Université Paris-Sud

Ecole Doctorale de Mathématiques de la Région Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay

Discipline : Mathématiques

Thèse de doctorat

Soutenue le 29 novembre 2013 par

Raphaël Henry

Spectre et pseudospectre d'opérateurs non-autoadjoints

Composition du jury :

Nicolas Burq	(Université Paris-Sud)	Examinateur
Bernard Helffer	(Université Paris-Sud)	Directeur de thèse
Frédéric Hérau	(Université de Nantes)	Rapporteur
Nicolas Lerner	(Université Paris VI)	Examinateur
André Martinez	(Università di Bologna)	Rapporteur
André Voros	(Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay)	Examinateur

Résumé

L'instabilité du spectre des opérateurs non-autoadjoints constitue la thématique centrale de cette thèse. Notre premier objectif est de mettre en évidence ce phénomène dans le cas de certains modèles naturels tels que l'opérateur d'Airy, l'oscillateur harmonique ou l'oscillateur cubique complexes. Dans ce but, nous nous intéressons au comportement des projecteurs spectraux associés aux valeurs propres de ces opérateurs, poursuivant une démarche initiée par E. B. Davies.

Le second objectif de notre travail consiste à montrer de quelle manière ces modèles peuvent contribuer à la compréhension de certains problèmes issus de domaines mathématiques et physiques aussi variés que la mécanique quantique, la supraconductivité ou la théorie du contrôle.

Nos résultats sur l'instabilité spectrale de l'oscillateur cubique complexe viennent ainsi corroborer un travail de B. Krejcirik et P. Siegl, soulignant l'impossibilité de fournir une justification rigoureuse aux théories actuelles de la mécanique quantique non-hermitienne.

Par ailleurs, nous nous appuyons sur les propriétés des modèles mentionnés ci-dessus pour obtenir des résultats sur le spectre et la résolvante d'opérateurs de Schrödinger à potentiels imaginaires purs dans des ouverts bornés. Ces résultats peuvent en particulier être appliqués à l'étude du système de Ginzburg-Landau dépendant du temps en supraconductivité.

Enfin, nous présentons des résultats sur la contrôlabilité d'équations paraboliques dégénérées qui reposent sur une étude spectrale et pseudospectrale de l'opérateur d'Airy et de l'oscillateur harmonique complexes. Ce dernier travail est le fruit d'une collaboration avec K. Beauchard, B. Helffer et L. Robbiano.

Abstract

Spectral instability of non-selfadjoint operators is the main subject of this thesis. Our first goal is to understand the pseudospectral behavior of natural models such as the complex Airy operator, harmonic oscillator and cubic oscillator. To this purpose, we analyze the asymptotic behavior of the spectral projections associated with the eigenvalues of these operators, following a work initiated by E.B. Davies.

Our second goal is to illustrate how such models can be used in several problems arising in quantum mechanics, superconductivity or control theory. For instance, our results on the spectral instability of the complex cubic oscillator enable us to confirm that the current theory of non-hermitian quantum mechanics can not be rigorously justified, as recently pointed out by B. Krejcirik and P. Siegl. On the other hand, we obtain spectral information and resolvent estimates for semi-classical Schrödinger operators with purely imaginary potentials in a bounded domain, by using the properties of the models mentioned above. In particuler, these results entail some information on the time-dependent Ginzburg-Landau system in superconductivity. Finally, we reproduce a joint work with K. Beauchard, B. Helffer et L. Robbiano in which the controllability of some degenerate parabolic operators is investigated. An analysis of the spectrum and resolvent of the complex Airy operator and harmonic oscillator yields some controllability and non-controllability results for the equation under consideration.

Remerciements

En premier lieu, je tiens bien sûr à remercier mon directeur de thèse Bernard Helffer pour avoir à lui tout seul transformé mon pseudo-savoir spectral en savoir pseudospectral. En plus d'avoir encadré ma thèse avec expertise, patience et humanité, il m'a aussi dispensé les cours qui m'ont donné la volonté d'aller aussi loin. L'histoire de ma thèse remonte probablement au premier cours de Magistère de M1 où, sensible à l'aura dégagée par le professeur, je m'étais déjà pris à rêver qu'il dirigerait peut-être ma thèse un jour. Peu importe que j'aie finalement abandonné ce cours dans les semaines qui ont suivi, l'idée devait avoir déjà germé en moi.

Je remercie Frédéric Hérau et André Martinez d'avoir accepté le rôle de rapporteur pour ma thèse. Les conseils qu'ils m'ont donnés lors de nos discussions ont contribué de façon significative à rendre ma thèse meilleure. Je remercie également Nicolas Burq, Nicolas Lerner et André Voros de me faire l'honneur de participer à mon jury. Leur présence sur la page de titre de cette thèse me remplit de fierté.

Je remercie Karine Beauchard et Luc Robbiano de m'avoir donné la chance de travailler avec eux sur un sujet passionnant qui a considérablement enrichi cette thèse, et d'avoir accepté de se plier aux délais que je leur ai imposés.

Merci aussi aux enseignants qui tout au long de ma scolarité m'ont poussé, parfois difficilement, jusqu'à ma position actuelle de doctorant anxieux de soutenir sa thèse. Je pense avant tout à Mlle Consolen (probablement Mme à l'heure qu'il est), à Mme Martinetto, et plus encore à Mme Mondini pour avoir, entre autres, essayé de me convaincre que je valais mieux que ce que laissaient croire mes notes aux concours de l'ENS. Merci également à S. Alinhac, A. Ancona, P. Billot, N. Burq, E. Fouvry, D. Hulin, T. Ramond et d'autres encore que j'oublie, pour la qualité de leurs cours ou de leurs conseils, qui m'ont permis de ne jamais regretter d'être venu étudier à Orsay.

Je remercie particulièrement Patrick Gérard, Sophie Havard, Guy Henniart et Sylvie Retailleau de nous avoir si bien défendus dans notre lutte contre le Rectorat de Versailles. Nous n'aurions pas remporté la bataille sans vous.

Merci à mes parents, à qui je dois tout, bien évidemment, et à Lise, ma soeur, pour avoir partagé avec moi tout un tas de passions qui contribuent maintenant à faire de moi ce que je suis. Plus que n'importe qui d'autre, je veux remercier Imène : je me serais probablement laissé dévorer par tous mes cancers si tu n'avais pas été là ! Merci aussi à ceux qui constituent maintenant ma seconde famille, Neziha, Mamie et les autres, vous qui m'avez si bien accueilli.

Je remercie tous les amis avec qui j'ai passé ma jeunesse. Jon, Oussi, Alex, depuis l'école primaire nous avons transformé ensemble un morne village du

Sud en une terre d'aventure remplie de souvenirs précieux. Les gars d'ici, Baù, Vince, Chris, ce ne sont pas quelques fléchettes dans les mollets qui me feront oublier tous les moments de bonheur et de pure hilarité que j'ai partagé avec vous. Merci à vous tous pour votre amitié inaltérable, même dans ces longues périodes où je ne donne pas de nouvelles.

Rétablissons la parité : merci évidemment à Mag et à Jasmine, merci à Elisa pour tous ses petits cadeaux, et merci à Morgane dont l'amitié, je l'espère, durera encore longtemps.

Je remercie toutes celles et ceux que j'ai connu ici à Orsay, à commencer par Grégoire, β_{culte} malgré lui, et Maxime, ex-colocataire théorique mais ami bien réel. Merci aussi à Corentin, bien plus qu'un simple frère de thèse, et également à Hervé, Jean, Caro, Aude, Guilhem, et à tous ceux que j'ai connu depuis le M1. Merci à la bande du bureau bien sûr, Rémi, Patrick, Vincent, mais aussi aux autres doctorants avec qui j'ai passé de bons moments durant cette thèse.

À Lise.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Opérateurs non-autoadjoints et pseudospectre

La plupart des lecteurs que la curiosité aura poussé jusqu'à ces pages sont familiers avec le résultat fondamental suivant en algèbre linéaire :

Théorème 1.1.1 *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.*

A l'inverse, il est bien connu qu'en général, une matrice qui n'est pas symétrique ne peut pas systématiquement être diagonalisée. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non symétrique possèdera alors éventuellement des valeurs propres complexes et/ou des blocs de Jordan. Autrement dit, la multiplicité *géométrique* d'une valeur propre λ (c'est-à-dire la dimension de l'espace propre $\ker(M - \lambda I)$ associé) pourra être différente de sa multiplicité *algébrique* (*i. e.* la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de M).
Une autre particularité des matrices non-autoadjointes, c'est-à-dire telles que $M^* \neq M$ (où $M^* = {}^tM$ si M est à coefficients réels, $M^* = {}^t\bar{M}$ si M est à coefficients complexes), concerne la norme de leur résolvante. On appelle résolvante de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application, à valeur matricielle,

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(M) \ni z \longmapsto (M - zI)^{-1} .$$

Cet objet, peu utilisé en algèbre linéaire élémentaire, prendra une importance majeure dans la suite de notre travail, lorsque nous étudierons les propriétés d'opérateurs différentiels. Néanmoins, on peut d'ores et déjà mettre en évidence, dans le cas de matrices particulièrement simples, la différence de comportement entre la résolvante d'une matrice autoadjointe, et d'une matrice qui ne l'est pas. Comparons par exemple le cas d'une matrice $n \times n$ diagonale D, avec celui du bloc de Jordan 2×2 élémentaire J :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Leurs résolvantes respectives $R_D(z)$ et $R_J(z)$ sont définies sur $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1 \dots, \lambda_n\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ respectivement. Pour tout z dans ces domaines de définition on a

$$R_D(z) = \begin{pmatrix} 1/(\lambda_1 - z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(\lambda_2 - z) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/(\lambda_n - z) \end{pmatrix}$$

et

$$R_J(z) = \begin{pmatrix} -1/z & -1/z^2 \\ 0 & -1/z \end{pmatrix} .$$

On en déduit que

$$\|R_D(z)\| = \frac{1}{d(z, \sigma(D))} ,$$

tandis que $\|R_J(z)\|$ est de l'ordre de $1/|z|^2$. La résolvante du bloc de Jordan J explose donc plus rapidement que celle de D au voisinage des valeurs propres. Remarquons que le comportement de la résolvante de D est similaire pour n'importe quelle matrice A autoadjointe, puisque la résolvante $R_A(z)$ de cette dernière vérifie alors $R_A(z) = P^{-1} R_D(z) P$, avec $\|P\| = 1$ et D diagonale.

Nous verrons plus loin, dans le cas général des opérateurs non bornés, que la croissance rapide de la résolvante au voisinage des valeurs propres traduit une autre particularité des matrices ou opérateurs non-autoadjoints : l'instabilité du spectre. Plus précisément, l'ajout d'une perturbation $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de norme $\varepsilon > 0$ peut modifier significativement la position des valeurs propres, là où dans le cas autoadjoint, les valeurs propres restent dans un voisinage de taille ε autour de leur position initiale. Ce phénomène constitue le sujet central de cette thèse, et nous tenterons de déterminer son ampleur dans les chapitres 2 et 3, dans le cas d'opérateurs différentiels modèles. Il possède également certaines implications dans le domaine de l'analyse numérique, qui ont été à l'origine de l'introduction par L. N Trefethen et M. Embree [134] de la notion de ε-pseudospectre d'un opérateur, voir (1.1.2). En effet, si l'on essaie de localiser par des méthodes numériques les valeurs propres d'un opérateur fermé non-autoadjoint, on est amené à remplacer cet opérateur par une perturbation (une grande matrice), ce qui peut ainsi faire apparaître sur les simulations des valeurs propres très éloignées de leur position réelle. Les exemples qui suivent illustrent ce phénomène.
Le premier est du à Mark Embree [55]. On considère, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les matrices $M_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, M_k = \begin{pmatrix} 0 & 1/k & 0 & \cdots & 0 \\ k & 0 & 1/k & & \vdots \\ 0 & k & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1/k \\ 0 & \dots & 0 & k & 0 \end{pmatrix} .$$

La première est symétrique, et on peut vérifier que toutes les autres lui sont semblables ; leur spectre est donc réel. Pourtant, en raison de l'instabilité spectrale, on voit apparaître sur les simulations (voir Figure 1.1) de nombreuses

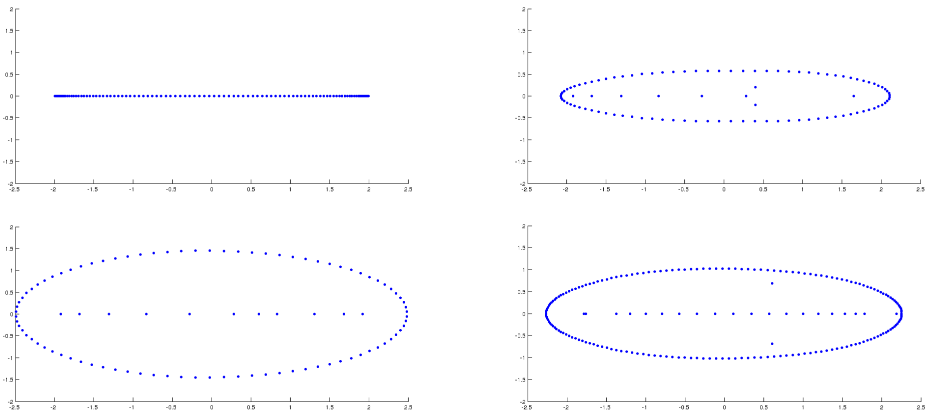

FIGURE 1.1 – Spectre de la matrice $M_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $k = 1$, $n = 100$ (en haut, à gauche), $k = 2$, $n = 100$ (en haut, à droite), $k = 3$, $n = 100$ (en bas, à gauche), et $k = 2$, $n = 200$ (en bas, à droite). On constate que l'étendue de la zone d'instabilité augmente avec k et n.

valeurs propres éloignées de l'axe réel pour les matrices non-autoadjointes M_k , $k \geq 2$. On devine déjà que la zone d'instabilité dans laquelle restent confinées les valeurs propres perturbées possède une certaine structure : il s'agit ici d'une ellipse. On peut par ailleurs remarquer que l'étendue de cette zone, dans cet exemple, augmente à la fois avec k et avec la taille n de la matrice.

Voici maintenant une autre illustration de ce phénomène, due elle aussi à Mark Embree [55]. Cet exemple montre que l'instabilité spectrale des opérateurs non-autoadjoints est capable de mettre en échec certaines fonctions pourtant courantes des logiciels de calcul scientifique. La fonction MATLAB `roots`, par exemple, détermine les racines d'un polynôme en calculant les valeurs propres de la matrice compagnon associée, qui est bien sûr non-autoadjointe. Cela donne lieu à des imperfections flagrantes. On rappelle que par définition, la matrice compagnon associée au polynôme

$$P(X) = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j X^j$$

est la matrice

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{pmatrix},$$

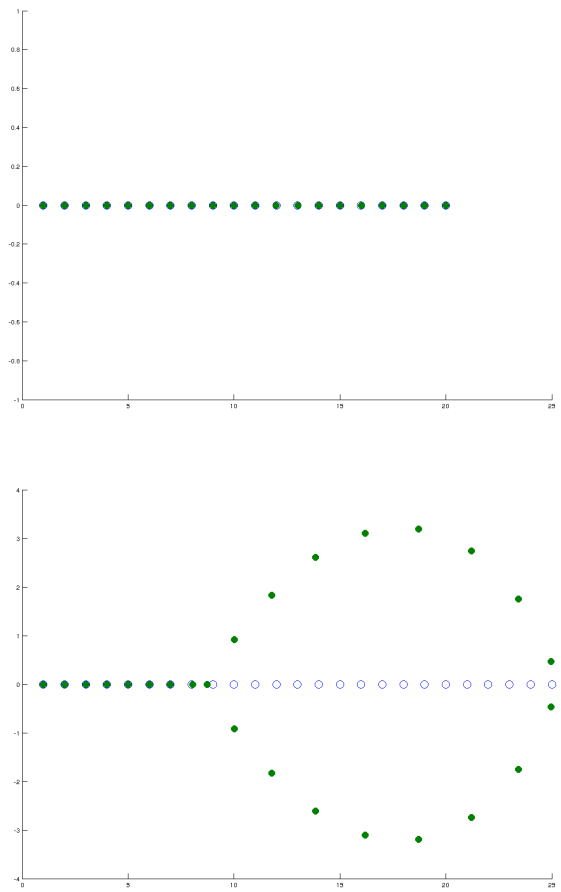

FIGURE 1.2 – Racines du polynôme $P(X) = (X-1)(X-2)\dots(X-N)$ calculées par la fonction MATLAB `roots`, pour $N = 20$ (en haut) et $N = 25$ (en bas). Les cercles représentent la vraie position des racines, et les disques les valeurs obtenues par la fonction `roots`.

et le polynôme caractéristique de C_P est $(-1)^n P(X)$. Ses valeurs propres coïncident donc avec les racines de P. En appliquant la fonction `roots` au polynôme $P(X) = (X-1)(X-2)\dots(X-N)$ par exemple, on obtient, pour différentes valeurs de N, la Figure 1.2. On voit clairement que pour les grandes valeurs de N, les racines de P sont très mal localisées en raison de l'instabilité du spectre de la matrice C_P associée.

Dans la suite, la notion de ε-pseudospectre va nous permettre de définir cette région d'instabilité dans laquelle apparaissent de fausses valeurs propres.

L'objectif de cette thèse est de comprendre les phénomènes évoqués ci-dessus dans le cas d'opérateurs fermés associés à des opérateurs différentiels non nécessairement [1] autoadjoints agissant sur des espaces de fonctions. Nous nous placerons donc désormais dans le cadre d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ pour définir les objets qui nous intéressent.

La théorie spectrale des opérateurs autoadjoints repose en grande partie sur le théorème spectral et ses nombreuses conséquences. En particulier, l'inégalité suivante est à la base de très nombreuses techniques : pour tout opérateur autoadjoint $\mathcal{A}$ défini sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, de domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, on a, pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $z \in \mathbb{C}$,

$$d(z, \sigma(\mathcal{A}))\|u\| \leq \|(\mathcal{A} - z)u\| \,. \tag{1.1.1}$$

Ici $\sigma(\mathcal{A})$ désigne le spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$ défini par :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}) \,, \quad \rho(\mathcal{A}) = \{z \in \mathbb{C} : (\mathcal{A} - z) \ \text{ inversible et d'inverse borné}\} \,.$$

L'inégalité (1.1.1) permet d'étudier le spectre de $\mathcal{A}$ et confirme que ce dernier renferme toutes les informations nécessaires à la compréhension du comportement de l'opérateur. Par exemple, d'après (1.1.1), la connaissance du spectre de $\mathcal{A}$ entraîne la connaissance de la norme de la résolvante dans l'ensemble du plan complexe.

On utilise souvent le théorème spectral pour localiser le spectre de $\mathcal{A}$, de façon exacte ou approchée. En effet, si l'on parvient à construire un *quasimode* associé à une valeur $\lambda^{app} \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire un vecteur $u^{app} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que

$$\|(\mathcal{A} - \lambda^{app})u^{app}\| \leq \varepsilon \, \|u^{app}\| \,,$$

avec $\varepsilon > 0$ (généralement petit, éventuellement une fonction $\varepsilon(h) \to 0$ d'un paramètre semiclassique $h \to 0$), alors (1.1.1) assure l'existence d'un élément $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ situé à une distance inférieure à ε de la "valeur propre approchée" λ^{app}.

Le théorème spectral permet en outre de définir un *calcul fonctionnel* pour les opérateurs autoadjoints, c'est-à-dire de donner un sens à des opérateurs de la forme $f(\mathcal{A})$, où f appartient à une large classe de fonctions, cette définition coïncidant avec les opérateurs naturellement attendus pour certaines fonctions particulières (par exemple, des fonctions polynômiales, la fonction $z \mapsto 1/z$, etc.).

Par ailleurs, il est clair que les notions de multiplicité géométrique et algébrique abordées au début de cette section coïncident dans le cas des opérateurs autoadjoints : pour toute valeur propre λ de $\mathcal{A}$, $u \in \ker(\mathcal{A}-\lambda)^2$ entraîne $u \in \ker(\mathcal{A}-\lambda)$. Il s'agit d'une autre particularité de cette classe d'opérateurs. Elles sont bien plus nombreuses mais nous n'entrerons pas davantage dans les détails ici.

Comme nous l'avons mis en évidence dans les exemples ci-dessus, de tels outils théoriques cessent de s'appliquer en toute généralité si les opérateurs considérés ne sont pas autoadjoints [2]. L'existence d'un quasimode associé à λ^{app} pour un opérateur non-autoadjoint ne garantit pas la présence de spectre au voisinage de λ^{app}. Pour certaines fonctions f, l'opérateur $f(\mathcal{A})$ peut être particulièrement délicat à définir, voire ne pas avoir de sens, et son spectre peut différer de l'image $f(\sigma(\mathcal{A}))$ du spectre. Enfin, l'existence de valeurs propres dont

1. Nous omettrons dans la suite le mot nécessairement.

2. On sait que les opérateurs normaux, c'est-à-dire ceux qui vérifient $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$, ont de nombreuses propriétés communes avec les opérateurs autoadjoints, mais les opérateurs considérés dans cette thèse n'entrent pas non plus dans cette catégorie.

la multiplicité algébrique dépasse la multiplicité géométrique impose de prendre en compte la présence éventuelle de blocs de Jordan. Au cours de cette thèse, nous aurons l'occasion de constater que de telles difficultés interviennent dans l'étude de modèles pourtant simples en apparence.

Une fois sorti du cadre des opérateurs autoadjoints, le spectre est un objet instable qui ne renferme plus l'ensemble des informations nécessaires à la compréhension de l'opérateur (voir par exemple la section 1.2 concernant les problèmes d'évolution associés). Seule une bonne connaissance de la résolvante peut permettre de répondre à certaines questions relatives au comportement des opérateurs fermés non-autoadjoints. La norme de la résolvante s'avère en général difficile à estimer, et il peut lui arriver de prendre de très grandes valeurs même à une distance importante du spectre de l'opérateur. La notion de *pseudospectre* permet de rendre compte de cette situation. Si $\mathcal{A}$ désigne un opérateur fermé de domaine dense défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, la famille des pseudospectres $\{\sigma_\varepsilon(\mathcal{A})\}_{\varepsilon>0}$ de $\mathcal{A}$ est définie par

$$\sigma_\varepsilon(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \bigcup \left\{ z \in \rho(\mathcal{A}) : \|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}. \tag{1.1.2}$$

Remarquons que d'après l'inégalité (1.1.1), le pseudospectre $\sigma_\varepsilon(\mathcal{A})$ d'un opérateur autoadjoint est inclus dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(\mathcal{A})) \leq \varepsilon\}$.
Comme nous l'avons observé, ces objets, plus stables sous perturbation de l'opérateur, sont plus adaptés à l'étude des opérateurs non-autoadjoints que le seul spectre.
Le phénomène d'instabilité spectrale évoqué précédemment peut être mesuré grâce au pseudospectre. En effet, $\sigma_\varepsilon(\mathcal{A})$ peut aussi être défini comme la réunion des spectres de toutes les perturbations de "taille" ε de l'opérateur $\mathcal{A}$, comme l'indique la caractérisation suivante, version faible d'un théorème dû à Roch et Silbermann [121] :

Théorème 1.1.2 (Roch-Silbermann)

$$\sigma_\varepsilon(\mathcal{A}) = \bigcup_{\|E\| \leq \varepsilon} \sigma(\mathcal{A} + E).$$

La question du pseudospectre peut donc être posée comme un problème d'estimation de résolvante, mais aussi comme un problème de perturbation. Les Figures 1.1 et 1.2 ci-dessus laissent ainsi deviner la forme du pseudospectre des matrices considérées.
Dans les sections qui suivent, nous aurons l'occasion de représenter le pseudospectre de certains opérateurs différentiels non-autoadjoints.

Nous avons déjà mentionné les importantes conséquences de l'instabilité spectrale dans le domaine de l'analyse numérique. Il semble que la notion de pseudospectre ait été introduite dans ce contexte, il y a quelques années, par L. N. Trefethen (voir [134] pour une discussion sur ce point), mais ces objets ont été considérés, de façon indépendante et sous différents noms, dans des publications antérieures.

Dans la section suivante, nous expliquons de quelle manière la forme du pseudospectre peut être reliée à l'étude des problèmes d'évolution associés à des opérateurs non-autoadjoints.

1.2 Pseudospectre et stabilité dans les problèmes d'évolution

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement des solutions du problème d'évolution associé à un opérateur fermé $\mathcal{A}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + \mathcal{A}u(t) = 0\,, \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\,. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Quand $\mathcal{A}$ est une matrice $n \times n$, il s'agit d'un problème de Cauchy pour un système de n équations différentielles d'ordre 1. Si $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel, avec par exemple $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, (1.2.1) est une équation aux dérivées partielles linéaire portant sur la fonction $u(t) = u(x,t)$, $x \in \Omega$, et avec donnée initiale $u_0(x)$.

Nous commençons par donner quelques exemples formels permettant de comprendre la différence de comportement entre le cas autoadjoint et le cas non-autoadjoint.
Si $\mathcal{A}$ est un opérateur autoadjoint, il est bien connu que le comportement asymptotique de la solution $u(t)$ est déterminé par le bas du spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$, $\lambda_1 = \inf \sigma(\mathcal{A})$.
Plus précisément, la norme d'une solution $u(t)$ dans $\mathcal{H}$ a une croissance exponentielle quand $t \to +\infty$, ou une décroissance exponentielle selon le signe de λ_1 , de l'ordre de $e^{-\lambda_1 t}$.
Le résultat général concernant cette affirmation sera énoncé plus loin (voir le Théorème 1.2.2), mais nous pouvons déjà nous en convaincre dans le cas où $\mathcal{A}$ est une matrice. En effet, si $\mathcal{A}$ est autoadjointe, alors d'après le Théorème 1.1.1, il existe une matrice unitaire P telle que $\mathcal{A} = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \{\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n\} = \sigma(\mathcal{A})\,.$$

Le système (1.2.1) devient alors, après le changement de variable $v(t) = P^{-1}u(t)$:

$$\forall j = 1, \dots, n\,, \quad v_j'(t) = -\lambda_j v_j(t)\,, \quad v(0) = P^{-1}u_0\,. \tag{1.2.2}$$

On en déduit que

$$\|u(t)\| = \|v(t)\| \le Ce^{-\lambda_1 t}\|u_0\|\,,$$

quelle que soit la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$.
Si $\mathcal{A}$ n'est pas autoadjoint en revanche, la situation peut être plus complexe. Tout d'abord, même dans les cas où les solutions de (1.2.1) sont (exponentiellement) asymptotiquement stables, c'est-à-dire que $\|u(t)\|$ tend (exponentiellement vite) vers 0 quand $t \to +\infty$, il arrive que les solutions possèdent un comportement transitoire, sur un intervalle de temps $[0, t_0]$, sur lequel $\|u(t)\|$ croît rapidement avant d'entamer sa décroissance. Par exemple, si $\mathcal{A}$ est une matrice non-normale mais diagonalisable, on peut encore effectuer le changement de variable $v(t) = P^{-1}u(t)$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{A}$ constituée d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres. La fonction $v(t)$ vérifie encore (1.2.2), mais

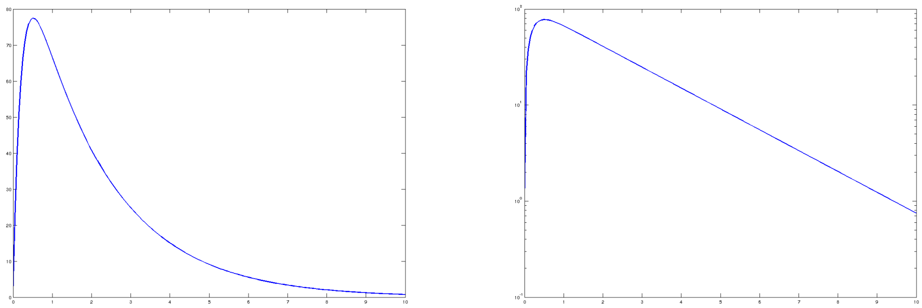

FIGURE 1.3 – Evolution de la norme $\|u(t)\|$ de la solution du problème d'évolution associé à la matrice (1.2.3), avec $\|u(0)\| = 1$, sur une échelle linéaire (à gauche) et logarithmique (à droite).

puisque la base $(e_1, \ldots, e_n)$ n'est pas nécessairement orthonormée, on n'a pas $\|u(t)\| = \|v(t)\|$ en général. On a ainsi

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j t} v_j(0) e_j \,,$$

mais les coefficients $v_j(0)$ peuvent être grands même si $\|u(0)\| = 1$. Mark Embree propose l'exemple suivant en guise d'illustration (voir aussi [107] et [108]) :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -500 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} , \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{1.2.3}$$

Le comportement de $\|u(t)\|$ en fonction du temps, représenté sur la Figure 1.3, laisse clairement apparaître une forte croissance pour des temps petits, bien que le système soit stable à l'infini. Cette croissance transitoire s'explique par le fait que les vecteurs propres de $\mathcal{A}$ sont presque colinéaires : on peut par exemple prendre $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (1, -0.009)$.

Dans l'étude des problèmes d'évolution linéaires, la présence d'un régime de croissance transitoire avant que les solutions ne commencent à décroître n'est pas toujours très problématique dans la mesure où, le plus souvent, seul le comportement des solutions en grand temps est considéré. Ce phénomène ne suffit pas à contredire une inégalité de ce type, valable dans le cas des opérateurs autoadjoints (ou normaux) :

$$\forall t > 0 \,, \quad \|u(t)\| \le C \exp(-\inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A})\, t) \|u_0\| \,, \tag{1.2.4}$$

pour peu que la constante $C > 0$ soit choisie suffisamment grande. En revanche, dans l'étude de problèmes non-linéaires (comme l'étude de l'équation

$$\partial_t \psi - \Delta \psi = (1 - |\psi|^2) \psi \,,$$

qui sera considérée dans la section 1.6, par exemple), on cherche souvent à comprendre le comportement des solutions en fonction du temps en s'appuyant sur les propriétés du problème linéarisé. Dans le cas où les solutions de ce dernier possèdent un régime de croissance transitoire, les effets de la nonlinéarité peuvent conduire à un comportement instable pour le problème non-linéaire, même en grand temps. Sans entrer davantage dans les détails, mentionnons l'exemple de l'équation de la chaleur non-linéaire,

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = (h^2\partial_x^2 + h\partial_x)u(x,t) + \frac{1}{8}u(x,t) + u(x,t)^p\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [-1,1]\,, \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0\,, & t \in \mathbb{R}^+\,, \end{cases}$$

où $h > 0$ et $p > 1$.
L'opérateur linéaire $\mathcal{A} = -h^2\partial_x^2 - h\partial_x - \frac{1}{8}$ est stable avec un régime de croissance transitoire, alors que les solutions $u(x,t)$ du problème non-linéaire explosent exponentiellement vite quand $t \to +\infty$ [69].

Par ailleurs, même si les exemples précédents ne suffisent pas à la contredire, l'inégalité (1.2.4) n'est pas valable en toute généralité, et il est possible que les solutions de (1.2.1) ne soient pas asymptotiquement stables même si $\inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}) > 0$. Leur comportement à l'infini n'est donc pas déterminé par le bas du spectre, mais par une autre quantité liée au pseudospectre de $\mathcal{A}$ et appelée abscisse pseudospectrale de $\mathcal{A}$, comme nous le verrons dans le Théorème 1.2.2 et dans l'égalité (1.2.8). Nous prenons pour en témoigner l'exemple de Zabczyk [55]. On considère la matrice infinie

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & J_k & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.2.5}$$

où, pour tout $k \geq 1$, J_k est un bloc de Jordan de taille k associé à la valeur propre $1 + ik$:

$$J_k = \begin{pmatrix} 1+ik & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1+ik & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1+ik \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})\,.$$

Il s'agit d'un opérateur non-borné agissant sur $\ell^2(\mathbb{N})$, que nous présentons ici sans entrer dans la description de son domaine. On a clairement $\inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}) = 1$. Pourtant, la taille du pseudospectre autour de la valeur propre $1 + ik$ augmente avec k en raison de la dégénérescence croissante des valeurs propres, voir Figure 1.4. En raison de ce phénomène, on constate que les solutions du problème d'évolution (1.2.1) associé à $\mathcal{A}$ ne sont pas stables.

Nous situons maintenant brièvement le cadre mathématique nécessaire à l'étude du problème d'évolution (1.2.1), ainsi que les résultats théoriques permettant de comprendre les particularités des exemples qui précèdent.
Le problème (1.2.1) est défini grâce au *semi-groupe* engendré par l'opérateur $\mathcal{A}$. Un semi-groupe de contraction fortement continu (le plus souvent dans la

suite, on parlera simplement de “semi-groupe de contraction”) est une famille $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, avec

$$\|\mathcal{S}(t)\| \leq 1\,,\ \forall t > 0\,,$$

telle que l'application $t \mapsto \mathcal{S}(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathcal{H}$, et vérifiant, pour tous $t, s \in \mathbb{R}^+$, les relations

$$\mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t) \circ \mathcal{S}(s) \ \text{ et } \mathcal{S}(0) = I\,.$$

On appelle *générateur (infinitésimal)* du semi-groupe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur fermé $\mathcal{A}$ défini sur le domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ u \in \mathcal{H} : \frac{\mathcal{S}(t)u - u}{t} \quad \text{a une limite quand} \quad t \to 0^+ \right\}\,,$$

par

$$\mathcal{A}u = \lim_{t\to 0+} \frac{\mathcal{S}(t)u - u}{t}\,.$$

Si $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, la fonction $u(t) = \mathcal{S}(t)u_0$ est alors solution du problème d'évolution (1.2.1).
Réciproquement, tout opérateur fermé n'est pas le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction. On dit qu'un opérateur $\mathcal{A}$ est accrétif si pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{A}u, u\rangle \geq 0$. Il est dit accrétif maximal si de plus, il n'admet pas d'extension accrétive stricte. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *L'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un semi-groupe de contraction si et seulement si il est accrétif maximal.*

On notera alors $e^{-t\mathcal{A}}$ ce semi-groupe.
Pour plus de détails sur la théorie des semi-groupes et des opérateurs accrétifs, nous renvoyons à [56], [75] et [119].

Comme nous l'avons illustré avec les exemples qui précèdent, la vitesse de décroissance d'un semi-groupe de contraction n'est pas nécessairement déterminée par le bas du spectre de son générateur, mais par une quantité liée au pseudospectre de celui-ci. Bien que les deux notions coïncident dans le cas des opérateurs autoadjoints (ou normaux), la nuance est cruciale dans le cas général. Le théorème suivant (voir [75]) précise cette idée. Il s'agit du principal résultat que nous utiliserons dans la suite de cette thèse quand nous étudierons des propriétés de semi-groupes.

Théorème 1.2.2 (Gearhardt-Prüss) *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur accrétif maximal sur $\mathcal{H}$. On suppose qu'il existe $\omega > 0$ tel que*

$$\sup_{\mathrm{Re}\, z\leq \omega} \|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| < +\infty\,. \tag{1.2.6}$$

Alors il existe une constante $M_\omega > 0$ telle que le semi-groupe $e^{-t\mathcal{A}}$ engendré par $\mathcal{A}$ vérifie, pour tout $t > 0$,

$$\|e^{-t\mathcal{A}}\| \leq M_\omega e^{-\omega t}\,. \tag{1.2.7}$$

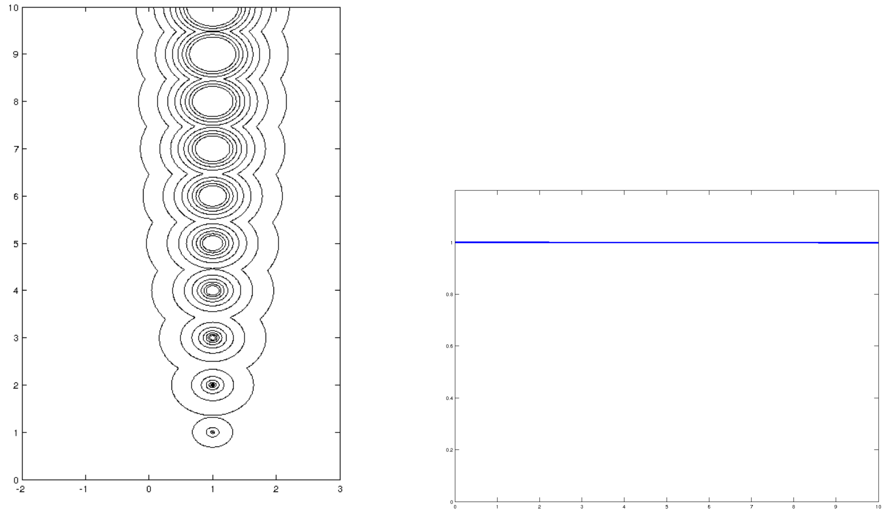

FIGURE 1.4 – Pseudospectre de la matrice (1.2.5) (à gauche), et évolution du semi-groupe associé (à droite).

Ce résultat peut être reformulé en terme de pseudospectre (voir [75]). Si on note $\hat{\omega}_0(\mathcal{A})$ le taux de décroissance de $e^{-t\mathcal{A}}$,

$$\hat{\omega}_0(\mathcal{A}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{-t\mathcal{A}}\| \,,$$

et si, pour $\varepsilon > 0$, $\hat{\alpha}_\varepsilon(\mathcal{A})$ désigne l'*abscisse pseudospectrale* de $\mathcal{A}$,

$$\hat{\alpha}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \inf \operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(\mathcal{A}) \,,$$

alors le Théorème 1.2.2 peut être reformulé par l'égalité suivante :

$$\hat{\omega}_0(\mathcal{A}) = - \lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\alpha}_\varepsilon(\mathcal{A}) \,. \tag{1.2.8}$$

On a clairement

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\alpha}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}) \,,$$

si $\mathcal{A}$ est un opérateur autoadjoint.
En revanche, dans l'exemple de la matrice (1.2.5), bien que $\inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}) = 1$, la Figure 1.4 semble indiquer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\alpha}_\varepsilon(\mathcal{A}) = 0$. Ceci explique pourquoi on observe $\|e^{-t\mathcal{A}}\| = 1$.

Le Théorème 1.2.2 ne donne aucune information sur la valeur de la constante M_ω. Dans la suite, lorsque nous considèrerons des opérateurs dépendant d'un paramètre, nous aurons pourtant besoin de contrôler cette constante par rapport au paramètre. Nous utiliserons pour cela une version précisée, quantitative, du Théorème 1.2.2, donnée dans [83].

1.3 Pseudospectre et indices d'instabilité

Dans cette section, nous associons à chaque valeur propre isolée d'un opérateur fermé, une quantité appelée *indice d'instabilité* et destinée à mesurer l'instabilité de cette valeur propre sous perturbation de l'opérateur. L'étude des indices d'instabilité occupera une place importante dans cette thèse, et les chapitres 2 et 3 sont principalement consacrés à ce sujet.

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur fermé agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ une valeur propre isolée, de multiplicité finie. On peut alors considérer le projecteur spectral Π_λ associé à λ (voir [40], Théorème 1.5.4), défini par la formule

$$\Pi_\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z - \mathcal{A})^{-1} dz \,, \tag{1.3.1}$$

où γ est un lacet du plan complexe entourant une fois positivement la valeur propre λ et aucun autre élément du spectre de $\mathcal{A}$.
Ce projecteur est indépendant de γ avec ces propriétés.
Si $\mathcal{A}$ est un opérateur autoadjoint, le projecteur Π_λ est orthogonal et son image est le sous-espace propre associé à λ.
Dans le cas général, on a toujours

$$\|\Pi_\lambda\| \geq 1 \,,$$

et l'image $R(\Pi_\lambda)$ de Π_λ est le sous-espace caractéristique associé à λ :

$$R(\Pi_\lambda) = \bigcup_{k \geq 1} \ker(\mathcal{A} - \lambda)^k. \tag{1.3.2}$$

On définit alors simplement les indices d'instabilité de la façon suivante :

Définition 1.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur fermé sur $\mathcal{H}$ et $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ isolé. L'indice d'instabilité associé à λ est*

$$\kappa(\lambda) := \|\Pi_\lambda\| \,,$$

où Π_λ est le projecteur spectral associé à λ.

Dans cette thèse, nous nous intéresserons principalement à des cas où les projecteurs spectraux sont de rang 1, ou de manière équivalente (voir (1.3.2)) à des valeurs propres simples (c'est à dire dont la multiplicité géométrique définie par $\dim \ker(\mathcal{A} - \lambda)$ est égale à 1) sans bloc de Jordan. Dans ce cas, nous disposerons d'une expression explicite du projecteur spectral et de l'indice d'instabilité correspondants [12] :

Proposition 1.3.2 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur fermé sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ une valeur propre isolée, de multiplicité finie. Soit Π_λ le projecteur spectral associé à λ. Alors :*

(i) On a le critère suivant pour l'absence de bloc de Jordan :

$$R(\Pi_\lambda) = \ker(\mathcal{A} - \lambda) \Longleftrightarrow \ker(\mathcal{A} - \lambda) \cap \ker(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda})^\perp = \{0\} \,. \tag{1.3.3}$$

(ii) Supposons que Π_λ est de rang 1. Soit u_λ un vecteur propre associé à λ, et u_λ^* un vecteur propre de $\mathcal{A}^*$ associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$. Alors,

$$\Pi_\lambda = \frac{\langle \cdot \, , u_\lambda^* \rangle}{\langle u_\lambda, u_\lambda^* \rangle} u_\lambda \,, \tag{1.3.4}$$

et

$$\kappa(\lambda) := \|\Pi_\lambda\| = \frac{\|u_\lambda\| \|u_\lambda^*\|}{|\langle u_\lambda, u_\lambda^* \rangle|} \,. \tag{1.3.5}$$

Preuve : Supposons $R(\Pi_\lambda) = \ker(\mathcal{A} - \lambda)$.
On a alors également $R(\Pi_\lambda^*) = \ker(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda})$, d'où

$$\ker \Pi_\lambda = (R(\Pi_\lambda^*))^\perp = \ker(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda})^\perp \,.$$

Or, $\ker(\mathcal{A} - \lambda) \cap \ker \Pi_\lambda = \{0\}$, donc

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda) \cap \ker(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda})^\perp = \{0\} \,.$$

Réciproquement, supposons que $\ker(\mathcal{A} - \lambda) \neq R(\Pi_\lambda)$, c'est-à-dire $\ker(\mathcal{A} - \lambda) \subsetneq \ker(\mathcal{A} - \lambda)^2$ d'après (1.3.2).
Soit $v \in \ker(\mathcal{A} - \lambda)^2 \setminus \ker(\mathcal{A} - \lambda)$, et $u = (\mathcal{A} - \lambda)v \in \ker(\mathcal{A} - \lambda) \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $u^* \in \ker(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda})$, on a

$$\langle u, u^* \rangle = \langle v, (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda})u^* \rangle = 0 \,,$$

d'où $u \in \ker(\mathcal{A} - \lambda) \cap \ker(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda})^\perp \setminus \{0\}$, ce qui prouve le point (i).
On se place maintenant sous les hypothèses du point (ii).
Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe $\alpha(f) \in \mathbb{C}$ tel que $\Pi_\lambda f = \alpha(f) u_\lambda$. Prenant le produit scalaire avec u_λ^*, on trouve

$$\alpha(f) = \frac{\langle f, u_\lambda^* \rangle}{\langle u_\lambda, u_\lambda^* \rangle} \,,$$

d'où (1.3.4).
On en déduit l'inégalité

$$\|\Pi_\lambda\| \leq \frac{\|u_\lambda\| \|u_\lambda^*\|}{|\langle u_\lambda, u_\lambda^* \rangle|} \,,$$

puis l'égalité en considérant $\Pi_\lambda u_\lambda^*$. □

L'une des raisons qui nous conduiront à étudier les indices d'instabilité associés aux valeurs propres d'un opérateur est que leur valeur est liée à la taille du pseudospectre entourant la valeur propre correspondante.
En effet, notons $\sigma_\varepsilon^{(\lambda)}$ la composante connexe de $\sigma_\varepsilon(\mathcal{A})$ contenant la valeur propre isolée λ, et supposons pour se fixer les idées que celle-ci est bornée et ne contient aucun autre élément de $\sigma(\mathcal{A})$. Considérons n'importe quel lacet du plan complexe γ entourant $\sigma_\varepsilon^{(\lambda)}$ et n'entourant aucun élément de $\sigma_\varepsilon(\mathcal{A}) \setminus \sigma_\varepsilon^{(\lambda)}$, ne rencontrant pas $\sigma_\varepsilon(\mathcal{A})$. Compte tenu de l'expression (1.3.1) on a alors [12], si $|\gamma|$ désigne la longueur de γ,

$$\kappa(\lambda) \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| dz \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} |\gamma| \,,$$

c'est-à-dire

$$|\gamma| \geq 2\pi\varepsilon\kappa(\lambda)\,. \tag{1.3.6}$$

Autrement dit, le périmètre de $\sigma_\varepsilon^{(\lambda)}$ croît au moins aussi vite que $\kappa(\lambda)$.
Dans le cas de la dimension finie au moins, le rôle des indices $\kappa(\lambda)$ dans la description du pseudospectre apparaît de façon plus flagrante encore.
Si $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice diagonalisable à valeurs propres distinctes, Embree et Trefethen montrent dans [134] que le pseudospectre est assez bien approché par des disques de rayon $\varepsilon\kappa(\lambda)$ autour des valeurs propres.
Plus précisément, quand $\varepsilon \to 0$, on a

$$\bigcup_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} D(\lambda, \varepsilon\kappa(\lambda) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \subset \sigma_\varepsilon(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} D(\lambda, \varepsilon\kappa(\lambda) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\,. \tag{1.3.7}$$

La question de la validité de ces inclusions dans le cas de la dimension infinie sera discutée dans l'Annexe A.

Les indices d'instabilité d'un opérateur $\mathcal{A}$ donnent également des informations importantes sur la famille de ses fonctions propres, notamment lorsqu'on cherche à déterminer si cette dernière possède les propriétés d'une base. Même dans les cas où l'opérateur n'admet pas de base hilbertienne de fonctions propres, on peut en effet chercher à savoir si les fonctions propres possèdent certaines propriétés plus faibles permettant de décomposer un vecteur $u \in \mathcal{H}$ quelconque suivant les espaces propres de $\mathcal{A}$. Dans cette thèse, on s'intéressera par exemple à la propriété de *base de Riesz*. Une famille $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ est appelée base de Riesz si c'est une famille totale de $\mathcal{H}$ et s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\phi \in \mathcal{H}$,

$$C^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle\phi, u_n\rangle|^2 \leq \|\phi\|^2 \leq C\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle\phi, u_n\rangle|^2\,. \tag{1.3.8}$$

On a alors le résultat suivant (voir [106]) :

Proposition 1.3.3 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur fermé sur $\mathcal{H}$. Supposons que*

$$\sup_{\lambda\in\sigma_d(\mathcal{A})} \kappa(\lambda) = +\infty\,,$$

où $\sigma_d(\mathcal{A})$ désigne le spectre discret de $\mathcal{A}$. Alors il n'existe pas de base de Riesz formée de fonctions propres de $\mathcal{A}$.

Dans les chapitres 2 et 3, nous étudions les indices d'instabilité associés aux valeurs propres λ_n d'opérateurs de Schrödinger non-autoadjoints, à résolvante compacte, en dimension 1. Plus précisément, nous déterminons le comportement asymptotique de $\kappa(\lambda_n)$ quand $|\lambda_n| \to +\infty$, et nous étendons les résultats de [41] et [45].

1.4 Modèles non-autoadjoints en dimension 1 : oscillateurs anharmoniques et opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques

Dans cette section, nous présentons les opérateurs considérés dans les chapitres 2 et 3. Il s'agit d'opérateurs différentiels modèles dont l'étude permet de mettre en évidence la majorité des phénomènes pseudospectraux mentionnés dans les sections précédentes. Certains de ces modèles apparaissent naturellement dans une grande variété de problèmes, comme nous le verrons dans les chapitres 4 et 5, qui abordent des questions plus générales ou issues de domaines mathématiques plus éloignés, et dans lesquels ces modèles jouent un rôle central.

1.4.1 L'opérateur d'Airy complexe

L'opérateur d'Airy complexe $-\frac{d^2}{dx^2}+ix$, en dépit de sa forme très simple, est un modèle non-autoadjoint fondamental qui interviendra tout au long de cette thèse. Il a été étudié dans [76, 101, 23]. Cet opérateur doit son nom à l'opérateur d'Airy standard $-\frac{d^2}{dx^2}+x$, dont une solution fondamentale est la célèbre *fonction d'Airy Ai* , introduite par G. B. Airy dans ses travaux sur les propriétés de la lumière [3]. Cette fonction jouera aussi un rôle important dans l'étude de la version non-autoadjointe de l'opérateur, voir le chapitre 2.
Dans cette sous-section, nous rappelons les principales propriétés de l'opérateur d'Airy complexe. Elles nous seront utiles par la suite. Dans les sections 1.6 et 1.7, nous donnerons des exemples de problèmes dans lesquels cet opérateur intervient.

Rappels sur l'opérateur d'Airy complexe sur $\mathbb{R}$

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats issus de [76] et [101]. On définit l'opérateur d'Airy complexe $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$ comme la fermeture de

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 = D_x^2 + ix\,, \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\,. \end{cases}$$

On peut vérifier que son domaine est

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^2dx)\,, \tag{1.4.1}$$

qui s'injecte de façon compacte dans $L^2(\mathbb{R})$.
$\mathcal{A}$ est donc à résolvante compacte. De plus, en conjuguant $\mathcal{A}$ par l'opérateur de translation $T_\nu : u(x) \mapsto u(x-\nu)$, $\nu \in \mathbb{R}$, on constate que, si $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, alors $\lambda - i\nu \in \sigma(\mathcal{A})$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$. Par conséquent, le spectre de $\mathcal{A}$ est soit vide, soit constitué de droites parallèles à l'axe imaginaire. Puisqu'il est par ailleurs discret par compacité de la résolvante, on a

$$\sigma(\mathcal{A}) = \emptyset\,.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est accrétif maximal, il engendre donc un semi-groupe de contraction $e^{-t\mathcal{A}}$ d'après le Théorème 1.2.1. La transformée de Fourier $\mathcal{F}e^{-t\mathcal{A}}\mathcal{F}^{-1}$ du semi-groupe engendré par $\mathcal{A}$ est donnée par l'étude du problème de Cauchy

$$\partial_t\widehat{u} + \xi^2\widehat{u} + \partial_\xi\widehat{u} = 0\,,\ \widehat{u}(0,\cdot) = \widehat{v}\,,$$

dont la solution est $\widehat{u}(t,\xi) = \exp(-\xi t + \xi t^2 - t^3/3)\widehat{v}(\xi - t)$. Une étude de la fonction $\xi \mapsto -\xi t + \xi t^2 - t^3/3$ (à t fixé) montre donc que

$$\forall t > 0, \quad \|e^{-t\mathcal{A}}\| = e^{-t^3/12}\,. \tag{1.4.2}$$

En utilisant la formule

$$(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}=\int_0^{+\infty} e^{-t(\mathcal{A}-\lambda)}dt\,, \tag{1.4.3}$$

qui relie le semi-groupe d'un opérateur à sa résolvante (voir [56]), on peut alors montrer [101] que, pour tout λ tel que $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$,

$$\exists C_1, C_2 \geq 0\,,\ C_1|\operatorname{Re}\lambda|^{-1/4}e^{\frac{4}{3}(\operatorname{Re}\lambda)^{3/2}} \leq \|(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}\| \leq C_2|\operatorname{Re}\lambda|^{-1/4}e^{\frac{4}{3}(\operatorname{Re}\lambda)^{3/2}}\,. \tag{1.4.4}$$

Remarquons qu'un résultat plus précis a été obtenu par William Bordeaux-Montrieux [23].

L'opérateur d'Airy complexe sur $\mathbb{R}^+$

Nous nous intéresserons également aux réalisations de Dirichlet et de Neumann de l'opérateur d'Airy complexe sur $\mathbb{R}^+$.
On définit la réalisation de Dirichlet $\mathcal{A}^D$ de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}+ix$ sur $\mathbb{R}^+$ à partir de la forme sesquilinéaire

$$a(u,v)=-\int_0^{+\infty} u''(x)\overline{v(x)}dx+i\int_0^{+\infty} xu(x)\overline{v(x)}dx+\int_0^{+\infty} u(x)\overline{v(x)}dx\,, \tag{1.4.5}$$

définie sur le domaine de forme

$$V=\{u\in H_0^1(\mathbb{R}^+) : x^{1/2}u\in L^2(\mathbb{R}^+)\}\,.$$

La forme a est coercive ; le théorème de Lax-Milgram permet alors de définir l'opérateur $\mathcal{A}^D$ par

$$a(u,v)=\langle \mathcal{A}^D u, v\rangle\,,\ \forall v\in V\,, \tag{1.4.6}$$

sur le domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^D)=\{u\in H_0^1(\mathbb{R}^+), x^{1/2}u\in L^2(\mathbb{R}^+), (D_x^2+ix)u\in L^2(\mathbb{R}^+)\}\,. \tag{1.4.7}$$

Il s'agit d'un opérateur à résolvante compacte, son spectre est donc discret.
Nous donnerons plus d'informations sur l'opérateur $\mathcal{A}^D$ dans le chapitre 2, mais nous rappelons déjà le résultat suivant, énoncé et démontré dans [7], qui décrit ses éléments propres.

Théorème 1.4.1 *Le spectre de $\mathcal{A}^D$ est constitué des $\lambda_j=-e^{\frac{i\pi}{3}}\mu_j$,*
où $\cdots<\mu_{j+1}<\mu_j<\cdots<\mu_1<0$ sont les zéros de la fonction d'Airy Ai.
Une famille de fonctions propres u_n associées aux λ_n est donnée par

$$u_n=Ai(e^{\frac{i\pi}{6}}x+\mu_n)\,, \tag{1.4.8}$$

et cette famille est totale dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

On a par ailleurs l'estimation de résolvante suivante, voir [76] :

Proposition 1.4.2 *Pour tout $\omega<|\mu_1|/2$, où μ_1 est le premier zéro de la fonction Ai, il existe une constante $C_\omega>0$ telle que*

$$\sup_{\operatorname{Re} z\leq\omega}\|(\mathcal{A}^D-z)^{-1}\|\leq C_\omega\,. \tag{1.4.9}$$

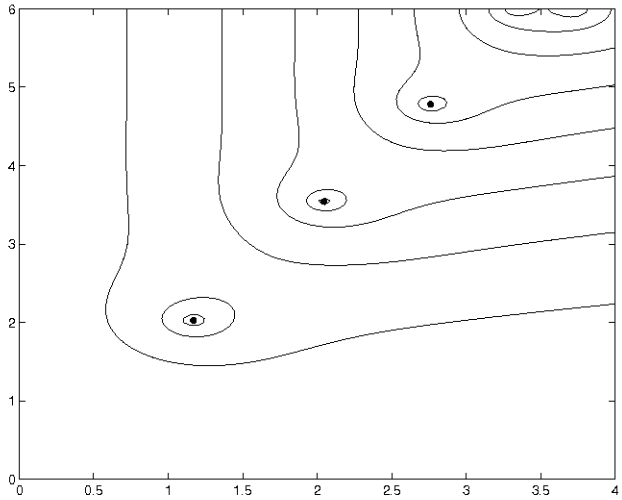

FIGURE 1.5 – Pseudospectre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + ix$ sur $\mathbb{R}^+$.

Cette estimation permet notamment d'appliquer le Théorème de Gearhardt-Prüss 1.2.2, et nous sera utile aux chapitres 4 et 5.

Nous montrerons dans le Théorème 2.1.1 que le spectre de $\mathcal{A}^D$ est très instable. La Figure 1.5, qui représente son pseudospectre pour différentes valeurs de ε, en est une illustration.

Dans la suite, nous considérerons une version légèrement plus générale de l'opérateur $\mathcal{A}^D$:

$$\mathcal{A}^D(1,\theta) = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta}x\,, \quad |\theta| < \frac{3\pi}{4}\,. \tag{1.4.10}$$

Nous nous intéresserons également à sa réalisation de Neumann $\mathcal{A}^N(1,\theta)$. Plus précisément, nous démontrerons le résultat suivant :

Théorème 1.4.3 *On note $(\kappa_n^D(1,\theta))_{n\geq 1}$ (resp. $(\kappa_n^N(1,\theta))_{n\geq 1}$) les indices d'instabilité de la réalisation de Dirichlet (resp. de Neumann) de l'opérateur*

$$-\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta}x \tag{1.4.11}$$

sur $\mathbb{R}^+$, avec $0 < |\theta| < 3\pi/4$.
Alors, il existe des suites réelles $(\alpha_j(\theta))_{j\geq 1}$ et $(\beta_j(\theta))_{j\geq 1}$ telles que

$$\kappa_n^D(1,\theta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(\theta)}{\sqrt{n}} \exp\left(C(\theta)(n-1/4)\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j(\theta) n^{-j}\right)\,, \tag{1.4.12}$$

et

$$\kappa_n^N(1,\theta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(\theta)}{\sqrt{n}} \exp\left(C(\theta)(n-3/4)\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j(\theta) n^{-j}\right)\,, \tag{1.4.13}$$

où

$$C(\theta) = 2\pi m_\theta^{3/2} |\sin\theta| \quad \textit{et} \quad K(\theta) = \left(2\sqrt{3|\sin\theta|} m_\theta^{1/4}\right)^{-1},$$

avec

$$m_\theta = \sqrt{1 + \frac{\sin^2(2\theta/3)}{\sin^2\theta} - 2\frac{\cos(\theta/3)\sin(2\theta/3)}{\sin\theta}} > 0\,.$$

1.4.2 L'opérateur de Davies et les oscillateurs anharmoniques complexes

Un autre exemple fondamental d'opérateur différentiel non-autoadjoint est donné par l'oscillateur harmonique complexe, souvent appelé opérateur de Davies, construit de la même façon que l'opérateur d'Airy complexe à partir de l'oscillateur harmonique autoadjoint standard. Il est souvent défini comme l'opérateur agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{H}_c = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^2, \tag{1.4.14}$$

où c est une constante complexe vérifiant $\operatorname{Re} c > 0$, $\operatorname{Im} c > 0$.
Selon les références, on considère aussi parfois le cas $c = i$, et c'est effectivement l'opérateur $\mathcal{H}_{c=i}$ qui interviendra dans les chapitres 4 et 5 de cette thèse. Cet opérateur a été introduit par E. B. Davies [43, 44, 41, 45] qui lui a donné le statut d'exemple modèle dans l'étude pseudospectrale des opérateurs non-autoadjoints. De nombreux travaux en ont découlé [144], [24], [116], qui ont abouti à une compréhension de plus en plus précise de ses propriétés pseudospectrales. Ainsi, après avoir montré que ses indices d'instabilité possèdent une croissance super-polynomiale dans [41], E. B. Davies a déterminé avec Kuijlaars [45] leur taux de croissance exponentielle, voir (1.4.19) et (1.4.20) ci-dessous. Par ailleurs, Boulton et Pravda-Starov [24], [116] ont étudié la forme générale du pseudospectre de $\mathcal{H}_c$ et précisé les directions asymptotiques de la frontière de $\sigma_\varepsilon(\mathcal{H}_c)$. De ces études découle en particulier l'estimation suivante sur la résolvante de l'opérateur $\mathcal{H}_i = -\frac{d^2}{dx^2} + ix^2$, que nous utiliserons dans les chapitres 4 et 5 et qui permet d'appliquer le Théorème de Gearhardt-Prüss 1.2.2 :
Pour tout $\omega < \sqrt{2}/2$, il existe $C_\omega > 0$ tel que

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq \omega} \|(\mathcal{H}_i - z)^{-1}\| \leq C_\omega\,. \tag{1.4.15}$$

Nous renvoyons également à la preuve directe de cette estimation proposée dans [75].
A l'heure qu'il est, l'opérateur de Davies continue à servir d'opérateur de référence, et de nombreux exemples ont été construits à partir de celui-ci pour illustrer de diverses manières les phénomènes non-autoadjoints. Nous l'avons rencontré à de nombreuses reprises au cours de ce travail, dans des problèmes de théorie du contrôle (voir le chapitre 5) comme dans l'étude semi-classique d'opérateurs plus généraux de la forme $-h^2\Delta + iV$, où V est à valeurs réelles (voir le chapitre 4).
Dans le chapitre 2, nous nous intéressons comme dans [41] à une famille plus générale d'*oscillateurs anharmoniques*

$$\mathcal{A}(m,\theta) = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta}|x|^m\,, \tag{1.4.16}$$

avec

$$|\theta| < \min\left\{\frac{(m+2)\pi}{4}, \frac{(m+2)\pi}{2m}\right\}. \tag{1.4.17}$$

Ces opérateurs agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ sont définis dans [41] en considérant la fermeture de la forme quadratique associée, qui est sectorielle si θ vérifie (1.4.17). D'après [41], le spectre de $\mathcal{A}(m,\theta)$ est constitué de valeurs propres discrètes, simples, que l'on classera dans l'ordre de module croissant et que l'on notera $(\lambda_n(m,\theta))_{n\geq 1}$. Les projecteurs spectraux Π_n associés sont de rang 1, et on définit comme dans la section 1.3 les indices d'instabilité

$$\kappa_n(m,\theta) := \|\Pi_n\|. \tag{1.4.18}$$

Nous utiliserons alors de manière cruciale l'expression donnée par (1.3.4) pour déterminer le comportement asymptotique de la suite $(\kappa_n(m,\theta))_{n\geq 1}$.
Rappelons que E. B. Davies a montré dans [41] et [42] que $\kappa_n(m,\theta)$ croît plus vite que toute puissance de n pour tout oscillateur anharmonique : pour tout $m \in]0,+\infty[$ et θ vérifiant (2.1.2), pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\kappa_n(m,\theta) \geq n^\alpha, \tag{1.4.19}$$

pour n suffisamment grand.
Ce résultat a été précisé dans le cas $m = 2$ de l'oscillateur harmonique complexe, puisque E. B. Davies et A. Kuijlaars montrent dans [45] que $\kappa_n(2,\theta)$ croît exponentiellement quand $n \to +\infty$, avec un taux donné explicitement. Ainsi, il existe $c(\theta)$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \kappa_n(2,\theta) = c(\theta). \tag{1.4.20}$$

Notre travail dans le chapitre 2 consistera à prouver que ce dernier résultat s'étend aux oscillateurs anharmoniques pairs $\mathcal{A}(2k,\theta)$, $k \geq 1$. Nous obtiendrons en fait des informations plus précises sur les indices d'instabilité de ces opérateurs quand $n \to +\infty$, puisque nous en déterminerons un développement asymptotique à tout ordre en puissances de n^{-1}. Plus précisément, nous démontrerons le résultat suivant :

Théorème 1.4.4 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et θ tel que $0 < |\theta| < \frac{(k+1)\pi}{2k}$. Si $\kappa_n(2k,\theta)$ désigne le n-ème indice d'instabilité de l'opérateur*

$$\mathcal{A}(2k,\theta) = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta}x^{2k}, \tag{1.4.21}$$

alors il existe $K(2k,\theta) > 0$ et une suite $(C^j(2k,\theta))_{j\geq 1}$ tels que

$$\kappa_n(2k,\theta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(2k,\theta)}{\sqrt{n}} e^{c_k(\theta)n}\left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} C^j(2k,\theta)n^{-j}\right), \tag{1.4.22}$$

avec

$$c_k(\theta) = \frac{2(k+1)\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2k}\right)\varphi_k(x_{\theta,k})}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}, \tag{1.4.23}$$

où

$$x_{\theta,k} = \left(\frac{\tan(|\theta|/(k+1))}{\sin(k|\theta|/(k+1)) + \cos(k|\theta|/(k+1))\tan(|\theta|/(k+1))}\right)^{\frac{1}{2k}} \quad (1.4.24)$$

$$\varphi_k(\xi) = \mathrm{Im} \int_0^{\xi e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}} (1-t^{2k})^{1/2} dt\,. \quad (1.4.25)$$

Dans la section D.1 de l'annexe D, nous vérifions que les développements (1.4.12), (1.4.13) et (1.4.22) restent valables pour décrire les indices d'instabilité de ces opérateurs lorsqu'on les définit sur n'importe quel espace L^p, $p \in]1,+\infty[$.

Signalons que la méthode utilisée au chapitre 2 pour démontrer le théorème 1.4.4 peut être utilisée pour obtenir un équivalent au premier ordre quand $n \to +\infty$ de $\kappa_n(m,\theta)$ pour tout $m \in [1,+\infty[$, sans se limiter aux cas $m = 1$ de l'opérateur d'Airy complexe ou m pair du théorème précédent. Néanmoins, à notre connaissance, pour $m \in [1,+\infty[$ quelconque, aucun développement asymptotique complet analogue à (2.3.23) n'a été donné concernant le spectre des réalisations de Dirichlet et de Neumann de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + x^m$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour cette raison, nous n'avons pas été capable jusque là de déterminer un développement asymptotique analogue à (1.4.22) pour tout $m \in [1,+\infty[$. Nous conjecturons en revanche qu'un tel développement existe, et nous renvoyons ce problème à des considérations ultérieures.

D'après la Proposition 1.3.3, une telle croissance des indices d'instabilité indique que la famille des fonctions propres de $\mathcal{A}(m,\theta)$ ne constitue pas une base, même en un sens faible. Nous démontrerons néanmoins qu'il s'agit de familles totales de l'espace L^2 :

Théorème 1.4.5 *Pour $m = 1$, $|\theta| < 2\pi/3$, ou $m = 2k$, $k \geq 1$, et θ vérifiant (2.1.2), les fonctions propres de $\mathcal{A}(m,\theta)$ forment une famille totale de l'espace $L^2(\mathbb{R})$.*

La Figure 1.6, réalisée à l'aide d'un code inspiré de [133], représente les bords du pseudospectre de quelques oscillateurs anharmoniques (1.4.16) pour certaines valeurs de ε. L'inégalité (1.3.6) et l'inclusion (1.3.7) (voir aussi l'annexe A) semblent indiquer que la question de la croissance des indices d'instabilité est liée à l'étude de la taille, en fonction de ε, des petits disques que l'on voit apparaître autour des premières valeurs propres sur les simulations.

1.4.3 Opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques

En mécanique quantique, l'état d'un système, ses niveaux d'énergie et son évolution dans le temps sont déterminés par un opérateur H appelé hamiltonien. Cette théorie est bâtie sur un certain nombre d'axiomes fondamentaux, dont la plupart sont imposés par des phénomènes physiques. Par exemple, le fait que le spectre de H, qui représente les niveaux d'énergie du système, doit être réel, est une hypothèse naturelle du point de vue physique. L'évolution de l'état d'un système quantique étant décrite par les solutions $\psi(t,x) = e^{itH}\psi_0(x)$ de l'équation de Schrödinger associée au hamiltonien H, il est également naturel d'imposer à l'opérateur d'évolution e^{itH} d'être unitaire, c'est-à-dire $\|e^{itH}\| = 1$

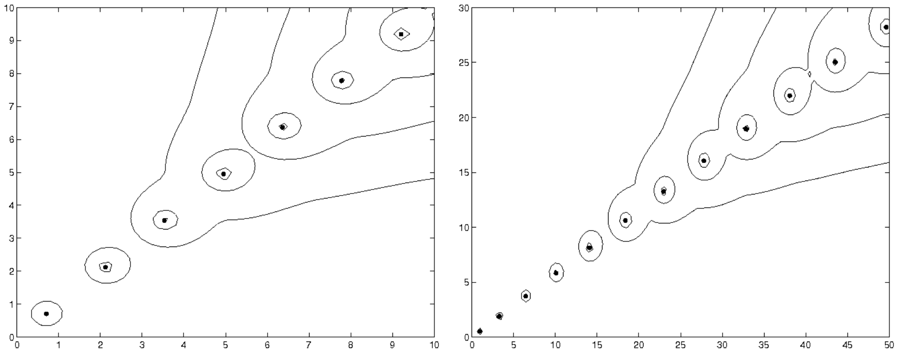

FIGURE 1.6 – Pseudospectres des oscillateurs harmonique et quartique complexes ($k = 1$ et $k = 2$ respectivement).

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, les solutions $\psi(t, x)$ représentant la densité de probabilité de présence d'une particule quantique au temps t, il est indispensable que leur norme soit préservée dans le temps. Pour ces raisons, les physiciens supposent assez systématiquement que l'opérateur H est autoadjoint, ce qui garantit ces propriétés. Néanmoins, selon C. M. Bender [18], cette hypothèse n'est pas réellement justifiée du point de vue de la physique, et n'est adoptée qu'afin de garantir les axiomes physiques d'énergies réelles et d'évolution unitaire. Selon certains physiciens, il serait donc possible de donner un sens, dans le cadre de la mécanique quantique, à des théories faisant intervenir des opérateurs non-autoadjoints, pour peu que leur spectre soit réel et leur évolution dans le temps unitaire.
Ainsi, depuis quelques années, physiciens et mathématiciens ont cherché à remplacer la symétrie propre aux opérateurs autoadjoints par un autre type de symétrie dans l'espace-temps, plus faible, appelée $\mathcal{PT}$-symétrie. Pour définir les opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques, on se place dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. On note $\mathcal{P}$ l'opérateur de parité

$$\mathcal{P} : u(x) \mapsto u(-x)\,,$$

et $\mathcal{T}$ l'opérateur d'inversion temporelle

$$\mathcal{T} : u(x) \mapsto \overline{u(x)}$$

(la conjugaison par $\mathcal{T}$ transforme formellement t en $-t$ dans le terme d'évolution $i\partial_t$ de l'équation de Schrödinger).

Définition 1.4.6 *L'opérateur $\mathcal{A}$ est $\mathcal{PT}$-symétrique si*

$$[\mathcal{PT}, \mathcal{A}] = 0\,.$$

Un grand nombre de travaux ont été consacrés à cette recherche de propriétés mathématiques communes aux opérateurs autoadjoints et $\mathcal{PT}$-symétriques : propriétés spectrales, pseudospectrales, et propriétés des fonctions propres. Si certaines analogies peuvent effectivement être constatées, notamment la réalité du

spectre dans certains cas, nous verrons que la propriété de $\mathcal{PT}$-symétrie ne permet pas à elle seule d'assurer les bonnes propriétés physiques attendues.
Les opérateurs de Schrödinger constituent évidemment le premier cas d'étude. Dans ce cas, l'opérateur $-\Delta + V$ est $\mathcal{PT}$-symétrique si et seulement si le potentiel vérifie $V(-x) = \overline{V(x)}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'un des modèles de base pour de tels opérateurs est l'*oscillateur cubique complexe* $\mathcal{A}_\alpha$, qui fera l'objet du chapitre 3 de cette thèse. Il s'agit de l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{A}_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + ix^3 + i\alpha x\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{1.4.26}$$

Il est clair que $\mathcal{A}_\alpha$ est $\mathcal{PT}$-symétrique quand α est réel.
L'oscillateur cubique complexe $\mathcal{A}_\alpha$, ainsi que ses variantes (le potentiel $x^2 + ix^3$, par exemple), ont fait l'objet d'un intérêt particulier au cours des dernières décennies (voir [28, 31, 20, 46, 47, 48, 124, 135, 136, 29, 18, 73, 97]). Ces travaux ont souvent été motivés par la conjecture de Bessis-Zinn-Justin, dont les simulations numériques avaient laissé deviner que le spectre de l'opérateur anharmonique impair $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + ix^3$ était réel. Certains travaux de Caliceti, Graffi et Maioli [28], [31] ont été consacrés à cet opérateur, plus précisément à la famille d'opérateurs $\mathcal{H}_\beta = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \beta x^{2n+1}$ $(\beta \in \mathbb{C})$. Plus tard, la conjecture de Bessis-Zinn-Justin a été prouvée par Shin [124] (voir aussi [46],[47]), dont le résultat, qui porte plus généralement sur les opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques à potentiels polynomiaux, entraîne en particulier :

Théorème 1.4.7 *Pour tout* $\alpha \geq 0$, *on a* $\sigma(\mathcal{A}_\alpha) \subset \mathbb{R}$.

Les propriétés du spectre de $\mathcal{A}_\alpha$ sont moins connues pour les valeurs négatives du paramètre α. Des simulations numériques (voir [46], [47], [48]) reproduites sur la figure 1.7 semblent indiquer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une valeur critique $\alpha_n^{crit} < 0$ du paramètre telle que $\lambda_n(\alpha)$ est réel pour $\alpha > \alpha_n^{crit}$. Pour $\alpha = \alpha_n^{crit}$, $\lambda_n(\alpha_n^{crit})$ croiserait une valeur propre consécutive pour former ensuite, pour $\alpha < \alpha_n^{crit}$, une paire complexe conjuguée située en dehors de l'axe réel. En ce qui concerne l'étude à α fixé des grandes valeurs propres que nous effectuons dans le chapitre 3, la conjecture voudrait que, pour tout $\alpha < 0$ fixé, les valeurs propres $\lambda_n(\alpha)$ soient toutes réelles à partir d'un certain rang N_α, où $N_\alpha \to +\infty$ quand $\alpha \to -\infty$ (voir Figure 1.7).

L'oscillateur cubique tel qu'il est présenté dans cette thèse a également été étudié dans [48] et [135]. Mentionnons également [73] qui considère une perturbation quadratique du potentiel cubique ix^3.
Par ailleurs, Bender et d'autres auteurs ont étudié plusieurs opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques, notamment $-\frac{d^2}{dx^2} + m^2x^2 - (ix)^N$ avec $N > 0$ [20], dont le cas $m = 0$ et $N = 3$ correspond à l'oscillateur cubique étudié ici avec $\alpha = 0$.
Enfin, le récent article [97] prend l'exemple de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ pour répondre par la négative à certaines questions concernant la possibilité de donner un sens physique aux opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques, voir le Théorème 1.4.10 ci-après.

Les travaux portant sur les opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques ne se limitent pas au seul oscillateur cubique. Par exemple, des critères pour l'existence ou la non-existence de valeurs propres en dehors de l'axe réel ont été formulés dans [29], dans le cas de certaines perturbations $\mathcal{PT}$-symétriques d'opérateurs de

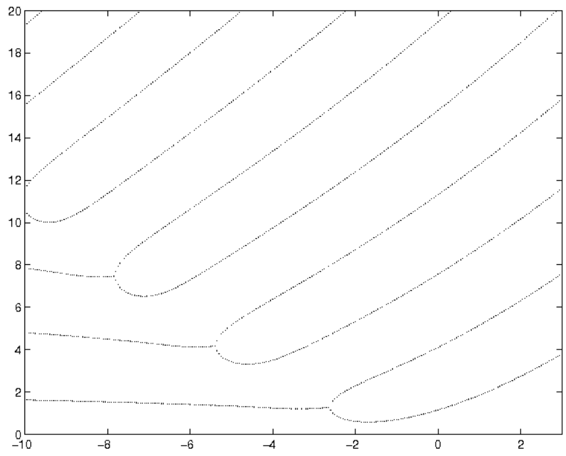

FIGURE 1.7 – Parties réelles des valeurs propres de $\mathcal{A}_\alpha$ en fonction de α.

Schrödinger autoadjoints. Nous consacrons une partie de l'Annexe D à l'étude de cette situation. D'autres critères concernant des questions similaires sont donnés dans [30].
Signalons également le travail de Borisov et Krejcirik [22], où le caractère $\mathcal{PT}$-symétrique des opérateurs non-autoadjoints étudiés provient du choix des conditions aux bords. Plus précisément, ils considèrent le guide d'onde H_α sur $\Omega = \mathbb{R}\times]0, d[$ défini par

$$\begin{cases} H_\alpha \psi = -\Delta\psi & \text{sur } \Omega\,, \\ \partial_2\psi + i\alpha\psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

où la fonction α est bornée et à valeurs réelles.
Dans certains cas où α peut être considéré comme perturbation d'une constante α_0, les auteurs donnent des critères assurant que le spectre essentiel ou ponctuel est réel.

Bien que la propriété de spectre réel, rencontrée dans de nombreux cas d'opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques, soit surprenante pour un opérateur non-autoadjoint, elle ne permet évidemment pas d'établir une véritable analogie entre opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques et opérateurs autoadjoints. Les notions d'opérateur *quasi-hermitien* et d'*opérateur métrique* associé à un opérateur non-autoadjoint ont été introduites (voir [97] et les références qu'il contient) pour désigner des opérateurs similaires, en un certain sens, à des opérateurs autoadjoints. On s'appuie sur [97] dans la suite de cette section.

Définition 1.4.8 *L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit quasi-hermitien s'il existe un opérateur Θ positif et borné tel que*

$$\Theta\,\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})\,,$$

et

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\,, \quad \Theta\,\mathcal{A}\,\psi = \mathcal{A}^*\,\Theta\,\psi\,. \tag{1.4.27}$$

Θ est alors appelé opérateur métrique associé à $\mathcal{A}$.

L'existence d'un opérateur métrique borné Θ vérifiant (1.4.27) n'implique pas en général que $\mathcal{A}$ possède des propriétés spectrales (ou pseudospectrales) comparables à celles d'un opérateur autoadjoint. C'est ce que nous allons constater dans le cas de l'oscillateur cubique $\mathcal{A}_\alpha$.
En revanche, dans le cas où Θ a la propriété supplémentaire d'être inversible et d'inverse borné, les conséquences de (1.4.27) sont nombreuses. Nous les résumons dans la proposition suivante :

Proposition 1.4.9 *Soit $\mathcal{A}$ tel qu'il existe un opérateur Θ positif, borné, inversible et d'inverse borné vérifiant (1.4.27). Alors :*

(i) Le spectre de $\mathcal{A}$ est réel.

(ii) Le pseudospectre de $\mathcal{A}$ est trivial en ce sens qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $z \in \rho(\mathcal{A})$, on a

$$\|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| \leq \frac{R}{|\operatorname{Im} z|} \,. \tag{1.4.28}$$

De plus, $R \leq \|\sqrt{\Theta}\|\|\sqrt{\Theta^{-1}}\|$.

(iii) Supposons que $\mathcal{A}$ soit un opérateur à résolvante compacte et à valeurs propres simples, et soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la famille des fonctions propres normalisées de $\mathcal{A}$. Supposons de plus que la famille $(u_n)_{n\geq 1}$ soit totale dans $\mathcal{H}$. Alors c'est une base de Riesz.

Rappelons que la famille $(u_n)_{n\geq 1}$ est une base de Riesz si (1.3.8) est vérifiée. En contredisant les points *(ii)* et *(iii)* de cette proposition, Krejcirik et Siegl montrent dans [97] le théorème suivant :

Théorème 1.4.10 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ est quasi-hermitien, mais il n'existe pas de pas de métrique Θ bornée et d'inverse borné vérifiant (1.4.27).*

Ce résultat met fin à l'espoir de mettre en place une théorie quantique qui s'appliquerait aux opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques ou quasi-hermitiens en toute généralité ; la condition Θ inversible, d'inverse borné, est en effet essentielle dans cette optique.

Au chapitre 3, nous chercherons également à comprendre les propriétés du pseudospectre et des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$, en déterminant comme dans les Théorèmes 1.4.3 et 1.4.4 le comportement asymptotique de ses indices d'instabilité. Plus précisément, nous montrerons le résultat suivant :

Théorème 1.4.11 *Pour tout $\alpha \geq 0$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \kappa_n(\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \,. \tag{1.4.29}$$

Le Théorème 1.4.11 et la Proposition 1.3.3 permettent de retrouver l'absence d'opérateur métrique d'inverse borné dans le cas $\alpha \geq 0$. C'est en effet immédiat à vérifier dans ce cas : on peut choisir les fonctions propres $(u_n^\alpha)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{A}_\alpha$ telles que, pour tout $n, m \geq 1$, $\langle u_n^\alpha, \overline{u_m^\alpha}\rangle = \delta_{n,m}$, et on a alors $\kappa_n(\alpha) = \|u_n^\alpha\|^2$ d'après la Proposition 1.3.2. En considérant la suite $\phi_n = \overline{u_n^\alpha}$, on a donc

$$\|\phi_n\|^2 = \kappa_n(\alpha) \to +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle \phi_n, u_j\rangle|^2 = 1 \,,$$

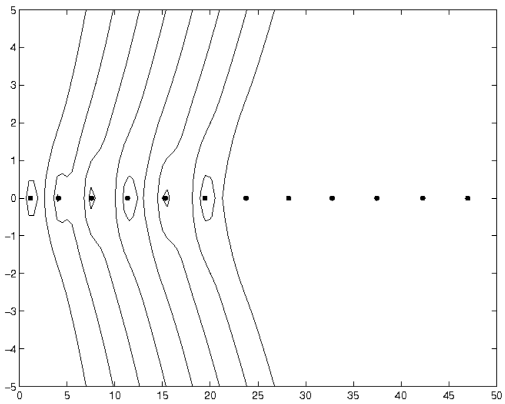

FIGURE 1.8 – Pseudospectre de l'oscillateur cubique complexe pour $\alpha = 0$.

ce qui contredit (1.3.8).
La généralisation à la dimension infinie de l'inclusion (1.3.7) (voir (A.1.1) dans l'annexe A) permet par ailleurs de contredire l'estimation (1.4.28). La présence d'un pseudospectre $\sigma_\varepsilon(\mathcal{A}_\alpha)$ bien plus étendu qu'un voisinage de taille ε autour des valeurs propres apparaît clairement sur la Figure 1.8.

1.5 Aperçu des résultats généraux sur l'instabilité spectrale

Depuis une dizaine d'années, un grand nombre de travaux ont contribué à généraliser les résultats sur le pseudospectre des modèles présentés à la section précédente. Ces études ont révélé que les particularités de modèles tels que l'oscillateur harmonique complexe (1.4.14) se retrouvent dans des situations bien plus générales.

Comme nous l'avons mentionné à la section 1.4, les premiers résultats concernant le pseudospectre d'opérateurs non-autoadjoints concernaient des situations particulières. Par exemple, le cas de l'oscillateur harmonique complexe a été largement analysé dans [41, 45, 24, 116].
Dans un contexte plus général, le pseudospectre est souvent étudié sous une forme semi-classique. Dans [42], E. B. Davies a considéré des opérateurs de Schrödinger $H_h = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ en dimension 1, où V est un potentiel à valeurs complexes. Il a montré que pour tout z de la forme

$$z = \xi^2 + V(x)\,, \qquad \xi \neq 0,\ \operatorname{Im} V'(x) \neq 0\,, \tag{1.5.1}$$

on peut construire un quasimode de type WKB associé à z, modulo $\mathcal{O}(h^n)$ pour tout $n \geq 1$. Autrement dit, il a mis en évidence l'existence d'une région pseudospectrale étendue dans laquelle la résolvante de H_h explose plus vite que toute puissance de h^{-1}. Ce résultat a ensuite été généralisé dans [144].
Dans [49], N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski s'intéressent aux mêmes questions dans une situation plus générale, où la condition (1.5.1) est reformulée

sous la forme d'une condition de crochet de Poisson sur le symbole de l'opérateur. Plus précisément, pour $p \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$, on note

$$\Lambda(p) = \overline{p(\{\rho \in T^*\mathbb{R}^n : \{p, \bar{p}\}(\rho) \neq 0\})}\,,$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne le crochet de Poisson.
On rappelle que l'opérateur $p^w(x, hD_x)$ désigne le quantifié de Weyl de p, défini par

$$p^w(x, hD_x)u = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{\frac{i}{h}\langle x-y, \xi\rangle} u(y)dyd\xi\,. \tag{1.5.2}$$

Dans [49], les auteurs expliquent comment se ramener au cas de symboles p bornés ainsi que toutes leurs dérivées. Dans ce cas, l'opérateur défini par (1.5.2) est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Le résultat de [49] est le suivant : si $P(h)$ est un opérateur dont la partie principale est donnée par $p^w(x, hD_x)$, avec $p^{-1}(z)$ compact pour un ensemble dense de $z \in \mathbb{C}$, alors il existe un ouvert dense $\tilde{\Lambda}$ de $\Lambda(p)$ tel que, pour tout $z \in \tilde{\Lambda}$, il existe $u(h) \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\|(P(h) - z)u(h)\| = \mathcal{O}(h^\infty)\|u(h)\|\,. \tag{1.5.3}$$

Dans le cas où le symbole p possède une extension holomorphe dans un voisinage de l'axe réel, il s'agit en fait d'un quasimode modulo $\mathcal{O}(e^{-c/h})$. Ce résultat repose encore sur la construction de quasimodes de type WKB, microlocalisés en un point $(x, \xi) \in p^{-1}(z)$.
En plus de cette minoration de la résolvante, les auteurs en donnent une majoration polynomiale au bord de l'ensemble $\Lambda(p)$, qui permet de retrouver directement certaines estimations utilisées dans cette thèse. En effet, dans de nombreux cas tels que l'opérateur d'Airy ou l'oscillateur harmonique, les estimations semiclassiques peuvent être reformulées par changment d'échelle pour obtenir des estimations quand $|z| \to +\infty$ dans certaines directions.

