on a*

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}^2_\mu} = |f(+\infty)|^2 + 4 \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} h(\sigma) |f'_\chi(\sigma+it)|^2 \, d\eta(t) d\sigma d\widetilde{m}(\chi).$$

Remarque 7.28. Soit $f \in \mathcal{A}^2_\infty$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}^2} \gtrsim 4 \int_0^x \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f'_\chi(\sigma+it)|^2 \, d\eta(t) d\widetilde{m}(\chi) \, \sigma^2 d\sigma.$$

Mais on sait que

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f'_\chi(\sigma+it)|^2 \, d\eta(t) d\widetilde{m}(\chi) = \|f_\sigma\|^2_{\mathcal{H}^2} \geq \|f_x\|^2_{\mathcal{H}^2}$$

car $\sigma \leq x$. On a donc pour tout $x > 0$,

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}^2} \gtrsim 4 \|f_x\|^2_{\mathcal{H}^2} \times \int_0^x \sigma^2 d\sigma \text{ et par conséquent } \|f_x\|_{\mathcal{H}^2} \lesssim \frac{\sqrt{3}\|f\|_{\mathcal{A}^2}}{2x^3}.$$

On peut évidemment appliquer le même raisonnement pour les espaces $\mathcal{A}^2_\mu$.

Corollaire 7.29. *Soit $\varepsilon > 0$, on a $T_\varepsilon(\mathcal{A}^2_\mu) \subset \mathcal{H}^2 \subset \mathcal{A}^2_\mu$.*

7.4 Coefficients des éléments de $\mathcal{A}^p_\mu$

Nous prouvons ici des inégalités entre la norme des éléments de $\mathcal{A}^p_\mu$ et la norme de leurs coefficients dans certains espaces ℓ_p à poids. Les preuves données suivent des raisonnements classiques utilisés dans le cadre du disque unité (voir [19], page 81 par exemple).

Théorème 7.30. *Soient $p \geq 1$ et μ une mesure de probabilité sur $(0,+\infty)$ telle que $0 \in Supp(\mu)$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ le poids associé.*

(i) Si $1 \leq p \leq 2$ et $f = \sum_{n\geq 1} a_n \mathrm{e}_n \in \mathcal{A}^p_\mu$, on a

$$\left\| w_n^{1/p} \, a_n \right\|_{\ell^{p'}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu}.$$

(ii) Si $p \geq 2$ et $\sum_{n\geq 1} w_n^{p'-1} |a_n|^{p'} < \infty$, on a $f = \sum_{n\geq 1} a_n \mathrm{e}_n \in \mathcal{A}^p_\mu$ et

$$\|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \left(\sum_{n\geq 1} w_n^{p'-1} |a_n|^{p'} \right)^{1/p'} = \left\| w_n^{1/p} \, a_n \right\|_{\ell^{p'}}.$$

Une corollaire immédiat est alors :

Corollaire 7.31. *Soit $p \geq 1$.*

(i) Si $1 \leq p \leq 2$ et $f = \sum_{n\geq 1} a_n \mathrm{e}_n \in \mathcal{A}^p$, on a

$$\left\| \frac{a_n}{(1+\ln(n))^{1/p}} \right\|_{\ell^{p'}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}^p}.$$

(ii) Si $p \geq 2$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{p'}}{(1+\ln(n))^{p'-1}} < \infty$, on a $f = \sum_{n\geq 1} a_n \mathrm{e}_n \in \mathcal{A}^p$ et

$$\|f\|_{\mathcal{A}^p} \leq \left(\sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{p'}}{(1+\ln(n))^{p'-1}} \right)^{1/p'} = \left\| \frac{a_n}{(1+\ln(n))^{1/p}} \right\|_{\ell^{p'}}.$$

Démonstration du théorème 7.30. Détaillons le cas $1 \leq p \leq 2$.

Pour tout entier $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \geq 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^\infty, d\mu \otimes d\widetilde{m})$, on pose

$$\tau_n(f) = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^\infty} f(\sigma, z) \bar{z}^{(n)} n^{-\sigma} d\mu(\sigma) \otimes d\widetilde{m}(z)$$

où $z^{(n)} = z_1^{\alpha_1} \dots z_k^{\alpha_k}$.
On remarque que, quand P est un polynôme de Dirichlet $P(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, on lui associe $f(\sigma, z) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-\sigma} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_k^{\alpha_k}$. On a dans ce cas $\tau_n(f) = w_n a_n$.
On considère $Q(f) = \big(\tau_n(f)\big)_{n\geq 1}$.
Q définit un opérateur de norme 1 de $L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^\infty, d\mu \otimes d\widetilde{m})$ vers $L^\infty(\omega)$ et de $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^\infty, d\mu \otimes d\widetilde{m})$ vers $L^2(\omega)$, où $L^q(\omega)$ est l'espace de Lebesgue sur les entiers strictement positifs muni de la mesure discrète où la masse au point n est donnée par $1/w_n$. En effet

$$|\tau_n(f)| \leq \|f\|_1$$

et

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\tau_n(f)|^2}{w_n} = \sum_{n\geq 1} |\langle f, b_n \rangle|^2$$

où $b_n(\sigma, z) = z^{(n)} n^{-\sigma} / \sqrt{w_n}$ est un système orthonormal dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^\infty, d\mu \otimes d\widetilde{m})$.
L'inégalité de Bessel nous donne alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\tau_n(f)|^2}{w_n} \leq \|f\|_2^2.$$

Maintenant par interpolation (en appliquant le théorème de Riesz-Thorin), Q est borné de $L^p(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^\infty, d\mu \otimes d\widetilde{m})$ vers $L^{p'}(\omega)$:

$$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{|\tau_n(f)|^{p'}}{w_n}\right)^{1/p'} \leq \|f\|_p \,.$$

En écrivant cete inégalité dans le cas particulier où f est un polynôme de Dirichlet (de la manière donnée en début de preuve), le résultat est alors prouvé.

L'autre cas est obtenu de manière similaire.

$\square$

Chapitre 8

Comparaison entre les espaces $\mathcal{A}^p$ et les espaces $\mathcal{H}^p$

Dans cette section, on précise le lien entre $\mathcal{A}^p$ et $\mathcal{H}^p$. Cette question est naturelle dès que l'on se rappelle le comportement de l'injection de $H^p(\mathbb{D})$ vers $B^q(\mathbb{D})$ dans le contexte classique du disque unité. En effet $H^p(\mathbb{D}) \subset B^q(\mathbb{D})$ si et seulement si $q \leq 2p$ et cette injection est compacte si et seulement $q < 2p$.

Théorème 8.1. *Soit $p > 2$. L'identité de $\mathcal{H}^2$ vers $\mathcal{A}^p$ n'est pas bornée mais l'injection de $\mathcal{H}^2$ vers $\mathcal{A}^2$ est compacte.*

Le comportement des espaces de Bergman $\mathcal{A}^p_\mu$ vis-à-vis des espaces de Hardy est donc radicalement différent dans le cadre des séries de Dirichlet par rapport au cas classique du disque unité.

On aura besoin de la formule suivante.

Lemme 8.2. *Pour $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n}^2 z^k = \frac{1}{(1-z)^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k.$$

Remarque 8.3. Nous discuterons de cette formule et donnerons d'autres preuves dans l'annexe B.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{D}$. Nous voulons estimer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k}^2 z^k$.

Puisque pour tout $w \in \mathbb{D}$, on a $\dfrac{1}{(1-w)^{n+1}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} w^k$, on remarque que $S = \dfrac{1}{n!} G^{(n)}(1)$ où G est la fonction définie pour tout $w \in \mathbb{D}$ par

$$G(w) = \frac{w^n}{(1-zw)^{n+1}}.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient

$$S = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n+k)! z^k}{n!(1-z)^{n+k+1}} = \frac{1}{(1-z)^{2n+1}} \tilde{S}$$

où $\tilde{S} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{k} z^k(1-z)^{n-k}$, qui est la dérivée à l'ordre n au point $w = z$ de la fonction

$$w \longmapsto \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} w^{n+k}(1-z)^{n-k} = \frac{w^n}{n!}\big(w+1-z\big)^n.$$

A l'aide d'une seconde utilisation de la formule de Leibniz, on obtient

$$\tilde{S} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}z^k \times \frac{n!}{(n-k)!}(z+1-z)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 z^k,$$

ce qui nous donne la formule cherchée. □

Remarque 8.4. Par unicité du développement en série entière, on a pour tout n, $m \geq 1$,

$$\sum_{j=0}^{min(m,\,2n+1)} (-1)^j \binom{2n+1}{j}\binom{n+m-j}{n}^2 = \binom{n}{m}^2.$$

Définition 8.5. *Soit $m \geq 1$ un entier. On note d_m la fonction multiplicative définie pour tout $k \geq 1$ par*

$$d_m(k) = \sum_{\substack{\gamma_1\ldots\gamma_m = k \\ \gamma_1,\ldots,\,\gamma_k \geq 1}} 1.$$

Remarque 8.6. Notons $*$ le produit de convolution de deux fonctions arithmétiques : c'est-à-dire si a, b sont deux fonctions arithmétiques (deux suites complexes) alors pour tout $n \geq 1$,

$$a * b(n) = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}.$$

On sait (voir [43] par exemple) que le produit de convolution de deux fonctions multiplicatives reste une fonction multiplicative. Or $d_m = \mathbb{I} * \cdots * \mathbb{I}$ (m fois) où $\mathbb{I}(n) = 1$ pour tout $n \geq 1$ donc d_m est multiplicative.

Proposition 8.7. *Soit $m \geq 1$ un entier. Il existe $\gamma_m > 0$ tel que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_m(n)^2 n^{-2\sigma} \sim \frac{\gamma_m}{(2\sigma-1)^{m^2}} \qquad \textit{quand } \sigma \to 1/2.$$

Démonstration. On sait que d_m est multiplicative, on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_m(n)^2 n^{-2\sigma} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\sum_{k\geq 0} d_m(p^k)^2 p^{-2\sigma k}\right).$$

Maintenant, on peut calculer chaque terme du produit car

$$d_m(p^k) = \sum_{\substack{p^{\alpha_1}\,..\,p^{\alpha_m} = p^k \\ \alpha_1,\ldots,\,\alpha_m \geq 0}} 1 = \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_m = k \\ \alpha_1,\ldots,\,\alpha_m \geq 0}} 1 = \binom{m+k-1}{m-1}.$$

Par le lemme 8.2, on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_m(n)^2 n^{-2\sigma} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k}^2 (p^{-2\sigma})^k}{(1-(p^{-2\sigma})^k)^{2m-1}} \right).$$

Maintenant

$$\left(\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k}^2 z^k \right) \times (1-z)^{(m-1)^2} = Q(z)$$

où $Q(0) = 1$ et $Q'(0) = 0$ car le coefficient de z est

$$\binom{m-1}{1}^2 - \binom{(m-1)^2}{1} = (m-1)^2 - (m-1)^2 = 0.$$

On obtient que $(Q(p^{-2\sigma}))_p \in \ell_1$ quand $\sigma \geq 1/2$ et le produit infini $\prod_{p\in\mathbb{P}} Q(p^{-2\sigma})$ est convergent et a une limite positive quand $\sigma \to 1/2$. Finalement on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_m(n)^2 n^{-2\sigma} = \frac{\prod_{p\in\mathbb{P}} Q(p^{-2\sigma})}{\prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-2\sigma})^{(m-1)^2+2m-1}} = \frac{\prod_{p\in\mathbb{P}} Q(p^{-2\sigma})}{\prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-2\sigma})^{m^2}}.$$

Donc quand $\sigma \to 1/2$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_m(n)^2 n^{-2\sigma} = \zeta(2\sigma)^{m^2} \times \left(\prod_{p\in\mathbb{P}} Q(p^{-2\sigma}) \right) \sim \frac{\gamma_m}{(2\sigma-1)^{m^2}}$$

pour une certaine constante $\gamma_m > 0$. □

Un corollaire immédiat est alors :

Corollaire 8.8. *Soit $m \geq 1$ un entier, il existe $\gamma_m > 0$ tel que*

$$\|\zeta^m(\sigma + \cdot)\|_{\mathcal{H}^2} \sim \frac{\sqrt{\gamma_m}}{(2\sigma-1)^{m^2/2}} \qquad \textit{quand } \sigma \to 1/2.$$

On peut donc passer à la preuve du théorème principal.

Démonstration du théorème 8.1. Supposons que l'injection de $\mathcal{H}^2$ vers $\mathcal{A}^p$ est bornée, il existe alors $m \geq 1$ tel que

$$2 < \frac{2(m+1)}{m} < p.$$

Par inclusion des espaces, l'injection de $\mathcal{H}^2$ vers $\mathcal{A}^{\frac{2(m+1)}{m}}$ est aussi bornée : il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{H}^2$,

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{\frac{2(m+1)}{m}}} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^2}.$$

On applique cette inégalité à la m-ième puissance du noyau reproduisant décalé de $\mathcal{H}^2$: $s \longmapsto \zeta^m(\sigma + s)$ avec $\sigma > 1/2$. Alors

$$\|\zeta^m(\sigma + \cdot)\|_{\mathcal{A}^{\frac{2(m+1)}{m}}} \leq C\|\zeta^m(\sigma + \cdot)\|_{\mathcal{H}^2}$$

et grâce au corollaire précédent

$$\|\zeta^m(\sigma+\cdot)\|_{\mathcal{H}^2} \sim \frac{\sqrt{\gamma_m}}{(2\sigma-1)^{m^2/2}} \quad \text{quand } \sigma \to 1/2.$$

Maintenant pour le premier terme de l'inégalité, on a

$$\|\zeta^m(\sigma+\cdot)\|_{\mathcal{A}^{\frac{2(m+1)}{m}}} = \|\zeta^{m+1}(\sigma+\cdot)\|_{\mathcal{A}^2}^{\frac{m}{m+1}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{m+1}(n)^2 n^{-2\sigma}}{\log(n)+1}\right)^{\frac{m}{2(m+1)}}.$$

Par la proposition 8.7 on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_{m+1}(n)^2 n^{-2\sigma} \sim \frac{\gamma_{m+1}}{(2\sigma-1)^{(m+1)^2}} \quad \text{quand } \sigma \to 1/2.$$

Par intégration,

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{m+1}(n)^2 n^{-2\sigma}}{\log(n)+1}\right)^{\frac{m}{2(m+1)}} \sim \frac{\widetilde{\gamma_m}}{(2\sigma-1)^{\frac{m^2(m+2)}{2(m+1)}}}$$

pour un certain $\widetilde{\gamma_m} > 0$.

Maintenant, utilisant l'inégalité provenant de la continuité de l'injection, on obtient que pour σ proche de 1/2,

$$1 \lesssim C \times (2\sigma-1)^{\frac{m^2(m+2)}{2(m+1)} - m^2/2} = C(2\sigma-1)^{\frac{m^2}{2(m+1)}}$$

et ceci est évidemment faux.

Pour finir la preuve, il nous reste à montrer que l'injection de $\mathcal{H}^2$ vers $\mathcal{A}^2$ est compacte. Il suffit en fait de remarquer que cette injection est un opérateur diagonal sur la base orthonormale $\big(\mathrm{e}_n\big)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{H}^2$ et que les valeurs propres, égales à $\dfrac{1}{\log(n)+1}$, tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. $\square$

Chapitre 9

Opérateurs de composition sur $\mathcal{A}^p_\mu$

Nous avons montré que les espaces $\mathcal{A}^p_\mu$ sont des espaces de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$. Comme dans le cadre des espaces $\mathcal{H}^p$, on cherche alors les fonctions analytiques $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ engendrant un opérateur de composition borné sur $\mathcal{A}^p_\mu$, compact ou encore inversible ou isométrique.

9.1 Continuité de C_Φ

Dans la suite, μ est une mesure de probabilité sur $(0, +\infty)$ telle que $0 \in Supp(\mu)$ et $p \geq 1$.

Théorème 9.1. *Soit $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ une fonction analytique de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où $c_0 \geq 1$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. Alors C_Φ est borné sur $\mathcal{A}^p_\mu$ si et seulement si φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.*

Autrement dit, quand $c_0 \geq 1$, Φ est un c_0-symbole sur $\mathcal{H}^p$ si et seulement si Φ est un c_0-symbole sur $\mathcal{A}^p_\mu$ (c'est-à-dire que Φ engendre un opérateur de composition borné sur $\mathcal{A}^p_\mu$).

Remarque 9.2. Rappelons que la condition $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où $c_0 \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}$ est une condition arithmétique : Φ a cette forme si et seulement si $P \circ \Phi \in \mathcal{D}$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ (voir [22],Th.A).

Démonstration.
$\triangleright$ Supposons que φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et que $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. Soit P un polynôme de Dirichlet, $P \circ \Phi$ est alors une série de Dirichlet bornée sur $\mathbb{C}_+$ (car $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$) et donc $P \circ \Phi$ est dans $\mathcal{H}^\infty$ et par conséquent dans $\mathcal{H}^p$. D'après le théorème 7.20(ii), on sait que

$$\|P \circ \Phi\|^p_{A^p_\mu} = \int_0^{+\infty} \|(P \circ \Phi)_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} \, d\mu(\sigma).$$

Maintenant, le point crucial est d'utiliser la continuité des opérateurs de composition sur $\mathcal{H}^p$. On remarque que pour tout $\sigma > 0$,

$$(P \circ \Phi)_\sigma(it) = P(\Phi(\sigma + it)) = P_\sigma(\Phi(\sigma + it) - \sigma).$$

Soit $\widetilde{\Phi}$ défini sur $\mathbb{C}_+$ par $\widetilde{\Phi}(s) = \Phi(\sigma + s) - \sigma$. On affirme que $\widetilde{\Phi}$ vérifie les hypothèses de continuité de $C_{\widetilde{\Phi}}$ sur $\mathcal{H}^p$: il s'écrit en effet sous la forme $\widetilde{\Phi}(s) = c_0 s + \widetilde{\varphi}(s)$ où $\widetilde{\varphi}$ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors il suffit donc de vérifier que $\widetilde{\varphi}(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ mais $\widetilde{\varphi}(s) = \varphi(s+\sigma) + (c_0 - 1)\sigma$ pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ et le résultat est alors clair car $c_0 \geq 1$ et $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.

Maintenant on applique le résultat de continuité sur $\mathcal{H}^p$. Puisque $c_0 \geq 1$, $C_{\widetilde{\Phi}}$ est une contraction sur $\mathcal{H}^p$ et on obtient (σ est fixé) :

$$\|(P \circ \Phi)_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} = \|P_\sigma(\widetilde{\Phi})\|^p_{\mathcal{H}^p} \leq \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p}.$$

Ceci est vrai pour tout $\sigma > 0$, alors

$$\int_0^{+\infty} \|(P \circ \Phi)_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p}\, d\mu(\sigma) \leq \int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p}\, d\mu(\sigma).$$

Donc $\|P \circ \Phi\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \|P\|_{\mathcal{A}^p_\mu}$. Maintenant, par densité de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{A}^p_\mu$, $C_\Phi : \mathcal{P} \cap \mathcal{A}^p_\mu \to \mathcal{A}^p_\mu$ s'étend en un opérateur borné $T : \mathcal{A}^p_\mu \to \mathcal{A}^p_\mu$ tel que $T(P) = P \circ \Phi$ pour tout $P \in \mathcal{P}$. Soit $f \in \mathcal{A}^p_\mu$, il existe une suite $(P_n) \subset \mathcal{P}$ telle que (P_n) converge vers f en norme. Alors par continuité de l'application évaluation en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ sur $\mathcal{A}^p_\mu$ (Théorème 7.6) :

$$\begin{array}{rcl} |T(f)(s) - T(P_n)(s)| & \leq & \|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*} \|T(f) - T(P_n)\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \\ & \leq & \|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*} \|T\|\, \|f - P_n\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \end{array}$$

et alors $T(P_n)(s) = P_n(\Phi(s))$ converge vers $T(f)(s)$ quand n tend vers l'infini. Mais par évaluation en $\Phi(s) \in \mathbb{C}_{1/2}$, $P_n(\Phi(s))$ converge vers $f(\Phi(s))$, donc $T(f)(s) = f(\Phi(s)) = C_\Phi(f(s))$ et le résultat est alors prouvé.

$\triangleright$ Maintenant supposons que Φ induise un opérateur de composition borné sur $\mathcal{A}^p_\mu$. La preuve est quasiment la même que celle donnée pour le théorème B de [22]. Nous ne donnons donc que les grandes lignes de cette preuve.

Soit $f \in \mathcal{A}^p_\mu$. Pour tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ on peut montrer que (voir [22],Prop4.3) pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$,

$$(f \circ \Phi)_\chi(s) = f_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi(s) \qquad (\Delta)$$

Puisque f et $f \circ \Phi$ appartiennent à $\mathcal{A}^p_\mu$, $(f \circ \Phi)_\chi$ et $f_{\chi^{c_0}}$ s'étendent analytiquement sur $\mathbb{C}_+$ pour presque tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ d'après la proposition 7.22 et donc l'égalité précédente reste vraie sur $\mathbb{C}_+$. Comme dans la proposition 5.1 de [22], on peut montrer que Φ_χ s'étend analytiquement sur $\mathbb{C}_+$ pour tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ (c'est une conséquence du fait que Φ_χ est une limite verticale de Φ).

Maintenant, soit $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ tel que $f_{\chi^{c_0}}$, Φ_χ et $(f \circ \Phi)_\chi$ s'étendent sur $\mathbb{C}_+$.

Si Φ_χ n'envoie pas $\mathbb{C}_+$ sur $\mathbb{C}_+$, alors il existe $s_0 \in \mathbb{C}_+$ tel que $\Phi_\chi(s_0)$ appartient à l'axe imaginaire et avec un argument de connexité, on peut choisir s_0 tel que $\Phi'_\chi(s_0) \neq 0$. Alors , par (Δ), $f_{\chi^{c_0}}$ admet une extension analytique sur un segment de l'axe imaginaire autour de $\Phi_\chi(s_0)$. Dans [4], F. Bayart a montré que

$$f = \sum_{n \geq 1} \frac{e_{p_n}}{\sqrt{p_n}\log(p_n)} \in \mathcal{H}^p$$

et que pour presque tout χ, $f_{\chi^{c_0}}$ ne s'étend pas analytiquement sur un domaine plus grand que $\mathbb{C}_+$. Mais $f \in \mathcal{A}^p_\mu$ car $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{A}^p_\mu$. Par conséquent Φ_χ envoie $\mathbb{C}_+$ vers $\mathbb{C}_+$ pour presque χ et alors par la Proposition 4.1 de [22], $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. Finalement, par le théorème 4.9 et en utilisant le même raisonemment fait dans [39] on obtient que φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

Quand $c_0 = 0$, on obtient le résultat suivant.

