



Université de Reims Champagne-Ardenne

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS

Spécialité: Mathématiques

par

Jean-Charles PONSIGNON

Réduction Fuchsienne et modèles stellaires

Soutenue le 26 juin 2013 devant le jury composé de :

M.	Olivier GOUBET	(Président du jury)
M.	Laurent AMOUR	

Rapporteurs:

M.	Jean-Philippe NICOLAS
M.	Patrice PONGERARD

Thèse préparée au
Laboratoire de Mathématiques de Reims
Laboratoire EA 4535
Moulin de la Housse
51 100 REIMS

A Elodie, Hugo et Lucas

Résumé

On considère le modèle stellaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dm} = \frac{C_1}{\rho r^2} \\ \frac{dP}{dm} = \frac{C_2 m}{r^4} \\ \frac{dl}{dm} = \epsilon \\ \frac{dT}{dm} = \frac{C_3 \kappa l}{r^4 T^3} \end{cases} . \text{ Après réduction et chan-}$$

gements d'inconnues et variables, on se ramène aux équations du type :

$$t^n u' + Au = t f(t, u, \zeta_1(t), \dots, \zeta_v(t))$$

Avec f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et des fonctions ζ_i ne s'annulant pas sur $]0, +\infty[$ et strictement croissantes sur un voisinage de 0.

Nous montrons que les solutions peuvent s'écrire dans un espace de séries absolument convergentes, de la forme :

$$\sum_{i_0 \geq 1, i_1, \dots, i_v \geq 0} t^{i_0} \zeta_1(t)^{i_1} \dots \zeta_v(t)^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D(t))$$

La fonction D est solution de l'équation $t^2 D' = D^2 - 1$ et les $h_{i_0, \dots, i_v}$ sont des polynômes en $D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r$ à coefficients dans l'espace des fonctions développables en séries entières sur $] -1, 1[$. Ce théorème d'existence servira ensuite de brique élémentaire à une méthode de réduction de type Fuchsienne. L'objectif étant d'obtenir un développement sous forme de série qui fait apparaître de manière explicite les différentes constantes arbitraires inhérentes à ce type d'équations.

Mots-clefs : Réduction Fuchsienne, modèle stellaire, équations différentielles non-linéaires.

Remerciements

Je voudrais adresser mes remerciements les plus sincères et les plus profonds, à Laurent AMOUR, qui depuis le début de ce doctorat m'a consacré énormément de son temps et de son énergie. M'accompagnant à chaque étape, il a su m'aider à surmonter les obstacles des premiers jours comme ceux des dernières années, se montrant toujours de bons conseils et surtout un soutien moral indéfectible.

Je voudrais également remercier mes rapporteurs Jean-Philippe NICOLAS et Patrice PONGERARD, ainsi qu'Olivier GOUBET, membre du jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant intérêt à mon travail.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble du Laboratoire de Mathématiques de Reims, dans lequel j'ai été très bien accueilli, et où j'ai passé quatre années enrichissantes.

Un dernier merci, et non des moindres, est porté aux membres de ma famille et à mes amis qui m'ont soutenus et supportés tout au long de ces années, en particulier ma compagne Elodie.

Table des matières

Introduction	10
Rappels	10
Motivations et inspirations	10
Résultats et plan de la thèse	13
 I Étude d'un modèle stellaire	 15
1 Introduction	16
2 Simplification du système	17
3 Recherche de solutions	19
3.1 Recherche et classification des équivalents	20
3.2 Les solutions du groupe A	21
3.3 Les solutions du groupe B	23
 II Existence et construction de solutions	 27
4 Introduction	28
5 Les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$	30
5.1 Notations et définition d'ouvert compatible	30
5.2 Définition des espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et de leurs caractéristiques	32
5.3 Nature des espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$	33
6 Propriétés sur les espaces $\theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$	40
7 Théorème d'existence et forme des solutions	46
 III Étude approfondie des solutions avec constantes arbitraires	 63
8 Introduction	64

9 Définitions des espaces $G[t, g_1, \dots, g_j]$ et propriétés	68
9.1 Propriétés des ensembles $G[t], G[t, g_1, \dots, g_j]$	76
10 Méthode de réduction	87
 IV Applications et Exemples	 96
11 Équation du type "$t^n \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, u)$" en dimension 1	97
11.1 Introduction	97
11.2 Définition du type d'équation $[\Delta]$	98
11.3 Zoologie de ces équations	99
 12 Étude d'équation comportant des termes de la forme $t^k \frac{d^n}{dt^n}$	 111
12.1 Introduction	111
12.2 Mode de réduction	114
12.3 Théorème d'existence	117
 Bibliographie	 127

Introduction

Cette introduction rappelle les buts, les motivations, les résultats mais aussi les obstacles que nous avons du surmonter. En effet, après la mise en exergue d'un certain type d'équation, nous nous sommes concentrés sur la recherche, d'abord infructueuse, de solutions sous forme de série.

La recherche d'une formulation convenable pour l'écriture des solutions des équations proposées ayant nécessité plusieurs tentatives, l'accent a été porté sur la partie théorique de la résolution.

Ci dessous, nous rappellerons les bases de la réduction Fuchsienne ainsi que les travaux menés en amont par S.KICHENASSAMY. Nous motiverons l'intérêt porté à ce modèle stellaire et les équations qui en découlent. Nous reviendrons également sur les difficultés que ces équations ont posées et finalement, nous décrirons le plan suivi dans cette thèse.

Rappels

Nous effectuons dans cette partie quelques rappels sur la réduction Fuchsienne. La méthode de réduction Fuchsienne permet une approche systématique de l'étude d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, dont les coefficients sont aussi bien analytiques que non-analytiques. Plus précisément, on répond aux questions suivantes :

- Trouver un ensemble de séries formelles contenant des solutions formelles de l'équation considérée ;
- Donner une procédure systématique permettant d'associer, à chaque solution formelle, une unique solution exacte ;
- Déterminer, parmi les termes de la série définissant la solution formelle, lesquels suffisent pour caractériser la solution exacte associée. L'idée sous-jacente est la même pour la méthode de réduction Fuchsienne que pour la théorie de Puiseux.
- La théorie de Puiseux, pour la résolution d'une équation algébrique, est basée sur la réduction de cette équation en une équation de la forme :

$$y = a + x\varphi(x, y)$$

à laquelle on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. On prouve ainsi l'existence de solutions ayant la forme de séries à exposants fractionnaires ;

- En ce qui concerne la réduction Fuchsienne, on réduit l'équation différentielle ou aux dérivées partielles étudiées à une équation non-linéaire, présentant un point singulier régulier où la variable de temps T s'annule, et à laquelle on peut appliquer les résultats d'existence prouvés dans [7, 8, 10] et [11]. Cette procédure de réductions conduit naturellement à étendre les algèbres de séries formelles à des séries plus générales, contenant, par exemple, des combinaisons de logarithmes ou même des puissances variables de la forme $t^k(x)$.

Il apparaît rapidement qu'il suffit seulement de connaître quelques résultats théoriques concernant les équations Fuchiennes, pour être ensuite capable d'aborder une très large classe d'équations différentielles et aux dérivées partielles. C'est ce qui rend la méthode aussi systématique.

Motivations et inspirations

Pour bien comprendre la motivation de ce doctorat, il convient d'aborder les travaux initiés par S.KICHENASSAMY et L.JAGER dans [6]. Partant d'une version simplifiée du modèle stellaire étudié ici, les auteurs ont établi un résultat d'existence de solutions après réduction du système. Le modèle choisi dans [6] est le suivant :

$$\frac{dx}{dt} = z^{-1}t^{\frac{1}{4}}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -x^{-4}$$

En faisant le changement d'inconnues suivant $t = \exp(-\tau)$ et en prenant un équivalent de la forme $t^\alpha(\ln(t))^\beta$, les auteurs ont montré que ce système pouvait s'écrire sous la forme :

$$\frac{dV}{d\tau} = AV - f$$

Avec :

$$f(t, V) = |\ln(t)|^{-a}B(V) + |\ln(t)|^{-\alpha-M}g(t)$$

La fonction B est analytique en $(t, V, \frac{1}{\ln(t)})$, et s'annule pour $V = 0$, g continue en 0 et A ne possède pas de valeurs propres à parties réelles négatives. Ce type d'équation n'est pas tout à fait similaire à celui abordé dans les rappels de cette introduction. Un résultat d'existence, sous certaines conditions, pour ces équations a été énoncé dans [6]. Il ne fait néanmoins pas mention d'éventuelles façons d'écrire ces solutions sous forme de série ou même d'éventuelles réductions permettant comme dans [7] de faire apparaître de quelle manière les constantes agissent sur les solutions.

Dans [6] le résultat d'existence permet tout de même de valider le choix des équivalents fait en amont. Cependant [6] ne fait pas une étude approfondie, en comparaison avec [7] et [8], de ce type d'équation. Seule l'existence est développée, la forme des solutions ainsi qu'une méthode de réduction adaptée n'est pas amorcée. Nous avons commencé par montrer que les réductions effectuées dans [6] s'appliquaient au cas plus général, ceci fait l'objet de la première partie de ce travail. Une fois vérifié que nous pouvions réduire notre système d'équation à une classe d'équations qui généralise celles introduites par [6], nous nous sommes ensuite attelés à approfondir le théorème d'existence afin de décrire sous forme de série absolument convergentes les solutions de ces équations.

Le principal défi de ce doctorat s'est donc découvert comme étant la résolution sous forme de série absolument convergentes et compatibles avec une réduction de type Fuchsienne des équations de type suivant :

$$t^{n+1}\frac{du}{dt} + Au = tf(t, u, \zeta_1, \dots, \zeta_v)$$

Avec $n \in \mathbb{N}$, f analytique en chacune de ces variables au voisinage de $(0, \dots, 0)$. Les ζ_i sont des fonctions de la forme indiquée page 46. Les conditions que doivent vérifier la matrice A étant précisées plus loin. Nous décrivons dans les lignes ci-dessous les principales pistes, échecs qui ont façonnés le cheminement de cette thèse :

- Dans un premier temps, nous avons privilégié la piste d’une résolution sous forme analytique des solutions. Il fallait alors mettre en évidence l’existence de variables supplémentaires, lesquelles étaient supposées être reliées d’une certaine manière à la particularité de ces équations. Cette recherche de variables, qui ajoutées à " t ", auraient permis de décrire analytiquement les solutions, était incitée par certaines réussites en ce sens.

La première qu’on peut citer est la façon dont la variable $t \ln(t)$ est introduite dans [8]. Elle est la solution d’une équation particulière et en même temps on peut l’utiliser pour décrire de manière analytique toute une classe d’équations. Mais il y a aussi le cas de l’article [1] où c’est une variable de la forme " t^x " qui est utilisée. Dans cet esprit, nous avons entrepris la recherche d’une solution particulière d’une équation du type recherchée qui pourrait être utilisée comme variable. Cette variable devait tendre vers 0 en 0 et les solutions d’équation comme :

$$t^n u' + u = t$$

étaient des candidats potentiels. Malheureusement aucune de ces solutions n’aboutira à une variable concluante.

- Il fut ensuite envisagé l’idée que l’on pourrait, comme dans l’article [1] de A.BENTRAD et S.KICHENASSAMY, faire apparaître une suite de variables reliées les unes aux autres par des relations fonctionnelles. On peut effectivement, une fois fixée une équation, trouver ce genre de résultat ; seulement les relations entre les variables sont complètement différentes d’une équation à l’autre.
- Nous décidâmes donc d’examiner de manière plus approfondie l’exemple simple qu’est :

$$t^2 u' + u = t$$

et de faire quelques constatations importantes pour la suite de notre raisonnement.

La recherche d’une solution sous forme de série entière de cette équation nous donne pour solution la série de Gevrey $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} (n-1)! t^n$. Il aurait alors été

possible d’étudier à l’aide de série de Gevrey les équations proposées, mais l’étude à l’aide de séries divergentes ne nous donnait pas entière satisfaction. En effet, nous cherchions à écrire les solutions à l’aide de réductions qui s’apparentent à des réductions Fuchsiennes et avec ce type de réduction chaque terme ajouté nous rapproche uniformément de la solution. Ce qui n’est pas possible avec des séries divergentes. Cependant à l’aide du théorème de convergence dominée, on peut montrer que cette équation possède une unique solution $\mathcal{C}^\infty$ qui tend vers 0 en 0. Une autre idée découlant de travaux qu’on attribue traditionnellement à E.BOREL, était d’écrire cette solution $\mathcal{C}^\infty$ comme somme uniformément convergente du type :

$$\sum_{k \geq 0} a_k \frac{t^k}{k!} f\left(\frac{t}{b_k}\right)$$

f et les b_k étant choisis convenablement de façon à ce que la série et ses dérivées soient convergentes. D’ailleurs, il est supposé que $f(0) = 1$, les dérivées de f en 0 toutes nulles et les fonctions $t \mapsto t^k f(t)$ soient bornées pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le plus aisé pour obtenir ce genre de fonction f étant de choisir une fonction qui

vaut 1 sur un intervalle proche de 0 et qui s'annule pour t assez grand. Il s'est avéré satisfaisant de chercher des séries sous cette forme et surtout d'examiner quelles relations pouvaient vérifier une série $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $\sum_{k \geq 0} t^k h_k(t)$ solution de

l'équation. Encore une fois aucune démarche systématique ne fût élaborée pour des cas généraux, quelques exemples fonctionnaient bien mais d'autres pas du tout.

- Après quelques tentatives, certains aspects du problème se sont éclaircis. En effet, bien que l'équation du dessus connaissent quelques difficultés à s'écrire sous la forme d'une série convergente, on montre à l'aide d'une intégration par partie que l'unique solution qui tend vers 0 en 0 a pour équivalent en 0 la première bissectrice. Nous avons donc cherché la solution sous la forme $th(t)$.

L'écriture sous cette forme rejoint alors des travaux que nous attribuons à M.BOREL, car après une majoration élémentaire, on se rend compte que la fonction h tend vers 0 en $+\infty$. Exploitant les idées précédentes, nous décidâmes d'écrire h comme fonction d'une nouvelle variable tendant vers 0 en $+\infty$ et qui de plus est adaptée à notre type d'équation. Notre choix se porte sur la variable D solution de l'équation :

$$t^2 u' = u^2 - 1$$

La mise en équation de tout ceci nous amena même à remarquer que les fonctions $D \mapsto h(D)$ sont solutions d'équations étudiées en [7]. Nous nous sommes ensuite attelés à la création d'espaces des séries absolument convergentes.

Résultats et plan de la thèse

Voici détaillés les différentes étapes et résultats de la thèse :

- Dans la partie I, nous décrivons le modèle stellaire ainsi qu'une simplification du problème. Nous effectuons alors une recherche d'équivalents qui nous mènera dans deux directions différentes : l'une menant à des solutions d'une forme étudiée dans [7] et l'autre qui, après les changements d'inconnues convenables, fera apparaître la classe d'équation mise en exergue dans ce travail.
- Dans la deuxième partie, nous définissons des espaces de séries absolument convergentes. Nous montrons leurs propriétés algébriques ainsi que leurs liens avec des fonctions analytiques. Des outils et des propriétés sont mis en avant afin de montrer le théorème d'existence principal. A savoir que ces solutions peuvent s'écrire localement sous la forme suivante :

$$\sum_{i_0 \geq 1, i_1, \dots, i_v \geq 0} t^k \zeta_1(t)^{i_1} \dots \zeta_v(t)^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D(t))$$

Avec pour tout $i_0, \dots, i_v$, $h_{i_0, \dots, i_v}$ polynômes en $D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r$ à coefficients dans l'espace des fonctions développables en séries entières sur $] -1, 1[$.

- Le résultat d'existence précédent est vu dans la troisième partie comme une brique élémentaire dans une technique de réduction qui s'apparente à de la réduction Fuchsienne. On y fait un parallèle avec les travaux faits dans [7] et [8], notamment au niveau de la visualisation des constantes arbitraires et l'intervention d'une variable qui s'assimile à $t \ln(t)$.

- Enfin, nous donnons dans la dernière partie deux exemples de réduction d'équations différentielles qui mènent aux équations étudiées. Ces exemples ont pour but de démontrer qu'une classe très importante d'équations peuvent trouver réponse grâce aux résultats énoncés plus haut.

Première partie

Étude d'un modèle stellaire

Sommaire

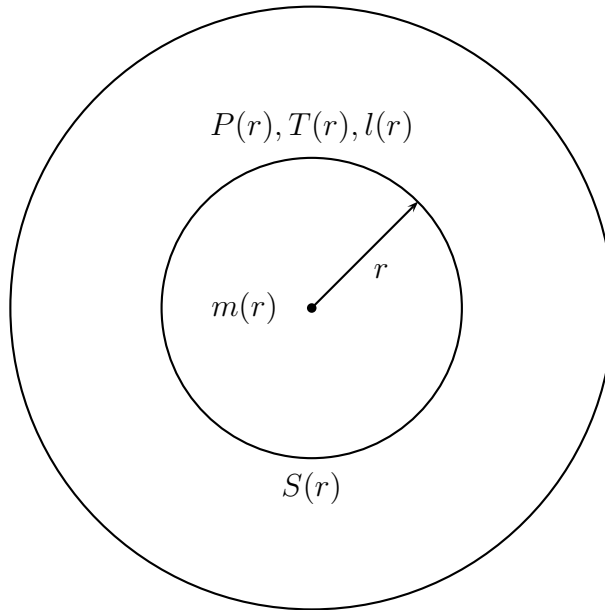
1	Introduction	16
2	Simplification du système	17
3	Recherche de solutions	19
3.1	Recherche et classification des équivalents	20
3.2	Les solutions du groupe A	21
3.3	Les solutions du groupe B	23

1 Introduction

Afin de pouvoir décrire l'intérieur d'une étoile, nous modélisons à l'aide d'un système les différentes interactions entre la pression (P), la température (T), la luminosité (l) et la masse (m) d'un élément de l'étoile se trouvant à une distance r du centre de l'étoile. Dans la suite, on notera $S(r)$ la sphère de rayon r et de centre : le centre de l'étoile. On considère en effet un modèle à symétrie sphérique décrivant l'interaction entre les variables suivantes :

- $m(r)$: la masse contenue dans $S(r)$.
- $P(r)$: la pression à la surface de $S(r)$.
- $T(r)$: la température à la surface de $S(r)$.
- $l(r)$: la luminosité émise par $S(r)$.

Nous schématisons sous la forme de la figure ci-dessous les données précédentes :



Représentation de l'étoile

Cependant, il est plus commode de prendre la masse m comme variable (ce qui est raisonnable car on convient aisément que $r \rightarrow m(r)$ peut se voir comme une bijection). Le modèle s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dm} = \frac{C_1}{\rho r^2} \\ \frac{dP}{dm} = \frac{C_2 m}{r^4} \\ \frac{dl}{dm} = \epsilon \\ \frac{dT}{dm} = \frac{C_3 \kappa l}{r^4 T^3} \end{array} \right. \quad (1)$$

- avec $\rho = \lambda_\rho P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}$, $\epsilon = \lambda_\epsilon \rho^{e_1} T^{e_2}$, $\kappa = \lambda_\kappa P^{k_1} T^{k_2}$

– où $\lambda_\rho, \lambda_\epsilon, \lambda_\kappa, \alpha_1, \alpha_2, C_1, C_2, C_3, e_1, e_2, k_1, k_2$ sont des constantes non nulles.

On remplace alors ρ, ϵ et κ dans le système précédent pour obtenir le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dm} = \frac{C_1}{\lambda_\rho r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}} \\ \frac{dP}{dm} = \frac{C_2 m}{r^4} \\ \frac{dl}{dm} = \lambda_\epsilon \lambda_\rho^{e_1} P^{\alpha_1 e_1} T^{e_2 + \alpha_2 e_1} \\ \frac{dT}{dm} = \frac{C_3 \lambda_\kappa P^{k_1} T^{k_2 - 3} l}{r^4} \end{array} \right. \quad (2)$$

On pourra prendre comme conditions initiales au centre de l'étoile :

$$P(0) = P_c, T(0) = T_c, l(0) = 0, r(0) = 0$$

P_c et T_c étant respectivement la pression et la température au centre de l'étoile. On pourra aussi fixer des conditions initiales aux bords de l'étoile avec :

$$P(M) = 0, T(M) = 0, l(M) = l, r(M) = R$$

M étant la masse totale de l'étoile, L la luminosité globale au bord de l'étoile et R le rayon de l'étoile ; on pourra aussi considérer que $R = +\infty$ et ainsi faire naître d'autres conditions initiales. Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons dans un premier temps nous attarder à simplifier le système puis, après avoir étudié les solutions homogènes, nous étudierons les différents cas de conditions initiales.

2 Simplification du système

Afin de simplifier le nombre excessif de constantes du système (2) et de continuer l'étude avec un système le plus concis possible, on étudie les effets de la transformation suivante :

$$(r, P, l, T) \mapsto (a_1 r, a_2 P, a_3 l, a_4 T) \quad (3)$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 sont éventuellement complexes, tous non nuls.

Notations. On note :

$$- \Delta = 4\alpha_2 + 4k_1\alpha_2 + (3 - 4\alpha_1)(e_2 + k_2 - 4) + 3e_1\alpha_2$$

$$- \Omega = (C_3 C_2^{k_1 + \alpha_1 e_1} \lambda_\kappa \lambda_\rho^{e_1} \lambda_\epsilon)^{\alpha_2} \left(\frac{C_1}{\lambda_\rho C_2^{\alpha_1}} \right)^{k_2 - 4 + e_2 + e_1 \alpha_2}$$

$$- \forall a \in \mathbb{C} \text{ on note } \delta_a = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

$$- \forall a, b \in \mathbb{C} \text{ on note } \delta_{a,b} = \delta_a \times \delta_b$$

Le théorème qui suit permet de résumer les possibilités de simplification qu'offre la transformation (3) :

Théorème 1.

- si $\Delta \neq 0$ ou $\Omega = 1$ alors le système (2) peut se ramener par une loi de transformation du type (3) au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dm} = \frac{1}{r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}} \\ \frac{dP}{dm} = \frac{m}{r^4} \\ \frac{dl}{dm} = P^{\alpha_1 e_1} T^{e_2 + \alpha_2 e_1} \\ \frac{dT}{dm} = \frac{P^{k_1} T^{k_2 - 3} l}{r^4} \end{array} \right. \quad (4)$$

- si $\Delta = 0$ et $\Omega \neq 1$ alors une réduction au système (4) est impossible. En revanche, il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que l'on puisse réduire (2) à un système du type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dm} = \frac{1}{r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}} \\ \frac{dP}{dm} = \frac{m}{r^4} \\ \frac{dl}{dm} = P^{\alpha_1 e_1} T^{e_2 + \alpha_2 e_1} \\ \frac{dT}{dm} = \frac{C P^{k_1} T^{k_2 - 3} l}{r^4} \end{array} \right. \quad (5)$$

Démonstration. Lorsque l'on utilise la transformation (3), on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4^{\alpha_2} a_2^{\alpha_1} a_1^3 \frac{dr}{dm} = \frac{C_1}{\lambda_\rho r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}} \\ a_2 a_1^4 \frac{dP}{dm} = \frac{C_2 m}{r^4} \\ a_3 \frac{dl}{dm} = a_4^{e_2 + \alpha_1 e_2} a_2^{\alpha_1 e_1} \lambda_\epsilon \lambda_\rho^{e_1} P^{\alpha_1 e_1} T^{e_2 + \alpha_2 e_1} \\ a_1^4 \frac{dT}{dm} = a_3 a_2^{k_1} a_4^{k_2 - 4} \frac{C_3 \lambda_\kappa P^{k_1} T^{k_2 - 3} l}{r^4} \end{array} \right. \quad (6)$$

Ainsi (2) se réduit à (4) si et seulement s'il existe $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$ vérifiant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \lambda_\rho a_4^{\alpha_2} a_2^{\alpha_1} a_1^3 \\ a_2 a_1^4 = C_2 \\ a_3 = a_4^{e_2 + \alpha_2 e_1} a_2^{\alpha_1 e_1} \lambda_\epsilon \lambda_\rho^{e_1} \\ a_1^4 = a_3 a_2^{k_1} a_4^{k_2 - 4} C_3 \lambda_\kappa \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \lambda_\rho a_4^{\alpha_2} a_2^{\alpha_1} a_1^3 \\ a_2 = C_2 a_1^{-4} \\ a_3 = a_4^{e_2 + \alpha_2 e_1} a_2^{\alpha_1 e_1} \lambda_\epsilon \lambda_\rho^{e_1} C_2^{\alpha_1 e_1} a_1^{-4 \alpha_1 e_1} \\ a_1^{4 + 4 k_1 + 4 \alpha_1 e_1} = C_3 C_2^{k_1 + \alpha_1 e_1} \lambda_\kappa \lambda_\rho^{e_1} \lambda_\epsilon a_4^{k_2 - 4 + e_2 + \alpha_2 e_1} \end{array} \right.$$

ce qui impose donc :

$$a_1^\Delta = \Omega \quad (7)$$

Dans le cas où $\Delta \neq 0$, alors (sous réserve du choix d'une représentation du logarithme) on peut obtenir un a_1 vérifiant (7) et ainsi obtenir a_2, a_3 et a_4 en remplaçant. Par contre si $\Delta = 0$, cela oblige $\Omega = 1$. Si on a bien $\Omega = 1$ alors on peut choisir $a_1 \neq 0$ de manière arbitraire, puis en déduire a_2, a_3 et a_4 pour que le système soit vérifié. Si $\Omega \neq 1$, alors la réduction du système sous la forme (8) est impossible.

Néanmoins, dans le cas $\Delta = 0$ et $\Omega \neq 1$ alors on peut réduire le système (6) à un système du type (5) ssi :

$$\begin{cases} C_1 = \lambda_\rho a_4^{\alpha_2} a_2^{\alpha_1} a_1^3 \\ a_2 a_1^4 = C_2 \\ a_3 = a_4^{e_2 + \alpha_2 e_1} a_2^{\alpha_1 e_1} \lambda_\epsilon \lambda_\rho^{e_1} \\ a_1^4 = C a_3 a_2^{k_1} a_4^{k_2 - 4} C_3 \lambda_\kappa \end{cases}$$

Ceci conduit à : $a_1^\Delta = C\Omega$ et donc à $1 = C\Omega$ (les constantes $\lambda_\rho, \lambda_\epsilon, \lambda_\kappa, C_1, C_2, C_3$ étant non nulles, on a obligatoirement $\Omega \neq 0$). Ainsi on choisit naturellement $C = \frac{1}{\Omega}$ et on peut alors prendre $a_1 \neq 0$ de manière arbitraire et donc calculer a_2 , a_3 et a_4 pour satisfaire au système.

□

3 Recherche de solutions

Le théorème précédent nous incite à conserver dans la suite le système suivant (quitte à modifier légèrement les calculs pour le cas où $\Delta = 0$ et $\Omega \neq 1$) :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dm} = \frac{1}{r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}} \\ \frac{dP}{dm} = \frac{m}{r^4} \\ \frac{dl}{dm} = P^{\tilde{e}_1} T^{\tilde{e}_2} \\ \frac{dT}{dm} = \frac{P^{k_1} T^{k_2 - 3} l}{r^4} \end{cases} \quad (8)$$

Avec $\tilde{e}_1 = \alpha_1 e_1$ et $\tilde{e}_2 = e_2 + \alpha_2 e_1$. Nous chercherons à résoudre ce système pour $m > 0$. Ce qui va être entrepris dans la suite de cette partie est directement inspiré des résultats de [5]. En effet dans [5], S.KICHENASSMY et L.JAGER montrent que pour un modèle stellaire voisin on peut obtenir des solutions dont les équivalents ne sont pas forcément homogènes. L'article montre qu'une fois dégagé un équivalent sous la forme que nous détaillerons ci-dessous, un théorème d'existence peut être énoncé. Nous commençons donc par examiner si des équivalents du même type peuvent être explicités dans un cadre plus général. Nous avons donc cherché des solutions de (8) qui ont des équivalents

de la forme : $\lambda m^\alpha |\ln(m)|^\beta$ où $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{C}$ et dont leurs dérivées ont des équivalents de la même forme.

3.1 Recherche et classification des équivalents

Nous allons donner des conditions nécessaires au fait que les solutions de l'équation (8) aient des équivalents de la forme $\lambda m^\alpha |\ln(m)|^\beta$ où $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{C}$. L'équation (8) fait intervenir la dérivée première des solutions. Nous devons donc nous assurer de conditions sous lesquelles les solutions et leurs dérivées soient de la forme énoncée précédemment, sans quoi aucune substitution ne sera possible dans l'équation (8).

Afin de fixer ces conditions, nous énonçons le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit $I \in \mathcal{V}(0) \cap]0, 1[$ et $u \in \mathcal{C}^1(I)$. On pose $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a \leq c$ et si $a = c$ alors $b > d)$. On suppose que $u = u_0 m^a |\ln(m)|^b + u_1 m^c |\ln(m)|^d + \tilde{u}$ avec $u_0 \neq 0$; $u_1 \neq 0$, $\tilde{u} \in \mathcal{C}^1(I)$ et*

$$\begin{cases} \tilde{u} \underset{m \rightarrow 0^+}{=} o(m^c |\ln(m)|^d) \\ \frac{d\tilde{u}}{dm} \underset{m \rightarrow 0^+}{=} o((1 - \delta_{(a,b)})m^a |\ln(m)|^b + \delta_{(a,b)}m^c |\ln(m)|^d) \end{cases}$$

Alors on a $u \underset{m \rightarrow 0^+}{\sim} u_0 m^a |\ln(m)|^b$ et

$$\frac{du}{dm} \underset{m \rightarrow 0^+}{\sim} [-\delta_a b u_0 + a u_0 + \delta_{(a,b)}(-\delta_c d u_1 + c u_1)] \times m^{a-1+\delta_{(a,b)}c} |\ln(m)|^{b-\delta_a+\delta_{(a,b)}[d+1-\delta_c]}$$

La démonstration de ce lemme est une étude au cas par cas de l'équivalent proposé. Nous allons donc supposer que chacune des variables peut s'écrire sous la forme décrite dans le lemme. Ceci revêt l'aspect suivant :

$$\begin{cases} r = R_0 m^{a_1} |\ln(m)|^{a_2} + \delta_a R_1 m^{a_3} |\ln(m)|^{a_4} + R_2 m^{a_1+\delta_a a_3} |\ln(m)|^{a_2+\delta_a a_4-\epsilon} \tilde{r} \\ P = P_0 m^{b_1} |\ln(m)|^{b_2} + \delta_b P_1 m^{b_3} |\ln(m)|^{b_4} + P_2 m^{b_1+\delta_b b_3} |\ln(m)|^{b_2+\delta_b b_4-\epsilon} \tilde{P} \\ l = l_0 m^{c_1} |\ln(m)|^{c_2} + \delta_c l_1 m^{c_3} |\ln(m)|^{c_4} + l_2 m^{c_1+\delta_c c_3} |\ln(m)|^{c_2+\delta_c c_4-\epsilon} \tilde{l} \\ T = T_0 m^{d_1} |\ln(m)|^{d_2} + \delta_d T_1 m^{d_3} |\ln(m)|^{d_4} + T_2 m^{d_1+\delta_d d_3} |\ln(m)|^{d_2+\delta_d d_4-\epsilon} \tilde{T} \end{cases}$$

où pour tout $(X, x) \in \{(R, a), (P, b), (l, c), (T, d)\}$ on a :

- $\delta_x = \delta_{(x_1, x_2)}$
- $X_2 = X_0(-\delta_{x_1} x_2 + x_1) + \delta_x X_1(-\delta_{x_3} x_4 + x_3)$
- $X_2 m^{x_1+\delta_x x_3} |\ln(m)|^{x_2+\delta_x x_4-\epsilon} \tilde{X} \underset{m \rightarrow 0^+}{=} o(X_0 m^{x_1} |\ln(m)|^{x_2} + \delta_x X_1 m^{x_3} |\ln(m)|^{x_4})$
- $\delta_x X_1 m^{x_3} |\ln(m)|^{x_4} \underset{m \rightarrow 0^+}{=} o(X_0 m^{x_1} |\ln(m)|^{x_2})$
- $X_0 \neq 0, X_1 \neq 0 \Rightarrow X_2 \neq 0$

– $0 < \epsilon \leq 1$ sera fixé par la suite.

Ces conditions vérifiées, on peut raisonnablement faire une identification de coefficient dans le système (8) et obtenir 2 systèmes d'équations, l'un provenant de l'identification en puissances de m et l'autre en identifiant les puissances de $\ln(m)$. Les systèmes qui suivent sont des conditions nécessaires quant à l'existence d'une solution avec les équivalents évoqués.

$$\begin{cases} 3a_1 - 1 + a_3\delta_a + \alpha_1b_1 + \alpha_2d_1 = 0 \\ b_1 - 1 + b_3\delta_b + 4a_1 = 1 \\ c_1 - 1 + c_3\delta_c - \tilde{e}_1b_1 - \tilde{e}_2d_1 = 0 \\ (4 - k_2)d_1 - 1 + d_3\delta_d + 4a_1 - k_1b_1 - c_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} 3a_2 - \delta_{a_1} + \delta_a(a_4 + 1 - \delta_{a_3}) + \alpha_1b_2 + \alpha_2d_2 = 0 \\ b_2 - \delta_{b_1} + \delta_b(b_4 + 1 - \delta_{b_3}) + 4a_2 = 0 \\ c_2 - \delta_{c_1} + \delta_c(c_4 + 1 - \delta_{c_3}) - \tilde{e}_1b_2 - \tilde{e}_2d_2 = 0 \\ (4 - k_2)d_2 - \delta_{d_1} + \delta_d(d_4 + 1 - \delta_{d_3}) + 4a_2 - k_1b_2 - c_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Remarque 1.

- Les systèmes (9) et (10) sont indépendants du signe des constantes choisies pour le système (8).
- La résolution des 2 systèmes (9) et (10) peut parfois s'avérer impossible par exemple : $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $d_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, c_2 et d_2 quelconque.
- Des cas d'impossibilités de résolution peuvent également intervenir si l'on impose des signes à r, P, l, T proche de l'origine. En effet, les signes des constantes de (8) et les coefficients du lemme 1 pour la dérivée peuvent donner des cas d'impossibilité.

Dans le cas où (9) et (10) sont simultanément résolubles on distingue 2 possibilités :

1. Les solutions du groupe A : constituées des cas conduisant à des solutions où les termes d'indices pairs sont tous nuls.
2. Les solutions du groupe B : constituées des cas conduisant à des solutions où les termes d'indices pairs sont non tous nuls.

3.2 Les solutions du groupe A

Intéressons nous aux solutions du groupe A. Les solutions du groupe A se résolvent à l'aide de théorèmes existants contenus dans l'article [7]. Ces résultats sont synthétisés dans le théorème suivant :

Théorème 2. Soit $(a_1 + \delta_a a_3, b_1 + \delta_b b_3, c_1 + \delta_c c_3, d_1 + \delta_d d_3)$ solutions de (9) et (10) avec $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = a_4 = b_4 = c_4 = d_4 = 0$. Alors quitte à effectuer un changement de variables, $\exists l \in N$ tel que l'on obtienne des solutions $(\tilde{r}, \tilde{P}, \tilde{l}, \tilde{T})$ définies localement par (11) et analytiques en $(m_0, ..m_l)$ ($m_i = m(\ln(m))^i$) possédant un nombre fini de constantes arbitraires (compris entre 0 et 4). Le nombre exact étant le nombre de racines à partie réelle positive du polynôme $P(X) = \det(A(X))$ où :

$$A(X) := \begin{pmatrix} \delta_{a_1} a_3 + 3a_1 + X & \alpha_1 b_1 & 0 & \alpha_2 d_1 \\ 4a_1 & \delta_{b_1} b_3 + b_1 + X & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{e}_1 b_1 & c_1 + \delta_{c_1} c_3 + X & -\tilde{e}_2 d_1 \\ 4a_1 & -k_1 b_1 & -c_1 & \delta_{d_1} d_3 - (k_2 - 2)d_1 + X \end{pmatrix}$$

Démonstration. La démonstration s'appuie sur l'article [7] et le changement d'inconnues suivant :

$$\begin{cases} r = R_0 m^{a_1} + \delta_{a_1} R_1 m^{a_3} + R_2 m^{a_1 + \delta_{a_1} a_3 + \varepsilon} \tilde{r} \\ P = P_0 m^{b_1} + \delta_{b_1} P_1 m^{b_3} + P_2 m^{b_1 + \delta_{b_1} b_3 + \varepsilon} \tilde{P} \\ l = l_0 m^{c_1} + \delta_{c_1} l_1 m^{c_3} + l_2 m^{c_1 + \delta_{c_1} c_3 + \varepsilon} \tilde{l} \\ T = T_0 m^{d_1} + \delta_{d_1} T_1 m^{d_3} + T_2 m^{d_1 + \delta_{d_1} d_3 + \varepsilon} \tilde{T} \end{cases} \quad (11)$$

On a d'après le lemme 1 :

$$\frac{dr}{dm} = R_2 m^{a_1 - 1 + a_3 \delta_{a_1}} + R_2 (a_1 + \delta_{a_1} a_3 + \varepsilon) m^{a_1 + \delta_{a_1} a_3 + \varepsilon - 1} \tilde{r} + R_2 m^{a_1 + \delta_{a_1} a_3 + \varepsilon} \frac{d\tilde{r}}{dm}$$

On suppose en effet ici que $(m^{\delta_{a_1} a_3 + \varepsilon + a_1} \tilde{r}, ..., m^{d_1 + \delta_{d_1} d_3 + \varepsilon} \tilde{T})$ vérifient les conditions du lemme 1. De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}} &= R_0^{-2} P_0^{-\alpha_1} T_0^{-\alpha_2} m^{-2a_1 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 d_1} \times \left(1 + \delta_{a_1} \frac{R_1}{R_0} m^{a_3} + m^{\delta_{a_1} a_3 + \varepsilon} \frac{R_2 \tilde{r}}{R_0}\right)^{-2} \\ &\times \left(1 + \delta_{b_1} \frac{P_1}{P_0} m^{b_3} + m^{\delta_{b_1} b_3 + \varepsilon} \frac{P_2 \tilde{P}}{P_0}\right)^{-\alpha_1} \times \left(1 + \delta_{d_1} \frac{T_1}{T_0} m^{d_3} + m^{\delta_{d_1} d_3 + \varepsilon} \frac{T_2 \tilde{T}}{T_0}\right)^{-\alpha_2} \end{aligned}$$

Comme $(a_1 + \delta_{a_1} a_3, ..., d_1 + \delta_{d_1} d_3)$ est solution des systèmes (9) et (10) on a :

$$-2a_1 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 d_1 = a_1 - 1 + a_3 \delta_{a_1}$$

De plus en identifiant les constantes de l'équivalent de (r, P, l, T) , on obtient :

$$R_2 = R_0^{-2} P_0^{-\alpha_1} T_0^{-\alpha_2} \quad \text{c'est à dire} \quad a_1 R_0 + \delta_{a_1} a_3 R_1 = R_0^{-2} P_0^{-\alpha_1} T_0^{-\alpha_2}$$

Ainsi en développant avec la formule de Taylor on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}} &= R_0^{-2} P_0^{-\alpha_1} T_0^{-\alpha_2} m^{a_1 - 1 + \delta_{a_1} a_3} \left[1 - 2\delta_{a_1} \frac{R_1}{R_0} m^{\delta_{a_1} a_3} - 2m^{\delta_{a_1} a_3 + \varepsilon} \frac{R_2 \tilde{r}}{R_0} - \alpha_1 \delta_{b_1} \frac{P_1}{P_0} m^{\delta_{b_1} b_3} \right. \\ &\quad \left. - \alpha_1 m^{\delta_{b_1} b_3 + \varepsilon} \frac{P_2 \tilde{P}}{P_0} - \alpha_2 \delta_{d_1} \frac{T_1}{T_0} m^{\delta_{d_1} d_3} - \alpha_2 m^{\delta_{d_1} d_3 + \varepsilon} \frac{T_2 \tilde{T}}{T_0}\right] + m^{2\varepsilon} f_1(m^\varepsilon, \tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{r}) \end{aligned}$$

Où f_1 est analytique en chacune de ces variables et ε est choisi de manière à ce que $\varepsilon < \min(\frac{a_3}{2}, \frac{b_3}{2}, \frac{d_3}{2})$.

Ainsi en simplifiant par $m^{a_1-1+\delta_{a_1}a_3}$ puis m^ε on a après évaluation de R_2 :

$$\begin{aligned} m \frac{d\tilde{r}}{dm} + (\delta_{a_1}a_3 + 3a_1 + \varepsilon)\tilde{r} + \alpha_1 b_1 \tilde{P} + 0.\tilde{l} + \alpha_2 d_1 \tilde{T} \\ = m^\varepsilon f_1(m, \tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{r}) \end{aligned}$$

En faisant de même pour les autres équations, on obtient :

$$m \frac{du}{dm} + A(\varepsilon)u = m^\varepsilon f(m, \tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{l}, \tilde{r})$$

Où $u = (\tilde{r}, \tilde{P}, \tilde{l}, \tilde{T})$ et $A(\varepsilon)$ définit dans l'énoncé du théorème. Le résultat annoncé se démontre donc en utilisant [7]

□

On remarque donc que les solutions du groupe A sont les solutions qu'une étude de réduction Fuchsienne, de type [7] et [8], aurait mis en lumière.

Il nous reste donc le second groupe de solutions à traiter. Nous n'allons pas immédiatement résoudre ces équations mais plutôt faire des réductions pour fixer un nouveau type d'équation, car cette fois-ci les réductions ainsi que les théorèmes présents dans [7] et [8] sont inutilisables.

3.3 Les solutions du groupe B

Nous commençons par considérer les solutions du groupe B de la même manière que pour le groupe A. Soit $((a_1, a_2) + \delta_a(a_3, a_4), (b_1, b_3) + \delta_b(b_3, b_4), (c_1, c_2) + \delta_c(c_3, c_4), (d_1, d_2) + \delta_d(d_3, d_4))$ un 4-uplet solutions des systèmes (9) et (10) tel que $(a_2 + \delta_a a_4, b_2 + \delta_b b_4, c_2 + \delta_c c_4, d_2 + \delta_d d_4) \neq (0, 0, 0, 0)$

Et on considère la première équation de (S) à savoir $\frac{dr}{dm} = \frac{1}{r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}}$. On rappelle que nous effectuons le changement d'inconnues suivant :

$$\begin{cases} r = R_0 m^{a_1} |\ln(m)|^{a_2} + \delta_a R_1 m^{a_3} |\ln(m)|^{a_4} + R_2 m^{a_1+\delta_a a_3} |\ln(m)|^{a_2+\delta_a a_4-\epsilon} \tilde{r} \\ P = P_0 m^{b_1} |\ln(m)|^{b_2} + \delta_b P_1 m^{b_3} |\ln(m)|^{b_4} + P_2 m^{b_1+\delta_b b_3} |\ln(m)|^{b_2+\delta_b b_4-\epsilon} \tilde{P} \\ l = l_0 m^{c_1} |\ln(m)|^{c_2} + \delta_c l_1 m^{c_3} |\ln(m)|^{c_4} + l_2 m^{c_1+\delta_c c_3} |\ln(m)|^{c_2+\delta_c c_4-\epsilon} \tilde{l} \\ T = T_0 m^{d_1} |\ln(m)|^{d_2} + \delta_d T_1 m^{d_3} |\ln(m)|^{d_4} + T_2 m^{d_1+\delta_d d_3} |\ln(m)|^{d_2+\delta_d d_4-\epsilon} \tilde{T} \end{cases}$$

Après calculs, et en respectant les hypothèses citées plus haut, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dm} = R_2 m^{a_1-1+a_3\delta_a} |\ln(m)|^{a_2-\delta_{a_1}+\delta_a[a_4+1-\delta_{a_3}]} \times \\ \left[1 + \frac{R_3}{R_2} |\ln(m)|^{-1+\delta_{a_1}-\delta_a(+1-\delta_{a_3})} + [(a_1 + a_3\delta_a) |\ln(m)|^{-\epsilon+\delta_{a_1}-\delta_a(+1-\delta_{a_3})} - \right. \\ \left. (a_2 + a_4\delta_a - \epsilon) |\ln(m)|^{-1-\epsilon+\delta_{a_1}-\delta_a(+1-\delta_{a_3})}] \tilde{r} + m \frac{d\tilde{r}}{dm} |\ln(m)|^{-\epsilon+\delta_{a_1}-\delta_a(+1-\delta_{a_3})} \right] \end{aligned}$$

avec $R_3 = -[(1 - \delta_{a_1})a_2R_0 + \delta_a(1 - \delta_{a_3})a_4R_1]$

On choisit $0 < \varepsilon < 1$ de telle manière que :

si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ alors $\forall y \in \{a, b, c, d\}$, on est $x_4 + 2\varepsilon - \delta_{y_1} + \delta_y(1 - \delta_{y_3}) < 0$ et ce pour tout $x \in \{a, b, c, d\}$.

Ce qui est possible car $\forall y \in \{a, b, c, d\}$, $\delta_{y_1} - \delta_y(1 - \delta_{y_3}) = 0$ ou 1 , de plus $x_4 < 0$ car $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ainsi $x_4 - \delta_{y_1} + \delta_y(1 - \delta_{y_3}) < 0$. On peut donc choisir $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+*}$ suffisamment petit pour que $x_4 + 2\varepsilon - \delta_{y_1} + \delta_y(1 - \delta_{y_3}) < 0$.

Une fois ε fixé, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 P^{\alpha_1} T^{\alpha_2}} &= R_0^{-2} P_0^{-\alpha_1} T_0^{-\alpha_2} m^{-2a_1 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 d_1} |\ln(m)|^{-2a_2 - \alpha_1 b_2 - \alpha_2 d_2} \times \\ &\left[1 + \delta_a \frac{R_1}{R_0} m^{a_3} |\ln(m)|^{a_4} + \frac{R_2}{R_0} m^{\delta_a a_3} |\ln(m)|^{\delta_a a_4 - \varepsilon} \tilde{r}\right]^{-2} \times \\ &\left[1 + \delta_b \frac{P_1}{P_0} m^{b_3} |\ln(m)|^{b_4} + \frac{P_2}{P_0} m^{\delta_b b_3} |\ln(m)|^{\delta_b b_4 - \varepsilon} \tilde{P}\right]^{-\alpha_1} \times \\ &\left[1 + \delta_d \frac{T_1}{T_0} m^{d_3} |\ln(m)|^{d_4} + \frac{T_2}{T_0} m^{\delta_d d_3} |\ln(m)|^{\delta_d d_4 - \varepsilon} \tilde{T}\right]^{-\alpha_2} \end{aligned}$$

Ce qui impose $R_2 = R_0^{-2} P_0^{-\alpha_1} T_0^{-\alpha_2} \neq 0$ et en utilisant le fait que les exposants vérifient les systèmes (9) et (10), on a :

$$\begin{aligned} &\left[1 + \delta_a \frac{R_1}{R_0} m^{a_3} |\ln(m)|^{a_4} + \frac{R_2}{R_0} m^{\delta_a a_3} |\ln(m)|^{\delta_a a_4 - \varepsilon} \tilde{r}\right]^{-2} \times \left[1 + \delta_b \frac{P_1}{P_0} m^{b_3} |\ln(m)|^{b_4} \right. \\ &+ \left. \frac{P_2}{P_0} m^{\delta_b b_3} |\ln(m)|^{\delta_b b_4 - \varepsilon} \tilde{P}\right]^{-\alpha_1} \times \left[1 + \delta_d \frac{T_1}{T_0} m^{d_3} |\ln(m)|^{d_4} + \frac{T_2}{T_0} m^{\delta_d d_3} |\ln(m)|^{\delta_d d_4 - \varepsilon} \tilde{T}\right]^{-\alpha_2} \\ &= 1 + \frac{R_3}{R_2} |\ln(m)|^{-1 + \delta_{a_1} - \delta_a(1 - \delta_{a_3})} + [(a_1 + \delta_a a_3) |\ln(m)|^{-\varepsilon + \delta_{a_1} - \delta_a(1 - \delta_{a_3})} \\ &- (a_2 + \delta_a a_4 - \varepsilon) |\ln(m)|^{-\varepsilon - 1 + \delta_{a_1} - \delta_a(1 - \delta_{a_3})}] \tilde{r} + m \frac{d\tilde{r}}{dm} |\ln(m)|^{-\varepsilon + \delta_{a_1} - \delta_a(1 - \delta_{a_3})} \end{aligned}$$

Ce qui donne en utilisant la formule de Taylor avec ε suffisamment petit, et après une patiente étude au cas par cas :

$$\begin{aligned} &m \frac{d\tilde{r}}{dm} + (3a_1 + \delta_a a_3) \tilde{r} + \alpha_1 (b_1 - \delta_{b_1} b_2) \Delta_a \tilde{P} + \alpha_2 (d_1 - \delta_{d_1} d_2) \Delta_a \tilde{T} \\ &- (a_2 + 2\delta_{a_1} a_2 + \delta_a a_4 - \varepsilon) |\ln(m)|^{-1} \tilde{r} + (\alpha_1 (b_1 - \delta_{b_1} b_2) \Omega_a) |\ln(m)|^{-1} \tilde{P} \\ &+ (\alpha_2 (d_1 - \delta_{d_1} d_2) \Omega_a) |\ln(m)|^{-1} \tilde{T} + \frac{R_3}{R_2} |\ln(m)|^{-1 + \varepsilon} \\ &= |\ln(m)|^{-\varepsilon - \delta_{a_1} + \delta_a(1 - \delta_{a_3})} \times f_1(m^{a_3} |\ln(m)|^{a_4 + \varepsilon}, m^{b_3} |\ln(m)|^{b_4 + \varepsilon}, m^{d_3} |\ln(m)|^{d_4 + \varepsilon} \\ &, m^{a_3} |\ln(m)|^{a_4} \tilde{r}, m^{b_3} |\ln(m)|^{b_4} \tilde{P}, m^{d_3} |\ln(m)|^{d_4} \tilde{T}) \end{aligned}$$

Avec $\forall x \in \{a, b, c, d\}$, $\Delta_x = 1 - \delta_{x_1} + \delta_x(1 - \delta_{x_3})$ et $\Omega_x = (1 - \delta_x) \delta_{x_1} + \delta_x \delta_{x_3}$.

Où f_1 est analytique en chacune de ces variables (son nombre de variables dépendant de la nullité ou non des couples $(a_1, a_2), \dots, (d_1, d_2)$, car $m^{x_3} |\ln(m)|^{x_4}$ n'a pas forcément d'existence) de plus $f_1(0, \dots, 0) = 0$.

