



THÈSE

Pour l'obtention du grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS École nationale supérieure d'ingénieurs (Poitiers) Laboratoire d'informatique et d'automatique pour les systèmes - LIAS (Poitiers) (Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers) Secteur de recherche : Automatique - Identification des systèmes

> Présentée par : Jérémy Vayssettes

Méthodes d'analyse modale de systèmes multivariables pour des essais de courte durée en conditions opérationnelles. Application aux essais de flottement

Directeur(s) de Thèse : Guillaume Mercère, Thierry Poinot

Soutenue le 14 novembre 2013 devant le jury

<u>Jury :</u>

| Président | Yves Rolain | Professor, ELEC, Vrije Universiteit, Brussel, België |
|------------|----------------------|--|
| Rapporteur | Hugues Garnier | Professeur, CRAN, Université de Nancy |
| Rapporteur | Laurent Baratchart | Directeur de recherche INRIA, Nice |
| Membre | Guillaume Mercère | Maître de conférences, LIAS, ENSIP, Université de Poitiers |
| Membre | Thierry Poinot | Professeur, LIAS, ENSIP, Université de Poitiers |
| Membre | Laurent Mevel | Chargé de recherche INRIA, Rennes |
| Membre | Pierre Vacher | Ingénieur de recherche, ONERA, Toulouse |

Pour citer cette thèse :

Jérémy Vayssettes. *Méthodes d'analyse modale de systèmes multivariables pour des essais de courte durée en conditions opérationnelles. Application aux essais de flottement* [En ligne]. Thèse Automatique ? Identification des systèmes. Poitiers : Université de Poitiers, 2013. Disponible sur Internet http://theses.univ-poitiers.fr

THESE

pour l'obtention du Grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS (Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées) (Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques

Secteur de Recherche : Automatique, traitement du signal

Présentée par :

Jérémy Vayssettes

Méthodes d'analyse modale de systèmes multivariables pour des essais de courte durée en conditions opérationnelles. Application aux essais de flottement.

Directeur de thèse : Guillaume Mercère - Université de Poitiers

Co-directeurs de thèse : Thierry Poinot – Université de Poitiers Pierre Apkarian – ONERA

Soutenue le 14 Novembre 2013

devant la Commission d'Examen

JURY

| Y. ROLAIN | Pr. à l'Univesité de Vrije, Bruxelles | (Président) |
|---------------|---------------------------------------|--------------|
| L. BARATCHART | DR. à l'INRIA Sophia Antipolis | (Rapporteur) |
| H. GARNIER | Pr. à l'Université de Lorraine | (Rapporteur) |
| L. MEVEL | CR. (HDR) à l'INRIA Rennes | |
| T. POINOT | Pr. à l'Université de Poitiers | |
| P. VACHER | IR. à l'ONERA Toulouse | |
| G. MERCERE | Mcf. (HDR) à l'Université de Poitiers | |

Remerciements

Il est assez difficile d'exprimer en quelques mots les sentiments que je ressens envers les personnes qui m'ont aidé, d'une manière ou d'une autre, durant l'accomplissement de ce travail.

Tout d'abord, je tiens particulièrement à remercier Guillaume Mercère, directeur de ma thèse. Cela a été un réel plaisir de travailler avec toi durant ces trois ans. Tu as su m'orienter et m'aider lorsque cela était nécessaire. Tu m'as également toujours fait confiance et tu as su trouver les mots justes pour me rassurer lorsque j'en avais besoin. Je te suis donc extrêmement reconnaissant pour tout cela. Encore un grand merci pour tout.

Je voudrais ensuite sincèrement remercier les membres de mon jury de thèse qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail. Je souhaite exprimer mes plus vifs remerciements à Hugues Garnier et Laurent Baratchart d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon mémoire et d'avoir examiné minutieusement mon travail. Merci d'avoir pris le temps de me faire part de vos remarques constructives. Je tiens également à remercier tout particulièrement Yves Rolain, président de ce jury, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour l'avoir examiné avec attention et pour ses judicieuses remarques. Enfin, je remercie Alexandre Janot d'être venu représenter l'ONERA à ma soutenance, ainsi que Laurent Mevel et Thierry Poinot pour leurs commentaires pertinents et constructifs.

Je souhaite également remercier Raymond de Callafon, Professeur à l'Université de Californie, San Diego, de m'avoir accueilli dans son Lab durant trois mois et pour le temps qu'il m'a accordé. Ce séjour m'a permis d'avoir un recul supplémentaire sur les méthodes d'identification important pour mes travaux, et m'a permis d'avoir accès à des données essentielles pour l'application et la validation de mon travail. Pour toutes ces raisons qui ont contribué à faire de ce séjour une expérience exceptionnelle, merci beaucoup Raymond.

D'autre part, je veux remercier Olivier Prot pour l'aide qu'il m'a apporté. Olivier, merci de m'avoir accordé le temps nécessaire pour répondre à mes questions et me faire bénéficier de tes éclairements. Un grand merci également pour tes commentaires constructifs sur certaines parties de mon mémoire qui ont contribué à en faire un travail abouti.

Je veux remercier les membres du LIAS à Poitiers et du Département de Conduite des Système et Dynamique du vol (DCSD) à l'ONERA Toulouse que j'ai eu l'occasion de côtoyer durant ma thèse. En particulier, je souhaite remercier les doctorants du DCSD parmi lesquels j'ai trouvé plus que de simples collègues de travail. Merci à Caro, Aurélie, Nico et Yann et Aurélie pour nos (parfois longues!) discussions du midi et pour tous les bons moments partagés. Merci à Lara, Laure, Jérémy et Guillaume qui se sont succédés dans mon bureau. Vous avez été super, et ce fut un plaisir de partager mes journées avec vous. Enfin, merci à Simon, Elodie, Razvan, Pierre, Adrien etc... avec qui j'ai également passé de très bons moments. Vous avez tous contribué au plaisir que j'ai eu à venir travailler tous les jours. Merci à tous !

Je pense également à mes parents, ma famille et mes amis qui m'ont soutenu et m'ont permis de décompresser et de penser à autre chose que la thèse lorsque c'était nécessaire. Je remercie particulièrement Fabien et Mélanie de m'avoir accueilli chez eux lors de mes nombreux séjours à Poitiers. J'ai également une pensée pour Amélie.

Deux personnes ont largement contribué à rendre mon séjour à San Diego « Amazing » : Bobbie, « little pink lady », et Steeve, « old boy ». Merci à tous les deux pour tout ce que vous avez fait pour moi, je ne l'oublierai pas ! J'espère vous revoir bientôt pour de nouvelles randonnées et balades à pied ou en vélo.

Enfin, je ne peux pas conclure ces remerciements sans penser à Emilie qui a vécu ma thèse au quotidien, qui a été la première à relire mon mémoire, qui a du supporter les derniers longs mois de rédaction... Merci pour ton soutien! Car sans toi tout cela n'aurait pas la même saveur...

Table des matières

| 1 | Inti | roduct | ion | 1 |
|----------|--|------------------------------|---|----|
| 2 | Positionnement des travaux de thèse | | | 7 |
| | 2.1 | Analyse modale expérimentale | | 8 |
| | | 2.1.1 | Présentation | 8 |
| | | 2.1.2 | Estimation des paramètres modaux au sein du proces- | |
| | | | sus d'analyse modale expérimentale | 9 |
| | 2.2 | Hypot | thèses pour une approche identification de l'analyse modale | 10 |
| | 2.3 Modélisation linéaire des structures | | lisation linéaire des structures | 12 |
| | | 2.3.1 | Représentation physique des structures | 12 |
| | | 2.3.2 | Modèles paramétriques | 14 |
| | 2.4 | Essais | de flottement | 19 |
| | | 2.4.1 | Phénomène de flottement | 19 |
| | | 2.4.2 | Contexte opérationnel des essais de flottement | 20 |
| | | 2.4.3 | Réduction de la durée des essais | 21 |
| | | 2.4.4 | Spécifications pour les algorithmes d'identification | 23 |
| | 2.5 | Choix | des méthodes d'identification | 24 |
| | | 2.5.1 | Étude bibliographique des méthodes d'identification . | 24 |
| | | 2.5.2 | Méthodes d'identification retenues et objectifs de cette | |
| | | | étude | 30 |
| 3 | Par | amétr | ages des fonctions de transfert MIMO | 33 |
| | 3.1 | Choix | du type de représentation | 34 |
| | | 3.1.1 | Cas des fonctions de transfert à dénominateur scalaire | 34 |
| | | 3.1.2 | Fractions matricielles | 34 |
| | 3.2 Contraintes pour le paramétrage des fractions matricie | | aintes pour le paramétrage des fractions matricielles | 36 |
| | | 3.2.1 | Spécification de l'ordre du système | 36 |
| | | 3.2.2 | Propreté du système | 37 |
| | | 3.2.3 | Contraintes additionnelles pour le paramétrage des frac- | |
| | | | tions matricielles | 39 |
| | 3.3 | Paran | nétrages des fractions matricielles | 40 |

| | | 3.3.1 Définitions et résultats préliminaires | 0 |
|---|--|---|---------------|
| | | 3.3.2 Paramétrage canonique échelon | 3 |
| | | 3.3.3 Paramétrage pseudo-canonique | 3 |
| | | 3.3.4 Bilan | 9 |
| | | | |
| 4 | Algo | orithmes itératifs d'identification fréquentielle de trans- | |
| | fert | s MIMO 6. | 1 |
| | 4.1 | Définition du problème d'identification | 2 |
| | 4.2 | Méthode de Sanathanan-Koerner (SK) | 3 |
| | 4.3 | Méthode de Gauss-Newton (GN) | 1 |
| | 4.4 | Méthode de la Variable Instrumentale (VI) | 9 |
| | 4.5 | Discussion et comparaison des trois schémas de convergence | 1 |
| | 1.0 | SK, GN et VI \ldots 7 | 1 |
| | 4.0 | Performances des méthodes en simulation | 3 |
| | | 4.6.1 Presentation du benchmark | ა - |
| | | $4.6.2 \text{Resultats} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots $ | 5 |
| | | 4.6.3 Influence des effets transitoires | 1 |
| | 4 7 | 4.6.4 Blocages de l'algorithme de Gauss-Newton 8 | 1 ว |
| | 4.1 | Bilan | 3 |
| 5 | Nou | veaux paramétrages des fractions matricielles 8 | 5 |
| | 5.1 | Fractions Matricielles à Gauche Pleines (FMG-P) 8 | 6 |
| | | 5.1.1 Définition de l'ensemble des FMG-P | 7 |
| | | 5.1.2 Respect des conditions essentielles pour l'identification 89 | 9 |
| | | 5.1.3 Choix de l'arrangement des indices de structure 9 | 1 |
| | | 5.1.4 Structure de la classe d'équivalence des FMG-P 99 | 2 |
| | 5.2 | Systèmes de coordonnées locales guidées par les données 10 | 0 |
| | | 5.2.1 Définition $\ldots \ldots \ldots$ | 0 |
| | | 5.2.2 Interprétation géométrique | 1 |
| | 5.3 Cas particuliers des FMG-P et des sur-paramétrages diago | | |
| | | naux quasi-uniformes | 4 |
| | | 5.3.1 Paramétrage par DDLC des FMG-P quasi-uniformes . 10 | 5 |
| | | 5.3.2 Sur-paramétrage diagonal des FMG pseudo-canoniques 10 | 8 |
| | 5.4 | Bilan | 9 |
| 6 Améliorations des algorithmes itératifs | | éliorations des algorithmes itératifs 11 | 1 |
| | 6.1 | Nouveaux schémas de convergence de l'algorithme de Gauss- | |
| | | Newton | 2 |
| | | 6.1.1 Expression de la méthode de Gauss-Newton pour les | |
| | | formos ploipos 11 | 2 |
| | | | |
| | | 6.1.2 Explication des blocages numériques de la convergence 115 | 3 |
| | | 6.1.2 Explication des blocages numériques de la convergence 113 6.1.3 Sur-paramétrage et solution par pseudo-inverse 114 | $\frac{3}{5}$ |

| | | 6.1.5 | Indépendance de la solution par rapport à la base de résolution | 118 |
|----|------|--------------|---|------------|
| | | 6.1.6 | Analyse en simulation de l'influence du paramétrage sur la convergence | 199 |
| | 62 | Prise e | sur la convergence | 122 |
| | 0.2 | 621 | Intégration des conditions aux limites | 131 |
| | | 6.2.1 | Évaluation sur un exemple de simulation | 134 |
| | 6.3 | Bilan o | des améliorations proposées | 138 |
| 7 | App | oroche | des sous-espaces | 141 |
| | 7.1 | Prélim | inaires | 142 |
| | | 7.1.1 | Position du problème d'identification | 143 |
| | | 7.1.2 | Rappels sur les méthodes des sous-espaces | 144 |
| | | 7.1.3 | Estimation de la matrice d'état grâce à l'invariance | |
| | | | temporelle des dynamiques du système | 147 |
| | 7.2 | Foncti | ons de covariance de données de courte durée | 149 |
| | | 7.2.1 | Estimation des fonctions de covariance | 149 |
| | | 7.2.2 | Prise en compte des conditions aux limites | 150 |
| | | 7.2.3 | Algorithme d'identification des sous-espaces fondé sur | 1 50 |
| | - 0 | T .11 | l'utilisation des fonctions de covariance | 153 |
| | 7.3 | Filtrag | ge non-causal des fonctions de covariance | 155 |
| | 7.4 | Estima | ation d'un modèle d'ordre réduit | 157 |
| | 7.5 | Exemp | | 159 |
| | | 7.5.1 | Influence des conditions aux limites | 159 |
| | | 1.5.2 | Identification fondee sur les fonctions de covariance fil- | 161 |
| | 76 | Dilan | trees | 101 |
| | 1.0 | Bilan . | | 103 |
| 8 | App | olicatio | on aux essais de flottement | 167 |
| | 8.1 | Essais | de flottement d'un avion civil | 168 |
| | | 8.1.1 | Présentation du cas d'étude | 168 |
| | | 8.1.2 | Résultats donnés par l'approche itérative | 172 |
| | | 8.1.3 | Résultats donnés par l'approche des sous-espaces | 183 |
| | | 8.1.4 | Bilan | 188 |
| | 8.2 | Essais | de flottement d'un avion militaire | 190 |
| | | 8.2.1 | Présentation du cas d'étude | 190 |
| | | 8.2.2 | Identification d'un modèle de la structure | 191 |
| | | 8.2.3 | Identification d'un modèle complet | 200 |
| | | 8.2.4 | Comparaison et discussion des deux approches | 206 |
| | | 8.2.5 | Bilan | 207 |
| 9 | Con | clusio | n | 211 |
| 10 | Pers | spectiv | ves scientifiques | 215 |

| Α | Ann A.1 A.2 | nexes Modèles utilisés pour les simulations numériques Produit matriciel de deux matrices polynomiales | 219 | |
|---------|--------------------------|---|----------------|--|
| Bi | bliog | 223 | | |
| Résumé | | | | |
| Summary | | | | |

Chapitre 1

INTRODUCTION

L'objectif de l'analyse modale est d'identifier les modes de vibration d'une structure. Initialement, l'analyse modale était fondée sur l'utilisation de méthodes essentiellement graphiques telles que la méthode du décrément logarithmique ou la méthode de la largeur de bande à 3 dB (Allemang, 1999b; Piranda, 2001). Avec le développement des outils informatiques, elle s'est orientée, ces deux dernières décennies, vers une approche identification permettant des traitements informatiques à la fois plus rapides et plus automatiques. L'analyse modale est, de ce fait, devenue un domaine spécifique de l'identification des systèmes. De plus, en permettant d'optimiser le design de structures, le contrôle d'éléments flexibles ou encore de vérifier le bon comportement vibratoire de structures, l'analyse modale est aujourd'hui une discipline incontournable dans de nombreux domaines industriels (Hermans et Van der Auweraer, 1999; Basseville et al., 2001; Peeters et Ventura, 2003; Cai et al., 2003). Elle est, par exemple, utilisée dans des domaines industriels tels que l'automobile (caisses, suspensions, moteurs, etc...), le spatial (lanceurs, satellites, antennes, etc...), le génie civil (ponts, barrages, plateformes en mer, etc...) ou l'aéronautique (tests de vibration au sol, essais en vol, etc...).

Comme toute procédure d'identification, l'analyse modale repose sur l'exploitation de données expérimentales. Dans certains cas, ces données ne peuvent être obtenues qu'en réalisant des essais spécifiques sur le système lorsqu'il se trouve en conditions de fonctionnement opérationnel. Pour certaines applications industrielles, ces essais peuvent avoir une durée et un coût importants. L'objectif des acteurs industriels concernés est donc d'obtenir de bons résultats tout en essayant de réduire au maximum la durée de la campagne d'essais réalisée. C'est, par exemple, particulièrement vrai pour l'identification des modes flexibles d'une structure d'avion en vol.

Des méthodes d'analyse modale ont été développées principalement se-

lon deux voies. Une première approche consiste à identifier les paramètres de fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel. Dans cet esprit, plusieurs auteurs (Pintelon et al., 1994, 1997; Guillaume et al., 2003) ont développé un ensemble de méthodes d'identification paramétrique dédiées à l'analyse modale de structures. Ces méthodes sont fondées sur l'identification d'un modèle à temps discret à partir des fonctions de réponse fréquentielle du système (FRF pour Frequency Response Function en Anglais). Parmi celles-ci, on trouve la méthode dite Least Square Complex Frequency-domain (LSCF) développée par Guillaume et al. (2003) qui est certainement une des méthodes actuellement les plus répandues pour traiter des applications industrielles (Peeters et Van der Auweraer, 2005). Ce type de méthodes a l'avantage d'offrir un bon conditionnement des calculs numériques, ce qui permet de traiter des systèmes de grande dimension. De plus, elles permettent l'obtention rapide d'un modèle identifié. Cependant, ces méthodes sont fondées sur l'estimation de transferts. Ces estimations, pour être précises et correctes, nécessitent l'utilisation de moyennes de périodogrammes (Welch, 1967). Or, ces moyennes sont difficilement réalisables lorsque les signaux d'entrée utilisés pour exciter le système sont de courte durée (Cauberghe, 2004). Enfin, ces méthodes ne permettent pas de représenter tous les systèmes. Elles sont, en effet, fondées sur l'utilisation de paramétrages particuliers des fonctions de transfert multi-entrées multi-sorties (MIMO pour Multi-Input Multi-Output en Anglais) qui excluent la représentation des systèmes dont l'ordre n'est ni un multiple du nombre d'entrées, ni un multiple du nombre de sorties. Toujours afin d'identifier les paramètres de fonctions de transfert dans le domaine fréquentiel, Vacher et Bucharles (2006a,b) ont développé une deuxième approche dédiée à l'analyse modale de structures de grande dimension. Celleci permet d'identifier des systèmes à temps continu à partir des données d'entrée-sortie fréquentielles. Ce type de méthodes est fondé sur l'utilisation d'algorithmes itératifs. Ceux-ci offrent l'avantage de diminuer les effets du bruit et permettent ainsi d'obtenir des identifications précises des modes en environnement bruité. D'autre part, ces méthodes permettent d'identifier des systèmes de grande dimension avec des temps de calcul faibles (Vacher et Bucharles, 2006b). Enfin, elles utilisent directement les transformées de Fourier des mesures, ce qui leur permet d'être utilisables lorsque l'excitation de la structure est fournie par des signaux d'entrée de courte durée. Cependant, elles ne permettent pas actuellement d'identifier des systèmes multi-entrées.

La deuxième voie de développement des méthodes d'analyse modale concerne l'identification de représentations d'état. Dans un premier temps, Juang et Pappa (1985) ont développé les méthodes de type *Eigenvalue Realization Algorithm* (ERA). Celles-ci offrent l'avantage d'estimer une représentation d'état sans itération et ainsi d'éviter tout problème potentiel de convergence. Cependant, les méthodes ERA ne permettent de réaliser des identifications qu'à partir de réponses impulsionnelles du système. Les méthodes sous-espaces sont issues de la généralisation de l'approche ERA à tout type de signal d'entrée. Elles ont connu un essor important à partir des années 90 en identification (Verhaegen et Dewilde, 1992; Van Overschee et De Moor, 1994; McKelvey, 1995; Viberg, 1995; Van Overschee et De Moor, 1996a; McKelvey, 1997) car elles offrent deux principaux avantages. D'une part, elles permettent d'identifier des représentations d'état pleines de systèmes MIMO. Elles permettent donc à l'utilisateur d'éviter le choix d'une structure de représentation pour les systèmes MIMO (Van Overschee et De Moor, 1996b; Katayama, 2005). D'autre part, comme les méthodes ERA, elles estiment les matrices de la représentation d'état sans nécessiter l'utilisation de méthodes itératives d'optimisation. Elles permettent donc d'éviter d'éventuels problèmes de convergence (Van Overschee et De Moor, 1996b). Cependant, leur principal inconvénient est que, lorsque les niveaux de bruit sont importants, l'estimation des paramètres fournie par ces méthodes n'est plus suffisamment précise pour certaines applications (Cauberghe, 2004).

Un rapide bilan permet donc de voir que des méthodes d'analyse modale de structures en conditions opérationnelles existent. Celles-ci permettent d'identifier des systèmes de grande dimension. Cependant, les méthodes existantes qui identifient des fonctions de transfert à temps discret ne permettent pas de représenter tous les systèmes et leur formulation rend le traitement d'essais de courte durée difficile. A l'inverse, les méthodes qui identifient des fonctions de transfert à temps continu pourraient permettre de traiter des essais de courte durée mais ne permettent pas actuellement d'identifier des systèmes MIMO. Les méthodes sous-espaces offrent l'avantage d'éviter une minimisation itérative d'un critère d'identification et le choix d'une structure de représentation. Cependant, elles ne permettent pas toujours d'atteindre un niveau de précision suffisant lorsque les niveaux de bruit qui affectent les mesures sont importants.

Cette étude se justifie donc par l'absence de méthodes existantes réellement adaptées à l'analyse modale de systèmes MIMO en conditions opérationnelles à partir d'essais de courte durée. C'est-à-dire, des méthodes qui permettent, en environnement bruité, à la fois d'identifier l'ensemble des systèmes Linéaires à Temps Invariant (LTI), de réduire la durée des essais en utilisant des excitations de courte durée et de sélectionner une bande de fréquence d'intérêt. Cette étude consiste donc à développer et proposer de nouvelles méthodes ou des améliorations de méthodes d'identification existantes pour combler ce manque.

La démarche adoptée se divise en deux temps :

• Dans un premier temps, nous avons généralisé l'approche développée par Vacher et Bucharles (2006a) au cas des systèmes MIMO. Pour cela, nous avons adopté une définition similaire du problème d'identification en la généralisant aux systèmes MIMO. Celle-ci implique l'utilisation de fractions matricielles pour représenter les fonctions de transfert MIMO. Les fractions matricielles devant être paramétrées, nous avons étudié les paramétrages existant dans la littérature afin de trouver un paramétrage sur lequel puissent se fonder les algorithmes d'identification. Cette étude et le paramétrage adopté sont présentés dans le **Chapitre 3**.

Sur la base de ce paramétrage, nous avons ensuite généralisé l'approche proposée par Vacher et Bucharles (2006a) aux systèmes MIMO. Pour cela, nous avons proposé une généralisation de la méthode de minimisation introduite par Whitfield (1987). Celle-ci exploite l'expression particulière obtenue pour la méthode de Gauss-Newton dans le cas des fonctions de transfert. De plus, nous avons comparé cette méthode avec deux autres méthodes itératives présentes dans la littérature : la méthode introduite par Sanathanan et Koerner (1963) (SK) et une version fréquentielle de la méthode SRIV (Simplified Refined Instrumental Value) (Blom et Van den Hof, 2010). L'objectif de cette comparaison est, d'une part, de mettre en évidence les liens entre l'expression des trois schémas de convergence de ces méthodes et, d'autre part, de déterminer une combinaison de méthodes offrant la meilleure précision et la convergence la plus rapide possible. Ce travail est présenté dans le Chapitre 4. Il a également fait l'objet d'un article soumis à l'International Journal of Control (Vayssettes et al., 2013).

Constatant des phénomènes de blocage de la convergence de la méthode de Gauss-Newton dus au choix d'une représentation non surparamétrée, nous avons ensuite défini un nouveau sur-paramétrage des fractions matricielles. Sachant que l'augmentation du nombre de paramètres non contraints diminue la sensibilité de la convergence vis-à-vis des faux minimum¹, nous avons généralisé cette approche en définissant les fractions matricielles irréductibles d'ordre fixé qui contiennent le nombre maximal de paramètres². Ces formes de fractions matricielles engendrent des classes d'équivalence de fonctions de transfert, c.-à-d., des ensembles de vecteurs de paramètres qui définissent un même système. Nous avons donc défini et étudié ces structures d'équivalence afin, d'une part, de définir de nouveaux paramétrages locaux des fonctions de transfert et, d'autre part, de proposer de nouveaux schémas de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton. Ceux-ci ont pour objectif d'améliorer les propriétés de convergence de cet algorithme. Le Chapitre 5 présente la définition et l'étude de ces nouveaux paramétrages. La modification du schéma de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton qui découle de ces paramétrages est présentée dans le Chapitre 6. Une partie de ces travaux a également été présen-

¹La notion de faux minimum sera précisée à la page 127.

 $^{^{2}\}mathrm{Le}$ nombre maximal de paramètres d'une fraction matricielle irréductible sera défini au Chapitre 5.

tée au $16^{ième}$ Symposium IFAC en Identification des Systèmes (SY-SID) (Vayssettes et al., 2012a) et dans l'article soumis à l'International Journal of Control (Vayssettes et al., 2013).

Constatant également que la diminution de la durée des essais était limitée par l'impact des effets transitoires dus au calcul des transformées de Fourier, nous avons pris en compte les conditions aux limites d'intégration de manière explicite dans la formulation du problème. Pour cela, nous ajoutons une entrée fictive au modèle identifié dont nous donnons également l'expression dans le **Chapitre 6**. Ce travail a également été présenté à la $\gamma^{ième}$ Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA) (Vayssettes et al., 2012b).

• Dans un deuxième temps, afin de posséder une alternative à l'approche itérative étudiée dans les Chapitres 3 à 6, nous avons choisi d'appliquer la méthode des sous-espaces introduite par Miller et De Callafon (2010) à des essais réalisés avec des excitations de courte durée. Pour cela, nous avons apporté deux modifications majeures à l'algorithme initial afin d'améliorer ses résultats dans ce contexte particulier. Premièrement, nous avons ajouté la prise en compte des conditions aux limites d'intégration dans le but de pouvoir diminuer la durée d'enregistrement des données. Deuxièmement, afin d'identifier uniquement les modes d'une bande de fréquence d'intérêt, nous avons développé un nouveau moyen d'identifier un système d'ordre réduit. Pour cela, nous utilisons un filtrage non-causal des fonctions de covariance des données d'entrée-sortie. Ces développements sont présentés dans le **Chapitre 7**.

Avant toute chose, le **Chapitre 2** définit le contexte dans lequel ces travaux s'inscrivent. Ainsi l'objectif de l'analyse modale et les fondements d'une approche identification de l'estimation des paramètres modaux y sont rappelés. Le contexte particulier des essais de flottement y est ensuite détaillé afin de dégager plusieurs spécifications pour les algorithmes d'identification. Sur la base d'une étude bibliographique et en regard de ces spécifications, le choix des méthodes développées aux Chapitres 3 à 7 y est ensuite justifié.

Le Chapitre 8 est finalement dédié à l'application des méthodes développées dans cette thèse à des données d'essais en vol. Deux études sont présentées dans ce dernier chapitre. La première, est menée sur un cas de simulation d'essais en vol de flottement d'un avion civil. Plus particulièrement, ce cas d'étude est représentatif d'essais réels réalisés à l'aide d'excitations multi-entrées de courte durée. Cette première étude est proposée afin d'évaluer l'impact des améliorations proposées, et les performances des méthodes développées dans de telles circonstances. La deuxième étude est menée sur des données provenant d'un essais en vol réalisé sur un avion de combat. Cet essai a été réalisé avec des excitations de plus longue durée. L'objectif de cette deuxième étude est, d'une part, de vérifier le bon comportement des algorithmes développés avec de telles données et, d'autre part, de comparer les résultats obtenus avec les deux approches développées dans cette thèse.

Ce mémoire de thèse est donc organisé comme le montre la Figure 1.1. Les Chapitres 3 à 6 sont dédiés à une identification paramétrique itérative dans le domaine fréquentiel de systèmes continus sous forme de fonctions de transfert. Le Chapitre 7 est, quant à lui, dédié à une identification par l'approche des sous-espaces dans le domaine temporel de systèmes discrets sous forme de représentations d'état.



FIGURE 1.1 – Organisation du mémoire.

Chapitre 2

Positionnement des travaux de thèse

L'objectif de ce chapitre est de situer les travaux de thèse dans un contexte d'analyse modale de structures flexibles réalisées avec des essais de courte durée lorsque le système est en conditions de fonctionnement opérationnel. Pour cela, nous introduisons l'analyse modale expérimentale et les hypothèses autorisant une approche identification de l'estimation des paramètres modaux qui s'appuie sur l'utilisation de modèles paramétriques. Les modèles utilisés dans la suite de ce mémoire sont également introduits. Le choix des méthodes d'identification développées dans ce mémoire est ensuite justifié. Pour cela, nous présentons, dans un premier temps, le contexte opérationnel des essais de flottement afin de dégager un ensemble de spécifications pour les méthodes d'identification mises en œuvre. Ensuite, grâce à une étude bibliographique, nous justifions le choix de deux approches qui respectent ces spécifications et que nous introduisons à la fin de ce chapitre.

Sommaire

| 2.1 | Anal | yse modale expérimentale | 8 |
|------------|---------------|---|-----------|
| | 2.1.1 | Présentation | 8 |
| | 2.1.2 | Estimation des paramètres modaux au sein du pro- cessus d'analyse modale expérimentale | 9 |
| 2.2 | Hype l'ana | othèses pour une approche identification de lyse modale | 10 |
| 2.3 | Mod | élisation linéaire des structures | 12 |
| | 2.3.1 | Représentation physique des structures | 12 |
| | 2.3.2 | Modèles paramétriques | 14 |
| 2.4 | Essa | is de flottement | 19 |
| | 2.4.1 | Phénomène de flottement | 19 |
| | 2.4.2 | Contexte opérationnel des essais de flottement $\ .$. | 20 |
| | 2.4.3 | Réduction de la durée des essais $\ldots \ldots \ldots$ | 21 |
| | 2.4.4 | Spécifications pour les algorithmes d'identification | 23 |
| 2.5 | Choi | x des méthodes d'identification | 24 |
| | 2.5.1 | Étude bibliographique des méthodes d'identification | 24 |
| | 2.5.2 | Méthodes d'identification retenues et objectifs de cette étude | 30 |

2.1 Analyse modale expérimentale

2.1.1 Présentation

L'analyse modale expérimentale est le processus qui consiste à établir et/ou améliorer la connaissance du modèle dynamique de structures réelles par le biais d'une approche expérimentale (Allemang, 1999a). Plus particulièrement, ce processus permet de déterminer les paramètres modaux d'une structure linéaire : fréquences, amortissements et vecteurs propres des modes. Quelle que soit la complexité de la structure étudiée, la connaissance de ces seuls paramètres permet de déterminer son comportement dynamique. Pour cette raison, et grâce aux progrès de l'informatique et de l'instrumentation, l'analyse modale expérimentale est aujourd'hui une méthode d'investigation privilégiée dans le domaine de la dynamique des structures (Bayard, 1994; Hermans et Van der Auweraer, 1999; Cauberghe, 2004; Vacher et Bucharles, 2006b).

Les paramètres modaux peuvent parfois être déterminés par des méthodes analytiques, telles que l'analyse par éléments finis. Un des objectifs de l'analyse modale expérimentale est alors de valider ou de corriger les résultats de l'approche analytique. Cependant, souvent, un modèle analytique n'existe pas et l'analyse modale expérimentale permet alors de déterminer un modèle qui sert ensuite à des études futures comme, par exemple, la prédiction des effets de modifications structurelles. Elle est également utilisée afin d'expliquer certains problèmes dynamiques, vibratoires ou acoustiques rencontrés et qui peuvent être difficilement compréhensibles de manière intuitive ou analytique. Enfin, elle permet aussi de surveiller et/ou de valider le comportement dynamique de structures en conditions opérationnelles.



FIGURE 2.1 – Analyse modale expérimentale de différents systèmes de transport¹.

Les premières méthodes d'analyse modale furent développées dans les

¹Sources : Wikimedia et Sopemea.

années 1940 par les avionneurs afin de prédire précisément l'apparition du phénomène de *flottement* (Bisplinghoff et Ashley, 1962). A cette époque, la nature analogique de l'approche utilisée menait à des procédures longues et peu pratiques (Garrick et Reed III, 1981; Kehoe, 1995). Avec les avancées technologiques, principalement dans le domaine de l'informatique et du calcul de la transformée de Fourier rapide (FFT) (Oppenheim et Schafer, 1989), les années 1960 virent le début de l'analyse modale moderne fondée sur des outils numériques. Aujourd'hui, l'analyse modale expérimentale dépasse largement le cadre de l'aéronautique pour s'intéresser au comportement des structures dans le domaine du génie civil (ponts, barrages, immeubles etc...), du transport terrestre (véhicules automobiles, ferroviaires, bateaux etc...), du spatial (satellites, lanceurs, antennes etc...) et plus généralement à tous les systèmes susceptibles d'être soumis à une ambiance vibratoire sévère.

2.1.2 Estimation des paramètres modaux au sein du processus d'analyse modale expérimentale

Le processus de détermination des paramètres modaux par analyse modale expérimentale implique plusieurs étapes. Le succès d'une analyse modale expérimentale, c.-à-d., l'atteinte de l'objectif fixé, découle de la bonne compréhension des fondements de chacune d'entre elles. On peut décomposer ce processus en cinq étapes principales (Allemang, 1999a) :

- La théorie de l'analyse modale fait référence à la partie de la théorie des vibrations qui explique l'existence de fréquences naturelles de vibration, de facteurs d'amortissements et de déformées modales pour les systèmes linéaires. Plus de détails sur cette première étape de l'analyse modale expérimentale peuvent être trouvés dans (Allemang, 1999b) qui fait une synthèse de ces outils théoriques.
- Les méthodes d'analyse modale expérimentale établissent les relations mathématiques entre la théorie de l'analyse modale et les données mesurées. L'ensemble des méthodes modernes découle des équations aux dérivées partielles. Ces méthodes conduisent cependant à une forme mathématique finale exprimée en fonction de données mesurées qui peuvent être de plusieurs natures. Ces données peuvent être des données brutes d'entrée-sortie dans le domaine temporel ou fréquentiel. Elles peuvent aussi consister en une forme de données calculées comme les réponses impulsionnelles ou les Fonctions de Réponse Fréquencielle (FRF).
- L'acquisition des données concerne l'aspect pratique de l'acquisition des données nécessaires pour la phase d'estimation des paramètres modaux. Ainsi, la plus grande attention doit être apportée au fait que les données respectent les hypothèses théoriques ainsi que les exigences

des méthodes numériques mises en œuvre dans la phase d'estimation des paramètres.

- L'estimation des paramètres modaux concerne la mise en œuvre des algorithmes et outils numériques qui, à partir des données mesurées, calculent les coefficients du modèle mathématique du système étudié. La formulation de ce problème est fondée à la fois sur le choix du modèle mathématique dicté par la théorie de l'analyse modale et sur la nature des données mesurées, définie par la méthode d'analyse modale utilisée. Les problèmes rencontrés à cette phase proviennent souvent de la violation des hypothèses formulées aux étapes précédentes. Le non-respect de ces hypothèses par les algorithmes d'estimation des paramètres modaux peut, en effet, complètement invalider l'approche expérimentale mise en œuvre.
- La présentation et la validation des données modales concernent la visualisation et l'interprétation des paramètres modaux estimés. Cela peut aller du simple tableau dans lequel sont rangés les paramètres modaux jusqu'à une représentation en trois dimensions des mouvements de la structure identifiée.

Les travaux de cette thèse sont dédiés à l'estimation des paramètres modaux, c.-à-d., les valeurs des fréquences, et des amortissements des modes d'une structure ainsi que leurs déformées et participations modales (Allemang, 1999a).

2.2 Hypothèses pour une approche identification de l'analyse modale

La réalisation d'une analyse modale expérimentale par le biais de méthodes d'identification repose sur quatre hypothèses fondamentales concernant toute structure mécanique étudiée (Allemang, 1999a) :

• La structure est supposée linéaire, c.-à-d., que la réponse de la structure à une combinaison d'excitations est la combinaison des réponses individuelles à chacune de ces excitations. Nous adoptons ainsi la définition d'un système linéaire donnée par Kailath (1980). Cette définition suppose que les systèmes considérés appartiennent à une classe de systèmes de dimension finie dont le comportement dynamique est décrit par un jeu d'équations différentielles linéaires. L'hypothèse de linéarité est vérifiée (ou presque) pour une large variété de structures. Elle est donc généralement une bonne hypothèse de travail en analyse modale.

- La structure ne varie pas dans le temps, c.-à-d., que les paramètres modaux de celle-ci sont constants. Cette hypothèse est généralement vérifiée par les systèmes mécaniques étudiés. Cependant dans certains cas, comme dans le cas particulier des essais réalisés sur un avion en vol, elle ne l'est pas totalement. En effet, au cours du vol, la masse de l'avion change (du fait de la consommation de carburant) de même que les conditions de vol ce qui implique des changements au niveau des paramètres modaux. Cependant, en faisant l'analyse modale en un point de vol fixe et en supposant la variation de masse négligeable durant un test, cette hypothèse est vérifiée pour chaque test. L'ensemble des tests effectués au cours d'un vol donnent donc un ensemble de modèles linéaires à paramètres invariants dans le temps (LTI pour Linear Time Invariant en Anglais).
- La structure obéit au théorème de réciprocité de Maxwell, c.à-d., qu'une force appliquée en un point p dans une direction $\vec{e_p}$ entraine une réponse en un point q dans une direction $\vec{e_q}$ qui est identique à la réponse en p causée par la même force appliquée en q selon $\vec{e_q}$. Ainsi, en notant H le transfert entre une force et un déplacement, cette hypothèse permet d'écrire $\mathsf{H}_{pq} = \mathsf{H}_{qp}$.
- La structure est observable, c.-à-d., que les mesures effectuées donnent accès à l'ensemble des dynamiques de la structure. En d'autres termes, l'ensemble des modes de la structure sont théoriquement observables avec les mesures effectuées.

Ces hypothèses sont également les hypothèses formulées en identification de systèmes LTI. Celles-ci nous permettent donc d'appliquer une approche *identification* de l'analyse modale. L'observabilité du système est un concept important en identification. En analyse modale, il est cependant très fréquent que l'on ne souhaite pas construire un modèle décrivant l'ensemble des comportements dynamiques de la structure. C'est particulièrement le cas lorsque des structures de grande dimension sont considérées. On cherche généralement à représenter simplement certains aspects de ce comportement en limitant, par exemple, l'étude à une bande de fréquence choisie. On supposera donc que les dynamiques qui nous intéressent sont observables, et on pourra supposer que le système n'est que partiellement observable, si par ailleurs d'autres aspects du système (qui eux ne nous intéressent pas) ne le sont pas. Cependant, le fait que les modes soient observables n'implique pas nécessairement que leur influence sur les sorties mesurées soit visible. En effet, en conditions opérationnelles, il peut être difficile, voire impossible, d'appliquer une excitation suffisamment riche pour exciter l'ensemble des modes de la structure. Les mesures peuvent également être de trop mauvaises qualités pour que l'influence d'un mode excité soit visible. Certains modes ne sont alors simplement pas visibles et ne peuvent donc pas être identifiés. Cette part visible de la structure dépend fortement des conditions expérimentales, c.-à-d., qu'elle dépend de la qualité et du nombre de mesures effectuées ainsi que des excitations appliquées. L'objectif fixé pour les méthodes d'identification mises en œuvre est donc de permettre l'estimation la plus précise possible des paramètres modaux de la structure qui sont visibles sur les mesures. On ne cherche donc pas à identifier nécessairement l'ensemble des dynamiques observables d'un système mais uniquement sa partie visible. De ce fait, on espère que les conditions expérimentales rendent possible l'identification de la plus grande part possible du système.

2.3 Modélisation linéaire des structures

Nous présentons dans cette section les modèles paramétriques qui seront utilisés dans les chapitres suivants. Du point de vue d'un ingénieur, une représentation physique exprimée en fonction des paramètres modaux permet une meilleure compréhension du sens physique de chaque paramètre. Cependant, ce type de représentation étant fortement non linéaire en les paramètres modaux, la plupart des méthodes d'identification n'estiment pas directement les paramètres modaux. Celles-ci identifient plus couramment des modèles paramétriques sous forme de fonctions de transfert ou de représentations d'état. Les paramètres modaux sont ensuite retrouvés grâce aux liens établis entre ces modèles et la représentation physique.

2.3.1 Représentation physique des structures

Les modèles de systèmes mécaniques sont fondés sur les équations fondamentales de la dynamique (Allemang, 1999a). Celles-ci permettent de représenter le comportement dynamique de structures physiques linéaires par un jeu d'équations linéaires de la forme (Allemang, 1999a)

$$M \ddot{q}(t) + C_1 \dot{q}(t) + K q(t) = B_1 u(t) ,$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_p q(t) \\ C_v \dot{q}(t) \\ C_a \ddot{q}(t) \end{bmatrix} ,$$
(2.1)

où q(t) note le vecteur de déplacements de la structure, avec \bullet et $\ddot{\bullet}$ qui notent respectivement la dérivée première et seconde par rapport au temps. Le vecteur $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente l'excitation externe agissant sur le système, et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ note le vecteur des mesures. Celui-ci peut être constitué d'une combinaison de mesures de déplacements, de vitesses et d'accélérations. Pour un système à m degrés de libertés, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice symétrique définie positive de masse, $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice symétrique d'amortissement et $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice symétrique de raideur. $B_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_u}$ est la matrice de transmission des efforts appliqués par les excitations en n_u positions différentes. La matrice $\begin{bmatrix} C_p^{\top} & C_v^{\top} & C_a^{\top} \end{bmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^{n_y \times m}$ est la matrice de gain des sorties qui peuvent inclure des mesures de position, de vitesse et/ou d'accélération. En supposant des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de l'équation (2.1) est donnée par (Labarrère et al., 1978)

$$Y(s) = \mathsf{H}(s) U(s) , \qquad (2.2)$$

avec la fonction de transfert H(s) définie par

$$\mathsf{H}(s) = \begin{bmatrix} C_p \\ C_v s \\ C_a s^2 \end{bmatrix} Z^{-1}(s) B_1 , \qquad (2.3)$$

où $Z(s) = M s^2 + C_1 s + K$ est la raideur dynamique de la structure, U(s) est la transformée de Laplace du vecteur d'excitations appliquées à la structure. H(s) est la fonction de transfert entrée-sortie d'ordre $n_x = 2m$ définie par (Allemang, 1999a)

$$\mathsf{H}(s) = D + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{c_k b_k^\top}{s + \lambda_k} + \frac{c_k^* b_k^H}{s + \lambda_k^*} \right) , \qquad (2.4)$$

où $(\bullet)^*$ et $(\bullet)^H$ notent respectivement la valeur complexe conjuguée et la transposée Hermitienne. Les pôles $\lambda_k = \sigma_k + j 2\pi f_k \in \mathbb{C}, k \in \{1, \ldots, m\}$, du système sont supposés distincts. La fréquence naturelle du $k^{\text{ième}}$ mode est donnée par f_k . Son taux d'amortissement est défini par (Allemang, 1999a)

$$\xi_k = \frac{-\sigma_k}{\sqrt{\sigma_k^2 + (2\pi f_k)^2}} \,. \tag{2.5}$$

Le vecteur colonne $c_k \in \mathbb{C}^{n_y \times 1}$ et le vecteur ligne $b_k^\top \in \mathbb{C}^{1 \times n_y}$ désignent respectivement la déformée et la participation modale associées au $k^{\text{ième}}$ mode du système. Les paramètres recherchés en analyse modale sont ainsi les coefficients

$$\left(f_k, \xi_k, c_k, b_k^{\top}\right), \ k \in \{1, \dots, m\}.$$
 (2.6)

On notera R_k et R_k^* les résidus associés respectivement aux pôles λ_k et λ_k^* définis par

$$R_k = c_k b_k^\top \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u} ,$$

$$R_k^* = c_k^* b_k^H \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u} .$$
(2.7)

En identification, cette représentation est aussi connue sous le nom de *forme diagonale de Gilbert* qui possède des résidus de rang unitaire lorsque le système a des pôles distincts (Kailath, 1980). Dans la suite, on appellera cette

représentation *modèle modal*. En appliquant la transformée inverse de Laplace (Labarrère et al., 1978), on obtient son expression dans le domaine temporel, soit

$$\mathbf{h}(t) = D\,\delta(t) + \sum_{k=1}^{m} \left(R_k e^{-\lambda_k t} + R_k^* e^{-\lambda_k^* t} \right) \,, \tag{2.8}$$

où $\delta(t)$ note l'impulsion de Dirac. La transmission directe entrée-sortie, notée D, est nulle si le vecteur des sorties ne contient pas de mesures données par des accéléromètres (Cauberghe, 2004). Il est important de noter que dans notre étude nous allons considérer le cas de mesures fournies par des accéléromètres pour lequel il faut considérer une transmission directe non nulle.

2.3.2 Modèles paramétriques

Les méthodes d'identification de systèmes linéaires sont fondées sur deux types de représentations :

- les fonctions de transfert qui modélisent les dynamiques entrée-sortie du système,
- les représentations d'état qui modélisent également les dynamiques internes du système.

Parmi ces deux catégories, plusieurs types de modèles permettent de représenter des systèmes à temps continu et à temps discret dans les domaines fréquentiels et temporels. Les coefficients non fixés de ces modèles sont les inconnues, ou paramètres, à identifier. Dans la suite de ce mémoire, nous appelons θ le vecteur des paramètres. Une présentation générale des différents modèles paramétriques pouvant être trouvée dans la littérature (cf. par exemple (Cauberghe, 2004)), nous ne présentons ici que les trois types de représentation que nous utiliserons dans notre étude : les fonctions de transfert fréquentielles continues à dénominateur commun, sous forme de fractions matricielles, et les représentations d'état discrètes.

2.3.2.1 Fonctions de transfert à dénominateur scalaire

Les fonctions de transfert à dénominateur scalaire expriment les relations entrée-sortie du système par des fractions rationnelles de polynômes dont le dénominateur est identique pour tous les transferts entrée-sortie. Ainsi, le transfert $h_{i,j}(s)$ entre la $i^{i\text{ème}}$ sortie et la $j^{i\text{ème}}$ entrée du système s'écrit

$$h_{i,j}(s) = D_{i,j} + \frac{n_{i,j}(s)}{d(s)},$$
(2.9)

où $d(s) \in \mathbb{C}$ note le dénominateur scalaire, $\mathsf{n}_{i,j}(s) \in \mathbb{C}$ et $D_{i,j} \in \mathbb{R}$ notent respectivement le numérateur et la transmission directe du transfert entre la $i^{\text{ième}}$ sortie et la $j^{\text{ième}}$ entrée. La fonction de transfert $\mathsf{H}(s)$ de dimension $n_u \times n_u$ du système est donc donnée par

$$\mathsf{H}(s) = \begin{bmatrix} \mathsf{h}_{1,1}(s) & \dots & \mathsf{h}_{1,n_u}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{h}_{n_y,1}(s) & \dots & \mathsf{h}_{n_y,n_u}(s) \end{bmatrix} .$$
(2.10)

Chacun des transferts élémentaires $h_{i,j}(s)$ peut être décomposé en éléments simples, soit

$$\mathsf{h}_{i,j}(s) = D_{i,j} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{r_{i,j,k}}{s + \lambda_k} + \frac{r_{i,j,k}^*}{s + \lambda_k^*} \right) \,. \tag{2.11}$$

En regroupant les résidus scalaires $r_{i,j,k}$, le transfert global à dénominateur commun peut également être exprimé en faisant apparaître les résidus R_k , soit

$$\mathsf{H}(s) = D + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{R_k}{s + \lambda_k} + \frac{R_k^*}{s + \lambda_k^*} \right) \,, \tag{2.12}$$

où

$$R_k = \begin{bmatrix} r_{1,1,k}(s) & \dots & r_{1,n_u,k}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n_y,1,k}(s) & \dots & r_{n_y,n_u,k}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}, \qquad (2.13)$$

et $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$. On retrouve une expression similaire à l'expression théorique du transfert donnée par l'équation (2.4). D'après l'équation (2.12), on voit que les pôles du système sont directement donnés par les racines du déterminant de $\mathsf{d}(s)$. Les participations et les déformées modales du $k^{\text{ième}}$ mode sont obtenues par une décomposition en valeur singulière (SVD pour Singular Value Decomposition en Anglais) du résidu R_k (Kailath, 1980).

2.3.2.2 Fractions matricielles

Les fonctions de transfert multivariables peuvent également être décrites par une fraction matricielle, c.-à-d., le ratio de deux matrices de polynômes (Kailath, 1980). Comme le dénominateur est matriciel et ne commute plus avec le numérateur, deux types de modélisations sont alors possibles.

Fractions Matricielles à Gauche (FMG) Une fonction de transfert de dimension $n_y \times n_u$ mise sous forme de FMG est définie par

$$H(s) = D_{G}^{-1}(s) N_{G}(s) , \qquad (2.14)$$

avec

$$D_{\mathcal{G}}(s) = D_0 + D_1 s + \dots + D_p s^p \quad \in \quad \mathbb{C}^{n_y \times n_y} ,$$

$$N_{\mathcal{G}}(s) = N_0 + N_1 s + \dots + N_p s^p \quad \in \quad \mathbb{C}^{n_y \times n_u} ,$$
(2.15)

où $D_G(s)$ est une matrice supposée inversible. $D_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ et $N_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$, $i \in \{0, \ldots, p\}$, sont respectivement les matrices de coefficients du dénominateur et du numérateur. Un paramétrage des matrices D_i et N_i doit être imposé afin que l'ordre du système soit égal à n_x , c.-à-d., deg(det($D_G(s)$)) = n_x , et que le transfert soit propre (cf. p. 37), c.-à-d., deg(det($D_G(s)$)) \geq deg(det($N_G(s)$)), quelles que soient les valeurs des paramètres identifiés. Les méthodes d'analyse modale trouvées dans la littérature utilisent généralement un paramétrage qui consiste à imposer $D_p = I$ afin de vérifier ces deux conditions (cf. par exemple (Guillaume et al., 2003; Cauberghe, 2004)). Ce choix fixe également la valeur de p égale à n_x/n_y . Ainsi, deux contraintes implicites sont imposées par ce choix de paramétrage :

- l'ordre du système doit être un multiple du nombre de sorties mesurées,
- l'ordre du système doit être au moins égal au nombre de sorties mesurées.

En analyse modale, le nombre de sorties mesurées est souvent supérieur à l'ordre du système identifié. La deuxième contrainte n'étant pas vérifiée, le nombre de mesures est alors artificiellement diminué afin d'obtenir $n_x/n_y = 1$. Cependant, comme nous le verrons dans les Chapitres 3 et 5, ces contraintes peuvent être évitées par des choix de paramétrages différents.

L'objectif étant dans notre étude d'estimer les paramètres modaux, ceuxci sont calculés à partir du numérateur et du dénominateur identifiés. En effet, la formulation de $D_{G}(s) = 0$ en un problème de valeurs propres généralisées résulte en n_x valeurs propres et vecteurs propres qui définissent respectivement les n_x pôles λ_k et les n_x déformées modales c_k . Les participations modales b_k^{\top} sont ensuite obtenues d'après les coefficients de $N_G(s)$ (Kailath, 1980).

Fractions Matricielles à Droite (FMD) Une fonction de transfert de dimension $n_y \times n_u$ mise sous forme de FMD est définie par

$$H(s) = N_{\rm D}(s) \, {\sf D}_{\rm D}^{-1}(s) \,, \qquad (2.16)$$

avec

$$D_{\mathrm{D}}(s) = D_0 + D_1 s + \dots + D_p s^p \quad \in \quad \mathbb{R}^{n_u \times n_u} ,$$

$$N_{\mathrm{D}}(s) = N_0 + N_1 s + \dots + N_n s^p \quad \in \quad \mathbb{R}^{n_y \times n_u} ,$$
(2.17)

où $D_D(s)$ est une matrice supposée inversible. $D_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ et $N_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$, $i \in \{0, \ldots, p\}$, sont respectivement les matrices de coefficient du dénominateur et du numérateur. En considérant le transfert transposé $\mathsf{H}^{\top}(s)$, la FMD de l'Eq. (2.16) devient une FMG donnée par

$$\mathsf{H}^{\top}(s) = \mathsf{D}_{\mathsf{D}}^{-\top}(s) \,\mathsf{N}_{\mathsf{D}}^{\top}(s) \,. \tag{2.18}$$

Ainsi, les résultats concernant les FMD peuvent s'obtenir par transposition des résultats valables pour les FMG.

De même que pour les FMG, un paramétrage doit être imposé afin que l'ordre du système soit égal à n_x et que le transfert soit propre quelles que soient les valeurs des paramètres identifiés. Dans la littérature, comme pour les FMG, le paramétrage communément trouvé consiste à fixer $D_p = I$. Ce choix fixe implicitement la valeur de p égale à n_x/n_u , ce qui a pour conséquence des contraintes similaires à celles vues pour les FMG, c.-à-d.,

- l'ordre du système doit être un multiple du nombre d'entrées,
- l'ordre du système doit être au moins égal au nombre d'entrées.

Comme pour les FMG, nous verrons aux Chapitres 3 et 5 que ces contraintes peuvent être évitées en choisissant un paramétrage plus adapté.

En analyse modale, le nombre d'entrées étant généralement beaucoup plus petit que le nombre de sorties, ces contraintes sont souvent moins pénalisantes que dans le cas des fractions matricielles à gauche. En revanche, le dénominateur étant de dimension $n_u \times n_u$ alors qu'il est de dimension $n_y \times n_y$ dans le cas des FMG, un système d'ordre n_x implique des degrés de polynômes plus grands pour les FMD que pour les FMG. Cela peut avoir un impact sur le conditionnement des calculs numériques (Cauberghe, 2004).

L'objectif étant d'estimer les paramètres modaux, ceux-ci sont calculés d'après $D_D(s)$ et $N_D(s)$ de façon similaire au cas des FMG.

2.3.2.3 Représentations d'état

Les représentations d'état sont un deuxième type de représentation des systèmes linéaires. Alors que les fonctions de transfert permettent de modéliser le comportement entrée-sortie d'un système, les représentations d'état donnent accès à des variables d'état du système. D'après l'équation (2.1), on peut écrire

$$\begin{bmatrix} s Q(s) \\ s^2 Q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(s) \\ s Q(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_1 \end{bmatrix} U(s) , \quad (2.19)$$

où $Q(s) \in \mathbb{C}^m$ note la transformée de Laplace de q(t). En définissant le vecteur d'état $X(s) \in \mathbb{C}^{n_x}$ et le vecteur de sorties $Y(s) \in \mathbb{C}^{n_y}$ tels que

$$X(s) = \begin{bmatrix} Q(s) \\ s Q(s) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y(s) = \begin{bmatrix} C_d Q(s) \\ C_v s Q(s) \\ C_a s^2 Q(s) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

une représentation d'état du système est donnée par

$$s X(s) = A X(s) + B U(s),$$

 $Y(s) = C X(s) + D U(s),$
(2.21)

où les matrices $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ et $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ sont définies par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} C_d & 0 \\ 0 & C_v \\ -C_a M^{-1}K & -C_a M^{-1}C_1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_a M^{-1}B_1 \end{bmatrix},$$
(2.22)

La fonction de transfert entre les entrées et sorties mesurées est alors donnée par

$$H(s) = C [s I - A]^{-1} B + D. \qquad (2.23)$$

En considérant les vecteurs propres à droite $V \in \mathbb{C}^{n_x \times n_x}$ de la matrice A (Golub et Van Loan, 1996)

$$AV = V\Lambda$$
 avec $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$, (2.24)

la représentation d'état peut être exprimée sous sa forme modale

$$\mathsf{H}(s) = CV \left[s \, I - \Lambda \right]^{-1} V^{-1} B + D \,. \tag{2.25}$$

En adoptant les notations lignes et colonnes (Golub et Van Loan, 1996), les déformées et les participations modales du $k^{ième}$ mode sont données par

$$\begin{cases} c_k = CV(:,k) \\ c_k^* = CV(:,m+k) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_k^\top = V^{-1}(k,:)B \\ b_k^H = V^{-1}(m+k,:)B \end{cases} \quad . \tag{2.26} \end{cases}$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace, une représentation d'état continue similaire est obtenue dans le domaine temporel. La représentation d'état donnée par l'équation (2.21) et son analogue temporelle représentent le comportement d'un système continu. Dans cette thèse, nous allons considérer des représentations d'état discrètes. Celles-ci mettent en relation les échantillons discrets $s_k = s(k\Delta t)$ des signaux continus s(t) acquis avec une période d'échantillonnage constante Δt . Nous supposons que l'acquisition respecte l'hypothèse d'un bloqueur d'ordre zéro selon laquelle la représentation d'état continue peut être convertie en une représentation d'état discrète (Ljung, 1999)

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= A_d \, x_k + B_d \, u_k , \\
y_k &= C_d \, x_k + D_d \, u_k ,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

où u_k et y_k sont les mesures temporelles échantillonnées. Les relations entre les matrices de la représentation continue et les matrices de la représentation discrète, sous l'hypothèse d'un bloqueur d'ordre zéro, sont données par (Ljung, 1999)

$$A_d = e^{A\Delta t} , \quad B_d = \int_0^{\Delta t} B e^{At} dt ,$$

$$C_d = C , \quad D_d = D .$$
(2.28)

2.4 Essais de flottement

Les essais en vol de flottement d'un avion constituent un contexte opérationnel particulièrement exigeant pour l'analyse modale (Pickrel et White, 2003; Brenner et al., 1997). La réduction de la durée des essais y étant un enjeu majeur (Vacher et al., 2009; Cooper, 2002), ils font partie du type d'applications visées par ces travaux. Afin de définir un ensemble de spécifications générales que doivent respecter les méthodes d'identification que nous allons développer, nous présentons dans cette section le contexte opérationnel des essais de flottement.

2.4.1 Phénomène de flottement

Toute structure étant sujette à des modes naturels de vibration, lorsqu'une structure est placée dans un fort écoulement d'air, les oscillations de la structure extraient de l'énergie du flux d'air. On parle de couplage aéroélastique entre l'air et la structure (Bisplinghoff et Ashley, 1962). Cette énergie procurée par les forces aérodynamiques modifie les caractéristiques naturelles des modes de vibrations de la structure. Si l'énergie extraite du flux d'air est plus importante que l'amortissement naturel du système, le niveau des vibrations augmente et rend la structure instable. Dans le domaine aéronautique, cette instabilité dynamique est appelée *flottement* (Bisplinghoff et Ashley, 1962). Le flottement peut apparaître de manière très soudaine et causer la destruction de l'avion (Garrick et Reed III, 1981). Parmi les phénomènes qui peuvent se produire durant un vol, le flottement est, par conséquent, l'un des plus critiques.

L'aéroélasticité concerne, dans le domaine aéronautique, l'étude du comportement des structures d'avion exposées à des forces aérodynamiques. La modélisation physique du comportement aéroélastique d'un objet y est primordiale. Elle est fondée sur une modélisation des dynamiques de la structure et des actions irrégulières des forces aérodynamiques. Pour des systèmes complexes tels qu'un avion, une modélisation exacte de tous les aspects de la structure dans toutes les conditions de vol possibles n'est pas réalisable. Par conséquent, la réalisation d'un nombre important de tests en vol combinés à l'utilisation de méthodes d'identification des systèmes est le seul moyen de garantir qu'un avion n'est pas sujet au flottement sur son domaine de vol.

2.4.2 Contexte opérationnel des essais de flottement

Actuellement, les essais en vol sont souvent constitués de séries de tests réalisés lorsque l'avion est stabilisé en un point de vol, c.-à-d., à une vitesse et une altitude constantes (Pickrel et White, 2003; Vacher et al., 2009). Le flottement étant par nature plus enclin à apparaitre avec l'augmentation de la vitesse, ces points de vols sont explorés, pour une altitude donnée, en augmentant la vitesse de vol. A chacun de ces points de vol, des modèles LTI sont identifiés. Pour cela, plusieurs tests d'identification sont réalisés pour différentes excitations appliquées à la structure. Les mesures de la réponse de la structure sont ensuite utilisées pour estimer les facteurs d'amortissement, notés ξ . Ceux-ci, obtenus pour chaque point de vol stabilisé, établissent une tendance en fonction de la vitesse de vol, notée V_c . Cette tendance sert à évaluer la stabilité de la structure de l'avion pour le point de vol suivant avant d'y emmener l'avion (Vacher et al., 2009).



FIGURE 2.2 – Surveillance des modes.

Les mouvements de la structure sont mesurés en plusieurs points selon les trois directions de l'espace. Plus de cent capteurs peuvent être disposés sur l'ensemble de la structure. La Figure 2.3 montre un exemple de configuration d'essais en vol de flottement où les mesures sont effectuées par des accéléromètres. Les directions des mesures sont indiquées par les lettres X, Y et Z.

Les données mesurées étant très perturbées par les déplacements d'air le long de la structure, les conditions d'essais en vol ne sont pas des conditions favorables pour la réalisation d'identifications précises (Cooper, 2002; Pickrel et White, 2003). En moyenne, les mesures ne sont donc pas de bonne qualité et présentent de faibles niveaux de rapport de signal à bruit. Tou-



FIGURE 2.3 – Exemple de configuration des mesures pour les essais de flottement d'un avion commercial.

tefois, de grandes disparités entre les mesures sont généralement observées. Certaines sont en effet inutilisables alors que d'autres peuvent être d'assez bonne qualité.

Les surfaces de contrôle de l'avion sont utilisées pour exciter l'avion. Le positionnement de ces surfaces de contrôle est montrée sur la Figure 2.4. Actuellement deux types de signaux sont utilisés : des balayages fréquentiels (sweep en Anglais) et de simples créneaux (pulse en Anglais). Bien que ces derniers permettent une moins bonne excitation des modes, les avionneurs souhaitent les utiliser de plus en plus car ils sont beaucoup plus courts. Typiquement, ils ne durent que quelques secondes contre parfois plusieurs minutes pour un balayage fréquentiel.

2.4.3 Réduction de la durée des essais

Plusieurs milliers de tests étant effectués durant une campagne d'essais de flottement, diminuer la durée de chaque test est un enjeux économique important pour les avionneurs. Supprimer, ou au moins diminuer la part des essais balayages au profil des essais pulses donne donc la possibilité aux avionneurs de diminuer considérablement la durée des essais. Pendant de nombreuses années, les avionneurs tels qu'Airbus ou Boeing n'utilisaient que des signaux d'excitation mono-entrée (Vacher et al., 2009; Pickrel et White,



FIGURE 2.4 – Surfaces de contrôle utilisées pour l'identification.

2003). Pour cette raison, plusieurs tests devaient nécessairement être réalisés à chaque point de vol afin d'exciter l'ensemble des modes. Depuis quelques années, de nouveaux outils permettent aux avionneurs de générer simultanément plusieurs signaux d'entrée pour les gouvernes de l'avion (Cooper, 2002; Vacher et al., 2009). Ce type de système permet une large amélioration de l'utilisation des essais pulses. L'ensemble des modes de la structure peuvent désormais être excités en un seul test. De plus, en utilisant plusieurs gouvernes simultanément, cette avancée permet d'augmenter l'énergie d'excitation de la structure. Rendant plus favorables les rapports de signal à bruit, cela favorise une identification plus précise des paramètres modaux et permet d'envisager une utilisation plus massive des essais pulses. Enfin, la possibilité de réaliser des essais multi-entrées permet également de diminuer la durée totale des essais en diminuant le nombre de tests à réaliser à chaque point de vol. Du point de vue de l'identification, cela implique, en revanche, l'utilisation de méthodes adaptées au traitement de tels essais, c.-à-d., des méthodes capables de traiter des essais multi-entrées avec des excitations de courte durée.

Comme le montre la Figure 2.5, pour une excitation de courte durée, la réponse du système est ensuite composée d'une phase de retour à l'équilibre. Cette phase dure plus ou moins longtemps en fonction de l'amortissement du système. Dans le cas de larges structures, dont les amortissements sont souvent très faibles, ces durées peuvent atteindre l'ordre de la minute. Un troisième moyen de réduire la durée des essais est de ne considérer que les données enregistrées durant les premières secondes après l'excitation pour effectuer l'identification. Ce faisant, les traitements peuvent être accélérés et les tests enchainés plus rapidement. De plus, en considérant la zone temporelle qui contient le niveau le plus important de signal, cela doit également permettre d'améliorer la précision de l'identification.



FIGURE 2.5 – Réponse après une excitation pulse.

Bien qu'illustré ici à travers l'application particulière des essais de flottement, cet objectif de réduction de la durée des essais d'identification est partagé par l'ensemble des industriels pour lesquels réduire la durée des essais implique une diminution significative des coûts impliqués. Les méthodes développées et présentées dans ce mémoire afin de répondre à cet objectif ont donc une visée plus large que l'application unique aux essais de flottement.

