

ÉCOLE DOCTORALE

Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur

Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg (ERA 27 IFSTTAR)
Laboratoire ICube (UMR7357 UDS CNRS)

THÈSE présentée par :

Gil GAULLIER

soutenue le : 27 septembre 2013

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université de Strasbourg**

Discipline : Signal, Image, Automatique, Robotique

Spécialité : Traitement du signal et des images

**Modèles déformables contraints en
reconstruction d'images de
tomographie non linéaire
par temps d'arrivée**

THÈSE dirigée par :

M. CHARBONNIER Pierre
M. HEITZ Fabrice

Directeur de Recherche, LRPC de Strasbourg
Professeur, Université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

M. AUBERT Gilles
Mme. BERGER Marie-Odile

Professeur, Université de Nice / Sophia Antipolis
Directrice de Recherche, INRIA, Centre Nancy Grand-Est

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. BOURQUIN Frédéric
M. CÔTE Philippe

Ingénieur Général des Ponts, des Eaux et des Forêts, IFSTTAR
Directeur de Recherche, IFSTTAR

Remerciements

Ce travail de doctorat est le résultat de recherches réalisées au sein du Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg et du laboratoire ICube. Il n'aurait pas été mené à bien sans l'appui financier de l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports de l'Aménagement et des Réseaux et de la région Alsace. Je tiens ici à exprimer toute ma gratitude envers ces deux institutions.

Je remercie également vivement :

- Mme Marie-Odile BERGER et M Gilles AUBERT qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter ma thèse et qui m'ont encouragé à publier plus largement certaines contributions obtenues au cours de ce travail de recherche. Leurs remarques concernant le manuscrit de thèse me seront à ce titre précieuses et je leur en remercie.
- MM Frédéric BOURQUIN pour son expertise à la fois mécanique et mathématique et Philippe CÔTE pour sa qualité de spécialiste en tomographie sismique. Je leur suis très reconnaissant d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et les remercie pour leurs commentaires lors de l'appréciation de ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse :

- Fabrice HEITZ qui malgré ses fonctions de directeur de laboratoire s'est toujours montré disponible pour des réunions régulières au cours desquelles il a contribué, par son expérience, à me former au domaine du traitement d'images. Ses remarques concernant mes recherches m'a été d'une grande aide dans leur conduite, puis dans leur présentation.
- Pierre CHARBONNIER qui m'a d'avantage encadré au quotidien et qui m'a initié à la reconstruction de données de tomographie. Je le remercie pour sa large culture dans le domaine qu'il a su me faire partager avec enthousiasme. Il a également su, lors de nos échanges, me guider et sa connaissance en matière de rédaction m'a permis de mener à bien ce travail.

Je n'oublie pas non plus ceux qui ont partagé mon bureau Aude, Philippe, Stéphane et tous les membres du groupe G6. Merci Valérie pour m'avoir permis de prendre du recul sur mon travail lorsqu'il le fallait. Plus généralement, merci aux membres du LRS et à son directeur Georges KUNTZ.

D'autre part, une grande partie des résultats présentés dans ce manuscrit n'aurait pas été possible sans l'acquisition de données réelles et je remercie à ce sujet Anaëlle LUCZAK et Oliver DURAND pour la prise de mesures.

De manière générale, je pense à tous ceux qui m'ont aidé, aux membres de l'Institut Cartan à Nancy (Karim, Séraphin, Bruno, François) et à ceux de l'École de Mécanique et des Microtechniques de Besançon.

Enfin, je n'aurais pu mener à bien mes recherches sans le soutien et l'affection de ma famille : Nathalie, Marie, mes grands parents, éteints au cours de ce travail, et bien sûr mes parents. Je n'ai qu'un mot à leur dire : merci.

Table des matières

I	<u>Introduction Générale</u>	19
1	Problématique	21
1.1	Contexte	21
1.2	Approche retenue	22
1.2.1	Motivation pour un <i>a priori</i> de forme	22
1.2.2	Démarche pratique	22
1.3	Contributions	23
1.4	Organisation du manuscrit	23
2	Cadre mathématique	25
2.1	Introduction	25
2.2	Problème mal posé	26
2.2.1	Dans un espace de Banach	26
2.2.2	Dans un espace de formes	26
2.3	Représentation des formes	27
2.3.1	Comme ouvert du plan	27
2.3.2	Comme courbe de niveau	27
2.4	Variations de forme	29
2.4.1	Famille de transformations	29
2.4.2	Champ de vitesse	29
2.5	Calcul différentiel sur une forme	29
2.5.1	Dérivée dans un espace de Banach	29
2.5.2	Dérivée de forme à partir des transformations	31
2.5.3	Dérivée de forme à partir d'un champ de vitesse	32
2.6	Deux exemples d'application	35
2.6.1	Modèle constant par morceaux	35
2.6.2	Intégrale de domaine	36
2.7	Composition	37
2.8	Conclusion	38
II	<u>Etat de l'Art</u>	39
3	Contours actifs	41
3.1	Introduction	41
3.2	Les approches frontière	42
3.2.1	Le modèle initial	42

3.2.2	Les modèles géométriques et géodésiques	42
3.3	Les approches région : le modèle de Mumford-Shah	44
3.3.1	Le modèle initial	44
3.3.2	Modèle constant par morceaux	44
3.4	Optimisation	46
3.4.1	Des intensités	46
3.4.2	De la forme	46
3.4.3	L'algorithme des <i>level-sets</i>	47
3.4.4	Recherche d'optimum global	49
3.5	Régularisation des modèles déformables	50
3.5.1	Sur le contour	50
3.5.2	Sur le champ de vitesse	52
3.5.3	En changeant d'espace fonctionnel	52
3.6	Conclusion	53
4	Contraintes géométriques de forme	55
4.1	Introduction	55
4.2	Les contraintes de forme : généralités	56
4.2.1	Description des formes	56
4.2.2	Critère de comparaison	57
4.2.3	Le problème de l'alignement	59
4.2.4	Prise en compte d'objets multiples	60
4.3	Modèle de Foulonneau (2004)	60
4.3.1	Description paramétrique des formes	60
4.3.2	Alignement et invariance géométrique	63
4.3.3	Formulation énergétique	64
4.4	Dérivation de forme	65
4.4.1	Calcul préliminaire	65
4.4.2	Éléments pour la dérivée de forme de $\eta_{u,v}(\Omega)$	67
4.4.3	Conséquences	68
4.4.4	Conclusion	69
4.5	Résultats d'évolution contrainte	70
4.5.1	Optimisation de E_{prior}^{multi}	70
4.5.2	Introduction en segmentation	71
4.6	Conclusion	71
5	Tomographie et reconstruction	73
5.1	Introduction	73
5.2	Tomographie d'émission	73
5.2.1	Position du problème	73
5.2.2	Approximations effectuées	74
5.2.3	Opérateurs	74
5.2.4	Méthodes analytiques d'inversion	77
5.3	Méthodes itératives régularisées	78
5.3.1	Opérateurs discrets	78
5.3.2	Problème mal posé - Régularisation de Tikhonov	79
5.3.3	Régularisation semi-quadratique	80

5.4	Tomographie par temps d'arrivée	83
5.4.1	Position du problème	83
5.4.2	Approximations effectuées	84
5.4.3	Trajet sur un domaine régulier	84
5.4.4	Opérateur direct	86
5.5	Méthodes d'inversion discrètes	86
5.5.1	Opérateurs discrets	86
5.5.2	Linéarisation	88
5.5.3	Méthode ART	90
5.5.4	Méthode SIRT	91
5.6	Méthodes orientées objet	92
5.6.1	L'approche de Santosa	92
5.6.2	Autres approches	94
5.7	Conclusion	95

III Reconstruction Tomographique Orientée Objet Contrainte

97

6	Reconstruction contrainte en tomographie linéaire	99
6.1	Introduction	99
6.2	Modélisation orientée objet	100
6.2.1	Définition du modèle image	100
6.2.2	Critère énergétique	101
6.3	Paramètres d'intensité	102
6.3.1	Estimation par optimisation	102
6.3.2	Dépendance par rapport à la forme	103
6.4	Optimisation de forme	104
6.4.1	Dérivée de Gâteaux	104
6.4.2	Expression du gradient	107
6.5	Algorithme et mise en œuvre	108
6.5.1	Implantation par ensemble de niveaux	108
6.5.2	Algorithme de reconstruction contrainte	108
6.5.3	Éléments pratiques	109
6.6	Évaluation sur un grand nombre de projections	111
6.7	Évaluation sur données réduites	113
6.7.1	Reconstructions pixelliques	113
6.7.2	Reconstruction orientée objet usuelle	114
6.7.3	Reconstruction orientée objet avec contrainte de forme	115
6.8	Conclusion	121
7	Reconstruction contrainte en tomographie non linéaire	123
7.1	Introduction	123
7.2	Problématique générale	124
7.3	Le problème direct	125

7.3.1	Formulation en champ de lenteur	125
7.3.2	Formulation en variable de forme	127
7.4	Le problème inverse	128
7.4.1	Formulation en champ de lenteur	128
7.4.2	Méthode de Gauss Newton	128
7.4.3	Formulation en variable de forme	129
7.4.4	Tentative d'adaptation de la méthode de Gauss Newton en variable de forme	130
7.5	Méthode de reconstruction par optimisation découplée	132
7.5.1	Fonctionnelle d'optimisation	132
7.5.2	Optimisation	133
7.5.3	Introduction de contraintes de forme	135
7.6	Mise en œuvre pratique	135
7.6.1	Détermination des courbes extrémales	135
7.6.2	Optimisation de la fonctionnelle E_k	136
7.6.3	Pas de la descente de gradient	138
7.7	Conclusion	138
8	Evaluation	141
8.1	Introduction	141
8.2	Acquisition et simulation de temps d'arrivée	141
8.2.1	Dispositif d'acquisition	141
8.2.2	Simulation	146
8.3	Comparaison entre temps d'arrivée simulés et acquis	151
8.3.1	Géométrie de parcours	151
8.3.2	Bruit modélisé	155
8.4	Détails pratiques sur la méthode de reconstruction développée	156
8.4.1	Champ de lenteur initial	156
8.4.2	Rétro-projection utilisée	157
8.5	Reconstructions pixelliques à l'aide du logiciel RAI-2D	158
8.5.1	Présentation	158
8.5.2	Reconstructions obtenues	158
8.6	Reconstruction orientée objet de données simulées	160
8.6.1	Données non bruitées	160
8.6.2	Données bruitées	163
8.7	Reconstruction orientée objet de données réelles	164
8.8	Conclusion	164
IV	Conclusions et perspectives	171
9	Conclusions	173
9.1	Conclusions	173
9.2	Synthèse des contributions	174
9.3	Perspectives	174
	Appendices	179

A Recherches effectuées pour une méthode de Gauss Newton orientée objet 179

A.1 Compléments de synthèse bibliographique 179

A.2 Adapter le point de vue du calcul des variations? 179

A.3 Caractérisation des trajets extrémaux en dérivée de forme 181

A.4 Formuler un algorithme de Gauss Newton orienté objet 183

Table des figures

2.1	Association d'une forme à la boule unité.	27
2.2	Variation de forme. Le champ de vitesse est ici uniquement représenté sur la frontière.	30
2.3	Evolution du modèle constant par morceaux : position initiale (en trait plein), position après évolution (en pointillé).	36
2.4	Composition d'une fonctionnelle de forme par une fonctionnelle d'une variable réelle.	38
4.1	Reconstitution de la forme modèle à partir de ses moments de Legendre invariants en échelle et translation (à gauche) et courbes d'erreur correspondantes, pour différentes valeurs de β (à droite).	64
4.2	Evolution de courbe avec changements de topologie. A gauche : courbe initiale (d'après [Sapiro et Tannenbaum, 1995]); au centre : évolution de la courbe; à droite : forme de référence. Extrait de [Charbonnier, 2009].	71
4.3	Image originale RVB (a), image de coefficient chromatique rouge r associée (b) par $r = R/(R+V+B)$, ensemble de 6 images de référence utilisé (c). Initialisation de la segmentation (d), résultat sans contrainte de forme ni terme de courbure (e), résultat avec la contrainte de forme multi-modèles à l'ordre $N : N = 10$ (f), $N = 30$ (g) et $N = 42$ (h). Extrait de [Foulonneau et al., 2009].	72
5.1	Modalités de tomographie : émission (a), transmission (b), réflexion (c).	74
5.2	Principe de la transformée de Radon (a) et expression de la droite d'observation à l'aide d'un vecteur ω du cercle unité (b).	75
5.3	Modèle de Dirac (a), modèle discret exact (non implanté) (b), modèle de disque (c), distribution d'un disque (d)	79
5.4	Calcul du temps par interpolation dans une maille.	87
5.5	Shooting (a) et bending (b) methods. Extrait de [Rawlinson et Sambridge, 2003].	88
6.1	Organigramme de l'algorithme de reconstruction contrainte orientée objet.	110
6.2	Données de projections en (a) de l'objet placé en (b). Données simulées pour soixante angles de prise de vues, avec un niveau de bruit tel que $SNR_\sigma = 15$ dB.	111
6.3	Reconstructions pixelliques des projections de la figure 6.2-a (Rapport signal à bruit 15 dB) : (a) Rétro-projection filtrée (fréquence de coupure : 0,3); (b) Régularisation de Tikhonov (coefficient de régularisation : 1600); (c) Régularisation semi-quadratique [Charbonnier et al., 1997] ($\varphi(u) = 2\sqrt{1+u^2} - 2$, paramètre d'échelle 5, coefficient de régularisation 10000).	112

6.4	Evolution de la reconstruction orientée objet, sans contrainte de forme, sur 100 itérations. Les niveaux de gris correspondent aux valeurs de f_{Ω} et f_{Ω^c} à l'itération considérée.	112
6.5	Evolution des constantes d'intensité de l'objet et du fond pour les données de projection de la Fig. 6.2-a.	113
6.6	Données de projections en (a) pour 5 angles et un bruit gaussien tel que $SNR_{\sigma}=15$ dB, image solution en (b).	114
6.7	Reconstructions pixelliques des projections de la Fig. 6.6-a : (a) Rétro-projection filtrée (fréquence de coupure : 0,1) ; (b) Régularisation de Tikhonov (coefficient de régularisation : 1600) ; (c) Régularisation semi-quadratique [Charbonnier et al., 1997] ($\varphi(u) = 2\sqrt{1+u^2} - 2$, paramètre d'échelle 5, coefficient de régularisation 1600).	114
6.8	Evolution de la reconstruction orientée objet, sans contrainte, sur 100 itérations. Les niveaux de gris correspondent aux valeurs de f_{Ω} et f_{Ω^c} à l'itération considérée.	115
6.9	Superposition du bord de la forme reconstruite en (a), évolution des constantes d'intensité de l'objet et du fond en (b).	115
6.10	Reconstruction orientée objet à partir des projections bruitées p et avec une pénalisation croissante de la longueur du contour ($10^5 \leq \lambda \leq 10^8$), où $E_{\lambda} = E_{data} + \lambda E_{length}$	116
6.11	Données de la reconstruction contrainte : données de projections en (a) pour 5 angles et un bruit gaussien tel que $SNR_{\sigma}=15$ dB, forme de référence en (b).	116
6.12	Reconstructions orientées objet contraintes obtenues pour l'expérience 6.7.1. 1 ^{ère} ligne : pour 6 angles de prise de vues, 2 ^{ème} ligne : pour 5 angles, 3 ^{ème} ligne : pour 4 angles. Initialisation (a), reconstruction sans <i>a priori</i> de forme (b), avec <i>a priori</i> , pour la forme de référence de la Fig. 6.11-b, à l'ordre $N = 21$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ (d).	117
6.13	Evolution des valeurs d'intensité au cours de la reconstruction contrainte : d'abord sans <i>a priori</i> , puis en introduisant l' <i>a priori</i> à l'ordre $N = 21$, puis à l'ordre $N = 45$.	118
6.14	Reconstructions orientées objet contraintes obtenues pour l'Exp. 6.7.2. 1 ^{ère} ligne : $SNR_{\sigma} = 25$ dB, 2 ^{ème} ligne : $SNR_{\sigma} = 20$ dB, 3 ^{ème} ligne : $SNR_{\sigma} = 15$ dB, 4 ^{ème} ligne : $SNR_{\sigma} = 10$ dB, 5 ^{ème} ligne : $SNR_{\sigma} = 5$ dB. Initialisation (a), reconstruction sans <i>a priori</i> de forme (b), avec <i>a priori</i> , pour la forme de référence de la Fig. 6.11-b, à l'ordre $N = 21$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ (d).	119
6.15	Ensemble de $N_{Ref} = 12$ images de référence (a) de l'Exp. 6.7.3. Résultats de reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 6.11-a : sans <i>a priori</i> de forme (b), en utilisant la contrainte multi-references à l'ordre $N = 21$ avec $\alpha = 0.9$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ avec $\alpha = 0.9$ (d).	120
6.16	Douze des $N_{Ref} = 46$ images de référence de l'expérience 6.7.4 (a) et résultats de reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 6.11-a : sans <i>a priori</i> de forme (b), en utilisant la contrainte multi-references avec $N = 21$ et $\alpha = 0.7$ (c), puis $N = 45$ et $\alpha = 0.5$ (d).	121
6.17	Neuf des $N_{Ref} = 47$ images de référence (a) de l'Exp. 6.7.4, lorsque l'objet modèle appartient à l'ensemble des images de référence. Résultats de reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 6.11-a : sans <i>a priori</i> de forme (b), en utilisant la contrainte multi-references à l'ordre $N = 21$ avec $\alpha = 0.7$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ avec $\alpha = 0.5$ (d).	121

6.18	Neuf des $N_{Ref} = 47$ images de référence (a) de l'Exp. 6.7.4, lorsque l'objet modèle appartient à l'ensemble des images de référence. Résultats de reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 6.11-a : sans <i>a priori</i> de forme (b), en utilisant la contrainte multi-références à l'ordre $N = 21$ avec $\alpha = 0.7$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ avec $\alpha = 0.9$ (d).	122
7.1	Trajet par arc de cercle dans le cas d'un gradient constant.	136
7.2	Approximation du trajet par arc de cercle.	136
8.1	Le banc MUSC	142
8.2	Schéma 3D de la maquette.	143
8.3	Schéma du dispositif expérimental pour la prise de mesures.	143
8.4	Dessin technique de la maquette.	144
8.5	Répartition des sources et des récepteurs.	145
8.6	Signal délivré par la source.	146
8.7	Signal reçu.	146
8.8	Reconstitution de la forme modèle à partir de ses moments de Legendre invariants en échelle et translation (à gauche) et courbes d'erreur correspondantes, pour différentes valeurs de β (à droite).	148
8.9	Tracé des 199 trajets rectilignes ne traversant que la résine.	149
8.10	Estimation de la distribution de la vitesse de la résine, par noyaux de Parzen, à partir des 199 trajets rectilignes ne traversant pas l'aluminium. Temps en microsecondes en abscisse.	149
8.11	Estimation de la densité des résidus, sur les 199 rais traversant uniquement la résine, par noyaux de Parzen. Temps en microsecondes en abscisse.	150
8.12	Estimation de la densité des résidus, sur les 199 rais traversant uniquement la résine, par noyaux de Parzen. Temps en microsecondes en abscisse.	152
8.13	Trajets obtenus sur la maquette numérique pour un parcours en arc de cercle (1ère ligne), obtenu par Fast Marching (2ème ligne), pour le modèle rectiligne (3ème ligne).	153
8.14	Temps de parcours (en microsecondes) dans la configuration placée à gauche : données réelles (a), données simulées, sans bruit, par Fast Marching (b), par trajets circulaires (c), par trajets rectilignes (d).	154
8.15	Temps de parcours (en microsecondes) dans la configuration placée à gauche : données réelles (a), données simulées par Fast Marching (b), par trajets circulaires (c), par trajets rectilignes (d) auxquelles est ajouté le bruit de mélange défini par (8.3).	155
8.16	Reconstruction initiale sur données réelles. Masque utilisé (a), rétro-projection en $m.s^{-1}$ (b), champ de lenteur initial (c).	157
8.17	Reconstructions pixelliques (RAI-2D) de données simulées bruitées pour différentes valeurs du rayon ρ du disque d'influence avec utilisation de bornes <i>a priori</i> : $\rho = 4$ (a), $\rho = 25$ (b), $\rho = 50$ (c). Temps d'arrivée simulés en rais circulaires avec ajout du bruit de mélange (8.3).	159
8.18	Reconstructions pixelliques (RAI-2D) de données simulées bruitées pour différentes valeurs du rayon ρ du disque d'influence <i>sans</i> utilisation de bornes <i>a priori</i> : $\rho = 4$ (a), $\rho = 25$ (b), $\rho = 50$ (c). Temps d'arrivée simulés en rais circulaires.	160

8.19	Superposition du bord de la forme reconstruite sur la maquette numérique pour 10 itérations de l'algorithme d'optimisation.	161
8.20	Résultats de reconstruction orientée objet contrainte sur données simulées en rais courbes, sans bruit, pour 35 sources et 26 récepteurs.	165
8.21	Superposition, sur la maquette numérique, du bord des reconstructions obtenues pour des données bruitées avec $N = 13, \alpha = 0,5$ et $N = 27, \alpha = 0,7$	166
8.22	Résultats de reconstruction orientée objet contrainte sur données simulées en rais courbes auxquelles est ajouté le bruit (8.3) (données issues de 35 sources et 26 récepteurs).	167
8.23	Superposition, sur la maquette numérique, du bord des reconstructions obtenues pour des données réelles avec $N = 13, \alpha = 0,5$ et $N = 27, \alpha = 0,7$	168
8.24	Résultats de reconstruction orientée objet contrainte sur données réelles pour 35 sources et 26 récepteurs.	169

Liste des tableaux

2.1	Différentes notions de dérivation. Le symbole \succ signifie « plus fort que »	31
6.1	Valeurs du paramètre α correspondant aux résultats obtenus dans l'expérience 6.7.1, où N est l'ordre des moments dans les différentes étapes de la reconstruction contrainte.	117
6.2	Valeurs du coefficient α pour les reconstructions de la Fig. 6.14, où N est l'ordre des moments dans les différentes étapes de la reconstruction contrainte.	120
8.1	Positions de la source.	145
8.2	Positions du récepteur.	146
8.3	Estimation des paramètres du modèle de mélange de bruit	151
8.4	Erreur quadratique moyenne avec les données acquises en fonction de la géométrie de parcours.	156

Première partie

Introduction Générale

Chapitre 1

Problématique

Ce premier chapitre d'introduction générale définit le contexte de la tomographie d'arrivée. Les caractéristiques de ce problème spécifient plusieurs conditions pour sa résolution. Nous exposons la démarche que nous avons adoptée pour les prendre en compte. Nous présentons une synthèse du travail effectué, à travers nos principales contributions, à la section 1.3. Le plan du manuscrit est détaillé dans la dernière section.

1.1 Contexte

Dans le domaine du génie civil, la tomographie par temps de première arrivée tient une place prépondérante car elle permet de déterminer la structure interne d'un ouvrage de manière non invasive, i.e. sans effectuer de prélèvements. Pour cette raison, elle est utilisée pour le Contrôle Non Destructif (CND) d'ouvrages. Le principe de cette technique d'imagerie est de soumettre la région d'étude à des sources acoustiques qui donnent lieu à des ondes se propageant à l'intérieur des matériaux. Leur propagation est plus ou moins rapide selon la présence d'hétérogénéité ou de défauts, de sorte que des disparités dans les temps d'arrivée permettent de préjuger de la présence de ces hétérogénéités ou de ces défauts. Ainsi, en récoltant les temps de première arrivée en un point du domaine, il est possible d'émettre des hypothèses sur le contenu de la région observée. De plus, une analyse approfondie de ces temps permet de déduire la forme des objets inclus dans la région d'étude.

La difficulté de ce problème est à la fois théorique et pratique : d'un point de vue théorique, la relation qui fournit ces temps de parcours à partir du domaine sous investigation n'est pas linéaire ; en pratique, il se peut qu'on ne dispose que d'un nombre restreint de mesures. Certaines positions de sources ou capteurs peuvent, par exemple, s'avérer difficiles d'accès ; dans certains cas, le nombre de mesures est limité afin de diminuer le temps d'acquisition.

Le domaine de la reconstruction a pour but, à partir de ces mesures de temps de première arrivée, de synthétiser une image du domaine observé. Ceci correspond à résoudre un problème inverse qui est, par nature, mal posé. Les méthodes de reconstruction se répartissent en deux grandes classes : les méthodes pixelliques, qui estiment la composition du milieu en considérant chaque pixel de manière indépendante et les méthodes orientées objet, qui approchent les structures d'intérêt par l'intermédiaire d'une forme en évolution. Un modèle pour décrire le milieu est défini à partir d'une forme dont la position est obtenue par optimisation. La formulation la plus simple consiste à attribuer une constante aux domaines intérieur et extérieur à la forme. Ces méthodes permettent une représentation uniforme de l'objet et du fond ainsi qu'une localisation

nette des contours. On parle de résolution par modèles déformables et, plus spécifiquement, par contours actifs.

Le travail présenté dans ce manuscrit vise à développer une méthode orientée objet en tomographie par temps de première arrivée. Celle-ci peut permettre de mieux rendre compte des différents objets homogènes présents dans le milieu. Les conditions expérimentales requièrent, en outre, que la méthode soit robuste au bruit et aux données manquantes. Son évaluation sur données réelles en conditions contrôlées constitue également un des objectifs de la thèse.

1.2 Approche retenue

1.2.1 Motivation pour un *a priori* de forme

La problématique de la thèse est la suivante : d'un coté, les conditions expérimentales peuvent donner lieu à des données tomographiques en nombre réduit ou avec un rapport signal-sur-bruit faible ; de l'autre, on dispose, dans certaines applications, d'une information *a priori* de nature globale sur la forme des objets à reconstruire. Celle-ci peut d'ailleurs être parfois très précise : par exemple des formes de piliers, ou des structures de génie civil répertoriées.

Nous nous proposons alors d'employer de récents résultats en segmentation orientée objet¹ pour mettre à profit cette information. Ce type d'approche consiste à considérer un *a priori* de forme. Elle peut dans certains cas reposer sur un ensemble d'objets de référence contraignant la forme en évolution à ressembler à l'un de ces objets. En segmentation, elle permet d'extraire et de reconnaître des objets partiellement occultés. Le travail présenté dans ce manuscrit a pour but d'évaluer si un tel *a priori* permet d'améliorer la résolution du problème inverse en conditions expérimentales difficiles. En particulier, on examine si ce type de contrainte permet d'éliminer des artefacts de reconstruction en obligeant la forme en évolution à prendre les contours d'une forme répertoriée *a priori*.

1.2.2 Démarche pratique

La contrainte de forme que nous avons choisie de mettre en œuvre repose sur la projection sur une base polynômiale des fonctions caractéristiques des différentes formes répertoriées *a priori*. On dispose alors d'une information globale sur les les objets répertoriés, tout en la réduisant à une série de coefficients. A notre connaissance, l'introduction d'une contrainte de forme présentant ces caractéristiques en reconstruction n'a pas été encore explorée.

Comme la reconstruction de données tomographiques par temps de première arrivée présente la difficulté de posséder un problème direct *non linéaire*, on s'est proposé, tout d'abord, d'évaluer l'apport d'une contrainte de forme dans le cadre plus simple de la tomographie linéaire. Nous avons considéré, pour cela, la modalité en émission utilisée couramment dans le domaine médical. Cette étape a permis de valider l'intérêt d'un *a priori* de forme afin de contrebalancer le manque de données ou les perturbations que peuvent contenir ces données.

Dans un second temps, nous avons abordé le problème de la tomographie par temps de première arrivée. La littérature disponible sur ce sujet porte essentiellement sur des méthodes de reconstruction pixellique. Très peu de travaux envisagent, à l'heure actuelle, une reconstruction orientées objet. La plupart du temps, les méthodes pixelliques reposent sur une approximation

1. Il s'agit alors de détecter des objets d'intérêt par un contour placé dans l'image.

du problème direct au premier ordre. Notre objectif est de proposer une formulation de ce principe en domaine variable² adaptée à notre problème.

En modalité d'émission, nous avons utilisé pour l'évaluation des objets synthétiques. A partir de ces objets, les données tomographiques ont été simulées. Pour la tomographie par temps d'arrivée, la méthode a, dans un premier temps, été testée sur données numériques. Dans un second temps, nous l'avons évaluée sur des données réelles acquises en conditions contrôlées. Ces données sont issues d'une maquette réalisée par le département MACS (Mesures Auscultation et Calcul Scientifique) de l'IFSTTAR (Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux). Elles ont été acquises sur un banc MUSC (Mesures Ultra-sonores Sans Contact) qui permet de mesurer les déplacements infinitésimaux (de l'ordre du micromètre) dus à l'application d'une source hautes fréquences sur la structure. D'un point de vue pratique, ces déplacements ont été obtenus à l'aide d'une source piezzo-électrique ultrasonore. La mesure de ces déplacements a, quant à elle, été obtenue par réflexion d'un faisceau laser à la surface de la structure.

Ce travail présentant un aspect exploratoire, des formes aux propriétés géométriques (par exemple, régularité) ou topologiques (connexité, convexité) différentes ont été considérées. Ceci constitue une première étape pour ensuite aborder des formes plus représentatives de génie civil : fondations, piliers, tuyauterie.

1.3 Contributions

La première contribution de la thèse est d'introduire, en tomographie non linéaire, des contraintes portant sur une représentation globale des formes. L'utilisation de ce type d'approche semble original pour aborder un problème inverse dans le contexte défavorable de données expérimentales de données manquantes ou dégradées. Nous avons évalué numériquement son intérêt, dans un premier temps dans le cadre de la tomographie linéaire d'émission, pour des mesures en nombre très restreint et en faisant varier le rapport signal-sur-bruit. Les résultats montrent l'efficacité de cette démarche sur des objets synthétiques.

La deuxième contribution est la mise en œuvre d'une méthode orientée objet pour le problème non linéaire de tomographie par temps d'arrivée. A notre connaissance, le problème de reconstruction associé n'a pas, à ce jour, été exploré dans la littérature à l'aide de méthode par évolution de forme. L'algorithme obtenu permet l'incorporation de contraintes géométriques globales, ce qui a permis de nous rendre compte de l'intérêt de telles contraintes en reconstruction de données de tomographie non linéaire.

La dernière contribution de ce travail de doctorat est expérimentale. Elle concerne l'évaluation de la méthode en conditions réelles contrôlées, pour une série de mesures effectuées sur une maquette placée sur banc MUSC. La totalité du signal est enregistrée par chacun des récepteurs et le temps d'arrivée est déterminé manuellement par un opérateur.

1.4 Organisation du manuscrit

Cette thèse étant consacrée aux méthodes orientées objet, l'introduction générale comporte un second chapitre destiné à présenter les différentes possibilités disponibles, employées dès la fin des années 80, en termes de représentation d'un domaine variable. Une synthèse des différentes

2. i.e. en variable de forme.

notions de dérivation est effectuée à partir de la dérivée au sens de Gâteaux. Nous donnons également la définition du gradient de forme nécessaire à tout algorithme d'optimisation.

Le mémoire est ensuite divisé en trois parties. La première est consacrée à l'état de l'art. Dans le chapitre 3, on présente les modèles déformables dans leur contexte initial : la segmentation d'image. On y introduit notamment le modèle de Mumford-Shah constant par morceaux ainsi que les méthodes par *level-sets*. Le chapitre 4 a pour but de présenter les contraintes de formes dans le contexte de la segmentation. Nous y détaillons la contrainte que nous utilisons dans le problème inverse de tomographie. Celle-ci repose sur une description paramétrique des formes à l'aide des moments de leur fonction caractéristique. L'alignement par rapport aux formes de référence est obtenu en rendant les moments invariants aux transformations affines. Le chapitre 5 est consacré à un état de l'art de la reconstruction pour les deux modalités que nous avons considérées : émission et temps d'arrivée. On y développe le modèle direct qui définit ces modalités ainsi qu'une synthèse des principales méthodes employées pour résoudre le problème inverse associé. On distingue les méthodes pixelliques, qui estiment l'intensité de chaque point de l'image, et les méthodes orientées objet, qui emploient un modèle déformable.

La deuxième partie du manuscrit porte sur les deux contributions de la thèse. La première, qui fait l'objet du chapitre 6, est d'introduire l'*a priori* choisi en reconstruction. Le cas, plus simple, de la tomographie d'émission est d'abord considéré. L'intérêt de la démarche est exploré numériquement sur données synthétiques et les résultats obtenus montrent un gain en robustesse par rapport aux méthodes pixelliques sur données manquantes ou bruitées. La seconde contribution, présentée au chapitre 7, est la proposition d'une méthode de reconstruction orientée objet qui soit adaptée au problème de reconstruction de données de tomographie par temps d'arrivée. La méthode proposée donne lieu à une série de problèmes linéaires dans lesquelles l'opérateur direct est estimé de proche en proche. On se ramène ainsi au cas du modèle linéaire, décrit au chapitre précédent. Aussi, la contrainte de forme y est introduite de manière similaire.

Dans la troisième partie, nous évaluons la méthode développée. Dans un premier temps, nous décrivons au chapitre 8 le cadre expérimental général. Notre propos étant de montrer l'intérêt d'une formulation orientée objet en temps d'arrivée, nous utilisons un modèle simplifié pour le trajet des ondes de parcours. Il correspond à déterminer le trajet circulaire qui minimise le temps de parcours. Dans un second temps, nous présentons les résultats obtenus. Ceux issus de données simulées sont mis en regard avec ceux provenant de données réelles issues du banc MUSC de l'IFSTTAR.

Nous présentons finalement des éléments de perspectives à ce travail.

Chapitre 2

Cadre mathématique

2.1 Introduction

Dans ce deuxième chapitre, on définit le cadre mathématique sur lequel repose le mémoire. Nous nous consacrons ici au problème de la reconstruction tomographique, qui est un problème inverse *mal posé*. Nous expliquons tout d'abord pourquoi il est difficile de mettre clairement en évidence cette caractéristique, bien connue, des problèmes *inverses*, auxquels nous nous intéressons, dans notre approche (section 2.2).

La méthode que nous proposons, somme toute relativement classique, revient à poser le problème de reconstruction comme un problème d'optimisation d'une fonctionnelle d'énergie. Toutefois, à la différence de beaucoup de méthodes traditionnelles, la solution recherchée n'est pas directement une image, définie sur un espace vectoriel, ou plus généralement sur un espace de Banach¹ éventuellement de dimension infinie : notre approche utilise les outils de l'optimisation de forme.

Il s'agit, essentiellement, de déterminer la forme optimale des objets à reconstruire (nous nous intéressons évidemment aussi à leurs distributions d'intensité, mais nous verrons au chapitre 6 que celles-ci peuvent être déterminées à partir de la forme). Le domaine de l'optimisation de forme a donné lieu à de nombreux développements pour la résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple [Sokolowski et Zolesio, 1992] et les références qu'il contient). Dans le domaine de l'industrie, on peut citer l'exemple de l'optimisation d'un profil pour limiter ses frottements dans l'air. Ces idées ont été mises à profit plus récemment [Aubert et al., 2003; Jehan-Besson et al., 2003] en imagerie. Nos travaux s'inscrivent dans cet esprit.

Dans cette présentation simplifiée, qui repose sur [Delfour et Zolésio, 2001], nous décrivons comment est formulée mathématiquement l'idée de domaine variable. Une particularité importante de l'espace des formes est qu'il *n'est pas* un espace vectoriel. Nous présentons, cependant, comment il est possible d'y transporter les différentes notions de dérivation et de définir le calcul des variations qui s'y rapporte.

Dans la section 2.3, les deux principales manières de représenter une forme sont introduites : comme ouvert du plan ou comme courbe de niveau. La section 2.4 est consacrée à l'idée de variations de forme, essentielle pour pouvoir espérer définir une quelconque notion d'optimisation. On s'interroge, en effet, sur la façon de faire *varier* une forme afin que *cette variation optimise* au mieux *un critère énergétique défini au préalable*. Cette variation peut se formuler à l'aide d'une transformation s'appliquant sur le domaine image ou par l'intermédiaire d'un champ de

1. On rappelle qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, voir plus loin.

vitesse. A partir de la notion de variation de formes, il est possible de définir celle de dérivée de forme (section 2.5).

On donne ensuite deux applications de ces définitions : la section 2.6 contient le calcul de la dérivée d'un modèle constant par morceaux et énonce le théorème de dérivation d'une intégrale définie sur un domaine variable. Nous l'utiliserons à plusieurs reprises dans ce manuscrit. Finalement, nous rappelons (section 2.7) les règles de composition entre une fonction dérivable de \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^n) dans \mathbb{R} avec une fonctionnelle de forme, éventuellement à valeurs dans \mathbb{R}^n .

2.2 Problème mal posé

Un problème mal posé est un problème pour lequel l'existence, l'unicité de la solution ou sa stabilité par rapport aux données est prise en défaut. Cette notion a été introduite par Hadamard. Elle caractérise les problèmes inverses que nous considérons.

2.2.1 Dans un espace de Banach

Nous rappelons d'abord la définition d'un espace de Banach :

Définition 2.2.1. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet : toute suite de Cauchy, définie à partir de la norme dont est muni cet espace, converge.*

Dans un espace de Banach, un argument de *compacité* est souvent utilisé pour montrer qu'un problème est mal posé. La compacité est d'abord invoquée dans un cadre *fonctionnel* : on cherche à montrer que l'opérateur direct est une application compacte. Dans un second temps, la compacité est invoquée dans un cadre *topologique* à travers le Théorème de Riesz :

Théorème 2.2.1. (*Riesz*) *La boule unité est compacte, si et seulement si, l'espace est de dimension finie.*

En couplant ces deux arguments, on parvient à déduire que : si l'opérateur *direct* est *compact*, alors l'opérateur *inverse ne peut être stable* dans un espace fonctionnel de dimension infinie. La stabilité étant prise en défaut, le problème inverse est mal posé.

2.2.2 Dans un espace de formes

Dans cette section, on s'intéresse à un espace de formes, *a priori* quelconque. Deux possibilités, naturelles et fréquemment utilisées [Henrot et Pierre, 2005, § 2.2], permettent d'y définir un cadre analytique ou géométrique :

- en faisant un espace semi-normé à l'aide de la semi-norme, [Henrot et Pierre, 2005, § 2.2.2] :

$$\|\Omega\| = \|\mathbf{1}_\Omega\|_{\mathcal{L}^p} \text{ pour } p < \infty \quad (2.1)$$

- en faisant un espace métrique à l'aide de la distance de Hausdorff, [Henrot et Pierre, 2005, § 2.2.3].

La distance de Hausdorff évalue la différence symétrique entre deux ensembles :

$$\Omega \Delta \Omega' = \mathcal{C}_{\Omega \setminus \Omega'} \cup \mathcal{C}_{\Omega' \setminus \Omega} \quad (2.2)$$

en évaluant la distance qui sépare leurs bords.

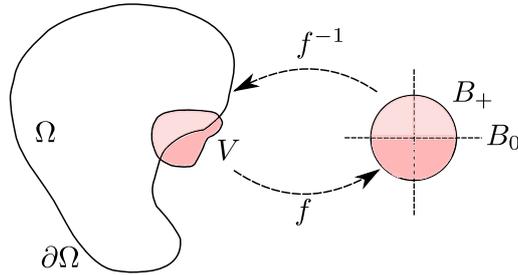


FIGURE 2.1 – Association d’une forme à la boule unité.

Toutefois, s’il est possible d’introduire une certaine rigidité dans l’espace des formes, il est nécessaire de bien avoir à l’esprit que celui-ci ne constitue *pas un espace vectoriel*. De manière générale, il semble *a priori* difficile de munir cet espace d’une quelconque structure algébrique. En effet, comment définir *a priori* la loi d’addition² $\Omega + \Omega'$?

Ces difficultés quant à la structure même de l’espace des formes expliquent certainement, au moins pour une large part, pourquoi nous n’avons pas trouvé de références portant sur le caractère mal posé du problème inverse en variable de forme.

2.3 Représentation des formes

Nous considérons, dans ce manuscrit deux façons de représenter une forme. La première qui est la plus naturelle est de se donner un ouvert du plan. La seconde consiste à définir le bord de la forme comme une courbe de niveau.

2.3.1 Comme ouvert du plan

La façon la plus naturelle de décrire une forme est de la représenter comme un ouvert Ω du plan \mathbb{R}^2 . Cet ouvert peut être relativement arbitraire. Cependant, sous certaines conditions de régularité sur le bord, on peut lui faire correspondre localement la boule unité B :

$$B = \{\|x\|_{\mathbb{R}^2}^2 \leq 1\},$$

avec $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 et $x = (x_1, x_2)$. On procède de la manière suivante.

Pour x un point de la frontière $\partial\Omega$ et V_x un voisinage de x , on associe à $\partial\Omega \cap V_x$ l’ensemble $B_0 = \{(x_1, x_2) \in B; x_2 = 0\}$ et à $\Omega \cap V_x$ l’ensemble $B_+ = \{(x_1, x_2) \in B; x_2 > 0\}$, voir Fig. 2.3.1. Si cette association s’effectue à l’aide d’une fonction f et que f et $f^{-1} \in \mathcal{C}^k$, on dit que f est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k et que Ω est de classe \mathcal{C}^k . Ces questions de régularité interviennent surtout dans un cadre théorique. Dans ce manuscrit, nous supposons toujours le bord suffisamment régulier.

2.3.2 Comme courbe de niveau

De la même manière que le relief peut être décrit, sur une carte, par des lignes de niveau, on peut également représenter les formes par des ensembles de niveaux, en anglais *level-sets*. Le

2. Il est clair que, dans notre cas, $\Omega + \Omega' = \{x = y + z, y \in \Omega, z \in \Omega'\}$ ne peut convenir.

principe de cette approche est de définir une fonction Ψ sur le domaine image $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, supposé borné³, afin que le bord de la forme soit constitué de l'image réciproque $\Psi^{-1}(c)$ d'une constante. En pratique, on construit Ψ de telle sorte que $c = 0$.

Le premier théorème que nous énonçons est un théorème d'existence pour la fonction Ψ :

Théorème 2.3.1. *Sous des hypothèses de régularité sur l'ouvert Ω , il existe une fonction $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$\Omega = \{y \in \mathcal{D} : \Psi < 0\} \text{ et } \partial\Omega = \{y \in \mathcal{D} : \Psi = 0\} \quad (2.3)$$

ainsi qu'un voisinage V_0 de $\partial\Omega$ tel que

$$\nabla\Psi \neq 0 \text{ sur } V_0 \text{ et } \mathcal{N} = -\frac{\nabla\Psi}{\|\nabla\Psi\|_{\mathbb{R}^2}} \quad (2.4)$$

où \mathcal{N} est la normale unitaire à $\Gamma = \partial\Omega$ orientée vers l'intérieur, avec $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 .

Ce théorème montre, sans donner la construction de la fonction Ψ , qu'il est possible de décrire Ω comme une ligne de niveau zéro. Pour une preuve de ce théorème, on se référera à [Delfour et Zolésio, 2001, p. 28]. La réciproque du théorème 2.3.1 est également utile. Elle énonce que lorsqu'on associe à une fonction Ψ une forme Ω par : $\Omega = \{y \in \mathcal{D} : \Psi(y) < 0\}$, son bord correspond à la courbe de niveau zéro :

Théorème 2.3.2. *Associons à une fonction continue $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble :*

$$\Omega = \{y \in \mathcal{D} : \Psi(y) < 0\} \quad (2.5)$$

Supposons que

$$\Psi^{-1}(0) = \{y \in \mathcal{D} : \Psi(y) = 0\} \neq \emptyset$$

et qu'il existe un voisinage V_0 de $\Psi^{-1}(0)$ tel que Ψ soit régulier sur V_0 et $\nabla\Psi \neq 0$ dans V_0 . Alors, Ω est régulier et :

$$\partial\Omega = \Psi^{-1}(0) \quad (2.6)$$

Pour une démonstration de ce théorème, voir [Delfour et Zolésio, 2001, p. 30].

Les théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 ne supposent pas d'expression particulière pour Ψ . En pratique, on prend la fonction distance orientée de la manière suivante :

$$\Psi(x) = \begin{cases} -d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega \\ d(x, \partial\Omega) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.7)$$

où $d(x, \partial\Omega)$ est la distance du point x à la frontière $\partial\Omega$: $d(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} d(x, y)$.

Remarque 2.3.1. *Une propriété importante, que nous mentionnons dès à présent, est que nous avons alors :*

$$\|\nabla\Psi(x)\|_{\mathbb{R}^2} = 1 \quad (2.8)$$

pour tout point x du domaine image.

3. Dans ce manuscrit, on considère, sans perte de généralité, un domaine borné du plan \mathbb{R}^2 . Il n'y a, a priori, pas de limite quant à la dimension finie de l'espace dans lequel est inclus le domaine image.

2.4 Variations de forme

Nous nous intéressons ici à faire varier une forme. A partir d'un domaine initial Ω , on distingue deux démarches différentes :

1. celles qui reposent sur une famille de transformation ;
2. celles qui utilisent un champ de vitesse.

2.4.1 Famille de transformations

Cette approche consiste à considérer l'image de Ω par une famille de transformations $F = I + f$, où I désigne l'application identité. Lorsqu'on suppose certaines hypothèses de régularité et de décroissance à zéro sur f , on parle de perturbation de l'identité [Delfour et Zolésio, 2001].

Cette approche a principalement été développée au début des années 70 dans le but d'obtenir des propriétés de complétude vis à vis de la métrique choisie [Micheletti, 1972; Murat et Simon, 1976]. Leurs différents points de vue sont relatés dans [Sokolowski et Zolesio, 1992; Delfour et Zolésio, 2001].

2.4.2 Champ de vitesse

L'approche par champ de vitesse a été développée par Zolésio et consiste à écrire une équation aux dérivées partielles (EDP) pour faire évoluer les points du domaine image \mathcal{D} . Elle est décrite en détail dans [Delfour et Zolésio, 2001]. Elle fait intervenir un paramètre de temps « artificiel » τ et cherche à déterminer l'évolution de la position $x(\tau)$ d'un point de Ω . Si on note $x(0) = X \in \Omega$ la position initiale de x , l'EDP indiquant la position de x en tout temps τ est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau) = V(\tau, x(\tau)), \tau > 0 \\ x(0) = X \end{cases} \quad (2.9)$$

où $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un champ de vitesse. Pour simplifier, et ce sera toujours le cas dans ce manuscrit, on supposera $V(\tau, x(\tau)) = V(x(\tau))$ dans (2.9), de sorte que (2.9) correspond à une équation aux dérivées ordinaires (EDO).

Remarque 2.4.1. *L'évolution de $x(\tau)$ selon (2.9) définit, en temps fini, une forme Ω_τ considérée comme une variation de Ω (voir Fig. 2.2). Pour que Ω_τ reste inclus dans \mathcal{D} , on doit imposer des conditions sur le champ de vitesse V . Celles-ci sont détaillées dans [Delfour et Zolésio, 2001; Sokolowski et Zolesio, 1992].*

2.5 Calcul différentiel sur une forme

On introduit la notion de dérivée de forme en montrant de quelle manière on peut transporter la notion de différentielle définie sur un espace de Banach vers un espace de formes.

2.5.1 Dérivée dans un espace de Banach

On donne d'abord des définitions en termes de dérivées directionnelles, *a priori non linéaires* par rapport à la direction considérée. On introduit ensuite la définition de dérivée usuelle ou dérivée au sens de Fréchet.

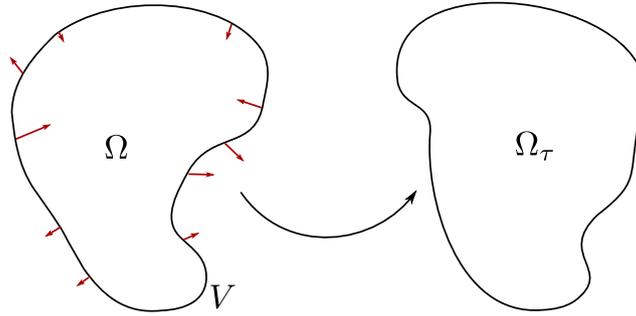


FIGURE 2.2 – Variation de forme. Le champ de vitesse est ici uniquement représenté sur la frontière.

Dérivées directionnelle

Définition 2.5.1. Soit E un espace de Banach et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. La dérivée directionnelle de Gâteaux, au point $x \in E$, et dans la direction θ , est donnée par :

$$df(x, \theta) = \lim_{\tau \searrow 0} \frac{f(x + \tau\theta) - f(x)}{\tau} \quad (2.10)$$

si la limite existe.

La dérivée directionnelle au sens de Hadamard diffère de celle de Gâteaux au sens où toutes les directions η , qui tendent vers θ , sont considérées :

Définition 2.5.2. Soit E un espace de Banach et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. La dérivée directionnelle au sens de Hadamard, au point $x \in E$, et dans la direction θ , est définie, si la limite suivante existe, par :

$$d_H f(x, \theta) = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \theta \\ \tau \searrow 0}} \frac{f(x + \tau\eta) - f(x)}{\tau} \quad (2.11)$$

Elle est plus forte que celle au sens de Gâteaux : si f a une dérivée directionnelle au sens de Hadamard, alors c'est le cas au sens de Gâteaux.

Notions de dérivation

A partir de la dérivée directionnelle, on définit la notion de dérivée en lui imposant d'être linéaire et continue par rapport à toutes ses directions. On donne les définitions de la dérivée au sens de Gâteaux et de celle au sens de Fréchet :

Définition 2.5.3. Soit E un espace de Banach et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable au point $x \in E$, au sens de Gâteaux, si :

- $\forall \theta \in E, df(x, \theta)$ existe,
- $\theta \mapsto df(x, \theta) : E \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue.

Définition 2.5.4. Soit E un espace de Banach et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable au point $x \in E$, au sens de Fréchet (ou dérivable), si :

– f admet une dérivée au sens de Gâteaux en $x : df(x, h)$,

$$– \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - df(x, h)|}{\|h\|_E} = 0,$$

où $\|\cdot\|_E$ désigne la norme dont est muni E .

Notation 2.5.1. La dérivée au sens de Fréchet est habituellement notée $df(x) \cdot h$ au lieu de $df(x, h)$.

Remarque 2.5.1. Le Tab. 2.1 indique, parmi toutes ces définitions, lesquelles sont plus fortes par rapport aux autres.

Fréchet } Gâteaux } directionnelle au sens de Hadamard } directionnelle au sens de Gâteaux

TABLE 2.1 – Différentes notions de dérivation. Le symbole } signifie « plus fort que ».

2.5.2 Dérivée de forme à partir des transformations

Définir la dérivée de forme induit qu'on ne se situe plus au point x d'un espace de Banach mais qu'on considère, à la place, un domaine arbitraire Ω . Afin de former, comme pour la Déf. 2.5.1, le taux de variation dans une direction donnée, on introduit la transformation suivante :

$$T_\tau(X) = X + \tau \theta(X) \quad (2.12)$$

Contrairement à (2.10), la direction θ dépend, cette fois-ci, de X . L'image directe de Ω par cette transformation délimite une nouvelle forme Ω_τ :

$$\Omega_\tau = T_\tau(\Omega) = \{T_\tau(X), X \in \Omega\} \quad (2.13)$$

qui peut s'interpréter comme une variation de Ω dans la direction $\theta(\cdot)$. Par conséquent, de la même manière que pour la Déf. 2.5.1, on peut poser :

Définition 2.5.5. Soit f une fonctionnelle dépendant d'une forme variable Ω . Alors, si elle existe, sa dérivée de Gâteaux dans la direction $\theta(\cdot)$, est donnée par :

$$f'(\Omega, \theta) = \lim_{\tau \searrow 0} \frac{f(\Omega_\tau) - f(\Omega)}{\tau} \quad (2.14)$$

où $\Omega_\tau = T_\tau(\Omega)$ et $T_\tau(X) = X + \tau \theta(X)$.

2.5.3 Dérivée de forme à partir d'un champ de vitesse

Dérivée directionnelle

On peut montrer qu'une famille de transformations définit un champ de vitesse et vice versa [Sokolowski et Zolesio, 1992; Delfour et Zolésio, 2001]. Par conséquent, on peut aussi formuler les différentes notions de dérivation à l'aide d'un champ de vitesse.

Définition 2.5.6. *Soit f une fonctionnelle dépendant d'une forme Ω . Alors, si elle existe, sa dérivée eulerienne, dans la direction V , est donnée par :*

$$f'(\Omega, V) = \lim_{\tau \searrow 0} \frac{f(\Omega_\tau) - f(\Omega)}{\tau} \quad (2.15)$$

où Ω_τ est l'ensemble $\Omega_\tau = \{x(\tau), \tau > 0, \text{ avec } X = x(0) \in \Omega\}$. La fonction $x(\tau)$ est solution de l'EDO :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau}(\tau) = V(x(\tau)), \tau > 0 \\ x(0) = X \end{cases}$$

Il se peut que la fonctionnelle dépende à la fois d'un domaine Ω et d'un élément x d'un espace de Banach. Dans ce cas, on parle plutôt de dérivée de domaine :

Définition 2.5.7. *Soit f une fonctionnelle dépendant à la fois d'une variable x , dans un espace de Banach, et d'une forme variable Ω . Alors, si elle existe, sa dérivée de domaine dans la direction V , est définie par :*

$$f'(x; \Omega, \theta) = \lim_{\tau \searrow 0} \frac{f(x, \Omega_\tau) - f(x, \Omega)}{\tau} \quad (2.16)$$

où Ω_τ est défini comme dans la Déf. 2.5.6.

Ce point de vue se distingue d'une vision lagrangienne du problème. Celle-ci conduirait à la notion de dérivée *matérielle*.

Définition 2.5.8. *Soit la fonctionnelle $J(x, \Omega)$. Alors, si elle existe, sa dérivée matérielle est définie par :*

$$\dot{f}(x; \Omega, V) = \lim_{\tau \searrow 0} \frac{f(x(\tau), \Omega_\tau) - f(x, \Omega)}{\tau} \quad (2.17)$$

où $x(\tau)$ et Ω_τ sont définis comme dans la Déf. 2.5.6.

Si on compare les Déf. 2.5.5, Déf. 2.5.6 et Déf. 2.5.7, on constate que celles-ci sont très similaires. Par conséquent, nous emploierons parfois le terme de dérivée directionnelle au sens de Gâteaux pour parler de la dérivée eulerienne ou de la dérivée de domaine. Nous énonçons, à présent, un critère de différentiation de forme.

Dérivée

Définition 2.5.9. *La fonctionnelle de forme $f(\Omega)$ admet une dérivée de forme en Ω si :*

- *f admet une dérivée eulérienne pour toute direction V ,*
- *la fonction $V \mapsto f'(\Omega, V)$ est linéaire et continue.*

Pour les espaces correspondant à la fonction $V \mapsto f'(\Omega, V)$, se reporter à [Sokolowski et Zolesio, 1992].

Remarque 2.5.2. *On constate, de même, que cette définition est similaire à la Déf. 2.5.3. Pour les mêmes raisons que précédemment, nous parlerons ainsi parfois de dérivée de Gâteaux pour désigner la dérivée de forme.*

La définition 2.5.9 est également valable pour des fonctionnelles dépendant, en plus, d'une variable dans un espace de Banach. Dans ce cas, on remplace la condition portant sur la dérivée eulérienne par une condition similaire sur la dérivée de domaine :

Définition 2.5.10. *La fonctionnelle de forme $f(x, \Omega)$, avec x élément d'un espace de Banach, admet une dérivée de forme en Ω si :*

- *f admet une dérivée de domaine pour toute direction V ,*
- *la fonction $V \mapsto f'(x; \Omega, V)$ est linéaire et continue.*

Gradient de forme

Nous définissons, dans cette section, le gradient de forme $\nabla_{\Omega} E$ d'une fonction différentiable E . A cet effet, nous suivons [Sokolowski et Zolesio, 1992, § 2.11], en y apportant toutefois quelques modifications dans un but de synthèse. Nous débutons cette section par une définition qu'on choisit pour son degré de généralité. Elle relie le gradient au champ de vitesse en termes de dualité :

Définition 2.5.11. *Soit E une fonctionnelle de forme définie sur l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathcal{D}} = \left\{ \Omega ; \Omega \subset \mathcal{D}, \Omega \text{ mesurable} \right\}$ et supposée différentiable (par rapport à Ω). Le gradient de forme $\nabla_{\Omega} E$ est défini par :*

$$E'(\Omega, V) = \left\langle \nabla_{\Omega} E, V \right\rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \quad (2.18)$$

où $E'(\Omega, V)$ désigne la différentielle de forme de E au point Ω , selon le vecteur V . Le crochet $\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}}$ correspond au crochet de dualité entre l'espace \mathcal{V} et son dual \mathcal{V}' . L'espace \mathcal{V} est l'espace fonctionnel des champs de vitesse admissibles.

Il n'est pas question, ici, d'expliciter l'espace \mathcal{V} . Nous indiquons seulement qu'il est supposé avoir un certain degré de régularité. Pour en avoir une idée plus précise, on pourra se référer à [Sokolowski et Zolesio, 1992; Delfour et Zolésio, 2001].

Remarque 2.5.3. *La Déf. 2.5.11 adapte la notion de gradient qui, a priori, est dépendante de la notion de produit scalaire et donc d'un cadre hilbertien. Elle propose une généralisation de l'idée de gradient en substituant le produit scalaire par un crochet de dualité. Cette définition semble ainsi naturellement convenir lorsqu'un espace de formes est considéré.*

On se propose, à présent, d'énoncer deux résultats fondamentaux sous forme de propositions. Ils prennent en compte la régularité du bord de la variable de forme.

Proposition 2.5.1. *Si $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^k , alors le support du gradient $\nabla_\Omega E$ est inclus dans le bord Γ :*

$$\text{supp}(\nabla_\Omega E) \subset \Gamma \quad (2.19)$$

Proposition 2.5.2. *Supposons, à présent, que :*

- le bord $\Gamma = \partial\Omega$ soit de classe \mathcal{C}^k ,
- aucun champ de vitesse $V \in \mathcal{V}$ n'ait de composante normale le long du bord $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\langle V, \mathcal{N} \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad (2.20)$$

quelque soit la normale \mathcal{N} au bord $\partial\Omega$, i.e. quelle que soit son orientation. Alors, le gradient $\nabla_\Omega E$ possède uniquement une composante normale :

$$\langle V, \nabla_\Omega E \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad (2.21)$$

Ces deux propositions permettent d'énoncer le corrolaire suivant :

Corollaire 2.5.1. *Sous les hypothèses des Prop. 2.5.1 & 2.5.2, on déduit qu'on a dans ce cas :*

$$\nabla_\Omega E = g\mathcal{N} \quad (2.22)$$

avec existence et unicité pour $g \in \mathcal{V}'$ à support inclus dans $\Gamma = \partial\Omega$.

Remarque 2.5.4. *Le Corrolaire 2.5.1 constitue une version simplifiée de la Formule d'Hadamard, [Sokolowski et Zolesio, 1992, Theorem 2.27]. Cette formule est, la plupart du temps, énoncée avec des hypothèses plus faibles que celles que nous avons mentionnées.*

D'après le Corrolaire 2.5.1, g est définie dans un sous-ensemble de \mathcal{V}' . Il s'avère, toutefois, que dans de nombreux cas⁴, on peut affirmer :

$$g \in L^1(\Gamma) \quad (2.23)$$

qui reste une affirmation très faible.

De (2.22), on obtient :

$$\begin{aligned} E'(\Omega, V) &= \left\langle \nabla_\Omega E, V \right\rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \\ &= \left\langle g\mathcal{N}, V \right\rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

où on se restreint à un cadre hilbertien dans la dernière égalité. Le crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}}$ s'interprète, dans ce cas, comme un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}$.

4. Nous admettons l'existence de tels cas qui utilisent, *a priori*, la régularité du bord.

Le cadre hilbertien le plus faible qui vient naturellement à l'esprit est : $\mathcal{V} = L^2(\Gamma)^2$. Avec ce choix, on a, par définition du produit scalaire associé à $\mathcal{V} = L^2(\Gamma)^2$:

$$E'(\Omega, V) = \int_{\Gamma} g(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma(x) \quad (2.25)$$

Les questions de régularité du bord et d'espaces fonctionnels adaptés pour définir le gradient de forme en toute généralité ne constituent pas la motivation principale de ce travail. Aussi, dans tout le manuscrit, nous prenons comme définition pour le gradient :

Définition 2.5.12. *Lorsque on a :*

$$E'(\Omega, V) = \int_{\Gamma} g(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma(x), \quad (2.26)$$

le gradient de forme $\nabla_{\Omega} E$ est donné par :

$$\nabla_{\Omega} E = g\mathcal{N} \in L^2(\Gamma)^2. \quad (2.27)$$

2.6 Deux exemples d'application

Nous donnons, dans cette section, deux exemples d'application aux définitions énoncées plus haut. Le premier correspond à la dérivée de Gâteaux d'un modèle image constant par morceaux. Le second examine le cas d'une intégrale définie sur un domaine variable $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

2.6.1 Modèle constant par morceaux

Un modèle image, constant par rapport à une forme Ω , correspond à la fonctionnelle :

$$f(x, \Omega) = f_{\Omega} \cdot \mathbb{1}_{\Omega}(x) + f_{\Omega^c} \cdot \mathbb{1}_{\Omega^c}(x)$$

où $\mathbb{1}_{\Omega}$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble Ω et où f_{Ω}, f_{Ω^c} sont des réels. Cette fonctionnelle est utilisée pour décrire une hétérogénéité par l'intermédiaire du domaine Ω . Les constantes f_{Ω} et f_{Ω^c} correspondent aux intensités estimées de l'objet et du fond. Dans cette modélisation, ces derniers sont considérés homogènes.

On cherche à déterminer les variations locales de $f(x, \Omega)$ par rapport à la forme Ω . L'introduction d'un champ de vitesse V donne lieu à un domaine Ω_{τ} correspondant à la fonction $f + \delta f$. Dans [Santosa, 1996], un calcul des variations est effectué en prenant le produit scalaire de δf avec une fonction test φ . Le produit scalaire, dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, de δf par φ est donné par :

$$\langle \delta f, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \delta f(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega \cap \Omega_{\tau}} \delta f(x) \varphi(x) dx$$

En effet, comme il s'agit d'un modèle constant par morceaux, l'intégrale est nulle en dehors du domaine d'intersection. Comme $f(x)$ ne prend que deux valeurs :

$$f(x) = \begin{cases} f_{\Omega} & \text{si } x \in \Omega \\ f_{\Omega^c} & \text{si } x \in \Omega^c \end{cases},$$

δf correspond à un terme de saut $\pm(f_{\Omega^c} - f_{\Omega})$ dont le signe est à déterminer. En considérant l'orientation du champ de vitesse V par rapport à la normale intérieure \mathcal{N} et en faisant tendre τ vers 0, on déduit [Santosa, 1996] :

$$\langle f'(\cdot; \Omega, V), \varphi \rangle_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} (f_{\Omega} - f_{\Omega^c}) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) d\Gamma(x) \quad (2.28)$$

Dans (2.28), il s'agit du produit scalaire, dans $L^2(\Gamma)$, de la dérivée $f'(\cdot; \Omega, V)$ contre une fonction test φ . Par définition du produit scalaire dans $L^2(\Gamma)$, on obtient :

$$f'(x; \Omega, V) = (f_{\Omega} - f_{\Omega^c}) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} \quad (2.29)$$

Remarque 2.6.1. Dans (2.29), la dérivée de forme $f'(x; \Omega, V)$ n'est pas écrite de la même manière qu'en (2.25). Par conséquent, on ne peut s'appuyer sur la Déf. 2.5.12. C'est pourquoi nous qualifions le calcul effectué dans [Santosa, 1996] comme étant formel.

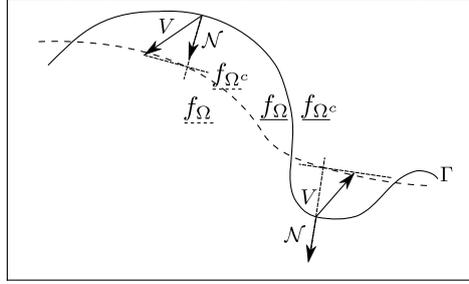


FIGURE 2.3 – Evolution du modèle constant par morceaux : position initiale (en trait plein), position après évolution (en pointillé).

Remarque 2.6.2. Nous préférons utiliser, lorsque cela est possible, une formulation par intégrale de domaine pour le calcul du gradient de forme.