De nombreux travaux ont contribué à compléter les résultats de [49]. Beaucoup d'entre eux s'appuient sur le travail de J. Sjöstrand en 1974 [127]. Dans [117], K. Pravda-Starov s'intéresse au cas des opérateurs quadratiques (c'est-à-dire dont le symbole est une forme quadratique). Plus précisément, il montre que si cet opérateur est *elliptique*, il existe un quasimode vérifiant (1.5.3) associé à chaque point z situé à l'intérieur de l'image numérique de l'opérateur.
A l'inverse, M. Hitrik, J. Sjöstrand et J. Viola [91] s'intéressent à des majorations de la résolvante pour des opérateurs quadratiques elliptiques. Ils montrent ainsi des bornes de la forme $\mathcal{O}(e^{c/h})$ en dehors d'un voisinage du spectre. Dans [140], J. Viola affaiblit ces hypothèses en remplaçant la condition d'ellipticité par la condition d'ellipticité partielle $S_q = \{0\}$ sur le symbole q, où l'ensemble singulier S_q est l'espace défini plus loin par (1.5.8). L'estimation de résolvante obtenue dans ce cas comporte alors une perte $k_0 > 0$:

$$\|(q^w(x, hD_x) - z)^{-1}\| \leq C\, e^{C/h^{1+2k_0}}\,. \tag{1.5.4}$$

Un autre contexte important est celui des opérateurs à caractéristiques doubles, largement étudiés depuis une dizaine d'années. Dans ce domaine encore, de nombreux travaux s'appuient sur [127]. Si $p : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est un symbole régulier, borné ainsi que toutes ses dérivées, le point z_0 est *à caractéristique double* si

$$p(z_0) = \nabla p(z_0) = 0\,.$$

Le premier terme dans le développement de Taylor de p au voisinage de z_0 est alors une forme quadratique q, dont les propriétés déterminent le comportement du spectre et de la résolvante de l'opérateur $p^w(x, hD_x)$ au voisinage de z_0.
L'étude de la résolvante de ces opérateurs a été initiée dans [88]. Sous certaines hypothèses d'ellipticité partielle, à la fois à l'infini et au voisinage des points à caractéristique double, F. Hérau, J. Sjöstrand et C. Stolk montrent une estimation semi-classique de la forme

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,, \quad h\|u\| \leq C\,\|(P(h) - zh)u\|\,, \tag{1.5.5}$$

pour tout $|z| \leq C'$ en-dehors d'un voisinage du spectre des approximations quadratiques de $P(1)$ autour des points à caractéristique double. Il en découle immédiatement une majoration de la résolvante en $\mathcal{O}(h^{-1})$. Ces résultats sont alors appliqués au cas de l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck

$$P = -\Delta_v + \frac{|v|^2}{4} - \frac{n}{2} + v \cdot \nabla_x - \nabla_x V(x) \cdot \nabla_v\,, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^{2n}\,, \tag{1.5.6}$$

dont l'étude, notamment concernant les problèmes de retour à l'équilibre, constitue une motivation majeure en théorie des opérateurs non-autoadjoints.
Dans [89], M. Hitrik et K. Pravda-Starov supposent que l'opérateur considéré est elliptique (et non plus "partiellement elliptique") à l'infini, mais affaiblissent les hypothèses locales sur l'approximation quadratique q du symbole au voisinage d'un point à caractéristique double. Plus précisément, ils supposent que $\operatorname{Re} q \geq 0$ et que q est elliptique le long de l'espace singulier associé à q, c'est-à-dire

$$\forall \rho = (x, \xi) \in S_q\,, \quad q(\rho) = 0 \Longrightarrow \rho = 0\,. \tag{1.5.7}$$

Ici l'ensemble S_q est défini par

$$S_q = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \ker(H^k_{\operatorname{Im} q} H_{\operatorname{Re} q})\,. \tag{1.5.8}$$

$H_{\operatorname{Re} q}$ et $H_{\operatorname{Im} q}$ désignent les champs de vecteurs hamiltoniens associés à $\operatorname{Re} q$ et $\operatorname{Im} q$, qui sont des applications linéaires sur $T^*\mathbb{R}^n$ car q est une forme quadratique. Sous la condition (1.5.7), M. Hitrik et K. Pravda-Starov montrent que l'estimation (1.5.5) reste valable.
Ce travail a été poursuivi dans [90]. Les auteurs font l'hypothèse plus forte $S_q = \{0\}$, et supposent que le reste dans le développement de Taylor d'ordre 2 du symbole au voisinage des points à caractéristique double est sectoriel. Sous ces conditions, ils obtiennent une meilleure estimation de résolvante :

$$\|(P(h) - z)^{-1}\| = \mathcal{O}(h^{-2k_0/(2k_0+1)}|z|^{-1/(2k_0+1)})\,,$$

pour tout z dans un domaine de la forme

$$\Omega_h = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{C} h^{2k_0/(2k_0+1)} |z|^{1/(2k_0+1)},\ Ch \leq |z| \leq C_0 \right\}.$$

Ici, l'indice $k_0 \geq 0$ est le même que dans (1.5.4) et est lié aux propriétés de sous-ellipticité de l'opérateur [118]. Il s'agit du plus petit entier tel que

$$\bigcap_{k=1}^{k_0} \ker(H_{\mathrm{Im}\, q}^k H_{\mathrm{Re}\, q}) = \{0\}\,.$$

Ces résultats ont été complétés par J. Viola [138, 139] et J. Sjöstrand [128], qui montrent que des estimations de résolvante en $\mathcal{O}(h^{-(1+\gamma)})$, pour $\gamma > 0$, sont valables dans un plus grand voisinage des points à caractéristique double, et plus près des éléments du spectre. De telles estimations ont été démontrées dans le cas où les approximations quadratiques sont elliptiques [138], puis sous l'hypothèse d'ellipticité partielle $S_q = \{0\}$ [139].

Pour finir, comme nous l'avons mis en évidence à la section 1.3, l'étude de la norme des projecteurs spectraux associés aux valeurs propres d'un opérateur permet d'en comprendre l'instabilité. Les chapitres 2 et 3 de cette thèse sont consacrés à ce sujet, et s'appuient sur les travaux de Davies [41] et Davies et Kuijlaars [45]. Dans [91] et [140], les auteurs étudient les indices d'instabilité d'opérateurs quadratiques en se ramenant à l'étude de polynômes orthogonaux avec un poids gaussien, généralisant l'approche utilisée en dimension 1 par [45] pour traiter le cas de l'oscillateur harmonique complexe (1.4.14). Ils en déduisent ainsi que les indices d'instabilité considérés ont un comportement similaire à ceux des opérateurs étudiés dans cette thèse, voir Théorèmes 1.4.3, 1.4.4 et 1.4.11. Comme nous ne nous plaçons pas ici dans le cas d'opérateurs quadratiques, la méthode utilisée dans cette thèse est néanmoins différente.
Dans l'annexe D, section D.3, nous rappelerons également les résultats de [106], qui donnent des exemples d'opérateurs dont les indices d'instabilité croissent à des vitesses variables, en recouvrant l'ensemble des comportements possibles depuis le cas d'une suite à croissance polynomiale, jusqu'à celui d'une croissance exponentielle de la forme e^{cn}.

1.6 Problèmes non-autoadjoints en supraconductivité : le système de Ginzburg-Landau dépendant du temps

1.6.1 Motivations

L'étude spectrale et pseudospectrale des opérateurs non-autoadjoints, bien que relativement récente en mathématiques, est motivée par de nombreux problèmes physiques. Nous avons en effet déjà mentionné dans la sous-section 1.4.3 certaines questions relatives à la "mécanique quantique non-hermitienne", qui consiste à essayer de généraliser les théories quantiques habituelles en donnant un sens à des hamiltoniens non-autoadjoints tout en préservant les axiomes fondamentaux de la mécanique quantique. Nous avons également mentionné dans la section 1.5 certains problèmes de théorie cinétique, tels que l'étude du retour à l'équilibre pour l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck (1.5.6).
Dans le chapitre 4, nous étudierons certains opérateurs non-autoadjoints dont l'étude aboutira à des applications dans le domaine de la supraconductivité.

Les supraconducteurs sont des matériaux qui possèdent la propriété de perdre toute leur résistance électrique lorsqu'ils sont placés à une température très basse, inférieure à leur température critique généralement proche du zéro absolu. Ce phénomène résulte, à l'échelle microscopique, de la liaison de certains électrons formant des paires appelées *paires de Cooper*. Ces électrons se retrouvent alors tous dans le même état quantique et se déplacent sans résistance dans le supraconducteur.
Néanmoins, si le matériau est soumis à un courant suffisamment fort, le phénomène disparait et le supraconducteur retourne à son état normal, même si la température est encore inférieure à sa température critique.
Ce principe peut être représenté par le modèle de Ginzburg-Landau dépendant du temps : il s'agit d'un système d'équations régissant un *paramètre d'ordre* ψ qui caractérise la supraconductivité, et dont le carré du module est proportionnel à la densité d'électrons formant des paires de Cooper. Ainsi, la solution $\psi \equiv 0$ correspond à l'état normal où le phénomène n'apparait pas ; à l'inverse, la solution $\psi \equiv 1$ caractérise l'état purement supraconducteur, dans lequel l'ensemble du matériau a perdu toute résistance électrique.
Dans la suite de cette sous-section, nous nous limitons au cas de la dimension 2 pour énoncer les équations qui nous intéressent. Dans ce contexte, le système de Ginzburg-Landau dépendant du temps est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \psi + i\Phi\psi = (\nabla - i\mathbf{A})^2\psi + \psi(1-|\psi|^2)\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\,, \\ \kappa^2 \mathrm{curl}^2 \mathbf{A} + \sigma(\partial_t \mathbf{A} + \nabla\Phi) = \mathrm{Im}\,(\overline{\psi}(\nabla - i\mathbf{A})\psi)\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\,, \\ \psi(t,x) = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega\,, \\ \sigma(\partial_t \mathbf{A}(t,x) + \nabla\Phi(t,x)) \cdot \vec{n}(x) = J(x)\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega\,, \\ \mathrm{curl}\ \mathbf{A}(t,x) = H_{ex}(x)\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega\,, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x)\,, & x \in \Omega\,, \\ \mathbf{A}(0,x) = \mathbf{A}_0(x)\,, & x \in \Omega\,. \end{cases} \tag{1.6.1}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ désigne un ouvert borné, régulier et connexe, et $\vec{n}(x)$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x. L'équation porte sur les trois fonctions $\psi(t,x) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}(t,x) \in \mathbb{R}^2$ et $\Phi(t,x) \in \mathbb{R}$. La fonction ψ est le paramètre d'ordre, $\mathbf{A}$ désigne le potentiel magnétique, et Φ le courant électrique. Le supraconducteur est soumis à un champ magnétique extérieur H_{ex} , et à un courant électrique $J \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$ appliqué à travers Ω. La constante κ désigne le paramètre de Ginzburg-Landau, propre au matériau, et σ sa conductivité normale.

La partie linéaire de ce système fait intervenir un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

$$\mathcal{L} = -(\nabla - i\mathbf{A})^2 + i\Phi\,,$$

dont l'étude spectrale et pseudospectrale [9, 10, 11, 8] a abouti à certains résultats concernant la stabilité de l'état normal. Dans cette thèse, nous considérons comme dans [7] le cas où le système ne comporte pas de champ magnétique.

Sous des hypothèses additionnelles et après linéarisation de ce système autour de l'état normal (voir la section 4.9 et [7]), nous sommes amenés à étudier l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \psi - \Delta \psi + i\Phi\psi - \psi = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\,, \\ \psi(t,x) = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega\,, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x)\,, & x \in \Omega\,. \end{cases} \tag{1.6.2}$$

Dans la sous-section qui suit, nous présentons certains résultats théoriques obtenus dans cette thèse qui nous permettront de retrouver, dans un cadre légèrement différent, les résultats de Y. Almog [7] sur la stabilité de l'état normal dans l'équation 1.6.2.

1.6.2 Présentation des résultats

Dans le chapitre 4, nous considérerons, pour $n \geq 1$, $h_0 > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ régulier et borné, l'opérateur

$$\mathcal{A}_h = -h^2\Delta + iV(x)\,, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_h) = H_0^1(\Omega;\mathbb{C}) \cap H^2(\Omega:\mathbb{C})\,, \tag{1.6.3}$$

où $V \in \mathcal{C}^\infty(\Omega\,;\mathbb{R})$.
Comme nous l'avons souligné à la section 1.2, l'étude des solutions du problème d'évolution 1.2.1 associé à l'opérateur $\mathcal{A}_h$ passe par la compréhension du spectre de $\mathcal{A}_h$, mais aussi de son pseudospectre.
En supposant d'abord que V n'admet pas de point critique, hypothèse souvent naturelle dans le contexte de la supraconductivité, nous montrerons le résultat suivant :

Théorème 1.6.1 *Soient $n \geq 1$ et $V \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega};\mathbb{R})$ tels que, pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $\nabla V(x) \neq 0$. On note*

$$\partial\Omega_\perp = \{x \in \partial\Omega : \nabla V(x) \times \vec{n}(x) = 0\}\,, \tag{1.6.4}$$

où $\vec{n}(x)$ désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x.

(i) Supposons que $\partial\Omega_\perp \neq \emptyset$. Soit $\mu_1 < 0$ le premier zéro de la fonction d'Airy Ai, et soit

$$J_m = \min_{x \in \partial\Omega_\perp} |\nabla V(x)|\,. \tag{1.6.5}$$

On a alors

$$\varliminf_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) \geq \frac{|\mu_1|}{2} J_m^{2/3}\,. \tag{1.6.6}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_\varepsilon \in (0, h_0)$ et $C_\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon)\,, \qquad \sup_{\substack{\gamma \,\leq\, |\mu_1| J^{2/3}/2, \\ \nu \,\in\, \mathbb{R}}} \|(\mathcal{A}_h - (\gamma-\varepsilon)h^{2/3} - i\nu)^{-1}\| \leq \frac{C_\varepsilon}{h^{2/3}}\,. \tag{1.6.7}$$

(ii) Si $\partial\Omega_\perp = \emptyset$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) = +\infty\,,$$

et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, il existe $h_\omega \in (0, h_0)$ et $C'_\omega > 0$ tels que

$$\forall h \in (0, h_\omega), \qquad \sup_{\substack{\gamma \,\leq\, \omega, \\ \nu \,\in\, \mathbb{R}}} \|(\mathcal{A}_h - \gamma h^{2/3} - i\nu)^{-1}\| \leq \frac{C'_\omega}{h^{2/3}}\,. \tag{1.6.8}$$

En dimension 1, nous préciserons ce résultat en donnant la limite exacte de $h^{-2/3} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h)$ au lieu de (1.6.6) :

Théorème 1.6.2 *Soient $h_0 > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $V \in \mathcal{C}^\infty((a,b);\mathbb{R})$. Pour $h \in (0, h_0)$, on considère l'opérateur*

$$\mathcal{A}_h = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x)\,, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_h) = H_0^1(a,b) \cap H^2(a,b)\,.$$

Supposons que, pour tout $x \in (a,b)$, $V'(x) \neq 0$. Alors,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) = \frac{|\mu_1|}{2} J^{2/3}\,, \tag{1.6.9}$$

où $J = \min(|V'(a)|, |V'(b)|)$.

Indépendamment des problèmes issus de la supraconductivité, le cas où V possède des points critiques paraît également intéressant. Nous montrerons donc le théorème suivant :

Théorème 1.6.3 *Soit V une fonction de Morse sur Ω. On désigne par $x_1^c, \dots, x_p^c$, $p \in \mathbb{N}^*$, les points critiques de V, et pour $k = 1, \dots, p$, on note*

$$\kappa_k = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|\lambda_j^k|}\,, \tag{1.6.10}$$

où $\{\lambda_j^k\}_{j=1,\dots,n} = \sigma(\mathrm{Hess} V(x_k^c))$.
Soit

$$\kappa = \min_{k=1,\dots,p} \kappa_k\,.$$

On suppose que, si $\kappa_k = \kappa$, alors pour tout $\ell \neq k$,

$$V(x_k^c) \neq V(x_\ell^c)\,. \tag{1.6.11}$$

Alors,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{h} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) = \frac{\kappa}{2}\,. \tag{1.6.12}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_\varepsilon \in (0, h_0)$ et $C_\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon)\,, \qquad \sup_{\substack{\gamma\,\leq\,\kappa/2,\\ \nu\,\in\,\mathbb{R}}} \|(\mathcal{A}_h - (\gamma - \varepsilon)h - i\nu)^{-1}\| \leq \frac{C_\varepsilon}{h}\,. \tag{1.6.13}$$

Remarquons qu'ici, nous serons en mesure de déterminer la limite exacte de $h^{-1} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h)$.

Ces résultats nous permettront de déterminer le comportement des solutions du problème d'évolution associé à $\mathcal{A}_h$. En effet, en utilisant une version précisée du Théorème de Gearhardt-Prüss (Théorème 1.2.2) établie dans [83], nous obtiendrons le résultat suivant :

Corollaire 1.6.4 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_\varepsilon \in (0, h_0)$ et $M_\varepsilon > 0$ tels que :*

(i) Sous les hypothèses du Théorème 1.6.1,

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon), \ \ \forall t > 0, \quad \|e^{-t\mathcal{A}_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq M_\varepsilon \ \exp(-(|\mu_1|J_m^{2/3}/2-\varepsilon)h^{2/3}t)\,. \tag{1.6.14}$$

(ii) Sous les hypothèses du Théorème 1.6.3,

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon), \quad \forall t > 0, \quad \|e^{-t\mathcal{A}_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq M_\varepsilon \ \exp(-(\kappa/2 - \varepsilon)ht)\,. \tag{1.6.15}$$

(iii) Sous les hypothèses du Théorème 1.6.2, la constante $|\mu_1|J_m^{2/3}/2$, ainsi que la puissance de h, sont optimales dans (1.6.14). De même, sous les hypothèses du Théorème 1.6.3, la constante $\kappa/2$ et la puissance de h sont optimales dans (1.6.15).

En particulier, le point (i) du corollaire précédent peut être reformulé pour retrouver, dans le cas d'un ouvert régulier, le résultat de Y. Almog [7] concernant la stabilité des solutions de (1.6.2) dans un grand domaine.
Pour $R > 1$, on note $\Omega_R = \{Rx : x \in \Omega\}$, et on considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t\psi_R - \Delta\psi_R + iR\Phi_n\left(\frac{x}{R}\right)\psi_R - \psi_R = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_R\,, \\ \psi_R(t,x) = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega_R\,, \\ \psi_R(0,x) = \psi_{0,R}(x)\,, & x \in \Omega_R\,, \end{cases} \tag{1.6.16}$$

où Φ_n est une fonction régulière dans $\bar{\Omega}$ telle que, pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $\nabla\Phi_n(x) \neq 0$.
On a alors

Théorème 1.6.5 *Soit*

$$\partial\Omega_\perp = \{x \in \partial\Omega : \nabla\Phi_n(x) \times \vec{n}(x) = 0\}$$

et, si $\partial\Omega_\perp \neq \emptyset$,

$$J_m = \min_{x\in\partial\Omega_\perp} |\nabla\Phi_n(x)|\,.$$

Soit

$$J_c = \left(\frac{2}{|\mu_1|}\right)^{3/2}\,.$$

Si $\partial\Omega_\perp = \emptyset$ ou $J_m > J_c$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_0 > 1$ et $M_\varepsilon > 0$ tels que, pour tous $R \geq R_0$ et $\psi_{0,R} \in H_0^1(\Omega_R) \cap H^2(\Omega_R)$, la solution ψ_R de (1.6.16) vérifie

$$\forall t > 0\,, \quad \|\psi_R(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_R)} \leq M_\varepsilon \exp(-((J_m/J_c)^{2/3} - 1 - \varepsilon)t)\|\psi_{0,R}\|_{L^2(\Omega_R)}\,. \tag{1.6.17}$$

Le Théorème 1.6.1 pourrait également permettre d'étudier la stabilité des solutions du système de Ginzburg-Landau non linéaire en l'absence de champ magnétique, en s'inspirant des résultats obtenus dans [8] en présence de champ magnétique. Cependant, ce problème n'a pas été abordé dans cette thèse.

1.7 Opérateurs non-autoadjoints dans des problèmes de contrôle

Dans le chapitre 5 qui reproduit un travail en commun avec K. Beauchard, B. Helffer et L. Robbiano [15], nous verrons comment résoudre certains problèmes issus de la théorie du contrôle à l'aide de l'étude spectrale et pseudospectrale des modèles non-autoadjoints présentés dans la section 1.4.
En théorie du contrôle, on cherche à introduire un terme source dans une équation de sorte que ses solutions atteignent, à un temps donné T, n'importe quel état souhaité à partir d'un état initial fixé. Le terme source servant à contrôler l'équation est généralement localisé dans un sous-ensemble du domaine dans lequel l'équation est considérée. Au chapitre 5, nous étudierons plus précisément la *contrôlabilité à zéro* du système, c'est-à-dire la possibilité de choisir le terme source de façon à ce que la solution s'annule au temps T. Ce problème est équivalent à celui de la contrôlabilité aux trajectoires, qui consiste à contrôler l'équation de façon à ce que la trajectoire considérée rejoigne au temps T n'importe quelle autre trajectoire donnée. De manière équivalente, il s'agit alors d'étudier l'*observabilité* du problème d'évolution associé à l'opérateur adjoint, voir l'inégalité (1.7.3).

Nous considèrerons l'équation

$$\begin{cases} \partial_t f - v^\gamma \partial_x f - \partial_v^2 f = u(t,x,v) 1_\omega(x,v)\,, & (t,x,v) \in (0,T) \times \Omega\,, \\ f(t,x,\pm 1) = 0\,, & (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{T}\,, \\ f(0,x,v) = f_0(x,v)\,, & (x,v) \in \Omega\,, \end{cases} \tag{1.7.1}$$

où $\Omega = \mathbb{T} \times (-1,1)$, $\gamma \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$. Il s'agit d'un système préalablement étudié dans [13], qui se rapproche des équations de Prandtl et de Crocco linéarisées en mécanique des fluides.
L'équation est ici contrôlée par le terme $u(t,x,v)1_\omega(x,v)$ sur un ouvert ω non-vide de Ω.
On définit la contrôlabilité à zéro de cette équation de la façon suivante :

Définition 1.7.1 *Soit $T > 0$ et $\gamma \in \mathbb{N}^*$. Le système (1.7.1) est* contrôlable à zéro au temps *T si, pour tout $f_0 \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in L^2((0,T)\times\Omega)$ tel que la solution de (1.7.1) vérifie $f(T,\cdot,\cdot) \equiv 0$.*

Comme annoncé précédemment, le système (1.7.1) est contrôlable à zéro au temps T si et seulement si le problème associé à l'opérateur adjoint,

$$\begin{cases} \partial_t g + v^\gamma \partial_x g - \partial_v^2 g = 0\,, & (t,x,v) \in (0,+\infty) \times \Omega\,, \\ g(t,x,\pm 1) = 0\,, & (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{T}\,, \\ g(0,x,v) = g_0(x,v)\,, & (x,v) \in \Omega\,, \end{cases} \tag{1.7.2}$$

vérifie l'inégalité d'observabilité suivante : il existe $C > 0$ tel que, pour tout $g_0 \in L^2(\Omega)$, la solution du problème de Cauchy (1.7.2) vérifie

$$\int_\Omega |g(T,x,v)|^2\, dxdv \leqslant \mathcal{C} \int_0^T \int_\omega |g(t,x,v)|^2\, dxdvdt\,. \tag{1.7.3}$$

La quesiton de l'observabilité d'un système est liée à celle de la vitesse de propagation de ses solutions. Par exemple, l'impossibilité d'observer une équation en un temps T arbitrairement petit provient généralement de sa vitesse finie de propagation, qui ne permet pas aux informations contenues dans l'ouvert ω de se propager en un temps arbitrairement petit à l'ensemble du domaine Ω. Dans le cas du système dégénéré (1.7.1) considéré ici, nous verrons que la vitesse de propagation dépend de la vitesse de transport v^γ dans la variable x. Par conséquent, les résultats obtenus dépendront de la valeur de l'exposant γ.

La contrôlabilité à zéro d'équations paraboliques dégénérées a été étudiée dans [36, 37, 35] dans le cas où la dégénérescence se situe à la frontière du domaine. La plupart des résultats concernant cette situation se limitent au cadre de la dimension 1.
Par ailleurs, dans [103], les auteurs étudient des équations paraboliques dégénérées à l'intérieur du domaine et prouvent qu'elles ne sont pas contrôlables à zéro. Néanmoins, dans le cas du système (1.7.1) que nous considérons ici, le couplage entre le terme de diffusion $-\partial_v^2$ et le terme de transport à vitesse v^γ aboutira à des résultats de nature différente.
Citons également [14] qui traite de la contrôlabilité à zéro du problème d'évolution associé à l'opérateur $-\partial_x^2 - |x|^{2\gamma}\partial_y^2$ dans $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ avec condition de Dirichlet au bord, où $\gamma > 0$. Comme dans les résultats qui suivent, la contrlôabilité à zéro de ces équations dépend de l'exposant γ.

Dans le chapitre 5 [15], nous cherchons à comprendre si le système (1.7.2) est observable dans une bande horizontale ou verticale, en fonction de la valeur de l'exposant γ. Nous démontrerons d'abord le résultat suivant concernant l'observabilité dans une bande horizontale :

Théorème 1.7.2 *Si $\gamma \geqslant 3$ et $\omega = \mathbb{T} \times (a,b)$ avec $-1 < a < b < 1$, alors le système (1.7.2) n'est pas observable dans ω, quel que soit $T > 0$.*

Ce résultat fait suite à ceux de [13], où K. Beauchard montrait l'observabilité en tout temps dans les cas $\gamma = 1$, $-1 < a < b < 1$, et $\gamma = 2$, $-1 < a < 0 < b < 1$, ainsi que l'observabilité en un temps suffisamment long dans le cas $\gamma = 2$, $0 < a < b < 1$.
En ce qui concerne le problème de l'observabilité dans une bande verticale, nous ne serons pas en mesure d'étudier directement l'équation (1.7.2). Nous la remplaçerons donc par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \partial_t g(t,x,v) + iv^\gamma(-\Delta_x^D)^\beta g(t,x,v) - \partial_v^2 g(t,x,v) = 0\,, & \forall (t,x,v) \in (0,T)\times\Omega\,, \\ g(t,x,.) = 0\,, & \forall (t,x) \in (0,T)\times\partial\Omega\,, \\ g(0,x,v) = g_0(x,v)\,, & \forall (x,v) \in \Omega_1 \times (-1,1)\,, \end{cases} \tag{1.7.4}$$

où $\gamma \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in (0,1)$, $\Omega := \Omega_1 \times (-1,1)$, Ω_1 étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^{N_1}$ et $N_1 \in \mathbb{N}^*$, et où Δ_x^D désigne la réalisation de Dirichlet du laplacien sur Ω_1.
Nous donnerons des exemples de domaines de contrôle $\omega_1 \times (-1,1)$ sur lesquels (1.7.4) n'est pas observable. Pour cela, on note $(\lambda_n, \varphi_n)_{n\geq 1}$ les éléments propres de $-\Delta_x^D$, où les fonctions propres φ_n sont supposées normalisées. Pour $s \in (0,1/2)$, on dit alors que le couple (Ω_1, ω_1) vérifie la propriété $\mathcal{P}(s)$ si

$$\mathcal{P}(s) : \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left[\frac{-1}{\lambda_n^s} \log\left(\int_{\omega_1} |\varphi_n(x)|^2 dx \right) \right] = +\infty.$$

Nous donnerons à la section 5.4 des exemples de couples (Ω_1, ω_1) vérifiant la propriété $\mathcal{P}(s)$.

En plus de retrouver des résultats comparables à ceux de [13] sur l'observabilité dans une bande horizontale, dans le cas du modèle (1.7.4), nous démontrerons ainsi le théorème suivant :

Théorème 1.7.3

(i) Dans le cas $\gamma = 1$, si $\beta \in (0, 3/4)$ et (Ω_1, ω_1) vérifient la propriété $\mathcal{P}\left(\frac{2\beta}{3}\right)$, alors le système (1.7.4) n'est pas observable dans $\omega = \omega_1 \times (-1, 1)$, quel que soit $T > 0$.

(ii) Dans le cas $\gamma = 2$, si $\beta \in (0, 1)$ et (Ω_1, ω_1) vérifie la propriété $\mathcal{P}\left(\frac{\beta}{2}\right)$, alors le système (1.7.4) n'est pas observable dans $\omega = \omega_1 \times (-1, 1)$, quel que soit $T > 0$.

Comme nous le verrons au chapitre 5, la preuve de ce résultat fera intervenir l'opérateur d'Airy complexe dans le cas $\gamma = 1$, et l'opérateur de Davies dans le cas $\gamma = 2$.
Ainsi, si la diffusion dans la variable v provenant du terme $-\partial_v^2$ est suffisante pour assurer l'observabilité de (1.7.4) dans une bande horizontale pour $\gamma = 1$ ou 2 (avec un phénomène de vitesse de propagation finie dans le cas $\gamma = 2$ qui imposera un temps d'observabilité minimal, voir Théorème 5.1.7), la diffusion dans la variable x est trop faible pour que le système soit observable dans une bande verticale $\omega_1 \times (-1, 1)$ pour certains ouverts ω_1.
Une condition de contrôle géométrique, portant sur la localisation des fonctions propres de $-\Delta_x^D$ dans ω_1, est donc nécessaire pour garantir l'observabilité du système (1.7.4). Ceci semble indiquer qu'une telle condition pourrait également être nécessaire pour contrôler l'équation initiale (1.7.1).

1.8 Plan de la thèse

Cette thèse est organisée de la façon suivante.
Dans le chapitre 2, nous étudions les indices d'instabilité de l'opérateur d'Airy complexe (1.4.10) et des oscillateurs anharmoniques (1.4.16) pour $m = 2k$, $k \geq 1$. Nous étendons les résultats de [41] et [45] en démontrant les Théorèmes 1.4.3 et 1.4.4. Nous montrons que les indices d'instabilité de ces opérateurs ont une croissance exponentielle et nous en déterminons un développement asymptotique complet. Ces résultats ont été annoncés dans [84] et la preuve du Théorème 1.4.4 est donnée dans [85]. Le chapitre 2 reprend ces preuves sous une forme détaillée. Nous nous ramenons d'abord à des opérateurs autoadjoints par dilatation analytique. Puis, dans le cas de l'opérateur d'Airy complexe, nous utilisons le comportement asymptotique bien connu de la fonction d'Airy [1]. Dans le cas des oscillateurs anharmoniques (1.4.16), nous utilisons des estimations WKB dans le plan complexe tirées de [125] et [111].
Nous démontrons également le Théorème 1.4.5, qui généralise les théorèmes de densité prouvés dans [7] et [41].

Le chapitre 3 constitue une version détaillée de [86]. Nous reprenons une étude similaire à celle du chapitre 2 dans le cas de l'oscillateur cubique complexe (1.4.26), pour montrer le Théorème 1.4.11. La preuve repose encore sur des estimations WKB complexes, mais nous ne pourrons plus nous ramener à des opérateurs autoadjoints de référence par dilatation analytique. De plus, le terme sous-principal $i\alpha x$ nous obligera à considérer un potentiel dépendant du paramètre semiclassique dans les estimations de [111]. Pour cette raison, nous aurons également besoin d'utiliser une version étendue de la méthode de Laplace qui permet de traiter des phases qui dépendent du paramètre. Ce résultat est énoncé et démontré dans l'Annexe B et s'inspire de la preuve de la méthode de Laplace standard. Nous n'avons pas connaissance d'un énoncé identique dans la littérature, bien que les résultats du Théorème B.1.1 se rapprochent de ceux de [114], qui propose une variante de la méthode de Laplace avec deux paramètres, sans se limiter à un équivalent au premier ordre.

Dans le chapitre 4, nous présentons une version légèrement détaillée de [87]. Nous considérons la réalisation de Dirichlet de l'opérateur de Schrödinger semiclassique $\mathcal{A}_h = -h^2\Delta + iV$, où V est un potentiel réel et régulier, dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$. Nous étudions la limite quand $h \to 0$ de la plus petite partie réelle des valeurs propres de $\mathcal{A}_h$, et nous donnons des estimations de résolvante permettant d'étudier la décroissance du semigroupe $e^{-t\mathcal{A}_h}$. Plus précisément, nous démontrons les Théorèmes 1.6.1, 1.6.2 et 1.6.3, le Corollaire 1.6.4, et enfin le Théorème 1.6.5 concernant le modèle de Ginzburg-Landau dépendant du temps en l'absence de champ magnétique. La stratégie de preuve consiste à fractionner l'ouvert Ω et à approcher l'opérateur $\mathcal{A}_h$ sur chaque sous-domaine par un opérateur modèle exprimé sous la forme d'un produit tensoriel d'opérateurs d'Airy ou d'oscillateurs harmoniques complexes. Les résultats font intervenir le bas du spectre de ces deux opérateurs.
Dans ce chapitre, seule la section 4.2, qui a été complétée en reprenant certains éléments de [76], diffère du texte de [87].

Dans le chapitre 5, nous reproduisons le texte de [15], écrit avec K. Beauchard, B. Helffer et L. Robbiano. Nous étudions la contrôlabilité à zéro d'équations paraboliques dégénérées de type Kolmogorov (1.7.2), (1.7.4), et nous donnons des cas où la contrôlabilité à zéro a lieu, ainsi que des contre-exemples sur d'autres cas qui font apparaître une condition de contrôle géométrique. Nous montrons notamment les Théorèmes 1.7.2 et 1.7.3. Une partie de la preuve repose sur une analyse du spectre et de la résolvante de l'opérateur d'Airy et de l'oscillateur harmonique complexes sur un segment $]-R,R[$ lorsque $R \to +\infty$. Nous déterminons en particulier, à la manière des résultats du chapitre 4, la limite de la plus petite partie réelle des valeurs propres de ces opérateurs.
Dans l'annexe E, nous précisons ces résultats spectraux en montrant que, quand $R \to +\infty$, les valeurs propres des opérateurs d'Airy et de Davies sur $]-R,R[$ se rapprochent à une distance exponentiellement petite des valeurs propres des opérateurs limites. La preuve consiste à combiner une construction de quasimode avec les estimations de résolvante obtenues au chapitre 5.

L'annexe A permet de justifier l'intérêt porté à l'étude des indices d'instabilité dans les chapitres 2 et 3. Nous tentons en effet d'étendre l'inclusion (1.3.7) au cas de la dimension infinie. La question est loin d'être entièrement résolue, mais nous montrons que sous certaines hypothèses sur le spectre et en nous limitant à un nombre fini de valeurs propres, cette inclusion reste valable.

Dans l'annexe C, nous rappelons quelques éléments utilisés dans le chapitre 4 sur le produit tensoriel d'opérateurs.

Enfin, l'annexe D contient des compléments sur l'étude des oscillateurs anharmoniques et cubique effectuée dans les chapitres 2 et 3. Dans la section D.1, nous vérifions que les indices d'instabilité de ces opérateurs admettent les mêmes développements asymptotiques quand on les définit sur l'espace $L^p(\mathbb{R})$, $p \in]1, +\infty[$.
Dans la section D.2, nous considérons des perturbations $\mathcal{PT}$-symétriques d'opérateurs autoadjoints et nous nous intéressons à la réalité de leur spectre. Nous verrons en particulier que le spectre est réel si la perturbation est suffisamment petite par rapport à la partie autoadjointe de l'opérateur, et que des valeurs propres complexes peuvent apparaître dans le cas contraire.
Dans la section D.3, nous résumons les travaux de B. Mityagin, P. Siegl et J. Viola [106] qui donnent des exemples d'opérateurs non-autoadjoints, eux aussi construits comme des perturbations d'opérateurs autoadjoints, dont les indices d'instabilité $(\kappa_n)_{n\geq 1}$ possèdent diverses vitesses de croissance. Ils montrent ainsi que tous les comportements possibles sont couverts concernant l'instabilité spectrale, depuis le cas de projecteurs spectraux bornés jusqu'à celui d'une croissance de l'ordre de e^{cn} comme dans les exemples des chapitres 2 et 3.

Chapitre 2

Instabilité spectrale des oscillateurs anharmoniques en dimension 1

2.1 Introduction

Notre objectif est d'étudier la sensibilité des valeurs propres de certains opérateurs différentiels non-autoadjoints sous de petites perturbations de ces opérateurs, via l'étude de la croissance des projecteurs spectraux Π_n associés à leurs valeurs propres.

Nous nous intéressons à certains *oscillateurs anharmoniques*

$$\mathcal{A}(m,\theta) = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta}|x|^m\,, \tag{2.1.1}$$

avec

$$|\theta| < \min\left\{\frac{(m+2)\pi}{4}, \frac{(m+2)\pi}{2m}\right\}\,, \tag{2.1.2}$$

définis sur $L^2(\mathbb{R})$ dans [41] en considérant la fermeture de la forme quadratique associée, qui est sectorielle si θ vérifie (2.1.2).
D'après [41], son spectre est constitué de valeurs propres discrètes, simples, que l'on classe dans l'ordre de module croissant et que l'on note $(\lambda_n(m,\theta))_{n\geq 1}$. Les projecteurs spectraux Π_n associés sont de rang 1, et on définit comme dans la section 1.3 les indices d'instabilité

$$\kappa_n(m,\theta) := \|\Pi_n\|\,. \tag{2.1.3}$$

D'après (1.3.5), on a l'expression suivante, que nous utiliserons de manière cruciale dans la suite :

$$\kappa_n(m,\theta) = \frac{\int_{\mathbb{R}} |u_n(x)|^2 dx}{\left|\int_{\mathbb{R}} u_n^2(x) dx\right|}\,, \tag{2.1.4}$$

où u_n est une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_n(m,\theta)$.
La croissance quand $n \to +\infty$ des indices $\kappa_n(m,\theta)$ est très liée à l'instabilité des valeurs propres sous de petites perturbations de l'opérateur $\mathcal{A}(m,\theta)$ (voir

la section 1.3 et l'annexe A).

Rappelons que E. B. Davies a montré dans [41] et [42] que $\kappa_n(m,\theta)$ croît plus vite que toute puissance de n pour tout oscillateur anharmonique, voir (1.4.19). Ce résultat a ensuite été précisé dans le cas $m=2$ de l'oscillateur harmonique [45], voir (1.4.20). Notre travail consiste à prouver que (1.4.20) s'étend à l'*opérateur d'Airy complexe* $\mathcal{A}(1,\theta)$ et aux oscillateurs anharmoniques pairs $\mathcal{A}(2k,\theta)$, $k\geq 1$. Nous obtiendrons en fait des informations plus précises sur les indices d'instabilité de ces opérateurs quand $n\to+\infty$, puisque nous en déterminerons un développement asymptotique à tout ordre en puissances de n^{-1}.
Une telle croissance des indices d'instabilité indique que les familles de fonctions propres des oscillateurs anharmoniques ne possèdent aucune des “bonnes” propriétés attendues en général. Elles ne constituent des bases ni au sens de Hilbert, ni aux sens de Riesz ou de Schauder (voir [41] et la section 1.3), ce qui exclut toute possibilité de décomposer avantageusement une fonction de L^2 suivant les espaces propres de ces opérateurs. Nous démontrerons néanmoins qu'il s'agit de familles totales de l'espace L^2.

Voici les énoncés détaillés des résultats que nous démontrerons. Nous nous limitons aux cas $m=1$ et $m=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$ dans (2.1.1), le premier cas correspondant à celui de l'opérateur d'Airy $-\frac{d^2}{dx^2}+e^{i\theta}|x|$ étudié dans [7] et [76]. Nous verrons à la section 2 que cet opérateur peut être décomposé en ses réalisations de Dirichlet et de Neumann sur $\mathbb{R}^+$, et nous démontrerons le

Théorème 2.1.1 *On note $(\kappa_n^D(1,\theta))_{n\geq1}$ (resp. $(\kappa_n^N(1,\theta))_{n\geq1}$) les indices d'instabilité de la réalisation de Dirichlet (resp. de Neumann) de l'opérateur*

$$-\frac{d^2}{dx^2}+e^{i\theta}x \tag{2.1.5}$$

sur $\mathbb{R}^+$, avec $0<|\theta|<3\pi/4$. Alors, il existe des suites réelles $(\alpha_j(\theta))_{j\geq1}$ et $(\beta_j(\theta))_{j\geq1}$ telles que

$$\kappa_n^D(1,\theta)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{K(\theta)}{\sqrt{n}}\exp\left(C(\theta)(n-1/4)\right)\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j(\theta)n^{-j}\right) \tag{2.1.6}$$

et

$$\kappa_n^N(1,\theta)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{K(\theta)}{\sqrt{n}}\exp\left(C(\theta)(n-3/4)\right)\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j(\theta)n^{-j}\right), \tag{2.1.7}$$

où

$$C(\theta)=2\pi m_\theta^{3/2}|\sin\theta|\quad \text{et}\quad K(\theta)=\left(2\sqrt{3|\sin\theta|}m_\theta^{1/4}\right)^{-1},$$

avec

$$m_\theta=\sqrt{1+\frac{\sin^2(2\theta/3)}{\sin^2\theta}-2\frac{\cos(\theta/3)\sin(2\theta/3)}{\sin\theta}}>0\,.$$

Notons que dans le cas de l'opérateur d'Airy complexe étudié dans [7] et [75],

$$-\frac{d^2}{dx^2} + ix\,,$$

on obtient le développement

$$\kappa_n^D(1,\pi/2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{3/4}\sqrt{3n}} \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j(\pi/2) n^{-j}\right) \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}(n-1/4)\right).$$

Concernant les oscillateurs anharmoniques pairs, on a un résultat similaire :

Théorème 2.1.2 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et θ tel que $0 < |\theta| < \frac{(k+1)\pi}{2k}$. Si $\kappa_n(2k,\theta)$ désigne le n-ème indice d'instabilité de l'opérateur*

$$\mathcal{A}(2k,\theta) = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta} x^{2k}\,, \tag{2.1.8}$$

alors il existe $K(2k,\theta) > 0$ et une suite $(C^j(2k,\theta))_{j\geq 1}$ tels que

$$\kappa_n(2k,\theta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(2k,\theta)}{\sqrt{n}} e^{c_k(\theta) n} \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} C^j(2k,\theta) n^{-j}\right), \tag{2.1.9}$$

avec

$$c_k(\theta) = \frac{2(k+1)\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2k}\right) \varphi_k(x_{\theta,k})}{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}\,, \tag{2.1.10}$$

où

$$x_{\theta,k} = \left(\frac{\tan(|\theta|/(k+1))}{\sin(k|\theta|/(k+1)) + \cos(k|\theta|/(k+1))\tan(|\theta|/(k+1))}\right)^{\frac{1}{2k}} \tag{2.1.11}$$

$$\varphi_k(x) = \operatorname{Im} \int_0^{xe^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}} (1-t^{2k})^{1/2} dt\,. \tag{2.1.12}$$

Remarque 2.1.3 *Dans le cas harmonique $k=1$, le premier terme du développement (2.1.9) permet de retrouver le résultat de Davies-Kuijlaars [45] :*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\|\Pi_n\| &= c_1(\theta) = 4\varphi_1\left(\frac{1}{\sqrt{2\cos(\theta/2)}}\right) \\ &= 2\mathrm{Re}\, f\left(\frac{e^{i\theta/4}}{\sqrt{2\cos(\theta/2)}}\right), \end{aligned}$$

où

$$f(z) = \log(z + \sqrt{z^2-1}) - z\sqrt{z^2-1}\,.$$

Voici maintenant un résultat concernant la densité dans L^2 de l'espace engendré par les fonctions propres des opérateurs considérés. Il a été démontré [7] dans le cas de l'opérateur d'Airy $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ pour $|\theta| < 2\pi/3$, et [41] dans le cas harmonique ($k=1$) ainsi que pour $\mathcal{A}(2k,\theta)$, $k \geq 2$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Nous en proposons une preuve valable pour tous les opérateurs $\mathcal{A}(2k,\theta)$ avec $|\theta| < \frac{(k+1)\pi}{2k}$ à la section 2.6.

Théorème 2.1.4 *Pour* $m = 1$ *,* $|\theta| < 2\pi/3$ *, ou* $m = 2k$*,* $k \geq 1$*, et* θ *vérifiant (2.1.2), les fonctions propres de* $\mathcal{A}(m,\theta)$ *forment une famille totale de l'espace* $L^2(\mathbb{R})$*.*

La croissance rapide des indices d'instabilité ainsi que cette propriété de densité permettent d'étudier la convergence normale de la série d'opérateurs définissant le semi-groupe $e^{-t\mathcal{A}(m,\theta)}$ associé à $-\mathcal{A}(m,\theta)$ lorsqu'on le décompose suivant les projecteurs Π_n, ce qui généralise le résultat de [45] dans le cas harmonique.

Corollaire 2.1.5 *Soit* $m = 1$ *ou* $m = 2k$*,* $k \geq 1$*, et* $|\theta| \leq \pi/2$*. Soit* $e^{-t\mathcal{A}(m,\theta)}$ *le semi-groupe engendré par* $\mathcal{A}(m,\theta)$*,* $\lambda_n = \lambda_n(m,\theta)$ *les valeurs propres de* $\mathcal{A}(m,\theta)$*, et* $\Pi_n = \Pi_n(m,\theta)$ *les projecteurs spectraux associés.*
Soit $T(\theta) = c_1(\theta)/\cos(\theta/2)$*, où* $c_1(\theta)$ *est la constante de (2.1.10). La série*

$$\Sigma_{m,\theta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\lambda_n(m,\theta)}\Pi_n(m,\theta)$$

n'est pas normalement convergente si $m = 1$*, ni si* $m = 2$ *et* $t < T(\theta)$ *; si* $m = 2$ *et* $t > T(\theta)$*, ou pour tout* $t > 0$ *si* $m = 2k$*,* $k \geq 2$*, la série converge normalement vers* $e^{-t\mathcal{A}(2k,\theta)}$*. De plus, dans les cas où* $\Sigma_{m,\theta}$ *converge, il existe* $C_1 = C_1(k,\theta)$ *et* $C_2 = C_2(\theta)$ *tel que, pour tout* N *suffisamment grand, on a l'estimation suivante :*

$$\|e^{-t\mathcal{A}(m,\theta)}(I - \Pi_{<N})\| \leq \begin{cases} \frac{C_1}{\sqrt{N}} e^{c_k(\theta)n} \exp(-t\mathrm{Re}\,\lambda_N), & k \geq 2 \\ \frac{C_2}{\sqrt{N}} \exp(-2\cos(\theta/2)(t - T(\theta))N), & k = 1,\ t > T \end{cases} \tag{2.1.13}$$

où $\Pi_{<N} = \Pi_1 + \cdots + \Pi_{N-1}$ *désigne la projection sur les* $N-1$ *premiers espaces propres.*

La suite est organisée de la façon suivante. La section 2 est consacrée à l'étude de l'opérateur d'Airy complexe et à la démonstration du Théorème 2.1.1. Nous traitons ensuite le cas des oscillateurs anharmoniques pairs dans les trois sections suivantes : nous étudions le comportement général des fonctions propres dans le plan complexe à la section 3, à l'aide de la méthode WKB complexe ; puis nous détaillons la construction d'un quasimode pour l'oscillateur anharmonique autoadjoint, suivant la démarche d'un exercice de [74], à la section 4 ; enfin, nous achevons la preuve du Théorème 2.1.2 à la section 5. Les deux dernières sections, indépendantes des précédentes, sont dédiées respectivement aux preuves du Théorème 2.1.4 et du Corollaire 2.1.5.

2.2 L'opérateur d'Airy complexe

Nous étudions dans cette section les indices d'instabilité de l'opérateur

$$\mathcal{A}(1,\theta) = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta}|x|\,,$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R})$, avec $|\theta| < 3\pi/4$. Le potentiel $e^{i\theta}|x|$ présente une singularité en 0, ce qui va nous conduire à décomposer l'opérateur suivant son action sur les fonctions paires et impaires de $L^2(\mathbb{R})$.

2.2.1 Décomposition sur la demi-droite

On utilise la décomposition

$$L^2(\mathbb{R}) = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{I}\,, \tag{2.2.1}$$

où $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{I}$ désignent respectivement l'ensemble des fonctions paires et impaires de $L^2(\mathbb{R})$. Cette décomposition permet d'identifier une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ à un unique couple $(u_P, u_I) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{I}$ tel que $u = u_P + u_I$, où

$$u_P(x) = \frac{1}{2}(u(x) + u(-x))$$

désigne la composante paire de u et

$$u_I = \frac{1}{2}(u(x) - u(-x))$$

sa composante impaire.
Considérons maintenant les restrictions de u_P et u_I à $\mathbb{R}^+$, notées toujours de la même façon, et notons $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ et $\mathcal{A}^N(1,\theta)$ respectivement les réalisations de Dirichlet et de Neumann sur $\mathbb{R}^+$ de l'opérateur d'Airy $-\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta}x$.
Alors, une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ appartient au domaine de $\mathcal{A}(1,\theta)$ si et seulement si $u_P \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^D(1,\theta))$ et $u_I \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^N(1,\theta))$, les fonctions paires et impaires vérifiant respectivement les conditions de Dirichlet et de Neumann en 0. La décomposition (2.2.1) permet donc d'identifier $\mathcal{A}(1,\theta)$ à l'opérateur

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^D(1,\theta) & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^N(1,\theta) \end{pmatrix}$$

agissant sur $\mathcal{D}(\mathcal{A}^D(1,\theta)) \times \mathcal{D}(\mathcal{A}^N(1,\theta))$.
En particulier,

$$\sigma(\mathcal{A}(1,\theta)) = \sigma(\mathcal{A}^D(1,\theta)) \cup \sigma(\mathcal{A}^N(1,\theta))\,, \tag{2.2.2}$$

et les indices d'instabilité de $\mathcal{A}(1,\theta)$ sont ceux de $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ et $\mathcal{A}^N(1,\theta)$, en classant la réunion de leurs valeurs propres dans l'ordre croissant de module.

La proposition suivante (voir [7]) décrit les éléments propres de $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ et $\mathcal{A}^N(1,\theta)$. La fonction d'Airy sera étudiée dans la prochaine sous-section.

Proposition 2.2.1

1. *Le spectre de $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ est discret et composé des*

$$\lambda_j^D = -e^{\frac{2i\theta}{3}}\mu_j, \quad j \in \mathbb{N}\,,$$

où $\cdots < \mu_{j+1} < \mu_j < \cdots < \mu_1 < 0$ sont les zéros de la fonction d'Airy Ai ;

2. *Le projecteur spectral Π_n associé à λ_n^D est de rang 1 ;*
3. *On a pour tout $n \geq 1$, $\int_{\mathbb{R}^+} u_n^2(x)dx \neq 0$ et*

$$\kappa_n := \|\Pi_n\| = \frac{\int_{\mathbb{R}^+} |u_n(x)|^2 dx}{\left|\int_{\mathbb{R}^+} u_n^2(x)dx\right|}, \tag{2.2.3}$$

où

$$u_n(x) = Ai(\mu_n + xe^{i\theta/3}) \tag{2.2.4}$$

est fonction propre de $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ *pour la valeur propre* λ_n^D .

Le cas de $\mathcal{A}^N(1,\theta)$ est analogue en remplaçant dans ce qui précède les zéros μ_n de la fonction d'Airy par ses points critiques ν_n, qui vérifient $\nu_1 < 0$ et, pour tout $n \geq 2$, $\mu_n < \nu_n < \mu_{n-1}$.
D'après (2.2.2), si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ désignent les valeurs propres de $\mathcal{A}(1,\theta)$ (dans l'ordre croissant de modules), on a donc $\lambda_{2k} = e^{2i\theta/3}|\mu_k|$ et $\lambda_{2k+1} = e^{2i\theta/3}|\nu_{k+1}|$.
D'autre part, $\kappa_{2k}(1,\theta) = \kappa_k^D(1,\theta)$ et $\kappa_{2k+1}(1,\theta) = \kappa_{k+1}^N(1,\theta)$.
Par conséquent, les développements (2.1.6) et (2.1.7) entraînent

Corollaire 2.2.2 *Les indices d'instabilité* $\kappa_n(1,\theta)$ *de l'opérateur* $\mathcal{A}(1,\theta)$ *vérifient*

$$\kappa_n(1,\theta) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(\theta)}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{C(\theta)}{2}(n-1/2)\right)\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j(\theta)n^{-j}\right) . \tag{2.2.5}$$

Notre étude reposera en grande partie sur les propriétés de la fonction d'Airy évoquée dans la proposition précédente. Nous les rappelons dans la sous-section suivante.

2.2.2 La fonction d'Airy

La fonction d'Airy Ai est la solution de l'opérateur d'Airy réel, c'est-à-dire

$$Ai''(x) = xAi(x) , \tag{2.2.6}$$

normalisée par la condition

$$Ai(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} ,$$

et qui décroît exponentiellement quand $x \to +\infty$. On observe alors que $Ai(x) > 0$ et $Ai'(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$. La fonction d'Airy peut être prolongée à tout le plan complexe en une fonction entière, et des développements asymptotiques à l'infini (voir [1]) permettent de décrire le comportement de la fonction, de sa dérivée, de ses zéros et de ses points critiques. Toutes ces propriétés sont résumées dans la proposition suivante et seront utilisées dans la suite.

Proposition 2.2.3 *Il existe des constantes* c_k , d_k , a_k , b_k , $k \geq 1$, *telles que*

1. *Pour tout* $\alpha \in]0,\pi]$,

$$Ai(z) \underset{|z|\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k c_k(\frac{2}{3}z^{3/2})^{-k}\right) , \tag{2.2.7}$$

pour $|\arg z| \leq \pi - \alpha$ *;*

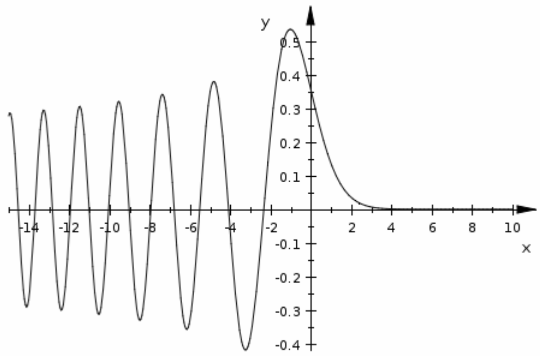

FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction d'Airy Ai sur $\mathbb{R}$.

2.

$$Ai(-z) \underset{|z|\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}\left(\sin(\frac{2}{3}z^{3/2}+\frac{\pi}{4})\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k c_{2k}(\frac{2}{3}z^{3/2})^{-2k}\right)\right.$$
$$\left.-\cos(\frac{2}{3}z^{3/2}+\frac{\pi}{4})\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k c_{2k+1}(\frac{2}{3}z^{3/2})^{-2k-1}\right), \quad (2.2.8)$$

pour $|\arg z| < \frac{2\pi}{3}$ *;*

3. Pour tout $\alpha \in]0,\pi]$,

$$Ai'(z) \underset{|z|\to+\infty}{\sim} -\frac{z^{1/4}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k d_k(\frac{2}{3}z^{3/2})^{-k}\right), \quad (2.2.9)$$

pour $|\arg z| \leq \pi-\alpha$ *;*

4.

$$Ai'(-z) \underset{|z|\to+\infty}{\sim} -\frac{z^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\left(\cos(\frac{2}{3}z^{3/2}+\frac{\pi}{4})\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k d_{2k}(\frac{2}{3}z^{3/2})^{-2k}\right)\right.$$
$$\left.+\sin(\frac{2}{3}z^{3/2}+\frac{\pi}{4})\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k d_{2k+1}(\frac{2}{3}z^{3/2})^{-2k-1}\right) \quad (2.2.10)$$

pour $|\arg z| < \frac{2\pi}{3}$ *;*

5.

$$|\mu_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{3\pi}{2}(n-1/4)\right)^{2/3}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a_k(n-1/4)^{-2k}\right) \quad ; \quad (2.2.11)$$

6.

$$|\nu_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{3\pi}{2}(n-3/4)\right)^{2/3}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k b_k(n-3/4)^{-2k}\right) \quad ; \quad (2.2.12)$$

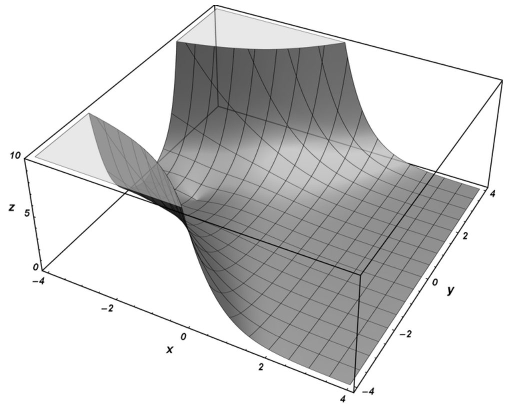

FIGURE 2.2 – Module de la fonction d'Airy sur $\mathbb{C}$.

On se servira également du lemme suivant :

Lemme 2.2.4 *La fonction*

$$F : x \mapsto xAi^2(x) - Ai'^2(x) \tag{2.2.13}$$

est une primitive de la fonction Ai^2.

Preuve : On utilise simplement l'équation (2.2.6) :

$$\begin{aligned} F'(x) &= Ai^2(x) + 2xAi(x)Ai'(x) - 2Ai''(x)Ai'(x) \\ &= Ai^2(x) + 2Ai'(x)\underbrace{(xAi(x) - Ai''(x))}_{=0}. \end{aligned}$$

⊟

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer le comportement asymptotique des indices d'instabilité de $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ et $\mathcal{A}^N(1,\theta)$.

2.2.3 Indices d'instabilité

Nous nous contenterons d'étudier la réalisation de Dirichlet $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ de l'opérateur d'Airy complexe, le cas de la réalisation de Neumann étant analogue à condition de remplacer les zéros μ_n de la fonction d'Airy par ses points critiques ν_n, et le développement (2.2.11) par (2.2.12). Nous supposerons également $\theta > 0$ sans perte de généralité (si $\theta < 0$, tous les calculs et résultats qui suivent sont valables avec $|\theta|$ à la place de θ).

Soit $u_n(x) = Ai(\mu_n + e^{i\theta/3}x)$ la n-ème fonction propre de $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ et

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^+} |u_n(t)|^2 dt\,, \quad J_n = \left| \int_{\mathbb{R}^+} u_n(t)^2 dt \right| ,$$

respectivement le numérateur et le dénominateur de l'expression (2.2.3) qu'on cherche à estimer. Nous allons déterminer un développement asymptotique quand $n \to +\infty$ de chacune de ces intégrales.

Etape 1 **: Etude de** I_n
Fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, que nous déterminerons explicitement plus loin. Alors la décomposition

$$I_n = I_{n,\varepsilon} + R_{n,\varepsilon}\,, \tag{2.2.14}$$

où

$$I_{n,\varepsilon} := \int_{\varepsilon|\mu_n|}^{+\infty} |u_n(t)|^2 dt \quad \text{ et } \quad R_{n,\varepsilon} := \int_0^{\varepsilon|\mu_n|} |u_n(t)|^2 dt\,,$$

va nous permettre d'appliquer (2.2.7) et (2.2.8) uniformément dans chaque intégrale $R_{n,\varepsilon}$ et $I_{n,\varepsilon}$ respectivement.
Etape 1.*a*. Commençons par traiter le terme $I_{n,\varepsilon}$.
D'après (2.2.7), il existe une suite réelle $(c_k')_{k\geq 1}$ telle que, pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_{n,\varepsilon} &= \int_{\varepsilon|\mu_n|}^{+\infty} \frac{1}{4\pi|\mu_n + te^{i\theta/3}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{4}{3}\mathrm{Re}\left[(\mu_n + te^{i\theta/3})^{3/2}\right]\right) \\ &\quad \times \left|1 + \sum_{k=1}^{N} c_k'(\mu_n + te^{i\theta/3})^{-3k/2} + r_N(\mu_n + te^{i\theta/3})\right|^2 dt\,, \end{aligned}$$

avec

$$|r_N(\xi)| = \mathcal{O}(|\xi|^{-3N/2}), \quad |\xi| \to +\infty\,.$$

En effet $|\mu_n + te^{i\theta/3}| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ uniformément par rapport à $t \in [\varepsilon|\mu_n|, +\infty[$:

$$\forall t \geq \varepsilon|\mu_n|\,, \quad |\mu_n + te^{i\theta/3}| \geq |t\sin\theta/3| \geq \varepsilon|\mu_n||\sin\theta/3| \to +\infty, \quad n \to +\infty\,.$$

En posant

$$h = h_n := |\mu_n|^{-3/2} \quad \text{ et } \quad t = h^{-2/3}s = |\mu_n|s\,, \tag{2.2.15}$$

on obtient

$$I_{n,\varepsilon} = \hat{I}_\varepsilon(h_n)\,,$$

où

$$\begin{aligned} \hat{I}_\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\sim} &\ \frac{1}{4\pi h^{1/3}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{|-1 + se^{i\theta/3}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{4}{3h}\mathrm{Re}\left[(-1 + se^{i\theta/3})^{3/2}\right]\right) \\ &\times \left|1 + \sum_{k=1}^{N} c_k'(-1 + se^{i\theta/3})^{-3k/2}h^k + r_N^h(s)\right|^2 ds \end{aligned}$$

avec

$$r_N^h(s) = \mathcal{O}(h^N)\,, \text{ quand } h \to 0 \tag{2.2.16}$$

uniformément par rapport à $s \geq \varepsilon$.
Or, on peut écrire

$$\left|1 + \sum_{k=1}^{N} c_k'(-1 + se^{i\theta/3})^{-3k/2}h^k + r_N^h(s)\right|^2 = 1 + \sum_{k=1}^{N} \tilde{c}_k(s)h^k + \tilde{r}_N^h(s)\,,$$

où les fonctions $\tilde{c}_k(s)$ vérifient, pour tout $k \geq 1$,

$$|\tilde{c}_k(s)| = \mathcal{O}((1 + s)^{-3k/2})\,,$$

et $\tilde{r}_N^h(s)$ vérifie (2.2.16) comme $r_N^h(s)$. Ainsi,

$$\hat{I}_\varepsilon(h) = \frac{1}{4\pi h^{1/3}} \int_\varepsilon^{+\infty} a_\theta(s,h) e^{-\frac{1}{h}\varphi_\theta(s)} ds\,, \qquad (2.2.17)$$

où

$$a_\theta(s,h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{|-1+se^{i\theta/3}|^{1/2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k(s) h^k\right)$$

et

$$\varphi_\theta(s) = \frac{4}{3} \mathrm{Re}\,(-1+se^{i\theta/3})^{3/2}\,.$$

Le membre de droite de (2.2.17) est maintenant sous la bonne forme pour appliquer la méthode de Laplace quand $h \to 0$. Il suffit pour cela de vérifier que la fonction φ_θ admet un unique point critique non dégénéré s_θ dans l'intervalle $[\varepsilon, +\infty[$, et que $\varphi_\theta''(s_\theta) > 0$, c'est-à-dire que s_θ est un point de minimum pour φ_θ.
Or on a

$$\begin{aligned} \varphi_\theta'(s) &= 2\mathrm{Re}\left(e^{i\theta/3}(-1+se^{i\theta/3})^{1/2}\right) \\ &= 2|-1+se^{i\theta/3}|^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{1}{2}\arg(-1+se^{i\theta/3})\right)\,, \end{aligned}$$

qui s'annule si et seulement si

$$\arg(-1+se^{i\theta/3}) = \pi - \frac{2\theta}{3}\,. \qquad (2.2.18)$$

En effet, d'après (2.1.2) on a

$$\frac{\theta}{3} + \frac{1}{2}\arg(-1+se^{i\theta/3}) \in \left]-\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right[,$$

donc φ_θ' s'annule si et seulement si

$$\frac{\theta}{3} + \frac{1}{2}\arg(-1+se^{i\theta/3}) = \frac{\pi}{2}\,.$$

En prenant la tangente dans (2.2.18), on obtient

$$\tan\frac{2\theta}{3} = \frac{s_\theta \sin(\theta/3)}{1 - s_\theta\cos(\theta/3)}\,,$$

d'où

$$s_\theta = \frac{\tan(2\theta/3)}{\sin(\theta/3) + \cos(\theta/3)\tan(2\theta/3)} = \frac{\sin(2\theta/3)}{\sin\theta}, \qquad (2.2.19)$$

et on a bien $s_\theta > 0$ pour $0 < \theta < 3\pi/4$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \varphi_\theta''(s) &= \mathrm{Re}\left(e^{2i\theta/3}(-1+s_\theta e^{i\theta/3})^{-1/2}\right) \\ &= |-1+s_\theta e^{i\theta/3}|^{-1/2} \cos\left(\frac{2\theta}{3} - \frac{1}{2}\arg(-1+se^{i\theta/3})\right), \end{aligned}$$

d'où, en utilisant (2.2.18),

$$\varphi''_\theta(s_\theta) = m_\theta^{-1/2} \sin\theta > 0\,, \tag{2.2.20}$$

où $m_\theta := |-1 + s_\theta e^{i\theta/3}|$ est la constante apparaissant dans le Théorème 2.1.1. Enfin, le terme principal de $a(s_\theta, h)$ vaut

$$a(s_\theta, 0) = m_\theta^{-1/2} \neq 0\,,$$

et

$$\varphi_\theta(s_\theta) = -\frac{4}{3} m_\theta^{3/2} \sin\theta\,.$$

On choisit $\varepsilon < s_\theta$ et, pour $M > s_\theta$ fixé, on écrit

$$\hat{I}_\varepsilon(h) = \hat{I}_{\varepsilon,M}(h) + \hat{R}_M(h)\,, \tag{2.2.21}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} \hat{I}_{\varepsilon,M}(h) & = & \frac{1}{4\pi h^{1/3}} \int_\varepsilon^M a_\theta(s,h) e^{-\frac{1}{h}\varphi_\theta(s)} ds\,, \\ \hat{R}_M(h) & = & \frac{1}{4\pi h^{1/3}} \int_M^{+\infty} a_\theta(s,h) e^{-\frac{1}{h}\varphi_\theta(s)} ds\,. \end{array}\right. \tag{2.2.22}$$

La méthode de Laplace s'applique à $\hat{I}_{\varepsilon,M}(h)$ et donne, d'après les valeurs calculées ci-dessus,

$$\hat{I}_{\varepsilon,M}(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^{1/6}}{2\sqrt{2\pi} m_\theta^{1/4} \sqrt{\sin\theta}} \exp\left(\frac{4}{3h} m_\theta^{3/2} \sin\theta\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(\theta) h^k\right)\,, \tag{2.2.23}$$

pour une suite $(A_k(\theta))_{k\geq 1}$ de réels.
Quant à $\hat{R}_M(h)$, puisque la fonction φ_θ est croissante sur $[M, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \hat{R}_M(h) &\leq Kh^{-1/3} \int_M^{+\infty} e^{-\frac{1}{h}\varphi_\theta(s)} ds\,, \quad K > 0\,, \\ &\leq Kh^{-1/3} e^{\left(1-\frac{1}{h}\right)\varphi_\theta(M)} \int_M^{+\infty} e^{-\varphi_\theta(s)} ds \\ &\leq K' h^{-1/3} e^{-\frac{1}{h}\varphi_\theta(M)}\,, \quad K' > 0\,, \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

dès que $h < 1$, avec évidemment $\varphi_\theta(M) > \varphi_\theta(s_\theta)$.
D'après (2.2.21), (2.2.23) et (2.2.24), on obtient donc

$$I_{n,\varepsilon} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{h^{1/6}}{2\sqrt{2\pi} m_\theta^{1/4} \sqrt{\sin\theta}} \exp\left(\frac{4}{3h} m_\theta^{3/2} \sin\theta\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(\theta) h^k\right)\,. \tag{2.2.25}$$

Remarque 2.2.5 *Dans le cas de l'opérateur d'Airy* $-\frac{d^2}{dx^2} + ix$ *étudié dans [7] et [76], on obtient les valeurs suivantes :* $s_{\pi/2} = \sqrt{3}/2$, $\varphi_{\pi/2}(s_{\pi/2}) = -\sqrt{2}/3$, $\varphi''_{\pi/2}(s_{\pi/2}) = \sqrt{2}$ *et* $a(s_{\pi/2}, 0) = \sqrt{2}$, *ce qui donne dans ce cas*

$$I_{n,\varepsilon} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{h^{1/6}}{2^{5/4}\sqrt{\pi}} e^{\frac{\sqrt{2}}{3h}} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(\pi/2) h^k\right)\,. \tag{2.2.26}$$

Etape 1.*b*. Il reste maintenant à contrôler le second terme dans (2.2.14),

$$R_{n,\varepsilon} = \int_0^{\varepsilon|\mu_n|} |Ai(\mu_n + te^{i\theta/3})|^2 dt \,.$$

Nous nous contentons de contrôler grossièrement ce terme de reste.
Pour n assez grand, on peut appliquer (2.2.8) uniformément par rapport à $t \in [0,\varepsilon]$ pour obtenir, en nous limitant à un équivalent au premier ordre,

$$\begin{aligned}
R_{n,\varepsilon} &= (1+o(1)) \int_0^{\varepsilon|\mu_n|} \frac{1}{\pi|\mu_n + te^{i\theta/3}|^{1/2}} \left|\sin\left(\frac{2}{3}(-(\mu_n + te^{i\theta/3}))^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|^2 dt \\
&\leq C\varepsilon|\mu_n| \sup_{t\in[0,\varepsilon|\mu_n|]} \frac{1}{|\mu_n + te^{i\theta/3}|^{1/2}} \left|\sin\left(\frac{2}{3}(-(\mu_n + te^{i\theta/3}))^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|^2, \quad C > 0\,, \\
&\leq C' \frac{\varepsilon|\mu_n|^{1/2}}{|-1+\varepsilon e^{i\theta/3}|^{1/2}} \left|\sin\left(\frac{2}{3}(|\mu_n|(-1+\varepsilon e^{i\theta/3}))^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|^2, \quad C' > 0\,, \\
&\leq C'' \frac{\varepsilon}{\pi|-1+\varepsilon e^{i\theta/3}|^{1/2} h_n^{1/3}} \exp\left(-\frac{1}{h_n}\varphi_\theta(\varepsilon)\right), \quad C'' > 0\,,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé

$$\left|\sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2}{3}\mathrm{Re}\, z^{3/2}\right) + o(1)\,,$$

pour $2\pi/3 < |\arg z| < \pi$.
Il existe donc $C = C(\theta,\varepsilon) > 0$ telle que, pour n suffisamment grand,

$$R_{n,\varepsilon} \leq C h_n^{-1/3} \exp\left(-\frac{1}{h_n}\varphi_\theta(\varepsilon)\right) .$$

En utilisant le fait que, pour $\varepsilon < s_\theta$,

$$-\varphi_\theta(\varepsilon) < -\varphi_\theta(s_\theta) = \frac{4}{3} m_\theta^{3/2} \sin\theta\,,$$

on en déduit donc que le terme $R_{n,\varepsilon}$ est négligeable devant $I_{n,\varepsilon}$; plus précisément, on a d'après (2.2.14) :

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(t)|^2 dt = I_{n,\varepsilon}\ (1 + o(e^{-c/h_n}))\,,$$

pour une certaine constante $c > 0$. Le développement (2.2.25) donne donc finalement

Proposition 2.2.6 *Si $u_n(x) = Ai(\mu_n + xe^{i\theta/3})$ désigne la n-ème fonction propre de l'opérateur $\mathcal{A}^D(1,\theta)$ et $h_n = |\mu_n|^{-3/2}$, on a*

$$\|u_n\|_2^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{h_n^{1/6}}{2\sqrt{2\pi\sin\theta}\, m_\theta^{1/4}} \exp\left(\frac{4}{3h_n} m_\theta^{3/2}\sin\theta\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(\theta) h_n^k\right) . \tag{2.2.27}$$

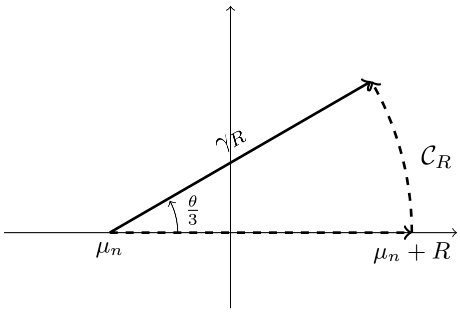

FIGURE 2.3 – Décomposition du chemin d'intégration γ_R.

Ceci termine l'étude du numérateur de (2.2.3) ; nous traitons maintenant le dénominateur J_n .

Etape 2 : Estimation de $| \int_{\mathbb{R}^+} u_n^2(x)dx|$
Il reste maintenant à estimer le dénominateur de l'expression (2.2.3). On commence par se ramener à une intégrale sur l'axe réel grâce à l'holomorphie de la fonction d'Airy et à sa décroissance à l'infini dans le secteur $|\arg z| < \pi/3$.

$$\begin{aligned} e^{i\theta/3}\int_{\mathbb{R}^+} u_n^2(x)dx &= \int_0^{+\infty} e^{i\theta/3} Ai^2(e^{i\theta/3}x+\mu_n)dx \\ &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} Ai^2(z)dz\,, \end{aligned}$$

où γ_R est le segment $[\mu_n, \mu_n + e^{i\theta/3}R] \subset \mathbb{C}$.
Or la fonction d'Airy est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et γ_R peut être décomposé en

$$\gamma_R = [\mu_n, \mu_n + R] \vee \mathcal{C}_R\,,$$

où $\mathcal{C}_R$ est l'arc de cercle (centré en μ_n, de rayon R) paramétré par

$$[0,1] \ni t \mapsto \mu_n + Re^{it\theta/3}\,,$$

voir Figure 2.3.
Donc,

$$e^{i\theta/3}\int_{\mathbb{R}^+} u_n^2(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\left(\underbrace{\int_{\mu_n}^{\mu_n+R} Ai^2(x)dx}_{=:I_R} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_R} Ai^2(z)dz}_{=:J_R}\right)\,.$$

Evidemment, $I_R \to \int_{\mu_n}^{+\infty} Ai^2(x)dx$ quand $R \to +\infty$. Quant à J_R, on a grâce à (2.2.7) et pour R suffisamment grand :

$$\begin{aligned} |J_R| &= \left|\int_0^1 \frac{iR\theta}{3} e^{it\theta/3} Ai^2(\mu_n + Re^{it\theta/3})dt\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{R\theta}{3|(\mu_n+Re^{it\theta/3})|^{1/2}}|e^{-\frac{4}{3}(\mu_n+Re^{it\theta/3})^{3/2}}|dt\,, \end{aligned}$$

donc $|J_R| \to 0$ quand $R \to +\infty$.
On en déduit

$$\left|\int_{\mathbb{R}^+} u_n^2(x)dx\right| = \int_{\mu_n}^{+\infty} Ai^2(x)dx\,. \tag{2.2.28}$$

En effet $Ai(x)$ est réel pour x réel. On utilise maintenant la formule du Lemme 2.2.4, qui entraîne

$$\int_{\mu_n}^{+\infty} Ai^2(x)dx = Ai'^2(\mu_n)\,, \tag{2.2.29}$$

puisque d'après (2.2.7) et (2.2.9),

$$xAi^2(x) - Ai'^2(x) \to 0\,,$$

quand $x \to +\infty$, et $Ai(\mu_n) = 0$.
D'après le développement (2.2.10) de la fonction Ai', en notant toujours $h_n = |\mu_n|^{-3/2}$, il existe une suite $(d'_k)_{k\geq 0}$ telle que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^+} u_n^2(x)dx\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}h_n^{-1/3}\Bigg(&\cos\left(\frac{2}{3h_n}+\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k d'_{2k}h_n^{2k}\\ &+\sin\left(\frac{2}{3h_n}+\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k d'_{2k+1}h_n^{2k+1}\Bigg)^2\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Or, le développement (2.2.11) de $|\mu_n|$ donne

$$h_n^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{2}(n-1/4)\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma_k(n-1/4)^{-2k}\right), \tag{2.2.31}$$

d'où

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2}{3h_n}+\frac{\pi}{4}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\left(n\pi+\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma_k(n-1/4)^{-2k+1}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma'_k(n-1/4)^{-2k}\right),\end{aligned}$$

et de même

$$\sin\left(\frac{2}{3h_n}+\frac{\pi}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma''_k(n-1/4)^{-2k+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{2}{3h_n}+\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k d'_{2k}h_n^{2k}+\sin\left(\frac{2}{3h_n}+\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k d'_{2k+1}h_n^{2k+1}\\ &\qquad \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\delta_{2k}(n-1/4)^{-2k}\right),\end{aligned}$$

et à partir de (2.2.30), on obtient finalement

Proposition 2.2.7 *Il existe* $(B_k)_{k\geq 1}$ *telle que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^+} u_n^2(x)dx\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}h_n^{-1/3}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty} B_k(n-1/4)^{-2k}\right), \tag{2.2.32}$$

où h_n *est défini par (2.2.15).*

Etape 3 **: Conclusion**
En réecrivant tous les développements en puissances de h_n et de $(n-1/4)^{-2}$ comme des développements en puissance de n^{-1}, on déduit de (2.2.3), (2.2.27) et (2.2.32) qu'il existe une suite $(C_k(\theta))_{k\geq 1}$ telle que

$$\begin{aligned}\kappa_n^D(1,\theta) \quad \underset{n\to+\infty}{\sim} \quad & \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}m_\theta^{1/4}\sqrt{\sin\theta}}h_n^{1/2}\exp\left(\frac{4}{3h_n}m_\theta^{3/2}\sin\theta\right) \\ & \times\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k(\theta)n^{-k}\right).\end{aligned}$$

Enfin, d'après (2.2.31),

$$\begin{aligned}h_n^{1/2}\exp\left(\frac{4}{3h_n}m_\theta^{3/2}\sin\theta\right) \quad \underset{n\to+\infty}{\sim} \quad & \sqrt{\frac{2}{3\pi n}}\exp\left(2\pi m_\theta^{3/2}\sin\theta\ (n-1/4)\right) \\ & \times\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k'(\theta)n^{-k}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat du Théorème 2.1.1. Le cas particulier de $\kappa_n^D(1,\pi/2)$ découle de (2.2.26).
Le cas de la réalisation de Neumann est analogue, en posant $\tilde{h}_n = |\nu_n|^{-3/2}$ et en utilisant le développement (2.2.12) au lieu de (2.2.11).

Dans les trois sections suivantes, on effectue une étude similaire des indices d'instabilité $\kappa_n(2k,\theta)$, $k\geq 1$. Les développements asymptotiques de la fonction d'Airy seront remplacés par des estimations WKB des fonctions propres de l'oscillateur anharmonique $\mathcal{A}(2k,\theta)$.

2.3 Comportement des fonctions propres des oscillateurs anharmoniques pairs

On étudie dans cette section le comportement dans le plan complexe des solutions $\psi_h \in L^2(\mathbb{R})$ de l'équation

$$\mathcal{P}_h(2k)\psi_h = \left(-h^2\frac{d^2}{dx^2}+x^{2k}-1\right)\psi_h = 0\,, \tag{2.3.1}$$

où $k\geq 1$, quand $h\to 0$.
Nous verrons ensuite à la sous-section 2.3.3 comment exprimer les fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{A}(2k,\theta)$ à l'aide de la fonction ψ_h.

2.3.1 Estimations WKB

Nous allons utiliser la méthode WKB complexe pour comprendre le comportement de la fonction ψ_h dans certaines régions du plan complexe. En effet, nous verrons qu'une dilatation analytique d'angle $\theta/(2k+2)$ transforme formellement $\mathcal{A}(2k,\theta)$ en l'opérateur $\mathcal{P}_h(2k)$ de (2.3.1) (voir sous-section 2.3.3 pour une justification rigoureuse) ; nous nous intéressons donc avant tout au comportement de $\psi_h(x)$ quand x tend vers l'infini dans le secteur

$$\mathcal{S}_{\theta/(2k+2)} = \left\{ x \in \mathbb{C} : |\arg x| \leq \frac{\theta}{2(k+1)} \right\}, \tag{2.3.2}$$

mais aussi à son comportement à la limite $h \to 0$.

Voici le théorème-clef de notre étude (voir [111], Ch. 6 et 10, [141], [70]). Pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{C}$, un *chemin reliant* $+\infty e^{i\beta}$ *à* x désignera un chemin $\gamma :]-\infty, t_0] \to \mathbb{C}$ du plan complexe tel que $\gamma(t_0) = x$ et tel que $\gamma(]-\infty, T])$ coïncide avec le rayon $[R, +\infty[e^{i\beta}$, pour un certain $T < t_0$ et un certain $R > 0$. On étudie le comportement asymptotique quand $|x| \to +\infty$ ou $h \to 0$ des solutions ψ_h de l'équation

$$-h^2 \frac{d^2}{dx^2}\psi_h(x) + f(x)\psi_h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{C}, \tag{2.3.3}$$

où f est une fonction entière. Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(0)$. On considère une détermination de la fonction $\sqrt{f}$ sur $\mathcal{D}$. Pour $a_0 \in \mathcal{D}$ fixé (ou a_0 un zéro de f), on pose

$$S(z) := \int_{a_0}^{z} \sqrt{f(t)}\, dt, \tag{2.3.4}$$

où l'intégrale est prise le long de n'importe quel chemin défini dans $\mathcal{D}$.
Soit $a_1 \in \mathbb{C}$, ou éventuellement $a_1 = +\infty e^{i\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Nous appelerons *chemin canonique* joignant a_1 à z, et nous noterons $\gamma(a_1, z)$, un chemin du plan complexe joignant a_1 à z et tel que la fonction $\operatorname{Re} S \circ \gamma(a_1, z)$ soit strictement décroissante. On note alors

$$\Delta(a_0, a_1) = \{ z \in \mathbb{C} : \exists\ \gamma(a_1, z) \ \text{ chemin canonique } \},$$

et pour $\varepsilon > 0$,

$$\Delta_\varepsilon(a_0, a_1) = \{ z \in \Delta(a_0, a_1) : d(z, \partial\Delta(a_0, a_1)) \geq \varepsilon \},$$

où $\partial\Delta(a_0, a_1)$ désigne la frontière de $\Delta(a_0, a_1)$.
On définit également la fonction

$$\sigma := \frac{1}{f^{3/4}} \left[\frac{1}{f^{1/4}} \right]''. \tag{2.3.5}$$

On a alors le théorème suivant, voir [111], Théorème 11.1 (p. 222) et Ch. 10.

Théorème 2.3.1 (Estimation WKB) *Soient* f, a_0, a_1, $\Delta(a_0, a_1)$ *et* $\Delta_\varepsilon(a_0, a_1)$ *comme ci-dessus, et* $\Gamma \subset \Delta_\varepsilon(a_0, a_1)$ *(non nécessairement borné). Si* $a_1 = +\infty e^{i\beta}$, *on suppose que* $\operatorname{Re} S(ye^{i\beta}) \to +\infty$ *quand* $y \to +\infty$. *On suppose de plus qu'il existe* $k, \rho, M > 0$ *tels que, pour tout* $x \in \Delta(a_0, a_1)$,

$$|\sigma(x)| \leq \frac{k}{1 + |S(x)|^{1+\rho}}, \tag{2.3.6}$$

et pour tout $x \in \Gamma$,

$$\int_{\gamma(a_1,x)} \frac{|S'(x)|}{1 + |S(x)|^{1+\rho}} dx \leq M\,, \tag{2.3.7}$$

où $\gamma(a_1, x)$ *est un chemin canonique reliant* a_1 *à* x.
Alors, il existe une solution entière ψ_h *de l'équation (2.3.3) telle que :*

1. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\exists R_\alpha > 0, \quad [R_\alpha, +\infty[e^{i\alpha} \subset \Gamma\,,$$

on a

$$\psi_h(x) = \frac{1}{f(x)^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{h} S(x)\right)(1 + o(1))\,, \tag{2.3.8}$$

uniformément par rapport à h , *quand* x *tend vers l'infini dans la direction* $\arg^{-1}\{\alpha\}$.
De plus, si $\operatorname{Re} S(ye^{i\alpha}) \to +\infty$ *quand* $y \to +\infty$, *alors (2.3.8) détermine* ψ_h *de façon unique, et pour toute solution* $\tilde{\psi}_h$ *appartenant à* $L^2(\mathbb{R}^+ e^{i\alpha})$, *il existe* $c \in \mathbb{C}$ *tel que* $\tilde{\psi}_h = c\psi_h$.

2. *Il existe une suite de fonctions* $u_j = u_j(a_0, a_1)$, $j \geq 1$, *telle que*

$$\psi_h(x) \underset{h \to 0}{\sim} \frac{1}{f(x)^{1/4}} \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} u_j(x) h^j\right) \exp\left(-\frac{1}{h} S(x)\right)\,, \tag{2.3.9}$$

uniformément pour x *dans* Γ.

L'objectif de la sous-section suivante est de vérifier que les hypothèses du théorème s'appliquent dans le cas de l'opérateur $\mathcal{P}_h(2k)$ de (2.3.1), c'est-à-dire avec $f(x) = x^{2k} - 1$, dans une région du plan complexe à déterminer, contenant le secteur $\mathcal{S}_{\theta/(2k+2)}$. Une partie de ce travail repose sur l'étude des lignes de niveau de $\operatorname{Re} S$, où S est la fonction définie par (2.3.4), appelées *lignes de Stokes* de l'opérateur.

2.3.2 Lignes de Stokes du problème autoadjoint

On prend $f(x) = x^{2k} - 1$, $a_0 = 1$ et $a_1 = +\infty e^{i\frac{\theta}{2k+1}}$ dans les notations de la sous-section précédente.
Soient $x_j = e^{ij\pi/k}$, $j = 0, \ldots, (2k-1)$, les zéros de la fonction $x \mapsto x^{2k} - 1$.
On considère une détermination de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^{2k} - 1}$ définie dans un domaine D du plan complexe. On note alors $S(z)$ la fonction

$$S : z \mapsto \int_1^z \sqrt{x^{2k} - 1}\, dx\,,$$

où le chemin d'intégration est inclus dans D, l'intégrale ne dépendant pas du choix du chemin.

Afin de déterminer l'ensemble $\Delta(a_0, a_1)$ dans lequel les estimations (2.3.8) et (2.3.9) pourront être appliquées, nous commençons par étudier les lignes de Stokes associées à la fonction S. Au voisinage de $x = x_j$, $j = 0, \ldots, (2k-1)$, on a

$$S(x) = \frac{2\sqrt{2k}}{3}(x - x_j)^{3/2}(1 + o(1)) ,$$

donc les lignes de niveau $\left\{\mathrm{Re} \int_{x_j}^{z} \sqrt{x^{2k} - 1}\ dx = 0\right\}$ forment localement trois branches formant deux-à-deux un angle de $2\pi/3$. C'est l'aspect général des lignes de Stokes, pour une fonction holomorphe f quelconque, au voisinage d'un zéro simple de f .
Quand x tend vers l'infini, on a

$$S(x) = x^{k+1}(1 + o(1)) , \tag{2.3.10}$$

et les lignes de niveau de $\mathrm{Re}\, S$ se rapprochent asymptotiquement des directions

$$\arg x = \frac{\pi}{2(k+1)} + \frac{j\pi}{k+1} , \quad j = 0, 1, 2 , \tag{2.3.11}$$

soit $2k + 2$ directions asymptotiques.
Par ailleurs, quelle que soit la valeur de k, il existe une et une seule ligne de Stokes $\{\mathrm{Re}\, S = 0\}$ finie qui est toujours le segment $[-1, 1]$. Le comportement des solutions sur ce segment sera étudié à la section 2.4.
Ainsi, si $\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des lignes de Stokes issues des zéros $x_j = e^{ij\pi/k}$, $j = 0, \ldots, (2k-1)$, alors $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$ est constitué de $2k + 2$ composantes connexes non-bornées Σ_j, chaque domaine Σ_j étant limité à l'infini par les directions asymptotiques $\mathbb{R}^+ e^{i(2j-1)\pi/(2k+2)}$ et $\mathbb{R}^+ e^{i(2j+1)\pi/(2k+2)}$, ainsi que des deux domaines

$$\mathcal{D}_\pm = \left(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=0}^{2k+1} \overline{\Sigma_j}\right) \cap \{\pm \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \quad ;$$

voir Figures 2.4 et 2.5.
On note $\mathcal{C}_j$ la ligne de Stokes issue de x_j ayant pour direction asymptotique $\mathbb{R}^+ e^{i(2j+1)\pi/(2k+2)}$ si $j = 1, \ldots, k-1$, et $\mathbb{R}^+ e^{i(2j-1)\pi/(2k+2)}$ si $j = k+1, \ldots, 2k-1$. On choisit la détermination de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^{2k} - 1}$ définie sur le domaine

$$D = \mathbb{C} \setminus \left([-1, 1] \cup \bigcup_{j \neq 0, k} \mathcal{C}_j\right)$$

et qui vérifie $\mathrm{Re}\, S(x) > 0$ pour $x \in \Sigma_0$.

