UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences

École doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Nice Sophia Antipolis

Discipline : Physique

présentée et soutenue par

Louis BELLANDO de CASTRO

LOCALISATION DE LA LUMIÈRE ET EFFETS COOPÉRATIFS DANS DES NUAGES D'ATOMES FROIDS

Thèse dirigée par Robin KAISER

soutenue à l'Institut Non Linéaire de Nice le 12 novembre 2013

Jury :

M. PILLET Pierre	Directeur de Recherche	Président
M. CARMINATI Rémi	Professeur	Rapporteur
M. GARREAU Jean-Claude	Directeur de Recherche	Rapporteur
M. CELARDO G. Lucas	Assistant de Recherche	Examinateur
M. KUHL Ulrich	Professeur	Examinateur
M. KAISER Robin	Directeur de Recherche	Directeur de thèse

Remerciements

Grâce à de nombreuses personnes qui m'ont entourées, les années que j'ai passé à l'Institut Non Linéaire de Nice ont été à la base d'un grand enrichissement personnel et professionnel et ceux malgré les terribles épreuves que j'ai traversées au cours de ma thèse.

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre Pillet d'avoir présidé mon jury de thèse, ses articles expérimentaux sur la superradiance et la sousradiance m'ont beaucoup influencé et ce fut un honneur pour moi de l'avoir comme président le jour de ma soutenance. Je tiens également à remercier Remi Carminatti et Jean Claude Garreau d'avoir accepté de corriger mon manuscrit de thèse et d'y avoir amené des remarques pertinentes et intéressantes. Je remercie aussi pour avoir été présent le jour de ma soutenance de thèse Luca Cellardo, avec qui j'ai eu de multiples discussions intéressantes sur les effets coopératif et le modèle vectoriel, et Ulrich Kuhl, qui est l'auteur d'un des premiers articles sur la localisation d'Anderson que j'ai lu et qui est venu discuter plusieurs fois avec moi avant ma soutenance sur mon manuscrit.

Le jour de la soutenance il y a également un membre supplémentaire assis aux côtés du jury qui ne pose pas de questions (et qui en l'occurrence pour mon cas spécifique ne connaissait pas la traduction du mot "culbuto" de l'Allemand au Français) mais qui est un des acteurs principaux du doctorat et sans lequel l'aboutissement d'un travail de thèse ne peut être possible. Cet acteur a été pour moi Robin Kaiser que j'ai connu pour mon stage de Master 2. Robin, qui s'est toujours comporté envers moi comme un excellent père scientifique, a su m'accepter et me faire évoluer malgré mon niveau lacunaire et mon manque de rigueur. Son éternel optimisme et son ambition démesurée ont su me transformer aussi bien dans ma vie scientifique que dans ma vie de tous les jours. Les concepts physiques et sa rigueur ont toujours su me faire aller de l'avant et ont fait de moi celui que je suis actuellement. Robin saches que le fait de t'avoir rencontré m'a fait profondément changer en bien, pour cela je t'en serais à jamais reconnaissant et en écrivant ces quelques lignes je m'aperçois que c'est en côtoyant des personnes telles que toi que le terme *academic father* prend toute sa signification.

Il faut souligner que le bon aboutissement d'un travail de thèse est avant tout une entreprise que l'on mène en équipe et celle des Atomes Froids de Nice a une très grande part de mérite. Je tiens tout d'abord à remercier Tom et Julien qui ont été en quelques sortes comme des grands frères pour moi dans le monde de la physique. Julien par sa patience et son réflexe de tout automatiser sur une expérience m'a fait faire des progrès considérables dans le domaine de la physique expérimentale et Tom par sa rigueur et sa patience m'a permis d'acquérir de nombreuse méthodes qui me seront utiles au cours de ma vie scientifique. Les années que j'ai passé à vous côtoyer nous ont fait devenir amis et je suis sûr que cette amitié sera conservée bien au-delà du laps de temps impartis par la

thèse. Présent au tout début et de retour pour la dernière année William m'a été aussi d'une précieuse aide, je te souhaite bon courage pour l'observation expérimentale de la sousradiance et je suis sûr que malgré les difficultés tu vas y arriver avec brio. Toujours dans la famille atomes froids il y a Quentin mon voisin de bureau qui a beaucoup importé pour moi tant par ses multiples connaissances que sa manière plus que cool d'arborer la vie en général. Je te souhaite plein de réussites personnelles et en sciences également. Enfin je tiens à remercier les anciens thésards Maryvonne, JF et Nicolas pour les conseils qu'ils ont pu m'apporter et les discussions que l'on a eu ensemble pendant les multiples pause-café. J'espère que tout ira bien pour vous dans le futur.

Comme je l'ai dit précédemment, mon séjour à l'INLN m'a fait singulièrement évoluer et c'est avant tout parce que ce labo fonctionne très correctement. Tout cela est possible grâce à l'équipe administrative, composée de Nath, Isabelle Lysiane et François Régis, qui sont toujours disponibles et efficaces, et également grâce aux équipes techniques Jean Charles, Jean Claude, Arnaud, Christian, Mathieu et Jean Daniel qui sont toujours à notre écoute. Je remercie Jorge qui m'a accueillis au labo pour le début de ma thèse et je remercie tout spécialement Jean Marc, qui a succédé à Jorge à la tête du labo, avec qui j'ai eu de multiples discussions sur des sujets divers et variés en partageant la même passion pour le non conformisme dans la vie. Jean Marc ta vision alternative de la vie m'inspire beaucoup et le jour où je cultiverai du génépi je penserais fort à tes conseils.

Le bon fonctionnement du labo est aussi la conséquence de la bonne ambiance qui y règne et ce grâce à tous les permanents et non permanents qui y contribuent. Parmi les permanents je remercie spécialement les Gattobigio (Parizia et Mario) et Guillaume pour les multiples conseils qui m'ont apportés au cours de ces quelques années. Une mention spéciale pour Patrizia (la maman du labo) qui m'a beaucoup soutenu dans les épreuves difficile et qui m'a fait bénéficier de ses très bon conseils sur la science et la vie en général (par exemple avec la recette du Tiramisu). Merci à tous les chercheurs (Fred, Xavier, Stéphane, Giovanna, Christian, Gian Luca, Mathias, Jacques Alexandre, Thierry, Jacques, Massimo, Médéric, Georges, Eric) pour tout le soutien et les conseils qu'ils ont su m'apporter. Dans la catégorie non permanent il y a aussi les copains de galère c'est à dire les doctorants de l'INLN à qui je souhaite beaucoup de réussite scientifiques et personnelles. Merci à Taha, Pipou, Mathias, Abdoulaye, Ardavan, François (Tic), Bruno (et Tac), Margerita, Laurent, Marta, Axel, Florence, Patrice, Emilie.

Il faut savoir que grâce aux multiples idées de Robin et à ses multiples collaborations j'ai eu l'occasion de voyager et discuter avec des chercheurs du monde entier. Merci tout d'abord à Philippe Courteille et à Romain Bachelard de m'avoir accueillis à Sao Carlos au Brésil ce fut une expérience professionnelle et humaine fabuleuse et j'espère avoir l'occasion de travailler avec vous de nouveaux. Merci également à Eric Akkermans et Ari Gero de collaborer avec nous et de faire preuve d'une très grande patience. Merci aussi à Nicola Piovella pour les multiples discussions pertinentes que nous avons sur les effets coopératifs. Merci à Ugo Tercas de m'avoir appris à dérégler (et par conséquent re-régler) une manip d'atomes froids.

Après avoir remercié la grande famille qu'est l'INLN il faut aussi remercier les familles que créent la vie à l'université et la vie de tous les jours. Je remercie tous les enseignants chercheurs qui m'ont accompagné au cours de mon cursus universitaire avec une mention spéciale pour Fabrice Mortessagne, Olivier Legrand, Ulrich Kuhl et Valérie Doya. En effets les membres de l'équipe POMC au Laboratoire Physique de la Matière Condensé ont guidé mes premiers pas dans le domaine du chaos ondulatoire et de la physique mésoscopique en éveillant mon intérêt pour cette fabuleuse branche de la physique. Je tiens également à remercier les collègues enseignants (Sylvie qui m'a connue au tout début de ma vie universitaire, Fabien, Massimo, Jean Marc, Carole,...) pour m'avoir fait découvrir les multiples facettes de l'enseignement supérieur. Je remercie tout particulièrement les copains de la fac (Laurent, Jérémy, Alphonse, Co et PM, Jo) avec qui j'ai passé des moments inoubliables et compte bien en repasser pleins d'autre à l'avenir. Il y a également les potes du foyer avec qui j'ai de nombreux souvenir et qui m'ont beaucoup apportés au cours de ces

dernières années.

Hors du cadre de l'université je tiens tout d'abord à remercier Marie et sa famille pour tout ce qu'ils ont fait pour moi. Marie, tu m'as toujours soutenue dans les bons moments aussi bien que dans passages difficile et pour cela je t'en serai toujours reconnaissant. Il y a aussi les copains punks de Nice (Luck, Lolo, Nico, Giz, Loïc, Elise, Boris, Julia, Pierre, Mélanie, Chine, Coco, Thomas,...) avec qui j'ai vécu beaucoup de bons moments et qui m'ont amené tout leur soutien quand ça allait mal. Ne vous inquiétez pas maintenant que la rédaction est finie on va pouvoir se remettre à boire des bières tous ensemble. Il y a aussi l'équipe du Volume à Nice qui m'a accompagnée au cours de ces dernières années. Enfin je tiens à remercier tout particulièrement mes amis d'I.M.O.D.I.U.M (Max et Kev') de m'avoir supporté depuis 10 ans en m'accompagnant dans les bon moments comme dans les moments difficiles. Ensemble avec notre groupe de musique du lycée on aura parcouru pas mal de chemin (et on va encore surement en parcourir) tout en réussissant nos projets de vie personnels et ça ça n'a pas prix.

Je remercie également mon père (Gilbert) et mon frère (Antoine) pour tout le soutien qu'ils m'ont apportés. La dernière épreuve difficile que nous avons eue à traverser tous les trois m'a montré à quel point je pouvais compter sur vous et je vous suis entièrement reconnaissant pour votre patience et votre compréhension.

Enfin je tiens tout particulièrement à remercier ma Maman (Nicole) qui nous a quittés trop tôt pour pouvoir assister à l'aboutissement de mon travail de thèse. Dès les premières heures de ma vie ma mère m'a orienté vers la science tout en m'ouvrant à la littérature, la musique et les arts en général. Malgré sa maladie elle a su m'accompagner et me conseiller au cours de ces dernières années de thèse. Se moquant gentiment de moi quand je lui faisais part des difficultés que je rencontrais au cours de mon travail de recherche, elle avait toujours un œil avertit pour me guider ce qui faisait preuve de sa très grande maturité et capacité en sciences. La personne que je suis aujourd'hui lui doit beaucoup de choses et malgré son absence le jour de ma soutenance je suis sûr qu'elle était là en quelques sortes pour m'accompagner dans ma réussite. Maman, saches que cet ouvrage t'es entièrement dédié et comme toujours j'irai au bout de mes passions pour te faire honneur.

Table des matières

Chapitre 1 Introduction

Chapitre 2 État de l'art sur la localisation de la lumière et dérivation du modèle.

1 Approche classique. **16**

1.1 Rayonnement d'un dipôle oscillant. 16

1.2 Diagramme de rayonnement et section efficace. 22

1.2.a *Diagramme de rayonnement pour un ensemble de N atomes.* *22*

1.2.b *Section efficace de diffusion.* *24*

2 Modèle. **25**

2.1 Modèle de l'atome à deux niveaux. 26

2.2 Description du système. 26

2.3 Hamiltonien d'interaction matière-rayonnement. 27

2.3.a *Hamiltonien d'origine et obtention du Hamiltonien en jauge (D.E).* . . . *27*

2.3.b *Détails sur le Hamiltonien en jauge D.E* *31*

2.4 Dérivation de l'Hamiltonien effectif. 33

3 Matrices aléatoires euclidiennes, localisation d'Anderson de la lumière et Effets coopératifs. **37**

3.1 Quelques comportements singuliers des spectres des matrices aléatoires et des matrices aléatoires Euclidiennes. 37

3.2 Localisation d'Anderson et interactions longues portées. 39

3.3 Effets coopératifs et milieux désordonnés de grandes tailles. 40

Chapitre 3 Étude numérique de la localisation de la lumière et des effets coopératifs.

1 Etude numérique des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif d'interaction matière-rayonnement. **44**

1.1 Approche numérique. 44

1.2 Etude du comportement des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif pour $N = 2$ atomes. 45

1.3 Distributions des valeurs propres dans le plan complexe. 48

1.4 Distribution des largeurs des modes dans les cas scalaires et vectoriels. 56

1.4.a *Discussion sur les comportements phénoménologique des distributions des largeurs de modes dans certains régimes.* *57*

1.4.b *Résultats numériques sur les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans les cas scalaire et vectoriel.* *62*

1.4.c *Comportements asymptotiques des distributions largeurs des modes.* . . . *66*

1.4.d *Conclusions et discussion sur l'étude des largeurs des modes Γ_{at} et de leur distributions.* *72*

1.5 Comportements de la partie réelle des valeurs propres de l'hamiltonien effectif. 73

1.5.a *Distributions des positions des modes $P(E_{at})$ dans les cas scalaire et vectoriel.* *73*

1.6 Distribution des écarts en énergie. 81

1.7 Sélection des valeurs propres dans le plan complexe. 84

1.8 Distributions $P(s)$ des distances plus proches voisins dans le plan complexes pour les valeurs propres sélectionnées. 88

1.9 Critères de recouvrement spectral entre les modes. 94

1.10 Comportement des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif pour des systèmes de taille inférieure à la longueur d'onde : limite de Dicke. 103

1.11 Conclusions sur les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif. 105

2 Étude des états propres du Hamiltonien effectif. **107**

2.1 Étude du taux de Participation Inverse 107

2.2 Conclusion sur l'étude du Taux de Participation Inverse. 117

3 Résultats numériques sur le taux d'émission du photon. **117**

3.1 Opérateur densité réduit et taux d'émission du photon. 118

3.2 Distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans les cas scalaire et vectoriel. 122

3.3 Comportements asymptotiques des distributions du taux d'émission du photon. 124

3.4 Définition d'une fonction d'échelle. 127

3.5 Discussions des résultats. 130

Chapitre 4 Etude expérimentale des effets coopératifs.

1 Rappels Théoriques sur les effets coopératifs. 133
1.1 Solutions "Many Body" pour N dipôles couplés. 134
1.2 Solution Timed Dicke pour l'état stationnaire. 137
1.3 Modèle incohérent. 139
1.4 Diffusion de Mie et effets Coopératifs. 142
1.5 Discussions sur les pertinences des différents modèles. 142

2 Dispositif expérimental. 145
2.1 Le Piège Magnéto Optique. 145
2.2 Dispositif d'imagerie. 150
2.2.a *Imagerie d'absorption.* *151*
2.2.b *Imagerie de fluorescence.* *153*

3 Vérification de la validité des solutions Times Dicke au régime de diffusion simple. 154
3.1 Protocole expérimental. 155
3.2 Résultats. 159
3.3 Discussions. 166

4 Diffusion Multiple Cohérente. 167
4.1 Cohérence dans le régime de diffusion multiple. 167
4.2 Protocole expérimental. 169
4.3 Résultats expérimentaux. 170
4.4 Conclusions et perspectives sur la Diffusion Multiple Cohérente. 176

5 Préparation de l'étude des états sousradiants dans les nuages dilués. 177
5.1 Rappels théoriques sur l'étude des états sousradiant dans les nuages d'atomes froids dilués. 177
5.2 Mise en place d'un système de coupure rapide. 179
5.3 Perspectives sur les expériences de sousradiance. 182

Chapitre 5 Conclusions et perspectives

Chapitre A Dérivation de l'équation sur l'amplitude des dipôles dans les cas scalaire et vectoriel.

1 Dérivation de l'équation sur les dipôles dans le cas scalaire. 189

2 Dérivation de l'équation sur les dipôles dans le cas vectoriel. . . 195

Chapitre B Élaboration d'un piège dipolaire désaccordé dans le bleu.

Bibliographie

10

Chapitre 1

Introduction

L'étude de l'interaction matière rayonnement et de la propagation d'ondes dans des milieux désordonnés est un sujet présentant à la fois de nombreux aspects complexes et forts intéressants pour les phénomènes physiques qu'ils impliquent. La prise en compte du caractère cohérent de l'onde se propageant dans un milieu où les diffuseurs sont placés de manières aléatoires peut présenter des comportements très riches tels que la rétrodiffusion cohérente (CBS) [1, 2][3], la localisation d'Anderson [4][5] ou encore l'augmentation de l'émission cohérente liée à la synchronisation entre les diffuseurs par le biais de l'onde qu'ils émettent [6][7].

A l'exception de ce dernier, les phénomènes de localisation faible (CBS) et forte (Localisation d'Anderson) sont communément vus comme des processus cohérents survivants dans le régime de diffusion multiple. En effet lorsqu'une onde se propageant dans un milieu désordonné subit un grand nombre d'évènements de diffusions, par des diffuseurs placés aléatoirement dans l'espace, on peut s'attendre à une perte de cohérence dans sa phase aboutissant à une minimisation des effets d'interférences entre les différents diagrammes de diffusions. Dans ce cas, des modèles ne tenant pas compte des effets d'interférences type Equation de Transfert Radiative (RTE) peuvent être utilisés [8][9] afin de décrire le régime de diffusion multiple et ce dans beaucoup de domaines de la Physique [10]. Cependant il a été montré que certains effets cohérents étaient susceptibles d'amener des corrections non négligeables aux comportements prédits par les équations de transfert radiatives telle que la suppression des fluctuations universelles de la conductance [11] ou encore les effets de localisation faible et forte.

La situation que nous considérons s'intéresse à la propagation d'une onde lumineuse dans une vapeur atomique et plus précisément un nuage d'atomes froids. L'étude de la relaxation cohérente de la lumière par un ensemble d'atomes, assimilés dans ce cas à des systèmes à deux niveaux, a suscité un grand intérêt [12, 13, 14] depuis le travail fondateur de Dicke notamment dans le but d'observer expérimentalement une augmentation du taux d'émission cohérente (superradiance) où une diminution de ce taux d'émission

(sousradiance). Dans une expérience dite de fluorescence classique, les atomes rayonnent la lumière de manière isotrope et la constante de temps de relaxation caractéristique du système est proportionnel à $1/\Gamma_0$ où Γ_0 est le taux de relaxation pour un atome indépendant. Lorsque ces atomes ne rayonnement plus de manière indépendante, le phénomène originalement prédit est connu sous le nom de *superfluorescence*. Dans ce cas, N atomes, initialement dans leur état excité, se désexcitent de plus en plus efficacement jusqu'à émettre l'excitation de manière plus intense avec un taux d'émission $\Gamma_c \propto N\Gamma_0$ et dans des directions de l'espace privilégiées (souvent reliées à la géométrie du système).

Cette situation, bien que similaire en certains points aux phénomènes que nous allons étudier dans ce manuscrit, diffère principalement de notre modèle dans le sens où nous ne nous intéressons qu'au dernier étage de la cascade radiative décrite précédemment en ne considérant qu'une excitation (un photon ou un atome excité) au maximum dans le système. Dans notre cas ce sont les interactions mutuelles entre atomes, assimilés à des dipôles ponctuels, via le champ électromagnétique qu'ils émettent qui vont être à l'origine des effets cohérents qui pourront aboutir à une augmentation du taux d'émission collectif (superradiance) ou au piégeage de l'excitation dans le système (sousradiance). D'ordinaire ces effets (que ce soit pour une seule ou plusieurs excitations) sont étudiés théoriquement pour des systèmes dont la taille est petite devant la longueur d'onde associée à la transition atomique $L < \lambda$ et dans le cas d'une seule excitation, il a été trouvé que le taux d'émission collectif superradiant, auquel on associe l'état symétrique :

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |g_1, ..., e_i, ..., g_N\rangle, \tag{1.1}$$

était proportionnel au nombre d'atomes $\Gamma_c \propto N\Gamma_0$ contenus dans le système[15, 6],$|g_1, ..., e_i, ..., g_N\rangle$ étant l'état associé au i-ème atome dans son états excité et les $N-1$ autres atomes dans leur état fondamental. Cependant ce type de système dont la taille est très petite n'est pas facilement réalisable d'un point de vue expérimental c'est pourquoi certains travaux se sont penchés sur l'étude de ces phénomènes dans des milieux dont la taille est supérieure à la longueur d'onde [16]. Dans cette limite, la distance relative entre deux atomes (non négligeable devant la longueur d'onde) induit un déphasage et il a été trouvé une généralisation, l'état Timed Dicke, à l'état symétrique présenté à l'équation (1.1) telle que :

$$|TD\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\mathbf{k}_0.\mathbf{r}_i} |g_1, ..., e_i, ..., g_N\rangle. \tag{1.2}$$

Il a également été obtenu que le taux d'émission collectif ne dépendait plus uniquement du nombre d'atomes N mais du rapport entre ce dernier et le nombre de modes transverses $(k_0 L)^2$ contenus dans le système. Ce rapport présente un certain intérêt dans le sens où il représente une quantité connue des expérimentateurs qui est l'épaisseur optique b_0 à résonance :

$$b_0 \propto \frac{N}{(k_0 L)^2}. \tag{1.3}$$

En plus de ces effets coopératifs, il faut garder à l'esprit que le milieu que nous considérons, une vapeur atomique, est un milieu totalement désordonné. Bien que le modèle que nous considérons soit singulièrement différent du modèle original utilisé par Anderson afin d'étudier la localisation d'électrons dans un cristal désordonné, on peut s'attendre à ce que des effets cohérents d'interférences destructives soient présents dans les phénomènes physiques que nous considérons, aboutissant à une localisation spatiale de l'onde

électromagnétique semblable à la localisation d'Anderson pour les fonctions d'ondes électroniques. En effet l'observation de la localisation d'Anderson de la lumière reste encore un défis expérimental et malgré certaines tentatives [17, 5, 18, 19] dont les résultats sont encore controversés, les exposants critiques associés à la transition métal isolant [20], prévue au départ pour ce type de transition, ne sont pas en accord total avec ceux obtenus expérimentalement. Il faut garder à l'esprit que dans le cadre d'un couplage entre les diffuseurs via le champ électromagnétique dans l'approximation dipolaire électrique, la probabilité qu'à le photon de faire un saut entre deux diffuseurs, qui ne sont pas plus proches voisins, devient non négligeable ce qui n'est aucunement décrit dans la théorie originale sur la Localisation d'Anderson, basée sur le modèle de l'électron fortement lié et qui ne tient compte que des interaction entre plus proches voisins. D'une manière grossière, on peut relier le taux de désordre W du système à sa densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$ avec $\rho = N/(k_0L)^3$ tel que :

$$W \propto \frac{N}{(k_0L)^3}. \tag{1.4}$$

Si l'on s'en réfère à la théorie d'Anderson, on peut donc s'attendre à ce qu'au dessus d'une certaine densité critique, il nous soit possible d'observer des modes localisés au sens d'Anderson.

Nous avons donc présenté les deux phénomènes physiques qui seront à la base de nos études numériques et expérimentales dans le corps de ce manuscrit. Les questions qui peuvent se poser étant dans quelles mesures les interactions longues portées entre les diffuseurs peuvent-elles influencer les effets de localisation forte si ces derniers sont possibles dans les systèmes que nous considérons ? Il y a t il compétition ou cohabitation entre les états sousradiants et les états localisé au sens d'Anderson ? Est-ce que les processus cohérents à la base de la coopérativité survivent au régime de diffusion multiple ?

En plus de cela il est possible également de considérer le caractère vectoriel de la lumière [21, 22, 23, 24] en prenant en compte sa polarisation et la structure interne des diffuseurs qui sont des atomes dans le cas que nous étudions. En effet une approximation souvent utilisée bien qu'erronée dans les situations concernant des ondes électromagnétiques est l'approximation scalaire pour une onde lumineuse [25, 26, 27]. Plusieurs études faisant cette approximation ont observé l'existence de modes aux très longs temps de vies qui ont parfois été assimilés à des modes localisés au sens d'Anderson. Un point intéressant serait de savoir quel est l'impact du caractère vectoriel de la lumière sur ces modes observés dans l'approximation scalaire.

Le chapitre 2 de ce manuscrit présente le modèle théorique que nous allons utiliser afin de mener notre étude numérique sur les effets coopératifs et la localisation de la lumière. Nous dériverons dans un premier un modèle classique décrivant un ensemble de dipôles couplés entre eux par le biais du champ qu'ils émettent soumis à un champ incident. Nous nous servirons de ce modèle classique afin d'illustrer les différences fondamentale entre l'approximation scalaire et le modèle vectoriel pour la lumière. Nous dériverons ensuite l'opérateur qui est à la base de notre étude numérique : le Hamiltonien effectif d'interaction matière rayonnement et qui possède les mêmes termes de couplages entre les atomes que ceux que nous aurons dérivés de manière classique dans l'approche dipôles couplés. Nous effectuerons dans la fin de ce chapitre un état de l'art sur les travaux théoriques et expérimentaux, susceptibles de nous intéresser pour notre étude numérique, dans le cadre des effets coopératifs et des effets de localisation d'Anderson.

Le chapitre 3 sera consacré à l'étude numérique des valeurs propres et des états propres de du Hamiltonien effectif afin de comprendre si les effets de localisation de la lumière

sont liés aux effets coopératif type sous radiance ou sont plutôt dus à des interférences destructives liées au désordre dans quel cas on pourrait les rapprocher des modes localisés au sens d'Anderson. Nous effectuerons au cours de ce chapitre une comparaison systématique entre les résultats obtenus dans l'approximation scalaire pour la lumière et ceux obtenus lorsque son caractère vectoriel est pris en compte. Nous terminerons ce chapitre par l'étude du spectre de la partie imaginaire de ce Hamiltonien effectif, que l'on peut relier au taux d'émission de l'excitation hors du système et qui peut contenir de informations intéressantes sur les effets liés à la coopérativité ou ceux liés au désordre.

Le chapitre 4 présente l'étude expérimentale des effets coopératifs en reprenant tout d'abord la procédure élaborée dans la référence [28] de manière systématique. Nous montrons que l'approximation Timed Dicke adaptée à notre modèle de dipôles couplés n'est valable que dans le régime de diffusions simple. Cependant nous observons également dans le régime de diffusion multiple une réduction drastique de la force appliquée au centre de masse du nuage mais nous ne sommes pas encore en mesure de relier cet effet à un processus incohérent décrit par un modèle de type Equation de Transfert Radiatif ou un processus cohérent. Afin de considérer cet effet de manière plus fine une nouvelle procédure expérimentale a été élaborée où l'épaisseur optique du nuage est maintenue constante et le désaccord du laser varie de manière à scanner la transition atomique. Enfin nous présenterons à la fin de ce chapitre l'élaboration d'un système de coupure rapide de faisceau laser afin d'exciter les états sousradiant et des les détecter par une expérience de fluorescence.

Chapitre 2

État de l'art sur la localisation de la lumière et dérivation du modèle.

Ce chapitre va servir de base à notre étude numérique portant sur la localisation de la lumière dans les nuages d'atomes froids. Dans un premier temps nous allons dériver de manière classique les potentiels d'interactions, que nous considérerons par la suite pour mener nos travaux, afin d'illustrer de manière simple les différences entre le cas où nous assimilons la lumière à une onde scalaire (cas scalaire), qui est bien sûr une situation non réelle concernant la lumière, et le cas où nous assimilons la lumière à une onde vectorielle. Dans le cas scalaire, les atomes sont assimilés à des diffuseurs ponctuels émettant l'onde de manière isotrope sous forme d'ondes sphériques alors que dans le cas vectoriel ils sont assimilés à des dipôles ponctuels émettant la lumière sous forme d'ondes dipolaires. Nous verrons également que l'on peut observer des effets de localisation (dans le sens où le photon reste un temps infini dans le système) dus à la coopérativité en considérant seulement deux particules.

Dans un deuxième temps nous dériverons le Hamiltonien effectif sur lequel nous nous baserons afin de considérer numériquement les états propres de la relaxation dans les modes du vides de N atomes à deux niveaux, couplés entre eux par le biais du champ associé à un photon unique. Nous discuterons des approximations faites afin d'obtenir ce Hamiltonien et des leurs conséquences sur la physique que nous étudions.

Enfin nous ferons un état de l'art succinct sur les matrices aléatoires et leurs applications dans différents domaines de la physique, notamment dans le cadre de la diffusion chaotique et de la localisation d'Anderson. Nous discuterons ensuite des différents travaux qui ont été réalisés sur la localisation de la lumière et les effets coopératifs dans des milieux désordonnés.

Il est important de souligner qu'à l'exception de la toute première section, nous négligerons dans les deux chapitres suivants l'influence d'un champ incident pilotant les dipôles et nous considérerons au plus une excitation (un atome excité ou un photon unique) dans

le nuage, nous restreignant ainsi à l'espace de Hilbert décrit par les états contenant au maximum une excitation. Une telle situation physique peut correspondre à un faisceau incident de très faible intensité, ou bien être mise en oeuvre en réalisant soit des mesures de coïncidences avec deux détecteurs [16] soit en utilisant le blocage de Rydberg par exemple [29, 30].

1 Approche classique.

L'interaction lumière-matière est un phénomène qui a été tout d'abord principalement étudié de manière classique depuis la fin du XIXème siècle lors de l'essor des théories sur l'électromagnétisme. Un des modèles les plus utilisé afin de décrire un atome, composé d'un noyau et d'un électron, interagissant avec un champ électrique est le modèle de Lorentz. Dans ce modèle, le système "atome + électron" est considéré comme globalement neutre et l'électron est supposé osciller atour de sa position d'équilibre avec une faible amplitude, comparée à la longueur du champ électromagnétique émis. Le but de cette section étant d'illustrer de manière classique des phénomènes tels que la sousradiance et la superradiance afin de comprendre leurs mécanismes simples en utilisant seulement deux dipôles.

1.1 Rayonnement d'un dipôle oscillant.

Dans cette partie, nous dérivons de manière classique les potentiels d'interactions entre les atomes, que nous allons utiliser par la suite dans notre approche hamiltonienne effective. Nous allons tout d'abord établir une approche générale à partir du modèle de Lorentz de l'électron élastiquement lié afin d'expliciter le champ rayonné par l'atome (champ source) sous forme d'une fonction de Green, dont l'expression à l'ordre 0 représentera la situation que nous nommons cas scalaire et nous expliciterons par la suite cette fonction dans le cas vectoriel. Les équations que nous dériverons servirons dans la deuxième partie étudiant l'influence du terme de champ proche dans la dynamique de N dipôles couplé. Il est utile d'expliciter une convention que je vais fréquemment utiliser en notant les objets (amplitude, champ, opérateur) vectoriels sous la forme $\mathbf{a} = \sum_{\alpha=x,y,z} a_\alpha \hat{u}_\alpha$ où $\hat{u}_\alpha$ est le vecteur unitaire selon la direction α.

Il est possible de décrire la réponse de N atomes, caractérisés chacun par une paire noyau (ion)-électron, soumis à un champ extérieur en se référant au modèle de Lorentz, qui assimile cette dynamique à celle d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés. L'équation du mouvement d'un tel système à la position $\mathbf{r}_i$ peut donc s'écrire :

$$\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{r}_i) + \omega_0^2 \mathbf{q}(\mathbf{r}_i) = -\frac{e}{m}\mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t) \tag{2.1}$$

où $\mathbf{q}$, quantifie le déplacement de l'électron par rapport à sa position d'équilibre, e et m sont respectivement sa charge et sa masse et $\omega_0 = ck_0$ est sa pulsation propre autour de la position d'équilibre en l'absence de force extérieure. Le terme de droite de cette équation correspond à la force extérieure appliquée au système reliée au champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ au point $\mathbf{r}_i$. Pour l'instant le vecteur décrivant la polarisation du champ incident est inclus

dans la définition de $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$. Afin d'adapter l'équation (2.1) à notre problème, nous allons rechercher des solutions oscillantes [31] telles que :

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}_i, t) = a\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}_i, t)e^{-i\omega t} \tag{2.2}$$

où a est relié à la taille du dipôle telle que $a = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$, $\boldsymbol{\beta} = \beta\hat{\mathbf{x}}'$ est une amplitude complexe qui sera reliée plus tard à l'amplitude du dipôle et $\hat{\mathbf{x}}'$ est le vecteur unitaire selon lequel le système oscille. L'hypothèse d'une solution oscillante nous permet de dériver une densité de charge telle que :

$$\rho(\mathbf{r}_i, \mathrm{t}) = \rho(\mathbf{r}_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} = -e\sum_i e^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{2.3}$$

qui peut être reliée simplement à une densité de courant oscillante :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_i, \mathrm{t}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} = -e\sum_i \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{r}_i, t)e^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{2.4}$$

Rappelons que la première des relations précédentes correspond à un champ scalaire et la seconde à un champ vectoriel. En utilisant les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{2.5}$$

et en résolvant l'équation $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ à partir des équations (2.5), ce qui nous fait utiliser le relation d'analyse vectorielle $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$ et le fait que le système "ion+électron" est globalement neutre ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$), il est possible d'obtenir une équation de propagation du champ en présence de sources telle que :

$$\left(\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\right) = \mu_0\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \tag{2.6}$$

Afin de modéliser proprement le rayonnement du système interagissant avec le champ incident, il faut séparer le terme de droite de l'équation (2.1) en une somme de deux termes : une onde plane modélisant le champ incident et un terme source modélisant le champ émis par l'atome tel que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\epsilon}_0 E_0 e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r} - i\omega t} + \mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t} \tag{2.7}$$

où E_0 est relié à l'amplitude du champ laser incident, $\boldsymbol{\epsilon}_0$ est sa polarisation, $\mathbf{k}$ est son vecteur d'onde tel que $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide et $\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}, t)$ est le champ émis par les dipôles.

En réinjectant les définitions posées aux équations (2.2) et (2.7) dans les équations (2.1) et (2.6) et en s'affranchissant des termes de dérivées temporelles d'ordres supérieures [31] on obtient le système d'équations fermé tel que :

$$-2i\omega a\dot{\boldsymbol{\beta}}_i - (\omega_0^2 - \omega^2)a\boldsymbol{\beta}_i = -\frac{e}{m}(\boldsymbol{\epsilon}_0 E_0 e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} + \mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}, t)) \tag{2.8}$$

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}_{(s)} = a\omega^2\mu_0 e\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\beta}_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{2.9}$$

Cas scalaire

La résolution de ce système dans le cas scalaire est assez simple et nous amène tout d'abord à substituer : $\boldsymbol{\beta}_i \rightarrow \hat{\epsilon}\beta_i$, $\boldsymbol{\epsilon}_L \rightarrow \hat{\epsilon}$ et $\mathbf{E}_{(s)} \rightarrow \hat{\epsilon}E_{(s)}$, ce qui nous permet de nous affranchir dans les expressions précédentes du vecteur unitaire $\hat{\epsilon}$, représentant d'une manière commune la polarisation du champ et l'orientation de dipôles. L'hypothèse faite que tous les dipôles et le champ oscillent selon le même axe de polarisation s'appelle *approximation scalaire* et constitue la différence principale entre les cas scalaire et vectoriel.

On reconnaît dans l'expression (2.9) une équation de Helmholtz pour le champ source :

$$(\nabla^2 + k^2)E_{(s)}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \tag{2.10}$$

il nous est donc utile d'introduire la fonction de Green retardée telle que :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{2.11}$$

afin d'expliciter le potentiel d'interaction lié au champ source, ce qui nous permet d'obtenir la relation :

$$E_{(s)}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{2.12}$$

En réinjectant ces définitions dans l'équation (2.9) on obtient au final une expression du champ source au point $\mathbf{r}$ telle que :

$$E_{(s)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{ae\mu_0\omega^2}{4\pi}\sum_j \beta_j \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}. \tag{2.13}$$

En réutilisant cette expression dans l'équation (2.8), on obtient une équation sur l'amplitude des dipôles, aux positions $\mathbf{r}_i$, dans le cas scalaire :

$$-2i\omega a\dot{\beta}_i = (\omega^2 - \omega_0^2)a\beta_i - \frac{e}{m}E_0 e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}_i} + \frac{e^2\mu_0\omega^2 a}{4\pi m}\sum_j \beta_j(t)\frac{e^{ik|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \tag{2.14}$$

En faisant l'approximation d'une diffusion quasi résonnante ($\omega \simeq \omega_0$) on peut simplifier l'expression précédente en introduisant le désaccord $\Delta_0 = \omega - \omega_0$, la pulsation de Rabi $\Omega_0 = aeE_0/\hbar$ ce qui nous permet de réécrire l'équation (2.14) sous la forme :

$$\dot{\beta}_i = \left(i\Delta_0 - \frac{\Gamma_0}{2}\right)\beta_i - i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}_i} + i\frac{\Gamma_0}{2}\sum_{j\neq i}\beta_j\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}}{k_0|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \tag{2.15}$$

avec

$$\Gamma_0 = \frac{\omega_0^2\mu_0 e^2}{4\pi mc} = \frac{k_0^3 e^2 a^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \tag{2.16}$$

On reconnaît là dans l'expression du taux d'émission Γ_0 (2.16) la largeur naturelle de l'état excité [1] pour un atome à deux niveaux si l'on substitue $ea = d$ où d est l'élément dipôle

1. La largeur naturelle de l'état excité Γ_0, apparaissant dans le premier terme de l'équation (2.15), est obtenue dans notre calcul grâce à la séparation des termes $i = j$ et des termes $i \neq j$ tout en négligeant les parties réelles associées aux termes $i = j$. Cependant cette largeur naturelle est la même que celle associée au terme d'amortissement $\Gamma_0\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ du modèle de Lorentz de l'oscillateur harmonique amortis pour un atome unique à condition de négliger les termes en $i = j$ de la fonction de Green (eq. (2.12)).

Il faut également noter que dans le cas d'un atome unique, ce type d'approximation revient à ne pas considérer les effets de réaction de rayonnement (self reaction) où le dipôle interagit avec le champ qu'il a lui-même rayonné [32]. Cette remarque est également valable pour le calcul concernant le cas vectoriel.

réduit associé à la transition entre l'état fondamental $|g\rangle$ et l'état excité $|e\rangle$. Il faut aussi remarquer que la notation a été allégée rendant la dépendance temporelle des amplitudes des dipôles dans les équations (2.14) et (2.15) implicite ($\beta_i \equiv \beta_i(t)$).

L'équation (2.15) montre que l'amplitude du dipôle i est à la fois affectée par le champ laser incident mais aussi par le rayonnement des $N-1$ dipôles, caractérisé dans le cas scalaire par des ondes sphérique, qui décroissent donc en $1/r$ de manière isotrope.

Cas vectoriel

Après avoir obtenu une équation d'évolution sur l'amplitude des dipôles dans le cas scalaire nous allons désormais expliciter une équation similaire pour le cas vectoriel. Ce calcul, basé sur le formalisme de la fonction de Green Dyadique, est inspiré de la référence [33] dans la manière d'expliciter la fonction de Green dans le cas vectoriel en fonction de celle obtenue dans le cas scalaire.

Afin d'expliciter le potentiel d'interaction dans le cas vectoriel il est utile d'exprimer le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ dans la jauge de Lorentz tel que $\Box.\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = 0$ où $\Box = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \triangle\right)$ est le d'Alembertien. La solution du potentiel vecteur peut s'écrire dans cette jauge :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dt' \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t' + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} - t\right) \tag{2.17}$$

où $\delta\left(t' + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} - t\right)$ est le potentiel retardé aussi appelé potentiel de Lienard-Wiechert. Le choix de l'utilisation du potentiel retardé est motivé par la recherche de solutions causales tout comme dans l'utilisation de la fonction de Green retardée à l'équation (2.12). La dépendance temporelle sinusoïdale supposée pour la densité de courant (eq. 2.4) nous permet de réécrire l'équation précédente comme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.18}$$

A ce stade on peut remarquer que la solution du potentiel vecteur peut s'écrire sous la forme d'une fonction de Green comme nous l'avons définie à la section précédente telle que :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int d\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{2.19}$$

En repartant de l'équation de propagation du champ électrique en présence de source (eq. (2.6)) et en réutilisant la décomposition posée à l'équation (2.7), on peut obtenir une équation vectorielle pour le champ source telle :

$$(\nabla^2 - k^2)\mathbf{E}_{(s)} = i\omega\mu_0\mathbf{j} \tag{2.20}$$

Une telle équation, apparemment complexe, peut être résolue en appliquant la méthode de la résolvante et le fait que la densité de courant peut être décomposée selon les trois directions de la base cartésienne. On peut par exemple l'expliciter selon la composante x en posant :

$$(\nabla^2 - k^2)\mathbf{G}_x = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\hat{u}_x \tag{2.21}$$

et procéder de même selon les autre composantes y et z. On peut donc exprimer une relation générale en utilisant les matrices de Green dyadique telle que :

$$(\nabla^2 - k^2)\overleftrightarrow{\mathbf{G}} = \overleftrightarrow{\mathbf{I}}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{2.22}$$

Avec $\mathbf{I}$ le tenseur unitaire. Il est à noter que $\mathbf{G}$ est un tenseur dont la première colonne correspond à la projection de moments dipolaires selon l'axe x, la deuxième colonne selon l'axe y et la troisième selon l'axe z. On peut donc exprimer une solution particulière à l'équation (2.20) telle que :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}'\mathbf{f}(\mathbf{r}')\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.23}$$

Afin d'obtenir une solution de l'équation (2.23) à partir de la fonction de green scalaire, il faut se rappeler de la relation reliant le champ électrique au potentiel vecteur telle que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla\phi(\mathbf{r}) \tag{2.24}$$

où $\phi(\mathbf{r})$ est le potentiel scalaire et d'énoncer la condition de Lorentz telle que :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0\epsilon_0\phi(\mathbf{r}) \tag{2.25}$$

ce qui nous permet de nous affranchir directement de $\phi(\mathbf{r})$. En réinjectant l'équation (2.25) dans l'équation (2.24) ce qui nous permet d'obtenir une relation entre le champ source et le potentiel vecteur telle que :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}) = i\omega\left(1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)\mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{2.26}$$

En prenant la définition de la densité de courant oscillante $\mathbf{j}$ selon une composante de la base cartésienne et en se servant de l'équation (2.19) on peut obtenir la relation :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (i\omega)^{-1}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\hat{u}_x, \tag{2.27}$$

et en injectant cette dernière relation dans l'équation (2.26), on obtient une relation reliant la fonction de Green dyadique à la fonction de Green scalaire :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2}\overrightarrow{\nabla}\overleftarrow{\nabla}\right)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tag{2.28}$$

où l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ est exprimé dans la base cartésienne. En suivant la référence [33] est donc possible de réécrire la fonction de Green dyadique dans cette base telle que :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = k\frac{e^{ikr}}{4\pi kr}\left[\left(1 + \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}\right)\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \left(-1 - \frac{3i}{kr} + \frac{3}{(kr)^2}\right)\frac{\mathbf{rr}}{r^2}\right] \tag{2.29}$$

où $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Après avoir explicité la matrice de Green dyadique dans la base cartésienne, on réinjecte sa définition dans l'équation (2.9) ce qui nous permet d'obtenir une expression vectorielle du champ source au point $\mathbf{r}$ exprimée dans la base cartésienne telle que :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}) = -\frac{k\mu_0\omega^2 ea}{4\pi}\sum_j \frac{e^{ikr_j}}{kr_j}\left[\left(1 + \frac{i}{kr_j} - \frac{1}{(kr_j)^2}\right)\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \left(-1 - \frac{3i}{kr_j} + \frac{3}{(kr_j)^2}\right)\frac{\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j}{r_j^2}\right]\boldsymbol{\beta}_j. \tag{2.30}$$

où $r_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$. En réinjectant cette expression dans l'équation (2.8) et en faisant l'approximation d'une diffusion quasi résonante on peut obtenir l'équation d'évolution de l'amplitude du dipôle i selon la direction α telle que :

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_{i,\alpha} = &(i\Delta_0 - \frac{\Gamma_0}{2})\beta_{i,\alpha} - i\epsilon_{0,\alpha}\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}_i} \\ &+ i\frac{\Gamma_0}{2}\sum_{j\neq i}\sum_{\alpha'}\beta_{j,\alpha'}\frac{3}{2}\frac{e^{ik_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}}\left[\left(1 + \frac{i}{k_0 r_{ij}} - \frac{1}{(k_0 r_{ij})^2}\right)\delta_{\alpha\alpha'}\right. \\ &\left.+ \left(-1 - \frac{3i}{k_0 r_{ij}} + \frac{3}{(k_0 r_{ij})^2}\right)\frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2}\right]\end{aligned} \tag{2.31}$$

où on a définit la largeur naturelle de l'état excité Γ pour une transition $J_g = 0 \to J_e = 1$ telle que :

$$\Gamma_0 = \frac{k_0^3 e^2 a^2}{3\pi\epsilon_0\hbar} \tag{2.32}$$

et à nouveau nous avons rendu la dépendance temporelle de l'amplitude du dipôle implicite ($\beta_{i,\alpha} \equiv \beta_{i,\alpha}(t)$).

Il est à noter que l'équation sur les dipôles obtenue dans le cas vectoriel est singulièrement différente de celle obtenue dans le cas scalaire. Tout d'abord, pour décrire la dynamique d'un milieu contenant N dipôles il nous faudra résoudre un système de N équations couplées dans le cas scalaire contre un système de $3N$ équations couplées dans le cas vectoriel. Ensuite la différence majeure vient de la forme de l'expression du potentiel d'interaction entre les dipôles liée à l'expression du champ source. En effet contrairement au champ source dans le cas scalaire, qui décroît de manière isotrope en $1/r$ quelle que soit la distance à laquelle l'on se place du dipôle, dans le cas vectoriel il est utile de distinguer trois zones correspondantes à la distance r à laquelle on se situe du dipôle par rapport à sa taille a. Ces trois zones sont :

- La zone de champ proche réactif $a \ll r \ll \lambda$
- La zone de champ proche radiatif $a \ll r \sim \lambda$
- La zone de champ lointain $a \ll \lambda \ll r$

Dans la zone de champ proche réactif le facteur exponentiel peut être approximé par l'unité ($\lim_{r\to 0} e^{ikr} = 1$) et le champ source peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}) = \frac{k\omega^2 ea}{4\pi\epsilon_0\hbar}\sum_j \frac{1}{(kr_j)^3}\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{3\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j}{r_j^2}\right]\boldsymbol{\beta}_j \tag{2.33}$$

On reconnaît là l'expression du dipôle statique. Dans la zone de champ proche radiatif ce sont les termes en $1/r^2$ qui dominent l'équation (2.30) ce qui nous permet de réécrire l'expression du champ source telle que :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}) = \frac{k\mu_0\omega^2 ea}{4\pi}\sum_j \frac{ie^{ikr_j}}{(kr_j)^2}\left[-\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \frac{3\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j}{r_j^2}\right]\boldsymbol{\beta}_j \tag{2.34}$$

et dans la zone de champ lointains ce sont les termes en $1/r$ qui dominent nous permettant de réécrire le champ source sous la forme :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}) = \frac{k\mu_0\omega^2 ea}{4\pi}\sum_j \frac{e^{ikr_j}}{kr_j}\left[-\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j}{r_j^2}\right]\boldsymbol{\beta}_j \tag{2.35}$$

Il est à noter que le champ dans la zone de champ proche radiatif est en opposition de phase avec les champs dans les deux autres zones. En regardant ces trois expressions il est aisé de remarquer que même dans la limite du champ lointains ($r \gg \lambda$) l'anisotropie du champ rayonné par les dipôles va amener des corrections non négligeables selon l'orientation des paires de dipôles par rapport à l'orientation des dipôles. En plus de cela lorsque l'on considérera des distances relatives entre les dipôles de l'ordre de la longueur d'onde ($r \leqslant \lambda$) on s'attendra à observer des différences singulières entre les cas scalaire et vectoriel, ce qui nous laisse présager que les différences fondamentales entre les deux cas auront lieux lorsque l'on considérera de système denses.

En considérant le cas simple où un unique dipôle se situe à l'origine en plaçant le point d'observation à une distance r de ce dernier et que son moment dipolaire est orienté selon l'axe $\hat{z}$ (parallèle à la polarisation du faisceau incident qui lui se propage selon l'axe $\hat{x}$), on peut décomposer le champ source selon deux directions [2] en coordonnées sphériques ($\hat{r}$,$\hat{\theta}$) tel que :

$$E_r = \frac{k\mu_0\omega^2 ea}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{kr}\left[-\frac{2i}{(kr)} + \frac{2}{(kr)^2}\right] \tag{2.36}$$

$$E_\theta = \frac{k\mu_0\omega^2 ea}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{kr}\left[1 + \frac{i}{(kr)} - \frac{1}{(kr)^2}\right] \tag{2.37}$$

où E_r est le champ électrique selon la direction longitudinale et E_θ selon la direction transverse. En regardant les comportements limites de ces deux expressions, on remarque qu'elles décroissent toute deux en $1/r^3$ pour une distance r inférieure à λ. Par contre lorsque l'on considère des distances supérieures à λ on remarque que le champ longitudinal décroît en $1/r^2$ alors que le champ transverse décroît en $1/r$. On constate donc qu'à des distances inférieures ou égales à la longueur d'onde ($r \leq \lambda$) l'interaction entre deux dipôles se fera principalement via le champ longitudinal on parle dans ce cas d'interaction réactive alors qu'à des distances supérieures ou égales à la longueur elle se fera par le biais du champ transverse on parle alors d'interaction radiative. Ceci constitue une différence majeure avec le cas scalaire, qui ne considère que des interactions radiatives entre les dipôles quelle que soit la distance qui les sépare.

1.2 Diagramme de rayonnement et section efficace.

Cette partie va nous permettre de rappeler certains concepts utilisés fréquemment en physique mésoscopique. Dans un premier temps nous allons nous intéresser à l'intensité diffusée par un atome puis un ensemble d'atomes dans un champ incident dans les cas scalaire et vectoriel. Cette étape nous permettra ensuite de calculer la puissance rayonnée par un atome dans les deux cas nous permettant ainsi de calculer la section efficace de diffusion. Nous terminerons ensuite par un bilan énergétique nous permettant d'illustrer de manière simple les effets cohérents tels que la superradiance et la sousradiance.

1.2.a *Diagramme de rayonnement pour un ensemble de N atomes.*

Après avoir dérivé les équations d'évolution des amplitudes des dipôles dans les cas scalaire et vectoriel et discuté des différences fondamentales entre les deux modèles, on peut

2. La symétrie du problème nous donne une invariance par rotation selon l'axe $\hat{\phi}$, autour de l'axe $\hat{x}'$ selon lequel est orienté le moment dipolaire.

s'intéresser au diagramme de rayonnement dans les deux cas afin de voir les différences apparaissant entre les deux modèles. On peut relier l'intensité rayonnée, qui est égale à la moyenne temporelle du vecteur de Poynting, à l'expression du champ source $E_{(s)}$ par la relation :

$$I(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\frac{\langle E^2_{(s)}(\mathbf{r},t)\rangle}{\mu_0 c} \tag{2.38}$$

Dans le cas scalaire, on reprend l'expression du champ source obtenue à l'équation (2.13) en se plaçant en champ lointains, ce qui nous permet de poser $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| \approx r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_j/r$. On peut donc réécrire l'expression du champ source telle que :

$$E_{(s)}(\mathbf{r},t) = -\frac{ae\mu_0\omega^2}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_j \beta_j(t)e^{-i\mathbf{k}_s.\mathbf{r}_j} \tag{2.39}$$

qui s'interprète simplement comme étant la somme au point $\mathbf{r}$ des ondes sphériques émises par les dipôles β_i aux point $\mathbf{r}$. Ici le vecteur $\mathbf{k}_s$ est selon la direction d'observation tel que $\mathbf{k}_s = k\mathbf{r}/r$. En réinjectant cette expression dans l'équation (2.38) on peut exprimer l'intensité au point $\mathbf{r}$ émise par un système contenant N dipôles telle que :

$$I(\mathbf{r},t) = \frac{a^2e^2\mu_0\omega^4}{32\pi^2cr^2}\sum_i\sum_j \beta_i(t)\beta_j^*(t)e^{i\mathbf{k}_s\cdot|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \tag{2.40}$$

On peut donc relier l'intensité au point $\mathbf{r}$ à une somme d'ondes planes, qui est l'approximation en champ lointains des ondes sphériques, émise par les dipôles j aux positions $\mathbf{r}_j$, arrivant avec une différence de marche proportionnelle à la distance relative r_{ij} entre les dipôles i et j.

Afin de dériver l'intensité diffusée dans le cas vectoriel il faut repartir de l'expression du champ source $E_{(s)}$ que l'on a obtenue à la section précédente :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}) = -\frac{k\mu_0\omega^2 ea}{4\pi}\sum_j \frac{e^{ikr_j}}{kr_j}\left[\left(1+\frac{i}{kr_j}-\frac{1}{(kr_j)^2}\right)\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \left(-1-\frac{3i}{kr_j}-\frac{3}{(kr_j)^2}\right)\frac{\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j}{r_j^2}\right]\boldsymbol{\beta}_j, \tag{2.41}$$

où $r_j = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|$, et de faire l'approximation en champ lointains en faisant l'hypothèse que l'intensité est considérée à un point $\mathbf{r}$ loin du nuage et de ne retenir que les termes liés à la partie propagative du champ source et de réécrire l'expression précédente comme :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r}) = \frac{k\mu_0\omega^2 ea}{4\pi}\sum_j \frac{e^{ikr_j}}{kr_j}\left[-\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j}{r_j^2}\right]\boldsymbol{\beta}_j \tag{2.42}$$

Il faut tout d'abord remarquer que dans les zones de champ proches (réactive et radiative) la distance r à laquelle l'on se place du dipôle étant inférieure ou de l'ordre de la longueur d'onde λ, on peut remplacer le facteur exponentiel dans les équations (2.33) et (2.34) par l'unité ce qui nous permet de voir que le champ ne se propage pas dans ce deux zone. En effet hormis une dépendance temporelle sinusoïdale, on peut considérer que le champ est statique spatialement. On peut donc ne retenir que la partie du champ source correspondant au champ lointains telle que :

$$\mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0\omega^2 ea}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_j e^{-i\mathbf{k}_s.\mathbf{r}_j}\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j}{r_j^2}\right]\boldsymbol{\beta}_j(t) \tag{2.43}$$

En utilisant à nouveaux l'approximation de Fraunhofer ($|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| \approx r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_j/r$)et la définition posée à l'équation (2.38) on obtient une expression pour l'intensité rayonnée dans le cas vectoriel telle que[3] :

$$\mathbf{I}(\mathbf{r},t) = \frac{a^2e^2\mu_0\omega^4}{32\pi^2c^2r^2}\sum_{i,j}\boldsymbol{\beta}_i(t)\boldsymbol{\beta}_j^*(t)e^{i\mathbf{k}_s\cdot|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \left(\frac{\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j}{r_j^2}\right)\right]^2 \tag{2.45}$$

Il donc possible à partir de cette expression d'exprimer une intensité relié aux projections des moments dipolaires selon les directions α et α' telle que :

$$I(\mathbf{r}_{\alpha,\alpha'},t) = \frac{a^2e^2\mu_0\omega^4}{32\pi^2c^2r^2}\sum_{i,j}\sum_{\alpha,\alpha'}\beta_{i,\alpha}(t)\beta_{j,\alpha'}^*(t)e^{i\mathbf{k}_s\cdot|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}\left[\delta_{\alpha\alpha'} - \frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2}\right] \tag{2.46}$$

Il est important de noter ici que dans l'expression précédente les composantes α et α' concernent le vecteur $\mathbf{r}$ selon la direction d'observation.

1.2.b *Section efficace de diffusion.*

A partir des expressions du champ source et de l'intensité rayonnée dans les cas scalaire et vectoriel, il est possible d'exprimer les sections efficaces de diffusion σ_0 à résonance afin de voir les différences existantes entre les deux cas. Pour cela il est utile de rappeler l'expression du champ total au point $\mathbf{r}$, obtenue au début de ce manuscrit, telle que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\epsilon}_0E_0e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}-i\omega t} + \mathbf{E}_{(s)}(\mathbf{r},t)e^{-i\omega t} \tag{2.47}$$

Pour le cas scalaire, il faut se servir de l'expression du champ source en champ lointain obtenu à la section précédente (eq. (2.39)) et réécrire son préfacteur pour obtenir :

$$E_{(s)}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar\Gamma_0}{2d}\frac{e^{ikr}}{kr}\sum_j\beta_j(t)e^{-i\mathbf{k}_s.\mathbf{r}_j}, \tag{2.48}$$

ce qui nous permet de réécrire l'équation (2.47) dans le cas scalaire sous la forme :

$$E(\mathbf{r},t) = E_0\left(e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}-i\omega t} - \frac{e^{ikr}}{kr}f(\mathbf{k}_s)e^{-i\omega t}\right), \tag{2.49}$$

avec $f(\mathbf{k})$ que l'on peut assimiler à une amplitude de diffusion telle que :

$$f(\mathbf{k}) = \frac{\Gamma_0}{\Omega_0}\sum_j\beta_j(t)e^{-i\mathbf{k}_s.\mathbf{r}_j}. \tag{2.50}$$

Dans le cas d'un atome unique, l'expression précédente devient $f(\mathbf{k}_s) = \dfrac{\Gamma_0}{\Omega_0}$ ce qui nous permet d'exprimer l'intensité diffusée dans une direction à une grande distance du nuage telle que :

$$I_s = I_0\frac{|f(\mathbf{k}_s)|^2}{(kr)^2}, \tag{2.51}$$

3. Afin d'obtenir cette expression nous nous somme servis des propriétés de projecteur pour le terme $\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \left(\dfrac{\mathbf{RR}}{R^2}\right)$ en utilisant :

$$\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \left(\frac{\mathbf{RR}}{R^2}\right)\right]^2 = \left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \left(\frac{\mathbf{rr}}{r^2}\right)\right] \tag{2.44}$$

En effet ce terme est parfois appelé dans la littérature '*projecteur transverse*' [34].

et d'obtenir la section efficace dans le cas scalaire en intégrant sur tout l'espace :

$$\sigma_0^{(s)} = \frac{1}{k^2}\int \mathrm{d}\mathbf{k}|f(\mathbf{k}_s)|^2 = \frac{\lambda^2}{\pi}. \tag{2.52}$$

La procédure pour obtenir la section efficace dans le cas vectoriel est singulièrement similaire à l'exception qu'il faut tenir compte du projecteur transverse $\left(\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{RR}}{R^2}\right)$. On peut donc réécrire l'amplitude de diffusion comme :

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}) = \frac{\Gamma_0}{\Omega_0}\sum_j \boldsymbol{\beta}_j(t)e^{-i\mathbf{k}_s.\mathbf{r}_j}\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{RR}}{R^2}\right]. \tag{2.53}$$

Dans le cas d'un atome unique placé à l'origine, l'intégrale angulaire de l'expression précédente donne pour les éléments diagonaux de $\mathbf{f}(\mathbf{k})$:

$$\sigma_0^{(v)} = \frac{1}{k^2}\int \mathrm{d}\mathbf{k}|f(\mathbf{k}_s)|^2 = \frac{3\lambda^2}{2\pi} = \frac{3}{2}\sigma_0^{(s)}. \tag{2.54}$$

On remarque donc que même en champ lointain avec une seule particule, la prise en compte du caractère vectoriel de la lumière amène à des différences quantitatives entre les cas scalaire et vectoriel dans les définitions de quantités qui vont nous être utiles dans la suite de ce manuscrit comme la largeur naturelle de l'état excité Γ_0 ou bien encore la section efficace de diffusion σ_0, qui va nous servir par la suite à calculer le libre parcours moyen de transport l ou bien encore le nombre de Ioffe-Regel $k_0 l$ (nous définirons ces deux quantité plus tard dans le manuscrit).

2 Modèle.

Dans cette section nous décrivons le système et le Hamiltonien que nous utilisons afin d'étudier la localisation du photon dans un nuage d'atomes froids. Cette approche, reposant essentiellement sur les potentiels d'interactions dérivés à la section précédente dans les cas scalaire et vectoriel peut paraître similaire à d'autre études considérant un système de N dipôles couplés [35], [22], ou encore considérant les propriétés statistiques des pôles de la matrice de Green [27] [26]. Mais il faut souligner, contrairement à la section précédente, que nous ne considérerons pas l'influence d'un champ incident, qui pilote les dipôles, ce qui nécessite avant tout une certaine prudence car la présence d'un faisceau incident sur le milieu crée une brisure de symétrie (axe privilégié selon le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ du champ laser) qui peut jouer un rôle majeur dans la réponse physique de ce genre de systèmes. Cependant, et c'est un des messages principaux de ce chapitre, au même titre que d'autres approches utilisant des Hamiltonien effectif comme par exemple dans le contexte de la localisation d'Anderson [36][37], l'étude des états propres de la relaxation dans les modes du vide de N dipôles couplés peut nous donner des indications sur les propriétés de transport du système.

2.1 Modèle de l'atome à deux niveaux.

Afin de modéliser la transition atomique nous considérons une transition $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$, décrite par un état fondamental $|g_i\rangle$ et un état excité, composé de trois sous niveaux Zeeman $|e_i^\alpha\rangle$, α étant la composante du sous niveau exprimée dans la base cartésienne telle que $\alpha = x, y, z$ et l'énergie de transition entre l'état fondamental et l'état excité est $\hbar\omega_0$. Il est évident que les calculs concernant une transition $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$ sont beaucoup plus simples que ceux concernant les atomes alcalins (où par exemple la transition cyclante du Rubidium 87 est une $F_g = 2 \rightarrow F_e = 3$) et dont la structure interne est bien plus complexe. Plusieurs fois par le passé il a été vérifié que cette structure interne pouvait avoir une influence non négligeable notamment sur des effets de localisation faible telle que la rétrodiffusion cohérente [38],[39] ou encore dans l'étude de la diffusion multiple de la lumière dans un nuage d'atome froids [40]. Dans l'étude de ces phénomènes physiques, il a été montré qu'une structure interne complexe des diffuseurs pouvait être une source de décohérence menant à la destruction de ces effets. En parallèle, certaines théories ont été élaborées afin de modéliser la diffusion multiple de photons par une transition dipolaire ayant une dégénérescence ou encore une structure hyperfine arbitraires [41][42]. Cependant nous pensons que la simplicité de l'algèbre liée à une transition $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$ permet de mettre en évidence des effets liés au caractère vectoriel de la lumière sans pour autant rajouter trop de complexité aux calculs.

Enfin il est utile d'expliciter l'état de polarisation de l'état excité $|e_i^\alpha\rangle$ car c'est là où réside une bonne partie de la subtilité contenue dans l'approche vectorielle. En effet la notation utilisée pour désigner l'état excité $|e_i^\alpha\rangle$ est en réalité une notation condensée qui peut se réécrire $|e_i, m_\alpha\rangle$ avec $\alpha = \pm 1, 0$ si l'on considère un problème dans la base où l'opérateur spin de l'atome est diagonal ou $\alpha = x, y, z$ si l'on considère un problème dans la base cartésienne dans laquelle les opérateurs spins des atomes ne sont pas forcément diagonaux. On peut donc poser arbitrairement $|e_i^z\rangle = |e_i, m_z = 0\rangle$ et composer une base, connue communément sous le nom de base des chimistes telle que [43] :

$$\begin{cases} |e_i^z\rangle = |e_i, m_z = 0\rangle \\ |e_i^x\rangle = |e_i, m_x = 0\rangle = \dfrac{|e_i, m_z = -1\rangle - |e_i, m_z = +1\rangle}{\sqrt{2}} \\ |e_i^y\rangle = |e_i, m_y = 0\rangle = i\dfrac{|e_i, m_z = -1\rangle + |e_i, m_z = +1\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases} \tag{2.55}$$

On remarque donc que l'état $|e_i^\alpha\rangle$ est l'état propre correspondant à la valeur propre 0 lorsqu'on lui applique l'opérateur $\mathbf{J}_\alpha$.

2.2 Description du système.

La géométrie utilisée, afin de modéliser le nuage d'atomes froids est un cube de taille exprimée en unité d'inverse du nombre d'onde $k_0 L$, k_0 étant le nombre d'onde associé à la transition atomique. Cette géométrie particulière ne correspond évidemment pas à une situation expérimentale réelle, où la répartition des atomes suit une distribution gaussienne pour un nuage dilué ou parabolique pour un nuage comprimé dans un piège dipolaire désaccordé dans le rouge. Cependant la situation d'un cube se rapproche de celle d'une couche d'atome (slab), qui est une géométrie souvent utilisée dans les cas d'école.

Il faut cependant souligner que la géométrie du système que nous considérons peut avoir un impact sur les phénomènes physiques que nous considérons. En effet dans le cadre de l'étude de la localisation d'Anderson dans des milieux ouverts[26], la manière dont sont

répartis les sites vis à vis de la frontière du milieu (qui représente la zone par laquelle l'excitation sort du système) va avoir un impact sur certains comportements des taux de décroissance des modes notamment dans le régime de diffusion multiple [44]. De même des calculs concernant l'émission coopérative pour un ensemble d'atomes dans une géométrie donnée montrent une correction quantitative liée à la géométrie du système [45]. Enfin, bien que ce ne soit pas le sujet principal de notre étude et que nous le développerons peu au cours de ce manuscrit, il a été montré que le comportement de déplacement de Lamb collectif était affecté de manière qualitative par la géométrie du système [46] tout comme le taux d'émission collectif du système dans certains cas bien précis en présence d'un champ incident.

2.3 Hamiltonien d'interaction matière-rayonnement.

2.3.a *Hamiltonien d'origine et obtention du Hamiltonien en jauge (D.E).*

Au cours de cette étude sur les états propres de la relaxation de N dipôles dans les modes du vide, nous considérerons principalement les valeurs propres et les états propres d'un Hamiltonien effectif modélisant l'interaction dipolaire entre atomes. Bien que cet opérateur non hermitien soit dérivé du Hamiltonien d'interaction matière-rayonnement exprimé en jauge $(D.E)$, bien connu et couramment utilisé, il est cependant utile de rappeler son origine et les approximations qui ont été faites afin d'obtenir son expression dans cette jauge. Initialement le Hamiltonien matière-rayonnement est exprimé dans la jauge $P.A$ [43] tel que :

$$H = \sum_i \sum_\alpha \frac{1}{m_i}[\mathbf{P}_{i,\alpha} - q_{i,\alpha}\mathbf{A}(\mathbf{r}_{i,\alpha})]^2 + V_{Coul} + H_R \tag{2.56}$$

ici $\alpha = x, y, z$ représente la composante dans la base cartésienne, m est la masse de la particule (nous considérons que la distribution de masse des particules est ponctuelle et identique pour toutes les particules), $\mathbf{P}_i$ est l'opérateur impulsion de la particule i, $\mathbf{A}(\mathbf{r}_{i,\alpha})$ est l'opérateur correspondant au potentiel vecteur à la position $\mathbf{r}_{i,\alpha}$ et $q_{i,\alpha}$ est la charge de la particule i. Il est à préciser que les opérateurs $\mathbf{r}_{i,\alpha}$ et $\mathbf{P}_{i,\alpha}$ représentent la position et l'impulsion du centre de masse de la particule i auxquels on a ajouté une correction locale $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{p}'$, qui peut être décomposée dans la base cartésienne telle que $\mathbf{r}_{\alpha,i} = \mathbf{r}_{cm,i} + \mathbf{r}'_{\alpha,i}$ et $\mathbf{P}_{\alpha,i} = \mathbf{p}_{cm,i} + \mathbf{p}'_{\alpha,i}$ avec $\mathbf{r}_{cm,i}$ et $\mathbf{p}_{cm,i}$ les positions et les impulsions respectives des centres de masses de la particule i. Le deuxième terme de cette expression est le potentiel d'interaction coulombienne tel que :

$$V^{(Coul)} = \sum_i \sum_\alpha \left[\epsilon_{i,\alpha}^{(self)} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{j\neq i} \sum_{\alpha,\alpha'} \frac{q_{i,\alpha} q_{j,\alpha'}}{|\mathbf{r}_{i,\alpha} - \mathbf{r}_{j,\alpha'}|} \right] \tag{2.57}$$

où ϵ_{self} représente l'énergie propre Coulombienne d'un seul atome, qui diverge à moins que l'on introduise une fréquence de coupure de l'ordre de l'inverse du rayon de Bohr, et le second terme de cette expression correspond à l'interaction coulombienne entre deux atomes. Il faut aussi remarquer que cette expression est associée à un champ longitudinal. Le troisième terme de l'équation (2.56), associé quant à lui à un champ transverse, dérive directement des équations de Maxwell-Lorentz et de la seconde quantification du champ

et est exprimé tel que :

$$H_R = \epsilon_0 \int d\mathbf{r}^3(\mathbf{E}_\perp^2(\mathbf{r}) + c^2\mathbf{B}^2(\mathbf{r})) = \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}^\dagger a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} \tag{2.58}$$

où $a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}^\dagger$ et $a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}$ sont les opérateurs créations et annihilation d'un photon de polarisation $\hat{\varepsilon}$ et de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ tel que $k = \omega_k/c$, $\mathbf{E}_\perp^2(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ électrique transverse au point $\mathbf{r}$ et $\mathbf{B}$ est le champ magnétique à ce même point. Il est à noter que l'énergie du vide électromagnétique, correspondant à l'énergie propre de l'état de Fock décrivant 0 photons, a été translatée telle que $\langle 0|H_R|0\rangle = 0$ au lieu de $\langle 0|H_R|0\rangle = \hbar\omega_k/2$.

Sachant que nous considérons des diffuseurs ponctuels, c'est à dire que l'étalement de leur fonction d'onde atomique est de l'ordre du rayon de Bohr a_0 ou de l'angström au maximum, est que les longueur d'onde que l'on considère son de l'ordre de quelques centaines de nanomètres, on peut appliquer à l'équation (2.57) l'approximation des grandes longueur d'ondes ce qui nous permet de réduire l'interaction coulombienne entre l'atome i et j à un couplage dipôle-dipôle telle que :

$$V_{Coul}^{i,j} = V_{dip}^{i,j} + \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{D}_i.\mathbf{D}_j\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \tag{2.59}$$

où l'opérateur dipôle $\mathbf{D}_i$ de l'atome i est définit tel que $\mathbf{D}_i = \sum_\alpha q_i(\mathbf{r}_{\alpha,i} - \mathbf{r}_i)$ et $V_{dip}^{i,j}$ l'interaction dipolaire statique entre l'atome i et j. Il est à noter que j'ai incorporé l'orientation α, exprimée dans la base cartésienne, à la définition de $\mathbf{D}_i$ afin d'alléger temporairement la notation dans les calculs qui vont suivre.

L'utilisation de l'approximation, qui nous permet d'obtenir l'équation (2.59), nécessite cependant quelques précautions car elle implique que les variations spatiales du champ sont négligeables à l'échelle de la taille du dipôle, qui est l'atome dans le cas que nous considérons. Sachant que notre étude porte sur des transitions dans le domaine du visible (la transition ${}^1S_0 \rightarrow {}^1P_1$ du Strontium d'une manière théorique ou encore la transition ${}^5S_{1/2} \rightarrow {}^5P_{3/2}$ pour le Rubidium), qui sont de l'ordre de quelques centaines de nanomètres et que la taille de diffuseur que nous considérons est de l'ordre de l'angström ($10^{-10}m$) cette approximation est valide. Dans le cas contraire, et c'est ce qui est considéré afin d'éviter la divergence de l'énergie coulombienne propre $\epsilon^{(self)}$, il faut considérer une fréquence de coupure ω_C de l'ordre de l'inverse du rayon de Bohr a_0 telle que $\omega_C = c2\pi/a_0$. Il faut aussi remarquer qu'en faisant cette approximation nous négligeons toutes les corrections relativistes liées aux très haute énergies (dont la fréquence est bien supérieure à ω_C) qui sont aussi impliquées dans la divergence du terme $\varepsilon_{i,self}$.

Ayant fait cette approximation en explicitant l'opérateur dipôle, on peut appliquer la transformation unitaire $U = e^{-i\frac{\sum_i \mathbf{D}_i\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)t}{\hbar}}$ afin de réécrire l'équation (2.56). Sous cette transformation le premier terme $[\mathbf{P}_i - q_i\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)]$ est remplacé par $\mathbf{P}_i$, le champ transverse $\mathbf{E}_\perp$ devient $\mathbf{E} + \dfrac{\boldsymbol{\mathcal{P}}}{\epsilon_0}$ où $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ est l'opérateur densité de polarisation tel que :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \sum_i \mathbf{D}_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \tag{2.60}$$

Le choix de la notation de ce dernier est volontaire afin de ne pas le confondre avec l'opérateur impulsion. On peut réécrire le troisième terme de l'équation (2.56), modifié

par cette transformation unitaire tel que :

$$H_R = \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \hbar\omega_k a^\dagger_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} - \sum_i \mathbf{D}_i.\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_i) + \sum_i \epsilon_i^{(Dip)} - \sum_{i\neq j} V^{i,j}_{Coul} - \frac{2}{3\epsilon_0}\sum_{i\neq j}\mathbf{D}_i\mathbf{D}_j\delta(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j) \quad (2.61)$$

où $\epsilon_i^{(Dip)}$ définit tel que :

$$\epsilon_i^{(Dip)} = \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \frac{1}{2\epsilon_0\mathcal{V}}(\hat{\varepsilon}.\mathbf{D}_i)^2 \quad (2.62)$$

Ce terme d'énergie propre dipolaire est relié à l'énergie correspondant à un changement d'orientation du moment dipolaire de l'atome et peut être relié à la masse effective de l'atome lorsque l'on considère le modèle d'Abrahams-Lorentz décrivant la dynamique d'un électron autour d'un noyau atomique [47]. De plus le terme d'interaction dipolaire statique $V^{i,j}_{dip}$ entre deux atomes apparaissant dans cette équation, vient compenser exactement le terme qui apparaît à l'équation (2.59) lors du développement du potentiel d'interaction coulombienne en faisant l'approximation des grandes longueurs d'ondes.

On peut regrouper les expressions obtenues précédemment par la transformation unitaire en deux termes correspondant à un Hamiltonien non perturbé H_0 tel que

$$H_0 = \sum_i (H_i^{at} + \epsilon_i^{(Dip)}) + H_R \quad (2.63)$$

et un terme correspondant à la perturbation induite par l'interaction matière rayonnement tel que :

$$V = -\sum_i \mathbf{D}_i.\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2\epsilon_0}\sum_{i\neq j}\mathbf{D}_i\mathbf{D}_j\delta(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j) \quad (2.64)$$

Le Hamiltonien correspondant aux atomes H_{at}, contient les termes reliés aux degrés de libertés externes et internes des atomes et peut s'expliciter sous la forme :

$$H_i^{at} = \frac{\mathbf{P}_i^2}{2M} + \sum_\alpha \frac{\mathbf{p}_{i,\alpha}^2}{2m_\alpha} + V_{i,\alpha}^{(Coul)} \quad (2.65)$$

A ce stade il est utile de discuter des différents termes que nous avons obtenus dans les équations (2.63)-(2.64) et nous introduirons ensuite les dernières approximations que nous allons faire dans la suite de cette étude.

Premièrement, le troisième terme de l'équation (2.63) ne décrit plus exactement le champ libre. En effet après lui avoir appliqué la transformation unitaire UH_RU, cet opérateur n'agit plus exclusivement dans le sous espace de Hilbert du champ $\mathcal{E}_R$ mais aussi dans le sous espace des degrés de libertés externe des atomes, et est donc relié aussi au champ correspondant au mouvement des particules.

Ensuite la fréquence de coupure k_C, qui garantit la non divergence des termes $V_i^{(Coul)}$ et $\epsilon_i^{(Dip)}$, n'a pas été introduite explicitement. En effet ces termes contribuent ensuite à la définition de la transition atomique et peuvent être non négligeables dans les études des déplacements en fréquences des niveaux d'énergies. Cependant il a été montré par des approches diagrammatiques, que les mécanismes principaux entrant dans ces processus de déplacement d'énergie étaient généralement reliés aux transferts d'excitations entre les particules plutôt qu'à la considération des énergies propre (coulombienne et dipolaire) des particules [12], ces dernières amenant une correction systématique à ces effets. Le but principal de cette étude n'étant pas de discuter en détail du déplacement de Lamb nous

incorporerons par la suite les définitions des termes d'énergies propres à la définition de la transition atomique.

Il est également à noter la présence d'un terme de contact qui est le deuxième terme de l'équation (2.64) ce terme utilisé dans beaucoup de références [24],[47], et qui sera négligé dans la suite de cette étude. En effet ce terme régularise le Hamiltonien et empêche les états propres de diverger lorsque deux atomes sont trop proches. Il existe des solutions alternatives [22] consistant à considérer un volume d'exclusion autour des atomes (sphère dure) afin de limiter l'influence de cette divergence due à la proximité entre deux particules. L'idée principale étant que lorsque deux particules se retrouvent à une distance très inférieure à la longueur d'onde, les niveaux d'énergies s'en retrouvent déplacés de telle manière que ce sous système ne peut plus se coupler au reste des particules.

Enfin les termes d'énergie cinétique $\frac{\mathbf{P}_i^2}{2M}$ et $\frac{\mathbf{p}_{i,\alpha}^2}{2m_\alpha}$ seront aussi négligés dans le reste de cette étude afin de rendre le problème moins complexe. Bien qu'il ait été discuté dans certains travaux [48] que négliger le vitesse des particules permettait en effet de négliger l'élargissement Doppler associé à cette vitesse mais ne permettait pas de négliger les déplacement en fréquences lié à la vitesse de recul $\hbar k_L/M$ liée à l'absorption d'un photon par un atome, considérer un vitesse résiduelle nous permettant de négliger les deux aurait des conséquences dramatiques sur les conclusions des résultats que nous obtiendrons par la suite. Notre but étant de discuter de l'influence des états coopératifs (sousradiants et superradiants) sur la localisation du photon dans une vapeur atomique, si l'on considère par exemple une vitesse résiduelle, correspondant à une température de $T = 10^{-3}K$, telle que $v \simeq \sqrt{k_B T/M}$ l'élargissement Doppler sera en effet négligeable devant la largeur naturelle de l'état excité $\Gamma_0 = (2\pi)6\text{MHz}$. Par contre cette vitesse résiduelle aura pour conséquence un élargissement Doppler dramatique et non négligeable par rapport aux états sous radiant que nous considérerons qui sont de l'ordre $10^{-3} - 10^{-6}\Gamma_0$. C'est pourquoi il faut aussi négliger le déplacement en fréquence lié à l'énergie de recul en considérant que les atomes sont totalement au repos. Il est cependant capital de souligner que les mécanismes d'élargissement de l'état excité (qu'ils soient reliés à la vitesse des atomes, ou encore à un couplage d'une particule avec un continuum) jouent un rôle capital lors de l'étude des états sous radiant [49],[35][50] et doivent être prises en compte lors d'études expérimentales de ces effets. Nous posons donc que tous les effets liés aux degrés de libertés externes des atomes seront donc négligés au cours de cette étude.

Comme nous l'avons dit dans la section précédente, bien que la partie expérimentale traite de travaux réalisés avec du Rubidium (^{87}Rb), qui possède une structure interne complexe, la transition que nous allons considérer pour cette étude théorique est plus proche d'études qui peuvent être réalisées avec du Strontium (^{86}Sr), qui peut être modélisé par une transition $J_g = 0 \to J_e = 1$. En restreignant notre étude au sous espace contenant au plus une excitation (un photon ou un atome excité) et qui est porté par les vecteurs de base $|G\rangle = |g...g...g\rangle \otimes |\hbar k\rangle$, qui décrit l'état où tous les atomes sont dans leur état fondamental et les photon est soit hors du nuage soit en propagation libre, et les vecteurs $|e_i\rangle = |g...e_i...g\rangle \otimes |0\rangle$ qui décrit l'état où l'atome i est excité, on peut réexprimer la partie atomique du Hamiltonien non perturbé (2.63), simplifié par les hypothèses faites précédemment, telle que :

$$H_i^{at} + \epsilon_i^{(Dip)} = \sum_{i=1}^{N}(\hbar\omega_0 + \hbar\delta\omega_0^{(1)}) \sum_\alpha |e_\alpha^i\rangle\langle e_\alpha^i| = \sum_{i=1}^{N}(\hbar\omega_0 + \hbar\delta\omega_0^{(1)}) \sum_\alpha S_{i,\alpha}^{(e)} \tag{2.66}$$

où $S_{i,\alpha}^{(e)} = |e_\alpha^i\rangle\langle e_{\alpha'}^i|$ est le projecteur sur l'état excité de l'atome i selon la direction α,

n'agissant que dans le sous espace de cet atome.

En conclusion de cette partie, en partant d'un Hamiltonien complexe exprimé en jauge $(P.A)$ agissant dans l'espace de Hilbert des degrés de libertés internes et externes des atomes et de celui du champ, nous avons obtenu, par le biais de plusieurs approximations, un Hamiltonien en jauge $(D.E)$ n'agissant que dans le sous espace de Hilbert restreint à une excitation pour les degrés de liberté des atomes et agissant aussi dans l'espace de Hilbert du champ. Il faut admettre que cette représentation est ultra simplifiée et nous allons encore l'alléger par la suite. Cependant ce modèle apparemment simple conserve encore une certaine richesse.

2.3.b *Détails sur le Hamiltonien en jauge D.E .*

Après avoir dérivé le Hamiltonien en jauge $(D.E)$, qui nous servira de point de départ afin de d'obtenir l'objet principal de l'étude de ce chapitre, qui est le Hamiltonien effectif H_{eff}, nous allons expliciter les différents termes qui composent le Hamiltonien et discuter de certaines approximations qui peuvent avoir des conséquences drastiques sur la physique que nous étudions. En reprenant la décomposition faite à la section précédente :

$$H = H_0 + V_{AR} + V_{AL} \tag{2.67}$$

H_0 correspond au Hamiltonien décrivant la dynamique du système non perturbé "atome+champ" et contient un premier terme H_A correspondant au milieu atomique tel que :

$$H_A = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega_0 \sum_{\alpha} |e_\alpha^i\rangle\langle e_\alpha^i| = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega_0 \sum_{\alpha} S_{i,\alpha}^{(e)} \tag{2.68}$$

où $\hbar\omega_0$ correspond désormais à l'énergie associée à la transition entre l'état fondamental $|g\rangle$ et l'état excité $|e_\alpha^i\rangle$ de l'atome i à laquelle on a incorporée la définition du déplacement de Lamb pour un seul atome dans un souci de simplicité. Le deuxième terme de ce Hamiltonien non perturbé correspond au champ tel que :

$$H_R = \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}^\dagger a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} \tag{2.69}$$

avec $\omega_k = kc$ la pulsation associé à un photon de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ tel que $k = |\mathbf{k}|$, et l'opérateur $a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}$ ($a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}^\dagger$), n'agissant quant à lui que dans l'espace de Hilbert du champ décrit par la base des états de Fock, est associé à l'annihilation (création) d'un photon de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et de polarisation $\hat{\varepsilon}$ tel que $\mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon} = 0$.

Après avoir négligé le terme de contact obtenu à la section précédente, le Hamiltonien d'interaction V_{AR} atomes-rayonnement s'explicite sous la forme :

$$V_{AR} = -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}_i.\mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \tag{2.70}$$

où $\mathbf{D}_i$ représente l'opérateur dipôle de l'atome i et $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ représente l'opérateur champ électrique transverse à la position $\mathbf{r}_i$. On peut décomposer l'opérateur dipôle en la somme de deux opérateurs telle que :

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i^{(+)} + \mathbf{D}_i^{(-)} \tag{2.71}$$

avec $\mathbf{D}_i^{(+)}$ correspondant à l'excitation de l'atome i tel que :

$$\mathbf{D}_i^{(+)} = d \sum_{\alpha=x,y,z} |e_\alpha^i\rangle\langle g^i|\hat{u}_\alpha = d \sum_{\alpha=x,y,z} S_{i,\alpha}^{(+)}\hat{u}_\alpha \tag{2.72}$$

où d est l'élément dipôle réduit associé à la transition e-g et $\mathbf{D}_i^{(-)} = [\mathbf{D}_i^{(+)}]^\dagger$ correspond à la désexcitation de ce même atome. On procède de la même manière avec l'opérateur champ électrique en posant :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}) \tag{2.73}$$

avec

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} \hat{\varepsilon} \tag{2.74}$$

où ϵ_0 représente la permittivité diélectrique du vide et $\mathcal{V}$ le volume utilisé pour quantifier le champ électrique. Ici l'opérateur $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$ correspondant au champ électrique transverse associé à l'annihilation d'un photon et celui associé à la création d'un photon est définit tel que $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}) = [\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r})]^\dagger$. Dans la situation où un champ cohérent externe est présent (champ Laser incident sur le nuage d'atomes), on doit aussi tenir compte du couplage atome laser V_{AL} tel que :

$$V_{AL} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\hbar\Omega_0}{2} \left(S_{i,\alpha}^{(-)} \hat{u}_\alpha \boldsymbol{\epsilon}_0 e^{i\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r}_i} + S_{i,\alpha}^{(+)} \hat{u}_\alpha \boldsymbol{\epsilon}_0 e^{-i\omega t + \mathbf{k}.\mathbf{r}_i} \right) \tag{2.75}$$

Ici Ω_0 est la pulsation de Rabi du champ Laser incident, ω est la pulsation du laser et $\boldsymbol{\epsilon}_0$ sa polarisation. Il est à noter que ce quatrième terme de l'Hamiltonien d'interaction matière-rayonnement n'a été introduit que dans le but de servir de base aux explications des modèles théoriques qui nous servirons lors de notre étude expérimentales des effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids. En effet lors de la dérivation de l'Hamiltonien effectif H_{eff} plus tard dans ce paragraphe tout comme pendant l'étude numérique de ses valeurs propres nous ferons l'hypothèse de l'absence d'un champ incident en imposant par conséquent la quantité $\Omega_0 = 0$.

A ce stade l'approximation de l'onde tournante n'est pas faite pour le terme d'interaction matière rayonnement V_{AR} mais elle est faite pour le terme d'interaction matière laser V_{AL}. En effet le terme d'interaction V à l'équation (2.70) contient aussi bien les termes résonnants $\mathbf{E}^{(+)}\mathbf{D}^{(+)}$ et $\mathbf{E}^{(-)}\mathbf{D}^{(-)}$ que les termes anti résonnants $\mathbf{E}^{(+)}\mathbf{D}^{(-)}$ et $\mathbf{E}^{(-)}\mathbf{D}^{(+)}$. Cette approximation souvent faite dans d'autres études peut apporter des corrections non négligeables à l'étude des effets coopératifs. En effet si cette approximation est faite de manière trop précipitée elle peut conduire à la non obtention des potentiels d'interactions qui ont été dérivées de manière classique dans la première section de ce chapitre, ou encore à un facteur 2 entre la partie réelle et la partie imaginaire du potentiel d'interaction [51], [52]. Une parade souvent utilisée est d'étendre l'intégration sur les vecteur d'ondes $\mathbf{k}$ dans l'espace réciproque aux fréquences négatives en intégrant k entre $-\infty$ et $+\infty$ au lieu de 0 et $+\infty$. Pour la dérivation du potentiel d'interaction dans le cas vectoriel il ne faut surtout pas faire cette approximation car elle nous fait négliger des diagrammes d'énergie entre les sous niveaux Zeeman et rendre la dérivation du potentiel d'interaction inextricable.

De plus cette approximation peut avoir des conséquences non négligeables sur les déplacements en fréquences des niveaux d'énergie. En effet en faisant l'approximation de l'onde

tournant nous négligeons l'influence de photons, dit virtuels qui peuvent tout d'abord contribuer au déplacement de Lamb du niveaux fondamental ou également contribuer à celui de l'état excité dans le cas d'un seul atome isolé [13]. Il est aussi à noter que dans le cas d'un seul atome, les termes anti résonnant se moyennent à 0 de manière formelle. Dans une situation impliquant plusieurs atomes, faire l'approximation de l'onde tournant peut amener à changement de signe du déplacement collectif en fréquences [53], ce qui peut avoir un impact indirect sur le transfert d'excitation de certains états tels que les états sousradiants. Pour résumer, dans les cas d'études précises de déplacement de Lamb, de déplacement en fréquences coopératifs ou encore dans l'étude des forces de Casimir-Polder, l'approximation de l'onde tournant est à faire avec précautions.

2.4 Dérivation de l'Hamiltonien effectif.

Après avoir explicité et discuté des approximations du Hamiltonien matière rayonnement que nous considérons, dans cette section nous allons dériver le Hamiltonien effectif, qui est le point de départ de notre étude numérique. L'idée principale étant de s'affranchir tout d'abord des variables correspondant au champ afin de ne considérer que les celles qui sont reliées aux atomes. Affirmer que les états propres du Hamiltonien effectif représentent les états atomiques est une idée erronée, cependant la considération de ces états propres peut nous amener une information intéressante sur la perturbation qu'induit le couplage entre le champ et la matière sur les niveaux atomiques.

Commençons tout d'abord par résoudre les équations d'évolutions des opérateurs reliés au champ, qui sont les opérateurs création et annihilation. L'équation d'évolution de l'opérateur annihilation en représentation de Heisenberg s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}, H] = -i\omega_k a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}(t) + \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \mathcal{V}\hbar}} \mathbf{D}_j(t)\hat{\varepsilon}^* e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j} \tag{2.76}$$

Afin d'obtenir cette expression il faut utiliser la relation de commutation $[a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}, a^{\dagger}_{\mathbf{k}'\hat{\varepsilon}'}] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'}$ et la relation $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$. La solution de l'équation (2.76) peut s'écrire de manière formelle telle que :

$$a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}(t) = e^{-i\omega_k t} a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}(0) + \frac{1}{\hbar}\int_0^t dt' \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} \mathbf{D}_j(t-\tau)\hat{\varepsilon}^* e^{-ikr_j} e^{-i\omega_k \tau} \tag{2.77}$$

avec $\tau = t - t'$. Le premier terme de cette équation est relié au champ libre en l'absence de sources et le deuxième terme est relié au champ source émis par les atomes. En réinjectant le terme correspondant au champ source dans l'expression du champ électrique transverse au point $\mathbf{r}_i$ (eq. (2.73)) on obtient l'expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t) = \frac{1}{\hbar}\sum_j \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \int_0^t d\tau \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 \mathcal{V}} \left[i\mathbf{D}_j(t-\tau) e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} e^{-i\omega_k \tau} \hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^* + h.c \right] \tag{2.78}$$

Il faut noter que par cette méthode on s'est affranchis des opérateurs correspondant au champ (opérateurs création et annihilation) et que l'opérateur champ transverse ne contient plus que des opérateurs atomiques.

Afin d'obtenir l'expression du Hamiltonien effectif nous allons utiliser la méthode de la résolvante. Cette méthode fréquemment utilisé dans les problèmes à N corps a été

introduite par Born-Oppenheimer en 1927 lors de leur étude des niveaux d'énergies électronique dans une molécule [54]. Elle consiste à exprimer la résolvante $G(z) = 1/(z - H)$ du Hamiltonien total en fonction de celle du Hamiltonien non perturbé $G_0(z) = 1/(z - H_0)$ et à calculer sa restriction au sous espace de Hilbert que nous considérons, qui est celui décrivant une excitation au maximum dans le nuage. Rappelons tout d'abord que les états propres du Hamiltonien décrivant le système (eq. (2.67)) sont décrits dans le sous espace de Hilbert $\mathcal{E} = \mathcal{E}^A \otimes \mathcal{E}^R$, avec $\mathcal{E}^A$ le sous espace de Hilbert correspondant au milieu atomique et $\mathcal{E}^R$ correspondant à celui du champ. Le sous espace $\mathcal{E}^A$ est décrit par les états de base $|G\rangle = |gg...g...g\rangle$, décrivant l'état où tous les atomes sont dans leur état fondamental et $|e^i_\alpha\rangle = |gg...e^i_\alpha...g\rangle$, décrivant l'état où l'atome i est excité selon sa composant α, quant au sous espace $\mathcal{E}^R$ il est décrit par les états $|\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}\rangle$, représentant un photon de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et de polarisation $\hat{\varepsilon}$, et $|0\rangle$, représentant l'absence de photon dans les modes du vide. L'espace de Hilbert $\mathcal{E}$ peut également être décomposé en deux autre sous espaces l'un correspondant à la situation où le photon est absorbé par un atome, décrit par l'état $|\mathcal{E}^i_\alpha\rangle = |gg...e^i_\alpha...g\rangle \otimes |0\rangle$ et l'autre correspondant à la situation où tous les atomes sont dans leur états fondamental $|\mathcal{G}\rangle = |gg...g...g\rangle \otimes |\mathbf{k}, \hat{\varepsilon}\rangle$. En introduisant les projecteurs P et Q sur ces deux derniers sous espaces tels que :

$$P|\mathcal{E}^i_\alpha\rangle = |\mathcal{E}^i_\alpha\rangle, P|\mathcal{G}\rangle = 0 \tag{2.79}$$

$$Q|\mathcal{E}^i_\alpha\rangle = 0, Q|\mathcal{G}\rangle = |\mathcal{G}\rangle \tag{2.80}$$

on peut désormais s'intéresser à l'amplitude de transition entre un état $|\Psi^I\rangle$ où l'excitation est dans le nuage, appartenant par conséquent à l'espace de Hilbert décrivant les états excités atomique $\mathcal{E}^A$, et un autre état $|\Psi^F\rangle$ appartenant au même sous espace de Hilbert. Pour cela il faut calculer l'élément de matrice $T_{IF} = \langle\Psi^F|T|\Psi^I\rangle$ de l'opérateur T tel que $T = V + VGV$. En se servant des projecteurs définis à l'équation (2.80) on peut exprimer l'élément de matrice T_{IF} tel que :

$$T_{IF} = \langle\Psi^F|(V + VG(E_I + i\eta)V)|\Psi^I\rangle = \langle\Psi^F|(V + VPG(E_I + i\eta)PV)|\Psi^I\rangle \tag{2.81}$$

η étant une quantité réelle et positive que l'on fera tendre vers 0 à la fin du calcul et $E_I = \hbar\omega_0$ (on considère que le photon incident est à résonance). En introduisant l'opérateur déplacement $R(z)$ tel que :

$$R(z) = V + \frac{Q}{z - QH_0Q - QVQ} \tag{2.82}$$

et en se servant de la définition [34] :

$$PG(E_I + i\eta)P = \frac{P}{E_I + i\eta - H_{eff}} \tag{2.83}$$

avec $H_{eff} = PH_0P + PR(z)P$, on peut désormais expliciter les éléments de matrice de l'opérateur déplacement et par conséquent ceux du Hamiltonien effectif. En utilisant l'expression précédemment obtenue pour l'opérateur champ électrique à l'équation (2.78) dans la définition du Hamiltonien d'interaction V, et en se servant du fait que les opérateurs P et Q sont des projecteurs sur deux sous espaces complémentaires tels que $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $Q = 1 - P$, l'élément de matrice de l'opérateur déplacement peut s'expliciter sous la forme :

$$\langle\mathcal{E}^j_{\alpha'}|R(z)|\mathcal{E}^i_\alpha\rangle = \frac{d^2}{2\epsilon_0\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \hbar\omega_k \hat{\varepsilon}_\alpha . \hat{\varepsilon}_{\alpha'} \frac{e^{i\mathbf{k}.|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}{z - \hbar\omega_0} \tag{2.84}$$

Pour $i = j$ cette expression se réduit à un imaginaire pur correspondant à la largeur naturelle de l'état excité Γ_0 que l'on a exprimé pour une transition $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$, telle que :

$$\langle \mathcal{E}^i_{\alpha'} | R(z) | \mathcal{E}^i_{\alpha} \rangle = -i \frac{\hbar \Gamma_0}{2} \delta_{\alpha\alpha'} \tag{2.85}$$

où la définition de Γ_0 est la même que celle donnée précédemment à l'équation (2.32). Il est à noter que nous avons perdu l'information sur le déplacement de Lamb d'un seul atome, qui aurait été la partie réelle de l'expression précédente, car nous avons l'avons incorporé à la définition de ω_0.

Pour $i \neq j$, en faisant l'approximation de Markov :

$$\langle \mathcal{E}^i_{\alpha'} | R(z) | \mathcal{E}^j_{\alpha} \rangle = -i \frac{\hbar \Gamma_0}{2} g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}_{ij}) \tag{2.86}$$

où $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ représente la distance entre les atomes i et j et $g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}_{ij})$ est le potentiel d'interaction obtenu dans le cas vectoriel à la section 1.1 tel que [4] :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}_{ij}) = \frac{3}{2} \frac{e^{ik_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}} \Bigg[\left(-1 - \frac{i}{k_0 r_{ij}} + \frac{1}{(k_0 r_{ij})^2} \right) \delta_{\alpha\alpha'} \\ + \left(1 + \frac{3i}{k_0 r_{ij}} - \frac{3}{(k_0 r_{ij})^2} \right) \frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2} \Bigg] \end{aligned} \tag{2.87}$$

avec $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. On peut donc expliciter au final un Hamiltonien effectif H_{eff} du système, décrivant sa relaxation dans les modes du vide, tel que

$$\begin{aligned} H_{eff} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha,\alpha'} -i \frac{\hbar \Gamma_0}{2} \delta_{\alpha\alpha'} \mid e^i_\alpha \rangle \langle e^i_{\alpha'} \mid \\ + \frac{\hbar \Gamma_0}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha,\alpha'} g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}_{ij}) \mid e^i_\alpha \rangle \langle e^j_{\alpha'} \mid \end{aligned} \tag{2.88}$$

Il est à noter que contrairement à d'autre études portant sur des effets de localisation d'Anderson [55][44][36][56], ce Hamiltonien décrit un désordre totalement hors diagonal, et que l'interaction entre chaque paires d'atomes sera décrite par une matrice 3×3, un système contenant N atomes sera donc décrit pas un Hamiltonien effectif de dimension $3N \times 3N$. Les états propres de ce Hamiltonien décrivent l'excitation à l'intérieur du système couplée aux diffuseurs, qui sont les atomes dans notre cas. Il faut aussi souligner l'absence d'un terme correspondant au champ incident, ce qui rend l'équation (2.88) différente des expressions obtenues pour des Hamiltoniens effectifs dans d'autres études sur l'interaction de la lumière avec un nuage d'atomes [57][58]. Une remarque important est aussi de voir que ce Hamiltonien effectif est un opérateur non hermitien. En effet ses valeurs propres Λ_i sont de la forme :

$$\Lambda_i = E_i - i \frac{\Gamma_i}{2} \tag{2.89}$$

où E_i représente la position en fréquence de l'état propre $|\Psi^i\rangle$ et Γ_i sa largeur, et il faut admettre que pour des systèmes contentant plus de $N = 2$ atomes ses états propres sont généralement non orthogonaux ($\langle \Psi^j | \Psi^i \rangle \neq 0$). Enfin il est utile de citer que ce Hamiltonien

4. Il est à noter que l'approximation d'une diffusion quasi résonante ($\omega \simeq \omega_0$) a été faite afin d'obtenir le potentiel d'interaction de l'Hamiltonien effectif, ce qui nous permet de remplacer $k = |\mathbf{k}|$ par $k_0 = \mathbf{k}_0$.

effectif, malgré sa non hermicité, a été déjà utilisé pour calculer le spectre de la lumière dans une structure périodique composée d'atomes [37], en utilisant de la lumière vectorielle tout en considérant aussi bien leur degrés de libertés internes (transition $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$) et externes (vibration de l'atome dans le piège harmonique).

Afin de dériver le potentiel d'interaction dans le cas scalaire, il faut moyenner la position de paires d'atomes i et j sur leur différentes orientations angulaires [48]. En procédant de cette manière, le terme $\frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2}$ se moyenne à zéro pour $\alpha \neq \alpha'$ et se moyenne à $1/3$ pour $\alpha = \alpha'$, ce qui nous permet d'obtenir un opérateur dont les éléments sont trois fois dégénérés et qui peut se réduite sou la forme d'un opérateur $N \times N$ tel que :

$$g(\mathbf{r}_{ij}) = -\frac{e^{ik_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}} \tag{2.90}$$

ce terme de couplage représente le potentiel d'interaction entre les atomes dans le cas scalaire et correspond aussi à la matrice de Green qui a été dérivée au début de ce chapitre à l'équation (2.12).