2.4.4 Spécifications pour les algorithmes d'identification

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les essais en vol ne sont pas un contexte favorable à une identification précise. Plus généralement, l'identification de systèmes en conditions de fonctionnement opérationnel doit souvent faire face à ce type de contexte peu favorable. Dans de tels cas, l'objectif des méthodes d'identification est donc de fournir le meilleur modèle possible d'après les données mesurées disponibles. Afin d'atteindre cet objectif, il est préférable que les méthodes d'identification satisfassent plusieurs spécificités que nous pouvons énoncer en nous inspirant du contexte des essais en vol.

Premièrement, en analyse modale, on s'intéresse généralement aux caractéristiques modales dans une bande de fréquence donnée. Une identification dans le domaine fréquentiel est donc bien indiquée car elle permet de sélectionner directement une bande de fréquence d'intérêt (Pintelon et Schoukens, 2001). Plus généralement, il sera donc préférable de choisir une méthode offrant la possibilité de sélectionner précisément une bande de fréquence.

Deuxièmement, l'analyse modale de structures de grande dimension implique un nombre important de mesures et donc un important volume de données à traiter. Ainsi, il est important de réussir à diminuer la quantité de ces données afin d'améliorer la rapidité des traitements. Dans la littérature, deux approches présentent cette caractéristique : les méthodes fréquentielles (Pintelon et Schoukens, 2001) et les méthodes fondées sur les fonctions de covariance des signaux mesurés (Juang, 1994; Miller et al., 2012).

Troisièmement, les données étant bruitées et n'ayant pas de connaissance a priori sur le bruit, un paramétrage du problème d'identification en erreur de sortie est alors bien indiqué (Ljung, 1999). Cette formulation du problème n'étant pas linéaire en fonction des paramètres, elle implique, soit l'utilisation de méthodes itératives d'optimisation, soit l'utilisation de méthodes sousespaces.

Quatrièmement, l'objectif étant d'obtenir les estimations les plus précises possibles à partir d'essais de courte durée, la durée des signaux d'entrée peut être trop courte pour estimer convenablement les fonctions de réponses fréquentielles (Welch, 1967). Ainsi, comme souligné dans (Verboven, 2002, Chapitre 6), l'utilisation d'excitations de courte durée rend difficilement utilisable une des approches classiques en analyse modale qui consiste à identifier les modes d'après les fonctions de transfert estimées (Pintelon et al., 1994). Dans le domaine fréquentiel, il est donc préférable que l'identification soit menée directement à partir des transformées de Fourier des signaux d'entrée-sortie.

En résumé, afin d'être adaptées au contexte traité par cette thèse, il est souhaitable que les méthodes développées s'appuient sur une formulation du problème d'identification en erreur de sortie. De plus, nous privilégierons des méthodes fondées sur l'utilisation des transformées de Fourier ou sur l'utilisation des fonctions de covariance des mesures.

2.5 Choix des méthodes d'identification

Les méthodes d'identification développées dans le but d'une utilisation pour l'analyse modale peuvent être regroupées autour d'un nombre réduit d'approches et idées communes. Le but de l'étude bibliographique présentée ci-après n'est pas de réaliser une présentation exhaustive de l'ensemble des méthodes d'identification rencontrées dans la littérature, mais de présenter les différents axes de développement rencontrés en analyse modale. L'objectif recherché est ensuite de proposer des axes d'études qui soient en accord avec les spécifications énoncées précédemment.

2.5.1 Étude bibliographique des méthodes d'identification

On peut classer les méthodes d'identification utilisées en analyse modale selon deux grands ensembles : les méthodes fondées sur une représentation du modèle sous forme d'état et celles fondées sur une représentation sous forme de transfert.

Une première classe de méthodes qui identifient les matrices (A, B, C, D)d'une représentation d'état sont les méthodes de type *Eigenvalue Realization Algorthm (ERA)*. Fondée sur les travaux précurseurs de Ho et Kalman (1965) et Kung (1978), l'approche ERA fut initialement développée par Juang et Pappa (1985). Considérant une représentation sous forme d'état, ERA permet d'estimer l'ordre du système et d'identifier une réalisation (A, B, C, D)du système via une décomposition en valeur singulière (SVD pour Singular Value Decomposition en Anglais) de la matrice de Hankel par bloc des coefficients de Markov du système. Cette matrice, qui est construite d'après les mesures de la réponse impulsionnelle du système, est généralement de grande dimension $(n_y N \times n_u N \text{ avec } N \text{ le nombre d'échantillons})$. ERA fût initialement développée dans le but d'estimer les paramètres modaux de structures flexibles Juang (1994). Une version d'ERA utilisant les fonctions de corrélation des mesures, nommée ERA with Data Correlations (ERA/DC), a également été introduite par Juang (1994). Celle-ci est plus rapide que ERA et permet d'avoir des estimations non-biaisées en présence de bruit blanc. Une version fréquentielle de ERA, nommée ERA in Frequency Domain (ERA-FD), a été introduite plus tard par Juang et Suzuki (1988). Sa formulation est proche de la formulation temporelle. Grâce à la possibilité de sélectionner directement une bande de fréquence, l'approche fréquentielle de ERA permet de réduire la quantité de données à traiter et donc d'améliorer la rapidité des temps de calcul par rapport à ERA. Une version rapide, nommée Efficient Frequency-domain ERA (EFERA), a également été développée par Vacher (2006) pour l'analyse modale durant les essais de flottement. Contrairement à ERA-FD, cette méthode identifie un modèle d'après les transformées de Fourier des entrées-sorties mesurées. Étant beaucoup plus rapide que ERA (Vacher, 2006), EFERA offre l'avantage de pouvoir identifier des systèmes de grande dimension en un temps relativement court. Cependant, le principal inconvénient des méthodes de type ERA est qu'elles ne permettent pas de traiter des essais avec tous types d'excitations. En effet, par construction de l'algorithme, les données doivent provenir de la réponse à une impulsion. De plus cette approche fait l'hypothèse d'un état initial du système nul (Juang, 1994), ce qui n'est pas toujours le cas. Par exemple, cette condition n'est généralement pas vérifiée pour les essais en vol car la structure de l'avion est en permanence soumise aux effets aérodynamiques. Une telle situation peut être responsable d'une estimation biaisée des paramètres du système.

Durant les années 90, un deuxième ensemble de méthodes, dites méthodes des sous-espaces, ont été développées. Comme les méthodes ERA, ces méthodes, aussi appelées méthodes 4SID (SubSpace-based State-Space System IDentification), sont également fondées sur les travaux de Ho et Kalman (1965) et Kung (1978) pour identifier des représentations d'état de systèmes MIMO. Toutefois, celles-ci permettent d'identifier un système dont l'état n'est pas nul à l'instant initial et dont l'excitation peut être aléatoire. Cette approche a connu un essor important durant les années 90 et le développement de nombreuses méthodes. Les plus connues, et répandues, sont certainement les méthodes dites Multivariable Output-Error State sPace (MOESP) (Verhaegen et Dewilde, 1992), Numerical algorithms for 4SID methods (N4SID) (Van Overschee et De Moor, 1994) et Canonical Variate Analysis (CVA) (Larimore, 1990). Elles sont présentées dans (Van Overschee et De Moor, 1996b) et dans (Katayama, 2005) selon un formalisme général. Ce
formalisme exprime les trois méthodes de manière similaire, leurs différences provenant simplement d'un choix différent de matrices de pondération. Cette approche peut être étendue à de nombreuses méthodes sous-espaces qui, pour la plupart, diffèrent les unes des autres par des choix différents de matrices de pondérations. Toutes ces méthodes utilisent la propriété d'invariance de la structure de la matrice d'observabilité du système pour estimer les matrices A et C. Connaissant A et C, les matrices B et D sont ensuites estimées via la résolution d'un problème moindres carrés pondéré. Dans le domaine de l'analyse modale, les méthodes des sous-espaces temporelles ont principalement été appliquées, en conditions opérationnelles, pour des estimations où aucune entrée déterministe n'est utilisée pour exciter la structure (appelées output only en Anglais) (Hermans et Van der Auweraer, 1999; Basseville et al., 2001). Comme l'approche ERA, les méthodes 4SID ont l'avantage d'identifier une représentation d'état sans faire appel à des méthodes d'optimisation itératives. De plus, elles permettent d'identifier des matrices pleines, ce qui évite tout besoin de structuration des matrices (A, B, C, D). Ces avantages expliquent la popularité de cette approche. Cependant, ces méthodes présentent plusieurs inconvénients. Premièrement, étant des méthodes temporelles, le choix d'une bande de fréquence ne peut se faire généralement qu'en utilisant des matrices de pondération. Cela rend la sélection précise d'une zone fréquentielle d'intérêt délicate. Deuxièmement, les méthodes de type MOESP et N4SID peuvent être sensibles à des bruits colorés en identifiant un nombre plus important de modes parasites dues au bruit (Miller et De Callafon, 2011). Enfin, elles souffrent de la nécessité de construire des matrices de grande dimension qui demandent une capacité de stockage et des temps de calcul qui peuvent devenir importants. Ces deux derniers inconvénients sont atténués pour les méthodes de type CVA qui utilisent des fonctions de corrélation. En procédant à des moyennages, le calcul des fonctions de corrélation permet, en effet, de réduire la quantité de données traités. De plus, le fait de traiter les fonctions de corrélation des mesures d'entrée-sortie rend ce type de méthodes moins sensibles au bruit que les méthodes utilisant directement les données entrée-sortie (Larimore, 1990; Peternell et al., 1996).

Une approche légèrement différente a été proposée par Miller et De Callafon (2009). Contrairement aux méthodes 4SID précédentes, celle-ci utilise la propriété d'invariance par décalage temporel des données mesurées pour estimer la matrice A de transition des états. Elle est ainsi une généralisation de la méthode ERA au cas d'entrées aléatoires et d'un état initial du système quelconque. Cette particularité lui offre l'avantage, par rapport aux méthodes de type MOESP et N4SID, d'être moins sensible aux effets du bruit (Miller et De Callafon, 2010). De plus, Miller et De Callafon (2009) ont également étendu cette approche à l'utilisation de fonctions de corrélation. Cela lui confère donc les avantages liés à l'utilisation des fonctions de corrélation cités précédemment. Enfin, cette méthode a été appliquée à l'identification de structures d'avions militaires en vol (Miller et al., 2012).

Outre l'identification sur des données temporelles brutes et corrélées, des méthodes 4SID ont également été développées afin de traiter des données fréquentielles. Fondés sur les mêmes principes que les méthodes des sousespaces temporelles, plusieurs algorithmes fréquentiels ont été proposés (Liu et al., 1994; McKelvey et Akcay, 1994; McKelvey, 1995; Cauberghe, 2004). Ces méthodes sont utilisables à partir des transformées de Fourier des mesures, des Fonctions de Réponses Fréquentielles (FRF) du système et des spectres fréquentiels des mesures. Par rapport aux méthodes temporelles, le passage dans le domaine fréquentiel offre l'avantage de réduire considérablement la taille des matrices nécessaires à la résolution des algorithmes 4SID. De plus, on a avec ces méthodes l'avantage de pouvoir directement sélectionner une bande de fréquence d'intérêt. Si celle-ci concerne des fréquences largement inférieures à la fréquence d'échantillonnage, cela assure le respect du théorème de Shannon (Labarrère et al., 1978). Cependant, le calcul des spectres fréquentiels ou des FRF d'après des mesures temporelles nécessite des fenêtrages temporels et/ou des calculs de moyennes (Pintelon et Schoukens, 2001). Ceux-ci sont uniquement réalisables si les signaux sont non nuls sur une durée suffisamment importante. Cela rend donc ces approches difficilement utilisables sur des essais réalisés à partir d'excitations de courte durée. En revanche, les versions de ces méthodes fondées sur l'utilisation des transformées de Fourier des entrées-sorties restent utilisables. Dans ce cas, elles ne profitent donc pas de la réduction du bruit par moyennage. De plus, ces méthodes sont sensibles aux phénomènes transitoires (Pintelon et Schoukens, 2001). Ainsi, afin d'éviter le biais introduit par ces effets, des entrées périodiques doivent être utilisées (McKelvey, 1995). Autrement, seule la méthode proposée par Cauberghe (2004) semble permettre d'éviter ce problème. Inspirée de l'idée proposée par Pintelon et al. (1997), celle-ci prend en compte de manière explicite les conditions aux limites d'intégration.

La deuxième classe de méthodes qu'on trouve dans la littérature concerne les méthodes qui identifient des fonctions de transfert. Contrairement aux approches précédentes, ces méthodes sont essentiellement fondées sur une approche paramétrique du problème d'identification. De plus, elles n'estiment pas l'ordre du système qui devient une inconnue à déterminer par l'utilisateur. Pour cette raison, ce deuxième ensemble de méthodes repose sur l'utilisation de représentations graphiques, appelées *diagrammes de stabilité*, qui sont un des outils majeurs de ce domaine (Phillips et Allemang, 2005). Un diagramme de stabilité est une interface graphique sur laquelle les modes estimés sont tracés en fonction de l'ordre du modèle identifié. La construction de ces diagrammes nécessite plusieurs identifiés. L'objectif est d'arriver, en comparant les résultats pour chaque ordre, à déterminer l'ordre du système identifié. De ce fait, la connaissance, la maîtrise de l'ordre, et surtout la possibilité d'estimer un modèle à tous les ordres possibles sont essentiels pour ces méthodes.

Parmi celles-ci, les méthodes de type moindres carrés à exponentielle complexe (LSCE pour Least Squares Complex Exponential en Anglais) forment un premier ensemble de méthodes temporelles développées pour l'analyse modale. Cette méthode fondée sur la résolution d'un problème des moindres carrés fut initialement développée par Brown et al. (1979) pour l'identification de systèmes SISO. Une version MIMO de LSCE, connue sous le nom de Polyreference LSCE (p-LSCE), a ensuite été proposée par Vold et al. (1982). Cet algorithme n'estime que les pôles et les participations modales, les déformées modales devant être identifiées par une seconde étape pour laquelle la méthode des moindres carrés fréquentiels (LSFD pour Least Squares Frequency-Domain en Anglais) est généralement utilisée (Mergeav, 1983). La combinaison LSCE-LSFD a l'avantage d'être rapide. Même pour des systèmes possédant un très grand nombre de sorties $(n_u > 500)$, cette combinaison de méthodes s'exécute en un temps raisonnable (Verboven, 2002), ce qui explique certainement son utilisation fréquente en analyse modale. Une version fréquentielle, appelée Least Squares Complex Frequency-domain, est proposée dans (Verboven, 2002). Celle-ci identifie une fonction de transfert à dénominateur scalaire d'après les FRF, les spectres fréquentiels ou les transformées de Fourier des entrées-sorties. Une implémentation soignée et surtout la quantité réduite de données dans le domaine fréquentiel permettent d'accélérer la résolution du problème des moindres carrés. Des versions discrètes, fondées sur l'utilisation de bases polynomiales conventionnelles, et continues, fondées sur l'utilisation de bases orthonormales sont également proposées dans (Verboven, 2002). Cependant, la conversion du modèle à dénominateur commun en un modèle modal nécessite une réduction du rang des résidus, par le biais d'une décomposition en valeurs singulières, qui détériore la précision des paramètres modaux estimés (Cauberghe, 2004). De plus, un modèle à dénominateur commun ne permet pas de dissocier deux modes proches en fréquence et en amortissement. Les versions de l'approche LSCE/LSCF qui identifient des transferts MIMO à dénominateur scalaire souffrent donc de ces inconvénients liés à cette forme de modèle (Cauberghe, 2004). Afin d'éviter ces inconvénients, Guillaume et al. (2003) ont introduit une version nommée Polyreference LSCF (p-LSCF) qui identifie des fractions matricielles à droite. Cauberghe (2004) a ensuite développé plusieurs variantes de p-LSCF permettant d'identifier des fractions matricielles à droite ou à gauche d'après les FRF ou les transformées de Fourier des mesures du système. Celles-ci permettent d'éviter les inconvénients liés à l'utilisation de fonctions de transfert à dénominateur scalaire. Cependant, elles sont fondées sur un paramétrage des fractions matricielles qui ne permet pas de représenter tous les ordres de systèmes. Seuls des modèles d'ordres multiples du nombre de sorties (pour les fractions à gauche) ou du nombre d'entrées (pour les fractions à droite) peuvent être représentés. De plus, un inconvénient majeur de l'approche pLSCF est qu'elle est sensible au bruit et ne permet pas une identification précise des modes lorsque celui-ci devient important. En effet, l'utilisation d'une simple étape de résolution moindres carrés ne permet pas d'éviter une estimation non-biaisée des paramètres.

Afin de minimiser les effets du bruit, et ainsi d'obtenir des estimations non-biaisées, des approches itératives ont été développées par Bayard (1994); Cauberghe (2004); Vacher et Bucharles (2006b). Celles-ci sont fondées sur l'idée de ne plus réaliser une seule mais plusieurs résolutions moindres carrés successives en réalisant une minimisation itérative du problème d'identification formulé en erreur de sortie fréquentielle. Cette formulation étant non linéaire par rapport aux paramètres, plusieurs méthodes (cf. par exemple (Sanathanan et Koerner, 1963), (Whitfield, 1987), (Blom et Van den Hof, 2010)) permettent de la linéariser localement à chaque itération afin d'obtenir une expression linéaire. Fondée sur cette approche, et reposant sur une minimisation utilisant l'algorithme de Gauss-Newton la méthode Polyreference Maximum Likelihood Estimator (p-MLE) est proposée par Cauberghe (2004) pour l'identification de modèles sous forme de fractions matricielles à droite. Ainsi, cette approche a l'avantage d'estimer précisément les paramètres modaux en conditions opérationnelles. De plus, Cauberghe (2004) propose une implémentation exploitant la structuration par colonne des fractions à droite afin d'accélérer sa résolution. Cela permet donc à cette approche d'être à la fois précise et rapide. Cependant, celle-ci repose également sur un paramétrage des fractions matricielles qui ne permet pas de représenter tous les ordres de système. De plus, uniquement l'identification de fractions matricielles à droite à partir des FRF est proposée.

Vacher et Bucharles (2006b) ont proposé une approche qui permet d'éviter ce dernier inconvénient. En effet, celle-ci est fondée sur l'utilisation combinée de la méthode proposée par Sanathanan-Koerner (SK) et de l'algorithme de Gauss-Newton. Plusieurs itérations SK sont utilisées pour initialiser l'algorithme de Gauss-Newton. Cette méthode, inspirée de l'approche proposée par Bayard (1994), est utilisée afin d'identifier des systèmes SIMO à temps continu à partir des transformées de Fourier des entrées-sorties. Reposant sur l'utilisation de bases polynomiales orthogonales de Forsythe (1957), cette méthode a l'avantage de pouvoir estimer précisément les paramètres modaux de structures de grande dimension en environnement bruité. De plus, une implémentation qui exploite la structure des fonctions de transfert donne l'avantage à cette méthode d'être rapide. Ainsi, pour des systèmes de grande dimension $(n_y > 50, n_x > 50)$, les identifications successives nécessaires au tracé des diagrammes de stabilité s'effectuent en peu de temps. Elle est, par ailleurs, utilisée depuis plusieurs années en conditions opérationnelles par Airbus pour la surveillance des essais de flottement. Cependant, le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle ne peut identifier que des systèmes SIMO. Elle n'est donc pas utilisable en l'état dans un contexte d'essais MIMO.

2.5.2 Méthodes d'identification retenues et objectifs de cette étude

La vue d'ensemble des méthodes d'identification appliquées à l'analyse modale présentée précédemment montre que plusieurs approches ont été développées. Les approches itératives permettant d'identifier des fonctions de transfert semblent offrir la meilleure capacité à estimer précisément les paramètres du système en environnement bruité. Une identification précise des amortissements étant cruciale pour la surveillance du flottement, nous avons donc choisi de privilégier cette approche. Parmi les méthodes existantes, la méthode développée par Vacher et Bucharles (2006b) respecte les spécifications énoncées à la Section 2.4.4. Elle a de plus déjà prouvé son efficacité par une utilisation en conditions opérationnelles d'essais de flottement. Nous avons donc choisi d'étendre cette approche à l'identification de fonctions de transfert MIMO. Cette extension nous conduira à l'étude de la convergence des méthodes itératives de Sanathanan-Koerner, Gauss-Newton et d'une version fréquentielle de la méthode SRIV (Simplified Refined Instrumental Variable) (Young, 1976) afin de déterminer une combinaison efficace de méthodes itératives (Chapitre 4). De plus, l'étude de la convergence de la méthode de Gauss-Newton nous conduira à définir de nouveaux paramétrages des fractions matricielles afin d'améliorer la convergence de l'algorithme proposé (Chapitre 5). L'objectif étant de valider cette approche d'un point de vue algorithmique, les aspects visant à améliorer l'implémentation numérique de ces algorithmes, c.-à-d., le conditionnement numérique et la rapidité des calculs, ne seront pas traités dans cette étude. La taille réduite des systèmes utilisés dans les évaluations réalisées assurera toutefois que les résultats ne sont pas perturbés par des problèmes de conditionnement numérique.

De plus, nous avons souhaité posséder une alternative fournie par une méthode fondée sur l'approche des sous-espaces. Bien que les capacités des méthodes des sous-espaces à fournir des résultats précis en environnement bruité semblent moindres, elles peuvent, en effet, constituer une alternative intéressante pour des essais moins bruités. Les méthodes développées par Cauberghe (2004) et Miller et De Callafon (2010) semblent les mieux adaptées à notre problème. Du fait de la méthode de calcul utilisée pour l'estimation de la matrice de transition des états et de la possibilité d'utiliser les fonctions de corrélation des signaux, la méthode introduite par Miller et De Callafon (2010) semble être la moins sensible aux effets du bruit. Nous avons donc choisi d'utiliser cette méthode. Afin qu'elle soit mieux adaptée à notre cadre d'utilisation, nous proposerons deux modifications majeures (Chapitre 7). La première, en s'inspirant de la solution proposée par Cauberghe (2004), a pour objectif d'éviter l'introduction des phénomènes transitoires lors du passage dans le domaine fréquentiel pour le calcul des fonctions de corrélation. La deuxième vise à permettre une sélection précise d'une bande de fréquence d'intérêt. Pour cela, nous utiliserons un filtrage non-causal des fonctions de corrélation.

Chapitre 3

PARAMÉTRAGES DES FONCTIONS DE TRANSFERT MIMO

L'objectif de ce Chapitre est de proposer un paramétrage des fonctions de transfert MIMO afin de pouvoir représenter l'ensemble des systèmes linéaires invariants dans le temps. Pour cela, nous justifions, dans un premier temps, le choix des fractions matricielles comme type de représentation. Nous présentons ensuite deux paramétrages des fractions matricielles développés dans la littérature : le paramétrage canonique échelon introduit par Popov (1969) et le paramétrage pseudo-canonique introduit par Guidorzi et Beghelli (1982). A travers ces deux paramétrages, nous introduisons les caractéristiques qui sont nécessaires au développement de méthodes d'identification pour l'analyse modale.

Sommaire

| 3.1 | Choi | ix du type de représentation | 34 |
|-----|--------------|---|----|
| | 3.1.1 | Cas des fonctions de transfert à dénominateur sca- laire | 34 |
| | 3.1.2 | Fractions matricielles | 34 |
| 3.2 | Cont mati | traintes pour le paramétrage des fractions ricielles | 36 |
| | 3.2.1 | Spécification de l'ordre du système | 36 |
| | 3.2.2 | Propreté du système | 37 |
| | 3.2.3 | Contraintes additionnelles pour le paramétrage des fractions matricielles | 39 |
| 3.3 | Para | métrages des fractions matricielles | 40 |
| | 3.3.1 | Définitions et résultats préliminaires | 40 |
| | 3.3.2 | Paramétrage canonique échelon | 43 |
| | 3.3.3 | Paramétrage pseudo-canonique | 53 |
| | 3.3.4 | Bilan | 59 |
| | | | |

3.1 Choix du type de représentation

Dans le Chapitre 2, nous avons présenté deux représentations paramétriques des fonctions de transfert MIMO : les fonctions de transfert à dénominateur scalaire et les fractions matricielles. Nous avons également introduit la forme générale de la représentation des systèmes physiques donnée par

$$\mathsf{H}(s) = D + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{R_k}{s + \lambda_k} + \frac{R_k^*}{s + \lambda_k^*} \right) \,, \tag{3.1}$$

où λ_k et λ_k^* sont les *m* couples, supposés distincts, de pôles complexes conjugués du système. Les résidus R_k sont définis par le produit des déformées et des participations modales

$$R_k = c_k \, b_k^\top \,. \tag{3.2}$$

Comme nous l'avons mentionné dans le Chapitre 2, les résidus R_k de cette représentation sont de rang unitaire. Comme nous allons le voir, cette caractéristique est importante pour le choix d'un modèle paramétrique.

3.1.1 Cas des fonctions de transfert à dénominateur scalaire

Les fonctions de transfert à dénominateur scalaire s'écrivent sous la forme

$$\mathsf{H}(s) = D + \frac{\begin{bmatrix} \mathsf{n}_{11}(s) & \dots & \mathsf{n}_{in_u}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{n}_{n_y1}(s) & \dots & \mathsf{n}_{n_yn_u}(s) \end{bmatrix}}{\mathsf{d}(s)},$$
(3.3)

et peuvent également se décomposer sous la forme (3.1). Cependant, partant du modèle identifié (3.3), aucune contrainte n'impose, lors de la décomposition en éléments simples, que les résidus R_k soient de rang unitaire. Par conséquent, les résidus calculés à partir d'un modèle identifié sous la forme (3.3) seront génériquement de rang plein. Cela donne aux fonctions de transfert à dénominateur scalaire des degrés de liberté supplémentaires, fictifs par rapport au système physique réel, qui sont utilisés pour minimiser le critère d'identification. Lors de la réduction par SVD des résidus à des résidus de rang unitaire, nécessaires pour retrouver les valeurs des déformées et des participations modales, cela conduit à une dégradation de la précision du modèle identifié (Cauberghe, 2004).

3.1.2 Fractions matricielles

Les fractions matricielles sont une autre forme de représentation des transferts MIMO rencontrée dans la littérature (Kailath, 1980). Plutôt qu'un dénominateur scalaire, ces représentations utilisent un dénominateur constitué d'une matrice de polynômes. On parle alors de dénominateur matriciel (Kailath, 1980). Comme le dénominateur est matriciel et ne commute plus avec le numérateur, on peut écrire des Fractions Matricielles à Gauche (FMG) et des Fractions Matricielles à Droite (FMD) définies par

$$\mathsf{H}(s) = \begin{cases} \mathsf{D}_{G}^{-1}(s) \,\mathsf{N}_{G}(s) & \text{FMG} \\ \mathsf{N}_{D}(s) \,\mathsf{D}_{D}^{-1}(s) & \text{FMD} \end{cases}$$
(3.4)

Il est possible de se ramener à un transfert à dénominateur commun sous la forme

$$H(s) = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{d}(s)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{d}(s) = \det(\mathsf{D}_{\mathsf{G}}(s)) \\ \tilde{N}(s) = \operatorname{adj}(\mathsf{D}_{\mathsf{G}}(s)) \mathsf{N}_{\mathsf{G}}(s) \end{cases} \quad \text{FMG} , \\ \begin{cases} \tilde{d}(s) = \operatorname{adj}(\mathsf{D}_{\mathsf{D}}(s)) \mathsf{N}_{\mathsf{G}}(s) \\ \tilde{N}(s) = \operatorname{adj}(\mathsf{D}_{\mathsf{D}}(s)) \mathsf{N}_{\mathsf{D}}(s) \end{cases} \quad \text{FMD} , \end{cases}$$
(3.5)

où adj(•) et det(•) notent respectivement l'adjointe et le déterminant d'une matrice. Cependant, il n'existe pas de relation bijective entre les coefficients de $D_G(s)$ et $N_G(s)$ (resp. $D_D(s)$ et $N_D(s)$)) d'une part et ceux de $\tilde{d}(s)$ et $\tilde{N}(s)$ d'autre part. Il n'est donc pas possible d'utiliser cette formulation pour identifier les coefficients d'une FMG (resp. FMD).

Dans le cas des fractions matricielles, et contrairement au cas des fonctions de transfert à dénominateur scalaire, les déformées et les participations modales ne sont pas calculées d'après les résidus R_k . Comme nous l'avons expliqué dans le Chapitre 2, dans le cas des FMG (resp. FMD), les déformées (resp. participations) modales sont obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres généralisées $D_G(s) = 0$ (resp. $D_D(s) = 0$). Les participations modales (resp. déformées modales) sont ensuite directement calculées d'après les coefficients du numérateur. Ainsi, ces paramètres modaux sont calculés à partir des paramètres identifiés en résolvant un jeu d'équations linéaires. Le modèle mis sous sa forme modale (3.1) conserve donc la même précision que sous la forme FMG ou FMD. De ce fait, l'utilisation des fractions matricielles est plus appropriée pour les besoins de l'identification des paramètres modaux que l'utilisation de fonctions de transfert à dénominateur scalaire.

Par conséquent, dans la suite de notre étude, nous utiliserons uniquement les fractions matricielles comme type de représentation des fonctions de transfert. De plus, dans un soucis de synthèse, nous présenterons uniquement dans ce chapitre les développements concernant les FMG. Les résultats analogues pour les FMD pouvant s'obtenir par transposition à partir des FMG (cf. Chapitre 2), nous préciserons simplement, lorsque nous le jugerons nécessaire, les principales différences entre FMG et FMD. Afin de simplifier les notations, l'indice G est omis dans la suite pour noter les FMG.

Il est nécessaire de paramétrer les fractions matricielles, c.-à-d., d'imposer une structuration en degré du numérateur et du dénominateur afin de respecter plusieurs contraintes qui permettent d'assurer un bon fonctionnement des méthodes d'identification. Ces contraintes sont rappelées et énumérées dans la section suivante.

3.2 Contraintes pour le paramétrage des fractions matricielles

Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons des paramétrages des fractions matricielles. On note $H(s, \theta)$ le paramétrage d'une fonction de transfert. θ est le vecteur des paramètres, c.-à-d., le vecteur des coefficients non fixés des fractions matricielles et qui doivent être identifiés. La notation H(s) définit quant à elle la valeur du transfert pour une valeur donnée de θ .

3.2.1 Spécification de l'ordre du système

L'ordre n_x d'un système représenté par une fraction matricielle est défini par le degré du déterminant de son dénominateur (Kailath, 1980), soit

$$n_x = \deg(\det(\mathsf{D}(s))) \,. \tag{3.6}$$

Ainsi, le choix de l'ordre du système n'est pas directement imposé par un choix unique du degré de l'ensemble des polynômes du dénominateur. Afin d'illustrer cela, nous prenons l'exemple d'un dénominateur de dimension $n_y = 2$ et d'un système d'ordre $n_x = 1$. En fixant des degrés de polynôme égaux à n_x , on obtient un dénominateur de la forme

$$\mathsf{D}(s) = \begin{bmatrix} d_{11,0} + d_{11,1} \, s & d_{12,0} + d_{12,1} \, s \\ d_{21,0} + d_{21,1} \, s & d_{22,0} + d_{22,1} \, s \end{bmatrix},\tag{3.7}$$

où l'ordre du système correspondant est donc égal au degré du déterminant de D(s) donné par l'expression

$$\det \mathsf{D}(s) = d_{11,0} d_{22,0} - d_{12,0} d_{21,0} + (d_{11,0} d_{22,1} + d_{11,1} d_{22,0} - d_{12,0} d_{21,1} - d_{12,1} d_{21,0}) s \qquad (3.8) + (d_{11,1} d_{22,1} - d_{12,1} d_{21,1}) s^{2}.$$

L'ordre du système sera donc d'ordre égal à 1 uniquement si les conditions suivantes sur les coefficients $d_{ij,l}$ sont remplies

$$\begin{cases} d_{11,0} d_{22,1} + d_{11,1} d_{22,0} - d_{12,0} d_{21,1} - d_{12,1} d_{21,0} \neq 0\\ d_{11,1} d_{22,1} - d_{12,1} d_{21,1} = 0 \end{cases}$$
(3.9)

Cela montre que le choix de l'ordre d'une fraction matricielle n'est pas immédiat. C'est donc le paramétrage choisi qui doit permettre de fixer un ordre désiré. Nous pouvons ainsi formuler la contrainte suivante pour le paramétrage des fractions matricielles.

Contrainte 3.1 (Ordre des fractions matricielles). L'ordre de $H(s, \theta)$ doit être égal à n_x quelles que soient les valeurs de θ .

En reprenant l'exemple précédent, on s'aperçoit que plusieurs choix permettent de respecter la Contrainte 3.1. Voici, parmi les nombreux choix possibles, deux choix de paramétrage qui remplissent les conditions (3.9) et conduisent à deux structurations en degré du dénominateur qui imposent un ordre $n_x = 1$

$$\begin{cases} d_{11,1} = d_{12,1} = d_{21,1} = 0 \\ d_{11,0} = d_{22,1} = 1 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} 1 & d_{12,0} \\ d_{21,0} & d_{22,0} + s \end{bmatrix}, \\ \begin{cases} d_{11,1} = d_{22,1} = -d_{21,1} = -d_{12,1} = 1 \\ d_{11,0} + d_{22,0} + d_{12,0} + d_{21,0} \neq 0 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} d_{11,0} + s & d_{12,0} - s \\ d_{21,0} - s & d_{22,0} + s \end{bmatrix}.$$

Notons que plus l'ordre et la dimension du dénominateur augmentent, plus le nombre de possibilités augmente. C'est une condition supplémentaire portant sur la « propreté » du système, qui permet la sélection d'une structuration en degré du dénominateur.

3.2.2 Propreté du système

En théorie de la commande des systèmes, une fonction de transfert H(s) est dite *propre* si son module reste borné lorsque s tend vers l'infini (Kailath, 1980), soit

$$\lim_{s \to \infty} |\mathsf{H}(s)| < \infty \,. \tag{3.10}$$

Une fonction de transfert est dite *strictement propre* si son module tend vers 0 lorsque s tend vers l'infini (Kailath, 1980), soit

$$\lim_{s \to \infty} |\mathsf{H}(s)| = 0.$$
 (3.11)

Pour que la fonction de transfert d'un système mono-entrée soit (strictement) propre, il suffit d'imposer un degré des polynômes du numérateur (strictement) inférieur au degré du dénominateur. Toutefois, cette condition n'est plus suffisante pour les systèmes multi-entrées. Pour l'illustrer, nous prenons l'exemple d'un dénominateur D(s) de degré 1 et deux choix possibles de numérateur de degré 1

$$\mathsf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1+2s & -s \\ -2s & 1+s \end{bmatrix} \qquad \mathsf{N}_1(s) = \begin{bmatrix} 2+s \\ 1-s \end{bmatrix} \qquad \mathsf{N}_2(s) = \begin{bmatrix} 2+s \\ 1+s \end{bmatrix} . \tag{3.12}$$

Comme montré par l'équation (3.5), il est possible d'écrire les transferts $H_1(s) = D^{-1}(s)N_1(s)$ et $H_2(s) = D^{-1}(s)N_2(s)$ avec un même dénominateur scalaire d(s) = 1 + 3s, soit

$$\mathsf{H}_{1}(s) = \frac{1}{\mathsf{d}(s)} \begin{bmatrix} 2+7s\\1+2s \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{H}_{2}(s) = \frac{1}{\mathsf{d}(s)} \begin{bmatrix} 2+7s+4s^{2}\\1+4s+s^{2} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Bien que les polynômes des numérateurs $N_1(s)$ et $N_2(s)$ soient de degré égal à celui des polynômes du dénominateur, $N_2(s)$ conduit à des termes de degré 2 au numérateur. Le transfert n'est donc pas propre, contrairement au transfert donné par $N_1(s)$. Comme cet exemple permet de le constater, la propreté d'une fraction matricielle n'est pas immédiate. Ainsi, le respect de ce critère conduit à formuler une contrainte supplémentaire pour le paramétrage des fractions matricielles.

Contrainte 3.2 (Propreté des fractions matricielles). Le transfert $H(s, \theta)$ doit être propre pour toutes les valeurs de θ .

Cette contrainte supplémentaire implique l'ajout de conditions portant sur la structuration en degré du dénominateur et du numérateur. Une première condition nécessaire de propreté des systèmes est donnée par le lemme suivant (Kailath, 1980).

Lemme 3.1 (Condition nécessaire de propreté des FMG). Si H(s) est un transfert (strictement) propre et si

$$H(s) = D^{-1}(s)N(s), \qquad (3.14)$$

alors chaque ligne de N(s) a des polynômes de degré (strictement) inférieur à ceux de la ligne correspondante de D(s).

Cependant, cette condition porte simplement sur la structure en degré du transfert lorsque celui-ci est propre. Elle ne permet pas, en revanche, d'assurer la propreté du transfert par un choix de structure. Toutefois, il existe une condition nécessaire et suffisante de propreté des transferts multi-entrées. Celle-ci fait intervenir la notion de réduction par ligne du dénominateur. La définition d'un dénominateur réduit par ligne fait intervenir les degrés des lignes du dénominateur. Avant de rappeler cette définition, précisons ce que nous appelons *degré d'une ligne* (resp. d'une colonne) d'une matrice polynomiale : c'est le degré du polynôme de plus haut degré présent sur cette ligne (resp. colonne).

Définition 3.1 (Dénominateur réduit par ligne). En notant ρ_i le degré de sa $i^{\text{ème}}$ ligne, on dit que le dénominateur D(s) est réduit par ligne si

$$n_x = \sum_{i=1}^{n_y} \rho_i \,, \tag{3.15}$$

où $\rho_i \in \mathbb{N}_+$. De manière équivalente, $\mathsf{D}(s)$ est réduit par ligne si sa matrice des coefficients de plus haut degré ligne, notée D_{hl} , est de rang plein.

Si nous reprenons l'exemple (3.12), la matrice D_{hl} vaut

$$\mathsf{D}_{hl} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \,. \tag{3.16}$$

 D_{hl} n'est pas de rang plein. D'après la Définition 3.1, le dénominateur n'est donc pas réduit par ligne. Nous pouvons désormais introduire la condition nécessaire et suffisante de propreté des systèmes donnée par le Lemme suivant (Kailath, 1980).

Lemme 3.2 (Condition nécessaire et suffisante de propreté des FMG). Si D(s) est réduit par ligne, alors le transfert

$$\mathsf{H}(s) = \mathsf{D}^{-1}(s)\mathsf{N}(s) \tag{3.17}$$

est (strictement) propre si et seulement si chacune des lignes de N(s) est de degré (strictement) inférieur au degré de la ligne correspondante de D(s).

Remarque 3.1. Une condition nécessaire et suffisante de propreté équivalente existe pour les fractions matricielles à droite. Par transposition, celle-ci porte sur les degrés colonnes du dénominateur et du numérateur (Kailath, 1980).

Ainsi, après avoir assuré que le système soit d'ordre n_x , le deuxième objectif du paramétrage des fractions matricielles est de définir une structure en degré de D(s) et N(s) qui permette de remplir la condition nécessaire et suffisante de propreté énoncée par le Lemme 3.2.

3.2.3 Contraintes additionnelles pour le paramétrage des fractions matricielles

Nous avons vu que le respect des Contraintes 3.1 et 3.2 nécessite une structuration en degré des fractions matricielles. De plus, ne connaissant pas, *a priori*, le système réel, il est important que la représentativité du paramétrage adopté ne soit pas limitée. En effet, le vrai système doit toujours être représentable par le paramétrage adopté. Ceci conduit à la contrainte supplémentaire suivante.

Contrainte 3.3 (Représentativité des fractions matricielles). Tout système d'ordre n_x doit être représentable par $H(s, \theta)$.

Enfin, dans la suite, nous allons formuler des méthodes d'identification fondées sur les paramétrages $H(s, \theta)$ retenus. Parmi ces méthodes, les méthodes d'optimisation telles que l'algorithme de Gauss-Newton nécessitent de dériver $H(s, \theta)$ par rapport à θ . Les paramétrages retenus doivent donc être continuement différentiables afin de permettre un bon fonctionnement des méthodes d'optimisation. Ceci conduit à la dernière contrainte pour le paramétrage des fractions matricielles.

Contrainte 3.4 (Différentiabilité des fractions matricielles). Les paramétrages retenus doivent être continuement différentiables par rapport à θ .

3.3 Paramétrages des fractions matricielles

3.3.1 Définitions et résultats préliminaires

Avant de détailler deux types de paramétrages des fractions matricielles couramment rencontrées dans la littérature, nous rappelons plusieurs définitions et résultats sur les fractions matricielles. Ces rappels ont pour objectif d'aider à la compréhension des développements qui vont suivre. Dans la suite, on considère des FMG de dimension $n_y \times n_u$ où le dénominateur et le numérateur sont définis par des matrices polynomiales de la forme

$$\mathsf{D}(s) = \sum_{j=0}^{p} D_j \, s^j \quad \text{et} \quad \mathsf{N}(s) = \sum_{j=0}^{r} N_j \, s^j \,. \tag{3.18}$$

Les valeurs p et r correspondent respectivement aux degrés maximum des polynômes de $\mathsf{D}(s)$ et $\mathsf{N}(s)$. Les matrices D_j et N_j sont appelées matrices de coefficients de dimensions respectives $n_y \times n_y$ et $n_y \times n_u$. On note \mathcal{D} et \mathcal{N} les matrices

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & \dots & D_p \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{N} = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \dots & N_r \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Le Lemme suivant énoncé par Hannan et Deistler (1988) donne un résultat important pour les FMG.

Lemme 3.1. Toute fonction de transfert causale H(s) de dimension $n_y \times n_u$ peut être représentée par une FMG de la forme

$$\mathsf{H}(s) = \mathsf{D}^{-1}(s) \mathsf{N}(s) , \qquad (3.20)$$

avec D(s) et N(s) deux matrices polynomiales de dimensions respectives $n_y \times n_y$ et $n_y \times n_u$.

Il est ainsi possible de représenter tous les systèmes d'ordre n_x par une FMG. Nous notons $\mathbb{M}(n_x)$ l'ensemble des fonctions de transfert propres de dimension $n_y \times n_u$ et d'ordre n_x . Afin d'éviter les confusions, dans la suite nous distinguons les fractions matricielles du transfert qu'elles représentent. Pour cela, $\mathbb{H}(s)$ désigne le transfert et nous adoptons la notation $(\mathbb{D}(s), \mathbb{N}(s))$ pour une fraction matricielle décrivant le transfert $\mathbb{H}(s)$. Nous noterons $\mathbb{S}(n_x)$ l'ensemble des FMG $(\mathbb{D}(s), \mathbb{N}(s))$ d'ordre n_x .

De plus, nous appelons π l'application qui associe toute fonction de transfert causale d'ordre n_x à une fraction matricielle, soit

$$\begin{aligned} \pi : & \mathbb{S}(n_x) & \longrightarrow & \mathbb{M}(n_x) \\ & (\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) & \longmapsto & \mathsf{D}^{-1}(s) \, \mathsf{N}(s) \,. \end{aligned}$$
 (3.21)

D'après le Lemme (3.1), on a $\pi(\mathbb{S}(n_x)) = \mathbb{M}(n_x)$. Ainsi, π est une fonction surjective, c.-à-d., que pour tout transfert H(s) dans $\mathbb{M}(n_x)$, il existe une FMG $(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s))$ dans $\mathbb{S}(n_x)$, telle que $\pi(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) = \mathsf{H}(s)$. Cependant, elle n'est pas injective, c.-à-d., que tout transfert dans $\mathbb{M}(n_x)$ n'est pas nécessairement l'image par π d'une unique FMG de $\mathbb{S}(n_x)$. D'autre part, il est important de noter que si $(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) \in \mathbb{S}(n_x)$, alors¹ $(\tilde{\mathsf{D}}(s), \tilde{\mathsf{N}}(s)) =$ $\mathsf{U}(s)(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) \in \mathbb{S}(n_x)$ où $\mathsf{U}(s)$ est une matrice polynomiale non-singulière de dimension $n_y \times n_y$ (Hannan et Deistler, 1988). En particulier, les degrés pet r ne peuvent pas être bornés dans $\mathbb{S}(n_x)$. La matrice $\mathsf{U}(s)$ n'étant pas nécessairement unimodulaire (cf. Définition 3.2), l'ensemble $\mathbb{S}(n_x)$ ne contient pas que des fractions matricielles irréductibles (cf. Définition 3.3). Ces deux notions sont précisées par les définitions suivantes (Hannan et Deistler, 1988).

Définition 3.2 (Matrice unimodulaire). Une matrice polynomiale U(s) est dite unimodulaire si deg(det(U(s))) = 0, c.-à-d., si son déterminant est égal à une valeur constante non nulle.

Définition 3.3 (FMG irréductible). Une FMG (D(s), N(s)) du transfert $H(s) = \pi(D(s), N(s))$ est dite irréductible si pour toute FMG $(\tilde{D}(s), \tilde{N}(s))$ telle que $\pi(\tilde{D}(s), \tilde{N}(s)) = H(s)$ on a deg $(\det(D(s))) \leq \deg(\det(\tilde{D}(s)))$. On dit aussi que (D(s), N(s)) est une FMG première à gauche.

On peut alors introduire l'ensemble des FMG irréductibles

$$\mathbb{S}_{i}(n_{x}) = \{ (\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) \in \mathbb{S}(n_{x}), (\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) \text{ est irréductible} \}, \qquad (3.22)$$

On peut noter que $S_i(n_x) \subset S(n_x)$. Afin de caractériser l'ensemble des FMG d'un transfert dans $S_i(n_x)$, nous allons utiliser la notion de *classe d'équivalence*. Comme nous le verrons par la suite, les classes d'équivalence jouent un rôle déterminant dans le choix d'un paramétrage. Deux éléments d'une même classe d'équivalence sont liés par une *relation d'équivalence*. Nous rappelons ici les deux définitions générales d'une relation (Kailath, 1980) et d'une classe d'équivalence (Reinhardt et Soeder, 1997).

Définition 3.4 (Relation d'équivalence). Soit \mathbb{F} un ensemble non vide et \sim une relation binaire dans \mathbb{F} . \sim est appelée relation d'équivalence si et seulement si pour tout $x, y, \text{ et } z \in \mathbb{F}, \sim$ vérifie les propriétés suivantes

- $\sim est \ réflexive : x \sim x$
- ~ est symétrique : si $x \sim y$, alors $y \sim x$
- ~ est transitive : si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$

Définition 3.5 (Classe d'équivalence). Soit l'ensemble non vide \mathbb{F} muni de la relation d'équivalence \sim . La classe d'équivalence d'un élément x de \mathbb{F} , notée $\mathcal{E}(x)$ est l'ensemble des images de x par \sim , soit

$$\mathcal{E}(x) = \{ y \in \mathbb{F} \mid x \sim y \}.$$
(3.23)

¹Nous utilisons la notation U(s)(D(s), N(s)) pour signifier la multiplication à gauche à la fois de D(s) et de N(s) par U(s)

En adaptant la Définition 3.4 aux fractions matricielles, on obtient

$$(\mathsf{D}(s),\mathsf{N}(s)) \sim (\tilde{\mathsf{D}}(s),\tilde{\mathsf{N}}(s))$$
 si $\pi(\mathsf{D}(s),\mathsf{N}(s)) = \pi(\tilde{\mathsf{D}}(s),\tilde{\mathsf{N}}(s))$.
(3.24)

Ainsi, on peut définir la classe des FMG irréductibles équivalentes de la façon suivante (Hannan et Deistler, 1988).

Définition 3.6 (FMG équivalentes dans $\mathbb{S}_i(n_x)$). Soit un transfert $\mathsf{H}(s) \in \mathbb{M}(n_x)$. L'ensemble $\pi^{-1}(\mathsf{H}(s)) \cap \mathbb{S}_i(n_x)$ est appelé classe d'équivalence des FMG irréductibles. Deux FMG ($\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)$) et ($\tilde{\mathsf{D}}(s), \tilde{\mathsf{N}}(s)$) appartenant à cette classe d'équivalence sont dites équivalentes, et on note ($\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)$) ~ $(\tilde{\mathsf{D}}(s), \tilde{\mathsf{N}}(s))$.

Nous avons mentionné précédemment que la multiplication à gauche d'une FMG par une matrice polynomiale non singulière donne un transfert identique. Dans $S_i(n_x)$, les matrices unimodulaires jouent un rôle particulier à ce niveau-là. En effet, une FMG dans $S_i(n_x)$ multipliée à gauche par une matrice unimodulaire non singulière donne une FMG appartenant aussi à $S_i(n_x)$ et représentant le même transfert. Ainsi, la structure de la classe d'équivalence des FMG est engendrée par les multiplications unimodulaires à gauche. Le Lemme suivant, énoncé par Hannan et Deistler (1988), permet de clarifier ce point.

Lemme 3.2 (Structure de la classe des FMG équivalentes). Deux FMG irréductibles (D(s), N(s)) et $(\tilde{D}(s), \tilde{N}(s))$ sont équivalentes si et seulement si il existe une matrice unimodulaire U(s) non singulière telle que

$$(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) = \mathsf{U}(s) \left(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)\right) \tag{3.25}$$

Pour finir, nous précisons le terme *paramétrage*. En effet, nous l'avons précédemment employé à plusieurs reprises sans l'avoir défini, ni précisé ce qu'on suppose par *paramétrage*. On appelle paramétrage des fractions matricielles une application

$$\psi: \quad \mathbb{V}(n_x) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{P}(n_\theta) \\ \mathsf{D}^{-1}(s) \,\mathsf{N}(s) \quad \longmapsto \quad \theta \;, \tag{3.26}$$

où $\mathbb{V}(n_x) \subseteq \mathbb{M}(n_x)$ est l'ensemble des fonctions de transfert irréductibles d'ordre n_x qui sont représentables par le paramétrage ψ . $\mathbb{P}(n_\theta) \subseteq \mathbb{R}^{n_\theta}$ avec $n_\theta \in \mathbb{N}$ est l'ensemble des paramètres de ces fonctions de transfert. Le vecteur $\theta = \psi(\mathsf{D}^{-1}(s) \mathsf{N}(s))$ est le vecteur de paramètres de longueur n_θ . Ses composantes sont appelées paramètres de la fraction matricielle. Comme nous le verrons, un seul paramétrage ne permet pas nécessairement d'atteindre tous les transferts de l'ensemble $\mathbb{M}(n_x)$. La définition géométrique d'un paramétrage suppose normalement que ψ soit une fonction bijective (Reinhardt et Soeder, 1997). Cependant, comme souligné dans (Ribarits, 2002), cette définition est trop restrictive. Par exemple, elle implique que tout élément de $\mathbb{V}(n_x)$ possède un unique vecteur de paramètres image par ψ . Nous accordons donc dans la suite un sens plus large au terme *paramétrage*. Pour cela, on supposera que ψ est une multifonction (Rockafellar et Wets, 1998), c.-à-d., que pour un élément v de $\mathbb{V}(n_x)$, $\psi(v)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{P}(n_{\theta})$. Par exemple, une application non injective d'un ensemble $\mathbb{P}(n_{\theta}) \subseteq \mathbb{R}^{n_{\theta}}$ dans un ensemble $\mathbb{V}(n_x)$ de fonctions de transfert pourra être appelée *paramétrage* comme c'est généralement le cas en théorie des systèmes linéaires (Kailath, 1980; Hannan et Deistler, 1988; Ribarits, 2002). Cela nous permettra par exemple de parler de *paramétrage plein* ou *de paramétrage par coordonnées locales* comme nous le verrons dans le Chapitre 5. Lorsque le paramétrage est identifiable et que, pour tout $v \in \mathbb{V}(n_x)$, l'on peut trouver un unique vecteur θ associé à v, alors ψ est une fonction.

3.3.2 Paramétrage canonique échelon

3.3.2.1 Définition et propriétés

Tout paramétrage canonique des FMG irréductibles se distingue des autres paramétrages par le fait d'associer une unique FMG de $S_i(n_x)$ à toute FMG appartenant à une même classe d'équivalence (Kailath, 1980; Ribarits, 2002). Nous parlerons aussi de forme canonique des FMG. Il existe plusieurs paramétrages canoniques des fractions matricielles irréductibles. Ceux-ci possèdent les avantages suivants : ils sont identifiables (McKelvey, 1998; Ljung, 1999), la variance de chaque paramètre estimé est minimale (Guidorzi, 1998) et ils offrent une interprétation plus aisée du sens physique de chacun des paramètres. Les paramétrages canoniques des fractions matricielles les plus connus et répandus dans la littérature sont la forme de Hermite et la forme de Popov (voir par exemple (Kailath, 1980; Hannan et Deistler, 1988)). Sans faire une présentation exhaustive des paramétrages canoniques des FMG, nous présentons dans cette section les principales caractéristiques de la forme canonique introduite par Popov (1969). La construction de ce paramétrage est fondée sur une sélection de n_{y} lignes linéairement indépendantes de la matrice de Hankel des coefficients de Markov, notée \mathcal{H} , du système considéré. On appelle coefficients de Markov d'une fonction de transfert H(s) les matrices $H_l \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ qui vérifient

$$\mathsf{H}(s) = \sum_{l=1}^{\infty} H_l s^{-l} + D , \qquad (3.27)$$

où D est la transmission directe entre les entrées et les sorties du système. En considérant un transfert $\mathsf{H}(s) \in \pi(\mathbb{S}_i(n_x))$, n_x étant donné, \mathcal{H} vaut

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \dots \\ H_2 & H_3 & H_4 & \dots \\ H_3 & H_4 & H_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^+ \\ \vdots \\ h_{1ny}^- \\ h_{2,1}^- \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{2,ny}^- \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad (3.28)$$

où $h_{i,j}^{\top}$ est la $j^{\text{ème}}$ ligne du $i^{\text{ème}}$ bloc ligne de la matrice infinie \mathcal{H} . La $j^{\text{ème}}$ ligne de chaque block i est reliée à la $j^{\text{ème}}$ sortie de la fonction de transfert. Par exemple, $h_{2,1}^{\top}$ est la deuxième ligne du premier bloc ligne $\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \ldots \end{bmatrix}$. En commençant par la première ligne de \mathcal{H} , et en parcourant ligne par ligne, on sélectionne les n_x premières lignes indépendantes. D'après la structure de \mathcal{H} , si une ligne $h_{i,j}^{\top}$ n'est pas sélectionnée, c.-à-d., $h_{i,j}^{\top}$ est une combinaison linéaire des lignes précédentes, alors $h_{i+1,j}^{\top}$, $h_{i+2,j}^{\top}$, etc. sont aussi des combinaisons linéaires des lignes précédentes (Hannan et Deistler, 1988, Théorème 2.4.1). En réitérant cette procédure pour les sorties suivantes jusqu'à obtenir une sélection de n_x lignes indépendantes, cette procédure de sélection mène à un unique jeu d'indices de Kronecker, noté $\Upsilon = \begin{bmatrix} \rho_1 & \dots & \rho_{n_y} \end{bmatrix}$. Les indices de Kronecker indiquent que les lignes $h_{1,1}^{\top}, h_{2,1}^{\top}, \dots, h_{\rho_{1,1}}^{\top}, \dots, h_{1,n_y}^{\top}, h_{2,n_y}^{\top},$ $\ldots,\, h_{\rho_{n_y},n_y}^\top$ forment une base de l'espace engendré par les lignes de la matrice de Hankel \mathcal{H} . Autrement dit, les indices $\rho_i \in \mathbb{N}_+$ indiquent que la $i^{\text{ième}}$ ligne des ρ_i premiers blocs de \mathcal{H} a été sélectionnée. Ainsi, les lignes $h_{\rho_i+1,k}^{\top}$, avec $k = \{1, \ldots, n_u\}$, peuvent être exprimées par une combinaison linéaire de toutes les lignes précédentes de la base, soit (Hannan et Deistler, 1988)

$$h_{\rho_i+1,k}^{\top} = -\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{\rho_j} d_{k,j,l-1} h_{l,j}^{\top}, \qquad (3.29)$$

où $d_{k,j,l-1}$ note le coefficient de la $k^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice D_{l-1} des coefficients de degré l-1 du dénominateur. Cela donne donc un système de n_y équations qui permet de déterminer les coefficients du dénominateur. En notant $\mathcal{H}_{\rho_{n_y}+1}$ la matrice formée des premières lignes de \mathcal{H} définie par

$$\mathcal{H}_{\rho_{ny}+1} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^{\dagger} \\ \vdots \\ h_{\rho_{ny}+1,n_y}^{\top} \end{bmatrix}, \qquad (3.30)$$

les équations (3.29) permettent d'écrire le système d'équations suivant

$$\mathcal{D}\mathcal{H}_{\rho_{n_y}+1} = 0, \qquad (3.31)$$

où $\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_0 & \dots & D_{\rho_{n_y}} \end{bmatrix}$ est la matrice des coefficients du dénominateur définie de façon unique d'après les combinaisons linéaires données par l'équation (3.29). La construction de \mathcal{D} par cette procédure est illustrée par l'Exemple 3.1.

Les coefficients du dénominateur ainsi déterminés, ceux du numérateur de la forme échelon sont ensuite calculés en résolvant un deuxième système d'équations qui découle de la relation (3.27). En définissant

$$\mathbf{N}(s) = \sum_{l=1}^{\rho_{n_y} - 1} \mathbf{N}_l \, s^l = \mathbf{N}(s) - \mathbf{D}(s) \, D \,, \qquad (3.32)$$

la relation (3.27) s'écrit

$$\mathsf{D}(s) \sum_{l=1}^{\infty} H_l s^{-l} = \mathbf{N}(s) .$$
 (3.33)

D'après cette relation, en comparant les coefficients des matrices polynomiales, on obtient le système d'équations suivant

$$\mathcal{D} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ H_1 & 0 & \dots & 0 \\ H_2 & H_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ H_{\rho_{n_y}} & H_{\rho_{n_y}-1} & H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \dots & \mathbf{N}_{\rho_{n_y}-1} \end{bmatrix} .$$
(3.34)

Les coefficients de \mathcal{D} étant fixés par l'équation (3.29), et la matrice de Toeplitz des paramètres de Markov étant de rang plein (Hannan et Deistler, 1988), ce système d'équation définit de manière unique les coefficients de la matrice polynomiale $\mathbf{N}(s)$. Les coefficients du numérateur $\mathsf{N}(s)$ sont ensuite calculés de façon unique avec les relations

$$N_l = \begin{cases} \mathbf{N}_l + D_l D & \text{si } 0 \le l \le \rho_{n_y} - 1, \\ D_l D & \text{si } l = \rho_{n_y}, \end{cases}$$
(3.35)

Pour un transfert H(s) donné, les indices de Kronecker étant uniques (Kailath, 1980; Hannan et Deistler, 1988), une FMG canonique est donc définie par cette procédure.

Exemple 3.1 (Construction de la forme canonique). Soit un système d'ordre $n_x = 3$, possédant 2 entrées, 2 sorties et dont les indices de Kronecker valent $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. La procédure de sélection des lignes de la matrice de Hankel \mathcal{H} permet donc de sélectionner les lignes $h_{1,1}^{\top}$, $h_{1,2}^{\top}$ et $h_{2,2}^{\top}$. Dans ce cas, on obtient alors la matrice $\mathcal{H}_{\rho_{n_y}+1}$ définie par

$$\mathcal{H}_{\rho_{n_y}+1}^{\top} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{2,1} & h_{2,2} & h_{3,1} & h_{3,2} \end{bmatrix} .$$
(3.36)

Les lignes $h_{2,1}^{\top}$ et $h_{3,2}^{\top}$ sont égales aux combinaisons linéaires des lignes sélectionnées précédentes, soit

$$h_{2,1}^{\top} = -d_{1,1,0} h_{1,1}^{\top} - d_{1,2,0} h_{1,2}^{\top} , \qquad (3.37)$$

$$h_{3,2}^{\top} = -d_{2,1,0} h_{1,1}^{\top} - d_{2,2,0} h_{1,2}^{\top} - d_{2,2,1} h_{2,2}^{\top} .$$
(3.38)

En écrivant ce système d'équation sous la forme

$$\mathcal{D}\mathcal{H}_{\rho_{n_u}+1} = 0, \qquad (3.39)$$

on obtient la matrice des coefficients du dénominateur définie par

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1,1,0} & d_{1,2,0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{2,1,0} & d_{2,2,0} & 0 & d_{2,1,0} & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$
(3.40)

Les coefficients du numérateur sont ensuite déterminés en résolvant

$$\mathcal{D} \begin{bmatrix} 0 & 0\\ H_1 & 0\\ H_2 & H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix} .$$
(3.41)

En supposant que le système possède une transmission directe D non nulle, les coefficients du numérateur sont donnés par

$$N_2 = D_2 D$$
, $N_1 = \mathbf{N}_1 + D_1 D$, $N_0 = \mathbf{N}_0 + D_0 D$. (3.42)

La forme canonique ainsi définie est aussi appelée *forme échelon* car la matrice des coefficients du dénominateur présente une structure en échelon. S'appuyant sur ses propriétés particulières, on peut adopter la définition suivante de la forme échelon proposée par Kailath (1980).

Définition 3.7 (Forme canonique échelon des FMG). Pour tout transfert $H(s) \in M(n_x)$ ayant un jeu d'indices de Kronecker $\Upsilon = (\rho_1 \ldots \rho_{n_y})$, la forme canonique échelon est l'unique FMG (D(s), N(s)) qui vérifie les propriétés suivantes

(a) les degrés ligne du dénominateur sont égaux à Υ et sont arrangés en ordre ascendant, soit

$$\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \cdots \leqslant \rho_{n_y} \,, \tag{3.43}$$

- (b) pour la $i^{\text{ème}}$ ligne, il existe un numéro de colonne, noté p_i , appelé indice pivot tel que
 - (i) $\mathsf{d}_{i,p_i}(s)$ est de degré ρ_i ,
 - (*ii*) $\mathsf{d}_{i,p_i}(s)$ est unitaire,
 - (iii) $\mathsf{d}_{i,p_i}(s)$ est le dernier polynôme de degré ρ_i sur la i^{ème} ligne, c.-à-d.,

$$\deg(\mathsf{d}_{i,j}(s)) < \rho_i \quad si \quad j > p_i , \qquad (3.44)$$

- (iv) si $\rho_i = \rho_j$ et i < j, alors $p_i < p_j$, autrement dit les pivots sont arrangés par ordre croissant,
- (v) si $i \neq j$, deg(d_{j,p_i}(s)) < ρ_i .

Remarque 3.1. La définition de la forme échelon pour les FMD dont est inspirée la Définition 3.7 est donnée dans (Kailath, 1980). Elle est obtenue en sélectionnant une base de colonnes de la matrice \mathcal{H} de façon similaire à la sélection des lignes détaillée plus haut. Il en résulte un jeu d'indices de Kronecker $\Upsilon = (\rho_1 \ldots \rho_{n_u})$ qui définit une structuration en colonne des degrés où les indices pivots notent les polynômes de plus haut degré colonne.

Plusieurs éléments importants peuvent être notés sur cette définition. Tout d'abord, on remarque que la forme échelon est le résultat d'un arrangement spécifique des degrés ligne et des pivots du dénominateur qui permet d'exprimer de manière unique le dénominateur D(s). On remarque aussi que les degrés ligne du dénominateur sont égaux aux indices de Kronecker ρ_i . Enfin, le dénominateur ainsi obtenu est, d'après sa structure, toujours réduit par ligne et par colonne (cf. Définition 3.1). Toute FMG sous forme échelon est donc d'ordre égal à

$$\sum_{i=1}^{n_y} \rho_i = n_x \,. \tag{3.45}$$

Dans la suite, on notera $n_x = |\Upsilon|$. De plus, on nommera (avec un léger abus de langage) *pivots* les coefficients fixés à 1, c.-à-d., les coefficients de plus haut degré des polynômes unitaires d_{i,p_i} donnés par la Définition 3.7-(b). L'exemple suivant illustre l'arrangement des coefficients non nuls du dénominateur dans la forme échelon.

Exemple 3.2 (Dénominateur sous forme échelon). Soit le dénominateur sous forme échelon suivant

$$\mathsf{D}(s) = \begin{bmatrix} 2+6s & 8+s & 5\\ 7+2s+s^2 & 9 & 3+7s\\ 6+9s & 4 & 1+4s+3s^2+s^3 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

avec des degrés lignes $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$ et $\rho_3 = 3$, et des pivots $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ et $p_3 = 1$. La structure échelon apparait en écrivant la matrice de coefficients où les pivots sont représentés en rouge

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 3 & 2 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 9 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$
(3.47)

Connaissant le dénominateur sous forme échelon, un unique numérateur est défini par l'équation (3.34). Pour cette raison, pour un transfert H(s)donné, Kailath (1980) utilise uniquement les conditions permettant d'obtenir le dénominateur sous forme échelon comme définition de cette forme canonique. On peut cependant énoncer la condition suivante portant sur la structure du numérateur (Hannan et Deistler, 1988; Guidorzi, 1998) :

$$\deg(\mathsf{n}_{i,j}(s)) \le \rho_i \,, \tag{3.48}$$

où $n_{ij}(s)$ est le polynôme situé sur la i^{ième} ligne et j^{ième} colonne du numérateur. Cette condition permet d'assurer que toute FMG sous forme échelon est propre.

D'autre part, on peut également remarquer que les pivots, qui sont les coefficients de plus haut degré sur chaque ligne de D(s), ne sont pas nécessairement situés sur la diagonale de D(s).

Notons qu'il existe plusieurs autres façons d'obtenir des réalisations canoniques d'après la matrice de Hankel \mathcal{H} . Par exemple, la forme de Hermite des FMG (Kailath, 1980) est obtenue de façon analogue à la forme échelon. La seule différence réside dans l'ordre de parcours des lignes de \mathcal{H} pour la sélection d'une base. En effet, la forme de Hermite est obtenue en parcourant \mathcal{H} sortie par sortie, c.-à-d., qu'on conserve tous les h_{i1} qui sont linéairement indépendants, puis tous les h_{i2} , etc... Un désavantage de la forme de Hermite est qu'elle n'est pas nécessairement réduite par ligne. La condition de propreté est donc plus difficile à assurer.