2.6.2 Intégrale de domaine

Nous énonçons le théorème donnant la dérivée de Gâteaux d'une intégrale de domaine. Nous nous servirons de ce théorème à plusieurs reprises. Les mesures de tomographie se formulant de manière intégrale, il est bien adapté à notre problème.

Théorème 2.6.1. Soit une fonctionnelle dépendant d'un domaine Ω :

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} f(x, \Omega) dx$$

Alors sa dérivée de Gâteaux $E'(\Omega, V)$, dans la direction V , est donnée par :

$$E'(\Omega, V) = - \int_{\Gamma} f(x, \Omega) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma(x) + \int_{\Omega} f'(x; \Omega, V) dx$$

où $f'(x; \Omega, V)$ désigne la dérivée de forme de la fonction $f(x, \Omega)$ et avec une normale unitaire \mathcal{N} orientée vers l'intérieur.

Démonstration. On pourra se référer à [Aubert et al., 2003, p. 2141]. \square

Corollaire 2.6.1. *Supposons que, dans la définition de $E(\Omega)$, f ne dépende pas de Ω . Alors,*

$$E'(\Omega, V) = - \int_{\Gamma} f(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma(x)$$

De plus, le gradient de forme de la fonctionnelle E est donné par :

$$\nabla_{\Omega} E(x) = -f(x) \mathcal{N}(x)$$

Démonstration. Par hypothèse, $f(x)$ ne dépend pas de Ω , donc $f(x, \Omega) = f(x)$ et $f'(x; \Omega, V) = 0$. Donc, d'après le théorème précédent :

$$E'(\Omega, V) = - \int_{\Gamma} f(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma(x)$$

D'après la Déf. 2.5.12, on déduit $\nabla_{\Omega} E = -f\mathcal{N}$ sur Γ . \square

2.7 Composition

On s'intéresse à la différentiation de $h(\Omega) = (g \circ f)(\Omega)$ définie par une fonctionnelle de forme à valeurs dans \mathbb{R} et par une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, voir Fig. 2.4.

Proposition 2.7.1. *Si f est dérivable au sens de Gâteaux et si g est dérivable (au sens de Fréchet) au point $f(\Omega)$, alors :*

$$h'(\Omega, V) = dg(f(\Omega)) \circ f'(\Omega, V) \quad (2.30)$$

Le point important est que g est supposée dérivable. Il existe des exemples où (2.30) n'est pas valable lorsque g admet seulement une dérivée directionnelle au sens de Gâteaux [Delfour et Zolésio, 2001; Sokolowski et Zolesio, 1992].

Lorsque f est à valeurs dans \mathbb{R}^n et g est telle que $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on pose :

$$h'(\Omega, V) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(\Omega)) \cdot f'_i(\Omega, V) \quad (2.31)$$

où les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ sont prises au point $f(\Omega)$. Les fonctions f'_i sont définies par $f'(\Omega, V) = (f'_1(\Omega, V), \dots, f'_n(\Omega, V))$ et $f'_i(\Omega, V)$ désigne la dérivée de Gâteaux de f_i dans la direction V .

Remarque 2.7.1. *Dans (2.31) la règle de composition des dérivées est appliquée de manière formelle lorsque la première fonction, notée f , est à variable de forme et à valeurs dans \mathbb{R}^n et lorsque la seconde fonction, notée g , est à variable dans \mathbb{R}^n . Dans les développements calculatoires de ce mémoire, on s'est assuré que g est toujours dérivable (au sens de Fréchet).*

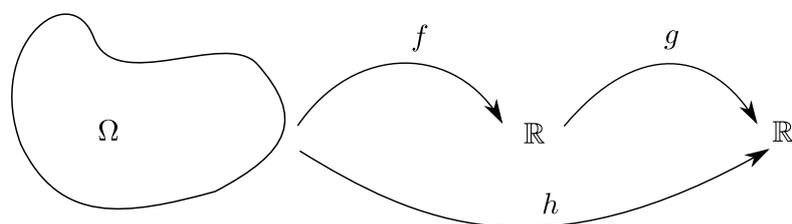


FIGURE 2.4 – Composition d’une fonctionnelle de forme par une fonctionnelle d’une variable réelle.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents éléments de mathématiques utilisés au cours du manuscrit. La description des formes comme ouverts du plan ou comme courbe de niveau a été introduite. La première correspond à une représentation explicite alors que la seconde est implicite à travers une fonction Ψ définie la plupart du temps, comme une distance orientée des points du domaine image à la frontière de la forme.

Pour définir la dérivée de forme, on est amené à considérer des variations autour d’un domaine initial. Celles-ci peuvent se formuler en terme de champ de déplacement ou en terme de champ de vitesse. Les deux modélisations sont liées entre elles et l’une peut s’exprimer en fonction de l’autre. On définit alors la dérivée de Gâteaux d’une fonctionnelle de forme. Celle-ci correspond à une dérivée directionnelle par rapport à un déplacement ou à un champ de vitesse.

Dans le cas où la fonctionnelle est une intégrale de domaine, on peut calculer sa dérivée de Gâteaux. Ce résultat est particulièrement utile pour le problème qui nous intéresse. Les mesures de tomographie correspondent, en effet, à une intégrale le long d’une direction. Pour le calcul des dérivées de forme, on utilisera également le théorème de composition. La fonction qui est composée avec la fonctionnelle de forme doit alors être dérivable.

Le calcul différentiel sur un domaine variable permet de faire évoluer ce domaine dans l’image. Ce principe est à la base des modèles déformables et, en particulier, des *contours actifs*, que nous décrivons dans le chapitre qui suit.

Deuxième partie

Etat de l'Art

Chapitre 3

Contours actifs

3.1 Introduction

Nous nous intéressons à mettre en œuvre une méthode de reconstruction à l'aide de modèles déformables et plus précisément, à l'aide de contours actifs. Le lecteur intéressé par plus de détails sur les modèles déformables et les contours actifs pourra se reporter à des articles de synthèse comme, par exemple [McInerney et Terzopoulos, 1996; Cremers et al., 2007; Xu et al., 2000]. Dans ce chapitre, nous présentons ce type d'approches dans leur contexte initial qui est la segmentation d'image. Ce problème consiste à partitionner le domaine de façon qu'il soit composé d'un ou de plusieurs objets d'intérêt à détecter et d'un fond.

Les contours actifs, qui ont été introduit à la fin des années 1980, procèdent par évolution de formes. Nous décrivons ici les modèles qui ont été développés à partir des articles [Kass et al., 1988; Caselles et al., 1993; Malladi et al., 1995] et [Mumford et Shah, 1989]. Ils donnent lieu à une équation aux dérivées partielles dont la résolution mathématique permet de faire évoluer la frontière. L'évolution prend fin lorsque le contour se situe au bord de l'objet à détecter.

On distingue les approches contour, qui considèrent des mesures locales prises le long du contour, des approches région qui prennent en compte des mesures globales, prises sur des régions intérieurs et extérieurs à la courbe en évolution. Les démarches contour ont, initialement, donné lieu à plus de développements mais les approches région ont plus récemment montré une meilleure efficacité par rapport à ces dernières [Chan et Vese, 2001; Vese et Chan, 2002].

Parallèlement à ces modèles, l'idée de représenter la forme en évolution par un ensemble de courbes de niveau, ou *level sets*, a également été développée [Osher et Sethian, 1988] à la fin des années 80. Cette implantation offre la possibilité de gérer efficacement les fusions ou scissions du contour. Pour cette raison, elle a depuis été appliquée à de nombreux domaines [Sethian, 1999; Osher et Fedkiw, 2003].

Ce chapitre d'état de l'art est organisée de la manière suivante. Dans la section 3.2, on présente les approches contour, qui reposent sur [Kass et al., 1988; Caselles et al., 1993; Malladi et al., 1995], et les approches région (section 3.3) introduites dans [Mumford et Shah, 1989]. Ce sont ces dernières que nous emploierons par la suite. La section 3.4 est consacrée à l'optimisation du critère énergétique définissant l'évolution de la frontière. Nous y présentons l'algorithme des *level sets* qui permet de gérer des changements de topologie du contour. Lorsque le bruit est élevé, il est nécessaire d'introduire un terme de régularisation. Ceci fait l'objet de la dernière section (section 3.5).

3.2 Les approches frontière

3.2.1 Le modèle initial

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine image à segmenter. On désigne par $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{D}$ un contour, non forcément connexe, placé dans \mathcal{D} . Le modèle initial de contour actif, introduit par Kass *et al.* dans [Kass et al., 1988], repose sur l'optimisation de l'énergie :

$$E = \alpha_1 \int_a^b \|\Gamma'(\sigma)\|_{\mathbb{R}^2}^2 d\sigma + \alpha_2 \int_a^b \|\Gamma''(\sigma)\|_{\mathbb{R}^2}^2 d\sigma + \alpha_3 \int_a^b g(\|\nabla I(\Gamma(\sigma))\|_{\mathbb{R}^2}) d\sigma \quad (3.1)$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 . Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des coefficients de pondération sur les différents termes de cette énergie. Le dernier comporte le gradient de l'image $I : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Il permet de détecter les objets, présents dans \mathcal{D} , délimités par des frontières présentant localement un saut d'intensité. Le gradient est alors localement fort aux bords des objets. La fonction g est une fonction positive et décroissante. Initialement, $g(\|\nabla I\|_{\mathbb{R}^2}) = -\|\nabla I\|_{\mathbb{R}^2}$ dans [Kass et al., 1988]. La minimisation de son intégrale le long de Γ tend à positionner celui-ci aux endroits où le gradient est localement élevé, i.e. aux frontières. Il permet de détecter les objets et est appelé terme d'*attache aux données*. Les deux autres termes ont pour rôle de régulariser le contour. Le premier est un terme d'élasticité et minimise la longueur de la courbe. Le second pénalise les fortes courbures. Il correspond à une terme de rigidité, souvent ignoré en pratique.

D'autres choix pour g ont été explorés. Par exemple,

$$g(\|\nabla I\|_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{1 + \|\nabla(G_\sigma * I)\|_{\mathbb{R}^2}^p} \quad (3.2)$$

$$g(\|\nabla I\|_{\mathbb{R}^2}) = \exp(-\|\nabla(G_\sigma * I)\|_{\mathbb{R}^2}) \quad (3.3)$$

où G_σ désigne une gaussienne de variance σ et $*$ le produit de convolution. Le choix (3.2) a notamment été utilisé dans [Caselles et al., 1993] et celui donné par (3.3) a été proposé dans [Malladi et al., 1995]. Le lissage introduit a pour but de limiter les pics d'intensité dus au bruit pour mieux identifier ceux provenant des frontières des objets. Il permet également d'augmenter l'attractivité du modèle en « élargissant » les zones où le potentiel g est faible.

Le critère énergétique (3.1) est non convexe en Γ et son optimisation (section 3.4) conduit *a priori* à un minimum local. En pratique, ceci correspond à une mauvaise segmentation de l'image.

Un inconvénient du modèle initial est qu'il dépend de la paramétrisation du contour. Cette dépendance engendre une composante tangentielle dans la force image, qui peut ne pas être nulle sur les bords de l'objet à segmenter. Le modèle est ainsi contraint à évoluer, bien que l'objet soit correctement détecté.

3.2.2 Les modèles géométriques et géodésiques

Modèles géométriques

Cette limitation du modèle initial a conduit à faire évoluer la forme dans la direction normale à sa frontière. Ces modèles, dits *géométriques*, ont été introduits indépendamment par Caselles *et al.* [Caselles et al., 1993] et par Malladi *et al.* [Malladi et al., 1995] :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}(\sigma, \tau) = F \cdot \mathcal{N} \quad (3.4)$$

où τ est un paramètre temporel artificiel d'évolution. Pour la normale unitaire \mathcal{N} à Γ , nous prenons pour convention qu'elle est orientée vers l'intérieur du domaine.

Le modèle géométrique le plus simple consiste à prendre pour F une constante réelle a qui permet de dilater (resp. contracter) le contour selon que a est négative (resp. positive). Ce type d'approche a été introduit par Cohen dans [Cohen, 1991] sous le nom de force *ballon*. Un autre exemple, bien connu, est donné par $F = \kappa$ où κ désigne la courbure du contour. L'équation (3.4) évolue selon le flot raccourcissant qui conduit à rendre convexe la forme et à la faire tendre vers un point. L'optimisation du critère énergétique correspondant donne lieu à une équation d'évolution qui peut s'écrire¹ :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}(\sigma, \tau) = g(\|\nabla I\|_{\mathbb{R}^2}) (a + \kappa) \mathcal{N} \quad (3.5)$$

ce qui incorpore la fonction d'attache aux données dans la force F . Lorsque le contour est situé au niveau de la frontière des objets, le premier facteur $g(\|\nabla I\|_{\mathbb{R}^2})$ tend à s'annuler mettant fin à l'évolution.

Modèles géodésiques

Contrairement à l'approche initiale, les modèles géométriques ne procèdent pas par la minimisation d'une énergie. Toutefois, Caselles *et al.* ont montré, dans [Caselles et al., 1997], que la minimisation de l'énergie :

$$E(\Gamma) = \int_0^1 g(\|\nabla I(\Gamma(\sigma))\|_{\mathbb{R}^2}) \|\Gamma'(\sigma)\|_{\mathbb{R}^2} d\sigma \quad (3.6)$$

conduit à l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}(\sigma, \tau) = g(\|\nabla I\|_{\mathbb{R}^2}) \kappa \mathcal{N} - \langle \nabla g, \mathcal{N} \rangle_{\mathbb{R}^2} \mathcal{N} \quad (3.7)$$

où, si l'on ajoute un terme de force ballon, on retrouve l'équation (3.5) avec un terme qui améliore la convergence de la courbe aux abords immédiats de l'objet.

La dénomination *contours actifs géodésiques* est utilisée car la minimisation (3.6) correspond à trouver la courbe géodésique sur l'espace de Riemann formé par $E(\Gamma)$, pour toute courbe Γ . Le second facteur $\|\Gamma'(\sigma)\|_{\mathbb{R}^2}$ dans (3.6) correspond à la longueur d'arc du contour. Il donne lieu, dans l'équation d'évolution, au flux raccourcissant. On montre [Blanc-Féraud et Aubert, 1999] que (3.7) est aussi un flot minimisant pour l'énergie de contour actif traditionnel sans terme de rigidité, ce qui établit l'équivalence de ces deux types de modèles.

1. Dans [Caselles et al., 1993; Malladi et al., 1995], où cette énergie est initialement introduite, une formulation équivalente, par ensemble de niveaux (§ 3.4.3), est utilisée.

3.3 Les approches région : le modèle de Mumford-Shah

3.3.1 Le modèle initial

Egalement à la fin des années 80, Mumford et Shah proposent [Mumford et Shah, 1989] le modèle suivant :

$$\begin{cases} f(x, \Omega) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_{\Omega_i}(x) \cdot \mathbf{1}_{\Omega_i}(x) \\ E(\Omega) = \int_{\mathcal{D} \setminus \partial\Omega} (f(x) - f(x, \Omega))^2 dx + \alpha_1 \int_{\mathcal{D} \setminus \partial\Omega} \|\nabla f(x, \Omega)\|_{\mathbb{R}^2} dx + \alpha_2 \mathcal{H}^1(\partial\Omega) \end{cases} \quad (3.8)$$

où $\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Omega_i$ et $f_{\Omega_i}(x) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D})$.

La première ligne de (3.8) représente le domaine image par l'intermédiaire de la forme Ω . Les fonctions $f_{\Omega}(x)$ et $f_{\Omega^c}(x)$, supposées continues, décrivent les niveaux d'intensité à l'intérieur et à l'extérieur de la forme. La seconde ligne de (3.8) est le critère énergétique à minimiser pour segmenter les objets. La mesure $\mathcal{H}^1(\partial\Omega)$ est la mesure de Hausdorff du bord. Elle généralise la longueur $|\partial\Omega|$ au cas où la frontière n'est pas régulière. Pour une définition précise, on pourra se référer à [Aubert et Kornprobst, 2001]. Le second terme impose à $f(x, \Omega)$ d'être régulière partout sauf au niveau du contour $\partial\Omega$.

Le premier correspond au terme d'attache aux données. Comme l'intégrale porte sur $\mathcal{D} \setminus \partial\Omega$, sa minimisation tend à placer le bord $\partial\Omega$ aux endroits où f présente des forts gradients. Les paramètres α_1 et α_2 , supposés positifs, sont des facteurs de pondération entre les différents termes de $E(\Omega)$.

Nous insistons sur le fait que $f(x, \Omega)$ est une fonctionnelle de forme. Si celle-ci ne dépendait pas de Ω , i.e. $f(x, \Omega) = g(x)$, le terme d'attache aux données serait convexe en $g(x)$. Ici, cette dépendance rend le critère *non convexe* par rapport à la variable Ω . Pour cette raison, l'optimisation (§ 3.4) donne lieu *a priori* à un minimum local. C'est également le cas pour le modèle de contour actif décrit au § 3.2.

La seconde ligne de (3.8) permet de segmenter n régions. On peut montrer [Mumford et Shah, 1989] qu'elle s'écrit également :

$$E(\Omega) = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\mathcal{D} \setminus \partial\Omega} (f(x) - f_{\Omega_i}(x))^2 dx + \alpha_1 \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\mathcal{D} \setminus \partial\Omega} \|\nabla f_{\Omega_i}\|_{\mathbb{R}^2} dx + \alpha_2 \sum_{1 \leq i \leq n} \mathcal{H}^1(\partial\Omega_i) \quad (3.9)$$

Sous cette écriture, le critère énergétique est plus facile à optimiser par rapport à la forme : dans (3.9), toutes les fonctions à intégrer ne font intervenir qu'une seule composante Ω_i .

3.3.2 Modèle constant par morceaux

Un cas important est celui où f_{Ω_i} sont des constantes réelles. Même s'il a été étudié dans l'article initial [Mumford et Shah, 1989], ce n'est qu'au début des années 2000 qu'il a été réintroduit par Chan et Vese [Chan et Vese, 2001]. Le modèle ne faisant pas intervenir d'information de bords dans le terme d'attache aux données, il est qualifié d'*active contour without edges*. Il correspond à une approche région et non frontière. Les résultats présentés dans [Chan et Vese, 2001] montrent son intérêt par rapport aux démarches contour.

Lorsque $f_{\Omega_i} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, le critère (3.9) prend la forme :

$$E(\Omega) = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\mathcal{D} \setminus \partial\Omega} (f(x) - f_{\Omega_i}(x))^2 dx + \alpha \sum_{1 \leq i \leq n} \mathcal{H}^1(\partial\Omega_i) \quad (3.10)$$

L'intégrale du gradient de f disparaît par rapport au cas général (3.8). Les gradients sont, en effet, nuls en dehors des frontières $\mathcal{D} \setminus \partial\tilde{\Omega}_i$, lorsque les intensités sont constantes par morceaux.

Cette approche impose que les contours $\partial\Omega_i$ évoluent tous à la *même vitesse*. Dans [Vese et Chan, 2002], on relâche cette condition en permettant aux contours d'évoluer différemment. Pour $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, on permet que $\partial\Omega_1$ évolue différemment de $\partial\Omega_2$ en définissant, par exemple, pour $m = 2$, les quatre régions à segmenter par :

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ \tilde{\Omega}_2 &= \Omega_1 \cap \Omega_2^c \\ \tilde{\Omega}_3 &= \Omega_1^c \cap \Omega_2 \\ \tilde{\Omega}_4 &= \Omega_1^c \cap \Omega_2^c\end{aligned}$$

Comme les vitesses d'évolution sont *différentes*, on parle alors d'adaptation *multi-phases* du critère. Celle-ci permet de segmenter $n = 2^m$ objets d'intensités différentes.

L'adaptation multiphase de critères est un sujet de recherche assez actif et nous n'en avons présenté ici qu'une possibilité. D'autres approches procèdent par « compétition de régions » pour pénaliser les intersections. Chaque forme est alors destinée à segmenter une distribution d'intensité [Yezzi et al., 2002]. Dans [Samson, 2000], l'adaptation multiphase est envisagée du point de vue d'un problème de classification.

Lorsque l'image ne contient qu'un seul objet, éventuellement formé de plusieurs composantes, sa segmentation ne requiert *a priori* que l'évolution d'une seule forme. L'image est alors partitionnée en terme d'« objet/fond ». On a alors le modèle à deux phases (représentées par f_Ω et f_{Ω^c}) suivant :

$$\begin{cases} f(x, \Omega) = f_\Omega \cdot \mathbb{1}_\Omega(x) + f_{\Omega^c} \cdot \mathbb{1}_{\Omega^c}(x) \\ E(\Omega) = \int_\Omega (f(x) - f_\Omega)^2 dx + \int_{\Omega^c} (f(x) - f_{\Omega^c})^2 dx + \alpha \mathcal{H}^1(\partial\Omega) \end{cases} \quad (3.11)$$

où $f_\Omega, f_{\Omega^c} \in \mathbb{R}$. C'est ce modèle que nous utilisons dans ce mémoire.

Notons qu'il existe d'autres formulations de critères de segmentation que celle proposée par [Chan et Vese, 2001] pour un modèle à deux phases. Dans [Yezzi et al., 1999], la différence quadratique des moyennes intérieure et extérieure au domaine est considérée :

$$E(\Omega) = -\frac{1}{2}(\mu_\Omega - \mu_{\Omega^c})^2 + \mathcal{H}^1(\partial\Omega) \quad (3.12)$$

où $\mu_\Omega = (\int_\Omega f(x) dx)/|\Omega|$ avec $|\Omega|$ l'aire du domaine Ω . Le cas où la moyenne est remplacée par la variance des régions est également étudié. Des critères plus génériques ont par ailleurs été définis, en attribuant à chaque région un terme d'attache aux données tel que leurs statistiques sont vues à travers une fonction [Jehan-Besson, 2003; Jehan-Besson et al., 2003] :

$$E_{data}(\Omega) = \int_\Omega \varphi(f(x) - \mu_\Omega) dx \quad (3.13)$$

$$E_{data}(\Omega) = \int_\Omega \varphi(\sigma_\Omega^2) dx \quad (3.14)$$

où σ_Ω^2 désigne la variance du domaine Ω . Nous faisons ici mention de critères énergétiques assez communs. Pour une présentation générale des contours actifs région, dans une approche statistique, on pourra se référer à [Cremers et al., 2007].

3.4 Optimisation

Le type de modèles déformables que nous étudions, i.e. les contours actifs orientés région, est constitué d'un modèle image et d'un critère énergétique. Ceci n'est pas le cas de tous les modèles, par exemple : les contours actifs orientés contour. L'optimisation de ce critère par rapport aux paramètres du modèle, i.e. intensité et forme, permet de réaliser la segmentation de l'image.

3.4.1 Des intensités

Dans le cas constant par morceaux, les valeurs optimales des intensités s'obtiennent aisément en annulant la dérivée de l'énergie (3.11) par rapport à ces dernières. Pour chaque région Ω fixée, le paramètre f_Ω est alors donné [Mumford et Shah, 1989] par la moyenne des intensités sur celle-ci :

$$f_\Omega = \frac{\int_{\Omega} f(x) dx}{|\Omega|} = \mu_\Omega \quad (3.15)$$

3.4.2 De la forme

Par descente de gradient

Pour la forme, on procède généralement par descente de gradient. Par définition, la frontière de la région suit l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}(\sigma, \tau) = -\nabla_{\Omega_\tau} E \\ \Gamma(0, \sigma) = \Gamma_0(\sigma) \end{cases} \quad (3.16)$$

où le gradient est pris par rapport à la forme Ω_τ . Dans ce manuscrit, le calcul du gradient résulte de l'application de la dérivée d'une intégrale de domaine, voir Théorème 2.6.1 et Corrolaire 2.6.1. Il est donc toujours colinéaire à la normale. La descente de gradient s'inscrit ainsi dans le cadre général de l'équation (3.4).

La discrétisation temporelle de la première ligne de (3.16) est effectuée de manière explicite :

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n - \nabla_{\Omega_n} E \cdot \delta_\tau \quad (3.17)$$

Le gradient correspondant à la direction de la plus forte pente, le schéma (3.17) a pour propriété d'être décroissant en énergie, *pourvu que* δ_τ soit suffisamment petit. En pratique (voir Chapitre 7), nous utiliserons une sélection du pas de temps δ_τ qui correspond à une traduction orientée objet d'une des règles d'Armijo [Bjorck, 1996]. Elle correspond à la première des règles de Wolfe.

Dans le cas du modèle à deux phases de Chan et Vese (3.11), le terme d'attache aux données admet pour gradient :

$$\nabla_{\Omega} E_{data}(x) = \left(-(f(x) - f_\Omega)^2 + (f(x) - f_{\Omega^c})^2 \right) \mathcal{N} \quad (3.18)$$

qui dépend des intensités f_Ω et f_{Ω^c} . Dans Zhao et *al.* [Zhao et al., 1996], le gradient est obtenu, à partir d'une formulation par *level-sets* (§ 3.4.3), en dérivant le modèle image. Comme celui-ci est discontinu au niveau de la frontière, ceci fait apparaître une distribution de Dirac δ_Γ le long du bord Γ .

L'évolution du modèle déformable est déterminé à travers l'équation discrète (3.17). Les paramètres d'intensité sont actualisés par calcul des moyennes à partir de la nouvelle position de la frontière. Une nouvelle valeur du gradient peut alors être calculée. On itère ensuite ce procédé.

Autres méthodes d'optimisation

Parmi les autres méthodes d'optimisation, on peut citer la méthode de gradient projeté qui est utilisée dans le cas d'une contrainte de forme de type : $C(\Omega) = 0$, où C désigne, en toute généralité, le membre de gauche d'une contrainte d'égalité. Cette méthode est présentée en variable de forme dans [Osher et Santosa, 2001].

Une autre classe de méthode d'optimisation est donnée par les méthodes de Newton. Celles-ci utilisent la Hessienne du critère par rapport à la variable d'optimisation. Lorsqu'on se place dans un espace de Banach, la dérivée d'ordre deux est une application linéaire symétrique. Or, de manière assez étrange, ce n'est *plus le cas* en variable de forme [Delfour et Zolésio, 2001]. En particulier, la dérivée seconde de forme perd toute propriété de symétrie. Pour pallier cet inconvénient, des démarches constructives, qui ont valeur de définitions, ont été proposées pour rétablir cette propriété [Delfour et Zolésio, 2001], fondamentale pour pouvoir introduire la notion de Hessienne.

De même, contrairement au cas d'une variable dans un espace de Banach, il n'est pas toujours clair que la dérivée seconde s'obtienne, à partir de la dérivée première, par dérivation. Même en partant d'une définition d'apparence très générale, le calcul peut ne pas faire apparaître ce point de manière évidente. C'est *a priori* le cas dans [Simon, 1989], où cette propriété ne semble plus triviale.

Ces quelques éléments que nous venons de mentionner peuvent, en partie, expliquer le fait que les méthodes de Newton restent, à l'heure actuelle, peu employées. La seule référence que nous ayons trouvée dans le domaine du traitement d'image est [Hintermüller et Ring, 2003].

Nous terminons cette section en rappelant que toutes les techniques d'optimisation qui ont été évoquées jusqu'ici donnent lieu, *a priori*, à un minimum local.

3.4.3 L'algorithme des *level-sets*

Historiquement, les *level-sets* ont été introduit dans [Osher et Sethian, 1988] pour modéliser la propagation d'un front ; en particulier, celui d'une flamme. L'extrémité du front est représentée par une courbe fermée Γ du plan \mathbb{R}^2 . Sa vitesse de propagation est supposée dépendre de la courbure κ du front.

L'équation obtenue est une équation aux dérivées partielles (EDP) ayant pour condition initiale, la position Γ_0 de la courbe Γ au temps $\tau = 0$. Depuis leur introduction, l'emploi des *level-sets* s'est développé dans le cadre de nombreuses applications : détection d'inclusion, reconstruction de sources, valeurs propres de l'opérateur Laplacien [Osher et Santosa, 2001; Osher et Fedkiw, 2003].

Equation d'évolution sur Ψ

Comme mentionné au chapitre 2, il existe une fonction $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\partial\Omega = \Psi^{-1}(0)$. Autrement dit, le bord de la forme Ω est représenté, à travers Ψ , comme une courbe de niveau zéro. On cherche à faire évoluer l'ensemble de courbes de niveaux Ψ . Pour cela, on considère un

paramètre temporel « artificiel » τ . Le contour $\Gamma = \partial\Omega$, fonction de τ et paramétré par σ , est caractérisé par l'égalité :

$$\Psi(\tau, \Gamma(\tau, \sigma)) = 0, \forall \sigma, \forall \tau \geq 0 \quad (3.19)$$

En dérivant cette équation par rapport à τ (Ψ est supposée différentiable), on obtient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \left\langle \nabla \Psi, \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad (3.20)$$

Or, la dérivée $\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}$ est donnée par l'équation d'évolution (3.16). D'où,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \left\langle \nabla \Psi, F \cdot \mathcal{N} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad (3.21)$$

De l'expression de la normale unitaire intérieure $\mathcal{N} = -\frac{\nabla \Psi}{\|\nabla \Psi\|_{\mathbb{R}^2}}$, Eq. (2.21), on déduit l'équation d'évolution vérifiée par Ψ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - F \|\nabla \Psi\|_{\mathbb{R}^2} = 0 \quad (3.22)$$

à laquelle on ajoute une condition aux bords de Neumann homogène : $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{N}} = 0$. La condition initiale est donnée par la définition de Ψ , Eq. (2.7), comme fonction distance.

L'équation (3.22) entre dans le cadre général des équations d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + H(\tau, x, \nabla \Psi, \nabla^2 \Psi) = 0 \quad (3.23)$$

où $\nabla^2 \Psi$ désigne la matrice Hessienne de Ψ et dans laquelle le flux H est appelé Hamiltonien.

Analyse numérique

Nous n'entrons pas dans le détail de la résolution exacte de (3.23). On pourra, pour cela, se référer aux travaux² de P.L. Lions et M.G. Crandall [Crandall et Lions, 1983] qui portent sur la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

L'approximation numérique de ces solutions, par *level-sets*, a été proposée dans [Osher et Sethian, 1988]. Elle a, depuis, été largement développée et enrichie : par exemple, [Sethian, 1999]. Une synthèse des principales évolutions, réalisées en termes de schémas numériques, est effectuée dans [Burger et Osher, 2005].

En traitement d'images, le domaine est constitué de pixels dont l'espacement peut être considéré comme arbitraire. On pose ainsi $h_1 = h_2 = 1$, i.e. les pas d'espace sont identiques et fixés égaux à 1 dans une image bidimensionnelle. Dans le cas de l'équation (3.22), le Hamiltonien est donné par : $H(\tau, x, \nabla \Psi, \nabla^2 \Psi) = F(\tau, x) \|\nabla \Psi\|_{\mathbb{R}^2}$. La condition de stabilité de Courant-Friedrich-Levi (CFL), associée au schéma décrit dans [Sethian, 1999], est :

$$F_{ij} \|\nabla \Psi_{ij}\|_{\mathbb{R}^2} \delta_t \leq 1 \quad (3.24)$$

pour tous les couples (i, j) du domaine discrétisé et où δ_t désigne le pas de temps.

Dans ce manuscrit, la mise en œuvre de la représentation par *level-sets* et de son évolution discrète correspond à celle qui est décrite dans [Foulonneau, 2004] et qui utilise le schéma numérique proposé dans [Adalsteinsson et Sethian, 1995].

2. Leurs idées correspondent à l'introduction d'un terme diffusif donnant lieu à une solution appelée solution de viscosité.

Propriétés

Une propriété importante des *level-sets* est de permettre des scissions ou fusions du contour, sans avoir à introduire d'information supplémentaire. Ceci est rendu possible par le fait que le bord n'est plus décrit comme un contour fermé, mais comme une courbe de niveau zéro. La création (resp. la suppression) locale de contours est permise par évolution, dans un voisinage de la ligne de niveau zéro, selon que Ψ change de signe en devenant localement négative (resp. positive) dans ce voisinage.

Le recours à un tel voisinage souvent appelé bande étroite, *narrow band*, permet de limiter le temps de calcul. Nous en faisons usage à travers l'implantation de [Adalsteinsson et Sethian, 1995; Sethian, 1999] qui est donnée dans [Foulonneau, 2004].

Conservation de la fonction Ψ

Une fonction Ψ idéale vérifie *a priori* $\|\nabla\Psi\|_{\mathbb{R}^2} = 1$. Toutefois, il peut s'avérer qu'au cours de l'évolution du *level set*, cette égalité ne soit plus vérifiée. Pour pallier cet inconvénient, il existe, à notre connaissance, au moins quatre façons de procéder :

- extraire périodiquement la courbe et recalculer la distance orientée donnée par la fonction Ψ ,
- rétablir périodiquement la condition sur la norme du gradient à l'aide d'une EDP, par exemple, celle proposée dans [Sussman et al., 1994],
- imposer cette condition sous forme de termes supplémentaires d'énergie dans le critère à minimiser [van den Doel et Ascher, 2006, 2007],
- étendre la vitesse aux autres courbes de niveau [Adalsteinsson et Sethian, 1999; Gomes et Faugeras, 2000] de façon à maintenir la condition toujours vraie.

L'implantation que nous employons utilise une réinitialisation périodique de l'ensemble de niveaux à l'aide de l'EDP proposée dans [Sussman et al., 1994].

3.4.4 Recherche d'optimum global

Par dérivée topologique

Le minimum local obtenu par descente de gradient dépend de la forme initiale qu'on se donne. En pratique, ceci signifie que la segmentation, qui peut ne pas être correctement réalisée, diffère selon l'initialisation. Ceci est particulièrement le cas pour la détection d'objets à trous. Si la forme est, au départ, placée en dehors de l'objet, les bords externes sont uniquement détectés et l'algorithme s'arrête. La forme ne parvient pas à entrer à l'intérieur de l'objet pour segmenter le trou.

Face à cet inconvénient, il a été proposé d'utiliser *la dérivée topologique*. Son principe est d'évaluer l'influence de l'introduction d'un trou [Sokolowski et Zochowski, 1999] dans le critère énergétique. Pour une fonctionnelle de forme donnée $E(\Omega)$ à valeurs réelles, elle est définie par :

$$E'_T(x) = \lim_{\rho \searrow 0} \frac{E(\Omega \setminus \overline{B_\rho(x)}) - E(\Omega)}{|B_\rho(x)|} \quad (3.25)$$

où $\overline{B_\rho(x)}$ désigne la boule fermée de rayon ρ centrée en x . Ce principe a été initialement employé dans [Shumacher, 1995] et étendue aux solutions d'une équation aux dérivées partielles elliptiques dans [Sokolowski et Zochowski, 1999].

Le calcul de la dérivée topologique et de son gradient s'effectue en pratique à travers un développement limité à l'ordre deux [Sokolowski et Zochowski, 1999]. La dérivée topologique a été exploitée dans [Hintermüller, 2005; Burger et al., 2004; Shi, 2005], où elle est formulée en termes de *level set* pour le problème de la segmentation d'images.

Par convexification

L'optimisation de critères énergétiques par descente de gradient à l'aide de *level-sets* donne lieu *a priori* à l'obtention d'un minimum *local*. Pour pallier cet inconvénient, des efforts ont été menés pour parvenir à la recherche d'un minimum *global*. On peut citer, par exemple, la méthode des *graph cuts* [Boykov et al., 2001]. On utilise alors une approximation discrète de l'énergie du modèle déformable. Toutefois, l'application de telles méthodes reste, aujourd'hui, limité à des critères énergétiques particuliers. Récemment, des *a priori* ont été inclus dans ces critères [Schoenemann et Cremers, 2007], mais ils restent, à l'heure actuelle, relativement simples.

Une autre approche, reposant sur des techniques variationnelles, consiste à optimiser un critère [Nikolova et al., 2006] par l'intermédiaire d'une fonction u à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$:

$$E(\mu_\Omega, \mu_{\Omega^c}, u) = \int_{\mathcal{D}} \|\nabla u(x)\|_{\mathbb{R}^2} dx + \alpha \int_{\mathcal{D}} \left(-(\mu_\Omega - f(x))^2 + (\mu_{\Omega^c} - f(x))^2 \right) u(x) dx \quad (3.26)$$

pour une normale unitaire orientée vers l'intérieur.

Le premier terme est un terme de régularisation à partir de la variation totale de u . Dans le second, on reconnaît le gradient du critère énergétique de Chan et Vese. Le point important est le fait qu'il n'y a pas de variable de forme et que l'énergie (3.26) est exprimée uniquement dans un cadre fonctionnel.

Lorsque les constantes μ_Ω et μ_{Ω^c} sont fixées, il est clair que l'énergie (3.26) est convexe en u . Son optimisation permet donc d'atteindre un minimum *global*. En pratique, la segmentation est effectuée en utilisant un seuil entre 0 et 1 sur la fonction u obtenue de façon à partitionner l'image. L'implantation de ce type de méthodes variationnelles peut s'effectuer à l'aide d'algorithmes très rapides [Aujol et Chambolle, 2005; Goldstein et al., 2009], ce qui constitue un autre avantage par rapport aux *level-sets*.

3.5 Régularisation des modèles déformables

En présence de bruit, la segmentation peut se dégrader du fait des perturbations que contient l'image. En pratique, ceci se traduit par des imperfections localisées au niveau du contour. Il est alors commun d'utiliser des techniques de *régularisation*, voir plus loin Chapitre 5. On dénombre quatre grandes classes de régularisation : celles qui s'appliquent sur le contour, celles-ci qui considèrent la courbe de niveau zéro, celles qui s'expriment à travers un champ de vitesse et celles qui utilisent les espaces de Sobolev.

3.5.1 Sur le contour

A partir d'une mesure du bord

Dans le critère énergétique (3.11), le terme de régularisation correspond à :

$$E_{reg}(\Omega) = \mathcal{H}^1(\Omega) \quad (3.27)$$

On peut alors montrer [Osher et Sethian, 1988; Aubert et Kornprobst, 2001] que sa dérivée de Gâteaux est donnée par :

$$E'_{reg}(\Omega, V) = \int_{\Omega} \kappa(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx \quad (3.28)$$

où \mathcal{N} est la normale unitaire orientée vers l'intérieur. La plupart du temps, ce résultat se démontre à partir de l'ensemble de courbe de niveaux Ψ . Toutefois, ceci est indépendant de la façon dont est représentée la forme. De (3.28), on déduit, par le Corrolaire 2.6.1 : $\nabla_{\Omega} E_{reg} = \kappa \mathcal{N}$. Autrement dit, l'incorporation d'une contrainte de longueur dans le critère à optimiser résulte en un terme de courbure dans l'équation d'évolution du contour.

Par régularisation de l'ensemble de courbes de niveaux

Une méthode classique pour réduire les imperfection issues du bruit est d'appliquer à l'image f un lissage. Ce dernier peut s'obtenir, en termes d'équation aux dérivées partielles (EDP), en résolvant l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) - \Delta u(\tau, x) = 0, & \tau \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = f(x) \end{cases} \quad (3.29)$$

où τ est un paramètre d'évolution qui joue le rôle d'un temps fictif. On peut, en effet, montrer [Aubert et Kornprobst, 2001] que la solution de cette équation est équivalente à l'emploi d'un lissage gaussien de noyau G . Dans [Shi, 2005; Shi et Karl, 2005], l'ensemble des courbes de niveaux Ψ est régularisé selon $\Psi = G \otimes \Psi$. Un système de voisinage particulier est défini afin de gagner en rapidité pour extraire la courbe de niveau zéro.

Considérer l'ensemble de courbes de niveaux Ψ permet d'avoir un cadre fonctionnel avec lequel on peut utiliser des régularisations classiques. Si on note :

$$E(\Psi) = E_{data}(\Psi) + \alpha E_{reg}(\Psi), \quad (3.30)$$

où E_{data} est le terme d'attache aux données exprimé en Ψ , le terme de régularisation correspond à $E_{reg}(\Psi)$. Plusieurs choix sont possibles pour ce dernier, par exemple :

$$E_{reg}(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla \Psi\|_{\mathbb{R}^2}^2 dx \quad (3.31)$$

Il s'agit de la régularisation de Tikhonov de Ψ , Chapitre 5. Remarquons qu'optimiser (3.31) par descente de gradient conduit à (3.29). Dans les deux cas, les fortes variations de l'ensemble de niveaux Ψ sont pénalisées, ce qui a tendance à favoriser les situations où les valeurs de Ψ se réduisent à une constante. Pour pallier cet inconvénient, la régularisation de Tikhonov peut être combinée avec un terme qui contraint la norme du gradient à rester égale à 1, en ajoutant, par exemple, dans le critère à optimiser un des termes proposés dans [van den Doel et Ascher, 2006, 2007].

On peut également considérer la *variation totale* du modèle image f qui, exprimée à l'aide de l'ensemble de niveaux Ψ , est donnée par :

$$E_{reg}(\Psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla f(\Psi)\|_{\mathbb{R}^2} dx \quad (3.32)$$

Le point important est le choix de la norme L^1 et non L^2 . Comme rappelé dans [van den Doel et Ascher, 2006], la combinaison de (3.31) et (3.32) peut s'avérer avantageuse dans certains cas.

3.5.2 Sur le champ de vitesse

La résolution d'un problème inverse par modèle déformable conduisant à une équation d'évolution, une autre possibilité consiste à régulariser le champ de vitesse. De cette manière, on limite les déplacements locaux qui font perdre de la régularité au contour.

Dans [Burger, 2004], le problème inverse :

$$\mathcal{R}(\Omega) = p, \quad (3.33)$$

où $\mathcal{R}(\Omega)$ est un opérateur agissant sur un domaine Ω , est considéré. La fonctionnelle suivante est introduite à chaque étape n :

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}(\Omega) + \mathcal{R}'(\Omega, V_n) - p\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|V_n\|_{\mathcal{H}} \quad (3.34)$$

que l'on optimise en V_n . Dans (3.34), $\mathcal{R}'(\Omega, V_n)$ désigne la dérivée de Gâteaux de $\mathcal{R}(\Omega)$ dans la direction V_n . La norme $\|\cdot\|_2$ est la norme usuelle sur $L^2(\mathcal{D})$, avec \mathcal{D} le domaine image. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ introduite pour régulariser le champ de vitesse est prise sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Typiquement on choisit $\mathcal{H} = L^2(\partial\Omega)$.

3.5.3 En changeant d'espace fonctionnel

Le gradient de forme est défini à partir de la norme $L^2(\partial\Omega)$ (Chapitre 2). On rappelle que la notion de gradient est dépendante du produit scalaire qu'on se donne. Aussi, l'idée de se placer dans les espaces de Sobolev H^p a récemment [Sundaramoorthi et al., 2007] été introduite. Comme le support du gradient est inclus dans la frontière de la forme, ces espaces nécessitent d'être adaptés en $H^p(\Gamma)$ pour être définis sur la courbe.

Le gradient de Sobolev d'un critère énergétique général E , que nous noterons $\widehat{\nabla}_{\Omega} E$, est relié [Sundaramoorthi et al., 2007] au gradient de forme $\nabla_{\Omega} E$ (au sens $L^2(\partial\Omega)$) à travers une EDO d'ordre deux. Il peut s'exprimer, à partir de $\nabla_{\Omega} E$, selon un noyau intégral. Pour des critères d'*a priori* comme la longueur relative d'une courbe Γ ou l'aire relative d'une région Ω , pondérée par une fonction ϕ :

$$\begin{aligned} E_{reg}(\Gamma) &= \frac{1}{L} \int_{\Gamma} \phi(x) d\Gamma(x) \\ E_{reg}(\Omega) &= \frac{1}{L^2} \int_{\Omega} \phi(x) dx, \end{aligned} \quad (3.35)$$

le gradient de forme (au sens $L^2(\partial\Omega)$) est mal posé. Dans (3.35), L est la longueur euclidienne de la courbe. Le gradient de forme est rendu stable [Sundaramoorthi et al., 2009] en considérant le produit scalaire défini sur les espaces de Sobolev. Ceci est dû au fait que dans $H^p(\Gamma)$, le gradient correspond à une re-paramétrisation du contour [Sundaramoorthi et al., 2007].

Se placer dans les espaces de Sobolev a donc un effet régularisant : en considérant un autre produit scalaire, la valeur du gradient se trouve modifiée, ce qui peut régulariser le champ de vitesse. Cette interprétation est, par exemple, donnée dans [Renka, 2009] pour expliquer les résultats positifs obtenus par contours actifs de type Sobolev.

D'autre part, le changement de métrique modifie le chemin parcouru lors d'une descente de gradient. Certains minima locaux sont, de cette manière, évités. Ces raisons font que ces formulations, qui consistent à changer d'espace fonctionnel, se montrent actuellement très attractives.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales approches de segmentation par contours actifs, qui constituent une classe très importante de modèles déformables. Ce type d'approche met en jeu un modèle des objets d'intérêt et, éventuellement, du fond. La plupart du temps, le problème de segmentation est traduit en un problème d'optimisation de critère énergétique.

Contrairement aux approches contour qui considèrent seulement le bord de la forme, les approches région prennent en compte le domaine intérieur et extérieur à la frontière. Celles-ci se sont considérablement popularisées au début des années 2000 en raison de leur efficacité.

Un cas particulièrement important est donné par le modèle de Mumford-Shah [Mumford et Shah, 1989] où l'image est supposée d'intensité constante par morceaux, également dénommé modèle de Chan et Vese [Chan et Vese, 2001]. C'est celui que nous utilisons dans ce manuscrit.

L'optimisation alternée des paramètres d'intensité et de la forme permet de faire évoluer le modèle. On procèdera à l'optimisation de forme par la méthode la plus élémentaire qui est la descente de gradient. D'autre part, on utilisera l'algorithme classique des *level sets*, où le contour en évolution est représenté par une courbe de niveau zéro afin de permettre aisément les fissions ou fusion.

En présence de bruit, un terme de régularisation est nécessaire. Ce dernier peut s'appliquer sur le contour, sur l'ensemble de courbes de niveaux ou sur le champ de vitesse.

Une possibilité qu'offrent les modèles déformables orientés région est de pouvoir introduire des contraintes *globales* de forme. Nous les présentons, dans le cadre de la segmentation, dans le chapitre 4. Au chapitre 5, nous montrerons comment le problème de reconstruction d'images tomographiques peut être abordé dans le formalisme des contours actifs régions, et mettrons en évidence l'apport de la régularisation par contraintes de formes en présence de bruit et pour un nombre réduit de directions de projections.

Chapitre 4

Contraintes géométriques de forme

4.1 Introduction

Afin de permettre la compréhension des développements de ce mémoire, on présente ici la contrainte de forme que nous avons employée en reconstruction. Celle-ci est le résultat des travaux d'A. Foulonneau dans le cadre d'une thèse réalisée au sein du LSIIT et du Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg [Foulonneau, 2004]. Elle est fondée sur une description paramétrique des formes et prend en compte plusieurs formes de référence. Plus précisément, les moments de Legendre de la fonction caractéristique des formes en présence sont considérés. Cette démarche permet de décrire les objets dans leur globalité, contrairement aux approches qui proposent une représentation qui se limite aux contours des objets. Le problème d'alignement est, quant à lui, traité par invariance géométrique.

Initialement introduite en segmentation, cette contrainte repose sur un ensemble de formes de référence répertoriant les différents objets qui peuvent être présents dans l'image. Les propriétés topologiques et géométriques globales des formes de référence sont considérées. On parle alors d'information de « haut niveau » apportée au modèle. On définit une énergie *a priori*, orientée région, dont l'optimisation contraint le modèle déformable à ressembler à l'une des formes de référence.

Le critère énergétique de segmentation s'écrit alors comme une combinaison entre le terme d'attache aux données et cette énergie *a priori*. Formellement, cela consiste à remplacer le terme usuel de longueur de la courbe $\mathcal{H}^1(\partial\Omega)$ (Chap. 3, § 3.2), par la contrainte de forme. L'information de haut niveau est introduite graduellement à partir d'un résultat de segmentation initial, éventuellement obtenu avec contrainte de longueur. Les expériences conduites sur images réelles durant la thèse d'A. Foulonneau montrent que des objets partiellement occultés sont correctement segmentés à l'aide de l'*a priori* de forme.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 4.2, nous proposons un bref état de l'art sur l'introduction de contraintes de formes dans la segmentation. La représentation paramétrique, sur laquelle repose la contrainte que nous utilisons, est décrite à la section 4.3.1. Le problème d'alignement et l'obtention d'une représentation invariante sous certaines transformations géométriques fait l'objet de la section 4.3.2. Nous présentons le cas de l'invariance aux translations et à un facteur d'échelle, mais le cas général des transformations affines a été exposé dans [Foulonneau et al., 2006]. La définition de l'énergie *a priori* est donnée dans la section 4.3.3. Sa dérivée de forme est conduite à la section 4.4 : nous proposons une nouvelle version de sa dérivation à travers les théorèmes d'optimisation de forme présentés au chapitre 2. Dans la sec-

tion 4.5, on décrit comment cette contrainte est incorporée dans le cadre de la segmentation. On montre un résultat d'évolution vers une référence et on reproduit un résultat de segmentation dans la dernière section.

4.2 Les contraintes de forme : généralités

Introduites en segmentation, les contraintes de forme reposent sur la connaissance *a priori* des propriétés topologiques et géométriques de l'objet que l'on souhaite détecter. Celle-ci peut être plus ou moins précise et donner lieu à un terme de plus ou moins « haut niveau ». Nous entendons par là que l'information prise en compte peut avoir un niveau de globalité et de complexité différent. La longueur du bord de la forme ou le rapport¹ entre son aire et son périmètre peuvent ainsi être considérés. Elles sont bien adaptées à des propriétés de nature locale qui imposent des contraintes globales sur les objets. Ils sont bien adaptés pour décrire des formes régulières. D'autres paramètres peuvent être pris en compte afin de décrire des catégories de forme différentes, comme les polygones [Mohammad-Djafari, 1996; Soussen et Mohammad-Djafari, 2004].

A ces *a priori*, qui ont un caractère local, s'opposent les *a priori* qui reposent sur une connaissance globale de l'objet à travers une forme de référence. L'information est alors qualifiée de « haut niveau ». La référence joue le rôle de forme cible et contraint l'évolution du modèle déformable. Elle peut rendre compte des différentes configurations prises par l'objet (par exemple signalisation routière [Foulonneau et al., 2009], piéton en marche [Cremers et al., 2006a], armatures ou tuyauteries répertoriées) ou être issue d'une phase d'apprentissage [Bresson et al., 2003; Chen et al., 2002; Cootes et al., 1995; Leventon et al., 2000]. La contrainte de forme que nous décrivons par la suite s'inscrit dans ce cadre. Pour ce type de démarche se posent trois questions fondamentales :

- Comment représenter les formes ?
- Comment comparer la référence avec la forme en évolution ?
- La référence ayant un repère qui lui est propre, comment prendre en compte les variations dues au fait que la forme en évolution n'a en général pas la même position, taille ni orientation que la référence ? Il s'agit de la question de l'alignement des formes.

Nous nous intéressons, à présent, à chacun de ces points et terminons cette section en évoquant le cas de la segmentation d'objets multiples.

4.2.1 Description des formes

Les critères énergétiques qui définissent les modèles déformables pouvant être de type contour ou région, on distingue essentiellement les approches qui considèrent le bord de la forme de référence de celles qui prennent en compte la région définie par la forme de référence (avec éventuellement une information sur la distribution des intensités dans cette région).

Approches contour

Le contour de la forme de référence est la plupart du temps représenté de manière paramétrique, i.e. à travers un nombre réduit d'éléments qui le caractérisent. Ces derniers peuvent être de nature géométrique, comme des points [Cootes et al., 1995] possédant certaines caractéristiques : points anguleux, points donnant lieu à une courbure maximale.

1. Appelé dans la littérature rapport isopérimétrique.

Ils peuvent également être de nature analytique. Ils sont alors constitués d'une série de coefficients qui correspondent à une transformation analytique du contour : descripteurs de Fourier [Staib et Duncan, 1992], moments² [Sundaramoorthi et al., 2009], ou splines [Cremers et al., 2003]. Une représentation à l'aide de séries de Fourier, en coordonnées sphérique, est utilisée dans [Baust et Navab, 2010] pour représenter des formes étoilées. Un inconvénient des approches contour est qu'elles ne permettent que de considérer des objets connexes. Les résultats présentés dans [Cremers et al., 2003; Staib et Duncan, 1992; Baust et Navab, 2010] reposent sur cette hypothèse. Lorsque le bord est constitué de plusieurs courbes fermées, sa représentation reste peu évidente à l'heure actuelle.

L'ensemble des configurations prises par l'objet peut, par ailleurs, être décrit de manière paramétrique à l'aide d'une base statistique. Dans un modèle de distribution de points [Cootes et al., 1995], une analyse en composantes principales (ACP) permet de déterminer les différentes directions des variations de forme. Ces *modes* autour de la moyenne correspondent aux vecteurs propres obtenus. Une forme de référence est approchée, à partir de l'objet moyen, par une combinaison linéaire des k premiers modes. Ceci définit un modèle de forme qui peut engendrer de nouvelles occurrences de l'objet, selon les coefficients que l'on adopte dans la combinaison linéaire.

Approches région

Une première possibilité est de décrire explicitement les formes [Foulonneau, 2004] à travers leurs fonctions caractéristiques. Toutefois, depuis l'apparition des *level sets* [Osher et Sethian, 1988], il est plus habituel [Leventon et al., 2000; Rousson et Paragios, 2002; Cremers et al., 2006a] d'employer des ensembles de niveaux. Ceci consiste à générer une fonction distance $\Psi(x)$ à partir du contour. L'approche est, dans les deux cas, complémentaire : la fonction distance peut s'obtenir [Sussman et al., 1994] à partir de la fonction caractéristique en résolvant, par exemple, une équation aux dérivées partielles. Inversement, le passage d'un ensemble de niveaux vers une fonction caractéristique s'obtient à l'aide de la fonction de Heaviside.

Le domaine intérieur aux formes peut, d'autre part, être décrit de manière paramétrique : on parle alors de représentation paramétrique basée région. Les moments de la fonction caractéristique sont ainsi considérés dans [Foulonneau et al., 2006, 2009]. Ils permettent d'obtenir une description compacte des formes, au lieu de considérer tous les points de leur domaine intérieur. En outre, contrairement aux représentations analytiques du contour, il n'est plus nécessaire de se restreindre à une hypothèse de connexité : à travers la fonction caractéristique, toutes les composantes de l'objet peuvent être prises en compte.

Comme pour les approches contour, on trouve également des représentations paramétriques de l'ensemble des formes de référence sur une base statistique. Cette dernière est, par exemple, issue d'une ACP [Leventon et al., 2000; Tsai et al., 2003] effectuée sur les fonctions distances des différentes formes de référence.

4.2.2 Critère de comparaison

Une façon naturelle d'introduire de l'*a priori* est de se placer dans un cadre bayésien. Lorsque les formes sont représentées par des ensembles de niveaux, il s'agit de maximiser la probabilité

2. Nous fournissons leur définition au § 4.3.1.

a posteriori :

$$\mathcal{P}(\Psi|I) = \frac{\mathcal{P}(I|\Psi)\mathcal{P}(\Psi)}{\mathcal{P}(I)}$$

Comme il est équivalent de minimiser l'opposé du logarithme de cette probabilité, ceci définit l'énergie *a priori* :

$$E_{prior} = -\log \mathcal{P}(\Psi) \quad (4.1)$$

Cette interprétation est utile pour définir un critère énergétique sur un *ensemble* de formes de référence. Pour une référence unique, le critère correspond à une comparaison entre la forme en évolution et l'objet de référence.

Référence unique

Lorsque la référence et la forme en évolution sont toutes deux décrites par ensembles de niveaux, plusieurs critères ont été proposées dans la littérature. Leur différence quadratique, voir Eq. (4.2) dans laquelle H désigne la fonction de Heaviside, est, par exemple, intégrée sur le domaine intérieur à la forme dans [Rousson et Paragios, 2002]. Dans [Bresson et al., 2003], c'est la fonction distance de la référence, voir Eq. (4.3), qui est intégrée sur le contour de la forme.

$$d_1^2(\Psi, \Psi^{ref}) = \int_{\mathcal{D}} \left(\Psi(x) - \Psi^{ref}(x) \right)^2 H(-\Psi(x)) dx \quad (4.2)$$

$$d_2^2(\Psi, \Psi^{ref}) = \int_{\partial\Omega} (\Psi^{ref}(x))^2 dx \quad (4.3)$$

Ces deux critères permettent de définir une mesure entre ensembles de niveaux. Ils ne constituent toutefois pas une distance³ car ils ne sont pas symétriques. Aussi, il est préférable de considérer leur symétrisation (celle de (4.2) est fournie dans [Cremers et al., 2003]).

De manière générale, il n'est pas évident de définir une distance entre formes [Charpiat et al., 2003]. Aussi, il est fréquent d'utiliser la distance la plus intuitive, donnée par la différence symétrique de deux ensembles Ω_1 et Ω_2 : $\Omega_1 \triangle \Omega_2 = (\Omega_1 \cap \Omega_2^c) \cup (\Omega_2 \cap \Omega_1^c)$. Celle-ci se traduit en termes d'ensembles de niveaux par :

$$d_3^2(\Psi, \Psi^{ref}) = \int_{\mathcal{D}} \left(H(\Psi(x)) - H(\Psi^{ref}(x)) \right)^2 dx \quad (4.4)$$

Elle est, par exemple, employée dans [Chan et Zhu, 2005; Riklin-Raviv et al., 2004; Cremers et al., 2006a].

Lorsqu'une description paramétrique sur une base analytique est utilisée, un critère de comparaison est donné par la distance, en termes de descripteurs, entre la forme en évolution et celle de référence. Comme ces descripteurs se réduisent la plupart du temps à une série de coefficients, i.e. un vecteur de \mathbb{R}^d , on peut considérer [Foulonneau, 2004] la distance euclidienne définie à partir de la norme usuelle sur \mathbb{R}^d .

Par unicité de la décomposition sur une base analytique, le minimum est atteint lorsque les formes sont confondues. Toutefois, on peut s'interroger si une petite perturbation sur les coefficients définit bien deux formes « voisines » entre elles.

3. Nous prenons le terme distance au sens mathématique, i.e. une fonction à valeur dans \mathbb{R}^+ qui soit symétrique en ses arguments, telle que $d(\Omega, \Omega) = 0$ et qui vérifie l'inégalité triangulaire.

Références multiples

L'emploi de plusieurs formes de référence introduit de la *variabilité* dans le modèle en permettant de considérer différents aspects d'un même objet ou plusieurs objets répertoriés. Dans le cadre d'une interprétation probabiliste de la segmentation, il suffit, d'après (4.1) de se donner une densité de probabilité pour établir une énergie *a priori*.

Lorsque l'ensemble des formes de référence est décomposée sur une base statistique, une matrice diagonale Σ semblable à la matrice de covariance, peut être utilisée pour définir cette densité de probabilité. Une possibilité [Leventon et al., 2000; Tsai et al., 2003] est d'associer aux coefficients $(\alpha_\ell)_{1 \leq \ell \leq k}$ des k premiers modes de variation, la densité de probabilité gaussienne :

$$\mathcal{P}(\alpha_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma_k|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha_k^t \Sigma_k^{-1} \alpha_k\right) \quad (4.5)$$

où Σ_k est la réduction de Σ à k valeurs diagonales.

Comme il est remarqué dans [Cremers et al., 2006a], il y a toutefois deux limitations à ce modèle. L'ACP étant effectuée sur des ensembles de niveaux, on perd la structure d'espace vectoriel : une combinaison linéaire d'ensembles de niveaux n'est *a priori* plus un ensemble de niveaux. En outre, il n'y a pas de justification, hormis pratique, à choisir des distributions gaussiennes. Ces limitations ont conduit à considérer un critère plus général qui repose sur l'estimation de la densité de probabilité.

L'idée, sur laquelle sont fondées [Cremers et al., 2006a; Kim et al., 2007], est d'employer un estimateur de densité de probabilité à partir d'un noyau donné. Pour un noyau gaussien, on a :

$$\mathcal{P}(\Psi) = \frac{1}{N_{ref}} \sum_{k=1}^{N_{ref}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} d^2(\Psi, \Psi_{(k)}^{ref})\right) \quad (4.6)$$

On peut alors montrer que cette probabilité tend (pour un nombre infini d'échantillons) vers la densité de probabilité des échantillons [Parzen, 1962]. Dans (4.6), la variance σ joue le rôle de paramètre d'échelle et est appelé largeur de bande. Elle est fixée [Cremers et al., 2006a] de telle sorte que chaque référence soit, en moyenne, à une distance σ des autres.

Cette formulation multi-références a été employée dans [Foulonneau et al., 2009] pour étendre à plusieurs objets l'*a priori* invariant proposé dans [Foulonneau et al., 2006].

4.2.3 Le problème de l'alignement

L'objet de référence diffère essentiellement de l'objet dans l'image par sa taille, position, voire son orientation : comme il possède un repère qui lui est propre, il n'a *a priori* aucune raison d'être dans la même configuration que l'objet. Il s'agit d'un niveau de *variabilité* d'aspect, de nature géométrique, à prendre en compte. Le problème consiste à aligner les deux formes pour ensuite les comparer. On distingue les approches qui procèdent par optimisation des paramètres d'alignement, également appelés paramètres de pose, de celles qui rendent le critère *intrinsèquement* invariant à certaines transformations géométriques.

Par optimisation

Une première possibilité consiste à optimiser les paramètres de pose pour aligner les formes [Cootes et al., 1995; Leventon et al., 2000; Rousson et Paragios, 2002]. On fait alors intervenir

explicitement les translations, rotations et changements d'échelle. Il s'agit de considérer les transformations :

$$x \rightarrow s \cdot R_\theta(x - t)$$

où s est le paramètre d'échelle, R_θ et t désignant respectivement la matrice de rotation d'angle θ et le vecteur de translation. Les paramètres de pose sont estimés pour aligner la forme en évolution $\Psi(s \cdot R_\theta(x - t))$ sur la référence $\Psi^{ref}(x)$.

Le processus d'alignement par optimisation peut, toutefois, s'avérer assez coûteux. D'autre part, comme il a été remarqué dans [Cremers et al., 2006b], se pose en pratique la question de l'alternance entre cette phase d'optimisation et celle d'évolution par gradient de forme. En outre, il donne lieu à un nombre supplémentaire de paramètres à régler : par exemple, le pas de descente est à ajuster pour l'optimisation des différentes variables de pose.

Par invariance géométrique

La seconde approche consiste à prendre en compte *intrinsèquement* les transformations géométriques [Cremers et al., 2006a; Foulonneau et al., 2006]. Lorsque la référence est représentée par une courbe de niveau [Cremers et al., 2006a], celle-ci est d'abord centrée en son centre de gravité et normalisée par un facteur d'échelle. De la même manière, on calcule les coordonnées du centre de gravité \bar{x}_ψ de la forme en évolution ainsi que la mise à l'échelle s_ψ nécessaire pour normaliser son aire. Les deux formes possèdent alors la même aire et sont alignées en leur centre de gravité. Il est alors possible de les comparer. Dans [Foulonneau et al., 2006], la représentation paramétriques des formes, après alignement, est considérée. Elle est rendue invariante à l'ensemble des transformations affines. Nous présentons au § 4.3.2 de quelle manière est obtenue l'invariance aux translations et à tout facteur d'échelle.

4.2.4 Prise en compte d'objets multiples

Nous terminons cette section en évoquant le cas d'objets multiples. Ces derniers peuvent être constitués de plusieurs composantes et avoir des distributions d'intensité différentes. L'introduction de contrainte de forme sur chaque objet est un problème peu évident qui reste, à l'heure actuelle, ouvert.

Une possibilité est d'utiliser la technique du *dynamic labelling* proposée dans [Cremers et al., 2003]. Celle-ci consiste à ajouter une variable qui pondère localement la contrainte sur différentes régions de l'image. Cette variable est simultanément optimisée pour s'adapter à la position du contour du modèle déformable. La technique du *dynamic labelling* a initialement été introduite pour segmenter des objets d'intensité identique. Dans cette forme, elle a, par exemple, été utilisée dans [Chan et Zhu, 2005]. Elle a ensuite été étendue au cas d'objets d'intensité différentes (modèle multi-phases) dans [Cremers et al., 2002].