Les identités utilisées et les discussions sur les différentes approximations (Born-Markov, Approximation de l'Onde tournante,...) afin d'obtenir l'Hamiltonien effectif dans les cas scalaires et vectoriel se trouvent dans l'Annexe A où nous dérivons à partir de l'Hamiltonien d'interaction matière rayonnement l'équation sur les dipôles couplés. Il est également important de souligner que les effets de retards, liés au temps de propagation du photon entre deux évènements consécutifs d'absorption réémmission par deux atomes différents, ont été négligés. Certains travaux [23] se sont penchés sur les conséquences de telles approximations dans une situation décrivant deux atomes couplés via un champ vectoriel.

Il est intéressant de noter que certaines études admettent que les effets de localisation de la lumière sont majoritairement causés par un désordre radial plutôt que par un désordre angulaire [15]. En effet l'expression décrite à l'équation (2.90) présente une invariance par rotation et ne considère qu'un désordre purement radial, ce qui n'est pas le cas de l'équation (2.87) qui, avant d'être moyennée sur les orientations des paires d'atomes, présente à la fois un désordre radial et un désordre angulaire. Cependant même si nous verrons par la suite que ne considérer qu'un désordre radial favorise certains effets que l'on pourrait qualifier de *localisation* du photon à l'intérieur du nuage, il n'est pas évident de prédire *à priori* que les effets de localisation sont principalement dus à un désordre radial.

Enfin il est important de souligner qu'au même titre que les équations (2.12) et (2.29), qui ont été dérivées de manières classique, les opérateurs correspondant le Hamiltonien effectif dans les cas scalaires (eq. (2.90)) et vectoriel (eq. (2.87)) appartiennent eux aussi à la grande famille des Matrices Aléatoires Euclidiennes. Les spectres de ces matrices désordonnés, étudiées depuis les années 1960 dans de nombreux domaines différents de la physique, peuvent présenter des propriétés remarquables dans certains cas limites notamment pour des opérateurs hermitiens. Avant de présenter nos résultats numériques, il est donc utile de faire un bref rappel des éléments théoriques qui ont été élaborés afin de décrire les comportements des valeurs propres des Matrices Aléatoire Euclidiennes en général et de faire un bref état de l'art sur les travaux théoriques portant sur l'étude des effets coopératifs et de la localisation d'Anderson de la lumière.

3 Matrices aléatoires euclidiennes, localisation d'Anderson de la lumière et Effets coopératifs.

Cette section a pour but de faire un état de l'art sur les travaux théoriques, élaborés par d'autres équipes et inscrits dans le contexte des recherches menées au cours de ce travail de thèse, que ce soit dans le domaine de la localisation d'Anderson de la lumière, de l'étude des effets coopératifs, ou encore des propriétés mathématiques des Matrices Aléatoires Euclidiennes non hermitiennes, qui composent l'ensemble d'objets mathématiques auquel appartient l'Hamiltonien effectif que nous avons précédemment dérivé.

Cette partie n'a aucunement la prétention d'amener des éléments de recherche nouveaux dans le cadre des travaux portant sur les effets coopératifs et la localisation d'Anderson mais plutôt d'effectuer un bref rappel sur les concepts fondamentaux établis dans chaque domaines afin de justifier certains approches que nous effectuerons lors de notre études numérique des états propres de l'Hamiltonien effectif. En effet comme nous avons pu l'évoquer précédemment, le support mathématique, qui est l'Hamiltonien effectif, utilisé afin de mener notre étude numérique sur les effets coopératifs et la localisation d'Anderson, n'est pas communément utilisé afin d'étudier ces phénomènes physiques. C'est pourquoi il est important de souligner les analogies mais aussi les différences fondamentales existantes entre le modèles que nous considérons et les autre modèles utilisés pour étudier les effets de localisation fortes due au désordre et les effets coopératifs lié à la synchronisation des dipôles atomiques.

Dans un premier temps nous allons rappeler certaines propriétés générales de Matrices Aléatoires Euclidiennes qui nous seront utiles lors de notre étude numérique, nous discuterons par la suites des différents travaux qui ont été réalisés sur la localisation d'Anderson pour des ondes électromagnétique notamment pour la lumière et nous discuterons des difficultés que comprennent les travaux étudiants les effets liés au désordres tout en considérant des interactions longues portées. Nous présenterons ensuite certains travaux qui ont été menés sur les effets coopératifs et les différents modèles utilisés pour les étudier.

3.1 Quelques comportements singuliers des spectres des matrices aléatoires et des matrices aléatoires Euclidiennes.

L'intérêt porté aux matrices aléatoires en général a trouvé son élan dans les travaux d'Eugène Wigner, dans les années 50, afin de décrire les propriétés statistiques des spectres de diffusions des neutrons dans les noyaux lourds. Des résultats expérimentaux dans ce domaine avaient été obtenus dès les années 30 par Fermi, qui tentait de sonder la structure des noyaux lourds, et à l'exception des premiers états excités, qui pouvaient être décrit par les modèles standard de Physique Nucléaire tel que le modèle en couche, la présence de certains états liés aux très longs temps de vies restait inexpliquée. C'est dans le but de s'affranchir de la complexité liée à la structure de ces noyaux lourds que Wigner s'est intéressé aux propriétés statistiques de deux états consécutifs en énergies ramenant ainsi le problème à l'étude d'un système à deux niveaux [59, 60]. En considérant des matrices symétriques dont les éléments non diagonaux sont des variables aléatoires gaussiennes, Wigner a réussi à prédire les propriétés statistiques de leurs spectre notamment en carac-

térisant leurs propriétés locales telles que les distributions $P(s)$ des écarts entre niveaux d'énergies consécutifs $s = E_{n+1} - E_n$ telles que :

$$P_W(s) = As^{\beta}e^{-Bs^2} \tag{2.91}$$

permettant ainsi l'établissement des trois grands ensembles : l'Ensemble Gaussien Orthogonal (GUO et $\beta = 1$), l'Ensemble Gaussien Unitaire (GUE et $\beta = 2$), l'ensemble Gaussien symplectique (GUS et $\beta = 4$) avec A et B des constantes numériques de normalisation. L'établissement ont été à la base de nombreux travaux qui ont suivis sur les propriétés statistiques pour différents opérateurs (Matrice de diffusion S, Matrice de Green G) tout d'abord dans le domaine de la Physique Nucléaire puis dans d'autres domaines de la Physique en général. Nous reviendrons brièvement sur ces propriétés statistiques au prochain chapitre lorsque nous présenterons nos résultats numériques sur les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif.

A la différence des Matrices Aléatoires originalement considérées par Wigner ou encore Dyson [61], il est évident que les termes non diagonaux de l'Hamiltonien effectif (eq. (2.88)) que nous considérons dans les cas scalaire (eq. (2.90)) et vectoriel (eq. (2.87)) ne sont en aucun cas de variables aléatoires gaussiennes indépendantes. En effet dans la situation que nous considérons, les variables aléatoires indépendantes sont les positions $\{\mathbf{r}_i\}$ des atomes (ou des dipôles) et les éléments non diagonaux de l'Hamiltonien effectif sont caractérisés par une fonction $f(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ dépendant des positions relatives entre les différents éléments, qui sont dans notre cas des atomes, placés aléatoirement dans l'espace euclidien. C'est pourquoi l'Hamiltonien effectif H_{eff} que nous considérons appartient à la famille des Matrices Aléatoires Euclidiennes qui peuvent être définies telles que :

$$A_{ij} = \langle \mathbf{r}_i | \mathbf{A} | \mathbf{r}_j \rangle = f(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \tag{2.92}$$

où A_{ij} représente l'élément d'un opérateur $\mathbf{A}$ appartenant à l'ensemble des matrices aléatoires euclidiennes, $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{r}_j$ représentent les positions des éléments i et j dans l'espace Euclidien de dimension d et f est une fonction quelconque dépendant des positions des éléments i et j. Dans notre cas la fonction f est la fonction de Green scalaire (eq.(2.90)) ou la fonction de Green dyadique (eq. (2.87)). D'une manière générale, de nombreux travaux ont été menés sur les Matrices Aléatoires Euclidiennes au cours des années 1990 dans des études portant par exemple sur les états vibrationnels de phonons dans des cristaux désordonnés [62, 63][64], les transport d'électrons dans des semi-conducteurs désordonnés [65][66] ou bien encore l'interprétation du pic bosonique pour des phonons dans des liquides amorphes très refroidis [67]. La complexité de ces systèmes résidant dans le désordre décrit par les positions des éléments qui les constituent.

Tout comme pour les matrices aléatoires en général, les situations considérants des opérateurs non hermitiens ont très rapidement été prises en compte par la suite pour les matrices aléatoire euclidiennes et certaines propriétés remarquables de leurs valeurs propres dans le plan complexe ont pu être établies tout comme le domaine circulaire contenant les valeurs propres qui a été aussi bien prédite théoriquement dans le domaine de la Physique Nucléaire [68] et observé numériquement pour les pôles de la matrice de Green [69, 70, 25, 71]. La plupart des propriétés connues pour les Matrices Aléatoires Euclidiennes non hermitiennes sont issues des résultats numériques qui ont été obtenus dans le cadre d'études portant sur l'interaction matière rayonnement comme par exemple les instabilité dynamiques de speckle causées par la non linéarité du milieux [72], la localisation forte d'onde de matière en 2 et 3 dimensions [73][27] ou encore l'étude d'un seuil pour le laser

aléatoire composé d'atomes en présence d'un milieux à gain [74][75]. Plus récemment des travaux se sont penchés sur le comportement de la densité d'état des valeurs propres selon l'axe imaginaire puis selon l'axe réel [76] et ont ensuite obtenus des solutions exactes sur le comportement de la frontière du domaine comportant les valeurs propres dans le plan complexe quelle que soit la taille L et le ratio taille sur nombre d'éléments contenus dans le système [77].

Nous avons donc vu dans cette section que l'étude des Matrices Aléatoires Euclidienne, qu'elles soient hermitiennes ou non hermitiennes, concerne de nombreux domaines différents de la Physique et qu'au premier abord il est très difficile d'obtenir des solutions analytiques décrivant les comportements de leur spectres dans n'importe quelles limites (grande densité, petites tailles, grand nombre d'éléments,...). C'est pourquoi afin d'obtenir des solutions à ces problèmes à N corps l'outil numérique est capital. Après avoir passé en revue quelques propriétés fondamentales de ces objets mathématiques, nous allons faire un bref état de l'art en deux sous parties sur les deux phénomènes physiques qui nous intéressent : la localisation d'Anderson de la lumière et les effets coopératifs (Superradiance et Sousradiance de Dicke). Nous n'énoncerons que les résultats importants qui ont un intérêt dans le contexte de ce travail de thèse et nous terminerons enfin par un aperçu des travaux utilisant des Matrices Aléatoires Euclidienne et traitant soit de la coopérativité soit de la localisation d'Anderson.

3.2 Localisation d'Anderson et interactions longues portées.

Dans son papier original, traitant de l'absence de transport d'électrons dans des milieux désordonnés [4], Anderson s'est intéressé aux états propres de l'Hamiltonien H_{DTBH} décrivant un électron fortement lié dans un milieu désordonné tel que :

$$H_{DTBH} = \sum_n V_n |n\rangle\langle n| + \sum_{n,m} t|m\rangle\langle n| \tag{2.93}$$

communément appelé '*Disordered Tight Binding Hamiltonian*' et ne considérant que les interactions entre sites plus proches voisins. Dans l'équation (2.93), le premier terme représente un désordre diagonal avec V_n une variable aléatoire indépendante de variance W, originalement gaussienne telle que $\langle V_i V_j \rangle = \delta_{ij}$, représentant l'énergie du site n et le deuxième terme de cette équation, représentant le saut de l'électron d'un site à l'autre où t est relié à la probabilité qu'a l'électron de passer d'un site $|n\rangle$ vers son plus proche voisin $|m\rangle$. Il est clair que l'Hamiltonien décrit à l'équation (2.93) est fondamentalement différent de l'Hamiltonien effectif que nous considérons (eq. (2.88)) dans la mesure où ce dernier ne considère qu'un désordre non diagonal et aussi des interactions très longues portées (en $1/k_0 r$).

Bien que les études suivant ce papier fondateur ont été d'un grand intérêt notamment dans le cadre de la Physique Mésoscopique ou encore de la Physique du Solide, leurs but a été avant tout de relier les propriétés statistiques spectrales de l'Hamiltonien décrit à l'équation (2.93) aux propriétés de transport dans les matériaux par le biais de quantités telles que la conductance [78] le produit entre le nombre d'onde k_0 et le libre parcours moyen de transport l^* [79], ou encore de trouver des critères d'universalité propres à la transition de phase, existant pour un milieu à 3 dimensions, afin de développer une théorie d'échelle basée sur un unique paramètre [20][80]. Malgré ces considérables avancées, le problème de l'influence d'interactions longues portées sur les effets de localisation

fortes liés au désordre sont restés pendant de nombreuse années une question ouverte bien qu'Anderson dans son papier original émettait une certaine réserve sur la validité de ses résultats dans le cas d'une d'interaction dipolaire (en $1/r^3$) [4] aucune preuve formelle ne venait démontrer ces affirmations.

C'est lorsque l'intérêt s'est porté sur la supraconductivité que la question de l'influence des interactions longues portées sur les effets de localisation forte a été abordée de manière sérieuse [81][82]. En effet plusieurs expériences menées dans les années 80 ont observées qu'au-dessus d'un certain seuil de désordre W associé à la densité spatiale $\rho = N/V$ d'impuretés (avec N le nombre d'impuretés et V le volume du système) :

$$W \propto \rho, \tag{2.94}$$

la température critique T_c [83] diminuait de manière drastique ou encore que le second champ critique H_{c2} [84] présentait un comportement anormal ce qui n'était pas prédit par les modèles décrivant des supraconducteurs contenant des impuretés. Dès lors plusieurs théories ont essayées d'expliquer ces comportement par de la diffusion anormale près du point critique dans la phase métallique ayant pour conséquence une diminution de la longueur de cohérence de la température critique ou encore l'influence sur ces comportement d'une répulsion coulombienne effective.

C'est au début des années 90 qu'une partie de la réponse a été obtenue, du moins pour le *Tight Binding Hamiltonian*, par L. V. Levitov [85], qui a démontré que la localisation des états vibrationnels était détruite par l'interaction dipolaire ($\propto r^{-3}$) entre les sites dans un milieu à trois dimensions. Ce résultat a ensuite été généralisé [86] pour un milieu de dimension d où le potentiel d'interaction $V(r-r')$ entre les sites décroît en fonction de leur distance relative en suivant une loi de puissance telle que $V(r-r') \propto |r-r'|^{-\alpha}$. Pour $\alpha \leq d$ il a été trouvé qu'il n'y avait pas de localisation que ce soit en présence d'un milieu peu ou très désordonné alors que dans la situation où $\alpha > d$ les états étaient localisés au-dessus d'un certain seuil de désordre. Ces prédictions théoriques ont été vérifiées expérimentalement à l'aide d'une chaîne de diélectriques quasi 1-D où les modes Transverses Magnétiques TM étaient découplés des modes Transverses Électromagnétiques TEM [87]. Pour les modes TM, dont la polarisation est parallèle à la chaîne de diélectriques, il a été observés que tous les modes étaient localisés alors que pour les modes TEM, dont la polarisation est transverse à la chaîne, certains étaient étendus de manière critique sans être localisés. Nous verrons au prochains chapitre quelles sont les expressions de ces modes TM et TEM que nous avons dans la situation où nous considérons $N = 2$ atomes. Il est toutefois important de souligner que les études que nous avons mentionnées précédemment considèrent à la fois un potentiel d'interaction en $|r-r'|^{-\alpha}$ mais qu'elles considèrent également un désordre sur site. Cette différence avec le modèle que nous considérons, dont le désordre est contenus dans les positions des sites ce qui n'est pas un désordre sur site, peut rendre invalide les prédictions théorique énoncée précédemment.

Dans cette section, nous avons donc vu que la question de l'influence des interactions longues portées sur les effets de localisation forte liée au désordre était encore une question ouverte bien que certains éléments de réponses ont été amenés ces dernières années.

3.3 Effets coopératifs et milieux désordonnés de grandes tailles.

Les effets coopératifs, tels que l'augmentation de l'émission cohérente (superradiance) ou encore sa diminution (sousradiance), ont été prédit par Dicke en 1954 [6] pour un

ensemble de N atomes, assimilés à des systèmes à deux niveaux $|-\rangle, |+\rangle$ contenus dans un volume V inférieur à la longueur d'onde λ, associée à leur fréquence de résonance ν telle que $\lambda = c/\nu$. Cependant aucune conjecture n'a été faite dans son étude sur un possible agencement des atomes sur un réseau périodique ou sur un désordre dans leurs positions respectives.

Contrairement à la situation que nous étudions, où nous nous intéressons au cas d'un seul état excité présent dans le système ou d'un seul photon, Dicke a considéré qu'initialement tous les atomes étaient dans leur état excité :

$$|J = \frac{N}{2}, M = \frac{N}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}|e_1, ..., e_i, ..., e_N\rangle, \tag{2.95}$$

où $N/2 > J > -N/2$ représente le moment cinétique total du système et $J > M > -J$ représente l'inversion de population. Cet état produit ne présente aucune corrélation entre les atomes et c'est la désexcitation d'un atome qui va créer une cohérence de phase, lié à la superposition des états du niveau $J = N/2 - 1$, ayant pour conséquence une accélération de l'émission cohérente qui sera maximale lorsque la moitié des atomes seront excités. De nombreux travaux traitent en détails les calculs sur le taux d'émission collectif sur l'intégralité de la cascade radiative [14] pour des systèmes dont la taille est inférieure à la longueur d'onde et une géométrie alternative a été également considérée où les N atomes sont contenus dans un volume très allongé en forme de cigare le long de l'axe de propagation $\hat{z}$ du faisceau incident. En effet afin d'étudier expérimentalement les effets coopératifs, le problème de la petite taille du système devant λ s'est rapidement posé et c'est pourquoi une partie de la théorie s'est développée pour traiter des système dont une dimension est grande devant la longueur d'onde conservant les deux autres de l'ordre ou petites devant λ.

Le cas que nous considérons correspond quant à lui au dernier étage de la cascade radiative ($J = -N/2+1$) pour un milieu de petite taille ($L < \lambda$) et le fait de ne pas savoir quel atome est excité permet de créer la superposition d'état symétrique :

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i |g_1, ..., e_i, ..., g_N\rangle, \tag{2.96}$$

associé à l'état superradiant, dont la décroissance est :

$$\Gamma_c = N\Gamma_0. \tag{2.97}$$

A cet état superradiant symétrique il faut également associer un état sousradiant antisymétrique dont le taux de décroissance est très faible, ce qui a pour conséquences de piéger l'excitation à l'intérieur du système par le biais d'interférences destructives.

Cependant le problème lié à la taille des échantillons afin d'observer expérimentalement cette décroissance s'est rapidement posé et a été traité avec grand intérêt au début dans les années 2000 [16, 88]. Certains travaux se sont penchés sur le diagramme d'émission des ces modes superradiants et sousradiants [89] alors que d'autre approches ont élaboré une théorie analytique complète [90]. Lorsque le système ne contient qu'une seule excitation et que sa taille est supérieure à la longueur d'onde, la difficulté du problème réside dans la prise en compte de la propagation du photon entre deux atomes se traduisant par la considération d'un déphasage associé à la distance entre les particules. En effet lorsque tous les atomes sont contenus dans une longueur d'onde on peut considérer que le transfert du photon d'un atome à l'autre est immédiat alors que lorsque la taille du système devient

grande devant la longueur d'on un déphasage lié à la distance relative entre les atomes commence à apparaître. Afin de contourner cette difficulté la prise en compte d'un champ incident de vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$ et l'ajout d'une phase à l'état symétrique (eq. (2.96)) :

$$|+\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k}_0.\mathbf{r}_i} \sum_i |g_1, ..., e_i, ..., g_N\rangle. \tag{2.98}$$

Il est à noter que ce type d'approximation est valide lorsque l'intensité du champ incident est faible et que l'on considère que le photon effectue au maximum un évènement de diffusion [5]. Dans ce cas de figure, il a été trouvé que le taux d'émission collective dépendait du rapport entre le nombre d'éléments N et le nombre de modes transverse contenus dans le système $(k_0L)^2$. Ce rapport peut être directement associé à l'épaisseur optique b_0 du système qui est définie au préfacteur géométrique près telle que

$$b_0 \propto \frac{N}{(k_0L)^2}. \tag{2.99}$$

Une remarque importante est que dans la limite des systèmes de petite taille devant la longueur d'onde, le nombre de modes transverses devient égal à l'unité $k_0L \simeq 1$ ce qui nous permet de retrouver la limite de Dicke sur les taux d'émission collectifs ($\propto N\Gamma_0$).

D'un point de vue expérimental, les expériences ayant détectées des états superradiants sont plus communes que celle ayant détectées l'émission d'états sousradiants. Citons d'abord celles ayant observées directement une signature de la superradiance dans le domaine de l'optique dans une vapeur atomique de sodium [7, 91] ou bien encore en utilisant une mesure indirecte à l'aide d'un condensat de Bose-Einstein. En effet les états superradiants étant plus robustes que les états sousradiants leur détection expérimentale a été mainte fois possible dans différents systèmes. En ce qui concerne les travaux expérimentaux ayant observés une signature de la sousradiance, deux expériences ont été réalisées dans l'espace libre en utilisant une vapeur atomique de gallium [92] ou encore à l'aide de deux ions [93]. La difficulté de ce type d'expérience résidant dans le fait qu'une réduction du taux d'émission selon une mode et difficile à détecter.

Nous avons donc vu que les effets coopératifs en plus d'être à l'origine d'une augmentation du taux d'émission (superradiance) de l'excitation hors du système sont aussi à l'origine d'un piégeage (sousradiance) de l'excitation à l'intérieur de ce système par des effets d'interférences destructives. Ce dernier effet, où l'excitation est supposée rester idéalement un temps infini dans le système peut présenter dans ses signatures aussi bien théoriques qu'expérimentales des similarités avec des effets de localisation forte (localisation d'Anderson). Pour des systèmes dont la taille est supérieure à la longueur d'onde, il est clair qu'une différence pourra être faite dans le sens où les effets liés à la coopérativité sont censés dépendre de l'épaisseur optique b_0 et ceux liés à la localisation d'Anderson sont censé dépendre de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs dans le système. Par contre pour les systèmes de petites tailles cette distinction risque d'être plus délicate à faire. Enfin on peut conjecturer que les effets coopératifs se produisent aussi bien dans des milieux ordonnées que désordonnés alors que les effets de localisation forte de type Anderson ne se produisent que dans des milieux désordonnés.

5. En réalité il est plus précis de dire que l'approximation Timed Dicke est valide dans le régime de diffusion simple lorsque la pulsation de Rabi du faisceau incident est très petite devant la largeur naturelle de l'état excité pour un atome unique ($\Omega_0 \ll \Gamma_0$).

Chapitre 3

Étude numérique de la localisation de la lumière et des effets coopératifs.

Dans cette partie nous étudions numériquement les états propres de l'Hamiltonien effectif que nous avons dérivé au chapitre précédent. Comme nous l'avons discuté précédemment, cet opérateur appartenant à la famille des Matrices Aléatoires Euclidiennes (ERM) est difficilement intégrable pour un système contant plus de $N = 2$ atomes il faut donc utiliser des approches numériques afin de pouvoir se faire une idée sur le comportement de son spectre en fonction des différents paramètres du système que nous considérons.

L'étude des états et des valeurs propres de cet Hamiltonien effectif peut être achevée de deux manière différentes : soit en considérant son spectre dans son intégralité, ce qui est équivalent à considérer les propriétés statistiques des pôles de sa résolvante (la matrice de Green) et donc d'être en mesure d'obtenir des informations sur les classes d'universalités de ce système [27, 70, 26], soit en considérant le spectre de la partie imaginaire de cet Hamiltonien, ce qui est équivalent à l'étude de la relaxation dans les modes du vide d'un système de N dipôles (atomes à deux niveaux) couplés par la biais du champ électromagnétique qu'ils émettent [15][94]. Ces deux approches, utilisant le *même* Hamiltonien effectif, vont nous permettre de savoir si les effets de localisation de la lumière dans un nuage d'atomes froids (dipôles au repos) sont dus aux effets coopératifs, résultants de la synchronisation entre dipôles atomiques induite par les interactions longues portées (sousradiance/superradiance) ou aux effets cohérents d'interférences destructives liés au désordre (localisation d'Anderson). Ce type d'approche, malgré le fait de la non hermicité du Hamiltonien effectif, est couramment utilisée afin d'étudier les états propres d'un système ouvert [36, 44][95], permettant ainsi l'établissement de comportements universels sur les propriétés statistiques des distributions des valeurs propres ou encore l'établissement de relations entre ces dernières et les propriétés de transport du système.

Afin de rendre cette étude plus exacte pour les systèmes denses, nous tiendrons compte du caractère vectoriel de la lumière, en considérant le terme de champ proche de l'interaction dipôle-dipôle, et nous comparerons les résultats obtenus au cas scalaire, où les ondes émises par les dipôles sont des ondes sphériques. Nous remarquerons que cette approximation scalaire, bien que plus pratique par son intégrabilité analytique [77] [76], donne des résultats singulièrement différents lorsque l'on atteint des distances entre les diffuseurs (les atomes) de l'ordre de la longueur d'onde associée à leur transition atomique

1 Etude numérique des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif d'interaction matière-rayonnement.

1.1 Approche numérique.

Afin d'étudier numériquement les valeurs propres du Hamiltonien effectif exprimé à la section précédente, nous avons tout d'abord fixé la densité du système $\rho\lambda^3$, avec $\rho = N/V$, $V = L^3$ étant le volume du cube et N le nombre d'atomes, que nous augmentons progressivement pour considérer des systèmes contenants entre 10 et 4000 atomes.

Afin d'avoir une analogie avec les études sur la localisation d'Anderson nous nous référerons fréquemment au nombre de Ioffe-Regel $k_0 l$ [79], qui peut être vu comme le libre parcours moyen de transport l :

$$l = \frac{l_{sc}}{1 - < cos\varsigma >}, \tag{3.1}$$

exprimé en unité d'inverse de nombre d'onde $k_0 = \omega_0/c$. Dans l'équation (3.1), la quantité l_{sc} représente le libre parcours moyen de diffusion élastique définit par :

$$l_{sc} = \frac{1}{\rho\sigma_0}, \tag{3.2}$$

où σ_0 représente la section efficace de diffusion à résonance et $< cos\varsigma >$ est le paramètre d'anisotropie qui dépend fortement de la manière dont va être redistribuée l'énergie diffusée. Comme nous l'avons vu au début du chapitre précédent (eqs. (2.52 et 2.54), la section efficace de diffusion n'aura pas la même valeur dans les cas scalaire et vectoriel. En effet dans le cas scalaire son expression est $\sigma_0^{(s)} = 4\pi/k_0^2$ alors que dans le cas vectoriel elle diffère d'un préfacteur numérique tel que $\sigma_0^{(v)} = (3/2)4\pi/k_0^2$. Cela aura pour conséquence une différence entre les définitions des nombres de Ioffe-Regel entre ces deux cas telle que

$$k_0 l^{(v)} = \frac{2}{3} k_0 l^{(s)} \tag{3.3}$$

pour une densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs donnée. Cette différence quantitative dans la définition du libre parcours moyen de diffusion l_{sc} (et de manière équivalente celle du libre parcours moyen de transport l) selon le cas que l'on considère, aura pour conséquence également une différence quantitative de l'épaisseur optique b_0 dans les cas scalaire et vectoriel. Dans un souci de rigueur, lorsque nous parlerons du cas scalaire (ou respectivement du cas vectoriel) exclusivement nous donnerons donc les précisions $b_0^{(s)}$ pour l'épaisseur

optique et $k_0 l^{(s)}$ pour le nombre de Ioffe-Regel (et respectivement $b_0^{(v)}$ et $k_0 l^{(v)}$) spécifiques à ce cas. Lorsque nous énoncerons des conditions ou des propriétés communes aux deux cas nous ne ferons pas cette distinction.

En plus de cela, l'utilisation du critère de Ioffe-Regel $k_0 l$ nécessite la prise de certaines précautions car la définition du libre parcours moyen de transport l telle qu'elle est définie à l'équation (3.1) n'est valable que dans l'approximation de diffusion indépendante (ISA) [96]. De plus nous avons énoncé que le paramètre d'anisotropie où $< cos\varsigma >$, où $\langle . \rangle$ représente dans ce cas la moyenne angulaire, dépend de la manière dont est redistribuée l'énergie diffusée. En effet dans le cas d'une diffusion isotrope il se moyenne à zéro alors que dans le cas d'une redistribution des vecteur d'ondes $\mathbf{k}'$ selon une direction il se moyenne à 1 aboutissant à la divergence du libre parcours moyen, on peut donc s'attendre à ce que le libre parcours moyen de transport diverge localement lorsque deux atomes sont très proches l'un de l'autre et que le transfert d'un atome vers l'autre se fait via le champ longitudinal (eq. 2.36) . Dans le cas scalaire, où les atomes sont décrit par des dipôles ponctuels dont le diagramme de rayonnement est isotrope le facteur d'anisotropie se moyenne tout naturellement à 0 et il en est de même dans le cas vectoriel lorsque l'on considère des dipôles éloignée dont l'orientation de leur moment dipolaire est aléatoire. Cependant il peut y avoir des corrections au libre parcours moyen lorsque deux dipôles sont très proche l'une de l'autre dans le cas vectoriel. Dans cet ouvrage nous ne discuterons pas de manière formelle ces corrections, il faut donc voir le libre parcours moyen de transport l et par conséquent le critère de Ioffe-Regel ($k_0 l \sim 1$) comme des quantités qualitatives nous permettant de connaître quel est la *densité effective* du système.

Fixer le nombre d'atomes et la densité du système nous permet d'accéder à deux autre paramètres qui sont la taille du système, que l'on exprimera en unités d'inverse de nombre d'onde $k_0 L$ et l'épaisseur optique $b_0 = k_0 L / k_0 l$. Ensuite nous tirons les positions des atomes à l'intérieur du système et nous diagonalisons le Hamiltonien effectif dans le cas scalaire (eq. (2.90)) et vectoriel (eq.(2.87)) pour une même configuration atomique, afin d'avoir une comparaison assidue entre les cas scalaire et vectoriels. Enfin nous réitérons cette procédure pour moyenner sur différentes configuration spatiales atomiques pour augmenter notre statistique sur les distributions des valeurs propres. Dans cette étude le nombre de configurations atomiques variera typiquement entre 10 et 100 configurations atomiques. Enfin cette étude a été réalisée à l'aide du logiciel MATLAB.

1.2 Etude du comportement des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif pour $N = 2$ atomes.

La considération du cas simple traitant seulement $N = 2$ atomes peut nous permettre d'avoir une idée sur le comportement des valeurs propres dans le plan complexe dans des cas comprenant plus d'éléments. En effet que ce soit dans le cas scalaire aussi bien que dans le cas vectoriel, les expressions des valeurs propres pour deux atomes peuvent s'obtenir de manière formelle. Dans le cas scalaire on obtient facilement que les valeurs propres décrivant un système composé de $N = 2$ atomes sont symétriques et non dégénérées telles que :

$$\Lambda_{\pm} = -\frac{\hbar\Gamma_0}{2}\left(i \pm \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r}\right) \tag{3.4}$$

Une étude rapide de cette expression nous montre que dans la limite où $k_0 r \to \infty$ elles vont se regrouper dans le plan complexe autour du point de coordonnées $(0, -\frac{i}{2})$ et lorsque deux atomes sont proches l'un de l'autre ($k_0 r \to 0$) leur parties imaginaires vont tendre respectivement vers 0 et i et leur parties réelles vers $-\infty$ et $+\infty$. Ces états sont associés aux états sousradiant et superradiant prédit dans le papier original de R. H. Dicke [6]. Nombreuses sont les études qui discutent du comportement des paire d'atomes dans le cas scalaire. En effet, certains travaux on démontrés que les photons superradiant créaient un potentiel attractif entre les paire d'atomes [97][48]. Tout comme dans ce travaux, on peut aussi considérer séparément les parties réelles et imaginaires de l'équation (3.4) et remarquer que la partie réelle, telle que :

$$\Re(\Lambda_\pm) = \mp \frac{\hbar\Gamma_0}{2} \frac{\cos(k_0 r)}{k_0 r} \tag{3.5}$$

qui est communément appelé cosinus cardinal, va diverger lorsque deux atomes seront très proches alors que la partie imaginaire, décrite quant à elle par un sinus cardinal telle que :

$$\Im(\Lambda_\pm) = -\frac{\hbar\Gamma_0}{2}(1 \pm \frac{\sin(k_0 r)}{k_0 r}) \tag{3.6}$$

tendra soit vers la valeur 1 pour l'état superradiant et la valeur 0 pour l'état sousradiant. En associant la position de l'état d'excitation collective à la partie réelle des valeurs propres telle que $E_{at} = \Re(\Lambda)$ et en associant la largeur Γ_{at} de cet état telle que $\Gamma_{at} = -2\Im(\Lambda)$, on remarque que l'état superradiant correspond à la valeur Λ_+ et le sousradiant à la valeur Λ_-. L'état propre correspondant à la valeur propre Λ_+ peut s'exprimer dans la base canonique tel que :

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle + |ge\rangle) \tag{3.7}$$

on peut donc remarquer que c'est un état symétrique, et celui correspondant à l'état sousradiant s'exprime tel que

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle - |ge\rangle) \tag{3.8}$$

qui est un état anti symétrique.

L'obtention des valeurs propres pour $N = 2$ atomes dans le cas vectoriel, bien que d'apparence plus compliqué, peut être achevée de manière assez simple à partir de l'équation (2.87) et appliquant une rotation unitaire nous permettant de superposer l'état $|e_i^z\rangle$ (eq. (2.55)) à l'état $|e_i^r\rangle$, où r dans ce cas bien précis représente l'axe portant la distance atomique. Nous allons donc considérer un état de polarisation dit longitudinal et deux états de polarisation transverses. Ayant effectué cette transformation, le problème se réduit à diagonaliser un opérateur 6×6 diagonal par blocs ce qui est similaire à la diagonalisation d'une matrice 2×2. Au final, on obtient deux valeurs propres de multiplicités $m_\Lambda = 1$, correspondant à la situation où les deux moments dipolaires sont alignés selon le même axe tel que :

$$\Lambda_\pm^{(1)} = -\frac{\hbar\Gamma_0}{2}\left(i \pm \frac{3}{2} e^{ik_0 r}\left[-\frac{2i}{(k_0 r)^2} + \frac{2}{(k_0 r)^3}\right]\right) \tag{3.9}$$

et deux autres valeurs propres de multiplicités $m_\Lambda = 2$, correspondant à la situation où les moments dipolaires sont orthogonaux entre eux tel que :

$$\Lambda_\pm^{(2)} = -\frac{\hbar\Gamma_0}{2}\left(i \pm \frac{3}{2} e^{ik_0 r}\left[\frac{1}{k_0 r} + \frac{i}{(k_0 r)^2} - \frac{1}{(k_0 r)^3}\right]\right) \tag{3.10}$$

Il est à noter que les équations (3.9) et (3.10) correspondent aux modes transverse magnétique (TM) et transverse électrique (TEM) lorsque l'on considère une chaîne de diffuseurs diélectriques couplés [87]. En effet, que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel, le cas simple à deux atomes, placés aléatoirement dans un espace à trois dimensions, peut être ramené à un problème à une dimension par le biais d'une rotation unitaire, ce qui nous permet de découpler les modes transverse magnétiques TM et électriques TEM. Ce découplage existant entre les modes transverse n'est valable que pour de problèmes à 1 dimension spatiale et n'est plus valable lorsque l'on considère des dimensions supérieures ($d = 2$ et $d = 3$), ce qui correspond pour nous au cas à $N = 3$ atomes. Dans ce cas les modes TM et TEM interfèrent provoquant l'apparition de résonances dues à ces interférences. Dans des problèmes à deux dimensions il est encore possible de privilégier un certain type de modes transverses ce qui n'est pas possible dans un problème à trois dimensions, ce qui fait toute la difficulté de ce type d'études dans des milieux à trois dimensions.

Afin d'obtenir les déplacements en fréquences et les élargissements spectraux associés aux valeurs propres explicitées aux équations (3.9) et (3.10) nous explicitons les parties réelles et imaginaires de ces deux expressions. Pour la valeur propre de multiplicité $m_\Lambda = 1$ on obtient pour le déplacement radiatif :

$$\Re(\Lambda_\pm^{(1)}) = \mp\frac{\hbar\Gamma_0}{2}\left(3\left[\frac{\sin(k_0 r)}{(k_0 r)^2} + \frac{\cos(k_0 r)}{(k_0 r)^3}\right]\right) \tag{3.11}$$

et pour l'élargissement spectral :

$$\Im(\Lambda_\pm^{(1)}) = -\frac{\hbar\Gamma_0}{2}\left(1 \pm 3\left[-\frac{\cos(k_0 r)}{(k_0 r)^2} + \frac{\sin(k_0 r)}{(k_0 r)^3}\right]\right). \tag{3.12}$$

Pour la valeur propre de multiplicité $m_\Lambda = 2$ nous obtenons pour le déplacement en fréquences :

$$\Re(\Lambda_\pm^{(2)}) = \mp\frac{\hbar\Gamma_0}{2}\left(\frac{3}{2}\left[\frac{\cos(k_0 r)}{(k_0 r)} - \frac{\sin(k_0 r)}{(k_0 r)^2} - \frac{\cos(k_0 r)}{(k_0 r)^3}\right]\right) \tag{3.13}$$

et pour l'élargissement spectral :

$$\Im(\Lambda_\pm^{(2)}) = -\frac{\hbar\Gamma_0}{2}\left(1 \pm \frac{3}{2}\left[\frac{\sin(k_0 r)}{(k_0 r)} + \frac{\cos(k_0 r)}{(k_0 r)^2} - \frac{\sin(k_0 r)}{(k_0 r)^3}\right]\right). \tag{3.14}$$

En développant les équations (3.11) et (3.13) en $k_0 r \to 0$, on remarque que les termes dominants sont de l'ordre de $\cos(x)/x^3$ ce qui nous montre que les déplacements radiatifs décrits par ces expression vont diverger vers $+\infty$ et $-\infty$, par contre en développant les parties imaginaires aux équations (3.12) et (3.14) on remarque que les termes en $\cos(x)/x^2$ et $\sin(x)/x^3$ vont se compenser à l'ordre 0 et donner la valeur $1/3$ à l'ordre 1 ce qui montre que les parties imaginaires de $\Lambda_\pm^{(1)}$ vont converger vers le valeurs 0 et 1 respectivement.

De manière similaire au cas scalaire, les valeurs propres $\Lambda_\pm^{(1)}$ (eq. (3.9))de multiplicité $m_\Lambda = 1$ correspondent aux états propres :

$$|\Psi_+^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e^z g\rangle + |g e^z\rangle) \tag{3.15}$$

pour l'état superradiant et :

$$|\Psi_-^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e^z g\rangle + |g e^z\rangle), \tag{3.16}$$

pour l'état correspondant à l'état sousradiant. De même pour les états propres associés aux valeurs propres $\Lambda_{\pm}^{(1)}$ (eq. (3.10)) de multiplicité $m_\Lambda = 2$ sont :

$$|\Psi_{+}^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e^{(x,y)}g\rangle + |ge^{(x,y)}\rangle) \tag{3.17}$$

pour les états superradiants et :

$$|\Psi_{-}^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e^{(x,y)}g\rangle + |ge^{(x,y)}\rangle), \tag{3.18}$$

pour les états sousradiants.

Il est utile de noter que les vecteurs décris par les équations (3.15) à (3.18) sont orthogonaux ce qui n'est plus le cas pour un système contenant un nombre d'éléments supérieur à $N = 2$ atomes. Il n'est cependant pas tout à fait exact de dire que l'Hamiltonien effectif est hermitien pour $N = 2$ atomes et non hermitien pour N supérieur à 2 atomes, cependant, dans le cas spécifique de 2 atomes, le spectre du Hamiltonien effectif est équivalent au spectre de la somme de deux opérateurs hermitien qui sont sa partie réelle et sa partie imaginaire.

La figure 3.1 nous montre l'évolution des largeurs Γ_{at} et des positions en énergies des modes, associé aux états d'excitation collective correspondant aux états sousradiant et superradiant, en fonction de la distance interatomique $k_0 r$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite). On remarque bien la levé de dégénérescence entre les états symétrique et antisymétrique apparaissant lorsque la distance interatomique est de l'ordre de la longueur d'onde λ, associée à la transition entre l'état fondamental et excité pour un atome unique.

1.3 Distributions des valeurs propres dans le plan complexe.

En se rappelant de la forme générale des valeurs propres de H_{eff} (eq. (2.89)) et le fait que ce soit un opérateur non hermitien, on peut prédire facilement qu'il y ait de fortes chances pour que ses valeurs propres Λ_i aient des propriétés remarquables dans le plan complexe. En effet, les opérateurs décrits par les équations (2.90) et (2.87) appartiennent à la famille des Matrices Aléatoires Euclidiennes (ERM), qui sont utilisées dans des domaines singulièrement différents tels que l'étude des propriétés statistique liées à la dynamique à l'intérieur de noyaux atomiques [63] ou encore dans l'étude des états vibrationnels dans des milieux désordonnés [98]. Dans le cadre de l'interaction matière-rayonnement, plusieurs études les ont considérées notamment pour traiter des problèmes concernant la localisation au sens d'Anderson d'ondes électromagnétiques dans un milieu désordonné composé de diélectrique à trois dimensions [71]. C'est dans ce contexte que les propriétés dans le plan complexe des valeurs propres de l'hamiltonien effectif H_{eff} ont commencé à être considérées [25][70], aboutissant au développement de théories décrivant de manière rigoureuse leur comportements dans le plan complexe [77].

Pour une situation contenant plus de $N = 2$ atomes, il a été trouvé [77, 76] que dans la limite des milieux dilués $\rho\lambda^3 \ll 1$ de taille supérieure à la longueur d'onde $k_0 L > 2\pi$, la distribution de valeurs propres dans le plan complexe était contenue dans un cercle dont le rayon était proportionnel à l'épaisseur optique b_0 tel que $R \simeq \sqrt{b_0/2}$. Cette distribution circulaire, sans le comportement en épaisseur optique, a été démontrée dans les années 80 dans le cadre de travaux menés sur Matrices Aléatoires Euclidiennes non

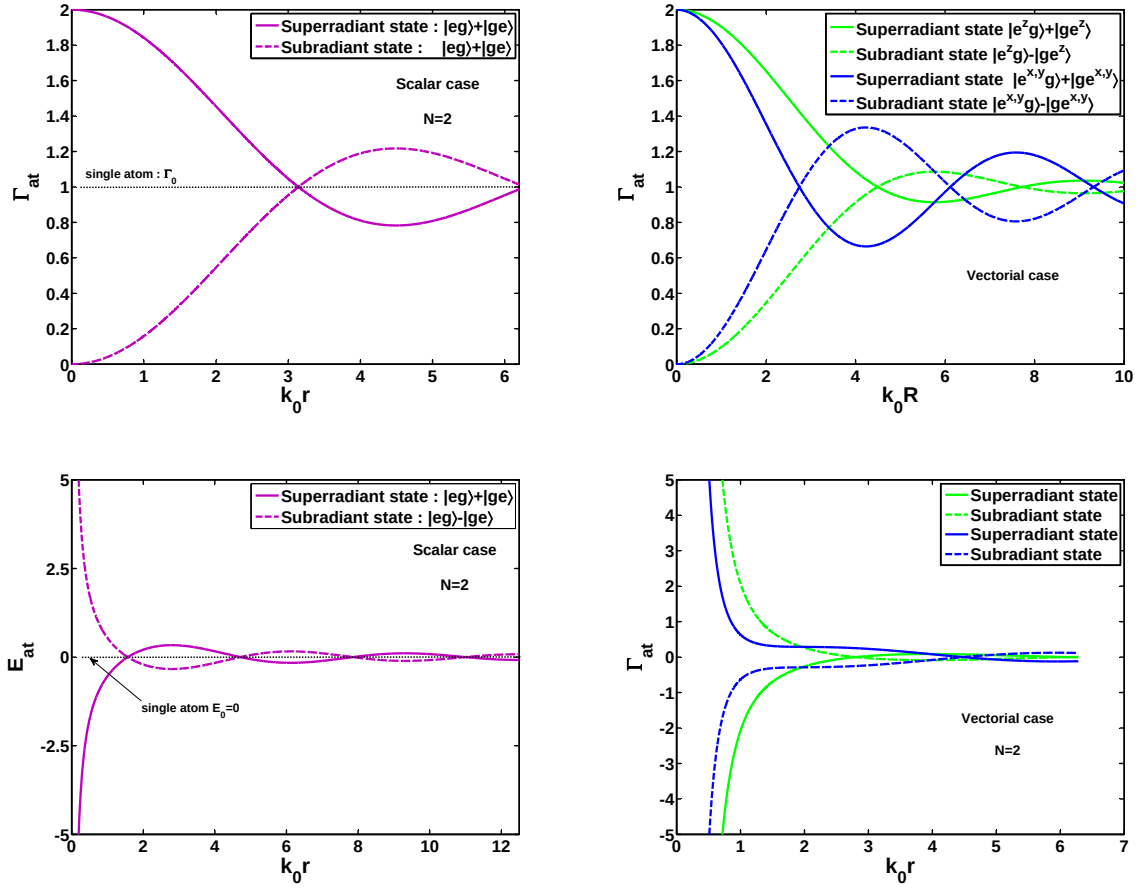

FIGURE 3.1 – Evolution des largeurs Γ_{at} des modes (figures du haut) et de leurs positions en énergies E_{at} (figure du bas) en fonction de la distance interatomique $k_0 r$ dans les cas scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droite) pour $N = 2$ atomes. Dans les deux cas on remarque un levé de dégénérescence singulier lorsque le distance interatomique devient inférieure à la longueur d'onde λ.

hermitienne [99] et a été ensuite réintroduite dans le cadre de travaux menés en physique nucléaire [63],[68]. D'une manière intuitive on peut expliquer ce comportement en $\sqrt{b_0}$ par les taux d'émissions associés au régime de diffusion multiple [40] qui est le régime prédominant lorsque le nuage est dilué et que son épaisseur optique commence à devenir non négligeable devant l'unité. De plus en se rappelant de la limite des équations (3.4)-(3.10) pour $k_0 r \to \infty$, on peut s'attendre à ce que ces distributions soient centrées autour de la valeur $(0, -\frac{i}{2})$ dans le plans complexe pour la limite de milieux dilués.

La figure 3.2 nous montre la répartition dans le plan complexe des valeurs propres de H_{eff} pour un nuage dilué ($\rho\lambda^3 = 0.01$) contenant $N = 500$ atomes sommé sur 66 réalisations différentes du désordre. On peut remarquer que dans le limite des milieux dilués ($\rho\lambda^3 \ll 1$), la considération du terme de champ proche de l'interaction dipôle-dipôle n'aboutit pas à des différences qualitatives entre les cas scalaire et vectoriel à l'exception des paires, qui sont représenté en trait plein sur cette figure, et qui ont été obtenues aux équations (3.4) dans le cas scalaire et (3.9) pour celles de multiplicité $m_\Lambda = 1$ et (3.10) pour celles de multiplicité $m_\Lambda = 2$ dans le cas vectoriel. On remarque clairement la frontière circulaire, observée précédemment par les autres travaux cités au début de cette section,

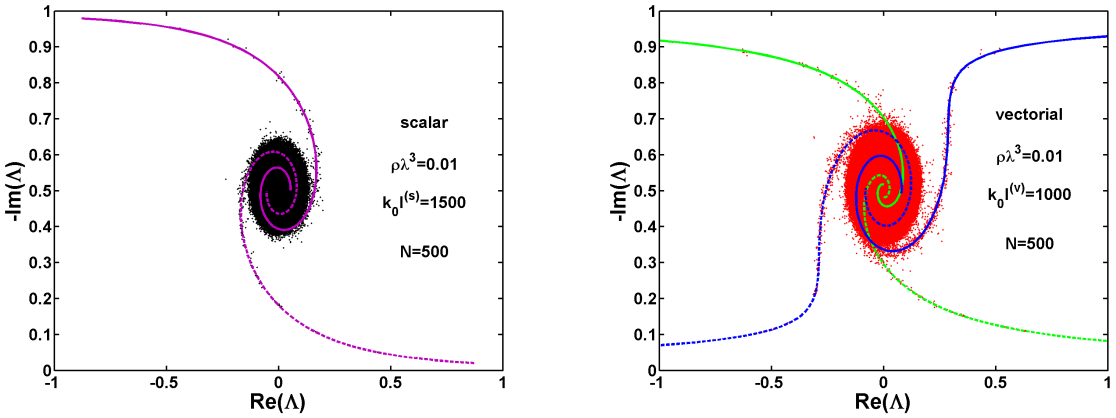

FIGURE 3.2 – Répartition dans le plan complexe des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite), pour un nuage contenant $N = 500$ atomes et une densité $\rho\lambda^3 = 0.01$, sommés sur 66 configurations spatiales différentes. Cette densité spatiale correspond à un nombre de Ioffe-Regel tel que $k_0 l^{(s)} = 1500$ dans le cas scalaire et $k_0 l^{(v)} = 1000$ dans le cas vectoriel ce qui nous donne un nuage d'épaisseur optique $b_0^{(s)} = 0.13$ dans le cas scalaire et $b_0^{(v)} = 0.21$ dans le cas vectoriel. Les courbes en traits pleins représentent les expressions obtenues pour le cas de $N = 2$ atomes dans le cas scalaire (eq. (3.4)) et vectoriel (vert eq. (3.9), bleu eq. (3.10)). On remarque que dans les deux cas les paires coopératives sont présentes même dans un milieu dilué et qu'elles dominent la physique des états ayant les temps de relaxations les plus long et les plus courts. Enfin on peut aussi voir que dans cette limite de paramètres (milieux dilués) la considération du terme de champ proche de l'interaction dipôle-dipôle n'amène pas de corrections majeures, à l'exception des paire coopératives présentes en plus grand nombre et de manière symétriques dans le ca vectoriel.

délimitant le domaine dans lequel est contenu l'ensemble des valeurs propres et on peut aussi voir que les états ayant les plus grands et les plus petits taux de décroissance sont ceux qui correspondent aux paires d'atomes dont la distance qui les sépare est inférieure à la longueur d'onde.

En considérant des milieux de plus en plus denses ($\rho\lambda^3 > 1$), il est connu que la loi de Marchenko-Pastur [100] atteint sa limite de validité. Selon cette dernière, associée au comportement découvert par Girko [99], dans la limite où la taille du système est supérieure à la longueur d'onde $k_0 L > 2\pi$ et qu'il contient un grand nombre d'éléments ($N \gg 1$), la frontière du domaine contenant les valeurs propres de H_{eff} va évoluer en suivant un cercle de rayon $R \sim \sqrt{b_0}$. Cependant il faut garder à l'esprit que la partie imaginaire des valeurs propres de H_{eff} sera toujours positive ou tendra au minimum vers 0 pour les états sousradiants ce qui n'est pas le cas pour la partie réelle des valeurs propres qui elle n'a pas de borne supérieure donnée. On peut donc s'attendre à ce que le centre (E_c,Γ_c) de l'ensemble des valeurs propres dans le plan complexe évolue selon l'axe imaginaire (propre aux largeurs des modes) en fonction des paramètres ($b_0, \rho\lambda^3$,...) du système. Il peut donc être probable que la limite de validité de la loi de Marchenko-Pastur soit atteinte lorsque le centre de l'ensemble des valeurs propres dans le plan complexe croise la frontière délimitant le domaine contenant ces valeurs propres. La figure 3.3, nous montre l'évolution du centre des distributions des valeurs propres dans le plan complexe en fonction de l'épaisseur optique b_0 dans le cas scalaire et de l'épaisseur optique corrigée

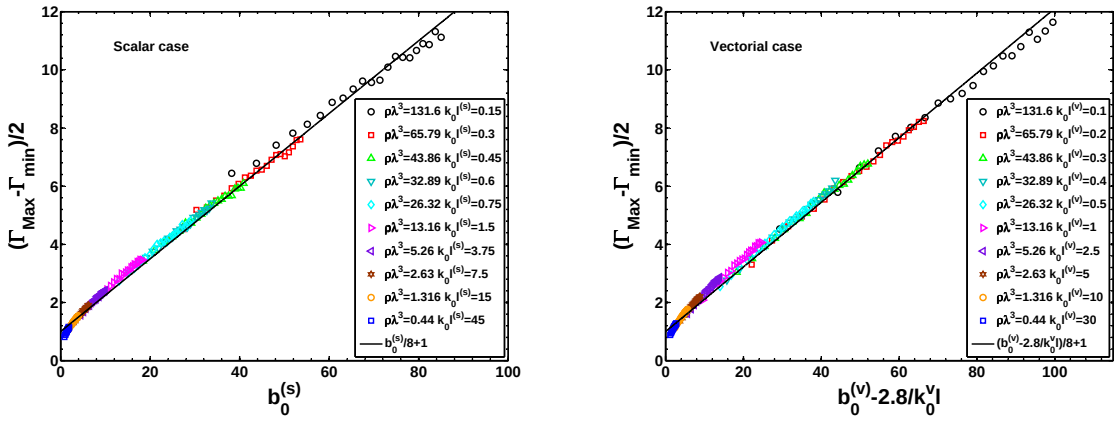

FIGURE 3.3 – Évolution du centre des distributions, tel qu'il est définis à l'équation (3.19), dans le cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour différentes densités ($\rho\lambda^3 = 0.44$ à 131.6) en fonction de l'épaisseur optique b_0. On peut remarquer une différence qualitative entre les cas scalaire et vectoriel qui est la dépendance en densité (exprimée en nombre de Ioffe Regel $k_0 l$) de cette quantité dans le cas vectoriel.

par la densité $b_0 - 2.8/k_0 l^{(v)}$ dans le cas vectoriel. Selon l'axe imaginaire, le centre des distributions des valeurs propres dans le plan complexe a été définit tel que :

$$\langle \Gamma_c \rangle = \frac{\Gamma_{Max} - \Gamma_{min}}{2} \tag{3.19}$$

afin de ne pas faire l'hypothèse d'une répartition ergodique des valeurs propres dans ce plan ce qui nous aurais conduit à le définir comme le barycentre des parties imaginaires. Notons que ce dernier est associé à la trace de l'Hamiltonien effectif $\mathrm{Tr}(H_{eff})$ et donc toujours égal à $N\Gamma_0/N = 1$. Ici $\Gamma_{Max} = \max_i(\Gamma_i)$ est la largeur maximum, $\Gamma_{min} = \min_i(\Gamma_i)$ la largeur minimum des modes et $\langle . \rangle$ représente la moyenne sur les configurations spatiales. Il est aussi à noter que nous avons négligé le déplacement de ce centre selon l'axe réel, nous y reviendrons lorsque nous discuterons brièvement du déplacement de Lamb collectif [101] plus tard dans ce manuscrit. On peut remarquer qu'il existe une différence qualitative dans les comportements des quantités Γ_c entre les cas scalaire et vectoriel dans la mesure où ce dernier présente une dépendance en densité spatiale $\rho\lambda^3$ du système qui devient non négligeable lorsque l'on considère des milieux denses ($\rho\lambda^3 \gg 1$ ou $k_0 l^{(v)} \ll 1$). Pour le cas scalaire on peut observer que le centre des distributions évolue linéairement en fonction de b_0 uniquement tel que :

$$\Gamma_c = \frac{b_0^{(s)}}{8} + 1 \tag{3.20}$$

et dans le cas vectoriel on remarque qu'il évolue en fonction de l'épaisseur optique corrigée pas la densité du système telle que :

$$\Gamma_c = \frac{b_0^{(v)} - 2.8/k_0 l^{(v)}}{9} + 1 \tag{3.21}$$

On remarque donc que la composante du centre Γ_c selon l'axe imaginaire de l'ensemble des valeurs propres dans le plan complexe exhibe un comportement linéaire en épaisseur optique $\Gamma_c \propto b_0$ alors que le comportement de la frontière supérieur de cet ensemble prédit

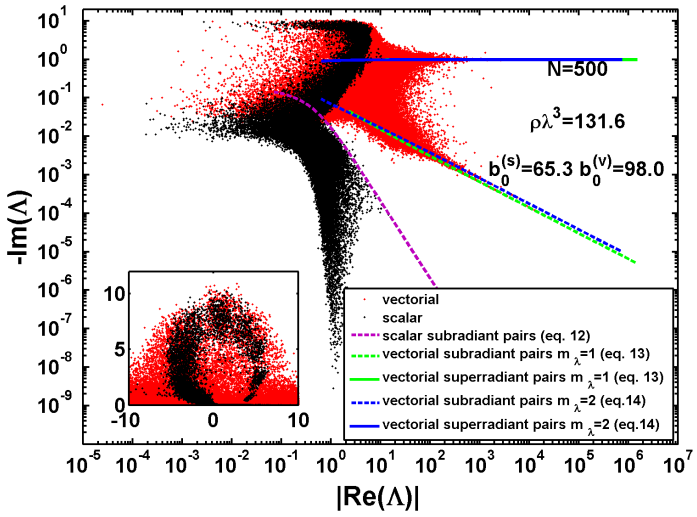

FIGURE 3.4 – Représentation log-log de la distribution dans le plan complexe des valeurs propres de H_{eff} pour un nuage dense ($\rho\lambda^3 = 131.6$) contenant $N = 500$ atomes sommés sur 66 configurations spatiales différentes. Contrairement au régime dilué, où les cas scalaire et vectoriels ne présentent que peu de différence qualitative à l'exception de paires coopératives d'atomes, on remarque dans le régime dense des différences drastiques entre les deux cas. Les courbes en trait pleins représentent encore les expressions obtenus dans le cas $N = 2$ atomes (eqs. (3.4)-(3.10)). On remarque que dans le cas vectoriel les modes ayant les plus long temps de vies (dont les parties imaginaires $-\Im(\Lambda)$ sont les plus petites) sont dominés par la physique des paires coopératives ce qui n'est pas les cas dans le cas scalaire, où la branche contenant les modes à longs temps de vies n'est pas décrite par l'équation (3.4). L'inset représente le zoom autour de $\Re(\Lambda) = 0$ de la distribution de ces valeurs propres. On remarque que la ségrégation entre les valeurs propre, plus connues sous le nom de transition de phase superradiante, est moins prononcée dans le cas vectoriel.

par la loi de Marchenko-Pastur selon le même axe est censé augmenter en fonction de la racine carrée de l'épaisseur optique ($\propto \sqrt{b_0}$)[102]. On peut donc s'attendre à ce qu'il y ait une limite où l'épaisseur optique est telle que le centre Γ_c soit au-dessus de la limite prédit par la loi de Marcheko-Pastur et que cette dernière ne soit plus valide.

La figure 3.4 présente en représentation logarithmique (avec en abscisse $|E_{at}|$) la superposition dans les cas scalaire et vectoriel de la répartition dans le plan complexe des valeurs propres de H_{eff} pour un nuage contenant $N = 500$ atomes à une densité $\rho\lambda^3 = 131.6$ sommé sur 66 configuration spatiales. Cette densité spatiale correspond à un nombre de Ioffe-Regel de $k_0 l^{(s)} = 0.15$ dans le cas scalaire et $k_0 l^{(v)} = 0.1$ dans le cas vectoriel. Les courbes en traits pleins représentent à nouveau les expressions obtenues pour les paires coopératives dans le cas de $N = 2$ atomes (eqs. (3.4),(3.9) et (3.10)). Contrairement au régime dilué, qui ne présente que peu de différences entre les deux cas, la prise en considération du terme de champ proche de l'interaction dipôle-dipôle conduit à des différences drastiques entre les cas scalaires et vectoriel lorsque l'on atteint les régimes denses ($\rho\lambda^3 \gg 1$). La première différence remarquable est la présence singulièrement plus prononcés des paires coopératives (superradiantes et sousradiantes) dans le cas vectoriel contrairement au cas scalaire où les paires superradiantes semblent disparaître. Cette

disparition des paires dans le cas scalaire peut être expliquée de manière intuitive et provient essentiellement du fait que le déplacement en fréquence de ces dernières n'est pas suffisamment grand afin qu'elles ne se couplent pas à d'autres états de paires coopératives.

Une autre différence frappante, est la présence dans le cas scalaire d'une concentration de valeurs propres ayant un long temps de vie ($\Im(\Lambda) \ll -0.5$) dans une bande d'énergie centrée autour de le valeur $\Re(\Lambda) \simeq 1$ alors que pour le cas vectoriel, il est clairement visible que les modes ayant les plus long temps de vie sont regroupés autour des branches données par les expressions analytiques (3.9) et (3.10) ce qui nous permet de dire qu'ils sont dominés par la physique des paire coopératives. Comme nous l'avons énoncé précédemment, il est à noter que le potentiel d'interaction associé au cas scalaire (eq.2.90) est souvent utilisé dans des études portant sur des effets de localisation forte due au désordre (Localisation d'Anderson) [26][27] [70]. Il faut donc être prudent vis à vis des conclusions que l'on peut avoir sur les modes ayant un long temps de vie car le cas vectoriel, plus correct pour décrire la dynamique des régimes denses pour la lumière, ne conduit pas forcément aux mêmes observations.

Enfin, l'inset de la figure 3.4 est un zoom en représentation linéaire autour de la valeur $\Re(\Lambda) = 0$ de la distribution de valeurs propres dans le plan complexe pour les mêmes paramètres, soulignant l'apparition d'un trou moins prononcée entre les valeurs propres dans le cas vectoriel. Cette absence de valeurs propres dans certaines zones du plan complexe, apparaissant aux hautes densités ($\rho\lambda^3 \gg 1$), a été associée par certaines études [103] à la transition de phase. Il est donc utile de discuter quel paramètre domine l'apparition de ce phénomène et de rappeler certaines propriétés associées à un phénomène nommé transition superradiante.

Discussion sur la séparation des valeurs propres dans le plan complexe pour le cas scalaire.

D'une manière générale, la transition superradiante peut être vue comme une transition de phase quantique du second ordre entre un régime où il n'y a pas de corrélations entre les différents états et un régime au-delà d'un certain couplage critique entre la matière et le rayonnement où les états sont corrélés aboutissant à l'apparition de modes superradiant [104, 105, 106]. Ce type de comportement a été obtenus au début des années 70 en considérant plusieurs niveaux de la cascade radiative (1, 2, 3 excitations...) et plusieurs modes transverse couplant le système à l'environnement pour un nombre N d'atomes tendant vers l'infinis afin que les calculs analytiques soient faits dans la limite thermodynamique [107].

Plusieurs travaux théoriques ont été dédiés à la compréhension des conditions nécessaires à l'existence de cette transition de phase, notamment sur le paramètre d'ordre, qui est assimilé à la densité spatiale atomique lorsque l'on considère le hamiltonien d'interaction matière rayonnement en jauge $D.E$ [108] ou encore sur l'influence des approximations faites lors du passage de la jauge $P.A$ à la jauge $D.E$ [109]. Il a été longtemps discuté que l'origine de cette transition était due à l'affranchissement des termes en A^2 dans l'hamiltonien décrit à l'équation (2.56) [110], à la présence des termes antirésonnants qui sont négligés l'approximation de l'onde tournante [111] ou encore à l'absence d'un champ extérieur [112].

Dans la situation décrivant un unique mode transverse couplant le système à l'environnement extérieur il a été trouvé qu'une ségrégation entre un mode superradiant et les reste des modes apparaissait [113] de manière indépendante à la nature de la dynamique

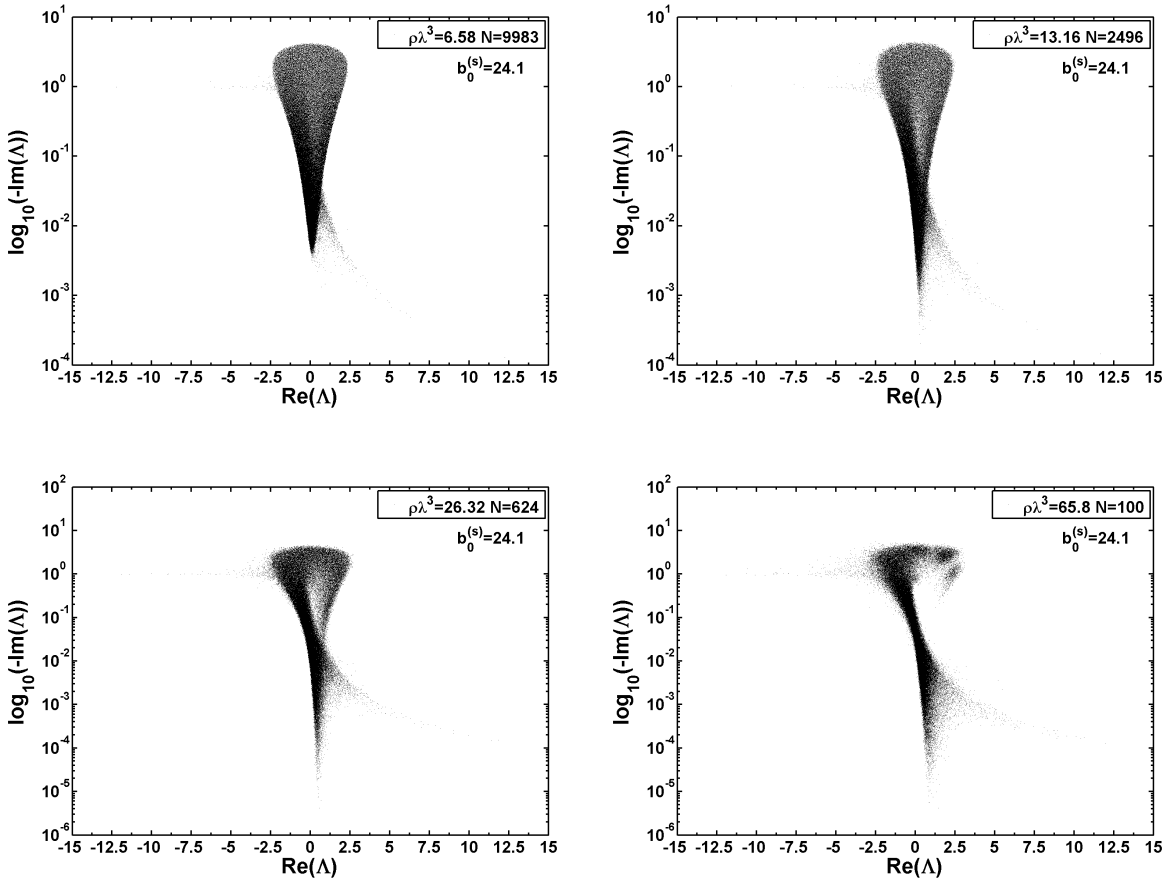

FIGURE 3.5 – Représentation dans le plan complexe des valeurs propres de H_{eff} dans le cas scalaire pour une épaisseur optique constante $b_0(s) = 24.1$ et différentes densités spatiales d'atomes $\rho\lambda^3 = 6.56$ à 65.58 sommé entre 10 et 1000 configurations spatiales. On remarque clairement l'apparition d'un trou à la densité $\rho\lambda^3 = 26.32$ qui se transforme continûment en une ségrégation au fur et à mesure que la densité du système diminue.

(intégrable ou chaotique) à l'intérieur du système. L'étude de l'influence de cette ségrégation sur la localisation d'Anderson a été aussi considérée dans des milieux 1D [114] et il a été trouvé dans ce cas que l'ouverture du système n'avait que peu de conséquences sur les comportements des modes localisés.

Dans notre situation, où nous nous intéressons à un nuage d'atomes (assimilés à des systèmes à deux niveaux) couplés à un réservoir, qui est le continuum et est par conséquent singulièrement différent d'une cavité, le nombre de canaux reliant notre système à l'environnement est associé à la taille transverse du nuage ($\sim (k_0 L)^2$) et la force de couplage de ces canaux peut être vu comme le nombre moyen d'atomes par canaux, c'est à dire par unité de modes transverse du nuage. C'est pourquoi lorsque nous étudions des milieux dilués nous nous référons souvent à l'épaisseur optique $b_0 \sim N/(k_0 L)^2$ afin d'étudier le comportement des états coopératifs. Cela dit, bien que nos calcul soient limités en nombre d'atomes ($\sim 10^4$) ce qui nous empêche de considérer des systèmes denses et grands à la fois, il est intéressant de savoir si la ségrégation des valeurs propres dans le plan complexe est uniquement un effet lié à l'épaisseur optique ou si c'est aussi un effet de taille ou de densité spatiale du système. L'objet de notre étude ne portant pas sur la description thermodynamique de l'invariance de jauge [115], nous nous contenterons d'amener des

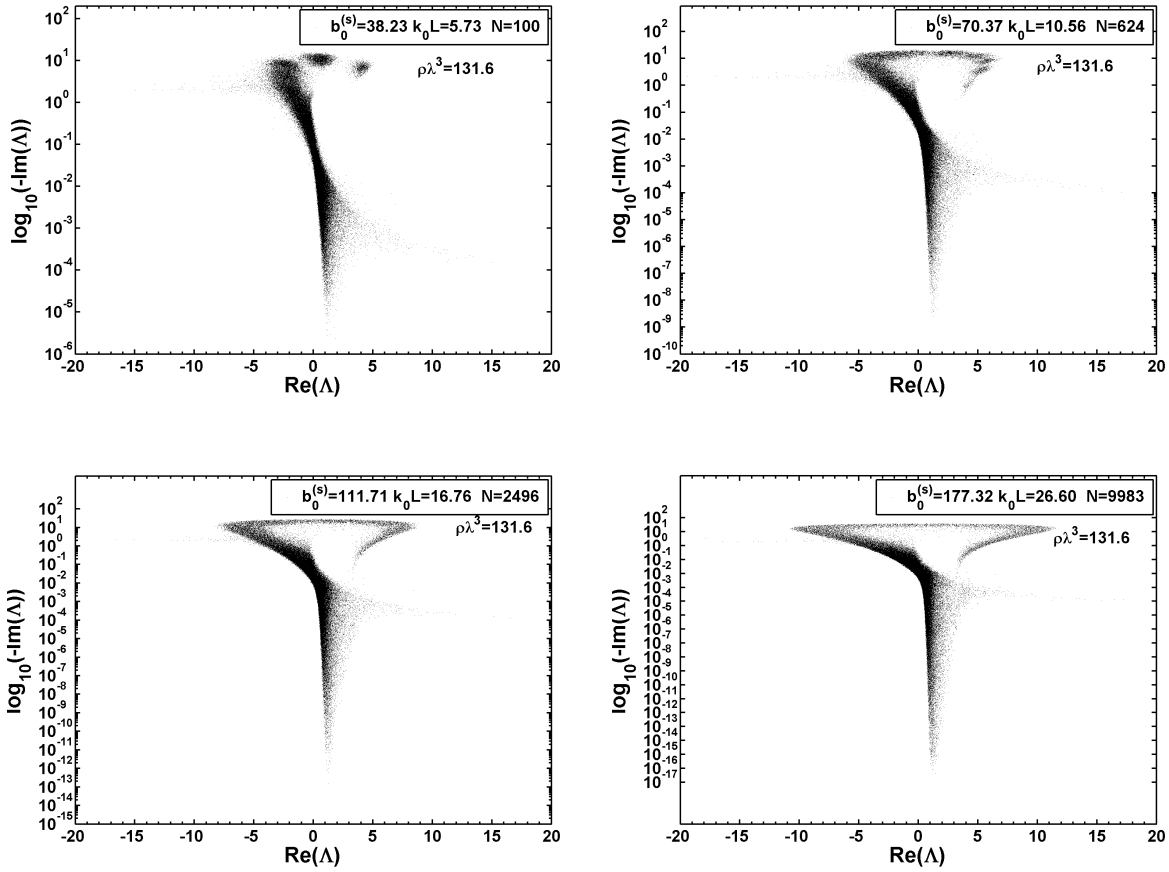

FIGURE 3.6 – Représentation dans le plan complexe des valeurs propres de H_{eff} dans le cas scalaire pour une densité spatiale de diffuseurs constante $\rho\lambda^3 = 131.6$ et différentes épaisseurs optiques $b_0^{(s)} = 38.23$ à 177.32. ici quelle que soit l'épaisseur optique considérée, on remarque que la branche des valeurs propres (accumulation autour de l'énergie $E_{at} = 1$) aux très longs temps de vies est toujours présente. Ce qui nous permet de pouvoir associer l'existence de ces modes aux longs temps de vie à un effet de densité.

éléments de réponse, basés sur des observations numériques, afin de comprendre l'origine de la ségrégation entre les valeurs propres dans notre modèle.

La figure 3.5 nous montre la répartition dans le plan complexe des valeurs propres de H_{eff} pour le cas scalaire (eq. (2.90)) pour une densité optique $b_0^{(s)} = 24.1$ constante et différentes densités spatiales de diffuseurs. On remarque clairement une transition continue entre une répartition ergodique des valeurs propres vers une ségrégation apparaissant aux grandes densités ($\rho\lambda^3 > 26.32$) passant tout d'abord par l'apparition d'un trou dans les distributions de valeurs propres. Afin de se convaincre que cette transition n'est pas un effet d'épaisseur optique, nous considérons un système à une densité fixée $\rho\lambda^3 = 131.6$ en faisant varier le nombre d'atomes, on remarque clairement que la densité des valeurs propres dans le plan complexe passe d'une forme d'îlots à une forme d'anneau. La figure 3.6 nous montre la répartition des valeurs propres dans le plan complexe pour un nuage dense ($\rho\lambda^3 = 131.6$) et différentes épaisseur optiques allant de $b_0^{(s)} = 38.23$ pour $N = 100$ à $b_0^{(s)} = 177.32$ pour $N = 9983$. Alors que la taille du système augmente et devient plus grande que la longueur d'onde ($k_0 L > 2\pi$), on remarque clairement la répartition

des valeurs propres dans le plan complexe passer d'une ségrégation totale (répartition en 'îlots' bien distincts) à une distribution annulaire (c'est à dire en forme d'anneau). Dans le contexte d'études théoriques menées sur des opérateurs non gaussien et non hermitien, il a été obtenu analytiquement qu'il existait une transition entre un phase où les valeurs propres de ces opérateurs étaient contenues sur une disque dans le plan complexe (au même titre que les résultats que nous avons obtenus à la figure 3.2) et une phase où les valeurs propres étaient disposées sur un anneau dans le plan complexe, ce que l'on remarque clairement aux figures 3.5 et 3.6 [116].

1.4 Distribution des largeurs des modes dans les cas scalaires et vectoriels.

Un autre aspect intéressant et tout aussi important dans le cadre d'étude sur les systèmes ouverts désordonnés, est l'étude des largeurs des modes $\Gamma_{at} = -2\Im(\Lambda)$ et plus précisément des propriétés statistiques de leurs distributions $P(\Gamma_{at})$. En effet l'ouverture d'un système a pour conséquences l'élargissement et le décalage en fréquence de ces modes qui sont originalement décrits par des deltas de Dirac dans le cas de systèmes fermés.

La question de l'influence du couplage d'un système au continuum sur ses propriétés de transport s'est rapidement posé dans le cadre d'études sur la localisation d'Anderson, qui au départ avait été prédite de manière théorique dans un milieu désordonnés à trois dimensions dans la limite thermodynamique [4]. C'est en reliant les propriétés spectrales à celles de transport par le biais d'un paramètre unique qui est la conductance adimensionnée g qu'a été ensuite prédit théoriquement l'existence d'une transition de phase entre une phase métallique (où tous les modes sont délocalisés et la diffusion multiple domine la dynamique du système) et une phase isolante (où tous les modes sont localisés spatialement) [20].

Originalement l'étude des propriétés statistiques des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ a été introduite dans le cadre d'études sur les systèmes chaotiques ouverts [117], qui sont des systèmes dont l'aspect non intégrable provient de leurs géométrie ou leur conditions aux limites et non de leurs inhomogénéité comme c'est le cas dans les systèmes que nous considérons. Ce type d'approche a été ensuite utilisé pour décrire les propriétés de transport dans des systèmes ouvert désordonnés [36] décrit par le *Tight Binding Hamiltonian* et plusieurs comportement universels de ces distributions ont été mis en évidences dans les différentes phases (métalliques, isolante et point critique). Ces travaux ont aussi montrés que les détails microscopiques du désordre n'avaient pas d'influence sur l'existence de la transition de phase entre le régime métallique et isolant [44].

Bien que l'on puisse tenter d'extrapoler certains de ces comportements universels à notre situation, il faut garder à l'esprit la présence du terme d'interaction longue portée dans les systèmes que nous considérons, qui sont des ensembles désordonnés de dipôles ponctuels couplés entre eux par le biais du champ. On peut donc se servir comme référence des propriétés universelles qui ont été obtenues avec le *Tight Binding Hamiltonian*, qui ne considère que des interactions entre plus proches voisins, mais il faut garder une certaine prudence vis à vis des conclusions que l'on peut tirer car le terme d'interaction longue portée peut avoir une influence non négligeable sur la dynamique du système.

Dans cette section nous allons tout d'abord discuter des propriétés des distributions des largeurs des modes dans différents régimes (dilués, dense spatialement et optiquement), et nous verrons quelles analogies peuvent être avec les propriétés universelles des largeurs

des modes obtenues dans d'autres travaux. Nous présenterons ensuite les résultats numériques que nous avons obtenus sur les distributions des largeurs de modes et enfin nous discuterons de leurs comportements asymptotiques et de ceux de leurs distributions.

1.4.a *Discussion sur les comportements phénoménologique des distributions des largeurs de modes dans certains régimes.*

Bien que l'on ait énoncé précédemment la complexité reliée à l'étude du transport d'une onde dans un milieu désordonné, il est possible d'obtenir dans certains cas limites et sous certaine hypothèses fortes des informations sur les comportements des distributions $P(\Gamma_{at})$ des largeurs de modes. C'est notamment les cas pour le *Tight Binding Hamiltonian*, ne prenant en compte que les interactions plus proches, où il est possible d'obtenir de manière phénoménologique dans les régimes diffusifs et isolants les lois sur les distributions des largeurs de modes dans certaine gammes précises d'énergie. Il est également possible d'obtenir d'autres comportements remarquables sur le taux de d'émission de la densité spectrale d'énergie à partir de l'équation de diffusion classique. Notons que dans ce dernier cas, les résultats obtenus sont à relier plus rigoureusement au taux d'émission du photon, qui sera étudié plus tard dans ce manuscrit, mais que certaines études font parfois l'extrapolation pour les distributions des largeurs des modes [36][44]. Il faut garder à l'esprit que l'obtention phénoménologique de ces comportements dépend fortement des hypothèses qui sont faites sur la manière dont le système est couplé à son réservoir (au continuum) et également dont l'énergie est initialement distribuée à l'intérieur du système.

Dans cette partie nous allons dériver deux comportements souvent évoqués dans ce type d'études et discuter des hypothèses fortes qui les accompagnent et nous discuterons ensuite de quelques autres lois singulières associées à des régimes bien précis (localisation forte, prélocalisation...). Dans tous les cas il faut garder à l'esprit que ces comportements ont été dérivés dans le cadres d'interactions plus proches voisins et qu'il y ait de grande chances pour qu'ils ne soient plus exacts dans le type de systèmes que nous considérons où des interactions longues protées entre éléments sont présentes. Il se peut cependant qu'il y ait des analogies dans certains cas limites.

Calcul classique sur le taux d'émission collectif dans le régime de diffusion multiple.

Afin d'obtenir la loi de puissance des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ associée au régime de diffusion multiple, nous partons de l'équation de diffusion pour une sphère homogène de taille R :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{3.22}$$

où $u = u(r,t)$ est la densité spectrale en énergie. Il est à noter que pour ce calcul une géométrie sphérique est considérée (d'où la forme du Laplacien) et qu'il est admis que les fonctions d'onde représentant la densité spectrale en énergie admet les même symétries que le problème (invariance par rotation). Le second membre de l'équation (3.22) est aussi nul car on considère un milieu passif, c'est à dire qu'il ne contient aucune source d'énergie.

En se servant de la méthode de séparation des variables, qui nous permet de poser $u(r,t) = F(r)G(t)$, et des conditions aux limites $u(R,t) = 0$, on peut obtenir une solution

générale à l'équation (3.22) telle que :

$$u(r,t) = \sum_n a_n F_n(r) \exp(-DB_n^2 t) \tag{3.23}$$

où

$$\begin{cases} F_n(r) = \dfrac{1}{4\pi R} \sin\left(\dfrac{n\pi r}{R}\right) \\ B_n = \dfrac{n\pi}{R} \end{cases} \tag{3.24}$$

Il est à noter que les fonctions d'ondes $F_n(r)$, qui sont les modes propres de diffusion du système, forment une base orthonormée. En considérant qu'à l'instant initial $t = 0$, la répartition d'énergie soit uniforme dans le milieu telle que :

$$u(r,0) = \frac{3U_0}{4\pi R^3} \tag{3.25}$$

il va nous être possible de calculer le taux de désexcitation du système, qui peut être vu comme la décroissance exponentielle au cours du temps de l'énergie stockée à l'intérieur du système. En décomposant l'état initial (eq. (3.25)) sur la base de modes de diffusion (eq. (3.23)), c'est à dire en faisant le produit scalaire entre ces deux fonctions, on peut expliciter les coefficients de Fourier a_n tels que :

$$a_n = \langle F_n(r) | u(r,0) \rangle = \frac{3U_0}{4\pi R^4} \int_0^R r \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) dr \tag{3.26}$$

qui s'intègre de manière formelle en donnant :

$$a_n = \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \frac{3U_0}{4\pi^2 R^2} \tag{3.27}$$

On peut donc réinjecter cette expression dans l'équation (3.23) afin de calculer l'énergie présente à l'intérieur du système au temps t telle que :

$$u(t) = \int_{\mathcal{S}} u(r,t) = \sum_n \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \frac{3U_0}{\pi R^2} \exp(-DB_n^2 t) \int_0^R r \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) dr \tag{3.28}$$

où $\mathcal{S}$ représente la surface par laquelle transite l'énergie du système vers le réservoir (le continuum). Il est à noter que nous avons fait l'hypothèse d'un transfert surfacique de l'énergie contenue dans le système vers le continuum, ce qui va donner un résultat singulièrement différents au cas l'où on considérerait un transfert volumique ou par le biais d'un unique site. En posant $\Gamma_n = DB_n^2$, la solution de l'équation (3.28) s'écrit :

$$u(t) = U_0 \sum_n \frac{3}{\pi^2 n^2} \exp(-\Gamma_n t) \tag{3.29}$$

En se rappelant de la définition de B_n (eq. (3.24)) on peut réécrire Γ_n tel que :

$$\Gamma_n = D\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 \tag{3.30}$$

ce qui nous permet de réécrire l'équation (3.29) comme :

$$u(t) = U_0 \sum_n \frac{3D}{R^2 \Gamma_n} \exp(-\Gamma_n t) \tag{3.31}$$

En traitant n comme une variable continue on peut différencier l'équation (3.30) par rapport à n, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{d\Gamma_n}{dn} = 2nD\left(\frac{\pi}{R}\right)^2 = 2\frac{\pi}{R}\sqrt{D}\sqrt{\Gamma_n} \tag{3.32}$$

De plus traiter n comme une variable continue nous permet de remplacer la somme par une intégrale continue dans l'équation (3.31) ce qui nous permet de relier la densité d'états $P(n)$ à la densité de taux d'émission $P(\Gamma)$ ($P(\Gamma)d\Gamma = P(n)dn$) :

$$P(\Gamma) \propto \frac{1}{\Gamma}\frac{dn}{d\Gamma} \tag{3.33}$$

En utilisant l'expression précédente et l'équation (3.32) on obtient que dans le régime diffusif, la distribution des largeurs des modes se comporte comme

$$P(\Gamma) \propto \Gamma^{-\frac{3}{2}} \tag{3.34}$$

Il est important de souligner que la loi de puissance que nous venons d'obtenir dépend fortement des conditions aux bords, de la manière dont est répartie initialement l'énergie à l'intérieur du système et aussi de la manière dont cette dernière s'échappe du système. Il faut aussi remarquer que le fait de traiter n comme une variable continue rend cette loi phénoménologique uniquement valable dans la gamme $\Gamma > \Gamma_0$.

Nous avons donc retrouvé à l'aide d'un calcul simple un des comportements attendu sur les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans le régime de diffusion multiple. Cette loi de puissance a été observée numériquement dans de nombreuses études et sa dépendance vis à vis de l'ouverture du système a même été prédite de manière phénoménologique et observé ensuite numériquement [44].

Loi de puissance des distributions des largeurs de modes propres aux états localisés proches de la frontière du système.

Dans la même philosophie que la section précédente, la loi associée aux modes localisés au sens d'Anderson, qui sont situés sur les bords du système et qui fuient à travers ces bords, peut être obtenue aussi en invoquant quelques arguments phénoménologiques. En ne passant pas cette fois par l'équation de diffusion (3.22), la dérivation de cette loi est nettement plus simple. Tout d'abord il faut admettre que les modes localisés sont uniformément répartis à l'intérieur du système tel que :

$$\begin{cases} P(r) = \dfrac{1}{L^3} \; r < R \\ P(r) = 0 \; r > R \end{cases} \tag{3.35}$$

et que leur taux d'émission Γ est directement relié à la distance r' qui les sépare de la bordure du système tel que

$$\Gamma \sim \Gamma_0 e^{-\frac{r'}{\xi}} \tag{3.36}$$

où ξ représente la longueur de localisation, qui est la zone sur laquelle s'étend le mode localisé ($\Psi(r) \sim \exp(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/\xi)$). En admettant que la répartition des résonances est ergodique dans le système tout comme l'est la distribution des diffuseurs (les atomes), on peut donc en tirer que la probabilité intégrée de trouver une résonance ayant une

taux démission Γ', inférieur à Γ et équivalent à celle de trouver un mode à une distance r' des bord du système supérieure à r telle que $P(\Gamma' < \Gamma) \propto P(r' > r)$. Sachant que $P(r' > r) \propto \mu_d(R - r')/\mu_d(R)$, ce qui représente une coquille centrée en 0 d'épaisseur dr et qui dépend aussi de la géométrie considérée avec $\mu_d(R - r') = R^3 - (R - r')^3$ et $\mu_d(R) = R^3$ on obtient au final que la distribution de largeurs des modes associée à ces états est proportionnelle à :

$$P(\Gamma') = \frac{dr'}{d\Gamma'} \frac{d}{dr'} \frac{\mu_d(R - r')}{\mu_d(R)} \tag{3.37}$$

en se servant de l'hypothèse fait à l'équation (3.36) on peut exprimer r' en fonction de Γ' ce qui nous permet d'obtenir au final la loi de puissance :

$$P(\Gamma') = -\frac{\xi}{\Gamma'} \frac{d}{dr'} \frac{\mu_d(R - r')}{\mu_d(R)} \tag{3.38}$$

Le terme $\dfrac{d}{dr'} \dfrac{\mu_d(R - r')}{\mu_d(R)}$ dépend de la géométrie du système et de sa dimension mais n'affectera en aucun cas l'exposant de cette loi de puissance. De nombreuses études [95, 118, 44] concernant le *Tight Binding Hamiltonian*, où seules les interactions plus proches voisins sont considérées, ont obtenues une loi de puissance similaire aux modes localisés proches de la bordure du système et se couplant au continuum à travers elle. Par contre il est capital de souligner que l'hypothèse de fuites par les bords du système est exacte dans le cas d'interactions plus proches voisins, car l'excitation devra être sur un site près de la frontière du système afin de se coupler au continuum mais elle n'est peut-être pas valide dans les situations que nous considérons ou des interactions longues portées (entre sites/atomes éloignés) sont possibles. Il se peut donc que l'hypothèse de couplage surfacique des excitations avec le continuum ne soit plus valide et que cette loi soit reliée à un tout autre type de physique associée elle aussi à des modes ayant un long temps de vie dans le système comme les modes sousradiants par exemple.

Comportements singuliers des distributions du taux démission pour les autres régimes.

Il faut aussi noter qu'il n'y a pas uniquement les deux lois dérivées précédemment qui sont associées à des régimes caractéristiques dans le genre de problèmes que nous considérons. En effet, en utilisant des arguments phénoménologiques comme nous l'avons fait dans les deux parties précédentes il est aussi possible d'obtenir les comportements des distributions du taux d'émission dans les régimes balistique et fortement localisé.

Le régime balistique correspond à des tailles de système inférieures au libre parcours moyen de transport ($L < l$). Dans ce régime l'excitation ne subit pas d'évènement de diffusion et sa distributions spatiale dans le milieu dépend seulement de sa célérité v et de son taux d'émission tel que :

$$r(\Gamma) = \frac{v}{\Gamma} \tag{3.39}$$

ce qui nous donne comme distribution en utilisant la relation (3.37) :

$$P(\Gamma) = \frac{1}{\Gamma^2} \tag{3.40}$$

Il est à noter qu'une loi de puissance similaire a aussi été obtenue analytiquement et observée numériquement pour le régime diffusif dans la situation où le couplage entre le système et le continuum se fait par un unique site sur la bordure du système. On retrouve également un comportement similaire dans le régime diffusif dans le cas de systèmes à 2 dimensions [119].

Dans le cadre de travaux, dans le régime de diffusion multiple pour des systèmes désordonnés dans la phase métallique, il est apparu que des déviations étaient présentes aux comportement initialement prévus par la théorie de matrices aléatoire pour les régime métalliques. Ces déviations sont causées par la présence de modes prélocalisés situés au centre du système dont l'existence est très peu affectée par l'ouverture de ce dernier. Ils ont été observé avec de nombreux modèle et de différentes manières, notamment par l'étude des distributions de l'intensité des états propres (qui est directement reliée à la distribution des largeurs des modes) [120] ou encore en considérant le modèle du *Kicked Rotor* à deux dimensions en considérant les distributions des largeurs des modes [121]. D'une manière générale le comportement des distributions des largeurs des modes reliées à ces états prélocalisés peut s'écrire sous la forme :

$$P(1/\Gamma) \sim \exp(-C(D)\ln^d(1/\Gamma)) \tag{3.41}$$

où d représente la dimension du système et $C(D)$ est une constante reliée au coefficient de diffusion.

Enfin dans le régime localisé, en plus du comportement que nous avons précédemment dérivé de manière phénoménologique dans la partie précédente, une autre loi, associée aux modes exponentiellement localisés au centre du nuage a été établie par plusieurs travaux [95] [122]. C'est en considérant un milieu ouvert désordonné composé de cavités diélectriques que la loi log normale, associée aux modes exponentiellement localisés au centre du nuage a été découverte [122]. Il est apparu que cette loi dépendait à la fois de la longueur de localisation ξ et de la taille du système telle que :

$$P(\Gamma) \sim \exp(-f\left(\frac{\xi}{L}\right)\ln^2(\Gamma)) \tag{3.42}$$

où la fonction $f(\xi/L)$ est une fonction linéaire dépendant à la fois de la longueur de localisation ξ et de la taille du système L. On peut remarquer que pour des systèmes dont la taille est très grande devant la longueur de localisation, la contribution de cette distribution devient négligeable. On peut comprendre facilement le comportement décrit par l'équation (3.42) en faisant l'hypothèse que les composantes des états localisés sont distribués de manière aléatoire sans aucune corrélation longues portées et que localement la longueur de localisation est distribuée selon un processus stochastique suivant une loi log-normale. Bien qu'il ne faille pas confondre corrélations et interactions longues protées, il est donc à prévoir que l'observation de cette loi dans le type de système que nous considérons semble compromise.

Enfin il a été observé numériquement que les distributions des largeurs des modes étaient décrites par une loi de puissance au point critique telle que [36, 44][123] :

$$P(\Gamma) \propto \Gamma^{-1-\frac{1}{d}} = \Gamma^{-\frac{4}{3}} \tag{3.43}$$

où $d = 3$ est la dimension du système. Ce comportement a été assimilé à de la diffusion anormale au point critique et est supposé être un comportement universel, qui ne dépend pas par conséquent des détails microscopique du système que l'on considère.

1.4.b *Résultats numériques sur les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans les cas scalaire et vectoriel.*

Après avoir discuté de manière phénoménologique des taux de désexcitation de la densité spectrale d'énergie dans différents régimes (diffusion multiple, isolant, point critique) et des hypothèses qui les entourent, nous allons présenter les résultats numériques que nous avons obtenus sur les distributions largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ de l'hamiltonien effectif H_{eff}.

Dans une situation décrivant plus de $N = 2$ atomes, les largeurs des modes ne correspondent pas exactement au temps de vie du mode à l'intérieur du système avant de se coupler au continuum. En effet il est plus exact de voir les largeurs Γ_{at} comme étant proportionnelles au temps que va passer le système dans cet état d'excitation avant de se coupler à un ou plusieurs autres états d'excitation. Cependant l'étude des propriétés statistiques de la partie imaginaire des valeurs propres de l'hamiltonien effectif peut nous amener certaines informations capitales sur les propriétés de transport à l'intérieur du système.

A priori on peut s'attendre à ce que pour les cas scalaire et vectoriels, dans la limite de milieux spatialement et optiquement dilués ($\rho\lambda^3 \ll 1$ et $b_0 \ll 1$), la physique de l'atome unique domine la dynamique du système et que par conséquent les distributions de largeurs des modes soit centrés autour de $\Gamma_0 = 1$, correspondant à la largeur naturelle de l'état excité pour un atome unique (non perturbé). Que ce soit en augmentant la taille ou la densité du système on s'attend de manière logique à ce que le nombre de modes ayant un long temps de vie (largeur inférieure à Γ_0) augmente, soit à cause des effets de diffusion multiples soit à cause d'autre effets cohérents, qui sont la localisation forte à cause du désordre ou les effets de sousradiance.

La figure 3.7 montre les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans les cas scalaire et vectoriels pour un nuage contenant $N = 700$ atomes moyenné sur 60 configurations spatiales pour des densités allant de $\rho\lambda^3 = 0.44$ à $\rho\lambda^3 = 131.6$. Comme l'on s'y attendait pour des milieux dilués, où la physique de l'atome unique est dominante, les distributions $P(\Gamma_{at})$ sont piquées autour de $\Gamma_0 = 1$ et il n'y a pas beaucoup de différences entre les cas scalaire et vectoriel. La considération de nuages plus denses spatialement $\rho\lambda^3 \gg 1$ (et de manière équivalente plus denses optiquement $b_0 \gg 1$, le nombre d'atomes étant maintenus constant) nous permet d'observer l'apparition d'un nombre croissant de modes ayant un long temps vie ($\Gamma_{at} > \Gamma_0$). Cependant on remarque également l'apparition de modes ayant des temps de vies de plus en plus courts ($\Gamma_{at} > \Gamma_0$), ce qui est un argument en la défaveur des effets de localisation forte liés au désordre, dont la théorie prévoit au-delà d'un certain seuil de désordre une localisation, c'est à dire une largeur des modes inférieure à celle de l'atome unique Γ_0, pour l'intégralité des modes. Il faut également noter qu'au même titre que les distributions des valeurs propres dans le plan complexe (figures 3.2 et 3.4), des différences qualitatives commencent à apparaître entre les cas scalaire et vectoriel lorsque l'on considère des systèmes spatialement et optiquement denses ($\rho\lambda^3 \gg 1$ et $b_0 \gg 1$).

De plus la loi $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-1}$, associée aux modes localisés au sens d'Anderson proches de la frontière du système et fuyant à travers elle et qui a soit disant été observée dans nos systèmes [26], n'apparaît pas de manière flagrante dans nos résultats numériques. En effet la loi de puissance que nous observons se rapproche de $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-4/3}$ à la place Γ_{at}^{-1}, ce qui est à rapprocher d'un comportement sous diffusif apparaissant à la transition Métal-Isolant [36] en admettant que les comportements universels prévus pour le modèle d'Anderson ouvert soient valides dans nos systèmes où les interactions longues portées

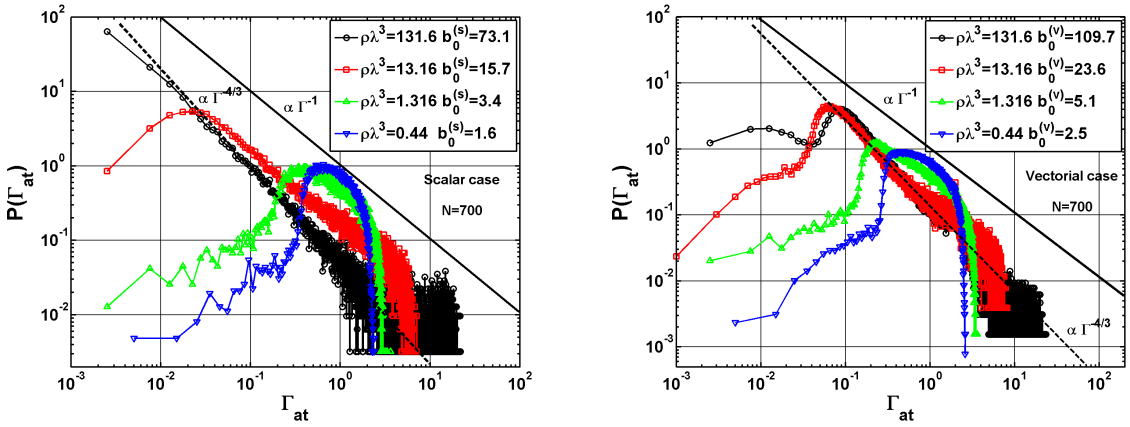

FIGURE 3.7 – Représentation en log-log des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour un nuage contenant $N = 700$ atomes pour différentes densités spatiales de diffuseurs allant de $\rho\lambda^3 = 0.44$ à $\rho\lambda^3 = 131.6$, moyenné sur 60 configurations spatiales. Dans les deux cas alors que la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$ (et par conséquent l'épaisseur optique b_0) augmentent, on observe un accroissement du nombre de modes ayant un long temps de vie (dont la largeur est inférieure à $\Gamma_0 = 1$). Cependant de manière équivalente on observe aussi l'apparition de modes ayant un temps de vie très court $\Gamma > \Gamma_0$ et la loi associée aux modes localisés proches de la frontière du système $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-1}$ n'est pas rigoureusement observée. En effet nous observons que la loi de puissance est plus proche de $P(\Gamma_{at} \propto \Gamma_{at}^{-4/3})$.

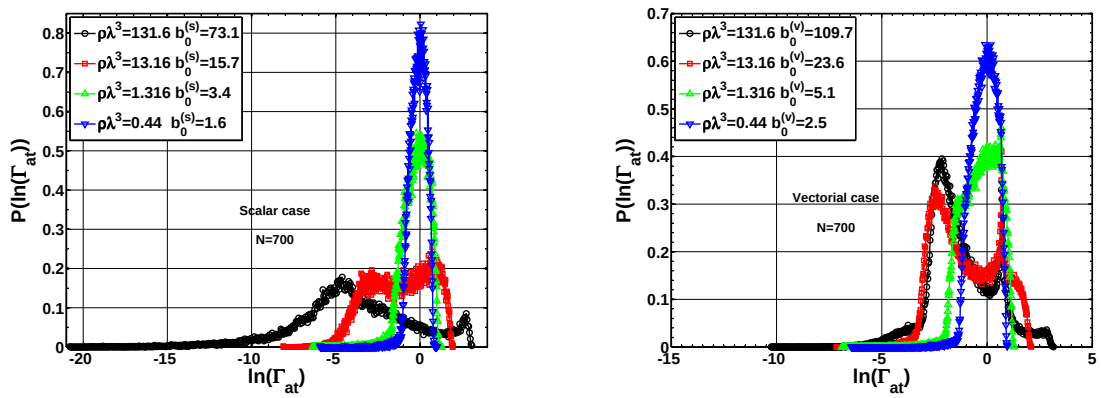

FIGURE 3.8 – Distribution des logarithmes des largeurs des modes $P\ln(\Gamma_{at})$ avec les mêmes paramètres qu'à la figure 3.7 afin de s'assurer de l'absence de la loi log normale associée aux modes exponentiellement localisés au centre du nuage. A ce stade on ne peut pas affirmer que cette loi est présente dans nos résultats numériques.

sont présentes.