Théorème 9.3. *Soit $p \geq 1$ et $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ appartenant à $\mathcal{D}$.*

(i) Si C_Φ est borné sur $\mathcal{A}^p_\mu$ alors Φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$.

(ii) Si Φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}$ (où $\eta > 0$) alors C_Φ est Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{A}^2_\mu$, a fortiori borné.

(iii) Si C_Φ est borné sur $\mathcal{A}^2_\mu$, alors il est borné sur $\mathcal{A}^{2k}_\mu$ pour tout $k \geq 1$. Par conséquent C_Φ est borné sur $\mathcal{A}^{2k}_\mu$ pour tout $k \geq 1$ sous les hypothèses de (ii).

Démonstration.

(i) Comme dans le cas $c_0 \geq 1$, la preuve est équivalente à celle donnée dans [22], Th.B dans le cas $\mathcal{H}^2$.

(ii) Par comparaison avec la norme infini, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\|n^{-\Phi_\sigma}\|^2_{\mathcal{H}^2} \leq \|n^{-\Phi_\sigma}\|^2_{\mathcal{H}^\infty} \leq n^{-1-2\eta}.$$

Maintenant on souhaite montrer que C_Φ est Hilbert-Schmidt ce qui impliquera évidemment que C_Φ est borné. Pour tout $n \geq 1$, on pose e^μ_n le polynôme de Dirichlet défini par

$$e^\mu_n = \frac{\mathrm{e}_n}{\sqrt{w_n}}\cdot$$

La suite $(\mathrm{e}^\mu_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormale de $\mathcal{A}^2_\mu$ et $C_\Phi(\mathrm{e}^\mu_n) \in \mathcal{H}^\infty$ pour tout $n \geq 1$: en effet $e^\mu_n \in \mathcal{P}$ et $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. Alors par le Théorème 7.20(ii),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \|C_\Phi(\mathrm{e}^\mu_n)\|^2_{\mathcal{A}^2_\mu} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \|(C_\Phi(\mathrm{e}^\mu_n))_\sigma\|^2_{\mathcal{H}^2} d\mu(\sigma) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\|n^{-\Phi_\sigma}\|^2_{\mathcal{H}^2}}{w_n} d\mu(\sigma) \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^{-1-2\eta}}{w_n} d\mu(\sigma) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-1-2\eta}}{w_n}\cdot
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après le lemme 7.3, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $w_n \geq Cn^{-\eta}$ pour tout $n \geq 1$. Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|C_\Phi(\mathrm{e}^\mu_n)\|^2_{\mathcal{A}^2_\mu} \leq \frac{1}{C} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\eta}} < +\infty$$

et donc C_Φ est Hilbert-Schmidt.

(iii) Supposons que C_Φ est borné sur $\mathcal{A}^2_\mu$. Soit P un polynôme de Dirichlet, on a

$$\|P\circ\Phi\|_{\mathcal{A}^{2k}_\mu} = \|P^k\circ\Phi\|^{1/k}_{\mathcal{A}^2_\mu} \le \|C_\Phi\|^{1/k}\|P^k\|^{1/k}_{\mathcal{A}^2_\mu} = \|C_\Phi\|^{1/k}\|P\|_{\mathcal{A}^{2k}_\mu}.$$

Par densité de $\mathcal{P}$ et continuité de l'application évaluation on obtient le résultat (comme dans la preuve du théorème 9.1). □

Question. *La continuité est-elle encore vraie quand $\eta = 0$ pour (ii) ?*

9.2 Compacité et fonctions de comptage généralisées

Soient $p \ge 1$ et $X = \mathcal{H}^p$ ou $\mathcal{A}^p_\mu$. On commence cette section par un critère de compacité.

Proposition 9.4. *Soit $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ une fonction analytique induisant un symbole sur X. Alors C_Φ est compact X si et seulement si pour toute suite (f_n) de X qui converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\|C_\Phi(f_n)\|_X \to 0$.*

Démonstration. L'application évaluation en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ est bornée sur X et X a la propriété de Fatou (au sens de [27], Prop 4.8) par le théorème de Montel pour les séries de Dirichlet (Lemme 18 de [5]). Il suffit alors d'utiliser le même raisonnement que dans la proposition 4.8 de [27]. □

Remarque 9.5. Avec ce critère, il est alors facile de voir que si C_Φ est compact sur $\mathcal{H}^2$ (resp. $\mathcal{A}^2_\mu$) alors C_Φ est compact sur $\mathcal{H}^{2k}$ (resp. $\mathcal{A}^{2k}_\mu$) pour tout $k \ge 1$.

A Condition suffisante de compacité

Notation. *Comme dans le cas $\mathcal{H}^2$, on appellera un c_0-symbole toute fonction analytique $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où $c_0 \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que C_Φ est borné sur $\mathcal{A}^2_\mu$. Quand $c_0 \ge 1$, cela est donc équivalent au fait que φ converge converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.*

Notons que dans la suite, nous imposerons que $c_0 \ge 1$.

Définition 9.6. *On définit la fonction de comptage de Nevanlinna associée à une fonction $\beta : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ par*

$$N_{\beta,\Phi}(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+\\ \Phi(a)=s}} \beta(\Re(a)) & si \quad s \in \Phi(\mathbb{C}_+),\\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Si $\beta(\sigma) = \sigma$,on retrouve la fonction de comptage N_Φ. Notons que les fonctions de comptages sont a priori à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\cdot$

Le lemme suivant permet d'obtenir un lien entre les fonctions de comptages généralisées et la fonction de comptage classique. Ceci permettra donc de transférer des résultats directement depuis le cas classique (en particulier l'inégalité de Littlewood).

Proposition 9.7. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Pour tout $s \in \mathbb{C}_+$, on a*

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) = \int_0^{\Re(s)} N_{\Phi_u}(s)h(u)du$$

où Φ_u est définie par $\Phi_u(s) := \Phi(s+u)$ pour tout $s \in \mathbb{C}_+$.

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}_+$.

$$\begin{aligned} N_{\beta_h,\Phi}(s) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+\\ \Phi(a)=s}} \beta_h(\Re(a)) \\ &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+\\ \Phi(a)=s}} \int_0^{\Re(a)} (\Re(a)-u)h(u)du \\ &= \sum_{\substack{\Re(a)<\Re(s)\\ \Phi(a)=s}} \int_0^{\Re(a)} (\Re(a)-u)h(u)du \end{aligned}$$

grâce au lemme 4.10 : en effet $\Phi(\mathbb{C}_{\Re(a)}) \subset \mathbb{C}_{\Re(a)}$ et alors $\Re(a) \geq \Re(s)$ implique $\Phi(a) \neq s$. Maintenant par le théorème de Fubini on a

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) = \int_0^{\Re(s)} \sum_{\substack{u<\Re(a)<\Re(s)\\ \Phi(a)=s}} (\Re(a)-u)h(u)\,du.$$

Il reste alors à remarquer que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{u<\Re(a)<\Re(s)\\ \Phi(a)=s}} (\Re(a)-u) &= \sum_{\substack{u<\Re(a)\\ \Phi_u(a-u)=s}} (\Re(a)-u) \\ &= \sum_{\substack{0<\Re(a')\\ \Phi_u(a')=s}} \Re(a') \\ &= N_{\Phi_u}(s). \end{aligned}$$

□

Proposition 9.8. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Pour tout $s \in \mathbb{C}_+$, on a*

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) \leq \frac{\beta_h(\Re(s))}{c_0}.$$

Démonstration. Par le lemme précédent, on sait que

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) = \int_0^{\Re(s)} N_{\Phi_u}(s)h(u)du.$$

Le lemme de Schwarz implique que $\Phi_u - u : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ et alors par l'inégalité de Littlewood (voir [6],Prop.3), on a pour tout $s' \in \mathbb{C}_+$,

$$N_{\Phi_u-u}(s') \leq \frac{\Re(s')}{c_0}.$$

Mais $N_{\Phi_u}(s) = N_{\Phi_u - u}(s-u)$ si $\Re(s) > u > 0$. Finalement

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) \le \int_0^{\Re(s)} \frac{(\Re(s)-u)h(u)}{c_0}\, du = \frac{\beta_h(\Re(s))}{c_0}.$$

□

Afin d'obtenir une majoration de la norme essentielle de C_Φ, il nous faut ici, comme dans le cas $\mathcal{H}^2$, obtenir des estimations de $N_{\beta,\Phi}$. On a alors l'analogue de la proposition 5.1.

Proposition 9.9. *Soient $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ et $\Phi_k : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ $(k \ge 0)$ des fonctions analytiques. Supposons que $(\Phi_k)_{k\ge 0}$ converge uniformément vers Φ sur tout ensemble compact de $\mathbb{C}_+$, alors pour tout $s \in \mathbb{C}_+$,*

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) \le \liminf_{k\to+\infty} N_{\beta_h,\Phi_k}(s).$$

Démonstration. Le schéma de la preuve est le même que celui de la proposition 5.1 mais il faut ici jouer avec les propriétés de β_h.

Fixons $s \in \Phi(\mathbb{C}_+)$ (si $s \notin \Phi(\mathbb{C}_+)$ il n'y à rien à prouver) et $\varepsilon > 0$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}_+$ satisfaisant $\Phi(a_i) = s$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\delta > 0$ tel que $2n\delta < \varepsilon$. $(\Phi_k)_{k\ge0}$ converge uniformément vers Φ sur tout compact de $\mathbb{C}_+$ et donc en particulier sur chaque disque $D(a_i, \delta)$ de centre a_i et de rayon δ. D'après le lemme d'Hurwitz, il existe $K \ge 0$ tel que pour tout $k \ge K$, $s \in \Phi_k(D(a_i,\delta))$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Maintenant fixons $k \ge K$, il existe $a_1^k \in D(a_1,\delta), \dots, a_n^k \in D(a_n, \delta)$ tels que $\Phi(a_i^k) = s$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par définition de β_h, on a

$$\begin{aligned}
\beta_h(\Re(a_i^k)) &= \int_0^{\Re(a_i^k)} (\Re(a_i^k) - u)h(u)du \\
&\ge \int_0^{\Re(a_i)-\delta} (\Re(a_i) - \delta - u)h(u)du \\
&= \beta_h(\Re(a_i)) - \left(\delta \int_0^{\Re(a_i)-\delta} h(u)du + \int_{\Re(a_i)-\delta}^{\Re(a_i)} (\Re(a_i)-u)h(u)du\right) \\
&\ge \beta_h(\Re(a_i)) - 2\delta
\end{aligned}$$

car $\|h\|_1 = 1$. En sommant tous les termes, on obtient

$$\beta_h(\Re(a_1^k)) + \cdots + \beta_h(\Re(a_n^k)) \ge \beta_h(\Re(a_1)) + \cdots + \beta_h(\Re(a_n)) - 2n\delta.$$

Alors pour tout $k \ge K$,

$$\begin{aligned}
\beta_h(\Re(a_1)) + \cdots + \beta_h(\Re(a_n)) &\le 2n\delta + \beta_h(\Re(a_1^k)) + \cdots + \beta_h(\Re(a_n^k)) \\
&\le \varepsilon + N_{\beta_h,\Phi_k}(s).
\end{aligned}$$

Donc

$$\beta_h(\Re(a_1)) + \cdots + \beta_h(\Re(a_n)) \le \varepsilon + \liminf_{k\to+\infty} N_{\beta_h,\Phi_k}(s)$$

et puisque n et ε sont arbitraires, le résultat est prouvé. □

Corollaire 9.10. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Supposons que*

$$\sup_{\Re(s)>0} \frac{N_{\beta_h,\Phi}(s)}{\beta_h(\Re(s))} = C < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{\chi\in\mathbb{T}^\infty} \sup_{\Re(s)>0} \frac{N_{\beta_h,\Phi_\chi}(s)}{\beta_h(\Re(s))} = C.$$

Démonstration. Strictement analogue à la preuve du corollaire 5.2. $\square$

Le théorème principal dans le cas des espaces de Bergman $\mathcal{A}^2_\mu$ est alors le suivant.

Théorème 9.11. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Supposons que $Im(\varphi)$ est borné sur $\mathbb{C}_+$, alors*

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{A}^2_\mu,e} \leq \left(2\sup_{\mathbb{C}_+}|Im(\varphi)| + c_0\right) \times \limsup_{\Re(s)\to 0} \frac{N_{\beta_h,\Phi}(s)}{\beta_h(Re(s))}.$$

Remarque 9.12. Pour les espaces $\mathcal{A}^2_\alpha$, en notant $N_{\alpha,\Phi}$ la fonction de comptage associée et β_α le poids associé, il est facile de voir que $\beta_\alpha(\sigma) \approx \sigma^{\alpha+2}$ quand σ est petit et donc sous les hypothèses du théorème précédent,

$$\|C_\varphi\|_{\mathcal{A}^2_\alpha,e} \lesssim \left(2\sup_{\mathbb{C}_+}|Im(\varphi)| + c_0\right) \times \limsup_{\Re(s)\to 0} \frac{N_{\beta_\alpha,\Phi}(s)}{\Re(s)^{\alpha+2}}.$$

Corollaire 9.13. *Supposons que $Im(\varphi)$ est borné sur $\mathbb{C}_+$. Si $N_{\beta_h,\Phi}(s) = o(\beta_h(\Re(s))$ quand $\Re(s) \to 0$ alors C_Φ est compact sur $\mathcal{A}^2_\mu$.*

Démonstration du Théorème 9.11. Le schéma de la preuve est analogue à la preuve du théorème 5.4 mais il faut appliquer les nouveaux résultats précédents. Nous omettrons donc quelques détails.

Pour $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{A}^2_\mu$ de la forme (3.1). On pose

$$\begin{cases} K_n(f) &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{e}_k \\ R_n(f) &= (I - K_n)(f) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \mathrm{e}_k. \end{cases}$$

On peut appliquer la proposition 5.5,

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{A}^2_\mu,e} = \lim_{n\to+\infty} \|C_\Phi R_n\| = \lim_{n\to+\infty} \left\{ \sup_{\|f\|_{\mathcal{A}^2_\mu}\leq 1} \|C_\Phi(R_n(f))\|_{\mathcal{A}^2_\mu} \right\}.$$

On considère $\Omega = (0,+\infty)\times(0,1)$ muni de la mesure d'aire : par la formule de Littlewood-Paley sur $\mathcal{A}^2_\mu$ avec la mesure de Lebesgue sur $(0,1)$ (théorème 7.25) :

$$\begin{aligned} \|C_\Phi(R_n(f))\|^2_{\mathcal{A}^2_\mu} &= |R_n(f)\circ\Phi(+\infty)|^2 \\ &+ 4\int_{\mathbb{T}^\infty} \iint_\Omega \beta_h(\Re(s))|(R_n(f)\circ\Phi)'_\chi(s)|^2\, ds d\widetilde{m}(\chi). \end{aligned}$$

$R_n(f) \circ \Phi(+\infty) = 0$ pour tout $n \geq 2$ et par la Proposition 4.3 de [22] :

$$\|C_\Phi(R_n(f))\|^2_{\mathcal{A}^2_\mu} = 4\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_\Omega \beta_h(\Re(s))|R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(\Phi_\chi(s))|^2|\Phi'_\chi(s)|^2\, ds d\widetilde{m}(\chi).$$

En appliquant alors le changement de variables $\Phi_\chi(s) \longmapsto s$, on obtient

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega \beta_h(\Re(s))|R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(\Phi_\chi(s))|^2|\Phi'_\chi(s)|^2\, ds \\ = &\iint_{\Phi_\chi(\Omega)} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\beta_h,\Phi_\chi}(s)\, ds. \end{aligned}$$

$Im(\varphi)$ est borné, il existe donc $A > 0$ tel que $|Im(\varphi)| < A$ et la même inégalité est vraie pour φ_χ pour tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$. Pour $Q = (0, +\infty) \times (-A, A + c_0)$, on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \beta_h(\Re(s))|R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(\Phi_\chi(s))|^2|\Phi'_\chi(s)|^2\, ds \\ \leq &\iint_Q |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\beta_h,\Phi_\chi}(s)\, ds. \end{aligned}$$

Fixons $\theta > 0$, on pose $Q = Q_\theta \cup \tilde{Q}_\theta$ où $Q_\theta = (0, \theta) \times (-A, A + c_0)$ et $\tilde{Q}_\theta = (\theta, +\infty) \times (-A, A + c_0)$. Nous allons couper l'intégrale précédente en deux parties. Soit γ_θ définie par

$$\gamma_\theta = \sup_{\chi \in \mathbb{T}^\infty}\left\{\sup_{0<Re(s)<\theta} \frac{N_{\beta_h,\Phi_\chi}(s)}{\beta_h(\Re(s))}\right\} = \sup_{0<Re(s)<\theta} \frac{N_{\beta_h,\Phi}(s)}{\beta_h(\Re(s))}.$$

La seconde égalité est vraie par le corollaire 9.10.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\beta_h,\Phi_\chi}(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi) \\ \leq \ &\gamma_\theta \int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 \beta_h(\Re(s))\, ds d\widetilde{m}(\chi). \end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure :

$$\begin{aligned} &\sup_{\|f\|_{\mathcal{A}^2_\mu}\leq 1}\left\{\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\beta_h,\Phi_\chi}(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi)\right\} \\ &\leq \gamma_\theta \sup_{\|f\|_{\mathcal{A}^2_\mu}\leq 1}\left\{\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 \beta_h(\Re(s))\, ds d\widetilde{m}(\chi)\right\} \\ &\leq \gamma_\theta \sup_{\|f\|_{\mathcal{A}^2_\mu}\leq 1}\left\{\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_{Q_\theta} |f'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 \beta_h(\Re(s))\, ds d\widetilde{m}(\chi)\right\}. \end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, on a utilisé que si f est dans la boule unité de $\mathcal{A}^2_\mu$, $R_n(f)$ aussi. Finalement, par la formule de Littlewood-Paley appliquée avec la mesure de Lebesgue normalisée sur $(-A, A + c_0)$ et le fait que $\chi \to \chi^{c_0}$ préserve la mesure on obtient

$$\sup_{\|f\|_{\mathcal{A}^2_\mu}\leq 1}\left\{4\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_{Q_\theta} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\beta_h,\Phi_\chi}(s)\, ds d\widetilde{m}(\chi)\right\} \leq (2A + c_0)\gamma_\theta.$$

Maintenant on cherche une majoration de la deuxième intégrale. Par la proposition 9.8,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^\infty}\iint_{\tilde{Q_\theta}} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 N_{\beta_h,\Phi_\chi}(s)\, dsd\widetilde{m}(\chi)\\
\leq\ &\iint_{\mathbb{T}^\infty}\int_{\tilde{Q_\theta}} |R_n(f)'_{\chi^{c_0}}(s)|^2 \frac{\beta_h(\Re(s))}{c_0}\, dsd\widetilde{m}(\chi)
\end{aligned}$$

et par le lemme 4.6,

$$= \frac{2A+c_0}{c_0}\int_\theta^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\beta_h(\sigma)|a_k|^2k^{-2\sigma}log^2(k)d\sigma.$$

Fixons $\varepsilon>0$. Il existe alors $K=K_\theta>0$ tel que pour tout $k\geq K$,

$$\int_\theta^{+\infty}\beta_h(\sigma)k^{-2\sigma}log^2(k)d\sigma \leq \varepsilon w_h(k).$$

En effet, par le lemme 7.3, on sait que $(w_h(k))$ est une suite décroissante qui décroit plus lentement que toute puissance négative de n, il existe donc $C=C_\theta>0$ tel que pour tout $k\geq 1$,

$$w_h(k)\geq Ck^{-\theta}.$$

Alors

$$\int_\theta^{+\infty}\beta_h(\sigma)\frac{k^{-2\sigma}log^2(k)}{w_h(k)}d\sigma \leq \int_\theta^{+\infty}\sigma k^{\theta-2\sigma}C^{-1}log^2(k)d\sigma$$

car $\beta_h(\sigma)\leq\sigma$ par définition de β_h. Clairement le terme de droite de la dernière inégalité tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

Finalement pour $n\geq K$, on obtient

$$\frac{2A+c_0}{c_0}\int_\theta^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\beta_h(\sigma)|a_k|^2k^{-2\sigma}log^2(k)d\sigma \leq \frac{2A+c_0}{c_0}\times\varepsilon$$

car nous travaillons avec des fonctions de $\mathcal{A}^2_\mu$ de norme plus petite que 1. En sommant les deux intégrales, on obtient que pour tout $n\geq K$,

$$\|C_\Phi R_n\|\leq(2A+c_0)\gamma_\theta+\frac{2A+c_0}{c_0}\times\varepsilon.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\|C_\Phi\|_{\mathcal{A}^2_\mu,e} &= \lim_{n\to+\infty}\|C_\Phi R_n\|\\
&\leq (2A+c_0)\gamma_\theta+\frac{2A+c_0}{c_0}\times\varepsilon.
\end{aligned}$$

Puisque ε et θ sont arbitraires, on obtient le résultat. $\square$

B Condition nécessaire de compacité

Suivons le même raisonnement que pour $\mathcal{H}^2$. Le noyau reproduisant en $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ associé à $\mathcal{A}^2_\mu$ est défini pour tout $w \in \mathbb{C}_{1/2}$ par

$$K_{\mu,s}(w) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-\overline{s}-w}}{w_h(n)}.$$

Afin de travailler sur $\mathbb{C}_+$, on définit des noyaux reproduisants partiels.