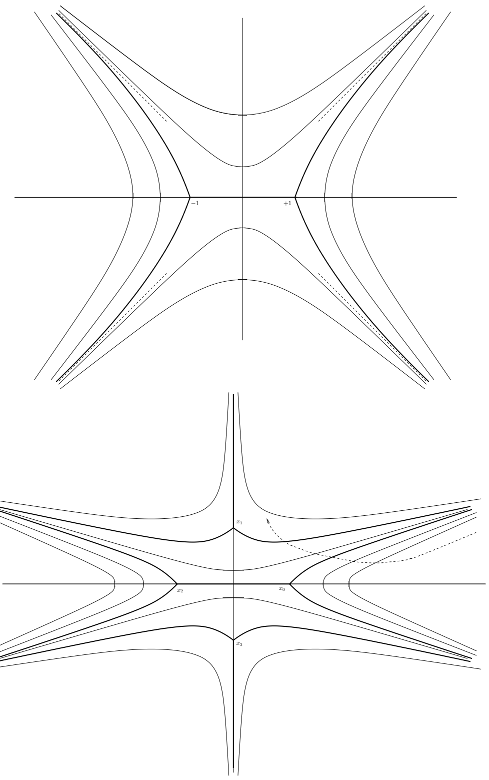

FIGURE 2.4 – Lignes de Stokes des oscillateurs harmonique ($k = 1$, en haut) et quartique ($k = 2$, en bas). Le chemin représenté en pointillés est un exemple de chemin canonique reliant un point situé à l'infini dans Σ_0 à un point de Σ_1 .

Soit $\Gamma = \overline{\mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_- \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_{-1} \cup \Sigma_{+1}} \setminus [-1, 1]$, et pour $\varepsilon > 0$,

$$\Gamma_\varepsilon = \{z \in \Gamma : d(z, \partial\Gamma) \geq \varepsilon\}. \tag{2.3.12}$$

Remarquons que $\Gamma_\varepsilon \subset D$.
On a alors le résultat suivant, où le comportement asymptotique des solutions quand $|x| \to +\infty$ est aussi valable pour un potentiel $x^{2k} - e^{i\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$, au lieu de $x^{2k} - 1$.

Proposition 2.3.2

1. *Pour tous $\mu \in \mathbb{R}$ et $\eta \in]-\pi/(2k+2), \pi/(2k+2)[$, si ψ_h est solution de (2.3.1) ou de*
$$\left(-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^{2k} - e^{i\mu}\right) \psi_h = 0\,, \tag{2.3.13}$$
avec $\psi_h \in L^2(\mathbb{R}^+ e^{i\eta})$, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $\alpha \in]-3\pi/(2k+2), 3\pi/(2k+2)[$,
$$\psi_h(z) = \frac{c}{(z^{2k}-1)^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{h} S(z)\right) (1 + o(1)), \quad z = re^{i\alpha},\ r \to +\infty\,, \tag{2.3.14}$$

uniformément par rapport à h. De plus, ψ_h est l'unique solution satisfaisant (2.3.14) pour $\alpha \in]-\pi/(2k+2), \pi/(2k+2)[$, et ψ_h est une fonction entière.

2. *Dans le cas $\mu = 0$, il existe une suite de fonctions u_j holomorphes sur Γ, $j \geq 1$, telles que, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\psi_h(z) \underset{h \to 0}{\sim} \frac{c}{(z^{2k}-1)^{1/4}} \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} u_j(z) h^j\right) \exp\left(-\frac{1}{h} S(z)\right), \quad (2.3.15)$$

uniformément pour $x \in \Gamma_\varepsilon$.

Preuve :
On applique le Théorème 2.3.1 avec $f(x) = x^{2k} - 1$, où l'on choisit comme points de base $a_0 = 1$ et $a_1 = +\infty e^{i\eta}$ le point situé à l'infini dans la direction $\arg^{-1}\{\eta\}$. L'étude des lignes de Stokes montre que, pour tout $z \in \Sigma_{-1} \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, il existe un chemin canonique $\gamma(a_1, z)$ reliant a_1 à z. En effet, le domaine

$$\Gamma_+ = \overline{\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \mathcal{D}_+} \setminus \partial\left(\overline{\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \mathcal{D}_+}\right)$$

est envoyé de façon bijective par S sur le plan complexe privé de deux demi-droites verticales (qui sont les images par S des lignes situées à la frontière de Γ_+). Pour $z \in \Gamma_+$, on peut donc construire $\gamma(a_1, z)$ comme l'image réciproque par S d'un chemin α dans $S(\Gamma_+)$ tel $\operatorname{Re}\alpha$ décroît strictement.
On construit de la même façon un chemin canonique reliant a_1 à z pour $z \in \Gamma_-$,

$$\Gamma_- = \overline{\Sigma_0 \cup \Sigma_{-1} \cup \mathcal{D}_-} \setminus \partial\left(\overline{\Sigma_0 \cup \Sigma_{-1} \cup \mathcal{D}_-}\right).$$

On a ainsi $\Gamma \subset \Delta(a_0, a_1)$ selon les notations de la sous-section 2.3.1.
Il reste à vérifier les conditions (2.3.6) et (2.3.7) du Théorème 2.3.1. On a

$$\sigma(x) = \frac{1}{f(x)^{3/4}} \left[\frac{1}{f^{1/4}}\right]''(x) = -\frac{f''(x)}{4f(x)^2} + \frac{5f'(x)^2}{16f(x)^3},$$

avec $f(x) = x^{2k} - 1$, $f'(x) = 2kx^{2k-1}$ et $f''(x) = 2k(2k-1)x^{2k-2}$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma(x) = Cx^{-2k-2}(1 + o(1)), \quad |x| \to +\infty. \quad (2.3.16)$$

D'après (2.3.10), il existe donc $R > 0$ tel que, pour tout $|x| > R$,

$$|\sigma(x)| \leq \frac{C}{2|x|^{2k+2}} \leq \frac{C}{|S(x)|^2}. \quad (2.3.17)$$

Pour $|x| \leq R$ maintenant, σ et S étant toutes deux bornées, on a bien sûr

$$|\sigma(x)| \leq \frac{C'}{1 + |S(x)|^2}$$

pour $C' > 0$ suffisamment grand, d'où (2.3.6) avec $\rho = 1$.
Enfin, il existe $p \in \mathbb{N}$ indépendant de x tel que, pour tout $x \in \Gamma_\varepsilon$, on peut choisir un chemin canonique $\gamma(x)$ de sorte que $S \circ \gamma(x)$ soit constitué d'au plus p segments ou intervalles complexes. Or il existe $A > 0$ tel que, pour tout segment ou intervalle complexe paramétré par le chemin $\gamma : I \to \mathbb{C}$,

$$\int_I \frac{|\gamma'(t)|dt}{1 + |\gamma(t)|^{1+\rho}} \leq A,$$

d'où (2.3.7). $\square$

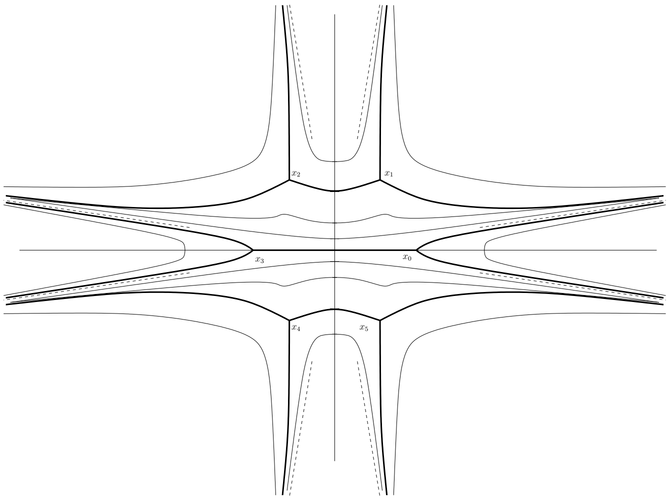

FIGURE 2.5 – Lignes de Stokes de l'oscillateur anharmonique $-\frac{d^2}{dx^2} + x^6$.

2.3.3 Une nouvelle expression des indices d'instabilité

Soit $n \geq 1$, λ_n la n-ème valeur propre de $\mathcal{A}(2k, \theta)$, et u_n une fonction propre associée à λ_n. Le changement d'échelle $\tilde{x} = |\lambda_n|^{-1/2k} x$ va d'abord transformer l'équation

$$(\mathcal{A}(2k, \theta) - \lambda_n) u_n(x) = 0 \,,$$

en

$$|\lambda_n| \left(-h_n^2 \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + e^{i\theta} \tilde{x}^{2k} - e^{i \arg \lambda_n} \right) u_n(h_n^{-1/(k+1)} \tilde{x}) = 0 \,, \tag{2.3.18}$$

où l'on a posé

$$h_n = |\lambda_n|^{-\frac{k+1}{2k}} \,, \tag{2.3.19}$$

qui désignera le nouveau paramètre de notre problème, $h_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. On effectue ensuite la dilatation analytique $y = e^{i\theta/(2k+2)} \tilde{x}$, et (2.3.18) devient

$$|\lambda_n| e^{i\theta/(k+1)} \left(-h_n^2 \frac{d^2}{dy^2} + y^{2k} - e^{i(\arg \lambda_n - \theta/(k+1))} \right) \psi_{h_n}(y) = 0 \,,$$

où

$$\psi_{h_n}(y) = u_n(h_n^{-1/(k+1)} e^{-i\theta/(2k+2)} y) \,. \tag{2.3.20}$$

Or, puisque $u_n \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\psi_{h_n} \in L^2(e^{-i\theta/(2k+2)}\mathbb{R})$. Ainsi, d'après la Proposition 2.3.2, on a $\psi_{h_n} \in L^2(\mathbb{R}^+)$, et en remarquant que ψ_{h_n} est une fonction paire ou impaire, $\psi_{h_n} \in L^2(\mathbb{R})$. Remarquons également que la condition $\psi_{h_n} \in L^2(\mathbb{R})$ entraîne automatiquement $\psi_{h_n} \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{4k} dx)$ (voir la Proposition 2.3.2). Par conséquent, ψ_{h_n} est une fonction propre de l'opérateur autoadjoint positif

$$-h_n^2 \frac{d^2}{dy^2} + y^{2k} \,,$$

associée à la valeur propre $e^{i(\arg \lambda_n - \theta/(k+1))}$. On a donc nécessairement

$$e^{i(\arg \lambda_n - \theta/(k+1))} = 1 \,,$$

c'est-à-dire que l'on retrouve l'opérateur $\mathcal{P}_h(2k)$ défini par (2.3.1), et que toutes les valeurs propres de $\mathcal{A}(2k,\theta)$ sont situées sur la demi-droite $\arg^{-1}\{\frac{\theta}{k+1}\}$.
D'après les arguments de la sous-section 2.3.2, on peut choisir de normaliser la fonction propre u_n de façon à ce que la fonction ψ_{h_n} définie par (2.3.20) soit caractérisée par le comportement asymptotique (2.3.14) avec $c = 1$, pour $x \to +\infty$ par exemple.
Enfin, les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres λ_n étant de rang 1, l'expression (2.1.4) peut être utilisée pour les indices d'instabilité $\kappa_n(2k,\theta)$.
En utilisant (2.3.20) et le changement de variable $x \mapsto h_n^{\frac{1}{k+1}} x$, on obtient ainsi

$$\kappa_n(2k,\theta) = \frac{\int_{\mathbb{R}} |\psi_{h_n}(e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}} y)|^2 dy}{\left|\int_{\mathbb{R}} \psi_{h_n}^2(e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}} y) dy\right|}.$$

On transforme ensuite l'intégrale du dénominateur en une intégrale réelle par homotopie, comme à la section 2.2.3 :

$$e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{h_n}^2(e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}} y) dy = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \psi_{h_n}^2(z) dz\,,$$

où γ_R est le segment $[-Re^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}, Re^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}] \subset \mathbb{C}$. Or

$$\gamma_R = [-R,+R] \vee \mathcal{C}_R \vee (-\mathcal{C}_R)$$

où $\mathcal{C}_R(t) = Re^{it\frac{\theta}{2(k+1)}}$, $t \in [0,1]$. La décroissance exponentielle de ψ_{h_n} quand $|x| \to +\infty$ dans le secteur (2.3.2) entraîne

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\pm\mathcal{C}_R} \psi_{h_n}^2(z) dz = 0 \tag{2.3.21}$$

(voir la Proposition 2.3.2 en remarquant que $S(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$ dans le secteur (2.3.2)).
En utilisant la partié ou l'imparité de la fonction ψ_{h_n}, on a également

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-\mathcal{C}_R} \psi_{h_n}^2(z) dz = 0\,.$$

Ainsi,

$$\kappa_n(2k,\theta) = \frac{\int_{\mathbb{R}} |\psi_{h_n}(e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}} x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} \psi_{h_n}^2(x) dx}. \tag{2.3.22}$$

Pour finir, on peut par parité se ramener à des intégrales sur $\mathbb{R}^+$ dans (2.3.22). Toutes les informations de cette sous-section sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 2.3.3 *Pour tout $n \geq 1$, la n-ème valeur propre λ_n de l'opérateur $\mathcal{A}(2k,\theta)$ s'écrit*

$$\lambda_n = r_n e^{i\theta/(k+1)}\,,$$

où $r_n > 0$ est la n-ème valeur propre de l'oscillateur anharmonique autoadjoint

$$-\frac{d^2}{dx^2} + x^{2k}.$$

On a la formule de Weyl suivante : il existe $(s_j)_{j\geq 1}$ tel que

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{(k+1)\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{k+1}{2k})}{\Gamma(\frac{1}{2k})}(n+1/2)\right)^{\frac{2k}{k+1}} \left(1+\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(n+1/2)^{-2j}\right). \tag{2.3.23}$$

Il existe une unique fonction propre u_n de $\mathcal{A}(2k,\theta)$ associée à λ_n telle que

$$u_n(x) = \psi_{h_n}(h_n^{1/(k+1)}e^{i\theta/(2k+2)}x)\,,$$

où h_n est défini par (2.3.19) et où ψ_h est l'unique solution de l'équation (2.3.1) vérifiant (2.3.14) avec $c=1$ quand $x\to+\infty$. Enfin, on a

$$\kappa_n(2k,\theta) = \frac{\int_{\mathbb{R}^+}|\psi_{h_n}(e^{i\theta/(2k+2)}x)|^2dx}{\int_{\mathbb{R}^+}\psi_{h_n}(x)^2dx}\,. \tag{2.3.24}$$

Le développement (2.3.23) est démontré dans [82] pour des opérateurs de la forme $-\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}+P(x)$, P polynôme réel de degré pair.
Dans la sous-section suivante, l'étude des solutions ψ_h décrites dans le Lemme 2.3.2, avec $h=h_n\to 0$, va nous permettre de déterminer un développement asymptotique du numérateur de (2.3.24).

2.3.4 Estimation de la norme des fonctions propres

Dans cette sous-section, on suppose sans perte de généralité que $\theta>0$.
On a donné dans la sous-section 2.3.2 un développement en puissances de h de la fonction propre ψ_h sur la demi-droite $\arg^{-1}\{\theta/(2k+2)\}$ privée d'un petit segment près de 0. Plus précisément, pour $\delta>0$ fixé (à déterminer plus tard dans cette sous-section), on a

$$\psi_h(x) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{(x^{2k}-1)^{1/4}}\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}u_j(x)h^j\right)\exp\left(-\frac{1}{h}S(x)\right), \tag{2.3.25}$$

uniformément pour $x\in[\delta,+\infty[e^{i\theta/(2k+2)}$.
On écrit alors

$$\int_0^{+\infty}|\psi_h(e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}x)|^2dx = I_\delta(h)+R_\delta(h)\,, \tag{2.3.26}$$

avec

$$I_\delta(h) = \int_\delta^{+\infty}|\psi_h(e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}x)|^2dx\,,\quad R_\delta(h) = \int_0^{\delta}|\psi_h(e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}x)|^2dx\,,$$

et nous commençons par estimer le terme $I_\delta(h)$.
Le caractère uniforme de (2.3.25) permet de passer à l'intégrale. Ainsi, il existe une suite de fonctions $(v_j)_{j\geq 1}$ telle que

$$I_\delta(h) = \int_\delta^{+\infty}a_\theta(x,h)e^{\frac{2}{h}\varphi_{\theta,k}(x)}dx\,, \tag{2.3.27}$$

avec

$$a_\theta(x,h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{|x^{2k}e^{i\frac{k\theta}{k+1}}-1|^{1/2}}\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}v_j(x)h^j\right)$$

et

$$\varphi_{\theta,k}(x) = -\mathrm{Re} \int_0^{xe^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}} (t^{2k}-1)^{1/2} dt\,.$$

Nous procédons alors de la même façon que pour l'opérateur d'Airy complexe : montrer que la phase $\varphi_{\theta,k}$ possède un unique point critique sur l'intervalle $[0,+\infty[$, et appliquer la méthode de Laplace pour obtenir que l'intégrale du membre de droite de (2.3.27) se concentre autour de ce point critique lorsque $h \to 0$.
On a

$$\varphi'_{\theta,k}(x) = -|x^{2k}e^{i\frac{k\theta}{k+1}} - 1|^{1/2} \cos\left(\frac{1}{2}\arg(x^{2k}e^{i\frac{k\theta}{k+1}} - 1) + \frac{\theta}{2(k+1)}\right).$$

Or d'après (2.1.2),

$$\frac{1}{2}\arg(x^{2k}e^{i\frac{k\theta}{k+1}} - 1) + \frac{\theta}{2(k+1)} \in \left]\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2(k+1)}\right],$$

et on en déduit que $\varphi'_{\theta,k}(x)$ s'annule si et seulement si

$$\arg(x^{2k}e^{i\frac{k\theta}{k+1}} - 1) = \pi - \frac{\theta}{k+1}\,. \tag{2.3.28}$$

En prenant la tangente dans (2.3.28), ceci est équivalent à

$$\frac{x^{2k}\sin(k\theta/(k+1))}{x^{2k}\cos(k\theta/(k+1)) - 1} = -\tan\frac{\theta}{k+1}\,,$$

ce qui donne un unique point critique

$$x_{\theta,k} = \left(\frac{\tan(\theta/(k+1))}{\sin(k\theta/(k+1)) + \cos(k\theta/(k+1))\tan(\theta/(k+1))}\right)^{\frac{1}{2k}}, \tag{2.3.29}$$

pour $\varphi_{\theta,k}$. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un maximum non-dégénéré.
Ainsi, la méthode de Laplace s'applique et on en déduit que, si $M > x_{\theta,k}$ est fixé, il existe une suite $(r_j(2k,\theta))_{j\geq 1}$ telle que

$$\begin{aligned}\int_\delta^M a_\theta(x,h)e^{\frac{2}{h}\varphi_{\theta,k}(x)}dx \quad \underset{h\to 0}{\sim} \quad & \frac{\sqrt{2\pi}}{|(x_{\theta,k}^{2k}e^{ik\theta/(k+1)} - 1)\varphi''_{\theta,k}(x_{\theta,k})|^{1/2}} e^{\frac{2}{h}\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})} h^{1/2} \\ & \times \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} r_j(2k,\theta)h^j\right). \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

La constante $\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})$ étant strictement positive, il s'agit d'un terme à croissance exponentielle quand $h \to 0$.
Quant à l'intégrale sur $[M,+\infty[$, on a pour $h < 1$ (voir (2.2.24))

$$\int_M^{+\infty} a_\theta(x,h)e^{\frac{2}{h}\varphi_{\theta,k}(x)}dx \leq Ke^{\frac{2}{h}\varphi_{\theta,k}(M)}\,, \tag{2.3.31}$$

avec $K > 0$ et $\varphi_{\theta,k}(M) < \varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})$.
Ainsi, d'après (2.3.27), (2.3.30) et (2.3.31), on a

$$I_\delta(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{|(x_{\theta,k}^{2k}e^{ik\theta/(k+1)}-1)\varphi''_{\theta,k}(x_{\theta,k})|^{1/2}} e^{\frac{2}{h}\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})}h^{1/2}\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty} r_j(2k,\theta)h^j\right). \tag{2.3.32}$$

Le lemme suivant assure enfin que le terme $R_\delta(h)$ de (2.3.26) est négligeable devant $e^{\frac{2}{h}\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})}h^{1/2}$ si δ est choisi suffisamment petit.

Lemme 2.3.4 *Il existe $\delta > 0$ et une constante $c \in]0, 2\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})[$ telle que*

$$R_\delta(h) = \mathcal{O}(e^{c/h}). \tag{2.3.33}$$

Preuve : On procède par majoration grossière de $|\psi_h|$ dans un voisinage complexe de $[-1, 1]$ par le principe du maximum.
Soit $a > 0$, et $\tilde{\delta} > 0$ suffisamment petit pour que

$$\forall x \in [-1-a, 1+a] + i[-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}], \quad \operatorname{Re} S(x) > \operatorname{Re} S(x_{\theta,k}e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}). \tag{2.3.34}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ l'ellipse ouverte centrée en 0, de grand-axe $[-1-a, 1+a]$ et de petit axe $[-i\tilde{\delta}, i\tilde{\delta}]$. Notons $\gamma_d = \partial\Omega \cap \Gamma_\varepsilon$, où Γ_ε est le domaine défini par (2.3.12), et $\gamma_g = \partial\Omega \setminus \gamma_d$.
D'après la Proposition 2.3.2, on a alors

$$\forall x \in \gamma_d, \quad \psi_h(x) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{(x^{2k}-1)^{1/4}}\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty} u_j(x)h^j\right)\exp\left(-\frac{1}{h}S(x)\right).$$

Par conséquent, d'après (2.3.34),

$$\forall x \in \gamma_d, \quad |\psi_h(x)|^2 = \mathcal{O}(e^{c_d/h}) \quad \text{avec} \quad c_d < 2\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k}).$$

D'autre part, la symétrie des fonctions propres entraîne également

$$\forall x \in \gamma_g, \quad |\psi_h(x)|^2 = \mathcal{O}(e^{c_g/h}) \quad \text{avec} \quad c_g < 2\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k}),$$

et le principe du maximum appliqué à ψ_h sur Ω donne donc

$$\sup_{x\in\Omega}|\psi_h(x)|^2 \le \sup_{x\in\partial\Omega}|\psi_h(x)|^2 = \mathcal{O}(e^{c/h}),$$

avec $c < 2\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})$.
On en déduit le contrôle souhaité sur R_δ dès que δ est suffisamment petit pour que $\{|z| \le \delta\} \subset \Omega$. $\boxminus$

Ainsi, (2.3.26) et (2.3.32) aboutissent au

Lemme 2.3.5 *Il existe une suite $(r_j(2k,\theta))_{j\ge 1}$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_h(e^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}x)|^2 dx \underset{h\to 0}{\sim} C_k(\theta)h^{1/2}e^{\frac{c_k(\theta)}{h}}\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty} r_j(2k,\theta)h^j\right), \tag{2.3.35}$$

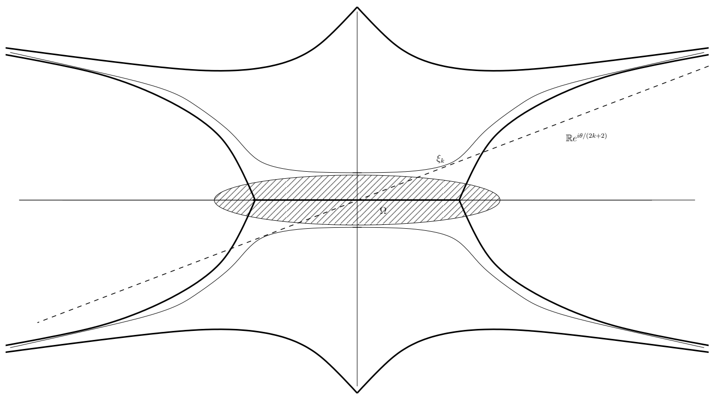

FIGURE 2.6 – L'ouvert Ω.

avec

$$C_k(\theta) = 2\frac{\sqrt{2\pi}}{|(x_{\theta,k}^{2k}e^{ik\theta/(k+1)} - 1)\varphi''_{\theta,k}(x_{\theta,k})|^{1/2}}$$

et

$$c_k(\theta) = 2\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})\,.$$

La section suivante consiste à étudier le dénominateur de l'expression (2.3.24).

2.4 Construction d'un quasimode pour le problème autoadjoint

L'étape suivante dans la preuve du Théorème 2.1.2 consiste à déterminer un équivalent de $\|\psi_h\|_2$ en approchant ψ_h, cette fois sur l'axe réel, par un vecteur propre approché modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ que nous allons construire explicitement.
Remarquons que la construction de quasimode proposée dans cette section pourrait être remplacée par des estimations de type WKB, valables au voisinage d'un point tournant simple, consistant à obtenir une expression approchée des solutions de l'équation $(-h^2\frac{d^2}{dx^2} + V(x))\psi_h(x) = 0$ faisant intervenir la fonction d'Airy Ai. Néanmoins, la construction que nous avons choisi de détailler dans cette section illustre une méthode standard qu'il nous semble intéressant de présenter ici. Pour davantage de détails sur la méthode alternative, nous renvoyons à la sous-section 3.3.3, ainsi qu'à [111], chapitre 11, et à [85].

2.4.1 Solution asymptotique pour un potentiel en puits simple

Nous effectuons la construction d'un quasimode dans le cas plus général de l'opérateur de Schrödinger semi-classique

$$\mathcal{P} - E := -h^2\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E\,,$$

avec un potentiel régulier en forme de puits simple. Le cas du potentiel $x^{2k}-1$ qui nous intéresse en est évidemment un cas particulier.
Nous suivons pour cela l'Exercice 12.3 proposé dans [74] :

Théorème 2.4.1 *Soit $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $E_0 \in \mathbb{R}$ fixé et supposons que*

$$\underline{\lim}_{|x|\to\infty} V(x) > E_0 \,,$$

que

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ V(x) < E_0\} =]\alpha_0, \beta_0[\,,$$

et que $V'(\alpha_0) < 0$, $V'(\beta_0) > 0$. Pour E dans un voisinage de E_0, nous notons $\alpha(E)$ (resp. $\beta(E)$) la racine de $V(x) - E = 0$ proche de α_0 (resp. β_0).
Il existe une fonction $\psi_-(\xi, E)$ (resp. $\psi_+(\xi, E)$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur des voisinages de $(\xi = 0, E = E_0)$ telles que

$$V(-\partial_\xi\psi_\pm(\xi)) + \xi^2 - E = 0, \quad \psi_\pm(0) = 0, \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \partial_\xi\psi_-(0) & = & -\alpha(E) \\ \partial_\xi\psi_+(0) & = & -\beta(E) \end{array} \right. , \quad (2.4.1)$$

et des fonctions

$$b_\pm(\xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} b_\pm^j(\xi) h^j, \quad b(0) \neq 0 \,,$$

à support dans un voisinage de $\xi = 0$, telles que la fonction $u \in \mathcal{D}(\mathcal{P})$ définie par

$$u(x, h) = \chi_- u_- + \chi_0 u_0 + \chi_+ u_+ \quad (2.4.2)$$

soit une solution asymptotique :

$$(\mathcal{P} - E)u = \mathcal{O}(h^\infty) \,,$$

où

- *(χ_-, χ_0, χ_+) constitue une partition de l'unité vérifiant, pour un certain $\delta > 0$*
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \textit{Supp } \chi_- & \subset &]-\infty, \alpha(E)) + \delta] \\ \textit{Supp } \chi_0 & \subset & [\alpha(E) + \frac{\delta}{2}, \beta(E) - \frac{\delta}{2}] \\ \textit{Supp } \chi_+ & \subset & [\beta(E) - \delta, +\infty[\ ; \end{array} \right.$$
- *Les fonctions u_+ et u_- ont pour expression*
$$u_\pm(x, h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi + \psi_\pm(\xi))} b_\pm(\xi, h) d\xi \ ; \quad (2.4.3)$$
- *u_0 est de la forme*
$$u_0(x) = a_+(x, E, h) e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x)} + a_-(x, E, h) e^{\frac{i}{h}\varphi_-(x)} \,, \quad (2.4.4)$$

  où
$$\varphi_\pm(x) = \pm \int_{\alpha(E)}^{x} \sqrt{E - V(t)} dt \,, \quad (2.4.5)$$

  et
$$a_\pm(x, E, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_\pm^j(x, E) h^j \,,$$

avec, pour une certaine constante $C \neq 0$ *,*

$$a^0_{\pm}(x,E) = e^{\mp i\frac{\pi}{4}} \frac{C}{(E - V(x))^{1/4}} \ ;$$

– $u = \mathcal{O}(h^\infty)$ *pour* $x < \alpha(E) - \delta$ *et* $x > \beta(E) + \delta$ *.*

Pour prouver ce théorème, nous procédons en trois étapes : construire une solution asymptotique u_- et, de façon analogue, une solution asymptotique u_+ au voisinage des points $\alpha(E)$ et $\beta(E)$ respectivement ; prolonger cette construction dans toute la partie classiquement autorisée $[\alpha(E), \beta(E)]$; et enfin, recoller ces solutions en une solution globale à l'aide de la formule (2.4.2).

2.4.2 Au voisinage des points tournants

Pour prouver l'existence de la fonction ψ de l'énoncé, on utilise le théorème des fonctions implicites. La fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{(\xi,E)} \times \mathbb{R}_x & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\xi, E, x) & \longmapsto & V(x) + \xi^2 - E \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et

$$\partial_x F(0, E_0, \alpha_0) = V'(\alpha_0) < 0$$

par hypothèse. Il existe donc un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, E_0)$, un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ de α_0, et une fonction $\mathcal{C}^\infty$

$$g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$$

telle que

$$[\ F(\xi, E, x) = 0, \quad (\xi, E) \in \mathcal{U}\ ] \Leftrightarrow [\ x = g(\xi, E)\ ]\ .$$

Autrement dit on a

$$V(g(\xi, E)) + \xi^2 - E = 0\,,$$

au voisinage de $(0, E_0, \alpha_0)$. De plus, puisque

$$V(\alpha(E)) + 0^2 - E = 0\,,$$

par définition de $\alpha(E)$, alors $\alpha(E) = g(0, E)$. Il suffit donc de poser

$$\psi_-(\xi, E) = -\int_0^\xi g(\eta, E) d\eta\,,$$

pour obtenir une fonction satisfaisant les conditions souhaitées.

Remarque 2.4.2 *Cette fonction* ψ_- *est construite de façon à ce que les points critiques de la phase*

$$\xi \longmapsto x\xi + \psi_-(\xi)$$

se situent sur la courbe d'équation

$$V(x) + \xi^2 - E = 0\,.$$

Notons que la fonction

$$f \;:\; (x,\xi,E) \longmapsto \frac{\xi^2 + V(x) - E}{x + \partial_\xi \psi_-(\xi)}$$

se prolonge partout au voisinage de $x = \alpha_0$, $\xi = 0$, $E = E_0$ car

$$\begin{aligned} f(-\partial_\xi\psi_-(\xi)+\varepsilon,\xi,E) &= \frac{V(-\partial_\xi\psi_-\xi(\xi)+\varepsilon)+\xi^2-E}{\varepsilon} \\ &= \frac{V(-\partial_\xi\psi_-\xi(\xi)+\varepsilon)-V(-\partial_\xi\psi_-\xi(\xi))}{\varepsilon} \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} V'(-\partial_\xi\psi_-(\xi)) \,, \end{aligned}$$

ce qui permet de prolonger f en posant

$$f(-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi,E) = V'(-\partial_\xi\psi_-(\xi)). \tag{2.4.6}$$

D'autre part on a

$$\partial_x f(-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi,E) = \frac{1}{2}V''(-\partial_\xi\psi_-(\xi))\,. \tag{2.4.7}$$

On pose maintenant

$$u_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} b_-(\xi,h)d\xi\,,$$

où b_- est à support dans un voisinage de $\xi = 0$ sur lequel la fonction ψ_- est définie, et où le développement asymptotique de b_- reste à déterminer. On a alors

$$(\mathcal{P}-E)u_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))}(\xi^2+V(x)-E)b_-(\xi,h)d\xi\,,$$

et on cherche à déterminer $b(\xi,h)$ tel qu'il existe

$$a(x,\xi,h) \sim \sum_{j=1}^{+\infty} a_j(x,\xi)h^j\,,$$

avec

$$e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))}(\xi^2+V(x)-E)b_-(\xi,h) = hD_\xi(e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))}a(x,\xi)) + \mathcal{O}(h^\infty)\,, \tag{2.4.8}$$

c'est-à-dire

$$(\xi^2+V(x)-E)b_-(\xi,h) = (x+\partial_\xi\psi_-(\xi))a(x,\xi,h) + hD_\xi a(x,\xi,h) + \mathcal{O}(h^\infty). \tag{2.4.9}$$

En identifiant les termes des développements asymptotiques, on obtient une suite d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\xi^2+V(x)-E)b_-^0(\xi) &=& (x+\partial_\xi\psi_-(\xi))a_0(x,\xi)\;; \\ (\xi^2+V(x)-E)b_-^1(\xi) - D_\xi a_0(x,\xi) &=& (x+\partial_\xi\psi_-(\xi))a_1(x,\xi)\;; \\ & \vdots & \\ (\xi^2+V(x)-E)b_-^j(\xi) - D_\xi a_{j-1}(x,\xi) &=& (x+\partial_\xi\psi_-(\xi))a_j(x,\xi) \\ & \vdots & \end{array}\right. .$$

La première équation a, pour tout b_-^0 , l'unique solution

$$a_0(x,\xi) = f(x,\xi,E)b_-^0(\xi)\,. \tag{2.4.10}$$

Néanmoins, l'équation suivante n'est résoluble que si

$$(D_\xi a_0)(-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi) = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$(\partial_\xi f)(-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi,E)b_-^0(\xi) + f(-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi,E)\partial_\xi b_-^0(\xi) = 0\,,$$

ou encore d'après (2.4.6) et (2.4.7) :

$$V'(-\partial_\xi\psi_-(\xi))\partial_\xi b_-^0 + \frac{1}{2}\partial_\xi(V'(-\partial_\xi\psi_-(\xi)))b_0 = 0\,.$$

Ceci impose l'expression de b_-^0 à une constante $c \neq 0$ près :

$$b_-^0(\xi) = \frac{c}{|V'(-\partial_\xi(\psi_-(\xi)))|^{1/2}}\,. \tag{2.4.11}$$

De la même façon, la deuxième équation du système admet une unique solution a_1 pour tout b_-^1, et l'équation suivante impose le choix de b_-^1 à une constante près, etc. On obtient ainsi le développement $(b_-^0, b_-^1, \dots, b_-^j, \dots)$ de b_- et les solutions $(a_0, a_1, \dots, a_j, \dots)$ associées.

La fonction u_- définie par (2.4.3) est une solution asymptotique au voisinage de 0. En effet, on a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}-E)u_-(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\mathbb{R}}\Big(hD_\xi(e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))}a(x,\xi)) + \mathcal{O}(h^\infty)\Big)\,d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\text{Supp } b_-} hD_\xi(e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))}a(x,\xi))d\xi + \mathcal{O}(h^\infty) \\
&= \sqrt{\frac{h}{2\pi}}\Big[e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))}a(x,\xi)\Big]_{\text{Supp } b_-} + \mathcal{O}(h^\infty) \\
&= \mathcal{O}(h^\infty)\,.
\end{aligned}$$

La même démarche permet de construire b_+, puis la solution asymptotique u_+ associée au voisinage de $\beta(E)$.

Montrons maintenant que

$$\forall x \in]-\infty, \alpha(E)-\delta]\,, \quad u_-(x,h) = \mathcal{O}(h^\infty)\,, \tag{2.4.12}$$

et l'analogue pour u_+.
Cela provient du fait que la phase

$$\phi_x : \xi \to x\xi + \psi_-(\xi)$$

n'admet pas de point critique pour $x < \alpha(E) - \delta$, ce qui va nous permettre d'effectuer des intégrations par parties successives dans (2.4.3) pour gagner autant de puissances de h que souhaitées.

L'absence de point critique sur $\mathbb{R} \setminus [\alpha_0, \beta_0]$ s'observe en remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que ϕ_x admet un point critique $\xi(x)$, on a

$$\partial_\xi \psi_-(\xi(x)) = -x\,,$$

ce qui, combiné avec (2.4.1), donne

$$V(x) + \xi^2(x) - E = 0\,,$$

et $E - V(x)$ doit nécessairement être positif, c'est-à-dire qu'on doit avoir $x \in [\alpha(E), \beta(E)]$. Les points critiques de ϕ_x sont alors donnés par

$$\xi_\pm(x) = \pm\sqrt{E - V(x)}\,. \tag{2.4.13}$$

(2.4.12) résulte du lemme suivant :

Lemme 2.4.3 *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $F_N(x,\xi,h) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, uniformément bornée par rapport à h, telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} b_-(\xi,h)d\xi = h^N \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} F_N(x,\xi,h)\,. \tag{2.4.14}$$

Preuve :
On procède par récurrence. Pour $N = 1$, l'égalité

$$(x + \partial_\xi \psi_-(\xi)) e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} = hD_\xi \left(e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} \right)$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} b_-(\xi,h)d\xi &= h \int_{\mathbb{R}} D_\xi \left(e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} \right) \frac{b_-(\xi,h)}{x+\partial_\xi\psi_-(\xi)} d\xi \\
&= h \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} F_1(x,\xi,h)d\xi\,,
\end{aligned}$$

avec

$$F_1(x,\xi,h) = D_\xi \left(\frac{b_-(\xi,h)}{x+\partial_\xi\psi_-(\xi)} \right)\,,$$

ce qui donne l'égalité souhaitée.
Si elle est vraie au rang N, le même procédé donne

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} b_-(\xi,h)d\xi &= h^N \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} F_N(x,\xi,h) \\
&= h^{N+1} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} F_{N+1}(x,\xi,h)d\xi\,,
\end{aligned}$$

avec

$$F_{N+1}(x,\xi,h) = D_\xi \left(\frac{F_N(x,\xi,h)}{x+\partial_\xi\psi_-(\xi)} \right)\,,$$

ce qui prouve le lemme. ⊟

2.4.3 Dans la région classiquement autorisée

Sur le segment $[\alpha(E), \beta(E)]$, on a deux courbes $\xi_\pm(x)$ de points critiques pour la fonction ϕ_x. Cela va nous permettre d'exprimer la solution u_- différement et de la prolonger sur tout le segment. On utilise pour cela la méthode de la phase stationnaire. Pour cela on suppose que $x > \alpha(E) + \delta$ est dans l'intervalle où l'expression (2.4.3) de u_- est valable. On écrit alors

$$\begin{aligned} u_-(x,h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \left(\int_{\mathbb{R}^-} e^{\frac{i}{h}(x\xi + \psi_-(\xi))} b_-(\xi,h) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^+} e^{\frac{i}{h}(x\xi+\psi_-(\xi))} b_-(\xi,h) d\xi \right) \\ &=: \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \left(I^-(x,h) + I^+(x,h) \right). \end{aligned}$$

L'intervalle $\mathbb{R}^-$ (resp. $\mathbb{R}^+$) contient un unique point critique $\xi_-(x)$ (resp. $\xi^+(x)$) de ϕ_x. D'après la méthode de la phase stationnaire (à x fixé), on a donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, des fonctions $(a_\pm^0, a_\pm^1, \ldots, a_\pm^{N-1})$ telles que

$$I^\pm(x,h) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} a_\pm^j(x) h^{j+1/2} \right) e^{\frac{i}{h}\phi_x(\xi_\pm(x))} + \mathcal{O}(h^{N+1/2}),$$

d'où l'expression (2.4.4) sur le segment $[\alpha(E), \beta(E)]$, avec

$$a_\pm(x,E,h) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{+\infty} a_\pm^j(x,E) h^j$$

et

$$\varphi_\pm(x) := \phi_x(\xi_\pm(x)) = x\xi_\pm(x) + \psi_-(\xi_\pm(x)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \varphi'_\pm(x) &= \xi_\pm(x) + x\xi'_\pm(x) + \xi'_\pm(x)(\partial_\xi\psi_-)(\xi_\pm(x)) \\ &= \xi_\pm(x) + \xi'_\pm(x)(x + (\partial_\xi\psi_-)(\xi_\pm(x)) \\ &= \pm\sqrt{E - V(x)}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.4.13), d'où l'expression (2.4.5).
D'autre part le premier terme $a_\pm^0$ de chaque intégrale est donné, d'après (2.4.11), par

$$\begin{aligned} a_\pm^0(x) &= \frac{e^{\mp i\frac{\pi}{4}} b_-^0(\xi_\pm(x))}{|\partial_\xi^2\psi_-(\xi_\pm(x))|^{1/2}} \\ &= \frac{ce^{\mp i\frac{\pi}{4}}}{|V'(-\partial_\xi\psi_-(\xi_\pm(x)))\partial_\xi^2\psi_-(\xi_\pm(x))|^{1/2}} \\ &= \frac{ce^{\mp i\frac{\pi}{4}}}{|\partial_\xi \left(V(-\partial_\xi\psi_-(\cdot))\right)(\xi_\pm(x))|^{1/2}}. \end{aligned}$$

En effet sgn $\phi_x''(\xi_\pm(x)) = \text{sgn}\,(\partial_\xi^2\psi_-)(\xi_\pm(x)) = \mp 1$, puisque $\partial_\xi^2\psi_-(0) = 0$ et $\partial_\xi^3\psi_-(0) < 0$ d'après (2.4.1), et $\pm\xi_\pm(x) \geq 0$.
Or, d'après (2.4.1), on a

$$\partial_\xi\left(V(-\partial_\xi\psi_-(\cdot))\right)(\xi_\pm(x)) = -2\xi_\pm(x) = -2\sqrt{E - V(x)}\,.$$

Donc finalement on obtient

$$a_\pm^0(x) = \frac{ce^{\mp i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}|E - V(x)|^{1/4}}\,, \tag{2.4.15}$$

et on remarque que le premier terme du développement (2.4.4) correspond à celui obtenu par la méthode WKB complexe.

L'expression (2.4.4) ainsi obtenue prolonge celles de $u_\pm$ au voisinage de $\alpha(E)$ et $\beta(E)$ dans toute la région classiquement autorisée et on a

$$\forall x \in [\alpha(E), \beta(E)], \quad (\mathcal{P} - E)u_0 = 0 + \mathcal{O}(h^\infty)\,.$$

Il ne reste plus qu'à recoller les différentes expressions obtenues. Soit u définie par (2.4.2). On a alors clairement

$$(\mathcal{P} - E)u = 0 + \mathcal{O}(h^\infty)\,, \tag{2.4.16}$$

ce qui termine notre construction, et le Théorème 2.4.1 est démontré.

2.5 Indices d'instabilité des oscillateurs anharmoniques pairs

2.5.1 Une conséquence du théorème spectral

Le théorème suivant va maintenant nous permettre d'affirmer que la solution asymptotique construite à la section précédente constitue une approximation modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ en norme L^2 de la fonction propre ψ_h.

Théorème 2.5.1 *Soit H un opérateur autoadjoint, et u un vecteur propre de H associé à une valeur propre λ. On suppose que le projecteur spectral Π_λ associé à λ est* de rang 1, *et qu'il existe $a > 0$ tel que*

$$d(\lambda, \sigma(H) \setminus \{\lambda\}) \geq a\,.$$

Si pour un certain $\varepsilon > 0$, il existe $u^{app} \in \mathcal{D}(H)$ et λ^{app} tels que

$$\|(H - \lambda^{app})u^{app}\|_2 \leq \varepsilon\,,$$

alors

(i) $|\lambda - \lambda^{app}| \leq \varepsilon$, *et*

(ii)

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \exists C > 0\,,\quad \|u - \alpha u^{app}\|_2 \leq C\frac{\varepsilon}{a}\,. \tag{2.5.1}$$

Autrement dit,

$$d(u, \langle u^{app}\rangle) \leq C\frac{\varepsilon}{a}\,.$$

Preuve :
Le point (i) est une conséquence directe du théorème spectral.
Pour montrer (ii), on décompose u^{app} suivant l'espace propre $\langle u\rangle$ associé à λ :

$$u^{app} = \beta u + u^{\perp}, \quad u^{\perp} \in \langle u\rangle^{\perp}.$$

On a

$$(H-\lambda)u^{app} = (H-\lambda^{app})u^{app} + (\lambda^{app}-\lambda)u^{app},$$

donc d'après les hypothèses et le point (i), et si l'on suppose u^{app} normalisée,

$$\|(H-\lambda)u^{app}\|_2 \leq 2\varepsilon. \tag{2.5.2}$$

En composant par l'opérateur $(I-\Pi_\lambda)$, on a d'autre part

$$\begin{aligned}(I-\Pi_\lambda)(H-\lambda)u^{app} &= (I-\Pi_\lambda)(H-\lambda)(\beta u) + (I-\Pi_\lambda)(H-\lambda)u^{\perp} \\ &= 0 + (H-\lambda)(I-\Pi_\lambda)u^{\perp} \\ &= (H-\lambda)u^{\perp},\end{aligned}$$

donc, d'après les hypothèses, le théorème spectral et car $H_{|\langle u\rangle^{\perp}}$ a pour spectre $\sigma(H)\setminus\{\lambda\}$,

$$\begin{aligned}\|(I-\Pi_\lambda)(H-\lambda)u^{app}\|_2 &= \|(H_{|\langle u\rangle^{\perp}}-\lambda)u^{\perp}\|_2 \\ &\geq d(\sigma(H_{|\langle u\rangle^{\perp}}),\lambda)\|u^{\perp}\|_2 \\ &\geq a\|u^{\perp}\|_2 .\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Ainsi, d'après (2.5.2) et (2.5.3), on a $\|u^{\perp}\|_2 \leq \frac{2\varepsilon}{a}$, d'où

$$\|u^{app}-\beta u\|_2 \leq \frac{2\varepsilon}{a},$$

c'est-à-dire

$$\|u - \frac{1}{\beta}u^{app}\|_2 \leq \frac{2\varepsilon}{a}.$$

□

Nous allons maintenant appliquer le Théorème 2.5.1 à l'oscillateur anharmonique autoadjoint

$$\tilde{\mathcal{P}}_{h_n}(2k) = -h_n^2\frac{d^2}{dx^2} + x^{2k},$$

et à la valeur propre $\lambda = 1$, avec pour vecteur propre associé la fonction ψ_h étudiée à la section 2.3. La solution approchée jouant ici le rôle de u^{app} est la solution asymptotique u construite à la section (2.4). La distance $a(h_n)$ séparant 1 de la valeur propre la plus proche est de l'ordre de

$$a(h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} C\,h_n, \quad C>0.$$

En effet, si μ désigne une valeur propre de $\tilde{\mathcal{P}}_{h_n}(2k)$, le changement de variable $y = h^{-\frac{1}{k+1}}x$ (inverse de celui effectué dans la sous-section 2.3.3), donne

$$\tilde{\mathcal{P}}_{h_n}(2k) - \mu = h_n^{\frac{2k}{k+1}}\left(-\frac{d^2}{dy^2} + y^{2k} - \mu h_n^{-\frac{2k}{k+1}}\right).$$

On rappelle que $h_n^{-\frac{2k}{k+1}} = |\lambda_n|$, où λ_n désigne la n-ème valeur propre de $\mathcal{A}(2k,\theta)$, $|\lambda_n|$ étant la n-ème valeur propre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + x^{2k}$. Par conséquent, les valeurs propres de $\tilde{\mathcal{P}}_{h_n}(2k)$ sont les $\mu_j^n := |\lambda_j|/|\lambda_n|$, $j \geq 1$, la plus proche de 1 étant μ_n^{n-1}, d'où

$$a(h_n) = \left|1 - \frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}\right| .$$

D'après (2.3.23), on a donc

$$a(h_n) = \mathcal{O}(n^{-1}) ,$$

et le majorant du Théorème 2.5.1, (ii) est

$$C\frac{\varepsilon}{a} = \mathcal{O}(h_n^\infty) .$$

Il existe donc $\alpha(h)$ tel que

$$\|\psi_h - \alpha(h)u(\cdot,h)\|_2 = \mathcal{O}(h^\infty) ,$$

d'où

$$\|\psi_h\|_2^2 = \alpha(h)^2\|u(\cdot,h)\|_2^2 + \mathcal{O}(h^\infty) . \tag{2.5.4}$$

Il reste maintenant à déterminer $\alpha(h)$ (sous-section 2.5.2) et à estimer la norme de $u(\cdot,h)$ (sous-section 2.5.3).

2.5.2 Raccordement des solutions

Pour déterminer le coefficient de proportionnalité $\alpha(h)$ liant la solution ψ_h (dont on connaît le développement WKB au voisinage de $+\infty$) au quasimode $u(\cdot,h)$ (dont on connaît l'expression explicite sur $[-1+\delta, 1-\delta]$), nous allons les comparer tous deux à une solution exprimée à l'aide de la fonction d'Airy (voir [111], Ch. 13, §7).

Rappelons que ψ_h est la solution de $\mathcal{P}(h)\psi_h = 0$ caractérisée par sa décroissance au voisinage de $+\infty$, et $u(\cdot,h)$ une solution telle que, pour $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$,

$$u(x,h) = \frac{2C}{(1-x^{2k})^{1/4}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{h}\int_{-1}^{x} \sqrt{t^{2k}-1}\, dt\right) + \mathcal{O}(h) .$$

Une autre solution w_h est donnée par son comportement en terme de fonction d'Airy au voisinage par exemple du point tournant $+1$ (voir [111]) :

$$w_h(x) = h^{1/2}\left(\frac{\zeta(x)}{1-x^{2k}}\right)^{1/4}\left(Ai\left(\frac{\zeta(x)}{h^{2/3}}\right) + \mathcal{O}(h)\right) ,$$

où

$$\zeta(x) = \left(\frac{3}{2}\int_{-1}^{x} \sqrt{t^{2k}-1}\, dt\right)^{2/3} .$$

Cette expression est valable pour tout $x \in [-1+\delta, +\infty[$, et en la comparant à celle de $u(x,h)$ quand $h \to 0$ d'une part, on obtient

$$w_h(x) = \frac{h^{1/2}}{2C\sqrt{\pi}}(1+\mathcal{O}(h))u(x,h) \quad ;$$

d'autre part, en comparant les comportements de w_h et ψ_h pour $x \to +\infty$,

$$w_h(x) = \frac{h^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}\psi_h(x)\,.$$

Ainsi, en comparant les termes principaux,

$$\psi_h(x) = \frac{1}{C}u(x,h) + \mathcal{O}(h^\infty)\,,$$

c'est-à-dire que $\alpha(h) = C^{-1}$ est une constante indépendante de h.

2.5.3 Norme des solutions sur l'axe réel

On reprend la solution donnée par (2.4.2) et on détermine un développement asymptotique de sa norme.
On a, puisque u_0 coïncide avec u_- (resp. u_+) sur Supp $\chi_0 \cap$ Supp χ_- (resp. Supp $\chi_0 \cap$ Supp χ_+),

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,h)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |u_-\chi_-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |u_0\chi_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |u_+\chi_+|^2 dx \\ &\quad +2\int_{\mathbb{R}} |u_0|^2\chi_0\chi_- dx + 2\int_{\mathbb{R}} |u_0|^2\chi_0\chi_+ dx \\ &=: I_-(h) + I_0(h) + I_+(h) + I_{0,-}(h) + I_{0,+}(h)\,. \qquad (2.5.5) \end{aligned}$$

Pour le calcul de $I_-(h)$, nous utilisons l'expression (2.4.3) de u_- pour écrire la norme sous forme d'une intégrale triple comme dans [53] :

$$\begin{aligned} I_-(h) &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} u_-(x)\bar{u}_-(x)\chi_-^2(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi h}\iiint_{[\alpha(E)\mp\delta]_x\times\mathbb{R}_{(\xi,\tilde{\xi})}} e^{\frac{i}{h}\Phi_\xi(x,\xi')} \\ &\qquad \times b_-(\xi,h)\bar{b}_-(\xi',h)\chi_-^2(x)dxd\xi d\xi'\,, \end{aligned}$$

où

$$\Phi_\xi(x,\xi') = x(\xi-\xi') + \psi_-(\xi) - \psi_-(\xi')\,.$$

Nous allons appliquer la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale double en (x,ξ'), en considérant ξ comme un paramètre. On a

$$\partial_{\tilde{x}}\Phi_\xi(x,\xi) = \xi - \xi' \quad \text{et} \quad \partial_{\xi'}\Phi_\xi(x,\xi) = -x - \partial_{\xi'}\psi_-(\xi')\,,$$

donc Φ_ξ admet pour unique point critique le point $(x,\xi') = (-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi)$.
D'autre part, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\text{Hess } \Phi_\xi(-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -\partial_\xi^2\psi_-(\xi) \end{pmatrix}$$

est de déterminant -1, donc l'unique point critique $(-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi)$ est non-dégénéré. Enfin, $\Phi_\xi(-\partial_\xi\psi_-(\xi),\xi) = 0$.

La méthode de la phase stationnaire (voir par exemple [74]) donne donc une suite de fonctions $(m_j(\xi))_{j\geq 1}$ telle que

$$I_-(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2\pi h} h \int_{\mathbb{R}} |b_-^0(\xi)|^2 \; |\chi_-(-\partial_\xi \psi_-(\xi))|^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} m_j(\xi) h^j\right) d\xi \,,$$

c'est-à-dire

$$I_-(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} c_-^j h^j. \tag{2.5.6}$$

De façon analogue, on montre que

$$I_+(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} c_+^j h^j \,. \tag{2.5.7}$$

Nous passons maintenant à l'estimation de $I_0(h)$. Signalons d'abord que, dans l'expression (2.4.4), on a

$$a_+(x,E,h) = \overline{a_-(x,E,h)} \,,$$

et que les coefficients du développement de $a_\pm(x,E,h)$ s'écrivent plus précisément

$$a_\pm^j(x,E) = e^{\mp i \frac{\pi}{4}} (-i)^j |a_\pm^j(x,E)| \,.$$

En notant $a^j(x,E) := 2|a_\pm^j(x,E)|$ et

$$\varphi(x,E) = \int_{\alpha(E)}^x \sqrt{E - V(t)} dt \,,$$

(2.4.4) se réecrit donc

$$\begin{aligned} u_0(x,E,h) \quad \underset{h\to 0}{\sim} \quad & \cos\left(\frac{1}{h}\varphi(x,E) - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p a_{2p}(x,E) h^{2p} \\ & + \sin\left(\frac{1}{h}\varphi(x,E) - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} a_{2p+1}(x,E) h^{2p+1} \,, \end{aligned}$$

avec

$$a_0(x,E) = \frac{2C}{(E - V(x))^{1/4}} \,.$$

Il existe donc des suites réelles $(a_j'(x,E))_{j\geq 0}$, $(a_j''(x,E))_{j\geq 1}$ et $(\tilde{a}_j(x,E))_{j\geq 1}$, avec

$$a_0'(x,E) = \frac{4C^2}{\sqrt{E - V(x)}} \,,$$

telles que

$$\begin{aligned} |u_0(x,E,h)|^2 \quad = \quad & \cos^2\left(\frac{1}{h}\varphi(x,E) - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{j=0}^{+\infty} a_j'(x,E) h^{2j} \\ & + \sin^2\left(\frac{1}{h}\varphi(x,E) - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{j=1}^{+\infty} a_j''(x,E) h^{2j} \\ & + \cos\left(\frac{2}{h}\varphi(x,E)\right) \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{a}_j(x,E) h^{2j+1} \,. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Intégrons le premier terme du membre de droite, qui contient le terme principal du développement de $I_0(h)$; les deux autres se traitent de la même façon.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \chi_0^2(x) \cos^2\left(\frac{1}{h}\varphi(x,E) - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{j=0}^{+\infty} a'_j(x,E) h^{2j} dx \\
&\underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \chi_0^2(x)\left(1 + \sin\frac{2}{h}\varphi(x,E)\right)\sum_{j=0}^{+\infty} a'_j(x,E) h^{2j} dx \\
&\underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{a'_j\chi_0^2}{2} dx\right) h^{2j} + R(h)\,,
\end{aligned}$$

où

$$R(h) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \chi_0^2(x) a'(x,E,h) \sin\frac{2}{h}\varphi(x,E) dx\,, \quad a'(x,E,h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} a'_j(x,E) h^{2j}\,.$$

La fonction φ n'ayant pas de point critique sur le support de χ_0 , des intégrations par parties successives comme dans la preuve du Lemme 2.4.3 (principe de la phase non stationnaire) entraînent

$$R(h) = \mathcal{O}(h^\infty)\,.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_0^2(x)\cos^2\left(\frac{1}{h}\varphi(x,E) - \frac{\pi}{4}\right) a'(x,E,h) dx \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} n_j h^{2j}$$

pour une suite réelle $(n_j)_{j\geq 0}$. Un traitement similaire des deux autres termes dans (2.5.8) donne finalement l'existence d'une suite $(c_0^j)_{j\geq 0}$ telle que

$$I_0(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} c_0^j h^j, \quad c_0^0 = \int_{\mathbb{R}} \frac{2C^2\chi_0^2(x)}{\sqrt{E - V(x)}} dx. \tag{2.5.9}$$

Enfin, la même méthode permet d'obtenir des développements similaires pour les intégrales $I_{0,\pm}(h)$ dans (2.5.5) :

$$I_{0,\pm}(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{0,\pm}^j h^j\,, \quad c_{0,\pm}^0 = \int_{\mathbb{R}} \frac{4C^2\chi_0(x)\chi_\pm(x)}{\sqrt{E - V(x)}} dx\,. \tag{2.5.10}$$

En regroupant (2.5.6), (2.5.7), (2.5.9) et (2.5.10), d'après (2.5.5), on a finalement pour une suite $(c_j)_{j\geq 0}$,

$$\|u(\cdot,E,h)\|_2^2 \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} c_j h^j\,, \quad c_0 > 0\,. \tag{2.5.11}$$

Ainsi, d'après (2.5.4), puisque $\alpha(h)$ est constant (voir sous-section 2.5.2),

Proposition 2.5.2 *Il existe une suite $(\rho_j)_{j\geq 0}$ telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_h(x)|^2 dx \underset{h\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} \rho_j h^j\,, \quad \rho_0 > 0\,. \tag{2.5.12}$$

2.5.4 Conclusion : preuve du Théorème 2.1.2

Les expressions (2.3.22), (2.3.35) et (2.5.12) nous permettent d'aboutir au résultat suivant :

Théorème 2.5.3 *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* θ *tel que* $0 < |\theta| < (k+1)\pi/2k$.
Si $\kappa_n(2k,\theta)$ *désigne la norme du n-ème projecteur spectral de l'opérateur*

$$\mathcal{A}(2k,\theta) = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta}x^{2k}\,,$$

et λ_n *sa n-ème valeur propre, alors il existe une suite positive* $(C'_j(2k,\theta))_{j\geq 0}$ *(avec* $C'_0(2k,\theta) > 0$*) telle que*

$$\kappa_n(2k,\theta) \underset{n\to+\infty}{\sim} h_n^{1/2} e^{c'_k(\theta)/h_n} \sum_{j=0}^{+\infty} C'_j(2k,\theta) h_n^j\,, \tag{2.5.13}$$

avec $h_n = |\lambda_n|^{-\frac{k+1}{2k}}$ *et*

$$c'_k(\theta) = 2\varphi_{\theta,k}(x_{\theta,k})\,, \tag{2.5.14}$$

où

$$x_{\theta,k} = \left(\frac{\tan(\theta/(k+1))}{\sin(k\theta/(k+1)) + \cos(k\theta/(k+1))\tan(\theta/(k+1))}\right)^{\frac{1}{2k}} \tag{2.5.15}$$

$$\varphi_{\theta,k}(x) = \operatorname{Im}\int_0^{xe^{i\frac{\theta}{2(k+1)}}} (1-t^{2k})^{1/2}dt\,. \tag{2.5.16}$$

En utilisant l'asymptotique (2.3.23) des valeurs propres λ_n, on a

$$\frac{1}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{(k+1)\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{k+1}{2k})}{\Gamma(\frac{1}{2k})}(n+1/2)\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} s_k^j (n+1/2)^{-2j}\right)\,,$$

d'où le résultat du Théorème 2.1.2.

2.6 Densité des fonctions propres dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous donnons ici une preuve du Théorème 2.1.4 dans les cas non couverts par les résultats d'Almog [7] (*i. e.* le cas de l'opérateur $\mathcal{A}(1,\theta)$, $|\theta| < 2\pi/3$) et de Davies [41] (*i. e.* le cas de $\mathcal{A}(m,\theta)$, $m > 1$, $|\theta| < \pi/2$). Notre preuve repose sur la méthode utilisée dans [7] qui consiste à estimer la résolvante de $\mathcal{A}(2k,\theta)$ à l'intérieur de l'image numérique de l'opérateur. Cette estimation de résolvante repose sur l'appartenance de $\mathcal{A}(2k,\theta)$ à une classe de Schatten C^p d'opérateurs avec $p > 0$ assez petit.
Les deux premières sous-sections de cette section contiennent des rappels généraux issus de [54] (Ch. XI.9.1) sur les classes de Schatten, tandis que la troisième reprend l'argument standard de la preuve suivant la démarche de [7].

2.6.1 Classes de Schatten

Les classes de Schatten $C^p(\mathcal{H})$, $0 < p < +\infty$, d'opérateurs bornés agissant sur $\mathcal{H}$, permettent une classification intermédiaire entre les opérateurs de rang fini et les opérateurs compacts. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ est un opérateur compact agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors l'opérateur $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ est autoadjoint compact et positif. On peut alors considérer $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^{1/2}$ et la suite de ses valeurs propres $(\mu_n(\mathcal{A}))_{n\geq 1}$ rangées dans l'ordre décroissant et répétées selon leur multiplicité, avec $\mu_n(\mathcal{A}) \to 0$.

Définition 2.6.1 *Pour $0 < p < +\infty$, on dit que $\mathcal{A}$ appartient à $C^p(\mathcal{H})$ si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(\mathcal{A})^p < +\infty$$

et on note alors

$$\|\mathcal{A}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^p\right)^{1/p} .$$

Pour $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $C^p(\mathcal{H})$ et $(C^p(\mathcal{H}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach. Il est clair que les espaces $C^p(\mathcal{H})$ sont inclus les uns dans les autres : $C^q(\mathcal{H}) \subset C^p(\mathcal{H})$ si $q \leq p$. Certaines valeurs particulières de p permettent de retrouver des classes usuelles d'opérateurs :

Exemple 2.6.2

1. *Si $(u_n)_{n\geq 1}$ désigne une base hilbertienne de vecteurs propres de $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ associée à la famille de valeurs propres $(\mu_n(\mathcal{A})^2)_{n\geq 1}$, alors*

$$\|\mathcal{A}\|_2^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(\mathcal{A})^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \mathcal{A}^*\mathcal{A}u_n, u_n\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{A}u_n\|^2 = \|\mathcal{A}\|_{HS}^2,$$

et $C^2(\mathcal{H})$ est la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

2. *$C^1(\mathcal{H})$ est la classe des opérateurs à trace et*

$$\|\mathcal{A}\|_1 = tr\,|\mathcal{A}| .$$

Le résultat suivant se montre comme dans [115] :

Proposition 2.6.3 *Pour tous $\varepsilon > 0$, $|\theta| < \frac{(k+1)\pi}{2k}$ et $k \geq 1$, on a*

$$(\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1} \in C^{\frac{k+1}{2k}+\varepsilon}(L^2(\mathbb{R})) .$$

Preuve : Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum \mu_n^{\frac{k+1}{2k}+\varepsilon}$ converge, où $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est la suite des valeurs propres de

$$\left([(\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1}]^*(\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1}\right)^{1/2} = \left([\mathcal{A}(2k,\theta)(\mathcal{A}(2k,\theta))^*]^{-1}\right)^{1/2} .$$

Si $(\nu_n)_{n\geq 1}$ désigne la famille des valeurs propres de $\mathcal{A}(2k,\theta)(\mathcal{A}(2k,\theta))^*$ (classées dans l'ordre croissant), on doit donc vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \nu_n^{-p/2} < +\infty$$

dès que $p > \frac{k+1}{2k}$.
$\mathcal{A}(2k,\theta)(\mathcal{A}(2k,\theta))^*$ est un opérateur autoadjoint, de symbole principal

$$P : (x,\xi) \mapsto |\xi^2 + e^{i\theta}x^{2k}|^2 = \xi^4 + 2\cos\theta\xi^2 x^{2k} + x^{4k}\,,$$

quasi-homogène et globalement elliptique, c'est-à-dire qu'on a

$$\forall t > 0, \quad P(t^{1/(4k)}x, t^{1/4}\xi) = tP(x,\xi)\,, \tag{2.6.1}$$

$$\forall (x,\xi) \neq (0,0), \quad |P(x,\xi)| > 0\,. \tag{2.6.2}$$

Les résultats de [120] permettent donc d'appliquer la formule de Weyl suivante :

$$N(t) := \#\{j \geq 1 : \nu_j \leq t\} \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_{P(x,\xi)\leq t} dxd\xi\,,$$

ce qui, appliqué à $t = \nu_n$ et compte tenu de (2.6.1), donne

$$n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\nu_n^{\frac{k+1}{4k}}\,,$$

avec $C = \text{Vol } P^{-1}(B(0,1))$.
La série $\sum \nu_n^{-p/2}$ converge donc si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{2kp}{k+1}} < +\infty\,,$$

c'est-à-dire $p > \frac{k+1}{2k}$. □

A ce stade, l'application directe du Corollaire 31 de [54], p. 1115, permet d'obtenir le Théorème 2.1.4. Nous détaillons néanmoins dans la suite les principaux arguments de la preuve.

2.6.2 Estimation de la résolvante

L'élément clef de la preuve du Théorème 2.1.4 est une estimation de la résolvante de $\mathcal{A}(2k,\theta)$ sur une suite de cercles de rayons $r_j \to +\infty$. De telles estimations existent dans un cadre général pour des opérateurs de Schatten (voir [54]), ce que nous rappelons dans la proposition ci-dessous :

Proposition 2.6.4 *Soit $\mathcal{A} \in C^p(\mathcal{H})$, $1 \leq p < +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite croissante $(r_j)_{j\geq1}$ de réels positifs avec $r_j \to +\infty$, et une constante $C_\varepsilon > 0$ telles que*

$$\forall j \geq 1, \forall \varphi \in [0,2\pi[, \quad \|(I - r_j e^{i\varphi}\mathcal{A})^{-1}\| \leq C_\varepsilon e^{r_j^{p+\varepsilon}}\,.$$

Notre estimation-clef de la résolvante en découle alors :

Corollaire 2.6.5 *Pour tous $\varepsilon > 0$, $k \geq 1$ et $|\theta| < \frac{(k+1)\pi}{2k}$, il existe une suite croissante $(r_j)_{j\geq1}$ de réels positifs avec $r_j \to +\infty$, et une constante $C = C(k,\theta,\varepsilon) > 0$ telles que*

$$\forall j \geq 1, \forall \varphi \in [0,2\pi[, \quad \|(\mathcal{A}(2k,\theta) - r_j e^{i\varphi})^{-1}\| \leq Ce^{r_j^{\frac{k+1}{2k}+\varepsilon}}\,.$$

Preuve :
$(\mathcal{A}(2k,\theta)-z)^{-1}=(\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1}(I-z(\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1})^{-1}$, donc l'inégalité de la proposition précédente, appliquée à $\mathcal{A}(2k,\theta)^{-1}\in C^{\frac{k+1}{2k}+\varepsilon}(L^2(\mathbb{R}))$, entraîne bien

$$\|(\mathcal{A}(2k,\theta)-r_je^{i\varphi})^{-1}\|\leq C\,\|(\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1}\|\,e^{r_j^{\frac{k+1}{2k}+\varepsilon}}\,.$$

□

2.6.3 Preuve du Théorème 2.1.4

Soient $(\lambda_n,u_n)_n$ les éléments propres de $\mathcal{A}(2k,\theta)$. Pour obtenir $\overline{\text{Vect }\{u_n\}}=L^2(\mathbb{R})$ on va montrer l'inclusion

$$R\big((\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1}\big)\subset \text{sp }\mathcal{A}(2k,\theta)\,, \tag{2.6.3}$$

où sp $\mathcal{A}(2k,\theta)$ désigne l'espace engendré par les fonctions propres *généralisées* de $\mathcal{A}(2k,\theta)$:

$$\text{sp }\mathcal{A}(2k,\theta)=\bigoplus_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{j=1}^{+\infty}\ker(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n)^j\,.$$

L'inclusion (2.6.3) est suffisante car

$$\overline{R\big((\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1}\big)}=\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}(2k,\theta))}=L^2(\mathbb{R})$$

et

$$\text{sp }\mathcal{A}(2k,\theta)=\text{Vect }\{u_n\}\,,$$

puisque $\bigcup_{j\geq1}\ker(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n)^j$ est l'image du projecteur Π_n qui est de rang 1 pour tout $n\geq 1$.
On reformule (2.6.3) par passage à l'orthogonal :

$$(\text{sp }\mathcal{A}(2k,\theta))^{\perp}\subset\big(R\big((\mathcal{A}(2k,\theta))^{-1}\big)\big)^{\perp}\,,$$

de sorte que l'on est ramené montrer que, pour tous $g\in(\text{sp }\mathcal{A}(2k,\theta))^{\perp}$ et $f\in L^2(\mathbb{R})$, l'application

$$F:\lambda\to\langle(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda)^{-1}f,g\rangle\,, \tag{2.6.4}$$

définie pour $\lambda\notin\sigma(\mathcal{A}(2k,\theta))$ vérifie $F(0)=0$. Nous prouverons en fait le lemme suivant :

Lemme 2.6.6 *F peut être prolongée en une fonction entière et $F\equiv 0$.*

Le Théorème 2.1.4 en découle directement.

Preuve du lemme : Le premier point, très général (voir [2]), consiste à vérifier que les singularités de la résolvante en les points du spectre sont éliminables sur l'orthogonal de l'espace sp $\mathcal{A}(2k,\theta)$. En effet, l'application $\lambda\mapsto(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda)^{-1}$ est analytique sur l'ouvert $\complement\sigma(\mathcal{A}(2k,\theta))$ (voir le lemme 8.1.3 de

[40], par exemple). Elle admet en $\lambda_n \in \sigma(\mathcal{A}(2k,\theta))$ un développement en série de Laurent de la forme :

$$(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda)^{-1} = \sum_{j=-j_0}^{+\infty} A_j(\lambda-\lambda_n)^j \,, \tag{2.6.5}$$

où les A_j sont des opérateurs qui commutent avec $\mathcal{A}(2k,\theta)$.
On a alors

$$\begin{aligned} I &= (\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda)^{-1}(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda) \\ &= (\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda)^{-1}((\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n)-(\lambda-\lambda_n)) \\ &= \sum_{j=-j_0}^{+\infty} A_j(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)^j - \sum_{j=-j_0}^{+\infty} A_j(\lambda-\lambda_n)^{j+1} \\ &= A_{-j_0}(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)^{-k} \\ &\quad + \sum_{j=-j_0+1}^{+\infty} \left(A_j(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n)-A_{j-1}\right)(\lambda-\lambda_n)^j \,, \end{aligned}$$

d'où par identification des coefficients,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{-j_0}(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n) &=& 0 \\ A_j(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n) &=& A_{j-1}, \quad \forall j \in \{-j_0+1,\ldots,-1\}\,. \end{array} \right. \tag{2.6.6}$$

On en déduit par récurrence,

$$\forall j \in \{-j_0,\ldots,-1\},\ (\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n)^{j_0+1+j}A_j = 0\,. \tag{2.6.7}$$

Par conséquent, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors

$$A_j f \in \ker\left((\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda_n)^{j_0+1+j}\right)\,,$$

c'est-à-dire que les fonctions $A_j f$ pour j négatif sont soit nulles soit dans sp $\mathcal{A}(2k,\theta)$. Or la fonction F est définie pour $g \in (\text{sp } \mathcal{A}(2k,\theta))^\perp$, donc

$$\forall j \in \{-j_0,\ldots,-1\},\ \langle A_j f, g\rangle = 0\,. \tag{2.6.8}$$

La fonction F est donc entière.

Pour montrer que F est nulle, on commence par remarquer que l'image numérique de $\mathcal{A}(2k,\theta)$ est incluse dans le secteur fermé

$$\bar{\mathcal{S}}_\theta = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 \le \arg z \le \theta\}$$

(on a supposé $\theta > 0$, le cas $\theta < 0$ étant similaire avec $\theta \le \arg z \le 0$) .
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, les points $\lambda = re^{i\varphi}$ avec $\varphi \in [\theta+\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ vérifient

$$\|(\mathcal{A}(2k,\theta)-re^{i\varphi})^{-1}\| \le \frac{1}{d(e^{i\varphi},\bar{\mathcal{S}}_\theta)}\,.$$

Autrement dit, il existe $C > 0$ tel que, pour tout λ en dehors du secteur

$$\mathcal{S}_\theta^\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \ : \ -\varepsilon < \arg z < \theta+\varepsilon\}\,,$$

on a
$$\|(\mathcal{A}(2k,\theta)-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|}\,, \tag{2.6.9}$$
d'où $|F(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1}$.
Si on montre que la même estimation est valable à l'intérieur du secteur $\mathcal{S}_\theta^\varepsilon$, alors F étant entière, elle sera identiquement nulle par le théorème de Liouville. Tout découle du Corollaire 2.6.5 et du théorème de Phragmen-Lindelöf :

Théorème 2.6.7 (Phragmen-Lindelöf)
Soit F une fonction entière. On suppose qu'il existe deux rayons
$$\mathcal{R}_1 = \{re^{i\theta_1} : r \geq 0\} \quad et \quad \mathcal{R}_2 = \{re^{i\theta_2} : r \geq 0\}$$
formant un angle $|\theta_1-\theta_2| = \frac{\pi}{a}$ et tels que
$$\forall \lambda \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2, |F(\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|}\,.$$
Soit (r_k) une suite croissante de réels tendant vers $+\infty$ telle que
$$\forall k, \max_{|\lambda|=r_k} |F(\lambda)| \leq Ce^{r_k^\beta}\,, \tag{2.6.10}$$
avec $\beta < a$. Alors on a
$$|F(\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|}$$
pour tout λ entre les deux rayons $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$.

En effet, pour $k \geq 2$ on a
$$|\theta| < \frac{(k+1)\pi}{2k} < \frac{2k\pi}{k+1}\,.$$
Par conséquent, d'après (2.6.9), il existe $\eta > 0$ tel que $|F(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1}$ sur des rayons formant un angle $|\theta + 2\varepsilon| = \frac{\pi}{a}$ avec $a = \frac{k+1}{2k} + \eta$. D'après le Corollaire 2.6.5, l'estimation (2.6.10) est valable pour $\beta = \frac{k+1}{2k} + \frac{\eta}{2}$. On a donc
$$|F(\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|}$$
pour tout $\lambda \in \mathcal{S}_\theta^\varepsilon$ également. Ceci conclut la preuve du Lemme 2.6.6 et du Théorème 2.1.4. ⊟

2.7 Propriétés des semi-groupes

2.7.1 Décomposition spectrale et estimation du reste

D'après les Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2, pour $m = 1$ ou $m = 2k$, $k \geq 1$, on a quand $n \to +\infty$
$$\begin{aligned}
\|e^{-t\lambda_n}\Pi_n\|_2 &= e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_n}\kappa_n(m,\theta) \\
&= \frac{K(m,\theta)}{\sqrt{n}} e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_n} e^{c_k(\theta)|\lambda_n|^{\frac{m+2}{2m}}}(1+o(1)) \\
&= \frac{K(m,\theta)}{\sqrt{n}} e^{-t|\lambda_n|\cos\frac{\theta}{k+1}} e^{c_k(\theta)|\lambda_n|^{\frac{m+2}{2m}}}(1+o(1))\,, \quad (2.7.1)
\end{aligned}$$

avec, dans le cas $m = 1$, les constantes $K(1, \theta) = K(\theta)$ et $c_{1/2}(\theta) = C(\theta)$ du Théorème 2.1.1.
Ainsi, pour $m = 1$ et pour tout $t > 0$, il existe $N_t \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_t, \quad e^{-t|\lambda_n| \cos \frac{2\theta}{3}} e^{c_{1/2}(\theta)|\lambda_n|^{\frac{3}{2}}} \geq e^{\frac{c_{1/2}(\theta)}{2}|\lambda_n|^{\frac{m+2}{2m}}},$$

et (2.7.1) est le terme général d'une série grossièrement divergente.
Pour $k = 1$, (2.7.1) donne

$$\|e^{-t\lambda_n}\Pi_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(2,\theta)}{\sqrt{n}} e^{(c_1(\theta)-t\cos\frac{\theta}{2})|\lambda_n|},$$

donc la série $\Sigma_{2,\theta}(t)$ converge normalement pour $t > T$ et ne converge pas normalement pour $t < T$.

Enfin, si $k \geq 2$, il existe N_t tel que

$$\forall n \geq N_t, \quad e^{-t|\lambda_n| \cos \frac{\theta}{k+1}} e^{c_k(\theta)|\lambda_n|^{\frac{k+1}{2k}}} \leq e^{|\lambda_n|\left(-\frac{t}{2}\cos\frac{\theta}{k+1}\right)},$$

et (2.7.1) est majoré par le terme général d'une série convergente.

Pour montrer que la série $\Sigma_{m,\theta}(t)$ converge bien vers $e^{-t\mathcal{A}(m,\theta)}$, on utilise la densité de la famille bi-orthogonale $(u_n, \bar{u}_n)_{n\geq 1}$ (voir [41]), où les fonctions propres u_n sont supposées normalisées par la condition $\langle u_n, \bar{u}_n\rangle = 1$ pour simplifier.
On a

$$e^{-t\mathcal{A}(m,\theta)} u_n = e^{-t\lambda_n} u_n$$

d'une part, et

$$\Sigma_{m,\theta}(t) u_n = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-t\lambda_j} \Pi_j u_n = e^{-t\lambda_n} u_n$$

d'autre part, où on a utilisé la formule

$$\Pi_j f = \langle f, \bar{u}_j\rangle u_j$$

(voir (1.3.4), [41], [12]) valable pour des projecteurs spectraux de rang 1, ainsi que la propriété de bi-orthogonalité $\langle u_j, \bar{u}_n\rangle = \delta_{j,n}$.

On en déduit par linéarité que $\Sigma_{m,\theta}(t)$ et $e^{-t\mathcal{A}(m,\theta)}$ coïncident sur $\mathrm{Vect}\{u_n : n \geq 1\}$, et donc sur $\mathcal{D}(\mathcal{A}(m,\theta))$ par densité (voir le Théorème 2.1.4).

L'inégalité sur le reste provient du fait que $e^{-t\mathcal{A}(m,\theta)}(I - \Pi_{<N})$ est alors égal au reste de rang N de la série $\Sigma_m(t)$. Dans le cas $k \geq 2$, si on note $\alpha = \frac{2k}{k+1} \in]1, 2[$ et $c_j = c_j(k, \theta)$, $j \geq 0$ les constantes (voir (2.3.23)) telles que

$$\mathrm{Re}\,\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{j=0}^{+\infty} c_j n^{\alpha-j},$$

une majoration grossière donne alors

$$\begin{aligned}
\|e^{-t\mathcal{A}(m,\theta)}(I-\Pi_{<N})\| &\leq \frac{2K(m,\theta)}{\sqrt{N}}\Big(e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_N+c_k(\theta)N}+e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_{(N+1)}+c_k(\theta)(N+1)} \\
&\quad + \sum_{n=N+2}^{+\infty} e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_n+c_k(\theta)n}\Big) \\
&\leq \frac{2K(m,\theta)}{\sqrt{N}}\Big(e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_N+c_k(\theta)N}+e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_{(N+1)}+c_k(\theta)(N+1)} \\
&\quad +2\int_{N+1}^{+\infty}\exp(-tc_0x^\alpha-tc_1x^{\alpha-1}+c_k(\theta)x)dx\Big)\,.
\end{aligned}$$

On vérifie alors aisément que l'intégrale du dernier membre est de l'ordre de $\mathcal{O}(e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_{N+1}+c_k(\theta)N})$, d'où (2.1.13), et un calcul similaire donne le résultat annoncé dans le cas $k=1$, $t>T$.

2.7.2 Remarque sur le théorème de Gearhardt-Prüss

Dans [83], l'application du théorème de Gearhardt-Prüss (voir Théorème 1.2.2) à un opérateur restreint à ses sous-espaces propres pris à partir du N-ème, donne l'estimation suivante :

$$\exists M_\omega>0, \forall t>0,\quad \|e^{-t\mathcal{A}}(I-\Pi_{<N})\|\leq M_\omega e^{-\omega t}\,, \tag{2.7.2}$$

pour $\omega\in]\mathrm{Re}\,\lambda_{N-1},\mathrm{Re}\,\lambda_N[$. Elle est valable sous la condition suivante :

$$\sup_{\mathrm{Re}\,z=\omega}\|(\mathcal{A}-z)^{-1}\|<+\infty\,. \tag{2.7.3}$$

Cette hypothèse peut être vérifiée par une méthode directe dans le cas de l'opérateur d'Airy complexe $-\frac{d^2}{dx^2}+ix$ sur $L^2(\mathbb{R}^+)$ et de l'oscillateur harmonique complexe $-\frac{d^2}{dx^2}+ix^2$, voir (1.4.9), (1.4.15) et [76].
Elle est également valable, de façon immédiate, pour les opérateurs $-\frac{d^2}{dx^2}+e^{i\theta}x$ sur $\mathbb{R}^+$ et $-\frac{d^2}{dx^2}+e^{i\theta}x^{2k}$ sur $\mathbb{R}$, pour $k\geq 1$ et $|\theta|<\pi/2$. En effet, le caractère sectoriel de ces opérateurs entraîne que (si $\mathcal{A}$ désigne l'un de ces opérateurs),

$$\forall\varepsilon>0\,,\forall\varphi\in[\theta+\varepsilon,2\pi-\varepsilon]\,,\quad \|(\mathcal{A}-re^{i\varphi})^{-1}\|=\mathcal{O}(r^{-1})\,,\ r\to+\infty\,.$$

En particulier, $\|(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}\|\to 0$ quand λ tend vers $\pm\infty$ le long de toute droite parallèle à l'axe imaginaire, d'où (2.7.3).
L'estimation (2.7.2), appliquée avec $\omega=\mathrm{Re}\,\lambda_N-\varepsilon$, donne donc

Proposition 2.7.1 *Soit $k\geq 1$, $|\theta|\leq\pi/2$, et $N\geq 1$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $M_\varepsilon>0$ telle que*

$$\forall t>0\,,\quad \|e^{-t\mathcal{A}(2k,\theta)}(I-\Pi_{<N})\|\leq M_\varepsilon e^{(-\mathrm{Re}\,\lambda_N+\varepsilon)t}\,. \tag{2.7.4}$$

L'avantage indiscutable de (2.7.4) par rapport à l'estimation (2.1.13) est que cette dernière n'est valable que pour N suffisamment grand. D'autre part, on peut retrouver (2.1.13) pour N suffisamment grand en écrivant

$$\|e^{-t\mathcal{A}(2k,\theta)}(I-\Pi_{<N})\|\leq e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda_N}\kappa_N(2k,\theta)+\|e^{-t\mathcal{A}(2k,\theta)}(I-\Pi_{<N+1})\|\,,$$

et en appliquant respectivement (2.1.9) et (2.7.4) aux premier et second terme du second membre.

Chapitre 3

L'oscillateur cubique complexe

3.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre aux propriétés de l'oscillateur cubique complexe

$$\mathcal{A}_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + ix^3 + i\alpha x\,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.1.1}$$

sur la droite réelle. L'opérateur sera défini rigoureusement et son domaine déterminé à la section 3.2. Nous vérifierons que son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres $(\lambda_n(\alpha))_{n\geq 1}$, avec $|\lambda_n(\alpha)| \leq |\lambda_{n+1}(\alpha)|$ et $|\lambda_n| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Ces valeurs propres sont simples, au sens de la multiplicité géométrique : $\dim \ker(\mathcal{A}_\alpha - \lambda_n(\alpha)) = 1$.
Comme nous l'avons rappelé dans la sous-section 1.4.3, le spectre de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ possède la propriété étonnante, pour un opérateur non-autoadjoint, d'être entièrement réel pour $\alpha \geq 0$. C'est cette propriété qui justifie l'intérêt porté à l'oscillateur cubique complexe ; elle soulève un certain nombre de questions auxquelles nous tenterons de répondre dans ce chapitre. En particulier, il s'agit de savoir si l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ partage, outre le fait que ses valeurs propres sont réelles pour $\alpha \geq 0$, certaines propriétés observées dans le cas des opérateurs autoadjoints :

- Les fonctions propres constituent-elles une base ?
- Le spectre de $\mathcal{A}_\alpha$ est-il stable sous perturbation de l'opérateur ?
- Que peut-on dire pour des valeurs négatives du paramètre α ?

Certaines de ces questions ont déjà été résolues, d'autres ont été formulées sous forme de conjectures. L'état d'avancement du sujet a été résumé dans la sous-section 1.4.3.
Le principal objectif de ce chapitre est d'établir pour $\mathcal{A}_\alpha$ un résultat similaire à ceux des Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 concernant l'instabilité spectrale des valeurs propres $\lambda_n(\alpha)$ quand $n \to +\infty$, dans le cas $\alpha \geq 0$. Pour cela, on définit comme précédemment les indices d'instabilité

$$\kappa_n(\alpha) = \|\Pi_n(\alpha)\|\,, \tag{3.1.2}$$

où $\Pi_n(\alpha)$ désigne le projecteur spectral de $\mathcal{A}_\alpha$ associé à la valeur propre $\lambda_n(\alpha)$. La première question à résoudre est celle de la multiplicité algébrique des valeurs propres de $\mathcal{A}_\alpha$, c'est-à-dire celle de l'existence ou non de blocs de Jordan associés. Nous retrouverons que les valeurs propres $\lambda_n(\alpha)$ sont algébriquement simples pour n suffisamment grand (résultat démontré pour tout $n \geq 1$ dans [73]). Nous pourrons dès lors utiliser, pour n suffisamment grand, l'expression (1.3.5). Cette expression nous permettra de déterminer comme précedemment un équivalent de $\kappa_n(\alpha)$ quand $n \to +\infty$.