On a vu que l'on pouvait se ramener au cas où $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in N^*$. On effectue alors le changement de variable suivant : $t = \frac{1}{|\ln(m)|^\varepsilon} = \frac{1}{|\ln(m)|^{\frac{1}{n}}}$ pour $t, m > 0$ assez petit. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{t^{n+1}}{n} \frac{d\tilde{r}}{dt} + (3a_1 + \delta_a a_3) \tilde{r} + \alpha_1(b_1 - \delta_{b_1} b_2) \Delta_a \tilde{P} + \alpha_2(d_1 - \delta_{d_1} d_2) \Delta_a \tilde{T} \\ & - (a_2 + 2\delta_{a_1} a_2 + \delta_a a_4 - \frac{1}{n}) t^n \tilde{r} + (\alpha_1(b_1 - \delta_{b_1} b_2) \Omega_a) t^n \tilde{P} \\ & + (\alpha_2(d_1 - \delta_{d_1} d_2) \Omega_a) t^n \tilde{T} + \frac{R_3}{R_2} t^{n-1} \\ & = t^{1+n(\delta_{a_1} + \delta_a(1-\delta_{a_3}))} \times f_1(e^{\frac{-a_3}{t^n}} t^{-1-a_4n}, e^{\frac{-b_3}{t^n}} t^{-1-b_4n}, e^{\frac{-d_3}{t^n}} t^{-1-d_4n} \\ & , e^{\frac{-a_3}{t^n}} t^{-1-a_4n} t \tilde{r}, e^{\frac{-a_3}{t^n}} t^{-1-a_4n} t \tilde{P}, e^{\frac{-a_3}{t^n}} t^{-1-a_4n} t \tilde{T}) \end{aligned}$$

On fait de même pour les autres équations et on a :

$$\frac{t^{n+1}}{n} \frac{du}{dt} + t^n B u + A u + t^{n-1} C = \begin{pmatrix} t^n [\delta_{d_1} - \delta_d(1-\delta_{d_3})] + 1 \tilde{f}_1(t^{-a_4n-1} e^{-\frac{a_3}{t^n}}, \dots, t^{-d_4n-1} e^{-\frac{d_3}{t^n}}, t^{-a_4n-1} e^{-\frac{a_3}{t^n}} t \tilde{r}, \dots, t^{-d_4n-1} e^{-\frac{d_3}{t^n}} t \tilde{T}) \\ t^n [\delta_{b_1} - \delta_b(1-\delta_{b_3})] + 1 \tilde{f}_2(t^{-a_4n-1} e^{-\frac{a_3}{t^n}}, t^{-a_4n-1} e^{-\frac{a_3}{t^n}} t \tilde{r}) \\ t^n [\delta_{c_1} - \delta_c(1-\delta_{c_3})] + 1 \tilde{f}_3(t^{-b_4n-1} e^{-\frac{b_3}{t^n}}, t^{-d_4n-1} e^{-\frac{d_3}{t^n}}, t^{-b_4n-1} e^{-\frac{b_3}{t^n}} t \tilde{P}, t^{-d_4n-1} e^{-\frac{d_3}{t^n}} t \tilde{T}) \\ t^n [\delta_{d_1} - \delta_d(1-\delta_{d_3})] + 1 \tilde{f}_4(t^{-a_4n-1} e^{-\frac{a_3}{t^n}}, \dots, t^{-d_4n-1} e^{-\frac{d_3}{t^n}}, t^{-a_4n-1} e^{-\frac{a_3}{t^n}} t \tilde{r}, \dots, t^{-d_4n-1} e^{-\frac{d_3}{t^n}} t \tilde{T}) \end{pmatrix}$$

$$\text{Où } C = \begin{pmatrix} \frac{R_3}{R_2} \\ \frac{P_3}{P_2} \\ \frac{l_3}{l_2} \\ \frac{T_3}{T_2} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{P} \\ \tilde{l} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4 \text{ analytiques en chacune de ces variables.}$$

De plus $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $\tilde{f}_i(0, \dots, 0) = 0$. Les matrices A et B sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3a_1 + \delta_{a_1} a_3 & \alpha_1(b_1 - \delta_{b_1} b_2) \Delta_a & 0 & \alpha_2(d_1 - \delta_{d_1} d_2) \Delta_a \\ 4(a_1 - \delta_{a_1} a_2) \Delta_b & b_1 + \delta_{b_1} b_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{e}_1(b_1 - \delta_{b_1} b_2) \Delta_c & c_1 + \delta_{c_1} c_3 & -\tilde{e}_2(d_1 - \delta_{d_1} d_2) \Delta_c \\ 4(a_1 - \delta_{a_1} a_2) \Delta_d & -k_1(b_1 - \delta_{a_1} b_2) \Delta_d & -(c_1 - \delta_{c_1} c_2) \Delta_d & (4 - k_2)d_1 + \delta_{d_1} d_3 \end{pmatrix}$$

et

$$-B = \begin{pmatrix} a_2 + 2\delta_{a_1} + \delta_a a_4 - \varepsilon & -\alpha_1(b_1 - \delta_{b_1} b_2) \Omega_a & 0 & -\alpha_2(d_1 - \delta_{d_1} d_2) \Omega_a \\ -4(a_1 - \delta_{a_1} a_2) \Omega_b & b_2 + \delta_{b_1} b_4 - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{e}_1(b_1 - \delta_{b_1} b_2) \Omega_c & c_2 + \delta_{c_1} c_4 - \varepsilon & \tilde{e}_2(d_1 - \delta_{d_1} d_2) \Omega_c \\ -4(a_1 - \delta_{a_1} a_2) \Omega_d & k_1(b_1 - \delta_{a_1} b_2) \Omega_d & (c_1 - \delta_{c_1} c_2) \Omega_d & d_2 + (3 - k_2) \delta_{d_1} d_2 + \delta_d d_4 - \varepsilon \end{pmatrix}$$

Quitte à augmenter la valeur prise par n , on réécrit sous la forme qui suit l'équation précédente :

$$t^{n+1} \frac{du}{dt} + n A u = t f(t, \zeta_1(t), \dots, \zeta_v(t), u)$$

avec les fonctions ζ_i qui sont de la forme $t \mapsto \frac{e^{-x_3}}{t^{x_4n+1}}$. Finalement on peut à l'aide d'un changement d'inconnues correspondant à la triangularisation de A ramener le problème à un système du type :

$$t^{[n]+1} \frac{du}{dt} + \tilde{A}u = tf(t, \zeta_1(t), \dots, \zeta_v(t), u)$$

Avec $\tilde{A}$ matrice triangulaire inversible, et $t^{[n]+1} = \text{diag}(t^{n_1+1}, \dots, t^{n_4+1})$ tel que $n_1, \dots, n_4 \in \mathbb{N}$. En effet pour le sous-espace propre 0, les lignes vont conduire à des simplifications par une certaine puissance de t . Si ce n'était pas le cas alors les hypothèses du lemme 1 seraient contredites.

On rappelle également qu'un théorème d'existence de solutions (moyennant le choix de constantes) est possible en utilisant une variante de la norme infinie. Ce type de démonstration est faite dans [6], ainsi que dans le dernier paragraphe de cette thèse. Le but étant de pousser un peu plus loin la description de ces solutions, nous avons donc pris le parti de ne pas adapter la démonstration donnée dans [6]. Nous avons, dans la partie suivante, créer de nouveaux espaces de séries convergentes dans lesquels un théorème d'existence est démontré.

Deuxième partie

Existence et construction de solutions

Sommaire

4	Introduction	28
5	Les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$	30
5.1	Notations et définition d'ouvert compatible	30
5.1.1	Existence d'ouverts compatibles	31
5.2	Définition des espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et de leurs caractéristiques	32
5.3	Nature des espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$	33
5.3.1	Les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ sous-espaces vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$	33
5.3.2	Définition d'une norme sur $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$	35
5.3.3	Les espaces $(\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}, +, \cdot, *, \ \cdot \ _{\alpha, \Omega_\zeta})$ comme $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach commutative	35
6	Propriétés sur les espaces $\theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$	40
6.0.4	Les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et l'analyticité	40
6.0.5	Équations dans $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D)^r)]$	41
7	Théorème d'existence et forme des solutions	46

4 Introduction

Cette introduction a deux buts : le premier est de souligner les difficultés inhérentes au type d'équation que nous essayons de résoudre, ainsi que les écueils auxquels nous nous sommes heurtés et le second est de faire apparaître le cheminement qui nous a conduit aux résultats énoncés. Les travaux effectués par S. KICHENASSAMY et W. LITTMAN dans [7] et [8] utilisant la réduction Fuchsienne portent sur des équations du type :

$$t \frac{\partial u}{\partial t} + Au = tf(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, x)$$

La résolution de ces équations se fait en supposant l'explosion des solutions sur une hypersurface du type $t = \psi(x)$. Dans le cas où l'hypersurface est réduite à 0 et que les solutions ne dépendent pas de x , ces équations se réduisent sous la forme :

$$t \frac{\partial u}{\partial t} + Au = tf(t, u) \quad (12)$$

Nous avons vu que ces travaux résolvait le problème initial dans le cadre des solutions homogènes.

Cependant, les équations obtenues dans la recherche de solutions non homogènes ne peuvent être résolues par le même type de raisonnement. En effet, dans le cas de l'équation (12), l'un des objets clés de la résolution est l'opérateur $t \frac{\partial}{\partial t}$. La particularité de cet opérateur est qu'il stabilise les puissances de t . En effet $t \frac{\partial t^k}{\partial t} = kt^k$. Ainsi sous de bonnes conditions sur A , l'opérateur $t \frac{\partial}{\partial t} + A$ est inversible de l'espace des fonctions analytiques en t sur un voisinage de 0 dans lui-même. Toutefois, bien que l'opérateur $t^n \frac{\partial}{\partial t} + A$ ($n \geq 2$) soit inversible dans l'espace des fonctions $C^\infty([0, a[)$ (a suffisamment petit) dans lui-même, les puissances de t ne sont pas stabilisées par ce type d'opérateur. En conséquence, la recherche de solutions sous forme de séries entières d'équation (même simple) de ce type s'avère infructueuse.

On peut illustrer ce point avec l'exemple suivant :

$$t^2 u' + 3u = t \text{ tel que } u(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad (13)$$

Si on cherche une solution sous forme de série entière alors on obtient :

$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{3^k} (k-1)! t^k$. Or cette série est de rayon de convergence nulle. Mentionnons que c'est une série de Gevrey, comme il est coutume de trouver dans ce type d'équation différentielle. Néanmoins, la recherche sous forme de série de Gevrey possède quelques lacunes par rapport à un développement en série entière : l'approximation par ce type de série est d'autant plus précis que son domaine de validité s'amenuise.

Notre but est donc de trouver une écriture sous forme de série qui se prête à la réduction Fuchsienne mais aussi qui soit convergente. Avant de pouvoir résoudre des équations complexes, il semble nécessaire de pouvoir résoudre des équations plus simples, comme l'équation précédente. Il est clair qu'on ne peut trouver à l'équation (13) une solution analytique, mais il existe une unique solution tendant vers 0 en 0 à cette équation, à savoir $e^{\frac{3}{t} \int_0^t \frac{e^{-s}}{s} ds}$. La première idée a été de voir si ce type de solutions (qui peut d'ailleurs

s'écrire sous forme de fonctions spéciales) ne peut pas être choisi comme variable pour résoudre une classe d'équation plus vaste. A la vue de [7] et [8], il est possible de faire de la réduction Fuchsienne en adaptant les variables au type d'équation notamment en choisissant des variables qui sont solutions de ce type d'équation. Ce type de procédés a fonctionné lors de l'utilisation de la variable " $t \ln(t)$ " dans [7] et [8], ou de l'intervention de variable sous la forme $t^{k(x)}$ dans [1].

Mais hélas aucune variable de ce type n'a été détectée, malgré plusieurs tentatives ; c'est même un résultat tendant à prouver qu'une infinité de variables de ce type serait nécessaire, qui semblait se dégager.

Nous avons décidé alors d'examiner la possibilité de construire comme dans [1] des espaces imbriqués de plus en plus importants dans lesquels les variables des espaces supérieures se calculeraient à partir de variables contenues dans des espaces inférieurs.

Malgré que certaines liaisons furent dégagées entre les variables, les liens étaient dans de nombreux cas inextricables. Il aura fallu de nombreux essais, tests en tout genre

pour conclure que la présence d'opérateur du type $t^n \frac{\partial}{\partial t}$ soit le problème majeur, et de l'incapacité pour ce type d'opérateur de stabiliser les puissances de " t ".

Revenons à l'équation (13) et à sa solution explicitée ci-dessus. En utilisant une intégration par partie, on démontre facilement qu'un équivalent au voisinage de 0 peut être donné sous la forme $\frac{t}{3}$. L'idée directrice était alors de dire que puisqu'on ne peut écrire les solutions de l'équation (13) de manière analytique avec des variables convenablement choisies, alors nous allons mettre en avant le fait que ces solutions sont équivalentes à des puissances de t au voisinage de 0.

En somme pour l'équation (13), cela revient à écrire que :

$$e^{\frac{3}{t} \int_0^t \frac{-3}{s} ds} = th(t) \text{ sur }]0, +\infty[$$

On s'aperçoit alors que h est une fonction qui tend vers $\frac{1}{3}$ en 0 et surtout qui tend vers 0 en $+\infty$. On émet alors l'hypothèse que h puisse s'écrire sous la forme d'une fonction analytique en variables qui tend vers 0 en $+\infty$. Après plusieurs essais, nous choisissons cette variable, que l'on notera D , adaptée au problème, c'est à dire vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$t^2 D'(t) = D^2(t) - 1 \text{ sur }]0, +\infty[$$

Une fois remplacée h par $\tilde{h}(D)$, et injectée dans l'équation (13), il apparaît que $\tilde{h}$ vérifiée une équation du type étudiée dans [7]. De plus dans le cas où le membre de droite de l'équation était une fonction analytique en t , nous avons la série correspondante en " $t^k \tilde{h}_k(D(t))$ " qui converge absolument vers la solution au moins sur un petit intervalle pour des raisons de majoration des " $t^k \tilde{h}_k(D(t))$ " par une constante fois le membre de droite. Nous commencerons donc par définir des notations et des espaces de séries qui serviront comme espace de solutions à nos équations.

5 Les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$

5.1 Notations et définition d'ouvert compatible

Dans la suite on utilisera les notations suivantes :

Notations. – $\mathcal{L}(E)$: les endomorphismes continus de E dans E .

- $\mathcal{A}(\Omega)$: fonctions analytiques sur Ω .
- $\mathcal{A}^*(\Omega)$: fonctions analytiques sur Ω ne s'annulant pas sur Ω .
- $\Re(z)$: la partie réelle d'un complexe z .
- $\Im(z)$: la partie imaginaire d'un complexe z .
- $I =]0, 1[$, $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} / \Re(z) > 0\}$.
- $D^+ = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1 \text{ et } \Re(z) > 0\}$
- $\forall z \in D^+ , \varphi(z) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$
- On définit la fonction D sur $]0, +\infty[$ par $D : t \mapsto \frac{1 - e^{-\frac{2}{t}}}{1 + e^{-\frac{2}{t}}}$. Cette fonction va être utilisée comme variable supplémentaire afin de résoudre les équations qui suivront. Cette fonction est la restriction d'une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}^+$, on notera indifféremment la fonction à valeurs réelles ou complexe par D .
- S l'ensemble des fonctions développables en séries entières sur $] -1, 1[$.
- $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans S en les variables $D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r$ de degré inférieur à k .

Définition 1. Dans la suite, on dira que $f \in \mathcal{B}$ ssi $f \in \mathcal{A}(]0, +\infty[)$ et qui de plus, vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall t \in]0, +\infty[$, on a $f(t) > 0$.
- $\exists a > 0$ tel que f soit strictement croissante sur $]0, a[$.
- $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$

Définissons, dans un premier temps, des ouverts qui s'avéreront nécessaires dans la définition des espaces de fonctions qui suivent.

Définition 2. Donnons nous $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_v) \in \mathcal{B}^{v+1}$. On appellera alors ouvert compatible avec ζ tout ouvert $\Omega_\zeta \subset D^+$ tel que :

- $\exists \delta \in]0, 1[$, $]\delta, 1[\subset \Omega_\zeta$.
- $\forall i \in \llbracket 0, v \rrbracket$, ζ_i se prolonge sur $\frac{1}{\varphi(\Omega_\zeta)}$.
- $\forall D \in \Omega_\zeta$, il existe un chemin continu $\Gamma_D \subset \Omega_\zeta \cup \{1\}$ allant de 1 à D , et $\forall s \in \Gamma_D \setminus \{1\}, \forall i \in \llbracket 0, v \rrbracket$ on a :

$$|\zeta_i(\frac{1}{\varphi(s)})| \leq |\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})|$$

Notations. Pour tout Ω_ζ , il existe $a(\Omega_\zeta) = \max(\frac{1}{2}, \inf(a \in]0, 1[/ a, 1[\subset \Omega_\zeta))$. De

même, on notera pour tout $i \in \llbracket 0, v \rrbracket$:

$$r(\alpha_i, \zeta_i) = \sup(s > 0 / \forall \mu \in]0, s[, \zeta_i(\mu) < \alpha_i) \in]0, +\infty]$$

$$r(\alpha, \zeta) = \min_{i \in \llbracket 0, v \rrbracket} (r(\alpha_i, \zeta_i))$$

$$\tilde{r}(\alpha_i, \zeta_i) = \inf(s \in [0, 1[/ \forall \mu \in]s, 1[, \zeta_i(\frac{1}{\varphi(\mu)}) < \alpha_i) \in]0, 1[$$

$$\tilde{r}(\alpha, \zeta) = \max_{i \in \llbracket 0, v \rrbracket} (\tilde{r}(\alpha_i, \zeta_i))$$

$$rs(\alpha_i, \zeta_i, \Omega_\zeta) = \sup(0 < s < \frac{1}{\varphi(a(\Omega_\zeta))} / \forall \mu \in]0, s[, \zeta_i(\mu) < \zeta_i(\frac{1}{\varphi(\Omega_\zeta)})) \in]0, \frac{1}{\varphi(a(\Omega_\zeta))}]$$

$$rs(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta) = \min_{i \in \llbracket 0, v \rrbracket} (rs(\alpha_i, \zeta_i, \Omega_\zeta))$$

$$L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta) = \min(rs(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta), r(\alpha, \zeta)) \in]0, \frac{1}{\varphi(a(\Omega_\zeta))}]$$

5.1.1 Existence d'ouverts compatibles

Lemme 2. $\forall \zeta \in \mathcal{B}^{v+1}$, il existe au moins un ouvert compatible Ω_ζ

Démonstration. Soit $\zeta \in \mathcal{B}^{v+1}$. Fixons $i \in \llbracket 0, v \rrbracket$. On sait $\exists \delta_i > 0$ tel que ζ_i soit strictement croissante sur $]0, \delta_i[$, nous allons construire un ouvert $\tilde{\Omega}_i$ de $\mathbb{C}$ contenant $]0, \delta_i[$. Fixons également $x_0 \in]0, \delta_i[$. Étant donné que ζ_i est analytique sur $]0, \delta_i[$, on en déduit qu'il existe $\tilde{R}_i(x_0)$ tel que $\forall s \in]x_0 - \tilde{R}_i(x_0), x_0 + \tilde{R}_i(x_0)[$:

$$\zeta_i(s) = \sum_{k \geq 0} \frac{\zeta_i^{(k)}(x_0)}{k!} (s - x_0)^k$$

On peut alors prolonger ζ_i sur $B(x_0, \tilde{R}_i(x_0))$ par la somme de la série entière précédente. Ainsi $\exists \varepsilon \in \mathcal{A}(B(0, \tilde{R}_i(x_0)))$ tendant vers 0 en 0 tel que $\forall z \in B(x_0, \tilde{R}_i(x_0))$:

$$\zeta_i(x_0 + z) = \zeta_i(x_0) + z\zeta_i'(x_0) + z\varepsilon(z)$$

Ainsi on peut écrire pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ suffisamment petit que :

$$\zeta_i(x_0 + h_1 + ih_2) = \zeta_i(x_0 + h_1) + ih_2\zeta_i'(x_0) + (h_1 + ih_2)\varepsilon(h_1 + ih_2) - h_1\varepsilon(h_1)$$

Et donc $\zeta_i(x_0 + h_1 + ih_2) \underset{h_1, h_2 \rightarrow 0}{\sim} \zeta_i(x_0 + h_1) + ih_2\zeta_i'(x_0)$

Et par continuité : $|\zeta_i(x_0 + h_1 + ih_2)|^2 \underset{h_1, h_2 \rightarrow 0}{\sim} (\zeta_i(x_0 + h_1))^2 + h_2^2(\zeta_i'(x_0))^2$.

Pour h_1, h_2 assez petit on a donc $s \mapsto |\zeta_i(x_0 + h_1 + ish_2)|$ croissante sur $[0, 1]$. C'est à dire qu'il existe $R_i(x_0) > 0$ tel que $\forall z \in B(x_0, R_i(x_0)), \forall \theta \in [0, 1]$:

$$|\zeta_i(z)| \geq |\zeta_i(Re(z) + i\theta Im(z))|$$

Cette analyse peut être faite $\forall x_0 \in]0, \delta_i[$ et on note $\tilde{\Omega}_i = \bigcup_{x_0 \in]0, \delta_i[} B(x_0, R_i(x_0)) \cap D^+$. On

a bien $]0, \delta_i[\subset \tilde{\Omega}_i$. De plus, si on note $\tilde{\Gamma}_z$ le chemin continue composé des 2 segments orientés $[0, Re(z)]$ et $[Re(z), z]$, on a la propriété suivante :

$\forall z \in \tilde{\Omega}_i, \forall s \in \tilde{\Gamma}_z \setminus \{0\}, |\zeta_i(s)| \leq |\zeta_i(z)|$. Ceci est le résultat de la construction précédente sur le segment $[Re(z), z]$ et de la croissance de ζ_i sur $]0, Re(z)]$. Notons à présent $\tilde{\Omega} = \bigcap_{0 \leq i \leq v} \tilde{\Omega}_i$. Pour obtenir le résultat du lemme, il nous suffit de prendre $\Omega_\zeta = D(\tilde{\Omega}) \cap D^+$.

- $0 < \max_{0 \leq i \leq v} (D(\delta_i)) < 1$ et $]\max_{0 \leq i \leq v} (D(\delta_i)), 1[\subset \Omega_\zeta$.
- ζ_i se prolonge sur $\frac{1}{\varphi(\Omega_\zeta)} = \hat{\Omega}$
- De plus, en choisissant pour tout $D \in \Omega_\zeta$, le chemin Γ_D composé du segment orienté $[1, D(\operatorname{Re}(\frac{1}{\varphi(D)}))]$ puis du chemin allant de $D(\operatorname{Re}(\frac{1}{\varphi(D)}))$ à D paramétré par θ de la manière suivante $D(\operatorname{Re}(\frac{1}{\varphi(D)}) + i\theta \operatorname{Im}(\frac{1}{\varphi(D)}))$, $\theta \in [0, 1]$.

□

5.2 Définition des espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et de leurs caractéristiques

Et voici les espaces de fonctions dont il est question :

Définition 3. Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_v) \in (\mathbb{R}^{+*})^{v+1}$ et $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_v) \in \mathcal{B}^{v+1}$. Fixons un ouvert compatible Ω_ζ de ζ . On définit alors l'ouvert $\Omega_\zeta[\alpha]$:

$$\Omega_\zeta[\alpha] = \{(z_0, \dots, z_v, D) \in B(0, \alpha_0) \times \dots \times B(0, \alpha_v) \times \Omega_\zeta \\ \text{tel que } \forall i \in \llbracket 0, v \rrbracket, |\frac{z_i}{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})}| < 1\}$$

On dira que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ ssi $\exists (h_{i_0, \dots, i_v})_{i_0, \dots, i_v \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}(\Omega_\zeta))^{\mathbb{N}^{v+1}}$ et $M > 0$ tel que $\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$:

$$u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D) \\ \text{et } \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \leq M$$

De même on dira que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0$ si et seulement si $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et $h_{0, \dots, 0} = 0$.

Sur ces espaces, pour approfondir la description des solutions de l'équation qui nous intéresse, nous définissons une caractéristique supplémentaire.

Définition 4. Soit Ω_ζ un ouvert compatible avec ζ et soit $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$. Par définition de $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ on sait qu'il existe $(h_{i_0, \dots, i_v})_{i_0, \dots, i_v \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}(\Omega_\zeta))^{\mathbb{N}^{v+1}}$ tel que pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$:

$$u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$$

On dira que u est de caractéristique r ($r \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $\forall (i_0, \dots, i_v) \in (\mathbb{N})^{v+1}$, $h_{i_0, \dots, i_v}$ se prolonge sur I par un élément de $S^{i_0}[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$

Notations. Dans la suite on notera $\forall D \in \Omega_\zeta, \forall i \in \llbracket 0, v \rrbracket$,

$$\delta_i(D) = \min(\alpha_i, |\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})|)$$

Remarque 2. Pour un élément u de $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$, la suite $(h_{i_0, \dots, i_v})_{(i_0, \dots, i_v) \in \mathbb{N}^{v+1}}$ correspondante est unique. En effet, supposons que $\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$,

$$u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^2(D).$$

$$\text{Ainsi } \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} (h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)) = 0$$

et $\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)| \leq 2M$ donc en fixant un $D_0 \in \Omega_\zeta$ on obtient une série entière nulle sur $B(0, \delta_0(D_0)) \times \dots \times B(0, \delta_v(D_0))$, ce qui nous permet d'affirmer $h_{i_0, \dots, i_v}^1(D_0) - h_{i_0, \dots, i_v}^2(D_0) = 0$ et ce, pour tout $D \in \Omega_\zeta$.

Dans la suite, nous essaierons de démontrer les résultats, quand cela sera possible, avec non pas comme hypothèse que :

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \leq M$$

Mais que sur $\Omega_\zeta[\alpha]$:

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)| \leq M$$

La démarche vise à introduire des raisonnements qui seront réutilisés par la suite.

5.3 Nature des espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$

Nous allons présenter quelques propriétés de ces espaces.

5.3.1 Les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ sous-espaces vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$

Proposition 1. Les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta} \subset \mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$. Soit $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ alors par définition on a $\exists (h_{i_0, \dots, i_v})_{i_0, \dots, i_v \in \mathbb{N}}$ analytiques sur Ω_ζ et $M > 0$ tel que

$$u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D) \text{ et}$$

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)| \leq M. \text{ Considérons la suite de fonctions suivantes}$$

$$\left(\sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq N \\ \vdots \\ 0 \leq i_v \leq N}} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D) \right)_{N \in \mathbb{N}}. \text{ C'est une suite de fonctions dans } \mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha]), \text{ de plus nous}$$

allons montrer que cette suite de fonctions converge uniformément vers u sur tout compact $K_0 \times \dots \times K_v \times H \subset \Omega_\zeta[\alpha]$. Soit $K_0 \times \dots \times K_v \times H \subset \Omega_\zeta[\alpha]$ avec $K_0, \dots, K_v, H$ compact de $\mathbb{C}$. Pour tout $i \in \llbracket 0, v \rrbracket$, $\exists D_{0,i} \in H$ et $z_{0,i} \in K_i$ tel que $\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D_{0,i})}) = \min_{D \in H} (\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)}))$

et $z_{0,i} = \max_{z \in K_i} (z)$. On note alors $\forall i \in \llbracket 0, v \rrbracket$, $G_i = \frac{|z_{0,i}| + \delta_i(D_{0,i})}{2}$ (ainsi $\forall i, G_i > 0$). De

cette façon, on a pour tout $D \in H$ et $\forall i \in \llbracket 0, v \rrbracket$:

$$G_i < \alpha_i \text{ et } \left| \frac{G_i}{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})} \right| < \frac{|z_{0,i}|}{2|\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})|} + \frac{|\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D_{0,i})})|}{2|\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})|} < 1$$

Ce qui signifie que pour tout $D \in H$, $(G_0, \dots, G_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$ et donc $\forall D \in H$:

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} |G_0^{i_0} \dots G_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)| \leq M \Rightarrow |h_{i_0, \dots, i_v}(D)| \leq \frac{M}{|G_0^{i_0} \dots G_v^{i_v}|}$$

On majore alors la différence du terme général de la suite et sa limite pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in K_0 \times \dots \times K_v \times H$:

$$\begin{aligned} |u(z_0, \dots, z_v, D) - \sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq N \\ \vdots \\ 0 \leq i_v \leq N}} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)| &\leq \sum_{i_0, \dots, i_v \geq N} |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)| \\ &\leq \sum_{i_0, \dots, i_v \geq N} \left(\frac{|z_{0,0}|}{|G_0|} \right)^{i_0} \dots \left(\frac{|z_{0,v}|}{|G_v|} \right)^{i_v} M \leq M \frac{\frac{|z_{0,0}|}{|G_0|}^N}{1 - \frac{|z_{0,0}|}{|G_0|}} \dots \frac{\frac{|z_{0,v}|}{|G_v|}^N}{1 - \frac{|z_{0,v}|}{|G_v|}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On déduit donc que u est analytique sur $K_0 \times \dots \times K_v \times H$ et par suite que $u \in \mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$. Comme $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0 \subset \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ on a les inclusions suivantes : $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0 \subset \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta} \subset \mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$. Montrons à présent que $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$.

- $0 \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0$ car $0 = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} \times 0$
et $\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} 0| = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} 0 \leq 1$
- soit $u, v \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. Comme u et v sont dans $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$,
 $\exists (h_{i_0, \dots, i_v}^1)_{i_0, \dots, i_v \in \mathbb{N}}, (h_{i_0, \dots, i_v}^2)_{i_0, \dots, i_v \in \mathbb{N}}$ dans $(\mathcal{A}(\Omega_\zeta))^{\mathbb{N}^{v+1}}$ et
 $\exists M_1, M_2 > 0$ tel que pour tout $(z_0, \dots, z_v) \in \Omega_\zeta[\alpha]$:

$$\begin{aligned} u(z_0, \dots, z_v, D) &= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) \\ \text{et } \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^1(D)|) &\leq M_1 \\ v(z_0, \dots, z_v, D) &= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^2(D) \\ \text{et } \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)|) &\leq M_2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} [\lambda_1 u + \lambda_2 v](z_0, \dots, z_v, D) &= \lambda_1 \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) \\ &+ \lambda_2 \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^2(D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [\lambda_1 h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) + \lambda_2 h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)] \end{aligned}$$

Avec $\lambda_1 h_{i_0, \dots, i_v}^1 + \lambda_2 h_{i_0, \dots, i_v}^2 \in \mathcal{A}(\Omega_\zeta)$. De plus, $\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$:

$$\begin{aligned} &|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [\lambda_1 h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) + \lambda_2 h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)]| \\ &\leq |\lambda_1| \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^1(D)|) + |\lambda_2| \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)|) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta^\alpha} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [\lambda_1 h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) + \lambda_2 h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)]|) \\ & \leq |\lambda_1| \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^1|) + |\lambda_2| \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^2|) \\ & \leq |\lambda_1| M_1 + |\lambda_2| M_2. \end{aligned}$$

Donc $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ est bien un sous espace vectoriel de $\mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$. On ferait de même pour $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0$. $\square$

5.3.2 Définition d'une norme sur $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$

Définissons à présent une norme sur $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$: Soit $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$, on note :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} &= \inf\{C > 0 / \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \leq C \\ \text{et } \forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha], u(z_0, \dots, z_v, D) &= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)\} \end{aligned}$$

5.3.3 Les espaces $(\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}, +, \cdot, *, \| \cdot \|_{\alpha, \Omega_\zeta})$ comme $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach commutative

En effet, nous montrons la propriété suivante :

Proposition 2. *On a $(\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}, +, \cdot, *, \| \cdot \|_{\alpha, \Omega_\zeta})$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach commutative*

Démonstration. En premier lieu, nous avons que $(\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Montrons que $\| \cdot \|_{\alpha, \Omega_\zeta}$ est une norme sur cet espace :

- Pour tout $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$, $\|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$ est bien définie car c'est la borne inférieure d'une partie bornée de $\mathbb{R}^+$. En effet ceci est du à la définition de $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$. De plus on a trivialement $\|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \geq 0$.
- Soit $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ tel que $\|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} = 0$. Par définition de $\| \cdot \|_{\alpha, \Omega_\zeta}$ on a pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$, $\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(D)| \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} = 0$. Donc pour tout $D \in \Omega_\zeta$, $i_0, \dots, i_v \geq 0$, $h_{i_0, \dots, i_v}(D) = 0$ et donc $u = 0$. Réciproquement on a facilement que $\|0\|_{\alpha, \Omega_\zeta} = 0$.
- Soit $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ tel que $u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$ sur $\Omega_\zeta[\alpha]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha], |\lambda z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)| &\leq |\lambda| \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \\ \Rightarrow \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|\lambda z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)|) &\leq |\lambda| \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|\lambda| |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \leq |\lambda| \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$$

et donc $\|\lambda.u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \leq |\lambda| \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et ceci pour tout $\lambda \neq 0$. De plus :

$$\|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} = \left\| \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda.u \right\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda.u\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$$

et donc $|\lambda| \cdot \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \leq \|\lambda.u\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et finalement $|\lambda| \cdot \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} = \|\lambda.u\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$ ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$.

- Soit $(u, v) \in (\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta})^2$ tel que $u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^1(D)$ et $v(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)$ sur $\Omega_\zeta[\alpha]$.

$$\begin{aligned} & \forall (z_0, \dots, z_v) \in \Omega_\zeta[\alpha], |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) + h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)| \\ & \leq \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^1(D)|) + \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)|) \\ & \Rightarrow \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) + h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)|) \\ & \leq \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^1(D)|) + \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)|) \end{aligned}$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^1(D) + h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)|) \\ & \leq \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^1(D)|) \\ & + \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^2(D)|) \\ & \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} + \|v\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \end{aligned}$$

On en déduit que $\|u + v\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} + \|v\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$

Ce qui achève de montrer que $\|\cdot\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$ est une norme sur $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$. Montrons à présent que cette norme sur $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ définit un espace de Banach. Considérons $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a sur $\Omega_\zeta[\alpha]$, $u_n(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)$. Le fait que la suite de Cauchy vérifie : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon, p \geq 0$:

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)|) \leq \varepsilon \quad (14)$$

Ceci implique que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon, p \geq 0$ et $\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$:

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)| \leq \varepsilon$$

Fixons $(i_0^0, \dots, i_v^0) \in \mathbb{N}^{v+1}$ et $D_0 \in \Omega_\zeta$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on note $\tilde{N}_\varepsilon = N_{\varepsilon(\frac{\delta_0(D_0)}{2})^{i_0^0} \dots (\frac{\delta_v(D_0)}{2})^{i_v^0}} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq \tilde{N}_\varepsilon, p \geq 0$:

$$|h_{i_0^0, \dots, i_v^0}^{n+p}(D_0) - h_{i_0^0, \dots, i_v^0}^n(D_0)| \leq \frac{\varepsilon}{(\frac{\delta_0(D_0)}{2})^{i_0^0} \dots (\frac{\delta_v(D_0)}{2})^{i_v^0}} \left(\frac{\delta_0(D_0)}{2}\right)^{i_0^0} \dots \left(\frac{\delta_v(D_0)}{2}\right)^{i_v^0} \leq \varepsilon$$

Cette inégalité provient du fait que $(\frac{\delta_0(D_0)}{2}, \dots, \frac{\delta_0(D_0)}{2}, D_0) \in \Omega_\zeta[\alpha]$. Ce qui conduit au fait que la suite $(h_{i_0^0, \dots, i_v^0}^n(D_0))_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet. Donc cette suite converge vers une limite que l'on note $h_{i_0^0, \dots, i_v^0}(D_0)$. Ce travail peut-être effectué pour tout $D_0 \in \Omega_\zeta$, on définit alors une fonction $h_{i_0^0, \dots, i_v^0}$ sur Ω_ζ . Et en reprenant l'idée précédente, on montre que la convergence de la suite de fonctions $(h_{i_0^0, \dots, i_v^0}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact dans Ω_ζ vers $h_{i_0^0, \dots, i_v^0}$. Donc $h_{i_0^0, \dots, i_v^0} \in \mathcal{A}(\Omega_\zeta)$. Et ceci est valable pour tout $(i_0^0, \dots, i_v^0) \in \mathbb{N}^{v+1}$. On peut donc affirmer que pour tout $(i_0, \dots, i_v) \in \mathbb{N}^{v+1}$ la suite de fonctions $(z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\Omega_\zeta[\alpha]$ vers $z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$. Fixons encore $(i_0, \dots, i_v) \in \mathbb{N}^{v+1}$.

En reprenant l'équation 14 on déduit également que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_\varepsilon, p \geq 0$:

$$\sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \leq \varepsilon$$

Ce qui signifie que la suite de fonctions analytiques sur $\Omega_\zeta[\alpha]$, $(z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme infinie, or cet espace est complet donc $(z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction analytique. La convergence uniforme entraînant la convergence simple et par unicité de la limite on déduit que $(z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}^n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$. Ce raisonnement pouvant être tenu pour tout $(i_0, \dots, i_v) \in \mathbb{N}^{v+1}$. A présent, montrons que $u = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$ est dans $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u . Soit $R \in \mathbb{N}$ et $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$, pour $n \geq N_\varepsilon$ et $p \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} & |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]| \\ & \leq |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D)]| + |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]| \\ & \leq \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D)]|) + \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \\ & \quad - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]| \\ & \leq \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D)]|) + \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \\ & \quad - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $(i_0, \dots, i_v) \in \mathbb{N}^{v+1}$, donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq R \\ 0 \leq i_v \leq R}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \\
& \leq \sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq R \\ 0 \leq i_v \leq R}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D)]|) \\
& + \sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq R \\ 0 \leq i_v \leq R}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \\
& \leq \varepsilon + \sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq R \\ 0 \leq i_v \leq R}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^{n+p}(D)]|)
\end{aligned}$$

Cette inégalité prévalant pour tout $p \in \mathbb{N}$ par passage à la limite d'un nombre fini de termes on a :

$$\sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq R \\ 0 \leq i_v \leq R}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \leq \varepsilon$$

Ce raisonnement pouvant être tenu pour tout $R \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq R \\ 0 \leq i_v \leq R}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \text{ converge et que de plus :}$$

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - h_{i_0, \dots, i_v}^n(D)]|) \leq \varepsilon$$

De là, on déduit l'appartenance de u à $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et aussi que $\|u - u_n\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \leq \varepsilon$. Ce qui signifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$. L'espace est donc bien complet.

Soit $(u, v) \in (\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta})^2$. Ainsi $\exists (h_{i_0, \dots, i_v})_{i_0, \dots, i_v \in \mathbb{N}}, (g_{i_0, \dots, i_v})_{i_0, \dots, i_v \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}(\Omega_\zeta))^{\mathbb{N}^{v+1}}$ tel que pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$, $u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$ et $v(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} g_{i_0, \dots, i_v}(D)$. Donc à partir des résultats sur les séries entières et en utilisant la définition de $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ on a :

$$\begin{aligned}
u * v(z_0, \dots, z_v, D) &= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D) * \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} g_{i_0, \dots, i_v}(D) \\
&= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} f_{i_0, \dots, i_v}(D)
\end{aligned}$$

avec $\forall (i_0, \dots, i_v) \in \mathbb{N}^{v+1}$, $f_{i_0, \dots, i_v}(D) = \sum_{\substack{l_0 + l'_0 = i_0 \\ l_v + l'_v = i_v}} h_{l_0, \dots, l_v}(D) g_{l'_0, \dots, l'_v}(D) \in \mathcal{A}(\Omega_\alpha)$. Afin de justifier l'existence et la norme de $u * v$ on examine donc pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$:

$$\begin{aligned} & |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} f_{i_0, \dots, i_v}(D)| \\ & \leq \sum_{\substack{l_0 + l'_0 = i_0 \\ l_v + l'_v = i_v}} |z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}(D)| \times |z_0^{l'_0} \dots z_v^{l'_v} g_{l'_0, \dots, l'_v}(D)| \\ & \leq \sum_{\substack{l_0 + l'_0 = i_0 \\ l_v + l'_v = i_v}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}(D)|) \times \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{l'_0} \dots z_v^{l'_v} g_{l'_0, \dots, l'_v}(D)|) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} & \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} f_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \\ & \leq \sum_{\substack{l_0 + l'_0 = i_0 \\ l_v + l'_v = i_v}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}(D)|) \times \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{l'_0} \dots z_v^{l'_v} g_{l'_0, \dots, l'_v}(D)|) \end{aligned}$$

Fixons $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq N \\ 0 \leq i_v \leq N}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} f_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \\ & \leq \sum_{\substack{0 \leq i_0 \leq N \\ 0 \leq i_v \leq N}} \sum_{l_0=0}^{i_0} \dots \sum_{l_v=0}^{i_v} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}(D)|) \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0-l_0} \dots z_v^{i_v-l_v} g_{i_0-l_0, \dots, i_v-l_v}(D)|) \\ & = \sum_{l_0=0}^N \dots \sum_{\substack{l_v=0 \\ l_v \leq i_v \leq N}}^N \sum_{l_0 \leq i_0 \leq N} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}(D)|) \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0-l_0} \dots z_v^{i_v-l_v} g_{i_0-l_0, \dots, i_v-l_v}(D)|) \\ & = \sum_{l_0=0}^N \dots \sum_{l_v=0}^N \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}(D)|) \sum_{\substack{l_0 \leq i_0 \leq N \\ l_v \leq i_v \leq N}} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}(D)|) \\ & \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \|v\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $N \in \mathbb{N}$ on obtient la sommabilité de la série, c'est à dire le fait que $u * v \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et même on a : $\|u * v\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \|v\|_{\alpha, \Omega_\zeta}$. Les autres propriétés d'algèbre et la commutativité s'obtiennent aisément comme sous algèbre de $\mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha])$ $\square$

Remarque 3. La proposition précédente est valable avec $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0$ au lieu de $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$. Mais on peut aussi voir $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0$ comme un idéal de l'anneau $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$.

6 Propriétés sur les espaces $\theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$

6.0.4 Les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ et l'analyticité

La proposition qui suit est cruciale dans la démonstration d'existence de solution car elle fait le lien entre les fonctions analytiques et les espaces définis précédemment.

Proposition 3. *Soit f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{v+m+1}$ à valeur dans $\mathbb{C}$. On se donne $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_v) \in \mathcal{B}^{v+1}$ et un ouvert Ω_ζ compatible avec ζ . Alors $\exists(\beta_1, \dots, \beta_m, M) \in (\mathbb{R}^{+*})^{m+1}$ et $\exists\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_v) \in (\mathbb{R}^{+*})^{v+1}$ tel que $\forall(u_1, \dots, u_m) \in B_{||| \alpha, \Omega_\zeta}(0, \beta_1) \cap \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0 \times \dots \times B_{||| \alpha, \Omega_\zeta}(0, \beta_m) \cap \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0$ on a :*

$$w : (z_0, \dots, z_v, D) \mapsto f(z_0, \dots, z_v, u_1(z_0, \dots, z_v, D), \dots, u_m(z_0, \dots, z_v, D)) \in B_{||| \alpha, \Omega_\zeta}(0, M)$$

De plus, si $u_1, \dots, u_m$ sont de caractéristiques r alors w est de caractéristique r .

Démonstration. Comme f est analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ on a $\exists(\alpha_0, \dots, \alpha_v, \beta_1, \dots, \beta_m) \in (\mathbb{R}^{+*})^{m+v+1}$ tel que $\forall(z_0, \dots, z_v, y_1, \dots, y_m) \in B(0, \alpha_0) \times \dots \times B(0, \alpha_v) \times B(0, \beta_1) \times \dots \times B(0, \beta_m)$:

$$f(z_0, \dots, z_v, y_1, \dots, y_m) = \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v}^{j_1, \dots, j_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m}$$

et $\sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_m \geq 0}} |a_{i_0, \dots, i_v}^{j_1, \dots, j_m}| |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |y_1|^{j_1} \dots |y_m|^{j_m} \leq M$

En outre, on a par passage à la limite que :

$$\sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_m \geq 0}} |a_{i_0, \dots, i_v}^{j_1, \dots, j_m}| |\alpha_0|^{i_0} \dots |\alpha_v|^{i_v} |\beta_1|^{j_1} \dots |\beta_m|^{j_m} \leq M$$

On choisit donc $(u_1, \dots, u_m) \in B_{||| \alpha, \Omega_\zeta}(0, \beta_1) \cap \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0 \times \dots \times B_{||| \alpha, \Omega_\zeta}(0, \beta_m) \cap \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}^0$. On note pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$:

$$u_1(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{l_0 + \dots + l_v \geq 1} z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}^1(D)$$

$$\dots u_m(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{l_0 + \dots + l_v \geq 1} z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}^m(D)$$

Ce qui implique par définition sur $\Omega_\zeta[\alpha]$:

$$|u_1(z_0, \dots, z_v, D)| \leq \sum_{l_0 + \dots + l_v \geq 1} |z_0|^{l_0} \dots |z_v|^{l_v} |h_{l_0, \dots, l_v}^1(D)| \leq \beta_1$$

$$\dots |u_m(z_0, \dots, z_v, D)| \leq \sum_{l_0 + \dots + l_v \geq 1} |z_0|^{l_0} \dots |z_v|^{l_v} |h_{l_0, \dots, l_v}^m(D)| \leq \beta_m$$

Ainsi $\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$ que $f(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_m)$ est bien défini. De plus sur $\Omega_\zeta[\alpha]$ on a :

$$\begin{aligned}
& f(z_0, \dots, z_v, u_1(z_0, \dots, z_v, D), \dots, u_m(z_0, \dots, z_v, D)) \\
&= \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v}^{j_1, \dots, j_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} \left(\sum_{l_0 + \dots + l_v \geq 1} z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}^1(D) \right)^{j_1} \\
&\dots \left(\sum_{l_0 + \dots + l_v \geq 1} z_0^{l_0} \dots z_v^{l_v} h_{l_0, \dots, l_v}^m(D) \right)^{j_m} \\
&= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} \tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}(D)
\end{aligned}$$

Où les $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}$ sont des polynômes en $h_{l_0, \dots, l_v}^j$ pour $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $l_0 + \dots + l_v \leq i_0 + \dots + i_v$. Du fait que les $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}$ sont des polynômes en $h_{l_0, \dots, l_v}^j$, on a que $\forall i_0, \dots, i_v \geq 0$, $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v} \in \mathcal{A}(\Omega_\zeta)$. En s'appuyant sur ce qui a été fait avec le produit de 2 éléments dans $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_v \leq N} \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} \tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \\
& \leq \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \alpha_0^{i_0} \dots \alpha_v^{i_v} \beta_1^{j_1} \dots \beta_m^{j_m} \leq M
\end{aligned}$$

Ce qui assure la sommabilité de la série et aussi le résultat escompté. Supposons que $u_1, \dots, u_m$ soient de caractéristiques r . Pour montrer que les $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}$ se prolongent en un élément de $S^{i_0}[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$, il suffit de remarquer que les $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}$ sont des polynômes en $h_{l_0, \dots, l_v}^j$ dont les monômes sont de la forme $h_{l_0, \dots, l_v}^{j_0} \times \dots \times h_{l_0, \dots, l_v}^{j_{\nu(i_0, \dots, i_v)}} \times \dots \times h_{l_0, \dots, l_v}^{j_{\nu(i_0, \dots, i_v)}}$, avec $\forall k \in \llbracket 0, \nu(i_0, \dots, i_v) \rrbracket$, $h_{l_0, \dots, l_v}^{j_k}$ se prolongeant en un élément de $S^{l_0^k}[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$.

Or par homogénéité du terme $z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v}$ on a que $\sum_{k=0}^{\nu(i_0, \dots, i_v)} l_0^k = i_0$.

On en déduit donc aisément que $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}$ se prolonge en un élément de $S^{i_0}[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$.

□

6.0.5 Équations dans $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$

Une autre proposition utile concernant les $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$ est énoncée ci-dessous.

Proposition 4. Soit $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$. Alors $\exists (h_{i_0, \dots, i_v})_{i_0, \dots, i_v \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{A}(\Omega_\zeta[\alpha]))^{\mathbb{N}^{v+1}}$ tel que pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta[\alpha]$:

$$u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$$

Alors la fonction v définie sur $]0, L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta)[$ par :

$$v(t) := \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} (\zeta_0(t))^{i_0} \dots (\zeta_v(t))^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D(t)) \quad (15)$$

est bien définie et continue sur $]0, L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta)[$, de plus :

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{]0, L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta)[} (|(\zeta_0(t))^{i_0} \dots (\zeta_v(t))^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D(t))|) \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \quad (16)$$

Démonstration. Fixons $(i_0, \dots, i_v) \in \mathbb{N}^{v+1}$.

Soit $t \in]0, L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta)[$, alors par définition $D(t) \in \Omega_\zeta$. De plus, par définition de $L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta)$ pour tout $(z_0, \dots, z_v) \in B(0, \zeta_0(t)) \times \dots \times B(0, \zeta_v(t))$ on a $(z_0, \dots, z_v, D(t)) \in \Omega_\zeta[\alpha]$. Ainsi $\forall (z_0, \dots, z_v) \in B(0, \zeta_0(t)) \times \dots \times B(0, \zeta_v(t))$:

$$|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D(t))| \leq \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)|)$$

Par passage à la limite quand $z_0 \rightarrow \zeta_0(t), \dots, z_v \rightarrow \zeta_v(t)$ on a :

$$|\zeta_0(t)^{i_0} \dots \zeta_v(t)^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D(t))| \leq \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)|)$$

Et ce raisonnement peut être tenu quelque soit $t \in]0, L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta)[$. Donc :

$$\sup_{]0, L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta)[} (|\zeta_0(t)^{i_0} \dots \zeta_v(t)^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D(t))|) \leq \sup_{\Omega_\zeta[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)|)$$

Ce qui donne bien :

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{]0, L(\alpha, \zeta, \Omega_\zeta)[} (|(\zeta_0(t))^{i_0} \dots (\zeta_v(t))^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D(t))|) \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_\zeta} \quad (17)$$

De ceci, on tire aisément que v est bien définie et de plus ces sommes partielles continues convergent uniformément vers v , donc v est continue. $\square$

Le lemme qui va suivre ne concerne pas directement les espaces $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$, mais s'avèrera utile pour décrire les $h_{i_0, \dots, i_v} \in \mathcal{A}(\Omega_\zeta)$ utilisés par ces derniers.