Définition 9.14. *Soient $s \in \mathbb{C}_+$ et $l \geq 1$. Pour $\mathcal{A}^2_\mu$, on définit le noyau reproduisant d'ordre l en $s \in \mathbb{C}_+$ par*

$$K^l_{\mu,s}(w) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p^+(n) \leq p_l}} \frac{n^{-\overline{s}-w}}{w_h(n)}.$$

Ces noyaux reproduisants sont bien définis sur $\mathbb{C}_+$: en effet par le lemme 7.3, si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $w_h(n) > Cn^{-\varepsilon}$. Alors

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ p^+(n) \leq p_l}} \frac{n^{-\Re(s)-\Re(w)}}{w_h(n)} \leq \frac{1}{C} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p^+(n) \leq p_l}} \frac{1}{n^{\Re(s)+\Re(w)-\varepsilon}} = \frac{1}{C} \prod_{i=1}^{l} \left(1 - p_i^{-\Re(s)-\Re(w)+\varepsilon}\right)^{-1}.$$

Pour $s \in \mathbb{C}_+$, cette quantité est alors bornée pour tout $w \in \mathbb{C}_\varepsilon$ et tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve le fait.

La proposition suivante est une reformulation directe de la proposition 5 de [6].

Proposition 9.15. *Soient Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ et $l \geq 1$ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ quand $p^+(n) > p_l$. Alors $C^*_\Phi(K^l_{\mu,s}) = K^l_{\mu,\Phi(s)}$.*

Lemme 9.16. *Sur la boule unité $B_{\mathcal{A}^2_\mu}$ de $\mathcal{A}^2_\mu$, la topologie faible coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur tout demi-plan $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$.*

Démonstration. Identique à la preuve du lemme 5.8. □

Théorème 9.17. *Soient Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ et $l \geq 1$ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ quand $p^+(n) > p_l$. On a*

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{A}^2_\mu, e} \geq \limsup_{\Re(s) \to 0} \frac{\|K^l_{\mu,\Phi(s)}\|_{\mathcal{A}^2_\mu}}{\|K^l_{\mu,s}\|_{\mathcal{A}^2_\mu}}.$$

Démonstration. Soit $l \geq 1$. Pour $s \in \mathbb{C}_+$, on définit la fonction (k_s) en $w \in \mathbb{C}_+$ par

$$k_s(w) := \frac{K^l_{\mu,s}(w)}{\|K^l_{\mu,s}\|_{\mathcal{A}^2_\mu}}.$$

Cette famille est contenue dans $B_{\mathcal{A}^2_\mu}$ et converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$: en effet on a

$$\lim_{\Re(s)\to 0} \|K^l_{\mu,s}\|^2_{\mathcal{A}^2_\mu} = \lim_{\Re(s)\to 0} K^l_{\mu,s}(s) = +\infty$$

et pour tout $w \in \mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$,

$$|K^l_{\mu,s}(w)| \leq \sum_{\substack{n\geq 1\\ p^+(n)\leq p_l}} \frac{n^{-1/2-\varepsilon}}{w_h(n)} < +\infty$$

car les noyaux reproduisant partiels sont définis sur $\mathbb{C}_+$.
Soit $K \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\mu)$, $K^* \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\mu)$ aussi et par le lemme précédent on sait que (k_s) converge faiblement vers 0 donc $K^*(k_s)$ converge en norme vers 0. Par conséquent

$$\|C_\Phi - K\| = \|C^*_\Phi - K^*\| \geq \|C^*_\Phi(k_s) - K^*(k_s)\|_{\mathcal{A}^2_\mu} \geq \|C^*_\Phi(k_s)\|_{\mathcal{A}^2_\mu} - \|K^*(k_s)\|_{\mathcal{A}^2_\mu}$$

et alors

$$\|C_\Phi - K\| \geq \limsup_{\Re(s)\to 0} \|C^*_\Phi(k_s)\|_{\mathcal{A}^2_\mu}.$$

Maintenant grâce à la proposition 9.15, et le fait que l'inégalité est vraie pour tout $K \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\mu)$, on obtient le résultat. □

Corollaire 9.18. *Soient Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ et $l \geq 1$ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ quand $p^+(n) > p_l$. Supposons que $C_\Phi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\mu)$, alors*

$$\lim_{\Re(s)\to 0} \frac{\|K^l_{\mu,\Phi(s)}\|_{\mathcal{A}^2_\mu}}{\|K^l_{\mu,s}\|_{\mathcal{A}^2_\mu}} = 0.$$

En particulier si $C_\Phi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}^2_\alpha)$ avec $\alpha > -1$, cela implique que

$$\lim_{\Re(s)\to 0} \frac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0.$$

Remarque 9.19. Le résultat concernant $\mathcal{A}^2_\alpha$ est déjà connu (voir [6]).

C Un critère de compacité sur les espaces $\mathcal{A}^2_\mu$

Dans cette section, on travaille sur les espaces $\mathcal{A}^2_\mu$ où μ est une mesure de probabilité telle que $d\mu(\sigma) = h d\sigma$ où h est une fonction (continue) positive. Rappelons que

$$\beta_h(\sigma) = \int_0^\sigma (\sigma - u)h(u)du.$$

Dans l'esprit de [26] (page 12), on introduit une nouvelle condition : on dit qu'un poids β vérifie la condition (κ) si la fonction $G = G_\beta$ définie par $G(\sigma) = \beta(\sigma)/\sigma$ (où $\sigma > 0$) est telle que

$$\lim_{\eta\to 0^+} \limsup_{\sigma\to 0^+} \frac{G(\eta\sigma)}{G(\sigma)} = 0.$$

Exemples 9.20.

(i) Si h est une fonction croissante, (κ) est vérifiée pour β_h : en effet dans ce cas on étend G en 0 par $G(0) = 0$ et il suffit de vérifier que G est une fonction convexe mais il est facile de voir que

$$G'(\sigma) = \frac{\displaystyle\int_0^\sigma uh(u)du}{\sigma^2}$$

et

$$\begin{aligned} G''(\sigma) &= \frac{\sigma^2 h(\sigma) - 2\displaystyle\int_0^\sigma uh(u)du}{\sigma^3} \\ &= \frac{2\displaystyle\int_0^\sigma u(h(\sigma) - h(u))du}{\sigma^3}. \end{aligned}$$

(ii) Soit $\alpha > -1$, β_α vérifie (κ) car $G(\sigma) \approx \sigma^{\alpha+1}$ quand σ est assez petit.

Proposition 9.21. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Supposons que β_h vérifie (κ). Si*

$$\lim_{\Re(s)\to 0} \frac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0$$

alors

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) = o(\beta_h(\Re(s))) \text{ quand } \Re(s) \to 0,$$

et donc C_Φ est compact sur $\mathcal{A}^2_\mu$ si $Im(\varphi)$ est borné.

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}_+$, on a

$$\begin{aligned} N_{\beta_h,\Phi}(s) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} \beta_h(\Re(a)) \\ &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} G(\Re(a))\Re(a). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on sait que

$$\lim_{\Re(s)\to 0} \frac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0$$

et alors par la condition (κ), il existe $\delta > 0$ tel que

$$G(\Re(s)) \leq \varepsilon G(\Re(\Phi(s)))$$

quand $\Re(s) < \delta$. Maintenant grâce au lemme de Schwarz, si $\Phi(a) = s$ et $\Re(s) < \delta$ alors $\Re(a) < \delta$ aussi. Par conséquent

$$\begin{aligned} N_{\beta_h,\Phi}(s) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} G(\Re(a))\Re(a) \\ &\leq \varepsilon \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} G(\Re(\Phi(a)))\Re(a) \\ &= \varepsilon G(\Re(s)) \sum_{\substack{a\in\mathbb{C}_+ \\ \Phi(a)=s}} \Re(a) \\ &= \varepsilon G(\Re(s)) N_\Phi(s) \end{aligned}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ tel que $\Re(s) < \delta$. Maintenant par l'inégalité de Littlewood (proposition 9.8)

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) \leq \frac{\varepsilon G(\Re(s))\Re(s)}{c_0} = \frac{\varepsilon \beta_h(\Re(s))}{c_0}$$

quand $\Re(s) < \delta$ et cela prouve le résultat. $\square$

Théorème 9.22. *Soient $\alpha > -1$, $l \geq 1$ et Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ quand $p^+(n) > p_l$ et tel que $Im(\varphi)$ est borné.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) C_Φ *est compact sur* $\mathcal{A}^2_\alpha$.

(ii) $\lim\limits_{\Re(s)\to 0} \dfrac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0$.

(iii) $N_{\alpha,\Phi}(s) = o(\beta_\alpha(\Re(s))$ *quand* $\Re(s)$ *tend vers* 0.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Corollaire 9.18, la Proposition 9.21 et le Corollaire 9.13. $\square$

Remarque 9.23. Remarquons que la condition (ii) ne dépend pas de α.

Avec le théorème précédent et le théorème 5.9, on obtient alors le résultat suivant.

Proposition 9.24. *Soient $l \geq 1$ et Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ si $p^+(n) > p_l$. Si $Im(\varphi)$ est borné et C_φ est compact sur $\mathcal{H}^2$ alors C_Φ est compact sur $\mathcal{A}^2_\alpha$ pour tout $\alpha > -1$.*

Question. *La compacité de C_Φ sur $\mathcal{H}^2$ implique t-elle la compacité de C_Φ sur $\mathcal{A}^2_\alpha$ en toute généralité ?*

9.3 Compacité et mesures de Carleson

Dans cette section, nous obtenons une majoration des fonctions de comptage généralisées par des fonctions de Carleson associées aux espaces $\mathcal{A}^2_\mu$. La proposition 9.7 nous permettra d'obtenir rapidement l'estimation souhaitée.

Définition 9.25. *Soit $\lambda_\mu = \lambda \otimes \mu$. On note $\lambda_{\mu,\Phi}$ la mesure image de λ_μ par Φ, c'est-à-dire, pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}_+$,*

$$\lambda_{\mu,\Phi}(\Omega) := \lambda_\mu(\{s \in \mathbb{C}_+, \Phi(s) \in \Omega\}).$$

La fonction de Carleson associée, notée λ_Φ, est alors définie par

$$\rho_{\mu,\Phi}(\vartheta) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \lambda_{\mu,\Phi}(H(t,\vartheta)).$$

Théorème 9.26. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$. Il existe $K > 0$ (indépendant de Φ) tel que pour tout ϑ assez petit et tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\sup_{s\in H(t,\vartheta/2)} N_{\beta_h,\Phi}(s) \leq K \cdot \lambda_{\mu,\Phi}\big(H(t, 2c_0\vartheta)\big).$$

En particulier pour tout ϑ assez petit,

$$\sup_{\substack{s\in\mathbb{C}_+ \\ \Re(s)<\vartheta/2}} N_{\beta_h,\Phi}(s) \leq K \cdot \rho_{\mu,\Phi}\big(2c_0\vartheta\big).$$

Corollaire 9.27. *Soit Φ un c_0-symbole avec $c_0 \geq 1$ tel que $Im(\varphi)$ est borné sur $\mathbb{C}_+$. Alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{A}^2_\mu, e} \leq C \limsup_{\vartheta \to 0} \frac{\rho_{\mu,\Phi}(\vartheta)}{\beta_h(\vartheta)}.$$

En particulier si $\rho_{\mu,\Phi}(\vartheta) = o(\beta_h(\vartheta))$ quand $\vartheta \to 0$ alors C_φ est compact sur $\mathcal{A}^2_\mu$.

Exemple 9.28. Pour l'espace $\mathcal{A}^2_\alpha$, on note $\rho_{\alpha,\Phi}$ la fonction de Carleson associée. On sait que dans ce cas, $\beta_\alpha(\sigma) \approx \sigma^{\alpha+2}$ quand σ est petit et alors si $Im(\varphi)$ est borné,

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{A}^2_\alpha, e} \lesssim C \limsup_{\vartheta \to 0} \frac{\rho_{\alpha,\Phi}(\vartheta)}{\vartheta^{\alpha+2}}.$$

Preuve du Corollaire 9.27. Analogue à la preuve du corollaire 6.3. □

Preuve du théorème 9.26. Par la proposition 9.7, on sait que

$$N_{\beta_h,\Phi}(s) = \int_0^{\Re(s)} N_{\Phi_u}(s) h(u) du.$$

Dans la preuve du théorème 6.2, on remarque que l'on peut choisir le même m_0 pour tous les translatés Φ_u $(u \geq 0)$ et donc pour $s \in H(t, \vartheta/2)$ avec $\vartheta < m_0$ on a

$$\begin{aligned} N_{\beta_h,\Phi}(s) &\leq K \int_0^{\Re(s)} \lambda_{\Phi_u}(H(t, 2c_0\vartheta)) h(u) du \\ &\leq K \int_0^{+\infty} \lambda(\{t' \in \mathbb{R}, \Phi(u + it') \in H(t, 2c_0\vartheta)\}) h(u) du \\ &= K \lambda_{\mu,\Phi}(H(t, 2c_0\vartheta)) \end{aligned}$$

grâce au théorème de Fubini. □

9.4 Opérateurs de compositions isométriques, inversibles, Fredholm

Dans le cas de l'espace $\mathcal{H}^2$, F. Bayart a montré les deux résultats suivants.

Théorème 9.29 ([4], Th14). *Soient $1 \leq p < +\infty$ et Φ un symbole sur $\mathcal{H}^p$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) C_Φ est inversible.

(ii) C_Φ est Fredholm.

(iii) $\Phi(s) = s + i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Théorème 9.30 ([4], Th16). *Soient $1 \leq p < +\infty$ et Φ un c_0-symbole sur $\mathcal{H}^p$. Alors C_Φ est une isométrie sur $\mathcal{H}^p$ si et seulement si pour tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$, $\Phi_\chi(it) \in i\mathbb{R}$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.*

Nous nous mettons maintenant dans le cas où μ est une mesure de probabilité sur $(0, +\infty)$ avec $d\mu(\sigma) = h(\sigma) d\sigma$ avec h une fonction continue strictement positive (on se passera de l'hypothèse de continuité à la fin de cette section). En particulier les mesures μ_α avec $\alpha > -1$ rentrent dans ce cadre. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 9.31. *Soient $1 \leq p < +\infty$ et Φ un c_0-symbole sur $\mathcal{A}^p_\mu$. Les assertions suivantes sont équivalentes .*

(i) C_Φ *est inversible.*

(ii) C_Φ *est Fredholm.*

(iii) C_Φ *est une isométrie.*

(iv) $\Phi(s) = s + i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Les implications $(i) \Rightarrow (ii)$, $(iv) \Rightarrow (i)$ et $(iv) \Rightarrow (iii)$ sont évidentes. Il suffit donc de montrer que $(ii) \Rightarrow (iv)$ et $(iii) \Rightarrow (iv)$.

Avec l'aide de la proposition 4.2 de [22], F. Bayart a prouvé le lemme suivant.

Lemme 9.32 ([4],Lem11)**.** *Soit Φ un c_0-symbole sur $\mathcal{H}^p$. Si Φ n'est pas une translation verticale, c'est-à-dire si Φ n'est pas de la forme $\Phi(s) = s + i\tau$ pour un certain $\tau \in \mathbb{R}$, alors il existe ε et $\eta > 0$ tels que*

$$\Phi(\mathbb{C}_{1/2-\varepsilon}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}.$$

Démonstration de $(ii) \Rightarrow (iv)$. On suit les idées de [4],Th14. Supposons donc que Φ ne soit pas une translation verticale. Par le lemme précédent, il existe ε et $\eta > 0$ tels que

$$\Phi(\mathbb{C}_{1/2-\varepsilon}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}.$$

On remarque que chaque fonction de $\mathrm{Im}(C_\Phi)$ est définie et bornée sur $\mathbb{C}_{1/2-\varepsilon}$: en effet $\Phi(\mathbb{C}_{1/2-\varepsilon}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}$ et si $f \in \mathcal{A}^p_\mu$, f est bornée sur $\mathbb{C}_{1/2+\eta}$ (car $\sigma_b(f) \leq 1/2$).

Maintenant par le lemme 9 de [4], on sait qu'il existe $f \in \mathcal{H}^p$ tel que $\sigma_c(f) = 1/2$ et que la droite $\Re(s) = 1/2$ soit une barrière pour f. Grâce à l'inclusion $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{A}^p_\mu$, f est dans $\mathcal{A}^p_\mu$. On considère alors le sous-espace de dimension infinie de $\mathcal{A}^p_\mu$ suivant :

$$F = vect\{\mathrm{e}_n f,\, n \geq 1\} = f\mathcal{P}.$$

Nous allons montrer que $F \cap Im(C_\Phi) = \{0\}$ et par conséquent codim($\mathrm{Im}(C_\Phi)$)$=+\infty$ ce qui est une contradiction avec (ii).

Soit $h \in F \cap Im(C_\Phi)$, il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $h = Pf$. Si $h \neq 0$, il existe s_0 tel que $\Re(s_0) = 1/2$ et $P(s_0) \neq 0$. Mais dans ce cas, f s'étend au-delà de $\mathbb{C}_{1/2}$ et on obtient alors une contradiction avec le fait que la droite $\Re(s) = 1/2$ est une barrière pour f. Finalement $F \cap Im(C_\Phi) = \{0\}$. □

Pour la preuve de $(iii) \Rightarrow (iv)$, on va d'abord montrer que si C_Φ est une isométrie alors $c_0 \geq 1$ à l'aide du lemme suivant.

Lemme 9.33. *Soit $s \in \mathbb{C}_1$. Alors*

$$\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^1_\mu)^*} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-\Re(s)}}{w_h(n)}.$$

En particulier,

$$\lim_{\Re(s)\to+\infty} \|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^1_\mu)^*} = 1.$$

Démonstration. Par la propriété reproduisante sur $\mathcal{A}^2_\mu$ (ou juste par simple calcul), pour tout polynôme de Dirichlet P on a

$$P(s) = \int_0^{+\infty} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} P(\sigma+it)\overline{K_\mu(s,\sigma+it)}\, dtd\mu(\sigma).$$

Maintenant par définition de la norme d'un polynôme de Dirichlet dans $\mathcal{H}^1$, on vérifie facilement que

$$\|P\|_{\mathcal{A}^1_\mu} = \left(\int_0^{+\infty} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |P(\sigma+it)|\, dtd\mu(\sigma)\right).$$

Par conséquent,

$$|P(s)| \leq \|P\|_{\mathcal{A}^1_\mu} \times \|K_\mu(s,\,\cdot\,)\|_\infty.$$

Maintenant il suffit de remarquer que

$$\|K_\mu(s,\,\cdot\,)\|_\infty = \sup_{w\in\mathbb{C}_+}\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-\overline{s}+w}}{w_h(n)}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-\Re(s)}}{w_h(n)}.$$

Pour la deuxième partie du lemme, il suffit de remarquer que $w_h(1) = 1$ (μ est une mesure de probabilité) et que $\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^1_\mu)^*} \geq 1$ (clair en testant sur e_1). □

Proposition 9.34. *Soit Φ un c_0-symbole sur $\mathcal{A}^p_\mu$. Si C_Φ est une contraction alors $c_0 \geq 1$.*

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. Pour tout $f \in \mathcal{A}^p_\mu$ on a

$$|f\circ\Phi(s)| \leq \|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*}\|f\circ\Phi\| \leq \|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*}\|C_\Phi\|\|f\|$$

et alors

$$\frac{\|\delta_{\Phi(s)}\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*}}{\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^p_\mu)^*}} \leq \|C_\Phi\|.$$

Par inclusion des espaces $\mathcal{A}^p_\mu$ et le fait que $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{A}^p_\mu$ avec $\|\cdot\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{H}^p}$, on obtient

$$\frac{\|\delta_{\Phi(s)}\|_{(\mathcal{H}^p)^*}}{\|\delta_s\|_{(\mathcal{A}^1_\mu)^*}} \leq \|C_\Phi\|.$$

Par le théorème 4.4 et le lemme précédent, on obtient alors pour tout $s \in \mathbb{C}_1$,

$$\zeta(2\Re(\Phi(s)))^{1/p}\|\delta_s\|^{-1}_{(\mathcal{A}^1_\mu)^*} \leq \|C_\Phi\|.$$

Maintenant supposons $c_0 = 0$, alors $\Phi(s) = \varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ et $\Re(c_1) > 1/2$ (d'après le lemme 3.3 de [22]). Finalement quand $\Re(s)$ tend vers l'infini, on obtient

$$\|C_\Phi\| \geq \zeta(2\Re(c_1))^{1/p} > 1$$

et par conséquent C_Φ n'est pas une contraction. □

Démonstration de $(iii) \Rightarrow (iv)$. Supposons que C_Φ est une isométrie. Par la proposition précédente, $c_0 \geq 1$. On a

$$\|2^{-\Phi}\|_{\mathcal{A}^p_\mu} = \|2^{-s}\|_{\mathcal{A}^p_\mu}$$

D'après le théorème 7.20,

$$\int_0^{+\infty} \|2^{-\sigma-\,\cdot}\|^p_{\mathcal{H}^p} - \|2^{-\Phi(\sigma+\,\cdot\,)}\|^p_{\mathcal{H}^p}\, d\mu(\sigma) = 0.$$

Mais

$$\|2^{-\Phi(\sigma+\,\cdot\,)}\|_{\mathcal{H}^p} = \|2^{-\sigma-(\Phi(\sigma+\,\cdot\,)-\sigma)}\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|2^{-\sigma-\,\cdot}\|_{\mathcal{H}^p}$$

par le Lemme de Schwarz car $c_0 \geq 1$. Alors $\|2^{-\sigma-\,\cdot}\|_{\mathcal{H}^p} = \|2^{-\Phi(\sigma+\,\cdot\,)}\|_{\mathcal{H}^p}$ pour tout $\sigma > 0$ (rappelons que h est une fonction continue strictement positive).