Nous énonçons maintenant le résultat principal de ce chapitre. Il indique que les indices d'instabilité (3.1.2) de $\mathcal{A}_\alpha$, pour $\alpha \geq 0$, ont un comportement à l'infini semblable à ceux des opérateurs $\mathcal{A}(1, \theta)$ et $\mathcal{A}(2k, \theta)$ du chapitre précédent.

Théorème 3.1.1 *Pour tout $\alpha \geq 0$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \kappa_n(\alpha) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} . \tag{3.1.3}$$

La preuve de ce résultat repose sur des techniques similaires à celles employées pour traiter le cas des oscillateurs anharmoniques pairs, notamment des estimations WKB des fonctions propres dans le plan complexe. La présence du terme $i\alpha x$ nous obligera néanmoins à étudier une équation dont le potentiel dépend du paramètre semi-classique h. Par ailleurs, nous ne pourrons nous réferer à un opérateur autoadjoint associé comme nous l'avions fait dans le cas des oscillateurs anharmoniques.
Comme nous l'avions signalé dans le chapitre précédent, cette croissance rapide de la suite $(\kappa_n(\alpha))_{n \geq 1}$ est incompatible avec l'existence d'une base de Riesz de fonctions propres de $\mathcal{A}_\alpha$, voir la section 1.3.

La suite est organisée de la façon suivante. La section 3.2 contient des généralités et des résultats déjà établis sur l'oscillateur cubique complexe. La section 3.3 est consacrée aux estimations de fonctions propres et aux résultats préliminaires utilisés pour prouver le Théorème 3.1.1. Enfin, la démonstration proprement dite est l'objet de la section 3.4.

3.2 Premières propriétés concernant l'oscillateur cubique complexe

On commence par définir l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha^0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha^0 &= -\frac{d^2}{dx^2} + ix^3 + i\alpha x, \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha^0) &= \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_\alpha^0$ est accrétif, il est donc fermable. On définit alors l'oscillateur cubique complexe comme sa fermeture, $\mathcal{A}_\alpha = \overline{\mathcal{A}_\alpha^0}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans le but de déterminer le domaine de $\mathcal{A}_\alpha$, on commence par énoncer le résultat suivant :

Proposition 3.2.1 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ est accrétif maximal. De plus, si $\mathcal{A}_\alpha^{0,conj}$ désigne le conjugué complexe de $\mathcal{A}_\alpha^0$, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\alpha^{0,conj} &= -\frac{d^2}{dx^2} - ix^3 - i\alpha x,\\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha^{0,conj}) &= \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

alors on a

$$\mathcal{A}_\alpha = (\mathcal{A}_\alpha^{0,conj})^*. \tag{3.2.1}$$

Preuve : Pour la preuve de l'accrétivité maximale de $\mathcal{A}_\alpha$, nous renvoyons à [9], Proposition 2.1 et [75], Exercice 13.7. L'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ ne possédant pas d'extension stricte accrétive, il suffit pour montrer l'égalité (3.2.1) de vérifier que $(\mathcal{A}_\alpha^{0,conj})^*$ est une extension accrétive de $\mathcal{A}_\alpha$.
Soit $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$. On pose $w = \mathcal{A}_\alpha u$, de sorte que

$$\forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha^{0,conj}) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{A}_\alpha^{0,conj} v, u\rangle = \langle v, w\rangle\,.$$

La forme linéaire $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha^{0,conj}) \ni v \mapsto \langle \mathcal{A}_\alpha^{0,conj} v, u\rangle$ se prolonge donc sur $L^2(\mathbb{R})$ en une forme linéaire continue $v \mapsto \langle v, w\rangle$, d'où $u \in \mathcal{D}((\mathcal{A}_\alpha^{0,conj})^*)$, et on a bien $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) \subset \mathcal{D}((\mathcal{A}_\alpha^{0,conj})^*)$. $\square$

D'après l'égalité (3.2.1), on a

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ \big(-\frac{d^2}{dx^2} + ix^3 + i\alpha x\big)u \in L^2(\mathbb{R})\Big\}. \tag{3.2.2}$$

En effet, le domaine de $(\mathcal{A}_\alpha^{0,conj})^*$ est par définition l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\mathbb{R})$ telles que la forme linéaire $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha^{0,conj}) \ni v \mapsto \langle \mathcal{A}_\alpha^{0,conj} v, u\rangle$ se prolonge sur $L^2(\mathbb{R})$ en une forme linéaire continue. C'est donc de manière équivalente l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $w_u \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{A}_\alpha^{0,conj} v, u\rangle = \langle v, w_u\rangle\,.$$

Cette égalité entraîne $w_u = (-\frac{d^2}{dx^2} + ix^3 + i\alpha x)u$ au sens des distributions, et

$$\mathcal{D}\big((\mathcal{A}_\alpha^{0,conj})^*\big) = \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ \big(-\frac{d^2}{dx^2} + ix^3 + i\alpha x\big)u \in L^2(\mathbb{R})\Big\},$$

d'où (3.2.2).
Le lemme suivant précise la forme du domaine de $\mathcal{A}_\alpha$:

Lemme 3.2.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha), \quad \|u''\|^2 + \|x^3 u\|^2 \leq C(\|\mathcal{A}_\alpha u\|^2 + \|u\|^2) \tag{3.2.3}$$

et

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^6 dx) \tag{3.2.4}$$

Preuve : Notons $D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$. On reprend la preuve du Lemme 2.3 de [28], en commençant par écrire

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_\alpha u, \mathcal{A}_\alpha u\rangle &= \|\mathcal{A}_0 u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle i\alpha x u, \mathcal{A}_0 u\rangle + \alpha^2\|xu\|^2\\ &= \|\mathcal{A}_0 u\|^2 + 2\alpha\|x^2 u\|^2 + \alpha^2\|xu\|^2. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

On se concentre ensuite sur le terme $\|\mathcal{A}_0 u\|^2$;

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_0 u\|^2 &= \|D^2u\|^2 + \|x^3u\|^2 + \langle D^2u, ix^3u\rangle + \langle ix^3u, D^2u\rangle \\
&= \|D^2u\|^2 + \|x^3u\|^2 + i(\langle x^3u, D^2u\rangle - \langle D^2u, x^3u\rangle) \\
&= \|D^2u\|^2 + \|x^3u\|^2 + i(\langle D^2(x^3u), u\rangle - \langle x^3D^2u, u\rangle) \\
&= \|D^2u\|^2 + \|x^3u\|^2 + i\langle [D^2, x^3]u, u\rangle.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
[D^2, x^k]u &= k(k-1)x^{k-2}u + 2kx^{k-1}u' = k\left((x^{k-1})'u + 2x^{k-1}u'\right) \\
&= ik(x^{k-1}D + Dx^{k-1})u = ik\Big((D + x^{k-1})^2 - D^2 - x^{2(k-1)}\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_0 u\|^2 &= \|D^2u\|^2 + \|x^3u\|^2 + 3\langle((D + x^2)^2 - D^2 - x^4)u, u\rangle \\
&\geq \|D^2u\|^2 + \|x^3u\|^2 - 3\langle D^2u, u\rangle - 3\langle x^4u, u\rangle. \qquad (3.2.6)
\end{aligned}$$

On peut maintenant choisir $\gamma \in]0, 1[$ et $\beta > 0$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \gamma x^6 - 3x^4 & > & -\beta \\ \gamma D^4 - 3D^2 & > & -\beta\,, \end{array}\right.$$

la première ligne valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la deuxième au sens d'un opérateur symétrique semi-borné inférieurement par $-\beta$. En effet, la deuxième ligne découle du théorème spectral ou, par l'inégalité de Parseval

$$\langle(\gamma D^4 - 3D^2)u, u\rangle_x = \langle(\gamma\xi^4 - 3\xi^2)\hat{u}, \hat{u}\rangle_\xi,$$

de l'existence de γ et β tels que $\gamma\xi^4 - 3\xi^2 > -\beta$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
D'après (3.2.5), après réecriture du membre de droite, on a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_0 u\|^2 &\geq (1-\gamma)(\|D^2u\|^2 + \|x^3u\|^2) \qquad (3.2.7) \\
&\quad + \langle(\gamma D^4 - 3D^2)u, u\rangle + \langle(\gamma x^6 - 3x^4)u, u\rangle \qquad (3.2.8) \\
&\geq (1-\gamma)(\|D^2u\|^2 + \|x^3u\|^2) - 2\beta\|u\|^2. \qquad (3.2.9)
\end{aligned}$$

Enfin, les termes restants dans (3.2.5) se contrôlent aisément de la façon suivante si $\alpha < 0$. Pour tout $\lambda > 1$ on a

$$\begin{aligned}
\|x^2u\|^2 &= \int_{|x|\leq\lambda} x^4|u(x)|^2dx + \int_{|x|>\lambda} x^4|u(x)|^2dx \\
&\leq \lambda^4\|u\|^2 + \lambda^{-2}\|x^3u\|^2,
\end{aligned}$$

donc si on choisit λ tel que $2|\alpha|\lambda^{-2} < (1-\gamma)/2$, alors

$$2\alpha\|x^2u\|^2 + \alpha^2\|xu\|^2 \geq -2|\alpha|\lambda^4\|u\|^2 - \frac{1-\gamma}{2}\|x^3u\|^2.$$

On déduit donc directement (3.2.3) de (3.2.5) et (3.2.9). ⊟

Voici maintenant un rappel des principales propriétés spectrales de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$.

Proposition 3.2.3 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(i) L'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ engendre un semi-groupe de contraction $e^{-t\mathcal{A}_\alpha}$.

(ii) L'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ est à résolvante compacte.

(iii) Les valeurs propres $\lambda_n(\alpha)$ sont simples (au sens de la multiplicité géométrique : $\dim\ker(\mathcal{A}_\alpha - \lambda_n(\alpha)) = 1$).

Preuve :
Le point (i) est une conséquence de l'accrétivité maximale de $\mathcal{A}_\alpha$ et du Théorème 1.2.1. Le point (ii) découle de l'inclusion de $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ dans $H^2(\mathbb{R})$ et dans un espace $L^2(\mathbb{R};\rho(x)dx)$ avec $\rho(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$. Enfin, le point (iii) est une conséquence de la théorie de Sibuya [125] (voir aussi le Théorème 2.3.1) qui donne une description asymptotique quand $x \to \pm\infty$ d'une base de solutions $(\psi_\alpha^1, \psi_\alpha^2)$ de l'équation $(\mathcal{A}_\alpha - \lambda)\psi_\alpha = 0$. Quand $x \to +\infty$ par exemple, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \psi_\alpha^1(x) & = & x^{-3/4} \exp\left(-e^{i\pi/4}(\frac{2}{5}x^{5/2} + \alpha x^{1/2})\right)(1 + o(1))\,, \\ \psi_\alpha^2(x) & = & x^{-3/4} \exp\left(+e^{i\pi/4}(\frac{2}{5}x^{5/2} + \alpha x^{1/2})\right)(1 + o(1))\,, \end{array} \right.$$

ce qui assure l'unicité (à une constante multiplicative près) de la solution dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. □

Le théorème suivant complète la Proposition 3.2.3 et résume les résultats des travaux mentionnés dans la sous-section 1.4.3 concernant l'oscillateur cubique.

Théorème 3.2.4 *(i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le spectre de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ est invariant par conjugaison complexe.*

(ii) Pour tout $\alpha \geq 0$, le spectre de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$ est constitué d'une suite croissante de valeurs propres $(\lambda_n(\alpha))_{n\geq 1}$ réelles, positives et simples.

(iii) Pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $n \geq 1$, le projecteur spectral $\Pi_n(\alpha)$ associé à la valeur propre $\lambda_n(\alpha)$ est de rang 1, et l'égalité (2.1.4) est satisfaite.

(iv) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions propres de $\mathcal{A}_\alpha$ forment une famille totale de l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Le point (i) est une conséquence directe de la propriété de $\mathcal{PT}$-symétrie. Le point (ii) a été observé numériquement dans [20] et démontré dans [124]. Le point (iii) est une conséquence des résultats de [73] ; les estimations de la section 3.3 nous permettront de retrouver ce résultat pour n suffisamment grand, voir Proposition 3.4.2. Le point (iv) est prouvé dans [97].

Rappelons (voir la sous-section 1.4.3) que les propriétés du spectre de $\mathcal{A}_\alpha$, pour $\alpha < 0$, sont encore mal connues. En particulier, à notre connaissance, la question de la réalité du spectre n'a pas été résolue.

3.3 Comportement asymptotique des fonctions propres

3.3.1 Changement d'échelle

Pour pouvoir utiliser les estimations WKB à la section suivante, on commence par effectuer le changement d'échelle suivant, qui permet de se ramener à l'étude d'une valeur propre fixe pour un opérateur dépendant d'un paramètre h. On rappelle que pour tout $\alpha \geq 0$, le spectre de $\mathcal{A}_\alpha$ est réel et $\lambda_n(\alpha) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. On pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_n & = & \lambda_n(\alpha)^{-5/6} \\ \tilde{x} & = & h_n^{2/5} x \,. \end{array} \right.$$

L'opérateur $\mathcal{A}_\alpha - \lambda_n(\alpha)$ se réécrit alors

$$-h_n^{4/5} \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + i h_n^{-6/5} \tilde{x}^3 + i\alpha h_n^{-2/5} \tilde{x} - \lambda_n(\alpha) = h_n^{-6/5} \left(-h_n^2 \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + i\tilde{x}^3 + i\alpha h_n^{4/5} \tilde{x} - 1 \right),$$

et on est ramené à l'étude du noyau de l'opérateur

$$\mathcal{A}_\alpha(h) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + ix^3 + i\alpha h^{4/5} x - 1.$$

Une fonction propre u_n^α de $\mathcal{A}_\alpha$ associée à $\lambda_n(\alpha)$ se réécrit

$$u_n^\alpha(x) = \psi_\alpha(h_n^{2/5} x, h_n) = \psi_\alpha(\lambda_n(\alpha)^{-1/3} x, h_n)\,, \tag{3.3.1}$$

où $\psi_\alpha(\cdot, h_n)$ est solution de

$$\mathcal{A}_\alpha(h_n)\psi_\alpha(\cdot, h_n) = 0\,, \quad \psi_\alpha(\cdot, h_n) \in L^2(\mathbb{R})\,.$$

Remarquons que la condition $\psi_\alpha(\cdot, h_n) \in L^2(\mathbb{R})$ suffit à assurer que $\psi_\alpha(\cdot, h_n)$ appartient au domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha(h_n)) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ (voir par exemple le Théorème 3.3.1 plus loin).
On travaillera donc dorénavant sur ces solutions ψ_α.
Dans toute la suite, sauf mention contraire, α est supposé fixé et positif.

3.3.2 Comportement des fonctions propres loin des points tournants

Dans cette sous-section, nous cherchons à déterminer le comportement asymptotique global sur $\mathbb{R}$ des solutions $\psi_\alpha(x, h)$ de

$$\mathcal{A}_\alpha(h)\psi_\alpha(x, h) = 0\,, \quad \psi_\alpha(\cdot, h) \in L^2(\mathbb{R}) \tag{3.3.2}$$

quand $h \to 0$.
Plus généralement, on s'intéresse au comportement de ψ_α dans certaines régions du plan complexe évitant les zéros du potentiel

$$V_\alpha(x, h) = ix^3 + i\alpha h^{4/5} x - 1\,.$$

On notera respectivement $x_+^\alpha(h)$, $x_-^\alpha(h)$ et $x_{\mathbf{i}}^\alpha(h)$ les zéros de $V_\alpha(\cdot, h)$ issus des zéros $x_+^0 = e^{-i\pi/6}$, $x_-^0 = e^{-5i\pi/6}$ et $x_{\mathbf{i}}^0 = i$ du potentiel $V_0(x) = ix^3 - 1$. Notons que pour h suffisamment petit, $x_\pm^\alpha(h)$, $x_{\mathbf{i}}^\alpha(h)$ sont des zéros simples.
Pour déterminer l'allure des solutions de (3.3.2), comme à la sous-section 2.3.2, il est utile d'étudier la géométrie des lignes de niveau (*lignes de Stokes*) de la fonction

$$x \mapsto \operatorname{Re} \int_{x_+^\alpha(h)}^{x} \sqrt{V_\alpha(z, h)}\; dz\,,$$

où l'on choisit une détermination de la fonction $z \mapsto \sqrt{V_\alpha(z,h)}$ holomorphe sur un domaine D du plan complexe. Le chemin d'intégration appartient au domaine D et la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin choisi.
On remarque que, dans le cas de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha(h)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_+^\alpha(h)$ et $x_-^\alpha(h)$ ont une ligne de Stokes commune, finie, qui joint ces deux points :

$$\operatorname{Re} \int_{x_-^\alpha(h)}^{x_+^\alpha(h)} \sqrt{V_\alpha(z,h)}\, dz = 0\,.$$

On notera $\ell_f^\alpha(h)$ cette ligne, et $\ell_f^0 = \ell_f^0(0)$.

Quand $|x| \to +\infty$, on a, si $x_\sigma^\alpha(h)$ désigne l'un des zéros de $V_\alpha(\cdot,h)$, $\sigma \in \{+,-,\mathbf{i}\}$,

$$\int_{x_\sigma^\alpha(h)}^{x} \sqrt{V_\alpha(z,h)}\, dz = e^{i\pi/4} x^{5/2}(1+o(1))\,,$$

donc les lignes de Stokes non-bornées issues de $x_\pm^\alpha(h)$, $x_\mathbf{i}^\alpha(h)$ se rapprochent à l'infini des cinq directions asymptotiques

$$D_k = \arg^{-1}\left\{\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right\}, \quad k = 0,\dots,4\,,$$

voir Figure 3.1.
Pour $\sigma \in \{-,+,\mathbf{i}\}$, $k = 0,\dots,4$, on note $\ell_{\sigma,k}^\alpha(h)$ la ligne de Stokes non-bornée (quand elle existe) issue de $x_\sigma^\alpha(h)$ admettant la direction asymptotique D_k. On note également $\ell_{\sigma,k}^0 = \ell_{\sigma,k}^0(0)$.
Pour $\varepsilon > 0$, on note

$$\ell_{\sigma,k,\varepsilon}^0 = \{x \in \mathbb{C} : d(x, \ell_{\sigma,k}^0) < \varepsilon\}\,, \tag{3.3.3}$$

et de même

$$\ell_{f,\varepsilon}^0 = \{x \in \mathbb{C} : d(x, \ell_f^0) < \varepsilon\}\,. \tag{3.3.4}$$

Alors, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, h_0[$ et tous σ, k,

$$\ell_{\sigma,k}^\alpha(h) \subset \ell_{\sigma,k,\varepsilon}^0\,, \quad \ell_f^\alpha(h) \subset \ell_{f,\varepsilon}^0\,. \tag{3.3.5}$$

On appellera $\Gamma_{+,\varepsilon}$ la composante connexe de

$$\mathbb{C} \setminus (\ell_{\mathbf{i},1,\varepsilon}^0 \cup \ell_{\mathbf{i},2,\varepsilon^0} \cup \ell_{-,2,\varepsilon}^0 \cup \ell_{-,3,\varepsilon}^0 \cup \ell_{f,\varepsilon}^0)$$

contenant $\mathbb{R}^+$, et $\Gamma_{-,\varepsilon}$ la composante connexe de

$$\mathbb{C} \setminus (\ell_{\mathbf{i},0,\varepsilon}^0 \cup \ell_{\mathbf{i},1,\varepsilon}^0 \cup \ell_{+,0,\varepsilon}^0 \cup \ell_{+,4,\varepsilon}^0 \cup \ell_{f,\varepsilon}^0)$$

contenant $\mathbb{R}^-$, voir Figure 3.2.
On remarque que

$$\Gamma_{-,\varepsilon} = J\Gamma_{+,\varepsilon}\,,$$

où $J : x \mapsto -\bar{x}$.
Dans la suite, on choisit la détermination de la fonction $z \mapsto \sqrt{V_\alpha(z,h)}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \left(\ell_f^\alpha(h) \cup \ell_{\mathbf{i},1}^\alpha(h)\right)$ telle que $\operatorname{Re} \int_{x_+^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\, dz > 0$ dans le domaine délimité par $\ell_{+,-1}^\alpha(h)$ et $\ell_{+,0}^\alpha(h)$.
Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et $\psi_\alpha(x,h) \in L^2(\mathbb{R}^\pm)$ une solution de*

$$\mathcal{A}_\alpha(h)\psi_\alpha(x,h) = 0\,. \tag{3.3.6}$$

Il existe alors $h_0 > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, h_0[$,

$$\psi_\alpha(x,h) = \frac{c(h)e^{-i\pi/8}}{x^{3/4}}(1+o(1))\exp\left(-\frac{1}{h}\int_{x_\pm^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\;dz\right)\,, \tag{3.3.7}$$

quand $|x| \to +\infty$ dans le domaine $\Gamma_{\pm,\varepsilon}$, uniformément par rapport à $h \in [0, h_0]$. De plus, ψ_α est l'unique solution de (3.3.6) vérifiant (3.3.7) pour un $c(h)$ donné. D'autre part, il existe une suite de fonctions $(u_j^\alpha)_{j\geq 1}$ définies sur $\Gamma_{\pm,\varepsilon}$ telles que

$$\psi_\alpha(x,h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{c}{V_\alpha(x,h)^{1/4}}\exp\left(-\frac{1}{h}\int_{x_\pm^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\;dz\right)\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}u_j^\alpha(x)h^j\right)\,, \tag{3.3.8}$$

uniformément pour $x \in \Gamma_{\pm,\varepsilon}$.

Preuve :
Montrons les estimations valables dans le domaine $\Gamma_{+,\varepsilon}$; le cas du domaine $\Gamma_{-,\varepsilon}$ se traite de façon analogue.
On note

$$S_h^\alpha(x) = \int_{x_+^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\;dz\,,$$

et on applique le Théorème 2.3.1 à l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha(h)$, avec comme points de base $a_0 = x_+^\alpha(h)$ et $a_1 = +\infty$.
On commence par vérifier qu'il existe $h_0 > 0$ tel que, en reprenant les notations du Théorème 2.3.1,

$$\forall h \in]0, h_0]\,,\quad \Gamma_{+,\varepsilon} \subset \Delta_h(a_0, a_1)\,.$$

On choisit en effet $h_0 > 0$ tel que les inclusions (3.3.5) soient vérifiées, et on peut alors trouver, pour tout $x \in \Gamma_{+,\varepsilon}$, un chemin canonique $\gamma_h(x)$ reliant a_1 à x , comme dans la preuve de la Proposition 2.3.2.
Vérifions maintenant les hypothèses (2.3.6) et (2.3.7) du Théorème 2.3.1, avec

$$\sigma(x) = \sigma_\alpha(x,h) := \frac{1}{V_\alpha(x,h)^{3/4}}\left[\frac{1}{V_\alpha(x,h)^{1/4}}\right]''\,.$$

Il existe $k > 0$ tel que

$$|\sigma_\alpha(x,0)| \leq \frac{k}{1+|x|^5} \qquad \text{et} \qquad \sigma_\alpha(x,h) = \sigma_\alpha(x,0)\big(1+\mathcal{O}(h^{4/5})\big)\,,$$

uniformément pour $x \in \Gamma_{+,\varepsilon}$, d'où (2.3.6).
D'autre part, de même que dans la preuve de la Proposition 2.3.2, il existe $p \in \mathbb{N}$ indépendant de x et de h tel que, pour tous $x \in \Gamma_{+,\varepsilon}$ et $h \in [0, h_0]$, on peut choisir un chemin canonique $\gamma_h(x)$ de sorte que $S_h^\alpha \circ \gamma_h(x)$ soit constitué d'au plus p segments ou intervalles complexes. Or il existe $A > 0$ tel que, pour tout segment ou intervalle complexe paramétré par le chemin $\gamma : I \to \mathbb{C}$,

$$\int_I \frac{|\gamma'(t)|dt}{1+|\gamma(t)|^5} \leq A\,,$$

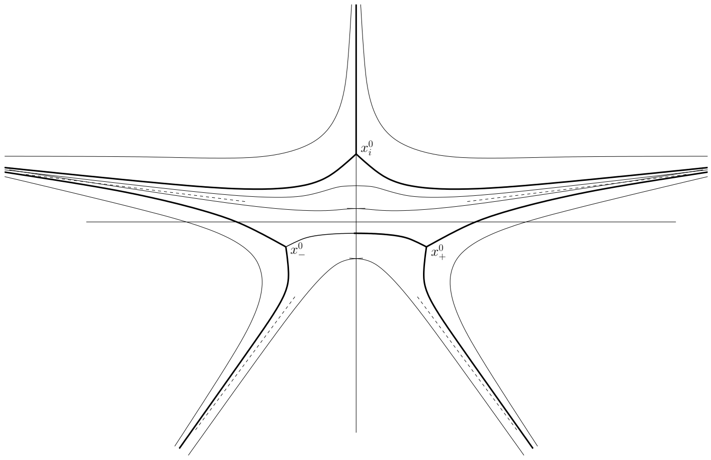

FIGURE 3.1 – Lignes de Stokes de l'opérateur $\mathcal{A}_0 = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + ix^3 - 1$. Les lignes en gras représentent les lignes de niveau $\{\mathrm{Re} \int_{x_\sigma^0}^x \sqrt{V_0(z)}\, dz = 0\}$, $\sigma \in \{+, -, \mathbf{i}\}$. Les lignes en pointillés représentent les directions asymptotiques D_k, $k = 0, \ldots, 4$.

d'où (2.3.7). □

On note maintenant

$$\Gamma_\varepsilon = \Gamma_{+,\varepsilon} \cup \Gamma_{-,\varepsilon} = \mathbb{C} \setminus (\ell^0_{\mathbf{i},1,\varepsilon} \cup \ell^0_{f,\varepsilon}) .$$

On a vu dans la sous-section 3.3.1 que si $\lambda_n(\alpha)$ désigne la n-ème valeur propre de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha$, et si

$$h_n = \lambda_n(\alpha)^{-5/6} , \tag{3.3.9}$$

alors il existe pour tout $n \geq 1$ une solution $\psi_1^\alpha(\cdot, h_n) \in L^2(\mathbb{R})$ de

$$\mathcal{A}_\alpha(h_n)\psi_1^\alpha(\cdot, h_n) = 0 . \tag{3.3.10}$$

D'après le théorème 3.3.1, $\psi_1^\alpha(\cdot, h_n)$ vérifie alors (3.3.7), et (3.3.8) pour $h = h_n \to 0$, dans $\Gamma_{+,\varepsilon}$ et $\Gamma_{-,\varepsilon}$ avec des constantes $c(h) = c_+(h)$ et $c(h) = c_-(h)$ respectivement. En comparant ces expressions pour $x \in \Gamma_{+,\varepsilon} \cap \Gamma_{-,\varepsilon}$, on constate que $c_+(h) = c_-(h)$, d'où le corollaire suivant, où l'on a choisi de normaliser ψ_1^α pour que $c = c_+ = c_- = 1$.

Corollaire 3.3.2 *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$, il existe une unique solution $\psi_1^\alpha(x, h_n) \in L^2(\mathbb{R})$ de (3.3.10) telle que $\psi_1^\alpha(\cdot, h_n)$ vérifie*

$$\psi_1^\alpha(x, h_n) = \frac{e^{-i\pi/8}}{x^{3/4}}(1 + o(1)) \exp\left(-\frac{1}{h_n} \int_{x_\pm^\alpha(h_n)}^x \sqrt{V_\alpha(z, h_n)}\, dz \right) , \tag{3.3.11}$$

quand $|x| \to +\infty$ dans Γ_ε, uniformément par rapport à $n \geq N$.

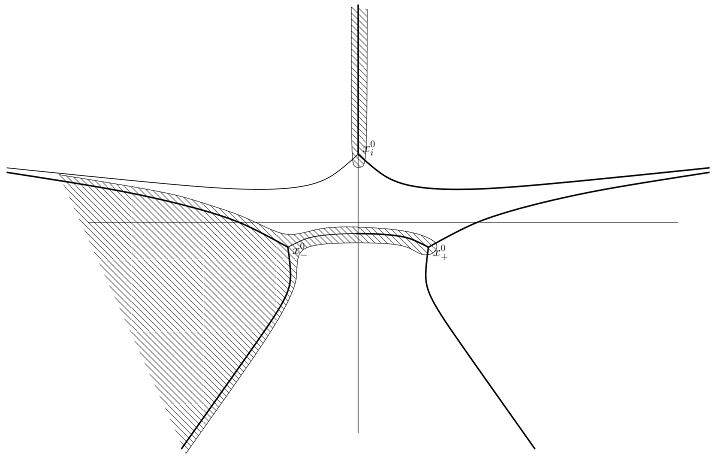

FIGURE 3.2 – Le domaine $\Gamma_{+,\varepsilon}$ (partie non hachurée). $\Gamma_{-,\varepsilon}$ est l'image de $\Gamma_{+,\varepsilon}$ par la symétrie d'axe $i\mathbb{R}$.

De plus, il existe une suite de fonctions $(u_j^\alpha)_{j\geq 1}$ *définies sur* Γ_ε *telle que*

$$\psi_1^\alpha(x,h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{V_\alpha(x,h_n)^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{h_n}\int_{x_\pm^\alpha(h_n)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h_n)}\;dz\right) \times \left(1+\sum_{j=1}^{+\infty} u_j^\alpha(x)h_n^j\right), \tag{3.3.12}$$

uniformément pour $x \in \Gamma_\varepsilon$.

En particulier le développement (3.3.12) est valable uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.

Le développement asymptotique (3.3.8) cesse dêtre valable au voisinage de la ligne de Stokes finie $\ell_f^\alpha(h)$. Pour connaître le comportement d'une solution sur $\ell_f^\alpha(h)$, il faut prendre en compte la présence dans son expression de termes de l'ordre de

$$V_\alpha(x,h)^{-1/4} \exp\left(+\frac{1}{h}\int_{x_\pm^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\;dz\right) .$$

Ces termes, négligeables quand $\int_{x_\pm^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\;dz \to -\infty$, deviennent "visibles" sur $\ell_f^\alpha(h)$, d'où l'existence d'une solution oscillante le long de $\ell_f^\alpha(h)$, que l'on étudie dans la sous-section suivante. Cette construction nous donnera également le comportement des solutions au voisinage des points tournants $x_\pm^\alpha(h)$. Il s'agira ensuite de raccorder les différentes solutions construites (sous-section 3.3.4).

3.3.3 Comportement des fonctions propres au voisinage d'un point tournant simple

Au voisinage d'un point tournant $x_0(h)$, les estimations obtenues dans la sous-section précédente cessent dêtre valables et l'équation doit être approchée d'une autre manière. On se place momentanément dans le cas plus général d'un potentiel $V(x,h)$ admettant un zéro simple $x_0(h)$, l'idée étant d'utiliser l'approximation

$$V(x,h) = V'(x_0(h),h)(x - x_0(h)) + o(|x - x_0(h)|)\,,$$

au voisinage de $x_0(h)$, pour approcher l'opérateur $-h^2\frac{d^2}{dx^2}+V(x,h)$, par l'opérateur d'Airy

$$-h^2\frac{d^2}{dy^2} + V'(x_0(h),h)y\,,\quad y = x - x_0(h)\,,$$

d'où l'on déduira une expression approchée des solutions faisant apparaitre la fonction d'Airy Ai .
On note $\ell_j(h)$, $j = 0,1,-1$, les lignes de Stokes $\left\{\mathrm{Re}\int_{x_0(h)}^{x}\sqrt{V} = 0\right\}$ issues de $x_0(h)$, et on choisit une détermination de $\sqrt{V}$ holomorphe dans un voisinage de $x_0(h)$ privé de $\ell_1(h)$, telle que $\mathrm{Re}\int_{x_0(h)}^{x}\sqrt{V} \geq 0$ dans le domaine délimité par $\ell_2(h)$ et $\ell_3(h)$. Pour $\delta > 0$, on définit comme précédemment le voisinage de $\ell_j(0)$

$$\ell_{j,\delta} = \{x \in \mathbb{C} : d(x, \ell_j(0)) < \delta\}, \tag{3.3.13}$$

de sorte que $\ell_j(h) \subset \ell_{j,\delta}$ pour h suffisamment petit.
On introduit également les *lignes anti-Stokes* de (3.3.21) issues de $x_0(h)$, définies comme les lignes de niveau de la fonction

$$x \mapsto \mathrm{Im}\int_{x_0(h)}^{x}\sqrt{V(z,h)}\;dz$$

issues de $x_0(h)$. Une étude locale similaire à celle des lignes de Stokes $\ell_j(h)$, $j = 0,1,-1$, permet d'affirmer qu'il existe trois lignes anti-Stokes issues de $x_0(h)$, que l'on notera $\tilde{\ell}_j(h)$, $j = 0,1,-1$, et que l'on choisit telles que

$$\forall x \in \tilde{\ell}_1(h),\quad \int_{x_0(h)}^{x}\sqrt{V(z,h)}\;dz > 0\,.$$

Là aussi, on définit un voisinage de la ligne $\tilde{\ell}_1(0)$ par

$$\tilde{\ell}_{1,\delta} = \{x \in \mathbb{C} : d(x, \tilde{\ell}_1(0)) < \delta\}\,, \tag{3.3.14}$$

et on a $\tilde{\ell}_1(h) \subset \tilde{\ell}_{1,\delta}$ pour h suffisamment petit.
On suppose que le potentiel $V(\cdot,h)$, défini pour $h \in [0,h_0]$, est une fonction entière de la forme

$$V(x,h) = V_0(x) + h^{\gamma}V_1(x,h)\,, \tag{3.3.15}$$

avec $\gamma > 0$.
On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $\beta = 0,1,2$, il existe $C_\beta > 0$ et $R_\beta > 0$ tel que

$$\forall |x| \geq R_\beta\,,\ \forall h \in [0,h_0]\,,\quad |\partial_x^\beta V_1(x,h)| \leq C_\beta\,|\partial_x^\beta V_0(x)|\,. \tag{3.3.16}$$

On suppose qu'il existe une fonction x_0 continue sur $[0,h_0]$ telle que

$$V(x_0(h),h) = 0\,,$$

et
$$\partial_x V(x_0(h),h) \neq 0\,,$$
pour tout $h \in [0,h_0]$.
On choisit $\eta > 0$ tel que l'ensemble $\ell_1(0) \cap \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0(0)| \leq \eta\}$ ne contient aucun zéro de V_0 autre que $x_0(0)$. Remarquons qu'alors, pour h suffisamment petit, $\ell_1(h) \cap \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0(h)| \leq \eta\}$ ne contient aucun zéro de $V(\cdot,h)$ autre que $x_0(h)$. On note alors, pour $\delta > 0$,
$$\mathcal{D}(\delta,\eta) = (\ell_{1,\delta} \cap \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0(0)| < \eta\}) \cup \tilde{\ell}_{1,\delta}\,. \tag{3.3.17}$$
Dans l'énoncé et la preuve qui suivent, on note
$$\zeta(x,h) = \left(\frac{3}{2}\int_{x_0(h)}^{x} \sqrt{V(z,h)}dz\right)^{2/3}\,, \tag{3.3.18}$$
qui est holomorphe sur $\mathcal{D}(\delta,\eta)$ et bijective de $\mathcal{D}(\delta,\eta)$ sur un voisinage d'une demi-droite de la forme $[-c,+\infty[$, si δ est suffisamment petit. On note également
$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{|V|^{1/4}}\partial_x^2\left(\frac{1}{|V|^{1/4}}\right) - \frac{5|V|^{1/2}}{16|\zeta|^3}\,. \tag{3.3.19}$$
On suppose alors que, pour $a > 0$ fixé, il existe $k, \rho > 0$ tels que, si δ est choisi suffisamment petit,
$$|\tilde{\sigma}(x,0)| \leq \frac{k}{1+|x|^{1+\rho}}\,, \tag{3.3.20}$$
pour tout $x \in \mathcal{D}(\delta,\eta)$ avec $|x - x_0(0)| \geq a$.

Théorème 3.3.3 *Soit $h_0 > 0$ et $x_0(h)$, $\eta > 0$, $V : \mathbb{C} \times [0,h_0] \ni (x,h) \mapsto V(x,h)$ vérifiant les hypothèses précédentes. On suppose de plus que, si δ est suffisamment petit, $\tilde{\ell}_{1,\delta}$ ne contient aucun zéro de $V(\cdot,h)$ autre que $x_0(h)$. Alors, sous les hypothèses qui précèdent, il existe $h_2 \in]0,h_0]$, $\delta > 0$ et une solution $w(x,h)$ de l'équation*
$$\left(-h^2\frac{d^2}{dx^2} + V(x,h)\right)w(x,h) = 0\,, \tag{3.3.21}$$
telle que, pour tout $h \in]0,h_2]$ et tout $x \in \mathcal{D}(\delta,\eta)$,
$$w(x,h) = \left(\frac{\zeta(x,h)}{V(x,h)}\right)^{1/4} Ai\left(\frac{\zeta(x,h)}{h^{2/3}}\right) + hr(x,h)\,, \tag{3.3.22}$$
où la fonction r vérifie, pour tout $h \in [0,h_2]$,
$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}(\delta,\eta) \setminus \ell_1(h)\,, & |r(x,h)| \leq K_0(x)\left|\left(\frac{\zeta(x,h)}{V(x,h)}\right)^{1/4} Ai\left(\frac{\zeta(x,h)}{h^{2/3}}\right)\right|\,, \\ \forall x \in \mathcal{D}(\delta,\eta) \cap \ell_1(h)\,, & |r(x,h)| \leq K_1\,, \end{cases} \tag{3.3.23}$$
où $K_1 > 0$ est une constante et $K_0(x) > 0$ est une fonction bornée dans $D(\delta,\eta)$ privé de tout voisinage ouvert de $\ell_1(0)$.

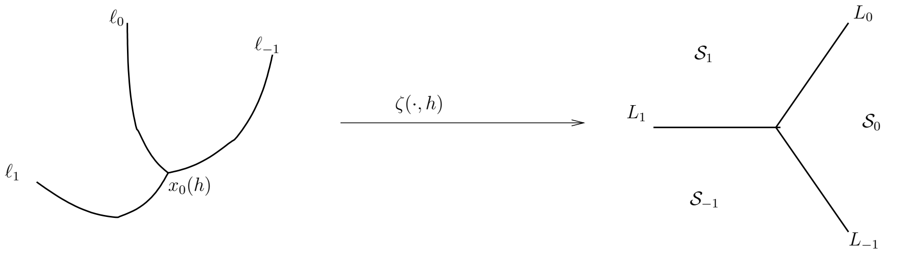

FIGURE 3.3 – Effet de la transformation $\zeta(\cdot,h)$ sur les lignes de Stokes.

Preuve :
Nous allons appliquer le Théorème 9.1, p. 417 de [111], avec un potentiel dépendant ici du paramètre h. On introduit le changement de variable

$$x \mapsto \zeta = \zeta(x,h)\,, \tag{3.3.24}$$

pour $h \in [0,h_0]$, ainsi que son inverse

$$\zeta \mapsto x = x(\zeta,h)\,. \tag{3.3.25}$$

Les trois lignes de Stokes $\ell_j(h)$, $j = 0,1,-1$, sont envoyées par le changement de variable (3.3.24) sur les demi-droites

$$L_j = \arg^{-1}\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2j\pi}{3}\right\}\,,$$

et la ligne $\tilde{\ell}_1(h)$ est envoyée sur l'axe $\mathbb{R}^+$.
Le secteur fermé délimité par L_{j-1} et L_j sera noté $\mathcal{S}_j$.

Soit $a = +\infty$, et soit $Z(a)$ l'ensemble des points $\zeta \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un chemin complexe γ_ζ joignant ζ à a, qui coïncide à l'infini avec $[0,+\infty[$, et tels que la fonction $v \mapsto \operatorname{Re}\gamma_\zeta(v)^{3/2}$ soit croissante.
Il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour $h = 0$, $\zeta(\mathcal{D}(2\delta,\eta),0) \subset Z(a)$. Ainsi, d'après (3.3.15) et (3.3.16), il existe $h_1 > 0$ tel que pour tout $h \in]0,h_1[$,

$$\zeta(\mathcal{D}(\delta,\eta),h) \subset Z(a)\,.$$

Le Théorème 9.1, p. 417 de [111], qui s'applique à tout $\zeta \in Z(a)$, assure donc l'existence d'une solution de la forme

$$w(x,h) = \left(\frac{\zeta(x,h)}{V(x,h)}\right)^{1/4} W(\zeta(x,h),h)\,, \quad x \in \mathcal{D}(\delta,\eta)\,.$$

Ici W peut se réécrire ainsi :

$$\forall h \in]0,h_1]\,,\ \forall \zeta \in \zeta(\mathcal{D}(\delta,\eta),h)\,,\quad W(\zeta,h) = Ai\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}}\right) + h\varepsilon(\zeta,h)\,, \tag{3.3.26}$$

où il existe $K > 0$ tel que

$$|\varepsilon(\zeta,h)| \leq KG\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}}\right) F(\zeta,h)\,, \tag{3.3.27}$$

avec

$$F(\zeta,h)=\int_{x([\zeta,+\infty[,h)}|\tilde{\sigma}(z,h)||dz|\,, \tag{3.3.28}$$

et où

- $x([\zeta,+\infty[,h)\subset\mathcal{D}(\delta,\eta)$ est l'image du chemin $[\zeta,+\infty[$ par le changement de variable inverse $x(\cdot,h)$,
- $\tilde{\sigma}$ est la fonction définie par (3.3.19),
-
$$G(z)=\frac{|Ai(z)|}{\sin\Theta(z)}\,, \tag{3.3.29}$$
-
$$\Theta(z)=\arctan\left(\frac{e^{2/3\mathrm{Re}\,z^{3/2}}|Ai(z)|}{e^{-2/3\mathrm{Re}\,z^{3/2}}|Ai(e^{2i\pi/3}z)|}\right)\,. \tag{3.3.30}$$

Dans l'expression (3.3.28), on utilise comme dans [111] la notation $|dz|=|\gamma'(t)|dt$ pour une intégrale le long d'un chemin γ. L'intégrale (3.3.28) est convergente en $z=0$, et la fonction G est positive car $\Theta(z)\in[0,\pi/2[$.

Remarque 3.3.4 *La fonction G n'est* a priori *pas définie si $Ai(z)=0$ ou si $Ai(e^{2i\pi/3}z)=0$, c'est-à-dire pour $z=\mu_n$ ou $z=e^{-2i\pi/3}\mu_n$, où $\mu_n<0$ est le n-ème zéro de la fonction d'Airy. On peut néanmoins prolonger G par continuité en ces points.*
En effet, quand $z\to\mu_n$, on a

$$\frac{e^{2/3\mathrm{Re}\,z^{3/2}}|Ai(z)|}{e^{-2/3\mathrm{Re}\,z^{3/2}}|Ai(e^{2i\pi/3}z)|}\to 0\,,$$

donc

$$G(z)=\frac{e^{-2/3\mathrm{Re}\,z^{3/2}}|Ai(e^{2i\pi/3}z)|}{e^{2/3\mathrm{Re}\,z^{3/2}}}(1+o(1))\,,$$

et G est continue en $z=\mu_n$.
Quand $z\to e^{-2i\pi/3}\mu_n$,

$$\frac{e^{2/3\mathrm{Re}\,z^{3/2}}|Ai(z)|}{e^{-2/3\mathrm{Re}\,z^{3/2}}|Ai(e^{2i\pi/3}z)|}\to+\infty\,,$$

donc $\sin\Theta(z)\to 1$ *et G est continue en $z=e^{-2i\pi/3}\mu_n$.*

Si maintenant ζ est fixé, $\arg\zeta\neq\pi$, alors il existe $\varepsilon=\varepsilon(\arg\zeta)>0$ tel que, pour tout $h\leq h_1$, $\Theta(\zeta/h^{2/3})\geq\varepsilon$, donc il existe $C(\arg\zeta)>0$ tel que

$$G\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}}\right)\leq C(\arg\zeta)\left|Ai\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}}\right)\right|\,,\quad \arg\zeta\neq\pi\,. \tag{3.3.31}$$

D'autre part il existe $C'>0$ (indépendant de ζ) tel que

$$G\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}}\right)\leq C'\,,\quad \zeta\in\mathbb{R}^-\,. \tag{3.3.32}$$

Montrons enfin que la fonction F définie par (3.3.28) est bornée pour tout h suffisamment petit et $\zeta\in\zeta(D(\delta,\eta))$. L'hypothèse (3.3.20) permet d'affirmer qu'il existe $K_1>0$ tel que, pour tout $\zeta\in\zeta(\mathcal{D}(\delta,\eta),0)$,

$$|F(\zeta,0)|\leq K_1\,.$$

Soit $c > 0$. Les hypothèses (3.3.15) et (3.3.16) permettent d'écrire, pour tout $\beta = 0, 1, 2$ et tout $x \in \mathcal{D}(\delta, \eta)$, $|x - x_0(0)| \geq c$,

$$\partial_x^\beta V(x,h) = \partial_x^\beta V_0(x)(1 + \mathcal{O}(h^\gamma)),$$

et

$$\zeta(x,h) = \zeta(x,0)(1 + \mathcal{O}(h^\gamma)),$$

où les restes $\mathcal{O}(h^\gamma)$ sont uniformes par rapport à x.
On en déduit que

$$\tilde{\sigma}(x,h) = \tilde{\sigma}(x,0)(1 + \mathcal{O}(h^\gamma)),$$

uniformément par rapport à $x \in \mathcal{D}(\delta, \eta)$, $|x - x_0(0)| \geq c$.
Il existe donc $h_2 \leq h_1$ tel que, pour tout $h \in [0, h_2]$ et tout $\zeta \in \zeta(\mathcal{D}(\delta, \eta), h)$,

$$|F(\zeta, h)| \leq 2K_1. \tag{3.3.33}$$

Finalement, d'après (3.3.27), (3.3.31), (3.3.32) et (3.3.33), les bornes (3.3.23) sont satisfaites par la fonction

$$r(x,h) := \left(\frac{\zeta(x,h)}{V(x,h)}\right)^{1/4} \varepsilon(\zeta(x,h),h). \tag{3.3.34}$$

□

Nous cherchons maintenant à intégrer la solution (3.3.22) le long d'une courbe régulière sur laquelle $\zeta(x,h)$ est réel. Pour cela, on commence par vérifier que la réunion des lignes $\ell_1(h)$ et $\tilde{\ell}_1(h)$ constitue bien une courbe régulière au point $x_0(h)$.
Si δ, h_2 et η sont comme dans le Théorème 3.3.3, on a alors

Lemme 3.3.5 *Pour tout $h \in [0, h_2]$, il existe un chemin analytique $\gamma_h : [-d, +\infty[\to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_h(0) = x_0(h)$,*

$$\gamma_h([-d, +\infty[) = \bar{\mathcal{D}}(\delta, \eta) \cap (\ell_1(h) \cup \tilde{\ell}_1(h)), \tag{3.3.35}$$

et vérifiant

$$\forall t \in [-d, +\infty[, \quad |\gamma_h'(t)| = 1. \tag{3.3.36}$$

Preuve :
Soit $\gamma_h : [-d, +\infty[\to \mathbb{C}$ un chemin continu tel que

$$\gamma_h([-d, +\infty[) = \bar{\mathcal{D}}(\delta, \eta) \cap (\ell_1(h) \cup \tilde{\ell}_1(h)).$$

Alors γ_h est l'image réciproque d'une demi-droite de la forme $[-c, +\infty[$ par la fonction $\zeta(\cdot, h)$, qui est holomorphe sur $\mathcal{D}(\delta, \eta)$ pour δ suffisamment petit. Ceci assure que γ_h est analytique, et quitte à le reparamétrer, on peut supposer que (3.3.36) est vérifié. ⊟

On fixe $\eta' \in]0, \eta[$ et $\delta' \in]0, \delta[$, et on choisit une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, [0,1])$ telle que $\chi(x) = 1$ pour tout $x \in \bar{\mathcal{D}}(\delta', \eta')$, et Supp $\chi \subset \mathcal{D}(\delta, \eta)$.
Le corollaire suivante donne une estimation quand $h \to 0$ de l'intégrale du carré de la solution (3.3.22) le long du chemin γ_h.

Corollaire 3.3.6 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3.3, il existe* $c_0 \neq 0$ *tel que, quand* $h \to 0$,

$$\int_{\gamma_h} w(x,h)^2 \chi(x) dx = c_0 h^{1/3}(1 + o(1)) . \tag{3.3.37}$$

Preuve :
Pour tout $h \in [0, h_2]$ et $x \in \gamma_h([-d, +\infty[)$, on a $x \in \ell_1(h) \cup \tilde{\ell}_1(h)$ par définition de γ_h . Or, $\zeta(\ell_1(h), h) \subset \mathbb{R}^-$ et $\zeta(\tilde{\ell}_1(h), h) \subset \mathbb{R}^+$. Par conséquent,

$$\zeta(x,h) \in \mathbb{R} \quad \text{pour} \quad x \in \gamma_h([-d, +\infty[) . \tag{3.3.38}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_h} w(x,h)^2 \chi(x) dx \quad &= \quad \int_{-d}^{+\infty} \left(\frac{\zeta(\gamma_h(t), h)}{V(\gamma_h(t), h)} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(Ai\left(\frac{\zeta(x,h)}{h^{2/3}} \right) + h\varepsilon(\zeta(x,h), h) \right)^2 \chi \circ \gamma_h(t) \, \gamma_h'(t) dt \, ,\end{aligned}$$

d'après le Théorème 3.3.3, où $\varepsilon(\zeta, h)$ est la fonction apparaissant dans l'expression (3.3.34).
D'après (3.3.38) et (3.3.23), il existe $M > 0$ tel que

$$\forall \zeta \in \mathbb{R} , \forall h \in [0, h_2] , \quad |\varepsilon(\zeta, h)| \leq M . \tag{3.3.39}$$

On considère maintenant le changement de variable à $h \in [0, h_2]$ fixé

$$[-d, +\infty[\ni t \mapsto \zeta := \zeta(\gamma_h(t), h) \in [-b_h, +\infty[,$$

où $[-b_h, +\infty[$ désigne l'ensemble image.

Remarque 3.3.7 *Cette transformation est bien inversible car pour tout* $h \in [0, h_2]$ *et* $t \in [-d, +\infty[$,

$$\partial_t \zeta(\gamma_h(t), h) = \gamma_h'(t) \sqrt{V(\gamma_h(t), h)} \left(\frac{3}{2} \int_{x_0(h)}^{\gamma_h(t)} \sqrt{V(z,h)} \, dz \right)^{-1/3} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Notons qu'on a alors la relation $\gamma_h(t) = x(\zeta, h)$, où $x(\cdot, h)$ est le changement de variable (3.3.25).
Soit b tel que $b > b_h$ pour tout $h \in [0, h_2]$. Soit $\chi_h = \chi(x(\cdot, h), h)$. Alors, pour tout $h \in [0, h_2]$, on a

$$\int_{\gamma_h} w(x,h)^2 \chi(x) dx = I_0(h) + hI_1(h) + h^2 I_2(h) , \tag{3.3.40}$$

avec

$$I_0(h) = \int_{-b}^{+\infty} \frac{\zeta}{V(x(\zeta,h),h)} Ai\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}} \right)^2 \chi_h(\zeta) d\zeta , \tag{3.3.41}$$

$$I_1(h) = 2 \int_{-b}^{+\infty} \frac{\zeta}{V(x(\zeta,h),h)} Ai\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}} \right) \varepsilon(\zeta,h) \chi_h(\zeta) d\zeta , \tag{3.3.42}$$

et

$$I_2(h) = \int_{-b}^{+\infty} \frac{\zeta}{V(x(\zeta,h),h)} \varepsilon(\zeta,h)^2 \chi_h(\zeta) d\zeta\,. \tag{3.3.43}$$

Il reste maintenant à estimer $I_0(h)$ et à vérifier que $hI_1(h)+h^2I_2(h)$ est négligeable devant $I_0(h)$ quand $h \to 0$. On rappelle pour cela la définition de la fonction d'Airy,

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+\xi^3/3)} d\xi\,,$$

d'où de façon immédiate,

$$Ai\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}}\right) = \frac{1}{2\pi h^{1/3}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h}(\zeta\xi+\xi^3/3)} d\xi\,.$$

Ainsi,

$$I_0(h) = \frac{1}{4\pi^2 h^{2/3}} \iiint_{[-d,+\infty[\times\mathbb{R}^2} \frac{\zeta}{V(x(\zeta,h),h)} e^{\frac{i}{h}\Phi(\zeta,\eta,\xi)} \chi_h(\zeta) d\zeta d\eta d\xi\,, \tag{3.3.44}$$

où

$$\Phi(\zeta,\eta,\xi) = \zeta(\xi-\eta) + \frac{1}{3}(\xi^3-\eta^3)\,.$$

On applique la méthode de la phase stationnaire par rapport à ζ et η, à ξ fixé. On a

$$D[\Phi(\cdot,\cdot,\xi)](\zeta,\eta) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \zeta & = & -\xi^2 \\ \eta & = & \xi \end{array} \right.$$

et

$$(\text{Hess } \Phi(\cdot,\cdot,\xi))_{|(\zeta,\eta)=(-\xi^2,\xi)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2\xi \end{pmatrix}.$$

Donc le point $(-\xi^2,\xi)$ est un point critique non-dégénéré de $\Phi(\cdot,\cdot,\xi)$. D'après la méthode de la phase stationnaire, on a donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\iint_{[-d,+\infty[\times\mathbb{R}} \frac{\zeta}{V(x(\zeta,h),h)} e^{\frac{i}{h}\Phi(\zeta,\eta,\xi)} \chi_h(\zeta) d\zeta d\eta = -\frac{\sqrt{2\pi}\xi^2}{V(x(-\xi^2,0),0)} \chi_0(-\xi^2)\, h(1+o(1))\,,$$

quand $h \to 0$, car $\Phi(-\xi^2,\xi,\xi) = 0$.
On obtient ainsi, d'après (3.3.44),

$$I_0(h) = c_0 h^{1/3}(1+o(1))\,, \quad h \to 0\,, \tag{3.3.45}$$

avec

$$c_0 = -(2\pi)^{-3/2} \int_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{V(x(-\xi^2,0),0)} \chi_0(-\xi^2) d\xi\,. \tag{3.3.46}$$

On traite maintenant le terme $hI_1(h)$ dans (3.3.40). D'après (3.3.39), et comme $\zeta/V(x(\zeta,h),h)$ est borné pour $(\zeta,h) \in [-d,+\infty[\times[0,h_2]$,

$$|I_1(h)| \leq M_1 \int_{-b}^{+\infty} \left| Ai\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}}\right) \right| d\zeta\,, \quad M_1 > 0\,.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{+\infty}\left|Ai\left(\frac{\zeta}{h^{2/3}}\right)\right|d\zeta &= h^{2/3}\int_{-b/h^{2/3}}^{+\infty}|Ai(u)|du\\ &\leq M_2h^{2/3}\int_{-b/h^{2/3}}^{0}\frac{du}{|u|^{1/4}}\,,\quad M_2>0\\ &\leq M_3h^{1/6}\,,\quad M_3>0\,,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le comportement asymptotique (2.2.7), (2.2.8) de la fonction d'Airy quand $u\to\pm\infty$.
On a donc

$$h|I_1(h)| = \mathcal{O}(h^{7/6}) = o(I_0(h))\,.$$

Enfin d'après (3.3.39), il est clair que

$$h^2I_2(h) = \mathcal{O}(h^2)\,,$$

et (3.3.37) découle de (3.3.40) et (3.3.45). □

Le corollaire précédent s'applique directement à l'oscillateur cubique $\mathcal{A}_\alpha(h)$, avec potentiel

$$V_\alpha(x,h) = ix^3 + i\alpha h^{4/5}x - 1\,,$$

On rappelle que $V_\alpha(\cdot,h)$ possède trois zéros simples pour h suffisamment petit, deux d'entre eux $x_\pm^\alpha(h)$ étant issus de $x_\pm^\alpha(0) = e^{i(\frac{\pi}{2}\mp\frac{4\pi}{3})}$. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, ces deux zéros sont reliés par une ligne de Stokes finie $\ell_f^\alpha(h)$ (voir la sous-section 3.3.2), le long de laquelle $\operatorname{Im}\int_{x_\pm^\alpha(h)}^x\sqrt{V_\alpha(z,h)}\,dz<0$. Cette ligne joue donc le rôle de la ligne de Stokes $\ell_1(h)$ des énoncés précédents.
D'autre part, on note $\tilde{\ell}_\pm^\alpha(h)$ la ligne anti-Stokes issue de $x_\pm^\alpha(h)$ le long de laquelle $\int_{x_\pm^\alpha(h)}^x\sqrt{V_\alpha(z,h)}\,dz>0$. On choisit alors deux chemins $\gamma_{h,+}^\alpha$ et $\gamma_{h,-}^\alpha$ comme dans le Lemme 3.3.5.
Enfin, on fixe $\eta<|x_+^0(0)-x_-^0(0)|$ et on note comme précédemment, pour $\delta>0$,

$$\mathcal{D}_\pm(\delta,\eta) = \left(\ell_{f,\delta}^0\cap\{x\in\mathbb{C}:|x-x_\pm^0(0)|<\eta\}\right)\cup\tilde{\ell}_{\pm,\delta}^0\,,$$

où $\ell_{f,\delta}^0$ et $\tilde{\ell}_{\pm,\delta}^0$ sont définis comme dans (3.3.4) et (3.3.14) (voir Figure 3.4).
Le Théorème 3.3.3 et le Corollaire 3.3.6 entraînent alors directement le résultat suivant.

Lemme 3.3.8 *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Il existe $\delta>0$, $h_3>0$, et deux solutions $\psi_\pm^\alpha(x,h)$ de l'équation*

$$\mathcal{A}_\alpha(h)\psi_\pm^\alpha(x,h) = \left(-h^2\frac{d^2}{dx^2}+V_\alpha(x,h)\right)\psi_\pm^\alpha(x,h) = 0\,,$$

telles que pour tous $h\in[0,h_3]$ et $x\in\mathcal{D}_\pm(\delta,\eta)$,

$$\psi_\pm^\alpha(x,h) = \left(\frac{\zeta_\pm^\alpha(x,h)}{V_\alpha(x,h)}\right)^{1/4}Ai\left(\frac{\zeta_\pm^\alpha(x,h)}{h^{2/3}}\right)+hr_\pm^\alpha(x,h)\,, \tag{3.3.47}$$

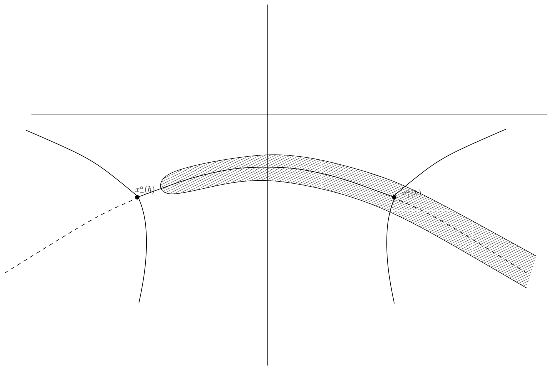

FIGURE 3.4 – Le domaine $\mathcal{D}_+(\delta,\eta)$ (zone hachurée). La ligne joignant $x_-^\alpha(h)$ à $x_+^\alpha(h)$ est la ligne de Stokes finie $\ell_f^\alpha(h)$. Les lignes en pointillés représentent les lignes anti-Stokes $\tilde{\ell}_\pm^\alpha(h)$.

où la fonction $r_\pm^\alpha$ vérifie, pour tout $h \in [0,h_3]$,

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_\pm(\delta,\eta) \setminus \ell_f^\alpha(h)\,, & |r(x,h)| \leq C_\pm^\alpha(x) \left| Ai\left(\frac{\zeta_\pm^\alpha(x,h)}{h^{2/3}}\right) \right|\,, \\ \forall x \in \mathcal{D}_\pm(\delta,\eta) \cap \ell_f^\alpha(h)\,, & |r(x,h)| \leq K_\pm^\alpha\,, \end{cases}$$

pour une certaine constante $K_\pm^\alpha > 0$, une certaine fonction $C_\pm^\alpha(x)$ bornée dans $\mathcal{D}_\pm(\delta,\eta)$ privé de tout voisinage ouvert de ℓ_f^0, et

$$\zeta_\pm^\alpha(x,h) = \left(\frac{3}{2}\int_{x_\pm^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\; dz\right)^{2/3}.$$

Soient de plus $\delta' \in]0,\delta[$, $\eta' \in]0,\eta[$, et $\chi_\pm \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C},[0,1])$ avec $\chi_\pm(x) = 1$ pour $x \in \mathcal{D}_\pm(\delta',\eta')$ et Supp $\chi_\pm \subset \mathcal{D}(\delta,\eta)$. Alors il existe $c_\pm^\alpha \neq 0$ tel que, quand $h \to 0$,

$$\int_{\gamma_{h,\pm}^\alpha} \psi_\pm^\alpha(x,h)^2 \chi_\pm^\alpha(x)dx = c_\pm^\alpha h^{1/3}(1+o(1))\,. \tag{3.3.48}$$

3.3.4 Raccordement

Dans les sous-sections 3.3.2 et 3.3.3, nous avons déterminé le comportement asymptotique quand $h \to 0$ de plusieurs solutions de (3.3.6). Nous avons ainsi construit une solution $\psi_1^\alpha(\cdot,h_n) \in L^2(\mathbb{R})$ dont le comportement est connu dans un domaine Γ_ε évitant un voisinage de la ligne de Stokes finie $\ell_f^\alpha(h)$, et deux solutions $\psi_\pm^\alpha(\cdot,h)$ au voisinage des points tournants $x_+^\alpha(h)$ et $x_-^\alpha(h)$, dont le comportement asymptotique est valable dans un voisinage de la ligne $\ell_f^\alpha(h)$ évitant le point tournant opposé (voir Lemme 3.3.8). Nous cherchons maintenant à raccorder entre elles ces différentes solutions, en comparant leurs expressions asymptotiques dans l'intersection des domaines où elles s'appliquent.
Commençons par énoncer la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld, qui lie la valeur de h_n à l'indice n. Nous l'utiliserons ici pour déterminer le coefficient de proportionnalité liant les solutions ψ_1^α et $\psi_\pm^\alpha$.

Lemme 3.3.9 (Règle de quantification de Bohr-Sommerfeld)

$$\mathrm{Im} \int_{x_-^\alpha(h_n)}^{x_+^\alpha(h_n)} \sqrt{V_\alpha(z,h_n)}\, dz = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right) h_n + \mathcal{O}(h_n^2)\,. \tag{3.3.49}$$

Preuve :
Soit γ un lacet situé dans le demi-plan inférieur et contournant positivement la ligne de Stokes finie $\ell_f^\alpha(h)$ joignant $x_-^\alpha(h)$ à $x_+^\alpha(h)$. On considère la solution $\psi_1^\alpha(x,h_n)$ définie au Corollaire 3.3.2, et on note Z_n le nombre de zéros de $\psi_1^\alpha(\cdot,h_n)$ à l'intérieur de γ. On part de la formule

$$\oint_\gamma \frac{\partial_x \psi_1^\alpha(x,h_n)}{\psi_1^\alpha(x,h_n)} dx = 2i\pi Z_n\,, \tag{3.3.50}$$

et on rappelle que que le développement (3.3.12) est valable uniformément pour $x\in\gamma$ car $\gamma\subset\Gamma_\varepsilon$ pour ε suffisamment petit. Ainsi, si on note

$$\phi_\alpha(x,h_n) = \frac{1}{V_\alpha(x,h_n)^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{h_n}\int_{x_+^\alpha(h_n)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h_n)}\, dz\right)\,,$$

alors

$$\begin{aligned}
\partial_x\psi_1^\alpha(x,h_n) &= \partial_x\phi_\alpha(x,h_n)(1+h_n u_1^\alpha(x)+\mathcal{O}(h_n^2)) \\
&\quad +\phi_\alpha(x,h_n)(h_n(u_1^\alpha)'(x)+\mathcal{O}(h_n^2)) \\
&= \phi_\alpha(x,h_n)\left(-\frac{\partial_x V_\alpha(x,h_n)}{4V_\alpha(x,h_n)} - \frac{\sqrt{V_\alpha(x,h_n)}}{h_n}\right) \\
&\quad \times\left(1+h_n u_1^\alpha(x)+\mathcal{O}(h_n^2)\right) + \phi_\alpha(x,h_n)(h_n(u_1^\alpha)'(x)+\mathcal{O}(h_n^2))\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial_x\psi_1^\alpha(x,h_n)}{\psi_1^\alpha(x,h_n)} = -\frac{\partial_x V_\alpha(x,h_n)}{4V_\alpha(x,h_n)} - \frac{\sqrt{V_\alpha(x,h_n)}}{h_n} + \mathcal{O}(h_n)\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{\partial_x\psi_1^\alpha(x,h_n)}{\psi_1^\alpha(x,h_n)}dx &= -\frac{1}{4}\oint_\gamma \frac{\partial_x V_\alpha(x,h_n)}{V_\alpha(x,h_n)}dx - \frac{1}{h_n}\oint_\gamma V_\alpha(x,h_n)^{1/2}dx + \mathcal{O}(h_n) \\
&= -i\pi - \frac{1}{h_n}\oint_\gamma V_\alpha(x,h_n)^{1/2}dx + \mathcal{O}(h_n)\,,
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $V_\alpha(\cdot,h_n)$ a exactement deux zéros ($x_-^\alpha(h_n)$ et $x_+^\alpha(h_n)$) à l'intérieur de γ. D'après (3.3.50), on a donc

$$i\oint_\gamma \sqrt{V_\alpha(x,h_n)}\, dx = \pi(2Z_n+1)h_n + \mathcal{O}(h_n^2)\,. \tag{3.3.51}$$

Puisque $\sqrt{V_\alpha(\cdot,h_n)}$ est définie au voisinage de $\ell_f^\alpha(h_n)$, on peut maintenant reserrer γ sur la ligne $\ell_f^\alpha(h_n)$, ce qui, en tenant compte du changement de signe à la traversée des coupures, donne

$$i\oint_\gamma \sqrt{V_\alpha(x,h_n)}\, dx = -2i\int_{x_-^\alpha(h_n)}^{x_+^\alpha(h_n)} \sqrt{V_\alpha(x,h_n)}\, dx\,.$$

Ainsi, (3.3.51) se réecrit

$$\mathrm{Im}\int_{x_-^\alpha(h_n)}^{x_+^\alpha(h_n)} \sqrt{V_\alpha(x,h_n)}\,dx = \pi\left(Z_n+\frac{1}{2}\right)h_n + \mathcal{O}(h_n^2)\,.$$

Le fait que $Z_n = n$ est montré par exemple dans [72]. $\boxminus$

Nous allons maintenant comparer les expressions asymptotiques de ψ_1^α et $\psi_\pm^\alpha$, à h fixé et quand $|x| \to +\infty$ le long des lignes $\tilde{\ell}_\pm^\alpha(h)$. Soit $n \geq 1$ fixé suffisamment grand pour que $\tilde{\ell}_-^\alpha(h_n) \subset \tilde{\ell}_{-,\delta}^0$, et soit $x \in \tilde{\ell}_-^\alpha(h_n)$. On peut utiliser l'expression asymptotique (2.2.7) de la fonction d'Airy, appliquée à $z = \zeta_-^\alpha(x,h_n)$. On obtient alors

$$Ai\left(\frac{\zeta_-^\alpha(x,h_n)}{h_n^{2/3}}\right) = \frac{h_n^{1/6}}{2\sqrt{\pi}\zeta_-^\alpha(x,h_n)}e^{-\frac{2}{3h_n}\zeta_-^\alpha(x,h_n)^{3/2}}(1+\mathcal{O}(\zeta_-^\alpha(x,h_n)^{-3/2}))\,,$$

quand $|x| \to +\infty$ le long de $\tilde{\ell}_-^\alpha(h_n)$. L'expression (3.3.47) se réecrit donc, en utilisant la notation $S_\pm^\alpha(x,h) = \int_{x_\pm^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\,dz$,

$$\begin{aligned}
\psi_-^\alpha(x,h_n) &= \frac{h_n^{1/6}}{2\sqrt{\pi}V_\alpha(x,h_n)^{1/4}}\exp\left(-\frac{1}{h_n}S_-^\alpha(x,h_n)\right)(1+\mathcal{O}(S_-^\alpha(x,h_n)^{-3/2}))\\
&= \frac{h_n^{1/6}}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{h_n}\int_{x_-^\alpha(h_n)}^{x_+^\alpha(h_n)}\sqrt{V_\alpha(z,h_n)}\,dz\right)\psi_1^\alpha(x,h_n)\\
&\quad \times(1+\mathcal{O}(|x|^{-5/2}))\,, \qquad (3.3.52)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'expression asymptotique (3.3.12).
Or, si $\tilde{\psi}_1^\alpha(x,h)$ désigne une solution de $\mathcal{A}_\alpha(h)\tilde{\psi}_1^\alpha(\cdot,h) = 0$ telle que $(\psi_1^\alpha, \tilde{\psi}_1^\alpha)$ forme un système fondamental de solutions de l'équation, alors il existe $\Lambda_-(h) \in \mathbb{C}$ et $\tilde{\Lambda}_-(h) \in \mathbb{C}$, indépendants de x, tels que

$$\forall x \in \mathbb{C}\,, \quad \psi_-^\alpha(x,h_n) = \Lambda_-(h_n)\psi_1^\alpha(x,h_n) + \tilde{\Lambda}_-(h_n)\tilde{\psi}_1^\alpha(x,h_n)\,. \qquad (3.3.53)$$

La solution $\tilde{\psi}_1^\alpha$ est dominante (exponentiellement croissante) quand $|x| \to +\infty$ le long de $\tilde{\ell}_-^\alpha(h_n)$ (elle serait sinon exponentiellement décroissante, et donc proportionnelle à ψ_1^α). Ainsi, en comparant (3.3.52) avec le membre de droite de (3.3.53) quand $|x| \to +\infty$, $x \in \tilde{\ell}_-^\alpha(h_n)$, on en déduit que, nécessairement,

$$\tilde{\Lambda}_-(h_n) = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda_-(h_n) = \frac{h_n^{1/6}}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{h_n}\int_{x_-^\alpha(h_n)}^{x_+^\alpha(x,h_n)}\sqrt{V_\alpha(z,h_n)}\,dz\right).$$

On peut maintenant comparer ψ_1^α et ψ_-^α quand $n \to +\infty$ à l'aide de l'expression (3.3.49), qui donne

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{1}{h_n}\int_{x_-^\alpha(h_n)}^{x_+^\alpha(x,h_n)}\sqrt{V_\alpha(z,h_n)}\,dz\right) &= \exp\left(-\frac{i}{h_n}\mathrm{Im}\int_{x_-^\alpha(h_n)}^{x_+^\alpha(x,h_n)}\sqrt{V_\alpha(z,h_n)}\,dz\right)\\
&= \exp\left(-in\pi - i\frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(h_n)\right)\\
&= (-1)^{n-1}i(1+\mathcal{O}(h_n))\,.
\end{aligned}$$

On en déduit finalement la relation suivante :

$$\psi_-^\alpha(x,h_n) = \frac{(-1)^{n-1}i}{2\sqrt{\pi}} h_n^{1/6} \psi_1^\alpha(x,h_n)(1+\mathcal{O}(h_n))\,, \quad n \to +\infty\,. \tag{3.3.54}$$

De la même façon, en comparant les comportements asymptotiques de ψ_1^α et ψ_+^α quand $|x| \to +\infty$ le long de $\tilde{\ell}_+^\alpha(h_n)$, on trouve

$$\psi_+^\alpha(x,h_n) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} h_n^{1/6} \psi_1^\alpha(x,h_n)\,. \tag{3.3.55}$$

Ces relations vont nous permettre d'intégrer le carré de la solution $\psi_1^\alpha(x,h_n)$ le long de la courbe homotope à $\mathbb{R}$, constituée de la réunion des trois lignes $\tilde{\ell}_-^\alpha(h_n)$, $\ell_f^\alpha(h_n)$ et $\tilde{\ell}_+^\alpha(h_n)$. On notera donc

$$\mathcal{L}_\alpha(h_n) = \tilde{\ell}_-^\alpha(h_n) \cup \ell_f^\alpha(h_n) \cup \tilde{\ell}_+^\alpha(h_n)\,, \tag{3.3.56}$$

et par extension $\mathcal{L}_\alpha(h_n)$ désignera également un chemin régulier (voir le Lemme 3.3.5) d'image $\mathcal{L}_\alpha(h_n)$.
Soit $\delta > 0$ la constante du Lemme 3.3.8, et $\eta > 0$ tel que $\eta < |x_+^0(0) - x_-^0(0)|$, et η suffisamment grand pour que $\ell_{f,\delta}^0 \subset \mathcal{D}_+(\delta,\eta) \cup \mathcal{D}_-(\delta,\eta)$. On choisit enfin $\eta' < |x_+^0(0) - x_-^0(0)|/2$ et $\delta' \in]0,\delta[$. Il existe alors une partition de l'unité (χ_-,χ_+) telle que, pour tout $h \in]0,h_3]$ et tout $x \in \mathcal{L}_\alpha(h)$, $\chi_-(x) + \chi_+(x) = 1$, et telle que $\chi_\pm(x) = 1$ pour $x \in \mathcal{D}_\pm(\delta',\eta')$, et Supp $\chi_\pm \subset \mathcal{D}_\pm(\delta,\eta)$.
On a alors, d'après (3.3.54) et (3.3.55), pour tout $x \in \mathcal{L}_\alpha(h_n)$,

$$\psi_1^\alpha(x,h_n)^2 = 4\pi h_n^{-1/3}(\psi_+^\alpha(x,h_n)^2\chi_+(x) - \psi_-^\alpha(x,h_n)^2\chi_-(x))(1+\mathcal{O}(h_n))\,, \tag{3.3.57}$$

quand $n \to +\infty$.
Ainsi, d'après (3.3.48) et en vérifiant grâce à l'expression (3.3.46) que

$$c_\alpha := c_+^\alpha + c_-^\alpha \neq 0\,,$$

on obtient

Lemme 3.3.10 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $c_\alpha \neq 0$ tel que*

$$\int_{\mathcal{L}_\alpha(h_n)} \psi_1^\alpha(x,h_n)^2 dx = c_\alpha(1+o(1))\,, \tag{3.3.58}$$

quand $n \to +\infty$.

Nous allons maintenant rassembler les résultats de cette section pour démontrer le Théorème 3.1.1.

3.4 Estimation des indices d'instabilité

Commençons par rappeler le résultat suivant concernant l'expression des indices d'instabilité (voir la section 1.3).

Proposition 3.4.1 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur fermé sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ une valeur propre simple isolée. Soit Π_λ le projecteur spectral associé à λ, u_λ un vecteur propre associé à λ , et u_λ^* un vecteur propre de $\mathcal{A}^*$ associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$. Alors :*

(i) Π_λ *est de rang* 1 *si et seulement si* $\langle u_\lambda, u_\lambda^* \rangle \neq 0$ *.*

(ii) Dans ce cas, on a

$$\kappa(\lambda) := \|\Pi_\lambda\| = \frac{\|u_\lambda\| \|u_\lambda^*\|}{|\langle u_\lambda, u_\lambda^* \rangle|} . \tag{3.4.1}$$

On rappelle (voir la sous-section 3.3.1) que les fonctions propres u_n^α associées à la n-ème valeur propre $\lambda_n(\alpha) \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{A}_\alpha$ s'écrivent

$$u_n^\alpha(x) = \psi_\alpha(h_n^{2/5} x, h_n) , \tag{3.4.2}$$

où

$$h_n = \lambda_n(\alpha)^{-5/6} , \tag{3.4.3}$$

et où $\psi_\alpha(\cdot, h_n) \in L^2(\mathbb{R})$ est solution de $\mathcal{A}_\alpha(h_n)\psi_\alpha(\cdot, h_n) = 0$.
On normalise u_n^α de sorte que

$$u_n^\alpha(x) = \psi_1^\alpha(h_n^{2/5} x, h_n) , \tag{3.4.4}$$

où ψ_1^α est la solution introduite dans le Corollaire 3.3.2.
La proposition suivante permet d'affirmer que l'expression (3.4.1) est valable pour les grandes valeurs propres de $\mathcal{A}_\alpha$, et donne le comportement asymptotique de son dénominateur. On retrouve ainsi, pour n suffisamment grand, le résultat du Théorème 3.2.4, (*iii*).

Proposition 3.4.2 *Soit* $\alpha \geq 0$*. Il existe* $N \geq 1$ *tel que, pour tout* $n \geq N$ *, le projecteur spectral* $\Pi_n(\alpha)$ *de* $\mathcal{A}_\alpha$ *associé à* $\lambda_n(\alpha)$ *est de rang* 1*. De plus, il existe* $k_\alpha > 0$ *tel que, pour tout* $n \geq N$ *, le* n*-ème indice d'instabilité s'écrit*

$$\kappa_n(\alpha) = k_\alpha \|\psi_1^\alpha(\cdot, h_n)\|_{L^2(\mathbb{R})}(1 + o(1)) , \quad n \to +\infty . \tag{3.4.5}$$

Preuve : On remarque d'abord que $\mathcal{A}_\alpha^* \Gamma = \Gamma \mathcal{A}_\alpha$, où $\Gamma : u(x) \mapsto \overline{u(x)}$. Par conséquent, on a

$$(u_n^\alpha)^*(x) = \overline{u_n^\alpha(x)} ,$$

avec les notations de la Proposition 3.4.1. D'après (3.4.4), on a alors

$$\begin{aligned} \langle u_n^\alpha, (u_n^\alpha)^* \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi_1^\alpha(h_n^{2/5} x, h_n)^2 dx \\ &= h_n^{-2/5} \int_{\mathbb{R}} \psi_1^\alpha(x, h_n)^2 dx . \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Pour estimer l'intégrale du membre de droite de (3.4.6), on va commencer par déformer le chemin d'intégration pour atteindre les points tournants $x_\pm^\alpha(h)$ de l'opérateur $\mathcal{A}_\alpha(h)$, qui sont les points critiques de la phase $\int_{x_\mp^\alpha(h)}^x \sqrt{V_\alpha(z,h)}\, dz$ apparaissant dans les estimations WKB de ψ_1^α (voir la sous-section 3.3.2). Soit $R > 0$ et $\gamma_{h,R}^\alpha : [-R : R] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que

$$\gamma_{h,R}^\alpha([-R, R]) = \mathcal{L}_\alpha(h) \cap \{|z| \leq R\} ,$$

où $\mathcal{L}_\alpha(h)$ est défini par (3.3.56). D'après le Lemme 3.3.5, quitte à reparamétrer $\gamma_{h,R}^\alpha$, on peut supposer qu'il s'agit d'un chemin de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\theta_{h,R}^\alpha = -\arg \gamma_{h,R}^\alpha(R)$, et $\mathcal{C}_{h,\pm R}^\alpha$ les arcs de cercles paramétrés par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{h,+R}^\alpha : \quad & [0,1] \ni t \mapsto \quad Re^{i(t-1)\theta_{h,R}^\alpha} , \\ \mathcal{C}_{h,-R}^\alpha : \quad & [0,1] \ni t \mapsto \quad -Re^{it\theta_{h,R}^\alpha} . \end{aligned}$$

Si $\tilde{\gamma}^{\alpha}_{h,R}$ désigne la réunion de ces trois chemins,

$$\tilde{\gamma}^{\alpha}_{h,R} = \mathcal{C}^{\alpha}_{h,-R} \vee \gamma^{\alpha}_{h,R} \vee \mathcal{C}^{\alpha}_{h,+R}\,,$$

alors par holomorphie de la fonction $\psi^{\alpha}_{1}(\cdot,h)^2$, on a

$$\int_{[-R,R]} \psi^{\alpha}_{1}(x,h)^2 dx = \int_{\tilde{\gamma}^{\alpha}_{h,R}} \psi^{\alpha}_{1}(x,h)^2 dx\,.$$

Or, puisque $\theta^{\alpha}_{h,R} < 3\pi/10$, l'équivalent (3.3.11) entraîne, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\mathcal{C}^{\alpha}_{h_n,\pm R}} \psi^{\alpha}_{1}(x,h_n)^2 dx \longrightarrow 0\,,$$

quand $R \to +\infty$.
On obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}} \psi^{\alpha}_{1}(x,h_n)^2 dx = \int_{\mathcal{L}_\alpha(h_n)} \psi^{\alpha}_{1}(x,h_n)^2 dx\,, \tag{3.4.7}$$

et d'après le Lemme 3.3.10 et (3.4.6), on a, pour n assez grand,

$$\langle u^{\alpha}_{n}, (u^{\alpha}_{n})^*\rangle = c_\alpha h_n^{-2/5}\big(1+o(1)\big)\,. \tag{3.4.8}$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, $|\langle u^{\alpha}_{n}, (u^{\alpha}_{n})^*\rangle| > 0$, d'où le résultat souhaité sur le rang de $\Pi_n(\alpha)$ d'après le point (i) de la Proposition 3.4.1.
(3.4.5) découle alors de (3.4.8), du Lemme 3.3.10 et du point (ii) de la Proposition 3.4.1, après le changement de variable $x \mapsto h_n^{2/5}x$. □

Il reste enfin à déterminer un équivalent du numérateur de (3.4.5), à l'aide du développement (3.3.12). Ce dernier étant uniforme par rapport à $x \in \mathbb{R}$, on peut passer à l'intégrale, ce qui donne en se limitant au premier ordre :

$$\|\psi^{\alpha}_{1}(\cdot,h_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = (1+o(1)) \int_{\mathbb{R}} a(x) e^{-\varphi_\alpha(x,h_n)} dx\,, \tag{3.4.9}$$

quand $n \to +\infty$, avec

$$a(x) = \frac{1}{V_0(x)^{1/4}} \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(x,h) = \frac{2}{h}\mathrm{Re}\int_{x^{\alpha}_{+}(h)}^{x} \sqrt{V_\alpha(z,h)}\; dz\,.$$

Proposition 3.4.3 *Si $\alpha \geq 0$, on a, quand $n \to +\infty$,*

$$\|\psi^{\alpha}_{1}(\cdot,h_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma(1/4) h_n^{1/4}(1+o(1)) \exp\left(\frac{C}{h_n} + \frac{\alpha r}{h_n^{1/5}}\right)\,, \tag{3.4.10}$$

où

$$C = \int_0^1 \sqrt{1-t^3}\; dt \; > 0 \quad \textit{et} \quad r = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^3}}\; dt\,.$$

Preuve :
Supposons d'abord $\alpha > 0$. Nous allons appliquer une variante de la méthode de Laplace pour déterminer le comportement de l'intégrale

$$I_\alpha(h) = \int_0^{+\infty} a(x) e^{-\varphi_\alpha(x,h)} dx\,,$$

quand $h \to 0$. En suivant les notations du Théorème B.1.1, on a $\varphi_\alpha(x,h) = \frac{1}{h}\Psi_\alpha(x,\varepsilon(h))$ avec $\varepsilon(h) = h^{4/5}$ et

$$\Psi_\alpha(x,\varepsilon) = 2\mathrm{Re}\int_{\tilde{x}_+^\alpha(\varepsilon)}^{x} \sqrt{\tilde{V}_\alpha(z,\varepsilon)}\, dz\,,$$

où on a noté $\tilde{x}_+^\alpha(\varepsilon) = x_+^\alpha(\varepsilon^{5/4})$ et $\tilde{V}_\alpha(x,\varepsilon) = V_\alpha(x,\varepsilon^{5/4}) = ix^3 + i\alpha\varepsilon x - 1$.
La fonction Ψ_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $x \in \mathbb{R}$ et ε suffisamment petit. De plus, $\Psi_\alpha(\cdot,0)$ admet un unique point critique en $x = 0$. En effet,

$$\partial_x\Psi_\alpha(x,0) = 2\mathrm{Re}\sqrt{ix^3-1} = 0\,,$$

si et seulement si $\arg(ix^3-1) = \pi$, ou encore $\mathrm{Im}\,(ix^3-1) = 0$, d'où $x = 0$.
Il s'agit d'un minimum strict. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\partial_x^2\Psi_\alpha(0,0) &= \mathrm{Re}\left.\frac{3ix^2}{\sqrt{ix^3-1}}\right|_{x=0} = 0\,,\\
\partial_x^3\Psi_\alpha(0,0) &= \mathrm{Re}\left(\frac{6ix}{\sqrt{ix^3-1}} + \frac{9}{2}\frac{x^4}{(ix^3-1)^{3/2}}\right)_{|x=0} = 0\,,\\
\partial_x^4\Psi_\alpha(0,0) &= 6\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\Psi_\alpha(x,0) = \Psi_\alpha(0,0) + \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)\,. \tag{3.4.11}$$

Il reste à déterminer les différentes constantes apparaissant dans le Théorème B.1.1. On a $\varepsilon(h)^2 = h^{8/5} = o(h)$, c'est-à-dire $N = 1$. D'autre part, (3.4.11) entraîne $\lambda_0 = 4$.
Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\partial_\varepsilon\Psi_\alpha(x,\varepsilon) &= 2\mathrm{Re}\left(-(\tilde{x}_+^\alpha)'(\varepsilon)\sqrt{\tilde{V}_\alpha(\tilde{x}_+^\alpha(\varepsilon),\varepsilon)} + \int_{\tilde{x}_+^\alpha(\varepsilon)}^{x}\partial_\varepsilon\sqrt{\tilde{V}_\alpha(z,\varepsilon)}\, dz\right)\\
&= 2\mathrm{Re}\int_{\tilde{x}_+^\alpha(\varepsilon)}^{x}\partial_\varepsilon\sqrt{\tilde{V}_\alpha(z,\varepsilon)}\, dz\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\partial_\varepsilon\Psi_\alpha(0,0) = \mathrm{Re}\, i\alpha\int_{\tilde{x}_+^0(0)}^{0}\frac{x}{\sqrt{ix^3-1}}\, dx\,. \tag{3.4.12}$$

On vérifie également que

$$\partial_x\partial_\varepsilon\Psi_\alpha(0,0) = 0\,,$$

et

$$\partial_x^2\partial_\varepsilon\Psi_\alpha(0,0) = \alpha\,,$$

d'où $\lambda_1 = 2$ dès que $\alpha \neq 0$.
Le Théorème B.1.1 s'applique donc avec $J = \tilde{J} = \{0\}$, et (B.1.4) donne

$$\|\psi_1^\alpha(\cdot,h_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma(1/4)h_n^{1/4}(1+o(1))\exp\left(-\frac{1}{h_n}\Psi_\alpha(0,0)\right)\,,$$

(ici, $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^4}dx = 1/4\Gamma(1/4)$). Pour obtenir le résultat souhaité, il suffit donc de constater que

$$\exp\left(-\frac{1}{h}\Psi_\alpha(0,\varepsilon(h))\right) = \exp\left(\frac{C}{h}+\frac{\alpha r}{h^{1/5}}\right)(1+o(1))\,, \tag{3.4.13}$$

où C et r sont les constantes de l'énoncé. En effet,

$$\Psi_\alpha(0,\varepsilon(h)) = \Psi_\alpha(0,0) + h^{4/5}\partial_\varepsilon\Psi_\alpha(0,0) + \mathcal{O}(h^{8/5})\,, \tag{3.4.14}$$

or

$$\Psi_\alpha(0,0) = 2\mathrm{Re}\int_{e^{-i\pi}/6}^{0}\sqrt{ix^3-1}\;dx = -\int_0^1\sqrt{1-t^3}\;dx\,,$$

et d'après (3.4.12),

$$\partial_\varepsilon\Psi_\alpha(0,0) = -\frac{\alpha}{2}\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^3}}dt\,.$$

Dans le cas $\alpha = 0$, on vérifie de la même façon que la méthode de Laplace s'applique (voir par exemple [57]) et aboutit au même résultat. $\square$

Pour conclure la preuve du Théorème 3.1.1, on utilise enfin la règle de Bohr-Sommerfeld (3.3.49), qui permet d'affirmer que h_n est de l'ordre de n^{-1} quand $n \to +\infty$. Cette loi de quantification permet d'exprimer h_n en fonction de n sous forme d'un développement asymptotique. Nous en calculons maintenant les premiers termes. En développant le membre de gauche de (3.3.49) de la même façon que pour $\Psi_\alpha(0,h^{4/5})$ dans la preuve de la Proposition 3.4.3 (voir (3.4.14)), on obtient

$$\sqrt{3}(C-\alpha r h_n^{4/5}) = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)h_n + \mathcal{O}(h_n^{8/5})\,,$$

où C et r sont les constantes de la Proposition 3.4.3. Ainsi,

$$h_n = \frac{\sqrt{3}C}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} - \frac{3^{9/10}\alpha r C^{4/5}}{\pi^{9/5}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{9/5}} + \mathcal{O}((n+1/2)^{-13/5})\,. \tag{3.4.15}$$

Le développement (3.4.15) permet de reformuler le terme exponentiel de (3.4.10) en fonction de n :

$$\frac{C}{h_n}+\frac{\alpha r}{h_n^{1/5}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(n+1/2) + 2\alpha r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}C}\right)^{1/5}(n+1/2)^{1/5} + \mathcal{O}((n+1/2)^{-3/5})\,.$$

Or les constantes C et r s'expriment explicitement,

$$C = \frac{2\sqrt{3}\pi^{3/2}}{15\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)} \quad \text{et} \quad r = \frac{\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)}{2\sqrt{\pi}}\,,$$

ce qui donne

$$2r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}C}\right)^{1/5} = (5/2)^{1/5}\pi^{-3/5}\Gamma(2/3)^{6/5}\Gamma(5/6)^{6/5}.$$

En rassemblant (3.4.5) et (3.4.10), on obtient finalement le théorème suivant :

Théorème 3.4.4 *Pour tout $\alpha \geq 0$, il existe une constante $K_\alpha > 0$ telle que*

$$\kappa_n(\alpha) = \frac{K_\alpha}{n^{1/4}}(1 + o(1)) \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} n + \alpha c n^{1/5}\right) , \tag{3.4.16}$$

quand $n \to +\infty$, où

$$c = (5/2)^{1/5} \pi^{-3/5} \Gamma(2/3)^{6/5} \Gamma(5/6)^{6/5} .$$

Le Théorème 3.1.1 en découle immédiatement.