4.3 Modèle de Foulonneau (2004)

4.3.1 Description paramétrique des formes

Nous exposons dans ce paragraphe la contrainte de forme [Foulonneau et al., 2009] que nous nous proposons d'introduire en reconstruction. Elle repose sur une représentation compacte et paramétrique des formes. Comme elle est orientée région, elle permet la prise en compte des différentes composantes d'un même objet. La base analytique est orthogonale, ce qui donne un

caractère hiérarchique à la représentation. Ceci offre la possibilité d'introduire la contrainte de manière multi-échelles. L'alignement des formes est, quant à lui, obtenu de manière intrinsèque. La représentation, rendue de cette manière invariante, peut prendre en compte l'ensemble des transformations affines [Foulonneau et al., 2006].

Moments de leurs fonctions caractéristiques

Dans [Foulonneau, 2004], il est proposé de prendre en compte les fonctions caractéristiques des objets à travers une transformée de celles-ci : leurs moments. Contrairement aux représentations paramétriques qui portent sur le contour des objets, il est possible de considérer des topologies quelconques. On peut ainsi envisager de décrire des formes constituées de composantes disjointes ou avec présence de trous. Nous rappelons dans un premier temps la définition des moments.

Représentation à l'aide des moments

Le moment d'indice (p, q) d'une fonction f correspond à la projection de f , au sens L^2 , sur des polynômes d'ordre p en x_1 , l'abscisse d'un point x du domaine image \mathcal{D} et d'ordre q en x_2 , l'ordonnée de x . On a ainsi la définition suivante :

Définition 4.3.1. *Le moment d'indice (p, q) d'une fonction f est le coefficient $M_{p,q}$ donné par :*

$$M_{p,q} = \int_{\mathcal{D}} f(x) P_p(x_1) P_q(x_2) dx \quad (4.7)$$

où $P_p(x_1)$ (resp. $P_q(x_2)$) est un polynôme d'ordre p en l'abscisse x_1 de x (resp. d'ordre q en l'ordonnée x_2 de x). On appelle ordre du moment, l'entier $N = p + q$.

L'idée formulée dans [Foulonneau, 2004] consiste à considérer les moments de la fonction caractéristique des objets. Une première propriété est de réduire la dimension du problème : à chaque forme est associé un vecteur de dimension $(N + 1) \cdot (N + 2) / 2$ constitué de l'ensemble des moments de sa fonction caractéristique. Ainsi,

$$\begin{aligned} M_{p,q} &= \int_{\mathcal{D}} \mathbb{1}_{\Omega}(x) P_p(x_1) P_q(x_2) dx \\ &= \int_{\Omega} P_p(x_1) P_q(x_2) dx \end{aligned} \quad (4.8)$$

où Ω désigne la forme. Dans [Foulonneau et al., 2003], ce vecteur est dénommé *descripteur de forme*.

Choix de la base polynômiale

Les moments, dits géométriques, s'obtiennent en prenant dans (4.8) les monômes x_1^p et x_2^q pour $P_p(x_1)$ et $P_q(x_2)$. Cependant, comme ils sont définis par une projection sur une base de polynômes, il peut être avantageux d'utiliser des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $L^2(\mathcal{D})$ dans (4.8). C'est pourquoi les polynômes de Legendre d'ordre p et q sont considérés dans [Foulonneau, 2004]. A l'ordre p , ces derniers sont donnés par :

$$P_p(x_1) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^p}{dx_1^p} (x_1^2 - 1)^n. \quad (4.9)$$

Ils ont la propriété d'être orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 P_p(x_1)P_q(x_1)dx_1 = \frac{2}{(2p+1)} \frac{2}{(2q+1)} \delta_{pq} \quad (4.10)$$

où δ_{pq} désigne le symbole de Kronecker. En faisant l'hypothèse $\mathcal{D} \subset [-1, 1]^2$ et en prenant pour P_p et P_q les polynômes donnés par (4.9), on obtient les moments de Legendre associés à la fonction caractéristique du domaine Ω :

$$\lambda_{p,q} = C_{pq} \int_{\Omega} P_p(x_1)P_q(x_2)dx. \quad (4.11)$$

où $C_{pq} = (2p+1)(2q+1)/4$.

Relation Moments géométriques / Moments de Legendre

En pratique, les moments $\lambda_{p,q}$ peuvent se calculer à partir du développement de P_p et P_q respectivement sur les puissances de x_1 et de x_2 :

$$P_p(x_1) = \sum_{0 \leq u \leq p} a_{pu} x_1^u$$

$$P_q(x_2) = \sum_{0 \leq v \leq q} a_{qv} x_2^v$$

Ceci permet d'établir une relation entre moments de Legendre et moments géométriques. En effet, en intégrant le produit $P_p(x_1).P_q(x_2)$ sur Ω , on obtient :

$$\lambda_{p,q} = C_{pq} \sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q a_{pu} a_{qv} M_{u,v}. \quad (4.12)$$

De cette manière, le calcul des moments $\lambda_{p,q}$ s'obtient à partir de M_{uv} , pour $0 \leq u \leq p$ et $0 \leq v \leq q$, sans requérir l'expression des polynômes de Legendre. La relation (4.12) permet aussi de différencier plus directement $\lambda_{p,q}$ par rapport à la forme. C'est de cette façon que les équations d'évolution du contour actif sont dérivées [Foulonneau, 2004]. Nous suivrons la même démarche au § 4.4 mais en employant la dérivée de Gâteaux.

Formule inverse

Il est possible d'utiliser les coefficients $\lambda_{p,q}$ afin de reconstituer l'image décrite à partir de ses moments :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_{p,q} P_p(x_1)P_q(x_2). \quad (4.13)$$

Les moments de Legendre correspondant à une projection sur une base orthogonale, ils peuvent s'interpréter comme les coordonnées de f sur cette base. La relation (4.13) peut ainsi être utilisée pour reconstruire la fonction caractéristique des formes à partir de leur moments de Legendre.⁴

En pratique, on utilise une version tronquée de (4.13) en allant jusqu'à un certain ordre N :

$$f_N(x) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p \lambda_{p-q,q} P_{p-q}(x_1)P_q(x_2) \quad (4.14)$$

4. Par la suite, nous parlerons plutôt de formule *d'inversion* pour éviter toute confusion avec le problème de reconstruction tomographique, qui fait l'objet de notre travail.

4.3.2 Alignement et invariance géométrique

On peut prendre en compte les translations, les mises à l'échelle ou, plus généralement, toute transformation affine en rendant les moments invariants à ces transformations géométriques. Ceci résout le problème de l'alignement entre forme en évolution et formes de référence sans recourir à une étape d'optimisation. La prise en compte de ces transformations géométrique constitue un premier niveau de *variabilité*. Nous présentons de quelle manière on parvient à définir des moments invariants par translation et mise à l'échelle. Ces idées sont exposées, par exemple, dans [Mukundan et Ramakrishnan, 1998; Teague, 1980] et mises à profit en contrainte de forme dans [Foulonneau et al., 2006].

Les moments géométriques étant définis à partir des puissances de x_1 et x_2 , ils donnent lieu pour la fonction caractéristique du domaine Ω aux coefficients :

$$M_{u,v} = \int_{\Omega} x_1^u x_2^v dx \quad (4.15)$$

L'invariance aux translations et changements d'échelles est alors obtenue en effectuant le changement de variable $x_1 \rightarrow (x_1 - \bar{x}_1)/|\Omega|^{\frac{1}{2}}$ et $x_2 \rightarrow (x_2 - \bar{x}_2)/|\Omega|^{\frac{1}{2}}$, où $|\Omega|$ désigne l'aire du domaine Ω et \bar{x}_1, \bar{x}_2 les coordonnées du centre de gravité de la forme. Les moments géométriques $\eta_{u,v}$ invariants aux translations et facteur d'échelle sont donc donnés par :

$$\eta_{u,v} = \int_{\Omega} H_{uv}(x) dx \text{ avec } H_{uv}(x) = \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^u (x_2 - \bar{x}_2)^v}{|\Omega|^{\frac{u+v+2}{2}}},$$

Dans [Foulonneau, 2004] un coefficient β , de rapport d'aire, est ajouté de sorte que l'aire de la forme reconstituée soit normalisée à $1/\beta$. Ce coefficient est introduit afin de garantir que l'objet reconstitué à partir de ses moments reste inscrit dans le carré $[-1, 1]^2$. Le changement de variable s'écrit alors $x_1 \rightarrow (x_1 - \bar{x}_1)/(\beta|\Omega|)^{\frac{1}{2}}$, $x_2 \rightarrow (x_2 - \bar{x}_2)/(\beta|\Omega|)^{\frac{1}{2}}$, et :

$$\eta_{u,v} = \int_{\Omega} H_{uv}(x) dx \text{ avec } H_{uv}(x) = \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^u (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta|\Omega|)^{\frac{u+v+2}{2}}}, \quad (4.16)$$

L'invariance aux translations et mise à l'échelle est ensuite transposée aux moments de Legendre en substituant $\eta_{u,v}$ à $M_{u,v}$ dans (4.12).

Le changement de variable utilisé ne requiert pas d'autre calcul que les moments. On a, en effet :

$$|\Omega| = \int_{\Omega} dx = M_{0,0} \quad (4.17)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\int_{\Omega} x_1 dx}{\int_{\Omega} dx} = \frac{M_{1,0}}{M_{0,0}} \quad (4.18)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\int_{\Omega} x_2 dx}{\int_{\Omega} dx} = \frac{M_{0,1}}{M_{0,0}} \quad (4.19)$$

de sorte qu'il n'y a pas de paramètre supplémentaire à évaluer : la représentation à l'aide des moments est ainsi rendu invariante aux transformations géométriques de manière *intrinsèque*. Nous considérons, ici, le cas de la translation et de la mise à l'échelle, mais on peut aussi rendre les moments invariants à toute transformation affine comme dans [Foulonneau et al., 2006]. Inscrire un objet d'aire $1/\beta$ dans un domaine donné n'est pas un problème trivial (on pourra

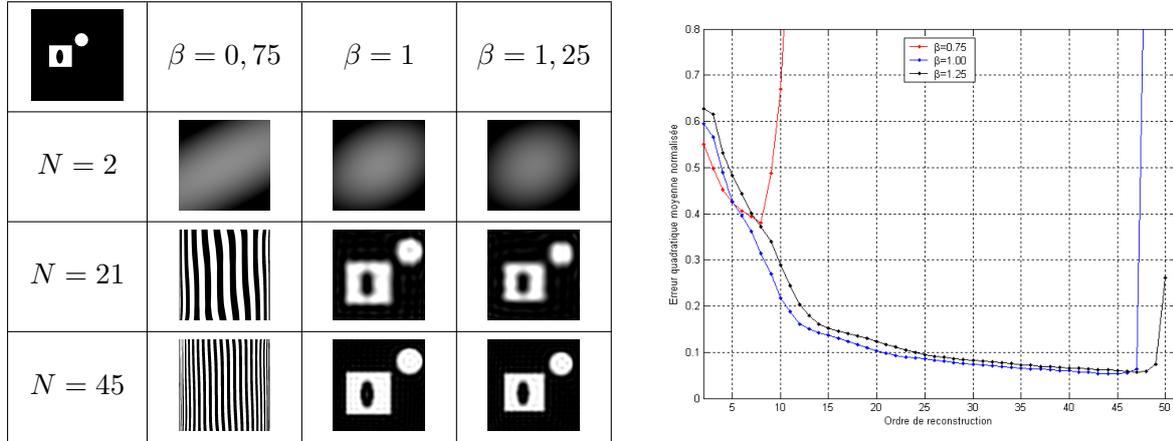


FIGURE 4.1 – Reconstitution de la forme modèle à partir de ses moments de Legendre invariants en échelle et translation (à gauche) et courbes d’erreur correspondantes, pour différentes valeurs de β (à droite).

en trouver des éléments d’explications dans [Foulonneau, 2004]). Pour résoudre ce problème, on procède à une phase expérimentale qui consiste à tracer les erreurs effectuées sur la fonction caractéristique en utilisant la formule d’inversion des moments (4.13). On choisit alors la plus petite valeur de β présentant une erreur minimale.

Nous illustrons ceci à partir de l’objet modèle qui sera utilisé en tomographie linéaire (chapitre 6) sur la Fig 4.1. Dans cet exemple, la référence est donnée par l’objet à une translation et une mise à l’échelle près. En termes de moments invariants, elle correspond à l’objet solution. Nous fournissons les résultats de la formule d’inversion (4.13) aux ordres 21 et 45, ce qui correspond à une erreur quadratique moyenne, par rapport à la fonction caractéristique de l’objet modèle, de 10% et 5% pour $\beta = 1$. Les courbes d’erreurs sont tracées sur la partie droite pour différentes valeurs de β . Elles montrent que, pour une valeur trop faible (par exemple $\beta = 0,75$), l’objet a tendance à sortir du carré $[-1, 1]^2$. Ceci conduit à des erreurs importantes dans la reconstruction de la fonction caractéristique de l’objet (2^{ème} colonne du tableau de gauche de la Fig. 4.1).

Cette étude, menée de manière systématique en pratique, permet également de choisir l’ordre de la représentation de l’objet de référence en termes de moments. Plus précisément, l’ordre de la représentation est déterminé à l’aide d’un seuil sur les erreurs de reconstruction.

En outre, les résultats obtenus sur la Fig 4.1 mettent en évidence l’aspect hiérarchique de la description : les reconstructions sont d’autant plus détaillées que l’on ajoute des moments d’ordre élevé.

4.3.3 Formulation énergétique

A partir de la représentation des fonctions caractéristiques par leurs moments invariants, une contrainte de forme est définie via un critère énergétique. Dans [Foulonneau et al., 2006], une référence unique est considérée mais le modèle a plus récemment été étendu, dans l’esprit de [Cremers et al., 2006a], à une série de formes de référence [Foulonneau et al., 2009]. C’est cette énergie d’*a priori* de forme *multi-références* que nous présentons ici.

Les formes en présence dans le problème sont la forme en évolution du modèle déformable

ainsi que les formes composant l'ensemble des objets de référence. Chacune d'entre elles est décrite par ses moments pour un certain ordre N . On dispose ainsi d'un vecteur $\boldsymbol{\lambda}(\Omega)$ constitué des moments de la forme en évolution⁵ et de N_{ref} vecteurs $\boldsymbol{\lambda}_{(k)}^{ref}$, avec $1 \leq k \leq N_{ref}$, pour chaque forme de référence.

L'énergie proposée est définie à partir d'une probabilité *a priori*. Celle-ci est écrite comme un mélange de gaussiennes centrées sur chaque référence :

$$E_{prior}^{multi}(\Omega) = -\log \left[\sum_{k=1}^{N_{ref}} \exp -\frac{\|\boldsymbol{\lambda}(\Omega) - \boldsymbol{\lambda}_{(k)}^{ref}\|^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.20)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme usuelle sur l'espace \mathbb{R}^d avec $d = (N+1).(N+2)/2$, le nombre total de moments d'ordre inférieur ou égal à N . Ce modèle de mélange est une seconde façon d'apporter de la variabilité à travers plusieurs formes de référence. La variance σ^2 est déterminée, pour toutes les références, en minimisant une erreur de classification. Plus précisément, elle est choisie telle que le mélange de gaussiennes ait un recouvrement minimal. De cette façon, il est plus aisé d'attribuer à la forme en évolution une des formes de référence.

Remarque 4.3.1. *On constate que l'énergie (4.20) est écrite en termes de descripteurs et non directement sur la fonction caractéristique. En outre, dans le cas d'une référence unique, celle-ci se réduit à un critère quadratique :*

$$E_{prior}(\Omega) = \|\boldsymbol{\lambda}(\Omega) - \boldsymbol{\lambda}^{ref}\|^2 = \sum_{0 \leq p+q \leq N} (\lambda_{p,q}(\Omega) - \lambda_{p,q}^{ref})^2 \quad (4.21)$$

qui mesure la distance entre les moments de la forme en évolution avec ceux de la référence. Nous donnons une justification intuitive du fait que ce critère correspond à une contrainte de similarité entre le modèle déformable et la forme de référence. En effet, l'optimisation de $E_{prior}(\Omega)$ a pour conséquence de contraindre $\boldsymbol{\lambda}(\Omega)$ vers $\boldsymbol{\lambda}^{ref}$. D'après la formule d'inversion (4.13), cela correspond à contraindre la fonction caractéristique du domaine courant vers celle de la référence.

Remarque 4.3.2. *Un modèle d'a priori multi-gaussien est considéré ici. Le noyau utilisé dans l'estimateur de densité de probabilité peut, toutefois, être de nature différente.*

4.4 Dérivation de forme

Par souci de complétude, nous donnons le calcul de la dérivée de forme de l'énergie *a priori* (4.20). Ce calcul est fourni dans [Foulonneau, 2004] de manière fonctionnelle. Nous proposons de l'établir ici, dans l'esprit de [Aubert et al., 2003; Delfour et Zolésio, 2001], à partir de la notion de variable de forme (chapitre 2). On procède d'abord à un calcul préliminaire afin de déterminer la conduite de la différentiation de forme.

4.4.1 Calcul préliminaire

En procédant par composition, on obtient facilement que la dérivée de Gâteaux de E_{prior}^{multi} donnée par (4.20) est égale à :

$$\langle \nabla_{\Omega} E_{prior}^{multi}, V \rangle_{\Gamma} = \sum_{k=1}^{N_{ref}} \sum_{0 \leq p+q \leq N} A_{k,p,q} \langle \nabla_{\Omega} (\lambda_{p,q}(\Omega) - \lambda_{(k)p,q}^{ref}), V \rangle_{\Gamma}$$

5. A partir de maintenant, on parlera de moments de formes, étant entendu qu'il s'agit des moments de leurs fonctions caractéristiques.

avec

$$A_{k,p,q} = \frac{\lambda_{p,q}(\Omega) - \lambda_{(k)p,q}^{ref}}{\sigma^2} w_{(k)} / \sum_{k=1}^{N_{ref}} w_{(k)}$$

et où on a noté

$$w_{(k)} = \exp\left(\frac{-\|\lambda(\Omega_{int}) - \lambda_{(k)}^{ref}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

On remarque que les fonctions $w_{(k)}$ jouent le rôle de pondération. Elles sont exponentiellement décroissantes en fonction de la distance (en termes de descripteurs) entre la forme en évolution et le $k^{\text{ème}}$ modèle de référence.

Dans cette égalité, les moments des formes de référence sont fixes et indépendants du modèle déformable. Le seul terme qui dépend de la forme en évolution Ω est $\lambda_{p,q}(\Omega)$. Il s'agit de déterminer sa dérivée de Gâteaux. Or,

$$\lambda_{p,q}(\Omega) = C_{pq} \sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q a_{pu} a_{qv} \eta_{u,v}(\Omega) \quad (4.22)$$

où

$$\eta_{u,v}(\Omega) = \int_{\Omega} H_{uv}(x) dx \text{ avec } H_{uv}(x) = \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^u (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta|\Omega|)^{\frac{u+v+2}{2}}}, \quad (4.23)$$

Par conséquent,

$$\langle \nabla_{\Omega} (\lambda_{p,q} - \lambda_{(k)p,q}^{ref}), V \rangle_{\Gamma} = C_{pq} \sum_{\substack{0 \leq u \leq p \\ 0 \leq v \leq q}} a_{pu} a_{qv} \langle \nabla_{\Omega} \eta_{u,v}, V \rangle_{\Gamma}$$

En définissant $a_{pu} = 0$ (resp. $a_{qv} = 0$) pour $u > p$ (resp. $v > q$), cette somme s'étend aux indices (u, v) tels que $0 \leq u + v \leq N$. D'autre part, comme cette égalité est indépendante de k , en l'introduisant dans (4.22), on obtient :

$$\langle \nabla_{\Omega} E_{prior}^{multi}, V \rangle_{\Gamma} = \sum_{0 \leq u+v \leq N} A_{uv}^{multi} \langle \nabla_{\Omega} \eta_{u,v}, V \rangle_{\Gamma} \quad (4.24)$$

dans laquelle A_{uv}^{multi} est donné par :

$$A_{uv}^{multi} = \left(\sum_{k=1}^{N_{ref}} A_{(k)uv} w_{(k)} \right) / \sigma^2 \sum_{k=1}^{N_{ref}} w_{(k)} \quad (4.25)$$

et où les facteurs individuels $A_{(k)uv}$ s'écrivent, pour chaque forme de référence k :

$$A_{(k)uv} = \sum_{0 \leq p+q \leq N} (\lambda_{p,q} - \lambda_{(k)p,q}^{ref}) C_{pq} a_{pu} a_{qv}.$$

Le problème à résoudre est donc de déterminer la dérivée de Gâteaux de $\eta_{u,v}(\Omega)$.

Remarque 4.4.1. Dans (4.24), le paramètre A_{uv}^{multi} est une moyenne pondérée des facteurs individuels $A_{(k)uv}$ calculés pour chaque forme. D'après son expression, toutes les références sont

considérées à travers la pondération $w_{(k)}/\sigma^2 \sum_{k=1}^{N_{ref}} w_{(k)}$, de sorte que le cas multi-références se comporte essentiellement comme la situation où on considère une forme de référence unique.

4.4.2 Éléments pour la dérivée de forme de $\eta_{u,v}(\Omega)$

Les moments géométriques invariants étant définis comme une intégrale de domaine, l'application du théorème 2.6.1 permet d'en déduire, pour une normale \mathcal{N} unitaire et orientée vers l'intérieur, l'expression de sa dérivée de Gâteaux :

$$\langle \nabla_{\Omega} \eta_{u,v}, V \rangle_{\Gamma} = - \int_{\Gamma} H_{uv}(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx + \int_{\Omega} H'_{uv}(x, \Omega, V) dx \quad (4.26)$$

Comme l'intégrande H_{uv} dépend, ici, de la forme par l'intermédiaire des trois variables \bar{x}_1, \bar{x}_2 et $|\Omega|$, elle correspond à la fonction de forme suivante :

$$\Omega \rightarrow \left(\bar{x}_1(\Omega), \bar{x}_2(\Omega), |\Omega| \right) \rightarrow H_{uv}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, |\Omega|)$$

On procède par composition. En appliquant la règle formelle de dérivation donnée au chapitre 2 par l'équation (2.31), on obtient :

$$H'_{uv}(x, \Omega, V) = \frac{\partial H_{uv}}{\partial \bar{x}_1} \bar{x}'_1(x, \Omega, V) + \frac{\partial H_{uv}}{\partial \bar{x}_2} \bar{x}'_2(x, \Omega, V) + \frac{\partial H_{uv}}{\partial |\Omega|} |\Omega|'(x, \Omega, V) \quad (4.27)$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial H_{uv}}{\partial \bar{x}_1}, \frac{\partial H_{uv}}{\partial \bar{x}_2}, \frac{\partial H_{uv}}{\partial |\Omega|}$ s'obtiennent facilement. Donc, pour établir $H'_{uv}(x, \Omega, V)$, il suffit de déterminer les dérivées $\bar{x}'_1(x, \Omega, V), \bar{x}'_2(x, \Omega, V), |\Omega|'(x, \Omega, V)$, ce qu'on présente de façon concise.

Dérivation de forme de $|\Omega|$

La dérivée de l'aire du domaine est un calcul classique. Par définition,

$$|\Omega| = M_{0,0} = \int_{\Omega} dx$$

est une intégrale de domaine d'intégrande constante et égale à l'unité. Elle ne dépend donc ni de la forme, ni de la variable d'espace x . On a ainsi, d'après le corollaire 2.6.1 :

$$|\Omega|'(\Omega, V) = M'_{0,0}(\Omega, V) = - \int_{\Gamma} \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx \quad (4.28)$$

pour une normale unitaire orientée vers l'intérieur.

Dérivation de forme de \bar{x}_1

Comme l'abscisse du centre de gravité est définie par :

$$\bar{x}_1 = \left(\int_{\Omega} x_1 dx \right) / \left(\int_{\Omega} dx \right) = \frac{M_{1,0}}{M_{0,0}}$$

on obtient, en dérivant le quotient par rapport à la forme :

$$\bar{x}'_1(x, \Omega, V) = - \frac{M_{1,0}(\Omega) M'_{0,0}(\Omega, V)}{M_{0,0}^2(\Omega)} + \frac{M'_{1,0}(x, \Omega, V)}{M_{0,0}(\Omega)} \quad (4.29)$$

En outre, la fonction $M_{1,0}$ est l'intégrale, sur le domaine Ω , de la fonction x_1 dans laquelle la forme n'intervient pas. Donc

$$M'_{1,0}(x, \Omega, V) = - \int_{\Gamma} x_1 \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx$$

avec une normale définie comme précédemment. En reportant dans (4.29), on obtient :

$$\bar{x}'_1(x, \Omega, V) = \frac{M_{1,0}(\Omega)/M_{0,0}(\Omega) \int_{\Gamma} \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx}{M_{0,0}(\Omega)} - \frac{\int_{\Gamma} x_1 \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx}{M_{0,0}(\Omega)}$$

où on a utilisé la valeur de la dérivée de $|\Omega| = M_{0,0}$ obtenue précédemment. Comme on a $\bar{x}_1 = M_{1,0}(\Omega)/M_{0,0}(\Omega)$, on conclut finalement :

$$\bar{x}'_1(x, \Omega, V) = \int_{\Gamma} \frac{(\bar{x}_1 - x_1) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx}{|\Omega|} \quad (4.30)$$

car $M_{0,0} = |\Omega|$

Dérivation de forme de \bar{x}_2

Pour \bar{x}_2 , le problème est identique à la différence qu'on considère la valeur de l'ordonnée. Il suffit donc de remplacer \bar{x}_1 par \bar{x}_2 dans (4.30). Cette remarque permet de conclure rapidement :

$$\bar{x}'_2(x, \Omega, V) = \int_{\Gamma} \frac{(\bar{x}_2 - x_2) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx}{|\Omega|} \quad (4.31)$$

4.4.3 Conséquences

La dérivée de Gâteaux des moments géométriques invariants (4.26) faisant intervenir l'intégrale de H'_{uv} , on cherche à déterminer l'intégrale de chacun de ses termes (4.32), (4.33) et (4.34). Pour cela, on note :

$$H'_{uv}(x, \Omega, V) = \frac{\partial H_{uv}}{\partial \bar{x}_1} \bar{x}'_1(x, \Omega, V) \quad (4.32)$$

$$H'_{uv}(x, \Omega, V) = \frac{\partial H_{uv}}{\partial \bar{x}_2} \bar{x}'_2(x, \Omega, V) \quad (4.33)$$

$$H'_{uv}(x, \Omega, V) = \frac{\partial H_{uv}}{\partial |\Omega|} |\Omega|'(x, \Omega, V) \quad (4.34)$$

Intégrale de $H'_{uv}(x, \Omega, V)$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{uv}}{\partial \bar{x}_1} &= -u \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^{u-1} (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta |\Omega|)^{\frac{u+v+2}{2}}} \\ &= -\frac{u}{\beta^{1/2} |\Omega|^{1/2}} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^{u-1} (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta |\Omega|)^{\frac{u+v+1}{2}}} \end{aligned}$$

et d'autre part, l'égalité (4.30) fournit $\bar{x}'_1(x, \Omega, V)$. En intégrant le produit de ces deux égalités, on obtient la quantité recherchée :

$$\int_{\Omega} H_{uv}^{1'}(x, \Omega, V) dx = \frac{-u}{\beta^{1/2}|\Omega|^{3/2}} \left(\int_{\Omega} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^{u-1} (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta|\Omega|)^{\frac{u+v+1}{2}}} dx \right) \int_{\Gamma} (\bar{x}_1 - x_1) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx$$

En outre, par définition des moments géométriques invariants, l'intégrale portant sur Ω est égale au moment invariant d'indice $(u-1, v)$:

$$\eta_{u-1, v} = \int_{\Omega} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^{u-1} (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta|\Omega|)^{\frac{u+v+1}{2}}} dx.$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} H_{uv}^{1'}(x, \Omega, V) dx = \frac{-u}{\beta^{1/2}|\Omega|^{3/2}} \eta_{u-1, v} \int_{\Gamma} (\bar{x}_1 - x_1) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx \quad (4.35)$$

Intégrale de $H_{uv}^{2'}$ (x, Ω, V)

Par le même argument que dans le § 4.4.2, on remarque qu'il suffit de remplacer x_1 par x_2 et l'indice u par v dans (4.35). Ainsi,

$$\int_{\Omega} H_{uv}^{2'}(x, \Omega, V) dx = \frac{-v}{\beta^{1/2}|\Omega|^{3/2}} \eta_{u, v-1} \int_{\Gamma} (\bar{x}_2 - x_2) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx \quad (4.36)$$

Intégrale de $H_{uv}^{3'}$ (x, Ω, V)

Pour $H_{uv}^{3'}$ (x, Ω, V), on a à la fois :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{uv}}{\partial |\Omega|} &= -\frac{u+v+2}{2} \frac{\beta(x_1 - \bar{x}_1)^u (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta|\Omega|)^{\frac{u+v+4}{2}}} \\ &= -\frac{u+v+2}{2|\Omega|} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^u (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta|\Omega|)^{\frac{u+v+2}{2}}} \end{aligned}$$

et $|\Omega|'(\Omega, V)$ donnée par (4.28). Comme

$$\eta_{u, v} = \int_{\Omega} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^u (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta|\Omega|)^{\frac{u+v+2}{2}}} dx,$$

il vient :

$$\int_{\Omega} H_{uv}^{3'}(x, \Omega, V) dx = -\frac{u+v+2}{2|\Omega|} \eta_{u, v} \int_{\Gamma} \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx \quad (4.37)$$

4.4.4 Conclusion

Il suffit, pour conclure, d'incorporer les égalités (4.35), (4.36), (4.37) dans (4.26) :

$$\langle \nabla_{\Omega} \eta_{u, v}, V \rangle_{\Gamma} = - \int_{\Gamma} \left(H_{uv}(x) + G_{uv}(x) \right) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx$$

où

$$G_{uv} = \frac{u+v+2}{2|\Omega_{int}|} \eta_{u,v} + \frac{u(x_1 - \bar{x}_1)}{\beta^{\frac{1}{2}} |\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u-1,v} + \frac{v(x_2 - \bar{x}_2)}{\beta^{\frac{1}{2}} |\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u,v-1} \quad (4.38)$$

En utilisant (4.24), on déduit l'expression de la dérivée de Gâteaux du critère *a priori* :

$$\langle \nabla_{\Omega} E_{prior}^{multi}, V \rangle_{\Gamma} = \sum_{0 \leq u+v \leq N} A_{uv}^{multi} \int_{\Gamma} (-H_{uv}(x) - G_{uv}(x)) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx$$

Par incorporation de la somme dans le produit scalaire, on conclut que la dérivée de Gâteaux du critère énergétique est donnée par :

$$\langle \nabla_{\Omega} E_{prior}^{multi}, V \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \left\langle \sum_{0 \leq u+v \leq N} A_{uv}^{multi} (-H_{uv}(x) - G_{uv}(x)) \mathcal{N}(x), V(x) \right\rangle_{\mathbb{R}^2} dx$$

D'après la fin du § 2.5.3 du chapitre 2, on déduit, par identification, que le gradient de forme est égal à :

$$\nabla_{\Omega} E_{prior}^{multi} = \sum_{0 \leq u+v \leq N} -A_{uv}^{multi} (H_{uv} + G_{uv}) \mathcal{N} \quad (4.39)$$

4.5 Résultats d'évolution contrainte

4.5.1 Optimisation de E_{prior}^{multi}

Nous présentons un résultat d'évolution, pour une référence unique, à partir de la minimisation de l'énergie *a priori* défini au § 4.3.3. L'optimisation est conduite, classiquement, par descente de gradient, ce qui donne lieu à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -\nabla_{\Omega} E_{prior}^{multi} \cdot \mathcal{N}$$

Par ailleurs, dans le cas d'une seule forme de référence que nous considérons dans un premier temps, A_{uv} se réduit à :

$$A_{uv} = \sum_{0 \leq p+q \leq N} C_{pq} a_{pu} a_{qv} (\lambda_{p,q} - \lambda_{p,q}^{ref}).$$

L'évolution d'une forme arbitraire, à partir du critère énergétique *a priori* définie pour une unique forme de référence, réduit les dissimilarités entre les deux formes. A convergence, le contour de la forme en évolution épouse les frontières de l'objet défini comme référence. La Figure 4.2 illustre ce propos : soumis à la référence « œufs », la « poule » retourne à l'état d'œufs. Pour cette raison, on parle d'évolution contrainte par un *a priori* de forme.

Dans cet exemple, l'implantation a été réalisée par *level-set*, ce qui permet les changements de topologie. A partir de l'objet « poule », connexe mais non convexe, on aboutit à un objet à quatre composantes connexes qui sont toutes convexes : « œufs ». L'évolution présentée à la Fig. 4.2 montre de quelle façon le contour évolue afin de parvenir à ces changements de topologies.

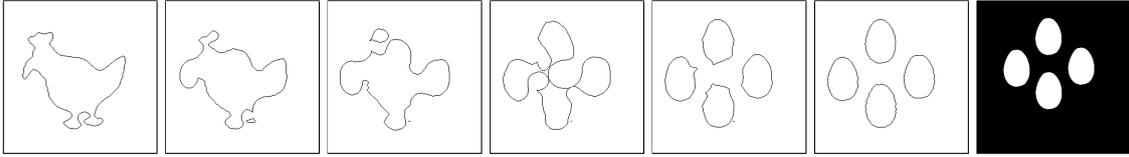


FIGURE 4.2 – Evolution de courbe avec changements de topologie. À gauche : courbe initiale (d’après [Sapiro et Tannenbaum, 1995]); au centre : évolution de la courbe; à droite : forme de référence. Extrait de [Charbonnier, 2009].

4.5.2 Introduction en segmentation

Dans [Foulonneau, 2004], l’*a priori* de forme est incorporé à un critère énergétique de segmentation. Dans celui-ci, le terme usuel de longueur est remplacé par E_{prior}^{multi} . Plus précisément, le critère est écrit comme une combinaison entre énergie d’attache aux données et énergie *a priori* :

$$E(\Omega) = (1 - \alpha)E_{data}(\Omega) + \alpha E_{prior}^{multi}(\Omega) \quad (4.40)$$

où le paramètre α est le poids que l’on souhaite donner à l’*a priori*. L’algorithme proposé dans [Foulonneau, 2004] introduit successivement la contrainte de forme, avec une précision et un poids croissants. Au départ, la segmentation est conduite à partir des données, avec éventuellement un terme de longueur. Ce résultat sert ensuite d’initialisation à la minimisation de (4.40) avec des moments allant jusqu’à un certain ordre N . L’algorithme itère par la suite cette procédure : le résultat obtenu par évolution est utilisé comme initialisation d’une nouvelle segmentation contrainte, avec une représentation plus précise des formes à l’aide d’un ordre supérieur. La Fig. 4.3 montre la segmentation successive du panneau « stop » en augmentant progressivement l’ordre des moments : $N = 0, 10, 30, 42$. L’ensemble des formes de référence est constitué d’une silhouette de panneau « stop », pour différentes orientations : $-60^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. L’orientation de l’objet est, de cette manière, prise en compte à travers un ensemble de variations potentielles. Ainsi, les moments ne sont pas rendus invariants dans le critère énergétique par rapport au groupe des rotations. Ceci permet de considérer des variations d’orientation sans accroître la difficulté de l’optimisation.

Dans cet exemple, la situation testée est une image réelle qui présente une occultation du fait de la présence d’un poteau. La segmentation sans contrainte de forme laisse apparaître cette occultation. L’introduction de l’*a priori* de forme montre que celle-ci est progressivement éliminée. En particulier, les caractères sur le panneau sont correctement reconstitués, alors qu’ils étaient initialement masqués par le poteau. Ceci est rendu possible grâce à l’information qu’apporte la forme de référence.

La première étape de segmentation permet de déterminer la position et les dimensions de l’objet dans l’image. La forme de référence la plus proche de l’objet est reconnue à l’aide d’une pondération prépondérante dans l’ensemble des formes de référence et l’optimisation du critère énergétique (4.40) contraint le modèle déformable à ressembler principalement à celle-ci.

4.6 Conclusion

La contrainte de forme proposée dans [Foulonneau, 2004] repose sur une description paramétrique des formes par l’intermédiaire des moments de Legendre de leur fonction caractéristique. Une information globale de haut niveau est ainsi prise en considération, ce qui permet de décrire

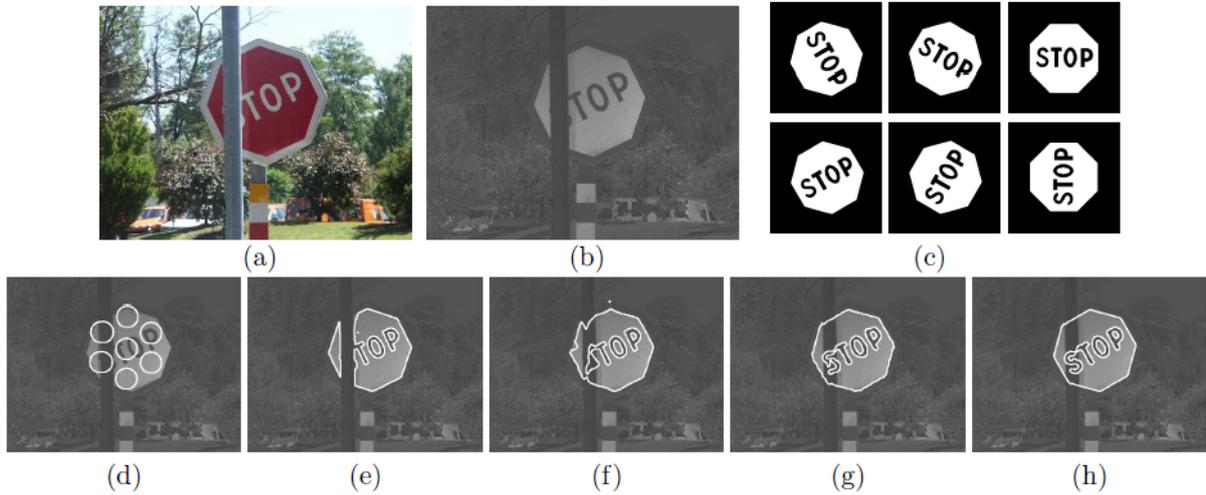


FIGURE 4.3 – Image originale RVB (a), image de coefficient chromatique rouge r associée (b) par $r = R/(R + V + B)$, ensemble de 6 images de référence utilisé (c). Initialisation de la segmentation (d), résultat sans contrainte de forme ni terme de courbure (e), résultat avec la contrainte de forme multi-modèles à l'ordre N : $N = 10$ (f), $N = 30$ (g) et $N = 42$ (h). Extrait de [Foulonneau et al., 2009].

des formes à topologies non triviales (avec notamment plusieurs composantes connexes ou des trous).

Le critère énergétique *a priori*, défini comme un mélange de gaussienne, contraint le modèle déformable vers l'ensemble de formes de référence. Il a initialement été introduit dans le cadre de la segmentation d'image. Dans ce cas, l'énergie gouvernant l'évolution du modèle s'écrit comme une combinaison entre *a priori* et attache aux données.

Les résultats illustrent le fait que l'information globale apportée par l'*a priori* permet de segmenter correctement un objet sujet à occultations. A partir d'un résultat de segmentation obtenu classiquement, la contrainte de forme est introduite progressivement en augmentant la précision de la description des objets en termes de moments.

A notre connaissance, cette combinaison *a priori* de forme et attache aux données, reste limitée dans la littérature au cas de la segmentation. Nous nous proposons de l'évaluer en reconstruction, ce qui fait l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre 5

Tomographie et reconstruction

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les deux modalités de tomographie annoncées dans l'introduction. On rappelle que la tomographie est une technique d'observation et d'imagerie non invasive qui permet d'avoir accès aux éléments constitutifs d'un objet. On acquiert ainsi, en 2D, une coupe du domaine qu'on souhaite examiner : *tomos* signifie étymologiquement *coupe*.

De manière générale, on peut distinguer trois modalités expérimentales en fonction de la position des sources et des capteurs : l'émission (les sources sont au sein de l'objet et émettent un rayonnement dans toutes les directions), la transmission (sources et capteurs se font face et encadrent le domaine d'étude), la réflexion (les sources sont à l'extérieur de l'objet et les récepteurs enregistrent l'onde réfléchie), voir Fig. 5.1. Nous considérons dans la suite le cas de l'émission pour la tomographie linéaire et celui de la transmission pour la tomographie par temps d'arrivée.

Ce chapitre d'état de l'art est organisé comme suit. Dans la section 5.2, nous présentons la modalité d'émission dont le modèle direct repose sur la transformée de Radon. La section 5.3 décrit les méthodes de reconstruction pixellique régularisée qui lui sont associées. La section 5.4 est consacrée à la tomographie par temps d'arrivée. Le problème est non linéaire et le critère énergétique est alors habituellement linéarisé. Dans la section 5.5, on présente les différentes techniques de reconstruction algébrique qui utilisent cette linéarisation. La section 5.6 est consacrée aux méthodes de reconstruction orientée objet. Ces dernières procèdent par évolution de forme et estiment simultanément la forme de l'hétérogénéité et ses paramètres d'intensité. Les développements de ces méthodes sont présentés dans les deux cas : linéaire et non linéaire.

5.2 Tomographie d'émission

Nous considérons dans cette section le cas de la tomographie d'émission utilisée dans le domaine médical.

5.2.1 Position du problème

La tomographie d'émission repose sur l'utilisation d'un traceur radioactif qui se fixe sur les régions à forte activité métabolique (par exemple, le cerveau, des tumeurs cancéreuses, un

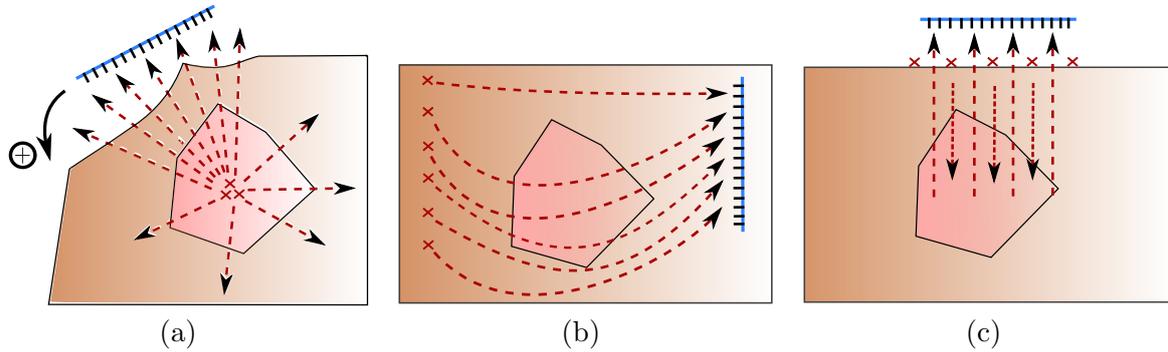


FIGURE 5.1 – Modalités de tomographie : émission (a), transmission (b), réflexion (c).

organe infecté). La radioactivité atteint une forte concentration dans ces régions et des photons γ sont localement émis dans toutes les directions. Ceci permet d'acquérir une information sur le fonctionnement des organes qui est complémentaire à celle portant sur leur anatomie.

La mesure correspond au nombre de photons collectés pour une direction donnée. Pour ce faire, une barrette de détecteurs est en rotation autour du patient. Elle comprend des collimateurs qui permettent de sélectionner les rayons γ dans la direction perpendiculaire aux détecteurs. Ceci améliore sensiblement la qualité de l'acquisition.

On approche communément le parcours des photons par des lignes droites, ce qui est une approximation raisonnable du fait de l'énergie du rayonnement. En réalité, l'interaction avec la matière peut donner lieu à différents phénomènes physiques (par exemple, diffusion Compton, effet photoélectrique) que nous négligeons ici. On pourra se référer à [Koulibaly, 1996] pour leur prise en compte.

Le problème qui consiste à déterminer la mesure, connaissant l'objet, est appelé problème *direct*. Si l'on désigne l'objet par f et l'observation par p , ce problème s'écrit :

$$p^n = \mathcal{R}f + \eta \quad (5.1)$$

dans lequel f est liée à la concentration de traceur radioactif en chaque point, le bruit η est supposé additif et gaussien et où \mathcal{R} est l'opérateur direct. Un bruit de Poisson est généralement considéré [Chan et al., 2007] mais nous nous restreignons ici au cas gaussien. Nous nous concentrons, à présent, sur la partie déterministe de l'opérateur, i.e. sur \mathcal{R} .

5.2.2 Approximations effectuées

Nous présentons ici la tomographie d'émission comme un processus de comptage du nombre de photons dans une direction donnée. Le parcours du rayonnement en lignes droites est une approximation hautes fréquences de la propagation d'une onde électromagnétique par les équations de Maxwell.

5.2.3 Opérateurs

Modélisation intégrale des mesures

Pour un angle de rotation θ donné, on considère que le rayonnement parcourt le domaine d'étude selon des droites parallèles. La mesure du nombre de photons incidents dans une direction

est modélisée mathématiquement par l'intégration du rayonnement de l'objet le long de cette droite [Kak et Slaney, 1988]. Ceci correspond à la définition de la transformée de Radon :

$$[\mathcal{R}f](u, \theta) = \int_{R_{u,\theta}} f(x) dR_{u,\theta}(x) \quad (5.2)$$

où $dR_{u,\theta}(\cdot)$ est l'élément de longueur le long de la droite d'observation $R_{u,\theta}$. Celle-ci est caractérisée par les valeurs de l'angle θ et de la position u par rapport au centre de rotation, Fig. 5.2-a. Comme cet opérateur repose sur une intégration selon une direction fixée, il est linéaire.

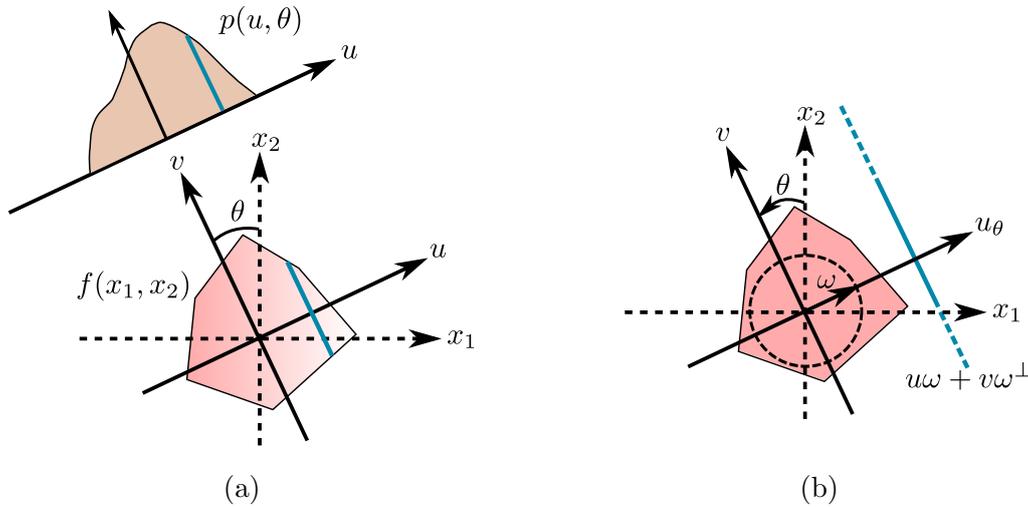


FIGURE 5.2 – Principe de la transformée de Radon (a) et expression de la droite d'observation à l'aide d'un vecteur ω du cercle unitaire (b).

Afin d'assurer que $[\mathcal{R}f](u, \theta)$ soit finie, nous supposons f bornée et mesurable dans $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Le domaine \mathcal{D} désigne le domaine image, supposé borné. La transformée de Radon est alors un opérateur sur les espaces suivants :

$$E = \{f, f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée, positive, mesurable}\} \quad (5.3)$$

$$F = \{p, p : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée, positive, mesurable}\} \quad (5.4)$$

où \mathcal{F} est l'espace des couples (u, θ) caractérisant $R_{u,\theta}$.

Opérateur de Radon

Afin de déterminer l'équation de la droite d'observation, il est plus aisé de se placer dans le repère d'observation (O, u_θ, v_θ) associé à l'angle de rotation θ . En effet, la droite $R_{u,\theta}$ correspond alors à la droite $u_\theta = u$, voir Fig. 5.2-a. Le changement de repère :

$$\begin{pmatrix} u_\theta \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

dans lequel x_1 et x_2 désignent les coordonnées cartésiennes de x , fournit l'équation de cette droite (première ligne du système). On obtient de cette manière :

$$R_{u,\theta} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{D}, \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 = \langle \omega, x \rangle_{\mathbb{R}^2} = u\} \quad (5.5)$$

où \mathcal{D} désigne le domaine image et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 . Le vecteur ω est défini par $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$.

La transformée de Radon est définie de la manière suivante :

$$[\mathcal{R}f](u, \theta) = \int_{\mathcal{D}} f(x) \delta(\cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 - u) dx \quad (5.6)$$

où δ désigne la distribution de Dirac. Ceci consiste à prendre en compte explicitement l'équation de la droite (5.5) dans la définition de l'opérateur de Radon.

Enfin, il est possible d'exprimer l'opérateur de Radon de manière vectorielle [Natterer, 1986] à partir du vecteur $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$:

$$[\mathcal{R}f](u, \omega) = \int_{v \in \mathbb{R}} f(u\omega + v\omega^\perp) dv \quad (5.7)$$

C'est généralement cette définition de la transformée de Radon qui est utilisée dans un cadre plus théorique. Elle traduit l'intégration de l'objet f perpendiculairement à $u \cdot \omega$, ce qui correspond bien à la direction perpendiculaire à l'abscisse $u_\theta = u$ (Fig. 5.2-b). Dans le même esprit que dans [Ramlaou et Ring, 2007], nous l'emploierons au chapitre 6-§ 6.4.

Opérateur adjoint

L'application adjointe, également appelée opérateur de rétro-projection, est donnée [Jain, 1989] par :

$$[\mathcal{R}^*p](x) = \int_{\theta \in [0, \pi[} p(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta) d\theta \quad (5.8)$$

La rétro-projection au point x est donc définie comme la somme des différentes projections le long de toutes les droites d'observation passant par x .

On peut également exprimer cette somme à partir du vecteur ω , de direction θ , parcourant le cercle unité. Les projections $p(u, \omega)$ à considérer sont telles que la droite $u_\theta = u$ passe par x . Ceci correspond à la valeur $u = \langle x, \omega \rangle$. L'opérateur de rétro-projection prend alors l'expression suivante :

$$[\mathcal{R}^*p](x) = \int_{\omega \in S_1} p(\langle \omega, x \rangle_{\mathbb{R}^2}, \omega) d\omega \quad (5.9)$$

où S_1 désigne le cercle unité, i.e. de rayon 1, centré en $(0,0)$.

Rétro-projection de projection

L'expression de la transformée de Radon (5.7) et de son adjoint (5.9) permet d'en déduire celle de la rétro-projection d'une projection :

$$[\mathcal{R}^*\mathcal{R}f](x) = \int_{\omega \in S_1} \int_{v \in \mathbb{R}} f(\langle \omega, x \rangle_{\mathbb{R}^2} \omega + v\omega^\perp) dv d\omega$$

Nous aurons besoin de cette expression lorsque nous établirons le champ de vitesse relatif à notre reconstruction orientée objet (Chapitre 6). Cette formule n'est toutefois pas satisfaisante en pratique car elle ne fait pas apparaître une intégration sur le domaine image. On utilisera plutôt l'expression :

$$[\mathcal{R}^*\mathcal{R}f](x) = 2 \int_{\mathcal{D}} f(y) \frac{1}{|x - y|} dy \quad (5.10)$$

qui est donnée dans [Ramlau et Ring, 2007]. On peut en trouver la preuve dans [Natterer, 1986] (Théorème 1.5 p15). Nous présentons ici une justification de ce résultat par un changement de variable. Posons :

$$y = \langle \omega, x \rangle \omega + v \omega^\perp = \psi_x(\theta, v)$$

On supposera d'abord que $v > 0$, pour que ψ soit bijectif (dans le cas contraire, on aurait également $y = \psi_x(-\theta, -v)$). Pour $v > 0$, on obtient à l'aide de ψ_x :

$$[\mathcal{R}^* \mathcal{R} f](x) = \int_{\theta \in S_1} \int_{v \in \mathbb{R}} f \circ \psi_x(\theta, v) dv d\theta = \int_{\mathcal{D}} f(y) |\det J_\psi|^{-1} dy$$

Le calcul de la Jacobienne donne, après quelques développements, en fonction de ω :

$$\det J_\psi = \langle \omega^\perp, x - y \rangle$$

On constate, à présent, que le vecteur $x - y$ n'a pas de composante par rapport à ω . En effet, en remplaçant y par son expression, on a :

$$\langle \omega, x - y \rangle = \langle \omega, x \rangle - \langle \omega, y \rangle = \langle \omega, x \rangle - \langle \omega, x \rangle \quad (5.11)$$

car ω et ω^\perp sont orthonormés. Comme le vecteur $x - y$ a une composante uniquement sur le vecteur ω^\perp , on a : $|\det J_\psi| = |x - y|$. Ceci permet de conclure, en relâchant la restriction pour v :

$$[\mathcal{R}^* \mathcal{R} f](x) = 2 \int_{\mathcal{D}} f(y) \frac{1}{|x - y|} dy$$

le coefficient 2 apparaît car on rappelle que y est à la fois atteint pour le couple (θ, v) et le couple $(-\theta, -v)$.

La rétro-projection des projections se comporte donc comme une convolution de l'objet avec la fonction $x \rightarrow 1/|x|$. L'utilisation de l'adjoint sur les données de projection est ainsi à l'origine d'un flou caractéristique. Ce dernier produit des artefacts « en étoile » et ne permet pas d'avoir une reconstruction satisfaisante de l'objet.

5.2.4 Méthodes analytiques d'inversion

Nous décrivons, à présent, quelques méthodes d'inversion qui reposent sur certaines propriétés analytiques de l'opérateur direct, notamment dans le domaine de Fourier. Ces méthodes correspondent à une première classe de techniques. Leurs résultats feront office de base de comparaison afin d'évaluer notre algorithme de reconstruction contrainte (chapitre 6).

Tout d'abord, il existe plusieurs expressions [Natterer, 1986] de l'inverse de l'opérateur de Radon. Ces dernières sont, toutefois, souvent inutilisables en pratique. Compte tenu que la rétro-projection des projections correspond à une convolution de l'objet, une première méthode analytique consiste à déconvoluer le signal. On obtient alors une reconstruction par rétro-projection/filtrage. Celle-ci est peu employée en pratique car elle nécessite un filtre 2D peu évident à mettre en œuvre.

Une autre possibilité consiste à se placer dans le domaine de Fourier. Le Théorème des projections, également dénommé Théorème de la coupe centrale, relie la transformée de Fourier des projections avec celle de l'objet. Il s'énonce comme suit :

Théorème 5.2.1. (*dit des projections*) Si on note $P_\theta(U)$ la transformée de Fourier, par rapport à u , de $p_\theta(u) = p(u, \theta)$, alors :

$$P_\theta(U) = F(U \cos \theta, U \sin \theta)$$

où F est la transformée de Fourier de f .

D'après ce théorème, si on construit la transformée de Fourier F de f de manière radiale à partir de la transformée de Fourier 1D des projections, on peut obtenir une reconstruction de l'objet par transformée inverse.

Une seconde approche qui peut également se dériver du théorème des projections consiste à prendre la transformée de Fourier inverse de $P_\theta(U)$ et à la filtrer par un filtre rampe :

$$q(v, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(U) |U| \exp(2i\pi Uv) dU$$

Ce filtre est l'inverse du filtre $x \rightarrow 1/|x|$ qui intervient dans la rétro-projection des projections. En prenant la rétro-projection de $q(u, \theta)$, on obtient la méthode de filtrage/rétro-projection (ou rétro-projection filtrée) dont les résultats sont bien meilleurs que ceux de la simple rétro-projection. Notons que comme le filtre rampe est passe-haut, il amplifie le bruit et on utilise, en pratique, un second filtre pour annuler les hautes fréquences.

5.3 Méthodes itératives régularisées

Une seconde classe de méthodes est donnée par les méthodes itératives d'inversion. Celles-ci reposent, la plupart du temps, sur la formulation discrète des opérateurs directs et adjoints.

5.3.1 Opérateurs discrets

Comme l'opérateur direct \mathcal{R} est linéaire, il existe une matrice \mathbf{R} telle que, si on ordonne les valeurs de f sous forme d'un vecteur, on ait :

$$p = \mathbf{R}f \tag{5.12}$$

Dans cette approche, l'opérateur adjoint correspond à la transposée \mathbf{R}^t de \mathbf{R} .

Nous présentons deux façons de définir les coefficients \mathbf{R}_{ij} . Pour la i -ème direction d'observation portée par la droite R_i , on a d'une part :

$$p_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \mathbf{R}_{ij} f(x_j)$$

où n désigne le nombre de pixels. D'autre part, la formulation intégrale (5.2) peut s'approcher par :

$$p_i = \int_{R_i} f \approx \sum_{1 \leq j \leq n} \mathbb{1}_{R_i}(x_j) f(x_j)$$

où $\mathbb{1}_{R_i}$ est la fonction caractéristique de R_i . On déduit, par identification, qu'un modèle immédiat consiste à prendre exactement :

$$\mathbf{R}_{ij} = \mathbb{1}_{R_i}(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \in R_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.13}$$

Ce modèle est appelé modèle de Dirac. Bien entendu dans le cas discret, la droite R_i est matérialisée par une largeur donnée, Fig. 5.3-a. La dénomination modèle de Dirac est à rapprocher de (5.6).

En réalité, la somme le long du rai R_i nécessite de calculer l'aire de l'intersection de chaque pixel avec le rai R_i (Fig. 5.3-b), ce qui s'avère coûteux. Un modèle d'approximation à moindre coût, plus satisfaisant que le modèle de Dirac, est donné par le modèle de disque [Koulibaly, 1996].

Ce dernier repose sur la projection de chaque pixel sur l'axe u_θ . Afin que cette projection s'effectue de manière identique, quel que soit l'angle d'observation θ , la maille cartésienne est remplacée par une maille circulaire (Fig. 5.3-c). La distribution d'intensité d'un disque est donnée sur la Fig. 5.3-d. Ainsi, quel que soit le couple (u, θ) , chaque disque se projette de manière similaire. Le coefficient \mathbf{R}_{ij} correspond à la longueur de l'intervalle projeté.

Pour simuler les données de projection, nous avons utilisé un modèle de disque incorporé dans le logiciel Matlab[®]. Par rapport à ce qui vient d'être décrit, les pixels sont divisés en quatre pour une plus grande précision. Chaque pixel contient ainsi quatre disques.

Le calcul de l'opérateur discret \mathbf{R} a été implanté afin d'obtenir les projections par produit matrice/vecteur. D'un point de vue pratique, la matrice \mathbf{R} est stockée de manière creuse.

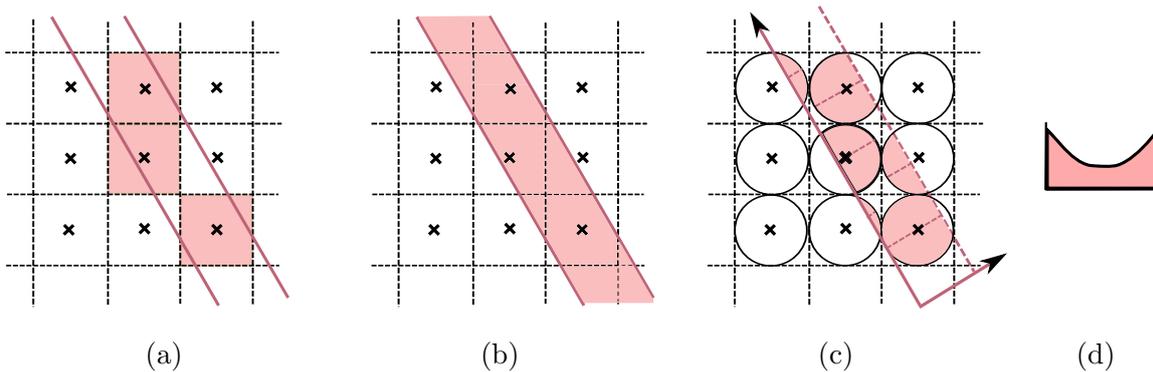


FIGURE 5.3 – Modèle de Dirac (a), modèle discret exact (non implanté) (b), modèle de disque (c), distribution d'un disque (d)

5.3.2 Problème mal posé - Régularisation de Tikhonov

Nous nous intéressons ici à l'estimation de l'objet f à partir des méthodes de régularisation. Celles-ci ont été introduites par Tikhonov et Arsenin [Tikhonov et Arsenin, 1977]. Le bruit d'acquisition, que nous supposons gaussien, nécessite de considérer des perturbations p^η de p . La reconstruction de l'objet s'obtient alors, formellement, en leur appliquant l'inverse de l'opérateur direct : $\ll f = \mathcal{R}^{-1}p^\eta \gg$. Or, on peut montrer [Kirsch, 1996] qu'en dimension infinie l'inverse d'un opérateur compact n'est jamais continu. D'après (5.2), la transformée de Radon est un opérateur compact [der Oord, 1967-1968]. Donc \mathcal{R}^{-1} n'est pas continu et de petites variations p^η peuvent donner lieu à de grande variations sur f . Par conséquent, le problème inverse est mal posé au sens où la stabilité est prise en défaut, voir chapitre 2-§ 2.2.

L'approche développée par Tikhonov et Arsenin [Tikhonov et Arsenin, 1977], à la fin des années 1970, consiste à estimer l'objet f par minimisation d'un critère de la forme :

$$E_T(f) = \frac{1}{2} \|p^\eta - \mathcal{R}f\|_F^2 + \alpha \|\nabla f\|_E^2 \quad (5.14)$$

Le premier terme est un terme de moindres carrés et joue le rôle d'attache aux données. Le second apporte de la régularité au problème inverse en pénalisant les fortes variations de f . Il pourrait également être constitué de la combinaison de termes de dérivées d'ordres supérieurs. Le paramètre α est positif et accorde plus ou moins de poids à la régularisation.

Les équations d'Euler-Lagrange associées à la minimisation de $E_T(f)$ donnent lieu à l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante :

$$\mathcal{R}^* \mathcal{R} f_\alpha - \alpha \Delta f_\alpha = \mathcal{R}^* p_{data}^\eta \quad (5.15)$$

avec condition aux bords de type Neumann homogène : $\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} = 0$ sur le bord $\partial \mathcal{D}$ du domaine image avec \mathcal{N} , la normale à $\partial \mathcal{D}$. L'opérateur Δ désigne le Laplacien et sa présence introduit un phénomène diffusif qui a tendance à lisser globalement l'image reconstruite. Les frontières n'apparaissent alors plus clairement, ce qui rend difficile la localisation des objets. Pour cette raison, la régularisation de Tikhonov est peu satisfaisante en pratique. C'est pour pallier ces inconvénients que les techniques de régularisation semi-quadratique ont été développées.

5.3.3 Régularisation semi-quadratique

L'extension semi-quadratique a été développée par les frères Geman [Geman et Reynolds, 1997; Geman et Yang, 1995]. Elle a, depuis, fait l'objet de plusieurs contributions dont [Charbonnier, 1994; Blanc-Féraud et al., 1995; Aubert et Vese, 1997; Idier, 2001]. L'approche semi-quadratique repose sur le fait que les forts gradients sont localisés au niveau de sauts d'intensité francs. Ces derniers caractérisent, la plupart du temps, les frontières des objets. Pour préserver les discontinuités, le principe de la régularisation semi-quadratique est d'introduire une fonction potentiel qui permet d'obtenir un comportement différent selon que le gradient soit localement fort ou faible.

Critère d'optimisation

Le critère énergétique de reconstruction semi-quadratique s'écrit de manière générale :

$$E(f) = \frac{1}{2} \|p - \mathcal{R}f\|_F^2 + E_{reg}(\nabla f, \phi) \quad (5.16)$$

La fonction ϕ constitue le potentiel. Nous reprenons les grandes lignes de [Charbonnier, 1994] dans lesquelles le potentiel intervient dans E_{reg} de la manière suivante :

$$E_{reg}(\nabla f, \phi) = \sum_k \phi(\nabla_{x_1} f(x_k)) + \sum_k \phi(\nabla_{x_2} f(x_k)) \quad (5.17)$$

Les notations $\nabla_{x_1} f(x_k)$ (resp. $\nabla_{x_2} f(x_k)$) désignent les composantes du gradient dans la direction x_1 (resp. x_2).