Une approche différente a également été proposée par Baratchart (1985). Celle-ci consiste à faire apparaître les invariants du système via une opération de factorisation. Ce faisant une nouvelle forme canonique est obtenue. De plus, cette factorisation réalise une combinaison linéaire des sorties du systèmes qui est ensuite utilisée pour identifier les paramètres du système.

3.3.2.2 Arrangement des pivots de la forme échelon

Il est possible d'effectuer des permutations des lignes d'une FMG en multipliant à gauche son dénominateur et son numérateur par une matrice de permutation. Cette propriété peut être utilisée pour arranger la forme échelon de manière à faciliter l'expression analytique de sa structure. En effet, pour tout dénominateur sous forme échelon, il est possible de trouver une matrice P qui permute les lignes du dénominateur afin de disposer les pivots p_i sur la diagonale. La structure de cette forme, que nous appellerons forme échelon arrangée dans la suite, est alors définie par

$$\deg(\mathsf{d}_{i,j}(s)) = \begin{cases} \leq \min(\rho_i - 1, \rho_j - 1) & \text{si } i < j \\ \rho_i & \text{si } i = j \\ \leq \min(\rho_i, \rho_j - 1) & \text{si } i > j \end{cases}$$
(3.49)

où $\mathbf{d}_{ij}(s)$ note les polynômes et ρ_i les degrés ligne de la forme arrangée. La structure de cette forme arrangée est ainsi spécifiée à travers la relation (3.49) par un jeu d'indices Υ qui contient les mêmes indices que la forme échelon (les indices de Kronecker) mais ordonnés différemment.

Nous avons vu dans la Section 3.3.1 que multiplier le dénominateur et le numérateur d'une FMG par une même matrice unimodulaire non singulière n'affecte pas le transfert. Or, toute matrice de permutation est par définition unimodulaire et non-singulière. Les permutations appliquées par P sur la forme échelon donnent donc une FMG équivalente qui est toujours canonique. Ainsi, en notant $(D_e(s), N_e(s))$ une FMG sous la forme échelon, la forme échelon arrangée associée, notée $(D_{er}(s), N_{er}(s))$, vérifie la propriété suivante

$$\left(\mathsf{D}_{er}(s),\mathsf{N}_{er}(s)\right)\sim\mathsf{P}\left(\mathsf{D}_{e}(s),\mathsf{N}_{e}(s)\right).$$
(3.50)

Exemple 3.3 (Forme échelon arrangée). Nous reprenons ici l'Exemple 3.2 pour présenter un cas de forme échelon arrangée et illustrer la différence de structure avec la forme échelon. Dans ce cas, les pivots sont arrangés sur la diagonale en permutant les deux premières lignes de $D_e(s)$. La matrice de permutation P est donc donnée par

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \,. \tag{3.51}$$

La forme échelon arrangée $\mathsf{D}_{er}(s) = \mathsf{P} \mathsf{D}_{e}(s)$ est ainsi définie par

$$\mathsf{D}_{er}(s) = \begin{bmatrix} 7+2s+s^2 & 9 & 3+7s \\ 2+6s & 8+s & 5 \\ 6+9s & 4 & 1+4s+3s^2+s^3 \end{bmatrix} \,. \tag{3.52}$$

Sa structure est spécifiée par le jeu d'indices $\tilde{\Upsilon} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut noter que la structure de cette forme échelon arrangée est identique à celle d'une forme canonique décrite à plusieurs reprises dans la littérature (par exemple (Guidorzi, 1975; Gevers et Wertz, 1984; Guidorzi, 1998)). La forme échelon arrangée étant identique à une permutation des lignes près à la forme échelon, ces deux formes possèdent les mêmes valeurs de paramètres. Elles correspondent donc à une unique forme canonique. Toutefois, à la connaissance de l'auteur, ce lien ne semble pas avoir été clairement fait dans la littérature. En effet, une ambiguïté qui porte sur les valeurs des indices de Kronecker est présente autour de la structure des FMG sous forme échelon. Tout d'abord, précisons que dans le cas où les pivots sont situés sur la diagonale du dénominateur, il n'y a pas d'ambiguïté possible : les indices de Kronecker obtenus en analysant la matrice de Hankel (3.28) sont égaux aux indices de structure. Cependant, comme nous l'avons mentionné précédemment, cela n'est pas nécessairement vrai pour tous les systèmes. Lorsqu'une telle situation est rencontrée, comme dans l'exemple (3.3) les indices de structure composant $\tilde{\Upsilon}$ sont bien les mêmes que les indices de Kronecker mais ordonnés différemment. Dans plusieurs travaux (voir par exemple (Guidorzi, 1975; Gevers et Wertz, 1984; Guidorzi, 1998)), ce point n'est pas précisé et il est seulement fait mention d'*invariants du système* à propos des indices $\tilde{\Upsilon}$. Dans (Hannan et Deistler, 1988) et certains travaux qui en découlent (par exemple (Ribarits, 2002), la structure (3.49) est donnée pour définir le paramétrage échelon d'un transfert d'indices de Kronecker $\tilde{\Upsilon}$. Seulement le cas des pivots situés sur la diagonale, pour lequel cela est vrai, semble avoir été pris en compte.

3.3.2.3 Interprétation géométrique

Les premiers travaux sur les aspects géométriques liés au problème du paramétrage des fonctions de transfert ont été réalisés par Kalman (1971, 1974) puis Hazewinkel (1976, 1977) qui ont notamment montré que l'ensemble des fonctions de transfert d'ordre n_x forme une variété analytique. Ces travaux furent initiés pour les descriptions sous forme de représentations d'état. Ces résultats furent également étendus au cas des fractions matricielles (Fuhrmann, 1976), ce qui permit notamment de synthétiser le cas des représentations d'état et des fractions matricielles et ainsi obtenir une approche généralisée. D'autres auteurs ont ensuite complété ces études comme Hannan et Deistler (1988) ou, plus récemment, Ribarits (2002).

Afin d'obtenir ces caractérisations géométriques, ces différents auteurs ont muni les espaces euclidiens de leur topologie naturelle et ont utilisé les propriétés topologiques de ces ensembles de nature différente (ensemble des transferts et ensemble des vecteurs de paramètres par exemple) pour caractériser la nature de leurs relations. Cela leur a notamment permis de donner des interprétations géométriques de certains ensembles de réalisations mises sous la forme de représentations d'état ou sous la forme de FMG. Nous allons également donner une interprétation géométrique des différents paramétrages étudiés dans ce chapitre afin d'établir des éléments de comparaison. Toutefois, au risque d'un manque de rigueur mathématique et de certains abus de langage, nous ne chercherons pas à approfondir les détails de topologie car s'étendre sur le sujet n'est pas nécessaire pour la suite de notre étude. Pour plus de détails sur ces notions, le lecteur peut, par exemple, se référer à (Hannan et Deistler, 1988; Ribarits, 2002) ou à (Reinhardt et Soeder, 1997).

On note ψ_e^{Υ} le paramétrage échelon qui associe un transfert $\mathsf{H}(s)$ d'indices de Kronecker Υ aux paramètres libres θ_e^{Υ} de la FMG ($\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)$), soit

$$\begin{aligned}
\psi_e^{\Upsilon} : & \mathbb{V}_{\Upsilon}^e \longrightarrow & \mathbb{P}_{\Upsilon}^e \\
& \mathsf{H}(s) \longmapsto & \theta_e^{\Upsilon},
\end{aligned}$$
(3.53)

où $\mathbb{V}^{e}_{\Upsilon}$ est l'ensemble des fonctions de transfert représentées par les FMG

d'indices de Kronecker Υ , et $\mathbb{P}^{e}_{\Upsilon}$ est l'ensemble des paramètres de ces FMG. On a $\mathbb{V}^{e}_{\Upsilon} \subset \mathbb{M}(n_x)$ et $\mathbb{P}^{e}_{\Upsilon} \subset \mathbb{R}^{n_{\theta}}$ (Hannan et Deistler, 1988) où n_{θ} est défini par l'équation (3.54). Le théorème suivant énoncé par Hannan et Deistler (1988) donne les principales propriétés de ce paramétrage.

Théorème 3.1 (Paramétrage échelon des FMG). Le paramétrage échelon ψ_e^{Υ} avec $\Upsilon = (\rho_1 \ldots \rho_{n_y})$, possède les propriétés suivantes :

(i) $\mathbb{P}^{e}_{\Upsilon}$ est un sous-ensemble ouvert et dense de $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$, où

$$n_{\theta} = n_x \, n_u + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y} \mu_{ij} \,, \qquad (3.54)$$

avec

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \min(\rho_i, \rho_j) & pour \quad i < j\\ \rho_i & pour \quad i = j\\ \min(\rho_i + 1, \rho_j) & pour \quad i > j \end{cases}$$
(3.55)

- (ii) ψ_e^{Υ} est un homéomorphisme,
- (iii) $\{\mathbb{V}^{e}_{\Upsilon} \mid |\Upsilon| = n_x\}$ est une partition disjointe de $\mathbb{M}(n_x)$ contenant $\binom{n_x + n_y 1}{n_y 1}$ parties.

Nous commentons brièvement les différents résultats donnés par ce théorème :

(i) signifie que les paramètres sont réellement *libres* dans le sens où ils ne sont pas restreints à un sous-ensemble *étroit* de $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$. Autrement dit, *presque tous* les éléments de $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$ correspondent à une fonction de transfert (Ribarits, 2002). De plus, ce résultat indique que le nombre de coefficients libres est différent pour différents indices de Kronecker. On peut vérifier que, pour toute valeur possible des indices de Kronecker, le nombre de paramètres vérifie la condition

$$n_{\theta} \le n_x (n_u + n_y) + n_u \, n_y \,.$$
 (3.56)

Toute fraction matricielle sous la forme échelon est identifiable.

- (ii) signifie que ψ_e^{Υ} est un paramétrage bijectif et continue sur les parties \mathbb{V}_{Υ}^e , et que $(\psi_e^{\Upsilon})^{-1}$ est aussi continue (Hannan et Deistler, 1988).
- (iii) implique que ψ_e^{Υ} est un paramétrage canonique, c.-à-d., que tout transfert correspond à un unique vecteur de paramètres θ_e^{Υ} (Ribarits, 2002). On peut noter que pour $n_y = 1$, nous n'avons qu'une partie \mathbb{V}_{Υ}^e , c.-à-d., $\mathbb{M}(n_x) = \mathbb{V}^e(n_x)$. Cela peut s'expliquer par le fait que les n_x premières lignes de la matrice de Hankel \mathcal{H} sont nécessairement l'unique base

pour l'espace engendré par ses lignes. En effet, lorsque $n_y = 1$, les blocs lignes de \mathcal{H} ne contiennent qu'une ligne et d'après les propriétés de \mathcal{H} , si une ligne h_{i1} n'est pas retenue, alors les lignes suivantes ne sont pas retenues non plus comme faisant partie de la base.

La figure (3.1) donne une représentation géométrique des ensembles $\mathbb{M}(n_x)$, \mathbb{V}^e_{Υ} , \mathbb{P}^e_{Υ} et du paramétrage ψ^{Υ}_e qui découle des propriétés énoncées précédemment.



FIGURE 3.1 – Représentation de l'ensemble $\mathbb{M}(n_x)$ dans le cas $n_y = 5$ et $n_x = 1$ (à gauche) et du paramétrage $\psi_e^{\Upsilon_2}$ (à droite).

Comme nous l'avons vu dans cette section, le paramétrage échelon des FMG permet de fixer l'ordre et de garantir la propreté du modèle identifié (Contraintes 3.1 et 3.2). Cependant, pour tout choix possible de Υ , ce n'est pas un unique paramétrage, mais c'est l'ensemble des paramétrages ψ_e^{Υ} qui permet de représenter l'ensemble des systèmes d'ordre n_x (Contrainte 3.3). Ces paramétrages étant disjoints, une erreur dans la sélection des indices de Kronecker peut entrainer de mauvais résultats pour l'identification. Comme souligné par Correa et Glover (1984), estimer ces indices d'après des données bruitées est équivalent à estimer un déterminant « exactement égal à zéro ». Autrement dit, ce n'est numériquement pas possible. Pour ces raisons, le paramétrage échelon, de même que toute autre forme canonique, n'est pas souhaitable pour procéder à une identification à partir de données bruitées et sans connaissance *a priori* sur le système. La forme échelon va cependant nous être utile dans le Chapitre 5 afin de définir des paramétrages des FMG plus adaptés.

3.3.3 Paramétrage pseudo-canonique

3.3.3.1 Définition

Des paramétrages dits *pseudo-canoniques* sont obtenus de manière très similaire au paramétrage échelon. Ils sont aussi fondés sur le choix d'une base des lignes de la matrice de Hankel \mathcal{H} avec la propriété que si une ligne h_{ij} n'est pas retenue (car linéairement dépendante des lignes précédentes), alors h_{i+1j} , h_{i+2j} , etc..., ne sont pas retenues non plus. Cependant, contrairement au cas canonique, la base des lignes retenue n'est pas obligatoirement formée des n_x premières lignes indépendantes de \mathcal{H} . En s'affranchissant de cette contrainte, ce choix n'est plus unique pour une matrice \mathcal{H} donnée car celle-ci peut correspondre à plusieurs transferts ayant des structures en degré différentes. Les lignes de \mathcal{H} sont repérées par des indices appelés *indices* de pseudo observabilité (Van Overbeek et Ljung, 1982) ou *indices de structure* (Gevers et Wertz, 1987) qui remplacent le rôle joué par les indices de Kronecker. Ces indices de structure, que nous noterons aussi ρ_i dans la suite, vérifient donc la relation

$$\sum_{i=1}^{n_y} \rho_i = n_x \quad \text{avec} \quad \rho_i \ge 0. \tag{3.57}$$

L'ensemble de ces n_y indices sera aussi noté Υ . À un choix d'indices Υ donné, correspond une unique FMG pseudo-canonique. De façon similaire à la forme échelon, les coefficients non nuls du dénominateur sont définis par

$$h_{\rho_i+1,i}^{\top} = -\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{\rho_j} d_{i,j,l-l} h_{l,j} , \qquad (3.58)$$

Ayant ainsi défini D(s), les coefficients du numérateur sont ensuite donnés comme pour la forme échelon par les relations (3.34) et (3.35).

Ces paramétrages pseudo-canoniques permettent de représenter presque tous les systèmes d'ordre n_x (Gevers et Wertz, 1987). En d'autres termes, l'ensemble des systèmes qui peut être représenté par un de ces paramétrages est dense dans l'ensemble des systèmes linéaires observables d'ordre n_x (Glover et Willems, 1974). Les formes pseudo-canoniques vérifient donc de façon générique la Contrainte 3.3. Ces paramétrages pseudo-canoniques sont différenciés des paramétrages canoniques par le fait que plusieurs formes pseudo-canoniques peuvent représenter un même système. Du fait de cette propriété, les formes pseudo-canoniques sont aussi appelées modèles à recouvrement (Glover et Willems, 1974; Van Overbeek et Ljung, 1982). Comme mentionné dans (Correa et Glover, 1984), cette propriété de recouvrement en fait des paramétrages très appropriés pour une utilisation combinée à des méthodes d'optimisation. En effet, si, au cours de l'optimisation d'un critère d'identification, de trop mauvais conditionnements numériques du problème d'identification sont observés, signe d'un mauvais choix d'indices de structure, il est possible de choisir de nouveaux indices Υ . Cela peut, de plus, se faire sans perte d'information puisque le nouveau paramétrage (sauf cas isolés) donne une représentation équivalente du modèle identifié avec le précédent. Il est ainsi possible de déterminer, en surveillant le conditionnement du problème d'identification au cours de l'optimisation, quand et comment changer de paramétrage pseudo-canonique (Van Overbeek et Ljung, 1982).

D'autre part, nous souhaitons un paramétrage où les coefficients du numérateur N(s) et du dénominateur D(s) sont des paramètres indépendants. Comme expliqué par Guidorzi et Beghelli (1982), cela implique des restrictions supplémentaires sur les indices de structure Υ puisqu'ils ne peuvent prendre que deux valeurs $\rho_1 = \rho$ et $\rho_2 = \rho + 1$. D'après la relation (3.57), cela signifie que μ_1 de ces indices ρ_i sont égaux à ρ et que μ_2 sont égaux à $\rho + 1$. Les entiers μ_1 et μ_2 vérifient donc

$$n_x = \rho \ n_y + \mu_1$$
 et $n_y = \mu_1 + \mu_2$. (3.59)

Les indices de structure qui satisfont l'équation (3.59) seront appelés *indices quasi-constants*. Pour un ensemble donné Υ d'indices quasi-constants, la structure en degré du dénominateur est définie par (Guidorzi et Beghelli, 1982; Correa et Glover, 1984)

$$\deg(\mathsf{d}_{i,j}(s)) = \begin{cases} \rho_j & \text{si } i = j\\ \rho_j - 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$
 (3.60)

De plus, les polynômes diagonaux de D(s) sont unitaires. D'après la Définition 3.1, cette structuration implique que le dénominateur est réduit par ligne. De plus, comme pour la forme échelon, la structure du numérateur vérifie

$$\deg(\mathsf{n}_{ij}(s)) \le \rho_i \,. \tag{3.61}$$

D'après le Lemme 3.2, ces paramétrages pseudo-canoniques vérifient donc la condition de propreté (Contrainte 3.2).

Afin d'illustrer la structure du dénominateur, nous considérons le cas particulier où les indices Υ sont définis par

$$\Upsilon = \left[\underbrace{\rho \cdots \rho}_{\mu_1 \text{ fois}}, \underbrace{\rho+1 \cdots \rho+1}_{\mu_2 \text{ fois}}\right].$$
(3.62)

La structure du dénominateur et du numérateur associés est alors la suivante :

$$\deg(\mathsf{D}(s)) = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \rho - 1 & \rho \\ \rho$$

où la notation $\overline{\bullet}$ désigne les polynômes unitaires.

3.3.3.2 Choix de l'arrangement des indices de structure

Pour un ordre n_x fixé et un nombre de sorties n_y donné, la valeur ρ est fixée par les conditions (3.59). Toutefois, il existe, dans le cas général, plusieurs choix possibles pour le choix de l'ordre des indices dans l'ensemble Υ . Ce nombre de possibilités est égal à $\binom{n_y}{\mu_1}$, c.-à-d., égal au nombre de combinaisons possibles de μ_1 éléments parmi n_y . Afin de montrer l'influence de l'arrangement des indices, on considère l'écriture des FMG $\mathsf{H}(s)$ sous la forme

$$\mathsf{H}(s) = \frac{1}{\det(\mathsf{D}(s))} \times \operatorname{adj}(\mathsf{D}(s)) \mathsf{N}(s) .$$
(3.64)

Cette écriture met en évidence que la fonction de transfert est le résultat d'une combinaison de la structure de la matrice $\operatorname{adj}(\mathsf{D}(s))$ avec la structure de $\mathsf{N}(s)$. Afin d'illustrer l'impact d'un changement d'ordre des indices, nous considérons deux arrangements particuliers de Υ : le cas d'indices rangés par ordre croissant donné par l'équation (3.62), d'une part, et, d'autre part, le cas d'indices rangés par ordre décroissant.

Pour un rangement croissant des indices, la structure du dénominateur et du numérateur est donnée par l'équation (3.63). D'après le calcul de la matrice adjointe, la structure de la matrice $\operatorname{adj}(\mathsf{D}(s))$ respecte alors

$$\operatorname{deg}(\operatorname{adj}(\mathsf{D}(s))) \leq \underbrace{\left[\begin{array}{c}\mu_{1} & \mu_{2} \\ \overline{\kappa+1} & \kappa \\ \kappa & \overline{\kappa+1} \\ \kappa & -1 \\ \kappa & -1 \end{array}\right]}_{\kappa - 1} \mu_{2}, \quad (3.65)$$

où $\kappa = n_x - \rho - 1$ et la notation $\overline{\bullet}$ désigne les polynômes unitaires. L'égalité est vérifiée dans le cas générique, c.-à-d., lorsque les coefficients de $\mathsf{D}(s)$ n'ont pas une valeur particulière qui entraine des annulations de certains coefficients de la matrice adjointe. Pour les besoins de l'identification, où ces coefficients sont estimés à partir de données bruitées et grâce à des algorithmes de calculs numériques, on peut supposer, sans réelle restriction, que nous sommes dans ce cas.

Pour un rangement décroissant des indices, la nouvelle distribution, notée $\tilde{\Upsilon},$ est définie par

$$\tilde{\Upsilon} = \left[\underbrace{\rho + 1 \cdots \rho + 1}_{\mu_2 \text{ fois}}, \underbrace{\rho \cdots \rho}_{\mu_1 \text{ fois}}\right].$$
(3.66)

Les structures du dénominateur $\hat{\mathsf{D}}(s)$ et du numérateur $\hat{\mathsf{N}}(s)$ associées sont les suivantes :

$$\deg(\tilde{\mathsf{D}}(s)) = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mu_{2} & \mu_{1} \\ \rho & \rho - 1 \\ \rho & \rho & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \rho & \rho & \rho \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{1} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} & \mu_{2} \\ \mu_{2} & \mu_{$$

et la structure de $\operatorname{adj}(\tilde{\mathsf{D}}(s))$, dans le cas générique, est alors

$$\operatorname{deg}(\operatorname{adj}(\widetilde{\mathsf{D}}(s))) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_2 & \mu_1 \\ \overline{\kappa} & \kappa - 1 \\ \kappa - 1 & \overline{\kappa} \\ \kappa - 1 & \kappa \\ \kappa - 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa + 1 \\ \kappa & \kappa + 1 \\ \kappa & \kappa + 1 \\ \kappa & \kappa \\ \kappa & \kappa + 1 \\ \kappa & \kappa \\ \kappa & \kappa + 1 \\ \kappa & \kappa \\ \kappa & \kappa + 1 \\ \kappa & \kappa \\ \kappa$$

Si on considère une réalisation du système considéré pour ces deux choix d'indices alors on constate que

• dans le cas d'un rangement croissant des indices, on associe

 $-\mu_1$ sous-systèmes d'ordre ρ aux μ_1 premières sorties,

- μ_2 sous-systèmes d'ordre $\rho+1$ aux μ_2 dernières sorties,
- dans le cas d'un rangement décroissant des indices, on associe
 - $-\mu_2$ sous-systèmes d'ordre $\rho + 1$ aux μ_2 premières sorties,
 - $-\mu_1$ sous-systèmes d'ordre ρ aux μ_1 dernières sorties.

Un raisonnement similaire peut évidemment être mené pour tout autre choix d'arrangement possible des indices, aboutissant à des subdivisions différentes du système entre les sorties. On remarque donc que c'est l'arrangement des lignes de la matrice adjointe du dénominateur, c.-à-d., des colonnes du dénominateur, qui « engendre » ces subdivisions du système en sous-systèmes. On peut également noter que le passage entre deux formes pseudo-canoniques définies par deux arrangements différents des indices nécessite des permutations des colonnes de $D(s, \theta)$ pour conserver les polynômes de plus haut degré sur la diagonale. Les deux FMG ainsi définies ne sont donc pas équivalentes. Cette différence est illustrée par l'exemple suivant.

Exemple 3.4 (Forme pseudo-canonique). Considérons l'exemple d'un système d'ordre $n_x = 6$ à deux entrées et quatre sorties. Soit une représentation

de ce système sous FMG donnée par $\mathsf{H}_1(s) = \mathsf{D}_1^{-1}(s) \, \mathsf{N}_1(s)$ avec

$$D_{1}(s) = \begin{bmatrix} 2+s & 3 & 4+8s & 7+5s \\ 9 & 6+s & 2+5s & 8+3s \\ 4 & 7 & 9+2s+s^{2} & 5+7s \\ 7 & 1 & 2+s & 3s+s^{2} \end{bmatrix},$$

$$N_{1}(s) = \begin{bmatrix} 4+2s & 6+7s \\ 2+5s & 4+9s \\ 9+4s^{2} & 6s+3s^{2} \\ s+6s^{2} & 8+s^{2} \end{bmatrix}.$$
(3.69)

La structure de $H_1(s)$ est donc définie par $\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ selon les équations (3.60) et (3.61). Un autre choix possible parmi les $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ possibilités pour le choix de Υ permettant de représenter un système d'ordre 6 à 4 sorties est $\Upsilon_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Le passage de $H_1(s)$ sous une forme pseudocanonique $H_2(s) = D_2^{-1}(s) N_2(s)$ définie par Υ_2 nécessite des permutations des lignes P_l et des colonnes P_c . Un choix possible de permutations est défini par

$$\mathsf{P}_{l} = \mathsf{P}_{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$
(3.70)

Ainsi on a bien

$$D_{2}(s) = P_{l} D_{1}(s) P_{c} = \begin{bmatrix} 2+s & 3 & 4+8s & 7+5s \\ 7 & 1 & 2+s & 3s+s^{2} \\ 4 & 7 & 9+2s+s^{2} & 5+7s \\ 9 & 6+s & 2+5s & 8+3s \end{bmatrix} P_{c}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+s & 7+5s & 4+8s & 3 \\ 7 & 3s+s^{2} & 2+s & 1 \\ 4 & 5+7s & 9+2s+s^{2} & 7 \\ 9 & 8+3s & 2+5s & 6+s \end{bmatrix}.$$
(3.71)

De même, on vérifie que $N_2(s) = P_l D_2(s) P_c$. Cependant, $H_2(s)$ vaut alors

Ce choix *a priori* de la distribution Υ va donc avoir une influence sur les performances de l'identification. Or, sans connaissance *a priori* du système, rien n'indique comment effectuer ce choix afin d'obtenir l'identification la plus précise possible.

3.3.3.3 Cas particulier $n_x = \rho n_y$

L'unique cas où un seul choix d'indices est possible est le cas particulier où l'ordre du système est multiple du nombre de sorties, c.-à-d., $n_x = \rho n_y$. En effet, dans ce cas particulier, les indices Υ sont alors tous égaux à une unique valeur $\rho \in \mathbb{N}_+$. La structure du dénominateur et du numérateur devient alors

Cette structuration des fractions matricielles est souvent rencontrée dans la littérature. En analyse modale, la plupart des algorithmes fondés sur l'utilisation de fractions matricielles font usage de ce paramétrage. C'est, par exemple, le cas du logiciel Polymax qui utilise ce type de paramétrages pour identifier des fonctions de transfert H(z) à temps discret (Guillaume et al., 2003). Le principal inconvénient d'un tel choix est que tous les ordres de systèmes ne peuvent pas être représentés. A l'inverse, la structuration générale donnée par l'équation (3.63), comme nous l'avons vu, permet de représenter tous les systèmes sauf cas isolés.

3.3.3.4 Interprétation géométrique

De même que pour le paramétrage échelon dans la Section 3.3.2.3, nous donnons ici une interprétation géométrique des paramétrages pseudo-canoniques. On note ψ^{Υ} un paramétrage pseudo-canonique qui associe le transfert H(s) d'indices de structure Υ aux paramètres libres θ_{pc}^{Υ} de la FMG (D(s), N(s)), soit

$$\begin{array}{ccccc}
\psi_{pc}^{\Upsilon} : & \mathbb{V}_{\Upsilon}^{pc} & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\Upsilon}^{pc} \\
& & \mathsf{H}(s) & \longmapsto & \theta_{pc}^{\Upsilon},
\end{array}$$
(3.74)

où $\mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon}$ est l'ensemble des fonctions de transfert représentées par les FMG sous forme pseudo-canonique d'indices de structure Υ , et $\mathbb{P}^{pc}_{\Upsilon}$ est l'ensemble des paramètres de ces FMG. Le théorème suivant, énoncé par Hannan et Deistler (1988), donne les principales propriétés de ce paramétrage.

Théorème 3.2 (Paramétrage pseudo-canonique des FMG). Le paramétrage pseudo-canonique ψ_{pc}^{Υ} avec $\Upsilon = (\rho_1 \ldots \rho_{n_y})$, possède les propriétés suivantes :

(i)
$$\mathbb{P}^{pc}_{\Upsilon}$$
 est un sous-ensemble ouvert et dense de $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$, où
 $n_{\theta} = n_x(n_u + n_y) + n_u n_y,$ (3.75)

- (ii) ψ_{pc}^{Υ} est un homéomorphisme,
- (iii) $\left\{ (\mathbb{V}_{\Upsilon}^{pc}, \psi_{pc}^{\Upsilon}) \mid |\Upsilon| = n_x \right\}$ est un système de coordonnées locales de $\mathbb{M}(n_x)$ contenant $\binom{n_y}{\mu_1}$ voisinages de coordonnées $\mathbb{V}_{\Upsilon}^{pc}$ se recouvrant, c.-à-d., que $\mathbb{M}(n_x)$ est une variété analytique réelle de dimension $n_x (n_u + n_y) + n_u n_y$.

Des commentaires identiques aux commentaires (i) et (ii) du Théorème 3.1 peuvent être formulés ici. De plus, notons que $\mathbb{V}^e_{\Upsilon} \subset \mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon}$ et qu'il y a égalité lorsque les indices Υ correspondent aux n_x premières lignes de la matrice de Hankel \mathcal{H} . En particulier, pour $n_y = 1$, nous avons alors $\mathbb{V}^{e}_{\Upsilon} = \mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon} = \mathbb{M}(n_x)$ (Hannan et Deistler, 1988). Enfin, notons que tous les ensembles $\mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon}$ du Théorème 2.6.3 dans (Hannan et Deistler, 1988) sont, en théorie, nécessaires pour couvrir $\mathbb{M}(n_x)$ (Ribarits, 2002). En se restreignant au choix d'indices quasi-constants, ceci ne peut être affirmé que de façon générique. En effet, comme mentionné précédemment, dans ce cas, les ensembles $\mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon}$ permettent de représenter *presque tous* les éléments de $\mathbb{M}(n_x)$. La propriété (*iii*) traduit l'avantage d'un paramétrage pseudo-canonique par rapport à un paramétrage canonique. En effet, cette propriété implique que chaque paramétrage pseudo-canonique est localement identifiable, c.-à-d., qu'il associe localement (au sein d'un voisinage de coordonnées) un unique vecteur de paramètres, ou coordonnées, θ à un transfert H(s). Toutefois, contrairement aux formes canoniques, les ensembles $\mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon}$ des transferts couverts par les différents paramétrages pseudo-canoniques ne sont pas disjoints.

La figure (3.2) donne une représentation géométrique des ensembles $\mathbb{M}(n_x)$, du recouvrement des ensembles $\mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon}$, et du paramétrage ψ^{Υ}_{pc} qui découle des propriétés vues précédemment.

Par analogie avec la définition de la forme échelon donnée à la Section 3.3.2.3, on parlera dans la suite de *forme pseudo-canonique* pour désigner l'ensemble des paramétrages pseudo-canoniques des FMG irréductibles d'ordre n_x .

3.3.4 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons justifié le choix des fractions matricielles comme représentation des transferts MIMO. Nous avons ensuite montré pourquoi il est nécessaire de paramétrer les fractions matricielles à travers plusieurs exigences que nous avons formulées. A la connaissance de l'auteur, seuls des paramétrages canoniques et pseudo-canoniques des fractions matricielles ont été proposés dans la littérature pour satisfaire ces exigences (Kailath, 1980; Hannan et Deistler, 1988; Guidorzi et Beghelli, 1982; Guidorzi, 1998). Nous avons comparé les propriétés géométriques des paramétrages canoniques échelons et des paramétrages pseudo-canoniques associés. Cela



FIGURE 3.2 – Représentation de l'ensemble $\mathbb{M}(n_x)$ dans le cas $n_y = 4$ et $n_x = 4$ ($\mu_1 = 1$) (à gauche) ainsi que des paramétrages $\psi_{pc}^{\Upsilon_1}$ et $\psi_{pc}^{\Upsilon_2}$ (à droite).

nous a permis de mettre en évidence les avantages qu'offrent les paramétrages pseudo-canoniques pour l'identification :

- L'ensemble des systèmes représentés par un paramétrage canonique est contenu dans l'ensemble des systèmes représentés par un paramétrage pseudo-canonique défini par le même jeu d'indices de structure Υ. De plus, l'utilisation de ce paramétrage permet théoriquement de représenter l'ensemble des systèmes linéaires à de rares cas isolés près.
- Chaque paramétrage pseudo-canonique est localement identifiable. Toutefois, les ensembles définis par les différents paramétrages se recouvrent. En d'autres termes, il est possible de représenter une fonction de transfert par plusieurs paramétrages pseudo-canoniques différents. Cette propriété offre un gros avantage pour la mise en œuvre de méthodes d'identification itératives car cela permet, si besoin, de changer de paramétrage en cours d'identification.

Ces propriétés nous permettent de conclure que la forme pseudo-canonique présentée dans ce chapitre est adaptée à la formulation de méthodes d'identification pour l'analyse modale. Dans le Chapitre suivant, nous formulons trois méthodes d'identification itératives fondées sur l'utilisation de cette forme pseudo-canonique.

Chapitre 4

Algorithmes itératifs d'identification fréquentielle de transferts MIMO

L'objectif de ce chapitre est de présenter trois algorithmes itératifs afin de généraliser au cas MIMO l'approche proposée par Vacher et Bucharles (2006b). Pour cela, nous proposons une généralisation de la méthode de Sanathanan et Koerner (1963) au cas MIMO fondée sur l'utilisation du paramétrage pseudo-canonique introduit au chapitre précédent. Toujours fondée sur ce même paramétrage, nous introduisons une nouvelle formulation de la méthode de Gauss-Newton pour les fonctions de transfert MIMO. Celle-ci correspond à une généralisation de l'expression particulière introduite par Whitfield (1987) pour les fonctions de transfert SISO. De plus, nous présentons également, dans ce chapitre, une troisième méthode itérative qui fait usage d'une variable instrumentale. Cette méthode initialement introduite par Blom et Van den Hof (2010) est ici généralisée afin d'identifier des systèmes MIMO de tout ordre. Enfin, le schéma de convergence de ces trois méthodes est comparé analytiquement et sur un cas de simulation.

Sommaire

| 4.1 | Défi | nition du problème d'identification | 62 | |
|-----|--|--|-----------|--|
| 4.2 | Mét | hode de Sanathanan-Koerner (SK) \ldots | 63 | |
| 4.3 | Mét | hode de Gauss-Newton (GN) | 67 | |
| 4.4 | Mét | hode de la Variable Instrumentale (VI) | 69 | |
| 4.5 | Discussion et comparaison des trois schémas de | | | |
| | conv | vergence SK, GN et VI | 71 | |
| 4.6 | Perf | ormances des méthodes en simulation | 73 | |
| | 4.6.1 | Présentation du benchmark \hdots | 73 | |
| | 4.6.2 | Résultats | 75 | |
| | 4.6.3 | Influence des effets transitoires | 80 | |
| | 4.6.4 | Blocages de l'algorithme de Gauss-Newton | 81 | |
| 4.7 | Bila | n | 83 | |
4.1 Définition du problème d'identification

Dans ce chapitre, nous traitons le problème d'identification dont l'objectif est de trouver le vecteur de paramètres $\theta \in \mathbb{R}^{n_{\theta}}$ qui minimise l'énergie $E(\theta)$ de l'erreur entre les n_y sorties mesurées du système et les sorties estimées par un modèle paramétrique. Dans le domaine temporel, cette énergie est définie par

$$E(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|y(t) - y(t,\theta)\|^2 dt, \qquad (4.1)$$

où $y(t,\theta) \in \mathbb{R}^{n_y}$ note le vecteur des sorties estimées, et $\| \bullet \|$ note la norme 2. Ce vecteur est défini, pour tout instant t, par le produit de convolution de la réponse impulsionnelle du modèle Linéaire à Temps Invariant (LTI) $h(t,\theta) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ avec le vecteur d'entrées $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, soit (Ljung, 1999)

$$y(t,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau,\theta) \ u(\tau) \ d\tau \ . \tag{4.2}$$

D'après l'égalité de Parseval (Reinhardt et Soeder, 1997), l'énergie d'un signal ne dépend pas du domaine de représentation. Ainsi, on peut exprimer cette énergie dans le domaine fréquentiel

$$E(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|Y(f) - Y(f,\theta)\|^2 df , \qquad (4.3)$$

où Y(f) et $Y(f, \theta)$ sont les transformées de Fourier respectivement de y(t) et de $y(t, \theta)$ calculées à la fréquence f. D'après l'équation (4.2) et la définition de la transformée de Fourier d'un produit de convolution, l'expression des sorties fréquentielles calculées $Y(f, \theta)$ est donnée par

$$Y(f,\theta) = \mathsf{H}(f,\theta) U(f) , \qquad (4.4)$$

où U(f) est la transformée de Fourier du vecteur d'entrées u(t). $H(f, \theta)$ est la valeur à la fréquence f du modèle $H(s, \theta)$ défini par la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t, \theta)$.

Ainsi, l'objectif de l'identification, dans le domaine fréquentiel, est de trouver la meilleure concordance possible entre les sorties d'un modèle paramétrique $H(s, \theta)$ et les transformées de Fourier des sorties mesurées. Dans la suite, seules les données aux n_f fréquences d'intérêt f appartenant à un ensemble noté \mathcal{F} sont considérées. En utilisant ces notations, on peut formuler le problème d'identification en erreur de sorties fréquentielles de la manière suivante : Trouver les valeurs de θ qui minimisent

$$J(\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \| Y(f) - Y(f,\theta) \|_W^2 .$$

$$(4.5)$$

La notation W signifie la possibilité d'inclure une matrice de pondération des sorties. On considère, dans ce chapitre, uniquement le paramétrage pseudocanonique présenté au Chapitre 3, c.-à-d., que le vecteur de paramètres contient les coefficients non fixés à 0 ou à 1 des fractions matricielles. Afin de simplifier les notations, on note $\theta \triangleq \theta_{pc}^{\Upsilon}$. D'autre part, plusieurs algorithmes itératifs sont introduits dans la suite de ce chapitre. Le vecteur calculé à l'itération précédente est noté $\check{\theta}$. Pour des raisons de clarté, l'indice f sera utilisé dans la suite afin de noter les valeurs calculées aux fréquences f, soit $H_f(\theta) \triangleq H(f,\theta), D_f(\theta) \triangleq D(f,\theta), N_f(\theta) \triangleq N(f,\theta)$. De même, on notera $U_f \triangleq U(f)$ et $Y_f \triangleq Y(f)$. De plus, toujours dans un souci de clarté, les notations sont aussi simplifiées pour exprimer les valeurs calculées avec $\check{\theta}$. Ainsi, on notera $\check{D}_f \triangleq D(f,\check{\theta}), \check{N}_f \triangleq N(f,\check{\theta})$ et $\check{H}_f \triangleq H(f,\check{\theta})$.

4.2 Méthode de Sanathanan-Koerner (SK)

Cette méthode itérative fut initialement développée par Sanathanan et Koerner (1963) afin d'identifier des fonctions de transfert SISO à temps continu à partir de données d'entrée-sortie fréquentielles. Steiglitz et Mc-Bride (1965) ont développé, quelques années plus tard, une méthode équivalente pour l'identification de modèles à temps discret à partir de données temporelles discrètes. Plus récemment, des travaux ont été réalisés afin de prouver l'existence de points stationnaires pour cet algorithme (Regalia et al., 1997) et d'exprimer la valeur maximale de la norme 2 de l'erreur du modèle identifié en de tels points (Regalia et Mboop, 1996). Ces résultats montrent que la méthode de Steiglitz-McBride, et donc également la méthode de Sanathanan-Koerner par extension de ces résultats au domaine fréquentiel, possède des propriétés d'approximation de systèmes complexes par des modèles d'ordre réduit qui sont particulièrement intéressantes (Regalia et Mboop, 1996). D'autre part, De Callafon et al. (1996) ont généralisé l'algorithme SK au cas multivariables en l'adaptant pour l'identification des fractions matricielles. Cependant, cette formulation ne permet pas d'identifier des systèmes MIMO à tous les ordres possibles. Dans cette section, nous proposons une formulation fondée sur l'utilisation des formes pseudo-canoniques introduites au Chapitre 3. Nous verrons que l'expression de l'algorithme SK alors obtenue, plus générale que celle trouvée dans (De Callafon et al., 1996), nous permettra d'identifier l'ensemble des fonctions de transfert MIMO de systèmes LTI.

D'après la définition du problème d'identification donnée par l'équa-

tion (4.5), nous cherchons à minimiser le critère d'identification suivant

$$J(\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \| Y_f - \mathsf{H}_f(\theta) U_f \|_W^2, \qquad (4.6)$$

où $H_f(\theta)$ est considérée sous forme d'une FMG. En factorisant ce critère par $D_f^{-1}(\theta)$, on peut écrire

$$J(\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \| \mathsf{D}_f^{-1}(\theta) \left(\mathsf{D}_f(\theta) Y_f - \mathsf{N}_f(\theta) U_f \right) \|_W^2.$$
(4.7)

L'expression précédente fait apparaître clairement que le critère à minimiser est non-linéaire par rapport à θ . La minimisation d'un tel critère ne peut donc pas se faire en utilisant une méthode de résolution linéaire telle que les moindres carrés. Afin de linéariser l'expression (4.7), la méthode SK consiste à remplacer le terme $\mathsf{D}_f^{-1}(\theta)$ par la valeur $\check{\mathsf{D}}_f$ calculée à l'itération précédente. Il en résulte l'expression d'un critère légèrement différent du critère d'identification exprimé par

$$J_{\rm sk}(\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \| \check{\mathsf{D}}_f^{-1} \left(\mathsf{D}_f(\theta) \, Y_f - \mathsf{N}_f(\theta) \, U_f \right) \|_W^2 \,. \tag{4.8}$$

Remarque 4.1. On peut remarquer que pour une représentation sous forme de FMD, l'équation (4.6) s'écrit

$$J(\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \| Y_f - \mathsf{N}_f(\theta) \, \mathsf{D}_f^{-1}(\theta) \, U_f \, \|_W^2 \,. \tag{4.9}$$

Il n'est alors pas possible de factoriser le terme de droite par $\mathsf{D}_f^{-1}(\theta)$. De ce fait, lorsque les transformées de Fourier des mesures d'entrée-sortie sont considérées, la méthode SK ne peut s'écrire que pour une représentation sous forme de FMG.

Le critère (4.8) est linéaire en θ et approche le critère d'identification lorsque $\check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} \approx \mathsf{D}_{f}^{-1}(\theta)$. Ainsi, la méthode SK permet de minimiser le critère d'identification de manière itérative sans recourir à une méthode d'optimisation non linéaire. De plus, cette méthode ne requiert pas de modèle initial puisqu'elle peut être initialisée, sans information *a priori*, en fixant $\check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} = I$ à la première itération. Le critère $J_{\rm sk}(\theta)$ étant linéaire en θ , minimiser l'équation (4.8) revient à résoudre un problème des moindres carrés à chaque itération. Afin d'exprimer ce problème sous une forme matricielle du type $||Ax+B||^2$, nous développons l'expression (4.8). Ce développement est fondé sur l'utilisation du paramétrage pseudo-canonique des FMG présenté au Chapitre 3. Celui-ci implique que la matrice des coefficients de plus haut degré ligne (cf. p. 38) est fixée à l'identité, notée I. D'après la structure du dénominateur donnée par l'équation (3.63) (p. 54), pour un choix d'indices $\Upsilon = \begin{bmatrix} \rho & \cdots & \rho & \rho + 1 & \cdots & \rho + 1 \end{bmatrix}$, les termes fixés peuvent être isolés en écrivant

$$\mathsf{D}_f(\theta) = \underline{\mathsf{D}}_f(\theta) + \overline{\mathsf{D}}_f \,. \tag{4.10}$$

 D_f désigne les termes de plus haut degrés du dénominateur définis par

$$\bar{\mathsf{D}}_f = I \times \operatorname{diag}\left(\underbrace{(j2\pi f)^{\rho} \cdots (j2\pi f)^{\rho}}_{\mu_1 \text{ fois}} \underbrace{(j2\pi f)^{\rho+1} \cdots (j2\pi f)^{\rho+1}}_{\mu_2 \text{ fois}}\right),$$
(4.11)

et $\underline{D}_f(\theta)$ désigne l'ensemble des autres termes du dénominateur. En utilisant l'expression (4.10), le critère (4.8) peut donc s'écrire

$$J_{\rm sk}(\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \| \check{\mathsf{D}}_f^{-1} \left(\underline{\mathsf{D}}_f(\theta) \, Y_f - \mathsf{N}_f(\theta) \, U_f \right) + \check{\mathsf{D}}_f^{-1} \, \bar{\mathsf{D}}_f \, Y_f \, \|_W^2 \,. \tag{4.12}$$

On peut remarquer que le cas particulier $n_x = \rho n_y$, correspondant à fixer $D_{\rho} = I$, conduit à $\bar{D}_f = I \times (j2\pi f)^{\rho}$. Ce cas particulier permet de retrouver l'écriture de cette méthode telle que rencontrée dans la littérature (De Callafon et al., 1996). Cependant, à la connaissance de l'auteur, la généralisation de cette expression, donnée par l'équation (4.12), n'existait pas.

En regroupant les termes de cette équation pour les n_f fréquences considérées, on peut construire une matrice $\mathbb{M}_{\mathrm{sk}} \in \mathbb{C}^{n_y n_f \times n_\theta}$ et un vecteur $\mathbb{Z}_{\mathrm{sk}} \in \mathbb{C}^{n_y n_f}$ définis par

$$\left| \begin{array}{c} \vdots \\ W \,\check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} \left(\,\underline{\mathsf{D}}_{f}(\theta) \,Y_{f} - \mathsf{N}_{f}(\theta) \,U_{f} \,\right) \\ \vdots \end{array} \right| = \mathbb{M}_{\mathrm{sk}} \,\theta \,, \tag{4.13}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ W \check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} \bar{\mathsf{D}}_{f} Y_{f} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbb{Z}_{\mathrm{sk}} .$$

$$(4.14)$$

Le produit $\mathbb{M}_{sk} \theta$ s'obtient en vectorisant (Golub et Van Loan, 1996) les combinaisons linéaires de θ . L'obtention des termes de \mathbb{M}_{sk} par le biais de cette opération relève uniquement d'un problème d'arrangement de données qui n'est pas détaillé ici. Le lecteur intéressé peut, par exemple, se référer à (De Callafon et al., 1996) qui détaille la construction de la matrice \mathbb{M}_{sk} .

Minimiser l'équation (4.8) revient donc à résoudre le problème des moindres carrés suivant¹

$$J_{\rm sk}(\theta) = \| \mathbb{M}_{\rm sk} \ \theta + \mathbb{Z}_{\rm sk} \|^2 , \qquad (4.15)$$

¹Notons que dans cette expression, la norme n'est plus pondérée car les pondérations sont incluses dans \mathbb{M}_{sk} et \mathbb{Z}_{sk}

Afin qu'une solution θ soit trouvée, le problème doit être sur-déterminé, c.à-d., que le nombre de lignes de la matrice \mathbb{M}_{sk} doit être supérieur ou égal au nombre de paramètres composant θ , ce qui implique

$$n_f \ge \frac{n_\theta}{n_y} \,. \tag{4.16}$$

Par conséquent, la matrice \mathbb{M}_{sk} est généralement rectangulaire avec un nombre de lignes supérieur au nombre de colonnes.

En pratique, la matrice \mathbb{M}_{sk} est toujours de rang plein. En effet, d'après l'équation (4.12), on peut remarquer que les colonnes de \mathbb{M}_{sk} ne sont linéairement dépendantes que si θ correspond au vecteur des paramètres exacts du système. Le problème des moindres carrés (4.15) possède donc toujours une solution θ unique. La matrice \mathbb{M}_{sk} étant construite avec des valeurs complexes, cette solution est complexe. Toutefois, une solution réelle est obtenue en résolvant le problème (4.15) pour les parties réelles et imaginaires de \mathbb{M}_{sk} et \mathbb{Z}_{sk} . En notant respectivement $\overline{\mathbb{M}}_{sk}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{sk}$ la matrice réelle et le vecteur réel définis par

$$\bar{\mathbb{M}}_{sk} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{\mathbb{M}_{sk}\} \\ \operatorname{Im}\{\mathbb{M}_{sk}\} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{Z}}_{sk} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{\mathbb{Z}_{sk}\} \\ \operatorname{Im}\{\mathbb{Z}_{sk}\} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

la solution réelle à chaque itération de l'algorithme SK est alors donnée par

$$\theta = -(\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{sk}}^{\top} \bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{sk}})^{-1} \bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{sk}}^{\top} \bar{\mathbb{Z}}_{\mathrm{sk}} \,. \tag{4.18}$$

Remarque 4.2. Nous avons introduit l'algorithme SK comme une méthode permettant de linéariser le problème d'identification en erreur de sorties. Une autre vision trouvée dans la littérature considère la résolution du problème posé à chaque itération SK comme le choix d'un paramétrage particulier du bruit (Söderström et Stoica, 1989). Rappelons que la formulation du problème en erreur de sortie suppose les sorties mesurées Y_f égales à la somme des sorties déterministes du système et d'un terme de bruit noté ϵ , soit

$$Y_f = \mathsf{H}_f(\theta) \, U_f + \epsilon_f \,, \tag{4.19}$$

où ϵ_f est la composante du bruit de fréquence f. Ainsi, la minimisation du critère initial (4.6) revient à minimiser l'effet du bruit ϵ_f sur les mesures. Dans ce cas, aucune hypothèse sur la représentation du bruit n'est formulée. En revanche, la minimisation du problème (4.8) se justifie en supposant que le bruit est de la forme $\epsilon_f = D_f^{-1}(\theta)\epsilon_{bf}$ où ϵ_{bf} est un bruit blanc. Si cette hypothèse est vérifiée, une résolution par moindres carrés linéaires donne une solution θ non biaisée qui vérifie

$$\mathsf{D}_{f}(\theta) Y_{f} - \mathsf{N}_{f}(\theta) U_{f} = \epsilon_{bf} .$$

$$(4.20)$$

On parle, dans ce cas, d'un paramétrage ARX (Auto Regressive model with eXogenous inputs) du bruit (Söderström et Stoica, 1989). D'après l'équation (4.8), on voit que la méthode SK consiste à résoudre à chaque itération

un tel problème des moindres carrés où $\check{\mathsf{D}}_f^{-1}$ joue alors le rôle de pondération fréquentielle. Cette approche permet de mettre en évidence le fait que si le bruit affectant les mesures ne respecte pas cette hypothèse, alors les paramètres identifiés par cette méthode sont biaisés (Van den Hof et al., 2008).

4.3 Méthode de Gauss-Newton (GN)

Whitfield (1987) a donné l'expression particulière de l'algorithme de Gauss-Newton dans le cas particulier des fonctions de transfert SISO. Nous introduisons ici la généralisation de cette expression pour les fractions matricielles à gauche et à droite. Afin de linéariser localement l'expression (4.7), cette méthode consiste à remplacer $H_f(\theta)$ par son développement en série de Taylor du premier ordre autour de $\check{\theta}$, soit

$$\mathsf{H}_{f}(\theta) = \check{\mathsf{H}}_{f} + \left. \frac{\partial \,\mathsf{H}_{f}}{\partial \theta} \right|_{\theta = \check{\theta}} \Delta\theta \,, \tag{4.21}$$

où $\Delta \theta = \theta - \check{\theta}$ est le pas de variation des paramètres. Les résultats sur les FMD s'obtenant par transposition des expressions valables pour les FMG, nous détaillons ici l'obtention de l'expression de la méthode de Gauss-Newton uniquement dans le cas des FMG. Avant de définir l'expression des dérivées de $H_f(\theta)$, rappelons que le vecteur de paramètres θ groupe les coefficients non nuls des polynômes du dénominateur et du numérateur, soit

$$\theta = \begin{bmatrix} \dots & d_{ij,l} & \dots & | & \dots & n_{ij,l} & \dots \end{bmatrix}^T .$$
 (4.22)

 $d_{ij,l}$ et $n_{ij,l}$ sont les coefficients de degré l des polynômes de la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne respectivement du dénominateur $\mathsf{D}_f(\theta)$ et du numérateur $\mathsf{N}_f(\theta)$. En considérant ces notations, les règles de dérivation matricielle (Golub et Van Loan, 1996) appliquées à $\mathsf{H}_f(\theta) = \mathsf{D}_f^{-1}(\theta) \mathsf{N}_f(\theta)$ donnent

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{f}}{\partial d_{ik,l}}\Big|_{\theta=\check{\theta}} = -\check{\mathbf{D}}_{f}^{-1} i \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & (j2\pi f)^{l} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \check{\mathbf{D}}_{f}^{-1} \check{\mathbf{N}}_{f},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_{f}}{\partial n_{ik,l}}\Big|_{\theta=\check{\theta}} = \check{\mathbf{D}}_{f}^{-1} i \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & (j2\pi f)^{l} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
(4.23)

D'après ces expressions, il apparait directement que $H_f(\theta)$ est continuement différentiable par rapport à θ pour toutes les valeurs fréquentielles dans le cas général. Dans le cas particulier où D(s) possède des pôles imaginaires purs, les dérivées partielles ne sont pas définies pour les pulsations $\omega = 2\pi f$ égales à ces valeurs de pôles. Cela correspond au cas de systèmes nonasymptotiquement stables qui ne sera pas rencontré dans notre situation. On suppose donc, sans réelle restriction, que $H_f(\theta)$ est continuement différentiable sur l'ensemble \mathcal{F} des fréquences considérées. Pour toute valeur $f \in \mathcal{F}$, le terme du premier ordre de $H_f(\theta)$ autour de la valeur précédente de θ vaut

$$\frac{\partial \mathsf{H}_f}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\check{\theta}} \Delta \theta = \sum_{p \in \mathbb{I}_n} \left. \frac{\partial \mathsf{H}_f}{\partial \theta_p} \right|_{\theta=\check{\theta}} \Delta \theta_p + \sum_{p \in \mathbb{I}_d} \left. \frac{\partial \mathsf{H}_f}{\partial \theta_p} \right|_{\theta=\check{\theta}} \Delta \theta_p , \qquad (4.24)$$

où θ_p est le $p^{i\text{ème}}$ scalaire de θ et où $\Delta \theta_p = \theta_p - \check{\theta}_p$. \mathbb{I}_n et \mathbb{I}_d sont l'ensemble des positions respectives des coefficients $n_{ij,l}$ et $d_{ij,l}$ dans le vecteur θ . D'après les expressions (4.23), les deux dérivées du terme à droite dans l'équation (4.24) valent respectivement

$$\sum_{p \in \mathbb{I}_{n}} \left. \frac{\partial \mathsf{H}_{f}}{\partial \theta_{p}} \right|_{\theta = \check{\theta}} \Delta \theta_{p} = \check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} \mathsf{N}_{f}(\Delta \theta) ,$$

$$\sum_{p \in \mathbb{I}_{d}} \left. \frac{\partial \mathsf{H}_{f}}{\partial \theta_{p}} \right|_{\theta = \check{\theta}} \Delta \theta_{p} = -\check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} \underline{\mathsf{D}}_{f}(\Delta \theta) \check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} \check{\mathsf{N}}_{f} .$$

$$(4.25)$$

Les matrices $N_f(\Delta\theta)$ et $\underline{D}_f(\Delta\theta)$ (défini à l'équation (4.10)) sont reconstruites en sommant les multiplications de chaque coefficient $\Delta\theta_p$ par la matrice qui contient $(j2\pi f)^l$ à la position correspondante. Enfin, en remarquant dans l'équation (4.25) que $\check{D}_f^{-1}\check{N}_f = \check{H}_f$, le critère minimisé à chaque itération GN peut s'écrire

$$J_{\rm gn}(\Delta\theta) = \sum_{f\in\mathcal{F}} \|\Delta Y_f - \check{\mathsf{D}}_f^{-1}(\mathsf{N}_f(\Delta\theta) - \underline{\mathsf{D}}_f(\Delta\theta)\,\check{\mathsf{H}}_f)\,U_f\,\|_W^2\,,\qquad(4.26)$$

où $\Delta Y_f = Y_f - \dot{\mathsf{H}}_f U_f$. Par transposition des expressions dérivées (4.25), une expression similaire est obtenue pour les FMD. L'expression du critère minimisé à chaque itération est alors donnée dans les deux cas par²

FMG :
$$J_{\text{gn}}(\Delta\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \|Z_f - \check{\mathsf{D}}_f^{-1}(\mathsf{N}_f(\Delta\theta) - \underline{\mathsf{D}}_f(\Delta\theta)\,\check{\mathsf{H}}_f)\,U_f\,\|_W^2$$
, (4.27)

$$\text{FMD}: \quad J_{\text{gn}}(\Delta\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \| Z_f - (\mathsf{N}_f(\Delta\theta) - \check{\mathsf{H}}_f \underline{\mathsf{D}}_f(\Delta\theta)) \,\check{\mathsf{D}}_f^{-1} \, U_f \, \|_W^2 \,, \quad (4.28)$$

avec

FMG :
$$\check{\mathsf{H}}_f = \check{\mathsf{D}}_f^{-1} \check{\mathsf{N}}_f$$
 et $Z_f = \Delta Y_f$, (4.29)

FMD :
$$\check{\mathsf{H}}_f = \check{\mathsf{N}}_f \check{\mathsf{D}}_f^{-1}$$
 et $Z_f = \Delta Y_f$, (4.30)

²Par soucis de clarté des expressions, nous conservons les mêmes notations dans les deux cas, mais il faut comprendre $\mathsf{D}_f \triangleq \mathsf{D}_G(f,\theta)$ et $\mathsf{N}_f \triangleq \mathsf{N}_G(f,\theta)$ pour les FMG et $\mathsf{D}_f \triangleq \mathsf{D}_D(f,\theta)$ et $\mathsf{N}_f \triangleq \mathsf{N}_D(f,\theta)$ pour les FMD.

où les termes D_f et $\underline{D}_f(\Delta\theta)$ sont définis comme à l'équation (4.10). Dans les deux cas, le critère J_{gn} est linéaire en $\Delta\theta$. De façon similaire aux itérations SK, minimiser les expressions (4.27) et (4.28) revient donc à résoudre un problème des moindres carrés de la forme

$$J_{\rm gn}(\Delta\theta) = \|\mathbb{M}_{\rm gn} \Delta\theta - \mathbb{Z}_{\rm gn}\|^2, \qquad (4.31)$$

où la matrice $\mathbb{M}_{\text{gn}} \in \mathbb{C}^{n_y n_f \times n_\theta}$, construite d'après les dérivées (4.25), est la matrice Jacobienne. Le vecteur $\mathbb{Z}_{\text{gn}} \in \mathbb{C}^{n_y n_f}$ est construit en groupant les termes Z_f pour toutes les fréquences considérées. La construction de \mathbb{M}_{gn} et \mathbb{Z}_{gn} est similaire à celle de \mathbb{M}_{sk} et \mathbb{Z}_{sk} décrite respectivement par les équations (4.13) et (4.14).

Afin que ce problème possède une solution, le nombre de fréquences considérées doit être supérieur ou égal au nombre de paramètres à identifier. Autrement dit, de même que pour les itérations SK, la matrice M_{gn} doit posséder un nombre de lignes supérieur ou égal au nombre de colonnes. La Jacobienne étant de rang plein lorsque le problème n'est pas sur-paramétré (Wills et Ninness, 2008), il existe donc une unique solution réelle au problème des moindres carrés (4.31) donnée par

$$\Delta \theta = (\bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \bar{\mathbb{M}}_{gn})^{-1} \bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \bar{\mathbb{Z}}_{gn} , \qquad (4.32)$$

où $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{gn}$ désignent les matrices réelles construites respectivement de façon analogue à $\overline{\mathbb{M}}_{sk}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{sk}$ selon l'équation (4.17). La mise à jour des paramètres à chaque itération est finalement donnée par

$$\theta = \dot{\theta} + \Delta\theta \,. \tag{4.33}$$

Afin d'assurer que la nouvelle valeur du critère soit inférieure à la valeur précédente, cette méthode de base peut être améliorée en effectuant une recherche unidimensionnelle selon la direction $\Delta\theta$ (Verhaegen et Verdult, 2007), soit

$$\theta = \dot{\theta} + \alpha \ \Delta\theta \ , \tag{4.34}$$

où la valeur scalaire α est trouvée en appliquant une des méthodes de recherche unidimensionnelle disponibles dans la littérature (voir par exemple Minoux, 1983).

4.4 Méthode de la Variable Instrumentale (VI)

Un inconvénient important de l'algorithme proposé par Sanathanan et Koerner (1963) est que la convergence des itérations n'implique pas nécessairement une minimisation du critère d'identification en erreur de sortie. En effet, comme nous l'avons mentionné précédemment, les itérations SK minimisent l'influence d'un bruit dont on suppose qu'il est généré par un procédé ARX. Si ce n'est pas le cas, les paramètres estimés sont alors biaisés (Van den Hof et al., 2008). L'algorithme de Gauss-Newton est en revanche capable d'identifier un modèle non biaisé mais doit pour cela être initialisé à proximité du minimum du critère afin de limiter le nombre d'itérations nécessaires pour converger (Ljung, 1999). Les méthodes d'optimisations non-convexes telles que l'algorithme de Gauss-Newton sont sensibles à l'initialisation fournie. L'obtention d'un modèle initial satisfaisant pour assurer un bon fonctionnement de ces méthodes reste un problème ouvert. Dans la littérature, des méthodes alternatives fondées sur l'utilisation d'une VI ont été étudiées (Young, 1976; Söderström et Stoica, 1983). Parmi ces méthodes, la méthode dite Simplified Refined IV (SRIV) fournit des estimées optimales lorsque le système respecte les hypothèses du paramétrage en erreur de sortie et présente l'avantage de fournir des paramètres estimés non biaisés lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée (Garnier et al., 2007; Young et al., 2008). Elle fut à l'origine formulée dans le domaine temporel. Plus récemment, une version fréquentielle de cette méthode a été proposée afin d'identifier des systèmes SISO (Van den Hof et al., 2008) et MIMO (Blom et Van den Hof, 2010). Cependant, la version MIMO proposée ne peut identifier que des modèles d'ordre égal à un multiple du nombre de sorties.

Dans cette section, nous proposons une formulation de cette méthode selon le même formalisme que celui utilisé précédemment pour les itérations SK et GN. Ainsi, nous allons généraliser cette version fréquentielle de SRIV à l'identification de systèmes MIMO de tout ordre. Dans la suite, nous appelons méthode VI cette généralisation. Pour cela, nous adoptons l'approche proposée par Van den Hof et al. (2008) qui ont montré que cette méthode consiste à trouver le vecteur θ pour lequel la dérivée du critère (4.6) est nulle. En d'autres termes, pour trouver les paramètres qui minimisent localement $J(\theta)$, SRIV cherche le vecteur de paramètres solution de

$$\left. \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}} = 0.$$
(4.35)

De même que la méthode de Sanathanan-Koerner, si des données d'entréesortie sont utilisées, l'expression de la méthode VI est impossible en considérant les FMD. Dans la suite de cette section nous considérons donc uniquement des transferts sous forme de FMG. D'après la définition (4.6) du critère $J(\theta)$ et d'après les règles de dérivation matricielle, on a (Van den Hof et al., 2008)

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{f \in \mathcal{F}} -2 \operatorname{Re} \{ (W \psi_f(\theta) U_f)^H W(Y_f - \mathsf{H}_f(\theta) U_f) \}, \qquad (4.36)$$

où $\psi_f(\theta) = \frac{\partial H_f}{\partial \theta}\Big|_{\theta = \check{\theta}}$ est la différentielle définie par l'équation (4.24) et $(\bullet)^H$ note la transposée Hermitienne d'une matrice. Ainsi, pour tout minimum

local du critère, la relation suivante est vérifiée

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{Re} \{ (W \psi_f(\theta) U_f)^H W (Y_f - \mathsf{H}_f(\theta) U_f) \} = 0, \qquad (4.37)$$

où le terme de gauche est non-linéaire par rapport à θ . La méthode VI approche ce problème non linéaire par le problème linéaire suivant

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{Re} \{ (W \,\check{\psi}_f \, U_f)^H \, W \,\check{\mathsf{D}}_f^{-1} \left(\,\mathsf{D}_f(\theta) \, Y_f - \mathsf{N}_f(\theta) \, U_f \, \right) \} = 0 \,.$$
(4.38)

D'après l'équation (4.37), le terme de gauche de l'équation (4.38) est obtenu en appliquant le même principe que pour les itérations SK, c.-à-d. en remplaçant $D_f(\theta)$ par \check{D}_f . De plus, les différentielles $\psi_f(\theta)$ sont également remplacées par les valeurs $\check{\psi}_f$ calculées à l'itération précédente. De ce fait, la solution de l'équation (4.37) est recherchée de façon itérative en résolvant le problème linéaire (4.38) à chaque itération. On peut remarquer que la résolution de ce problème correspond à la recherche de la solution réelle qui minimise l'erreur entre les sorties filtrées par \check{D}_f^{-1} et multipliées par la variable instrumentale $(W \psi_f(\theta) U_f)^H$.