Enfin, bien que nous confirmerons cette affirmation après s'être affranchis des états associés aux paire coopérative, nous n'observons pas à ces stade la loi log-normale associée aux modes localisés exponentiellement au centre du nuage (figure 3.8), qui est caractéristique de la localisation d'Anderson [117][124] [36][123]. Des absences d'observations similaires de cette loi ont été faites en considérant la fonction de Green associée à l'équation de diffusion dans un slab à 3 dimensions [125].

A ce stade nous pouvons donc dire que l'étude seule des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ ne nous permet pas de trancher de manière rigoureuse si les effets de localisation du photon dans un nuage d'atomes froids sont dus aux effets coopératifs ou aux effets liés au désordre.

Discussion sur l'origine de la loi de puissance des distributions de largeurs des modes.

Bien que nous ayons observé précédemment le comportement en loi de puissance pour les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-\alpha}$ dans les régimes denses (optiquement ou spatialement), la non convergence de l'exposant vers la valeurs $\alpha = -1$ nous pousse à remettre en question la validité de cette loi pour le type de systèmes que nous considérons, où les interactions longue portée sont présente et qu'une excitation au centre du nuage peut se coupler au continuum.

Il a déjà été discuté dans certains travaux [77] en considérant les distributions des largeurs des modes ayant une partie réelle (énergie) proche de 0 $P(\Gamma_{at}|E_{at} \simeq 0)$, que la présence de cette loi de puissance n'était pas reliée exclusivement à la densité spatiale de diffuseurs ($\rho\lambda^3$) mais aussi à l'épaisseur optique du système b_0. De plus d'autre études portant sur des systèmes de dimensions inférieure ($d = 2$) ont aussi observé que l'exposant convergeait de manière continue d'une valeur différente de $\alpha = -1$ vers la valeur $\alpha = -1$ [26].

Donner une réponse définitive à cette question n'est pas totalement trivial dans la mesure où nos calculs numériques sont limités à un nombre maximum d'atomes ($\sim 10^4$ atomes), ce qui implique qu'il est difficile de considérer à la fois des milieux denses et de grandes tailles. Afin d'amener des éléments de réponse à cette question, nous allons considérer deux cas distincts, le premiers où la densité du système $\rho\lambda^3$ est maintenue constante et l'épaisseur optique b_0 augmente et le deuxième où l'épaisseur optique est constante et la densité varie.

La figure 3.9 nous montre les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans les cas scalaire (figures de gauches) et vectoriel (figures de droites) pour différents nuages contenant entre $N = 15$ et $N = 15000$ atomes pour un système dont la densité spatiale de diffuseurs et maintenue constante ($\rho\lambda^3 = 13.16$, figures du haut) et un système dont l'épaisseur optique $b_0^{(s)} = 8.3$ et $b_0^{(v)} = 12.5$ est constante (figures du bas). En considérant le cas où la densité spatiale de diffuseurs est constante $\rho\lambda^3$ pour un épaisseur optique qui augmente ($b_0^{(s)} = 4.38$ à 45.75 dans le cas scalaire et $b_0^{(v)} = 6.56$ à 42.25 dans le cas vectoriel), on remarque clairement que l'exposant de la loi de puissance $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-\alpha}$ converge de manière continue vers la valeurs $\alpha = 4/3$, ce qui nous indique que l'exposant de cette loi de puissance est clairement dominé par l'épaisseur optique b_0 dans les deux cas. On peut considérer le problème de manière complémentaire où l'épaisseur optique est maintenue constante $b_0^{(s)} = 8.3$ et $b_0^{(v)} = 12.5$ en faisant varier la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$. Dans ce cas l'exposant de la loi de puissance ne varie que peu entre la valeur $\alpha = 0.9$ pour la densité $\rho\lambda^3 = 1.316$ et $\alpha = 1.1$ pour $\rho\lambda^3 = 26.32$ ce qui nous prouve que l'exposant de la décroissance algébrique $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-\alpha}$ est principalement dominé par les effets coopératifs et dépend par conséquent de l'épaisseur optique du système.

Un autre remarque importante est l'apparition accentuée dans le cas scalaire de modes aux longs temps de vies ($\Gamma_{at} \ll 1$) lorsque l'épaisseur optique $b_0^{(s)}$ est maintenue constante et que la densité spatiale de diffuseurs augmente. Ce comportement ne va pas dans le sens des effets coopératifs car il évolue en fonction de la densité spatiale ce qui privilégie un

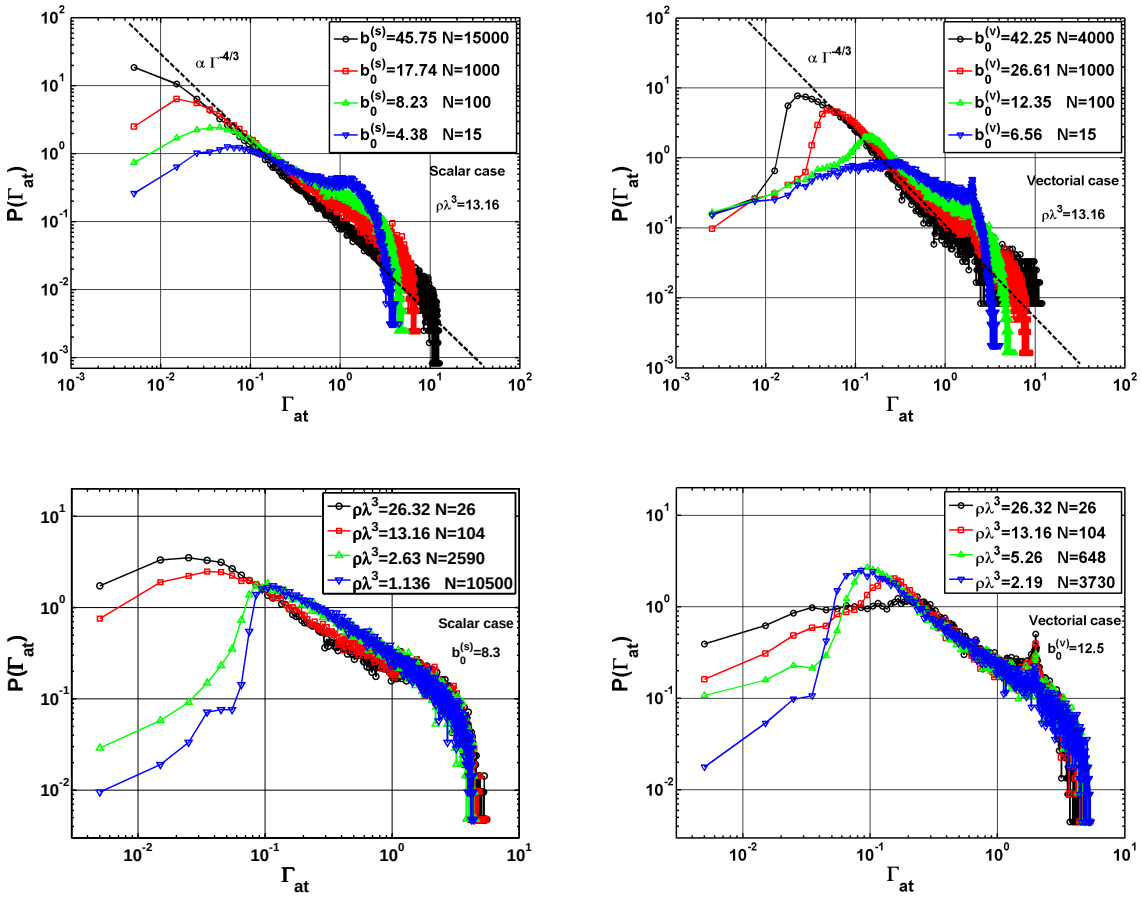

FIGURE 3.9 – Représentation en log-log des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans le cas scalaire (figures de gauche) et le cas vectoriel (figures de droites) pour une densité spatiale de diffuseurs constante ($\rho\lambda^3 = 13.16$) (figures du haut) et pour une épaisseur optique constante ($b_0^{(s)} = 8.3$ et $b_0^{(s)} = 12.5$) (figures du bas). Le nombre d'atome que nous considérons varie entre $N = 15$ à 10000 atomes et les données numériques sont moyennés entre 2000 à 10 configurations spatiales. Dans les figure du haut, on remarque clairement dans les deux cas (scalaire et vectoriel) l'exposant de la loi de puissance $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-\alpha}$ converger vers la valeur $\alpha = 4/3$ ce qui est une indication allant dans le sens où les effets coopératifs, dépendant majoritairement de l'épaisseur optique b_0 dans les milieux dont la taille est supérieur à la longueur d'onde ($L > \lambda$), dominent cet exposant. Dans les figures du bas, où la densité $\rho\lambda^3$ varie et l'épaisseur optique b_0 est maintenue constante, l'exposant α a tendance à rester autour de la même valeur en augmentant légèrement. Un ajustement linéaire sur les logarithmes des données nous permet d'extraire les exposant des décroissances algébriques pour les figure du bas qui varient entre $\alpha = 0.9$ et $\alpha = 1.1$.

comportement local pas forcément lié au désordre. Ces modes sont à relier directement à ceux présents dans la concentration, située autour de l'énergie $E_{at} = 1$, d'états ayant une très longue durée de vie . Cette concentration qui se manifeste par une branche dans le plan complexe (figure 3.4) apparaît effectivement lorsque la densité spatiale du système est élevée ($\rho\lambda^3 > 1$) et ne dépend aucunement de l'épaisseur optique b_0 du système comme nous l'avons vu à la section 1.3.

1.4.c *Comportements asymptotiques des distributions largeurs des modes.*

Après avoir considéré les distributions des largeurs des modes de l'Hamiltonien effectif, nous nous intéressons aux comportements asymptotiques de ces largeurs afin de voir s'ils ne contiennent pas d'informations sur les origines possibles de la localisation du photon à l'intérieur du nuage.

L'étude de certaines valeurs singulières (valeur maximum, minimum et valeur la plus probable) des largeurs des modes va nous permettre de savoir quel type de physique domine leur comportements. En effet si l'on remarque que ces valeurs sont uniquement fonction de la densité $\rho\lambda^3$ du système (ou de manière équivalente du nombre de Ioffe-Regel $k_0 l$) nous serons plus à même à penser que la dynamique de cette quantité est dominée par les effets liés au désordre alors que si le comportement de ces quantités sont dominé par l'épaisseur optique b_0 il est très probable que ce soient les effets coopératifs (superradiance/sousradiance) qui dominent cette physique. Il est à noter que le dernier argument n'est valable que dans la limite des systèmes dont la taille est supérieure à la longueur d'onde où l'épaisseur optique $b_0 \sim N/(k_0 L)^2$ peut être vu comme le nombre de canaux transverse couplant le système au continuum. Pour des tailles de systèmes inférieures à la longueur d'onde ce nombre de canaux transverses sera linéaire en fonction du nombre d'atomes N. De la même manière il faut aussi souligner qu'une dépendance unique en fonction de la densité du système n'est pas forcément reliée à des effets de localisation lié au désordre mais qu'elle souligne l'importance d'un effet local comparée à un effet global (qui sont les effets coopératifs).

Evolution de la valeur maximum moyenne des largeurs de modes.

Comme nous l'avons vu précédemment en considérant les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ (figure 3.7), pour un nombre d'atomes N fixé, le fait d'augmenter la densité spatiale $\rho\lambda^3$ du système et par conséquent son épaisseur optique b_0 conduit à l'apparition de modes ayant un très court temps de vie ($\Gamma_{at} > \Gamma_0$). Dans le cadre d'études sur le comportement des distributions des valeurs propres des Matrices Aléatoires Euclidienne il a été observé dans que la valeur maximum moyenne de la partie imaginaire du spectre de H_{eff} évoluait en racine carrée de l'épaisseur optique ($\propto \sqrt{b_0}$) pour des nuages optiquement dilués et que cette dépendance devenait linéaire ($\propto b_0$) pour de grandes épaisseurs optiques. Ce premier comportement pour les faibles épaisseurs optiques est une conséquence directe de la loi de Marchenko-Pastur ([76, 77]) et le second comportement a été extrapolé à partir de l'évolution du centre et du rayon des distributions dans le plan complexe pour de grande épaisseur optique.

Afin d'étudier le comportement de la valeur maximum moyenne des largeurs des modes en fonction des différents paramètres du système (épaisseur optique b_0, densité $\rho\lambda^3$ ou $k_0 l$), nous la définissons telle que :

$$\Gamma_{Max} = \langle \max_i(\Gamma_i) \rangle \tag{3.44}$$

où $\langle\cdot\rangle$ correspond à la moyenne sur les configurations spatiales, nous avons ensuite appliqué la méthode des moindres carrés à nos données numériques que nous avons obtenues pour Γ_{Max} en se basant sur l'expression obtenue dans la référence [76] et nous obtenons dans

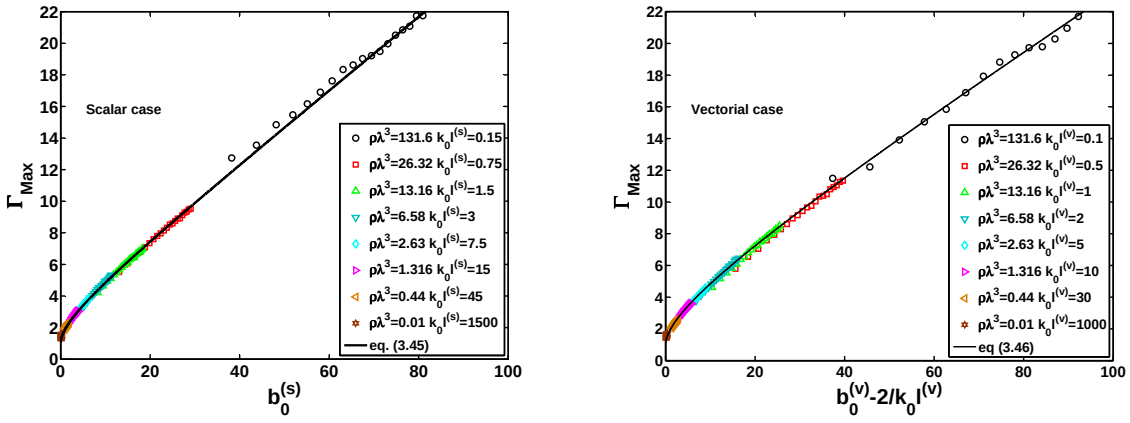

FIGURE 3.10 – Evolution de la valeur maximum moyenne des largeurs des modes Γ_{at} en fonction de l'épaisseur optique b_0 dans le cas scalaire (figure de droite) et de l'épaisseur optique corrigée par le nombre de Ioffe-Regel dans le cas vectoriel (figure de gauche) pour différentes densités allant de $\rho\lambda^3 = 0.01$ à $\rho\lambda^3 = 131.6$. Les courbes en trait pleins ont été obtenues à partir du fit des données numérique et de l'évolution du centre des distributions des valeurs propres dans le plan complexe obtenu aux équations (3.20) et (3.21). Les courbes en traits pleins représentent les équations (3.45) et (3.46) basées sur la référence [76] et affinée à partir du fit de nos donnée numériques.

le cas scalaire le comportement empirique :

$$\Gamma_{Max} = \sqrt{\frac{b_0^{(s)}}{1.67} + \left(\frac{b_0^{(s)}}{8.5}\right)^2} + \frac{b_0^{(s)}}{8.9} + 1 \tag{3.45}$$

Cette équation est qualitativement et quantitativement en accord avec la référence [76] et le troisième terme de cette expression qui représente l'évolution du centre des distributions dans le plan complexe est presque en accord avec ce qui a été obtenu à l'équation (3.20).

Nous avons procédé de la même manière dans le cas vectoriel en se rappelant la correction en densité que nous avons obtenue pour l'évolution du centre des distributions dans le plan complexe. Cette fois ci nous n'obtenons pas exactement la correction $b_0^{(v)} - 2.8/k_0 l^{(v)}$ mais plus précisément $b_0^{(v)} - 2/k_0 l^{(v)}$ ce qui nous permet d'obtenir la relation :

$$\Gamma_{Max} = \sqrt{\frac{b_0^{(v)} - 2/k_0 l^{(v)}}{1.5} + \left(\frac{b_0^{(v)} - 2/k_0 l^{(v)}}{15.25}\right)^2} + \frac{b_0^{(v)} - 2/k_0 l^{(v)}}{8.48} + 1 \tag{3.46}$$

Contrairement au cas scalaire où le déplacement du centre est à peu près équivalent à l'augmentation de la bordure dans le régime des milieux optiquement denses (deuxième et troisième termes de l'équation (3.45)) on obtient un facteur proche de deux dans le cas vectoriel (deuxième et troisième terme de l'équation (3.46)). Par contre nous sommes encore en accord avec l'évolution du centre des distributions dans le plan complexe obtenus à l'équation (3.21).

La figure 3.10 montre l'évolution de la valeur maximum moyenne des largeurs des modes Γ_{at} en fonction de l'épaisseur optique b_0 dans le cas scalaire et de l'épaisseur optique corrigée par la densité du système $(b_0 - 2/k_0 l)$ dans le cas vectoriel. Même si le comportement de cette quantité semble similaire dans le cas scalaire et vectoriel il

existe, au même titre que pour les l'évolution des centre des distributions (figure 3.3), une différence drastique entre les deux cas qui est la dépendance en densité de cette quantité. Les courbes en trait pleins représentent les équations (3.45) et (3.46) qui ont été obtenues sur la base de la référence [76] en faisant un fit de nos donnée numériques.

Il est intéressant de voir que dans le cas scalaire la valeur maximale moyenne des largeurs des modes dépend uniquement de l'épaisseur optique ce qui nous montre que la physique qui domine cette quantité est celle des effets coopératifs ce qui n'est pas exactement le cas lorsque l'on considère la nature vectorielle de la lumière. Un autre aspect intéressant est l'existence de deux régimes différents que ce soit dans le cas scalaire et vectoriel, l'un évoluant en racine carrée de l'épaisseur optique ou en racine carré de l'épaisseur optique corrigée par la densité, l'autre régime évoluant de manière linéaire en fonction de l'épaisseur optique ou de l'épaisseur optique corrigée par la densité.

Enfin il est important de souligner que les comportements explicités par les équations (3.45) et (3.46) sont uniquement valable pour des systèmes dont la taille est supérieure à la longueur d'onde λ. En effet en considérant l'équation décrivant Γ_{Max} dans le cas vectoriel il apparaît immédiatement que son domaine de validité est réduit à $b_0 - 2/k_0 l > 0$ ce qui nous conduit à $k_0 L \gtrsim 2$. Nous ne le montrons pas dans cette partie mais nous avons vérifié numériquement que ces lois n'étaient plus valides pour des systèmes de petite taille.

Evolution de la valeur minimum moyenne des largeurs de modes.

De la même manière que nous avons traité le moment d'ordre 1 de la valeur maximum de la largeur de modes Γ_{Max}, nous pouvons procéder à une étude similaire pour la valeur minimum moyenne Γ_{min}. La connaissance du moment d'ordre 1 de la valeur minimum des largeurs des modes représente certains intérêts en physique notamment dans la définitions de seuils pour des effets types laser aléatoires dans des milieux désordonnés [126], ou encore dans le seuil concernant l'apparition d'instabilités dynamiques [72].

Dans le cas du seuil pour le laser aléatoire on peut voir cela de manière intuitive lorsque le taux d'émission minimum d'amplification devient supérieur au taux d'émission minimum des pertes [74], qui est relié à la valeur minimum moyenne des largeurs des modes. En effet un laser aléatoire est un milieu à gain dépourvus de cavité où la diffusion multiple est censée jouer le rôle rétroactif. Un milieu désordonné composé de dipôles ponctuels disposés de manière aléatoire dans un volume donnée est donc un candidat idéal à l'étude de ce genre de phénomènes et il a été observé récemment que un nuage d'atomes froids, composé de rubidium (^{85}Rb) pouvait à la fois jouer le rôle de milieu diffusant et de milieux à gain en se servant de transition sa structure hyperfine.

Pour ce qui est des instabilités dynamiques il faut voir la valeur minimum moyenne des largeurs des modes comme la valeur au-delà de laquelle les taux démission d'instabilité commencent à dominer la dynamique du système.

Dans les milieux dilués, en se rappelant des distributions dans le plan complexe des valeurs propres de l'hamiltonien effectif H_{eff} (figure 3.2), on peut s'attendre à ce que la physique de Γ_{min} soit dominé par les paires coopératives situées dans les branche hélicoïdales des distributions. Il faudra donc se servir des expression obtenues dans le cas de $N = 2$ atomes en se concentrant sur les état sousradiants afin d'avoir une idée sur le comportement du moment d'ordre 1 de la valeur minimum des largeurs de modes.

Pour des milieux denses, toujours en se remémorant les distributions de valeurs propres dans le plan complexe (figure 3.4), on remarque que la quantité Γ_{min} sera toujours dominée par les paires sousradiantes dans le cas vectoriel mais qu'un autre type de physique

différents de celle des paires va la dominer dans le cas scalaire.

Afin d'obtenir le comportement de Γ_{min}, il faut tout d'abord la relier à la densité de probabilité $p(\Delta r_{min})$ de trouver deux atomes à une distance Δr_{min}, qui est la distance la plus petite séparant deux atomes dans un nuage de taille L contenant $N-2$ autres atomes. Sachant que la probabilité de trouver deux atomes à une distance r est donnée par $p_1 = \dfrac{4\pi r^2}{\rho}$, que la probabilité que les autre paires d'atomes soient séparées par une distance supérieure à Δr_{min} est donnée par $p_2 = \left(1 - \dfrac{4\pi \Delta r_{min}^3}{\rho}\right)^{(N-1)^2}$ et que la probabilité que les $(N-2)$ atomes soient à une distance supérieure à Δr_{min} des deux premiers atomes est $p_3 = \left(1 - \dfrac{4\pi \Delta r_{min}^3}{\rho}\right)^{(N-2)}$, en calculant la probabilité $p(r_{min}) = p_1 p_2 p_3$ [76] on peut calculer :

$$p(\Delta r_{min}) = N(N-1)\left(\frac{4\pi r^2}{L^3}\right)\left(1 - \frac{4\pi r^3}{L^3}\right)^{(N-2)(N-1)^2} \tag{3.47}$$

En faisant le développement de la partie imaginaire de l'équation (3.4) correspondant aux états de paires sousradiant on obtient $\Gamma_- \simeq_0 1 - \dfrac{(kr)^2}{6}$ ce qui nous permet de relier une distance kr à une largeur minimum. On peut donc relier la densité de probabilité de trouver deux atomes à une distance Δr_{min} associée à une largeur de mode minimale telle que $p(\min(\Gamma_{at})) = p(\Delta r_{min}) \times d(\Delta r_{min})/d(\min(\Gamma_{at}))$ ce qui nous permet de calculer sa valeur moyenne dans la limite d'un grand nombre d'atomes ($N \to \infty$). On peut ainsi obtenir la relation décrivant l'évolution valeur minimale moyenne des largeurs des modes :

$$\langle \Gamma_{min} \rangle \propto \frac{\Gamma_0}{b_0 N^{\frac{1}{3}}} = \Gamma_0 (N\rho\lambda^3)^{-\frac{2}{3}}. \tag{3.48}$$

Nous remarquons que l'équation (3.48) peut aussi bien être exprimée en fonction de l'épaisseur optique b_0 ou de la densité du système $\rho\lambda^3$ réajustée ensuite par le nombre d'atomes N. Cependant il est important de noter que la manière la plus correcte de représenter $\langle \Gamma_{min} \rangle$ est en fonction de la densité spatiale d'atomes $\rho\lambda^3$. En effet, le comportement des paires d'atomes plus proches voisins est un comportement exclusivement local qui ne dépend pas des corrélations induites par les interactions longues portées, la correction numérique N dans l'équation (3.48) venant du fait que chaque paires d'atomes peut être vue comme une réalisation indépendante. Bien que cela soit tentant de les représenter en fonctions de l'épaisseur optique car nous les avons appelées *paires coopératives*, il est préférable de les représenter en fonction de la densité spatiale.

Afin de calculer numériquement Γ_{min}, nous procédons de manière similaire à la section précédente en définissant :

$$\Gamma_{min} = \langle \min_i(\Gamma_i) \rangle \tag{3.49}$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente encore la moyennes sur les configurations spatiales.

La figure 3.11 montre la quantité Γ_{min} dans le cas scalaire et vectoriel pour des densités spatiales de diffuseurs allant de $\rho\lambda^3 = 0.44$ à $\rho\lambda^3 = 131.6$. Dans le régime dilué ($\rho\lambda^3 < 20$), on remarque que le comportement décrit par l'équation (3.48) (courbes en trait pleins sur les graphiques) marche parfaitement pour décrire l'évolution de la valeur minimum moyenne des largeurs des modes ce qui est une bonne indication de l'influence du comportement de cette quantité par les paire sousradiantes dans cette gamme de paramètres.

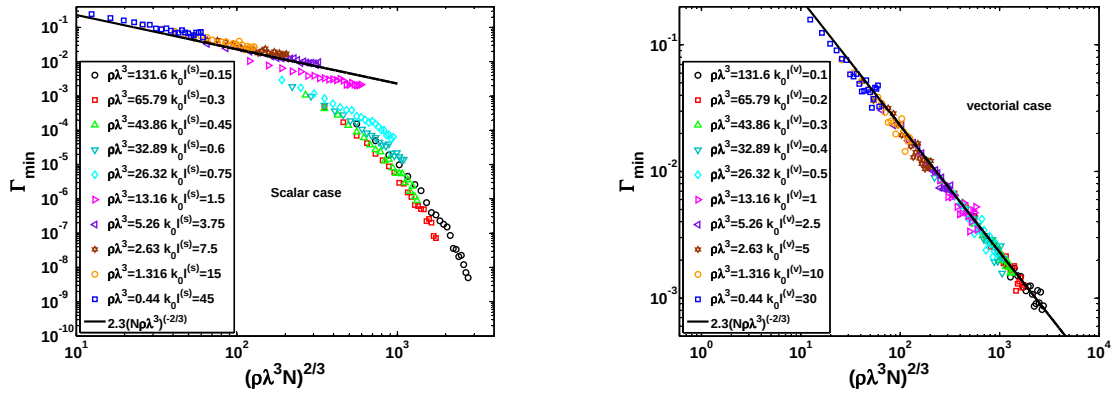

FIGURE 3.11 – Evolution de la valeur minimum moyenne des largeurs des modes Γ_{min} en fonction de $(\rho\lambda^3 N)^{-\frac{2}{3}}$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour des densités allant de $\rho\lambda^3 = 0.44$ à $\rho\lambda^3 = 131.1$. Comme nous l'avions prévus à partir des distributions des valeurs propres de H_{eff} dans le plans complexe, que ce soit dans le régime dilué ou dans le régime dense le moment d'ordre 1 de la valeur minimum de largeur des modes est dominée par les paires sousradiantes dans le cas vectoriel alors que nous observons une nette rupture de pente dans le cas scalaire. Cette rupture de pente dans le cas scalaire apparaît aux grandes densités ($\rho\lambda^3 \simeq 26.32$) et correspond à l'apparition de la concentration des valeurs propres ayant un long temps de vie autour d'une énergie bien précise ($E_{at} \simeq 1$). Les traits pleins représentent l'équation (3.48) sur les deux graphiques.

Lorsque l'on considère des milieux denses ($\rho\lambda^3 > 20$), on remarque que Γ_{min} est toujours dominé par les paires sousradiantes dans le cas vectoriel. En effet la considération du terme de champ proche de l'interaction dipôle-dipôle (2.87) a pour effet que le déplacement en fréquence des niveaux d'énergies de deux atomes très proche (situés à une distance inférieure à la longueur d'onde) est accru dû à la présence du terme en $1/r^3$ ce qui a pour conséquence un découplage des paires coopérative (sousradiantes et superradiantes) du reste du système. Dans le cas scalaire, où le déplacement en fréquence est moindre dû à l'unique présence du terme en $1/r$, ces états de paires se recouplent à des états coopératifs concernant plus de 2 atomes, ce qui a pour conséquence l'apparition de cette branche et la diminution drastique de la quantité Γ_{min}.

Evolution de la valeur la plus probable des largeurs des modes.

Dans cette section nous nous intéressons au comportement de la valeur la plus probable Γ_{inv} des largeurs des modes, qui correspond à la largeur associée au maximum des distributions $P(\Gamma_{at})$ telle que

$$P(\Gamma_{inv}) = \max(P(\Gamma_{at})) \tag{3.50}$$

L'étude de cette quantité va nous permettre de savoir si elle est dominée par des effets liés au désordre et par conséquent que son comportement dépende de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ du système ou si elle est dominé par les effets coopératif ce qui se traduirait par une dépendance en épaisseur optique b_0.

La considération des distributions des largeurs des modes à la section précédente (figure 3.7) nous a montré que pour des milieux dilués ($b_0 \ll 1$ et $\rho\lambda^3 \ll 1$), la physique de

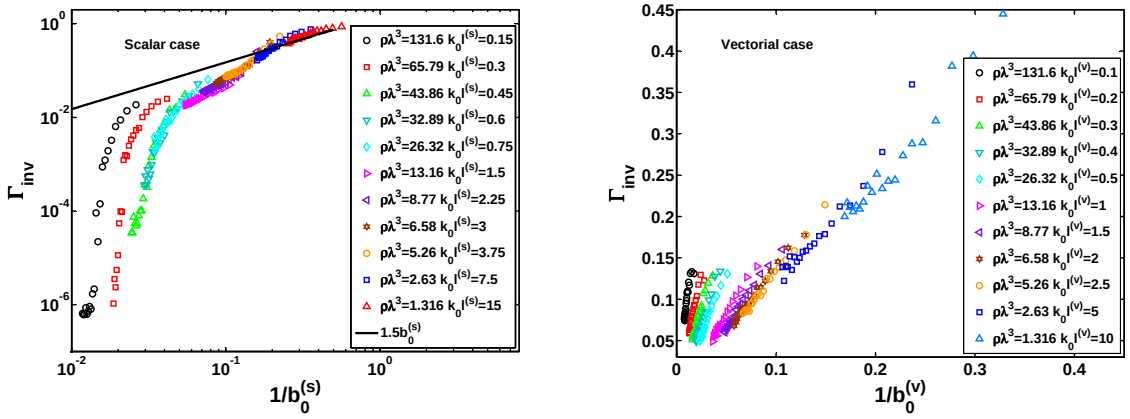

FIGURE 3.12 – Evolution de la valeur la plus probable des largeurs de modes Γ_{inv} dans le cas scalaire en fonction de l'inverse de l'épaisseur optique $(b_0^{(s)})^{-1}$. On peut remarquer que pour des milieux peu denses ($\rho\lambda^3 < 26$), cette quantité a un comportement linéaire en fonction de l'inverse de l'épaisseur optique ce qui nous laisser présager que les effets coopératifs la dominent. La rupture de pente ayant lieu pour les milieux denses ($\rho\lambda^3 > 26$) a lieu à peu près au même point où les paires coopératives ne dominent plus le comportement de la valeur moyenne minimale des largeurs des modes Γ_{min}, ce qui nous montre qu'un nouveau type de physique domine cette quantité. Evolution de la quantité Γ_{inv} en fonction de l'inverse de l'épaisseur optique b_0^{-1}. On remarque que Γ_{inv} évolue linéairement en fonction de $(b_0^{(v)})^{-1}$ et qu'à partir d'une certaine densité, correspondant au nombre de Ioffe-Regel $k_0 l^{(v)} = 1$ la pente de cette dépendance linéaire augment en fonction de la densité (ou du nombre de Ioffe-Regel).

l'atome unique était dominante et les distributions $P(\Gamma_{at})$ étaient centrés autour de la valeur $\Gamma_0 = 1$. On peut donc s'attendre dans ce régime-là à ce que la valeur la plus probable des largeurs des modes soit aux alentours de $\Gamma_0 = 1$. Lorsque la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$ et de manière équivalente l'épaisseur optique b_0 augmentent, on remarque en considérant les figures 3.7 et 3.9 que la valeur la plus probable des largeurs des modes se déplace vers les petites valeurs de Γ_{at} ($\inf \Gamma_0$). Que ce soit dans les cas scalaire ou vectoriel on remarque, dans la gamme de paramètres que nous considérons ($k_0 L > 2\pi$), qu'il n'y a qu'une seule valeur pour Γ_{inv} . De plus, sa position est moins prononcée dans le cas scalaire et tend à disparaître lorsque l'on considère des milieux denses.

La figure 3.12 montre l'évolution de la quantité Γ_{inv} dans le cas scalaire et vectoriel pour de taille de système supérieure à λ et différentes densité spatiales $\rho\lambda^3 = 1.36$ à 131.6. Dans les deux cas nous avons fait tout d'abord la conjecture que cette quantité devait être dominée par les effets coopératifs et que par conséquent elle évoluerait en fonction de l'épaisseur optique b_0 ou de son inverse.

Dans le cas scalaire on remarque bien que pour des milieux peu denses ($\rho\lambda^3 < 13.6$) cette quantité évolue linéairement en fonction de $(b_0^{(s)})^{-1}$ telle que :

$$\Gamma_{inv} \approx \frac{\Gamma_0}{b_0} \tag{3.51}$$

ce qui nous permet de dire que dans cette gamme de paramètres elle est majoritairement dominée par les effets coopératifs. La rupture de pente ayant lieu pour des systèmes denses ($\rho\lambda^3 > 26$) se produit à peu près au même point où les paires coopératives ne

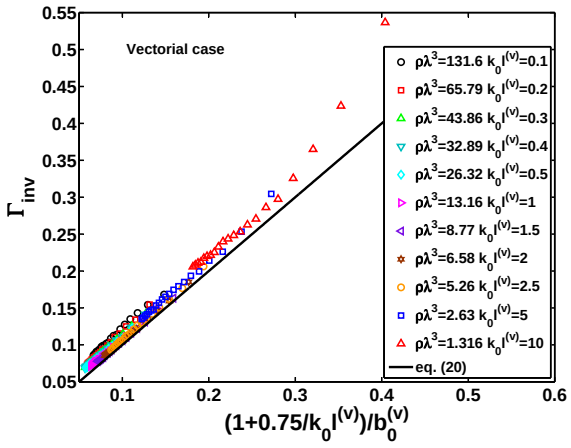

FIGURE 3.13 – Evolution de la valeur la plus probable des largeurs des modes Γ_{inv} dans le cas vectoriel en fonction de la quantité explicitée à l'équation (3.52). On remarque que toutes les courbes collapsent sur la courbe en traits pleins ce qui prouve que l'équation (3.52) décrit correctement le comportement de Γ_{inv} dans cette gamme de paramètres.

dominent plus le comportement de la valeur moyenne minimum des largeurs des modes Γ_{min} (figure 3.11), ce qui nous montre qu'un autre type de physique (peut être relié aux effets coopératifs) domine le comportement de cette quantité.

Dans le cas vectoriel, on remarque clairement une dépendance linéaire de Γ_{inv} par rapport à l'inverse de l'épaisseur optique $(b_0^{(v)})^{-1}$ et la pente de cette droite augment lorsque l'on considère des systèmes de plus en plus denses. Empiriquement nous avons obtenus que le comportement de Γ_{inv} était décrit par :

$$\Gamma_{inv} \approx \frac{\Gamma_0}{b_0^{(v)}} \left(1 + \frac{0.75}{k_0 l^{(v)}}\right) \tag{3.52}$$

ce que nous confirme la figure 3.13. Il faut toutefois noter que les équations (3.51) et (3.52) ne permettent pas de retrouver la physique de l'atome unique dans la mesure où elle diverge pour de très faible épaisseur optiques $b_0^{(v)}$.

1.4.d *Conclusions et discussion sur l'étude des largeurs des modes Γ_{at} et de leur distributions.*

L'étude des largeurs des modes Γ_{at} nous a permis de mettre en évidence plusieurs comportements reliés à l'épaisseur optique b_0 du nuage et par conséquent aux effets coopératifs. L'étude des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ nous permet de remettre en question la validité sur l'association de la loi de puissance $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-1}$ à des effets de localisation lié au désordre, dans la mesure où l'on a observé une convergence continue de l'exposant de cette loi d'une valeur supérieure à -1 vers une valeur supérieure qui est $-4/3$. L'absence d'observation d'autre lois reliées à des régimes caractéristiques (régime balistique, régime diffusif ou encore états exponentiellement localisé au centre du nuage), nous permet de remettre en cause la validité d'une telle approche dans le type de système que nous considérons. En effets ces lois ont été dérivées dans le cadre de travaux sur les matrices aléatoires ou sur le *Tight Binding Hamiltonian* désordonné où seules les interactions plus proches voisins sont considérées alors que nous savons que les interactions

longues protée sont présentes dans les systèmes que nous considérons. De plus une hypothèse forte faite afin d'obtenir ces lois est celle d'un couplage surfacique du système avec le continuum alors que dans le cas d'interactions longues portées ce couplage est volumique.

L'étude des comportements asymptotiques des largeurs des modes nous a permis de voir que les effets coopératifs dominaient la largeur moyenne maximum Γ_{Max} et que le paires coopératives dominaient le comportement de la largeur moyenne minimum Γ_{min} pour des milieux dilués ($\rho\lambda^3 < 20$). Alors que les paires coopératives continuent de dominer Γ_{min} pour des milieux denses dans le cas vectoriel, on remarque un brusque changement de comportement de cette quantité dans le cas scalaire. Cette rupture arrive à un point intéressant proche du seuil prédit par Ioffe-Regel pour la transition entre le régime métallique et isolant [79]. Cependant, il est important de souligner qu'à ces densités les paires coopératives disparaissent dans le cas scalaire pour se coupler à d'autres états concernant un plus grand nombre d'atome. Il nous est donc impossible de trancher formellement pour dire si ces états aux long temps de vie sont liés à des modes localisés dû au désordre ou si ce sont des états sousradiants.

1.5 Comportements de la partie réelle des valeurs propres de l'hamiltonien effectif.

1.5.a *Distributions des positions des modes $P(E_{at})$ dans les cas scalaire et vectoriel.*

De la même manière que nous avons considéré les largeurs des modes Γ_{at}, nous pouvons aussi étudier le comportement et les propriétés statistiques des positions en énergies $E_{at} = \Re(\Lambda)$ des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff}. Ce type d'approche, qui est équivalent à l'étude du comportement de la densité d'états, a connu son essor dans les années 60 lors de l'avènement des théories sur les matrices aléatoires [127]. Cette section n'a pas pour prétention de contredire les travaux menés dans les références [77, 76] mais plutôt d'y apporter des observations empiriques supplémentaire dans des régimes intermédiaires.

Dans le cadre des matrices aléatoires et plus précisément du *Tight Binding Hamiltonian*, nous avons précédemment évoqué que la densité d'états pouvait être décrite par une loi semi circulaire [59]. Dans la situation d'un milieu totalement ordonné (cristal parfait), une caractéristique de la densité d'états est la présence de singularités de van Hove [128], causées par les interactions longues protées rendues possible par la périodicité du milieu, ayant pour conséquence la présence de coupures nettes dans les distributions des postions des modes. Lorsque le système est faiblement désordonné, ces cassure nette de la densité d'états se lissent et il apparaît des queues dans les distributions d'énergies, appelées queues d'Urbach [129]. Ces déviations à la densité d'états d'un cristal parfait ont été observées en 1953 dans les spectres d'absorption de cristaux ioniques à haute température et ont été observées depuis dans un grand nombre de matériaux. Pour un milieu totalement désordonné, il est censé n'y avoir aucune corrélations longue protée, il a été prouvé de manière formelle que la densité d'états ne possède aucune singularité [130] et qu'il n'y a pas de brisures nettes dans les distributions en énergies mais plutôt des queues lissent où se situent les états localisés.

Dans notre cas, peu d'études ont été menées uniquement sur les comportements des distributions des positions des modes que ce se soit dans le cas scalaire ou vectoriel [68].

En ce qui concerne le cas scalaire des prédictions analytiques [77, 76] en fonctions des différents paramètres (taille du système $k_0 L$, densité spatiale $\rho\lambda^3$ ou encore épaisseur optique b_0) ont été obtenues pour le spectre de la matrice aléatoire cosinus cardinal :

$$C_{ij} = (1 - \delta_{ij}) \frac{\cos(k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{3.53}$$

qui est directement reliée à la partie réelle du potentiel d'interaction dans le cas scalaire (eq. (2.90)). Les comportements analytiques ont tout d'abord été obtenus de manière approximative [76] en utilisant la fonction inverse de la résolvante appelée *Blue Fonction* puis par une approche exactes en utilisant la même méthode agrémentée d'une décomposition de l'équation (3.53) sur une base d'harmonique sphériques [77].

Selon ces travaux, dans la limite des grandes tailles de système ($k_0 L \gg 1$) il a été trouvé que pour les milieux optiquement dilués ($b_0 \ll 1$) que la distribution des valeurs propres $p(\Lambda_r)$ de l'équation (3.53) était décrite par une loi semi circulaire telle que :

$$P(\Lambda_r) = \frac{\sqrt{\beta - \Lambda_r^2}}{2\pi\beta} \tag{3.54}$$

où β est une quantité proportionnelle à l'épaisseur optique b_0. Toujours dans la situation de systèmes de grande tailles, dilués spatialement mais dense optiquement ($b_0 \gg 1$), ce qui implique que leur taille est plus grande que dans la situation concernant l'équation (3.54), il a été obtenu que la distribution des valeurs propres de l'opérateur (3.53) étaient décrite par une lorentzienne telle que :

$$P(\Lambda_r) = \frac{1}{(1 + \Lambda_r^2)} \tag{3.55}$$

Les deux expressions précédentes ne sont pas dépourvues d'intérêts, la première (eq. (3.54)) concernant les milieux optiquement denses permet de retrouver le cas limite décrit dans le contexte des matrices aléatoires pour des ensembles Gaussiens Orthogonaux et permet aussi de retrouver les caractéristique reliées aux singularités de van Hove, la deuxième (eq. (3.55)), comme nous le verrons d'ici peu de temps, est à relier aux distributions des positions en énergie des paire coopératives.

Dans le cas de milieux spatialement denses, il a été obtenus qu'une plage de valeurs propres contenues dans l'intervalle $[\Lambda_{r,1}, \Lambda_{r,2}]$ tel que

$$\begin{cases} \Lambda_{r,1} \simeq -\dfrac{\rho\lambda^3}{2\pi^2} - \dfrac{\pi^2}{2\rho\lambda^3} \\ \Lambda_{r,2} \simeq -\dfrac{3[\rho\lambda^3]^{1/3}}{2\pi^{2/3}} + \dfrac{\pi^{2/3}}{2[\rho\lambda^3]^{1/3}} + \dfrac{\pi^2}{6\rho\lambda^3} \end{cases} \tag{3.56}$$

ce qui est aussi en accord avec les observations que nous avons faites précédemment où la ségrégation entre les valeurs propres ne dépend que de la densité spatiale du système [108].

En ce qui concerne le comportement des partie réelles E_{at} des valeurs propres de l'hamiltonien effectif H_{eff} dans le cas scalaire (eq. 2.90) et vectoriel (eq. 2.87), les corrélations existantes entre les parties réelles et imaginaire rajoutées à la divergence de la partie réelle pour $k_0 r \to 0$ rendent l'approche analytique singulièrement plus délicate. Cependant on peut se servir des comportements qui ont été obtenus pour l'opérateur aléatoire cosinus cardinal comme base pour notre étude numérique.

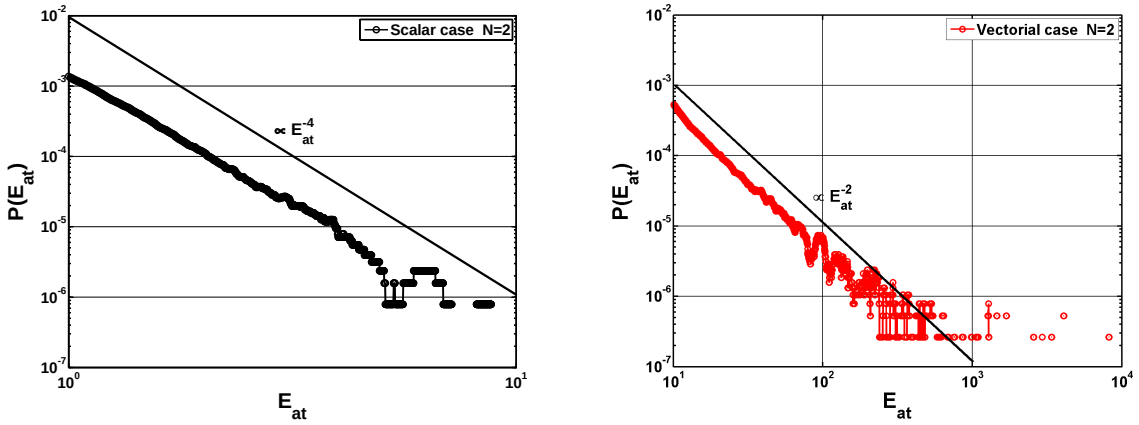

FIGURE 3.14 – Zoom sur les ailes lissées des distributions de positions en énergies $P(E_{at})$ dans le cas scalaire (figure de gauche) et le cas vectoriel (figure de gauche) pour un système contenant $N = 2$ atomes dans une boite de taille $k_0 L = 1.57$ moyenné sur 4950 positions. On remarque clairement que les résultats obtenus sur les ailes des distributions sont en parfait accord avec les expressions donnée par les équations (3.59) pour le cas scalaire et (3.60) pour le cas vectoriel.

En reprenant une approche similaire à celle que nous avons utilisée précédemment pour obtenir la largeur moyenne minimum de largeurs des modes, on peut développer les parties réelles des équations (2.90) et (2.87) dans la situation simple décrivant les cas de $N = 2$ atomes. Pour le cas scalaire on obtient que :

$$\Re(\Lambda_\pm) = \pm\frac{1}{k_0 r} + \mathcal{O}(k_0 r) \tag{3.57}$$

et pour les cas vectoriel nous obtenons :

$$\Re(\Lambda_\pm) = \pm\frac{1}{(k_0 r)^3} + \mathcal{O}(k_0 r) \tag{3.58}$$

En se rappelant que la probabilité de trouver deux atomes séparés d'une distance r est donnée par $p(r) = 4\pi r^2/(k_0 L)^3$, dans l'hypothèse faite d'une symétrie sphérique, et en se servant de la relation $P(E)dE = P(r)dr$ on obtient que la distribution en énergies $P_{paires}(E_{at})$, associée à deux atomes placés à une distance très proche l'un de l'autre, est décrite dans le cas scalaire par :

$$P_{pairs}(E_{at}) \propto \frac{1}{E_{at}^4} \tag{3.59}$$

et pour le cas vectoriel nous obtenons :

$$P_{pairs}(E_{at}) \propto \frac{1}{E_{at}^2} \tag{3.60}$$

Les deux expressions précédentes montrent une singulière différence dans les comportements des positions des modes même dans la limite de $N = 2$ atomes. En se référant à la distribution des valeurs propres dans le plan complexe (figure 3.4) on pouvait déjà remarquer cette différence dans les comportements des valeurs propres associées aux paires coopératives et décrites par les équations (3.4),(3.9) et (3.10).

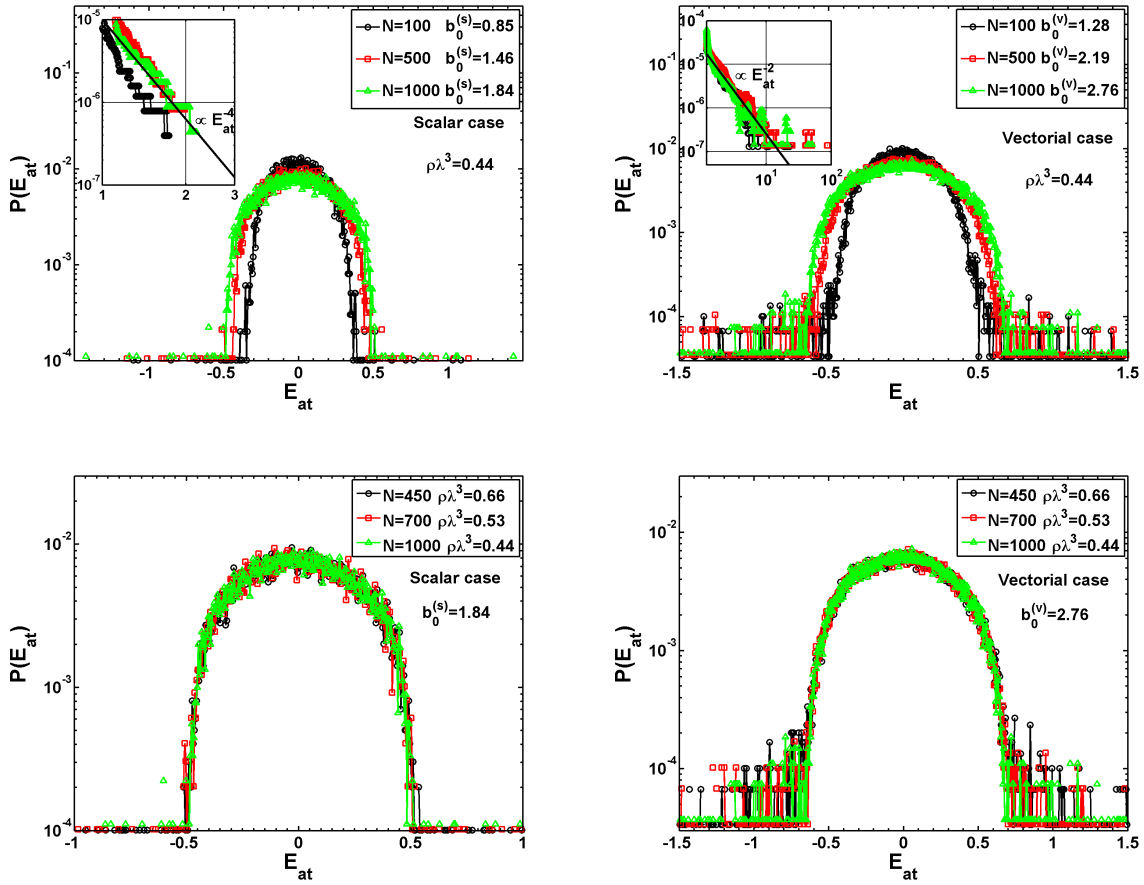

FIGURE 3.15 – Distributions des positions en énergies $P(E_{at})$ dans les cas scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droite) dans le limite des milieux dilués. Dans les figures du haut la densité est maintenue constante ($\rho\lambda^3 = 0.44$), le nombre de configurations spatiales varie entre $100, 20$ et 10 configurations et le nombre d'atomes varie entre $N = 100, 500$ et 1000, faisant varier de manière proportionnelle l'épaisseur optique b_0 des nuages. La forme de ces distributions est clairement décrite par une loi semi circulaire (eq. (3.54)) dont le rayon augmente de manière proportionnelle avec l'épaisseur optique b_0 dans le deux cas. Les insets montrent les ailes des distributions lissées en représentation logarithmique pour les mêmes paramètres. On remarque clairement que le comportement des paires coopératives décrit aux équations (3.59) et (3.60) est présent dans ces distributions. Dans les figures du bas, l'épaisseur est maintenue constante ($b_0^{(s)} = 1.84$ et $b_0^{(v)} = 2.76$) en faisant varier le nombre d'atome entre $N = 450$ à 1000 pour différentes densité spatiales de diffuseurs allant de $\rho\lambda^3 = 0.44$ à $\rho\lambda^3 = 0.66$.On remarque clairement dans les deux cas que toutes les distributions sont exactement similaires ce qui montre que dans cette gamme de paramètres (milieux spatialement dilués) l'épaisseur optique est l'unique paramètre pertinent pour décrire la forme des distributions.

La figure 3.14 nous présente les ailes lissées des distributions des positions en énergies $P(E_{at})$ pour un système contenant $N = 2$ atomes, on remarque clairement dans les deux cas scalaire et vectoriels qu'elles suivent les lois de puissance obtenues aux équations (3.59) et (3.60).

Pour un système contenant plus que $N = 2$ atomes, en se rappelant de la répartition

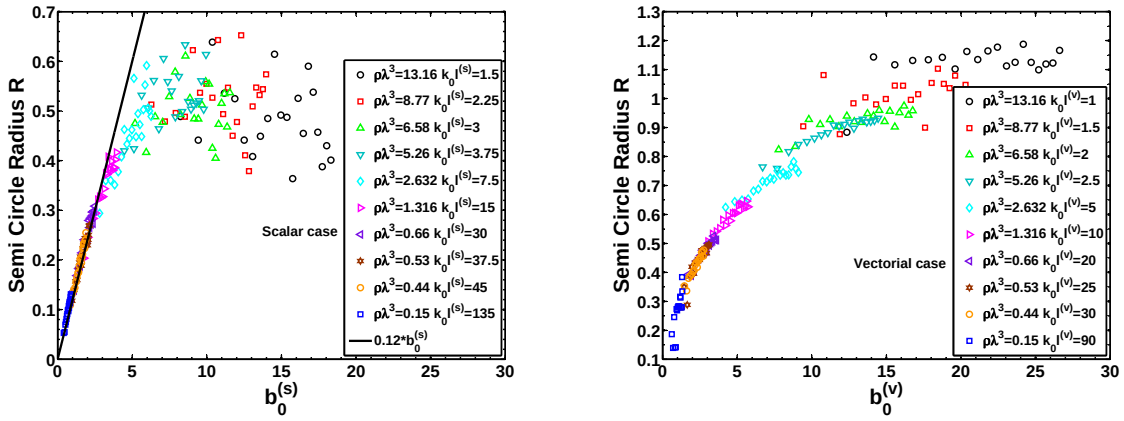

FIGURE 3.16 – Évolution du rayon de la loi semi circulaire en fonction de l'épaisseur optique b_0 pour les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) dans la limite des milieux dilués $\rho\lambda^3 < 13.16$. Dans le cas scalaire on observe clairement une dépendance linéaire du rayon en fonction de l'épaisseur optique $b_0^{(s)}$ pour de densité inférieure à $\rho\lambda^3 \simeq 2$, on remarque aussi que toutes les courbes se superposent indépendamment de la densité montrant ainsi que l'épaisseur optique est le seul paramètre pertinent dans cette gamme de paramètres.

des valeurs propres dans le plan complexe (figures 3.2 et 3.4), on peut d'ores et déjà s'attendre à ce que la physique des paires coopératives, décrite aux équations (3.59) - (3.60) et contenue dans les ailes des distributions, évolue de manière indépendante par rapport au reste des modes dominés pas une physique collective. Dans la limite des milieux spatialement et optiquement dilués ($\rho\lambda^3 \ll 1$ et $b_0 \ll 1$) il est à prévoir que la physique de l'atome unique domine le comportement des valeurs propres et que les distributions d'énergies soient centrées autour de la valeur $E_{at} = 0$.

La figure 3.15 montre les distributions des positions des modes $P(E_{at})$ dans les cas scalaire et vectoriels pour différents nombres d'atomes ($N = 100, 500$ et 1000) pour un nuage dilué spatialement ($\rho\lambda^3 = 0.44$) et optiquement ($b_0 \sim 1$). On remarque que dans ce régime les distributions $P(E_{at})$ sont clairement décrites par une loi semi circulaire semblable à l'équation (3.54 figures du haut) dont le rayon augmente proportionnellement à l'épaisseur otique b_0. Les insets montrent les ailes de ces distributions lissées afin de souligner les comportements en loi de puissances de ces dernières cohérents avec ceux obtenus aux équations (3.59) et (3.60), ce qui nous montre une cohabitation entre les paires coopératives et une physique dite collective.

Toujours en restant dans la limite de milieux dilués mais en considérant cette fois un système dont l'épaisseur optique b_0 (3.15 figures du bas) est constante et la densité spatiale d'atomes $\rho\lambda^3$ varie, nous remarquons que toutes les courbes sont décrite par une même expression ce qui nous montre que dans cette gamme de paramètres l'épaisseur optique est l'unique paramètre dont dépendent les distributions des positions de modes $P(E_{at})$.

La réduction des moindres carrés à partir de l'équation (3.54) sur nos données numériques nous permet d'obtenir l'évolution du paramètre β en fonction de l'épaisseur optiques b_0 dans les cas scalaire et vectoriels. Dans le cas scalaire on remarque clairement un comportement linéaire pour des densités inférieures à $\rho\lambda^3 \simeq 2$ et nous obtenons $\beta \simeq 0.12 b_0^{(s)}$. Dans le cas vectoriel la présence accrue des paires coopérative dans les ailes des distributions $P(E_{at})$ rend la convergence du fit moins bonne et à tendance à fausser

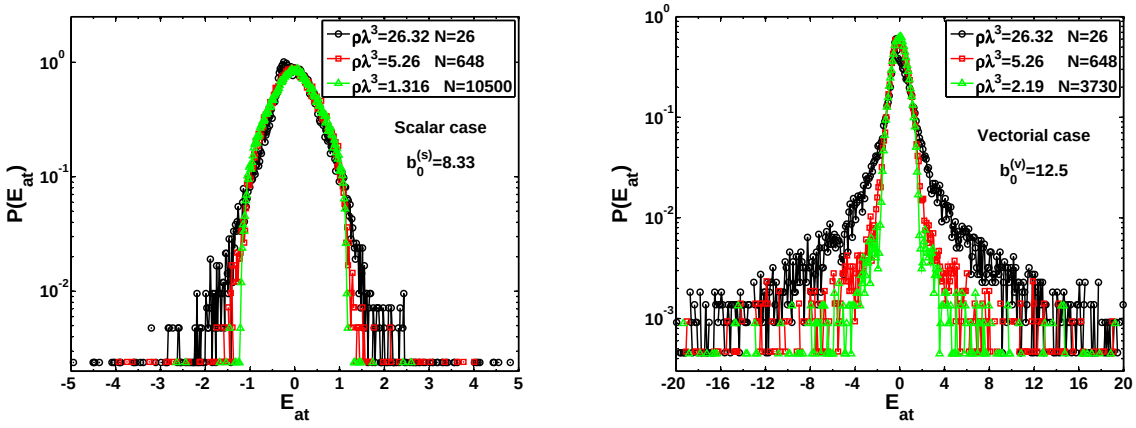

FIGURE 3.17 – Représentation en semi-log des distributions des positions en énergies $P(E_{at})$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour différentes densités spatiales $\rho\lambda^3$ de diffuseurs et une épaisseur optique constante ($b_0^{(s)} = 8.33$ et $b_0^{(v)} = 12.5$). Afin de maintenir l'épaisseur optique constant en augmentant la densité spatiale, le nombre d'atome N est varié entre $N = 26$ et 10500 dans le cas scalaire et $N = 26$ et 3730 dans le cas vectoriel. On remarque que le changement de forme des distributions $P(E_{at})$ se fait de manière continue en fonction de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ du système. La représentation en semi-log souligne le comportement exponentiel de ces distributions pour les milieux denses.

ce comportement linéaire. La figure 3.16 nous montre l'évolution du rayon R des distributions des positions des modes $P(E_{at})$ en fonction de l'épaisseur optique b_0 du système dans le cas scalaire et vectoriel. Ce rayon a été obtenu en réduisant les moindres carrées entre l'expression décrite à l'équation (3.54) et nos données numériques en laissant le paramètre β (proportionnel au rayon de la loi semi circulaire) comme paramètre libre. Dans le cas scalaire on observe clairement le comportement linéaire ($\beta \propto 0.12 b_0^{(s)}$) de ce rayon en fonction de l'épaisseur optique $b_0^{(s)}$ du système totalement indépendant de la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$. On remarque aussi le décrochement qui apparaît aux grandes densités ($\rho\lambda^3 > 2$) où la loi semi circulaire n'est plus censée fonctionner pour décrire le comportement des distributions $P(E_{at})$, ce qui concorde aussi avec les résidus obtenus en réduisant les moindres carrés qui sont de l'ordre de 10^{-3} au lieu de 10^{-5} pour les milieux dilués ($\rho\lambda^3 < 2$). Dans le cas vectoriel, la présence accrue des paires coopératives dans les ailes des distributions des positions de modes $P(E_{at})$ a tendance à fausser ce comportement linéaire, ce qui se traduit par des résidus plus élevés que dans le cas scalaire, mais on remarque tout de même un comportement indépendant de la densité spatiale du nuage dans la limite des milieux dilué ($\rho\lambda^3 < 2$).

En considérant des milieux spatialement denses, dans les deux cas (scalaire et vectoriel) on remarque une différence singulière de la forme des distributions des positions des modes $P(E_{at})$ comparées à celles obtenues dans les régimes dilués. Ce changement dans la forme des distributions $P(E_{at})$ n'est pas une transition abrupte entre un comportement lié aux régimes dilués et un comportement lié aux régimes denses mais plutôt un passage continu entre les deux.

Le figure 3.17 nous montre les distributions des positions en énergie $P(E_{at})$ dans les cas scalaire et vectoriel pour des systèmes à différentes densités spatiales $\rho\lambda^3$ de diffuseurs

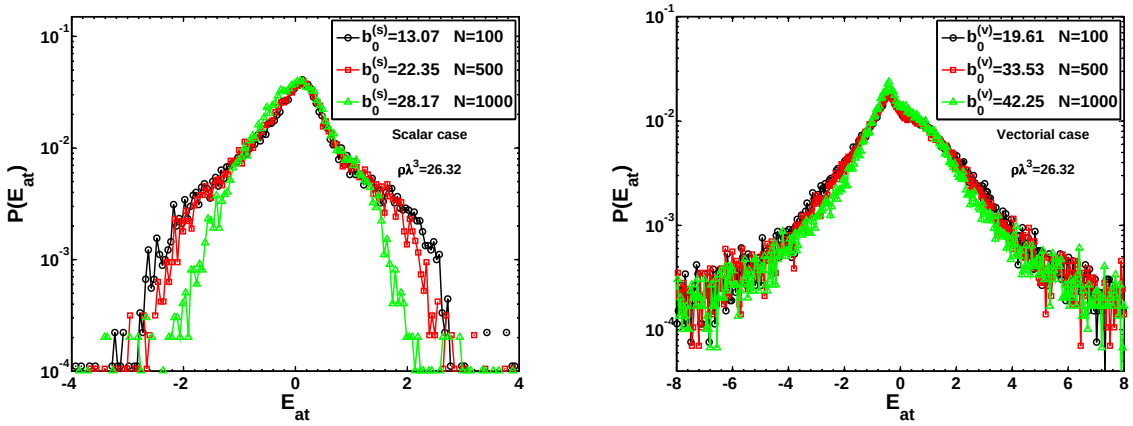

FIGURE 3.18 – Représentation en semi-log des distributions des positions en énergies $P(E_{at})$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour un milieu dense ($\rho\lambda^3 = 26.32$) et différents nombre d'atomes $N = 100$ à 1000. Malgré un affaissement dans le cas scalaire pour $N = 1000$ atomes, on remarque que le paramètre d'ordre de la loi exponentielle qui décrit le centre des distributions $P(E_{at})$ évolue très peu en fonction de l'épaisseur optique ($b_0^{(s)}$ ou $b_0^{(v)}$) du système.

pour une épaisseur optique constante ($b_0^{(s)} = 8.33$ et $b_0^{(v)} = 12.5$). Il apparaît clairement que la forme de ces distributions change de manière continue en fonction de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ du système, passant d'une loi semi circulaire pour les milieux dilués ($\rho\lambda^3 < 1$) à un comportement exponentiel (souligné par la représentation en semi-log) pour les milieux denses. Ce comportement exponentiel du centre des distributions en énergies $P(E_{at})$ autour de $E_{at} = 0$ pour les milieux denses peut être décrit par une loi de Laplace tel que :

$$P(E_{at}) = \frac{1}{2\beta'} \exp(-\beta'|E|) \tag{3.61}$$

Des comportements similaires ont été obtenus en considérant la densité d'états de matériaux organiques désordonnés [131] qui ont été assimilés à des redistributions anormales d'énergies. Il est aussi utile de remarquer que les ailes des distributions $P(E_{at})$, qui correspondent aux paires coopératives, ont un comportement indépendant du reste des distributions et sont encore décrites pas les équations (3.59) et (3.60). Afin de voir comment se comporte le paramètre β' de la loi exponentielle décrit à l'équation (3.61), nous considérons les distributions $P(E_{at})$ pour une densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs fixée. La figure 3.18 montre l'évolution de ces distributions en représentation semi-log pour un milieu dense ($\rho\lambda^3 = 26.32$) et différentes épaisseur optiques ($b_0^{(s)}$ et $b_0^{(v)}$) obtenues en faisant varier le nombre d'atomes ($N = 100$ jusqu'à 1000). On remarque que le paramètre (ou la largeur) de la loi exponentielle décrivant le centre des distributions des positions des modes $P(E_{at})$ n'évolue pratiquement pas en fonction de l'épaisseur optique du système. On remarque l'asymétrie 'rouge ($E_{at} < 0$)-bleu ($E_{at} > 0$' apparaître, non décrite par l'équation (3.61), et dans le cas scalaire on observe un 'affaissement' de la distribution pour $b_0^{(s)} = 28.17$ et $N = 1000$. Cet affaissement est directement relié à la disparition des paires coopératives, qui se recouplent aux autres états d'excitation collective correspondant à un nombre d'atomes plus élevé. Une réduction des moindres carrés sur nos donnée numériques, en utilisant l'équation (3.61) et en laissant le paramètre β' comme seul paramètre libre nous donne $\beta' \simeq 1$.

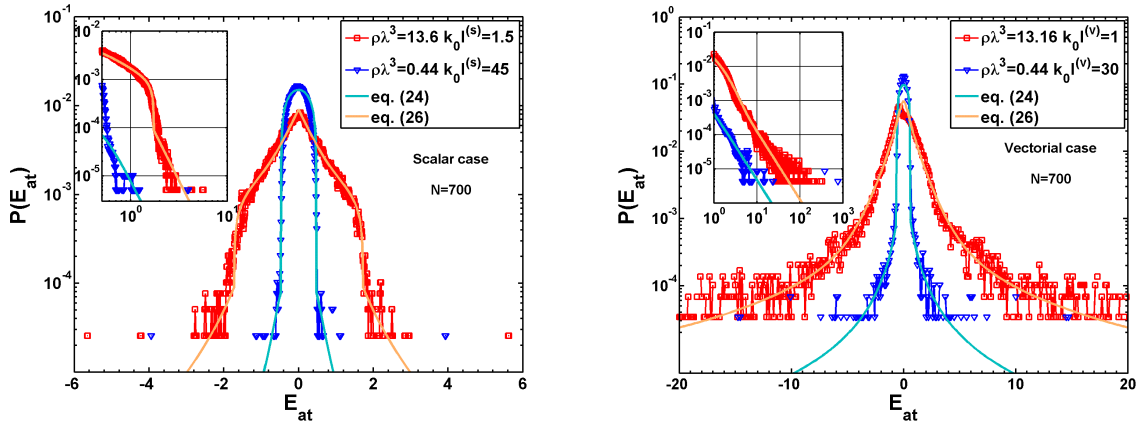

FIGURE 3.19 – Représentation en semi log des distributions des positions des modes dans les cas scalaire (figure de droite) et vectoriel (figure de gauche) pour un nuage contenant $N = 700$ atomes pour deux densités spatiales $\rho\lambda^3$ différentes et 14 configurations spatiales. Les courbes en trait pleins représentes les équations (3.62), (3.63) et (3.64) obtenues de manière empiriques à partir des observations faite sur nos données numériques. On remarque que les comportements décris par ces équations sont en accord avec ceux de nos données numériques. Les insets montrent en représentation logarithmique les ailes des distributions lissées soulignant les comportements en loi de puissance liés à la présence des paires coopératives (eqs. (3.59) et (3.60)).

Finalement, en se basant sur les observations que nous avons faites précédemment pour les régimes spatialement dilués et spatialement denses, et en assimilant les comportements dans les ailes à des lorentzienne en E_{at}^2 pour le cas scalaire et E_{at} pour le cas vectoriel, nous obtenons de manière empirique que les distributions des positions des modes $P(E_{at})$ ont une comportement dans la limite des régimes dilué ($\rho\lambda^3 < 1$) décrit par la relation :

$$P(E_{at}) \approx \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\beta - E_{at}^2}}{\beta} + P_{pairs}(E_{at}) \tag{3.62}$$

où β à la même valeur dans le cas scalaire et vectoriel ($\beta \simeq 0.1b_0$ avec b_0 l'épaisseur optique soit dans le cas scalaire soit dans le cas vectoriel). Pour les régimes denses ($\rho\lambda^3 > 1$) nous obtenons deux expressions légèrement différentes entre les cas scalaires et vectoriel. Dans le cas vectoriel les distributions des positions des modes sont décrites par l'équation :

$$P(E_{at}) = \frac{1}{2\beta''}\exp(-\beta''|E|) + \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\beta' - E_{at}^2}}{\beta'} + P_{pairs}(E_{at}) \tag{3.63}$$

et dans le cas vectoriel :

$$P(E_{at}) = \frac{1}{2\beta''}\exp(-\beta''|E|) + P_{pairs}(E_{at}) \tag{3.64}$$

Contrairement au cas scalaire, il est clair que la rupture abrupte dans le comportement exponentiel du centre des distributions $P(E_{at})$ ne semble pas être présente dans le cas vectoriel. Il se peut que le nombre accru de paires coopératives dans ce cas-là et leur robustesse (tendance à ne pas disparaître) rendent l'observation de cette rupture difficile. Nous avons choisis *ab initio* de représenter cette rupture dans le cas scalaire en se servant

des bords de la loi semi circulaire obtenue dans les régimes dilués (3.54) ce qui s'est avéré fonctionner sur le comportement de nos données numériques.

La figure 3.19 nous montre les distributions des positions des modes en énergie en représentation semi-log pour un nuage contenant $N = 700$ atomes dans les régimes denses ($\rho\lambda^3 = 0.44$) et dilués ($\rho\lambda^3 = 13.16$). Le courbes en trait pleins représentent les équations (3.62)-(3.64), obtenues de manière empirique à partir des observations sur le comportement de nos données numériques. Les inset montrent en représentation logarithmique les ailes des distributions $P(E_{at})$ lissées afin souligner la présence des paires coopératives dont les comportements sont décrits par les équations (3.59) et (3.60), on peut remarquer que dans le cas scalaire la présence des paire est moins prononcée dans le régime dense ce qui est en accord avec l'observation faite pour la répartitions de paires dans le plan complexe (figure 3.4).

1.6 Distribution des écarts en énergie.

Après avoir considéré les distributions des positions des mode $P(E_{at})$ à la section précédente, une autre quantité intéressante à étudier est la distributions de écarts moyens entre les niveaux d'énergies consécutifs $P(\Delta E_{at})$ avec $\Delta E_{at} = E_{at,i+1} - E_{at,i}$. En effet, l'étude de cette quantité peut nous amener des informations sur les corrélations susceptible d'exister entre le positions des niveaux d'énergies et par conséquent nous donner une indication sur un changement drastique sur la dynamique du système. En considérant les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ ou de leur position en énergie $P(E_{at})$, nous regardons principalement les comportement qui sont relié au moments d'ordres 1 de ces quantités alors que l'étude des distributions écarts moyen en niveaux d'énergies consécutifs va nous amener des informations sur les propriétés statistiques des fluctuations, moments d'ordres 2, des distributions reliées à ces quantités. Il est à noter que dans cette partie nous nous référerons à des distributions dont l'écart moyen est normalisé à l'unité ($\langle \Delta E_{at} \rangle = 1$).

Dans de nombreux domaines de la physique ondulatoire, la distribution des écarts entre niveaux d'énergie consécutifs (communément appelée $P(s)$ avec $s \equiv \Delta E_{at}$) a été intensivement étudiée afin de déterminer si la dynamique de ces systèmes était déterministe (intégrable) ou chaotique. Dans le cas de systèmes intégrables (dont le nombre de degrés de liberté et ne dépasse pas le nombre de degrés de symétries), les niveaux d'énergies sont totalement décorrélés il a été trouvé que la distribution des écarts entre niveaux d'énergies les plus proches était décrite par une loi de Poisson telle que :

$$P_P(s) = e^{-s} \tag{3.65}$$

Il faut cependant souligner que ce type de comportement n'est pas totalement universel à tous les systèmes intégrables, en effet dans le cas d'un oscillateur harmonique, qui est un système tout à fait intégrable, les niveaux d'énergies sont équidistants ce qui se traduira par une distribution des écarts en énergies décrite par une fonction delta.

Dans le cas de systèmes chaotiques, les premier travaux fondateurs utilisant ce type d'approche ont été introduits par Eugène Wigner [59, 60], qui a réduit la complexité de ces systèmes en ne s'intéressant qu'au sous espace de Hilbert contenant deux niveaux consécutifs en énergie, ce qui est équivalent à se rapprocher de l'étude d'un système à 2 niveaux. En se basant sur les différentes propriétés de symétries des Hamiltoniens, Dyson [61] et Metha [127] ont établis par la suite plusieurs classe d'universalités tout d'abord pour les Ensembles Gaussiens Unitaires, les Ensembles Gaussiens Orthogonaux et les Ensembles

Gaussiens Symplectiques. Dans les trois cas il a été trouvé que les distributions des écarts entre niveaux d'énergies consécutifs étaient bien décrites par les distributions de Wigner :

$$P_W(s) = As^{\beta}e^{-Bs^2} \tag{3.66}$$

où $\beta = 1, 2$ ou 4 est un exposant qui dépend de la classe d'universalité et A et B sont deux constantes numériques de normalisations. En considérant rapidement l'équation (3.66), on remarque que les distributions des écarts entre les niveaux d'énergies consécutif auront pour les très petits écarts ($s \to 0$) un comportement linéaire ($\beta = 1$) pour les Hamiltoniens appartenant aux Ensembles Gaussiens Orthogonaux, quadratique ($\beta = 2$) pour les Hamiltoniens appartenant aux Ensemble Gaussiens Unitaires ou quartique ($\beta = 4$) pour les matrices appartenant aux Ensembles Gaussiens Symplectiques. Il est important de noter que malgré des différences notable dans les comportements des écarts entre niveaux d'énergies très proches, les densités d'états en énergies sont décrites dans les trois cas par des lois semi circulaires, ce qui nous montre que l'observation d'une loi semi circulaire, comme nous l'avons obtenues précédemment (fig. 3.19) n'implique pas l'observation d'une répulsion entre les niveaux d'énergies.

Que ce soit pour des systèmes intégrables ou non intégrables (chaotiques), les comportements décrits par les équations (3.65) et (3.66) ont été observé à de maintes reprises que ce soit numériquement ou expérimentalement dans le cadres d'études menées sur des particules quantiques dans des billards chaotiques [132], avec des cavité micro-ondes chaotiques [133] ou encore dans la situation d'un atome d'hydrogène soumis à un très fort champ magnétique extérieur [134].

Dans le cadre de la physique mésoscopique, il a tout d'abord été conjecturé que la théorie des matrices aléatoires pouvait s'appliquer au cas d'un électron dans un potentiel désordonné [135] ce qui a été démontré par la suite par Efetov [136] en utilisant une approche supersymmétrique basée sur le calcul de fonctions de corrélations à deux points. La force de la théorie des matrice aléatoire résidant dans le fait que les détails microscopiques du système n'ont que peu d'influence sur les comportements des fluctuations des densités d'états des valeurs propres et par conséquent sur les distributions des écarts entre niveau d'énergies consécutifs.

En ce qui concerne la localisation d'Anderson des électrons, en s'intéressant aux états propres de la matrice transmission, il est possible d'obtenir des informations sur les propriétés de transport du système et par conséquent de savoir si l'on considère une phase métallique (où la diffusion multiple domine la dynamique du système) ou une phase isolante (où les modes localisés au sens d'Anderson sont prédominants dans le système). Lorsque la diffusion multiple domine la dynamique du système, il existe une corrélation entre les états propres du système ce qui a pour conséquences une répulsion entre les niveaux d'énergies, on pourra donc s'attendre à ce que la distribution des écarts entre niveaux d'énergies consécutif soit décrite pas les distributions de Wigner (eq. 3.66). Dans la phase isolante, où il n'existe pas de corrélations entre les états localisés et dons peu de répulsion, la distribution des écarts en énergies est décrite par une loi de Poisson (eq. 3.65). L'universalité de ce type de comportements a été prouvée expérimentalement dans des cavités micro-ondes désordonnées [137]. Cependant une transition abrupte entre les distributions de Wigner dans le régime métallique et la loi de Poisson dans la phase isolante n'est supposée avoir lieu de manière abrupte que dans la situation où l'on considère un milieu de taille infinie alors que pour de systèmes de tailles finies cette transition apparaît graduellement. Au point critique, où a lieu la transition entre le régime métallique et isolants, plusieurs études ont essayé d'établir la formes des distributions des écarts entre

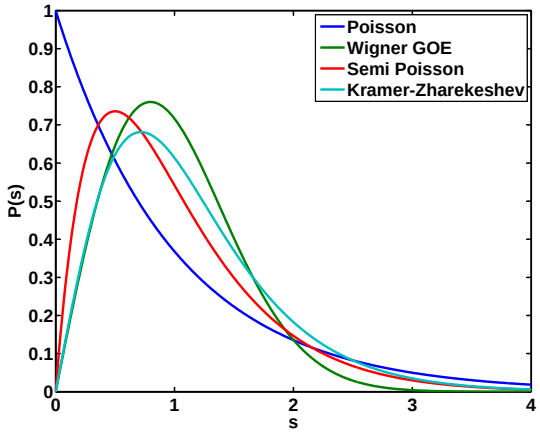

FIGURE 3.20 – Graphique illustrant les distributions $P(s)$ des écarts entre niveaux d'énergies consécutifs dans la phase métallique (eq. 3.66), au point critique (eq. 3.68) et (3.67) et dans la phase isolante (eq. 3.65).

les niveaux d'énergies consécutifs et à ce jour les distributions qui ont été retenues de manière commune sont celles établie par Kramer et Zharekeshev [138] :

$$P_{KZ}(s) = \frac{A_C^2 s}{\sqrt{\mu^2 + (A_C s)^2}} e^{\mu - \sqrt{\mu^2 + s^2}} \tag{3.67}$$

avec $A_C \simeq 1.91$ et $\mu \simeq 2.21$. Une autre distribution des écarts en énergie au point critique a été trouvée plus récemment est la distribution semi Poisson telle que [139] :

$$P_{SP}(s) = 4se^{-2s} \tag{3.68}$$

La figure 3.20 donne une illustration des distributions des écarts entre niveaux d'énergies consécutifs dans les différents régimes (métallique, point critique et isolant). On remarque qu'à l'exception de la loi de Poisson, représentative de la localisation forte due au désordre, il y a toujours une répulsion entre les niveaux d'énergies dont la séparation tend à être nulle ($s \to 0$).

De la même manière que les travaux menés sur la localisation d'Anderson, ce type d'approche a été aussi utilisé lors d'études sur la transition superradiante, où la nature quantique de cette transition et sa relation avec les systèmes chaotiques ont été discutés, et des travaux considérant l'Hamiltonien de Dicke ont obtenus les exposant critique associés à cette transition de phase soit de manière asymptotique dans des cas limites bien précis [140] soit de manière exacte en considérant une système de taille finie [141].

Que ce soit dans le contexte de la transition métal-isolant ou de la transition superradiante, les comportements d'échelle et les exposants critiques ont été obtenus en utilisant les distributions intégrées d'écarts en énergie telles que

$$I(s) = \int_s^\infty P(s)ds \tag{3.69}$$

et en considérant ensuite la quantité [142][143]

$$J(s_0) = \frac{I(s_0) - I_W(s_0)}{I_W(s_0) - I_P(s_0)} \tag{3.70}$$

où s_0 sont les abscisses auxquelles s'intersectent la distribution de Wigner (3.66), associée à la distribution intégrée $I_W(s)$, et la loi de Poisson (3.65), associée à la distribution intégrée $I_P(s)$. Dans la situation où il y a répulsion entre les modes (régime diffusif ou régime de couplage faible pour les effets coopératifs), les distributions des écarts entre les niveaux d'énergies sont décrites par les distributions de Wigner on peut donc prévoir que la quantité $J(s_0)$ tendra vers une valeur nulle. Dans le cas contraire où il n'y a pas de répulsions entre les modes (phase isolant ou régime de couplage fort), les distributions des écarts en énergies seront décrites par une loi de Poisson ce qui aura pour conséquence la convergence de la quantité $J(s_0)$ vers la valeur 1. Enfin il est important de souligner que ce type d'étude est mené majoritairement dans le cas de système fermé dont la dynamique est décrite par un Hamiltonien hermitien (appartenant par conséquent à l'Ensemble Gaussien Orthogonal) et qu'avant de faire ce type d'approche des changements drastiques ont été observés dans les comportements des distributions des écarts entre niveaux d'énergies.

Dans notre situation, il est assez difficile de prévoir analytiquement quel sera le comportement des distributions des écart en énergies consécutifs car contrairement aux travaux que nous avons énumérés précédemment, les termes non diagonaux des opérateur aléatoires que nous considérons ne sont pas des variable aléatoires indépendantes : ce sont de fonctions qui dépendent des positions relatives entre les éléments du système et ce sont ces positions qui sont des variables aléatoires indépendantes. Il est donc difficile d'adopter la même démarche que pour les matrices aléatoires 'classiques' en se ramenant à l'étude du sous espace contenant deux niveaux consécutifs en énergies. Cependant l'étude de telles distributions peut être susceptible de nous amener des informations sur un changement drastiques de comportement entre une phase où les corrélations dominent la dynamique des états propres, amenant à une répulsion entre les niveaux d'énergies, et une phase où il n'existe pas de répulsions entre les modes. De plus il est important de noter que dans les cas scalaire et vectoriels, les Hamiltoniens effectifs que nous considérons sont des opérateurs non hermitiens ce qui a pour conséquences que le produite scalaire entre deux états propres sera non nul, c'est à dire qu'il y aura toujours un recouvrement, même négligeable, entre les modes.

Dans cette partie, nous nommerons les écarts entre niveaux d'énergie consécutifs ΔE_{at} afin de ne pas porter à confusion avec une quantité que nous considérerons ultérieurement dans ce manuscrit qui sera la distribution des plus proches voisins en énergies dans le plan complexe qui elle sera notée $P(s)$. La figure 3.21 montre les distributions des écarts en énergies consécutifs $P(\Delta E_{at})$ en représentation logarithmique dans les cas scalaire et vectoriel pour un nuage contenant $N = 500$ à différentes densités spatiales $\rho\lambda^3 = 131.6, 13.16$ et 1.316. On remarque que quelle que soit la densité considérée il n'y a pas de répulsions entre les niveaux d'énergies considérés que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel ce qui ne nous permet pas d'affirmer l'existence d'un changement de comportement drastique apparaissant aux grandes densités spatiales ou optiques. Dans les deux cas les formes des distributions des écarts en énergies sont qualitativement les mêmes à l'exception des plus grands écarts obtenus dans le cas vectoriel dû à la présence des termes en $1/(k_0 r)^2$ et $1/(k_0 r)^3$ dans le potentiel d'interaction.

1.7 Sélection des valeurs propres dans le plan complexe.

Dans de nombreux travaux portant sur la localisation d'Anderson, il est souvent utile de ne s'intéresser qu'à une partie bien spécifique du spectre dans laquelle on suppose *a priori*

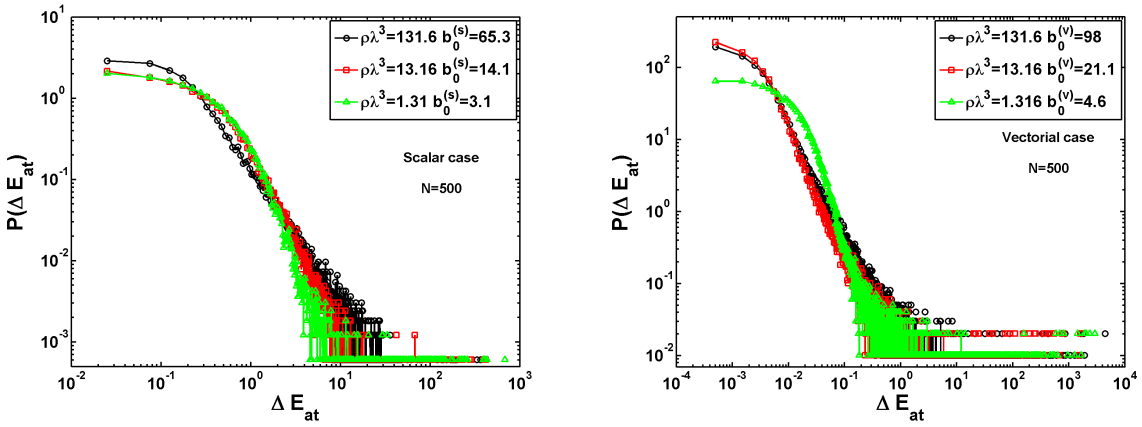

FIGURE 3.21 – Représentation log-log des distributions des écarts entre niveaux d'énergies consécutifs $P(\Delta E_{at})$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure des droite) pour un nuage contenant $N = 500$ atomes à différentes densité spatiales $\rho\lambda^3 = 1.136, 13.16$ et 131.6 moyenné sur 15 configurations spatiales. On remarque que qu'elle que soit la densité spatiale que l'on considère, on n'observe pas de répulsion entre les niveaux d'énergies ni même un changement de comportement drastique dans les formes de ces distributions. Dans les deux cas les distributions ont qualitativement les mêmes formes à l'exception des plus grandes valeurs de ΔE_{at} obtenues dans le cas vectoriel, qui vient du fait que les paires d'atomes coopératives sont plus décalées en énergies à cause de la présence du terme en $1/(k_0 r)^3$ dans le potentiel d'interaction.

qu'il est possible d'observer les états localisés. De manière générale dans le contexte de la diffusion chaotique, afin d'observer les distributions des écarts entre les niveaux d'énergies consécutifs que nous avons énoncées à la section précédente, seules les valeurs au centre de la loi semi circulaire sont retenues.

Dans des études portant sur des systèmes similaires au notre [27] les états localisés sont séparés *'à la main'* des états étendus en se servant d'arguments géométriques basés sur le nombre de site contribuant à l'état d'excitation collectif. Cette notion sera approfondie lorsque nous les états propres de l'Hamiltonien effectif plus tard dans cette étude. Plus récemment, une étude a achevé une sélection sur les états contenus dans l'accumulation des valeurs propres aux longs temps de vies autour de l'énergie $E_{at} = 1$ (branche dans le plan complexe) [144] afin de calculer le nombre de Thouless, qui quantifie le recouvrement entre les différents modes et qui dans le cas d'électrons à l'intérieur d'un matériau semi-conducteur peut être reliée à la conductance.

Notre idée originale est que le comportement des paires coopératives d'atomes, qui sont découplées du reste des états à cause de leur écarts en énergie, ont un comportement indépendant vis à vis du reste des autre excitations collectives concernant la majorité des atomes. En se basant sur les comportements que nous avons obtenus précédemment de manière numérique nous élaborons donc un critère afin de nous affranchir de ces paires d'atomes dont la distance qui les sépare est inférieure à la longueur d'onde. Certaines études ont évité ce problème en posant un volume d'exclusion de l'ordre de la longueur d'onde au cube afin de s'affranchir de l'influence des paires coopératives [22, 24].

En se rappelant de ce qui a été précédemment évoqué lorsque nous avons considéré la répartition des valeurs propres dans le plan complexe, qui suit une distribution circulaire dans le cas de systèmes dilués nous suivons l'hypothèse que la répartition dans le plan

complexe des valeurs propres, qui ne sont pas associées à des paires coopératives, est décrite par une ellipse dont le grand axe (selon l'axe des imaginaire) est égal au petit axe (selon l'axe des réels) dans le cas de systèmes diluées et que pour des systèmes denses il commence à y avoir une légère anisotropie (non équivalence entre les deux axes) qui apparaît. De nombreux travaux ont été voués à une description rigoureuse du support des valeurs propres dans le plan complexe [116, 77, 145] en considérant un 'super opérateur' contenant l'opérateur aléatoire non hermitien et son auto adjoint et en utilisant l'inverse de la résolvante de cet opérateur. Notre but n'étant que de s'affranchir des paires coopératives d'atomes nous ne nous étendrons pas sur une description ultra rigoureuse du comportement de la frontière du domaine contenant les valeurs propres dans le plan complexe.

En se référant aux comportements asymptotiques qui ont été obtenus pour les valeurs maximales des largeurs des modes aux équations (3.45) et (3.46) dans les cas scalaire et vectoriels et pour les équations (3.51)-(3.52) que l'on va relier à la bordure inférieure du domaine que l'on désire sélectionner, en faisant la conjecture que ces dernières équations décrivent la limite constituant la frontière entre la physique des états sousradiant reliée à plus de deux atomes et la physique des états sousradiants reliés à des paire coopératives, il est possible d'établir un équation pour le comportement du domaine elliptique selon l'axe imaginaire telle que :

$$\Gamma_{Axe} = \frac{\Gamma_{Max} + \Gamma'_{inv}}{2} \tag{3.71}$$

Le premier terme de l'équation (3.71) correspond exactement à l'équation (3.45) pour le cas scalaire et à l'équation (3.46) pour le cas vectoriel alors que le deuxième terme de l'expression précédente bien que similaire aux équations (3.51) pour le cas scalaire et (3.52) pour le cas vectoriel a été minoré d'un facteur 2 tel que

$$\Gamma'_{inv} = \frac{\Gamma_0}{2b_0^{(s)} + 1} \tag{3.72}$$

pour le cas scalaire et :

$$\Gamma'_{inv} = \frac{\Gamma_0}{2b_0^{(v)} + 1}\left(1 + \frac{1}{k_0 l^{(v)}}\right) \tag{3.73}$$

pour le cas vectoriel. Cette correction vient du fait que la frontière entre le domaine propre aux paires coopératives et les domaine propre aux états d'excitation collective associés à plus de 2 atomes ne se situe pas à la valeur la plus probable des largeurs des modes mais aux point d'inflexion légèrement inférieur en largeur sur les distributions des largeurs des modes comme cale est clairement visible dans le cas vectoriel à la figure 3.7.

Pour l'axe réel (celui selon lequel sont les positions en énergies), on reprend les résultats obtenus aux équations (3.62), (3.63) et (3.64) pour les cas scalaire et vectoriel, et en adoptant une expression similaire à celle que l'on a établie pour l'expression (3.71), on obtient comme comportement pour l'axe de l'ellipse :

$$E_{Axe} = \sqrt{\frac{b_0^{(s)/(v)}}{5.5} + \left(\frac{b_0^{(s)/(v)}}{5.5}\right)^2} \tag{3.74}$$

dans les cas scalaire ou vectoriel. Enfin nous ne gardons que les valeurs propres contenues dans le domaine $\mathcal{C}$ délimité par l'équation de l'ellipse

$$\frac{\Gamma_{at}}{\Gamma_{axe}} + \frac{E_{at}}{E_{axe}} = 1 \tag{3.75}$$

afin de s'affranchir des états correspondant aux paires coopératives très décalées en énergies.

Il est utile de remarquer qu'en procédant de cette manière on s'affranchit également des états aux long temps de vies qui s'accumulent dans la branche autour de l'énergie $E_{at} = 1$ dans le cas scalaire. Afin de ne pas éliminer ces états aux très long temps de vies, nous ajoutons un critère de sélection supplémentaire nous permettant de nous affranchir également des états se situant à une distance d dans le plan complexe, inférieure à une certaine distance d_{ex} seuil que nous imposons, des courbes représentatives décrivant les comportements des valeurs propres pour $N = 2$ atomes (eqs. (3.4), (3.10), et (3.10)). Connaissant l'expression analytique associée aux paires coopératives, il nous est possible pour chaque valeur propre $\Lambda_i = (E_{at,i}, \Gamma_{at,i})$ n'étant pas contenue dans le domaine elliptique définit à l'équation (3.75) de calculer sa distance minimale $d_m = \min(d)$ par rapport à la courbe représentative de paires coopératives dans le plan complexe telle que :

$$d = \sqrt{(E_{at,i} - E_{at})^2 + (\Gamma_{at,i} - \Gamma^{(\pm)}(E_{at}))^2} \tag{3.76}$$

où $\Gamma^{(\pm)}(E_{at})$ est définie dans le cas scalaire, après avoir développé les équations (3.5) et (3.6) en $k_0 r \sim 0$, telle que :

$$\Gamma^{(\pm)}(E_{at}) \simeq 1 \pm \left(1 - \frac{1}{(E_{at}^{(\pm)})^2}\right). \tag{3.77}$$

On peut adopter la même procédure pour le cas vectoriel en développant cette fois ci à l'ordre 2 les équations (3.11), (3.13), (3.12) et (3.14) ce qui nous permet d'obtenir :

$$\Gamma^{(\pm),1}(E_{at}) \simeq 1 \pm \left(1 - \frac{1}{E_{at}}\right) \tag{3.78}$$

$$\Gamma^{(\pm),2}(E_{at}) \simeq 1 \pm \left(1 - \frac{1}{E_{at}}\right). \tag{3.79}$$

A partir de ces expressions analytiques on est donc en mesure de calculer la distance d entre chaque valeur Λ_i et le point le plus proche appartenant aux courbes associées aux paires et de comparer cette distance au seuil que l'on a fixé préalablement. Typiquement nous avons choisis $d_{ex} = 1$ afin de sélectionner les valeurs propres dans le plan complexe.

La figure 3.22 nous montre un exemple de sélection des valeurs propres dans les cas scalaire et vectoriel en se basant sur le domaine délimités par l'équation (3.75). On remarque bien que cette est valide que ce soit dans la limite des milieux dilués ($\rho\lambda^3 \ll 1$) ou des milieux denses ($\rho\lambda^3 \gg 1$).

Après s'être affranchis des états correspondants aux paires coopératives d'atomes (eqs. (3.4), (3.9) et (3.10)), il est intéressant de revenir brièvement sur les distributions de largeurs et des positions des modes ($P(\Gamma_{at})$ et $P(E_{at})$) afin de s'assurer que les comportement que nous avons précédemment attribués aux paire coopératives soient tels que nous l'avons conjecturés.

La figure 3.23 nous montre les distributions des largeurs et des positions des modes sélectionnés dans les cas scalaire et vectoriel pour un nuage contentant $N = 700$ atome à différentes densités spatiales ($\rho\lambda^3 = 0.44, 1.316, 13.16$ et 131.6). En regardant les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ on remarque tout d'abord que l'accumulation autour de la valeur $\Gamma_{at} = 2\Gamma_0$, associée aux paire coopératives d'atome a disparu ce qui souligne

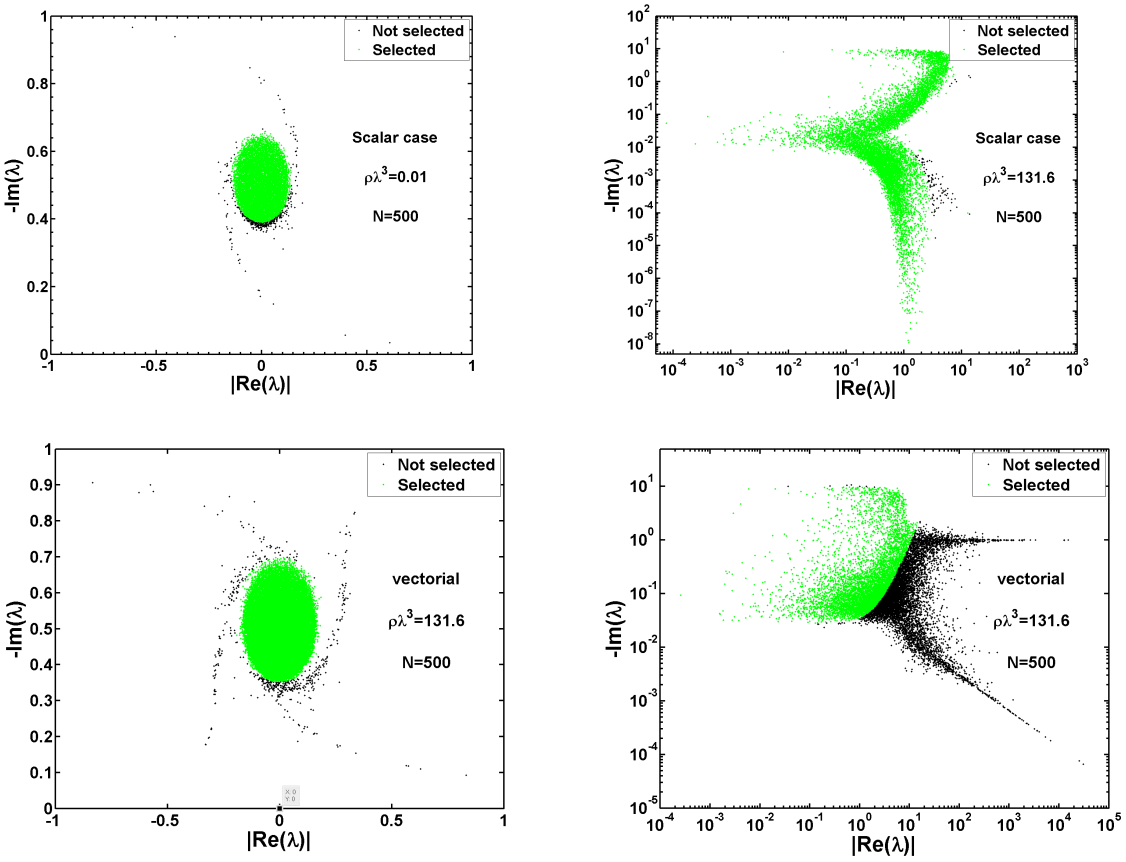

FIGURE 3.22 – Exemple de sélection des valeurs propres dans les cas scalaire (figures du haut) et vectoriel (figures du bas) pour le régime dilué ($\rho\lambda^3 = 0.01$) et dense ($\rho\lambda^3 = 131.6$). On remarque bien que le domaine délimité par l'équation (3.75) marche bien dans les deux cas que ce soit dans la limite des systèmes denses ou dilués.

la convergence de l'exposant de la décroissance algébrique vers la valeur $-4/3$ dans le cas vectoriel. Dans le cas scalaire, nous continuons également à observer ce comportement preuve que l'exposant de cette décroissance algébrique n'était pas relié à la présence des paires coopératives. En ce qui concerne les distributions des positions des modes sélectionnés, on remarque dans le deux cas que les lois de puissance dérivées aux équations (3.59) et (3.60), associées aux paires coopératives d'atomes ne sont plus présentes, par contre la déformation et l'asymétrie de ces distributions apparaissant aux grandes densités spatiales est accrue dans le cas scalaire. Cette déformation des distributions des positions des modes $P(E_{at})$ aux grand densités spatiale est une conséquence directe de la ségrégation des valeurs propres dans le cas scalaire et quasiment absente dans le cas vectoriel.

1.8 Distributions $P(s)$ des distances plus proches voisins dans le plan complexes pour les valeurs propres sélectionnées.