Maintenant d'après le lemme 9.32, si Φ n'est pas une translation verticale, il existe $\varepsilon, \eta > 0$ tel que $\Phi(\mathbb{C}_{1/2-\varepsilon}) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}$ et alors pour tout $\sigma > 1/2 - \varepsilon$,

$$2^{-\sigma} = \|2^{-\Phi(\sigma+\,\cdot\,)}\|_{\mathcal{H}^p}.$$

Par comparaison avec la norme infini, on a alors

$$2^{-\sigma} \leq 2^{-1/2-\eta}$$

pour tout $\sigma > 1/2 - \varepsilon$ et cela est évidemment faux. $\square$

Remarque 9.35. Soit μ une mesure de probabilité sur $(0, +\infty)$ telle que $0 \in Supp(\mu)$ et $d\mu = h d\sigma$ où h est une fonction positive. S'il existe un intervalle ouvert I telle que h est strictement positive sur I alors le théorème est encore vrai. C'est une conséquence du lemme suivant et de légères adaptations de la preuve précédente.

Lemme 9.36. *Soit Φ un symbole avec $c_0 \geq 1$. Si Φ n'est pas une translation verticale alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta_\varepsilon > 0$ tel que $\Phi(\mathbb{C}_\varepsilon) \subset \mathbb{C}_{\varepsilon+\eta}$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que φ n'est pas constante alors $\varphi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ et par la proposition 4.2 de [22], il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi(\mathbb{C}_\varepsilon) \subset \mathbb{C}_\delta$ et par conséquent $\Phi(\mathbb{C}_\varepsilon) \subset \mathbb{C}_{c_0\varepsilon+\delta}$. Dans ce cas, il suffit de choisir $\eta = (c_0 - 1)\varepsilon + \delta$ qui est strictement positif car $c_0 \geq 1$.

Si φ est constante égale à $i\tau$ ($\tau \in \mathbb{R}$) et $c_0 > 1$ alors $\Phi(\mathbb{C}_\varepsilon) \subset \mathbb{C}_{c_0\varepsilon}$ et il suffit de choisir $\eta = (c_0 - 1)\varepsilon$.

Si φ est constante égale à $c_1 \in \mathbb{C}_+$ et $c_0 \geq 1$, $\Phi(\mathbb{C}_\varepsilon) \subset \mathbb{C}_{c_0\varepsilon+\Re(c_1)}$ et il suffit de choisir $\eta = (c_0 - 1)\varepsilon + \Re(c_1)$. $\square$

Chapitre 10

Multiplicateurs sur $\mathcal{A}^p_\mu$

Dans ce chapitre nous étudions les multiplicateurs sur les espaces $\mathcal{A}^p_\mu$, c'est-à-dire les fonctions m telles que $mf \in \mathcal{A}^p_\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{A}^p_\mu$.

Le cas $p = 2$ a déjà été traité dans [34]. Notre preuve est malgré tout différente : l'argument clé est l'utilisation de l'application évaluation.

Théorème 10.1. *Soit $p \geq 1$. Une fonction m est un multiplicateur sur $\mathcal{A}^p_\mu$ si et seulement si $m \in \mathcal{H}^\infty$. De plus dans ce cas on a*

$$\|m\|_{\mathcal{H}^\infty} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{A}^p_\mu \\ \|f\|_{\mathcal{A}^p_\mu \leq 1}}} \|mf\|_{\mathcal{A}^p_\mu}.$$

Démonstration.
$\triangleright$ Supposons tout d'abord que m est un multiplicateur sur $\mathcal{A}^p_\mu$ et notons M l'opérateur de multiplication associé. La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}^p_\mu$ donc $m = m \times 1 \in \mathcal{A}^p_\mu$ et $\|m\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \|M\|$. Par récurrence, on montre que pour tout $k \geq 1$, $m^k \in \mathcal{A}^p_\mu$ et

$$\|m^k\|_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \|M\|^k$$

et donc

$$\|m^k\|^{1/k}_{\mathcal{A}^p_\mu} \leq \|M\|. \tag{10.1}$$

Pour f de la forme (3.1), notons pour tout $l \geq 1$, f_l la série de Dirichlet définie par

$$f_l = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p^+(n) \leq p_l}} a_n \mathrm{e}_n.$$

Pour tout $l \geq 1$, on a alors l'inégalité suivante :

$$|f_l(s)| \leq \left(\prod_{i=1}^{l} \frac{1}{1 - p_i^{-2\Re(s)}} \right)^{1/p} \times \|f\|_{\mathcal{H}^p} \cdot .$$

En effet, pour un élément $F \in H^p(\mathbb{T}^\infty)$ et $z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{D}$, on a par définition

$$F(z_1, \ldots, z_l, 0, 0, \ldots) = \int_{\mathbb{T}^\infty} F(\zeta) \prod_{i=1}^{l} P_{z_i}(\zeta_i) d\widetilde{m}(\zeta).$$

Le résultat en découle (en reprenant la preuve du Théorème 4.2 par exemple).

Cela implique que l'application évaluation "partielle" est bornée pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ (et la majoration de la norme de l'évaluation est uniforme sur chaque demi-plan $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$). En particulier, en reprenant la preuve du Théorème 7.6, ce résultat reste vrai sur $\mathcal{A}^p_\mu$. Fixons donc $s \in \mathbb{C}_+$, il existe alors une constante $C_{s,l} > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$

$$|m_l^k(s)| \leq C_{s,l} \|m^k\|_{\mathcal{A}^p_\mu}.$$

On a utilisé sans le dire que si une série de Dirichlet dépend uniquement d'un nombre fini de nombres premiers, il en est de même pour toute puissance entière de cette série. En combinant cela avec (10.1) on obtient alors

$$|m_l(s)| \leq C_{s,l}^{1/k} \|M\|.$$

En particulier quand k tend vers $+\infty$, on a pour tout $l \geq 1$,

$$|m_l(s)| \leq \|M\|.$$

La majoration de dépend plus de l, la suite (m_l) est donc une suite d'éléments de $\mathcal{H}^\infty$ uniformément bornée : d'après le Théorème de Montel dans ce cadre, il existe $\widetilde{m} \in \mathcal{H}^\infty$ telle que (m_l) converge uniformément vers $\widetilde{m}$ sur tout demi-plan $\mathbb{C}_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Or $m \in \mathcal{A}^p_\mu$ donc (m_l) converge uniformément vers m sur tout demi-plan de $\mathbb{C}_{1/2+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$).

Finalement par unicité, $\widetilde{m}$ est donc une extension de m bornée sur $\mathbb{C}_+$ et donc $m \in \mathcal{H}^\infty$.

$\triangleright$ Supposons maintenant que $m \in \mathcal{H}^\infty$. Pour tout polynôme de Dirichlet P, mP est un élement de $\mathcal{H}^\infty$ et par le Théorème 7.20(ii), on a

$$\|mP\|^p_{\mathcal{A}^p_\mu} = \int_0^{+\infty} \|m_\sigma P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} \, d\mu(\sigma).$$

Or par le Théorème 4.7, on a pour tout $\sigma > 0$,

$$\|m_\sigma P_\sigma\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|m_\sigma\|_{\mathcal{H}^\infty} \|P_\sigma\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|m\|_{\mathcal{H}^\infty} \|P_\sigma\|_{\mathcal{H}^p}.$$

Finalement on a donc

$$\begin{aligned} \|mP\|^p_{\mathcal{A}^p_\mu} &\leq \|m\|^p_{\mathcal{H}^\infty} \int_0^{+\infty} \|P_\sigma\|^p_{\mathcal{H}^p} \, d\mu(\sigma) \\ &= \|m\|^p_{\mathcal{H}^\infty} \|P\|^p_{\mathcal{A}^p_\mu}. \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat par densité des polynômes de Dirichlet et continuité de l'application évaluation sur $\mathcal{A}^p_\mu$. □

Remarque 10.2. On remarquera que la première partie de la preuve peut s'adapter aux espaces de fonctions analytiques sur un domaine Ω où l'application évaluation est bornée en tout point de Ω.

Quatrième partie

Espaces de Bergman $\mathcal{B}^p$

Introduction

Nous venons de voir une manière de définir des espaces de Bergman de séries de Dirichlet en voyant la norme de ces espaces comme une norme sur un demi-plan. On peut en fait avoir un autre point de vue : les espaces $\mathcal{H}^p$ ont en effet été définis à l'aide du point de vue de Bohr en les reliant aux espaces de Hardy du polytore infini $H^p(\mathbb{T}^\infty)$, l'idée est alors la suivante.

Soit P un polynôme de Dirichlet, $D(P)$ est alors un polynôme analytique sur $\mathbb{D}^\infty$ et donc si X est un sous-espace de $L^p(\mathbb{D}^\infty)$, on peut associer à P la norme $\|D(P)\|_X$.

C'est ce que nous allons faire dans les chapitres suivants en prenant pour X l'espace de Bergman du polydisque. On se posera alors les question suivantes.

(i) Que peut-on dire sur l'application évaluation sur ces espaces ?

(ii) Quels sont les liens entres ces nouveaux espaces et $\mathcal{H}^p$?

(iii) Quels sont les multiplicateurs de ces espaces ?

(iv) Que peut-on dire de la continuité et de la compacité des opérateurs de composition dans ce cadre ?

Chapitre 11

Espaces de Bergman $\mathcal{B}^p$

Afin de définir les espaces de Bergman $\mathcal{B}^p$, nous faisons tout d'abord quelques rappels sur les espaces de Bergman du polydisque infini.

11.1 Les espaces de Bergman $B^p(\mathbb{D}^\infty)$

Rappelons que $\widetilde{A} = A \otimes A \otimes \cdots$ où A est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. Pour $p \geq 1$, $B^p(\mathbb{D}^\infty)$ est l'espace de Bergman du polydisque infini. Il est défini comme l'adhérence dans $L^p(\mathbb{D}^\infty, \widetilde{A})$ de l'ensemble des polynômes analytiques.

Remarque 11.1. Soit P un polynôme analytique défini pour tout $z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbb{D}^\infty$ par $P(z) := \sum_{n=1}^{N} a_n z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k}$. Alors

$$\|P\|_{B^2(\mathbb{D}^\infty)} = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|^2}{(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)} \right)^{1/2}.$$

Clairement $H^2(\mathbb{T}^\infty) \subset B^2(\mathbb{D}^\infty)$. En fait cette inclusion est vraie pour tout $p \geq 1$, Il suffit d'appliquer plusieurs fois le fait que cette propriété est vraie dans le cas d'une variable.

Rappelons que le noyau de Bergman en $z, w \in \mathbb{D}$ est défini par $k(w, z) := \dfrac{1}{(1 - \overline{w}z)^2}$.

Définition 11.2. *Soit $z \in \mathbb{D}^\infty$ et $\zeta \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. Pour $n \geq 1$, on pose*

$$K_n(\zeta, z) := \prod_{i=1}^{n} k(\zeta_i, z_i) \;\; et \;\; K(\zeta, z) := \prod_{i=1}^{+\infty} k(\zeta_i, z_i).$$

K est bien défini grâce à la condition sur ζ et le fait que (K_n) converge ponctuellement vers K.

Remarque 11.3. On sait que

$$\|k(\zeta_i, \cdot)\|_2^2 = k(\zeta_i, \zeta_i) = \frac{1}{(1 - |\zeta_i|^2)^2} \cdot$$

Donc $K(\zeta, \cdot) \in B^2(\mathbb{D}^\infty)$ et

$$\|K(\zeta, \cdot)\|_{B^2(\mathbb{D}^\infty)}^2 = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 - |\zeta_i|^2)^2}.$$

Proposition 11.4. *Soit P un polynôme analytique sur $\mathbb{D}^\infty$ et soit $\zeta \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. Alors*

$$|P(\zeta)| \leq \left(\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-|\zeta_i|^2}\right) \|P\|_{B^2(\mathbb{D}^\infty)}.$$

Démonstration. Par la propriété reproduisante sur l'espace de Bergman du disque appliquée plusieurs fois, on obtient que

$$P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \int_{\mathbb{D}^n} P(z_1, \ldots, z_n) \overline{K_n(\zeta, z)}\, dA(z_1)..dA(z_n).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors le résultat. □

Grâce à la proposition précédente, on peut étendre par densité l'application évaluation définie pour les polynômes analytiques pour $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. Pour tout $F \in B^2(\mathbb{D}^\infty)$, on note $\tilde{F}(\zeta)$ cette extension et on a

$$|\tilde{F}(\zeta)| \leq \left(\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-|\zeta_i|^2}\right) \|f\|_{B^2(\mathbb{D}^\infty)}.$$

De plus la norme est exactement $\displaystyle\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1-|\zeta_i|^2}$: c'est une conséquence de [15]. De plus les auteurs ont prouvé que $\tilde{F}$ était holomorphe sur $\mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. Nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 11.5. *([15]) Soient $\zeta \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$, $N \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $z \in \mathbb{T}^\infty$,*

$$G_N(z) := \prod_{j=1}^{N} (1 - \overline{\zeta_j} z_j)^a.$$

Alors (G_N) est une martingale bornée dans $L^2(\mathbb{T}^\infty)$.

Remarque 11.6. Tout élément G_n appartient à $B^2(\mathbb{D}^\infty)$ et on a

$$\|G_n\|_{L^2(\mathbb{D}^\infty)} = \|G_n\|_{B^2(\mathbb{D}^\infty)} \leq \|G_n\|_{H^2(\mathbb{T}^\infty)} = \|G_n\|_{L^2(\mathbb{T}^\infty)}.$$

Donc (G_n) est une martingale bornée dans $L^2(\mathbb{D}^\infty)$. Par le théorème de Doob et par fermeture, on sait que le produit converge simplement et en norme dans $B^2(\mathbb{D}^\infty)$.

Rappelons maintenant quelques notations et résultats de [15].

Soit U une algèbre uniforme sur un espace compact X et μ une mesure sur X. $H^p(\mu)$ est défini comme l'adhérence de U dans $L^p(\mu)$.

Proposition 11.7. *([15]) Soient U une algèbre uniforme sur un espace compact X, μ une mesure de probabilité sur X, $y \in X$ tel que l'évaluation en y s'étende continument à $H^2(\mu)$. Supposons que toute puissance réelle du noyau reproduisant associé à y, $x \to K(x, y)$, appartienne à $H^2(\mu)$. Alors pour $p \geq 1$, on a*

$$|\tilde{F}(y)|^p \leq K(y, y) \int |f(x)|^p d\mu(x)$$

pour toute fonction F dans $H^p(\mu)$ et la norme de l'application évaluation en y est exactement $K(y, y)^{1/p}$.

Avec cette proposition et la dernière remarque, on obtient que l'application évaluation est bornée sur $B^p(\mathbb{D}^\infty)$ pour $\zeta \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$ et on a

$$|f(\zeta)|^p \leq \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-|\zeta_i|^2)^2} \|f\|^p_{B^p(\mathbb{D}^\infty)}.$$

De plus $\tilde{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$ d'après [15].

11.2 Application évaluation sur $\mathcal{B}^p$

Rappelons que R est la mesure de probabilité sur $[0,1]^\infty$ définie comme le produit infini des mesures $2r_i dr_i$ sur $[0,1]$.

Définition 11.8. *Soit $P \in \mathcal{P}$ de la forme $\sum_{n\geq 1}^{N} a_n n^{-s}$. On définit sur $\mathcal{P}$ la norme*

$$\|P\|_{\mathcal{B}^p} := \left(\int_{[0,1]^\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n r_1^{\alpha_1} \cdots r_k^{\alpha_k} \mathrm{e}_n(it) \right\|^p_{\mathcal{H}^p} dR \right)^{1/p}.$$

Remarque 11.9. Le fait que $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^p}$ soit une norme est une conséquence de la proposition suivante.

Définition 11.10. *Soit $p \geq 1$. On définit l'espace $\mathcal{B}^p$ comme le complété de $\mathcal{P}$ relativement à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^p}$.*

Remarque 11.11. Notons $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Pour f de la forme (3.1), on a

$$\|f\|_{\mathcal{B}^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{d(n)} \right)^{1/2}.$$

Nous utilisons maintenant le point de vue de Bohr pour préciser le lien entre $\mathcal{B}^p$ et $B^p(\mathbb{D}^\infty)$.

Proposition 11.12. *Soit $p \geq 1$.*

(i) Soit $P \in \mathcal{P}$. On a $\|P\|_{\mathcal{B}^p} = \|D(P)\|_{B^p}$.

(ii) $D : \mathcal{P} \to B^p(\mathbb{D}^\infty)$ s'étend en un isomorphime isométrique de $\mathcal{B}^p$ sur $B^p(\mathbb{D}^\infty)$.

Démonstration. Le premier fait est clair. Pour le deuxième, il suffit de remarquer que $\mathcal{B}^p$ est le complété de $\mathcal{P}$ et que $B^p(\mathbb{D}^\infty)$ est l'adhérence de l'ensemble des polynômes analytiques. □

Théorème 11.13. *Soient $p \geq 1$ et $f \in \mathcal{B}^p$. L'abscisse de convergence uniforme de f vérifie $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$. De plus, si $\Re(w) > \frac{1}{2}$, on a*

$$|f(w)| \leq \zeta(2Re(w))^{2/p} \|f\|_{\mathcal{B}^p}$$

et

$$\|\delta_w\|_{(\mathcal{B}^p)^*} = \zeta(2Re(w))^{2/p}.$$

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{B}^p$ et $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$. On pose $z_s = (p_1^{-s}, p_2^{-s}, \ldots) \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. On sait que $D(f) \in B^p(\mathbb{D}^\infty)$ et donc

$$|D(f)(z_s)|^p \leq \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-|p_i^{-s}|^2)^2} \, \|D(f)\|^p_{B^p(\mathbb{D}^\infty)}.$$

Mais grâce à la proposition précédente $\|D(f)\|_{B^p(\mathbb{D}^\infty)} = \|f\|_{\mathcal{B}^p}$ et

$$\begin{aligned} D(f)(z_s) &= \sum_{\substack{n=p_1^{\alpha_1}\cdots\, p_k^{\alpha_k}\\ n\geq 1}} a_n (p_1^{-s})^{\alpha_1} .. (p_k^{-s})^{\alpha_k} \\ &= \sum_{\substack{n=p_1^{\alpha_1}..p_k^{\alpha_k}\\ n\geq 1}} a_n (p_1^{\alpha_1} \ldots \, p_k^{\alpha_k})^{-s} = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}. \end{aligned}$$

Alors

$$|f(s)|^p \leq \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1-p_i^{-2\Re(s)}\right)^2} \, \|f\|^p_{\mathcal{B}^p} = \zeta(2\Re(s))^2 \, \|f\|^p_{\mathcal{B}^p}.$$

Donc f admet une extension analytique bornée sur chaque demi-plan $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Bohr, on a $\sigma_u(f) \leq \frac{1}{2}$.

Pour prouver que la norme est exactement $\zeta(2Re(w))^{2/p}$, il suffit d'utiliser le résultat équivalent de [15] sur $B^p(\mathbb{D}^\infty)$. □

11.3 Limites verticales généralisées

Le but de cette section est d'obtenir une formule de type Littlewood-Paley grâce à un nouvelle notion de limites verticales. Remarquons que l'on peut faire agir $\chi \in \mathbb{D}^\infty$ sur les entiers naturels de la même manière que si χ appartenait à $\mathbb{T}^\infty$.

Définition 11.14. *Soit $\chi \in \mathbb{D}^\infty$ et f de la forme (3.1). On note f_χ la série de Dirichlet suivante :*

$$f_\chi = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \chi(n) \mathrm{e}_n.$$

Nous allons appliquer le même raisonnement que dans [22] et [4] afin d'obtenir une autre expression de la norme dans $\mathcal{B}^p$ qui sera utile pour les opérateurs de composition.

Soit ψ la transformation de Cayley qui envoie $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}_+$ définie pour tout $z \in \mathbb{D}$ par

$$\psi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

On dit qu'une fonction f est dans $H^p_i(\mathbb{C}_+)$ si $f \circ \psi \in H^p(\mathbb{D})$. Dans ce cas on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f \circ \psi_1(e^{i\theta})|^p d\theta = \int_{\mathbb{R}} |f(it)|^p d\lambda_i(t)$$

où
$$d\lambda_i(t) = \frac{dt}{\pi(1+t^2)}.$$

Définition 11.15. *Soit $t \in \mathbb{R}$. Le flot de Kronecker T_t est défini sur $\mathbb{D}^\infty$ par $T_t(z_1, z_2, \dots) := (p_1^{-it} z_1, p_2^{-it} z_2, \dots)$.*

Lemme 11.16. *Soient $\chi \in \mathbb{D}^\infty$, $f \in \mathcal{B}^p$ et $t \in \mathbb{R}$. On pose $g_\chi(it) := D(f)(T_t\chi)$. Alors pour w une mesure borélienne finie sur $\mathbb{R}$, on a*
$$\int_{\mathbb{D}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_\chi(it)|^p dw(t) d\widetilde{A}(\chi) = w(\mathbb{R}) \|f\|_{\mathcal{B}^p}^p.$$

Démonstration. Le Flot de Kronecker (T_t) est juste une rotation sur $\mathbb{D}^\infty$, donc
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}^\infty} |g_\chi(it)|^p d\widetilde{A}(\chi) &= \int_{\mathbb{D}^\infty} |D(f)(T_t\chi)|^p d\widetilde{A}(\chi) \\ &= \int_{\mathbb{D}^\infty} |D(f)(\chi)|^p d\widetilde{A}(\chi) \\ &= \|D(f)\|_{\mathcal{B}^p}^p. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le théorème de Fubini. □

Proposition 11.17. *Soient $\chi \in \mathbb{D}^\infty$ et $f \in \mathcal{B}^p$. Alors $g_\chi \in H_i^p(\mathbb{C}_+)$ et g_χ est une extension de f_χ sur $\mathbb{C}_+$.*

Démonstration. Grâce au lemme précédent, on sait que pour presque tout $\chi \in \mathbb{D}^\infty$, $g_\chi \in L^p(\lambda_i)$. Il suffit donc de montrer en utilisant une caractérisation classique de l'espace de Hardy du disque que pour tout $n \geq 1$,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n g_\chi(it) d\lambda_i(t) = 0.$$

On utilise alors la même idée que dans [22] et [4] mais il nous faut ici adapter la preuve car nous ne travaillons pas avec des séries de Fourier sur $\mathbb{T}^\infty$ mais avec des éléments de $B^p(\mathbb{D}^\infty)$. Fixons $n \geq 1$ et définissons G pour tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ par
$$G(\chi) := \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n g_\chi(it) d\lambda_i(t).$$

$G \in L^p(\mathbb{D}^\infty)$ car
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}^\infty} |G(\chi)|^p dm(\chi) &= \int_{\mathbb{D}^\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n g_\chi(it) d\lambda_i(t) \right|^p d\widetilde{A}(\chi) \\ &\leq \int_{\mathbb{D}^\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_\chi(it)|^p d\lambda_i(t) d\widetilde{A}(\chi) = \|D(f)\|_{\mathcal{B}^p}^p, \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du lemme précédent.