En développant le dénominateur afin d'isoler les termes de plus haut degré selon

$$\mathsf{D}_f(\theta) = \underline{\mathsf{D}}_f(\theta) + \bar{\mathsf{D}}_f , \qquad (4.39)$$

de façon similaire aux méthodes SK et GN, on obtient

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{Re} \{ (W \,\tilde{\psi}_f)^H (W \,\check{\mathsf{D}}_f^{-1} (\,\mathsf{D}_f(\theta) \,Y_f - \mathsf{N}_f(\theta) \,U_f \,) + W \,Z_f \,) \} = 0 \,, \quad (4.40)$$

avec $Z_f = \check{\mathsf{D}}_f^{-1} \bar{\mathsf{D}}_f Y_f$. Les matrices \mathbb{M}_{gn} , \mathbb{M}_{sk} et \mathbb{Z}_{sk} introduites dans les sections précédentes sont construites en regroupant respectivement les termes $W \check{\psi}_f U_f$, $W \check{\mathsf{D}}_f^{-1} (\mathsf{D}_f(\theta) Y_f - \mathsf{N}_f(\theta) U_f)$ et $W Z_f$ calculés pour les n_f fréquences f considérées. Avec ces notations, la résolution du problème (4.38) revient donc à résoudre à chaque itération

$$\bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \left(\bar{\mathbb{M}}_{sk} \theta + \bar{\mathbb{Z}}_{sk} \right) = 0.$$
(4.41)

Comme expliqué dans les sections précédentes, les matrices $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$ et $\overline{\mathbb{M}}_{sk}$ sont de rang plein. La solution θ réelle à chaque itération de la méthode VI est donc donnée par

$$\theta = -(\bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \bar{\mathbb{M}}_{sk})^{-1} \bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \bar{\mathbb{Z}}_{sk} .$$

$$(4.42)$$

4.5 Discussion et comparaison des trois schémas de convergence SK, GN et VI

Lorsqu'une représentation sous forme de FMG est choisie, les expressions des trois schémas de convergence SK, GN et VI sont similaires. En comparant

les équations (4.18), (4.32) et (4.42), on remarque que celles-ci sont fondées sur les mêmes matrices $\overline{\mathbb{M}}_{sk}$ et $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$. Cependant, la méthode de Gauss-Newton calcule $\Delta \theta$ alors que la méthode de Sanathanan-Koerner et la méthode VI calculent directement θ à chaque itération. Afin de rendre la comparaison de ces trois schémas de convergence plus directe, nous allons montrer que les expressions des itérations SK et VI peuvent être modifiées pour exprimer leurs résolutions comme le calcul de $\Delta \theta$ à chaque itération.

Pour cela, nous introduisons la notation $\tilde{\mathcal{E}}_f = \mathcal{E}_f(\tilde{\theta})$ définissant l'erreur de sortie calculée à l'itération précédente. Avec les notations précédemment introduites, son expression est

$$\check{\mathcal{E}}_f = \check{\mathsf{D}}_f^{-1} \left(\check{\mathsf{D}}_f Y_f - \check{\mathsf{N}}_f U_f \right).$$
(4.43)

En regroupant les parties réelles et imaginaires des termes de l'équation (4.43)évaluées aux fréquences f, on obtient

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \operatorname{Re}\{W \,\check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} \,(\,\check{\mathsf{D}}_{f} \,Y_{f} - \check{\mathsf{N}}_{f} \,U_{f} \,)\} \\ \vdots \\ \operatorname{Im}\{W \,\check{\mathsf{D}}_{f}^{-1} \,(\,\check{\mathsf{D}}_{f} \,Y_{f} - \check{\mathsf{N}}_{f} \,U_{f} \,)\} \\ \vdots \end{bmatrix} = \bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{sk}} \,\check{\theta} + \bar{\mathbb{Z}}_{\mathrm{sk}} \,,$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \operatorname{Re}\{W \,\check{\mathcal{E}}_{f}\} \\ \vdots \\ \operatorname{Im}\{W \,\check{\mathcal{E}}_{f}\} \\ \vdots \end{bmatrix} = \bar{\mathbb{Z}}_{\mathrm{gn}} \,.$$

$$(4.44)$$

Ainsi, d'après l'équation (4.43), on obtient la relation suivante

$$\bar{\mathbb{Z}}_{\rm sk} = \bar{\mathbb{Z}}_{\rm gn} - \bar{\mathbb{M}}_{\rm sk} \check{\theta} \,. \tag{4.45}$$

Par conséquent, dans les expressions des solutions obtenues avec les méthodes SK et VI respectivement données par les équations (4.18) et (4.42), le terme $\overline{\mathbb{Z}}_{sk}$ peut être remplacé par l'expression (4.45). Ce faisant, les schémas itératifs des méthodes SK et VI sont réécrits d'une manière similaire à celui de la méthode de Gauss-Newton, soit

$$\theta = \check{\theta} + \Delta\theta \,, \tag{4.46}$$

avec

$$SK: \quad \Delta\theta = -(\bar{\mathbb{M}}_{sk}^{\top}\bar{\mathbb{M}}_{sk})^{-1}\bar{\mathbb{M}}_{sk}^{\top}\bar{\mathbb{Z}}_{gn}, \qquad (4.47)$$

$$VI: \quad \Delta\theta = -(\bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \bar{\mathbb{M}}_{sk})^{-1} \bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \bar{\mathbb{Z}}_{gn} , \qquad (4.48)$$

$$GN: \quad \Delta\theta = (\bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \, \bar{\mathbb{M}}_{gn})^{-1} \, \bar{\mathbb{M}}_{gn}^{\top} \, \bar{\mathbb{Z}}_{gn} \,. \tag{4.49}$$

Ce résultat montre clairement que le schéma de convergence de la méthode VI a une formulation similaire à celle des itérations SK et GN. La direction de descente $\Delta\theta$ calculée à chaque itération est cependant différente. On remarque qu'elle fait intervenir les deux matrices \mathbb{M}_{sk} et \mathbb{M}_{gn} qui permettent de calculer respectivement les directions de recherche des itérations SK et GN. Dans les trois cas, une recherche unidimensionnelle selon la direction de recherche $\Delta\theta$ peut être réalisée afin d'assurer une décroissance du critère. La mise à jour des paramètres est alors donnée par

$$\theta = \dot{\theta} + \alpha \,\Delta\theta \,, \tag{4.50}$$

où $\alpha \in [0 \ 1]$ est trouvé en appliquant une des méthodes de recherche unidimensionnelle disponibles dans la littérature (cf. par exemple (Minoux, 1983)). Une telle stratégie de recherche implique que la direction de recherche soit une direction de descente. Cette condition est toujours vraie dans le cas de l'algorithme de Gauss-Newton (Björk, 1996). A la connaissance de l'auteur, cela n'est pas prouvé, pour les directions de recherche données par la méthode VI et la méthode SK. S'il arrivait que la direction de recherche ne soit pas une direction de descente, il serait donc alors préférable d'effectuer une recherche unidimensionnelle selon la direction $-\Delta\theta$. La détermination de ces éventuelles situations et leur étude n'a cependant pas été traitée et est remise à des travaux ultérieurs. Dans la suite la recherche unidimensionnelle est donc effectuée selon la direction de $\Delta\theta$ pour les trois méthodes.

4.6 Performances des méthodes en simulation

4.6.1 Présentation du benchmark

Afin d'illustrer les propriétés des méthodes itératives discutées précédemment, nous appliquons leur utilisation à l'identification d'un modèle multivariable d'ordre $n_x = 4$, possédant trois sorties, et deux entrées. Les sorties mesurées sont données par

$$y(t) = y_0(t) + v(t), \qquad (4.51)$$

où $y_0(t)$ note les sorties non bruitées du système et v(t) un bruit de mesure coloré. Les sorties non bruitées du système sont générées par le processus markovien suivant

$$y_0(t) = \int_0^{+\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau , \qquad (4.52)$$

où $h(t-\tau) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ sont les paramètres de Markov du système. $v(t) \in \mathbb{R}^3$ est un bruit de mesure coloré généré par

$$v(t) = \int_0^{+\infty} g(t-\tau) e(\tau) d\tau , \qquad (4.53)$$

où $g(t-\tau) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et $e(\tau) \in \mathbb{R}^3$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance notée var(e(t)) (Ljung, 1999). En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (4.51), l'expression des sorties Y(s) dans le domaine de Laplace est donnée par

$$Y(s) = \mathsf{H}(s) U(s) + \mathsf{G}(s) \operatorname{var}(e(t)), \qquad (4.54)$$

où $var(e(t))(\bullet)$ note la variance et

$$H(s) = D^{-1}(s) N(s)$$
 et $G(s) = A^{-1}(s) B(s)$. (4.55)

Le bruit de mesure coloré est donc le résultat d'un bruit blanc qui passe à travers un filtre dont le numérateur et le dénominateur sont différents de ceux du système. Les valeurs de D(s), N(s), A(s) et B(s) sont données par l'Annexe A.1.

Le signal d'excitation utilisé est un créneau d'une durée de 0.2 secondes appliqué successivement à chacune des deux entrées. L'identification est réalisée avec les transformées de Fourier des entrées et des sorties du système. Celles-ci sont calculées à partir des données enregistrées durant les 20 secondes qui suivent le début de l'excitation.

Cinq variances différentes du bruit blanc e(t) qui entrainent cinq niveaux de rapport de signal à bruit (SNR) différents sont utilisées : 29 dB, 23 dB, 16 dB, 10 dB et 6 dB. Pour chacun de ces niveaux de bruit, 1 simulation de Monte-Carlo avec 100 réalisations de bruit est effectuée. Les convergences des méthodes de Sanathanan-Koerner (SK), de la Variable Instrumentale (VI) et de Gauss-Newton sont observées grâce au critère d'identification $J(\theta)$ donné par l'équation (4.5). Deux critères supplémentaires servent à évaluer la qualité du modèle identifié par chacun des algorithmes sur les données d'estimation :

$$BFR_i(\%) = 100 \times \left(1 - \frac{\|y_{0i}(t) - y_i(t)(\theta)\|}{\|y_{0i}(t) - moy(y_{0i}(t))\|}\right), \qquad (4.56)$$

$$VAF_{i}(\%) = 100 \times \left(1 - \frac{\operatorname{var}(y_{0i}(t) - y_{i}(t)(\theta))}{\operatorname{var}(y_{0i}(t))}\right), \qquad (4.57)$$

où l'indice *i* note la i^{ieme} sortie du système, moy(\bullet) note la valeur moyenne d'un vecteur et var(\bullet) sa variance.

Les trois méthodes itératives sont initialisées par une résolution moindrescarrés (LS). Le modèle identifié à cette étape sert de référence et est utilisé pour évaluer l'amélioration apportée par les trois schémas itératifs. Les critères d'arrêt sont identiques pour les trois algorithmes : la convergence est stoppée si le critère atteint la valeur minimale fixée à 10^{-5} , ou si 3 diminutions successives du critère sont inférieures à 10^{-4} , ou après 100 itérations si aucun des deux critères d'arrêt précédents n'est atteint avant.



FIGURE 4.1 – Valeurs des critères d'identification calculés pour les différentes méthodes en fonction du niveau de bruit.

4.6.2 Résultats

Le paramétrage pseudo-canonique utilisé pour réaliser les identifications est défini par la structure en degré des lignes $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (cf. p. 54). Sur la Figure 4.1, on constate que les trois méthodes itératives SK, VI et GN permettent d'améliorer la valeur du critère d'identification par rapport à la résolution des moindres carrés initiale. Pour un rapport de signal à bruit d'environ 30 dB, on remarque que les modèles identifiés avec les méthodes SK, VI et GN donnent des valeurs de critère très proches. En revanche, l'étape LS donne une valeur de critère plus importante due à une identification légèrement biaisée. Lorsque le niveau de bruit augmente, on observe une nette différence. En effet, les valeurs de critères calculées avec les méthodes VI et GN restent très proches et relativement faibles alors que SK montre de moins bonnes performances. Bien que donnant toujours des valeurs de critère légèrement plus faibles que la résolution LS, la méthode SK apparait beaucoup moins performante que les méthodes VI et GN dès que les niveaux de bruit augmentent. A titre d'exemple des résultats obtenus, les Figures 4.2 et 4.3 montrent les diagrammes de Bode en amplitude des modèles respectivement identifiés par les méthodes SK et GN pour le niveau de rapport signal à bruit égal à 10 dB. Comme discuté précédemment dans ce chapitre, la détérioration des résultats de la méthode SK, qui se constate également sur la réponse fréquencielle des modèles identifiés, est provoquée par le biais du modèle identifié présent car le bruit ne respecte pas un paramétrage de type ARX. Sur les Figures 4.2 et 4.3, on peut notamment constater que cela se traduit par un biais de l'amortissement des modes identifiés.

Cette tendance est confirmée par les valeurs des BFR et VAF données par



FIGURE 4.2 – Tracés des diagrammes de Bode en amplitude des modèles identifiés par la méthode SK (rouge) et du système réel (bleu) pour le niveau de rapport signal à bruit égal 10 dB.



FIGURE 4.3 – Tracés des diagrammes de Bode en amplitude des modèles identifiés par la méthode GN (rouge) et du système réel (bleu) pour le niveau de rapport signal à bruit égal 10 dB.

la Figure 4.4. Les valeurs tracées correspondent respectivement aux valeurs moyennes pour l'ensemble des sorties calculées à partir des valeurs BFR_i et VAF_i . On voit que la méthode SK devient moins précise que la résolution LS pour des niveaux de bruit importants. Cela montre que l'amélioration du critère d'identification observée précédemment pour la méthode SK par rapport à la résolution LS est due à une meilleure explication du bruit, et non du système, par le modèle identifié. L'observation du BFR et du VAF permet donc de constater que, pour un niveau de bruit important, et lorsque celui-ci ne respecte pas d'hypothèses particulières, il semble préférable d'utiliser une unique résolution par moindres carrés plutôt que la méthode de Sanathanan-Koerner. D'autre part, on constate que le modèle le plus précis est obtenu pour tous les niveaux de bruit avec la méthode GN. Lorsque le niveau de bruit est peu important, la méthode VI offre une précision très proche de la méthode GN. En revanche, lorsque le niveau de bruit devient important (SNR < 15 dB), la précision du modèle identifié par la méthode VI se dégrade beaucoup plus rapidement. Son niveau de précision est ainsi à peu près médian entre les méthodes LS et GN pour un rapport signal à bruit égal à 6 dB.

La Figure 4.5 montre le nombre d'itérations nécessaires à SK, VI et GN pour converger. Premièrement, on constate que le nombre d'itérations SK diminue lorsque le niveau de bruit devient important. Cela montre que cette méthode n'arrive plus réellement à converger lorsque le niveau de signal à bruit est inférieur à 15 dB. Deuxièmement, on constate que le nombre d'itérations de la méthode GN est le plus important. On voit notamment que, par rapport à la méthode VI, une meilleure précision de l'identification pour des niveaux de bruit importants se fait au prix d'un nombre d'itérations plus élevé.

L'ensemble des observations menées sur ce cas d'étude permet d'avancer trois conclusions principales lorsqu'un bruit coloré ne respectant aucune propriété particulière affecte les mesures :

- La méthode SK donne de moins bons résultats que les méthodes VI et GN lorsque le niveau de bruit n'est pas faible.
- L'utilisation de la méthode de Gauss-Newton semble incontournable lorsque les niveaux de bruit sont importants. Pour des niveaux de bruit plus faibles, celle-ci peut éventuellement être remplacée par une utilisation de la méthode VI qui permet d'obtenir des résultats relativement proches en moins d'itérations.
- Le nombre d'itérations nécessaires à la méthode de Gauss-Newton pour converger devient important lorsque le niveau de bruit augmente. En revanche, la méthode VI converge en un nombre moins important d'itérations. Une utilisation combinée de ces deux méthodes, où la méthode



FIGURE 4.4 – BFR et VAF calculés pour chacune des méthodes en fonction du niveau de bruit.



FIGURE 4.5 – Nombre d'itérations moyen des algorithmes en fonction du niveau de bruit.

VI servirait d'initialisation à la méthode de Gauss-Newton, semble donc s'avérer une bonne solution pour réaliser des identifications à la fois précises et rapides en environnement bruité.

Toutefois, à travers cet exemple, nous pouvons mettre en évidence deux limitations importantes des méthodes étudiées : l'influence des effets transitoires sur la précision des modèles identifiés et les blocages de la convergence de la méthode de Gauss-Newton. Ces deux phénomènes que nous présentons ci-après peuvent être responsables d'une dégradation de la précision des résultats d'identification.

4.6.3 Influence des effets transitoires

La durée d'enregistrement après l'excitation influence la qualité du modèle identifié. La Figure 4.6 donne les valeurs des trois indicateurs obtenues avec la méthode de Gauss-Newton pour un niveau de rapport signal à bruit égal à 10 dB. Les courbes pour l'exemple de la méthode de Gauss-Newton sont données à titre illustratif, mais plus généralement, une tendance identique est observée avec les méthodes LS, SK et VI. On constate que la durée choisie, égale à 20 secondes, est celle qui permet de minimiser au mieux le critère d'identification pour un niveau de rapport signal à bruit égal à 10 dB. On voit que lorsque cette durée diminue, les performances des algorithmes sont détériorées. Ceci est dû aux effets transitoires qui biaisent le calcul des transformées de Fourier des sorties. En effet, on peut voir sur la Figure 4.7 que si une durée plus faible est considérée, le niveau d'énergie des sorties du système est loin du niveau d'énergie initial. Cela traduit un état final du système loin de son état initial, ce qui, comme nous le détaillerons au Chapitre 6, biaise le calcul des transformées de Fourier.



FIGURE 4.6 – Valeurs des trois critères de précision du modèle identifié en fonction de la durée considérée.

L'instant t = 20 s est le moment où l'énergie des sorties est globalement égale au niveau d'énergie du bruit. L'effet des phénomènes transitoires sur la précision des modèles identifiés est une première limitation observée pour résoudre le problème d'identification tel que nous l'avons formulé. D'une part, cela empêche de considérer une durée d'enregistrement des données plus courte. C'est donc un frein à la réduction de la durée des essais. D'autre part, l'obligation d'allonger la durée d'enregistrement empêche de bénéficier d'un meilleur rapport de signal à bruit obtenu en ne considérant que les premières secondes qui succèdent à l'excitation. Une solution sera proposée au Chapitre 6 afin d'éviter l'effet des phénomènes transitoires tout en conservant un formalisme identique pour les méthodes d'identification présentées dans ce chapitre.

4.6.4 Blocages de l'algorithme de Gauss-Newton

Une deuxième limitation observée avec la formulation du problème d'identification proposée dans ce chapitre concerne la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton. Nous avons vu que la méthode de Gauss-Newton permet d'obtenir l'identification la plus précise lorsqu'un niveau important de bruit coloré affecte les mesures. Cependant, dans certains cas, on peut observer des blocages numériques de sa convergence. Ceux-ci, lorsqu'ils ont lieu, dégradent fortement les performances de cette méthode et sont donc très pénalisant. Comme nous le détaillerons au Chapitre 6, ces blocages de convergence sont provoqués par les contraintes induites par l'utilisation d'un



FIGURE 4.7 – Sorties du système.

paramétrage pseudo-canonique. Afin d'éviter de telles situations de blocage, nous proposons au Chapitre 5 l'utilisation de nouveaux paramétrages des fractions matricielles. Au Chapitre 6, nous détaillerons ensuite deux nouveaux schémas de convergence fondés sur ces paramétrages.

4.7 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons généralisé au cas des fonctions de transfert MIMO la formulation de la méthode de Sanathanan-Koerner, de la méthode de Gauss-Newton et d'une méthode, présente dans la littérature, qui utilise une variable instrumentale (VI). Fondée sur l'utilisation d'un paramétrage pseudo-canonique, la généralisation proposée pour chacun des algorithmes permet d'identifier des systèmes de tout ordre possible. Une comparaison analytique de leur schéma de convergence a permis de montrer le lien existant entre ces trois algorithmes d'identification. Les performances de ces méthodes, lorsque différents niveaux de bruit coloré affectent les mesures, ont ensuite été discutées à travers l'étude d'un cas de simulation. Ainsi, pour des niveaux de bruit faibles, les trois méthodes donnent des résultats très proches. En revanche, lorsque les niveaux de bruit augmentent, la méthode de Sanathanan-Koerner donne les moins bons résultats. L'algorithme de Gauss-Newton est, au contraire, la méthode qui procure la meilleure précision. Toutefois, par rapport à l'algorithme VI, il requiert un nombre plus important d'itérations. Afin de combiner rapidité de convergence et précision des résultats, une utilisation combinée de ces deux méthodes semble donc être une bonne solution. Cette combinaison, où VI jouera le rôle d'initialisation de l'algorithme de Gauss-Newton, sera étudiée au Chapitre 8 sur un cas représentatif d'analyse modale durant les essais en vol de flottement d'un avion civil. Enfin, l'étude réalisée dans ce chapitre nous a permis d'introduire les deux principales limitations observées pour les méthodes itératives, à savoir, l'impact négatif des effets transitoires dus à la formulation du problème d'identification adoptée, et les blocages de la convergence de la méthode de Gauss-Newton dus au choix d'un paramétrage pseudo-canonique. Les Chapitres 5 et 6 sont dédiés à l'étude de solutions permettant d'éviter ces deux problèmes.

Chapitre 5

NOUVEAUX PARAMÉTRAGES DES FRACTIONS MATRICIELLES

L'objectif de ce chapitre est de définir de nouveaux paramétrages des fractions matricielles afin d'améliorer la convergence des méthodes d'optimisation telles que la méthode de Gauss-Newton. Pour cela, nous définissons la forme dénommée forme pleine. Il s'agit de la forme sur-paramétrée des fractions matricielles qui possède le nombre maximal de paramètres permettant d'assurer la propreté du transfert ainsi qu'un ordre fixé. De plus, dans ce chapitre nous définissons la classe des fractions matricielles pleines équivalentes et étudions la structure d'équivalence afin d'introduire le paramétrage local des fractions matricielles fondé sur l'utilisation d'un système de coordonnées locales guidées par les données. Enfin, nous présentons et discutons le cas particulier des formes pleines quasi-uniformes ainsi que le cas d'un sur-paramétrage intermédiaire.

Sommaire

| 5.1 | Fractions Matricielles à Gauche Pleines (FMG-P) 86 | | |
|---|--|--|--|
| | 5.1.1 | Définition de l'ensemble des FMG-P 87 | |
| | 5.1.2 | Respect des conditions essentielles pour l'identifi- cation | |
| | 5.1.3 | Choix de l'arrangement des indices de structure 91 | |
| | 5.1.4 | Structure de la classe d'équivalence des FMG-P 92 | |
| 5.2 Systèmes de coordonnées locales guidées par les | | | |
| données $\dots \dots \dots$ | | | |
| | 5.2.1 | Définition | |
| | 5.2.2 | Interprétation géométrique | |
| 5.3 Cas particuliers des FMG-P et des sur-paramé- | | | |
| trages diagonaux quasi-uniformes $\ldots \ldots \ldots 104$ | | | |
| | 5.3.1 | Paramétrage par DDLC des FMG-P quasi-uniformes 105 | |
| | 5.3.2 | Sur-paramétrage diagonal des FMG pseudo-cano- | |
| | | niques | |
| 5.4 | Bila | n | |

5.1 Fractions Matricielles à Gauche Pleines (FMG-P)

Comme nous l'avons montré dans le Chapitre 4, l'utilisation de méthodes d'optimisation fondées sur les paramétrages canoniques ou pseudocanoniques peut conduire à des situations de blocage de la convergence. Ces blocages, comme nous le détaillerons au Chapitre 6, sont provoqués par l'utilisation d'un paramétrage minimal, c.-à-d., un paramétrage qui définit une fonction de transfert par un nombre de paramètres inférieur ou égal à

$$N_{min} = n_x (n_u + n_y) + n_u \, n_y \,. \tag{5.1}$$

Afin d'éviter ces situations problématiques, l'étude de paramétrages fondés sur des fractions matricielles *sur-paramétrées* est nécessaire. Une première forme sur-paramétrée particulière appelée *forme sur-paramétrée diagonale* a été proposée dans (Vayssettes et al., 2012a). Comme nous allons le voir dans ce chapitre, l'utilisation des formes sur-paramétrées diagonales permet de résoudre le problème des blocages numériques de la convergence.

A la connaissance de l'auteur, l'influence du sur-paramétrage sur la convergence des méthodes d'optimisation a uniquement été étudiée dans le cas des représentations d'état (McKelvey, 1995; Ribarits, 2002). Dans ce cas, McKelvey et Helmersson (1997) ont notamment montré que l'utilisation d'un nombre maximal de coefficients laissés libres, combinée à une réduction des dimensions de minimisation, améliorent les propriétés de convergence des méthodes d'optimisation.

Afin de poursuivre le même objectif pour l'utilisation des fractions matricielles, nous proposons, dans ce chapitre, de généraliser l'approche proposée dans (Vayssettes et al., 2012a). Cette généralisation implique l'introduction de nouvelles formes des fractions matricielles que nous appelons formes surparamétrées pleines. Outre l'évitement des situations de blocage, l'objectif recherché est donc d'améliorer la convergence des algorithmes d'optimisation en considérant un nombre maximal de coefficients non-contraints durant la minimisation. Ces nouvelles formes sont étudiées dans cette section. La Section 5.2 est dédiée à la définition des paramétrages dynamiques des fractions matricielles pleines. Comme nous le verrons au Chapitre 6, un tel paramétrage est très important pour tirer pleinement profit des formes pleines lors d'une optimisation. Enfin, la Section 5.3 présente un cas particulier des formes pleines qui nous sera utile pour l'identification. De plus, les formes sur-paramétrées diagonales sont également présentées dans cette dernière section. Nous verrons qu'elles forment un autre cas particulier des formes pleines.

De même qu'au Chapitre 3, les résultats concernant les FMD s'obtenant par transposition de ceux valables pour les FMG, nous développons dans ce chapitre uniquement le cas des FMG.

5.1.1 Définition de l'ensemble des FMG-P

Définition 5.1 (Forme FMG-P). Soit une fonction de transfert H(s) d'ordre n_x et de dimension $n_y \times n_u$. On appelle Fraction Matricielle à Gauche Pleine (FMG-P) une FMG (D(s), N(s)) définie par la structure en degré suivante

$$\deg(\mathsf{D}(s)) = \begin{bmatrix} -\rho_1 - \\ \vdots \\ -\rho_{n_y} - \end{bmatrix}, \qquad \deg(\mathsf{N}(s)) = \begin{bmatrix} -\rho_1 - \\ \vdots \\ -\rho_{n_y} - \end{bmatrix}, \qquad (5.2)$$

où D(s) est supposé réduit par ligne, c.-à-d., les degré ρ_i des lignes de D(s)et N(s) vérifient la condition

$$\sum_{i=1}^{n_y} \rho_i = n_x \qquad avec \qquad \rho_i \ge 0.$$
(5.3)

Comme c'est le cas pour les paramétrages canoniques et pseudo-canoniques vus précédemment dans les Sections 3.3.2 et 3.3.3, la forme pleine est structurée. Cette structure est également fixée par un jeu d'indices

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n_y} \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

où les valeurs ρ_i , qui ne sont pas nécessairement distinctes, définissent le degré de tous les polynômes situés sur la i^{ième} ligne de D(s) et N(s).

Remarque 5.1. D'après la Définition 5.1, on remarque que, pour un choix d'indices Υ , aucun paramètre ne peut être ajouté au dénominateur sans modifier l'ordre de la FMG-P. De plus, aucun paramètre ne peut être ajouté au numérateur sans supprimer la condition de propreté. La dénomination « pleine » est donc choisie pour signifier qu'aucun paramètre ne peut être ajouté sans supprimer une de ces deux conditions.

Remarque 5.2. D'après la Définition 3.1 (page 38), un dénominateur non réduit par ligne suppose que ses coefficients de plus haut degré ligne D_{hl} vérifient det $(D_{hl}) = 0$. Lorsque les coefficients sont estimés à partir de données bruitées, la vérification au sens strict d'une telle condition est cependant numériquement quasi-impossible (Correa et Glover, 1984). Bien que l'obtention d'un dénominateur non réduit par ligne est théoriquement possible, cette condition n'est donc pas réellement restrictive pour l'identification.

Remarque 5.3. Les formes pleines des FMD (FMD-P) sont définies par transposition des FMG-P.

On remarque que si la structure du numérateur des FMG-P est identique à celle de la forme échelon présentée au Chapitre 3, celle du dénominateur est simplifiée. En effet, dans ce cas, le dénominateur est uniquement structuré par ligne, toutes les colonnes ayant la même structure, alors que le dénominateur de la forme échelon est structuré par ligne et par colonne. Cette simplification est due aux paramètres supplémentaires. En notant v_k , la $k^{\text{ième}}$ valeur distincte d'indice dans Υ , μ_k la multiplicité de cette valeur, et n_{ρ} le nombre de valeurs différentes d'indices dans Υ tels que

$$n_x = \sum_{k=1}^{n_{\rho}} \mu_k \, \upsilon_k \,, \tag{5.5}$$

on peut vérifier que le nombre de paramètres supplémentaires est égal à

$$N_{sup} = \sum_{k=1}^{n_{\rho}} \sum_{l=1}^{k} \mu_k \,\mu_l \left(|\upsilon_k - \upsilon_l| + 1 \right) \geq n_y^2 \,. \tag{5.6}$$

Plus de détails sont donnés sur ce point dans la Section 5.1.4.

Remarque 5.4. Notons ici que le nombre de paramètres supplémentaires N_{sup} est égal à n_y^2 uniquement lorsque les indices Υ sont quasi-constants. Il est important de remarquer que dans le cas de valeurs d'indices non quasiconstantes, les FMG-P ne permettent pas de couvrir l'ensemble des systèmes d'ordre n_x . En effet, dans ce cas, l'ensemble des systèmes décrits par N_{min} paramètres n'est alors pas couvert par les FMG-P. Comme nous le verrons, seul le cas des FMG-P spécifiées par des indices quasi-constants permet de représenter presque tous les systèmes d'ordre n_x .

Exemple 5.1 (Forme FMG-P). Soit un système de dimension 4×2 et d'ordre $n_x = 4$ défini sous forme FMG-P pour $\Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Les structures du dénominateur D(s) et du numérateur N(s) sous forme pleine sont données par

$$\deg(\mathsf{D}(s)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad et \quad \deg(\mathsf{N}(s)) = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 2 \end{bmatrix} .$$
(5.7)

Toute représentation identifiable de ce système possède un nombre maximal de paramètres égal à $n_x(n_u + n_y) + n_u n_y = 32$. Le nombre de paramètres n_{θ} de la FMG-P (5.7) est calculé en sommant le nombre de coefficients des polynômes de D(s) et N(s). Ainsi, on trouve $n_{\theta} = 48$. La forme pleine a donc au minimum 16 paramètres supplémentaires. Cette valeur est retrouvée par la formule (5.6) avec, dans ce cas, $\mu_1 = \mu_3 = 1$, $\mu_2 = 2$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ et $v_3 = 2$ soit

$$N_{sup} = 1 \times 1 + 2 \times (2 + 2 \times 1) + 1 \times (3 + 2 \times 2 + 1) = 17.$$
 (5.8)

La condition portant sur les indices de structure ρ_i donnée par l'équation (5.3) n'implique pas un unique choix possible pour Υ . De ce fait, plusieurs FMG-P différentes peuvent décrire un système d'ordre n_x . Ceci implique la définition suivante de l'ensemble des FMG-P d'ordre n_x .

Définition 5.2 (Ensemble des FMG-P irréductibles d'ordre n_x). L'ensemble des FMG-P (D(s), N(s)) irréductibles d'ordre n_x est défini par¹

$$\mathbb{H}(n_x) = \{ (\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) \in \mathbb{S}_i(n_x) \mid (\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) \text{ est une } FMG-P \} .$$
(5.9)

Dans la suite, on notera \mathbb{T}_{Υ} l'ensemble des coefficients θ^{Υ} non fixés à 0 des FMG-P d'indices Υ , soit

$$\mathbb{T}_{\Upsilon} = \{ \theta^{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{N_{min} + N_{sup}} \, | \, (\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) \in \mathbb{H}(n_x) \, \} \,, \tag{5.10}$$

où $\mathbb{T}_{\Upsilon} \subset \mathbb{R}^{N_{min}+N_{sup}}$.

Nous avons défini la forme pleine des fractions matricielles appelée FMG-P et l'ensemble $\mathbb{H}(n_x)$ des FMG-P d'ordre n_x . Nous devons désormais démontrer que les FMG-P de l'ensemble $\mathbb{H}(n_x)$ respectent les Exigences 3.1 (p. 37) à 3.4 (p. 39) essentielles pour l'identification afin d'assurer qu'elles forment un ensemble de fractions matricielles adaptées.

5.1.2 Respect des conditions essentielles pour l'identification

L'ordre de (D(s), N(s)) est égal à n_x pour toutes les valeurs de Υ et $\theta^{\Upsilon} \in \mathbb{T}_{\Upsilon}$. D(s) étant supposé réduit par ligne, d'après la Définition 3.1, l'ordre de toute FMG-P de l'ensemble $\mathbb{H}(n_x)$ est égal à n_x pour toutes les valeurs de Υ et de $\theta^{\Upsilon} \in \mathbb{T}_{\Upsilon}$.

Le transfert (D(s), N(s)) est propre pour toutes les valeurs de Υ et $\theta^{\Upsilon} \in \mathbb{T}_{\Upsilon}$. D'après le Lemme 3.2, D(s) étant réduit par ligne, la structure donnée par l'équation (5.2) définit un transfert propre pour toutes les valeurs de $\theta^{\Upsilon} \in \mathbb{T}_{\Upsilon}$ et tout choix possible de Υ .

Le transfert (D(s), N(s)) est continûment différentiable par rapport à θ^{Υ} . Les FMGP sont des fractions rationnelles définies lorsque D(s) est inversible. Dans le cas général, les FMG-P sont donc continûment différentiables pour toutes les valeurs de θ^{Υ} et pour toutes les valeurs complexes de *s* sur l'axe imaginaire. Dans le cas particulier où $D(s, \theta)$ possède des pôles imaginaires purs, les FMG-P ne sont pas différentiables pour les pulsations $\omega = 2\pi f$ égales à la valeur de ces pôles. Cela correspond à des systèmes non-asymptotiquement stables qui ne seront pas rencontrés dans notre cas.

¹On rappelle que l'ensemble $\mathbb{S}_i(n_x)$ est l'ensemble des FMG irréductibles d'ordre n_x défini à la page 41.

De plus, au cours de l'optimisation, la probabilité qu'un pôle imaginaire pur soit atteint est très faible (pour ne pas dire impossible). Cela supposerait, en effet, que la valeur d'un pôle atteint au cours des itérations soit exactement égale à 0 alors que l'optimisation ne cherche pas à converger vers une telle valeur. Par conséquent, $H(s, \theta)$ est donc continûment différentiable à de très rares exceptions près qui ne seront pas rencontrées en pratique.

Tout système d'ordre n_x peut être représenté par (D(s), N(s)). Nous devons montrer que tous les systèmes d'ordre n_x peuvent être représentés par une FMG-P de l'ensemble $\mathbb{H}(n_x)$. Pour cela, nous nous appuyons sur la forme canonique échelon. En effet, d'après (Kailath, 1980), tout dénominateur réduit par ligne d'une FMG peut être mis sous forme échelon par une multiplication unimodulaire à gauche. Or, par définition, toute FMG-P a un dénominateur réduit par ligne. Pour tout dénominateur D(s) d'une FMG-P, il existe donc une matrice unimodulaire $U_e(s)$ telle que

$$\mathsf{D}_e(s) = \mathsf{U}_e(s)\,\mathsf{D}(s)\,,\tag{5.11}$$

où $D_e(s)$ est sous forme échelon. On peut alors distinguer deux cas de figure :

- (i) Si les degrés lignes ρ_i de D(s) sont rangés par ordre croissant, d'après (Kailath, 1980, Lemme 6.3.14), $D_e(s)$ possède les mêmes degrés lignes que D(s). Le numérateur $N_e(s)$ sous forme échelon possède donc, dans ce cas, d'après la structure en degré de la forme échelon, la même structure générique que le numérateur N(s) de la FMG-P. Il existe donc, dans le cas d'indices rangés par ordre croissants, une forme échelon équivalente à toute FMG-P et qui possède la même distribution Υ .
- (ii) Si les degrés lignes ρ_i de D(s) ne sont pas rangés par ordre croissant, alors on peut trouver une matrice de permutations des lignes (cf. Section 3.3.2.2) qui ré-arrange cette FMG-P en une FMG-P équivalente définie par des indices de structure rangés par ordre croissants. On est alors ramené au cas précédent.

De plus, comme nous l'avons vu dans la Section 3.3.2, les paramétrages échelons sont des paramétrages canoniques spécifiés par les indices de Kronecker obtenus en parcourant la matrice de Hankel des paramètres de Markov. Si les indices ρ_i de la FMG-P sont rangés par ordre croissant, ils sont donc identiques (d'après (i)) aux indices de Kronecker. Si la FMG-P possède des indices rangés différemment, les indices de Kronecker du transfert représenté sont les mêmes indices rangés par ordre croissant (d'après (ii)).

Réciproquement, tout système d'ordre n_x peut s'écrire sous une forme canonique échelon. Ainsi, tout système d'ordre n_x peut être représenté par une FMG-P de l'ensemble $\mathbb{H}(n_x)$. Ainsi, nous avons montré que la forme pleine respecte les Exigences 3.1 à 3.4 essentielles pour l'identification. Cet ensemble de fractions matricielles peut donc être utilisé pour formuler des méthodes d'identification.

5.1.3 Choix de l'arrangement des indices de structure

On va ici mener une analyse similaire à celle réalisée sur les formes pseudo-canoniques dans la Section 3.3.3.2. Cette analyse nous a permis de mettre en évidence que c'est la structuration des lignes de la matrice adjointe du dénominateur qui entraine, dans le cas pseudo-canonique, des résultats mathématiquement différents selon l'arrangement des indices.

On considère ici un jeu d'indices ρ_i donné. Selon le choix effectué pour l'arrangement de ces indices dans Υ , plusieurs FMG-P peuvent être définies. Celles-ci seront différenciées par un arrangement différent de leurs lignes. On considère un de ces choix qu'on note $\Upsilon = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n_y} \end{bmatrix}$. Pour ce choix particulier, on exprime H(s) au moyen de l'ajointe du dénominateur, soit

$$\mathsf{H}(s) = \frac{1}{\det(\mathsf{D}(s))} \times \operatorname{adj}(\mathsf{D}(s)) \mathsf{N}(s) .$$
(5.12)

Les valeurs du transfert dépendent du produit des lignes de $\operatorname{adj}(\mathsf{D}(s))$ et des colonnes de $\mathsf{N}(s)$. Ces valeurs dépendent de la structure de ces deux matrices. D'après le calcul de la matrice adjointe, dans le cas générique, c.-à-d., sans annulation due à des valeurs particulières de coefficients (cf. p. 55), cette structure est donnée par

$$\operatorname{deg}(\operatorname{adj}(\mathsf{D}(s))) = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_{n_y} \\ | & | & | \end{bmatrix} \quad \operatorname{et} \quad \operatorname{deg}(\mathsf{N}(s)) = \begin{bmatrix} -\rho_1 - \\ -\rho_2 - \\ \vdots \\ -\rho_{n_y} - \end{bmatrix},$$
(5.13)

avec de manière générique $\kappa_i = n_x - \rho_i$. A ce niveau, on peut voir qu'une permutation des lignes de $\mathsf{D}(s)$ revient à une permutation identique des colonnes de $\operatorname{adj}(\mathsf{D}(s))$. Ainsi, au niveau de la structure en degré, une permutation d'indices, c.-à-d., une permutation des lignes de $\mathsf{D}(s)$ et $\mathsf{N}(s)$, revient à permuter les colonnes de $\operatorname{adj}(\mathsf{D}(s))$. Au niveau de la structure en degré, l'arrangement des colonnes de $\mathsf{D}(s)$ (c.-à-d. des lignes de $\operatorname{adj}(\mathsf{D}(s))$) reste identique, ce qui conduit à un résultat mathématiquement équivalent pour l'identification. Pour un choix d'indices ρ_i donné, leur arrangement n'a donc pas d'influence sur les résultats de l'identification lorsqu'un paramétrage sous forme FMG-P est utilisé. Par rapport aux paramétrages des formes pseudocanoniques, cela offre donc l'avantage de supprimer l'incertitude portant sur ce choix d'arrangement des indices. Par convention, et sans aucune restriction, nous choisissons, dans la suite de ce chapitre, de ranger par défaut les indices définissant la structure des FMG-P par ordre croissant, soit

$$\rho_1 \le \rho_2 \le \dots \le \rho_{n_y} \,. \tag{5.14}$$

5.1.4 Structure de la classe d'équivalence des FMG-P

Les FMG-P (D(s), N(s)) de structure Υ forment un ensemble de représentations équivalentes. Nous avons vu que les classes d'équivalence des FMG sont engendrées par des multiplications unimodulaires à gauche (Lemme 3.2 p. 42). Nous allons, dans un premier temps, définir l'ensemble des matrices U(s) qui engendrent les classes d'équivalence des FMG-P. Dans un deuxième temps, cela nous permettra de préciser la structure de ces classes d'équivalence.

Définition de l'ensemble des matrices unimodulaires qui maintiennent la structure des FMG-P Considérons une FMG-P (D(s), N(s)) appartenant à $\mathbb{H}(n_x)$. Soit Υ sa distribution, μ_k la multiplicité de la $k^{\text{ième}}$ valeur composant l'ensemble Υ , notée v_k , et n_ρ le nombre de valeurs différentes telles que

$$n_x = \sum_{k=1}^{n_\rho} \mu_k \, v_k \,. \tag{5.15}$$

De plus, nous notons $\mathsf{F}(s) \in \mathbb{C}^{n_y \times (n_u + n_y)}$ la matrice qui regroupe le numérateur et le dénominateur de la fraction matricielle $(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s))$ de la façon suivante

$$\mathsf{F}(s) = \begin{bmatrix} \mathsf{D}(s) & \mathsf{N}(s) \end{bmatrix} . \tag{5.16}$$

Avec les notations introduites, la structure en degré de F(s) est donc définie par

$$\deg(\mathsf{F}(s)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_k \qquad (5.17)$$

Effectuer une multiplication unimodulaire de la FMG (D(s), N(s)) revient à multiplier à gauche la matrice F(s) par cette même matrice unimodulaire. L'ensemble des matrices unimodulaires qui n'affectent pas la structure de (D(s), N(s)), noté \mathbb{U}_{Υ} , est donc l'ensemble des matrices unimodulaires qui n'affectent pas la structure en degrés de F(s). Soit U(s), une telle matrice unimodulaire. On considère la partition suivante de U(s)

où les polynômes de $U_{kl}(s)$ sont de même degré, noté ν_{kl} . Alors, la matrice $\tilde{F}(s)$ obtenue en multipliant F(s) à gauche par U(s) est donnée par

$$\tilde{\mathsf{F}}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathsf{F}}_k(s) \\ \dots & \tilde{\mathsf{F}}_k(s) \end{bmatrix}^{\mu_k}, \qquad (5.19)$$

où $\tilde{\mathsf{F}}_k(s) \in \mathbb{C}^{\mu_k \times (n_u + n_y)}$ vaut

$$\tilde{\mathsf{F}}_k(s) = \sum_{l=1}^{n_\rho} \mathsf{U}_{kl}(s) \,\mathsf{F}_l(s) \,. \tag{5.20}$$

 $\mathsf{F}_{l}(s) \in \mathbb{C}^{\mu_{l} \times (n_{u}+n_{y})}$ désigne ici le $l^{\text{ième}}$ bloc ligne de $\mathsf{F}(s)$. D'après les structures de $\mathsf{F}(s)$ et $\mathsf{U}(s)$, respectivement données par les équations (5.17) et (5.18), $\mathsf{F}_{l}(s)$ est donc constitué des μ_{l} lignes des polynômes de $\mathsf{F}(s)$ qui sont de degrés v_{l} . Par hypothèse, $\tilde{\mathsf{F}}(s)$ est donc composé du numérateur $\tilde{\mathsf{N}}(s)$ et du dénominateur $\tilde{\mathsf{D}}(s)$ d'une FMG équivalente à $(\mathsf{D}(s),\mathsf{N}(s))$. Cela implique que les degrés des blocs lignes $\tilde{\mathsf{F}}_{k}(s)$ vérifient la relation

$$\deg \tilde{\mathsf{F}}_k(s) \le \max_l (\nu_{kl} + \nu_l) \le \nu_k \,, \tag{5.21}$$

où ν_{kl} est le degré des polynômes de $\mathsf{U}_{kl}(s)$, ν_l celui des polynômes de $\mathsf{F}_l(s)$ et ν_k celui des polynômes de $\mathsf{F}_k(s)$. D'après l'équation (5.21), les valeurs maximales de ν_{kl} permettant de conserver la structure de $\mathsf{F}_l(s)$ vérifient

$$\nu_{kl} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad l > k \\ \upsilon_k - \upsilon_l & \text{si} \quad l \le k \end{cases},$$
(5.22)

où $-\infty$ note par convention le degré de zéro. Ainsi, l'ensemble \mathbb{U}_{Υ} est formé de toutes les matrices unimodulaires possédant la structure en degré suivante

$$\operatorname{deg} \mathsf{U}(s) = \begin{bmatrix} \overbrace{-0}^{-}, & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ &$$

Exemple 5.2 (Structure des matrices unimodulaires). Nous reprenons ici le cas de l'Exemple 5.1. Nous considérons donc un système de dimension 4×2 , d'ordre $n_x = 4$ et d'indices de structure $\Upsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. La structure des FMG-P équivalentes représentant ce système est donnée par l'équation (5.7). Les valeurs d'indices qui composent Υ valent $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ et $v_3 = 2$ avec $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$ et $\mu_3 = 1$. La structure de l'ensemble des matrices unimodulaires qui engendrent les FMG-P équivalentes de ce système est donnée par

deg U(s) =
$$\begin{bmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 1 & 0 & 0 & -\infty \\ 1 & 0 & 0 & -\infty \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 (5.24)

Par exemple, la matrice suivante est un élément de cet ensemble

$$\mathsf{U}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 2+s & 3 & 7 & 0\\ 3+s & 4 & 2 & 0\\ 3+4s+5s^2 & 5s & 9+s & 3 \end{bmatrix} \,. \tag{5.25}$$

A travers cet exemple, on peut voir que le nombre de paramètres supplémentaires de la forme pleine est égal au nombre de coefficients non fixés à zéro dans U(s). De manière plus générale, cela se comprend en remarquant que, pour une FMG-P donnée, une FMG-P équivalente est obtenue en résolvant un système de $n_{\theta} = N_{min} + N_u$ équations linéaires où les N_u coefficients de U(s) permettent de fixer N_u valeurs de paramètres. D'après l'équation (5.23), on peut calculer le nombre de coefficients non nuls qui composent U(s). Celui-ci vaut

$$N_u = \sum_{k=1}^{n_{\rho}} \sum_{l=1}^{k} \mu_k \,\mu_l \,(\upsilon_k - \upsilon_l + 1) \geq n_y^2 \,. \tag{5.26}$$

On retrouve bien la valeur¹ du nombre de coefficients supplémentaires donnée par l'équation (5.6) (p. 88).

Démonstration 5.1. Nous montrons ici que $N_u > n_y^2$ lorsque Υ est formé d'indices non quasi-constants et que $N_u = n_y^2$ lorsque Υ est formé d'indices quasi-constants. Pour cela, on remarque dans un premier temps que par définition on a

$$n_y^2 = \left(\sum_{k=1}^{n_{\rho}} \mu_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n_{\rho}} \mu_k^2 + 2 \times \sum_{k=1}^{n_{\rho}} \sum_{l < k} \mu_k \mu_l .$$
(5.27)

¹Ici on est dans le cas d'indices ρ_i rangés par ordre croissant pour lequel la valeur absolue présente dans l'équation (5.6) n'est plus nécessaire.

En développant l'expression (5.26), on obtient

$$N_u = \sum_{k=1}^{n_\rho} \mu_k^2 + \sum_{k=1}^{n_\rho} \sum_{l < k} \mu_k \,\mu_l \left(\upsilon_k - \upsilon_l + 1 \right).$$
(5.28)

Les coefficients $(v_k - v_l + 1)$ sont par définition toujours supérieurs ou égaux à 2. Pour des valeurs d'indices non quasi-constants, quels que soient ces indices, au moins une des valeurs $(v_k - v_l + 1)$ est strictement supérieure à 2. Par comparaison avec la relation (5.27), on en déduit que $N_u > n_y^2$ lorsque Υ est formé d'indices non quasi-constants.

Dans le cas particulier d'indices quasi-constants le nombre N_u vaut

$$N_{u} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{k} \mu_{k} \mu_{l} (\upsilon_{k} - \upsilon_{l} + 1)$$

= $\mu_{1}^{2} + \mu_{1} \mu_{2} \times 2 + \mu_{2}^{2}$
= $(\mu_{1} + \mu_{2})^{2} = n_{y}^{2}.$ (5.29)

Afin de préciser la structure des classes d'équivalence des FMG-P, nous allons exprimer les n_{θ} relations entre les paramètres d'une même classe d'équivalence.

Structure des classes d'équivalence des FMG-P Nous considérons désormais les matrices qui regroupent les coefficients des polynômes de $F_k(s)$ et $\tilde{F}_k(s)$ définies par les équations (5.19) et (5.20). Ces matrices, notées respectivement \mathcal{F}_k et $\tilde{\mathcal{F}}_k$, appartiennent à $\mathbb{R}^{\mu_k \times (n_u + n_y)(v_k + 1)}$ et sont définies par

$$\mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} F_{k,0} & F_{k,1} & \dots & F_{k,v_k} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{k,0} & \tilde{F}_{k,1} & \dots & \tilde{F}_{k,v_k} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

où $F_{k,l} \in \mathbb{R}^{\mu_k \times (n_u + n_y)}$ et $\tilde{F}_{k,l} \in \mathbb{R}^{\mu_k \times (n_u + n_y)}$ notent respectivement les coefficients de degré l des matrices polynomiales $\mathsf{F}_k(s)$ et $\tilde{\mathsf{F}}_k(s)$. Nous formons également les matrices $\mathcal{U}_k \in \mathbb{R}^{\mu_k \times (\sum_{l=1}^k \mu_l (v_k - v_l + 1))}$ qui regroupent les blocs de coefficients non nuls du $k^{\text{ième}}$ bloc ligne de $\mathsf{U}(s)$, soit

$$\mathcal{U}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{k1} & \mathcal{U}_{k2} & \dots & \mathcal{U}_{kv_k} \end{bmatrix}, \qquad (5.31)$$

où chacune des matrices $\mathcal{U}_{kl} \in \mathbb{R}^{\mu_k \times \mu_l(v_k - v_l + 1)}$ regroupe les coefficients des polynômes des matrices $U_{ik}(s)$ définies par l'équation (5.18), soit

$$\mathcal{U}_{kl} = \begin{bmatrix} U_{kl,0} & U_{kl,1} & \dots & U_{kl,\upsilon_k-\upsilon_l} \end{bmatrix}, \quad \forall l \in \{1 \quad \dots \quad \upsilon_k\}.$$
(5.32)

Avec ces notations, et en se servant de la forme matricielle du produit de deux matrices de polynômes présenté en Annexe (A.2), les coefficients des matrices $\tilde{\mathsf{F}}_k(s)$ sont définis par

$$\tilde{\mathcal{F}}_k = \mathcal{U}_k \,\mathfrak{F}_k \,, \tag{5.33}$$

où les matrices $\mathfrak{F}_k \in \mathbb{R}^{\sum_{l=1}^k \mu_l(v_k - v_l + 1) \times (v_k + 1)(n_u + n_y)}$ sont définies par



En utilisant la relation $\operatorname{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\operatorname{vec}(B)$ (Golub et Van Loan, 1996), où $\operatorname{vec}(\bullet)$ désigne l'opération de vectorisation d'une matrice, les coefficients des matrices $\tilde{\mathcal{F}}_k$, pour tout $k \in \{1 \ldots n_\rho\}$, peuvent être mis sous forme vectorielle, soit

$$\operatorname{vec}(\tilde{\mathcal{F}}_k) = \Pi_k \operatorname{vec}(\mathcal{U}_k) \quad \operatorname{avec} \quad \Pi_k = (I_{\mu_k} \otimes \mathfrak{F}_k^T), \quad (5.35)$$

où I_{μ_k} est la matrice identité de dimension μ_k . Ainsi, les paramètres du $k^{\text{ième}}$ bloc ligne des fractions matricielles équivalentes à $(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s))$ sont définis par l'équation (5.35). L'expression des vecteurs de paramètres équivalents en fonction des coefficients de $\mathsf{U}(s)$ est obtenue en répétant cette opération pour chaque valeur v_k d'indices composant la distribution Υ . En effet, en adoptant la convention suivante

$$\theta^{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \operatorname{vec}(\mathcal{F}_1) \\ \operatorname{vec}(\mathcal{F}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{vec}(\mathcal{F}_{n_{\rho}}) \end{pmatrix}, \qquad (5.36)$$

tout vecteur de paramètres $\tilde{\theta}^{\Upsilon}$ d'une FMG équivalente est alors donné par

$$\tilde{\theta}^{\Upsilon} = \Pi_F(\theta^{\Upsilon}) \mathcal{U} \,, \tag{5.37}$$

où $\tilde{\theta}^{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{n_{\theta}}, \Pi_{F}(\theta^{\Upsilon}) \in \mathbb{R}^{n_{\theta} \times N_{sup}}$ et $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{N_{sup}}$ sont respectivement donnés par

$$\tilde{\theta}^{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \operatorname{vec}(\tilde{\mathcal{F}}_{1}) \\ \operatorname{vec}(\tilde{\mathcal{F}}_{2}) \\ \vdots \\ \operatorname{vec}(\tilde{\mathcal{F}}_{n_{\rho}}) \end{pmatrix}, \quad \Pi_{F}(\theta^{\Upsilon}) = \begin{bmatrix} \Pi_{1} & 0 \\ \ddots & 0 \\ 0 & \Pi_{n_{\rho}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \operatorname{vec}(\mathcal{U}_{1}) \\ \operatorname{vec}(\mathcal{U}_{2}) \\ \vdots \\ \operatorname{vec}(\mathcal{U}_{n_{\rho}}) \end{pmatrix}.$$
(5.38)

Exemple 5.3 (Construction de $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$). On considère toujours le cas de l'Exemple 5.1 en notant

$$\mathsf{D}(s) = \begin{bmatrix} \mathsf{d}_{11}(s) & \dots & \mathsf{d}_{14}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathsf{d}_{41}(s) & \dots & \mathsf{d}_{44}(s) \end{bmatrix} \quad et \quad \mathsf{N}(s) = \begin{bmatrix} \mathsf{n}_{11}(s) & \mathsf{n}_{12}(s) \\ \vdots & \vdots \\ \mathsf{n}_{41}(s) & \mathsf{n}_{42}(s) \end{bmatrix} .$$
(5.39)

La matrice F(s) qui groupe D(s) et N(s) selon l'équation (5.16) est constituée de trois blocs de coefficients \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3 définis par

$$\mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} d_{11,0} & \dots & d_{14,0} & n_{11,0} & n_{12,0} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathcal{F}_2 = \begin{bmatrix} d_{21,0} & \dots & d_{24,0} & n_{21,0} & n_{22,0} & d_{21,1} & \dots & n_{22,1} \\ d_{31,0} & \dots & d_{34,0} & n_{31,0} & n_{32,0} & d_{31,1} & \dots & n_{32,1} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathcal{F}_3 = \begin{bmatrix} d_{41,0} & \dots & d_{44,0} & n_{41,0} & n_{42,0} & d_{41,1} & \dots & n_{42,1} & d_{41,2} & \dots & n_{42,2} \end{bmatrix} .$$

D'après l'équation (5.30), les matrices \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 et \mathfrak{F}_3 valent

$$\mathfrak{F}_{1} = \begin{bmatrix} d_{11,0} & \dots & d_{14,0} & n_{11,0} & n_{12,0} \end{bmatrix}, \\\mathfrak{F}_{2} = \begin{bmatrix} d_{11,0} & \dots & n_{12,0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{11,0} & \dots & n_{12,0} \\ d_{21,0} & \dots & n_{22,0} & d_{21,1} & \dots & n_{22,1} \\ d_{31,0} & \dots & n_{32,0} & d_{31,1} & \dots & n_{32,1} \end{bmatrix}, \\\mathfrak{F}_{3} = \begin{bmatrix} d_{11,0} & \dots & d_{14,0} & n_{11,0} & n_{12,0} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_{11,0} & \dots & n_{12,0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{11,0} & \dots & n_{12,0} \\ d_{21,0} & \dots & d_{22,0} & n_{21,0} & n_{22,0} & d_{21,1} & \dots & n_{22,1} & 0 & \dots & 0 \\ d_{31,0} & \dots & d_{32,0} & n_{31,0} & n_{32,0} & d_{31,1} & \dots & n_{32,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_{21,0} & \dots & n_{22,0} & d_{21,1} & \dots & n_{22,1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_{31,0} & \dots & n_{32,0} & d_{31,1} & \dots & n_{32,1} \\ d_{41,0} & \dots & d_{44,0} & n_{41,0} & n_{42,0} & d_{41,1} & \dots & n_{42,1} & d_{41,2} & \dots & n_{42,2} \end{bmatrix}$$

Pour cet exemple, la matrice $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ est alors définie par

$$\Pi_F(\theta^{\Upsilon}) = \begin{bmatrix} \mathfrak{F}_1^{\top} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathfrak{F}_2^{\top} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathfrak{F}_2^{\top} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{F}_3^{\top} \end{bmatrix}, \qquad (5.40)$$

avec

 $\theta^{\Upsilon} = \begin{bmatrix} d_{11,0} & \dots & n_{12,0} & d_{21,0} & d_{31,0} & \dots & n_{22,1} & n_{32,1} & d_{41,0} & \dots & n_{42,2} \end{bmatrix}^{\top}.$ La structure des matrices unimodulaires qui permettent d'obtenir les vecteurs

La structure des matrices animoaulaires qui permettent à obtenir les vecteurs de paramètres $\tilde{\theta}^{\Upsilon}$ des FMG-P équivalentes est donnée par l'Exemple (5.2).
En notant $u_{ij,l}$ le coefficient de degré l de la $i^{i \grave{e}m e}$ ligne et $j^{i \grave{e}m e}$ colonne d'une telle matrice U(s), les trois blocs de coefficients \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 et \mathcal{U}_3 valent

$$\mathcal{U}_{1} = u_{11,0},
\mathcal{U}_{2} = \begin{bmatrix} u_{21,0} & u_{21,1} & u_{22,0} & u_{23,0} \\ u_{31,0} & u_{31,1} & u_{32,0} & u_{33,0} \end{bmatrix},
\mathcal{U}_{3} = \begin{bmatrix} u_{41,0} & u_{41,1} & u_{41,2} & u_{42,0} & u_{43,0} & u_{42,1} & u_{43,1} & u_{44,0} \end{bmatrix}.$$
(5.41)

Remarque 5.5. L'ensemble des paramètres des FMD-P équivalentes s'obtient par transposition du résultat obtenu pour les FMG-P. L'ensemble des paramètres des FMD-P équivalentes d'un système qui posséderait n_y entrées et n_u sorties et les mêmes indices de structure Υ est donc défini par

$$\tilde{\theta}^{\Upsilon} = \mathcal{U}^{\top} \Pi_F^{\top}(\theta^{\Upsilon}) . \tag{5.42}$$

Par conséquent, une différence importante entre les FMG-P et les FMD-P réside dans le nombre de paramètres supplémentaires. En effet, il n'est pas identique dans les deux cas. Pour un jeu d'indices Υ donné, si le nombre de sorties est supérieur au nombre d'entrées, alors le nombre de paramètres supplémentaire d'une FMG-P est supérieur à celui d'une FMD-P, et vice versa.

On note $\mathcal{E}_{\Upsilon}(\theta^{\Upsilon})$ l'ensemble des coefficients $\theta^{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{N_{min}+N_{sup}}$ non fixés des FMG-P équivalentes d'indices Υ . D'après la relation (5.37), l'ensemble $\mathcal{E}_{\Upsilon}(\theta^{\Upsilon})$ engendré par les colonnes de $\Pi_F(\theta)$. Ce résultat est résumé par le Lemme suivant.

Lemme 5.1 (Structure des classes d'équivalence des FMG-P). Soit (D(s), N(s)) une FMG-P, élément de $\mathbb{H}(n_x)$, et Υ une distribution donnée. L'ensemble des paramètres de la classe d'équivalence des FMG-P, notée $\mathcal{E}(\theta^{\Upsilon})$, est défini par

$$\mathcal{E}(\theta^{\Upsilon}) = \left\{ \Pi_F(\theta^{\Upsilon}) \, \mathcal{U}, \, \mathcal{U} \in \mathfrak{U}^{\Upsilon} \right\} \,, \tag{5.43}$$

où \mathcal{U} est le vecteur des coefficients non-nuls des matrices unimodulaires inversibles de l'ensemble \mathbb{U}_{Υ} . L'ensemble $\mathfrak{U}^{\Upsilon} \subset \mathbb{R}^{N_{sup}}$ est l'ensemble des vecteurs de coefficients des matrices de ces matrices unimodulaires.

On note que la classe d'équivalence est donnée par le sous-espace vecoriel $\mathbb{R}^{N_{sup}}$ en excluant la valeur 0 car le vecteur nul n'appartient à aucune classe d'équivalence. Sont également exclues les valeurs donnant des matrices unimodulaires non-inversibles, c.-à-d., les points de l'espace $\mathbb{R}^{N_{sup}}$ qui correspondent à une valeur nulle d'un des coefficients diagonaux de U(s). De plus, on peut remarquer que les colonnes de $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ forment une base de ce sous-espace vectoriel. Nous allons désormais exprimer le vecteur de paramètres $\tilde{\theta}^{\Upsilon}$ de l'ensemble des FMG-P équivalentes à $(\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s))$ en fonction de θ^{Υ} . Pour cela, nous considérons la matrice unimodulaire $\tilde{\mathsf{U}}(s)$ définie par

$$\mathsf{U}(s) = \check{\mathsf{U}}(s) + I_{n_y} \,, \tag{5.44}$$

où $U(s) \in \mathbb{U}_{\Upsilon}$ et I_{n_y} note la matrice identité de dimension n_y . La matrice identité est un élément de \mathbb{U}_{Υ} qui est l'ensemble des matrices unimodulaires inversibles dont la structure est donnée par l'équation (5.23). Alors clairement, $\tilde{U}(s)$ appartient à l'ensemble qui contient la matrice 0_{n_y} ainsi que toute matrice de l'ensemble \mathbb{U}_{Υ} à l'exception de la matrice $-I_{n_y}$. Toute transformation unimodulaire $\tilde{U}(s)$ de cet ensemble appliquée à $(\mathsf{D}(s),\mathsf{N}(s))$ permet donc d'obtenir une FMG équivalente dont le vecteur de paramètres $\tilde{\theta}^{\Upsilon}$ vaut

$$\tilde{\theta}^{\Upsilon} = \theta^{\Upsilon} + \Pi_F(\theta^{\Upsilon}) \,\tilde{\mathcal{U}} \,, \tag{5.45}$$

où $\tilde{\mathcal{U}}$ est le vecteur des coefficients de $\tilde{\mathsf{U}}(s)$. Les valeurs $\tilde{\theta}^{\Upsilon}$, $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ et $\tilde{\mathcal{U}}$ sont définies comme à l'équation (5.38). Ainsi, le plan tangent des classes d'équivalence $\mathcal{E}(\theta^{\Upsilon})$ est engendré par les colonnes de $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ qui forment donc une base de la classe d'équivalence. Le Lemme suivant établit le rang de $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$.

Lemme 5.2 (Rang de $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$). La matrice $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ définie par l'équation (5.38) est de rang plein.

Démonstration 5.2 ($\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ est de rang plein). $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ possède n_{θ} lignes et $N_u < n_{\theta}$ colonnes. On doit donc montrer que le rang de $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ est égal à

$$N_{u} = \sum_{k=1}^{n_{\rho}} \sum_{l=1}^{k} \mu_{k} \mu_{l} (\upsilon_{k} - \upsilon_{l}) ,$$

c.-à-d. que ses N_u colonnes sont indépendantes. D'après la construction de $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ donnée par l'équation (5.38), cela est équivalent à montrer que les colonnes des matrices Π_k sont indépendantes, ce qui est équivalent, d'après la définition de Π_k donnée à l'équation (5.35), à montrer que les $\sum_{l=1}^k \mu_l (v_k - v_l)$ colonnes de \mathfrak{F}_k^T sont linéairement indépendantes. Ainsi, montrer que $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$ revient à montrer que les lignes des matrices \mathfrak{F}_k sont linéairement indépendantes.

Par hypothèse, D(s) est réduit par ligne, autrement dit la matrice D_{hl} de ses plus hauts coefficients lignes est de rang plein. D_{hl} étant une matrice carrée, cela signifie que ses lignes sont linéairement indépendantes. Par définition, chaque matrice \mathcal{F}_k définie par l'équation (5.34) contient μ_k lignes de D_{hl} . Elles forment ainsi les n_y dernières colonnes des matrices \mathcal{F}_k . Pour tout $k \in \{1 \ \dots \ n_{\rho}\}$, ces μ_k lignes de D_{hl} sont indépendantes et impliquent donc que les lignes de \mathcal{F}_k sont indépendantes. Les lignes des matrices \mathfrak{F}_k étant formées des blocs \mathcal{F}_k et de blocs de zéros, les lignes des matrices \mathfrak{F}_k sont donc linéairement indépendantes.