Lemme 3. Soit h solution bornée de l'équation :

$$Dh'(D) - mh(D) = a(D)(D \ln(D))^{i_1} \dots (D \ln(D))^{i_r} \text{ sur }]0, 1[$$

Avec $a \in S, m \in \mathbb{Z}, (i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que $i_1 + \dots + i_r = k \geq 1$.

1^{er} cas : Si $k > m$ alors h peut s'écrire comme un élément de $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$

2^e cas : Si $k = m$

– Si $i_r = k$ et $a(0) \neq 0$ alors h peut s'écrire comme un élément de $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^{r+1}]$.

– Sinon, h peut s'écrire comme un élément de $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$

3^e cas : Si $m > k$

- Si $i_r = k$ et $a(0) \neq 0$ alors h peut s'écrire comme un élément de $S^{k+1}[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$.
- Sinon h peut s'écrire comme un élément de $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$

Démonstration. on rappelle que pour $i \neq -1$ et $j \geq 0$ une primitive de $D^i \ln(D)^j$ sur $]0, 1[$ peut s'écrire $\sum_{l \geq 0} \frac{(-1)^l D^{i+1} j! \ln(D)^{j-l}}{(i+1)^{l+1} (j-l)!}$ Dans la suite, on posera : $a(D) = \sum_{l \geq 0} a_l D^l$ pour D dans le disque de convergence.

1^{er} cas : Si $k > m$

Une étude formelle avec variation de la constante nous mène à :

$$\boxed{1} = \sum_{l \geq 0} a_l D^{l+k-m-1} \ln(D)^{i_1+\dots+r_{i_r}}, \text{ or } k > m \text{ donc } \forall l \geq 0, l+k-m-1 \geq 0. \text{ Ainsi}$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$, une primitive de $D^{l+k-m-1} \ln(D)^{i_1+\dots+r_{i_r}}$ sur $]0, 1[$ peut s'écrire

$$\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p D^{l+k-m} (i_1 + \dots + r_{i_r})! \ln(D)^{i_1+\dots+r_{i_r}-p}}{(l+k-m)^{p+1} (i_1 + \dots + r_{i_r} - p)!}$$

Étudions à présent la sommabilité de :

$$\sum_{l \geq 0} a_l \left(\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p D^{l+k-m} (i_1 + \dots + r_{i_r})! \ln(D)^{i_1+\dots+r_{i_r}-p}}{(l+k-m)^{p+1} (i_1 + \dots + r_{i_r} - p)!} \right) = \sum_{l \geq 0} u_l(D)$$

Soit $\alpha \in]e^{-1}, 1[$ et pour tout $D \in]0, \alpha[$:

$$\begin{aligned} \boxed{*} &= \sum_{l \geq 0} \left(\sum_{p \geq 0} \left| \frac{a_l (-1)^p D^{l+k-m} (i_1 + \dots + r_{i_r})! \ln(D)^{i_1+\dots+r_{i_r}-p}}{(l+k-m)^{p+1} (i_1 + \dots + r_{i_r} - p)!} \right| \right) \\ &\leq \sum_{l \geq 0} \sum_{p=0}^{i_1+\dots+r_{i_r}} |a_l| |D|^{l+k-m} (i_1 + \dots + r_{i_r})! |\ln(D)|^{i_1+\dots+r_{i_r}-p} \\ &\leq \left(\sum_{l \geq 0} |a_l| |D|^l \right) \left(\sum_{p=0}^{i_1+\dots+r_{i_r}} |D|^{k-m} |\ln(D)|^{i_1+\dots+r_{i_r}-p} (i_1 + \dots + r_{i_r})! \right) \end{aligned}$$

Étant donné que $a \in S$, $\exists M_\alpha > 0$ tel que

$\forall D \in]0, \alpha[, \forall p \in \{0, \dots, i_1 + \dots + r_{i_r}\}, \sum_{l \geq 0} |a_l| |D|^l \leq M_\alpha$. De plus si $D \in [e^{-1}, \alpha[$

, $|\ln(D)|^{i_1+\dots+r_{i_r}-p} \leq 1$.

Donc pour tout $D \in [e^{-1}, \alpha[, \boxed{*} \leq M_\alpha (i_1 + \dots + r_{i_r} + 1)! \alpha^{k-m}$.

Par contre si $D \in]0, e^{-1}[$, $|\ln(D)|^{i_1+\dots+r_{i_r}-p} \leq |\ln(D)|^{i_1+\dots+r_{i_r}}$, ainsi pour $D \in]0, e^{-1}[$ on a $\boxed{*} \leq M_\alpha (i_1 + \dots + r_{i_r} + 1)! |D|^{k-m} \ln(D)^{i_1+\dots+r_{i_r}}$.

Or $D \mapsto D^{k-m} \ln(D)^{i_1+\dots+r_{i_r}}$ est bornée sur $]0, 1[$ car $k - m \geq 1$.

Pour finir $\exists N_\alpha > 0$ tel que $\forall D \in]0, \alpha[, \boxed{*} \leq N_\alpha$.

Sur $]0, \alpha[$, $\sum_{l \geq 0} u_l(D)$ converge normalement et de plus $\sum_{l \geq 0} u'_l(D)$ converge également

normalement car $\sum_{l \geq 0} u'_l(D) = \boxed{1}$. Ce qui conduit au fait que $D \mapsto \sum_{l \geq 0} u_l(D)$ est une

primitive de $\boxed{1}$ sur $]0, \alpha[$. Ce travail pouvant être mené pour tout $\alpha \in]e^{-1}, 1[$, donc $D \mapsto \sum_{l \geq 0} u_l(D)$ est une primitive de $\boxed{1}$ sur $]0, 1[$.

Reprenons à présent $\alpha \in]e^{-1}, 1[$, en utilisant le théorème de FUBINI on a $\forall D \in]0, \alpha[$:

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq 0} u_l(D) &= \sum_{p=0}^{i_1+\dots+r i_r} \sum_{l \geq 0} \frac{a_l D^l D^{k-m} (-1)^p (i_1 + \dots + r i_r)! \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r-p}}{(l+k-m)^{p+1} (i_1 + \dots + r i_r - p)!} \\ &= \sum_{p=0}^{i_1+\dots+r i_r} b_p(D) D^{k-m} \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r-p} \end{aligned}$$

Où $b_p(D) = \sum_{l \geq 0} \frac{a_l D^l (-1)^p (i_1 + \dots + r i_r)!}{(i_1 + \dots + r i_r - p)! (l+k-m)^{p+1}}$, on vérifie facilement que $a_p \in S$.

$\exists C_0 \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $D \in]0, 1[$:

$$h(D) = \sum_{p=0}^{i_1+\dots+r i_r} b_p(D) D^k \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r-p} + C_0 D^m$$

On choisira $C_0 = 0$, si nécessaire, dans le cas où $m < 0$ afin que h reste bornée.
Si $p = 0$ alors,

$$\begin{aligned} D^k \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r} \\ = (D \ln(D))^{i_1} \dots (D(\ln(D))^r)^{i_r} \in S^k[D \ln(D), \dots, D \ln(D)^r] \end{aligned}$$

Montrons à présent par récurrence sur $p \in \{1, \dots, i_1 + \dots + r i_r\}$ que $D^k \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r-p}$ est un monôme de $S^k[D \ln(D), \dots, D \ln(D)^r]$.

$p=1$:

On a $i_1 + \dots + i_r = k > m \geq 0$ donc il existe $k_0 \in \{1, \dots, r\}$ tel que $i_{k_0} \geq 1$.

$$\begin{aligned} D^k \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r-1} \\ = (D \ln(D))^{i_1} \dots (D(\ln(D))^{k_0})^{i_{k_0}-1} \dots (D(\ln(D))^r)^{i_r} D(\ln(D))^{k_0-1} \\ = (D \ln(D))^{i_1} \dots (D(\ln(D))^{k_0-1})^{i_{k_0}-1+1} (D(\ln(D))^{k_0})^{i_{k_0}-1} \\ \dots (D(\ln(D))^r)^{i_r} \text{ si } k_0 \geq 2 \\ = D(D \ln(D))^{i_1-1} \dots (D(\ln(D))^r)^{i_r} \text{ si } k_0 = 1 \end{aligned}$$

Dans tous les cas $D^k \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r}$ est un monôme de $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$

$p \mapsto p+1$:

$p \leq i_1 + \dots + r i_r - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{r,p}$ dans $\mathbb{N}$ et $\gamma_p \in S$ tel que

$$D^k \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r-p} = \gamma_p(D) (D \ln(D))^{\alpha_{1,p}} \dots (D(\ln(D))^r)^{\alpha_{r,p}}$$

avec $\sum_{i=1}^r \alpha_{i,p} \leq k$. On applique alors la même méthode que pour le cas $p = 1$ à savoir l'existence d'un $k_0 \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\alpha_{k_0,p} \neq 0$. Si c'est le cas le raisonnement tenu pour $p = 1$ est de nouveau valable. Dans le cas contraire cela signifie que $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ on a $\alpha_{i,p} = 0$ et donc $i_1 + \dots + r i_r - p = \alpha_{1,p} + \dots + r \alpha_{r,p} = 0$. Donc $p = i_1 + \dots + r i_r$, ce qui est absurde car $p \leq i_1 + \dots + r i_r - 1$.

Ce qui termine la récurrence et aussi le premier point du lemme.

2^ecas : Si $k = m$

$$\boxed{1} = \sum_{l \geq 1} a_l D^{l-1} (\ln(D))^{i_1 + \dots + r i_r} + a_0 \frac{(\ln(D))^{i_1 + \dots + r i_r}}{D}$$

Au vu du cas précédent il existe $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} h(D) &= \sum_{p=0}^{i_1 + \dots + r i_r} \underbrace{\left(\sum_{l^{p+1}(i_1 + \dots + r i_r - p)!} a_l (-1)^p D^l (i_1 + \dots + r i_r)! \right)}_{:= a_p(D) \in S} D^k \ln(D)^{i_1 + \dots + r i_r - p} \\ &\quad + a_0 \frac{D^k \ln(D)^{i_1 + \dots + r i_r + 1}}{i_1 + \dots + r i_r + 1} + C_0 D^k \end{aligned}$$

En utilisant le 1^{er} cas on a que le premier terme de la somme ci-dessus est dans $S^k[D \ln(D), \dots, D(\ln(D))^r]$. Il ne nous reste plus qu'à s'occuper de $D^k \ln(D)^{i_1 + \dots + r i_r + 1}$.

$\sum_{p=1}^r i_p = k \geq 1$ donc $\exists k_0 \in \{1, \dots, r\}$ tel que $i_{k_0} \neq 0$.

Notons $\tilde{k} = \min(k_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket \text{ tel que } i_{k_0} \neq 0)$.

– Si $\tilde{k} = r$

alors $k = i_r$. On cherche alors $(\alpha_0, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que $D^{\alpha_0} (D \ln(D))^{\alpha_1} \dots (D(\ln(D))^r)^{\alpha_r} = (D(\ln(D))^r)^k \ln(D)$

Ce qui conduit au système suivant :
$$\begin{cases} \alpha_1 + \dots + r \alpha_r = rk + 1 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq k \end{cases}$$

Or $\alpha_1 + \dots + r \alpha_r \leq r(\alpha_1 + \dots + \alpha_r) \leq rk$

Il est donc impossible que $(D(\ln(D))^r)^k \ln(D)$ soit dans $S^k[D \ln(D), \dots, D \ln(D)^{r+1}]$.

Par contre $(D(\ln(D))^r)^k \ln(D) = \underbrace{(D(\ln(D))^r)^{k-1} D(\ln(D))^{r+1}}_{\in S^k[D \ln(D), \dots, D \ln(D)^{r+1}]}$

– sinon $1 \leq \tilde{k} < r$

$$\begin{aligned} &(D(\ln(D))^{\tilde{k}})^{i_{\tilde{k}}} \dots (D(\ln(D))^r)^{i_r} \ln(D) \\ &= (D(\ln(D))^{\tilde{k}+1}) (D(\ln(D))^{\tilde{k}})^{i_{\tilde{k}}-1} \dots (D \ln(D))^{i_r} \\ &= \underbrace{(D(\ln(D))^{\tilde{k}})^{i_{\tilde{k}}-1} (D(\ln(D))^{\tilde{k}+1})^{i_{\tilde{k}+1}+1} \dots (D(\ln(D))^r)^{i_r}}_{\in S^k[D \ln(D), \dots, D \ln(D)^r]} \end{aligned}$$

Ce qui parachève la démonstration du 2^e point du lemme.

3^ecas : Si $m > k$

– Si $m \notin \mathbb{N}^*$ alors $\forall l \geq 0$, $l + k - m - 1 \neq -1$. On obtient alors une primitive de $\boxed{1}$ de la même manière que précédemment et toutes les solutions de l'équation sont dans $S^k[D \ln(D), \dots, D \ln(D)^r]$

– Si $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{1} = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \neq m-k}} a_l D^{l+k-m-1} (\ln(D))^{i_1 + \dots + r i_r} + a_{m-k} D^{-1} \ln(D)^{i_1 + \dots + r i_r}$$

En s'appuyant sur les résultats des 2 premiers cas, on a $\exists C_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall D \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} h(D) &= \sum_{p=0}^{i_1+\dots+r i_r} \underbrace{\left(\sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \neq m-k}} \frac{a_l (-1)^l D^l (i_1 + \dots + r i_r)!}{(i_1 + \dots + r i_r - p)! (l + k - m)^{p+1}} \right)}_{\in S} D^k \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r-p} \\ &\quad + C_0 D^m + a_{m-k} \frac{D^m \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r+1}}{i_1 + \dots + i_r + 1} \end{aligned}$$

Il nous reste donc à examiner $D^m \ln(D)^{i_1+\dots+r i_r+1}$. Avec les mêmes notations que dans le 2^e cas, on suppose que :

– si $\tilde{k} < r$ alors

$$\begin{aligned} &D^m \ln(D)^{\tilde{k} i_{\tilde{k}} + \dots + r i_r + 1} \\ &= D^{m-k} (D \ln(D)^{\tilde{k}})^{i_{\tilde{k}}} \dots (D (\ln(D))^r)^{i_r} (\ln(D)) \\ &= \underbrace{D^{m-k} (D (\ln(D))^{\tilde{k}})^{i_{\tilde{k}}-1} (D (\ln(D))^{\tilde{k}+1})^{i_{\tilde{k}+1}+1} \dots (D \ln(D)^r)^{i_r}}_{\in S^k [D \ln(D), \dots, D \ln(D)^r]} \end{aligned}$$

– sinon $\tilde{k} = r$ Donc $k = i_r$

$$\begin{aligned} D^m \ln(D)^{r i_r + 1} &= D^{m-k} (D (\ln(D))^r)^{i_r} (\ln(D)) \\ &= \underbrace{D^{m-k-1} (D \ln(D)) (D \ln(D)^r)^{i_r}}_{\in S^{k+1} [D \ln(D), \dots, D (\ln(D))^r]} \end{aligned}$$

Le résultat est optimal dans le sens suivant : $D^4 \ln(D)^7$ ne peut se décomposer qu'en $(D \ln(D)) (D (\ln(D))^2)^3$ dans $S[D \ln(D), D (\ln(D))^2]$.

□

7 Théorème d'existence et forme des solutions

Le théorème qui suit représente le résultat principal de cette partie, il servira notamment à donner réponse quant aux questions de l'existence et la forme des solutions des systèmes de la partie précédente, dans la plupart des cas.

Soit $n_1, \dots, n_p$ des entiers naturels non nuls et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On se donne également $A \in GL_p(\mathbb{R})$ tel que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ soit triangulaire supérieure, ainsi que des fonctions f_i analytiques au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de leurs variables. après le choix d'une fonction ϕ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $(k, j) \in \Upsilon_n := \{(q, r) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 1 \leq q \leq n-1 \text{ et } 1 \leq r \leq \phi(q)\}$ les fonctions $e_{k,j}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$e_{k,j}(t) = \frac{e^{-\frac{\alpha_{k,j}^{k,j}}{k t^k} + \frac{\alpha_{k-1,j}^{k,j}}{(k-1)t^{k-1}} + \dots + \frac{\alpha_{1,j}^{k,j}}{t}}}{t \alpha_0^{k,j}}$$

Avec $\forall (k, j) \in \Upsilon_n$, $\alpha_0^{k,j}, \dots, \alpha_{k-1}^{k,j} \geq 0$, $\alpha_k^{k,j} > 0$

De plus les $\alpha_0^{k,j}$ sont supposés entiers. Ces fonctions peuvent être réordonnées avec un seul indice sous la forme : $\zeta_1, \dots, \zeta_v$. On pose également $\zeta_0 : t \mapsto t$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Nous laisserons alors au lecteur le soin de montrer que $\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_v) \in \mathcal{B}^{v+1}$.

Théorème 3. *Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on considère le système d'équations suivant :*

$$t^{n_i+1}u'_i + a_{i,i}u_i + \dots + a_{i,p}u_p = \zeta_0 f_i(\zeta_0, \dots, \zeta_v, u_1, \dots, u_p, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m), \forall i \in \llbracket 1, \dots, p \rrbracket \quad (18)$$

On suppose que les $a_{i,j}$ sont complexes et que les $\Re(a_{i,i})$ sont non nuls. Les fonctions f_i sont analytiques au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de leurs variables. De même il existe $\alpha^0 = (\alpha_0^0, \dots, \alpha_v^0) \in (\mathbb{R}^{+\star})^{v+1}$ et Ω_ζ^0 un ouvert compatible avec ζ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on ait $\tilde{w}_i(t) = w_i(\zeta_0(t), \dots, \zeta_v(t), D(t))$ sur $]0, L(\alpha^0, \zeta, \Omega_\zeta^0)[$ avec $w_i \in \Theta_{\alpha^0, \Omega_\zeta^0}^0$

Alors, il existe $\alpha^1 \in (\mathbb{R}^{+\star})^{v+1}$ et Ω_ζ^1 un ouvert compatible avec ζ tels que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$u_i(t) = v_i(\zeta_0(t), \dots, \zeta_v(t), D(t)) \text{ sur }]0, L(\alpha^1, \zeta, \Omega_\zeta^1)[\text{ et } v_i \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$$

De plus, si on suppose que $w_1, \dots, w_m$ sont de caractéristiques r , alors $v_1, \dots, v_p$ sont de caractéristiques r .

Démonstration. La preuve consiste en 3 étapes : la première étape nous permettra d'amener le problème dans l'espace des solutions voulu ainsi qu'à la définition d'opérateurs nécessaires à la deuxième étape qui montrera l'existence de solutions. Enfin, la dernière étape montrera la particularité de ces fonctions dans $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta}$.

Étape 1

Il sera utile d'écrire les ζ_i sur Ω_ζ de la façon suivante :

$$\forall i \in \llbracket 0, v \rrbracket, \forall z \in \frac{1}{\varphi(\Omega_\zeta)}, \zeta_i(z) = e^{\xi_i(z)}$$

Quitte à réduire Ω_ζ , on suppose que les ξ_i sont analytiques sur $\frac{1}{\varphi(\Omega_\zeta)}$.

Nous nous proposons de réduire l'équation (18), en posant $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $u_i(t) = v_i(\zeta_0(t), \dots, \zeta_v(t), D(t))$. En injectant v_i dans l'équation (18) on obtient $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned} t^{n_i-1}(D^2(t) - 1) \frac{\partial v_i}{\partial D} + t^{n_i+1} \sum_{l=0}^v \xi'_l(t) \zeta_l(t) \frac{\partial v_i}{\partial z_l} + a_{i,i}v_i + \dots + a_{i,p}v_p \\ = \zeta_0(t) f_i(\zeta_0(t), \dots, \zeta_v(t), v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $t = \frac{1}{\varphi(D(t))}$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(D(t))^{n_i-1}} (D^2(t) - 1) \frac{\partial v_i}{\partial D} + \frac{1}{\varphi(D(t))^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v \xi'_l\left(\frac{1}{\varphi(D(t))}\right) \zeta_l(t) \frac{\partial v_i}{\partial z_l} \\ + a_{i,i}v_i + \dots + a_{i,p}v_p = \zeta_0(t) f_i(\zeta_0(t), \dots, \zeta_v(t), v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre une nouvelle équation différentielle en $(z_0, \dots, z_v, D)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}}(D^2 - 1)) \frac{\partial v_i}{\partial D} + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right)^{z_l} \frac{\partial v_i}{\partial z_l} \\ & + a_{i,i} v_i + \dots + a_{i,p} v_p = z_0 f_i(z_0, \dots, z_v, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \end{aligned} \quad (19)$$

Dans la suite on étudie les solutions des équations suivantes :

$$\frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}}(D^2 - 1)) \frac{\partial v_i}{\partial D} + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right)^{z_l} \frac{\partial v_i}{\partial z_l} + a_{i,i} v_i = u \quad (20)$$

1^{er} cas : si $\Re(a_{i,i}) > 0$

On se donne $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_v) \in (\mathbb{R}^{+*})^{v+1}$. Clairement, on remarque que $\Omega_\zeta^\alpha = \Omega_\zeta \cap \{z \in D^+, \operatorname{Re}(z) > \tilde{r}(\alpha, \zeta)\}$ est un ouvert compatible avec ζ . De plus $a(\Omega_\zeta^\alpha) = \max(a(\Omega_\zeta), \tilde{r}(\alpha, \zeta))$. On choisit $\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta} \subset \Omega_\zeta^\alpha$ un ouvert compatible avec ζ de telle façon que $a(\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}) = a(\Omega_\zeta^\alpha)$ et $\forall D \in \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}$:

$$\left| e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)^{n_i}}{n_i}} \right| \int_{\Gamma_D} \frac{|\varphi(s)|^{n_i-1}}{|s^2-1|} \left| e^{\frac{-a_{i,i}\varphi(s)^{n_i}}{n_i}} \right| |ds| \leq \frac{1}{\Re(a_{i,i})} + 1$$

Ce qui est rendu possible en utilisant le prolongement par continuité de cette expression pour tout $D \in I$. En effet pour tout $D \in I$ on a :

$$\left| e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)^{n_i}}{n_i}} \right| \int_{\Gamma_D} \frac{|\varphi(s)|^{n_i-1}}{|s^2-1|} \left| e^{\frac{-a_{i,i}\varphi(s)^{n_i}}{n_i}} \right| |ds| \leq \frac{1}{\Re(a_{i,i})}$$

On définit alors l'application $A_{n_i}(a_{i,i})$ de $\Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}}$ dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}}$ telle que pour tout

$$u = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D) \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}} \text{ on ait :}$$

$$A_{n_i}(a_{i,i})(u) := \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} H_{i_0, \dots, i_v}(D)$$

$$\begin{aligned} \text{où } H_{i_0, \dots, i_v}(D) &= \frac{e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)^{n_i}}{n_i}}}{\zeta_0\left(\frac{1}{\varphi(D)}\right)^{i_0} \dots \zeta_v\left(\frac{1}{\varphi(D)}\right)^{i_v}} \int_{\Gamma_D} \frac{h_{i_0, \dots, i_v}(s)}{s^2-1} \varphi(s)^{n_i-1} \zeta_0\left(\frac{1}{\varphi(s)}\right)^{i_0} \\ &\dots \zeta_v\left(\frac{1}{\varphi(s)}\right)^{i_v} e^{-\frac{a_{i,i}\varphi(s)^{n_i}}{n_i}} ds \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que $A_{n_i}(a_{i,i})(u) \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}}$ pour $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}}$.

Soit $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}}$ tel que $u = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$ sur $\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]$.

Alors, pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]$ et tout $(i, s) \in \llbracket 0, v \rrbracket \times \Gamma_D$ on a :

$$\left| \frac{\zeta_i\left(\frac{1}{\varphi(s)}\right) z_i}{\zeta_i\left(\frac{1}{\varphi(D)}\right)} \right| < \left| \zeta_i\left(\frac{1}{\varphi(s)}\right) \right| \text{ et } \left| \frac{\zeta_i\left(\frac{1}{\varphi(s)}\right) z_i}{\zeta_i\left(\frac{1}{\varphi(D)}\right)} \right| \leq |z_i| < \alpha_i$$

Ainsi, $\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]$ et $\forall s \in \Gamma_D$ on a

$(\frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})}, \dots, \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})}, s) \in \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]$. Ceci nous donne donc pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]$ et $\forall s \in \Gamma_D$:

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}} (|\frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})}|^{i_0} \dots |\frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})}|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)|) \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}}$$

$\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]$ on a :

$$\begin{aligned} & |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} H_{i_0, \dots, i_v}(D)| \\ & \leq \left| \int_{\Gamma_D} \left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} \right. \\ & \quad \times |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \frac{|\varphi(s)|^{n_i-1}}{|s^2-1|} |e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)n_i}{n_i}}| |e^{-\frac{a_{i,i}\varphi(s)n_i}{n_i}}| ds \Big| \\ & \leq \sup_{\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \\ & \quad \times |e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)n_i}{n_i}}| \left| \int_{\Gamma_D} \frac{|\varphi(s)|^{n_i-1}}{|s^2-1|} |e^{-\frac{a_{i,i}\varphi(s)n_i}{n_i}}| ds \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{\Re(a_{i,i})} + 1 \right) \sup_{\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \\ & \Rightarrow \sup_{\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} H_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \\ & \leq \left(\frac{1}{\Re(a_{i,i})} + 1 \right) \sup_{\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \end{aligned}$$

Et donc en notant $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_v \leq N} \sup_{\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} H_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \\ & \leq \left(\frac{1}{\Re(a_{i,i})} + 1 \right) \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \\ & \leq \left(\frac{1}{\Re(a_{i,i})} + 1 \right) \|u\|_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le théorème de convergence dominée, on montre que $H_{i_0, \dots, i_v} \in \mathcal{A}(\Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta})$. Ainsi on a $A_{n_i}(a_{i,i})(u) \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}}$ et $\|A_{n_i}(a_{i,i})(u)\|_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}} \leq (\frac{1}{\Re(a_{i,i})} + 1) \|u\|_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}}$. Par linéarité on a que $A_{n_i}(a_{i,i}) \in \mathcal{L}(\Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta}})$ et $\|A_{n_i}(a_{i,i})\| \leq \frac{1}{\Re(a_{i,i})} + 1$.

2^e cas : si $\Re(a_{i,i}) < 0$

On se donne $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_v) \in (\mathbb{R}^{+*})^{v+1}$. On remarque facilement que $\Omega_\zeta^\alpha = \Omega_\zeta \cap \{z \in D^+, \operatorname{Re}(z) > \tilde{r}(\alpha, \zeta)\}$ est un ouvert compatible avec ζ .

De plus $a(\Omega_\zeta^\alpha) = \max(a(\Omega_\zeta), \tilde{r}(\alpha, \zeta))$.

Choisissons $C_i \in [\frac{|\Re(a_{i,i})|}{n_i \ln(2) + |\Re(a_{i,i})|(\varphi(a(\Omega_\zeta^\alpha)))^{n_i}}]^{\frac{1}{n_i}}, \frac{1}{\varphi(a(\Omega_\zeta^\alpha))}]$. Nous définissons un chemin continue $\Gamma_{C_i, D} \subset \Omega_\zeta^\alpha$ allant de $D(C_i)$ à $D \in \Omega_\zeta$.

$\Gamma_{C_i, D}$ est composé du segment orienté $[D(C_i), D(\operatorname{Re}(\frac{1}{\varphi(D)}))]$ et de $\{D(\operatorname{Re}(\frac{1}{\varphi(D)} + i\theta \operatorname{Im}(\frac{1}{\varphi(D)})))/\theta \in [0, 1]\}$. On vérifie par construction de Ω_ζ^α que $\Gamma_{C_i, D} \subset \Omega_\zeta^\alpha$ pour tout $D \in \Omega_\zeta^\alpha$. On choisit $\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta} \subset \Omega_\zeta^\alpha$ un ouvert compatible avec ζ de telle façon que $a(\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}) = a(\Omega_\zeta^\alpha)$ et $\forall D \in \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}$:

$$|e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)n_i}{n_i}}| \int_{\Gamma_{C_i, D}} \frac{|\varphi(s)|^{n_i-1}}{|s^2-1|} |e^{\frac{-a_{i,i}\varphi(s)n_i}{n_i}}| ds \leq \frac{1}{|\Re(a_{i,i})|} + 1$$

Ce qui est rendu possible en utilisant le prolongement par continuité de cette expression pour tout $D \in]a(\Omega_\zeta^\alpha), 1[$. En effet pour tout $D \in]a(\Omega_\zeta^\alpha), 1[$ on a :

$$|e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)n_i}{n_i}}| \int_{\Gamma_{C_i, D}} \frac{|\varphi(s)|^{n_i-1}}{|s^2-1|} |e^{\frac{-a_{i,i}\varphi(s)n_i}{n_i}}| ds \leq \frac{1}{|\Re(a_{i,i})|}$$

On définit alors l'application $A_{n_i, C_i}(a_{i,i})$ de $\Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}$ dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}$ telle que pour tout

$u = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D) \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}$ on ait :

$$\begin{aligned} A_{n_i, C_i}(a_{i,i})(u) &:= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} H_{i_0, \dots, i_v}(D) \\ \text{où } H_{i_0, \dots, i_v}(D) &= \frac{e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)n_i}{n_i}}}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})^{i_0} \dots \zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})^{i_v}} \int_{\Gamma_{C_i, D}} \frac{h_{i_0, \dots, i_v}(s)}{s^2-1} \varphi(s)^{n_i-1} \zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})^{i_0} \\ &\dots \zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})^{i_v} e^{-\frac{a_{i,i}\varphi(s)n_i}{n_i}} ds \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que $A_{n_i, C_i}(a_{i,i})(u) \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}$ pour $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}$.

Soit $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}$ tel que $u = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$ sur $\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]$.

Alors pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]$ et tout $(i, s) \in \llbracket 0, v \rrbracket \times \Gamma_{C_i, D}$ on a :

$$\left| \frac{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(s)})z_i}{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})} \right| < \left| \zeta_i(\frac{1}{\varphi(s)}) \right|$$

Si $s \in [D(C_i), D(\operatorname{Re}(\frac{1}{\varphi(D)}))]$ alors il y a 2 possibilités :

– Si $D(C_i) < D(\operatorname{Re}(\frac{1}{\varphi(D)}))$ alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(s)})z_i}{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})} \right| &< \left| \zeta_i(\frac{1}{\varphi(s)}) \right| \leq \zeta_i(C_i) \leq \alpha_i \\ \Rightarrow \left| \frac{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(s)})z_i}{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})} \right| &< \alpha_i \end{aligned}$$

– Si $D(C_i) > D(Re(\frac{1}{\varphi(D)}))$ alors

$$\left| \frac{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(s)})z_i}{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})} \right| < |z_i| \frac{|\zeta_i(Re(\frac{1}{\varphi(D)}))|}{|\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})|} \leq |z_i| < \alpha_i$$

Pour le cas où s est dans la seconde partie du chemin de $\Gamma_{C_i, D}$ on fait de la même manière que pour le cas $a_{i,i} > 0$. Dans tous les cas, on a pour $s \in \Gamma_{C_i, D}$:

$$\left| \frac{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(s)})z_i}{\zeta_i(\frac{1}{\varphi(D)})} \right| < \alpha_i$$

Ainsi, $\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]$ et $\forall s \in \Gamma_{C_i, D}$ on a

$(\frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})}, \dots, \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})}, s) \in \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]$. Ceci nous donne donc pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]$ et $\forall s \in \Gamma_{C_i, D}$:

$$\sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \leq \|u\|_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, \zeta}}$$

$\forall (z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]$ on a :

$$\begin{aligned} & |z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} H_{i_0, \dots, i_v}(D)| \\ & \leq \left| \int_{\Gamma_{C_i, D}} \left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} \right. \\ & \quad \times |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \frac{|\varphi(s)|^{n_i-1}}{|s^2-1|} |e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)n_i}{n_i}}| |e^{-\frac{a_{i,i}\varphi(s)n_i}{n_i}}| ds \Big| \\ & \leq \sup_{\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \\ & \quad \times |e^{\frac{a_{i,i}\varphi(D)n_i}{n_i}}| \left| \int_{\Gamma_{C_i, D}} \frac{|\varphi(s)|^{n_i-1}}{|s^2-1|} |e^{-\frac{a_{i,i}\varphi(s)n_i}{n_i}}| ds \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{|\Re(a_{i,i})|} + 1 \right) \sup_{\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \\ & \quad \sup_{\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \\ & \Rightarrow \sup_{\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} H_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \\ & \leq \left(\frac{1}{|\Re(a_{i,i})|} + 1 \right) \sup_{\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)})z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_0} \dots \left| \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)})z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \end{aligned}$$

Et donc en notant $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_v \leq N} \sup_{\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} H_{i_0, \dots, i_v}(D)|) \\
& \leq \left(\frac{1}{|\Re(a_{i,i})|} + 1 \right) \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}[\alpha]} \left(\left| \frac{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(s)}) z_0}{\zeta_0(\frac{1}{\varphi(D)})} \dots \frac{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(s)}) z_v}{\zeta_v(\frac{1}{\varphi(D)})} \right|^{i_v} |h_{i_0, \dots, i_v}(s)| \right) \\
& \leq \left(\frac{1}{|\Re(a_{i,i})|} + 1 \right) \|u\|_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant le théorème de convergence dominée, on montre que $H_{i_0, \dots, i_v} \in \mathcal{A}(\Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta})$. Ainsi, on a $A_{n_i, C_i}(a_{i,i})(u) \in \Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}$ et $\|A_{n_i, C_i}(a_{i,i})(u)\|_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}} \leq \left(\frac{1}{|\Re(a_{i,i})|} + 1 \right) \|u\|_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}}$. S'en suit que $A_{n_i, C_i}(a_{i,i}) \in \mathcal{L}(\Theta_{\alpha, \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}})$ et $\|A_{n_i, C_i}(a_{i,i})\| \leq \frac{1}{|\Re(a_{i,i})|} + 1$.

Ainsi si on se donne $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_v) \in (\mathbb{R}^+)^{v+1}$ on peut définir quitte à fixer un certain nombres de constantes arbitraires,

$\tilde{\Omega}_\zeta^\alpha = \bigcap_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,i} > 0} \Omega_{a_{i,i}, n_i, \zeta} \bigcap_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,i} < 0} \Omega_{a_{i,i}, C_i, n_i, \zeta}$ un ouvert compatible avec ζ tel que $a(\tilde{\Omega}_\zeta^\alpha) = a(\Omega_\zeta^\alpha)$. Sur $\Theta_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha}$ les opérateurs précédents sont encore définis, leurs normes toutes inférieures à $\frac{1}{|\Re(a_{i,i})|} + 1$. De plus, par construction de ces opérateurs, pour tout $u \in \Theta_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha}$ et tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $A_{n_i}(a_{i,i})(u)$ ou $A_{n_i, C_i}(a_{i,i})(u)$ (suivant que $\Re(a_{i,i})$ est strictement positive ou négative) est solution de l'équation :

$$\frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}}(D^2 - 1) \frac{\partial v}{\partial D} + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right) z_l \frac{\partial v}{\partial z_l} + a_{i,i} v = u \quad (21)$$

A présent, soulignons une propriété importante des opérateurs $A_{n_i}(a_{i,i})$ ou $A_{n_i, C_i}(a_{i,i})$ (suivant que $\Re(a_{i,i})$ est strictement positive ou négative). Pour montrer cette propriété nous allons fixer $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et son $a_{i,i}$ correspondant, si $\Re(a_{i,i}) < 0$ nous fixons C_i de la manière évoquée plus haut. Pour plus de lisibilité, nous noterons donc A_i l'opérateur $A_{n_i}(a_{i,i})$ ou $A_{n_i, C_i}(a_{i,i})$ suivant les cas. On vient de voir que pour $u \in \Theta_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha}$, on a $v = A_i(u) \in \Theta_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha}$ c'est à dire qu'il existe $(h_{i_0, \dots, i_v})_{i_0, \dots, i_v \leq 0}, (g_{i_0, \dots, i_v})_{i_0, \dots, i_v \leq 0} \in (\mathcal{A}(\tilde{\Omega}_\zeta^\alpha))^{\mathbb{N}^{v+1}}$ tel que sur $\tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha]$:

$$\begin{aligned}
u(z_0, \dots, z_v, D) &= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D) \\
\text{et } v(z_0, \dots, z_v, D) &= \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} g_{i_0, \dots, i_v}(D)
\end{aligned}$$

Or v vérifie sur $\tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha]$ l'équation (21) donc d'une part en qualité d'espace vectoriel on a $u - a_{i,i} v \in \Theta_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha}$ c'est à dire que :

$$\frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}}(D^2 - 1) \frac{\partial v}{\partial D} + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right) z_l \frac{\partial v}{\partial z_l} \in \Theta_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha}$$

Mais en plus, on a sur $\tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha]$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} \left[\frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}} (D^2 - 1) g'_{i_0, \dots, i_v}(D) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v i_l \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right) g_{i_0, \dots, i_v}(D) \right] \\ & = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [h_{i_0, \dots, i_v}(D) - a_{i, i} g_{i_0, \dots, i_v}(D)] \end{aligned}$$

Donc par identification (on fixe D puis on utilise l'unicité du développement en série entière), et en utilisant le fait que $u - a_{i, i} v \in \Theta_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha}$ on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \sup_{\tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} \left[\frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}} (D^2 - 1) g'_{i_0, \dots, i_v}(D) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v i_l \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right) g_{i_0, \dots, i_v}(D) \right]|) \\ & \leq \|u - a_{i, i} v\|_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha]} \leq (2 + |a_{i, i}|) \|u\|_{\alpha, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha]} \end{aligned}$$

Posons à présent w la fonction définie sur $]0, L(\alpha, \zeta, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha])$ par $w(t) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} \zeta_0(t)^{i_0} \dots \zeta_v(t)^{i_v} g_{i_0, \dots, i_v}(D(t))$. On sait par la proposition 4 que w est bien définie. Mais de plus, on peut utiliser la dérivation termes à termes. En effet fixons $a_0 \in]0, L(\alpha, \zeta, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha])$, pour tout $t \in]a_0, L(\alpha, \zeta, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha])$ on a :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} (\zeta_0(t)^{i_0} \dots \zeta_v(t)^{i_v} g_{i_0, \dots, i_v}(D(t))) (t) \right| \\ & = \left| \frac{1}{t^{n_i}} \right| \times |\zeta_0(t)^{i_0} \dots \zeta_v(t)^{i_v} \left[\frac{1}{\varphi(D(t))^{n_i-1}} (D(t)^2 - 1) g'_{i_0, \dots, i_v}(D(t)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varphi(D(t))^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v i_l \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D(t))} \right) g_{i_0, \dots, i_v}(D(t)) \right]| \\ & \leq \frac{1}{a_0^{n_i}} \sup_{\tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha]} (|z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} \left[\frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}} (D^2 - 1) g'_{i_0, \dots, i_v}(D) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v i_l \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right) g_{i_0, \dots, i_v}(D) \right]|) \end{aligned}$$

Donc la série des dérivées termes à termes converge absolument sur tout $]a_0, L(\alpha, \zeta, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha])$. Ainsi w est dérivable sur $]0, L(\alpha, \zeta, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha])$ et de plus par passage à la limite de l'équation (21) quand $(z_0, \dots, z_v, D) \rightarrow (\zeta_0(t), \dots, \zeta_v(t), D(t))$ on a pour tout $t \in]0, L(\alpha, \zeta, \tilde{\Omega}_\zeta^\alpha[\alpha])$:

$$t^{n_i} w'(t) + a_{i, i} w(t) = u(\zeta_0(t), \dots, \zeta_v(t), D(t))$$

Étape 2

Cette étape va démontrer l'existence, dans un certain espace de solutions, de l'équation proposée dans le théorème. Ce qu'il manque en effet pour utiliser les opérateurs définis dans la première étape, c'est de déterminer un α^1 qui permette l'utilisation du théorème de point fixe dans un espace $\Theta_{\alpha^1, \Omega_{\zeta}^{\alpha^1}}$. Pour déterminer cet α^1 et également les rayons des boules ouvertes qui seront stables par récurrence, il faut que, les conditions que nous allons expliciter plus bas, soient vérifiées. Dans un premier temps, il nous faut obtenir α^1 de telle manière que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $z_0 f_i(z_0, \dots, z_v, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m)$ ait un sens.

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Comme f_i est analytique en chacune de ces variables au voisinage de $(0, \dots, 0)$, donc $\exists \alpha_{2,i}^0, \dots, \alpha_{2,i}^v, \beta_{0,i}^1, \dots, \beta_{0,i}^p, \gamma_{0,i}^1, \dots, \gamma_{0,i}^m > 0, \exists M_{0,i}^0 > 0$ et $(a_{i_0, \dots, i_v, i}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^{p+m+v} \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ tel que $\forall (z_0, \dots, z_v, y_1, \dots, y_p, x_1, \dots, x_m) \in B(0, \alpha_{2,i}^0) \times \dots \times B(0, \alpha_{2,i}^v) \times B(0, \beta_{0,i}^0) \times \dots \times B(0, \beta_{0,i}^p) \times B(0, \gamma_{0,i}^1) \times \dots \times B(0, \gamma_{0,i}^m)$:

$$f_i(z_0, \dots, z_v, y_1, \dots, y_p, x_1, \dots, x_m) = \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, i}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} y_1^{j_1} \dots y_p^{j_p} x_1^{l_1} \dots x_m^{l_m} \quad (22)$$

$$\text{et } \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} |a_{i_0, \dots, i_v, i}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m}| |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |y_1|^{j_1} \dots |y_p|^{j_p} |x_1|^{l_1} \dots |x_m|^{l_m} \leq M_{0,i} \quad (23)$$

$$(24)$$

De plus, en utilisant les résultats sur les séries entières, on a $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists M_{0,i}^k > 0$ tel que sur $B(0, \alpha_{2,i}^0) \times \dots \times B(0, \alpha_{2,i}^v) \times B(0, \beta_{0,i}^0) \times \dots \times B(0, \beta_{0,i}^p) \times B(0, \gamma_{0,i}^1) \times \dots \times B(0, \gamma_{0,i}^m)$:

$$\sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} (j_k) |a_{i_0, \dots, i_v, i}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m}| |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |y_1|^{j_1} \dots |y_k|^{j_k-1} \dots |y_p|^{j_p} |x_1|^{l_1} \dots |x_m|^{l_m} \leq M_{0,i}^k \quad (25)$$

Dans la suite, on notera pour tout $q \in \llbracket 0, v \rrbracket$, $\alpha_q^2 = \min_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} (\alpha_{2,i}^q)$. De même, on note

$$M = \max_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ k \in \llbracket 0, p \rrbracket}} (M_{0,i}^k) \text{ et } \beta = \min_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, p \rrbracket}} (\beta_{0,i}^k)$$

Afin de pouvoir utiliser ces expressions avec les $w_1, \dots, w_m$, il convient de s'assurer que la norme de ces dernières, ne soit pas supérieure aux $\gamma_k = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} (\gamma_{0,i}^k)$ pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

Les w_i sont dans $\Theta_{\alpha^0, \Omega_{\zeta}^0}$ ce qui permet quitte à réduire les $\alpha_0^0, \dots, \alpha_v^0$ d'imposer que $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$\|w_k\|_{\alpha^0, \Omega_{\zeta}^0} < \gamma_k$$

On définit par récurrence les constantes b_k pour k allant de p de 1.

- $b_p = (p.M)(\frac{1}{|\Re(a_{p,p})|} + 1)$
- pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ on a :

$$b_k = \left(\frac{1}{|\Re(a_{k,k})|} + 1 \right) [p.M + |a_{k,k+1}|b_{k+1} + \dots + |a_{k,p}|b_p]$$

Le maximum de ces b_k est noté b :

$$b = \max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} (b_k)$$

Fixons à présent $\alpha^1 = (\alpha_0^1, \dots, \alpha_v^1)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, v \rrbracket$:

$$\alpha_i^1 < \min(\alpha_i^0, \alpha_i^2) \text{ et } \alpha_0^1 < \min(\alpha_i^0, \alpha_i^2, \frac{1}{2b}, \frac{\beta}{2b})$$

Le travail de l'étape 1 pour construire les opérateurs $A_{n_i, C_i}(a_{i,i})$ et $A_{n_i}(a_{i,i})$ a été fait en partant d'un ouvert Ω_ζ compatible avec ζ . On peut donc effectuer le même travail mais en partant avec Ω_ζ^0 comme ouvert compatible de base.

Une fois fixées les constantes arbitraires C_i pour les $a_{i,i} < 0$, on peut alors définir les opérateurs de l'étape précédente sur l'espace $\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^0, \alpha^1}$. Pour plus de lisibilité, on notera

A_i l'opérateur $A_{n_i, C_i}(a_{i,i})$ si $a_{i,i} < 0$ ou $A_{n_i}(a_{i,i})$ si $a_{i,i} > 0$. On fixe alors $\Omega_\zeta^1 = \Omega_\zeta^{0, \alpha^1}$. On a $\Omega_\zeta^1 \subset \Omega_\zeta^0$ par construction, et les α_i^1 sont inférieurs aux α_i^0 , donc les w_i sont dans $\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}$ et de plus $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$\|w_k\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} < \gamma_k$$

Définissons l'application $R = (R_1, \dots, R_p)$ de $(\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p$ dans $(\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p$ par récurrence sur ces composantes de p à 1 :

$$R_p(u) := A_p(z_0 f_p(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m)) \text{ puis}$$

$$R_k(u) := A_k(z_0 f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m)) - a_{k, k+1} A_k(R_{k+1}(u)) - \dots - a_{k, p} A_k(R_p(u))$$

Dans la suite, on munira $(\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p$ de la norme produit suivante :

$$\|u\| = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} (\|u_i\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1})$$

Muni de cette norme, $(\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p$ est un espace Banach.

Montrons à présent, par récurrence sur k allant de p à 1 que R_k est bien définie de $(\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p \cap B_{\|\cdot\|}(0, \beta)$ dans $\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0 \cap B_{\|\cdot\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}}(0, \alpha_0^1 b_k)$ et que $\forall (u, v) \in (B_{\|\cdot\|}(0, \beta))^2$ on a $\|R_k(u) - R_k(v)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq \alpha_0^1 b_k \|u - v\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}$.

Pour $k = p$

Soit $u = (u_1, \dots, u_p) \in (\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p \cap B_{\|\cdot\|}(0, \beta)$, on a $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, u_i dans $B_{\|\cdot\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}}(0, \beta) \subset B_{\|\cdot\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}}(0, \beta_{0,p}^i)$. De même, étant donné que $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $w_k \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0 \cap B_{\|\cdot\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}}(0, \gamma_k)$, on peut utiliser la proposition 3 et l'écriture de l'équation 22 pour démontrer que $f_p(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}$ et de plus :

$$\|f_p(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq M$$

Donc, par propriété d'algèbre de Banach on a $z_0 f_p(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$ et :

$$\|z_0 f_p(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq \alpha_0^1 M$$

De cela, on déduit que $R_p(u)$ est bien défini et $R_p(u) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$ car $z_0 f_p(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$. Pour s'en rendre compte, il suffit d'examiner comment les A_i opèrent. En effet, si $h_{0, \dots, 0} = 0$ alors $H_{0, \dots, 0} = 0$. Comme $\|A_p\| \leq \frac{1}{|\Re(a_{p,p})|} + 1$, on a également :

$$\|R_p(u)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq \left(\frac{1}{|\Re(a_{p,p})|} + 1 \right) \alpha_0^1 M < \alpha_0^1 b_p$$

A présent, choisissons $(u, v) \in B_{\|\cdot\|}(0, \beta)$, avec $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$ Pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in B(0, \alpha_0^1) \times \dots \times B(0, \alpha_v^1) \times \Omega_\zeta^1$ on a :

$$\begin{aligned} & f_p(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) - f_p(z_0, \dots, z_v, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \\ &= \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, p}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [u_1^{j_1} \dots u_p^{j_p} - v_1^{j_1} \dots v_p^{j_p}] w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &= \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, p}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [u_1^{j_1} \dots u_p^{j_p} - v_1^{j_1} u_2^{j_2} \dots u_p^{j_p}] w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &+ \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, p}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [v_1^{j_1} u_2^{j_2} \dots u_p^{j_p} - v_1^{j_1} v_2^{j_2} u_3^{j_3} \dots u_p^{j_p}] w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, p}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [v_1^{j_1} \dots v_{p-1}^{j_{p-1}} u_p^{j_p} - v_1^{j_1} \dots v_p^{j_p}] w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq p} g_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \end{aligned}$$

Fixons $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} & g_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \\ &= \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, p}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} v_1^{j_1} \dots v_{k-1}^{j_{k-1}} [u_k^{j_k} - v_k^{j_k}] u_{k+1}^{j_{k+1}} \dots u_p^{j_p} w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &= (u_k - v_k) \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0, j_k \geq 1 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, p}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} v_1^{j_1} \dots \\ &\dots v_{k-1}^{j_{k-1}} \left[\sum_{l=0}^{j_k-1} u_k^{j_k-1-l} v_k^l \right] u_{k+1}^{j_{k+1}} \dots u_p^{j_p} w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &= (u_k - v_k) \tilde{g}_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0, j_k \geq 1 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} |a_{i_0, \dots, i_v, p}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m}| |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |v_1|^{j_1} \dots \\
& \dots |v_{k-1}|^{j_{k-1}} \left[\sum_{l=0}^{j_k-1} |u_k|^{j_k-1-l} |v_k|^l \right] |u_{k+1}|^{j_{k+1}} \dots |u_p|^{j_p} |w_1|^{l_1} \dots |w_p|^{l_p} \\
& \leq \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0, j_k \geq 1 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} (j_k) |a_{i_0, \dots, i_v, p}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m}| |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |v_1|^{j_1} |v_2|^{j_2} \dots \\
& \dots |v_{k-1}|^{j_{k-1}} (\max(|u_k|, |v_k|))^{j_k-1} |u_{k+1}|^{j_{k+1}} \dots |u_p|^{j_p} |w_1|^{l_1} \dots |w_p|^{l_p} \leq M
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant la démonstration de la proposition 3 ainsi que les inégalités (25) on obtient que $\tilde{g}_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \in B_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}(0, M)$.