En fait, $G \in B^p(\mathbb{D}^\infty)$. Il suffit de montrer qu'il existe une suite de polynômes analytiques convergeant vers G. Puisque $f \in B^p(\mathbb{D}^\infty)$, on a $D(f) \in B^p(\mathbb{D}^\infty)$ et il existe donc une suite de polynômes analytiques (P_k) telle que
$$\|D(f) - P_k\|_{B^p(\mathbb{D}^\infty)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors pour tout $k \geq 0$, on définit les polynômes suivants :

$$Q_k(\chi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n P_k(T_t\chi) d\lambda_i(t)$$

et on affirme que (Q_k) converge vers G. En effet

$$\|G - Q_k\|^p_{B^p(\mathbb{D}^\infty)} = \int_{\mathbb{D}^\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n (g_\chi(it) - P_{k,\chi}(it))\, d\lambda_i(t) \right|^p d\widetilde{A}(\chi).$$

On obtient, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\|G - Q_k\|^p_{B^p(\mathbb{D}^\infty)} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|(D(f) - P_k)(T_t(\,\cdot\,))\|^p_{B^p(\mathbb{D}^\infty)} d\lambda_i(t)$$

mais T_t étant juste une rotation,

$$\|G - Q_k\|^p_{B^p(\mathbb{D}^\infty)} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|(D(f) - P_k)\|^p_{B^p(\mathbb{D}^\infty)} d\lambda_i(t) = \|(D(f) - P_k)\|^p_{B^p(\mathbb{D}^\infty)}$$

et ce terme tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Cela prouve l'affirmation.

On affirme maintenant que G s'annule presque partout. Puisque G appartient à $B^p(\mathbb{D}^\infty)$, il suffit de prouver que G est orthogonal à chaque monôme "positif". Soit $q \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_{\mathbb{D}^\infty} \overline{\chi}(q) G(\chi) d\widetilde{A}(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^n \int_{\mathbb{D}^\infty} \overline{\chi}(q) g_\chi(it) d\widetilde{A}(\chi)\, d\lambda_i(t).$$

En fait,

$$\int_{\mathbb{D}^\infty} \overline{\chi}(q) g_\chi(it) d\widetilde{A}(\chi) = 0$$

car $g_\chi(it) = Df(T_t\chi) \in B^p(\mathbb{D}^\infty)$. C'est clair pour les polynômes analytiques et le résultat s'obtient donc par densité.

La preuve que g_χ est une extension de f_χ est la même que celle donnée pour $\mathcal{H}^p$ dans [4]. $\square$

Maintenant, nous notons f_χ l'extension plutôt que g_χ. Comme dans le cas $\mathcal{H}^p$ avec $p \geq 1$, cette extension est presque sûrement simple.

Proposition 11.18. *Soient $\chi \in \mathbb{D}^\infty$ et $f \in \mathcal{B}^p$ pour $p \geq 1$. Alors pour presque tout χ (relativement à $\widetilde{A}$), f_χ converge sur $\mathbb{C}_+$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{B}^2$ de la forme (3.1). On considère $L^2(\mathbb{D}^\infty, \widetilde{A})$ et la suite orthonormale (Φ_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $\Phi_n(\chi) = \sqrt{d(n)}\chi(n)$. Pour $\sigma > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, soit $c_n := \dfrac{a_n n^{-\sigma-it}}{\sqrt{d(n)}}$.
En remarquant que $\left(a_n/\sqrt{d(n)}\right)_{n\geq 1} \in \ell^2$ et que $\left(n^{-\sigma}\log(n)\right)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|^2 \log^2(n) < +\infty.$$

Le théorème de Menchoff implique donc que $\sum c_n\Phi_n(\chi)$ converge pour presque tout χ. Par conséquent, le résultat est montré pour $p = 2$.
Pour $p \neq 2$, il suffit de prouver le résultat quand $p = 1$. Ce sera une conséquence de la Proposition 12.7 et du même raisonnement fait dans le cas $\mathcal{A}^p_\mu$. $\square$

Soit $f \in \mathcal{B}^2$, on sait que pour presque tout $\chi \in \mathbb{D}^\infty$, f_χ converge sur $\mathbb{C}_+$ et donc $g_\chi = f_\chi$, on obtient donc que pour toute mesure de probabilité borélienne w sur $\mathbb{R}$,

$$\|f\|_{\mathcal{B}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{D}^\infty} |f_\chi(it)|^2 d\widetilde{A}(\chi) dw(t).$$

Théorème 11.19. *Soit $f \in \mathcal{B}^2$ et w une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$\|f\|_{\mathcal{B}^2}^2 = |f(+\infty)|^2 + 4 \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{D}^\infty} \sigma |f_\chi(\sigma + it)|^2 d\widetilde{A}(\chi) d\sigma dw(t).$$

Démonstration. Pour $\sigma > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{D}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_\chi'(\sigma + it)|^2 dw(t) d\widetilde{A}(\chi) = \|f'\|_{\mathcal{B}^2}^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|a_n|^2 n^{-2\sigma} \log^2(n)}{d(n)}.$$

On multiplie alors par σ et il suffit de remarquer que

$$\int_0^{+\infty} \sigma n^{-2\sigma} d\sigma = \frac{1}{4\log^2(n)}.$$

□

11.4 Inégalité sur les coefficients $\mathcal{B}^p$

Nous donnons ici quelques inégalités entre la norme d'éléments de $\mathcal{B}^p$ et des normes ℓ^p à poids des coefficients de ces éléments (comme dans le théorème 7.30).

Théorème 11.20. *Soit $p \geq 1$.*

(i) Si $1 \leq p \leq 2$ et $f = \sum_{n \geq 1} a_n \mathrm{e}_n \in \mathcal{B}^p$, on a

$$\left\| \frac{a_n}{d(n)^{1/p}} \right\|_{\ell^{p'}} \leq \|f\|_{\mathcal{B}^p}.$$

(ii) Si $p \geq 2$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^{p'}}{d(n)^{p'-1}} < \infty$, on a $f = \sum_{n \geq 1} a_n \mathrm{e}_n \in \mathcal{B}^p$ et

$$\|f\|_{\mathcal{B}^p} \leq \left(\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^{p'}}{d(n)^{p'-1}} \right)^{1/p'} = \left\| \frac{a_n}{d(n)^{1/p}} \right\|_{\ell^{p'}}.$$

Démonstration. Nous ne donnons pas les détails car la preuve suit les mêmes idées que la preuve du théorème 7.30.

Soit $1 \leq p \leq 2$.
Pour tout entier $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k} \geq 1$ et $f \in L^p(\mathbb{D}^\infty, d\widetilde{A})$, on définit

$$\tau_n(f) = \int_{\mathbb{D}^\infty} f(z)\bar{z}^{(n)}\, d\widetilde{A}$$

où $\bar{z}^{(n)} = \bar{z}_1^{\alpha_1} \dots \bar{z}_k^{\alpha_k}$.
On remarque que, quand P est un polynôme de Dirichlet $P(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, on lui associe $f(z) = D(P)(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_k^{\alpha_k}$ On a dans ce cas $\tau_n(f) = a_n/d(n)$.

Alors on considère $Q(f) = \big(\tau_n(f)\big)_{n\geq 1}$. Cela définit un opérateur de norme 1 de $L^1(\mathbb{D}^\infty, d\widetilde{A})$ vers $L^\infty(\omega)$ et de $L^2(\mathbb{D}^\infty, d\widetilde{A})$ vers $L^2(\omega)$, avec $\omega(n) = d(n)$. Le même argument d'interpolation donne alors le résultat. □

11.5 Multiplicateurs sur $\mathcal{B}^p$

Soit $1 \leq p < +\infty$. F. Bayart a montré dans [4] que $\mathcal{H}^\infty$ était l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{H}^p$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions m définies sur $\mathbb{C}_{1/2}$ telles que $mf \in \mathcal{H}^p$ pour tout $f \in \mathcal{H}^p$. Remarquons qu'un multiplicateur qui est a priori défini sur $\mathbb{C}_{1/2}$ est en fait défini et borné sur $\mathbb{C}_+$.

Théorème 11.21. *Soit $p \geq 1$. $\mathcal{H}^\infty$ est l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{B}^p$.*

Remarque 11.22. On pourrait adapter la preuve donnée dans le cas des espaces $\mathcal{A}^p_\mu$, on donne malgré tout une autre preuve.

Démonstration. Le point-clé est d'utiliser le theorème 11.1 de [15] : l'identité définie initialement sur les polynômes de $H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ dans $H^\infty(\mathbb{D}^\infty)$ (muni de $\widetilde{A}$) s'étend en un isomorphisme isométrique.

Considérons $m \in \mathcal{H}^\infty$, $D(m)$ appartient à $H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ et donc à $H^\infty(\mathbb{D}^\infty)$. Si f appartient à $\mathcal{B}^p$, $D(mf) = D(m)D(f)$ (l'égalité est justifiée par le lemme 2.3 de [5]) et vu que $D(f) \in B^p(\mathbb{D}^\infty)$, $D(mf)$ aussi.

Soit m un multiplicateur de $\mathcal{B}^p$ et notons M l'opérateur de multiplication associé. La fonction constante égale à 1 est dans $\mathcal{B}^p$ donc $m \in \mathcal{B}^p$ et $\|m\|_{\mathcal{B}^p} \leq \|M\|$. Vu que m appartient à $\mathcal{B}^p$, m^2 aussi et on continue d'itérer ce procédé afin d'obtenir que pour tout $k \geq 1$, $\|m^k\|_{\mathcal{B}^p} \leq \|M\|^k$. En particulier, on a

$$\left(\int_{\mathbb{D}^\infty} |D(m^k)|^p \, d\widetilde{A} \right)^{1/p} \leq \|M\|^k$$

et ainsi

$$\left(\int_{\mathbb{D}^\infty} |D(m)|^{kp} \, d\widetilde{A} \right)^{1/kp} \leq \|M\|.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient alors que $\|D(m)\|_{H^\infty(\mathbb{D}^\infty)} \leq \|M\|$. En réutilisant le théorème 11.1 de [15] on obtient finalement que $m \in \mathcal{H}^\infty$.

De plus en mettant bout-à-bout les deux parties de la preuve, on a $\|M\| = \|m\|_{\mathcal{H}^\infty}$.

□

Nous souhaitons donner maintenant un critère d'hypercyclicité concernant M^*. Rappelons qu'un opérateur T sur un espace de Banach X est hypercyclique si il existe un élément $x \in X$ tel que $\{T^n(x),\, n \geq 1\}$ soit dense dans X. On trouvera dans [7] de très nombreux résultats concernant ces opérateurs. Nous allons avoir besoin du résultat suivant qui est une conséquence du critère d'hypercyclicité.

Théorème 11.23 (Critère de Godefroy-Shapiro (Cor1.10 de [7]))**.**
Soit $T \in B(X)$ où X est un espace de Banach. Supposons que $\bigcup_{|\lambda|<1} Ker(T-\lambda)$ et $\bigcup_{|\lambda|>1} Ker(T-\lambda)$ possèdent tous les deux un sous-espace dense dans X. Alors T est Hypercyclique.

Remarque 11.24. L'hypothèse que X soit un espace de Banach nous suffira même si le critère est en fait vrai pour des $F-$espaces (voir [7]).

Nous commençons par le cas $\mathcal{H}^2$ où l'ensemble des multiplicateurs est aussi $\mathcal{H}^\infty$ (Théorème 4.7).

Théorème 11.25. *Soit $m \in \mathcal{H}^\infty$. Si M est l'opérateur de multiplication associé à m sur $\mathcal{H}^2$ alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $m(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \varnothing$ *et m est non constante.*

(ii) M^* *est hypercyclique.*

Remarque 11.26. Ce résultat est analogue à celui prouvé dans le cas du disque unité. L'idée de la preuve reste la même mais il y a ici le problème que les fonctions de $\mathcal{H}^2$ sont a priori définies sur $\mathbb{C}_{1/2}$ et non sur $\mathbb{C}_+$.

Notation. *Soit f une série de Dirichlet de la forme (3.1). Pour $l \geq 1$, on note $f^l(s)$ la série de Dirichlet définie par*

$$f = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p^+(n) \leq p_l}} a_n \mathrm{e}_n.$$

On remarquera que si f et g sont deux séries de Dirichlet, on a $(fg)^l = f^l g^l$.

Lemme 11.27. *Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}_+$ à distance strictement positive de l'axe imaginaire et $f \in \mathcal{H}^\infty$. Alors $(f^l)_{l \geq 1}$ converge uniformément vers f sur Ω.*

Démonstration. $f \in \mathcal{H}^\infty$ donc $D(f) \in H^\infty(B)$ où $B = c_0 \cap \mathbb{D}^\infty$ est la boule unité de c_0 (d'après [15]). Par le lemme de Schwarz, pour tout $n \geq l \geq 1$ et $z = (z_1, z_2, \cdots) \in B$,

$$|D(f)(z_1, \cdots, z_n, 0, \cdots) - D(f)(z_1, \cdots, z_l, 0, \cdots)| \leq 2 \sup_{l \leq k \leq n} |z_k| \times \|D(f)\|_{H^\infty(B)}.$$

En particulier si $\varepsilon = Dist(\Omega, \partial\mathbb{C}_+)$, en appliquant l'inégalité précédente à $z = (p_1^{-s}, p_2^{-s}, \cdots)$ où $s \in \Omega$ et en faisant tendre n vers l'infini, on a

$$|f(s) - f^l(s)| \leq 2 p_l^{-\varepsilon} \|f\|_{\mathcal{H}^\infty}.$$

En faisant tendre l vers $+\infty$ on obtient donc le résultat souhaité. $\square$

Lemme 11.28. *Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}_+$ à distance strictement positive de l'axe imaginaire et $l_0 \in \mathbb{N}$. Alors dans $\mathcal{H}^2$,*

$$vect\{K_s^l,\, s \in \Omega,\, l \geq l_0\}^{\perp} = \{0\}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{H}^2$ de la forme (3.1). Supposons que $f \in vect\{K_s^l,\, s \in \Omega,\, l \geq l_0\}^{\perp}$. Alors pour tout $s \in \Omega$ et $l \geq l_0$,

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ p^+(n) \leq p_l}} a_n n^{-s} = 0.$$

Remarquons que la série f^l est définie sur $\mathbb{C}_+$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Toutes les séries f^l $(l \geq l_0)$ sont donc nulles sur Ω et donc sur $\mathbb{C}_+$. Par unicité du développement en série de Dirichlet, on a donc que tous les coefficients a_n sont nuls dès que $p^+(n) \leq p_l$ avec $l \geq l_0$. Par conséquent tous les coefficients sont nuls et la fonction f est donc nulle. □

Démonstration du théorème 11.25.
▷ Supposons tout d'abord que m est non constante et $m(\mathbb{C}_+) \cap \mathbb{T} \neq \varnothing$. Par le théorème de l'application ouverte les ensembles Ω_1 et Ω_2 définies par

$$\Omega_1 = \{s \in \mathbb{C}_+,\, |m(s)| > 1\}$$

$$\Omega_2 = \{s \in \mathbb{C}_+,\, |m(s)| < 1\}$$

sont donc des ouverts non vides de $\mathbb{C}_+$. On souhaite maintenant utiliser le critère de Godefroy-Shapiro pour montrer que M^* est hypercyclique.

Remarquons tout d'abord que pour $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ et tout $f \in \mathcal{H}^2$, on a

$$< M^*(K_s)\,,\, f > = < K_s\,,\, M(f) > = < K_s\,,\, mf > = \overline{m(s)f(s)} = < \overline{m(s)}K_s\,,\, f > \cdot$$

Donc $\overline{m(s)}$ est une valeur propre de M^* associée au vecteur propre K_s.
Maintenant pour $s \in \mathbb{C}_+$ et $l \geq 1$, on a pour tout $f \in \mathcal{H}^2$,

$$< M^*(K_s^l)\,,\, f > = < K_s^l\,,\, M(f) > = < K_s^l\,,\, mf > = (\overline{m(s)f(s)})^l.$$

Or $(mf)^l = m^l f^l$ et donc

$$< M^*(K_s^l)\,,\, f > = < \overline{m^l(s)}K_s^l\,,\, f > .$$

Finalement $m^l(s)$ est aussi valeur propre de M^* associée au vecteur propre K_s^l.

Nous allons maintenant montrer que $\bigcup_{|\lambda|>1} Ker(M^* - \lambda)$ contient un sous-ensemble dense. Sur Ω_1, on sait que $|m(s)| > 1$. On a deux cas :

Si $\Omega_1 \cap \mathbb{C}_{1/2}$ est encore un ouvert non vide alors

$$vect\{K_s,\, s \in \mathbb{C}_{1/2} \cap \Omega_1\} \subset \bigcup_{|\lambda|>1} Ker(M^* - \lambda)$$

et clairement le premier sous-ensemble est dense dans $\mathcal{H}^2$ (si un élément est dans son orthogonal, alors cet élément s'annule sur un ouvert de $\mathbb{C}_{1/2}$ et est donc nul).

Sinon $\Omega_1^{'} := \Omega_1 \cap (\mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{C}_{1/2})$ est d'intérieur non vide. Dans ce cas, quitte à prendre un sous-ensemble un peu plus petit, on peut supposer que c'est un ouvert ne touchant pas le bord de $\mathbb{C}_+$ sur lequel $|m(s)| \geq 1 + \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 11.27, il existe donc $l_0 \geq 1$ tel que sur $\Omega_1^{'}$, $|m^l| > 1$ pour tout $l \geq l_0$. On a alors

$$vect\{K_s^l,\, s \in \Omega_1^{'},\, l \geq l_0\} \subset \bigcup_{|\lambda|>1} Ker(M^* - \lambda)$$

et ce sous-ensemble est dense par le lemme 11.28.

On traite le cas Ω_2 de la même manière. D'après le critère de Godefroy-Shapiro, M^* est donc hypercyclique.

$\triangleright$ Supposons maintenant que M^* est hypercyclique. On a alors $\|M^*\| > 1$ (sinon l'orbite d'un élément ne pourrait pas être dense). Comme $\|M^*\| = \|M\| = \|m\|_{\mathcal{H}^\infty}$, on a donc $\sup_{\mathbb{C}_+} |m| > 1$. Il nous reste maintenant à montrer que $\inf_{\mathbb{C}_+} |m| < 1$ et la preuve sera finie par un argument de connexité.

Si le terme constant de m est nul alors le résultat est évident car dans ce cas

$$\lim_{\Re(s)\to+\infty} m(s) = 0.$$

Supposons donc que m s'écrit pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ sous la forme

$$m(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$$

avec $c_1 \neq 0$ et supposons par l'absurde que $\inf_{\mathbb{C}_+} |m| \geq 1$. Par le fait que $c_1 \neq 0$, $1/m$ est développable en série de Dirichlet dans un certain-demi plan, il suffit en effet d'écrire

$$\frac{1}{m(s)} = c_1^{-s} \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c_n}{c_1} n^{-s}\right)^{-1}$$

et de remarquer que

$$\lim_{\Re(s)\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c_n}{c_1} n^{-s} = 0.$$

Maintenant par hypothèse $1/m$ est défini sur $\mathbb{C}_+$ et bornée par 1 : d'après le théorème de Bohr, $1/m$ appartient donc à $\mathcal{H}^\infty$ et $\|1/m\|_\infty \leq 1$, on peut donc le voir comme un multiplicateur sur $\mathcal{H}^2$ que l'on note $M_{1/m}$. Mais alors $M_{1/m}^*$ ne peut être hypercyclique car $\|M_{1/m}^*\| = \|M_{1/m}\| = \|1/m\|_\infty \leq 1$. Or clairement $M_{1/m}^* = (M^*)^{-1}$ et donc par passage à l'inverse (voir Corollaire 1.3 de [7]), M^* n'est pas hypercyclique non plus, ce qui est absurde. $\square$

Remarque 11.29. Cette preuve s'adapte sur $\mathcal{B}^2$ ou encore sur $\mathcal{A}_\mu^2$ où l'ensemble des multiplicateurs est encore $\mathcal{H}^\infty$ (voir [34]).

Chapitre 12

Comparaison entre les espaces $\mathcal{B}^p$ et les espaces $\mathcal{H}^p$

Dans ce chapitre, nous étudions les injections entre les espaces $\mathcal{B}^p$ et les espaces $\mathcal{H}^p$. Contrairement aux espaces $\mathcal{A}^p$ qui ont un comportement différent envers $\mathcal{H}^p$ par rapport au cas classique du disque, nous obtenons ici des résultats équivalents à ceux d'une variable.

Premièrement, suivant des idées de [4], on obtient un résultat d'hypercontractivité sur les espaces $\mathcal{B}^p$.

Soit $1 \leq p \leq q < +\infty$. Pour $f \in B^p(\mathbb{D}^\infty)$, $z \in \mathbb{D}^\infty$ et $k \geq 1$, on pose $\hat{z_k} = (z_1, \ldots, z_{k-1}, z_{k+1}, \ldots)$. Soit $f_{\hat{z_k}}(z_k) = f(z)$. Alors

$$\int_{\mathbb{D}^\infty} \|f_{\hat{z_k}}\|^r_{L^r(\mathbb{D})} dA(\hat{z_k}) = \|f\|^r_{L^r(\mathbb{D}^\infty)}.$$

On considère une suite d'opérateurs $S_k : B^p(\mathbb{D}) \to B^q(\mathbb{D})$ pour $k \geq 1$ tels que $S_k(1) = 1$. Si P est un polynôme analytique sur $\mathbb{D}^\infty$, on définit

$$\left\{ \begin{array}{l} P^1 = P, \\ P^{k+1} = S_k(P_{\hat{z_k}}(z_k)). \end{array} \right.$$

Cette séquence n'est pas en général une suite de polynômes mais si P dépend uniquement de $z_1, \ldots, z_n$ alors chaque terme de cette suite aussi. Cette suite est donc stationnaire.