5.2 Systèmes de coordonnées locales guidées par les données

5.2.1 Définition

L'utilisation de systèmes de coordonnées locales guidées par les données fut initiée à la fin des années 1990 par Wolodkin et al. (1997) et McKelvey et Helmersson (1997). Cette approche, plus connue sous la dénomination anglaise de Data Driven Local Coordinates (DDLC) consiste à identifier des représentations d'état pleines mais en réduisant le nombre de dimensions de recherche durant la minimisation du critère d'identification. Cette réduction est obtenue en réalisant l'optimisation selon les directions orthogonales au plan tangent à la classe d'équivalence des formes pleines. Ce faisant, le nombre de directions de recherche est réduit à un nombre minimum et seulement la partie de rang plein de la matrice Jacobienne est considérée. En procédant ainsi, l'approche DDLC permet d'assurer que la représentation choisie est localement identifiable. Ainsi, ces paramétrages offrent donc l'avantage majeur lié à l'utilisation de formes canoniques et pseudo-canoniques. De plus, et contrairement aux formes canoniques et pseudo-canoniques, l'utilisation d'un paramétrage par DDLC profite également des bons conditionnements numériques des problèmes d'identification procurés par l'utilisation de formes pleines. Grâce à ces deux attributs, l'approche DDLC permet d'améliorer les performances des méthodes d'optimisation conventionnelles par rapport aux résultats qu'elles fournissent avec des paramétrages canoniques ou pseudocanoniques (McKelvey et Helmersson, 1997; McKelvey et al., 2004). Pour cette raison, les méthodes reposant sur un paramétrage par DDLC ont rencontré un vif intérêt de la part de la communauté scientifique en identification. De nombreux travaux ont ainsi été réalisés sur la caractérisation formelle de l'approche DDLC et sur son usage pour améliorer les méthodes d'optimisation (voir par exemple (McKelvey et al., 2004; Ribarits et al., 2004; Wills et Ninness, 2008)).

La définition des FMG-P et l'étude de la structure des classes d'équivalence réalisée dans la Section 5.1 permettent d'étendre l'utilisation de cette approche aux fractions matricielles. Une conséquence directe du Lemme 5.1 est que les FMG-P possèdent N_{sup} paramètres non essentiels pour décrire la fonction de transfert. Considérer l'ensemble des paramètres θ^{Υ} des FMG-P se traduirait donc par $n_x(n_u + n_y) + n_u n_y + N_{sup}$ directions de recherche lors de l'optimisation. Or, en utilisant un système de coordonnées locales de θ^{Υ} , le nombre de dimensions de l'espace de recherche peut être réduit à un nombre minimal $N_{min} = n_x(n_u + n_y) + n_u n_y$. Ces directions sont données par les colonnes du complément orthogonal $\Pi_F^{\perp}(\theta^{\Upsilon})$ de l'espace tangent à la classe d'équivalence $\mathcal{E}(\theta^{\Upsilon})$. $\Pi_F^{\perp}(\theta^{\Upsilon})$ est obtenu, par exemple, par une décomposition en valeurs singulières ou une factorisation QR de $\Pi_F(\theta)$. D'après le Lemme 5.2, l'espace de recherche engendré par les colonnes de $\Pi_F^{\perp}(\theta^{\Upsilon})$ est toujours de dimension N_{min} , donc toujours égal au nombre minimal de coordonnées nécessaires pour représenter la fonction de transfert. Comme nous allons le voir, le vecteur de paramètres θ^{Υ} d'une FMG-P considérée joue le rôle de valeur nominale pour le paramétrage par coordonnées locales. Cette approche est donc parfaitement adaptée à une utilisation itérative où chaque nouvelle FMG-P identifiée devient la FMG-P nominale pour l'itération suivante.

5.2.2 Interprétation géométrique

On note φ_{Υ} l'application qui associe à θ^{Υ} une FMG-P (D(s), N(s)), soit

$$\begin{aligned} \varphi_{\Upsilon} : & \mathbb{T}_{\Upsilon} \longrightarrow & \mathbb{S}_i(n_x) \\ & \theta^{\Upsilon} \longmapsto & (\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)) , \end{aligned} \tag{5.46}$$

où $\mathbb{T}_{\Upsilon} \subseteq \mathbb{R}^{N_{min}+N_{sup}}$ est l'ensemble des coefficients non fixés à 0 des FMG-P d'indices de structure Υ . Notons que φ_{Υ} peut se décomposer en deux applications. La première, quasi-directe, est l'application qui insère les paramètres θ^{Υ} dans les matrices de coefficients¹ \mathcal{D} et \mathcal{N} de $(\mathsf{D}(s),\mathsf{N}(s))$. La deuxième application multiplie \mathcal{D} et \mathcal{N} par les matrices de Vandermonde des puissances de *s* pour construire $\mathsf{D}(s)$ et $\mathsf{N}(s)$. Ces deux applications étant continues, bijectives et d'inverse continues, φ_{Υ} est un homéomorphisme (Hannan et Deistler, 1988). On peut désormais introduire la définition des *coordonnées locales des FMG-P quidées par les données*.

Définition 5.3 (Coordonnées locales des FMG-P guidées par les données). Soit $\theta^{\Upsilon} \in \mathbb{T}_{\Upsilon}$, le vecteur des coefficients non nuls d'une FMG-P de $\mathbb{S}_i(n_x)$. L'application δ_{Υ} suivante

$$\begin{aligned} \delta_{\Upsilon} : & \mathbb{P}_{\Upsilon}^{d} & \longrightarrow & \mathbb{T}_{\Upsilon} \\ & \theta_{d}^{\Upsilon} & \longmapsto & \theta^{\Upsilon}(\theta_{d}^{\Upsilon}) = \theta^{\Upsilon} + \Pi_{F}^{\perp}(\theta^{\Upsilon}) \, \theta_{d}^{\Upsilon} \,, \end{aligned} \tag{5.47}$$

transfère les coordonnées θ_d^{Υ} des points de $\delta_{\Upsilon}^{-1}(\mathbb{T}_{\Upsilon})$ à ceux de l'ensemble des coefficients \mathbb{T}_{Υ} . On dit que le vecteur θ_d^{Υ} devient un vecteur de coordonnées locales dans \mathbb{T}_{Υ} . L'ensemble $\mathbb{P}_{\Upsilon}^d \subset \mathbb{R}^{N_{min}}$ devient l'espace des paramètres, autrement dit l'ensemble des coordonnées θ_d^{Υ} telles que $\varphi_{\Upsilon}(\theta^{\Upsilon}(\theta_d^{\Upsilon}))$ soit une FMG irréductible d'ordre n_x . On note \mathbb{V}_{Υ}^d l'ensemble des fonctions de transfert dont les coordonnées locales sont $\theta_d^{\Upsilon} \in \mathbb{P}_{\Upsilon}^d$, c.-à-d., $\mathbb{V}_{\Upsilon}^d = \pi(\varphi_{\Upsilon}(\delta_{\Upsilon}(\mathbb{P}_{\Upsilon}^d)))$.

On note ψ_d^{Υ} le paramétrage par DDLC qui associe le transfert $\mathsf{H}(s)$ d'indices de structure Υ aux paramètres libres θ_d^{Υ} de la FMG ($\mathsf{D}(s), \mathsf{N}(s)$), soit¹

$$\begin{aligned}
\psi_d^{\Upsilon} : & \mathbb{V}_{\Upsilon}^d \longrightarrow \mathbb{P}_{\Upsilon}^d \\
& \mathsf{H}(s) \longmapsto \theta_d^{\Upsilon}.
\end{aligned}$$
(5.48)

¹La définition de \mathcal{D} et \mathcal{N} est donnée à la page 40.

¹Selon la définition d'un paramétrage adoptée et donnée à la page 42.

Le théorème suivant donne les principales propriétés de ce paramétrage.

Théorème 5.1 (Paramétrage par DDLC des FMG-P). Le paramétrage par DDLC ψ_d^{Υ} , avec $\Upsilon = (\rho_1 \ldots \rho_{n_y})$, possède les propriétés suivantes :

(i) \mathbb{P}^d_{Υ} est un sous-ensemble ouvert et dense de $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$, avec

$$n_{\theta} = n_x \left(n_u + n_y \right) + n_u \, n_y, \tag{5.49}$$

- (ii) ψ_d^{Υ} est un homéomorphisme,
- (iii) $((\mathbb{V}^d_{\Upsilon}, \psi^{\Upsilon}_d) \mid |\Upsilon| = n_x)$ est un système de coordonnées locales de $\mathbb{M}(n_x)$.
- **Démonstration 5.3.** (ii) Nous devons montrer que ψ_d^{Υ} est une application bijective, continue et d'inverse continue. Pour cela, nous utilisons le fait que $\psi_d^{\Upsilon} = (\delta_{\Upsilon} \circ \varphi_{\Upsilon} \circ \pi)^{-1}$. δ_{Υ} est une application affine qui est donc continue et bijective. Les colonnes de $\Pi_F^{\perp}(\theta^{\Upsilon})$ formant une base du complément orthogonal à la classe d'équivalence $\mathcal{E}_{\Upsilon}(\theta), \Pi_F^{\perp}(\theta^{\Upsilon})$ est de rang plein. δ_{Υ}^{-1} est donc continue. Ceci montre que δ_{Υ} est un homéomorphisme. Les applications π et φ_{Υ} étant des homéomorphismes, ψ_d^{Υ} est donc un homéomorphisme.
 - (i) Pour montrer que P^d_Υ est un sous-ensemble ouvert et dense de R^{nθ}, nous nous inspirons de la démonstration du point (i) du Théorème 4.9.1 dans (Ribarits, 2002). Pour cela, nous introduisons l'application

$$\Delta: \mathbb{R}^{n_{\theta}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta_{e}^{\Upsilon} \longmapsto \det(W_{o}^{n_{x}}(\theta_{e}^{\Upsilon}) W_{c}^{n_{x}}(\theta_{e}^{\Upsilon})), \qquad (5.50)$$

avec $W_o^{n_x}(\theta_e^{\Upsilon}) = \mathcal{O}_{n_x}^{\top} \mathcal{O}_{n_x} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ où \mathcal{O}_{n_x} est la matrice d'observabilité du système correspondant. $W_c^{n_x}(\theta_e^{\Upsilon})$ est définie de manière analogue d'après la matrice de contrôlabilité. Notons que θ_e^{Υ} est à la fois le vecteur des coefficients d'une FMG et d'une représentation d'état sous forme échelon (Hannan et Deistler, 1988). D'après Hannan et Deistler (1988), Δ est une fonction analytique. $\mathbb{P}_{\Upsilon}^d = (\Delta \circ \psi_e^{\Upsilon} \circ (\psi_d^{\Upsilon})^{-1})^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est donc l'antécédent d'un ensemble ouvert par une fonction continue. Donc \mathbb{P}_{Υ}^d est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^{n_θ} . La densité de \mathbb{P}_{Υ}^d dans \mathbb{R}^{n_θ} découle d'un résultat connu pour les fonctions analytiques (Hannan et Deistler, 1988) : $\Delta(\theta_e^{\Upsilon}) = 0$ ne peut être vrai que sur un sous-ensemble restreint de \mathbb{R}^{n_θ} . Vu que $\theta_e^{\Upsilon} = (\psi_e^{\Upsilon} \circ (\psi_d^{\Upsilon})^{-1})(\theta_d^{\Upsilon})$ et que ψ_e^{Υ} et ψ_d^{Υ} sont des homéomorphismes (d'après le Théorème (3.1) et le résultat précédent), \mathbb{P}_{Υ}^d est donc un sous-ensemble dense de \mathbb{R}^{n_θ} .

(iii) Clairement, l'ensemble $\{\mathbb{V}^{d}_{\Upsilon}, |\Upsilon| = n_x\}$ couvre l'espace $\mathbb{M}(n_x)$ des fonctions de transfert d'ordre n_x . Les propriétés (i) et (ii) précédemment démontrées associées au fait que les transformations de coordonnées sont des fonctions analytiques impliquent ce résultat. De même que pour les paramétrages canoniques et pseudo-canoniques vus précédemment, nous commentons brièvement les résultats de ce Théorème :

- (i) Là encore, cela signifie que les paramètres sont totalement libres et que *presque tout* point de $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$ correspond à une fonction de transfert de $\mathbb{M}(n_x)$.
- (ii) Assure la bijectivité et la continuité du paramétrage ψ_d^{Υ} . Notons qu'ici, ψ_d^{Υ} est défini *localement*, i.e. pour un voisinage ouvert de θ^{Υ} dans \mathbb{T}_{Υ} . En effet, $\psi_d^{\Upsilon} = (\delta_{\Upsilon} \circ \varphi_{\Upsilon} \circ \pi_i)^{-1}$ avec δ_{Υ} définie localement pour une valeur θ^{Υ} donnée. On dit que ψ_d^{Υ} est un paramétrage *local* d'un voisinage ouvert *local* dans \mathbb{V}_{Υ}^d . Comme mentionné dans (Ribarits, 2002) pour le paramétrage par DDLC des représentations d'état, l'exactitude des résultats d'identification étant conservée par des applications continues, l'exactitude de l'identification en terme d'estimation des fonctions de transfert impliquera donc l'exactitude en terme d'estimation des paramètres θ_d^{Υ} . Le problème d'estimation est donc *localement bien posé*.
- (iii) Pour une valeur nominale de θ^{Υ} , ψ_d^{Υ} est un paramétrage d'un voisinage local dans \mathbb{V}^d_{Υ} . Cependant, au cours d'un processus d'optimisation, la valeur nominale change à chaque itération, impliquant un voisinage local différent dans \mathbb{V}^d_{Υ} . Ainsi, sauf pour de rares cas particuliers (voir (Ribarits, 2002)), l'ensemble \mathbb{V}^d_{Υ} peut être atteint par des changements successifs de coordonnées locales.

La figure (5.1) donne une interprétation géométrique du paramétrage par DDLC des fractions matricielles.



FIGURE 5.1 – Représentation d'un système de coordonnées locales pour les FMG-P.

D'après l'analyse menée à la Section (5.1.3) où nous avons montré que l'ordre des indices dans Υ n'a pas d'importance pour les FMG-P, on peut remarquer que chaque ensemble \mathbb{V}^d_{Υ} englobe $n_y!$ partitions \mathbb{V}^e_{Υ} de $\mathbb{M}(n_x)$. En effet, ce sont les $n_y!$ ensembles de fonctions de transfert définies par $|\Upsilon| = n_x$, c.-à-d., ayant les mêmes indices de Kronecker mais ordonnés différemment. Cela signifie que par rapport aux paramétrages canoniques échelon, $n_y!$ fois moins de paramétrages par DDLC des FMG-P sont nécessaires pour représenter l'ensemble des fonctions de transfert d'ordre n_x .

5.3 Cas particuliers des FMG-P et des sur-paramétrages diagonaux quasi-uniformes

Le choix particulier d'une FMG-P structurée par une sélection de degrés quasi-uniformes présente un intérêt particulier pour l'identification. En effet, comme nous allons le voir ci-après, toute FMG-P quasi-uniforme est équivalente à une fraction matricielle pseudo-canonique. Les FMG-P quasiuniformes profitent donc des propriétés de recouvrement des formes pseudocanoniques (cf. Chapitre 3). De plus, nous introduisons, dans cette section, une seconde forme sur-paramétrée. Celle-ci, que nous dénommons fraction matricielle *sur-paramétrée diagonale* est également définie par un jeu d'indices quasi-constants. Comme nous allons le voir, elle constitue une forme également particulièrement intéressante pour notre étude puisqu'il s'agit d'un sur-paramétrage intermédiaire entre les paramétrages des formes

¹On rappelle que $\mathbb{V}^{e}_{\Upsilon}$, dont la définition est donnée à la page 50, définit l'ensemble des fonctions de transfert représentées par une FMG sous forme canonique échelon d'indices de Kronecker Υ .

pseudo-canoniques et ceux des formes sur-paramétrées pleines.

5.3.1 Paramétrage par DDLC des FMG-P quasi-uniformes

Si des indices quasi-constants sont choisis, les FMG-P ont une structure particulière. Par exemple, pour des indices Υ rangés par ordre croissant, soit

$$\Upsilon = \left[\underbrace{\rho \cdots \rho}_{\mu_1 \text{ fois}}, \underbrace{\rho+1 \cdots \rho+1}_{\mu_2 \text{ fois}}\right],$$

la structure des FMG-P est alors

$$\deg \mathsf{D}(s,\theta) = \left[\frac{\rho}{\rho+1}\right] \overset{\mu_1}{\downarrow}_{\mu_2} , \qquad \deg \mathsf{N}(s,\theta) = \left[\frac{\rho}{\rho+1}\right] \overset{\mu_1}{\downarrow}_{\mu_2} . \tag{5.51}$$

Nous appelons ces formes des FMG-P quasi-uniformes. Comme toute FMG-P, elles sont équivalentes aux formes échelons décrites à la Section 3.3.2 d'indices de Kronecker Υ . Mais les FMG-P quasi-uniformes présentent un intérêt particulier car on peut montrer qu'elles sont, de façon générique, équivalentes aux FMG pseudo-canoniques décrites à la Section 3.3.3 ayant les mêmes indices Υ . On montre le principe de cette démonstration à travers l'Exemple 5.51. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes pour le dénominateur

$$\mathsf{D}(s) = \begin{bmatrix} \mathsf{D}_{\mu_1\mu_1}(s) & \mathsf{D}_{\mu_1\mu_2}(s) \\ \mathsf{D}_{\mu_2\mu_1}(s) & \mathsf{D}_{\mu_2\mu_2}(s) \end{bmatrix},$$
(5.52)

où les $\mathsf{D}_{\mu_i\mu_j}(s)$ notent les blocs de polynômes de degré correspondant aux indices μ_i et μ_j , avec $i, j \in \{1, 2\}$. D'après la structure en degré définie par l'équation (5.23) (page 93), la matrice unimodulaire $\mathsf{U}(s)$ qui permet de transformer la FMG-P quasi-uniforme (5.51) en une forme pseudo-canonique équivalente est de la forme

$$\mathsf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_{\mu_1\mu_1,0} & 0\\ U_{\mu_2\mu_1,0} + U_{\mu_2\mu_1,1} s & U_{\mu_2\mu_2,0} \end{bmatrix}, \qquad (5.53)$$

où $U_{\mu_i\mu_j,l}$ désigne les coefficients de degré l des blocs $U_{\mu_i\mu_j}(s)$ de mêmes dimensions que $\mathsf{D}_{\mu_i\mu_j}(s)$. Dans la suite de cet exemple, afin de simplifier les notations, nous adoptons la convention suivante : $D_{ij,l} \triangleq D_{\mu_i\mu_j,l}$ et $U_{ij,l} \triangleq U_{\mu_i\mu_j,l}$. De même, on note $\overline{D}_{ij,l} \triangleq \overline{D}_{\mu_i\mu_j,l}$ les blocs de coefficients de la forme pseudo-canonique associée. D'après la structure de la forme pseudo-canonique donnée par l'équation (3.63), trouver les coefficients de U(s) consiste à résoudre le système d'équations suivant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0_{\mu_{2}\mu_{1}} & 0_{\mu_{2}\mu_{1}} & I_{\mu_{2}} \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{21,0}^{\top} \\ U_{21,1}^{\top} \\ U_{22,0}^{\top} \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}_{2}^{\top}} \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11,\rho} & 0 & 0 \\ D_{11,\rho-1} & D_{11,\rho} & D_{12,\rho} \\ D_{21,\rho} & D_{21,\rho+1} & D_{22,\rho+1} \end{bmatrix}}_{A},$$

$$\underbrace{I_{\mu_{1}}}_{\tilde{B}} = \underbrace{U_{11,0}}_{\mathcal{U}_{1}} & \underbrace{D_{11,\rho}}_{\tilde{A}},$$
(5.54)

où B et \tilde{B} correspondent aux coefficients d'une forme pleine qui doivent être fixés à 0 ou à 1 pour obtenir une forme pseudo-canonique. Ainsi, on a $B \triangleq \begin{bmatrix} \bar{D}_{21,\rho} & \bar{D}_{21,\rho+1} & \bar{D}_{22,\rho+1} \end{bmatrix}$ et $\tilde{B} \triangleq \bar{D}_{11,\rho}$. Il s'agit donc de trouver les coefficients

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \operatorname{vec}(\mathcal{U}_1) \\ \operatorname{vec}(\mathcal{U}_2) \end{bmatrix}$$
(5.55)

qui fixent $n_y^2 - n_y$ coefficients de D(s) à 0 et n_y coefficients à 1. Le système d'équations (5.54) possède une telle solution \mathcal{U} , c.-à-d., qu'il existe une FMG pseudo-canonique équivalente à la FMG-P (D(s), N(s)), si et seulement si

$$\begin{cases} A \text{ est inversible} \\ \tilde{A} \text{ est inversible} \end{cases} \iff \begin{cases} \det \begin{pmatrix} D_{11,\rho} & D_{12,\rho} \\ D_{21,\rho+1} & D_{22,\rho+1} \end{pmatrix} \neq 0 \\ \det D_{11,\rho} \neq 0 \end{cases}$$
(5.56)

En remarquant que

$$\begin{bmatrix} D_{11,\rho} & D_{12,\rho} \\ D_{21,\rho+1} & D_{22,\rho+1} \end{bmatrix} = \mathsf{D}_{hl} , \qquad (5.57)$$

où D_{hl} est la matrice des plus haut degrés ligne du dénominateur, on voit que la première condition est vérifiée par hypothèse d'après la Définition 5.1 des FMG-P. En effet, on a supposé les FMG-P réduites par ligne, autrement dit, det $(D_{hl}) \neq 0$. Il est donc possible de transformer toute FMG-P donnée par l'équation (5.51) en une FMG pseudo-canonique équivalente si et seulement si det $(D_{11,\rho}) \neq 0$. Théoriquement, cette condition n'est pas toujours strictement vérifiée. Si elle n'est pas vérifiée, ou si det $(D_{11,\rho})$ est proche de zéro, cela signifie que la FMG-P identifiée correspond à un système isolé qui n'est pas représentable par la forme pseudo-canonique structurée par des indices rangés par ordre croissant. Dans une telle situation, d'après la Section 5.1.3 où nous avons montré que l'arrangement des indices de structure n'impacte pas le résultat de l'identification, il est alors possible de modifier l'arrangement des indices dans Υ afin de rechercher une autre forme pseudo-canonique. Cela conduit alors à une condition nécessaire et suffisante similaire mais qui dépend de coefficients différents de la FMG-P identifiée. Par exemple, on peut montrer que la recherche de la forme pseudo-canonique équivalente ayant des indices de structure décroissants demande la résolution d'un système d'équations qui implique la condition det $D_{12,\rho} \neq 0$. D'après le Théorème 3.2, presque tout transfert dans $\mathbb{M}(n_x)$ est représentable par une FMG sous forme pseudo-canonique. On peut donc dire que pour presque toute FMG-P, il est possible de trouver une FMG pseudo-canonique équivalente. On peut de plus mentionner qu'en pratique, il n'a jamais été observé de cas où les conditions (5.56) ne soient pas vérifiées.

Ainsi, nous avons montré que pour un jeu d'indices Υ quasi-constants rangés par ordre croissant, toute FMG-P quasi-uniforme est équivalente presque partout à une FMG pseudo-canonique. Ce résultat peut être étendu à tout arrangement possible d'indices. Pour des indices non rangés par ordre croissant, le principe de la démonstration reste le même. Seule la répartition des blocs de coefficients change. Au final, la condition det $D_{11,\rho} \neq 0$ reste la condition nécessaire et suffisante à l'obtention d'une forme pseudo-canonique équivalente. Comme montré dans la Section 5.1.3, l'ordre des indices des FMG-P n'a pas d'influence. Le résultat montré ici implique donc que l'ensemble des systèmes représentés par les FMG-P quasi-uniformes d'indices Υ rangés par ordre croissant, noté \mathbb{V}^d , englobe les $\binom{n_y}{\mu_1}$ ensembles $\mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon}$. Autrement dit, tous les systèmes représentés par l'ensemble \mathbb{V}^d vérifient

$$\mathbb{V}^d \supset \bigcup_{|\Upsilon| = n_x} \mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon} \,. \tag{5.58}$$

De plus, les FMG-P quasi-uniformes étant un cas particulier des FMG-P, le paramétrage par DDLC vu dans la Section 5.2 reste évidemment valable et possède les mêmes propriétés que celles énoncées dans le cas général. Ainsi $\mathbb{V}^d \triangleq \mathbb{V}^d_{\Upsilon}$ lorsque les indices de structure sont quasi-constants.

En utilisant les notations introduites dans la Section 5.1.4, l'expression du plan tangent à la classe d'équivalence des FMG-P quasi-uniformes est donnée par

$$\Pi_F(\theta_d^{\Upsilon}) = \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0\\ 0 & \Pi_2 \end{bmatrix} , \qquad (5.59)$$

où Π_1 et Π_2 valent

$$\Pi_{1} = (I_{\mu_{1}} \otimes \mathfrak{F}_{1}^{T}) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{F}_{1} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{F}_{1}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$
$$\Pi_{2} = (I_{\mu_{2}} \otimes \mathfrak{F}_{2}^{T}) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{F}_{2} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{F}_{1}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline{\mathcal{F}_{2}} \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

5.3.2 Sur-paramétrage diagonal des FMG pseudo-canoniques

Le sur-paramétrage diagonal des FMG pseudo-canoniques, que nous avons introduit dans (Vayssettes et al., 2012a), peut être défini de la manière suivante.

Définition 5.4 (Sur-paramétrage diagonal des FMG). Soit un transfert de dimension $n_y \times n_u$ et d'ordre n_x . Soit une distribution Υ d'indices de structure définie par les équations (3.57) et (3.59) (p. 53). On appelle surparamétrage diagonal des FMG pseudo-canoniques, le paramétrage défini par les équations (3.60) et (3.61) (p. 54) où les coefficients de plus haut degré des polynômes diagonaux de D(s) sont libres.

D'après l'équation (5.23) (p. 93), la structure des matrices unimodulaires qui ne modifient pas la structure de ces FMG est donnée par

$$\deg \mathsf{U}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\infty \\ & \ddots & \\ -\infty & 0 \end{bmatrix} . \tag{5.62}$$

Cette structure décrit un sous-ensemble de l'ensemble \mathbb{U}_{Υ} des matrices unimodulaires qui maintiennent la structure des FMG-P. Cela correspond, en effet, à l'ensemble des matrices de \mathbb{U}_{Υ} dont les coefficients hors diagonaux sont tous nuls. On note θ_s^{Υ} le vecteur des coefficients non fixés d'une FMG sur-paramétrée diagonale d'indices de structure Υ . Le nombre de coefficients non fixés est donc égal à $N_{min} + n_y$. De manière analogue au cas général des FMG-P, l'ensemble des vecteurs de paramètres des FMG sur-paramétrées équivalentes est défini par

$$\tilde{\theta}_s^{\Upsilon} = \theta_s^{\Upsilon} + \bar{\Pi}_F(\theta_s^{\Upsilon})\bar{\mathcal{U}}.$$
(5.63)

Ici, $\bar{\Pi}_F(\theta_s^{\Upsilon}) \in \mathbb{R}^{(N_{min}+n_y) \times n_y}$ et $\bar{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^{n_y}_*$ sont les matrices construites comme indiqué à la Section 5.1.4 d'après la structure des matrices unimodulaires (5.62).

Comme nous l'avons montré dans le cas général des FMG-P, de cette forme sur-paramétrée diagonale découle un paramétrage par coordonnées locales. Celui-ci est engendré par le complément orthogonal au plan tangent $\bar{\Pi}_F(\theta_s^{\Upsilon})$. De même que le paramétrage par DDLC des FMG-P, ce paramétrage est un homéomorphisme qui associe un sous-ensemble, noté \mathbb{V}_{Υ}^s , de $\mathbb{M}(n_x)$ à un sous-ensemble ouvert et dense, noté \mathbb{P}_{Υ}^s , de $\mathbb{R}^{N_{min}}$. L'ensemble des paramètres \mathbb{P}_{Υ}^s est ainsi de dimension égale à l'ensemble des paramètres, noté \mathbb{P}_{Υ}^d , lorsqu'un paramétrage plein est adopté. Cependant, $\bar{\Pi}_F(\theta_s^{\Upsilon})$ ayant un nombre de lignes inférieur à $\Pi_F(\theta^{\Upsilon})$, l'espace des coefficients non fixés est de dimension inférieure. Il s'agit du sous-espace de \mathbb{T}_{Υ} qui ne contient que les directions des coefficients non fixés à zéros. Ceci implique que l'ensemble \mathbb{V}_{Υ}^s des systèmes représentables est inclus dans \mathbb{V}_{Υ}^d . De même, l'ensemble $\mathbb{V}_{\Upsilon}^{pc}$ des systèmes représentables par les formes pseudo-canoniques est inclus dans $\mathbb{V}^{s}_{\Upsilon}$. D'après ces remarques, on peut ainsi exprimer les relations suivantes

$$\mathbb{V}^d \supseteq \mathbb{V}^s_{\Upsilon} \supseteq \mathbb{V}^{pc}_{\Upsilon} \,. \tag{5.64}$$

Par conséquent, on voit que plus la forme choisie contient de paramètres supplémentaires, plus l'ensemble des systèmes représentables par le paramétrage par coordonnées locales qui en découle est important. En ce sens, les formes sur-paramétrées diagonales permettent d'obtenir des paramétrages par DDLC *intermédiaires* entre les paramétrages des formes pseudocanoniques et ceux des formes pleines. Ces observations peuvent être généralisées à toute autre forme sur-paramétrée. En effet, les FMG-P étant les formes contenant un nombre maximal de paramètres (cf. Remarque (5.1)), toute autre forme sur-paramétrée respectant l'ordre et la propreté des FMG induirait un paramétrage par coordonnées locales qui serait *intermédiaire* entre le paramétrage par DDLC des formes pleines et le paramétrage pseudocanonique.

Par ailleurs, il est important de mentionner que contrairement aux FMG-P quasi-uniformes, deux arrangements différents des indices de structure ne conduisent pas à des formes sur-paramétrées diagonales équivalentes. Le nombre de systèmes de coordonnées locales qui permet de couvrir l'ensemble des transferts $\mathbb{M}(n_x)$ est donc plus important que pour les formes pleines. De plus, l'incertitude liée du choix de l'ordre des indices subsiste donc dans le cas des des formes sur-paramétrées diagonales.

5.4 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons défini les fractions matricielles pleines. D'un point de vue analytique, ces formes pleines permettent de réduire l'effort de structuration des fractions matricielles à son minimum. En effet, seul un choix des degrés des lignes (FMG-P) ou des colonnes (FMD-P) doit être effectué. D'un point de vue pratique, l'implémentation de fonctions de calcul est également facilité par la gestion de ces structures simplifiées. L'étude des classes d'équivalence des FMG-P a ensuite permis de formuler un paramétrage par coordonnées locales guidées par les données. Comme nous le verrons dans le Chapitre 6, ce paramétrage va permettre d'améliorer les propriétés de convergence des méthodes d'optimisation par rapport aux résultats obtenus avec les paramétrages présents dans la littérature. Comme nous l'avons vu ce paramétrage est fondé sur l'utilisation de coordonnées locales qui, lors d'une utilisation itérative, sont mises à jour à chaque itération de l'algorithme. On peut mentionner qu'une approche similaire mais fondée sur un type de paramétrages différents a été développée dans la littérature (Fulcheri et Olivi, 1998). Ces travaux sont fondés sur l'utilisation de paramétrages par interpolation des fonctions rationnelles qui engendrent également des systèmes de coordonnées locales. Fondé sur l'utilisation de ces paramétrages, un algorithme de type quasi-Newton qui utilise des changements de systèmes de coordonnées locales a été développé et semble donner de bons résultats (Olivi et al., 2013). Il serait intéressant d'étudier les liens possibles entre cette approche et l'approche développée dans ce mémoire et de comparer les résultats obtenus dans les deux cas.

Plus spécifiquement, nous avons vu que les FMG-P quasi-uniformes sont liées aux formes pseudo-canoniques. Elles présentent donc un intérêt particulier pour l'identification. L'ordre des indices de structure pour les FMG-P n'ayant pas d'influence sur les résultats de l'identification, elles permettent, de plus, d'éviter un choix arbitraire de répartition des indices comme c'est le cas avec toute autre forme paramétrée. Du fait de ces avantages, l'utilisation des FMG-P quasi-uniformes sera privilégiée et généralement adoptée. Toutefois, si au cours de l'identification cela s'avérait nécessaire, un changement d'indices de structure pour basculer sur une forme non quasi-uniforme reste possible.

Nous avons également présenté, dans ce chapitre, le cas particulier des formes sur-paramétrées diagonales. Ces formes conduisent également à un paramétrage par DDLC qui, comme nous le verrons au Chapitre 6, permettent d'améliorer la convergence des méthodes d'optimisation par rapport aux paramétrages existants. Les formes sur-paramétrées diagonales sont un surparamétrage intermédiaire entre les formes pseudo-canoniques et les formes pleines. Il va nous permettre de caractériser, au Chapitre 6, l'influence du nombre de coefficients non-fixés sur la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton.

Chapitre 6

Améliorations des algorithmes itératifs d'identification fréquentielle de transferts MIMO

Dans ce chapitre, nous présentons un nouveau schéma de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton. Celui-ci est fondé sur l'utilisation des paramétrages par DDLC de fractions matricielles introduits au Chapitre 5. Fondée sur des simulations de Monte-Carlo, une analyse de la convergence est ensuite présentée afin d'étudier les propriétés de l'algorithme lorsque ces paramétrages sont utilisés. Ensuite, nous proposons une nouvelle formulation du problème d'identification afin de prendre en compte les conditions aux limites d'intégration. L'objectif étant de proposer une solution valable pour l'ensemble des méthodes itératives présentées au Chapitre 4 afin de réduire la durée d'identification tout en évitant que les effets transitoires ne biaisent les résultats obtenus.

Sommaire

| 6.1 Nouveaux schémas de convergence de l'algorithme | |
|---|--|
| de Gauss-Newton $\dots \dots \dots$ | |
| 6.1.1 | Expression de la méthode de Gauss-Newton pour les formes pleines |
| 6.1.2 | Explication des blocages numériques de la conver- gence |
| 6.1.3 | Sur-paramétrage et solution par pseudo-inverse $% \left({{\left({{{{\bf{n}}_{\rm{s}}}} \right)}_{\rm{sol}}} \right)$. 115 |
| 6.1.4 | Paramétrage par DDLC des fractions matricielles . 116 |
| 6.1.5 | Indépendance de la solution par rapport à la base de résolution |
| 6.1.6 | Analyse en simulation de l'influence du paramé- trage sur la convergence |
| 6.2 Prise en compte des conditions aux limites 131 | |
| 6.2.1 | Intégration des conditions aux limites |
| 6.2.2 | Évaluation sur un exemple de simulation 134 |
| 6.3 Bilan des améliorations proposées 138 | |

6.1 Nouveaux schémas de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton

Nous présentons dans cette section des schémas de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton fondés sur l'utilisation des formes sur-paramétrées pleines et diagonales présentées au Chapitre 5. Afin de simplifier les expressions mathématiques, nous reprenons ici les notations introduites au Chapitre 4, à savoir $\check{\theta}$ pour exprimer le vecteur de paramètres calculé à l'itération précédente et $\check{D}_f \triangleq \mathsf{D}(\check{\theta}, f)$, $\check{N}_f \triangleq \mathsf{N}(\check{\theta}, f)$ et $\check{\mathsf{H}}_f \triangleq \mathsf{H}(\check{\theta}, f)$. Le vecteur de paramètres considéré est formé des coefficients non-fixés des formes pleines. Toujours dans le but de simplifier les notations, on note $\theta \triangleq \theta^{\Upsilon}$.

6.1.1 Expression de la méthode de Gauss-Newton pour les formes pleines

En considérant que tous les coefficients des fractions matricielles pleines non fixés à zéros sont des paramètres, on a alors $\theta \in \mathbb{R}^{N_{min}+N_{sup}}$. Les deux expressions du critère à minimiser à chaque itération de l'algorithme de Gauss-Newton s'obtiennent comme détaillé dans le cas pseudo-canonique (Chapitre 4, p. 67 - 68), soit, en conservant les mêmes notations qu'au Chapitre 4¹,

FMG :
$$J_{\text{gn}}(\Delta\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \|\Delta Y_f - \check{\mathsf{D}}_f^{-1}(\mathsf{N}_f(\Delta\theta) - \mathsf{D}_f(\Delta\theta)\,\check{\mathsf{H}}_f)\,U_f\,\|_W^2$$
, (6.1)

FMD :
$$J_{\text{gn}}(\Delta\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \|\Delta Y_f - (\mathsf{N}_f(\Delta\theta) - \check{\mathsf{H}}_f \mathsf{D}_f(\Delta\theta)) \check{\mathsf{D}}_f^{-1} U_f \|_W^2$$
. (6.2)

Contrairement à l'expression présentée au Chapitre 4 pour le cas pseudocanonique, ici aucun coefficient n'est fixé à 1. En revanche, comme dans le cas pseudo-canonique, minimiser ces deux expressions revient à rechercher la solution réelle d'un problème des moindres carrés de la forme

$$J_{\rm gn}(\Delta\theta) = \|\bar{\mathbb{M}}_{\rm gn} \Delta\theta - \bar{\mathbb{Z}}_{\rm gn}\|^2, \qquad (6.3)$$

où² $\overline{\mathbb{M}}_{gn} \in \mathbb{R}^{2n_y n_f \times (N_{min}+N_{sup})}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{gn} \in \mathbb{R}^{N_{min}+N_{sup}}$ Le nombre de surparamètres étant dans ce cas égal à N_{sup} , la matrice Jacobienne $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$ n'est pas de rang plein et possède N_{sup} singularités. Comme nous allons l'expliquer dans la section suivante, une mauvaise gestion de ces singularités peut engendrer des problèmes numériques responsables d'un mauvais fonctionnement de l'algorithme.

¹De même qu'au Chapitre 4, et toujours par souci de clarté des expressions, les mêmes notations sont conservées dans les deux cas, mais il faut comprendre $\mathsf{D}_f \triangleq \mathsf{D}_G(f,\theta)$ et $\mathsf{N}_f \triangleq \mathsf{N}_G(f,\theta)$ pour les FMG et $\mathsf{D}_f \triangleq \mathsf{D}_D(f,\theta)$ et $\mathsf{N}_f \triangleq \mathsf{N}_D(f,\theta)$ pour les FMD.

 $^{{}^{2}\}overline{\mathbb{M}}_{gn}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{gn}$ sont respectivement formés avec les valeurs réelles et imaginaires de la matrice \mathbb{M}_{gn} et du vecteur \mathbb{Z}_{gn} comme à l'équation (4.17) (p. 66).

6.1.2 Explication des blocages numériques de la convergence

Une première façon de résoudre l'équation (6.3) consiste à fixer au moins N_{sup} paramètres pour ne considérer que la partie non-singulière de la matrice \mathbb{M}_{gn} . Comme illustré par l'Exemple 6.1, en fixant les N_{sup} paramètres qui correspondent aux coefficients contraints à 0 ou à 1 lorsqu'un paramétrage pseudo-canonique est adopté, on obtient la structure générale des formes pseudo-canoniques.

Exemple 6.1. Prenons l'exemple d'un système d'ordre $n_x = 3$, de dimensions $n_y = 2$ et $n_u = 1$, et d'indices de Kronecker $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Les FMG-P représentant ce système sont de la forme

$$D(s,\theta) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \vartheta_4 s & \theta_2 + \theta_5 s \\ \theta_7 + \vartheta_{10} s + \vartheta_{13} s^2 & \theta_8 + \theta_{11} s + \vartheta_{14} s^2 \end{bmatrix},$$

$$N(s,\theta) = \begin{bmatrix} \theta_3 + \theta_6 s \\ \theta_9 + \theta_{12} s + \theta_{15} s^2 \end{bmatrix}.$$
(6.4)

Le vecteur de paramètres θ contient tous les coefficients θ_i et ϑ_i . Si on fixe les paramètres ϑ_{10} et ϑ_{13} à zéro ainsi que les paramètres ϑ_4 et ϑ_{14} alors on obtient le paramétrage pseudo-canonique décrit au Chapitre 3. Le vecteur de paramètres θ de la forme canonique est alors constitué uniquement des coefficients θ_i .

En appliquant de telles contraintes, il est donc possible de retrouver, d'après l'équation (6.3), la solution réelle donnée au Chapitre 4 par l'équation (4.32) (p. 69). En adoptant les notations Matlab pour la sélection des colonnes de matrices, et en notant S et F l'indice des coefficients de θ qui sont respectivement mis en recherche et fixés, cette solution correspond donc à la solution d'un problème des moindres carrés contraint de la forme

$$J_{\rm gn}(\Delta\theta(S)) = \|\bar{\mathbb{M}}_{\rm gn}(:,S) \ \Delta\theta(S) + \bar{\mathbb{M}}_{\rm gn}(:,F) \ \Delta\theta(F) + \bar{\mathbb{Z}}_{\rm gn}\|^2$$

sujet à $\Delta\theta(F) = 0$, (6.5)

dont la solution est donnée par

$$\Delta\theta(S) = ((\bar{\mathbb{M}}_{gn}(:,S))^{\top} \bar{\mathbb{M}}_{gn}(:,S))^{-1} (\bar{\mathbb{M}}_{gn}(:,S))^{\top} \bar{\mathbb{Z}}_{gn}.$$
(6.6)

Dans ce cas, il est crucial que la matrice $\overline{\mathbb{M}}_{gn}(:, S)$ associée aux paramètres recherchés soit non-singulière. Bien que cette condition puisse paraître générique, il arrive assez fréquemment qu'au cours de l'optimisation $\overline{\mathbb{M}}_{gn}(:, S)$ approche d'une singularité numérique. L'optimisation se bloque alors sur les valeurs des paramètres estimés à cet instant de l'optimisation comme illustré à la Figure 6.1 Dans une telle situation, le calcul de la solution des moindres carrés s'apparente à l'algorithme de l'itération inverse (Mathews et Fink, 2004). Cette méthode numérique, aussi appelée méthode de la puissance inverse, est un algorithme très efficace de calcul des vecteurs propres ou des vecteurs singuliers d'une matrice (Golub et Van Loan, 1996; Demmel, 1997). Comme c'est le cas pour l'itération inverse, lorsque $\overline{M}_{gn}(:, S)$ s'approche d'une singularité, la solution donnée par l'équation (4.32) est un vecteur qui, à chaque itération, se rapproche un peu plus du noyau de cette matrice. Comme on le verra dans la Section 6.1.5, ce noyau est formé de combinaisons linéaires des paramètres des fractions matricielles équivalentes à ($\check{D}(s), \check{N}(s)$). Dans une telle situation, θ tend alors vers une combinaison des paramètres précédents $\check{\theta}$ qui correspond aux paramètres d'une fonction de transfert équivalente. L'algorithme est alors incapable d'identifier un transfert différent, ce qui explique pourquoi la convergence est bloquée.



FIGURE 6.1 – Illustration du phénomène de blocage sur un modèle de structure flexible utilisé au Chapitre 8 : les pôles identifiés (représentés par les ronds) restent bloqués sur des valeurs différentes des pôles du système (représentés par les croix).

Afin d'éviter qu'une telle situation se produise, il est donc nécessaire de relâcher les contraintes lors de la résolution des moindres carrés. Nous présentons ci-après deux approches possibles fondées sur l'utilisation des formes sur-paramétrées définies au Chapitre 5. Uniquement le cas des FMG est développé dans les Sections 6.1.3 et 6.1.4, les résultats analogues pour le cas des FMD s'obtenant toujours par transposition. De plus, nous détaillons dans ce chapitre uniquement le cas des fractions matricielles quasi-uniformes qui, pour les raisons expliquées au Chapitre 5, seront généralement utilisées.

Remarque 6.1. Dans la suite de ce chapitre, nous proposons un nouveau schéma de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton afin d'éviter les blocages numériques de sa convergence. Toutefois, la matrice $\overline{M}_{gn}(:, S)$ qui, comme nous venons de le montrer, est responsable de ces blocages, intervient également dans l'expression du schéma de convergence de la méthode de la

Variable Instrumentale (VI) présentée au Chapitre 4. Il est donc possible que des problèmes de blocage similaires se produisent pour la méthode VI. Cependant, l'analyse de ces situations et l'expression d'un nouveau schéma de convergence pour la méthode VI n'ont pas été traités dans cette étude et sont remis à des recherches futures.

6.1.3 Sur-paramétrage et solution par pseudo-inverse

Afin d'éviter les blocages de la convergence, une première possibilité consiste à considérer le paramétrage plein des fractions matricielles et à rechercher l'ensemble des coefficients du vecteur $\theta \in \mathbb{R}^{N_{min}+N_{sup}}$. La matrice $\overline{\mathbb{M}}_{gn} \in \mathbb{R}^{2n_y n_f \times (N_{min}+N_{sup})}$ étant alors singulière, le problème est résolu en faisant usage d'une pseudo-inverse de la matrice $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$. Dans le cas de fractions matricielles sur-paramétrées, $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$ possède N_{sup} singularités. Selon le paramétrage adopté, d'après les développements du Chapitre 5, on a respectivement $N_{sup} = n_y^2$, $N_{sup} = n_u^2$, $N_{sup} = n_y$ ou $N_{sup} = n_u$ pour des fractions matricielles quasi-uniformes pleines à gauches, pleines à droite, sur-paramétrées diagonales à gauche ou sur-paramétrées diagonales à droite. De ce fait, quelle que soit la forme sur-paramétrée adoptée, la décomposition en valeurs singulières (SVD) de $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$ est de la forme (Golub et Van Loan, 1996)

$$\bar{\mathbb{M}}_{\text{gn}} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\top\\ V_2^\top \end{bmatrix} = U_1 S_1 V_1^\top , \qquad (6.7)$$

où $U_1 \in \mathbb{R}^{2n_y n_f \times N_{min}}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{N_{min} \times N_{min}}$ et $V_1 \in \mathbb{R}^{N_{min} \times (N_{min} + N_u)}$. De plus, S_1 est une matrice diagonale qui contient les N_{min} valeurs singulières non nulles de $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$. Avec cette approche, la mise à jour des paramètres à chaque itération est donnée par

$$\theta = \check{\theta} + \Delta \theta \quad \text{avec} \quad \Delta \theta = \bar{\mathbb{M}}_{\text{gn}}^{\#} \bar{\mathbb{Z}}_{\text{gn}} ,$$
 (6.8)

où $\overline{\mathbb{M}}_{gn}^{\#} = V_1 S_1^{-1} U_1^{\top}$ note la pseudo-inverse de Moore-Penrose de $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$. La valeur $\Delta \theta$ ainsi calculée est orthogonale au noyau de $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$ (Golub et Van Loan, 1996). De plus, cette méthode de base donnée par l'équation (6.8) peut être améliorée. Tout d'abord, comme dans le cas des FMG pseudo-canoniques présenté au Chapitre 4, une recherche unidimensionnelle selon la direction $\Delta \theta$ peut être réalisée afin d'assurer que la nouvelle valeur du critère soit inférieure à la valeur précédente, soit

$$\theta = \check{\theta} + \alpha \ \Delta\theta \,, \tag{6.9}$$

où la valeur scalaire α est trouvée en appliquant une des méthodes de recherche unidimensionnelle disponibles dans la littérature (cf. par exemple Minoux, 1983). Outre l'avantage d'éviter les situations de blocage de la convergence, les formes sur-paramétrées sont, d'une manière générale, connues pour améliorer la convergence des méthodes d'optimisation (McKelvey, 1995). De plus, la réduction du nombre de directions de recherche procuré par la SVD permet d'assurer une progression de la minimisation du critère. Cet aspect est également le principal avantage associé à l'utilisation de formes identifiables telles que les formes pseudo-canoniques (McKelvey, 1995). Cette approche permet donc d'associer les avantages provenant de l'utilisation des formes sur-paramétrées pleines à ceux provenant de l'utilisation de formes paramétrées identifiables.

6.1.4 Paramétrage par DDLC des fractions matricielles

Afin de résoudre le problème des moindres carrés (6.3) à chaque itération, une autre solution consiste à utiliser le paramétrage dynamique par coordonnées locales, plus couramment nommé *Data Driven Local Coordinates* (DDLC) en Anglais, introduit au Chapitre 5. Cette approche s'inspire de la méthode introduite par McKelvey et Helmersson (1997) puis développée dans plusieurs articles (Ribarits, 2002; McKelvey et al., 2004; Ribarits et al., 2004) pour l'identification de représentations d'état. La démarche consiste à rechercher une solution $\Delta\theta$ selon les directions orthogonales au plan tangent $\Pi_F(\check{\theta}) \in \mathbb{R}^{N_{min}+N_{sup}}$ défini au Chapitre 5 (p. 96). Celles-ci sont données par les colonnes de son complément orthogonal, noté $\Pi_F^{\perp}(\check{\theta})$. Celui-ci s'obtient grâce à une factorisation QR ou à une décomposition en valeurs singulières de $\Pi_F(\check{\theta})$ (Golub et Van Loan, 1996). $\Pi_F(\check{\theta})$ étant de rang plein d'après le Lemme 5.2 (p. 99), le nombre de colonnes de $\Pi_F^{\perp}(\check{\theta})$, c.-à-d., le nombre de directions orthogonales considérées vaut

$$d_{\perp} = n_{\theta} - \operatorname{rank}(\Pi_F) = n_{\theta} - N_{sup} \,. \tag{6.10}$$

Ce faisant, la solution $\Delta \theta$ s'écrit

$$\Delta \theta(\theta_d) = \Pi_F^{\perp}(\check{\theta}) \,\theta_d \,, \tag{6.11}$$

où $\theta_d \in \mathbb{R}^{N_{min}}$ est le vecteur de coordonnées locales (cf. Section 5.2). Cette approche consiste donc à rechercher la solution θ_d du problème des moindres carrés suivant

$$J_{\rm gn}(\Delta\theta(\theta_d)) = \|\mathbb{M}_{\rm gn}^{\perp} \theta_d - \mathbb{Z}_{\rm gn}\|^2, \qquad (6.12)$$

où $\mathbb{M}_{\text{gn}}^{\perp} = \mathbb{M}_{\text{gn}} \prod_{F}^{\perp}(\check{\theta})$. La solution réelle du problème (6.12) qui minimise ce critère est donnée par

$$\theta_d = ((\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\perp})^{\top} (\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\perp}))^{-1} (\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\perp})^{\top} \bar{\mathbb{Z}}_{\mathrm{gn}} , \qquad (6.13)$$

où $\overline{\mathbb{M}}_{gn}^{\perp}$ et $\overline{\mathbb{Z}}$ sont construites avec les parties réelles et imaginaires respectivement de \mathbb{M}_{gn}^{\perp} et \mathbb{Z} de façon similaire à la construction (4.17). D'après la

Définition 5.3 (p. 101), θ_d sont les coordonnées locales de la FMG-P identifiée à l'itération courante. Le schéma de convergence basique de l'algorithme de Gauss-Newton est, dans ce cas, donné par

$$\theta = \check{\theta} + \Delta \theta(\theta_d) . \tag{6.14}$$

Wills et Ninness (2008) ont récemment montré que, à chaque itération, cette approche implique les mêmes directions de recherche que la pseudo-inverse de Moore-Penrose. Ce résultat, montré pour les représentations d'état, ne dépend pas du type de représentation choisi. Il est donc aussi vrai dans notre cas. Ainsi, d'après (Wills et Ninness, 2008, Théorème 5.1), les deux schémas de convergence donnés par les équations (6.8) et (6.14) sont par conséquent identiques. Cela implique donc l'égalité suivante

$$\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\#} = \Pi_F^{\perp}(\check{\theta}) \left((\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\perp})^{\top} (\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\perp}) \right)^{-1} (\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\perp})^{\top} .$$
(6.15)

De même que pour la solution par pseudo-inverse, le schéma de convergence basique donné par l'équation (6.14) peut être amélioré en appliquant une minimisation unidimensionnelle comme présenté à l'équation (6.9).

L'approche DDLC permet ainsi d'obtenir des schémas de convergence identiques à ceux fondés sur une résolution par pseudo-inverse. Toutefois, l'utilisation d'un paramétrage par DDLC permet de calculer directement \mathbb{M}_{gn}^{\perp} sans nécessiter le calcul préalable de \mathbb{M}_{gn} (McKelvey et Helmersson, 1997). En effet, cela est possible en appliquant la méthode des différences finies afin de calculer les différentielles qui composent les colonnes de \mathbb{M}_{gn}^{\perp} . Avec les notations utilisées (cf. p. 68), pour toute valeur f considérée, la $p^{\text{ième}}$ colonne de \mathbb{M}_{gn} est définie, an appliquant la méthode des différences finies, par

$$\mathbb{M}_{\mathrm{gn}}(i_f, p) = \lim_{\gamma \to 0} \frac{\left(\mathsf{H}_f(\check{\theta} + e_p \gamma) - \mathsf{H}_f(\check{\theta})\right) U_f}{\gamma}, \qquad (6.16)$$

où i_f note les indices des n_y lignes calculées à la fréquence f, et $e_p = I_{n_\theta}(:, p)$ est le vecteur unitaire associé au $p^{\text{ième}}$ élément de θ , noté θ_p . En utilisant les colonnes de $\Pi_F^{\perp}(\check{\theta}) \in \mathbb{R}^{(N_{min}+N_{sup})\times N_{min}}$ comme vecteurs unitaires pour le calcul des différences finies, les colonnes de la matrice \mathbb{M}_{gn}^{\perp} sont alors définies par (McKelvey et Helmersson, 1997)

$$\mathbb{M}_{\mathrm{gn}}^{\perp}(i_f, p) = \lim_{\gamma \to 0} \frac{\left(\mathsf{H}_f(\check{\theta} + \pi_p^{\perp}(\check{\theta})\gamma) - \mathsf{H}_f(\check{\theta})\right) U_f}{\gamma} , \qquad (6.17)$$

où $\pi_p^{\perp}(\check{\theta})$ note la p^{ième} colonne de $\Pi_F^{\perp}(\check{\theta})$. D'après l'expression des dérivées donnée par l'équation (4.25) (p. 68), la valeur de \mathbb{M}_{gn}^{\perp} ainsi calculée dans le cas des FMG est égale à

$$\mathbb{M}_{\mathrm{gn}}^{\perp}(i_f, p) = \lim_{\gamma \to 0} \frac{\mathsf{D}_f^{-1}\left(\mathsf{N}_f(\pi_p^{\perp}(\check{\theta})\gamma) - \mathsf{D}_f(\pi_p^{\perp}(\check{\theta})\gamma)\,\check{\mathsf{H}}_f\right)\,U_f}{\gamma} \,. \tag{6.18}$$

Ce faisant, le nombre de calculs de gradient nécessaires est diminué d'un nombre égal à rang $(\Pi_F(\check{\theta}))$ car la matrice Jacobienne réduite \mathbb{M}_{gn}^{\perp} possède rang $(\Pi_F(\check{\theta}))$ colonnes de moins que \mathbb{M}_{gn} . Ainsi, dans le cas des FMG-P quasiuniforme, le rang de $\Pi_F(\check{\theta})$ étant n_y^2 d'après le Lemme 5.2 (p. 99), l'approche DDLC permet d'éviter le calcul de n_y^2 colonnes de la matrice \mathbb{M}_{gn} . Lorsque le nombre de sorties est important, ce qui est généralement le cas en analyse modale, cela offre donc une réduction, qui peut ne pas être négligeable, des temps de calcul.

En résumé, aux propriétés favorables pour la minimisation du critère d'identification cités dans le cas d'une résolution par pseudo-inverse, l'approche DDLC ajoute l'avantage d'offrir un coût de calcul comparable à celui engendré par l'utilisation d'un paramétrage pseudo-canonique.

Nous avons vu que la solution obtenue avec l'approche DDLC est identique à celle donnée par la pseudo-inverse de Moore-Penrose. La direction de cette dernière est orthogonale au noyau de M_{gn} . Cependant, cette direction dépend de la base polynomiale choisie pour décrire les entrées des matrices N(s) et D(s). De ce fait, la solution obtenue dans une base n'est pas orthogonale au noyau de M_{gn} dans une autre base et vice versa. Par conséquent, le calcul du vecteur $\Delta \theta$ donné par l'équation (6.8) dépend de la base polynomiale choisie, ce qui peut avoir pour conséquence une convergence plus ou moins rapide et précise de l'algorithme selon la base de résolution choisie. Afin de trouver une solution indépendante de ce choix et ainsi d'éviter, si besoin, une telle incertitude, nous proposons une nouvelle procédure de mise à jour des coefficients. Comme nous allons le détailler ci-après, celle-ci est fondée sur l'exécution de n_u recherches unidimensionnelles.

6.1.5 Indépendance de la solution par rapport à la base de résolution

6.1.5.1 Cas général des fractions matricielles pleines

D'après le Lemme 5.1 (p. 98), pour tout¹ $\theta \in \mathbb{T}_{\Upsilon}, f \in \mathcal{F}$, on a

$$\mathsf{H}_f(\theta) = \mathsf{H}_f(\Pi_F(\theta)\,\mathcal{U})\,,\tag{6.19}$$

où $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{N_{sup}}_*$ note² le vecteur de coefficients non nuls d'une matrice unimodulaire $\mathsf{U}(s)$ qui maintient la structure en degré de la fraction matricielle. En notant $\overline{\mathcal{U}}$ les coefficients de la matrice $\overline{\mathsf{U}}(s) = \mathsf{U}(s) - I$, d'après l'équa-

¹On rappelle que \mathbb{T}_{Υ} désigne l'ensemble des paramètres des fonctions des FMG-P irréductibles d'ordre n_x et d'indices Υ , \mathcal{F} est l'ensemble des fréquences considérées.

²La définition de \mathcal{U} est donnée par l'équation (5.38) (p. 96).

tion (6.19), pour la valeur $\check{\theta}$ trouvée à l'itération précédente, on peut écrire

$$\mathsf{H}_{f}(\check{\theta}) = \mathsf{H}_{f}(\check{\theta} + \Pi_{F}(\check{\theta})\bar{\mathcal{U}}) = \mathsf{H}_{f}\left(\check{\theta} + \sum_{i=1}^{n_{y}^{2}} \pi_{i}(\check{\theta})\bar{u}_{i}\right), \qquad (6.20)$$

où $\pi_i(\check{\theta}) \in \mathbb{R}^{N_{min}+N_{sup}}$ et $\bar{u}_i \in \mathbb{R}$ désignent respectivement la $i^{\text{ième}}$ colonne de $\Pi_F(\check{\theta})$ et la $i^{\text{ième}}$ ligne de $\bar{\mathcal{U}}$. Une conséquence directe de ce résultat est que les dérivées directionnelles de $\mathsf{H}_f(\check{\theta})$ dans les directions $\pi_i(\check{\theta})$ sont nulles. Ainsi, nous avons

$$\forall f \quad \left. \frac{\partial \mathbf{H}_f}{\partial \theta} \right|_{\theta = \check{\theta}} \pi_i(\check{\theta}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\mathbb{M}}_{\text{gn}} \pi_i(\check{\theta}) = 0 \,, \tag{6.21}$$

ce qui implique que le noyau de $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$ est le sous-espace engendré par les n_y^2 vecteurs $\pi_i(\check{\theta})$. L'ensemble des solutions réelles du problème des moindres carrés (6.3) est donc donné par (Golub et Van Loan, 1996)

2

$$\bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\#} \bar{\mathbb{Z}}_{\mathrm{gn}} + \sum_{i=1}^{n_{\tilde{y}}} \beta_i \pi_i(\check{\theta}) \qquad \text{avec} \quad \Delta \theta = \bar{\mathbb{M}}_{\mathrm{gn}}^{\#} \bar{\mathbb{Z}}_{\mathrm{gn}} , \qquad (6.22)$$

où β_i , $i \in \{1, n_y\}$, est une valeur scalaire de \mathbb{R} . En remplaçant $\Delta \theta$ par cette expression dans l'équation (6.9), on obtient

$$\theta = \check{\theta} + \alpha \left(\Delta \theta + \sum_{i=1}^{n_y^2} \beta_i \pi_i(\check{\theta}) \right) \,. \tag{6.23}$$

D'après le Lemme 5.1, on peut développer $\check{\theta}$ selon les directions $\pi_i(\check{\theta})$

$$\check{\theta} = \sum_{i=1}^{n_y^2} \pi_i(\check{\theta}) \mathfrak{u}_i , \qquad (6.24)$$

où \mathfrak{u}_i notent ici la $i^{i\check{e}me}$ entrée des coefficients \mathcal{U} de la matrice unimodulaire particulière $\mathsf{U}(s) = I_{n_y} \in \mathbb{U}_{\Upsilon}$. De manière similaire, les vecteurs θ et $\Delta \theta$ peuvent respectivement être développés en fonction de $\pi_i(\theta)$ et $\pi_i(\Delta \theta)$. Ainsi, l'équation (6.23) donne

$$\theta = \sum_{i=1}^{n_y^2} (\alpha \,\beta_i + \mathfrak{u}_i) \,\pi_i(\check{\theta}) + \alpha \,\sum_{i=1}^{n_y^2} \pi_i(\Delta\theta) \,\mathfrak{u}_i \,, \tag{6.25}$$

et, sachant qu'une combinaison linéaire des $\pi_i(\theta)$ donne un transfert équivalent, l'opération de mise à jour des paramètres θ est alors donnée par

$$\theta = \sum_{i=1}^{n_y^2} \pi_i(\check{\theta}) + \sum_{i=1}^{n_y^2} \frac{\alpha}{\alpha \beta_i + \mathfrak{u}_i} \pi_i(\Delta \theta) \mathfrak{u}_i \,. \tag{6.26}$$

Seulement n_y coefficients \mathfrak{u}_i sont non nuls et égaux à 1. En notant *ii* leurs indices, la nouvelle valeur des paramètres est donnée par

$$\theta = \sum_{i=1}^{n_y^2} \pi_i(\check{\theta}) + \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_{ii} \pi_{ii}(\Delta \theta) \quad \text{avec} \quad \alpha_{ii} = \frac{\alpha}{\alpha \beta_{ii} + 1} \,. \tag{6.27}$$

Cette équation correspond à une minimisation multidimensionnelle le long des n_y directions $\pi_{ii}(\Delta\theta)$. Cependant, en pratique, et particulièrement si le nombre de sorties est grand, une telle recherche multidimensionnelle peut s'avérer couteuse en temps de calcul. Afin de réduire la durée de cette recherche, les coefficients α_{ii} peuvent être déterminés par plusieurs minimisations unidimensionnelles successives selon la procédure suivante :

- (i) Les valeurs α_{ii} sont initialisées à une même valeur par une minimisation globale selon $\Delta \theta$.
- (ii) Ces valeurs sont ensuite affinées en réalisant successivement une minimisation unidimensionnelle selon chaque direction $\pi_{ii}(\Delta\theta)$ en conservant les valeurs précédemment trouvées pour les autres coefficients α_{ii} .

Si nécessaire, l'étape (ii) est répétée jusqu'à ce que les valeurs α_{ii} aient convergé.

6.1.5.2 Cas particulier des fractions matricielles sur-paramétrées diagonales

Le schéma de convergence présenté précédemment permet de généraliser le schéma de résolution proposé dans (Vayssettes et al., 2012a) pour le surparamétrage diagonal des fractions matricielles. En effet, comme illustré par l'Exemple 6.2, l'utilisation du sur-paramétrage diagonal correspond au cas où chaque colonne de $\Pi_F(\theta)$ contient les paramètres d'une seule ligne de la fraction matricielle. Chaque vecteur $\pi_i(\theta)$ est de même longueur que θ mais ne contient que les coefficients correspondant aux entrées de la $i^{ième}$ ligne de D (s, θ) et N (s, θ) . Nous les appelons des *partitions lignes* de θ . Par définition, on a donc dans ce cas

$$\theta = \sum_{i=1}^{n_y} \pi_i(\theta) . \tag{6.28}$$

En suivant le même raisonnement que pour le cas général des FMG-P, le schéma de convergence est donné dans le cas particulier des formes surparamétrées diagonales par

$$\theta = \check{\theta} + \sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i \, \pi_i(\theta) \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \frac{\alpha}{1 + \beta_i}.$$
(6.29)

Exemple 6.2. Afin d'illustrer la recherche de solutions par minimisation multidimensionnelle, on considère un système d'ordre $n_x = 3$, de dimensions $n_y = 2$ et $n_u = 1$, et d'indices de Kronecker $\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Les FMG-P représentant ce système sont de la forme

$$D(s,\theta) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_4 s & \theta_2 + \theta_5 s \\ \theta_7 + \vartheta_{10} s + \vartheta_{13} s^2 & \theta_8 + \theta_{11} s + \theta_{14} s^2 \end{bmatrix},$$

$$N(s,\theta) = \begin{bmatrix} \theta_3 + \theta_6 s \\ \theta_9 + \theta_{12} s + \theta_{15} s^2 \end{bmatrix},$$
(6.30)

avec

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{15} \end{bmatrix}^\top \tag{6.31}$$

Les coefficients notés ϑ_i sont ceux fixés à 0 pour la forme sur-paramétrée diagonale. D'après l'équation (5.23) qui définit la structure générale des matrices unimodulaires qui maintiennent la structure des FMG-P, dans le cas présenté ici nous avons

$$\mathsf{U}(s) = \begin{bmatrix} \mathfrak{u}_1 & 0\\ \underline{\mathfrak{u}}_2 + \underline{\mathfrak{u}}_3 \, s & \mathfrak{u}_4 \end{bmatrix} \,. \tag{6.32}$$

Les coefficients notés \underline{u}_i sont ceux fixés à 0 pour la forme sur-paramétrée diagonale. L'ensemble des paramètres des FMG-P équivalentes vaut, d'après le Lemme 5.1

$$\check{\theta} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc} \theta_{1} & 0 & 0 & 0\\ \theta_{2} & 0 & 0 & 0\\ \theta_{2} & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \theta_{6} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \theta_{1} & 0 & \theta_{7}\\ 0 & \theta_{2} & 0 & \theta_{8}\\ 0 & \theta_{3} & 0 & \theta_{9}\\ 0 & \theta_{4} & \theta_{1} & \theta_{10}\\ 0 & \theta_{5} & \theta_{2} & \theta_{11}\\ 0 & \theta_{6} & \theta_{3} & \theta_{12}\\ 0 & 0 & \theta_{4} & \theta_{13}\\ 0 & 0 & \theta_{5} & \theta_{14}\\ 0 & 0 & \theta_{6} & \theta_{15} \end{bmatrix}}_{\Pi_{F}(\theta)} \qquad (6.33)$$

On voit que pour $U(s) = I_2$, on retrouve la valeur θ qui correspond à la somme de la première et de la quatrième colonne de $\Pi_F(\theta)$. Dans le cas des FMG-P, le nouveau jeu de paramètres calculés à chaque itération correspond donc, dans ce cas, à la somme des quatre colonnes de $\Pi_F(\theta)$ ajoutée aux colonnes 1 et 4 respectivement multipliées par les coefficients α_{11} et α_{22} . Dans l'équation (6.33), les coefficients ϑ_{10} , ϑ_{13} et $\underline{\mathfrak{u}}_2$, $\underline{\mathfrak{u}}_3$ sont absents respectivement des vecteurs θ et \mathcal{U} lorsque la forme sur-paramétrée diagonale est considérée. Par conséquent, $\Pi_F(\theta)$ est, dans ce cas, obtenu en supprimant les lignes et les colonnes indiquées par les flèches rouges. Les deux colonnes $\pi_i(\theta)$ restantes forment des partitions lignes de θ .