Ce travail peut être effectué pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Donc en utilisant les propriétés d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta^1}$ on a :

$$\begin{aligned}
& \|z_0 f_p(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) - z_0 f_p(z_0, \dots, z_v, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \\
& \leq \alpha_0^1 \sum_{k=1}^p \|u_k - v_k\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} M \leq \alpha_0^1 p M \|u - v\|
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\|R_p(u) - R_p(v)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq \alpha_0^1 p M \left(\frac{1}{|\Re(a_{p,p})|} + 1 \right) \|u - v\| \leq \alpha_0^1 b_p \|u - v\|$$

Supposons $R_p, \dots, R_{q+1}$ définis et définissons R_q

Par définition de R_k on a pour tout $u = (u_1, \dots, u_p) \in (\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p \cap B_{\|\cdot\|}(0, \beta)$:

$$\begin{aligned}
R_k(u) := & A_k(z_0 f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m)) - a_{k,k+1} A_k(R_{k+1}(u)) - \dots \\
& \dots - a_{k,p} A_k(R_p(u))
\end{aligned}$$

Notons également $\tilde{R}_k(u) := A_k(z_0 f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m))$.

Soit $u = (u_1, \dots, u_p) \in (\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p \cap B_{\|\cdot\|}(0, \beta)$, on a $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, u_i dans $B_{\|\cdot\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}}(0, \beta) \subset B_{\|\cdot\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}}(0, \beta_{0,k}^i)$. De même, étant donné que $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $w_k \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0 \cap B_{\|\cdot\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}}(0, \gamma_k)$, on peut utiliser la Proposition 3 et l'écriture de l'équation (22) pour démontrer que $f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}$ et de plus :

$$\|f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq M$$

Donc par propriété d'algèbre de Banach, on a $z_0 f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$ et :

$$\|z_0 f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq \alpha_0^1 M$$

De tout ça, on déduit que $\tilde{R}_k(u)$ est bien défini et $\tilde{R}_k(u) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$ car $z_0 f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$. Pour s'en rendre compte, il suffit d'examiner comment les A_i opèrent. En effet, si $h_{0, \dots, 0} = 0$ alors $H_{0, \dots, 0} = 0$. Comme $|||A_k||| \leq \frac{1}{|\Re(a_{k,k})|} + 1$, on a également :

$$\|\tilde{R}_k(u)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq \left(\frac{1}{|\Re(a_{k,k})|} + 1\right) \alpha_0^1 M < \alpha_0^1 \left(\frac{1}{|\Re(a_{k,k})|} + 1\right) pM$$

$\forall l \in \llbracket k+1, p \rrbracket$ l'hypothèse de récurrence nous assure que $R_l(u) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$ et que $\|R_l(u)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} < \alpha_0^1 b_l$. Comme $\forall l \in \llbracket k+1, p \rrbracket$, $R_l(u) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$ on a $A_k(R_l(u)) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$, donc par les propriétés d'espace vectoriel de $\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$ on a bien $R_k(u) \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$. De plus, l'inégalité triangulaire nous donne :

$$\|R_k(u)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} < \alpha_0^1 \left(\frac{1}{|\Re(a_{k,k})|} + 1\right) (pM + |a_{k,k+1}|b_{k+1} + \dots + |a_{k,p}|b_p) = \alpha_0^1 b_k$$

A présent, choisissons $(u, v) \in B_{\|\cdot\|}(0, \beta)$, avec $u = (u_1, \dots, u_p)$ et $v = (v_1, \dots, v_p)$. Pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in B(0, \alpha_0^1) \times \dots \times B(0, \alpha_v^1) \times \Omega_\zeta^1$ on a :

$$\begin{aligned} & f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) - f_k(z_0, \dots, z_v, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \\ &= \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, k}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [u_1^{j_1} \dots u_p^{j_p} - v_1^{j_1} \dots v_p^{j_p}] w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &= \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, k}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [u_1^{j_1} \dots u_p^{j_p} - v_1^{j_1} u_2^{j_2} \dots u_p^{j_p}] w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &+ \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, k}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [v_1^{j_1} u_2^{j_2} \dots u_p^{j_p} - v_1^{j_1} v_2^{j_2} u_3^{j_3} \dots u_p^{j_p}] w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, k}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} [v_1^{j_1} \dots v_{p-1}^{j_{p-1}} u_p^{j_p} - v_1^{j_1} \dots v_p^{j_p}] w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\ &= \sum_{1 \leq r \leq p} g_r(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \end{aligned}$$

Fixons $r \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
& g_r(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \\
&= \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, k}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} v_1^{j_1} \dots v_{r-1}^{j_{r-1}} [u_r^{j_r} - v_r^{j_r}] u_{r+1}^{j_{r+1}} \dots u_p^{j_p} w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\
&= (u_r - v_r) \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0, j_r \geq 1 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} a_{i_0, \dots, i_v, k}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} v_1^{j_1} \dots \\
&\quad \dots v_{r-1}^{j_{r-1}} \left[\sum_{l=0}^{j_r-1} u_r^{j_r-1-l} v_r^l \right] u_{r+1}^{j_{r+1}} \dots u_p^{j_p} w_1^{l_1} \dots w_p^{l_p} \\
&= (u_r - v_r) \tilde{g}_r(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0, j_r \geq 1 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} |a_{i_0, \dots, i_v, k}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m}| |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |v_1|^{j_1} \dots \\
&\quad \dots |v_{r-1}|^{j_{r-1}} \left[\sum_{l=0}^{j_r-1} |u_r|^{j_r-1-l} |v_r|^l \right] |u_{r+1}|^{j_{r+1}} \dots |u_p|^{j_p} |w_1|^{l_1} \dots |w_p|^{l_p} \\
&\leq \sum_{\substack{i_0, \dots, i_v \geq 0 \\ j_1, \dots, j_p \geq 0, j_r \geq 1 \\ l_1, \dots, l_m \geq 0}} (j_r) |a_{i_0, \dots, i_v, r}^{j_1, \dots, j_p, l_1, \dots, l_m}| |z_0|^{i_0} \dots |z_v|^{i_v} |v_1|^{j_1} |v_2|^{j_2} \dots \\
&\quad \dots |v_{r-1}|^{j_{r-1}} (\max(|u_r|, |v_r|))^{j_r-1} |u_{r+1}|^{j_{r+1}} \dots |u_p|^{j_p} |w_1|^{l_1} \dots |w_p|^{l_p} \leq M
\end{aligned}$$

Et donc en utilisant la démonstration de la proposition 3 ainsi que les inégalités (25) on a que $\tilde{g}_r(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m) \in B_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}(0, M)$.

Ce travail peut être effectué pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, donc, en utilisant les propriétés d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_\zeta^1}$ on a :

$$\begin{aligned}
& \|z_0 f_k(z_0, \dots, z_v, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_m) - z_0 f_k(z_0, \dots, z_v, v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_m)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \\
& \leq \alpha_0^1 \sum_{r=1}^p \|u_r - v_r\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} M \leq \alpha_0^1 p M \|u - v\|
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\|\tilde{R}_k(u) - \tilde{R}_k(v)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq \alpha_0^1 p M \left(\frac{1}{|\Re(a_{k,k})|} + 1 \right) \|u - v\|$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et la norme subordonnée de A_k on a :

$$\begin{aligned}
& \|R_k(u) - R_k(v)\|_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1} \leq \alpha_0^1 \|u - v\| \left(\frac{1}{|\Re(a_{k,k})|} + 1 \right) (pM + |a_{k,k+1}| b_{k+1} + \dots + |a_{k,p}| b_p) \\
& \leq \alpha_0^1 b_k \|u - v\|
\end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence. On déduit donc de la récurrence que $(\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p \cap B_{\|\cdot\|}(0, \beta)$ est stable par R étant donné que pour tout $k \in \llbracket 1, \dots, p \rrbracket$, $\alpha_0^1 b_k \leq \alpha_0^1 b \leq \frac{\beta}{2}$. De plus, R est contractante sur $B_{\|\cdot\|}(0, \beta)$ car pour tout $k \in \llbracket 1, \dots, p \rrbracket$, $\alpha_0^1 b_k \leq \alpha_0^1 b \leq \frac{1}{2}$.

On peut alors utiliser le théorème du point fixe de Banach sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = R(u_n)$$

Il existe donc $v = (v_1, \dots, v_p) \in (\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0)^p$ tel que $R(v) = v$. Par construction de R on a donc pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $v_k = R_k(v)$ et donc chaque v_k s'écrit comme le A_k d'un élément dans $\Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$. Ainsi, d'après ce qu'on a vu à l'étape 1, $u_k : t \mapsto v_k(\zeta_0(t), \dots, \zeta_v(t), D(t))$ est dérivable sur $]0, L(\alpha^1, \zeta, \Omega_\zeta^1)[$. De plus, on a également que $u = (u_1, \dots, u_p)$ solution sur $]0, L(\alpha^1, \zeta, \Omega_\zeta^1)[$ de l'équation (18).

Étape 3

On fixe $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $u \in \Theta_{\alpha^1, \Omega_\zeta^1}^0$ de caractéristique r . On a vu à l'étape 1 dans la construction des A_i que si on note $v = A_i(u)$ alors sur $\Omega_\zeta^1[\alpha^1]$:

$$\frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}}(D^2 - 1) \frac{\partial v}{\partial D} + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right) z_l \frac{\partial v}{\partial z_l} + a_{i,i} v = u$$

Si on note sur $\Omega_\zeta^1[\alpha^1]$, $u(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} h_{i_0, \dots, i_v}(D)$

et $v(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} z_0^{i_0} \dots z_v^{i_v} g_{i_0, \dots, i_v}(D)$, par définition de l'opérateur on a sur Ω_ζ^1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi(D)^{n_i-1}}(D^2 - 1) g'_{i_0, \dots, i_v}(D) + \frac{1}{\varphi(D)^{n_i+1}} \sum_{l=0}^v i_l \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right) g_{i_0, \dots, i_v}(D) \\ & + a_{i,i} g_{i_0, \dots, i_v}(D) = h_{i_0, \dots, i_v}(D) \\ & \Rightarrow D g'_{i_0, \dots, i_v}(D) + \frac{i_0 D}{(D^2 - 1) \varphi(D)} g_{i_0, \dots, i_v}(D) \\ & + \left[\frac{D}{\varphi(D)^2 (D^2 - 1)} \sum_{l=1}^v i_l \xi'_l \left(\frac{1}{\varphi(D)} \right) + \frac{a_{i,i} D \varphi(D)^{n_i-1}}{D^2 - 1} \right] g_{i_0, \dots, i_v}(D) \\ & = \frac{D \varphi(D)^{n_i-1}}{D^2 - 1} h_{i_0, \dots, i_v}(D) \end{aligned} \tag{26}$$

(27)

On définit la fonction ψ_0 sur I par :

$$\psi_0(D) = \frac{D + (D^2 - 1) \varphi(D)}{D(D^2 - 1) \varphi(D)} \text{ si } D \in]-1, 1[\setminus \{0\} \text{ et } \psi_0(0) = 0$$

En utilisant le développement en série entière de φ sur $] -1, 1[$, on montre que φ_0 est dans S . On rappelle que pour tout $l \in \llbracket 1, v \rrbracket$, $\exists (k_l, j_l) \in \Upsilon_n$ tel que $\zeta_l = e_{k_l, j_l}$. Fixons

$l \in \llbracket 1, v \rrbracket$. On rappelle que $\forall t \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}\zeta_l(t) &= e_{k_l, j_l}(t) = \frac{e^{-\frac{\alpha_{k_l, j_l}}{k_l t^{k_l}} + \frac{\alpha_{k_l-1, j_l}}{(k_l-1)t^{k_l-1}} + \dots + \frac{\alpha_{1, j_l}}{t}}}{t^{\alpha_0^{k_l, j_l}}} \\ &= e^{-\frac{\alpha_{k_l, j_l}}{k_l t^{k_l}} + \frac{\alpha_{k_l-1, j_l}}{(k_l-1)t^{k_l-1}} + \dots + \frac{\alpha_{1, j_l}}{t} - \alpha_0^{k_l, j_l} \ln(t)}\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in]0, +\infty[$ on a :

$$\xi'_l(t) = \frac{\alpha_{k_l, j_l}}{t^{k_l+1}} - \frac{\alpha_{k_l-1, j_l}}{t^{k_l}} - \dots - \frac{\alpha_{1, j_l}}{t^2} - \frac{\alpha_0^{k_l, j_l}}{t}$$

On récupère donc pour tout $D \in I$:

$$\begin{aligned}\xi'_l\left(\frac{1}{\varphi(D)}\right) &= \alpha_{k_l, j_l}^{k_l, j_l} \varphi(D)^{k_l+1} - \alpha_{k_l-1, j_l}^{k_l, j_l} \varphi(D)^{k_l} - \dots - \alpha_1^{k_l, j_l} \varphi(D)^2 - \alpha_0^{k_l, j_l} \varphi(D) \\ \Rightarrow \frac{D}{\varphi(D)^2(D^2-1)} \xi'_l\left(\frac{1}{\varphi(D)}\right) &= \frac{\alpha_{k_l, j_l}^{k_l, j_l} D \varphi(D)^{k_l-1}}{D^2-1} - \frac{\alpha_{k_l-1, j_l}^{k_l, j_l} D \varphi(D)^{k_l-2}}{D^2-1} - \dots \\ &- \frac{\alpha_1^{k_l, j_l} D}{D^2-1} + \alpha_0^{k_l, j_l} - \alpha_0^{k_l, j_l} D \psi_0(D) := \alpha_0^{k_l, j_l} + D \psi_l(D)\end{aligned}$$

On remarque que $\psi_l \in S$ et ceci pour tout $l \in \llbracket 1, v \rrbracket$. En posant $\psi = \psi_0 + \dots + \psi_v \in S$ et $\alpha_0 = \sum_{l=1}^v \alpha_0^{k_l, j_l} \geq 0$, on réécrit l'équation 26 sous la forme :

$$Dg'_{i_0, \dots, i_v}(D) - (i_0 - \alpha_0)g_{i_0, \dots, i_v}(D) + D\psi(D)g_{i_0, \dots, i_v}(D) = \frac{D\varphi(D)^{n_i-1}}{D^2-1}h_{i_0, \dots, i_v}(D)$$

On note alors $\tilde{\psi}(D) = \int_0^D \psi(s)ds \in S$, $\tilde{g}_{i_0, \dots, i_v} = e^{\tilde{\psi}}g_{i_0, \dots, i_v}$ et finalement $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}(D) = \frac{\varphi(D)^{n_i-1}e^{\tilde{\psi}(D)}}{D^2-1}h_{i_0, \dots, i_v}(D)$. L'équation précédente s'écrit aussi sur Ω_ζ^1 :

$$D\tilde{g}'_{i_0, \dots, i_v}(D) - (i_0 - \alpha_0)\tilde{g}_{i_0, \dots, i_v}(D) = D\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}(D)$$

Comme $h_{i_0, \dots, i_v}$ se prolonge en un élément de $S^{i_0}[D\ln(D), \dots, D(D\ln(D))^r]$ et que $D \mapsto \frac{\varphi(D)^{n_i-1}e^{\tilde{\psi}(D)}}{D^2-1} \in S$ on a que $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_v}$ se prolonge en un élément de $S^{i_0}[D\ln(D), \dots, D(D\ln(D))^r]$. On utilise alors le lemme 3 ainsi que le prolongement analytique pour conclure que $\tilde{g}_{i_0, \dots, i_v}$ se prolonge en un élément de $S^{i_0}[D\ln(D), \dots, D(D\ln(D))^r]$. Et donc comme $e^{-\tilde{\psi}} \in S$ on a que $g_{i_0, \dots, i_v}$ se prolonge en un élément de $S^{i_0}[D\ln(D), \dots, D(D\ln(D))^r]$. Ce travail pouvant être effectué pour tout $(i_0, \dots, i_v) \in (\mathbb{N})^{v+1}$, on conclut que si u est de caractéristique r alors $A_i(u)$ est de caractéristique r . Et ceci pour tout A_i . Cependant ce résultat en lui-même ne nous permet pas de conclure quant à la caractéristique de la solution de notre équation dans le cas où les $w_1, \dots, w_m$ sont de caractéristique r . Revenons à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers la solution de (18). On a $u_n = (u_n^1, \dots, u_n^p)$, le raisonnement que nous venons de tenir nous permet en effet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$ que u_n^l est de caractéristique r . Il suffit pour s'en rendre compte de combiner la proposition 3 avec la stabilité de la caractéristique par les A_i . Notons pour tout $(z_0, \dots, z_v, D) \in \Omega_\zeta^1[\alpha^1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall l \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$u_n^l(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} h_{i_0, \dots, i_v}^{n, l}(D) v_l(z_0, \dots, z_v, D) = \sum_{i_0, \dots, i_v \geq 0} g_{i_0, \dots, i_v}^l(D)$$

Alors, ce qui va nous permettre de conclure quant à la caractéristique de v , c'est le fait que $\forall l \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\forall n \geq i_0$ on ait :

$$h_{i_0, \dots, i_v}^{n, l} = h_{i_0, \dots, i_v}^{i_0, l} = g_{i_0, \dots, i_v}^l$$

Ce résultat se démontre par récurrence sur i_0 . En effet, sans faire explicitement la récurrence dans le détail, on remarque que le z_0 placé en facteur de tout les f_i va permettre de faire progresser le développement de v , et rang après rang dans la suite u_n les premiers termes se stabilisent. A chaque itération, le terme d'indice $(i_0, \dots, i_v)$ de $A_i(z_0 f(z_0, \cdot, u..))$ est en fait calculé à partir de termes d'indice $(i'_0, \dots, i'_v)$ avec $i'_0 \leq i_0 - 1$. La propriété aux rangs initiaux est assurée par le fait que seuls les coefficients des f_i déterminent ces termes. $\square$

Troisième partie

Étude approfondie des solutions avec constantes arbitraires

Sommaire

8	Introduction	64
9	Définitions des espaces $G[t, g_1, \dots, g_j]$ et propriétés	68
9.0.6	Définitions	69
9.1	Propriétés des ensembles $G[t, g_1, \dots, g_j]$	76
10	Méthode de réduction	87

Dans la partie précédente, nous avons énoncé un théorème d'existence pour les équations qui nous intéressent. Cependant, en observant de plus près ces solutions, on s'aperçoit que certaines dépendent d'une constante arbitraire. Or, dans le travail précédent, il nous est impossible de voir exactement comment ces constantes agissent sur la solution. Les paragraphes ci-dessous ont pour but de compenser ce défaut (du moins pour la dimension 1) en faisant apparaître une liaison entre ces constantes et les éléments de la série qui forment cette solution.

8 Introduction

Cette introduction a pour but de définir un problème précis en dimension 1, d'en fixer les conditions et de le réduire au maximum. La troisième partie de cette thèse est une analogie avec ce qui a été fait dans [7] et [8] en ce qui concerne les variables de la forme $t \ln(t), \dots, t(\ln(t))^l$. En effet, pour rappel, ces variables avaient été introduites afin de trouver une alternative à l'impossibilité de résoudre avec des fonctions analytiques en t des équations du type :

$$tu' - u = t \text{ ou encore } tu' - u = t(\ln(t))^l$$

Le rapprochement entre ce type d'équation et les équations qui nous occupent, est l'objet de cette partie. Dans cette introduction, nous allons fixer un cadre simple et précis pour faciliter la compréhension des techniques mises en place. Cependant, l'adaptation des procédés décrits ci-dessous dans des cadres plus généraux est possible. Nous commençons donc par définir les ensembles N_i pour $i \geq 1$.

Définition 5. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ on dira que $g \in N_i$ si et seulement si $\exists(n_0, \dots, n_{i-1}) \in \mathbb{N}^n$ tel que :

$$\forall t > 0, g(t) = \frac{e^{-\frac{1}{it}}}{e^{\frac{-n_{i-1}}{(i-1)t^{i-1}}} \dots e^{\frac{-n_1}{t}} t^{n_0}}$$

Remarque 4. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $g_i \in N_i$ on a $g_i \in \mathcal{B}$.

Définissons, à présent, des fonctions que nous utiliserons comme variables dans les propositions suivantes. On définit en effet sur $]0, +\infty[$ et pour tout $(k, j) \in \Upsilon_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) les fonctions $e_{k,j}$ par :

$$e_{k,j}(t) = \frac{e^{-\frac{\alpha_{k,j}^k}{kt^k}}}{e^{\frac{-\alpha_{k,j}^{k-1}}{(k-1)t^{k-1}}} \dots e^{\frac{-\alpha_{k,j}^1}{t}} t^{\alpha_{k,j}^0}}$$

Avec $\forall(k, j, i) \in \Upsilon_n \times \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\alpha_{k,j}^i \in \mathbb{Q}^+$ et $\forall(k, j) \in \Upsilon_n$, $\alpha_{k,j}^k \in \mathbb{Q}^{+*}$. On rappelle que $\Upsilon_n = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, \psi(k) \rrbracket\}$ où ψ désigne une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

Nous étudierons dans cette partie les équations du type :

$$t^{n+1}u' + au = tf(t, u, (e_{k,j})_{(k,j) \in \Upsilon_n})$$

avec $a \in \mathbb{Q}^*$ et f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et de plus ayant les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ tous dans $\mathbb{Q}$.

On énonce alors une propriété qui nous permettra de réduire une telle équation :

Proposition 5. Soit u solution de l'équation suivante sur $V \cap]0, +\infty[$ (V voisinage de 0.)

$$t^{n+1}u' + au = tf(t, u, (e_{k,j})_{(k,j) \in \Upsilon_n})$$

avec $a \in \mathbb{Q}^*$ et f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et de plus les coefficients du développement de f en $(0, \dots, 0)$ sont supposés dans $\mathbb{Q}$. Alors, quitte à réduire le voisinage V , on peut se ramener à une équation du type :

$$\tau^{np+1} \frac{dv}{d\tau} + rv = \tau \tilde{f}(\tau, v, (g_{ip})_{1 \leq i \leq n})$$

Avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g_{ip} \in N_{ip}$ et $v(\tau) = u(\tau^p)$. De plus on a $r \in \mathbb{Z}^*$.

Démonstration. Nous réduisons, dans un premier temps, les variables $e_{n,1}, \dots, e_{n,\psi(n)}$. En effet, pour tout $j \in \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket$ et pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\alpha_{n,j}^i \in \mathbb{Q}^+$ et $\alpha_{n,j}^n \in \mathbb{Q}^{+*}$. On peut donc écrire pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket$, $\alpha_{n,j}^i = \frac{p_{n,j}^i}{q_{n,j}^i}$ de telle manière que si $\alpha_{n,j}^i \neq 0$ alors $p_{n,j}^i, q_{n,j}^i \in \mathbb{N}^*$ et $p_{n,j}^i \wedge q_{n,j}^i = 1$ sinon on pose $p_{n,j}^i = 0$ et $q_{n,j}^i = 1$. Une fois fixés ces entiers naturels, on pose $s_n = \text{ppcm}(q_{n,1}^n n, \dots, q_{n,\psi(n)}^n n)$. Par définition du ppcm d'entiers naturels non nuls, on sait que pour tout $j \in \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket$, il existe $\tilde{q}_{n,j}^n \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_n = n q_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n$.

Avec ces notations on a pour tout $j \in \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket$ et $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned} e_{n,j}(t) &= \frac{e^{-\frac{\alpha_{n,j}^n}{nt^n}}}{e^{\frac{-\alpha_{n,j}^{n-1}}{(n-1)t^{n-1}}} \dots e^{\frac{-\alpha_{n,j}^1}{t}} t^{\alpha_{n,j}^0}} \\ &= \frac{e^{\frac{-p_{n,j}^n}{q_{n,j}^n nt^n}}}{e^{\frac{-p_{n,j}^{n-1}}{q_{n,j}^n (n-1)t^{n-1}}} \dots e^{\frac{-p_{n,j}^1}{q_{n,j}^1 t}} t^{\frac{p_{n,j}^0}{q_{n,j}^0}}} \\ &= \left(\frac{e^{\frac{-1}{s_n t^n}}}{e^{\frac{-p_{n,j}^{n-1}}{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^n (n-1)t^{n-1}}} \dots e^{\frac{-p_{n,j}^1}{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^1 t}} t^{\frac{p_{n,j}^0}{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^0}}} \right)^{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n} \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variables $\tau_1^{s_n} = t$ et on pose $v_1(\tau_1) = u(\tau_1^{s_n})$. Après le changement de variables, l'équation initiale devient :

$$\frac{\tau_1^{ns_n+1}}{s_n} \frac{dv_1}{d\tau_1} + av_1 = \tau_1^{s_n} f(\tau_1^{s_n}, v_1, (e_{k,j}(\tau_1^{s_n}))_{(k,j) \in \Upsilon_n})$$

Ainsi pour tout $j \in \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket$:

$$\begin{aligned} e_{n,j}(\tau_1^{s_n}) &= \left(\frac{e^{\frac{-1}{s_n \tau_1^{s_n n}}}}{e^{\frac{-p_{n,j}^{n-1}}{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^{(n-1)s_n}}}} \dots e^{\frac{-p_{n,j}^1}{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^1 \tau_1^{s_n}}} \frac{s_n p_{n,j}^0}{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^0}} \right)^{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n} \\ &= \left(\frac{e^{\frac{1}{n s_n \tau_1^{s_n n}}}}{e^{\frac{-p_{n,j}^{n-1}}{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^{(n-1)s_n}}}} \dots e^{\frac{-p_{n,j}^1}{p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^1 \tau_1^{s_n}}} \frac{s_n p_{n,j}^0}{n p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n q_{n,j}^0}} \right)^{n p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n} \end{aligned}$$

On pose alors pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} n_n^i &= E \left(\max_{j \in \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket} \left(\frac{p_{n,j}^i s_n}{q_{n,j}^i p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n n} \right) \right) + 1 \text{ et} \\ \forall j \in \llbracket 1, \psi(n) \rrbracket, \tilde{\alpha}_{n,j}^i &= \left(n_n^i - \frac{p_{n,j}^{i-1} s_n}{q_{n,j}^i p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n n} \right) n p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n \in \mathbb{Q}^+ \end{aligned}$$

Où E désigne la fonction partie entière. Finalement on a :

$$e_{n,j}(\tau_1^{s_n}) = [f_n(\tau_1^{s_n})]^{n p_{n,j}^n \tilde{q}_{n,j}^n} e^{\frac{-\tilde{\alpha}_{n,j}^{n-1}}{s_n (n-1) \tau_1^{s_n (n-1)}}} \times \dots \times e^{\frac{-\tilde{\alpha}_{n,j}^1}{s_n \tau_1^{s_n}}} \tau_1^{\tilde{\alpha}_{n,j}^0}$$

$$\text{Avec } \tilde{f}_n(t) = \frac{e^{\frac{-1}{s_n n t^{s_n n}}}}{e^{\frac{-n_n^{n-1}}{s_n (n-1) t^{n-1}}} \times \dots \times e^{\frac{-n_n^1}{s_n t}} t^{n_n^0}}.$$

Ainsi, quitte à modifier les valeurs de $\psi(1), \dots, \psi(n-1)$, on peut ramener l'équation à la forme suivante :

$$\frac{\tau_1^{n s_n + 1}}{s_n} \frac{dv_1}{d\tau_1} + a v_1 = \tau_1^{s_n} f_1(\tau_1^{s_n}, \tau_1^{\tilde{\alpha}_{n,1}^0}, \dots, \tau_1^{\tilde{\alpha}_{n,\psi(n)}^0}, v_1, (e_{k,j}(\tau_1^{s_n}))_{(k,j) \in \Upsilon_{n-1}}, f_n(\tau_1^{s_n}))$$

On fait alors de même pour $k = n-1$; ce qui nous donne donc en posant $v_2(\tau_2) = v_1(\tau_2^{s_{n-1}})$ et toujours quitte à modifier $\psi(1), \dots, \psi(n-2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_2^{n s_n s_{n-1} + 1}}{s_n s_{n-1}} \frac{dv_2}{d\tau_2} + a v_2 &= \tau_2^{s_n s_{n-1}} f_2(\tau_2^{s_n s_{n-1}}, \tau_2^{\tilde{\alpha}_{n-1,1}^0}, \dots, \tau_2^{\tilde{\alpha}_{n-1,\psi(n-1)}^0}, \tau_2^{s_{n-1} \tilde{\alpha}_{n,1}^0}, \dots \\ &\dots, \tau_2^{s_{n-1} \tilde{\alpha}_{n,\psi(n)}^0}, v_2, (e_{k,j}(\tau_1^{s_n}))_{(k,j) \in \Upsilon_{n-2}}, \tilde{f}_{n-1}(\tau_2^{s_{n-1}}), \tilde{f}_n(\tau_2^{s_{n-1} s_n})) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \tilde{f}_{n-1}(t) = \frac{e^{\frac{-1}{s_{n-1} s_n (n-1) t^{n-1}}}}{e^{\frac{-n_{n-1}^{n-2}}{s_{n-1} s_n (n-2) t^{n-2}}} \times \dots \times e^{\frac{-n_{n-1}^1}{s_{n-1} s_n t}} t^{n_{n-1}^0}}.$$

On continue ainsi jusque $v_n(\tau_n) = v_{n-1}(\tau_n^{s_1})$ et l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n^{s_1 \dots s_n + 1}}{s_1 \dots s_n} \frac{dv_n}{d\tau_n} + a v_n &= \tau_n^{s_1 \dots s_n} f_n(\tau_n^{s_1 \dots s_n}, \tau_n^{\tilde{\alpha}_{1,1}^0}, \dots, \tau_n^{\tilde{\alpha}_{1,\psi(1)}^0}, \dots \\ &\dots, \tau_n^{s_1 \dots s_{n-1} \tilde{\alpha}_{n,1}^0}, \dots, \tau_n^{s_1 \dots s_{n-1} \tilde{\alpha}_{n,\psi(n)}^0}, v_n, \tilde{f}_1(\tau_n^{s_1}), \dots, \tilde{f}_n(\tau_n^{s_1 \dots s_n})) \end{aligned}$$

Avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $t > 0$:

$$\tilde{f}_i(t) = \frac{e^{\frac{-1}{s_i \dots s_n i t^i}}}{e^{\frac{-n_i^{i-1}}{s_i \dots s_n (i-1)t^{i-1}}} \times \dots \times e^{\frac{-n_i^1}{s_i \dots s_n t} t^{n_i^0}}}$$

Étant donné que $a \in \mathbb{Q}^*$, il existe $(\tilde{p}, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$, $\tilde{p} \wedge q = 1$ tel que $a = \frac{\tilde{p}}{q}$. Les rationnels que sont $\tilde{\alpha}_{1,1}^0, \dots, \tilde{\alpha}_{1,\psi(1)}^0, s_1 \tilde{\alpha}_{2,1}^0, \dots, s_1 \tilde{\alpha}_{2,\psi(2)}^0, \dots, s_1 \dots s_n \tilde{\alpha}_{n,1}^0, \dots, s_1 \dots s_{n-1} \tilde{\alpha}_{n,\psi(n)}^0$ peuvent être renotés de la façon suivante : $\beta_1, \dots, \beta_m$ avec $m = \prod_{1 \leq i \leq n} \psi(i)$. On peut alors poser pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\beta_i = \frac{w_i}{z_i}$, avec $w_i \wedge z_i = 1$ si $\beta_i \neq 0$ et sinon $z_j = 1, w_j = 0$. On pose finalement $\tau = \tau_n^e$ avec $e = \text{ppcm}(q, z_1, \dots, z_m)$, $v(\tau) = v_n(\tau^e) = u(\tau^{s_1 \dots s_n e})$. Ainsi l'équation devient :

$$\tau^{ns_1 \dots s_n e + 1} \frac{dv}{d\tau} + \tilde{p} s_1 \dots s_n e v = e s_1 \dots s_n \tau^{s_1 \dots s_n e} f_{n+1}(\tau^{s_1 \dots s_n e}, v, \tau^{w_1}, \dots, \tau^{w_m}, \tilde{f}_1(\tau^{s_1 \dots s_n e}), \dots, \tilde{f}_n(\tau^{s_1 \dots s_n e}))$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\tau^{s_1 \dots s_n e}) &= \frac{e^{\frac{-1}{s_i \dots s_n i \tau^{i s_1 \dots s_n e}}}}{e^{\frac{-n_i^{i-1}}{s_i \dots s_n (i-1) \tau^{(i-1) s_1 \dots s_n e}}} \times \dots \times e^{\frac{-n_i^1}{s_i \dots s_n \tau^{s_1 \dots s_n e}} \tau^{s_1 \dots s_n e n_i^0}}} \\ &= (g_{is_1 \dots s_n e}(\tau))^e \end{aligned}$$

En posant pour tout $t > 0$:

$$g_{is_1 \dots s_n e}(t) = \frac{e^{\frac{-1}{s_1 \dots s_n e i t^{i s_1 \dots s_n e}}}}{e^{\frac{-n_i^{i-1}}{s_1 \dots s_n e (i-1) t^{(i-1) s_1 \dots s_n e}}} \times \dots \times e^{\frac{-n_i^1}{s_1 \dots s_n e t^{s_1 \dots s_n e}} t^{n_i^0 s_1 \dots s_n e}}}$$

Ainsi, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g_{is_1 \dots s_n e} \in N_{is_1 \dots s_n e}$. Et on a donc le résultat pour $p = s_1 \dots s_n e$, $r = \tilde{p} s_1, \dots, s_n e$ et les g_j mentionnés plus haut.

□

Nous sommes donc ramenés après la proposition précédente aux équations du type :

$$t^{n+1} u' + a u = t f(t, u, g_1, \dots, g_n)$$

Avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g_i \in N_i$. Montrons dans la proposition qui suit, que l'on peut encore réduire ces équations.

Proposition 6. *Les équations du type :*

$$t^{n+1} u' + a u = t f(t, u, g_1, \dots, g_n)$$

Avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g_i \in N_i$, $a \in \mathbb{Z}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et dont les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$.

Alors cette équation peut se ramener à l'aide d'un changement d'inconnue et variable à :

$$\tau^{np+1} \frac{dw}{d\tau} + a_0 w + a_1 \tau w + \dots + a_{np} \tau^{np} w = \tau^{np+1} g(\tau, w, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{np})$$

Avec $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{np}$ dans $\mathbb{Z}$, les $\tilde{g}_i$ dans N_i . Où $w = P_n(\tau^p) + \tau^{np} u(\tau^{np})$, $P_n \in \mathbb{Q}_n[X]$

Démonstration.

$$\begin{aligned} t^{n+1}u' + au &= tf(t, u, g_1(t), \dots, g_n(t)) \\ &= t\tilde{f}(t, u) + tg_1(t)f_1(t, u, g_1(t), \dots, g_n(t)) + \dots + tg_n(t)f_n(t, u, g_1(t), \dots, g_n(t)) \end{aligned}$$

On sait d'après la partie IV qu'il existe $P_n \in \mathbb{Q}_n[X]$ tel qu'en posant $u = P_n(t) + t^n v$, l'équation :

$$t^{n+1}u' + au = t\tilde{f}(t, u)$$

peut se réduire à :

$$t^{n+1}v' + av + b_1tv + \dots + b_nt^n v = t^{n+1}\tilde{f}(t, v)$$

En utilisant le même changement d'inconnue dans l'équation qui nous intéresse, on obtient :

$$\begin{aligned} t^{n+1}v' + av + b_1tv + \dots + b_nt^n v &= t^{n+1}\tilde{f}(t, v) \\ &+ t^{n+1}\frac{g_1(t)}{t^{2n}}f_1(t, P_n(t) + t^n v, t^n\frac{g_1(t)}{t^{2n}}, \dots, t^n\frac{g_n(t)}{t^{2n}}) + \\ &\dots + t^{n+1}\frac{g_n(t)}{t^{2n}}f_n(t, P_n(t) + t^n v, t^n\frac{g_1(t)}{t^{2n}}, \dots, t^n\frac{g_n(t)}{t^{2n}}) \end{aligned}$$

Donc, en posant $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{g}_i : t \mapsto \frac{g_i(t)}{t^{2n}} \in N_i$, on peut écrire l'équation précédente sous la forme :

$$t^{n+1}v' + av + b_1tv + \dots + b_nt^n v = t^{n+1}\tilde{g}(t, v, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n)$$

Ensuite, on écrit qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^\star \times \mathbb{N}^\star$, $p \wedge q = 1$ tel que $a = \frac{p}{q}$. De même, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut écrire $b_i = \frac{p_i}{q_i}$ avec $(p_i, q_i) \in \mathbb{Z}^\star \times \mathbb{N}^\star$, $p_i \wedge q_i = 1$ si $b_i \neq 0$, ou $p_i = 0$, $q_i = 1$. Il suffit ensuite de poser $p = \text{ppcm}(q, q_1, \dots, q_n)$ et $w(\tau) = v(\tau^p)$ pour obtenir le résultat. □

Dans la suite de cette partie, nous essaierons donc de déterminer de manière précise la forme des solutions d'équations du type :

$$t^{n+1}u' + a_0u + a_1u + \dots + a_nt^n u = t^{n+1}f(t, u, g_1, \dots, g_n) (n \geq 1)$$

Avec les a_i dans $\mathbb{Z}$, les g_i dans N_i . De plus, on supposera que f est analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$.

9 Définitions des espaces $G[t, g_1, \dots, g_j]$ et propriétés

Dans cette sous-section, nous allons définir des ensembles de fonctions proches de ceux de la partie II sur lesquels nous montrerons des propriétés. Ces ensembles seront définis par récurrence et serviront de support pour les solutions explicitées dans le théorème qui suivra.

9.0.6 Définitions

Définition 6. On dira que $u \in G^1[t]$ si et seulement si $\exists \alpha > 0$, $a \in \mathbb{Q}$ et Ω_t un ouvert compatible pour $t \mapsto t$ tel que :

- $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$
- et $u = at + tv$ avec $v \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$

Définissons ensuite pour tout $g_1 \in N_1 \subset \mathcal{B}$, l'ensemble $G^1[t, g_1]$.

Définition 7. Soit $g_1 \in N_1$, on dira que $u \in G^1[t, g_1]$ si et seulement si $\exists \alpha > 0$, $a \in G^1[t]$ et Ω_{t, g_1} un ouvert compatible pour $(t \mapsto t, g_1)$ tel que :

- $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$
- et $u = a + g_1 v$ avec $v \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$

Ensuite, on définit par récurrence sur j les ensembles $G^1[t, g_1, \dots, g_j]$ pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$.

Fixons $j \geq 1$ et supposons les ensembles $G^1[t, g_1, \dots, g_j]$ bien défini pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$. Et définissons pour tout $(g_1, \dots, g_j, g_{j+1}) \in N_1 \times \dots \times N_j \times N_{j+1}$ les ensembles $G^1[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$.

Définition 8. Soit $(g_1, \dots, g_{j+1}) \in N_1 \times \dots \times N_{j+1}$, on dira que $u \in G^1[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ si et seulement si $\exists \alpha > 0$, $a \in G^1[t, g_1, \dots, g_j]$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}$ un ouvert compatible pour $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{j+1})$ tel que :

- $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$
- et $u = a + g_{j+1} v$ avec $v \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$

Montrons que ces ensembles ont une structure d'anneaux :

Proposition 7. $(G^1[t], +, \times)$ est un anneau commutatif. De même pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ on a $(G^1[t, g_1, \dots, g_j], +, \times)$ anneau commutatif. On a également pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$:

$$G^1[t] \subset G^1[t, g_1] \subset \dots \subset G^1[t, g_1, \dots, g_j]$$

Démonstration. Montrons que $G^1[t]$ possède une structure d'anneau. Soit u et v dans $G^1[t]$ alors $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\exists a, b \in \mathbb{Q}$, $\exists \Omega_t^1, \Omega_t^2$ ouverts compatibles avec $t \mapsto t$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_t^1}^0$, $v \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_t^2}^0$ et $u = at + tu_1$, $v = bt + tv_1$ avec $u_1 \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_t^1}^0$, $v_1 \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_t^2}^0$. Ainsi en choisissant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ et $\Omega_t = \Omega_t^1 \cap \Omega_t^2$ on a u et v dans $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. Donc par propriété d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ on a : $u + v$ dans $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ et uv dans $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. De plus $u + v = (a + b)t + t(u_1 + v_1)$ et $uv = 0 + t(abt + btu_1 + atv_1 + tu_1v_1)$ encore une fois les propriétés d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ nous permettent d'affirmer que $u_1 + v_1 \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ et que $abt + btu_1 + atv_1 + tu_1v_1 \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. Ainsi nous obtenons bien 2 lois de compositions internes. De plus, $\forall \alpha > 0$ et $\forall \Omega_t$ ouvert compatible avec $t \mapsto t$ on a $0 \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ et fait donc office d'élément neutre car la fonction nulle s'écrit $at + tu_1$ pour $a = 0$ et u_1 la fonction nulle. On a trivialement que pour $u \in G^1[t]$, $-u$ est l'inverse de u pour l'addition. Les deux lois sont associatives, commutatives et $\times$ est distributive par $+$ tout simplement par commutativité, associativité et distributivité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Montrons à présent que $G^1[t, g_1]$ possède une structure d'anneau pour tout $g_1 \in N_1$. Soit $g_1 \in N_1$ et soit u et v dans $G^1[t, g_1]$ alors $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\exists a, b \in G^1[t]$, $\exists \Omega_{t, g_1}^1, \Omega_{t, g_1}^2$

ouverts compatibles avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1}}^0$, $v \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_{t, g_1}}^0$ et $u = a + g_1 u_1, v = b + g_1 v_1$ avec $u_1 \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1}}^0$, $v_1 \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_{t, g_1}}^0$. Étant donné que $a \in G^1[t]$, $\exists \alpha_3 > 0$ et Ω_t^3 ouvert compatible pour $t \mapsto t$ tel que $a \in \Theta_{\alpha_3, \Omega_t^3}$, de même $b \in G^1[t]$, $\exists \alpha_4 > 0$ et Ω_t^4 ouvert compatible pour $t \mapsto t$ tel que $b \in \Theta_{\alpha_4, \Omega_t^4}$. Ainsi, on choisissant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $\Omega_{t, g_1} = \Omega_{t, g_1}^1 \cap \Omega_{t, g_1}^2 \cap \Omega_t^3 \cap \Omega_t^4$ on a u, v, a et b dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$. Donc, par propriété d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$ on a : $u + v$ dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$ et uv dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$. De plus, $u + v = (a + b) + g_1(u_1 + v_1)$ et $uv = ab + g_1(bu_1 + av_1 + g_1 u_1 v_1)$ encore une fois les propriétés d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$ nous permettent d'affirmer que $u_1 + v_1 \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ et que $bu_1 + av_1 + u_1 v_1 \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$. Ainsi, nous obtenons bien 2 lois de compositions internes. De plus, $\forall \alpha > 0$ et $\forall \Omega_{t, g_1}$ ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ on a $0 \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$ qui fait donc office d'élément neutre, car la fonction nulle s'écrit $a + g_1 u_1$ pour $a = 0$ et u_1 la fonction nulle. On a trivialement que pour $u \in G^1[t, g_1]$, $-u$ est l'inverse de u pour l'addition. Les deux lois sont associatives, commutatives et $\times$ est distributive par $+$ tout simplement par commutativité, associativité et distributivité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Montrons à présent pour $j \geq 2$ que $G^1[t, g_1, \dots, g_j]$, possède une structure d'anneau pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$. Soit $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ et soit u et v dans $G^1[t, g_1, \dots, g_j]$ alors $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\exists a, b \in G^1[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$, $\exists \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^1, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^2$ ouverts compatibles avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_j)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^1}^0$, $v \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^2}^0$ et $u = a + g_j u_1, v = b + g_j v_1$ avec $u_1 \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^1}^0$, $v_1 \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^2}^0$. Étant donné que $a \in G^1[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$, $\exists \alpha_3 > 0$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{j-1}}^3$ ouvert compatible pour $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{j-1})$ tel que $a \in \Theta_{\alpha_3, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j-1}}^3}$, de même $b \in G^1[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$, $\exists \alpha_4 > 0$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{j-1}}^4$ ouvert compatible pour $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{j-1})$ tel que $b \in \Theta_{\alpha_4, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j-1}}^4}$. Ainsi on choisissant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_j} = \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^1 \cap \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^2 \cap \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j-1}}^3 \cap \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j-1}}^4$ on a u, v, a et b dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$. Donc par propriété d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$ on a : $u + v$ dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$ et uv dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$. De plus $u + v = (a + b) + g_j(u_1 + v_1)$ et $uv = ab + g_j(bu_1 + av_1 + g_j u_1 v_1)$ encore une fois les propriétés d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$ nous permettent d'affirmer que $u_1 + v_1 \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ et que $bu_1 + av_1 + u_1 v_1 \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$. Ainsi nous obtenons bien 2 lois de compositions internes. De plus $\forall \alpha > 0$ et $\forall \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}$ ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_j)$ on a $0 \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$ qui fait donc office d'élément neutre, car la fonction nulle s'écrit $a + g_1 u_1$ pour $a = 0$ et u_1 la fonction nulle. On a trivialement que pour $u \in G^1[t, g_1, \dots, g_j]$, $-u$ est l'inverse de u pour l'addition. Les deux lois sont associatives, commutatives et $\times$ est distributive par $+$ tout simplement par commutativité, associativité et distributivité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $g_1 \in N_1$ alors montrons $G^1[t] \subset G^1[t, g_1]$. Soit $u \in G^1[t]$ alors il existe $\alpha > 0$ et Ω_t un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. Il suffit alors de noter Ω_{t, g_1} l'intersection de Ω_t avec un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ pour obtenir que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$, de plus $u = u + g_1.0$ donc $u \in G^1[t, g_1]$ et ce raisonnement peut être tenu pour tout $g_1 \in N_1$. De même soit $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ ($j \geq 2$). Montrons que pour tout $k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$ on a : $G^1[t, g_1, \dots, g_k] \subset G^1[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$. Soit $u \in G^1[t, g_1, \dots, g_k]$ alors il existe $\alpha > 0$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_k}$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_k)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_k}}^0$, il suffit alors de noter $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{k+1}}$ l'intersection de $\Omega_{t, g_1, \dots, g_k}$ avec un ouvert compatible de $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{k+1})$ pour obtenir que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{k+1}}}^0$, de plus $u = u + g_{k+1}.0$ donc $u \in G^1[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$ et ce raisonnement peut être tenu pour tout $k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$.

□

Définissons à présent par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $G^k[t]$ et $G^k[t, g_1, \dots, g_j]$ pour tout $j \geq 1$ et $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$.
 Supposons donc bien définis les ensembles $G^k[t]$ et $G^k[t, g_1, \dots, g_j]$ pour tout $j \geq 1$ et $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$. Et définissons les ensembles $G^{k+1}[t]$ et $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ pour tout $j \geq 1$ et $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$

Définition 9. On dira que $u \in G^{k+1}[t]$ si et seulement si $\exists \alpha > 0$, $a \in \mathbb{Q}$ et Ω_t un ouvert compatible pour $t \mapsto t$ tel que :

- $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$
- et $u = at + tv$ avec $v \in G^k[t]$

Définissons ensuite pour tout $g_1 \in N_1 \subset \mathcal{B}$, l'ensemble $G^{k+1}[t, g_1]$.

Définition 10. Soit $g_1 \in N_1$, on dira que $u \in G^{k+1}[t, g_1]$ si et seulement si $\exists \alpha > 0$, $a \in G^{k+1}[t]$ et Ω_{t, g_1} un ouvert compatible pour $(t \mapsto t, g_1)$ tel que :

- $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$
- et $u = a + g_1 v$ avec $v \in G^k[t, g_1]$

Ensuite, on définit par récurrence sur j les ensembles $G^1[t, g_1, \dots, g_j]$ pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$.
 Fixons $j \geq 1$ et supposons les ensembles $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ bien définis pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$. Définissons pour tout $(g_1, \dots, g_j, g_{j+1}) \in N_1 \times \dots \times N_j \times N_{j+1}$ les ensembles $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$.

Définition 11. Soit $(g_1, \dots, g_{j+1}) \in N_1 \times \dots \times N_{j+1}$, on dira que $u \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ si et seulement si $\exists \alpha > 0$, $a \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}$ un ouvert compatible pour $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{j+1})$ tel que :

- $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$
- et $u = a + g_{j+1} v$ avec $v \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$

Montrons que les $G^k[t, g_1, \dots, g_j]$ et les $G^k[t]$ ont des structures d'anneaux.

Proposition 8. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$ et $\forall (g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ on a les ensembles $G^k[t]$ et $G^k[t, g_1, \dots, g_j]$ qui possèdent une structure d'anneau. On a de plus que :

$$G^k[t] \subset G^k[t, g_1] \subset \dots \subset G^k[t, g_1, \dots, g_j]$$

$$\text{et } G^{k+1}[t] \subset G^k[t], G^{k+1}[t, g_1] \subset G^k[t, g_1], \dots, G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j] \subset G^k[t, g_1, \dots, g_j]$$

Remarque 5. Les inclusions de la proposition sont comprises à injection près. Par exemple, la fonction $(t, D) \mapsto t \in G^k[t]$ et donc $(t, g_1, D) \mapsto t \in G^k[t, g_1]$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $k \geq 1$. A savoir, que $G^k[t]$, $G^k[t, g_1, \dots, g_j]$ possède des structures d'anneaux pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ et que de plus :

$$G^k[t] \subset G^k[t, g_1] \subset \dots \subset G^k[t, g_1, \dots, g_j]$$

$$\text{et } G^{k+1}[t] \subset G^k[t], G^{k+1}[t, g_1] \subset G^k[t, g_1], \dots, G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j] \subset G^k[t, g_1, \dots, g_j]$$

Le rang initial a déjà été traité en partie dans la proposition qui précède. Il reste à montrer que :

$$G^2[t] \subset G^1[t], G^2[t, g_1] \subset G^1[t, g_1], \dots, G^2[t, g_1, \dots, g_j] \subset G^1[t, g_1, \dots, g_j]$$

Soit $u \in G^2[t]$ donc $\exists \alpha_1 > 0$, $\exists \Omega_1$ un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_1}^0$ et de plus il existe $a \in \mathbb{Q}$ et $u_1 \in G^1[t]$ tel que : $u = at + tu_1$. Comme $u_1 \in G^1[t]$, il existe $\alpha > 0$ et Ω un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $u_1 \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$. Donc $u, u_1 \in \Theta_{\min(\alpha_1, \alpha)^0, \Omega_1 \cap \Omega}^0$ et finalement $u \in G^1[t]$. Ce travail étant reductible pour tout $u \in G^2[t]$ on a $G^2[t] \subset G^1[t]$

Soit $u \in G^2[t, g_1]$ donc $\exists \alpha_1 > 0$, $\exists \Omega_1$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_1}^0$ et de plus il existe $a \in G^2[t]$ et $u_1 \in G^1[t, g_1]$ tel que : $u = at + tu_1$. Comme $u_1 \in G^1[t, g_1]$, il existe $\alpha > 0$ et Ω un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $u_1 \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$. En utilisant que $G^2[t] \subset G^1[t]$, on obtient $a \in G^1[t]$. Donc $u, u_1 \in \Theta_{\min(\alpha_1, \alpha)^0, \Omega_1 \cap \Omega}^0$ et finalement $u \in G^1[t, g_1]$. Ce travail étant reductible pour tout $u \in G^2[t, g_1]$ on a $G^2[t, g_1] \subset G^1[t, g_1]$

On montre alors les autres inclusions par récurrence en s'appuyant sur le même principe. La propriété est alors vraie au rang 1.