Fonction de pondération

Il existe dans la littérature plusieurs choix de fonctions de potentiel ϕ , par exemple $\phi = \min(u^2, 1)$ dans [Blake et Zisserman, 1987], $\phi = u^2/(1 + u^2)$ dans [Geman et Reynolds, 1997]. Pour une synthèse bibliographique sur les différents potentiels utilisés, on pourra se référer à [Charbonnier, 1994].

La différentiation du critère (5.17) donne lieu aux équations normales suivantes :

$$(\mathbf{R}^t \mathbf{R} - \alpha \Delta_{pond}) f = \mathbf{R}^t f \quad (5.18)$$

où le Laplacien pondéré Δ_{pond} est défini au nœud (i, j) par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda^N & 0 \\ \lambda^W & -\Sigma & \lambda^E \\ 0 & \lambda^S & 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients de cette matrice sont donnés par :

$$\lambda^E = \frac{\phi'(f_{i,j+1} - f_{i,j})}{2(f_{i,j+1} - f_{i,j})}, \lambda^W = \frac{\phi'(f_{i,j} - f_{i,j-1})}{2(f_{i,j} - f_{i,j-1})}$$

$$\lambda^S = \frac{\phi'(f_{i+1,j} - f_{i,j})}{2(f_{i+1,j} - f_{i,j})}, \lambda^N = \frac{\phi'(f_{i,j} - f_{i-1,j})}{2(f_{i,j} - f_{i-1,j})}$$

$$\Sigma = \lambda^E + \lambda^W + \lambda^N + \lambda^S$$

On peut constater que la fonction qui joue un rôle primordial est $\phi'(u)/(2u)$. Elle est appelée fonction de pondération. Les conditions pour imposer un lissage des zones homogènes et une préservation des discontinuité sont :

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\phi'(u)}{2u} = 1 \quad (5.19)$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\phi'(u)}{2u} = 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{\phi'(u)}{2u} \text{ continue et strictement décroissante} \quad (5.21)$$

Ainsi, lorsque nous avons une région d'intensité homogène au nœud (i, j) (i.e. lorsque les différences entre les valeurs de $f_{i,j}$ avec celles de ses quatre voisins $(i, j + 1)$, $(i, j - 1)$, $(i + 1, j)$ et $(i - 1, j)$ sont proches de zéro), le Laplacien pondéré se comporte localement comme Δ . La régularisation obtenue correspond donc à celle de Tikhonov. En revanche, lorsque la discontinuité est très marquée (i.e. aux frontières des objets), le Laplacien pondéré est constitué localement de termes nuls, ce qui permet de relâcher le lissage et de préserver la discontinuité. Les conditions imposées à la fonction de pondération offrent ainsi la possibilité d'avoir un comportement local différent en fonction des sauts d'intensité présents dans l'image.

Processus de ligne

Un processus de ligne est une variable $b = (b_1, b_2)$ qui marque localement une discontinuité suivant la direction horizontale pour b_1 et verticale pour b_2 . Typiquement, $b_1 = 0$ ou $b_2 = 0$ aux frontières des objets. Initialement [Geman et Geman, 1984], la variable b était booléenne et prenait ses valeurs dans $\{0, 1\}^2$. Elle a, par la suite, été considérée à valeurs dans $[0, 1]^2$ dans [Geman et Reynolds, 1997; Geman et Yang, 1995]. Les deux potentiels donnés en exemple de la

section précédente ont la propriété de pouvoir s'exprimer à l'aide d'un processus de ligne [Geman et Reynolds, 1997]. Les conditions de [Geman et Reynolds, 1997] ont ensuite été généralisé dans [Charbonnier, 1994] en montrant que les potentiels, qui vérifient (5.19)-(5.21), s'écrivent :

$$\phi(u) = \min_{b \in [0,1]} (bu^2 + \Psi(b)) = b^*u^2 + \Psi(b^*) \quad (5.22)$$

où le minimum est atteint en :

$$b^* = \frac{\phi'(u)}{2u} \quad (5.23)$$

Comme la fonction de pondération est évaluée, dans (5.17), en chacune des composantes du gradient, on a :

$$\begin{cases} b_1^*(x_k) = \frac{\phi'(\nabla_{x_1} f(x_k))}{2\nabla_{x_1} f(x_k)} \\ b_2^*(x_k) = \frac{\phi'(\nabla_{x_2} f(x_k))}{2\nabla_{x_2} f(x_k)} \end{cases} \quad (5.24)$$

En incorporant (5.22)-(5.24) dans le critère énergétique (5.17), on obtient finalement le terme de régularisation :

$$E_{reg}(\nabla f, \phi) = \sum_k \left(b_1^*(x_k) \cdot (\nabla_{x_1} f)^2(x_k) + b_2^*(x_k) \cdot (\nabla_{x_2} f)^2(x_k) \right) + \sum_k \left(\Psi(b_1^*(x_k)) + \Psi(b_2^*(x_k)) \right)$$

qui est quadratique en ∇f . La minimisation du critère énergétique complet (5.16) par rapport à f peut alors être conduite à l'aide des équations normales qui lui sont associées.

Remarque 5.3.1. *Le critère de reconstruction (5.16) qui faisait intervenir une variable unique f comporte à présent une seconde variable b qui minimise $\phi(u)$. Toutefois, le critère obtenu est quadratique lorsque la variable auxiliaire est fixée à b^* . Ceci est à l'origine du nom semi-quadratique introduit dans [Geman et Yang, 1995].*

L'algorithme de reconstruction semi-quadratique que nous avons présenté correspond à l'algorithme ARTUR qui a été développé dans [Charbonnier, 1994]. La stratégie adoptée est une minimisation alternée des deux variables. La première étape de minimisation porte sur b et est donnée par (5.24). La variable auxiliaire étant fixée, on effectue, dans un second temps, la minimisation par rapport à f .

La formulation (5.22) du potentiel ϕ porte le nom d'extension multiplicative. Celle-ci repose sur le produit entre b et u^2 . Une seconde approche est de faire intervenir la variable auxiliaire b de manière additive. Elle a donné lieu, dans [Charbonnier, 1994], à un second algorithme du nom de LEGEND. Dans [Allain et al., 2006], une version améliorée de cet algorithme est proposée.

Diffusion anisotrope

Dans ce qui précède, la prise en compte des discontinuités est effectuée avec un critère énergétique discret exprimé en fonction des coordonnées horizontales et verticales du gradient. Cette approche a ensuite été étendue, dans [Aubert et Vese, 1997], par l'étude mathématique, dans sa formulation continue, du terme de régularisation :

$$E_{reg}(\nabla f, \phi) = \int_{\mathcal{D}} \phi(\|\nabla f(x)\|_{\mathbb{R}^2}) dx \quad (5.25)$$

La régularisation n'est plus relâchée horizontalement ou verticalement mais dans la direction qui est normale à la discontinuité. Inversement, elle est préservée dans la direction tangentielle au saut d'intensité.

Comme les contours \mathcal{C} des objets peuvent être considérés comme des courbes de niveaux $\mathcal{C} = f^{-1}(c)$, ceci revient à limiter la régularisation dans la direction du gradient ∇f et à apporter de la diffusion dans la direction orthogonale au gradient.

Commentaire

Les fonctions de potentiel et de pondération permettent de limiter localement le rôle que joue la régularisation. Contrairement aux contraintes géométriques de forme, elles n'agissent pas sur l'ensemble du contour de l'objet.

Nous présentons, à la section 5.6, des formulations orientées objet du problème de reconstruction qui permettent de mettre en œuvre ces contraintes géométriques. Comme pour les méthodes analytiques, les résultats des méthodes itératives régularisées serviront de base de comparaison pour l'évaluation de notre méthode.

5.4 Tomographie par temps d'arrivée

Nous considérons, à présent, le problème de la tomographie par temps d'arrivée. Nous en décrivons le principe, les approximations faites, ainsi que les principales propriétés.

5.4.1 Position du problème

Le principe de la tomographie sismique est de faire traverser le domaine d'étude par des ondes mécaniques ou acoustiques. Celles-ci sont engendrées par des sources, et une série de capteurs permet de recueillir le signal obtenu. En fonction de la composition du milieu, notamment en présence d'hétérogénéité, le signal initial se modifie et l'analyse de ces modifications nous renseigne sur le contenu interne de la région étudiée. Cette analyse peut porter sur l'amplitude de la mesure, sur la totalité du signal (on parle alors de tomographie par forme d'onde) ou sur le temps que met l'onde à atteindre les capteurs.

Nous nous intéressons à cette dernière modalité qu'on appelle tomographie par temps d'arrivée. Bien sûr, le temps d'arrivée aux capteurs dépend de la vitesse caractéristique des matériaux traversés : plus un matériau a une vitesse élevée, plus l'onde le traversera rapidement.

Afin d'écrire le problème de façon intégrale, ce n'est pas la vitesse $v(x)$ qui est généralement considérée mais son inverse. On s'intéresse ainsi à reconstruire $s(x) = 1/v(x)$ qui est appelé champ de lenteur. Sa reconstruction, avec les disparités qu'elle peut contenir, permet d'identifier la présence de défauts ou d'objets. Pour cette raison, les applications de la tomographie par temps d'arrivée dépasse la sismique et comprend à l'heure actuelle le Contrôle Non Destructif d'ouvrages.

Concernant la modalité expérimentale, nous nous plaçons en transmission, c'est-à-dire dans le cas où sources et capteurs se font face. Nous détaillons au chapitre 8 le dispositif expérimental utilisé pour la prise de mesure en conditions réelles.

5.4.2 Approximations effectuées

Propagation d'ondes

Nous nous intéressons à la propagation du signal dans la direction orthogonale au front d'ondes. Cette direction est généralement désignée par le terme de rai. Nous considérons le cas où les sources délivrent un signal hautes fréquences. Ceci signifie que les ondes qui se propagent ont une longueur d'onde très petite par rapport aux dimensions des objets.

Loi de Descartes et de l'optique géométrique

On rappelle qu'en tomographie linéaire d'émission, le parcours des ondes est considéré comme s'effectuant en lignes droites. En tomographie par temps d'arrivée, ce n'est plus le cas. Toutefois, en régime hautes fréquences, on peut approcher le parcours par les lois de l'optique géométrique [Rawlinson et Sambridge, 2003]. On assimile ainsi le trajet de l'onde acoustique à celui d'un rayon lumineux. En particulier, on suppose qu'il suit le principe de Fermat du plus court chemin :

Proposition 5.4.1. (*Principe de Fermat*) *La géométrie de parcours d'une onde issue d'une source α vers un récepteur β est telle que le temps d'arrivée soit minimal. Autrement dit, le chemin reliant α à β est stationnaire en temps.*

Ceci est la principale différence avec la modalité de la tomographie d'émission. Elle a pour conséquence que le problème *perd sa linéarité*. Nous montrons au chapitre 7, cette caractéristique bien connue du problème (rappelée par exemple dans [Rawlinson et Sambridge, 2003]).

Une deuxième conséquence du principe de Fermat est constituée par la loi de Descartes en présence d'hétérogénéité. Celle-ci permet d'établir localement les angles que suivent le chemin réfléchi et réfracté. Nous ne tiendrons pas compte dans notre modélisation de la partie réfléchie du rayonnement. Dans notre approche, le trajet réfracté est approché par des arcs de cercle, voir § 5.4.4. On trouvera, par exemple dans [Telford et al., 1976], la prise en compte précise des phénomènes de réflexion et de réfraction dans le cas où le champ de lenteur est de gradient constant.

5.4.3 Trajet sur un domaine régulier

équation eikonale

La troisième conséquence du principe de Fermat, que nous mentionnons, correspond à la détermination de l'équation que suit le front d'onde. Il s'agit ici du front temporel que met l'onde pour atteindre chaque point du domaine. On peut, en effet, montrer (on pourra, par exemple, se référer à [Lakshminarayanan et Varadharajan, 1997]) que le principe de Fermat est équivalent à l'équation eikonale :

$$\|\nabla t\|_{\mathbb{R}^2} = s(x) \quad (5.26)$$

dans laquelle t désigne le temps parcouru par l'onde et $s(x)$ le champ de lenteur. Le gradient ∇ est à prendre par rapport à la composante spatiale x .

Cette équation permet de déterminer le temps d'arrivée que met l'onde pour atteindre un récepteur à partir d'une source donnée. A partir de raisonnements infinitésimaux portant sur la modification du front temporel, on peut, par exemple, déterminer l'équation que vérifie chaque rai reliant une source à un récepteur [Aki et Richards, 1980]. Nous choisissons, dans la section

qui suit, d'adopter le point de vue variationnel décrit dans [Cartan, 1967b] pour un chemin lumineux.

équation des rais

Une analyse dimensionnelle élémentaire, qui repose sur le fait qu'un temps est le produit d'une longueur par l'inverse d'une vitesse, permet de formuler le problème de manière intégrale :

$$t = \int_{R_{\alpha\beta}} s(x) dR_{\alpha\beta}(x) \quad (5.27)$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le rai qui relie la source α au récepteur β et où $dR_{\alpha\beta}(\cdot)$ est l'élément de longueur de $R_{\alpha\beta}$. Par rapport à la tomographie d'émission, c'est le champ de lenteur qui est intégré le long d'une direction de parcours.

Comme dans [Cartan, 1967b], nous procédons, à présent, à la paramétrisation du rai. Nous considérons ainsi que le chemin entre α et β est décrit par une fonction que nous noterons γ :

$$R_{\alpha\beta} = \{\gamma(\sigma) \in \mathbb{R}^2, a \leq \sigma \leq b\} \quad (5.28)$$

où nous avons désigné par a et b les valeurs du paramètres σ aux bornes du chemin, i.e. au niveau de la source et du récepteur.

En introduisant cette paramétrisation dans l'expression (5.27) du temps d'arrivée, on obtient :

$$t = \int_a^b s(\gamma(\sigma)) \|\dot{\gamma}\|_{\mathbb{R}^2} d\sigma \quad (5.29)$$

dans laquelle $\dot{\gamma}$ désigne la dérivée $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\sigma}$. Cette formulation permet d'obtenir des bornes d'intégration qui portent sur la variable σ et non plus sur le chemin d'intégration. Ce dernier est reporté dans la fonction à intégrer.

Comme par le principe de Fermat, le temps d'arrivée en β est minimal, on peut écrire les équations d'Euler-Lagrange relatives à l'optimisation de (5.29) par rapport au chemin γ . Ceci est possible car γ est présent dans une intégrale aux bornes fixes. Il vient alors l'équation de trajet suivante :

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{s(\gamma)\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|_{\mathbb{R}^2}} \right) = \nabla s(\gamma) \|\dot{\gamma}\|_{\mathbb{R}^2} \quad (5.30)$$

L'équation (5.30) est identique à celle d'un rai de lumière. L'indice optique du milieu [Cartan, 1967b] est remplacé par le champ de lenteur. Ce résultat est cohérent avec le fait que le trajet des ondes est modélisé comme un rayon lumineux en régime hautes fréquences.

Comme le chemin $\gamma(\sigma)$ est une courbe paramétrée de \mathbb{R}^2 , on a $\gamma(\sigma) = (\gamma_1(\sigma), \gamma_2(\sigma))$ et $\dot{\gamma}(\sigma) = (\frac{d\gamma_1}{d\sigma}(\sigma), \frac{d\gamma_2}{d\sigma}(\sigma))$. L'équation (5.30) correspond donc à un système de deux équations différentielles. Le facteur $\nabla s(\gamma)$, présent dans son second membre, désigne le gradient spatial (i.e. par rapport à x) du champ de lenteur. Il est évalué « au point γ », i.e. le long du rai de parcours.

Remarque 5.4.1. Si on développe la dérivée $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{s(\gamma)\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|_{\mathbb{R}^2}} \right)$ apparaît un terme de dérivée seconde $\ddot{\gamma}$. L'équation de trajet équivaut donc à un système de deux équations différentielles ordinaires (EDO) d'ordre deux.

5.4.4 Opérateur direct

Nous synthétisons dans cette section les éléments que nous venons de développer. De manière identique à la tomographie d'émission, les temps d'arrivée mesurés correspondent à un opérateur d'intégration le long d'une direction de parcours. On obtient ainsi deux formulations équivalentes :

$$t = \int_{R_{\alpha\beta}} s(x) dR_{\alpha\beta}(x) \quad (5.31)$$

$$t = \int_a^b s(\gamma(\sigma)) \|\dot{\gamma}\|_{\mathbb{R}^2} d\sigma \quad (5.32)$$

A la différence de la tomographie d'émission, l'équation de $R_{\alpha\beta}$, donnée par (5.30), fait intervenir le champ de lenteur s . Cette dépendance du parcours par rapport à la lenteur est à l'origine de la non linéarité du problème. Nous le montrerons au chapitre 7 dans la modélisation que nous proposons du problème direct.

Remarque 5.4.2. *Nous avons insisté sur le fait que le problème direct est non linéaire par rapport à s . Toutefois, lorsque la lenteur s est fixée, l'expression des temps d'arrivée (donnée par exemple par l'Eq (5.31)) est linéaire. En effet, le modèle direct correspond à une intégration le long d'un chemin qui ne varie plus simultanément avec la fonction à intégrer.*

Notation 5.4.1. *Dans le cas continu, on notera l'opérateur direct $\mathcal{R}(s)$, de sorte que les temps d'arrivée sont donnés par la relation $t = \mathcal{R}(s).s$.*

5.5 Méthodes d'inversion discrètes

Les méthodes classiques d'inversion pixeliques utilisées en inversion en tomographie par temps d'arrivée telles que ART et SIRT, sont pour la plupart des méthodes itératives utilisant une formulation discrète de l'opérateur direct et de son adjoint.

5.5.1 Opérateurs discrets

Opérateur direct

Nous considérons ici un champ de lenteur *fixé*. Comme pour la modalité d'émission, il est possible d'assembler une matrice permettant d'obtenir les temps mesurés. Toutefois, pour des raisons de stockage, nous adoptons la démarche proposée dans [Côte, 1988] qui consiste à additionner des temps élémentaire en se passant d'une matrice qui décrit les directions de parcours.

Le domaine est discrétisé à l'aide d'un maillage régulier aux nœuds duquel est associée une valeur du champ de lenteur. On définit, à présent, la quantité suivante :

Définition 5.5.1. *Soit ℓ_{ij} la longueur de l'intersection du pixel x_j avec le rai R_i . Lorsque R_i ne traverse pas x_j , leur intersection est vide et on pose $\ell_{ij} = 0$.*

Avec cette définition, le temps d'arrivée associé au i -ème couple source/capteur s'écrit comme la somme des temps obtenus dans chaque maille :

$$t_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \ell_{ij} s(x_j) \quad (5.33)$$

ce qui correspond à la formulation discrète de l'équation (5.31). Dans (5.33), n désigne le nombre de pixels dans l'image.

Définition 5.5.2. Pour un champ de lenteur fixé s , l'opérateur matriciel direct associé à s est défini par $\mathbf{R} = (\ell_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, de sorte que $\mathbf{t} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}$

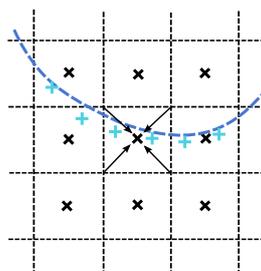


FIGURE 5.4 – Calcul du temps par interpolation dans une maille.

Le calcul des ℓ_{ij} n'est toutefois pas évident en pratique. La solution adoptée dans [Côte, 1988] est de se déplacer dans la direction tangente au rai R_j , selon un certain pas qu'on se fixe. Le nouveau point obtenu est inclus dans une des mailles cartésiennes et le temps lui correspondant est calculé par interpolation. On utilise, à cet effet, les quatre valeurs de lenteurs aux différents nœuds de la maille en accordant plus de poids au nœud le plus proche du point, voir Fig. 5.4.

Le point essentiel est la détermination du rai de parcours. Comme son calcul numérique permet de se ramener à une somme discrète, nous considérons que la résolution de l'équation de trajet (5.30) fait partie de la discrétisation de l'opérateur direct.

La synthèse effectuée dans [Rawlinson et Sambridge, 2003] fait principalement état de trois méthodes pour approcher l'opérateur direct.

1. Les méthodes de tracé de rais se divisent en méthodes de tir et en méthodes par inflexion.
 - Les méthodes de tirs consistent, à partir du point source, à estimer la pente initiale pour que le trajet atteigne le récepteur (Fig. 5.5-a).
 - Les méthodes par inflexion (*bending methods*) fixent les bornes du chemin au niveau d'une source et d'un récepteur et estiment la trajectoire parcourue de manière itérative. Un terme correctif est introduit pour modifier le chemin initial. Ce terme est déterminé, soit à partir de l'équation de trajet (5.30), soit à partir du principe de Fermat (c'est-à-dire par recherche de chemin minimal), voir Fig. 5.5-b.
2. Les méthodes par propagation de front, telles que le *Fast Marching* [Sethian, 1999] propagent d'abord les temps de parcours à l'aide de l'équation eikonale (5.26). Le chemin minimal est ensuite déterminé par descente de gradient à partir du récepteur considéré.
3. Les méthodes de recherche de chemin minimum dans un graphe s'inspirent de la théorie des jeux. Elles affectent à chaque arête reliant deux nœuds voisins un coût correspondant au temps de parcours. Le trajet de l'onde correspond alors à celui possédant un coût minimum.

Nous avons utilisé une méthode de *bending* simplifiée, proposée dans [Côte, 1988], reposant sur un parcours décrit par arcs de cercle. Le rayon du trajet circulaire est déterminé, par dichotomie, de manière à ce qu'il minimise le temps de parcours. On trouve également cette approche, qui

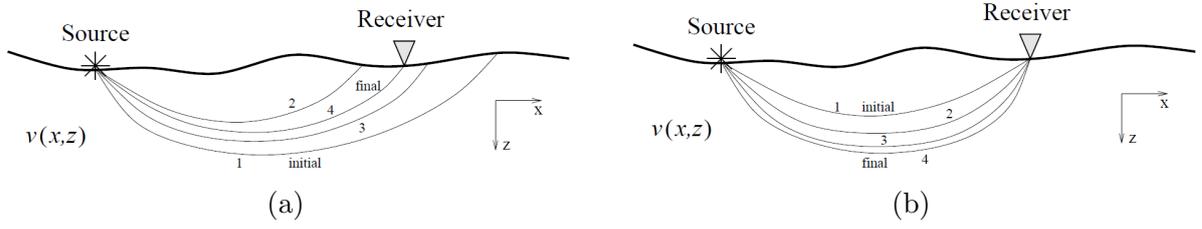


FIGURE 5.5 – Shooting (a) et bending (b) methods. Extrait de [Rawlinson et Sambridge, 2003].

réduit sensiblement le coût de calcul, dans [Thurber, 1983]. Nous plaçons la description de cette méthode au chapitre 7.

Opérateur de rétro-projection

Nous présentons dans cette section deux discrétisations de l'opérateur de rétro-projection. On rappelle qu'en émission, celui-ci est défini comme la somme des différentes projections le long de toutes les droites d'observation passant par x .

Une approche élémentaire repose sur l'analyse dimensionnelle du champ de lenteur comme quotient d'un temps par rapport à une longueur. En considérant chaque rai qui traverse le i -ème pixel, on effectue la moyenne des rapports entre les temps d'arrivée de ces rais avec leurs longueurs. On parvient ainsi à l'estimation :

$$s(x_i) = \frac{1}{N_{x_i}} \sum_{j|x_i \in R_j} \frac{T_j}{L_j} \quad (5.34)$$

où la somme porte sur tous les rais R_j passant par le pixel x_i . Le nombre N_{x_i} correspond au cardinal de cet ensemble et T_j et L_j sont respectivement le temps d'arrivée et la longueur de ces rais.

Cette expression est très simple mais ne permet pas de tenir compte de la géométrie des rais dans le pixel x_i . Or, il paraît naturel, comme dans [Côte, 1988], de donner aux rais d'autant plus d'importance que leur intersection avec le pixel x_i est grande.

A partir de la définition 5.5.1, l'idée consiste à faire intervenir, dans (5.34), un coefficient α_j défini par : $\alpha_j = \ell_{ij} / \sum_j \ell_{ij}$. Ce coefficient de pondération remplace le facteur N_{x_i} . On obtient de cette manière la rétro-projection discrète suivante :

$$s(x_i) = \sum_{j|x_i \in R_j} \left(\frac{\ell_{ij}}{\sum_j \ell_{ij}} \right) \frac{T_j}{L_j} \quad (5.35)$$

L'expression (5.35) est celle que nous utilisons pour la rétro-projection discrète des temps d'arrivée. Plus précisément, nous employons l'idée, développée dans [Côte, 1988], qui consiste à remplacer le pixel x_i , dans $x_i \in R_j$, par un disque appelé *disque d'influence*. La longueur ℓ_{ij} correspond alors à la longueur de l'intersection du rai R_j avec ce disque.

5.5.2 Linéarisation

Les méthodes procédant par optimisation considèrent le résidu entre les temps mesurés T et ceux obtenus par le modèle direct de tomographie :

$$r(s) = T - t(s) \quad (5.36)$$

où $t(s)$ désigne le modèle direct de temps d'arrivée pour un champ de lenteur s . Comme $t(s)$ est non linéaire, le résidu lui-même est non linéaire. Le critère énergétique à optimiser est un terme de moindres carrés :

$$E = \frac{1}{2} \|T - t\|_F^2 = \frac{1}{2} \|r\|_F^2 \quad (5.37)$$

auquel on peut ajouter un terme de régularisation. Nous réduisons volontairement le critère à son terme d'attache aux données (5.37), en gardant les mêmes notations qu'en émission. L'espace F désigne l'espace du modèle direct et E celui du champ de lenteur s . On supposera désormais :

$$E = \{s, s : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée, positive, mesurable}\} \quad (5.38)$$

$$F = \{t, t : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée, positive, mesurable}\} \quad (5.39)$$

où \mathcal{F} est l'espace des couples (α, β) .

La démarche pour revenir à un problème linéaire est de linéariser le résidu. On obtient alors le terme de moindres carrés suivant :

$$E = \frac{1}{2} \|r(s_k) + \mathbf{J}_r(s_k)(s - s_k)\|_F^2 \quad (5.40)$$

où s_k désigne le champ de lenteur employé pour la linéarisation et \mathbf{J}_r la Jacobienne du résidu. Le calcul de la Jacobienne $\mathbf{J}_r(s_k)$ est donné, voir par exemple [Taillandier, 2008], par $\mathbf{J}_r(s_k) = -\mathbf{R}(s_k)$, où $\mathbf{R}(s_k)$ désigne l'opérateur direct relatif au champ s_k .

Le champ de lenteur reconstruit s'obtient alors en suivant la procédure :

- Poser $h_k = \arg \min_h E(h)$ où,

$$E(h) = \frac{1}{2} \|r(s_k) - \mathbf{R}(s_k)h_k\|_F^2 \quad (5.41)$$

- Poser $s_{k+1} = s_k + h_k$.

Les équations normales associées à (5.41) donnent lieu à l'algorithme de Gauss-Newton :

$$\begin{cases} \left(\mathbf{R}(s_k)^t \cdot \mathbf{R}(s_k) \right) h_k = \mathbf{R}(s_k)^t \cdot r(s_k) \\ s_{k+1} = s_k + h_k \end{cases} \quad (5.42)$$

Remarque 5.5.1. *Il est également possible, comme il est rappelé dans [Côte, 1988], de faire intervenir des termes statistiques dans l'énergie (5.40). On obtient alors un terme de moindres carrés pondérés. Par exemple, à partir de la matrice de covariance \mathbf{Cov}_t sur les temps mesurés, il vient :*

$$E = \left(r(s_k) + \mathbf{J}_r(s_k)(s - s_k) \right)^t \mathbf{Cov}_t^{-1} \left(r(s_k) + \mathbf{J}_r(s_k)(s - s_k) \right)$$

Ainsi, si \mathbf{Cov}_t est diagonale de coefficients $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq N_p}$ avec N_p le nombre de mesures, le poids est d'autant plus important que σ_i est petit, i.e. que la donnée de temps est considérée comme sûre.

Une autre approche, consiste à écrire :

$$\begin{aligned} r(s_k) - \mathbf{R}(s_k) \cdot h_k &= \left(T - \mathbf{R}(s_k) \cdot s_k \right) - \left(\mathbf{R}(s_k) \cdot (s_{k+1} - s_k) \right) \\ &= T - \mathbf{R}(s_k) \cdot s_{k+1} \end{aligned}$$

L'algorithme de Gauss-Newton prend alors la forme suivante :

Poser $s_{k+1} = \arg \min_s E(s)$ où,

$$E(s) = \frac{1}{2} \|T - \mathbf{R}(s_k) \cdot s\|_F^2 \quad (5.43)$$

Les équations normales associées à (5.43) sont données par :

$$\left(\mathbf{R}(s_k)^t \cdot \mathbf{R}(s_k) \right) s_{k+1} = \mathbf{R}(s_k)^t \cdot T \quad (5.44)$$

5.5.3 Méthode ART

Le champ reconstruit à partir de (5.43) correspond à la solution, au sens des moindres carrés, de l'équation *linéaire* :

$$\mathbf{R}(s_k) \cdot s_{k+1} = T \quad (5.45)$$

Pour un problème linéaire, plusieurs méthodes dites *algébriques* peuvent être employées. Ces dernières correspondent à des méthodes itératives. Nous présentons d'abord la méthode ART.

Si nous notons $\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{R}(s_k)$, le problème consiste à résoudre mathématiquement :

$$\mathbf{R}^{(k)} \cdot s_{k+1} = T \quad (5.46)$$

La méthode ART¹, introduit par Kaczmarz [Kaczmarz, 1937], repose sur l'interprétation de (5.46) en termes algébriques. Chaque ligne définissant un hyperplan, la solution de ce système appartient nécessairement à chacun d'entre eux.

Notons $(H_i)_{1 \leq i \leq N_p}$ ces hyperplans, où N_p désigne le nombre de projections T . Chaque espace H_i est défini par $\mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)} \cdot s_{k+1} = T_i$, où $\mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)}$ désigne la i -ème ligne de $\mathbf{R}^{(k)}$: $\mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)} = (\mathbf{R}_{i,1}^{(k)}, \dots, \mathbf{R}_{i,N_p}^{(k)})$. On note à présent $s_k = s^{(k)}$, la variable d'indice étant, dès lors, réservée pour désigner le pixel auquel on cherche la valeur de $s^{(k)}$: $s^{(k)} = (s_j^{(k)}) = s^{(k)}(x_j)$, $1 \leq j \leq n$ où n est le nombre de pixels. Afin d'estimer la solution, le procédé itératif de l'ART consiste à projeter orthogonalement une donnée initiale $s^{(0)}$ sur chacun des H_i . Ainsi, à chaque itération k , la distance entre $s^{(k)}$ et la solution par moindres carrés du système se réduit progressivement.

Comme le vecteur $\mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)}$ n'est pas orthonormé, on déduit :

$$s_j^{(k+1)} = s_j^{(k)} + \frac{T_i - \langle \mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)}, s^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\langle \mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)}, \mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^2}} \mathbf{R}_{ij}^{(k)} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N_p \quad (5.47)$$

où $s_j^{(k)} = s^{(k)}(x_j)$ correspond à la valeur de la k -ème itération du champ de lenteur s au pixel x_j .

L'équation (5.47) est itérée, de manière cyclique, en i . On parcourt ainsi plusieurs fois chaque ligne $\mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)}$ du système linéaire pour approcher la solution.

Remarque 5.5.2. *Le résultat obtenu dépend de l'ordre avec lequel les indices i sont parcourus. Dans [Bjorck, 1996, p. 278], il est montré que la méthode définie par (5.47) pouvait s'apparenter à une méthode de Gauss-Seidel particulière.*

1. Acronyme de Algebraic Reconstruction Technique.

Dans le domaine de la tomographie sismique, cette méthode a été introduite par Lager et Lytle [Lager et Lytle, 1977]. D'après la définition 5.5.2, l'opérateur discret $\mathbf{R}^{(k)}$ associé à $s^{(k)}$ est donné par :

$$\mathbf{R}_{ij}^{(k)} = \ell_{ij}^{(k)}$$

où $\ell_{ij}^{(k)}$ sont les distances des différents trajets R_i pour le champ $s^{(k)}$ dans chaque pixel x_j . En pratique, le trajet est calculé, à partir du champ de lenteur $s^{(k)}$, par l'une des trois méthodes décrite à la section 5.5.1 : méthode de tir, *bending method* ou *Fast Marching*.

Par définition du modèle discret défini à partir de (5.33), on a :

$$\langle \mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)}, s^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \sum_{1 \leq j \leq n} \ell_{ij}^{(k)} s_j^{(k)} = t_i^{(k)}.$$

où $t_i^{(k)}$ correspond au temps calculé à partir du champ de lenteur $s^{(k)}$.

Le numérateur $T_i - \langle \mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)}, s^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^2}$ dans (5.47) équivaut donc à la différence, autrement dit au résidu $r_i^{(k)}$, entre les temps obtenus à partir des mesures et ceux $t_i^{(k)}$ obtenus à partir de $s^{(k)}$. En formulant (5.47) à partir des $\ell_{ij}^{(k)}$, on obtient l'algorithme ART de tomographie par temps d'arrivée suivant :

$$s_j^{(k+1)} = s_j^{(k)} + \frac{\ell_{ij}^{(k)}}{\sum_{1 \leq j \leq n} (\ell_{ij}^{(k)})^2} r_i^{(k)} \quad (5.48)$$

où $r_i^{(k)} = T_i - t_i^{(k)} = T_i - \langle \mathbf{R}_{i,\cdot}^{(k)}, s^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^2}$.

5.5.4 Méthode SIRT

La méthode SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique) repose également sur l'équation (5.47). Pour l'ART, la modification apportée à x_j dépend du i -ème rai. Toutefois, au lieu de modifier immédiatement la valeur du champ de lenteur $s_j^{(k)}$ au pixel x_j , la moyenne des modifications pour chaque pixel x_j est considérée dans la méthode SIRT. Cette méthode consiste donc à prendre la moyenne des termes correctifs de (5.48) sur l'ensemble des rais R_i qui traversent x_j :

$$s_j^{(k+1)} = s_j^{(k)} + \frac{1}{N_{x_j}} \sum_{1 \leq i \leq N_{x_j}} \left(\frac{\ell_{ij}^{(k)}}{\sum_{1 \leq j \leq n} (\ell_{ij}^{(k)})^2} r_i^{(k)} \right) \quad (5.49)$$

où N_{x_j} est le nombre de rais qui intersectent le pixel x_j .

Comme elle considère simultanément plus de données, la méthode SIRT donne lieu à de meilleurs résultats de reconstruction que l'ART. En contrepartie, sa convergence est plus lente.

Remarque 5.5.3. *Nous avons présenté l'algorithme SIRT, comme dans [Kak et Slaney, 1988], de manière heuristique. Il est montré, dans [Ivansson, 1981], que la méthode SIRT correspond, en réalité, à l'optimisation d'un terme de moindres carrés pondérés.*

Dans [Côte, 1988], dont nous nous inspirons pour la modélisation du problème direct, une reconstruction par un algorithme SIRT est utilisée. L'algorithme développé a donné lieu à un logiciel dénommé RAI-2D. Ce dernier sert de base de comparaison pour l'évaluation de notre méthode de reconstruction contrainte en tomographie par temps d'arrivée.

Nous souhaitons remplacer l'étape d'inversion pixellique par une inversion *orientée objet*. Nous présentons, à présent, ces méthodes.

5.6 Méthodes orientées objet

Jusqu'à présent, nous avons décrit des méthodes d'inversions *pixelliques* en émission et temps d'arrivée. Nous avons décrit les méthodes orientées objet dans le cadre de la segmentation d'image (chapitre 3). Nous montrons dans cette section comment elles ont été introduites en reconstruction.

5.6.1 L'approche de Santosa

Il semble que le premier exemple d'utilisation de *level-set* pour résoudre un problème inverse soit l'article [Santosa, 1996] publié par Santosa. Les méthodes orientées objet ont, dès lors, donné lieu à plusieurs développements [Santosa, 1996; Feng, 2002; Feng et al., 2003; Ramlau et Ring, 2007; Shi, 2005; Burger, 2001] dans le cas linéaire. Dans le cas non linéaire, les développements sont actuellement plus réduits [Santosa, 1996; Burger, 2004]. A notre connaissance, le domaine de la tomographie par temps d'arrivée n'a pas encore été exploré par *level-set*.

En tomographie linéaire

Le critère énergétique est identique à celui utilisé par une méthode de régularisation :

$$E(f) = \frac{1}{2} \|p - \mathcal{R}f\|_F^2 + \alpha E_{reg}(f) \quad (5.50)$$

Nous restons, pour le moment, volontairement vague sur le terme E_{reg} ². La différence de l'approche de Santosa, par rapport au cas pixellique, repose sur deux éléments :

1. f est décrit de manière constante par morceaux par rapport à une forme Ω .
2. L'optimisation du critère (5.50) est effectuée par descente de gradient.

L'inconnue f à déterminer n'est donc plus constituée des valeurs d'intensité pour chaque pixel de l'image. Elle prend à présent l'expression suivante :

$$f(x) = f_{\Omega} \mathbb{1}_{\Omega}(x) + f_{\Omega^c} \mathbb{1}_{\Omega^c}(x) \quad (5.51)$$

où $f_{\Omega}, f_{\Omega^c} \in \mathbb{R}$ désignent respectivement les constantes d'intensité de l'objet et du fond. Dans cette modélisation, l'image est supposée être constituée d'un seul objet homogène. Plus récemment, la reconstruction de plusieurs objets d'intensité constante a été réalisée [Feng, 2002; Shi, 2005; Ramlau et Ring, 2007]. Ceci correspond à une résolution du problème inverse à l'aide de *level-sets* multi-phases (Chapitre 3). Dans [Feng, 2002], un fond non homogène, mais présentant un gradient constant dans la direction horizontale ou verticale, est également considéré. Dans ce cas, le paramètre f_{Ω^c} n'est plus supposé constant. Il est choisi tel que $f_{\Omega^c}(x_1, x_2) = a x_1$ ou $f_{\Omega^c}(x_1, x_2) = a x_2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. De manière générale, le cas où $f_{\Omega}(x_1, x_2)$ et $f_{\Omega^c}(x_1, x_2)$ sont des fonctions polynômiales est décrit dans [Feng, 2002].

Santosa emploie le cadre fonctionnel des ensembles de niveaux pour optimiser (5.50) en supposant (5.51). Nous conduisons le calcul par optimisation de forme à partir du schéma de composition suivant :

$$\Omega \rightarrow f(x, \Omega) \rightarrow E(f)$$

D'après la règle de composition des dérivées, on obtient :

$$E'(\Omega, V) = \langle \nabla_f E, f'(\cdot; \Omega, V) \rangle_E \quad (5.52)$$

2. Dans [Santosa, 1996], l'ajout d'un terme de régularisation était placé en perspective.

où $\langle f, g \rangle_E$ désigne le produit scalaire usuel dans $L^2(\mathcal{D})$ et où les quantités $\nabla_f E(x)$ et $f'(x; \Omega, V)$, dont on prend le produit scalaire, sont respectivement le gradient de l'énergie par rapport à f et la dérivée de forme de $f(x, \Omega)$.

Nous nous restreignons ici, sans perte de généralité, à présenter la dérivation du terme d'attache aux données. Le terme de régularisation donnerait, par exemple, lieu à une force proportionnelle à la courbure (§ 3.2) s'il s'agissait de $E_{reg}(f) = |\partial\Omega|$. On suppose ainsi $E = \frac{1}{2} \|p - \mathcal{R}f\|_F^2$ et on considérera le cas où \mathcal{R} est un opérateur linéaire³. Le calcul de $\nabla_f E(x)$ est classique et s'obtient à partir des équations normales :

$$\nabla_f E(x) = [\mathcal{R}^*(p - \mathcal{R}f)](x) \quad (5.53)$$

Remarque 5.6.1. Dans le cas où \mathcal{R} est non linéaire, \mathcal{R}^* est remplacé par l'adjoint de la Jacobienne de \mathcal{R} .

Pour la dérivée de forme $f'(x; \Omega, V)$, nous avons donné son expression au chapitre 2-§ 2.6.1 :

$$f'(x; \Omega, V) = (f_\Omega - f_{\Omega^c}) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} \quad (5.54)$$

L'incorporation de (5.53) et (5.54) dans (5.52) permet d'obtenir la valeur de la dérivée directionnelle $E'(\Omega, V)$ dans la direction V . Nous rappelons que pour $f, g \in E = L^2(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$,

$$\langle f, g \rangle_E = \int_{\mathcal{D}} f(x) g(x) dx$$

avec $x = (x_1, x_2)$. Ainsi, l'équation (5.52), fournissant $E'(\Omega, V)$, s'écrit :

$$E'(\Omega, V) = \int_{\mathcal{D}} (f_\Omega - f_{\Omega^c}) [\mathcal{R}^*(p - \mathcal{R}f)](x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx \quad (5.55)$$

Par conséquent, d'après le Corrolaire 2.6.1, on obtient :

$$\nabla_\Omega E = (f_\Omega - f_{\Omega^c}) [\mathcal{R}^*(p - \mathcal{R}f)] \mathcal{N} \quad (5.56)$$

Pour minimiser le critère énergétique, on fait ensuite évoluer la forme Ω dans la direction opposée à ce gradient.

Commentaire

L'obtention du champ de vitesse repose sur la dérivée de forme de :

$$f(x) = f_\Omega \mathbf{1}_\Omega(x) + f_{\Omega^c} \mathbf{1}_{\Omega^c}(x)$$

Au chapitre 2, nous avons décrit la démarche suivie par Santosa qui se fonde sur des raisonnements infinitésimaux sur la frontière. Ceci donne un caractère assez formel au calcul. Plus récemment, des justifications plus rigoureuses ont été proposées [Ramlau et Ring, 2007; Burger, 2001]. L'article [Burger, 2001] constitue un des rares exemples où des preuves de convergence sont établies. Nous nous sommes inspirés, pour notre part, de [Ramlau et Ring, 2007] pour établir le gradient de forme du terme d'attache aux données (chapitre 6).

3. Dans [Santosa, 1996], Santosa ne se restreint pas à cette hypothèse.

En tomographie non linéaire

Dans la seconde partie de [Santosa, 1996], Santosa envisage une formulation de l'algorithme de Gauss-Newton par *level-set*. L'équation matricielle associée :

$$\left(\mathbf{J}_r(s_k)^t \cdot \mathbf{J}_r(s_k) \right) h_k = -\mathbf{J}_r(s_k)^t \cdot r(s_k) \quad (5.57)$$

permet de déterminer l'incrément h_k sur le champ de lenteur. Le problème, ici, réside dans le fait que cette formulation est pixellique au sens où h_k contient des variations d'intensité en chaque pixel de l'image. Or, on souhaite une modélisation orientée objet du problème, i.e. avec s_k constant par morceaux par rapport à une forme :

$$s_k(x, \Omega) = s_\Omega \mathbf{1}_\Omega(x) + s_{\Omega^c} \mathbf{1}_{\Omega^c}(x) \quad (5.58)$$

avec $s_\Omega, s_{\Omega^c} \in \mathbb{R}$. La relation $s_{k+1} = s_k + h_k$ n'a alors plus aucune raison d'être valable. En effet, h_k n'est *a priori* pas constante par morceaux : la somme entre h_k et une fonction constante par rapport à une forme n'a aucune raison d'être constante par morceaux.

En revanche, en linéarisant s_{k+1} , il vient :

$$s_{k+1} = s_k + s'_k(x; \Omega, V)$$

où $s'_k(x; \Omega, V)$ est la dérivée de forme de s_k dans la direction V .

Une interprétation⁴ de l'article de Santosa peut être donnée de la manière qui suit. En posant :

$$h_k(x) = s'_k(x; \Omega, V)$$

on s'assure que $s_{k+1} = s_k + h_k$ reste constant par morceaux. On note à présent : $s_k(x, \Omega) = s(x, \Omega_k)$, d'où Ω_k , $s'(x; \Omega_k, V_k) = s'_k(x; \Omega, V)$. La fonction s_k étant constante par rapport à Ω_k , on a, de manière similaire à (5.54) :

$$s'_k(x; \Omega, V) = (s_{\Omega_k} - s_{\Omega_k^c}) \langle V_k(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

où V_k est le champ de vitesse qui s'applique sur Ω_k . En supposant $V_k(x)$ porté par la normale, on obtient :

$$V_k(x) = \frac{h_k(x)}{s_{\Omega_k} - s_{\Omega_k^c}} \quad (5.59)$$

Ce champ de vitesse est ensuite utilisé pour faire évoluer Ω_k vers Ω_{k+1} .

5.6.2 Autres approches

Même si le cas non linéaire est envisagé théoriquement par Santosa, les résultats numériques présentés dans [Santosa, 1996] ne prennent en compte que des situations où le problème direct est linéaire. Les articles considérant explicitement la non-linéarité du critère à optimiser restent limités. Ils concernent plutôt la tomographie électromagnétique [Naik et al., 2008] ou celle de capacité [Kortschak et al., 2007]. Dans [Dorn et Lesselier, 2006], les équations de Maxwell ont été étudiées en régime basses fréquences. Le phénomène de diffraction doit alors être considéré. Il a été analysé théoriquement par rapport à une forme dans [Hettlich, 1995] et a donné lieu à des résultats de simulations orientées objet dans [Litman et al., 1998].

4. Dans [Santosa, 1996], Santosa travaille, en réalité, directement sur la fonction des level-sets.

Dans [Naik et al., 2008], les paramètres d'intensité ne sont plus supposés connus mais sont estimés par minimisation. Le modèle image est supposé constant par morceaux et le contour est représenté, de manière paramétrique, à l'aide de splines. L'évolution de la frontière est effectuée par descente de gradient sur le résidu entre les données mesurées et celles estimées. Les intensités, reliées au résidu de manière non linéaire, sont calculées à l'aide d'un algorithme de Gauss-Newton.

A notre connaissance, peu de travaux ont, à l'heure actuelle, utilisé un algorithme de Gauss-Newton pour faire évoluer le contour. Dans [Kortschak et al., 2007], une descente de gradient est également employée. En revanche, des travaux portant sur la recherche de cavités ont donné lieu à la mise en œuvre de méthode de Gauss-Newton orientée objet. Dans [Burger, 2004], le résidu est linéarisé par rapport à la forme Ω_k qui définit le modèle image s_k .

Nous développons, au chapitre 7, une approche qui consiste à rendre linéaire le résidu par rapport à s_k de telle sorte qu'on peut procéder par descente de gradient pour faire évoluer le contour. Les intensités ne sont pas supposées connues et sont estimées à chaque pas d'évolution. D'autre part, contrairement aux *a priori* utilisés dans [Burger, 2004; Kortschak et al., 2007; Naik et al., 2008], nous introduisons la contrainte de forme définie au chapitre 4.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre d'état de l'art, nous avons présenté les deux modalités de tomographie que nous considérons par la suite : celle d'émission dont le problème direct est linéaire et celle par temps d'arrivée qui est non linéaire. Dans les deux cas, les données sont obtenues par intégration d'une quantité le long de directions, ou rais.

Les principales méthodes d'inversions pixelliques ont été décrites : régularisation ou techniques algébriques. La théorie semi-quadratique permet, pour les premières, de prendre en compte les discontinuités dans la reconstruction. Elle fait intervenir une fonction potentiel qui agit localement sur l'image au niveau des contours.

Contrairement à ces méthodes, les méthodes *orientées objet* modélisent explicitement les bords en faisant évoluer un modèle discontinu. Elles permettent notamment de reconstruire les frontières des formes de manière satisfaisante. Des justifications rigoureuses du champ de vitesse n'ont, cependant, été proposées que récemment.

Dans le chapitre qui suit, nous justifions, à l'aide du théorème 2.6.1, l'expression obtenue par Santosa. Nous montrons, ensuite, comment nous introduisons la contrainte de forme en reconstruction. Nous espérons que l'information *a priori*, apportée par des objets de référence, puisse contrebalancer le manque de données. Nous considérons, dans un premier temps, le cas de la tomographie linéaire d'émission. Des résultats numériques, à partir d'objets synthétiques, permettent d'évaluer la méthode.

Troisième partie

Reconstruction Tomographique

Orientée Objet Contrainte

Chapitre 6

Reconstruction contrainte en tomographie linéaire

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de reconstruction en tomographie linéaire. Ce chapitre sert de première étape pour établir un algorithme de reconstruction contrainte en tomographie non linéaire par temps d'arrivée.

Dans les années 90, des méthodes de régularisation respectant les discontinuités ont été proposées pour réduire le caractère passe-bas de la régularisation linéaire. Ces techniques fournissent généralement des résultats satisfaisants, mais peuvent être prises en défaut, en présence de bruit important ou d'un nombre trop limité d'angles d'observation. Dans ces méthodes, une variable auxiliaire permet de relâcher *localement* la régularisation au niveau des frontières des objets.

Une autre approche, dite *orientée objet*, consiste à prendre en compte *globalement* les points de la frontière des formes à l'aide d'un contour actif. Cette approche a initialement été développée dans le domaine de la segmentation d'objets. Dans la démarche *orientée objet*, un modèle image est défini à partir des domaines intérieurs et extérieurs à la forme, ainsi que par les paramètres d'intensité qui s'y rapportent. Le critère énergétique se compose d'un terme d'attache aux données et d'une contrainte de longueur de courbe qui force les frontières à être régulières.

Le critère de reconstruction que nous définissons s'écrit comme une combinaison entre l'*a priori* de forme décrit au chapitre 4 et un terme d'attache aux données. L'opposée de la composante normale du gradient de reconstruction correspond au champ de vitesse d'évolution. Dans ce chapitre, un travail d'unification est mené sur l'expression du gradient du terme d'attache aux données. Ce travail nous a paru nécessaire car ce dernier donne lieu à différentes expressions [Santosa, 1996; Feng, 2002; Ramlau et Ring, 2007] dans la littérature. D'autre part, nous montrons que l'utilisation de contraintes de forme de haut niveau, concernant la géométrie et la topologie des objets, peut améliorer la qualité de la reconstruction sur des données bruitées et en nombre très limité.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La section 6.2 présente la modélisation orientée objet que nous avons retenue. Les deux paragraphes suivants portent sur l'optimisation du modèle déformable : paramètres d'intensité et contour. Plus précisément, nous établissons au paragraphe 6.4 le gradient de l'énergie d'attache aux données par optimisation de forme. Nous donnons ensuite, dans la section 6.5, quelques éléments d'implantation. Nous illustrons enfin, sur données synthétiques, l'apport de la contrainte de forme (section 6.6 et section 6.7).

6.2 Modélisation orientée objet

6.2.1 Définition du modèle image

Les méthodes orientées objet supposent l'image f composée d'une région de fond Ω^c et d'une région, Ω , représentant l'objet. On se donne un modèle d'intensité à l'intérieur et à l'extérieur du domaine objet. Même si des modèles d'ordre plus élevé existent (notamment polynomiaux, voir par exemple [Feng, 2002]), nous considérerons le cas où le fond et le domaine objet sont supposés tous les deux constants :

$$f(x) = \begin{cases} f_\Omega & \text{pour } x \in \Omega \\ f_{\Omega^c} & \text{pour } x \in \Omega^c \end{cases}$$

A l'aide de la fonction caractéristique d'un ensemble, le modèle image s'écrit :

$$f(x, \Omega) = f_\Omega \cdot \mathbb{1}_\Omega(x) + f_{\Omega^c} \cdot \mathbb{1}_{\Omega^c}(x) \quad (6.1)$$

où $\mathbb{1}_\Omega$ (resp. $\mathbb{1}_{\Omega^c}$) désigne la fonction caractéristique de Ω (resp. Ω^c). Les intensités f_Ω et f_{Ω^c} sont supposées réelles.

L'introduction de la contrainte reste valable dans le cas où les intensités sont décrites de manière polynomiale. En reconstruction tomographique, les modèles polynomiaux ont été considérés, sans *a priori* de forme, dans [Feng, 2002; Shi, 2005]. Ils peuvent être intéressants lorsque l'image à reconstruire n'est pas constante et présente des gradients dans certaines directions. C'est par exemple le cas en imagerie du sous-sol [ERL, 2009]. D'autres modèles où plusieurs objets ont chacun des intensités différentes (adaptation multiphase) existent également dans la littérature [Feng, 2002; Ramlau et Ring, 2007; Shi, 2005]. L'incorporation de contraintes de forme paraît alors moins directe.

Nous ne faisons pas d'hypothèse particulière sur la topologie de l'objet solution. Ce dernier est simplement considéré comme étant binaire. Il peut notamment être constitué de plusieurs composantes connexes. A partir des données de projection p , on cherche à reconstruire l'objet. On s'intéressera particulièrement à la qualité de la reconstruction de chacune de ses composantes.

Le modèle direct est donné par : $p = \mathcal{R}f + \eta$, où \mathcal{R} désigne l'opérateur de Radon et η le bruit d'acquisition, supposé gaussien. Lorsque les mesures correspondent à un taux de comptage, il est habituel d'utiliser un bruit de Poisson. C'est le cas en tomographie d'émission dans le domaine médical où les observations sont données par le nombre de photons collectés par chacun des collimateurs. La nature poissonnien du bruit en reconstruction orientée objet, pour des données tomographiques PET, a été prise en compte dans [Chan et al., 2007]. Le cas gaussien reste toutefois une approximation usuelle lorsque le taux de comptage est suffisamment élevé.

A partir de ce modèle image, les distributions d'intensité ainsi que la forme sont évaluées par optimisation. Il s'agit donc de :

Trouver Ω^* , $f_{\Omega^*}^*$, $f_{\Omega^{*c}}^*$ tel que

$$\begin{cases} (\Omega^*, f_{\Omega^*}^*, f_{\Omega^{*c}}^*) = \arg \min E(\Omega, f_\Omega, f_{\Omega^c}) \\ f = f_\Omega \cdot \mathbb{1}_\Omega + f_{\Omega^c} \cdot \mathbb{1}_{\Omega^c} \end{cases} \quad (6.2)$$

où le minimum est pris sur $\Omega, f_\Omega, f_{\Omega^c}$. Nous définissons à présent le critère énergétique de reconstruction E dans lequel est incorporé la contrainte de forme définie au chapitre précédent.

6.2.2 Critère énergétique

Le critère énergétique usuel en reconstruction fait intervenir la longueur de la frontière pour contraindre l'évolution du modèle déformable. Ce terme a pour effet d'atténuer le caractère mal posé du problème inverse et se calcule à partir d'informations locales. D'autre part, on a dans certaines applications une idée précise de la classe d'objet à reconstruire : par exemple, piliers, fondations, tuyauteries. On propose donc ici d'employer la contrainte de forme, information de haut niveau que nous avons décrite au chapitre 4. Comme en segmentation [Foulonneau, 2004], on définit alors le critère énergétique :

$$E_\alpha = (1 - \alpha) E_{data} + \alpha E_{prior}^{multi} \quad (6.3)$$

où α est un paramètre de poids qu'on ajuste afin d'obtenir un compromis entre le terme d'attache aux données et le terme d'*a priori*. Dans le cas où le bruit sur les projections est considéré gaussien, le terme d'attache aux données correspond au terme de moindres carrés suivant :

$$E_{data} = \frac{1}{2} \|p - \mathcal{R}f\|_F^2 \quad (6.4)$$

Le critère défini en (6.3) est usuel en segmentation [Cremers et al., 2006a; Foulonneau, 2004; Rousson et Paragios, 2002], mais ne semble pas encore avoir été introduit en reconstruction. Sa dérivée de forme s'obtient par linéarité :

$$\nabla_\Omega E_\alpha = (1 - \alpha) \nabla_\Omega E_{data} + \alpha \nabla_\Omega E_{prior}^{multi} \quad (6.5)$$

où $\nabla_\Omega E_{prior}^{multi}$ est donné par (4.39).

Dans (6.4), la norme correspond à celle de l'espace fonctionnel des projections. Ce dernier est le plus souvent choisi comme étant égal à $F = L^2(\mathcal{F})$, où \mathcal{F} est l'ensemble des directions d'observation. En pratique, on travaille toutefois avec des variables discrètes et non continues. La norme est alors réduite à une somme discrète.

Nous avons décidé de ne pas faire de choix particulier sur la nature continue ou discrète de l'espace d'arrivée. Pour cela, on développe les calculs à partir du produit scalaire par la relation $\|\cdot\|_F = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_F}$. Ces derniers s'appliquent ainsi dans les deux cas, continu comme discret. D'autre part, par souci de concision, on notera simplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ et $\|\cdot\|^2$ pour $\|\cdot\|_F^2$.

Pour établir le gradient de forme (6.5), il reste à déterminer celui du terme d'attache aux données. En effet, le gradient de l'énergie *a priori* a été établi à partir de la dérivée d'une intégrale de domaine au chapitre 4. Avant de procéder au calcul des variations, nous rappelons que, par linéarité de la transformée de Radon, nous avons :

$$\mathcal{R}f = f_\Omega \mathcal{R}\mathbf{1}_\Omega + f_{\Omega^c} \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c}. \quad (6.6)$$

D'où,

$$\begin{aligned} E_{data} &= \frac{1}{2} \|p - f_\Omega \mathcal{R}\mathbf{1}_\Omega - f_{\Omega^c} \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle p - f_\Omega \mathcal{R}\mathbf{1}_\Omega - f_{\Omega^c} \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c}, p - f_\Omega \mathcal{R}\mathbf{1}_\Omega - f_{\Omega^c} \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \end{aligned} \quad (6.7)$$

Contrairement à E_{prior}^{multi} qui ne dépend que de la forme, ce terme de moindres carrés fait intervenir *à la fois* la forme et les distributions d'intensité : $E_{data} = E_{data}(f_{int}, \Omega)$ où $f_{int} = (f_\Omega, f_{\Omega^c})$. Les trois composantes du modèle déformable sont donc à estimer. En faisant intervenir le produit scalaire, nous allons dériver plus facilement leur expression. Nous commençons par optimiser le terme d'attache aux données par rapport aux constantes d'intensité, puis nous procéderons à son optimisation de forme.

6.3 Paramètres d'intensité

Nous estimons les paramètres d'intensité par optimisation du critère de reconstruction par rapport aux valeurs d'intensité. Ces valeurs s'obtiennent en utilisant les règles usuelles de dérivation. Les résultats obtenus laissent apparaître une dépendance des intensités par rapport à la forme. Nous montrons toutefois que les variations d'intensité selon un champ de vitesse appliqué à la forme sont nulles.

6.3.1 Estimation par optimisation

Les variables f_Ω et f_{Ω^c} étant réelles, il suffit, pour obtenir f_Ω^* et $f_{\Omega^c}^*$, de déterminer les dérivées partielles $\partial_{f_\Omega} E_{data}$ et $\partial_{f_{\Omega^c}} E_{data}$. En effet, le terme d'*a priori* ne dépend pas des intensités f_Ω et f_{Ω^c} . On écrit :

$$\begin{cases} E_{data} = \frac{1}{2} \langle \varepsilon_{data}, \varepsilon_{data} \rangle \\ \varepsilon_{data} = p - f_\Omega \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega - f_{\Omega^c} \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \end{cases} \quad (6.8)$$

Considérons les variations par rapport à f_Ω . Par composition et en utilisant la dérivée du produit scalaire, on obtient :

$$\partial_{f_\Omega} E_{data} = \langle \partial_{f_\Omega} \varepsilon_{data}, \varepsilon_{data} \rangle$$

D'après l'expression de ε_{data} , on a $\partial_{f_\Omega} \varepsilon_{data} = -\mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega$, de sorte que :

$$\partial_{f_\Omega} E_{data} = -\langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, p - f_\Omega \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega - f_{\Omega^c} \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle$$

La condition nécessaire d'optimalité que doit vérifier l'estimation d'intensité du domaine intérieur est alors :

$$\langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, p - f_\Omega \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega - f_{\Omega^c} \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle = 0$$

ce qui s'écrit également, en développant le produit scalaire :

$$f_\Omega \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega \rangle + f_{\Omega^c} \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle = \langle p, \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega \rangle \quad (6.9)$$

Nous cherchons à estimer les intensités f_Ω et f_{Ω^c} qui correspondent aux domaines intérieur et extérieur Ω et Ω^c . Les projections $\mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega$ et $\mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c}$ constituent donc, pour une position fixée des frontières de la forme, les données du problème.

En procédant à l'optimisation par rapport à f_{Ω^c} , on aboutit à une seconde condition similaire à (6.9). Comme $\partial_{f_{\Omega^c}} \varepsilon_{data} = -\mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c}$, celle-ci s'écrit, en suivant la même démarche :

$$f_\Omega \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle + f_{\Omega^c} \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c}, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle = \langle p, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \quad (6.10)$$

On aboutit ainsi à deux conditions sur les intensités f_Ω et f_{Ω^c} à travers le système linéaire (6.9), (6.10). Celui-ci s'écrit matriciellement :

$$M \cdot f_{int} = b \quad (6.11)$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega \rangle & \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \\ \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle & \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c}, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \langle p, \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega \rangle \\ \langle p, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \end{pmatrix}, f_{int} = \begin{pmatrix} f_\Omega \\ f_{\Omega^c} \end{pmatrix}$$

Ce système a une solution, si et seulement si,

$$\det(M) = \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega \rangle \cdot \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c}, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle - \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_\Omega, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle^2 \neq 0$$

La matrice M et le second membre b dépendent des projections de la fonction caractéristique du domaine intérieur et extérieur. Les intensités f_Ω et f_{Ω^c} , obtenues par inversion du système (6.11), sont donc des fonctions de la forme Ω . Nous aurons à tenir compte de cette dépendance lors de l'optimisation par rapport à la forme. Nous faisons à présent deux remarques.

Remarque 6.3.1. *Nous avons choisi une normale unitaire orientée vers l'intérieur. Le calcul des intensités ne dépend toutefois pas de l'orientation de la normale.*

Remarque 6.3.2. *Le système linéaire étant de dimension 2, les estimations d'intensité sont données par :*

$$f_{\Omega} = \left(\langle \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c}, \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \cdot \langle p, \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega} \rangle - \langle \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega}, \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \cdot \langle p, \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \right) / \det M \quad (6.12)$$

$$f_{\Omega^c} = \left(-\langle \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega}, \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \cdot \langle p, \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega} \rangle + \langle \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega}, \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega} \rangle \cdot \langle p, \mathcal{R}\mathbf{1}_{\Omega^c} \rangle \right) / \det M \quad (6.13)$$

Permutons les variables Ω et Ω^c : ceci consiste à noter Ω le domaine approchant le fond et Ω^c le domaine approchant l'objet. On vérifie bien que permuter les variables Ω et Ω^c correspond à permuter f_{Ω} avec f_{Ω^c} .

6.3.2 Dépendance par rapport à la forme

Les constantes d'intensité sont des fonctions de la forme Ω . Pour cette raison, nous avons choisi de faire apparaître en indice la forme Ω dans f_{Ω} et f_{Ω^c} . Le terme d'attache aux données (6.4) dépend de Ω de la manière suivante¹ :

$$\Omega \rightarrow (f_{int}(\Omega), \Omega) \rightarrow E_{data}(f_{int}, \Omega)$$

Les variations de E_{data} par rapport à Ω s'obtiennent formellement, comme dans [Ramlau et Ring, 2007], en dérivant le couple (f_{int}, Ω) par rapport à Ω . La dérivée de Gâteaux $E'_{data}(\Omega, V)$, dans la direction V , de E_{data} est constituée de la somme des dérivées directionnelles $E_{data}(f_{int}, \Omega)$ par rapport à f_{int} et par rapport à Ω . Comme E_{data} est dérivable par rapport à f_{int} on peut appliquer la règle de composition avec une dérivée directionnelle de Gâteaux (Chapitre 2, § 2.7) :

$$E'_{data}(\Omega, V) = \partial_{f_{int}} E_{data}(f_{int}, \Omega) \cdot f'_{int}(\Omega, V) + E'_{data}(f_{int}; \Omega, V) \quad (6.14)$$

où $f'_{int}(\Omega, V)$ est la dérivée de Gâteaux, dans la direction V , de f_{int} et où $E'_{data}(f_{int}; \Omega, V)$ désigne la dérivée de domaine de E_{data} , dans la direction V , en la valeur courante de f_{int} .