Cette solution permet, comme dans le cas des formes pleines, d'assurer l'indépendance de la solution par rapport à la base polynomiale choisie. L'adoption d'un tel type de minimisation est donc utile pour s'assurer que, à chaque itération, le calcul du nouveau jeu de paramètres ne puisse pas entrainer de mauvais comportement de l'algorithme dû simplement à un mauvais choix de la base de résolution. Cette stratégie de recherche étant plus coûteuse en temps de calcul qu'une recherche unidimensionnelle, si tel n'est pas le cas, il est préférable de réaliser une minimisation unidimensionnelle. Et si tel est le cas, il est préférable, si possible de choisir une base de résolution différente afin de privilégier l'utilisation d'une minimisation unidimensionnelle. Dans notre cas, après avoir pris soin de vérifier qu'une recherche unidimensionnelle par dichotomie donne des résultats quasi-identiques à ceux obtenus avec cette recherche multidimensionnelle, les résultats proposés dans la suite ont été obtenus en réalisant à chaque itération de l'algorithme une recherche unidimensionnelle par dichotomie.

6.1.6 Analyse en simulation de l'influence du paramétrage sur la convergence

McKelvey et Helmersson (1997) ont proposé une étude statistique afin de mettre en avant l'avantage d'utiliser un paramétrage par DDLC des représentations d'état pleines. Cette étude a permis de valider l'amélioration apportée par cette approche pour l'identification de représentations d'état. Nous proposons dans cette section une étude statistique similaire afin d'étudier l'impact d'un paramétrage par DDLC des fractions matricielles sur les performances de l'algorithme de Gauss-Newton. Trois paramétrages des fractions matricielles à gauche et à droite vont être comparés : le paramétrage pseudo-canonique présenté au Chapitre 3, le paramétrage par DDLC de la forme sur-paramétrée diagonale et le paramétrage par DDLC des formes pleines quasi-uniformes introduites au Chapitre 5.

6.1.6.1 Présentation du benchmark

Afin d'analyser la convergence de la méthode de Gauss-Newton pour différents paramétrages, nous utilisons, dans cette section, des systèmes de dimension réduite. Nous considérons, dans un premier temps, le cas de représentations sous forme de FMG. Dans un deuxième temps, nous étudierons également le cas des FMD. Dans les deux cas, nous comparons la convergence de l'algorithme dans les trois situations suivantes :

- utilisation du paramétrage pseudo-canonique défini à la Section 3.3.3 et du schéma de convergence donné au Chapitre 4,
- utilisation du paramétrage par DDLC des fractions matricielles pleines définies au Chapitre 5 et du schéma de convergence donné par l'équation (6.14),
- utilisation du paramétrage par DDLC des fractions matricielles surparamétrées diagonales définies au Chapitre 5 et du schéma de convergence donné par l'équation (6.14).

De plus, à chaque itération une minimisation unidimensionnelle est réalisée dans chacun des trois cas. Comme nous l'avons expliqué dans la Section 6.1.4, la solution donnée avec un paramétrage DDLC est identique à celle donnée en considérant une résolution par pseudo-inverse de la forme sur-paramétrée associée. Le troisième cas considéré dans cette étude indiquera donc le comportement de la méthode de Gauss-Newton pour un sur-paramétrage intermédiaire entre les formes pseudo-canoniques et les formes pleines.

Dans cette étude, nous cherchons à retrouver, en partant de paramètres initiaux différents de ceux du système recherché, les paramètres d'un système d'après sa réponse non bruitée. Plusieurs systèmes de référence $H_0(s)$ sont générés aléatoirement. Ces systèmes possèdent 3 entrées, 5 sorties et sont de la forme

$$\mathsf{H}_{0}(s) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{R_{k}}{s+\lambda_{k}} + \frac{R_{k}^{H}}{s+\lambda_{k}^{*}} \right).$$
(6.34)

Chaque système est ainsi composé de m modes doubles. Nous considérons cinq valeurs différentes de $m : m = \{2, 3, ..., 6\}$. Pour chacune de ces valeurs, 20 systèmes sont générés aléatoirement selon le processus suivant :

- les m fréquences f_k de chaque mode sont tirées aléatoirement entre 1 et 6 Hz,
- les *m* taux d'amortissement ξ_k de chaque mode sont tirés aléatoirement entre 0.005 et 0.050,
- les participations modales b_k^{\top} et les déformées modales c_k de chaque mode, qui définissent les résidus $R_k = b_k^{\top} c_k$, sont générés aléatoirement par une loi de distribution normale de moyenne nulle et de variance unitaire.

Chaque optimisation est initialisée avec des paramètres perturbés de manière aléatoire. Les paramètres initiaux sont obtenus en ajoutant aux valeurs des fréquences, des amortissements, des participations modales et des déformées modales de $H_0(s)$ des perturbations aléatoires. Celles-ci sont des distributions gaussiennes de moyenne nulle et de variance respectivement égale à

- 0.05 Hz pour les fréquences,
- 0.10 pour les amortissements,
- 0.20 pour les participations et déformées modales.

Ces choix de variance permettent de suffisamment perturber les paramètres sans pour autant que l'algorithme ne soit initialisé trop loin de l'optimum. Pour chaque modèle $H_0(s)$, l'optimisation est lancée avec 5 initialisations différentes. Pour chaque valeur de m, les 5 premiers résultats sont obtenus avec le premier modèle et les 5 initialisations différentes, les 5 résultats suivants sont obtenus avec le modèle suivant, etc... Cela signifie que les simulations 1-100 correspondent à des systèmes d'ordre 4, les simulations 101-200 correspondent à des systèmes d'ordre 6, etc... Enfin, les données utilisées pour réaliser les optimisations sont constituées des $n_f = 200$ échantillons des réponses fréquentielles non bruitées de chaque système sur la plage de fréquence $\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$ Hz. Les entrées fréquentielles utilisées $u_i(f)$, $i = \{1, 2, 3\}$, sont définies par

$$u_i(f) = e^{-j 2\pi \frac{(i-1)f}{n_u \, df}}$$
 avec $df = 0.025$. (6.35)

Les données d'entrée-sortie utilisées n'étant pas bruitées, la valeur du critère $J(\theta)$ doit normalement converger vers le minimum global et être égale à zéro à la fin de chaque optimisation. La minimisation est stoppée si l'amélioration relative du critère est trois fois inférieure à 10^{-4} consécutivement, ou si plus de 500 itérations ont eu lieu. On considère que l'optimisation est réussie lorsque la valeur du critère atteint 10^{-10} .

6.1.6.2 Résultats pour les FMG

Les résultats des simulations de Monte-Carlo réalisées pour des représentations sous forme de FMG sont montrés sur les Figures 6.2 à 6.4. La convergence de l'algorithme est analysée en observant les valeurs finales du critère d'identification (Figure 6.2) et le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre cette valeur finale (Figure 6.3). De plus, nous observons le conditionnement des matrices Jacobiennes considérées : \overline{M}_{gn} dans le cas pseudocanonique et $\overline{M}_{gn}^{\perp}$ pour les deux paramétrages DDLC considérés. Le conditionnement d'une matrice X est défini par

$$\operatorname{cond}(X) = \frac{\max_k s_k}{\min_k s_k}, \qquad (6.36)$$

où s_k sont les valeurs singulières de la matrice X. Sachant qu'un conditionnement élevé entraine une détermination numériquement instable de la direction de descente $\Delta \theta$ de l'algorithme de Gauss-Newton, le conditionnement de la Jacobienne est souvent utilisé comme indicateur de la qualité de la convergence (McKelvey et Helmersson, 1997). Lorsque le conditionnement dépasse 10^{15} , la matrice $\overline{\mathbb{M}}_{gn}$ devient singulière et la minimisation est stoppée. Les valeurs maximales de conditionnement atteintes au cour des itérations réalisées sont données par la Figure 6.4.

Sur la Figure 6.2, on voit que, dans de nombreux cas, l'optimisation ne converge pas vers les paramètres du vrai système lorsque les formes pseudocanoniques (points bleus) ou sur-paramétrées diagonales (croix vertes) sont adoptées. On remarque que plus l'ordre du système est grand, c.-à-d., plus sa complexité augmente, plus le nombre d'optimisations n'ayant pas convergé est élevé. A l'inverse, lorsque le paramétrage par DDLC des formes pleines (croix rouges) est utilisé, seuls trois cas de non convergence sont observés.

Ces cas de non-convergence peuvent avoir deux causes différentes :

- la minimisation est bloquée par un faux minimum, c.-à-d., une situation où l'algorithme ne progresse plus alors qu'il ne se trouve pas sur un minimum réel du critère. Ceux-ci sont liés à la formulation du problème sous une forme plus contrainte qui laisse moins de degrés de liberté à l'algorithme pour converger. Ces situations se traduisent par un nombre d'itérations important sans réelle amélioration du critère d'optimisation,
- la matrice Jacobienne devient singulière durant l'optimisation. On observe alors un blocage numérique de la convergence prématuré comme expliqué à la Section 6.1. Ces cas sont repérés sur les différentes figures par les ronds noirs.

La Figure 6.3 permet de constater que le nombre d'itérations nécessaire pour converger est largement diminué lorsque les formes pleines sont utilisées par rapport aux deux autres formes. En particulier, on voit que le nombre d'optimisations n'ayant pas convergé après les 500 itérations est très largement diminué. En effet, seuls trois cas de blocage par un minimum local sont observés. Cela montre clairement que lorsque le paramétrage par DDLC des formes pleines est adopté, l'optimisation est beaucoup moins sensible aux faux minima.

La Figure 6.4 montre que le conditionnement de la matrice Jacobienne est également largement diminué par l'utilisation des formes pleines. Celuici reste relativement faible puisque la valeur maximale du conditionnement atteinte au cours des itérations n'est supérieure à 10⁸ qu'à deux reprises. Ainsi, la détermination des directions de minimisation se fait de manière plus précise, ce qui explique que la convergence nécessite globalement moins d'itérations. De plus, le conditionnement ne semble pas ou peu dépendre de la taille du système. A l'inverse, lorsque le paramétrage pseudo-canonique est adopté, on voit que les valeurs de conditionnement deviennent en moyenne plus élevées lorsque l'ordre du système augmente. La même tendance est observée avec le sur-paramétrage diagonal.



 $\label{eq:Figure 6.2-Valeurs du critère après minimisation pour les trois paramétrages des FMG.$



FIGURE 6.3 – Nombre d'itérations pour les trois paramétrages des FMG.





FIGURE 6.4 – Conditionnement maximal des matrices Jacobiennes pour les trois paramétrages des FMG.

Le conditionnement de la matrice Jacobienne est toutefois plus faible dans ce cas que pour les formes pseudo-canoniques. De plus, la Figure 6.4 permet de relever les cas de blocages numériques et ainsi de constater que l'utilisation des paramétrages par DDLC des formes pleines permet bien, comme nous le souhaitions, d'éviter de tels blocages. Le sur-paramétrage diagonal permet également d'éviter ces situations de blocages numériques de la convergence.

6.1.6.3 Résultats pour les FMD

Les résultats des simulations de Monte-Carlo réalisées pour des représentations sous forme de FMD sont montrés sur les Figures 6.5 à 6.7. La comparaison des formes pseudo-canoniques, des formes sur-paramétrées diagonales et des formes pleines conduit aux mêmes conclusions que pour les FMG. Ainsi, d'une part, le sur-paramétrage des FMD permet d'éviter les blocages numériques. D'autre part, la sensibilité vis-à-vis des faux minima diminue en augmentant le nombre de coefficients laissés libres.

Toutefois, on constate de légères différences entre les formes à droite et les formes à gauche étudiées précédemment. Sur la Figure 6.5, on constate que la forme pleine n'a pas convergé à plusieurs reprises. Ces non-convergences sont dues à la présence de faux minima dont l'algorithme n'arrive pas à sortir. Sur la Figure 6.7, on voit que le conditionnement maximal de la Jacobienne reste pourtant faible. Le calcul des directions de descente se fait donc correctement. Les cas de non convergence observés s'expliquent donc par une forme du critère qui semble plus complexe et irrégulière. L'algorithme de Gauss-Newton semble donc plus sensible à la présence de faux minima dans le cas des FMD-P que dans le cas des FMG-P. Cela signifie également qu'il sera plus sensible à une mauvaise initialisation avec les FMD-P qu'avec les FMG-P. Nous pouvons avancer deux explications possibles à cette différence constatée :

- La convergence des méthodes d'optimisation étant améliorée lorsqu'un plus grand nombre de paramètres sont laissés libres, le meilleur comportement des FMG-P peut s'expliquer par un nombre plus important de paramètres supplémentaires (n_y^2 contre n_u^2 pour les FMD-P). Afin de confirmer ou d'infirmer l'hypothèse que le nombre de paramètres supplémentaires peut améliorer la convergence indépendamment du type de représentation choisie, il serait intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus avec des représentations d'état pleines qui possèdent n_x^2 paramètres supplémentaires.
- Pour un ordre de système donné, les formes à droite possèdent des polynômes au dénominateur qui sont d'ordre plus élevé que pour les formes à gauche. Ceci peut favoriser un moins bon conditionnement des calculs. Bien que cette hypothèse semble contredite par les valeurs de conditionnements relativement similaires dans les deux cas, l'utilisation de bases polynomiales orthogonales dans les deux cas serait le meilleur moyen de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse.

Ces deux pistes d'explications restent cependant à être étudiées afin d'acquérir une meilleure compréhension des différences observées.



6.1 Nouveaux schémas de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton 129

 $\label{eq:FIGURE} \begin{array}{l} {\rm Figure} \ 6.5 - {\rm Valeurs} \ {\rm du} \ {\rm crit}\\ {\rm er} \ {\rm e} \ {\rm spring} \ {\rm minimisation} \ {\rm pour} \ {\rm les} \ {\rm trois} \\ {\rm paramétrages} \ {\rm des} \ {\rm FMD}. \end{array}$



FIGURE 6.6 – Nombre d'itérations pour les trois paramétrages des FMD.



FIGURE 6.7 – Conditionnement maximal des matrices Jacobiennes pour les trois paramétrages des FMD.

6.1.6.4 Bilan de l'analyse

Ces simulations de Monte-Carlo permettent donc de dégager deux principales tendances quant à l'influence du paramétrage des fractions matricielles. D'une part, afin d'éviter les situations de blocage numérique de la convergence expliquées à la Section 6.1, il est nécessaire de choisir des formes surparamétrées conduisant à l'utilisation d'un paramétrage par DDLC. La fréquence des blocages numériques augmentant avec l'ordre du système considéré, cela s'avère indispensable pour identifier des systèmes d'ordre élevé. D'autre part, plus le nombre de coefficients libres de la forme adoptée est grand, meilleur est le conditionnement de la matrice Jacobienne. Cette tendance s'accentue lorsque l'ordre du système augmente. Ainsi, le meilleur conditionnement est donné par les formes pleines (FMG-P et FMD-P) qui possèdent le nombre maximal de coefficients non-fixés. De ce fait, la précision de la direction de descente calculée à chaque itération est améliorée et le nombre d'itérations nécessaires pour converger est diminué. De plus, la convergence est moins sensible à la présence de faux minima, et donc aussi moins sensible à l'initialisation, lorsqu'un paramétrage par DDLC d'une forme pleine est utilisé. Enfin, la comparaison entre les FMG-P et les FMD-P montre que les FMD-P sont plus sensibles à l'initialisation que les FMG-P.

6.2 Prise en compte des conditions aux limites d'intégration pour le calcul des transformées de Fourier continues

Nous avons vu au Chapitre 4 que, en utilisant les transformées de Fourier des signaux d'entrée-sortie, la précision de l'identification est dégradée si on ne considère pas une durée d'enregistrement des données suffisamment importante. Dans cette section, nous proposons une solution afin d'éviter de telles dégradations. Celle-ci s'inspire de l'idée proposée dans (Pintelon et al., 1997) pour des transferts mono-entrée mono-sortie en temps discret. Comme nous allons le voir, cette solution est fondée sur l'intégration des conditions aux limites d'intégration dans la formulation du problème d'identification.

6.2.1 Intégration des conditions aux limites

Nous rappelons que l'objectif du problème d'identification tel qu'il est formulé au Chapitre 4 est de minimiser le critère d'identification suivant

$$J(\theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \|Y_f - Y_f(\theta)\|_W^2, \qquad (6.37)$$

où

$$Y_f(\theta) = \mathsf{H}_f(\theta) \ U_f \ , \tag{6.38}$$

et U_f , Y_f sont respectivement les transformées de Fourier des entrées et des sorties du système.

Dans le domaine temporel continu, la transformée de Fourier d'un signal est fondée sur l'intégration de ce signal sur l'ensemble (infini) de l'horizon temporel. Toutefois, lors d'expériences réelles, les signaux sont mesurés sur un intervalle $\begin{bmatrix} t_0 & t_1 \end{bmatrix}$ évidemment limité dans le temps. Si chaque signal n'est pas de valeur strictement égale aux instants limites t_0 et t_1 , par exemple lorsque le système n'est pas revenu à l'état d'équilibre à la fin du test, la relation (6.38) n'est alors plus vraie. Comme nous allons le voir, dans de tels cas, il est nécessaire d'intégrer des termes correctifs dans le calcul des transformées de Fourier afin d'obtenir des résultats mathématiquement corrects.

Pour le calcul de ces termes correctifs, nous adoptons l'approche de Klein et Morelli (2006, Chapitre 7) qui partent d'une représentation d'état du système donnée par

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t),$$

$$\dot{y}(t) = C x(t) + D u(t).$$
(6.39)

Soit X_f la transformée de Fourier du vecteur d'état x(t) sur l'intervalle $[t_0, t_1]$

$$X_f = \int_{t_0}^{t_1} x(t) e^{-j 2 \pi f t} dt.$$
 (6.40)

En intégrant par parties la première équation de la représentation (6.39), on peut facilement montrer que X_f est égal à

$$X_f = (j2\pi f \times I - A)^{-1} \ [B \ U_f + \Delta_f] , \qquad (6.41)$$

avec
$$\Delta_f = x_0 e^{-j 2 \pi f t_0} - x_1 e^{-j 2 \pi f t_1}.$$
 (6.42)

Ici, $x_0 = x(t_0)$ et $x_1 = x(t_1)$ représentent les valeurs de l'état aux limites d'intégration. Plutôt que d'effectuer un traitement sur les données pour éliminer le terme Δ_f comme indiqué dans (Klein et Morelli, 2006), nous allons l'intégrer au modèle à identifier.

En pratique, les signaux sont échantillonnés avec une période constante notée Δt . La Transformée de Fourier Discrète (TFD) est donc utilisée. Si x_k désigne les échantillons du vecteur d'état aux instants $k \Delta t$ et n le nombre d'échantillons, la TFD aux fréquences f_l $(l = 0, \dots, n-1)$ est donnée par (Labarrère et al., 1978)

$$X_{l} = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k} e^{-j 2 \pi f_{l} k \Delta t} \quad \text{avec} \quad f_{l} = \frac{l}{n \Delta t}. \quad (6.43)$$

Si le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon est vérifié, nous avons alors la relation suivante entre la transformée de Fourier continue et et la TFD (Labarrère et al., 1978)

$$X_{f_l} = \Delta t \; X_l. \tag{6.44}$$

La première conséquence de ce résultat est que la relation (6.42) doit être considérée uniquement pour les fréquences f_l . La deuxième conséquence est que, connaissant les n instants d'échantillonnage $k \Delta t$ pour $k = 0, \dots, n -$ 1, nous conservons une certaine liberté dans le choix des instants limites d'intégration t_0 et t_1 . En pratique, on peut en effet considérer toutes les valeurs données par $t_0 = -\alpha \Delta t$ et $t_1 = n\Delta t - \alpha \Delta t$ où $0 < \alpha < 1$. Toutefois, la formule (6.43) de la TFD procure une meilleure règle d'intégration numérique de la transformée continue donnée par l'équation (6.40) lorsque $\alpha = 1/2$ car elle n'entraine aucun déphasage temporel. L'évaluation du terme correctif Δ_f de l'équation (6.42) aux fréquences f_l et pour $\alpha = 1/2$ donne

$$\Delta_{f_l} = e^{j 2\pi f_l \frac{\Delta t}{2}} \Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta x = x_0 - x_1. \tag{6.45}$$

La transformée de Fourier du vecteur de sortie y(t) est ensuite obtenue

$$Y_{f_l} = C \ (j \ 2 \ \pi \ f_l \ I - A)^{-1} \ [B \ U_{f_l} + \Delta x \ V_{f_l}] + \bar{D} \ \begin{bmatrix} U_{f_l} \\ V_{f_l} \end{bmatrix}$$
(6.46)

avec
$$V_{f_l} = e^{j 2 \pi f_l \frac{\Delta t}{2}}$$
 et $\bar{D} = \begin{bmatrix} D & D_x \end{bmatrix}$. (6.47)



FIGURE 6.8 – Choix des instants limites d'intégration avec des données échantillonnées. Les échantillons du signal réel (pointillés bleu) sont représentés par des « + ». Le tracé continu bleu et pointillé rouge représentent respectivement les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1/2$.

Les n_y gains du vecteur D_x traduisent l'influence sur les conditions aux limites des modes présents en dehors de la bande de fréquence \mathcal{F} considérée. Ainsi, le transfert entrées-sorties qui prend en compte les conditions aux limites s'écrit

$$\mathbb{H}(s,\Theta) = C (s I - A)^{-1} \begin{bmatrix} B & \Delta x \end{bmatrix} + \bar{D}, \tag{6.48}$$

où $\Theta = \begin{bmatrix} \theta^T & \theta_{\Delta}^T \end{bmatrix}^T$ est un vecteur qui regroupe les paramètres descriptifs du système et les $n_x + n_y$ paramètres supplémentaires correspondant respectivement aux vecteurs Δx et D_x . De ce fait, les conditions aux limites des essais peuvent être considérées simplement en identifiant un système possédant une entrée fictive supplémentaire. Les valeurs fréquentielles de cette entrée supplémentaire sont égales à $V_{f_l} = e^{j 2 \pi f_l \frac{\Delta t}{2}}$. Le vecteur d'entrée considéré regroupe alors les entrées excitatrices et cette entrée fictive. A la fréquence f_l , ce vecteur d'entrée étendu vaut donc $\mathbb{U}_{f_l} = \begin{bmatrix} U_{f_l} V_{f_l} \end{bmatrix}^T$. Notons ici que d'après la définition du problème d'identification (4.5), nous avons $f \triangleq f_l$ où f note les fréquences considérées pour l'identification.

Le problème d'identification en erreur de sortie fréquentielle en présence de conditions aux limites non nulles peut donc être défini de la manière suivante :

Trouver les valeurs de Θ qui minimisent

$$\mathbb{J}(\Theta) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \| Y_f - \mathbb{H}_f(\Theta) \mathbb{U}_f \|_W^2.$$
(6.49)

Nous allons voir, sur un cas de simulation, que les conditions aux limites ont une influence importante sur les résultats si on souhaite réduire la durée de l'identification.
6.2.2 Évaluation sur un exemple de simulation

Afin d'évaluer l'intérêt de prendre en compte les conditions aux limites, nous reprenons ici l'exemple de simulation utilisé au Chapitre 4. On rappelle qu'il s'agit d'un modèle de système d'ordre 4 et de dimension 3×2 . De plus, l'excitation utilisée est un créneau d'une durée de 0.2 s appliqué successivement à chaque entrée du système. Le modèle identifié $\mathbb{H}(f, \Theta)$ est représenté sous forme d'une FMG-P.

6.2.2.1 Validation sur des données non bruitées

Le cas traité est constitué d'une phase d'excitation du système suivie d'une phase de retour à l'équilibre. Nous utilisons le rapport

$$A_r = (A/A_{\text{max}})_{\text{moven}}, \qquad (6.50)$$

entre l'amplitude de l'enveloppe d'un signal en fin d'identification (A) et son amplitude maximale (A_{\max}) pour évaluer le niveau de retour au repos du système. La valeur moyenne de ces rapports calculée sur les mesures donne un critère représentatif de l'éloignement du système par rapport à son état de repos. Comme le montre la Figure 6.9, cette valeur est directement liée à la durée d'enregistrement des données, notée d_r . La correspondance entre ces deux valeurs est donnée par le Tableau 6.1.



FIGURE 6.9 – Troisième sortie non bruitée du modèle.

La Figure 6.10 présente les valeurs du critère d'identification obtenues sur des données non bruitées pour différents niveaux de retour à l'équilibre du système. Les racines carrés des critères \mathbb{J} et J obtenues respectivement avec et sans prise en compte des termes de bord sont utilisées pour comparer le niveau de précision obtenu. Leurs valeurs normalisées par l'énergie des

| $d_r(s)$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 50 | 100 | 200 |
|----------|------|------|------|------|------|-------------------|-------------------|-------------------|
| A_r | 0.37 | 0.18 | 0.10 | 0.07 | 0.05 | $8 \cdot 10^{-3}$ | $2 \cdot 10^{-4}$ | $4 \cdot 10^{-7}$ |

TABLE 6.1 – Correspondance entre la durée d'enregistrement et le rapport d'amplitude $A_r = (A/A_{\text{max}})_{\text{moyen}}$.

sorties et notées $\overline{\mathbb{J}}^{1/2}$ et $\overline{J}^{1/2}$ sont considérées de sorte que les résultats soient compris entre 0 et 1.

Ces résultats montrent clairement que considérer les termes de bord entraîne une diminution systématique de la valeur du critère obtenue sur des données parfaites. Comme le montre la Figure 6.10, cela est vrai quelle que soit la méthode itérative utilisée. Sur des données parfaites, les résultats obtenus avec la méthode VI et la méthode de Gauss-Newton étant identiques, le deuxième graphique de la Figure 6.10 montre les résultats pour ces deux méthodes. Les valeurs obtenues sont, dans les trois cas, très proches de zéro. Elles ne sont pas strictement égales à zéro car en pratique le théorème de Nyquist-Shannon n'est jamais strictement vérifié. D'autre part, il est important de mentionner qu'avec les termes de bord, la convergence est toujours obtenue après seulement deux itérations alors qu'elle nécessite plus d'itérations si ces termes ne sont pas pris en compte.

6.2.2.2 Validation sur des données bruitées

Les résultats présentés dans cette section sont fondés sur une simulation de Monte-Carlo réalisée avec 100 séquences de bruit coloré différentes. Le niveau de rapport signal à bruit (SNR) moyen calculé sur les 20 secondes suivant l'excitation est égal à 23 dB.

Le critère donné par l'équation (6.49), ainsi que le BFR et le VAF définis au Chapitre 4 (p. 74), sont considérés comme indicateurs du niveau global de convergence. Le bénéfice réel de la prise en compte des termes de bord peut être évalué par les rapports entre les valeurs de ces trois indicateurs obtenues avec (\mathbb{J} , \mathbb{BFR} , \mathbb{VAF}) et sans (J, BFR, VAF) leur prise en compte. Plus précisément, l'amélioration relative de chaque indicateur est respectivement considérée et exprimée en pourcentage par

$$\Delta \mathcal{X} = 100 \times \frac{\mathcal{X} - \mathbb{X}}{\mathcal{X}} \tag{6.51}$$

Critère :
$$\mathcal{X} = J$$
 et $\mathbb{X} = \mathbb{J}$,
BFR : $\mathcal{X} = 100 - BFR$ et $\mathbb{X} = 100 - BFR$, (6.52)
VAF : $\mathcal{X} = 100 - VAF$ et $\mathbb{X} = 100 - BFR$,

avec



FIGURE 6.10 – Influence des termes de bord sur la précision de l'identification (sans bruit).

La Figure 6.11 montre les trois valeurs $\Delta \mathcal{X}$ obtenues pour chacun des algorithmes en fonction de la durée d'identification considérée. Pour le niveau de bruit considéré, les résultats obtenus avec la méthode VI et la méthode de Gauss-Newton sont quasi-identiques. Par conséquent, le deuxième graphique de la Figure 6.11 montre les résultats pour ces deux méthodes. On voit sur



FIGURE 6.11 – Influence des termes de bord sur la précision de l'identification en fonction de la durée d'enregistrement(avec bruit).

cette figure que pour une identification réalisée en considérant une durée d'enregistrement $d_r = 5$ s, les valeurs du critère d'identification et du VAF sont améliorées de plus de 80% quel que soit l'algorithme utilisé. La valeur du BFR est améliorée de presque 60% pour la méthode de Sanathanan-Koerner, et de presque 80% pour la méthode VI et pour la méthode de Gauss-Newton. De plus, on constate, comme avec les données non bruitées, que l'amélioration induite par les termes de bord décroit avec la durée de l'identification.

Cependant, lorsque les données sont bruitées, cette amélioration peut trouver une limite et n'est pas toujours vérifiée. En effet, comme on peut le voir sur la Figure 6.11, pour une durée supérieure à 20 secondes, la prise en compte des termes de bord peut même entraîner une légère détérioration du critère d'identification pour la méthode de Sanathanan-Koerner. Soulignons que, pour l'exemple traité, cet instant correspond au moment où l'amplitude de l'information utile, autrement dit les sorties non bruitées, devient globalement inférieure à l'amplitude du bruit de mesure. Les indicateurs BFR et VAF peuvent, quant à eux, être légèrement moins bon au-delà de 40 secondes d'enregistrement. Concernant les méthodes VI et GN, on voit également qu'il n'y a plus vraiment d'amélioration du critère d'identification au-delà de 20 secondes d'enregistrement. Pour des durées supérieures à 40 secondes les indicateurs BFR et VAF peuvent également être légèrement moins bons lorsque les conditions aux limites sont considérées.

6.2.2.3 Bilan de l'évaluation

Comme nous l'avons vu sur cet exemple de simulation, lorsque les amplitudes des conditions aux limites sont supérieures aux niveaux de bruit affectant le système, la méthode proposée améliore la précision de l'identification. Lorsqu'elles sont inférieures aux niveaux de bruit, les résultats peuvent toutefois être légèrement détériorés. Nous avons vu que cela est plus particulièrement vrai lorsque la méthode de Sanathanan-Koerner est utilisée. Cela est certainement dû au fait que les coefficients supplémentaires du modèle « expliquent » alors une partie du bruit et non plus les conditions aux limites.

6.3 Bilan des améliorations proposées

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution de l'algorithme de Gauss-Newton qui permet d'exploiter les paramétrages par DDLC des fractions matricielles à gauche et à droite. Cette solution restreint, à chaque itération, la recherche d'une solution aux seules directions orthogonales au plan tangent à la classe d'équivalence du modèle. Ces directions orthogonales sont calculées d'après l'expression du plan tangent donnée au Chapitre 5. Une telle solution offre plusieurs avantages :

- Elle permet d'éviter la construction de l'ensemble de la matrice Jacobienne. Ce faisant, cette solution offre l'avantage d'un coût de calcul diminué par rapport à une solution fondée sur l'utilisation d'une pseudo-inverse.
- Elle évite de fixer des contraintes sur les paramètres afin de résoudre le problème des moindres carrés posé à chaque itération. Comme nous

l'avons expliqué, ces contraintes étant responsables de blocages numériques de la convergence, cette solution permet donc d'éviter tout blocage numérique de la minimisation.

• Elle permet d'améliorer la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton en le rendant moins sensible à la présence de faux minima.

Les deux derniers points ont été validés par une analyse fondée sur des simulations de Monte-Carlo dans le cas des FMG et des FMD. Pour cette analyse, nous avons comparé les convergences obtenues lorsque des formes pseudo-canoniques, sur-paramétrées diagonales et pleines sont utilisées. Nous avons vu que seules les formes pseudo-canoniques présentent des cas de blocage numérique. De plus, cette analyse a permis de montrer qu'il est préférable d'utiliser les formes pleines (FMG-P et FMD-P) plutôt que les formes sur-paramétrées diagonales. En effet, un paramétrage par DDLC des formes pleines permet à l'algorithme d'être moins souvent stoppé par des faux minima.

Afin d'obtenir une solution indépendante de la base polynomiale de résolution, nous avons également proposé un nouveau schéma de convergence fondé sur une recherche multidimensionnelle. Cette solution qui fut présentée dans (Vayssettes et al., 2012a) pour les formes sur-paramétrées diagonales a ici été généralisée au cas des formes pleines. Ce schéma de convergence permet, de vérifier ou, si nécessaire, d'assurer que la convergence obtenue soit indépendante de la base de résolution choisie.

D'autre part, nous avons proposé une solution qui permet d'étendre le champ d'application des méthodes itératives présentées au Chapitre 4 à des situations où l'état du système n'est pas identique en début et en fin d'essai. Cette extension est, dans ces travaux, principalement motivée par le traitement d'essais courts où la durée d'enregistrement n'est pas toujours suffisante pour permettre le retour du système à son état initial à la fin de l'essai. On peut toutefois envisager d'autres applications de cette méthode. Par exemple, pour des essais de plus longue durée, où le système est soumis à une excitation non périodique, elle permet de cibler l'identification sur une partie des enregistrements. L'intérêt dans ce cas serait d'alléger les traitements numériques en se focalisant sur une zone réduite de l'enregistrement. Comme nous l'avons montré expérimentalement, l'apport de la méthode n'est toutefois effectif que si les amplitudes des conditions aux limites sont significatives par rapport au niveau des perturbations affectant le système. Par ailleurs, rappelons que la prise en compte des conditions aux limites implique l'identification de $n_x + n_y$ paramètres supplémentaires, ce qui peut être un inconvénient dans certaines situations.

Enfin, il faut souligner que la formulation des algorithmes itératifs qui en découle correspond à la formulation la plus générale de l'identification fréquentielle de systèmes LTI continus en erreur de sortie. Cette formulation ne comporte pas de restriction tant sur le système identifié que sur les données traitées, hormis, bien entendu, le bon respect du théorème de Shannon pour l'échantillonnage des mesures.

Chapitre 7

IDENTIFICATION PAR APPROCHE DES SOUS-ESPACES VIA LES FONCTIONS DE COVARIANCE FILTRÉES DE DONNÉES DE COURTE DURÉE

L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthode d'identification par approche des sous-espaces afin d'estimer une réalisation d'un système d'ordre réduit avec des séquences de données de courte durée. Pour cela, nous proposons deux améliorations de l'algorithme fondé sur l'utilisation de fonctions de covariance, proposé par Miller et De Callafon (2010). Premièrement, dans le but d'identifier les dynamiques du système sur une bande de fréquence choisie, un filtrage non-causal des fonctions de covariance est réalisé. Deuxièmement, afin de prendre en compte les conditions aux limites, la formulation de l'algorithme est étendue. L'algorithme proposé intègre donc des pondérations fréquentielles calculées en tenant compte de l'état initial et final du système.

Sommaire

| 7.1 Préliminaires | | | | | |
|---|---|--|--|--|--|
| 7.1.1 | Position du problème d'identification | | | | |
| 7.1.2 | Rappels sur les méthodes des sous-espaces 144 | | | | |
| 7.1.3 | Estimation de la matrice d'état grâce à l'inva- riance temporelle des dynamiques du système 147 | | | | |
| 7.2 Fonctions de covariance de données de courte | | | | | |
| dure | ${ m \acute{e}e}$ | | | | |
| 7.2.1 | Estimation des fonctions de covariance 149 | | | | |
| 7.2.2 | Prise en compte des conditions aux limites 150 | | | | |
| 7.2.3 | Algorithme d'identification des sous-espaces fondé sur l'utilisation des fonctions de covariance 153 | | | | |
| 7.3 Filtrage non-causal des fonctions de covariance 155 | | | | | |
| 7.4 Estimation d'un modèle d'ordre réduit 157 | | | | | |
| 7.5 Exemple illustratif | | | | | |
| 7.5.1 | Influence des conditions aux limites | | | | |
| 7.5.2 | Identification fondée sur les fonctions de covariance filtrées | | | | |
| 7.6 Bilan | | | | | |

7.1 Préliminaires

Les méthodes d'identification des sous-espaces (4SID pour Subspacebased State-Space IDentification methods en Anglais) forment une classe de méthodes d'identification de systèmes linéaires à paramètres invariant dans le temps (LTI) qui a rencontré un succès important depuis le début des années 1990 (Larimore, 1990; Verhaegen et Dewilde, 1992; Van Overshee et De Moor, 1995; Viberg, 1995; Bauer, 2005; Akcay, 2010). Comparées à des approches itératives telles que celles présentées aux chapitres précédents, les méthodes 4SID ont l'avantage d'estimer une représentation d'état du système sans nécessiter la minimisation d'un critère d'identification. Elles permettent ainsi d'éviter tout problème de convergence. De plus, elles offrent l'avantage d'identifier des matrices d'état pleines et ne nécessitent pas le choix d'un paramétrage canonique ou pseudo-canonique. Enfin, leur succès provient également du fait que ces méthodes sont fondées sur l'utilisation d'outils numériques robustes tels que la factoristion QR ou la décomposition en valeur singulière (SVD) (Golub et Van Loan, 1996).

Les méthodes 4SID les plus répandues peuvent s'écrire selon le formalisme proposé par Van Overshee et De Moor (1995). Celui-ci est fondé sur l'estimation du sous-espace engendré par les lignes d'une version pondérée de la matrice d'observabilité étendue. De plus, elles utilisent l'invariance de la matrice d'observabilité afin d'estimer la matrice d'état du système. Ainsi, ces méthodes diffèrent les unes des autres uniquement par le choix de matrices de pondérations différentes (cf. par exemple (Jansson et Wahlberg, 1998)). Dans le cadre de travail fixé par ce formalisme, plusieurs études se sont intéressées à l'impact de ces matrices de pondération sur les performances asymptotiques des méthodes (Gustafsson, 2002; Jansson et Wahlberg, 1995; Bauer, 2005). L'algorithme proposé dans ce chapitre est fondé sur une approche légèrement différente. En effet, contrairement aux méthodes précédentes, la matrice d'état du système est identifiée en utilisant l'ensemble des données afin de transcrire l'invariance des dynamiques du système dans le temps (cf. Section 7.1.3 pour plus de détails). Ce principe, également à la base des méthodes de type ERA (Juang et Pappa, 1985), permet une meilleure estimation de l'ordre du système en évitant d'estimer les pôles du système générateur du bruit (Miller et De Callafon, 2010). De plus, son extension à une utilisation des fonctions de covariance possède plusieurs intérêts. Premièrement, elle permet de réduire la dimension des matrices d'entrée-sortie traitées. Deuxièmement, les fonctions de covariance permettent de minimiser les effets du bruit. De ce fait, l'algorithme permet d'estimer des matrices d'état non-biaisées asymptotiquement. Cet algorithme offre donc l'avantage d'atteindre ce résultat, quelle que soit la nature colorée ou non du bruit, sans nécessiter l'utilisation de matrices de pondération (Miller et De Callafon, 2010).

Cependant, la transformée de Fourier qui intervient dans le calcul des fonctions de covariance biaise les résultats fournis par cette méthode lorsque des données de courte durée sont utilisées. Une méthode similaire à celle décrite au Chapitre 6 est proposée dans ce chapitre afin de tenir compte des conditions aux limites d'intégration et ainsi éviter tout biais dû aux effets transitoires.

De plus, sans matrice de pondération, l'estimation d'un modèle d'ordre réduit, ne représentant qu'une partie du système, est impossible en une étape. Afin de focaliser l'identification sur une bande de fréquence d'intérêt, l'utilisation d'un filtre non-causal est introduite dans ce chapitre afin d'appliquer des pondérations fréquentielles sur les données. Bien que l'utilisation de pondérations fréquentielles au niveau des algorithmes sous-espaces ne soit pas nouvelle, la façon de procéder que nous proposons dans ce chapitre est différente : l'estimation est réalisée via les fonctions de covariance et les pondérations fréquentielles sont calculées en prenant en compte les conditions initiales et finales. L'objectif visé est de pouvoir se servir de séquences de données de courte durée afin d'estimer une réalisation d'ordre réduit nonbiaisée du système grâce à la méthode sous-espace proposée.

Après avoir rappelé brièvement les principales étapes des méthodes 4SID dans cette section, les modifications proposées sont présentées dans les Sections 7.2 et 7.3. Le nouvel algorithme incorporant ces modifications est ensuite présenté dans la Section 7.4. Finalement, la Section 7.5 est dédiée à l'illustration de ces deux modifications sur un exemple de simulation.

7.1.1 Position du problème d'identification

Dans ce chapitre, on considère un système discret, linéaire à tempsinvariant, décrit par la représentation d'état suivante

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= A \, x_k + B \, u_k \\
y_k &= C \, x_k + D \, u_k + v_k ,
\end{aligned}$$
(7.1)

où $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement le vecteur d'état, d'entrée et de sortie du système; et où $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ sont les matrices du système. Le vecteur $v_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ est un bruit de mesure qui peut être coloré et supposé stationnaire (Ljung, 1999). On suppose que les représentations données par (7.1) sont des descriptions minimales de systèmes stables, commandables et observables (Kailath, 1980). Le problème d'identification considéré dans ce chapitre consiste à estimer, dans un premier temps, l'ordre du système et, dans un deuxième temps, les matrices (A, B, C, D).

7.1.2 Rappels sur les méthodes des sous-espaces

De nombreuses méthodes sous-espaces sont présentes dans la littérature (cf. par exemple (Viberg, 1995; Van Overschee et De Moor, 1996b; Katayama, 2005)). L'ensemble de ces méthodes repose sur des principes de base que nous rappelons brièvement dans cette section.

Nous introduisons le vecteur qui regroupe les sorties mesurées défini par

$$Y_{\alpha} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+\alpha-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y} .$$
(7.2)

Les vecteurs $U_{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha n_u}$ et $V_{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y}$ sont définis de façon similaire. En regroupant plusieurs de ces vecteurs construits pour différents instants k, on construit la matrice de Hankel des sorties $Y_{\alpha,\beta}$ définie par

$$Y_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+\beta-1} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+\alpha-1} & y_{k+\alpha} & \cdots & y_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha \, n_y \times \beta} , \qquad (7.3)$$

où α et β sont fixés par l'utilisateur. La matrice de Hankel des entrées $U_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{\alpha n_u \times \beta}$ et du bruit $V_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times \beta}$ sont construites de façon similaire. D'autre part, la matrice d'observabilité étendue est définie par

$$\Gamma_{\alpha} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\alpha-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha \, n_y \times n_x} \,, \tag{7.4}$$

et on définit la matrice triangulaire inférieure de Toeplitz, notée T_{α} , par

$$T_{\alpha} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\alpha-2}B & CA^{\alpha-3}B & \dots & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times \alpha n_u} .$$
(7.5)

D'après les relations (2.27), on a par récurrence (Viberg, 1995)

$$Y_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha} X_{\beta} + T_{\alpha} U_{\alpha,\beta} + V_{\alpha,\beta} , \qquad (7.6)$$

avec

$$X_{\beta} = \begin{bmatrix} x_k & x_{k+1} & \dots & x_{k+\beta-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times \beta} .$$
 (7.7)

L'objectif des méthodes des sous-espaces est, dans un premier temps, d'estimer la matrice d'observabilité étendue. Pour cela, la relation (7.6) est utilisée afin de trouver la matrice $\hat{\Gamma}_{\alpha}$ dont les colonnes engendrent un espace de même dimension que l'espace engendré par Γ_{α} . Cela implique que l'ordre du système, qui est égal au rang de Γ_{α} , peut être estimé d'après les données mesurées. D'après $\hat{\Gamma}_{\alpha}$, les matrices estimées \hat{A} et \hat{C} sont ensuite, comme nous allons le voir, facilement calculées. Dans un deuxième temps, les matrices \hat{B} et \hat{D} sont déterminées en résolvant le problème des moindres carrés suivant

$$(\hat{B}, \hat{D}) = \arg\min_{B, D} \sum_{n=1}^{N} \| y_{k_0+n} - (\hat{C} \, \hat{A}^n \, x_{k_0} + \hat{C} \, \hat{A}^{n-1} \, B \, u_{k_0} + D \, u_{k_0+n}) \|^2 \,,$$
(7.8)

où $\|.\|$ note la norme 2, N est choisi suffisamment grand pour que le problème soit sur-déterminé et k_0 note l'instant initial de la séquence choisie.

Afin d'estimer la matrice $\hat{\Gamma}_{\alpha}$ d'après l'équation (7.6), on va éliminer le terme $T_{\alpha}U_{\alpha,\beta}$. Pour cela, l'équation (7.6) est projetée sur le sous-espace orthogonal à la matrice des entrées futures $U_{\alpha,\beta}$. Une telle projection orthogonale, notée $\Pi_u \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}$, est définie par (Van Overschee et De Moor, 1996b)

$$\Pi_u = I_\beta - U_{\alpha,\beta}^T \left(U_{\alpha,\beta} \, U_{\alpha,\beta}^T \right)^{-1} U_{\alpha,\beta} \,, \tag{7.9}$$

L'équation (7.6) projetée sur le sous-espace orthogonal aux entrées est donc donnée par

$$Y_{\alpha,\beta} \Pi_u = \Gamma_\alpha X_\beta \Pi_u + V_{\alpha,\beta} \Pi_u .$$
(7.10)

D'après (Miller et De Callafon, 2010, Lemme 2), le rang de Γ_{α} est préservé si l'entrée est une excitation persistente (Katayama, 2005) et si la condition suivante est vérifiée

$$\beta \ge (\alpha + 1)n_u + n_x \,. \tag{7.11}$$

Si $V_{\alpha,\beta} \Pi_u = 0$, l'ordre du système peut être déterminé en examinant le rang de $Y_{\alpha,\beta} \Pi_u$. En pratique, cette condition n'est pas strictement vérifiée et $Y_{\alpha,\beta} \Pi_u$ peut être une matrice de rang plein. Cependant, les effets du bruit, c.-à-d., des termes non nuls de $V_{\alpha,\beta} \Pi_u$, sont normalement faibles par rapport aux influences des dynamiques du système. La valeur probable de n_x peut donc être déterminée en recherchant une diminution importante des valeurs singulières de $Y_{\alpha,\beta} \Pi_u$. La valeur de l'ordre n_x est donc donnée par la position de la valeur singulière σ_{n_x} située juste avant cette diminution importante. Par conséquent, le premier objectif des méthodes 4SID est de trouver la matrice Q qui minimise le problème des moindres carrés suivant

$$\epsilon_{n_x} = \arg\min_{\operatorname{rank}(Q)=n_x} \|Q - Y_{\alpha,\beta} \Pi_u\|^2 .$$
(7.12)

La décomposition en valeur singulière (SVD) de $Y_{\alpha,\beta} \prod_u$ est donnée par

$$Y_{\alpha,\beta} \Pi_u = \begin{bmatrix} U_{n_x} & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{n_x} & 0\\ 0 & \Sigma_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n_x}^T\\ V_v^T \end{bmatrix}, \qquad (7.13)$$

où $\Sigma_{n_x} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_x})$ contient les n_x premières valeurs singulières de $Y_{\alpha,\beta} \prod_u$. La matrice Q_{n_x} qui minimise le problème (7.52) est donc égale à (Golub et Van Loan, 1996)

$$Q_{n_x} = U_{n_x} \Sigma_{n_x} V_{n_x}^T , \qquad (7.14)$$

$$= \hat{\Gamma}_{\alpha} \left(\hat{X}_{\beta} \Pi_{u} \right), \qquad (7.15)$$

où $\hat{\Gamma}_{\alpha}$ et $\hat{X}_{\beta} \Pi_{u}$ sont respectivement les estimations de la matrice d'observabilité étendue du système et de la matrice $X_{\beta} \Pi_{u}$. D'après l'égalité (7.15), un choix couramment effectué pour obtenir la matrice d'observabilité estimée est le suivant (Van Overschee et De Moor, 1996b)

$$\hat{\Gamma}_{\alpha} = U_{n_x} \Sigma_{n_x}^{1/2}, \quad \hat{X}_{\beta} \Pi_u = \Sigma_{n_x}^{1/2} V_{n_x}^T.$$
 (7.16)

La matrice \hat{C} est donnée par les n_y premières lignes de $\hat{\Gamma}_{\alpha}$. De plus, l'invariance par décalage de la matrice d'observabilté du système permet de calculer \hat{A} . Kung (1978) est le premier à avoir utilisé cette propriété afin d'estimer la matrice d'état en remarquant que

$$\bar{U}_{n_x} \Sigma_{n_x}^{1/2} \hat{A} = \underline{U}_{n_x} \Sigma_{n_x}^{1/2} , \qquad (7.17)$$

où \underline{U}_{n_x} et \overline{U}_{n_x} sont les sous-matrices formées en supprimant respectivement les n_y premières et dernières lignes de U_{n_x} . De plus, Kung (1978) a montré que si $(\alpha - 1) \ge n_x$, la matrice \overline{U}_{n_x} est de rang plein. En supposant que cette condition soit vérifiée, une estimation de la matrice d'état est alors donnée par

2

$$\hat{A} = \Sigma_{n_x}^{-1/2} \, (\bar{U}_{n_x}^\top \, \bar{U}_{n_x})^{-1} \bar{U}_{n_x}^\top \, \underline{U}_{n_x} \, \Sigma_{n_x}^{1/2} \,. \tag{7.18}$$

Cette méthode est désormais très largement utilisée par les méthodes sousespaces développées depuis le début des années 1990 (Viberg, 1995). Connaissant les matrices \hat{A} et \hat{C} , les matrices \hat{B} et \hat{D} sont ensuite facilement retrouvées en résolvant le problème des moindres carrés (7.8).

Nous avons ici décrit les étapes de base de la majorité des méthodes sousespaces. Notons cependant que, si dans l'équation (7.10) le terme $V_{\alpha,\beta} \prod_u$ ne correspond pas à un terme de bruit blanc, l'utilisation de matrices de pondération s'avère nécessaire afin d'obtenir une estimation non biaisée de la matrice d'observabilité et, par conséquent, des matrices (A, B, C, D) du système (Katayama, 2005). Différents choix ont été proposés pour ces matrices de pondération (Van Overschee et De Moor, 1996b) qui conduisent à différentes méthodes sous-espaces. Toutefois, comme montré par Van Overschee et De Moor (1996b), ces méthodes peuvent généralement s'exprimer selon un formalisme identique où seul le choix des matrices de pondération est différent.

`

7.1.3 Estimation de la matrice d'état grâce à l'invariance temporelle des dynamiques du système

La façon la plus couramment utilisée pour estimer la matrice A est d'utiliser la propriété d'invariance de la matrice d'observabilité comme indiqué dans la section précédente. Toutefois, Miller et De Callafon (2009) ont récemment proposé d'utiliser l'invariance des dynamiques du système par décalage temporel des données pour estimer les dynamiques du système. Cette propriété est également exploitée par la méthode dite *Eigenvalue Realization Algorithm* (ERA) développée par Juang et Pappa (1985). La méthode proposée dans (Miller et De Callafon, 2009) permet, ainsi, de généraliser l'approche ERA au cas d'entrées aléatoires. Nous rappelons ici cette méthode que nous exploiterons dans la suite de ce chapitre.

Pour commencer, on définit la matrice $\overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta}$ comme la matrice $Y_{\alpha,\beta}$ décalée d'un bloc ligne vers le bas

$$\vec{Y}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+\beta} \\ y_{k+2} & y_{k+3} & \cdots & y_{k+\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+\alpha} & y_{k+\alpha+1} & \cdots & y_{k+\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha \, n_y \times \beta} \,. \tag{7.19}$$

En réalisant ce décalage, une équation similaire à l'équation (7.6) peut être écrite. Elle est donnée par

$$\overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} = \overrightarrow{\Gamma}_{\alpha} X_{\beta} + \overrightarrow{T}_{\alpha} \overrightarrow{U}_{\alpha,\beta} + \overrightarrow{V}_{\alpha,\beta} , \qquad (7.20)$$

où $\overrightarrow{U}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{\alpha n_u \times \beta}$ et $\overrightarrow{V}_{\alpha,\beta}$ sont construites de manière similaire à $\overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times \beta}$ et les matrices $\overrightarrow{\Gamma}_{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times n_x}$ et $\overrightarrow{T}_{\alpha} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times \alpha n_u}$ sont respectivement définies par

$$\overline{\Gamma}_{\alpha} = \Gamma_{\alpha} A , \qquad (7.21)$$

$$\vec{T}_{\alpha} = \begin{bmatrix} CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\alpha-1}B & CA^{\alpha-2}B & CA^{\alpha-3}B & \dots & D \end{bmatrix} .$$
 (7.22)

D'après (Miller et De Callafon, 2010, Lemme 1), la projection Π_u définie par l'équation (7.9) est orthogonale à la matrice décalée des entrées $\overrightarrow{U}_{\alpha,\beta}$. De ce fait, la même projection permet d'éliminer l'effet des entrées sur les matrices de sortie $Y_{\alpha,\beta}$ et $\overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta}$. En multipliant l'équation (7.20) à droite par cette matrice de projection, on a donc, avec l'équation (7.10), une deuxième équation projetée donnée par

$$\overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} \Pi_u = \overrightarrow{\Gamma}_{\alpha} X_{\beta} \Pi_u + \overrightarrow{V}_{\alpha,\beta} \Pi_u .$$
(7.23)

Après avoir calculé la matrice d'observabilité estimée Γ_{α} et la matrice $X_{\beta} \Pi_{u}$ comme à l'équation (7.16), l'objectif est de trouver la matrice \hat{A} qui estime au mieux la propagation des dynamiques du système à travers les données de sortie. Celle-ci est donnée par la solution du problème des moindres carrés suivant

$$\hat{A} = \arg\min_{\operatorname{rang}(A)=n_x} \sum_{n=1}^{N} \|\hat{\Gamma}^{\#} \overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} \Pi_u - A \, \hat{X}_{\beta} \Pi_u \|, \qquad (7.24)$$

$$= \arg\min_{\operatorname{rang}(A)=n_x} \sum_{n=1}^{N} \| \hat{\Gamma}^{\#} \overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} \Pi_u - A \hat{\Gamma}^{\#} Y_{\alpha,\beta} \Pi_u \|, \qquad (7.25)$$

soit,

$$\hat{A} = \hat{\Gamma}^{\#} \overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} \Pi_u \left(\hat{\Gamma}^{\#} Y_{\alpha,\beta} \Pi_u \right)^{\#} , \qquad (7.26)$$

qui d'après les équations (7.13) à (7.16) vaut

$$\hat{A} = \Sigma_{n_x}^{-1/2} U_{n_x}^{\top} \overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} \Pi_u V_{n_x} \Sigma_{n_x}^{-1/2} .$$
(7.27)

Cette solution présente un avantage par rapport à la solution fondée sur l'invariance de la matrice d'observabilité donnée par l'équation (7.18) lorsque les données sont perturbées par un bruit coloré. En effet, dans une telle situation, la précision de \hat{A} est moins affectée par la présence éventuelle de pôles parasites d'un système générateur d'un bruit coloré (Miller et De Callafon, 2010).

Toutefois, si les termes de bruits projetés dans les équations (7.10) et (7.23) ne sont pas orthogonaux aux sorties projetées $Y_{\alpha,\beta} \prod_u$ et $\overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} \prod_u$, les matrices estimées du système sont biaisées. Afin d'éviter cela et d'obtenir une estimation non biaisée, les sorties projetées doivent être pondérées par des matrices W_1 et W_2 choisies de telle sorte que

$$\lim_{\alpha,\beta\to\infty} W_1 V_{\alpha,\beta} \Pi_u W_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\alpha,\beta\to\infty} W_1 \overrightarrow{V}_{\alpha,\beta} \Pi_u W_2 = 0. \quad (7.28)$$

Ainsi, lorsque le nombre de mesures considérées tend vers l'infini, on a

$$W_1 Y_{\alpha,\beta} \Pi_u W_2 = W_1 \Gamma_\alpha X_\beta \Pi_u W_2 , \qquad (7.29)$$

$$W_1 \overrightarrow{Y}_{\alpha,\beta} \Pi_u W_2 = W_1 \Gamma_\alpha A X_\beta \Pi_u W_2.$$
(7.30)

Si les deux conditions (7.28) ne sont pas parfaitement remplies, l'influence des termes de bruit doit être suffisamment « blanchie » afin que l'estimation du rang de Γ ne soit pas biaisée.

Comme nous allons le voir, cette méthode peut être étendue à l'utilisation de données autres que les données brutes d'entrée-sortie. Plus particulièrement, l'utilisation de fonctions de covariance des mesures permet d'assurer une estimation non biaisée des dynamiques du système indépendamment de la nature colorée ou non du bruit. De plus, dans ce cas, l'obtention d'une estimation non-biaisée ne nécessite pas l'utilisation de matrices de pondération.

7.2 Identification via les fonctions de covariance de données de courte durée

La méthode des sous-espaces proposée par Miller et De Callafon (2010) peut être formulée de manière similaire à partir des fonctions de covariance des données. Pour tout signal quasi-stationnaire s_k et w_k , la fonction de corrélation $R_{sw}(\tau)$, aussi appelée fonction de covariance des signaux s et w, est définie par (Ljung, 1999)

$$R_{sw}(\tau) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} E\{s_{k+\tau} \, w_k^T\}, \qquad (7.31)$$

où $E\{.\}$ note l'espérance d'une valeur. Le signal d'entrée u_k est choisi pour être un signal quasi-stationnaire (Ljung, 1999). Le système étant supposé stable, l'état x_k et la sortie y_k sont aussi des signaux quasi-stationnaires. De ce fait, les fonctions de covariance $R_{yu}(\tau)$, $R_{xu}(\tau)$, $R_{uu}(\tau)$ et $R_{vu}(\tau)$ existent et sont définies comme dans l'équation (7.31). De plus, ces fonctions peuvent s'exprimer en fonction des matrices d'état du système, soit

$$R_{xu}(\tau + 1) = A R_{xu}(\tau) + B R_{uu}(\tau) ,$$

$$R_{yu}(\tau) = C R_{xu}(\tau) + D R_{uu}(\tau) + R_{vu}(\tau) .$$
(7.32)

Si le bruit v_k n'est pas corrélé avec l'entrée u_k , alors $R_{vu}(\tau) = 0$. L'avantage procuré par l'utilisation des fonctions de covariance est que l'estimation non-biaisée des paramètres est une conséquence directe de l'estimation nonbiaisée des fonctions de covariance. Ainsi, le fait d'utiliser les fonctions de covariance et non les données d'entrée-sortie brutes permet d'identifier de manière non-biaisée le comportement entrée-sortie du système étudié. De plus, ceci reste vrai lorsque le bruit est coloré.

7.2.1 Estimation des fonctions de covariance

La définition théorique des fonctions de covariance, donnée par l'équation (7.31), implique un nombre infini d'échantillons de données. Bien sûr en pratique, seulement un nombre fini d'échantillons est disponible. Les fonctions de covariance doivent donc être estimées. Une définition de cet estimateur proposée dans la littérature est donnée par (Ljung, 1999)

$$\tilde{R}_{sw}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N} s(t+\tau) w^{T}(t) .$$
(7.33)

Cette estimation est légèrement différente de la vraie fonction de covariance $R_{sw}(\tau)$. Au niveau de l'espérance de cette valeur estimée, nous souhaiterions avoir

$$\lim_{N \to \infty} E\{\tilde{R}_{sw}(\tau)\} = R_{sw}(\tau) .$$
(7.34)

Si tel est le cas, l'estimation (7.33) est exacte lorsque le nombre d'échantillons tend vers l'infini (Ljung, 1999). Cependant, ce n'est pas exactement le cas car son espérance est en réalité égale à (Ljung, 1999)

$$E\{\tilde{R}_{sw}(\tau)\} = \frac{N - |\tau|}{N} R_{sw}(\tau) , \qquad (7.35)$$

où $\frac{N-|\tau|}{N}$ est un facteur de pondération qui vérifie la propriété

$$\lim_{N \to \infty} E\{\tilde{R}_{sw}(\tau)\} = R_{sw}(\tau) .$$
(7.36)

L'estimateur proposé est donc asymptotiquement non-biaisé. On peut aussi remarquer que cet estimateur n'est pas biaisé si $|\tau| << N$. D'autre part, remarquons que plus le décalage temporel τ devient grand, plus le nombre d'échantillons utilisés pour calculer les fonctions de covariance devient petit. De ce fait, lorsque τ devient grand par rapport au nombre d'échantillons considérés, les fonctions estimées possèdent une variance importante et peuvent devenir biaisées. Pour éviter une telle situation, nous utilisons un estimateur légèrement différent, donné par

$$\hat{R}_{sw}(\tau) = \omega(\tau) \,\tilde{R}_{sw}(\tau) \,, \tag{7.37}$$

où $\omega(\tau)$ est une fenêtre rectangulaire définie par

$$\omega(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\tau| \le \tau_{max} \\ 0 & \text{si} \quad |\tau| \ge \tau_{max} \end{cases}$$
(7.38)

Nous précisons que τ_{max} est choisi de manière à vérifier $\tau_{max} \ll N$ de manière à ce que l'estimation $\hat{R}_{sw}(\tau)$ soit non-biaisée. Une conséquence directe de ce choix est que la longueur des données considérées pour l'identification est largement réduite par rapport aux données brutes d'entrée-sortie mesurées.

7.2.2 Prise en compte des conditions aux limites

Les fonctions de covariance estimées $\tilde{R}_{sw}(\tau)$ ne sont pas calculées directement en appliquant le produit de convolution défini à l'équation (7.33). En notant $\mathsf{TF}^{-1}\{.\}$ la transformée de Fourier inverse, la relation suivante est généralement utilisée

$$\tilde{R}_{sw}(\tau) = \mathsf{TF}^{-1}\{S(f)W(f)\},$$
(7.39)

où S(f) et W(f) sont respectivement les transformées de Fourier des signaux s(t) et w(t) considérés. Il est, en effet, numériquement plus efficace de calculer, dans un premier temps, la transformée de Fourier des signaux temporels et, ensuite, de calculer la transformée de Fourier inverse du produit des transformées de Fourier (Orfanidis, 1996) plutôt que de calculer directement le produit de convolution des signaux temporels. Comme nous l'avons expliqué dans la Section 6.2, si le niveau d'énergie des signaux n'est pas identique aux instants limites considérés, les effets transitoires biaisent le calcul des transformées de Fourier. De ce fait, dans une telle situation, les valeurs $R_{sw}(\tau)$ calculées par l'équation (7.39) sont biaisées. Par conséquent, afin d'éviter que les résultats d'identification fournis par un algorithme fondé sur l'utilisation de ces fonctions de covariance soient biaisés lorsque les conditions aux limites ne sont pas identiques, il est nécessaire de prendre en compte des termes correctifs. Pour cela, dans un premier temps la démarche est similaire à celle présentée à la Section 6.2 que nous transposons ici aux signaux discrets. Cette première étape est similaire à celle proposée par Cauberghe (2004) pour identifier des systèmes discrets à partir de méthodes des sousespaces dans le domaine fréquentiel. Dans un deuxième temps, nous verrons comment étendre cette approche à l'identification d'après les fonctions de covariance. Plus particulièrement, nous allons définir une entrée fictive supplémentaire à prendre en considération dans le domaine temporel. Cela nous permettra ensuite de formuler une nouvelle version de l'algorithme des sousespaces fondé sur les fonctions de covariance. Soulignons de plus qu'une telle formulation pour ce type d'algorithmes n'a, à la connaissance de l'auteur, pas été proposée dans la littérature. En effet, des moyennages et/ou des fenêtrages temporels sont généralement effectués afin d'obtenir une estimation non-biaisée des fonctions de covariance (Ljung, 1999). Cependant, ces méthodes de calcul ne sont plus applicables lorsque des signaux de courte durée sont utilisés (Cauberghe, 2004). L'approche que nous proposons, qui permet d'éviter ces calculs, permet donc d'étendre les algorithmes sous-espaces fondés sur l'utilisation de fonctions de covariance à l'utilisation de signaux de courte durée.