Après s'être affranchi des états correspondant aux paires coopérative d'atomes, nous allons considérer les distributions $P(s)$ des distances plus proches voisins entre les modes dans le plan complexe. En effet n'ayant pas observé de changement de comportement dans les distributions des écarts entre niveaux d'énergies consécutifs $P(\Delta E_{at})$, nous pouvons

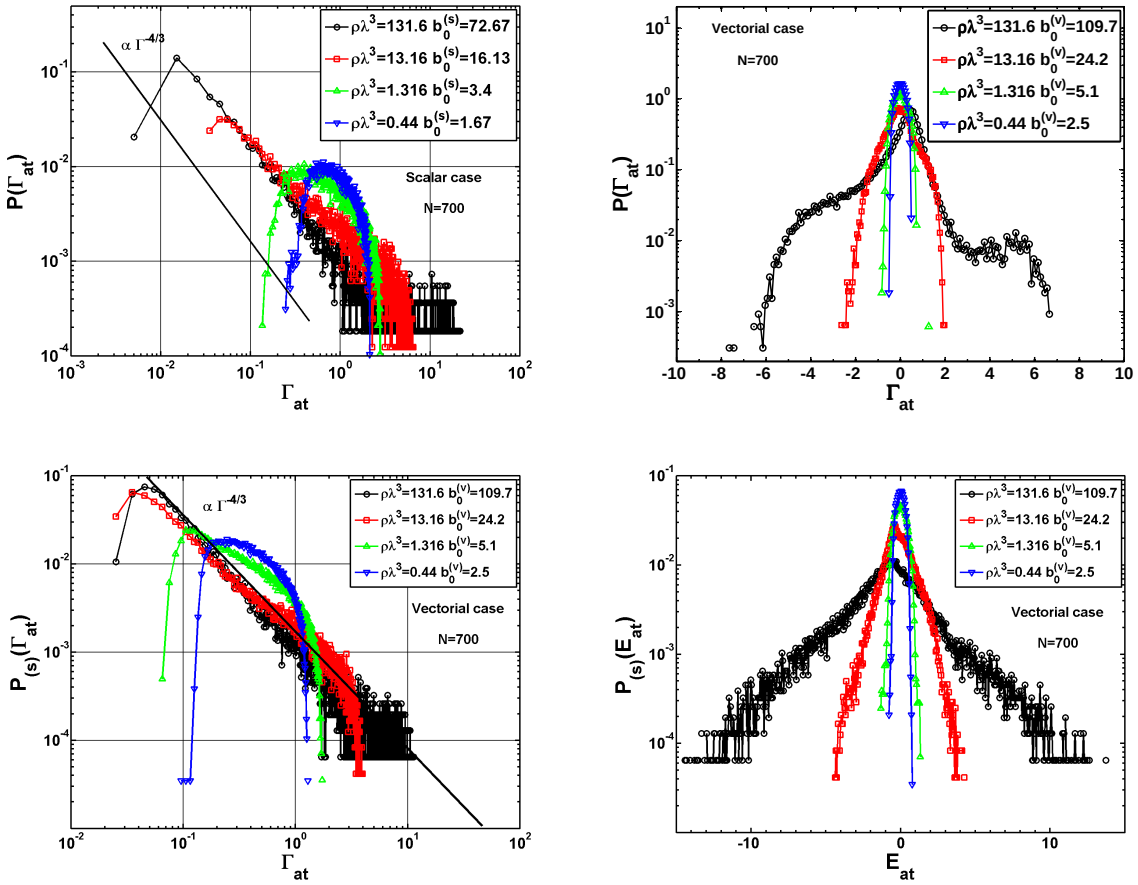

FIGURE 3.23 – Distributions des largeurs (figures de gauche) et des positions (figure de droites) des modes sélectionnés dans le cas scalaire (figure du haut) et vectoriel (figure du bas) pour un nuage contenant $N = 700$ atomes à différentes densités spatiales $\rho\lambda^3 = 0.44, 1.316, 13.16$ et 131.6. Pour le cas vectoriel on remarque clairement en considérant les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ que l'accumulations des largeurs autour de $\Gamma_{at} = 2$ à disparue ce qui souligne la convergence de l'exposant de la décroissance algébrique vers la valeur $-4/3$ et en regardant les distributions des positions des modes $P(E_{at})$ on peut voir que les lois de puissances associées aux paires coopératives dans les ailes des distributions ont disparues. Par contre les cas scalaire montre certaines montre certaines différences flagrantes notamment dans la convergence de l'exposant de la décroissance algébrique vers la valeur $-4/3$ et aussi dans l'asymétrie rouge-bleue des distributions des positions des modes $P(E_{at})$ très prononcée.

vérifier s'il est possible d'avoir une information sur un changement de dynamique en regardant le comportement des distances entre les modes dans le plan complexe.

Ce type d'approche est fréquemment utilisé dans le domaine du chaos ondulatoire est souvent expliqué de manière simple à l'aide d'un système à deux niveaux auquel on ajoute un canal de perte, le tout modélisé par un hamiltonien contenant deux termes : le premier étant diagonal et hermitien (système à deux niveaux non perturbé) et le second étant une matrice non hermitienne totalement remplie (pertes, couplage avec l'environnement,

perturbation...) dont la pondérations est paramétrées tel que :

$$H_e = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} - i\alpha \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \tag{3.80}$$

avec $E_2 > E_1$ et avec α représentant la force du couplage ou la perturbation. Ce modèle idéal, ramenant l'étude d'un système complexe à la simple considération d'un système à deux niveaux, permet de reproduire des mécanismes tels qu'un couplage vers l'extérieur via un canal de perte [146], une interaction longue protée entre les niveaux d'énergies et bien d'autres mécanismes encore. Dans le cas où le second terme de l'équation (3.80) est un opérateur symétrique ($\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$), ce qui se rapproche de notre situation, il a été trouvé que lorsque le couplage α est supérieur à l'écart entre les niveaux d'énergies du système fermé $E_2 - E_1$, les niveaux d'énergies du système perturbé se retrouvaient dégénérés selon l'axe réel mais que l'écart entre les parties imaginaires des deux états divergeaient, l'une allant tendant vers une valeur nulle et l'autre tendant vers l'infinis. De ce fait au-dessus du seuil $\alpha > E_2 - E_1$ il y avait une répulsion entre les valeurs propres dans le plan complexe.

Dans le contexte de travaux menés sur la localisation d'Anderson en utilisant des Matrices Aléatoires Euclidiennes non hermitiennes (matrice hessienne d'un fluide de Lennard-Jones tronqué qui peut être associé à un désordre topologique) [143] non seulement une transition de phase, rendue non abrupte par les effets de tailles finies du système, a été observée en considérant la distributions des distances entre les valeurs propres dans le plan complexe et les exposant critiques associés à la transition de phase métal isolant ont été obtenus de manière exacte. De la même manière, des études ont été menées sur la transition superradiante entre le régime de couplage faible matière rayonnement et le régime de couplage fort et il a été établis, en considérant les pôles de la matrice diffusion, que la répulsion entre les valeurs propres dans le plan complexe, d'un système invariant par renversement temporel, était quadratique [147].

La situation que nous considérons est singulièrement différente car nous n'avons pas un contrôle aussi simple sur le couplage du système avec le vide via les canaux de pertes. En effets chaque atomes que nous considérons ne peut pas être assimilé à un canal de perte mais il existe toutefois un paramètre pertinent, qui est le nombre d'atomes par nombre de modes transverse contenus dans le système, proportionnel à l'épaisseur optique du système $b_0 \propto N/(k_0 L)^2$, dont dépendent les effets coopératifs. De plus, comme nous l'avons évoqué précédemment, les opérateurs que nous considérons sont non hermitiens, que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel, on peut donc s'attendre à ce qu'ils présentent dans certains cas limites des comportements similaire à ceux appartenant à l'Ensemble Gaussien Unitaire.

Afin de calculer les distributions $P(s)$ des distances plus proches voisins dans le plan complexe, nous définissons la distance d_{ij} dans ce plan entre deux modes telle que :

$$d_{ij} = \sqrt{(E_{at,i} - E_{at,j})^2 + (\frac{\Gamma_{at,i}}{2} - \frac{\Gamma_{at,j}}{2})^2} \tag{3.81}$$

et les distances plus proches voisins dans le plan complexe sont calculées telles que

$$s_{ij} = \min_{i \neq j}(d_{ij}) \tag{3.82}$$

Dans la suite de cette partie, nous allons tout d'abord considérer les distributions plus proches voisins dans le plan complexe pour les valeurs propres que nous avons sélectionnées à la section précédente en se servant du domaine délimité par l'équation (3.75), à titre

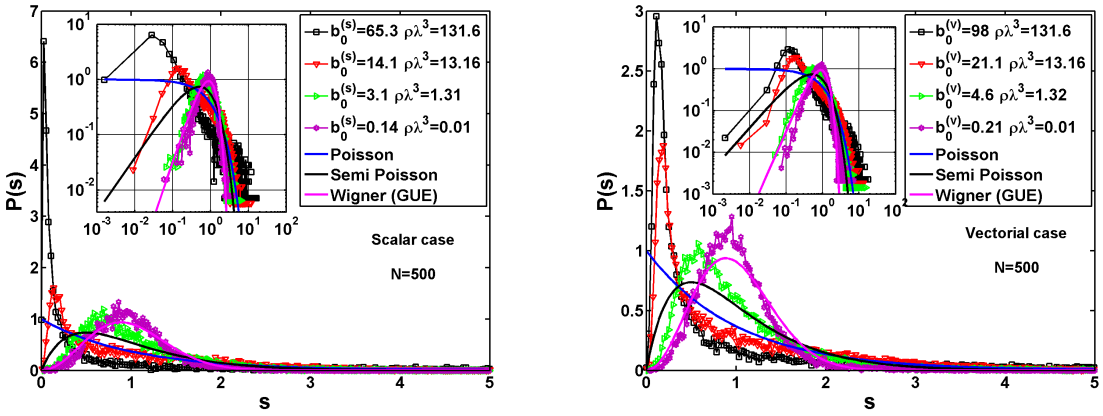

FIGURE 3.24 – Représentations des distributions des distances plus proches voisins $P(s)$ entre les énergies dans le plan complexe dans les cas scalaire (figure de droite) et vectoriel (figure de gauche) pour un nuage contenant $N = 500$ atomes à différentes densités spatiales de diffuseurs ($\rho\lambda^3 = 0.01, 1.316, 13.16$ et 131.6) correspondant à différentes épaisseurs optiques. Que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel, on remarque une singulière différence entre les régimes optiquement et spatialement denses et dilués dans le sens où le maximum de ces distributions tend vers zéro. Les insets présentent les même distributions en représentation log-log afin de souligner leur comportements similaires aux distributions de Wigner appartenant à l'Ensemble Gaussien Unitaire ($P(s) \propto s^2$) pour de très petits écarts ($s \to 0$) et la modification de comportement ayant lieu pour les très grands écarts lorsque le système est optiquement et spatialement épais. Les courbes en trait pleins représentent les distributions des Poisson (bleu), de Wigner pour les Ensembles Gaussiens Unitaires (cyan) et la Semi-Poisson (noir) décrites par les équations (3.65), (3.66) et (3.68).

comparatif nous considérerons les distributions plus proches voisins des valeurs propres non sélectionnées et nous ferons une brève étude dans le cas scalaire des distributions plus proches voisins sur les valeurs propres contenues dans la bande d'énergies comprise entre $E_{at} = 0.5\Gamma_0$ et $E_{at} = 1.5\Gamma_0$.

La figure 3.24 montre la distribution $P(s)$ des distances entre plus proches voisins dans le plan complexe en dans les cas scalaire et vectoriel pour un nuage contenant $N = 700$ atomes à différentes densité spatiales d'atomes $\rho\lambda^3 = 0.01, 1.136, 13.16$ et 131.6 correspondant à différentes épaisseurs optiques b_0. On remarque clairement un changement de comportement entre les régimes optiquement ou spatialement denses ($b_0 \gg 1$ et $\rho\lambda^3 \gg 1$) et les régimes optiquement ou spatialement dilués ($b_0 \ll 1$ et $\rho\lambda^3 \ll 1$). Pour le régime dilué les distributions $P(s)$ se rapprochent des distributions de Wigner (eq. (3.66) avec $\beta = 2$) que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel. Les insets soulignent le comportement quadratique ($\propto s^2$) de ces distributions pour les très petites distances ($s \to 0$) ce qui est un comportement similaire à ceux observés avec les opérateurs appartenant à l'Ensemble Gaussien Unitaire. Une étude à épaisseur optique constante et à densité spatiale constante va nous permettre de savoir quelle est le paramètre qui domine la forme de ces distributions. La figure 3.25 nous montre les distributions des distances plus proches voisins $P(s)$ en représentation semi-logarithmique pour une épaisseur optique constante $b_0^{(s)} = 8.33$ dans le cas scalaire et $b_0^{(v)} = 12.51$ dans le cas vectoriel pour différentes densités spatiales $\rho\lambda^3$ de diffuseurs. On remarque clairement que pour une épaisseur optique donnée, la

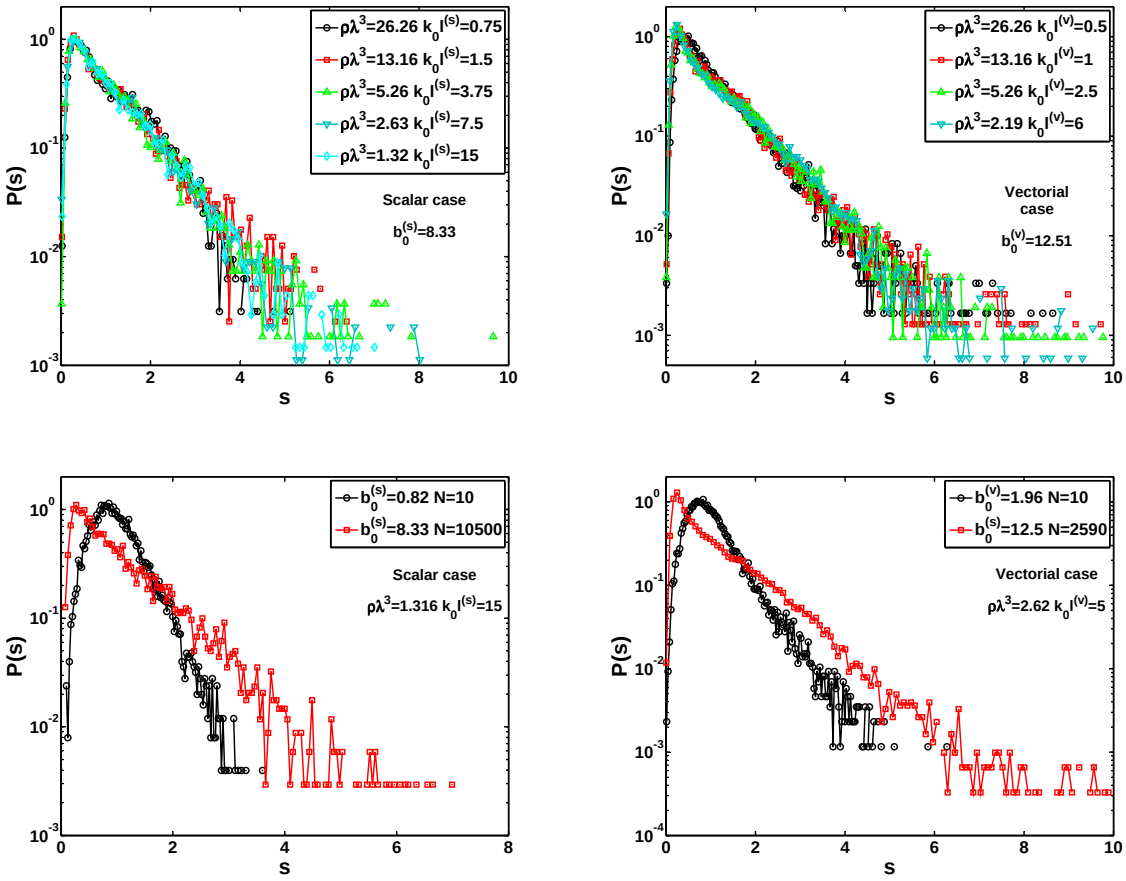

FIGURE 3.25 – Représentation en semi-log des distributions $P(s)$ des distances plus proches voisins dans le plan complexe dans les cas scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droite) pour un système à épaisseur optique constante (figures du haut) avec $b_0^{(s)} = 8.34$ et $b_0^{(v)} = 12.51$ ou une densité spatiale atomique constante $\rho\lambda^3 = 26.26$. en considérant les distributions pour une épaisseur optique constante on remarque qu'à la fois dans les cas scalaire et vectoriel, les formes des distributions évoluent très peu en fonction de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ ou du nombre de Ioffe-Regel $k_0 l$. Par contre en considérant ces distributions pour une densité spatiale donnée ($\rho\lambda^3 = 26.26$) et différents nombre d'atomes $N = 26$ et 1100 on remarque clairement la forme de ces distributions évoluer en fonction de l'épaisseur optique du système b_0. On peut donc en déduire que l'épaisseur optique est le paramètre pertinent pour décrire la forme des distributions plus proches voisins des valeurs propres que nous avons sélectionnées.

forme des distributions $P(s)$ varie très peu. Par contre en considérant ces distributions pour une densité spatiale de diffuseurs fixée (figures du bas) et différentes épaisseurs optique, on remarque clairement une modification de leur forme ce qui nous indique que l'épaisseur optique b_0 est le paramètre pertinent dont dépend la forme des distributions. Cette dépendance en épaisseur optique nous permet de dire que le comportement des distance entre les plus proches voisins dans le plan complexe est globalement dominé par les effets coopératifs, ce qui nous laisse présager que si une transition de phase existe et peut être observée elle sera à rapprocher de la transition dominée par les effets coopératifs [147] plutôt que de la transition métal-isolant [143].

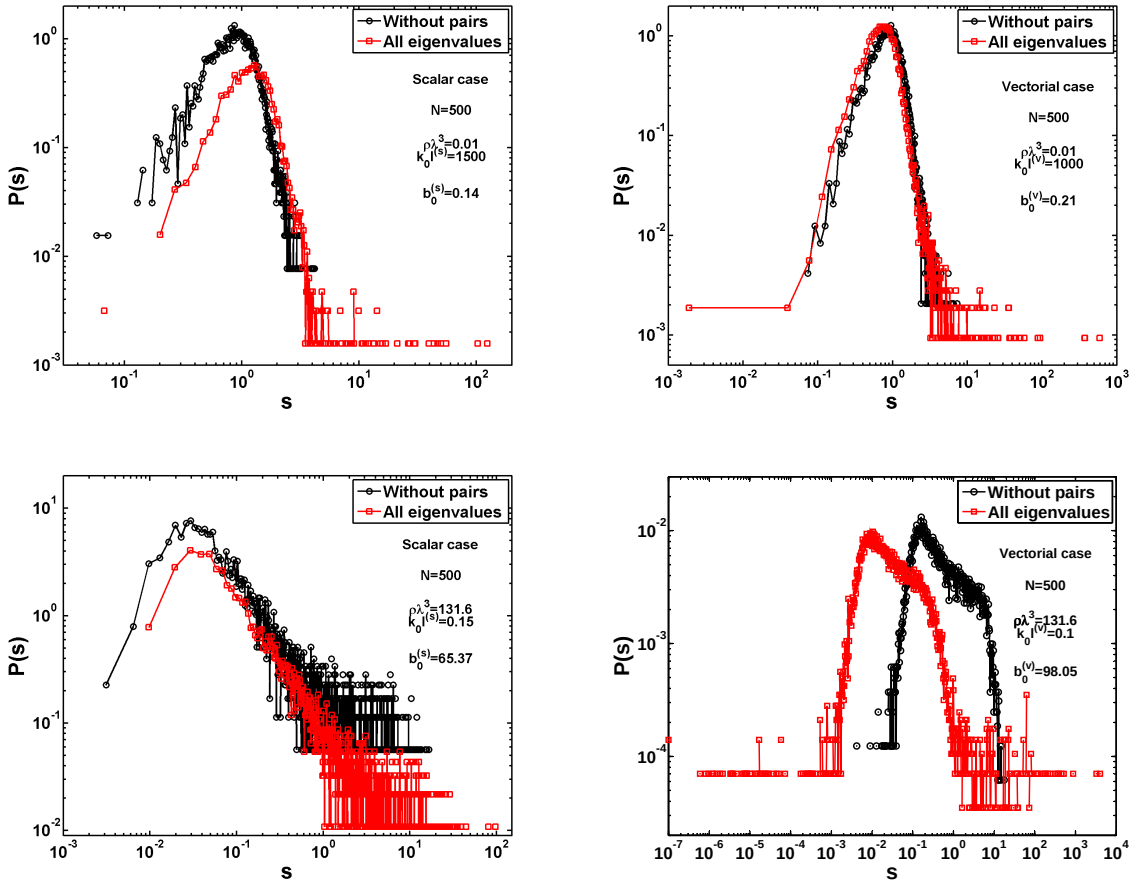

FIGURE 3.26 – Comparaisons des distributions des distances plus proches voisins $P(s)$ avec et sans sélection des valeurs propres contenues dans le domaine décrite par l'équation (3.75) pour les cas scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droite) dans les régimes dilués ($\rho\lambda^3 = 0.01$ pour les figures du haut) et dense ($\rho\lambda^3 = 131.6$ pour les figures du bas). On peut facilement remarquer que la présence des paires coopératives d'atomes influence la forme des distributions $P(s)$ surtout pour les valeurs extrêmes ($s \gg 1$ et $s \ll 1$) des distances plus proches voisins dans le plan complexe.

Comparaison des distributions $P(s)$ ***avec et sans sélection des valeurs propres.***

Après avoir remarqué numériquement que la forme des distributions des distances plus proches voisins $P(s)$ dans le plan complexe était dominée par l'épaisseur optique b_0 du système pour les valeurs propres qui n'étaient pas associées à des paire coopératives, il peut être intéressant de voir en quoi la présence des paires influence la forme de ces distributions en dans quelle mesure elle les modifie. Pour cela nous considérons les distributions $P(s)$ avec et sans paire pour des nuages optiquement dilués ($b_0 \ll 1$) et optiquement dense ($b_0 \gg 1$). Comme nous l'avons discuté précédemment lors de l'étude du comportement asymptotique des largeurs des modes Γ_{at}, il est vrai que la physique des paire est dominée par les effets de densité qui représentent un comportement local. De plus en se rappelant les observations faites lors de la considération de la répartition des valeurs propres dans le plan complexe, on sait que les paires coopératives d'atomes sont plus robustes dans le cas vectoriel et qu'elles ont tendance à disparaître dans le cas scalaire, on peut donc

s'attendre à ce que les distributions $P(s)$ ne présentent que peu de différences avec ou sans paires dans le cas scalaire pour de grandes densités spatiales de diffuseurs ($\rho\lambda^3 \gg 1$).

La figure 3.26 nous montre la comparaison des distributions distances plus proches voisins $P(s)$ dans le plan complexe dans le cas scalaire et vectoriel dans les régimes dilués ($\rho\lambda^3 = 0.01$) et denses ($\rho\lambda^3 = 131.6$). Dans le régime dilué, on remarque clairement que la forme des distributions $P(s)$ est peu influencé, à l'exception de ailes ($s \to 0$ et $s \gg 1$) par la présence des paires coopératives d'atomes ce qui n'est pas surprenant car les paires sont très peu présentes et découplées en énergie du reste des valeurs propres pour des milieux dilués. En revanche dans la limite des milieux denses, on peut constater que la disparition des paires coopératives (surtout les paire superradiantes) dans le cas scalaire a pour conséquence une faible différence entre les distributions $P(s)$ avec ou sans sélection des valeurs propres ce qui n'est pas le cas dans le cas vectoriel où on peut observer des différences drastiques lorsque l'on ne sélectionne pas les valeurs propres.

1.9 Critères de recouvrement spectral entre les modes.

Après avoir considéré les propriétés statistiques des valeurs propres Λ de l'hamiltonien effectif, soit en étudiant le comportement des distributions de leur parties imaginaires $P(\Gamma_{at})$ et de leurs parties réelles $P(E_{at})$, soit en s'intéressant aux corrélations pouvant exister entre les différents modes en considérant les distributions $P(s)$ des distances plus proches voisins dans le plan complexe, nous pouvons nous intéresser au recouvrement spectral entre les modes en nous intéressant à une quantité reliée au rapport entre les moyennes des largeurs des modes Γ_{at} et des écart en énergies moyen ΔE_{at}. Cette quantité, quantifiant le recouvrement spectral entre les modes, est aussi bien utilisée dans des travaux portant sur les effets coopératifs que sur la localisation d'Anderson et permet de mettre en évidence un changement drastique dans la dynamique du régime.

Le critère de recouvrement spectral entre les modes dans les travaux sur la localisation d'Anderson et les effets coopératifs.

Dans certaines situations, la quantité quantifiant le recouvrement spectral est qualifiée de nombre de Thouless, qui a été introduit dans le contexte de la localisation d'Anderson par Thouless [80] et qui dans le cas d'électrons se propageant dans un cristal peut être relié de manière formelle à la conductance adimensionnée à condition que la taille du système soit bien supérieur au libre parcours moyen de transport ($L \gg l$).

Au cours des différents travaux théoriques menés sur la localisation d'Anderson, il a été montré que l'unique paramètre pertinent afin d'observer des comportements d'échelles et de faire de l'analyse de taille finie était la conductance adimensionnée g définie originellement comme :

$$g = \hbar \frac{G}{e^2} \tag{3.83}$$

où G est la conductance réelle du système et e est la charge de l'électron. L'idée originale de Thouless [78] est de partir d'un système dont la taille est comparable au libre parcours moyen de transport et d'augmenter progressivement la taille de ce système afin de considérer au final un système dont la taille est macroscopique dans le but de relier le comportement de la conductance du système macroscopique, difficilement calculable dans

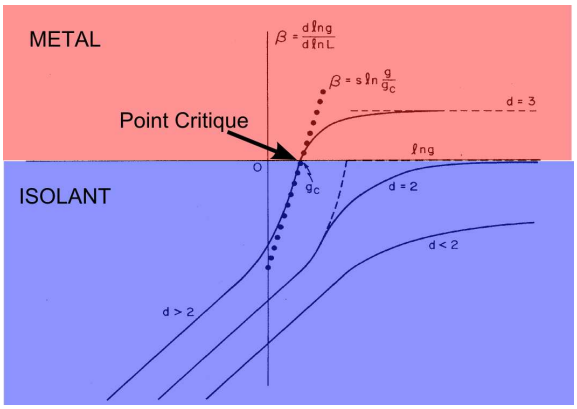

FIGURE 3.27 – Figure issue de la référence [20], représentant la dérivée de la conductance adimensionnée g par rapport à la taille du système pour des milieux de dimension $d = 1, 2$ et 3. On remarque que la quantité $\beta(g)$ ne change de signe que pour des dimensions supérieure à $d = 2$ et que par conséquent pour un milieu à $d = 1$ dimension il y a toujours localisation en présence de désordre et pour $d = 3$ dimensions il y a une transition de phase entre un régime métallique ($g > g_c$) et un régime isolant ($g < g_c$) qui a lieu au point critique g_c.

le cas d'un milieux désordonnée, à celle du système microscopique, qui est facilement dérivable lorsque la taille de ce dernier est comparable au libre parcours moyen de transport l. Ce type d'approche a été la base de l'analyse de taille finie sur laquelle repose une grande partie des travaux menés dans le contexte de la localisation d'Anderson. Il faut cependant attendre les travaux d'Abrahams *et al.* [20] afin qu'il soit démontré que la conductance adimensionnée g soit l'unique paramètre qui présente un comportement d'échelle lorsque l'on s'intéresse aux effets de localisation forte de la fonction d'onde électronique. Pour cela une fonction $\beta(g)$, supposée continue et monotone, a été introduite telle que :

$$\beta(g) = \frac{d\ln(g)}{d\ln(L)} \tag{3.84}$$

Connaissant les comportements asymptotiques de $\beta(g)$ dans la phase métallique (où la diffusion multiple domine la dynamique du système) pour un système faiblement désordonné et dans la phase isolante (où les modes localisés au sens d'Anderson sont prédominants) pour un système fortement désordonné, Abrahams *et al.* ont obtenus la forme de la fonction $\beta(g)$ pour des systèmes de dimension $d = 1, 2$ et 3. Lorsque la quantité $\beta(g)$ est négative cela implique que la conductance du système diminue lorsque sa taille augmente et lorsque $\beta(g)$ et positive la conductance du système augmente proportionnellement avec sa taille. La figure 3.27, tirée de la référence [20] illustre bien ce changement de comportement de la conductance adimensionnée g apparaissant pour des milieux dont la dimension est supérieure à $d = 2$ entre une phase isolante (pour des systèmes fortement désordonnés) et une phase métallique (pour des systèmes faiblement désordonnés). Dans la limite des très faible désordres (droite de la figure 3.27) on retrouve bien les comportement prédit par la théorie cinétique des porteur de charges (modèle de Drude) qui précise dans le cas de métaux que la conductance d'un système à 1 dimension diminue linéairement avec la taille L du système et qu'elle augmente linéairement en fonction de la taille pour un milieux à 3 dimensions. Il est cependant important de souligner que ces comportements

ont été obtenus à température nulle ($T = 0K$) négligeant par conséquent les effets de transport liés à la présence de phonons dans le milieu.

Un des grands atouts de la théorie élaborée par Thouless et perfectionnée par Abrahams est qu'elle permet de relier les propriétés de transport du milieu aux propriétés spectrales des opérateurs (Hamiltonien, matrice diffusion) qui décrivent la dynamique. En effet la manière dont est exprimée la conductance adimensionnée g à l'équation (3.83) est une écriture convenable pour les expérimentateurs. Une réécriture possible tout aussi équivalente mais qui met en avant la relation entre la conductance adimensionnée et les propriétés spectrales de l'Hamiltonien effectif est le rapport entre la largeur spectrale moyenne et l'écart moyen entre les niveaux d'énergie telle que :

$$g = \frac{\Delta E}{\delta E} \tag{3.85}$$

où $\Delta E\mathcal{N}(E)$ est le nombre de modes contenus dans la tranche d'énergie ΔE par unité de volume L^d, d étant la dimension du système, et δE est l'écart moyen entre les niveaux d'énergies définis comme $\delta E = 1/(L^d\mathcal{N}(E))$. Pour un système faiblement désordonné de dimensions 3 on s'attend à ce que la conductance adimensionnée soit supérieure à l'unité : il y a recouvrement spectral entre les modes, et pour un système fortement désordonnée on s'attend à ce que cette quantité soit inférieure à l'unité due à l'absence de recouvrement spectral entre les modes. Cependant il est important de souligner que ce critère est le plus souvent valable lorsque l'on considère le transport d'électrons dans des milieux désordonnés dont la taille L est largement supérieure au libre parcours moyen de transport.

En ce qui concerne le transport de photons à l'intérieur de milieux désordonnés, l'utilisation de ce critère à des fins de preuve sur la localisation d'Anderson nécessite un peu plus de prudence. En effet extrapoler les résultats analytiques obtenus avec des fonctions d'ondes électroniques peut s'avérer erroné lorsque la probabilité d'interaction longues portées est non nulle. Plusieurs travaux discutent des problèmes que l'on peut rencontrer lorsque l'on traite de la localisation forte de la lumière et que l'on considère le transport de photons à la place de celui d'électrons [96][148]. Le principal problème résidant dans l'extrapolation des méthodes employées avec le critère de Thouless est que bien qu'il peut y avoir suppression du transport (ou diminution drastique de la vitesse de groupe), ce dernier effet est accompagné d'une augmentation drastique de la densité locale d'états ce qui rend impossible toute localisation au sens d'Anderson car cette dernière est prévue pour une densité locale d'états finie. La situation que nous considérons plus particulièrement, qui est parfaitement décrite par la diffusion Rayleigh dans la limite classique, a pour caractéristique une évolution de la section efficace de diffusion proportionnelle à λ_0^4, reliée à la petite taille des diffuseurs devant la longueur d'onde, ce qui est la principale limite du parallèle que l'on peut faire entre le critère g et la conductance du milieu pour la lumière. Dans le cas de diffuseurs dont la taille est non négligeable devant la longueur d'onde, qui s'inscrit plutôt dans la physique décrite par la diffusion de Mie, des analogies ont été établie entre le paramètre de recouvrement entre les modes et la conductance adimensionnée du système et des mesures en transmissions ont permis de relier le deux paramètres de manière exacte [149].

Dans le cadre de travaux menés sur l'étude des effets coopératifs et plus précisément sur la transition superradiante, un critère κ de recouvrement spectral entre les modes est aussi utilisé comme preuve d'une transition de phase entre le régime de *couplage parfait*, où il existe un fort recouvrement entre les modes et pas de ségrégation entre eux, et un

régime d'absence de recouvrement entre les modes, où une ségrégation apparaît entre états superradiants et les états sousradiants, piégés à l'intérieur du système [150]. Bien qu'une relation directe n'ait pas encore été établie dans ce contexte entre la conduction du système et le critère κ, plusieurs études relient ce critère à la section efficace [151][152] et l'utilisent afin d'étudier sa valeurs moyenne, ses fluctuation ou encore son auto corrélation.

Étude numérique du critère de recouvrement spectral entre les modes pour les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff}**.**

Dans notre situation, nous allons nous intéresser à l'évolution du recouvrement entre les modes en fonction de différents paramètres du système en utilisant tout d'abord une '*réécriture naïve*' du paramètre permettant de quantifier le recouvrement spectral entre les modes tel qu'il est définis dans le contexte des études portant sur la transition superradiante :

$$\kappa = \left\langle \frac{\langle \Gamma_{at} \rangle_i}{\langle \Delta E_{at} \rangle_i} \right\rangle \tag{3.86}$$

où $\langle \Gamma_{at} \rangle_i$ représente la largeur moyenne des modes pour une réalisation du désordre $\langle \Delta E_{at} \rangle_i$ représente l'écart moyen entre les niveaux d'énergies consécutifs pour cette même réalisation et $\langle . \rangle$ représente la moyenne sur les configurations spatiales. Il est évident que l'expression décrite à l'équation 3.86 ne tiens aucunement compte des corrélations pouvant exister entre les différents temps de vies des modes mais sa définition est acceptée dans plusieurs travaux expérimentaux [153]. Une autre manière permettant quant à elle de tenir compte des corrélations entre les différents temps de vie est de s'intéresser à la quantité [154] :

$$g = \left\langle \frac{\langle \delta\omega \rangle_i}{\langle \Delta E_{at} \rangle_i} \right\rangle \tag{3.87}$$

où $(\langle \delta\omega \rangle_i)^{-1} = \langle 1/\Gamma_{at} \rangle_i$. Il est à noter que la définition donnée par l'équation (3.86) découle plus de la considération des quantités reliées aux propriétés macroscopique du système (pôles de la matrice diffusion) alors que la seconde définition donnée par l'équation (3.87) est plus pertinente lorsque l'on considère des quantités reliées aux propriétés microscopiques du système (ce qui est plus adapté à notre situation car nous considérons les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif sont à relier pôles de la matrice de Green [34]). Dans la suite de cette partie nous allons donc comparer les résultats donnés par les critères définit à l'équation (3.86) et ceux donnés par l'équation (3.87).

La figure 3.28 montre l'évolution des quantités κ (eq. 3.86) et g (eq. 3.87) en fonction de la taille du système L/λ, exprimée en unités de longueur d'onde, et pour différentes densités spatiales $\rho\lambda^3$ de diffuseurs en considérant l'intégralité du spectre de l'hamiltonien effectif (c'est à dire en considérant aussi les états correspondants aux paires coopérative d'atomes). On remarque tout d'abord une différence singulière entre les comportements des quantités g et κ que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel. Pour le critère de recouvrement entre les modes κ (eq. 3.86), on remarque dans le cas vectoriel (figure du haut à droite) de grandes fluctuations et aussi le fait que sa valeur ne semble dépendre que de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ à l'exception des milieux très dilués ($\rho\lambda^3 = 0.01$) où son évolution en fonction de la taille L/λ est décrite par une loi de puissance telle $\kappa \propto L^2$ alors que dans le cas scalaire (figure du haut à gauche) il est toujours décrit pas une loi de puissance passant brusquement de $\kappa \propto L^2$ pour les systèmes dont la taille est supérieure à la longueur d'onde à $\kappa \propto L$ pour $L < \lambda$. Dans les deux cas on remarque κ passe en dessous de l'unité

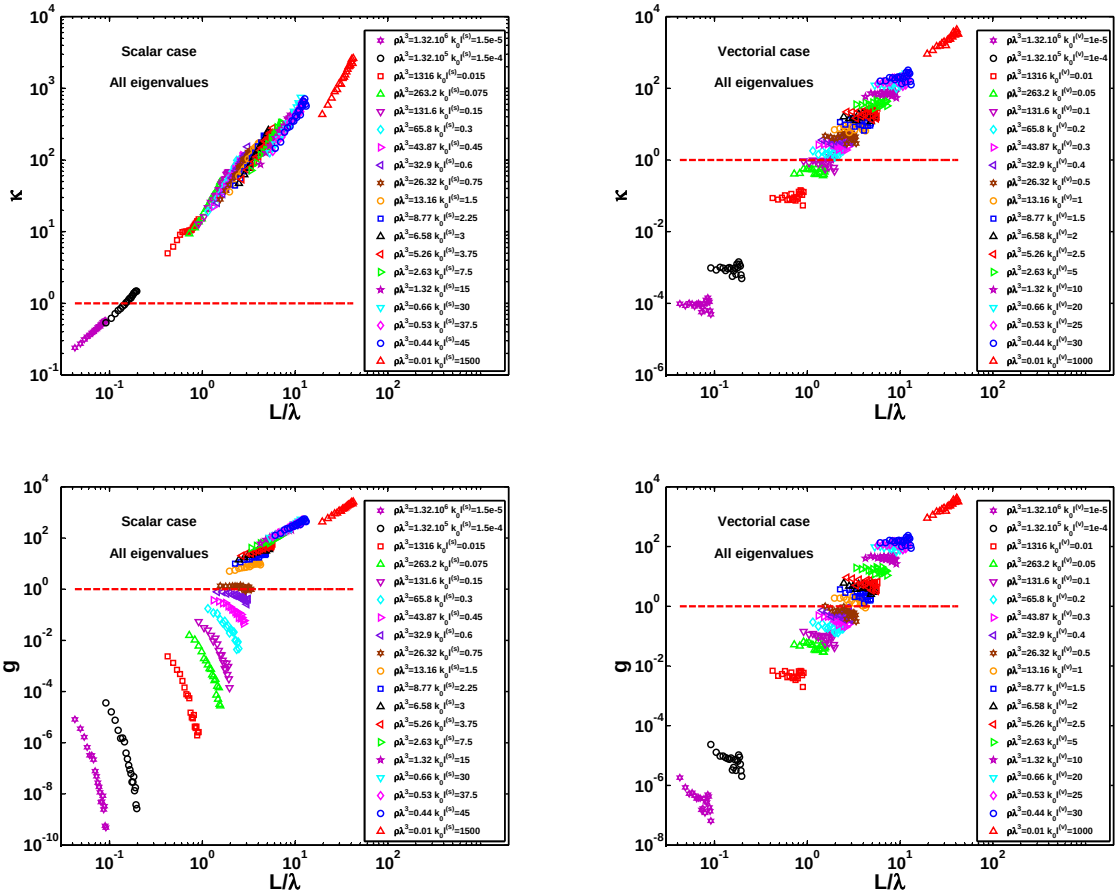

FIGURE 3.28 – Evolution des critères κ (eq. (3.86) et figures du haut) et g (eq. (3.87) et figures du bas) en fonction de la taille du système, exprimée en unité λ dans les cas scalaire (figures de droite) et vectoriel (figures de gauche) pour différentes densité spatiales $\rho\lambda^3$ de diffuseurs. On remarque clairement pour la quantité κ de singulières différences entre les cas scalaire et vectoriel dans le sens où ce dernier présente de grandes fluctuations et semble dépendre uniquement de la densité spatiale alors que dans le cas scalaire l'évolution de cette quantité en fonction de la taille L/λ est décrite par une loi de puissance dont l'exposant change de manière soudaine aux alentours de $L/\lambda = 1$ passant de $\kappa \propto L$ à $\kappa \propto L^2$. La considération de la quantité g (figures du bas) est tout particulièrement intéressante car on observe clairement un changement de comportement de cette quantité dans le cas scalaire qui semble être lié à un effet de densité spatiale $\rho\lambda^3$ d'atomes dans le système. Ce changement de comportement de la quantité g dans le cas vectoriel est moins prononcé et apparait à des densités bien supérieures $\rho\lambda^3 > 10^4$ et au même titre que pour κ on observe encore de grandes fluctuations sur cette quantité à l'exception des milieux dilués $\rho\lambda^3 = 0.01$. Il est à noter que les deux quantités κ et g présentent le même comportement dans la limite des milieux très dilués $\rho\lambda^3 = 0.01$ et évoluent en fonction de la taille du système comme L^2.

($\kappa = 1$) pour de grandes densités ($\rho\lambda^3 \simeq 1.3.10^5$ dans le cas scalaire et $\rho\lambda^3 \simeq 0.1$ pour le cas vectoriel). La considération de la quantité g (figure du bas) présente un intérêt tout particulier dans le cas scalaire (figure du bas à gauche) dans la mesure où l'on observe un changement de son comportement, dépendant uniquement de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs dans le système, aux alentours de la valeur $\rho\lambda^3 \simeq 26.32$. Pour des systèmes

dont la densité spatiale est inférieure à cette valeur g évolue comme une loi de puissance en fonction de la taille du système alors qu'elle présente une décroissance exponentielle en fonction de ce paramètre pour des systèmes dont la densité spatiale est supérieure à $\rho\lambda^3 = 26.32$. Ce changement de comportement à lieu aussi dans le cas vectoriel (figure du bas à droite) mais de manière moins prononcée et pour des densités spatiales nettement supérieures ($\rho\lambda^3 \sim 10^5$) et la même manière que pour la quantité κ on observe aussi de grandes fluctuations de g. Il est aussi intéressant de noter que les quantités κ et g exhibent le même comportement dans la limite des milieux très dilués ($\rho\lambda^3 = 0.01$) où elles évoluent en fonction de la taille comme une loi de puissance telle que $\kappa \propto g \propto L^2$.

Réitérer le calcul des quantités κ et g sans considérer les états correspondant aux paires coopératives d'atomes nous permet d'obtenir des informations supplémentaires très intéressantes (3.29). En appliquant le critère de sélection développé à la section 1.7 pour les cas scalaire et vectoriel on peut calculer à nouveau les quantités κ et g. La première observation est que les fluctuations présentes sur les deux quantités κ et g dans le cas vectoriel sont dues à la présence des paires coopératives d'atomes dans la limite des milieux dont la densité est pas trop élevée ($\rho\lambda^3 \geq 131.6$). Pour le cas vectoriel, l'évolution des deux quantités est désormais raisonnablement décrite par une loi de puissance dont l'exposant diminue lorsque la densité spatiale du système augmente jusqu'à faire tendre la quantité g vers une valeur constante en fonction de la taille pour des systèmes très denses ($\rho\lambda^3 < 1316$). Pour le cas scalaire les résultats obtenus à la figure 3.29 sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus à la figure 3.28 à la différence qu'il y a légèrement moins de fluctuations sur les quantités κ et g. De la même manière qu'à la figure 3.28 on remarque dans les deux cas que les comportements des quantités κ et g sont similaires dans la limite de système très dilués ($\rho\lambda^3 = 0.01$) et que l'évolution de ces deux quantités est décrite par une loi de puissance telle que :

$$\kappa \propto g \propto L^2. \tag{3.88}$$

Cela nous montre que la différence de définition entre κ et g est significative pour des systèmes dont le libre parcours moyen l devient non négligeable devant la longueur d'onde.

En ce qui concerne le cas scalaire, il est tentant de relier ce changement de comportement dans la quantité g à une transition de phase de type métal isolant au vue de la densité à laquelle cette transition apparaît ($k_0 l^{(s)} \simeq 1$). Il faut cependant garder une certaine prudence vis à vis de ces résultats car la relation entre g et la conductance du système n'est pas formellement établie. De plus il est à remarquer que contrairement aux résultats précédent nous avons poussé la considération des quantités g et κ à la limite de systèmes dont la taille est très petite devant la longueur d'onde ($L/\lambda \ll 1$ pour $\rho\lambda^3 = 10^5$ et 10^6). Comme nous le verrons plus tard dans ce manuscrit, cette limite de très petites tailles de systèmes devant la longueur d'onde, parfois appelée limite de Dicke, affiche des comportements propres aux effets coopératifs et à la phase superradiante.

Enfin il est utile de savoir si ce changement de comportement de g dans le cas scalaire est associé à un désordre spatial dans les positions des diffuseurs, dans ce cas il serait très probable que cette transition soit reliée à la localisation d'Anderson, ou si on observe un changement similaire dans un milieu ordonné, ce qui irait à l'encontre d'une transition type métal isolant. C'est pourquoi nous allons considérer dans la prochaine section les mêmes quantités g et κ pour un réseau cubique.

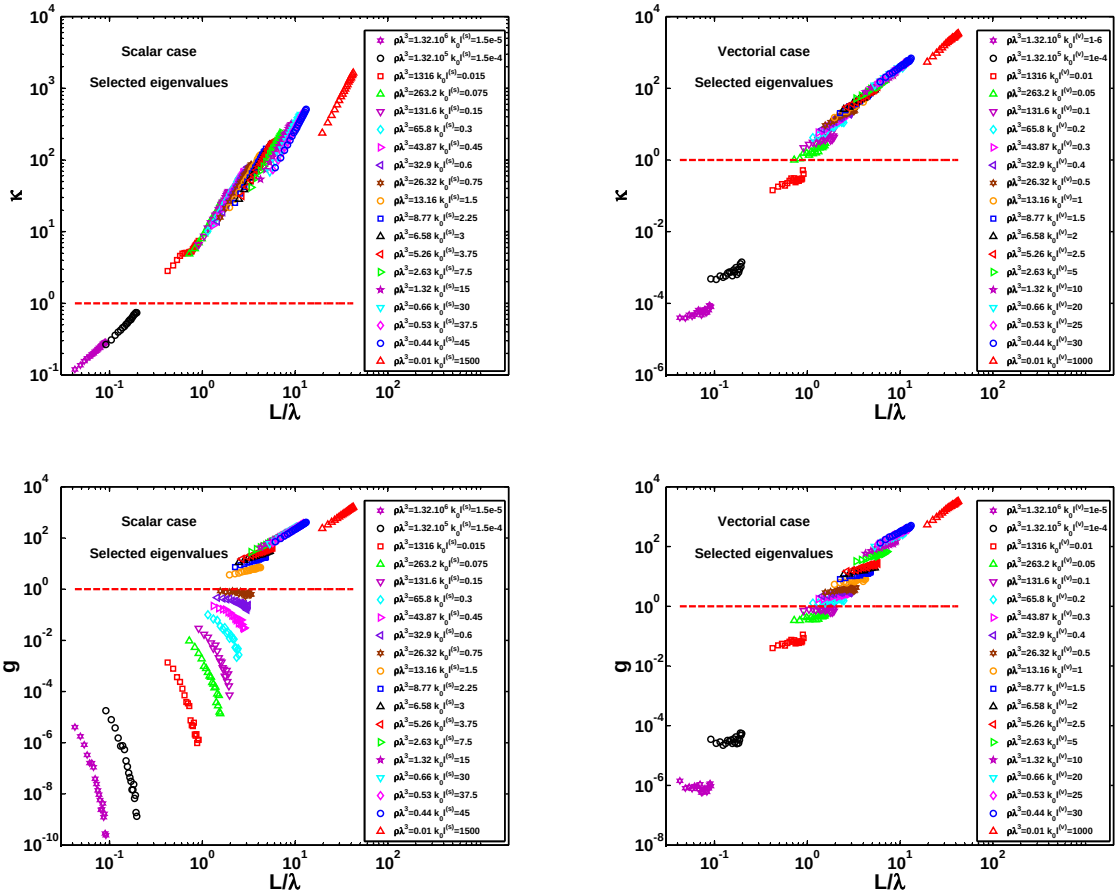

FIGURE 3.29 – Evolution des quantités κ (eq. (3.86) et figures du haut) et g (eq. (3.87) et figures du bas) comme pour la figure 3.28 en ne considérant pas les états correspondant aux paires coopératives d'atomes. A l'inverse de la figure 3.28 on remarque que les quantités κ et g présentent nettement moins de fluctuations dans le cas vectoriel (figures de droite). On observe désormais que l'évolution de la quantité κ est monotone en fonction de la taille du système dans les deux cas et clairement décrite par une loi de puissance dans le cas scalaire présentant le même comportement que pour la figure 3.28 alors qu'elle tend à devenir constante dans le cas vectoriel pour les systèmes denses. La considération de la quantité g ne présente pas de différence dans le cas scalaire avec ou sans paires mais que l'inversion de pente en fonction de la taille de g, présente pour les systèmes très denses dans le cas vectoriel, a disparue, ce qui nous permet d'affirmer que ce changement de comportement était causé par les paires coopératives dans ce cas.

Étude des quantités κ et g dans le cas d'un milieu parfaitement ordonné : cas d'un réseau cubique.

Dans cette section, nous cherchons à déterminer si le changement de comportement apparaissant dans la quantité g pour le cas scalaire est lié à un désordre dans les positions des diffuseurs, auquel cas il serait probable que cette transition soit associée à la localisation d'Anderson, ou s'il perdure dans la situation décrivant un milieu parfaitement ordonné, ce qui privilégierait une transition liée à la coopérativité qui n'implique pas un désordre spatial dans les positions des diffuseurs. Nous allons donc nous intéresser au comporte-

ment de g, définit à l'équation (3.87) dans la situation décrivant un système parfaitement ordonné un réseau cubique et à titre comparatif nous nous intéresserons également au comportement de la quantité κ (eq. 3.86) dans les cas scalaire et vectoriel.

Nous considérons un réseau cubique pour un nombre d'atome variant entre $N = 8$ et 1000 et pour différents pas du réseau a allant de $a = 0.1/k_0$ à $a = 1000/k_0$. La relation entre le pas du réseau et le nombre d'atomes par unité de longueur d'onde au cube $\rho\lambda^3$ étant $\rho\lambda^3 = \lambda^3/a^3$ on peut en déduire le libre parcours moyen dans le cas scalaire tel que :

$$k_0 l^{(s)} = \frac{(k_0 a)^3}{4\pi} \tag{3.89}$$

et pour le cas vectoriel :

$$k_0 l^{(v)} = \frac{(k_0 a)^3}{6\pi} \tag{3.90}$$

où on retrouve bien le facteur 2/3 entre les nombres de Ioffe-Regel définis dans les cas vectoriel et scalaire.

La figure 3.30 nous montre l'évolution des quantités κ (figures du haut) et g (figures du bas) dans les scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droites). Le système considéré est un réseau cubique dont le nombre de sites (d'atomes) varie entre $N = 8$ et 1000 et dont le pas varie entre $k_0 a = 0.5$ et 1000 ce qui correspond en se référant aux équations (3.89) et (3.90) à un nombre de Ioffe-Regel variant entre $k_0 l^{(s,v)} = 10^-2$ à 10^7 dans les deux cas (scalaire et vectoriel). L'étude de la quantité κ ne présente pas de singulières différence à la situation où l'on considère un milieu désordonné dans le sens où l'évolution de cette quantité est décrite par une loi de puissance dans les deux cas et que l'on retrouve bien $\kappa \propto L^2$ dans les deux cas. On observe cependant une singulière différence entre les cas scalaire et vectoriel pour les régimes dense $k_0 l \ll 1$ dans le sens où l'exposant de cette loi diffère entre le cas scalaire et le cas vectoriel tel que $\kappa \propto L$ dans le cas scalaire et $\kappa \propto L^{3/2}$ dans le cas vectoriel.

La considération de la quantité g présente quant à elle de singulières différences avec la situation où nous considérons des milieux désordonnés. En effet que le changement de comportement de cette quantité en fonction de la taille du système se produit aussi bien dans le cas scalaire que dans le cas vectoriel et qu'il a lieu à des densités moindres que pour les milieux dilués ($k_0 l \simeq 4$ pour le réseau cubique au lieu de $k_0 l \simeq 0.75$ pour le milieu désordonné). Ce changement de position du point de transition nous met en garde à savoir si la transition que l'on observe avec le réseau cubique est la même que celle observée avec le milieu désordonné. Certains point communs existent quand même avec la situation concernant les milieux désordonnés comme le comportement de g et κ qui est qualitativement et quantitativement le même dans le limite des milieux très dilués ($\kappa, g \propto L^2$ pour $\rho\lambda^3 \ll 1$ ou $k_0 m \gg 1$).

Au final, on observe aussi un changement de comportement pour la quantité g dans les cas scalaire et vectoriel en considérant un milieu parfaitement ordonnée (réseau cubique). Ce qui ne va pas exactement dans le sens d'une transition liée au désordre et par conséquent à la localisation d'Anderson. Cependant il faut garder une certaine prudence via à vis de ce résultat, qui se veut comme une ouverture et non un résultat final de ce travail de thèse, car le changement de position du point où a lieu la transition signifie peut être que ce n'est pas le même type de physique qui gouverne ce changement de comportement pour les milieux ordonnés et désordonnés. Il faut avouer qu'une approche analytique [148] pour les milieux ordonnés permettrait d'amener à ce résultat un grand nombre d'éléments

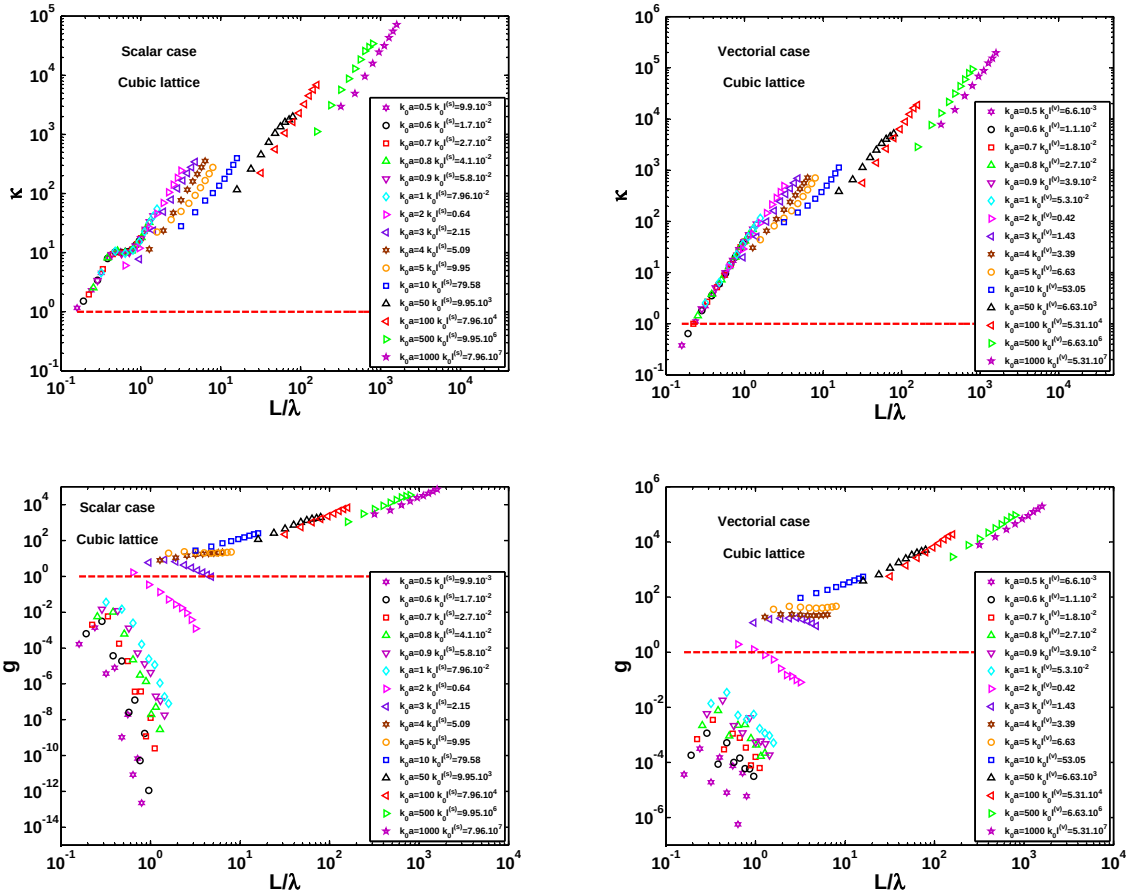

FIGURE 3.30 – Evolution des critères κ (eq. (3.86) et figures du haut) et g (eq. (3.87) et figures du bas) en fonction de la taille du système, exprimée en unité λ dans les cas scalaire (figures de droite) et vectoriel (figures de gauche) pour des réseaux cubiques contenant entre $N = 8$ et 1000 atomes et dons les pas k_0a varient entre $k_0a = 0.5$ et $k_0a = 1000$ ce qui correspond dans les deux cas à un nombre de Ioffe-Regel k_0l variant entre 10^{-2} et 10^7. En ce qui concerne la quantité κ, on remarque que son comportement en fonction de la taille du système est clairement décrit pas une loi de puissance telle que $\kappa \propto L^2$ dans la limite des milieux très dilués. Dans le régime dense, on note une différence singulière entre les deux cas telle que $\kappa \propto L$ dans le cas scalaire et $\kappa \propto L^{\frac{3}{2}}$ dans le cas vectoriel. L'étude de la quantité g sur un réseau cubique présente quant à elle de singulières différence avec celle pour les milieux désordonnés. En effet on remarque désormais que le changement de comportement de g a lieu aussi bien dans le cas vectoriel que dans le cas scalaire mais aussi que la densité à laquelle se produit ce changement est plus élevée que dans le cas de milieux désordonnés ($k_0l \simeq 4$). Les fluctuations apparaissant aux très grandes densités sont causées par une erreur d'arrondis numérique dans les deux cas.

de réponses sur les effets (coopératif ou localisation d'Anderson) qui gouvernent cette transition.

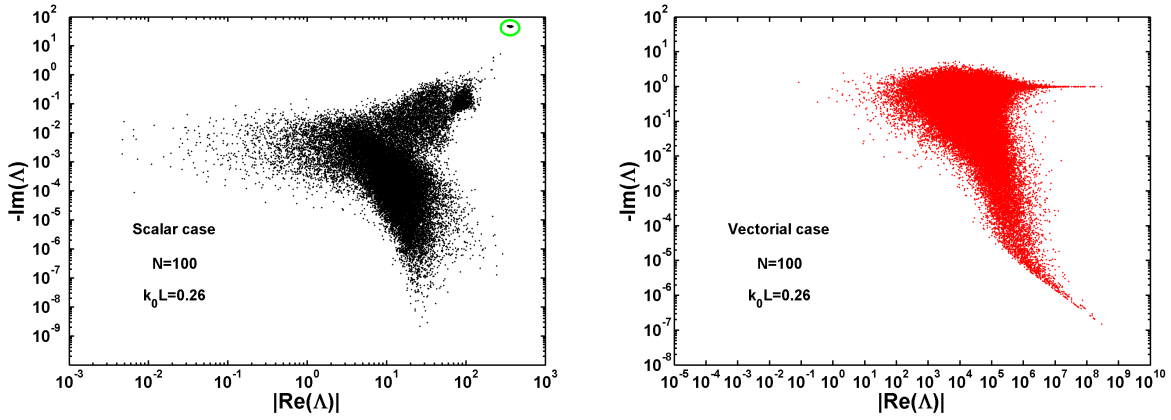

FIGURE 3.31 – Répartitions des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} dans le plan complexe pour les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour un système contenant $N = 100$ atomes de taille $k_0 L = 0.26$ sommées sur 330 configurations spatiales. Dans le cas scalaire on remarque clairement une ségrégation apparaissant entre les valeurs propres ayant un long temps de vie ($-\Im(\Lambda) \ll 1$), qui sont assimilées à l'état superradiant symétrique, et celles ayant un très court temps de vie ($-\Im(\Lambda) \gg 1$), qui sont assimilées aux états sousradiants. Cette ségrégation n'apparaît pas dans le cas vectoriel malgré la présence d'états aux long temps de vies apparaissant pour de très grande énergie $|\Re(\Lambda)| \gg 1$.

1.10 Comportement des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif pour des systèmes de taille inférieure à la longueur d'onde : limite de Dicke.

Dans cette section étudions le comportement des valeurs propre de l'hamiltonien effectif dans la limite de Dicke c'est à dire pour des systèmes de tailles inférieures à la longueur d'onde $L \ll \lambda$. Ce régime originalement étudié par Dicke [6] correspond à la situation où tous les éléments du système sont couplés aux modes du vide via un unique mode transverse ($(k_0 L)^2 < 1$). Dans plusieurs études, il a été montré que dans ce cas limite, les effets coopératifs ne dépendaient plus du ratio entre le nombre d'éléments et le nombre de modes transverses mais seulement du nombre d'éléments uniquement. Certains travaux s'intéressant à des comportements d'échelles en fonction de l'épaisseur optique b_0 du système [15] pour des milieux dont la taille est grande devant la longueur d'onde ($L > \lambda$), ont observé que dans cette limite la quantité d'échelle n'était plus fonction de l'épaisseur optique mais dépendait du nombre d'atomes N contenus dans le système.

Afin de reprendre la même démarche que nous avons adoptée pour étudier les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} pour des systèmes dont la taille est supérieure à la longueur d'onde, nous considérons tout d'abord la répartition des valeurs propres dans les cas scalaire et vectoriels.

La figure 3.31 nous montre la répartition des valeurs propres de H_{eff} dans le plan complexe pour les cas scalaire et vectoriel pour un nuage de taille $k_0 L = 0.26$ contenant $N = 100$ atomes sommé sur 330 configurations spatiales. Tous comme les observations que nous avons faites précédemment au début de ce chapitre on remarque des différences drastiques entre les deux cas dans le sens où la ségrégation apparaissant dans le cas

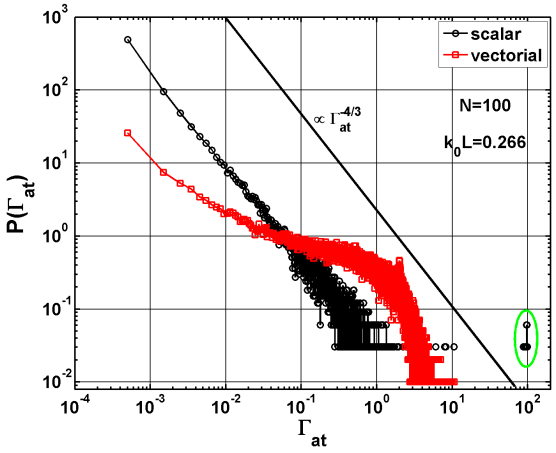

FIGURE 3.32 – Représentation log-log des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ pour un nuage contenant $N = 100$ dans la limites de Dicke $k_0L = 0.26$ dans les cas scalaire (courbe noire) et vectoriel (courbe rouge) moyenné sur 330 configurations spatiales. On remarque tout d'abord que l'état pur superradiant dont la largeur est proche des $N\Gamma_0$ n'est présent que dans le cas scalaire et que dans le cas vectoriel les modes ayant les temps de vies les plus court ont une largeur de $\sim 10\Gamma_0$. Une autre observation intéressante dans le cas scalaire est la présence de la décroissance algébrique telle que $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_0^{-4/3}$ comme nous l'avons observée précédemment (figures 3.7 et 3.9) lors de l'étude des distributions des largeurs des modes pour des systèmes dont la taille est supérieure à la longueur d'onde ($L > \lambda$). Le maintien de cette loi de puissance dans la limite de Dicke est un argument supplémentaire n'allant pas dans le sens de la relation entre ce comportement et les modes localisés au sens d'Anderson.

scalaire, entre les valeurs propres aux très courts temps de vies ($-\Im(\Lambda) \ll 1$), assimilées aux états superradiant symétriques, et celles aux très longs temps de vies ($-\Im(\Lambda) \gg 1$) qui sont les états sousradiants, n'existe pas dans le cas vectoriel. Malgré l'apparition d'états ayant un long temps vie dans le cas vectoriel on n'observe pas l'existence d'un état ayant un taux de décroissance proportionnel au nombre d'éléments N contenus dans le système.

La figure 3.32 montre les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans le cas scalaire et vectoriel pour un système contenant $N = 100$ atomes, dont la taille est $k_0L = 0.266$. On remarque clairement l'absence du pic superradiant dans le cas vectoriel, situé à $\Gamma_{Sup} = N\Gamma_0$ dans le cas scalaire (entouré en vert dans la figure 3.32). Cette absence vient du fait que les termes en $1/(k_0r)^2$ et $1/(k_0r)^3$ augmentent la décohérence reliée au " Van der Walls dephasing " [14]. Ce mécanisme de déphasage, à l'origine de l'absence du pis superradiant, est lié aux déplacements en fréquences des états d'excitations collectives associé à un désordre dans les orientations relatives des dipôles ce qui crée une source de décohérence brisant la symétrie permettant l'observation de l'état superradiant. Certaines études [53] considérant le modèle vectoriel que nous étudions mais admettant que tous les dipôles sont alignés selon un même axe, ce qui se ramène à l'étude d'une matrice $N \times N$, observent encore le pic superradiant dans le limite de taille de systèmes inférieure à la longueur d'onde λ. Il faut toutes fois souligner que ces études tiennent aussi compte des corrections liées à l'échange de photons virtuels en ne faisant pas l'approximation de l'onde tournante. Une autre remarque intéressante vient du fait que l'on continue à observer dans la limite de Dicke ($k_0L < 2\pi$) la décroissance algébrique dans le cas scalaire telle que $P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-4/3}$.

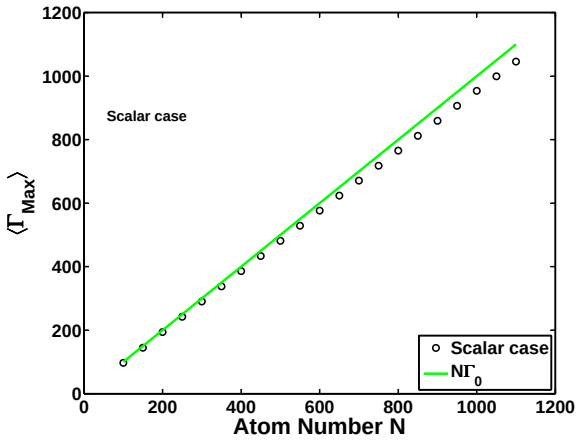

FIGURE 3.33 – Evolution de la largeur de mode associée à l'état superradiant en fonction du nombre d'atomes N dans le cas scalaire pour un nuage dont la densité est $\rho\lambda^3 = 1.36.10^6$. On remarque clairement une déviation à la convergence de cette largeurs vers la valeur $N\Gamma_0$.

Cette observation ne va clairement pas dans le sens de la relation entre la loi de puissance, observée dans d'autres études [26], et les modes localisés au sens d'Anderson proches de la frontière du système et fuyant à travers elle mais ne va pas à l'encontre d'un régime de diffusion anormal [36, 44, 123] telle que pourrait l'être la sousradiance.

Une observation plus poussée des figures 3.31 et 3.32 dans le cas scalaire nous montre que le pic superradiant dans le cas scalaire ne converge pas exactement vers la valeur $N\Gamma_0$ tout comme dans l'étude menée par la référence [53].Cette non convergence exacte provient de la non hermicité de l'Hamiltonien effectif H_{eff} ce qui a pour conséquence que le taux de décroissance moyen des états sous radiant $\langle\Gamma_{Sub}\rangle$ n'est pas exactement égal à 0. La figure 3.33 nous montre l'évolution de la largeur associée à l'état superradiant en fonction du nombre d'atomes pour un système dont la densité spatiale de diffuseurs est $\rho\lambda^3 = 1.36.10^6$ (la taille de ce système est toujours inférieure à la longueur d'onde qu'elle que soit le nombre d'atomes compris entre $N = 100$ et 1000). On remarque que la largeur de ce pic ne converge pas exactement vers la valeur $N\Gamma_0$

1.11 Conclusions sur les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif.

Les observations que nous avons faites sur les résultats numériques que nous avons obtenus sur les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} ne sont pas en désaccords avec celle faites par d'autre travaux [26][77][25][35], cependant les interprétations à faires sur les différences de comportements des valeurs propres entre les différents régimes (dilués, spatialement et optiquement dense, taille inférieure à la longueur d'onde λ) sont à considérer avec prudence.

D'une manière générale nous avons vu que l'influence des termes de champ proche, présents dans le cas vectoriel, donnait lieu à des différences drastiques entre ce dernier et le cas scalaire lorsque nous considérions des milieux denses. L'apparition de modes aux longs temps de vies dans le cas scalaire et absent dans le cas scalaire, où les modes aux

longs temps de vies sont dominés par les états associées aux paires coopératives d'atomes, montre que le caractère vectoriel de la lumière peut avoir de lourdes conséquences sur les effets cohérent type localisation d'Anderson ou encore les effets coopératifs.

En considérant les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ nous avons effectivement observé une décroissance algébrique ($P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-\alpha}$) apparaissant pour les milieux dense mais le comportement de son exposant α semble dépendre principalement plus de l'épaisseur optique b_0 que de la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$ ce qui privilégie le fait que ce comportement est principalement lié aux effets coopératifs. De plus la convergence de cet exposant vers la valeurs $-4/3$, qui est associée par certaines études à la signature d'une diffusion anormale à la transition métal isolant [36][44], et non vers la valeurs -1, comme indiqué pour les modes localisés au sens d'Anderson proches de la frontière et fuyant à travers elle, nous pousse à penser que les approches se basant sur les propriétés statistiques des largeurs des modes doivent être effectuées avec prudence dans les système que nous étudions, où l'influence des interactions longues portées est non négligeable. L'étude des comportement asymptotiques des largeurs des modes nous a aussi permis de voir que le physique des états ayant les temps de vies les plus courts (dont les largeurs sont les plus grandes) étaient dominés par les effets coopératifs dépendant donc de l'épaisseur optique b_0 alors que ceux qui avaient les temps de vie les plus longs (dont la largeur est très petite devant celle de l'atome unique $\Gamma_{at} \ll \Gamma_0$) étaient majoritairement dominés par les paires sousradiantes coopératives à l'exception des milieux denses dans le cas scalaire dont les largeurs moyenne minimum présentent de singulières déviations avec le comportement prédit pour les paires.

L'étude des distributions des positions des modes $P(E_{at})$ nous a permis de voir un changement de forme de ces dernières entre les régimes denses et dilués mais la considérations des distributions des écarts entre niveaux d'énergies consécutifs $P(\Delta E_{at})$ ne nous a pas permis de mettre en évidence un changement de comportement drastique entre les deux régimes dans le mesure où il n'y a jamais de répulsions entre les positions des modes et ce que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel.

Après s'être affranchis des états associés aux paires coopératives d'atomes, les considérations des distributions des distances plus proches voisins dans le plan complexe $P(s)$ nous a permis de constater un changement de comportement entre les milieux optiquement denses et diluées dominé par les effets coopératifs, dans le mesure où la formes des distributions $P(s)$ ne dépend uniquement que de l'épaisseur optique b_0. N'ayant pas malheureusement les comportements asymptotiques de ces distributions dans les régimes denses nous ne sommes pas en mesure de faire une analyse d'échelle afin de voir si ce changement de comportement est lié à une transition de phase.

Enfin l'étude de recouvrement entre les modes nous donne un résultat surprenant lorsque l'on considère la quantité assimilée parfois au nombre de Thouless g dans le sens où l'on observe un changement de comportement drastique de l'évolution de cette dernière en fonction de la taille du système $k_0 L$ lorsque l'on considère des systèmes dont la densité spatiale de diffuseurs est supérieure à $\rho\lambda^3 = 26.35$. Tout laisserait à penser que ce changement de comportement est le signature de la transition d'Anderson mais sa persistance dans la limite de Dicke, où la taille du système est bien inférieure à la longueur d'onde ($L < \lambda$), et un comportement similaire observé dans la situation considérant des systèmes parfaitement ordonnés (réseau cubique) nous empêchent à ce stade d'affirmer que ce changement de comportement est relié à la transition Métal-Isolant prévue dans le contexte de la théorie sur la localisation d'Anderson.

En conclusion, plusieurs éléments nous indiquent un changement de comportement

ayant lieu dans le cas scalaire et absent dans le cas vectoriel entre les régimes spatialement dilués et denses. Il est encore difficile à ce stade de relier ce changement à une transition de phase et bien même d'affirmer qu'il ne peut jamais avoir lieu dans le cas vectoriel : le cas que nous considérons suppose un désordre dans les orientations relatives des dipôles atomiques ce qui peut être négligé théoriquement comme l'on fait les études [21, 53][155] et aussi affranchit de manière expérimentale. D'autre processus physiques pourraient aussi permettre d'introduire un désordre diagonal à l'Hamiltonien effectif que nous considérons tout comme l'ajout d'un faisceau incident provoquant un déplacement lumineux ou encore celui d'un gradient de champ magnétique levant la dégénérescence Zeeman dans le cas vectoriel.

2 Étude des états propres du Hamiltonien effectif.

Après avoir considéré les valeurs propres du Hamiltonien effectif dans les cas scalaire et vectoriel nous nous intéressons dans cette section à ses vecteurs propres afin d'obtenir des indications sur les mécanismes à l'origine de la localisation du photon dans un ensemble de dipôles ponctuels placés de manière aléatoire dans un système à 3 dimensions spatiales. L'idée principale étant que, malgré le fait que les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} soient reliées aux états propres, il est tout à fait possible que dans la situation particulière que nous considérons, l'information sur une localisation du photon causée par le désordre soit contenue dans les états propres et non pas dans les valeurs propres du Hamiltonien effectif. Pour cela nous considérerons dans un premier temps une quantité fréquemment utilisée dans le contexte de travaux menés sur la localisation d'Anderson qui est le taux de participation du mode (le PR (Participation Ratio)) ou son inverse (l'IPR (Inverse Participation Ratio)). Cette quantité, si l'espace de Hilbert dans lequel on la considère est la base canonique réelle, peut être directement proportionnelle au volume spatial du mode, plus précisément au nombre de sites participant à l'état d'excitation collective.

2.1 Étude du taux de Participation Inverse

Le Taux de Participation (Participation PR) ou son inverse (l'Inverse Participation Ratio (IPR)) ne sont pas des quantités qui ont étés élaborées dans l'unique but d'étudier les effets de localisation reliés au désordre. En effet cette quantité permet de connaître l'étalement d'un mode dans un espace de Hilbert donné que ce soit l'espace réel $|\mathbf{r}\rangle$, celui des impulsions $|\mathbf{p}\rangle$ et bien d'autres encore. Cette quantité permet généralement de savoir si l'étalement des certains modes augmente ou diminue en fonction de différentes paramètre du système (taille, densité...).

Dans le contexte de la localisation d'Anderson, la notion de Participation Ratio a été introduite dès les début par Thouless [156], qui a mis en évidence pour la première fois un comportement en loi de puissance des fonctions d'ondes spatiales électroniques dans un régime intermédiaire entre un milieux faiblement désordonné (où la diffusion multiple est censée gouverner la dynamique du système) et un milieu fortement désordonné (où les fonctions d'ondes sont exponentiellement localisés dans l'espace). Ce travail fondateur, à la base de la théorie d'échelle décrivant une transition de phase entre une phase métallique et

une phase isolante, a permis l'élaboration de nouvelles approches pour étudier les effets de localisation forte liés au désordre qui ont aboutis à la mise en évidence d'un comportement multi fractal des fonctions d'ondes au point critique pour des systèmes à '$2+\epsilon$' dimensions [157].

D'une manière générale, on peut voir l'Inverse Participation Ratio comme une mesure du 'degré d'étendue' de l'état dans l'espace de Hilbert dans lequel il est exprimé. On peut donc s'attendre à ce que dans le régime diffusif, où tous les modes sont étendus spatialement sur l'intégralité du système et que leur répartition est ergodique, à ce que l'Inverse Participation Ration varie comme $IPR \sim N$. Dans le régime isolant, où toutes les fonctions sont censés être exponentiellement localisés dans l'espace sur une taille typique ξ, qui est la longueur de localisation, tels que $\Psi(r) \sim e^{-r/\xi}$, à condition que la taille du système soit bien supérieure à la longueur de localisation ($L > \xi$) et que l'on se situe loin du point critique, où a lieu la transition de phase, on doit s'attendre à ce que l'IPR n'évolue plus avec la taille (le nombre de site du système) pour une variance de désordre donnée, que nous supposons équivalente à la densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs dans le système.

Concernant l'utilisation du Participation Ratio pour les effets coopératifs, cette quantité est parfois utilisée afin d'obtenir une information sur l'entropie linéaire [158], qui est une manière de mesurer le degré de pureté d'un mode. il est à noter que cette analogie entre l'entropie linéaire et le Participation Ratio a été tout d'abord établie dans le contexte de recherche sur la localisation d'Anderson [159].

Dans notre situation, les états propres $|\Psi\rangle$ de l'Hamiltonien effectif peuvent être exprimés dans la base canonique $|e_i^{(\alpha)}\rangle$ pour le cas vectoriel et $|e_i\rangle$ pour le cas scalaire tel que :

$$|\Psi^{(s)}\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |e_i\rangle \tag{3.91}$$

$$|\Psi^{(v)}\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=x,y,z} c_i^{\alpha} |e_i^{\alpha}\rangle. \tag{3.92}$$

Chaque atome dans son état excité $|e_i\rangle$ étant situé à la position $|\mathbf{r}_i\rangle$ de manière distincte, l'équivalence formelle entre la base canonique et l'espace de Hilbert décrivant les positions des atomes peut être faite ce qui nous permet de réécrire les équations (3.91)-(3.92) telles que :

$$|\Psi^{(s)}\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |\mathbf{r}_i\rangle \tag{3.93}$$

$$|\Psi^{(v)}\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=x,y,z} c_i^{\alpha} |\mathbf{r}_i^{\alpha}\rangle. \tag{3.94}$$

Les définitions que nous utiliserons pour calculer les Inverse Participations Ratio dans les cas scalaire et vectoriel sont les suivantes :

$$IPR^{(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} |c_i|^4}{\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2}, \tag{3.95}$$

$$IPR^{(v)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=x,y,z} |c_i^{\alpha}|^4}{\sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha=x,y,z} |c_k^{\alpha}|^2}. \tag{3.96}$$

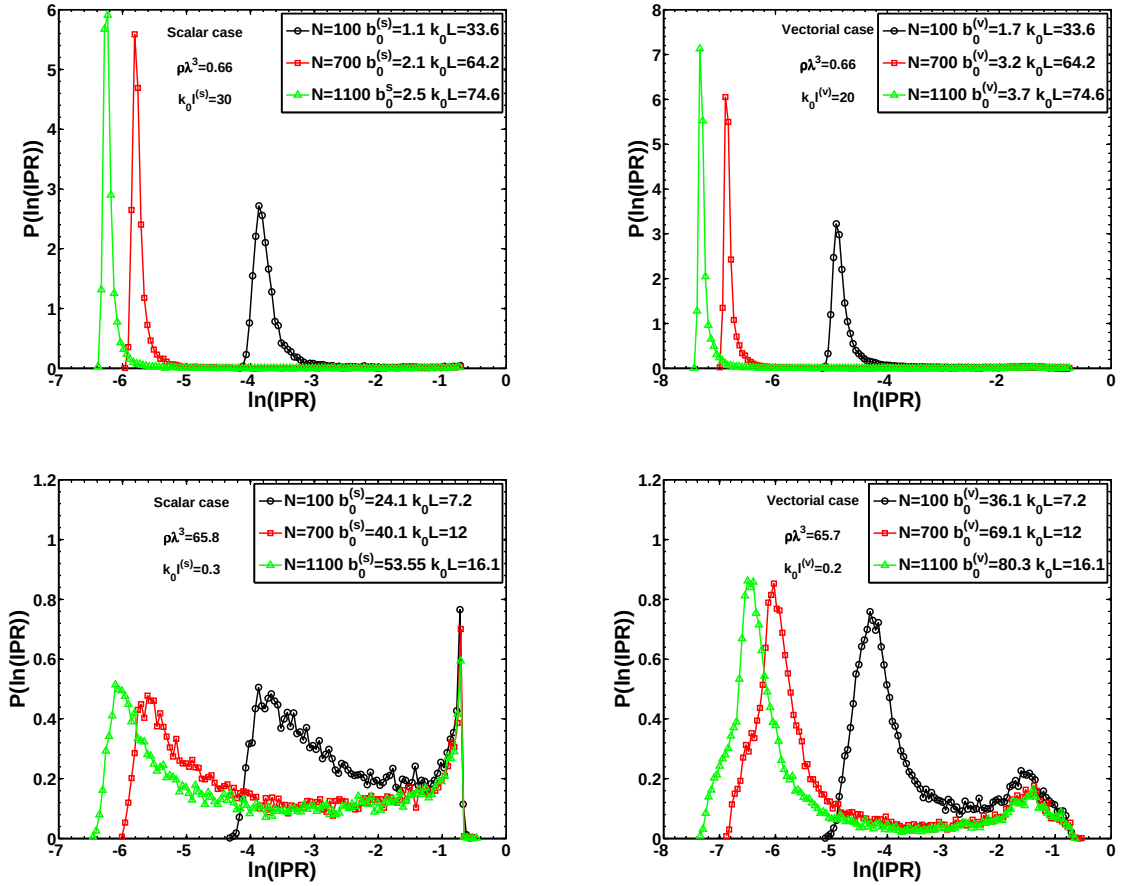

FIGURE 3.34 – Distributions $P(\ln(IPR))$ des logarithmes des IPR dans les cas scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droites), dans le régime dilués ($\rho\lambda^3 = 0.66$, figures du haut) et dense ($\rho\lambda^3 = 65.7$, figures du bas) pour des nuages contenant $N = 100, 700$ et 1100 atomes ce qui équivaut à des tailles k_0L différentes de nuages. Pour le régime dilué ($\rho\lambda^3 = 0.66$), on remarque dans les deux cas qu'il n'y a pas de valeur autour de laquelle s'accumulent les IPR et la position de la valeur la plus probable des IPR décroît proportionnellement avec la taille k_0L du système ce qui va dans le sens du régime de diffusion multiple, où tous les modes sont délocalisés sur l'intégralité du système. Pour les régimes denses ($\rho\lambda^3 = 65.7$), on remarque l'apparition dans les deux cas d'une valeur autour de laquelle s'accumulent les Inverse Participations Ratio et dont la position reste indépendante quelle que soit la taille k_0L du système. Ce point d'accumulation prend pour valeurs $\ln(IPR) \simeq -0.7$ pour le cas scalaire et $\ln(IPR) \simeq -1.5$ dans le cas vectoriel. Ces deux points d'accumulations sont à relier aux états de paires coopératives dont la présence est plus accrue pour les milieux dense et dont l'Inverse Participation Ratio ne dépend aucunement de la taille du système.

Il existe plusieurs façons d'étudier l'Inverse Participation Ratio comme par exemple considérer sa distribution $P(IPR)$ pour une densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs donnée afin de savoir s'il n'y a pas une valeur, que l'on pourrait ensuite assimiler à une longueur de localisation ξ, autour de laquelle s'accumulent les IPR indépendamment de la taille k_0L du système. Une telle observation serait une preuve allant dans le sens de la localisation au sens d'Anderson.

La figure 3.34 montre les distributions Inverse Participation Ratio $P(\ln(IPR))$ dans les cas scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droite) pour les régimes denses (figures du bas) et dilués (figure du haut) pour de nuages contenant $N = 100, 700$ et 1100 atomes. Dans le régime dilué ($\rho\lambda^3 = 0.66$), on remarque qu'il n'existe aucune valeur, dont la position est indépendant de la taille $k_0 L$ du système, autour de laquelle s'accumulent les Inverse Participation Ratio. De plus la position de la valeur la plus probable des IPR décroît de manière proportionnelle à la taille du système, ce qui va dans le sens de modes délocalisés sur l'intégralité du système, dont l'étalement varie proportionnellement au nombre de sites dans le système, comme cela est attendu dans le régime de diffusion multiple. Dans le régime dense ($\rho\lambda^3 = 65.7$), que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel, on remarque l'apparition d'un second pic dont la position ne varie pas en fonction de la taille du système et qui se situe aux alentours de $\ln(IPR) \simeq -0.7$ dans le cas scalaire et $\ln(IPR) \simeq -1.4$ dans le cas vectoriel. Ce pic est à relier aux états de paires coopératives dont l'Inverse Participation Ratio est proche de $1/2$ pour le cas scalaire. Dans le cas vectoriel il faut se rappeler que chaque atome (site) est décrit par trois états de polarisations (eqs. (2.55)) ce qui a pour conséquences qu'un état de pair peut avoir un Inverse Participation Ratio allant de $1/2$ à $1/6$ d'où la position du pic correspondant aux paire aux alentours de $\ln(IPR) \simeq -1.4 \simeq \ln(1/4)$. Également pour le régime dense, la position du sommet du deuxième pic décroît en fonction de la taille du système, ce qui ne nous permet pas de le relier à des effets de localisation forte dues au désordre type Anderson.

Il faut cependant garder une certaine prudence vis à vis des conclusions définitives que l'on peut avoir sur la figure 3.34 car le traitement a été réalisé sur tous les états confondus et il se peut très bien que certains états localisés soient caché à l'intérieur de l'ensemble de tous les états (diffusif, coopératifs, paires...). C'est pour cela que nous considérons une autre représentation de Inverse Participation Ratio dans le plan (Γ_{at},IPR) afin d'avoir une vision d'ensemble sur le comportement des IPR pour les modes aux long temps de vies (de manière équivalente : ayant une largeur proche de 0 ($\Gamma_{at} \ll \Gamma_0$)).

Désormais nous nous focalisons sur les milieux spatialement denses ($\rho\lambda^3 > 13.16$) afin d'étudier les comportements des Inverses Participation Ratio associés aux modes ayant un long temps de vie dans ce régime. La figure 3.35 nous montre en représentation log-log les Inverse Participation Ratio IPR en fonction des largeurs des modes Γ_{at} auxquels ils sont associés pour un milieu spatialement dense ($\rho\lambda^3 = 65.8$) contenant $N = 500$ et 1100 atomes. Les lignes verticales en traits pleins représentent le taux d'émission sousradiant Γ_{sub} donné par la référence [35] tel que :

$$\Gamma_{sub} \propto \frac{\Gamma_0}{b_0} \tag{3.97}$$

et celles en pointillés représentent le taux d'émission associé au régime de Radiation Trapping (diffusion multiple) donné par la référence [40] tel que

$$\Gamma_{RT} \propto \frac{\Gamma_0}{b_0^2}. \tag{3.98}$$

On remarque tout d'abord que les états superradiant (dont la largeur est supérieure à celle de l'atome unique : $\Gamma_{at} > \Gamma_0$) ont tendance à être totalement délocalisés sur l'intégralité du système leur IPR variant par conséquent en l'inverse du nombre d'atome ($IPR \sim 1/N$) que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel. Pour les modes ayant un long temps de vie ($\Gamma_{at} < \Gamma_0$), on remarque tout d'abord que dans le cas vectoriel ceux ayant les plus grand temps de vies sont associés à des états de paires coopératives avec leur Inverse

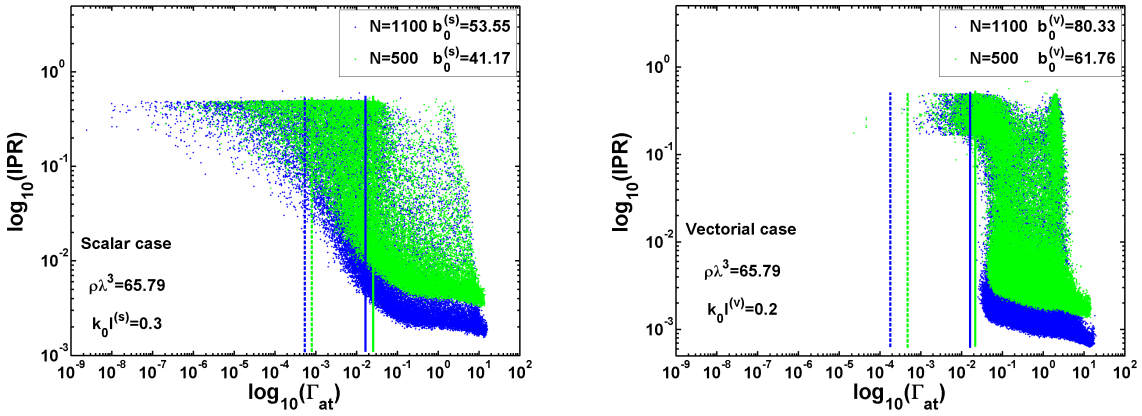

FIGURE 3.35 – Représentation log-log des Inverse Participation Ratio (IPR) en fonction des largeurs des modes Γ_{at} dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour deux nuages contenant $N = 500$ et $N = 1100$ atomes pour une densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3 = 65.8$. Dans le cas vectoriel, à l'exception des états d'excitations correspondant aux paires coopératives d'atomes, ayant un long temps de vie ($\Gamma_{at} < 0.1\Gamma_0$) qui ont un inverse participation ratio compris entre $1/6 \lesssim IPR \lesssim 1/2$, on remarque que la majorité des modes sont délocalisés sur la totalité du nuage (ayant par conséquent un $IPR \sim N$). Contrairement au cas vectoriel, on observe dans le cas scalaire l'apparition de modes ayant un très long temps de vie ($\Gamma_{at} < 10^{-3}\Gamma_0$) qui ne peuvent pas être associés à des paires coopératives car leur Inverse participation Ratio est bien inférieur ($IPR \simeq 10^{-1}$) à celui des paire censé être aux alentours de la valeur 1/2. Cependant, un détail n'allant pas dans le sens de modes localisés au sens d'Anderson, est que leur volume semble augmenter (certes de manière moindre que les états totalement délocalisés sur tout le système) lorsque la taille du système augmente. On remarque également la présence dans le cas scalaire de modes ayant un temps de vie mois élevé ($\Gamma_{at} \simeq 10^{-1}\Gamma_0$) qui sont totalement délocalisés et dont l'IPR varie en $1/N$. Les courbes verticales en traits pleins représentent le taux d'émission sousradiant ($\Gamma_{sub} \propto \Gamma_0/b_0$) donné à la référence [35] et celles en pointillés représentent le taux d'émission dans le régime de Radiation Trapping donné par la référence [40].

Participation Ratio compris entre 1/6 et 1/2. Le reste des modes ayant un long temps de vie ($\Gamma_{at} \simeq \Gamma_0$) étant délocalisés sur l'ensemble du nuage (ayant par conséquent un IPR variant en $1/N$). Le cas scalaire présente quant à lui certains comportements intéressant des modes aux longs temps de vie ($\Gamma_{at} < 10^{-2}\Gamma_0$) dans le sens où leur IPR ne peut pas être décrit par celui des états correspondant aux paires coopératives d'atomes (dont l'Inverse Participation Ratio est aux alentours de 1/2). En effet ces modes, qui sont ceux contenus dans la concentration autour de l'énergie $E_{at} = 1$ (3.4) d'états ayant un très long temps de vie, ont un IPR compris entre 1/2 et 0.1 ce qui suggère que plus de 2 sites (atomes) participent à ces états d'excitation collective. Cependant le volume de ces modes aux longs temps de vie semble augmenter avec le nombre de site ce qui ne va pas dans le sens de modes localisés au sens d'Anderson et dons le volume est censé rester constant (autour de la longueur de localisation ξ) quelle que soit la taille du système. Afin de souligner l'augmentation de volume (ou de manière équivalente la diminution de l'IPR) de ces modes aux longs temps de vies, nous nous concentrons sur les états dans le cas scalaire situés dans la bande d'énergie comprise entre $E_{at} = 0.5\Gamma_0$ et $E_{at} = 1.5\Gamma_0$. La figure 3.36

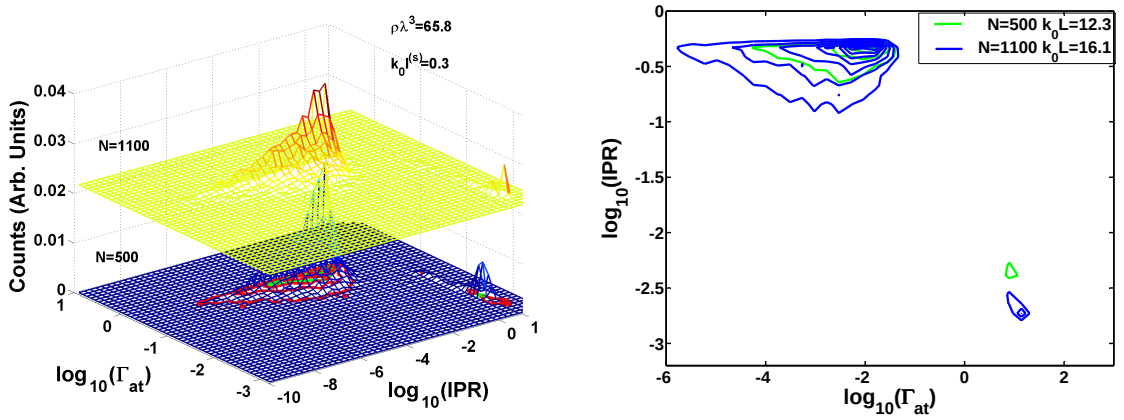

FIGURE 3.36 – Figure de gauche : Histogramme 2D de la 'densité d'Inverse Participation Ratio/largeur des modes' en représentation log-log dans le cas scalaire pour les mêmes paramètres que la figure 3.35. L'histogramme pour $N = 1100$ atomes a été volontairement rehaussé selon l'axe z afin de distinguer celui pour $N = 500$ atomes. Les contours en trait plein en rouge représentent les projections des *iso densités* (point à la même hauteur z) sur l'histogramme associé au nuage contenant $N = 500$ atomes. Figure de droite : représentation des *iso densités* pour les deux nuages contenant $N = 500$ (courbes vertes) et $N = 1100$ atomes (courbes bleues). Cette représentation nous permet clairement de dire qu'en plus d'avoir leur largeur Γ_{at} qui diminue, la taille de ces modes aux longs temps de vie augmente avec le nombre de sites (d'atomes) contenus dans le système.

montre à gauche une représentation schématique des histogrammes à deux dimensions de la densité IPR/Γ_{at} en représentation log-log pour les valeurs propres situées dans la bande d'énergie comprise $0.5 < E_{at} < 1.5$ avec les même paramètres dans le cas scalaire que la figure 3.35. L'histogramme associé au nuage contenant $N = 1100$ atomes a été rehaussé volontairement afin que l'on puisse distinguer celui associé au nuage contenant $N = 500$ atomes. Les courbes en trait pleins en rouges sont les projections des iso densités (points à la même hauteur selon l'axe z) de la courbe pour $N = 1100$ atomes sur celle associée à $N = 500$ atomes (dont les iso densités sont représentées en vert mais que l'on distingue difficilement). La figure 3.36 à droite montre les iso densités seules dans le plan (Γ_{at},IPR) pour le nuage contenant $N = 500$ atomes (courbes en vert) et le nuage contenant $N = 1100$ atomes (courbes en bleu). On remarque très clairement que lorsque la taille k_0L du système augmente (ou proportionnellement le nombre d'atomes N pour une densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs fixée), les modes aux longs temps de vies voient leur étalement augmenter (ou de manière équivalente leur IPR diminuer) tout comme leur largeur Γ_{at} diminuer, ce qui signifie que leur temps de vie augmente. Cette observation ne nous permet donc pas de relier à ce stade ces modes aux longs temps de vie, contenus dans la concentration des valeurs propres autour de l'énergie $E_{at} = 1$, à des modes localisés au sens d'Anderson.

Afin de poser des nombres sur les observations faites à la figure 3.36 nous allons quantifier le comportement des IPR des modes ayant un long temps de vie ($\Gamma_{at} \ll 1$) en fonction de la taille k_0L du système pour des milieux dont la densité spatiale de diffuseurs est fixée ($\rho\lambda^3 = cst$), ce qui équivaut à considérer l'évolution de l'IPR en fonction du nombre de sites (c'est à dire du nombre d'atomes N). Pour cela, nous nous intéressons à l'évolution de la bordure inférieure du domaine décrit par l'ensemble des points dans le plan (Γ_{at},IPR) en

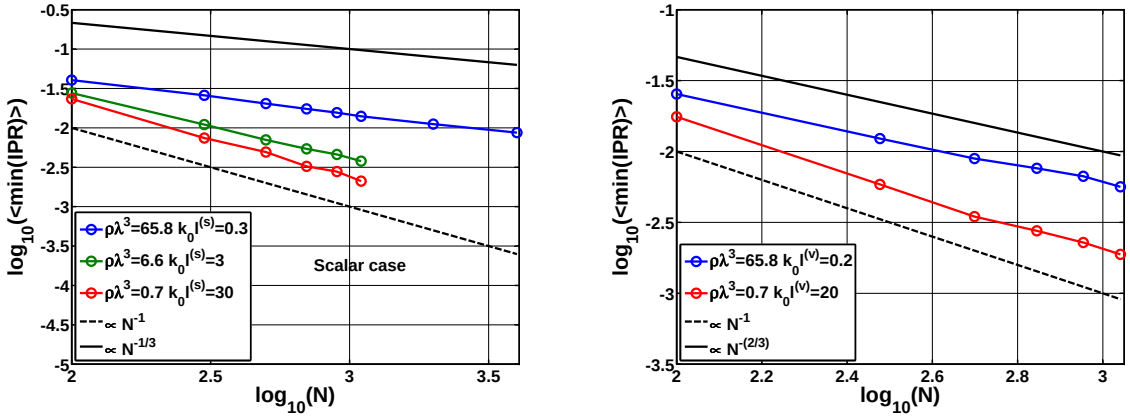

FIGURE 3.37 – Représentation log-log de l'évolution en fonction du nombre d'atomes N de la valeur moyenne des Inverse Participation Ratio minimum $\langle \min(IPR) \rangle$ des modes ayant un long temps de vie ($\Gamma_{at} < 10^{-2}\Gamma_0$) pour des nuages à différentes densités spatiales de diffuseur $\rho\lambda^3 = 65.8$ à 0.7. Dans les deux cas (scalaire et vectoriel) on remarque que quel que soit le régime que l'on considère (dense ou dilué), le comportement de $\langle \min(IPR) \rangle$ est plutôt décrit par une loi de puissance décroissante en fonction du nombre d'atomes. Cette loi de puissance passe de $\langle \min(IPR) \rangle \propto N^{-1}$ dans le régime dilué, ce qui prouve que tous les modes sont délocalisés sur la totalité du nuage, à $\langle \min(IPR) \rangle \propto N^{-\frac{1}{3}}$ dans le cas scalaire et $\langle \min(IPR) \rangle \propto N^{-\frac{2}{3}}$ dans le cas vectoriel, ce qui nous permet pas d'affirmer que ces modes aux longs temps de vies sont des modes localisés à causes des effets d'interférence liés au désordre. Nous avons étendu les simulations à $N = 2000$ et 4000 atome pour le régime dense dans le cas scalaire afin de s'assurer que nous ne considérerions pas des systèmes dont a taille est inférieure à la longueur de localisation ξ.

quantifiant son comportement de deux manières différentes. Soit nous sélectionnons tous les points ayant à la fois à une largeur de mode Γ_{at} et un Inverse Participation Ratio inférieur à un certain seuil (Γ_{at}^S,IPR^S) que nous choisissons arbitrairement et nous calculons la valeur moyenne des IPR sélectionnés, nous qualifierons cette méthode comme étant globale. Soit nous considérons une fraction des modes ayant les IPR les plus faible contenus dans la bande $\Gamma_{at,i} \in [\ln(\Gamma_{min}) + (k-1)\dfrac{\ln(\Gamma_0) - \ln(\Gamma_{min})}{N_r - 1}, \ln(\Gamma_{min}) + k\dfrac{\ln(\Gamma_0) - \ln(\Gamma_{min})}{N_r - 1}]$ avec $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 < k < N_r$ et N_r le nombre de bande que l'on veut pour séquencer l'espace selon Γ_{at} et nous calculons l'IPR moyens pour tous ces modes. Les deux méthodes donnent singulièrement les mêmes résultats à condition de ne pas choisir des paramètres trop extrême comme par exemple un seuil trop bas ou un nombre de bande trop élevé. La figure 3.37 nous montre en représentation log-log l'évolution de l'IPR minimum moyen $\langle \min(IPR) \rangle$ en fonction du nombre d'atomes N pour des systèmes dilués $\rho\lambda^3 = 0.7$ et des systèmes dense $\rho\lambda^3 = 65.8$. Dans le régime dilué ($\rho\lambda^3 = 0.7$), que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel, on remarque que l'Inverse Participation Ratio décroît de manière proportionnelle au nombre d'atomes N tel que :

$$IPR \sim \frac{1}{N}, \tag{3.99}$$

ce qui nous permet de dire que dans ce régime, à l'exception des états correspondant aux paires coopératives, tous les modes sont délocalisés sur l'ensemble du nuage.

On observe par contre dans le régime dense ($\rho\lambda^3 = 65.8$) que l'Inverse Participation Ratio décroît encore en fonction du nombre d'atome en suivant une loi de puissance dont l'exposant est supérieur à -1. On trouve pour les deux cas les comportements en lois de puissances suivants :

$$\langle \min(IPR^{(s)}) \rangle \propto \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}, \tag{3.100}$$

$$\langle \min(IPR^{(v)}) \rangle \propto \frac{1}{N^{\frac{2}{3}}}. \tag{3.101}$$

Que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel, on ne peut donc pas affirmer que ces modes ayant un long temps de vie soient localisés au sens strict d'Anderson car leur Inverse Participation Ratio devrait rester constant à un certain point de désordre, c'est à dire à partir d'une certaine densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs. Dans le cas scalaire nous avons poussé les calculs jusqu'à $N = 4000$ atomes pour le régime dense ($\rho\lambda^3 = 65.8$) afin de s'assurer que la taille du système n'était pas inférieure à une certaine longueur de localisation ξ pour $N = 1100$ atomes et qu'un changement de comportement apparaisse pour un nombre supérieur d'atomes (de manière équivalente une taille plus élevée).