Chapitre 4

On the semiclassical analysis of Schrödinger operators with purely imaginary electric potentials in a bounded domain

In this chapter, we describe the leftmost eigenvalue of the non-selfadjoint operator $\mathcal{A}_h = -h^2\Delta + iV(x)$ with Dirichlet boundary conditions on a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, as $h \to 0$. V is assumed to be a Morse function without critical point at the boundary of Ω . More precisely, we compare $\inf \operatorname{Re}\sigma(\mathcal{A}_h)$ with the minimum of the spectrum's real part for some model operator. In the case where V has no critical point, the spectrum is determined by the boundary points where ∇V is orthogonal, and the model operator involves a 1-dimensional complex Airy operator in $\mathbb{R}^+$. If V is a Morse function with critical points in Ω , the behavior of the operator near the critical points prevails, and the model operator is a complex harmonic oscillator.
This question is related to the decay of associated semigroups. In particular, it allows to recover, in a simplified setting, some stability results of [7] in superconductivity theory.

4.1 Introduction

Let $n \geq 1$, $h_0 > 0$, and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a smooth bounded domain. We consider, for $h \in (0, h_0)$, the operator

$$\mathcal{A}_h = -h^2\Delta + iV(x)\,, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_h) = H_0^1(\Omega;\mathbb{C}) \cap H^2(\Omega;\mathbb{C})\,, \tag{4.1.1}$$

where $V \in \mathcal{C}^\infty(\Omega\ ;\mathbb{R})$ is a smooth potential.
Under these conditions $\mathcal{A}_h$ has compact resolvent, hence discrete spectrum and

the purpose of this paper is to understand the behavior as $h \to 0$ of the smallest real part of $\lambda(h)$, for $\lambda(h) \in \sigma(\mathcal{A}_h)$. We are also looking for uniform resolvent estimates in any half-plane free of eigenvalues.
One of the main difficulties of this task is that, due to possible pseudospectral effects, a quasimode construction may not be sufficient to locate an eigenvalue.

The question considered here is related to stability problems for equations of the form

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t \psi_R - \Delta\psi_R + iRV(x/R)\psi_R = \lambda_R\psi_R, & (t,x) \in (0,+\infty)\times\Omega_R\,, \\ \psi_R(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,+\infty)\times\partial\Omega_R\,, \\ \psi_R(0,x) = \psi_R^0(x), & x \in \Omega_R\,, \end{array}\right. \tag{4.1.2}$$

where $\Omega_R = \{Rx : x \in \Omega\}$, in the large domain limit $R \to +\infty$. This system can be interpreted as a linearization of the time-dependent Ginzburg-Landau system in superconductivity, without magnetic field and in a large smooth domain. From this point of view, the following results should be compared with those of [7, 8, 9, 10, 11].
Similar questions have also been considered in [15] in a 1-dimensional setting to understand the controllability of some degenerate parabolic equations.
In addition to these applications, the results stated in this paper might have some independent, theoretical interest in the growing field of non-selfadjoint spectral theory.

We shall first focus on the case where the potential V has no critical point. Here again, this assumption makes sense in the framework of superconductivity, see [7] and Section 4.9. More precisely, we will prove the following :

Theorem 4.1.1 *Let $n \geq 1$ and $V \in \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega;\mathbb{R})$ be such that, for every $x \in \bar\Omega$, $\nabla V(x) \neq 0$. Let*

$$\partial\Omega_\perp = \{x \in \partial\Omega : \nabla V(x) \times \vec{n}(x) = 0\}\,, \tag{4.1.3}$$

where $\vec{n}(x)$ denotes the outward normal on $\partial\Omega$ at x.

(i) Assume that $\partial\Omega_\perp \neq \emptyset$. Let $\mu_1 < 0$ be the rightmost zero of the Airy function Ai, and let

$$J_m = \min_{x\in\partial\Omega_\perp} |\nabla V(x)|\,. \tag{4.1.4}$$

Then we have

$$\varliminf_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \inf \operatorname{Re}\sigma(\mathcal{A}_h) \geq \frac{|\mu_1|}{2} J_m^{2/3}\,, \tag{4.1.5}$$

where $\mathcal{A}_h$ is the operator defined by (4.1.1).
Moreover, for every $\varepsilon > 0$, there exists $h_\varepsilon \in (0,h_0)$ and $C_\varepsilon > 0$ such that

$$\forall h \in (0,h_\varepsilon), \qquad \sup_{\substack{\gamma \leq |\mu_1| J_m^{2/3}/2,\\ \nu\in\mathbb{R}}} \|(\mathcal{A}_h - (\gamma-\varepsilon)h^{2/3} - i\nu)^{-1}\| \leq \frac{C_\varepsilon}{h^{2/3}}\,. \tag{4.1.6}$$

(ii) Assume that $\partial\Omega_\perp = \emptyset$, then

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \inf \operatorname{Re}\sigma(\mathcal{A}_h) = +\infty\,,$$

and for all $\omega \in \mathbb{R}$, there exists $h_\omega > 0$ and $C'_\omega > 0$ such that

$$\forall h \in (0, h_\omega), \qquad \sup_{\substack{\gamma \leq \omega, \\ \nu \in \mathbb{R}}} \|(\mathcal{A}_h - \gamma h^{2/3} - i\nu)^{-1}\| \leq \frac{C'_\omega}{h^{2/3}}. \tag{4.1.7}$$

This result is essentially a reformulation of those stated in [7], but the proof presented here, based on locally approximating models, gives a good overview of the underlying phenomena involved and might be more convenient for possible generalizations of this statement.
As we shall see in the proof of this first statement, we will not be able to prove that $\frac{|\mu_1|}{2} J_m^{2/3}$ is the exact limit for $h^{-2/3} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h)$ as $h \to 0$. This is because we will have to approximate $\mathcal{A}_h$ in the neighborhood of $\partial\Omega_\perp$ by operators whose resolvents are not compact for $n \geq 2$. However, this result can still be used to obtain some decay estimates for equations of the form (4.1.2), see Corollary 4.1.4 and Sections 4.8 and 4.9.
In dimension 1, obviously, this problem of non-compact resolvent will not appear, hence we can state a more accurate result :

Theorem 4.1.2 *Let $h_0 > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, and $V \in \mathcal{C}^\infty((a, b); \mathbb{R})$. For $h \in (0, h_0)$, let*

$$\mathcal{A}_h = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_h) = H_0^1(a, b) \cap H^2(a, b).$$

Assume that, for every $x \in (a, b)$, $V'(x) \neq 0$. Then,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) = \frac{|\mu_1|}{2} J^{2/3}, \tag{4.1.8}$$

where $J = \min(|V'(a)|, |V'(b)|)$ and μ_1 denotes the rightmost zero of the Airy function Ai.

The problem of optimality in (4.1.5), in the general, n-dimensional setting, is left for future considerations.

In the case where the potential V has critical points in Ω, the spectrum of $\mathcal{A}_h$ is expected to behave differently. The following statement shows that the quantity $\inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h)$ is no longer determined by the behavior at the boundary, but by the shape of the potential near the critical points.

Theorem 4.1.3 *Let V be a Morse function on $\bar{\Omega}$, without critical point in $\partial\Omega$ and with at least one critical point in Ω. Let $x_1^c, \ldots, x_p^c$, $p \in \mathbb{N}^*$, denote those critical points, and for $k = 1, \ldots, p$, let*

$$\kappa_k = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|\lambda_j^k|}, \tag{4.1.9}$$

where $\{\lambda_j^k\}_{j=1,\ldots,n} = \sigma(\operatorname{Hess} V(x_k^c))$.
Let

$$\kappa = \min_{k=1,\ldots,p} \kappa_k,$$

and assume that, if $\kappa_k = \kappa$, then for any $\ell \neq k$,

$$V(x_k^c) \neq V(x_\ell^c)\,. \tag{4.1.10}$$

Then,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{h} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) = \frac{\kappa}{2}\,. \tag{4.1.11}$$

Moreover, for every $\varepsilon > 0$, there exists $h_\varepsilon \in (0, h_0)$ and $C_\varepsilon > 0$ such that

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon), \qquad \sup_{\substack{\gamma\,\leq\,\kappa/2,\\ \nu\,\in\,\mathbb{R}}} \|(\mathcal{A}_h - (\gamma-\varepsilon)h - i\nu)^{-1}\| \leq \frac{C_\varepsilon}{h}\,. \tag{4.1.12}$$

The assumption (4.1.10) is meant to avoid any resonance phenomenon between two wells. Note that, unlike in Theorem 4.1.1, here we give the exact limit for $h^{-1} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h)$.

As mentioned above, the previous theorems enable us to state some decay estimates for the semigroup associated with $\mathcal{A}_h$.

Corollary 4.1.4 *For all $\varepsilon > 0$, there exists $h_\varepsilon \in (0, h_0)$ and $M_\varepsilon > 0$ such that :*

(i) Under the assumptions of Theorem 4.1.1,

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon)\,,\ \ \forall t > 0\,,\ \ \|e^{-t\mathcal{A}_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq M_\varepsilon \exp(-(|\mu_1| J_m^{2/3}/2-\varepsilon) h^{2/3} t)\,. \tag{4.1.13}$$

(ii) Under the assumptions of Theorem 4.1.3,

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon)\,,\ \ \forall t > 0\,,\ \ \|e^{-t\mathcal{A}_h}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq M_\varepsilon \exp(-(\kappa/2 - \varepsilon) h t)\,. \tag{4.1.14}$$

(iii) Under the assumptions of Theorem 4.1.2, the constant $|\mu_1| J_m^{2/3}/2$ is optimal in (4.1.13), as well as the exponent of h. Similarly, under the assumptions of Theorem 4.1.3, the constant $\kappa/2$ is optimal in (4.1.14), as well as the exponent of h .

This corollary will follow easily from Theorems 4.1.1, 4.1.2 and 4.1.3, by using a refined, quantitative version of the Gearhardt-Prüss Theorem, see [83].

Many interesting questions, which arise naturally in superconductivity theory, are left aside from this paper and should be investigated in future research. First of all, as recalled in Section 4.9, the time-dependent Ginzburg-Landau equations involve a non-linear term of the form $(1 - |\psi|^2)\psi$, which shall not be considered in this work. The recent work of Y. Almog and B. Helffer [8] includes the analysis of this non-linearity in the presence of a magnetic field, but as far as we know, this non-linear problem has not been considered yet in the simpler case where the magnetic field is neglected.
Secondly, here we only consider the case of a smooth domain Ω. As explained in [7], most physically relevant domains would instead contain some singularities, such as corners with right-angles. However, since Y. Almog [7] has already considered this feature under the assumption of a potential without critical point, and since the case of a Morse potential is outside the scope of superconductivity theory, this question shall not be considered here. Nevertheless, our guess is that

the results stated in Theorems 4.1.1 and 4.1.3 would be similar for a domain with right-angled corners at the boundary, and that the proof could be easily adjusted by adding a model acting on a quarter of space in order to approximate the operator $\mathcal{A}_h$ near those singularities.
Finally, we think that it could be interesting to analyze the effect of a magnetic field when the electric potential has critical points. Namely, the behavior of $\inf \mathrm{Re}\,(\mathcal{A}_{\mathbf{A},V,h})$ should be investigated, where

$$\mathcal{A}_{\mathbf{A},V,h} = -(h\nabla - i\mathbf{A}(x))^2 + iV(x)\,,$$

and where V satisfies the assumptions of Theorem 4.1.3. This problem has been considered in [8] in the case where the electric potential V has no critical point. Of course, some additional conditions on the magnetic field $\mathbf{B} =$ curl $\mathbf{A}$ should be added in order to understand this question.

Section 4.2 is dedicated to the analysis of some simplified models which shall be used as local approximations for operator $\mathcal{A}_h$. In Section 4.3, we locally straighten the boundary by introducing a system of local coordinates, previously used in [8, 67, 112] in cases $n = 2$ or $n = 3$. We prove Theorem 4.1.1 in Section 4.4, and the lower bound of Theorem 4.1.3 in Section 4.5. We complete the proof of Theorem 4.1.2 (upper bound) in Section 4.6, and we prove the upper bound of Theorem 4.1.3 in Section 4.7. Section 4.8 is devoted to the proof of Corollary 4.1.4. Finally, in Section 4.9, we give a possible application for the previous results in superconductivity theory, recovering the results of [7].

4.2 Simplified models

In this section, we consider the simplified cases where Ω is either the whole space $\mathbb{R}^n$, or the half-space

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}. \tag{4.2.1}$$

Furthermore the potential V will be assumed to be a linear function or, in Subsection 4.2.4, a quadratic form.
In Sections 4.4 to 4.7, we shall use these simplified models as local approximations for the more general operator $\mathcal{A}_h$.

4.2.1 Whole space model, and particular half-space models

In this subsection, we mainly refer to [76], and reformulate the 2-dimensional statements therein in the n-dimensional setting.
We shall consider three model operators $-\Delta + i\ell$, where $\ell(x) = J \cdot x$ is a linear function : the first one in $\mathbb{R}^n$, the second one in $\mathbb{R}^n_+$ with J parallel to $\partial\mathbb{R}^n_+$, and the third one in $\mathbb{R}^n_+$ with J orthogonal to $\partial\mathbb{R}^n_+$.

The whole space model

Let $J = (J_1, \ldots, J_n) \in \mathbb{R}^n$ and

$$\mathcal{A}_0 = -\Delta + i\ell$$

acting on $L^2(\mathbb{R}^n)$, where $\ell(x) = J \cdot x$. Up to an orthogonal change of variable followed by the scale change $x \mapsto |J|^{1/3}x$, we can assume that $\mathcal{A}_0$ has the form $\mathcal{A}_0 = -\Delta + ix_1$.
We then get as in [76], Proposition 7.1,

Lemma 4.2.1 *We have $\sigma(\mathcal{A}_0) = \emptyset$, and for all $\omega \in \mathbb{R}$, there exists C^0_ω such that*

$$\sup_{\mathrm{Re}\, z \leq \omega} \|(\mathcal{A}_0 - z)^{-1}\| \leq C^0_\omega \,. \tag{4.2.2}$$

Proof :
A partial Fourier transform in $(x_2, \dots, x_n)$ gives the operator

$$\widehat{\mathcal{A}}_0 = D_x^2 + ix + \eta^2 \,,$$

where $\eta = |(\xi_2, \dots, \xi_n)|$, and, for a fixed η,

$$D_x^2 + ix - (\lambda - \eta^2)$$

is invertible for all $\lambda \in \mathbb{C}$, since, according to Subsection 1.4.1, the complex Airy operator on the real line has empty spectrum. Moreover, for all $\lambda \in \mathbb{C}$, there exists $C > 0$ such that

$$\forall \eta \in \mathbb{R} \,, \qquad \|(D_x^2 + ix - (\lambda - \eta^2))^{-1}\|_x \leq C \,. \tag{4.2.3}$$

Indeed, the map

$$\eta \mapsto (D_x^2 + ix - (\lambda - \eta^2))^{-1}$$

being bounded on any compact subset of the complex plane, it is enough to control the norm in (4.2.3) as $\eta \to +\infty$. Let $R_0 > 0$. Then, for η large enough, we have $\mathrm{Re}\,(\lambda - \eta^2) \leq -R_0$, hence

$$\|(D_x^2 + ix - (\lambda - \eta^2))^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda - \eta^2|} \leq \frac{1}{R_0} \,, \tag{4.2.4}$$

and (4.2.3) is satisfied.
Thus, for all $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\|(\widehat{\mathcal{A}}_0 - \lambda)^{-1} v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|(\widehat{\mathcal{A}}_0 - \lambda)^{-1} v(\cdot, \xi_2, \dots, \xi_n)\|_x^2 d\xi_2 \dots d\xi_n \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|v(\cdot, \xi_2, \dots, \xi_n)\|^2 d\xi_2 \dots d\xi_n \\
&\leq C \, \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \,.
\end{aligned}$$

$\boxminus$

Parallel current in the half-space

Now we consider the Dirichlet (resp. Neumann) realization $\mathcal{A}^D_{/\!/}$ (resp. $\mathcal{A}^N_{/\!/}$) of $-\Delta + i(J_1 x_1 + \cdots + J_{n-1} x_{n-1})$ in $\mathbb{R}^n_+$. As in [76], Subsection 7.3, we can use the decomposition $L^2(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{I}$, where $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{I}$ denote respectively the even and odd functions in $L^2(\mathbb{R}^n)$ with respect to the x_n variable, see Subsection 2.2.1 :

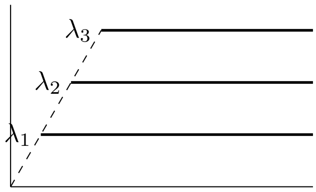

FIGURE 4.1 – Spectrum of $\mathcal{A}_\perp$.

Proposition 4.2.2 *Let $\mathcal{P}$ be a closed operator acting on $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. Let us denote by $(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ the elements of $\mathbb{R}^n$. Assume that $\mathcal{P}$ preserves the even and odd functions with respect to x_n , that is $x_n \mapsto \mathcal{P}u(x', x_n)$ is even (resp. odd) if $x_n \mapsto u(x', x_n)$ is even (resp. odd). Let $\mathcal{P}^D$ and $\mathcal{P}^N$ be the Dirichlet and Neumann realizations of $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) : x_n > 0\}$. Then,*

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P}^D) \cup \sigma(\mathcal{P}^N) . \tag{4.2.5}$$

Thus, according to Lemma 4.2.1, the spectra of $\mathcal{A}_{/\!\!/}^D$ and $\mathcal{A}_{/\!\!/}^N$ are empty.
Moreover, since $\mathcal{A}_{/\!\!/}^D$ (resp. $\mathcal{A}_{/\!\!/}^N$) is the restriction of $\mathcal{A}_0$ to $\mathfrak{P}$ (resp. $\mathfrak{I}$), the resolvent estimate in Lemma 4.2.1 yields

Lemma 4.2.3 *$\sigma(\mathcal{A}_{/\!\!/}^D) = \sigma(\mathcal{A}_{/\!\!/}^N) = \emptyset$, and for all $\omega \in \mathbb{R}$ and $\sharp = D, N$,*

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq \omega} \|(\mathcal{A}_{/\!\!/}^\sharp - z)^{-1}\| \leq C^0_\omega . \tag{4.2.6}$$

Perpendicular current in the half-space

Let $J_n \in \mathbb{R}$ and $\mathcal{A}_\perp$ be the Dirichlet realization of $-\Delta + iJ_n x_n$ in $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Here again, we can easily adapt the results of [76] (see Proposition 7.2 therein) to any dimension $n \geq 2$ to obtain

Lemma 4.2.4 *$\sigma(\mathcal{A}_\perp) = \{|\mu_j| J_n^{2/3} e^{i\pi/3} + r : j \geq 1, \ r > 0\}$, and for all $\omega < |\mu_1| J_n^{2/3}/2$, there exists $C^\perp_\omega$ such that*

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq \omega} \|(\mathcal{A}_\perp - z)^{-1}\| \leq C^\perp_\omega . \tag{4.2.7}$$

Proof :
Let $\mathcal{A}^+_{x_n}$ denote the Dirichlet realization of the complex Airy operator $-\frac{d^2}{dx_n^2} + iJ_n x_n$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$. For all $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ and $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}^+_{x_n})$, if u_λ denotes an eigenfunction of $\mathcal{A}^+_{x_n}$ associated with λ , then the function $f_{\eta,\lambda} \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ defined by

$$f_{\eta,\lambda} : (x', x_n) \mapsto e^{i\eta \cdot x'} u_\lambda(x_n)$$

satisfies

$$\mathcal{A}_\perp f_{\eta,\lambda} = (\lambda + |\eta|^2) f_{\eta,\lambda} .$$

Notice that $\lambda + \eta^2$ might not be an eigenvalue of $\mathcal{A}^D_\perp$ since $f_{\eta,\lambda}$ does not belong to $\mathcal{D}(\mathcal{A}^D_\perp)$. However, the following statement (see [9]) ensures that $\lambda + \eta^2 \in \sigma(\mathcal{A}^D_\perp)$:

Proposition 4.2.5 *Let $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap H^1_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ such that, in $\mathbb{R}^n_+$, ψ satisfies*

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}\,, \begin{cases} -\Delta\psi + ix\psi = \lambda\psi \\ \psi_{|x=0} = 0 \\ \psi \neq 0. \end{cases}$$

Then $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_\perp)$.

Since the functions $f_{\eta,\lambda}$ belong $L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap H^1_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, we get

$$\bigcup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}^+_{x_n})} \{\lambda + r : r > 0\} \subset \sigma(\mathcal{A}^D_\perp)\,. \tag{4.2.8}$$

Now we shall prove

$$\complement \bigcup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}^+_{x_n})} \{\lambda + r : r > 0\} \subset \rho(\mathcal{A}^D_\perp)\,,$$

by using a partial Fourier transform in the x' variable.
Let $\nu \notin \bigcup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}^+_{x_n})} \{\lambda + r : r > 0\}$. Then,

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^{n-1}\,, \qquad \nu - |\eta|^2 \in \rho(\mathcal{A}^+_{x_n})\,,$$

hence

$$\widehat{\mathcal{A}_\perp} - \nu = \mathcal{A}^+_{x_n} - (\nu - \eta^2)$$

is invertible.
As in Subsection 4.2.1, it remains to check that the resolvent $\|(\mathcal{A}^D - (\nu - |\eta|^2))^{-1}\|$ is bounded as $|\eta| \to +\infty$, which can be done by using the estimate, for $\operatorname{Re} z < 0$,

$$\|(\mathcal{A}^+_{x_n} - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re} z|}\,,$$

which holds because $\mathcal{A}^+_{x_n}$ is accretive.
Consequently, we have

$$\sigma(\mathcal{A}_\perp) = \bigcup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}^+_{x_n})} \{\lambda + r : r > 0\}\,.$$

Recalling from [7] that $\sigma(\mathcal{A}^+_{x_n}) = \{e^{i\pi/3}|\mu_j| J_n^{2/3}\}_{j \geq 1}$ where $\mu_j < 0$ are the zeroes of the Airy function Ai , we get the desired statement. □

In the following subsection, we consider a case which was not studied in [76] : the operator $-\Delta + iJ \cdot x$ in the half-space, where neither J_n nor $(J_1, \ldots, J_{n-1})$ vanishes.

4.2.2 General current in the half-space

Let $J = (J_1, \ldots, J_n) \in \mathbb{R}^n$ be such that $J_n \neq 0$ and $(J_1, \ldots, J_{n-1}) \neq 0$. We want to study the spectrum and the resolvent of an operator acting on $L^2(\mathbb{R}^n_+)$

as $-\Delta + iJ\cdot x$, with a domain which includes the Dirichlet condition at $x_n = 0$. The imaginary part

$$\ell(x,y) = J\cdot x$$

of the potential does not have a constant sign, hence we are unable to use the variational approach to define the operator. We shall instead define the operator by separation of variables.

Let $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ denote the $(n-1)$ first coordinates of a vector $x \in \mathbb{R}^n$. Let

$$\mathcal{A}_{x'} = -\Delta_{x'} + iJ'\cdot x' , \tag{4.2.9}$$

and let $\mathcal{A}^+_{x_n}$ be the Dirichlet realization in $\mathbb{R}^+$ of the complex Airy operator

$$-\frac{d^2}{dx_n^2} + iJ_n x_n . \tag{4.2.10}$$

Both $\mathcal{A}_{x'}$ and $\mathcal{A}^+_{x_n}$ are maximal accretive, hence they are generators of contraction semigroups $(e^{-t\mathcal{A}_{x'}})_{t>0}$ and $(e^{-t\mathcal{A}^+_{x_n}})_{t>0}$ respectively. One can easily check that the family $(e^{-t\mathcal{A}_{x'}} \otimes e^{-t\mathcal{A}^+_{x_n}})_{t>0}$ is a contraction semigroup in $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Thus, we can define the desired operator as follows :

Definition 4.2.6 *$\mathcal{A}_+$ is the generator of the semigroup $(e^{-t\mathcal{A}_{x'}} \otimes e^{-t\mathcal{A}^+_{x_n}})_{t>0}$.*

In order to describe the domain of operator $\mathcal{A}_+$, we recall the following statement (see [119], Theorem X.49) :

Theorem 4.2.7 *Let $\mathcal{A}$ be the generator of a contraction semigroup on a Hilbert space $\mathcal{H}$. Let $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ be a dense subset of $\mathcal{H}$, such that $e^{-t\mathcal{A}}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Then, $\mathcal{D}$ is a* core *for $\mathcal{A}$, that is*

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_{|\mathcal{D}}} .$$

Let $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{x'}) \odot \mathcal{D}(\mathcal{A}^+_{x_n})$ be the set of all finite linear combinations of functions of the form $f\otimes g = f(x')g(x_n)$ (see Appendix C.2), where $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{x'})$ and $g \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^+_{x_n})$. Then it is clear that $\mathcal{D}$ satisfies the conditions of Theorem 4.2.7 with $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+$, hence $\mathcal{A}_+ = \overline{\mathcal{A}_{+|\mathcal{D}}}$. Consequently, we have the following characterization of the domain :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}_+) \quad = \quad & \{u \in L^2(\mathbb{R}^2_+) : \exists (u_j)_{j\geq 1} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} ,\ u_j \xrightarrow[j\to+\infty]{L^2} u , \\ & (\mathcal{A}_+ u_j)_{j\geq 1} \text{ is a Cauchy sequence } \} . \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Now we shall highlight, using counter-examples, some difficulties related to the fact that the imaginary part of the potential changes sign.
First, we could try to define the operator $\mathcal{A}_+$ by using the variational approach, which consists in defining $\mathcal{A}_+ u$ by

$$\langle \mathcal{A}_+ u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_+} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + i\ell u\bar{v})\, dx \tag{4.2.12}$$

for all v in a convenient space.
In other words, we consider the sesquilinear form

$$a(u,v) := \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u\cdot\nabla\bar{v}\ dx + i\int_{\mathbb{R}^n_+} \ell u\bar{v}\ dx + \int_{\mathbb{R}^n_+} u\bar{v}\ dx$$

on the form domain

$$V_a := H_0^1(\mathbb{R}^n_+) \cap L^2(\mathbb{R}^n_+; |\ell(x,y)|dx)\,,$$

on which a is continuous.
If a was coercive, that is

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V_a, \quad |a(u,u)| \geq \alpha \|u\|^2_{V_a}\,,$$

(where $\|\cdot\|^2_{V_a} := \|\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|\nabla \cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \||\ell|^{1/2}\cdot\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)})$, then $\mathcal{A}_+ u$ could be defined, using the Lax-Milgram theorem, by formula (4.2.12) for all $v \in V_a$. Unfortunately, the following counter-example shows that a is not coercive, so that the variational approach fails.

Lemma 4.2.8 *There exists a sequence $(u_j)_{j\geq 0} \in V_a^{\mathbb{N}}$ such that $(|a(u_j,u_j)|)_{j\geq 0}$ is bounded whereas $\|u_j\|_{V_a}$ tends to $+\infty$ as $j \to +\infty$.*

Proof :
We set

$$u_j(x', x_n) := \sqrt{\chi(|(x_2,\dots,x_n)| - 2)\,(\chi(x_1 - j) + \chi(x_1 + j))}\,,$$

where $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-2,2[;[0,1])$ is equal to 1 on $[-1,1]$, and we check that :

- $\|u_j\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$ is constant,
- the sequence
$$\left(\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \ell(x)|u_j(x)|^2\,dx\right|\right)_{j\geq 0}$$
is bounded, and
- $\||\ell|^{1/2}u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \to +\infty$ as $j \to +\infty$.

The first point is clear, and we notice that, for some c_0, $c_1 > 0$, $c_0 < c_1$, on the support of $x \mapsto \chi(|(x_2,\dots,x_n)| - 2)\chi(x_1 - j)$, we have

$$j - c_0 \leq \ell(x) \leq j + c_1\,,$$

and on the other hand, on the support of $x \mapsto \chi(|(x_2,\dots,x_n)| - 2)\chi(x_1 + j)$,

$$-j - c_0 \leq \ell(x) \leq -j + c_1\,,$$

so that $|\ell(x)| \geq j - c_1$ on the support of $|u_j|^2$, and

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \ell(x)|u_n(x)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \ell(x)\chi(|(x_2,\dots,x_n)| - 2)\chi(x_1 - j)\,dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n_+} \ell(x)\chi(|(x_2,\dots,x_n)| - 2)\chi(x_1 + j)\,dx \\ &\in [-C_1, C_2]\,,\end{aligned}$$

for some $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ and the second point follows.
Finally,

$$\||\ell|^{1/2}u_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \geq (j - c_1)\|u_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = (j - c_1)\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \longrightarrow +\infty\,,$$

as $n \to +\infty$. $\boxminus$

Since we are interested in the spectrum of $\mathcal{A}_+$, one question to consider would be that of the nature of the spectrum. In particular, is it purely discrete? This would be the case, for instance, if $\mathcal{A}_+$ had compact resolvent. However, we have the following counter-example.
For some $u_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, let us consider the sequence

$$u_j(x) := u_0(x_1 - 2jJ_2M, x_2 + 2jJ_1M, x_3, \dots, x_n),$$

where M denotes the diameter of Supp u_0. Then the supports of u_j are disjoints and translated along a direction leaving $J \cdot x$ constant. Hence,

$$(\mathcal{A}_+u_j)(x) = (\mathcal{A}_+u_0)(x_1 - 2jJ_2M, x_2 + 2jJ_1M, x_3, \dots, x_n), \tag{4.2.13}$$

since

$$\begin{aligned}
&[(-\Delta + iJ \cdot x)u_0](x_1 - 2jJ_2M, x_2 + 2jJ_1M, x_3, \dots, x_n) \\
&\quad = -\Delta u_j(x) + [iJ_1(x_1 - 2jJ_2M) + iJ_2(x_2 + 2jJ_1M) + iJ_3x_3 + \cdots + iJ_nx_n]u_j(x) \\
&\quad = (-\Delta + iJ \cdot x)u_j(x).
\end{aligned}$$

Thus, $\|\mathcal{A}_+u_j\| = \|\mathcal{A}_+u_0\|$ for all j, and so $v_j := \mathcal{A}_+u_j$ is bounded, while the sequence $(u_j = \mathcal{A}_+^{-1}v_j)_{j\geq 0}$ has no converging subsequence. Therefore $\mathcal{A}_+^{-1}$ is not compact.

Finally, one can show by a similar construction that, for $j = 1, \dots, n$, we can not expect to have a control of $\|(-\frac{d^2}{dx_j^2} + iJ_jx_j)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ by the graph norm of $\mathcal{A}_+$:

Proposition 4.2.9 *There exists a sequence $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{D}(\mathcal{A}_{x'})\odot\mathcal{D}(\mathcal{A}^+_{x_n}))^{\mathbb{N}}$ such that $((\mathcal{A}_+ + 1)u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ is bounded whereas $(\|(\mathcal{A}^+_{x_n} \odot I)u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)})_{j\in\mathbb{N}}$ tends to $+\infty$. As a consequence, we do not have a uniform control for $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{x'}) \odot \mathcal{D}(\mathcal{A}^+_{x_n})$ of $\|(\mathcal{A}^+_{x_n} \odot I)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$ by the graph norm of $\mathcal{A}_+$.*

Proof :
We can take

$$u_j(x) = \chi(x_1 + jJ_n)\chi(|x_2, \dots, x_{n-1} - 2)\chi(x_n - jJ_1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{x'}) \odot \mathcal{D}(\mathcal{A}^+_{x_n}),$$

where $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty([-2, 2]; [0, 1])$ is equal to 1 on $[-1, 1]$.
Then, for some c_0, c_1, $c_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{A}^+_{x_n} \odot I)u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} &= \| - \chi''(x_n - jJ_1)\chi(x_1 + jJ_n)\chi(|x_2, \dots, x_{n-1}| - 2) \\
&\quad + iJ_nx_nu_j(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \\
&\geq -c_0 + c_1 j \to +\infty,
\end{aligned}$$

while

$$\|(\mathcal{A}_+ + 1)u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq c_2,$$

since $|J \cdot x| \leq 4|J|$ for all $x \in$ Supp u_j. $\square$

However, we prove in the following lemma that we can control separately $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n_+)}$ and $\|\ell u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$, which gives a good description of the domain :

Lemma 4.2.10 *We have*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_+) = H_0^1(\mathbb{R}_+^n) \cap H^2(\mathbb{R}_+^n) \cap L^2(\mathbb{R}_+^n; |\ell(x)|^2 dx)\,, \tag{4.2.14}$$

and there exists $C > 0$ such that, for all $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_+)$,

$$\|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \|\ell u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq \|\mathcal{A}_+ u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}\,. \tag{4.2.15}$$

Proof :
We use characterization (4.2.11). Let $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_+)$ and $(u_j)_{j\geq 1} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ such that $u_j \underset{j\to+\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} u$ and $(\mathcal{A}_+ u_j)_{j\geq 1}$ is a Cauchy sequence. Then, using the identity

$$\mathrm{Re}\,\langle \mathcal{A}_+ v, v\rangle = \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}\,,$$

we see that $(\nabla u_j)_{j\geq 1}$ is a Cauchy sequence in $L^2(\mathbb{R}_+^n)$, hence

$$u_j \underset{j\to+\infty}{\overset{H^1}{\longrightarrow}} u\,, \tag{4.2.16}$$

and $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^n)$.
In order to prove (4.2.15), we write (all the norms denoting L^2 norms)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_+ u_j\|^2 &= \langle(-\Delta + i\ell)u_j, (-\Delta + i\ell)u_j\rangle \\ &= \|\Delta u_j\|^2 + \|\ell u_j\|^2 + 2\mathrm{Im}\,\langle -\Delta u_j, \ell u_j\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Besides, we have

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,\langle -\Delta u_j, \ell u_j\rangle &= \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla u_j(x)\cdot\overline{\nabla(\ell u_j)(x)}dx \\ &= \mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \ell(x)|\nabla u_j(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \nabla u_j(x)\cdot\overline{\nabla\ell(x) u_j(x)}dx\right) \\ &= \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}_+^n} J\cdot\nabla u_j(x)\overline{u_j(x)}dx\,. \end{aligned}$$

Hence, for some $C > 0$,

$$|\mathrm{Im}\,\langle -\Delta u_j, \ell u_j\rangle| \leq C\,\|\nabla u_j\|\,\|u_j\|\,.$$

Thus, according to (4.2.17), estimate (4.2.15) holds for the functions u_j. Consequently, $(u_j)_{j\geq 1}$ is a Cauchy sequence in $H^2(\mathbb{R}_+^n)$ and in $L^2(\mathbb{R}_+^n; |\ell(x)|^2 dx)$, and (4.2.14) follows, as well as (4.2.15) for every $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_+)$. ⊟

Now we answer the question of the spectrum of $\mathcal{A}_+$. Since $\mathcal{A}_{x'}$ has empty spectrum (see Subsection 4.2.1), we expect $\sigma(\mathcal{A}_+)$ to be empty as well. In order to prove it, we use semigroup estimates.

Proposition 4.2.11 *We have $\sigma(\mathcal{A}_+) = \emptyset$. Moreover, for every $\omega \in \mathbb{R}$, there exists $C_\omega > 0$ such that*

$$\sup_{\mathrm{Re}\,z\leq\omega} \|(\mathcal{A}_+ - z)^{-1}\| \leq C_\omega\,. \tag{4.2.18}$$

Finally, the semigroup generated by $\mathcal{A}_+$ satisfies

$$\forall t > 0, \quad \|e^{-t\mathcal{A}_+}\| \leq e^{-(n-1)t^3/12}\,. \tag{4.2.19}$$

Proof :
Let us recall that $e^{-t\mathcal{A}_+} = e^{-t\mathcal{A}_{x'}} \otimes e^{-t\mathcal{A}^+_{x_n}}$, where $\mathcal{A}_{x'}$ and $\mathcal{A}^+_{x_n}$ are respectively defined by (4.2.9) and (4.2.10). We also recall the following estimates (see [76, 101]) :

$$\forall t > 0\,, \quad \|e^{-t\mathcal{A}_{x'}}\| = e^{-(n-1)t^3/12}\,, \tag{4.2.20}$$

and for all $\omega < |\mu_1|/2$, where μ_1 is the rightmost zero of the Airy function, there exists $M_\omega > 0$ such that

$$\forall t > 0\,, \quad \|e^{-t\mathcal{A}^+_{x_n}}\| \leq M_\omega\, e^{-\omega t}\,. \tag{4.2.21}$$

Thus, (4.2.19) follows, and the formula

$$(\mathcal{A}_+ - z)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-t(\mathcal{A}_+ - z)} dt\,, \tag{4.2.22}$$

which holds *a priori* for $\operatorname{Re} z < 0$, can be extended to the whole complex plane. Hence the resolvent of $\mathcal{A}_+$ is an entire function, and we have $\sigma(\mathcal{A}_+) = \emptyset$ as well as (4.2.18) . □

4.2.3 Uniform resolvent estimate with respect to the angle

In the proof of the main theorems, we will need to manage the transition between the case of an orthogonal current and a general transverse current. Let $J_0\,, J_1 > 0$ such that $J_0 < J_1$. Then, for $J \in \mathbb{R}$ such that $J_0 < |J| < J_1$, $\theta \in [0,\pi]$ and $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\vec{v}| = 1$, we set

$$\mathcal{A}_+(J,\theta,\vec{v}) = -\Delta + iJ(\sin\theta\ \vec{v}\cdot x' + \cos\theta\ x_n)\,, \tag{4.2.23}$$

acting on $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Then, using the results of previous subsections, we shall prove that :

Lemma 4.2.12

(i) For all $\varepsilon > 0$, there exists $K_\varepsilon > 0$ such that, for all J satisfying $J_0 \leq |J| \leq J_1$ and $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ such that $|\vec{v}| = 1$,

$$\sup_{\substack{\theta\,\in\,[0,\,\pi] \\ \operatorname{Re} z\,\leq\,|\mu_1|/2}} \|(\mathcal{A}_+(J,\theta,\vec{v}) - (z-\varepsilon)|J|^{2/3})^{-1}\| \leq \frac{K_\varepsilon}{|J|^{2/3}}\,. \tag{4.2.24}$$

(ii) Let $\theta_0 \in (0,\pi/2)$. Then, for all $\omega \in \mathbb{R}$, there exists $K'_\omega > 0$ such that, for every J satisfying $J_0 \leq |J| \leq J_1$ and $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\vec{v}| = 1$,

$$\sup_{\substack{\theta_0\,\leq\,\theta\,\leq\,\pi-\theta_0 \\ \operatorname{Re} z\,\leq\,\omega}} \|(\mathcal{A}_+(J,\theta,\vec{v}) - z|J|^{2/3})^{-1}\| \leq \frac{K'_\omega}{|J|^{2/3}}\,. \tag{4.2.25}$$

Proof :
For $j = 1,\ldots,n-1$, let

$$\mathcal{A}_j(J,\theta,v_j) = -\frac{d^2}{dx_j^2} + iJv_j\sin\theta\ x_j\,,$$

acting on $L^2(\mathbb{R})$, and

$$\mathcal{A}_n^+(J,\theta) = -\frac{d^2}{dx_n^2} + iJ\cos\theta\; x_n\,,$$

acting on $L^2(\mathbb{R}^+)$.
Using that each $\mathcal{A}_j(J,\theta,v_j)$, $j=1,\dots,n-1$ and $\mathcal{A}_n^+(J,\theta)$ is maximal accretive, we can easily check that, for $\vec{v}=(v_1,\dots,v_{n-1})$,

$$e^{-t\mathcal{A}(J,\theta,\vec{v})} = e^{-t\mathcal{A}_1(J,\theta,v_1)}\otimes\cdots\otimes e^{-t\mathcal{A}_{n-1}(J,\theta,v_{n-1})}\otimes e^{-t\mathcal{A}_n^+(J,\theta)}\,. \tag{4.2.26}$$

Since $|\vec{v}|=1$, we can choose k such that $|v_k|\geq 1/\sqrt{n}$. We can also assume that $Jv_k\sin\theta$ and $J\cos\theta$ are both non-negative (if not, replace $\mathcal{A}_k(J,\theta,v_k)$ or $\mathcal{A}_n^+(J,\theta)$ by its adjoint).
Notice now that, for $\theta\in(0,\pi)$, by rescaling $x\mapsto(Jv_k\sin\theta)^{1/3}x$, we have

$$e^{-t\mathcal{A}_k(J,\theta,v_k)} = e^{-t(|J|v_k\sin\theta)^{2/3}\mathcal{A}_k(1,\pi/2,1)}\,,$$

and by rescaling $x\mapsto(|J|\cos\theta)^{1/3}x$, we have similarly

$$e^{-t\mathcal{A}_n^+(J,\theta)} = e^{-t(|J|\cos\theta)^{2/3}\mathcal{A}_n^+(1,0)}\,.$$

Hence, if $\theta\in[\theta_0,\pi-\theta_0]$, then according to (4.2.20) and (4.2.26),

$$\|e^{-t\mathcal{A}(J,\theta,\vec{v})}\| \leq \|e^{-t(|J|v_k\sin\theta)^{2/3}\mathcal{A}_k(1,\pi/2,1)}\| = e^{-t^3|Jv_k\sin\theta|^2/12} \leq e^{-J_0^2\varepsilon_0^2t^3/12n}\,,$$

where $\varepsilon_0=\sin\theta_0$.
Thus, formula (4.2.22) yields (4.2.25).
In order to prove (4.2.24), for $\omega<|\mu_1|/2$, we write, using (4.2.20), (4.2.21) and (4.2.26),

$$\begin{aligned}
\|e^{-t\mathcal{A}(J,\theta,\vec{v})}\| &\leq \|e^{-t(|J|v_k\sin\theta)^{2/3}\mathcal{A}_k(1,\pi/2,1)}\|\|e^{-t(|J|\cos\theta)^{2/3}\mathcal{A}_n^+(1,0)}\|,\\
&\leq M_\omega\exp\left(-\frac{t^3}{12n}|J|^2\sin^2\theta - t|J|^{2/3}\omega(\cos\theta)^{2/3}\right)\\
&\leq M_\omega e^{-|J|^{2/3}\omega t}e^{g_\theta(t|J|^{2/3})}\,,
\end{aligned}$$

where

$$g_\theta(s) = -\frac{1}{12n}\sin^2\theta s^3 + \omega s(1-(\cos\theta)^{2/3})\,.$$

It is then straightforward to check that g_θ is bounded in $\mathbb{R}^+$, uniformly with respect to $\theta\in(0,\pi)$. Hence, (4.2.24) follows from formula (4.2.22). $\boxminus$

4.2.4 Quadratic potential in the whole space

In order to prove Theorem 4.1.3, we will need to understand the pseudospectral behavior of operators of the form $-\Delta+i\mathcal{Q}$ acting in $L^2(\mathbb{R}^n)$, where $\mathcal{Q}$ is a real quadratic form.
More precisely, let $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ such that $\lambda_j\neq 0$, $j=1,\dots,n$, and

$$\mathcal{H}_\mathcal{Q} = -\Delta + i\mathcal{Q}\,,\quad \mathcal{Q}(x)=\mathcal{Q}_\lambda(x)=\sum_{j=1}^n\lambda_jx_j^2\,. \tag{4.2.27}$$

We want to determine the spectrum of $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ and to control its resolvent uniformly on any half-plane included in the resolvent set.

For any $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, let

$$\mathcal{H}_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + i\alpha x^2, \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}_\alpha) = H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^4 dx),$$

be the (1-dimensional) complex harmonic oscillator [24, 41, 45, 116]. Let us recall that

$$\sigma(\mathcal{H}_\alpha) = \{(2k+1)\sqrt{|\alpha|}e^{\pm i\pi/4} : k \in \mathbb{N}\}, \tag{4.2.28}$$

where $\pm = \operatorname{sign} \alpha$.
If $\alpha < 0$, notice indeed that $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}^*_{|\alpha|}$, hence $\lambda \in \sigma(\mathcal{H}_\alpha)$ if and only if $\bar{\lambda} \in \sigma(\mathcal{H}_{|\alpha|})$. Moreover, for every $\omega < \sqrt{|\alpha|/2}$, there exists $c_\omega > 0$ such that

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq \omega} \|(\mathcal{H}_\alpha - z)^{-1}\| \leq c_\omega, \tag{4.2.29}$$

see (1.4.15), [75], Proposition 14.13, and [24, 116].
Now, notice that

$$\mathcal{H}_{\mathcal{Q}} = \overline{\sum_{j=1}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \mathcal{H}_{\lambda_j} \otimes I \otimes \cdots \otimes I},$$

(use for instance Theorem 4.2.7 to check that the domains coincide).
Unlike in Subsection 4.2.2, separation of variables is very efficient for $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ because the operators $\mathcal{H}_{\lambda_j}$ appearing in its decomposition are sectorial. We can indeed apply the spectral mapping theorem due to Ichinose, see Theorem C.2.2, which yields

$$\sigma(\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}) = \sigma(\mathcal{H}_{\lambda_1}) + \cdots + \sigma(\mathcal{H}_{\lambda_n}). \tag{4.2.30}$$

In view of (4.2.28) and (4.2.29), we then get

Lemma 4.2.13 *Let $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ such that $\lambda_j \neq 0$ for all $= 1, \ldots, n$, and let $\sigma_j = \operatorname{sign} \lambda_j$. Then,*

$$\sigma(\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} (2k_j + 1)\sqrt{|\lambda_j|}e^{i\sigma_j \pi/4} : (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n \right\}. \tag{4.2.31}$$

Moreover, for all $\omega < \sqrt{|\lambda_1|/2} + \cdots + \sqrt{|\lambda_n|/2}$, there exists $K_\omega > 0$ such that

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq \omega} \|(\mathcal{H}_{\mathcal{Q}} - z)^{-1}\| \leq K_\omega. \tag{4.2.32}$$

4.3 Local coordinates near the boundary

In this section, we introduce local coordinates in the neighborhood of some point $b \in \partial\Omega$, in order to straighten a portion of the boundary. These coordinates will allow us to use the models of previous section as approximate operators for $\mathcal{A}_h$.

Throughout this section, we mainly refer to [67], appendix F and [112], although these coordinates have also been used in [8] in a 2-dimensional setting.

Let $b \in \partial\Omega$ be fixed. Then, for some neighborhood $\omega \subset \Omega$ of b and some neighborhood $\mathcal{U}$ of the origin in $\mathbb{R}^{n-1}$, there exists a diffeomorphism

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \partial\Omega \cap \omega \\ y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) & \longmapsto & x = \varphi(y) \end{array}$$

with $\varphi(0) = b$.
Then, in these coordinates, the metric induced on $\partial\Omega$ by the euclidian metric of $\mathbb{R}^n$ writes

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}(y) dy_i \otimes dy_j \,,$$

where

$$\forall i, j = 1, \ldots, n-1, \quad g_{ij}(y) = \partial_{y_i}\varphi(y) \cdot \partial_{y_j}\varphi(y) \,. \tag{4.3.1}$$

We can choose φ so that, for every $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\partial_{y_i}\varphi(0) \cdot \partial_{y_j}\varphi(0) = \delta_{i,j}$. Hence, if g denotes the matrix $g = (g_{ij})_{i,j}$, then $\det g(0) = 1$.

Now we define some local coordinates in a neighborhood of b in Ω.
Let $\vec{\nu}(y) = -\vec{n}(\varphi(y))$, where $\vec{n}(x)$ is the outward normal of $\partial\Omega$ at x. We then define the map $\mathcal{F}$ by

$$\mathcal{F}(y, z) = \varphi(y) + z\vec{\nu}(y) \,. \tag{4.3.2}$$

Notice that $z = d(\mathcal{F}(y, z), \partial\Omega)$.
After taking possibly a smaller ω, there exists $z_0 > 0$ such that $\mathcal{F}$ is a diffeomorphism from $\mathcal{U} \times (0, z_0) \subset \mathbb{R}^n$ onto $\Omega \cap \omega$.
In the following we use the notation $\partial_j = \partial_{y_j}$ if $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, and $\partial_n = \partial_z$.
In the coordinates (y, z) the euclidian metric in $\mathbb{R}^n$ writes

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k \otimes dx_k = \sum_{i,j=1}^{n-1} G_{ij}(y, z) dy_i \otimes dy_j + dz \otimes dz \,,$$

where for every $i, j = 1, \ldots, n$,

$$G_{ij}(y, z) = \partial_i \mathcal{F}(y, z) \cdot \partial_j \mathcal{F}(y, z) \,.$$

Indeed, we have, for all $i = 1, \ldots, n-1$,

$$G_{in}(y, z) = (\partial_i \varphi(y) + z\partial_i \vec{\nu}(y)) \cdot \vec{\nu}(y) = 0 \,,$$

since $\partial_i \varphi(y)$ and $\partial_i \vec{\nu}(y)$ are tangent to $\partial\Omega$, and

$$G_{nn}(y, z) = |\vec{\nu}(y)|^2 = 1 \,.$$

Besides, for all $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, we have

$$\begin{aligned} G_{ij}(y, z) &= (\partial_i \varphi(y) + z\partial_i \vec{\nu}(y)) \cdot (\partial_j \varphi(y) + z\partial_j \vec{\nu}(y)) \\ &= g_{ij}(y) + z(\partial_i \vec{\nu}(y) \cdot \partial_j \varphi(y) + \partial_i \varphi(y) \cdot \partial_j \vec{\nu}(y)) + z^2 \partial_i \vec{\nu}(y) \cdot \partial_j \vec{\nu}(y) \\ &= g_{ij}(y) - 2\Omega_{ij}(y) z + z^2 \partial_i \vec{\nu}(y) \cdot \partial_j \vec{\nu}(y) \,, \end{aligned}$$

where $\Omega_{ij} = -\partial_i\varphi \cdot \partial_j\vec{\nu}$ are the coefficients of the second fundamental form of $\partial\Omega$.
Notice that, since we have assumed $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$, we have also

$$G_{ij}(0,0) = \delta_{ij} \qquad \text{and} \qquad \det G(0,0) = 1\,, \tag{4.3.3}$$

where $G = (G_{ij})_{i,j}$.

We conclude this section by giving the expression of operator $\mathcal{A}_h$ in coordinates (y,z). If we set

$$T_{\mathcal{F}}: \begin{array}{ccc} L^2(\Omega\cap\omega) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{U}\times(0,z_0)) \\ u & \longmapsto & u\circ\mathcal{F} \end{array}\,, \tag{4.3.4}$$

then

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{F}}(-h^2\Delta_x + iV(x))T_{\mathcal{F}}^{-1} &= -h^2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\det G(y,z)}}\partial_i\left(\sqrt{\det G(y,z)}G^{ij}(y,z)\partial_j\right) \\ &\quad +iV\circ\mathcal{F}(y,z)\,, \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

where $(G^{ij})_{ij} = (G_{ij})_{ij}^{-1} = G^{-1}$.
Notice that, since

$$G(y,z) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & (G_{ij}(y,z))_{i,j\le n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

then we have

$$G(y,z)^{-1} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & (G^{ij}(y,z))_{i,j\le n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hence, (4.3.5) can be reformulated as

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{F}}(-h^2\Delta_x + iV(x))T_{\mathcal{F}}^{-1} &= -h^2\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}G^{ij}(y,z)\partial_{y_i}\partial_{y_j} + \partial_z^2\right) \\ &\quad -h^2\sum_{j=1}^{n}\beta_j(y,z)\partial_j + iV\circ\mathcal{F}(y,z)\,, \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

where for all $j\in\{1,\dots,n-1\}$,

$$\beta_j(y,z) = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\sum_{i=1}^{n-1}\partial_{y_i}(G^{ij}\sqrt{\det G}) \qquad \text{and} \qquad \beta_n(y,z) = \frac{\partial_z(\sqrt{\det G})}{\sqrt{\det G}}\,. \tag{4.3.7}$$

Finally, notice that according to (4.3.3), we have

$$\forall i,j\in\{1,\dots,n-1\}\,,\quad G^{ij}(y,z) = \delta_{ij} + \mathcal{O}(|(y,z)|)\,,\quad |(y,z)|\to 0\,. \tag{4.3.8}$$

4.4 Lower bound for a potential without critical point

In this section, we work under the assumptions of Theorem 4.1.1. We prove the results of (i). If $\partial\Omega_\perp = \emptyset$, (ii) can be proved alike, by dropping all the terms corresponding to a point $b_j^\perp(h) \in \partial\Omega_\perp$ in the following proof.
For $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$, we denote by $B(x_0, \delta)$ the open ball of radius r centered at x_0 . Let

$$\partial\Omega_{/\!/} = \{x \in \partial\Omega : \nabla V(x) \cdot \vec{n}(x) = 0\}\,,$$

and

$$\partial\Omega_\angle = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_\perp \sqcup \partial\Omega_{/\!/})\,.$$

Our strategy will be to partition the domain Ω into small subdomains on which $\mathcal{A}_h$ will be approximated by simpler models based on the operators studied in Section 4.2. For some $\rho > 0$ to be determined in the following, and for every $h \in (0, h_0)$, we choose two sets of indices $J_{int}(h) \subset \mathbb{N}$, $J_{bdry}(h) \subset \mathbb{N}$, and a set of points

$$\big\{a_j(h) \in \Omega : j \in J_{int}(h)\big\} \cup \big\{b_k(h) \in \partial\Omega : k \in J_{bdry}(h)\big\}\,,$$

such that

$$\bar\Omega \subset \bigcup_{j \in J_{int}(h)} B(a_j(h), h^\rho) \;\cup \bigcup_{k \in J_{bdry}(h)} B(b_k(h), h^\rho)\,,$$

and such that the closed balls $\bar B(a_j(h), h^\rho/2)$, $\bar B(b_k(h), h^\rho/2)$ are all disjoints.
Notice that $\sharp J_{int}(h) \propto h^{-n\rho}$ and $\sharp J_{bdry}(h) \propto h^{-(n-1)\rho}$.
For $\natural = \perp, /\!/, \angle$, we define

$$J_\natural(h) = \{j \in J_{bdry}(h) : b_j(h) \in \partial\Omega_\natural\}\,.$$

Now we take a partition of unity in Ω ,

$$\Big((\chi_{j,h})_{j \in J_{int}(h)}, (\zeta^\perp_{j,h})_{j \in J_\perp(h)}, (\zeta^{/\!/}_{j,h})_{j \in J_{/\!/}(h)}, (\zeta^\angle_{j,h})_{j \in J_\angle(h)}\Big)\,,$$

such that, for every $x \in \bar\Omega$,

$$\sum_{j \in J_{int}(h)} \chi_{j,h}(x)^2 + \sum_{\natural,\; k \in J_\natural(h)} \zeta^\natural_{k,h}(x)^2 = 1\,, \tag{4.4.1}$$

and such that Supp $\chi_{j,h} \subset B(a_j(h), h^\rho)$ for $j \in J_{int}(h)$, Supp $\zeta^\natural_{j,h} \subset B(b_j(h), h^\rho)$ for $j \in J_\natural$, and $\chi_{j,h} \equiv 1$ (resp. $\zeta^\natural_{j,h} \equiv 1$) on $\bar B(a_j(h), h^\rho/2)$ (resp. $\bar B(b_j(h), h^\rho/2)$) .
We set, for $j \in J_\natural(h)$, $\eta^\natural_{j,h} = \zeta^\natural_{j,h}\mathbf{1}_{\bar\Omega}$.
Notice that for all $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup|\partial^\alpha \chi_{j,h}| = \mathcal{O}(h^{-|\alpha|\rho}) \quad \text{and} \quad \sup|\partial^\alpha \eta^\natural_{j,h}| = \mathcal{O}(h^{-|\alpha|\rho})\,. \tag{4.4.2}$$

Now we introduce our approximating operators. For $j \in J_{int}(h)$, we set

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{j,h} = -h^2\Delta + i(V(a_j(h)) + \nabla V(a_j(h)) \cdot (x - a_j(h)))\,, \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_{j,h}) = H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n; |x|^2 dx)\,. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Then, according to Lemma 4.2.1 and by rescaling $x \mapsto h^{-2/3}x$, we have $\sigma(\mathcal{A}_{j,h}) = \emptyset$, and for all $\omega \in \mathbb{R}$, there exists $C^0_\omega > 0$ such that

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq \omega h^{2/3}} \|(\mathcal{A}_{j,h} - z)^{-1}\| \leq \frac{C_\omega}{h^{2/3}}\,. \tag{4.4.4}$$

In order to define the approximating operators at the boundary, for $\natural = \perp$, $/\!\!/$, $\angle$ and $j \in J_\natural(h)$, we denote by $\mathcal{F}_{b_j} = \mathcal{F}_{b_j(h)}$ the local diffeomorphism defined by (4.3.2), where we choose $b = b_j(h)$ as base point, so that $\varphi(0) = b_j(h)$. In these coordinates, we define our local approximation for $\mathcal{A}_h$ near $b_j(h)$ as

$$\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h} = -h^2\Delta_{y,z} + i\left(V(b_j(h)) + \sum_{i=1}^{n-1} J_i^{(j)} y_j + J_n^{(j)} z\right)\,, \tag{4.4.5}$$

where, for all $j \in J_\natural(h)$ and $i = 1, \ldots, n-1$,

$$J_i^{(j)} = J_i^{(j)}(h) = \nabla V(b_j(h))\cdot\partial_i\varphi(0) \quad \text{and} \quad J_n^{(j)} = J_n^{(j)}(h) = \nabla V(b_j(h))\cdot\vec{\nu}(0)\,. \tag{4.4.6}$$

Notice that, if $j \in J_{/\!\!/}(h)$, then $J_n^{(j)} = 0$, hence $\tilde{\mathcal{A}}^{/\!\!/}_{j,h}$ has the same form as operator $\mathcal{A}^D_{/\!\!/}$ studied in Subsection 4.2.1. Hence, according to Lemma 4.2.3 and after rescaling $(y,z) \mapsto (h^{-2/3}y, h^{-2/3}z)$, for all $\omega \in \mathbb{R}$, there exists $C^1_\omega > 0$ such that

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq \omega h^{2/3}} \|(\tilde{\mathcal{A}}^{/\!\!/}_{j,h} - z)^{-1}\| \leq \frac{C^1_\omega}{h^{2/3}}\,. \tag{4.4.7}$$

Similarly, if $j \in J_\perp(h)$, then $(J_1^{(j)}, \ldots, J_{n-1}^{(j)}) = 0$ and $\tilde{\mathcal{A}}^\perp_{j,h}$ has the same form as operator $\mathcal{A}_\perp$ considered in Subsection 4.2.1, with

$$J_n = J_n^{(j)} = |\nabla V(b_j(h))|\,.$$

Hence, in view of Lemma 4.2.4, for all $\omega < |\mu_1||\nabla V(b_j(h))|^{2/3}/2$, there exists $C^2_\omega > 0$ such that

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq \omega h^{2/3}} \|(\tilde{\mathcal{A}}^\perp_{j,h} - z)^{-1}\| \leq \frac{C^2_\omega}{h^{2/3}}\,. \tag{4.4.8}$$

If $j \in J_\angle(h)$, then $\tilde{\mathcal{A}}^\angle_{j,h}$ has the form (4.2.23), with $|J| = |\nabla V(b_j(h))|$,

$$\cos\theta = \frac{J_n^{(j)}}{|\nabla V(b_j(h))|} \quad \text{and} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{J_1^{(j)}}{|\nabla V(b_j(h))|}, \ldots, \frac{J_{n-1}^{(j)}}{|\nabla V(b_j(h))|}\right)\,. \tag{4.4.9}$$

Let us define, for $\delta > 0$, the subset of the boundary

$$\partial\Omega_\perp^{(\delta)} = \{x \in \partial\Omega : d(x, \partial\Omega_\perp) \leq \delta\}\,.$$

Then, for any fixed $\varepsilon > 0$, there exists $\delta_0 > 0$ such that, for all $x \in \partial\Omega_\perp^{(\delta_0)}$,

$$\frac{|\mu_1|}{2} J_m^{2/3} - \varepsilon \leq \frac{|\mu_1|}{2}|\nabla V(x)|^{2/3} - \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{4.4.10}$$

where J_m is defined by (4.1.4).
On the other hand, there exists $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ such that, for all $x \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_\perp^{(\delta_0)}$,

the angle θ defined in (4.4.9) satisfies $\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$.
Thus, for all $j \in J_{\angle}(h)$, by using (4.2.24) (with $\varepsilon/2$ instead of ε) and (4.4.10) if $b_j(h) \in \partial\Omega_{\perp}^{(\delta_0)}$, or by using (4.2.25) if $b_j(h) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{\perp}^{(\delta_0)}$, there exists $C_\varepsilon^3 > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$,

$$\sup_{\operatorname{Re} z \leq (|\mu_1| J_m^{2/3}/2 - \varepsilon) h^{2/3}} \|(\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\angle} - z)^{-1}\| \leq \frac{C_\varepsilon^3}{h^{2/3}}, \tag{4.4.11}$$

(here again, we used the rescaling $(y, z) \mapsto (h^{-2/3} y, h^{-2/3} z)$).

Now let us check that the potential in (4.4.5) is a good approximation of the potential $iV \circ \mathcal{F}_{b_j}(x)$ near $b_j(h)$.
As $(y, z) \to 0$, we have

$$\varphi(y, z) = b_j(h) + \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \varphi(0) y_i + \mathcal{O}(|y|^2),$$

hence

$$\mathcal{F}_{b_j}(y, z) = b_j(h) + \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \varphi(0) y_i + z\vec{\nu}(y) + \mathcal{O}(|y|^2),$$

and using (4.3.3), we get

$$\begin{aligned}
&\nabla V(b_j(h)) \cdot (\mathcal{F}_{b_j}(y, z) - b_j(h))) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} J_i^{(j)} \partial_i \varphi(0) + J_n^{(j)} \vec{\nu} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k \partial_k \varphi(0) + z\vec{\nu}(y) + \mathcal{O}(|y|^2) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} J_i^{(j)} y_i + J_n^{(j)} z + \mathcal{O}(|y|^2).
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Thus, using that

$$V(x) = V(b_j(h)) + \nabla V(b_j(h)) \cdot (x - b_j(h)) + \mathcal{O}(|x - b_j(h)|^2),$$

we obtain

$$V \circ \mathcal{F}_{b_j} = V(b_j(h)) + \sum_{i=1}^{n-1} J_i^{(j)} y_i + J_n^{(j)} z + \mathcal{O}(|(y, z)|^2). \tag{4.4.13}$$

Since Ω is compact, there exists a fixed neighborhood of $\partial\Omega$ which is covered by a finite number of charts $(\mathcal{F}, \omega)$ as defined in (4.3.2). Hence, up to a translation there is a finite number of diffeomorphisms $\mathcal{F}_{b_j}$ for $h \in (0, h_0)$ and $j \in J_{bdry}(h)$. Consequently all the remainder terms $\mathcal{O}(|y|^2)$ and $\mathcal{O}(|(y, z)|^2)$ above are uniform with respect to j and $h \in (0, h_0)$.

Now we gather the resolvents of the approximate operators previously defined to build an approximate resolvent for $\mathcal{A}_h$. For a fixed $\varepsilon > 0$ and any $\nu \in \mathbb{R}$, we set

$$\lambda(h) = \lambda_0 h^{2/3} + i\nu, \quad \lambda_0 = \frac{|\mu_1|}{2} J_m^{2/3} - \varepsilon. \tag{4.4.14}$$

Let $\psi_{j,h} \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega \cap \bar{\Omega})$ and $\tilde{\psi}_{j,h} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{U} \times (0, z_0))$ such that $\psi_{j,h}(x) = 1$ near $b_j(h)$ and $\tilde{\psi}_{j,h}(y,z) = 1$ near 0. Here ω, $\mathcal{U}$ and z_0 are the objects appearing in (4.3.4) corresponding to the diffeomorphism $\mathcal{F}_{b_j}$ near $b_j(h)$. Then we set

$$R^\natural_{j,h} = T^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}} \tilde{\psi}_{j,h} (\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h} - \lambda(h))^{-1} T_{\mathcal{F}_{b_j}} \psi_{j,h} \,, \tag{4.4.15}$$

where $T_{\mathcal{F}_{b_j}} = T_{\mathcal{F}_{b_j(h)}}$ is defined in (4.3.4).
Now we define our global approximate resolvent, for $h \in (0, h_0)$, by

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(h) \;\; = \;\; & \sum_{j \in J_{int}(h)} \chi_{j,h} (\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1} \chi_{j,h} \\ & + \sum_{\natural \in \{\perp, /\!\!/, \angle\}} \sum_{j \in J_\natural(h)} \eta^\natural_{j,h} R^\natural_{j,h} \eta^\natural_{j,h} \,. \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Then, we have

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_h - \lambda(h)) \mathcal{R}(h) \;\; = \;\; & I + \sum_{j \in J_{int}(h)} \chi_{j,h} (\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{j,h})(\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1} \chi_{j,h} \\ + \;\; & \sum_{j \in J_{int}(h)} [\mathcal{A}_h, \chi_{j,h}] (\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1} \chi_{j,h} \\ + \;\; & \sum_{\natural \in \{\perp, /\!\!/, \angle\}} \sum_{j \in J_\natural(h)} T^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}} \tilde{\eta}^\natural_{j,h} (\tilde{\mathcal{A}}_h - \tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h})(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h} - \lambda(h))^{-1} T_{\mathcal{F}_{b_j}} \eta^\natural_{j,h} \\ + \;\; & \sum_{\natural \in \{\perp, /\!\!/, \angle\}} \sum_{j \in J_\natural(h)} T^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}} [\tilde{\mathcal{A}}_h, \tilde{\eta}^\natural_{j,h}] (\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h} - \lambda(h))^{-1} T_{\mathcal{F}_{b_j}} \eta^\natural_{j,h} \,, \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

where $\tilde{\mathcal{A}}_h = T_{\mathcal{F}_{b_j}} \psi_{j,h} \mathcal{A}_h T^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}} \tilde{\psi}_{j,h}$ denotes the operator $\mathcal{A}_h$ expressed in the local coordinates near $b_j(h)$ (see (4.3.6)), and $\tilde{\eta}^\natural_{j,h} = \eta^\natural_{j,h} \circ \mathcal{F}_{b_j}$.
In the following, we estimate each term of the right-hand side.

First, for $j \in J_{int}(h)$, we have

$$\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{j,h} = i\mathcal{O}(|x - a_j(h)|^2), \quad x \to a_j(h),$$

hence $\|\chi_{j,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{j,h})\| = \mathcal{O}(h^{2\rho})$. According to (4.4.4), we then get

$$\|\chi_{j,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{j,h})(\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1} \chi_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^{2(\rho - 1/3)}) \,. \tag{4.4.18}$$

Now we estimate the terms of the second sum in the right-hand side of (4.4.17).
We have, for $j \in J_{int}(h)$,

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_h, \chi_{j,h}](\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1} \chi_{j,h} \;\; = \;\; & -h^2 \Delta \chi_{j,h} (\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1} \chi_{j,h} \\ & -2h \nabla \chi_{j,h} \cdot h \nabla (\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1} \chi_{j,h} \\ =: \;\; & P^{(1)}_{j,h} + P^{(2)}_{j,h} \,. \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

According to (4.4.2) and (4.4.4),

$$\|P^{(1)}_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^{2(2/3 - \rho)}) \,. \tag{4.4.20}$$

On the other hand, for every $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{j,h})$, we have

$$\begin{aligned} \|h\nabla v\|^2 &= \mathrm{Re}\,\langle(\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))v,v\rangle + \mathrm{Re}\,\lambda(h)\|v\|^2 \\ &\leq \|(\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))v\|\|v\| + \mathrm{Re}\,\lambda(h)\|v\|^2\,, \end{aligned}$$

which, applied to $v = (\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\chi_{j,h}f$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, yields

$$\begin{aligned} \|h\nabla(\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\chi_{j,h}f\| \leq & \sqrt{\|(\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\|}\|f\| \\ & + \sqrt{|\mathrm{Re}\,\lambda(h)|}\|(\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\|\|f\|\,, \end{aligned} \tag{4.4.21}$$

that is, in view of (4.4.2), (4.4.4) and (4.4.14) ,

$$\|P^{(2)}_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^{2/3-\rho})\,. \tag{4.4.22}$$

Thus, (4.4.19), (4.4.20) and (4.4.22) yield, for every $j \in J_{int}(h)$,

$$\|[\mathcal{A}_h,\chi_{j,h}](\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\chi_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^{2/3-\rho})\,. \tag{4.4.23}$$

Now we consider the boundary terms in (4.4.17). First, according to (4.3.6) and (4.4.13), for $\natural = /\!\!/, \perp, \angle$ and $j \in J_\natural(h)$, we have

$$\tilde{\mathcal{A}}_h - \tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h} = -h^2\sum_{i,k=1}^{n-1}(G^{ik}(y,z)-\delta_{ik})\partial_i\partial_k - h^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y,z)\partial_i + \mathcal{O}(|(y,z)|^2)\,.$$

Here the functions G^{ik} and β_i depend on the index $j \in J_\natural(h)$, although we do not mention it in the notation. However, the remainder term $\mathcal{O}(|(y,z)|^2)$ is uniform with respect to j and $h \in (0,h_0)$.
Hence, according to (4.3.8), and since the functions β_i are bounded on Supp $\tilde{\eta}^\natural_{j,h}$, we have, for some $C > 0$,

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\eta}^\natural_{j,h}(\tilde{\mathcal{A}}_h - \tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h})(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\| \leq Ch^\rho\|h^2\Delta_{(y,z)}(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\| \\ &+C\Big(\|h^2\nabla_{(y,z)}(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\| + h^{2\rho}\|(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\|\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

Regarding the second term in the right-hand side of (4.4.24), we can use an estimate similar to (4.4.21) to get

$$\|h\nabla_{(y,z)}(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\| \leq \|(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\|^{1/2} + (\mathrm{Re}\,\lambda(h))^{1/2}\|(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\|\,,$$

hence using (4.4.7), (4.4.8) and (4.4.11),

$$\|h\nabla_{(y,z)}(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\| = \mathcal{O}(h^{-1/3})\,. \tag{4.4.25}$$

The first norm in the right-hand side can be estimated as follows : as in (4.2.15), we can write, for all $u \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h})$,

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))u\|^2 &= \|h^2\Delta u\|^2 + \|(i\tilde{\ell}-\lambda(h))u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle -h^2\Delta u,(i\tilde{\ell}-\lambda(h))u\rangle \\ &\geq \|h^2\Delta u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle h\nabla u, h\nabla[(i\tilde{\ell}-\lambda(h))u]\rangle \\ &\geq \|h^2\Delta u\|^2 + 2h\mathrm{Im}\,\langle h\nabla u, J^{(j)}u\rangle - 2\lambda_0 h^{2/3}\|h\nabla u\|^2\,, \end{aligned} \tag{4.4.26}$$

where $J^{(j)} = (J_1^{(j)}, \dots, J_n^{(j)})$, and $\tilde{\ell}$ denotes the potential of $\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\natural}$,

$$V(b_j(h)) + J_1^{(j)} y_1 + \cdots + J_n^{(j)} z \,.$$

Notice that $|J^{(j)}|$ is bounded uniformly with respect to j and h since $\partial\Omega$ is compact.
Thus, for some $c > 0$ independent of j and h ,

$$\|h^2 \Delta u\|^2 \leq \|(\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\natural} - \lambda(h))u\|^2 + c\,(h\|h\nabla u\|\|u\| + h^{2/3}\|h\nabla u\|^2)\,. \qquad (4.4.27)$$

Applying this estimate to $u = (\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\natural} - \lambda(h))^{-1} f$, with $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, we then get from (4.4.7), (4.4.8), (4.4.11) and (4.4.25),

$$\|h^2 \Delta (\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\natural} - \lambda(h))^{-1} f\|^2 \leq c'\,\|f\|^2\,, \qquad c' > 0\,,$$

that is

$$h^\rho \|\tilde{\eta}_{j,h}^{\natural} h^2 \Delta (\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\natural} - \lambda(h))^{-1}\| = \mathcal{O}(h^\rho)\,. \qquad (4.4.28)$$

Then, (4.4.24), (4.4.25) and (4.4.28) yield

$$\|T_{\mathcal{F}_{b_j}}^{-1} \tilde{\eta}_{j,h}^{\natural} (\tilde{\mathcal{A}}_h - \tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\natural})(\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\natural} - \lambda(h))^{-1} T_{\mathcal{F}_{b_j}} \eta_{j,h}^{\natural}\| = \mathcal{O}(h^\rho) + \mathcal{O}(h^{2/3}) + \mathcal{O}(h^{2(\rho - 1/3)})\,. \qquad (4.4.29)$$

Finally, the terms contained in the last sum of the right-hand side in (4.4.17) can be estimated as in (4.4.23) :

$$\|T_{\mathcal{F}_{b_j}}^{-1} [\tilde{\mathcal{A}}_h, \tilde{\eta}_{j,h}^{\natural}] (\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^{\natural} - \lambda(h))^{-1} T_{\mathcal{F}_{b_j}} \eta_{j,h}^{\natural}\| = \mathcal{O}(h^{2/3-\rho})\,. \qquad (4.4.30)$$

Let us stress that the constants in estimates (4.4.4), (4.4.7), (4.4.8) and (4.4.11) are independent of $h \in (0, h_0)$ and $j = j(h)$. Hence estimates (4.4.18), (4.4.23), (4.4.29) and (4.4.30) are uniform with respect to j.

For the time being, we have controlled separately each term appearing in the right-hand side of (4.4.17). However, since the sums therein contain a growing number of terms as $h \to 0$, we shall sum these estimates carefully in order to get an appropriate bound eventually. In this purpose, we take into account the *almost orthogonality* of those terms. Namely, we use the following lemma ([130], VII §2) :

Lemma 4.4.1 (Cotlar-Stein Lemma) *Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space and, for every $j \in \mathbb{N}$, $T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Assume that*

$$A := \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{\|T_j T_k^*\|} < +\infty\,, \qquad (4.4.31)$$

and

$$B := \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{\|T_j^* T_k\|} < +\infty\,. \qquad (4.4.32)$$

Then, $\sum_{j \in \mathbb{N}} T_j$ converges in the strong operator topology and

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{N}} T_j \right\| \leq \sqrt{AB}\,. \qquad (4.4.33)$$

Here we apply this lemma for a fixed $h \in (0, h_0)$ with, for $j \in J_{int}(h)$,

$$T_j = \chi_{j,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{j,h})(\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1}\chi_{j,h}\,.$$

Since the first sum in the right-hand side of (4.4.17) has a finite number of terms, we set $T_j = 0$ for $j \in \mathbb{N} \setminus J_{int}(h)$. By definition of the functions $\chi_{j,h}$, for every $j_0 \in J_{int}(h)$, we have Supp $\chi_{j_0,h} \cap$ Supp $\chi_{k,h} = \emptyset$ except for a finite number (uniformly bounded with respect to h and j_0) of indices k, which we shall denote by $\{k_1(j_0), \dots, k_p(j_0)\}$.
Hence we have clearly

$$\forall j_0 \in J_{int}(h)\,,\ k \in J_{int}(h) \setminus \{k_1(j_0), \dots, k_p(j_0)\}\,, \quad T_{j_0}T_k^* = T_{j_0}^*T_k = 0\,.$$

Thus,

$$A = \sup_{j_0 \in J_{int}(h)} \sum_{\ell=1}^{p} \|T_{j_0}T^*_{k_\ell(j_0)}\| = \mathcal{O}(h^{2(\rho-1/3)})\,,$$

according to (4.4.18).
Similarly, we get $B = \mathcal{O}(h^{2(\rho-1/3)})$. Hence (4.4.33) yields

$$\left\| \sum_{j \in J_{int}(h)} \chi_{j,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{j,h})(\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1}\chi_{j,h} \right\| = \mathcal{O}(h^{2(\rho-1/3)})\,. \tag{4.4.34}$$

We can handle the other sums in (4.4.17) alike to get, in view of (4.4.23), (4.4.29) and (4.4.30),

$$\left\| \sum_{j \in J_{int}(h)} [\mathcal{A}_h, \chi_{j,h}](\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1}\chi_{j,h} \right\| = \mathcal{O}(h^{2/3-\rho})\,, \tag{4.4.35}$$

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{\natural \in \{\perp, /\!\!/, \angle\}} \sum_{j \in J_\natural(h)} T^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}} \tilde{\eta}^\natural_{j,h}(\tilde{\mathcal{A}}_h - \tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h})(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h} - \lambda(h))^{-1} T_{\mathcal{F}_{b_j}} \eta^\natural_{j,h} \right\| \\ = \mathcal{O}(h^\rho) + \mathcal{O}(h^{2/3}) + \mathcal{O}(h^{2(\rho-1/3)})\,,\end{aligned} \tag{4.4.36}$$

and

$$\left\| \sum_{\natural \in \{\perp, /\!\!/, \angle\}} \sum_{j \in J_\natural(h)} T^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}} [\tilde{\mathcal{A}}_h, \tilde{\eta}^\natural_{j,h}](\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h} - \lambda(h))^{-1} T_{\mathcal{F}_{b_j}} \eta^\natural_{j,h} \right\| = \mathcal{O}(h^{2/3-\rho})\,. \tag{4.4.37}$$

Thus, if we choose $\rho \in (1/3, 2/3)$, we obtain from (4.4.17), (4.4.34), (4.4.35), (4.4.36) and (4.4.37) :

$$(\mathcal{A}_h - \lambda(h))\mathcal{R}(h) = I + \mathcal{E}(h)\,, \quad \|\mathcal{E}(h)\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \tag{4.4.38}$$

Hence, there exists $h_\varepsilon \in (0, h_0)$ such that, for all $h \in (0, h_\varepsilon)$, $(\mathcal{A}_h - \lambda(h))$ is invertible, with

$$(\mathcal{A}_h - \lambda(h))^{-1} = \mathcal{R}(h)(I + \mathcal{E}(h))^{-1}\,.$$

Consequently, there is a strip free from eigenvalues :

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon)\,, \quad \sigma(\mathcal{A}_h) \cap ([0, (|\mu_1| J_m^{2/3}/2 - \varepsilon) h^{2/3}] + i\mathbb{R}) = \emptyset\,,$$

which proves (4.1.5). Moreover, we have of course $\|(I + \mathcal{E}(h))^{-1}\| = \mathcal{O}(1)$, and according to (4.4.4), (4.4.7), (4.4.8) and (4.4.11), by using Lemma 4.4.1 again to estimate the sums in (4.4.16), we get

$$\|\mathcal{R}(h)\| = \mathcal{O}(h^{-2/3})\,.$$

The estimate (4.1.6) follows, which concludes the proof of Theorem 4.1.1.

4.5 Lower bound for a Morse potential

Here we prove part of the statements in Theorem 4.1.3. Namely, we prove (4.1.12), as well as the lower bound in (4.1.11) :

$$\varliminf_{h \to 0} \frac{1}{h} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) \geq \frac{\kappa}{2}\,. \tag{4.5.1}$$

The corresponding upper bound shall be proved in Section 4.7.

We follow the same method as in Section 4.4, but we will need a quadratic approximation in the neighborhood of the critical points of V.
Let $x_1^c, \dots, x_p^c$ be the critical points of V , and, for $k = 1, \dots, p$, $\theta_{k,h} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; [0,1])$ such that

$$\operatorname{Supp} \theta_{k,h} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_k^c| \leq h^{\rho'}\}\,, \tag{4.5.2}$$

where $\rho' > 0$ shall be determined later, and $\theta_{k,h}(x) = 1$ if $|x - x_k^c| \leq h^{\rho'}/2$. As in Section 4.4, for any $h \in (0, h_0)$ we consider a covering of the compact set $\bar\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^p \{|x - x_k^c| > h^{\rho'}\}$ by balls $B(a_j(h), h^\rho/2)$ and $B(b_k(h), h^\rho/2)$, $j \in J_{int}(h)$, $k \in J_{bdry}(h)$, where $a_j(h) \in \Omega$ and $b_j(h) \in \partial\Omega$, such that the corresponding closed balls of radius $h^\rho/2$ do not intersect one another, and such that, for every $h \in (0, h_0)$, $j \in J_{int}(h)$ and $k = 1, \dots, p$,

$$\bar B(a_j(h), h^\rho/2) \cap \bar B(x_k^c, h^{\rho'}/2) = \emptyset\,. \tag{4.5.3}$$

Then we define $J_\natural(h)$, $\natural = /\!\!/, \perp, \angle$, as in Section 4.4, as well as the functions $\chi_{j,h}$ and $\eta_{j,h}^\perp$, with the following condition instead of (4.4.1) :

$$\forall x \in \bar\Omega\,, \quad \sum_{j \in J_{int}(h)} \chi_{j,h}(x)^2 + \sum_{\natural,\ k \in J_\natural(h)} \eta_{k,h}^\natural(x)^2 + \sum_{k=1}^p \theta_{k,h}(x)^2 = 1\,. \tag{4.5.4}$$

Let $\mathcal{A}_{j,h}$, $\tilde{\mathcal{A}}_{j,h}^\natural(h)$ and $R_{j,h}^\natural$ denote the same approximate operators as before. For $k = 1, \dots, p$, we set

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_{k,h} = -h^2 \Delta + i(V(x_k^c) + (\operatorname{Hess} V(x_k^c)(x - x_k^c)) \cdot (x - x_k^c))\,, \\ \mathcal{D}(\mathcal{H}_{k,h}) = H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n; |x|^4 dx)\,, \end{array} \right. \tag{4.5.5}$$

which will stand as an approximation of $\mathcal{A}_h$ near x_k^c .
Instead of (4.4.14) we set, for any $\nu \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$,

$$\lambda(h) = \lambda_0 h + i\nu\,, \quad \lambda_0 = \frac{\kappa}{2} - \varepsilon\,, \tag{4.5.6}$$

where κ is the constant in Theorem 4.1.3.
Our approximate resolvent will be

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(h) &= \sum_{j\in J_{int}(h)} \chi_{j,h}(\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\chi_{j,h} \\ &+ \sum_{\natural\in\{\perp,/\!\!/,\angle\}}\ \sum_{j\in J_\natural(h)} \eta^\natural_{j,h}R^\natural_{j,h}\eta^\natural_{j,h} \\ &+ \sum_{k=1}^{p}\theta_{k,h}(\mathcal{H}_{k,h}-\lambda(h))^{-1}\theta_{k,h}\,. \end{aligned}\tag{4.5.7}$$

Then, we have

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_h-\lambda(h))\mathcal{Q}(h) &= I + \sum_{j\in J_{int}(h)} \chi_{j,h}(\mathcal{A}_h-\mathcal{A}_{j,h})(\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\chi_{j,h} \\ &+ \sum_{j\in J_{int}(h)} [\mathcal{A}_h,\chi_{j,h}](\mathcal{A}_{j,h}-\lambda(h))^{-1}\chi_{j,h} \\ &+ \sum_{\natural\in\{\perp,/\!\!/,\angle\}}\ \sum_{j\in J_\natural(h)} T^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}}\tilde\eta^\natural_{j,h}(\tilde{\mathcal{A}}_h-\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h})(\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}T_{\mathcal{F}_{b_j}}\eta^\natural_{j,h} \\ &+ \sum_{\natural\in\{\perp,/\!\!/,\angle\}}\ \sum_{j\in J_\natural(h)} T^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}}[\tilde{\mathcal{A}}_h,\tilde\eta^\natural_{j,h}](\tilde{\mathcal{A}}^\natural_{j,h}-\lambda(h))^{-1}T_{\mathcal{F}_{b_j}}\eta^\natural_{j,h} \\ &+ \sum_{k=1}^{p}\theta_{k,h}(\mathcal{A}_h-\mathcal{H}_{k,h})(\mathcal{H}_{k,h}-\lambda(h))^{-1}\theta_{k,h} \\ &+ \sum_{k=1}^{p}[\mathcal{A}_h,\theta_{k,h}](\mathcal{H}_{k,h}-\lambda(h))^{-1}\theta_{k,h}\,, \end{aligned}\tag{4.5.8}$$

where $\tilde{\mathcal{A}}_h = T_{\mathcal{F}_{b_j}}\psi_{j,h}\mathcal{A}_hT^{-1}_{\mathcal{F}_{b_j}}\tilde\psi_{j,h}$ denotes the operator $\mathcal{A}_h$ expressed in the local coordinates near $b_j(h)$ (see (4.3.6)), and $\tilde\eta^\natural_{j,h}=\eta^\natural_{j,h}\circ\mathcal{F}_{b_j}$.