On note Δt la période d'échantillonnage, $t_0 = 0$ et $t_1 = (N-1)\Delta t$ les instants limites considérés. En désignant x_k le vecteur d'état à l'instant $k \Delta t$ et N le nombre d'échantillons temporels, la Transformée de Fourier Discrète (TFD) à la fréquence f_l $(l = 0, \dots, N-1)$ est définie par l'équation (6.43) que nous rappelons ici

$$X_{l} = \sum_{k=0}^{N-1} x_{k} e^{-j 2 \pi f_{l} k \Delta t} \quad \text{avec} \quad f_{l} = \frac{l}{N \Delta t}. \quad (7.40)$$

De façon similaire, la TFD de x_{k+1} vaut

$$\mathsf{TF}\{x_{k+1}\} = \sum_{k=0}^{N-1} x_{k+1} e^{-j 2 \pi f_l k \Delta t}, \qquad (7.41)$$

où $\mathsf{TF}\{.\}$ note la TFD du signal décallé. En faisant le changement de variable K = k + 1, cette dernière peut se réécrire

$$\mathsf{TF}\{x_{k+1}\} = \sum_{K=1}^{N} x_K e^{-j 2\pi f_l (K-1)\Delta t}$$

= $e^{j 2\pi f_l \Delta t} \Big(\sum_{K=0}^{N-1} x_K e^{-j 2\pi f_l K\Delta t} - x_0 + x_N e^{-j 2\pi f_l N\Delta t} \Big).$
(7.42)

En remarquant que le terme sommé est égal à celui de l'équation (7.40) et que $e^{-j 2 \pi f_l N \Delta t} = 1$, l'équation (7.42) devient

$$\mathsf{TF}\{x_{k+1}\} = e^{j \, 2 \, \pi \, f_l \, \Delta t} X(f_l) - e^{j \, 2 \, \pi \, f_l \, \Delta t} \Delta x \,, \tag{7.43}$$

avec $\Delta x = x_0 - x_N$. En calculant la TFD inverse, la valeur de l'état réel du système à l'instant k+1 est égale à la valeur calculée $\tilde{x}_{k+1} = \mathsf{TF}^{-1}\{\mathsf{TF}\{x_{k+1}\}\}$ à laquelle il faut ajouter un terme additionnel

$$x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta x \, e^{j2\pi l(k+1)/N} \,. \tag{7.44}$$

En remplaçant x_{k+1} dans l'équation (7.1) par cette expression, la représentation d'état qui doit être considérée est donc

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= A \, x_k + B \, \bar{u}_k \\
y_k &= C \, x_k + \bar{D} \, \bar{u}_k + v_k ,
\end{aligned} \tag{7.45}$$

avec $\bar{B} = \begin{bmatrix} B & \Delta x \end{bmatrix}$, $\bar{D} = \begin{bmatrix} D & D_x \end{bmatrix}$ et $\bar{u}_k = \begin{bmatrix} u_k^T & \nu_k \end{bmatrix}^T$. Cela montre que les conditions aux limites peuvent être prises en compte sans modifier la formulation du problème d'identification. Celles-ci peuvent en effet être considérées en ajoutant simplement une entrée fictive ν_k définie par

$$\nu_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{j2\pi l(k+1)/N} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = N-1\\ 0 & \text{si} \quad k < N-1 \end{cases}$$
(7.46)

Dans la suite, nous allons donc considérer le système augmenté de l'entrée ν_k et on note $n_{\bar{u}} = n_u + 1$. D'après l'expression (7.46), l'entrée fictive ν_k est une impulsion qui a lieu à l'instant final de l'enregistrement. Cette entrée fictive possède un rôle mathématique. En effet, ses fonctions de corrélation

avec les entrées et les sorties mesurées n'étant pas nulles, ν_k va avoir une influence sur les calculs de l'algorithme d'identification. De plus, notons que la formulation sous forme de représentation d'état (7.45) implique d'ajouter le vecteur D_x à la matrice D. Ce terme additionnel peut être vu comme l'influence de modes qui se situent à l'extérieur de la bande de fréquence considérée sur les conditions aux limites.

7.2.3 Algorithme d'identification des sous-espaces fondé sur l'utilisation des fonctions de covariance

L'extension de l'algorithme présenté dans la Section 7.1.3 à l'utilisation des fonctions de covariance $\hat{R}_{\bar{u}\bar{u}}$, $\hat{R}_{y\bar{u}}$, $\hat{R}_{x\bar{u}}$ implique les relations suivantes

$$\mathbf{R}_{y\bar{u}} = \Gamma_{\alpha} \, \mathbf{R}_{x\bar{u}} + T_{\alpha} \, \mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u}} + \mathbf{R}_{v\bar{u}} \,, \tag{7.47}$$

$$\vec{\mathbf{R}}_{y\bar{u}} = \Gamma_{\alpha} A \mathbf{R}_{x\bar{u}} + \vec{T}_{\alpha} \vec{\mathbf{R}}_{\bar{u}\bar{u}} + \vec{\mathbf{R}}_{v\bar{u}} , \qquad (7.48)$$

où les matrices Γ_{α} , T_{α} et $\overrightarrow{T}_{\alpha}$ sont définies comme à la Section 7.1. La matrice $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times \beta n_{\bar{u}}}$ est définie par

$$\mathbf{R}_{y\bar{u}} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau) & \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau+1) & \dots & \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau+\beta-1) \\ \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau+1) & \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau+2) & \dots & \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau+\beta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau+\alpha-1) & \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau+\alpha) & \dots & \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau+\alpha+\beta-2) \end{bmatrix} .$$
(7.49)

Les matrices $\mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u}} \in \mathbb{R}^{\alpha n_{\bar{u}} \times \beta n_{\bar{u}}}$ et $\mathbf{R}_{v\bar{u}} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times ln_{\bar{u}}}$ sont définies de façon similaire. Les matrices $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times \beta n_{\bar{u}}}, \mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u}} \in \mathbb{R}^{\alpha n_{\bar{u}} \times \beta n_{\bar{u}}}$ et $\mathbf{R}_{v\bar{u}} \in \mathbb{R}^{\alpha n_y \times ln_{\bar{u}}}$ sont les matrices décalées d'une ligne vers le bas définies comme à la Section 7.1.3.

De même qu'à la Section 7.1, les équations (7.47) et (7.48) sont projetées sur le complément orthogonal des fonctions de covariance des entrées afin d'obtenir

$$\mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} = \Gamma_{\alpha} \, \mathbf{R}_{x\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} + \mathbf{R}_{v\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} ,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{R}}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} = \Gamma_{\alpha} \, A \, \mathbf{R}_{x\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} + \overrightarrow{\mathbf{R}}_{v\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} .$$
(7.50)

De façon similaire au cas des données temporelles brutes, la matrice de projection à droite $\Pi_{\bar{u}\bar{u}} \in \beta n_{\bar{u}} \times \beta n_{\bar{u}}$ est définie par

$$\Pi_{\bar{u}\bar{u}} = I_{\beta n_{\bar{u}}} - (\mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u}})^T (\mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u}} \, \mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u}}^T)^{-1} \mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u}} \,, \tag{7.51}$$

et préserve le rang de Γ_{α} lorsque la condition $\beta \ge (\alpha + 1)n_{\bar{u}} + n_x$ est vérifiée (Miller et De Callafon, 2010). Le bruit étant dé-corrélé des entrées, en théorie, on a $\mathbf{R}_{v\bar{u}} = 0$. L'ordre du système peut alors être déterminé en examinant le rang de $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}}$. Toutefois, en pratique, cette condition n'est pas strictement vérifiée et $\mathbf{R}_{v\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}}$ peut être une matrice de rang plein. Cependant, du fait de l'utilisation des fonctions de corrélation, les effets du bruit sont rendus très faibles par rapport aux influences des dynamiques du système. La chute des valeurs singulières de $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}}$ permet donc de déterminer la valeur de l'ordre n_x du système. Comme dans le cas des données d'entréesortie brutes présenté à la Section 7.1, dans un premier temps, l'objectif de l'algorithme est alors de trouver la matrice Q qui minimise le problème des moindres carrés suivant

$$\epsilon_{n_x} = \arg\min_{\operatorname{rank}(Q)=n_x} \|Q - \mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}}\|^2 \,. \tag{7.52}$$

En notant $\Sigma_{n_x} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_x})$ la matrice qui contient les n_x premières valeurs singulières de $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \prod_{\bar{u}\bar{u}}$, la solution Q_{n_x} donnée par la SVD de $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \prod_{\bar{u}\bar{u}}$ vaut

$$\mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} = \begin{bmatrix} U_{n_x} & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{n_x} & 0\\ 0 & \Sigma_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n_x}^T\\ V_v^T \end{bmatrix} .$$
(7.53)

où $\Sigma_{n_x} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ contient les n_x premières valeurs singulières de $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \prod_{\bar{u}\bar{u}}$. La matrice Q_{n_x} qui minimise le problème (7.52) vaut donc (Golub et Van Loan, 1996)

$$Q_{n_x} = U_{n_x} \Sigma_{n_x} V_{n_x}^T . aga{7.54}$$

En procédant selon les mêmes étapes de calcul qu'à la Section 7.1, une estimation de la matrice d'état A est donnée par

$$\hat{A} = \hat{\Gamma}^{\#}_{\alpha} \overrightarrow{\mathbf{R}}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} (\hat{\mathbf{R}}_{x\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}})^{\#} , \qquad (7.55)$$

où $(\bullet)^{\#}$ note la pseudo-inverse, et où les matrices $\hat{\Gamma}$ et $\hat{\mathbf{R}}_{x\bar{u}} \prod_{\bar{u}\bar{u}}$ sont respectivement données par

$$\hat{\Gamma}_{\alpha} = U_{n_x} \Sigma_{n_x}^{1/2}, \quad \hat{\mathbf{R}}_{x\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}} = \Sigma_{n_x}^{1/2} V_{n_x}^T.$$
 (7.56)

Une estimation de la matrice des sorties C est calculée d'après les n_y premières lignes de $\hat{\Gamma}$. Dans la dernière étape de l'algorithme, une estimation des matrices B et D est calculée en résolvant le problème des moindres carrés suivant

$$(\hat{B}, \hat{D}) = \arg\min_{B,D} \sum_{n=1}^{N} \| \hat{R}_{y\bar{u}}(\tau_0 + n) - (7.57) \| \hat{C} \hat{A}^n \hat{R}_{x\bar{u}}(\tau_0) + \hat{C} \hat{A}^{n-1} B \hat{R}_{\bar{u}\bar{u}}(\tau_0) + D \hat{R}_{\bar{u}\bar{u}}(\tau_0 + n)) \|^2.$$

7.3 Filtrage non-causal des fonctions de covariance

Comme nous l'avons décrit dans la section précédente, l'ordre du modèle est déterminé d'après la SVD de $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}}$. Ainsi, si on sélectionne un ordre plus faible que n_x , c.-à-d., une matrice Q_η de rang $\eta = n_x - j$ avec $j \ge 1$, l'erreur obtenue en résolvant le problème des moindres carrés devient (Golub et Van Loan, 1996, Th. 2.5.2)

$$\epsilon_{\eta} = \|Q_{\eta} - \mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}}\|^2 = \sigma_{\eta+1} \gg \epsilon_{n_x} , \qquad (7.58)$$

car la position $\eta + 1$ est située avant la chute des valeurs singulières. De ce fait, il n'est pas possible de choisir un ordre inférieur sans obtenir un résultat biaisé.

Initialement motivée par le désir de « blanchir » les données (Viberg, 1995), c.-à-d., éliminer les effets de la partie colorée du bruit affectant les données, l'utilisation de matrices de pondération peut également modifier la dimension de l'espace engendré par la matrice d'observabilité Γ_{α} . Des matrices de pondération peuvent donc être utilisées afin d'influencer l'ordre du modèle identifié. Dans (Van Overschee et De Moor, 1996b, Chapitre 5), il a été montré qu'un choix particulier des matrices de pondération conduit à une base équilibrée pondérée en fréquence de l'espace d'état dans laquelle des réductions de modèles sont possibles. Cela correspond à la technique de réduction de modèles par pondération fréquentielle introduite par Enns (1984a). Fondée sur la réduction équilibrée, la réduction pondérée en fréquence consiste à pondérer les données d'entrée et de sortie dans la procédure d'équilibrage afin de favoriser les dynamiques de certaines bandes de fréquences lors de la réduction.

Dans notre cas, l'algorithme ne nécessite pas l'utilisation de matrices de pondération pour offrir une estimation consistante des paramètres. Toutefois, comme pour les approches mentionnées précédemment, des matrices de pondération additionnelles pourraient servir à améliorer l'identification d'un modèle d'ordre inférieur. Utiliser un filtre est une autre possibilité qui permet d'éviter le choix, pas toujours évident, de telles matrices. Un filtre non-causal F(q) (exprimé en fonction de l'opérateur de décalage temporel positif q) peut en effet être appliqué aux fonctions de corrélation $\tilde{R}_{\bar{u}\bar{u}}(\tau)$ et $\tilde{R}_{y\bar{u}}(\tau)$ tel que

$$\ddot{R}_{\bar{u}\bar{u},f}(\tau) = F(q)\,\ddot{R}_{\bar{u}\bar{u}}(\tau)\,,$$
(7.59)

$$\tilde{R}_{y\bar{u},f}(\tau) = F(q)\,\tilde{R}_{y\bar{u}}(\tau)\,.$$
(7.60)

Bien sûr, l'utilisation de tels filtres modifie la valeur des fonctions de corrélation en ajoutant un biais aux valeurs non-filtrées. Cependant, l'équivalence suivante est vérifiée

$$\hat{R}_{y\bar{u}}(\tau) = \mathsf{H}(q)\,\hat{R}_{\bar{u}\bar{u}}(\tau) \iff \hat{R}_{y\bar{u},f}(\tau) = \mathsf{H}(q)\,\hat{R}_{\bar{u}\bar{u},f}(\tau)\,,\tag{7.61}$$

où $\mathsf{H}(q)$ note le vrai système, $\hat{R}_{\bar{u}\bar{u},f}(\tau) = w(\tau) \tilde{R}_{\bar{u}\bar{u},f}(\tau)$ et $\hat{R}_{y\bar{u},f}(\tau) = w(\tau) \tilde{R}_{y\bar{u},f}(\tau)$. L'algorithme présenté dans la section précédente pourra donc être appliqué aux données filtrées afin d'identifier $\mathsf{H}(q)$.

En notant $U(\omega_l)$ et $Y(\omega_l)$ les transformées de Fourier respectives de u(t) et y(t), les estimations des fonctions de covariance filtrées $\tilde{R}_{\bar{u}\bar{u},f}(\tau)$ et $\tilde{R}_{y\bar{u},f}(\tau)$ valent

$$\tilde{R}_{\bar{u}\bar{u},f}(\tau) = \mathsf{T}\mathsf{F}^{-1}\{\tilde{\phi}_{uu,f}(f_l)\},\qquad(7.62)$$

$$\tilde{R}_{y\bar{u},f}(\tau) = \mathsf{TF}^{-1}\{\tilde{\phi}_{yu,f}(f_l)\}.$$
 (7.63)

Les estimations des densités spectrales filtrées $\tilde{\phi}_{uu,f}(f_l)$ et $\tilde{\phi}_{yu,f}(f_l)$ sont définies par

$$\tilde{\phi}_{uu,f}(f_l) = F(f_l) U(f_l) U(f_l)^*$$
(7.64)

$$\phi_{yu,f}(f_l) = F(f_l) Y(f_l) U(f_l)^* , \qquad (7.65)$$

où $F(f_l)$ est la réponse fréquentielle du filtre choisi.

Choisir un filtre non-causal F(q) tel que sa réponse fréquentielle soit définie par

$$F(f_l) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f_l \in \begin{bmatrix} f_{min}, f_{max} \\ 0 & \text{si} & f_l \notin \begin{bmatrix} f_{min}, f_{max} \\ f_{min}, f_{max} \end{bmatrix} \quad , \tag{7.66} \end{cases}$$

revient à sélectionner une bande de fréquence. Dans ce cas, seulement les valeurs de $\tilde{\phi}_{\bar{u}\bar{u}}(f_l)$ et $\tilde{\phi}_{y\bar{u}}(f_l)$ aux pulsations comprises entre f_{min} et f_{max} sont retenues. En utilisant un tel filtre, l'influence des pôles situés hors de la bande de fréquence sélectionnée sur les données est diminuée. Par conséquent, les valeurs singulières correspondantes de $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi_{\bar{u}\bar{u}}$ peuvent être largement réduites. Ainsi, la chute de valeur se produit après un plus petit nombre de valeurs singulières. Un modèle d'ordre inférieur peut alors être identifié.

Si on ne s'intéresse pas aux dynamiques du système sur l'ensemble du domaine fréquentiel, ce filtre est un moyen de focaliser l'identification sur la bande de fréquence d'intérêt. Il permet d'identifier un modèle dont la réponse va « coller » avec la réponse du système dans cette bande de fréquence indépendamment des dynamiques du système sur le reste de la plage de fréquences. Bien que basée sur un algorithme d'identification totalement différent, la méthode de *vector fitting* présentée dans (Gustavsen et Semlyen, 1999) permet une approche similaire en affectant plus de poids à la zone fréquentielle sur laquelle une plus grande précision est souhaitée. Celui-ci est cependant fondé sur une procédure d'optimisation itérative. Son principal inconvénient est donc le besoin d'initialiser sa convergence.

Comparée à une réduction équilibrée qui est l'approche la plus couramment utilisée pour procéder à une réduction de modèles, l'approche présentée ici est légèrement différente. En effet, la réduction équilibrée réduit un modèle en tronquant ses états peu observables et commandables. Le résultat n'est donc pas nécessairement équivalent puisque, dans ce cas, l'opération de troncature est faite indépendamment du positionnement fréquentiel des pôles. La réduction équilibrée pondérée en fréquence introduite par Enns (1984b) permet en revanche d'inclure des pondérations fréquentielles afin de mettre l'accent sur les états dans une certaine bande de fréquence. Si les matrices de pondération sont choisies pour mettre l'accent sur la même bande de fréquence $[f_{min}, f_{max}]$, un modèle similaire à celui obtenu avec l'approche présentée ici est obtenu. Cependant, la réduction équilibrée nécessite une identification préalable du modèle complet et nécessite donc une procédure en deux étapes. Des résultats équivalents à une réduction équilibrée peuvent être obtenus en une seule étape avec certaines méthodes 4SID lorsqu'un choix particulier des matrices de pondération est effectué (Van Overschee et De Moor, 1996a). Cependant, ces approches fondées sur l'utilisation de matrices de pondération fréquentielles souffrent de la difficulté de choisir ces matrices si on veut sélectionner précisément une bande de fréquence. Cet inconvénient est évité par les méthodes fondées sur un calcul des grammiens limités en fréquence (Gawronski et Juang, 1990) mais cette approche nécessite la connaissance du système complet. La solution que nous proposons ici permet la même simplicité d'utilisation que la méthode des grammiens limités en fréquence. De plus, elle donne la possibilité d'obtenir un modèle d'ordre réduit d'après les données mesurées en une seule étape.

D'autre part, l'utilisation du filtre F(q) offre un avantage pour l'algorithme d'identification fondé sur l'utilisation des fonctions de covariance. Réduisant le bruit affectant les mesures, il permet en effet de tronquer plus efficacement $\tilde{R}_{y\bar{u},f}(\tau)$ grâce à la fenêtre temporelle $\omega(\tau)$. Ainsi, cela permet de traiter moins de points de données.

7.4 Estimation d'un modèle d'ordre réduit

Soit $R_{y\bar{u},f}(\tau)$ et $R_{\bar{u}\bar{u},f}(\tau)$ les estimations des fonctions de covariance filtrées $R_{y\bar{u},f}(\tau)$ et $R_{\bar{u}\bar{u},f}(\tau)$. Elles sont calculées avec les données $\bar{u}(t)$ et y(t)d'entrée-sortie mesurées. Elles peuvent de plus être exprimées en fonction des matrices de l'espace d'état comme nous l'avons vu pour les fonctions de covariance non-filtrées à l'équation (7.32).

Ainsi, l'algorithme décrit à la Section 7.2.3 peut être formulé en utilisant les fonctions de covariance filtrées. Premièrement, on écrit les relations suivantes

$$\mathbf{R}_{y\bar{u},f} = \Gamma_{\alpha} \, \mathbf{R}_{x\bar{u},f} + T \, \mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u},f} + \mathbf{R}_{v\bar{u},f} \tag{7.67}$$

$$\vec{\mathbf{R}}_{y\bar{u},f} = \Gamma_{\alpha} A \mathbf{R}_{x\bar{u},f} + \vec{T} \, \vec{\mathbf{R}}_{\bar{u}\bar{u},f} + \vec{\mathbf{R}}_{v\bar{u},f} \,. \tag{7.68}$$

Les matrices $\mathbf{R}_{y\bar{u},f}$, $\mathbf{R}_{x\bar{u},f}$, $\mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u},f}$, $\mathbf{R}_{v\bar{u},f}$, $\mathbf{R}_{y\bar{u},f}$, $\mathbf{R}_{x\bar{u},f}$, $\mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u},f}$, $\mathbf{R}_{v\bar{u},f}$ sont définies comme à l'équation (7.49) en se servant des fonctions de covariance

filtrées. La projection $\Pi_{\bar{u}\bar{u},f}$ sur le complément orthogonal des espaces engendrés par les matrices de Hankel par bloc $\mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u},f}$ et $\mathbf{R}_{\bar{u}\bar{u},f}$ est définie de façon similaire à la projection non-filtrée. En fonction du filtre choisi et des fréquences des modes du système, l'influence de certains modes sur les données filtrées peut être très faible ou même inexistante. Dans une telle situation, une chute significative des valeurs singulières de $\mathbf{R}_{y\bar{u},f} \Pi_{\bar{u}\bar{u},f}$ se trouve après les premières η valeurs singulières. La position η est donnée par

$$\eta = n_x - (2c + r) , \qquad (7.69)$$

où c est le nombre de modes complexes et r le nombre de modes réels ayant peu d'influence sur les données filtrées. Ainsi, la matrice Q_{η} qui minimise le problème des moindres carrés suivant

$$\epsilon_{\eta} = \min_{rank(Q)=\eta} \|Q - \mathbf{R}_{y\bar{u},f} \Pi_{\bar{u}\bar{u},f}\|^2 , \qquad (7.70)$$

est donnée par la SVD de $\mathbf{R}_{u\bar{u},f} \prod_{\bar{u}\bar{u},f}$, soit

$$Q_{\eta} = U_{\eta} \Sigma_{\eta} V_{\eta}^{T} . \tag{7.71}$$

Dans ce cas, l'erreur résiduelle ϵ_{η} est faible et l'identification d'un modèle d'ordre réduit η ne conduit plus à une estimation biaisée.

Par conséquent, l'objectif qui n'est plus d'identifier au mieux le système complet (A, B, C, D), mais simplement le système réduit $(A_f, \bar{B}_f, C_f, \bar{D}_f)$ d'ordre η , peut directement être atteint d'après la matrice $\hat{R}_{y\bar{u},f} \prod_{\bar{u}\bar{u},f}$. Le système ainsi identifié est le système qui estime au mieux les dynamiques du système dans la bande de fréquence sélectionnée, indépendamment du comportement dynamique à l'extérieur de cette bande de fréquence. La matrice d'observabilité étendue du système d'ordre réduit alors estimée, notée $\hat{\Gamma}_{\alpha,f}$, et la matrice de réponse estimée de l'état filtré, notée $\mathbf{R}_{x\bar{u},f}$, sont obtenues en factorisant Q_{η} , soit

$$Q_{\eta} = \hat{\Gamma}_{\alpha,f} \left(\mathbf{R}_{x\bar{u},f} \Pi_{\bar{u}\bar{u},f} \right), \qquad (7.72)$$

où un choix de solutions possibles est

$$\hat{\Gamma}_{\alpha,f} = U_{\eta} \Sigma_{\eta}^{1/2}, \qquad \mathbf{R}_{x\bar{u},f} \Pi_{\bar{u}\bar{u},f} = \Sigma_{\eta}^{1/2} V_{\eta}^{T}.$$
 (7.73)

Ensuite, la propriété d'invariance vue à la Section 7.2.3 permet d'identifier la matrice d'état d'ordre réduit \hat{A}_f . La matrice \hat{C}_f est donnée par les n_y premières lignes de $\hat{\Gamma}_{\alpha,f}$. Les matrices d'entrée \hat{B}_f , \hat{D}_f sont obtenues en résolvant un problème des moindres carrés formulé avec les données filtrées comme à l'équation (7.57).

7.5 Exemple illustratif

Afin d'illustrer les améliorations proposées dans ce chapitre, nous appliquons l'algorithme fondé sur l'utilisation de fonctions de covariance à l'exemple de simulation utilisé aux Chapitres 4 et 6. Le modèle que nous cherchons à identifier est donc le modèle d'ordre 4 possédant 2 entrées et 3 sorties qui est donné par l'Annexe A.1. De même que pour les précédentes évaluations, les résultats montrés ici sont obtenus en appliquant successivement à chaque entrée un créneau d'une durée de 0.2 secondes. La fréquence d'échantillonnage utilisée est égale à 128 Hz. De ce fait, les transformées de Fourier des données non filtrées sont calculées pour des fréquences allant de 0 à 64 Hz. Les sorties du modèle sont perturbées par un bruit coloré généré via le modèle de bruit donné à l'Annexe A.1. Les résultats montrés dans cette section font intervenir les deux niveaux de bruit intermédiaires utilisés aux Chapitres 4 et 6 pour lesquels les niveaux de rapport de signal à bruit (SNR) valent 23 dB et 16 dB. Ces rapports sont calculés sur les 20 secondes suivant l'excitation. Enfin, les indicateurs BFR et VAF définis au Chapitre 4 (p. 74) sont utilisés afin d'évaluer la précision des modèles identifiés.

7.5.1 Influence des conditions aux limites

Afin de montrer l'impact des conditions aux limites sur les résultats, nous considérons dans un premier temps les données non-filtrées. Plusieurs durées d'enregistrement des données, notées d_r , ont été considérées. Pour chacune de ces durées, 1 simulation de Monte-Carlo avec 100 séquences de bruit différentes a été réalisée avec et sans prise en compte des conditions aux limites. La Figure 7.1 montre les sorties bruitées et non bruitées du modèle pour une séquence du niveau de bruit égal à 16 dB. Les valeurs moyennes des indicateurs BFR et VAF pour les deux niveaux de bruit considérés sont donnés par la Figure 7.2. Comme nous l'avons constaté au Chapitre 6 dans le cas des méthodes itératives, on peut voir que lorsque les conditions aux limites ne sont pas explicitement prises en compte dans l'écriture de l'algorithme, une durée d'enregistrement inférieure à 25 secondes entraine une importante dégradation des résultats. Celle-ci est due aux effets transitoires qui biaisent l'estimation des paramètres. Plus particulièrement, comme le montre la Figure 7.3, l'estimation des modes est biaisée. En revanche, on voit que la prise en compte des conditions aux limites permet d'améliorer les résultats en évitant un tel biais. De plus, quel que soit le niveau de bruit, on constate qu'un modèle plus précis est identifié avec une durée d'enregistrement très courte. Cela montre que lorsque les effets transitoires n'affectent pas les données, l'algorithme parvient à tirer profit du niveau d'énergie des sorties qui est maximal après l'excitation. Enfin, on voit que la prise en compte des conditions aux limites permet toujours d'améliorer la précision du modèle identifié. Cela n'est pas le cas avec les méthodes itératives discutées au Chapitre 6 qui voient une limite à cette amélioration lorsque le niveau moyen d'énergie des sorties devient égal au niveau du bruit. La tendance est ici différente grâce aux fonctions de corrélation qui permettent de diminuer le niveau de bruit affectant les données utilisées pour l'identification.



FIGURE 7.1 – Sorties bruitées et non bruitées du modèle pour une séquence de bruit.



FIGURE 7.2 – Influence des conditions aux limites sur les valeurs de BFR et VAF pour les deux niveaux de bruit considérés.

7.5.2 Identification fondée sur les fonctions de covariance filtrées

On considère désormais uniquement la durée $d_r = 5$ secondes en tenant compte des conditions aux limites, et un niveau de bruit moyen égal à 16 dB. Nous souhaitons identifier un modèle qui représente uniquement le comportement dynamique du système entre 2.5 et 10 Hz. Pour cela, un filtre, défini comme à l'équation (7.66) avec $f_{min} = 2.5$ Hz et $f_{max} = 10$ Hz, est appliqué sur les fonctions de covariance. La Figure 7.4 montre l'impact du filtre sur les valeurs singulières pour une des simulations de Monte-Carlo. On constate que lorsque le filtre est utilisé, la chute des valeurs singulières se situe après la deuxième valeur singulière. Cela traduit une diminution de l'influence du premier mode. L'identification d'un système d'ordre deux est alors possible.



FIGURE 7.3 – Valeurs des modes identifiés avec et sans prise en compte des conditions aux limites pour une durée d'enregistrement de 5 secondes. Les modes du système réel sont représentés par les cercles rouges.

Les modes identifiés sont comparés avec ceux obtenus par la procédure en



FIGURE 7.4 – Valeurs singulières de $\mathbf{R}_{y\bar{u}} \Pi$ et $\mathbf{R}_{y\bar{u},f} \Pi_{\bar{u}\bar{u},f}$.

deux étapes suivantes : le modèle complet est d'abord identifié sans filtrer les données, puis, dans une deuxième étape, est réduit par une réduction équilibrée pondérée en fréquence¹. Les modes identifiés dans ces deux cas sont montrés sur la Figure 7.5. On voit que l'identification d'après les fonctions de covariance filtrées permet d'identifier précisément le deuxième mode. De plus, on voit que son estimation n'est pas biaisée. Ainsi, l'algorithme fondé sur les fonctions de covariance filtrées permet d'obtenir, en une seule étape,

 $^{^{1}\}mathrm{La}$ fonction implémentée dans la toolbox Matlab MORE (MOdel REduction) (Poussot-Vassal et Vuillemin, 2012) est utilisée pour effectuer cette réduction.



FIGURE 7.5 – Valeurs des modes identifiés avec les deux étapes d'identification puis de réduction équilibrée (gauche) et avec l'algorithme 4SID fondé sur les fonctions de covariance filtrées (droite). Les modes du système réel sont représentés par les cercles rouges.

un résultat comparable à une procédure identification-réduction. On voit que seule la variance de l'amortissement estimé est légèrement supérieure à celle obtenue en deux étapes. Toutefois, il est important de remarquer que cet exemple est favorable à la réalisation d'une identification du système complet suivie d'une réduction équilibrée car le système générant le bruit ne possède pas de mode complexe proche de la bande de fréquence d'intérêt. Dans le cas contraire, l'identification du système complet est affectée par de tels modes. Cela peut conduire à une identification moins précise des modes présents dans la bande de fréquence d'intérêt. Après l'étape de réduction, les modes d'intérêt sont donc estimés moins précisément. L'algorithme proposé permet d'éviter ce type de problème en réduisant l'influence des modes de bruit se trouvant en dehors de la bande de fréquence d'intérêt.

La Figure 7.6 montre les gains en décibels des transferts identifiés. On peut voir que les dynamiques des systèmes réduits identifiés correspondent à celles du système de référence sur la plage de fréquence [2.5 10] Hz.

7.6 Bilan

Dans cette section, nous avons présenté un algorithme d'identification 4SID fondé sur l'utilisation des fonctions de covariance des données d'entréesortie du système. Cet algorithme, introduit par Miller et De Callafon (2010), possède la propriété de procurer des estimations non-biaisées en présence de bruit coloré et sans nécessiter l'utilisation de matrices de pondération. Nous avons ensuite introduit deux améliorations de cette méthode :

• Premièrement, nous avons intégré la prise en compte des conditions aux limites dans la formulation de l'algorithme. Cette amélioration permet une utilisation de l'algorithme lorsque le système n'est pas dans un état final identique à son état initial. Comme nous l'avons montré sur un exemple, la prise en compte explicite des conditions aux limites permet d'améliorer la précision du modèle identifié.

• Deuxièmement, nous avons montré que la sélection de l'ordre du modèle peut être influencée en utilisant un filtrage non-causal des fonctions de covariance. Cela permet de sélectionner une bande de fréquence pour laquelle on souhaite capturer et identifier les dynamiques du système. Nous avons validé cette approche sur un exemple pour lequel les résultats obtenus en une seule étape d'identification sont similaires à ceux obtenus par une étape d'identification du modèle complet suivie d'une étape de réduction du modèle. Cette nouvelle possibilité permet d'adapter l'algorithme initial au contexte de l'analyse modale. En effet, la sélection d'une bande de fréquence est souvent importante dans ce domaine. En particulier, c'est le cas pour les essais de flottement où cela va permettre de focaliser l'identification sur la bande de fréquence dans laquelle se trouvent les modes aéro-élastiques.

Ces deux améliorations permettent d'envisager deux utilisations possibles de cet algorithme :

- Il peut être utilisé en tant qu'algorithme d'identification à part entière et ainsi constituer une alternative à l'approche itérative présentée au Chapitre 4,
- Il peut être utilisé comme un moyen d'améliorer la précision de l'identification de certains modes qui seraient difficilement identifiés par une identification globale. Pour cela, après une première identification globale, le filtre fréquentiel peut être utilisé pour restreindre la zone d'intérêt autour du ou des modes recherchés.

Cet algorithme est appliqué à l'analyse modale d'essais de flottement dans le Chapitre 8. De plus, toujours dans le Chapitre 8, ses performances sont comparées à celles de l'approche itérative développée aux Chapitres 3 à 6.



FIGURE 7.6 – Tracés des diagrammes de Bode en amplitude du système complet (bleu) et des modèles d'ordre réduit identifiés avec les fonctions de covariance filtrées (rouge).

Chapitre 8

APPLICATION AUX ESSAIS DE FLOTTEMENT

Dans ce chapitre, les méthodes d'identification développées dans les chapitres précédents sont appliquées au cas de l'analyse modale de structures d'avions. Dans un premier temps, un cas de simulation représentatif d'essais de flottement d'un avion civil réalisés avec des excitations multi-entrées de courte durée est étudié. L'impact des améliorations apportées aux méthodes étudiées dans les chapitres précédents est discuté sur cet exemple. De plus, une combinaison de méthodes itératives est proposée afin de disposer d'un algorithme itératif précis et qui converge en un nombre limité d'itérations. Cet algorithme ainsi que l'algorithme par approche des sous-espaces présenté dans le Chapitre 7 sont ensuite appliqués à des données réelles d'un essai de flottement d'un avion de combat. Cet essai ayant été réalisé avec des excitations de plus longue durée, l'objectif de cette seconde étude est de valider le bon comportement des algorithmes lorsque des excitations de plus longue durée sont utilisées.

Sommaire

| 8.1 Essais de flottement d'un avion civil 168 | | | | | |
|---|---|--|--|--|--|
| 8.1.1 | Présentation du cas d'étude | | | | |
| 8.1.2 | Résultats donnés par l'approche itérative \ldots . 172 | | | | |
| 8.1.3 | Résultats donnés par l'approche des sous-espaces . 183 | | | | |
| 8.1.4 | Bilan | | | | |
| 8.2 Essais de flottement d'un avion militaire 190 | | | | | |
| 8.2.1 | Présentation du cas d'étude | | | | |
| 8.2.2 | Identification d'un modèle de la structure 191 | | | | |
| 8.2.3 | Identification d'un modèle complet 200 | | | | |
| 8.2.4 | Comparaison et discussion des deux approches $$ 206 | | | | |
| 8.2.5 | Bilan | | | | |

8.1 Essais de flottement d'un avion civil

Dans cette section, nous appliquons les méthodes d'identification développées dans les chapitres précédents au cas de l'analyse modale d'une structure flexible d'avion civil. Plus particulièrement, nous nous intéressons, dans cette section, au cas d'essais de flottement réalisés avec des excitations multientrées de courte durée. Ce type d'essais n'ayant pas encore été réalisé sur des avions « réels », des données réelles ne sont, à ce jour, pas disponibles. Le cas d'étude présenté dans cette section repose donc sur des données de simulation représentatives des conditions d'essai réelles. Les objectifs de l'étude menée dans cette section sont multiples. D'une part, nous allons utiliser ces données afin d'évaluer l'impact des améliorations proposées aux Chapitres 6 sur les performances des méthodes étudiées. D'autre part, ces données vont nous permettre de définir une combinaison de méthodes itératives afin de posséder un algorithme itératif qui fournisse une identification rapide et précise lors d'essais de flottement réalisés avec des excitations multi-entrées de courte durée. Enfin, nous allons également utiliser ces données afin d'évaluer l'approche des sous-espaces présentée au Chapitre 7.

8.1.1 Présentation du cas d'étude

Le modèle que nous allons chercher à identifier est un modèle simplifié obtenu en réduisant un modèle aéroélastique de structure complet. Ce modèle réduit ne représente donc pas la totalité des caractéristiques de l'avion. Cependant, il est représentatif des principales difficultés rencontrées par les algorithmes d'identification lors des essais en vol. C'est un modèle d'ordre 11 qui possède 5 modes aéroélastiques et 1 mode apériodique. Ce mode apériodique, situé à une fréquence f = 1.24 Hz, permet de représenter l'influence d'un éventuel retard aérodynamique ou d'un mode de gouverne. Ce type de mode peut être visible sur les données mesurées lors des essais en vol et peut biaiser l'identification des paramètres modaux de la structure. Les 5 modes aéroélastiques ont été choisis afin de représenter certaines caractéristiques typiques du comportement d'une structure d'avion civil. La Figure 8.1 montre leur position dans le plan fréquence – taux d'amortissement. Ces modes possèdent les particularités suivantes rencontrées lors des essais en vol :

- Le premier mode possède un amortissement relativement important $(\xi_1 = 80 \%)$ pour une structure flexible d'avion civil. Par expérience, nous savons que ce type de modes est généralement difficile à identifier précisément lors des essais en vol. En particulier l'estimation de l'amortissement d'un tel mode présente généralement une variance importante. D'autre part, ce mode correspond au mode de plus basse fréquence rencontré qui se trouve généralement à environ 1 Hz.
- Le deuxième mode $(f_2 = 1.65 \text{ Hz})$ est un mode très peu amorti $(\xi_2 = 7$



FIGURE 8.1 – Modes aéroélastiques du modèle

‰). Les modes peu amortis sont généralement bien identifiés. Cependant, ces modes sont cruciaux pour la surveillance du flottement car ils sont très proches de la zone d'instabilité. De ce fait, leur amortissement doit être identifié très précisément.

- Le troisième et le quatrième mode sont deux modes très proches en fréquence $(f_3 = 2.51 \text{ Hz et } f_4 = 2.52 \text{ Hz})$ et en amortissement $(\xi_3 = 12 \% \text{et } \xi_4 = 26 \%)$. L'identification de tels modes proches présente une difficulté majeure car les algorithmes doivent réussir à les dissocier. Lorsqu'ils n'y parviennent pas, deux situations peuvent se présenter. Si l'influence d'un mode est plus visible sur les mesures, seul celui-ci est identifié. Si les deux modes ont une influence équivalente sur les mesures, un mode *moyen* est identifié pour représenter les deux modes proches.
- Enfin, le cinquième mode ($f_5 = 2.9$ Hz) représente un mode aéroélastique plus isolé qui possède une valeur d'amortissement également plus commune ($\xi_5 = 36$ ‰).

Le modèle possède 6 sorties et 3 entrées. Les excitations appliquées sont de simples créneaux, d'une durée de 0.2 secondes, successivement appliqués à chaque entrée. Comme on le voit sur la Figure 8.2, l'énergie de ce signal permet d'exciter l'ensemble de la bande de fréquence contenant les modes aéroélastiques. En revanche, il faut souligner que ce type d'excitations fournit une excitation beaucoup moins riche que les excitations généralement utilisées en analyse modale ou plus généralement en identification. Les sorties du modèle sont perturbées par un bruit simulé représentatif du bruit affectant les mesures durant les essais en vol. Ce bruit est formé de la somme de deux composantes : un bruit coloré simulant les effets des perturbations qui


FIGURE 8.2 – Signal d'excitation utilisé et son spectre fréquentiel

affectent l'avion et les mesures, et un bruit blanc simulant le bruit présent à haute fréquence sur les mesures. Le contenu fréquentiel des perturbations est généré à l'aide de spectres de Karman (Etkin, 1972) dont les variances ont été estimées d'après des données d'essais en vol. Le bruit à haute fréquence est simulé par une séquence de bruit Gaussien dont la variance a également été estimée d'après des données d'essais en vol. Plus de détails sur la façon dont ce bruit est simulé peuvent être trouvés dans (Vacher et Bucharles, 2008). Durant les essais en vol, on a pu constater que les niveaux de bruit ne sont pas constants (Vacher et Bucharles, 2008) et varient en fonction des conditions de vol. Deux niveaux de bruit sont donc considérés dans cette étude : un niveau élevé qui représente des conditions très bruitées, et un niveau plus faible qui correspond à des conditions d'essais plus favorables. Pour chaque niveau de bruit, les résultats montrés sont les valeurs moyennes obtenues en réalisant une simulation de Monte-Carlo avec 100 séquences aléatoires de bruit de même caractéristique. Le rapport de signal à bruit moyen, noté SNR, est respectivement égal à 9.7 dB et 14.3 dB pour les deux niveaux de bruit. Bien que le niveau de bruit soit toujours important, le niveau de bruit le moins important sera nommé *modéré* dans la suite, par différence avec le niveau élevé.

Le critère d'identification est utilisé pour juger le niveau de convergence des différents algorithmes, tandis que la qualité du modèle identifié sera jugée par le niveau de précision moyen d'identification de chacun des modes. Les données utilisées pour l'identification sont échantillonnées à 128 Hz et enregistrées pendant une durée $d_r = 7.5$ secondes. Comme on peut le voir sur la Figure 8.3, la sélection des premières secondes permet de considérer la zone où le niveau de signal est le plus important.

Dans une première section, nous présentons les résultats obtenus avec l'approche itérative développée dans les Chapitres 3 à 6. Dans une deuxième section, nous présentons les résultats obtenus avec l'approche des sous-espaces développée au Chapitre 7. Dans ces deux sections, nous montrons également l'influence des améliorations proposées sur l'identification des paramètres



FIGURE 8.3 – Sorties non bruitées du système

modaux.

8.1.2 Résultats donnés par l'approche itérative

Dans cette section, les identifications sont réalisées à ordre fixé. Rappelons que lors d'une analyse modale, lorsque l'ordre du système n'est pas estimé par l'algorithme utilisé, comme c'est le cas par les méthodes traitées dans cette section, celui-ci est déterminé par le biais de diagrammes de stabilité (Phillips et Allemang, 2005). Le tracé de ces diagrammes nécessite plusieurs identifications successives réalisées pour différentes valeurs d'ordre du modèle identifié. Dans un premier temps, nous n'appliquons pas une telle démarche¹. Connaissant l'ordre du système que nous souhaitons identifier, nous comparons les performances des méthodes lorsque l'ordre du modèle est correctement fixé par rapport à l'ordre du système réel. De ce fait, un ordre $n_x = 11$, c.-à-d., égal à l'ordre du modèle déterministe recherché, est fixé pour réaliser les identifications.

8.1.2.1 Influence du paramétrage sur la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton

Cas des fractions matricielles à gauche Au Chapitre 6, nous avons montré que le choix d'un paramétrage par DDLC des formes sur-paramétrées diagonales (DDLC diag.) ou des formes pleines (DDLC plein) introduites au Chapitre 5 permet d'améliorer les propriétés de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton. Nous comparons, ici, les résultats obtenus avec ces deux paramétrages à ceux donnés par l'utilisation d'un paramétrage pseudocanonique (Pseudo can.). L'objectif est de comparer sur un cas d'application les résultats obtenus pour ces trois choix de paramétrage.

Les critères d'arrêt utilisés sont identiques pour les trois cas considérés : la convergence est stoppée si le critère atteint la valeur minimale fixée à 10^{-5} , ou si 3 diminutions successives du critère sont inférieures à 10^{-4} , ou après 100 itérations si aucun des deux critères d'arrêt précédents n'est atteint avant. De plus, l'algorithme de Gauss-Newton (GN) est initialisé par la solution obtenue après la résolution d'un problème des moindres carrés linéaires, noté LS (pour Least-Squares en Anglais) dans la suite. Cette résolution correspond à la première itération de l'algorithme de Sanathanan-Koerner (SK), lorsque $\check{D}_f^{-1} = I_{n_y}$ (cf. p. 64). Comme nous le verrons plus loin, les modèles identifiés avec cette unique étape LS sont biaisés mais ne sont pas trop éloignés du modèle optimal. De ce fait, la solution donnée par l'étape LS n'est pas un mauvais modèle initial pour l'algorithme de Gauss-Newton.

Le Tableau 8.1 montre les valeurs moyennes des critères d'identification après minimisation, ainsi que le nombre moyen d'itérations nécessaires à l'al-

 $^{^1 \}mathrm{On}$ reviendra ultérieurement sur ce problème d'estimation de l'ordre à la Section 8.1.2.4.

gorithme pour atteindre ces valeurs. On constate que l'utilisation d'un des deux paramétrages par DDLC permet d'améliorer la minimisation du critère quel que soit le niveau de bruit. En particulier, on voit que les valeurs de critère les plus faibles sont obtenues avec le paramétrage par DDLC des formes pleines. Dans le cas du niveau de bruit modéré, l'amélioration par rapport à un paramétrage pseudo-canonique est légère car l'algorithme minimise déjà très bien le critère lorsque ce paramétrage est utilisé. Toutefois, dans ce cas, on remarque que le paramétrage par DDLC des formes pleines offre une convergence plus rapide. Dans le cas du niveau de bruit élevé, l'amélioration apportée sur la minimisation du critère est plus importante. Le nombre d'itérations est également plus important car la convergence de l'algorithme est moins facilement stoppée par des faux minima¹. Enfin, on constate que le paramétrage par DDLC des formes sur-paramétrées diagonales ne permet pas une minimisation du critère aussi efficace que le paramétrage par DDLC des formes pleines.

| | | Pseudo can. | DDLC diag. | DDLC plein |
|--|----------|----------------|---------------|---------------|
| $\begin{array}{l} \text{Bruit modéré} \\ (\text{SNR} = 14.3 \text{ dB}) \end{array}$ | J | 0.090 | 0.086 | 0.085 |
| | nb iter. | 15.6 | 14.5 | 12.8 |
| Bruit élevé (SNR $= 9.7 \text{ dB}$) | J | 0.171 | 0.164 | 0.160 |
| | nb iter. | 16.8 | 21.5 | 22.5 |

TABLE 8.1 – Influence du paramétrage sur la convergence

Pour résumer, par rapport aux deux autres paramétrages considérés, le paramétrage par DDLC des formes pleines offre les meilleures propriétés de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton. Il permet d'obtenir une meilleure minimisation du critère d'identification associée à une convergence plus rapide.

Les Figures 8.4 et 8.5 montrent les modes identifiés après convergence de l'algorithme avec le paramétrage pseudo-canonique et le paramétrage par DDLC de la forme pleine, pour chacun des deux niveaux de bruit. La précision des paramètres modaux identifiés est jugée à l'aide de trois critères :

• Le taux d'identification de chaque mode, c.-à-d., le nombre de fois, sur les 100 identifications réalisées, où un mode identifié peut être associé à un mode du système réel. Cette association est fondée sur l'utilisation d'une extension appropriée du *Modal Assurance Criterion* (Vacher et al., 2010). Afin de réaliser l'association, outre les valeurs d'amortis-

¹La notion de faux minimum est expliqué dans la Section 6.1.6.2.

sement et de fréquence des modes, ce critère permet de tenir compte de la précision des déformées modales identifiées.

- L'erreur relative moyenne de l'amortissement des modes identifiés et associés à un mode aéroélastique du système réel. La racine carrée de cette erreur au carrée, notée RMS (pour Root Mean Square en Anglais) est montrée sur les tracés.
- L'erreur moyenne de la fréquence des modes identifiés et associés à un mode aéroélastique du système réel. De même que précédemment, l'erreur RMS est montrée sur les tracés.

Sur ces deux figures, on peut noter plusieurs différences en faveur de l'utilisation du paramétrage par DDLC des formes pleines. Dans le cas du niveau de bruit modéré, on constate que la légère amélioration du critère apportée par l'utilisation des formes pleines se traduit par une amélioration de la précision moyenne de l'amortissement du mode 2 et de la fréquence du mode 1. Dans le cas du niveau de bruit élevé, l'amélioration du critère apportée par l'utilisation des formes pleines est visible sur les trois premiers modes dont l'amortissement est identifié de façon légèrement plus précise. La fréquence du premier mode est également identifiée plus précisément.

Cas des fractions matricielles à droite Dans le cas des FMD, se pose le problème de l'initialisation de l'algorithme de Gauss-Newton. En effet, actuellement nous ne possédons aucune méthode permettant de trouver un modèle initial directement sous forme de FMD. Une solution envisagée consiste à identifier un modèle initial sous forme de FMG puis de le transformer en une FMD équivalente. Cependant, cette solution entraine un problème de convergence de l'algorithme quel que soit le paramétrage utilisé. La Figure 8.6 compare la convergence des versions à droite et à gauche de l'algorithme, c.à-d., lorsqu'un paramétrage plein d'un modèle respectivement sous la forme d'une FMD et d'une FMG est utilisé. Cet exemple montre l'évolution du critère à chaque itération pour une des séquences de bruit de niveau modéré. Dans le cas des FMD, l'initialisation est calculée à partir de la même FMG initiale que pour la version à gauche de l'algorithme. On constate que la version à droite converge beaucoup plus lentement que la version à gauche. Notons qu'un comportement similaire a été observé quel que soit le niveau de bruit et la séquence de bruit utilisés.

Un comportement similaire se produit également lorsque l'algorithme est initialisé par un modèle très peu éloigné de l'optimum. Une telle initialisation peut être donnée par une FMG obtenue après plusieurs itérations de la version à gauche de l'algorithme de Gauss-Newton. Cette observation montre que cette mauvaise convergence ne provient donc pas uniquement d'une initialisation trop éloignée de l'optimum. Ce problème semble, plus vraisemblablement, être provoqué par le fait d'initialiser la convergence par



FIGURE 8.4 – Estimation des modes avec le paramétrage pseudocanonique (à gauche) et le paramétrage par DDLC des FMG-P (à droite) pour le niveau de bruit modéré.

une FMD calculée à partir d'une FMG. Dans ce cas, le critère d'identification semble avoir une forme particulière qui empêche l'algorithme de converger correctement.

De plus, à chaque itération, on a pu constater que le conditionnement de la matrice Jacobienne n'est pas particulièrement important; ce qui semble indiquer que le calcul des directions de descente se fait correctement. Cependant, ajouter une faible valeur λ , par exemple 0.0001, à toutes les valeurs singulières de la matrice Jacobienne permet de débloquer la convergence dans tous les cas testés. Cet ajout peut se faire comme indiqué par Wills et Ninness (2008) et revient à modifier légèrement la direction de descente



FIGURE 8.5 – Estimation des modes avec le paramétrage pseudocanonique (à gauche) et le paramétrage par DDLC des FMG-P (à droite) pour le niveau de bruit élevé.

de l'algorithme. Toutefois, ces phénomènes de blocage et déblocage de la convergence restent encore en partie inexpliqués. De plus, nous ne savons pas, actuellement, si modifier les directions de recherche permet d'assurer une convergence systématique de l'algorithme.

Pour ces raisons, nous n'utiliserons dans la suite de ce chapitre que la version à gauche de l'algorithme de Gauss-Newton.



FIGURE 8.6 – Illustration du problème de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton avec les FMD.

8.1.2.2 Influence des conditions aux limites

Les bénéfices apportés par la prise en compte des conditions aux limites sont évalués par le rapport des valeurs du critère d'identification J(sans prise en compte des conditions aux limites) et \mathbb{J} (avec prise en compte des conditions aux limites) obtenues après la convergence des algorithmes. Pour une résolution des moindres carrés (LS) ainsi que pour les méthodes de Sanathanan-Koerner (SK), de la Variable Instrumentale (VI) et de Gauss-Newton (GN), la valeur moyenne de ce rapport est donnée dans le Tableau 8.2. On voit que les résultats des quatre méthodes sont améliorés

| Niveau de bruit | J/\mathbb{J} | | | | |
|-----------------|----------------|------|------|------|--|
| | LS | SK | IV | GN | |
| Modéré | 1.40 | 1.26 | 1.23 | 1.15 | |
| Elevé | 1.44 | 1.16 | 1.21 | 1.06 | |

TABLE 8.2 – Influence des conditions aux limites sur la convergence des algorithmes.

lorsque les conditions aux limites sont prises en compte. En particulier, pour chaque niveau de bruit considéré, la valeur du critère donnée par la résolution des moindres carrés est respectivement diminuée de 40% et de 44% lorsque les conditions aux limites sont prises en compte. Le modèle identifié lors de cette première étape servant d'initialisation aux itérations SK, VI et GN, la prise en compte des conditions aux limites permet d'obtenir une initialisation plus proche de l'optimum. De ce fait, cela permet, d'une part, d'augmenter les chances de convergence des algorithmes et, d'autre part, de diminuer le nombre moyen d'itérations nécessaire.

Comme le montre la Figure 8.7 pour la résolution LS, en évitant le biais introduit par les effets transitoires lors du calcul des transformées de Fourier, la prise en compte des conditions aux limites permet de diminuer le biais présent sur l'estimation des fréquences et des amortissements des modes. On peut voir que, sur cet exemple, la prise en compte des conditions aux limites permet d'obtenir une estimation moins biaisée des fréquences des modes 1, 2 et 3 et des amortissements des modes 2 et 3. Le taux d'identification des deux premiers modes est également largement amélioré.

8.1.2.3 Algorithme fondé sur une combinaison de méthodes itératives

Au Chapitre 4, nous avons comparé les performances des méthodes de Sanathanan-Koerner, de la Variable Instrumentale et de Gauss-Newton sur un cas de simulation d'un système de taille réduite. Cela nous a permis d'illustrer les performances de ces trois méthodes. En particulier, nous avons vu que la méthode de Gauss-Newton est celle qui permet d'obtenir la meilleure précision mais qu'elle requiert un nombre plus important d'itérations. De plus, bien que l'utilisation d'un paramétrage par DDLC des formes pleines permette d'améliorer sa rapidité de convergence, comme nous l'avons vu précédemment à la Section 8.1.2.1, l'algorithme de Gauss-Newton reste sensible à l'initialisation et peut nécessiter un nombre important d'itérations lorsqu'il est initialisé loin de l'optimum. A l'inverse, au Chapitre 4 nous avons vu que les méthodes SK et VI requièrent moins d'itérations que l'algorithme de Gauss-Newton pour converger. Afin de posséder un algorithme itératif qui allie la précision fournie par la méthode de Gauss-Newton et la rapidité de convergence des itérations SK et VI, il peut donc être bénéfique d'utiliser quelques itérations SK ou VI afin de fournir une meilleure initialisation à l'algorithme de Gauss-Newton. Pour réaliser ces combinaisons, on fixe les critères d'arrêt suivants :

- la convergence de la méthode de Gauss-Newton est stoppée si le critère atteint la valeur minimale fixée à 10⁻⁵, ou si 3 diminutions successives du critère sont inférieures à 10⁻⁴, ou après 200 itérations si aucun des deux critères d'arrêt précédents n'est atteint avant.
- la convergence des méthodes SK et VI est stoppée si le critère atteint la valeur minimale fixée à 10⁻⁵, ou si 3 diminutions successives du cri-



FIGURE 8.7 – Estimation initiale des modes sans (à gauche) et avec prise en compte des conditions aux limites (à droite) pour le niveau de bruit modéré.

tère sont inférieures à 10^{-3} , ou après 200 itérations si aucun des deux critères d'arrêt précédents n'est atteint avant. Le réglage du deuxième critère (diminutions successives) permet de stopper ces deux méthodes lorsqu'elles se sont suffisamment rapprochées du minimum, pour ensuite utiliser la méthode de Gauss-Newton qui est plus efficace pour terminer la minimisation du critère.

La Figure 8.8 montre les valeurs moyennes de critère atteintes à chaque itération pour la méthode de Gauss-Newton (GN) et lorsque celle-ci est combinée avec la méthode de Sanathanan-Koerner (SK + GN) ou avec la mé-

thode de la Variable Instrumentale $(VI + GN)^2$. Pour le niveau de bruit modéré, l'initialisation fournie par la résolution des moindres carrés étant relativement bonne, on constate que l'algorithme GN converge rapidement. En moyenne, il converge après 12.8 itérations. On constate que les itérations SK convergent plus lentement, ce qui ralentit l'algorithme SK + GN. Cet algorithme converge, en moyenne, après 14.8 itérations. En revanche, les itérations VI convergent rapidement et permettent d'obtenir une convergence de l'algorithme VI + GN après 12.9 itérations. Bien que l'utilisation des itérations SK et VI ne permet pas d'améliorer la vitesse de convergence pour ce niveau de bruit, on remarque toutefois qu'elles permettent de légèrement améliorer la minimisation du critère puisque la valeur finale moyenne du critère obtenue dans les deux cas (0.083) est inférieure à celle obtenue avec l'algorithme GN (0.085).

Pour le niveau de bruit élevé, on constate que la convergence des algorithmes SK + GN et VI + GN est nettement plus rapide que celle de l'algorithme GN. Dans ce cas, les itérations SK et VI permettent d'éviter la convergence lente des premières itérations de l'algorithme GN. En effet, on peut voir, sur la Figure 8.8, que l'algorithme GN a besoin, en moyenne, d'environ deux fois plus d'itérations que les algorithmes SK + GN et VI + GN pour diviser par deux la valeur initiale du critère. En moyenne, la valeur minimale du critère est obtenue après 22.5 itérations pour l'algorithme GN. Le même niveau de minimisation du critère est obtenu pour les algorithmes SK + GN et VI + GN après respectivement seulement 14.9 et 11.2 itérations. D'autre part, on constate qu'en fournissant une initialisation plus précise, les itérations SK et VI permettent ensuite une meilleure minimisation du critère par la méthode de Gauss-Newton. De ce fait, la valeur minimale moyenne du critère obtenue est respectivement égale à 0.149 et 0.145 pour les algorithmes SK + GN et VI + GN alors qu'elle vaut 0.160 avec l'algorithme GN. Enfin, on constate, comme pour le niveau de bruit modéré, que l'utilisation combinée des itérations VI et GN permet une minimisation du critère à la fois plus rapide et plus précise que la combinaison des itérations SK et GN.

Ainsi, cette analyse montre, sur un cas de simulation représentatif d'essais en vol réalisés avec des excitations MIMO de courte durée, que l'utilisation d'itérations SK ou VI pour initialiser la minimisation par la méthode de Gauss-Newton permet d'obtenir un algorithme itératif plus performant. On a pu également constater que la combinaison VI + GN est plus performante que la combinaison SK + GN quel que soit le niveau de bruit. La Figure 8.9 montre les modes identifiés avec cet algorithme itératif pour les deux niveaux de bruit. Malgré des conditions d'excitation et de bruit défavorables, on voit que la combinaison VI + GN constitue un algorithme itératif qui permet

 $^{^{2}}$ Précisons que les résultats présentés ici sont obtenus en prenant en compte les conditions aux limites. De plus, le paramétrage par DDLC des formes pleines est utilisé pour minimiser le critère d'identification avec la méthode de Gauss-Newton.



d'obtenir une identification relativement précise des modes.

FIGURE 8.8 – Convergence des algorithmes pour le niveau de bruit modéré (en haut) et le niveau de bruit élevé (en bas).



FIGURE 8.9 – Estimation des modes avec l'algorithme VI + GNpour le niveau de bruit modéré (à gauche) et le niveau de bruit élevé (à droite).

8.1.2.4 Estimation de l'ordre du système

Comme nous l'avons mentionné en introduction de cette étude, lors d'analyses modales, et en particulier durant les essais en vol, l'ordre du système n'est pas connu. L'algorithme itératif développé n'estimant pas l'ordre du système, le tracé de diagrammes de stabilité serait alors nécessaire afin d'estimer l'ordre du système. La Figure 8.10 présente les diagrammes obtenus dans le plan taux d'amortissement - fréquence. Pour tracer ces diagrammes, des identifications ont successivement été réalisées pour des ordres décroissants de $n_x = 18$ à $n_x = 8$. Chaque mode identifié est représenté par un cercle de taille différente en fonction de l'ordre du modèle. Lorsque l'ordre diminue, si les cercles se superposent ou restent proches, cela indique la présence d'un mode.

On peut rappeler que le paramétrage des fractions matricielles adopté permet de représenter tous les ordres de système possibles. Sur la Figure 8.10, on voit que cela permet d'obtenir des diagrammes clairs. Ainsi, pour chacun des deux niveaux de bruit, on voit que les cinq modes du système sont visibles. On constate de plus que les deux modes proches (modes 3 et 4) sont systématiquement identifiés pour un ordre supérieur ou égal à $n_x = 11$, ce qui montre que l'algorithme arrive à discerner correctement deux modes proches bien que l'ordre du modèle soit mal choisi.

Lorsque l'ordre devient inférieur à $n_x = 11$, l'algorithme ne conserve que les modes lui permettant d'expliquer au mieux les données. Par exemple, pour le cas traité ici, on voit que lorsque $n_x \leq 10$, un des deux modes proches n'est plus identifié.



FIGURE 8.10 – Tracés des diagrammes de stabilité obtenus avec l'algorithme VI + GN pour une simulation de bruit de niveau modéré (à gauche) et de niveau élevé (à droite).

8.1.3 Résultats donnés par l'approche des sous-espaces

Dans cette section, nous appliquons la méthode par approche des sousespaces développée au Chapitre 7. Les fonctions de corrélation sont calculées d'après les données d'entrée-sortie utilisées précédemment. Les matrices de Hankel des entrées et des sorties (cf. Chapitre 7) sont construites pour les N = 225 décalages $\tau \in [-24\ 200]$. Comme le montre la Figure 8.11, ce choix permet de conserver la zone où les entrées et les sorties sont les plus corrélées. De ce fait, une augmentation du nombre de décalages τ ne permet pas d'améliorer les résultats. Comme nous l'avons illustré au Chapitre 7, et de même que précédemment avec l'approche itérative, les conditions aux limites permettent d'éviter que les effets transitoires n'introduisent un biais sur l'estimation des modes. Elles sont donc systématiquement considérées dans la suite de cette section.

8.1.3.1 Sélection d'une bande de fréquence

Les données mesurées étant échantillonnées à 128 Hz, sans utilisation d'un filtre fréquentiel, les fonctions de covariance sont calculées pour des fréquences comprises entre 0 et 64 Hz. Comme le montre la Figure 8.12 pour le niveau de bruit modéré, les résultats obtenus sont alors très mauvais. En effet, les deux premiers modes ne sont jamais correctement identifiés et le troisième ne l'est que très peu de fois. L'algorithme est inutilisable dans de telles conditions. Comme nous le verrons dans la section suivante, les résultats sont très nettement améliorés lorsque des fonctions de covariance filtrées sont utilisées.

8.1.3.2 Résultats donnés par l'algorithme développé

Nous présentons ici les résultats obtenus avec l'algorithme lorsque les fonctions de covariance sont filtrées afin de ne conserver que les dynamiques comprises entre 0.5 et 3.5 Hz. La Figure 8.13 montre les résultats obtenus en réalisant des identifications à l'ordre 11. On peut voir que les modes 1 et 5 sont généralement bien estimés. Le mode 2 est également très souvent associé au mode réel. Cependant, la dispersion observée sur les estimations de son amortissement est importante pour le niveau de bruit élevé. Enfin, on constate que la principale difficulté pour l'algorithme réside dans l'identification des deux modes proches. En effet, l'algorithme n'estime souvent qu'un seul des deux modes, y compris lorsque le niveau de bruit est modéré.



FIGURE 8.11 – Fonctions de corrélation des sorties avec la première entrée.



FIGURE 8.12 – Résultats donnés par l'algorithme pour le niveau de bruit modéré lorsqu'aucun filtre fréquentiel n'est utilisé.



FIGURE 8.13 – Estimation des modes avec l'algorithme des sousespaces pour le niveau de bruit modéré (à gauche) et le niveau de bruit élevé (à droite).

8.1.3.3 Estimation de l'ordre du système

Comme nous l'avons rappelé dans le cas de l'approche itérative, dans une situation d'essais réels, l'ordre du système n'est, *a priori*, pas connu. Contrairement aux méthodes itératives, l'approche des sous-espaces permet théoriquement d'estimer l'ordre du système en cherchant une chute des valeurs singulières de la matrice de Hankel projetée des sorties. La Figure 8.14 montre les valeurs singulières normalisées à 1 obtenues dans le cas traité ici pour une simulation de bruit modéré et une simulation de bruit élevé. On voit que 15 et 19 valeurs singulières sont respectivement non nulles. Cependant,



FIGURE 8.14 – Valeurs singulières pour le niveau de bruit modéré (à gauche) et élevé (à droite).

il n'y a pas de chute de valeur importante après la 10 ou 11^{ième} valeur. Dans un tel cas, il peut donc être difficile de déterminer l'ordre du système à partir de la seule observation des valeurs singulières. De même qu'avec l'algorithme itératif, un diagramme de stabilité peut alors être tracé afin d'obtenir une détection rapide et quasi-automatique de l'ordre du système. L'observation des valeurs singulières est alors utilisée afin de déterminer l'ordre maximal pour le tracé des diagrammes de stabilité. Lorsque les valeurs singulières sont nulles au-delà d'une certaine position comme c'est le cas sur la Figure 8.14, la valeur d'ordre maximal est directement fixée par l'algorithme. Si tel n'est pas le cas, les dernières valeurs singulières sont généralement très faibles. L'ordre maximal est alors choisi égal à la dernière valeur singulière non négligeable. Cela permet, en pratique, de limiter la valeur de l'ordre maximal choisi et d'accélérer le tracé des diagrammes de stabilité. Notons que, pour ce cas d'étude, le nombre de valeurs singulières non nulles varie entre 14 et 17 selon les différentes séquences de bruit modéré, et entre 18 et 22 pour le niveau de bruit élevé.