Comme le système linéaire (6.11) correspond à la condition $\partial_{f_{int}} E_{data}(f_{int}, \Omega) = 0$, le premier terme de (6.14) s'annule. D'où,

$$E'_{data}(\Omega, V) = E'_{data}(f_{int}; \Omega, V)$$

La contribution provenant des variations d'intensité par rapport à la forme disparaît. Tout se passe comme si f_{int} ne dépendait pas du champ de vitesse V . On conclut qu'on peut considérer les intensités *fixées* à la valeur courante, i.e. les supposer indépendantes de toute variation de forme. Donc, il n'est pas nécessaire de tenir compte de f_{int} dans l'optimisation de forme du critère d'attache aux données E_{data} .

1. La seule variable de forme qui intervient est en Ω . Le complémentaire Ω^c est une fonction de Ω à travers la relation $\Omega^c = \mathcal{D} \setminus \Omega$.

6.4 Optimisation de forme

Depuis une quinzaine d'années [Santosa, 1996], jusqu'à très récemment avec [Ramlau et Ring, 2007], le champ de vitesse issu des données de projection est établi de différentes manières en reconstruction tomographique orientée objet. Santosa parvient, grâce à un raisonnement formel, à la conclusion suivante (voir chapitre 5) :

$$\nabla_{\Omega} E_{data} = (f_{\Omega} - f_{\Omega^c}) \mathcal{R}^*(p - \mathcal{R}f) \quad (6.15)$$

où \mathcal{R}^* est l'opérateur adjoint de \mathcal{R} . Dans cette section, on se propose de montrer que l'approche développée dans [Ramlau et Ring, 2007] aboutit à la même conclusion.

Pour établir le gradient de forme de l'attache aux données, on suit les démarches récentes qui procèdent par optimisation de forme [Delfour et Zolésio, 2001; Aubert et al., 2003]. On fournit, ci après, une démonstration qui débute précisément par les développements calculatoires de [Ramlau et Ring, 2007].

6.4.1 Dérivée de Gâteaux

On propose d'établir le champ de vitesse en suivant, au départ, les lignes de [Ramlau et Ring, 2007]. Celles-ci introduisent les notations suivantes :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \Omega & \Omega_2 = \Omega^c \\ f_1 = f_{\Omega} & f_2 = f_{\Omega^c} \end{cases} \quad (6.16)$$

De sorte que :

$$\begin{cases} f(x) = \sum_i f_i \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i}(x) \\ E_{data} = \frac{1}{2} \left\langle p - \sum_i f_i \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i}, p - \sum_i f_i \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i} \right\rangle \end{cases}$$

Initialement, ces notations sont introduites dans [Ramlau et Ring, 2007] pour traiter le cas multiphasés. Dans notre cas, $i \in \{1, 2\}$. En développant le produit scalaire, on obtient :

$$E_{data} = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle - \sum_i \langle p, f_i \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_i f_j \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i}, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_j} \rangle$$

On pose :

$$A_{ij} = \frac{1}{2} f_i f_j \langle \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i}, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_j} \rangle \quad (6.17)$$

$$B_i = -f_i \langle p, \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i} \rangle \quad (6.18)$$

D'où,

$$E_{data} = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle + \sum_i B_i(\Omega) + \sum_{i,j} A_{ij}(\Omega)$$

La dérivée de Gâteaux $E'_{data}(\Omega, V)$ de E_{data} , dans la direction V , est donc égale à :

$$E'_{data}(\Omega, V) = \sum_i B'_i(\Omega, V) + \sum_{i,j} A'_{ij}(\Omega, V). \quad (6.19)$$

Dérivation de A_{ij}

Considérons, dans un premier temps, les termes A_{ij} . Par définition de l'opérateur adjoint \mathcal{R}^* , on a :

$$A_{ij} = \frac{1}{2} f_i f_j \left\langle \mathcal{R}^* \mathcal{R} \mathbb{1}_{\Omega_i}, \mathbb{1}_{\Omega_j} \right\rangle_E$$

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ est ici, le produit scalaire usuel dans $E = L^2(\mathcal{D})$:

$$\langle f, g \rangle_E = \int_{\mathcal{D}} f(x) g(x) dx$$

D'où,

$$A_{ij} = \frac{1}{2} f_i f_j \int_{\Omega_j} a_i(x) dx \quad \text{avec} \quad a_i(x) = [\mathcal{R}^* \mathcal{R} \mathbb{1}_{\Omega_i}](x) \quad (6.20)$$

Donc, d'après le théorème 2.6.1, la dérivée de Gâteaux $A'_{ij}(\Omega, V)$, dans la direction V , de A_{ij} est donnée par :

$$A'_{ij}(\Omega, V) = \frac{f_i f_j}{2} \left(\sigma_j \int_{\Gamma} a_i(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma + \int_{\Omega_j} a'_i(x; \Omega, V) dx \right) \quad (6.21)$$

où \mathcal{N} est la normale unitaire à Γ orientée vers l'intérieur et où σ_j définit le signe de la première intégrale : si $\Omega_j = \Omega_1 = \Omega$ (resp. $\Omega_j = \Omega_2 = \Omega^c$), on a $\sigma_j = -1$ (resp. $\sigma_j = 1$) pour ce choix d'orientation de la normale.

Le terme $a'_i(x; \Omega, V)$ est la dérivée de domaine (chapitre 2) de a_i et nécessite, à ce stade, d'être évalué. Pour cela, on utilise l'égalité suivante, rappelée dans [Ramlau et Ring, 2007] et détaillée dans [Natterer, 1986] :

$$a_i(x) = [\mathcal{R}^* \mathcal{R} \mathbb{1}_{\Omega_i}](x) = 2 \int_{y \in \Omega_i} \frac{dy}{|x - y|} \quad (6.22)$$

Nous en avons donné une démonstration au chapitre 5, p. 76. L'intérêt de cette égalité est d'exprimer à *nouveau* a_i comme une intégrale de domaine. Comme l'intégrande $1/|x - y|$ ne dépend *cette fois-ci* plus de la forme, on obtient d'après le corollaire 2.6.1 :

$$a'_i(x; \Omega, V) = \sigma_i \int_{y \in \Gamma} \frac{2}{|x - y|} \langle V(y), \mathcal{N}(y) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma$$

σ_i étant défini comme précédemment. Ainsi, en permutant l'ordre des intégrales :

$$\int_{\Omega_j} a'_i(x; \Omega, V) dx = \sigma_i \int_{y \in \Gamma} \int_{x \in \Omega_j} \frac{2}{|x - y|} \langle V(y), \mathcal{N}(y) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx d\Gamma$$

Dans [Ramlau et Ring, 2007], le théorème de la divergence est employé pour transformer l'intégrale de domaine en intégrale de bord. On propose ici de terminer le calcul d'une manière différente. On procède, tout d'abord, à la permutation des variables x et y et on utilise à nouveau l'identité (6.22) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} a'_i(x; \Omega, V) dx &= \sigma_i \int_{x \in \Gamma} \int_{y \in \Omega_j} \frac{2}{|x - y|} \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dy d\Gamma \\ &= \sigma_i \int_{\Gamma} a_j(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma \end{aligned}$$

En incorporant ce résultat dans (6.21), on obtient :

$$A'_{ij}(\Omega, V) = \frac{f_i f_j}{2} \int_{\Gamma} (\sigma_j a_i(x) + \sigma_i a_j(x)) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} dx \quad (6.23)$$

qui est linéaire par rapport à V . Donc, d'après la Déf. 2.5.9, A_{ij} est dérivable par rapport à la forme Ω .

Dérivation de B_i

On s'attache à présent à déterminer la dérivée de Gâteaux, dans la direction V , des quantités $B_i(\Omega)$. L'utilisation de l'adjoint permet, là encore, de les exprimer en intégrale de domaine.

$$\begin{aligned} B_i(\Omega) &= -f_i \langle \mathcal{R}^* p, \mathbf{1}_{\Omega_i} \rangle_E \\ &= -f_i \int_{\Omega_i} [\mathcal{R}^* p](x) dx \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{R}^* p$ est indépendant de la forme, il vient, d'après le corollaire 2.6.1 :

$$B'_i(\Omega, V) = -\sigma_i f_i \int_{\Gamma} [\mathcal{R}^* p](x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma \quad (6.24)$$

où l'on rappelle que $\sigma_i = -1$ pour $i = 1$ et $\sigma_i = 1$ pour $i = 2$.

On déduit que $B'_i(\Omega, V)$ est linéaire par rapport à V . Donc, d'après la Déf. 2.5.9, B_i admet une dérivée de forme.

Dérivée de forme de E_{data}

Il suffit maintenant d'incorporer les dérivées de A_i et B_i dans (6.25), qu'on rappelle par commodité :

$$E'_{data}(\Omega, V) = \sum_i B'_i(\Omega, V) + \sum_{i,j} A'_{ij}(\Omega, V). \quad (6.25)$$

Le premier terme s'obtient directement à partir de (6.24) :

$$\sum_i B'_i(\Omega, V) = - \left(\sum_i \sigma_i f_i \right) \int_{\Gamma} [\mathcal{R}^* p](x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma \quad (6.26)$$

Quant au second, on remarque que $\sigma_i a_j(x)$ est le symétrique de $\sigma_j a_i(x)$ dans (6.23). Donc, la somme est en fait évaluée deux fois :

$$\sum_{i,j} A'_{ij}(\Omega, V) = \int_{\Gamma} \sum_{i,j} f_i f_j \sigma_j a_i(x) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma$$

Pour avoir une expression similaire à $\sum \langle \nabla_{\Omega} B_i(\Omega), V \rangle_{\Gamma}$, et faire apparaître le facteur $\sum \sigma_i f_i$, on arrange toutefois les termes suivants :

$$\sum_{i,j} f_i f_j \sigma_j a_i(x) = \left(\sum_i \sigma_i f_i \right) \left(\sum_i f_i a_i(x) \right)$$

D'où,

$$\sum_{i,j} A'_{ij}(\Omega, V) = \int_{\Gamma} \left(\sum_i \sigma_i f_i \right) \left(\sum_i f_i a_i(x) \right) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma.$$

En tenant compte de la définition (6.20), on obtient finalement :

$$\sum_{i,j} A'_{ij}(\Omega, V) = \int_{\Gamma} \left(\sum_i \sigma_i f_i \right) \left(\sum_i f_i [\mathcal{R}^* \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i}](x) \right) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma \quad (6.27)$$

L'introduction des expressions (6.26) et (6.27) dans (6.25) fournit la conclusion suivante :

$$E'_{data}(\Omega, V) = \int_{\Gamma} \left(\sum_i \sigma_i f_i \right) \left(\sum_i f_i [\mathcal{R}^* \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i}](x) - [\mathcal{R}^* p](x) \right) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma \quad (6.28)$$

6.4.2 Expression du gradient

Pour établir l'expression du gradient, on remarque, tout d'abord, que le second facteur de (6.28) s'écrit par linéarité :

$$\begin{aligned} \sum_i f_i [\mathcal{R}^* \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i}](x) - [\mathcal{R}^* p](x) &= \mathcal{R}^* \left(\sum_i f_i \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i} - p \right) \\ &= \mathcal{R}^* \left(\mathcal{R} \left(\sum_i f_i \mathbf{1}_{\Omega_i} \right) - p \right) \end{aligned}$$

Comme $f = \sum_i f_i \mathbf{1}_{\Omega_i}$, il vient :

$$\sum_i f_i [\mathcal{R}^* \mathcal{R} \mathbf{1}_{\Omega_i}](x) - [\mathcal{R}^* p](x) = \mathcal{R}^* (\mathcal{R} f - p) \quad (6.29)$$

D'autre part, dans le premier facteur de (6.28), on a $f_1 = f_{\Omega}$, $f_2 = f_{\Omega^c}$. Dans le cas d'une normale unitaire orientée vers l'intérieur, $\sigma_1 = -1$ et $\sigma_2 = 1$. Donc,

$$\sum \sigma_i f_i = -f_{\Omega} + f_{\Omega^c} \quad (6.30)$$

En introduisant les égalités (6.29) et (6.30) dans (6.28), on déduit :

$$E'_{data}(\Omega, V) = \int_{\Gamma} (-f_{\Omega} + f_{\Omega^c}) \mathcal{R}^* (\mathcal{R} f - p) \langle V(x), \mathcal{N}(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\Gamma \quad (6.31)$$

Comme cette expression est linéaire par rapport à V , E_{data} est dérivable par rapport à Ω . Donc, E_{data} admet un gradient de forme. Ce dernier est donné (chapitre 2) par :

$$\nabla_{\Omega} E_{data} = (f_{\Omega} - f_{\Omega^c}) \mathcal{R}^* (p - \mathcal{R} f) \mathcal{N} \quad (6.32)$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu par Santosa dans [Santosa, 1996], mais en procédant par optimisation de forme à partir du théorème de dérivation d'une intégrale de domaine.

Remarque 6.4.1. Nous avons conduit les calculs en orientant la normale unitaire vers l'intérieur. Dans le cas où celle-ci est orientée vers l'extérieur on a $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = -1$. On obtiendrait alors :

$$\nabla_{\Omega} E_{data} = (f_{\Omega^c} - f_{\Omega}) \mathcal{R}^* (p - \mathcal{R} f) \mathcal{N}$$

On peut réunir ces résultats en utilisant le saut du modèle déformable à travers le bord Γ qui est défini par :

$$[f] = \begin{cases} f_{\Omega} - f_{\Omega^c} & \text{si } \mathcal{N} \text{ est orientée vers l'intérieur} \\ f_{\Omega^c} - f_{\Omega} & \text{si } \mathcal{N} \text{ est orientée vers l'extérieur} \end{cases} \quad (6.33)$$

Le saut est ainsi égal à la différence de la constante d'intensité qui est dans le sens de la normale avec celle qui est dans le sens opposé. Avec cette notation, le gradient de forme est donné, quelle que soit l'orientation de la normale, par :

$$\nabla_{\Omega} E_{data} = [f] \mathcal{R}^*(p - \mathcal{R}f)\mathcal{N} \quad (6.34)$$

Remarque 6.4.2. On trouve dans [Feng, 2002] une démonstration, dans le cas discret, de l'expression du gradient obtenue en (6.32).

6.5 Algorithme et mise en œuvre

6.5.1 Implantation par ensemble de niveaux

L'estimation sur la forme est effectuée par descente de gradient (de forme). Celle-ci donne lieu à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\partial_t \Gamma = F(t, x)\mathcal{N} \quad \text{avec} \quad F(x) = -\nabla_{\Omega_t} E(x) \quad (6.35)$$

Toutefois, faire évoluer le contour à partir de (6.35) peut être inapproprié aux changements de topologies au cours de l'évolution. Pour cette raison, nous choisissons une implantation par ensemble de niveaux (*level-sets*) (chapitre 3). Elle a l'avantage de permettre des fusions ou scissions de régions.

En toute rigueur, l'équation d'Hamilton-Jacobi résultante est valable uniquement sur la courbe de niveau zero. En pratique, on la considère sur une bande étroite (principe de *narrow band* [Chopp, 1993]) pour faire évoluer l'ensemble de niveaux. Nous utilisons l'implantation réalisée au cours de la thèse de A. Foulonneau [Foulonneau, 2004]. Sa mise en œuvre repose sur [Adalsteinsson et Sethian, 1995]. Outre le recours à une bande étroite, l'ensemble de niveaux est périodiquement ré-initialisé car son évolution peut lui faire perdre son caractère de fonction distance. La ré-initialisation de la fonction distance est effectuée [Sussman et al., 1994] à partir de l'équation :

$$\Psi_t = \text{sign}(\Psi)(1 - \|\nabla \Psi\|_{\mathbb{R}^2}) \quad (6.36)$$

dans laquelle $\text{sign}(\Psi)$ désigne le signe de $\Psi(x)$ au point x .

6.5.2 Algorithme de reconstruction contrainte

Nous employons la même stratégie que celle décrite au chapitre 4 en segmentation. Elle repose sur une introduction progressive de la contrainte. Dans un premier temps, nous faisons évoluer la forme sans *a priori* de forme, par optimisation du terme d'attache aux données E_{data} . Ce premier résultat sert d'initialisation à un cycle d'optimisation dans lequel la contrainte est introduite. L'ordre² N des moments invariants, par rapport à une mise à l'échelle globale (facteur d'échelle et translation), est choisi de telle sorte que l'erreur commise sur la représentation des formes de référence soit inférieure à un certain seuil. Le critère de reconstruction contrainte E_{α} donné par l'égalité :

$$E_{\alpha} = (1 - \alpha) E_{data} + \alpha E_{prior}^{multi} \quad (6.37)$$

est alors considéré. L'optimisation de cette énergie, avec ajustement du paramètre α , donne lieu à un nouveau résultat de reconstruction qui sert d'initialisation au cycle suivant. Dans la

2. Nous parlons bien ici du degré des polynômes des moments et non de l'ordonnancement des moments.

représentation des formes, l'ordre N des moments est choisi afin que l'erreur quadratique entre les moments de la forme reconstruite et ceux de la forme de référence soit divisée par deux. Le critère E_α correspondant est ensuite optimisé. L'algorithme procède ainsi, en continuation, en initialisant une nouvelle phase d'optimisation par le résultat de reconstruction de la phase précédente. L'ordre des moments est, à nouveau, déterminé de telle sorte que l'erreur commise sur la représentation des formes soit divisée par deux et une dernière phase d'optimisation est effectuée.

La Fig. 4.1 du chapitre 4 présente la courbe des erreurs quadratiques moyennes par rapport à la forme de référence en fonction de l'ordre de sa représentation en termes de moments. Ces erreurs sont respectivement inférieures à 10% et 5% à partir de l'ordre $N = 21$ et $N = 45$. Nous choisissons donc de faire succéder à une reconstruction sans *a priori* une reconstruction contrainte à l'ordre $N = 21$ puis à l'ordre $N = 45$.

Le paramètre α joue le rôle de pondération sur la contrainte de forme. En pratique, les gradients de forme du terme d'attache aux données et d'*a priori* n'ont pas le même ordre de grandeur. Le réglage du paramètre α n'est donc pas évident et peut nécessiter une grande précision pour jouer le rôle de « balancier » entre les deux forces. Nous adoptons l'alternative proposée dans [Foulonneau, 2004] afin de pallier ce problème. Elle consiste à normaliser les forces afin qu'elles aient le même ordre de grandeur.

6.5.3 Éléments pratiques

L'algorithme est initialisé à partir d'une forme arbitraire décrite sur deux niveaux de couleurs. Ceci permet d'identifier les domaines intérieurs et extérieurs au contour. Dans nos simulations, nous choisissons une forme circulaire pour initialiser la méthode.

Les constantes d'intensité associées aux domaines intérieurs et extérieurs sont calculées d'après les égalités (6.12) et (6.13). Ceci donne lieu à un modèle image initial. A partir de cette initialisation, l'algorithme procède par descente de gradient, faisant ainsi évoluer la frontière de la forme. Les valeurs d'intensité sont actualisées, à chaque étape d'évolution, en fonction de la position du contour.

Comme nous l'avons mentionné, le contour est décrit par une courbe de niveau zéro. Afin de préserver les propriétés de l'ensemble de niveaux, on effectue une ré-initialisation de l'ensemble tous les cycles de cinq évolutions. Cette ré-initialisation peut légèrement modifier la position du contour. Aussi, les intensités sont re-calculées après chaque ré-initialisation.

D'autre part, à chaque cycle, on évalue, comme dans [Foulonneau, 2004], l'erreur relative :

$$\epsilon = \frac{|E_\alpha(\Omega_n) - E_\alpha(\Omega_{n-1})|}{(E_\alpha(\Omega_{n-1}))^2} \quad (6.38)$$

Si celle-ci est inférieure à 10^{-3} , nous mettons fin à l'algorithme. Afin d'éviter la situation où des cycles se reproduisent sans vérifier le critère d'arrêt, une comparaison de la position du contour est effectuée. Si dans une série de huit cycles, le contour revient à une position déjà atteinte, nous décidons également de mettre fin à l'algorithme.

La Fig. 6.1 résume ces éléments d'implantation sous forme d'un organigramme. Le symbole \diamond désigne les entrées.

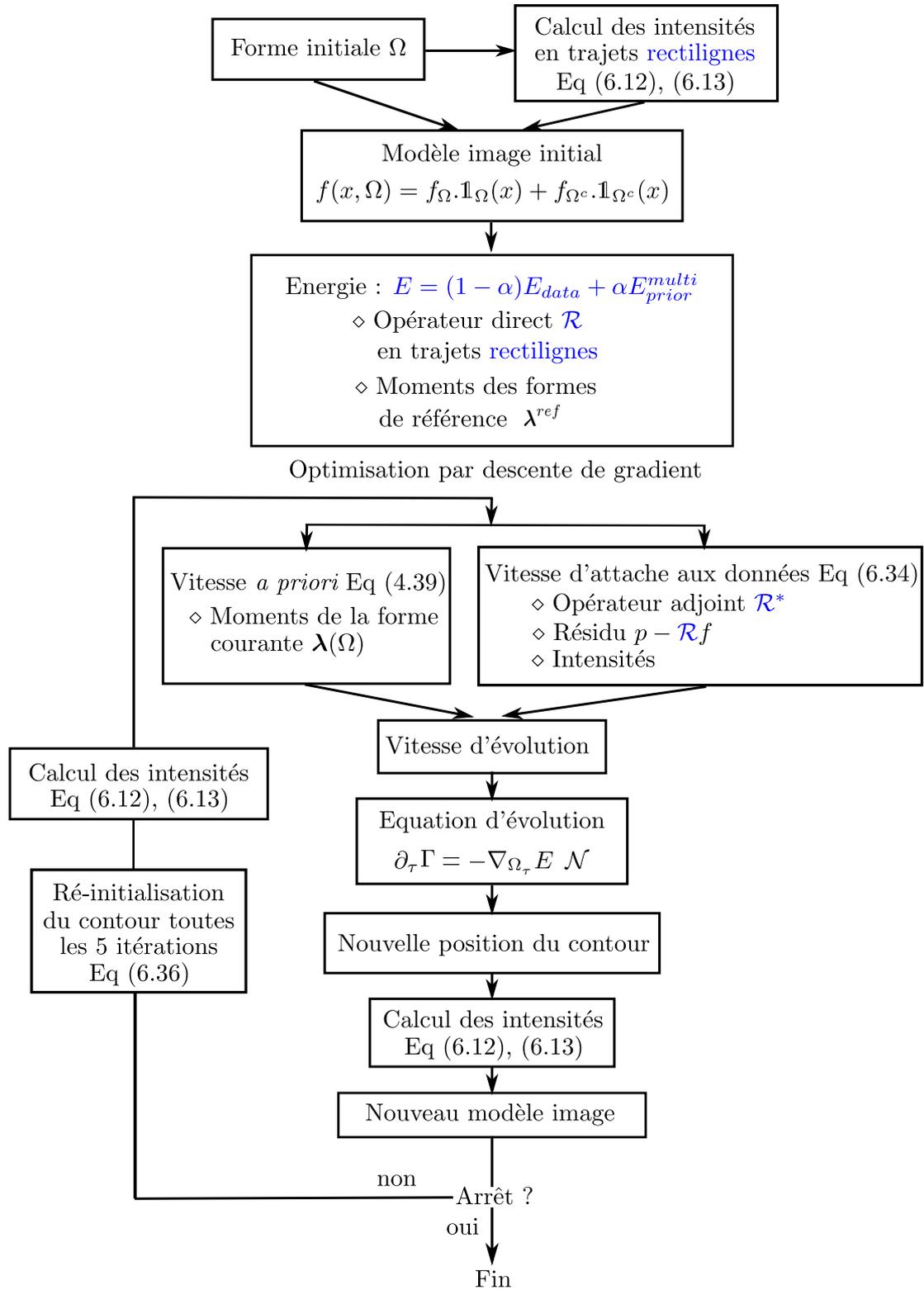


FIGURE 6.1 – Organigramme de l'algorithme de reconstruction contrainte orientée objet.

6.6 Évaluation sur un grand nombre de projections

Nous nous intéressons, dans cette section, au cas où nous disposons d'un grand nombre de projections. Nous parcourons l'ensemble des angles de prise de vues $[0^\circ, 180^\circ[$ par pas de trois degrés. Cela donne 60 angles de projections. Nous considérons le modèle direct suivant :

$$p(u, \theta) = [\mathcal{R}f](u, \theta) + \eta \quad (6.39)$$

où η désigne le bruit d'acquisition supposé gaussien. Nous prenons la définition suivante pour le rapport signal sur bruit :

$$SNR_\sigma = 10 \log_{10} \frac{\sigma_{p-\eta}^2}{\sigma_{p-\mathcal{R}f}^2}$$

où $\sigma_{p-\eta}^2$ désigne la variance de la série statistique $p = \mathcal{R}f$ et $\sigma_{p-\mathcal{R}f}^2$ la variance de la partie aléatoire du modèle direct.

Nous présentons, sur la Fig. 6.2-a, les données de projection de l'objet modèle introduit à la Fig. 4.1. Pour la Fig. 6.2-a, nous avons placé en abscisse θ et en ordonnée u . Nous avons utilisé, pour simuler le problème direct, la fonction Matlab[®] `pradon` que nous avons adaptée pour notre implantation. Cette fonction correspond à un modèle amélioré de disque concave décrit au paragraphe 5.3.1.

L'objet synthétique, que nous avons choisi, est simple d'aspect mais a une certaine complexité topologique : il est constitué de deux composantes. L'une (le disque) est homéomorphe à un point, contrairement à l'autre (le carré à trou). D'autre part, l'une (le disque) est régulière, ce qui n'est pas le cas de l'autre (le carré).

Sur la Fig. 6.2-a, nous pouvons compter soixante colonnes différentes correspondant au soixante angles de prise de vues. Chaque colonne présente des perturbations dues au bruit d'acquisition. Nous avons choisi, sur ce jeu de données, un rapport signal sur bruit de 15 dB. La

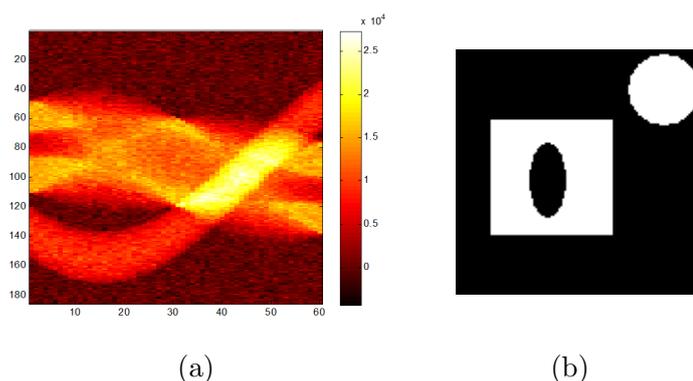


FIGURE 6.2 – Données de projections en (a) de l'objet placé en (b). Données simulées pour soixante angles de prise de vues, avec un niveau de bruit tel que $SNR_\sigma = 15$ dB.

figure 6.3 montre les résultats de reconstructions obtenus par les méthodes pixeliques décrites au chapitre 5. Sur la partie 6.3-a, nous faisons figurer le résultat obtenu avec une rétro-projection filtrée, puis celui obtenu avec une régularisation de Tikhonov (§ 5.3.2) sur la partie 6.3-b. On peut constater que l'objet est globalement bien reconstruit, mais que l'image obtenue a un caractère lisse absent de l'image solution. En particulier, le bord de l'objet n'est pas n'est pas

tout à fait net : sa reconstruction ne fait pas apparaître, de manière franche, les sauts d'intensité au niveau de la frontière. Pour pallier cet inconvénient, nous avons procédé, Fig 6.3-c, à une reconstruction avec prise en compte des discontinuités (§ 5.3.3). Le résultat obtenu est significativement amélioré. Il donne lieu à une reconstruction satisfaisante de l'objet.

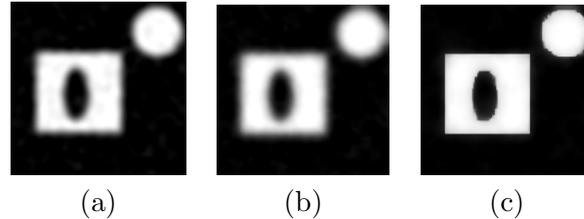


FIGURE 6.3 – Reconstructions pixelliques des projections de la figure 6.2-a (Rapport signal à bruit 15 dB) : (a) Rétro-projection filtrée (fréquence de coupure : 0,3) ; (b) Régularisation de Tikhonov (coefficient de régularisation : 1600) ; (c) Régularisation semi-quadratique [Charbonnier et al., 1997] ($\varphi(u) = 2\sqrt{1 + u^2} - 2$, paramètre d'échelle 5, coefficient de régularisation 10000).

Les méthodes pixelliques avec prise en compte des discontinuités considèrent les frontières de manière locale. Nous nous intéressons, à présent, aux résultats que donnent les méthodes orientées objet. La frontière correspond, dans ce cas, au bord de la forme en évolution. On peut dire que sa modélisation a un caractère global, dans la mesure où tous les points de la frontière sont considérés.

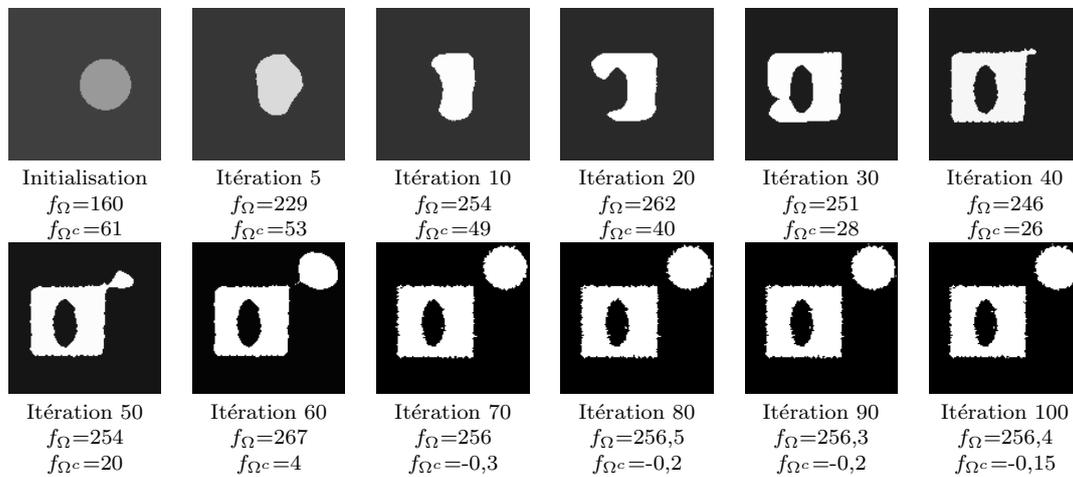


FIGURE 6.4 – Evolution de la reconstruction orientée objet, sans contrainte de forme, sur 100 itérations. Les niveaux de gris correspondent aux valeurs de f_{Ω} et f_{Ω^c} à l'itération considérée.

Sur la Fig. 6.4, on présente l'évolution du modèle déformable constant par morceaux sur 100 itérations. La forme initiale correspond à un disque. Les constantes d'intensité de l'objet et du fond sont calculées par les relations (6.12)-(6.13). On constate que l'implantation par *level-sets* a permis de gérer efficacement les changements de topologie. A partir du disque initial, le carré troué est progressivement reconstruit. Puis, au niveau de la quarantième itération apparaît une protubérance sur le coin du carré situé en haut à droite. Cette protubérance se développe pour reconstruire le disque à la soixante dixième itération. A partir d'une initialisation constituée

d'une seule composante connexe, on est parvenu à reconstruire les deux composantes de l'objet solution.

Nous plaçons sur la Fig. 6.5, l'évolution des valeurs des constantes d'intensité. Ces dernières sont actualisées à chaque itération à travers les égalités (6.12)-(6.13). On constate que ces valeurs bien respectivement vers 255 pour l'objet et zéro pour le fond.

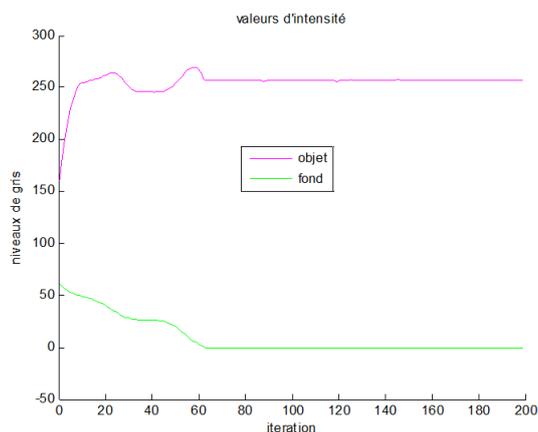


FIGURE 6.5 – Evolution des constantes d'intensité de l'objet et du fond pour les données de projection de la Fig. 6.2-a.

Le cas considéré ici se prête bien à une reconstruction pixellique. Lorsqu'un grand nombre de projections est disponible, cette méthode s'avère suffisante. En pratique, on dispose toutefois rarement d'autant de projections : certaines directions d'observation s'avèrent, par exemple, inaccessibles. Pour certaines applications, notamment dans le domaine médical, on cherche également à réduire le temps d'acquisition pour des raisons de confort pour le patient. Dans cette situation, le nombre de projection est délibérément réduit.

6.7 Évaluation sur données réduites

Nous considérons, à présent, le cas d'un faible nombre de projections. Nous présentons, à la Fig 6.6, les projections de l'objet de la Fig. 6.2-b pour cinq angles de prise de vues et avec un bruit d'acquisition gaussien tel que $SNR_{\sigma} = 15$ dB.

6.7.1 Reconstructions pixelliques

Nous nous intéressons, dans un premier temps, aux méthodes pixelliques : rétro-projection filtrée et méthodes de régularisation quadratiques et semi-quadratiques. La Fig. 6.7 montre les résultats obtenus avec ces méthodes. Ces derniers s'avèrent comme attendu, décevants : on peut notamment constater que le contour des objets n'apparaît jamais nettement.

La rétro-projection filtrée laisse apparaître un flou caractéristique en étoile, Fig. 6.7-a. Quant à la régularisation de Tikhonov, elle donne un caractère trop lisse à l'image reconstruite, Fig. 6.7-b.

La méthode de régularisation semi-quadratique ARTUR, présentée au chapitre 5, est de même prise en défaut : malgré la prise en compte des discontinuités, la reconstruction du bord

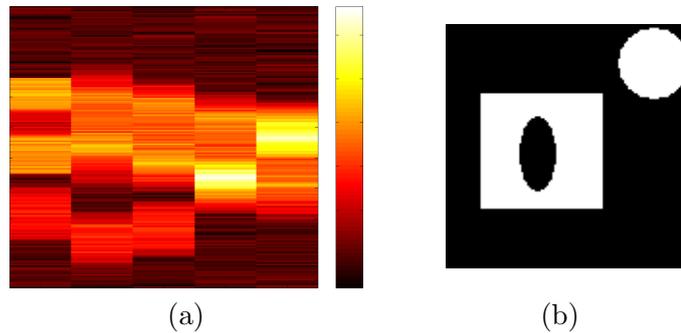


FIGURE 6.6 – Données de projections en (a) pour 5 angles et un bruit gaussien tel que $SNR_{\sigma}=15$ dB, image solution en (b).

de l'objet n'est pas satisfaisante, Fig. 6.7-c. Ceci est dû au nombre limité de projections considéré.

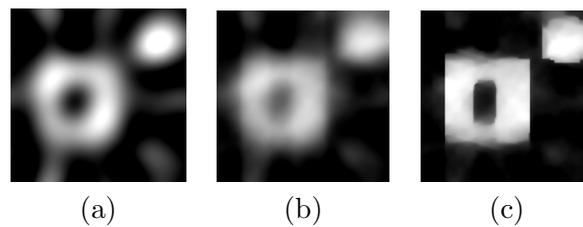


FIGURE 6.7 – Reconstructions pixelliques des projections de la Fig. 6.6-a : (a) Rétro-projection filtrée (fréquence de coupure : 0,1) ; (b) Régularisation de Tikhonov (coefficient de régularisation : 1600) ; (c) Régularisation semi-quadratique [Charbonnier et al., 1997] ($\varphi(u) = 2\sqrt{1+u^2} - 2$, paramètre d'échelle 5, coefficient de régularisation 1600).

6.7.2 Reconstruction orientée objet usuelle

Nous explorons, à présent, le cas des reconstructions orientées objet. Nous procédons, dans un premier temps, à une reconstruction en prenant en compte uniquement le terme d'attache aux données. On présente les résultats obtenus sur la Fig. 6.8. Par rapport à la Fig. 6.4, on constate que le bord de la forme perd de sa régularité à cause du manque de données.

Nous faisons figurer, sur la Fig. 6.9, l'évolution des valeurs des constantes d'intensité. Sur la partie (a), nous superposons le bord de la forme reconstruite sur la solution. Sur la partie (b), nous présentons les courbes d'intensités de l'objet et du fond. On constate la présence de valeurs qui dépassent 255 pour l'objet et de valeurs qui sont négatives pour le fond. Ceci s'explique par le fait que, dans la reconstruction obtenue, le domaine couvert par l'objet est sous-estimé : la Fig. 6.9-a montre que l'objet est plus petit que sur la solution. Comme le fond tient une place plus importante dans l'image reconstruite, sa constante d'intensité est plus petite que sa valeur solution. On obtient ainsi des valeurs négatives. En contrepartie, les intensités étant solution de (6.12)-(6.13), la constante d'intensité de l'objet est sur-évaluée. On obtient alors, pour cette dernière, des valeurs au dessus de 255.

Pour pallier le défaut de régularité de la frontière, on peut tenter une reconstruction orientée

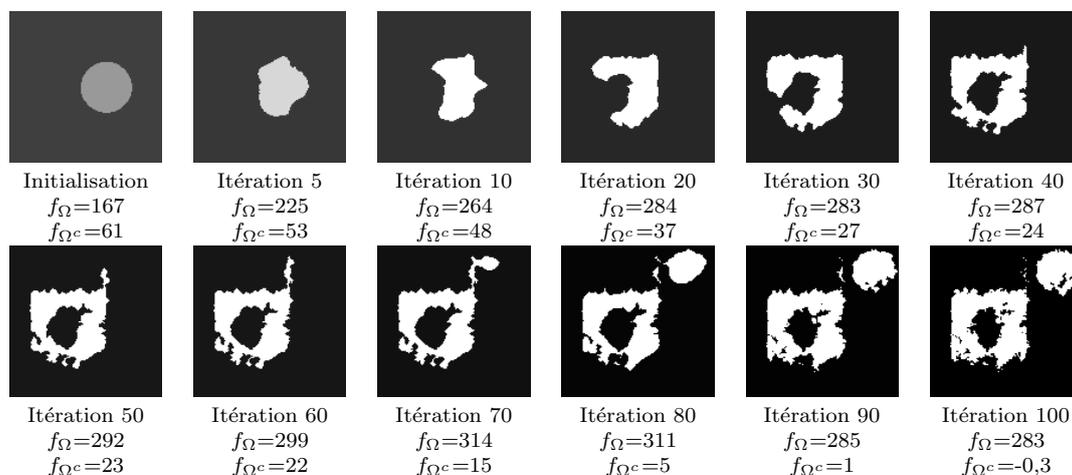


FIGURE 6.8 – Evolution de la reconstruction orientée objet, sans contrainte, sur 100 itérations. Les niveaux de gris correspondent aux valeurs de f_{Ω} et f_{Ω^c} à l'itération considérée.

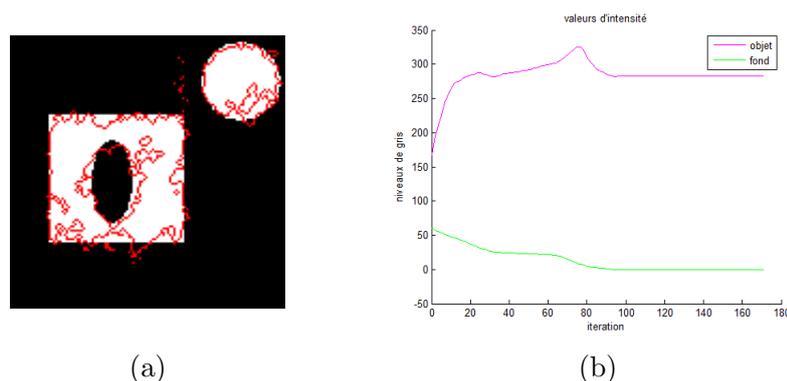


FIGURE 6.9 – Superposition du bord de la forme reconstruite en (a), évolution des constantes d'intensité de l'objet et du fond en (b).

objet avec pénalisation de la longueur du contour. En fonction du poids λ qu'on attribue à la contrainte de longueur, on remarque qu'il n'est pas toujours possible de reconstruire toutes les composantes de l'objet, Fig. 6.10. Avec une contrainte importante, le contour gagne en régularité mais, en contrepartie, le lissage ne permet pas le développement de l'excroissance qui permet de reconstruire le disque. Ainsi, lorsque $\lambda \approx 10^6$, seul le carré à trou est reconstruit. Lorsque le paramètre de poids est trop fort ($\lambda \approx 10^8$), la contrainte de longueur est prédominante. La reconstruction obtenue se réduit, dans ce cas, à un point.

6.7.3 Reconstruction orientée objet avec contrainte de forme

Les expériences précédentes montrent que, lorsque le nombre de projections est réduit, les méthodes pixelliques et orientées objets usuelles sont peu performantes. Nous proposons de mettre en œuvre notre méthode de reconstruction orientée objet contrainte. Nous nous intéressons à évaluer si la contrainte de forme que nous souhaitons introduire [Foulonneau,

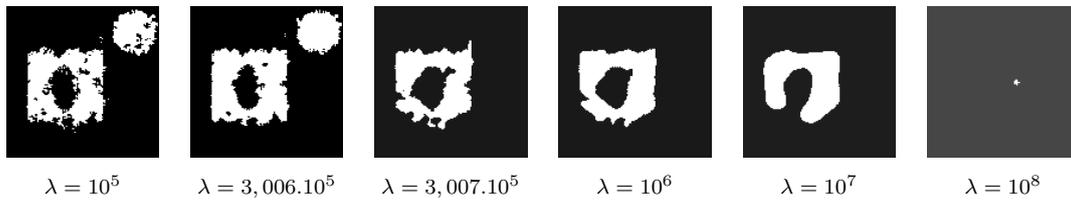


FIGURE 6.10 – Reconstruction orientée objet à partir des projections bruitées p et avec une pénalisation croissante de la longueur du contour ($10^5 \leq \lambda \leq 10^8$), où $E_\lambda = E_{data} + \lambda E_{length}$.

2004] permet de prendre en compte les différents niveaux de régularité que comporte l’objet (points anguleux, forme circulaire).

Les données de l’algorithme sont présentées sur la Fig. 6.11. Sur la parties (a), on rappelle les données de projection. On place sur la partie (b) la forme de référence. Celle-ci correspond à l’objet modèle, introduit à la Fig. 4.1, à une translation et une mise à l’échelle près.

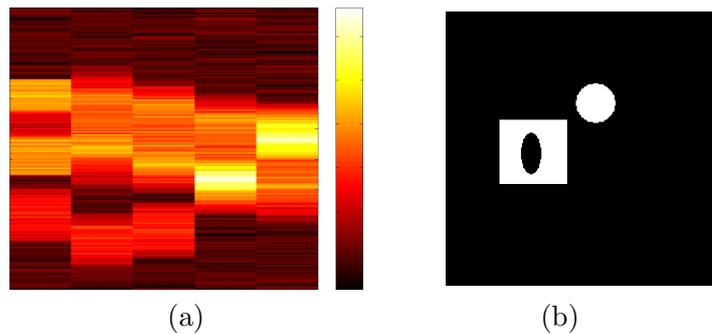


FIGURE 6.11 – Données de la reconstruction contrainte : données de projections en (a) pour 5 angles et un bruit gaussien tel que $SNR_\sigma=15$ dB, forme de référence en (b).

Une contrainte de haut niveau, introduite après un résultat de reconstruction initiale, peut s’avérer intéressante car elle prend en compte globalement la forme de l’objet à reconstruire. Elle ne se réduit pas à une information locale sur la régularité du contour. Une contrainte de régularité peut d’ailleurs être inadaptée, notamment lorsque l’objet possède des points anguleux. Ceci est le cas avec l’objet que nous considérons.

Nous souhaitons évaluer si la contrainte permet d’apporter l’information nécessaire pour reconstruire correctement l’objet. Nous procédons, dans un premier temps, à une expérience (Exp. 6.7.1) dans laquelle nous faisons varier le nombre de projections. Nous considérons ensuite différents niveaux de bruit pour un nombre de projections fixé (Exp. 6.7.2). Dans ces deux expériences, un seul niveau de variabilité est introduit. Il correspond aux dimensions (échelle) et à la position de l’objet. L’ensemble des objets de référence est alors réduit à la forme de la Fig. 6.11-b.

Dans les expériences suivantes, nous introduisons un second niveau de variabilité à travers l’aspect multi-références du modèle *a priori*. L’ensemble de formes de référence contient, dans un premier temps, des variantes de l’objet ainsi que des objets différents (Exp. 6.7.3). Dans un second temps, nous explorons le cas où cet ensemble est constitué de formes qui pourraient être issues de configurations apprises (Exp. 6.7.4). Ces deux dernières expériences sont conduites à partir des données de la Fig. 6.11-a, i.e. pour cinq angles de prises de vues et avec un rapport

Nb. angles	6	5	4
$N = 21$	0,8	0,9	0,95
$N = 45$	0,7	0,9	0,85

TABLE 6.1 – Valeurs du paramètre α correspondant aux résultats obtenus dans l'expérience 6.7.1, où N est l'ordre des moments dans les différentes étapes de la reconstruction contrainte.

signal sur bruit de 15 dB.

Expérience 6.7.1. Nous évaluons si la contrainte de forme permet de compenser le manque de données issu de conditions expérimentales où le nombre d'angles d'observation est restreint. Pour ce faire, nous considérons trois séries de projections qui correspondent respectivement à 4, 5 et 6 angles de prise de vues.

La Fig. 6.12 présente l'initialisation du modèle déformable (colonne (a)) et la reconstruction obtenue sans *a priori* (colonne (b)) dans les trois cas. Celle-ci se dégrade naturellement lorsque le nombre de données se réduit. Nous introduisons ensuite la contrainte avec la forme de référence de la Fig. 6.11-b. Les résultats à l'ordre $N = 21$ (colonne (c)) et à l'ordre $N = 45$ (colonne (d)) montrent que l'*a priori* de forme apporte suffisamment d'information pour pallier le manque de projections. Dans les trois cas, la reconstruction obtenue est satisfaisante, pourvu que le paramètre α soit adapté. En particulier, les différents niveaux de régularité que comporte l'objet (points anguleux, forme circulaire) sont correctement reconstruits. Le tableau. 6.1 contient les valeurs de α correspondant aux différentes situations envisagées dans cette expérience.

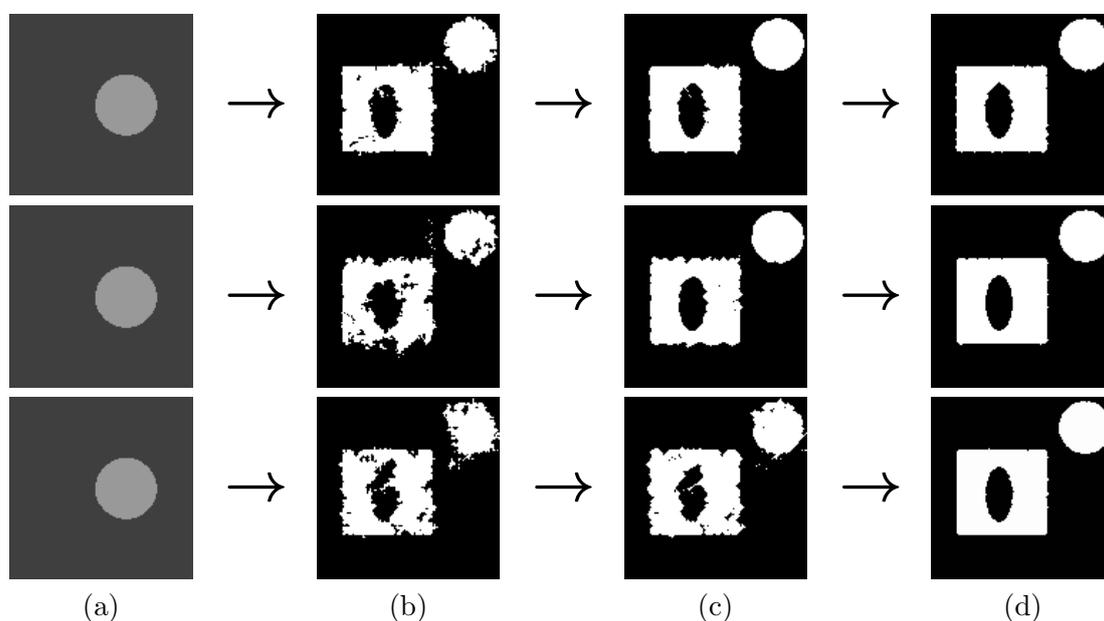


FIGURE 6.12 – Reconstructions orientées objet contraintes obtenues pour l'expérience 6.7.1. 1^{ère} ligne : pour 6 angles de prise de vues, 2^{ème} ligne : pour 5 angles, 3^{ème} ligne : pour 4 angles. Initialisation (a), reconstruction sans *a priori* de forme (b), avec *a priori*, pour la forme de référence de la Fig. 6.11-b, à l'ordre $N = 21$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ (d).

Comme nous l'avons déjà précisé, la forme de référence considérée (Fig 6.11-b) diffère de

l'objet d'un facteur d'échelle et d'une translation. Comme dans l'expérience de segmentation proposée au chapitre 4 (Fig. 4.3), la phase d'optimisation initiale sans *a priori* permet de reconstruire approximativement les positions et dimensions des différentes composantes de l'objet. L'optimisation avec *a priori* de forme fondé sur les moments de Legendre invariants en translation et en échelle contraint ensuite le contour à ressembler à l'objet.

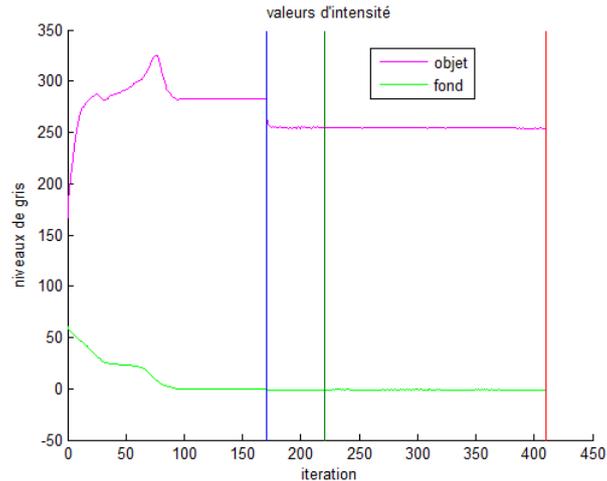


FIGURE 6.13 – Evolution des valeurs d'intensité au cours de la reconstruction contrainte : d'abord sans *a priori*, puis en introduisant l'*a priori* à l'ordre $N = 21$, puis à l'ordre $N = 45$.

Sur la Fig. 6.13, on présente l'évolution des constantes d'intensité au cours de la reconstruction contrainte. On considère les données de la Fig. 6.11-a, i.e. les projections obtenues avec cinq angles de prise de vues et avec un rapport signal sur bruit tel que $SNR_{\sigma} = 15$ dB. La première phase correspond à une reconstruction sans *a priori* et reproduit le résultat de la Fig. 6.9. L'intensité de l'objet est supérieure à 255. Celle du fond est légèrement négative. Avec l'introduction de la contrainte de forme à l'ordre $N = 21$ puis $N = 45$, on constate que les estimations des valeurs d'intensité de l'objet et du fond tendent respectivement vers 255 et zéro. Ce résultat montre que, non seulement la forme tend vers la solution, mais que c'est également le cas pour les paramètres d'intensité.

Expérience 6.7.2. On s'intéresse ici à différents niveaux de bruit sur les projections. Le bruit est supposé additif, gaussien. Il est source d'artefacts dans la reconstruction de l'objet. On cherche à évaluer si l'*a priori* permet de contraindre suffisamment la forme en évolution pour éliminer ces artefacts. On considère cinq séries de données, obtenues pour cinq angles de prise de vues, qui correspondent respectivement à un rapport signal sur bruit de 25 dB, 20 dB, 15 dB, 10 dB, 5 dB.

Les résultats sont présentés Fig. 6.14. La reconstruction se détériore naturellement lorsque le rapport signal sur bruit diminue (colonne (b)). Nous adoptons la même démarche que pour l'Exp. 6.7.1, en introduisant la contrainte à l'ordre $N = 21$ (colonne (c)). Nous améliorons ensuite le résultat obtenu à l'aide d'une représentation des formes jusqu'à l'ordre $N = 45$ (colonne (d)). Lorsque le niveau de bruit est supérieur à 15 dB, les résultats montrent que l'*a priori* de forme permet de remédier aux artefacts issus des données de projections bruitées. En revanche, lorsque le niveau de bruit est inférieur à 15 dB, la contrainte de forme ne permet pas de re-

construire l'objet. Pour $SNR_\sigma = 10$ dB, la composante circulaire n'est pas reconstruite dans la première phase de l'algorithme. Aussi, la forme de référence identifiée à partir de la reconstruction sans contrainte de forme est le carré à trou. Pour $SNR_\sigma = 5$ dB, les perturbations sont trop importantes pour que les résultats obtenus soient satisfaisants. Le tableau 6.2 indique les valeurs du paramètre α correspondant aux différentes reconstructions obtenues.

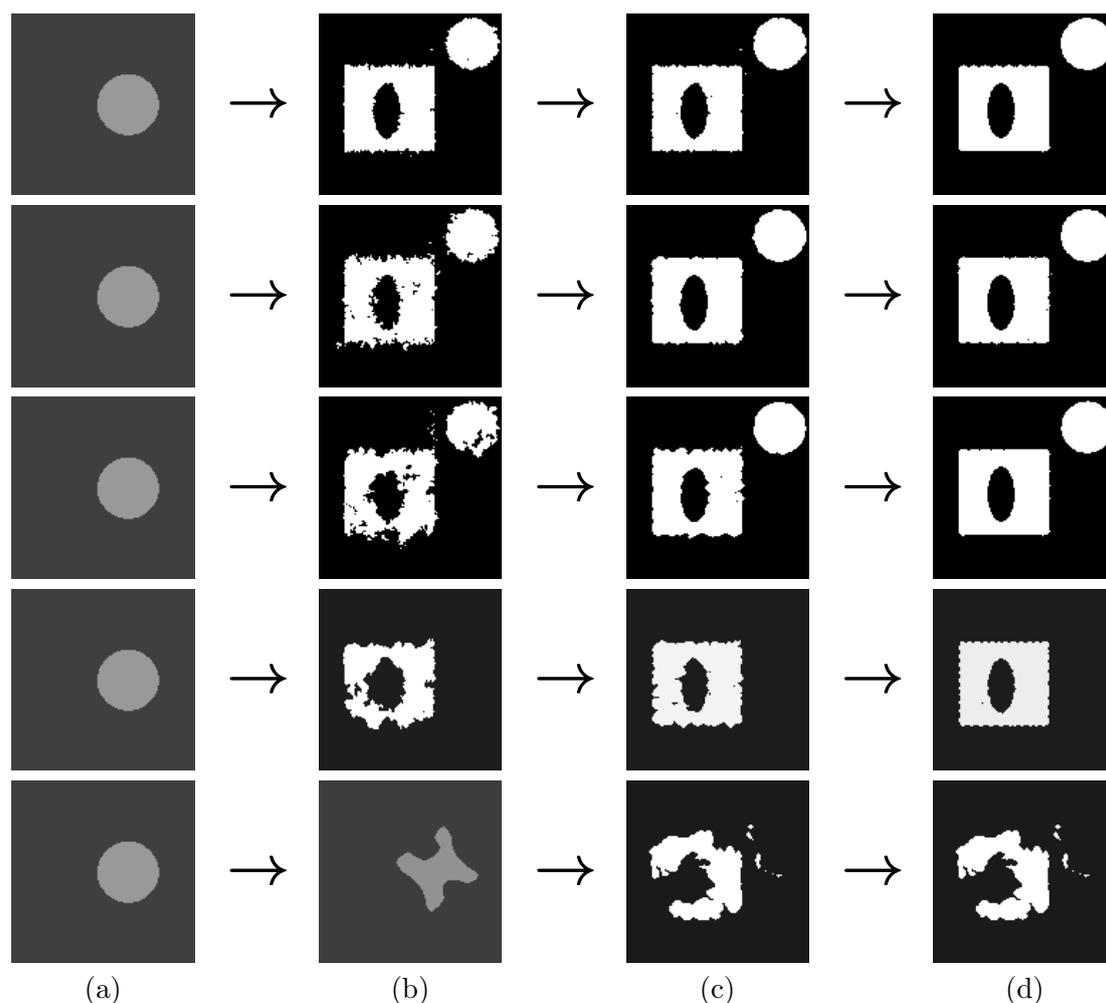


FIGURE 6.14 – Reconstructions orientées objet contraintes obtenues pour l'Exp. 6.7.2. 1^{ère} ligne : $SNR_\sigma = 25$ dB, 2^{ème} ligne : $SNR_\sigma = 20$ dB, 3^{ème} ligne : $SNR_\sigma = 15$ dB, 4^{ème} ligne : $SNR_\sigma = 10$ dB, 5^{ème} ligne : $SNR_\sigma = 5$ dB. Initialisation (a), reconstruction sans *a priori* de forme (b), avec *a priori*, pour la forme de référence de la Fig. 6.11-b, à l'ordre $N = 21$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ (d).

Expérience 6.7.3. Dans cette expérience, l'ensemble de formes de référence est constitué de 12 objets (Fig. 6.15-a). Parmi ces derniers figurent la forme de référence de la Fig. 6.11-b et des variantes de celle-ci. La composante circulaire est positionnée sur d'autres parties de l'image : au niveau du bord supérieur, gauche, droit, inférieur de l'autre composante. Les deux composantes de l'objet sont d'autre part considérés séparément : le disque seul et le carré troué font partie de l'ensemble. Nous avons également introduit une forme de référence qui a les dimensions réelles

SNR (dB)	25	20	15	10	5
$N = 21$	0,5	0,7	0,9	0,7	0,5
$N = 45$	0,9	0,9	0,9	0,5	0,7

TABLE 6.2 – Valeurs du coefficient α pour les reconstructions de la Fig. 6.14, où N est l'ordre des moments dans les différentes étapes de la reconstruction contrainte.

de l'objet, mais qui diffère de celui-ci par l'absence de trou dans le carré. Enfin, nous ajoutons des objets sans rapport avec la forme à reconstruire : tasses, bouilloire, main.

Nous considérons les données de projections de la Fig. 6.11-a, obtenues pour 5 angles de prise de vues et avec un niveau de bruit de 15 dB. Comme pour les Exp. 6.7.1 et Exp. 6.7.2, nous procédons à la reconstruction contrainte, à partir d'un résultat obtenu sans *a priori* (colonne (b)), à l'ordre $N = 21$ (colonne (c)), puis à l'ordre $N = 45$ (colonne (d)). Les résultats montrent que l'intégration de plusieurs références n'engendre pas de modifications majeures. L'objet, qui figure à la première ligne et à la deuxième colonne de la Fig. 6.15-a, est correctement reconnu par classification. Il donne lieu à un terme de force prépondérant qui contraint le contour à lui ressembler.



FIGURE 6.15 – Ensemble de $N_{Ref} = 12$ images de référence (a) de l'Exp. 6.7.3. Résultats de reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 6.11-a : sans *a priori* de forme (b), en utilisant la contrainte multi-références à l'ordre $N = 21$ avec $\alpha = 0.9$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ avec $\alpha = 0.9$ (d).

Expérience 6.7.4. Dans cette expérience, nous nous proposons d'aller plus loin, en termes d'invariance géométrique, que la translation et la mise à l'échelle. Nous nous intéressons aux rotations à partir d'une base d'apprentissage. En effet, il a été montré [Foulonneau et al., 2009] que prendre en compte certains degrés de liberté dans l'ensemble d'apprentissage plutôt que dans l'invariance du descripteur facilite l'optimisation. Nous considérons ici un ensemble de formes de référence constitué des rotations de l'objet de la Fig. 6.11-b. L'intervalle $I = [-45^\circ, +45^\circ]$ des angles de rotation est parcouru par pas de 2° . Dans ce cas, l'image de référence n'appartient plus à l'ensemble : les formes les plus proches correspondent à une rotation de celle-ci de $+1^\circ$ ou -1° . Nous présentons, à la Fig. 6.16-a, 12 des 46 images qui composent cet ensemble. Elles peuvent être considérées comme des configurations apprises qui indiquent l'orientation de la forme.

Les résultats de reconstruction obtenus à l'ordre $N = 21$ (sur la Fig. 6.16-c) et à l'ordre $N = 45$ (sur la Fig. 6.16-d) laissent apparaître un manque de régularité sur les bords du carré. Ceci est dû au fait que nous sommes amenés à relâcher la contrainte de forme, car aucune des images de référence ne présente la même orientation que l'objet. En effet, si nous affectons un poids trop important à l'*a priori*, le contour sera contraint à ressembler à la forme de référence la plus proche. Il sera alors décalé d'un angle de $+1^\circ$ ou -1° par rapport à l'objet à reconstruire.

Au contraire, en laissant suffisamment d'importance au terme d'attache aux données, on peut espérer que les données de projections permettent de déterminer l'orientation réelle de l'objet. En contrepartie, ceci est source d'irrégularité au niveau du contour, du fait du caractère mal posé du problème inverse. Ce résultat pourrait être amélioré en introduisant une contrainte de longueur, ce qui aurait pour effet de limiter la présence de ces irrégularités.

A titre de comparaison, nous avons effectué une simulation où nous avons introduit l'objet modèle dans l'ensemble des formes de référence. Avec les mêmes valeurs de paramètres pour la reconstruction contrainte, les résultats, Fig. 6.17, montrent que, malgré la présence de l'objet modèle, les reconstructions obtenues sont peu satisfaisantes. Ceci est dû au fait que les valeurs du paramètre de poids α sur la contrainte de forme ne sont pas suffisamment élevées (respectivement $\alpha = 0,7$ pour $N = 21$ et $\alpha = 0,5$ pour $N = 45$) pour pouvoir contraindre suffisamment la forme en évolution vers l'objet à reconstruire. En revanche, lorsqu'on augmente le poids de la contrainte de forme à la dernière étape, on constate, pour $\alpha = 0,9$ à l'ordre $N = 45$, que la reconstruction obtenue est améliorée.

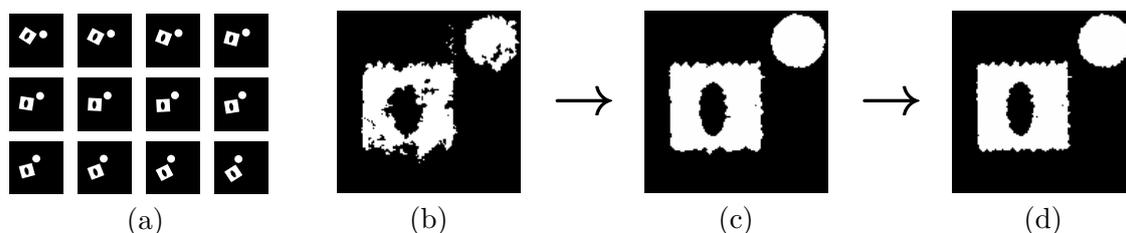


FIGURE 6.16 – Douze des $N_{Ref} = 46$ images de référence de l'expérience 6.7.4 (a) et résultats de reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 6.11-a : sans *a priori* de forme (b), en utilisant la contrainte multi-références avec $N = 21$ et $\alpha = 0.7$ (c), puis $N = 45$ et $\alpha = 0.5$ (d).