The boundary terms, that is those appearing in the third and fourth sums in the righ-hand side, can be estimated as in Section 4.4, hence (4.4.36) and (4.4.37) hold.

Regarding the first and second sums in the right-hand side, we have to take into account that, when $a_j(h)$ is close to some critical point x^c_k, $|\nabla V(a_j(h))|$ can become small as $h\to 0$. However, according to (4.5.3), we have for all $j\in J_{int}(h)$,

$$\forall x\in \mathrm{Supp}\ \chi_{j,h}\,,\quad |x-x^c_k|\geq \frac{h^{\rho'}}{2}\,.$$

Hence, using that

$$\nabla V(a_j(h)) = \mathrm{Hess}V(x^c_k)\cdot(a_j(h)-x^c_k)+\mathcal{O}(|a_j(h)-x^c_k|^2)\,,$$

there exists $c>0$ such that, for every $h\in(0,h_0)$ and $j\in J_{int}(h)$,

$$|\nabla V(a_j(h))|\geq \frac{h^{\rho'}}{c}\,. \tag{4.5.9}$$

According to Subsection 4.2.1, after a rotation we can assume that $\mathcal{A}_{j,h}$ has the form

$$-h^2\Delta + i|\nabla V(a_j(h)|x_1 + i(V(a_j(h)) - \nabla V(a_j(h)) \cdot a_j(h))\,.$$

Now if T_h denotes the unitary map

$$T_h : u(x) \mapsto \frac{h^{2/3}}{|\nabla V(a_j(h))|^{1/3}} u\left(\frac{|\nabla V(a_j(h))|^{1/3}}{h^{2/3}} x\right)\,,$$

then

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h) = \big(h|\nabla V(a_j(h))|\big)^{2/3} T_h^{-1}\Big(\mathcal{A}_0 - \big(h|\nabla V(a_j(h))|\big)^{-2/3}\big(\lambda(h) + i\nu_0(h)\big)\Big) T_h\,, \\ \nu_0(h) = V(a_j(h)) - \nabla V(a_j(h)) \cdot a_j(h)\,, \end{cases}$$

where $\mathcal{A}_0 = -\Delta + ix_1$ is the operator of Subsection 4.2.1.
Thus, we have

$$\|(\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1}\| = \frac{1}{\big(h|\nabla V(a_j(h))|\big)^{2/3}} \left\| \Big(\mathcal{A}_0 - \big(h|\nabla V(a_j(h))|\big)^{-2/3}\big(\lambda(h) + i\nu_0(h)\big)\Big)^{-1} \right\|\,. \tag{4.5.10}$$

Besides, in view of (4.5.6) and (4.5.9), if we choose $\rho' < 1/2$, then there exists $\omega > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$,

$$(h|\nabla V(a_j(h))|)^{-2/3} \mathrm{Re}\,\lambda(h) \leq \omega\,.$$

Hence, (4.5.9), (4.5.10) and Lemma 4.2.1 yield

$$\|(\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{2/3(1+\rho')}}\right)\,. \tag{4.5.11}$$

Using this resolvent estimate, we prove as for (4.4.18) that, for all $j \in J_{int}(h)$,

$$\|\chi_{j,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{j,h})(\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1}\chi_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^{2\rho - 2/3(1+\rho')})\,. \tag{4.5.12}$$

Now we handle the commutator terms as in Section 4.4, by estimating the two terms of (4.4.19). First (4.4.20) clearly becomes

$$\|P^{(1)}_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^{4/3 - 2\rho - 2\rho'/3})\,. \tag{4.5.13}$$

On the other hand, (4.4.21) and (4.5.11) imply

$$\begin{aligned} \|h\nabla(\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1}\chi_{j,k}\| &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{1/3(1+\rho')}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{1/6+2\rho'/3}}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{1/3(1+\rho')}}\right)\,, \end{aligned}$$

since $\rho' < 1/2$.
Hence

$$\|P^{(2)}_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^{2/3 - \rho - \rho'/3})\,, \tag{4.5.14}$$

and by (4.5.13) we get, for all $j \in J_{int}(h)$,

$$\|[\mathcal{A}_h, \chi_{j,h}](\mathcal{A}_{j,h} - \lambda(h))^{-1}\chi_{j,h}\| = \mathcal{O}(h^{2/3-\rho-\rho'/3}). \tag{4.5.15}$$

It remains to estimate the terms of the two last sums in the right-hand side of (4.5.8). For each $k = 1, \ldots, p$, let U_k be an orthogonal matrix such that

$$ {}^tU_k \ \mathrm{Hess}V(x_k^c) \ U_k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

where $\{\lambda_j^k\}_{j=1,\ldots,n} = \sigma(\mathrm{Hess}V(x_k^c))$.
Let $T_{h,k} : u(x) \mapsto u(h^{-1/2}U_k(x - x_k^c))$. Then,

$$T_{h,k}(\mathcal{H}_{k,h} - \lambda(h))T_{h,k}^{-1} = h\left(-\Delta + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^k x_j^2 - (\lambda(h) - iV(x_k^c))h^{-1}\right). \tag{4.5.16}$$

Since x_k^c, $k = 1\ldots, n$, are non-degenerate critical points, we have $\lambda_j^k \neq 0$ for $j = 1, \ldots, n$. Hence, according to Lemma 4.2.13, we have

$$\inf \mathrm{Re}\,\sigma(\mathcal{H}_{k,h}) = \frac{\kappa_k}{2}h,$$

where κ_k is the constant defined in (4.1.9). Moreover, since $\mathrm{Re}\,(\lambda(h)-iV(x_k^c))h^{-1} < \kappa_k/2$ for any $k = 1, \ldots, p$ due to (4.5.6), (4.5.16) and (4.2.32) yield

$$\|(\mathcal{H}_{k,h} - \lambda(h))^{-1}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right). \tag{4.5.17}$$

On the other hand, according to (4.5.2),

$$\forall k = 1, \ldots, p, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \sup|\partial^\alpha \theta_{k,h}| = \mathcal{O}(h^{-|\alpha|\rho'}), \tag{4.5.18}$$

and

$$\|\theta_{k,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{H}_{k,h})\| = \mathcal{O}(h^{3\rho'}). \tag{4.5.19}$$

Thus, combining (4.5.17), (4.5.18), (4.5.19), and following the proof of (4.4.18) and (4.4.23), we get, for all $k = 1, \ldots, p$,

$$\|\theta_{k,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{H}_{k,h})(\mathcal{H}_{k,h} - \lambda(h))^{-1}\theta_{k,h}\| = \mathcal{O}(h^{3\rho'-1}) \tag{4.5.20}$$

and

$$\|[\mathcal{A}_h, \theta_{k,h}](\mathcal{H}_{k,h} - \lambda(h))^{-1}\theta_{k,h}\| = \mathcal{O}(h^{1/2-\rho'}). \tag{4.5.21}$$

As a conclusion, if we choose

$$\frac{1}{3} < \rho' < \frac{1}{2} \qquad \text{and} \qquad \frac{1+\rho'}{3} < \rho < \frac{2-\rho'}{3}, \tag{4.5.22}$$

then according to (4.4.36), (4.4.37), (4.5.8), (4.5.12), (4.5.15), (4.5.20), (4.5.21), and by using again Lemma 4.4.1 to handle the large number of terms in the sums, we get

$$(\mathcal{A}_h - \lambda(h))\mathcal{Q}(h) = I + \tilde{\mathcal{E}}(h)\,, \qquad \|\tilde{\mathcal{E}}(h)\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \tag{4.5.23}$$

Hence, there exists $h_\varepsilon \in (0, h_0)$ such that, for all $h \in (0, h_\varepsilon)$, $(\mathcal{A}_h - \lambda(h))$ is invertible, with

$$(\mathcal{A}_h - \lambda(h))^{-1} = \mathcal{Q}(h)(I + \tilde{\mathcal{E}}(h))^{-1}\,.$$

Consequently, there is a strip free from eigenvalues :

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon), \quad \sigma(\mathcal{A}_h) \cap ([0, (\kappa/2 - \varepsilon)h] + i\mathbb{R}) = \emptyset\,,$$

which proves (4.5.1). Moreover, we have of course $\|(I + \mathcal{E}(h))^{-1}\| = \mathcal{O}(1)$, and according to (4.4.7), (4.4.8), (4.4.11), (4.5.11), (4.5.17), and by using Lemma 4.4.1 again to estimate the sums in (4.5.7), we get

$$\|\mathcal{Q}(h)\| = \mathcal{O}(h^{-1})\,.$$

The estimate (4.1.6) follows.

4.6 Upper bound for a potential without critical point in dimension 1

In this section, we prove Theorem 4.1.2. In view of the statement of Theorem 4.1.1, it only remains to prove that

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\, \frac{1}{h^{2/3}} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) \leq \frac{|\mu_1|}{2} J^{2/3}\,. \tag{4.6.1}$$

Up to a scale change, we can assume that $a = 0$ and $b = 1$. Moreover, without loss of generality, we shall assume in this section that $V' > 0$ on $(0,1)$, and $J = |V'(0)|^{2/3}$.
First we want to show that the resolvent of $\mathcal{A}_h$, as $h \to 0$, can be conveniently approximated by the resolvent of operator

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{-,h} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + i(V(0) + V'(0)x)\,, \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_{-,h}) = H_0^1(0, +\infty) \cap H^2(0, +\infty) \cap L^2(0, +\infty; x^2 dx)\,. \end{array} \right. \tag{4.6.2}$$

More precisely, given $\lambda_0 > 0$ and $\lambda(h) = \lambda_0 h^{2/3}$, we extend $(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}$ on $(0, +\infty)$ by considering instead the operator $\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]}$. We then prove the following :

Proposition 4.6.1 *Under the assumptions of Theorem 4.1.2, we have*

$$\|\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]} - (\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(0,+\infty))} = o\left(\frac{1}{h^{2/3}}\right)\,, \tag{4.6.3}$$

as $h \to 0$.

Proof :
Choosing again $\rho \in (1/3, 2/3)$, we consider $\chi_{-,h} = \eta_{-,h}\mathbf{1}_{[0,1]}$, where $\eta_{-,h} \in \mathcal{C}_0^\infty(-\infty, h^\rho; [0,1])$, $\eta_{-,h}(x) = 1$ for $x \leq h^\rho/2$. We set

$$\tilde{\chi}_h = \sqrt{1-\chi_{-,h}^2}\mathbf{1}_{[0,1]}\,,$$

and we use the approximate resolvent

$$\tilde{\mathcal{R}}(h) = \chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h} + \tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h\,.$$

We have

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})\tilde{\mathcal{R}}(h) = I + \chi_{-,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{-,h})(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}\\ &+[\mathcal{A}_h, \chi_{-,h}](\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h} + [\mathcal{A}_h, \tilde{\chi}_h](\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h\,,\end{aligned}$$

hence, composing on the left by $\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]}$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]} - \chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h} = \tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h\\ &-\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{-,h})(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}\\ &-\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]}[\mathcal{A}_h, \chi_{-,h}](\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}\\ &-\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]}[\mathcal{A}_h, \tilde{\chi}_h](\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h\,.\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

We want to prove that the right-hand side behaves as $o(h^{-2/3})$ as $h \to 0$.
Consider first the second term. We have clearly

$$\|(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{2/3}}\right)\,, \tag{4.6.5}$$

and

$$\|(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{2/3}}\right)\,. \tag{4.6.6}$$

Hence, we can easily check, as in (4.4.18) after replacing $-\lambda(h)$ by $+\lambda_0 h^{2/3}$, that

$$\|\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h+\lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}(\mathcal{A}_h-\mathcal{A}_{-,h})(\mathcal{A}_{-,h}+\lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{2(2/3-\rho)}}\right)\,. \tag{4.6.7}$$

We can also check, as in (4.4.23), that

$$\|[\mathcal{A}_h, \chi_{-,h}](\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}\| = \mathcal{O}(h^{2/3-\rho})\,.$$

Consequently, in view of (4.6.5),

$$\|\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]}[\mathcal{A}_h, \chi_{-,h}](\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^\rho}\right)\,, \tag{4.6.8}$$

and similarly,

$$\|\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]}[\mathcal{A}_h, \tilde{\chi}_h](\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^\rho}\right)\,. \tag{4.6.9}$$

Let us now consider the first term in the right-hand side of (4.6.4). After replacing $\lambda_0 h^{2/3}$ by $\lambda_0 h^{2/3} - iV(0)$, we can assume that $V(0) = 0$. By applying the equality

$$|\mathrm{Im}\,\langle(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})v, v\rangle| = \|V^{1/2}v\|^2_{L^2(0,1)}\,,$$

to $v = \tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h u$, $u \in L^2(0,+\infty)$, and after noticing (since we assumed $V' > 0$ on $[0,1]$) that for some $C > 0$,

$$\forall x \in \mathrm{Supp}\ \tilde{\chi}_h, \quad V(x) \geq V(h^\rho/2) \geq \frac{h^\rho}{C}\,,$$

we get

$$\begin{aligned}
&\frac{h^\rho}{C}\|\tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h u\|^2 \leq \|V^{1/2}\tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h u\|^2\\
&\leq \|(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})\tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h u\|\ \|\tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h u\|\\
&\leq (\|u\| + \|[\mathcal{A}_h, \tilde{\chi}_h](\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h u\|)\|\tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h u\|\\
&\leq (1 + \mathcal{O}(h^{2/3-\rho}))\|\tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h u\|\|u\|\,,
\end{aligned}$$

where we have used an estimate similar to (4.4.23) (with $+\lambda_0 h^{2/3}$ instead of $-\lambda(h)$) to control the commutator term.
Hence,

$$\|\tilde{\chi}_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^\rho}\right)\,. \tag{4.6.10}$$

Thus, since $\rho \in (1/3, 2/3)$, (4.6.4), (4.6.7), (4.6.8), (4.6.9) and (4.6.10) yield

$$\|\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]} - \chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}\| = o\left(\frac{1}{h^{2/3}}\right)\,. \tag{4.6.11}$$

In order to get (4.6.3), it remains to show that

$$\|\chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h} - (\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\| = o\left(\frac{1}{h^{2/3}}\right)\,. \tag{4.6.12}$$

In this purpose, we write

$$\chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h}+\lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h}+\lambda_0 h^{2/3}) = \chi^2_{-,h} - \chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h}+\lambda_0 h^{2/3})^{-1}[\mathcal{A}_{-,h}, \chi_{-,h}\,]\,,$$

and composing on the right by $(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}$,

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1} - \chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\chi_{-,h} = \tilde{\chi}_h^2(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\tilde{\chi}_h^2\\
&+\chi_{-,h}(\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}[\mathcal{A}_{-,h}, \chi_{-,h}](\mathcal{A}_{-,h} + \lambda_0 h^{2/3})^{-1}\,.
\end{aligned}$$

The second term in the right-hand side can be estimated as (4.6.8), while the first one satisfies the same bound as in (4.6.10), hence (4.6.12) holds. This concludes the proof of Proposition 4.6.1. □

The upper bound (4.6.1) follows easily from [96], Section IV, §3.5. Indeed, for any subsequence $h_j \to 0$ and any eigenvalue

$$\mu \in h_j^{2/3}\sigma((\mathcal{A}_{-,h_j} + \lambda_0 h_j^{2/3})^{-1}) \setminus \{0\}\,,$$

there exists a sequence $(\mu_j)_{j\geq 1}$, with

$$\mu_j \in h_j^{2/3}\sigma(\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_{h_j}+\lambda_0 h_j^{2/3})^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]})\setminus\{0\} = h_j^{2/3}\sigma((\mathcal{A}_{h_j}+\lambda_0 h_j^{2/3})^{-1})\setminus\{0\}\,,$$

such that $\mu_j \to \mu$ as $j\to+\infty$. In particular, with $\mu = 1/(e^{i\pi/3}|\mu_1|J^{2/3}+\lambda_0)$, we get a sequence $\lambda_j = h_j^{2/3}(1/\mu_j-\lambda_0)\in\sigma(\mathcal{A}_{-,h_j})$ such that $h_j^{-2/3}\mathrm{Re}\,\lambda_j \to |\mu_1|J^{2/3}/2$ as $j\to+\infty$, which proves (4.6.1).

4.7 Upper bound for a Morse potential

In this section, we prove the upper bound in (4.1.11), following the method of Section 4.6. Namely, we want to prove

$$\varlimsup_{h\to 0}\frac{1}{h}\inf\mathrm{Re}\,\sigma(\mathcal{A}_h)\leq\frac{\kappa}{2}\,. \qquad (4.7.1)$$

Let $\lambda_0>0$ and $\lambda(h)=\lambda_0 h$. Let $k_0\in\{1,\dots,p\}$ such that

$$\kappa_{k_0} = \min_{k=1,\dots,p}\kappa_k =: \kappa\,,$$

where κ_k is the quantity defined in (4.1.9).
By reproducing the argument given at the end of previous section, it is enough to prove the following :

Proposition 4.7.1 *Under the assumptions of Theorem 4.1.3, we have*

$$\|\mathbf{1}_{\bar\Omega}(\mathcal{A}_h+\lambda_0 h)^{-1}\mathbf{1}_{\bar\Omega}-(\mathcal{H}_{k_0,h}+\lambda_0 h)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(0,+\infty))} = o\left(\frac{1}{h}\right)\,, \qquad (4.7.2)$$

as $h\to 0$, where $\mathcal{H}_{k_0,h}$ is the approximate operator defined in (4.5.5).

Proof :
Let us denote

$$\mathcal{L}(x_{k_0}^c) = V^{-1}(\{V(x_{k_0}^c)\})\setminus\{x_{k_0}^c\}\,.$$

By assumption (4.1.10), we have

$$\forall x\in\mathcal{L}(x_{k_0}^c),\quad \nabla V(x)\neq 0\,. \qquad (4.7.3)$$

Notice that $V^{-1}(\{V(x_{k_0^c})\})$ may contain only $x_{k_0}^c$ if it is an absolute extremum. Some points $x\in\mathcal{L}(x_{k_0}^c)$ could also lie on $\partial\Omega$, but to simplify the proof, we shall assume that $\mathcal{L}(x_{k_0}^c)\cap\partial\Omega=\emptyset$. If not, we can handle the corresponding terms in (4.7.5) by using estimates similar to (4.4.29) and (4.4.30).
Let $\rho'\in(1/3,1/2)$, and $\theta_{k_0,h}$, $\mathcal{H}_{k_0,h}$ as in Section 4.5. For every $h\in(0,h_0)$, we choose a set of indices $L(h)\subset\mathbb{N}$ and a set of points

$$\left\{d_\ell(h)\in\mathcal{L}(x_{k_0}^c) : \ell\in L(h)\right\}\,,$$

such that

$$\mathcal{L}(x_{k_0}^c)\subset\bigcup_{\ell\in L(h)}B(d_\ell(h),h^{\rho'})$$

and such that $\bar{B}(d_\ell(h), h^{\rho'}/2) \cap \bar{B}(d_m(h), h^{\rho'}/2) = \emptyset$ for every $\ell, m \in L(h)$, $\ell \neq m$.
For $\ell \in L(h)$, we choose $\varphi_{\ell,h} \in \mathcal{C}_0^\infty\big(B(d_\ell(h), h^{\rho'}); [0,1]\big)$, $\varphi_{\ell,h}(x) = 1$ if $x \in \bar{B}(d_\ell(h), h^{\rho'}/2)$. Let

$$\psi_h = \mathbf{1}_{\bar{\Omega}}(x) \sqrt{1 - \theta_{k_0,h}(x)^2 - \sum_{\ell \in L(h)} \varphi_{\ell,h}(x)^2}\,.$$

We will use the same kind of approximate operator as before on Supp $\varphi_{\ell,h}$:

$$\mathcal{A}_{\ell,h} = -h^2\Delta + i\big(V(d_\ell(h)) + \nabla V(d_\ell(h)) \cdot (x - d_\ell(h))\big)\,.$$

Let $\lambda_0 > 0$. Our approximate resolvent is

$$\tilde{\mathcal{Q}}(h) = \theta_{k_0,h}(\mathcal{H}_{k_0,h}+\lambda_0 h)^{-1}\theta_{k_0,h} + \sum_{\ell \in L(h)} \varphi_{\ell,h}(\mathcal{A}_{\ell,h}+\lambda_0 h)^{-1}\varphi_{\ell,h} + \psi_h(\mathcal{A}_h+\lambda_0 h)^{-1}\psi_h\,, \tag{4.7.4}$$

and we have

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{[0,1]}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\mathbf{1}_{[0,1]} - \theta_{k_0,h}(\mathcal{H}_{k_0,h} + \lambda_0 h)^{-1}\theta_{k_0,h} = \psi_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\psi_h \\
&+ \sum_{\ell \in L(h)} \varphi_{\ell,h}(\mathcal{A}_{\ell,h} + \lambda_0 h)^{-1}\varphi_{\ell,h} \\
&-\mathbf{1}_{\bar{\Omega}}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\theta_{k_0,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{H}_{k_0,h})(\mathcal{H}_{k_0,h} + \lambda_0 h)^{-1}\theta_{k_0,h} \\
&-\mathbf{1}_{\bar{\Omega}}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\mathbf{1}_{\bar{\Omega}}[\mathcal{A}_h, \theta_{k_0,h}](\mathcal{H}_{k_0,h} + \lambda_0 h)^{-1}\theta_{k_0,h} \\
&- \sum_{\ell \in L(h)} \mathbf{1}_{\bar{\Omega}}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\varphi_{\ell,h}(\mathcal{A}_h - \mathcal{A}_{\ell,h})(\mathcal{A}_{\ell,h} + \lambda_0 h)^{-1}\varphi_{\ell,h} \\
&- \sum_{\ell \in L(h)} \mathbf{1}_{\bar{\Omega}}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\mathbf{1}_{\bar{\Omega}}[\mathcal{A}_h, \varphi_{\ell,h}](\mathcal{A}_{\ell,h} + \lambda_0 h)^{-1}\varphi_{\ell,h} \\
&-\mathbf{1}_{\bar{\Omega}}(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\mathbf{1}_{\bar{\Omega}}[\mathcal{A}_h, \psi_h](\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\psi_h\,.
\end{aligned} \tag{4.7.5}$$

In the following, we assume for simplicity that $V(x_{k_0}^c) = 0$ (if not, one only has to replace $\lambda_0 h$ by $\lambda_0 h + iV(x_k^c))$.
Using that, for some $C > 0$,

$$\forall x \in \text{Supp } \psi_h, \quad |V(x)| \geq \frac{h^{\rho'}}{C}\,,$$

we can prove as (4.6.10) that

$$\|\psi_h(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\psi_h\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{\rho'}}\right)\,.$$

Besides, as already stated, we have by rescaling :

$$\|(\mathcal{A}_{\ell,h} + \lambda_0 h)^{-1}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^{2/3}}\right) \quad \text{and} \quad \|(\mathcal{H}_{k_0,h} + \lambda_0 h)^{-1}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right)\,. \tag{4.7.6}$$

We have also clearly

$$\|(\mathcal{A}_h + \lambda_0 h)^{-1}\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right)\,. \tag{4.7.7}$$

Hence, we can check, as in (4.6.7) and (4.6.8), that all the other terms in the right-hand side of (4.7.5) are of the form $o(h^{-1})$ as $h \to 0$. The sums over $L(h)$ can be estimated by Lemma 4.4.1.
Finally, it remains to show that

$$\|\theta_{k_0,h}(\mathcal{H}_{k_0,h}+\lambda_0 h)^{-1}\theta_{k_0,h} - (\mathcal{H}_{k_0,h}+\lambda_0 h)^{-1}\| = o\left(\frac{1}{h}\right),$$

which can be done as for (4.6.12). □

4.8 Semigroups estimates

In this section we prove Corollary 4.1.4 by using a quantitative version of the Gearhardt-Prüss Theorem [83]. Indeed, the standard version does not enable us to get a uniform control of the constant M_ε with respect to h in (4.1.13) and (4.1.14).
We focus on the proof of (4.1.13), the case of (ii) being similar.
For all $\varepsilon > 0$, according to (4.1.6) there exists $h_\varepsilon > 0$ such that

$$\forall h \in (0, h_\varepsilon), \quad \sup_{\nu\in\mathbb{R}} \|(\mathcal{A}_h - (|\mu_1| J_m^{2/3}/2 - \varepsilon)h^{2/3} - i\nu)^{-1}\| \le \frac{C_\varepsilon}{h^{2/3}}.$$

Moreover, the operator $\mathcal{A}_h$ being maximal accretive, it generates a contraction semigroup $e^{-t\mathcal{A}_h}$:

$$\forall t > 0, \quad \|e^{-t\mathcal{A}_h}\| \le 1. \tag{4.8.1}$$

We apply [83], Theorem 1.5, with $\omega = -(|\mu_1| J_m^{2/3} - \varepsilon)h^{2/3} < 0$, $r(\omega)^{-1} \le C_\varepsilon h^{-2/3}$, $m(t) \equiv 1$ and $a = \tilde{a} = t/2$, which yields

$$\|e^{-t\mathcal{A}_h}\| \le \frac{(|\mu_1| J_m^{2/3} - \varepsilon)C_\varepsilon}{1 - e^{-(|\mu_1| J_m^{2/3}/2-\varepsilon)h^{2/3}t/2}} e^{-(|\mu_1| J_m^{2/3}/2-\varepsilon)h^{2/3}t}. \tag{4.8.2}$$

Let $c_0 > 0$ and $t_h = 2c_0 h^{-2/3}/(|\mu_1| J_m^{2/3} - \varepsilon)$. Then, by (4.8.2),

$$\forall t \ge t_h, \quad \|e^{-t\mathcal{A}_h}\| \le M_\varepsilon^{(1)} e^{-(|\mu_1| J_m^{2/3}-\varepsilon)h^{2/3}t},$$

with

$$M_\varepsilon^{(1)} = \frac{(|\mu_1| J_m^{2/3} - \varepsilon)C_\varepsilon}{1 - e^{-c_0}}.$$

Moreover, by (4.8.1),

$$\forall t \le t_h, \quad \|e^{-t\mathcal{A}_h}\| \le M_\varepsilon^{(2)} e^{-(|\mu_1| J_m^{2/3}-\varepsilon)h^{2/3}t},$$

with $M_\varepsilon^{(2)} = e^{2c_0}$.
Thus,

$$\forall t > 0, \quad \|e^{-t\mathcal{A}_h}\| \le M_\varepsilon e^{-(|\mu_1| J_m^{2/3}-\varepsilon)h^{2/3}t}, \tag{4.8.3}$$

with $M_\varepsilon = \max(M_\varepsilon^{(1)}, M_\varepsilon^{(2)})$.
Estimate (4.1.14) can be proved the same way.

To prove the optimality statement in (iii) of Corollary 4.1.4, under the assumptions of Theorem 4.1.3, we just consider

$$u_h \in \ker(\mathcal{A}_h - \lambda_{0,h} h)\,,$$

where $\lambda_{0,h}$ satisfies $h\lambda_{0,h} \in \sigma(\mathcal{A}_h)$ and $h\mathrm{Re}\,\lambda_{0,h} = \inf \mathrm{Re}\,\sigma(\mathcal{A}_h)$.
Then, we have

$$e^{-t\mathcal{A}_h} u_h(x) = e^{-\lambda_{0,h} h t} u_h(x)\,.$$

Thus, by (4.1.11), for every $t > 0$ and $\varepsilon > 0$, there exists $h_\varepsilon > 0$ such that, for every $h \in (0, h_\varepsilon)$,

$$\|e^{-t\mathcal{A}_h} u_h\| = e^{-\lambda_{0,h} h t} \|u_h\| \geq e^{-(\kappa/2+\varepsilon) h t} \|u_h\|\,.$$

Optimality in (4.1.13) under the assumptions of Theorem 4.1.2 can be proved the same way.

4.9 Application to the stability of the normal state in superconductivity

In this section, we recall the results of [7] and explain how we can recover them, in the simplified setting of a smooth domain Ω , by rewriting Corollary 4.1.4 in the large domain limit.

4.9.1 The time-dependent Ginzburg-Landau equations

In this subsection we recall the time-dependent Ginzburg-Landau model, and we introduce the simplifications leading to the linear problem which shall be considered in next subsection.

Superconducting materials are known to lose their electrical resistance when placed at a lower temperature than their critical one. However, if a sufficiently strong current is applied throughout the sample, then superconductivity disappears and the material reverts to the normal state, even if the temperature remains lower than the critical one.
In order to understand this phenomenon, we consider the time-dependent Ginzburg-Landau model, which can be written as follows in the 2-dimensional setting (see [7] for the 3-dimensional version of the system) :

$$\begin{cases} \partial_t\psi + i\Phi\psi = (\nabla - i\mathbf{A})^2\psi + \psi(1-|\psi|^2)\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \kappa^2 \mathrm{curl}^2\mathbf{A} + \sigma(\partial_t\mathbf{A} + \nabla\Phi) = \mathrm{Im}\,(\overline{\psi}(\nabla - i\mathbf{A})\psi)\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \psi(t,x) = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \sigma(\partial_t\mathbf{A}(t,x) + \nabla\Phi(t,x)) \cdot \vec{n}(x) = J(x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \mathrm{curl}\ \mathbf{A}(t,x) = H_{ex}(x)\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega\,, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x)\,, & x \in \Omega\,, \\ \mathbf{A}(0,x) = \mathbf{A}_0(x)\,, & x \in \Omega\,. \end{cases} \tag{4.9.1}$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a smooth bounded, connected domain and $\vec{n}(x)$ denotes the outward normal on $\partial\Omega$ at x.
The unknown functions are $\psi(t,x) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}(t,x) \in \mathbb{R}^2$ and $\Phi(t,x) \in \mathbb{R}$. The

function ψ denotes the so-called *order parameter* of the superconductor, and $|\psi|^2$ represents the density of presence of superconducting electrons in the material. Hence $\psi \equiv 0$ corresponds to the normal state where superconductivity does not take place, whereas $\psi \equiv 1$ represents a purely superconducting state.
$\mathbf{A}$ denotes the magnetic potential in the sample, and Φ the electric current. H_{ex} denotes the exterior magnetic field, and $J \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$ represents the electric current applied through Ω. In the following we will denote the magnetic field by $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$.
The constants κ and σ denote respectively the Ginzburg-Landau parameter, which is a material property, and the normal conductivity of the sample.

Our goal in the following is to prove, under additional assumptions and in the large domain limit, that if the applied electric current J is strong enough, then the normal state solution is stable as $t \to +\infty$. This problem was solved in [7], in a more physically relevant setting. More precisely, the author considered a non-smooth domain Ω with right-angled corners at its boundary, such that $\partial\Omega = \partial\Omega_c \sqcup \partial\Omega_i$, with different boundary conditions on each component $\partial\Omega_c$ and $\partial\Omega_i$. Here we shall recover the results in [7] in the case of a smooth boundary.

Let us first consider the stationary normal solution $(0, \mathbf{A}_n, \Phi_n)(x)$ of (4.9.1). Then the second line of (4.9.1) yields

$$\frac{\kappa^2}{\sigma}\text{curl } \mathbf{B}_n + \nabla\Phi_n = 0\,,$$

where $\mathbf{B}_n = \text{curl } \mathbf{A}_n$. Hence Φ_n is harmonic in Ω.
Now we neglect the effects of the magnetic field, that is, we assume $H_{ex} = \mathbf{A} = 0$, and we consider the linearization of (4.9.1) near the stationary normal state $(0, 0, \Phi_n)$ which leads to the system

$$\begin{cases} \partial_t\psi - \Delta\psi + i\Phi_n\psi - \psi = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega\,, \\ -\Delta\Phi_n = 0\,, & x \in \Omega, \\ \nabla\phi_n(x)\cdot\vec{n}(x) = \frac{\kappa^2}{\sigma}J(x), & x \in \partial\Omega\,, \\ \psi(t,x) = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \psi(0,x) = \psi_0(x)\,, & x \in \Omega\,. \end{cases} \tag{4.9.2}$$

Furthermore, we shall assume that $\nabla\Phi_n \neq 0$ in Ω. Indeed, in the setting of a domain Ω with right-angled corners at its boundary, this assumption can be easily justified, see [7].

The case where the magnetic field is not neglected has been studied in [9, 10, 11, 8]. Moreover, the results of [8] include the analysis of the nonlinear term $\psi(1 - |\psi|^2)$.

In the following subsection, we shall assume that Ω is a large domain in order to recover the operator $\mathcal{A}_h$ studied in the previous sections.

4.9.2 Stability of the normal state

Here again we follow [7]. We consider equations (4.9.2) in the domain $\Omega_R = \{Rx : x \in \Omega\}$ for $R > 1$. In order to preserve the gradient, we consider an electric potentiel of the form

$$\Phi_R(x) = R\Phi_n\left(\frac{x}{R}\right).$$

Thus, we consider the problem

$$\begin{cases} \partial_t \psi_R - \Delta\psi_R + iR\Phi_n\left(\frac{x}{R}\right)\psi_R - \psi_R = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_R\,, \\ \psi_R(t,x) = 0\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ \psi_R(0,x) = \psi_{0,R}(x)\,, & x \in \Omega\,, \end{cases} \tag{4.9.3}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and we no longer need to assume $n = 2$.
The function Φ_n is assumed to be smooth and satisfies, for all $x \in \bar{\Omega}$, $\nabla\Phi_n(x) \neq 0$.
In other words, we have

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \quad \psi_R(t,x) = e^{-t\mathcal{L}_R}\psi_{0,R}(x)\,, \tag{4.9.4}$$

where

$$\begin{cases} \mathcal{L}_R = -\Delta + iR\Phi_n\left(\frac{x}{R}\right) - 1\,, \\ \mathcal{D}(\mathcal{L}_R) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,. \end{cases}$$

Let us set $h = h(R) = R^{-3/2}$, and $T_R : u(x) \mapsto Ru(x/R)$. Then,

$$T_R\mathcal{L}_R T_R^{-1} = h(R)^{-2/3}(-h(R)^2\Delta + i\Phi_n - h(R)^{2/3}))\,.$$

Hence, for all $t > 0$ and $R > 1$ we have $\|e^{-t\mathcal{L}_R}\| = \|e^{-(th(R)^{-2/3})(\mathcal{A}_{h(R)} - h(R)^{2/3})}\|$, where $\mathcal{A}_h$ is the operator defined in (4.1.1), where $V = \Phi_n$ satisfies the assumptions of Theorem 4.1.1. Thus, Corollary 4.1.4 yields :

Theorem 4.9.1 (Y. Almog, [7]) *Let*

$$\partial\Omega_\perp = \{x \in \partial\Omega : \nabla\Phi_n(x) \times \vec{n}(x) = 0\}$$

and, if $\partial\Omega_\perp \neq \emptyset$,

$$J_m = \min_{x \in \partial\Omega_\perp} |\nabla\Phi_n(x)|\,.$$

Let

$$J_c = \left(\frac{2}{|\mu_1|}\right)^{3/2}.$$

If $\partial\Omega_\perp = \emptyset$ *or* $J_m > J_c$, *then for all* $\varepsilon > 0$, *there exists* $R_0 > 1$ *and* $M_\varepsilon > 0$ *such that, for all* $R \geq R_0$ *and* $\psi_{0,R} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, *the solution* ψ_R *of (4.9.3) satisfies*

$$\forall t > 0\,, \quad \|\psi_R(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq M_\varepsilon \exp(-((J_m/J_c)^{2/3} - 1 - \varepsilon)t)\|\psi_{0,R}\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{4.9.5}$$

The results of [9, 10, 11, 8] give similar conditions for the stability of the normal state in the presence of a magnetic field.

Chapitre 5

Degenerate parabolic operators of Kolmogorov type with a geometric control condition

We consider Kolmogorov-type equations on a rectangle domain $(x, v) \in \Omega = \mathbb{T} \times (-1, 1)$, that combine diffusion in variable v and transport in variable x at speed v^γ, $\gamma \in \mathbb{N}^*$, with Dirichlet boundary conditions in v. We study the null controllability of this equation with a distributed control as source term, localized on a subset ω of Ω.

In dimension one, when the control acts on a horizontal strip $\omega = \mathbb{T} \times (a, b)$ with $0 < a < b < 1$, then the system is null controllable in any time $T > 0$ when $\gamma = 1$, and only in large time $T > T_{min} > 0$ when $\gamma = 2$ (see [13]). In this article, we prove that, when $\gamma > 3$, the system is not null controllable (whatever T is) in this configuration. This is due to the diffusion weakening produced by the first order term.

When the control acts on a vertical strip $\omega = \omega_1 \times (-1, 1)$ with $\overline{\omega_1} \subset \mathbb{T}$, we investigate the null controllability on a toy model, where $(\partial_x, x \in \mathbb{T})$ is replaced by $((-\Delta)^{1/2}, x \in \Omega_1)$, and Ω_1 is an open subset of $\mathbb{R}^N$. As the original system, this toy model satisfies the controllability properties listed above. We prove that, for $\gamma = 1, 2$ and for appropriate domains (Ω_1, ω_1), then null controllability does not hold (whatever $T > 0$ is), when the control acts on a vertical strip $\omega = \omega_1 \times (-1, 1)$ with $\overline{\omega_1} \subset \Omega_1$. Thus, a geometric control condition is required for the null controllability of this toy model. This indicates that a geometric control condition may be necessary for the original model too.

5.1 Introduction

5.1.1 Origin of the problem

The goal of this article is to study the null controllability of Kolmogorov-type equations

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) - v^\gamma \partial_x f(t,x,v) - \partial_v^2 f(t,x,v) = u(t,x,v) 1_\omega(x,v)\,, & (t,x,v) \in (0,T)\times\Omega\,, \\ f(t,x,\pm 1) = 0\,, & (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{T}\,, \\ f(0,x,v) = f_0(x,v)\,, & (x,v)\in\Omega\,, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

where $\Omega = \mathbb{T}\times(-1,1)$, $\gamma \in \mathbb{N}^*$, $T>0$, and the control is a source term $u(t,x,v)$ localized on a nonempty open subset ω of Ω. This equation, with $\gamma = 1$, is close to linearizations of Prandt or Crocco-type equations for fluids [110, 27, 26] ; this motivates the study of the controllability of (5.1.1). For other values of $\gamma\in\mathbb{N}^*$, there are less physical motivations, but the behavior of the system with respect to null controllability is extremely interesting, from a theoretical point of view (finite speed of propagation, geometric control condition, the first order term weakens diffusion in variable v).

Definition 5.1.1 (Null controllability) *Let $T>0$ and $\gamma\in\mathbb{N}^*$. System (5.1.1) is* null controllable *in time T if, for any $f_0 \in L^2(\Omega)$, there exists $u \in L^2((0,T)\times\Omega)$ such that the solution of (5.1.1) satisfies $f(T,\cdot,\cdot) = 0$.*

By duality, null controllability is equivalent to observability for the adjoint system

$$\begin{cases} \partial_t g(t,x,v) + v^\gamma \partial_x g(t,x,v) - \partial_v^2 g(t,x,v) = 0\,, & (t,x,v)\in(0,+\infty)\times\Omega\,, \\ g(t,x,\pm1) = 0\,, & (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{T}\,, \\ g(0,x,v) = g_0(x,v)\,, & (x,v)\in\Omega\,. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Definition 5.1.2 (Observability) *Let $T>0$, $\gamma\in\mathbb{N}^*$ and ω be a non empty open subset of Ω. System (5.1.2) is* observable *in ω in time T if there exists $\mathcal{C}>0$ such that, for any $g_0\in L^2(\Omega)$, the solution of the Cauchy problem (5.1.2) satisfies*

$$\int_\Omega |g(T,x,v)|^2\,dxdv \leqslant \mathcal{C}\int_0^T\int_\omega |g(t,x,v)|^2\,dxdvdt\,.$$

Equation (5.1.2) combines diffusion in variable v and transport in variable x (at speed v^γ). Thanks to the interplay between these two phenomena, the equation diffuses both in variables v and x (see Proposition 5.6.2) but, in a weaker way than the heat equation $\partial_t g - \partial_x^2 g - \partial_v^2 g = 0$. Thus, natural questions are the following ones.

Question 1 : Is the diffusion in variable v strong enough for observability to hold when the control acts on a horizontal strip $\omega = \mathbb{T}\times(a,b)$ with $0<a<b<1$, whatever $\gamma\in\mathbb{N}^*$ is ? (i.e. as for equation $\partial_t g - \partial_v^2 g = 0$, $(t,x,v)\in(0,T)\times\mathbb{T}\times(-1,1)$)

Question 2 : Is the diffusion in variable x sufficient for null controllability to hold when the control acts on a vertical strip $\omega = \omega_1 \times (-1,1)$ where $\omega_1 \subset\subset \mathbb{T}$?

The goal of this article is to answer the first question and to study the second one for a toy-model.

Null controllability of Equation (5.1.2) is studied in [13] when the control is localized in a horizontal strip $\omega = \mathbb{T} \times (a,b)$ with $-1 < a < b < 1$. Precisely, the following theorem is proved by the first author in [13].

Theorem 5.1.3

1. *If $\gamma = 1$ and $\omega = \mathbb{T} \times (a,b)$ with $-1 < a < b < 1$, then System (5.1.2) is observable in ω in any time $T > 0$.*
2. *If $\gamma = 2$ and $\omega = \mathbb{T} \times (a,b)$ with $0 < a < b < 1$ then there exists $T^* \geqslant a^2/2$ such that*
   - *System (5.1.2) is observable in ω in any time $T > T^*$;*
   - *System (5.1.2) is not observable in ω in time $T < T^*$.*
3. *If $\gamma = 2$ and $\omega = \mathbb{T} \times (a,b)$ with $-1 < a < 0 < b < 1$ then System (5.1.2) is observable in any time $T > 0$.*

When $\gamma = 1$, Statement 1 above illustrates that there is an infinite speed of propagation in the direction v. When $\gamma = 2$, Statements 2 and 3 above illustrate a different situation : a finite speed of propagation in variable v occurs and the information needs time to reach the degeneracy $\{v = 0\}$ from the observation location ω when $\omega \cap \{v = 0\} = \emptyset$.

5.1.2 Main results

The first goal of this article is to prove that observability does not hold, when $\gamma \geqslant 3$ and the control acts on a horizontal strip : the presence of the first order term $v^\gamma \partial_x f$ in the equation reduces diffusion in the variable v so strongly that observability becomes false. Thus, Theorems 5.1.3 and 5.1.4 below answer **Question 1**.

Theorem 5.1.4 *If $\gamma \geqslant 3$ and $\omega = \mathbb{T} \times (a,b)$ with $-1 < a < b < 1$, then System (5.1.2) is not observable in ω (whatever $T > 0$ is).*

The second goal of this article is to investigate null controllability of Equation (5.1.2) for $\gamma \in \{1,2\}$ when the control acts on a vertical strip $\omega = \omega_1 \times (-1,1)$ where $\omega_1 \subset\subset \mathbb{T}$. Unfortunately, we are not able to work directly on Equation (5.1.2). Thus, we consider the following toy model.

$$\begin{cases} \partial_t g(t,x,v) + i v^\gamma (-\Delta_x^D)^\beta g(t,x,v) - \partial_v^2 g(t,x,v) = 0\,, & (t,x,v) \in (0,T) \times \Omega\,, \\ g(t,x,\pm 1) = 0\,, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega_1\,, \\ g(0,x,v) = g_0(x,v)\,, & (x,v) \in \Omega_1 \times (-1,1)\,, \end{cases} \tag{5.1.3}$$

where

- $\Omega := \Omega_1 \times (-1,1)$, Ω_1 is a bounded open subset of $\mathbb{R}^{N_1}$ and $N_1 \in \mathbb{N}^*$,

– Δ_x^D is the Dirichlet-Laplace operator on Ω_1

$$D(\Delta_x^D) = H^2 \cap H_0^1(\Omega_1)\,, \qquad \Delta_x^D g = \Delta g\,,$$

– $\gamma \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in (0,1)$.

Of course, the case $\beta = 1/2$ is of particular interest for System (5.1.2). We use the same definition for the observability of Systems (5.1.2) and (5.1.3).

We are able to deny observability with explicit counterexamples, under an appropriate assumption $\mathcal{P}(s)$ on the open sets (Ω_1, ω_1). In order to express this assumption, we introduce the non decreasing sequence $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ of the eigenvalues of $(-\Delta_x^D)$ on Ω_1 and a corresponding orthonormal sequence of associated eigenfunctions,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x)\,, & x \in \Omega_1\,, \\ \varphi_n(x) = 0\,, & x \in \partial\Omega_1\,, \\ \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega_1)} = 1\,. & \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Definition 5.1.5 (Property $\mathcal{P}(s)$) *Let $s \in (0,1/2)$ and ω_1 be an open subset of Ω_1. The pair (Ω_1,ω_1) satisfies the property $\mathcal{P}(s)$ if*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \left[\frac{-1}{\lambda_n^s} \ln \left(\int_{\omega_1} |\varphi_n(x)|^2 dx \right) \right] = +\infty.$$

This assumption is related to the classical problem of high-frequency localization of the eigenfunctions of the Laplacian. Note that $1/2$ is the optimal upperbound for possible values of s (see [99, Theorem 5.4 and Proposition 5.5]). Particular examples of pairs (Ω_1,ω_1) satisfying Property $\mathcal{P}(s)$ for any $s \in (0,1/2)$ are discussed in Section 5.4. For instance, if Ω_1 is a conical open subset of $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ generated by an open subset U of $\mathbb{S}^{d-1}$,

$$\Omega_1 = \{x = rx'\,;\, 0 < r < 1\,, x' \in U\}\,,$$

and ω_1 is an open subset of Ω_1 that does not intersect its boundary $\partial\Omega_1$, then the pair (Ω_1,ω_1) satisfies Property $\mathcal{P}(s)$ for every $s \in (0,1/2)$. One can indeed construct a subsequence of eigenfunctions $\widetilde{\varphi}_k$ localized near the boundary $\partial\Omega_1$, called "whispering gallery eigenmodes".

Our first nonobservability result concerns System (5.1.3) for $\gamma = 1$.

Theorem 5.1.6 *We assume $\gamma = 1$.*

1. *If $\beta > 0$ and $\omega = \Omega_1 \times (a,b)$ where $0 < a < b < 1$ then System (5.1.3) is observable in ω in any time $T > 0$.*
2. *If $\beta \in (0,3/4)$ and (Ω_1,ω_1) satisfies Property $\mathcal{P}\left(\frac{2\beta}{3}\right)$, then System (5.1.3) is not observable in $\omega = \omega_1 \times (-1,1)$ (whatever $T > 0$ is).*

In particular, when $\beta = 1/2$, the diffusion in the variable v is strong enough for System (5.1.3) to be observable in a horizontal strip $\omega = \Omega_1 \times (a,b)$ in any positive time T. On the contrary, the diffusion in the variable x is too weak for System (5.1.3) to be observable in a vertical strip $\omega = \omega_1 \times (-1,1)$ in finite time T, at least for appropriate pairs (Ω_1,ω_1) that satisfy Property $\mathcal{P}(1/3)$ (which happens, for instance, when Ω_1 is a bounded conical open subset of $\mathbb{R}^d$ and $\overline{\omega_1} \subset \Omega_1$). Thus a Geometric Control Condition (GCC) on (Ω, ω) is required for (5.1.3) to be observable in ω. Theorem 5.1.6 indicates that System (5.1.2), with $\gamma = 1$, may require a GCC for being observable. This is a conjecture for the answer of **Question 2**.

Our second noncontrollability result concerns System (5.1.3) for $\gamma = 2$.

Theorem 5.1.7 *We assume $\gamma = 2$.*

1. *If $\beta > 0$ and $\omega = \Omega_1 \times (a, b)$ where $0 < a < b < 1$ then there exists $T^* \geqslant a^2/2$ such that*
   – *System (5.1.3) is observable in ω in any time $T > T^*$,*
   – *System (5.1.3) is not observable in ω in time $T < T^*$.*
2. *If $\beta \in (0, 1)$ and (Ω_1, ω_1) satisfies Property $\mathcal{P}\left(\frac{\beta}{2}\right)$, then System (5.1.3) is not observable in $\omega = \omega_1 \times (-1, 1)$ (whatever $T > 0$ is).*

In particular, when $\beta = 1/2$, the diffusion in the variable v is strong enough for System (5.1.3) to be observable in a horizontal strip $\omega = \Omega_1 \times (a, b)$, but there is a finite speed of propagation of the information from the observation location ω to the degeneracy set $\{v = 0\}$. On the contrary, the diffusion in the variable x is too weak for (5.1.3) to be observable in a vertical strip $\omega = \omega_1 \times (-1, 1)$ in finite time T, at least for appropriate pairs (Ω_1, ω_1). Thus a GCC on (Ω, ω) is required for (5.1.3) to be observable in ω. Theorem 5.1.7 encourages to conjecture that a GCC condition should be required for System (5.1.2), with $\gamma = 2$, to be observable.

5.1.3 Bibliographical comments

Null controllability of the heat equation

The null and approximate controllabilities of the heat equation are essentially well understood subjects for both linear and semilinear equations, for bounded or unbounded domains [59, 51, 60, 63, 64, 65, 71, 95, 98, 100, 104, 105, 142, 143] and also with discontinuous [52, 16, 17, 122] or singular [137, 58] coefficients.

In particular, the heat equation on a smooth bounded domain Ω of $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), with a source term located on an open subset ω of Ω, is null controllable in arbitrarily small time T and with an arbitrarily small control support ω. This result is related to the infinite speed of propagation of information in heat equation. It is proved, for the case $d = 1$ by H. Fattorini and D. Russell [61, Theorem 3.3], and, for $d \geqslant 2$ by O. Imanuvilov [93, 94] (see also the book [68] by A. Fursikov and O.Imanuvilov) and G. Lebeau and L. Robbiano [98]. It is then natural to wonder whether the same result holds for degenerate parabolic equations.

Boundary-degenerate parabolic equations

The null controllability of parabolic equations degenerating on the boundary of the domain in one space dimension is well understood, but much less is known in higher dimension. Given $0 < a < b < 1$ and $\gamma > 0$, let us consider the 1D equation

$$\partial_t w(t,x) + \partial_x(x^{2\gamma}\partial_x w)(t,x) = u(t,x)1_{(a,b)}(x)\,, \qquad (t,x) \in (0,+\infty)\times(0,1)\,,$$

with suitable boundary conditions. Then, null controllability holds if and only if $\gamma \in (0,1)$ [36, 37], while, for $\gamma \geq 1$, the best result one can obtain is the so called "regional null controllability"[35], which consists in controlling the solution within the domain of influence of the control. Several extensions of the above results are available in one space dimension, see [4, 102] for equations in divergence form, [34, 33] for operators in nondivergence form, and [32, 66] for cascade systems. Fewer results are available for multidimensional problems, and they are mainly obtained in the case of two dimensional parabolic operators which simply degenerate in the normal direction to the boundary of the space domain, see [38].

Parabolic equations degenerating inside the domain

In [103], P. Martinez, J. Vancostenoble and J.-P. Raymond study linearized Crocco type equations

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + \partial_x f(t,x,v) - \partial_{vv} f(t,x,v) = u(t,x,v)1_\omega(x,v)\,, & (t,x,v) \in (0,T)\times\mathbb{T}\times(0,1)\,,\\ f(t,x,0) = f(t,x,1) = 0\,, & (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{T}\,. \end{cases}$$

For a given strict open subset ω of $\mathbb{T}\times(0,1)$, they prove that null controllability does not hold : the optimal result is regional null controllability. Note that, for Kolmogorov-type equations (5.1.2), the coupling between diffusion in v and transport in x (at speed v^γ) generates diffusion both in variables x and v (see Proposition 5.6.2). Thus, the controllability results are different.

In [14], K. Beauchard, P. Cannarsa and R. Guglielmi study Grushin-type equations

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,y) - \partial_x^2 f(t,x,y) - |x|^{2\gamma}\partial_y^2 f(t,x,y) = u(t,x,y)1_\omega(x,y)\,, & (t,x,y) \in (0,T)\times\Omega\,,\\ f(t,x,y) = 0\,, & (t,x,y) \in (0,T)\times\partial\Omega\,, \end{cases} \tag{5.1.5}$$

where $\Omega := (-1,1)\times(0,1)$, $\omega \subset (0,1)\times(0,1)$, and $\gamma > 0$. Here, the parabolic operator degenerates along the line $\{0\}\times(0,1)$. They prove that

- null controllability holds in any time $T > 0$ when $\gamma \in (0,1)$;
- null controllability does not hold (whatever $T > 0$) when $\gamma > 1$;
- when $\gamma = 1$ and $\omega = (a,b)\times(0,1)$ with $0 < a < b < 1$, there exists $T_{min} \geqslant a^2/2$ such that null controllability holds when $T > T_{min}$ and does not hold when $T < T_{min}$.

Note that, contrary to Grushin-type equations (5.1.5), in Kolmogorov-type equations (5.1.2), the parabolic operator degenerates everywhere on the domain.

Unique continuation for Kolmogorov-type equations

In this section, we focus on unique continuation for Kolmogorov-type equations (5.1.2), i.e. whether the property $g(t,x,v) \equiv 0$ on $(0,T)\times\omega$ does imply $g \equiv 0$ on $(0,T)\times\Omega$, for a given open subset ω of Ω.

When $\omega = \mathbb{T} \times (a, b)$ is an horizontal strip, then the unique continuation of equation (5.1.2) holds for every $\gamma \in \mathbb{N}^*$, as a consequence of Holmgren theorem (the coefficients of the operator are analytic and the hypersurface $\mathbb{T} \times \{a, b\}$ is noncharacteristic). In particular, Theorem 5.1.4 emphasizes that, when $\gamma \geqslant 3$, then observability does not hold even if unique continuation holds.

To our best knowledge, when ω is a general open subset of Ω, then unique continuation for Kolmogorov-type equations (5.1.2) is an open problem.

J.-M. Bony proved in [21] that Hörmander's operators of the form $P = \sum_j X_j^2$ (i.e. such that the Lie algebra generated by the X_j has maximal rank at any point) with analytic coefficients, satisfy the unique continuation, in the following sense : if, for some f with non zero gradient, $f^{-1}(a)$ is a strongly noncharacteristic surface and u is a distribution such that $Pu = 0$ and $u = 0$ on $f^{-1}[(-\infty, a)]$, then $u \equiv 0$ on a neighborhood of $f^{-1}(a)$. The validity of the same result for Hörmander's operators of the form $P = X_0 + \sum_j X_j^2$ (generalizing our Kolmogorov operator $\mathcal{K} = \partial_t + v^\gamma \partial_x - \partial_v^2$) is an open problem.

When coefficients are not analytic, but only C^∞, unique continuation may not hold. For instance, S. Alinhac and C. Zuily built in [6] a zero order C^∞-perturbation of the Kolmogorov operator $\mathcal{K} = \partial_t + v^\gamma \partial_x - \partial_v^2$ for which unique continuation does not hold. There exist C^∞-functions $u(t, x, v)$ and $a(t, x, v)$ on a neighborhood V of 0 in $\mathbb{R}^3$ such that $Ku + au = 0$, $u(t, x, v) = a(t, x, v) = 0$ when $v < 0$, and $0 \in \mathrm{Supp}(u)$. And the same result holds with any surface $\{v = \text{constant}\}$.

The result of S. Alinhac and C. Zuily leaves open the question of the unique continuation for System (5.1.2). Indeed, their counterexample does not satisfy the boundary conditions of (5.1.2) and it cannot be built with $a = 0$. However, it suggests that unique continuation for System (5.1.2) is a subtle issue.

5.1.4 Structure of the paper

The article is organized as follows.

Section 5.2 is devoted to the proof of Theorem 5.1.4.

In Section 5.3, we prove the negative statements of Theorems 5.1.6 and 5.1.7. These results rely on a fine semi classical analysis of the complex Airy and Davies operators.

In Section 5.4, we propose examples of pairs (Ω_1, ω_1) satisfying Property $\mathcal{P}(s)$ for any $s \in (0, 1/2)$.

The proof of the positive results of Theorems 5.1.6 and 5.1.7 relies on the decomposition of the solution of (5.1.3) on a Hilbert basis of $L^2(\Omega_1)$, called 'Fourier decomposition' with a slight abuse of vocabulary. Thus, the validity of this decomposition and associated well-posedness results are treated in Section 5.5.

In Section 5.6, we prove the positive results of Theorems 5.1.6 and 5.1.7. The strategy is the same as in [13], but intermediate results have been improved. Hence we rewrite the proof completely. First, we state a Carleman estimate for the 1D-heat equation satisfied by the Fourier components. Then, we quantify the dissipation of Fourier modes ; this result is stronger than in [13]. Then, we combine these two tools to prove the first statements of Theorems 5.1.6 and 5.1.7.

5.2 Nonobservability when $\gamma \geqslant 3$

The goal of this section is the proof of Theorem 5.1.4. The strategy is the same as in [13, Section 5.3] but intermediate results are different. Let $\gamma \in \mathbb{N}^*$, $a\,, b\,, T \in \mathbb{R}$ be fixed, in the whole section, such that

$$\gamma \geqslant 3\,,\ T > 0 \text{ and } 0 < a < b < 1\,.$$

Step 1 : Approximate solution.
Let $\epsilon > 0$ be such that $b < 1-\epsilon$ and $\theta_\pm \in C^\infty(\mathbb{R})$ be such that $\mathrm{Supp}(\theta_-) \subset (-1-\epsilon, -1+\epsilon)$, $\mathrm{Supp}(\theta_+) \subset (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ and $\theta_\pm(\pm 1) = 1$. Let $\mu \in \mathbb{C}$ be some eigenvalue, with smallest real part, of the operator $(-\partial_y^2 + iy^\gamma)$, with domain

$$\mathcal{D}_\gamma := \{u \in H^2(\mathbb{R}) \text{ s. t. } y^\gamma u \in L^2(\mathbb{R})\}\,.$$

Note that this operator has compact resolvent (see [81]) ; moreover, μ is a simple eigenvalue and a real number if $\gamma = 3$. Let ξ be an associated eigenfunction

$$\begin{cases} -\xi''(y) + iy^\gamma \xi(y) = \mu\,\xi(y)\,, & y \in \mathbb{R}\,,\\ \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1\,. \end{cases}$$

We recall that (see [125, Chapter 10, Sections 59 and 60])

$$|\xi(y)| \leqslant Ce^{-c\,|y|^{\frac{2+\gamma}{2}}}\,, \quad \forall y \in \mathbb{R} \tag{5.2.1}$$

for some constants $C, c > 0$.
For $n \in \mathbb{N}^*$, we define

$$\tilde{g}_n(t,v) := n^{\frac{1}{2(2+\gamma)}} \left[\xi\left(n^{\frac{1}{2+\gamma}} v\right) - \sum_{\sigma \in \{-,+\}} \xi\left(\sigma n^{\frac{1}{2+\gamma}}\right) \theta_\sigma(v)\right] e^{-\mu n^{\frac{2}{2+\gamma}} t}\,.$$

We have

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{g}_n(t,v) + in\,v^\gamma \tilde{g}_n(t,v) - \partial_v^2 \tilde{g}_n(t,v) = E_n(t,v)\,, & (t,v) \in (0,T)\times(-1,1)\,,\\ \tilde{g}_n(t,\pm 1) = 0\,, & t \in (0,T)\,, \end{cases}$$

where

$$E_n(t,v) = n^{\frac{1}{2(2+\gamma)}} \sum_{\sigma \in \{-,+\}} \Big((\mu\,n^{\frac{2}{2+\gamma}} - in\,v^\gamma)\theta_\sigma(v) + \theta''_\sigma(v)\Big)\xi\left(\sigma\,n^{\frac{1}{2+\gamma}}\right) e^{-\mu\,n^{\frac{2}{2+\gamma}} t}\,. \tag{5.2.2}$$

Let g_n be the solution of

$$\begin{cases} \partial_t g_n(t,v) + in\,v^\gamma g_n(t,v) - \partial_v^2 g_n(t,v) = 0\,, & (t,v) \in (0,T)\times(-1,1)\,,\\ g_n(t,\pm 1) = 0\,, & t \in (0,T)\,,\\ g_n(0,v) = \tilde{g}_n(0,v)\,, & v \in (-1,1)\,. \end{cases}$$

We have

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\tilde{g}_n - g_n)(t)\|^2_{L^2(-1,1)} = -\|\partial_v(\tilde{g}_n - g_n)(t)\|^2_{L^2(-1,1)} + \mathrm{Re}\left(\int_{-1}^1 \overline{E_n(t,v)}(\tilde{g}_n - g_n)(t,v)dv\right)\,.$$

By Poincaré and Cauchy-Schwarz Inequalities, we deduce that, for every $t \in [0,T]$,

$$\frac{d}{dt}\|(\tilde{g}_n - g_n)(t)\|^2_{L^2(-1,1)} \leqslant -\frac{\pi^2}{4}\|(\tilde{g}_n - g_n)(t)\|^2_{L^2(-1,1)} + \frac{4}{\pi^2}\|E_n(t)\|^2_{L^2(-1,1)}\,.$$

From this inequality and (5.2.2), we deduce that, for every $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\|(\tilde{g}_n - g_n)(t)\|^2_{L^2(-1,1)} &\leqslant \tfrac{4}{\pi^2}\int_0^t \|E_n(\tau)\|^2_{L^2(-1,1)} e^{-\frac{\pi^2}{4}(t-\tau)}d\tau \\
&\leqslant C\, n^{2+\frac{1}{2+\gamma}} \sum_{\sigma\in\{-1,1\}} \left|\xi\left(\sigma\, n^{\frac{1}{2+\gamma}}\right)\right|^2 \int_0^t e^{\left(-2\mathrm{Re}\,(\mu)\, n^{\frac{2}{2+\gamma}} + \frac{\pi^2}{4}\right)\tau} d\tau \\
&\leqslant C\, n^{2-\frac{1}{2+\gamma}} \sum_{\sigma\in\{-1,1\}} \left|\xi\left(\sigma\, n^{\frac{1}{2+\gamma}}\right)\right|^2
\end{aligned}$$

where the constant C may change from line to line.
By (5.2.1), we deduce that

$$\|(\tilde{g}_n - g_n)(t)\|_{L^2(-1,1)} \leqslant C n^{\frac{3+2\gamma}{2(2+\gamma)}} e^{-c\sqrt{n}}\,, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{5.2.3}$$

Step 2 : Conclusion.
Working by contradiction, we assume that System (5.1.2) is observable in ω in time T. The observability inequality applied to the solution $g(t,x,v) := g_n(t,v)e^{inx}$ of (5.1.2) gives

$$\int_{-1}^{1} |g_n(T,v)|^2\, dv \leqslant \mathcal{C}\int_0^T\int_a^b |g_n(t,v)|^2\, dvdt\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,.$$

We deduce from the triangular inequality, the previous relation and (5.2.3) that

$$\begin{aligned}
\|\tilde{g}_n(T)\|_{L^2(-1,1)} \;&\leqslant\; \left(\mathcal{C}\int_0^T\int_a^b |\tilde{g}_n(t,v)|^2 dvdt\right)^{1/2} + \|(\tilde{g}_n - g_n)(T)\|_{L^2(-1,1)} \\
&\quad + \left(\mathcal{C}\int_0^T\int_a^b |(\tilde{g}_n - g_n)(t,v)|^2\, dvdt\right)^{1/2} \\
&\leqslant\; \left(\mathcal{C}\int_0^T\int_a^b |\tilde{g}_n(t,v)|^2\, dvdt\right)^{1/2} + (1+\sqrt{T\mathcal{C}})C\, n^{\frac{3+2\gamma}{2(2+\gamma)}} e^{-c\sqrt{n}}\,.
\end{aligned}$$

However, there exists $C > 0$ such that

$$\|\tilde{g}_n(T)\|_{L^2} \geqslant C e^{-\mathrm{Re}\,(\mu)\, n^{\frac{2}{2+\gamma}} T}$$

and

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T\int_a^b |\tilde{g}_n(t,v)|^2\, dvdt\right)^{1/2} \\
=\;& \left(\int_0^T\int_a^b n^{\frac{1}{(2+\gamma)}} \left|\xi\left(n^{\frac{1}{2+\gamma}} v\right)\right|^2 e^{-2\mathrm{Re}\,(\mu) n^{\frac{2}{2+\gamma}} t}\, dvdt\right)^{1/2} \quad \text{because } b < 1-\epsilon \\
=\;& \left(\int_{a\, n^{\frac{1}{2+\gamma}}}^{b\, n^{\frac{1}{2+\gamma}}} |\xi(y)|^2\, dy\right)^{1/2} \left(\int_0^T e^{-2\mathrm{Re}\,(\mu)\, n^{\frac{2}{2+\gamma}} t}\, dt\right)^{1/2} \\
\leqslant\;& C\, n^{\frac{-1}{2+\gamma}} \left(\int_{a\, n^{\frac{1}{2+\gamma}}}^{b\, n^{\frac{1}{2+\gamma}}} e^{-2c\,|y|^{\frac{2+\gamma}{2}}}\, dy\right)^{1/2} \quad \text{by (5.2.1)} \\
\leqslant\;& C\, n^{\frac{-1}{2(2+\gamma)}} e^{-c\, a^{\frac{2+\gamma}{2}}\sqrt{n}}\,.
\end{aligned}$$

This gives a contradiction, when $n \to +\infty$, because $\frac{2}{2+\gamma} < \frac{1}{2}$ when $\gamma > 2$. $\square$

5.3 Nonobservability on a vertical strip

The goal of this section is the proof of the nonobservability results of Theorems 5.1.6 and 5.1.7.

5.3.1 Accurate spectral analysis

In this section, we are interested in the spectrum of the operators

$$\mathcal{A}_{(-R,R)} := -\frac{d^2}{dy^2} + iy \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_{(-R,R)} := -\frac{d^2}{dy^2} + iy^2$$

defined on the segment $(-R, R)$, $R > 0$, with Dirichlet boundary conditions at $y = \pm R$, with domains

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{(-R,R)}) = \mathcal{D}(\mathcal{H}_{(-R,R)}) = H^2 \cap H_0^1((-R,R),\mathbb{C})\,.$$

More precisely, we study the asymptotic behavior, as $R \to +\infty$, of the bottom of the spectrum of $\mathcal{A}_{(-R,R)}$ and $\mathcal{H}_{(-R,R)}$ and we prove the following two theorems, in Subsections 5.3.3 and 5.3.4 respectively.

Theorem 5.3.1 *Let $\mu_1 < 0$ be the first zero of the Airy function. Then,*

$$\lim_{R\to\infty}\Big(\inf \operatorname{Re}\sigma(\mathcal{A}_{(-R,R)})\Big) = \frac{|\mu_1|}{2}\,, \tag{5.3.1}$$

where $\sigma(\mathcal{A}_{(-R,R)})$ denotes the spectrum of $\mathcal{A}_{(-R,R)}$. Moreover, for every $\varepsilon > 0$, there exists $R_\varepsilon > 0$ and $M_\varepsilon > 0$ such that, for every $R \geq R_\varepsilon$,

$$\sup_{\substack{\gamma \,\leq\, |\mu_1|/2 \,-\, \varepsilon,\\ \nu \,\in\, \mathbb{R}}} \Big\|\Big(\mathcal{A}_{(-R,R)} - (\gamma + i\nu)\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} \leqslant M_\varepsilon\,. \tag{5.3.2}$$

Now, let us consider the case of the Davies operator.

Theorem 5.3.2 *We have*

$$\lim_{R\to\infty}\Big(\inf \operatorname{Re}\sigma(\mathcal{H}_{(-R,R)})\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \tag{5.3.3}$$

Moreover, for every $\varepsilon > 0$, there exists $R'_\varepsilon > 0$ and $M'_\varepsilon > 0$ such that, for every $R \geq R'_\varepsilon$,

$$\sup_{\substack{\gamma \,\leq\, \sqrt{2}/2 \,-\, \varepsilon,\\ \nu \,\in\, \mathbb{R}}} \Big\|\Big(\mathcal{H}_{(-R,R)} - (\gamma + i\nu)\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} \leqslant M'_\varepsilon\,. \tag{5.3.4}$$

Analogous questions have been considered in [7, 10, 11, 9] and [8] in relation with problems occuring in superconductivity. We study these two operators using the techniques developed in these references. The study of more general cases (dimension 2) complementary to those studied in [7] and [8] will be done in [87].

5.3.2 Proof of the negative statements of Theorems 5.1.6 and 5.1.7

The goal of this subsection is the proof of the second statements of Theorems 5.1.6 and 5.1.7, by application of the results of the previous subsection. Thus, in the whole subsection, γ, β, Ω_1 and ω_1 are fixed such that

– either $\gamma = 1$, $\beta \in (0, 3/4)$ and (Ω_1, ω_1) satisfies Property $\mathcal{P}(2\beta/3)$,

– or $\gamma = 2$, $\beta \in (0, 1)$ and (Ω_1, ω_1) satisfies Property $\mathcal{P}(\beta/2)$.

For $n \in \mathbb{N}^*$, we introduce the operator $A_{n,\gamma}$ defined by

$$D(A_{n,\gamma}) := H^2 \cap H^1_0((-1,1), \mathbb{C}) , \quad A_{n,\gamma}\psi := -\frac{d^2\psi}{dv^2} + i\lambda_n^\beta v^\gamma \psi .$$

By rescaling ($y = \lambda_n^{\frac{\beta}{2+\gamma}} v$) and using Theorems 5.3.1 and 5.3.2, there exist $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 > 0$ and $n_* \in \mathbb{N}^*$ such that, for every $n \geqslant n_*$, $A_{n,\gamma}$ has an eigenvalue μ_n satisfying

$$\mathcal{C}_1 \lambda_n^{\frac{2\beta}{2+\gamma}} \leqslant \mathrm{Re}\,(\mu_n) \leqslant \mathcal{C}_2 \lambda_n^{\frac{2\beta}{2+\gamma}} . \tag{5.3.5}$$

We introduce a normalized eigenfunction ψ_n of $A_{n,\gamma}$ associated with the eigenvalue μ_n,

$$\begin{cases} -\psi_n''(v) + i\lambda_n^\beta v^\gamma \psi_n(v) = \mu_n \psi_n(v) , & v \in (-1,1) , \\ \psi_n(\pm 1) = 0 , \\ \|\psi_n\|_{L^2(-1,1)} = 1 . \end{cases}$$

Then the function

$$g_n(t,x,v) := \varphi_n(x)\psi_n(v)e^{-\mu_n t}$$

is a solution of (5.1.3). The second statement of Theorems 5.1.6 and 5.1.7 is a consequence of the following proposition.

Proposition 5.3.3 *For every $T > 0$, we have*

$$\varliminf_{n\to+\infty} \left(\frac{\int_0^T \int_\omega |g_n(t,x,v)|^2 \,dxdvdt}{\int_\Omega |g_n(T,x,v)|^2 \,dxdv} \right) = 0.$$

Proof of Proposition 5.3.3 :
We have

$$\int_\Omega |g_n(T,x,v)|^2 dv \, = e^{-2\,\mathrm{Re}\,(\mu_n) T} ,$$

because ψ_n and φ_n are normalized in L^2.
By Fubini's Theorem, we get

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\omega |g_n(t,x,v)|^2 \,dxdvdt &= \left(\int_0^T e^{-2\,\mathrm{Re}\,(\mu_n)\,t} dt\right) \left(\int_{-1}^1 |\psi_n(v)|^2 \,dv\right) \left(\int_{\omega_1} |\varphi_n(x)|^2 \,dx\right) \\ &= \tfrac{1-e^{-2\,\mathrm{Re}\,(\mu_n)\,T}}{2\,\mathrm{Re}\,(\mu_n)} \int_{\omega_1} |\varphi_n(x)|^2 \,dx . \end{aligned}$$

Thus,

$$\frac{\int_0^T \int_\omega |g_n(t,x,v)|^2 \,dxdvdt}{\int_\Omega |g_n(T,x,v)|^2 \,dxdv} = \frac{e^{2\,\mathrm{Re}\,(\mu_n)\,T} - 1}{2\,\mathrm{Re}\,(\mu_n)} \int_{\omega_1} \varphi_n(x)^2 \,dx .$$

Let C be a positive constant such that

$$C > 2\mathcal{C}_2 T\,, \tag{5.3.6}$$

where $\mathcal{C}_2$ is as in (5.3.5).
Let $s := \frac{2\beta}{2+\gamma}$. By Property $\mathcal{P}(s)$, there exists a subsequence $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ such that

$$\frac{-1}{\lambda_{n_k}^s} \ln\left(\int_{\omega_1} |\varphi_{n_k}(x)|^2 dx\right) \geqslant C\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

or, equivalently

$$\int_{\omega_1} |\varphi_{n_k}(x)|^2 dx \leqslant e^{-C\,\lambda_{n_k}^s}\,, \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Then,

$$\frac{\int_0^T \int_\omega |g_{n_k}(t,x,v)|^2\, dxdvdt}{\int_\Omega |g_{n_k}(T,x,v)|^2\, dxdv} \leqslant \frac{e^{(2\mathcal{C}_2 T - C)\,\lambda_{n_k}^s}}{2\mathcal{C}_1\,\lambda_{n_k}^s} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

by (5.3.6), which gives the conclusion. □

5.3.3 Semi classical analysis of the complex Airy operator ($\gamma = 1$)

The goal of this subsection is the proof of Theorem 5.3.1.

We introduce two model-operators, that have well known spectral and pseudospectral behavior. Let $\mathcal{A}_{(-R,+\infty)}$ and $\mathcal{A}_{(-\infty,R)}$ be the Dirichlet realizations of the operator $-\frac{d^2}{dy^2} + iy$ on the intervals $(-R,+\infty)$ and $(-\infty,R)$ respectively. We are going to approximate the resolvent of $\mathcal{A}_{(-R,R)}$ by the one of $\mathcal{A}_{(-R,+\infty)}$ or $\mathcal{A}_{(-\infty,R)}$ depending on where we are, respectively close to $-R$ or close to $+R$. Let us remark that, if

$$T_R : u(x) \mapsto u(x+R) \quad \text{ and } \quad U_R : u(x) \mapsto u(R-x) \tag{5.3.7}$$

then

$$T_R^{-1}(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda)T_R = \mathcal{A}_{(0,+\infty)} - (\lambda + iR)\,, \tag{5.3.8}$$

$$U_R^{-1}(\mathcal{A}_{(-\infty,R)} - \lambda)U_R = \mathcal{A}^*_{(0,+\infty)} - (\lambda - iR)\,, \tag{5.3.9}$$

thus

$$\inf \operatorname{Re} \sigma\Big(\mathcal{A}_{(-R,\infty)}\Big) = \inf \operatorname{Re} \sigma\Big(\mathcal{A}_{(-\infty,R)}\Big) = \frac{|\mu_1|}{2}\,, \tag{5.3.10}$$

because $\inf \operatorname{Re} \sigma\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)}\Big) = |\mu_1|/2$, see [7].

Step 1 : We prove

$$\varliminf_{R\to+\infty} \left(\inf \operatorname{Re} \sigma\Big(\mathcal{A}_{(-R,R)}\Big)\right) \geqslant \frac{|\mu_1|}{2} \tag{5.3.11}$$

and (5.3.2).
Let $\varepsilon > 0$. We search $R_\varepsilon > 0$ such that

$$\forall R \geq R_\varepsilon, \quad \sigma\Big(\mathcal{A}_{(-R,R)}\Big) \cap (]-\infty, |\mu_1|/2 - \varepsilon] + i\mathbb{R}) = \emptyset\,. \tag{5.3.12}$$

We recall that, by [75], there exists $C_\varepsilon > 0$ such that

$$\sup_{\substack{\gamma \le |\mu_1|/2-\varepsilon,\\ \nu\in\mathbb{R}}} \left\| \Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)} - (\gamma+i\nu)\Big)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(0,+\infty))} \leqslant C_\varepsilon, \tag{5.3.13}$$

$$\sup_{\substack{\gamma \le |\mu_1|/2-\varepsilon,\\ \nu\in\mathbb{R}}} \left\| \Big(\mathcal{A}^*_{(0,+\infty)} - (\gamma+i\nu)\Big)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(0,+\infty))} \leqslant C_\varepsilon. \tag{5.3.14}$$

Let

$$\lambda = \gamma + i\nu\,, \quad \gamma \le |\mu_1|/2 - \varepsilon]\,,\ \nu\in\mathbb{R}\,, \tag{5.3.15}$$

and $h_+, h_- \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ be such that

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Supp}\,(h_-) \subset (-\infty, 1/2)\,, & h_- \equiv 1 \text{ on } (-\infty,-1/2]\,,\\ \mathrm{Supp}\,(h_+) \subset (-1/2,+\infty)\,, & h_+ \equiv 1 \text{ on } [1/2,+\infty)\,,\\ \multicolumn{2}{c}{h_-^2 + h_+^2 \equiv 1 \text{ on } (-\infty,+\infty)\,.} \end{array}$$

For $R > 0$, we define

$$\eta_R^\pm(x) = h_\pm\left(\frac{x}{R}\right)\mathbf{1}_{(-R,R)}(x) \tag{5.3.16}$$

and

$$\mathcal{R}_R(\lambda) = \eta_R^-\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1}\eta_R^- + \eta_R^+\Big(\mathcal{A}_{(-\infty,R)} - \lambda\Big)^{-1}\eta_R^+\,. \tag{5.3.17}$$

$\mathcal{R}_R(\lambda)$ will be used as an approximation of the resolvent of $\mathcal{A}_{(-R,R)}$. We have

$$\begin{aligned} \Big(\mathcal{A}_{(-R,R)} - \lambda\Big)\mathcal{R}_R(\lambda) = I \quad &+ \quad [\mathcal{A}_{(-R,R)}, \eta_R^-]\,\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1}\eta_R^-\\ &+ \quad [\mathcal{A}_{(-R,R)}, \eta_R^+]\,\Big(\mathcal{A}_{(-\infty,R)} - \lambda\Big)^{-1}\eta_R^+ \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

as an equality between operators on $L^2(-R,R)$.
We estimate the second term on the right hand side. In what follows, the estimates are uniform with respect to $\nu = \operatorname{Im}\lambda$. We have

$$[\mathcal{A}_{(-R,R)}, \eta_R^-]\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1}\eta_R^- = \left(-(\eta_R^-)'' - 2(\eta_R^-)'\frac{d}{dy}\right)\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1}\eta_R^-, \tag{5.3.19}$$

Using $\|(\eta_R^-)'\|_{L^\infty(-R,R)} = \mathcal{O}(R^{-1})$ and $\|(\eta_R^-)''\|_{L^\infty(-R,R)} = \mathcal{O}(R^{-2})$, we get, by (5.3.8) and (5.3.13),

$$\left\|(\eta_R^-)''\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1}\eta_R^-\right\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right). \tag{5.3.20}$$

Moreover, for every $v \in L^2(-R,+\infty)$,

$$\begin{aligned} &\left\|\tfrac{d}{dy}\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1} v\right\|_{L^2(-R,+\infty)}\\ \le\ &\left(\left\|\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1}\right\|^{1/2} + \sqrt{\gamma}\left\|\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1}\right\|\right)\|v\|_{L^2(-R,+\infty)}. \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Indeed, let $w := (\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda)^{-1} v$, i.e.

$$\begin{cases} -w''(y) + iyw(y) - \lambda w(y) = v(y)\,, \quad y \in (-R, +\infty)\,, \\ w(-R) = w(+\infty) = 0\,. \end{cases}$$

We have

$$\begin{aligned} \|w'\|^2_{L^2(-R,+\infty)} &= -\mathrm{Re}\left(\int_{-R}^{+\infty} \overline{w(y)} w''(y) dy\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\int_{-R}^{+\infty} \overline{w}[iyw + \lambda w + v]\right) \\ &= \gamma \int_{-R}^{+\infty} |w|^2 + \mathrm{Re}\left(\int_{-R}^{+\infty} \overline{w} v\right) \\ &\leqslant \gamma \|w\|^2_{L^2(-R,+\infty)} + \|w\|_{L^2(-R,+\infty)} \|v\|_{L^2(-R,+\infty)}\,. \end{aligned}$$

By taking the square root of this inequality, we get

$$\|w'\|_{L^2(-R,+\infty)} \leqslant \sqrt{\gamma} \|w\|_{L^2(-R,+\infty)} + \|w\|^{1/2}_{L^2(-R,+\infty)} \|v\|^{1/2}_{L^2(-R,+\infty)},$$

which proves (5.3.21). By applying (5.3.21) to $v = \eta_R^- u$, $u \in L^2(\mathbb{R})$, we get

$$\left\|(\eta_R^-)' \frac{d}{dy}\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1} \eta_R^-\right\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right), \tag{5.3.22}$$

which gives, with (5.3.19) and (5.3.20),

$$\left\|[\mathcal{A}_{(-R,R)}, \eta_R^-]\Big(\mathcal{A}_{(-R,+\infty)} - \lambda\Big)^{-1} \eta_R^-\right\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{5.3.23}$$

In the same way, we verify that

$$\left\|[\mathcal{A}_{(-R,R)}, \eta_R^+]\Big(\mathcal{A}_{(-\infty,R)} - \lambda\Big)^{-1} \eta_R^+\right\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{5.3.24}$$

Equality (5.3.18) can be written

$$(\mathcal{A}_{(-R,R)} - \lambda)\mathcal{R}_R(\lambda) = I + \mathcal{E}_R(\lambda)\,,$$

with $\|\mathcal{E}_R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}(R^{-1})$, uniformly with respect to $\lambda \in]-\infty, |\mu_1|/2 - \varepsilon] + i\mathbb{R}$. We deduce the existence of $R_\varepsilon > 0$ such that, for every $R \geq R_\varepsilon$, $(\mathcal{A}_{(-R,R)} - \lambda)$ is invertible, with inverse

$$\Big(\mathcal{A}_{(-R,R)} - \lambda\Big)^{-1} = \mathcal{R}_R(\lambda)\Big(I + \mathcal{E}_R(\lambda)\Big)^{-1}.$$

We have proved (5.3.12). Moreover, according to the definition (5.3.17) of $\mathcal{R}_R(\lambda)$, (5.3.8), (5.3.9), (5.3.13) and (5.3.14) yield the estimate (5.3.2).

Step 2 : We prove that

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} \Big(\inf \mathrm{Re}\, \sigma\Big(\mathcal{A}_{(-R,R)}\Big)\Big) \leqslant \frac{|\mu_1|}{2}\,. \tag{5.3.25}$$

First, we reduce the study to the complex Airy operator $\mathcal{A}_{(0,R)}$ on the interval $(0,R)$. Indeed, applying the translation $T_R : u(x) \mapsto u(x+R)$, we get

$$T_R^{-1}(\mathcal{A}_{(-R,R)} - \lambda)T_R = \mathcal{A}_{(0,2R)} - (\lambda + iR)\,,$$

thus $\operatorname{Re}\sigma(\mathcal{A}_{(-R,R)}) = \operatorname{Re}\sigma(\mathcal{A}_{(0,2R)})$. Therefore, in order to prove (5.3.25), we are going to prove that

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\big(\inf \operatorname{Re}\sigma\big(\mathcal{A}_{(0,R)}\big)\big) \leqslant \frac{|\mu_1|}{2}. \tag{5.3.26}$$

Let $\theta_1,\, \theta_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ be such that

$$\begin{array}{c} \text{Supp }(\theta_1) \subset (-\infty, 2/3)\,, \quad \theta_1 \equiv 1 \text{ on } (-\infty,1/2)\,,\\ \text{Supp }(\theta_2) \subset (1/2,+\infty)\,, \quad \theta_2 \equiv 1 \text{ on } (2/3,+\infty)\,,\\ \theta_1^2 + \theta_2^2 \equiv 1 \text{ on } \mathbb{R}\,. \end{array}$$

For $j = 1,2$ and $R > 0$, we define

$$\chi_R^j(x) = \theta_j\left(\frac{x}{R}\right)\mathbf{1}_{(0,R)}(x)\,. \tag{5.3.27}$$

We want to prove that

$$\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)} + 1\Big)^{-1} \quad \text{in } \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))\,. \tag{5.3.28}$$

Let us remark that

$$\sigma\left(\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)}\right) = \sigma\left(\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\right)$$

with non vanishing eigenvalues that have the same multiplicity for both operators.