La Figure 8.15 montre le tracé obtenu pour les deux cas ayant servi au tracé des valeurs singulières de la Figure 8.14. Pour le niveau de bruit élevé, on remarque que la présence des deux modes proches est difficile à discerner. Cependant, il donne une bonne indication de l'ordre du système car au moins 4 des 5 modes réellement présents peuvent être facilement identifiés. Lorsque le niveau de bruit est modéré, le diagramme obtenu est plus clair et permet de facilement estimer le nombre de modes présents.

8.1.4 Bilan

Ce cas d'application nous a permis d'évaluer les performances des algorithmes développés dans des conditions représentatives d'essais de flottement réalisés au moyen de tests d'identification de courte durée pour des systèmes MIMO. Nous avons ainsi pu montrer que les améliorations proposées, tant au niveau de l'approche itérative que de l'approche des sous-espaces, per-



FIGURE 8.15 – Tracés des diagrammes de stabilité pour la simulation de bruit de niveau modéré (à gauche) et de niveau élevé (à droite).

mettent d'obtenir une identification relativement précise des modes dans de telles conditions.

Concernant l'approche itérative, ce cas d'étude a permis d'établir que l'utilisation de paramétrages par DDLC des fractions matricielles est bénéfique pour traiter de tels essais. En effet, comme nous l'avons montré, ces paramétrages permettent d'améliorer à la fois la vitesse de convergence et la précision de l'algorithme de Gauss-Newton par rapport aux paramétrages pseudo-canoniques. De plus, la prise en compte des conditions aux limites, en évitant les effets transitoires, permet d'obtenir une estimation moins biaisée des modes. Enfin, ce cas d'étude nous a permis de montrer que l'utilisation combinée des méthodes de la variable instrumentale et de Gauss-Newton permettent d'obtenir un algorithme itératif efficace. En effet, dans des conditions peu favorables à une identification précise, il parvient à identifier les modes du système de façon relativement précise en un nombre limité d'itérations. De plus, grâce aux paramétrages des fractions matricielles utilisés, cet algorithme permet un balavage de tous les ordres de système possibles. Nous avons vu sur ce cas d'application que cela permet de tracer des diagrammes de stabilités clairs.

Concenant l'approche des sous-espaces, nous avons vu que, grâce à l'uti-

lisation d'un filtre non-causal, l'algorithme sous-espace fondé sur l'utilisation des fonctions de covariance permet également d'obtenir des estimations relativement précises des modes du système. Cette amélioration permet à l'algorithme d'être utilisé pour traiter un tel problème.

8.2 Essais de flottement d'un avion militaire

Dans la section précédente, nous avons appliqué l'algorithme itératif et l'algorithme par approche des sous-espaces à un cas représentatif d'essais de flottement d'un avion civil. Ayant développé ces deux algorithmes dans le but de traiter des essais réalisés avec des excitations de courte durée, nous avons pu évaluer leurs capacités à traiter de tels essais. Cependant, ces deux algorithmes peuvent évidemment être utilisés pour traiter des essais utilisant des excitations plus riches et de plus longue durée. Afin d'illustrer leurs performances dans le cas d'essais réalisés avec des excitations plus conventionnellement utilisées en analyse modale, dans cette section, ces deux algorithmes sont appliqués à des données provenant d'un essais de flottement mené sur un avion de combat. Cet essai a été réalisé en utilisant un multi-sinus comme signal d'excitation.

8.2.1 Présentation du cas d'étude

Les données utilisées proviennent d'une acquisition réalisée sur un avion F/A 18 lors d'essais en vol menés au centre de recherche de la NASA situé à Dryden en Californie. Les données d'entrée-sortie ont été acquises avec une fréquence d'échantillonnage de 200 Hz. Le signal d'excitation utilisé pour exciter les deux ailerons LEF (pour Leading Edge Flap en Anglais) est un multi-sinus de fréquence comprise entre 3 et 35 Hz. La position des ailerons est accessible et peut être utilisée comme entrée afin d'identifier la réponse de la structure à l'excitation apportée par les ailerons. L'excitation et sa Densité Spectrale de Puissance (DSP) sont montrées sur la Figure 8.16.

Les données de sortie sont composées de 94 mesures fournies par des accéléromètres et des capteurs de pression. Seules les mesures possédant un rapport de signal à bruit suffisant sont conservées pour réaliser l'identification. Plus précisément, la cohérence entre les mesures et l'entrée est utilisée pour sélectionner les mesures. La cohérence $C_{uy}(f)$ entre une mesure y(t) et l'entrée u(t) est définie par

$$C_{uy}(f) = \frac{\phi_{uy}^2(f)}{\phi_{uu}(f)\phi_{yy}(f)},$$
(8.1)

où $\phi_{sw}(f)$ note la valeur, à la fréquence f, de la densité spectrale de puissance croisée entre deux signaux s(t) et w(t). Les mesures dont l'amplitude de la cohérence au carré moyenne sur la bande de fréquence 3 - 35 Hz est supérieure ou égale à 2/3 sont conservées pour l'identification. Selon ce critère,



FIGURE 8.16 – Tracés du signal d'entrée et de sa Densité Spectrale de Puissance.

sept mesures d'accéléromètre et une mesure de pression sont conservées pour l'identification. La mesure de pression retenue est effectuée au niveau du nez de l'avion et les mesures d'accéléromètres retenues sont situées aux extrémités des deux ailes. La position des accéléromètres retenus et non retenus est montrée sur la Figure 8.17.

Le nombre de mesures retenues par rapport au nombre de mesures disponibles peut paraître faible. Cependant, il n'est pas anormal car l'utilisation des ailerons LEF ne permet pas d'exciter l'ensemble des modes de structure. Les mesures sélectionnées correspondent ainsi aux mesures sur lesquelles les modes excités sont suffisamment visibles. L'utilisation de surfaces de contrôle différentes, en excitant des modes différents, entrainerait la sélection d'autres mesures.

8.2.2 Identification d'un modèle de la structure

8.2.2.1 Identification avec l'algorithme itératif VI + GN

Nous avons vu, dans la section précédente, que l'algorithme constitué d'une utilisation combinée de la méthode de la variable instrumentale et de la méthode de Gauss-Newton permet d'obtenir une identification à la fois précise et rapide des modes d'une structure flexible. Nous appliquons donc cet algorithme à l'identification les modes de la structure de l'avion de combat F/A18 d'après les données de l'essai réalisé.

L'ordre du modèle n'est pas connu. Un diagramme de stabilité est donc tracé afin de l'estimer. La Figure 8.18 montre le résultat obtenu pour des ordres variant de 6 à 12. On constate que, sur la bande de fréquence considérée, le diagramme permet d'identifier la présence de trois modes situés respectivement à environ 15 Hz, 22 Hz et 35 Hz. Parmi ceux-ci, le premier,



FIGURE 8.17 – Position des mesures d'accéléromètre.

qui est assez peu amorti et présente donc le plus gros danger pour le flottement, est identifié précisément pour tous les ordres de modèle. D'après ces résultats, le système identifié semble donc pouvoir être représenté par un modèle d'ordre 6 dont la fréquence et l'amortissement des modes sont donnés par le Tableau 8.3.

La Figure 8.19 compare le tracé de Bode du modèle identifié d'ordre 6 à la réponse fréquentielle des transferts estimés entre l'entrée et les sorties mesurées. On constate que ce modèle représente précisément les dynamiques du système sur la bande de fréquence comprise entre 3 et 35 Hz.

Soulignons que la convergence de l'algorithme est permise par l'utili-

| Mode | 1 | 2 | 3 |
|--------------------|-------|-------|-------|
| f (Hz) | 16.53 | 21.13 | 35.86 |
| $\xi \ (^0/_{00})$ | 74 | 663 | 187 |

TABLE 8.3 – Modes du modèle identifié.

sation d'une des formes sur-paramétrées introduites au Chapitre 5. En effet, pour l'ensemble des ordres balayés, la convergence de la méthode de Gauss-Newton est prématurément stoppée lorsqu'un paramétrage pseudocanonique est adopté. Cela conduit à une mauvaise identification des modes et à un modèle systématiquement imprécis.



FIGURE 8.18 – Diagramme de stabilité donné par l'algorithme VI + GN.



$$\label{eq:FIGURE-8.19-Comparaison} \begin{split} FIGURE 8.19-Comparaison des réponses fréquentielles mesurées et données par le modèle identifié par l'algorithme VI + GN. \end{split}$$

8.2.2.2 Identification avec l'algorithme des sous-espaces

L'algorithme des sous-espaces fondé sur des fonctions de covariance est également appliqué à ces données. Un filtre non-causal des fonctions de covariance est choisi afin de sélectionner la bande de fréquence sur laquelle le système est excité. De plus, les conditions aux limites au début et la fin de l'essai sont prises en compte afin d'obtenir une pondération fréquentielle calculée en tenant compte de l'état initial et de l'état final du système. Les fonctions de covariance pondérées sont tronquées pour ne conserver que les valeurs calculées pour $\tau \in [-20\ 100]$.

Les valeurs singulières de la matrice de Hankel des sorties projetées sont montrées sur la Figure 8.20. On peut voir que 16 valeurs sont non nulles. Hormis après la troisième valeur singulière, on ne distingue pas de chute importante de valeur. L'ordre du modèle étant, *a priori*, supérieur à 3, il est donc difficile de le déterminer par l'unique observation de ces valeurs singulières.



FIGURE 8.20 – Valeurs singulières de la matrice de Hankel des sorties projetées.

Comme expliqué à la Section 8.1.3.3, le tracé d'un diagramme de stabilité peut alors s'avérer utile. La Figure 8.21 montre le diagramme de stabilité, tracé dans le plan taux d'amortissement - fréquence, obtenu en parcourant les ordres compris entre 6 et 16. On constate que trois ou quatre modes semblent présents. Un premier mode est clairement identifié à environ 5 Hz. Un mode très amorti est également identifié entre 20 et 30 Hz. Enfin, pour un ordre supérieur à 7, l'algorithme identifie deux modes très proches à environ 16 Hz. Pour des ordres égaux à 6 et 7, le premier de ces deux modes n'est plus identifié, ce qui laisse penser que le système ne possède réellement qu'un mode à 16 Hz. Cette hypothèse est confirmée par une amélioration de la précision de la réponse donnée par le modèle par rapport aux données mesurées. La Figure 8.22 compare le tracé de Bode du modèle identifié d'ordre 6 à la réponse fréquentielle des transferts estimés entre l'entrée et les sorties mesurées. Le Tableau 8.4 donne les valeurs des modes identifiés.



FIGURE 8.21 – Diagramme de stabilité donné par l'algorithme des sous-espaces.

| Mode | 1 | 2 | 3 | |
|------------------|------|-------|------|--|
| f (Hz) | 5.89 | 16.48 | 24.7 | |
| $\xi~(^0/_{00})$ | 128 | 71 | 579 | |

TABLE 8.4 – Modes du modèle identifié.

En comparant ce modèle au modèle identifié avec l'algorithme itératif, on constate que les deux algorithmes identifient deux modèles d'ordre 6 qui ont deux modes en commun. En effet, les deux algorithmes identifient un mode à 16 Hz avec un taux d'amortissement d'environ 70‰. Ils identifient également un mode compris entre 20 Hz et 25 Hz dont l'amortissement est de l'ordre de 600‰. En revanche, l'algorithme fondé sur l'approche des sousespaces identifie un troisième mode situé aux basses fréquences, à environ 6 Hz alors que l'algorithme itératif identifie un mode situé à une fréquence plus importante, à environ 35 Hz. En comparant les réponses fréquentielles données aux Figures 8.19 et 8.22 on voit que le modèle identifié par l'algorithme itératif possède une réponse fréquentielle plus proche de la réponse mesurée. En particulier, on constate qu'il est plus précis au delà de 25 Hz, ce qui semble confirmer la présence d'un mode situé au delà de 25 Hz. La comparaison des réponses temporelles données par la Figure 8.23 conduit à une conclusion similaire : le modèle identifié par l'algorithme VI+GN représente plus précisément les dynamiques du système que le modèle identifié par l'algorithme des sous-espaces. C'est particulièrement vrai pour les sorties 3, 5 et 7. Cependant, ces observations doivent être tempérées par le fait qu'un seul jeu de données étant disponible, les données utilisées pour réaliser ces observations sont les mêmes que celles utilisées pour réaliser l'identification. Une validation croisée, en utilisant un second jeux de données, serait ici nécessaire afin de déterminer sans aucun doute possible le modèle qui explique le mieux le comportement du système.

8.2.2.3 Bilan

Dans cette section, nous avons appliqué les deux algorithmes pour identifier un modèle de la structure de l'avion en utilisant les mesures de position des ailerons comme données d'entrée.

Les deux algorithmes identifient deux modèles qui représentent de manière relativement précise le comportement dynamique de la structure. La comparaison des deux modèles obtenus montre que l'algorithme itératif VI + GN identifie plus précisément les dynamiques du système. Il fournit donc vraisemblablement une identification également plus précise des modes de la structure.

Toutefois, on peut noter que les deux algorithmes identifient deux modes sur trois avec des fréquences et des amortissements similaires. La comparaison des deux modèles nous permet donc de valider la présence de ces deux modes. De plus, le mode possédant un amortissement faible, et donc présentant le plus gros risque pour le flottement, est identifié par les deux algorithmes à une fréquence et avec un taux d'amortissement quasi-identiques.



 $\label{eq:FIGURE 8.22-Comparaison} \mbox{ fréquentielles mesurées et données par le modèle identifié avec l'algorithme des sous-espaces.}$



 $\label{eq:Figure 8.23-Comparaison des sorties temporelles données par les deux modèles.$

8.2.3 Identification d'un modèle complet : aileron \times structure

Dans la Section 8.2.2, le signal d'entrée choisi est la mesure de position des ailerons. Un inconvénient de ce choix est que le signal d'entrée utilisé est bruité. Dans l'étude présentée à la Section 8.2.2, ce signal d'entrée a été choisi pour deux raisons :

- Ce choix permet d'identifier uniquement le transfert correspondant à la structure de l'avion, en évitant que le transfert lié aux ailerons ne puisse perturber l'estimation des modes de la structure.
- Le niveau de bruit affectant l'entrée est relativement faible. De plus, la sélection d'une bande de fréquence restreinte permet d'éliminer le bruit de mesure à hautes fréquences.

Bien que l'entrée utilisée soit peu bruitée, les performances des algorithmes peuvent être légèrement détériorées par l'utilisation d'un tel signal d'entrée. Le choix du signal générateur de l'excitation, noté r(t) comme signal d'entrée permet d'éviter cet inconvénient. Nous présentons dans la suite une étude similaire à celle présentée dans la Section 8.2.2, mais où le signal d'entrée considéré est désormais le signal générateur d'excitation. Ce faisant, le modèle identifié est alors le modèle complet aileron × structure. La Section 8.2.3.1 présente les résultats obtenus avec l'algorithme VI + GN. La Section 8.2.3.2 présente les résultats obtenus avec l'algorithme des sousespaces. Enfin, la Section 8.2.4 compare cette approche à celle présentée dans la Section 8.2.2 afin d'identifier les modes de la structure de l'avion.

8.2.3.1 Identification avec l'algorithme itératif VI + GN

De même que pour l'identification du transfert de la structure présentée dans la Section 8.2.2, un diagramme de stabilité est tracé afin d'estimer l'ordre du modèle complet. Pour cela, des identifications sont réalisées pour des valeurs d'ordre comprises entre $n_x = 16$ et $n_x = 6$. Le tracé obtenu est donné par la Figure 8.24. On constate que sur la bande de fréquence considérée, le diagramme montre la présence de 4 modes situés à environ 14 Hz, 16Hz, 27Hz et 32 Hz. D'après ces résultats, le système complet semble donc pouvoir être représenté par un modèle d'ordre 8 dont la fréquence et l'amortissement des modes sont donnés par le Tableau 8.5.

La Figure 8.25 compare la réponse fréquentielle du modèle identifié à la réponse des transferts estimés entre le signal générateur et les sorties mesurées. On constate que ce modèle représente précisément les dynamiques du système sur la bande de fréquence considérée.



FIGURE 8.24 – Diagramme de stabilité donné par l'algorithme VI + GN.

| Mode | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------|-------|-------|------|-------|
| f (Hz) | 13.78 | 16.33 | 27.3 | 32.04 |
| $\xi (0/00)$ | 707 | 72 | 332 | 76 |

TABLE 8.5 - Modes du modèle identifié.



FIGURE 8.25 – Comparaison des réponses fréquentielles mesurées et données par le modèle identifié avec l'algorithme VI + GN.

8.2.3.2 Identification avec l'algorithme des sous-espaces

Un modèle du transfert complet peut également être identifié via l'algorithme des sous-espaces introduit au Chapitre 7. Les valeurs singulières de la matrice de Hankel des sorties projetées sont montrés sur la Figure 8.26.



FIGURE 8.26 – Valeurs singulières de la matrice de Hankel des sorties projetées.

De même qu'à la Section 8.2.2, on ne distingue pas de chute importante des valeurs non-nulles. Par conséquent, un diagramme de stabilité est tracé afin d'estimer l'ordre du système. Le diagramme obtenu en parcourant les ordres compris entre $n_x = 16$ et $n_x = 7$ est donné par la Figure 8.27. On remarque que l'algorithme identifie 5 modes complexes lorsque l'ordre est supérieur à 11. Lorsque l'ordre est égal à 9 ou 10, le mode localisé à environ 28 Hz n'est plus identifié et seuls 4 modes complexes sont identifiés. La précision du modèle d'ordre 9 obtenue est très proche de celle des modèles d'ordre 10 et 11, et supérieure à celle des modèles identifiés d'ordre inférieur. Par conséquent, le modèle d'ordre 9 est retenu. Celui-ci est formé de 4 modes complexes situés à environ 10 Hz, 16 Hz, 22 Hz et 34 Hz, et d'un mode réel situé à environ 16 Hz. Les valeurs des fréquences et des amortissements de ces 5 modes sont données dans le Tableau 8.6.

| Mode | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f (Hz) | 10.37 | 16.20 | 16.52 | 22.53 | 34.43 |
| $\xi (^0/_{00})$ | 445 | 78 | 1000 | 483 | 108 |

TABLE 8.6 – Modes du modèle identifié.

La Figure 8.28 compare la réponse fréquentielle du modèle identifié à la réponse des transferts estimés entre le signal générateur et les sorties mesurées. On peut voir que ce modèle représente précisément les dynamiques



FIGURE 8.27 – Diagramme de stabilité donné par l'algorithme des sous-espaces.

du système sur la bande de fréquence considérée.

En observant les Figures 8.25 et 8.28, on constate que la précision des modèles identifiés par les deux algorithmes est très proche. Les deux algorithmes identifient 4 modes complexes localisés à des fréquences similaires. Cependant, la présence du mode apériodique supplémentaire identifié par l'algorithme des sous-espaces entraine des différences sur les valeurs des fréquences et des amortissements des 4 modes complexes par rapport aux valeurs des modes identifiés par l'algorithme VI + GN.



FIGURE 8.28 – Comparaison des réponses fréquentielles mesurées et données par le modèle identifié avec l'algorithme des sous-espaces.
8.2.4 Comparaison et discussion des deux approches

Connaissant le signal d'excitation et la mesure de la position des ailerons, il est possible d'identifier la fonction de transfert des ailerons. Connaissant le modèle complet aileron \times structure, la connaissance d'un modèle d'aileron nous permettra d'estimer une fonction de transfert de la structure de l'avion d'après le modèle complet.

Les deux algorithmes sont utilisés afin d'identifier un modèle des ailerons. Dans les deux cas, un modèle d'ordre 2 est identifié. Le Tableau 8.7 donne la fréquence et l'amortissement du mode identifié dans les deux cas. La réponse fréquentielle des deux modèles d'aileron ainsi que la réponse fréquentielle estimée à partir des données mesurées sont donnés par la Figure 8.29.

| Algorithme | VI + GN | Sous-espaces | | |
|------------------|---------|--------------|--|--|
| f (Hz) | 18.6 | 17.5 | | |
| $\xi (^0/_{00})$ | 682 | 669 | | |

TABLE 8.7 – Mode identifié par chaque algorithme.



FIGURE 8.29 – Comparaison des réponses fréquentielles mesurées et données par les modèles identifiés avec les deux algorithmes.

Dans notre cas, nous souhaitons uniquement identifier les dynamiques de la structure de l'avion. Possédant à la fois un modèle des ailerons et un modèle du système aileron \times structure, il est possible de calculer un modèle de la structure. Ainsi deux modèles de la structure peuvent être calculés à partir des modèles respectivement identifiés par l'algorithme VI + GN et l'algorithme des sous-espaces. Ce calcul d'un modèle de la structure implique de multiplier la fonction de transfert du modèle complet par l'inverse de la fonction de transfert des ailerons. L'inversion du transfert des ailerons impliquant la présence de deux modes hors de la bande de fréquence considérée, une réduction équilibrée est ensuite réalisée afin d'obtenir un modèle qui

| | VI + GN | | | | Sous-espaces | | | | |
|--------------|---------|-------|-------|-------|--------------|------|-------|-------|-------|
| f (Hz) | 13.78 | 16.33 | 27.29 | 32.04 | 10.37 | 16.2 | 16.52 | 22.53 | 34.43 |
| $\xi (0/00)$ | 707 | 72 | 332 | 76 | 445 | 78 | 1000 | 483 | 108 |

décrit les dynamiques de la structure sur la bande de fréquence choisie. Les modes des deux modèles ainsi obtenus sont donnés dans le Tableau 8.8

TABLE 8.8 – Modes du modèle de structure calculé à partir desmodèles identifiés par chaque algorithme.

La Figure 8.30 donne la réponse fréquentielle du modèle calculé pour l'algorithme VI + GN. Elle est comparée à la réponse du modèle identifié à la Section 8.2.2 et à la réponse estimée d'après les données mesurées. Précisons que la réponse fréquentielle estimée est calculée à partir des spectres fréquentiels croisés entre les sorties mesurées y(t) et le signal d'excitation r(t) d'une part et l'entrée mesurée u(t) et le signal d'excitation r(t) d'une part et l'entrée mesurée u(t) et le signal d'excitation r(t) d'autre part. Ce faisant, la réponse fréquentielle estimée n'est pas biaisée par le bruit présent sur les mesures d'entrée et de sortie. De même, la Figure 8.31 compare la réponse fréquentielle du modèle obtenu avec l'algorithme des sous-espaces à la réponse du modèle identifié à la Section 8.2.2.

On constate dans les deux cas que le modèle de structure calculé à partir du modèle complet et du modèle des ailerons préalablement identifiés estiment moins précisément les dynamiques de la structure que les modèles directement identifiés à partir des mesures u(t) et y(t) dans la Section 8.2.2. Cela permet de constater que, bien que la mesure de position des ailerons u(t) soit légèrement bruitée, son utilisation permet d'obtenir, en une seule étape, une estimation plus précise des dynamiques de la structure, et donc des modes aéroélastiques de l'avion.

8.2.5 Bilan

Dans cette section, nous avons appliqué les deux algorithmes développés à des données réelles provenant d'un essai de flottement réalisé sur un avion de combat. Cela nous a permis de montrer que les deux algorithmes estiment correctement un modèle à partir de données réelles. De plus, cela montre que ces deux algorithmes, développés dans le but de traiter des essais réalisés avec des excitations de courte durée, fournissent également de bons résultats avec des excitations de plus longue durée.

L'objectif étant d'identifier les modes de la structure de l'avion, les mesures de position des ailerons ont dans un premier temps été utilisées comme données d'entrée. Les deux algorithmes ont permis d'identifier deux modèles d'ordre 6 du comportement dynamique de la structure. Le modèle identifié par l'algorithme itératif VI+GN est dans ce cas plus précis que le modèle identifié par l'algorithme des sous-espaces. Toutefois le modèle fournit par l'algorithme des sous-espaces possède 2 modes communs avec le modèle donné par l'algorithme itératif et nous a ainsi permis de valider la présence de ces deux modes.

L'utilisation de mesures comme données d'entrée pouvant entrainer une estimation biaisée des modes, nous avons ensuite cherché à identifier les modes de la structure de l'avion en utilisant le signal générateur de l'excitation comme signal d'entrée. Le modèle identifié représente alors le comportement dynamique des ailerons ainsi que la réponse de la structure. Les deux algorithmes ont permis d'identifier deux modèles légèrement différents. Cependant, dans ce cas, et contrairement au cas précédent, la précision des deux modèles obtenus est similaire. Cette seconde étude nous a permis de constater que les modes du modèle de structure identifié précédemment n'apparaissent pas dans ces deux modèles du transfert complet. Cela est dû à l'influence du transfert des ailerons et au fait qu'à partir des mesures réalisées, les influences respectives des dynamiques des ailerons et de la structure ne peuvent pas être dissociées par les algorithmes. Afin d'extraire un modèle de la structure, nous avons ensuite identifié un modèle du transfert entre le signal générateur et la mesure de position des ailerons. Un modèle de la structure a ensuite pu être calculé pour chacun des deux algorithmes et comparé aux deux modèles de structure identifiés directement à l'aide des mesures de position des ailerons. Dans les deux cas, le modèle identifié directement représente de manière plus précise le comportement dynamique de la structure. Cette comparaison nous a donc permis de valider le choix des mesures de position comme données d'entrée afin d'obtenir une estimation des modes de la structure.

Grâce à cette étude, on a pu constater qu'avec des données réelles, l'algorithme itératif permet d'identifier des modèles très précis. Il semble ainsi plus performant, en terme de précision d'estimation des modes, que l'algorithme des sous-espaces. Il serait intéressant d'appliquer ces deux algorithmes à des données provenant de systèmes différents afin de savoir si cette tendance est confirmée, et si oui dans quelle mesure. Concernant la mise en oeuvre pratique de ces algorithmes, nous pouvons également mentionner que le réglage des hyper-paramètres peut rendre l'utilisation de l'algorithme des sous-espaces assez délicate. En effet, l'algorithme requiert notamment le choix des coefficients définissant la taille des matrices de Hankel par block des données d'entrée-sortie. Or l'algorithme s'est avéré sensible à ce choix qui doit s'effectuer sans connaissance a priori des valeurs optimales. Le développement d'une méthode permettant d'optimiser de manière automatique ou quasi-automatique ces coefficients fournirait une avancée importante pour l'utilisation de cet algorithme en facilitant sa mise en oeuvre pratique.



FIGURE 8.30 – Comparaison des réponses fréquentielles du modèle de structure calculé et du modèle identifié avec l'algorithme VI + GN à la réponse fréquentielle estimée d'après les mesures.



FIGURE 8.31 – Comparaison des réponses fréquentielles du modèle de structure calculé et du modèle identifié avec l'algorithme des sous-espaces à la réponse fréquentielle estimée d'après les mesures.

Chapitre 9

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons développé deux algorithmes d'identification en vue d'une application à l'analyse modale de structures flexibles. Une attention particulière a été apportée au traitement d'essais en conditions opérationnelles réalisés en utilisant des excitations multi-entrées de courte durée. Ces essais impliquent des mesures bruitées par un bruit généralement coloré dont le niveau peut être important. De plus, les entrées excitant le système avec un niveau d'énergie moins important que les excitations généralement appliquées en analyse modale, les sorties mesurées sont caractérisées par de faibles niveaux de rapport de signal à bruit. Dans ce mémoire, deux algorithmes d'identification adaptés à ce contexte particulier sont développés pour identifier des systèmes linéaires invariants dans le temps. Le premier identifie un modèle à temps continu à partir des transformées de Fourier des mesures d'entrée-sortie du système. Le deuxième identifie un modèle à temps discret à partir des fonctions de covariance des mesures temporelles d'entrée-sortie du système. Dans les deux cas, un modèle du bruit en erreur de sortie est adopté. Ces deux algorithmes sont ensuite évalués sur un cas représentatif d'essais de flottement d'un avion civil réalisé avec des excitations de très faible durée. Les performances de ces deux algorithmes sont également validées sur des données réelles provenant d'un essai en vol d'un avion de combat réalisé avec une excitation, de type multi-sinus, qui est plus communément utilisée en analyse modale.

Le premier algorithme développé est fondé sur l'identification de fractions matricielles par une combinaison de méthodes itératives. L'étude de cette approche est traitée dans les Chapitres 3 à 6.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude du paramétrage des fractions matricielles. Deux types de paramétrages présents dans la littérature, les paramétrages canoniques et pseudo-canoniques, sont présentés. Ces paramétrages imposent une structure en degré du numérateur et du dénominateur des fractions matricielles qui est détaillée. Leurs propriétés géométriques sont également discutées. Cela nous a permis de voir que, du fait de ces propriétés géométriques, l'utilisation d'un paramétrage pseudo-canonique est préférable pour les besoins de l'identification.

Ce paramétrage pseudo-canonique est ensuite utilisé dans le Chapitre 4 pour formuler trois méthodes itératives : la méthode de Sanathanan-Koerner, une méthode utilisant une variable instrumentale, appelée méthode VI, et la méthode de Gauss-Newton. Fondées sur le paramétrage pseudo-canonique adopté, les expressions de la méthode de Sanathanan-Koerner et de la méthode VI trouvées dans la littérature sont généralisées à l'identification de systèmes multivariables de tout ordre possible. De plus, l'expression particulière de la méthode de Gauss-Newton appliquée aux fonctions de transfert est généralisée aux systèmes multivariables. Le formalisme adopté pour exprimer ces trois méthodes permet de mettre en évidence le lien existant entre les trois schémas de convergence obtenus. L'application de ces trois méthodes sur des données simulées a ensuite permis de constater que la méthode de Gauss-Newton et la méthode VI sont plus performantes que la méthode de Sanathanan-Koerner lorsque le bruit est coloré, qu'il n'est pas modélisé, et que son niveau d'énergie devient important. De plus, cet exemple nous a aussi permis de constater que la meilleure précision est obtenue avec la méthode de Gauss-Newton. Mais cette méthode converge plus lentement que la méthode de Sanathanan-Koerner ou que la méthode VI lorsqu'elle est initialisée loin de l'optimum. Cette comparaison nous a donc permis de justifier l'intérêt de combiner la méthode de Gauss-Newton avec une des deux autres méthodes itératives étudiées afin d'obtenir l'algorithme final fournissant l'estimation des paramètres du système la plus précise et rapide possible.

Le Chapitre 5 est dédié à l'étude et à la définition de nouvelles formes structurées des fractions matricielles. En particulier, les fractions matricielles pleines sont définies. D'un point de vue pratique, l'utilisation de ces formes pleines permet de réduire au maximum l'effort de structuration nécessaire pour les fractions matricielles. De plus, la structure des classes d'équivalence de ces nouvelles formes de fractions matricielles est étudiée dans ce chapitre. L'étude réalisée a permis de définir des paramétrages par coordonnées locales guidées par les données. Les propriétés géométriques de ces nouveaux paramétrages sont étudiées et comparées à celles des paramétrages canoniques et pseudo-canoniques étudiés au Chapitre 3. Cette comparaison a permis de montrer, d'un point de vue géométrique, les avantages procurés par l'utilisation de ces paramétrages par coordonnées locales en vue d'une utilisation pour l'identification. Ils permettent, en effet, d'améliorer la convergence d'une méthode d'optimisation telle que la méthode de Gauss-Newton en laissant un maximum de coefficients des fractions matricielles libres tout en réduisant le nombre de directions de recherche à chaque itération.

Au Chapitre 6, des phénomènes de blocage numérique de la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton rencontrés sont expliqués. En particulier, on montre que ceux-ci sont provoqués par l'utilisation d'un paramétrage canonique ou pseudo-canonique. Le nouveau schéma de convergence de l'algorithme de Gauss-Newton, fondé sur l'utilisation des formes sur-paramétrées introduites au Chapitre 5, est ensuite donné. La solution obtenue à chaque itération de l'algorithme n'étant plus, dans ce cas, indépendante de la base polynomiale de résolution choisie, une méthode qui permet d'obtenir une solution indépendante de la base choisie est également proposée. L'amélioration des propriétés de convergence de la méthode de Gauss-Newton résultant de l'utilisation des formes pleines est ensuite montrée par une simulation de Monte-Carlo. En particulier, cette simulation montre l'absence de blocages numériques lorsqu'une forme sur-paramétrée est utilisée. Cette simulation montre également que l'utilisation des formes pleines permet à la convergence de l'algorithme d'être moins fréquemment stoppée par des faux minima. Dans ce chapitre, une solution est également proposée afin de pouvoir réduire la durée d'enregistrement des données sans introduire de biais sur les paramètres estimés. Cette solution permet de prendre en compte l'état du système à l'instant initial et à l'instant final considérés. Ce faisant, le biais introduit par les effets transitoires lorsque l'état du système n'est pas identique aux instants limites considérés est alors évité. De plus, la solution proposée permet de conserver le formalisme utilisé pour l'expression des méthodes itératives. La formulation des algorithmes itératifs qui en découle correspond à la formulation la plus générale de l'identification fréquentielle de systèmes linéaires continus en erreur de sortie. Cette formulation ne comporte pas de restriction sur le système identifié, ni sur les données traitées, hormis, bien entendu, le bon respect du théorème de Shannon pour l'échantillonnage des mesures.

Le deuxième algorithme développé est fondé sur une approche des sousespaces. Plus particulièrement, il repose sur une méthode des sous-espaces présente dans la littérature qui utilise les fonctions de covariance des mesures. Le Chapitre 7 présente deux améliorations apportées qui permettent de rendre cette méthode plus adaptée à l'analyse modale à partir d'essais de courte durée. Premièrement, on a montré dans ce chapitre qu'il est possible d'utiliser un filtre non-causal des fonctions de covariance afin d'identifier un modèle qui représente les dynamiques du système étudié uniquement sur une bande de fréquence choisie. Deuxièmement, on a proposé une solution analogue à celle proposée au Chapitre 6 afin d'éviter que les paramètres estimés ne soient biaisés lorsque la durée d'enregistrement des données est réduite. Ces deux améliorations permettent donc de formuler un algorithme fondé sur une approche des sous-espaces qui inclut des pondérations fréquentielles calculées en tenant compte de l'état initial et final du système.

Au Chapitre 8, un cas de simulation représentatif des conditions d'essais en vol de flottement d'un avion civil réalisés avec des excitations multi-entrées de courte durée a permis d'analyser les performances des méthodes itératives étudiées. Ainsi, les améliorations apportées au Chapitre 6 ont pu être validées sur cet exemple. Plus particulièrement, à travers cet exemple, nous avons montré que le paramétrage par coordonnées locales des fractions matricielles pleines permet à l'algorithme de Gauss-Newton à la fois de converger plus rapidement et de fournir une estimation plus précise des paramètres modaux du système. De plus, nous avons également vu, sur cet exemple, qu'une estimation moins biaisée des modes du système est obtenue grâce à la prise en compte des conditions aux limites d'intégration. Enfin, ce cas d'étude nous a permis de montrer qu'une utilisation combinée de la méthode VI et de la méthode de Gauss-Newton donne un algorithme itératif performant dans des conditions proches de celles rencontrées lors d'essais en vol réel. En effet, la variable instrumentale fournit une bonne initialisation à la méthode de Gauss-Newton qui converge ensuite rapidement vers une estimation précise des paramètres. L'algorithme fondé sur l'approche des sous-espaces a également été appliqué à ce cas d'étude. On a montré que l'utilisation des pondérations fréquentielles est essentielle afin d'obtenir des estimations précises des modes. Les résultats fournis par les deux algorithmes ont également pu être comparés et discutés. Enfin, les deux algorithmes ont été appliqués à des données réelles provenant d'un essai de flottement d'avion de combat. Les deux algorithmes donnent de bons résultats qui ont pu être comparés et discutés.

Chapitre 10

PERSPECTIVES SCIENTIFIQUES

Le premier algorithme développé dans cette thèse identifie un modèle sous forme de fractions matricielles dans le domaine fréquentiel. Nous avons vu que cet algorithme permet d'identifier de façon précise les paramètres modaux d'un système à partir de données bruitées. Cependant, l'implémentation de cet algorithme dans des bases polynomiales conventionnelles engendre des problèmes de conditionnement numérique lorsque les dimensions ou l'ordre du système deviennent importants. Cet algorithme ayant montré des performances encourageantes sur les cas traités, une prochaine étape est donc de l'implémenter dans des bases de polynômes orthogonaux afin d'obtenir des résultats équivalents pour des systèmes de grande dimension et/ou d'ordre élevé. Il serait par exemple intéressant de reproduire l'implémentation fondée sur l'utilisation de polynômes de Forsythe proposée dans (Vacher et Bucharles, 2006b) pour traiter l'identification de systèmes mono-entrée multi-sorties. Celle-ci permet, en effet, d'obtenir actuellement de bons résultats lors de la surveillance des essais en vol.

De plus, l'implémentation actuelle n'est pas optimisée afin d'exploiter les structures des matrices. Une implémentation également améliorée dans ce sens là devrait permettre d'augmenter la rapidité de l'algorithme.

D'autre part, nous avons amélioré la convergence de la méthode de Gauss-Newton en utilisant des fractions matricielles pleines. Toutefois, l'initialisation de l'algorithme se fait par des fractions matricielles pseudo-canoniques car nous ne possédons, actuellement, aucune méthode permettant de trouver une fraction matricielle initiale sous forme pleine. Or McKelvey et al. (2004) ont montré que dans le cas des représentations d'état, la forme de la représentation d'état initiale a une influence importante sur la convergence de l'algorithme. En particulier, ils ont montré qu'une représentation d'état initiale pleine semble permettre d'améliorer la convergence de l'algorithme. On peut donc raisonnablement penser qu'il en serait de même pour les fractions matricielles. Il serait donc souhaitable de développer des méthodes fondées sur la structure simplifiée des fractions matricielles pleines afin d'identifier un modèle initial sous forme de fraction matricielle à gauche ou à droite pleine.

De plus, la mauvaise convergence de l'algorithme de Gauss-Newton pour les fractions matricielles à droite reste en partie inexpliquée et doit encore être étudiée. La possession d'un modèle initial sous forme pleine à droite permettrait de savoir si le problème est causé par l'obtention d'un modèle initial par transposition d'une fraction matricielle à gauche ou si une autre raison peut expliquer cette mauvaise convergence.

D'autre part, nous avons montré dans ces travaux que l'augmentation du nombre de paramètres améliore la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton. Ainsi, les fractions matricielles pleines permettent d'obtenir les meilleurs résultats. Des résultats similaires ont été montrés pour les représentations d'état pleines par McKelvey et al. (2004). Les fractions matricielles pleines à gauche, à droite, et les représentations d'état pleines possédant respectivement n_y^2 , n_u^2 et n_x^2 paramètres supplémentaires, il semble donc intéressant d'effectuer une comparaison des résultats obtenus avec l'approche DDLC pour ces trois types de représentation. Cette comparaison permettrait de déterminer si le nombre de paramètres supplémentaires est déterminant indépendamment du type de représentation choisie. Si tel est le cas, il pourrait alors être utile d'adapter le choix de la représentation en fonction du nombre d'entrées, de sorties et d'états du système à identifier afin de sélectionner la représentation qui permet de considérer un nombre maximal de paramètres.

Enfin, d'un point de vue méthodologique, il semble intéressant d'étudier le lien existant entre la forme canonique échelon présentée dans le Chapitre 3, le paramétrage des systèmes cycliques proposé par Baratchart (1985), et la forme canonique propagateur proposée par Mercère et Bako (2011). Cette forme propagateur est fondée sur la construction d'une sortie auxiliaire à partir d'une combinaison linéaire des sorties du système. En remplaçant une des sorties du système par cette sortie auxiliaire, une nouvelle représentation du système est construite. L'ensemble des représentations pouvant ainsi être construites définit une seule et unique forme canonique identique à celle du système initial. Cette forme canonique est définie par une sélection des lignes de la matrice d'observabilité. Le paramétrage des systèmes cycliques est également fondé sur un choix de combinaisons linéaires des sorties du système qui sert à construire une représentation équivalente utilisée afin d'identifier le système. Comme nous l'avons vu au Chapitre 3, la forme canonique échelon est obtenue en sélectionnant certaines lignes de la matrice de Hankel des paramètres de Markov du système. Cette matrice de Hankel pouvant se décomposer en un produit de la matrice d'observabilité et de la matrice de commandabilité, un lien pourrait être réalisé entre ces trois types de paramétrages. De plus, les propriétés géométriques de la forme canonique échelon étant désormais bien connues (Hannan et Deistler, 1988; Ribarits, 2002), les propriétés géométriques de la forme canonique propagateur pourraient ainsi être établies en se basant sur sa relation avec la forme canonique échelon.

Annexe A

ANNEXES

A.1 Modèles utilisés pour les simulations numériques

La fonction de transfert $\mathsf{H}(s)$ du système à identifier est définie sous forme de FMG par

$$\mathsf{H}(s) = \mathsf{D}^{-1}(s) \mathsf{N}(s) , \qquad (A.1)$$

avec

$$N(s) = N_0 + N_1 s + N_2 s^2$$

$$D(s) = D_0 + D_1 s + D_2 s^2.$$
(A.2)

Les matrices N_0, N_1, N_2 valent

$$N_{0} = \begin{bmatrix} 2.3894 & -11.688 \\ -0.90169 & 9.0012 \\ 4.0313 & -14.405 \end{bmatrix}, N_{1} = \begin{bmatrix} 0.17094 & -0.89314 \\ 0.3403 & -1.4176 \\ -0.014076 & -0.20729 \end{bmatrix},$$

$$N_{2} = \begin{bmatrix} 0.015128 & -0.069879 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
(A.3)

et les matrices D_0, D_1, D_2 valent

$$D_{0} = \begin{bmatrix} 1355.7 & -4807.5 & 12.886\\ -968.59 & 3244.4 & -112.88\\ 1236.4 & -6736.1 & 116.65 \end{bmatrix},$$

$$D_{1} = \begin{bmatrix} 84.793 & -365.1 & 8.8387\\ 136.17 & -624.32 & 7.5342\\ 16.979 & -50.159 & 6.4601 \end{bmatrix},$$

$$D_{2} = \begin{bmatrix} 7.9895 & -28.355 & 0.078921\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
(A.4)

La fonction de transfert G(s) du bruit est définie par

$$\mathsf{G}(s) = \mathsf{A}^{-1}(s) \,\mathsf{B}(s) \,, \tag{A.5}$$

avec

$$B(s) = B_0 + B_1 s + B_2 s^2$$

$$A(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2.$$
(A.6)

Les matrices B_0, B_1 et B_2 valent

$$B_{0} = \begin{bmatrix} 0.86863 & -0.30276 & 0.071037 \\ 9.68 & -0.50926 & 0.64008 \\ -56.496 & 2.8041 & -3.7295 \end{bmatrix},$$

$$B_{1} = \begin{bmatrix} -1.5049 & 0.58348 & -0.12515 \\ -18.814 & 1.1071 & -1.2429 \\ 122.35 & -6.6471 & 8.0506 \end{bmatrix},$$

$$B_{2} = \begin{bmatrix} 0.62602 & -0.28458 & 0.053937 \\ 9.0273 & -0.58091 & 0.59639 \\ -66.231 & 3.9122 & -4.3441 \end{bmatrix},$$

(A.7)

et les matrices A_0, A_1, A_2 valent

$$A_{0} = \begin{bmatrix} -217.24 & 129.43 & -2.3346 \\ -1248.3 & 5089.6 & -17.243 \\ 7820 & -32968 & 850.85 \end{bmatrix},$$

$$A_{1} = \begin{bmatrix} 400.54 & -144.21 & 2.5177 \\ 2413.7 & -9868.1 & 18.774 \\ -16708 & 71702 & -1805.3 \end{bmatrix},$$

$$A_{2} = \begin{bmatrix} -186.2 & 0 & 0 \\ -1155.3 & 4704.4 & 0 \\ 8922.9 & -38985 & 956.82 \end{bmatrix}.$$
(A.8)

A.2 Produit matriciel de deux matrices polynomiales

Soit deux matrices polynomiales $Q(s) \in \mathbb{C}^{r_q \times c_q}$ et $V(s) \in \mathbb{C}^{r_v \times r_q}$ définies par

$$Q(s) = Q_0 + Q_1 s + \dots + Q_q s^q ,$$

$$V(s) = V_0 + V_1 s + \dots + V_v s^v ,$$

et leurs matrices de coefficients données respectivement par

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & \dots & Q_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_q \times (q+1) c_q},$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} V_0 & V_1 & \dots & V_v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{v_q \times (v+1) r_q}.$$

De plus, nous notons $W(s) \in \mathbb{C}^{r_v \times c_q}$ le résultat de la multiplication polynomiale V(s) Q(s). La matrice des coefficients de W(s), notée \mathcal{W} , vaut alors

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} W_0 & W_1 & \dots & W_w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_v \times (q+v+1) c_q}, \qquad (A.9)$$

où w = q + v et la matrice des coefficients de degré k est définie par

$$W_k = \sum_{i=0}^k V_i Q_{k-i} , \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, w\} .$$
 (A.10)

La matrice \mathcal{W} , résultat de la multiplication des coefficients de Q(s) par les coefficients de V(s) est donc définie par le produit matriciel suivant

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & 0_{r_q c_q} & \cdots & 0_{r_q c_q} \\ 0_{r_q c_q} & \mathcal{Q} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathcal{Q} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{r_q c_q} \\ 0_{r_q c_q} & \cdots & 0_{r_q c_q} & \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$
 $v + 1 \text{ blocs} \cdot \quad (A.11)$

Bibliographie

- H. Akcay. Instrumental variable frequency-domain subspace identification. In Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Technology, Viña del Mar, Chile, 2010.
- R. J. Allemang. Vibrations : experimental modal analysis. University of Cincinnati, Class Notes, UC-SDRLCN-20.263-663/664, http ://www.sdrl.uc.edu/academic-course-info/vibrations-iii-20-263-663, Cincinnati, Ohio, USA, 1999a.
- R. J. Allemang. Vibrations : Analytical and experimental modal analysis. University of Cincinnati, Class Notes, UC-SDRLCN-20-263-662, http://www.sdrl.uc.edu/academic-course-info/vibrations-ii-20-293-663, Cincinnati, Ohio, USA, 1999b.
- L. Baratchart. On the parametrization of linear constant systems. Journnal on Control and Optimization, 23:752–773, 1985.
- M. Basseville, A. Benveniste, M. Goursat, L. Hermans, L. Mevel, and H. Van Der Auweraer. Output-only subspace-based structural identification : from theory to industrial testing practice. *Journal of Dynamic Systems, Mea*surement, and Control, 123 :668–676, 2001.
- D. Bauer. Asymptotic properties of subspace estimators. *Automatica*, 41 : 359 376, 2005.
- D. S. Bayard. High-order multivariable transfer function curve fitting : algorithms, sparse matrix methods and experimental results. *Automatica*, 30 : 1439–1444, 1994.
- R. L. Bisplinghoff and H. Ashley. *Principles of Aeroelasticity*. John Wiley & Sons, 1962.

Åke Björk. Numerical Methods for Least Squares Problems. SIAM, 1996.

- R. S. Blom and P. M. J. Van den Hof. Multivariable frequency domain identification using IV-based linear regression. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, Georgia, USA, 2010.
- M. J. Brenner, R. C. Lind, and D. F. Voracek. Overview of recent flight flutter testing research at NASA dryden. Technical memorandum 4792, NASA Dryden Flight Research Center, Edwards, California, USA, 1997.
- D. Brown, R. J. Allemang, and R. Zimmerman. Parameter estimation techniques for modal analysis. SAE paper 790221, pages 828–846, 1979.
- W. Cai, Pillay. P, Z. Tang, and A. M. Omekanda. Low-vibration design of switched reluctance motors for automotive applications using modal analysis. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 39 :971–977, 2003.
- B. Cauberghe. Applied frequency-domain system identification in the field of experimental and operational modal analysis. PhD thesis, Vrije Universiteit, Brussels, Belgium, 2004.
- J. E. Cooper. Towards faster and safer flight flutter testing. In *Proceedings* of the Symposium on Reduction of Military Vehicle Acquisition Time and Cost through Advanced Modelling and Virtual Simulation, Paris, France, 2002.
- G. O. Correa and K. Glover. Pseudo-canonical forms, identifiable parametrizations and simple parameter estimation for linear multivariable systems : input-output models. *Automatica*, 20 :429–442, 1984.
- R.A. De Callafon, D. De Roover, and P. Van Den Hof. Multivariable least squares frequency domain identification using polynomial matrix fraction descriptions. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996.
- J. W. Demmel. Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997.
- D. Enns. Model reduction for control system design. PhD thesis, Stanford University, Stanford, California, USA, 1984a.
- D. F. Enns. Model reduction with balanced realizations : an error and a frequency weighted generalization. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, 1984b.
- B. Etkin. Dynamics of Atmospheric Flight. John Wiley & Sons, 1972.
- G. Forsythe. Generation and use of orthogonal polynomials for data-fitting with a digital computer. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 5 :74–88, 1957.

- P. A. Fuhrmann. Algebraic system theory : an analyst's point of view. *Journal* of the Franklin Institute, 301 :521–540, 1976.
- P. Fulcheri and M. Olivi. Matrix rational H_2 approximation : a gradient algorithm based on shur analysis. *Journal on Control and Optimization*, 36 :2103–2127, 1998.
- H. Garnier, M. Gilson, P.C. Young, and E. Huselstein. An optimal IV technique for identifying continuous-time transfer function model of multiple input systems. *Control Engineering Practice*, 15:471-486, 2007.
- I. E. Garrick and W. H. Reed III. Historical development of aircraft flutter. Journal of Aircraft, 18:897 – 912, 1981.
- W. Gawronski and J. Juang. Model reduction in limited time and frequency intervals. *International Journal of Systems Science*, 21:349–376, 1990.
- M. Gevers and V. Wertz. Uniquely identifiable state-space and ARMA parametrizations for multivariable linear systems. *Automatica*, 20:333–347, 1984.
- M. Gevers and V. Wertz. Parametrization issues in system identification. In *Proceedings of the IFAC World Congress*, Munich, Germany, 1987.
- K. Glover and J. C. Willems. Parametrizations of linear dynamical systems : canonical forms and identifiability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 :640–645, 1974.
- G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996.
- R. Guidorzi. Canonical structures in the identification of multivariable systems. Automatica, 11 :361–374, 1975.
- R. Guidorzi. On the use of minimal parametrisations in multivariable AR-MAX identification. *European Journal of Control*, 4:85–92, 1998.
- R. P. Guidorzi and S. Beghelli. Input-output multistructural models in multivariable systems identification. In *Proceedings of the IFAC Symposium* on *Identification and System Parameter Estimation*, Washington D.C., Maryland, USA, 1982.
- P. Guillaume, P. Verboven, S. Vanlanduit, H. Van Der Auweraer, and B. Peeters. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator. In *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, Florida, USA, 2003.
- T. Gustafsson. Subspace-based system identification : weighting and prefiltering of instruments. *Automatica*, 38 :433 – 443, 2002.

- B. Gustavsen and A. Semlyen. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 14 : 1052–1061, 1999.
- E. J. Hannan and M. Deistler. The Statistical Theory of Linear Systems. John Wiley & Sons, 1988.
- M. Hazewinkel. Moduli and canonical forms for linear dynamical systems ii : the topological case. *Mathematical systems theory*, 10 :363–385, 1976.
- M. Hazewinkel. Moduli and canonical forms for linear dynamical systems III : the algebraic-geometric case. In Ames Research Center Conference on Geometric Control Theory, 1977.
- L. Hermans and H. Van der Auweraer. Modal testing and analysis of structures under operational conditions : industrial applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13 :193 – 216, 1999.
- B. L. Ho and R. E. Kalman. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*, 12:545–548, 1965.
- M. Jansson and B. Wahlberg. On weighting in state-space subspace system identification. In *Proceedings of the European Control Conference*, Rome, Italy, 1995.
- M. Jansson and B. Wahlberg. On consistency of subspace methods for system identification. *Automatica*, 34 :1507 1519, 1998.
- J. N. Juang. Applied System Identification. Prentice Hall, 1994.
- J.-N. Juang and R. S. Pappa. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 8 :620–627, 1985.
- J.-N. Juang and H. Suzuki. An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal analysis identification. ASME Transactions on Vibrations, Acoustics, Stress, 110:24–29, 1988.
- T. Kailath. Linear Systems. Prentice Hall, 1980.
- R. E. Kalman. Global structure of classes of kinear dynamical systems. In Lectures of the NATO Advanced Study Institute on Geometric and Algebraic Methods for Nonlinear Systems, London, 1971.
- R. E. Kalman. Algebraic geometric description of the class of linear systems of constant dimension. In *Princeton Conference on Information Sciences* and Systems, 1974.

- T. Katayama. Subspace Methods for System Identification. Springer Verlag, 2005.
- M. W. Kehoe. A historical preview of flight flutter testing. In *Proceedings* of the AGARD Conference on Structures and Materials Pane, Rotterdam, The Netherlands, 1995.
- V. Klein and E. A. Morelli. Aircraft System Identification. AIAA, 2006.
- S. Y. Kung. A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. In *Proceedings of the Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers*, Pacific Grove, California, USA, 1978.
- M. Labarrère, J. P. Krief, and B. Gimonet. Le filtrage et ses applications. Cepadues Editions, 1978.
- W. E. Larimore. Canonical variate analysis in identification, filtering, and adaptative control. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision* and Control, Honolulu, Hawaii, USA, 1990.
- K. Liu, R.N. Jacques, and D.W. Miller. Frequency domain structural system identification by observability range space extraction. In *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, USA, 1994.
- L. Ljung. System Identification : Theory for the User. Prentice Hall, 1999.
- J. H. Mathews and K. D. Fink. Numerical Methods Using Matlab. Prentice Hall, 2004.
- T. McKelvey. Identification of State-Space Models from Time and Frequency Data. PhD thesis, Linköping University, Linköping, Sweden, 1995.
- T. McKelvey. Frequency domain system identification with instrumental variable based subspace algorithm. In *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences*, Sacramento, California, USA, 1997.
- T. McKelvey. Discussion : "On the use of minimal parametrisations in multivariable armax identification" by R. P. Guidorzi. European Journal of Control, 4 :93–98, 1998.
- T. McKelvey and H. Akcay. An efficient frequency domain state-space identification algorithm. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision* and Control, Lake Buena Vista, Florida, USA, 1994.
- T. McKelvey and A. Helmersson. System identification using an overparametrized model class-improving the optimization algorithm. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, California, USA, 1997.

- T. McKelvey, A. Helmerson, and T. Ribarits. Data driven local coordinates for multivariable linear systems and their application to system identification. *Automatica*, 40 :1629–1635, 2004.
- G. Mercère and L. Bako. Parametrization and identification of multivariable state-space systems : a canonical approach. *Automatica*, 47 :1547–1555, 2011.
- M. Mergeay. Least squares complex exponential method and global system parameter estimation used by modal analysis. In *Proceedings of the International Seminar on Modal Analysis*, Leuven, Belgium, 1983.
- D. N. Miller and R. A. De Callafon. Subspace identification from classical realization methods. In *Proceedings of the IFAC Symposium on System Identification*, Saint-Malo, France, 2009.
- D. N. Miller and R. A. De Callafon. Subspace identification using dynamic invariance in shifted time-domain data. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, Georgia, USA, 2010.
- D. N. Miller and R. A. De Callafon. Efficient identification of input dynamics for correlation function-based subspace identification. In *Proceedings of the IFAC World Congress*, Milan, Italy, 2011.
- D. N. Miller, R. A. De Callafon, and M. J. Brenner. Covariance-based realization algorithm for the identification of aeroelastic dynamics. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 35 :1169–1177, 2012.
- M. Minoux. Programmation Mathématique. Théorie et algorithmes. Dunod, 1983.
- M. Olivi, F. Seyfert, and J.P. Marmorat. Identification of microwave filters by analytic and rational H^2 approximation. *Automatica*, 49 :317–325, 2013.
- A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall, 1989.
- S. J. Orfanidis. Opitmum Signal Processing. An Introduction. Prentice Hall, 1996.
- B. Peeters and H. Van der Auweraer. POLYMAX : a revolution in operational modal analysis. In *Proceedings of the International Operational Modal Analysis Conference*, Copenhagen, Denmark, 2005.
- B. Peeters and C. E. Ventura. Comparative study of modal analysis techniques for bridge dynamic characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17 :965–988, 2003.

- K. Peternell, W. Scherrer, and M. Deistler. Statistical analysis of novel subspace identification methods. Signal Processing, 52(2):161-177, 1996.
- A. W. Phillips and R.I J. Allemang. Data presentation schemes for selection and identification of modal parameters. In *Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, USA, 2005.
- C. R. Pickrel and P. J. White. Flight flutter testing of transport aircraft : In-flight modal analysis. In *Proceedings of the SEM IMAC Conference and Exposition*, Kissimmee, Florida, USA, 2003.
- R. Pintelon and J. Schoukens. System Identification : a Frequency Domain Approach. IEEE Press, 2001.
- R. Pintelon, P. Guillaume, Y. Rolain, J. Schoukens, and H. Van Hamme. Parametric identification of transfer functions in the frequency domain a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :2245–2259, 1994.
- R. Pintelon, J. Schoukens, and G. Vandersteen. Frequency domain system identification using arbitrary signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :1717–1720, 1997.
- J. Piranda. Analyse modale expérimentale. Techniques de l'ingénieur : vibrations en milieu industriel, mesures, surveillance et contrôle, r6180 :1–29, 2001.
- V. M. Popov. Some properties of control systems with irreducible matrix transfer functions. *Lecture Notes in Mathematics*, 144 :169–180, 1969.
- C. Poussot-Vassal and P. Vuillemin. Introduction to MORE : a MOdel REduction Toolbox. In *Proceedings of the IEEE Multi Systems Conference*, Dubrovnik, Croatia, 2012.
- P. A. Regalia and M. Mboop. Undermodeled adaptative filtering : an a priori error bound for the Steiglitz-McBride method. *Transactions on Circuits* and Systems-II : Analog and Digital Signal Processing, 43 :105–116, 1996.
- P. A. Regalia, M. Mboop, and M. Ashari. On the existence of stationary points for the Steiglitz-McBride algorithms. *Transactions on Automatic Control*, 42 :1592–1596, 1997.
- Fritz Reinhardt and Heinrich Soeder. Atlas des mathématiques. Encyclopédies d'aujourd'hui, 1997.
- T. Ribarits. *The role of parametrization in identification of linear dynamic systems*. PhD thesis, Technischen Universität, Wien, Austria, 2002.

- T. Ribarits, M. Deistler, and B. Hanzon. On new parametrization methods for the estimation of linear state-space models. *International Journal of Adaptative Control and Signal Processing*, 18:717–743, 2004.
- R. T. Rockafellar and R. Wets. Variational Analysis. Springer Verlag, 1998.
- C. K. Sanathanan and J. Koerner. Transfer function synthesis as a ratio of two complex plynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9 : 56–58, 1963.
- T. Söderström and P. G. Stoica. Instrumental Variable Methods for System Identification. Springer, 1983.
- T. Söderström and P. G. Stoica. System Identification. Prentice Hall, 1989.
- K. Steiglitz and L. E. McBride. A technique for the identification of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10:461–464, 1965.
- P. Vacher. EFERA : an efficient realization technique for the identification of large aeroelastic models. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, 2006.
- P. Vacher and A. Bucharles. Detection of turbulence during flutter tests. In Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium, 2006a.
- P. Vacher and A. Bucharles. A multi-sensor parametric identification procedure in the frequency domain for the real-time surveillance of flutter. In *Proceedings of the IFAC Symposium on System Identification*, Newcastle, Australia, 2006b.
- P. Vacher and A. Bucharles. Realistic simulation of flutter flight tests. In Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium, 2008.
- P. Vacher, B. Jacquier, and A. Bucharles. Flutter flight tests : a challenging benchmark for real-time methods. In *Proceedings of the International Workshop on Sequential Methodologies*, Troyes, France, 2009.
- P. Vacher, B. Jacquier, and A. Bucharles. Extensions of the MAC criterion to complex modes. In *Proceedings of the International Conference on Noise* and Vibration Engineering, Leuven, Belgium, 2010.
- P. M. J. Van den Hof, G. Sippe, S. G. Douma, and R. Toth. An IV-based iterative linear regression algorithm with optimal output error properties. DCSC technical report nr. 09-018, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 2008.

- A. J. M. Van Overbeek and L. Ljung. On-line structure selection for multivariable state-space models. *Automatica*, 18:529–543, 1982.
- P. Van Overschee and B. De Moor. N4SID : Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, 30 :75–93, 1994.
- P. Van Overschee and B. De Moor. Continuous-time frequency domain subspace system identification. *Signal Processing*, 52 :179–194, 1996a.
- P. Van Overschee and B. De Moor. Subspace Identification for Linear Systems : Theory, Implementation, Applications. Kluwer Academic Publishers, 1996b.
- P. Van Overshee and B. De Moor. A unifying theorem for three subspace system identification algorithms. *Automatica*, 31 :1853–1864, 1995.
- J. Vayssettes, P. Vacher, and G. Mercère. An iterative algorithm for modal analysis based on structured matrix fractions. In *Proceedings of the IFAC* Symposium on System Identification, Brussels, Belgium, 2012a.
- J. Vayssettes, P. Vacher, and G. Mercère. Identification fréquentielle sur essais courts avec intégration des conditions aux limites. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Grenoble, France, 2012b.
- J. Vayssettes, P. Vacher, and G. Mercère. Frequency domain identification of aircraft structural modes from short duration flight tests. *International Journal of Control*, 2013.
- P. Verboven. Frequency-domain system identification for modal analysis. PhD thesis, Vrije Universiteit, Brussels, Belgium, 2002.
- M. Verhaegen and P. Dewilde. Subspace model identification part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms. *International Journal of Control*, 56:1211–1241, 1992.
- M. Verhaegen and V. Verdult. *Filtering and System Identification : A Least Squares Approach*. Cambridge University Press, 2007.
- M. Viberg. Subspace-based methods for the identification of linear timeinvariant systems. Automatica, 31 :1835–1851, 1995.
- H. Vold, L. Kundrat, G. T. Rocklin, and R. Russel. A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers. SAE Technical Paper series, 820194, 1982.
- P. D. Welch. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15:70–73, 1967.

- A. H. Whitfield. Asymptotic behaviour of transfer function synthesis methods. International Journal of Control, 45 :1083–1092, 1987.
- A. Wills and B. Ninness. On gradient-based search for multivariable system estimates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53 :298–306, 2008.
- G. Wolodkin, S. Ranagn, and K. Poolla. An LFT approach to parameter estimation. In *Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, USA, 1997.
- P. Young. Some observations on instrumental variable methods of time-series analysis. *International Journal of Control*, 23:593–612, 1976.
- P. C. Young, H. Garnier, and M. Gilson. Identification of Continuous-time Models from Sampled Data. Springer, 2008.

Résumé

L'analyse modale a pour objectif d'identifier les modes de vibration d'une structure. Cette discipline peut nécessiter la réalisation d'essais spécifiques sur le système lorsqu'il se trouve en conditions de fonctionnement opérationnel. Pour certaines applications industrielles, ces essais ont une durée et un coût importants. Les acteurs industriels concernés souhaitent donc obtenir de bons résultats tout en essayant de réduire au maximum la durée des essais réalisés. Afin de répondre à ce besoin, l'objectif de ces travaux est de proposer des méthodes d'identification de systèmes linéaires invariants dans le temps qui soient adaptées au traitement d'essais de courte durée en conditions opérationnelles. Premièrement, une approche fondée sur l'identification dans le domaine fréquentiel de fractions matricielles par des méthodes itératives est étudiée. Cette étude permet la formulation d'un algorithme combinant une variable instrumentale itérative et la méthode de Gauss-Newton. Cet algorithme est fondé sur un nouveau paramétrage des fractions matricielles et tient compte de l'état du système aux instants limites considérés. Deuxièmement, un algorithme fondé sur une approche des sous-espaces est proposé. Celui-ci identifie un système sous forme d'état d'après les fonctions de covariance des mesures temporelles d'entrée-sortie. Cet algorithme inclut des pondérations fréquentielles qui tiennent compte de l'état du système aux instants limites considérés. Les deux algorithmes développés sont finalement appliqués à un cas de simulation représentatif des conditions d'essai en vol de flottement d'un avion civil et à des données provenant d'un essai réalisé sur un avion de combat.

Mots clés : identification, analyse modale, essais de courte durée, fractions matricielles, représentations d'état.

Summary

Modal analysis aims at identifying the vibrational modes of a structure. Estimating these structural modes often requires specific identification tests on the system operating in normal conditions. For some industrial applications, such tests can imply an important time and financial cost. As a consequence, the concerned industrial companies try to get as good result as possible while they also try to reduce as much as possible the duration of a test campaign. This PhD thesis aims at providing linear time invariant system identification methods able to give accurate modal parameter estimations from short duration tests performed in operational conditions. First, an iterative approach based on the identification of matrix fraction descriptions in the frequency domain is studied. This study leads to the formulation of an algorithm combining the use of an iterative instrumental variable method and the use of the Gauss-Newton method. This algorithm is based on a new parametrization of matrix fraction descriptions and takes into account the initial and final state of the system. Second, a subspace-based algorithm is proposed. This one includes frequency weighting matrices which are calculated by considering a frequency band selection and also the initial and final state of the system. Both developed algorithms are finally applied to a simulation case representative of flight flutter-tests conditions of a civil aircraft and to the real data of a flutter test performed on a military aircraft.

Key words : identification, modal analysis, short duration tests, matrix fraction descriptions, state space descriptions.