Supposons donc la propriété vraie aux rangs inférieurs à k et montrons la au rang $k + 1$.

Commençons déjà par montrer que :

$$G^{k+1}[t] \subset G^k[t], G^{k+1}[t, g_1] \subset G^k[t, g_1], \dots, G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j] \subset G^k[t, g_1, \dots, g_j]$$

Et pour ça, nous montrons d'abord que pour $c \in \mathbb{Q}$, on a $(t, D) \mapsto ct \in G^k[t]$. Il est facile de voir que pour tout $\alpha_0 > 0$ et Ω_t^0 ouvert compatible avec $t \mapsto t$ on a $(t, D) \mapsto ct \in \Theta_{\alpha_0, \Omega_t^0}^0$, de plus $ct = ct + t \cdot 0$ avec $0 \in G^{k-1}[t]$ (si $k \geq 2$) car anneau, sinon $0 \in \Theta_{\alpha_0, \Omega_t^0}^0$ car $\Theta_{\alpha_0, \Omega_t^0}^0$ algèbre. On conclut donc que pour tout $c \in \mathbb{Q}$, on a $(t, D) \mapsto ct \in G^k[t]$.

Ce résultat sera utilisé dans les lignes qui vont suivre.

Montrons que $G^{k+1}[t] \subset G^k[t]$:

Soit $u \in G^{k+1}[t]$ alors on a par définition le fait qu'il existe $\alpha > 0$ et Ω_t un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. De plus, il existe $a \in \mathbb{Q}$ et $u_1 \in G^k[t]$ tel que $u = at + tu_1$. Comme $t \mapsto at$, $t \mapsto t$ et u_1 sont dans $G^k[t]$, on a par propriété d'algèbre de $G^k[t]$ (hypothèse de récurrence) que $u \in G^k[t]$. Ce travail pouvant être fait pour tout $u \in G^{k+1}[t]$, on a $G^{k+1}[t] \subset G^k[t]$.

Maintenant, montrons $G_{k+1}[t, g_1] \subset G_k[t, g_1]$ pour tout $g_1 \in N_1$. Soit $g_1 \in N_1$. Et soit $u \in G_{k+1}[t, g_1]$. On a alors par définition qu'il existe $\alpha > 0$ et Ω_{t, g_1} un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$. De plus, $\exists a \in G^{k+1}[t]$ et $u_1 \in G^k[t, g_1]$ tel que $u = a + g_1 u_1$. On a vu précédemment que $G^{k+1}[t] \subset G^k[t]$ donc $a \in G^k[t]$. De plus, $u_1 \in G^k[t, g_1]$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence si $k \geq 2$ on a $u_1 \in G^{k-1}[t, g_1]$ ce qui nous donne $u \in G^k[t, g_1]$. Si par contre $k = 1$, alors il existe $\alpha_0 > 0$ et Ω_{t, g_1}^0 ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $u_1 \in \Theta_{\alpha_0, \Omega_{t, g_1}^0}^0$. Pour obtenir que u est dans $G^1[t, g_1]$ il suffit de remarquer que u et u_1 sont dans $\Theta_{\min(\alpha, \alpha_0)^0, \Omega_{t, g_1} \cap \Omega_{t, g_1}^0}^0$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que pour $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ on a $G^{k+1}[g_1, \dots, g_j] \subset G^k[g_1, \dots, g_j]$. Nous le montrons par récurrence sur $j \geq 1$.

La propriété au rang 1 a été démontrée juste au dessus.

Supposons donc la propriété vraie pour les rangs inférieurs à $j \geq 1$ et montrons la pour $j + 1$. On se munit donc de $(g_1, \dots, g_{j+1}) \in N_1 \times \dots \times N_{j+1}$, il nous faut montrer que $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}] \subset G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$. Soit $u \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$. Alors, par définition, il existe $\alpha > 0$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{j+1})$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$. De plus, il existe $a \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ et $u_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ tel que $u = a + g_{j+1}u_1$. Or, si $a \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$, on a aussi $a \in G^k[t, g_1, \dots, g_j]$ d'après l'hypothèse de récurrence. De plus, $u_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}] \subset G^{k-1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ (pour $k \geq 2$), ce qui donne $u \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$. Si par contre $k = 1$ alors le fait que $u_1 \in G^1[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ implique l'existence de $\alpha_0 > 0$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}^0$ un ouvert compatible avec $(t, g_1, \dots, g_{j+1})$ tel que $u_1 \in \Theta_{\alpha_0, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$. Il suffit alors de remarquer que $u, u_1 \in \Theta_{\min(\alpha_0, \alpha), \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}} \cap \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}^0}$ pour conclure que $u \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$.

Fixons $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$. Soit $u \in G^{k+1}[t]$ alors $\exists \alpha > 0$ et $\exists \Omega_t$ un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. Prenons alors Ω_{t, g_1} un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ inclus dans Ω_t (il suffit de prendre l'intersection d'un ouvert compatible quelconque et de Ω_t). Alors on a, à injection près $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. De plus, $\exists a \in \mathbb{Q}$ et $u_1 \in G^k[t]$ tel que $u = at + tu_1$. Comme $u_1 \in G^k[t]$, on a aussi par hypothèse de récurrence que $u_1 \in G^k[t, g_1]$, ce qui nous donne que $u \in G^{k+1}[t, g_1]$. Conclusion : $G^{k+1}[t] \subset G^{k+1}[t, g_1]$.

Soit $u \in G^{k+1}[t]$ alors $\exists \alpha > 0$ et $\exists \Omega_t$ un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. Prenons alors Ω_{t, g_1} un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ inclus dans Ω_t (il suffit de prendre l'intersection d'un ouvert compatible quelconque de $(t \mapsto t, g_1)$ et de Ω_t). De plus $\exists a \in \mathbb{Q}$ et $u_1 \in G^k[t]$ tel que $u = at + tu_1$. Comme $u_1 \in G^k[t]$ on a donc $tu_1 = 0.t + tu_1 \in G^{k+1}[t]$. De plus, $at = at + t.0 \in G^{k+1}[t]$. La somme de 2 éléments dans $G^{k+1}[t]$ est dans $G^{k+1}[t]$. Ceci sera montré plus bas par récurrence sans aucun lien avec les inclusions recherchées. Ainsi $u = u + g_1.0 \in G^{k+1}[t, g_1]$.

Soit $g_1 \in N_1$. Soit $u \in G^{k+1}[t, g_1]$ alors $\exists \alpha > 0$ et $\exists \Omega_{t, g_1}$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$. Prenons alors Ω_{t, g_1, g_2} un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, g_2)$ inclus dans Ω_{t, g_1} (il suffit de prendre l'intersection d'un ouvert compatible quelconque et de Ω_{t, g_1}). De plus, $\exists a \in G^{k+1}[t]$ et $u_1 \in G^k[t, g_1]$ tel que $u = a + g_1u_1$. Comme $u_1 \in G^k[t, g_1]$ on a donc $g_1u_1 = 0 + g_1u_1 \in G^{k+1}[t, g_1]$. De plus, $a \in G^{k+1}[t] \subset G^{k+1}[t, g_1]$ (montré dans le paragraphe précédent). La somme de 2 éléments dans $G^{k+1}[t, g_1]$ est dans $G^{k+1}[t, g_1]$. Ceci sera montré plus bas par récurrence sans aucun lien avec les inclusions recherchées. Ainsi $u = u + g_2.0 \in G^{k+1}[t, g_1, g_2]$.

A présent, supposons que la propriété soit vraie pour tous les rangs inférieurs à r ($2 \leq r \leq j$) c'est à dire :

$$G^{k+1}[t] \subset G^{k+1}[t, g_1] \subset \dots \subset G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{r-1}] \subset G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_r]$$

Soit $u \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_r]$ ($1 \leq r \leq j-1$) $\exists \alpha > 0$ et $\exists \Omega_{t, g_1, \dots, g_r}$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_r)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_r}}^0$. Prenons alors $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{r+1}}$ un ouvert compatible

avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{r+1})$ inclus dans $\Omega_{t, g_1, \dots, g_r}$ (il suffit de prendre l'intersection d'un ouvert compatible quelconque et de $\Omega_{t, g_1, \dots, g_r}$). Alors on a, à injection près $u \in \Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{r+1}}}^0$. De plus $\exists a \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{r-1}]$ ($r \geq 2$) et $u_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_r]$ tel que $u = a + g_r u_1$. Comme $u_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_r]$ on a donc $g_r u_1 = 0 + g_r u_1 \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_r]$. De plus $a \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{r-1}] \subset G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_r]$. La somme de 2 éléments dans $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_r]$ est dans $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_r]$. Ceci sera montré plus bas par récurrence sans aucun lien avec les inclusions recherchées. Ainsi $u = u + g_{r+1}.0 \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{r+1}]$.

Montrons maintenant que $G^{k+1}[t]$ possède une structure d'anneau. Comme $G^{k+1}[t] \subset G^k[t]$ nous allons montrer que $G^{k+1}[t]$ est un sous anneau de $G^k[t]$. Soit u et v dans $G^{k+1}[t]$ alors $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\exists a, b \in \mathbb{Q}$, $\exists \Omega_t^1, \Omega_t^2$ ouverts compatibles avec $t \mapsto t$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_t^1}^0$, $v \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_t^2}^0$ et $u = at + tu_1, v = bt + tv_1$ avec $u_1 \in G^k[t]$, $v_1 \in G^k[t]$.

Ainsi, en choisissant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ et $\Omega_t = \Omega_t^1 \cap \Omega_t^2$ on a u et v dans $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. Donc par propriété d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ on a : $u + v$ dans $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$ et uv dans $\Theta_{\alpha, \Omega_t}^0$. Donc $u - v = (a - b)t + t(u_1 - v_1)$. Ainsi $a - b \in \mathbb{Q}$ et $u_1 - v_1 \in G^k[t]$ par utilisation de l'hypothèse de récurrence sur k .

De même on a $uv = 0t + t(abt + btu_1 + atv_1 + tu_1v_1)$. $0 \in \mathbb{Q}$ et en utilisant le fait que $(t, D) \mapsto ct \in G^k[t]$ ($\forall c \in \mathbb{Q}$) avec l'hypothèse de récurrence sur k (à savoir $G^k[t]$ possède une structure d'anneau) on récupère le fait que $abt + atv_1 + btu_1 + tu_1v_1 \in G^k[t]$. Ainsi, $uv \in G^{k+1}[t]$. Et finalement $G^{k+1}[t]$ possède bien une structure d'anneau.

Nous allons montrer par récurrence sur $j \geq 1$ que pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$, que $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ possède une structure d'anneau.

- Montrons la propriété au rang initial. Soit $g_1 \in N_1$, pour montrer que $G^{k+1}[t, g_1]$ possède une structure d'anneau nous allons montrer que $G^{k+1}[t, g_1]$ est un sous-anneaux de $G^k[t, g_1]$. Soit u et v dans $G^{k+1}[t, g_1]$ alors $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\exists a, b \in G^{k+1}[t]$, $\exists \Omega_{t, g_1}^1, \Omega_{t, g_1}^2$ ouverts compatibles avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1}^1}^0$, $v \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_{t, g_1}^2}^0$ et $u = a + g_1 u_1, v = b + g_1 v_1$ avec $u_1 \in G^k[t, g_1]$, $v_1 \in G^k[t, g_1]$. Étant donné que $a \in G^{k+1}[t]$, $\exists \alpha_3 > 0$ et Ω_t^3 ouvert compatible pour $t \mapsto t$ tel que $a \in \Theta_{\alpha_3, \Omega_t^3}^0$, de même $b \in G^{k+1}[t]$, $\exists \alpha_4 > 0$ et Ω_t^4 ouvert compatible pour $t \mapsto t$ tel que $b \in \Theta_{\alpha_4, \Omega_t^4}^0$. Ainsi on choisissant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $\Omega_{t, g_1} = \Omega_{t, g_1}^1 \cap \Omega_{t, g_1}^2 \cap \Omega_t^3, \Omega_t^4$ on a u, v, a et b dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$. Donc par propriété d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$ on a : $u + v$ dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$ et uv dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1}}^0$. Dans un premier temps on a $u - v = (a - b) + g_1(u_1 - v_1)$, or d'après l'hypothèse de récurrence on a $G^k[t, g_1]$ qui possède une structure d'anneau donc $u_1 - v_1 \in G^k[t, g_1]$. De plus, $a, b \in G^{k+1}[t]$ et il a été montré que $G^{k+1}[t]$ a une structure d'anneau, donc $a - b \in G^{k+1}[t]$. Ce qui mène à $u + v \in G^{k+1}[t, g_1]$. Dans un second temps $uv = ab + g_1(bu_1 + av_1 + g_1 u_1 v_1)$. On utilise de nouveau que $a, b \in G^{k+1}[t]$ et la structure d'anneau de $G^{k+1}[t]$ pour en déduire que $ab \in G^{k+1}[t]$. Ensuite $a \in G^{k+1}[t] \subset G^k[t] \subset G^k[t, g_1]$ de même pour b donc en utilisant la structure d'anneau de $G^k[t, g_1]$ on a $bu_1 + av_1 + g_1 u_1 v_1 \in G^k[t, g_1]$. Ce qui finalement implique $uv \in G^{k+1}[t, g_1]$

- Supposons donc la propriété vraie pour les rangs inférieurs à $j \geq 1$ et montrons la au rang $j + 1$.

Soit $(g_1, \dots, g_{j+1}) \in N_1 \times \dots \times N_{j+1}$. Montrons que $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ est un sous anneau de $G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$. Soit u et v dans $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ alors $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\exists a, b \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$, $\exists \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}^1, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}^2$ ouverts compatibles avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{j+1})$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$, $v \in \Theta_{\alpha_2, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$ et $u = a + g_{j+1}u_1, v = b + g_{j+1}v_1$ avec $u_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$, $v_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$. Étant donné que $a \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$, $\exists \alpha_3 > 0$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^3$ ouvert compatible pour $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_j)$ tel que $a \in \Theta_{\alpha_3, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^3}^0$, de même $b \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$, $\exists \alpha_4 > 0$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^4$ un ouvert compatible pour $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_j)$ tel que $b \in \Theta_{\alpha_4, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^4}^0$. Ainsi, en choisissant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $\Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}} = \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}^1 \cap \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}^2 \cap \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^3 \cap \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^4$ on a u, v, a et b dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$. Donc, par propriété d'algèbre de $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_{j+1}}}^0$ on a : $u + v$ dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$ et uv dans $\Theta_{\alpha, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}}^0$.

Dans un premier temps, on a $u - v = (a - b) + g_{j+1}(u_1 - v_1)$, or d'après l'hypothèse de récurrence on a $G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ qui possède une structure d'anneau donc $u_1 - v_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$. De plus, $a, b \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ et il a été montré que $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ a une structure d'anneau, donc $a - b \in G^{k+1}[t]$. Ce qui mène à $u + v \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$. Dans un second temps, $uv = ab + g_{j+1}(bu_1 + av_1 + g_{j+1}u_1v_1)$. On utilise de nouveau $a, b \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ et la structure d'anneau de $G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$ pour en déduire que $ab \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j]$. Ensuite, $a \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_j] \subset G^k[t, g_1, \dots, g_j] \subset G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ de même pour b donc en utilisant la structure d'anneau de $G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$ on a $bu_1 + av_1 + g_{j+1}u_1v_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$. Ce qui finalement implique $uv \in G^{k+1}[t, g_1, \dots, g_{j+1}]$

□

On termine par la définition suivante :

Définition 12. On définit $G[t] = \bigcap_{k \geq 1} G^k[t]$ et de même pour tout $j \geq 1$ et tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ on définit :

$$G[t, g_1, \dots, g_j] = \bigcap_{k \geq 1} G^k[t, g_1, \dots, g_j]$$

Corollaire 1. Les espaces $G[t]$ et $G[t, g_1, \dots, g_j]$ avec $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ possèdent des structures d'anneaux. De plus on a les inclusions suivantes :

$$G[t] \subset G[t, g_1] \subset G[t, g_1, g_2] \subset \dots \subset G[t, g_1, \dots, g_{j-1}] \subset G[t, g_1, \dots, g_j]$$

Démonstration. Le résultat s'obtient rapidement en constatant que l'intersection quelconque de sous-anneau est un sous-anneau. En effet, les $G^k[t]$ (pour $k \geq 2$) sont tous des sous-anneaux de $G^1[t]$. De même, les $G^k[t, g_1, \dots, g_j]$ (pour $k \geq 2$) sont tous des sous-anneaux de $G^1[t, g_1, \dots, g_j]$. Les inclusions se déduisent de la proposition qui précède. □

Présentons des propriétés sur ces ensembles $G[t]$ et $G[t, g_1, \dots, g_j]$

Nous définissons également des type d'équations.

Définition 13. On dira que u vérifie une équation de type F_0 si et seulement s'il existe une fonction f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et dont les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$, il existe un entier $n \geq 2$, $a \in \mathbb{Q}^*$, $v_1, \dots, v_m \in G[t]$ tel que u vérifie l'équation :

$$t^n u' + au = tf(t, u, w_1, \dots, w_m)$$

Avec sur $]0, +\infty[\cap V$ (V un voisinage de 0) : $w_1(t) = v_1(t, D(t)), \dots, w_m(t) = v_m(t, D(t))$.

De même on définit :

Définition 14. Soit $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$. On dira que u vérifie une équation de type $F_j[g_1, \dots, g_j]$ si et seulement s'il existe une fonction f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et dont les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$, il existe un entier $n \geq j + 2$, $a \in \mathbb{Q}^*$, $v_1, \dots, v_m \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que u vérifie l'équation :

$$t^n u' + au = tf(t, g_1, \dots, g_j, u, w_1, \dots, w_m)$$

On a sur $]0, +\infty[\cap V$ (V un voisinage de 0) les égalités :

$$w_1(t) = v_1(t, g_1(t), \dots, g_j(t), D(t)), \dots, w_m(t) = v_m(t, g_1(t), \dots, g_j(t), D(t)).$$

9.1 Propriétés des ensembles $G[t]$, $G[t, g_1, \dots, g_j]$

Énonçons une première propriété des ensembles définis précédemment.

Proposition 9. Pour tout $u \in G[t]$, il existe $a \in \mathbb{Q}$ et $v \in G[t]$ tel que :

$$u = at + tv$$

Et pour tout $g_1 \in N_1$ et tout $u \in G[t, g_1]$, il existe $a \in G[t]$ et $v \in G[t, g_1]$ tel que :

$$u = a + g_1 v$$

Et pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ et tout $u \in G[t, g_1, \dots, g_j]$, il existe $a \in G[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$ et $v \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que :

$$u = a + g_j v$$

Démonstration. Soit $u \in G[t]$. Comme $u \in G[t] = \bigcap_{i \geq 1} G^i[t]$, on a que $u \in G^1[t]$. Donc, il existe $\alpha_1 > 0$, Ω_t^1 un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_t^1}^0$. De plus, il existe $a_1 \in \mathbb{Q}$ et $v_1 \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_t^1}^0$ tel que :

$$u = a_1 t + tv_1$$

Nous allons montrer que $v_1 \in G[t]$.

Soit $k \geq 2$. On a $u \in G[t] = \bigcap_{i \geq 1} G^i[t]$, donc $u \in G^k[t]$. Cela signifie qu'il existe $\alpha_k > 0$,

Ω_t^k un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que : $u \in \Theta_{\alpha_k, \Omega_t^k}^0$. De plus, il existe $a_k \in \mathbb{Q}$ et $v_k \in G^{k-1}[t]$ tel que :

$$u = a_k t + t v_k$$

Comme $v_k \in G^{k-1}[t]$, $\exists \tilde{\alpha}_k > 0$, $\exists \tilde{\Omega}_t^k$ un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $v_k \in \Theta_{\tilde{\alpha}_k, \tilde{\Omega}_t^k}^0$. On sait que $a_1 t + t v_1 = a_k t + t v_k$ donc pour tout $t \in]0, \min(\alpha_k, \tilde{\alpha}_k, \alpha_1)[$ on a :

$$a_1 + v_1 = a_k + v_k$$

Or $(v_1, v_k) \in (\Theta_{\min(\alpha_1, \alpha_k, \tilde{\alpha}_k), \Omega_t^1 \cap \tilde{\Omega}_t^k \cap \Omega_t^k}^0)^2$, donc par passage à la limite quand $t \rightarrow 0$, on a $a_1 = a_k$. Ceci implique que $t v_1 = t v_k$ pour tout $t \in]0, \min(\alpha_1, \alpha_k, \tilde{\alpha}_k)[$, donc par prolongement analytique on a : $v_1 = v_k$. Ainsi, $v_1 \in G^{k-1}[t]$. Ce travail peut être fait pour tout $k \geq 2$, donc $v_1 \in G[t]$.

Soit $u \in G[t, g_1]$. Comme $u \in G[t, g_1] = \bigcap_{i \geq 1} G^i[t, g_1]$, on a que $u \in G^1[t, g_1]$. Donc, il existe $\alpha_1 > 0$, Ω_{t, g_1}^1 un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1}^1}^0$. De plus, il existe $a_1 \in G^1[t]$ et $v_1 \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1}^1}^0$ tel que :

$$u = a_1 + g_1 v_1$$

Nous allons montrer que $v_1 \in G[t, g_1]$.

Soit $k \geq 2$. On a $u \in G[t, g_1] = \bigcap_{i \geq 1} G^i[t, g_1]$, donc $u \in G^k[t, g_1]$. Cela signifie qu'il existe $\alpha_k > 0$, Ω_{t, g_1}^k un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que : $u \in \Theta_{\alpha_k, \Omega_{t, g_1}^k}^0$. De plus, il existe $a_k \in G^k[t]$ et $v_k \in G^{k-1}[t, g_1]$ tel que :

$$u = a_k + g_1 v_k$$

Comme $v_k \in G^{k-1}[t, g_1]$, $\exists \tilde{\alpha}_k > 0$, $\exists \tilde{\Omega}_{t, g_1}^k$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ tel que $v_k \in \Theta_{\tilde{\alpha}_k, \tilde{\Omega}_{t, g_1}^k}^0$.

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_k, \tilde{\alpha}_k)$ et $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_k^1 \cap \tilde{\Omega}_k^1$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$. Ainsi sur $\Omega[\alpha]$ on a $a_1 + g_1 v_1 = a_k + g_1 v_k$, en utilisant l'analyticité des 2 membres on a $a_1 = a_k$ et $v_1 = v_k$. Donc $v_1 \in G^{k-1}[t, g_1]$ et $a_1 \in G^k[t]$. Ce travail peut être fait pour tout $k \geq 2$, donc $v_1 \in G[t, g_1]$ et $a_1 \in G[t]$.

Soit $(t, g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$ avec $j \geq 2$. Soit $u \in G[t, g_1, \dots, g_j]$. Comme $u \in G[t, g_1, \dots, g_j] = \bigcap_{i \geq 1} G^i[t, g_1, \dots, g_j]$, on a que $u \in G^1[t, g_1, \dots, g_j]$. Donc, il existe $\alpha_1 > 0$, $\Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^1$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_j)$ tel que $u \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^1}^0$. De plus, il existe $a_1 \in G^1[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$ et $v_1 \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^1}^0$ tel que :

$$u = a_1 + g_j v_1$$

Nous allons montrer que $v_1 \in G[t, g_1, \dots, g_j]$.

Soit $k \geq 2$. On a $u \in G[t, g_1, \dots, g_j] = \bigcap_{i \geq 1} G^i[t, g_1, \dots, g_j]$, donc $u \in G^k[t, g_1, \dots, g_j]$. Cela

signifie qu'il existe $\alpha_k > 0$, $\Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^k$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_j)$ tel que : $u \in \Theta_{\alpha_k, \Omega_{t, g_1, \dots, g_j}^k}^0$. De plus, il existe $a_k \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$ et $v_k \in G^{k-1}[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que :

$$u = a_k + g_1 v_k$$

Comme $v_k \in G^{k-1}[t, g_1, \dots, g_j]$, $\exists \tilde{\alpha}_k > 0$, $\exists \tilde{\Omega}_{t, g_1, \dots, g_j}^k$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_j)$ tel que $v_k \in \Theta_{\tilde{\alpha}_k, \tilde{\Omega}_{t, g_1, \dots, g_j}^k}^0$.

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_k, \tilde{\alpha}_k)$ et $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_k^1 \cap \tilde{\Omega}_k^1$ un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_j)$. Ainsi sur Ω_α on a $a_1 + g_1 v_1 = a_k + g_1 v_k$, en utilisant l'analyticité des 2 membres on a $a_1 = a_k$ et $v_1 = v_k$. Donc $v_1 \in G^{k-1}[t, g_1, \dots, g_j]$ et $a_1 \in G^k[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$. Ce travail peut être fait pour tout $k \geq 2$, donc $v_1 \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ et $a_1 \in G[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$.

□

De la proposition précédente découle le corollaire suivant :

Corollaire 2. *Pour tout $u \in G[t]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$ et $v \in G[t]$ tel que :*

$$u = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k + t^k v$$

Pour tout $j \geq 1$, pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $u \in G[t, g_1, \dots, g_j]$, il existe une suite d'éléments $(a_{l_0, \dots, l_j})_{l_0 + \dots + l_j \leq k}$ dans $\mathbb{Q}$, ainsi qu'une suite d'éléments $(v_{l_0, \dots, l_j})_{l_0 + \dots + l_j = k} \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que :

$$u = \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_j \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_j \leq k}} a_{l_0, \dots, l_j} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, \dots, l_j \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_j = k}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j} v_{l_0, \dots, l_j}$$

Démonstration. Soit $u \in G[t]$, montrons par récurrence sur $k \geq 1$ la propriété de l'énoncé.

- Pour $k = 1$. Le rang initial a été montré dans la proposition précédente.
- Supposons vraie la propriété au rang k et montrons la au rang $k + 1$. L'hypothèse de récurrence nous donne l'existence de $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$ et $v \in G[t]$ tel que :

$$u = \sum_{i=1}^k a_i t^i + t^k v$$

Or, d'après la proposition précédente $\exists v_1 \in G[t]$ et $a_{k+1} \in \mathbb{Q}$ tel que $v = a_{k+1} t + t v_1$

Ainsi $u = \sum_{i=1}^{k+1} a_i t^i + t^{k+1} v_1$. Ce qui termine la récurrence.

Montrons à présent par récurrence sur $j \geq 1$, que pour tout $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $u \in G[t, g_1, \dots, g_j]$, il existe une suite d'éléments $(a_{l_0, \dots, l_j})_{l_0 + \dots + l_j \leq k}$ dans $\mathbb{Q}$, ainsi qu'une suite d'éléments $(v_{l_0, \dots, l_j})_{l_0 + \dots + l_j = k} \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que :

$$u = \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_j \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_j \leq k}} a_{l_0, \dots, l_j} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, \dots, l_j \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_j = k}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j} v_{l_0, \dots, l_j}$$

- Montrons la propriété au rang $j = 1$ par récurrence sur $k \geq 1$:

- Pour $k = 1$:

La proposition précédente nous permet d'affirmer que pour $u \in G[t, g_1]$, il existe $a \in G[t]$ et $v_{0,1} \in G[t, g_1]$ tel que $u = a + g_1 v_{0,1}$. Or $a \in G[t]$ donc il existe $a_{1,0} \in \mathbb{Q}$ et $v_{1,0} \in G[t] \subset G[t, g_1]$ tel que $a = a_{1,0}t + tv_{1,0}$. Donc $u = a_{1,0}t + tv_{1,0} + g_1 v_{0,1}$, ce qui démontre le résultat pour $k = 1$.

- Supposons vraie la propriété pour les rangs inférieurs à k ($k \geq 1$) et montrons la au rang $k + 1$. Soit $u \in G[t, g_1]$. D'après la proposition précédente, il existe donc $a \in G[t]$ et $v \in G[t, g_1]$ tel que $u = a + g_1 v$. Comme $v \in G[t, g_1]$ on a d'après l'hypothèse de récurrence l'existence d'une suite d'éléments $(b_{l_0, l_1})_{l_0 + l_1 \leq k}$ dans $\mathbb{Q}$, ainsi qu'une suite d'éléments $(w_{l_0, l_1})_{l_0 + l_1 = k} \in G[t, g_1]$ tel que :

$$v = \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0 \\ l_0 + l_1 \leq k}} b_{l_0, l_1} t^{l_0} g_1^{l_1} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, l_1 \geq 0 \\ l_0 + l_1 = k}} t^{l_0} g_1^{l_1} w_{l_0, l_1}$$

De même, comme $a \in G[t]$, il existe, avec ce qui a été fait plus haut, des éléments $a_{1,0}, \dots, a_{k+1,0}$ de $\mathbb{Q}$ et $v_{k+1,0} \in G[t]$ tels que $a = a_{1,0}t + \dots + a_{k+1,0}t^{k+1} + t^{k+1}v_{k+1,0}$. Ainsi, en reprenant on a :

$$\begin{aligned} u &= a + g_1 v \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} a_{l,0} t^l + t^{k+1} v_{k+1,0} + \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0 \\ l_0 + l_1 \leq k}} b_{l_0, l_1} t^{l_0} g_1^{l_1+1} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, l_1 \geq 0 \\ l_0 + l_1 = k}} t^{l_0} g_1^{l_1+1} w_{l_0, l_1} \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} a_{l,0} t^l + \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 1 \\ l_0 + l_1 \leq k+1}} b_{l_0, l_1-1} t^{l_0} g_1^{l_1+1} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, l_1 \geq 1 \\ l_0 + l_1 = k+1}} t^{l_0} g_1^{l_1} w_{l_0, l_1-1} + t^{k+1} v_{k+1,0} \end{aligned}$$

Pour $l_0 \geq 1, l_1 \geq 1$ et $l_0 + l_1 = k + 1$ on pose $a_{l_0, l_1} = b_{l_0, l_1-1}$, et pour $l_0 \geq 0, l_1 \geq 1$ et $l_0 + l_1 = k + 1$ on pose $v_{l_0, l_1} = w_{l_0, l_1-1}$. Il suffit alors de constater que $v_{0, k+1} \in G[t] \subset G[t, g_1]$ pour obtenir le résultat.

- Supposons pour $j \geq 2$, que la propriété soit vraie pour tous les rangs inférieurs à $j - 1$ et montrons la au rang j . Nous allons montrer par la propriété au rang j par récurrence sur $k \geq 1$:

- Pour $k = 1$:

La proposition précédente nous permet d'affirmer que pour $u \in G[t, g_1, \dots, g_j]$, il existe $a \in G[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$ et $v_{0, \dots, 0, 1} \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que $u = a + g_j v_{0, \dots, 0, 1}$. Or $a \in G[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$, en utilisant l'hypothèse de récurrence il existe $a_{1,0, \dots, 0} \in \mathbb{Q}$ et $w_{1,0, \dots, 0}, \dots, w_{0, \dots, 0, 1} \in G[t, g_1, \dots, g_{j-1}] \subset G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que $a = a_{1,0, \dots, 0}t + tw_{1,0, \dots, 0} + g_1 w_{0,1,0, \dots, 0} + \dots + g_{j-1} w_{0, \dots, 0, 1} + g_j v_{0, \dots, 0, 1}$. En posant $v_{1,0, \dots, 0} = w_{1,0, \dots, 0}, v_{0,1,0, \dots, 0} = w_{0,1,0, \dots, 0}, \dots, v_{0, \dots, 0, 1,0} = w_{0, \dots, 0, 1}$ on obtient le résultat.

- Supposons vraie la propriété pour les rangs inférieurs à k ($k \geq 1$) et montrons la au rang $k + 1$. Soit $u \in G[t, g_1, \dots, g_j]$. D'après la proposition précédente, il existe donc $a \in G[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$ et $v \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que $u = a + g_j v$. Comme $v \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ on a d'après l'hypothèse de récurrence l'existence d'une

suite d'éléments $(b_{l_0, l_1, \dots, l_j})_{l_0 + \dots + l_j \leq k, l_0 \geq 1}$ dans $\mathbb{Q}$, ainsi qu'une suite d'éléments $(w_{l_0, \dots, l_j})_{l_0 + \dots + l_j = k}$ dans $G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que :

$$v = \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_j \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_j \leq k}} b_{l_0, \dots, l_j} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, \dots, l_j \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_j = k}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j} w_{l_0, l_1, \dots, l_j}$$

De même, comme $a \in G[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$, il existe une suite d'éléments $(c_{l_0, l_1, \dots, l_{j-1}})_{l_0 + \dots + l_{j-1} \leq k+1, l_0 \geq 1}$ dans $\mathbb{Q}$, ainsi qu'une suite d'éléments $(z_{l_0, \dots, l_{j-1}})_{l_0 + \dots + l_{j-1} = k+1}$ dans $G[t, g_1, \dots, g_{j-1}]$ tel que :

$$a = \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_{j-1} \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_{j-1} \leq k+1}} c_{l_0, \dots, l_{j-1}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_{j-1}^{l_{j-1}} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, \dots, l_{j-1} \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_{j-1} = k+1}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_{j-1}^{l_{j-1}} z_{l_0, l_1, \dots, l_{j-1}}$$

Ainsi, en reprenant on a :

$$\begin{aligned} u &= a + g_1 v \\ &= \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_{j-1} \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_{j-1} \leq k+1}} c_{l_0, \dots, l_{j-1}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_{j-1}^{l_{j-1}} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, \dots, l_{j-1} \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_{j-1} = k+1}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_{j-1}^{l_{j-1}} z_{l_0, l_1, \dots, l_{j-1}} \\ &\quad + \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_j \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_j \leq k}} b_{l_0, \dots, l_j} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j+1} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, \dots, l_j \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_j = k}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j+1} w_{l_0, l_1, \dots, l_j} \\ &= \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_{j-1} \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_{j-1} \leq k+1}} c_{l_0, \dots, l_{j-1}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_{j-1}^{l_{j-1}} + \sum_{\substack{l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_j \geq 1 \\ l_0 + \dots + l_j \leq k+1}} b_{l_0, \dots, l_{j-1}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j} \\ &\quad + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, \dots, l_j \geq 1 \\ l_0 + \dots + l_j = k+1}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_j^{l_j} w_{l_0, l_1, \dots, l_{j-1}} + \sum_{\substack{l_0 \geq 0, \dots, l_{j-1} \geq 0 \\ l_0 + \dots + l_{j-1} = k+1}} t^{l_0} g_1^{l_1} \dots g_{j-1}^{l_{j-1}} z_{l_0, l_1, \dots, l_{j-1}} \end{aligned}$$

Pour $l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_{j-1} \geq 0, l_0 + \dots + l_{j-1} \leq k+1$, on pose $a_{l_0, \dots, l_{j-1}, 0} = c_{l_0, \dots, l_{j-1}} \in \mathbb{Q}$.

Pour $l_0 \geq 0, l_1 \geq 0, \dots, l_{j-1} \geq 0, l_0 + \dots + l_{j-1} = k+1$, on pose $v_{l_0, \dots, l_{j-1}, 0} = z_{l_0, \dots, l_{j-1}} \in G[t, g_1, \dots, g_{j-1}] \subset G[t, g_1, \dots, g_j]$.

Pour $l_0 \geq 1, l_1 \geq 0, \dots, l_j \geq 1, l_0 + \dots + l_j \leq k+1$, on pose $a_{l_0, \dots, l_{j-1}, l_j} = b_{l_0, \dots, l_{j-1}, l_j-1} \in \mathbb{Q}$.

Pour $l_0 \geq 0, l_1 \geq 0, \dots, l_j \geq 1, l_0 + \dots + l_j = k+1$, on pose $v_{l_0, \dots, l_{j-1}, l_j} = w_{l_0, \dots, l_{j-1}, l_j-1} \in G[t, g_1, \dots, g_j]$.

On obtient ainsi le résultat. □

Énonçons une proposition de liaison entre les équations de ce travail et les ensembles définis dans cette partie.

Proposition 10. *Si u vérifie une équation de type F_0 , alors, il existe $v \in G[t]$ tel que $u(t) = v(t, D(t))$ sur $]0, +\infty[\cap V$ (V un certain voisinage de 0).*

Pour $(g_1, \dots, g_j) \in G_1 \times \dots \times G_j$. Si u vérifie une équation de type $F_j[g_1, \dots, g_j]$, alors, il existe $v \in G[t, g_1, \dots, g_j]$ tel que $u(t) = v(t, g_1(t), \dots, g_j(t), D(t))$ sur $]0, +\infty[\cap V$ (V un certain voisinage de 0).

Démonstration. Soit u qui vérifie une équation de type F_0 . Alors, il existe f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et dont les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$. Il existe aussi $a \in \mathbb{Q}^*$, un entier $n \geq 2$ et $v_1, \dots, v_m \in G[t]$ tel que u vérifie l'équation :

$$t^n u' + au = tf(t, u, w_1, \dots, w_m)$$

Avec $w_1(t) = v_1(t, D(t)), \dots, w_m(t) = v_m(t, D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit. On pose $b = \frac{f(0, \dots, 0)}{a}$. Comme $v_1, \dots, v_m \in G[t]$ on sait d'après la proposition qui précède qu'il existe $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Q}$ et $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m \in G[t]$ tel que :

$$v_1 = a_1 t + t\tilde{v}_1, \dots, v_m = a_m t + t\tilde{v}_m$$

On pose $u = bt + t\tilde{u}$ et on remplace dans l'équation :

$$bt^n + t^n \tilde{u}' + t^{n+1} \tilde{u}' + abt + at\tilde{u} = tf(t, bt + t\tilde{u}, a_1 t + t\tilde{w}_1, \dots, a_m t + t\tilde{w}_m)$$

Avec $\tilde{w}_1(t) = \tilde{v}_1(t, D(t)), \dots, \tilde{w}_m(t) = \tilde{v}_m(t, D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Donc l'équation s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} bt^n + t^n \tilde{u}' + t^{n+1} \tilde{u}' + abt + at\tilde{u} &= tf(0, \dots, 0) + t^2 g(t, \tilde{u}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m) \\ \Rightarrow t^n \tilde{u}' + a\tilde{u} &= t\tilde{g}(t, \tilde{u}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m) \end{aligned}$$

Ceci implique que $\tilde{u}$ vérifie une équation de type F_0 . Comme $\tilde{u}$ vérifie une équation du type F_0 , on a d'après la partie II, l'existence de $\alpha > 0$, Ω un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ et $\tilde{v} \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$ tel que $\tilde{u}(t) = \tilde{v}(t, D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Ainsi pour $t > 0$ suffisamment petit, $\exists v \in G^1[t]$, $u(t) = v(t, D(t))$. On peut donc résumer la situation comme :

Si u vérifie une équation de type F_0 alors il existe $v \in G^1[t]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit, $u(t) = v(t, D(t))$. Or $\tilde{u}$ vérifie une équation de type F_0 donc $\tilde{v} \in G^1[t]$ et donc $v \in G^2[t]$. On peut alors itérer, et affirmer que par récurrence on a : $\forall n \geq 1$, $v \in G^n[t]$. Finalement on a bien $v \in G[t]$.

Fixons $(g_1, \dots, g_j) \in N_1 \times \dots \times N_j$. Nous allons montrer par récurrence sur k allant de 1 à j que si u vérifie une équation de type $F_k[g_1, \dots, g_k]$ alors, il existe $v \in G[t, g_1, \dots, g_k]$ tel que pour tout $t > 0$ suffisamment petit on a : $u(t) = v(t, g_1(t), \dots, g_k(t), D(t))$.

– Montrons la propriété au rang 1.

On a $g_1 \in N_1$ donc $\exists n_1^0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall t > 0$, $g_1(t) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{n_1^0}}$. Soit u qui vérifie une équation de type $F_1[g_1]$. Alors, il existe f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et dont les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$. Il existe aussi $a \in \mathbb{Q}^*$, un entier $n \geq 3$ et $v_1, \dots, v_m \in G[t, g_1]$ tel que u vérifie l'équation :

$$t^n u' + au = tf(t, g_1, u, w_1, \dots, w_m)$$

Avec $w_1(t) = v_1(t, g_1(t), D(t)), \dots, w_m(t) = v_m(t, g_1(t), D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit.

Comme $v_1, \dots, v_m \in G[t, g_1]$ on sait d'après la proposition qui précède qu'il existe $a_1, \dots, a_m \in G[t]$ et $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m \in G[t, g_1]$ tel que :

$$v_1 = a_1 + g_1 \tilde{v}_1, \dots, v_m = a_m + g_1 \tilde{v}_m$$

On pose $u = z + g_1 \tilde{u}$ et on remplace dans l'équation :

$$\begin{aligned} t^n z' + az + t^n \left(\frac{g_1}{t^2} - n_1^0 \frac{g_1}{t} \right) \tilde{u} + t^n g_1 \tilde{u}' + a g_1 \tilde{u} \\ = t f(t, g_1, z + g_1 \tilde{u}, \tilde{a}_1 + g_1 \tilde{w}_1, \dots, \tilde{a}_m + g_1 \tilde{w}_m) \end{aligned}$$

Avec $\tilde{w}_1(t) = \tilde{v}_1(t, g_1(t), D(t)), \dots, \tilde{w}_m(t) = \tilde{v}_m(t, g_1(t), D(t)), \tilde{a}_1(t) = a_1(t, D(t)), \dots, \tilde{a}_m(t) = a_m(t, D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Donc l'équation s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} t^n z' + az + g_1 (t^n \tilde{u}' + a \tilde{u} + t^{n-2} \tilde{u} - n_1^0 t^{n-1} \tilde{u}) \\ = t f(t, 0, z, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) + g_1 t g(t, g_1, \tilde{u}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m, z, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \end{aligned}$$

On choisit alors de prendre z tel que :

$$t^n z' + az = t f(t, 0, z, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$$

Alors on peut réduire l'équation sous la forme :

$$t^n \tilde{u}' + a \tilde{u} + t^{n-2} \tilde{u} - n_1^0 t^{n-1} \tilde{u} = t g(t, g_1, \tilde{u}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m, z, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$$

La fonction z vérifie donc une équation de type F_0 . Il en résulte qu'il existe $\tilde{z} \in G[t]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit, $z(t) = \tilde{z}(t, D(t))$. En observant que $\tilde{z}, a_1, \dots, a_m$ sont dans $G[t]$, donc, dans $G[t, g_1]$ on obtient que $\tilde{u}$ vérifie une équation de type $F_1[g_1]$. Comme $\tilde{u}$ vérifie une équation du type $F_1[g_1]$, on a d'après la partie II, l'existence de $\alpha > 0$, Ω un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1)$ et $\tilde{v} \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$ tel que $\tilde{u}(t) = \tilde{v}(t, g_1(t), D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Et de même pour u , il existe $v \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_1}^0$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $u(t) = v(t, g_1(t), D(t))$. Or $v = \tilde{z} + g_1 \tilde{v}$ par prolongement analytique. Par définition, avec ce qui précède, on a donc $v \in G^1[t, g_1]$.

En résumé, si u vérifie une équation de type $F_1[g_1]$ alors, il existe $v \in G^1[t, g_1]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit, $u(t) = v(t, g_1(t), D(t))$. Or $\tilde{u}$ vérifie une équation de type $F_1[g_1]$ donc $\tilde{v} \in G^1[t, g_1]$ et donc $v \in G^2[t, g_1]$. On peut alors itérer, et donc affirmer que par récurrence on a : $\forall n \geq 1, v \in G^n[t, g_1]$. Finalement on a bien $v \in G[t, g_1]$.

- Supposons à présent la propriété vraie pour les rangs inférieurs à k ($1 \leq k \leq j-1$) et montrons la propriété vraie au rang $k+1$. On a $(g_1, \dots, g_{k+1}) \in N_1 \times \dots \times N_{k+1}$ donc $\exists n_{k+1}^0, \dots, n_{k+1}^k \in \mathbb{N}$, tel que $\forall t > 0$, $g_{k+1}(t) = \frac{e^{-\frac{1}{(k+1)t^{k+1}}}}{e^{\frac{-n_{k+1}^k}{kt^k}} \dots e^{\frac{-n_{k+1}^1}{t}} t^{n_{k+1}^0}}$. Soit u qui vérifie une équation de type $F_{k+1}[g_1, \dots, g_{k+1}]$. Alors, il existe f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et dont les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$. Il existe aussi $a \in \mathbb{Q}^*$, un entier $n \geq k+3$ et $v_1, \dots, v_m \in G[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$ tel que u vérifie l'équation :

$$t^n u' + au = t f(t, g_1, \dots, g_{k+1}, u, w_1, \dots, w_m)$$

Avec $w_1(t) = v_1(t, g_1(t), \dots, g_{k+1}(t), D(t)), \dots, w_m(t) = v_m(t, g_1(t), \dots, g_{k+1}(t), D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit.

Comme $v_1, \dots, v_m \in G[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$ on sait d'après la proposition qui précède qu'il existe $a_1, \dots, a_m \in G[t, g_1, \dots, g_k]$ et $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m \in G[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$ tel que :

$$v_1 = a_1 + g_{k+1}\tilde{v}_1, \dots, v_m = a_m + g_{k+1}\tilde{v}_m$$

On pose $u = z + g_{k+1}\tilde{u}$ et on remplace dans l'équation :

$$\begin{aligned} t^n z' + az + g_{k+1}(t^n \tilde{u}' + a\tilde{u} + (t^{n-k-2} - n_{k+1}^k t^{n-k-1} - \dots - n_{k+1}^1 t^{n-2} - n_{k+1}^0)\tilde{u}) \\ = tf(t, g_1, \dots, g_{k+1}, z + g_{k+1}\tilde{u}, \tilde{a}_1 + g_{k+1}\tilde{w}_1, \dots, \tilde{a}_m + g_{k+1}\tilde{w}_m) \end{aligned}$$

Avec $\tilde{w}_1(t) = \tilde{v}_1(t, g_1(t), \dots, g_{k+1}(t), D(t)), \dots$

$\dots, \tilde{w}_m(t) = \tilde{v}_m(t, g_1(t), \dots, g_{k+1}(t), D(t)), \tilde{a}_1(t) = a_1(t, D(t)), \dots, \tilde{a}_m(t) = a_m(t, D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Donc l'équation s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} t^n z' + az + g_{k+1}(t^n \tilde{u}' + a\tilde{u} + (t^{n-k-2} - n_{k+1}^k t^{n-k-1} - \dots - n_{k+1}^1 t^{n-2} - n_{k+1}^0)\tilde{u}) \\ = tf(t, g_1, \dots, g_k, 0, z, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) + tg_{k+1}g(t, g_1, \dots, g_{k+1}, \tilde{u}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \end{aligned}$$

On choisit alors de prendre z tel que :

$$t^n z' + az = tf(t, g_1, \dots, g_k, 0, z, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$$

Alors on peut réduire l'équation sous la forme :

$$\begin{aligned} t^n \tilde{u}' + a\tilde{u} + (t^{n-k-2} - n_{k+1}^k t^{n-k-1} - \dots - n_{k+1}^1 t^{n-2} - n_{k+1}^0)\tilde{u} \\ = tg(t, g_1, \dots, g_{k+1}, \tilde{u}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \end{aligned}$$

La fonction z vérifie donc une équation de type $F_k[g_1, \dots, g_k]$. Il en résulte qu'il existe $\tilde{z} \in G[t, g_1, \dots, g_k]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit, $z(t) = \tilde{z}(t, g_1(t), \dots, g_k(t), D(t))$. En observant que $\tilde{z}, a_1, \dots, a_m$ sont dans $G[t, g_1, \dots, g_k]$ donc dans $G[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$ on obtient que $\tilde{u}$ vérifie une équation de type $F_{k+1}[g_1, \dots, g_{k+1}]$. Comme $\tilde{u}$ vérifie une équation du type $F_k[g_1, \dots, g_{k+1}]$, on a d'après la partie II, l'existence de $\alpha > 0$, Ω un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_{k+1})$ et $\tilde{v} \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$ tel que $\tilde{u}(t) = \tilde{v}(t, g_1(t), \dots, g_{k+1}(t), D(t))$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Et de même pour u , il existe $v \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_1}^0$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $u(t) = v(t, g_1(t), \dots, g_{k+1}(t), D(t))$. Or $v = \tilde{z} + g_1\tilde{v}$ par prolongement analytique. Par définition, avec ce qui précède, on a donc $v \in G^1[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$.

En résumé si u vérifie une équation de type $F_{k+1}[g_1, \dots, g_{k+1}]$ alors il existe $v \in G^1[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit, $u(t) = v(t, g_1(t), \dots, g_{k+1}(t), D(t))$. Or $\tilde{u}$ vérifie une équation de type $F_k[g_1, \dots, g_{k+1}]$ donc $\tilde{v} \in G^1[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$ et donc $v \in G^2[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$. On peut alors itérer, et donc affirmer que par récurrence on a : $\forall n \geq 1, v \in G^n[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$. Finalement on a bien $v \in G[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$.

□

Nous introduisons plusieurs lemmes qui serviront dans la dernière section.

Lemme 4. Soit f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables et dont les coefficients du développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$. Soit $v_1, \dots, v_m \in G[t]$ alors $(t, D) \mapsto tf(t, v_1, \dots, v_m) \in G[t]$

Démonstration. Comme $v_1, \dots, v_m \in G[t]$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ et il existe $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ des ouverts compatibles avec $t \mapsto t$ tel que $v_1 \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_1}^0, \dots, v_m \in \Theta_{\alpha_m, \Omega_m}^0$. Donc en posant $\alpha = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ et $\Omega = \bigcap_{1 \leq i \leq m} \Omega_i$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $v_i \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$. En utilisant la proposition 3, on a $tf(t, v_1, \dots, v_m) \in \Theta_{\alpha, \Omega}$. De plus comme $v_1, \dots, v_m \in G[t]$ il existe $w_1, \dots, w_m \in G[t]$ et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 t + t w_1 \\ &\dots\dots\dots \\ v_m &= a_m t + t w_m \end{aligned}$$

Donc pour tout t suffisamment petit :

$$\begin{aligned} tf(t, v_1, \dots, v_m) &= tf(t, a_1 t + t w_1, \dots, a_m t + t w_m) \\ &= tf(0, \dots, 0) + t(tg(t, w_1, \dots, w_m)) \end{aligned}$$

Le travail effectué précédemment par $tf(t, v_1, \dots, v_m)$ nous permet d'affirmer qu'il existe $\tilde{\alpha} > 0$ et $\tilde{\Omega}_\alpha$ ouvert compatible avec $(t \mapsto t)$ tel que $tg(t, w_1, \dots, w_m) \in \Theta_{\tilde{\alpha}, \tilde{\Omega}_\alpha}^0$.