Enfin, pour terminer cette étude sur l'étendue spatiale des modes dans les cas scalaire et vectoriel, il peut être intéressant d'identifier par leur IPR les modes dans le plan complexe, tels qu'ils sont représentés aux figures 3.2 et 3.4, afin d'avoir une idée supplémentaire sur leur comportement global. La figure 3.38 nous montre la répartition dans le plan complexe des valeurs propres auxquelles sont associées en niveaux de couleur leur taux de participation inverse (IPR) dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour un milieu spatialement dilué ($\rho\lambda^3 = 0.7$, figures du haut) et spatialement dense ($\rho\lambda^3 = 65.8$, figures du bas). Le code couleur pour les IPR va du bleu pour les modes dont le taux de participation inverse tend vers $1/N$ et rouge pour les modes dont le taux de participation inverse tend vers la valeur $1/2$. Les courbes en trait pleins correspondent aux expressions analytiques obtenues pour les paires coopératives aux équations (eq. 3.4, courbe violette) pour le cas scalaire et (eqs. (3.9), courbe verte- (3.10), courbe bleue) dans le cas vectoriel.

Dans le régime dilué on remarque clairement, que ce soit dans le cas scalaire ou vectoriel, que les états dont les IPR sont proches de $1/2$ dans le cas scalaire et compris entre $1/2$ et $1/6$ dans le cas vectoriel et qui correspondent aux paires coopératives d'atomes, sont séparés du reste des valeurs propres dont le taux de participation inverse a une très petite valeur proche de $1/N$. On remarque cependant l'existence dans le cas scalaire des quelques modes dont la position dans le plan complexe est proche de la courbe analytique obtenue pour les paires sousradiantes (eq. (3.4)) et qui ont un taux de participation inverse différent de $1/2$ et qui se rapproche plutôt de $\simeq 0.2$. La présence de ces états est pour l'instant inexpliquée et pourrait être à l'origine de l'apparition de la branche contenant les modes aux longs temps de vies ($\Gamma_{at} \ll 1$) lorsque l'on considère des systèmes spatialement denses.

Dans le régime dense ($\rho\lambda^3 = 65.8$) on remarque tout d'abord que les résultats obtenus entre les cas scalaires et vectoriel ne sont pas uniquement différents dans la manière dont sont réparties les valeurs propres Λ dans le plan complexe mais aussi dans le comportement de leurs taux de participation inverse. En effet dans le cas vectoriel les conclusions à donner au régime dense sont similaires à celle du régime dilué dans le sens où les états correspondant aux paires coopératives d'atomes, ayant un IPR compris entre $1/6$ et $1/2$, ne se mélangent pas avec le reste des valeurs propres, dont le taux de participation inverse est proche de $1/N$, et sont repoussées vers des valeurs extrêmes ($|E_{at}| \gg 1$ et $\Gamma_{at} \to 0$ ou

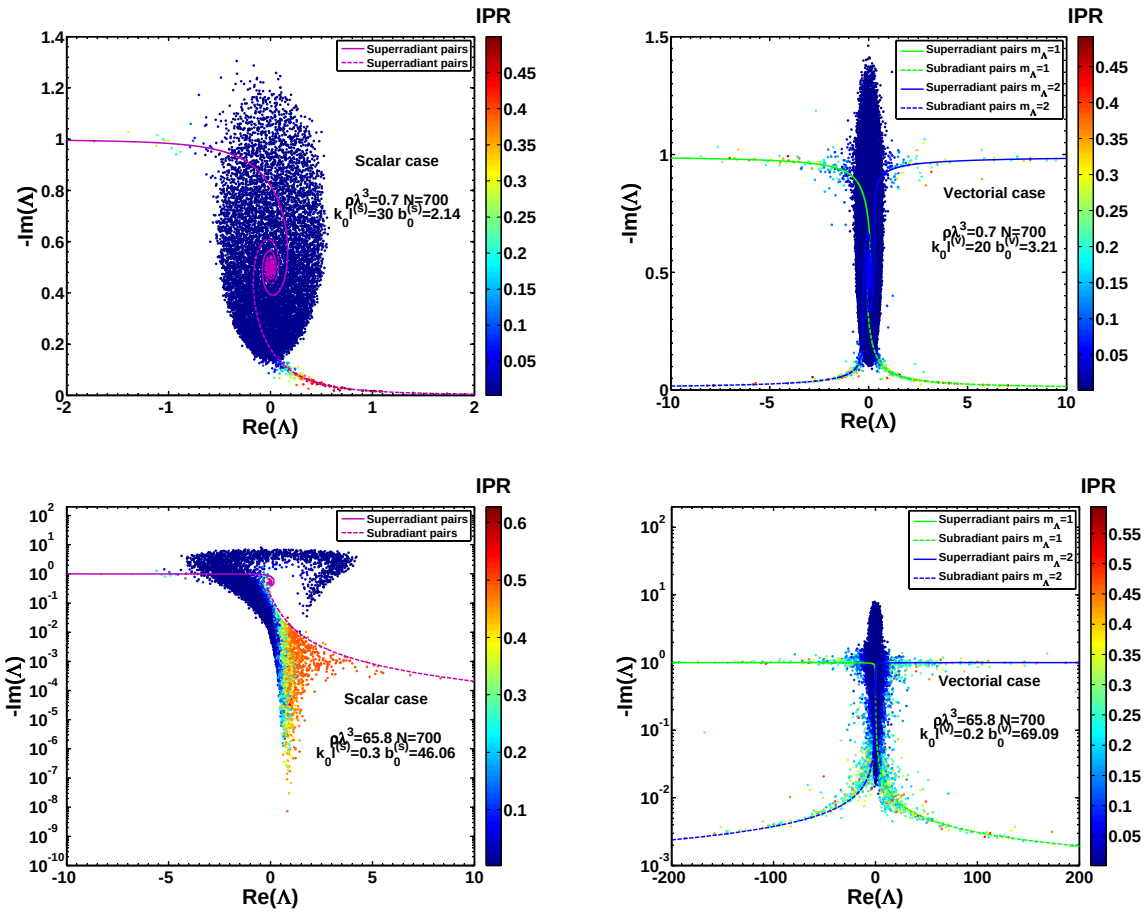

FIGURE 3.38 – Représentation semi log dans les cas scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droite) pour un milieu spatialement dilué ($\rho\lambda^3 = 0.6$, figures du haut) et spatialement dense ($\rho\lambda^3 = 131.6$, figures du bas) contenant $N = 500$ atomes, de la répartition dans le plan complexe des valeurs propre Λ, auxquelles ont été associés leur Taux de Participation Inverse (IPR) dont la couleur va du bleu pour les modes totalement délocalisés ($IPR \sim 1/N$) au rouge pour les modes dont l'IPR est aux alentours de 0.5 . Pour les milieux dilués, on remarque clairement dans les deux cas que les états ayant une Taux de Participation Inverse proches de 0.5 pour le cas scalaire et compris entre 0.5 et 0.16 pour le cas vectoriel se situent près des courbes analytiques décrivant les comportements des paires (courbes en traits pleins, eqs. (3.4)-(3.10))et sont donc à associer à états de paires coopératives. On remarque que ces états de paires ne viennent pas se mélanger avec les autre états totalement délocalisés sur le nuage dont le taux de Participation Inverse tend vers $IPR \sim 1/N$. Une observation intéressante et encore inexpliquée est la présence dans le cas scalaire d'état dont le Taux de Participation Inverse est aux alentours de 0.1 et qui se situent aussi près de la courbes analytique décrivant le comportement des paires. Dans le régime dense (figures du bas), le comportement reste le même entre les états de pair et les autres états dans le cas vectoriel (figure du bas à droite) par contre dans le cas scalaire on remarque qu'un nombre d'états ayant un IPR proche de 0.5 s'écartent de la courbe décrivant le comportement des états sousradiants pour se situer dans l'accumulation des valeurs propres située autour de l'énergie $E_{at} = 1$.

$\Gamma_{at} \to 2$). En ce qui concerne le cas scalaire, on remarque que beaucoup d'états éloignés de la courbe analytique décrivant les états sousradiants ont un taux de participation inverse

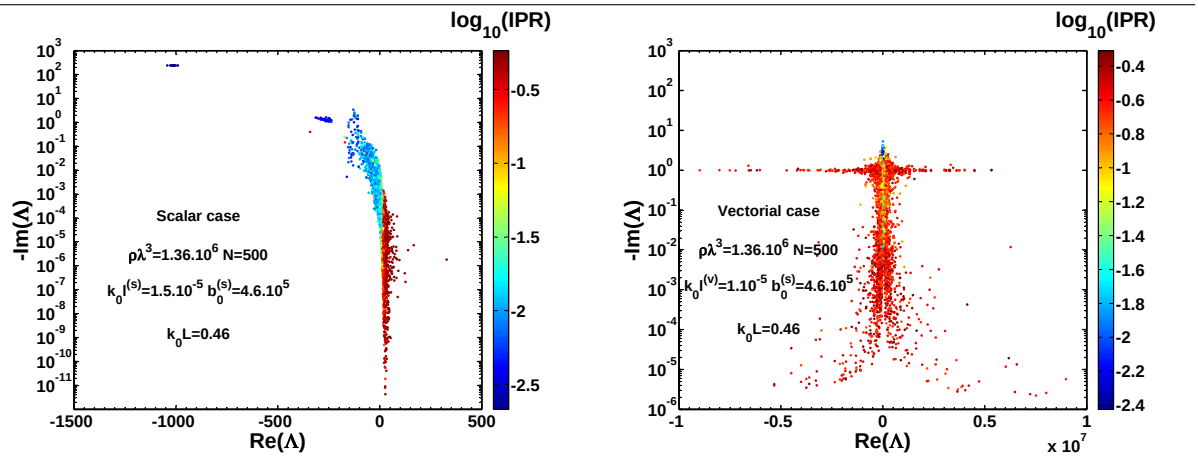

FIGURE 3.39 – Représentation pour un nuage contenant $N = 500$ atomes dans la limite de Dicke ($k_0L = 0.46$) de la répartition des valeurs propres dans le plan complexe telle qu'elles sont présentées dans la figure 3.38 pour les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite). Pour cette figure le Taux de Participation Inverse est représenté en logarithme décimal afin de mieux distinguer les modes totalement délocalisés sur l'ensemble du système ($IPR \sim 1/N$). Dans le cas vectoriel, on remarque que les modes délocalisés sur l'ensemble du nuage ($IPR \sim 1/N$) se situent vers les énergies proches de $E_{at} = 0$ et que le reste des modes (très décalés vers les énergies positives et négatives) ont surtout un Taux de Participation Inverse comprise entre 0.16 et 0.5. Dans le cas scalaire, on peut observer les états superradiant, qui ont une largeur telle que $\Gamma_{Sup} \simeq N\Gamma_0$ et sont très décalés vers les énergies négatives, sont totalement délocalisés sur l'ensemble du système alors que les autres modes ayant un long temps de vie ($\Gamma_{at} \ll 1$) ont des Taux de Participations Inverse variant entre 10^{-2} et $1/2$. Un point intéressant est que les modes ayant les plus longs temps de vies et qui sont contenus dans l'accumulation de valeurs propres autour de l'énergie $E_{at} \simeq 30$, ont un Taux de Participation Inverse porche de $1/2$.

proche de $1/2$. De plus l'IPR des états présents dans la branche semble décroître de manière continue au fur et à mesure que ces états sont de plus en plus éloignés de la courbe associée aux paires sousradiantes. Cette observation nous empêche de conclure pour l'instant que les modes contenus dans cette branche sont reliés directement à des modes localisés au sens d'Anderson dans la mesure où ils n'ont pas tous la même étendue (où le même taux de participation) ce qui ne va pas dans le sens d'une longueur de localisation ξ commune à tous ces modes aux longs temps de vies.

Pour finir nous utilisons la même représentation qu'à la figure 3.38 afin de considérer les taux de participations inverse associés aux valeurs propres dans la limite des systèmes dont la taille est inférieure à la longueur d'onde $k_0L \ll 2\pi$ (limite de Dicke). La figure 3.39 nous montre pour un nuage de taille $k_0L = 0.46$ contenant $N = 500$ atomes la répartition des valeurs propres dans le plan complexe auxquelles on a associé leurs Taux de Participation Inverse (IPR) dont le code couleur varie entre le bleu (pour les modes dont l'IPR est proche de $\log_{10}(1/N)$) et en rouge (pour les modes dont l'IPR est porche de $\log_{10}(1/2)$). Dans le cas vectoriel, on remarque tout d'abord l'absence de ségrégation entre les valeurs propres dans le plan complexe et l'étalement de ces dernière vers de très grandes valeurs en énergie ($|E_{at}| \gg 1$). On remarque aussi que les états délocalisés se situent vers les énergies proches de $E_{at} = 0$ et que les états correspondant aux paires coopératives et donc l'IPR varie entre 0.16 et 0.5 convergent vers les valeurs extrêmes en

énergies. Les résultats dans le cas scalaire sont tout aussi intéressant dans le sens où les états totalement délocalisés sont les états superradiant dont la largeur est proche de $N\Gamma_0$ et que les états ayant les plus long temps de vie ont un IPR proche de 1/2. On remarque aussi que dans ce dernier cas il n'y a quasiment plus d'états proches des courbes décrivant les paires coopératives.

2.2 Conclusion sur l'étude du Taux de Participation Inverse.

En résumé l'étude du Taux de participation Inverse nous a montré que le volume des modes augmentait aussi bien dans le régime dilué, ce qui est à priori normal dans le sens où les fonctions sont censées être délocalisées sur la totalité du nuage, que dans le régime dense, ce qui ne va pas exactement dans le sens de la localisation d'Anderson, où le taux de Participation des modes localisés est censé rester constant.

Bien que nous ayons vu que l'exposant de la loi de puissance décrivant le comportement de l'IPR en fonction du nombre de sites (d'atomes) montrait une dépendance en fonction de la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$, passant de $IPR \propto N^{-1}$ dans le régime dilué à $IPR \propto N^{-1/3}$ dans le cas scalaire et $IPR \propto N^{-2/3}$ dans le cas vectoriel pour le régime dense, cette diminution du Taux de Participation Inverse robuste pour les grandes densités $\rho\lambda^3 \gg 1$ va plus dans le sens d'un piégeage de l'excitation relié aux effets coopératifs.

Enfin en représentant les Taux de Participations Inverses des modes dans le plan complexe nous avons pu constater que les modes aux long temps de vies dans le cas scalaire, parfois assimilés à des modes localisés au sens d'Anderson [144, 37], présentaient essentiellement un IPR proche de 2 qui serait un indice nous permettant de relier l'apparition de ces modes aux longs temps de vie à la disparition des paires coopératives dans le cas scalaire. Une remarque intéressante est que selon certains travaux [92], la sousradiance collective peut être assimilée à un ensemble de paires d'atomes dans des états antisymétrique ce qui est plutôt en bon accord avec nos observations numériques

3 Résultats numériques sur le taux d'émission du photon.

Dans cette partie nous nous intéressons à une autre quantité qui est le taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$ et que l'on peut calculer en considérant les spectres des parties imaginaires des équations (2.87) et (2.90). Le taux d'émission du photon est directement relié à la probabilité de détecter le photon hors du système au temps t et est donc par conséquence relié à la probabilité que l'excitation a de rester dans le système. Nous intéressant à un problème de localisation de la lumière nous pouvons essayer de savoir si le comportement des modes ayant un long temps de vie dans le système (ou de manière équivalente un taux d'émission $\Gamma_{h\nu}$ très faible) est dominé par la densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs dans système ou bien par l'épaisseur optique b_0 ce qui nous permettra de déterminer si la physique dominant ces états est à relier de localisation de type Anderson ou aux effets coopératifs

Par le passé, ce type d'approche a permis de mettre en évidence des comportements d'échelle pour le cas scalaire que nous considérons [15] permettant de prouver que les effets

de localisation du photon étaient principalement dus à une synchronisation entre le dipôles causée par les interactions longues portées plutôt qu'aux effets d'interférence destructives liés au désordre (localisation d'Anderson). De plus les comportements phénoménologiques dérivés à la section (1.4.a), sont au départ dérivés dans le cadres de calcul sur le taux d'émission de la densité spectrale d'énergie hors du système, on peut donc s'attendre à observer dans les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ de comportements propres aux régimes de diffusion multiple ou de localisation tels qu'ils sont prévus par la théorie.

Dans un premier temps nous allons effectuer quelques rappels sur la théorie de la photodétection afin de relier l'opérateur nous permettant de calculer le taux d'émission du photon à partir de l'Hamiltonien effectif dans les cas scalaire (eq. (2.90)) et vectoriel (eq. 2.87), nous présenterons ensuite les résultats obtenus sur les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans les deux cas. De la même manière que nous avons considérés les comportements asymptotiques pour les largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ lors de l'étude des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff}, nous considérerons aussi les comportements asymptotiques des distributions $P(\Gamma_{h\nu})$. Enfin nous terminerons cette étude avec la considération d'une fonction dépendant à la fois de l'épaisseur optique b_0 et de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ qui nous permettra de mettre en évidence un comportement d'échelle que ce soit dans les cas scalaire ou vectoriel.

3.1 Opérateur densité réduit et taux d'émission du photon.

Un grand nombre de travaux dans la littérature s'intéressent au taux d'émission de l'énergie du système pour un ensemble de N atomes. Plusieurs approches peuvent être utilisées que ce soit dans les cas scalaire ou vectoriel, comme par exemple le calcul des fonctions de corrélations d'ordre 1 du champ à un ou deux temps [160] ou encore l'évolution de la matrice densité ρ_A restreinte au sous espace de Hilbert décrivant tous les atomes dans leur état fondamental $|G\rangle$. Le problème pouvant devenir rapidement difficile si l'on considère des champs incidents de forte intensité [161], le mouvement des atomes [57], ou encore lorsque certaines approximation ne sont pas faite comme celle de Born-Markov ou l'approximation de l'onde tournante. C'est pourquoi dans la majeure partie des cas seulement $N = 2$ atomes sont considérés.

Dans cette section nous allons tout d'abord montrer comment relier le champ sortant du nuage à la partie imaginaire de l'Hamiltonien effectif et nous nous intéresserons ensuite au cas particulier où nous restreignons notre étude au sous espace de Hilbert décrivant au maximum une excitation dans le nuage pour relier l'opérateur densité réduit à la partie imaginaire de l'Hamiltonien effectif et du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$.

D'un point de vue du champ, la probabilité de détecter un photon au temps t à l'extérieur du nuage est proportionnelle au module du champ au carré $S(\mathbf{R}, t)$ exprimé selon la direction $\mathbf{R}$ et au temps t par unité d'angle solide telle que :

$$S(\mathbf{R}, t) \propto c\epsilon_0 \langle \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{R}, t)\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{R}, t)\rangle, \tag{3.102}$$

où $\langle ... \rangle$ représente la moyenne sur les états propres de l'Hamiltonien effectif. En se rappelant des définitions des opérateurs $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$ (eq. (2.74)) et $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}) = [\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})]^\dagger$, il est possible d'expliciter l'équation (3.102) en fonction des opérateurs atomiques ($S_i^{(\pm)}$) en exprimant les opérateurs photoniques $a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}$ et $a^\dagger_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}$ en représentation de Heisenberg (eq. (2.77)).

Dans cette représentation il est possible de réécrire l'opérateur $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$ tel que :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{R},t) = \frac{1}{\hbar}\sum_{j}\sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}}\int_0^t d\tau \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}\left[i\mathbf{D}_j(t-\tau)e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{R}-\mathbf{r}_j)}e^{-i\omega_k\tau}\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^*\right] \tag{3.103}$$

en n'ayant pas fait préalablement l'approximation de l'onde tournante (RWA). En utilisant l'approximation de Markov, valable quand le taux de désexcitation collectif est supérieur au temps que met le photon à traverser le système ($(\max(\Gamma_{h\nu}))^{-1} > k_0 L/c$) on peut remplacer $\mathbf{D}_j^{(\pm)}(t-\tau)$ par $\mathbf{D}_j^{(\pm)}(t)$ pour le sortir de l'intégrale temporelle et en transformant la somme discrète sur les $\mathbf{k}$ en un intégrale continue. Suivant la référence [160], en faisant l'hypothèse que le détecteur soit placé très loin du système tel que $R \gg \max_{i,j}(r_{ij})$, on peut réécrire l'équation (3.102) telle que :

$$S(\mathbf{R},t) \propto c\epsilon_0 \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\alpha'} e^{ik\hat{R}.(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)}\langle S_{i,\alpha}^{(+)}(t)S_{j,\alpha'}^{(-)}(t)\rangle. \tag{3.104}$$

En faisant la moyenne angulaire de cette expression on peut obtenir la probabilité $\pi(t)$ de détecter un photon hors du nuage au temps t telle que :

$$\Pi(t) = \int \mathrm{d}\Omega_{\hat{R}} S(\mathbf{R},t) \propto c\epsilon_0 \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\alpha'} \Im(g_{\alpha,\alpha'}(r_{ij}))\langle S_{i,\alpha}^{(+)}(t)S_{j,\alpha'}^{(-)}(t)\rangle \tag{3.105}$$

On peut donc remarquer que la probabilité de détecter un photon au temps t dans la totalité de l'espace va être reliée à la partie imaginaire du potentiel d'interaction $g_{\alpha\alpha'}(r)$. L'interprétation physique de cette expression est assez simple dans le sens où l'on peut associer la probabilité de détecter un photon au point $\mathbf{R}$ comme le module au carré de tous les champs émis par les dipôles (les atomes) avec un terme d'interférences relié à la différence de marche qui est proportionnelle à leur distances relatives.

Nous avons donc vu qu'il était possible de relier la partie imaginaire du potentiel d'interaction ($g_{\alpha\alpha'}(r)$ ou $g(r)$) à la probabilité de détecter un photon au temps t loin du nuage. Cependant ce type d'approche invoque beaucoup d'approximations (champ lointains, Markov,...) dont les conséquences sur la physique que nous étudions sont parfois mal maîtrisées [1]. Nous allons donc considérer l'évolution de la matrice densité $\hat{\rho}_A$, restreinte à l'espace de Hilbert décrivant les états atomiques, dans le but de formaliser la relation entre le taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$ et la partie imaginaire de l'Hamiltonien effectif H_{eff}. Ici un chapeau a été rajouté à l'opérateur densité $\hat{\rho}$ afin de ne pas porter à confusion entre ce dernier et la densité spatiale ρ de diffuseurs dans le système.

Afin d'illustrer de manière simple à quel terme de la matrice densité correspond la probabilité $\Pi(t)$ de détecter un photon hors du système à un temps t, nous considérons tout d'abord le cas simple décrivant $N = 1$ atome avec une seule excitation. En repartant de l'expression de l'Hamiltonien en jauge $D.E$ dont les termes sont exprimés aux équations (2.68) à (2.70) on peut expliciter les équations d'évolutions des populations dans l'état

1. Il est à noter que nous avons négligés l'influence d'un champ incident en ne prenant pas en compte le terme d'interférence entre ce dernier et le champ diffusé. Selon certain travaux [160], ce terme d'interférence peut être négligé lorsque l'on fait l'hypothèse que le détecteur est placé à une distance bien supérieure à la taille du système. Les effets de retards, liés au temps finis entre l'émission de l'excitation par un atome et son absorption par un autre atome, ont également été négligés ce qui peut rendre le problème très complexe lorsqu'ils sont pris en compte [23]

excité ρ_{ee} et fondamental ρ_{gg} :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho_{gg}}{\mathrm{d}t} &= \Gamma_0\rho_{ee}\\ \frac{\mathrm{d}\rho_{ee}}{\mathrm{d}t} &= -\Gamma_0\rho_{gg}\end{aligned} \tag{3.106}$$

et des cohérences :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\rho_{ge}}{\mathrm{d}t} &= \left(-i\omega_0 - \frac{\Gamma_0}{2}\right)\rho_{ge}\\ \frac{\mathrm{d}\rho_{eg}}{\mathrm{d}t} &= \left(i\omega_0 - \frac{\Gamma_0}{2}\right)\rho_{eg}\end{aligned} \tag{3.107}$$

Considérant que le milieu est ouvert dans le sens où l'excitation peut en sortir, le système d'équations (3.106) et (3.107) peut être réécris sous la forme d'une équation de Lindbald telle que[2] :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}[H_A, \hat{\rho}] + \mathcal{L}(\hat{\rho}) \tag{3.109}$$

où H_A est la partie de l'Hamiltonien correspondant au milieu atomique et décrit à l'équation (2.68) et $\mathcal{L}(\rho)$ s'exprime pour 1 atome tel que :

$$\mathcal{L}(\hat{\rho}_A) = -\frac{\Gamma_0}{2}\left(\hat{\rho}|e\rangle\langle e| - |e\rangle\langle e|\hat{\rho}\right) + \Gamma_0 S^{(-)}\hat{\rho}S^{(+)} \tag{3.110}$$

A partir des équations (3.109) et (3.110) on peut donc remarquer que l'évolution de la population dans l'état fondamental ρ_{gg} peut s'écrire pour un unique atome :

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{gg}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0\langle g|S^{(-)}\hat{\rho}S^{(+)}|g\rangle \tag{3.111}$$

ce qui nous permet de dire que le taux d'émission du photon est relié au deuxième terme, qui est le terme dissipatif, de l'équation maîtresse (eq. 3.109).

D'une manière plus générale, l'équation maîtresse, décrivant l'évolution de la matrice densité décrivant les états atomiques, a été obtenue en faisant l'approximation de l'onde tournante (RWA) et celle de Born-Markov dans beaucoup de travaux pour les cas scalaire et vectoriel [13][162] et peut s'écrire dans le cas vectoriel telle que :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}[H_A, \hat{\rho}_A] - \sum_{i,j}\sum_{\alpha\alpha'}\Re(g_{\alpha\alpha'}(r_{ij}))[S^{(+)}_{i,\alpha}S^{(-)}_{j,\alpha'}, \hat{\rho}_A] \tag{3.112}$$

$$- \frac{\Gamma_0}{2}\sum_{i,j}\sum_{\alpha\alpha'}\Im(g_{\alpha\alpha'}(r_{ij}))\left(S^{(+)}_{i,\alpha}S^{(-)}_{j,\alpha'}\hat{\rho}_A + \hat{\rho}_A S^{(+)}_{i,\alpha}S^{(-)}_{j,\alpha'} - 2S^{(-)}_{i,\alpha}\hat{\rho}_A S^{(+)}_{j,\alpha'}\right) \tag{3.113}$$

A partir de l'expression précédente, nous pouvons nous intéresser à l'évolution temporelle de l'opérateur densité réduit à l'espace de Hilbert décrivant l'état fondamental $|G\rangle$ que

2. Une autre écriture possible du système d'équations (3.106) et (3.107) relie l'équation d'évolution de la matrice densité l'Hamiltonien effectif H_{eff} et peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left(H_{eff}\hat{\rho} - \hat{\rho}H_{eff}\right) + \Gamma_0 S^{(-)}\hat{\rho}S^{(+)}. \tag{3.108}$$

Les résultats obtenus dans les situations décrivant $N = 1$ et $N = 2$ atomes sont les mêmes que ceux obtenus avec l'Hamiltonien H_A.

l'on peut relier à la probabilité $\Pi(t)$ de détecter un photon à l'extérieur du nuage au temps t. De manière équivalente, il est aussi possible de relier le taux d'émission du photon à la partie imaginaire de l'Hamiltonien effectif dans les cas scalaire (eq. (2.90)) et vectoriel (eq. (2.87)) en considérant également l'évolution temporelle de la matrice densité restreinte à l'espace de Hilbert décrivant toutes les excitations $\rho_{e_{i,\alpha}e_{i,\alpha}}$ en se servant de la propriété sur la trace de la matrice densité :

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{GG}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\sum_i \sum_\alpha \rho_{e_{i,\alpha}e_{i,\alpha}}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.114}$$

Cependant le calcul en utilisant la restriction à l'espace de Hilbert décrivant l'état où tous les atomes sont dans leur état fondamental est plus simple et présente donc plus de chances d'aboutir au bon résultat.

En définissant les populations décrivant tous les atomes dans leur états fondamental ρ_{GG} ou l'atome i dans son état excité $\rho_{e_i^\alpha e_i^\alpha}$ selon sa composante α :

$$\rho_{e_i^\alpha e_i^\alpha} = \langle e_i^\alpha \hat{\rho_A} | e_i^\alpha \rangle \tag{3.115}$$

$$\rho_{GG} = \langle G | \hat{\rho_A} | G \rangle, \tag{3.116}$$

on peut expliciter l'évolution de l'opérateur ρ_{GG} telle que :

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{GG}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\langle G|\hat{\rho_A}|G\rangle}{\mathrm{d}t}. \tag{3.117}$$

On remarque facilement que les valeurs moyennes sur l'état fondamental $|G\rangle$ des deux premiers termes de l'équation (3.113) sont nulles ce qui nous permet de réécrire cette équation telle que :

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{GG}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0 \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\alpha\alpha'} \Im(g_{\alpha\alpha'}(r_{ij})) \langle G | S_{i,\alpha}^{(-)} \hat{\rho}_A S_{j,\alpha'}^{(+)} | G \rangle. \tag{3.118}$$

On peut donc ramener le calcul du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$ à un problème aux valeurs propres[3] [163] reliées à la partie imaginaire du potentiel d'interaction servant à décrire l'Hamiltonien effectif H_{eff} tel que :

$$\sum_{i=1}^{N} -\Im(g_{\alpha\alpha'}(r_{ij}))\mathbf{u}_j = \Gamma_{h\nu}^j \mathbf{u}_j \tag{3.120}$$

où $\Gamma_{h\nu}^j$ est le taux d'émission du photon associé au mode $\mathbf{u}_j$ qui contient l'information sur la direction angulaire de ce photon [164].

En résumé, afin de calculer les taux d'émission du photon dans les cas scalaire et vectoriel, nous aurons à diagonaliser les opérateurs :

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_0 \frac{\sin(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}} \text{ (cas scalaire)} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{\alpha,\alpha'} = \Gamma_0 \Bigg[&\left(\frac{\sin(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}} + \frac{\cos(k_0 r_{ij})}{(k_0 r_{ij})^2} - \frac{\sin(k_0 r_{ij})}{(k_0 r_{ij})^3} \right) \delta_{\alpha\alpha'} \\ &+ \left(-\frac{\sin(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}} - 3\frac{\cos(k_0 r_{ij})}{(k_0 r_{ij})^2} + 3\frac{\sin(k_0 r_{ij})}{(k_0 r_{ij})^3} \right) \frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2} \Bigg] \text{ (cas vectoriel)}\end{aligned} \tag{3.122}$$

3. Pour cela une hypothèse forte est faite dans le sens où l'on considère que le taux d'émission de chaque population des états excités décroît exponentiellement au cours du temps tel que :

$$\Pi_{e_{i,\alpha}e_{i,\alpha}} \propto e^{-\Gamma_{h\nu}^{(i,\alpha)}t} \tag{3.119}$$

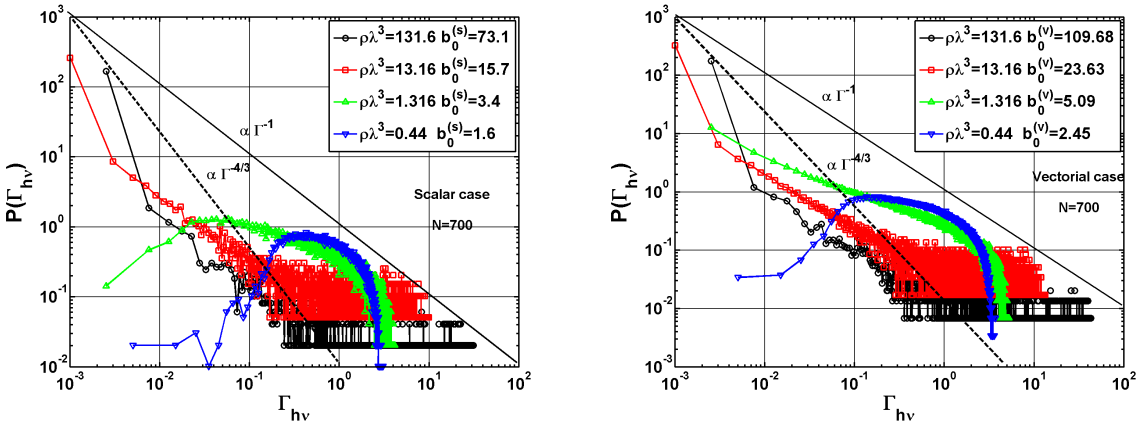

FIGURE 3.40 – Distributions des taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans les cas scalaire (figure de droite) et vectoriel (figure de gauche) pour un nuage contenant $N = 500$ atomes at différente densités spatiales $\rho\lambda^3 = 0.44$ à 131.6 moyenné sur 15 configurations spatiales. De la même manière que pour les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ on remarque que pour les systèmes dilués la physique de l'atome unique est dominante et que les distributions sont piquées autour de Γ_0 et que les distributions $P(\Gamma_{h\nu})$ tendent vers une loi de puissance pour les milieux denses ($\rho\lambda^3 > 13.16$). Cependant, contrairement aux distributions des largeurs des modes l'exposant de la loi de puissance n'est pas le même et tend plus tôt vers la valeur -1 au lieu de $-4/3$.

Il est à noter que contrairement à l'opérateur décrivant l'Hamiltonien effectif H_{eff} dans le cas scalaire (eq. 2.90) et vectoriel (eq. 2.87), qui est un opérateur non hermitien, l'opérateur servant à calculer le taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$, qui est la parie imaginaire de H_{eff} est quant à lui hermitien dans les deux cas.

3.2 Distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans les cas scalaire et vectoriel.

Dans cette section, de la même manière que nous avons considéré les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ lors de notre étude des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff}, nous allons nous intéresser aux distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$. Il est avant tout capital de souligner que le taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$ et sa densité de probabilité $P(\Gamma_{h\nu})$ ne sont en aucun cas équivalents aux largeurs des modes Γ_{at} et à leur distributions $P(\Gamma_{at})$ à l'exception du cas particulier décrivant $N = 2$ atomes. En effet, il faut plutôt voir les largeurs des modes Γ_{at} associées à la probabilité que le système soit pendant un certain temps dans un état d'excitation collective donné $|\Psi\rangle$ avant de décroître dans un dans un autre état d'excitation sans pour autant se coupler à l'extérieur (émettre l'excitation) alors que le taux d'émission du photon est quant à lui relié à la probabilité qu'a l'excitation de rester un certain temps dans le système avant de se coupler à l'extérieur.

L'approche numérique que nous avons utilisé afin de calculer le taux d'émission du photon est similaire à celle que nous avons décrite au début de ce chapitre pour calculer les valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} à l'exception que nous n'avons seulement diagonalisé que sa partie imaginaire $\Im(g_{\alpha\alpha'}(r_{ij}))$ dans les cas scalaire (eq. 2.90) et vectoriel

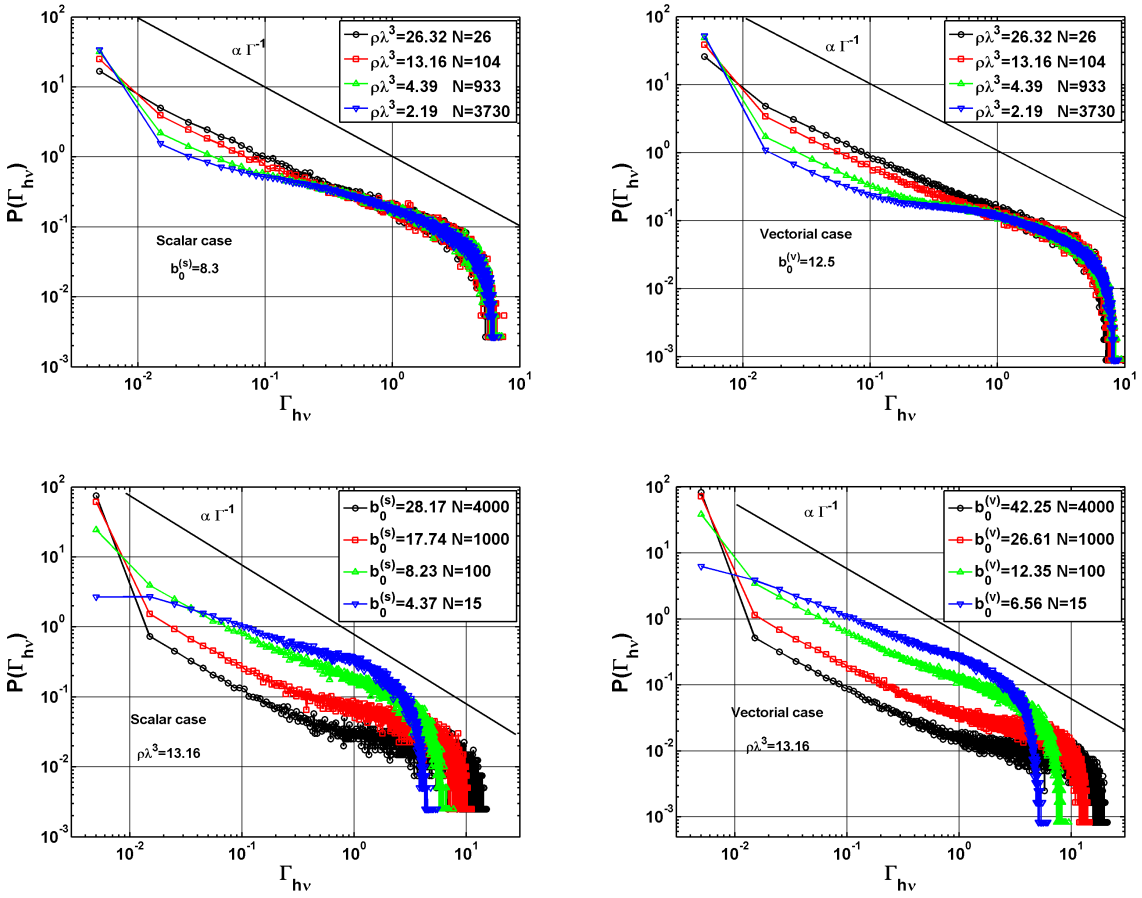

FIGURE 3.41 – Représentation en log-log des distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans le cas scalaire (figures de gauches) et le cas vectoriel (figures de droite) pour une densité spatiale de diffuseurs constante ($\rho\lambda^3 = 13.16$) (figures du bas) et pour une épaisseur optique constante ($b_0^{(s)} = 8.3$ et $b_0^{(s)} = 12.5$) (figures du haut) pour des nuages contenant $N = 15$ à 4000 atomes environs moyennés sur 10 à 2000 configurations spatiales. Contrairement aux distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dont l'exposant de la décroissance algébrique affiche clairement une dépendance en épaisseur optique b_0, aucune dépendance nette ne peut être établie pour l'exposant de la loi de puissance des distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$. Dans les deux cas scalaire et vectoriel, l'exposant de la décroissance algébrique semble sensiblement augmenter en fonction de la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$ at aussi de l'épaisseur optique b_0.

(eq. 2.87) pour une configuration spatiale donnée.

La figure 3.40 montre les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour un nuage contenant $N = 700$ atomes et différentes densités spatiales ($\rho\lambda^3 = 0.44$ à 131.6) de diffuseurs. Tout comme pour les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$, on remarque que pour les systèmes dilués ($\rho\lambda^3 \ll 1$) la physique de l'atome unique est dominante et les distributions sont piquées autour de $\Gamma_0 = 1$ et que pour les systèmes denses spatialement ($\rho\lambda^3 \gg 1$) et optiquement ($b_0 \gg 1$), le nombre de mode aux longs temps de vies ($\Gamma_{h\nu}$) augmente. On remarque aussi que les distributions $P(\Gamma_{h\nu})$ passent d'une 'courbe en cloche' pour les milieux dilués à une loi de puissance pour les milieux dense à l'exception que l'ex-

posant de la décroissance algébrique n'est pas le même que pour les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ et se rapproche plus de la valeur -1 que de $-4/3$. Une autre remarque intéressante est l'absence dans le cas vectoriel du pic à $\Gamma_{h\nu} = 2$, associé aux paires superradiantes.

Suivant la même procédure que pour l'étude des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ nous considérons les distributions du taux d'émission du photon pour une densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs fixées et une épaisseur optique b_0 fixée afin de connaître l'origine de cette loi de puissance et de savoir si elle est à relier aux effets coopératifs ou aux effets liés au désordre. La figure 3.41 nous montre en représentation log-log les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans les cas scalaire (figures de gauche) et vectoriel (figures de droite) pour des nuages dont l'épaisseur optique est constante ($b_0^{(s)} = 8.3$ et $b_0^{(s)} = 12.5$, figures du haut) ou pour des nuages dont la densité spatiale de diffuseurs est constante ($\rho\lambda^3 = 13.16$, figures du bas). Afin de maintenir ces paramètre constant nous avons fait varier le nombre d'atomes entre $N = 15$ et $N = 4000$ atomes environs moyennés entre 2000 et 10 configurations spatiales. Contrairement aux distributions de largeurs des modes que nous avons considérées lors de l'études des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} où l'exposant de la décroissance algébrique dépend clairement de l'épaisseur optique du système, l'exposant de la loi de puissance des distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ ne semble pas dépendre en particulier ni de l'épaisseur optique b_0 ni de la densité spatiale de diffuseur $\rho\lambda^3$ et semble légèrement augmenter en fonction de ces deux paramètres. Une autre observation importante sont les similarités qui existent entre les distributions dans les cas scalaire et vectoriel du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ et ce pour des systèmes optiquement denses ou spatialement denses ce qui n'est pas le cas des distributions des largeurs des modes, qui présentent de grande différence pour des systèmes denses. Enfin il faut également noter l'absence du pic à $\Gamma_{h\nu} = 2$ qui correspond aux paires coopératives d'atomes.

3.3 Comportements asymptotiques des distributions du taux d'émission du photon.

De la même manière nous avons considérés les comportements de certaines valeurs asymptotiques (largeur moyenne minimum Γ_{min} et largeur moyenne maximum Γ_{Max}) des largeurs des modes, nous pouvons procéder similairement avec le taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$. Nous considèrerons brièvement à la fin de cette section les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans la limite de Dicke où la taille du système est bien inférieure à la longueur d'onde ($k_0 L < \lambda$).

Tout d'abord nous nous intéressons à la valeur moyenne maximum du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}^{(Max)}$ définie telle que :

$$\Gamma_{h\nu}^{(Max)} = \langle \max_i(\Gamma_{h\nu,i}) \rangle \tag{3.123}$$

où $\langle . \rangle$ représente la moyenne sur les configurations spatiales du désordre. La figure 3.42 nous montre l'évolution de la valeur moyenne maximum $\Gamma_{h\nu}^{(Max)}$, définie à l'équation (3.123),en fonction de l'épaisseur optique du système b_0 dans le cas scalaire et vectoriel. On remarque tout d'abord que cette quantité présente globalement un comportement qualitatif similaire à la valeur moyenne maximum des largeurs des modes Γ_{Max} (figure

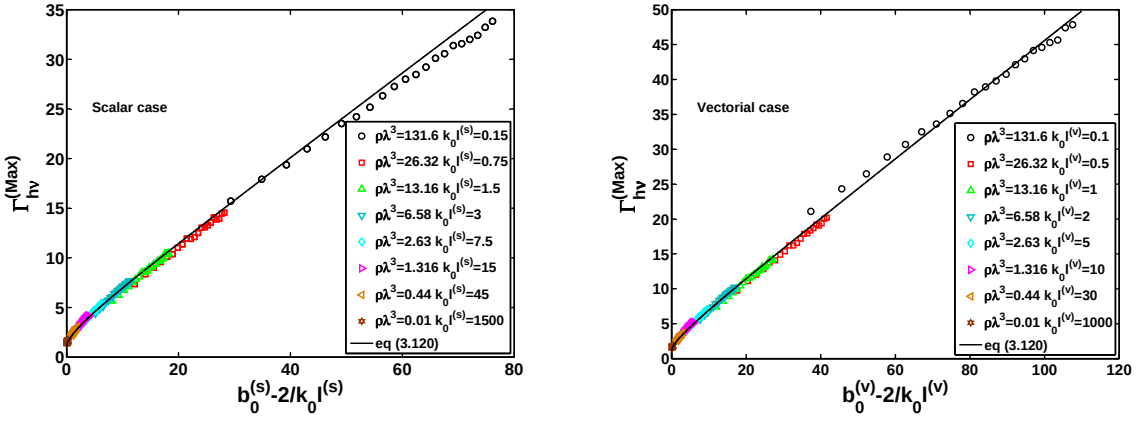

FIGURE 3.42 – Évolution de la valeur moyenne maximum du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}^{(Max)}$ en fonction de l'épaisseur optique du système $b_0 - 2/k_0 l$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite). A la différence de la valeur moyenne des largeurs des modes Γ_{Max} (3.10), on remarque que la quantité $\Gamma_{h\nu}$ présente une dépendance en densité dans le cas scalaire également et que cette dépendance est la même pour le cas vectoriel. Une autre différence remarquable entre Γ_{Max} et $\Gamma_{h\nu}$ est que le comportement de cette dernière quantité est singulièrement le même que ce soit dans le cas scalaire ou dans le cas vectoriel, ce qui est souligné par la courbe en trait pleins sur les deux figure représentant la même équation (3.124), ce qui n'est pas le cas de la valeur moyenne des largeurs des modes Γ_{Max}.

3.10) et qu'elle ne présente plus uniquement une dépendance en densité dans le cas vectoriel mais aussi dans le cas scalaire. Un autre point important est que la dépendance en densité spatiale $\rho\lambda^3$ ou en nombre de Ioffe-Regel $k_0 l$ est la même dans le deux cas tout comme leur comportement en général, dont nous avons trouvé l'expression empiriquement à partir d'une réduction des moindres carrés telle que :

$$\Gamma_{h\nu}^{(Max)} = \sqrt{b_0 + \left(\frac{b_0}{5}\right)^2} + \frac{b_0}{4.5} + 1 \tag{3.124}$$

Cette similarité entre les cas scalaire et vectoriel pour le comportement de la quantité $\Gamma_{h\nu}^{(Max)}$ est une différence remarquable entre les taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$ et les largeurs des modes Γ_{at}.

Tous comme pour ces dernières, nous nous intéressons désormais au comportement de la valeur minimum moyenne du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}^{(min)}$ définie telle que

$$\Gamma_{h\nu}^{(min)} = \langle \min_i(\Gamma_{h\nu,i}) \rangle. \tag{3.125}$$

où encore $\langle . \rangle$ représente la moyenne sur les configurations spatiales du désordre. Dans l'éventualité où le taux d'émission du photon serait dominé par les taux d'émission associés aux paires coopératives d'atomes on pourrait s'attendre à ce que l'expression obtenue précédemment pour la largeur imaginaire minimum moyenne telle que :

$$\langle \Gamma_{min} \rangle \propto \frac{\Gamma_0}{b_0 N^{\frac{1}{3}}} = \Gamma_0 (N\rho\lambda^3)^{-\frac{2}{3}} \tag{3.126}$$

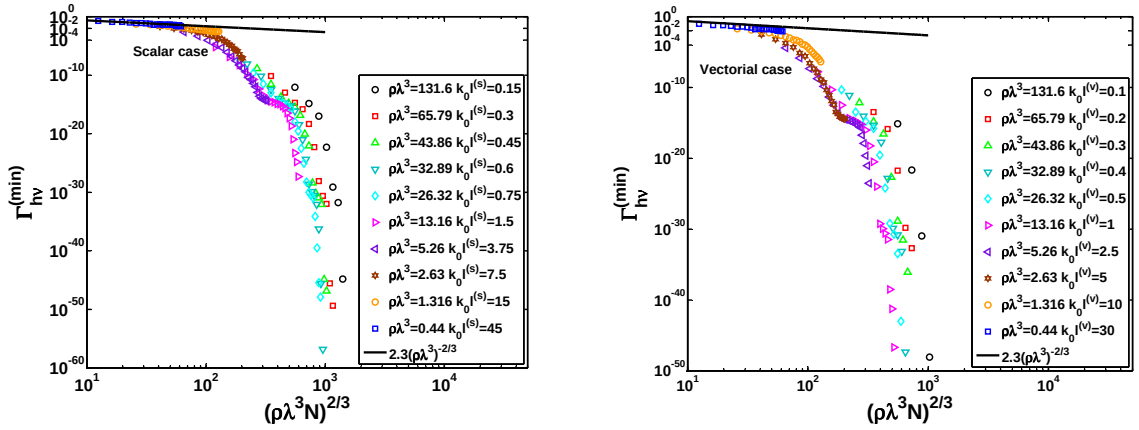

FIGURE 3.43 – Évolution du taux d'émission du photon minimum moyen $\Gamma_{h\nu}^{(min)}$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) en fonction de la quantité $(\rho\lambda^3)^{\frac{2}{3}}$ pour des nuages dont la densité spatiale de diffuseurs varie entre $\rho\lambda^3 = 0.44$ et $\rho\lambda^3 = 131.6$. De la même manière que pour la valeur maximum moyenne du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}^{(Max)}$, on remarque qu'il n'y a quasiment pas de différence entre les cas scalaire et vectoriel contrairement à valeur minimum moyenne des largeurs des modes Γ_{min} (figure 3.11) qui présente des différences entre les deux cas. Tout comme pour Γ_{min} dans le cas scalaire, on remarque un soudain décrochement de l'évolution de la quantité $\Gamma_{h\nu}^{(min)}$, par rapport aux comportements prédit par les équations (3.48) et (3.126), apparaissant pour les systèmes dont la densité spatiale de diffuseurs est supérieure à $\rho\lambda^3 \gtrsim 2.63$ dans le cas scalaire et $\rho\lambda^3 \gtrsim 1.14$ pour le cas vectoriel. Le trait plein représente la courbe associée à l'équation $2.3(\rho\lambda^3 N)^{-2/3}$. Il est à noter que les valeurs très faibles du taux d'émission du photon minimum moyen ($\Gamma_{h\nu}^{(min)} < 10^{-15}\Gamma_0$) ne peuvent pas être considérées de manière rigoureuses car inférieure à l'erreur numérique toléré par le logiciel de calcul.

soit encore valable pour décrire le comportement de la quantité $\Gamma_{h\nu}^{(min)}$. La figure 3.43 montre l'évolution valeur minimum moyenne du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}^{(min)}$ dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) en fonction du paramètre exprimé aux équations (3.48) et (3.126), qui est à associé à la largeur minimum moyenne des états correspondant aux paires coopératives d'atomes. Les densités spatiales considérées vont de $\rho\lambda^3 = 0.44$ à $\rho\lambda^3 = 131.6$. Contrairement à la valeur minimum moyenne des largeurs des modes Γ_{min} (figure 3.11), où le cas scalaire présente des différences singulières avec le cas vectoriel, on remarque que le comportement la valeur moyenne du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}^{(min)}$ est le même entre les cas scalaire et vectoriel. De la même manière que pour l'évolution de la quantité Γ_{min} pour le cas scalaire, $\Gamma_{h\nu}^{(min)}$ présente un décrochement en fonction de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ au comportement associé au moment d'ordre 1 de la largeur minimum des états correspondant aux paires coopératives d'atomes (trait plein sur la figure 3.43). Ce décrochement apparaît aux densités $\rho\lambda^3 \gtrsim 2.63$ pour le cas scalaire et $\rho\lambda^3 \gtrsim 1.14$ pour le cas vectoriel. Il est important de noter que les très faible valeurs de $\Gamma_{h\nu}^{(min)}$ telles que $\Gamma_{h\nu}^{(min)} < 10^{-15}\Gamma_0$ n'ont aucun sens physique car elles se situent bien en deçà de l'erreur numérique tolérée par notre logiciel de calcul.

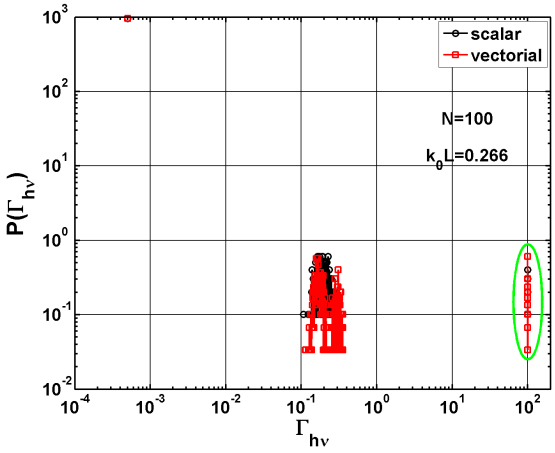

FIGURE 3.44 – Représentation log-log des distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ pour un nuage contenant $N = 100$ dans la limites de Dicke $k_0L = 0.26$ dans les cas scalaire (courbe noire) et vectoriel (courbe rouge) moyenné sur 99 configurations spatiales. Contrairement au aux distributions des largeurs des modes dans la limites des milieux de petites taille devant la longueur d'onde ($L \ll \lambda$), on remarque que le pic superradiant est présent aussi bien dans les cas scalaire et vectoriel. On observe également que la largeur de l'état superradiant est exactement de $N\Gamma_0$.

Distributions du taux d'émission de photon $P(\Gamma_{h\nu})$ ***dans la limite de Dicke*** $(L < \lambda)$***.***

Il est également utile de considérer les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans le limites de système dont la taille est très petite devant la longueur d'onde tout comme nous l'avons fait à la section 1.10 pour les distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$. Ce type d'étude a auparavant été faite dans le cas scalaire [15] et il a été observé que le taux d'émission associé à l'état superradiant symétrique était effectivement décrit par $\Gamma_{Sup} = N\Gamma_0$.

La figure 3.44 nous montre les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dans limite de Dicke (taille de système petites devant la longueur d'onde ($L \ll \lambda$)) dans les cas scalaire (courbe noire) et vectoriel (courbe rouge) pour un nuage contenant $N = 100$ atomes dont la taille est $k_0L = 0.26$ moyenné sur 99 configurations spatiales différentes. Contrairement aux distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dans cette même limite, on remarque la présence du pic superradiant aussi bien dans les cas scalaire et vectoriel. On observe également que dans les deux cas la position de ce pis est exactement à $N\Gamma_0$ ce qui est une indication allant dans les sens que les déplacements en fréquences, considérés dans l'étude des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} et pas dans le spectre de sa partie imaginaire, sont à l'origine d'un déphasage empêchant la convergence de ce pic vers $N\Gamma_0$ (figure 3.45).

3.4 Définition d'une fonction d'échelle.

Après avoir vu que les comportements du taux d'émission du photon ne présentaient que peu de différences entre les cas scalaire et vectoriel, nous reprenons la procédure établie

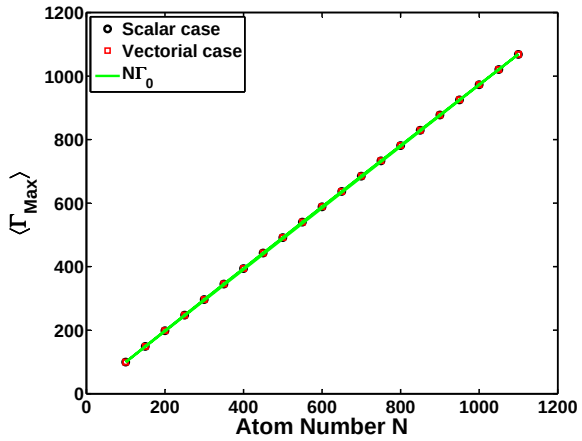

FIGURE 3.45 – Evolution du taux d'émission associé à l'état superradiant en fonction du nombre d'atomes N dans les cas scalaire (courbe noire) et vectoriel (courbe rouge) pour un nuage dont la densité spatiale de diffuseurs est $\rho\lambda^3 = 1.36.10^7$. La courbe verte représente le taux d'émission évoluant selon $N\Gamma_0$. On remarque que dans les deux cas (scalaire et vectoriel) le taux d'émission associé à l'état superradiant converge effectivement vers $N\Gamma_0$.

dans les travaux [15][155] afin de voir si le cas vectoriel que nous considérons présente également un comportement d'échelle en fonction de l'épaisseur optique du système. Le cas vectoriel a été également abordé dans la référence [155] dans la situation où tous les dipôles sont alignés selon le même axe et qui est donc décrite par un opérateur $N \times N$. La situation que nous considérons où les différentes composantes en polarisations des dipôles sont couplées n'a pas encore été l'objet de ce type d'approche, bien que l'on puisse s'attendre à un comportement d'échelle aux vues des observations précédentes que nous avons faites (grandes similarités entre les cas scalaire et vectoriel).

Que ce soit dans le cadre de travaux théoriques [55] ou expérimentaux [165], ce qui permet souvent de mettre en évidence l'existence ou non d'une transition de phase est l'observation d'un comportement d'échelle, c'est à dire qu'indépendamment des autre paramètres du problème toutes les courbes décrivant une quantité sont décrites par une unique fonction dépendant d'un seul paramètre dans la limite thermodynamique. Une brève étude phénoménologique nous permet de voir que dans la limite des nuages très dilués ($\rho\lambda^3 \ll 1$), la physique de l'atome unique est dominante et que tous les taux d'émission du photon seront proche de celui pour un atome indépendant Γ_0. On peut donc dire sans trop prendre de risque que le taux d'émission moyen sera $\Gamma_{mean} = 2\mathrm{Tr}[\Im(g_{\alpha,\alpha'}(r))]/N = \Gamma_0 = 1$. Dans la limite de Dicke ($L \ll \lambda$), où il y a un mode superradiant dont le taux d'émission est $\Gamma_{Sup} = N\Gamma_0$ et $N-1$ mode sousradiants dégénérés dont les taux d'émission sont $\Gamma_{Sous} = 0\Gamma_0$, on obtient facilement que le taux d'émission moyen du photon est $\Gamma_{mean} = [N \times 1 + 0 \times (N-1)]\Gamma_0/N = \Gamma_0 = 1$. On remarque donc que le taux d'émission moyen du photon n'est pas une quantité adéquate pour décrire un changement de phase. Par contre le fait que ce dernier reste à la même valeur quelle que soit la limite de taille de système que nous considérons nous permet d'élaborer une fonction qui compte le nombre de modes au-dessus et en dessous de Γ_{mean} qui elle peut nous fournir des indications sur un éventuel changement de comportement du taux d'émission du photon. Nous définissons donc une quantité $C(k_0L, k_0l)$, reliée à la distribution intégrée du taux d'émission du

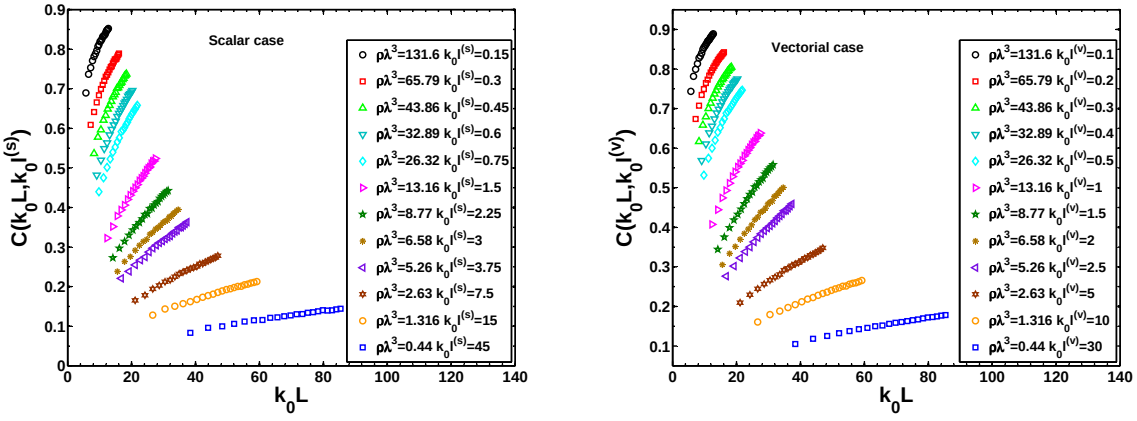

FIGURE 3.46 – Évolution de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ en fonction de la taille du système k_0L exprimée en unités de nombre d'onde dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour différentes densités spatiales de diffuseurs ($\rho\lambda^3 = 0.44$ à 131.6). On remarque peu de différences entre les deux cas et aussi l'absence de comportement d'échelle de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ en fonction de la taille du système. On observe également que le comportement de $C(k_0L, k_0l)$ est croissant de manière monotone quelle que soit la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$ que l'on considère.

photon telle que :

$$C(k_0L, k_0l) = 1 - 2\int_{\Gamma_0}^{\infty} P(\Gamma_{h\nu})d\Gamma_{h\nu} \tag{3.127}$$

En regardant la quantité définie à l'équation (3.127) on remarque que dans la limite des milieux dilués ($\rho\lambda^3 \ll 1$), la physique de l'atome unique va dominer les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ qui seront répartie autour de la valeur Γ_0 de manière symétrique, ce qui aura pour conséquences que la quantité $C(k_0L, k_0l)$ tendra vers une valeur nulle. En revanche dans un cas où tous les modes sont "*localisés*" dans le sens où ils ont un taux d'émission $\Gamma_{h\nu}$ inférieur à celui de l'atome unique Γ_0 on remarque que la quantité $C(k_0L, k_0l)$ tendra vers la valeur 1.

La figure 3.46 nous montre l'évolution de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ définie à l'équation (3.127) en fonction de la taille du système k_0L exprimée en unités de nombre d'onde dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour des systèmes à différentes densités spatiales de diffuseurs ($\rho\lambda^3 = 0.44$ à 131.6). On remarque tout d'abord que l'évolution de $C(k_0L, k_0l)$ est croissante de manière monotone quelle que soit la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$ ce qui est un indice de l'absence de changement dans le comportement de cette quantité lié à la densité spatiale du système. On remarque aussi l'absence de comportement d'échelle de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ en fonction de la taille du système k_0L ce qui nous montre que ce dernier paramètre n'est pas le paramètre pertinent pour mettre en évidence un comportement d'échelle pour cette quantité.

A l'inverse la considération de l'évolution de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ en fonction de l'épaisseur optique du système nous amène à des résultats singulièrement plus intéressant. La figure 3.47 nous montre l'évolution de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ en fonction de l'épaisseur optique b_0 du système pour différentes densités spatiales de diffuseurs ($0.44 \leq \rho\lambda^3 \geq 131.6$) dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite). Contrairement aux observations faites à la figure 3.46, on remarque tout d'abord que le comportement de

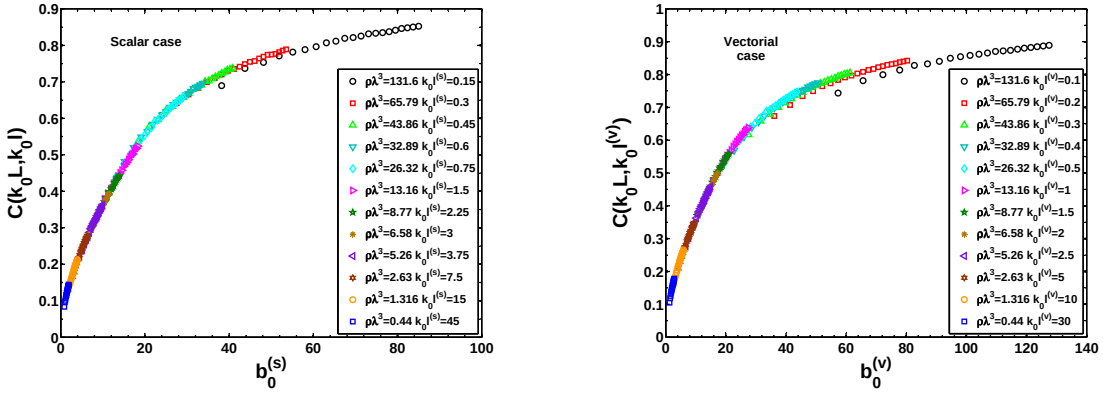

FIGURE 3.47 – Évolution de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ en fonction de l'épaisseur optique du système b_0 dans les cas scalaire (figure de gauche) et vectoriel (figure de droite) pour différentes densités spatiales de diffuseurs ($\rho\lambda^3 = 0.44$ à 131.6). Contrairement aux observations faites à la figure 3.46, on remarque que le comportement de $C(k_0L, k_0l)$ en fonction de l'épaisseur optique est décrit par une unique fonction quelle que soit la densité spatiale de diffuseurs $\rho\lambda^3$ considérée, ce qui est une preuve que l'épaisseur optique est la quantité pertinente pour mettre en évidence un comportement d'échelle quel que soit le cas scalaire ou vectoriel. Par contre on remarque également que l'évolution de $C(k_0L, k_0l)$ en fonction de l'épaisseur optique b_0 est croissante de manière monotone ce qui ne nous permet pas d'affirmer l'existence d'une transition de phase dont l'épaisseur optique est l'unique paramètre d'ordre.

$C(k_0L, k_0l)$ est décrit par une unique fonction dépendant de l'épaisseur optique b_0 totalement indépendants de la densité spatiale de diffuseurs du système $\rho\lambda^3$ pour des densités spatiales inférieures à $\rho\lambda^3 = 65.8$. Cette observation, qui avait été déjà obtenue pour le cas scalaire [15], montre que la considération du caractère vectoriel, où l'on tient compte du couplage entre le différentes composantes en polarisation, n'amène pas de changements qualitatifs à ce résultat, et que l'épaisseur optique b_0 est le paramètre pertinent afin de mettre en évidence un comportement d'échelle dans la limite des systèmes de grandes taille devant la longueur d'onde $k_0Lg2\pi$. On constate également que l'évolution de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ est croissante de manière monotone quelles que soient les densités spatiales de diffuseurs $\rho\lambda^3$ et les épaisseurs optiques b_0 considérées ce qui nous empêche d'affirmer l'existence d'une transition de phase dont l'épaisseur optique soit l'unique paramètre d'ordre. La figure 3.48 souligne l'absence de différences entre les cas scalaire et vectoriel dans le comportement de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ en plus du fait que l'épaisseur optique soit le seul paramètre pertinent dans la limite des systèmes dont la taille est grande devant la longueur d'onde ($k_0L > 2\pi$).

3.5 Discussions des résultats.

Nous avons donc vu que le comportement du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$ contrairement aux largeurs des modes Γ_{at} ou même aux valeurs propre Λ_i, ne comportait que peu de différences entre les cas scalaire et vectoriel. Nous avons tout d'abord vu que les distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$, de la même manière que celles des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$, étaient décrites par une loi de puissance mais que son exposant

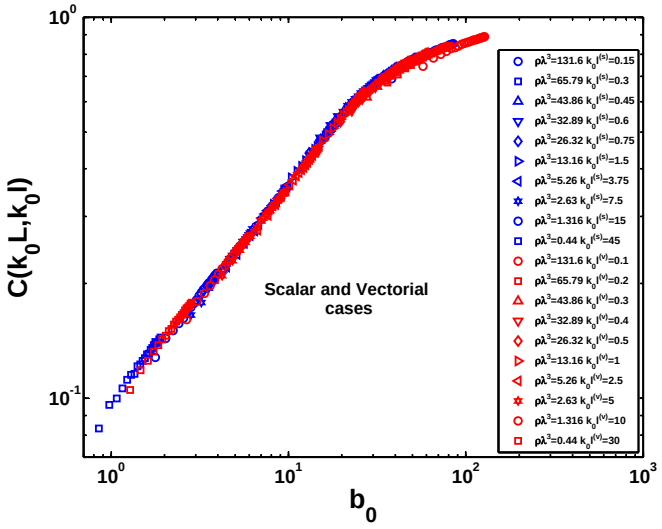

FIGURE 3.48 – Superposition de la quantité $C(k_0L, k_0l)$ dans les cas scalaire (bleu) et vectoriel (rouge) en représentation log-log pour les mêmes paramètres que la figure 3.47. On remarque clairement que quel que soit le cas considéré (scalaire ou vectoriel), l'épaisseur optique b_0 et le seul paramètre pertinent permettant de mettre en évidence un comportement d'échelle où la quantité $C(k_0L, k_0l)$ n'est décrite que par une seule fonction dépendant de b_0

était plus proche de -1 que de $-4/3$. A la différence des distributions des largeurs des modes $P(\Gamma_{at})$ dont l'exposant de la décroissance algébrique est clairement dominé par l'épaisseur optique b_0 (figure 3.9), nous observons que la dépendance de l'exposant des loi de puissance des distributions du taux d'émission du photon $P(\Gamma_{h\nu})$ dépend à la fois de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ du système et de son épaisseur optique b_0.

L'études de certaines valeurs remarquables (valeur maximale, valeur minimale et valeur la plus probable) du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$ a mis clairement en évidence l'absence qualitative entre les cas scalaire et vectoriel et nous a permis de voir que l'épaisseur optique b_0, corrigée légèrement par la densité, dominait le taux d'émission maximum du photon et que pour des systèmes dont la densité est inférieure à $\rho\lambda^3 \simeq 1$ la formule associée aux paires coopératives d'atomes (eq. (3.48)) décrivait correctement cette quantité.

Enfin l'élaboration d'une fonction $C(k_0L, k_0l)$ de comptage des modes aux longs temps de vies nous a permis de mettre en évidence un comportement d'échelle en fonction de l'épaisseur optique b_0 du système indépendant de la densité spatiale $\rho\lambda^3$ de diffuseurs que l'on considère.

Chapitre 4

Etude expérimentale des effets coopératifs.

Cette partie est consacrée à l'étude expérimentale des effets coopératifs en se basant principalement sur la détection indirecte de ces effets par la modification de la pression de radiation [28, 166]. Dans un premier temps nous allons effectuer un bref rappel sur les différents aspects théoriques nous permettant de savoir quelles quantités observer afin de mettre en évidence ces effets coopératifs, nous discuterons des approximations faites par les différents modèles utilisés et leurs conséquences sur la physique que l'on considère. Il est à noter que le modèle utilisé le plus fréquemment est celui des dipôles couplés que nous avons dérivé de manière classique au chapitre 2 afin d'illustrer les potentiels d'interaction du Hamiltonien effectif pour les cas scalaire et vectoriel. Les études expérimentales que nous avons menées étant réalisées dans des milieux dilués ($\rho \simeq 10^{10} - 10^{11}$atomes.cm^{-3} ce qui est de l'ordre de $\rho\lambda^3 \simeq 0.01$ et $k_0 l \simeq 1000$) nous développerons les approches théoriques uniquement pour le cas scalaire, qui est une approximation convenable pour les milieux dilués. Dans un deuxième temps nous présenterons le dispositif expérimental que nous avons utilisé afin de mettre en évidence ces effets coopératifs et nous présenterons dans la dernière partie les résultats expérimentaux que nous avons obtenue.

1 Rappels Théoriques sur les effets coopératifs.

Dans cette partie nous allons présenter les différents modèles que nous pouvons utiliser afin d'étudier les effets coopératifs. Certains de ces modèles comme les solutions "*Many Body*" associées au N dipôles couplés ne sont pas intégrables et nécessitent, tout comme pour l'étude des valeurs propres du Hamiltonien effectif H_{eff}, une approche numérique. D'autres, se rapprochant d'une approche en champ moyen comme la solution

"*Timed Dicke*" peuvent être traités de manière analytique. Nous allons donc discuter dans les prochaines parties de la pertinence des différents modèles, liée aux approximations qui sont faites afin de les obtenir, pour décrire les résultats expérimentaux que nous avons obtenus que ce soit dans les régimes de diffusion simple ou celui de diffusion multiple. Cette section ne présente pas une dérivation détaillée et exhaustive des calculs permettant d'obtenir la modification de la force, appliquée au centre de masse d'un nuage de géométrie gaussienne, par la présence de la diffusion coopérative et nous invitons le lecteur à consulter les références [45, 167, 51, 168] pour plus de détails sur les différents modèles et les calculs permettant de les obtenir.

1.1 Solutions "Many Body" pour N dipôles couplés.

La solution "*Many Body*" représente plus précisément la résolution des équations différentielles associées aux amplitudes de N dipôles couplés en présence d'un champ Laser incident. Ces équations ont été dérivées dans le cas scalaire et vectoriel au début de ce manuscrit et leurs expressions se trouvent aux équations (2.15) pour le cas scalaire et (2.31) pour le cas vectoriel. Ce type d'approche, initialement introduit par L. Foldy [169] est couramment utilisé afin de calculer le champ rayonné par un ensemble d'atomes froids, assimilé à un ensemble de dipôles couplés au repos. Nous nous permettons de rappeler l'équation d'évolution des dipôles couplés dans le cas scalaire telle que [1] :

$$\dot{\beta}_i = \left(i\Delta_0 - \frac{\Gamma_0}{2}\right)\beta_i - i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}_0.\mathbf{r}} + i\frac{\Gamma_0}{2}\sum_{j\neq i}\beta_j\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}}{k_0|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \tag{4.1}$$

qui est la base de nombreuses approches théoriques servant aux études expérimentales des effets coopératifs dans les milieux dilués.

La limite de validité de ce modèle se situe pour les champs de faibles intensités ($\Omega_0 < \Gamma_0$), étant similaire dans une certaine mesure à la considération d'une seule excitation dans le système telle que nous l'avons faites pour l'étude numérique du Hamiltonien effectif, au-delà de quoi il faut tenir compte des corrections au première ordre sur la diffusion liées aux effets de saturation de la population dans l'état excité ([170]). Dans le cadre d'une description linéaire de la réponse du système, de nombreux travaux ont utilisé cette approche que ce soit dans le cas scalaire [31] ou vectoriel [22] et il est aussi possible d'associer à ce modèle des termes supplémentaires afin de tenir compte des corrections liées à l'échange de photons virtuels, qui sont négligés lorsque l'on fait l'approximation de l'onde tournante (RWA) [21] pour une seule excitation ou encore si l'on tient compte des corrections liées à la présence de deux excitations . Il existe deux manières différentes de considérer la réponse des dipôles couplés, soit dans le régime stationnaire en posant $\dot{\beta}_j = 0$, soit en résolvant numériquement le système d'équation différentielles de manière temporelle afin de considérer également la réponse dans le régime transitoire. Enfin ce modèle tiens compte des corrections liées aux effets d'interférences que ce soit dans le régime de diffusion simple ou celui de diffusion multiple.

Afin de relier l'opérateur force $\mathbf{F}$ à l'amplitude des dipôles β_j il est utile de passer en représentation d'interaction pour le Hamiltonien matière rayonnement en posant

1. Bien que k_0 soit le nombre d'onde relié à la transition atomique, nous choisissons $\mathbf{k}_0$ pour le vecteur d'onde d'un photon appartenant à un mode du champ laser incident afin de ne pas porter confusion avec les vecteurs d'ondes $\mathbf{k}$ des photons appartenant aux modes du vide.

$H_I = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$ où H_0 est le Hamiltonien du système en l'absence de perturbation décrit aux équations (2.68) et (2.69) et $V = V_{AR} + V_{AL}$ représente l'interaction matière-rayonnement décrite aux équations (2.70) et (2.75). Comme le montre la référence [171] on peut obtenir le Hamiltonien d'interaction matière-rayonnement [2] en représentation d'interaction tel que :

$$H_I = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left(S_j^{(-)} e^{i\Delta_0 t - \mathbf{k}_0.\mathbf{r}_j} + S_j^{(+)} e^{-i\Delta_0 t + \mathbf{k}_0.\mathbf{r}_j}\right) + \hbar \sum_{j=1}^{N}\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}\left(S_j^{(-)} e^{-i\omega t} + S_j^{(+)} e^{i\omega t}\right).\left(a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j}\right). \quad (4.3)$$

Ici, la pulsation de Rabi du faisceau Laser incident $\Omega_0 = dE_0/\hbar$ est non nulle, contrairement aux sections précédentes, et $g_{\mathbf{k}} = (d^2\omega_k/2\hbar\epsilon_0\mathcal{V})^{(1/2)}$ est la constante de couplage atome-photon selon le mode $\mathbf{k}$. Il est à noter que nous considérons uniquement le cas scalaire ce qui a pour conséquences l'omission de toutes les notations concernant la polarisation du photon ε, celle du Laser incident $\boldsymbol{\epsilon}_L$ ou encore les composantes en polarisation atomiques α. Une remarque également importante est que dans l'expression du Hamiltonien à l'équation (4.3), l'approximation de l'onde tournante (RWA) a été faite pour le premier terme, correspondant au couplage des atomes avec le champ laser, mais pas pour le deuxième terme correspondant au couplage des atomes aux modes du vide. Plusieurs travaux discutent de l'influence de cette approximation sur les effets coopératifs où le déplacement collectif de Lamb devrait jouer un rôle [88, 101, 172].

Afin de calculer la force moyenne appliquée au centre de masse du nuage, qui est l'observable que nous voulons mesurer expérimentalement, il est possible de dériver une expression de la force coopérative moyenne F_c, à partir de du Hamiltonien d'interaction matière rayonnement (eq. (2.67)) en explicitant l'opérateur $\mathbf{F}_j$ correspondant à la force appliqué au j-ième atome à partir de la relation :

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_{aj} + \mathbf{F}_{ej} = -\nabla_{\mathbf{r}_j} H \quad (4.4)$$

où $\mathbf{F}_{aj}$ est la force ressentie par l'atome due à l'absorption d'un photon du champ incident et $\mathbf{F}_{ej}$ est la force ressentie par un atome liée à l'absorption d'un photon émis par un autre atome. En réutilisant la nouvelle écriture du Hamiltonien en représentation d'interaction (eq. (4.3)) et en utilisant la définition donnée à l'équation (4.4) on peut obtenir les expressions des opérateurs force reliés à l'absorption d'un photon du faisceau incident $\mathbf{F}_{aj}$ et à l'absorption d'un photon émis par un autre atome $\mathbf{F}_{ej}$ tel que [51] :

$$\mathbf{F}_{aj} = i\hbar\mathbf{k}_0 \frac{\Omega_0}{2}\left(S_j^{(-)} e^{i\Delta_0 t + i\mathbf{k}_0.\mathbf{r}_j} + h.c\right) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{F}_{ej} = i\hbar \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} g_{\mathbf{k}}\left(a_{\mathbf{k}}^{\dagger} S_j^{(-)} e^{i(\omega_k - \omega_0)t - i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j} + a_{\mathbf{k}} S_j^{(+)} e^{-i(\omega_k - \omega_0)t + i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j}\right). \quad (4.6)$$

2. Afin d'obtenir le Hamiltonien H_I en représentation d'interaction, il faut utiliser l'identité :

$$e^{-\alpha A} B e^{\alpha A} = B - \alpha[A,B] + \frac{\alpha^2}{2!}[A,[A,B]] + ..., \quad (4.2)$$

associée aux relations de commutation pour les opérateurs atomiques $[S_i^{(\pm)}, S_i^e] = \mp S_i^{(\pm)}$ avec $S_i^e = |e_i\rangle\langle e_i|$ le projecteur sur l'état excité de l'atome i, $S_i^{(+)}$ ($S_i^{(-)}$) étant l'opérateur excitation (désexcitation) de l'atome i définit à l'équation (2.72) et se rappeler également des relations de commutation pour les opérateurs photoniques $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$

Il est donc possible de relier les expressions des opérateurs force appliqués à un seul atome, données aux équations (4.4), (4.5) et (4.6), à la force $\mathbf{F}$ appliquée au centre de masse du nuage en exprimant la valeur moyenne de la force telle que $\mathbf{F} = 1/N \sum_j \mathbf{F}_j$. Il est à noter que cette force est N fois inférieure à la force totale qui s'applique au nuage. En faisant l'hypothèse d'une invariance par rotation de la distribution spatiale des atomes dans le nuage autour de l'axe de propagation $\hat{z}$ du faisceau Laser incident telle que $\mathbf{k}_0 = k_0\hat{z}$, la force moyenne $\mathbf{F}$ sera dans la même direction que le vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$ du faisceau incident. Cette hypothèse est plus que correcte dans la mesure où nous étudions expérimentalement des nuages dont la distribution en densité est gaussienne.

Afin de relier formellement les amplitudes des dipôles β_j aux valeurs moyennes de $\mathbf{F}_{aj}$ et $\mathbf{F}_{ej}$, il faut faire l'hypothèse que le système 'atome+photon' peut être décrit par l'état

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|G\rangle + \sum_{j=1}^{N} e^{-i\Delta_0 t}\beta(t)|j\rangle \tag{4.7}$$

où les états $|G\rangle$ et $|j\rangle \equiv |g_1...e_j...g\rangle$ ont les même définitions qu'aux chapitres précédents. Il est vrai que l'état décrit par l'équation (4.7) est plus que simplifié et il faudrait tenir compte en toute rigueur des corrections amenées par les doubles excitations (deux photons, deux atomes excités, un atome excité et un photon...). Finalement en s'affranchissant de la contribution des photons virtuels, on peut obtenir les valeurs moyennes des deux composantes de la force appliquées au centre de masse du système selon l'axe $\hat{z}$ telle que [45][51] :

$$\langle \hat{F}_a \rangle = -\frac{\hbar k_0 \Omega_0}{N} \sum_{j=1}^{N} \Im(\beta_j e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j}) \tag{4.8}$$

$$\langle \hat{F}_e \rangle = -\frac{\hbar k_0 \Omega_0}{N} \sum_{j,m=1}^{N} \frac{z_j - z_m}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|} j_1(k_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)\Im(\beta_j \beta_m^*) \tag{4.9}$$

où $j_1(z) = \sin(z)/z^2 - \cos(z)/z$ est la fonction de Bessel sphérique au premier ordre. Cette approche permet de mettre en évidence les deux contributions à la force appliquée au centre de masse du nuage selon l'axe $\hat{z}$, une partie coopérative et atomes indépendants, reliée à $\langle \hat{F}_a \rangle$ sachant que l'absorption d'un photon par un atome peut être modifiée par la présence des autre atomes, et une partie exclusivement coopérative reliée à $\langle \hat{F}_e \rangle$. Pour un atome unique, la contribution de F_e est donc nulle et en réinjectant dans l'équation (4.9) l'équation (4.1) pour un seul atome dans le régime stationnaire (c'est à dire pour $\dot{\beta}_i = 0$ et sans le troisième terme de cette équation) on retrouve effectivement la formule de la pression de radiation pour un atome unique soumis à un champ incident.

Par une formulation microscopique de la diffusion collective en passant par le théorème optique, il est possible [171] de relier les deux expressions précédentes à l'intensité diffusée $I_s(\theta, \phi)$ (eq. (2.40)) telle que :

$$F_z = \frac{\hbar k_0 \Gamma_0}{4\pi N} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta(1 - \cos\theta) \sum_{j,m=1}^{N} \left[\beta_j \beta_m^* e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m)}\right] \tag{4.10}$$

$$= \frac{r^2}{Nc} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta(1 - \cos\theta) I_s(\theta, \phi) \tag{4.11}$$

La première écriture de l'expression précédente nous montre que la force moyenne selon l'axe de propagation du faisceau Laser n'est pas proportionnelle à l'amplitude d'excitation de dipôles ($|\beta_i|^2$) mais est le résultat d'un effet d'interférence lié à la différence de marche proportionnelle à la distance relative entre les dipôles. La deuxième écriture souligne le fait que la force s'appliquant au centre de masse du nuage selon la direction de propagation du faisceau incident est directement proportionnelle au flux sortant de l'intensité diffusée $I_s(\theta, \phi)$. En considérant le cas simple d'une intensité diffusée de manière isotrope, on trouve que la force moyenne appliqués au centre de masse du nuage est $F_z = (4\pi r^2/Nc)I_s$ ce qui permet de retrouver la relation entre la puissance diffusée et la pression de radiation.

1.2 Solution Timed Dicke pour l'état stationnaire.

La solution Timed Dicke peut être assimilée à une approche champ moyen dans la mesure où elle est obtenue en considérant que tous les dipôles ont la même amplitude et la même phase que le laser incident au facteur de propagation près. Afin de faire cette approximation il faut donc effectuer le changement de variable :

$$\beta_j = \tilde{\beta}_j e^{i\mathbf{k}_0.\mathbf{r}_j} \tag{4.12}$$

ce qui permet de s'affranchir du déphasage imposé par le champ incident et de réécrire les équations sur les dipôles couplés (eq. (4.1)) telles que :

$$\left(i\Delta_0 - \frac{\Gamma_0}{2}\right)\tilde{\beta}_j - i\frac{\Omega_0}{2} + i\frac{\Gamma_0}{2}\sum_{m\neq j}\tilde{\beta}_m e^{i\mathbf{k}_0.(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_j)}\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|}}{k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|} = 0. \tag{4.13}$$

En sommant le système d'équations précédent il est possible [173] d'obtenir une amplitude moyenne $\tilde{\beta}_{TD}$ des dipôles telle que :

$$\tilde{\beta}_{TD} \equiv \langle\tilde{\beta}_j\rangle = \frac{1}{N}\sum_j \tilde{\beta}_j = \frac{\Omega_0}{2(\Delta_0-\Delta_c)+i\Gamma_c}. \tag{4.14}$$

Dans l'équation précédente, le terme Δ_c correspondant à un déplacement radiatif collectif, et le terme Γ_c à un élargissement spectral collectif peuvent être explicités tels [51] que :

$$\Gamma_c = \Gamma_0\left(1 + \frac{1}{N}\sum_m\sum_{j\neq m}\frac{\sin(k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|)}{k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|}e^{-i\mathbf{k}_0.(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_j)}\right) = Ns_N \tag{4.15}$$

$$\Delta_c = -\frac{\Gamma_0}{2N}\left(\sum_m\sum_{j\neq m}\frac{\cos(k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|)}{k_0|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_m|}e^{-i\mathbf{k}_0.(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_j)}\right). \tag{4.16}$$

On retrouve bien que le déplacement en énergie collectif est relié à la partie réelle $\Re(g(r))$ du potentiel d'interaction du Hamiltonien effectif (eq. (2.90)) et que l'élargissement collectif est relié à sa partie imaginaire $\Im(g(r))$. Il a été montré que l'expression associée au déplacement en énergie collectif (eq. (4.16)), moyennée sur les configurations spatiales atomiques, était reliée au déplacement de Lamb collectif qui se comporte comme une fonction de la densité spatiale du système $\langle\Delta_c\rangle \propto \rho\lambda^3$ [174][12]. Comme nous considérons des nuages dilués dont la densité spatiale est très faible ($\rho\lambda^3 \ll 1$), nous nous permettons de mettre à la main $\Delta_c = 0$ négligeant par conséquent les effets physiques reliés au déplacement de Lamb collectif.

En suivant les références [45][51] il est possible de se servir des équations (4.9) et (4.9) en réinjectant l'expression obtenue pour l'amplitude moyenne des dipôles $\tilde{\beta}_{TD}$ (eq. (4.14)) afin d'obtenir une expression de la force collective appliquée au centre de masse du nuage telle que :

$$F_c = \hbar \mathbf{k}_0 \Gamma_0 \frac{N\Omega_0^2}{4\Delta_0^2 + N^2\Gamma_0^2 s_N^2}(s_N - f_N) \tag{4.17}$$

où s_N et f_N sont deux quantités reliées au facteur de structure $S_N(\mathbf{k}) = (1/N)\sum_{j=1}^{N} \exp(-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0).\mathbf{r}_j)$ telles que :

$$s_N = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta |S_N(\mathbf{k},\theta,\phi)|^2 \tag{4.18}$$

$$f_N = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\cos\theta |S_N(\mathbf{k},\theta,\phi)|^2. \tag{4.19}$$

Pour un atome indépendant ($N = 1$), la quantité f_N se moyenne à 0 et la quantité s_N à 1. On retrouve bien par l'équation (4.17) l'expression connue pour la pression de radiation :

$$F_1 = \hbar \mathbf{k}_0 \Gamma_0 \frac{\Omega_0^2}{4\Delta_0^2 + \Gamma_0^2}. \tag{4.20}$$

En faisant la moyenne sur les configurations, c'est à dire en remplaçant la somme discrète sur les amplitude des dipôles par une intégrale continue $\sum_i \to \int_{\mathcal{V}} d\mathbf{r} n(\mathbf{r})$ dans l'hypothèse d'une distribution en densité gaussienne isotrope ($n(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/2\sigma_r^2)$) et en utilisant la définition de l'épaisseur optique à résonance au centre du nuage $b_0 = \int \mathrm{d}z n(0,0,z) = 3N/(k_0\sigma_r)^2$ on peut réexprimer les quantités s_N et f_N définies aux équations (4.18) et (4.19). Dans cette approximation ces deux quantités peuvent se réécrire sous la forme $s_N \to s_\infty \approx 1/4(k_0\sigma_r)^2$ et $f_N \to f_\infty \approx s_\infty - 2s_\infty^2$ [45] on trouve également que $Ns_\infty = b_0/12$ ce qui permet d'exprimer le rapport entre la force coopérative F_c (eq. (4.17)) et celle ressentie par un atome indépendant tel que :

$$\frac{F_{c,\infty}}{F_1} = \frac{4\Delta_0^2 + \Gamma_0^2}{4\Delta_0^2 + (\frac{b_0}{12})^2\Gamma_0^2} \frac{b_0}{24(k\sigma_r)^2}. \tag{4.21}$$

Il est à remarquer que lorsque l'on remplace la somme discrète sur les dipôles par une intégrale continue, on s'affranchit de la granularité du système négligeant ainsi les corrections liées à cette dernière lorsque l'on considère un très petit nombre d'atomes pour un milieu dilué. En effet une analyse rapide de l'expression donnée par l'équation (4.21) nous montre que lorsque l'épaisseur optique devient négligeable $b_0 \to 0$ le rapport $F_{c,\infty}/F_1$ tend également vers une valeur nulle ce qui nous montre que la limite de l'atome indépendant donnée par F_1 n'est pas retrouvée. Pour éviter ce problème, il faut tenir compote de la correction :

$$s_N \approx \frac{1}{N} + s_\infty \tag{4.22}$$

où le premier terme correspond à la diffusion par un seul atome alors que le second prend en compte les effets d'interférences entre les champs diffusés par plusieurs atomes [28]. Il

a été montré également que les corrections sur f_∞ étaient négligeable permettant d'écrire $f_N \approx f_\infty$. Tenant compte de cette correction on peut réécrire le rapport F_c/F_1 entre la force coopérative et celui de la force ressentie par un atome indépendant tel que :

$$\frac{F_c}{F_1} = \frac{4\Delta_0^2 + \Gamma_0^2}{4\Delta_0^2 + (1+\frac{b_0}{12})^2\Gamma_0^2}\left(1 + \frac{b_0}{24(k\sigma_r)^2}\right) \tag{4.23}$$

Les nuages que nous considérerons au cours de nos expériences ont pour taille typique $\sigma_r \simeq 500\mu$m ce qui aura pour conséquence que l'on puisse négliger le dernier terme de l'équation (4.23) et ne considérer seulement que l'expression :

$$\frac{F_c}{F_1} = \frac{4\Delta_0^2 + \Gamma_0^2}{4\Delta_0^2 + (1+\frac{b_0}{12})^2\Gamma_0^2} \tag{4.24}$$

On remarque donc que la force coopérative aura une dépendance lorentzienne en épaisseur optique b_0. Il est important de remarquer que les expressions dérivées précédemment ont été obtenus dans la limite des systèmes dont la taille est supérieure à la longueur d'onde ($L \gg \lambda$) dans le cas d'une distribution en densité spatiale $n(\mathbf{r})$ isotrope. Les formules générales concernant les distributions gaussiennes quelles que soient leurs ratios d'aspect ont été obtenues dans la référence [45]. Enfin il est utile de remarquer qu'au même titre que l'expression de la pression de radiation pour un seul atome, la force collective F_c est également symétrique par rapport à la transition atomique $\Delta_0 = 0\Gamma_0$ pour les désaccords dans le bleu ($\Delta_0 > 0\Gamma_0$) et ceux dans le rouge ($\Delta_0 < 0\Gamma_0$).

1.3 Modèle incohérent.

Le modèle que l'on qualifie d'incohérent est relié aux Equations de Transfer Radiatif, souvent utiles pour décrire le régime de diffusion multiple, ne tient pas compte quant à lui des effets d'interférences que ce soit dans le régime de diffusion simple ou multiple. En effet une hypothèse faite, souvent valide [9][175], est qu'un photon subissant un grand nombre d'évènements de diffusion par les diffuseurs placés de manière aléatoire dans un milieu optiquement épais, perd sa cohérence de phase. Dans certains cas ; cette perte de cohérence dans la phase du photon a pour conséquences une minimisation des effets d'interférences entre les différents diagrammes de diffusion rendant les propriétés des transports quasiment indépendantes de la nature ondulatoire du photon ou de la structure interne des diffuseurs. Il est donc possible de croire que dans le régime de diffusion multiple les solutions "*Many Body*" ne soient plus valides et que la dynamique du système se rapproche des comportements donnés par le modèle incohérent.

Dans ce modèle le photon est assimilé à une particule effectuant une marche au hasard avec une probabilité d'être diffusé de manière isotrope après une distance parcourue équivalente au libre parcours moyen de diffusion $l_{sc} = 1/n(r)\sigma_0$ avec $n(r)$ une distribution en densité gaussienne telle que :

$$n(r) = n_0 e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r}}, \tag{4.25}$$

Au bout d'un certain nombre d'évènements de diffusions le photon sort du système et en retenant sa direction de sortie (θ_i, ϕ_i) nous sommes en mesure de calculer le diagramme d'émission du système lorsqu'un grand nombre de photons $N_\gamma \gg 1$ est pris en compte. A partir de ce diagramme d'émission $S(\theta, \phi)$ il est possible de remonter à la force appliquée

au centre de masse du système. En effet un photon incident va transmettre une impulsion $\hbar k_0/m$ au centre de masse du système dans sa direction de propagation initiale (selon l'axe $\hat{z}$) et va transmettre une autre impulsion de même norme au centre de masse du système selon sa direction de sortie (θ, ϕ). Il est à noter que nous considérons uniquement des processus de diffusions élastiques.

Afin de calculer la force appliquée au centre de masse du système par le flux incident de photons, il s'agit de connaitre la dépendance en épaisseur optique $b(\Delta_0)$ de la force ressentie par chaque atomes dans le nuage exprimée telle que :

$$\frac{F_z^{(RTE)}}{F_1} = \frac{\sigma^{RTE}}{N\sigma(\Delta_0)}\langle 1 - cos\theta\rangle_i. \tag{4.26}$$

qui est l'analogue de l'équation (4.9). [3] Ici le terme F_1 est la force appliquée à un atome unique, dont le diagramme de rayonnement est isotrope, avec lequel nous avons échangé N_γ photons, σ^{RTE} est la section efficace d'extinction macroscopique et $\sigma(\Delta_0)$ est la section efficace de diffusion exprimée pour le cas scalaire telle que :

$$\sigma(\Delta_0) = \frac{\sigma_0^{(s)}}{1 + 4\left(\frac{\Delta_0}{\Gamma_0}\right)^2} \tag{4.27}$$

où $\sigma_0^{(s)}$ possède la même définition qu'à l'équation (2.52). On remarque que l'expression de la force, donnée à l'équation (4.26), est le produit de deux termes. Le premier terme correspond à la section efficace totale d'extinction et le second à un bilan d'impulsion, relié au diagramme d'émission obtenus numériquement. Pour ce dernier, en faisant l'hypothèse d'une invariance par rotation autour de l'axe $\hat{z}$ selon lequel se propagent initialement les photons (invariance par rotation selon), on peut donc obtenir par un bilan d'impulsion son expression telle que :

$$\langle 1 - cos\theta\rangle_i = 1 - \frac{1}{N_\gamma}\sum_{i=1}^{N_\gamma} \cos\theta_i. \tag{4.28}$$

Dans l'expression donnée à l'équation (4.28), le "1" provient du transfert d'impulsion lié à l'absorption des photons incidents par le système et le second terme provient du transfert d'impulsion lié à l'émission de ces photons. Dans le cas d'un diagramme d'émission isotrope, le deuxième terme de l'équation (4.28) se moyenne à 0 et on retrouve bien que $F_z^{(RTE)}$ suit le comportement prévu pour un atome unique.

La relation entre le premier terme et l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$ est plus subtile à expliciter et a été obtenue par M. T. Rouabah et N. Piovella [4]. En effet le nombre d'atomes N et le désaccord du faisceau Δ_0 ne sont pas des paramètres contrôlés de manière explicite dans les simulations pour le modèle incohérent. Cependant il est possible de relier le terme $\sigma^{(RTE)}/N\sigma(\Delta_0)$ à l'écart type de la distribution en densité gaussienne σ_r et l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$. En effet il est possible d'exprimer la section efficace macroscopique de

3. Bien évidemment le nombre d'atomes N et le désaccord Δ_0 ne sont pas des paramètres contrôlés de manière explicite pour les simulations numériques nous permettant d'obtenir le diagramme d'émission.

4. Pour plus de détails sur ce calcul, le lecteur est invité à consulter la thèse de M. T. Rouabah à paraitre très prochainement.

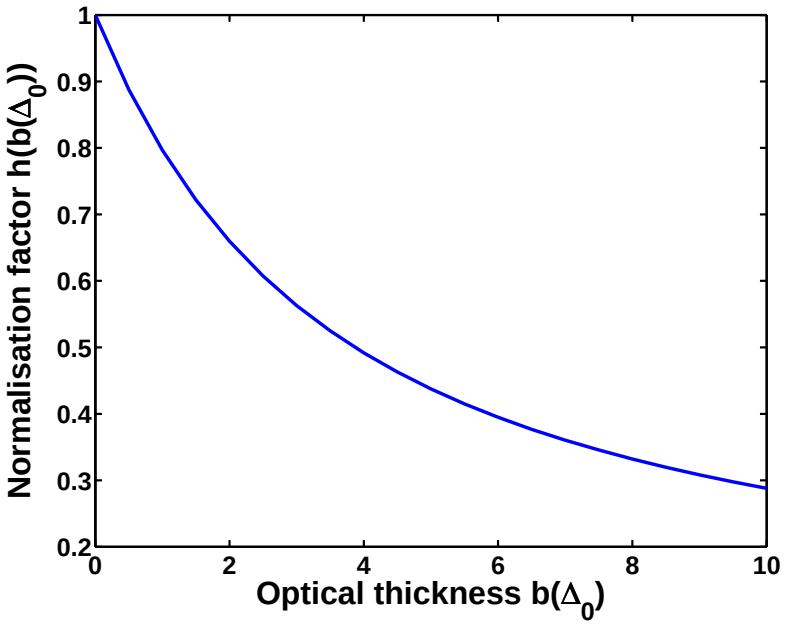

FIGURE 4.1 – Evolution du facteur de normalisation $h(b(\Delta_0))$ en fonction de l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$ du système. On remarque que ce facteur est toujours inférieur à 1 quelle que soit l'épaisseur optique considérée.

diffusion [5] telle que :

$$\sigma^{RTE} = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r \left[1 - \exp\left(-b(\Delta_0) e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}\right)\right]. \tag{4.29}$$

En considérant l'équation précédente on remarque bien que lorsque l'épaisseur optique ou encore que l'écart type de la distribution gaussienne en densité tendent vers 0 la section efficace totale d'extinction devient nulle. Par un changement de variable adapté on peut au final réécrire le premier terme de l'équation (4.26) comme :

$$\frac{\sigma^{RTE}}{N\sigma(\Delta_0)} = \frac{1}{b(\Delta_0)} \int_0^{b(\Delta_0)} \mathrm{d}y\ \frac{1 - e^{-y}}{y}. \tag{4.30}$$

L'intégrale dans l'équation (4.30) peut se réécrire à l'aide des primitives des fonctions exponentielles ce qui nous permet de réécrire l'équation (4.26) sous la forme :

$$\frac{F_z^{(RTE)}}{F_1} = \frac{1}{b(\Delta_0)} \langle 1 - cos\theta \rangle_i [C_E + \ln(b(\Delta_0)) - E_i(-b(\Delta_0))] \tag{4.31}$$

$$= h(b(\Delta_0)) \langle 1 - cos\theta \rangle_i, \tag{4.32}$$

5. En réalité, la quantité pertinente pour renormaliser la force est la section efficace totale d'extinction σ_{ext}. Mais dans la situation que nous considérons la section efficace macroscopique d'absorption est nulle car nous ne tenons compte que des processus de diffusion élastique. On peut donc poser :

$$\sigma_{abs}^{RTE} = \sigma_{ext}^{RTE}$$

où $C_E = 0.577215664$ est la constante d'Euler et $E_i(-b(\Delta_0))$ est la fonction exponentielle intégrale. On remarque facilement que l'expression de la force pour le modèle incohérent donnée à l'équation (4.32) ne dépend uniquement que du facteur d'anisotropie relié au diagramme d'émission et de l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$. La figure 4.1 nous montre l'évolution du facteur de normalisation en fonction de l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$. On remarque que cette quantité est toujours inférieure à l'unité quelle que soit l'épaisseur optique considérée ce qui aura pour conséquences de réduire la force appliquée au centre de masse du système par le flux de photons incidents lorsque l'on considèrera des milieux optiquement épais.