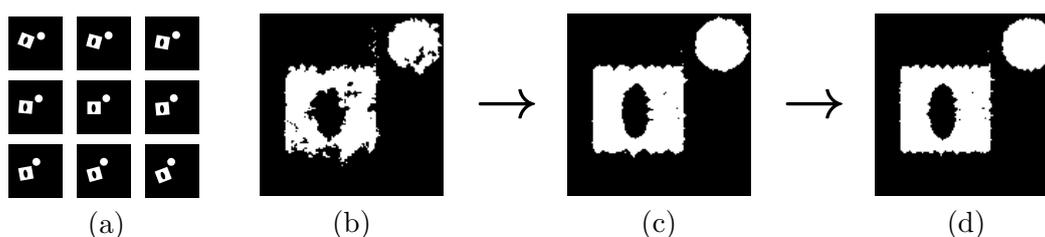


FIGURE 6.17 – Neuf des $N_{Ref} = 47$ images de référence (a) de l'Exp. 6.7.4, lorsque l'objet modèle appartient à l'ensemble des images de référence. Résultats de reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 6.11-a : sans *a priori* de forme (b), en utilisant la contrainte multi-références à l'ordre $N = 21$ avec $\alpha = 0.7$ (c), puis à l'ordre $N = 45$ avec $\alpha = 0.5$ (d).

6.8 Conclusion

Nous avons considéré dans ce chapitre la tomographie linéaire d'émission. L'opérateur direct correspond, pour sa partie déterministe, à l'opérateur de Radon. L'algorithme de reconstruction contrainte repose, comme en segmentation, sur une combinaison entre un terme d'attache aux données et le terme d'*a priori* défini au chapitre précédent. L'évolution du modèle déformable est conduite par optimisation. Celle des paramètres d'intensité donne lieu à la résolution d'un



FIGURE 6.18 – Neuf des $N_{Ref} = 47$ images de référence (a) de l’Exp. 6.7.4, lorsque l’objet modèle appartient à l’ensemble des images de référence. Résultats de reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 6.11-a : sans *a priori* de forme (b), en utilisant la contrainte multi-références à l’ordre $N = 21$ avec $\alpha = 0.7$ (c), puis à l’ordre $N = 45$ avec $\alpha = 0.9$ (d).

système linéaire. La forme de l’objet reconstruit est, quant à elle, optimisée par descente de gradient.

Pour mettre en œuvre une reconstruction orientée objet contrainte, il suffit d’établir le gradient du terme d’attache aux données. Celui de l’*a priori* a , en effet, été donné au chapitre 4. Nous établissons ce gradient à partir du théorème de dérivation d’une intégrale de domaine. La conclusion est identique à celle obtenue dans [Santosa, 1996] de manière plus formelle.

L’algorithme est ensuite évalué sur données simulées à partir d’un objet synthétique. Nous nous sommes particulièrement intéressés au cas où peu de données de projections étaient disponibles. Les résultats montrent que l’*a priori* de forme permet d’améliorer significativement les résultats de reconstruction par rapport à des approches pixelliques ou orientées objet, sans contrainte de forme. L’amélioration est très sensible lorsque l’on dispose d’un faible nombre de projections ou que le rapport signal à bruit est défavorable.

Ces résultats ont été obtenus dans le cadre d’un problème de tomographie linéaire. Nous nous proposons, dans la suite, d’aborder le cas, notablement plus complexe, de la tomographie non linéaire par temps d’arrivée.

Chapitre 7

Reconstruction contrainte en tomographie non linéaire

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de reconstruction en tomographie non linéaire par temps de première arrivée. Pour cette modalité, la mesure correspond au temps que met une onde acoustique pour atteindre un point d'arrivée à partir d'un point source.

Contrairement à la modalité d'émission, le problème direct est non linéaire. La méthode de reconstruction incorporant des contraintes de formes, que nous avons présentée au chapitre précédent, procède par optimisation d'une fonctionnelle de forme linéaire par descente de gradient de forme. Dans l'obtention de l'expression du gradient, l'hypothèse de linéarité du problème direct est exploitée à différentes reprises.

Afin de se replacer dans le cadre de la tomographie d'émission, une approche par linéarisation semble la plus naturelle. Cette approche consiste à effectuer un développement au premier ordre du modèle direct. Dans une démarche orientée objet, la dérivée usuelle est remplacée par la dérivée de forme, ce qui nécessite de pouvoir calculer la dérivée de forme de l'opérateur direct. Or ce dernier ne s'exprime pas comme une intégrale de domaine ni comme une intégrale sur le bord d'un domaine, de sorte qu'on ne peut appliquer ici les règles opératoires de détermination de la dérivée données au Chapitre 2.

Le problème direct se formule comme une intégrale curviligne le long d'une courbe extrémale, i.e. le long d'un chemin solution d'un problème d'optimisation. La démarche que nous avons adoptée pour résoudre le problème inverse a été d'approcher le problème de moindres carrés non linéaires par une suite de problèmes d'optimisation linéaire. Dans cette mesure, chacune des fonctionnelles de forme peut être optimisée par descente de gradient de forme, de la même manière qu'au chapitre précédent. D'autre part, comme, à chaque itération, un problème d'optimisation de forme linéaire est considéré, l'incorporation de contraintes peut être effectuée de manière identique à celle de la tomographie d'émission.

Ce chapitre est organisé de la manière qui suit. Dans la section 7.2, nous rappelons les spécificités de la modalité par temps d'arrivée et introduisons la problématique générale du problème de reconstruction associé. Par la suite, nous formulons le problème direct (section 7.3) ainsi que le problème inverse (section 7.4). Nous montrons, en particulier, quelles sont les difficultés qu'implique une approche par linéarisation de forme. Face à ces difficultés, une méthode approchant le problème de moindres carrés non linéaires par une suite de fonctionnelles de forme

linéaires est proposée à la section 7.5. La section 7.6 est consacré à différents éléments de mise en œuvre de l'algorithme de reconstruction que nous proposons.

7.2 Problématique générale

La tomographie d'émission, traitée dans le chapitre précédent, a la particularité de posséder un problème direct linéaire. Une brève analyse de la situation montre que ceci provient du fait que la géométrie des trajets orthogonaux au front d'onde est identique quel que soit le point considéré : chaque point émettant un rayonnement rectiligne, la mesure effectuée se réduit à une intégration le long de droites. Si on se place suffisamment loin de l'objet, toutes ces droites sont parallèles et sont portées par la même direction. On obtient, dans ce cas :

$$\int_L (f + f') = \int_L f + \int_L f' \quad (7.1)$$

où $\int_L f$ désigne l'intégration de f le long de cette même direction de parcours. Ceci correspond à la linéarité des mesures d'émission par rapport à l'objet f . Au chapitre précédent, nous avons paramétré la droite L par sa direction θ et sa distance à l'origine u : $L = L_{u,\theta}$.

En tomographie par temps d'arrivée, le trajet orthogonal au front ne suit plus la même géométrie. Il obéit à un principe physique de *moindre action* qui conduit à un problème d'optimisation. Chaque champ de lenteur donne donc lieu à un trajet différent reliant un point source à un point d'arrivée. Comme pour la tomographie d'émission, la mesure de temps d'arrivée est un opérateur d'intégration le long de ce trajet de parcours. Cependant, l'opérateur direct perd, cette fois-ci, sa linéarité :

$$\int_{\gamma_{u+u'}} (u + u') \neq \int_{\gamma_u} u + \int_{\gamma_{u'}} u' \quad (7.2)$$

Dans (7.2), on a noté γ_u la direction de parcours issue du champ de lenteur u et $\int_{\gamma_u} u$ le temps d'arrivée qui lui est associé. La perte de linéarité dans (7.2) provient du fait qu'en général les trois directions de parcours γ_u , $\gamma_{u'}$ et $\gamma_{u+u'}$ diffèrent entre elles.

Le principe physique qui induit le temps d'arrivée (et donc sa non linéarité) est le principe de Fermat (Chap. 6) que nous rappelons :

(PF) *la géométrie des directions de parcours est celle qui minimise le temps d'arrivée.*

Le problème direct, qui correspond à déterminer les temps d'arrivée connaissant le champ de lenteur, contient ainsi un problème d'optimisation, contrairement à la tomographie d'émission. Ceci le rend d'autant plus complexe et difficile à approcher par des méthodes numériques adaptées.

En effectuant différentes mesures pour différents points source et plusieurs points d'acquisition, nous obtenons une collection de temps d'arrivée. La détermination du champ de lenteur à l'origine de ces mesures, la plupart du temps bruitées et en nombre réduit, constitue le problème inverse. Nous rappelons que ce problème est mal posé au sens où il n'y a pas existence, unicité ni stabilité de l'objet par rapport aux mesures. Le point le plus problématique en pratique est l'absence de stabilité, de faibles perturbations dues au bruit ou à des erreurs numériques pouvant induire de grandes variations sur l'objet reconstruit.

L'absence de linéarité du problème direct et le caractère mal posé du problème inverse rendent le problème de reconstruction d'autant plus difficile à analyser et à résoudre numériquement :

ils augmentent, en particulier, la présence d'artefacts dans l'image reconstruite. Dans ce cas, la mise en œuvre de méthode orientée objet peut être intéressante afin de délimiter clairement le bord des objet et de limiter les artefacts de reconstruction.

Du fait de la non linéarité du problème direct, la méthode par évolution de forme développée au chapitre précédent ne peut être employée telle quelle. En effet, dans le chapitre précédent, nous utilisons le problème direct, qui nous renseigne sur la manière dont sont obtenues les données, pour estimer l'objet qui est à l'origine de ces données : en particulier, nous avons été conduits à rétroprojeter les résidus entre les mesures et le modèle direct en employant la linéarité de ce dernier.

Le but de ce chapitre est de montrer comment nous sommes parvenus à développer une méthode par évolution de forme dans le cas notablement plus complexe où nous sommes confrontés à la fois à l'absence de linéarité (pour le problème direct) et de caractère bien posé (pour le problème inverse).

7.3 Le problème direct

7.3.1 Formulation en champ de lenteur

Position du problème

Dans cette section, nous supposons (provisoirement) le champ de lenteur u régulier ; en particulier, nous ferons l'hypothèse que u est de classe \mathcal{C}^1 . L'opérateur direct de temps d'arrivée en un point β à partir d'un point source α correspond à l'intégrale curviligne de ce champ de lenteur

$$t(u) = \int_{\gamma} u, \quad (7.3)$$

le long du chemin γ ,

$$\gamma : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \sigma & \longmapsto \gamma(\sigma) \end{cases} \quad (7.4)$$

de classe \mathcal{C}^1 , qui minimise le temps de parcours entre un point source α et un point d'arrivée β . Ceci signifie que le chemin γ vérifie le problème d'optimisation :

$$\int_{\gamma} u = \inf_{\psi} \int_{\psi} u \quad (7.5)$$

où l'infimum considère tous les chemin reliant α à β qui sont de classe \mathcal{C}^1 . Le problème d'optimisation (7.5) que vérifie γ constitue le principe de Fermat. Nous ferons souvent référence au problème (7.5) en le désignant par l'abréviation (*PF*).

Le problème direct défini par (7.3)-(7.5) peut ainsi se formuler comme l'opérateur donnant lieu au temps de parcours le plus court entre les points α et β , ce qui se s'écrit de manière condensée par :

$$t(u) = \inf_{\psi} \int_{\psi} u, \quad (7.6)$$

où ψ est un chemin de classe \mathcal{C}^1 joignant α à β . Cette formulation met en valeur le fait que le problème direct constitue, en lui-même, un problème d'optimisation.

Non linéarité

Intéressons-nous maintenant à la dépendance du modèle direct par rapport au champ de lenteur u . Nous montrons, dans cette section, la non linéarité, annoncée à la section 7.2, des temps d'arrivée $t(u)$ par rapport à u . Celle-ci provient de (7.5) et de l'identité :

$$\inf_x f(x) + \inf_x g(x) \leq \inf_x (f + g)(x)$$

pour toute fonction f et g : en général, il n'y a pas de relation d'égalité entre les deux membres de l'identité précédente.

Considérons deux champs de lenteur réguliers u et u' ainsi que le champ $u'' = u + u'$. Pour un chemin quelconque de classe \mathcal{C}^1 reliant α à β , on a, par linéarité :

$$\int_{\psi} u + \int_{\psi} u' = \int_{\psi} (u + u')$$

En prenant l'infimum de cette égalité par rapport à ψ , on obtient l'inégalité :

$$\inf_{\psi} \int_{\psi} u + \inf_{\psi} \int_{\psi} u' \leq \inf_{\psi} \int_{\psi} (u + u') = \inf_{\psi} \int_{\psi} u''$$

Or, d'après (7.6), ceci correspond à :

$$t(u) + t(u') \leq t(u'') = t(u + u') \quad (7.7)$$

Le fait que l'identité précédente est, en général, une inégalité et non une égalité montre l'absence de linéarité du temps d'arrivée $t(u)$ en fonction du champ de lenteur u .

Le point de vue du calcul des variations

Cette section a pour but d'introduire le cadre théorique qui convient au problème direct dans le cas où le champ de lenteur est régulier et, en particulier, de classe \mathcal{C}^1 .

Reprenons le problème d'optimisation défini par (7.5) en introduisant la fonctionnelle :

$$E(\psi) = \int_{\psi} u \quad (7.8)$$

définie, pour tout chemin ψ de classe \mathcal{C}^1 reliant un point source α à un point d'arrivée β , comme l'intégrale du champ de lenteur u le long de ψ . Alors, en fonction de la fonctionnelle E , les temps d'arrivée sont donnés par :

$$\begin{cases} t(u) &= E(\gamma) \\ E(\gamma) &= \min_{\psi} E(\psi) \end{cases} \quad (7.9)$$

Comme la courbe γ minimise la fonctionnelle E , on peut la caractériser comme annulant la différentielle de la fonctionnelle E . Le sens et calcul explicite de la différentielle de E est donné par l'étude de E du point de vue du calcul des variations. Ce domaine des mathématiques s'intéresse à des fonctionnelles définies sur des espaces de dimension infinie, typiquement des courbes du plan ou des surfaces de \mathbb{R}^3 , et cherche les courbes ou les surfaces qui minimisent ces fonctionnelles.

Le calcul de la différentielle de E nécessite un certain degré de régularité sur u : pour que la différentielle de E ait un sens, il est nécessaire que u soit de classe \mathcal{C}^1 . C'est pourquoi nous avons fait cette hypothèse dans cette présentation du problème direct. Nous nous intéressons, à présent, à la formulation de ce problème en variable de forme.

7.3.2 Formulation en variable de forme

Dans une approche orientée objet du problème, le champ de lenteur u est défini par :

$$u(\Omega, x) = u_\Omega \cdot \mathbb{1}_\Omega(x) + u_{\Omega^c} \cdot \mathbb{1}_{\Omega^c}(x), \quad (7.10)$$

où u_Ω, u_{Ω^c} sont deux constantes qui correspondent aux valeurs de lenteur à l'intérieur et à l'extérieur de la forme Ω . A l'évidence un tel champ de lenteur n'est plus de classe \mathcal{C}^1 .

Si nous introduisons, comme précédemment, la fonctionnelle définie pour toute courbe ψ par :

$$\mathcal{E}(\psi, \Omega) = \int_\psi u(\Omega, \cdot) \quad (7.11)$$

dans laquelle Ω est fixée et joue le rôle de paramètre; alors la seconde ligne de (7.9), qui caractérise γ selon (PF), est donnée par : $\mathcal{E}(\gamma, \Omega) = \inf_\psi \mathcal{E}(\psi, \Omega)$. Or, la forme Ω définissant le champ de lenteur u , la courbe qui minimise la fonctionnelle $\mathcal{E}(\cdot, \Omega)$ dépend du paramètre Ω . Ainsi, $\gamma = \gamma_\Omega$, de sorte que :

$$\mathcal{E}(\gamma_\Omega, \Omega) = \inf_\psi \mathcal{E}(\psi, \Omega) \quad (7.12)$$

En particulier, nous soulignons le fait que lorsqu'on fait varier la forme Ω , le chemin d'intégration γ_Ω est amené à varier.

L'opérateur direct du problème de tomographie par temps d'arrivée s'exprime ensuite comme l'intégrale du champ de lenteur $u(\Omega, \cdot)$ le long de γ_Ω . Par suite, à l'aide de la fonctionnelle \mathcal{E} , il prend l'expression suivante :

$$T(\Omega) = \int_{\gamma_\Omega} u(\Omega, \cdot) = \mathcal{E}(\gamma_\Omega, \Omega) \quad (7.13)$$

Pour Ω variable, on constate donc que l'intégrande $u(\Omega, \cdot)$ mais également le chemin d'intégration γ_Ω sont amenés à varier, ce qui est à prendre en compte dans un éventuel calcul de dérivée de forme.

Dans ce qui précède nous n'avons volontairement pas précisé le degré de régularité des courbes considérées. Rappelons que, pour une courbe

$$\psi : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \\ \sigma & \longmapsto (\psi_1(\sigma), \psi_2(\sigma)) \end{cases} ,$$

l'intégrale curviligne de u le long de ψ est définie par :

$$\int_\psi u = \int_a^b u(\psi(\sigma)) \|\dot{\psi}\|(\sigma) d\sigma \quad (7.14)$$

ce qui suppose *a priori* que le chemin d'intégration ψ soit de classe \mathcal{C}^1 . Dans (7.14), on a noté $\|\dot{\psi}\|(\sigma)$ l'élément de longueur qui est donné par $\|\dot{\psi}\|(\sigma) = \left(\dot{\psi}_1^2(\sigma) + \dot{\psi}_2^2(\sigma) \right)^{1/2}$, où ψ_1 et ψ_2 sont les valeurs dans \mathbb{R}^2 de la fonction ψ .

Or, on peut démontrer [Cartan, 1967b] que, pour un champ de lenteur homogène u , le trajet minimisant l'intégrale curviligne de u s'effectue en lignes droites. Par conséquent, pour un modèle déformable constant par morceaux $u(\Omega, \cdot)$, le trajet qui minimise l'intégrale curviligne de $u(\Omega, \cdot)$ est composé de segments de droites. On en déduit que le trajet minimisant comporte des points anguleux et n'est pas globalement continûment différentiable, mais de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

L'intégrale curviligne donnée par (7.14) se généralise également à ce cas. Pour cela, on introduit une subdivision $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{n+1} = b$ du segment $[a, b]$ telle la restriction $\psi|_i$ de ψ soit de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$, puis on pose :

$$E(\psi) = \int_{\psi} u = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\psi|_i(\sigma)) \|\dot{\psi}|_i\|(\sigma) d\sigma \quad (7.15)$$

Cette nouvelle définition coïncide alors avec (7.14) dans le cas où le chemin est de classe \mathcal{C}^1 [Cartan, 1967b] et est indépendante du choix de la subdivision telle que γ soit de classe \mathcal{C}^1 sur chaque segment $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ [Cartan, 1967b].

7.4 Le problème inverse

7.4.1 Formulation en champ de lenteur

A partir d'une collection de mesures, le problème inverse consiste à déterminer le champ de lenteur à l'origine de ces mesures. Pour des points source α_i en nombre n_s ($1 \leq i \leq n_s$) et des points d'arrivée β_j en nombre n_r ($1 \leq j \leq n_r$), ceci correspond à considérer l'ensemble des trajet $\gamma_{\alpha_i \beta_j}$ minimisant le temps de parcours entre le point α_i et le point β_j .

L'opérateur de temps d'arrivée t est alors à valeurs dans \mathbb{R}^{N_p} avec $N_p = n_s \times n_r$:

$$t : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathcal{D}) & \longrightarrow \mathbb{R}^{N_p} \\ u & \longmapsto (t_1(u), t_2(u), \dots, t_{N_p}(u)) \end{cases}$$

où chaque composante de t est donné par l'intégrale curviligne de u le long $\gamma_{\alpha_i \beta_j}$:

$$t_{i,j}(u) = \int_{\gamma_{\alpha_i \beta_j}} u = E(\gamma_{\alpha_i \beta_j}) \quad (7.16)$$

où E est la fonctionnelle introduite à la section 7.3.1. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le trajet $\gamma_{\alpha_i \beta_j}$ minimise E , i.e. $E(\gamma_{\alpha_i \beta_j}) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}^1} E(\psi)$ où nous avons noté $\mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}^1$ l'ensemble des

courbes de classe \mathcal{C}^1 qui relient le point α_i au point β_j .

A partir de l'opérateur de temps d'arrivée t , on se propose de résoudre le problème inverse par optimisation. La fonctionnelle employée est un terme de moindres carrés :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|T - t(u)\|_{N_p}^2 \quad (7.17)$$

où T désigne le vecteur de \mathbb{R}^{N_p} formé des mesures acquises. La norme $\|\cdot\|_{N_p}$ employée est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{N_p} . Comme l'opérateur de temps d'arrivée est une fonction non linéaire par rapport au champ de lenteur u , la fonctionnelle (7.17) correspond à un terme de moindres carrés non linéaires.

7.4.2 Méthode de Gauss Newton

La méthode de Gauss Newton est une méthode numérique qui permet d'approcher un problème d'optimisation non linéaire par une série de fonctionnelles linéaires à optimiser. Nous la présentons dans cette section en variable de champ de lenteur ; nous discutons de la transposition de la méthode en variable de forme à la section 7.4.4

Face à un problème de moindres carrés non linéaires, le principe de la méthode de Gauss Newton est de linéariser la fonctionnelle à optimiser afin de pouvoir appliquer, à nouveau, les différentes stratégies d'optimisation qui s'appliquent dans le cas linéaire.

Notons $r(v)$ le résidu entre les temps acquis T et le modèle direct, i.e. $r(v) = T - t(v)$. Du fait de la non linéarité du problème direct, c'est une fonction non linéaire du champ de lenteur v . La méthode de Gauss Newton consiste à substituer la fonctionnelle $J(v) = \frac{1}{2}\|r(v)\|^2$ par une version linéarisée de celle-ci à travers un développement au premier ordre. La fonctionnelle de Gauss Newton à optimiser est ainsi donnée par :

$$L(v) = \frac{1}{2}\|r(u) + dr(u) \cdot v\|_{N_p}^2 \quad (7.18)$$

où $dr(v) \cdot u$ est la différentielle du résidu r , au point v , appliquée sur le vecteur u . Dans cette formulation, u et v sont des champs de lenteur, donc des fonctions qui à chaque point du domaine associent la valeur de lenteur en ce point. Ce sont des éléments d'un espace de fonctions, donc d'un espace de dimension infinie.

Chaque composante du résidu est donnée par $r_k(u) = T - t_k(u) = T - E(\gamma_{\alpha_i\beta_j})$, où $\gamma_{\alpha_i\beta_j}$ est la k -ème courbe minimisant E . Les théorèmes de calcul des variations appliqués $E(\gamma_{\alpha_i\beta_j})$ permettraient de calculer explicitement la différentielle $dr_k(u) \cdot v$ pour tout champ de lenteur v .

La fonctionnelle (7.18) étant obtenue en linéarisant le résidu autour du point u , nous la noterons L_u pour faire figurer, en paramètre, le point autour duquel on se place. Désignant par v^* l'optimum de la fonctionnelle L_u , une nouvelle fonctionnelle est élaborée en linéarisant le résidu autour du point $u + v^*$. Cette nouvelle fonctionnelle est à nouveau optimisée et le résidu linéarisé autour de la somme de l'optimum et du point précédent. La stratégie d'optimisation du critère d'attache (7.17) proposée par la méthode de Gauss Newton se résume ainsi de la façon suivante :

Méthode de Gauss Newton

Pour $L_u(v) = \frac{1}{2}\|r(u) + dr(u) \cdot v\|_{N_p}^2$, la méthode de Gauss Newton approche la solution du problème :

$$J(u) = \min_v J(v) = \min_v \frac{1}{2}\|r(v)\|_{N_p}^2 \quad (7.19)$$

par la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ définie, à partir de u_0 donné, par :

$$\begin{cases} L_{u_k}(v_{k+1}) &= \min_v L_{u_k}(v) \\ u_{k+1} &= u_k + v_{k+1} \end{cases} \quad (7.20)$$

7.4.3 Formulation en variable de forme

Lorsqu'on considère plusieurs points source $\alpha_i (1 \leq i \leq n_s)$ et points d'arrivée $\beta_j (1 \leq j \leq n_r)$, l'opérateur de temps d'arrivée est défini par :

$$T : \begin{cases} S_{ad} &\longrightarrow \mathbb{R}^{N_p} \\ \Omega &\longmapsto (T_1(\Omega), T_2(\Omega), \dots, T_{N_p}(\Omega)) \end{cases}$$

où S_{ad} désigne l'ensemble des formes admissibles. De la même manière que lorsque nous formulons le problème inverse en champ de lenteur, chaque composante de T est donnée par :

$$T_k(\Omega) = \int_{\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}} u(\Omega, \cdot) = \mathcal{E}(\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}, \Omega) \quad (7.21)$$

où $\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}$ minimise la fonctionnelle $\mathcal{E}(\cdot, \Omega)$ sur l'ensemble des courbes de classe \mathcal{C}^1 par morceaux reliant α_i à β_j , où (α_i, β_j) constitue la k -ème couple source/capteur.

Comme pour la formulation en champ de lenteur, nous nous proposons de procéder par optimisation pour résoudre le problème inverse. On introduit alors la fonctionnelle :

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \|T - T(\Omega)\|_{N_p}^2 \quad (7.22)$$

où $\|\cdot\|_{N_p}$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{N_p} et on estime l'objet par l'optimum de cette fonctionnelle, i.e. par la forme Ω^* telle que :

$$E(\Omega^*) = \inf_{\Omega} E(\Omega) \quad (7.23)$$

7.4.4 Tentative d'adaptation de la méthode de Gauss Newton en variable de forme

Ayant formulé le problème inverse en variable de forme dans la section précédente, on s'intéresse à adapter la méthode de Gauss Newton, présentée à la section 7.4.2 en variable de forme.

Position du problème

Il est clair que dans une formulation par évolution de forme de la méthode de Gauss Newton, la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ qui estime de proche en proche le champ de lenteur à reconstruire est substituée par une suite de forme $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ qui tend, en un certain sens, vers la forme à reconstruire. Pour chacune de ces formes, on est conduit à définir le champ de lenteur $u(\Omega_k, \cdot)$ donné par :

$$u(\Omega_k, x) = u_{\Omega_k} \cdot \mathbf{1}_{\Omega_k}(x) + u_{\Omega_k^c} \cdot \mathbf{1}_{\Omega_k^c}(x) \quad (7.24)$$

où $u_{\Omega_k}, u_{\Omega_k^c}$ sont des constantes réelles qui estiment la lenteur caractéristique des matériaux de l'objet et du fond.

La seconde ligne de (7.20) indique comment actualiser ce champ de lenteur de l'itération k à l'itération $k+1$, ce qui correspond à la façon de faire évoluer la forme Ω_k vers la forme Ω_{k+1} . On en déduit que, dans le cadre d'une formulation orientée objet, la variable v_{k+1} est nécessairement un champ de vitesse qui s'applique sur le bord $\partial\Omega_k$ de la forme Ω_k . La seconde ligne de (7.20) qui permet d'obtenir $u(\Omega_{k+1}, \cdot)$ à partir $u(\Omega_k, \cdot)$ serait alors remplacée par une équation d'évolution de la forme :

$$\Gamma_{k+1} = \Gamma_k + V_{k+1} \quad (7.25)$$

où $\Gamma_k = \partial\Omega_k$.

D'autre part, d'après la première ligne de (7.20), le champ de vitesse V_{k+1} est obtenu par optimisation de la fonctionnelle de moindres carrés linéarisée. Dans une approche en variable de forme, la linéarisation est effectuée par dérivée de forme, ce qui conduit à considérer la fonctionnelle :

$$L_{\Omega}(V) = \frac{1}{2} \|T - T(\Omega) - T'(\Omega) \cdot V\|_{N_p}^2 \quad (7.26)$$

où $T'(\Omega) \cdot V$ est la dérivée de Gâteaux de l'opérateur direct T dans la direction du champ de vitesse V . Le champ de vitesse V_{k+1} est ensuite défini par :

$$V_{k+1} = \inf_V L_\Omega(V), \quad (7.27)$$

ce qui permet de faire évoluer la forme Ω_k selon (7.25).

Méthode de Gauss Newton en variable de forme

Pour $L_\Omega(V) = \frac{1}{2} \|T - T(\Omega) - T'(\Omega) \cdot V\|_{N_p}^2$, la méthode de Gauss Newton approche la solution du problème :

$$E(\Omega^*) = \min_{\Omega \in S_{ad}} E(\Omega) = \min_{\Omega \in S_{ad}} \frac{1}{2} \|T - T(\Omega)\|_{N_p}^2 \quad (7.28)$$

par la suite $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ définie, à partir de Ω_0 donné, par :

$$\begin{cases} L_{\Omega_k}(V_{k+1}) &= \min_V L_{\Omega_k}(V) \\ \partial \Omega_{k+1} &= \partial \Omega_k + V_{k+1} \end{cases} \quad (7.29)$$

Difficultés

Pour définir la fonctionnelle de Gauss Newton orientée objet à optimiser, tout revient à déterminer la dérivée de forme $T'(\Omega) \cdot V$.

La première difficulté à laquelle on est tout de suite confronté est le fait que la fonctionnelle de forme T n'est ni une intégrale sur le domaine Ω , ni une intégrale sur son bord $\partial\Omega$: il s'agit d'un opérateur dont chacune des composantes est une intégrale curviligne. Par conséquent, nous ne pouvons appliquer les théorèmes usuels de calcul de dérivée de forme. En particulier, ceux énoncés au Chapitre 2 ne peuvent être utilisés pour le calcul de $T'(\Omega) \cdot V$.

La seconde difficulté provient du fait que chaque composante de T dépend de Ω de deux manières : à travers la variable Ω en elle-même et à travers le chemin $\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}$. Aussi, la dérivée de forme de $T_k(\Omega) = \mathcal{E}(\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}, \Omega)$, avec (α_i, β_j) le k -ième couple source/capteur, ne se calcule pas aisément car elle nécessite de tenir compte des variations de γ_Ω en fonction de Ω en même temps que des variations de la forme Ω .

Orientations de recherche explorées

Nous effectuons dans cette section une synthèse des orientations de recherche qui ont été explorées afin d'adapter la méthode de Gauss Newton en variable de forme. Le détail de ce travail figure dans l'annexe A.

Pour adapter la méthode de Gauss Newton, nous cherchons à nous replacer dans le cadre d'une formulation équivalente à celle présentée en variable de champ de lenteur. Comme nous l'avons signalé à la section 7.3.1, le calcul de la différentielle des résidus qui définit la méthode de Gauss Newton nécessite que le champ de lenteur soit de classe \mathcal{C}^1 . Dans ce cas, on peut appliquer les théorèmes de différentiation donnés par le calcul des variations. Or, dans le cas d'une formulation orientée objet, le champ de lenteur est défini, à chaque itération, par (7.24) ; il présente, par conséquent, une discontinuité le long du bord $\partial\Omega_k$. Cette absence de continuité,

qui rend le champ de lenteur non dérivable, est la principale source de difficulté dans la recherche d'une méthode de Gauss Newton en variable de forme.

Lorsque le champ de lenteur est de classe \mathcal{C}^1 , le premier résultat obtenu par le calcul des variations est l'expression de la différentielle de la fonctionnelle $E(\psi)$ par rapport à ψ . Le fait que γ minimise E se traduit alors par le fait que la différentielle de E au point γ est nulle. Si on souhaite procéder de la même manière pour adapter la méthode de Gauss Newton en variable de forme, nous devons caractériser la courbe γ_Ω comme annulant une certaine quantité. Cette quantité ne peut être la différentielle au sens usuel de la fonctionnelle $\mathcal{E}(\cdot, \Omega)$ car le champ de lenteur $u(\Omega_k, \cdot)$ n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

En revanche, comme $\mathcal{E}(\cdot, \Omega_k)$ est une fonctionnelle de forme, on peut considérer sa dérivée de forme car cette notion de dérivation ne nécessite aucune condition de régularité sur le champ de lenteur $u(\Omega_k, \cdot)$. Pour un point source α et un point d'arrivée β , la courbe γ_{Ω_k} qui relie α à β en minimisant $\mathcal{E}(\cdot, \Omega_k)$ annule alors la dérivée de domaine $\mathcal{E}(\cdot, \Omega_k)$, i.e. γ_{Ω_k} est définie par :

$$\mathcal{E}'(\gamma_{\Omega_k}; \Omega_k, V) = 0 \quad \text{pour tout } V \quad (7.30)$$

où $\mathcal{E}'(\cdot; \Omega_k, V)$ est la dérivée de domaine de la fonctionnelle de forme \mathcal{E} (Chapitre 2). Le calcul de la dérivée de domaine de \mathcal{E} figure à l'annexe A, § A.3, ce qui permet de caractériser la courbe γ_{Ω_k} .

Toutefois, pour définir complètement un algorithme de Gauss Newton en variable de forme, nous avons besoin de déterminer la dérivée de forme de $T(\Omega_k) = \mathcal{E}(\gamma_{\Omega_k}, \Omega_k)$, ce qui nécessite de prendre en compte les variations de la collection de trajets $\gamma_{\Omega_k, \alpha_i \beta_j}$ par rapport à Ω_k . L'incorporation de (7.30) dans ces variations n'est pas direct et ne permet pas d'obtenir aisément la dérivée de forme de T par rapport à Ω_k .

Cependant, si on garde en mémoire le principe de la méthode de Gauss Newton qui consiste à rendre linéaire le résidu, nous parvenons à un algorithme de reconstruction que nous présentons dans la section qui suit.

7.5 Méthode de reconstruction par optimisation découplée

7.5.1 Fonctionnelle d'optimisation

L'algorithme de Gauss Newton orienté objet n'étant pas évident à exprimer en variable de forme, nous proposons de procéder de manière différente, tout en gardant l'idée principale de la méthode qui consiste à approcher la fonctionnelle de moindres carrés non linéaires $E(\Omega) = \frac{1}{2} \|T - T(\Omega)\|_{N_p}$ par un critère de moindres carrés linéaire.

Pour ce faire, nous introduisons la fonctionnelle de forme $T_\psi(\Omega)$ définie par :

$$T_\psi : \begin{cases} S_{ad} & \longrightarrow \mathbb{R}^{N_p} \\ \Omega & \longmapsto (T_\psi|_1(\Omega), T_\psi|_2(\Omega), \dots, T_\psi|_{N_p}(\Omega)) \end{cases} \quad (7.31)$$

avec $T_\psi|_k(\Omega) = \mathcal{E}(\psi_{\alpha_i \beta_j}, \Omega) = \int_{\psi_{\alpha_i \beta_j}} u(\Omega, \cdot)$ où (α_i, β_j) est le k -ème couple source/capteur.

On rappelle que $\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}$ est le chemin joignant α_i à β_j qui minimise la fonctionnelle $\mathcal{E}(\cdot, \Omega)$ sur l'ensemble des trajets joignant α_i à β_j . Lorsque $\psi_{\alpha_i \beta_j} = \gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}$ pour tout i, j ($1 \leq i \leq n_s, 1 \leq j \leq n_r$), chaque composante de T_{γ_Ω} est égale à $\mathcal{E}(\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}, \Omega) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}} \mathcal{E}(\psi, \Omega)$ où on a noté $\mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}$

l'ensemble des chemins continus qui relient α_i à β_j . On a donc, d'après (7.21), $T_{\gamma_\Omega}(\Omega) = T(\Omega)$.

A partir de l'opérateur T_ψ , nous considérons le problème d'optimisation suivant :

Problème d'optimisation considéré

Chercher Ω^* et les trajets $\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}$ ($1 \leq i \leq n_s, 1 \leq j \leq n_r$) tels que

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}, \Omega^*) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}} \mathcal{E}(\psi, \Omega^*) & \text{pour tout couple } (\alpha_i, \beta_j) \\ E(\Omega^*) = \frac{1}{2} \|T - T(\Omega^*)\|_{N_p}^2 = \inf_{\Omega} \frac{1}{2} \|T - T_{\gamma_{\Omega^*}}(\Omega)\|_{N_p}^2 \end{cases} \quad (7.32)$$

où $\mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}$ est l'ensemble des trajets continus reliant α_i à β_j .

Nous cherchons ainsi à résoudre un problème d'optimisation différent de celui de l'optimisation de la fonctionnelle d'attache aux données dont l'expression est donnée par :

$$\text{Chercher } \Omega^* \text{ tel que } E(\Omega^*) = \inf_{\Omega} E(\Omega) \text{ où } E(\Omega) = \frac{1}{2} \|T - T(\Omega)\|_{N_p}^2 = \frac{1}{2} \|T - T_{\gamma_{\Omega}}(\Omega)\|_{N_p}^2$$

car, dans (7.32), la fonctionnelle à optimiser comporte l'opérateur $T_{\gamma_{\Omega^*}}$ et non $T_{\gamma_{\Omega}}$.

Le fait que la fonctionnelle considérée fait intervenir γ_{Ω^*} rend le problème de moindres carrés linéaire car contrairement à $T_{\gamma_{\Omega}}(\Omega)$ qui fait intervenir Ω dans les trajets $\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}$ et dans $u(\Omega, \cdot)$ par $T_{\gamma_{\Omega}}|_k(\Omega) = \mathcal{E}(\gamma_{\Omega, \alpha_i \beta_j}, \Omega)$, $T_{\gamma_{\Omega^*}}$ fait intervenir la forme Ω uniquement dans $u(\Omega, \cdot)$. Aussi, chaque composante de $T_{\gamma_{\Omega^*}}$ est donné par $\mathcal{E}(\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}, \Omega)$.

Or, $\mathcal{E}(\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}, \Omega) = \int_{\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}} u(\Omega, \cdot)$, donc chaque composante de $T_{\gamma_{\Omega^*}}$ est linéaire par rapport au champ de lenteur $u(\Omega, \cdot)$. En effet, les trajets $\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}$ sont fixés, de sorte que pour $u = u(\Omega, \cdot)$ et $\tilde{u} = u(\tilde{\Omega}, \cdot)$, on a :

$$\int_{\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}} u + \int_{\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}} \tilde{u} = \int_{\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}} (u + \tilde{u}).$$

La formulation du problème de reconstruction (7.32) a permis de s'extraire de la dépendance des trajets en fonction de Ω . En quelque sorte, le couplage qui existait entre le champ de lenteur et les trajets à travers Ω n'est plus présent. Toutefois, dans (7.32) la collection des trajets $\gamma_{\Omega^*, \alpha_i \beta_j}$ est à déterminer car Ω^* est la forme que l'on cherche à reconstruire.

7.5.2 Optimisation

Dans cette section, on se propose de détailler de quelle manière est conduite l'optimisation de (7.32) pour laquelle la seconde ligne fait intervenir la forme Ω^* dans la collection de trajets considérée. Ces derniers sont définis par la première ligne de (7.32) et sont à déterminer pour définir le problème d'optimisation de forme qui reconstruit, par la seconde ligne, la forme recherchée par la forme Ω^* .

Pour résoudre de problème (7.32), on se donne une suite de forme $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ et une collection de trajets $\gamma_{\alpha_i \beta_j}^k$ ($1 \leq i \leq n_s, 1 \leq j \leq n_r$) associés à Ω_k par (PF). Ceci signifie que $\mathcal{E}(\gamma_{\alpha_i \beta_j}^k, \Omega_k) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}} \mathcal{E}(\psi, \Omega_k)$ pour tout couple de point (α_i, β_j) tel que $1 \leq i \leq n_s, 1 \leq j \leq n_r$, où $\mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}$ est l'ensemble des trajets continus joignant α_i à β_j .

Nous procédons ensuite de la manière suivante :

Algorithme d'optimisation de forme proposé

On définit la suite $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ par le problème d'optimisation :

$$E_k(\Omega_{k+1}) = \inf_{\Omega} E_k(\Omega) \quad (7.33)$$

dans lequel

$$E_k(\Omega) = \frac{1}{2} \|T - T_{\gamma^k}(\Omega)\|_{N_p}^2 \quad (7.34)$$

Montrons que cette méthode d'optimisation permet, si elle converge, d'atteindre l'optimum recherché défini par le problème (7.32).

Supposons que la suite $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ converge en un certain sens et notons Ω_∞ sa limite. Soit E_∞ la fonctionnelle de forme définie par

$$E_\infty(\Omega) = \frac{1}{2} \|T - T_{\gamma_{\Omega_\infty}}(\Omega)\|_{N_p}^2, \quad (7.35)$$

où γ_{Ω_∞} est la collection de trajets qui relie chaque point source à chaque point d'arrivée en vérifiant le problème d'optimisation (PF) défini à partir Ω_∞ .

On suppose que la suite de fonctionnelle E_k converge vers la fonctionnelle E_∞ ; alors en faisant tendre k vers l'infini dans (7.33) on obtient :

$$E_\infty(\Omega_\infty) = \inf_{\Omega} E_\infty(\Omega)$$

Explicitons, tout d'abord, le membre de gauche de cette expression. D'après (7.35), on a $E_\infty(\Omega_\infty) = \frac{1}{2} \|T - T_{\gamma_{\Omega_\infty}}(\Omega_\infty)\|_{N_p}^2 = \frac{1}{2} \|T - T(\Omega_\infty)\|_{N_p}^2$.

On obtient donc, sous réserve de la convergence de la suite Ω_k et de la suite de fonctionnelle E_k , l'égalité suivante :

$$\|T - T(\Omega_\infty)\|_{N_p}^2 = \inf_{\Omega} \|T - T_{\gamma_{\Omega_\infty}}(\Omega)\|_{N_p}^2$$

Donc, la limite Ω_∞ de la suite $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ définie par (7.33)-(7.34) est une solution du problème d'optimisation (7.32).

Pour mettre en œuvre l'algorithme d'optimisation proposé, il est nécessaire de définir la fonctionnelle E_k avant de procéder à son optimisation. Aussi, une première étape consiste à déterminer la collection de trajets γ^k en résolvant le problème d'optimisation (PF) défini à partir de Ω_k . Dans un second temps, on procède à l'optimisation de E_k . Ceci conduit au système suivant :

Schéma d'optimisation employé

On approche Ω^* par la suite $(\Omega_k)_{k \geq k}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\gamma_{\alpha_i \beta_j}^k, \Omega_k) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_{\alpha_i \beta_j}} \mathcal{E}(\psi, \Omega_k) & \text{pour } 1 \leq i \leq n_s, 1 \leq j \leq n_r \\ E_k(\Omega_{k+1}) = \inf_{\Omega} E_k(\Omega) = \inf_{\Omega} \frac{1}{2} \|T - T_{\gamma^k}(\Omega)\|_{N_p}^2 \end{cases} \quad (7.36)$$

de sorte qu'on a découplé le rôle que joue la variable Ω_k en considérant, d'une part, l'optimisation sur les trajets pour déterminer γ^k et, d'autre part, l'optimisation de forme pour déterminer le champ de lenteur.

7.5.3 Introduction de contraintes de forme

L'optimisation découplée effectuée dans le système (7.36) permet d'abord d'obtenir les trajets $\gamma_{\alpha_i\beta_j}^k$, ce qui définit la fonctionnelle de forme E_k à travers $T_{\gamma^k}(\Omega)$. A partir de $\gamma_{\alpha_i\beta_j}^k = \gamma_{\Omega_k, \alpha_i\beta_j}$, chaque composante de $T_{\gamma^k}(\Omega)$ est donnée par :

$$\mathcal{E}(\gamma_{\Omega_k, \alpha_i\beta_j}, \Omega) = \int_{\gamma_{\Omega_k, \alpha_i\beta_j}} u(\Omega, \cdot)$$

Comme $\gamma_{\Omega_k, \alpha_i\beta_j}$ est fixé par la forme Ω_k , chaque composante de $T_{\gamma^k}(\Omega)$ est linéaire par rapport à $u(\Omega, \cdot)$.

A chaque étape k de notre algorithme d'optimisation, nous sommes donc conduit à résoudre un problème d'optimisation similaire à un problème de reconstruction en tomographie linéaire. Pour cette raison, nous proposons d'introduire la contrainte de forme décrite au Chapitre 4 de la même manière qu'au Chapitre 6.

Ceci nous amène à définir, à chaque étape k , une fonctionnelle de reconstruction contrainte comme combinaison convexe entre E_k et E_{prior}^{multi} :

$$E_k^{rec}(\Omega) = (1 - \alpha)E_k(\Omega) + \alpha E_{prior}^{multi}(\Omega) \quad (7.37)$$

On approche ensuite le problème de reconstruction en tomographie non linéaire par temps d'arrivée à travers la suite $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ dont les éléments vérifient :

$$E_k^{rec}(\Omega_k) = \inf_{\Omega} E_k^{rec}(\Omega) \quad (7.38)$$

7.6 Mise en œuvre pratique

Dans cette section, on s'intéresse à résoudre chaque ligne du système (7.36).

7.6.1 Détermination des courbes extrémales

On s'intéresse à résoudre la première ligne de (7.36) :

$$\mathcal{E}(\gamma_{\alpha_i\beta_j}^k, \Omega_k) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_{\alpha_i\beta_j}} \mathcal{E}(\psi, \Omega_k)$$

pour tout point source α_i , $1 \leq i \leq n_s$, et point d'arrivée β_j , $1 \leq j \leq n_r$, i.e. à déterminer la collection de trajets formant γ^k . En pratique, la détermination du chemin minimisant le temps d'arrivée entre deux points s'effectue par l'emploi de méthodes de tirs, de propagation de front ou de recherche de chemin minimum dans un graphe (Chapitre 5).

La méthode que nous utilisons pour déterminer la collection de trajets γ^k est une version simplifiée de la recherche d'un chemin au coût minimum en ce qui concerne le temps de parcours. Elle repose sur la vérification de (PF) pour une classe de chemins particuliers. Celle-ci est composée d'arcs de cercle reliant le point source au point d'arrivée et correspond effectivement

à la classe des chemins extrémaux lorsque le gradient est constant dans la direction orthogonale à la droite qui joint le point source au point d'arrivée [Cartan, 1967b].

La Figure 7.1 présente le chemin extrémal qui relie deux points ayant la même ordonnée pour un champ de lenteur dont le gradient est constant par rapport à la direction y . Comme le gradient est constant par rapport à y et que le point source et le point d'arrivée ont même ordonnée, le chemin extrémal qui relie ces deux points est constitué d'un arc de cercle. Le cas

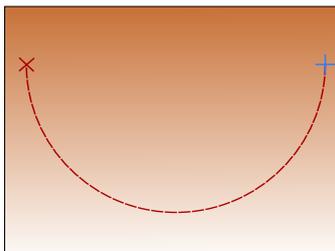


FIGURE 7.1 – Trajet par arc de cercle dans le cas d'un gradient constant.

que nous étudions n'admet pas de gradient constant dans quelque direction que ce soit : nous nous plaçons dans la situation où une hétérogénéité est présente dans un fond homogène. Le calcul des chemins extrémaux n'est pas évident et nous l'approchons en recherchant la flèche f_l (Figure 7.2) telle que l'arc de cercle qui relie le point source au point d'arrivée présente un temps d'arrivée minimale. En pratique, plusieurs valeurs de flèches sont testées y compris la valeur zéro qui correspond à la situation où le chemin minimal est constitué de la droite reliant les deux points considérés.

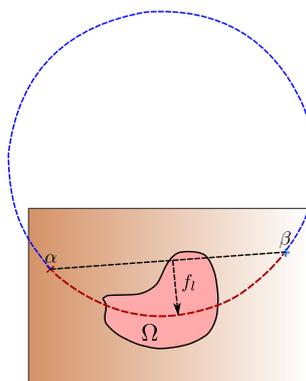


FIGURE 7.2 – Approximation du trajet par arc de cercle.

7.6.2 Optimisation de la fonctionnelle E_k

On s'intéresse à résoudre la seconde ligne de (7.36).

Comme la collection de trajets que forme γ^k est donnée par l'étape précédente, chaque composante de $T_{\gamma^k}(\Omega)$ est linéaire par rapport à $u(\Omega, \cdot)$. Ceci entraîne que la fonctionnelle de forme E_k est un critère de moindres carrés linéaires et permet d'envisager une stratégie

d'optimisation de E_k similaire à celle employée au Chapitre 6. Nous pouvons donc procéder à l'optimisation de la suite des fonctionnelle E_k approchant E par descente de gradient.

On rappelle, qu'en tomographie d'émission, la fonctionnelle d'attache aux données a pour expression :

$$E_{data} = \frac{1}{2} \|p - \mathcal{R}f\|_F^2 \quad (7.39)$$

où F est l'espace des mesures et dans laquelle l'opérateur \mathcal{R} est un opérateur d'intégration le long de droites. Dans (7.39), f correspond au modèle déformable et est donnée par :

$$f(\Omega, x) = f_\Omega \cdot \mathbf{1}_\Omega(x) + f_{\Omega^c} \cdot \mathbf{1}_{\Omega^c}(x)$$

A travers la fonctionnelle E_k , nous nous sommes ramenés à une situation identique, à l'exception que l'intégration ne s'effectue plus le long de droite mais le long des chemins extrémaux $\gamma_{\alpha_i \beta_j}^k$. En effet, notons \mathcal{R}_k l'opérateur défini par :

$$\mathcal{R}_k : \begin{cases} E & \longrightarrow F = \mathbb{R}^{N_p} \\ u(\Omega, \cdot) & \longmapsto \left(\dots, \int_{\gamma_{\alpha_i \beta_j}^k} u(\Omega, \cdot), \dots \right) \end{cases} \quad (7.40)$$

où E désigne l'espace des champs de vitesse décrit à travers une forme $\Omega : E = \{u(\Omega, x) = u_\Omega \cdot \mathbf{1}_\Omega(x) + u_{\Omega^c} \cdot \mathbf{1}_{\Omega^c}(x), \Omega \subset \mathcal{D}\} \subset \{u \text{ bornée, positive, mesurable}\}$. Alors, on a :

$$T_{\gamma^k}(\Omega) = \mathcal{R}_k u \quad \text{avec} \quad u = u(\Omega, \cdot) \quad (7.41)$$

de sorte que la fonctionnelle E_k prend pour expression :

$$E_k = \frac{1}{2} \|T - \mathcal{R}_k u\|_{N_p}^2. \quad (7.42)$$

D'après le Chapitre 6, le gradient de forme de la fonctionnelle d'attache aux données (7.39) est donné par :

$$\nabla_\Omega E_{data} = [f] \mathcal{R}^*(p - \mathcal{R}f) \cdot \mathcal{N}, \quad (7.43)$$

où $[\cdot]$ désigne le saut de $f(\Omega, \cdot)$ relativement à l'orientation de la normale \mathcal{N} à $\partial\Omega$. Il s'agit du saut entre les constantes d'intensité calculées, voir Chapitre 6, par résolution du système linéaire correspondant à l'optimisation sur les intensités. Pour obtenir (7.43), l'utilisation de la linéarité du critère de moindres carrés (7.39) a été exploitée à différentes reprises. Comme nous nous sommes ramenés à une suite de problème de moindres carrés linéaires à travers les fonctionnelles E_k , on déduit que leur gradient de forme est égal à :

$$\nabla_\Omega E_k = [u] \mathcal{R}_k^*(T - \mathcal{R}_k u) \cdot \mathcal{N} \quad (7.44)$$

par identification de l'opérateur linéaire \mathcal{R}_k avec l'opérateur d'émission \mathcal{R} . Ayant à disposition le gradient de forme de E_k , nous pouvons procéder à son optimisation par descente de gradient à partir de la forme Ω_k .

Dans cette section, nous avons montré de quelle manière nous optimisons la suite de fonctionnelle E_k qui approche l'énergie de moindres carrés non linéaires E . L'incorporation de contraintes de forme à travers le critère de reconstruction contrainte (7.37) donne lieu à la même façon de procéder dans la mesure où nous avons établi au Chapitre 6 le gradient de forme de l'énergie de reconstruction contrainte qui est définie à partir de formes de référence répertoriées afin d'améliorer les résultats de reconstruction.

7.6.3 Pas de la descente de gradient

Le schéma itératif d'une descente de gradient de forme à partir de l'énergie de reconstruction contrainte E_k^{rec} est donnée par :

$$\begin{cases} \Gamma_{n+1} = \Gamma_n - \nabla_{\Omega_n} E_k^{rec} \delta_\tau \\ \Omega_0 \text{ donné} \end{cases} \quad (7.45)$$

L'énergie E_k^{rec} incorpore l'énergie *a priori* à travers (7.37) à la suite de fonctionnelle E_k permettant d'approcher l'énergie de moindres carrés non linéaire donné par $E(\Omega) = \|T - T(\Omega)\|_{N_p}^2$. Nous initialisons la descente à partir de la forme $\Omega_0 = \Omega_k$.

À partir de Ω_k , la méthode itérative (7.45) fait évoluer la forme Ω_n dans la direction de la plus grande pente donnée par le gradient de forme $\nabla_{\Omega_n} E_k^{rec}$. Elle est donc décroissante en énergie pourvu que δ_τ soit suffisamment petit : un choix correct du pas de descente est nécessaire pour assurer une décroissance en énergie.

Pour déterminer ce pas de descente, nous proposons, à partir de la valeur $\delta_\tau = 1$, de diviser successivement le pas δ_τ par deux jusqu'à ce qu'une décroissance en énergie soit effectivement atteinte. Ceci donne lieu à l'algorithme suivant de descente de gradient :

- (0) Soit $n = 0$
Soit $\Omega_0 = \Omega_k$
- (1) Soit $\delta_\tau = 1$ et $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n - \nabla_{\Omega_n} E_k^{rec} \delta_\tau$
Tant que $E_k^{rec}(\Omega_{n+1}) > E_k^{rec}(\Omega_n)$
 - Faire $\delta_\tau = \delta_\tau / 2$
 - Faire évoluer Ω_n avec ce pas : $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n - \nabla_{\Omega_n} E_k^{rec} \delta_\tau$
- (2) Faire $n = n + 1$ et revenir à (1)

Cette façon de procéder est une des façons les plus simples de sélectionner le pas d'une descente de gradient en optimisation. : elle est régulièrement utilisées pour résoudre des problèmes de moindres carrés par des méthodes de descentes pour une fonction à valeurs scalaires ou vectorielles [Bjorck, 1996]. Nous nous proposons ici de l'employer dans le cadre de descentes de gradient de forme. Pour des descentes de gradient à partir de fonctions scalaires ou vectorielles, d'autres critères plus sophistiqués comme les règles d'Armijo et Goldstein sont présentés dans [Dennis et Schnabel, 1983].

Leur principe repose sur un seuil permettant d'assurer que le pas soit à la fois :

- suffisamment petit pour obtenir effectivement une décroissance en énergie à la suite de la descente de gradient
- suffisamment grand pour que la méthode (7.45) ne s'arrête au cours de la descente sans atteindre un minimum local du fait d'un pas trop petit.

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la reconstruction orientée objet de données de tomographie non linéaire par temps d'arrivée.

Dans un premier temps, nous avons cherché à transposer l'algorithme de Gauss Newton en variable de forme, ce qui conduit à une formulation en champ de vitesse faisant intervenir la

dérivée de forme du modèle direct. Ce dernier s'exprimant comme une intégrale curviligne le long d'une courbe extrémale, sa dérivée de forme n'est pas évidente à déterminer en pratique : il ne s'agit pas d'une intégrale sur un domaine ou sur le bord d'un domaine variable.

D'autre part, comme le champ de vitesse correspond à un modèle déformable constant par rapport au domaine Ω , il présente une discontinuité sur le bord $\partial\Omega$ de la forme. Par conséquent, il n'est pas continu sur $\partial\Omega$ et les théorèmes classiques de calcul des variations qui supposent une régularité de classe C^1 ne peuvent s'appliquer dans le cadre d'une modélisation orientée objet du champ de vitesse.

Pour exprimer que le modèle direct est une intégrale le long d'une courbe extrémale, nous avons formulé cette condition en variable de forme. Son incorporation dans le calcul de la dérivée de forme n'est toutefois pas immédiat dans la pratique, de sorte que ce calcul reste ouvert.

Notre démarche a été d'approcher le problème de moindres carrés non linéaires par une suite de fonctionnelles de forme linéaires. Dans cette mesure, elle reste très proche d'une méthode de Gauss Newton. Elle s'exprime cependant uniquement en variable de forme et ne fait pas intervenir de dérivée dans la direction d'un champ de vitesse. L'optimisation n'est donc pas conduite du point de vue du champ de vitesse. Elle effectuée directement en variable de forme.

Ceci permet d'adopter une stratégie identique à celle présentée dans le chapitre précédent, que ce soit du point de vue de l'optimisation de chaque fonctionnelle de forme approchant le problème de moindres carrés non linéaires, comme de celui de l'incorporation de contraintes dans la reconstruction orientée objet.

Chapitre 8

Evaluation

8.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose d'évaluer la méthode de reconstruction présentée au chapitre précédent. On rappelle que l'algorithme obtenu procède par évolution de forme et qu'il est possible d'y inclure la contrainte de forme décrite au Chapitre 4. Ces deux aspects en font une méthode originale pour laquelle nous souhaitons évaluer l'intérêt par rapport aux autres méthodes disponibles dans la littérature.

Nous réalisons une prise de mesures en conditions réelles grâce à un dispositif expérimental dédié à la tomographie sismique qui a été développé au sein du pôle *Mesures Auscultation et Calcul Scientifique* de l'IFSTTAR de Nantes pour des objets de dimensions réduites. Nous cherchons à reproduire ces données réelles en proposant un modèle numérique de temps d'arrivée bruités (section 8.2) et comparons ce modèle aux données réelles à la section 8.3.

Nous donnons, à la section 8.4, certains détails de mise en œuvre sur notre méthode de reconstruction orientée objet portant principalement sur son initialisation. Nous procédons, ensuite, à la reconstruction de nos données simulées à l'aide du logiciel de reconstruction pixellique RAI-2D développé au sein du pôle *Mesures Auscultation et Calcul Scientifique* de l'IFSTTAR de Nantes (section 8.5). Ces résultats serviront de base de comparaison pour les reconstructions contraintes obtenues par notre méthode. Ces dernières sont présentées aux sections 8.6 et 8.7 où les résultats à partir des données simulées sont mis en regard avec ceux issus de données réelles.

8.2 Acquisition et simulation de temps d'arrivée

8.2.1 Dispositif d'acquisition

Banc de mesures

L'acquisition est effectuée sur un banc de Mesures Ultrasonores Sans Contact (MUSC) développé par l'antenne IFSTTAR localisée à Nantes. Ce dispositif est utilisé pour évaluer le comportement de structures de génie civil lorsque ces dernières sont soumises à une onde sismique. En augmentant la fréquence de la source, les longueurs d'ondes propagées sont diminuées, ce qui permet de considérer une structure de dimensions réduites. Un interféromètre laser mesure les déplacements relatifs à la surface jusqu'à une précision de quelques Angstroms. Il est supporté par un bras qui le positionne au dessus de la maquette à quelques microns près. La mesure est effectuée par réflexion d'un laser à la surface, de sorte qu'il n'y a pas de contact entre

le récepteur et la structure. L'onde sismique est due à une source piezzo-électrique en contact avec le modèle (Figure 8.1).

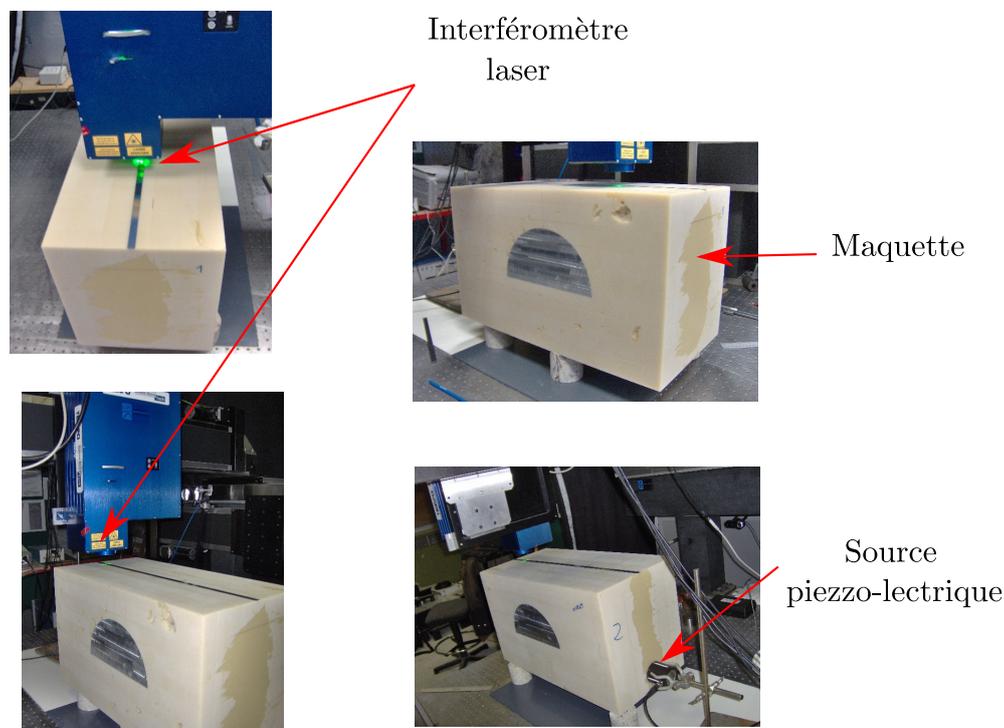


FIGURE 8.1 – Le banc MUSC

Maquette étudiée

La spécificité du banc de mesure employé offre la possibilité de considérer des structures aux dimensions réduites. Une maquette, retenue conjointement avec le département *Mesures Auscultation et Calcul Scientifique* de l'IFSTTAR, a été réalisée. Elle correspond à un parallélépipède de résine propal, chargé à 200%, de dimensions $35 \times 60 \times 30$ cm (voir Fig. 8.3). Cette structure contient un demi-cylindre en aluminium de rayon 25 cm. La Figure 8.4 montre une coupe latérale et transversale de la maquette. Les caractéristiques physiques des matériaux employés induisent une vitesse de propagation théorique d'environ 2700 m.s^{-1} pour la résine et de 6000 m.s^{-1} pour l'aluminium.

Acquisition de temps d'arrivée

Les mesures sont effectuées à la moitié de l'épaisseur du parallélépipède, i.e. à 15 cm des bords latéraux. Sur cette coupe, l'objet à reconstruire est donc un demi-disque, objet composé de deux bords réguliers : l'un droit, l'autre hémisphérique.

Le dispositif expérimental est le suivant : afin de s'affranchir des « effets de bords » inhérents aux angles droits d'un parallélépipède, on positionne les récepteurs de façon équirépartie sur la face supérieure, en laissant une marge de 5 cm par rapport aux bords transversaux. Pour chaque

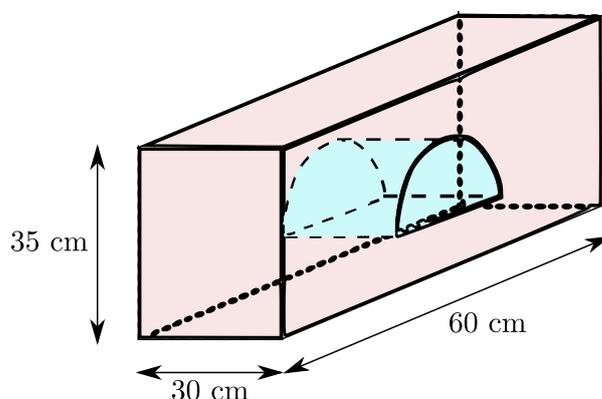


FIGURE 8.2 – Schéma 3D de la maquette.

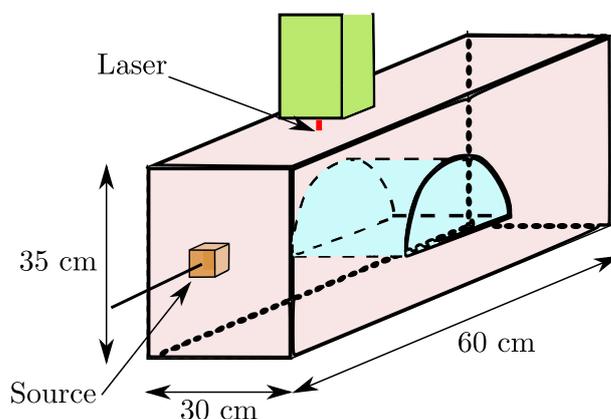


FIGURE 8.3 – Schéma du dispositif expérimental pour la prise de mesures.

série d'impulsions¹, fournie par la source, on effectue 26 mesures en déplaçant le capteur tous les deux centimètres.

On réalise deux séries de mesures différentes :

- la source est placée sur la face opposée à celle de la mesure. Comme pour le capteur, une marge de 5 cm est laissée par rapport aux bords. La source est ensuite déplacée tous les 2,5 cm, ce qui correspond à 21 positions.
- on ajoute, à cette série, des mesures effectuées sur les bords latéraux. On laisse alors une marge de 5,5 cm par rapport aux extrémités et on déplace la source tous les 4 cm. Ceci donne lieu à 7 positions sur chaque face latérale.