Ainsi $(t, D) \mapsto tf(t, v_1, \dots, v_m) \in G^1[t]$. Or le même raisonnement peut être tenu pour $tg(t, w_1, \dots, w_m)$ donc $tg(t, w_1, \dots, w_m) \in G^1[t]$ et donc $(t, D) \mapsto tf(t, v_1, \dots, v_m) \in G^2[t]$. On itère ainsi pour obtenir que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(t, D) \mapsto tf(t, v_1, \dots, v_m) \in G^k[t]$. Donc $(t, D) \mapsto tf(t, v_1, \dots, v_m) \in G[t]$. □

Lemme 5. Soit $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m \in G[t]$, $a \in \mathbb{N}$ et f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables, on suppose également que les coefficients de son développement en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$. Alors il existe une unique solution tendant vers 0 en 0 pour l'équation :

$$tz' + az = t^2 f(t, v_1, \dots, v_m)$$

Où $v_1, \dots, v_m$ sont les fonctions à valeurs réelles telles que pour tout $t > 0$ suffisamment petit $v_i(t) = \tilde{v}_i(t, D(t))$. De plus il existe $\tilde{z} \in G[t]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $z(t) = \tilde{z}(t, D(t))$.

Démonstration. L'unique solution tendant vers 0 en 0 de l'équation :

$$tz' + az = t^2 f(t, v_1, \dots, v_m)$$

s'écrit pour $t > 0$ suffisamment petit :

$$z(t) = \frac{1}{t^a} \int_0^t s^{a+1} f(s, v_1(s), \dots, v_m(s)) ds$$

Le lemme précédent nous permet d'affirmer que $tf(t, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) \in G[t]$. Il existe donc $\alpha \in]0, 1[$ et Ω un ouvert compatible avec $t \mapsto t$ tel que $tf(t, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$. Il existe donc $(h_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions analytiques sur Ω tel que pour tout $(t, D) \in \Omega[\alpha]$:

$$tf(t, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) = \sum_{k \geq 1} t^k h_k(D)$$

De plus il existe $M > 0$, tel que :

$$\sum_{k \geq 1} \sup_{\Omega[\alpha]} (|t^k h_k(D)|) \leq M$$

On rappelle que $\Omega[\alpha] = \{(t, D) \in B(0, \alpha) \times \Omega \text{ tel que } |t\varphi(D)| < 1\}$. Soit $D \in]0, 1[$, alors :

$$\int_1^D \frac{ds}{(s^2 - 1)\varphi(s)^{a+2}} = \frac{1}{(a+1)\varphi(D)^{a+1}}$$

Quitte à réduire l'ouvert Ω , on peut supposer en utilisant la continuité de l'expression précédente qu'il existe pour tout $D \in \Omega$ un chemin continue $\Gamma(1, D)$ inclus dans Ω allant de 1 à D tel que $\forall D \in \Omega$:

$$\left| \int_{\Gamma(1, D)} \frac{ds}{(s^2 - 1)\varphi(s)^{a+2}} \right| \leq \frac{2}{|\varphi(D)|^{a+1}}$$

On pose $(\tilde{h}_{k+1})_{k \geq 1}$ la suite de fonctions analytiques sur Ω définies par :

$$\tilde{h}_{k+1}(D) = \varphi(D)^{a+k+1} \int_{\Gamma(1, D)} \frac{h_k(s) ds}{(s^2 - 1)\varphi(s)^{a+k+2}}$$

On a alors sur $\Omega[\alpha]$:

$$\begin{aligned} |t^{k+1} \tilde{h}_{k+1}(D)| &= |t^{k+1} \varphi(D)^{a+k+1} \int_{\Gamma(1, D)} \frac{h_k}{(s^2 - 1)\varphi(s)^{a+k+2}} ds| \\ &= \left| \int_{\Gamma(1, D)} \left(\frac{t\varphi(D)}{\varphi(s)} \right)^k h_k(s) \frac{t\varphi(D)^{a+1}}{(s^2 - 1)\varphi(s)^{a+2}} ds \right| \end{aligned}$$

De plus $\forall (t, D) \in \Omega[\alpha]$ et $\forall s \in \Gamma(1, D) \setminus \{1\}$ on a $(\frac{t\varphi(D)}{\varphi(s)}, s) \in \Omega[\alpha]$ car :

$$\left| \frac{t\varphi(D)}{\varphi(s)} \varphi(s) \right| = |t\varphi(D)| < 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |t^{k+1} \tilde{h}_{k+1}(D)| &\leq \sup_{\Omega[\alpha]} (|t^k h_k(D)|) |t\varphi(D)^{a+1}| \int_{\Gamma(1, D)} \left| \frac{ds}{(s^2 - 1)\varphi(s)^{a+2}} \right| \\ &\leq 2\alpha \sup_{\Omega[\alpha]} (|t^k h_k(D)|) \\ &\leq \sup_{\Omega[\alpha]} (|t^k h_k(D)|) \end{aligned}$$

Pour α suffisamment petit. Finalement $\forall (t, D) \in \Omega[\alpha]$ et $\forall k \geq 1$,

$$\sup_{\Omega[\alpha]}(|t^{k+1}\tilde{h}_{k+1}(D)|) \leq \sup_{\Omega[\alpha]}(|t^k h_k(D)|)$$

Donc si on note $\tilde{z}(t, D) = \sum_{k \geq 0} t^{k+1} \tilde{h}_{k+1}(D)$ sur $\Omega[\alpha]$ alors $\tilde{z} \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$. On vérifie aisément que $t \mapsto \tilde{z}(t, D(t))$ est bien défini et dérivable pour $t > 0$ suffisamment petit et que de plus $z(t) = \tilde{z}(t, D(t))$ est bien solution de l'équation. A présent reprenons l'équation initiale. On utilise également le fait qu'il existe $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Q}$ et $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m \in G[t]$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= a_1 t + t \tilde{w}_1 \\ &\dots\dots \\ \tilde{v}_m &= a_m t + t \tilde{w}_m \end{aligned}$$

On notera $w_1, \dots, w_m$ les fonctions à valeurs réelles telles que pour $t > 0$ suffisamment petit on ait $w_i(t) = \tilde{w}_i(t, D(t))$. On pose alors $z = a_0 t^2 + tw$ et l'équation devient :

$$\begin{aligned} t^2 w' + (a+1)tw + (a+2)a_0 t^2 &= t^2 f(t, a_1 t + t w_1, \dots, a_m t + t w_m) \\ \Rightarrow t^2 w' + (a+1)tw + (a+2)a_0 t^2 &= t^2 f(0, \dots, 0) + t^3 g(t, w_1, \dots, w_m) \end{aligned}$$

On choisit $a_0 = \frac{f(0, \dots, 0)}{a+2}$ de façon à obtenir :

$$tw' + (a+1)w = t^2 g(t, w_1, \dots, w_m)$$

En utilisant ce qui a été fait plus haut, on peut donc obtenir $\tilde{\alpha} \in]0, 1[$ et $\tilde{\Omega}$ un ouvert compatible de $t \mapsto t$ et $\tilde{w} \in \Theta_{\tilde{\alpha}, \tilde{\Omega}}^0$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit on ait : $w(t) = \tilde{w}(t, D(t))$. Par prolongement analytique, on en déduit que $\tilde{z} \in G^1[t]$. En itérant ce raisonnement on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{z} \in G^n[t]$, et donc $\tilde{z} \in G[t]$. □

Notations. Dans la suite, on notera Y la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $Y(t) = -t \ln(t) + t^2$. On constate après étude de fonction que $Y \in \mathcal{B}$

Lemme 6. Soit $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_r \in G[t]$. Soit $a \in \mathbb{N}^*$, f et g deux fonctions analytiques en chacune de leurs variables au voisinage de $(0, \dots, 0)$, de plus les coefficients de leurs développements en $(0, \dots, 0)$ sont dans $\mathbb{Q}$. On note également $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r$ les fonctions à valeurs réelles définies pour $t > 0$ suffisamment petit par $v_i(t) = \tilde{v}_i(t, D(t))$ et $w_j(t) = \tilde{w}_j(t, D(t))$. On considère l'équation :

$$tu' - au = tf(t, v_1, \dots, v_m)u + tg(t, w_1, \dots, w_r)$$

Alors il existe $c_1, \dots, c_{a-1} \in \mathbb{Q}$ (si $a \geq 2$ sinon on retire ces constantes du développement), b_1, b_2 et $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0 \in G[t]$ tel que :

$$u(t) = e^{u_0(t)} [c_1 t + \dots + c_{a-1} t^{a-1} + b_1 t^{a-1} Y + C t^a + b_2 t^{a+1} + t^{a-1} v_0]$$

Avec C constante arbitraire et v_0, u_0 à valeurs réelles définies pour $t > 0$ suffisamment petit par $u_0(t) = \tilde{u}_0(t, D(t))$ et $v_0(t) = \tilde{v}_0(t, D(t))$.

Démonstration. Comme $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m \in G[t]$ il existe $\tilde{v}_{1,1}, \dots, \tilde{v}_{m,1} \in G[t]$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &= a_1 t + t\tilde{v}_{1,1} \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{v}_m &= a_m t + t\tilde{v}_{m,1}\end{aligned}$$

L'équation devient :

$$\begin{aligned}tu' - au &= utf(t, a_1 t + t\tilde{v}_{1,1}, \dots, a_m t + t\tilde{v}_{m,1}) + tg(t, w_1, \dots, w_r) \\ \Rightarrow tu' - au - tf(0, \dots, 0)u - t^2 f_1(t, \tilde{v}_{1,1}, \dots, \tilde{v}_{m,1})u &= tg(t, w_1, \dots, w_r)\end{aligned}$$

Considérons l'équation $tz' = -t^2 f_1(t, \tilde{v}_{1,1}, \dots, \tilde{v}_{m,1})$. D'après le lemme précédent il existe $\tilde{z} \in G[t]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $z(t) = \tilde{z}(t, D(t))$. Posons $v = e^z e^{-f(0, \dots, 0)t} u$. On a alors :

$$tv' - av = tg(t, w_1, \dots, w_m) e^z e^{-f(0, \dots, 0)t}$$

D'après le lemme 4 $tg(t, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m) e^{\tilde{z}} e^{-f(0, \dots, 0)t} \in G[t]$, on le notera $\tilde{u}_0$. Donc en utilisant le corollaire 2 il existe $b_1, \dots, b_{a+2} \in \mathbb{Q}$ et $\tilde{u}_0 \in G[t]$ tel que :

$$tg(t, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m) e^{\tilde{z}} e^{-f(0, \dots, 0)t} = b_1 t + \dots + b_{a+2} t^{a+2} + t^{a+2} \tilde{u}_0$$

On pose alors $v = -\frac{b_1}{a}t - \dots - \frac{b_{a-1}}{1}t^{a-1} + t^{a-1}v_1$, l'équation devient :

$$tv'_1 - v_1 = b_a t + b_{a+1} t^2 + b_{a+2} t^3 + t^3 w_0$$

On notera $c_1 = -\frac{b_1}{a}, \dots, c_{a-1} = -\frac{b_{a-1}}{1}$. Ensuite on pose $v_1 = -b_a Y + (b_a + b_{a+1})t^2 + Ct + \frac{b_{a+2}}{2}t^3 + tv_2$. On a alors :

$$tv'_2 = t^2 w_0$$

En utilisant le lemme précédent on a l'existence de $\tilde{v}_0 \in G[t]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit on ait : $v_2(t) = \tilde{v}_0(t, D(t))$. Il suffit de réécrire u à la lumière de ce qui a été fait pour obtenir le résultat.

□

10 Méthode de réduction

Nous rappelons que les systèmes d'équations que nous tentons de réduire sont de la forme :

$$t^{n+1}u' + a_0 u + a_1 t u + \dots + a_n t^n u = t^{n+1} f(t, u, g_1, \dots, g_n)$$

Avec $(g_1, \dots, g_n) \in N_1 \times \dots \times N_n$. De plus $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall t > 0$ on peut écrire :

$$g_k(t) = \frac{e^{\frac{-1}{kt^k}}}{e^{\frac{-n_k^{k-1}}{(k-1)t^{k-1}}} \dots e^{\frac{-n_k^1}{t}} t^{n_k^0}}$$

Si $a_0 \in \mathbb{N}^*$, on se réfère à la partie II pour expliciter la forme de l'unique solution qui tend vers 0 en 0. En effet il existe alors $\alpha > 0$, Ω un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, g_1, \dots, g_n)$ et $v \in \Theta_{\alpha, \Omega}^0$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $u(t) = v(t, g_1(t), \dots, g_n(t), D(t))$. Traitons dans cette section le cas où $-a_0 \in \mathbb{N}^*$. Dans un premier temps nous montrons, quitte à remplacer g_n , que l'on peut supposer $a_1 - n_n^{n-1} < 0, \dots, a_n - n_n^0 < 0$. En effet il suffit de poser :

$$\tilde{g}_n(t) = \frac{e^{-\frac{1}{nt^n}}}{e^{\frac{-(n_n^{n-1} + |a_1| + 1)}{(n-1)t^{n-1}}} \dots e^{\frac{-(n_n^1 + |a_{n-1}| + 1)}{t}} t^{n_n^0 + |a_n| + 1}}$$

Ainsi on a :

$$g_n = \tilde{g}_n e^{-\frac{|a_1| + 1}{(n-1)t^{n-1}}} \dots e^{-\frac{|a_{n-1}| + 1}{t}} t^{|a_n| + 1}$$

En raisonnant par récurrence on peut montrer qu'il existe $\tau_{n-1}, \dots, \tau_0$ tel que :

$$g_n = \tilde{g}_n g_{n-1}^{\tau_{n-1}} \dots g_1^{\tau_1} t^{\tau_0}$$

Il suffit donc de remplacer g_n par $\tilde{g}_n$ à l'aide de la formule ci-dessus pour obtenir le résultat. On supposera donc dans la suite que $a_1 - n_n^{n-1} < 0, \dots, a_n - n_n^0 < 0$.

On considère 2 cas :

– Si $a_0 = -1$: On effectue alors le changement d'inconnues suivant :

$$u = v_{n-1,1} + g_n u_{n-1,1}$$

On remplace dans l'équation pour avoir :

$$\begin{aligned} & t^{n+1} v'_{n-1,1} + a_0 v_{n-1,1} + \dots + a_n t^n v_{n-1,1} \\ & + g_n [t^{n+1} u'_{n-1,1} + (a_1 - n_n^{n-1}) t u_{n-1,1} + \dots + (a_n - n_n^0) t^n u_{n-1,1}] \\ & = t^{n+1} f(t, v_{n-1,1} + g_n u_{n-1,1}, g_1, \dots, g_n) \\ & = t^{n+1} f(t, v_{n-1,1}, g_1, \dots, g_{n-1}, 0) + t^{n+1} g_n g(t, u_{n-1,1}, v_{n-1,1}, g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

On choisit donc $v_{n-1,1}$ tel que $v_{n-1,1}$ solution de :

$$t^{n+1} v'_{n-1,1} + a_0 v_{n-1,1} + \dots + a_n t^n v_{n-1,1} = t^{n+1} f(t, v_{n-1,1}, g_1, \dots, g_{n-1}, 0)$$

D'après la proposition de la section précédente, il existe $\tilde{v}_{n-1,1} \in G[t, g_1, \dots, g_{n-1}]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $v_{n-1,1}(t) = \tilde{v}_{n-1,1}(t, g_1(t), \dots, g_{n-1}(t), D(t))$.

Donc $u_{n-1,1}$ vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} & t^n u'_{n-1,1} + (a_1 - n_n^{n-1}) u_{n-1,1} + \dots + (a_n - n_n^0) t^{n-1} u_{n-1,1} \\ & = t^n g(t, u_{n-1,1}, v_{n-1,1}, g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

– Si $a_0 < -1$: On effectue alors le changement d'inconnues suivant :

$$u = v_{n-1,1} + g_n u_{n,1}$$

On remplace dans l'équation pour avoir :

$$\begin{aligned} & t^{n+1} v'_{n-1,1} + a_0 v_{n-1,1} + \dots + a_n t^n v_{n-1,1} \\ & + g_n [t^{n+1} u'_{n,1} + (a_0 + 1) u_{n,1} + (a_1 - n_n^{n-1}) t u_{n,1} + \dots + (a_n - n_n^0) t^n u_{n,1}] \\ & = t^{n+1} f(t, v_{n-1,1} + g_n u_{n,1}, g_1, \dots, g_n) \\ & = t^{n+1} f(t, v_{n-1,1}, g_1, \dots, g_{n-1}, 0) + t^{n+1} g_n g(t, u_{n,1}, v_{n-1,1}, g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

On choisit donc $v_{n-1,1}$ tel que $v_{n-1,1}$ solution de :

$$t^{n+1}v'_{n-1,1} + a_0v_{n-1,1} + \dots + a_nt^n v_{n-1,1} = t^{n+1}f(t, v_{n-1,1}, g_1, \dots, g_{n-1}, 0)$$

D'après la proposition de la section précédente, il existe $\tilde{v}_{n-1,1} \in G[t, g_1, \dots, g_{n-1}]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $v_{n-1,1}(t) = \tilde{v}_{n-1,1}(t, g_1(t), \dots, g_{n-1}(t), D(t))$.

Donc $u_{n,1}$ vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} t^{n+1}u'_{n,1} + (a_0 + 1)u_{n,1} + (a_1 - n_n^{n-1})tu_{n,1} + \dots + (a_n - n_n^0)t^nu_{n,1} \\ = t^{n+1}g(t, u_{n,1}, v_{n-1,1}, g_1, \dots, g_n) \end{aligned}$$

On peut donc itérer ce raisonnement afin de revenir au premier cas.

Dans tous les cas on peut écrire $u = v_{n-1,1} + g_nv_{n-1,2} + \dots + g_n^{|a_0|-1}v_{n-1,|a_0|} + g_n^{|a_0|}u_{n-1,1}$ avec $\tilde{v}_{n-1,1}, \dots, \tilde{v}_{n-1,|a_0|} \in G[t, g_1, \dots, g_{n-1}]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit :

$$v_{n-1,1}(t) = \tilde{v}_{n-1,1}(t, g_1(t), \dots, g_{n-1}(t), D(t)), \dots, v_{n-1,|a_0|}(t) = \tilde{v}_{n-1,|a_0|}(t, g_1(t), \dots, g_{n-1}(t), D(t))$$

Et $u_{n-1,1}$ vérifiant une équation du type :

$$\begin{aligned} t^nu'_{n-1,1} + (a_1 - |a_0|n_n^{n-1})u_{n-1,1} + \dots + t^{n-1}(a_n - |a_0|n_n^0)u_{n-1,1} \\ = t^ng(t, u_{n-1,1}, g_1, \dots, g_n, v_{n-1,1}, \dots, v_{n-1,|a_0|}) \end{aligned}$$

En continuant ce procédé, on va donc montrer par récurrence descendante sur k allant de n à 2 (en posant $u = u_n$) qu'il existe $\alpha_n, \dots, \alpha_k$ dans $\mathbb{N}^*$. Il existe également pour tout $i \in \llbracket k-1, n-1 \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket$, $\exists \tilde{v}_{i,j} \in G[t, g_1, \dots, g_i]$ tel que pour tout $t > 0$ suffisamment petit on ait : $v_{i,j}(t) = \tilde{v}_{i,j}(t, g_1(t), \dots, g_i(t), D(t))$. Les changements d'inconnues suivant :

$$\begin{aligned} u &= v_{n-1,1} + g_nv_{n-1,2} + \dots + g_n^{\alpha_n-1}v_{n-1,\alpha_n} + g_n^{\alpha_n}u_{n-1,1} \\ u_{n-1,1} &= v_{n-2,1} + g_{n-1}v_{n-2,2} + \dots + g_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1}v_{n-2,\alpha_{n-1}} + g_{n-1}^{\alpha_{n-1}}u_{n-2,1} \\ &\dots\dots\dots \\ u_{k,1} &= v_{k-1,1} + g_kv_{k-1,2} + \dots + g_k^{\alpha_k-1}v_{k-1,\alpha_k} + g_k^{\alpha_k}u_{k-1,1} \end{aligned}$$

Conduisent au fait que $u_{k-1,1}$ vérifie une équation du type :

$$\begin{aligned} t^ku'_{k-1,1} + \beta_{k-1,0}u_{k-1,1} + \dots + \beta_{k-1,k-1}t^{k-1}u_{k-1,1} \\ t^kh_k(t, u_{k-1,1}, g_{1,k}, \dots, g_{n,k}, w_{k-1,1}^k, \dots, w_{k-1,\gamma_{k-1}^k}^k, \dots, w_{n-1,1}^k, \dots, w_{n-1,\gamma_{n-1}^k}^k) \end{aligned}$$

Avec $-\beta_{k-1,0}, \dots, -\beta_{k-1,k-1}, \gamma_{n-1}^k, \dots, \gamma_{k-1}^k$ dans $\mathbb{N}^*$. De plus $\forall i \in \llbracket k-1, n-1 \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1, \gamma_i^k \rrbracket$, $\exists \tilde{w}_{i,j}^k \in G[t, g_1, \dots, g_i]$ tel que pour tout $t > 0$ suffisamment petit $w_{i,j}^k(t) = \tilde{w}_{i,j}^k(t, g_1(t), \dots, g_i(t), D(t))$. Les fonctions $g_{1,k}, \dots, g_{n,k}$ sont respectivement dans $N_1 \times \dots \times N_n$. Elles sont définies de la façon suivante :

$$g_{i,k} = \begin{cases} g_i & \text{si } i \leq k \\ \frac{g_{i,k+1}}{\delta_{i,k-1}^k \dots \delta_{i,1}^k t^{\delta_{i,0}^k}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $\forall i \geq k+1$, $\forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\delta_{i,j}^k$ dans $\mathbb{N}$. De plus $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g_{i,k} \in N_i$.

Le rang initial de cette récurrence a été fait ci-dessus. Supposons donc vraie la propriété pour les rangs supérieurs à $k+1$ et montrons la au rang $(k \geq 2)$. L'hypothèse

de récurrence nous donne donc : il existe $\alpha_n, \dots, \alpha_{k+1}$ dans $\mathbb{N}^*$. Il existe également pour tout $i \in \llbracket k, n-1 \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket$, $\exists \tilde{v}_{i,j} \in G[t, g_1, \dots, g_i]$ tel que pour tout $t > 0$ suffisamment petit on ait : $v_{i,j}(t) = \tilde{v}_{i,j}(t, g_1(t), \dots, g_i(t), D(t))$. Les changements d'inconnues suivants :

$$\begin{aligned} u &= v_{n-1,1} + g_n v_{n-1,2} + \dots + g_n^{\alpha_n-1} v_{n-1,\alpha_n} + g_n^{\alpha_n} u_{n-1,1} \\ u_{n-1,1} &= v_{n-2,1} + g_{n-1} v_{n-2,2} + \dots + g_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1} v_{n-2,\alpha_{n-1}} + g_{n-1}^{\alpha_{n-1}} u_{n-2,1} \\ &\dots\dots\dots \\ u_{k+1,1} &= v_{k,1} + g_{k+1} v_{k,2} + \dots + g_{k+1}^{\alpha_{k+1}-1} v_{k,\alpha_{k+1}} + g_{k+1}^{\alpha_{k+1}} u_{k,1} \end{aligned}$$

Conduisent au fait que $u_{k,1}$ vérifie une équation du type :

$$\begin{aligned} &t^{k+1} u'_{k,1} + \beta_{k,0} u_{k,1} + \dots + \beta_{k,k} t^k u_{k,1} \\ &t^{k+1} h_{k+1}(t, u_{k,1}, g_{1,k+1}, \dots, g_{n,k+1}, w_{k,1}^{k+1}, \dots, w_{k,\gamma_k^{k+1}}^{k+1}, \dots, w_{n-1,1}^{k+1}, \dots, w_{n-1,\gamma_{n-1}^{k+1}}^{k+1}) \end{aligned}$$

Avec $-\beta_{k,0}, \dots, -\beta_{k,k}, \gamma_{n-1}^{k+1}, \dots, \gamma_k^{k+1}$ dans $\mathbb{N}^*$. De plus $\forall i \in \llbracket k, n-1 \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket 1, \gamma_i^{k+1} \rrbracket$, $\exists \tilde{w}_{i,j}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_i]$ tel que pour tout $t > 0$ suffisamment petit $w_{i,j}^{k+1}(t) = \tilde{w}_{i,j}^{k+1}(t, g_1(t), \dots, g_i(t), D(t))$.

On considère 2 cas :

– Si $\beta_{k,0} = -1$: On effectue alors le changement d'inconnues suivant :

$$u_{k,1} = v_{k-1,1} + g_k u_{k-1,1}$$

On remplace dans l'équation pour avoir :

$$\begin{aligned} &t^{k+1} v'_{k-1,1} + \beta_{k,0} v_{k-1,1} + \dots + \beta_{k,k} t^k v_{k-1,1} \\ &+ g_k [t^{k+1} u'_{k-1,1} + (\beta_{k,1} - n_k^{k-1}) t u_{k-1,1} + \dots + (\beta_{k,k} - n_k^0) t^k u_{k-1,1}] \\ &= t^{k+1} h_{k+1}(t, v_{k-1,1} + g_k u_{k-1,1}, g_{1,k+1}, \dots, g_{n,k+1}, w_{k,1}^{k+1}, \dots, w_{k,\gamma_k^{k+1}}^{k+1}, \dots, w_{n-1,1}^{k+1}, \dots, w_{n-1,\gamma_{n-1}^{k+1}}^{k+1}) \end{aligned}$$

A présent, nous allons décrire la construction des $g_{i,k}$ pour $i \geq k+1$:

Pour tout $k+1 \leq i \leq n$ on a :

$$g_{i,k+1}(t) = \frac{e^{\frac{-1}{it^i}}}{e^{\frac{-n_{i,k+1}^{i-1}}{(i-1)t^{i-1}}} \dots e^{\frac{-n_{i,k+1}^1}{t}} t^{n_{i,k+1}^0}}$$

Si $i = k+1$ on a :

$$\frac{g_{k+1}(t)}{g_k(t)} = \frac{e^{\frac{-1}{(k+1)t^{k+1}}}}{e e^{\frac{-(n_{k+1,k+1}^{k-1} - n_k^{k-1})}{(k-1)t^{k-1}}} \dots e^{\frac{-(n_{k+1,k+1}^1 - n_k^1)}{t}} t^{n_{k+1,k+1}^0 - n_k^0}}$$

Pour $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, on note :

$$n_{k+1,k}^j = \begin{cases} 0 & \text{si } n_{k+1,k+1}^j - n_k^j < 0 \\ n_{k+1,k+1}^j - n_k^j & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose aussi $n_{k+1,k}^k = n_{k+1,k+1}^k + 1$. Ainsi il existe $\tilde{\delta}_{k-1}, \dots, \tilde{\delta}_1$ dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{g_{k+1,k+1}(t)}{g_k(t)} = g_{k+1,k}(t) e^{\frac{-\tilde{\delta}_{k-1}}{(k-1)t^{k-1}}} \dots e^{\frac{\tilde{\delta}_1}{t}} t^{\tilde{\delta}_0}$$

En utilisant le même type de procédé on récurse afin d'obtenir l'existence de $\delta_{k+1,k+1}^k, \dots, \delta_{k+1,0}^k$ tel que :

$$g_{k+1,k+1}(t) = g_{k+1,k}(t) g_k(t) (g_{k-1}(t))^{\delta_{k+1,k-1}^k} \dots (g_1(t))^{\delta_{k+1,1}^k} t^{\delta_{k+1,0}^k}$$

On peut faire de même pour les $g_{i,k+1}$, $i \geq k+1$. En utilisant ce résultat ainsi que l'hypothèse de récurrence on écrit pour $i \geq k+1$:

$$\begin{aligned} g_i &= g_{i,i} = g_{i,i-1} g_{i-1}(t)^{\delta_{i,i-2}^{i-1}} \dots (g_1(t))^{\delta_{i,1}^{i-1}} t^{\delta_{i,0}^{i-1}} \\ &= \dots \\ &= g_{i,k} g_k(t)^{\delta_{i,k-1}^k} \dots (g_1(t))^{\delta_{i,1}^k} t^{\delta_{i,0}^k} \end{aligned}$$

Revenons aux éléments de l'équation :

$\forall j \in \llbracket 1, \gamma_k^{k+1} \rrbracket$, $\tilde{w}_{k,j}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_k]$. Donc $\exists \tilde{a}_{k,j}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_{k-1}]$ et $\tilde{b}_{k,j}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_k]$ tel que $\tilde{w}_{k,j}^{k+1} = \tilde{a}_{k,j}^{k+1} + g_k \tilde{b}_{k,j}^{k+1}$.

De même $\forall j \in \llbracket 1, \gamma_{k+1}^{k+1} \rrbracket$, $\tilde{w}_{k+1,j}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$, donc $\exists \tilde{a}_{k+1,j}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_k]$, $\exists \tilde{b}_{k+1,j,k}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_k]$ et $\exists \tilde{b}_{k+1,j,k+1}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_{k+1}]$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{k+1,j}^{k+1} &= \tilde{a}_{k+1,j}^{k+1} + g_k \tilde{b}_{k+1,j,k}^{k+1} + g_{k+1} \tilde{b}_{k+1,j,k+1}^{k+1} \\ &= \tilde{a}_{k+1,j}^{k+1} + g_k \tilde{b}_{k+1,j,k}^{k+1} + g_{k+1,k} g_k (g_{k-1})^{\delta_{k+1,k-1}^k} \dots (g_1)^{\delta_{k+1,1}^k} t^{\delta_{k+1,0}^k} \tilde{b}_{k+1,j,k+1}^{k+1} \end{aligned}$$

On continue ces substitutions jusque :

Pour tout $j \in \llbracket 1, \gamma_{n-1}^{k+1} \rrbracket$, $\exists \tilde{a}_{n-1,j}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_{k-1}]$, $\exists \tilde{b}_{n-1,j,k}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_k]$, $\dots, \exists \tilde{b}_{n-1,j,n-1}^{k+1} \in G[t, g_1, \dots, g_{n-1}]$ tel que :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{n-1,j}^{k+1} &= \tilde{a}_{n-1,j}^{k+1} + g_k \tilde{b}_{n-1,j,n-1}^{k+1} + \dots + g_{n-1} \tilde{b}_{n-1,j,n-1}^{k+1} \\ &= \tilde{a}_{n-1,j}^{k+1} + g_k \tilde{b}_{n-1,j,n-1}^{k+1} + \dots + g_{n-1,k} g_k (g_{k-1})^{\delta_{n-1,k-1}^k} \dots (g_1)^{\delta_{n-1,1}^k} t^{\delta_{n-1,0}^k} \tilde{b}_{n-1,j,n-1}^{k+1} \end{aligned}$$

Dans la suite on notera $a_{i,j}$ et $b_{i,j,l}^k$ les fonctions à valeurs réelles qui se rapportent à leurs homologues avec des tildes. On peut donc remplacer dans l'équation et observer que le membre de droite peut s'écrire pour $t > 0$ suffisamment petit :

$$\begin{aligned} &t^{k+1} h_{k+1}(t, v_{k-1,1} + g_k u_{k-1,1}, g_{1,k+1}, \dots, g_{n,k+1}, w_{k,1}^{k+1}, \dots, w_{k,\gamma_k^{k+1}}^{k+1}, \dots, w_{n-1,1}^{k+1}, \dots, w_{n-1,\gamma_{n-1}^{k+1}}^{k+1}) \\ &= t^{k+1} f_k(t, v_{k-1,1}, g_1, \dots, g_k, a_{k,1}^{k+1}, \dots, a_{k,\gamma_k^{k+1}}^{k+1}, \dots, a_{n-1,1}^{k+1}, \dots, a_{n-1,\gamma_{n-1}^{k+1}}^{k+1}) \\ &+ t^{k+1} h_k(t, u_{k-1,1}, g_{1,k}, \dots, g_{n,k}, v_{k-1,1}, a_{k,1}^{k+1}, \dots, a_{k,\gamma_k^{k+1}}^{k+1}, \dots, a_{n-1,1}^{k+1}, \dots, a_{n-1,\gamma_{n-1}^{k+1}}^{k+1}, \tilde{b}_{k,1}^{k+1}, \dots \\ &\dots, \tilde{b}_{k,\gamma_k^{k+1}}^{k+1}, (\tilde{b}_{i,j,l}^{k+1})_{k+1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i^{k+1}, k \leq l \leq i}) \end{aligned}$$

Avec f_k et h_k analytiques au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de leurs variables.

On choisit donc $v_{k-1,1}$ tel que $v_{k-1,1}$ solution de :

$$\begin{aligned} &t^{k+1} v'_{k-1,1} + \beta_{k,0} v_{k-1,1} + \dots + \beta_{k,k} t^k v_{k-1,1} \\ &= t^{k+1} f_k(t, v_{k-1,1}, g_1, \dots, g_k, a_{k,1}^{k+1}, \dots, a_{k,\gamma_k^{k+1}}^{k+1}, \dots, a_{n-1,1}^{k+1}, \dots, a_{n-1,\gamma_{n-1}^{k+1}}^{k+1}) \end{aligned}$$

D'après la proposition de la section précédente, il existe $\tilde{v}_{k-1,1} \in G[t, g_1, \dots, g_{k-1}]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $v_{k-1,1}(t) = \tilde{v}_{k-1,1}(t, g_1(t), \dots, g_{k-1}(t), D(t))$. Donc $u_{k-1,1}$ vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} & t^k u'_{k-1,1} + (\beta_{k,1} - n_k^{k-1})u_{k-1,1} + \dots + (\beta_{k,k} - n_k^0)t^{k-1}u_{k-1,1} \\ &= t^k h_k(t, u_{k-1,1}, g_{1,k}, \dots, g_{n,k}, v_{k-1,1}, a_{k,1}^{k+1}, \dots, a_{k,\gamma_k}^{k+1}, \dots, a_{n-1,1}^{k+1}, \dots, a_{n-1,\gamma_{n-1}}^{k+1}, \tilde{b}_{k,1}^{k+1}, \dots, \\ & \dots, \tilde{b}_{k,\gamma_k}^{k+1}, (\tilde{b}_{i,j,l}^{k+1})_{k+1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i^{k+1}, k \leq l \leq i}) \end{aligned}$$

Étant donné que les $-\beta_{k,1}, \dots, -\beta_{k,k}$ sont dans $\mathbb{N}^*$, donc $-\beta_{k,1} + n_k^{k-1}, \dots, -\beta_{k,k} + n_k^0$ aussi. En reprenant toutes les hypothèses on constate que la propriété est alors bien démontrée au rang k .

– Si $\beta_{k,0} < -1$:

On effectue la même transformation qu'au cas précédent. On ne retombe alors pas immédiatement sur la propriété recherchée cependant on augmente le terme $\beta_{k,0}$ de 1. Ainsi après plusieurs itérations on est ramené au cas $\beta_{k,0} = -1$.

Dans tous les cas la propriété au rang k est alors démontrée.

La récurrence nous mène donc jusqu'à l'existence de $\tilde{w}_{1,1}^2, \dots, \tilde{w}_{1,\gamma_1^2}^2 \in G[t, g_1]$, ..., $\tilde{w}_{n-1,1}^2, \dots, \tilde{w}_{n-1,\gamma_{n-1}^2}^2 \in G[t, g_1, \dots, g_{n-1}]$ et $u_{1,1}$ vérifiant l'équation :

$$t^2 u'_{1,1} + \beta_{1,0} u_{1,1} + \beta_{1,1} t u_{1,1} = t^2 h_2(t, u_{1,1}, g_{1,2}, \dots, g_{n,2}, w_{1,1}^2, \dots, w_{1,\gamma_1^2}^2, \dots, w_{n-1,1}^2, \dots, w_{n-1,\gamma_{n-1}^2}^2)$$

Avec $-\beta_{1,0}, -\beta_{1,1}$ dans $\mathbb{N}^*$. On se ramène par le même type de réduction à :

$$\begin{aligned} & t^2 u'_{1,|\beta_{1,0}|} - u_{1,|\beta_{1,0}|} + t [\beta_{1,1} - n_1^0(|\beta_{1,0}| - 1)] u_{1,|\beta_{1,0}|} \\ &= t^2 h_2(t, u_{1,|\beta_{1,0}|}, g_{1,2}, \dots, g_{n,2}, w_{1,1}, \dots, w_{1,\gamma_1}, \dots, w_{n-1,1}, \dots, w_{n-1,\gamma_{n-1}}) \end{aligned}$$

On pose $u_{1,|\beta_{1,0}|} = u_0 + g_1 u_1 + (g_1)^2 v$. Ainsi l'équation devient :

$$\begin{aligned} & t^2 u'_0 - u_0 + [\beta_{1,1} - n_1^0|\beta_{1,0}|] + (g_1)^2 [t^2 v' + v + [\beta_{1,1} + n_1^0(|\beta_{1,0}| + 1)]] \\ &= t^2 h_2(t, u_0 + g_1 u_1 + (g_1)^2 v, g_{1,2}, \dots, g_{n,2}, w_{1,1}^2, \dots, w_{1,\gamma_1^2}^2, \dots, w_{n-1,1}^2, \dots, w_{n-1,\gamma_{n-1}^2}^2) \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, \gamma_1 \rrbracket$, il existe $\tilde{w}_{1,j} \in G[t, g_1]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit $w_{1,j}(t) = \tilde{w}_{1,j}(t, g_1(t), D(t))$. Comme $\tilde{w}_{1,j} \in G[t, g_1]$, il existe $\tilde{z}_{1,j,0} \in G[t]$ et $\tilde{z}_{1,j,1} \in G[t, g_1]$ tel que :

$$\tilde{w}_{1,j} = \tilde{z}_{1,j,0} + g_1 \tilde{z}_{1,j,1}$$

On continue ainsi jusqu'à :

Pour tout $j \in \llbracket 1, \gamma_{n-1} \rrbracket$, il existe $\tilde{w}_{n-1,j} \in G[t, g_1, \dots, g_{n-1}]$ tel que pour tout $t > 0$ suffisamment petit on ait :

$$w_{n-1,j}(t) = \tilde{w}_{n-1,j}(t, g_1(t), \dots, g_{n-1}(t), D(t))$$

Comme $\tilde{w}_{n-1,j} \in G[t, g_1, \dots, g_{n-1}]$, il existe $\tilde{z}_{n-1,j,0} \in G[t], \dots, \tilde{z}_{n-1,j,n-1} \in G[t, g_1, \dots, g_{n-1}]$ tel que :

$$\tilde{w}_{n-1,j} = \tilde{z}_{n-1,j,0} + g_1 \tilde{z}_{n-1,j,1} + \dots + g_{n-1} \tilde{z}_{n-1,j,n-1}$$

Comme précédemment on notera $z_{i,j,l}$ les fonctions réelles qui pour $t > 0$ suffisamment petit vérifient : $z_{i,j,l}(t) = \tilde{z}_{i,j,l}(t, g_1(t), \dots, g_l(t), D(t))$.
Pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \frac{g_{j,2}(t)}{g_1^2(t)} &= \frac{e^{\frac{-1}{jt^j}}}{e^{\frac{-n_{j,2}^{j-1}}{(j-1)t^{j-1}}} \dots e^{\frac{-n_{j,2}^1}{t}} t^{n_{j,2}^0} g_1^2(t)} \\ &= \frac{e^{\frac{-1}{jt^j}}}{\underbrace{e^{\frac{-n_{j,2}^{j-1}}{(j-1)t^{j-1}}} \dots e^{\frac{-(n_{j,2}^1+2)}{t}} t^{n_{j,2}^0}}_{:=\tilde{g}_j(t)}} t^{2n_1^0} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $g_{j,2} = \tilde{g}_j g_1^2 t^{2n_1^0}$. Par suite, en utilisant les formules qui précèdent on a pour tout $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} g_j &= g_{j,j} = g_{j,j-1} g_{j-1} g_{j-2}^{\delta_{j,j-2}^{j-1}} \dots g_1^{\delta_{j,1}^{j-1}} t^{\delta_{j,0}^{j-1}} \\ &= \dots \\ &= \tilde{g}_j g_{j-1}^{\tilde{\delta}_{j-1}^j} \dots g_1^{\tilde{\delta}_1^j} t^{\tilde{\delta}_0^j} g_1^2 \end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence et en utilisant l'écriture ci-dessus, on a pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$g_j = \tilde{g}_j \tilde{g}_{j-1}^{\tilde{\delta}_{j-1}^j} \dots \tilde{g}_1^{\tilde{\delta}_1^j} t^{\tilde{\delta}_0^j} g_1^2$$

On reprend les expressions précédentes et pour tout $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, \gamma_i \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{i,j} &= \tilde{z}_{i,j,0} + \sum_{l=1}^i g_l \tilde{z}_{i,j,l} \\ &= \tilde{z}_{i,j,0} + g_1 \tilde{z}_{i,j,1} + \sum_{l=2}^i g_l \tilde{z}_{i,j,l} \\ &= \tilde{z}_{i,j,0} + g_1 \tilde{z}_{i,j,0}^1 + g_1^2 \tilde{z}_{i,j,1}^1 + g_1^2 \sum_{l=1}^i \tilde{g}_l \tilde{g}_{l-1}^{\tilde{\delta}_{l-1}^j} \dots g_1^{\tilde{\delta}_1^j} t^{\tilde{\delta}_0^j} \tilde{z}_{i,j,l} \end{aligned}$$

Et pour $i = 1$ et $j \in \llbracket 1, \gamma_1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{1,j} &= \tilde{z}_{1,j,0} + g_1 \tilde{z}_{1,j,1} \\ &= \tilde{z}_{1,j,0} + g_1 \tilde{z}_{1,j,0}^1 + g_1^2 \tilde{z}_{1,j,1}^1 \end{aligned}$$

Avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tilde{z}_{i,j,0}^1 \in G[t]$ et $\tilde{z}_{i,j,1}^1 \in G[t, g_1]$. On écrit donc le second membre sous la forme :

$$\begin{aligned}
& t^2 h_2(t, u_0 + g_1 u_1 + g_1^2 v, g_{1,2}, \dots, g_{n,2}, (w_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq \gamma_i}}) \\
&= t^2 h_2(t, u_0 + g_1 u_1 + g_1^2 v, g_1, g_1^2 \tilde{g}_2 g_1^{\tilde{\delta}_1^2} t^{\tilde{\delta}_0^2}, \dots, g_1^2 \tilde{g}_n g_{n-1}^{\tilde{\delta}_{n-1}^2} \dots g_1^{\tilde{\delta}_1^n} t^{\tilde{\delta}_0^n}, z_{1,1,0} + g_1 z_{1,1,0}^1 + g_1^2 z_{1,1,1}^1, \dots \\
&\dots, z_{1,\gamma_1,0} + g_1 z_{1,\gamma_1,0}^1 + g_1^2 z_{1,\gamma_1,1}^1, (\tilde{z}_{i,j,0} + g_1 \tilde{z}_{i,j,0}^1 + g_1^2 \tilde{z}_{i,j,1}^1 + g_1^2 \sum_{l=1}^i \tilde{g}_l g_{l-1}^{\tilde{\delta}_{l-1}^2} \dots g_1^{\tilde{\delta}_1^2} t^{\tilde{\delta}_0^i} \tilde{z}_{i,j,l})_{\substack{2 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq \gamma_i}}) \\
&= t^2 f_1(t, u_0, z_{1,1,0}, \dots, z_{1,\gamma_1,0}, \dots, z_{n-1,1,0}, \dots, z_{n-1,\gamma_{n-1},0}) \\
&+ t^2 g_1 u_1 h_1(t, u_0, u_1, z_{1,1,0}, \dots, z_{1,\gamma_1,0}, \dots, z_{n-1,1,0}, \dots, z_{n-1,\gamma_{n-1},0}) \\
&+ t^2 g_1 \tilde{h}_1(t, u_0, z_{1,1,0}, z_{1,1,0}^1, \dots, z_{1,\gamma_1,0}, z_{1,\gamma_1,0}^1, \dots, z_{n-1,1,0}, z_{n-1,1,0}^1, \dots, z_{n-1,\gamma_{n-1},0}, z_{n-1,\gamma_{n-1},0}^1) \\
&+ g_1^2 t^2 f(t, u_0, u_1, v, g_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_n, (z_{i,j,l})_{2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i, 2 \leq l \leq i}, (z_{i,j,0})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i}, \\
&(z_{i,j,0}^1)_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i}, (z_{i,j,1}^1)_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i})
\end{aligned}$$

Nous choisissons donc u_0 solution de :

$$\begin{aligned}
& t^2 u'_0 - u_0 + [\beta_{1,1} - n_1^0(|\beta_{1,0}| - 1)] t u_0 \\
&= t^2 f_1(t, u_0, z_{1,1,0}, \dots, z_{1,\gamma_1,0}, \dots, z_{n-1,1,0}, \dots, z_{n-1,\gamma_{n-1},0})
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant la proposition précédente, il existe $\tilde{u}_0 \in G[t]$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit on ait : $u_0(t) = \tilde{u}_0(t, D(t))$.

On choisit ensuite u_1 vérifiant l'équation :

$$\begin{aligned}
& t u'_1 + (\beta_{1,1} - n_1^0 |\beta_{1,0}|) u_1 \\
&= u_1 t h_1(t, u_0, u_1, z_{1,1,0}, \dots, z_{1,\gamma_1,0}, \dots, z_{n-1,1,0}, \dots, z_{n-1,\gamma_{n-1},0}) \\
&+ t \tilde{h}_1(t, u_0, z_{1,1,0}, z_{1,1,0}^1, \dots, z_{1,\gamma_1,0}, z_{1,\gamma_1,0}^1, \dots, z_{n-1,1,0}, z_{n-1,1,0}^1, \dots, z_{n-1,\gamma_{n-1},0}, z_{n-1,\gamma_{n-1},0}^1)
\end{aligned}$$

Notons $a = -(\beta_{1,1} - n_1^0 |\beta_{1,0}|)$. D'après la proposition 2 on a l'existence de $c_1, \dots, c_{a-1} \in \mathbb{Q}$ (si $a \geq 2$ sinon on retire ces constantes du développement), b_1, b_2 et $\tilde{l}_0, \tilde{s}_0 \in G[t]$ tel que :

$$u(t) = l_0(t) [c_1 t + \dots + c_{a-1} t^{a-1} + b_1 t^{a-1} Y + C t^a + b_2 t^{a+1} + t^{a-1} s_0]$$

Avec C constante arbitraire et l_0, s_0 à valeurs réelles définies pour $t > 0$ suffisamment petit par $l_0(t) = \tilde{l}_0(t, D(t))$ et $s_0(t) = \tilde{s}_0(t, D(t))$. La fonction v vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}
& t^2 v' + v + [\beta_{1,1} + n_1^0(|\beta_{1,0}| + 1)] t v \\
&= t^2 f(t, u_0, u_1, v, g_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_n, (z_{i,j,l})_{2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i, 2 \leq l \leq i}, (z_{i,j,0})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i}, \\
&(z_{i,j,0}^1)_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i}, (z_{i,j,1}^1)_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \gamma_i})
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats précédents et la proposition 8 on peut réécrire la forme de l'équation que vérifie v par :

$$t^2 v' + v = t f(t, v, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n, p_1, \dots, p_q)$$

Avec $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_q \in G[t, g_1, \dots, g_n] \in G[t, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n]$ par construction, et pour $t > 0$ suffisamment petit $p_j(t) = \tilde{p}_j(t, D(t))$. Et $(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n) \in N_1 \times \dots \times N_n$. Donc en utilisant le théorème de la partie II il existe $\alpha_1 > 0$, Ω_1 un ouvert compatible avec $(t \mapsto t, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n)$, une unique solution $\tilde{v} \in \Theta_{\alpha_1, \Omega_1}^0$ tel que pour $t > 0$ suffisamment petit on ait $v(t) = \tilde{v}(t, \tilde{g}_1(t), \dots, \tilde{g}_n(t))$.

Ainsi nous avons réussi comme dans [7] et [8] à donner un développement faisant apparaître de manière explicite le rôle de la constante arbitraire.

Quatrième partie

Applications et Exemples

Sommaire

11 Équation du type "$t^n \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, u)$" en dimension 1	97
11.1 Introduction	97
11.2 Définition du type d'équation $[\Delta]$	98
11.3 Zoologie de ces équations	99
 12 Étude d'équation comportant des termes de la forme $t^k \frac{d^n}{dt^n}$	111
12.1 Introduction	111
12.2 Mode de réduction	114
12.3 Théorème d'existence	117
 Bibliographie	127

- Nous allons donner deux exemples d'utilisation des théorèmes des parties II et III.
- Dans un premier temps, nous allons illustrer le fait qu'en dimension 1 des classes d'équations beaucoup plus vastes peuvent se ramener aux équations étudiées précédemment. L'intérêt de cet exemple gît essentiellement dans l'intervention de réduction astucieuse qui s'apparente à des réductions Fuchsiennes faisant ainsi apparaître des mécanismes de réduction automatisés suivant les différents cas.
 - Dans un second temps, nous montrerons que des équations avec des dérivées d'ordre supérieure à 1 peuvent se ramener aux équations étudiées dans les parties précédentes. Un parallèle avec les équations de [7] sera effectué.

11 Équation du type " $t^n \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, u)$ " en dimension 1

11.1 Introduction

Nous nous intéressons ici à des équations en dimension 1 du type $t^n u' = f(t, u)$. Notre but est de toucher la classe d'équation la plus large possible qui puisse se réécrire sous la forme énoncée à la fin de la partie II. Ces équations ne garantissent pas toujours des solutions qui tendent vers 0 en 0. Il sera donc souvent nécessaire de voir à quel équivalent on peut faire appel pour obtenir, après réduction, des solutions d'équations qui tendent vers 0 en 0. Des réductions particulières seront donc introduites pour atteindre ce résultat. Pour motiver les définitions et les démonstrations qui vont suivre, nous commençons par un exemple sur lequel nous motiverons des réductions et expliquerons leurs intérêts.