1.4 Diffusion de Mie et effets Coopératifs.

Il est aussi possible de s'affranchir de la complexité liée à la granularité du système et de considérer un milieu continu d'indice n et de retrouver la limite classique des effets coopératifs [168]. En effet, la théorie de Mie est une des solutions aux équations de Maxwell pour la diffusion d'ondes électromagnétiques par des objet sphériques dont la taille est non négligeable devant la longueur d'onde du faisceau incident. Pour cette approche le nuage, composé de plusieurs dipôles couplés entre eux via le champ électromagnétique, est assimilé à un seul objet macroscopique caractérisé par une polarisabilité complexe.

Dans la référence [168] il a été montré que dans la limite des très grand désaccords $\Delta_0 \gg 1$ pour un système contenant un très grand nombre d'atomes $N \gg 1$, le modèle nommé "*Partial Wave Expansion*", basé sur la théorie de la diffusion de Mie, pouvait rejoindre les résultats obtenus avec les solutions *Many Body* des N dipôles couplés. Il a été montré que lorsque le déphasage ϕ du faisceau incident lors de son passage à travers système par le centre de ce dernier est tel que :

$$\phi \approx -\frac{2}{3}\frac{b_0\Delta_0/\Gamma_0}{1+4\left(\frac{\Delta_0}{\Gamma_0}\right)^2} \tag{4.33}$$

il était possible d'observer des oscillations dans la force appliquée au centre de masse du système caractéristiques des résonances de Mie. Cependant cette équivalence n'a pu être extrapolée pour des faibles désaccords de quelques MHz. C'est pourquoi une de nos motivations initiale à l'étude systématique des effets coopératif pour des désaccords positifs ($\Delta_0 > 0\Gamma_0$) et négatifs ($\Delta_0 < 0\Gamma_0$) de manière symétrique par rapport à la transition atomique était l'observation sans succès jusqu'à présent de ces résonances de Mie pour des faibles désaccords.

1.5 Discussions sur les pertinences des différents modèles.

Afin de comparer nos résultats expérimentaux aux prédictions théoriques données par les différents modèles, plusieurs approches numériques sont utilisées afin de calculer l'intensité diffusée et ensuite la force moyenne appliquée au centre de masse du nuage. Pour l'approche Times Dicke numérique et l'approche Many Body, pour une configuration spatiale du désordre donnée on connaît la taille du système et le nombre d'atomes qu'il contient ce qui nous permet d'avoir une information sur sa densité spatiale de diffuseurs

$\rho\lambda^3$ et son épaisseur optique à résonance au centre du nuage :

$$b_0 = \int \mathrm{d}z\ n(0,0,z) = \frac{3N}{k_0\sigma_r} \tag{4.34}$$

où l'épaisseur optique est ici exprimée pour une distribution de densité spatiale gaussienne. Connaissant les positions des dipôles, dont les amplitudes complexes sont représentées par β_j, et connaissant la pulsation de Rabi du champ incident il est possible d'obtenir numériquement les amplitudes complexes des dipôles à partir des équations (4.1) et (4.13) en les écrivant sous forme matricielle dans le régime stationnaire ($\dot{\beta}_i = 0$) telle que :

$$i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}_0.\mathbf{r}} = \mathbf{M}\beta \Leftrightarrow \beta = \mathbf{M}^{-1}i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}_0.\mathbf{r}} \tag{4.35}$$

et en s'aidant des expressions obtenues pour l'intensité diffusées $I_s(\theta,\phi)$ de calculer numériquement la force moyenne appliquée au centre de masse du nuage le long de l'axe de propagation du faisceau incident.

Les simulations concernant le modèle incohérent ont été réalisées par J. Chabé. Pour ce modèle nous considérons un faisceau incident de particules (flux de N_γ photons) sur le système décrit par une distribution en densité gaussienne $n(r)$. La taille du faisceau incident (largeur de zone L_ϕ sur laquelle se propagent les photons) est réglée de manière à ce qu'elle soit plus grande que l'écart type de la distribution gaussienne ($L_{phi} > \sigma_r$) afin de pouvoir assimiler ce flux incident à une onde plane. Après que chaque photon ait effectué une marche au hasard dans le système nous retenons la direction (θ,ϕ) vers laquelle le photon sort du système ce qui nous permet de calculer numériquement le diagramme d'émission (ou de manière équivalente l'intensité diffusée). A partir de ce diagramme d'émission il nous est donc possible de calculer la modification de la force moyenne appliquée au centre de masse du nuage reliée au facteur d'anisotropie (eq. (4.28)). Dans les simulations, l'épaisseur optique du système est calculée *à postériori* en gardant la même distribution spatiale en densité et le même nombre de photon N_γ mais en utilisant cette fois ci un faisceau de taille infiniment petite passant par le centre de la distribution. L'épaisseur optique $b(\Delta_0)$ est ensuite calculée à partir du rapport T entre le nombre de photons $N_\gamma^{(0)}$ transmis à travers le nuage et n'ayant subi aucun évènement de diffusion et le nombre total de photon N_γ telle que :

$$b(\Delta_0) = -\ln\left(\frac{N_\gamma^{(0)}}{N_\gamma}\right) = -\ln(T), \tag{4.36}$$

et va nous permettre de renormaliser à l'aide de l'équation (4.30) le premier terme de la force moyenne appliquée au centre de masse du nuage obtenue à partir du diagramme d'émission.

La figure 4.2 nous montre les diagrammes d'émissions obtenus numériquement pour les trois modèles : le Many Body (courbe bleue), l'approximation Timed Dicke (courbe verte) et le modèle incohérent (courbe noir), pour un système d'épaisseur optique à résonance au centre $b_0 = 10$ d'écart type $k_0\sigma_r = 20$. Pour les calculs concernant le modèle incohérent 13000 photons ont été considérés et pour ceux concernant la solution Many Body et l'approximation Timed Dicke $N = 1300$ atomes ont été considérés pour 200 configurations spatiales. A la différence des résultats obtenus avec les solutions Many Body et l'approximation Timed Dicke, le modèle incohérent ne montre de pas de lobe vers l'avant. Son diagramme de rayonnement est presque isotrope avec une légère surintensité vers l'arrière

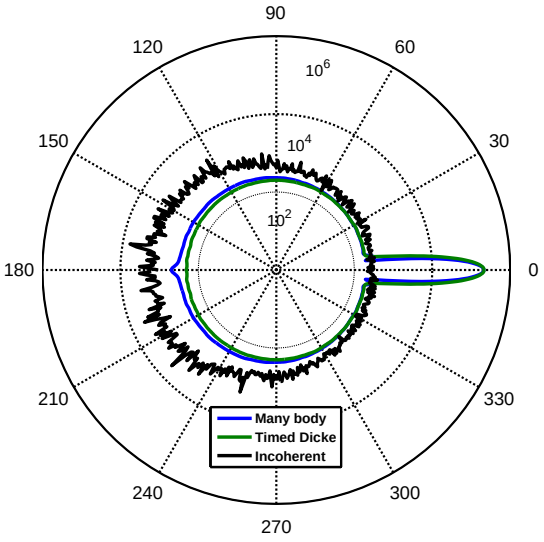

FIGURE 4.2 – Diagramme d'émission obtenus numériquement à partir des solutions Many Body (courbe bleu), de l'approximation Timed Dicke (courbe verte) et du modèle incohérent (courbe noire) pour un nuage de taille typique $k_0\sigma_r = 20$ et une épaisseur optique à résonance au centre du nuage $b_0 = 10$. Le faisceau incident est de très faible intensité ($\Omega_0 = 0.01$) et son désaccord est nul ($\Delta_0 = 0\Gamma_0$). A l'inverse des résultats obtenus avec les solutions Many Body et Timed Dicke, le diagramme d'émission obtenus à partir du modèle incohérent ne présente pas de lobe vers l'avant et est plutôt isotrope avec une légère surintensité vers l'arrière (dans la direction où le faisceau incident arrive). Les diagrammes de rayonnement obtenus avec les solutions Many Body et l'approximation Timed Dicke présentent quant à eux tous les deux un lobe vers l'avant dont l'amplitude est sensiblement la même dans les deux cas. Cependant considérant une situation dans le régime de diffusion multiple $b_0 = b(\Delta_0) = 10 \gg 1$, on remarque que l'approximation Timed Dicke ne présente pas de cône vers l'arrière, associé au Cône de Rétrodiffusion Cohérente et qui est un effet cohérent survivant dans le régime de diffusion multiple, ce qui nous montre l'inexactitude de ce modèle lorsque le photon subi plus d'un évènement de diffusion.

(dans la direction où arrive le faisceau incident). Les diagrammes obtenus avec la solution Many Body et l'approximation Timed Dicke présentent quant à eux un lobe orienté vers l'avant ayant les mêmes amplitudes dans les deux cas. Cependant on remarque que le diagramme d'émission obtenu avec la solution Timed Dicke ne présente pas de Cône de Rétrodiffusion Cohérente [38, 39], qui est un effet de cohérence survivant dans le régie de diffusion multiple, ce qui représente bien l'inexactitude de ce dernier modèle de l'approximation dans le régime de diffusion multiple.

2 Dispositif expérimental.

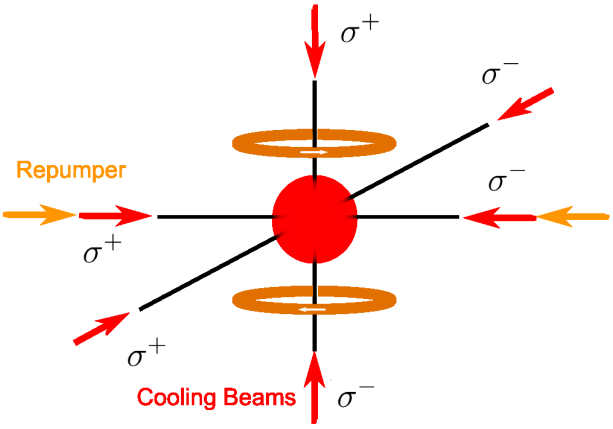

FIGURE 4.3 – Représentation schématique du dispositif expérimental utilisé afin de refroidir et piéger les atomes de Rubidium 87. Les six faisceaux Refroidisseurs, servant à ralentir les atomes et représentés en rouge, sont polarisés circulairement et désaccordés dans le rouge avec un désaccord typique de $-3\Gamma_0$. Les deux faisceaux Repompeur, servant à maintenir les atomes dans l'état $F = 2$ pendant la phase de chargement du piège et représentés en orange, sont également polarisés circulairement. Le gradient de champ magnétique (quadrupolaire) est généré par une paire de bobines en configurations anti Helmholtz. Tous les faisceaux (Refroidisseur et Repompeur) sont alignés sur le 0 de gradient de champ magnétique considéré comme le centre du piège.

Le dispositif expérimental dont nous disposons afin de détecter les effets coopératif de type superradiance est un Piège Magnéto Optique (Magneto Optical Trap - MOT) dont l'idée originale a été proposée par J. Dalibard et les principes de fonctionnement bien connus depuis les années 90 [176][177]. Dans cette partie nous ne traiterons que des spécificités de notre expérience nous permettant d'atteindre de très grandes épaisseurs optiques ($b_0 > 100$) bien que lors de la présentation des résultats les épaisseurs optique maximales que nous considérerons seront de l'ordre de $b_0 = 50$.

2.1 Le Piège Magnéto Optique.

L'espèce atomique que nous utilisons dans notre Piège Magnéto Optique est du Rubidium 87 (^{87}Rb), un isotope du Rubidium, que nous chargeons à partir d'une vapeur atomique à température ambiante afin de refroidir les atomes à des températures de l'ordre de quelque dizaines de micro Kelvins (typiquement entre 30 et 100μK). Afin de ralentir les atomes nous nous servons de leur structure hyperfine plus précisément de la transition cyclante $F = 2 \rightarrow F' = 3$, qui appartient à la raie $D2$ du rubidium. La très grande taille des waist ($w \simeq 280mm$) des faisceaux laser nous permettent de capturer un très grand nombre d'atome au centre de la cellule à vide, l'interaction matière-lumière créant des forces dissipatives agissant comme une force de friction visqueuse, les atomes allant le plus rapidement étant ceux qui sont les plus ralentis (refroidissement Doppler) [178]. Le confinement des atomes est obtenu quant à lui grâce à un gradient de champ magnétique, généré par des bobines en configuration anti-Helmholtz, permettant de briser l'invariance par translation et ramenant ainsi les atomes au centre du piège.

Comme nous l'avons dit précédemment pour refroidir la vapeur atomique le laser prin-

cipal, qui est une DFB de la marque $Toptica$, est accordé de manière à être résonant avec la transition hyperfine $F = 2 \rightarrow F' = 3$, suivant la règle de sélection $F \rightarrow F', F' \pm 1$ les atomes dans $F' = 3$ se désexcitent pour revenir dans l'état $F = 2$. Cependant la probabilité qu'un atome diffuse sur la raie $F' = 2$ est non nulle ce qui a pour conséquence que les atomes ont une probabilité non nulle de se retrouver dans l'état $F = 1$ (le rapport de branchement entre $F' = 2$ vers $F = 1$ et $F = 2$ est aux alentours de 1/2 et 1/2). Il nous faut donc utiliser un deuxième laser Repompeur, accordé sur la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$, afin de ne pas perdre ces atomes. Contrairement aux faisceaux nous servant à refroidir les atomes qui sont contra propageant selon les trois directions de l'espace (une verticale et deux horizontales), le Repompeur est aussi contra propageant mais selon une seule direction horizontale de l'espace (figure 4.3).

La figure 4.3 montre une représentation schématique du dispositif expérimental du piège avec les polarisations des bobines servant à créer le gradient de champ magnétique et les polarisations des différents faisceaux servant à refroidir ou à maintenir les atomes dans l'état $F = 2$.

Description de la cellule à vide et du système LIAD.

Afin de ne pas être perturbé par l'environnement extérieur, le nuage d'atomes est chargé à l'intérieur d'une cellule cubique en quartz de type Hellma de 10cm d'arrête où règne un vide très poussé. Ne disposant pas d'appareil de mesure pour avoir une information sur cette pression de manière précise on peut tout de même avoir une idée de la pression à l'intérieur de la cellule en considérant le temps de chargement du mot (environ $\simeq$ 1s) ce qui correspond à peu près à une pression de l'ordre de 10^{-8}mbar [179]. Cette valeur a évolué au cours des deux dernières années passant de 30s, ce qui correspond à un vide à 10^{-9}mbar, pour passer à 1s car la vanne du réservoir du rubidium a été ouverte afin de disposer de plus d'atomes dans la vapeur chaude, composée d'un mélange de Rubidium 85 et Rubidium 87, à l'intérieur de la cellule pour être capable d'atteindre des épaisseurs optiques b_0 plus élevées. Afin de maintenir un vide élevé dans la cellule nous utilisons une pompe ionique Varian VacIon 20 Plus d'un débit de 27L/s.

Nous utilisons également une technique nommée LIAD (Light Induced Atom Desorption) qui est basée sur une désorption d'atomes par les parois qui est similaire à l'effet photoélectrique : un atome absorbant un photon est éjecté des parois et retourne vers le centre de la cellule. Cependant nous utiliserons très peu ce type de technique au cours de nos campagne de mesures car le changement de pression à l'intérieur de la cellule résultant de l'utilisation de cette technique n'est pas encore totalement sous contrôle et en ouvrant légèrement la vanne du réservoir de Rubidium il nous a été possible d'atteindre des épaisseurs optiques équivalentes (bien qu'avec un vide légèrement moins poussé) avec une pression constante pendant toute la durée du cycle à l'intérieur de la cellule.

Champ magnétique et dispositif d'alimentation des bobines.

Le gradient de champ magnétique est créé à partir de deux bobines en configurations anti Helmholtz. Elles sont alimentées par une alimentation par découpage TDK-Lambda pouvant débiter au maximum 30V ou 25A. L'alimentation est ajustables manuellement de telle sorte à ce qu'elle débite environs 4A dans les bobines, qui sont placées verticalement et dont le diamètre est de 26cm, ce qui donne un gradient vertical de champ magnétique

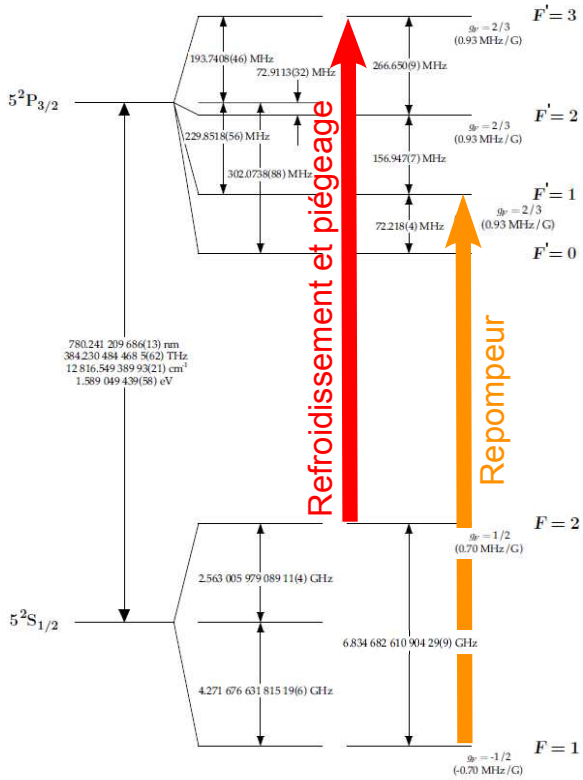

FIGURE 4.4 – Niveaux d'énergie de la raie $D2$ du rubidium 87 (^{87}Rb) illustrant les transitions sur lesquelles sont accordées le faisceau servant à refroidir les atomes et le faisceau servant à repomper les atomes dans l'état $F = 2$. Le faisceau servant à refroidir les atomes (en rouge sur la figure) est accordé sur la transition hyperfine $F = 2 \rightarrow F' = 3$ et le faisceau du Repompeur servant à maintenir les atomes dans l'état $F = 2$ est accordé sur la transition hyperfine $F = 1 \rightarrow F' = 2$.

d'environs 12G.cm^{-1} au centre de la cellule. Afin de compenser le champ magnétique terrestre on utilise trois autres bobines de compensation selon les trois directions (une verticale et deux horizontales).

Informations supplémentaires sur le dispositif laser MOT et Repompeur.

Comme nous l'avons énoncé précédemment afin de refroidir ou de repomper les atomes de Rubidium 87, nous utilisons deux DFB Toptica accordables sur la raie D2. Les deux diodes ont une puissance opérationnelle de 80mW environs pour un courant d'alimentation de 120mA. Ce dispositif simple à implémenter sur une expérience d'atomes froids possède certains avantages et inconvénients comparés aux dispositifs utilisant des diodes montées sur des cavités externes étendues [180]. Tous d'abord les DFB sont accordables sans saut de modes sur des gammes de fréquences de plusieurs Giga Hertz ce qui permet d'en faire de très bons éléments de base pour des pièges dipolaires peu désaccordés ou bien même des faisceaux servant à charger ou repomper un MOT. Cependant à l'inverse des diodes montée sur de cavités externes étendues [181], la largeur spectrale d'une DFB est

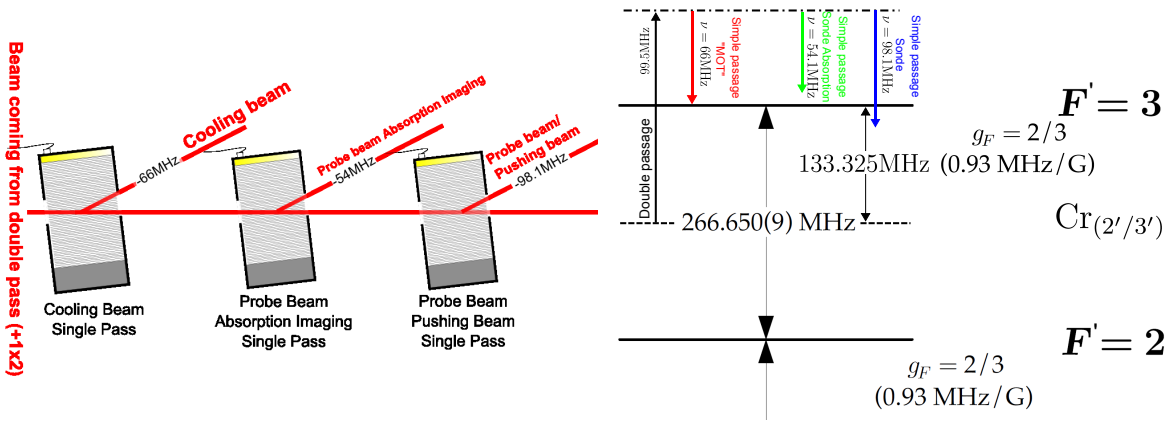

FIGURE 4.5 – Figure de gauche : Illustration de la disposition spatiale des Modulateurs Acousto Optiques qui servent à couper les faisceaux Refroidisseurs et sonde. Figure de droite : Configuration des différentes fréquences centrale de porteuse des signaux Radio Fréquences pour les Modulateur Acousto-Optiques (AOM) simples passages, servant à couper les faisceaux sondes (flèches bleue et verte) et les faisceau servant à refroidir les atomes (flèche rouge). Les désaccords de ces trois faisceaux sont contrôlés par le double passage situé avant l'amplificateur laser à semi-conducteur (MOPA). On peut donc remarquer que par rapport au 'zéro' (désaccord nul) du faisceau servant à refroidir les atomes, les désaccords des faisceaux sondes se situes respectivement à $-1.1\Gamma_0$ pour celui nous servant à l'imagerie d'absorption et $+2.1\Gamma_0$ pour celui nous servant aux expériences de coopérativité.

d'environ 3MHz ce qui correspond à la moitié de la largeur naturelle de l'état excité pour un atome unique ($\Gamma_0/2\pi = 6$MHz) ce qui n'est pas d'une précision optimale pour s'en servir dans l'élaboration d'un faisceau sonde (dont la largeur spectrale doit être en théorie bien inférieure à la largeur naturelle de l'état excité).

En sortie de chaque diode des isolateurs optiques Isowave à -40dB ont été placés afin d'éviter au maximum les effet de rétroaction causés par le retour d'une partie du faisceau ou d'une réflexion parasite, qui peut avoir comme conséquence des instabilité dans la fréquence du laser ou dans son intensité et qui peut même endommager de manière irréversible la DFB.

Afin de maintenir les fréquences des lasers sur les transitions atomiques $F = 2 \rightarrow F' = 3$ pour le laser MOT et $F = 1 \rightarrow F' = 2$ pour le laser Repompeur, nous utilisons une système Proportionnel Intégrateur Dérivateur afin d'asservir à l'aide d'un système de spectroscopie par absorption saturée les fréquences des DFB sur les croisements $F = 1 \rightarrow F' = 1/2$ pour le Repompeur et $F = 2 \rightarrow F' = 2/3$ pour le laser MOT. Pour le laser MOT, le système utilisé afin de pouvoir contrôler sa fréquence est un Modulateur Acousto-Optique (AOM) de la marque Gooch & Housego de type $3110-120$ en configuration double passage, injecté deux fois dans l'ordre $+1$ et dont la fréquence de la porteuse de la Radio Fréquence (RF) se trouve à 99.5MHz. Le croisement $F = 2 \rightarrow F' = 2/3$ se situant à 133MHz de la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$, afin d'être à résonance, la fréquence de l'AOM simple passage (AOM de même référence que celui utilisé pour le double passage) qui sert à couper le faisceau MOT, est à 66MHz. Afin de ne pas perdre de puissance inutilement nous avons choisis de contrôler les fréquences des faisceaux sondes à partir du Double passage du laser MOT en réutilisant l'ordre 0 du simple passage pour injecter l'AOM qui nous servira à allumer le faisceau sonde pour l'imagerie d'absorption et celui qui nous servira à faire la sonde pour

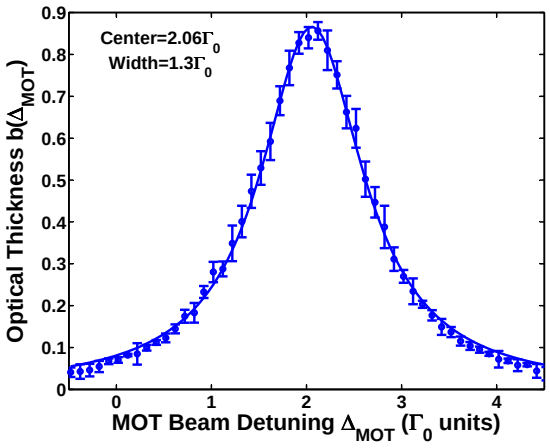

FIGURE 4.6 – Mesure de l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$ au centre du nuage en fonction du désaccord du faisceau sonde nous servant à faire les expériences de coopérativité. Cette courbe a été obtenue avec le système d'imagerie d'absorption que nous allons décrire à la section suivante et nous permet de connaitre avec précision où se trouve la fréquence de résonnance du faisceau sonde. L'ajustement lorentzien nous donne une largeur de $1.3\Gamma_0$ ce qui est cohérent avec la largeur spectrale de la DFB.

les expériences de sous radiance, qui sera développé au prochain chapitre.

La figure 4.5 nous présente une illustration (figure de gauche) de la disposition spatiale des Modulateurs Acousto-Optique que nous utilisons afin de couper le faisceau servant à refroidir les atomes ou les deux faisceaux sondes et un schéma (figure de droite) de la configuration des différentes fréquences des signaux Radio Fréquences (RF) pilotant les Modulateur Acousto-Optiques Simples passages. Tout comme le désaccord des faisceaux servant à refroidir les atomes, les désaccords des deux faisceaux sondes sont contrôlés à partir du même Modulateur Acousto-Optique en configuration double passage. Ce dispositif d'une très grande simplicité à implémenter a pour avantage de réduire les pertes de puissance optique car l'ordre 0 des Modulateur Acousto-Optique est réutilisé pour le faisceau suivant mais a pour désavantage que les désaccords de deux faisceaux ne peuvent être modifiés de manière différente simultanément. La principale raison à ce décalage dans les fréquences de Radio Fréquences de Modulateurs Acousto-Optique est d'augmenter la plage accessible des désaccords des différents faisceaux sondes de manière indépendante. En effets pour des raison historiques l'imagerie d'absorption se fait dans le rouge ($\Delta_0 < 0$) ce qui explique la position de la résonance de ce faisceau par rapport à celle des faisceaux servant à refroidir le atomes alors que la fréquence du Modulateur Acousto-Optique servant à pousser ou à sonder les atomes doit être plus centrée sur la transition atomique et atteindre de manière égale les désaccord dans le rouge et dans le bleu. La figure 4.6 nous montre une mesure de l'épaisseur optique du nuage $b(\Delta_{MOT})$ réalisée grâce au dispositif d'imagerie d'absorption, que nous allons décrire un peu plus tard dans ce manuscrit, et illustre bien le décalage relatif des positions des résonances pour les faisceaux sondes (ici le faisceau sonde que nous avons utilisé pour les expériences de coopérativités) par rapport à la position de la résonance des faisceaux nous servant à refroidir les atomes. Ce type de calibration en fréquence est capital (que ce soit pour la sonde que nous utilisons pour l'imagerie d'absorption ou pour celle utilisée pour les expériences sur la coopérativité) afin de s'assurer qu'il n'y a pas de modifications dans les désaccords que nous considérons. Ici

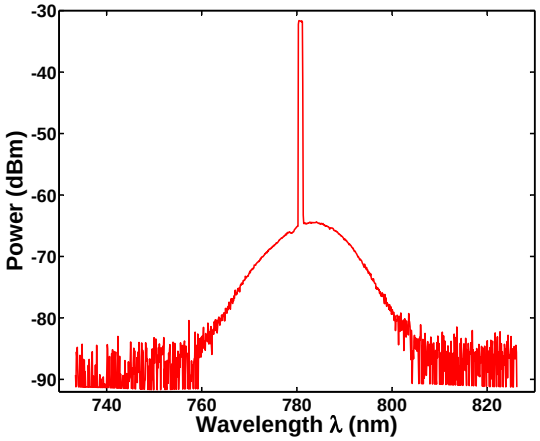

FIGURE 4.7 – Spectre du dispositif laser, mesuré à l'aide un analyseur de spectre optique en sortie du MOPA injecté par la DFB. On remarque clairement le mode de la DFB d'une largeur inférieur à la résolution spectrale de l'appareil, dominant l'émission spontanée caractérisée par le piédestal s'étalant sur 40nm environs et dont le maximum se situe à -60dBm (30dBm en dessous du mode principal de la DFB)

l'ajustement lorentzien nous donne un centre à $\Delta_{MOT} = +2.06\Gamma_0$ ce qui est cohérent avec les fréquences centrales des porteuses pour les AOM simple passages et une largeur de $1.3\Gamma_0$ ce qui cohérent avec la largeur atomique en tenant compte de la largeur de la DFB. Plus tard dans ce manuscrit lorsque nous évoquerons les désaccords réel du faisceau sonde par rapport à la transition atomique nous utiliserons le terme Δ_0.

Comme nous l'avons énoncé précédemment, une des originalités principales de notre expérience est de pouvoir obtenir des nuages avec de fortes densités optiques ($b_0 > 100$) en capturant à l'aide de faisceaux de grande taille (dont la mesure du waist à $1/e^2$ est aux alentours de $w = 280$mm) un grand nombre d'atomes ($N \simeq 10^9$ atomes). Pour cela, afin que l'intensité de chacun des 6 faisceaux soit proche de l'intensité de saturation I_{sat} reliés à la transition cyclante $F = 2 \rightarrow F' = 3$ telle que $I_{sat} = 1.6\text{mW.cm}^{-2}$ (pour un faisceau polarisé circulairement dont la fréquence est proche de la résonance atomique) il nous faut au départ une grande puissance optique ($P_{MOT} > 200$mW). Pour cela nous utilisons un amplificateur de type MOPA (amplificateur laser semi-conducteur ou Tappered Amplifier) de la marque Sacher de puissance nominale de 1W, placé entre le double passage et le simple passage du faisceau nous servant à refroidir les atomes (le faisceau MOT). L'utilisation de ce type de technologie présente certains avantages dans la simplicité d'implémentation de ces appareils mais un des principal inconvénients de ce type de technique est l'apparition d'un piédestal spectral large de 10nm et situé à -40dBm du maximum du mode amplifié de la DFB. La figure 4.7 montre piédestal du MOPA non filtré, on remarque clairement qu'il y a des photons issus du cône d'émission spontanée du MOPA sur une plage d'environ 40nm.

2.2 Dispositif d'imagerie.

Afin de mesurer les différentes caractéristiques (nombre d'atomes, taille, épaisseur optique, position du centre de masse,...) de notre nuage d'atomes froids, nous utilisons deux

technique d'imageries standard qui sont l'imagerie d'Absorption et l'imagerie de Fluorescence. La première consiste à regarder l'ombre du nuage en considérant en transmission le nombre de photons absorbés par ce dernier alors que la deuxième consiste à regarder les photons diffusés par le nuage d'atomes selon un certain angle solide. Dans cette partie nous énoncerons brièvement les principes de ces deux techniques de mesures et leurs spécificités sur notre expérience.

2.2.a *Imagerie d'absorption.*

L'imagerie d'absorption est la technique que nous utilisons afin de connaître le nombre d'atomes, l'épaisseur optique et la densité spatiale du nuage. Son principe de fonctionnement se base sur la diffusion de manière isotrope des photons d'un faisceau quasi résonnant de faible intensité (faisceau sonde) ce qui a pour conséquence un amoindrissement du nombre de photons transmis dans le sens de propagation du faisceau. Il est donc possible de calculer l'épaisseur optique du nuage $b(x,y)$ en mesurant le ratio entre l'intensité transmise et l'intensité incidente telle que :

$$b(x,y) = -\ln(T(x,y)) = -\ln\left(\frac{I(x,y)}{I_0(x,y)}\right) \tag{4.37}$$

où $T(x,y)$ est la transmission, $I_0(x,y)$ l'intensité incidente et $I(x,y)$ l'intensité transmise. L'épaisseur optique est définie telle que :

$$b(x,y) = \sigma(\Delta_0)\int dz n(x,y,z) \tag{4.38}$$

avec $\sigma(\Delta_0)$ la section efficace de diffusion définie telle que :

$$\sigma(\Delta_0) = \frac{\sigma_0}{1+\left(4\frac{\Delta_0}{\Gamma_0}\right)^2} \tag{4.39}$$

où $\sigma_0 = g\dfrac{3\lambda^2}{2\pi}$ est la section efficace à de diffusion à résonance. La constante $g = 7/15$ est une correction numérique prise en compte dans nos mesures en faisant l'hypothèse que tous les atomes sont équirépartis dans les sous niveaux Zeeman [6].

Afin de s'affranchir proprement du fond lumineux qui peut être présent pendant cette séquence de mesure il faut prendre trois image : la première où l'on mesure la puissance transmise P atténuée par la présence du nuage, la deuxième où l'on mesure directement la puissance du faisceau sonde sans le nuage P_0 et la troisième P_{BG}, que l'on soustrait aux deux précédentes, où l'on mesure le fond lumineux sans faisceau sonde et sans nuage d'atomes. Sachant que le waist su faisceau sonde et bien plus grand que la surface active

6. En réalité cette correction s'applique toujours lorsque la polarisation du faisceau incident est linéaire et que tous les atomes sont équirépartis dans les sous niveaux Zeeman amenant une correction numérique g dans la définition de la section efficace de diffusion telle que :

$$g = \frac{1}{3}\frac{2F+1}{2F'+1}. \tag{4.40}$$

Dans le cas d'une polarisation circulaire du faisceau incident, à condition que la durée du pulse soit assez longue pour pomper tous les atomes dans un sous niveau Zeeman extrême ($m_F = \pm 2$), cette correction numérique devient de l'ordre de l'unité.

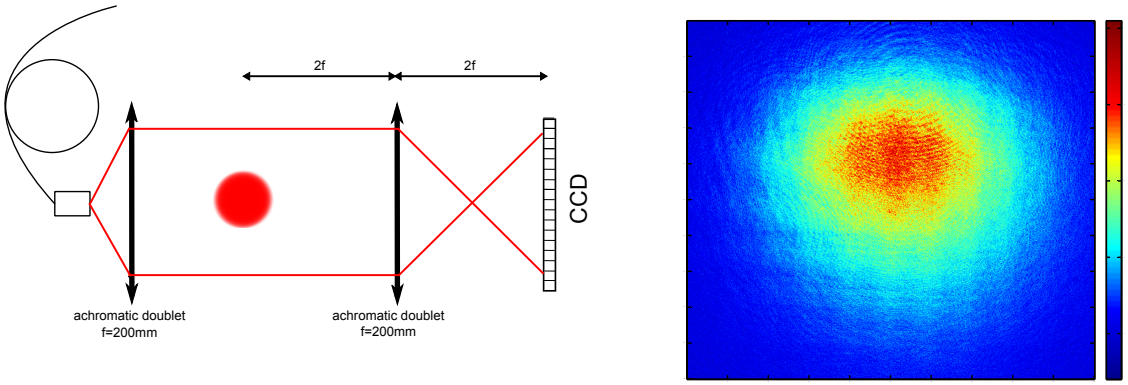

FIGURE 4.8 – Figure de gauche : représentation schématique du dispositif d'imagerie nous permettant d'effectuer les mesures d'imagerie par absorption. Le faisceau sonde est amené sur les par une fibre optique afin que son mode soit dans effectivement dans l'approximation gaussienne de l'optique. Une configuration 2f-2f a été choisie afin d'avoir un grossissement proche de 1 dans le plan conjugué des atomes. Figure de droite : Une image du nuage d'atomes obtenus grâce au dispositif d'imagerie par absorption.

de la caméra CCD ($\simeq$ 4mm) il nous est possible d'associer ces trois puissances à des intensités et de calculer la transmission telle que :

$$T = \frac{I - I_{BG}}{I_0 - I_{BG}} \tag{4.41}$$

et d'en tirer l'épaisseur optique au centre du nuage en utilisant la relation $b = -ln(T)$. Cependant il est évident que la distribution transverse de la densité spatial atomique n'est pas constante (contrairement au cas connu d'un slab) car décrite par une distribution gaussienne telle que :

$$n(r) = n_0 e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} \tag{4.42}$$

où n_0 est la densité spatiale au centre du nuage et σ_r en admettant que le nuage est décrit par une distribution gaussienne isotrope. Pour cela nous calculons l'épaisseur optique, donnée par l'équation (4.37), seulement sur le centre du nuage qui est obtenue à partir de l'emplacement du maximum lissé de la gaussienne à deux dimensions. On entend par lissé une auto convolution 2D faite sur l'image du nuage sur une zone de 4×4 pixels afin de s'affranchir des valeurs aberrantes de certains pixels causées par la présence de poussières qui diffractent le faisceau incident. Connaissant ensuite l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$, le désaccord Δ_0 du faisceau sonde il nous est ensuite possible de remonter à l'épaisseur optique à résonance b_0 au centre du nuage et connaissant la taille du nuage (l'écart type du nuage gaussien), on peut ensuite en déduire le nombre d'atomes tout comme les autres propriétés du nuage (température, densité...). La figure 4.8 représente un schéma du dispositif expérimental qui nous sert à réaliser l'imagerie par absorption (figure de gauche) et une image du nuage thermique réalisée à l'aide de ce dispositif (figure de droite). Le caractère cohérent de l'imagerie d'absorption se manifeste par la présence de franges d'interférence sur l'image du nuage. Afin d'obtenir une image précise du nuage d'atome dans le but de minimiser les sources d'erreurs sur les quantité (épaisseur optique, nombre d'atomes, taille...) que nous allons mesuré nous avons optés pour une configuration 2f-2f qui certes

n'est pas un système optique afocal mais qui nous permet d'obtenir un grossissement du nuage proche de 1 dans son plan conjugué, avec le deuxième doublet achromatique qui se trouve confondus avec les plan de la surface active de la caméra CCD.

Pour réaliser le faisceau sonde qui nous sert à faire l'imagerie d'absorption, nous le faisons passer par une fibre optique afin de rendre son mode gaussien. L'intensité du faisceau sur les atomes est d'environ $100\mu\text{W.cm}^{-2}$ (ce qui correspond à un paramètre de saturation $s < 0.01$). Pour imager le nuage nous utilisons une caméra CCD Point Grey GRAS-20S4M-C sur laquelle nous pouvons contrôler le temps d'exposition. Typiquement le temps d'exposition que nous utiliserons afin de faire nos mesures par imagerie d'absorption sera compris entre 100μs et 200μs. Afin de connaître avec précision la fréquence du faisceau sonde, on balaye sa fréquence à partir du double passage placé sur le faisceau MOT afin d'obtenir un profil d'absorption, réalisé sur un nuage à très faible épaisseur optique $b(\delta) < 1$. Sachant que les fréquences des porteuses des simples passages du MOT et du faisceau sonde imagerie ne sont pas forcément aux même fréquences ($\nu_{SP,MOT} = 66\text{MHz}$ et $\nu_{SP,Abs} = 58.1$) cela nous permet de savoir où se situe la résonance du faisceau sonde par rapport à celle des faisceaux MOT et d'adapter le contrôle fait par le double passage en conséquences. Enfin, dans le but d'améliorer la qualité de l'image et de s'affranchir d'un maximum d'aberrations, les lentilles utilisées pour le système d'imagerie sont des doublets achromatiques.

2.2.b *Imagerie de fluorescence.*

L'utilisation de l'imagerie de fluorescence que nous avons faite a été principalement dans le but de mesurer le déplacement du centre de masse du nuage afin de mettre en évidence des effets coopératifs lorsque ce dernier est poussé par un faisceau quasi résonnant. Afin d'obtenir des images du nuage en fluorescence on l'éclaire avec les 6 faisceaux du MOT afin de regarder la lumière diffusée par les atomes. On peut calculer l'intensité arrivant sur le capteur CCD à partir de la formule :

$$I(x,y) = \frac{\Omega}{4\pi}\frac{\Gamma_0}{2}\hbar\omega_0\frac{s}{s+1}\int dz n(x,y,z) \tag{4.43}$$

où Ω est l'angle de collecte des photons diffusés par le nuage, $s(\Delta_0)$ est le paramètre de saturation tel que :

$$s(\Delta_0) = \frac{I/I_{sat}}{1+4\left(\frac{\Delta_0}{\Gamma_0}\right)^2}. \tag{4.44}$$

et $n(x,y,z)$ est la densité spatiale d'atomes. L'intensité de saturation associée aux faible désaccords par rapport à la transition cyclante $F = 2 \rightarrow F' = 3$ est $I_{sat} = 1.6\text{mW.cm}^{-2}$. Afin de réaliser des mesures précises sur la taille du nuage (σ_x et σ_y) il est important de faire l'imagerie de fluorescence dans le régime de diffusion simple (c'est à dire avec une épaisseur optique très faible telle que $b(\Delta_0) < 1$). Tout comme pour l'imagerie d'absorption, il faut aussi s'affranchir du fond lumineux lié à l'environnement en prenant deux images : une avec le nuage d'atome et l'autre sans nuage que l'on soustrait à la première.

Afin de réaliser l'imagerie de fluorescence, nous avons utilisé une caméra CCD Pointgrey GRAS-20S4M-C sur laquelle nous avons placé un objectif de 50mm. Les temps d'exposition de cette caméra également ajustable est contrôlé afin d'être aux alentours de

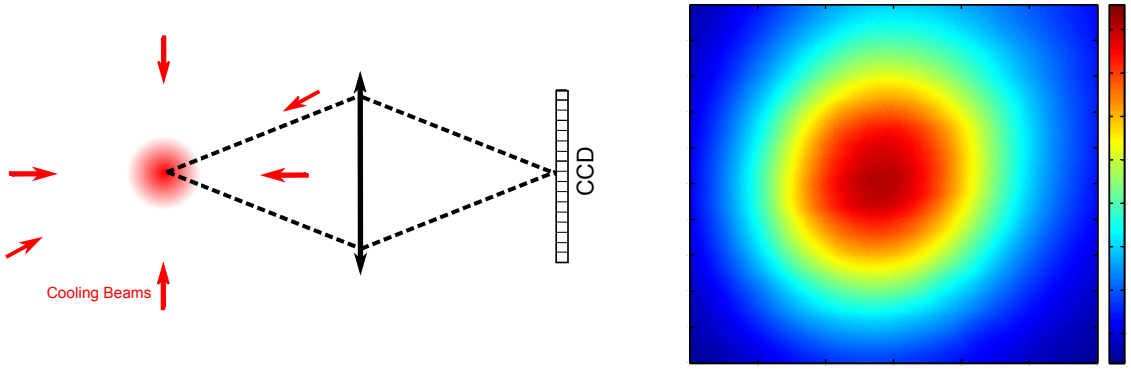

FIGURE 4.9 – Figure de gauche : représentation schématique du dispositif d'imagerie nous permettant d'effectuer l'imagerie de fluorescence en utilisant les 6 faisceaux nous servant à refroidir les atomes. Figure de droite : Une image de fluorescence du nuage d'atome prise à l'aire de ce dispositif. Le centre du nuage contenant plus d'atomes diffuse par conséquent plus de photons d'où son intensité supérieure.

200μs. La figure 4.9 nous montre une représentation schématique du dispositif expérimental d'imagerie par fluorescence et une image du nuage d'atome acquise à l'aide ce dispositif.

3 Vérification de la validité des solutions Times Dicke au régime de diffusion simple.

Dans cette partie nous décrivons les expériences que nous avons menées afin d'étudier de manières systématiques la modification de la pression de radiation par les effets coopératifs telle qu'elle a été observée dans la référence [28] en faisant une mesure indirecte de ces effets sur la position du centre de masse du nuage. Le but de cette campagne de mesures étant de pousser l'étude plus loin en désaccord Δ_0 et en épaisseur optique b_0 afin de confirmer que cette modification de la pression de radiation est bien le fait d'effet cohérent type superradiants et de vérifier que le comportement prédit analytiquement par les Solutions Timed Dicke était bien valide dans le régime de diffusion simple ($b(\Delta_0) < 1$) et non pas dans le régime de diffusion multiple ($b(\Delta_0) > 1$) également. Un des but non achevés de cette série de mesures était aussi l'observation de résonances de Mie qui se traduiraient par des déviations singulières au comportement de la réduction de la pression de radiation telle qu'elle est prévue par le modèle Timed Dicke apparaissant à des couples épaisseur optiques et désaccord (b_0,Δ_0) apparaissant de manière symétrique par rapport à la résonance atomique [168].

3.1 Protocole expérimental.

Le protocole expérimental que nous avons utilisé est assez similaire à celui adopté dans la référence [28] à l'exception principale que, possédant une pression supérieur de Rubidium dans la cellule, les temps typiques de chargement du MOT sont moindres nous permettant de réaliser des statistiques équivalentes mais sur des temps plus courts (40 images par points prises en 30min contre 100 par points images prises sur plusieurs heures) ce qui nous permet de nous affranchir au maximum des dérives lentes (fluctuation des intensité, de température de la pièce, des polarisation des faisceaux...) de l'expériences. Les différentes étapes composant un cycle sont les suivantes :

- **MOT** : pendant cette étape nous chargeons un grand nombre d'atomes ($N \sim 10^9$) à l'intérieur du piège pendant un temps de 500ms. Pendant cette période le gradient de champ magnétique est allumé et le désaccord des faisceaux du MOT est typiquement de $-3\Gamma_0$. Le Repompeur est aussi allumé à pleine puissance et son désaccord est nul par rapport à la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$.
- **Dark MOT** : cette étape d'une durée de 50ms est capitale afin d'obtenir un nuage compacte et dense. Pour cela la puissance du Repompeur est réduite entre 10 et 6% et le désaccord du laser refroidissant les atomes passe progressivement de $-3\Gamma_0$ à $-7\Gamma_0$. La réduction de l'effet d'ombre lié au désaccord croissant des faisceaux MOT et la réduction da puissance du Repompeur permet de perdre les atomes les plus chauds et de ramener les atomes les plus froids vers le centre du piège faisant passer la densité spatiale atomique au centre du nuage de 10^{10}atomes.cc^{-3} à 10^{11}atomes.cc^{-3} typiquement ce qui permet d'obtenir des épaisseurs optiques de l'ordre de $b_0 \sim 50$. A l'issue de cette étape la fraction d'atomes dans $F = 2$ est de 30%.
- **Coupure du gradient de champ magnétique** : nous avons remarqué que le gradient de champ magnétique avait un temps d'extinction très lent ($\simeq 100\mu$s) pendant lequel il présentait des grande fluctuations voir des inversions. C'est pour cela que nous éteignons tous les lasers pendant 500μs afin de ne pas faire de pompage Zeeman indésiré et de garder les atomes équirépartis dans tous les sous niveaux Zeeman.
- Le **Dépompage des atomes dans** $F = 1$: est réalisé pendant un temps de 1ms pendant lequel le Repompeur est coupé et les faisceaux du laser MOT sont remis à pleine puissance et désaccordé progressivement à $-10\Gamma_0$ afin d'augmenter le nombre de photons diffusant sur la transition $F' = 2$ et par conséquent le nombre d'atomes passant dans l'état $F = 1$. A la fin de cette étape la fraction d'atomes dans $F = 2$ est de l'ordre du pour-cent.
- Le **Repompage des atomes dans** $F = 2$: permet d'avoir un contrôle sur la fraction d'atomes dans $F = 2$ sans modifier la taille du nuage et par conséquent l'épaisseur optique b_0 vue par le faisceau pousseur. Afin de balayer tout la plage d'épaisseur optique (de $b_0 \simeq= 0$ à $b_0 \simeq= 50$) la puissance du Rempompeur est ajustée entre 0 et 100%.
- **Poussée des atomes** : le faisceau sonde pousseur horizontal d'un désaccord de Δ_0 par rapport à la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ est allumé pendant un temps t_{push} (quelque dizaines de micro secondes) afin d'échanger entre 20 et 100 photons avec chaque atomes du nuage. Permettant ainsi de pousser les atomes dans $F = 2$ et de laisser à la même place les atomes dans $F = 1$.
- **Temps de vol** : Le temps de vol permet de séparer les centres de masses des deux nuages (celui des atomes dans $F = 1$, qui ne voit pas le faisceau pousseur et qui effectue une chute verticale et celui des atomes dans $F = 2$, qui voit le faisceau pousseur et dont le centre de masse est déplacé horizontalement au cours de sa chute verticale). En l'absence de modifications par les effets coopératifs, le centre de masse

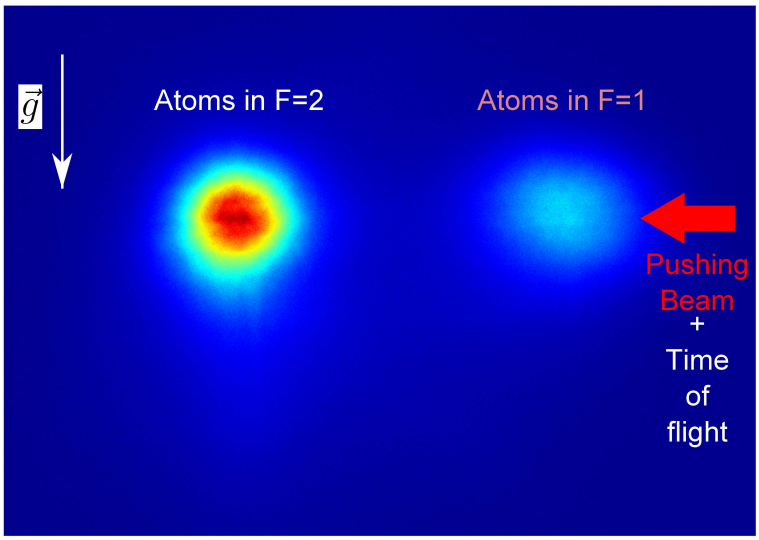

FIGURE 4.10 – Image de fluorescence illustrant la séparation des deux nuages dans $F = 1$ (nuage de droite) et $F = 2$ (nuage de gauche) après que le nuage dans $F = 2$ ait été poussé par le faisceau pousseur et que les deux nuage soient tombés librement pendant un temps de vol d'une durée de $t_{TOF} = 20$ms. ici les paramètres expérimentaux sont les mêmes que pour les expériences réalisées dans référence [28] c'est à dire que $N_\gamma \simeq 100$ photons sont échangés moyenne et que la température initiale du nuage est de $T \simeq 30\mu$K.

du nuage des atomes dans $F = 2$ est censé se déplacer de :

$$\Delta x = \Gamma_{sc} v_{rc} \left(\frac{t_{push}^2}{2} + t_{push} t_{TOF} \right) \tag{4.45}$$

avec v_{rc} la vitesse de recul associée à l'absorption d'un photon et Γ_{sc} le taux de diffusion définis tel que :

$$\Gamma_{sc} = \frac{\Gamma_0}{2} \frac{s(\Delta_0)}{1 + s(\Delta_0)} \tag{4.46}$$

Les épaisseurs optiques à résonance b_0 typiques que nous avons utilisées sont aussi supérieures aux expériences qui ont été réalisées précédemment ce qui a pour conséquences que le nuage que nous étudions est à une température T plus élevée ($T \simeq 80\mu$K contre 50μK dans les expériences précédentes). L'originalité de la procédure expérimentale élaborée dans la référence [28] reposant sur le fait que le contrôle sur l'épaisseur optique à résonance b_0 au centre du nuage se fait en modifiant le rapport entre les populations d'atome dans les états $F = 1$ et $F = 2$, le faisceau sonde pousseur, accordé sur la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ n'agissant que sur le atomes dans $F = 2$ et pas sur ceux dans $F = 1$ (Figure 4.10).

Voulant échanger un nombre inférieur de photons ($N_\gamma \simeq 30$ au lieu de $N_\gamma \simeq 100$) et ayant un nuage dont la température est plus élevée, il est évident qu'un des risque auquel on s'expose est que l'étalement de l'écart type du nuage gaussien soit plus important que le déplacement entre les deux centre des masses des nuages dans $F = 1$ et $F = 2$ au cours de leurs temps de vols. Un calcul simple nous permet d'obtenir que dans ces conditions, un nuage dont la taille longitudinale est de $\sigma_z(0) \simeq 900\mu$m aura comme taille longitudinale $\sigma_z(t_{TOF})$ après un temps de vol d'une durée de $t_{TOF} = 20$ms :

$$\sigma_z(t_{TOF}) = \sqrt{\frac{k_B T}{m} t_{TOF}^2 + \sigma_z^2(0)} \tag{4.47}$$

où k_B est la constante de Boltzmann et $m = 1.44.10^{-25}$kg la masse atomique du Rubidium, on obtient après une application numérique $\sigma_z(t_{TOF}) \simeq 2$mm. Pour le déplacement du centre de masse du nuage dans $F = 2$ avec lequel $N_\gamma \simeq 30$ photons ont étés échangés avec le faisceau pousseur on peut s'attendre à ce qu'au bout d'un temps de vol d'une durée de t_{TOF} il ait été séparé du centre de masse du nuage dans $F = 1$ d'une distance $\Delta x_c^{(ind)}$:

$$\Delta x_c^{(ind)} \simeq N_\gamma v_{rc} t_{TOF} \tag{4.48}$$

où $v_{rc} = 5.8$mm.s^{-1} est la vitesse de recul d'un atome de rubidium liée à l'absorption d'un photon[7]. L'application numérique nous donne qu'au bout d'un temps de vol de $t_{TOF} = 20$ms les centres de masses des deux nuages seront séparés de 3.5mm ce qui n'est pas singulièrement supérieur à leur étalement pendant les temps de vol. Il est à noter que les applications numériques précédentes sont sous estimées dans le sens où l'on a négligé à l'équation (4.47) le chauffage du nuage dans $F = 2$ lié à l'absorption de photons pendant que le faisceau pousseur est allumé et que l'on a aussi négligé à l'équation (4.48) l'accélération du centre de masse lorsque le faisceau pousseur est allumé. On peut donc s'attendre à ce l'on ait du mal à distinguer les positions des centres de masse des nuages dans $F = 1$ et $F = 2$ avec les paramètres expérimentaux que nous voulons explorer (nuage plus épais optiquement donc plus chaud et moins de photon échangés). C'est pourquoi pour chaque désaccords du faisceau pousseur, nous avons effectué 3 mesures utilisant l'imagerie de fluorescence :

- La **Mesure** 1 **de Fluorescence** est effectuée après un temps de vol sans repomper les deux nuages dans $F = 2$ avant la séquence d'imagerie afin de mesurer la position du centre de masse du nuage initialement dans $F = 2$ sans qu'elle ne soit pas affectée par la trainée d'atome existant entre les deux nuages et l'étalement du nuage dans $F = 1$. Cette traînée provient des atomes qui passent de l'état $F = 2$ à $F = 1$ par pompage optique pendant la séquence de poussage.
- La **Mesure** 2 **de Fluorescence** est effectuée après un temps de vol en repompant les deux nuages dans $F = 2$ juste avant la séquence d'imagerie de fluorescence afin de connaître les positions des centres de masse des nuages contenant les atomes dans $F = 2$ et $F = 1$ et de vérifier que ce dernier tombe bien de manière verticale. Cette mesure nous permet aussi en soustrayant les images de la mesure 1 à celles de la mesure 2 de connaître le taux de dépompage en ayant une information sur la fraction d'atomes dans $F = 1$.
- **Mesure** 3 **de Fluorescence In situ** : Cette mesure s'effectue sans temps de vols afin de vérifier que la position du centre de masse du nuage initial, contenant à la fois les atomes dans $F = 1$ et dans $F = 2$, ne varie pas au cours de la séquence expérimentale. Cette mesure permet également de vérifier la fraction d'atomes dans $F = 2$ après la séquence de repompage des atomes, que nous allons décrire juste après, et vérifier par conséquence que le taux d'atomes dans $F = 2$, qui est proportionnel au nombre de photon diffusés par le nuage à condition que l'on se trouve dans le régime de diffusion simple ($b(\delta) < 1$) et que la puissance du faisceau incidente soit constante, soit bien cohérente avec l'épaisseur optique que nous mesurons grâce à l'imagerie d'absorption.

Nous avons aussi mesuré de manière indépendante l'épaisseur optique à résonance b_0 au centre du nuage par imagerie d'absorption en gardant exactement les même paramètres

7. Une vitesse de recul est aussi liés à l'émission d'un photon par l'atome mais cette dernière étant isotrope elle se moyenne à 0 contrairement à l'absorption d'un photon sui se fait toujours selon la même direction.

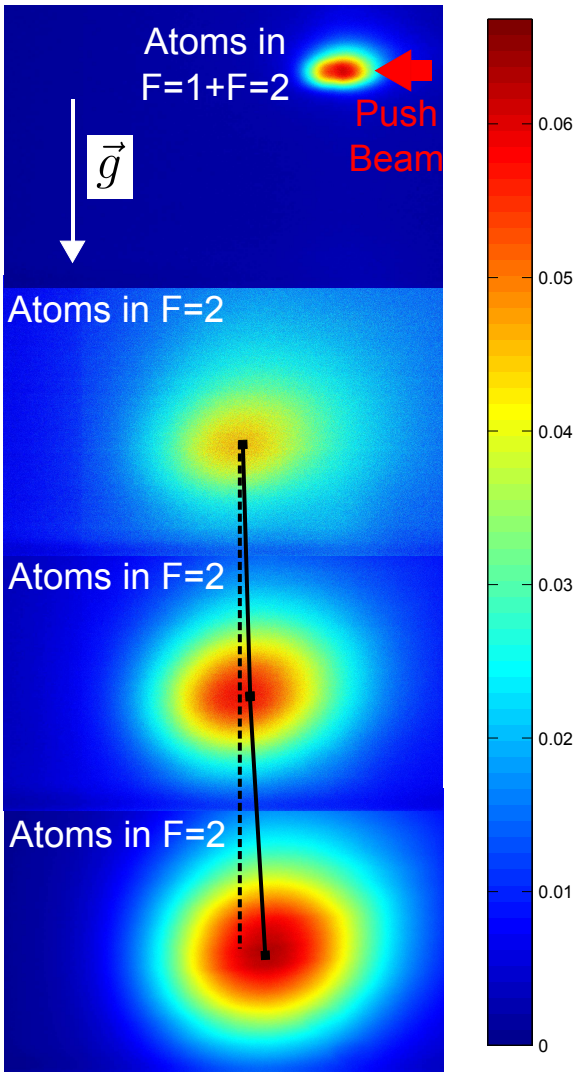

FIGURE 4.11 – Images de fluorescences données par la procédure de mesure 3 (Première image en partant du haut), où le nuage à sa position initiale contient les atomes dans $F = 1$ et $F = 2$ avant d'être poussé par le faisceau sonde et d'effectuer un temps de vol. Les trois images suivantes montent des images de fluorescences obtenues par la procédure de mesure 1 afin d'illustrer la réduction déplacement du centre de masse du nuage contenant les atomes dans $F = 2$ lorsque l'épaisseur optique à résonance b_0 augmente. On remarque bien que lorsque l'épaisseur optique de ce dernier augmente le déplacement de son centre de masse Δx_c est réduit.

expérimentaux pour le cycle.

Comme nous l'avons énoncé précédemment il n'y a que deux séries de mesures par désaccord où nous faisons faire au nuage un temps de vol afin de mesurer la position du centre de masse du nuage déplacé. Le mesure nous permettant de connaître l'épaisseur optique au centre du nuage b_0 par imagerie d'absorption et la mesure nous permettant de connaître sa position initiale ainsi que son écart type initial se font *in situ* juste après avoir repompé une fraction des atomes dans $F = 2$.

3.2 Résultats.

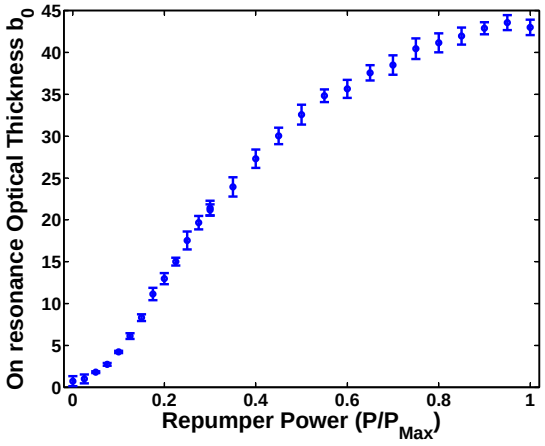

FIGURE 4.12 – Évolution de l'épaisseur optique à résonance b_0 au centre du nuage en fonction de la puissance relative (P/P_{Max}) du Repompeur. La réponse sigmoïdale vient en réalité de la réponse en puissance de l'oscillateur contrôlé en tension (VCO), qui pour une consigne linéaire en puissance donne une réponse non linéaire (sigmoïdale). On remarque bien qu'entre une épaisseur optique à résonance nulle et une épaisseur optique à résonance égale à 45 on parcourt tour les points entre ces deux valeurs.

Dans cette section nous présentons les résultats que nous avons obtenus sur l'étude systématique de la modification de la pression de radiation par les effets coopératifs. Les mesures ont été prises pour des désaccords allant de $\Delta_0 = -4.5$ à $\Delta_0 = +4.5\Gamma_0$ par pas de $0.5\Gamma_0$. Dans cette section nous ne discuterons pas des résultats obtenus à résonance $(\Delta_0 = 0\Gamma_0)$, qui font l'objet d'une section à part entière dans la suite de ce document, et nous discuterons séparément des données prises entre $-1\Gamma_0$ et $+1\Gamma_0$ où une fluctuation coup par coup accrue, dont l'origine reste encore à déterminer, a été observée.

Afin d'avoir un contrôle sur l'épaisseur optique à résonance b_0 du nuage tout en gardant sa taille σ constante après avoir dépompé tous les atomes dans $F = 1$ nous appliquons un rapide pulse de Repompeur pendant 500μs en faisant varier la puissance de ce dernier entre 0 et 100% de sa puissance maximale. La figure 4.12 nous montre l'évolution de l'épaisseur optique à résonance en fonction de la puissance du Repompeur pour un cycle expérimental typique. La réponse non linéaire (sigmoïdale) vient en réalité de la réponse de l'oscillateur contrôlé en tension (VCO), qui pour une consigne linéaire a une réponse en puissance non linéaire.

Afin de mesurer la modification de la pression de radiation par les effets coopératifs nous procédons à une mesure indirect sur la position du centre de masse du nuage poussé (celui dans $F = 2$) après un temps de vol d'une durée typique de 20ms. Connaissant la durée du pulse, la puissance du faisceau sonde et son waist nous sommes en mesure de calculer le nombre de photon échangés pour un atome unique et par conséquent de connaître la force appliquée par le faisceau pour un seul atome. Typiquement pour un désaccord donné du faisceau pousseur nous obtenons une réduction du déplacement du centre de masse du nuage dans $F = 2$ au fur et à mesure que sons épaisseur optique à résonance b_0 augmente. Ce déplacement une fois renormalisé par le force F_1 appliquée à 1 atome unique nous permet ensuite de calculer le désaccord théorique prédit par le modère Times Dicke.

La figure 4.13 nous montre le déplacement du centre de masse Δx_c du nuage dans

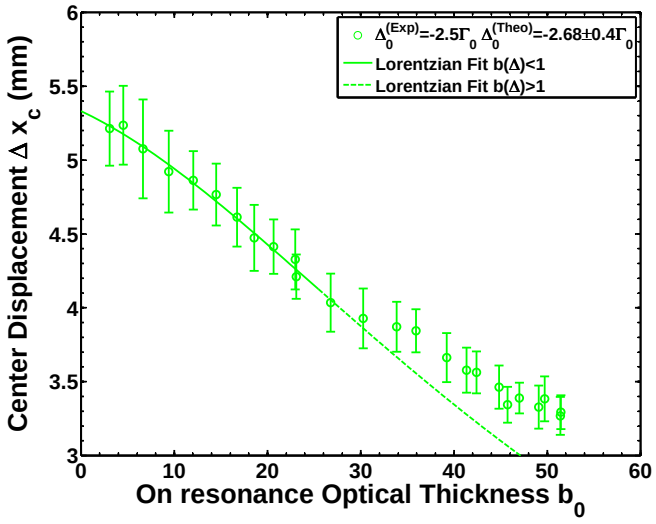

FIGURE 4.13 – Déplacement du centre de masse du nuage dans $F = 2$ en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0 pour un désaccord du faisceau pousseur $\Delta_0^{(Exp)} = -2.5\Gamma_0$. La courbe en traits pleins (continues et pointillées) représentent un ajustement à partir du modèle théorique donné par l'équation (4.24). L'ajustement est fait en laissant le désaccord Δ_0 comme seul paramètre libre et nous obtenons $\Delta_0^{Theo} = -2.68 \pm 0.3\Gamma_0$. La courbe continue correspond au domaine où le faisceau pousseur est dans le régime de diffusion simple $b(\Delta_0) < 1$ et celle en pointillé correspond au régime de diffusion multiple $b(\Delta_0) > 1$. On remarque clairement un décrochement des données expérimentales par rapport à la prédiction théorique du modèle Timed Dicke lorsque l'on atteint le régime de diffusion multiple ce qui prouve que l'hypothèse faite sur la validité du Timed Dicke dans le régime de diffusion simple est validée.

$F = 2$ en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0 pour un désaccord expérimental du faisceau pousseur $\Delta_0^{(Exp)} = -2.5\Gamma_0$. Atteignant des épaisseurs optique à résonance allant jusqu'à $b_0 = 60$ il est clair qu'une partie de cette courbe $b_0 > 25$ correspond au régime de diffusion multiple où le modèle Timed Dicke n'est plus censé être adapté. En effet le comportement lorentzien prédit par ce dernier n'est plus en accords avec le déplacement du nuage et on observe un net décrochage de la position du centre de masse, mesurée expérimentalement à l'aide de l'imagerie de fluorescence, au comportement lorentzien prédit par le modèle Timed Dicke. En faisant un fit lorentzien sur le données numériques pour $b(\Delta) < 1$ et en laissant l'amplitude et la largeur comme paramètre libre de fit, nous obtenons à partir de la largeur de la lorentzienne un désaccord théorique tel que $\Delta_0^{(Theo)} = -(2.68 \pm 0.3)\Gamma_0$. Pour obtenir cette courbe nous avons échangé en moyenne 40 photons avec le nuage dans $F = 2$ ce qui équivaut à un déplacement de 5.47mm. On obtient donc comme entre l'extrapolation du fit lorentzien en $b_0 = 0$ et le déplacement calculé un écart de 2%.

Connaissant les paramètres expérimentaux (durée du pulse t_{push}, désaccord Δ_0, durée du temps de vol t_{TOF} et intensité du faisceau I) on peut normaliser par le déplacement Δx_1 , calculé pour un seul atome, tous les déplacement Δx_c du centre de masse du nuage pour chaque désaccords Δ_0 du faisceau pousseur ce qui nous permet d'obtenir le ratio F_c/F_1 de la force coopérative normalisée par la force agissant sur un atome unique. La fi-

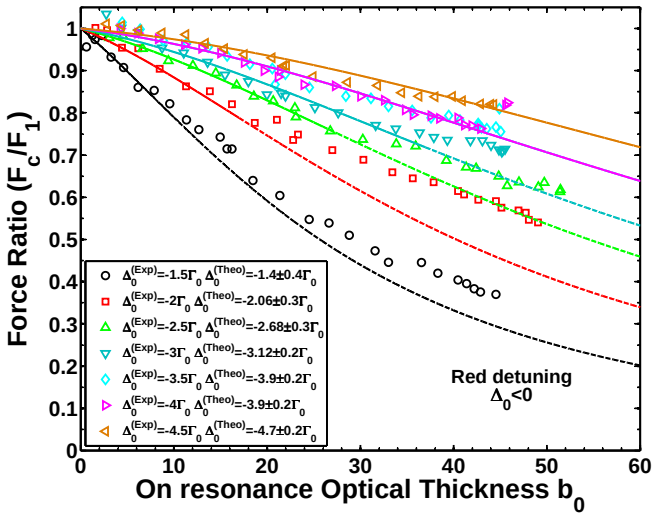

FIGURE 4.14 – Évolution de la force coopérative F_c normalisée par la force appliquée à un seul atome F_1 en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0 au centre du nuage pour différents désaccords dans le rouge ($\Delta_0 < 0$) allant de $\Delta_0^{(Exp)} = -1.5\Gamma_0$ à $\Delta_0^{(Exp)} = -4.5\Gamma_0$ par pas de $0.5\Gamma_0$. Les courbe en trait pleins représentent des ajustements fait à partir de l'expression analytique donnée à l'équation (4.24) où seul le désaccord $\Delta_0^{(Theo)}$ a été laisse comme paramètre libre. On remarque que les résultats théorique sont en accord avec les paramètres expérimentaux ce qui nous prouve la validité du modèle Timed Dicke dans le régime de diffusion simple ($b(\Delta_0) < 1$). Les courbe en pointillés représentent quant à elles le prolongement des courbes théorique (en traits pleins) dans le régime de diffusion multiple ($b(\Delta_0) > 1$). On remarque clairement un décrochement des données expérimentales par rapport à ces courbes ce qui est une preuve de la limite de validité du modèle Timed Dicke (et par conséquent du comportement prédit à l'équation (4.24)) dans le régime de diffusion multiple. Un seul paramètre expérimental présente une déviation (réitérée à plusieurs reprises expérimentalement) pour le désaccord $\Delta_0 = -3.5\Gamma_0$.

gure 4.14 nous montre l'évolution de la force de pression de radiation coopérative F_c/F_1 en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0 au centre du nuage pour différents désaccord Δ_0 allant de $-4.5\Gamma_0$ à $-1.5\Gamma_0$ par pas de 0.5Γ0. Les courbes en trait pleins représentent un ajustement à partir de l'expression analytique (4.24) où seul le désaccord Δ_0 été laissé comme paramètre ajustable. A l'exception d'un désaccord ($\Delta_0^{(Exp)} = -3.5$), on remarque que les désaccords $\Delta_0^{(Theo)}$ obtenus à partir de cet ajustement sont en accord avec les paramètres expérimentaux $\Delta_0^{(Theo)}$. De même on observe clairement un décrochement des données expérimentales avec le modèle théorique (courbe en trait pleins) lorsque l'on atteint le régime de diffusion multiple $b(\Delta_0) > 1$ ce qui met bien en évidence le domaine de validité du modèle Timed Dicke initialement prévu pour le régime de diffusion simple. Procédant de la même manière pour les désaccords dans le bleu $\Delta_0 > 0$ nous obtenons encore un accord convenable entre la théorie et les données expérimentale avec cependant de plus grande barre d'erreur sur les ajustements et un décrochement pour les courbes à $\Delta_0 = +3.5\Gamma_0$ et $\Delta_0 = +4\Gamma_0$. La figure 4.15 nous montre l'évolution de la force de pressions coopérative, normalisée par la force agissant sur un atome unique F_1, en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0 au centre du nuage pour des désaccords positifs du

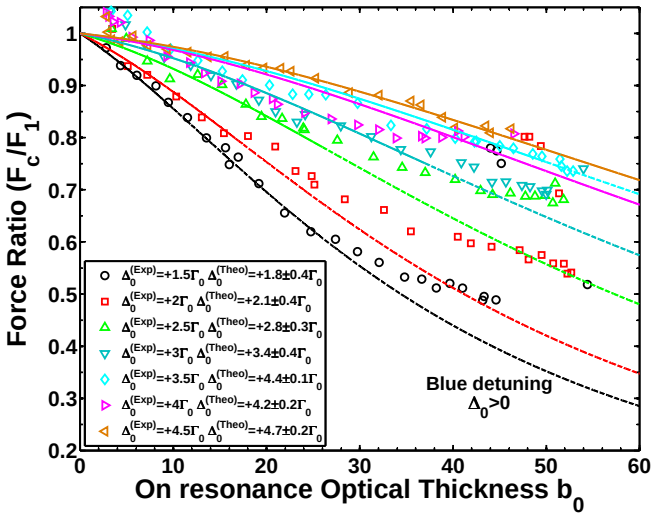

FIGURE 4.15 – Évolution de la force coopérative F_c normalisée par la force appliquée à un seul atome F_1 en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0 au centre du nuage pour différents désaccords dans le rouge ($\Delta_0 < 0$) allant de $\Delta_0^{(Exp)} = -1.5\Gamma_0$ à $\Delta_0^{(Exp)} = -4.5\Gamma_0$ par pas de $0.5\Gamma_0$. Tout comme pour la figure 4.14, les courbes en traits pleins représentent les ajustements obtenus sur les données expérimentales à partir de la formule analytique donnée par la solution Timed Dicke (eq. 4.24). Les observations pour les désaccords dans le bleu sont les mêmes que pour celles faites les résultats obtenus pour les désaccords dans le rouge, dans le sens où on observe un décrochement des données expérimentales par rapport au comportement prédit par la solution Timed Dicke lorsque l'on atteint le régime de diffusion multiple et on observe encore un résultat aberrent pour $\Delta_0 = +3.5\Gamma_0$.

faisceau pousseur ($\Delta_0 > 0$). De la même manière que pour les résultats obtenus avec les désaccords dans le rouge ($\Delta_0 < 0$) on remarque que les données expérimentales sont convenablement en accord avec les prédictions théorique du modèle Times Dicke dans le régime de diffusion simple ($b(\Delta_0) < 1$). Cependant les erreurs des ajustements sont plus élevées pour les désaccords positifs que pour les désaccords négatifs du faisceau pousseur. Le décrochement pour $\Delta_0 = +3.5\Gamma_0$ est aussi présent et s'étend cette fois ci au paramètre expérimental $\Delta_0 = +4\Gamma_0$. A ce stade nous n'avons pas réussis à identifier si cette asymétrie 'rouge/bleue' était reliée à l'asymétrie 'rouge/bleue' de l'interaction dipôle-dipôle et qui n'est bien évidemment pas décrite par l'expression analytique obtenue à l'équation (4.24).

Un point commun entre les données expérimentales prises dans le rouge ($\Delta_0 < 0$) et dans le bleu ($\Delta_0 > 0$) est le décrochement des données expérimentales par rapport aux courbes théoriques prédites par la solution Timed Dicke (eq. 4.24) lorsque l'on atteint le régime de diffusion multiple typiquement pour $b(\Delta_0) > 1$.

Le figure 4.16 nous montre les données expérimentales normalisées par les courbes théorique en trait plein en fonction de l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$. Le régime de diffusion multiple est indiqué par le trait plein rouge vertical et l'accord parfait entre la théorie et l'expérience est indiquée par le trait plein horizontal vert. Il est à noter que $10^{0.1}$ représente un écart de 25% entre la théorie et l'expérience. On remarque clairement le décrochement lorsque l'on atteint le régime de diffusion multiple ce qui en accord avec la limite de validité

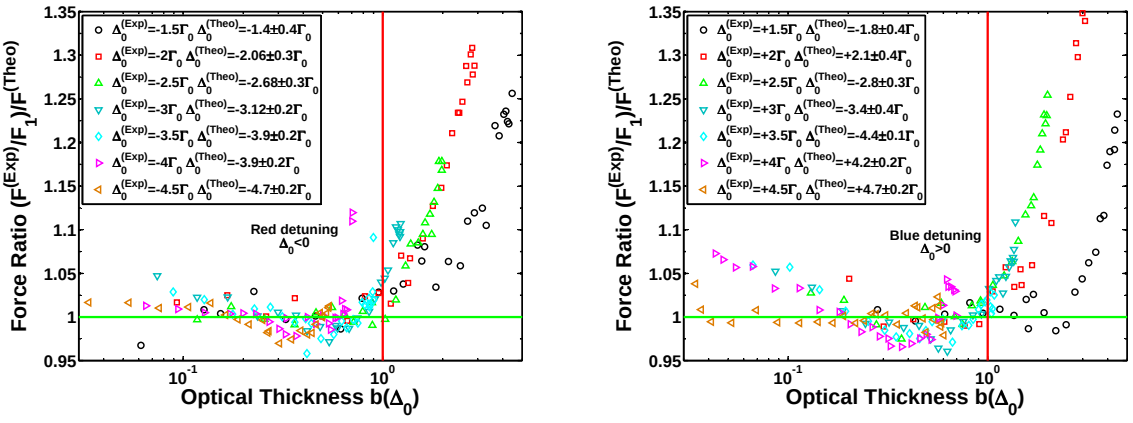

FIGURE 4.16 – Évolution des données expérimentales normalisées par les comportements théoriques prédit par la solution Timed Dicke (courbes en traits pleins aux figures 4.14 et 4.15) en fonction de l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$. Cette représentation des données expérimentales souligne leur décrochement par rapport à la prédiction du modèle Timed Dicke lorsque l'on atteint le régime de diffusion multiple $b(\Delta_0) > 1$ vérifiant ainsi le domaine de validité du modèle Timed Dicke au régime de diffusion simple.

des solutions Timed Dicke uniquement dans le régime de diffusion simple ($b(\Delta_0) < 1$).

Asymétrie 'Rouge-Bleu'.

Plusieurs hypothèses peuvent être faites sur l'origine de l'asymétrie entre les résultats obtenus pour les désaccords dans le rouge $\Delta_0 < 0$ et les désaccords dans le bleu $\Delta_0 > 0$. Tout d'abord le '*facteur humain*' peut être à l'origine de cette asymétrie. En effet, les calibrations en puissance du faisceau pousseur et celles des fréquences des faisceaux sondes ayant été réalisées en début de campagne de mesure et les données expérimentales ayant été prises chronologiquement d'abord pour les désaccords négatifs ($\Delta_0 < 0$) puis pour les désaccords positifs ($\Delta_0 > 0$) il se peut très bien que certaines de ces calibrations aient légèrement changées bien qu'elles aient été vérifiées à nouveau au cours de cette campagne de mesures. Un argument allant à l'encontre de ce '*facteur humain*' est que la différence entre la force calculée pour un atome unique et celle mesurée expérimentalement ne dépasse pas les 5% d'erreur et ce pour les expériences menées dans le bleu également.

Ensuite, une explication triviale vient du fait que le faisceau sonde pousseur est unidirectionnel ce qui a pour effet que pour chaque atomes, le transfert d'impulsion lié à l'absorption d'un photon se fait toujours selon le même axe de propagation du faisceau et ne se moyenne donc pas à 0 alors que le transfert d'impulsion lié à l'émission du photon absorbé, redistribué de manière isotrope, se moyenne à 0. Ceci a pour conséquence un décalage Doppler vers les fréquences négatives (décalage vers le rouge) qui dépend donc du nombre de photons échangés entre le faisceau incident et les atomes. Un calcul simple nous permet de savoir à partir de combien de photon échangés le shift Doppler induit par le faisceau pousseur devient non négligeable comparé à la largeur naturelle Γ_0 de l'état excité. Sachant que la vitesse de recul associée à l'absorption/émission d'un photon, dont la fréquence est proche de la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$, est $v_{rc} = 5.8\text{mm.s}^{-1}$ et N_γ est le nombre de photon moyen échangé entre le faisceau incident et chaque atomes, le rapport

$N_\gamma k_0 v_{rc}/\Gamma_0$ devient non négligeable pour $N_\gamma \simeq 20$ photons échangés, ce qui est environ le nombre de photons que nous avons échangés avec les atomes au cours de nos expériences. Nos résultats expérimentaux devraient donc présenter une erreur systématique décalée dans le rouge, c'est à dire que le désaccord mesuré et prédit par le modèle Timed Dicke devrait être toujours légèrement inférieure à celui que l'on choisit expérimentalement pour le faisceau pousseur ($\Delta_0^{(Theo)} < \Delta_0^{(Exp)}$). On remarque en considérant les figures 4.14 et 4.15 qu'à l'exception d'un jeu de données expérimentales pour les désaccords dans le rouge ($\Delta_0 = -1.5\Gamma_0$), nous n'observons pas ce type de comportement. Il est à noter que la largeur spectrale du laser utilisé pour pousser les atomes est non négligeable comparée à la largeur naturelle de l'état excité ce qui peut moyenner cet effet à 0.

Enfin une explication moins triviale et riche en processus physiques, serait la présence de forces coopératives dipolaires qui présentent une asymétrie 'rouge-bleue'. Ces forces dipolaires dépendent essentiellement de deux processus physique, la redistribution spectrale d'un photon qui a lieu lors d'un processus d'absorption-réémission inélastique ou encore du gradient d'intensité relié aux ondes sphérique émises par les atomes. Ces phénomènes de force dipolaires coopérative sont encore peu compris c'est pour cela que nous ne nous étendrons pas sur ce sujet au cours de ce manuscrit.

Évolution de la température du nuage.

Au cours de ces expériences, principalement menées dans le but des faire une mesure systématique de la modification de la pression de radiation par la diffusion coopérative, nous nous sommes également intéressés à l'évolution de la température du nuage en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0. En effet la mesure du déplacement du centre de masse du nuage est une mesure sur la force moyenne (moment d'ordre 1) coopérative qui ne contient aucune information sur les fluctuations (moment d'ordre 2) des effets coopératifs. D'une manière générale, dans toutes les études partant sur de effets cohérents il est souvent utiles d'avoir des informations sur les moments d'ordre 2 des observables afin de savoir si l'origine du phénomène est de nature quantique ou classique. En optique quantique ou encore dans les travaux portant sur la localisation d'Anderson, l'étude des fluctuations joue un rôle capital.

La procédure que nous avons utilisée pour mesurer la température T du nuage est la mesure par imagerie d'absorption de l'étalement de l'écart type de la distribution en densité gaussienne du nuage après un temps de vol t_{TOF} et nous avons utilisé la formule :

$$T = \frac{m}{k_B}\frac{\sigma^2(t_{TOF}) - \sigma^2(0)}{t_{TOF}^2} \tag{4.49}$$

où m est la masse d'un atome de Rubidium, k_B la constante de Boltzmann, $\sigma(0)$ et $\sigma(t_{TOF})$ sont les écarts type de la distribution gaussienne en densité du nuage avant et après le temps de vol. La température initiale du nuage avant d'avoir été poussé est aux alentours de 75-80μK tout comme nous le montre la figure 4.17 qui représente la température du nuage dans $F = 1$, dont les atomes ne sont pas affectés par le faisceau pousseur et qui reste sensiblement à la même température que le nuage en sortie de Dark MOT. En considérant la figure 4.17 on remarque bien que la température du nuage dans $F = 1$ reste constante autour de 75-80μK indépendamment de la puissance du Repompeur (c'est à dire du ratio d'atomes dans $F = 2$).

L'étude de la température du nuage dans $F = 2$ nous a révélée quelques surprises et n'en sont encore qu'au stade préliminaire. En effet lors des études précédentes sur la

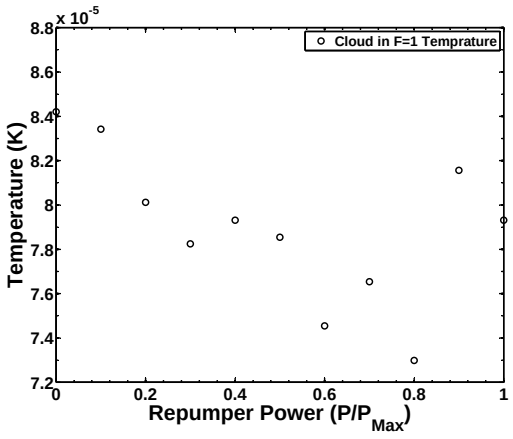

FIGURE 4.17 – Évolution de la température du nuage dans $F = 1$ en fonction de la puissance du repompeur, c'est à dire de la fraction d'atomes dans $F = 2$. On remarque que la température reste constant aux alentours des 80μK quelle que soit la puissance du Repompeur.

modification de la pression de radiation par les effets coopératifs il avait été observé que la température du nuage dans $F = 2$ restait constant [173]. Nos observations sont légèrement différentes dans le sens où nous observons la température augmenter en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0. Cela ne point en aucun cas un problème dans la série de mesure précédentes mais il faut garder à l'esprit qu'en moyenne 5 fois plus de photons (100 contre 20 à 40 dans nos expériences) ont été échangés lors des expérience précédentes ce qui peut très bien avoir moyenné l'effet que nous avons observé à 0. La figure 4.18 nous montre l'évolution des températures selon les axes y (température transverse T_y) et selon l'axe de propagation du faisceau pousseur (température longitudinale T_z). La figure 4.18 nous montre l'évolution des températures selon les deux axes (transverse et longitudinaux) en fonction de l'épaisseur optique à résonnante pour le nuage contenant les atomes dans $F = 2$ pour des désaccords du faisceau pousseur symétriques par rapport à la résonance tels que $\Delta_0 = \pm 2$ et $\pm 3\Gamma_0$. On remarque clairement une augmentation de la température selon les deux axes lorsque l'épaisseur optique b_0 augmente. La température du nuage dans $F = 1$ est représentée en vert afin de donner une référence. Un point intéressant est que la température transverse T_y, qui ne devrait normalement pas être affectée par le chauffage lié au nombre de photon échangés avec le faisceau pousseur, a tendance à devenir égale à la température longitudinale T_z lorsque l'on atteint le régime de diffusion multiple ($b(\Delta_0) \simeq 1$). Une explication vulgarisée de ce comportement est que dans le régime de diffusion multiple, les directions propres se recouvrent que sui peut donner lieu à ce type de comportements. Il est à noter que les premiers points pour les épaisseurs optiques très faibles sont probablement aberrent, liés à une mauvaise convergence du logiciel de mesures causé par le rapport signal/bruit trop faible.

Sachant que la température de recule T_{rc} est égale à $T_{rc} = 348.66$nK pour le Rubidium 87 et que l'on échange entre 30 et 40 photons en moyenne, on peut facilement calculer l'augmentation de la température selon la direction de propagation du faisceau pousseur telle que $\Delta T = N_\gamma T_{rc}$ où N_γ représente le nombre de photons échangés. On obtient $\Delta T = 10.45\mu$K et 13.95μK ce qui est en accord avec les données expérimentales qui présentent un écart de température entre la direction longitudinale T_z et la direction

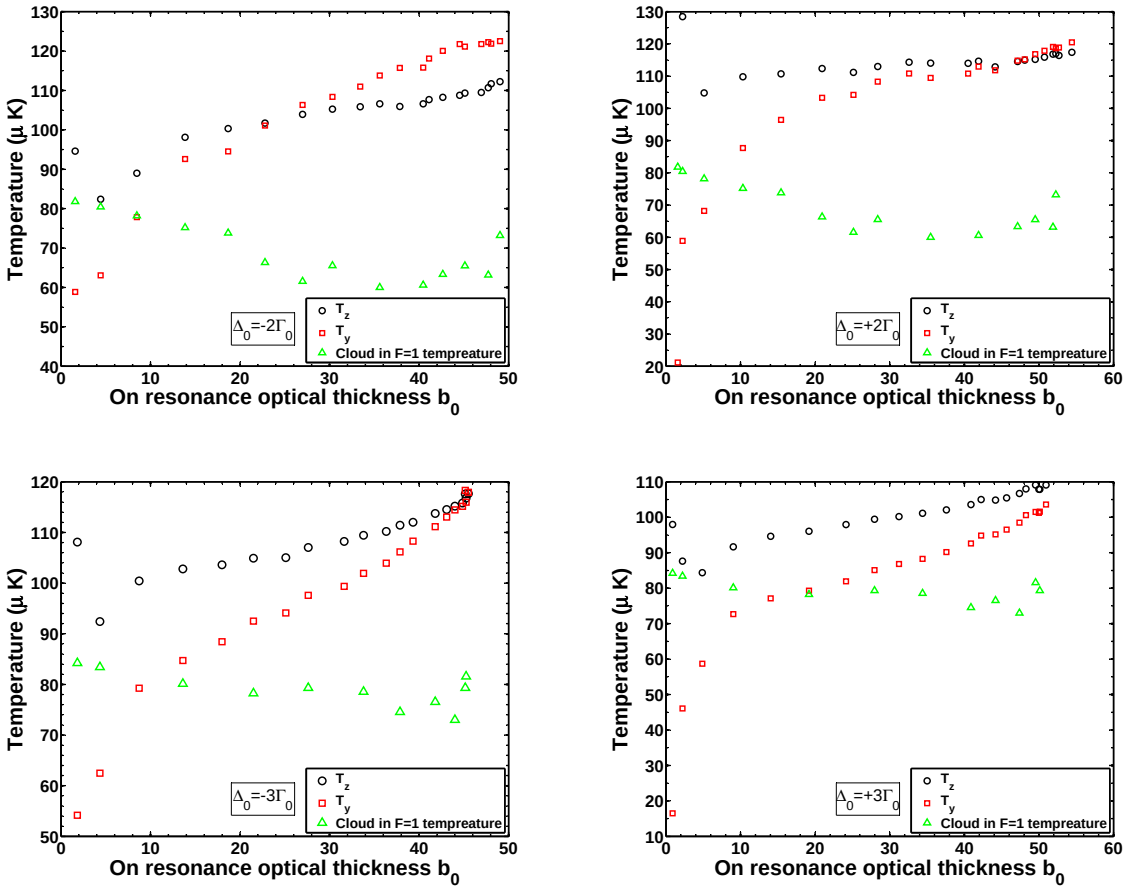

FIGURE 4.18 – Évolution de la température du nuage dans $F = 2$ en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0 selon les directions transverse T_y et longitudinale T_z pour quatre désaccords du faisceau pousseur symétrique par rapport à la résonance atomique tels que $\Delta_0 = \pm 2$ et $\pm 3\Gamma_0$. La température du nuage dans $F = 1$ est donnée en référence pour les deux désaccords (courbe verte). On remarque clairement une augmentation de la température selon les deux directions lorsque l'épaisseur optique du système augmente. Un point intéressant est la tendance de la température transverse T_y, qui ne devrait pas être affectée par le chauffage induit par le faisceau pousseur, à devenir égale à la température longitudinale T_z et ce lorsque l'on se rapproche du régime de diffusion multiple ($b(\Delta_0) \simeq 1$.

transverse T_y de cet ordre-là.

3.3 Discussions.

La série de résultats que nous avons présentés, vient donc valider l'approximation Timed Dicke dans le régime de diffusion simple $b(\Delta_0) < 1$ et vérifie bien la limite de validité de ce modèle dans le régime de diffusion multiple ($b(\Delta_0) > 1$) dans la mesure où l'on observe de manière systématique un décrochement des données expérimentales par rapport aux prédictions théoriques lorsque l'on dépasse $b(\Delta_0) > 1$. Le décrochement systématique apparaissant de manière symétrique par rapport à la transition atomique pour $\Delta_0^{(Exp)} = \pm 3.5\Gamma_0$ reste encore inexpliqué et pourrait être relié aux résonances de Mie il faudrait

pour cela affiner la théorie élaborée dans la référence [168] et procéder à des mesure plus systématiques allant dans ce sens. L'augmentation du chauffage en fonction de l'épaisseur optique à résonance b_0 est aussi un autre résultat préliminaire intéressant qui nécessiterait une théorie plus développée et des prises de mesures supplémentaires.

4 Diffusion Multiple Cohérente.

Dans cette section nous avons cherché à mettre en évidence un effet cohérent survivant dans le régime de diffusion multiple. Nous basant sur les prédictions de deux modèles différents l'un décrivant des processus cohérents le modèle Timed Dicke et l'autre décrivant des processus incohérents le modèle incohérent (tous deux décrits au début de ce chapitre), nous avons cherché à confronter nos résultats expérimentaux aux résultats numériques obtenus à partir de ces deux modèles.

4.1 Cohérence dans le régime de diffusion multiple.

Désirant explorer la validité des comportements prédits par l'approximation Timed Dicke loin dans le régime de diffusion multiple ($b(\Delta_0) \gg 1$), nous avons décidé de faire des séries d'expériences proche de résonance ($\Delta_0 \simeq 0\Gamma_0$). En effet les désaccords considérés pour les séries d'expériences que nous avons présentées à la section précédente nous permettaient seulement d'atteindre au maximum une épaisseur optique de $b(\Delta_0) = 5$ pour une épaisseur optique à résonance $b_0 = 50$. Afin de vérifier s'il était possible d'observer une décohérence dans la phase des photons diffusés un grand nombre de fois, qui se traduirait par un déplacement Δx_c du centre de masse du nuage différent de celui prédit par les solutions Many Body lorsque l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$ varie, nous avons tout d'abord réitéré les mêmes expériences, présentées à la section précédente, à résonance ($\Delta_0 = 0\Gamma_0$). En effet lorsque le désaccord du faisceau pousseur est nul l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$ et celle à résonance b_0 sont égales nous permettant d'atteindre rapidement le régime de diffusion multiple $b(\Delta_0) \gg 1$.

Lorsque l'épaisseur optique , qui est proportionnelle à la racine carrée du nombre d'évènements de diffusions subit par le photon $b(\Delta_0) \propto N_{Diff}$, devient très grande devant l'unité ($b(\Delta_0) \propto \sqrt{N_{diff}} \gg 1$), on peut s'attendre de manière intuitive à ce que les effets d'interférences ne perdurent pas, dû à la perte de mémoire causée par le grand nombre d'évènements de diffusions, et que par conséquent la dynamique du système soit décrite par un modèle de type Equation de Transfert Radiatif [9], proche du modèle incohérent que nous avons décrit au début de ce chapitre. Selon ce modèle, le diagramme d'émission est légèrement anisotrope et orienté vers l'arrière dans la direction du faisceau incident, on pourrait donc s'attendre à une augmentation de la force appliquée au centre de masse du nuage lorsque l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$ augmente. Cependant la prise en compte de la renormalisation de la force par la section efficace totale d'extinction (eq. (4.30) et figure 4.1) va aller à l'encontre de cette augmentation de la force appliquée au centre de masse du système lorsque l'épaisseur optique augmente. Cette anisotropie du diagramme d'émission, obtenue numériquement avec le modèle incohérent, peut être expliquée de manière intuitive très simplement. En effet prenons le cas limite d'un milieu dont l'indice est infini (ce qui correspond à une épaisseur optique infinie), les photons incidents ne pouvant le

pénétrer sont réfléchis à l'interface vide/milieu ce qui explique la forte anisotropie du diagramme d'émission lorsque le milieu est optiquement très épais. Lorsque l'indice du milieu diminue les photons incidents commencent à le pénétrer et sont diffusé aléatoirement de manière isotrope ce qui a pour conséquence que le diagramme d'émission devienne de moins en moins anisotrope vers l'arrière pour retrouver au final un diagramme d'émission isotrope lorsque l'épaisseur optique devient très faible.

Dans la plupart des cas cette vision intuitive est correcte lorsque l'on considère un milieu homogène, si l'on assimile les diffuseurs à des sphères dures dépourvues de résonances internes ou encore si l'on néglige la nature ondulatoire des particules diffusées et que le type d'interactions dominantes sont celles entre les plus proches voisins. Dans notre situation, les diffuseurs sont des dipôles oscillants induits auxquels nous associons une amplitude complexe (une phase et un module) et le type d'interaction que nous considérons entre les dipôles (bien que les interactions plus proches voisins soient également prises en compte) sont des interactions très longues portées reliées à la présence du terme en $1/r$. Dans certains travaux théoriques [15] il a été montré que ce type d'interaction favorisait la synchronisation entre les dipôles et qu'elle aboutissait à des comportements d'échelle dominés par les effet coopératifs ce qui se traduisait par un comportement d'échelle décrit uniquement, dans la limite des taille de système grandes devant la longueur d'onde, par le rapport entre le nombre d'atomes N et le nombre de modes transverses $(k_0 L)^2$, qui est proportionnel à l'épaisseur optique b_0. Lorsque le faisceau sonde pousseur est à résonance ($\Delta_0 = 0\Gamma_0$), les deux quantités $b(\Delta_0)$ et b_0 sont strictement équivalentes et nous avons vu au chapitre précédent (bien que l'étude numérique des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif H_{eff} soit faites en l'absence de champ incident) que pour un photon à résonance ($\omega_L = \omega_0$) on observe des effets cohérents pour des milieux optiquement très denses ($b_0 \gg 1$). Bien qu'il soit connu que la probabilité d'excitation ($|\beta_j|^2$) des dipôles à l'intérieur d'un système, dont la taille est bien supérieure au libre parcours moyen de diffusion, soit décrite par la loi de Beer-Lambert, il est tout à fait possible qu'une certaine cohérence persiste dans la phase des dipôles et qu'elle survive dans le régime de diffusion multiple. De plus lorsque nous parlons d'épaisseur optique il faut entendre épaisseur optique au centre du nuage et comme nous l'avons évoqué précédemment (eq. 4.42), le nuage ne présente pas une distribution en densité spatiale uniforme mais gaussienne ce qui a pour conséquence que l'épaisseur optique (suivant de par sa définition la distribution en densité spatiale) présente également une distribution gaussienne. Il est donc tout à fait concevable que les atomes situés sur les bords du nuage, où les photons sont diffusés une fois au maximum contrairement au centre du nuage, préservent cette cohérence de phase et affectent également de manière cohérente la phase des atomes situés au centre du nuage par le biais des interactions longues protées.

Au final nous allons donc comparer nos résultats expérimentaux aux prédictions théoriques et numériques données par le modèle incohérent et les solutions Many Body. Pour le modèle incohérent il nous reste à savoir dans quelles gammes de paramètres le terme relié au diagramme d'émission est prédominant, auquel cas la force appliquée au centre de masse du nuage augmenterait avec l'épaisseur optique du système, ou si c'est celui relié à la section efficace totale d'extinction qui domine, auquel cas cette force diminuerait en fonction de l'épaisseur optique du système. Dans ce dernier cas de figure, il nous reste à savoir dans quelles mesures les prédictions du modèle incohérent diffèrent de celles données par les solutions Timed Dicke.

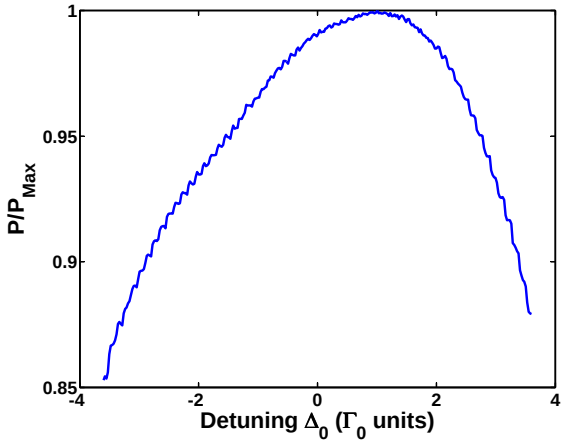

FIGURE 4.19 – Courbe de calibration en intensité du faisceau sonde pousseur où l'on a mesuré la variation de la puissance optique du faisceau pousseur normalisée au maximum P/P_{Max} allant sur les atomes en fonction du désaccord $-3.5\Gamma_0 < \Delta_0 < +3.5\Gamma_0$. On remarque une modification de 25% de la puissance pour les désaccords extrêmes.

4.2 Protocole expérimental.

La procédure expérimentale que nous avons utilisée afin d'affiner les points pris autour de la résonance $-2\Gamma_0 < \Delta_0 < +2\Gamma_0$, bien que ressemblant en certains points à celle que nous avons exposée à la section précédente, en diffère principalement dans le fait qu'au lieu de maintenir le désaccord Δ_0 fixé et d'augmenter l'épaisseur optique à résonance b_0, nous scannons le désaccord pour une épaisseur optique fixée et nous réitérons la procédure pour différentes épaisseurs optiques. Les deux cas de figure possibles pour ces prises de données sont soit de maintenir l'intensité I/I_{sat} du faisceau pousseur constante soit de maintenir le paramètre de saturation $s(\Delta_0)$ constant.