Proposition 12.1. *Si $\prod_{k=1}^{+\infty} \|S_k\| < +\infty$ alors la suite $(P^k)_{k\geq 1}$ converge vers un élément $S(P)$ de $B^q(\mathbb{D}^\infty)$. De plus, S s'étend en un opérateur borné de $B^p(\mathbb{D}^\infty)$ vers $B^q(\mathbb{D}^\infty)$.*

En fait, si on considère une suite d'opérateurs $S_k : H^p(\mathbb{D}) \to B^q(\mathbb{D})$, on obtient le résultat similaire suivant.

Proposition 12.2. *Si $\prod_{k=1}^{+\infty} \|S_k\| < +\infty$ alors la suite (P^k) converge vers un élément $S(P)$ de $B^q(\mathbb{D}^\infty)$. De plus, S s'étend en un opérateur borné de $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ vers $B^q(\mathbb{D}^\infty)$.*

On donne uniquement la preuve de cette deuxième proposition.

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\|P^{(k+1)}\|_{B^q(\mathbb{D}^\infty)} \leq \left(\prod_{i=1}^{k}\|S_i\|\right)\|P\|_{H^p(\mathbb{T}^\infty)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\|P^{(k+1)}\|^q_{B^q(\mathbb{D}^\infty)} &= \int_{\mathbb{D}^\infty} |S_k(P^k_{\hat{z_k}}(z_k))|^q d\widetilde{A}(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}^\infty}\int_{\mathbb{D}} |S_k(P^k_{\hat{z_k}}(z_k))|^q \, dA(z_k) d\widetilde{A}(\hat{z_k}) \\
&= \int_{\mathbb{D}^\infty} \|S_k(P^k_{\hat{z_k}}(\,\cdot\,))\|^q_{B^q(\mathbb{D})} d\widetilde{A}(\hat{z_k}) \\
&\leq \|S_k\|^q \int_{\mathbb{D}^\infty} \|P^k_{\hat{z_k}}(\,\cdot\,)\|^q_{H^p(\mathbb{T})} d\widetilde{A}(\hat{z_k}) \\
&= \|S_k\|^q \int_{\mathbb{D}^\infty} \left(\int_{\mathbb{T}} |P^k_{\hat{z_k}}(\chi_k)|^p dm(\chi_k)\right)^{q/p} d\widetilde{A}(\hat{z_k}).
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{q}{p} \geq 1$, on obtient, par l'inégalité triangulaire intégrale,

$$\|P^{(k+1)}\|^q_{B^q(\mathbb{D}^\infty)} \leq \|S_k\|^q \left(\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{D}^\infty} |P^k_{\hat{z_k}}(\chi_k)|^q d\widetilde{A}(\hat{z_k})\right)^{p/q} dm(\chi_k)\right)^{q/p}$$

Par récurrence, on obtient le résultat. □

Nous donnons maintenant quelques applications de ces propositions, mais nous avons besoin tout d'abord de quelques résultats préliminaires, dans le contexte classique du disque unité.

Lemme 12.3. *La suite* $\left(\dfrac{2}{n+2}\right)_{n\geq 0}$ *est un multiplicateur de* $B^1(\mathbb{D})$ *vers* $H^1(\mathbb{D})$ *avec norme exactement* 1*, c'est-à-dire pour* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in B^1(\mathbb{D})$*, on a*

$$\Big\|\sum_{n\geq 0}\frac{2}{n+2}a_n z^n\Big\|_{H^1(\mathbb{D})} \leq \|f\|_{B^1(\mathbb{D})}.$$

Démonstration. Soient $r < 1$ et $f \in B^1(\mathbb{D})$ de la forme (1.1). Alors en notant M cet opérateur de multiplication, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Mf(re^{i\theta})|\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n+2}a_n r^n e^{in\theta}\right| d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} 2\int_0^1 a_n \rho^{n+1} r^n e^{in\theta}\, d\rho\right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n r^n e^{in\theta}\right| \rho\, d\rho d\theta
\end{aligned}$$

Si r tend vers 1, on obtient le résultat. □

Lemme 12.4. *Soit $r \leq \frac{2}{3}$. Alors $\left(r^n \frac{n+2}{2\sqrt{n+1}}\right)_{n\geq 0}$ est un multiplicateur de $H^1(\mathbb{D})$ vers $H^2(\mathbb{D})$ avec norme* 1.

Démonstration. On adapte une preuve de [11]. Soit $f \in H^1(\mathbb{D})$, avec norme 1, de la forme (1.1). On considère la factorisation $f = gh$ où g et h sont dans $H^2(\mathbb{D})$ et vérifient $\|g\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \|h\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = 1$. Notons (b_n) et (c_n) les coefficients de Fourier de g et h. On a

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}.$$

On sait de plus que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 = 1.$$

On souhaite montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| a_n r^n \frac{n+2}{2\sqrt{n+1}} \right|^2 \leq 1.$$

On peut supposer que les coeffcients b_n et c_n sont tous positifs (au pire, le module de a_n devient plus grand mais on cherche une condition suffisante pour l'inégalité, il n'y a donc aucun problème). On suppose donc

$$|a_n| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$$

et pour montrer la dernière inégalité il suffit donc de montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k} r^n d_n \frac{n+2}{2\sqrt{n+1}} \leq 1$$

pour toute suite positive (d_n) avec norme ℓ_2 égale à 1. Cela est équivalent à

$$\sum_{k,n=0}^{+\infty} b_k c_n r^{n+k} d_{n+k} \frac{n+k+2}{2\sqrt{n+k+1}} \leq 1.$$

On aura cette inégalité dès que

$$\sum_{k,n=0}^{+\infty} \left(r^{n+k} \frac{n+k+2}{2\sqrt{n+k+1}} d_{n+k} \right)^2 \leq 1.$$

Mais pour tout j, on a seulement $j+1$ possibilités d'écrire cet entier comme la somme de deux entiers. Il suffit donc de prouver l'inégalité suivante

$$\sum_{j=0}^{+\infty} r^{2j} \frac{(j+2)^2}{4} d_j^2 \leq 1.$$

Et avec la définition de (d_n), ce sera vrai dès que pour tout $j \geq 0$,

$$r^{2j} \frac{(j+2)^2}{4} \leq 1.$$

La dernière inégalité est clairement vraie pour $j = 0$ pour tout r, on à alors juste à calculer

$$r_0 = \inf_{j\geq 1} \left(\frac{2}{j+2}\right)^{1/j}.$$

On peut vérifier facilement que $x \to \frac{\log(2/(x+2))}{x}$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et on obtient alors $r_0 = \dfrac{2}{3}$. $\square$

Le lemme suivant est évident.

Lemme 12.5. $(\sqrt{n+1})_{n\geq 0}$ *est un multiplicateur de $H^2(\mathbb{D})$ vers $B^2(\mathbb{D})$ avec norme exactement égale à 1. En fait, c'est même une isométrie.*

On peut maintenant énoncer un résultat de contractivité sur les espaces de Bergman du disque. P_r désigne l'opérateur de contraction : pour $z \in \mathbb{D}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{D}$, $P_r(f)(z) = f(rz)$.

Théorème 12.6. *Si $r \leq \dfrac{2}{3}$, $P_r : B^1(\mathbb{D}) \to B^2(\mathbb{D})$ est borné avec norme 1. Réciproquement, si $P_r : B^1(\mathbb{D}) \to B^2(\mathbb{D})$ est borné avec norme 1 alors $r \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.*

Démonstration. Si $r \leq \frac{2}{3}$, il suffit d'appliquer les trois lemmes précédents.
Réciproquement, supposons que $P_r : B^1(\mathbb{D}) \to B^2(\mathbb{D})$ est borné avec norme 1. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\|1 + arz\|^2_{B^2(\mathbb{D})} = 1 + \frac{a^2r^2}{2}$$

$$\|1 + az\|_{B^1(\mathbb{D})} = 1 + \frac{a^2}{8} + o(a^2).$$

Donc on a

$$1 + \frac{a^2r^2}{2} \leq \left(1 + \frac{a^2}{8} + \circ(a^2)\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{4} + o(a^2).$$

et donc $r^2 \leq \frac{1}{2}$. $\square$

On obtient maintenant une proposition équivalente à la proposition 7.19.

Proposition 12.7. *Soit $\varepsilon > 0$. Alors $T_\varepsilon : \mathcal{B}^1 \to \mathcal{B}^2$ est borné.*

Démonstration. On considère la suite suivante d'opérateurs (on garde les notations du théorème précédent)

$$\begin{array}{rccc} S_k : & B^1(\mathbb{D}) & \longrightarrow & B^2(\mathbb{D}), \\ & f & \longmapsto & P_{p_k^{-\varepsilon}}(f). \end{array}$$

Si on applique la proposition 12.1 à cette suite d'opérateurs et à une série de Dirichlet f de la forme (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} S(f)(s) &= \sum_{n=p_1^{\alpha_1}..\, p_k^{\alpha_k}\geq 1} a_n (p_1^{-s-\varepsilon})^{\alpha_1} ..\, (p_k^{-s-\varepsilon})^{\alpha_k} \\ &= \sum_{n=p_1^{\alpha_1}..\, p_k^{\alpha_k}\geq 1} a_n n^{-s-\varepsilon} = T_\varepsilon(f)(s). \end{aligned}$$

D'après le théorème précédent, on sait que $\|P_r\|_{B^1(\mathbb{D})\to B^2(\mathbb{D})} \leq 1$ pour r assez petit et on obtient donc le résultat sur T_ε car $p_k^{-\varepsilon} \to 0$ quand k tend vers l'infini et donc le produit infini des normes est fini. □

Notations. *Soit $p \geq 1$. On note $\mathcal{H}^p_{\mathbb{P}}$ (resp. $\mathcal{B}^p_{\mathbb{P}}$)) le sous-espace suivant de $\mathcal{H}^p$ (resp. $\mathcal{B}^p$) :*

$$\mathcal{H}^p_{\mathbb{P}} = \overline{vect(e_k,\, k \in \mathbb{P})}^{\mathcal{H}^p} \qquad \big(resp.\ \mathcal{B}^p_{\mathbb{P}} = \overline{vect(e_k,\, k \in \mathbb{P})}^{\mathcal{B}^p}\big).$$

Théorème 12.8. *Soit $p \geq 1$.*

(i) L'injection de $\mathcal{H}^p$ vers $\mathcal{B}^{2p}$ est bornée avec norme 1.
Mais,

(ii) l'injection de $\mathcal{H}^p$ vers $\mathcal{B}^p$ n'est pas compacte. En fait, ce n'est même pas un opérateur strictement singulier.

Démonstration.
(i) Rappelons ([19]) que l'injection de $H^p(\mathbb{D})$ vers $B^{2p}(\mathbb{D})$ est bornée avec norme 1 donc il suffit d'utiliser la proposition 12.2 pour obtenir la continuité de l'injection de $\mathcal{H}^p$ vers $\mathcal{B}^{2p}$.

(ii) Dans [4], il est montré que $\mathcal{H}^p_{\mathbb{P}} = \mathcal{H}^2_{\mathbb{P}}$ et pour la même raison on a $\mathcal{B}^p_{\mathbb{P}} = \mathcal{B}^2_{\mathbb{P}}$. Mais clairement $\mathcal{H}^2_{\mathbb{P}} = \mathcal{B}^2_{\mathbb{P}}$ donc $\mathcal{H}^p$ et $\mathcal{B}^p$ ont des sous-espaces fermés de dimension infinie isomorphes et donc l'identité de $\mathcal{H}^p$ vers $\mathcal{B}^p$ n'est pas strictement singulière. □

Remarques 12.9.

(i) Quand $p = 1$, (i) a déjà été prouvé par Helson (voir [25]).

(ii) On peut vérifier facilement que pour $n \neq m$ on a

$$\|\mathrm{e}_{p_n} - \mathrm{e}_{p_m}\|_{\mathcal{B}^p} \geq \|\mathrm{e}_{p_n}\|_{\mathcal{B}^p} = \left(\frac{2}{p+2}\right)^{1/p}$$

et alors on obtient un deuxième argument de la non compacité dans (ii). On peut même en faire une troisième preuve : considérons la suite $(\mathrm{e}_{p_n})_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}^p$. Chaque élément de cette suite est de norme 1 et donc si l'injection était compacte, il existerait une sous-suite $(\mathrm{e}_{p_{n_k}})_{k\geq 0}$ convergente vers un élément f appartenant à $\mathcal{B}^p$. Mais l'application évaluation étant bornée, $f \equiv 0$ et c'est une contradiction car $\|\mathrm{e}_{p_{n_k}}\|_{\mathcal{B}^p} = \left(\frac{2}{p+2}\right)^{1/p}$ pour tout $k \geq 0$.

(iii) Remarquons qu'il est immédiat (sans utiliser le théorème précédent) que l'injection de $\mathcal{H}^p$ vers $\mathcal{B}^{2p}$ n'est pas compacte : en effet si c'était le cas, par restriction à la variable $z_1 = 2^{-s}$, l'injection de $H^p(\mathbb{D})$ vers $B^{2p}(\mathbb{D})$ serait compacte mais ce n'est pas le cas.

(iv) Le principe de restriction utilisé précédemment permet aussi de montrer que (e_n) n'est pas une base de Schauder sur $\mathcal{H}^1$: en effet si c'était le cas, par restriction (z^n) serait une base de Schauder sur $H^1(\mathbb{D})$ ce qui est faux.

En fait, on peut prouver $\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{B}^4$ par simple calcul sur les coefficients des séries de Dirichlet. Soit f une série de Dirichlet de la forme (3.1). On souhaite montrer que $\|f\|_{\mathcal{B}^4} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^2}$. On a

$$\|f\|^4_{\mathcal{B}^4} = \|f^2\|^2_{\mathcal{B}^2}.$$

Mais $f^2(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n n^{-s}$ où pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \sum_{d|n} a_d \times a_{n/d}.$$

Donc

$$\|f^2\|_{\mathcal{B}^2}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sum_{d|n} a_d \times a_{n/d}|^2}{d(n)}.$$

On applique maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisant le fait que la somme contient exactement $d(n)$ termes :

$$\|f^2\|_{\mathcal{B}^2}^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{d|n} |a_d|^2 \, |a_{n/d}|^2.$$

On a $n \geq 1$ et $n = d \times \dfrac{n}{d}$, on intervertit alors les sommes :

$$= \sum_{d=1}^{+\infty} |a_d|^2 \sum_{d|n} |a_{n/d}|^2.$$

Mais si n est un multiplie de d, alors $\dfrac{n}{d}$ est dans $\mathbb{N}$, et

$$\sum_{d|n} |a_{n/d}|^2 = \|f\|_{\mathcal{H}^2}^2.$$

Finalement, on a

$$\|f\|_{\mathcal{B}^4}^4 \leq \|f\|_{\mathcal{H}^2}^4.$$

Chapitre 13

Opérateurs de composition sur les espaces $\mathcal{B}^p$

Les espaces $\mathcal{B}^p$ sont des espaces de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_{1/2}$, on cherche alors comme dans le cas $\mathcal{A}^p_\mu$ à caractériser les fonctions analytiques $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ induisant un opérateur de composition borné sur $\mathcal{B}^p$.

13.1 Continuité des opérateurs de composition

Commençons par quelques résultats préliminaires avant d'énoncer le théorème principal : le point clé est d'utiliser les limites verticales pour $\chi \in \mathbb{D}^\infty$, on doit donc vérifier que celles-ci ont de bonnes propriétés vis-à-vis des opérateurs de composition. Ce qui rend plus difficile les résultats à obtenir est le fait que les limites verticales f_χ avec $\chi \in \mathbb{D}^\infty$ ne peuvent pas être vues comme des limites normales de f.

Lemme 13.1. *Soient $\chi \in \mathbb{D}^\infty$ et Φ une fonction de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ avec $c_0 \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. On a dans le demi plan de convergence absolue de φ,*

$$(n^{-\Phi})_\chi = \chi(n)^{c_0} \times (n^{-\Phi_\chi})$$

Démonstration. Grâce à la forme particulière de Φ, $n^{-\Phi}$ est bien une série de Dirichlet. Supposons que φ soit de la forme

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s},$$

alors dans le demi-plan de convergence absolue de φ, d'après le Lemme 3.3 de [22] on a

$$n^{-\Phi(s)} = n^{-c_0 s - c_1} \prod_{k=2}^{+\infty} \left((1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-c_k \log(n))^j}{j!} k^{-js} \right)$$

Il suffit alors d'appliquer χ qui est complètement multiplicative. $\square$

Lemme 13.2. *Soient $\Phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_\eta$ une fonction analytique de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où c_0 est un entier et $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors pour presque tout $\chi \in \mathbb{D}^\infty$, Φ_χ s'étend en une fonction analytique Φ_χ sur $\mathbb{C}_\theta$ et φ_χ converge uniformément sur $\mathbb{C}_{\theta+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons $\theta = 0$. Il suffit de montrer que φ_χ s'étend sur $\mathbb{C}_+$. Remarquons que ceci est vrai pour $\chi \in \mathbb{T}^\infty$ juste en utilisant le fait que dans ce cas f_χ est une limite normale de φ. Il nous suffit donc de montrer que si φ converge sur $\mathbb{C}_+$ alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n r_1^{\alpha_1}..r_k^{\alpha_k} n^{-s}$$

converge aussi sur $\mathbb{C}_+$ pour tout $r \in (0,1)^\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_{\varepsilon/2}$, en particulier $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{H}^\infty$ d'après le théorème de Bohr et donc $D(\varphi_\varepsilon) \in H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Fixons donc $r \in (0,1)^\infty$, l'application définie par $z \to D(\varphi_\varepsilon)(r_1 z_1, r_2 z_2, \cdots)$ est alors aussi dans $H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$. En effet d'après [15], Th11.2, $H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ est isométriquement isomorphe à $H^\infty(B)$, l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur B, la boule unité ouverte de c_0. Le résultat est alors évident car si $z \in B$, $r.z = (r_1 z_1, r_2 z_2, \cdots)$ aussi. On vient donc de montrer que pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n r_1^{\alpha_1}..r_k^{\alpha_k} n^{-s-\varepsilon}$$

converge et est bornée sur $\mathbb{C}_+$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, le résultat suit par le théorème de Bohr.

□

On aimerait montrer que si $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ alors pour presque tout $\chi \in \mathbb{D}^\infty$ (par rapport à $\widetilde{A}$), $\Phi_\chi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. Cela n'est pas évident, néanmoins on peut le montrer dans un cas particulier. Pour cela, nous faisons quelques rappels.

Définition 13.3. *Une suite d'entiers $(q_n)_{n\geq 1}$ est dite multiplicativement indépendante si pour tout $k \geq 1$ et pour tout $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$, l'égalité*

$$c_1 \log(q_1) + \cdots c_k \log(q_k) = 0$$

implique $c_1 = \cdots = c_k = 0$.

Lemme 13.4 (Kronecker)**.**
Soient $q_1, \ldots, q_n$ multiplicativement indépendants. Alors la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{T}^d \\ t & \longmapsto & (q_1^{-it}, \ldots, q_n^{-it}) \end{array}$$

a une image dense.

Lemme 13.5. *Soient Φ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ avec $c_0 \geq 1$ et φ définie pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ par*

$$\varphi(s) = c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$$

où les q_j sont multiplicativement indépendants et $c_{q_j} \neq 0$. Alors

(i) $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ *si et seulement si* $\Re(c_1) \geq |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|$.

(ii) En particulier si $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ alors pour tout $\chi \in \mathbb{D}^\infty$, $\Phi_\chi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.

Démonstration. (i) est une conséquence du lemme précédent et (ii) est alors trivial. □

Théorème 13.6. *Soient $p \geq 1$, Φ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où $c_0 \geq 1$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. Si φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et que pour presque tout $\chi \in \mathbb{D}^\infty$, $\Phi_\chi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ alors C_Φ est borné sur $\mathcal{B}^p$ et est une contraction.*

En utilisant le lemme précédent, on obtient ce corollaire immédiat :

Corollaire 13.7. *Soient Φ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ avec $c_0 \geq 1$ et φ définie pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ par*

$$\varphi(s) = c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$$

où les q_j sont multiplicativement indépendants et $c_{q_j} \neq 0$. Alors si

$$\Re(c_1) \geq |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|,$$

C_Φ est borné sur $\mathcal{B}^p$ et est une contraction.

Dans la preuve du théorème précédent, nous allons utiliser le résultat suivant.