Les sources et les récepteurs se répartissent comme sur la Fig. 8.5. Les Tab. 8.1 et Tab. 8.2 donnent, en termes de distance par rapport au coin situé en haut, à gauche, les différentes positions source/capteur intervenant lors de la prise de mesure.

Afin que l'impulsion puisse être bien visible sur les enregistrements de mesure, le signal délivré par la source est amplifié. Nous montrons à la figure 8.6 le signal délivré par la source

1. On parle également de tirs.

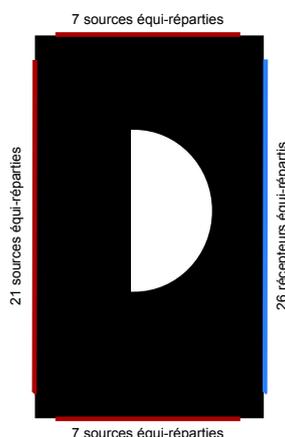


FIGURE 8.5 – Répartition des sources et des récepteurs.

n° source	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
positions x (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
positions y (mm)	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	
n° source	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
positions x (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
positions y (mm)	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550

TABLE. 8.1-a : Sur le bord opposé aux récepteurs.

n° source	22	23	24	25	26	27	28
positions x (mm)	55	95	135	175	215	255	295
positions y (mm)	0	0	0	0	0	0	0

TABLE. 8.1-b : Sur le bord supérieur.

n° source	29	30	31	32	33	34	35
positions x (mm)	55	95	135	175	215	255	295
positions y (mm)	600	600	600	600	600	600	600

TABLE. 8.1-c : Sur le bord inférieur.

TABLE 8.1 – Positions de la source.

et à la figure 8.7 l'enregistrement obtenu par l'un des récepteurs. La figure 8.6 laisse apparaître un léger artefact précédant l'impulsion qui est dû au procédé d'amplification du signal. Cet artefact se propage, tout comme l'impulsion, le long des trajets de parcours et est présent dans les enregistrements. Cependant, il ne doit pas être confondu avec le signal émis par la source. La figure 8.7 laisse apparaître une série de pics précédés d'un signal fluctuant qui s'interprète comme la propagation de l'artefact issu de la porte d'amplification.

En pratique, un opérateur détermine manuellement le temps d'arrivée de l'impulsion en relevant, sur les enregistrements, le début du signal reçu. Ce relevé ne doit pas prendre en compte le signal précurseur : ceci fausserait la valeur du temps d'arrivée. Considérons la première position de la source sur le côté droit du rectangle et la position du récepteur qui lui fait face

n°récepteur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
positions x (mm)	350	350	350	350	350	350	350	350	350	350	350	350	350
positions y (mm)	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270	290
n°récepteur	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
positions x (mm)	350	350	350	350	350	350	350	350	350	350	350	350	350
positions y (mm)	310	330	350	370	390	410	430	450	470	490	510	530	550

TABLE 8.2 – Positions du récepteur.

sur le côté gauche, la source et le récepteur sont suffisamment éloignés du demi-disque pour que le trajet le plus court en temps soit constitué par le segment les reliant. La distance réelle parcourue par l'onde est donc facile à déterminer en fonction des coordonnées de la source et du récepteur.

En divisant cette distance par le temps d'arrivée obtenu après relevé, on a une estimation des vitesses de propagation dans les matériaux. Si on prend en compte le signal précurseur dans la détermination du temps d'arrivée, la vitesse de propagation du fond s'élève à 9450 m.s^{-1} tandis qu'elle est de l'ordre de 2900 m.s^{-1} si l'impulsion est bien déterminée dans l'enregistrement.

Comme le relevé des temps d'arrivée est effectué manuellement en estimant qualitativement le début de l'impulsion, les données de temps d'arrivée peuvent être soumises à de nombreux aléas, notamment des erreurs de jugement ou des difficultés à déterminer le début du signal.

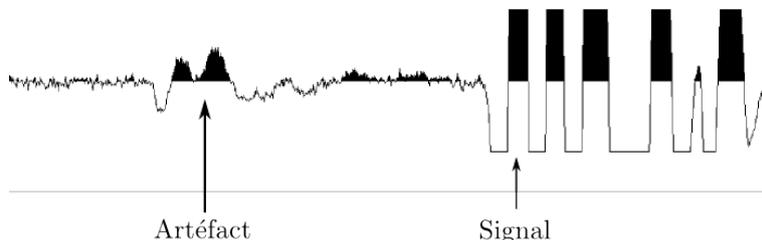


FIGURE 8.6 – Signal délivré par la source.

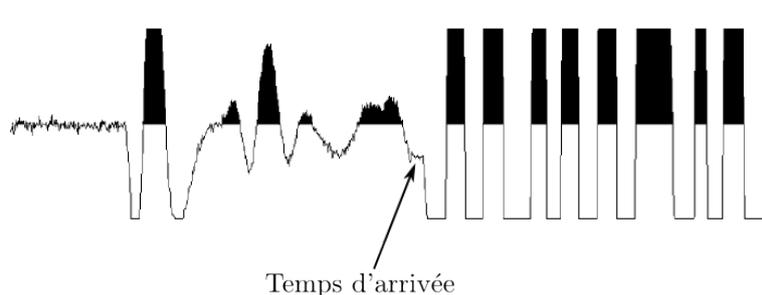


FIGURE 8.7 – Signal reçu.

8.2.2 Simulation

Dans cette section, on cherche à simuler des temps d'arrivée correspondant à la situation décrite plus haut. On définit, pour cela, une maquette numérique comportant un objet

synthétique de la forme d'un demi disque. Pour chaque couple de position source/capteur, on calcule le plus court chemin au sens du temps de parcours entre le point source et le point d'arrivée.

Maquette numérique

On définit une maquette numérique avec un pas de discrétisation fixé dans les directions horizontales et verticales à $h=5\text{ mm}$. La largeur (resp. la longueur) de la maquette est donc discrétisée par $350/5+1 = 71$ nœuds (resp. $600/5+1 = 121$ nœuds). On associe ensuite à chacun de ces nœuds le centre d'un pixel, ce qui donne lieu à une image 71×121 pixels.

Dans cette image, nous plaçons un demi disque en nous reportant au dessin technique de la maquette réelle concernant la position et les dimensions de ce dernier. La vitesse caractéristique de propagation dans l'aluminium est de 6000 m.s^{-1} tandis que celle du fond est supposée égale à 2700 m.s^{-1} , ce qui est représenté en niveau de gris.

Objet synthétique

L'objet retenu constitué par le demi disque est d'un d'intérêt suffisamment élevé tout en gardant une certaine simplicité : il est convexe et son bord présente une partie rectiligne et une partie incurvée. Le bord rectiligne est relié au bord hémisphérique par deux points anguleux, ce qui peut être intéressant dans les expériences de reconstruction. En effet, la qualité de la reconstruction du bord, qui présente des caractéristiques différentes, peut constituer un critère visuel d'évaluation quant à la qualité des reconstructions obtenues.

Nous rappelons que l'introduction de contraintes de forme repose sur une énergie *a priori* qui compare les moments de la forme en évolution avec ceux des différentes formes de référence. Afin de pouvoir contraindre la forme en évolution vers l'objet, une représentation de celui-ci, à un facteur de translation et à une mise à l'échelle près, figure dans l'ensemble des formes de référence répertoriées *a priori*.

Pour cette version de l'objet, nous pouvons procéder à sa décomposition en moments de Legendre et à sa reconstruction à partir de ses moments. Cette reconstruction repose sur la formule d'inversion (4.13) du § 4.3.1. Différentes reconstruction obtenues à partir de moments d'ordres différents permettent d'avoir une idée de la qualité de la représentation paramétrique de l'objet en fonction de l'ordre des moments et de fixer les paramètres de la représentation.

La qualité des reconstructions obtenues est quantifiée par l'erreur quadratique moyenne entre l'objet reconstruit et la fonction caractéristique de l'objet. Sur la droite, on fait figurer les différentes courbes d'erreur en fonction du coefficient β introduit au Chapitre 4. Ce coefficient multiplicatif est employé pour garantir que les formes restent incluses dans le carré $[-1; 1]^2$. On constate que l'erreur quadratique moyenne est inférieure à 10% à partir de l'ordre $N = 13$ pour $\beta = 1$. Pour parvenir à une erreur inférieure à 5%, il faut aller jusqu'à l'ordre $N = 27$.

Dans notre méthode de reconstruction contrainte, nous introduisons la contrainte progressivement, comme au Chapitre 6 : plus précisément, nous faisons succéder à une reconstruction sans contrainte une reconstruction contrainte où l'ordre des moments est choisi de telle sorte que l'erreur quadratique moyenne sur l'objet soit inférieure à 10%, puis inférieure à 5%. Nous commençons donc par une reconstruction sans contrainte, puis nous employons la méthode avec une représentation paramétrique des formes avec des moments d'ordre $N = 13$, puis d'ordre $N = 27$.

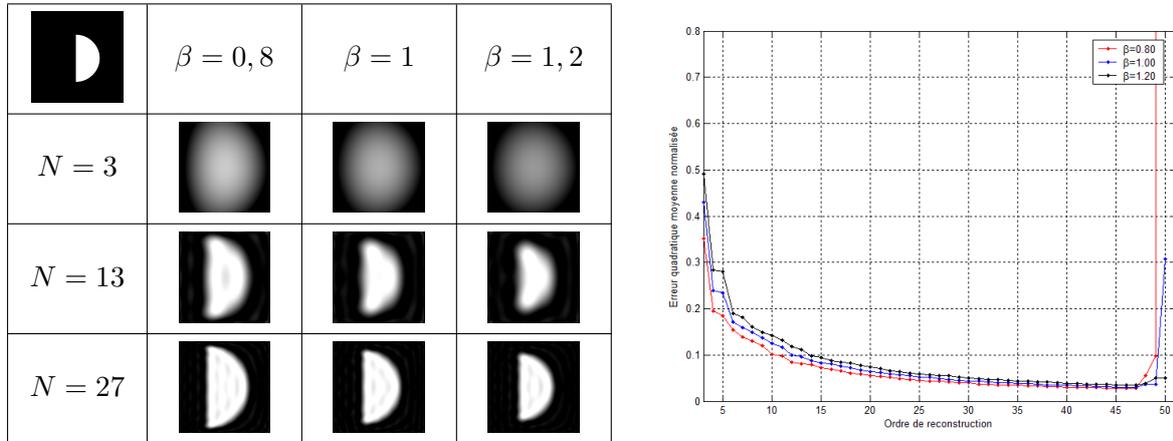


FIGURE 8.8 – Reconstitution de la forme modèle à partir de ses moments de Legendre invariants en échelle et translation (à gauche) et courbes d’erreur correspondantes, pour différentes valeurs de β (à droite).

Temps simulés

A l’aide de cette maquette numérique, on simule des temps d’arrivée de la manière décrite au Chapitre 7 : pour chaque couple (α_i, β_j) , où α_i (resp. β_j) est la position de la source (resp. du récepteur), on recherche le chemin joignant α_i à β_j qui donne lieu au temps de parcours minimum. Ceci correspond à déterminer le trajet $\gamma_{\alpha_i\beta_j}$ qui réalise :

$$\int_{\gamma_{\alpha_i\beta_j}} u = \min_{\psi_{\alpha_i\beta_j} \in \mathcal{C}_{\alpha_i\beta_j}} \int_{\psi_{\alpha_i\beta_j}} u \quad (8.1)$$

où $\mathcal{C}_{\alpha_i\beta_j}$ désigne l’ensemble des chemins reliant le point α_i au point β_j et u la vitesse du milieu.

Lorsque la classe des arcs de cercle joignant α_i à β_j est considérée, l’intégrale curviligne $\int_{\psi_{\alpha_i\beta_j}} u$ sur un arc de cercle $\psi_{\alpha_i\beta_j}$ est calculée en se déplaçant infinitésimalement (i.e. selon un pas très petit) le long de la tangente en chaque point de l’arc $\psi_{\alpha_i\beta_j}$. Chacun des temps infinitésimaux obtenus en fonction de la position du point de la tangente dans la maquette est ensuite sommé. Ce procédé est effectué pour différentes valeurs de flèche (Chapitre 7). Celle donnant lieu à un temps de parcours minimum est retenue.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous désignerons par le bruit toute incertitude sur les temps d’arrivée. Ces incertitudes sont de deux natures et proviennent :

- des erreurs de relevé du temps d’arrivée par l’opérateur,
- de l’acquisition : dans toute prise de mesure, des signaux parasites se superposent au signal qu’on souhaite mesurer.

Dans un premier temps, on s’intéresse à la vitesse caractéristique du fond. Celle-ci est fixée à 2700 m.s^{-1} . Pour atteindre cette valeur, une résine propal chargée à 200% a été spécifiée. En fonction de la qualité de la réalisation de cette résine, il se peut toutefois qu’on ne soit pas parvenu à obtenir cette valeur théorique.

Afin de s’assurer que cette valeur a été atteinte, on considère les trajets rectilignes traversant uniquement la résine. Pour une vitesse de propagation fixée à 2700 m.s^{-1} , les trajets les plus

courts, au sens du temps d'arrivée, qui possèdent une flèche nulle sont au nombre de 199, voir figure 8.9.

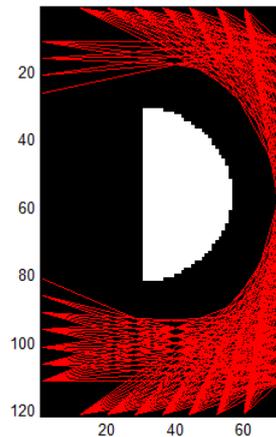


FIGURE 8.9 – Tracé des 199 trajets rectilignes ne traversant que la résine.

Comme les trajets de la figure 8.9 sont constitués de segments de droites, on peut facilement déterminer la distance parcourue par le front d'onde le long de ces trajets rectilignes. Si on divise cette distance par le temps que met l'onde pour atteindre le capteur, on a une estimation de la vitesse de propagation dans la résine. La figure 8.10 montre la distribution, obtenue par noyaux de Parzen, voir [Parzen, 1962], en appliquant ce procédé pour chacun des 199 trajets considérés.

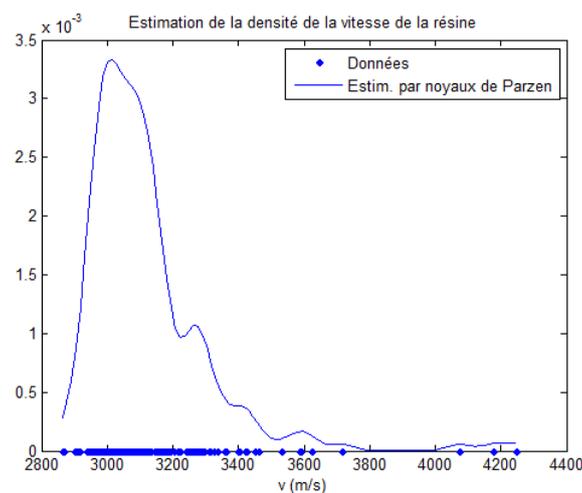


FIGURE 8.10 – Estimation de la distribution de la vitesse de la résine, par noyaux de Parzen, à partir des 199 trajets rectilignes ne traversant pas l'aluminium. Temps en microsecondes en abscisse.

On constate que l'étendue des valeurs est large, de 2800 à 4200 $m.s^{-1}$, avec une forte concen-

tration autour de la valeur 3000 m.s^{-1} . On remarque que la valeur théorique égale à 2700 m.s^{-1} ne fait pas partie des valeurs obtenues. Ces résultats peuvent s'expliquer par un manque de qualité dans la réalisation de la résine. Les photos de la maquette font apparaître des défauts dans le bloc de résine. A ceci, s'ajoutent certainement des erreurs de relevé du temps d'arrivée effectuées par l'opérateur chargé de déterminer visuellement l'arrivée du signal sur les enregistrements.

Cette étude montre qu'il est plus pertinent de considérer que la résine réalisée possède une vitesse de propagation d'environ 3000 m.s^{-1} . Nous ferons donc cette hypothèse à partir de maintenant.

Proposition d'un modèle de bruit

On s'intéresse, à présent, à proposer un modèle de bruit additif sur les temps d'arrivée. Ce modèle de bruit a pour but de prendre en compte le bruit d'acquisition ainsi que les erreurs de relevé du temps d'arrivée commises par l'opérateur.

Pour cela, on considère, à nouveau, les 199 trajets rectilignes ne traversant que la résine. En supposant la vitesse de propagation dans la résine égale à 3000 m.s^{-1} , on obtient les temps théoriques d'arrivée de ces 199 trajets : il suffit de multiplier la vitesse de propagation par la distance de chacun des segments de droites en vertu du fait qu'un temps est le produit d'une distance par une vitesse. Si, à présent, on retranche à ces valeurs théoriques les temps acquis lors de la prise de mesure, on obtient une estimation du bruit qui est composé du bruit d'acquisition et des erreurs de relevé du signal émis sur les enregistrements.

La figure 8.11 présente, à l'aide de noyaux de Parzen, la distribution estimée pour le bruit, en retranchant les valeurs théoriques de temps d'arrivée aux temps relevés par l'opérateur sur les enregistrements obtenus lors de la prise de mesure.

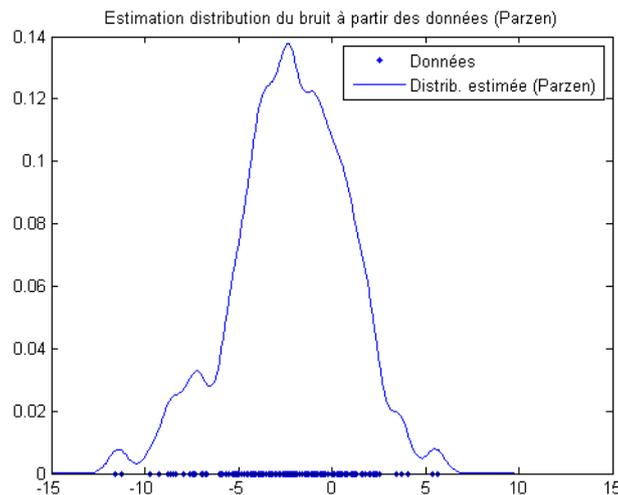


FIGURE 8.11 – Estimation de la densité des résidus, sur les 199 rais traversant uniquement la résine, par noyaux de Parzen. Temps en microsecondes en abscisse.

On constate que cette distribution n'est pas gaussienne. Si la densité estimée est globalement en forme de cloche, elle présente également des pics localisés au niveau de certaines valeurs. On propose [Torr et Zisserman, 2000] de modéliser cette densité par une loi de mélange entre une

loi normale et une loi uniforme :

$$\eta = \mathbb{1}_{[0,p]}(V) \cdot X + \mathbb{1}_{[p,1]}(V) \cdot Y \quad (8.2)$$

où $\mathbb{1}_{[0,p]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, p]$, avec $0 < p < 1$. Dans (8.2), V suit une loi uniforme sur $[0,1]$, X une loi uniforme sur $[a, b]$ et Y est une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 . Le paramètre p correspond à la proportion de mélange entre la loi uniforme X qui traduit les erreurs de relevé et la loi normale Y qui rend compte du bruit d'acquisition supposé ici gaussien.

D'après l'allure de la distribution des résidus entre les temps théoriques et les valeurs relevées, la loi uniforme X est définie sur $[-12;6]$; on prend donc $a = -12, b = 6$. On cherche ensuite à estimer les autres paramètres de ce modèle de bruit par optimisation. Pour ce faire, on utilise un algorithme EM (Expectation Maximization). Les estimations obtenues à partir des résidus entre les temps théoriques et les valeurs relevées figurent dans le tableau 8.3.

	proportion mélange	moyenne de Y	variance de Y
Estimation par EM	$\hat{p} = 0,88$	$\hat{\mu} = -2,63$	$\hat{\sigma}^2 = 6,92$

TABLE 8.3 – Estimation des paramètres du modèle de mélange de bruit

A partir de ces valeurs, on simule un bruit de mélange :

$$\hat{\eta} = \mathbb{1}_{[0,\hat{p}]}(V) \cdot X + \mathbb{1}_{[\hat{p},1]}(V) \cdot Y \quad (8.3)$$

où X suit une loi uniforme $\mathcal{U}(-12;6)$ et Y une loi normale $\mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ de moyenne $\hat{\mu}$ et de variance $\hat{\sigma}^2$. La Figure 8.12 montre une distribution, estimée par noyau de Parzen, de temps d'arrivée bruités : une réalisation du bruit (8.3) est ajoutée aux 199 valeurs de temps correspondant aux trajets rectilignes ne traversant que la résine. On constate que la distribution obtenue a une allure proche de celle correspondant aux 199 résidus entre les temps théoriques et les valeurs relevées sur les enregistrements obtenus en conditions réelles.

8.3 Comparaison entre temps d'arrivée simulés et acquis

Si nous considérons deux points α_i et β_j , le temps d'arrivée en β_j à partir du point α_i dépend de la manière dont nous avons calculé le trajet minimum au sens du temps de parcours entre ces deux points. A la section 7.2, nous avons mentionné le fait qu'une façon d'approcher le plus court chemin au sens du temps d'arrivée est de considérer l'arc de cercle qui joint α_i à β_j pour lequel le temps de parcours est le plus court.

Dans cette section, on cherche à estimer qualitativement de quelle manière cette façon de procéder permet d'approcher les trajets réels reliant chaque point source à chaque point d'arrivée. On s'intéressera également à comparer les données simulées de temps d'arrivée bruités avec les données acquises pour estimer si le modèle de bruit que nous proposons est réaliste.

8.3.1 Géométrie de parcours

On considère la question de la géométrie des trajets donnant lieu à un parcours minimum au sens du temps d'arrivée. Nous rappelons que, pour un milieu parfaitement homogène, la

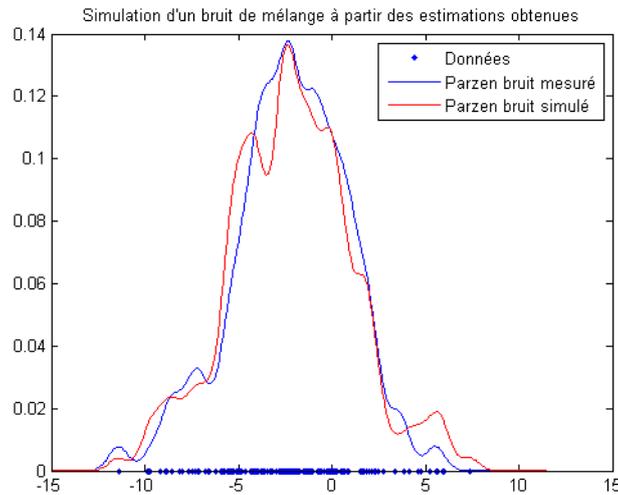


FIGURE 8.12 – Estimation de la densité des résidus, sur les 199 rais traversant uniquement la résine, par noyaux de Parzen. Temps en microsecondes en abscisse.

géométrie des trajets est donnée par un parcours rectiligne joignant chaque point source à chaque point d'arrivée. En effet, la vitesse de propagation étant constante dans tout le milieu, le plus court chemin joignant deux points est une droite.

Dans le cas où un milieu homogène comporte une hétérogénéité, la remarque ci-dessus permet de supposer que le plus court chemin, au sens du temps d'arrivée, s'effectue par la réunion de segments de droite : le milieu ambiant et l'objet possédant tous deux des vitesses de propagation constantes, ils sont chacun traversés en lignes droites.

Le trajet comporte donc des points anguleux qui rompent avec la partie rectiligne du trajet qui traverse le milieu ambiant et de celle qui traverse l'objet. La détermination de la position des points anguleux au niveau du bord de l'objet est un problème qui implique la géométrie de l'objet et n'est pas trivial. Pour cette raison, nous avons choisi, comme dans [Côte, 1988], d'approcher les trajets par des arcs de cercle et de procéder par la recherche de l'arc qui donne lieu à un temps de parcours minimum (Chapitre 7). Afin de mieux déterminer le parcours qui relie un point source à un point d'arrivée, le Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg a également mis en œuvre un algorithme optimal de recherche de plus court chemin par *Fast Marching* [Sethian, 1996].

La figure 8.13 montre les géométries de trajets obtenues pour quelques couples source/capteur selon la méthode de calcul choisie : trajet rectiligne, recherche du plus court chemin dans la classe des arcs de cercle joignant la source au capteur ou trajet optimal obtenu par *Fast Marching*. On constate que la détermination des chemins à l'aide d'un algorithme de *Fast Marching* donne effectivement des trajets formés de segments de droite. En ce sens, il est conforme à la réalité physique du problème. Toutefois, l'approximation en arcs de cercle apparaît être une approximation acceptable du trajet physique, comme nous le vérifierons dans la suite sur la mesure des temps d'arrivée.

Nous utiliserons la version approchée des trajets en arcs de cercle car nous disposons de codes sources développés en Fortran par l'équipe du pôle *Mesures Auscultation et Calcul Scientifique* de l'IFSTTAR localisée à Nantes lorsque le trajet est supposé s'effectuer en arc de cercle. Parmi

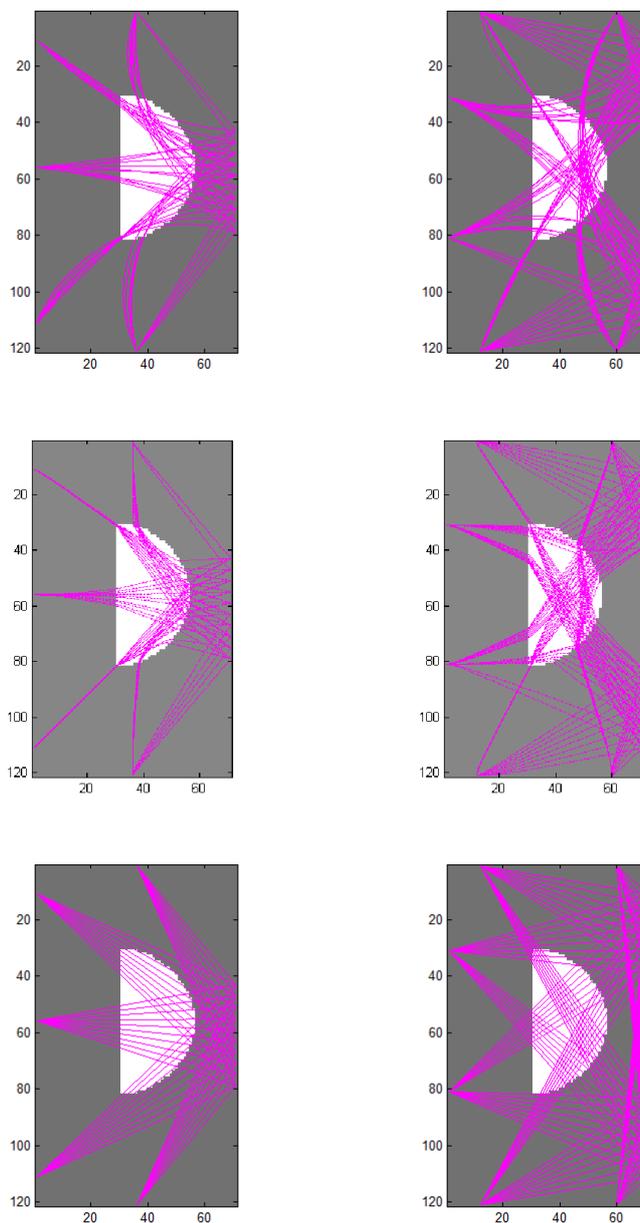


FIGURE 8.13 – Trajets obtenus sur la maquette numérique pour un parcours en arc de cercle (1ère ligne), obtenu par Fast Marching (2ème ligne), pour le modèle rectiligne (3ème ligne).

ces procédures informatiques figure la rétro-projection des données de temps d'arrivée qui est nécessaire pour calculer le champ de vitesse de notre méthode de reconstruction par évolution de forme. Ayant ainsi à disposition les codes sources pour mettre en œuvre notre algorithme de reconstruction, nous avons privilégié cette géométrie de parcours.

En fonction de l'approximation faite sur les trajets, nous nous intéressons maintenant aux variations que cette approximation entraîne sur les temps d'arrivée. Pour cela, nous traçons les temps de parcours obtenus pour chaque couple source/capteur en fonction de la géométrie choisie pour les trajets et comparons ces temps d'arrivée avec les temps relevés après acquisition. Nous faisons figurer les capteurs en abscisse, les sources en ordonnées et indiquons le temps correspondant en niveaux de couleurs (figure 8.14).

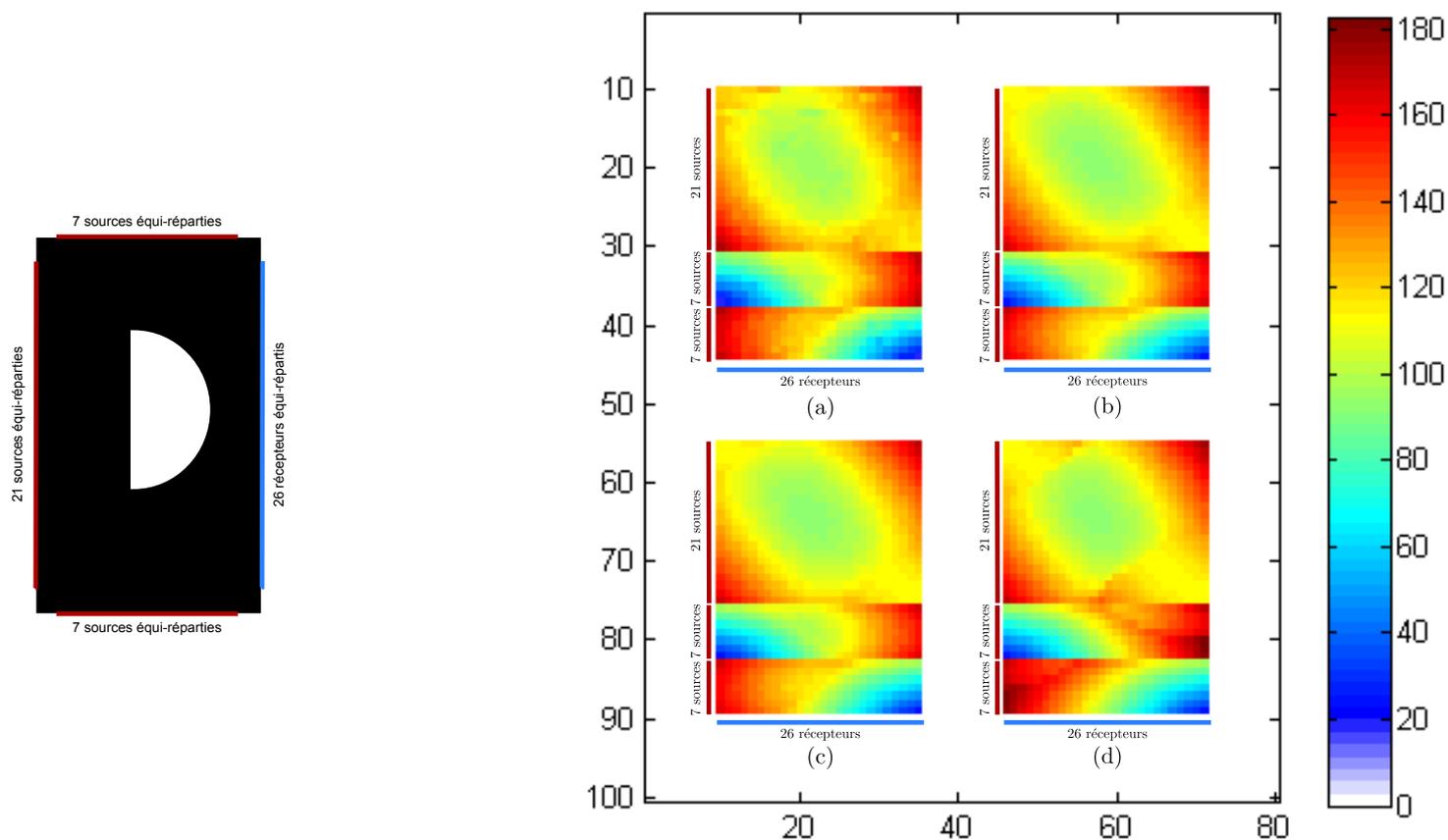


FIGURE 8.14 – Temps de parcours (en microsecondes) dans la configuration placée à gauche : données réelles (a), données simulées, sans bruit, par *Fast Marching* (b), par trajets circulaires (c), par trajets rectilignes (d).

Dans ces cartes de temps, les données ont été calculées par recherche du plus court chemin, au sens du temps de parcours, sans prendre en considération le bruit qui doit être ajouté à ces simulations. On constate qu'hormis les perturbations dues au bruit, l'allure générale de la carte de temps acquise est bien approchée par la carte obtenue par *Fast Marching* et par celle

obtenue en approchant les trajets physiques par des arcs de cercle. En revanche, considérer que le parcours entre deux points s'effectue toujours de manière rectiligne donne lieu à des temps simulés trop éloignés de ceux qui ont été acquis.

On constate donc visuellement que les temps obtenus par *Fast Marching* sont proches de ceux obtenus en supposant que le trajet entre deux points s'effectue par l'intermédiaire d'un arc de cercle.

8.3.2 Bruit modélisé

Dans cette section, on s'intéresse aux temps simulés incluant le modèle de bruit que nous proposons : aux temps obtenus par recherche du plus court chemin est ajoutée une réalisation du bruit (8.3). En reprenant la même démarche que précédemment, nous faisons figurer en niveaux de couleurs le temps correspondant à un couple source/capteur. Nous obtenons les cartes de temps données par la figure 8.15.

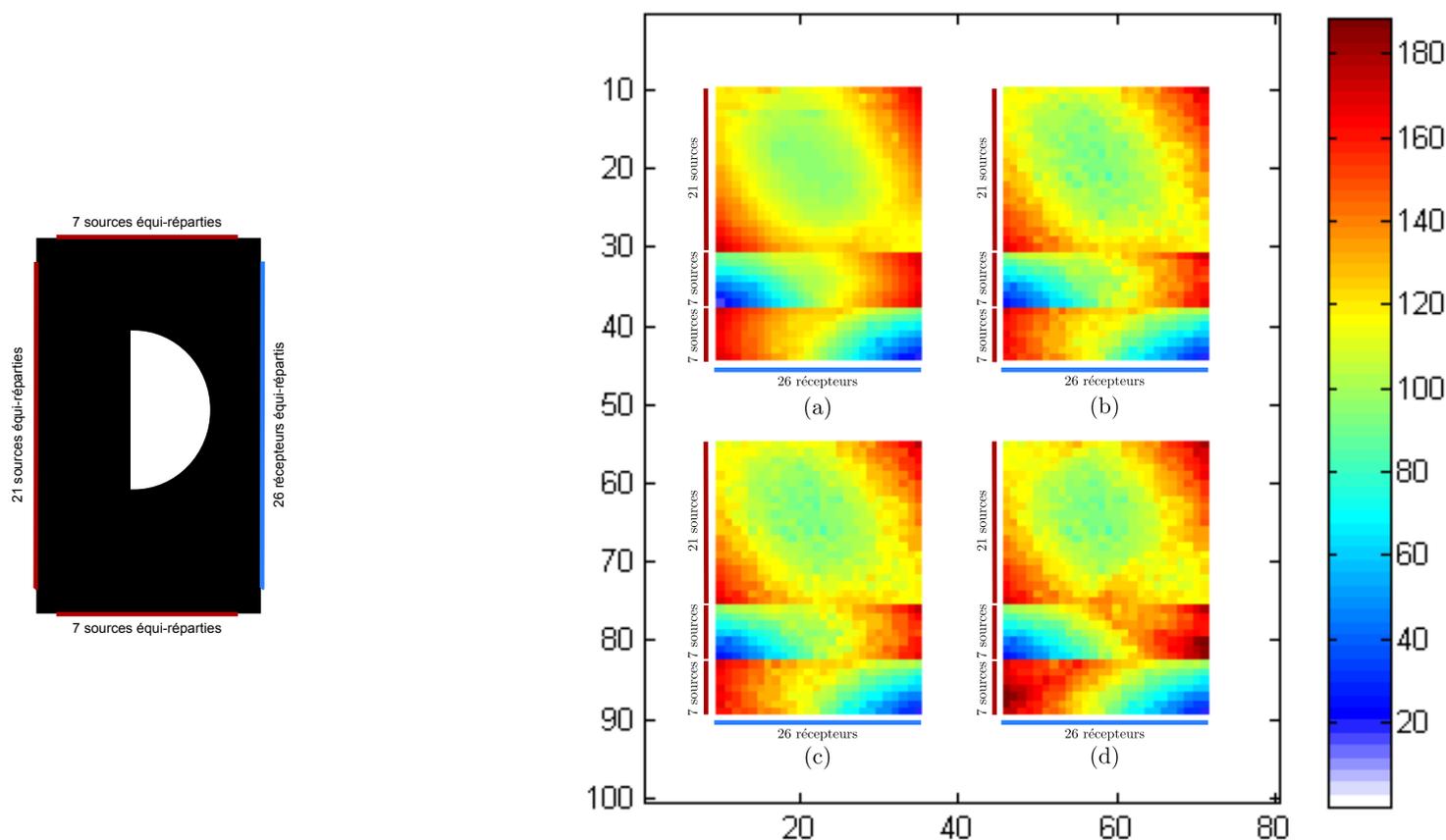


FIGURE 8.15 – Temps de parcours (en microsecondes) dans la configuration placée à gauche : données réelles (a), données simulées par Fast Marching (b), par trajets circulaires (c), par trajets rectilignes (d) auxquelles est ajouté le bruit de mélange défini par (8.3).

On constate que la carte de temps obtenue sur données réelles (fig. 8.15-a) en haut à

gauche a un aspect plus lisse que les autres cartographies de temps. Il semble que la variance du bruit engendré par notre modèle soit plus importante que celle du bruit physique. Ceci provient certainement du fait que le bruit a été estimé à partir des trajets ne traversant que la résine de manière rectiligne. Nous n'avons pas pris en compte les trajets traversant l'aluminium pour lesquels nous n'avons pas les moyens d'estimer le bruit que contiennent les temps associés à ces trajets.

Enfin, les trajets considérés ne traversant que la résine, dont la vitesse de propagation est beaucoup moins élevée que celle de l'aluminium, ils correspondent aux trajets les plus lents de la prise de mesure. Durant le parcours de l'onde le long de ces trajets, le signal a tendance à s'atténuer, ce qui rend l'estimation de l'arrivée du signal au niveau du capteur d'autant plus difficile. La surestimation du bruit peut alors également s'expliquer par des erreurs de relevé du début de l'impulsion délivrée par la source sur les enregistrements (figure 8.7)

Nous quantifions la comparaison qualitative entre les temps d'arrivée acquis et ceux simulés avec un bruit de mélange à l'aide d'un calcul d'erreur quadratique moyenne (table 8.4). Comme nous l'avons déjà remarqué, approcher les parcours par des arcs de cercles s'avère être une bonne approximation.

Fast Marching	arc de cercle	lignes droites
19,4	19,4	55,2

TABLE 8.4 – Erreur quadratique moyenne avec les données acquises en fonction de la géométrie de parcours.

8.4 Détails pratiques sur la méthode de reconstruction développée

8.4.1 Champ de lenteur initial

Dans cette section, nous faisons figurer certains détails concernant l'initialisation de la méthode de reconstruction orientée objet que nous avons présentée au chapitre précédent.

A partir d'une forme Ω que l'on se donne au départ, nous définissons le modèle déformable initial :

$$u(\Omega, x) = u_{\Omega} \cdot \mathbb{1}_{\Omega}(x) + u_{\Omega^c} \cdot \mathbb{1}_{\Omega^c}(x) \quad (8.4)$$

en nous donnant comme constante d'intensité u_{Ω} et u_{Ω^c} , les moyennes intérieures et extérieures à Ω de la rétro-projection u^* de u :

$$u_{\Omega} = \left(\int_{\Omega} u^*(x) dx \right) / |\Omega| \quad u_{\Omega^c} = \left(\int_{\Omega^c} u^*(x) dx \right) / |\Omega^c| \quad (8.5)$$

où $|\Omega|$ (resp. $|\Omega^c|$) désigne l'aire de la forme Ω (resp. Ω^c).

Pour déterminer (8.5) en pratique, on superpose la forme Ω définie sous forme de masque sur la rétro-projection des temps d'arrivée obtenue à l'aide du logiciel RAI-2D du pôle *Mesures Auscultation et Calcul Scientifique* de l'IFSTTAR à Nantes. La figure 8.16 présente, sur la partie gauche, le masque utilisé sur deux niveaux de couleur, ce qui permet d'identifier les domaines intérieurs et extérieurs à la forme Ω . Sur la partie centrale, nous faisons figurer la rétro-projection des temps d'arrivée.

On s'intéresse à reconstruire non seulement la forme de l'hétérogénéité mais également les constantes de vitesse de propagation de l'objet et du fond. On pose $f_{\Omega} = 1/u_{\Omega}$ (resp. $f_{\Omega^c} =$

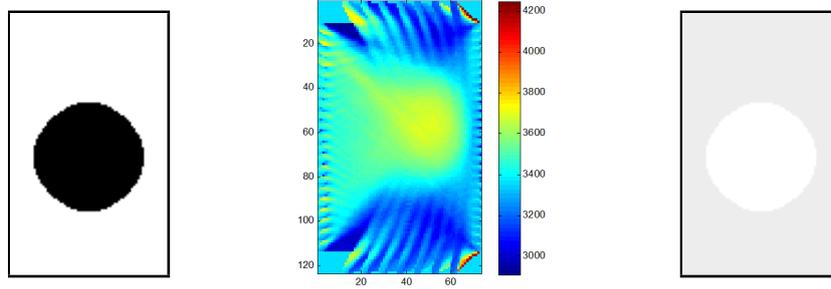


FIGURE 8.16 – Reconstruction initiale sur données réelles. Masque utilisé (a), rétro-projection en $m.s^{-1}$ (b), champ de vitesse initial (c).

$1/u_{\Omega^c}$). Comme u correspond au champ de vitesse reconstruit, les vitesses de propagation de l'objet et du fond sont respectivement données par f_{Ω} et f_{Ω^c} . A partir de (8.5), on obtient $f_{\Omega} = 3\,521\,m.s^{-1}$ et $f_{\Omega^c} = 3\,336\,m.s^{-1}$, ce qui, compte tenu du fait que la vitesse de propagation dans l'aluminium est de $6\,000\,m.s^{-1}$ donne lieu à une valeur très éloignée de la réalité pour f_{Ω} , ce qui est normal, puisque l'initialisation est très différente de la forme réelle.

Sur la partie droite de la figure 8.16, nous plaçons la reconstruction définie, à partir de Ω , par (8.4)-(8.5) qui sert d'initialisation à notre méthode de reconstruction orientée objet. Celle-ci a été représentée en niveaux de gris en définissant la couleur donnée par le blanc pour la valeur 6000.

Remarque 8.4.1. *Au départ, nous n'avons aucune indication quant à la géométrie des trajets de parcours. Pour cette raison, nous calculons la rétro-projection des données de temps d'arrivée en faisant l'hypothèse que les trajets s'effectuent de manière rectiligne.*

8.4.2 Rétro-projection utilisée

Nous rappelons (Chapitre 5) que la rétro-projection est calculée selon la formule discrète :

$$u^*(x_i) = \sum_{R_j | x_i \in R_j} \left(\frac{\ell_{ij}}{\sum_j \ell_{ij}} \right) \frac{T_j}{L_j} \quad (8.6)$$

où la somme porte sur tous les trajets R_j , qu'on désigne également par le terme de rais, qui passent par le pixel x_i . Pour chacun de ces rais R_j , T_j et L_j sont respectivement le temps d'arrivée le long de R_j et la longueur de R_j . Le coefficient ℓ_{ij} désigne la longueur du rai R_j dans le pixel x_i . Compte tenu qu'une vitesse est le quotient d'un temps par une longueur, l'identité (8.6) s'interprète comme une moyenne des valeurs de vitesses associées aux rais qui passent par le pixel x_i . Cette moyenne est pondérée par la longueur du rai dans le pixel x_i .

Lorsqu'aucun rai ne traverse le pixel x_i , le choix effectué dans le logiciel RAI-2D est d'affecter au pixel la valeur donnée par :

$$u^*(x_i) = \frac{1}{N_{ray}} \sum_{R_j} \frac{T_j}{L_j} \quad (8.7)$$

où N_{ray} désigne le nombre total de trajets de parcours. Ceci correspond à affecter à ces pixels la moyenne des valeurs de vitesses lorsque tous les trajets de parcours sont considérés.

Comme il a été montré dans [Côte, 1988], il peut être intéressant de considérer dans (8.6) un disque centré en x_i au lieu d'un pixel centré en x_i . La somme porte alors sur tous les rais qui traversent le disque et le coefficient ℓ_{ij} correspond à la longueur du rai R_j dans ce disque. L'introduction d'un disque de diamètre supérieur à celui d'un pixel permet de prendre en compte plus de rais de parcours et a tendance à introduire de la régularisation dans les reconstructions [Côte, 1988].

8.5 Reconstructions pixelliques à l'aide du logiciel Rai-2D

Nous donnons dans cette section les résultats que nous obtenons à partir du logiciel de reconstruction pixellique utilisé par le pôle *Mesures Auscultation et Calcul Scientifique* de l'IFSTTAR à Nantes. Ces résultats permettront de comparer les résultats obtenus par notre méthode de reconstruction orientée objet contrainte avec une méthode pixellique. Les avantages ou les défauts de notre algorithme de reconstruction et, plus largement, l'intérêt de l'introduction de contrainte de forme en reconstruction de données de tomographie non linéaire pourront ainsi être évalués.

8.5.1 Présentation

Le logiciel RAI-2D repose sur une méthode d'inversion de type SIRT, améliorée par l'emploi de nombreux paramètres de contrôle [Côte, 1988]. L'un d'entre eux est précisément l'introduction d'un disque d'influence dont on peut choisir la valeur du rayon. Parmi les autres paramètres de contrôle, figure la possibilité de tronquer les valeurs reconstruites au-delà de valeurs que l'on se donne *a priori*.

Typiquement, comme on estime la vitesse de propagation dans la résine à 3000 m.s^{-1} et celle dans l'aluminium à 6000 m.s^{-1} , le fait d'entrer ces valeurs dans le logiciel modifiera toute intensité reconstruite supérieure à 6000 m.s^{-1} (resp. inférieure à 3000 m.s^{-1}) en la fixant à la valeur de 6000 m.s^{-1} (resp. 3000 m.s^{-1}). En procédant de cette manière, on limite les instabilités provenant du problème de reconstruction qui ont tendance à produire des valeurs très éloignées de celles à reconstruire. En ce sens, tronquer les valeurs reconstruites à partir de valeurs données *a priori* est également une manière d'apporter de la régularisation au problème inverse de reconstruction.

Dans les reconstructions qui suivent, nous faisons varier la valeur du rayon du disque d'influence pour estimer l'impact de ce paramètre dans les résultats obtenus. Ensuite, nous présentons des résultats de reconstruction sans utiliser les bornes du logiciel qui permettent de tronquer les valeurs reconstruites.

8.5.2 Reconstructions obtenues

Dans une première série d'expériences, on fait varier la valeur du rayon ρ du disque d'influence tout en bornant les valeurs reconstruites par les valeurs de vitesse de propagation *a priori* de 3000 m.s^{-1} et 6000 m.s^{-1} . Les données à reconstruire sont les temps d'arrivée simulés en rais circulaires auxquels est ajouté le bruit de mélange défini par (8.3).

Comme le domaine est discrétisé suivant un pas $h = 5 \text{ mm}$, la plus petite valeur entière de rayon donnant lieu à un disque contenant un pixel correspond à la valeur $\rho = 4 \text{ mm}$. On choisit d'abord d'utiliser le logiciel RAI-2D avec cette première valeur de rayon pour le disque d'influence. Puis, nous procédons à deux autres reconstructions correspondant aux valeurs $\rho = 25 \text{ mm}$ et $\rho = 50 \text{ mm}$.

La figure 8.17 montre sur la première ligne les résultats de reconstruction obtenus, en niveaux de couleurs. Afin de pouvoir visualiser l'objet, nous superposons sur la seconde ligne la frontière théorique de l'objet sur les reconstructions en niveaux de gris. Cette première expérience montre

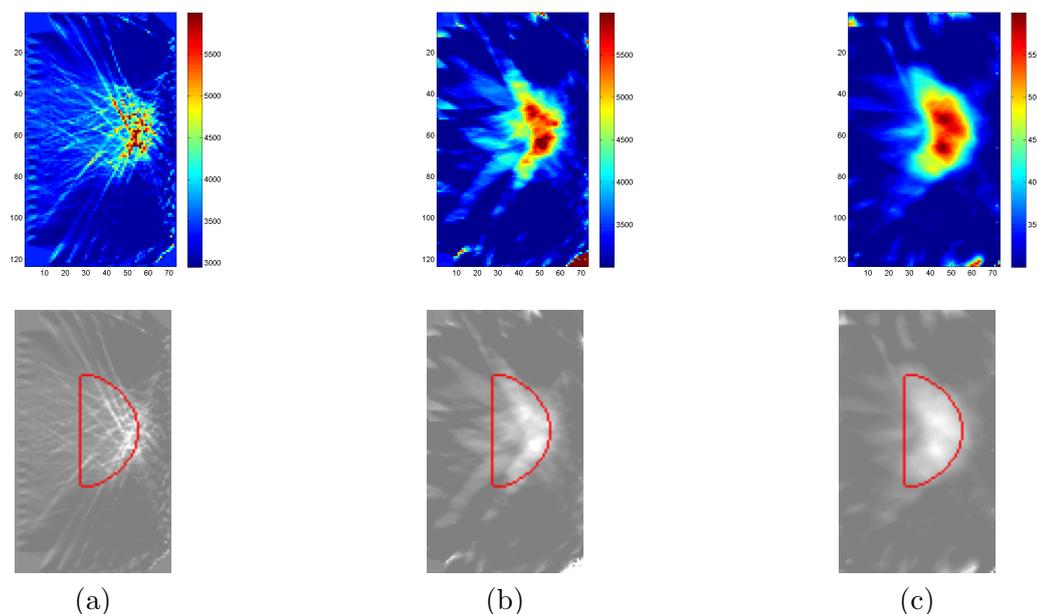


FIGURE 8.17 – Reconstructions pixelliques (RAI-2D) de données simulées bruitées pour différentes valeurs du rayon ρ du disque d'influence avec utilisation de bornes *a priori* : $\rho = 4$ (a), $\rho = 25$ (b), $\rho = 50$ (c). Temps d'arrivée simulés en rais circulaires avec ajout du bruit de mélange (8.3).

que plus la valeur de rayon de disque d'influence est grande, meilleure est la reconstruction obtenue : pour $\rho = 4$, on a du mal à identifier l'objet (la reconstruction est très pixellisée) tandis que pour $\rho = 50$ la forme hémisphérique du demi-disque apparaît plus nettement. L'introduction d'un disque d'influence de rayon élevé lisse l'image reconstruite et permet de mieux identifier l'objet.

Nous procédons, ensuite, à la même expérience mais en n'utilisant plus les bornes *a priori* sur les valeurs reconstruites. Nous plaçons ces résultats sur la figure 8.18.

En comparant avec la figure 8.17, on constate que dans ce cas, pour $\rho = 4$, l'image reconstruite est constituée de valeurs comprises entre 2000 et 7500 m.s^{-1} . La valeur d'intensité prédominante dans l'image reconstruite correspond à une vitesse de propagation de 4000 m.s^{-1} . Celle-ci apparaît à presque tous les niveaux de l'image, de sorte qu'il est difficile de donner une géométrie particulière à l'objet : seulement quelques pixels possèdent une vitesse de propagation supérieure à 6000 m.s^{-1} . Pour $\rho = 25$, la reconstruction obtenue laisse apparaître une région dont la vitesse de propagation est comprise entre 4500 m.s^{-1} et 6000 m.s^{-1} , sans géométrie particulière. Celle-ci apparaît plus nettement pour $\rho = 50$.

En comparant les figures 8.17 et 8.18, on constate que l'emploi de bornes *a priori* sur les valeurs reconstruites limite les instabilités dues au caractère mal posé du problème inverse. En absence de borne *a priori*, ces instabilités se localisent à des niveaux précis de l'image pour de grandes valeurs de rayon de disque d'influence. Sur la reconstruction obtenue, on constate que

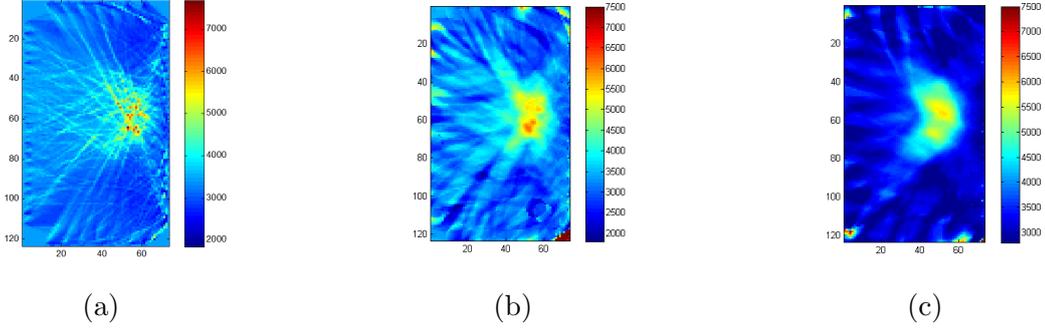


FIGURE 8.18 – Reconstructions pixelliques (RAI-2D) de données simulées bruitées pour différentes valeurs du rayon ρ du disque d’influence *sans* utilisation de bornes *a priori* : $\rho = 4$ (a), $\rho = 25$ (b), $\rho = 50$ (c). Temps d’arrivée simulés en rais circulaires.

le fond contient de petits objets présents sur les bords ou les coins de l’image, ce qui étaient déjà le cas à la figure 8.17. Cependant, les valeurs de vitesse qui leur sont associées sont ici excessivement élevé, de l’ordre de $25\,000\text{ m.s}^{-1}$ pour $\rho = 25$ et $100\,000\text{ m.s}^{-1}$ pour $\rho = 50$.

8.6 Reconstruction orientée objet de données simulées

8.6.1 Données non bruitées

On présente les reconstructions orientées objet contraintes obtenues à partir des données de temps d’arrivée numériques correspondant au problème direct non bruité. Au départ, nous commençons, comme en modalité d’émission, à reconstruire l’objet sans introduire la contrainte de forme.

Reconstruction sans contrainte de forme

A partir de la reconstruction initiale décrite à la section 8.4.1, nous appliquons le schéma d’optimisation donné par :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\gamma_{\alpha_i\beta_j}^k, \Omega_k) = \inf_{\psi \in \mathcal{C}_{\alpha_i\beta_j}} \mathcal{E}(\psi, \Omega_k) & \text{pour } 1 \leq i \leq n_s, 1 \leq j \leq n_r, k \geq 0 \\ E_k(\Omega_{k+1}) = \inf_{\Omega} E_k(\Omega) = \inf_{\Omega} \frac{1}{2} \|T - T_{\gamma^k}(\Omega)\|_{N_p}^2 & \text{pour } k \geq 0 \end{cases} \quad (8.8)$$

La première ligne de (8.8) constitue un problème d’optimisation sur les trajets joignant chaque point source à chaque point d’arrivée. Ce problème est résolu par la recherche de trajets donnant lieu aux temps de parcours les plus courts (Chapitre 7), ce qui définit, en fonction de la collection de trajets γ^k , la fonctionnelle de forme E_k . La seconde ligne de (8.8) correspond à l’optimisation de forme de E_k . Cette optimisation est réalisée par une descente de gradient avec recherche du pas de descente (Chapitre 7). Nous effectuons dans un premier temps dix itérations de l’algorithme d’optimisation.

Dans la section précédente, nous avons vu que l’introduction d’un disque d’influence de rayon donné permettait d’introduire de un lissage dans la reconstruction. L’optimisation de la seconde

ligne de (8.8) est effectuée en déterminant le champ de vitesse permettant de faire évoluer la forme. Ce champ de vitesse est calculé à partir de la rétro-projection de l'opérateur T_{γ^k} . Il doit être évalué de la manière la plus précise possible, si bien qu'il n'est pas souhaitable d'introduire un lissage dans son calcul. Pour cette raison, nous choisissons, dans ce qui suit, une valeur entière du rayon du disque d'influence qui soit la plus petite possible. D'autre part, nous faisons le choix de ne pas utiliser les bornes qui permettent de tronquer les valeurs obtenues par l'intermédiaire de valeurs données *a priori*.

A la figure 8.19, on superpose, sur la maquette numérique, le contour de la forme à chaque étape k de l'algorithme d'optimisation. Dix fonctionnelles de forme ont été définies à partir de la recherche de plus court chemin sur le champ de lenteur de l'étape précédente. Leur optimisation, par descente de gradient, a conduit aux dix formes dont nous avons tracé le contour sur la maquette numérique.

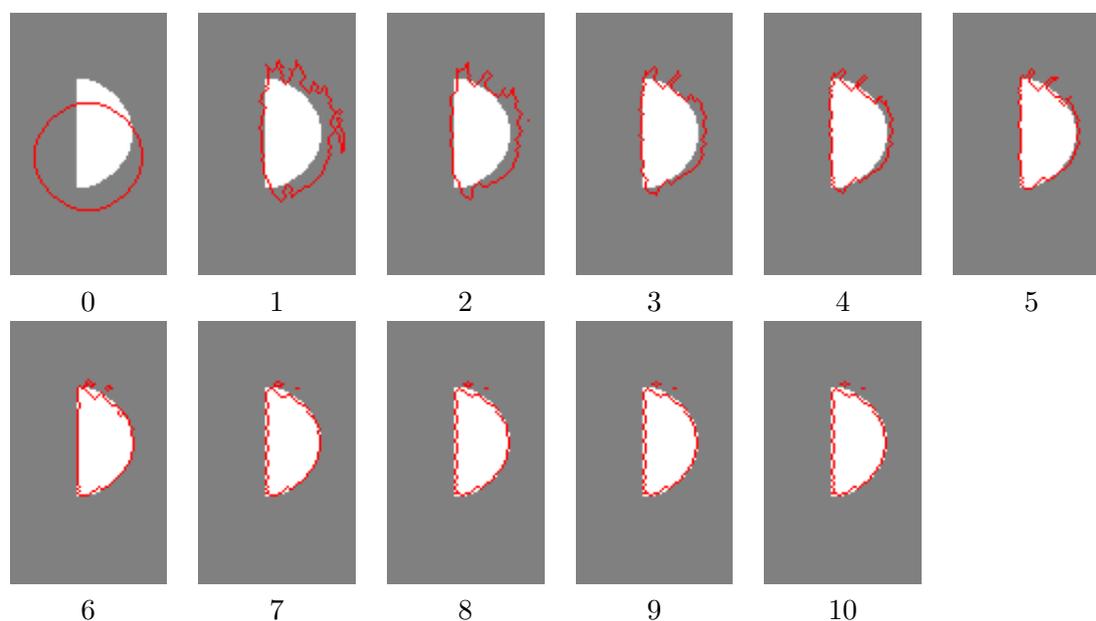


FIGURE 8.19 – Superposition du bord de la forme reconstruite sur la maquette numérique pour 10 itérations de l'algorithme d'optimisation.

On constate que celles-ci se rapprochent de plus en plus de l'objet à reconstruire. En particulier, dans le premier résultat de reconstruction, le bord incurvé du demi-disque est relativement loin de l'objet, ce qui est amélioré par la suite. Les dernières images reconstruites varient très peu, ce qui confirme que l'algorithme d'optimisation tend à converger. Sur ces dernières, le contour de la forme reconstruite est situé à l'intérieur de l'objet. Les reconstructions obtenues montrent l'intérêt de notre algorithme d'optimisation qui considère successivement des fonctionnelles de moindres carrés linéaires qu'on peut optimiser par descente de gradient.

Les données numériques de temps d'arrivée prises en compte ici sont non bruitées. Comme les données ne sont pas perturbées, le problème inverse est résolu par évolution de forme sans que le caractère mal conditionné de l'opérateur n'intervienne de manière défavorable dans la reconstruction. Celui-ci se manifeste essentiellement en présence de bruit ou d'erreurs numériques

sur les mesures créant des perturbations qui s'amplifient aux cours du processus de reconstruction. Aussi, ces premiers résultats ne rendent pas compte de toute la difficulté du problème de reconstruction de tomographie par temps d'arrivée. En revanche, ils permettent de valider la méthode proposée.

En pratique, se pose toutefois la question de la définition d'un critère d'arrêt pour mettre fin aux itérations de l'algorithme d'optimisation.

Introduction d'un critère d'arrêt

Le critère d'arrêt que nous définissons repose sur la suite des valeurs d'énergie $E_k(\Omega_k)$. Cette suite est initialisée par $E_0(\Omega_0) = \frac{1}{2} \|T - T_{\gamma^0}(\Omega_0)\|_{N_p}^2$. La forme Ω_0 correspond à la forme initiale qu'on se donne pour la première reconstruction orientée objet obtenue à partir de la rétro-projection des données de temps d'arrivée (section 8.4.1). La collection de trajets γ^0 joignant chaque point source à chaque point d'arrivée est calculée sur cette reconstruction initiale par recherche des trajets optimaux du point de vue du temps d'arrivée. D'après l'expression générale de T_{γ^k} (Chapitre 7), l'énergie $E_0(\Omega_0)$ correspond au résidu entre les temps acquis et les temps calculés à partir de la reconstruction initiale $u(\Omega_0, \cdot)$. On rappelle, en effet, que $T_{\gamma^0}(\Omega_0) = T(\Omega_0)$, où $T(\Omega)$ est l'opérateur de temps d'arrivée défini à partir du champ de lenteur $u(\Omega, \cdot)$.

A partir de E_0 , la seconde ligne de (8.8) permet d'obtenir Ω_1 . Puis, à la l'itération suivante, la première ligne de (8.8) définit la collection de trajets γ^1 , donc la fonctionnelle d'énergie $E_1(\Omega)$. De manière générale, on obtient que la seconde ligne de (8.8) permet d'obtenir la forme Ω_{k+1} à partir de E_k , puis que la première ligne de (8.8) définit la collection de trajets γ^{k+1} à l'itération qui suit. Ceci montre que la suite d'éléments $E_k(\Omega_k)$, $k \geq 0$, est bien définie.

Le critère d'arrêt que l'on se donne est le suivant. On décide de mettre fin à l'algorithme d'optimisation lorsque l'entier k réalise :

$$|E_{k+1}(\Omega_{k+1}) - E_k(\Omega_k)| < 0,05 \cdot E_0(\Omega_0) \quad (8.9)$$

L'utilisation de ce critère fait arrêter l'algorithme d'optimisation à la troisième image de la figure 8.19. Par rapport à la première image de la figure 8.19, le résultat est amélioré. Le contour de la forme reconstruite se situe à l'extérieur de l'objet mais il reste encore des itérations pour que le bord hémisphérique soit mieux reconstruit.

Afin d'améliorer ce résultat, nous nous proposons d'introduire la contrainte de forme du Chapitre 4 dans l'algorithme de reconstruction orienté objet.

Reconstruction contrainte

La figure 8.20-a montre sur la partie gauche les différentes configurations de formes *a priori*. Parmi ces dernières figurent l'objet, d'autres demi disques placés dans des orientations différentes ainsi que deux intrus constitués par un disque et un carré. Notons que le bord de l'un de ces deux intrus est uniquement incurvé tandis que le bord de l'autre n'est composé que de bords rectilignes. L'objet présente, quant à lui, les deux types de bords. La figure 8.20-a présente sur la partie droite les reconstructions obtenues à l'aide du critère de reconstruction contraint. On constate, comme en modalité d'émission, que la reconstruction effectuée uniquement avec l'énergie d'attache aux données a permis d'obtenir un résultat suffisamment proche de l'objet pour que l'énergie *a priori* définie à partir de toutes les configurations contraigne la forme vers l'occurrence qui lui ressemble le plus. Celle-ci est donnée par l'objet lui-même, aux dimensions et à la position près.