Le fait de scanner l'intensité du faisceau pousseur en la maintenant constante nécessite cependant certaines calibrations supplémentaires liées à la fonction de réponse du système 'AOM Double passage + fibre optique'. En effet, bien qu'optimisé au maximum, l'alignement du Modulateur Acousto-Optique n'est pas idéal ce qui a pour conséquences un léger déplacement du faisceau injecté deux fois dans l'ordre +1. La puissance de ce faisceau, injecté ensuite dans une fibre optique, présente donc une dépendance en désaccord liée à la désinjection de ce dernier dans la fibre par effet de bras de levier. La figure 4.19 illustre la variation de puissance optique P/P_{Max} du faisceau pousseur allant sur les atomes en fonction du désaccord Δ_0 entre -3.5 et $+3.5\Gamma_0$, on remarque clairement que la puissance varie de 25% pour les désaccords extrêmes ($-3.5\Gamma_0$). Afin de s'affranchir de cette dépendance, nous réalisons ce type de calibration avant chaque expérience pour la plage de désaccord que l'on souhaite scanner et nous faisons lire la courbe de calibration au programme de contrôle de l'expérience. Il est capital de laisser la tension de consigne en amplitude du signal Radio Fréquence des oscillateurs contrôlés en tension (VCO) à son maximum pendant l'acquisition de la courbe de calibration. Connaissant la puissance relative minimum que l'on ne pourra dépasser et la dépendance de la puissance en fonction du désaccord, donnée par la courbe de calibration et qui n'est autre que la fonction de réponse $I_{FR}(\Delta_0)$ du système "AOM Double passage + fibre optique", nous

procédons par la biais du programme de contrôle à une interpolation qui modifiera la tension de contrôle par une correction en tension $V_{Corr}(\Delta_0)$ de l'amplitude du signal Radio Fréquence du simple passage du faisceau sonde pousseur afin de maintenir constante la puissance optique P et par conséquent l'intensité I du faisceau pousseur. Afin de maintenir le paramètre de saturation $s(\Delta_0)$ constant nous appliquons à cette consigne la correction $(1 + 4(\Delta_0/\Gamma_0)^2)V_{Corr}(\Delta_0)$.

Contrairement aux expériences présentées à la section précédente, les prises de données ont été faites uniquement avec le dispositif d'imagerie d'absorption afin de réduire les multiples sources d'erreurs provenant de mesures croisées faites par des appareils différents. Dans le but de s'affranchir des dérives lentes de l'expérience, les mesures par imagerie d'absorption nous permettent d'avoir toujours accès à l'information sur l'épaisseur optique ce qui n'était pas le cas lorsque l'on mesurait le déplacement du centre de masse du nuage par imagerie de fluorescence et que l'on mesurait séparément l'épaisseur optique par imagerie d'absorption pour le même cycle. Grâce à cette vérification quasi permanente sur l'épaisseur optique du nuage nous avons réduit le nombre de cycle ce qui minimise aussi l'impact des dérives lentes de l'expérience sur les résultats expérimentaux.

Enfin la manière dont est contrôlée l'épaisseur optique diffère également du protocole expérimental présenté à la section précédente dans le sens où nous modifions le désaccord du Repompeur pendant la séquence de "Dark MOT" afin de modifier l'épaisseur optique du nuage. Le temps de chargement du MOT a également été réduit ce qui fait que nous travaillons avec un nuage plus froid (20μK) et plus dilué optiquement $b_0 < 10$.

4.3 Résultats expérimentaux.

Étude du déplacement du centre de masse du nuage.

Suivant le même principe qu'à la section précédente (désaccord Δ_0 fixé et épaisseur optique à résonance b_0 qui varie) nous avons donc mesuré le déplacement du centre de masse du nuage pour un désaccord de faisceau pousseur nul ($\Delta_0 = 0\Gamma_0$). La figure 4.20 nous montre l'évolution de la force appliquée au centre de masse du nuage, normalisée par celle ressentie par un atome unique, en fonction de l'épaisseur optique à résonnance b_0 du système pour un désaccord de faisceau pousseur nul ($\Delta_0 = 0$ et $b(\Delta_0) = b_0$). On remarque clairement que loin dans le régime de diffusion multiple ($b(\Delta_0) \gg 1$), le ratio de la force continue de diminuer en fonction de l'épaisseur optique du système. A ce stade on peut donc exclure dans la gamme de paramètres considérés, le fait que ce soit la force prédite par la modèle incohérent lorsque le terme relié au diagramme d'émission est dominant, qui domine le comportement de la force appliquée au centre de masse du système. Désormais il nous reste donc à savoir si cette diminution drastique de la force dans le régime de diffusion multiple est plus fidèlement décrite par les prédictions du modèle incohérent lorsque c'est le terme relié à la section efficace totale d'extinction qui domine la force ou bien si ce comportement expérimental se rapproche plus des prédictions donnée par les solutions Many Body.

Dans l'hypothèse où le comportement des données expérimentales se rapprocherait des prédictions données par les solutions Many Body, il peut être dangereux, voir même totalement erroné, d'attribuer entièrement cette réduction drastique de la force aux effets coopératifs. En effet les solutions Many Body aux dipôles couplés (en plus de décrire les effets coopératifs), décrivent aussi bien les effets de diffractions liés à la taille transverse

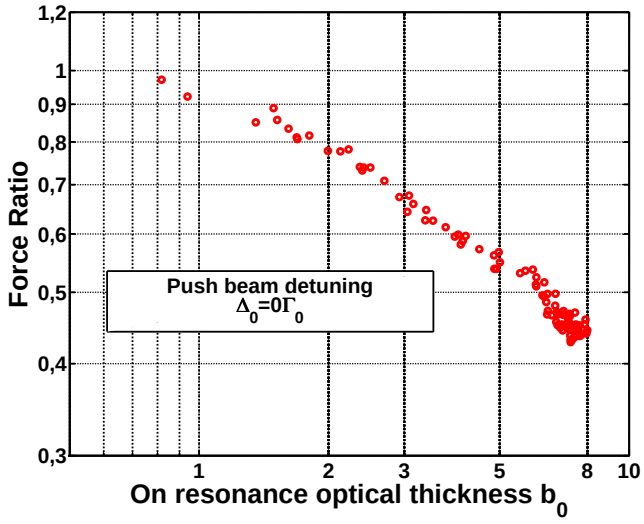

FIGURE 4.20 – Évolution de la force appliquée au centre de masse du nuage dans $F = 2$ normalisée par la force appliquée à un seul atome (F_c/F_1) en fonction de l'épaisseur optique à résonnance b_0 du nuage pour un désaccord de faisceau pousseur nul ($\Delta_0 = 0\Gamma_0$ et $b(\Delta_0) = b_0$). Ces points expérimentaux ont été obtenus avec la nouvelle procédure expérimentale que nous allons décrire dans cette section. On remarque clairement que dans le régime de diffusion multiple ($b_0 > 1$) le ratio de la force continue de diminuer en fonction de l'épaisseur optique du nuage.

du nuage grande devant la longueur d'onde λ et nous ne sommes pas capable, en l'état actuel des connaissances, de savoir dans quelles mesures ces effets de diffractions jouent sur un rôle dans la réduction de la force exercée sur le centre de masse du nuages lorsque le faisceau pousseur est à résonance. De plus garder le désaccord Δ_0 du faisceau pousseur constant tout comme la taille du nuage $k_0\sigma_r$ tout en augmentant son épaisseur optique (en augmentant le nombre d'atomes N) est équivalent à augmenter la masse de ce système ce qui pourrait expliquer de manière triviale cette réduction du déplacement du centre de masse en fonction de l'épaisseur optique. C'est pourquoi nous avons choisi de considérer le problème sous un autre angle en scannant la transition atomique $F = 2 \rightarrow F' = 3$ avec le désaccord du faisceau sonde en maintenant l'épaisseur optique à résonance constante.

La figure 4.21 est une courbe de test nous montrant le déplacement Δx_c du centre de masse du nuage dans $F = 2$ en fonction du désaccord du faisceau pousseur Δ_0 pour différentes épaisseurs optiques à résonance fixées ($b_0 = 0.38$ à 7.58). Les données ont été prises avec une intensité constante du faisceau pousseur telle que $I/I_{sat} = 0.01$ et le temps d'allumage du faisceau est de 50μs ce qui nous fait échanger entre $N_\gamma = 10$ photons pour $\Delta_0 = 0\Gamma_0$ et $N_\gamma = 1$ pour $\Delta_0 = \pm 1.5\Gamma_0$. L'effet observé à la figure **??** est toujours observé dans le mesure où l'on observe une réduction drastique du déplacement du centre de masse du nuage. Cependant, le nombre de photons échangés étant supérieur pour les désaccords proches de la résonance il est évident que le nuage sera plus poussé vers ces paramètres que lorsque l'on s'éloigne de la résonance. Cependant en modifiant le nombre de photons échangés en fonction du désaccord du faisceau pousseur, il est difficile d'en déduire un comportement cohérent qui dépend de l'épaisseur optique $b(\Delta_0)$ et de mettre en évidence une cohérence de phase aboutissant à une réduction de la pression de radiation dans le

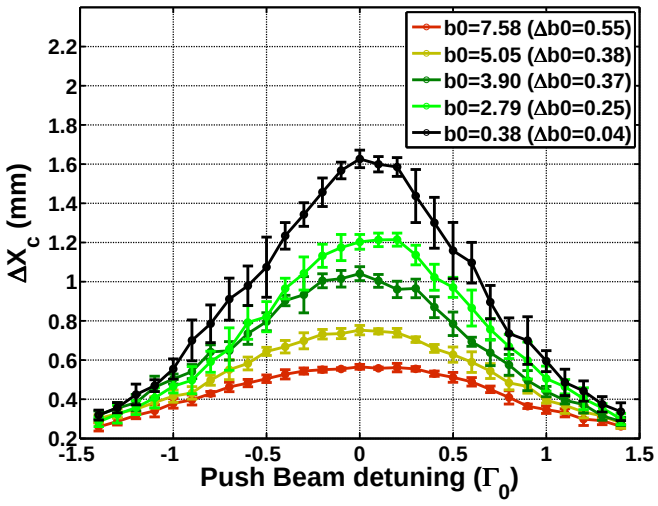

FIGURE 4.21 – Déplacement du centre de masse du nuage dans $F = 2$ en fonction du désaccord du faisceau pousseur $-1.5\Gamma_0 < \Delta_0 < +1.5\Gamma_0$ pour différente épaisseurs optiques à résonance maintenues constantes $0.38 \leqslant b_0 \leqslant 7.58$. Dans cette série de mesures l'intensité est maintenue constante telle que $I/I_{sat} = 10^{-2}$ ce qui a pour conséquence que le nombre de photons échangés varie entre $N_\gamma = 10$ pour $\Delta_0 = 0\Gamma_0$ et $N_\gamma = 1$ pour $\Delta_0 = \pm 2\Gamma_0$. Les observations précédentes faite sur la diminution drastique de la force appliquée au centre de masse du nuage à résonance ($\Delta_0 = 0\Gamma_0$) restent les mêmes que pour la figure 4.20 cependant il est difficile de quantifier ce phénomène alors que l'impulsion initiale du nuage (le nombre de photon échangé N_γ) varie en fonction du désaccord.

régime de diffusion multiple $b(\Delta_0) > 1$ c'est pourquoi nous avons optés pour des scans où l'on garde le paramètre de saturation $s(\Delta_0)$ constant.

La figure 4.22 nous montre le déplacement du centre de masse du nuage en fonction du désaccord $-1.5\Gamma_0 \leq \Delta_0 \leq +1.5\Gamma_0$ du faisceau pousseur pour différentes épaisseur optiques à résonance au centre du nuage $b_0 = 1.1$ à 9.7. Ici le paramètre de saturation est maintenu constant tel que $s(\Delta_0) = 2.10^{-2}$ et le faisceau pousseur est allumé de manière à échanger en moyenne $N_\gamma = 50$ photons quel que soit le désaccord. On remarque clairement l'effet cohérent survivant dans le régime de diffusion multiple aboutissant à la réduction du déplacement Δx_c du centre de masse du nuage lorsque le désaccord du faisceau pousseur est proche de résonance. Il est important de noter à nouveau que la taille du nuage a été maintenue constante ce qui minimise les effets de diffraction liés à la taille transverse du nuage. On peut enfin comparer les comportements numériques donnés par le modèle incohérent et la solution "*Many Body*" à nos données expérimentales en s'intéressant au rapport de la force collective appliquée au centre de masse du nuage et de la force ressentie par un atome indépendant.

La figure 4.23 nous montre l'évolution de la force F_c appliquée au centre de masse normalisée par la force F_1 ressentie par un atome indépendant (courbe rouge) pour un nuage d'épaisseur optique à résonance constante $b_0 = 6.1 \pm 0.47$ en fonction du désaccord Δ_0 variant entre $-1.5\Gamma_0$ et $+1.5\Gamma_0$. Les prédictions théoriques données par le modèle incohérent (courbe verte) et les solutions Many Body (courbe bleu) ne présentent que peu de différences, ce qui ne nous permet pas de rapprocher cette diminution de la force,

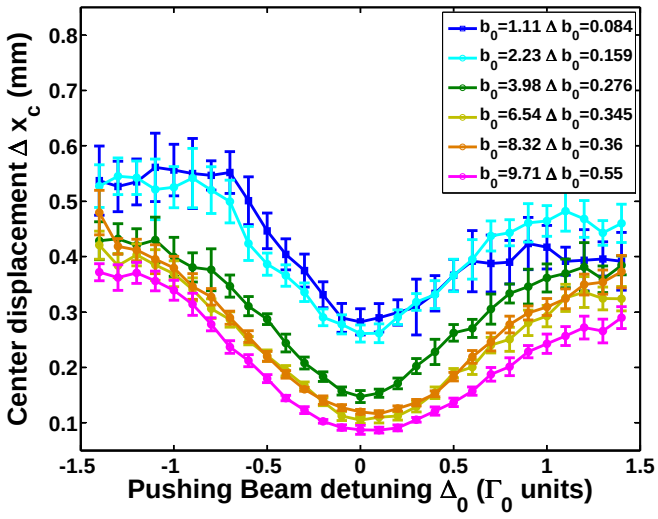

FIGURE 4.22 – Déplacement du centre de masse du nuage dans $F = 2$ en fonction du désaccord du faisceau pousseur $-1.5\Gamma_0 < \Delta_0 < +1.5\Gamma_0$ pour différentes épaisseurs optiques à résonance maintenues constantes $1.1 \leqslant b_0 \leqslant 9.71$. Dans cette série de mesure le paramètre de saturation $s(\Delta_0) = 2.10^{-2}$ a été maintenu constant de telle sorte à échanger en moyenne $N_\gamma = 20$ photons. On remarque encore une réduction drastique du déplacement Δx_c du centre de masse du nuage dans $F = 2$ à la résonance $\Delta_0 = 0\Gamma_0$.

lorsque l'on se rapproche de la résonnance atomique, à un effet cohérent ou un effet incohérent. La courbe noire montre quant à elle le comportement de la force lorsque l'on considère uniquement le terme de la force incohérente relié au diagramme d'émission. On remarque une différence qualitative entre cette dernière et les prédictions données par les deux autres modèles. La différence quantitative entre nos données expérimentales et les comportements donnés par le modèle incohérent et les solutions Many Body peut avoir plusieurs origines tout comme une répartition non uniforme des atomes dans tous les sous niveaux Zeeman avant le processus d'imagerie d'absorption ou encore la polarisation circulaire du faisceau pousseur mal contrôlée.

Comme nous l'avons énoncé précédemment lorsque nous avons décrit le processus d'imagerie d'absorption qui nous sert à mesurer l'épaisseur optique du nuage, ce dernier n'est pas parfait et il peut y avoir des sources d'erreurs liées à la largeur spectrale de la DFB que nous utilisons ou bien même liées au différences dans les force des transitions entre les différents sous niveaux Zeeman qui ne sont pas prise en compte par notre imagerie d'absorption à très faible intensité [182].

Étude de l'évolution de la température du nuage et des fluctuations au coup par coup.

De la même manière que nous l'avons fait à la section précédente, nous pouvons aussi nous intéresser à l'évolution de la température du nuage en fonction du désaccord Δ_0 pour une épaisseur optique à résonance b_0 fixée. Nous regarderons également le comportement des fluctuations au coup par coup en fonction du désaccord.

Afin de mesurer la température du nuage, nous utilisons la même procédure qu'à la

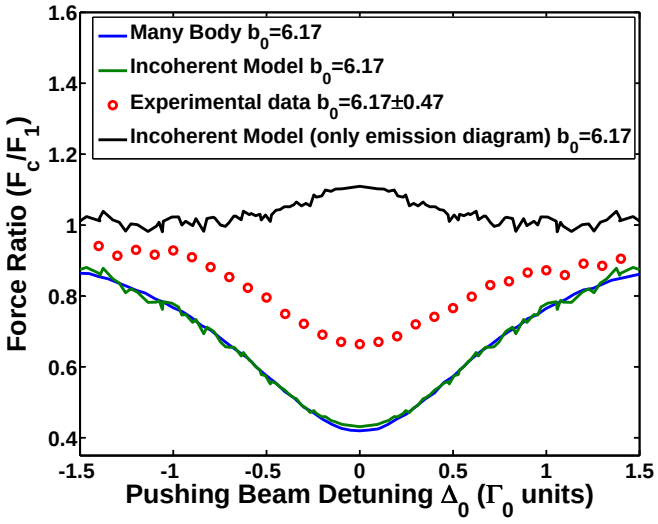

FIGURE 4.23 – Évolution de la force appliquée au centre de masse du nuage dans $F = 2$ normalisée par celle ressentie par un atome indépendant (F_c/F_1) en fonction du désaccord du faisceau pousseur $-1.5\Gamma_0 < \Delta_0 < +1.5\Gamma_0$ pour une épaisseur optique à résonance maintenue constante $b_0 = 6.17 \pm 0.47$. Dans cette série de mesure le paramètre de saturation $s(\Delta_0) = 8.10^{-2}$ a été maintenu constant de telle sorte à échanger en moyenne $N_\gamma = 50$ photons. On remarque encore une réduction drastique de la force coopérative appliquée au centre de masse du nuage dans $F = 2$ à lorsque l'on s'approche résonance $\Delta_0 = 0\Gamma_0$.

section précédente, c'est à dire que nous mesurons l'étalement de l'écart type du nuage gaussien $\sigma(t_{TOF})$ après un temps de vols de temps t_{TOF} et nous utilisons la même formule donnée à l'équation (4.49) afin de calculer la température T du nuage. Nous ne regarderons seulement les températures longitudinales T_z et transverses T_y pour deux épaisseur optiques b_0 et pour chacun des paramètres de saturation que nous avons considéré $s(\Delta_0) = 2.10^{-2}$ et 8.10^{-2}.

La figure 4.24 nous montre l'évolution de la température du nuage selon les directions longitudinales T_z et transverses T_y en fonction du désaccord Δ_0 du faisceau pousseur pour deux paramètres de saturation différents $s(\Delta_0) = 2.10^{-2}$ et 8.10^{-2} pour des nuages à différente épaisseurs optiques à résonance $b_0 = 1.46, 2.23, 6.17$ et 6.54 maintenues constante pendant la durée de l'expérience. On remarque clairement une réduction du chauffage lorsque le désaccord du faisceau pousseur se rapproche de la résonance $\Delta_0 \simeq 0\Gamma_0$. On remarque également que plus l'on va dans le régime de diffusion multiple $b(\Delta_0) \gg 1$ pour $b_0 = 6.17$ et 6.54 plus cette réduction du chauffage est importante. Ce comportement peut avoir plusieurs origines physiques et nous n'avons pas réussi encore à établir laquelle était prédominante dans notre situation. Il y a tout d'abord dans les phénomènes triviaux une compression de la taille longitudinale du nuage qui pourrait avoir une signature similaire sur la température mesurée après temps de vol. En effet les atomes du côté éclairé par le faisceau pousseur n'étant pas affecté par l'ombre des autres atomes (c'est à dire l'atténuation du faisceau lorsqu'il traverse le nuage optiquement dense) sont plus poussés vers l'avant que les autre atomes situés de l'autre côté du nuage voyant un faisceau dont l'intensité est atténuée telle que $I = I_0 \exp(-b(\Delta_0))$. Un autre effet moins trivial

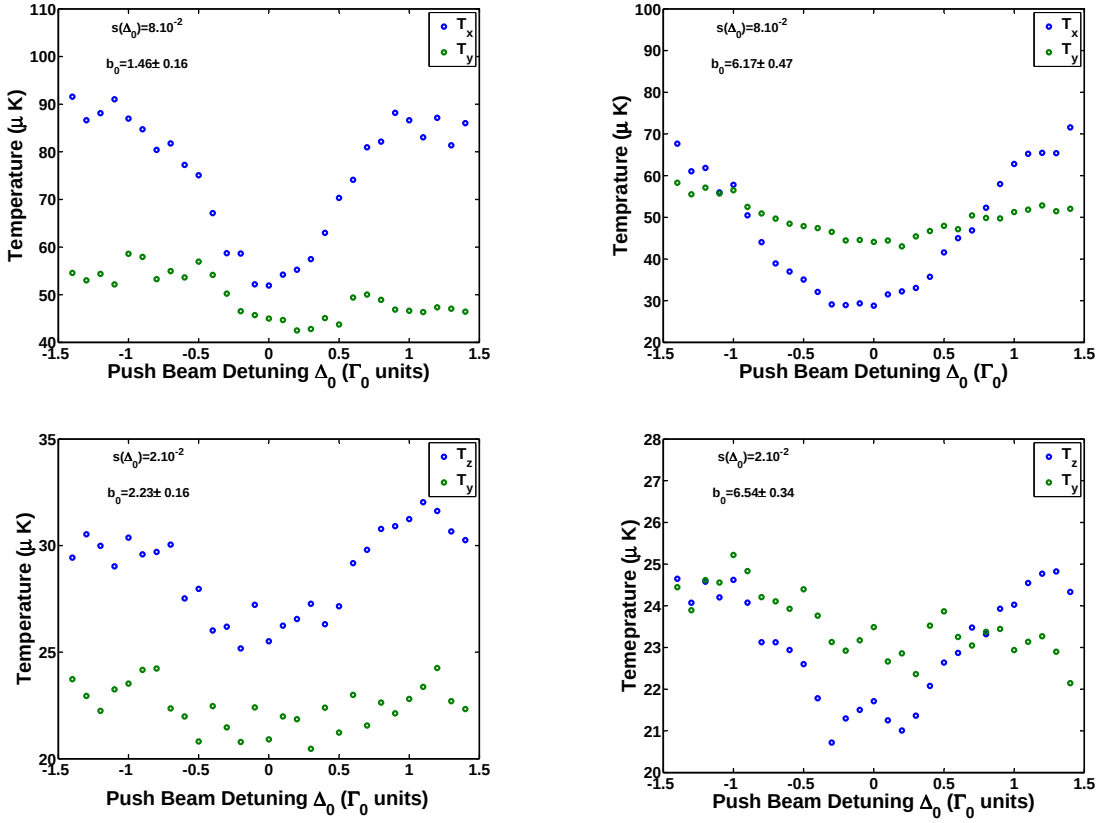

FIGURE 4.24 – Évolution de la température du nuage dans $F = 2$ selon les directions longitudinales T_z et transverse T_y en fonction du désaccord Δ_0 du faisceau pousseur pour deux paramètre de saturation différents $s(\Delta_0) = 2.10^{-2}$ (figures du bas) et $s(\Delta_0) = 8.10^{-2}$ pour différente épaisseurs optiques à résonance $b_0 = 1.46, 2.23, 6.17$ et 6.54 maintenues constantes pendant la durée de l'expérience. On remarque une diminution singulière du chauffage selon la direction longitudinale T_z lorsque l'on s'approche de résonance ($\Delta_0 \simeq \Gamma_0$) avec le faisceau pousseur alors que la température selon la direction transverse T_y semble varier très peu et rester proche de la température initiale du nuage. Les différences apparentes dans ces températures initiales proviennent de la procédure expérimentale pour obtenir une certaine épaisseur optique b_0 où nous modifions les paramètres du Dark MOT donc sa température initiale également.

est la disparition à résonance des forces coopératives dipolaires qui pourrait se traduire par une réduction du chauffage également [183]. Enfin un dernier effet qui expliquerait cette réduction du chauffage serait une inversion des interactions entre atomes induites par la lumière lorsque cette dernière est proche de résonance [184]. Les différences apparentes dans les températures transverses T_y, proches de la température initiale du nuage avant d'être poussé proviennent du fait que nous modifions les paramètres du Dark MOT afin d'avoir un contrôle sur l'épaisseur optique b_0 du nuage, modifiant par conséquent sa température initiale.

Une observation intéressante qui a été faite au cours des prises de données expérimentales est l'augmentation des fluctuations au coup par coup de la position du centre de masse lorsque le désaccord du faisceau s'approche de la résonance suivi d'une diminution drastique des ce fluctuation lorsque le faisceau est à résonance ($\Delta_0 = 0\Gamma_0$). La figure 4.25

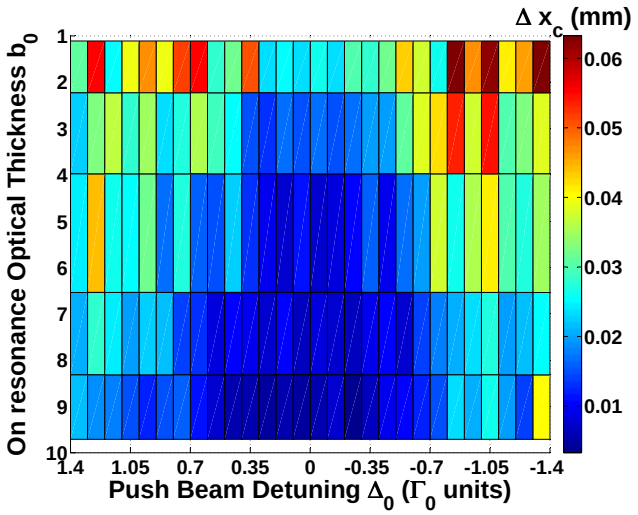

FIGURE 4.25 – Figure à deux dimension (désaccord du faisceau pousseur Δ_0, épaisseur optique à résonance b_0) des fluctuations statistiques du déplacement Δx_c du centre de masse du nuage. On remarque clairement que ces fluctuations sont maximales pour les désaccords $\Delta_0 = \pm 1\Gamma_0$ et qu'elles s'atténuent de manière drastique lorsque le désaccord du faisceau pousseur est nul $\Delta_0 = 0\Gamma_0$. Cependant pas de théorie explique à l'heure actuelle ce comportement.

nous montre une représentation à 2 dimensions dans l'espace des paramètres désaccord du faisceau pousseur/épaisseur optique (Δ_0, b_0) des fluctuations statistiques du déplacement Δx_c du centre de masse du nuage poussé par le faisceau incident. A l'opposé des observations que l'on peut faire à partir des simulations numériques *Many Body* sur la figure 4.23 où les fluctuations augmentent lorsque le désaccord du faisceau pousseur est à résonance, on remarque dans nos données expérimentales une diminution drastique de ces dernières pour un désaccord nul $\Delta_0 = 0\Gamma_0$ et ce quelle que soit l'épaisseur optique considérée. En l'état actuel des choses aucune théorie ne prédit un comportement similaire. Il faut toutefois rester prudent car ce type de comportement peut être le fait d'un bruit en fréquence du faisceau laser incident.

4.4 Conclusions et perspectives sur la Diffusion Multiple Cohérente.

Dans cette section nous avons mesuré une réduction drastique de la force appliquée au centre de masse du nuage dans le régime de diffusion multiple. A ce stade nous ne sommes pas encore en mesure de relier cette physique à un effet cohérent survivant dans lé régime de diffusion multiple ou à un effet incohérent lié à l'atténuation du faisceau à l'intérieur du nuage. Une autre explication possible est que la force ne soit pas la bonne observable afin de mettre en évidence la signature d'effets coopératifs dans le régime de diffusion multiple.

Une étude intéressante en cours est de savoir dans quelles gammes de paramètres les prédictions, sur l'observable force, données par les solutions Timed Dicke et le modèle incohérent diffèrent et s'il est possible de mettre en évidence des effets cohérents dominés par les effets coopératifs survivants dans le régime diffusion multiple. Pour cela plusieurs

pistes sont envisageables tout comme aller explorer des désaccords élevés ($|\Delta_0| > 5\Gamma_0$) pour des systèmes optiquement très épais ($b_0 > 50$).

5 Préparation de l'étude des états sousradiants dans les nuages dilués.

Un dernier projet expérimental qui n'est pas encore aboutis à ce jour est l'étude des états sousradiants à une excitation pouvant être présent dans les nuages spatialement dilués et optiquement denses $b_0 \gg 1$ et $\rho\lambda^3 \ll 1$. Certains travaux théoriques ayant déjà donnés quelques indications afin de les observer et de les contrôler [35], nous pensons qu'il peut être possible de les détecter dans nos systèmes et voir même de les utiliser par la suite afin d'autre états exotiques situés entre localisation forte au sens d'Anderson et états coopératifs tels que cela est observé numériquement dans des systèmes idéaux.

De manière générale, la sousradiance est un effet d'interférences destructives aboutissant au piégeage partiel de l'excitation à l'intérieur du système. En effet la présence des atomes modifiant la densité d'états des modes du vide joue un rôle équivalant à celui d'une cavité empêchant le couplage vers l'extérieur de l'état "atome+excitation". Il faut toutes fois remarquer qu'il n'est pas évident des se coupler directement à l'aide d'un faisceau incident à ces états sousradiants, le couplage s'effectuant de manière privilégiée avec les états superradiant dont les largeurs sont singulièrement plus grandes. Il a cependant été montré qu'il était possible d'avoir un contrôle sur le nombre et le comportement de ces états en jouant sur l'épaisseur optique à résonance b_0 du nuage, sur sa température T et sur le désaccord Δ_0 du faisceau incident.

Dans un premier temps nous effectuerons un bref rappel sur la dynamique des états sousradiants et la relaxation d'un système décrivant N dipôles couplés à un champ incident. Nous décrirons ensuite quels sont les différents éléments dont on doit tenir compte afin de s'assurer de l'observation de ces états.

5.1 Rappels théoriques sur l'étude des états sousradiant dans les nuages d'atomes froids dilués.

Comme nous l'avons énoncé précédemment, la sousradiance est un état métastable issu d'un effet d'interférences destructives. Dans le chapitre précédent nous avons vu qu'il existait une certaine confusion entre les états localisés par le désordre au sens de la localisation d'Anderson et les états piégés par la présence des autres atomes donc le couplage vers l'extérieur est fortement diminué. D'une manière intuitive, il est possible de voir la dynamique des états sousradiants à partir de l'Hamiltonien effectif que nous avons étudié au chapitre précédent (eqs. (2.88) et (2.90)). Cependant, la non hermicité de ce dernier rend l'étude complexe car les vecteurs propres gauche de H_{eff} ne sont pas égaux au vecteurs propres droits :

$$H_{eff}|\Phi_j^{(d)}\rangle = \Lambda_j|\Phi_j^{(d)}\rangle \tag{4.50}$$

$$\langle\Phi_j^{(g)}|H_{eff} = \langle\Phi_j^{(g)}|\Lambda'_j \tag{4.51}$$

avec $\langle\Phi_j^{(g)}|\Phi_j^{(d)}\rangle \neq 1$ et $\Lambda'_j \neq \Lambda_j$. En se servant de l'équation d'évolution de l'état $|\Psi\rangle$ décrivant le système de N dipôle couplés [8] :

$$i\frac{\mathrm{d}|\Psi\rangle}{\mathrm{d}t} = H_{eff}|\Psi\rangle, \tag{4.52}$$

il est possible d'exprimer l'état $|\Psi\rangle$ dans lequel le système se trouve tel que $|\Psi\rangle = \sum_j \xi_j|\Phi_j^{(d)}\rangle$ et de considérer la relaxation du système telle que :

$$\frac{\mathrm{d}\langle\Psi|\Psi\rangle}{\mathrm{d}t} = \sum_j\sum_k \xi_k^*\xi_j(\Lambda'_k - \Lambda_j)\langle\Phi_j^{(g)}|\Phi_k^{(d)}\rangle. \tag{4.53}$$

Cette dernière expression montre à quel point la non hermicité de l'Hamiltonien effectif H_{eff} rend le problème complexe et non solvable analytiquement si l'on considère la relaxation de tous les modes à la fois.

Lorsque les dipôles les dipôles ont été suffisamment excités par le faisceau incident, on peut considérer que les dipôles sont dans leur états stationnaire ($\dot{\beta}_j \simeq 0$) et il est alors possible d'exprimer l'état du système en le décomposant sur la base des états propres de l'Hamiltonien effectif au moment où le faisceau s'éteint ($t = 0$) tel que :

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_j \chi_j|\Phi_j^{(d)}\rangle. \tag{4.54}$$

En se servant de l'équation (4.52) on peut donc exprimer l'état du système au temps t tel que :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \xi_j e^{-i\Lambda_j t}|\Phi_j^{(d)}\rangle. \tag{4.55}$$

On peut donc réexprimer la relaxation de la densité d'énergie du système telle que :

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_j |\xi_j|^2 e^{-i\Gamma_{at,i}t} + \sum_j\sum_{k\neq j} \xi_k^*\xi_j e^{-i(\Lambda_j-\Lambda'_k)t}\langle\Phi_j^{(g)}|\Phi_k^{(d)}\rangle. \tag{4.56}$$

ce qui montre la difficulté liée au fait de la non orthogonalité des vecteurs propres de H_{eff} afin d'obtenir une solution analytique pour une situation dérivant plus de $N = 2$ atomes. Cependant, malgré la complexité apparente de ce problème, on peut s'attendre de manière intuitive à ce que les états qui restent présents dans le système soit les états sous radiant qui ne se couplent pas ou très peu aux autres modes. On peut donc prévoir qu'après un régime de relaxation transitoire complexe, où la relaxation des tous les états est difficilement descriptible d'un point de vue analytique, il ne survive plus dans le système que l'état au plus long temps de vie c'est à dire ayant la largeur de mode la plus fine. Cet état, dont nous avons étudié le comportement au chapitre précédent définis à l'équation (3.49) et représenté à la figure 3.11, se relaxe du système de manière exponentielle sans être perturbés par les relaxations des autre modes qui sont déjà hors du système tel que :

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = |\xi_{Sub}|^2 e^{-i\Gamma_{Sub}t}. \tag{4.57}$$

8. En toute rigueur il faut aussi considérer l'évolution du couplage du système avec le champ incident et rajouter un deuxième terme à cette équation modélisant le couplage du champ laser avec l'état symétrique (superradiant), qui est équivalent dans la situation décrivant $N = 2$ atomes à l'état décrit à l'équation (3.7).

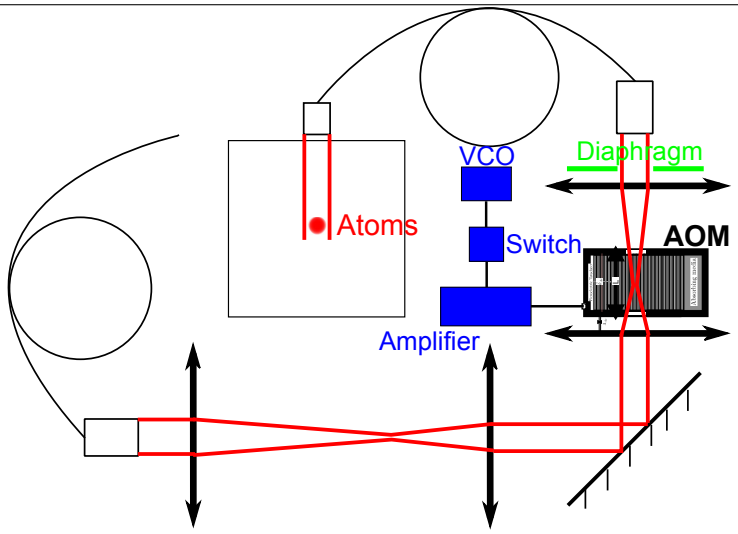

FIGURE 4.26 – Dispositif expérimental du système nous permettant de réaliser l'extinction rapide du faisceau sonde afin d'exciter le nuage pour y détecter des modes sousradiants. Le premier télescope confocal nous permet de réduire une première fois le diamètre du faisceau et le deuxième télescope nous permet d'obtenir un très petit waist du faisceau à l'intérieur du Modulateur Acousto-Optique. Sur ce schéma nous n'avons pas représenté l'ordre 0 bloqué par le diaphragme après la seconde lentille du deuxième télescope.

C'est pourquoi nous nous attendons à observer expérimentalement après un temps long une décroissance exponentielle caractéristique d'un état sousradiant existant dans un nuage dilué dont la taille est grande devant la longueur d'onde. Comme nous l'avons évoqué au début de ce chapitre, les densités spatiale de diffuseurs que nous considérons sont de l'ordre de $\rho\lambda^3 \simeq 10^{-2}$-$10^{-1}$. En se rappelant les résultats numériques obtenus au chapitre précédent sur la valeur moyenne minimum des largeurs des modes (figure 3.11) on peut s'attendre à ce que le temps de vie minimum soit dominé par les paires coopératives d'atomes. Cette remarque rejoint une remarque de la référence [92] disant que les états sousradiants sont des ensembles de paires dans des états antisymétriques.

5.2 Mise en place d'un système de coupure rapide.

Un des points les plus importants afin d'observer une signature de la sousradiance dans des milieux dilués est la mise en place d'un système permettant de couper le faisceau de manière nette et rapide par rapport au temps typique associé à la largeur naturelle de l'état excité $\tau_{at} = 1/\Gamma_{at} = 26$ns. La fraction d'états sousradiants étant aussi très faible dans le signal de fluo récolté il faut aussi veiller à ce que le taux d'extinction soit aussi grand (aux alentours des 30dB). Pour cela deux solutions expérimentales ont été envisagées. Le première étant de mettre en série un modulateur électro-optique EOspace AZ-0K5-10-PFU-SFU-780 en série avec un Modulateur Acousto-Optique (AOM) Crystal Technology 3080-122. Cependant malgré l'extinction rapide du modulateur électro-optique sur 10dB en 7ns un problème que nous n'avons pu régler a été la dérive du seuil de sa consigne. Nous avons donc opté pour un système ne comprenant que le Modulateur Acousto-Optique en configuration simple passage dans lequel nous injectons un faisceau fortement focalisé. Le dispositif expérimental est décrit à la figure 4.26 et consiste tout d'abord en une fibre

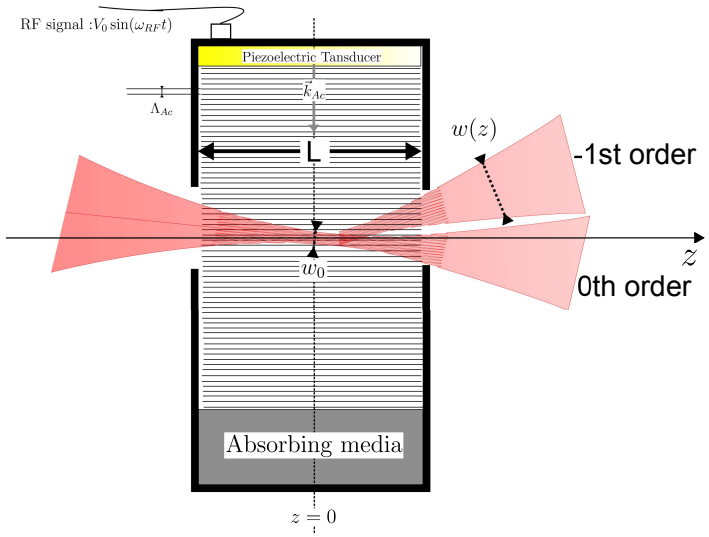

FIGURE 4.27 – Représentation schématique d'un faisceau gaussien injecté dans un Modulateur Acousto-Optique dont le cristal à une longueur L.

optique P1-780PM-FC-5 monomode à maintien de polarisation dans laquelle on a injecté l'ordre 0 provenant du Modulateur Acousto-Optique qui contrôle le faisceau sonde nous servant à faire l'imagerie par absorption, afin de rendre bien gaussien le mode du faisceau que l'on va injecter dans l'AOM nous servant à réaliser la coupure rapide. En sortie de fibre nous avons placé un collimateur afin que le mode gaussien soit bien collimaté et nous faisons passer ce dernier par un télescope confocal, composé d'une première lentille de focale $f = 200$mm et d'une deuxième lentille de focale $f = 100$mm, afin de réduire dans un premier temps le waist du faisceau d'un facteur 2. Nous nous servons ensuite d'un deuxième télescope confocal dont la première lentille a une courte focale ($f = 50$mm) afin que le waist du faisceau à l'intérieur du Modulateur Acousto-Optique soit petit. Nous nous affranchissons de l'ordre 0 de l'AOM à l'aide d'un diaphragme et nous injectons l'ordre -1 dans une fibre optique monomode à maintien de polarisation afin d'envoyer le faisceau sur le nuage d'atomes.

Il est cependant légèrement erroné de croire que plus le faisceau injecté dans le Modulateur Acousto-Optique sera focalisé plus le temps d'extinction sera court. En effet dans l'approximation de l'optique gaussienne, bien que le faisceau ait un diamètre d_o très petit à l'intérieur du Modulateur, sa divergence fait qu'il existe un rapport 'longueur du cristal/longueur de Rayleigh (z_R)' afin que le temps d'extinction soit optimum. En effet l'extinction du faisceau se fait sur la totalité du waist $w(L/2)$ du faisceau en sortie et en entrée du modulateur (figure 4.27). Selon le constructeur, le temps typique d'allumage '10%-90%' du Modulateur Acousto-Optique est donné par la formule :

$$t1_{all} = 0.66 \frac{d_o}{V_{ac}}. \tag{4.58}$$

où $d_o = 2w_0$ est le diamètre du faisceau et V_{ac} est la vitesse de l'onde acoustique dans le cristal du modulateur. La limitation de ce temps étant le temps de transite de l'onde acoustique à travers le faisceau optique. Bien que le temps d'allumage et les temps d'extinction ne soient pas tout à fait égaux à cause d'un décalage Doppler lié à la propagation dans un sens de l'onde acoustique on peut poser pour le temps d'extinction $t1_{all} \simeq t1_{ext}$. Il est aussi communément adopté que le temps d'allumage est plus rapide lorsque le faisceau

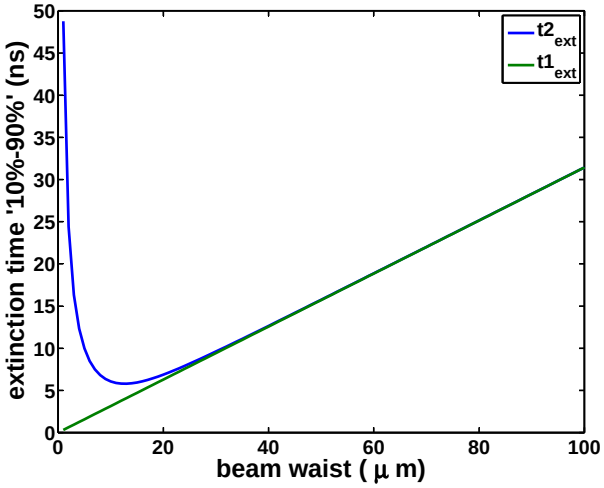

FIGURE 4.28 – Évolutions des temps d'extinction donné par les équations (4.58) (courbe verte) et (4.61) (courbe bleu) en fonction du waist w_0 du faisceau à l'intérieur du Modulateur Acousto-Optique. On remarque clairement que la prise en compte de la divergence du faisceau à l'intérieur du modulateur amène à des différences drastiques lorsque la longueur de Rayleigh z_R du faisceau devient égale à la taille du cristal.

est injecté dans l'ordre $+1$ et que le temps d'extinction est plus rapide lorsque le faisceau est injecté dans l'ordre -1.

Il faut cependant noter que l'expression donnée à l'équation (4.58) ne tient pas compte de la divergence du faisceau à l'intérieur du Modulateur Acousto-Optique qui peut devenir dans le cas d'un faisceau fortement focalisé dans l'AOM un facteur limitant. En faisant l'hypothèse que le point où est focalisé le faisceau est effectivement au centre du cristal du modulateur $w(z=0)=w_0$, il est possible de connaître la valeur du waist du faisceau selon son axe de propagation z dans tout le cristal tel que :

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}. \tag{4.59}$$

avec z_R la longueur de Rayleigh définie telle que $z_R = \pi w_0^2/\lambda$. On peut donc définir le temps d'extinction $t2_{ext}(w_0)$ en tenant compte de la divergence du faisceau dans le modulateur tel que :

$$t2_{ext}(w_0) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{d}z \frac{1.32 w(z)}{V_{ac}} \tag{4.60}$$

ce qui nous donne au final comme expression du temps d'extinction :

$$t2_{ext}(w_0) = \frac{1.32}{V_{ac}}\frac{z_R w_0}{L}\left(\frac{L}{2z_R}\sqrt{1+\left(\frac{L}{2z_R}\right)^2} + \mathrm{Argsh}\left(\frac{L}{2z_R}\right)\right). \tag{4.61}$$

La figure 4.28 nous montre l'évolution des temps d'extinctions $t1_{ext}$ et $t2_{ext}$ en fonction du waist w_0 du faisceau dans le Modulateur Acousto-Optique. Ici nous avons pris comme paramètres (longueur du cristal, célérité de l'onde acoustique...) ceux donnés dans les spécifications pour le Modulateur Acousto-Optique que nous utilisons au cours de nos

expériences c'est à dire une vitesse d'onde acoustique $V_{ac} = 4.2\text{mm}.\mu\text{s}^{-1}$ et une longueur de cristal $L = 2.5\text{mm}$. On remarque clairement qu'à partir d'un waist de 20μm l'influence de la divergence du faisceau sur le temps d'extinction devient non négligeable pour aboutir au-delà pour un waist de faisceau qui tend vers 0 à une divergence de faisceau qui devient infinie. Cela nous montre donc que la prise en compte de la divergence du faisceau gaussien devient importante lorsque l'on cherche à optimiser les temps d'extinction et d'allumage du faisceau par un Modulateur Acousto-Optique. Ici on observe que le temps d'extinction minimum que l'on puisse atteindre avec notre AOM est de 5.7ns pour un waist de 13μm ce qui est bien inférieur aux contraintes imposé par le temps typique d'émission d'un atome $\tau_{at} = 27\text{ns}$.

Un point important à souligner que nous avons énoncé au début de cette section est qu'il faut à la fois éteindre rapidement le faisceau avec un bon taux d'extinction également. Vu que nous disposons d'une certaine marge vis à vis du temps d'extinction minimum $\min(t2_{ext}) = 5.7\text{ns}$ comparé au temps associé à la largeur naturelle de l'état excité $\tau_{at} = 27\text{ns}$, nous avons choisi de travailler avec un faisceau dont le waist est $w_0 = 38\mu$m afin de ne pas trop détériorer le taux d'extinction et de garder un temps d'extinction faible devant $t2_{ext} = 12\text{ns} < \tau_{at} = 26\text{ns}$.

Nous avons également veillé à optimiser l'extinction électronique du signal Radio Fréquences afin de s'assurer qu'il ne subsistait une puissance optique résiduelle injectée dans l'ordre -1 due à une mauvaise extinction électrique. Pour cela nous avons choisi d'utiliser un switch (interrupteur) Mini Circuits ZYSWA-2-50DR de bande passante 5GHz afin de faire basculer le signal RF d'un canal allant vers l'amplificateur vers un canal auquel nous avons connecté à un bouchon d'impédance 50Ohm pour couper le signal électrique. Le temps de coupure du switch $t_{ext,elec} = 5\text{ns}$ n'est pas en soi un facteur limitant c'est pourquoi nous nous somme concentré sur le taux d'extinction du signal RF en sortie de switch La figure 4.29 montre le spectre du signal RF lorsqu'un switch laisse passer le signal (courbe bleue) lorsqu'un switch est éteint (courbe rouge) et lorsque deux switchs branchés en série sont éteints (courbe verte). On remarque que l'utilisation d'un unique switch ne parvient pas à éteindre totalement le signal dans la mesure où on continue d'observer un signal très faible (à -82.7dBm). Bien que ce signal pourrait être négligé il ne faut pas oublier que nous avons effectué la mesure avant l'amplificateur de puissance ce qui peut avoir des conséquences néfastes sur une éventuelle puissance optique résiduelle dans l'ordre -1 que l'on cherche à couper au mieux. Nous avons donc choisit de travailler avec deux switch de la même référence branchés en série et contrôlé par le même signal TTL (0-5V).

5.3 Perspectives sur les expériences de sousradiance.

A ce stade il nous reste à travailler sur un système de détection rapide "propre". Plusieurs dispositifs ont été testés (Photodiode Ultra Rapide, Photodiode à avalanche, Photo Multiplicateur...) et tous présentent des limites à l'observation des signaux atomiques de sousradiance. En effet afin d'observer une signature de la sousradiance dans nuage d'atomes froids dilués, les expériences de fluorescence doivent s'effectuer loin de résonance $\Delta_0 \simeq 5\Gamma_0$ afin de ne pas être pollué par les effets de piégeage de la lumière lié à la diffusion multiple [40] et d'être aussi dans le régime de diffusion simple $b(\Delta_0) < 1$ ce qui réduit considérablement le rapport signal à bruit de ce type d'expérience. A ce jour la solution pour laquelle nous avons opté est l'utilisation d'un Photo Multiplicateur de la marque

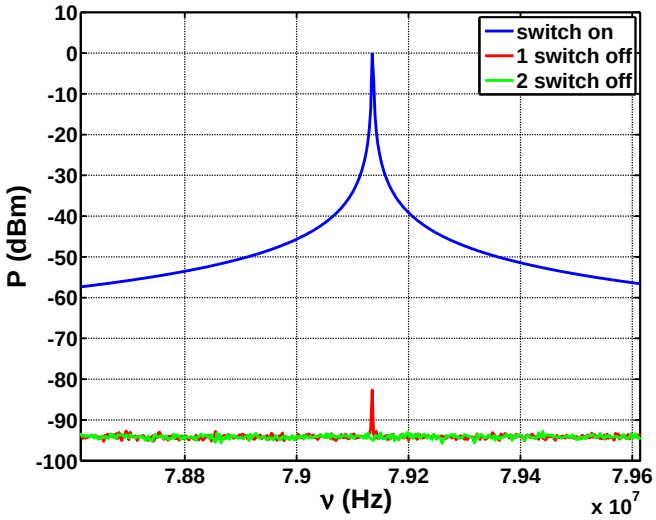

FIGURE 4.29 – Spectre représentant la porteuse centrée sur la fréquence centrale de l'oscillateur électrique en tension avec un switch allumé (courbe bleue), un switch éteint (courbe rouge) et deux switch branchés en série contrôlé par le même signal TTL (courbe verte). On remarque bien que lorsque l'on utilise qu'un seul switch le signal électrique bien qu'il soit faible n'est pas totalement éteint.

Perkin Helmer en mode comptage de photon. Cependant les effets lié à l'after pulse de ce type de système de détection sont le principal facteur limitant à l'observation de signaux atomique nous permettant d'obtenir une indication sur l'existence d'état sousradiants.

Il faut également remarquer que les calculs théoriques [35] ont été élaborés dans l'approximation scalaire, qui est, comme nous l'avons vu précédemment dans ce manuscrit, un modèle très simplifié et parfois erroné. Un point intéressant serait de refaire les même calculs en prenant en compte le caractère vectoriel de la lumière ainsi que les effets liés à l'échange de photons virtuels en ne faisant pas l'approximation de l'onde tournante [21, 53].

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

Au cours de ce travail de thèse nous avons tout d'abord étudié numériquement les effets coopératifs et la localisation de la lumière dans un nuage d'atomes froids dont la taille est grande devant la longueur d'onde en effectuant une comparaison systématique entre l'approximation scalaire pour la lumière et la situation où son caractère vectoriel est considéré. L'étude expérimentale des effets coopératifs nous a permis de vérifier la validité de l'approximation Timed Dicke au régime de diffusion simple et nous avons également observé une réduction drastique de la force appliquée au centre de masse du nuage dans le régime de diffusion multiple.

L'étude des valeurs propres de l'Hamiltonien effectif d'interaction matière rayonnement au chapitre 3 nous a permis de mettre en évidence des comportements liées aux effets coopératifs dans le sens qu'ils dépendent de l'épaisseur optique b_0 tout comme l'évolution de l'exposant de la décroissance algébrique des distributions des largeurs de modes $P(\Gamma_{at})$ ou encore dans le formes des distributions des distance plus proches voisins dans le plan complexe $P(s)$. Pour les distributions des largeurs des modes, la loi de puissance que nous avons observée dans les cas scalaire et vectoriel se rapproche plus d'un comportement relié à de la diffusion anormale au point critique [36] ($P(\Gamma_{at}) \propto \Gamma_{at}^{-4/3}$) contrairement à ce qu'affirment d'autres études associant cette décroissance algébrique à des modes localisés fuyant à travers la bordure du système [26]. Nous avons également vu dans les deux cas (scalaire et vectoriel) que les largeurs maximum moyennes Γ_{Max} étaient dominées par les effets coopératifs contrairement aux largeurs minimum moyennes Γ_{min} qui sont dominées par les paires coopératives d'atomes dans la limite des nuages dilués ($\rho\lambda^3 \lesssim 26$). Dans la limite de milieux denses $\rho\lambda^3 > 26$, nous avons vu que les paires sousradiantes continuent de dominer les modes aux plus longs temps de vies dans le cas vectoriel alors qu'un autre type de mécanisme différent de celui des paires coopératives semble apparaître dans le cas scalaire. Il faut cependant être prudent avant de relier ce comportement, apparaissant aux grande densités $\rho\lambda^3 \gg 1$ dans le cas scalaire, à des effets de localisation forte de type Anderson dans la mesure où la diminution du degré de recouvrement entre les modes

κ (qui peut être une signature de la localisation d'Anderson) en fonction de la taille $k_0 L$ du système est encore observée pour des milieux dont la taille est inférieure à la longueur d'onde et que la superradiance de Dicke est clairement observée. De plus ce comportement est également observé dans le cas d'un réseau cubique ce qui ne va pas dans le sens d'une localisation liée à un désordre spatial dans les positions des atomes. A ce stade il est donc difficile d'affirmer que l'observation de modes localisés au sens d'Anderson soit possible dans le type de système que nous considérons. Cela ne veut pas dire qu'il sera impossible d'observer ce type de comportement dans un nuage d'atomes froids car il est tout à fait envisageable d'ajouter des artifices supplémentaires au modèle que nous avons considéré soit en ajoutant un désordre diagonal (en introduisant par exemple un déplacement lumineux de l'état excité à l'aide d'un speckle ou encore en levant la dégénérescence Zeeman à l'aide d'un gradient de champ magnétique) soit en considérant d'autre types d'interactions entres les atomes que l'interaction dipolaire électrique. Il est à noter que la prise en compte de ces phénomènes physique peut également avoir un impact sur les effets coopératifs.

Contrairement au spectre et aux états propres de l'Hamiltonien effectif, la considération du taux d'émission du photon $\Gamma_{h\nu}$ du nuage, relié au spectre de la partie imaginaire de H_{eff} ne montre que peu de différence entre les cas scalaire et vectoriel que ce soit dans la limites des milieux denses ou dilués. Dans les deux cas, l'étude de cette quantité permet de mettre en évidence un comportement d'échelle que l'on peut associer aux effets coopératifs dans la mesure où le paramètre pertinent est l'épaisseur optique b_0, sans pour autant qu'il y ait observation d'une transition de phase. Le mécanisme supposé à la base de ce comportement d'échelle est une synchronisation entre les dipôles liée aux interactions longues portées.

L'étude expérimentale systématique des effets coopératifs en se basant sur la procédure élaborée dans la référence [28] nous a permis de mettre en évidence l'invalidité de l'approximation Timed Dicked dans le régime de diffusion multiple. En effet lorsque ce régime est atteint un décrochement systématique des données expérimentales par rapport aux prédictions données par les solutions Timed Dicked est observé. Nous avons également observé un décrochement apparaissant de manière symétrique par rapport à la transition atomique pour un désaccord du faisceau incident $\Delta_0 = \pm 3.5\Gamma_0$ et dans le régime de diffusion simple. A ce stade nous n'avons pas réussi à le relier aux résonances de Mie que nous cherchions au début de cette campagne de mesures. Nous avons également observé une réduction drastique de la force appliquée au centre de masse du nuage dans le régime de diffusion multiple. Dans l'état actuel des choses nous n'avons pas encore réussi à démontrer que cette réduction drastique de la force était reliée à un effet cohérent survivant dans le régime de diffusion multiple dans le sens où les prédictions théoriques données par un modèle de type Equation de Transfert Radiatif ne tenant pas compte des effets d'interférences et celles données par les solutions Many Body ne présentes que peu de différences et sont en accords qualitatif avec nos donnée expérimentales. Un point intéressant serait de savoir dans quelles gammes de paramètres il est possible de mettre en évidence un effet cohérent dans le régime de diffusion multiple dont la mécanisme de base serait les interactions longues portées présentées dans les solutions Many Body (tout comme dans l'Hamiltonien effectif H_{eff} que nous avons étudié précédemment) ce qui nous permettrait par exemple de faire un parallèle avec le modèle de Heisenberg [185], utilisé afin d'expliquer les effets de supraconductivité à haute température critique, ouvrant un tout nouveau champ dans le domaine des atomes froids. Enfin il se peut tout à fait que dans la gamme de paramètres que nous avons exploré expérimentalement, la force ne soit

pas la bonne observable afin de mettre en évidence des effets coopératifs dans le régime de diffusion multiple.

En conclusion, les perspectives de ce travail de thèse sont multiples. Tout d'abord en ce qui concerne les études des valeur propres de l'Hamiltonien effectif, la prises en compte de phénomène physiques supplémentaires tels que un déplacement lumineux des états excité, la vitesse de atomes ou encore des couplages entre atomes autres que le couplage dipolaire électrique pourrait amener à l'observation de comportement forts intéressant dans le domaines de la localisation et des effets coopératifs. Un dernier point intéressant déjà abordé par certaines études [53, 21] serait de na pas faire certaines approximations (comme l'approximation de l'onde tournante, l'approximation de Born Markov...) afin de voir leurs influence sur les effets coopératifs.

Enfin d'un point de vue expérimental, les perspectives ouvertes par l'étude de la Diffusion Multiple Cohérente peuvent faire des systèmes tels que les nuages d'atomes froids, un milieu test afin d'étudier des effets cohérents induits par les interactions longues portées et robustes dans le régime de diffusion multiple. Un point expérimental difficile à réaliser serait d'arriver à mesurer *in situ* la phase de dipôles atomiques dans le nuage afin de voir si la cohérence de cette dernière est observable expérimentalement ce qui serait en accord avec les observations théoriques en cours. Un dernier point qui ouvrirait un tout nouveau champ dans le domaine des atomes froids serait de travailler sur un mapping entre le modèle de Heisenberg et le modèle Many Body afin de comprendre quelle est l'importance des effets coopératifs dans des phénomènes physiques tels que la supraconductivité à haute température critique.

Annexe A

Dérivation de l'équation sur l'amplitude des dipôles dans les cas scalaire et vectoriel.

Dans cette section nous dérivons de la même manière les équations sur les dipôles dans les cas scalaire et vectoriel. Le cas scalaire étant bien connus il servira de référence à la dérivation du cas vectoriel plus complexe. Nous nous servirons aussi de la dérivation du cas scalaire afin de discuter des différentes approximations qui peuvent être faites et de leurs conséquences sur la physique que nous étudions.

1 Dérivation de l'équation sur les dipôles dans le cas scalaire.

Commençons par expliciter le Hamiltonien interaction matière rayonnement dans la jauge $(D.E)$ pour le cas scalaire :

$$H = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega_0 |e^i\rangle\langle e^i| + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - \sum_{i=1}^{N} D_i.E(\mathbf{r}_i) \tag{A.1}$$

avec l'opérateur $|e^i\rangle\langle e^i|$, le projecteur décrivant l'atome i dans son état excité, n'agissant que dans le sous espace de Hilbert de cet atome, $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ $(a_{\mathbf{k}})$ correspondant à l'opérateur création (annihilation) d'un photon dans le mode $\mathbf{k}$, D_i l'opérateur dipôle associé à l'atome i et $E(\mathbf{r}_i)$ l'opérateur champ électrique transverse à la position $\mathbf{r}_i$.

Le choix de l'utilisation de la jauge $(D.E)$ nécessite cependant quelques précautions. En effet cette approximation est valable si la variation spatiale du champ est négligeable à

l'échelle de la taille du dipôle, qui est un atome dans le cas que nous considérons. Sachant que la taille pour un atome est de l'ordre de 1Å et que les longueurs d'ondes que nous considérons sont de l'ordre de quelques centaines de nanomètres cette approximation peut être considérées comme valide. Dans le cas contraire il aurait fallu introduire une fréquence de coupure ω_C proportionnelle à l'inverse du rayon de Bohr a_0 telle que $\omega_C = ck_C = c2\pi/a_0$ afin de ne pas considérer les longueurs d'ondes égales ou inférieures à la taille de l'atome.

L'opérateur dipôle peut être séparé en deux termes tels que :

$$D_i = D_i^{(+)} + D_i^{(-)} \tag{A.2}$$

avec $D_i^{(+)}$ correspondant à l'excitation de l'atome i

$$D_i^{(+)} = d|e^i\rangle\langle g^i| \tag{A.3}$$

d étant l'élément de dipôle réduit associé à la transition $e-g$ et $D_i^{(-)} = \left[D_i^{(+)}\right]^\dagger$ correspondant à la désexcitation de ce même atome. On peut procéder de la même manière avec l'opérateur champ électrique :

$$E(\mathbf{r}) = E^{(+)}(\mathbf{r}) + E^{(-)}(\mathbf{r}) \tag{A.4}$$

où $E^{(+)}(\mathbf{r})$ correspond à l'absorption d'un photon pouvant être exprimé comme :

$$E^{(+)}(\mathbf{r}) = i\sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} \tag{A.5}$$

et $E^{(-)} = \left[E^{(+)}\right]^\dagger$. Il est a noter que les opérateurs dipôle et champ sont des opérateurs scalaires. Afin de tracer sur les degrés de liberté du champ il faut résoudre les équations d'évolution des opérateurs création et annihilation en représentation d'Heisenberg tel que :

$$\frac{\mathrm{d}a_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}[a_{\mathbf{k}}, H] \tag{A.6}$$

qui s'explicite :

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} = -i\omega_k a_{\mathbf{k}}(t) + \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}\hbar}} D_j(t) e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j} \tag{A.7}$$

Afin d'obtenir cette équation il faut utiliser la relation de commutation sur les opérateurs création et annihilation :

$$[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k'}}] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{A.8}$$

et aussi utiliser la formule $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$. La solution de l'équation (A.7) s'écrit :

$$a_{\mathbf{k}}(t) = e^{-i\omega_k t} a_{\mathbf{k}}(0) + \int_0^t dt' \sum_{j=1}^{N}\sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}\hbar}} D_j(t-\tau) e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j} e^{-i\omega_k\tau} \tag{A.9}$$

avec $\tau = t - t'$. L'utilisation de la notation $D_j(t-\tau)$ plutôt que $D_j(t')$, pourtant plus légère, sera justifiée plus tard dans le calcul.

Il est utile de remarquer que le premier terme de l'équation précédente correspond à la propagation libre du champ en l'absence d'atomes et que le second correspond au

champ émis par les atomes. En procédant de la même manière sur l'équation d'évolution de l'opérateur création on obtient :

$$a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) = e^{i\omega_k t} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(0) + \int_0^t dt' \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \mathcal{V}\hbar}} D_j(t-\tau) e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j} e^{i\omega_k \tau} \tag{A.10}$$

En réinjectant les équations (A.9) et (A.10) dans l'expression de l'opérateur champ électrique on obtient la relation :

$$E(\mathbf{r},t) = E_{free}(\mathbf{r},t) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mathbf{k}} \int_0^t dt' \frac{\omega_k}{2\epsilon_0 \mathcal{V}} \left[i D_j(t-\tau) e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} e^{-i\omega_k \tau} + h.c \right] \tag{A.11}$$

Avec $E_{free}(\mathbf{r},t)$ correspondant au champ du laser incident tel que $E_{free}(\mathbf{r},t) = \frac{E_L}{2} e^{i(\mathbf{k}_L.\mathbf{r}-\omega t)} + h.c$. A ce stade, il n'a pas encore été fait d'approximations de type onde tournante et l'hypothèse que dans l'état stationnaire, tous les dipôles oscillent à la même fréquence que laser incident, est faite, posant ainsi la moyenne de l'opérateur dipôle sur les degrés de liberté du champ et internes des atomes, telle que :

$$D_j(t) = d_j(t) e^{-i\omega_L t} + h.c \tag{A.12}$$

Il utile de discuter la signification d'une telle approximation. En effet, contrairement aux calculs des articles [22] et[24], une dépendance temporelle pour les quantités d_j et $d_j^{\dagger}$ a été gardée. En réalité ces quantités peuvent être reliées aux amplitudes des dipôles au temps t auxquelles on impose une phase supplémentaire : celle du laser incident. Afin d'obtenir l'approximation faite à l'équation (A.12), l'hypothèse d'une faible intensité du laser incident a été faite ($\Omega_0 \ll \Gamma_0$ où Γ_0 et Ω_0 seront deux quantités définies à la fin du calcul) afin de rester dans le cadre de l'optique linéaire. Cette hypothèse est équivalente à restreindre notre étude au sous espace de Hilbert des N atomes contenant au plus une excitation, dont la base est décrite par les états $|G\rangle$, qui est l'état décrivant tous les atomes sont dans l'état fondamental, et $|e^j\rangle$, décrivant l'état où l'atome j est excité. Avec les deux hypothèses faites précédemment on peut donc écrire l'état propre du système dans cette base au temps t tel que :

$$|\Psi(t)\rangle = |G\rangle + \sum_{j=1}^{N} d_j(t) e^{-i\omega_L t} |e_j\rangle \tag{A.13}$$

qui nous permet d'expliciter l'équation (A.12). De la même manière une approximation similaire est faite sur l'opérateur champ tel que :

$$E(\mathbf{r},t) = \bar{E}(\mathbf{r},t) e^{-i\omega_L t} + h.c \tag{A.14}$$

On verra plus tard dans le calcul que la dépendance temporelle de l'amplitude $\bar{E}(\mathbf{r},t)$ est directement reliée à celle de l'amplitude du dipôle. Cette deuxième approximation sera utilisée un peu plus tard dans le calcul. En se rappelant la définition faite pour le champ du laser incident à l'équation (A.11), on en déduit que $\bar{E}(\mathbf{r},t) = \frac{E_L}{2} e^{i\mathbf{k}_L.\mathbf{r}} + \bar{E}_{(s)}$, où $\bar{E}_{(s)}$ est relié à l'amplitude du champ émis par les atomes.

Afin de réinjecter l'expression des dipôles précédemment obtenues dans l'équation (A.11), il faut faire l'approximation de Markov, qui suppose qu'il n'y a pas d'effet de

mémoire lors des processus d'absorption-réémission du photon par les atomes, en posant :

$$D_j(t-\tau) = d_j(t)e^{-i\omega_L(t-\tau)} + h.c \tag{A.15}$$

Cette approximation me permettra de sortir $d_j(t)$ et $d_j^\dagger(t)$ des intégrales sur t'. Notons que cette approximation est valide lorsque le temps entre deux évènements successifs de diffusion du photon est bien inférieur au temps que met ce dernier à traverser le nuage.

On se concentre Pour la suite du calcul sur le deuxième terme de l'équation (A.11) en y réinjectant les approximations faites sur l'opérateur dipôle , ce qui donne :

$$\begin{aligned} E_{(s)}(\mathbf{r},t) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^t dt' \frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}} \\ \Bigg[i\Big(d_j(t)e^{-i\omega_L(t-\tau)} + d_j^\dagger(t)e^{i\omega_L(t-\tau)}\Big)e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}e^{-i\omega_k\tau} \\ - i\Big(d_j(t)e^{-i\omega_L(t-\tau)} + d_j^\dagger(t)e^{i\omega_L(t-\tau)}\Big)e^{-i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}e^{i\omega_k\tau}\Bigg] \end{aligned} \tag{A.16}$$

et on sépare les termes en $exp(i\omega_L t)$ de ceux en $exp(-i\omega_L t)$:

$$\begin{aligned} E_{(s)}(\mathbf{r},t) = i\sum_{j=1}^{N}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^t dt' \frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}} \\ \Bigg[d_j(t)e^{-i\omega_L t}\Big(e^{-i(\omega_k-\omega_L)\tau}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} - e^{i(\omega_k+\omega_L)\tau}e^{-i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\Big) \\ + d_j^\dagger(t)e^{i\omega_L t}\Big(e^{-i(\omega_k+\omega_L)\tau}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} - e^{i(\omega_k-\omega_L)\tau}e^{-i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\Big)\Bigg] \end{aligned} \tag{A.17}$$

En se rappelant l'hypothèse faite à l'équation (A.14) on se concentre désormais sur les termes en $exp(-i\omega_L t)$ ce qui nous donne :

$$\bar{E}_{(s)}(\mathbf{r},t) = i\sum_{j=1}^{N}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^t dt' \frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}\Bigg[d_j(t)\Big(e^{-i(\omega_k-\omega_L)\tau}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} - e^{i(\omega_k+\omega_L)\tau}e^{-i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\Big)\Bigg] \tag{A.18}$$

Dans la limite où t tend vers $+\infty$, l'intégrale temporelle peut être simplifiée en utilisant les expressions :

$$\begin{aligned} I_{(-)} &= \int_0^t dt' e^{-i(\omega_k-\omega_L)\tau} = \pi\delta(\omega_k-\omega_L) - i\frac{P}{\omega_k-\omega_L} \\ I_{(+)} &= \int_0^t dt' e^{i(\omega_k+\omega_L)\tau} = \pi\delta(\omega_k+\omega_L) + i\frac{P}{\omega_k+\omega_L} \end{aligned} \tag{A.19}$$

et je réinjecte les intégrales $I_{(-)}$ et $I_{(+)}$ dans l'expression du champ source :

$$\bar{E}_{(s)}(\mathbf{r},t) = i\sum_{j=1}^{N}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}\Bigg[d_j(t)\Big(I_{(-)}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} - I_{(+)}e^{-i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\Big)\Bigg] \tag{A.20}$$

A ce stade l'approximation d'une diffusion quasi résonnante est faite en posant $k_L \approx k_0$ dans les expressions des intégrales. En réalité il n'est pas mathématiquement correcte

de faire de manière abrupte cette substitution car cela aura pour conséquence la non convergence des intégrales (A.19). Il est plus exact de dire que la pulsation du laser ω_L est très proche de la pulsation associée à la transition atomique telle que $\omega_L = \omega_0 + \epsilon$ avec $\epsilon \to 0$. En effet cette situation est plutôt réaliste dans le cadre des expériences que nous considérons car le désaccord du faisceau incident est très petit devant pulsation ω_0 reliée à la transition atomique. Ensuite je me sert de la formule $\sum_{\mathbf{k}} exp(-i\mathbf{k}.\mathbf{R})f(k) = \sum_{\mathbf{k}} exp(i\mathbf{k}.\mathbf{R})f(k)$ (annexe de [**?**])afin de réécrire l'expression précédente ce qui nous donne :

$$\bar{E}_{(s)}(\mathbf{r},t) = i\sum_{j=1}^{N}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}[d_j(t)(I_{(-)} - I_{(+)})]e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} \tag{A.21}$$

En faisant l'hypothèse que le volume $\mathcal{V}$ contenant un photon tend vers l'infini je peux remplacer la somme sur les vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ par une intégrale continue :

$$\sum_{\mathbf{k}} \to \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty} k^2 dk \int d\Omega_k \tag{A.22}$$

l'équation (A.20) peut alors s'écrire :

$$E_{(s)}(\mathbf{r},t) = i\sum_{j=1}^{N}\int_0^{+\infty} dk \int d\Omega_k \frac{k^2\omega_k}{16\pi^3\epsilon_0}[d_j(t)(I_{(-)} - I_{(+)})]e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)} \tag{A.23}$$

Je substitue $\mathbf{r}$ par $\mathbf{r}_i$ et pose pour la suite $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Compte tenu de l'intégrale angulaire :

$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_k e^{i\mathbf{k}.\mathbf{R}} = \frac{sin(kR)}{kR} \tag{A.24}$$

l'équation (A.23) devient :

$$E_{(s)}(\mathbf{r}_i) = i\sum_{j=1}^{N}\int_0^{+\infty} dk \frac{k^2\omega_k}{4\pi^2\epsilon_0}\frac{sin(kr_{ij})}{kr_{ij}}[d_j(t)(I_{(-)} - I_{(+)})] \tag{A.25}$$

Considérant que ω_k est une quantité strictement positive, le premier terme de l'intégrale $I_{(+)}$ ne vient pas contribuer au calcul de l'intégrale sur k. En se servant de la définition positive de ω_k, ce qui me permet d'étendre la borne inférieure de l'intégrale sur les k à moins l'infinis pour le premiers terme de l'intégrale $I_{(-)}$ sans modifier le préfacteur devant elle, et en se rappelant que c'est un delta de Dirac, je peux réécrire l'expression précédente comme :

$$E_{(s)}(\mathbf{r}_i) = i\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{k_0^3}{4\pi\epsilon_0}\frac{sin(k_0r_{ij})}{k_0r_{ij}}d_j(t) - iP\int_0^{+\infty} dk\frac{k^2\omega_k}{4\pi^2\epsilon_0}\left[d_j(t)\left(\frac{1}{\omega_k+\omega_0}+\frac{1}{\omega_k-\omega_0}\right)\frac{sin(kR)}{kR}\right]\right] \tag{A.26}$$

L'intégration du deuxième terme plus complexe je vais donc détailler mon calcul. Le terme en $k + k_0$ ne n'ayant pas de singularité entre 0 et $+\infty$ ne nécessite pas d'utiliser la valeur principale de Cauchy. Son intégration nous donne [50] :

$$\int_0^{+\infty} dk\frac{ck^3}{c(k+k_0)}\frac{sin(kR)}{kR} = \frac{k_0^3}{k_0R}[-cos(k_0R)si(k_0R) + sin(k_0R)ci(k_0) - 1] \tag{A.27}$$

avec les fonctions $ci()$ et $si()$ étant les cosinus et sinus intégrals. De la même manière en utilisant cette fois la valeur principale de Cauchy on obtient pour le terme en $k - k_0$:

$$\int_0^{+\infty} dk \frac{ck^3}{c(k-k_0)} \frac{sin(kR)}{kR} = \frac{k_0^3}{k_0 R}[cos(k_0 R)(si(k_0 R) + \pi) - sin(k_0 R)ci(k_0) + 1] \quad \text{(A.28)}$$

La somme des deux expressions (A.27) et (A.28) nous permet de réécrire l'équation (A.26) comme :

$$E_{(s)}(\mathbf{r}_i, t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{k_0^3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{cos(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}} + i \frac{sin(k_0 r_{ij})}{k_0 r_{ij}} \right) d_j(t) \quad \text{(A.29)}$$

J'obtiens au final une expression du champ total modifié tel que :

$$\bar{E}(\mathbf{r}_i) = \frac{E_L}{2} e^{i\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{k_0^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{k_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}} d_j \quad \text{(A.30)}$$

Il est utile de souligner le fait de ne pas s'être affranchis des termes "antirésonnants" en $\omega_k + \omega_0$, qui permettent au final d'obtenir le kernel exponentiel, en effet si nous nous étions affranchis de ces terme plus tôt dans le calcul le résultat serait inextricable. Un autre point important est qu'il est assumé de plein gré que la dépendance temporelle de l'amplitude du champ émis par les atomes est directement reliée à celle des dipôles au temps t. Afin d'avoir un système d'équations fermées on s'intéresse désormais à l'évolution de l'opérateur dipôle D_i en représentation de Heisenberg. Pour cela nous poseons les relations de commutation suivantes :

$$[D_i^{(+)}, D_j^{(-)}] = d^2(|e^i\rangle\langle e^i| - |g^i\rangle\langle g^i|) = d^2\sigma_z^i\delta_{ij} \quad \text{(A.31)}$$

$$[\sigma_z^i, D_j^{(\pm)}] = \pm 2 D_i^{(\pm)}\delta_{ij} \quad \text{(A.32)}$$

$$[|e^i\rangle\langle e^i|, D_j^{(\pm)}] = \pm D_i^{(\pm)}\delta_{ij} \quad \text{(A.33)}$$

En posant l'équation d'évolution de l'opérateur dipole relié à la désexcitation d'un atome D_i^- on obtient la relation suivante :

$$\dot{D}_i^{(-)}(t) = -i\omega_0 D_i^{(-)}(t) + \frac{1}{i\hbar} d^2\sigma_z^i . E(\mathbf{r}_i, t) \quad \text{(A.34)}$$

En utilisant les équations d'évolution des opérateurs création et annihilation eqs (A.7) à (A.69) afin de réexprimer l'opérateur champ électrique et en ne réinjectant que sa partie en $exp(-i\omega_L t)$ dans l'équation d'évolution de l'opérateur dipôle lié à la désexcitation de l'atome i on obtient :

$$\dot{D}_i^{(-)}(t) = -i\omega_0 D_i^{(-)}(t) + \frac{1}{i\hbar} d^2\sigma_z^i . \left(\frac{E_L}{2} e^{i(\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i - \omega_L t)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{k_0^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{k_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}} d_j(t) e^{-i\omega_L t} \right) \quad \text{(A.35)}$$

Un point intéressant à ce stade du calcul, est que nous avons d'abord explicité l'équation d'évolution de l'opérateur désexcitation en calculant son commutateur avec le Hamiltonien du système puis nous y avons réinjecté l'expression du champ électrique sommée sur les modes du vides. Le calcul aurait été bien plus complexe si nous avions tout d'abord réinjecté l'expression du champ électrique modifié puis calculé l'équation d'évolution de l'opérateur désexcitation sachant que l'opérateur champ électrique moyenné contient des opérateurs dipôles dans sa définition.

En se rappelant l'approximation faite à l'équation (A.12) d'une faible excitation permet de poser l'opérateur $\sigma_z^i = -\mathbb{1}$, où $\mathbb{1}$ est l'opérateur identité. L'équation précédente devient :

$$\dot{D}_i^{(-)}(t) = -i\omega_0 D_i^{(-)}(t) + \mathbb{1}\frac{i}{2}\frac{dE_L}{\hbar}de^{i(\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i-\omega_L t)} + \mathbb{1}\frac{id^2}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\frac{k_0^3}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{k_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}}d_j(t)e^{-i\omega_L t} \tag{A.36}$$

en réutilisant ensuite l'hypothèse faite à l'équation (A.37) et en posant :

$$D_i^{(-)}(t) = d_i(t)e^{-i\omega_L t} = d\sigma_i^{(-)}(t)e^{-i\omega_L t} \tag{A.37}$$

on peut réécrire l'équation d'évolution des dipôles telle que :

$$\dot{\sigma}_i^{(-)}(t) = i(\omega_L - \omega_0)\sigma_j^{(-)}(t) + \frac{i}{2}\frac{dE_L}{\hbar}e^{i\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i} + i\sum_{j=1}^{N}\frac{d^2k_0^3}{4\pi\hbar\epsilon_0}\frac{e^{k_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}}\sigma_j^{(-)}(t) \tag{A.38}$$

On reconnaît ici la largeur naturelle de l'état excité pour un atome à deux niveaux :

$$\Gamma = \frac{d^2k_0^3}{2\pi\hbar\epsilon_0} \tag{A.39}$$

la pulsation de Rabi telle que :

$$\Omega_0 = -\frac{dE_L}{\hbar} \tag{A.40}$$

et également le désaccord du laser tel que $\Delta_0 = \omega_L - \omega_0$. On peut donc réécrire l'équation précédente comme :

$$\dot{\sigma}_i^{(-)}(t) = i\Delta_0\sigma_j^{(-)} - i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i} + i\sum_{j=1}^{N}\frac{\Gamma}{2}\frac{e^{k_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}}\sigma_j^{(-)} \tag{A.41}$$

On remarque que pour $i = j$ la partie imaginaire du troisième terme de l'équation (A.41) est égale à $\Gamma/2$ ce qui nous permet de réécrire cette équation comme :

$$\dot{\sigma}_i^{(-)}(t) = (i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})\sigma_j^{(-)} - i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i} + i\sum_{j\neq i}^{N}\frac{\Gamma}{2}\frac{e^{k_0 r_{ij}}}{k_0 r_{ij}}\sigma_j^{(-)} \tag{A.42}$$

ce qui nous donne l'équation sur l'évolution de l'amplitude des dipôles dans le cas scalaire.

2 Dérivation de l'équation sur les dipôles dans le cas vectoriel.

Après avoir dérivé dans la section précédente l'équation sur les dipôles dans le cas scalaire un calcul similaire est effectué afin d'obtenir l'équation sur les dipôles dans le cas vectoriel. Le cas vectoriel, bien que légèrement plus complexe, n'est pas singulièrement différent du cas scalaire à l'exception des opérateurs qui sont désormais des opérateurs vectoriels dont les composantes sont exprimées dans la base cartésienne.

En partant de l'Hamiltonien interaction matière-rayonnement exprimé pour une transition $J = 0 \rightarrow J' = 1$ [22] :

$$H = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega_0 \sum_{\alpha,\alpha'} |e^i_\alpha\rangle\langle e^i_{\alpha'}|\delta_{\alpha\alpha'} + \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \hbar\omega_k a^\dagger_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} - \sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}_i.\mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \tag{A.43}$$

avec $|e^i_\alpha\rangle\langle e^i_{\alpha'}|$ le projecteur sur l'espace de Hilbert décrivant l'atome i dans son état excité selon la composante de polarisation α, exprimée dans la base cartésienne telle que $\alpha = x, y, z$, $a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}$ ($a^\dagger_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}$) les opérateurs annihilation et création d'un photon de polarisation $\hat{\varepsilon}$ dans le mode $\mathbf{k}$ ($\hat{\varepsilon}.\mathbf{k} = 0$), $\mathbf{D}_i$ l'opérateur dipôle pour l'atome i et $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ est l'opérateur champ électrique transverse à la position $\mathbf{r}_i$. De la même manière que dans la section précédente on peut séparer l'opérateur dipôle en deux termes tels que :

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}^{(+)}_i + \mathbf{D}^{(-)}_i \tag{A.44}$$

avec $\mathbf{D}^{(+)}_i$ correspondant à l'excitation de l'atome i :

$$\mathbf{D}^{(+)}_i = d \sum_{\alpha=x,y,z} |e^i_\alpha\rangle\langle g^i|\hat{u}_\alpha \tag{A.45}$$

d est encore l'élément dipôle réduit associé à la transition $e-g$, $\mathbf{D}^{(-)}_i = \left[\mathbf{D}^{(+)}_i\right]^\dagger$ correspond à la désexcitation de l'atome i et $\hat{u}_\alpha$ est le vecteur unitaire selon la direction α. On procède de la même manière avec l'opérateur champ électrique transverse :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}) \tag{A.46}$$

avec $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$ l'opérateur champ électrique correspondant à l'absorption d'un photon contenant désormais le vecteur polarisation de la lumière $\hat{\varepsilon}$ tel que :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} \hat{\varepsilon} \tag{A.47}$$

et $\mathbf{E}^{(-)} = \left[\mathbf{E}^{(+)}\right]^\dagger$. Afin de suivre la même procédure que dans la section précédente nous exprimons les équations d'évolution des opérateur création et annihilation en représentation de Heisenberg :

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} = -i\omega_k a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}(t) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}\hbar}} \mathbf{D}_j(t)\hat{\varepsilon}^* e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j} \tag{A.48}$$

La solution de l'équation (A.48) peut s'écrire comme :

$$a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}(t) = e^{-i\omega_k t} a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}(0) + \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} \mathbf{D}_i(t-\tau)\hat{\varepsilon}^* e^{-ikr_i} e^{-i\omega_k\tau} \tag{A.49}$$

Avec $\tau = t - t'$. A la différence de la section précédente le relation de commutation utilisée pour les opérateurs créations et annihilation est :

$$[a_{\mathbf{k}\hat{\varepsilon}}, a^\dagger_{\mathbf{k'}\hat{\varepsilon}'}] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'} \tag{A.50}$$

le kronecker sur les composantes en polarisations $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\varepsilon}'$ est une conséquence directe de l'orthogonalité entre le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et le vecteur polarisation du champ. En effet on considère que la base utilisée pour décrire les états de polarisation du champ est une base orthonormée décrite par l'ensemble de vecteurs $\hat{k}, \hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}'$.

Tout comme dans la section précédente on peut remarquer que le premier terme de l'équation (A.49) correspond au champ en l'absence de source et que le second terme correspond au champ émis par les sources. Le seule différence singulière avec l'expression développée à la section précédente est la présence de la somme sur les composantes α en polarisation des dipôles, qui sont implicitement dans la définition de l'opérateur $\mathbf{D}_j$, et de la somme sur le polarisation du champ ε. On procède de la même manière afin d'obtenir l'équation d'évolution pour l'opérateur création et on réinjecte ces expressions dans la définition de l'opérateur champ électrique transverse. On obtient au final une expression selon la composante α du champ électrique telle que :

$$E_\alpha(\mathbf{r},t) = E_{free}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\hbar}\sum_{i,\alpha'}\sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}}\int_0^t d\tau \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}\left[iD_{i,\alpha'}(t-\tau)e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}e^{-i\omega_k\tau}\hat{\varepsilon}_\alpha\hat{\varepsilon}^*_{\alpha'} + h.c\right] \quad \text{(A.51)}$$

où le terme de propagation libre du champ est réécris comme $E_{free}(\mathbf{r},t) = E_L\epsilon_\alpha e^{i(\mathbf{k}_L.\mathbf{r}-\omega t)} + h.c$. Ici, ϵ_α représente la polarisation du laser incident selon la direction α.

En se concentrant sur le terme source de l'équation (A.51) afin d'expliciter le potentiel d'interaction entre les dipôles dans le cas vectoriel, nous faisons l'hypothèse que dans l'état stationnaire tous les dipôles oscillent à la fréquence du laser [24] posant ainsi :

$$\mathbf{D}_i(t) = \mathbf{d}_i(t)e^{-i\omega_L t} + h.c \quad \text{(A.52)}$$

où $\mathbf{d}_i$ représente l'amplitude des dipôles au temps t selon les trois composantes en polarisation tel que : $\mathbf{d}_i(t) = \sum_{\alpha=x,y,z} d_{i,\alpha}(t)$. Afin d'obtenir proprement cette expression il faut se servir de la relation $\hat{u}_\alpha \cdot \hat{u}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ avec $\beta = x, y, z$. Reprenant l'approximation d'un faible excitation faite à la section précédente, la base canonique de l'espace de Hilbert des atomes contenant au plus une excitation peut être désormais décrit par les états $|G\rangle$, qui possède la même définition qu'auparavant et $|e_{i\alpha}\rangle$, qui décrit l'état où l'atome i est excité dans sa composante α. L'état propre décrivant le système au temps t exprimé dans dans cette bas peut s'écrire comme :

$$|\Psi(t)\rangle = |G\rangle + \sum_{j=1}^{N}\mathbf{d}_j(t)e^{-i\omega_L t}|e^j_\alpha\rangle \quad \text{(A.53)}$$

A ce stade il faut faire l'approximation de Markov en posant :

$$D_{j,\alpha}(t-\tau) = d_{j,\alpha}(t)e^{-i\omega_L(t-\tau)} + h.c \quad \text{(A.54)}$$

En y réinjectant les approximations faites précédemment sur l'opérateur dipôle, le deuxième terme de l'équation (A.51) devient :

$$E^{(source)}_\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\hbar}\sum_{i,\alpha'}\sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}}\int_0^t dt' \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}\left[i\left(d_{i,\alpha'}(t)e^{-i\omega_L(t-\tau)} + d^\dagger_{i,\alpha'}(t)e^{i\omega_L(t-\tau)}\right)e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}e^{-i\omega_k\tau}\hat{\varepsilon}_\alpha\hat{\varepsilon}^*_{\alpha'} + h.c\right] \quad \text{(A.55)}$$

A ce stade une approximation de type onde tournante n'est pas encore faite au même titre qu'à la section précédente et nous séparons les termes en $exp(-i\omega_L t)$ de ceux en $exp(i\omega_L t)$:

$$E_{(s)}(\mathbf{r},t) = i\sum_{j=1,\alpha'}^{N}\sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}}\int_0^t d\tau\frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}} \left[d_{j,\alpha'}e^{-i\omega_L t}\left(e^{-i(\omega_k-\omega_L)\tau}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\hat{\varepsilon}_\alpha\hat{\varepsilon}^*_{\alpha'} - e^{i(\omega_k+\omega_L)\tau}e^{-i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\hat{\varepsilon}^*_\alpha\hat{\varepsilon}_{\alpha'}\right) + d^\dagger_{j,\alpha'}e^{i\omega_L t}\left(e^{-i(\omega_k+\omega_L)\tau}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\hat{\varepsilon}_\alpha\hat{\varepsilon}^*_{\alpha'} - e^{i(\omega_k-\omega_L)\tau}e^{-i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\hat{\varepsilon}^*_\alpha\hat{\varepsilon}_{\alpha'}\right)\right] \quad \text{(A.56)}$$

En refaisant la même approximation que dans la section précédente sur l'opérateur champ électrique transverse qui consiste à séparer sa moyenne quantique dans l'état stationnaire en deux termes oscillants respectivement à $i\omega_L t$ et $-i\omega_L t$ tel que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega_L t} + h.c, \quad \text{(A.57)}$$

et en se concentrant désormais sur les termes oscillants en $-i\omega_L t$, on obtient :

$$\bar{E}_{(s),\alpha}(\mathbf{r}) = i\sum_{j=1,\alpha'}^{N}\sum_{\mathbf{k},\hat{\varepsilon}}\int_0^t d\tau\frac{\omega_k}{2\epsilon_0\mathcal{V}}\left[d_{j,\alpha'}\left(e^{-i(\omega_k-\omega_L)\tau}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\hat{\varepsilon}_\alpha\hat{\varepsilon}^*_{\alpha'} - e^{i(\omega_k+\omega_L)\tau}e^{-i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\hat{\varepsilon}^*_\alpha\hat{\varepsilon}_{\alpha'}\right)\right]. \quad \text{(A.58)}$$

En considérant que le vecteur polarisation est réel (i.e $\varepsilon = \varepsilon^*$)et en réutilisant les identités exprimées à la section précédente (eqs. A.22 et A.19) on peut réécrire l'expression précédente comme :

$$\bar{E}_{(s),\alpha}(\mathbf{r},t) = i\sum_{j=1,\alpha'}^{N}\int_0^\infty dk\int d\Omega_k\sum_{\hat{\varepsilon}\perp\mathbf{k}}\frac{k^2\omega_k}{16\pi^3\epsilon_0}\left[d_{j,\alpha'}\left((I_{(-)}-I_{(+)})\hat{\varepsilon}_\alpha\hat{\varepsilon}_{\alpha'}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\right)\right] \quad \text{(A.59)}$$

La somme sur les vecteurs polarisations du champ peut se réécrire :

$$\sum_{\hat{\varepsilon}\perp\mathbf{k}}\hat{\varepsilon}_\alpha\hat{\varepsilon}_{\alpha'} = \left(\delta_{\alpha\alpha'} - \frac{k_\alpha k_{\alpha'}}{k^2}\right) \quad \text{(A.60)}$$

que l'on réinjecte dans l'expression (A.59) :

$$\bar{E}_{(s),\alpha}(\mathbf{r}) = i\sum_{j=1,\alpha'}^{N}\int_0^\infty dk\int d\Omega_k\frac{k^2\omega_k}{16\pi^3\epsilon_0}\left[d_{j,\alpha'}\left((I_{(-)}-I_{(+)})\left(\delta_{\alpha\alpha'}-\frac{k_\alpha k_{\alpha'}}{k^2}\right)e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}\right)\right] \quad \text{(A.61)}$$

En utilisant l'expression sur la sommation des vecteurs polarisations, l'intégrale angulaire nous donne [186] :

$$\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_k e^{i\mathbf{k}.\mathbf{R}}\left(\delta_{\alpha\alpha'}-\frac{k_\alpha k_{\alpha'}}{k^2}\right) = \left(\delta_{\alpha\alpha'}-\frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2}\right)\frac{sin(kr)}{kr}+\left(\delta_{\alpha\alpha'}-3\frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2}\right)\left(\frac{cos(kr)}{(kr)^2}-\frac{sin(kr)}{(kr)^3}\right) = \tau_1(kr) \quad \text{(A.62)}$$

ce qui nous permet de réécrire l'équation (A.61) :

$$\bar{E}_{(s),\alpha}(\mathbf{r}_i) = i\sum_{j=1,\alpha'}^{N}\int_0^\infty dk\frac{k^2\omega_k}{4\pi^2\epsilon_0}\left[d_{j,\alpha'}\left((I_{(-)}-I_{(+)})\tau_1(kr_{ij})\right)\right] \quad \text{(A.63)}$$

[1] En reprenant les mêmes arguments qui nous ont permis d'obtenir l'équation (A.26) il est possible de réécrire l'équation précédente comme :

$$\bar{E}_{(s),\alpha}(\mathbf{r}_i) = i\sum_{j=1,\alpha'}^{N}\left[\frac{k_0^3}{4\pi\epsilon_0}\tau_1(k_0 r) - iP\int_0^{\infty} dk\frac{k^2\omega_k}{4\pi^2\epsilon_0}d_{j,\alpha'}\left(\frac{1}{\omega_k+\omega_0}+\frac{1}{\omega_k-\omega_0}\right)\tau_1(kr_{ij})\right] \tag{A.64}$$

En plus des deux intégrales utilisées à la section précédente (eqs. A.27-A.28), l'intégration du deuxième terme nécessite l'utilisation de quatre intégrales supplémentaires [50], deux pour les terme en $k-k_0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} dk\frac{ck^3}{c(k-k_0)}\frac{cos(kR)}{(kR)^2} &= \frac{k_0^3}{(k_0R)^2}[-cos(k_0R)ci(k_0) - sin(k_0R)(si(k_0R)+\pi)]\\ \int_0^{+\infty} dk\frac{ck^3}{c(k-k_0)}\frac{sin(kR)}{(kR)^3} &= \frac{k_0^3}{(k_0R)^3}[cos(k_0R)(si(k_0R)+\pi) - sin(k_0R)ci(k_0)]\end{aligned} \tag{A.65}$$

et deux pour les termes en $k+k_0$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} dk\frac{ck^3}{c(k+k_0)}\frac{cos(kR)}{(kR)^2} &= \frac{k_0^3}{(k_0R)^2}[cos(k_0R)ci(k_0) - sin(k_0R)(si(k_0R))]\\ \int_0^{+\infty} dk\frac{ck^3}{c(k+k_0)}\frac{sin(kR)}{(kR)^3} &= \frac{k_0^3}{(k_0R)^3}[-cos(k_0R)si(k_0R) + sin(k_0R)ci(k_0)]\end{aligned} \tag{A.66}$$

L'utilisation de ces equations nous permet au final d'obtenir le potentiel lié au déplacement en fréquences des dipôles tel que :

$$\frac{k_0^3}{4\pi\epsilon_0}\left(\delta_{\alpha\alpha'}-\frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2}\right)\frac{cos(k_0r)}{k_0r} - \left(\delta_{\alpha\alpha'}-3\frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2}\right)\left(\frac{sin(k_0r)}{(k_0r)^2}+\frac{cos(k_0r)}{(k_0r)^3}\right) = \tau_2(kr) \tag{A.67}$$

on peut donc réécrire l'équation (A.68) sous la forme :

$$\bar{E}_{(s),\alpha}(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1,\alpha'}^{N}\left[\frac{k_0^3}{6\pi\epsilon_0}\Big(\tau_2(k_0r_{ij}) + i\tau_1(k_0r_{ij})\Big)\right] \tag{A.68}$$

Ce qui nous donne une relation pour le champ selon la direction α telle que :

$$\bar{E}_{\alpha}(\mathbf{r}_i) = \frac{E_L}{2}\epsilon_\alpha e^{i\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i} + \sum_{j=1}^{N}\frac{k_0^3}{6\pi\epsilon_0}g_{\alpha\alpha'}(kr_{ij})d_{j,\alpha'} \tag{A.69}$$

avec le potentiel d'interaction $g_{\alpha\alpha'}(kr_{ij})$ correspondant à l'interaction dipôle-dipôle connue en électrodynamique classique [47] :

$$\begin{aligned}g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}_{ij}) = \frac{3}{2}e^{ikr}\Bigg[&\left(-\frac{1}{kr}-\frac{i}{(kr)^2}+\frac{1}{(kr)^3}\right)\delta_{\alpha\alpha'}\\ &+\left(\frac{1}{kr}+\frac{3i}{(kr)^2}-\frac{3}{(kr)^3}\right)\frac{r_\alpha r_{\alpha'}}{r^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{A.70}$$

1. Il faut remarquer qu'entre les équations (A.61) et (A.63) nous avons substitué $\mathbf{r}$ par $\mathbf{r}_i$ et ensuite posé $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Afin d'obtenir l'équation d'évolution sur l'amplitude des dipôles, il est utile d'exprimer les relations de commutation pour l'opérateur dipôle dans le cas vectoriel telles que :

$$[D^{(+)}_{i,\alpha}, D^{(-)}_{j,\alpha'}] = d^2(|e^i_\alpha\rangle\langle e^i_{\alpha'}| - |g^i\rangle\langle g^i|)\delta_{\alpha,\alpha'} = d^2\sigma^i_z\delta_{ij}\delta_{\alpha,\alpha'} \tag{A.71}$$

$$[\sigma^i_z, D^{(\pm)}_{j,\alpha}] = \pm 2D^{(\pm)}_i\delta_{ij}\delta_{\alpha,\alpha'} \tag{A.72}$$

$$[|e^i\rangle\langle e^i|, D^{(\pm)}_{j,\alpha}] = \pm D^{(\pm)}_i\delta_{ij}\delta_{\alpha,\alpha'}, \tag{A.73}$$

et d'expliciter l'équation d'évolution de l'opérateur désexcitation de l'atome i $\mathbf{D}^{(-)}_i$ selon la composant α :

$$\dot{D}^{(-)}_{i,\alpha}(t) = -i\omega_0 D^{(-)}_{i,\alpha}(t) + \frac{1}{i\hbar}d^2\sigma^i_z.E_\alpha(\mathbf{r}_i, t). \tag{A.74}$$

En réinjectant le terme oscillant en $-i\omega_L t$ obtenu précédemment sur l'opérateur champ électrique on obtient :

$$\dot{D}^{(-)}_{i,\alpha}(t) = -i\omega_0 D^{(-)}_{i,\alpha}(t) + \frac{1}{i\hbar}d^2\sigma^i_z.\left(\frac{E_L}{2}\epsilon_\alpha e^{i(\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i-\omega_L t)} + \sum_{j=1,\alpha'}^{N}\frac{k_0^3}{6\pi\epsilon_0}g_{\alpha,\alpha'}(r_{ij})d_{j,\alpha'}e^{-i\omega_L t}\right), \tag{A.75}$$

et en réutilisant l'hypothèse d'une faible excitation, ce qui nous permet de substituer l'opérateur σ^i_z par l'opérateur identité $\sigma^i_z = -\mathbb{1}$ on peut réécrire l'équation (A.75) comme :

$$\dot{D}^{(-)}_{i,\alpha}(t) = -i\omega_0 D^{(-)}_{i,\alpha}(t) - \frac{1}{i\hbar}d^2\mathbb{1}\left(\frac{E_L}{2}\epsilon_\alpha e^{i(\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i-\omega_L t)} + \sum_{j=1,\alpha'}^{N}\frac{k_0^3}{6\pi\epsilon_0}g_{\alpha,\alpha'}(r_{ij})d_{j,\alpha'}(t)e^{-i\omega_L t}\right) \tag{A.76}$$

Désormais on utilise l'approximation faite sur l'état stationnaire de l'opérateur dipôle en posant :

$$D^{(-)}_{i,\alpha}(t) = d_{i,\alpha}(t)e^{-i\omega_L t} = d\sigma^{(-)}_{i,\alpha}(t)e^{-i\omega_L t} \tag{A.77}$$

que l'on réinjecte dans l'équation (A.78) ce qui nous donne :

$$\dot{\sigma}^{(-)}_{i,\alpha}(t) = i(\omega_L-\omega_0)\sigma^{(-)}_{i,\alpha}(t) - \frac{1}{i\hbar}d\mathbb{1}\left(\frac{E_L}{2}\epsilon_\alpha e^{i(\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i-\omega_L t)} + \sum_{j=1,\alpha'}^{N}\frac{k_0^3}{6\pi\epsilon_0}g_{\alpha,\alpha'}(r_{ij})\sigma_{j,\alpha'}(t)e^{-i\omega_L t}\right) \tag{A.78}$$

A ce stade on peut facilement reconnaître la pulsation de Rabi définie à l'équation (A.40), le désaccord du laser tel que $\Delta_0 = \omega_L - \omega_0$ et la largeur naturelle de l'état excité associée à une transition $J = 0 \to J' = 1$ telle que :

$$\Gamma = \frac{d^2k_0^3}{3\pi\hbar\epsilon_0} \tag{A.79}$$

que l'on insère dans l'équation (A.78) :

$$\dot{\sigma}^{(-)}_{i,\alpha}(t) = i\Delta_0\sigma^{(-)}_{i,\alpha}(t) - i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i} + i\sum_{j\neq i}^{N}\frac{\Gamma}{2}g_{\alpha,\alpha'}(r_{ij})\sigma^{(-)}_{j,\alpha'}(t) \tag{A.80}$$

Afin d'obtenir une expression finale sur l'équation d'évolution de l'amplitude des dipôles dans le cas vectoriel il faut désormais séparer l'expression pour l'atome unique ($i = j$). Un calcul simple nous permet de voir que lorsque kr tend vers 0 la partie imaginaire du

tenseur $g_{\alpha,\alpha'}(r_{ij})$ tend vers la valeur 2/3 ce qui nous permet de réécrire au final l'équation d'évolution de l'amplitude du dipôle i selon le composante α telle que :

$$\frac{d\sigma_{i,\alpha}(t)}{dt} = (i\Delta_0 - \frac{\Gamma}{2})\sigma_{i,\alpha}(t) - i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\mathbf{k}_L.\mathbf{r}_i} + i\sum_{j\neq i}^{N}\frac{\Gamma}{2}g_{\alpha,\alpha'}(r_{ij})\sigma_{j,\alpha'}(t) \tag{A.81}$$

Annexe B

Élaboration d'un piège dipolaire désaccordé dans le bleu.