Lemme 13.8. *Soient $r, r' \in (0,1)^\infty$ et $f \in \mathcal{H}^p$. On suppose que $r_i \leq r_i'$ pour tout $i \geq 1$, alors*

$$\|f_r\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|f_{r'}\|_{\mathcal{H}^p}.$$

Démonstration. Le résultat est vrai dans le cas classique du disque unité. Par hypercontractivité (voir [4] ou l'analogue donné par la proposition 12.1), on obtient alors le résultat. □

Démonstration du théorème 13.6. Supposons que φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. Par hypothèse, pour presque tout $\chi \in \mathbb{D}^\infty$, Φ_χ est un c_0-symbole sur $\mathcal{H}^p$ avec $c_0 \geq 1$, en particulier le résultat est vrai pour presque tout $\chi = r \in (0,1)^\infty$. Considérons P un polynôme de Dirichlet, on sait que pour tout $s \in \mathbb{C}_+$,

$$(P \circ \Phi)_\chi(s) = P_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi(s).$$

Soit w une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. On a d'après le lemme 11.16,

$$\|P \circ \Phi\|_{\mathcal{B}^p}^p = \int_{(0,1)^\infty} \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |(P \circ \Phi)_\chi(it)|^p dw(t)\, d\widetilde{m}(\zeta) dR$$

où $\chi = (r_1\zeta_1,\, r_2\zeta_2, \cdots)$.

$$\|P \circ \Phi\|_{\mathcal{B}^p}^p = \int_{(0,1)^\infty} \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |P_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi(it)|^p dw(t)\, d\widetilde{m}(\zeta) dR$$

Maintenant, on considère $P_{\chi^{c_0}}$ comme $P_{r^{c_0},\zeta^{c_0}}$ et l'on fait de même pour $\Phi_\chi(it)$. Sachant que Φ_r vérifie alors les conditions de continuité pour C_{Φ_r} sur $\mathcal{H}^p$ (c'est-à -dire envoie $\mathbb{C}_+$ sur $\mathbb{C}_+$ et a la bonne forme). On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |P_{\chi^{c_0}} \circ \Phi_\chi(it)|^p dw(t)\, d\widetilde{m}(\zeta) &\leq \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{R}} |P_{r^{c_0},\zeta}(it)|^p dw(t)\, d\widetilde{m}(\zeta) \\ &= \|P_{r^{c_0}}\|_{\mathcal{H}^p}^p. \end{aligned}$$

car C_{Φ_r} est alors une contraction. Grâce au lemme précédent, et sachant que $c_0 \geq 1$, on a $\|P_{r^{c_0}}\|_{\mathcal{H}^p} \leq \|P_r\|_{\mathcal{H}^p}$. On a donc prouvé que

$$\|P \circ \Phi\|_{\mathcal{B}^p}^p \leq \int_{(0,1)^\infty} \|P_r\|_{\mathcal{H}^p}^p dR = \|P\|_{\mathcal{B}^p}^p.$$

On conclut alors comme dans la preuve du théorème 9.1 grâce à la continuité de l'application évaluation et la densité des polynômes de Dirichlet. $\square$

Dans le cas $c_0 = 0$, on obtient le résultat suivant.

Théorème 13.9. *Soient $p \geq 1$ et $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ appartenant à $\mathcal{D}$. Alors*

(i) Si Φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2+\eta}$ (où $\eta > 0$) alors C_Φ est Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{B}^2$, a fortiori borné.

(ii) Si C_Φ est borné sur $\mathcal{B}^2$, alors il est borné sur $\mathcal{B}^{2k}$ pour tout $k \geq 1$. Par conséquent C_Φ est borné sur $\mathcal{B}^{2k}$ pour tout $k \geq 1$ sous les hypothèses de (ii).

Les preuves sont analogues à celles du Théorème 9.3.

13.2 Compacité des opérateurs de composition

En définissant des noyaux reproduisants K_s^l dans ce cadre, on montre le théorème suivant. L'unique changement par rapport au cas $\mathcal{H}^2$ est le fait que le noyau de produisant de $\mathcal{B}^2$ est le carré du noyau reproduisant de $\mathcal{H}^2$. Dans le prochain théorème K_s^l sera le noyau reproduisant partiel d'ordre l de $\mathcal{B}^2$ associé à $s \in \mathbb{C}_{1/2}$.

Théorème 13.10. *Soient Φ un c_0-symbole où $c_0 \geq 1$ et $l \geq 1$. Supposons que $\Phi(s) = c_0 s + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^{-s}$ où $c_n = 0$ quand $p^+(n) > p_l$. On a alors*

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{B}^2,e} \geq \limsup_{\Re(s)\to 0} \frac{\|K_{\Phi(s)}^l\|_{\mathcal{B}^2}}{\|K_s^l\|_{\mathcal{B}^2}}.$$

En particulier, si C_Φ est compact alors

$$\lim_{\Re(s)\to 0} \frac{\Re(s)}{\Re(\Phi(s))} = 0.$$

On peut obtenir une équivalence lorsque le symbole est "sympathique".

Proposition 13.11. *Soient Φ de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ avec $c_0 \geq 1$ et φ définie pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ par*

$$\varphi(s) = c_1 + \sum_{j=1}^{d} c_{q_j} q_j^{-s}$$

où les q_j sont multiplicativement indépendants et $c_{q_j} \neq 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Re(c_1) > |c_{q_1}| + \cdots + |c_{q_d}|$.

(ii) $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$ *pour un certain* $\varepsilon > 0$.

(iii) C_Φ *est compact sur* $\mathcal{B}^2$.

Démonstration. Analogue au corollaire 2 de [6].

Les deux arguments clés sont le théorème de Kronecker et le fait que si $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ alors C_Φ est compact sur $\mathcal{B}^2$. Nous ne montrons que ce point précis.

Si T_ε est l'opérateur de translation par $\varepsilon > 0$, on a $T_\varepsilon^{-1} \circ \Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ et d'après le corollaire 13.7 on a donc que $C_{T_\varepsilon^{-1} \circ \Phi}$ est borné sur $\mathcal{B}^2$. Or T_ε est un opérateur diagonal sur la base orthonormale de $\mathcal{B}^2$ et cette diagonale tend vers 0, T_ε est donc un opérateur compact, ce qui conclut la preuve par composition.

$\square$

Remarque 13.12. Le résultat précédent est aussi vrai sur les espaces $\mathcal{A}_\alpha^2$ avec $\alpha > -1$.

Cinquième partie

Espaces de Hardy-Orlicz de séries de Dirichlet $\mathcal{H}^{\psi}$

Introduction

Dans cette dernière partie, nous introduisons les espaces de Hardy-Orlicz $\mathcal{H}^\psi$ de séries de Dirichlet. Pour cela nous commençons par définir les espaces de Hardy-Orlicz du polytore infini $H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$ et utilisons le point de vue de Bohr. Nous nous intéresserons en particulier à l'application évaluation sur ces espaces qui est plus difficile à obtenir que dans le cas du disque unité. La méthode utilisée permet de retrouver des résultats optimaux dans le cadre du disque unité.

Nous abordons l'étude des opérateurs de compositions sur ces espaces.

Durant toute cette partie, ψ sera une fonction d'Orlicz.

Chapitre 14

Espaces de Hardy-Orlicz $\mathcal{H}^\psi$

14.1 Espaces de Hardy-Orlicz $H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$

Définition 14.1. *L'espace de Hardy-Orlicz $H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$ est l'ensemble des (classes de) fonctions de $L^\psi(\mathbb{T}^\infty)$ dont les coefficients de Fourier a_n sont nuls pour $n \in \mathbb{Z}^{(\infty)} \backslash \mathbb{N}^{(\infty)}$.*

Par inclusion dans l'espace $H^1(\mathbb{T}^\infty)$, nous pouvons déjà définir pour un élément $F \in H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$ l'évaluation en $z = (z_1, z_2, \cdots) \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. On a en effet dans ce cas

$$F(z) = \int_{\mathbb{T}^\infty} f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots) \prod_{i=1}^{+\infty} P_{z_i}(\zeta_i)\, d\widetilde{m}(\zeta)$$

où pour $z \in \mathbb{D}$, P_z est le noyau de Poisson usuel. Par comparaison des normes $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{T}^\infty)}$ et $\|\cdot\|_{H^\psi(\mathbb{T}^\infty)}$ et par le Théorème 4.2 on obtient alors

$$|F(z)| \leq \frac{\|F\|_{H^\psi(\mathbb{T}^\infty)}}{\prod_{i=1}^{+\infty}(1 - |z_i|^2)}.$$

Le but de cette section est de donner maintenant une majoration de la norme de l'application évaluation sur $H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$ dépendant de ψ. La méthode utilisée dans le cas d'une variable dans [27] ne s'adapte pas ici car l'un des arguments est d'utiliser la norme infini du noyau de Poisson. Malheureusement dans le cas du polytore infini, il est montré dans [15] que le produit infini des noyaux de Poisson en $z \in \mathbb{D}^\infty$ appartient à $H^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ si et seulement si $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_1$, ce qui est insuffisant pour notre étude.

Nous donnons des estimations dans deux cas particuliers.

Proposition 14.2. *Supposons que $\widetilde{\psi} := \sqrt{\psi}$ soit une fonction convexe. Alors pour tout $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$, on a*

$$\|\delta_z\|_{(H^\psi(\mathbb{T}^\infty))^*} \leq \psi^{-1}\left(\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1 + |z_i|^2}{1 - |z_i|^2}\right).$$

Démonstration. Soient F appartenant à la boule unité de $H^\psi(\mathbb{T}^\infty) \subset H^1(\mathbb{T}^\infty)$ et $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. On a

$$F(z) = \int_{\mathbb{T}^\infty} F(\zeta_1, \zeta_2, \cdots) \prod_{i=1}^{+\infty} P_{z_i}(\zeta_i)\, d\widetilde{m}(\zeta)$$

et en particulier en se rappelant que les noyaux de Poisson sont positifs,

$$|F(z)| \leq \int_{\mathbb{T}^\infty} |F(\zeta_1, \zeta_2, \cdots)| \prod_{i=1}^{+\infty} P_{z_i}(\zeta_i)\, d\widetilde{m}(\zeta).$$

Maintenant, on utilise l'inégalité de Jensen avec $\widetilde{\psi}$ en utilisant le fait que l'intégrale de chaque noyau de Poisson vaut 1 :

$$\widetilde{\psi}(|F(z)|) \leq \int_{\mathbb{T}^\infty} \widetilde{\psi}(|P(\zeta_1, \zeta_2, \cdots)|) \prod_{i=1}^{+\infty} P_{z_i}(\zeta_i)\, d\widetilde{m}(\zeta).$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(|F(z)|) &\leq \left(\int_{\mathbb{T}^\infty} \widetilde{\psi}^2(|P(\zeta_1, \zeta_2, \cdots)|) d\widetilde{m}(\zeta) \right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{T}^\infty} \prod_{i=1}^{+\infty} P_{z_i}^2(\zeta_i)\, d\widetilde{m}(\zeta) \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}^\infty} \psi(|P(\zeta_1, \zeta_2, \cdots)|) d\widetilde{m}(\zeta) \right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{T}^\infty} \prod_{i=1}^{+\infty} P_{z_i}^2(\zeta_i)\, d\widetilde{m}(\zeta) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}^\infty} \prod_{i=1}^{+\infty} P_{z_i}^2(\zeta_i)\, d\widetilde{m}(\zeta) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

car F est dans la boule unité de $H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \prod_{i=1}^{+\infty} P_{z_i}^2(\zeta_i)\, d\widetilde{m}(\zeta) = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1 + |z_i|^2}{1 - |z_i|^2}.$$

□

Remarque 14.3. Soit ψ une fonction d'Orlicz. Supposons qu'il existe Ψ convexe et $c_1, c_2 > 0$ tels que pour tout $x \geq 0$,

$$c_1 \sqrt{\Psi(x)} \leq \Psi(x) \leq c_2 \sqrt{\Psi(x)}.$$

Alors le résultat de la proposition précédente reste vrai (à constante près).

On obtient maintenant une estimation plus intéressante pour les fonctions ψ_q.

Proposition 14.4. *Soient $q \geq 1$ et $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. Alors*

$$\|\delta_z\|_{(H^{\psi_q}(\mathbb{T}^\infty))^*} \leq \psi_q^{-1}\left(\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - |z_i|^2} \right).$$

Remarque 14.5. La proposition précédente nous donne des résultats analogues à ceux obtenus pour $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ dans le Théorème 4.2.

Démonstration. Soient F appartenant à la boule unité de $H^{\psi_q}(\mathbb{T}^\infty)$ et $z \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$. On a

$$\psi_q(|F(z)|) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|F(z)|^{kq}}{k!}.$$

Par le Théorème 4.2, on a alors

$$\begin{aligned}
\psi_q(|F(z)|) &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|F\|^{kq}_{H^{kq}(\mathbb{T}^\infty)}}{k!\prod_{i=1}^{+\infty}(1-|z_i|^2)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{+\infty}(1-|z_i|^2)} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|F\|^{kq}_{H^{kq}(\mathbb{T}^\infty)}}{k!} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{+\infty}(1-|z_i|^2)} \times \int_{\mathbb{T}^\infty} \psi_q(|F(\zeta)|)d\widetilde{m}(\zeta) \\
&\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{+\infty}(1-|z_i|^2)}
\end{aligned}$$

car F est dans la boule unité de $H^{\psi_q}(\mathbb{T}^\infty)$. $\square$

Remarque 14.6. On peut généraliser le résultat précédent dès que la fonction ψ se développe en série entière sur $(0,+\infty)$ et a tous ses coefficients de Taylor positifs. Plus généralement, dès que ψ admet un développement de la forme

$$\psi(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^{q_k}$$

avec $q_k, a_k \geq 0$ $(k \geq 0)$, la proposition précédente reste vraie (avec une preuve similaire).

14.2 Espaces $\mathcal{H}^\psi$ de séries de Dirichlet

On suit le même raisonnement que celui fait par F. Bayart dans [4] concernant la définition des espaces $\mathcal{H}^p$.

Définition 14.7. *Pour $P \in \mathcal{P}$, on pose*

$$\|P\|_{\mathcal{H}^\psi} := \inf\left\{C>0 \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \psi\left\{\frac{|P(it)|}{C}\right\} dt \ \leq 1\right\}.$$

Remarque 14.8. Pour l'instant ce n'est pas clair que ce soit une norme sur $\mathcal{P}$ mais grâce a la théorie ergodique on verra que c'est en fait le cas.

Rappelons que flot T_t est défini sur $\mathbb{T}^\infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$T_t(z) = (p_1^{-it}z_1,\ p_2^{-it}z_2, \cdots)$$

et que c'est un flot uniquement ergodique.

Lemme 14.9. *Soit $P \in \mathcal{P}$, on a*

$$\|P\|_{\mathcal{H}^\psi} = \|DP\|_{H^\psi(\mathbb{T}^\infty)}.$$

Démonstration. La fonction $\psi(|DP|)$ est continue sur $\mathbb{T}^\infty$, on applique alors le théorème ergodique au point $z_0 = (1,1,\cdots)$ qui nous donne que pour tout $C > 0$,

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\psi\left(\frac{|D(P)(T_t(z_0)|}{C}\right)dt = \int_{\mathbb{T}^\infty}\psi\left(\frac{|D(P)(z)|}{C}\right)d\widetilde{m}(z),$$

et donc le résultat. $\square$

Rappelons que les espaces $\mathcal{H}^p$ étaient définis par complétion ce qui n'est pas possible ici, les espaces de Orlicz n'étant pas forcément séparables. Une définition "convenable" pour l'espace $\mathcal{H}^\psi$ serait alors :

Définition 14.10. *$\mathcal{H}^\psi$ (resp. $\mathcal{HM}^\psi$) est défini comme étant le sous-espace de $\mathcal{H}^1$ constitué des séries de Dirichlet f telles que $D(f) \in H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$ (resp. $D(f) \in HM^\psi(\mathbb{T}^\infty)$). Dans ce cas, on pose $\|f\|_{\mathcal{H}^\psi} = \|D(f)\|_{H^\psi(\mathbb{T}^\infty)}$ (de même pour $\mathcal{HM}^\psi$).*

On utilise maintenant les résultats d'évaluation obtenus sur $H^\psi(\mathbb{T}^\infty)$. Nous commençons par le cas où $\psi = \psi_q$.

Théorème 14.11. *Soient $q \geq 1$ et $f \in \mathcal{H}^{\psi_q}$. Alors $\sigma_b(f) \leq 1/2$ et pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$,*

$$|f(s)| \leq \psi_q^{-1}(\zeta(2\Re(s))).$$

Démonstration. Nous donnons peu de détails de cette preuve qui suit la même trame que la preuve du Théorème 11.13. Soit $w \in \mathbb{C}_{1/2}$. Posons $F = D(f)$, alors $z_w = (2^{-w}, 3^{-w}, \cdots) \in \mathbb{D}^\infty \cap \ell_2$ et $F \in H^{\psi_q}(\mathbb{T}^\infty)$. On a donc

$$|F(z_w)| = |f(w)| \leq \psi_q^{-1}\left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-2\Re(w)}}\right) \|Df\|_{\psi_q}.$$

En utilisant que$\|Df\|_{\psi_q} = \|f\|_{\psi_q}$, le théorème de Bohr et le produit Eulérien de la fonction Zêta, on obtient le résultat. □

Proposition 14.12. *Soient ψ une fonction d'Orlicz telle que $\sqrt{\psi}$ soit convexe et $f \in \mathcal{H}^\psi$. Alors $\sigma_b(f) \leq 1/2$ et pour tout $s \in \mathbb{C}_{1/2}$,*

$$|f(s)| \leq \psi^{-1}\left(\frac{\zeta^2(2\Re(s))}{\zeta^4(2\Re(s))}\right).$$

Démonstration. Similaire à la précédente. □

On peut se poser maintenant la question de l'optimalité de $\mathbb{C}_{1/2}$ comme domaine commun de définition pour les espaces $\mathcal{H}^\psi$.

Proposition 14.13. *Supposons que ψ vérifie l'une des conditions suivantes :*

(i) $\psi = \psi_q$ avec $q \leq 2$.

(ii) La norme dans $\mathcal{H}^\psi$ vérifie une inégalité du type $\|\cdot\|_\psi \leq C_\psi \|\cdot\|_p$ pour un certain $p \geq 1$.

Alors $\mathbb{C}_{1/2}$ est optimal : il existe $f \in \mathcal{H}^\psi$ dont le domaine de convergence est exactement $\mathbb{C}_{1/2}$.

Démonstration. Considérons la série f définie par

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{p_n}\log(p_n)} \mathrm{e}_{p_n}.$$

Alors f appartient à l'espace $\mathcal{H}^\psi$. En effet, sous l'hypothèse (i), il suffit d'utiliser les inégalités de Khintchine : si $(z_j)_{j\geq 1}$ est une suite de variables aléatoire i.i.d de Steinhauss, on sait que les normes ψ_q avec $q \leq 2$ et la norme 2 sont équivalentes. Donc pour une série à spectre dans les nombres premiers, f est dans l'espace de Hardy $\mathcal{H}^{\psi_q}$ si et seulement si f est dans l'espace $\mathcal{H}^2$. Or la fonction f appartient clairement à $\mathcal{H}^2$ et diverge en $s = 1/2$, ce qui nous donne le résultat. Le deuxième est évident. $\square$

Le cas ψ_q avec $q > 2$ semble déjà plus difficile.

Notation. *Soit* (α_n) *une suite de scalaires. On note* (α_n^*) *la suite obtenue en réarrangeant en ordre décroissant la suite* $(|\alpha_n|)$*. On dit que cette suite est dans* $\ell^{p,\infty}$ *si* $\sup_{n\geq 1} n^{\frac{1}{p}} \alpha_n^* < \infty$ *et on pose dans ce cas*

$$\|(\alpha_n)\|_{p,\infty} = \sup_{n\geq 1} n^{\frac{1}{p}} \alpha_n^*$$

$\| \|_{p,\infty}$ *est équivalent à une norme sur* $\ell^{p,\infty}$.

Le résultat suivant semble donner une "piste" pour le cas $q > 2$. Ici (r_n) désigne une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher.

Théorème 14.14 ([37])**.** *Soit* (α_n) *une suite de carré sommable, de sorte que* $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n r_n$ *converge presque surement. Soient* $1 < p < 2 < q < \infty$ *deux exposants conjugués. Alors* $S \in L^{\psi_q}([0,1])$ *si et seulement si* $(\alpha_n) \in \ell^{p,\infty}$*. De plus il existe deux constantes* A_p *et* B_p *telles que*

$$A_p^{-1} \|(\alpha_n)\|_{p,\infty} \leq \|S\|_{\psi_q} \leq B_p \|(\alpha_n)\|_{p,\infty}$$

On peut alors se poser la question de savoir s'il existe des espaces $\mathcal{H}^{\psi}$ où le domaine d'évaluation est plus grand que $\mathbb{C}_{1/2}$. En se limitant à des séries à spectres dans les nombres premiers, le Théorème précédent affirme que oui (ce qui n'était pas le cas pour les espaces $\mathcal{H}^p$).

Chapitre 15

Opérateurs de composition sur les espaces $\mathcal{H}^\psi$

Ce chapitre est le début d'une étude sur les opérateurs de composition sur les espaces $\mathcal{H}^\psi$. Nous nous intéressons en particulier à la continuité. Nous avons besoin de deux résultats préliminaires.

Notation. *Soit $\sigma > 0$. On note $\widetilde{P}_\sigma$ la fonction définie pour tout $z = (z_1, z_2, \cdots) \in \mathbb{T}^\infty$ par*

$$\widetilde{P}_\sigma(z) = \prod_{i=1}^{+\infty} P_{p_i^{-\sigma}}(z_i).$$

Grâce au fait que $\widetilde{P}_\sigma$ soit un produit des noyaux de Poisson usuels, on a

$$\|\widetilde{P}_\sigma\|_{H^1(\mathbb{T}^\infty)} = 1.$$

Lemme 15.1. *Soient $f \in \mathcal{H}^\psi$ et $0 \leq \sigma' < \sigma$. Alors $\|f_\sigma\|_{\mathcal{H}^\psi} \leq \|f_{\sigma'}\|_{\mathcal{H}^\psi}$. En particulier*

$$\sup_{\sigma>0} \|f_\sigma\|_{\mathcal{H}^\psi} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^\psi}.$$

Démonstration.

$$\|f_\sigma\|_{\mathcal{H}^\psi} = \|f_{\sigma'+(\sigma-\sigma')}\|_{\mathcal{H}^\psi} = \|D(f_{\sigma'}) * \widetilde{P}_{\sigma-\sigma'}\|_{H^\psi(\mathbb{T}^\infty)}$$

$$\leq \|D(f_{\sigma'})\|_{H^\psi(\mathbb{T}^\infty)} \|\widetilde{P}_{\sigma-\sigma'}\|_{H^1(\mathbb{T}^\infty)} = \|D(f_{\sigma'})\|_{H^\psi(\mathbb{T}^\infty)}.$$

□

Lemme 15.2. *Soit $f \in \mathcal{HM}^\psi$. On a*

$$\sup_{\sigma>0} \|f_\sigma\|_{\mathcal{H}^\psi} = \|f\|_{\mathcal{H}^\psi}.$$

Démonstration. Une inégalité a déjà été prouvée dans le lemme précédent. Il suffit de remarquer que le résultat est vrai pour les polynômes (grâce au théorème de convergence dominée) et d'utiliser la densité de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{HM}^\psi$. □

Théorème 15.3. *Soient $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ une fonction analytique de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où $c_0 \geq 1$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. Si φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et vérifie $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ alors C_Φ est borné et est une contraction sur $\mathcal{HM}^\psi$.*

Remarque 15.4. Pour ne pas confondre la fonction d'Orlicz ψ et les applications ψ_ξ $(\xi > 0)$, nous noterons dans la preuve suivante (et uniquement dans cette preuve) Ψ la fonction d'Orlicz au lieu de ψ.