Step 2.a : We prove that

$$\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)} - \chi_R^1\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^1 \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{in } \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))\,.$$

For this, we use the following approximations of the resolvent of $(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1)$,

$$\tilde{\mathcal{R}}_R = \chi_R^1\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^1 + \chi_R^2\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^2\,.$$

Then, we have

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1)\tilde{\mathcal{R}}_R = I \quad &+ \quad [\mathcal{A}_{(0,R)} + 1, \chi_R^1]\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^1\\ &+ \quad [\mathcal{A}_{(0,R)} + 1, \chi_R^2]\Big(\mathcal{A}_{(0,2R)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^2\,,\end{aligned}$$

thus, by composing on the left by $\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)}$, we get

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)} - \chi_R^1\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^1 = \chi_R^2\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^2\\ &-\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)}[\mathcal{A}_{(0,R)} + 1, \chi_R^1]\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^1\\ &-\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)}[\mathcal{A}_{(0,R)} + 1, \chi_R^2]\Big(\mathcal{A}_{(0,R)} + 1\Big)^{-1}\chi_R^2.\end{aligned} \tag{5.3.29}$$

Now, we control the different terms on the right hand side. The terms involving commutators can be estimated as in Step 1, thanks to (5.3.2), and we get

$$\left\|\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)}+1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)}[\mathcal{A}_{(0,R)}+1,\chi_R^1]\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)}+1\Big)^{-1}\chi_R^1\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right), \tag{5.3.30}$$

$$\left\|\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)}+1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)}[\mathcal{A}_{(0,R)}+1,\chi_R^2]\Big(\mathcal{A}_{(0,R)}+1\Big)^{-1}\chi_R^2\right\||_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{5.3.31}$$

Moreover, for $u\in L^2((0,R),\mathbb{C})$, we have

$$\operatorname{Im}\big\langle(\mathcal{A}_{(0,R)}+1)u\,,\,u\big\rangle=\langle yu\,,\,u\rangle \tag{5.3.32}$$

where $\langle .,.\rangle$ denotes the $L^2((0,R),\mathbb{C})$-hermitian product.
This relation, applied to $u=\chi_R^2\Big(\mathcal{A}_{(0,R)}+1\Big)^{-1}\chi_R^2 f$, $f\in L^2(0,+\infty)$, which is supported in $(R/2,R)$, gives

$$\operatorname{Im}\big\langle(\mathcal{A}_{(0,R)}+1)u\,,\,u\big\rangle\geqslant\frac{R}{2}\|u\|^2.$$

Moreover,

$$(\mathcal{A}_{(0,R)}+1)u=(\chi_R^2)^2f+[\mathcal{A}_{(0,R)}+1,\chi_R^2]\Big(\mathcal{A}_{(0,R)}+1\Big)^{-1}\chi_R^2f\,.$$

Thus, estimating the commutator as in Step 1, we get

$$\big|\operatorname{Im}\big\langle(\mathcal{A}_{(0,R)}+1)u,u\big\rangle\big|\leqslant C\left(1+\frac{1}{R}\right)\|f\|\|u\|\,.$$

Therefore,

$$\frac{R}{2}\|u\|^2\leqslant C\left(1+\frac{1}{R}\right)\|f\|\|u\|\,.$$

We have proved that

$$\left\|\chi_R^2\Big(\mathcal{A}_{(0,R)}+1\Big)^{-1}\chi_R^2\right\|_{\mathcal{L}(L^2(0,+\infty))}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{5.3.33}$$

By (5.3.29), (5.3.30), (5.3.31) and (5.3.33), we have

$$\left\|\mathbf{1}_{(0,R)}\Big(\mathcal{A}_{(0,R)}+1\Big)^{-1}\mathbf{1}_{(0,R)}-\chi_R^1\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)}+1\Big)^{-1}\chi_R^1\right\|_{\mathcal{L}(L^2(0,+\infty))}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \tag{5.3.34}$$

which ends Step 2.a.

Step 2.b : We verify that

$$\chi_R^1\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)}+1\Big)^{-1}\chi_R^1\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}\Big(\mathcal{A}_{(0,+\infty)}+1\Big)^{-1}\quad\text{in }\mathcal{L}(L^2(0,+\infty))\,, \tag{5.3.35}$$

which ends the proof of (5.3.28).
To simplify notation, let us introduce

$$\mathcal{A}_+=\mathcal{A}_{(0,+\infty)}+1\,.$$

First, we write

$$\chi_R^1 \mathcal{A}_+^{-1} \chi_R^1 \mathcal{A}_+ = (\chi_R^1)^2 - \chi_R^1 \mathcal{A}_+^{-1} [\mathcal{A}_+, \chi_R^1],$$

then, composing on the right by $\mathcal{A}_+^{-1}$ and using that $(\chi_R^1)^2 = 1 - (\chi_R^2)^2$,

$$\mathcal{A}_+^{-1} - \chi_R^1 \mathcal{A}_+^{-1} \chi_R^1 = (\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} + \chi_R^1 \mathcal{A}_+^{-1} [\mathcal{A}_+, \chi_R^1] \mathcal{A}_+^{-1}. \tag{5.3.36}$$

The term involving a commutator can be estimated as in Step 1,

$$\left\| \chi_R^1 \mathcal{A}_+^{-1} [\mathcal{A}_+, \chi_R^1] \mathcal{A}_+^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^+))} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{5.3.37}$$

For $f \in L^2(0, +\infty)$, we have

$$\begin{aligned}
\frac{R}{2} \|(\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} f\|^2 &\leqslant \|y^{1/2} (\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} f\|^2 \quad (\text{because Supp } (\chi_R^2) \subset (R/2, R)) \\
&= \operatorname{Im} \langle \mathcal{A}_+ (\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} f \,,\, (\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} f \rangle \\
&\leqslant \|\mathcal{A}_+ (\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} f\| \|(\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} f\| \\
&\leqslant \Big(\|(\chi_R^2)^2 f\| + \|[\mathcal{A}_+, (\chi_R^2)^2] \mathcal{A}_+^{-1} f\| \Big) \|(\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} f\| \,,
\end{aligned}$$

where $\langle .,. \rangle$ denotes the $L^2((0, +\infty), \mathbb{C})$-hermitian product and $\|.\|$ is the associated norm. Estimating the term with a commutator as in Step 1, we get

$$R \, \|(\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} f\|_{L^2(0,+\infty)} \leqslant C \left(1 + \frac{1}{R} \right) \|f\|_{L^2(0,+\infty)} \,.$$

Thus

$$\left\| (\chi_R^2)^2 \mathcal{A}_+^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(0,+\infty))} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \,. \tag{5.3.38}$$

Finally, (5.3.36), (5.3.37) and (5.3.38) imply (5.3.35).

Step 2.c : Conclusion.
Step 2.a and Step 2.b prove (5.3.28). The eigenvalues of $\mathcal{A}_+^{-1}$ are isolated, thus we can apply [96, Section IV, §3.5]. For any subsequence $R_j \to +\infty$ and any eigenvalue $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_+^{-1}) \setminus \{0\}$, there exists a sequence (λ_j) such that, for every j large enough

$$\lambda_j \in \sigma \left(\mathbf{1}_{(0,R_j)} \Big(\mathcal{A}_{(0,R_j)} + 1 \Big)^{-1} \mathbf{1}_{(0,R_j)} \right) \setminus \{0\} = \sigma \left(\Big(\mathcal{A}_{(0,R_j)} + 1 \Big)^{-1} \right) \setminus \{0\}$$

and $\lambda_j \to \lambda$ when $j \to +\infty$.
In particular, with $\lambda = 1/(\tilde{\lambda} + 1)$, where $\tilde{\lambda} = e^{i\pi/3} |\mu_1| \in \sigma(\mathcal{A}_{(0,+\infty)})$ is the eigenvalue of $\mathcal{A}_{(0,+\infty)}$ with smallest real part (see [7]), we get a sequence $\tilde{\lambda}_j = 1/\lambda_j - 1 \in \sigma(\mathcal{A}_{(0,R_j)})$ such that $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_j \to \operatorname{Re} \tilde{\lambda} = |\mu_1|/2$, from which we deduce (5.3.25).

5.3.4 Semi classical analysis of the Davies operator ($\gamma = 2$)

The goal of this section is the proof of Theorem 5.3.2, which is similar to the one of Theorem 5.3.1.

Step 1 : Let $\varepsilon > 0$. We search $R_\varepsilon > 0$ such that

$$\forall R \geq R_\varepsilon, \quad \sigma\left(\mathcal{H}_{(-R,R)}\right) \cap \Big((-\infty, \sqrt{2}/2 - \varepsilon) + i\mathbb{R}\Big) = \emptyset \tag{5.3.39}$$

and we prove (5.3.4).
Let $\alpha \in (0, 1/3)$ and $\zeta_R^1, \zeta_R^2, \zeta_R^3 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$ be such that

$$\begin{gathered}
\mathrm{Supp}\ \zeta_R^1 \subset (-\infty, -R + R^\alpha)\,, \quad \zeta_R^1 \equiv 1 \text{ on } (-\infty, -R + R^\alpha/2)\,, \\
\mathrm{Supp}\ \zeta_R^2 \subset (-R + R^\alpha/2, R - R^\alpha/2)\,, \quad \zeta_R^2 \equiv 1 \text{ on } (-R + R^\alpha, R - R^\alpha)\,, \\
\mathrm{Supp}\ \zeta_R^3 \subset (R - R^\alpha, +\infty)\,, \quad \zeta_R^3 \equiv 1 \text{ on } (R - R^\alpha/2, +\infty)\,, \\
(\zeta_R^1)^2 + (\zeta_R^2)^2 + (\zeta_R^3)^2 \equiv 1 \text{ on } \mathbb{R}\,,
\end{gathered}$$

$$\|(\zeta_R^j)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \underset{R \to +\infty}{\mathcal{O}}(R^{-\alpha})\,, \qquad \|(\zeta_R^j)''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \underset{R \to +\infty}{\mathcal{O}}(R^{-2\alpha})\,, \tag{5.3.40}$$

Close to $y = -R$, we have

$$y^2 = -2R(y + R) + R^2 + o(|y + R|)\,.$$

Thus, we are going to approximate $\mathcal{H}_{(-R,R)}$, close to $y = -R$, by the complex Airy type operator on $(-R, +\infty)$

$$\mathcal{A}_R^- := -\frac{d^2}{dy^2} - 2iR(y + R) + iR^2.$$

In the same way, we will approximate $\mathcal{H}_{(-R,R)}$ close to $y = +R$ by the complex Airy type operator on $(-\infty, +R)$

$$\mathcal{A}_R^+ := -\frac{d^2}{dy^2} - 2iR(R - y) + iR^2.$$

Then, we remark that, if T_R and U_R are defined by (5.3.7), then we have

$$\mathcal{A}_R^- = T_R \tilde{\mathcal{A}}_{2R}^* T_R^{-1} + iR^2 \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_R^+ = U_R \tilde{\mathcal{A}}_{2R}^* U_R^{-1} + iR^2\,,$$

where $\tilde{\mathcal{A}}_R$ is the Dirichlet realization of the complex Airy operator $-\frac{d^2}{dy^2} + iRy$ on $(0, +\infty)$.
Following [75], we deduce that

$$\inf \mathrm{Re}\, \sigma\left(\mathcal{A}_R^+\right) = \inf \mathrm{Re}\, \sigma\left(\mathcal{A}_R^-\right) = (2R)^{2/3} \frac{|\mu_1|}{2}\,, \tag{5.3.41}$$

and, for every $\varepsilon > 0$, there exists $C_\varepsilon > 0$ such that

$$\sup_{\substack{\gamma \,\in\, [0,\, R^{2/3}|\mu_1|/2 \,-\, \varepsilon], \\ \nu \,\in\, \mathbb{R}}} \left\| \Big(\mathcal{A}_R^\pm - (\gamma + i\nu)\Big)^{-1} \right\| \leqslant \frac{C_\varepsilon}{R^{2/3}}\,. \tag{5.3.42}$$

We call $\mathcal{H}_0$ the complex harmonic oscillator $-\frac{d^2}{dy^2} + iy^2$ on $\mathbb{R}$, that will serve to approximate $\mathcal{H}_{(-R,R)}$ on the support of ζ_R^2. We recall that $\inf \mathrm{Re}\, \sigma(\mathcal{H}_0) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$ (see [41]) and

$$\sup_{\substack{\gamma \,\leq\, \sqrt{2}/2 \,-\, \varepsilon, \\ \nu \,\in\, \mathbb{R}}} \left\| \Big(\mathcal{H}_0 - (\gamma + i\nu)\Big)^{-1} \right\| \leqslant C'_\varepsilon\,, \tag{5.3.43}$$

for some $C'_\varepsilon > 0$, see for instance [116].
Now, we take $\lambda = \gamma + i\nu \in (0, \sqrt{2}/2 - \varepsilon) + i\mathbb{R}$ and we set

$$\mathcal{Q}_R(\lambda) = \zeta_R^1\Big(\mathcal{A}_R^- - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^1 + \zeta_R^2\Big(\mathcal{H}_0 - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^2 + \zeta_R^3\Big(\mathcal{A}_R^+ - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^3. \quad (5.3.44)$$

Then, we have

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \lambda)\mathcal{Q}_R(\lambda) &= I + [\mathcal{H}_{(-R,R)}, \zeta_R^1]\Big(\mathcal{A}_R^- - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^1 \\ &+[\mathcal{H}_{(-R,R)}, \zeta_R^2]\Big(\mathcal{H}_0 - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^2 + [\mathcal{H}_{(-R,R)}, \zeta_R^3]\Big(\mathcal{A}_R^+ - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^3 \\ &+\zeta_R^1(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \mathcal{A}_R^-)\Big(\mathcal{A}_R^- - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^1 + \zeta_R^3(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \mathcal{A}_R^+)\Big(\mathcal{A}_R^+ - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^3\,,\end{aligned}$$

as equality between operators on $L^2(-R,R)$. The terms involving commutators can be estimated as in Step 1 of the previous section, by using (5.3.40), (5.3.42), (5.3.43) and we get

$$\begin{aligned}&\Big\|[\mathcal{H}_{(-R,R)}, \zeta_R^1]\Big(\mathcal{A}_R^- - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^1\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} + \Big\|[\mathcal{H}_{(-R,R)}, \zeta_R^2]\Big(\mathcal{H}_0 - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^2\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} \\ &+\Big\|[\mathcal{H}_{(-R,R)}, \zeta_R^3]\Big(\mathcal{A}_R^+ - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^3\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}(R^{-\alpha})\,.\end{aligned}$$

Moreover, we have, by definition of $\mathcal{A}_R^-$,

$$(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \mathcal{A}_R^-)u(y) = i(y+R)^2 u(y)\,,$$

and on the support of ζ_R^1, we have $y + R \leq R^\alpha$. Therefore, by (5.3.42)

$$\begin{aligned}\Big\|\zeta_R^1(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \mathcal{A}_R^-)\Big(\mathcal{A}_R^- - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^1\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} &\leq R^{2\alpha}\Big\|\Big(\mathcal{A}_R^- - \lambda\Big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,+\infty))} \\ &\leq C_\varepsilon R^{2(\alpha - 1/3)}\,.\end{aligned}$$

In the same way, we verify

$$\Big\|\zeta_R^3(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \mathcal{A}_R^+)\Big(\mathcal{A}_R^+ - \lambda\Big)^{-1}\zeta_R^3\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} \leq C_\varepsilon R^{2(\alpha-1/3)}\,.$$

Thus, we have proved that

$$(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \lambda)\mathcal{Q}_R(\lambda) = I + \tilde{\mathcal{E}}_R(\lambda),$$

with $\|\tilde{\mathcal{E}}_R(\lambda)\| \to 0$ as $R \to +\infty$, uniformly with respect to λ in the interval $(0, \sqrt{2}/2 - \varepsilon) + i\mathbb{R}$. Thus, there exists $R_\varepsilon > 0$ such that, for every $R \geq R_\varepsilon$, $(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \lambda)$ is invertible, with

$$\Big(\mathcal{H}_{(-R,R)} - \lambda\Big)^{-1} = \mathcal{Q}_R(\lambda)\Big(I + \tilde{\mathcal{E}}_R(\lambda)\Big)^{-1}. \quad (5.3.45)$$

This proves the existence of $R_\epsilon > 0$ such that (5.3.39) holds. The resolvent estimate (5.3.4) follows from (5.3.42), (5.3.43) and (5.3.44).

Step 2 : We prove

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} \inf \operatorname{Re} \sigma\left(\mathcal{H}_{(-R,R)}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} . \tag{5.3.46}$$

Let $\varphi_R^1, \varphi_R^2 \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ be such that

$$\begin{gathered}
\text{Supp } (\varphi_R^1) \subset (-\infty, -R/2) \cup (R/2, +\infty) , \quad \varphi_R^1 \equiv 1 \text{ on } (-\infty, -2R/3) \cup (2R/3, +\infty) , \\
\text{Supp } (\varphi_R^2) \subset (-2R/3, 2R/3) , \quad \varphi_R^2 \equiv 1 \text{ on } (-R/2, R/2) , \\
(\varphi_R^1)^2 + (\varphi_R^2)^2 \equiv 1 \text{ on } \mathbb{R} , \\
\|(\varphi_R^j)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O\left(R^{-1}\right) , \quad \|(\varphi_R^j)''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = O\left(R^{-2}\right) .
\end{gathered}$$

We recall that $\mathcal{H}_0$ denotes the operator $-\frac{d^2}{dx^2} + ix^2$ defined on $\mathbb{R}$, and we set

$$\tilde{\mathcal{Q}}_R = \varphi_R^2 \Big(\mathcal{H}_0 + 1\Big)^{-1} \varphi_R^2 + \varphi_R^1 \Big(\mathcal{H}_{(-R,R)} + 1\Big)^{-1} \varphi_R^1 .$$

Thus, we have

$$\left(\mathcal{H}_{(-R,R)} + 1\right) \tilde{\mathcal{Q}}_R = I + \mathcal{P}_R ,$$

where

$$\mathcal{P}_R = [\mathcal{H}_{(-R,R)}, \varphi_R^2]\Big(\mathcal{H}_0 + 1\Big)^{-1} \varphi_R^2 + [\mathcal{H}_{(-R,R)}, \varphi_R^1]\Big(\mathcal{H}_{(-R,R)} + 1\Big)^{-1} \varphi_R^1 ,$$

and

$$\|\mathcal{P}_R\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}(R^{-1}) . \tag{5.3.47}$$

By composing on the left with $(\mathcal{H}_{(-R,R)} + 1)^{-1}$, we get

$$\Big(\mathcal{H}_{(-R,R)}+1\Big)^{-1} - \varphi_R^2\Big(\mathcal{H}_0+1\Big)^{-1}\varphi_R^2 = \varphi_R^1\Big(\mathcal{H}_{(-R,R)}+1\Big)^{-1}\varphi_R^1 - \Big(\mathcal{H}_{(-R,R)}+1\Big)^{-1}\mathcal{P}_R . \tag{5.3.48}$$

By going back over the proof of (5.3.33) and replacing (5.3.32) by

$$\operatorname{Im} \left\langle \mathcal{H}_{(-R,R)} u, u \right\rangle = \langle x^2 u, u\rangle , \tag{5.3.49}$$

we get

$$\left\| \varphi_R^1 \Big(\mathcal{H}_{(-R,R)} + 1\Big)^{-1} \varphi_R^1 \right\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) .$$

By (5.3.48), the previous relation, together with (5.3.47) and (5.3.4) imply

$$\left\| \Big(\mathcal{H}_{(-R,R)} + 1\Big)^{-1} - \varphi_R^2 \Big(\mathcal{H}_0 + 1\Big)^{-1} \varphi_R^2 \right\|_{\mathcal{L}(L^2(-R,R))} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) . \tag{5.3.50}$$

Then, we prove that the operator $\varphi_R^2(\mathcal{H}_0 + 1)^{-1}\varphi_R^2$ converges to $(\mathcal{H}_0 + 1)^{-1}$ in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$, when $R \to +\infty$, with the same arguments as in Step 2.b of the previous section. Thus, (5.3.46) is proved, with the same arguments as in Step 2.c of the previous section, and this ends the proof of Theorem 5.3.2.

5.4 Examples of (Ω_1, ω_1) satisfying Property $\mathcal{P}(s)$

The goal of this section is to give examples of pairs (Ω_1, ω_1) that satisfy Property $\mathcal{P}(s)$ for any $s \in (0, 1/2)$. Precisely, we prove that it is the case if Ω_1 is a conical bounded subset of $\mathbb{R}^d$ and ω_1 is any open subset of Ω_1 that does not intersect the boundary $\partial\Omega_1$. Note that the result covers the situation where Ω_1 is a disk or a circular sector in 2D, a ball in any space dimension.

Proposition 5.4.1 *Let $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$ and U be an open subset of $\mathbb{S}^{d-1}$. Let Ω_1 be the conical open subset of $\mathbb{R}^d$ defined by*

$$\Omega_1 := \{x = rx' \, ; \, 0 < r < 1 \, , x' \in U\} \, .$$

Let ω_1 be an open subset compactly embedded in Ω_1. There exist constants $C, K > 0$, a sequence $(\widetilde{\lambda}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ of eigenvalues of the operator $(-\Delta^D_{\Omega_1})$ (with domain $H^2 \cap H^1_0(\Omega_1)$) and associated normalized eigenvectors $(\widetilde{\varphi}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ such that

$$\int_{\omega_1} |\widetilde{\varphi}_k(x)|^2 dx \leqslant K e^{-C\sqrt{\widetilde{\lambda}_k}} \, , \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

In particular (Ω_1, ω_1) satisfies Property $\mathcal{P}(s)$ for any $s \in (0, 1/2)$.

We refer to [109] for other similar results. Our proof of Proposition 5.4.1 relies on properties of Bessel functions, recalled in the next statement.

Proposition 5.4.2 *The Bessel functions of the first kind J_ν satisfy*

$$0 < J_\nu(\nu x) \leqslant e^{\nu g(x)} \, , \quad \forall \nu \in (0, +\infty) \, , x \in (0, 1) \, , \tag{5.4.1}$$

$$|J'_\nu(\nu x)| < \frac{(1 + x^2)^{1/4} e^{\nu g(x)}}{x\sqrt{2\pi\nu}} \, , \quad \forall \nu \in (0, +\infty) \, , x \in (0, 1) \, , \tag{5.4.2}$$

$$J_\nu(\nu) \underset{\nu\to+\infty}{\sim} \frac{a}{\nu^{1/3}} \, , \tag{5.4.3}$$

where

$$g(x) := \ln(x) + \sqrt{1 - x^2} - \ln[1 + \sqrt{1 - x^2}] \quad \textit{and} \quad a := \frac{2^{1/3}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} > 0 \, .$$

Inequalities (5.4.1) and (5.4.2) are proved in [126] ; inequality (5.4.3) is in [1, Formula 9.3.31, Page 368]. Note that g is negative and increasing on $(0, 1)$ and that $g(1) = 0$.

Proof of Proposition 5.4.1 : We recall that, in coordinates (r, x'), the Dirichlet-Laplacian writes

$$(-\Delta^D_{\Omega_1})\varphi = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{d-1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}(-\Delta^D_U)\varphi \, .$$

Let $(\lambda'_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ be the increasing sequence of eigenvalues of $(-\Delta^D_U)$ and $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ be associated eigenfunctions

$$\begin{cases} (-\Delta^D_U)X_k(x') = \lambda'_k X_k(x') \, , & x' \in U \, , \\ X_k(x') = 0 \, , & x' \in \partial U \, , \\ \|X_k\|_{L^2(U)} = 1 \, . \end{cases}$$

For $k \in \mathbb{N}^*$, we define

$$\nu_k := \sqrt{\lambda'_k + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2}$$

and j_k the first positive zero of the Bessel function of first kind J_{ν_k}. Note that

$$\nu_k < j_k < \nu_k + \delta \nu_k^{1/3}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \tag{5.4.4}$$

for some constant $\delta > 0$ (see [1, Formula 9.5.14, Page 371]). Let

$$C_k := \left(\int_0^1 \left| r^{-\frac{d}{2}+1} J_{\nu_k}(j_k r) \right|^2 r^{d-1} dr \right)^{1/2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Then, for every $k \in \mathbb{N}^*$, the function

$$\widetilde{\varphi}_k(rx') := \frac{1}{C_k} r^{-\frac{d}{2}+1} J_{\nu_k}(j_k r) X_k(x'), \forall r \in (0,1), x' \in U,$$

is a normalized eigenfunction of $(-\Delta_{\Omega_1}^D)$ associated to the eigenvalue

$$\widetilde{\lambda}_k := j_k^2. \tag{5.4.5}$$

Step 1 : We prove the existence of $\mathcal{C}_1 > 0$ such that, for k large enough

$$C_k \geqslant \frac{\mathcal{C}_1}{\nu_k^{3/4}}. \tag{5.4.6}$$

Let $\epsilon \in (0, 5/6)$. Performing changes of variables, we get, for k large enough

$$\begin{aligned} C_k &= \left(\int_0^1 |J_{\nu_k}(j_k r)|^2 r dr \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{j_k} \left(\int_0^{j_k} |J_{\nu_k}(\rho)|^2 \rho d\rho \right)^{1/2} \\ &\geqslant \frac{1}{j_k} \left(\int_0^{\nu_k} |J_{\nu_k}(\rho)|^2 \rho d\rho \right)^{1/2} \quad \text{by (5.4.4)} \\ &\geqslant \frac{\nu_k}{j_k} \left(\int_0^1 |J_{\nu_k}(\nu_k r)|^2 r dr \right)^{1/2} \\ &\geqslant C \left(\int_{1-\nu_k^{-\frac{5}{6}-\epsilon}}^1 |J_{\nu_k}(\nu_k r)|^2 dr \right)^{1/2} \quad \text{by (5.4.4).} \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

For $r \in (1 - \nu^{-\frac{5}{6}-\epsilon}, 1)$ and ν large enough, we have

$$\begin{aligned} |J_\nu(\nu r)| &\geqslant |J_\nu(\nu)| - \nu(1-r) \sup\{|J'_\nu(\nu\sigma)|; \sigma \in (r,1)\} \\ &\geqslant \frac{a}{2\nu^{1/3}} - \nu^{1-\frac{5}{6}-\epsilon} \frac{C}{\sqrt{\nu}} \quad \text{by (5.4.2) and (5.4.3)} \\ &\geqslant \frac{1}{\nu^{1/3}} \left(\frac{a}{2} - \frac{C}{\nu^\epsilon} \right) \\ &\geqslant \frac{a}{4\nu^{1/3}}. \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

We deduce from (5.4.7) and (5.4.8) that (5.4.6) holds for some constant $\mathcal{C}_1 > 0$.

Step 2 : Conclusion.

Let ω_1 be an open subset of $\mathbb{R}^d$ such that $\overline{\omega_1} \subset \Omega_1$. There exists $a \in (0,1)$ such that

$$\omega_1 \subset \{x = rx'; 0 < r < a, x' \in U\}.$$

Thus, for every $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_{\omega_1} |\widetilde{\varphi}_k(x)|^2 dx &\leqslant \int_0^a \left| \frac{1}{C_k} r^{-\frac{d}{2}+1} J_{\nu_k}(j_k r) \right|^2 r^{d-1} dr \\ &\leqslant \frac{a^2}{2C_k^2} \sup \left\{ J_{\nu_k}(j_k r); 0 < r < a \right\} .\end{aligned}$$

Let $b \in (a, 1)$. By (5.4.4), we have $\frac{j_k a}{\nu_k} < b < 1$ for k large enough. Then, by (5.4.1) for every $r \in (0, a)$,

$$0 < J_{\nu_k}(j_k r) = J_{\nu_k}\left(\nu_k \frac{j_k r}{\nu_k}\right) \leqslant e^{\nu_k g\left(\frac{j_k r}{\nu_k}\right)} .$$

Explicit computations show that $g'(x) > 0$, for every $x \in (0, 1)$, thus

$$g\left(\frac{j_k r}{\nu_k}\right) < g(b) < 0 , \quad \forall r \in (0, a).$$

Therefore,

$$\int_{\omega_1} |\widetilde{\varphi}_k(x)|^2 dx \leqslant \frac{a^2}{2C_k^2} e^{-|g(b)|\nu_k} .$$

By (5.4.6), (5.4.4) and (5.4.5), we get the conclusion. □

Finally, let us quote, without proof, other examples of pairs (Ω_1, ω_1) satisfying Property $\mathcal{P}(s)$ for appropriate values of s.

If Ω_1 is a filled ellipse and ω_1 is an open subset of Ω_1 that does not intersect $\partial\Omega_1$, then the pair (Ω_1, ω_1) satisfies property $\mathcal{P}(s)$ for any $s \in (0, 1/2)$. This can be proved by working in separate variables as in [109] and constructing "whispery galleries" solutions. The same result holds if ω_1 intersects $\partial\Omega_1$ but does not intersect the small axis of Ω_1 (see [109, Theorem 3.1, page 786]). This time this corresponds to "focusing solutions".

All these results can be proved with semi-classical analysis (see for instance [132] and [50]).

5.5 Well posedness and Fourier decomposition

In this section $\gamma \in \mathbb{N}^*$ and $\beta \in (0, 1)$ are fixed. For $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$, we define

$$|f|_V := \left(\int_\Omega |\partial_v f(x, v)|^2 dx dv \right)^{1/2}$$

and

$$V := \mathrm{Adh}_{|.|_V}[C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})] .$$

Observe that $H_0^1(\Omega) \subset V \subset L^2(\Omega)$, thus V is dense in $L^2(\Omega)$. We define the operator $A_{\gamma,\beta}$ by

$$D(A_{\gamma,\beta}) := \{ f \in V; -\partial_v^2 f + i v^\gamma (-\Delta_x)^\beta f \in L^2(\Omega) \} ,$$

$$A_{\gamma,\beta} f := -\partial_v^2 f + i v^\gamma (-\Delta_x)^\beta f .$$

Then $D(A_{\gamma,\beta})$ is dense in $L^2(\Omega)$, $(A_{\gamma,\beta}, D(A_{\gamma,\beta}))$ is a closed operator and both $A_{\gamma,\beta}$ and $A^*_{\gamma,\beta}$ are dissipative, thus $(A_{\gamma,\beta}, D(A_{\gamma,\beta}))$ generates an strongly continuous semigroup of contractions of $L^2(\Omega)$ (see the Lumer-Phillips Theorem [113, Corollary 4.4, Chapter 1, page 15], or the Hille Yosida Theorem [25, Theorem VII.4, page 105]).

We consider a solution $g \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$ of (5.1.3). Then, the function $x \mapsto g(t,x,v)$ belongs to $L^2(\Omega_1)$ for almost every $(t,v) \in [0,+\infty) \times (-1,1)$, thus, it can be developed on the Hilbert basis $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (see (5.1.4)) as follows

$$g(t,x,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n(t,v)\varphi_n(x) \quad \text{where} \quad g_n(t,v) := \int_{\mathbb{T}} g(t,x,v)\varphi_n(x)dx\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{5.5.1}$$

In what follows, with a slight abuse of vocabulary, this decomposition is called 'Fourier decomposition' and the functions $g_n(t,v)$ are called 'Fourier components'.

Proposition 5.5.1 *For every $n \in \mathbb{N}^*$, g_n is the unique solution of*

$$\begin{cases} \partial_t g_n(t,v) + i\lambda_n^\beta v^\gamma g_n(t,v) - \partial_v^2 g_n(t,v) = 0\,, & (t,v) \in (0,+\infty)\times(-1,1)\,, \\ g_n(t,\pm 1) = 0\,, & t \in (0,+\infty)\,, \\ g_n(0,v) = g_{0,n}(v)\,, & v \in (-1,1)\,, \end{cases} \tag{5.5.2}$$

where $g_{0,n} \in L^2(-1,1)$ is given by

$$g_{0,n}(v) := \int_{\Omega_1} g_0(x,v)\varphi_n(x)dx\,, \quad v \in (-1,1)\,.$$

This result can be proved by following the same steps as in [14, Section 2.2].

5.6 Observability on a horizontal strip

The goal of this section is the proof of the statements 1 of Theorems 5.1.6 and 5.1.7. Note that the negative part of the first statement of Theorem 5.1.7 (i.e. no null controllability, when $\gamma = 2$ and $T < T^*$) can be done exactly as in [13].

5.6.1 Global Carleman estimate

The goal of this subsection is the statement of a global Carleman estimate, proved in [13, Appendix] and useful for the proof of the statements 1 of Theorems 5.1.6 and 5.1.7. For $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\gamma \in \{1,2\}$, we introduce the operator

$$\mathcal{P}_{\lambda,\gamma}\, g := \partial_t g + i\lambda v^\gamma g - \partial_v^2 g\,.$$

Proposition 5.6.1 *Let a, b be such that $-1 < a < b < 1$. There exist a weight function $\beta \in C^1([-1,1], \mathbb{R}_+^*)$, positive constants $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ such that, for every $\lambda \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \{1,2\}$, $T > 0$ and $g \in C^0([0,T], L^2(-1,1)) \cap L^2(0,T; H_0^1(-1,1))$ the* *following inequality holds*

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}_1 \int_0^T \int_{-1}^1 \left(\tfrac{M}{t(T-t)} \left|\tfrac{\partial g}{\partial v}(t,v)\right|^2 + \tfrac{M^3}{(t(T-t))^3} \left|g(t,v)\right|^2 \right) e^{-\frac{M\beta(v)}{t(T-t)}} dvdt \\ &\leqslant \int_0^T \int_{-1}^1 |\mathcal{P}_{\lambda,\gamma} g(t,v)|^2 e^{-\frac{M\beta(v)}{t(T-t)}} \, dvdt + \int_0^T \int_a^b \tfrac{M^3}{(t(T-t))^3} |g(t,v)|^2 e^{-\frac{M\beta(v)}{t(T-t)}} \, dvdt\,, \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

where $M := \mathcal{C}_2 \max\{T + T^2; \sqrt{|\lambda|} T^2\}$.

In this proposition, the weight β is the usual one for Carleman estimates for 1D heat equations; since its explicit expression will not be used in this article, we do not specify its properties. Note that we have sharp dependency of M on λ and T. In particular, if we treat the term $i\lambda v^\gamma g$ as a lower-order term, to apply the Carleman estimate for the operator $(\partial_t - \partial_v^2)$, then, we can obtain a less sharp dependency $M = O(\lambda^{2/3})$, which is not sufficient in this article. The proof of this Carleman estimate is done in [13, Appendix], by revisiting the usual proof.

5.6.2 Dissipation of Fourier components

The Dirichlet realization of the operator $-\partial_v^2 + i\lambda_n^\beta v^\gamma$ on $(-1,1)$ is not a normal operator. Thus it is not obvious that the exponential decay of the solutions of (5.5.2) is given by the smallest real part of the eigenvalues of this operator. This question is answered in the following statement.

Proposition 5.6.2 *Let* $\gamma \in \{1,2\}$ *and*

$$d := \frac{2\gamma\beta}{2+\gamma}\,.$$

There exist $K, \delta > 0$ *such that, for every* $n \in \mathbb{N}^*$ *and* $g_{0,n} \in L^2(-1,1)$*, the solution of (5.5.2) satisfies*

$$\|g_n(t)\|_{L^2(-1,1)} \leqslant K e^{-\delta \lambda_n^d t} \|g_{0,n}\|_{L^2(-1,1)}\,, \quad \forall t > 0\,. \tag{5.6.2}$$

Moreover, for every $\epsilon > 0$*, there exists* $n_* > 0$ *such that, for every* $n > n_*$*, (5.6.2) holds with* $K = K_\epsilon$ *and*

$$\delta = \begin{cases} |\mu_1|/2 - \varepsilon \ \text{if}\ \gamma = 1\,, \\ \sqrt{2}/2 - \varepsilon \ \text{if}\ \gamma = 2\,, \end{cases} \tag{5.6.3}$$

where μ_1 *is the first zero (from the right) of the Airy function.*
Finally, the exponent d *of* λ_n *in (5.6.2) is optimal, and the critical value of* δ *in (5.6.3) is also optimal.*

This result is stronger than [13, Propositions 10 and 17] because in (5.6.2), we have L^2-norms on both sides, whereas in [13] there was an H^1-norm on the right hand side. We study this problem in semi-classical formulation (take $h_n = \lambda_n^{-\beta/2}$ and $s = h_n t$).

Let $h_0 > 0$. For $h \in (0, h_0)$ and $\psi_{0,h} \in L^2(-1,1)$, we consider the equation

$$\begin{cases} h\partial_t \psi_h(t,v) - h^2 \partial_v^2 \psi_h(t,v) + i v^\gamma \psi_h(t,v) = 0\,, & (t,v) \in (0,+\infty) \times (-1,1)\,, \\ \psi_h(t,\pm 1) = 0\,, & t \in (0,+\infty)\,, \\ \psi_h(0,v) = \psi_{0,h}(v)\,, & v \in (-1,1)\,. \end{cases} \tag{5.6.4}$$

Proposition 5.6.3 *Let $e = 2\gamma/(\gamma+2)$. There exist $K, \delta > 0$ such that, for every $h \in (0, h_0)$ and $\psi_{0,h} \in L^2(-1,1)$, the unique solution of (5.6.4) satisfies*

$$\|\psi_h(t)\|_{L^2(-1,1)} \leq K e^{-\delta h^{e-1} t} \|\psi_{0,h}\|_{L^2(-1,1)}, \quad \forall t > 0. \tag{5.6.5}$$

Moreover, for every $\varepsilon > 0$, there exists $h^* \in (0, h_0)$ such that, for every $h \in (0, h^*)$, (5.6.5) holds with $K = K_\varepsilon$ and (5.6.3) where μ_1 is the first zero (from the right) of the Airy function.
Finally, the exponent d of h in (5.6.5) is optimal, and the critical value of δ in (5.6.3) is also optimal.

Proof of Proposition 5.6.3 :
Let A_h be the operator defined by

$$A_h = -h^2 \frac{d^2}{dv^2} + iv^\gamma, \quad \mathcal{D}(A_h) = H^2(-1,1) \cap H_0^1(-1,1).$$

By rescaling ($R = R(h) = h^{-e/\gamma}$ and $y = Rv$) and using Theorems 5.3.1 and 5.3.2, we have

$$\lim_{h \to 0} h^{-e} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) = \begin{cases} |\mu_1|/2 & \text{if } \gamma = 1, \\ \sqrt{2}/2 & \text{if } \gamma = 2. \end{cases} \tag{5.6.6}$$

Thus, we can consider

$$\delta^* := \min_{h \in (0, h_0)} h^{-e} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h) > 0.$$

Let $\delta \in (0, \delta^*)$. By Theorems 5.3.1 and 5.3.2, there exists C_δ such that

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \left\| \Big(A_h - \delta h^e - i\nu \Big)^{-1} \right\| \leqslant \frac{C_\delta}{h^e}.$$

Thus,

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \left\| \left(\frac{A_h}{h} - \delta h^{e-1} - i\nu \right)^{-1} \right\| \leqslant C_\delta h^{1-e}. \tag{5.6.7}$$

Moreover, the operator $h^{-1}A_h$ is maximally accretive, thus it generates a semi-group of contractions :

$$\|\psi_h(t)\|_{L^2(-1,1)} \leqslant \|\psi_{0,h}\|_{L^2(-1,1)}, \quad \forall t > 0. \tag{5.6.8}$$

We can apply [83, Theorem 1.5], with $\omega = -\delta h^{e-1} < 0$, $r(\omega)^{-1} \leq C_\delta h^{1-e}$, $m(t) \equiv 1$ and $a = \tilde{a} = t/2$. Note that

$$\|\mathbf{1}\|^2_{L^2((0,t/2); e^{\omega t} dt)} = \frac{1 - e^{\omega t/2}}{-\omega}.$$

Thus, we obtain

$$\|\psi_h(t, \cdot)\|_{L^2(-1,1)} \leqslant \frac{\delta C_\delta}{1 - e^{-\delta h^{e-1} t/2}} e^{-\delta h^{e-1} t} \|\psi_{0,h}\|_{L^2(-1,1)}, \quad \forall t > 0. \tag{5.6.9}$$

Let $c_0 > 0$ and $t_h = 2c_0 h^{1-e}/\delta$. Then, by (5.6.9),

$$\|\psi_h(t, \cdot)\|_{L^2(-1,1)} \leqslant K_1 e^{-\delta h^{e-1} t} \|\psi_{0,h}\|_{L^2(-1,1)}, \quad \forall t \geq t_h$$

with

$$K_1 = \frac{\delta C_\delta}{1 - e^{-c_0}}\,.$$

Moreover, by (5.6.8),

$$\|\psi_h(t)\|_{L^2(-1,1)} \leqslant K_2 e^{-\delta h^{e-1} t} \|\psi_{0,h}\|_{L^2(-1,1)}\,, \quad \forall t \leq t_h$$

with $K_2 = e^{2c_0}$. Thus,

$$\|\psi_h(t)\|_{L^2(-1,1)} \leqslant K e^{-\delta h^{e-1} t} \|\psi_{0,h}\|_{L^2(-1,1)}\,, \quad \forall t > 0 \tag{5.6.10}$$

with $K = \max(K_1, K_2)$.
Finally, if $\varepsilon > 0$ is fixed, by (5.6.6) there exists $h^* \in (0, h_0)$ such that all the previous estimates hold for $h \in (0, h^*)$ and δ as in (5.6.3). Indeed, we have

$$\delta < \tilde{\delta}^* := \min_{h \in (0,h^*)} h^{-e} \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h).$$

To prove the optimality of exponent $(e-1)$ of h in (5.6.5), we just consider

$$\psi_{0,h} \in \ker(A_h - \lambda_{0,h} h^e)\,,$$

where $\lambda_{0,h}$ satisfies $h^e \lambda_{0,h} \in \sigma(\mathcal{A}_h)$ and $h^e \operatorname{Re} \lambda_{0,h} = \inf \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}_h)$. Then, we have

$$\psi_h(t, v) = e^{-\lambda_{0,h} h^{e-1} t} \psi_{0,h}(v)\,.$$

Thus, by (5.6.6), for every $t > 0$ and $\varepsilon > 0$, there exists $h^* > 0$ such that, for every $h \in (0, h^*)$,

$$\begin{aligned} \|\psi_h(t,\cdot)\|_{L^2(-1,1)} &= e^{-\lambda_{0,h} h^{e-1} t} \|g_{0,n}\|_{L^2(-1,1)} \\ &\geqslant e^{-(\nu+\varepsilon) h^{e-1} t} \|\psi_{0,h}\|_{L^2(-1,1)}\,, \end{aligned}$$

with $\nu = |\mu_1|/2$ if $\gamma = 1$ and $\nu = \sqrt{2}/2$ if $\gamma = 2$. □

5.6.3 Proof of the positive statements of Theorems 5.1.6 and 5.1.7

The positive statements in Theorems 5.1.6 and 5.1.7 are consequences of the following proposition and of the Bessel-Parseval equality.

Proposition 5.6.4 *Let $\beta \in (0, 1)$ and $0 < a < b < 1$.*

- *If $\gamma = 1$, then, for every $T > 0$, there exists $C > 0$ such that for every $n \in \mathbb{N}^*$ and $g_{0,n} \in L^2(-1, 1)$, the solution of (5.5.2) satisfies*

$$\int_{-1}^{1} |g_n(T, v)|^2 \, dv \leqslant C \int_0^T \int_a^b |g_n(t, v)|^2 \, dv dt\,. \tag{5.6.11}$$

- *If $\gamma = 2$, then, there exists $T_1 > 0$ such that, for every $T > T_1$, there exists $C > 0$ such that for every $n \in \mathbb{N}^*$ and $g_{0,n} \in L^2(-1, 1)$, the solution of (5.5.2) satisfies (5.6.11).*

Proof of Proposition 5.6.4 :
We deduce from Proposition 5.6.1 that

$$\mathcal{C}_3\lambda_n^{3\beta/2}e^{-c^*\,\lambda_n^{\beta/2}}\int_{T/3}^{2T/3}\int_{-1}^{1}|g_n(t,v)|^2dvdt \leqslant \mathcal{C}_4\int_0^T\int_a^b|g_n(t,v)|^2dvdt \quad (5.6.12)$$

for n large enough, where $\mathcal{C}_3 := \mathcal{C}_2\max\{4\mathcal{C}_1;(4\mathcal{C}_1)^3\}$, $c^* := \frac{9}{2}\mathcal{C}_2\max\{\beta(v);v\in[-1,1]\}$, $\mathcal{C}_4 := \max\{x^3e^{-\beta_*x};x\geqslant 0\}$ and $\beta_* := \min\{\beta(v);v\in(a,b)\}$.
Moreover, thanks to Proposition 5.6.2, we have

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1|g_n(T,v)|^2\,dv &\leqslant \frac{3K^2}{T}\,e^{-2\delta\lambda_n^dT/3}\int_{T/3}^{2T/3}\int_{-1}^1|g_n(t,v)|^2\,dvdt\\ &\leqslant \frac{\mathcal{C}_5}{\lambda_n^{3\beta/2}}e^{c^*\lambda_n^{\beta/2}-2\delta\lambda_n^dT/3}\int_0^T\int_a^b|g_n(t,v)|^2\,dvdt\end{aligned} \quad (5.6.13)$$

where $\mathcal{C}_5 := K^2\mathcal{C}_4/\mathcal{C}_3$.

Case 1 : $\gamma = 1$. Then $d=\frac{2\beta}{3}>\frac{\beta}{2}$, thus the observability constant above converges to zero as $n\to+\infty$. This proves the existence of a uniform observability constant for high frequencies : there exists $\mathcal{C}_H>0$ and $n_0\in\mathbb{N}^*$ such that

$$\int_{-1}^1|g_n(T,v)|^2\,dv\leqslant\mathcal{C}_H\int_0^T\int_a^b|g_n(t,v)|^2\,dvdt\,,\quad\forall g_n^0\in L^2(-1,1),n>n_0.$$

Moreover, for every $n\in\{1,...,n_0\}$, there exists a constant $C_n>0$ such that

$$\int_{-1}^1|g_n(T,v)|^2\,dv\leqslant C_n\int_0^T\int_a^b|g_n(t,v)|^2\,dvdt\,,\quad\forall g_n^0\in L^2(-1,1)$$

(usual observability inequality for 1D heat equations). Thus, the uniform observability constant $C:=\max\{\mathcal{C}_H,C_n;1\leqslant n\leqslant n_0\}$ gives the conclusion.

Case 2 : $\gamma=2$. Then $d=\frac{\beta}{2}$, thus, when $T>T_1:=\frac{3c_*}{2\delta}$, the observability constant in (5.6.13) converges to zero as $n\to+\infty$ and the proof can be ended as in the previous case. □

Annexe A

Pseudospectre et indices d'instabilité

A.1 Introduction

Notre objectif est de préciser la forme du pseudospectre dans le cas particulier d'un opérateur à spectre discret constitué de valeurs propres simples au sens de la multiplicité algébrique. Plus précisément, nous généraliserons un résultat donné dans [134] permettant de comparer le pseudospectre à une réunion de boules autour des valeurs propres.
Nous utilisons la notion d'*indice d'instabilité* associé à un élément isolé λ du spectre. Ces objets ont été définis à la section 1.3, et permettent en un sens de mesurer l'instabilité de λ.
Dans [134], M. Embree et L. N. Trefethen donnent une description approximative du pseudospectre d'une matrice à valeurs propres distinctes, sans bloc de Jordan :

Théorème A.1.1 ([134]) *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ une matrice à valeurs propres simples et sans bloc de Jordan. Alors, quand $\varepsilon \to 0$,*

$$\bigcup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} D(\lambda, \kappa(\lambda)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \subset \sigma_\varepsilon(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} D(\lambda, \kappa(\lambda)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2))\,.$$

Ce théorème est démontré à l'aide de la caractérisation donnée par le Théorème 1.1.2, en utilisant la théorie des perturbations de Kato [96].
Dans cette annexe, nous cherchons à comprendre si ce résultat s'étend au cas de la dimension infinie. La principale difficulté de cette généralisation provient de la nécessité de contrôler le reste $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ uniformément par rapport à la perturbation, mais aussi par rapport à la valeur propre λ. Le contrôle par rapport à la perturbation sera considéré ici, mais la question de savoir dans quels cas le reste est uniforme par rapport à λ n'a pas été traitée. C'est pourquoi nous nous contentons de considérer des parties bornées de pseudospectre.

Proposition A.1.2 *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur fermé dont le spectre est constitué de valeurs propres isolées, simples, sans bloc de Jordan. Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$,* *il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que, pour tout* $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\mathcal{K}\cap \bigcup_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} D(\lambda,\kappa(\lambda)\varepsilon+\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(\varepsilon^2)) \subset \mathcal{K}\cap\sigma_\varepsilon(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}\cap \bigcup_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} D(\lambda,\kappa(\lambda)\varepsilon+\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(\varepsilon^2))\,. \tag{A.1.1}$$

La suite de cette annexe est consacrée à la preuve de cette proposition : nous déterminons le coefficient du terme d'ordre 1 dans la section A.2, et nous contrôlons le reste uniformément par rapport à la perturbation dans la section A.3.

A.2 Premier terme du développement des valeurs propres perturbées

Nous utilisons la caractérisation du pseudospectre donnée par le Théorème 1.1.2. Soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\|\mathcal{B}\| \leq 1$. Sous les hypothèses de non-dégénérescence de la proposition, la théorie des perturbations de Kato [96] permet d'affirmer qu'il existe, pour $t \in \mathbb{C}$ suffisamment petit, une unique fonction $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{C}$ telle que $\lambda(t)$ est valeur propre (simple, sans bloc de Jordan) de l'opérateur $\mathcal{A}(t) := \mathcal{A}+t\mathcal{B}$ avec $\lambda(0) = \lambda$, et que cette fonction est holomorphe. On suppose ici $\lambda \in \mathcal{K}$, où $\mathcal{K}$ est un compact fixé, car si r_λ désigne le rayon de convergence de la fonction $\lambda(t)$, on peut alors avoir

$$\inf\{r_\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} = 0\,.$$

Il s'agit de déterminer le terme principal de la distance $|\lambda(t) - \lambda|$ pour $|t| \leq \varepsilon$. D'après le développement de Taylor de $\lambda(t)$ en 0, nous cherchons donc à calculer $\lambda'(0)$.

Soit u_λ un vecteur propre pour $\mathcal{A}$ associé à λ et u_λ^* un vecteur propre pour $\mathcal{A}^*$ associé à $\bar{\lambda}$.

L'hypothèse rg $\Pi_\lambda = 1$ entraîne $\langle u_\lambda, u_\lambda^*\rangle \neq 0$ d'après la Proposition 1.3.2, (i).

Les vecteurs propres $u_\lambda(t)$ et $u_\lambda^*(t)$ de $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{A}^*(t)$ respectivement, vérifiant $u_\lambda(0) = u_\lambda$ et $u_\lambda^*(0) = u_\lambda^*$, dépendent eux aussi de façon holomorphe de t pour t suffisamment petit, et nous pouvons dériver l'égalité

$$\mathcal{A}(t)u_\lambda(t) = \lambda(t)u_\lambda(t)\,,$$

pour obtenir

$$\lambda'(t)u_\lambda(t) = (\mathcal{A}(t) - \lambda(t))u'_\lambda(t) + \mathcal{A}'(t)u_\lambda(t)\,.$$

En prenant le produit scalaire avec u_λ^* en $t = 0$, nous obtenons

$$\lambda'(0)\langle u_\lambda, u_\lambda^*\rangle = \underbrace{\langle u'_\lambda(0), (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda})u_\lambda^*\rangle}_{=0} + \langle \mathcal{B}u_\lambda, u_\lambda^*\rangle\,,$$

c'est-à-dire

$$\lambda'(0) = \frac{\langle \mathcal{B}u_\lambda, u_\lambda^*\rangle}{\langle u_\lambda, u_\lambda^*\rangle}\,. \tag{A.2.1}$$

Dans d'autres contextes, cette formule est appelée Formule de Feynman-Hellmann. Puisque $\|\mathcal{B}\| \leq 1$ et d'après (1.3.5), on a donc

$$|\lambda'(0)| \leq \kappa(\lambda)\,.$$

D'autre part, si on choisit

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\kappa(\lambda)} \Pi^*_{\bar{\lambda}} \,,$$

où $\Pi^*_{\bar{\lambda}}$ est le projecteur spectral associé à $\bar{\lambda}$ pour $\mathcal{A}^*$, on a bien $\|\mathcal{B}\| \leq 1$ et

$$\lambda'(0) = \kappa(\lambda)\,.$$

Ceci achève la preuve de la proposition dans le cas de la dimension finie, en écrivant

$$\lambda(t) = \lambda + \lambda'(0)t + \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(t^2)\,.$$

Il est en effet facile d'obtenir l'uniformité par rapport à $\mathcal{B}$ dans la boule unité par un argument de compacité, qui n'est plus valable en dimension infinie. Le reste de la preuve en dimension infinie consiste à vérifier que le reste $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(t^2)$ est uniforme par rapport à l'opérateur $\mathcal{B}$ choisi dans la perturbation.

A.3 Uniformité du reste par rapport à la perturbation

Pour insister sur la dépendance en l'opérateur $\mathcal{B}$ des objets manipulés dans la section précédente, nous noterons ici $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}(t) = \mathcal{A}(t)$ et $\lambda_{\mathcal{B}}(t) = \lambda(t)$. Nous supposerons par ailleurs $\lambda = 0$ pour alléger les notations.

Etape 1 : Exprimer les valeurs propres de $\mathcal{A} + t\mathcal{B}$ comme les zéros d'une fonction $\mathcal{E}^{-+}_{\mathcal{B}}(t,z)$.
Le contrôle uniforme du reste par rapport à $\mathcal{B}$ va se faire en exprimant les valeurs propres $\lambda_{\mathcal{B}}(t)$ comme zéros d'une fonction régulière, ce qui sera possible en considérant le problème de Grushin suivant. Nous renvoyons à [129] pour une discussion approfondie sur ce type de méthodes.

Soit $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z)$ l'opérateur agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}$ défini par

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z) = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + t\mathcal{B} - z & u_0^* \\ \langle \cdot, u_0^* \rangle & 0 \end{pmatrix} ,$$

où u_0^* vérifie $\mathcal{A}^* u_0^* = 0$ et $\langle u_0, u_0^* \rangle = 1$.
Remarquons que u_0^* est orthogonal à tout vecteur propre de $\mathcal{A}$ associé à une valeur propre $\mu \neq 0$.
Dans la suite, on notera $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathcal{B}}(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Nous allons vérifier que $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z)$ est inversible pour t et z suffisamment petits. Nous verrons ensuite que les valeurs propres de $\mathcal{A} + t\mathcal{B}$ s'interprètent comme les zéros d'une fonction de t et de z apparaissant dans l'expression de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z)^{-1}$.

Lemme A.3.1 *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $r_0 > 0$ tels que, pour tous $|t| \leq \varepsilon_0$, $|z| \leq r_0$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\|\mathcal{B}\| \leq 1$, l'opérateur*

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z) := \begin{pmatrix} \mathcal{A} + t\mathcal{B} - z & u_0^* \\ \langle \cdot\,, u_0^* \rangle & 0 \end{pmatrix} \ : \ \mathcal{D}(\mathcal{A}) \otimes \mathbb{C} \to \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}$$

est inversible.

Preuve :
Commençons par vérifier que $\mathbf{A}$ est inversible. Soit $\mathbf{x} = (u, \alpha) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \otimes \mathbb{C}$ tel que $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$. Alors,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{A}u + \alpha u_0^* & = & 0\,, \\ \langle u, u_0^* \rangle & = & 0\,. \end{array} \right.$$

En prenant le produit scalaire de la première ligne par u_0^*, on obtient $\alpha \|u_0^*\|^2 = 0$, d'où $\alpha = 0$ puis $\mathcal{A}u = 0$. Comme 0 est valeur propre simple, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u = \lambda u_0$, ce qui donne $\bar{\lambda} = 0$ dans la deuxième ligne, puisque $\langle u_0, u_0^* \rangle = 1$. On a donc $\mathbf{x} = 0$ et $\mathbf{A}$ est injectif.

Pour montrer la surjectivité, prenons maintenant $\mathbf{y} = (v, \beta) \in \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}$ et cherchons $\mathbf{x} = (u, \alpha)$ tel que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{A}u + \alpha u_0^* & = & v\,, \\ \langle u, u_0^* \rangle & = & \beta\,. \end{array} \right.$$

On remarque que $R(\mathcal{A}) \subset \langle u_0^* \rangle^{\perp}$ et que la restriction $\mathcal{A}_{\perp}$ de $\mathcal{A}$ à $\langle u_0^* \rangle^{\perp}$ est inversible.
On distingue donc deux cas :
Si $v \in \langle u_0^* \rangle^{\perp}$, alors $\widetilde{\mathbf{x}} := (\tilde{u}, 0)$, où $\tilde{u} = \mathcal{A}_{\perp}^{-1} v$, vérifie la première ligne du système ci-dessus, et cela reste valable si l'on ajoute à $\tilde{u}$ n'importe quel multiple de u_0 ; on prend donc $u = \tilde{u} + \beta u_0$ pour satisfaire la seconde ligne, et $\mathbf{x} := (u, 0)$ est un antécédent de $\mathbf{y}$.
Par ailleurs, si $v = \lambda u_0^*$, alors $\mathbf{x} = (\beta u_0, \lambda)$ convient.
Par conséquent $\mathbf{A}$ est inversible.

Nous allons maintenant déterminer l'inverse $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$, en le construisant par exemple comme un inverse à gauche. Soit

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & w \\ \ell & \mu \end{pmatrix}$$

avec $w \in \mathcal{H}$, $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ et $\mu \in \mathbb{C}$.
La condition $\mathbf{CA} = I$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}\mathcal{A} + \langle \cdot\,,\, u_0 * \rangle w & = & I\,, \\ \mathcal{C}u_0^* & = & 0\,, \\ \ell \circ \mathcal{A} + \mu \langle \cdot\,,\, u_0 * \rangle & = & 0\,, \\ \ell(u_0^*) & = & 1\,. \end{array} \right.$$

Pour que la troisième ligne soit vérifiée, on choisit $\mu = 0$ et $\ell = \langle \cdot\,,\, \nu u_0^* \rangle$ avec $\nu \in \mathbb{C}$ à déterminer.
La quatrième condition impose alors $\nu = 1/\|u_0^*\|^2$. Si on choisit maintenant $w = u_0$, on constate d'après (1.3.4) que l'opérateur $\langle \cdot\,,\, u_0 * \rangle w$ est égal au projecteur spectral Π de $\mathcal{A}$ associé à la valeur propre 0.
D'après les deux premières lignes, l'opérateur $\mathcal{C}$ doit donc vérifier

$$\mathcal{C}\mathcal{A} = I - \Pi \quad \text{et} \quad u_0^* \in \ker \mathcal{C}\,.$$

Ceci conduit à choisir

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}_{\perp}^{-1}(I - \Pi)\,,$$

d'où finalement

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\perp}^{-1}(I-\Pi) & u_0 \\ \frac{1}{\|u_0^*\|^2}\langle \cdot \,,\, u_0 * \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant montrer que $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}(t,z)$ est inversible, et en construire l'inverse, pour $|t|$ et $|z|$ suffisamment petits.
On a

$$\mathbf{C}\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z) = \mathbf{C}\left(\mathbf{A} + \begin{pmatrix} t\mathcal{B}-z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = I + \mathbf{D}\,,$$

où

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathcal{B}}(t,z) = \mathbf{C}\begin{pmatrix} t\mathcal{B}-z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\mathcal{C}\mathcal{B} - z\mathcal{C} & 0 \\ \frac{1}{\|u_0^*\|^2}\langle (t\mathcal{B}-z)\cdot \,,\, u_0^* \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe clairement $t_0 > 0$ et $r_0 > 0$ tel que si $|t| \leq t_0$, $|z| \leq r_0$, $\|\mathcal{B}\| \leq 1$, alors $\|\mathbf{D}_{\mathcal{B}}(t,z)\| < 1$.
Ainsi, $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z)$ est inversible d'inverse

$$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}(t,z) = (I+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{C} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathbf{D}^n\right)\mathbf{C}\,. \tag{A.3.1}$$

$\boxminus$

Dans la suite, on choisit t_0 et r_0 tels que

$$(t_0 + r_0)\|\mathcal{C}\| < 1\,.$$

Lemme A.3.2 *Soit*

$$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}(t,z) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^0(t,z) & \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+(t,z) \\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^-(t,z) & \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z) \end{pmatrix}$$

l'inverse de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z)$ *pour*

$$|t| \leq t_0\,,\ |z| \leq r_0\,,\ \|\mathcal{B}\| \leq 1\,.$$

On a alors

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z) = \frac{1}{\|u_0^*\|^2}\left(1 + \langle \sum_{n\geq 1}(-1)^n(t\mathcal{B}-z)\left[\mathcal{C}(t\mathcal{B}-z)\right]^{n-1}u_0, u_0^*\rangle\right)\,. \tag{A.3.2}$$

Enfin, sous les conditions ci-dessus, z est dans le spectre de $\mathcal{A}+t\mathcal{B}$ si et seulement si

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z) = 0\,.$$

Preuve : L'expression (A.3.2) se détermine directement à partir de (A.3.1), puisque pour $n \geq 1$,

$$\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} \left[\mathcal{C}(t\mathcal{B}-z)\right]^n & 0 \\ \frac{1}{\|u_0^*\|^2}\langle (t\mathcal{B}-z)\left[\mathcal{C}(t\mathcal{B}-z)\right]^{n-1}\cdot \,,\, u_0^* \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que $\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z$ est inversible si et seulement si $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z)\neq 0$.
En notant $\mathcal{R}^- = \cdot u_0^*$ et $\mathcal{R}^+ = \langle \cdot\,,\, u_0*\rangle$ les opérateurs apparaissant dans l'expression de $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}(t,z)$, et en exprimant les conditions $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = I$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}\mathbf{E}_{\mathcal{B}} = I$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{R}^+\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^0 = 0\,, & \mathcal{R}^+\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+ = 1\,,\\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^0\mathcal{R}^- = 0\,, & \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^-\mathcal{R}^- = 1\,,\\ (\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+ + \mathcal{R}^-\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+} = 0\,, & \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^-(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z) + \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}\mathcal{R}^+ = 0\,,\\ (\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^0 + \mathcal{R}^-\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^- = I\,, & \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z) + \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+\mathcal{R}^+ = I\,. \end{array}\right.$$

Si $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}\neq 0$, la troisième ligne donne

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{R}^- = -(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+})^{-1}\,,\\ \mathcal{R}^+ = -(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+})^{-1}\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^-(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)\,. \end{array}\right.$$

En injectant ces égalités dans la quatrième ligne,

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^0 - \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+})^{-1}\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^-) = I\,,\\ (\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^0 - \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+(\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+})^{-1}\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^-)(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z) = I\,. \end{array}\right.$$

Ceci fournit un inverse explicite pour $\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z$.
Réciproquement, si $\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z$ est inversible, la troisième ligne permet d'exprimer $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^-$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+ = -(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)^{-1}\mathcal{R}^-\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}\,,\\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^- = -\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}\mathcal{R}^+(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)^{-1}\,, \end{array}\right.$$

et en multipliant ces lignes par $\mathcal{R}^+$ à gauche et $\mathcal{R}^-$ à droite respectivement,

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \mathcal{R}^+\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^+ = -\mathcal{R}^+(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)\mathcal{R}^-\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+},\\ 1 = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^-\mathcal{R}^- = -\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}\mathcal{R}^+(\mathcal{A}+t\mathcal{B}-z)\mathcal{R}^-, \end{array}\right.$$

d'où $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}\neq 0$. ⊟

Notre objectif est donc de montrer que les zéros de la fonction $z\mapsto \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z)$ sont des fonctions continues de t uniformément par rapport à $\mathcal{B}$.

Etape 2 : Point fixe.
Dans la preuve du lemme suivant, nous reprenons les étapes de la démonstration du théorème des fonctions implicites en vérifiant que toutes les estimations sont uniformes par rapport à $\mathcal{B}$.

Lemme A.3.3 *Il existe $0 < t_1 < t_0$ tel que, pour tous $|t|\leq t_1$, $\|\mathcal{B}\|\leq 1$, l'unique valeur propre $z_{\mathcal{B}}(t)$ de $\mathcal{A}+t\mathcal{B}$ avec $z_{\mathcal{B}}(0)=0$ vérifie*

$$|z_{\mathcal{B}}(t)|\leq r(t)\,,$$

où $r(t)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$ et $r(t)\to 0$ quand $t\to 0$.

Preuve :
Commençons par remarquer qu'il existe $c>0$ tel que, pour tous $|t|\leq t_0$ et $\|\mathcal{B}\|\leq 1$,

$$|\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,0)|\leq c\,|t|\,. \tag{A.3.3}$$

En effet, on a

$$|\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,0)| = |\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,0) - \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(0,0)| \leq M_{\mathcal{B}}(t)\,|t|\,, \tag{A.3.4}$$

où

$$M_{\mathcal{B}}(t) = \max_{|s|\leq|t|} |\partial_t \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(s,0)|\,.$$

Or d'après (A.3.2), on a

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z) &= \frac{1}{\|u_0^*\|^2}\langle \Bigg(\sum_{n\geq 1} (-1)^n (\mathcal{B}-z)[\mathcal{C}(t\mathcal{B}-z)]^{n-1} \\ &\quad + \sum_{n\geq 2} (-1)^n (n-1)(t\mathcal{B}-z)\mathcal{C}\mathcal{B}[\mathcal{C}(t\mathcal{B}-z)]^{n-2} \Bigg) u_0\,,\, u_0^* \rangle\,.\end{aligned}$$

Si $|s| \leq t_0$, on en déduit

$$|\partial_t \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(s,0)| \leq \frac{\|u_0\|}{\|u_0^*\|} \sum_{n\geq 1} n \|t\mathcal{C}\|^{n-1} \leq c\,, \quad c > 0\,,$$

et (A.3.3) en découle.
Remarquons également qu'on a

$$|\partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z) - \partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(0,0)| \to 0\,, \tag{A.3.5}$$

quand $(t,z) \longrightarrow 0$ uniformément pour $\|\mathcal{B}\| \leq 1$.
En effet, d'après (A.3.2) on a

$$\begin{aligned}\partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z) - \partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(0,0) &= \frac{1}{\|u_0^*\|^2}\langle \sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \big([\mathcal{C}(t\mathcal{B}-z)]^{n-1} \\ &\quad + (n-1)(t\mathcal{B}-z)[\mathcal{C}(t\mathcal{B}-z)]^{n-2} \big) u_0, u_0^* \rangle\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}|\partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z) - \partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(0,0)| &\leq \frac{\|u_0\|}{\|u_0^*\|} \sum_{n\geq 2} n \|(t+z)\mathcal{C}\|^{n-1} \\ &= \frac{\|u_0\|}{\|u_0^*\|} \left(\frac{1}{(1-\|(t+z)\mathcal{C}\|)^2} - 1 \right),\end{aligned}$$

ce qui entraîne (A.3.5) quand $(t,z) \longrightarrow 0$ uniformément pour $\|\mathcal{B}\| \leq 1$.

On reprend maintenant la preuve par méthode du point fixe, inspirée de la méthode de Newton, du théorème des fonctions implicites, avec $\mathcal{B}$ considéré comme un paramètre par rapport auquel les estimations doivent être uniformes. On cherche les zéros $z_{\mathcal{B}}(t)$ de la fonction $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,\cdot)$ comme points fixes de la fonction

$$F_{\mathcal{B}}^t : z \longmapsto z - \frac{1}{\partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(0,0)} \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z)\,.$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On a, pour $|t| \leq t_0$, $|z| \leq r_0$ et $\|\mathcal{B}\| \leq 1$,

$$\partial_z F_{\mathcal{B}}^t(z) = 1 - \frac{\partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(t,z)}{\partial_z \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{-+}(0,0)}\,.$$

D'après (A.3.5), il existe donc $t_1 \in]0, t_0[$ et $r_1 \in]0, r_0[$ tel que, pour $|t| \leq t_1$ et $\|\mathcal{B}\| \leq 1$,

$$\sup_{|z| \leq r_1} |\partial_z F^t_{\mathcal{B}}(z)| \leq \varepsilon. \tag{A.3.6}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} |F^t_{\mathcal{B}}(z)| &\leq |F^t_{\mathcal{B}}(z) - F^t_{\mathcal{B}}(0)| + |F^t_{\mathcal{B}}(0)| \\ &\leq |F^t_{\mathcal{B}}(z) - F^t_{\mathcal{B}}(0)| + \|u_0^*\|^2 |\mathcal{E}^{-+}_{\mathcal{B}}(t,0)|, \\ &\leq \varepsilon|z| + \|u_0^*\|^2 |\mathcal{E}^{-+}_{\mathcal{B}}(t,0)|\,. \end{aligned} \tag{A.3.7}$$

D'après (A.3.3), il existe donc $t_2 \in]0, t_1[$ tel que, pour tous $|t| \leq t_2$ et $\|\mathcal{B}\| \leq 1$, $|F^t_{\mathcal{B}}(z)| \leq r_1$ dès que $|z| \leq r_1$.
Ainsi, d'après (A.3.6), l'application $F^t_{\mathcal{B}}(z) : \{|z| \leq r_1\} \to \{|z| \leq r_1\}$ est une contraction, et l'unique point fixe $z_{\mathcal{B}}(t)$ de $F^t_{\mathcal{B}}$ vérifie $|z_{\mathcal{B}}(t)| \leq r_1$.
D'autre part, pour $|t| \leq t_2$ et $\|\mathcal{B}\| \leq 1$, on a d'après (A.3.3) et (A.3.7),

$$|z_{\mathcal{B}}(t)| \leq \varepsilon |z_{\mathcal{B}}(t)| + c\|u_0^*\|^2 |t|\,,$$

c'est-à-dire

$$|z_{\mathcal{B}}(t)| \leq \frac{c\|u_0^*\|^2}{1-\varepsilon} |t|\,.$$

Le résultat souhaité en découle avec par exemple $\varepsilon = 1/2$ et $r(t) = 2c\|u_0^*\|^2|t|$. ⊟

On déduit enfin du Lemme A.3.3 que le reste $\mathcal{O}(t^2)$ dans le développement

$$z_{\mathcal{B}}(t) = z_{\mathcal{B}}(0) + z'_{\mathcal{B}}(0)t + \mathcal{O}(t^2)$$

est uniforme par rapport à $\mathcal{B}$ pour $\|\mathcal{B}\| \leq 1$, ce qui achève la preuve de la Proposition A.1.2.

Annexe B

Une variante de la méthode de Laplace

Nous démontrons ici un résultat qui étend la méthode de Laplace, sous des hypothèses malgré tout assez fortes, au cas où la phase dépend de façon régulière d'une certaine puissance du paramètre.

B.1 Enoncé

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$. On s'intéresse au comportement quand $h \to 0$ des intégrales de la forme

$$I(h) = \int_a^b f(x) e^{-\varphi(x,h)} dx\,. \tag{B.1.1}$$

Théorème B.1.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, +\infty]$, $h_0 > 0$, ainsi que deux fonctions, φ définie sur $[a, b[\times]0, h_0]$ et $f \in L^1([a, b[; e^{-\varphi(x,h)} dx)$ pour tout $h < h_0$, continue en a. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ tels que*

$$h^\alpha \varphi(x, h) = \psi(x, h^\gamma)\,,$$

avec $\psi(\cdot, \varepsilon) \in \mathcal{C}^\infty([a, b[)$ pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 = h_0^\gamma$) et $\psi(x, \cdot)$ de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ en 0, où $N := [\alpha/\gamma]$.
Pour $j \in \{0, \dots, N\}$, on note $\lambda_j = \min\{k \in \mathbb{N}^* : \partial_\varepsilon^j \partial_x^k \psi(a, 0) \neq 0\}$ et

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\alpha - j\gamma} > 0\,.$$

On suppose que l'ensemble $J = \arg\min(j \mapsto \Lambda_j)$ des indices réalisant le minimum de Λ_j est réduit à un élément, $J = \{j_0\}$, et que

$$\partial_\varepsilon^{j_0} \partial_x^{\lambda_{j_0}} \psi(a, 0) > 0\,. \tag{B.1.2}$$

On suppose de plus que $\psi(\cdot, 0)$ est strictement minimale en $x = a$, et qu'il existe $M \in [a, b[$ tel que

$$\forall x \in [M, b[,\ \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\,, \qquad \psi(x, \varepsilon) > \psi(a, 0)\,. \tag{B.1.3}$$

Alors, l'intégrale (B.1.1) vérifie

$$I(h) \underset{h\to 0}{\sim} Kf(a)\left|\frac{1}{j_0!\lambda_{j_0}!}(\partial_\varepsilon^{j_0}\partial_x^{\lambda_{j_0}}\psi)(a,0)\right|^{-1/\lambda_{j_0}} h^{1/\Lambda_{j_0}}e^{-\varphi(a,h)}\,, \tag{B.1.4}$$

avec

$$K := \int_0^{+\infty} e^{-y^{\lambda_{j_0}}}\,dy\,. \tag{B.1.5}$$

Par souci de simplicité dans l'énoncé de ce théorème, nous avons supposé que l'ensemble $J = \arg\min(j \mapsto \Lambda_j)$ est réduit à un seul indice j_0. Cette formulation est suffisante pour l'usage que nous en faisons au chapitre 3. On a cependant un énoncé et une preuve similaires dans le cas où J contient plusieurs indices. On note alors $\tilde{J} = \arg\max_{j\in J}(j \mapsto \lambda_j)$ et l'hypothèse (B.1.2) est remplacée par

$$\sum_{j\in\tilde{J}} \frac{1}{j!}\partial_\varepsilon^j(\partial_x^\lambda\psi)(a,0) > 0\,, \qquad \lambda = \max_{j\in J}\lambda_j\,. \tag{B.1.6}$$

La conclusion (B.1.4) du théorème est alors valable pour $j_0 \in J$, où (B.1.5) devient

$$K := \int_0^{+\infty} e^{-g(y)}dy\,, \quad g(y) = \sum_{j\in J} d_j y^{\lambda_j}\,, \tag{B.1.7}$$

les constantes d_j étant définies en (B.2.3).

Dans la preuve qui suit, on ne suppose pas nécessairement que l'ensemble $J = \arg\min(j \mapsto \Lambda_j)$ est réduit à un élément.

B.2 Preuve

La preuve, comme pour la méthode de Laplace standard, consiste à montrer que l'intégrale $I(h)$ se concentre, quand h tend vers 0, autour du point particulier a, puis, par approximation locale de l'intégrande, que l'intégrale au voisinage de ce point se comporte suivant l'équivalent (B.1.4).

Etape 1 : première simplification.
On fixe $\delta \in]0, b-a[$ et on s'intéresse à l'intégrale localisée

$$J(h) = \int_a^{a+\delta} f(x)e^{-\varphi(x,h)}\,dx\,.$$

Par hypothèse, on peut écrire $\varphi(x,h) = \frac{1}{h^\alpha}\psi(x,\varepsilon(h))$, avec $\varepsilon(h) = h^\gamma$. Un développement de Taylor à l'ordre N en ε en x donne :

$$\begin{aligned}\psi(x,\varepsilon) \quad &= \quad \psi(a,\varepsilon) + \sum_{j=0}^{N}\left(\frac{1}{j!\lambda_j!}\partial_\varepsilon^j\partial_x^{\lambda_j}\psi(a,0)(x-a)^{\lambda_j} + \mathcal{O}(|x-a|^{\lambda_j+1})\right)\varepsilon^j \\ &\quad +\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\,,\end{aligned}$$

où le reste $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ est uniforme pour $x \in [a, a+\delta]$.

Ainsi, en remarquant que $h^{-\alpha}\varepsilon(h)^{N+1} \to 0$ par définition de N, on a

$$\varphi(x,h) = \varphi(a,h) + \frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N} c_j\varepsilon^j\Big((x-a)^{\lambda_j} + \mathcal{O}(|x-a|^{\lambda_j+1})\Big) + o(1)\,,$$

avec

$$c_j = \frac{1}{j!\lambda_j!}\partial_\varepsilon^j \partial_x^{\lambda_j}\psi(a,0)\,. \tag{B.2.1}$$

On a donc

$$J(h) \underset{h\to 0}{\sim} K(h)\,, \quad K(h) = e^{-\varphi(a,h)}\int_a^{a+\delta} f(x)e^{-\frac{1}{h^\alpha}\tilde\psi(x,\varepsilon(h))}dx\,, \tag{B.2.2}$$

où

$$\tilde\psi(x,\varepsilon) = \sum_{j=0}^N c_j\varepsilon^j\Big((x-a)^{\lambda_j} + \mathcal{O}(|x-a|^{\lambda_j+1})\Big)\,.$$

Etape 2 : changement de variable.
On va maintenant mettre en évidence le terme ayant le plus de poids dans $\tilde\psi$ par un changement de variables approprié. On utilise pour cela la notation

$$\Lambda_j = \frac{\lambda_j}{\alpha - j\gamma}$$

de l'énoncé, pour $j = 0,\ldots,N$, en remarquant que, par définition de N, tous ces exposants sont positifs. On choisit $j_0 \in J$ où J est également défini dans l'énoncé, et on pose

$$y = |c_{j_0}|^{1/\lambda_{j_0}}\varepsilon^{j_0/\lambda_{j_0}}h^{-\alpha/\lambda_{j_0}}(x-a)\,,$$

de sorte que

$$\frac{1}{h^\alpha}c_{j_0}\varepsilon^{j_0}(x-a)^{\lambda_{j_0}} = (\ \mathrm{sgn}\ c_{j_0})y^{\lambda_{j_0}}\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} K(h) &= |c_{j_0}|^{-1/\lambda_{j_0}}h^{1/\Lambda_{j_0}}e^{-\varphi(a,h)} \\ &\quad\times\int_0^{\delta|c_{j_0}|^{1/\lambda_{j_0}}h^{-1/\Lambda_{j_0}}} f(|c_{j_0}|^{-1/\lambda_{j_0}}h^{1/\Lambda_{j_0}}y+a)e^{-\Psi(y,h)}dy\,, \end{aligned}$$

où

$$\Psi(y,h) = \sum_{j=0}^N\Big(d_jh^{\mu_j}y^{\lambda_j} + o(h_j^\mu)\Big)\,,$$

$$\forall j = 0,\ldots,N, \qquad \left\{\begin{array}{lcl} d_j &=& c_j|c_{j_0}|^{-\lambda_j/\lambda_{j_0}}\,, \\ \mu_j &=& \frac{1}{\lambda_{j_0}}(\lambda_j(\alpha-j\gamma) - \lambda_{j_0}(\alpha-j_0\gamma))\,. \end{array}\right. \tag{B.2.3}$$

On vérifie alors immédiatement que, si $j\notin J$, c'est-à-dire $\Lambda_j > \Lambda_{j_0} = \inf_\ell \Lambda_\ell$, alors $\mu_j > 0$, et que si $j \in J$, c'est-à-dire $\Lambda_j = \Lambda_{j_0} = \inf_\ell\Lambda_\ell$, alors $\mu_j = 0$.
Ainsi, on a

$$\Psi(y,h) = g(y) + o(1)\,, \quad g(y) = \sum_{j\in J} d_jy^{\lambda_j}\,,$$

où le reste $o(1)$ est uniforme par rapport à y.

Etape 3 : équivalent de $K(h)$.
On vient de mettre l'intégrale $K(h)$ sous la forme suivante :

$$K(h) = |c_{j_0}|^{-1/\lambda_{j_0}} h^{1/\Lambda_{j_0}} e^{-\varphi(a,h)} \int_0^{+\infty} f_h(y) e^{-g(y)} dy\,,$$

avec

$$f_h(y) = f(|c_{j_0}|^{-1/\lambda_{j_0}} h^{1/\Lambda_{j_0}} y + a) e^{-R(y,h)} \mathbf{1}_{[0,\delta|c_{j_0}|^{1/\lambda_{j_0}} h^{-1/\Lambda_{j_0}}]}\,.$$

On a clairement

$$\lim_{h\to 0} f_h = f(a) \quad \text{(simplement)},$$

et

$$\exists M > 0\,,\ \forall h \in]0, h_0]\,,\ \forall y \in \mathbb{R}^+\,,\quad |f_h(y) e^{-g(y)}| \le M e^{-g(y)}\,.$$

D'autre part, g étant une fonction polynomiale, $e^{-g} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ si et seulement si le coefficient dominant de g est strictement positif, c'est-à-dire, avec $\tilde{J}$ et λ définis comme dans l'énoncé, $\sum_{j\in\tilde{J}} d_j > 0$, ou encore

$$|c_{j_0}|^{-\lambda_{\lambda_{j_0}}} \sum_{j\in\tilde{J}} c_j > 0\,,$$

ce qui est assuré par l'hypothèse (B.1.6).
On a donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_h(y) e^{-g(y)} dy \underset{h\to 0}{\to} K f(a)\,,$$

où $K = \int_0^{+\infty} e^{-g(y)} dy$.
On obtient ainsi

$$K(h) \underset{h\to 0}{\sim} K f(a) |c_{j_0}|^{-1/\lambda_{j_0}} h^{1/\Lambda_{j_0}} e^{-\varphi(a,h)}\,, \tag{B.2.4}$$

et le membre de droite de l'équivalent est exactement celui de (B.1.4).

Etape 4 : Localisation au voisinage de a.
Il ne reste donc plus qu'à justifier la localisation de l'intégrale au voisinage du point a, c'est-à-dire à montrer que

$$I(h) \underset{h\to 0}{\sim} K(h)\,. \tag{B.2.5}$$

On commence par majorer grossièrement l'intégrale sur $[a+\delta, b[$:

$$\left| \int_{a+\delta}^b f(x) e^{-\varphi(x,h)} dx \right| \le \exp\left(- \inf_{x\in[a+\delta,b[} \varphi(x,h) \right) \int_{a+\delta}^b |f(x)| dx.$$

D'après l'équivalent (B.2.4), si on montre que

$$\varphi(a,h) < \inf_{x\in[a+\delta,b[} \varphi(x,h)\,, \tag{B.2.6}$$

pour h suffisamment petit, on aura donc

$$\left| \int_{a+\delta}^{b} f(x) e^{-\varphi(x,h)} dx \right| = o(K(h)) ,$$

et par conséquent (B.2.5).
Or, $\psi(\cdot, 0)$ étant minimale (strictement) en $x = a$ par hypothèse, on a pour tout $x \in [a+\delta, b[$, $\psi(x,0) > \psi(a,0)$, et par continuité de ψ par rapport à ε en 0 , à condition de prendre h assez petit, il existe $\eta > 0$ tel que $\psi(x, h^\gamma) > \psi(a, h^\gamma) + \eta$ pour tout $x \in [a+\delta, M]$ (où $M \in]a+\delta, b[$ est arbitraire).
On a donc

$$\inf_{x \in [a+\delta, M]} \varphi(x,h) > \varphi(a,h) .$$

Il suffit enfin de choisir M assez grand pour que

$$\inf_{x \in [M, b[} \psi(x, \varepsilon) > \psi(a, 0) .$$

Ceci est possible grâce à l'hypothèse (5.3.11), et (B.2.6) en découle.

Conclusion : (B.2.4) et (B.2.5) entraînent immédiatement (B.1.4). □

B.3 Exemple modèle

On considère ici l'intégrale $I(h)$ avec $a = 0$ et

$$\varphi(x,h) = \frac{1}{h}(c + x^4 + \sigma h^\gamma x^2) ,$$

où $\gamma > 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $\sigma = \pm 1$.
Des problèmes similaires interviennent dans [80] ; voir aussi [78], sous-section 3.2.
On a ici $j \in \{0, 1\}$, $\lambda_0 = 4$, $\lambda_1 = 2$, et donc $\Lambda_0 = 4$, $\Lambda_1 = 2/(1-\gamma)$.
On distingue donc plusieurs cas :

- $\gamma > 1/2$.
  On a alors $\Lambda_1 > 4$ et Λ_j est minimal pour $j_0 = 0$. On effectuera donc le changement de variable $x = h^{1/4} y$, ce qui donnera finalement

  $$I(h) \underset{h \to 0}{\sim} K f(0) h^{1/4} e^{-c/h} ,$$

  où

  $$K = \int_0^{+\infty} e^{-y^4} dy = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) .$$

- $\gamma < 1/2$ et $\sigma = +1$.
  On a cette fois $\Lambda_1 < \Lambda_0$, d'où $j_0 = 1$. En posant $x = h^{1/2} \varepsilon^{-1/2} y = h^{1/\Lambda_1} y$, on obtiendra

  $$I(h) \underset{h \to 0}{\sim} K f(0) h^{1/\Lambda_1} e^{-c/h} , \tag{B.3.1}$$

  avec

  $$K = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} .$$

- $\gamma < 1/2$ et $\sigma = -1$.
  La méthode ne s'applique alors pas car elle nous amènerait à considérer l'intégrale divergente
  $$K = \int_0^{+\infty} e^{+y^2} dy \,.$$
  En effet, l'hypothèse (B.1.2) de la proposition correspond ici à $\sigma > 0$.
- $\gamma = 1/2$, c'est-à-dire $\Lambda_0 = \Lambda_1$.
  Le changement de variable $x = h^{1/4} y$ aboutit alors à l'équivalent (B.3.1) avec cette fois
  $$K = \int_0^{+\infty} e^{-y^4 \pm y^2} \, dy \,.$$

Annexe C

Produit tensoriel d'opérateurs

Dans cette annexe, on rappelle quelques notions élémentaires, utilisées au chapitre 4, concernant le produit tensoriel d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Nous nous référons principalement à [92] et [119].

C.1 Définitions et propriétés élémentaires

Les définitions qui suivent sont tirées de [119]. Nous nous limitons ici au produit tensoriel d'espaces de Hilbert. Le cas des espaces de Banach est traité en détail dans [123] et [92].
Soient $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1})$ et $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2})$ des espaces de Hilbert. On définit le produit tensoriel $f \otimes g$ d'un couple $(f, g) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ comme la forme bilinéaire sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ agissant de la façon suivante :

$$\forall(\phi,\psi) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2, \quad (f \otimes g)(\phi, \psi) = \langle \phi, f\rangle \langle \psi, g\rangle\,.$$

On note ensuite $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2 \subset \mathrm{Bil}\ (\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2)$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de la forme $f \otimes g$ avec $f \in \mathcal{H}_1$ et $g \in \mathcal{H}_2$.
On définit la forme sesquilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ par son action sur les éléments de la forme $f \otimes g$,

$$\langle f \otimes g, \phi \otimes \psi\rangle = \langle f, \phi\rangle_{\mathcal{H}_1} \langle g, \psi\rangle_{\mathcal{H}_2}\,,$$

puis en l'étendant par linéarité à tout l'ensemble $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$.
Cette définition ne dépend pas de la combinaison linéaire choisie pour représenter un élément de $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$. La forme sequilinéaire ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$, et on notera $\|\cdot\|$ la norme associée. On définit alors $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ comme le complété de $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ par rapport à cette norme. $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est un espace de Hilbert.
Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ sont des bases hilbertiennes de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ respectivement, alors $(x_k \otimes y_\ell)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Remarque C.1.1 *On peut vérifier (voir [119]) que, si* (X, μ) *et* (Y, ν) *sont deux espaces mesurés, alors*

$$L^2(X; d\mu) \otimes L^2(Y; d\nu) = L^2(X \times Y; d\mu \otimes d\nu)\,.$$

Si A et B sont des opérateurs de domaines denses respectifs $\mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(B)$, on définit l'opérateur linéaire $A \odot B$ sur $\mathcal{D}(A) \odot \mathcal{D}(B)$ par

$$(A \odot B)(f \odot g) = Af \otimes Bg\,,$$

et en étendant par linéarité. La valeur de $(A \odot B)u$ ne dépend pas de la représentation choisie pour $u \in \mathcal{D}(A) \odot \mathcal{D}(B)$, ce qui justifie la définition de l'opérateur.
Dans le cas où $A \odot B$ est fermable, on notera

$$A \otimes B = \overline{A \odot B}\,.$$

La proposition suivante [119] résume les propriétés élémentaires de la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$.