L'exemple choisi est l'équation suivante :

$$t^2 \frac{\partial u}{\partial t} + 5tu + 2u = 1 + tu^2 + t^3 u$$

Nous allons effectuer sur cette équation 2 réductions successives. Nous commençons par poser $u = \frac{1}{2} + tv$ et nous l'injectons dans l'équation initiale :

$$\begin{aligned} t^2 \frac{\partial u}{\partial t} &= t^2 v + t^3 \frac{\partial v}{\partial t} = 1 + t\left(\frac{1}{2} + tv\right)^2 + t^3\left(\frac{1}{2} + tv\right) - 2\left(\frac{1}{2} + tv\right) - 5t\left(\frac{1}{2} + tv\right) \\ \Rightarrow t^2 \frac{\partial v}{\partial t} + 5tv + 2v &= -\frac{9}{4} + t^2 v^2 + \frac{t^2}{2} + t^3 v \end{aligned}$$

L'intérêt de cette réduction est l'augmentation des puissances de t qui sont attachées aux " v^i " ($i \geq 2$). Cependant, cette réduction ne permet pas d'effacer le "1" de l'équation initiale car il est remplacé par " $-\frac{9}{4}$ ". On a toutefois isolé un équivalent potentiel en 0, de la solution, à savoir $\frac{1}{2}$. A présent, posons $v = -\frac{9}{4} + w$, ce qui nous donne :

$$t^2 \frac{\partial w}{\partial t} + 5tw + 2w = \frac{45}{8}t + \frac{113}{64}t^2 - \frac{9}{8}t^3 + t^3 w + t^2 w^2 - \frac{9}{4}t^2 w$$

Au final, on se retrouve avec une équation du type :

$$t^2 \frac{\partial w}{\partial t} + 2w = tf(t, w)$$

Avec $u = \frac{1}{2} - \frac{9}{8}t + tw$. Il est important de bien voir que la première réduction n'est pas anodine car sans elle nous aurions pu obtenir des termes du type w^i seuls. Il est intéressant de constater que ce genre de réductions cumulées ne correspond pas aux réductions effectuées dans [1]. En effet, dans [1] deux réductions successives auraient conduits à la transformation suivante : $u = \frac{1}{2} - \frac{9}{8}t + t^2w$. Hélas, ce type de réduction reste sur le même type d'équation c'est à dire qu'il reste une constante dans l'équation. Avant d'énoncer un résultat qui généralise ce phénomène, nous allons introduire quelques définitions et propositions pour fixer les bases de la démonstration du théorème qui suivra.

11.2 Définition du type d'équation $[\Delta]$

En effet, pour pouvoir énoncer un théorème de réduction sur les équations du type $t^n u' = f(t, u)$, il convient de s'entendre sur les critères de base que doivent respecter les éléments constitutifs de l'équation.

Définition 15. Soit (E) une équation du type $t^n \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, u)$, $t > 0$, avec $n \in \mathbb{N}$. On dira que (E) est du type $[\Delta]$, si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique en chacune de ces variables dans un voisinage de $(0, 0)$ et qu'il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $u \in \mathcal{C}^1(V \cap]0, +\infty[)$.

De même, on définit le fait qu'une équation du type $[\Delta]$ soit complètement factorisée.

Définition 16. On dira que (E) de type $[\Delta]$ est complètement factorisée si :

- $n = 0$
- ou $\exists(0, z) \in \mathcal{D}f$, $f(0, z) \neq 0$

La proposition qui suit montre que la qualité de complète factorisation est accessible à toutes équations de type $[\Delta]$ moyennant une réécriture.

Proposition 11. Soit (E) une équation du type $t^n \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, u)$, $t > 0$ du type $[\Delta]$. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique en chacune de ces variables au voisinage de $(0, 0)$ tel que (E) puisse se ramener à une équation du type :

$$(E') : t^{n_0} \frac{\partial u}{\partial t} = g(t, u)$$

Où (E') est complètement factorisée.

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Rang initial $n = 0$
Vrai par définition.
- Passage du rang $k - 1$ au rang k
On a (E) qui s'écrit :

$$t^k \frac{du}{dt} = f(t, u) = \sum_{i \geq 0} t^i f_i(u)$$

Si $f(0, u) = f_0(u) \neq 0$ alors (E) est complètement factorisée par définition et on peut alors prendre $n_0 = n$ et $g \equiv f$. Si $f(0, u) = f_0(u) = 0$ alors pour $t > 0$ l'équation devient :

$$\begin{aligned} t^k \frac{du}{dt} &= t f_1(u) + t^2 f_2(u) + \dots \\ \Rightarrow t^{k-1} \frac{du}{dt} &= f_1(u) + t f_2(u) + \dots = \sum_{i \geq 1} t^{i-1} f_i(u) = \tilde{f}(t, u) \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser l'hypothèse de récurrence. □

Cette proposition nous permet dans la suite de choisir des équations complètement factorisées sans perte de généralités.

11.3 Zoologie de ces équations

En effet, nous décrivons dans le théorème qui suit, une zoologie des équations étudiées dans ce paragraphe. Cette étude vise à réduire le système sous une certaine forme. Cette forme sera reprise dans le théorème d'existence situé à la fin de cette partie.

Notations. $\mathbb{Z}^- = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } k \leq 0\}$

Théorème 4. Soit (E) du type $[\Delta]$ complètement factorisée du type $t^n \frac{du}{dt} = f(t, u)$, $t > 0$. On suppose de plus que si $n \neq 0$, $\exists u_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(0, u_0) \in \mathcal{D}f$ et $f(0, u_0) = 0$. Alors on a 4 cas :

- cas A_0 : $n = 0$ ou $(\frac{\partial f}{\partial y}(0, u_0) \notin \mathbb{N} \text{ et } n = 1)$
Alors, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\exists Q_{p-1} \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $Q_{p-1}(0) + 1 = Q_p(0)$, $Q_{p-1}(0) \neq 0$, $\exists P_{2p-1} \in \mathbb{C}_{2p-1}[X]$, $\exists f_p : \mathcal{D}f_p \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique en chacune de ses variables tel qu'en posant $u = P_{2p-1}(t) + t^p \tilde{u}$, on ait $\tilde{u}$ qui vérifie l'équation :

$$t \frac{d\tilde{u}}{dt} + Q_{p-1}(t) \tilde{u} = t^p f_p(t, \tilde{u})$$

- cas A_1 : $n = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, u_0) \in \mathbb{N}$
Alors, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\exists k(p) \in \mathbb{N}^*$, $\exists Q_{p-1} \in \mathbb{C}_{p-1}[X_0, \dots, X_{k(p)}]$, $Q_{p-1}(0) \notin \mathbb{Z}^-$, $\exists P_{2p-1} \in \mathbb{C}_{2p-1}[X_0, \dots, X_{k(p)}]$, il existe aussi pour tout $i \in \llbracket 0, k(p) \rrbracket$, $f_{p,i} : \mathcal{D}f_{p,i} \subset \mathbb{R}^{k(p)+1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique en chacune de ses variables tel qu'en posant $u = P_{2p-1}(t, t \ln(t), \dots, t(\ln(t))^{k(p)}) + t^p \tilde{u}$, on ait $\tilde{u}$ qui vérifie l'équation :

$$t \frac{d\tilde{u}}{dt} + Q_{p-1}(t, t \ln(t), \dots, t(\ln(t))^{k(p)}) \tilde{u} = \sum_{i=0}^{k(p)} t^p (\ln(t))^i f_{p,i}(t, t \ln(t), \dots, t(\ln(t))^{k(p)}, \tilde{u})$$

Et Q_{p-1} , P_{2p-1} , f_p dépendant d'un paramètre arbitraire pour p assez grand.

- cas A_2 : $n \geq 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, u_0) \neq 0$
Alors, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\exists Q_{p-1} \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $Q_{p-1}(0) \neq 0$, $\exists P_{2p-1} \in \mathbb{C}_{2p-1}[X]$, $\exists f_p : \mathcal{D}f_p \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique en chacune de ses variables tel qu'en posant $u = P_{2p-1}(t) + t^p \tilde{u}$, on ait $\tilde{u}$ qui vérifie l'équation :

$$t^n \frac{d\tilde{u}}{dt} + Q_{p-1}(t)\tilde{u} = t^p f_p(t, \tilde{u})$$

- cas A_3 : $n \geq 2$ et $\exists m \geq 2$ tel que $\frac{\partial^m f}{\partial y^m}(0, u_0) \neq 0$. En effet, sinon $f(0, u) \equiv 0$ et (E) n'est pas complètement factorisée. Il existe alors $i, r \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel qu'en posant $\tau = t^{\frac{1}{r}}$ et $u = P(\tau) + \tau^i \tilde{u}$, on puisse se ramener au cas A_0 , A_1 ou A_2 .

Remarque 6.

- Dans le cas A_1 , on a $k(p+1) \leq 3k(p) + 1$
- Le fait dans A_1 de choisir dans $\mathbb{N}$ le coefficient $\frac{\partial f}{\partial y}(0, u_0) - 1$ n'est pas gênant. S'il est dans $\mathbb{Q}$ on se ramène à $\mathbb{N}$ par changement de variable sinon on peut énoncer des variantes dans $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.
- A_2 mène à une réduction que nous étudierons ensuite.
- Dans A_3 , P n'est pas nécessairement unique.

Démonstration. Cas A_0 : Montrons le résultat par récurrence sur $p \geq 1$:

- rang 1
- Si $n = 0$

$$t \frac{du}{dt} = tf(t, u) = th(t) + t \sum_{i \geq 1} f_i(t) u^i$$

Comme h est analytique au voisinage de 0, on peut écrire sur un voisinage de 0 : $h(t) = \sum_{i \geq 1} a_i t^i$. Ce qui donne :

$$t \frac{du}{dt} = a_1 t + t^2 \sum_{i \geq 0} a_{i+2} t^i + t \sum_{i \geq 1} f_i(t) u^i$$

On pose alors $u = a_1 t + tv$:

$$\begin{aligned} t \frac{du}{dt} &= a_1 t + t^2 \frac{dv}{dt} + tv = a_1 t + t^2 \sum_{i \geq 0} a_{i+2} t^i + t \sum_{i \geq 1} f_i(t) t^i (a_1 + v)^i \\ t \frac{dv}{dt} + v &= t \sum_{i \geq 0} a_{i+2} t^i + \sum_{i \geq 1} f_i(t) t^i (a_1 + v)^i = tg(t, v) \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang 1 en prenant $P_{2 \times 1 - 1}(X) = a_1 X$, $Q_{1-1}(X) = 1$, et $f_1 = g$.

- Si $n = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, u_0) \notin \mathbb{N}$

On écrit $f(t, u) = f_0(u) + tf_1(u) + t^2f_2(u) + \dots$. On pose $\frac{\partial f}{\partial y}(0, u_0) = f'_0(u_0)$ et par définition $f_0(u_0) = 0$. En opérant la transformation $u = u_0 + tv$ dans l'équation précédente, on a :

$$\begin{aligned} t \frac{du}{dt} &= t^2 \frac{dv}{dt} + tv = f'_0(u_0)tv + \frac{f''_0(u_0)}{2}t^2v^2 + \dots + tf_1(u_0) + t^2g(t, v) \\ \Rightarrow t \frac{dv}{dt} + (1 - f'_0(u_0))v &= f_1(u_0) + tg(t, v) \end{aligned}$$

Une nouvelle transformation s'impose : $v = \frac{f_1(u_0)}{1-f'_0(u_0)} + w$. Elle implique :

$$t \frac{dw}{dt} + (1 - f'_0(u_0))w = t\tilde{g}(t, w)$$

La propriété est donc vraie au rang 1 en prenant $P_{2 \times 1-1}(X) = u_0 + \frac{f_1(u_0)}{1-f'_0(u_0)}X$, $Q_{1-1}(X) = 1 - f'_0(u_0) \notin \mathbb{Z}^-$ et $f_1 = \tilde{g}$.

- Supposons la propriété vraie au rang $p \geq 1$ et montrons la au rang $p + 1$:

L'hypothèse de récurrence s'énonce ainsi : $\exists Q_{p-1} \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $\exists P_{2p-1} \in \mathbb{C}_{2p-1}[X]$ avec $Q_{p-1}(0) \notin \mathbb{Z}^-$, $\exists f_p : \mathcal{D}f_p \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique en chacune de ces variables tel qu'en posant $u = P_{2p-1}(t) + t^p v$, v vérifie l'équation :

$$t \frac{dv}{dt} + Q_{p-1}(t)v = t^p f_p(t, v)$$

On pose $Q_{p-1}(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_{p-1}X^{p-1}$ avec $b_0 \notin \mathbb{Z}^-$. De même, on écrit $f_p(t, v) = f_0(t) + \sum_{i \geq 1} f_i(t)v^i$ et $f_0(t) = \sum_{i \geq 0} a_i t^i$. On effectue la réduction suivante : $v = \frac{a_0}{p+b_0}t^p + tw$. Notons bien que cette réduction est possible puisque $b_0 \notin \mathbb{Z}^-$ donc $p + b_0 \notin \mathbb{Z}^-$, c'est à dire non nul.

$$\begin{aligned} t \frac{dv}{dt} + Q_{p-1}(t)v &= \frac{pa_0}{p+b_0}t^p + t^2 \frac{dw}{dt} + tw + (b_{p-1}t^{p-1} + \dots + b_1t) \frac{a_0}{p+b_0}t^p \\ &\quad + \frac{a_0b_0}{p+b_0}t^p + (b_{p-1}t^{p-1} + \dots + b_1t)tw + b_0tw \\ &= a_0t^p + t^{p+1} \sum_{i \geq 0} a_{i+1}t^i + t^p \sum_{i \geq 1} f_i(t)t^i \left(w + a_0 \frac{t^{p-1}}{p+b_0} \right)^i \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} t \frac{dw}{dt} + (1 + b_0 + b_1t + \dots + b_{p-1}t^{p-1})w &+ (b_{p-1}t^{2p-2} + \dots + b_1t^p) \frac{a_0}{p+b_0} \\ &= a_1t^p + t^{p+1} \sum_{i \geq 0} a_{i+2}t^i + t^p f_1(t) \left(w + \frac{a_0t^{p-1}}{p+b_0} \right) + t^{p+1} \sum_{i \geq 0} f_{i+2}(t) \left(\frac{w + a_0t^{p-1}}{p+b_0} \right)^{i+2} \end{aligned}$$

On écrit $f_1(t) = \sum_{i \geq 0} c_i t^i = c_0 + t \tilde{f}_1(t)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} t^p f_1(t) \left(w + \frac{a_0 t^{p-1}}{p + b_0} \right) &= t^p c_0 \left(w + \frac{a_0 t^{p-1}}{p + b_0} \right) + t^{p+1} \tilde{f}_1(t) \left(w + \frac{a_0 t^{p-1}}{p + b_0} \right) \\ &= c_0 t^p w + \delta_{p-1} \frac{c_0 a_0 t^p}{p + b_0} + (1 - \delta_{p-1}) \frac{c_0 a_0}{p + b_0} t^{p+1-(p-2)} \\ &\quad + t^{p+1} \tilde{f}_1(t) \left(w + \frac{a_0 t^{p-1}}{p + b_0} \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} t \frac{dw}{dt} + (c_0 t^p + b_{p-1} t^{p-1} + \dots + b_1 t + b_0 + 1) w &= \left[a_1 - \frac{b_1}{p + b_0} + \frac{\delta_{p-1} c_0 a_0}{p + b_0} \right] t^p \\ &\quad + t^{p+1} \left(\frac{(1 - \delta_{p-1}) a_0}{p + b_0} [c_0 t^{p-2} + (1 - \delta_{p \geq 3}) b_2 + (1 - \delta_{p \geq 4}) (b_3 t + \dots + b_{p-1} t^{p-3})] \right. \\ &\quad \left. + \tilde{f}_1(t) \left(w + \frac{a_0 t^{p-1}}{p + b_0} \right) + \underbrace{\sum_{i \geq 0} a_{i+2} t^i + \sum_{i \geq 2} f_{i+2}(t) t^i \left(w + \frac{a_0 t^{p-1}}{p + b_0} \right)^{i+2}}_{\tilde{f}_{p+1}(t, w)} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$t \frac{dw}{dt} + [c_0 t^p + \dots + b_1 t + b_0 + 1] w = \left[a_1 - \frac{b_1}{p + b_0} + \delta_{p-1} \frac{c_0 a_0}{p + b_0} \right] t^p + t^{p+1} \tilde{f}_{p+1}(t, w)$$

$$\text{En posant } w = \frac{\left[a_1 - \frac{b_1}{p + b_0} + \delta_{p-1} \frac{c_0 a_0}{p + b_0} \right]}{b_0 + 2} t^p + \tilde{u} = \beta t^p + \tilde{u} \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} t \frac{d\tilde{u}}{dt} + [c_0 t^p + \dots + b_1 t + b_0 + 1] \tilde{u} \\ = t^{p+1} \left[\tilde{f}_{p+1}(t, \beta t^p + \tilde{u}) - \delta_{p \geq 2} (b_1 + \dots + b_{p-1} t^{p-2}) + c_0 t^{p-1} \right] \end{aligned}$$

On obtient bien ce que l'on veut en posant :

$$\begin{aligned} Q_p(X) &= c_0 X^p b_{p-1} X^{p-1} + \dots + b_1 X + b_0 + 1 \\ Q_p(0) &= b_0 + 1 = Q_{p-1}(0) + 1 \Rightarrow Q_p(0) \notin \mathbb{Z}^- \\ f_{p+1}(t, \tilde{u}) &= \tilde{f}_{p+1}(t, \alpha t^p + \tilde{u}) - \delta_{p \geq 2} (b_1 + \dots + b_{p-1} t^{p-2}) + c_0 t^{p-1} \end{aligned}$$

De plus $v = \alpha t^p + t w = \alpha t^p + \beta t^{p+1} + t \tilde{u}$ avec $\alpha = \frac{a_0}{p + b_0}$. Or $u = P_{2p-1}(t) + t^p v = P_{2p-1}(t) + \alpha t^{2p} + \beta t^{2p+1} + t^{p+1} u$ donc on a le résultat avec :

$$P_{2p+1}(t) = P_{2p-1}(t) + \alpha t^{2p} + \beta t^{2p+1}$$

Et ceci termine la récurrence

Cas A_1 :

On commence par effectuer le même type de réduction que dans le cas A_0 , puis on utilise les articles [7] et [8].

Cas A_2 : On procède de même par récurrence sur $p \geq 1$:

– rang 1 :

On suppose donc $t^n \frac{du}{dt} = \sum_{i \geq 0} t^i f_i(u)$ avec $f_0(u_0) = 0$ et $f'_0(u_0) \neq 0$. Nous commençons donc par réduire de la façon suivante $u = u_0 + tv$, donnant :

$$\begin{aligned} t^{n+1} \frac{dv}{dt} + t^n v &= f'_0(u_0)tv + tf_1(u_0) + t^2 h(t, v) \\ \Rightarrow t^n \frac{dv}{dt} + t^{n-1} v &= f'_0(u_0)v + f_1(u_0) + th(t, v) \end{aligned}$$

On utilise ensuite la transformation suivante : $v = -\frac{f_1(u_0)}{f'_0(u_0)} + w$. Une fois le changement d'inconnues effectué, on a :

$$t^n \frac{dw}{dt} - f'_0(u_0)w = tf(t, w - \frac{f_1(u_0)}{f'_0(u_0)}) - t^{n-1}(-\frac{f_1(u_0)}{f'_0(u_0)} + w) = t\tilde{h}(t, w)$$

Au final, le changement d'inconnue suivant $u = u_0 - t\frac{f_1(u_0)}{f'_0(u_0)} + tw$ montre la propriété au rang 1.

– Supposons la propriété au rang p et montrons la au rang $p+1$:

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $t^n \frac{du}{dt} + Q_{p-1}(t)u = t^p f_p(t, u)$ avec $Q_{p-1}(0) = -f'_0(u_0)$. On utilise la notation suivante : $f_p(t, u) = \sum_{i \geq 0} f_{p,i}(t)u^i$.

Et la transformation que nous commençons par faire est : $u = -\frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)}t^p + tv$. Elle a pour conséquence ;

$$\begin{aligned} t^{n+1} \frac{dv}{dt} + t^n - p \frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} t^{p-1+n} + [Q_{p-1}(t) - Q_{p-1}(0)] \left[-\frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} t^p + tv \right] + f'_0(u_0)tv \\ = t^p \left[tf'_{p,0}(0) + t^2 g_{p,0}(t) + f_{p,1}(0) \left(tv - \frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} t^p \right) + t^2 \tilde{f}(t, v) \right] \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} t^n \frac{dv}{dt} + t^{n-1}v - p \frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} t^{p-2+n} + [Q_{p-1}(t) - Q_{p-1}(0)] \left[-\frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} t^p + tv \right] + f'_0(u_0)v \\ t^p \left[f'_{p,0}(0) - f_{p,1}(0) \left(\frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} t^{p-1} \right) \right] + \tilde{f}(t, v) + f_{p,1}(0)t^p v \end{aligned}$$

Après examen des puissances portées par les monômes en " t ", on s'aperçoit qu'elles sont toutes supérieures à p . En effet, on a $p-2+n \geq p-2+2 \geq p$. De même, le fait que $[Q_{p-1}(t) - Q_{p-1}(0)]$ puisse s'écrire sous la forme $tg(t)$, augmente la puissance des termes en t^{p-1} d'au moins 1 pour que tous les termes en puissance de t aient un ordre d'au moins p .

$$\begin{aligned} t^n \frac{dv}{dt} + \underbrace{[-f_{p,1}(0)t^p + Q_{p-1}(t) + \delta_{n-1 \geq p} t^{n-1}]}_{:=Q_p} v \\ = \underbrace{\left[\delta_{n-2p} \frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} + g(0) \frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} + f'_{p,0}(0) - \delta_{p-1} \frac{f_{p,1}(0)f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} \right]}_{:=\beta'} + t^{p+1} \tilde{g}(t, v) \end{aligned}$$

Avec ce choix de Q_p , on a $Q_p(0) = -f'_0(u_0)$ car $n \geq 2$. On pose alors $v = -\frac{\beta'}{f'_0(u_0)}t^p + w$.

$$t^n \frac{dw}{dt} - p \frac{\beta'}{f'_0(u_0)} t^{p-1+n} + \underbrace{\frac{Q_p(t)(-\beta')t^p}{f'_0(u_0)}}_{:=\beta' t^p + t^{p+1}} + Q_p(t)w = \beta' t^p + t^{p+1} \tilde{g}(t, w)$$

Donc :

$$t^n \frac{dw}{dt} + Q_p(t)w = t^{p+1} f_{p+1}(t, w)$$

Où $f_{p+1}(t, w) = \tilde{g}(t, w) - r(t) + p \frac{\beta' t^{-2+n}}{f'_0(u_0)}$. Au final, on montre bien la récurrence avec :

$$\begin{aligned} u &= P_{2p-1}(t) + t^p \left(tw - \frac{\beta'}{f'_0(u_0)} - \frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} t^p \right) \\ &= P_{2p-1}(t) - \frac{\beta'}{f'_0(u_0)} t^{2p+1} - \frac{f_{p,0}(0)}{f'_0(u_0)} t^{2p} + t^{p+1} w \\ &= P_{2p+1}(t) + t^{p+1} w \end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence.

Cas A_3 :

Rappelons les hypothèses : nous devons réduire une équation du type suivant :

$$t^n \frac{du}{dt} = \sum_{i \geq 0} f_i(u) t^i \text{ avec } f_0(u_0) = 0, f'_0(u_0) = 0, \dots, f_0^{(m-1)}(u_0) = 0, f_0^{(m)}(u_0) \neq 0$$

On commence par poser $u = u_0 + v$. Et nous allons tout d'abord éliminer un cas, celui où $\forall j \geq 1, f_j(u_0) = 0$. L'équation devient dans ce cas de la forme :

$$t^n \frac{dv}{dt} = v g(t, v) = v g_1(t) + v^2 g_2(t) + \dots$$

– Si g_1 n'est pas la fonction nulle alors $\exists r \in \mathbb{N}$ tel que $f_1^{(r)}(0) \neq 0$. Donc $f_1(t) = t^r g(t)$ et $g(0) \neq 0$. On pose alors $v = t^{n+m+1} w$:

$$t^{2n+m+1} \frac{dw}{dt} + (n+m+1) t^{2n+m} w = t^{n+m+1+r} w g(t) + t^{2n+2m+2} \tilde{g}(t, w)$$

– Si $r < n-1$ On simplifie par $n+m+1+r$:

$$t^{n-r} \frac{dw}{dt} + (n+m+1) t^{n-1-r} w = g(0) w + t \tilde{g}(t, w)$$

On a $n-r \geq 2$ car $n-r-1 \geq 1$, $g(0) \neq 0$ c'est donc le cas A_2 .

– Si $r \geq n-1$ On simplifie par $2n+m$:

$$t \frac{dw}{dt} + (n+m+1) w = t \tilde{g}(t, w)$$

C'est donc le cas A_0 .

– Si $r = n - 1$ On a :

$$t \frac{dw}{dt} + (n + m + 1 - g(0))w = t \tilde{\tilde{g}}(t, w)$$

Si $g(0) - m - n - 1$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$, alors on retourne au cas A_0 et si $g(0) - m - n - 1 \in \mathbb{N}$, alors, on retourne au cas A_1 .

– Si par contre, g_1 est la fonction nulle, alors, $t^n \frac{dv}{dt} = v^2 f(t, v)$. La transformation $v = t^{n+1}w$ nous donne :

$$\begin{aligned} t^{2n+1} \frac{dw}{dt} + t^{2n}w &= t^{2n+2}w^2 f(t, t^{n+1}w) \\ \rightarrow t \frac{dw}{dt} + w &= t^2 w^2 f(t, t^{n+1}w) \end{aligned}$$

Ce qui correspond au cas A_0 .

Dans la suite, on va donc pouvoir supposer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_k(u_0) \neq 0$. On a alors l'équation en $v = u - u_0$ de la forme :

$$t^n \frac{dv}{dt} = a_m v^m + a_{m+1} v^{m+1} + \dots + b_k t^k + b_{k+1} t^{k+1} + \dots + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 1}} c_{i,j} t^i v^j$$

Avec $m \geq 2$, $k \geq 1$, $n \geq 2$ et $a_p \neq 0$, $b_k \neq 0$. Montrons par récurrence sur $m \geq 1$ que ce type d'équation se réduit bien aux cas A_0 , A_1 ou A_2 . On a ici $m \geq 2$ mais pour faciliter la mise en ?uvre du premier rang, nous montrerons la propriété pour $m \geq 1$.

– rang initial $m = 1$

On pose $u = tv$, ce qui dans l'équation précédente donne :

$$\begin{aligned} t^{n+1} \frac{dv}{dt} + t^n v &= a_1 tv + a_2 t^2 v^2 + \dots + b_k t^k f(t) + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 1}} c_{i,j} t^{i+j} v^j \\ \Rightarrow t^n \frac{dv}{dt} + t^{n-1} v - a_1 v &= a_2 t v^2 + a_3 t^2 v^3 + \dots + b_k t^{k-1} f(t) + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 1}} c_{i,j} t^{i+j-1} v^j \\ \Rightarrow t^n \frac{dv}{dt} + (\delta_{n-1} - a_1) v & \\ = \delta_{k-1} b_k + t \left[a_2 v^2 + a_3 t v^3 + \dots + g(t) + \sum_{\substack{i \geq 0 \\ j \geq 0}} c_{i+1,j+1} t^{i+j} v^{j+1} \right] \end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$ alors on retrouve le cas A_2 .

– Supposons la propriété vraie aux rangs $1, \dots, m - 1$ et montrons la au rang $m \geq 2$

– $\boxed{n \geq k+1}$ Soit l'équation (E) :

$$t^n \frac{du}{dt} = \sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 1}} c_{i,j} t^i u^j + b_k t^k + b_{k+1} t^{k+1} + \dots + a_m u^m + a_{m+1} u^{m+1}$$

On note $E_{k,m}$ l'ensemble inclus dans $\mathbb{N}^2$ défini comme suit :

$$E_{k,m} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket \text{ et } c_{i,j} \neq 0\}$$

On définit $r = \frac{s}{q} \in \mathbb{Q}$ de la façon suivante : $r = \max(S)$ où

$$S = \underbrace{\left\{ \frac{k-i}{j}, (i, j) \in E_{k,m} \right\} \cup \left\{ \frac{k}{m} \right\}}_{:=S_1}. \text{ Comme } S \neq \emptyset \text{ et } \text{Card}(S) < \infty \text{ alors } r \text{ est}$$

bien défini.

$$\underline{1^{\text{er cas}}} : \text{ Si } r = \frac{k}{m} \text{ et si } S_1 \neq \emptyset, \max(S_1) < \frac{k}{m}$$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket, \frac{k-i}{j} < \frac{k}{m}$ si $c_{i,j} \neq 0$. Or si $i \geq k$ et $j \geq m$ ce résultat reste vraie par majoration.

Donc $\forall i, j \geq 1, c_{i,j} \neq 0, \frac{k-i}{j} < \frac{k}{m} \Rightarrow im + kj > km$. On pose $\tau = t^{\frac{1}{m}}$. Ce changement de variable a pour effet :

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{(n-1)m+1}}{m} \frac{du}{d\tau} &= a_m u^m + a_{m+1} u^{m+1} + \\ &\dots + b_k \tau^{km} + b_{k+1} \tau^{(k+1)m} + \dots + \sum_{im+kj > km} c_{i,j} \tau^{im} u^j \end{aligned}$$

On utilise alors la réduction suivante : $u = \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{1}{m}} \tau^k (1 + \tau v)$. Attention la racine m^e de $\frac{-b_k}{a_m}$ n'est pas forcément unique, mais on en choisit une. Cette réduction opère les modifications suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{\tau^{(n-1)m+1}}{m} \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{1}{m}} k \tau^{k-1} (1 + \tau v) + \frac{\tau^{(n-1)m+1}}{m} \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{1}{m}} \tau^k \left(\tau \frac{dv}{d\tau} + v \right) \\ &= -b_k \tau^{km} (1 + \tau v)^m + a_{m+1} \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{m+1}{m}} \tau^{k(m+1)} (1 + \tau v)^{m+1} + \dots \\ &+ b_k \tau^{km} + b_{k+1} \tau^{(k+1)m} + \dots \\ &+ \sum_{im+kj > km} \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{j}{m}} c_{i,j} \tau^{im+kj} (1 + \tau v)^j \end{aligned}$$

On poursuit :

$$\begin{aligned} &\frac{k}{m} \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{1}{m}} \tau^{(n-1)m+k} + \frac{k}{m} \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{1}{m}} \tau^{(n-1)m+k+1} v \\ &+ \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m} \tau^{(n-1)m+k+2} \frac{dv}{d\tau} + \frac{\tau^{(n-1)m+k+1}}{m} \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{1}{m}} v \\ &= b_{k+1} \tau^{(k+1)m} + b_{k+2} \tau^{(k+2)m} + \dots + (-mb_k \tau^{km+1}) + c \tau^{km+1} + \tau^{km+2} f(\tau, v) \\ &+ d \tau^{km+1} + \tau^{km+2} g(\tau, v) \\ &= -pb_k \tau^{km+1} v + \alpha \tau^{km+1} + \tau^{km+2} \tilde{f}(\tau, v) \end{aligned}$$

$n-1 \geq k \rightarrow (n-1)m+k \geq km+k \geq km+1$, donc en factorisant par τ^{km+1} on a :

$$\tau^{\underbrace{(n-1)m+k-km+1}_{\geq 2}} \frac{dv}{d\tau} + \underbrace{m^2 \left(\frac{-b_k}{a_m} \right)^{\frac{1}{m}} b_k v}_{\neq 0} = \tilde{\alpha} + \tau \tilde{g}(\tau, v)$$

On retrouve donc le cas A_2 .

2^{ecas} : Si $r = \frac{s}{q} > \frac{k}{m} (sm > kq)$

Donc $\exists l \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ tel que $\frac{k-i_l}{j_l} = \dots = \frac{k-i_1}{j_1} = \frac{s}{q}$, avec $j_1 < \dots < j_l$ et $c_{i_1, j_1} \neq 0, \dots, c_{i_l, j_l} \neq 0$. On pose $\tau = t^{\frac{1}{q}}$.

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{(n-1)q+1}}{q} \frac{du}{d\tau} &= a_m u^m + a_{m+1} u^{m+1} + \dots + b_k \tau^{kq} + b_{k+1} \tau^{(k+1)q} + \dots \\ &+ c_{i_1, j_1} \tau^{i_1 q} u^{j_1} + \dots + c_{i_l, j_l} \tau^{i_l q} u^{j_l} + \sum_{iq+sj > kq} c_{i,j} \tau^{iq} u^j \end{aligned}$$

On pose alors $u = \tau^s(u_0 + v)$ où u_0 est une racine du polynôme $P(X) = b_k + c_{i_1, j_1} X^{j_1} + \dots + c_{i_l, j_l} X^{j_l}$. Avec ce changement d'inconnues on a :

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{(n-1)q+s+1}}{q} \frac{dv}{d\tau} + \frac{s}{q} \tau^{(n-1)q+s} (v + u_0) \\ = a_m \tau^{sm} (u_0 + v)^m + a_{m+1} \tau^{s(m+1)} (u_0 + v)^{m+1} + \dots \\ + b_{k+1} \tau^{(k+1)q} + b_{k+2} \tau^{(k+2)q} + \dots + \tau^{kq} P(u_0 + v) + \sum_{iq+sj > kq} c_{i,j} \tau^{iq+sj} (u_0 + v)^j \end{aligned}$$

On a : $n \geq k+1 \rightarrow (n-1)q \geq kq \rightarrow (n-1)q+m > kq$ et $ms > kq$. De plus, $P(u_0 + X)$ est encore un polynôme de degré " j_l ".

$P(u_0 + X) = d_1 X + \dots + d_{j_l-1} X^{j_l-1} + d_{j_l} X^{j_l}$ avec $d_{j_l} = c_{i_l, j_l} \neq 0$. Ainsi en simplifiant par τ^{kq} on a :

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{(n-1)q+s+1-kq}}{q} \frac{dv}{d\tau} + \frac{s}{q} \tau^{(n-1)q+s-kq} (v + u_0) \\ = a_m \tau^{sm-kq} (u_0 + v)^m + a_{m+1} \tau^{s(m+1)-kq} (u_0 + v)^{m+1} + \dots + b_{k+1} \tau^q + b_{k+2} \tau^{2q} \\ + \dots + d_1 v + \dots + d_{j_l-1} v^{j_l-1} + d_{j_l} v^{j_l} + \sum_{iq+sj > kq} c_{i,j} \tau^{iq+sj} (u_0 + v)^j \end{aligned}$$

Comme les " d_i " sont non tous nuls, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence car $j_l \leq m-1$.

3^{ecas} : Si $r = \frac{k}{m} = \max(S_1)$ et $S_1 \neq \emptyset$

On réutilise les notations précédentes, à savoir que l'équation s'écrit :

$$t^n \frac{du}{dt} = a_m u^m + c_{i_1, j_1} t^{i_1} u^{j_1} + \dots \\ \dots + c_{i_l, j_l} t^{i_l} u^{j_l} + b_k t^k + \sum_{\substack{im+kj > km \\ j \geq 1}} c_{i,j} t^i u^j + b_{k+1} t^{k+1} + \dots$$

Avec $j_1 < \dots < j_l$, $\frac{k-i_1}{j_1} = \dots = \frac{k-i_l}{j_l} = \frac{k}{m}$, $c_{i_1, j_1} \neq 0, \dots, c_{i_l, j_l} \neq 0$. $a_m \neq 0$, $b_k \neq 0$. On pose $P(X) = a_m X^m + c_{i_l, j_l} X^{j_l} + \dots + c_{i_1, j_1} X^{j_1} + b_k$.

Considérons, dans un premier temps, que P possède une racine d'ordre $< m$, on la note u_0 . Ainsi, $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = (X - u_0)^\mu Q(X)$, $Q(u_0) \neq 0$ et $\mu \leq m - 1$. On pose alors $\tau = t^{\frac{1}{m}}$ et $u = \tau^k(u_0 + v)$:

$$\frac{\tau^{(n-1)m+1}}{m} \left[k\tau^{k-1}(u_0 + v) + \tau^k \frac{dv}{d\tau} \right] = \tau^{km} P(u_0 + v) + \sum_{im+kj > km} c_{i,j} \tau^{im+kj} (u_0 + v)^j \\ + b_{k+1} \tau^{(k+1)m} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\tau^{(n-1)m+1+k}}{m} \frac{dv}{d\tau} + \frac{k\tau^{(n-1)m+k}}{m} (u_0 + v) \\ = \tau^{km} P(u_0 + v) + \sum_{im+kj > km} c_{i,j} \tau^{im+kj} (u_0 + v)^j + b_{k+1} \tau^{(k+1)m} + \dots$$

$n \geq k + 1$ donc $(n - 1)m + k \geq km + k$, on peut donc simplifier par τ^{km} :

$$\tau^{(n-1)m+k+1-km} \frac{dv}{d\tau} = mv^\mu Q(v + u_0) + \tau g(\tau, v)$$

On retrouve alors une équation où m est remplacée par $\mu \leq m - 1$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence.

Maintenant, si P possède une racine d'ordre m , on la note u_0 . On peut donc écrire :

$$P(X) = a_m X^m + c_{i_l, j_l} X^{j_l} + \dots + c_{i_1, j_1} X^{j_1} + b_k = a_m (X - u_0)^m$$

Reprenons alors avec l'expression suivante, en posant $\tau = t^{\frac{1}{m}}$ et $u = \tau^k v$.

$$a_m u^m + c_{i_l, j_l} u^{j_l} t^{i_l} + \dots + c_{i_1, j_1} u^{j_1} t^{i_1} + b_k t^k \quad (28) \\ = a_m u^m + c_{i_l, j_l} \tau^{i_l m} u^{j_l} + \dots + c_{i_1, j_1} \tau^{i_1 m} u^{j_1} + b_k \tau^{km} \\ = \tau^{km} [a_m v^m + c_{i_l, j_l} v^{j_l} + \dots + c_{i_1, j_1} v^{j_1} + b_k] = \tau^{km} P(v) = \tau^{km} a_m (v - u_0)^m \\ = \tau^{km} a_m \left(\frac{u}{\tau^k} - u_0 \right)^m = a_m (u - u_0 t^{\frac{k}{m}})^m = a_m \sum_{i=0}^m C_m^i u^i (t^{\frac{k}{m}})^{m-i}$$

Pour $i = m - 1$, un terme en " $t^{\frac{k}{m}} u^{m-1}$ " apparaît, il doit donc être présent dans (28) ce qui implique que $\frac{k}{m}$ est entier. On pose finalement, comme $\frac{k}{m}$ est entier, $u = u_0 t^{\frac{k}{m}} + v$:

$$t^n \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} u_0 t^{\frac{k}{m}-1+n} = a_m v^m + \sum_{i+\frac{k}{m}j > k} c_{i,j} t^i (u_0 t^{\frac{k}{m}} + v)^j + b_{k+1} t^{k+1} + \dots$$

$\frac{k}{m} - 1 + n \geq n > k$, de plus les termes de la forme " αt^α " dans " $c_{i,j} t^i (u_0 t^{\frac{k}{m}} + v)^j$ " sont de la forme " $u_0^j c_{i,j} t^{i+j\frac{k}{m}}$ " avec $i + j\frac{k}{m} > k$. On se retrouve donc dans une situation similaire à la précédente où n et m n'ont pas changés mais k devient $k' > k$. On peut donc ainsi itérer si l'équation ne se réduit pas sous une forme convenable, pour arriver au cas où $n < k + 1$.

$$- \boxed{n < k + 1}$$

On garde la définition de S_1 , mais dans toute cette section

$$\boxed{r = \max \left(k - n + 1, \max(S_1 \cup \left\{ \frac{k}{m} \right\}) \right)}$$

$$\underline{\underline{1^{\text{er}} \text{cas}}} : \text{Si } k \leq \frac{m(n-1)}{m-1}$$

$$- \underline{\text{Si } r \neq \frac{k}{m}}$$

Comme $\frac{k}{m} \geq k - n + 1$ et $r > \frac{k}{m} \geq k - n + 1$ ($r \neq \frac{k}{m}$) on a donc :

$$r = \frac{k - i_1}{j_1} = \dots = \frac{k - i_l}{j_l} = \frac{s}{q} \quad j_1 < \dots < j_l \leq m - 1, \quad s \wedge q = 1$$

On pose $\tau = t^{\frac{1}{q}}$ et $u = \tau^s(u_0 + v)$ où u_0 est une racine du polynôme P défini par $P(X) = c_{i_l, j_l} X^{j_l} + \dots + c_{i_1, j_1} X^{j_1} + b_k = c_{i_l, j_l} (X - u_0)^\mu Q(X)$, $Q(u_0) \neq 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^{(n-1)q+1}}{q} \left[s u_0 \tau^{s-1} + s \tau^{s-1} v + \tau^s \frac{dv}{d\tau} \right] = \tau^{kq} P(u_0 + v) \\ & + \sum_{\substack{sj+iq > kq \\ j \geq 1}} c_{i,j} \tau^{iq+sj} (u_0 + v)^j + b_{k+1} \tau^{(k+1)q} + \dots \end{aligned}$$

Étant donné que $(n-1)q + s > kq$ donc on peut simplifier par kq :

$$\tau^{(n-1)q+s+1-kq} \frac{dv}{d\tau} = qP(u_0 + v) + \tau g(\tau, v)$$

$P(u_0 + v) = v^\mu Q(v + u_0)$ et $d(vQ(v + u_0)) = j_l \leq m - 1$ On utilise donc l'hypothèse de récurrence.

$$- \underline{\text{Si } r = \frac{k}{m}}$$

On pose $P(X) = a_m X^m + c_{i_l, j_l} X^{j_l} + \dots + c_{i_1, j_1} X^{j_1} + b_k - r \delta_{n+r-k-1}$. Si P possède une racine u_0 d'ordre $\leq m-1$ alors on pose $\tau = t^{\frac{1}{m}}$ et $u = \tau^k(u_0 + v)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{k}{m} \tau^{(n-1)m+k} (u_0 + v) + \frac{\tau^{(n-1)m+k+1}}{m} \frac{dv}{d\tau} = \tau^{km} m(u_0 + v) \\ & \frac{k}{m} \delta_{n+r-k-1} \tau^{km} (u_0 + v) + \sum_{\substack{im+kj > km \\ j \geq 1}} c_{i,j} \tau^{im+kj} (u_0 + v)^j + b_{k+1} \tau^{(k+1)m} + \dots \end{aligned}$$

$\frac{k}{m} \geq k - n + 1 \Rightarrow (n - 1)m + k = km$. Si $n + r - 1 - k = 0$ alors $(n - 1)m + k = km$, sinon $(n - 1)m + k > km$. Donc, on peut factoriser par τ^{km} et on a :

$$\tau^{(n-1)m+k+1} \frac{dv}{d\tau} = mP(u_0 + v) + \tau g(\tau, v)$$

On écrit $P(X) = (X - u_0)^\mu Q(X)$, $\mu \leq m - 1$, $Q(u_0) \neq 0$ donc $P(u_0 + v) = v^\mu Q(u_0 + v)$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence. Si P ne possède qu'une racine u_0 d'ordre m , alors $\frac{k}{m}$ est entier pour une raison déjà évoquée. On pose alors $u = t^r(u_0 + v)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} t^n \left[r t^{r-1} (u_0 + v) + t^r \frac{dv}{dt} \right] &= t^k P(u_0 + v) + r t^k \delta_{n+r-k-1}(u_0 + v) \\ &+ \sum_{i+rj > k} c_{i,j} t^{i+rj} (u_0 + v)^j + b_{k+1} t^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

Comme $n + r \geq k + 1$ on a :

$$t^{n+r} \frac{dv}{dt} = a_m t^k v^m + \tilde{b}'_k t^{k'} + b_{k'+1} t^{k'+1} + \dots + \sum_{i+rj > k} \tilde{c}_{i,j} t^{i+rj} (u_0 + v)^j$$

Avec $k' > k$. Ensuite, on pose $w = t^r v$.

$$t^n \frac{dw}{dt} = r t^{r+n-1} w + a_m w^m + \tilde{b}'_k t^{k'} + b_{k'+1} t^{k'+1} + \dots + \sum_{i+rj > k} \tilde{c}_{i,j} t^i (u_0 t^r + w)^j$$

Ainsi, après réduction n et m sont inchangés mais k est remplacé par $k' > k$. On peut ainsi itérer si les réductions ne mènent pas à l'hypothèse de récurrence ou directement A_0 , A_1 et A_2 , pour arriver à $k > \frac{m(n-1)}{m-1}$. On remarque que les termes " βt^α " dans " $\tilde{c}_{i,j} t^i (u_0 t^r + w)^j$ " sont de la forme " $u_0^j \tilde{c}_{i,j} t^{i+rj}$ " avec $i + rj > k$.

2^e cas : Si $k > \frac{m(n-1)}{m-1}$

– si $r = \max(S_1)$, $S_1 \neq \emptyset$

Ainsi, $\exists i_1, j_1, \dots, i_l, j_l$ tel que $r = \frac{k-i_1}{j_1} = \dots = \frac{k-i_l}{j_l} = \frac{s}{q}$, $m \wedge q = 1$ et $j_1 < \dots < j_l$. On pose $P(X) = c_{i_l, j_l} X^{j_l} + \dots + c_{i_1, j_1} X^{j_1} - r \delta_{s+(n-1)q-kq} X + b_k$. On opère alors de la même façon que précédemment : Si P possède une racine, alors son ordre est $\leq m - 1$ donc en posant $\tau = t^{\frac{1}{q}}$ et $u = \tau^m(u_0 + v)$ on pourra utiliser l'hypothèse de récurrence après réduction.

– si $r \neq \max(S_1)$ ou $S_1 = \emptyset$

$r = k - n + 1$ par définition, $r \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u = t^r(u_0 + v)$ où $u_0 = \frac{b_k}{r}$ après réduction et simplification on a :

$$t \frac{dv}{dt} + \underbrace{r}_{>0} v = t g(t, v)$$

C'est le cas A_0 .

□

12 Étude d'équation comportant des termes de la forme $t^k \frac{d^n}{dt^n}$

Nous allons, dans ce qui suit, conjuguer les réductions initiées dans l'application précédente avec un mode de raisonnement similaire à [7] et [8]. En effet, après avoir montré des résultats d'existence et la forme des solutions des équations du type :

$$t \frac{du}{dt} + Au = tg(t, u)$$

L'article [7] fait la démonstration que les équations du type $P(N)u + Bu = tg(t, u)$ avec N l'opérateur $t \frac{d}{dt}$ et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, peuvent se ramener au cas simple. Nous nous sommes donc intéressés à la faisabilité d'une telle situation pour les équations traitées dans les parties précédentes.

Les résultats que nous énonçons dans la suite de cette application répondent en partie à cette question.

12.1 Introduction

Nous donnons tout d'abord dans cette sous-section deux exemples qui illustrent bien les lignes précédentes et préfigurent la démarche de réduction que nous emploierons dans la suite.

Le premier exemple est donné par l'équation suivante :

$$t^4 \frac{d^2 u}{dt^2} - 2t^2 \frac{du}{dt} + u = tg(t, u)$$

Avec g analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ces variables. Nous posons alors l'opérateur $N_2 := t^2 \frac{d}{dt}$.

$$N_2^2 = N_2 \circ N_2 = t^2 \frac{d}{dt} \left(t^2 \frac{d}{dt} \right) = 2t^3 \frac{d}{dt} + t^4 \frac{d^2}{dt^2}$$

Donc $t^4 \frac{d^2}{dt^2} = N_2^2 - 2tN_2$. Donc, l'équation devient :

$$\begin{aligned} N_2^2 u - 2tN_2 u - 2N_2 u + u &= tg(t, u) \\ N_2(N_2 - I)u - (N_2 - I)u &= tg(t, u) + 2tN_2 u \end{aligned}$$

On pose alors $\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = N_2 u - u \end{cases}$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} t^2 \frac{du_1}{dt} - u_1 - u_2 &= 0 \\ t^2 \frac{du_2}{dt} - u_2 &= t\tilde{g}(t, u_1, u_2) \end{aligned}$$

Ce type de système a été traité précédemment. On peut affirmer l'existence de solutions qui tendent vers 0 en 0 ainsi qu'écrire les solutions sous la forme de série convergente

explicitées dans la partie II. Prenons à présent l'exemple suivant :

$$t^3 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3u = tf(t, u)$$

f analytique au voisinage de $(0, 0)$ en chacune de ces variables. Nous prenons cette fois l'opérateur $N_{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} \frac{d}{dt}$ pour $t > 0$.

$$\begin{aligned} N_{\frac{3}{2}}^2 &= N_{\frac{3}{2}} \circ N_{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} \frac{d}{dt} \left(t^{\frac{3}{2}} \frac{d}{dt} \right) \\ &= \frac{3}{2} t^2 \frac{d}{dt} + t^3 \frac{d^2}{dt^2} \end{aligned}$$

Donc, $t^3 \frac{d^2}{dt^2} = N_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{3}{2} t^2 \frac{d}{dt} = N_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} N_{\frac{3}{2}}$. L'équation devient donc :

$$N_{\frac{3}{2}}^2 - \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} N_{\frac{3}{2}} + 3u = tf(t, u)$$

Cette fois-ci le polynôme $P(X) = X^2 + 3$ ne possède pas de racine réelle. On pose tout

de même $\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = N_{\frac{3}{2}} u + \sqrt{3} i u \end{cases}$.

Ce qui implique $N_{\frac{3}{2}} u_1 + \sqrt{3} i u_1 - u_2 = 0$ et $(N_{\frac{3}{2}} - \sqrt{3} i) u_2 - \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} (u_2 - \sqrt{3} i u_1) = tf(t, u_1)$.