Démonstration. Soient $0 < \eta, \xi < +\infty$. Rappelons que la fonction $\psi_\xi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}$ est définie pour tout $s \in \mathbb{C}_+$ par

$$\psi_\xi(s) = \frac{s-\xi}{s+\xi}.$$

Soit f un polynôme de Dirichlet. Par changement de variables, on a

$$\int_0^{2\pi} \Psi\left(\frac{|f \circ \psi_\xi^{-1}(e^{i\theta})|}{C}\right) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} \Psi\left(\frac{|f(it)|}{C}\right) d\lambda_\xi(t)$$

où $C > 0$ et

$$d\lambda_\xi(t) = \frac{\xi}{\pi} \frac{1}{t^2+\xi^2}\, dt.$$

Sachant que $\Phi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, on a $\psi_\eta \circ \Phi \circ \psi_\xi^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. On peut alors écrire

$$f \circ \Phi \circ \psi_\xi^{-1} = f \circ \psi_\eta^{-1} \circ \varphi_a \circ \varphi_a \circ \Psi_\eta \circ \phi \circ \psi_\xi^{-1}$$

où a est choisit tel que $\varphi_a(\psi_\eta \circ \Phi \circ \psi_\xi^{-1}(0)) = 0$. C'est-à -dire $a = \psi_\eta(\Phi(\xi))$ (φ_a est l'automorphisme du disque unité associé à a dans les notations de cette thèse).

On a donc deux symboles, un qui fixe 0 : $\varphi_a \circ \psi_\eta \circ \Phi \circ \psi_\xi^{-1}$ et un autre qui est une fonction intérieure : φ_a. D'après les résultats sur les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz du disque unité (voir Prop3.12 de[27]), on a

$$\int_0^{2\pi} \Psi\left(\frac{|f \circ \Phi \circ \psi_\xi^{-1}(e^{i\theta})|}{C}\right) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \int_0^{2\pi} \Psi\left(\frac{|f \circ \psi_\eta^{-1}(e^{i\theta})|}{C}\right) \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{15.1}$$

Maintenant pour $g \in H^\infty$ et $\sigma > 0$, on a

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Psi\left(\frac{|g(\sigma+it)|}{C}\right) dt = \int_{\mathbb{T}^\infty} \Psi\left(\frac{|D(g_\sigma)(z)|}{C}\right) d\widetilde{m}(z).$$

En effet, c'est une conséquence du théorème ergodique et du fait que $D(g_\sigma)$ est continue sur $\mathbb{T}^\infty$ car g est dans H^∞ et que donc son abscisse de Bohr est inférieure ou égale à 0. Or d'après le théorème B de [22] on sait que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Psi\left(\frac{|g(\sigma+it)|}{C}\right) dt = \lim_{\xi\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \Psi\left(\frac{|g(\sigma+it)|}{C}\right) d\lambda_\xi(t).$$

Finalement en appliquant 15.1 à Φ_σ, on a

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \Psi\left(\frac{|D(f \circ \Phi_\sigma)|}{C}\right) d\widetilde{m} \leq \limsup_{\zeta\to+\infty} \left(\frac{1+|\psi_\eta(\Phi(\xi))|}{1-|\psi_\eta(\Phi(\xi))|}\right) \times \int_{\mathbb{T}^\infty} \Psi\left(\frac{|D(f)|}{C}\right) d\widetilde{m}$$

où on a choisit $\eta = c_0\xi$. Or

$$\lim_{\xi\to+\infty}\psi_\eta(\Phi(\xi)) = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{2c_0\xi+\varphi(\xi)} = 0.$$

Finalement, on on obtient donc

$$\|f\circ\Phi_\sigma\|_{\mathcal{H}^\psi} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^\psi}.$$

Grâce au lemme précédent, on a alors

$$\|f\circ\Phi\|_{\mathcal{H}^\psi} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^\psi}.$$

On conclut alors en utilisant la continuité de l'application évaluation et la densité de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{HM}^\psi$. □

Remarque 15.5. Le cas $c_0 = 0$ est déjà un problème dans le cadre des espaces $\mathcal{H}^p$ sauf quand p est pair. Pour cette raison on peut énoncer un résultat de continuité sur l'espace gaussien $\mathcal{H}^{\psi_2}$: soit $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ une fonction analytique appartenant à $\mathcal{D}$. On suppose que Φ s'étend sur $\mathbb{C}_+$ et que φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et vérifie $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ alors C_Φ est borné sur $\mathcal{H}^{\psi_2}$. Nous détaillons la preuve maintenant.

Soit Φ vérifiant les conditions précédentes. D'après le théorème B de [22], il existe une constante $C \geq 1$ telle que $\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^2} = C$. En utilisant le raisonnement déjà fait dans la preuve de (iii) du théorème 9.3, on a

$$\|C_\Phi\|_{\mathcal{H}^{2k}} \leq C^{1/k}.$$

Supposons maintenant $f \in \mathcal{H}^{\psi_2}$ vérifiant $\|f\|_{\mathcal{H}^{\psi_2}} \leq 1$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^\infty}\psi_2\left(\frac{|D(f\circ\Phi)|}{C}\right)d\widetilde{m} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\mathbb{T}^\infty}\frac{|D(f\circ\Phi)|^{2k}}{k!C^{2k}}d\widetilde{m}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\|f\circ\Phi\|_{\mathcal{H}^{2k}}^{2k}}{k!C^{2k}}\\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{C^2\|f\|_{\mathcal{H}^{2k}}^{2k}}{k!C^{2k}}\\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\|f\|_{\mathcal{H}^{2k}}^{2k}}{k!}.
\end{aligned}$$

Or ce dernier terme est plus petit que 1 car $\|f\|_{\mathcal{H}^{\psi_2}} \leq 1$. Finalement, on a donc

$$\|f\circ\Phi\|_{\mathcal{H}^{\psi_2}} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^{\psi_2}}.$$

Sous les hypothèses du théorème précédent, quand $c_0 = 1$, on peut faire de même que précédemment et obtenir une preuve de la continuité dans ce cas. Cela nous donne un exemple de continuité sur un espace $\mathcal{H}^\psi$ et non pas seulement sur un espace $\mathcal{HM}^\psi$.

Intéressons nous maintenant à une réciproque. Si C_Φ est borné sur un espace $\mathcal{H}^\psi$, que peut-on dire de Φ ? On utilise les mêmes remarques faites concernant l'évaluation.

Proposition 15.6. *Soient $\Phi : \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ une fonction analytique, de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où $c_0 \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}$, générant un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}^\psi$. Supposons que ψ vérifie l'une des conditions suivantes :*

(i) $\psi = \psi_q$ avec $q \leq 2$.

(ii) La norme dans $\mathcal{H}^\psi$ vérifie une inégalité du type $\|\cdot\|_\psi \leq C_\psi \|\cdot\|_p$ pour un certain $p \geq 1$.

Alors si $c_0 \geq 1$, φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et vérifie $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$. Si $c_0 = 0$, φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et vérifie $\varphi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$.

Démonstration. On a déjà montré que la série f_χ définie par

$$f_\chi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(p_n)}{\sqrt{p_n}\log(p_n)} e_{p_n}$$

appartient à l'espace $\mathcal{H}^\psi$ pour tout $\chi \in \mathbb{T}^\infty$. Il suffit alors de refaire le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 9.1. □

Dans le cas ψ_2, on peut donc énoncer le résultat suivant.

Théorème 15.7. *Une fonction analytique $\Phi : \mathbb{C}_{1/2} \to \mathbb{C}_{1/2}$ définit un opérateur de composition borné sur $\mathcal{H}^{\psi_2}$ si et seulement si*

(i) Elle est de la forme $\Phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$ où c_0 est un entier naturel et $\varphi \in \mathcal{D}$.

(ii) Φ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}_+$, toujours noté Φ, tel que $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ si $c_0 \geq 1$ et $\Phi(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_{1/2}$ si $c_0 = 0$. De plus C_Φ est une contraction si $c_0 \geq 1$.

De plus dans les deux cas, φ converge uniformément sur $\mathbb{C}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque 15.8. Dans le cas $c_0 = 1$, en appliquant le même type de raisonnement il est facile de voir que l'équivalence est encore vraie sur les espaces $\mathcal{H}^{\psi_q}$ avec $q \leq 2$.

Notons qu'une meilleure connaissance de l'évaluation sur certains $\mathcal{H}^\psi$ permettrait peut-être de faire un lien entre le comportement de C_Φ sur $\mathcal{H}^\infty$ et celui sur les espaces $\mathcal{H}^p$, notamment si certains espaces de Hardy-Orlicz étaient définis sur $\mathbb{C}_\theta$ avec $0 < \theta < 1/2$.

Annexe A

Nous présentons ici un principe général pour comparer (relativement à p) la norme de l'application évaluation. Nous allons énoncer ce résultat dans le cadre général de sous-espaces de L^p. Quand nous travaillons sur les espaces classiques de fonctions analytiques sur le disque unité (espaces de Hardy et Bergman), ce principe est inutile car on peut travailler avec des puissances de fonctions pour obtenir la norme de l'application évaluation. Cela n'est plus possible dans le cadre des séries de Dirichlet, on ne peut pas a priori considérer f^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ si $f \in \mathcal{D}$ sauf si α est un entier positif pair. La méthode suivante nous permet d'obtenir des résultats optimaux dans ce cas.

Nous considérons des sous espaces $X_p \subset L^p(\Omega, \nu)$ de fonctions sur Ω, où ν est une mesure de probabilité sur Ω et $p \geq 1$. On suppose de plus l'existence d'une sous-algèbre $\mathcal{P} \subset \bigcap\limits_{p\geq 1} X_p$ dense dans X_p (dans la plupart des cas, il suffit de penser aux polynômes).

Fixons $\omega \in \Omega$ et supposons que l'application évaluation $f \in X_p \mapsto f(\omega)$ est bornée avec norme N_p.

Notons que grâce à la théorie des noyaux reproduisants, la valeur de N_2 est généralement connue et facile à obtenir.

Proposition. *En gardant les notations précédentes, on a*

(i) *Si* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2}$, *alors* $N_p \geq N_{q_1} N_{q_2}$.

(ii) *Soit* $q \geq p \geq 1$. *On a* $N_p \geq N_q$.

(iii) *Soit* m *un entier positif. On a pour tout* $p \geq 1$, $N_{pm} \leq \big(N_p\big)^{1/m}$.

En particulier, $N_{2m} \leq \big(N_2\big)^{1/m}$.

Démonstration.
(i) Soit f et g appartenant à $\mathcal{P}$ où $\|f\|_{L^{q_1}} = 1$ et $\|g\|_{L^{q_2}} = 1$. Le produit fg appartient toujours à $\mathcal{P} \subset X_p$ et on a

$$N_p \geq N_p \|fg\|_{L^p} = N_p \|fg\|_{X^p} \geq |f(\omega)| \times |g(\omega)|.$$

En prenant maintenant la borne supérieure relativement à f et g, on obtient alors (i).

(ii) est trivial.

(iii) Par récurrence, on a $N_p \geq N_{q_1} \cdots N_{q_r}$ dès que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_r}\cdot$ En particulier, on peut écrire $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{pm} + \cdots + \dfrac{1}{pm}$ (m fois) et donc $N_p \geq \big(N_{pm}\big)^m$. □

Annexe B

Dans cette annexe, nous donnons plusieurs preuves du lemme 8.2. Nous avons déjà donné une preuve de celui-ci à l'aide de la formule de Leibnitz.

Lemme. *Pour $n \geq 1$, on a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n}^2 z^k = \frac{1}{(1-z)^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 z^k.$$

M. De la Salle nous a communiqué une autre preuve de ce lemme.

Démonstration. Soit $r \in (0,1)$, on pose S la somme définie par

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n}^2 r^{2k}.$$

Notons que l'on considère une somme avec r^2 et non r. On peut interpréter cette somme comme un produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T})$. On a

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - re^{i\theta})^{-n-1} (1 - re^{-i\theta})^{-n-1} \, d\theta \\ &= \int_{\mathcal{C}(0,1)} F(z) \, dz \end{aligned}$$

où F est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{r,\, 1/r\}$ définie par

$$F(z) = \frac{z^n}{(1-rz)^{n+1}(z-r)^{n+1}}.$$

D'après le théorème des résidus, on a donc $S = Res(F, r)$. Pour calculer S, il suffit maintenant de trouver un lacet homotope à $\mathcal{C}(0,1)$ dans $\mathbb{C} \setminus \{r,\, 1/r\}$ pour lequel l'intégrale sera plus facile à calculer. Considérons donc le lacet Γ_r paramétré par

$$\gamma_r : z \in \mathcal{C}(0,1) \longmapsto \frac{z+r}{1+rz}.$$

Pour tout $r \in \mathbb{D}$, r et $1/r$ n'appartiennent pas à Γ_r et les indices restent inchangés. On a donc

$$S = \int_{\Gamma_r} F(z) \, dz$$

En utilisant la paramétrisation, on obtient alors

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(0,1)} F(\gamma_r(z))\gamma_r'(z)\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{(z+r)^n(1+rz)^{n+2}}{(1-r^2)^{2n+2}z^{n+1}} \times \frac{1-r^2}{(1+rz)^2}\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{(z+r)^n(1+rz)^n}{(1-r^2)^{2n+1}z^{n+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{(1-r^2)^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 r^{2k}.
\end{aligned}$$

en considérant la dernière intégrale comme un produit scalaire (de la fonction $z \to (z+r)^n$ contre elle-même). Par prolongement analytique, on obtient le résultat. □

Une autre preuve peut-être obtenue à l'aide d'une démonstration par récurrence. Pour $n = 1$, on vérifie facilement que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+1}{1}^2 z^k = \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

La preuve de l'hérédité se fait alors en remarquant que

$$\binom{n+k}{n} \times \frac{(n+k+1)}{n+1} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Il suffit de calculer la dérivée seconde de l'égalité au rang n pour obtenir l'égalité au rang $n+1$. Cette preuve plus élémentaire est par contre très fastidieuse.

Une dernière possibilité de preuve nous a été donnée par K. Grosse-Erdmann, cette formule est en fait un cas particulier d'un résultat obtenu par Euler en 1748 concernant les fonctions hypergéométriques que l'on peut trouver dans [20].

Problèmes

Nous proposons ici une liste de questions ouvertes et de certains problèmes.

- Peut-on se passer du fait que $Im(\varphi)$ soit borné dans le thèorème 5.4 ?
- Le critère d'équivalence de compacité sur $\mathcal{H}^2$ du Théorème 5.11 peut-il être obtenu avec moins de restrictions ?
- La compacité de C_Φ sur $\mathcal{H}^p$ est-elle équivalente à la compacité de C_Φ sur $\mathcal{H}^q$ pour $1 \leq p < q < +\infty$? La même question se pose pour les espaces $\mathcal{A}^p_\mu$ et les espaces $\mathcal{B}^p$.
- Comment obtenir l'optimalité des majorations de la norme de l'évaluation sur $\mathcal{A}^p$?
- Que peut-on dire dans le cas $c_0 = 0$ concernant la continuité et la compacité de C_Φ sur $\mathcal{A}^p_\mu$?
- La compacité de C_Φ sur $\mathcal{H}^p$ implique t-elle sur la compacité de C_Φ sur $\mathcal{A}^p$ ou sur $\mathcal{B}^p$?
- Comment obtenir une formule de type Littlewood-Paley sur $\mathcal{H}^p$ et $\mathcal{A}^p$? Cela permettrait d'obtenir une condition suffisante de compacité pour C_Φ sur ces espaces.
- Comment améliorer le résultat de continuité obtenu pour $\mathcal{B}^p$?
- Les espaces $\mathcal{A}^p$ et $\mathcal{B}^p$ sont-ils isomorphes ? Sont-ils isomorphes à ℓ_p ?
- Comment améliorer les résultats concernant l'évaluation sur l'espace $\mathcal{H}^\psi$?
- Que peut-on dire de la compacité de C_Φ sur $\mathcal{H}^{\psi_2}$? Est-ce équivalent à la compacité faible ?
- Définir des espaces $\mathcal{A}^\psi$ et $\mathcal{B}^\psi$ et étudier les propriétés d'injections entre ces espaces et les espaces $\mathcal{H}^\psi$.
- Comment bien définir un espace de Bloch de séries de Dirichlet ? Une fois défini, est-ce le dual de $\mathcal{A}^1$ ou de $\mathcal{B}^1$?

Bibliographie

[1] A. Aleman, J-F. Olsen, and E. Saksman. Fourier multipliers for Hardy spaces of Dirichlet series. *arXiv preprint arXiv :1210.4292*, 2012.

[2] E. Amar and E. Matheron. *Analyse complexe*, volume 517. Cassini, 2004.

[3] M. Bailleul and P. Lefevre. Some Banach spaces of Dirichlet series.

[4] F. Bayart. Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators. *Monatshefte für Mathematik*, 136(3) :203–236, 2002.

[5] F. Bayart. *Opérateurs de composition sur des espaces de séries de Dirichlet, et problèmes d'hypercyclicité simultanée*. PhD thesis, Lille 1, 2002.

[6] F. Bayart. Compact composition operators on a Hilbert space of Dirichlet series. *Illinois Journal of Mathematics*, 47(3) :725–743, 2003.

[7] F. Bayart and E. Matheron. *Dynamics of linear operators*. Number 179. Cambridge University Press, 2009.

[8] H. Bohnenblust and E. Hille. On the absolute convergence of Dirichlet series. *The Annals of Mathematics*, 32(3) :600–622, 1931.

[9] H. Bohr. Über die gleichmässige konvergenz Dirichletscher reihen. *Angew. Math.*, pages 203–211, 1913.

[10] H. Bohr. *Almost periodic functions*. American Mathematical Soc., 1947.

[11] A. Bonami. étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$.(french). *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 20(2) :335–402, 1970.

[12] L. Carleson. An interpolation problem for bounded analytic functions. *American Journal of Mathematics*, 80(4) :921–930, 1958.

[13] J. S. Choa and H. O. Kim. On function-theoretic conditions characterizing compact composition operators on H^2. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 75(7) :109–112, 1999.

[14] B. R. Choe. The essential norms of composition operators. *Glasgow Mathematical Journal*, 34(2) :143–155, 1992.

[15] B. J. Cole and T. W. Gamelin. Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1) :112–142, 1986.

[16] C. .C Cowen Jr and B. D. MacCluer. *Composition operators on spaces of analytic functions*, volume 20. CRC Press, 1995.

[17] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdà, M. Ounaïes, and K. Seip. The Bohnenblust–Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive. *Mathematical analysis and applications*, (Part B) :685–726, 2011.

[18] P. L. Duren. *Theory of H^p spaces*. Academic Press, 1970.

[19] P.L Duren and A. Schuster. *Bergman spaces*, volume 100. Amer Mathematical Society, 2004.

[20] L. Euler. Introductio in analysin infinitorum, 1748. *English Translation : John Blanton, Introduction to Analysis of the Infinite*, 1, 1988.

[21] H. Federer. *Geometric Measure Theory.-Reprint of the 1969 Edition*. Springer, 1996.

[22] J. Gordon and H. Hedenmalm. The composition operators on the space of Dirichlet series with square summable coefficients. *Michigan Math. J*, 46(2) :313–329, 1999.

[23] H. Hedenmalm, P. Lindqvist, and K. Seip. A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$. *Duke Math. J. 86*, 1997.

[24] H. Hedenmalm, P. Lindqvist, and K. Seip. Addendum to a Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$. *Duke Mathematical Journal*, 99(1) :175, 1999.

[25] H. Helson. *Dirichlet series*. Regent press, 2005.

[26] K. Kellay and P. Lefèvre. Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 386(2) :718–727, 2012.

[27] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, and L. Rodríguez-Piazza. Composition operators on Hardy-Orlicz spaces. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 207(974), 2010.

[28] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, and L. Rodríguez-Piazza. Nevanlinna counting function and Carleson function of analytic maps. *Mathematische Annalen*, 351(2) :305–326, 2011.

[29] P. Lefèvre and L. Rodriguez-Piazza. Finitely strictly singular operators in harmonic analysis and function theory. *Advances in Math*, 255 :119–152, 2014.

[30] O. Lehto. A majorant principle in the theory of functions. *Math. Scand*, 1 :5–17, 1953.

[31] D. Li. *Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 2013.

[32] D. Li and H. Queffélec. *Introduction à l'étude des espaces de Banach*. Société mathématique de France, 2004.

[33] J. E. Littlewood. On inequalities in the theory of functions. *Proceedings London Math. Soc.*, 23((2)) :481–519, 1925.

[34] J. E. McCarthy. Hilbert spaces of Dirichlet series and their multipliers. *Transactions of the American Mathematical Society*, 356(3) :881–894, 2004.

[35] AM Olevskiæi. *Fourier series with respect to general orthogonal systems*. Springer-Verlag (Berlin and New York), 1975.

[36] JF. Olsen and K. Seip. Local interpolation in Hilbert spaces of Dirichlet series. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(1) :203–212, 2008.

[37] G. Pisier. De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon. *Mathematical analysis and applications*, (Part B) :685–726, 1981.

[38] H. Queffélec and M. Queffélec. *Diophantine Approximation and Dirichlet Series*. Hindustan Book Agency, 2013.

[39] H. Queffélec and K. Seip. Approximation numbers of composition operators on the H^2 space of Dirichlet series. *arXiv preprint arXiv :1302.4117*, 2013.

[40] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. John Wiley & Sons, 2011.

[41] J. H. Shapiro. The essential norm of a composition operator. *Annals of Mathematics*, pages 375–404, 1987.

[42] J. H. Shapiro. *Composition operators and classical function theory*. Springer-Verlag, 1993.

[43] G. Tenenbaum. *Introduction a la théorie analytique et probabiliste des nombres*. 1995.