Comme pour la modalité d'émission, on fait se succéder, à la figure 8.20-a, deux reconstructions contraintes où on augmente à la fois le poids que l'on donne à l'énergie *a priori* et le nombre de paramètres dans la description des formes pour une meilleure représentation de celles-ci. Comme expliqué à la section 8.2.2, nous contraignons la reconstruction en considérant des moments d'ordre 13, puis d'ordre 27. Le poids que l'on donne à l'énergie *a priori* est respectivement choisi égal à $\alpha = 0,5$ et $\alpha = 0,7$. Le dernier résultat de reconstruction est alors très satisfaisant comme le montre la superposition du contour des formes reconstruites sur le champ de lenteur synthétique (figure 8.20-b).

Nous plaçons sur la dernière partie de la figure 8.20 les courbes d'énergie correspondant aux différentes étapes de l'algorithme de reconstruction contrainte. Sur ces courbes, nous plaçons un cercle rouge pour identifier la suite des énergies $E_k(\Omega_k)$. On constate que la suite des énergies $(E_k(\Omega_k))_{k \geq 0}$ est décroissante.

Chaque cercle correspond donc à un passage d'une étape à la suivante, i.e. au passage d'une collection de trajet γ^k définissant la fonctionnelle d'énergie E_k à une collection de trajet γ^{k+1} définissant la fonctionnelle d'énergie E_{k+1} . Les courbes bleues correspondent à l'optimisation de chaque énergie $E_k(\Omega)$ effectuée par descente de gradient à partir de la forme Ω_k . On constate que la recherche du pas de descente présenté au Chapitre 7 permet d'obtenir une décroissance en énergie : les courbes bleues qui représentent $E_k(\Omega)$ sont décroissantes.

8.6.2 Données bruitées

Dans cette section, on s'intéresse à la reconstruction orientée objet à partir des temps simulés par des trajets en arc de cercle auxquels est ajouté le bruit (8.3). Ces données correspondent à la cartographie de temps située sur la seconde ligne, première colonne de la partie droite de la figure 8.15.

D'après la comparaison effectuée entre les temps acquis et ceux simulés à l'aide du bruit additif donné par (8.3), la variance du bruit estimé à partir des trajets rectilignes traversant la résine est supérieure à celle du bruit physique. Nous sommes donc dans une situation plus défavorable que dans le cas réel.

L'expérience que nous menons dans cette section a pour but de voir si l'introduction de contraintes de forme permet de remédier à cette situation défavorable pour la reconstruction.

Afin de pouvoir comparer les résultats de reconstruction avec ceux obtenus dans le cas non bruité, nous faisons se succéder à la reconstruction orientée objet sans contrainte deux reconstructions contraintes avec les mêmes paramètres que ceux déterminés précédemment, i.e. une reconstruction considérant des moments d'ordre 13 avec un poids $\alpha = 0,5$, puis une reconstruction considérant des moments d'ordre 27 avec un poids $\alpha = 0,7$. On superpose le contour de la forme reconstruite sur la maquette synthétique à la figure 8.21.

Les résultats obtenus sont satisfaisants ; toutefois l'objet a tendance à être légèrement sur-estimé par la reconstruction obtenue : la forme reconstruite contient l'objet. Ce léger défaut peut être amélioré par une recherche plus adéquate des coefficients de pondération affectés à la contrainte de forme. Cette recherche conduit à de nouvelles valeurs du coefficient α pour lesquelles la contrainte de forme est relâchée pour que l'énergie d'attache aux données soit prépondérante et permette de mieux estimer l'objet. Nous présentons les reconstructions obtenues à la figure 8.22. On constate que les frontières de l'objet sont mieux estimées. En contrepartie, comme la contrainte de forme a un poids moins important le bord de l'objet reconstruit est moins régulier.

8.7 Reconstruction orientée objet de données réelles

Nous nous intéressons finalement à la reconstruction des données réelles. Comme pour le cas de données simulées bruitées, à partir d'une reconstruction orientée objet sans contrainte, nous faisons se succéder deux reconstructions contraintes avec les mêmes paramètres que ceux déterminés dans le cas de données simulées non bruitées. Nous rappelons que, dans ce cas, les valeurs des paramètres de la reconstruction contrainte sont données par $N = 13, \alpha = 0,5$ et $N = 27, \alpha = 0,7$. Nous plaçons sur la figure 8.23 le contour des formes reconstruites pour ces valeurs de paramètres.

Nous constatons que l'objet reconstruit est, cette fois-ci, inclus dans l'objet physique. Nous cherchons par la suite à améliorer ce résultat par une recherche plus adéquate des valeurs de coefficients de pondération affectés à la contrainte. Nous montrons ces résultats sur la figure 8.24. En donnant un poids plus important à la contrainte à l'ordre $N = 13$, le bord de la forme reconstruite se rapproche plus du contour de l'objet. En appliquant ensuite la contrainte de forme avec $N = 27, \alpha = 0,9$, on parvient à une reconstruction satisfaisante, à la fois pour la géométrie de l'objet et pour les valeurs de vitesse de propagation de l'objet et du fond.

8.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué la méthode de reconstruction orientée objet contrainte pour la modalité de tomographie non linéaire par temps d'arrivée décrite au Chapitre 7. Deux collections de données ont été utilisées : l'une est constituée de temps simulés et l'autre de temps acquis en conditions réelles. Dans les données simulées, un modèle de bruit a été proposé en estimant les incertitudes de mesures pour un certain nombre de trajet.

La reconstruction de données simulées non bruitées a essentiellement permis de valider la méthode proposée. Elle montre l'intérêt de procéder par critères énergétiques linéaires successifs : l'objet est successivement mieux estimé à chaque étape de la méthode. D'autre part, les valeurs de vitesse de propagation calculées pour l'objet et le fond sont proches des valeurs théoriques sans avoir eu besoin de contraindre les valeurs reconstruites comme dans la reconstruction pixellique effectuée avec le logiciel RAI-2D.

L'introduction de contraintes de forme permet d'améliorer le résultat obtenu après cette première reconstruction. En particulier, l'apport de la contrainte dans le contexte de la reconstruction est la diminution sensible des artefacts présents dans les images reconstruites. Ceci valide l'hypothèse de recherche que nous avons formulée au Chapitre 1.

L'algorithme a ensuite été évalué sur données simulées bruitées, ce qui correspond à un cas plus défavorable que celui constitué par les données réelles : la variance du bruit estimé est plus grande que celle du bruit physique. Les résultats de reconstruction obtenus sont satisfaisants et montre la robustesse de la méthode par rapport au bruit.

Finalement, la reconstruction de données acquises en conditions réelles a été effectuée. Elle permet de s'assurer que la méthode développée n'est pas seulement efficace sur des données numériques mais qu'elle est également bien adaptée à la reconstruction de données réalistes.

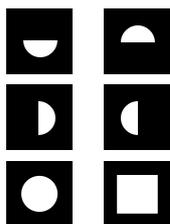
Paramètres	initialisation	$N = 0$	$N = 13$ $\alpha = 0,5$	$N = 27$ $\alpha = 0,7$
Nb d'approximations de l'opérateur direct	0	3	3	2
Formes de références 				
vitesse ($m.s^{-1}$)	$f_{\Omega} = 3\ 521$ $f_{\Omega^c} = 3\ 298$	$f_{\Omega} = 5\ 234$ $f_{\Omega^c} = 3\ 006$	$f_{\Omega} = 5\ 765$ $f_{\Omega^c} = 2\ 994$	$f_{\Omega} = 5\ 962$ $f_{\Omega^c} = 2\ 998$

FIGURE 8.20-a : Résultats de reconstructions orientées objet contraintes à partir de données simulées non bruitées.

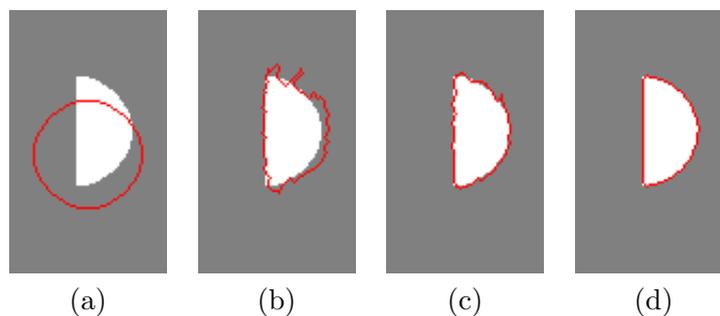


FIGURE 8.20-b : Superposition, sur la solution, du contour de l'initialisation (a), du contour de la reconstruction obtenue pour $N = 0$ (b), pour $N = 13$ (c) et $N = 27$ (d) à partir de données simulées non bruitées.

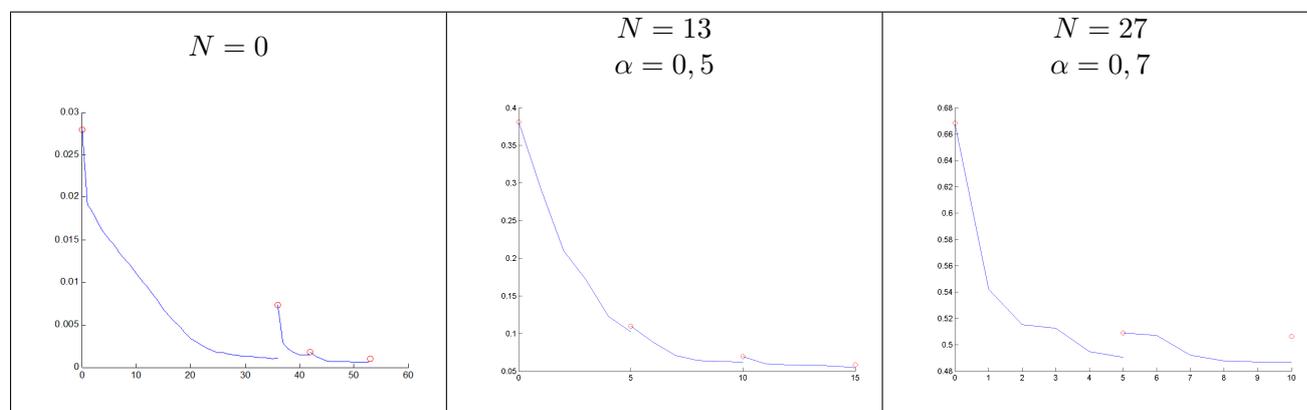


FIGURE 8.20-c : Courbes d'énergie.

FIGURE 8.20 – Résultats de reconstruction orientée objet contrainte sur données simulées en raies courbes, sans bruit, pour 35 sources et 26 récepteurs.

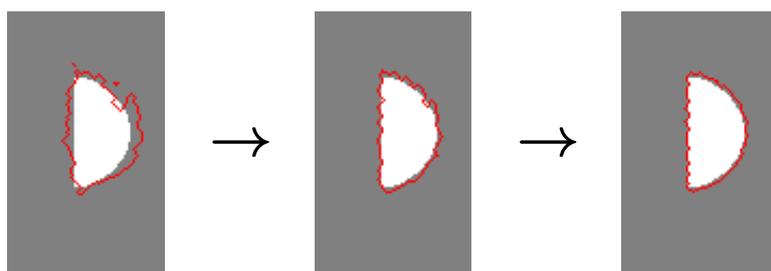


FIGURE 8.21 – Superposition, sur la maquette numérique, du bord des reconstructions obtenues pour des données bruitées avec $N = 13, \alpha = 0,5$ et $N = 27, \alpha = 0,7$.

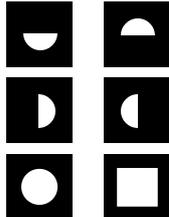
Paramètres	initialisation	$N = 0$	$N = 13$ $\alpha = 0,3$	$N = 27$ $\alpha = 0,9$
Nb d'approximations de l'opérateur direct	0	4	3	2
Formes de références 				
vitesse ($m.s^{-1}$)	$f_{\Omega} = 3\ 582$ $f_{\Omega^c} = 3\ 365$	$f_{\Omega} = 4\ 987$ $f_{\Omega^c} = 3\ 056$	$f_{\Omega} = 5\ 600$ $f_{\Omega^c} = 3\ 053$	$f_{\Omega} = 5\ 685$ $f_{\Omega^c} = 3\ 052$

FIGURE 8.22-a : Résultats de reconstructions orientées objet contraintes à partir de données simulées bruitées.

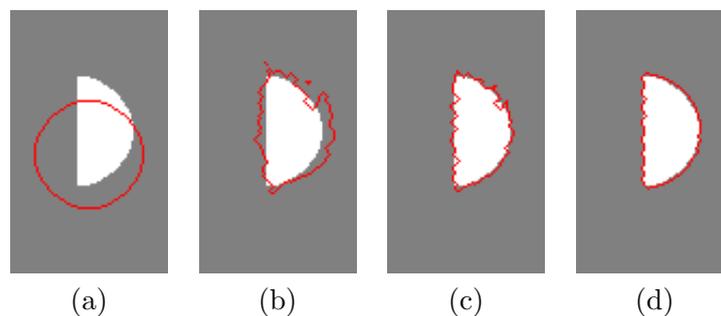


FIGURE 8.22-b : Superposition, sur la solution, du contour de l'initialisation (a), du contour de la reconstruction obtenue pour $N = 0$ (b), pour $N = 13$ (c) et $N = 27$ (d) à partir de données simulées bruitées.

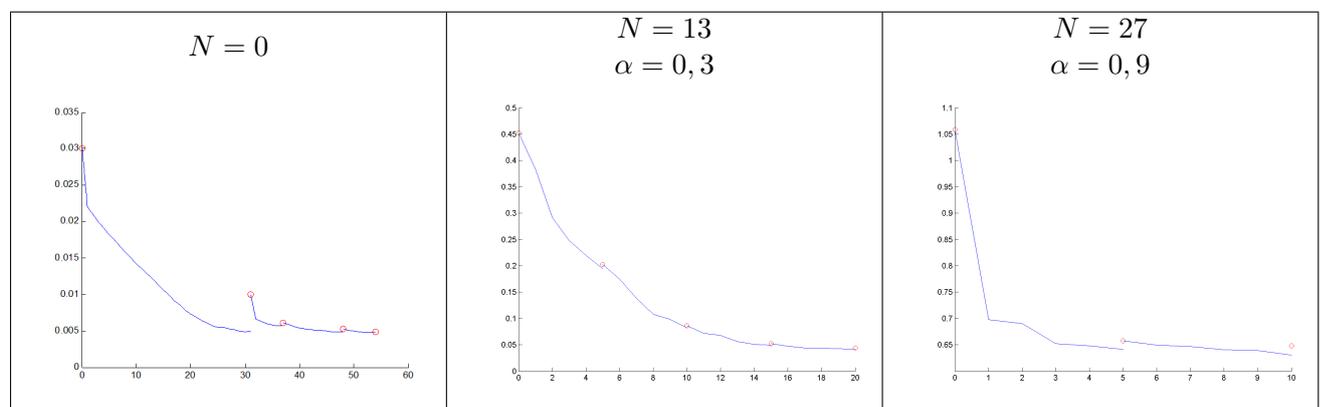


FIGURE 8.22-c : Courbes d'énergie.

FIGURE 8.22 – Résultats de reconstruction orientée objet contrainte sur données simulées en rais courbes auxquelles est ajouté le bruit (8.3) (données issues de 35 sources et 26 récepteurs).

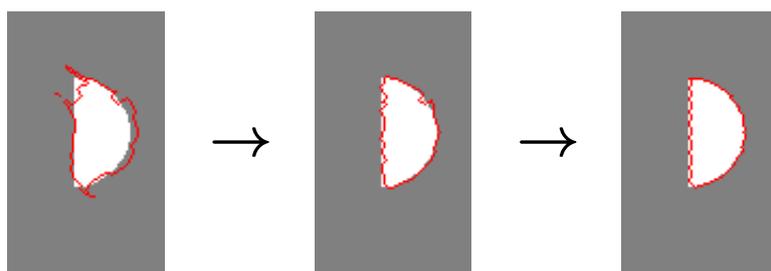


FIGURE 8.23 – Superposition, sur la maquette numérique, du bord des reconstructions obtenues pour des données réelles avec $N = 13, \alpha = 0,5$ et $N = 27, \alpha = 0,7$.

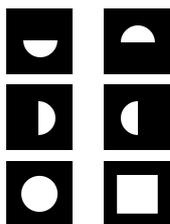
Paramètres	initialisation	$N = 0$	$N = 13$ $\alpha = 0,7$	$N = 27$ $\alpha = 0,8$
Nb d'approximations de l'opérateur direct	0	3	2	2
Formes de références 				
vitesse ($m.s^{-1}$)	$f_{\Omega} = 3\ 522$ $f_{\Omega^c} = 3\ 330$	$f_{\Omega} = 5\ 081$ $f_{\Omega^c} = 3\ 039$	$f_{\Omega} = 5\ 390$ $f_{\Omega^c} = 3\ 025$	$f_{\Omega} = 5\ 500$ $f_{\Omega^c} = 3\ 024$

FIGURE 8.24-a : Résultats de reconstructions orientées objet contraintes à partir de données réelles.

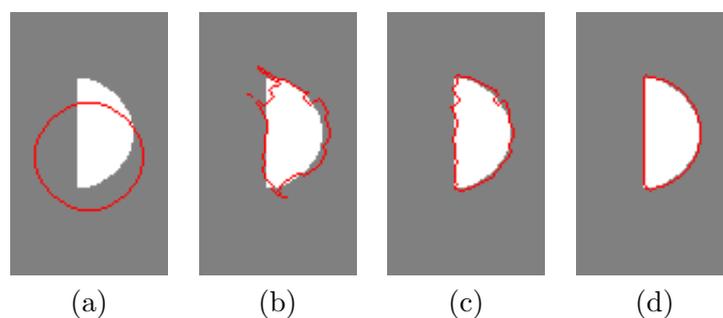


FIGURE 8.24-b : Superposition, sur la solution, du contour de l'initialisation (a), du contour de la reconstruction obtenue pour $N = 0$ (b), pour $N = 13$ (c) et $N = 27$ (d) à partir de données réelles.

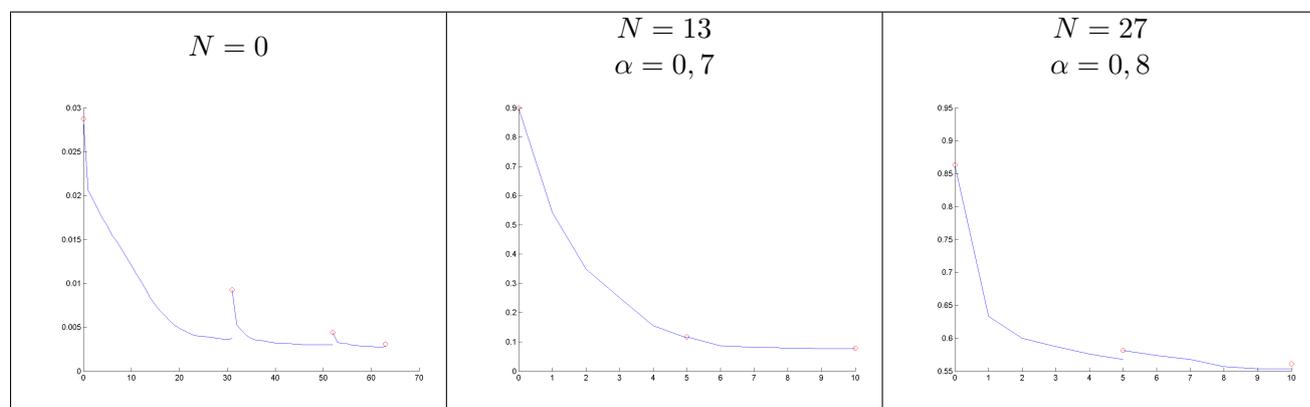


FIGURE 8.24-c : Courbes d'énergie.

FIGURE 8.24 – Résultats de reconstruction orientée objet contrainte sur données réelles pour 35 sources et 26 récepteurs.

Quatrième partie

Conclusions et perspectives

Chapitre 9

9.1 Conclusions

Le travail de doctorat présenté dans ce manuscrit a permis de développer une méthode de reconstruction objet originale en tomographie non linéaire par temps d'arrivée. Elle tient compte des deux principales difficultés théoriques du problème de reconstruction pour cette modalité qui sont la non linéarité du problème direct et le caractère mal posé du problème inverse.

Concernant la non linéarité du problème direct par rapport au champ de lenteur, la méthode lève cette difficulté en considérant un problème d'optimisation particulier. Ce dernier repose sur une fonctionnelle de temps d'arrivée pour laquelle les trajets de parcours sont à déterminer et dont le champ de lenteur est défini à partir d'une forme. Nous avons proposé d'optimiser ce critère par une optimisation découplée entre celle effectuée sur les trajets et celle effectuée sur la forme. La première optimisation consiste à déterminer le parcours minimisant le temps d'arrivée (principe de Fermat) ; la seconde repose sur l'optimisation de forme de la fonctionnelle en procédant par descente de gradient.

Concernant le caractère mal posé du problème de reconstruction, l'introduction de contraintes géométriques globales a permis de diminuer sensiblement les artefacts de reconstruction provenant de l'instabilité du problème inverse. L'introduction de telles contraintes s'effectue par combinaison convexe entre un terme d'attache aux données et une énergie *a priori* définie à partir des moments des différentes formes de référence répertoriées. Elle a été évaluée non seulement en tomographie non linéaire mais également en modalité d'émission pour laquelle le problème direct est linéaire.

En tomographie linéaire, une analyse des résultats de reconstruction contrainte a été effectuée en condition de plus en plus dégradée, i.e. en diminuant le nombre d'acquisitions, et en faisant varier le rapport signal-sur-bruit. Les résultats obtenus sur objet synthétique montrent l'efficacité de la contrainte de forme pour pallier la présence d'artefacts de reconstruction provenant du caractère mal posé du problème inverse.

La méthode de reconstruction orientée objet en tomographie non linéaire par temps d'arrivée conduisant à une suite de fonctionnelles linéaires, l'incorporation de contraintes de forme s'effectue de manière similaire à celle effectuée dans le cas de la modalité d'émission. On considère, pour chaque fonctionnelle linéaire d'attache aux données, une combinaison convexe avec l'énergie *a priori* qui définit la contrainte de forme. L'approximation de l'opérateur non linéaire par une suite d'opérateurs linéaires s'avère, par ailleurs, être une méthode efficace pour la reconstruction de données de tomographie par temps de première arrivée : l'objet est de mieux en mieux estimé à chaque étape de la méthode. Les résultats de reconstruction orientée objet contrainte à partir des temps numériques sont satisfaisants du point de vue de la géométrie de la forme comme des valeurs de vitesses de propagation. Un bruit additif, estimé par rapport à des données réelles sur

un nombre particulier de trajets, est employé. Les résultats de reconstruction obtenus montrent, en particulier, la robustesse de la méthode par rapport au bruit.

L'évaluation de l'algorithme sur les temps acquis à partir d'un banc de mesures de tomographie sismique pour objets de dimensions réduites rend compte du fait que la méthode proposée est également bien adaptée à la reconstruction de données réelles.

Par rapport aux méthodes de reconstruction pixellique, les avantages de notre méthode de reconstruction portent sur une localisation nette des contours avec une représentation homogène des objets et du fond. Ainsi, l'objet reconstruit est facilement identifiable dans l'image, ce qui peut être intéressant pour reconnaître ou évaluer l'importance de défauts dans une structure. D'autre part, la possibilité d'inclure des contraintes de formes globales dans la méthode permet de réduire certains artefacts de reconstruction, ce qui permet d'autant mieux d'identifier l'objet.

9.2 Synthèse des contributions

La première contribution obtenue au cours de ce travail de doctorat est le développement d'une méthode de reconstruction objet en tomographie non linéaire par temps de première arrivée. A notre connaissance, très peu de travaux utilisent à l'heure actuelle cette modélisation du problème : la plupart du temps, il s'agit d'algorithmes de reconstruction pixellique. Si on élargit le champ de la bibliographie, on trouve des exemples de reconstruction par évolution de forme pour certains problèmes inverses modélisés par des équations aux dérivées partielles. De manière générale, c'est un sujet qui reste actuellement en développement.

La deuxième contribution de notre travail est l'incorporation de contraintes géométriques globales dans le cadre de la reconstruction d'images de tomographie. Les contraintes de forme de haut niveau employant un ensemble d'objets de référence sont initialement issues du domaine de la segmentation d'images. Dans ce domaine, elles ont montré qu'elles permettaient de détecter correctement un objet soumis à des occultations. A notre connaissance, elles n'ont pas été employées en reconstruction d'images de tomographie non linéaire. Dans ce cadre, nous avons montré qu'elles permettent de réduire sensiblement les artefacts de reconstruction liés au caractère mal posé du problème.

La dernière contribution de ce travail est de nature expérimentale. Elle porte sur l'évaluation de la méthode à partir de données réelles acquises sur un banc de mesure de tomographie sismique pour objets de dimensions réduites. Les résultats de reconstruction obtenus à partir de ces données sont satisfaisants, tant du point de vue de la géométrie de la forme reconstruite que des valeurs de vitesse de propagation. Aussi, il nous semble tout à fait envisageable d'employer la méthode développée sur des données réelles.

9.3 Perspectives

Dans le travail présenté dans ce manuscrit, nous avons employé, pour le problème direct, une approximation du parcours des ondes en arcs de cercle. La comparaison entre les temps simulés et les temps acquis en conditions réelles montre que cette approximation est convenable par rapport à la réalité physique du problème. L'opérateur direct obtenu définit un opérateur adjoint à partir duquel est calculé le champ de vitesse permettant de faire évoluer la forme dans la reconstruction orientée objet. Cet opérateur adjoint repose donc sur une géométrie de parcours en arcs de cercle.

Les résultats de reconstruction obtenus avec cette approximation du trajet des ondes ont donné satisfaction. Toutefois, une géométrie de trajet en arc de cercle n'est pas conforme avec la réalité physique qui indique que les ondes se propagent en segments de droites lorsqu'elles parcourent des régions homogènes.

Une manière d'améliorer la méthode de reconstruction développée consisterait à résoudre le problème direct à partir de méthodes de propagation de front de type *Fast Marching*. Ce travail a été entrepris, en partie, au Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg. On peut constater qu'à l'aide de telles méthodes la géométrie de parcours dans les matériaux s'effectue effectivement en segments de droites.

Une première perspective est donc de mettre en œuvre l'opérateur direct correspondant ainsi que l'opérateur adjoint qui lui est associé. De cette manière, le calcul du champ de vitesse permettant de faire évoluer la forme dans la reconstruction orientée objet serait plus conforme avec la réalité physique, car les opérateurs utilisés respecteraient le trajet physique des ondes en segments de droites.

Dans le travail présenté dans ce manuscrit, nous nous sommes placés en régime hautes fréquences, ce qui permet d'approcher le parcours dans les matériaux par les lois de l'optique géométrique, i.e. le principe de Fermat qui est une conséquence de l'équation eikonale. On peut, à présent, s'interroger sur la validité de notre méthode de reconstruction orientée objet lorsque l'hypothèse de haute fréquence n'est plus faite. Dans ce cas, un terme de transport doit être considéré en plus de l'équation eikonale [Taillandier, 2008].

Une seconde perspective à ce travail consisterait à étudier le problème direct et inverse de tomographie sismique dans le cas de moyennes ou basses fréquences, ce qui revient à prendre en compte un terme de transport dans les équations de propagation des ondes.

L'étude de ce type d'équations de propagation a déjà donné lieu à quelques développements dans le cadre de la modélisation du transport lumineux à l'aide de méthodes probabilistes de type *Monte Carlo Markov Chains (MCMC)* [Veach et Guibas, 1997]. Il pourrait alors s'avérer intéressant d'utiliser ce type de méthodes et d'évaluer leur efficacité pour étudier le problème de tomographie sismique sans se limiter au régime hautes fréquences.

Les résultats présentés dans ce travail de doctorat porte sur la reconstruction d'un objet homogène dans un fond uniforme. La situation qui considère plusieurs objets est plus complexe et nécessite d'employer plusieurs ensembles de niveaux, chacun d'entre eux constituant une phase de la méthode par évolution de forme. On parle alors de méthodes multiphases. La reconstruction de plusieurs objets à l'aide de telles méthodes a été effectuée dans [Feng, 2002; Shi, 2005; Ramlau et Ring, 2007]. L'adaptation de l'incorporation de contraintes de forme à des méthodes de reconstruction multiphases n'a, à notre connaissance, pas été explorée et constitue une autre perspective à ce travail.

Concernant la contrainte de forme utilisée, son efficacité réside dans le fait que les formes sont considérées dans leur globalité. On peut s'interroger sur les résultats qu'on obtiendrait si les objets de référence décrivaient de manière partielle et non plus globale les différentes occurrences de l'objet qu'on cherche à reconstruire.

Finalement, même si la méthode proposée a été évaluée sur données réelles, celles-ci ont été acquises en conditions contrôlées en laboratoire. Dans l'idée de l'utiliser pour des applications industrielles, une évaluation sur des données acquises sur le terrain reste à effectuer.

Appendices

Annexe A

Recherches effectuées pour une méthode de Gauss Newton orientée objet

A.1 Compléments de synthèse bibliographique

Dans [Burger, 2004], un schéma de Levenberg Marquardt en variable de forme est proposé à partir de (7.26) pour la détection d'obstacle modélisée par des équations aux dérivées partielles. La méthode est développée dans un cadre abstrait qui suppose seulement que la solution du problème direct u_Ω , qui dépend de la forme de la cavité Ω , vérifie une équation générale de la forme $E(u, \Omega) = 0$. On suppose donc que la quantité u_Ω vérifie une équation homogène dans laquelle peut intervenir des opérateurs différentiels.

Aucune restriction particulière sur l'expression explicite de la fonctionnelle de forme $F(\Omega)$ à optimiser pour reconstruire Ω n'est faite. Celle-ci est supposée ne dépendre uniquement de u_Ω , de sorte qu'est posé $F(\Omega) = G(u_\Omega)$.

Par rapport à l'article [Burger, 2004], le problème de reconstruction de donnée de tomographie par temps d'arrivée diffère par le fait que le trajet γ_Ω , joignant le point source α au point d'arrivée β et définissant le problème direct, est solution d'un problème d'optimisation. Le trajet γ_Ω est celui qui minimise le temps d'arrivée en β .

D'autre part, la fonctionnelle de forme utilisée pour reconstruire Ω est donnée par le résidu $T - T(\Omega) = T - \mathcal{E}(\gamma_\Omega, \Omega)$, où T est le temps d'arrivée mesuré en β à partir d'un signal émis en α . Cette fonctionnelle dépend de Ω de deux manières, d'une part à travers Ω et d'autre part à travers γ_Ω . Elle ne dépend donc pas de la forme Ω uniquement à travers γ_Ω .

Ces différences par rapport au cadre défini dans [Burger, 2004] montrent qu'on ne peut pas suivre directement [Burger, 2004] pour déterminer un champ de vitesse permettant de faire évoluer Ω dans le but de reconstruire l'objet.

A.2 Adapter le point de vue du calcul des variations ?

A la section 7.3.1, nous avons vu que le cadre mathématique du problème direct de tomographie par temps d'arrivée est celui du calcul des variations. En effet, $\mathcal{E}(\psi, \Omega)$ correspond à

l'intégrale curviligne du champ de lenteur $u(\Omega, \cdot)$ le long du chemin ψ :

$$\mathcal{E}(\psi, \Omega) = \int_{\psi} u(\Omega, \cdot) \quad (\text{A.1})$$

Pour suivre [Burger, 2004], il est nécessaire de traduire le problème d'optimisation (7.12) définissant γ_{Ω} à travers une équation homogène. Pour cela, on se propose d'exprimer (7.12) par l'annulation de la différentielle de \mathcal{E} par rapport à ψ en l'extremum γ_{Ω} . Or, dans le cadre du calcul des variations, nous avons le théorème général suivant [Cartan, 1967b] :

Théorème A.2.1. *Soit F une fonctionnelle attachée à une courbe de la forme :*

$$F(\psi) = \int_a^b g(\psi, \dot{\psi}). \quad (\text{A.2})$$

Alors sa différentielle est donnée par :

$$dF(\psi) \cdot \phi = \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\psi, \dot{\psi}) \cdot \phi + \frac{\partial g}{\partial y}(\psi, \dot{\psi}) \cdot \dot{\phi} \right) \quad (\text{A.3})$$

pour tout couple $(\psi, \dot{\psi})$ et $(\phi, \dot{\phi})$ dans un ensemble U où g est différentiable et pour ϕ tel que $\phi(a) = \phi(b) = 0$

Remarque A.2.1. *La notion de différentiabilité nécessite de se placer sur un ensemble topologiquement ouvert que nous avons noté ici U . Pour la définition de celui-ci, on pourra se reporter à [Cartan, 1967b]*

Le Théorème A.2.1 utilise la notion de différentielle sur des espaces de dimension quelconque qui ont la propriété d'être complets [Cartan, 1967a]. Dans cette approche, chaque fonction joue le rôle de point ou de vecteur. Ainsi, dans (A.3), la dérivée partielle de g selon x (resp. selon y) est prise au point $(\psi, \dot{\psi})$ et est appliquée sur le vecteur ϕ (resp. $\dot{\phi}$).

Déterminons tout d'abord la fonction g associée à la fonctionnelle $\mathcal{E}(\cdot, \Omega)$. D'après la section 7.3.1, on a :

$$\mathcal{E}(\psi, \Omega) = \int_a^b u(\Omega, \psi) \|\dot{\psi}\|$$

De cette égalité, on déduit que la fonction g est donnée par : $g(x, y) = u(\Omega, x) \|y\|$. En effet, on a dans ce cas :

$$\int_a^b g(\psi, \dot{\psi}) = \int_a^b u(\Omega, \psi) \|\dot{\psi}\| = \mathcal{E}(\psi, \Omega). \quad (\text{A.4})$$

Or, le champ de lenteur $u(\Omega, \cdot)$ est constant par morceaux par rapport à Ω ; en particulier, il présente une discontinuité le long du bord $\partial\Omega$. Il n'est donc pas différentiable dans un voisinage de $\partial\Omega$. Cette absence de différentiabilité du champ de lenteur $u(\Omega, \cdot)$ entraîne la non différentiabilité de g . Par conséquent, on ne peut pas appliquer ici le Théorème A.2.1. Pour pallier ce problème de régularité, nous proposons dans la section qui suit un calcul en dérivée de forme.

A.3 Caractérisation des trajets extrémaux en dérivée de forme

Dans cette section, on cherche à traduire (PF) par l'annulation de la dérivée de forme de la fonctionnelle de temps d'arrivée. Notons, à présent, simplement γ le chemin γ_Ω défini par $\mathcal{E}(\gamma_\Omega, \Omega) = \inf_{\psi} \mathcal{E}(\psi, \Omega)$. Une variation de forme Ω_τ de Ω donne lieu à un chemin γ_τ défini par : $\mathcal{E}(\gamma_\tau, \Omega_\tau) = \inf_{\psi} \mathcal{E}(\psi, \Omega_\tau)$.

Le trajet γ minimisant le temps d'arrivée $\mathcal{E}(\cdot, \Omega)$ défini à partir de Ω annule la dérivée de Gâteaux de la fonctionnelle $\mathcal{E}(\cdot, \Omega)$ par rapport à la variable de trajet :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(\gamma_\tau, \Omega) - \mathcal{E}(\gamma, \Omega)}{\tau} = 0 \quad (\text{A.5})$$

avec $\mathcal{E}(\gamma, \Omega) = \int_{\gamma} u(\Omega, \cdot)$ et $u(\Omega, \cdot)$ un champ de vitesse constant par morceaux.

Pour exprimer cette intégrale curviligne, introduisons une subdivision $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{n+1} = b$ du segment $[a, b]$ telle que à la fois la restriction de γ et la restriction de γ_τ soit de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$. Alors, d'après la section 7.3.1, on a :

$$\int_{\gamma_\tau} u(\Omega, \cdot) = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\gamma_\tau|_i} u(\Omega, \cdot) = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma_\tau) \|\dot{\gamma}_\tau\| \quad (\text{A.6})$$

et

$$\int_{\gamma} u(\Omega, \cdot) = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\gamma|_i} u(\Omega, \cdot) = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma) \|\dot{\gamma}\| \quad (\text{A.7})$$

Donc, le quotient (A.5) est donné par :

$$\frac{\mathcal{E}(\gamma_\tau, \Omega) - \mathcal{E}(\gamma, \Omega)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{0 \leq i \leq n+1} \left(\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma_\tau) \|\dot{\gamma}_\tau\| - \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma) \|\dot{\gamma}\| \right) \quad (\text{A.8})$$

Introduisons dans cette expression le terme $\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma_\tau) \|\dot{\gamma}\|$; on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}(\gamma_\tau, \Omega) - \mathcal{E}(\gamma, \Omega)}{\tau} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \left(\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{u(\Omega, \gamma_\tau) - u(\Omega, \gamma)}{\tau} \|\dot{\gamma}\| + \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma_\tau) \frac{\|\dot{\gamma}_\tau\| - \|\dot{\gamma}\|}{\tau} \right) \quad (\text{A.9})$$

On cherche à évaluer la limite de (A.9) lorsque τ tend vers 0. Pour cela, posons :

$$I_i(\tau) = \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma_\tau) \frac{\|\dot{\gamma}_\tau\| - \|\dot{\gamma}\|}{\tau} \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta N(\tau) = \frac{\|\dot{\gamma}_\tau\| - \|\dot{\gamma}\|}{\tau} \quad (\text{A.11})$$

de sorte que

$$I_i(\tau) = \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma_\tau) \Delta N(\tau) \quad (\text{A.12})$$

et

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(\gamma_\tau, \Omega) - \mathcal{E}(\gamma, \Omega)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{u(\Omega, \gamma_\tau) - u(\Omega, \gamma)}{\tau} \|\dot{\gamma}\| + \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{0 \leq i \leq n+1} I_i(\tau) \quad (\text{A.13})$$

Comme la dérivée de forme γ' du trajet extrémal $\gamma = \gamma_\Omega$ est donnée par :

$$\gamma' = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\gamma_\tau - \gamma}{\tau} \quad (\text{A.14})$$

où $\gamma_\tau = \gamma_{\Omega_\tau}$, on peut faire l'approximation, au premier ordre : $\gamma_\tau = \gamma + \tau\gamma'$. Dans l'intégrale (A.12), le premier facteur a pour limite :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} u(\Omega, \gamma_\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} u(\Omega, \gamma + \tau\gamma') = u(\Omega, \gamma) \quad (\text{A.15})$$

Le second tend, lorsque τ tend vers 0, vers :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta N(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\|\dot{\gamma} + \tau\dot{\gamma}'\| - \|\dot{\gamma}\|}{\tau} = dN(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}' \quad (\text{A.16})$$

où dN est la différentielle de la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 : $N(x) = \|x\|$ et où $\dot{\gamma}'$ est la dérivée de forme de $\dot{\gamma} = \frac{d}{d\sigma}\gamma$. Dans (A.16), cette différentielle, prise au point $\dot{\gamma}$, s'applique linéairement sur le vecteur $\dot{\gamma}'$. Pour calculer la limite de $\Delta N(\tau)$ lorsque τ tend vers 0, tout revient à déterminer la différentielle de la norme N .

Lemme A.3.1. *La norme*

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & N(x) = \|x\| \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

est différentiable pour $x \neq 0$ et de différentielle donnée par :

$$dN(x) \cdot h = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|} \quad (\text{A.18})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^2 qui définit la norme par $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Démonstration A.3.1. *On rappelle que, de manière générale, la différentielle d'une forme bilinéaire b est donnée par [Cartan, 1967a] :*

$$db(x, y) \cdot (h, k) = b(x, h) + b(k, y). \quad (\text{A.19})$$

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant une forme bilinéaire, notamment symétrique, notons $b(x, y) = \langle x, y \rangle$. On a :

$$db(x, y) \cdot (h, k) = b(x, h) + b(y, k), \quad (\text{A.20})$$

car $b(k, y) = b(y, k)$.

On s'intéresse à déterminer la différentielle de $c(x) = N^2(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = b(x, x)$. Par composition, on déduit :

$$dc(x) \cdot h = db(x, x) \cdot (h, h)$$

D'après (A.20), on a donc :

$$dc(x) \cdot h = b(x, h) + b(x, h) = 2\langle x, h \rangle. \quad (\text{A.21})$$

Comme $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{c(x)}$, on obtient par composition des dérivées :

$$dN(x) \cdot h = \frac{dc(x) \cdot h}{2\sqrt{c(x)}} = \frac{2\langle x, h \rangle}{2\sqrt{\langle x, x \rangle}} = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}.$$

ce qui correspond au résultat annoncé.

On déduit du lemme A.3.1 que :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta N(\tau) = dN(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}' = \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}' \rangle}{\|\dot{\gamma}\|}$$

de sorte que :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I_i(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma_\tau) \Delta N(\tau) = \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma) \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}' \rangle}{\|\dot{\gamma}\|} \quad (\text{A.22})$$

Par une intégration par partie, il vient :

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma) \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}' \rangle}{\|\dot{\gamma}\|} = \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{d}{d\sigma} \left\langle \frac{u(\Omega, \gamma) \dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \gamma' \right\rangle - \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \left\langle \frac{d}{d\sigma} \frac{u(\Omega, \gamma) \dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \gamma' \right\rangle$$

La dérivée de forme γ' possède des valeurs différentes à gauche et à droite des points σ_i et est nul aux extrémités $\sigma_0 = a$ et $\sigma_{n+1} = b$. Lorsqu'on somme le terme tout intégré, on obtient donc des termes de sauts aux points $\sigma_1, \dots, \sigma_n$:

$$\sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{d}{d\sigma} \left\langle \frac{u(\Omega, \gamma) \dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \gamma' \right\rangle = \sum_{0 < i < n+1} \left[u(\Omega, \gamma) \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}' \rangle}{\|\dot{\gamma}\|} \right]_{\sigma_i}$$

où $[\cdot]_{\sigma_i}$ représente le saut en σ_i . Par suite,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{0 \leq i \leq n+1} I_i(\tau) &= \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} u(\Omega, \gamma) \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}' \rangle}{\|\dot{\gamma}\|} \\ &= \sum_{0 < i < n+1} \left[u(\Omega, \gamma) \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}' \rangle}{\|\dot{\gamma}\|} \right]_{\sigma_i} - \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \left\langle \frac{d}{d\sigma} \frac{u(\Omega, \gamma) \dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \gamma' \right\rangle \end{aligned}$$

Le principe de Fermat (*PF*) affirmant que (A.13) est nul, (*PF*) se traduit en dérivée de forme par :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{u(\Omega, \gamma_\tau) - u(\Omega, \gamma)}{\tau} \|\dot{\gamma}\| + \sum_{0 < i < n+1} \left[u(\Omega, \gamma) \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma}' \rangle}{\|\dot{\gamma}\|} \right]_{\sigma_i} \\ = \sum_{0 \leq i \leq n+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \left\langle \frac{d}{d\sigma} \frac{u(\Omega, \gamma) \dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \gamma' \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

pour toute subdivision $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{n+1} = b$ du segment $[a, b]$ telle que γ et γ_τ soit de classe \mathcal{C}^1 sur chaque segment $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$.

A.4 Formuler un algorithme de Gauss Newton orienté objet

Pour formuler une méthode de Gauss Newton orienté objet, définie par l'identité (7.26), il reste à exprimer la dérivée de forme $T'(\Omega) \cdot V$ de l'opérateur $T(\Omega) = \mathcal{E}(\gamma_\Omega, \Omega)$. En notant, comme précédemment, $\gamma = \gamma_\Omega$ et $\gamma_\tau = \gamma_{\Omega_\tau}$, cela correspond à déterminer la dérivée de Gâteaux de $\mathcal{E}(\gamma, \Omega)$ par rapport à Ω . Celle-ci est donnée par : $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(\gamma_\tau, \Omega_\tau) - \mathcal{E}(\gamma, \Omega)}{\tau}$. Dans cette expression, γ vérifie (A.23).

Ce calcul reste difficile à déterminer. Ceci est dû au fait que $\mathcal{E}(\gamma, \Omega)$ est une intégrale curviligne et n'est pas une intégrale de domaine ou une intégrale sur le bord d'un domaine de \mathbb{R}^2 . La fonctionnelle $\mathcal{E}(\gamma, \Omega)$ est une intégrale le long d'une courbe extrémale, i.e. le long d'une courbe correspondant à un extremum pour un problème d'optimisation donné, ce qui rend peu évident la différentiation de forme.

Pour rendre compte du fait que $\gamma = \gamma_\Omega$ est extrémale, la condition obtenue en (A.23) doit être incorporée au calcul de la dérivée de forme de l'opérateur $T(\Omega) = \mathcal{E}(\gamma_\Omega, \Omega)$. Ceci reste difficile en pratique.

Bibliographie

- In P. Argoul, N. Point, et G. Dutilleul, editors, *Problèmes inverses en génie civil*, number 15 in Collection études et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées (ERLPC) - Série sciences pour le génie civil. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, January 2009.
- D. Adalsteinsson et J.A. Sethian. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118 :269–277, 1995.
- D. Adalsteinsson et J.A. Sethian. The fast construction of extension velocities in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 148(1) :2–22, 1999.
- K. Aki et P.G. Richards. *Quantitative Seismology : Theory and Methods*. W.H. Freeman, San Francisco, 1980.
- M. Allain, J. Idier, et Y. Goussard. On global and local convergence of half-quadratic algorithms. *IEEE Trans. on Image Processing*, 15(5) :1130–1142, 2006.
- G. Aubert et P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing : Partial Differential Equation and Calculus of Variations*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2001.
- G. Aubert et L. Vese. A variational method in image recovery. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34 : 1948–1979, 1997.
- G. Aubert, M. Barlaud, O. Faugeras, et S. Jehan-Besson. Image segmentation using active contours : calculus of variations or shape gradients ? *SIAM, Journal on Applied Mathematics*, 63(6) :2128–2154, September 2003. Egalement RR-INRIA 4483, juin 2002.
- J.F. Aujol et A. Chambolle. Dual norms and image decomposition models. *International Journal of Computer Vision*, 63(1) :85–104, 2005.
- M. Baust et N. Navab. A spherical harmonics shape model for level set segmentation. In *Proc. 11th European Conference on Computer Vision (ECCV'2010)*, volume 6313 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 580–593, Hersonissos, Crete, Greece, September 2010.
- A. Bjorck. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. SIAM, 1996.
- A. Blake et A. Zisserman. *Visual Reconstruction*. Series in artificial intelligence. The M.I.T. Press, London, 1987.
- L. Blanc-Féraud et G. Aubert. Some remarks on the equivalence between 2D and 3D classical snakes and geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 34(1) :19–28, septembre 1999.

- L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, G. Aubert, et M. Barlaud. Nonlinear image processing : Modeling and fast algorithm for regularization with edge detection. In *Proc. IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume I, pages 474–477, Washington D.C., USA, September 1995.
- Y. Boykov, O. Veksler, et R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(11) :1222–1239, November 2001.
- X. Bresson, P. Vandergheynst, et J.P. Thiran. A priori information in image segmentation : energy functional based on shape statistical model and image information. In *Proc. IEEE Conference on Image Processing*, volume 3, pages 425–428, Barcelone, Espagne, September 2003.
- M. Burger. A level set method for inverse problems. *Inverse Problems*, (17) :1327–1355, 2001.
- M. Burger. Levenberg-marquardt level set methods for inverse obstacle problems. *Inverse Problems*, 20 :259–282, 2004.
- M. Burger et S. Osher. A survey on level set methods for inverse problems and optimal design. *European J. Appl. Math.*, 16 :263–301, 2005.
- M. Burger, B. Hackl, et W. Ring. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, 194 :344–362, 2004.
- H. Cartan. *Calcul Différentiel*. Collection Méthodes. Hermann, 1967a.
- H. Cartan. *Formes Différentielles, éléments de Calcul des Variations*. Collection Méthodes. Hermann, 1967b.
- V. Caselles, F. Catté, T. Coll, et F. Dibos. A geometric model for active contours in image processing. *Numerische Mathematik*, 66 :1–31, October 1993.
- V. Caselles, R. Kimmel, et G. Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, February 1997.
- T. Chan et L. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image processing*, 10(2) :266–277, February 2001.
- T. Chan et W. Zhu. Level set based shape prior segmentation. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 1164–1170, June 2005.
- T. Chan, H. Li, M. Lysaker, et X. Tai. Level set method for positron emission tomography. *International Journal of Biomedical Imaging*, 2007 :1–15, 2007.
- P. Charbonnier. *Reconstruction d'image : régularisation avec prise en compte des discontinuités*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, septembre 1994.
- P. Charbonnier. *Mémoire de forme et d'apparence en traitement d'images*. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université de Strasbourg, septembre 2009.

- P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298–311, February 1997.
- G. Charpiat, O. Faugeras, et R. Keriven. Approximations of shape metrics and application to shape warping and empirical shape statistics. Technical Report RR-4820, INRIA, Sophia Antipolis, May 2003.
- Y. Chen, H. Tagare, S. Thiruvenkadam, F. Huang, D. Wilson, K.S. Gopinath, R.W. Briggs, et E.A. Geiser. Using prior shapes in geometric active contours in a variational framework. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :315–328, December 2002.
- D. Chopp. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, 106(1) :77–91, May 1993.
- L. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Image Understanding*, 53(2) :211–218, 1991.
- T. Cootes, D. Cooper, C. Taylor, et J. Graham. Active shape models - their training and application. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(1) :38–59, January 1995.
- P. Côte. *Tomographie Sismique en Génie Civil*. Thèse de doctorat d'état, Université Joseph Fourier, Grenoble I, octobre 1988.
- M.G. Crandall et P.L. Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277(1) :1–42, may 1983.
- D. Cremers, F. Tischhäuser, J. Weickert, et C. Schnörr. Diffusion snakes : Introducing statistical shape knowledge into the Mumford-Shah functional. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :295–313, December 2002.
- D. Cremers, T. Kohlberger, et C. Schnörr. Shape statistics in kernel space for variational image segmentation. *Pattern Recognition : Special Issue on Kernel and Subspace Methods in Computer Vision*, 36(9) :1929–1943, September 2003.
- D. Cremers, S. Osher, et S. Soatto. Kernel density estimation and intrinsic alignment for shape priors in level set segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 69(3) :335–351, 2006a.
- D. Cremers, N. Sochen, et C. Schnörr. A multiphase dynamic labeling model for variational recognition-driven image segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 66(1) :67–81, January 2006b.
- D. Cremers, M. Rousson, et R. Deriche. A review of statistical approaches to level set segmentation : Integrating color, texture, motion and shape. *International Journal of Computer Vision*, 72(2) :195–215, 2007.
- M.C. Delfour et J.P. Zolésio. *Shape and Geometries : Analysis, Differential Calculus and Optimization*. Advances in design and control. SIAM, 2001.
- J. E. Dennis et R. B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall Series in Computational Mathematics. Prentice-Hall, 1983.

- E. Van der Oord. Indice d'une application linéaire. Théorème de Riesz. Opérateurs compacts dans L^2 . In *Séminaire Choquet*, volume 1, Exp. No. A1, pages A1–A8, 1967-1968.
- O. Dorn et D. Lesselier. Level set methods for inverse scattering. *Inverse Problems*, 22(4) : R67–R131, 2006.
- H. Feng. *Curve evolution object-based techniques for image reconstruction and segmentation*. Thèse de doctorat, Université de Boston, 2002.
- H. Feng, W. Karl, et D. Castañón. A curve evolution approach to object-based tomographic reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(1) :44–57, January 2003.
- A. Foulonneau. *Une contribution à l'introduction de contraintes géométriques dans les contours actifs orientés région*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur - Strasbourg I, Strasbourg, décembre 2004.
- A. Foulonneau, P. Charbonnier, et F. Heitz. Geometric shape priors for region-based active contours. In *Proc. IEEE Conference on Image Processing*, volume 3, pages 413–416, Barcelone, Espagne, September 2003.
- A. Foulonneau, P. Charbonnier, et F. Heitz. Affine-invariant geometric shape priors for region-based active contours. *IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(8) :1352–357, August 2006.
- A. Foulonneau, P. Charbonnier, et F. Heitz. Multi-reference shape priors for active contours. *International Journal on Computer Vision*, 81(1) :68–81, January 2009.
- S. Geman et D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distribution and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6) :721–741, November 1984.
- S. Geman et G. Reynolds. Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(3) :367–383, 1997.
- S. Geman et C. Yang. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization and fft's. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(7) :932–946, 1995.
- T. Goldstein, X. Bresson, et S. Osher. Geometric applications of the split Bregman method : Segmentation and surface reconstruction. Rapport de Recherche CAM09-06, UCLA, February 2009.
- J. Gomes et O. Faugeras. Reconciling distance functions and level sets. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11(2) :209–223, June 2000.
- A. Henrot et M. Pierre. *Variation et optimisation de formes, Une analyse géométrique*. Springer, 2005.
- F. Hettlich. Fréchet derivatives in inverse obstacle scattering. *Inverse Problems*, 11(2) : 371–382, 1995.
- M. Hintermüller. Fast level set based algorithms using shape and topological sensitivity information. *Control and Cybernetics*, 34(1) :305–324, 2005.

- M. Hintermüller et W. Ring. A second order shape optimization approach for image segmentation. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(2) :442–467, 2003.
- J. Idier. Convex half-quadratic criteria and interacting auxiliary variables for image restoration. *IEEE Trans. on Image Processing*, 10(7) :1001–1009, 2001.
- S. Ivansson. Remark on an earlier proposed iterative tomographic algorithm. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 75 :855–860, 1981.
- Anil K. Jain. *Fundamentals of digital image processing*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1989.
- S. Jehan-Besson. *Modèles de contours actifs basés région pour la segmentation d'images et de vidéos*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, January 2003.
- S. Jehan-Besson, M. Barlaud, et G. Aubert. DREAM2S : Deformable Regions driven by an Eulerian Accurate Minimization Method for image and video Segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 53(1) :45–70, June 2003.
- S. Kaczmarz. Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen. *Bull. Acad. Polon. Sci. Lett.*, A :355–357, 1937.
- A. C. Kak et M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.
- M. Kass, A. Witkin, et D. Terzopoulos. Snakes : active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4) :321–331, January 1988.
- J. Kim, M. Çetin, et A. Willsky. Nonparametric shape priors for active contour-based image segmentation. *Signal Processing*, 87(12) :3021–3044, 2007.
- A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Applied Mathematical Science. Springer, Berlin, 1996.
- B. Kortschak, H. Wegleiter, et B. Brandstätter. Formulation of cost functionals for different measurement principles in nonlinear capacitance tomography. *Measurement Science and Technology*, (18) :71–78, 2007.
- P.M. Koulibaly. *Régularisation et corrections physiques en tomographie d'émission*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1996.
- D.L. Lager et R.J. Lytle. Determining a subsurface electromagnetic profile from high frequency measurements by applying reconstruction technique algorithm. *Radio Science*, 5(12) :249–260, 1977.
- V. Lakshminarayanan et S. Varadharajan. Dynamic programming, the fermat principle and the eikonal equation revisited. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 95(3) :713–716, December 1997.
- M. Leventon, W. Grimson, et O. Faugeras. Statistical shape influence in geodesic active contours. In *Proc. of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 1316–1323, Hilton Head Island, USA, June 2000.

- A. Litman, D. Lesselier, et F. Santosa. Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of a level-set. *Inverse Problems*, 14(3) : 685–706, 1998.
- R. Malladi, J. Sethian, et B. Vemuri. Shape modeling with front propagation : a level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2) :158–175, February 1995.
- T. McInerney et D. Terzopoulos. Deformable models in medical image analysis : a survey. *Medical Image Analysis*, 1(2), jun 1996.
- A.M. Micheletti. Metrica per famiglie di domini limitati e proprietà generiche degli autovalori. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Ser.*, 3(26) :683–694, 1972.
- A. Mohammad-Djafari. Image reconstruction of a compact object from a few number of projections. In *IASTED, International Conference on Signal and Image Processing (SIP'96)*, pages 325–329, 1996.
- R. Mukundan et K.R. Ramakrishnan. *Moment Functions in Image Analysis, Theory and Applications*. World Scientific, 1998.
- D. Mumford et J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Com. pure & Appli. Math.*, 42(5) :577–685, 1989.
- F. Murat et J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Rapport 76015, Université Pierre et Marie Curie, 1976.
- N. Naik, J. Eriksson, P. den Groen, et H. Sahli. A nonlinear iterative reconstruction and analysis approach to shape-based approximate electromagnetic tomography. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 46(5) : 1558–1574, 2008.
- F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Teubner, Stuttgart, 1986.
- M. Nikolova, S. Esedoğlu, et T. Chan. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(5) :1632–1648, 2006. (UCLA CAM Report 04-54, 2004).
- S. Osher et R. Fedkiw. *Level Set Method and Dynamic Implicit Surface*, volume 153 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2003.
- S. Osher et F. Santosa. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints - I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *J. Comput. Phys*, 171 : 272–288, 2001.
- S. Osher et J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependant speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12–49, November 1988.
- E. Parzen. On estimation of a probability density function and mode. *Annals of Mathematical Statistics*, 33 :1065–1076, September 1962.
- R. Ramlau et W. Ring. A Mumford-Shah level-set approach for the inversion and segmentation of X-ray tomography data. *Journal of Computational Physics*, 221(2) :539–557, 2007.

- N. Rawlinson et M. Sambridge. Seismic travelttime tomography of the crust and lithosphere. *Advances in Geophysics*, 46 :81–198, 2003.
- R. Renka. Image segmentation with a Sobolev gradient method. *Nonlinear Analysis*, 2009. Sous Presse. Disponible en ligne, doi :10.1016/j.na.2008.11.070.
- T. Riklin-Raviv, N. Kiryati, et N. Sochen. Unlevel-sets : geometry and prior-based segmentation. In *8th European Conference on Computer Vision*, volume 3024 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 50–61, Prague, République Tchèque, May 2004.
- M. Rousson et N. Paragios. Shape priors for level set representations. In *7th European Conference on Computer Vision (ECCV)*, volume 2351 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 78–93, Copenhagen, Danemark, May 2002.
- C. Samson. *Contribution à la classification d'images satellitaires par approche variationnelle et équations aux dérivées partielles*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, septembre 2000.
- F. Santosa. A level-set approach for inverse problems involving obstacles. *The European Series in Applied and Industrial Mathematics : Control, Optimization and Calculus of Variations*, 1 :17–33, 1996.
- G. Sapiro et A. Tannenbaum. Area and length preserving geometric invariant scale-spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(1) :67–72, January 1995.
- T. Schoenemann et D. Cremers. Globally optimal image segmentation with an elastic shape prior. In *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'2007)*, pages 1–6, Rio de Janeiro, Brazil, 2007.
- J.A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 93(4) :1591–1595, 1996.
- J.A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision and material sciences*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- Y. Shi. *Object-Based Dynamic Imaging With Level Set Methods*. Thèse de doctorat, Université de Boston, USA, 2005.
- Y. Shi et W. C. Karl. A fast level set method without solving pdes. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, volume 2, pages 97–100, March 2005.
- A. Shumacher. *Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien*. Thèse de doctorat, Universität-Gesamthochschule-Siegen, Siegen, 1995.
- J. Simon. Second variations for domain optimization problems. volume 91, pages 361–378. Birkhäuser Verlag Basel, 1989.
- J. Sokolowski et A. Zochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 37(4) :1251–1272, 1999.

- J. Sokolowski et J.P. Zolesio. *Introduction to shape optimization : shape sensitivity analysis*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, July 1992.
- C. Soussen et A. Mohammad-Djafari. Polygonal and polyhedral contour reconstruction in computed tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(11) :1507–1523, November 2004.
- L. Staib et J. Duncan. Boundary finding with parametrically deformable models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(11) :1061–1075, November 1992.
- G. Sundaramoorthi, A. Yezzi, et A. Mennucci. Sobolev active contours. *International Journal of Computer Vision*, 73(3) :345–366, 2007.
- G. Sundaramoorthi, A. Yezzi, A. Mennucci, et G. Sapiro. New possibilities with Sobolev active contours. *International Journal of Computer Vision*, 2009. A paraître.
- M. Sussman, P. Smereka, et S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114 :146–159, 1994.
- C. Taillandier. *Formulation de la tomographie des temps de première arrivée à partir d'une méthode de gradient : un pas vers la tomographie interactive*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, décembre 2008.
- M.R. Teague. Image analysis via the general theory of moments. *Journal of the Optical Society of America*, 70(8) :920–930, August 1980.
- W.M. Telford, L.P. Geldart, R.E. Sheriff, et D.A. Keys. *Applied Geophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- C.H. Thurber. Earthquake locations and three-dimensional crustal structure in the coyote lake area, central california. *Journal of Geophysical Research*, 88(B10) :8226–8236, 1983.
- A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin. *Solutions of Ill-posed Problems*. Winston and Sons, Washington, D.C., 1977.
- P. H. S. Torr et A. Zisserman. Mlesac : a new robust estimator with application to estimating image geometry. *Comput. Vis. Image Underst.*, 78(1) :138–156, April 2000.
- A. Tsai, A. Yezzi, W. Wells, C. Tempany, D. Tucker, A Fan, W. Grimson, et A. Willsky. A shape-based approach to the segmentation of medical imagery using level sets. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(2) :137–154, February 2003.
- K. van den Doel et U. Ascher. On level set regularization for highly ill-posed distributed parameter estimation problems. *J. Comput. Phys*, 216 :707–723, 2006.
- K. van den Doel et U. Ascher. Dynamic level set regularization for large distributed parameter estimation problems. *Inverse Problems*, 23 :1271–1288, 2007.
- E. Veach et L. J. Guibas. Metropolis light transport. In Addison Wesley, editor, *Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics (SIGGRAPH'97)*, pages 65–76, Los Angeles, CA, USA, August 1997.

-
- L. Vese et T. Chan. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :271–293, 2002.
- C. Xu, D. Pham, et J. Prince. *Medical Image Segmentation Using Deformable Models*, volume PM80, chapter 3, pages 129–174. SPIE Press, June 2000.
- A. Yezzi, A. Tsai, et A. Willsky. A statistical approach to snakes for bimodal and trimodal imagery. In *Proc. of 7th IEEE International Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 898–903, Kerkyra, Grèce, September 1999.
- A. Yezzi, A. Tsai, et A. Willsky. A fully global approach to image segmentation via coupled curve evolution equations. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13 : 195–216, 2002.
- H. Zhao, T. Chan, B. Merriman, et S. Osher. A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, 127(1) :179–195, 1996.

Giil GAULLIER

Modèles déformables contraints en reconstruction d'images de tomographie non linéaire par temps d'arrivée



Résumé

La reconstruction tomographique par temps de première arrivée est rendue difficile par son caractère mal posé et par la non-linéarité du problème direct associé. Dans cette thèse, on se propose d'employer un modèle déformable, permettant d'introduire un *a priori* global sur la forme des objets à reconstruire, pour obtenir des solutions plus stables et de meilleure qualité.

Dans un premier temps, nous introduisons des contraintes de forme de haut niveau en reconstruction tomographique d'émission, modalité où le problème direct est linéaire. Dans un second temps, différentes stratégies de résolution du problème non linéaire de reconstruction en temps d'arrivée sont envisagées. La solution retenue approche le problème direct par une suite de problèmes linéaires, conduisant à un algorithme par minimisations successives simples, au cours desquelles l'*a priori* de forme est introduit.

L'efficacité de la méthode est montrée en simulation et à partir de données réelles, acquises sur un banc développé par l'IFSTTAR pour le contrôle non destructif de structures de génie civil.

Mots clefs : reconstruction d'image, tomographie par temps de première arrivée, problème direct non linéaire, contrainte de forme, optimisation de forme, level-sets

Abstract

Image reconstruction from first time arrival is a difficult task due to its ill-posedness nature and to the non linearity of the direct problem associated. In this thesis, the purpose is to use a deformable model because it enables to introduce a global shape *prior* on the objects to reconstruct, which leads to more stable solutions with better quality.

First, high level shape constraints are introduced in Computerized Tomography for which the direct problem is linear. Secondly, different strategies to solve the image reconstruction problem with a non linearity hypothesis are considered. The chosen strategy approximates the direct problem by a series of linear problems, which leads to a simple successive minimization algorithm with the introduction of the shape *prior* along the minimization.

The efficiency of the method is demonstrated for simulated data as for real data obtained from a specific measurement device developed by IFSTTAR for non destructive evaluation of civil engineering structures.

Keywords : image reconstruction, first time arrival tomography, non linear direct problem, shape constraint, shape optimisation, level-set method