Proposition C.1.2

(i) La norme $\|\cdot\|$ *est une* norme croisée*, c'est-à-dire que pour tous* $f \in \mathcal{H}_1$ *et* $g \in \mathcal{H}_2$*,* $\|f \otimes g\| = \|f\|_{\mathcal{H}_1} \|g\|_{\mathcal{H}_2}$*.*

(ii) La norme $\|\cdot\|$ *est* uniforme *: pour tous* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ *et* $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$*, on a*

$$\|\mathcal{A} \odot \mathcal{B}\| = \|\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|\,. \tag{C.1.1}$$

Preuve :
Le point (i) est immédiat compte tenu de la définition de la norme $\|\cdot\|$.
Soit $u = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j \otimes g_j \in \mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$; alors, en choisissant une base orthonormée $(x_j)_{j=1,\dots,n}$ (resp. $(y_k)_{k=1,\dots,n}$) de l'espace vectoriel engendré par les f_j, $j = 1, \dots n$ (resp. par les g_k, $k = 1, \dots p$), on peut réecrire pour certains $c_{j,k} \in \mathbb{C}$

$$u = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{j,k} x_j \otimes y_k$$

et les fonctions $x_j \otimes y_k$ forment une famille orthonormée pour le produit scalaire de $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. On remarque alors que la famille $(\sum_{j \le n} c_{j,k} A x_j \otimes y_k)_{k \le p}$ est orthogonale, et que pour tout $k = 1, \dots, p$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} c_{j,k} A x_j \otimes y_k \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} c_{j,k} A x_j \right\|_{\mathcal{H}_1}^2 .$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|(A \odot I)u\|^2_{\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2} &= \left\| \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} c_{j,k} A x_j \otimes y_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \left\| \sum_{j=1}^{n} c_{j,k} A x_j \right\|_{\mathcal{H}_1}^2 \\ &\le \sum_{k=1}^{p} \|A\|^2 \sum_{j=1}^{n} |c_{j,k}|^2 \le \|A\|^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

On a donc $\|A \odot I\| \le \|A\|$, et de même, pour $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, $\|I \odot B\| \le \|B\|$.
En remarquant que $A \odot B = (A \odot I)(I \odot B)$, on en déduit

$$\|A \odot B\| \le \|A\| \|B\|\,.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{H}_1$, $g \in \mathcal{H}_2$, $\|f\|_{\mathcal{H}_1} = \|g\|_{\mathcal{H}_2} = 1$, tels que

$$\|\mathcal{A}f\|_{\mathcal{H}_1} \geq \|\mathcal{A}\| - \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\mathcal{B}g\|_{\mathcal{H}_2} \geq \|\mathcal{B}\| - \varepsilon \,.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A} \odot \mathcal{B}\| \geq \|(\mathcal{A} \odot \mathcal{B})(f \otimes g)\| &= \|\mathcal{A}f\|_{\mathcal{H}_1} \|\mathcal{B}g\|_{\mathcal{H}_2} \\ &\geq (\|\mathcal{A}\| - \varepsilon)(\|\mathcal{B}\| - \varepsilon) \\ &\geq \|\mathcal{A}\| \, \|\mathcal{B}\| - \varepsilon(\|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|) + \varepsilon^2 \,. \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0 , on obtient donc

$$\|\mathcal{A} \odot \mathcal{B}\| \geq \|\mathcal{A}\| \, \|\mathcal{B}\| \,,$$

d'où (ii). □

On considère maintenant les opérateurs de la forme

$$A \odot I + I \odot B \,, \quad \mathcal{D}(A \odot I + I \odot B) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B}) \,,$$

et

$$A \otimes I + I \otimes B \,.$$

La première question est celle de la fermabilité de ces opérateurs.

Proposition C.1.3 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des opérateurs fermables. Alors $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \odot I + I \odot \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \otimes I + I \otimes \mathcal{B}$ sont fermables.*

Preuve : On rappelle qu'un opérateur T est fermable si et seulement si $\mathcal{D}(T^*)$ est dense.
Pour tout $u = f \otimes g$ avec $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathcal{B}^*)$ et tout $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B})$, on a

$$\langle u, (\mathcal{A} \odot \mathcal{B})v \rangle = \langle (\mathcal{A}^* \odot \mathcal{B}^*)u, v \rangle \,,$$

et cette égalité s'étend par linéarité à tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B}^*)$.
L'application

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B}) \ni v \mapsto \langle u, (\mathcal{A} \odot \mathcal{B})v \rangle$$

s'étend donc en une forme antilinéaire continue sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B}^*)$.
Ainsi,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B}^*) \subset \mathcal{D}((\mathcal{A} \odot \mathcal{B})^*) \,.$$

Puisque $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ et $\mathcal{D}(\mathcal{B}^*)$ sont denses dans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ respectivement, $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B}^*)$ est dense dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, donc $\mathcal{D}((\mathcal{A} \odot \mathcal{B})^*)$ est dense également, et $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ est fermable.
De la même façon, on vérifie que

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B}^*) \subset \mathcal{D}((\mathcal{A} \odot I + I \odot \mathcal{B})^*) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) \odot \mathcal{D}(\mathcal{B}^*) \subset \mathcal{D}((\mathcal{A} \otimes I + I \otimes \mathcal{B})^*) \,,$$

et que $\mathcal{A} \odot I + I \odot \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \otimes I + I \otimes B$ sont fermables. □

Dans la suite, on notera

$$\mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B} := \overline{\mathcal{A} \odot I + I \odot \mathcal{B}} \,.$$

Remarque C.1.4 *T. Ichinose montre dans [92] que $\overline{\mathcal{A} \odot I + I \odot \mathcal{B}}$ et $\overline{\mathcal{A} \otimes I + I \otimes \mathcal{B}}$ coïncident, ce que nous n'utilisons pas dans cette thèse.*

C.2 Produit tensoriel d'opérateurs autoadjoints ou sectoriels

Dans les cas les plus simples, la méthode de séparation des variables fonctionne sans complication et le spectre d'un opérateur de la forme $A \dotplus B$ se décompose aisément. Voici un rappel des cas les mieux balisés.

C.2.1 Opérateurs autoadjoints

Dans le cas d'opérateurs autoadjoints, le théorème suivant [119] permet de traiter une large classe de problèmes :

Théorème C.2.1 *Soit*

$$P(X_1, \ldots, X_N) = \sum_{i_1 < \cdots < i_N} c_{i_1,\ldots,i_N} X_1^{i_1} \ldots X_N^{i_N} \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_N]$$

un polynôme à N variables, de degré n_k en la variable X_k. Etant donnés N opérateurs linéaires fermés $A_1, \ldots, A_N$ sur des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_k$, $k = 1, \ldots, N$ respectivement, on définit l'opérateur $P(A_1, \ldots, A_N)$ par

$$P(A_1, \ldots, A_N) = \sum_{i_1 < \cdots < i_N} c_{i_1,\ldots,i_N} A_1^{i_1} \odot \cdots \odot A_N^{i_N} \, ,$$

sur le domaine

$$\mathcal{D}(P(A_1, \ldots, A_N)) = \bigodot_{k=1}^{N} \mathcal{D}(A_k^{n_k}) \, .$$

Si les opérateurs $A_1, \ldots, A_N$ sont autoadjoints, alors $P(A_1, \ldots, A_N)$ est essentiellement autoadjoint et

$$\sigma(\overline{P(A_1, \ldots, A_N)}) = \overline{P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))} \, .$$

En particulier, si A_1 et A_2 sont autoadjoints, on a

$$\sigma(A_1 \dotplus A_2) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2) \, .$$

C.2.2 Opérateurs sectoriels

Le résultat suivant concernant les opérateurs sectoriels est dû à T. Ichinose [92] (voir aussi [119], XIII. 9). Il est également valable pour une somme quelconque $A_1 \dotplus \cdots \dotplus A_n$ d'opérateurs si ces opérateurs en vérifient deux à deux les hypothèses.

Rappelons qu'un opérateur linéaire fermé $\mathcal{A}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit *sectoriel de type* $\theta_{\mathcal{A}} \in [0, \pi[$ s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tels que l'image numérique de $\mathcal{A}$ est incluse dans le secteur

$$\mathcal{S}_{\theta_{\mathcal{A}}} = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ |\arg(z - z_0) - \varphi| \leq \theta_{\mathcal{A}} \} \, ,$$

et si pour tout θ tel que $\theta_{\mathcal{A}} < \theta < \pi$, on a

$$\forall z \notin \mathcal{S}_\theta, \quad \|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \mathcal{S}_\theta)} \, .$$

Théorème C.2.2 ([92]) *Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés définis respectivement sur les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. On suppose que A est sectoriel de type θ_A et B sectoriel de type θ_B avec $0 \leq \theta_A + \theta_B < \pi$. Alors*

$$\sigma(A \dotplus B) = \sigma(A) + \sigma(B)\,.$$

Ainsi le spectre de $A \dotplus B$ est vide si et seulement si $\sigma(A) = \emptyset$ ou $\sigma(B) = \emptyset$.

Un critère plus général est donné dans [92] pour des opérateurs de la forme $P(A, B)$ avec $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ vérifiant certaines propriétés dépendant du spectre de A et B .

Annexe D

Compléments sur l'instabilité spectrale en dimension 1

Nous avons regroupé dans cette annexe des discussions complémentaires concernant les chapitres 2 et 3.
Dans la section D.1, nous vérifions que toutes les estimations obtenues dans ces deux chapitres sur les indices d'instabilité restent valables si les opérateurs considérés sont définis sur un espace L^p, $1 < p < +\infty$, et pas seulement sur L^2. Cette section fait suite à une suggestion de C. Gérard.
Dans la section D.2, nous discutons la réalité du spectre de certains modèles $\mathcal{PT}$-symétriques construits comme des perturbations d'opérateurs autoadjoints.
Enfin, nous rappelons dans la section D.3 certains résultats concernant l'existence d'opérateurs dont les indices d'instabilité ont une croissance exponentielle, mais avec un ordre de croissance inférieur à 1. Cette dernière section résume un travail de B. Mityagin, P. Siegl et J. Viola [106].

D.1 Une remarque sur les indices d'instabilité dans L^p

Pour étudier les opérateurs non-autoadjoints, le cadre hilbertien semble moins naturel que dans le cas autoadjoint. Il est donc intéressant de chercher à reformuler les résultats qui précèdent quand les opérateurs considérés sont définis sur un espace de Banach. On fixe donc $p \in]1, +\infty[$, et on note $q \in]1, +\infty[$ son conjugué, c'est-à-dire $1/p + 1/q = 1$. Pour $m \geq 1$, θ satisfaisant (2.1.2) et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit les opérateurs $\mathcal{A}^{(p)}(m, \theta)$ et $\mathcal{A}_\alpha^{(p)}$ agissant sur $L^p(\mathbb{R})$ par (2.1.1) et (3.1.1) respectivement. Plus précisément, on note d'abord $\mathcal{A}_{conj}^{0,(q)}(m, \theta)$ l'opérateur défini sur $L^q(\mathbb{R})$ par

$$\mathcal{A}_{conj}^{0,(q)}(m, \theta) = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{-i\theta}|x|^m\,, \quad \mathcal{D}\big(\mathcal{A}_{conj}^{0,(q)}(m, \theta)\big) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\,.$$

On définit alors $\mathcal{A}^{(p)}(m,\theta) = \big(\mathcal{A}^{0,(q)}_{conj}(m,\theta)\big)^*$. De façon analogue, on définit l'opérateur $\mathcal{A}^{(p)}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors, pour $m \geq 1$,

$$\mathcal{D}\big(\mathcal{A}^{(p)}(m,\theta)\big) = \Big\{u \in L^p(\mathbb{R}) : -u'' + e^{i\theta}|x|^m u \in L^p(\mathbb{R})\Big\}$$

et pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}\big(\mathcal{A}^{(p)}_\alpha\big) = \Big\{u \in L^p(\mathbb{R}) : -u'' + (ix^3 + i\alpha x)u \in L^p(\mathbb{R})\Big\}.$$

On a en fait la description suivante du domaine de ces opérateurs :

Proposition D.1.1 *Pour $k \geq 1$, $p \in]1,+\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathcal{D}\big(\mathcal{A}^{(p)}(2k,\theta)\big) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R};|x|^{2kp}dx)$$

et

$$\mathcal{D}\big(\mathcal{A}^{(p)}_\alpha\big) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R};|x|^{3p}dx)\,.$$

Preuve : Nous esquissons une preuve qui reprend celle de la régularité des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques dans L^2. Dans la suite, P désignera l'opérateur $\mathcal{A}^{(p)}(2k,\theta)$ ou $\mathcal{A}^{(p)}_\alpha$.
On note $D = -i\frac{d}{dx}$. Il suffit de montrer que, si $u \in L^p(\mathbb{R})$ vérifie $Pu \in L^p(\mathbb{R})$, alors $D^2u \in L^p(\mathbb{R})$.
On utilise les classes de symboles Γ^m_ρ et les classes d'opérateurs correspondantes G^m_ρ définies dans [79], Définitions 1.1.1 et 1.2.3. On a $P = p^w(x,D_x) \in G^2_1$, c'est-à-dire que le symbole p appartient à la classe Γ^2_1. La définition du quantifié de Weyl $p^w(x,D_x)$ est donnée par (1.5.2) avec $h=1$ (voir aussi l'expression (1.2.21) de [79]). De plus, p vérifie $p \sim p_2 + p_1 + \cdots$ au sens de [79], Définition 1.1.2, où pour tout $j \leq 2$, $p_j(x,\xi)$ est *quasi-homogène* de degré j au sens de [82], (4). Plus précisément, il existe k, $\ell \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\forall \rho > 0\,, \quad p_j(\rho^k x, \rho^\ell \xi) = \rho^j p_j(x,\xi)\,.$$

D'après [79] (voir aussi [5] pour d'autres classes de symboles), il existe alors un opérateur Q d'ordre -2 et un opérateur $R : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tels que $QP = I + R$. Ainsi, si $Pu \in L^p(\mathbb{R})$, alors $D^2u = D^2Q(Pu) - D^2Ru$. On a clairement $D^2Ru \in L^p(\mathbb{R})$. Par ailleurs, D^2Q est un opérateur d'ordre 0 sur $L^p(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $D^2Q \in G^0_1$. Les Théorèmes 19 (p. 87) et 20 (p. 89) de [39] assurent alors que l'opérateur D^2Q est continu sur $L^p(\mathbb{R})$, d'où $D^2Q(Pu) \in L^p(\mathbb{R})$. Ainsi, on a bien $D^2u \in L^p(\mathbb{R})$. □

D'après [125] (voir aussi [111], ch. 6 et le Théorème 2.3.1 de cette thèse), toutes les fonctions propres de $\mathcal{A}^{(p)}(2k,\theta)$ et de $\mathcal{A}^{(p)}_\alpha$ appartiennent à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par conséquent, pour tout $p \in]1,+\infty[$, on a $\sigma(\mathcal{A}^{(p)}(2k,\theta)) = \sigma(\mathcal{A}^{(2)}(2k,\theta))$ et $\sigma(\mathcal{A}^{(p)}_\alpha) = \sigma(\mathcal{A}^{(2)}_\alpha)$.
Dans la suite, on note $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^q,L^p}$ le crochet de dualité (antilinéaire à gauche) entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{R})^* \cong L^q(\mathbb{R})$.
Pour $\lambda_n \in \sigma(\mathcal{A}(m,\theta))$, $n \geq 1$, et $\varepsilon > 0$ assez petit, on définit comme dans $L^2(\mathbb{R})$ le projecteur spectral

$$\Pi^{(p)}_n(m,\theta) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-\lambda_n|=\varepsilon} (z - \mathcal{A}^{(p)}(m,\theta))^{-1}dz \; : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})\,.$$

Remarquons que les restrictions à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des projecteurs $\Pi_n^{(p)}(m,\theta)$ coïncident pour tout $p \in]1,+\infty[$.
On définit de même les projecteurs spectraux $\Pi_n^{(p)}(\alpha)$ de $\mathcal{A}_\alpha^{(p)}$, et on note $\kappa_n^{(p)}(m,\theta) = \|\Pi_n^{(p)}(m,\theta)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))}$ et $\kappa_n^{(p)}(\alpha) = \|\Pi_n^{(p)}(\alpha)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))}$.

Lemme D.1.2 *Soit (X,μ) un espace mesuré et $\mathcal{A}$ un opérateur fermé agissant sur $L^p(X,d\mu)$. Soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ une valeur propre isolée, simple au sens de la multiplicité algébrique, et Π_λ son projecteur spectral associé. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $u^* \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ tels que $\mathcal{A}u = \lambda u$ et $\mathcal{A}^*u^* = \lambda^* u^*$.*
Alors,

$$\|\Pi_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^p(X,d\mu))} = \frac{\|u^*\|_{L^q}\|u\|_{L^p}}{|\langle u^*, u\rangle_{L^q,L^p}|}. \tag{D.1.1}$$

Preuve :
Cette formule se prouve de la même façon que (1.3.5). Il existe $\alpha(f) \in \mathbb{C}$ tel que $\Pi_\lambda f = \alpha(f) u$, donc

$$\langle u^*, f\rangle_{L^q,L^p} = \langle \Pi_{\lambda^*} u^*, f\rangle_{L^q,L^p} = \langle u^*, \Pi_\lambda f\rangle_{L^q,L^p} = \alpha(f)\langle u^*, u\rangle_{L^q,L^p}.$$

Ainsi,

$$\alpha(f) = \frac{\langle u^*, f\rangle_{L^q,L^p}}{\langle u^*, u\rangle_{L^q,L^p}},$$

et on a l'analogue de (1.3.4) :

$$\Pi_\lambda = \frac{\langle u^*, \cdot\rangle_{L^q,L^p}}{\langle u^*, u\rangle_{L^q,L^p}} u. \tag{D.1.2}$$

On a donc clairement

$$\|\Pi_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^p(X,d\mu))} \leq \frac{\|u^*\|_{L^q}\|u\|_{L^p}}{|\langle u^*, u\rangle_{L^q,L^p}|}.$$

Pour montrer l'égalité, on applique (D.1.2) à la fonction $|u^*|^{q-2}u^* \in L^p(X,d\mu)$:

$$\begin{aligned}
\|\Pi_\lambda(|u^*|^{q-2}u^*)\|_{L^p} &= \frac{|\langle u^*, |u^*|^{q-2}u^*\rangle_{L^q,L^p}|}{|\langle u^*, u\rangle_{L^q,L^p}|}\|u\|_{L^p} \\
&= \frac{\|u^*\|_{L^q}^q\|u\|_{L^p}}{|\langle u^*, u\rangle_{L^q,L^p}|} \\
&= \frac{\|u^*\|_{L^q}\|u\|_{L^p}}{|\langle u^*, u\rangle_{L^q,L^p}|}\||u^*|^{q-2}u^*\|_{L^p},
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\|u^*\|_{L^q}^q &= \|u^*\|_{L^q}\left(\int_X |u^*|^q d\mu\right)^{(q-1)/q} = \|u^*\|_{L^q}\left(\int_X (|u^*|^{q-1})^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \|u^*\|_{L^q}\||u^*|^{q-2}u^*\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

$\boxminus$

Dans le cas des opérateurs $\mathcal{A}^{(p)}(m,\theta)$ et $\mathcal{A}_\alpha^{(p)}$, (D.1.1) entraîne, pour tous $p \in]1,+\infty[$, $m \geq 1$, θ satisfaisant (2.1.2) et $n \geq 1$,

$$\kappa_n^{(p)}(m,\theta) = \frac{\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}\|u_n\|_{L^q(\mathbb{R})}}{|\langle u_n, \bar{u}_n\rangle|_{L^q,L^p}} . \tag{D.1.3}$$

où u_n est une fonction propre de $\mathcal{A}^{(p)}(m,\theta)$ associée à λ_n.
La formule analogue est valable pour $\kappa_n^{(p)}(\alpha)$, $\alpha \geq 0$.

Dans l'expression (D.1.3), le dénominateur $\int_{\mathbb{R}} u_n(x)^2dx$ ne dépend pas de p et a été calculé dans le cas de $\mathcal{A}^{(2)}(1,\theta)$ (resp. $\mathcal{A}^{(2)}(2k,\theta)$, $k \geq 1$, $\mathcal{A}_\alpha^{(2)}$) dans la Proposition 2.2.7 (resp. Proposition 2.5.2, Lemme 3.3.10).
D'autre part, les calculs effectués précedemment dans le cas $p = 2$ donnent un développement asymptotique pour le numérateur de (D.1.3) identique à (2.2.25) (resp. à celui du Lemme 2.3.5, de la Proposition 3.4.3). On a donc finalement :

Théorème D.1.3 *Soient $k \geq 1$, θ vérifiant (2.1.2) et $\alpha > 0$. Pour tout $p \in]1,+\infty[$, les indices d'instabilité $\kappa_n^{(p)}(1,\theta)$, $\kappa_n^{(p)}(2k,\theta)$ et $\kappa_n^{(p)}(\alpha)$ sont indépendants de p et vérifient respectivement les développements asymptotiques (2.2.5), (2.1.9) et (3.4.16).*

D.2 Perturbations $\mathcal{PT}$-symétriques d'opérateurs autoadjoints

Dans cette section, nous nous intéressons au cas des opérateurs $\mathcal{PT}$-symétriques qui peuvent être considérés comme des perturbations d'opérateurs autoadjoints. Dans cette situation, la théorie des perturbations de Kato [96] permet d'obtenir des informations sur le spectre de l'opérateur perturbé, notamment la réalité des valeurs propres sous certaines hypothèses.
On considère un opérateur $\mathcal{A}_0$ autoadjoint agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, à résolvante compacte et à valeurs propres simples. On perturbe $\mathcal{A}_0$ par un opérateur $\mathcal{PT}$-symétrique $\mathcal{A}_1$, c'est-à-dire que l'on considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la famille d'opérateurs

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}_0 + \alpha\mathcal{A}_1 . \tag{D.2.1}$$

Pour assurer que la famille $\mathcal{A}(\alpha)$ dépend de façon holomorphe du paramètre α, et que l'on peut bien considérer cet opérateur comme une perturbation de $\mathcal{A}_0$ dans le cadre de la théorie de Kato, nous serons amenés à supposer que $\mathcal{A}_1$ est relativement borné par rapport à $\mathcal{A}_0$ au sens de la définition suivante.

Définition D.2.1 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des opérateurs fermés agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit que $\mathcal{B}$ est* relativement borné par rapport à $\mathcal{A}$*, ou* $\mathcal{A}$-borné*, si :*

(i) $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{B})$.

(ii) Il existe $a, b \geq 0$ tels que

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) , \quad \|\mathcal{B}u\| \leq a\|u\| + b\|\mathcal{A}u\| . \tag{D.2.2}$$

Cette notion va nous permettre de considérer, par exemple en dimension 1, le cas où $\mathcal{A}_0$ est un oscillateur anharmonique autoadjoint

$$\mathcal{A}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + x^{2k}\,, \quad k \geq 1\,,$$

que l'on perturbera par le potentiel $\mathcal{PT}$-symétrique $\mathcal{A}_1 = -(ix)^m$, avec $m \leq 2k$. Dans la suite, on utilisera la notion de famille holomorphe d'opérateurs au sens suivant :

Définition D.2.2 *Soit $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ et $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine contenant α_0. Soit $(\mathcal{A}(\alpha))_{\alpha\in\Omega}$ une famille d'opérateurs fermés agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit que $(\mathcal{A}(\alpha))_{\alpha\in\Omega}$ est une* famille holomorphe de type (A) *si :*

(i) Pour tout $\alpha \in \Omega$, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\alpha_0}) =: \mathcal{D}$.

(ii) Pour tout $u \in \mathcal{D}$, l'application $\Omega \ni \alpha \mapsto \mathcal{A}_\alpha u$ est une application holomorphe à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Il s'agit d'une classe particulière de famille holomorphes d'opérateurs dans un sens plus large, voir [96] pour plus de détails sur l'holomorphie au sens de Kato. Dans le cas considéré ici, la notion de famille holomorphe de type (A) sera suffisante, comme l'assure le théorème suivant (voir [119]).

Théorème D.2.3 *Soient $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ des opérateurs fermés agissant sur $\mathcal{H}$. La famille $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}_0 + \alpha\mathcal{A}_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, est une famille holomorphe de type (A) au voisinage de $\alpha = 0$ si et seulement si $\mathcal{A}_1$ est relativement borné par rapport à $\mathcal{A}_0$.*

La théorie de Kato affirme que si $(\mathcal{A}(\alpha))_{\alpha\in\Omega}$ est holomorphe de type (A), et si le spectre de $\mathcal{A}(\alpha_0)$ est constitué de valeurs propres simples, alors pour tout $\lambda(\alpha_0) \in \sigma(\mathcal{A}(\alpha_0))$, il existe $\alpha^* = \alpha^*(\lambda) > 0$ tel que, si $|\alpha - \alpha_0| \leq \alpha^*$, alors il existe une unique valeur propre $\lambda(\alpha) \in \sigma(\mathcal{A}(\alpha))$, simple, telle que $\lambda(\alpha) \to \lambda(\alpha_0)$ quand $\alpha \to \alpha_0$. De plus la fonction $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)$ est holomorphe au voisinage de α_0.
L'idée commune à toutes les preuves qui vont suivre concernant la réalité du spectre est alors la suivante. L'opérateur $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}_0 + \alpha\mathcal{A}_1$ étant supposé $\mathcal{PT}$-symétrique pour $\alpha \in \mathbb{R}$, il est immédiat que son spectre est globalement invariant par conjugaison complexe. Par conséquent, si $\lambda(\alpha)$ est valeur propre, $\overline{\lambda(\alpha)}$ l'est également. Ainsi, si $\lambda(\alpha)$ n'était pas réel pour $\alpha \neq 0$, la valeur propre simple $\lambda(0)$ se scinderait pour $\alpha \neq 0$ en deux branches distinctes $\lambda(\alpha)$ et $\overline{\lambda(\alpha)}$, contredisant la théorie de Kato.
Dans l'espoir d'obtenir des informations sur l'ensemble du spectre de $\mathcal{A}(\alpha)$, il est nécessaire de contrôler le rayon de convergence de l'application $\alpha \mapsto \lambda(\alpha) \in \sigma(\mathcal{A}(\alpha))$ issue de $\lambda(0) \in \sigma(\mathcal{A}_0)$:

Théorème D.2.4 *Soit $(\mathcal{A}(\alpha))_{\alpha\in\Omega}$ une famille holomorphe de type (A) au voisinage de $\alpha_0 = 0$, de la forme $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}_0 + \alpha\mathcal{A}_1$, où $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ sont des opérateurs fermés sur $\mathcal{H}$, et $\mathcal{A}_1$ est relativement borné par rapport à $\mathcal{A}_0$. Supposons de plus que $\mathcal{A}_0$ est à résolvante compacte et à valeurs propres simples. Pour tout $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0)$, on note $r(\lambda)$ le rayon de convergence de la fonction holomorphe $\lambda(\alpha) \in \sigma(\mathcal{A}(\alpha))$ telle que $\lambda(\alpha) \to \lambda$ quand $\alpha \to 0$.*

Alors, pour tous a,b vérifiant (D.2.2) et tout contour Γ_λ entourant une fois positivement λ et n'entourant aucun autre élément de $\sigma(\mathcal{A}_0)$, on a

$$r(\lambda) \geq \min_{z\in\Gamma_\lambda} \left(\|(\mathcal{A}_0 - z)^{-1}\|(a+b|z|)+b \right)^{-1} . \tag{D.2.3}$$

Preuve :
Nous renvoyons également à [96] pour la démonstration de ce théorème.
On suppose que λ est une valeur propre simple de $\mathcal{A}_0$ et que Γ_λ est un contour entourant λ comme dans l'énoncé. Si la résolvante $(\mathcal{A}(\alpha)-z)^{-1}$ est définie et bornée pour $z\in\Gamma_\lambda$, alors on peut définir le projecteur spectral associé à $\lambda(\alpha)$ par

$$\Pi_{\lambda(\alpha)}(\mathcal{A}(\alpha)) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\lambda} (z-\mathcal{A}(\alpha))^{-1}\, dz\, . \tag{D.2.4}$$

Or pour tout $z\in\Gamma_\lambda$, on a

$$(\mathcal{A}(\alpha)-z)(\mathcal{A}_0-z)^{-1} = I + \alpha\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_0-z)^{-1}\, ,$$

et le membre de droite est inversible si et seulement si

$$|\alpha| < \|\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_0-z)^{-1}\|^{-1}. \tag{D.2.5}$$

A cette condition, $\Pi_{\lambda(\alpha)}(\mathcal{A}(\alpha))$ est bien défini et holomorphe ainsi que $\lambda(\alpha)$, pour tout α vérifiant (D.2.5).
Or, on a grâce à (D.2.2), pour tout $u\in\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_0-z)^{-1}u\| &\leq a\|(\mathcal{A}_0-z)^{-1}u\| + b\|\mathcal{A}_0(\mathcal{A}_0-z)^{-1}u\|\\ &\leq (a+b|z|)\|(\mathcal{A}_0-z)^{-1}u\| + b\|u\|\, ,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_0-z)^{-1}\| \leq (a+b|z|)\|(\mathcal{A}_0-z)^{-1}\| + b\, ,$$

et le rayon de convergence $r(\lambda)$ vérifie bien (D.2.3). □

Dans la suite, on cherchera donc à déterminer un contour Γ_λ et des constantes a et b vérifiant (D.2.2) tels que

$$\min_{z\in\Gamma_\lambda} \left(\|(\mathcal{A}_0 - z)^{-1}\|(a+b|z|)+b \right)^{-1}$$

soit le plus grand possible, de préférence uniformément minoré par rapport à $\lambda\in\sigma(\mathcal{A}_0)$.
Le bon choix de Γ_λ dépendra de la quantité $\delta := d(\lambda,\sigma(\mathcal{A}_0)\setminus\{\lambda\})/2$, et comme nous le verrons, nous aurons intérêt à choisir

$$\Gamma_\lambda = \{z\in\mathbb{C} : |z-\lambda| = \delta\}\, .$$

Dans tous les énoncés qui suivent, $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ sont des opérateurs fermés agissant sur $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}_0$ est supposé autoadjoint, à résolvante compacte et à valeurs propres simples ; $\mathcal{A}_1$ est $\mathcal{PT}$-symétrique et relativement borné par rapport à $\mathcal{A}_0$.

Proposition D.2.5 *Pour tout compact $\mathcal{K}\subset\mathbb{C}$, il existe $\alpha^* = \alpha^*(\mathcal{K}) > 0$ tel que*

$$\sigma(\mathcal{A}(\alpha))\cap\mathcal{K}\subset\mathbb{R}$$

dès que $|\alpha|\leq\alpha^*$.

Preuve : Il suffit de montrer qu'il existe α^* positif tel que

$$\min_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0) \cap \mathcal{K}} r(\lambda) > \alpha^* \,, \tag{D.2.6}$$

où $r(\lambda)$ est le rayon de convergence défini précédemment.
En effet, le Théorème D.2.4 assurera alors que, si $|\alpha| \leq \alpha^*$, il existe une unique valeur propre simple $\lambda(\alpha)$ de $\mathcal{A}(\alpha)$ issue de chaque valeur propre $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0)$. Les valeurs propres de $\mathcal{A}(\alpha)$ étant complexes conjuguées, cela entraîne nécessairement $\lambda(\alpha) \in \mathbb{R}$.
On note

$$\delta = \min_{\lambda,\mu \in \sigma(\mathcal{A}_0) \cap \mathcal{K}, \lambda \neq \mu} \frac{|\lambda - \mu|}{2} \,,$$

et on entoure chaque $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0) \cap \mathcal{K}$ par le contour $\gamma_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| = \delta\}$.
Alors, d'après (D.2.3),

$$r(\lambda) \geq \left(\frac{a + b(|\lambda| + \delta)}{\delta} + b \right)^{-1} \geq \frac{\delta}{a + b(M + 2\delta)} > 0 \,,$$

où a, b sont des constantes vérifiant (D.2.2) et

$$M := \sup_{z \in \mathcal{K}} |z| \,.$$

L'inégalité (D.2.6) est alors vérifiée dès que $\alpha^* < \delta/(a + b(M + 2\delta))$. $\square$

En rajoutant des hypothèses sur $\mathcal{A}_1$ et sur le spectre de $\mathcal{A}_0$, on peut assurer que l'ensemble du spectre de $\mathcal{A}(\alpha)$ est réel pour α suffisamment petit. Dans la proposition suivante, on suppose que $\mathcal{A}_1$ est un opérateur borné. Comme nous le verrons ensuite, cette hypothèse n'est pas optimale et le même résultat est valable pour certaines perturbations $\mathcal{A}_0$-bornées, mais non bornées. L'hypothèse de séparation du spectre (D.2.7), en revanche, est cruciale.
Des résultats plus généraux sont démontrés dans [29], notamment dans le cas où $\mathcal{A}_0$ possède des valeurs propres multiples.

Proposition D.2.6 *Supposons* $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *et*

$$\delta := \min_{\lambda,\mu \in \sigma(\mathcal{A}_0), \lambda \neq \mu} \frac{|\lambda - \mu|}{2} > 0 \,. \tag{D.2.7}$$

Alors, $\sigma(\mathcal{A}(\alpha)) \subset \mathbb{R}$ *dès que* $|\alpha| < \delta/\|\mathcal{A}_1\|$.

Preuve :
D'après les arguments précédents, il suffit de vérifier que

$$\min_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0)} r(\lambda) \geq \frac{\delta}{\|\mathcal{A}_1\|} \,. \tag{D.2.8}$$

Or, si $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0)$ et $\Gamma_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| = \delta\}$, alors (D.2.3) appliqué avec $a = \|\mathcal{A}_1\|$ et $b = 0$ donne directement $r(\lambda) \geq \delta/\|\mathcal{A}_1\|$. $\square$

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, les résultats de [29] donnent des conclusions similaires sous des hypothèses plus faibles sur l'opérateur $\mathcal{A}_0$. Nous allons voir que dans certains cas, il est aussi possible d'alléger les hypothèses sur la perturbation $\mathcal{A}_1$. Nous explorons cette possibilité en considérant l'exemple des oscillateurs anharmoniques en dimension 1. Soit $M \in]2, +\infty[$, $m \in]0, M[$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}(\alpha)$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha) &= -\frac{d^2}{dx^2} + |x|^M + \alpha(ix)^m, \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}(\alpha)) &= H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; |x|^{2M} dx)\,. \end{aligned} \tag{D.2.9}$$

Comme précedemment, on notera

$$\mathcal{A}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + |x|^M \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_1 = (ix)^m\,.$$

$\mathcal{A}_0$ est à résolvante compacte et à valeurs propres simples. On les note λ_n, $\lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, et les valeurs propres de $\mathcal{A}(\alpha)$ sont notées $\lambda_n(\alpha)$, $|\lambda_n(\alpha)| \leq |\lambda_{n+1}(\alpha)| \to +\infty$.
Les résultats qui suivent sont également valables pour des opérateur de la forme

$$\mathcal{A}(\alpha) = -\frac{d^2}{dx^2} + P(x) + \alpha Q(ix)\,,$$

où P et Q sont des polynômes de degrés respectifs $M = 2k$ avec $k \geq 1$, et $m < 2k$.
Des résultats plus précis concernant le spectre d'opérateurs de cette forme peuvent être trouvés dans [29], [47], [48] ou [19].

Proposition D.2.7

(i) Si $M \geq 2(m+1)$ *, il existe* $\alpha^* > 0$ *tel que, dès que* $|\alpha| \leq \alpha^*$ *,*

$$\sigma(\mathcal{A}(\alpha)) \subset \mathbb{R}\,.$$

(ii) Si $M > 2(m+1)$*, alors pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, il existe un compact* $\mathcal{K}(\alpha) \subset \mathbb{C}$ *tel que*

$$\sigma(\mathcal{A}(\alpha)) \setminus \mathcal{K}(\alpha) \subset \mathbb{R}\,.$$

Preuve : D'abord, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\lambda > 0$ et tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; |x|^{2M} dx)$,

$$\|\mathcal{A}_1 u\| \leq C(\lambda^m \|u\| + \lambda^{m-M} \|\mathcal{A}_0 u\|)\,. \tag{D.2.10}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_1 u\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |x|^{2m} |u(x)|^2 dx \\ &= \int_{[-\lambda,\lambda]} |x|^{2m} |u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\lambda,\lambda]} |x|^{2m} |u(x)|^2 dx \\ &\leq \lambda^{2m} \int_{[-\lambda,\lambda]} |u(x)|^2 dx + \lambda^{2(m-M)} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\lambda,\lambda]} |x|^{2M} |u(x)|^2 dx \\ &\leq \lambda^{2m} \|u\|^2 + \lambda^{2(m-M)} \|x^M u\|^2\,. \end{aligned}$$

Or, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$,

$$\|x^M u\|^2 \leq \|u''\|^2 + \|x^M u\|^2 \leq c(\|\mathcal{A}_0 u\|^2 + \|u\|^2)\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_1 u\|^2 &\leq (\lambda^{2m} + c\lambda^{2(m-M)})\|u\|^2 + c\lambda^{2(m-M)}\|\mathcal{A}_0 u\|^2 \\ &\leq (c+1)\lambda^{2m}\|u\|^2 + c\lambda^{2(m-M)}\|\mathcal{A}_0 u\|^2\end{aligned}$$

pour $\lambda > 1$. On a ainsi (D.2.10) avec $C = \sqrt{c+1}$.
On va maintenant appliquer (D.2.3) avec $a = C\lambda^m$ et $b = C\lambda^{m-M}$ et déterminer la valeur optimale de λ. Rappelons que, d'après (2.3.23), il existe $c_M > 0$ tel que

$$\lambda_n = c_M n^{2M/(M+2)}(1 + \mathcal{O}(n^{-2}))\,, \quad n \to +\infty\,. \tag{D.2.11}$$

Ainsi, la distance entre λ_n et $\sigma(\mathcal{A}_0) \setminus \{\lambda_n\}$ s'écrit, pour un certain $d_M > 0$,

$$\begin{aligned} d(\lambda_n, \sigma(\mathcal{A}_0) \setminus \{\lambda_n\}) &= |\lambda_n - \lambda_{n-1}| \\ &= c_M \left(n^{2M/(M+2)} - (n-1)^{2M/(M+2)}\right)(1 + \mathcal{O}(n^{-2})) \\ &= 2d_M n^{(M-2)/(M+2)}(1 + \mathcal{O}(n^{-1})), \quad n \to +\infty\,. \end{aligned}$$

On entoure alors λ_n avec le contour $\Gamma_{\lambda_n} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| = d_M n^{(M-2)/(M+2)}\}$, et (D.2.3) appliqué avec $a = C\lambda^m$ et $b = C\lambda^{m-M}$ donne

$$\begin{aligned} r(\lambda_n) &\geq \min_{z \in \Gamma_{\lambda_n}} \left(C(d_M n^{(M-2)/(M+2)})^{-1}(\lambda^m + \lambda^{m-M}|z|) + C\lambda^{m-M}\right)^{-1} \\ &\geq \frac{d_M}{C} \min_{z \in \Gamma_{\lambda_n}} \frac{n^{(M-2)/(M+2)}}{\lambda^m + \lambda^{m-M}(|z| + (d_M n^{(M-2)/(M+2)})^{-1})}. \end{aligned}$$

Or d'après (D.2.11), il existe $N_0 > 0$ tel que, pour tout $n \geq N_0$ et tout $z \in \Gamma_{\lambda_n}$,

$$|z| + (d_M n^{(M-2)/(M+2)})^{-1} \leq 2c_M n^{2M/(M+2)}\,,$$

d'où

$$r(\lambda_n) \geq \frac{d_M}{C} \frac{n^{(M-2)/(M+2)}}{\lambda^m + 2c_M n^{2M/(M+2)}\lambda^{m-M}}\,.$$

Ainsi, en choisissant $\lambda = n^{2/(M+2)}$, on obtient, pour tout $n \geq N_0$,

$$r(\lambda_n) \geq k_M n^{\frac{M-2(m+1)}{M+2}}, \quad k_M = \frac{d_M}{C(1 + 2c_M)}\,. \tag{D.2.12}$$

Dans le cas $M > 2(m+1)$, on a donc $r(\lambda_n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé, on en déduit qu'il existe $N(\alpha) > 0$ tel que, pour tout $n \geq N(\alpha)$, $r(\lambda_n) > |\alpha|$, ce qui entraîne que toutes les valeurs propres $\lambda_n(\alpha)$ en-dehors d'un compact $\mathcal{K}(\alpha)$ sont réelles, d'où (ii).
D'autre part, si $M \geq 2(m+1)$, (D.2.12) entraîne, pour tout $n \geq N_0$, $r(\lambda_n) \geq k_M$. Ainsi, si $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ désigne un compact contenant $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_0}\}$, alors on a $\sigma(\mathcal{A}(\alpha)) \setminus \mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ dès que $|\alpha| < k_M$. Enfin, $\sigma(\mathcal{A}(\alpha)) \cap \mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ si α est suffisamment petit d'après la Proposition (D.2.5), d'où (i). $\square$

Voici quelques exemples :

Exemple D.2.8

(i) Perturbation par un terme linéaire, $m = 1$:

– *Dans le cas de l'oscillateur quartique perturbé,*

$$\mathcal{A}_\alpha^{4,1} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^4 + i\alpha x\,,$$

on a $M = 2(m+1)$, et il existe α^* tel que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $|\alpha| \leq \alpha^*$, le spectre de $\mathcal{A}_\alpha^{4,1}$ est entièrement réel.
Dans [19], les auteurs estiment la valeur critique du paramètre à $\alpha^* \approx 3,169$. Au-delà de cette valeur, les deux premières valeurs propres de $\mathcal{A}_\alpha^{4,1}$ se croisent et deviennent complexes conjuguées. Les deux valeurs propres suivantes se croisent pour $|\alpha| \approx 7,625$, etc.
Nous renvoyons également à [47] pour plus d'informations sur le spectre d'opérateurs de la forme

$$-\frac{d^2}{dx^2} + x^4 + \alpha x^2 + i\beta x\,.$$

– *Les valeurs propres de l'opérateur*

$$\mathcal{A}^{6,1} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^6 + ix\,,$$

sont réelles à l'exception d'un nombre fini d'entre elles.

(ii) Perturbations cubiques. La valeur critique de l'exposant dans le potentiel principal est ici $M = 8$:

– *L'opérateur*

$$\mathcal{A}_\alpha^{8,3} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^8 + i\alpha x^3$$

a un spectre réel pour α suffisamment petit.

– *L'opérateur*

$$\mathcal{A}^{10,3} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^{10} + ix^3$$

n'a qu'un nombre fini de valeurs propres en-dehors de l'axe réel.

D.3 Indices d'instabilité avec des vitesses de croissance variables

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons étudié des opérateurs dont les indices d'instabilité ont une croissance exponentielle, de l'ordre de e^{cn}, $c > 0$ (voir (2.2.5), (2.1.9) et (3.4.16)). Dans [41], E. B. Davies parle du comportement *tempérée* (*tame* en anglais) d'un opérateur non-autoadjoint pour désigner le cas où ses indices d'instabilité ont une croissance polynomiale. Dans cette section, nous résumons les résultats obtenus par B. Mityagin, P. Siegl et J. Viola dans [106] concernant l'existence d'opérateurs non-autoadjoints dont les indices d'instabilité ont un comportement intermédiaire, avec une vitesse de croissance comprise entre celle, polynomiale, des opérateurs tempérés, et celle des oscillateurs anharmoniques et cubique des chapitres 2 et 3.
Nous formulerons ensuite une conjecture indiquant que les indices d'instabilité

des opérateurs de la forme (D.2.9) semblent également posséder des vitesses de croissance variées. Cette conjecture est justifiée par de simples arguments de scaling, et nous pensons qu'elle pourrait être démontrée à l'aide d'estimations semblables à celles de la sous-section 3.3.3. Néanmoins, les résultats de [106] reposant sur une idée plus astucieuse, nous ne nous intéresserons pas à la preuve de cette conjecture, dont le principal intérêt est de reprendre des exemples naturels préalablement étudiés à la section D.2.
Les opérateurs construits dans [106], de même que les opérateurs de la forme (D.2.9), sont des perturbations d'opérateurs autoadjoints, ce qui explique pourquoi l'on s'attend à ce qu'ils soient, dans un certain sens, "moins instables" que les opérateurs étudiés dans les chapitres 2 et 3.

Dans les énoncés qui suivent, nous nous intéressons à l'ordre de croissance exponentielle des indices d'instabilité κ_n de certains opérateurs non-autoadjoints. Plus précisément, nous étudions la limite quand $n \to +\infty$ de la quantité

$$\frac{\log \log \kappa_n}{\log n}\,.$$

Nous énonçons maintenant les résultats de [106]. Le premier exemple est celui de l'*oscillateur harmonique translaté* sur $L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{H}_a = -\frac{d^2}{dx^2} + (x+ia)^2, \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}_a) = H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; |x|^4 dx)\,,$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Théorème D.3.1 (B. Mityagin, P. Siegl et J. Viola, [106])
Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $(\kappa_n(a))_{n\geq 1}$ la suite des indices d'instabilité de l'opérateur $\mathcal{H}_a$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \log \kappa_n(a)}{\log n} = \frac{1}{2}\,. \tag{D.3.1}$$

Ce théorème se démontre en remarquant que, pour tout $n \geq 1$, les fonctions

$$u_n(x) = h_n(x+ia) \qquad \text{et} \qquad u_n^*(x) = h_n(x-ia)\,,$$

où h_n est la n-ème fonction de Hermite, sont respectivement des fonctions propres de $\mathcal{H}_a$ et $\mathcal{H}_a^*$ associées à la valeur propre $\lambda_n = 2n-1$.
De plus, le spectre de $\mathcal{H}_a$ est uniquement consititué de ces valeurs propres pour $n \geq 1$, et ces dernières sont algébriquement simples. Par transformation de Fourier, on a $\|u_n\| = \|u_n^*\| = \|e^{ax}h_n\|$, donc d'après (1.3.5), le n-ème indice d'instabilité de $\mathcal{H}_a$ s'écrit

$$\kappa_n(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{2ax} h_n(x)^2 dx\,.$$

Le comportement de cette intégrale quand $n \to +\infty$ peut alors être déterminé en utilisant les propriétés des fonctions de Hermite, et (D.3.1) en découle.

L'idée de la preuve du Théorème D.3.1 peut être généralisée pour construire toute une classe d'opérateurs dont les indices d'instabilité possèdent des comportements variés. Plus précisément, B. Mityagin, P. Siegl et J. Viola considèrent pour $\beta > 2$ l'oscillateur anharmonique

$$T = -\frac{d^2}{dx^2} + |x|^\beta, \quad \mathcal{D}(T) = H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; |x|^{2\beta}dx),$$

et s'intéressent, pour certaines fonctions $p \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, à la perturbation

$$L = e^{p(x)}Te^{-p(x)} = T + p''(x) - p'(x)^2 + 2p'(x)\frac{d}{dx}. \tag{D.3.2}$$

Ils vérifient ainsi que les valeurs propres de L sont algébriquement simples, et que les fonctions propres de L et L^* sont respectivement de la forme

$$v_n(x) = e^{p(x)}\varphi_n(x) \quad \text{et} \quad v_n^*(x) = e^{-p(x)}\varphi_n(x),$$

où φ_n est une fonction propre normalisée de T. Par conséquent, d'après (1.3.5), le n-ème indice d'instabilité de L s'écrit

$$\kappa_n = \int_{\mathbb{R}} e^{2p(x)}|\varphi_n(x)|^2 dx.$$

Des estimations WKB sur la fonction φ_n aboutissent alors au résultat suivant :

Théorème D.3.2 (B. Mityagin, P. Siegl et J. Viola, [106]) *Soient $\beta > 2$, $\alpha \in]0, 1 + \beta/2[$, $p(x) = x(1+x^2)^{(\alpha-1)/2}$, et $(\kappa_n(\alpha, \beta))_{n\geq 1}$ la suite des indices d'instabilité de l'opérateur L défini par (D.3.2). Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \log \kappa_n(\alpha, \beta)}{\log n} = \frac{2\alpha}{2+\beta} \in]0, 1[.$$

Nous énonçons maintenant une conjecture concernant les opérateurs de la forme (D.2.9). Nous ne donnerons que des idées de preuve, l'intérêt du résultat étant moindre depuis que nous avons eu connaissance du travail effectué dans [106].

Conjecture D.3.3 *Soient $M > 0$, $0 < m < M$ et $\mathcal{A}(M, m)$ l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par*

$$\mathcal{A}(M, m) = -\frac{d^2}{dx^2} + |x|^M + ix^m.$$

Soit $(\kappa_n(M, m))_{n\geq 1}$ la suite des indices d'instabilité de $\mathcal{A}(M, m)$. Alors,

(i) si $m < M < 2(m + 1)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \log \kappa_n(M, m)}{\log n} = \frac{2(m+1) - M}{M+2} \in]0, 1[.$$

(ii) Si $M \geq 2(m + 1)$, alors

$$\exists C > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall n \geq 1, \quad \kappa_n(M, m) \leq C\, n^\alpha.$$

Cette conjecture peut être justifiée par un simple argument de scaling, comparable à celui de la sous-section 3.3.1. En effet, si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}(M,m)$, avec $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$, alors le changement de variable $y = \lambda_n^{-1/M} x$ permet de se ramener à l'étude de l'opérateur

$$\mathcal{A}_h(M,m) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + (y^M - e^{i\varphi}) + ih^{1-\mu} y^m\,, \quad \mu = \frac{2(m+1)-M}{M+1}\,,$$

où le lien entre λ_n et les paramètres (h,φ) est donné par $h_n = |\lambda_n|^{-(M+2)/2M}$, $\varphi_n = \arg \lambda_n$.
Des estimations semblables à celles de la section 3.3 sur l'axe réel devraient permettre de vérifier, de même qu'au chapitre 3, que les valeurs propres de $\mathcal{A}(M,m)$ sont algébriquement simples pour n suffisamment grand, et que ses indices d'instabilité ont une croissance de la forme $\exp\left(\frac{1}{h_n} c h_n^{1-\mu}\right)$, $c > 0$, quand $n \to +\infty$. Une règle de quantification semblable à (3.3.49) devrait d'autre part permettre de vérifier que $h_n \propto n^{-1}$ et d'achever la preuve de la Conjecture D.3.3.

Annexe E

Localisation exponentielle des valeurs propres pour les réalisations de Dirichlet des opérateurs d'Airy complexes et de Davies sur un segment

E.1 Introduction

Dans cette annexe, nous précisons les résultats des Théorèmes 5.3.1 et 5.3.2 sur le spectre des opérateurs d'Airy et de Davies sur un segment. Plus précisément, on note, pour $R > 0$,

$$\begin{cases} \mathcal{A}_R = -\frac{d^2}{dx^2} + ix\,, & \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) = H^1_0(]0,R[) \cap H^2(]0,R[)\,, \\ \mathcal{H}_R = -\frac{d^2}{dx^2} + ix^2\,, & \mathcal{D}(\mathcal{H}_R) = H^1_0(]-R,R[) \cap H^2(]-R,R[)\,, \\ \mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + ix\,, & \mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^1_0(\mathbb{R}^+) \cap H^2(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+; x^2dx)\,, \\ \mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + ix^2\,, & \mathcal{D}(\mathcal{H}) = H^2(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; x^4dx)\,, \end{cases} \tag{E.1.1}$$

et on va montrer que, pour toute valeur propre λ de $\mathcal{A}$ (resp. de $\mathcal{H}$), il existe, pour R suffisamment grand, une valeur propre λ_R de $\mathcal{A}_R$ (resp. de $\mathcal{H}_R$) telle que la distance $|\lambda - \lambda_R|$ soit exponentiellement petite quand $R \to +\infty$. Contrairement aux résultats des Théorèmes 5.3.1 et 5.3.2 qui ne donnaient pas d'information quantitative sur la distance $|\lambda - \lambda_R|$, nous allons donc obtenir une estimation précise de cette distance. D'autre part, l'étude qui suit est effectuée au voisinage de n'importe quelle valeur propre de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{H}$, là où les énoncés de la section 5.3 ne concernaient que la valeur propre de plus petite partie réelle. Remarquons néanmoins (voir Proposition E.2.1) que les preuves proposées dans les sections 5.3.3 et 5.3.4 permettent d'obtenir des énoncés similaires concernant n'importe quelle valeur propre de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{H}$.

On rappelle que l'opérateur $\mathcal{A}_R$ défini par (E.1.1) peut être obtenu à partir de l'opérateur $\mathcal{A}_{]-R/2,R/2[}$ de la section 5.3 par la translation $x \mapsto x + R/2$, et que le spectre de $\mathcal{A}_R$ est obtenu à partir de celui de $\mathcal{A}_{]-R/2,R/2[}$ par translation de $iR/2$.

Les résultats qui suivent reposent sur des constructions de quasimodes qui utilisent la décroissance exponentielle des fonctions propres considérées au chapitre 2. Toutefois, il est important de rappeler que, les opérateurs considérés n'étant pas autoadjoints, la construction d'un quasimode ne permet pas à elle seule d'assurer l'existence d'une vraie valeur propre à proximité de la valeur propre approchée. Comme nous le verrons dans la preuve des Théorèmes E.1.1 et E.1.2, cette construction devra s'accompagner d'estimations de résolvante au voisinage du spectre de $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{H}$.

Nous énonçons maintenant les résultats de ce chapitre.
Soit $\delta > 0$ fixé et, pour tout $R > 0$, $\eta_R \in \mathcal{C}_0^\infty(]-R+\delta/2, R-\delta/2[;[0,1])$ tel que $\eta_R(x) = 1$ pour $|x| \le R - \delta$. On note alors $\chi_R = \eta_R \mathbf{1}_{[0,R]}$ et $\theta_R = \eta_R \mathbf{1}_{[-R,R]}$.

Théorème E.1.1 *Soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ et u_λ une fonction propre de $\mathcal{A}$ associée à λ. Il existe alors $C > 0$, $c_0 > 0$ et $R_0 > 0$ tels que, pour tout $R \ge R_0$,*

$$\|(\mathcal{A}_R - \lambda)\chi_R u_\lambda\| \le e^{-c_0 R^{3/2}} \|\chi_R u_\lambda\|, \tag{E.1.2}$$

et il existe $\lambda_R \in \sigma(\mathcal{A}_R)$ tel que

$$|\lambda - \lambda_R| \le C e^{-c_0 R^{3/2}}. \tag{E.1.3}$$

On a un énoncé équivalent concernant l'oscillateur harmonique complexe :

Théorème E.1.2 *Soit $\lambda \in \sigma(\mathcal{H})$ et v_λ une fonction propre de $\mathcal{H}$ associée à λ. Il existe alors $K > 0$, $d_0 > 0$ et $R_0 > 0$ tels que, pour tout $R \ge R_0$,*

$$\|(\mathcal{H}_R - \lambda)\theta_R u_\lambda\| \le e^{-d_0 R}\|\theta_R v_\lambda\|, \tag{E.1.4}$$

et il existe $\lambda_R \in \sigma(\mathcal{H}_R)$ tel que

$$|\lambda - \lambda_R| \le K e^{-d_0 R}. \tag{E.1.5}$$

Dans la section E.2, nous montrons les estimations (E.1.2) (sous-section E.2.1) et (E.1.3) (sous-section E.2.2). Dans la section E.3, nous prouvons de la même façon le Théorème E.1.2.

E.2 L'opérateur d'Airy complexe

E.2.1 Construction de quasimode

On montre ici l'estimation (E.1.2).
On a

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_R - \lambda)\chi_R u_\lambda &= \chi_R(\mathcal{A} - \lambda)u_\lambda + [\mathcal{A}_R, \chi_R]u_\lambda \\ &= -\chi_R'' u_\lambda - 2\chi_R' u_\lambda'.\end{aligned} \tag{E.2.1}$$

Or, d'après la Proposition 2.2.1, quitte à renormaliser la fonction propre u_λ , il existe un zéro $\mu < 0$ (en fait, $\mu = e^{2i\pi/3}\lambda$) de la fonction d'Airy Ai tel que

$$u_\lambda(x) = Ai(\mu + e^{i\pi/6}x) .$$

Ainsi, par définition de χ_R, et en utilisant le développement asympptotique (2.2.7) au premier ordre, il existe $R_1 > 0$ tel que, pour tout $R \geq R_1$,

$$\begin{aligned}
\|\chi_R'' u_\lambda\|^2 &\leq C_1 \int_{R-\delta}^{R-\delta/2} |Ai(\mu + e^{i\pi/6}x)|^2 dx, \quad C_1 > 0 \\
&\leq C_2 \int_{R-\delta}^{R-\delta/2} \frac{1}{|\mu + e^{i\pi/6}x|^{1/2}} \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{4}{3}|\mu + e^{i\pi/6}x|^{3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\arg(\mu + e^{i\pi/6}x)\right)\right), \quad C_2 > 0 .
\end{aligned}$$

Quitte à choisir un plus grand R_1 , il existe $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$ tels que, pour tout $R \geq R_1$ et tout $x \in [R - \delta, R - \delta/2]$,

$$\cos\left(\frac{3}{2}\arg(\mu + e^{i\pi/6}x)\right) \geq a_0 \quad \text{et} \quad |\mu + e^{i\pi/6}x|^{3/2} \geq b_0 R^{3/2} .$$

Ainsi, il existe $C_3 > 0$ tel que, pour tout $R \geq R_1$,

$$\|\chi_R'' u_\lambda\|^2 \leq C_3 \exp\left(-\frac{4}{3}a_0 b_0 R^{3/2}\right) . \tag{E.2.2}$$

On a de même

$$\|\chi_R' u_\lambda'\|^2 \leq C_4 \int_{R-\delta}^{R-\delta/2} |Ai'(\mu + e^{i\pi/6}x)|^2 dx ,$$

et on montre donc comme pour (E.2.2), en utilisant le développement asymptotique (2.2.9) au lieu de (2.2.7), qu'il existe $R_0 \geq R_1$ et $c_1 > 0$ tels que, pour tout $R \geq R_0$,

$$\|\chi_R' u_\lambda'\|^2 \leq e^{-c_1 R^{3/2}} . \tag{E.2.3}$$

Enfin, on a clairement, pour tout $R \geq R_0$,

$$\|\chi_R u_\lambda\| \geq \frac{1}{C_5} , \quad C_5 > 0 , \tag{E.2.4}$$

et l'estimation (E.1.2) découle de (E.2.1), (E.2.2), (E.2.3) et (E.2.4).

E.2.2 Localisation exponentielle des valeurs propres

Soient $\omega > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés. On note $\Lambda_{\omega,\varepsilon}$ le demi plan $\operatorname{Re} z \leq \omega$ privé des disques de rayon ε centrés autour de chaque valeur propre de $\mathcal{A}$:

$$\Lambda_{\omega,\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \omega,\ |z - \lambda| \geq \varepsilon,\ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} .$$

Alors, d'après [76], les estimations (5.3.13) et (5.3.14) peuvent en fait s'étendre à tout l'ensemble $\Lambda_{\omega,\varepsilon}$: il existe $C_{\omega,\varepsilon} > 0$ tel que

$$\sup_{z \in \Lambda_{\omega,\varepsilon}} \|(\mathcal{A} - z)^{-1}\| \leq C_{\omega,\varepsilon} \quad \text{et} \quad \sup_{z \in \Lambda_{\omega,\varepsilon}} \|(\mathcal{A}^* - z)^{-1}\| \leq C_{\omega,\varepsilon} . \tag{E.2.5}$$

Ainsi, en choisissant $\lambda \in \Lambda_{\omega,\varepsilon}$ au lieu de (5.3.15), on vérifie que la preuve effectuée à la section 5.3.3 permet d'obtenir l'estimation suivante :

Proposition E.2.1 *Pour tous $\omega > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $M_{\omega,\varepsilon} > 0$ tel que, pour tout R suffisamment grand,*

$$\sup_{z\in\Lambda_{\omega,\varepsilon}} \|(\mathcal{A}_R - z)^{-1}\| \leq M_{\omega,\varepsilon} \,. \tag{E.2.6}$$

Cette estimation va nous permettre d'estimer les projecteurs spectraux associés à $\mathcal{A}_R$.
Soient λ, λ_R, u_λ et χ_R comme dans l'énoncé du Théorème E.1.1. Soit

$$r_R = (\mathcal{A}_R - \lambda)\chi_R u_\lambda \,, \quad \|r_R\| \leq e^{-c_0 R^{3/2}} \,. \tag{E.2.7}$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $d(\lambda, \sigma(\mathcal{A}) \setminus \lambda) > \varepsilon$, et

$$\Pi = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-\lambda|=\varepsilon} (z - \mathcal{A})^{-1} dz \,,$$

le projecteur spectral de $\mathcal{A}$ associé à la valeur propre λ .
On note également

$$\Pi_R = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-\lambda|=\varepsilon} (z - \mathcal{A}_R)^{-1} dz \,.$$

D'après (5.3.28) et l'argument de l'étape 2.c de la section 5.3.3 (voir [96], Section IV, §3.5), pour R suffisamment grand, l'opérateur Π_R est de rang 1 , c'est-à-dire que le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z-\lambda| \leq \varepsilon\}$ contient exactement une valeur propre simple de $\mathcal{A}_R$. Notons-la λ_R ; Π_R est alors, pour R suffisamment grand, le projecteur spectral de $\mathcal{A}_R$ associé à λ_R, et par conséquent,

$$\mathcal{A}_R \Pi_R(\chi_R u_\lambda) = \lambda_R \Pi_R(\chi_R u_\lambda) \,. \tag{E.2.8}$$

D'autre part, d'après la Proposition E.2.1, on a, encore pour R suffisamment grand,

$$\|\Pi_R\| \leq C_{\lambda,\varepsilon} \,, \quad C_{\lambda,\varepsilon} > 0 \,, \tag{E.2.9}$$

et

$$\|\Pi - \Pi_R\| \longrightarrow 0 \,, \quad R \longrightarrow +\infty \,. \tag{E.2.10}$$

D'après (E.2.7) et (E.2.8), on a

$$\begin{aligned} \lambda_R \Pi_R((\chi_R u_\lambda)) &= \mathcal{A}_R \Pi_R(\chi_R u_\lambda) \\ &= \Pi_R \mathcal{A}_R(\chi_R u_\lambda) \\ &= \lambda \Pi_R(\chi_R u_\lambda) + \Pi_R r_R \,, \end{aligned}$$

donc

$$|\lambda - \lambda_R| = \frac{\|\Pi_R r_R\|}{\|\Pi_R \chi_R u_\lambda\|} \,. \tag{E.2.11}$$

Or, d'après (E.2.7) et (E.2.9), on a

$$\|\Pi_R r_R\| \leq C_{\lambda,\varepsilon} e^{-c_0 R^{3/2}} \,. \tag{E.2.12}$$

D'autre part, si $\bar{u}_\lambda$ désigne le conjugué de u_λ , on a d'après la formule (1.3.4),

$$\begin{aligned} \Pi_R(\chi_R u_\lambda) &= (\Pi_R - \Pi)\chi_R u_\lambda + \Pi(\chi_R u_\lambda) \\ &= (\Pi_R - \Pi)\chi_R u_\lambda + \frac{\langle \chi_R u_\lambda, \bar{u}_\lambda\rangle}{\langle u_\lambda, \bar{u}_\lambda\rangle}\chi_R u_\lambda \,. \end{aligned} \tag{E.2.13}$$

Quand $R \to +\infty$, on a $\|(\Pi_R - \Pi)\chi_R u_\lambda\| \to 0$ (voir (E.2.10)), $\|\chi_R u_\lambda\| \to \|u_\lambda\|$, et

$$\left| \frac{\langle \chi_R u_\lambda, \bar{u}_\lambda \rangle}{\langle u_\lambda, \bar{u}_\lambda \rangle} \right| \longrightarrow 1 ,$$

et donc $\|\Pi_R(\chi_R u_\lambda)\| \to \|u_\lambda\|$ d'après (E.2.13).
Ainsi, l'estimation (E.1.3) découle de (E.2.11) et (E.2.12).

E.3 L'oscillateur harmonique complexe

On prouve maintenant le Théorème E.1.2 en suivant la méthode de la section précédente. Par dilatation analytique $x \mapsto e^{i\pi/8}x$ (voir la sous-section 2.3.3), la valeur propre $\lambda \in \sigma(\mathcal{H})$ s'écrit, pour un certain $n \geq 1$, $\lambda = e^{i\pi/4}(2n-1)$, et la fonction propre v_λ associée à $\lambda \in \sigma(\mathcal{H})$ est de la forme

$$v_\lambda(x) = P_n(e^{i\pi/8}x) \exp\left(-e^{i\pi/4}\frac{x^2}{2}\right), \tag{E.3.1}$$

où P_n est le n-ème polynôme de Hermite.
Comme dans (E.2.1), on a

$$(\mathcal{H}_R - \lambda)\theta_R v_\lambda = -\theta''_R v_\lambda - 2\theta'_R v'_\lambda , \tag{E.3.2}$$

et d'après (E.3.1), pour R suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \|\theta''_R v_\lambda\|^2 &\leq \int_{R-\delta}^{R-\delta/2} |P_n(e^{i\pi/8}x)|^2 e^{-x^2\cos(\pi/4)} dx \\ &\leq e^{-d_1 R^2}, \quad d_1 > 0 . \end{aligned} \tag{E.3.3}$$

De même, en dérivant (E.3.1), on a pour R suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \|\theta'_R v'_\lambda\| &\leq \int_{R-\delta}^{R-\delta/2} |P'_n(e^{i\pi/8}x) - e^{i\pi/8}xP_n(e^{i\pi/8}x)|^2 e^{-x^2\cos(\pi/4)} dx , \\ &\leq e^{-d_2 R^2}, \quad d_2 > 0 . \end{aligned} \tag{E.3.4}$$

Enfin, on a clairement

$$\|\theta_R v_\lambda\| \longrightarrow \|v_\lambda\| \quad \text{quand} \quad R \longrightarrow +\infty , \tag{E.3.5}$$

et l'estimation (E.1.4) découle de (E.3.2), (E.3.3), (E.3.4) et (E.3.5).

La preuve de l'inégalité (E.1.5) s'effectue selon un raisonnement analogue à celui de la sous-section E.2.2.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz et I. Stegun, *Handbook of mathematical functions.* National bureau of standards, 1964.

[2] S. Agmon, *Elliptic boundary value problems.* D. Van Nostrand Company, 1965.

[3] G. B. Airy, *On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic.* Trans. Camb. Phil. Soc. 6 (1838), 379-402.

[4] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, et G. Fragnelli, *Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications to null controllability.* J. Evol. Equ. 6 (2) (2006), 161-204.

[5] S. Alinhac et P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* InterEditions, 1991.

[6] S. Alinhac et C. Zuily, *Uniqueness and nonuniqueness of the Cauchy problem for hyperbolic operators with double characteristics.* Comm. Partial Differential Equations 6 (7) (1981), 799-828.

[7] Y. Almog, *The stability of the normal state of superconductors in the presence of electric currents.* Siam J. Math. Anal. 40 (2) (2008), 824-850.

[8] Y. Almog et B. Helffer, *Global stability of the normal state of superconductors in the presence of a strong electric current.* A paraître dans Comm. in Math. Physics.

[9] Y. Almog, B. Helffer et X. B. Pan, *Superconductivity near the normal state under the action of electric currents and induced magnetic fields in* $\mathbb{R}^2$. Commun. Math. Phys. 300 (2010), 147-184.

[10] Y. Almog, B. Helffer et X. B. Pan, *Superconductivity near the normal state in a half-plane under the action of a perpendicular electric current and an induced fagnetic field*. Trans. AMS 365 (2013), 1183-1217.

[11] Y. Almog, B. Helffer et X. B. Pan, *Superconductivity near the normal state in a half-plane under the action of a perpendicular current and an induced magnetic field II : the large conductivity limit.* Siam J. Math. Anal. 44 (6) (2012), 3671-3733.

[12] A. Aslanyan et E.-B. Davies, *Spectral instability for some Schrödinger operators.* Proc. R. Soc. London A, 456 (2000), 1291-1303.

[13] K. Beauchard, *Null controllability of Kolmogorov-type equations.* Mathematics of Control, Signals, and Systems (to appear), 2013.

[14] K. Beauchard, P. Cannarsa, et R. Guglielmi, *Null controllability of Grushin-type operators in dimension two.* JEMS (preprint), 2013.

[15] K. Beauchard, B. Helffer, R. Henry et L. Robbiano, *Degenerate parabolic operators of Kolmogorov type with a geometric control condition.* Soumis.

[16] A. Benabdallah, Y. Dermenjian, et J. Le Rousseau, *Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications to controllability and an inverse problem.* J. Math. Anal. Appl. 336 (2) (2007), 865-887.

[17] A. Benabdallah, Y. Dermenjian, et J. Le Rousseau, *On the controllability of linear parabolic equations with an arbitrary control location for stratified media.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 344 (6) (2007), 357-362.

[18] C. M. Bender, *Making sense of non-Hermitian hamiltonians.* Rep. Prog. Phys. 70 (2007), 947-1018.

[19] C. M. Bender, M. V. Berry, P. N. Meisinger, V. M. Savage et M. Simsek, *Complex WKB analysis of energy-level degeneracies of non-Hermitian Hamiltonians.* J. Phys. A : Math. Gen. 34 (2001), L31-6.

[20] C. M. Bender et S. Boettcher, *Real spectra in non-hermitian hamiltonians having $\mathcal{PT}$-symmetry.* Phys. Rev. Lett. 80 (1998), 5243.

[21] J.-M. Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés.* Ann. Inst. Fourier 19 (1) (1969), 277-304.

[22] D. Borisov et D. Krejcirik, *$\mathcal{PT}$-symmetric waveguides.* Integr. equ. oper. theory 62 (2008), 489-515.

[23] W. Bordeaux-Montrieux, *Estimation de résolvante et construction de quasimode près du bord du pseudospectre.* arXiv :1301.3102.

[24] L. Boulton, *The non-self-adjoint harmonic oscillator, compact semigroups and pseudospectra.* Journal of Operator Theory 47 (2002), 413-429.

[25] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[26] J.-M. Buchot et J.-P. Raymond, *Feedback stabilization of a boundary layer equation, part2 : Nonhomogeneous state equations and numerical simulations.* Appl. Math. Res. Express. (2), 2009.

[27] J.-M. Buchot et J.-P. Raymond, *Feedback stabilization of a boundary layer equation, part 1.* ESAIM : COCV 17 (2) (2011).

[28] E. Caliceti, S. Graffi et M. Maioli, *Perturbation theory of odd anharmonic oscillators.* Commun. Math. Phys. 75 (1980), 51-66.

[29] E. Caliceti, S. Graffi et J. Sjöstrand, *$\mathcal{PT}$-symmetric non-selfadjoint operators, diagonalizable and non-diagonalizable, with real discrete spectrum.* J. Phys. A : Math. Theor. 40 (33) (2007), 10155-10170.

[30] E. Caliceti, M. Hitrik, S. Graffi et J. Sjöstrand, *Quadratic $\mathcal{PT}$-symmetric operators with real spectrum and similarity to self-adjoint operators.* J.Phys. A : Math. Theor. 45 (2012), 444007.

[31] E. Caliceti et M. Maioli, *Odd anharmonic oscillators and shape resonances.* Ann. Inst. H. Poincaré A 38 (1983), 175-186.

[32] P. Cannarsa et L. de Teresa, *Controllability of 1-D coupled degenerate parabolic equations.* Electron. J. Differ. Equ. 73 (2009), 21 p.

[33] P. Cannarsa, G. Fragnelli et D. Rocchetti, *Null controllability of degenerate parabolic operators with drift.* Netw. Heterog. Media 2 (4) (2007), 695-715.

[34] P. Cannarsa, G. Fragnelli et D. Rocchetti, *Controllability results for a class of one-dimensional degenerate parabolic problems in nondivergence form.* J. Evol. Equ. 8 (2008), 583-616.

[35] P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble, *Persistent regional null controllability for a class of degenerate parabolic equations.* Commun. Pure Appl. Anal. 3 (4) (2004), 607-635.

[36] P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble, *Null controllability of degenerate heat equations.* Adv. Differential Equations 10 (2) (2005), 153-190.

[37] P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble, *Carleman estimates for a class of degenerate parabolic operators.* SIAM J. Control Optim. 47 (1) (2008), 1-19.

[38] P. Cannarsa, P. Martinez et J. Vancostenoble, *Carleman estimates and null controllability for boundary-degenerate parabolic operators.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347 (3-4) (2009), 147-152.

[39] R. Coifman et Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels.* Astérisque 57, 1978.

[40] E. B. Davies, *Linear operators and their spectra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2007.

[41] E. B. Davies, *Wild spectral behaviour of anharmonic oscillators.* Bull. London. Math. Soc. 32 (2000), 432-438.

[42] E. B. Davies, *Semi-classical states for the non-self-adjoint Schrödinger operators.* Commun. Math. Phys. 200 (1999), 35-41.

[43] E. B. Davies, *Pseudospectra, the harmonic operator and complex resonances.* Proc. Roy. Soc. London A, 455 (1999), 585-599.

[44] E. B. Davies, *Pseudospectra of differential operators.* J. Operator Theory 43 (2000), 243-262.

[45] E. B. Davies et A. Kuijlaars, *Spectral asymptotics of the non-self-adjoint harmonic oscillator.* J. London Math. Soc. (2) 70 (2004), 420-426.

[46] E. Delabaere et F. Pham, *Eigenvalues of complex hamiltonians with $\mathcal{PT}$-symmetry I.* Phys. Lett. A 250 (1998), 25-28.

[47] E. Delabaere et F. Pham, *Eigenvalues of complex hamiltonians with $\mathcal{PT}$-symmetry II.* Phys. Lett. A 250 (1998), 29-32.

[48] E. Delabaere et D. T. Trinh, *Spectral analysis of the complex cubic oscillator.* J. Phys. A : Math. Gen. 33 (2000), 8771-8796.

[49] N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski, *Pseudospectra of semiclassical (pseudo-)differential operators.* Comm. Pure and Applied Mathematics, Vol. LVII (2004), 384–0415.

[50] S. Didelot, *Etude d'une perturbation singulière elliptique dégénérée.* Thèse de doctorat, Reims, 1999.

[51] A. Doubova, E. Fernández-Cara et E. Zuazua, *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient.* SIAM J. Control Optim. 42 (3) (2002), 798-819.

[52] A. Doubova, A. Osses et J.-P. Puel, *Exact controllability to trajectories for semilinear heat equations with discontinuous diffusion coefficients.* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (2002), 621-661.

[53] J. J. Duistermaat, *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities.* Comm. Pure. Appl. Math. 27 (1974), 207-281.

[54] N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators, Vol. 2.* Interscience Publ., 1963.

[55] M. Embree, *Pseudospectra and the dynamics of non-self-adjoint operators.* Mini-cours, école d'été de l'ANR NOSEVOL, Berder, 2013.

[56] K. J. Engel et R. Nagel, *One-parameter semi-groups for linear evolution equations.* Springer, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 194, 2000.

[57] A. Erdelyi, *Asymptotic expansions.* Dover, 1956.

[58] S. Ervedoza, *Control and stabilization properties for a singular heat equation with an inverse-square potential.* Comm. Partial Differential Equations 33 (10-12) (2008), 1996-2019.

[59] G. Alessandrini et L. Escauriaza, *Null-controllability of one-dimensional parabolic equations.* ESAIM Control Optim. Calc. Var. 14 (2) (2008), 284-293.

[60] C. Fabre, J.-P. Puel et E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh 125 A (1995), 31-61.

[61] H. O. Fattorini et D. Russel, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension.* Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971), 272-292.

[62] M. V. Fedoryuk, *Asymptotic Analysis : Linear Ordinary Differential Equations.* Springer, 1993.

[63] E. Fernández-Cara et E. Zuazua, *Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 17 (2000), 583-616.

[64] E. Fernández-Cara et E. Zuazua, *The cost of approximate controllability for heat equations : The linear case.* Advances in Differential Equations 5 (4-6) (2000), 465-514.

[65] E. Fernández-Cara et E. Zuazua, *On the null controllability of the one-dimensional heat equation with BV coefficients.* Computational and Applied Mathematics 12 (2002), 167-190.

[66] C. Flores et L. de Teresa, *Carleman estimates for degenerate parabolic equations with first order terms and applications.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (7-8) (2010), 391-396, 2010.

[67] S. Fournais et B. Helffer, *Spectral Methods in surface superconductivity.* Birkhäuser, 2010.

[68] A.V. Fursikov et O.Y. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations.* Lecture Notes Series, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 34, 1996.

[69] J. Galkowski, *Nonlinear instability in a semiclassical problem.* Commun. Math. Phys. 316 (2012), 705-722.

[70] C. Gérard et A. Grigis, *Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier.* Journal of differential equations 72 (1988), 149-177 .

[71] M. González-Burgos et L. de Teresa, *Some results on controllability for linear and nonlinear heat equations in unbounded domains.* Adv. Differential Equations 12 (11) (2001), 1201-1240.

[72] V. Grecchi, M. Maioli and A. Martinez, *Padé summability of the cubic oscillator.* J. Phys. A : Math. Theor. 42 (2009), 208-425.

[73] V. Grecchi et A. Martinez, *The spectrum of the cubic oscillator.* Commun. Math. Phys. 319 (2013), 479-500.

[74] A. Grigis et J. Sjöstrand, *Microlocal analysis for differential operators, an introduction.* Cambridge University Press, London Math. Soc. Lecture Note Series 196, 1994.

[75] B. Helffer, *Spectral theory and its applications.* Cambridge University Press, 2013.

[76] B. Helffer, *On pseudo-spectral problems related to a time dependent model in superconductivity with electric current.* Confluentes Math. 3, (2) (2011), 237-251.

[77] B. Helffer, *Semi-Classical Analysis for the Schrödinger Operator and Applications.* Lecture Notes in Mathematics no. 1336, 1988.

[78] B. Helffer, *Semi-classical analysis and statistical mechanics.* Cours de DEA 1997-98, 140 p.

[79] B. Helffer, *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques.* Astérisque 112, 1984.

[80] B. Helffer et A. Martinez, *Phase transition in the semiclassical regime.* Rev. Math. Phys. 12 (11) (2000), 1429–1450.

[81] B. Helffer et D. Robert, *Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudo-différentiels sur* $\mathbb{R}^n$. Commun. in P.D.E 7 (1982), 795-882.

[82] B. Helffer et D. Robert, *Asymptotique des niveaux d'énergie pour des hamiltoniens à un degré de liberté.* Duke Math. J. 49 (4) (1982), 853-868.

[83] B. Helffer et J. Sjöstrand, *From resolvent bounds to semi-group bounds.* Actes du Colloque d'Evian (Juin 2009).

[84] R. Henry, *Spectral instability of some non-selfadjoint anharmonic oscillators.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 1043-1046.

[85] R. Henry, *Spectral instability for the complex Airy operator and even non-selfadjoint anharmonic oscillators.* A paraître dans Journal of Spectral Theory.

[86] R. Henry, *Spectral projections of the complex cubic oscillator.* A paraître à AHP.

[87] R. Henry, *On the semiclassical analysis of Schrödinger operators with purely imaginary electric potentials in a bounded domain.* Soumis.

[88] F. Hérau, J. Sjöstrand et C. C. Stolk, *Semiclassical analysis for the Kramers-Fokker-Planck equation.* Comm. Partial Differential Equations 30 (4-6) (2005), 689-760.

[89] M. Hitrik et K. Pravda-Starov, *Semiclassical hypoelliptic estimates for non-selfadjoint operators with double characteristics.* Comm. Partial Differential Equations 35 (6) (2010), 988-1028.

[90] M. Hitrik et K. Pravda-Starov, *Eigenvalues and subelliptic estimates for non-selfadjoint semiclassical operators with double characteristics.* A paraître dans Ann. Inst. Fourier (2013).

[91] M. Hitrik, J. Sjöstrand et J. Viola, *Resolvent esimates for elliptic quadratic differential operators.* Anal. PDES 6 (1) (2013), 181-196.

[92] T. Ichinose, *Operators on tensor products of Banach spaces.* TAMS 170 (1972), 197-219.

[93] O. Y. Imanuvilov, *Boundary controllability of parabolic equations.* Uspekhi. Mat. Nauk 48 (3(291)) (1993), 211-212.

[94] O. Y. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations.* Mat. Sb. 186 (6) (1995), 109-132.

[95] O. Y. Imanuvilov et M. Yamamoto, *Carleman estimate for a parabolic equation in Sobolev spaces of negative order and its applications.* Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems, G. Chen et al. eds., Marcel-Dekker (2000), 113-137.

[96] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators.* Springer, Berlin, 1966.

[97] D. Krejcirik et P. Siegl, *On the metric operator for the imaginary cubic oscillator.* Phys. Rev. D 86 (2012), 121702(R).

[98] G. Lebeau et L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur.* Comm. P.D.E. 20 (1995), 335-356.

[99] G. Lebeau et J. Le Rousseau, *On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. Applications to unique continuation and control of parabolic equations.* ESAIM : COCV 18 (2012), 712-747.

[100] A. Lopez et E. Zuazua, *Uniform null controllability for the one dimensional heat equation with rapidly oscillating periodic density.* Annales IHP. Analyse non linéaire 19 (5) (2002), 543-580.

[101] J. Martinet, *Sur les propriétés spectrales d'opérateurs non-autoadjoints provenant de la mécanique des fluides.* Thèse de doctorat, 2009.

[102] P. Martinez et J. Vancostenoble, *Carleman estimates for one-dimensional degenerate heat equations.* J. Evol. Equ. 6 (2) (2006), 325-362.

[103] P. Martinez, J. Vancostonoble et J.-P. Raymond, *Regional null controllability of a linearized Crocco type equation.* SIAM J. Control Optim. 42 (2) (2003), 709-728.

[104] L. Miller, *On the null-controllability of the heat equation in unbounded domains.* Bulletin des Sciences Mathématiques 129 (2) (2005), 175-185.

[105] L. Miller, *On exponential observability estimates for the heat semigroup with explicit rates.* Rendiconti Lincei : Matematica e Applicazioni 17 (4) (2006), 351-366.

[106] B. Mityagin, P. Siegl et J. Viola, *Differential operators admitting various rates of spectral projection growth.* En préparation.

[107] C. Moler et C. Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix.* SIAM Rev. 20 (4) (1978), 801-836.

[108] C. Moler et C. Van Loan, *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later.* SIAM Rev. 45 (1) (2003), 3–49.

[109] B.-T. Nguyen et D. S. Grebekov, *Localization of laplacian eigenfunctions in circular and elliptical domains.* SIAM J. Appl. Math. 73 (2) (2013), 780-803.

[110] O. A. Oleinik et V.N. Samokhin, *Mathematical Models in Boundary Layer Theory, Applied Mathematics and Mathematical Computation*, volume 15. Chapman Hall CRC, Boca Raton, London, New York, 1999.

[111] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions.* Academic Press, 1974.

[112] X. B. Pan, *Surface superconductivity in* 3 *dimensions.* Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), 3899-3937.

[113] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, New-York, 1983.

[114] R. N. Pederson, *Laplace's method for two parameters.* Pacific J. Math. 15 (2) (1965), 585-596.

[115] Pham The Lai et D. Robert, *Sur un problème aux valeurs propres non linéaire.* Israel J. Math. 36 (2) (1980), 169-186.

[116] K. Pravda-Starov, *A complete study of the pseudo-spectrum for the rotated harmonic oscillator.* J. London. Math. Soc. 73 (2) (2006), 745-761.

[117] K. Pravda-Starov, *On the pseudospectrum of elliptic quadratic differential operators.* Duke Math. J. 145 (2) (2008), 249-279.

[118] K. Pravda-Starov, *Subelliptic estimates for quadratic differential operators.* Amer. J. Math. 133 (1) (2011), 39-89.

[119] M. Reed et B. Simon, *Methods of modern mathematical physics.* Academic Press, New York, 4 volumes, 1972-1978.

[120] D. Robert, *Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels.* Comm. Partial Differential Equations 3 (1978), 755-826.

[121] S. Roch et B. Silbermann, *C^*-algebras techniques in numerical analysis.* J. Oper. Theory 35 (1996), 241-280.

[122] J. Le Rousseau, Carleman estimates and controllability results for the one-dimensional heat equation with BV coefficients. *J. Differential Equations* 233 (2) (2007), 417-447.

[123] R. Schatten, *A theory of cross-spaces.* Ann. of Math. Studies, n. 26, Princeton Univ. Press, 1950.

[124] K. C. Shin, *On the reality of eigenvalues for a class of PT-Symmetric oscillators.* Commun. Math. Phys. 104, 229 (3) (2002), 543-564.

[125] Y. Sibuya, *Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient.* North-Holland publishing company, 1975.

[126] K. M. Siegel, *An inequality involving Bessel functions of argument nearly equal to their orders.* Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 858-859.

[127] J. Sjöstrand, *Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics.* Ark. Mat. 12 (1974), 85-130.

[128] J. Sjöstrand, *Resolvent estimates for non-selfadjoint operators via semigroups.* Around the research of Vladimir Maz'ya III, International Mathematical Series 13 (2010), 359-384.

[129] J. Sjöstrand et M. Zworski, *Elementary linear algebra for advanced spectral problems.* Annales de l'Institut Fourier 57 (2007), 2095-2141.

[130] E. M. Stein, *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[131] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions.* Oxford Univ. Press, London, 1939.

[132] J. Toth et S. Zelditch, *Counting nodal lines wich touch the boundary of an analytic domain.* Journal of Differential Geometry 81 (2009), 649-686.

[133] L. N. Trefethen, *Spectral methods in Matlab.* SIAM, Philadelphia, 2000.

[134] L. N. Trefethen et M. Embree, *Spectra and pseudospectra.* A course in three volumes (2004).

[135] D. T. Trinh, *Asymptotique et analyse spectrale de l'oscillateur cubique.* Thèse de Doctorat, 2002.

[136] D. T. Trinh, *On the Sturm-Liouville problem for the complex cubic oscillator.* Asymptotic Analysis 40 (2004), 211-234.

[137] J. Vancostenoble et E. Zuazua, *Null controllability for the heat equation with singular inverse-square potentials.* J. Funct. Anal. 254 (7) (2008), 1864-1902.

[138] J. Viola, *Resolvent estimates for non-selfadjoint operators with double characteristics.* J. Lond. Math. Soc. (2) 85 (1) (2012), 41-78.

[139] J. Viola, *Non-elliptic quadratic forms and semiclassical estimates for non-selfadjoint operators.* Int. Math. Res. Notices (2012).

[140] J. Viola, *Spectral projections and resolvent bounds for partially elliptic quadratic differential operators.* J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 4 (2013), 145-221.

[141] A. Voros, *Spectre de l'équation de Schrödinger et méthode BKW.* Publications mathématiques d'Orsay, 81.09, 1981.

[142] E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation : boundary control.* International Conference in honour of Prof. R. Glowinski, Computational Sciences for the 21st Century, M.O. Bristeau et al. eds., John Wiley and Sons (1997), 738-747.

[143] E. Zuazua, *Finite dimensional null-controllability of the semilinear heat equation.* J. Math. Pures et Appl. 76 (1997), 237-264.

[144] M. Zworski, *A remark on a paper of E. B. Davies.* Proc. Amer. Math. Soc. 129 (10) (2001), 2955–2957.