Ce qui donne le système suivant :

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{2}} \frac{du_1}{dt} + \sqrt{3} i u_1 - u_2 &= 0 \\ t^{\frac{3}{2}} \frac{du_2}{dt} - \sqrt{3} i u_2 &= t^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(t, u_1, u_2) \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $\tau = t^{\frac{1}{2}}$ et $\tilde{u}_i(\tau) = u_i(t)$ pour $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \tau^2 \frac{d\tilde{u}_1}{d\tau} + 2\sqrt{3} i \tilde{u}_1 - 2\tilde{u}_2 &= 0 \\ \tau^2 \frac{d\tilde{u}_2}{d\tau} - 2\sqrt{3} i \tilde{u}_2 &= 2\tau \tilde{f}(\tau^2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \end{aligned}$$

La réduction de cette équation ne mène hélas pas au théorème d'existence vu dans la partie II. En effet les parties réelles des éléments diagonaux sont nulles. A présent définissons les opérateurs $N_{\frac{p}{q}}$ et énonçons une propriété de liaison entre cet opérateur et les termes de la forme $t^k \frac{d^q}{dt^q}$.

Définition 17. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p > q$ et $p \wedge q = 1$, on note $N_{\frac{p}{q}}$ l'application qui à tout $u \in \mathcal{C}(V \cap]0, +\infty[)$ (V voisinage de 0) associe la fonction $u \in \mathcal{C}(V \cap]0, +\infty[)$ définie par :

$$N_{\frac{p}{q}} := t^{\frac{p}{q}} \frac{du}{dt}$$

Ci-dessous, nous présentons une propriété de ces opérateurs :

Lemme 7. Pour $(p, q, i) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^*)^2$, $p > q$, $p \wedge q = 1$ on a :

$$t^{\frac{ip}{q}} \frac{d^i}{dt^i} = \sum_{j=1}^i B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) t^{(\frac{p}{q}-1)(i-j)} N_{\frac{p}{q}}^j(u)$$

$$\text{Avec } \forall i \in \mathbb{N}^*, B_{i,i} \left(\frac{p}{q} \right) = 1, B_{i+1,1} \left(\frac{p}{q} \right) = \prod_{l=0}^{i-1} \left(-l - \frac{p}{q} \right).$$

$$\text{et } \forall j \in \llbracket 2, i \rrbracket, B_{i+1,j} \left(\frac{p}{q} \right) = \left[-i - \frac{p}{q} + 1 \right] B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) + B_{i,j-1} \left(\frac{p}{q} \right)$$

Démonstration. Montrons la propriété par récurrence sur $i \in \mathbb{N}^*$. Pour $i = 1$, on a $t^{\frac{p}{q}} \frac{d}{dt} = N_{\frac{p}{q}} = \sum_{j=1}^1 1 \times t^{(\frac{p}{q}-1)(1-j)} N_{\frac{p}{q}}^j$. Ce qui démontre bien la propriété. Pour $i = 2$, on a $t^{\frac{p}{q}} \frac{d}{dt} \left(t^{\frac{p}{q}} \frac{d}{dt} \right) = t^{\frac{p}{q}} \frac{p}{q} t^{\frac{p}{q}-1} \frac{d}{dt} + t^{\frac{2p}{q}} \frac{d^2}{dt^2}$. Et donc

$$t^{\frac{2p}{q}} \frac{d^2}{dt^2} = -\frac{p}{q} t^{\frac{p}{q}-1} N_{\frac{p}{q}} + N_{\frac{p}{q}}^2$$

La propriété est donc vraie au rang 2. Supposons à présent la propriété vraie au rang $1, \dots, i$ et montrons la au rang $i + 1$. L'hypothèse de récurrence nous donne :

$$t^{\frac{ip}{q}} \frac{d^i}{dt^i} = \sum_{j=1}^i B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) t^{(\frac{p}{q}-1)(i-j)} N_{\frac{p}{q}}^j$$

On compose alors par $N_{\frac{p}{q}}$:

$$N_{\frac{p}{q}} \left(t^{\frac{ip}{q}} \frac{d^i}{dt^i} \right) = \sum_{j=1}^i B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) \left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i-j) t^{(\frac{p}{q}-1)(i+1-j)} N_{\frac{p}{q}}^j + \sum_{j=1}^i B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) t^{(\frac{p}{q}-1)(i-j)} N_{\frac{p}{q}}^{j+1}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} N_{\frac{p}{q}} \left(t^{\frac{ip}{q}} \frac{d^i}{dt^i} \right) &= t^{\frac{ip}{q}} \frac{d}{dt} \left(t^{\frac{ip}{q}} \frac{d^i}{dt^i} \right) \\ &= t^{\frac{p}{q}} \frac{ip}{q} t^{\frac{ip}{q}-1} \frac{d^i}{dt^i} + t^{\frac{(i+1)p}{q}} \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
t^{\frac{(i+1)p}{q}} \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} &= \sum_{j=1}^i B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) \left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i-j) t^{\left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i+1-j)} N_{\frac{p}{q}}^j + \sum_{j=1}^i B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) t^{\left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i-j)} N_{\frac{p}{q}}^{j+1} \\
&\quad - \frac{ip}{q} t^{\frac{p}{q}-1} \sum_{j=1}^i B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) t^{\left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i-j)} N_{\frac{p}{q}}^j \\
&= \sum_{j=2}^{i+1} B_{i,j-1} \left(\frac{p}{q} \right) t^{\left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i+1-j)} N_{\frac{p}{q}}^j + \sum_{j=1}^i \left[-i - j \left(\frac{p}{q} - 1 \right) \right] B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) t^{\left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i+1-j)} N_{\frac{p}{q}}^j \\
&= \underbrace{\left[-i - \frac{p}{q} + 1 \right] B_{i,1} \left(\frac{p}{q} \right) t^{\left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i+1-1)} N_{\frac{p}{q}}^1}_{:= B_{i+1,1} \left(\frac{p}{q} \right)} \\
&\quad + \sum_{j=1}^i \underbrace{\left[\left[-i - \frac{p}{q} + 1 \right] B_{i,j} \left(\frac{p}{q} \right) + B_{i,j-1} \left(\frac{p}{q} \right) \right] t^{\left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i+1-j)} N_{\frac{p}{q}}^j}_{:= B_{i+1,j} \left(\frac{p}{q} \right)} \\
&\quad + \underbrace{B_{i,i} \left(\frac{p}{q} \right) t^{\left(\frac{p}{q} - 1 \right) (i+1-(i+1))} N_{\frac{p}{q}}^{i+1}}_{:= B_{i+1,i+1} \left(\frac{p}{q} \right)}
\end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence. □

Ce lemme sera d'une aide précieuse dans la réduction qui va suivre.

12.2 Mode de réduction

Précisons à présent quel type d'équation nous allons réduire. Nous décrivons le système d'équation pour p allant de 1 à m .

$$\begin{aligned}
&t^{n_{p,k(p)}} \frac{d^{k(p)} u_p}{dt^{k(p)}} + b_{p,k(p)-1} t^{n_{p,k(p)}-1} \frac{d^{k(p)-1} u_p}{dt^{k(p)-1}} + \dots \\
&b_{p,1} t^{n_{p,1}} \frac{du_p}{dt} + a_{p,p} u_p + \dots + a_{p,m} u_m = t g_p(t, u_1, \dots, u_m)
\end{aligned}$$

Avec $\forall p \in \llbracket 1, m \rrbracket$, g_p analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables. On a k une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $a_{p,p} \in \mathbb{R}^*$. De plus on suppose que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, k(i) \rrbracket$, $n_{i,j} \geq j$. Montrons par récurrence sur $\max_{p \in \llbracket 1, m \rrbracket} (k(p))$ que ce type d'équation peut se ramener à un système qui se décrit par ligne de la façon suivante :

$$\tau^{n_i} \frac{d\tilde{u}_i}{d\tau} + c_{i,i} \tilde{u}_i + \dots + c_{i,m'} \tilde{u}_{m'} = \tau \tilde{g}_i(\tau, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{m'})$$

$\forall i \in \llbracket 1, m' \rrbracket$, $\tilde{g}_i$ est analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables. $\forall i \in \llbracket 1, m' \rrbracket$, $c_{i,i} \in \mathbb{C}^*$ et $m' \geq m$.

Vérification de la propriété au rang 1.

Si $\max_{p \in \llbracket 1, m \rrbracket} (k(p)) = 1$ alors par définition la propriété est vérifiée.

Supposons la propriété vraie aux rangs $1, \dots, k_0 - 1$ et montrons la au rang k_0 ($k_0 \geq 2$).

Fixons $p \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $k(p) = k_0$. On a alors en posant $b_{p, k_0} = 1$:

$$\begin{aligned} & t^{n_{p, k_0}} \frac{d^{k_0} u_p}{dt^{k_0}} + b_{p, k_0-1} t^{n_{p, k_0-1}} \frac{d^{k_0-1} u_p}{dt^{k_0-1}} + \dots + b_{p, 1} t^{n_{p, 1}} \frac{du_p}{dt} + a_{p, p} u_p + \dots + a_{p, m} u_m \\ & = tg_p(t, u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

On note alors $\min_{j \in \llbracket 1, k_0 \rrbracket} \left\{ \frac{n_{p, j}}{j} \text{ tel que } b_{p, j} \neq 0 \right\} = \frac{r_p}{s_p}$ avec $r_p \wedge s_p = 1$. L'existence de $\frac{r_p}{s_p}$ est établie car $b_{p, k_0} \neq 0$

– 1^{er} cas : Si $\frac{r_p}{s_p} = 1$ alors on utilise [7] et [8] pour conclure

– 1^{er} cas : Si $\frac{r_p}{s_p} > 1$ Réécrivons l'équation :

$$\begin{aligned} & t^{\frac{s_p n_{p, k_0} - r_p k_0}{s_p}} t^{\frac{r_p k_0}{s_p}} \frac{d^{k_0} u_p}{dt^{k_0}} + b_{p, k_0-1} t^{\frac{s_p n_{p, k_0-1} - r_p (k_0-1)}{s_p}} t^{\frac{r_p (k_0-1)}{s_p}} \frac{d^{(k_0-1)} u_p}{dt^{(k_0-1)}} + \dots \\ & + b_{p, 1} t^{\frac{s_p n_{p, 1} - r_p 1}{s_p}} t^{\frac{r_p}{s_p}} \frac{du_p}{dt} + a_{p, p} u_p + \dots + a_{p, m} u_m = tg_p(t, u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

On utilise alors le lemme :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{k_0} t^{\frac{s_p n_{p, l} - r_p l}{s_p}} t^{\frac{r_p l}{s_p}} b_{p, l} \frac{d^l u_p}{dt^l} + a_{p, p} u_p + \dots + a_{p, m} u_m = tg_p(t, u_1, \dots, u_m) \\ & \Rightarrow \sum_{l=1}^{k_0} t^{\frac{s_p n_{p, l} - r_p l}{s_p}} b_{p, l} \sum_{j=1}^l B_{l, j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{\left(\frac{r_p}{s_p} - 1 \right) (l-j)} N_{\frac{r_p}{s_p}}^j + a_{p, p} u_p + \dots + a_{p, m} u_m \\ & = tg_p(t, u_1, \dots, u_m) \\ & \Rightarrow \sum_{l=1}^{k_0} \sum_{j=1}^l t^{\frac{s_p n_{p, l} - r_p l}{s_p} + \left(\frac{r_p}{s_p} - 1 \right) (l-j)} b_{p, l} B_{l, j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) N_{\frac{r_p}{s_p}}^j + a_{p, p} u_p + \dots + a_{p, m} u_m \\ & = tg_p(t, u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

Par définition de $\frac{r_p}{s_p}$ on a $s_p n_{p, l} - r_p l \geq 0$ et donc pour $1 \leq j \leq l \leq k_0$:

$$\begin{aligned} & \frac{s_p n_{p, l} - r_p l}{s_p} + \left(\frac{r_p}{s_p} - 1 \right) (l-j) = 0 \\ & \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{r_p}{s_p} - 1 \right) (l-j)}_{>1} = 0 \Rightarrow l = j \end{aligned}$$

Donc, on peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \leq j < l \leq k_0} t^{\frac{s_p n_{p,l} - r_p l}{s_p} + (\frac{r_p}{s_p} - 1)(l-j)} b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) N_{\frac{r_p}{s_p}}^j + \sum_{l=1}^{k_0} b_{p,l} t^{\frac{s_p n_{p,l} - r_p l}{s_p}} N_{\frac{r_p}{s_p}}^l(u_p) \\
& + a_{p,p} u_p + \dots + a_{p,m} u_m = t g_p(t, u_1, \dots, u_m) \\
\Rightarrow & \sum_{1 \leq j < l \leq k_0} t^{\frac{s_p n_{p,l} - r_p l}{s_p} + (\frac{r_p}{s_p} - 1)(l-j)} b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) N_{\frac{r_p}{s_p}}^j \\
& + \left(\sum_{\substack{l=1 \\ s_p n_{p,l} = r_p l}}^{k_0} b_{p,l} N_{\frac{r_p}{s_p}}^l + a_{p,p} \right) u_p + \sum_{\substack{l=1 \\ s_p n_{p,l} > r_p l}}^{k_0} b_{p,l} t^{\frac{s_p n_{p,l} - r_p l}{s_p}} N_{\frac{r_p}{s_p}}^l(u_p) \\
& + a_{p,p} u_p + \dots + a_{p,m} u_m = t g_p(t, u_1, \dots, u_m)
\end{aligned}$$

On note alors $P_p(X) = \sum_{\substack{l=1 \\ s_p n_{p,l} = r_p l}}^{k_0} b_{p,l} X^l + a_{p,p}$. Par définition de $\frac{r_p}{s_p}$, P n'est pas constant. Notons α_p une racine de P_p , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{l=1 \\ s_p n_{p,l} = r_p l}}^{k_0} b_{p,l} N_{\frac{r_p}{s_p}}^l(u_p) + a_{p,p} u_p = Q_p(N_{\frac{r_p}{s_p}}) \left(N_{\frac{r_p}{s_p}}(u_p) - \alpha_p u_p \right) \\
& = \left[\sum_{l=1}^{k_0-1} \tilde{b}_{p,l} N_{\frac{r_p}{s_p}}^l \right] \left(N_{\frac{r_p}{s_p}}(u_p) - \alpha_p u_p \right) + \tilde{a}_{p,p} \left(N_{\frac{r_p}{s_p}}(u_p) - \alpha_p u_p \right) \quad (29)
\end{aligned}$$

On remarque que $\tilde{a}_{p,p}$ et α_p sont différents de 0, car $-\alpha_p \tilde{a}_{p,p} = a_{p,p} \neq 0$. De plus, pour $1 \leq j < l \leq k_0$ tels que $b_{p,j} \neq 0$:

$$\frac{s_p n_{p,l} - r_p l}{s_p} + \left(\frac{r_p}{s_p} - 1 \right) (l-j) > 0$$

On a :

$$\begin{aligned}
& b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{\frac{s_p n_{p,l} - r_p l}{s_p} + (\frac{r_p}{s_p} - 1)(l-j)} N_{\frac{r_p}{s_p}}^j(u_p) \\
& = b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{w(l,p,j)} N_{\frac{r_p}{s_p}}^j(u_p) \\
& = b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{w(l,p,j)} \left[N_{\frac{r_p}{s_p}}^j(u_p) - (\alpha_p)^j u_p \right] + b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{\frac{w(l,p,j)}{s_p}} (\alpha_p)^j u_p \quad (30)
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous posons $\begin{cases} u_{p,1} = u_p \\ u_{p,2} = N_{\frac{r_p}{s_p}}(u_p) - \alpha_p u_p \end{cases}$. Ce qui donne pour $j = 1$:

$$b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{\frac{w(l,p,j)}{s_p}} u_{p,2} + b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{w(l,p,j)} u_{p,1}$$

Et pour $j \geq 2$:

$$b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{\frac{w(l,p,j)}{s_p}} \left(\sum_{s=0}^{j-1} (\alpha_p)^s N_{\frac{r_p}{s_p}}^s(u_{p,2}) \right) + b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) t^{\frac{w(l,p,j)}{s_p}} \alpha_p^j u_{p,1}$$

On effectue alors le changement de variable $\tau = t^{\frac{1}{\tilde{s}}}$ où $\tilde{s} = \prod_{k(p)=k_0} s_p$ et on pose :

$$\tilde{u}_{1,p}(\tau) = u_{1,p}(t), \quad \tilde{u}_{2,p}(\tau) = u_{2,p}(t)$$

Ce changement de variable est tout à fait acceptable car nous sommes sur $V \cap]0, +\infty[$, V voisinage de 0. La partie (30) devient :

$$b_{p,l} B_{l,j} \left(\frac{r_p}{s_p} \right) \tau^{w(l,p,j)} \sum_{s=0}^{j-1} \alpha_p^s N_{\tilde{s}(r_p-s_p)+s_p}^s$$

Et la partie (29) devient :

$$\left[\sum_{l=1}^{k_0-1} \tilde{b}_{p,l} N_{\tilde{s}(r_p-s_p)+s_p}^l \right] (\tilde{u}_{p,2}) + \tilde{a}_{p,p} \tilde{u}_{p,2}$$

Et ce raisonnement peut-être tenu pour tout p tel que $k(p) = k_0$. Dans le cas où $k(p) < k_0$, on notera $\tilde{u}_{p,1}(\tau) = u_p(t)$. En réunissant l'ensemble des équations, on peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence.

Ce qui termine la démonstration.

Les racines des polynômes P_p ne sont pas forcément réelles et donc le travail que nous avons fait dans la partie II sur l'existence et la forme des solutions ne peut être réutilisé. C'est pour cette raison que nous donnons dans la sous-section qui suit un théorème d'existence qui répond en partie à ce type de système.

12.3 Théorème d'existence

La sous-section précédente précise que pour un système qui se décrit par ligne de la façon suivante :

$$t^{n_{p,k(p)}} \frac{d^{k(p)} u_p}{dt^{k(p)}} + b_{p,k(p)-1} t^{n_{p,k(p)-1}} \frac{d^{k(p)-1} u_p}{dt^{k(p)-1}} + \dots$$

$$b_{p,1} t^{n_{p,1}} \frac{du_p}{dt} + a_{pp} + \dots + a_{p,m} u_m = t g_p(t, u_1, \dots, u_m)$$

Avec $\forall p \in \llbracket 1, m \rrbracket$, g_p analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables. Avec k une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $a_{p,p} \in \mathbb{R}^*$. De plus, on suppose que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, k(i) \rrbracket$, $n_{i,j} \geq j$.

On peut se ramener au cas :

$$\tau^{n_i} \frac{d\tilde{u}_i}{d\tau} + c_{i,i} \tilde{u}_i + \dots + c_{i,m} \tilde{u}_m = \tau \tilde{g}_i(\tau, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m)$$

$\forall i \in \llbracket 1, m' \rrbracket$, $\tilde{g}_i$ est analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables.
 $\forall i \in \llbracket 1, m' \rrbracket$, $c_{i,i} \in \mathbb{C}^*$ et $m' \geq m$.

Nous allons réduire ce dernier système en augmentant, comme dans la première application de cette partie, la puissance des termes t^k du membre de droite.

La technique est semblable à ce qui a été vu plus haut puisque la matrice triangulaire inversible permet le même type de réduction. Nous allons montrer par récurrence sur p que le type d'équations énoncé ci-dessus peut se ramener à une équation de la forme :

$$\text{diag}(t^{n_1}, \dots, t^{n_m}) \frac{du}{dt} + A_0 u + t A_1 u + \dots + t^p A_p u = t^{p+1} f(t, u)$$

Avec $u = (u_1, \dots, u_m)$. $A_0 = (a_{i,j})$ triangulaire supérieure inversible. $A_1 = (a_{i,j}^1), \dots$, $A_p = (a_{i,j}^p)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on suppose $n_i \geq 2$ et on note également $f(t, u) = (f_1(t, u_1, \dots, u_m), \dots, f_m(t, u_1, \dots, u_m))$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$f_i(t, u_1, \dots, u_m) = \sum_{l_0, \dots, l_m \geq 0} c_{l_0, \dots, l_m}^i t^{l_0} u_1^{l_1} \dots u_m^{l_m}$$

La propriété que l'on souhaite démontrer est vraie au rang 1 avec le travail de la sous-section précédente. Supposons donc la propriété vraie au rang p et montrons la au rang $p+1$. On pose alors $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $u_i = D^i t^{p+1} + t \tilde{u}_i$. Avec $(D^1, \dots, D^m) = A^{-1}(c_{0, \dots, 0}^1, \dots, c_{0, \dots, 0}^m)$. On a alors :

$$\begin{aligned} & t^{n_i} \frac{du_i}{dt} + a_{i,i} u_i + \dots + a_{i,m} u_m \\ & + a_{i,1}^1 t u_1 + \dots + a_{i,m}^1 t u_m \\ & + \dots + \\ & + a_{i,1}^p t^p u_1 + \dots + a_{i,m}^p t^p u_m = t^{p+1} \sum_{l_0, \dots, l_m \geq 0} c_{l_0, \dots, l_m}^i t^{l_0} u_1^{l_1} \dots u_m^{l_m} \end{aligned}$$

devient :

$$\begin{aligned} & t^{n_i} \frac{d\tilde{u}_i}{dt} + t^{n_i} \tilde{u}_i + (p+1) D^i t^{n_i+p} \\ & + a_{i,i} D^i t^{p+1} + a_{i,i} t \tilde{u}_i + \dots + a_{i,m} D^m t^{p+1} + a_{i,m} t \tilde{u}_m \\ & + a_{i,1}^1 D^1 t^{p+2} + a_{i,1}^1 t^2 \tilde{u}_1 + \dots + a_{i,m}^1 D^m t^{p+2} + a_{i,m}^1 t^2 \tilde{u}_m \\ & \dots \\ & + a_{i,1}^p D^1 t^{2p} + a_{i,1}^p t^{p+1} \tilde{u}_1 + \dots + a_{i,m}^p D^m t^{2p} + a_{i,m}^p t^{2p} \tilde{u}_m \\ & = t^{p+1} \sum_{l_0, \dots, l_m \geq 0} c_{l_0, \dots, l_m}^i t^{l_0} [D^1 t^{p+1} + t \tilde{u}_1]^{l_1} \dots [D^m t^{p+1} + t \tilde{u}_m]^{l_m} \end{aligned}$$

En supposant $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m$ suffisamment petit dans un voisinage de 0, l'équation devient :

$$\begin{aligned}
& t^{n_i} \frac{d\tilde{u}_i}{dt} + t^{n_i-1} \tilde{u}_i + (p+1) D^i t^{n_i+p-1} \\
& + a_{i,i} \tilde{u}_i + \dots + a_{i,m} \tilde{u}_m \\
& + a_{i,1}^1 t \tilde{u}_1 + \dots + a_{i,m}^1 t \tilde{u}_m \\
& + \dots + \\
& + a_{i,1}^p t^p \tilde{u}_1 + \dots + a_{i,m}^p t^p \tilde{u}_m + \sum_{\substack{1 \leq r \leq p \\ 1 \leq l \leq m}} a_{i,l}^r t^{p+r} \\
& = t^{p+1} \sum_{l_0 + \dots + l_m \geq 1} c_{l_0, \dots, l_m}^i t^{l_0} [D^1 t^{p+1} + t \tilde{u}_1]^{l_1} \dots [D^m t^{p+1} + t \tilde{u}_m]^{l_m} \\
& = c_{1,0, \dots, 0}^i t^{p+1} + c_{0,1,0, \dots, 0}^i \tilde{u}_1 + \dots + c_{0, \dots, 0,1}^i \tilde{u}_m + t^{p+2} \tilde{f}(t, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m)
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en posant finalement :

$$\tilde{u} = A^{-1} \begin{pmatrix} c_{1,0, \dots, 0}^1 - \sum_{1 \leq l \leq m} a_{1,l}^1 \\ \dots \\ c_{1,0, \dots, 0}^1 - \sum_{1 \leq l \leq m} a_{1,l}^1 \end{pmatrix} t^{p+1} + \tilde{u}$$

Utilisons ce résultat pour $n = \max_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} (n_i)$.

$$diag(t^{n_1}, \dots, t^{n_m}) \frac{du}{dt} + A_0 u + A_1 t u + \dots + A_n t^n u = t^{n+1} f(t, u)$$

Un examen attentif du coefficient $a_{i,i}^{n_i-1}$ de chaque ligne nous permet d'affirmer que le premier changement d'inconnu, initié plus haut, a pour conséquence d'ajouter 1 à ce coefficient et de laisser globalement inchangé l'ensemble du système. On peut donc supposer, quitte à effectuer plusieurs fois cette transformation, que les coefficients $a_{i,i}^{n_i-1}$ ont des parties réelles strictement positives. Bien qu'ayant généralisé une méthode de réduction, nous énonçons un résultat d'existence partiel pour ces équations réduites. En effet, les matrices A_i précédemment citées seront toutes supposées diagonales.

Dans la suite pour I intervalle réel, on désignera par $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k -dérivables de I dans $\mathbb{C}$.

Définissons avant des espaces de fonctions qui nous seront utiles pour la construction de solutions.

Définition 18. Soit $\alpha > 0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, on définit $E_{\alpha, \varepsilon}$ de la façon suivante :

$$E_{\alpha, \varepsilon} = \{u \in \mathcal{C}(]0, \alpha[) \text{ tel que } \frac{|u(t)|}{|t^\varepsilon|} \text{ soit majoré sur }]0, \alpha[\}$$

On muni cet espace de la norme suivante :

$$\|u\|_{\alpha, \varepsilon} = \inf \{C > 0 \text{ tel que } \forall t \in]0, \alpha[, \frac{|u(t)|}{|t^\varepsilon|} \leq C \}$$

Nous énonçons ensuite une propriété :

Proposition 12. *L'espace $E_{\alpha,\varepsilon}$ muni de la norme $\| \cdot \|_{\alpha,\varepsilon}$ est un espace de Banach*

Démonstration. Montrons déjà que $E_{\alpha,\varepsilon}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(]0, \alpha[)$.

- $0 \in E_{\alpha,\varepsilon}$ car la fonction nulle est continue sur $]0, \alpha[$ et que de plus $\forall t \in]0, \alpha[$ on a $\frac{|0|}{|t|^\varepsilon} = 0 \leq 0$. On déduit que $\|u\|_{\alpha,\varepsilon} = 0$ si u est la fonction nulle.
- Soit $(u, v) \in (E_{\alpha,\varepsilon})^2$. Comme u et v sont continues sur $]0, \alpha[$ on a $u + v$ continue sur $]0, \alpha[$. De plus $\forall t \in]0, \alpha[$:

$$\begin{aligned} \frac{|u(t) + v(t)|}{|t|^\varepsilon} &\leq \frac{|u(t)| + |v(t)|}{|t|^\varepsilon} \leq \frac{|u(t)|}{|t|^\varepsilon} + \frac{|v(t)|}{|t|^\varepsilon} \\ &\leq \|u\|_{\alpha,\varepsilon} + \|v\|_{\alpha,\varepsilon} \end{aligned}$$

Donc $u + v \in E_{\alpha,\varepsilon}$ et de plus $\|u + v\|_{\alpha,\varepsilon} \leq \|u\|_{\alpha,\varepsilon} + \|v\|_{\alpha,\varepsilon}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in E_{\alpha,\varepsilon}$, alors premièrement λu est bien continue sur $]0, \alpha[$ et de plus $\forall t \in]0, \alpha[$:

$$\frac{|\lambda u(t)|}{|t|^\varepsilon} = |\lambda| \frac{|u(t)|}{|t|^\varepsilon} \leq |\lambda| \|u\|_{\alpha,\varepsilon}$$

Donc $\lambda u \in E_{\alpha,\varepsilon}$ et même $\|\lambda u\|_{\alpha,\varepsilon} \leq |\lambda| \|u\|_{\alpha,\varepsilon}$

En conclusion, $E_{\alpha,\varepsilon}$ est bien un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(]0, \alpha[)$. Montrons, à présent, que $\| \cdot \|_{\alpha,\varepsilon}$ est bien une norme sur $E_{\alpha,\varepsilon}$.

- On a vu précédemment que $\|0\|_{\alpha,\varepsilon} = 0$. Supposons que pour $u \in E_{\alpha,\varepsilon}$ on ait $\|u\|_{\alpha,\varepsilon} = 0$. C'est à dire que $\forall t \in]0, \alpha[$: $\frac{|u(t)|}{|t|^\varepsilon} \leq 0$. Donc $\forall t \in]0, \alpha[$, $\frac{u(t)}{t^\varepsilon} = 0$ et donc comme t ne s'annule pas on a u qui est nulle sur $]0, \alpha[$.
- On a vu plus haut que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in E_{\alpha,\varepsilon}$: $\|\lambda u\|_{\alpha,\varepsilon} \leq |\lambda| \|u\|_{\alpha,\varepsilon}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on a donc :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\alpha,\varepsilon} &= \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda u \right\|_{\alpha,\varepsilon} \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda u\|_{\alpha,\varepsilon} \\ &\Rightarrow \|\lambda u\|_{\alpha,\varepsilon} \geq |\lambda| \|u\|_{\alpha,\varepsilon} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on a $\|\lambda u\|_{\alpha,\varepsilon} = |\lambda| \|u\|_{\alpha,\varepsilon}$

- l'inégalité triangulaire est démontrée plus haut.

On a donc bien un espace vectoriel normé. Il ne reste plus qu'à démontrer qu'il est complet. Soit $(u_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $E_{\alpha,\varepsilon}$. Pour tout $\mu > 0$, $\exists N_\mu \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\mu$, $p \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\|u_{n+p} - u_n\|_{\alpha,\varepsilon} \leq \mu$$

Utilisons cette propriété pour $\frac{\mu}{\alpha^\varepsilon}$ au lieu de μ . On a alors pour tout $\mu > 0$, $\forall n \geq N_{\frac{\mu}{\alpha^\varepsilon}}$, $\forall p \geq \mathbb{N}$, $\forall t \in]0, \alpha[$:

$$\begin{aligned} |u_{n+p}(t) - u_n(t)| &< \frac{\mu}{\alpha^\varepsilon} t^\varepsilon \leq \mu \\ &\Rightarrow \sup_{]0, \alpha[} |u_{n+p}(t) - u_n(t)| \leq \mu \end{aligned}$$

En d'autres termes, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme infinie sur $]0, \alpha[$. Donc, cette suite converge vers une fonction, notée u , continue sur $]0, \alpha[$. Montrons que u est

dans $E_{\alpha,\varepsilon}$ et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u en norme $\|\cdot\|_{\alpha,\varepsilon}$. Soit $\mu > 0$. Fixons $t_0 \in]0, \alpha[$. $\forall n \geq N_\mu, \forall p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{|u(t_0) - u_n(t_0)|}{|t_0|^\varepsilon} &\leq \frac{|u(t_0) - u_{n+p}(t_0)|}{|t_0|^\varepsilon} + \frac{|u_{n+p}(t_0) - u_n(t_0)|}{|t_0|^\varepsilon} \\ &\leq \frac{|u(t_0) - u_{n+p}(t_0)|}{|t_0|^\varepsilon} + \|u_{n+p} - u_n\|_{\alpha,\varepsilon} \\ &\leq \frac{|u(t_0) - u_{n+p}(t_0)|}{|t_0|^\varepsilon} + \mu \end{aligned}$$

Et ceci est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$ donc en faisant tendre p vers $+\infty$ on a :

$$\frac{|u(t_0) - u_n(t_0)|}{|t_0|^\varepsilon} \leq \mu$$

Ce travail peut être effectué pour tout $t_0 \in]0, \alpha[$ et donc $\forall t \in]0, \alpha[$:

$$\begin{aligned} \frac{|u(t) - u_n(t)|}{|t|^\varepsilon} &\leq 2\mu \\ \Rightarrow u &\in E_{\alpha,\varepsilon} \text{ et } \|u - u_n\|_{\alpha,\varepsilon} \leq \mu \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Théorème 5. *On considère le système d'équation suivant décrit par ligne :*

$$t^{n_i} \frac{du_i}{dt} + a_i^0 u_i + a_i^1 t u_i + \dots + a_i^n t^n u_i = t^{n+1} \tilde{f}_i(t, u_1, \dots, u_m) \quad (31)$$

Avec $n = \max_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} (n_i)$, f analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables.

On suppose que tous les a_i^j sont dans $\mathbb{C}$. De plus les coefficients a_i^0 sont non nuls et les coefficients $a_i^{n_i-1}$ sont de parties réelles strictement positives. Alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ et un certain nombre de constantes arbitraires (nous décrivons plus loin les intervalles disponibles à ces constantes) tel qu'un élément $u \in (E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon})^m$ soit solution du système d'équations (31).

Démonstration. Posons pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\Phi_i = \{s \in \llbracket 0, n_i - 1 \rrbracket \text{ tel que } \operatorname{Re}(a_i^s) \neq 0\}$. D'après les hypothèses du théorème on sait que $s(i) = \min_{s \in \Phi_i} (s)$ a bien un sens, car $\operatorname{Re}(a_i^{n_i-1}) > 0$. On peut donc réécrire ligne par ligne les équations (31) par :

$$t^{n_i} \frac{du_i}{dt} + a_i^0 u_i + a_i^1 t u_i + \dots + a_i^{s(i)} t^{s(i)} u_i = t^{s(i)+1} f_i(t, u_1, \dots, u_m)$$

Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et $l \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_{l+1}}$ est encore analytique au voisinage de $(0, \dots, 0)$ en chacune de ses variables. Donc $\exists \alpha_{i,l} > 0$, $\beta_{i,l}^1, \dots, \beta_{i,l}^m > 0$, $M_{i,l} > 0$ tel que pour tout $(t, z_1, \dots, z_m) \in B(0, \alpha_{i,l}) \times B(0, \beta_{i,l}^1) \times \dots \times B(0, \beta_{i,l}^m)$:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{l+1}}(t, z_1, \dots, z_m) \right| \leq M_{i,j}$$

En posant $\tilde{\alpha} = \min_{\llbracket 1, m \rrbracket^2}(\alpha_{i,l})$, $\beta = \min_{\llbracket 1, m \rrbracket^3}(\beta_{i,l}^j)$ et $M = \max_{\llbracket 1, m \rrbracket^2}(M_{i,l})$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\forall (t, x_1, \dots, x_m), (t, y_1, \dots, y_m) \in B(0, \tilde{\alpha}) \times B(0, \beta)^m$ on a :

$$\begin{aligned} |f_i(t, x_1, \dots, x_m) - f_i(t, y_1, \dots, y_m)| &\leq \sum_{l=1}^m \sup_{[x_l, y_l]} \left(\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{l+1}}(t, z_1, \dots, z_m) \right| \right) |x_l - y_l| \\ &\leq M \sum_{l=1}^m |x_l - y_l| \end{aligned}$$

De la même manière pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\exists \alpha_i^1 > 0, R_i > 0$ tel que $\forall t \in B(0, \alpha_i^1)$:

$$|f_i(t, 0, \dots, 0)| \leq R_i$$

Dans la suite, on notera $R = \max_{\llbracket 1, m \rrbracket}(R_i)$ et $\alpha_1 = \min_{\llbracket 1, m \rrbracket}(\alpha_i^1)$.

On définit également pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $b_i = \frac{2mM}{|Re(a_i^{s(i)})|}$, $c_i = \frac{2}{|Re(a_i^{s(i)})|}$ et $d_i = \left(\frac{|Re(a_i^{s(i)})|}{4\varepsilon} \right)^{n_i - s(i) - 1}$.

On note alors $b = \max_{\llbracket 1, m \rrbracket}(b_i) > 0$, $c = \max_{\llbracket 1, m \rrbracket}(c_i) > 0$ et $d = \min_{\llbracket 1, m \rrbracket}(d_i)$.

On choisit finalement α_ε de la façon suivante :

$$\alpha_\varepsilon = \min(\tilde{\alpha}, \alpha_1, d, \left(\frac{\beta}{3cR} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \frac{1}{2b})$$

Dans la suite, nous munissons l'espace produit $(E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon})^m$, de la norme induite :

$$\|(u_1, \dots, u_m)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m} = \max_{l \in \llbracket 1, m \rrbracket} (\|u_l\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon})$$

Muni de cette norme, $(E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon})^m$ est encore un espace de Banach. Nous allons définir des opérateurs R_i sur $(E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon})^m$ dans $E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon}$. De plus, nous montrerons que ces opérateurs sont contractants sur $B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$. Plus précisément, nous montrerons que $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \forall (u, v) \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$, $\|R_i(u) - R_i(v)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon} \leq \alpha b_i \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}$, mais aussi que $\|R_i(0)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon} \leq \alpha^{1-\varepsilon} R c_i$.

Fixons $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$

On a :

$$t^{n_i} \frac{du_i}{dt} + a_i^0 u_i + a_i^1 t u_i + \dots + a_i^{s(i)} t^{s(i)} u_i = t^{s(i)+1} f_i(t, u_1, \dots, u_m)$$

On différencie alors 2 cas :

– Si $Re(a_i^{s(i)}) > 0$

On intègre alors de cette manière :

$$\begin{aligned} u_i(t) &= e^{\frac{a_i^0}{n_i t^{n_i}}} \dots e^{\frac{a_i^{s(i)}}{(n_i - s(i) - 1) t^{n_i - s(i) - 1}}} \int_0^t e^{\frac{-a_i^0}{n_i s^{n_i}}} \dots \\ &\dots e^{\frac{-a_i^{s(i)}}{(n_i - s(i) - 1) s^{n_i - s(i) - 1}}} s^{s(i) - n_i + 1} f_i(s, u_1(s), \dots, u_m(s)) ds \end{aligned}$$

On définit sur $]0, \alpha_\varepsilon[$, et pour tout $u \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$:

$$R_i(u)(t) = e^{\frac{a_i^0}{n_i t^{n_i}}} \dots e^{\frac{a_i^{s(i)}}{(n_i - s(i) - 1)t^{n_i - s(i) - 1}}} \int_0^t e^{\frac{-a_i^0}{n_i s^{n_i}}} \dots$$

$$\dots e^{\frac{-a_i^{s(i)}}{(n_i - s(i) - 1)s^{n_i - s(i) - 1}}} s^{s(i) - n_i + 1} f_i(s, u_1(s), \dots, u_m(s)) ds$$

On constate alors que si $u \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$, alors $R_i(u)$ est bien défini sur $]0, \alpha_\varepsilon[$ et de plus on a $R_i(u) \in \mathcal{C}^1([0, \alpha_\varepsilon]) \subset \mathcal{C}([0, \alpha_\varepsilon])$. Prenons $(u, v) \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)^2$, alors pour tout $t \in]0, \alpha_\varepsilon[$ on a :

$$| [R_i(u) - R_i(v)](t) | \leq e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i - s(i) - 1)t^{n_i - s(i) - 1}}} \times$$

$$\int_0^t s^{\frac{-Re(a_i^{s(i)})}{(n_i - s(i) - 1)s^{n_i - s(i) - 1}}} |f_i(s, u_1(s), \dots, u_m(s)) - f_i(s, v_1(s), \dots, v_m(s))| ds$$

$$\leq Mm(\|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}) e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i - s(i) - 1)t^{n_i - s(i) - 1}}} \int_0^t \frac{e^{\frac{-Re(a_i^{s(i)})}{(n_i - s(i) - 1)s^{n_i - s(i) - 1}}}}{s^{n_i - s(i)}} s^{\varepsilon + 1} ds$$

$$\leq t \times t^\varepsilon \frac{mM}{|Re(a_i^{s(i)})|} \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}$$

$$\leq \alpha_\varepsilon b_i t^\varepsilon \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}$$

$$\Rightarrow \frac{|[R_i(u) - R_i(v)](t)|}{t^\varepsilon} \leq \alpha_\varepsilon b_i \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}$$

Donc $R_i(u) - R_i(v) \in E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon}$ et :

$$\|R_i(u) - R_i(v)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon} \leq \alpha_\varepsilon b_i \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}$$

De plus, pour tout $t \in]0, \alpha_\varepsilon[$:

$$|R_i(0)(t)| \leq e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i - s(i) - 1)t^{n_i - s(i) - 1}}} \int_0^t \frac{e^{\frac{-Re(a_i^{s(i)})}{(n_i - s(i) - 1)s^{n_i - s(i) - 1}}}}{s^{n_i - s(i)}} s |f_i(s, 0, \dots, 0)| ds$$

$$\leq t \frac{1}{|Re(a_i^{s(i)})|} R_i$$

$$\leq \alpha_\varepsilon^{1-\varepsilon} c_i R t^\varepsilon$$

Donc $R_i(0) \in E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon}$ et $\|R_i(0)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon} \leq \alpha_\varepsilon^{1-\varepsilon} c_i R$. Comme la fonction nulle est dans $B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$, on en déduit que pour tout $u \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$ on a $R_i(u) \in E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon}$.

- Si $Re(a_i^{s(i)}) < 0$

On choisit une constante C_i dans l'intervalle ouvert : $] \frac{1}{|Re(a_i^{s(i)})|^{\frac{1}{n_i - s(i) - 1}} \alpha_\varepsilon}, \alpha_\varepsilon[$. Avec le choix d'une telle constante on a pour tout $t \in]0, \alpha_\varepsilon[$:

$$\left| \frac{1}{|t|^\varepsilon} e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i - s(i) - 1)t^{n_i - s(i) - 1}}} \int_{C_i}^t \frac{e^{\frac{-Re(a_i^{s(i)})}{(n_i - s(i) - 1)s^{n_i - s(i) - 1}}}}{s^{n_i - s(i)}} s^{1+\varepsilon} ds \right| \leq \frac{2\alpha_\varepsilon}{|Re(a_i^{s(i)})|}$$

et aussi :

$$\left| \frac{1}{|t|^\varepsilon} e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)t^{n_i-s(i)-1}}} \int_{C_i}^t \frac{e^{\frac{-Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)s^{n_i-s(i)-1}}}}{s^{n_i-s(i)}} ds \right| \leq \frac{2\alpha_\varepsilon^{1-\varepsilon}}{|Re(a_i^{s(i)})|}$$

Pour en convenir, il faut traiter les 2 cas : $0 < t \leq C_i$ et $C_i \leq t$ α_ε et utiliser les inégalités vérifiées par α_ε .

On intègre alors de cette manière :

$$u_i(t) = e^{\frac{a_i^0}{n_i t^{n_i}}} \dots e^{\frac{a_i^{s(i)}}{(n_i-s(i)-1)t^{n_i-s(i)-1}}} \int_{C_i}^t e^{\frac{-a_i^0}{n_i s^{n_i}}} \dots \\ \dots e^{\frac{-a_i^{s(i)}}{(n_i-s(i)-1)s^{n_i-s(i)-1}}} s^{s(i)-n_i+1} f_i(s, u_1(s), \dots, u_m(s)) ds$$

On définit sur $]0, \alpha_\varepsilon[$, et pour tout $u \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$:

$$R_i(u)(t) = e^{\frac{a_i^0}{n_i t^{n_i}}} \dots e^{\frac{a_i^{s(i)}}{(n_i-s(i)-1)t^{n_i-s(i)-1}}} \int_{C_i}^t e^{\frac{-a_i^0}{n_i s^{n_i}}} \dots \\ \dots e^{\frac{-a_i^{s(i)}}{(n_i-s(i)-1)s^{n_i-s(i)-1}}} s^{s(i)-n_i+1} f_i(s, u_1(s), \dots, u_m(s)) ds$$

On constate que si $u \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$, alors $R_i(u)$ est bien défini sur $]0, \alpha_\varepsilon[$ et de plus on a $R_i(u) \in \mathcal{C}^1([0, \alpha_\varepsilon]) \subset \mathcal{C}([0, \alpha_\varepsilon])$. Prenons $(u, v) \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)^2$, alors pour tout $t \in]0, \alpha_\varepsilon[$ on a :

$$\begin{aligned} |[R_i(u) - R_i(v)](t)| &\leq e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)t^{n_i-s(i)-1}}} \times \\ &\left| \int_{C_i}^t s^{\frac{-Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)s^{n_i-s(i)-1}}} \frac{e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)t^{n_i-s(i)-1}}}}{s^{n_i-s(i)}} |f_i(s, u_1(s), \dots, u_m(s)) - f_i(s, v_1(s), \dots, v_m(s))| ds \right| \\ &\leq Mm(\|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}) e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)t^{n_i-s(i)-1}}} \int_{C_i}^t \frac{e^{\frac{-Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)s^{n_i-s(i)-1}}}}{s^{n_i-s(i)}} s^{\varepsilon+1} ds \\ &\leq t \times t^\varepsilon \frac{2mM}{|Re(a_i^{s(i)})|} \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m} \\ &\leq \alpha_\varepsilon b_i t^\varepsilon \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m} \\ &\Rightarrow \frac{|[R_i(u) - R_i(v)](t)|}{t^\varepsilon} \leq \alpha_\varepsilon b_i \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m} \end{aligned}$$

Donc, $R_i(u) - R_i(v) \in E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon}$ et :

$$\|R_i(u) - R_i(v)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon} \leq \alpha_\varepsilon b_i \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}$$

De plus, pour tout $t \in]0, \alpha_\varepsilon[$:

$$\begin{aligned} \frac{|R_i(0)(t)|}{|t|^\varepsilon} &\leq \frac{1}{|t|^\varepsilon} e^{\frac{Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)t^{n_i-s(i)-1}}} \left| \int_{C_i}^t \frac{e^{\frac{-Re(a_i^{s(i)})}{(n_i-s(i)-1)s^{n_i-s(i)-1}}}}{s^{n_i-s(i)}} s |f_i(s, 0, \dots, 0)| ds \right| \\ &\leq 2\alpha_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{|Re(a_i^{s(i)})|} R_i \\ &\leq \alpha_\varepsilon^{1-\varepsilon} c_i R t^\varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $R_i(0) \in E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon}$ et $\|R_i(0)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon} \leq \alpha_\varepsilon^{1-\varepsilon} c_i R$. Comme la fonction nulle est dans $B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$ on en déduit que pour tout $u \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$ on a $R_i(u) \in E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon}$.

Ainsi, $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \forall u \in B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$

$$\begin{aligned} \|R_i(u)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon} &\leq \alpha_\varepsilon b_i \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m} + \|R_i(0)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon} \\ &\leq \alpha_\varepsilon b \|u\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m} + c_i R \alpha_\varepsilon^{1-\varepsilon} \\ &\leq \alpha_\varepsilon b \beta + c R \alpha_\varepsilon^{1-\varepsilon} \\ &\leq \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{3} < \beta \end{aligned}$$

Et ceci, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, donc $B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta)$ stable par $R = (R_1, \dots, R_m)$. De plus, pour tout $(u, v) \in (B_{\|\cdot\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}}(0, \beta))^2$:

$$\|R(u) - R(v)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m} < \frac{1}{2} \|u - v\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m}$$

De même, on a :

$$\|R(0)\|_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon, m} \leq \frac{\beta}{3} < \beta$$

Donc, si on pose la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = R(w_n)$, on peut utiliser le théorème de point fixe de Banach qui affirme que cette suite converge vers une limite $u \in E_{\alpha_\varepsilon, \varepsilon}$ et que par continuité $R(u) = u$. Ceci implique que u soit dérivable sur $]0, \alpha_\varepsilon[$ et que de plus u vérifie le système d'équation (31).

□

Références

- [1] A. Bentrâd, S. Kichenassamy, A linear Fuchsian Equation with Variable Indices, *J. Differ. Eq.*, 190(1)(2003)64-80
- [2] J.-M. Bony, Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon nonlinéaires, *Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz*, 1983-1984, École Polytechnique (17 janvier 1984).
- [2] H. Brezis, *Notes de cours de DEA Univ. Paris VI*, non publié, (1984).
- [3] G. Cabart, Singularités en optique non-linéaire : étude mathématique, *Doctorat de Mathématiques, Reims, 2005*
- [4] G. Cabart, S. Kichenassamy, Explosion et normes L_p pour l'équation des ondes nonlinéaire cubique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 335, 903-908 (2002).
- [5] M. Crouzeix, A. L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, 2ème éd., Masson, (1989).
- [6] L. JAGER, S. Kichenassamy, Stellar Models and Irregular Singularities, *Communications in Contemporary Mathematics*, 5 (2003) 719-735.
- [7] S. Kichenassamy, W. Littman, Blow-up surfaces for nonlinear wave equations, I, *Commun. in Partial Differential Equations*, 18(3 and 4), 431-452 (1993).
- [8] S. Kichenassamy, W. Littman, Blow-up surfaces for nonlinear wave equations, II, *Commun. in Partial Differential Equations*, 18(11), 1869-1899 (1993).
- [9] S. Kichenassamy, G. K. Srinivasan, The structure of WTC expansion and applications, in *J. Phys. A : Math. Gen.*, 28, 1977-2004 (1995).
- [10] S. Kichenassamy, The Blow-up problem for exponential nonlinearities, *Commun. in Partial Differential Equations*, 21(1 and 2), 125-162 (1996).
- [11] S. Kichenassamy, Fuchsian equations in Sobolev spaces and blow-up, *J. of Differential Equations*, 125, 299-327 (1996).
- [12] S. Kichenassamy, Stability of blow-up patterns for non-linear wave equations, *Contemp. Math.*, 255, 139-162 (2000).
- [13] S. Kichenassamy, On a conjecture of Fefferman and Graham, *Adv. Math.*
- [14] H. Lindblad, C. Sogge, On existence and scattering with minimal regularity for nonlinear wave equations, *J. Funct. Anal.*, 130, 357-426 (1995).
- [15] W. Strauss, Nonlinear wave equations, *CBMS Lecture Notes*, Vol. 73, American Mathematical Society, Providence (1999).

Réduction Fuchsienne et modèles stellaires

Résumé :

L'objet de cette thèse est l'étude d'un système différentielle non linéaire issu d'un modèle stellaire. Après réduction et changements d'inconnues et variables, on se ramène à un second membre analytique en chacune des variables du problème ainsi qu'en des fonctions bien choisies. Nous montrons ensuite que les solutions peuvent s'écrire dans un espace de séries absolument convergentes. Ce théorème d'existence servira alors de brique élémentaire à une méthode de réduction de type Fuchsienne. L'objectif étant d'obtenir un développement sous forme de série faisant apparaître de manière explicite les différentes constantes arbitraires inhérentes à ce type d'équations.

Mots clés : Réduction Fuchsienne, modèle stellaire, équations différentielles non-linéaires

Fuchsian reduction and stellar models

Abstract :

The object of this thesis is the study of a non linear differential equation stemming from a stellar model. After reduction and unknowns changes and variables, we achieve to an analytic second member in each of the problem variables and well chosen functions. Then we show that the solutions can be described in a space of absolute convergent series. This theorem of existence will be used as an elementary brick to a nearby method of Fuchsian reduction. The objective was to obtain a development which elicits arbitrary various constants inherent to this type of equations.

Keywords : Fuchsian reduction, stellar models, non-linear differential equations

Laboratoire de Mathématiques de Reims

Laboratoire EA 4535

Moulin de la Housse

51100 REIMS