Ce projet expérimental qui n'a pas été présenté dans le corps de ce document montre une technique que nous avons élaboré au cours de ce travail de thèse et qui peut nous permettre d'étudier l'influence du terme de champ proche de l'interaction dipôle-dipôle ($1/(k_0 r)^3$, eq. (2.87)) comme nous l'avons étudié de manière numérique pour le spectre de l'Hamiltonien effectif H_{eff} au chapitre 3. En effet comme nous l'avons énoncé précédemment les densité spatiales typiques que nous pouvons atteindre sans artifice avec les nuages d'atomes froids sont de l'ordre de $\rho \simeq 10^{10}$-10^{11}at.cm^{-3} ce qui représente des milieux très dilués ($\rho\lambda^3 \simeq 0.01$). Afin d'atteindre de densités spatiales supérieures tout en conservant un grand nombre d'atomes et un temps de chargement raisonnable ($\sim$ 2s), nous avons donc élaboré un piège dipolaire désaccordé dans le bleu ($\Delta_0 > 0\Gamma_0$).

Le principe de fonctionnement de ce piège basé sur le potentiel dipolaire U_{Dip} :

$$U_{Dip} \simeq \frac{3\pi c^2}{2\omega_0}\frac{\Gamma_0}{\Delta_0} I(\mathbf{r}) \tag{B.1}$$

est assez simple dans le sens où il repose techniquement sur deux Modulateurs Acousto-Optiques (AOM) croisés à 90° oscillants en opposition de phase (où $f_1(t) = f_0 + \Delta f \sin(\omega_m t)$ est la fréquence du premier AOM et $f_2(t) = f_0 + \Delta f \cos(\omega_m t)$ est celle du second avec f_0 = 80MHz, Δf = 0-20MHz et $f_m = \omega_m/2\pi$ = 90kHz). Ce dispositif des AOM à pour conséquences de créer un "tube de lumière" dans lequel les atomes sont piégés selon une direction que l'on recroise ensuite à l'endroit ou se trouve le nuage à 90° de sa direction initiale afin de créer une "boite de lumière" dans laquelle les atomes seront confinés. Il est à noter que l'approximation de l'onde tournant e à été faite pour obtenir la relation présentée à l'équation (B.1) et qu'elle est valable uniquement lorsque $\Delta_0 \ll \omega_0$. Dans cette expression $I(\mathbf{r})$ représente le profile radial de l'intensité tel que

$$I(x,y) = \frac{2P}{\pi w^2} e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}} \tag{B.2}$$

avec P la puissance optique du faisceau nous servant à réaliser le piège et w son waist. Afin de s'assurer que le profil radial du faisceau était bien gaussien au niveau des atomes, nous avons utilisé une fibre optique NKT-Photonics LMA-PM-10, micro structurée monomode à maintient de polarisation. Grâce à cette fibre nous disposons d'une puissance optique d'environ 550mW au niveau des atomes avec un faisceau dont le profil radial est bien décrit par un profil gaussien.

Les performances finales de ce piège sont un temps de vie typique de 500ms, relié aux pertes à un corp. Les limites principales à cette performance étant le chauffage lié à l'absorption de photons des murs du piège par les atomes contenus dans ce dernier et la fréquence f_m de rotation du faisceau elle même limitée par les performances électroniques des oscillateurs contrôlés en tension (VCO) que nous utilisons. Une solution possible à la limite créée par le chauffage des atomes serait l'utilisation d'autres dispositifs laser que ceux que nous avons présentés au chapitre 4 tel qu'un Titane-Saphir ou d'un laser dans le fréquences Télécom avec un cavité de doublage en fréquence. En effet l'utilisation de ces technologies nous permettrait d'utiliser pour le piège un faisceau plus puissant et plus désaccordé réduisant ainsi le taux d'émission spontané des photons du mur du piège par les atomes tout en maintenant une hauteur de barrière de potentiel suffisante afin de garder les atomes dans le piège. Une autre source de chauffage liée à l'émission spontanée provient du pieédestal du cône d'émission spontanée du MOPA (présenté au chapitre précédent à la figure 4.7). Afin diminuer l'influence de ce cône d'émission spontanée nous avons testés deux techniques de filtrage : la première en utilisant un étalon (cavité Fabry-Perot) qui n'a pas montré d'améliorations significatives en raison de la perte de puissance optique lié à l'utilisation de l'étalon et la deuxième en chauffant une cellule de Rubidium à 120°C qui a permis d'améliorer légèrement le temps de vie du piège.

Enfin après compression, nous avons réussi en chargeant 5.10^7 atomes dans le piège, à atteindre des densités spatiales d'atomes proches de $\rho = 10^{13}$atomes.cm^{-3} ce qui correspond à un nombre de Ioffe-Regel [1] de :

$$k_0 l = 2.8. \tag{B.3}$$

Bien qu'il soit peu courant d'atteindre ces densités avec un nuage thermique contenant un grand nombre d'atomes, il faut toutes fois prendre avec prudence ce dernier résultat encourageant. En effet la densité spatiale d'atomes a été mesurées grâce au dispositif d'imagerie d'absorption que nous avons décrite au chapitre précédent et il se peut qu'il contienne certaines sources d'erreurs liées tout d'abord à la largeur spectrale du laser que nous utilisons. Il se peut aussi que la densité spatiale élevée du nuage soit une source d'erreur car elle nous impose de faire les mesures d'imagerie d'absorption proche du régime de diffusion multiple ($b(\Delta_{Probe}) \simeq 1$ avec $\Delta_{probe} \gg 1$). Une amélioration au protocole de mesures serait donc d'utiliser des techniques de mesures alternatives comme par exemple une technique d'imagerie non destructive par contraste de phase [187, 188].

1. Il est à noter que pour le calcul du nombre de Ioffe Regel nous avons pris le section efficace pour un atome à deux niveaux (transition $J_g = 0 \rightarrow J_e = 1$) ce qui pourrait être à l'origine d'une sous estimation de ce nombre.

Fast compression of a cold atomic cloud using a blue-detuned crossed dipole trap

Tom Bienaimé,[*] Giovanni Barontini,[†] Laure Mercier de Lépinay, Louis Bellando, Julien Chabé, and Robin Kaiser
Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS, Institut Non-Linéaire de Nice, UMR 7335, F-06560 Valbonne, France
(Received 4 July 2012; published 19 November 2012)

We present the experimental realization of a compressible blue-detuned crossed dipole trap for cold atoms allowing for fast dynamical compression (∼5–10 ms) of 5×10^7 rubidium atoms up to densities of $\sim 10^{13}$ cm^{-3}. The dipole trap consists of two intersecting tubes of blue-detuned laser light. These tubes are formed using a single, rapidly rotating laser beam which, for sufficiently fast rotation frequencies, can be accurately described by a quasistatic potential. The atomic cloud is compressed by dynamically reducing the trap volume, leading to densities close to the Ioffe-Regel criterion for light localization.

DOI: 10.1103/PhysRevA.86.053412 PACS number(s): 37.10.De, 37.10.Gh, 67.85.−d

I. INTRODUCTION

The use of optical dipole traps for manipulating and trapping ultracold atoms has been crucial to the evolution of this field of research. For example, they can be used to form a Bose-Einstein condensate (BEC) [1], create artificial crystals of light [2], or study physics in low dimensions by freezing the spatial degrees of freedom [3].

Light-matter interaction in the dense regime is a very dynamic and challenging field of research [4–6], where one of the long-standing problems is an understanding of the role of cooperative effects (superradiance [7,8], subradiance [9], collective Lamb shift [10]) and disorder (weak [11] and strong [12] localization). In order to reach this regime, a dipole trap can be used to compress the cloud to high densities where the strong-localization phase transition [12] is expected to occur at a threshold given by the Ioffe-Regel criterion [13] $kl \sim 1$, where $k = 2\pi/\lambda$ is the light wave vector and $l = 1/(n\sigma)$ is the mean free path (with n the atomic density and σ the scattering cross section). For resonant two-level systems, the scattering cross section $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$ allows the Ioffe-Regel criterion to be expressed as $n\lambda^3 \sim 1$. Such densities correspond for rubidium atoms to 10^{13}–10^{14} cm^{-3}, three orders of magnitude higher than magneto-optical-trap (MOT) densities. These high densities are commonly obtained in dipole traps for bosonic [1] or fermionic [14] ultracold gases. However, the relatively low number of atoms ($\sim 10^5$) and long duty cycles (∼10 s) make it difficult to efficiently study light-matter interaction in dense regimes [15] where a large number of atoms as well as short duty cycles are important assets for efficient detection of signatures of cooperative effects and/or strong localization of light. Indeed the Ioffe-Regel criterion should not be confused with the BEC threshold $n\Lambda_T^3 \sim 1$, where Λ_T is the thermal de Broglie wavelength. In contrast to Bose-Einstein condensation, we do not expect a drastic constraint on temperature for the Ioffe-Regel criterion of strong localization.

In this paper, we present a compressible blue-detuned crossed dipole trap to achieve a very fast dynamical compression (∼5–10 ms) of a large number of ^{87}Rb atoms ($\sim 5 \times 10^7$) to densities compatible with the Ioffe-Regel criterion, i.e., $\sim 10^{13}$ cm^{-3}. Trapping atoms in a "dark" region surrounded by blue-detuned light has several advantages, such as minimizing photon scattering, light shifts of the atomic levels, and light-assisted collisional losses [16]. Experimentally, blue-detuned trap are more difficult to produce than red ones. However, an original method [17] consists in using a focused Gaussian laser beam which is rapidly rotating and obtained by use of two perpendicular acousto-optical modulators (AOMs). If the rotation frequency is sufficiently high, the resulting time-averaged potential forms a tube of light. Crossing two of these tubes leads to a dark volume where atoms are trapped. This method allows dynamic control of the shape and the size of the trap which, for example, might be used to optimize the loading efficiency with a large trapping volume and then compress the cloud using a fast dynamical reduction of the trap size. These blue-detuned time-averaged potentials have been used in the past to study thermal cloud compression [17] and optical billiards and chaos [18–20], or to design microscopically tailored potentials for BECs [21] or ultracold Fermi gases [22]. For red dipole traps, a dynamical compression allowed quantum degeneracy to be reached via runaway evaporative cooling using a mobile lens to change the trap waist dynamically [23].

II. EXPERIMENTAL SETUP

A. Trap configuration

The trap consists of two tubes of blue-detuned light, crossed at 90° to create a box of light [see Fig. 1(a)] where the atoms are confined. The size and the shape of the box can be dynamically adjusted. Figure 1(b) shows the experimental setup used to create the tubes of light. A laser beam with 1 mm waist passes through two AOMs (Gooch & Housego M080-2B/F-GH2), crossed at 90°. The AOMs are powered by two radio-frequency (rf) signals whose instantaneous frequencies are respectively given by $f_1(t) = f_0 + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$ and $f_2(t) = f_0 + \Delta f \sin(2\pi f_m t)$. The central frequency f_0 is fixed at 80 MHz, the modulation frequency amplitude Δf is at most 20 MHz and the modulation frequency f_m is generally set to 90 kHz. In the (+1, +1) diffraction order of the AOMs, the laser beam is rotating at frequency f_m, and a lens, placed at a focal distance of 150 mm from the AOMs, creates a time-averaged tube of light with a diameter of 1 mm and a

[*]Present address: Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, Blegdamsvej 17, DK-2100 Copenhagen, Denmark.
[†]Present address: Research Center OPTIMAS, Technische Universität Kaiserslautern, DE-67663 Kaiserslautern, Germany.

 ©2012 American Physical Society

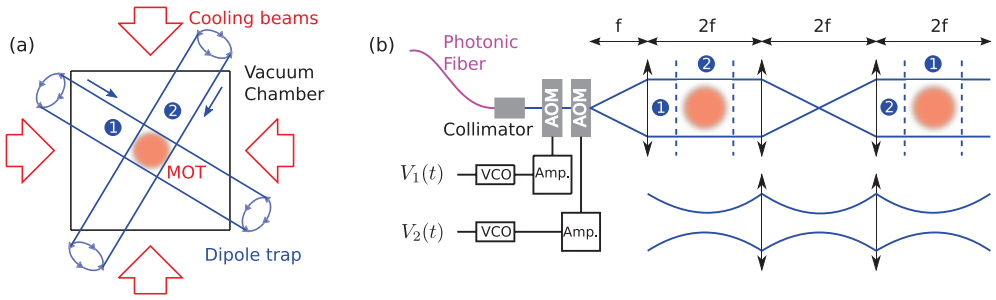

FIG. 1. (Color online) Sketch of the experimental setup. (a) Top view of the setup, showing the location of the two horizontal tubes forming the crossed blue-detuned dipole trap. (b) Details of the setup used to produce the two tubes [(+1, +1) orders of the AOMs]. On the top, only the contour of the trap is sketched while on the bottom only the beam profile is shown. For simplicity, we do not show the two mirrors that are used to cross the tubes 1 and 2 (the dashed lines show the position of the crossing). VCO indicates voltage-control oscillator.

waist of 65 μm in the lens focal plane where the atoms are trapped. Using a system of lenses and mirrors, the tube can be "recycled" and crossed at 90° from its initial direction (see Fig. 1). By varying the modulation frequency amplitude Δf, the trap size can be dynamically controlled.

A rotating laser beam with power P, waist w, and a radial intensity profile given by $I(x,y) = \frac{2P}{\pi w^2}\exp[-2(x^2+y^2)/w^2]$ describing a circle of radius a creates a time-average intensity profile

$$I(r) = \frac{2P}{\pi w^2}\exp\left(\frac{-2(r^2+a^2)}{w^2}\right)\mathcal{I}_0\left(\frac{4ar}{w^2}\right), \qquad (1)$$

where r is the radial distance of the polar coordinate system and $\mathcal{I}_0$ is the zeroth-order modified Bessel function. For ^{87}Rb atoms, the dipole potential for a linearly polarized light with detuning Δ with respect to the D_2 line such that $\Delta'_{\rm FS} \gg |\Delta| \gg \Delta'_{\rm HFS}$, where $\hbar\Delta'_{\rm FS}$ and $\hbar\Delta'_{\rm HFS}$ are respectively the energy splitting of the fine and hyperfine excited states, is given by [16]

$$U(r) = \frac{2}{3}\frac{\hbar\Gamma^2}{8\Delta}\frac{I(r)}{I_{\rm sat}}, \qquad (2)$$

Γ being the linewidth and $I_{\rm sat}$ the saturation intensity of the transition. For large trap size $a/w \gg 1$, i.e., when the radius is large compared to the waist, Eq. (2) simplifies to the intuitive formula

$$U(r) = U_0\exp\left(-\frac{2(r-a)^2}{w^2}\right), \qquad (3)$$

where the potential height is given by

$$U_0 = \frac{2}{3}\frac{\hbar\Gamma}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}}\frac{\Gamma}{\Delta}\frac{P}{I_{\rm sat}aw}. \qquad (4)$$

When the trap is small, i.e., $a/w < 1$, the two walls of the tube start touching each other and the trap can no longer be described as a box with Gaussian walls, but is well approximated by a harmonic potential

$$U(r) = U_1 + \tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2, \qquad (5)$$

where $U_1 = (2/3)\frac{\hbar\Gamma}{4\pi}\frac{\Gamma}{\Delta}\frac{P}{I_{\rm sat}w^2}\exp(\frac{-2a^2}{w^2})$ is the "offset" value of the potential at the center of the trap and $\omega = 2\sqrt{\frac{U_1}{m}}\frac{\sqrt{2a^2-w^2}}{w^2}$ is the trap frequency. Figure 2 shows the radial profile of the time-averaged potential for two trap radii as well as its harmonic approximation. The possibility of controlling the trap frequency by tuning its radius can allow for runaway evaporative cooling by compensating the reduction of the trap frequency due to the lowering of the potential barrier (reducing the intensity or increasing the detuning) by a reduction of the size of the trap. The trap frequency is very sensitive to the trap radius. A careful control of the approach to the final trap radius is thus required when reaching the harmonic regime.

B. Laser system

The laser system consists of a distributed-feedback (DFB) laser diode injecting a semiconductor laser amplifier SACHER delivering up to 1 W. After the optical isolator, the beam (power 900 mW) is coupled into a large-core (10 μm), monomode, polarization-maintaining photonic crystal fiber (NKT Photonics LMA-PM-10). The coupling efficiency into the fiber is 60%, limited by the quality of the laser mode of the semiconductor amplifier.

At the output of the fiber, 550 mW of collimated linearly polarized light injects the crossed AOMs, yielding 250 mW in the (+1, +1) diffraction order for creating the light tube. The power of the beam can be controlled by adjusting the rf power driving the AOMs. The light frequency ν can be tuned over 120 GHz without mode jump by adjusting the current I of the

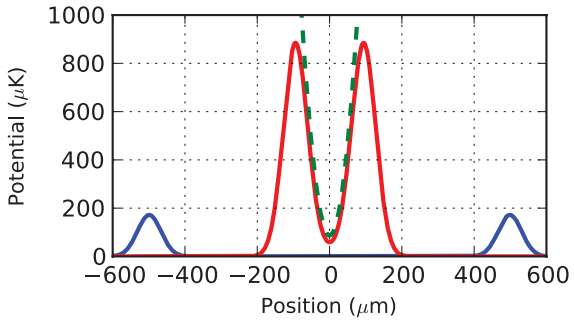

FIG. 2. (Color online) Radial profiles of the time-averaged potential for two trap radii. The solid curves correspond to Eqs. (1) and (2) for trap radii $a = 500\,\mu$m (blue, outer peaks) and $a = 100\,\mu$m (red, inner peaks). The green dashed line represents the harmonic approximation of the potential [see Eq. (5)] for $a = 100\,\mu$m. It gives $U_1 = 85\,\mu$K and $\omega/(2\pi) = 860$ Hz. The parameters are $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, and $w = 65\,\mu$m.

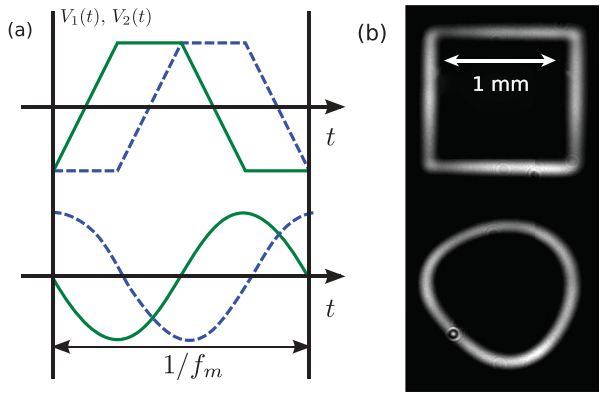

FIG. 3. (Color online) Measured cross sections of the blue-detuned tubes for two different VCO modulations. As an example, we show two useful configurations: the square and the circle. (a) Signals $(V_1(t), V_2(t))$ that are sent to the VCOs. (b) Pictures of the resulting cross sections taken at the position where the atoms are trapped. The size of the trap is $L \simeq 1$ mm and the waist $w = 65\ \mu$m.

DFB diode ($dv/dI = 2\ \text{GHz mA}^{-1}$). Typical detunings used with this setup range between 5 and 80 GHz.

Such semiconductor laser systems have the advantage of moderate costs and simplicity of implementation. However, they often have a modest mode quality and more importantly they possess an amplified spontaneous emission background which spreads over 40 nm, containing photons at resonance with the atomic line. For experiments where this background spectrum is a limitation, a titanium-sapphire laser or a frequency-doubled laser might be a more convenient choice.

C. Electronic control of rf signals

In order to create the tubes of light, a precise control of the rf signals feeding the AOMs is necessary. For this, we use voltage-control oscillators (VCOs) delivering rf signals whose instant frequencies $f_i(t)$ linearly depend on the input voltages $V_i(t)$. Thus, the two input voltages $(V_1(t), V_2(t))$ are associated with a position $(x(t), y(t))$ in the $(+1, +1)$ diffraction order of the AOMs, such that it is possible to create tubes of light with arbitrary cross sections. Figure 3 shows the signals $V_i(t)$ which produce circular and square tubes as well as the subsequent experimental pictures of these cross sections. We use homemade VCOs, based on the Mini-Circuit POS-150+ chip with output frequency between 50 and 150 MHz and a 3 dB input modulation bandwidth of 100 kHz. Two phase-locked Agilent 33220A function generators are used to drive the VCOs. The VCOs are feeding two Mini-Circuit ZHL-1A rf amplifiers.

In Fig. 3(b), we notice that the ring-shaped potential is slightly asymmetric. We attribute this to nonlinearities in the overall system response $(x(V_1(t)), y(V_2(t)))$ which is supported by the fact that this asymmetry is reduced for smaller traps since they require lower modulation amplitudes. The square-shaped trap is not affected because its parametric equations do not lead to a combined motion in the x and y directions (the nonlinearities imply only that the straight lines are not drawn at constant speed). By designing and engineering the synthesizer signals driving the VCOs, it would be possible to compensate for the trap asymmetry. However, all the measurements performed in this paper use the ring-shaped potential without compensating for the asymmetry, to keep the system complexity to a minimum.

D. Parameters and experimental sequence

Unless otherwise stated, the parameters of the trap are as follows: size $L = 1$ mm (radius $a = 500\ \mu$m), waist $w = 65\ \mu$m, detuning $\Delta = 40$ GHz, rotation frequency $f_m = 90$ kHz, laser power for a single tube $P = 200$ mW, linear polarization. For these parameters, the potential height for ^{87}Rb atoms is 190 μK [see Eq. (4)].

We first load a MOT of ^{87}Rb atoms from a vapor cell with a background gas pressure of $\sim 10^{-9}$ mbar. All lasers are tuned close to the D_2 line of ^{87}Rb and are derived from DFB diodes, conveniently amplified with a tapered amplifier and controlled via AOMs. In this series of experiments, we deliberately choose to work with a moderate number of atoms to investigate the performances of our trapping scheme. We trap $\sim 5 \times 10^7$ atoms in 2.5 s. The loading time can be reduced by increasing the rubidium background pressure when a larger atom number needs to be trapped using, e.g., ultraviolet light-emitting diodes to temporarily increase the hot gas pressure during the MOT loading—so-called light-induced atomic desorption (LIAD) [24,25]. The cooling laser detuning is -3Γ and the temperature of the cloud is $\sim 55\ \mu$K. We then apply a 50 ms temporal dark MOT period where the intensity of the repumping laser is reduced by a factor of 10 and the detuning of the cooling beam is increased from -3Γ to -6Γ. This allows us to compress and produce a homogeneous distribution of atoms, mainly in the $F = 1$ hyperfine ground state, with a density $\sim 10^{11}$ cm^{-3} and a temperature $\sim 20\ \mu$K. During the temporal dark MOT period, the intensity of the dipole trap is progressively ramped up in order to maximize the "mode matching" between the dark MOT and the dipole trap. After this, the magnetic field and the laser cooling beams are turned off. In order to keep the atoms in a single hyperfine level, we choose to keep the repumping laser on at all times after loading, thus forcing the atoms into the $F = 2$ hyperfine level.[1] Then the atoms evolve freely in the dipole potential and the trapping time varies between 5 ms and 1.2 s. Using absorption or fluorescence imaging techniques, the properties of the cloud, e.g., the number of atoms, temperature, and density, are measured. In the following, unless otherwise stated, absorption imaging from the side of the cell is used to perform quantitative measurements. Figure 4 shows *in situ* fluorescence images of the cloud taken from the top of the cell for a single tube and for the crossed dipole trap.

III. LOADING

The loading period corresponds to the transfer of the atoms from the dark MOT to the dipole trap. During the first

[1]Pumping the atoms into the $F = 1$ hyperfine level would instead require the development of a specific depumping laser. Indeed, keeping the MOT cooling beams on to pump the atoms in the $F = 1$ hyperfine level would not be efficient and would lead to several scattered photons, thus preventing us from attaining our goal of reaching high densities.

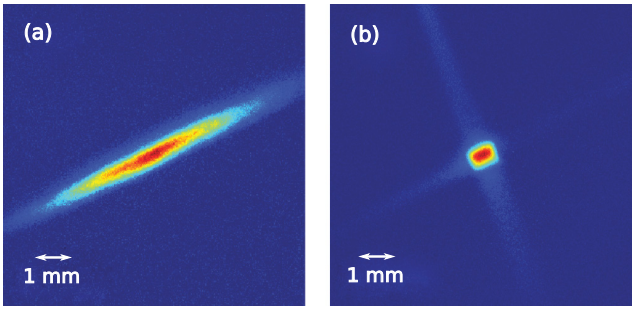

FIG. 4. (Color online) *In situ* fluorescence images of the atoms in the dipole trap taken from the top of the cell after 100 ms of holding time. (a) Single-tube trap. (b) Crossed trap. Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $L = 1$ mm, $w = 65$ μm, and $f_m = 90$ kHz.

$\sim$60 ms, the atoms are in a transient regime before reaching a quasisteady regime. In order to optimize the transfer efficiency from the dark MOT to the dipole trap, it is important to understand the mechanisms occurring during this stage.

A. Transient regime

During the transfer of the atoms from the dark MOT to the dipole trap, the mode matching is not perfect, exciting breathing modes and oscillations of the center of mass of the cloud. Figure 5 shows the center-of-mass position and the root-mean-square (rms) size of the cloud after a 5 ms time of flight as a function of the holding time in the dipole trap. We notice that the cloud is squeezed along the direction of gravity [smaller rms size in Fig. 5(b)] as can also be seen on the *in situ* images (see Fig. 7). We observe oscillations of the cloud size that we identify as *breathing modes*. Their period is similar to that observed on the center-of-mass position. The oscillation period is $\sim$25 ms, which is compatible with atoms falling from a height $h = 500$ μm and bouncing on the bottom of the trap with a period $2\sqrt{2h/g} \sim 20$ ms. The damping of the oscillations is important because of the strong trap anharmonicity. After $\sim$60 ms, the oscillations are almost completely damped and the trap enters the so-called *quasisteady regime*.

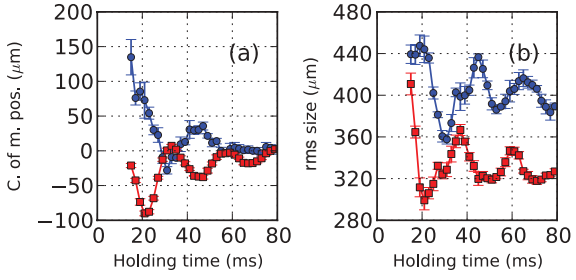

FIG. 5. (Color online) Center-of-mass position (a) and rms size (b) of the cloud after a 5 ms time of flight as a function of the holding time in the dipole trap. The blue points correspond to measurements along the x axis, which is orthogonal to the direction of gravity. The red squares represent measurements along the z axis, which is defined as pointing opposite to gravity. This figure shows center-of-mass oscillations and breathing modes during the transient regime. Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $L = 1$ mm, $w = 65$ μm, and $f_m = 90$ kHz.

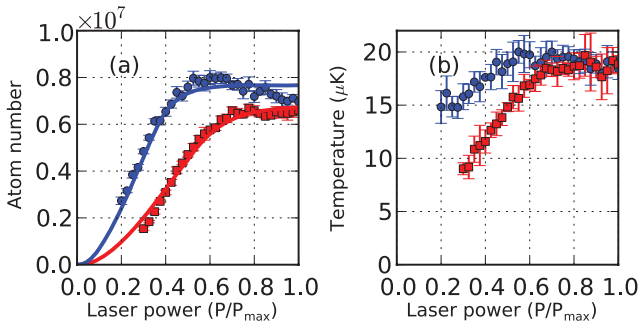

FIG. 6. (Color online) Number of atoms (a) and cloud temperature (b) measured 60 ms after loading as a function of the laser power ($P_{max} = 200$ mW). The blue points correspond to a detuning of 20 GHz and the red squares to $\Delta = 40$ GHz. The solid lines in (a) are fits of the data according to Eq. (7) using the potential barrier height U as the only free fitting parameter. We obtain $U = 320$ μK for $\Delta = 20$ GHz and $U = 190$ μK for $\Delta = 40$ GHz. Parameters: $L = 1$ mm, $w = 65$ μm, and $f_m = 90$ kHz.

B. Trapped atom number

At the end of the transient regime, $\sim$60 ms after the atom transfer from the dark MOT, we study the number of trapped atoms and the temperature of the cloud as a function of the laser power, which can be adjusted between 0 and 200 mW. Figure 6 shows the data for two different laser detunings $\Delta = 20$ GHz (blue points) and $\Delta = 40$ GHz (red squares). The trap is loaded from a dark MOT with $\simeq 1.3 \times 10^7$ atoms and a temperature of $\simeq 22$ μK. The size of the trap is $L \simeq 1$ mm.

Both the number of atoms and the temperature reach a plateau after $P = 0.5 P_{max}$ for $\Delta = 20$ GHz and $P = 0.7 P_{max}$ for $\Delta = 40$ GHz. The temperature plateau corresponds to the temperature of the dark MOT. This can be understood by noticing that when the barrier height is sufficiently high, all the atoms (initially in the trapping region) are trapped and their temperature is that of the dark MOT. Before the plateau, the temperature increases linearly with laser power, which can be understood as a consequence of the linear increase of the potential barrier with laser power. The red squares in Fig. 6(b) clearly point at the origin when $P \to 0$, which is consistent with the fact that only atoms with an energy (kinetic plus potential) smaller than the barrier height are trapped during loading. However, the blue points do not extend to the origin when $P \to 0$, which might be due to spontaneous-emission heating, which is more important for a detuning of 20 GHz than for 40 GHz.

We define the loading efficiency as the number of atoms in the trap after 60 ms of holding time (i.e., at the end of the transient regime) divided by the number of atoms in the dark MOT measured before loading. For the data presented on Fig. 6, the loading efficiency is 60%, which corresponds to an excellent value compared to what is usually observed in red-detuned dipole traps. When the size of the dark MOT is smaller than the trap volume, the nontrapped atoms correspond to those having a too large energy (kinetic plus potential): they "jump" over the potential barrier. If gravity were compensated (by, e.g., optical pumping of the atoms in a particular Zeeman sublevel and applying a vertical magnetic field gradient), the atoms would possess only kinetic energy, which should

significantly improve the loading efficiency. The maximum estimated number of atoms that can be trapped is $\sim 10^8$ (equal to the density of the dark MOT, $\sim 10^{11}$ cm^{-3}, times the trapping volume, ~ 1 mm^3).

1. *Model for trap loading*

We consider the case of a box-shaped trap and suppose that in the dark MOT, the atoms are uniformly distributed in space, with a momentum probability distribution given by the Boltzmann distribution

$$p(\mathbf{p},\mathbf{r}) = \frac{\Lambda_T^3}{L^3} \exp\left[-\frac{\mathbf{p}^2}{2mk_BT}\right],$$

where $\Lambda_T = h/\sqrt{2\pi mk_BT}$ is the thermal wavelength. The probability density for an atom to have an energy E is $p(E) = \int \frac{d^3\mathbf{p}\,d^3\mathbf{r}}{h^3}\delta(E(\mathbf{p},\mathbf{r}) - E)p(\mathbf{p},\mathbf{r})$, where the energy of the atom takes the form $E(\mathbf{p},\mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/(2m) + mgz$, with the z axis defined along the direction opposite to gravity. After some calculations, we find

$$p(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}k_BT}\sqrt{\frac{E}{k_BT}} \exp\left[-\frac{E}{k_BT}\right] \mathcal{F}\left(\frac{E}{mgL}, \frac{mgL}{k_BT}\right), \quad (6)$$

where the function $\mathcal{F}$ is defined as $\mathcal{F}(\alpha,\beta) = \int_0^{\min(\alpha,1)} du\sqrt{1-u/\alpha}\,\exp(\beta u)$. In the $g \to 0$ case, i.e., without gravity, Eq. (6) simplifies to the well-known free-space density probability $p(E) = 2/(\sqrt{\pi}k_BT)\sqrt{E/(k_BT)}\exp[-E/(k_BT)]$, where in front of the Boltzmann factor $\exp[-E/(k_BT)]$ one recognizes the three-dimensional free-space density of states. If the height of the potential barrier is U, then the fraction of atoms N/N_0 that are trapped during loading is given by

$$\frac{N}{N_0} = \int_0^U dE\, p(E). \quad (7)$$

The solid lines in Fig. 6 correspond to fits according to Eq. (7) which allows us to determine, using a single free fitting parameter, the potential height U corresponding to $P_{\max} = 200$ mW. We obtain $U = 320$ μK for $\Delta = 20$ GHz and $U = 190$ μK for $\Delta = 40$ GHz. We can compare these values to theoretical estimations by substituting the experimental parameters into Eq. (4), leading respectively to $U = 380$ and 190 μK, in good agreement with the values extracted from the fit.

IV. QUASISTEADY REGIME

After the transient regime leading to the loading of the trap, the evolution of the cloud properties occurs on a longer time scale: the quasisteady regime. In this section, we study the evolution of the cloud in this quasisteady regime in order to characterize the trap and to understand the mechanisms limiting its performance. To this end, two quantities are of particular interest: the trap lifetime and the temperature of the cloud. The lifetime τ is determined from an exponential fit $N_0\exp(-t/\tau)$ to the decay curve of the number of atoms in the trap as a function of the holding time, while the temperature is inferred from the rms size of the cloud measured in time of flight.

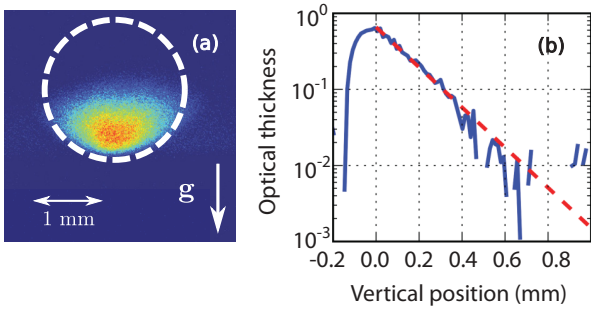

FIG. 7. (Color online) (a) *In situ* absorption image of the cloud inside the dipole trap 450 ms after loading (sideview). The white dashed line represents the limits of the trap. The atoms lie down on the bottom of the trap due to gravity. (b) Vertical optical thickness profile (blue solid curve). The origin is chosen at the position of the maximum optical thickness. The fit $b(z) = b(0)\exp[-mgz/(k_BT)]$ (red dashed line) leads to a temperature of 18 μK. The temperature estimated using the standard time of flight measurement gives 21 μK. Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $L = 1$ mm, $w = 65$ μm, $f_m = 90$ kHz.

A. *In situ* density profile

For a trap of size L, gravity effects can be neglected when $mgL \ll k_BT$. For a cloud temperature of 40 μK, this condition gives $L \ll 400$ μm, showing that gravity is an important parameter for large traps. The influence of gravity can be observed in the absorption imaging from the side of the chamber as shown in Fig. 7 where atoms lie down on the bottom of the trap. This situation is similar to that observed with strontium MOTs on the intercombination line at 689 nm [26].

For atoms at thermal equilibrium in the dipole trap, one expects the optical thickness profile along the vertical direction to be given by the Boltzmann factor

$$b(z) = b(0)\exp\left[-\frac{mgz}{k_BT}\right]. \quad (8)$$

Figure 7 shows the *in situ* density profile of the cloud obtained by absorption imaging. A fit from Eq. (8) leads to a temperature of 18 μK. The temperature of the cloud given by a time-of-flight measurement is 21 μK, in good agreement with the *in situ* measurement. As one does not expect a thermodynamic equilibrium to be reached when considering the conservative dynamics of independent particles in a trap, the good agreement between these two methods of estimating the temperature of the atomic cloud suggests that relaxation due to residual light scattering combined with a limited trap height or "s-wave" collisions (the elastic s-wave collision rate after loading is $\Gamma_{\rm el} \lesssim 10$ s^{-1}) might be present in our system.

B. Losses due to "hot" collisions

The MOT loading time of ~ 20 s allows us to infer a background gas pressure of $P \sim 10^{-9}$ mbar [27]. The trap loss rates due to the background species i can be estimated

TABLE I. Coefficients C_i of the van der Waals potential between rubidium and background species i in Hartree atomic units (a.u.) $= e^2a_0^5/(4\pi\epsilon_0)$, where e is the electron charge, a_0 is the Bohr radius, and ϵ_0 is the vacuum permittivity (data taken from Ref. [29]). Trap loss rate γ_i computed from Eq. (9) with $P_i \simeq 10^{-9}$ mbar, $U = 190\ \mu$K, and $T = 300$ K.

Species i	C_i (a.u.)	γ_i (s^{-1})
Rb-Rb	4430	0.14
Rb-He	36.2	0.08
Rb-H_2	140	0.16

by [27–29]

$$\gamma_i \simeq 6.8\frac{P_i}{(k_BT)^{2/3}}\left(\frac{C_i}{m_i}\right)^{1/3}(Um_{\mathrm{Rb}})^{-1/6}, \qquad (9)$$

where $T \simeq 300$ K is the background gas temperature, P_i the partial pressure of the background species i, and $U \simeq 190\ \mu$K the potential height of the dipole trap. With m_{Rb} and m_i we indicate the masses of rubidium and of the background species, i and C_i are the coefficients of the van der Waals interaction potential $-C_i/r^6$ between the ground-state trapped Rb atoms and i. Table I gives the value of the C_i coefficients for Rb-Rb, Rb-He, and Rb-H_2 collisions and the corresponding trap loss rates γ_i for the parameters of the experiment. The estimated trap lifetimes $1/\gamma_i$ resulting from the background collisions are significantly longer than the measured one, allowing us to conclude that the dominant loss mechanism is not due to collisions with the background gas.

A further confirmation of the marginality of hot collisions is obtained by performing a lifetime measurement by turning on LIAD just after loading the trap. Even though this increases the residual gas pressure of the cell by one order of magnitude to $P \sim 10^{-8}$ mbar, we notice no difference on the measured lifetime.

C. Influence of the trap size

The influence of the size of the trap on its lifetime is an important issue to study before starting the compression of the cloud. After loading, the atoms are kept in the trap for 20 ms, before linearly reducing the trap size for an additional 20 ms. The end of this stage is used as the initial condition to measure the lifetime of the cloud. We choose this experimental procedure since it allows an efficient trap loading and prevents nontrapped atoms (because of the too small trap volume compared to the dark MOT volume) from being present in the imaging region when the trapped atom number is measured during the first 40 ms. The initial conditions are chosen such that the initial atomic density is low enough to prevent density effects in the measurement (small s-wave collision rate). Note that this experimental procedure does not maintain the potential height constant, as $U \propto 1/L$ [see Eq. (4)].

Figure 8 shows that the lifetime of the cloud rapidly decreases when the size of the trap is reduced. This is consistent with atom losses occurring when the atoms interact with the potential barrier. The smaller is the trap, the more frequent are interactions with the barrier, leading to stronger losses and to a subsequent lifetime reduction. The reduction of the lifetime

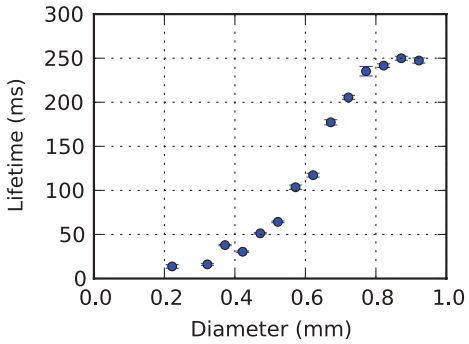

FIG. 8. (Color online) Lifetime of the cloud as a function of the dipole trap diameter. Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $w = 65\ \mu$m, and $f_m = 90$ kHz.

with the trap size is an important factor to take into account for the cloud compression.

D. Influence of the rotation frequency

A first limiting effect gives a lower bound for low rotation frequencies: if during one period $1/f_m$, the atoms with velocity on the order of $\sim\sqrt{k_BT/m}$ move by more than the waist of the laser w, the atom can escape the trap between successive arrivals of the laser beam. This condition is written

$$f_m \gg \frac{1}{w}\sqrt{\frac{k_BT}{m}} \simeq 1\ \mathrm{kHz}, \qquad (10)$$

for $w = 65\ \mu$m and $T = 40\ \mu$K.

In order to study the influence of the rotation frequency above this limit, we vary the rotation frequency and keep all other parameters constant. Figure 9(a) shows that the lifetime increases with increasing rotation frequency without reaching saturation in the explored frequency range (contrary to what is observed in Ref. [17]). This can be understood by noticing that the faster the beam rotates, the better is the time-averaged-potential approximation. The upper bound for the rotation frequency is set by the input modulation bandwidth of the VCOs.

Figure 9(b) shows the cloud temperature after 150 ms of holding time as a function of the rotation frequency. Below 30 kHz, we observe significant heating which decreases with increasing rotation frequency. Above 30 kHz, the temperature

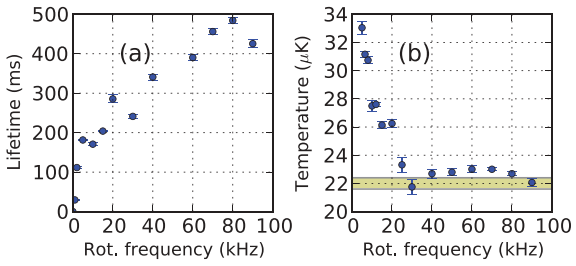

FIG. 9. (Color online) (a) Lifetime of the dipole trap as a function of the rotation frequency. (b) Temperature of the cloud measured after 150 ms of holding time as a function of the rotation frequency. The shaded area represents the initial dark MOT temperature before loading the dipole trap. Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $L = 1$ mm, and $w = 65\ \mu$m.

reaches a plateau which is close to the initial dark MOT temperature [shaded area in Fig. 9(b)]. We identify this phenomenon as being due to dipolar heating, i.e., heating due to the dipole potential fluctuations that atoms experience when they bounce on the potential barrier because of the rotating laser. From this measurement, we can get an estimate of the dipole-induced heating rate, expected to scale as $1/(Lf_m)$, which can be used for optimizing compression schemes.

After compression, for small trap size in the harmonic regime, we also require the rotation frequency to be large compared to the trap frequency $\omega/(2\pi)$ for the time-averaged approximation to be valid. The maximum trap frequencies that can be reached are a few kilohertz. By using a rotation frequency close to 100 kHz the two previous conditions are easily satisfied.

It is clear that the trap has better performance when the rotation frequency is increased. However, there is an intrinsic limitation that restrains this argument. Indeed, modulatation of a signal at a frequency f_m creates sidebands separated by f_m. These sidebands affect the dipole potential. The limit for having a nice "continuous trap shape" is to consider that the distance d between two peaks associated with two sidebands should be smaller than the laser waist $w = 65\ \mu$m. The AOM deflection angle is $\alpha = 9.3 \times 10^{-5}$ rad MHz^{-1}, and after a distance $L = 150$ mm (the lens focal length), the distance between two points is $d = \alpha f_m L$. The condition is then written

$$f_m \ll \frac{w}{\alpha L} \simeq 5\ \text{MHz}. \tag{11}$$

This argument shows that there is an intrinsic limit for the maximum frequency one can use. However, we are limited to $f_m < 100$ kHz by the VCOs, so there is still room for improvement.

In summary, below a modulation frequency of ∼1 kHz, the atoms are no longer trapped. This regime can be observed in the two first points of Fig. 9(b). In the intermediate regime $3 < f_m < 30$ kHz, we observe a reduction of the heating. This regime is associated with dipolar heating losses due to the rotating laser. For $f_m > 30$ kHz we observe an increase of the lifetime and a stabilization of the temperature. These results justify the choice of a rotation frequency of 90 kHz, which corresponds to the maximum frequency we can use, taking into account the 100 kHz input modulation bandwidth of the VCOs. The performance of the trap might probably be improved using VCOs with a higher input modulation bandwidth and a better frequency stability.

E. Influence of the detuning

We study the influence of the detuning on the lifetime and temperature by changing Δ and P while maintaining $U \propto P/\Delta$ constant. The first point on the right side of Fig. 10 is measured for $P = 200$ mW and $\Delta = 60$ GHz, corresponding to a potential height $U = 126\ \mu$K.

Figure 10(a) shows that for $\Delta < 20$ GHz the lifetime strongly depends on the detuning, and that for $\Delta > 20$ GHz, the lifetime becomes constant at ∼280 ms. It is important to note that the semiconductor laser diodes used in these experiments present, in addition to their main laser mode, a pedestal which spreads over 40 nm. From the data of Fig. 10(a), we conclude that above 20 GHz spontaneous emission due to the main laser mode is not the limiting phenomenon leading to atom losses. We attribute the limited lifetime above 20 GHz to heating induced by the amplified spontaneous-emission pedestal and dipolar heating as discussed in Sec. IV D.

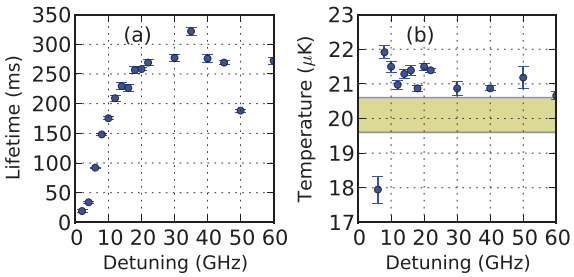

FIG. 10. (Color online) (a) Lifetime of the dipole trap as a function of the laser detuning at constant potential height. For this measurement we adjust the laser power to maintain a constant potential barrier $U \propto P/\Delta$ while the detuning is varied. (b) Temperature of the cloud measured after 150 ms of holding time as a function of the laser detuning. The shaded area represents the initial dark MOT temperature before loading the dipole trap. Parameters: $L = 1$ mm, $w = 65\ \mu$m, and $f_m = 90$ kHz.

In Fig. 10(b), we notice that the cloud temperature does not depend on the laser detuning. The temperature is constant, slightly higher than the dark MOT temperature. After loading the cloud at the dark MOT temperature spontaneous emission leads to atom losses without temperature increase (the potential height is $126\ \mu$K). We conclude that the extra heating due to spontaneous emission is immediately suppressed by evaporation: the atoms escape from the trap when their total energy becomes higher than the potential barrier height.

We notice in Fig. 10(a) particularly short trap lifetimes around $\Delta = 50$ GHz. In order to study this more quantitatively, we measure the number of atoms in the dipole trap after 150 ms of holding time using the same experimental parameters as in Fig. 10. These data points are shown in Fig. 11 where we observe a 10 GHz broad resonance centered around 50 GHz which manifests itself as atom losses. No resonance is seen

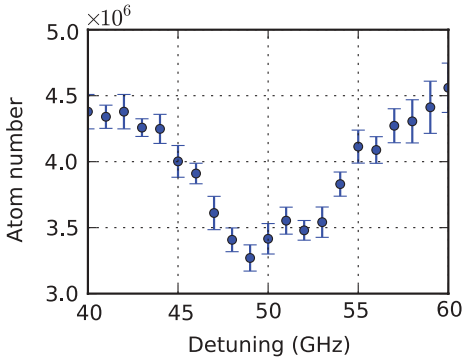

FIG. 11. (Color online) Number of atoms in the dipole trap after 150 ms of holding time as a function of the laser detuning at constant potential height. This curve shows a region where we measure abnormally low lifetimes, which indicates a resonance whose origin is unknown. The resonance is centered around 50 GHz and is 10 GHz broad. Parameters: $L = 1$ mm, $w = 65\ \mu$m, and $f_m = 90$ kHz (the same as those of Fig. 10).

in the incident laser spectrum and its origin remains elusive. Possible explanations might involve acoustic modes in the optical fiber or, more interestingly, molecular resonances.

F. Influence of the laser system spectrum

Assuming thermal equilibrium, the mean photon scattering rate Γ_{sc} can be estimated from the temperature by computing the average potential

$$\langle U \rangle = \frac{\int d\mathbf{r}\, U(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{U(\mathbf{r})+mgz}{k_B T}\right]}{\int d\mathbf{r}\, \exp\left[-\frac{U(\mathbf{r})+mgz}{k_B T}\right]}, \tag{12}$$

and using the relation $\hbar\Gamma_{sc} = U\ \Gamma/\Delta$. For a blue dipole trap $\langle U \rangle$ and $\langle \Gamma_{sc} \rangle$ are both increasing functions of the temperature. For the typical parameters of the experiment, $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $L = 1$ mm, $w = 65\ \mu$m, and $T = 20\ \mu$K, evaluation of Eq. (12) gives $\langle U \rangle = 2.11\ \mu$K and $\langle \Gamma_{sc} \rangle = 41\ \text{s}^{-1}$. This underestimates the photon scattering rate by not accounting for imperfections of the potential. More importantly, a major drawback of semiconductor laser systems is their amplified spontaneous-emission background which spreads over 40 nm and contains photons resonant with the atomic lines. These photons contribute to heating, leading to a potential reduction of the trap lifetime. The spontaneous-emission background is clearly seen when looking at the laser system power spectrum shown in Fig. 12(a). It represents 0.9% of the total laser power. In this section, we investigate two different approaches to filtering resonant photons using an etalon or a rubidium cell.

The first method consists in filtering the spontaneous-emission background using an etalon of finesse $\mathcal{F} = 60$ with free spectral range $\Delta\nu_{\text{FSR}} = 210$ GHz. Its transmission exhibits peaks separated by 210 GHz with full with at half maximum $\Delta\nu_{\text{FSR}}/\mathcal{F} = 3.5$ GHz. For an optical spectrum analyzer that does not resolve the transmission peaks, the expected reduction of the spontaneous emission background is $10\log_{10}\mathcal{F} = 17$ dB, which shows good agreement with the measurements presented in Fig. 12(a). After filtering, the spontaneous emission background represents only 0.04% of the total laser power. Due to the poor mode quality of the laser system, the coupling efficiency through the etalon is weak, leaving only 70 mW of light available for creating the dipole trap. In order to maintain a decent trap depth, we reduce the laser detuning to 24 GHz. The influence of the filtering on the trap lifetime is shown in Fig. 12(b). The measurement indicates that the spontaneous-emission background is not the dominant effect which limits the trap lifetime below 200 ms.

The second method involves using a 7.5-cm-long rubidium cell to filter photons around the Doppler-broadened lines. Heating the cell from 22 to 120 °C allows the filtering of photons by increase in the rubidium pressure of several orders of magnitude. Using heated cells as narrowband absorption filters to reduce the amplified spontaneous-emission background of diode laser systems has proven to be an efficient technique to minimize resonant photon scattering in dipole traps, hence extending their lifetimes [30–32]. Figure 12(c) illustrates the filtering efficiency by looking at the transmission of a weakly saturating probe through the cell. Figure 12(d) shows the number of atoms in the trap as a function of time with

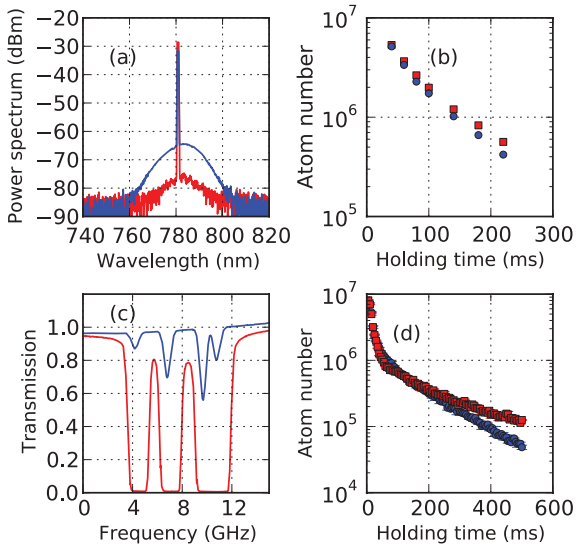

FIG. 12. (Color online) (a) Power spectrum of the laser system (blue, broader, curve) and of the laser system plus etalon (red curve). (b) Number of atoms in the dipole trap as a function of the holding time without (blue points) and with etalon (red squares). The lifetimes are 58 and 66 ms, respectively. The laser power is the same for the two measurements. Parameters: $P = 70$ mW, $\Delta = 24$ GHz, $L = 1$ mm, $w = 65\ \mu$m, and $f_m = 90$ kHz. (c) Transmission of a weakly saturating probe through a 7.5-cm-long rubidium cell at 22 °C (blue, upper, curve) and 120 °C (red curve). (d) Number of atoms in the dipole trap as a function of the holding time using the rubidium cell at 22 °C (blue points) and 120 °C (red squares). Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 43$ GHz, $L = 1$ mm, $w = 65\ \mu$m, and $f_m = 90$ kHz.

and without filtering. These curves show a double-exponential decay. We relate the first decay to losses occurring during the transient regime and the second one to losses in the quasisteady regime where the lifetime of the trap is evaluated. Again, below 200 ms we are not able to observe any benefit from resonant photon filtering. However, for longer trapping times, we notice lower atom losses, indicating that photon scattering from the spontaneous-emission background becomes important.

In conclusion, below 200 ms, light scattering from the laser pedestal does not limit the experiment. Since we are aiming at fast compression times, we choose not to use any filtering method in the setup. Nevertheless, our data indicate that one should definitely consider implementing these techniques to obtain long trapping times, which might be useful in applications involving quantum-degenerate gases.

G. Conclusion and final performance

The dipole trap presented in this section allows for trapping a large number of atoms with an excellent loading efficiency. Table II summarizes the performance and limitations of the setup. It helps us find the best compromise for our purposes with the following parameters that maximize the loading, the lifetime, and the cloud temperature: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $L = 1$ mm, $w = 65\ \mu$m, and $f_m = 90$ kHz. With these parameters, the height of the potential barrier is $\sim$190 μK, the typical lifetime is $\sim$450 ms, and the temperature

TABLE II. Summary of the experiments performed on the static dipole trap in the quasisteady regime. For each measurement, we identify a mechanism leading to losses and/or heating and find the parameters that give the best trap performances.

Experimental parameters	Losses and/or heating mechanisms	Solutions
Size L	Interactions with potential barrier	Largest possible size ∼1 mm for better lifetime and loading
Rotation frequency f_m	Dipolar heating	$f_m > 30$ kHz, the largest possible keeping in mind the sideband limit. Limited by the VCO modulation bandwidth: 90 kHz.
Laser mode detuning Δ	Spontaneous emission	$\Delta > 20$ GHz, ideally the largest possible while keeping a suitable potential height
Laser system pedestal	Spontaneous emission	Beam filtering through etalon or rubidium hot cell

of the cloud is constant at $\sim 25\ \mu$K (about the dark MOT temperature), leading to a factor $\eta = U/(k_B T) \simeq 7.6$.

V. COMPRESSION

In this section, we compress the atomic cloud by dynamically reducing its size L by means of the blue-detuned crossed dipole trap. The goal is to quickly compress the maximum number of atoms N below the strong localization threshold, qualitatively given by the Ioffe-Regel criterion [13]. As discussed in the Introduction, this threshold corresponds to atomic densities of $n = N/L^3 \simeq 10^{13}$–10^{14} cm^{-3} for rubidium atoms.

A. Principles of the compression scheme

The aim of this section is to understand the relevant parameters for compressing the cloud. Simple arguments allow us to qualitatively address important issues, even though they do not aim at describing the experiment in a rigorous way (in particular concerning the role of gravity).

1. Maximum compression speed

We are interested in calculating the maximum speed at which the potential barrier of height U can move before the atoms are no longer able to follow the motion of the barrier and consequently jump over it. Let us consider the most pessimistic case where the potential barrier moves towards the atoms in the laboratory frame at a speed $v_{\rm pot}$ while the atom moves in the opposite direction at a speed $v_{\rm atom}$. In the frame attached to the potential barrier, the atom has a velocity $v = v_{\rm pot} + v_{\rm atom}$ and will not jump over the barrier if its kinetic energy is smaller than the potential height, leading to the criterion $v_{\rm pot} < \sqrt{2U/m} - v_{\rm atom}$. Noting that $\sqrt{2U/m} \gg v_{\rm atom}$, the condition simplifies to

$$v_{\rm pot} < \sqrt{\frac{2U}{m}}. \tag{13}$$

For a 200 μK potential height, we obtain a maximum barrier velocity of 0.2 m s^{-1}. If the barrier moves by 500 μm, the minimal time needed to compress the cloud is 2.5 ms. This will not be a restrictive constraint for the experimental realization of the compression. Moreover, knowing that the potential barrier increases during compression [cf. Eq. (4)], Eq. (13) overestimates the minimum compression time.

2. Heating

For an ideal gas undergoing an adiabatic reversible process the following equation applies: $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, where T is the temperature, V the volume, and γ the adiabatic index. For a monatomic gas $\gamma = 5/3$. When the size of the trap is reduced to L_f, a cloud of monatomic atoms (e.g., rubidium atoms) initially at a temperature T_i in a trap of size L_i will reach a temperature T_f given by

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{L_i}{L_f}\right)^2. \tag{14}$$

Any nonadiabatic reversible compression would lead to higher final temperatures than the one predicted by Eq. (14).

3. Phase-space density evolution

When the size of the trap is reduced such that $a \simeq w$, i.e., the radius is about equal to the waist, the geometry of the trap changes from a box with Gaussian walls to a harmonic potential $U = U_1 + (1/2)m\omega^2 r^2$ where the analytical expressions for U_1 and ω are given in Sec. II A. During an adiabatic compression, the entropy of the cloud is conserved, implying phase-space density conservation when the geometry of the trap does not change. However, when the geometry of the trap changes from a box to a harmonic potential, the phase-space density ρ slightly increases. Denoting by $\rho_i \equiv n_i \Lambda_{T_i}^3$ (where n_i is the density and Λ_{T_i} is the initial thermal wavelength) the initial phase-space density for the atoms in a box, and by $\rho_f \equiv n_f \Lambda_{T_f}^3$ the final phase-space density for the atoms at the center of the harmonic trap, one can easily show that the increase in phase-space density for an adiabatic transformation is given by[2]

$$\rho_f = e^{3/2} \rho_i. \tag{15}$$

This phase space density increase comes from the modification of the density of states when the trap geometry is modified [33,34].

4. Potential height evolution

The temperature increase of the cloud resulting from the compression tends to make the atoms escape from the trap by jumping over the potential barrier. However, when the trap size

[2]The following equation is obtain by equating the entropy of an ideal gas in a box $S = Nk_B\{\ln[V/N\Lambda_T^3] + \frac{5}{2}\}$ and its entropy in a harmonic trap $S = Nk_B\{\ln[(1/N)(k_B T/\hbar\omega)^3] + 4\}$.

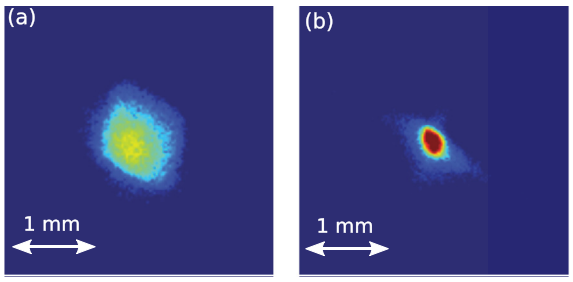

FIG. 13. (Color online) *In situ* fluorescence images of the atoms in the dipole trap taken from the top of the cell. (a) Cloud before compression, trap size $L_i = 1$ mm. (b) Cloud after a 10 ms compression, trap size $L_f = 300$ μm. Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $w = 65$ μm, and $f_m = 90$ kHz.

is reduced, the potential height increases as well. Equation (4) shows that a trap with initial size L_i and potential height U_i, compressed to a final size L_f, has a final potential height $U_f = U_i L_i / L_f$. The temperature of the atoms thus increases faster than the height of the potential. Using Eq. (14), and neglecting collisions (evaporation), atoms stay in the trap while $k_B T_f = U_f$, which allows us to estimate the size of the trap before the atoms escape:

$$\frac{L_f}{L_i} = \frac{k_B T_i}{U_i}. \tag{16}$$

In the experiment $k_B T_i / U_i \sim 1/8$ so that, starting from a trap size of 1 mm, we can compress the cloud down to $\sim$125 μm before atoms jump over the potential barrier.

5. *Lifetime constraint*

In addition to the constraints on the minimum compression time discussed in Sec. V A1, there are also restrictions on the maximum compression time. We have shown in Sec. IV C that the trap lifetime strongly depends on its size. This implies important limitations on the maximum compression time that should be used. For example, using the data from Fig. 8, compressing the cloud to a final size of 400 μm should be done in less than 30 ms (which is the lifetime of the trap for this diameter) in order not to lose too many atoms during compression.

B. Experimental realization

After loading the dipole trap (initial size $L_i = 1$ mm) using the protocol described in Sec. II D, the size of the trap is kept constant during 20 ms in order for the nontrapped atoms to escape from the imaging field of view. The size of the trap is then linearly reduced and the compression time can be varied. The data presented below are taken for different final trap sizes L_f, while the compression time is fixed. Figure 13 shows fluorescence images of the cloud viewed from the top of the cell, before and after compression. Absorption imaging from the side of the trap is used to perform quantitative measurements.

Figure 14 shows the density (a) and the temperature (b) of the cloud as functions of the trap size after compression L_f for two different compression times: 5 ms (blue points) and 10 ms (red squares). The blue points correspond to 2×10^7 initially loaded atoms and the red squares to 10^7 atoms. We manage to increase the density by more than one order of magnitude to reach 5×10^{12} cm^{-3}, reducing the trap size by a factor of 5. Figure 14(b) shows strong heating during compression. The faster the compression, the higher the heating, as expected from the discussion on adiabatic heating in Sec. V A. In the future, if the high final temperature is a problem, one can think of adding an evaporative cooling stage after compression, which would make the cloud colder and denser. We notice that for small compression ($L_f > 0.6$ mm), the density and the temperature are almost unaffected. This can be understood by looking at absorption images of the cloud (see Fig. 7) where the atoms do not occupy the full trap volume because of gravity. The change of slope that we observe for $L_f < 0.6$ mm corresponds to the situation where the cloud starts occupying all the trap volume. For small trap size we observe a saturation of the cloud density when the trap reaches the harmonic regime. This might be due to the the increased sensitivity to instabilities for small traps. Indeed, in the harmonic regime, the trap frequency is very sensitive to the trap size. Inelastic (s-wave or/and light-assisted) collisions can also play a role at high densities and contribute to the observed fluctuations.

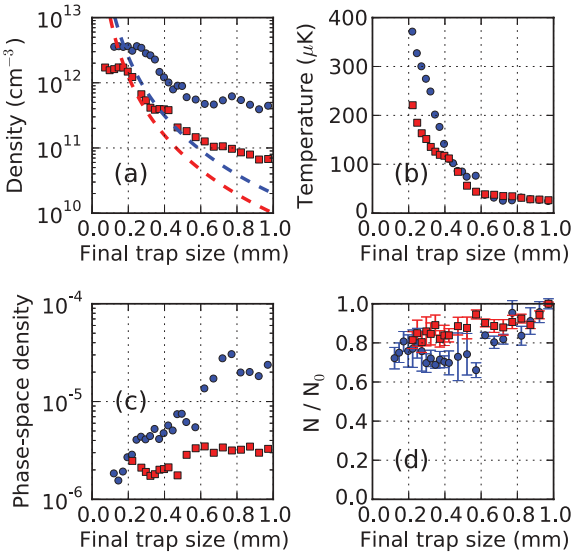

FIG. 14. (Color online) (a) Density, (b) temperature, and (c) phase-space density of the cloud as a function of the trap size after compression L_f. (d) Fraction of the remaining atoms after compression. The initial trap size is $L_i = 1$ mm. The blue points correspond to a 5 ms compression and the red squares to a 10 ms compression. The initial conditions are $N = 2 \times 10^7$ initially loaded atoms for the blue points and $N = 10^7$ atoms for the red squares. The dashed curves in (a) correspond to the densities one would obtain if the trap were uniformly loaded $n = N/L^3$. Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $w = 65$ μm, and $f_m = 90$ kHz.

Figure 14(c) shows the phase-space density $n\Lambda_T^3$ as a function of the final trap size. As previously discussed, the phase-space density is conserved for an adiabatic compression if the trap geometry does not change (the density of states is conserved). We observe that for a 10 ms compression time, the phase-space density is conserved but this is no longer the case when the compression time is 5 ms.

Figure 14 (d) shows the fraction of remaining atoms after compression. We manage to keep more than 80% of the atoms, which is very promising. To do so, we need to compress faster than any loss mechanism; in particular, faster than the trap lifetime for the final trap size we are aiming at (see Fig. 8).

1. Maximum density

The experiments performed above are designed to understand how compression works. They are carried out using a 2.5 s MOT loading time from a low-pressure background gas, resulting in a modest number of atoms loaded into the trap, $\sim 10^7$. Techniques to increase the number of trapped atoms include making the loading time longer, increasing the background gas pressure using LIAD, or enlarging the initial trap volume. The latter is something difficult to achieve with our current setup. Therefore, a cloud with more atoms but a larger initial size would not increase significantly the number of trapped atoms. Improving the dark MOT density (by further detuned trapping lasers) will be important to increase the number of trapped atoms well beyond 10^8.

To test the performance of the trap we simply increase the MOT loading time to 20 s. We also use a detuning of 20 GHz (compared to 40 GHz usually) to increase the potential height. In these conditions, 5×10^7 atoms are loaded into the trap. After compressing the cloud to a final size of 200 μm in 5 ms, we measure a density of 10^{13} cm^{-3}, which corresponds to

$$kl \simeq 2.8, \tag{17}$$

compatible with the Ioffe-Regel criterion. This setup thus proves to be an effective tool to rapidly compress a large atomic cloud down to the strong-localization threshold, paving the way for efficient exploration of light-matter interaction in the dense regime. In the future, the trap performances can be further improved by having a more precise control of the trap-size evolution when the trap enters the harmonic regime, since in this regime the parameters of the trap (e.g., the trap frequency) vary very quickly with its radius.

C. Collisions and thermalization

When the cloud is compressed, the spatial density and the temperature rise, which makes the cloud enter into a regime where collisions are no longer negligible on the time scale of the experiments [35]. The elastic collision rate is given by

$$\Gamma_{\rm el} = n\sigma\bar{v}_{\rm rel}, \tag{18}$$

where n is the cloud density, $\bar{v}_{\rm rel} = 4\sqrt{k_B T/(\pi m)}$ is the mean relative atom velocity, and σ is the total elastic cross section. If we consider pure s-wave collisions, which in our case is a strong approximation given the temperature of the gas (where higher-order collisions, e.g., p-wave collisions, can occur), the total cross section is given by $\sigma = 8\pi a^2$ for identical bosons ($\sigma = 4\pi a^2$ for nonidentical particles), where a is the scattering length. Elastic s-wave collision rates computed for the data of the experiments presented in Sec. V B are shown in Fig. 15(a). During compression, the collision rate increases by almost two orders of magnitude (from 10 to 10^3 s^{-1}). In our compressed trap, s-wave collisions are thus expected to become relevant, with subsequent thermalization and evaporation.

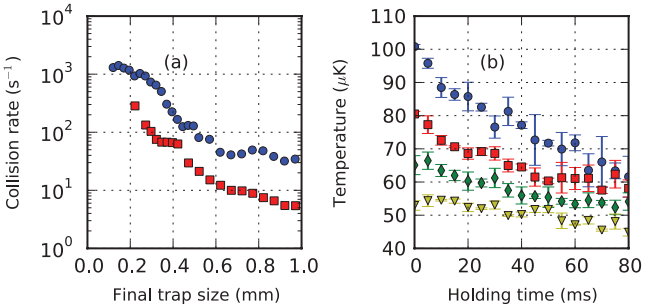

FIG. 15. (Color online) (a) Elastic s-wave collision rate as a function of the trap size after compression. The blue points correspond to a 5 ms compression and 2×10^7 atoms initially loaded. The red squares correspond to a 10 ms compression and 10^7 atoms initially loaded. (b) Temperature as a function of the holding time for different initial conditions of the atoms in the dipole trap. The different initial conditions are prepared by compressing the cloud during 40 ms from an initial size $L_i = 1$ mm to different final trap sizes after compression, $L_f = 0.42$ mm (blue points), 0.47 mm (red squares), 0.52 mm (green diamonds), and 0.57 mm (yellow triangles). After compression the diameter is kept constant. The state of the system after compression is used as the initial condition for this measurement. The smaller is the trap size after compression, the hotter and denser are the cloud initial conditions. The initial densities and temperatures are 1.7×10^{11},1.6×10^{11},1.4×10^{11},1.2×10^{11} cm^{-3} and 101,81,65,53 μK, which correspond to elastic s-wave collision rates of 27,23,17,14 s^{-1}, respectively. These s-wave collision rates are compatible with the points showing the temperature reduction. Parameters: $P = 200$ mW, $\Delta = 40$ GHz, $w = 65$ μm, and $f_m = 90$ kHz.

Figure 15(b) shows the cloud temperature as a function of the holding time just after compression. The cloud is compressed during 40 ms and the trap parameters are kept constant after compression. The state of the system after compression is the initial condition for this experiment: the smaller the final trap size, the denser and hotter the cloud, leading to higher s-wave collision rates. In Fig. 15(b), we notice that the temperature reduction is faster when the cloud is initially hotter and denser (i.e., the trap size after compression is smaller), which strongly hints at thermalization due to s-wave collisions. The elastic collision rates computed from Eq. (18) (see the caption of Fig. 15) are compatible with the time scale of the temperature reduction observed in Fig. 15(b). Indeed, three or four elastic collisions are needed for the gas to thermalize [35]. We note that pumping the atoms into the $F = 1$ hyperfine level (instead of $F = 2$ used in this work) would allow us to avoid unwanted hyperfine-structure-changing collisions occurring at large densities.

VI. CONCLUSION

We have studied a blue-detuned crossed dipole trap designed to quickly compress cold atomic clouds to high densities. Extensive characterization of the system has led to an understanding of the properties and the dynamics of this trapping scheme. After a very efficient loading of a large number of atoms (up to 5×10^7), the cloud is compressed in 5 ms from an initial density of 5×10^{10} cm^{-3} to a final density of 10^{13} cm^{-3}. The cloud density in the final stage is very

close to the Ioffe-Regel criterion, demonstrating the efficiency and reliability of this technique for studying light-matter interactions in the dense regime.

Extension of this work includes improving the trap performances by optimizing the trap loading (e.g., denser dark MOT, compensating for gravity, etc.), having a better control of the final compression state, or using Sisyphus cooling during the early compression stages. In addition to these modifications concerning the experimental protocol, improvements of the setup itself would lead to substantial performance leaps; using, e.g., a more detuned and powerful laser to reduce spontaneous emission losses or using VCOs with a higher input modulation bandwidth and a better frequency stability.

Increasing the trap lifetime would allow use of this setup for producing quantum-degenerate gases. This kind of compressible dipole trap would make the loading and evaporation proceed differently from the standard approach to optical BECs, yielding larger BECs more quickly. It would consist in reaching a high collision rate during a first compression stage and then realizing runaway evaporative cooling. To do so, the trap frequency should be maintained constant by reducing the trap size when the trap power is reduced. This technique would not require mobile lenses [23,36], allowing for faster and more stable operations.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Grants No. ANR-06-BLAN-0096 CAROL and No. ANR-09-JCJC-009401 INTERLOP. We acknowledge fruitful discussions with the cold-atom group at INLN. We thank Jean-François Schaff for discussions and the imaging program.

[1] M. D. Barrett, J. A. Sauer, and M. S. Chapman, Phys. Rev. Lett. **87**, 010404 (2001).
[2] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch, Nature (London) **415**, 39 (2002).
[3] Z. Hadzibabic, P. Kruger, M. Cheneau, B. Battelier, and J. Dalibard, Nature (London) **441**, 1118 (2006).
[4] E. Akkermans, A. Gero, and R. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **101**, 103602 (2008).
[5] R. Kaiser, J. Mod. Opt. **56**, 2082 (2009).
[6] I. M. Sokolov, M. D. Kupriyanova, D. V. Kupriyanov, and M. D. Havey, Phys. Rev. A **79**, 053405 (2009).
[7] M. O. Scully, E. S. Fry, C. H. R. Ooi, and K. Wódkiewicz, Phys. Rev. Lett. **96**, 010501 (2006).
[8] T. Bienaimé, S. Bux, E. Lucioni, P. W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **104**, 183602 (2010).
[9] T. Bienaimé, N. Piovella, and R. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **108**, 123602 (2012).
[10] M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **102**, 143601 (2009).
[11] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C. A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **83**, 5266 (1999).
[12] P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
[13] A. F. Ioffe and A. R. Regel, Prog. Semicond. **4**, 237 (1960).
[14] S. R. Granade, M. E. Gehm, K. M. O'Hara, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **88**, 120405 (2002).
[15] S. Balik, M. D. Havey, I. M. Sokolov, and D. V. Kupriyanov, Phys. Rev. A **79**, 033418 (2009).
[16] R. Grimm, M. Weidemuller, and Y. B. Ovchinnikov, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (1999).
[17] N. Friedman, L. Khaykovich, R. Ozeri, and N. Davidson, Phys. Rev. A **61**, 031403 (2000).
[18] V. Milner, J. L. Hanssen, W. C. Campbell, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **86**, 1514 (2001).
[19] N. Friedman, A. Kaplan, D. Carasso, and N. Davidson, Phys. Rev. Lett. **86**, 1518 (2001).
[20] A. Kaplan, N. Friedman, M. Andersen, and N. Davidson, Phys. Rev. Lett. **87**, 274101 (2001).
[21] K. Henderson, C. Ryu, C. MacCormick, and M. G. Boshier, New J. Phys. **11**, 043030 (2009).
[22] B. Zimmermann, T. Müller, J. Meineke, T. Esslinger, and H. Moritz, New J. Phys. **13**, 043007 (2011).
[23] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, Phys. Rev. A **71**, 011602 (2005).
[24] A. Gozzini, F. Mango, J. Xu, G. Alzetta, F. Maccarrone, and R. Bernheim, Nuovo Cimento D **15**, 709 (1993).
[25] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, Phys. Rev. A **63**, 023404 (2001).
[26] T. Chanelière, L. He, R. Kaiser, and D. Wilkowski, Eur. Phys. J. D **46**, 507 (2008).
[27] T. Arpornthip, C. A. Sackett, and K. J. Hughes, Phys. Rev. A **85**, 033420 (2012).
[28] J. E. Bjorkholm, Phys. Rev. A **38**, 1599 (1988).
[29] S. Bali, K. M. O'Hara, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, Phys. Rev. A **60**, R29 (1999).
[30] M. Hammes, D. Rychtarik, and R. Grimm, C. R. Acad. Sci., Ser. IV–Phys. **2**, 625 (2001).
[31] R. Dumke, M. Volk, T. Müther, F. B. J. Buchkremer, G. Birkl, and W. Ertmer, Phys. Rev. Lett. **89**, 097903 (2002).
[32] H. Lignier, J. Chabé, D. Delande, J. C. Garreau, and P. Szriftgiser, Phys. Rev. Lett. **95**, 234101 (2005).
[33] P. W. H. Pinkse, A. Mosk, M. Weidemüller, M. W. Reynolds, T. W. Hijmans, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **78**, 990 (1997).
[34] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, S. Inouye, J. Stenger, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **81**, 2194 (1998).
[35] W. Ketterle and N. J. Van Druten, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **37**, 181 (1996).
[36] T. Bienaimé, Ph.D. thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2011.

Bibliographie

[1] E. Akkermans, P. E. Wolf, and R. Maynard. Coherent backscattering of light by disordered media : Analysis of the peak line shape. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1471–1474, Apr 1986. *- Cité 1 fois : page 11 -*

[2] B A van Tiggelen, A Lagendijk, and A Tip. Multiple-scattering effects for the propagation of light in 3d slabs. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 2(37) :7653, 1990. *- Cité 1 fois : page 11 -*

[3] Diederik S. Wiersma, Meint P. van Albada, Bart A. van Tiggelen, and Ad Lagendijk. Experimental evidence for recurrent multiple scattering events of light in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :4193–4196, May 1995. *- Cité 1 fois : page 11 -*

[4] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109 :1492–1505, Mar 1958. *- Cité 4 fois : pages 11, 39, 40 et 56 -*

[5] Martin Störzer, Peter Gross, Christof M. Aegerter, and Georg Maret. Observation of the critical regime near anderson localization of light. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :063904, Feb 2006. *- Cité 2 fois : pages 11 et 13 -*

[6] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93 :99–110, Jan 1954. *- Cité 5 fois : pages 11, 12, 40, 46 et 103 -*

[7] M. Gross, C. Fabre, P. Pillet, and S. Haroche. Observation of near-infrared dicke superradiance on cascading transitions in atomic sodium. *Phys. Rev. Lett.*, 36 :1035–1038, Apr 1976. *- Cité 2 fois : pages 11 et 42 -*

[8] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover, New York, 1950. *- Cité 1 fois : page 11 -*

[9] Romain Pierrat, Benoît Grémaud, and Dominique Delande. Enhancement of radiation trapping for quasiresonant scatterers at low temperature. *Phys. Rev. A*, 80 :013831, Jul 2009. *- Cité 3 fois : pages 11, 139 et 167 -*

[10] V. Letokhov and S. Johansson. *Astrophysical Lasers.* OUP Oxford, 2008. *- Cité 1 fois : page 11 -*

[11] Frank Scheffold and Georg Maret. Universal conductance fluctuations of light. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :5800–5803, Dec 1998. *- Cité 1 fois : page 11 -*

[12] R. Friedberg, S.R. Hartmann, and J.T. Manassah. Frequency shifts in emission and absorption by resonant systems ot two-level atoms. *Physics Reports*, 7(3) :101 – 179, 1973. *- Cité 3 fois : pages 11, 29 et 137 -*

[13] G.S. Agarwal. *Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relation to other approaches.* Springer tracts in modern physics. Springer-Verlag, 1974. *- Cité 3 fois : pages 11, 33 et 120 -*

[14] M. Gross and S. Haroche. Superradiance : An essay on the theory of collective spontaneous emission. *Physics Reports*, 93(5) :301 – 396, 1982. *- Cité 3 fois : pages 11, 41 et 104 -*

[15] E. Akkermans, A. Gero, and R. Kaiser. Photon localization and dicke superradiance in atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :103602, Sep 2008. *- Cité 9 fois : pages 12, 36, 43, 103, 117, 127, 128, 130 et 168 -*

[16] Marlan O. Scully, Edward S. Fry, C. H. Raymond Ooi, and Krzysztof Wódkiewicz. Directed spontaneous emission from an extended ensemble of n atoms : Timing is everything. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :010501, Jan 2006. *- Cité 3 fois : pages 12, 16 et 41 -*

[17] Diederik S. Wiersma, Paolo Bartolini, Ad Lagendijk, and Roberto Righini. Localization of light in a disordered medium. *Nature*, 390(6661) :671–673, 1997. *- Cité 1 fois : page 13 -*

[18] C. M. Aegerter, M. Störzer, and G. Maret. Experimental determination of critical exponents in anderson localisation of light. *Europhys. Lett.*, 75(4) :562–568, 2006. *- Cité 1 fois : page 13 -*

[19] SperlingT., BuhrerW., AegerterC. M., and MaretG. Direct determination of the transition to localization of light in three dimensions. *Nat Photon*, 7(1) :48–52, 2013. *- Cité 1 fois : page 13 -*

[20] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan. Scaling theory of localization : Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 42 :673–676, Mar 1979. *- Cité 4 fois : pages 13, 39, 56 et 95 -*

[21] Yong Li, Jörg Evers, Hang Zheng, and Shi-Yao Zhu. Collective spontaneous emission beyond the rotating-wave approximation. *Phys. Rev. A*, 85 :053830, May 2012. *- Cité 5 fois : pages 13, 107, 134, 183 et 187 -*

[22] L Chomaz, L Corman, T Yefsah, R Desbuquois, and J Dalibard. Absorption imaging of a quasi-two-dimensional gas : a multiple scattering analysis. *New Journal of Physics*, 14(5) :055001, 2012. *- Cité 7 fois : pages 13, 25, 30, 85, 134, 191 et 196 -*

[23] P. W. Milonni and P. L. Knight. Retardation in the resonant interaction of two identical atoms. *Phys. Rev. A*, 10 :1096–1108, Oct 1974. *- Cité 3 fois : pages 13, 36 et 119 -*

[24] Olivier Morice, Yvan Castin, and Jean Dalibard. Refractive index of a dilute bose gas. *Phys. Rev. A*, 51 :3896–3901, May 1995. *- Cité 5 fois : pages 13, 30, 85, 191 et 197 -*

[25] Marian Rusek, Arkadiusz Orłowski, and Jan Mostowski. Band of localized electromagnetic waves in random arrays of dielectric cylinders. *Phys. Rev. E*, 56 :4892–4895, Oct 1997. *- Cité 4 fois : pages 13, 38, 48 et 105 -*

[26] F. A. Pinheiro, M. Rusek, A. Orlowski, and B. A. van Tiggelen. Probing anderson localization of light via decay rate statistics. *Phys. Rev. E*, 69 :026605, Feb 2004. *- Cité 9 fois : pages 13, 25, 26, 43, 53, 62, 64, 105 et 185 -*

[27] Mauro Antezza, Yvan Castin, and David A. W. Hutchinson. Quantitative study of two- and three-dimensional strong localization of matter waves by atomic scatterers. *Phys. Rev. A*, 82 :043602, Oct 2010. *- Cité 6 fois : pages 13, 25, 38, 43, 53 et 85 -*

[28] T. Bienaimé, S. Bux, E. Lucioni, Ph. W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser. Observation of a cooperative radiation force in the presence of disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :183602, May 2010. *- Cité 7 fois : pages 14, 133, 138, 154, 155, 156 et 186 -*

[29] Alpha Gaetan, Yevhen Miroshnychenko, Tatjana Wilk, Amodsen Chotia, Matthieu Viteau, Daniel Comparat, Pierre Pillet, Antoine Browaeys, and Philippe Grangier. Observation of collective excitation of two individual atoms in the rydberg blockade regime. *Nat Phys*, 5(2) :115–118, 2009. *- Cité 1 fois : page 16 -*

[30] E. Urban, T. A. Johnson, T. Henage, L. Isenhower, D. D. Yavuz, T. G. Walker, and M. Saffman. Observation of rydberg blockade between two atoms. *Nat Phys*, 5(2) :110–114, 2009. *- Cité 1 fois : page 16 -*

[31] Anatoly A. Svidzinsky, Jun-Tao Chang, and Marlan O. Scully. Cooperative spontaneous emission of n atoms : Many-body eigenstates, the effect of virtual lamb shift processes, and analogy with radiation of n classical oscillators. *Phys. Rev. A*, 81 :053821, May 2010. *- Cité 2 fois : pages 17 et 134 -*

[32] Dalibard, J., Dupont-Roc, J., and Cohen-Tannoudji, C. Vacuum fluctuations and radiation reaction : identification of their respective contributions. *J. Phys. France*, 43(11) :1617–1638, 1982. *- Cité 1 fois : page 18 -*

[33] L. Novotny and B. Hecht. *Principles of Nano-Optics*. Principles of Nano-optics. Cambridge University Press, 2006. *- Cité 2 fois : pages 19 et 20 -*

[34] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Atom-Photon Interactions*. Wiley Science Paperback Series. Wiley, 1998. *- Cité 3 fois : pages 24, 34 et 97 -*

[35] Tom Bienaimé, Nicola Piovella, and Robin Kaiser. Controlled dicke subradiance from a large cloud of two-level systems. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :123602, Mar 2012. *- Cité 7 fois : pages 25, 30, 105, 110, 111, 177 et 183 -*

[36] Tsampikos Kottos and Matthias Weiss. Statistics of resonances and delay times : A criterion for metal-insulator transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :056401, Jul 2002. *- Cité 11 fois : pages 25, 35, 43, 56, 57, 61, 62, 63, 105, 106 et 185 -*

[37] Mauro Antezza and Yvan Castin. Spectrum of light in a quantum fluctuating periodic structure. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :123903, Sep 2009. *- Cité 3 fois : pages 25, 36 et 117 -*

[38] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C. A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser. Coherent backscattering of light by cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :5266–5269, Dec 1999. *- Cité 2 fois : pages 26 et 144 -*

[39] Y. Bidel, B. Klappauf, J. C. Bernard, D. Delande, G. Labeyrie, C. Miniatura, D. Wilkowski, and R. Kaiser. Coherent light transport in a cold strontium cloud. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :203902, May 2002. *- Cité 2 fois : pages 26 et 144 -*

[40] G. Labeyrie, E. Vaujour, C. A. Müller, D. Delande, C. Miniatura, D. Wilkowski, and R. Kaiser. Slow diffusion of light in a cold atomic cloud. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :223904, Nov 2003. *- Cité 5 fois : pages 26, 49, 110, 111 et 182 -*

[41] Cord A. Müller, Thibaut Jonckheere, Christian Miniatura, and Dominique Delande. Weak localization of light by cold atoms : The impact of quantum internal structure. *Phys. Rev. A*, 64 :053804, Oct 2001. *- Cité 1 fois : page 26 -*

[42] Cord A. Müller, Christian Miniatura, David Wilkowski, Robin Kaiser, and Dominique Delande. Multiple scattering of photons by atomic hyperfine multiplets. *Phys. Rev. A*, 72 :053405, Nov 2005. *- Cité 1 fois : page 26 -*

[43] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons and atoms : introduction to quantum electrodynamics*. Wiley professional paperback series. Wiley, 1997. *- Cité 2 fois : pages 26 et 27 -*

[44] Matthias Weiss, J. A. Méndez-Bermúdez, and Tsampikos Kottos. Resonance width distribution for high-dimensional random media. *Phys. Rev. B*, 73 :045103, Jan 2006. *- Cité 10 fois : pages 27, 35, 43, 56, 57, 59, 60, 61, 105 et 106 -*

[45] Ph. W. Courteille, S. Bux, E. Lucioni, K. Lauber, T. Bienaimé, R. Kaiser, and N. Piovella. Modification of radiation pressure due to cooperative scattering of light. *The European Physical Journal D*, 58(1) :69–73, 2010. *- Cité 5 fois : pages 27, 134, 136, 138 et 139 -*

[46] Jamal T. Manassah. Cooperative radiation from atoms in different geometries : decay rate and frequency shift. *Adv. Opt. Photon.*, 4(2) :108–156, Jun 2012. *- Cité 1 fois : page 27 -*

[47] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998. *- Cité 3 fois : pages 29, 30 et 199 -*

[48] A. Gero and E. Akkermans. Superradiance and multiple scattering of photons in atomic gases. *Phys. Rev. A*, 75 :053413, May 2007. *- Cité 3 fois : pages 30, 36 et 46 -*

[49] Vasily V. Temnov and Ulrike Woggon. Superradiance and subradiance in an inhomogeneously broadened ensemble of two-level systems coupled to a low-q cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :243602, Dec 2005. *- Cité 1 fois : page 30 -*

[50] M. Trippenbach, Bo Gao, J. Cooper, and K. Burnett. Slow collisions between identical atoms in a laser field : Application of the born and markov approximations to the system of moving atoms. *Phys. Rev. A*, 45 :6539–6554, May 1992. *- Cité 3 fois : pages 30, 193 et 199 -*

[51] T. Bienaimé, M. Petruzzo, D. Bigerni, N. Piovella, and R. Kaiser. Atom and photon measurement in cooperative scattering by cold atoms. *Journal of Modern Optics*, 58(21) :1942–1950, 2011. *- Cité 6 fois : pages 32, 134, 135, 136, 137 et 138 -*

[52] Anatoly A. Svidzinsky, Jun-Tao Chang, and Marlan O. Scully. Dynamical evolution of correlated spontaneous emission of a single photon from a uniformly excited cloud of n atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :160504, Apr 2008. *- Cité 1 fois : page 32 -*

[53] Yong Li, Jörg Evers, Wei Feng, and Shi-Yao Zhu. Spectrum of collective spontaneous emission beyond the rotating-wave approximation. *Phys. Rev. A*, 87 :053837, May 2013. *- Cité 6 fois : pages 33, 104, 105, 107, 183 et 187 -*

[54] M. Born and R. Oppenheimer. Zur quantentheorie der molekeln. *Annalen der Physik*, 389(20) :457–484, 1927. *- Cité 1 fois : page 34 -*

[55] A. MacKinnon and B. Kramer. One-parameter scaling of localization length and conductance in disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 47 :1546–1549, Nov 1981. *- Cité 2 fois : pages 35 et 128 -*

[56] Yan V. Fyodorov and Hans-Jurgen Sommers. Statistics of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering : Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. *Journal of Mathematical Physics*, 38(4) :1918–1981, 1997. *- Cité 1 fois : page 35 -*

[57] J. Guo and J. Cooper. Cooling and resonance fluorescence of two atoms in a one-dimensional optical molasses. *Phys. Rev. A*, 51 :3128–3135, Apr 1995. *- Cité 2 fois : pages 35 et 118 -*

[58] J. Guo. Effects of resonant dipole interaction between atoms on laser cooling : The case of two identical atoms. *Phys. Rev. A*, 50 :R2830–R2833, Oct 1994. *- Cité 1 fois : page 35 -*

[59] Eugene P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Annals of Mathematics*, 62(3) :pp. 548–564, 1955. *- Cité 3 fois : pages 37, 73 et 81 -*

[60] Eugene P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, 67(2) :pp. 325–327, 1958. *- Cité 2 fois : pages 37 et 81 -*

[61] Freeman J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1) :140–156, 1962. *- Cité 2 fois : pages 38 et 81 -*

[62] Marc Mézard and Giorgio Parisi. Thermodynamics of glasses : A first principles computation. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :747–750, Jan 1999. *- Cité 1 fois : page 38 -*

[63] M. Mézard, G. Parisi, and A. Zee. Spectra of euclidean random matrices. *Nuclear Physics B*, 559(3) :689 – 701, 1999. *- Cité 3 fois : pages 38, 48 et 49 -*

[64] Ariel Amir, Yuval Oreg, and Yoseph Imry. Localization, anomalous diffusion, and slow relaxations : A random distance matrix approach. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :070601, Aug 2010. *- Cité 1 fois : page 38 -*

[65] S. Ciliberti, T. S. Grigera, V. Martin-Mayor, G. Parisi, and P. Verrocchio. Anderson localization in euclidean random matrices. *Phys. Rev. B*, 71 :153104, Apr 2005. *- Cité 1 fois : page 38 -*

[66] S.R. Elliott. *Physics of amorphous materials*. Longman Scientific & Technical, 1990. *- Cité 1 fois : page 38 -*

[67] T. S. Grigera, V. Martin-Mayor, G. Parisi, and P. Verrocchio. Phonon interpretation of the 'boson peak' in supercooled liquids. *Nature*, 422 :289–292, 2003. *- Cité 1 fois : page 38 -*

[68] A. Zee. Law of addition in random matrix theory. *Nuclear Physics B*, 474(3) :726 – 744, 1996. *- Cité 3 fois : pages 38, 49 et 73 -*

[69] Marian Rusek and Arkadiusz Orłowski. Analytical approach to localization of electromagnetic waves in two-dimensional random media. *Phys. Rev. E*, 51 :R2763–R2766, Apr 1995. *- Cité 1 fois : page 38 -*

[70] Marian Rusek, Jan Mostowski, and Arkadiusz Orłowski. Random green matrices : From proximity resonances to anderson localization. *Phys. Rev. A*, 61 :022704, Jan 2000. *- Cité 4 fois : pages 38, 43, 48 et 53 -*

[71] Marian Rusek, Arkadiusz Orlöwski, and Jan Mostowski. Localization of light in three-dimensional random dielectric media. *Phys. Rev. E*, 53 :4122–4130, Apr 1996. *- Cité 2 fois : pages 38 et 48 -*

[72] Benoît Grémaud and Thomas Wellens. Speckle instability : Coherent effects in nonlinear disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :133901, Mar 2010. *- Cité 2 fois : pages 38 et 68 -*

[73] Pietro Massignan and Yvan Castin. Three-dimensional strong localization of matter waves by scattering from atoms in a lattice with a confinement-induced resonance. *Phys. Rev. A*, 74 :013616, Jul 2006. *- Cité 1 fois : page 38 -*

[74] F. A. Pinheiro and L. C. Sampaio. Lasing threshold of diffusive random lasers in three dimensions. *Phys. Rev. A*, 73 :013826, Jan 2006. *- Cité 2 fois : pages 39 et 68 -*

[75] A. Goetschy and S. E. Skipetrov. Euclidean matrix theory of random lasing in a cloud of cold atoms. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(3) :34005, 2011. *- Cité 1 fois : page 39 -*

[76] S E Skipetrov and A Goetschy. Eigenvalue distributions of large euclidean random matrices for waves in random media. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44(6) :065102, 2011. *- Cité 9 fois : pages 39, 44, 48, 66, 67, 68, 69, 73 et 74 -*

[77] A. Goetschy and S. E. Skipetrov. Non-hermitian euclidean random matrix theory. *Phys. Rev. E*, 84 :011150, Jul 2011. *- Cité 9 fois : pages 39, 44, 48, 64, 66, 73, 74, 86 et 105 -*

[78] D.J. Thouless. Electrons in disordered systems and the theory of localization. *Physics Reports*, 13(3) :93 – 142, 1974. *- Cité 2 fois : pages 39 et 94 -*

[79] A.F.Ioffe and A.R.Regel. Noncrystalline, amporphous and liquid electronic semiconductors. *Progress in Semiconductors*, 4(237), 1960. *- Cité 3 fois : pages 39, 44 et 73 -*

[80] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher. New method for a scaling theory of localization. *Phys. Rev. B*, 22 :3519–3526, Oct 1980. *- Cité 2 fois : pages 39 et 94 -*

[81] Michael Ma and Patrick A. Lee. Localized superconductors. *Phys. Rev. B*, 32 :5658–5667, Nov 1985. *- Cité 1 fois : page 40 -*

[82] D. B. Haviland, Y. Liu, and A. M. Goldman. Onset of superconductivity in the two-dimensional limit. *Phys. Rev. Lett.*, 62 :2180–2183, May 1989. *- Cité 1 fois : page 40 -*

[83] Y. Shapira and G. Deutscher. Semiconductor-superconductor transition in granular al-ge. *Phys. Rev. B*, 27 :4463–4466, Apr 1983. *- Cité 1 fois : page 40 -*

[84] A. T. Fiory, A. F. Hebard, and W. I. Glaberson. Superconducting phase transitions in indium/indium-oxide thin-film composites. *Phys. Rev. B*, 28 :5075–5087, Nov 1983. *- Cité 1 fois : page 40 -*

[85] L. S. Levitov. Delocalization of vibrational modes caused by electric dipole interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :547–550, Jan 1990. *- Cité 1 fois : page 40 -*

[86] L.S. Levitov. Critical hamiltonians with long range hopping. *Annalen der Physik*, 8(7-9) :697–706, 1999. *- Cité 1 fois : page 40 -*

[87] Sanli Faez, Ad Lagendijk, and Alexander Ossipov. Critical scaling of polarization waves on a heterogeneous chain of resonators. *Phys. Rev. B*, 83 :075121, Feb 2011. *- Cité 2 fois : pages 40 et 47 -*

[88] Richard Friedberg and Jamal T. Manassah. Effects of including the counterrotating term and virtual photons on the eigenfunctions and eigenvalues of a scalar photon collective emission theory. *Physics Letters A*, 372(14) :2514 – 2521, 2008. *- Cité 2 fois : pages 41 et 135 -*

[89] J H Eberly. Emission of one photon in an electric dipole transition of one among n atoms. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 39(15) :S599, 2006. *- Cité 1 fois : page 41 -*

[90] Anatoly Svidzinsky and Jun-Tao Chang. Cooperative spontaneous emission as a many-body eigenvalue problem. *Phys. Rev. A*, 77 :043833, Apr 2008. *- Cité 1 fois : page 41 -*

[91] N. Skribanowitz, I. P. Herman, J. C. MacGillivray, and M. S. Feld. Observation of dicke superradiance in optically pumped hf gas. *Phys. Rev. Lett.*, 30 :309–312, Feb 1973. *- Cité 1 fois : page 42 -*

[92] D. Pavolini, A. Crubellier, P. Pillet, L. Cabaret, and S. Liberman. Experimental evidence for subradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 54 :1917–1920, Apr 1985. *- Cité 3 fois : pages 42, 117 et 179 -*

[93] R. G. DeVoe and R. G. Brewer. Observation of superradiant and subradiant spontaneous emission of two trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :2049–2052, Mar 1996. *- Cité 1 fois : page 42 -*

[94] E. Mandonnet. *Etude théorique d'un gaz de Bose ultra froid : 1. Diffusion et localisation de la lumière 2. Condensation de Bose-Einsein en dimensionnalité réduite.* PhD thesis, ENS, Mars 2000. *- Cité 1 fois : page 43 -*

[95] Mikhail Titov and Yan V. Fyodorov. Time-delay correlations and resonances in one-dimensional disordered systems. *Phys. Rev. B*, 61 :R2444–R2447, Jan 2000. *- Cité 3 fois : pages 43, 60 et 61 -*

[96] Ad Lagendijk and Bart A. van Tiggelen. Resonant multiple scattering of light. *Physics Reports*, 270(3) :143 – 215, 1996. - *Cité 2 fois : pages 45 et 96* -

[97] A. Gero and E. Akkermans. Effect of superradiance on transport of diffusing photons in cold atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :093601, Mar 2006. - *Cité 1 fois : page 46* -

[98] T S Grigera, V Martin-Mayor, G Parisi, and P Verrocchio. Vibrations in glasses and euclidean random matrix theory. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 14(9) :2167, 2002. - *Cité 1 fois : page 48* -

[99] V. Girko. Circular law. *Theory of Probability and Its Applications*, 29(4) :694–706, 1985. - *Cité 2 fois : pages 49 et 50* -

[100] V A Marchenko and L A Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1(4) :457, 1967. - *Cité 1 fois : page 50* -

[101] Marlan O. Scully. Collective lamb shift in single photon dicke superradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :143601, Apr 2009. - *Cité 2 fois : pages 51 et 135* -

[102] Arthur Goetschy. *Light in disordered atomic systems : Euclidean matrix theory of random lasing*. PhD thesis, Laboratoire de Physique et de Modélisation des Milieux Condensés, Novembre 2011. - *Cité 1 fois : page 52* -

[103] Joshua Feinberg and A. Zee. Non-gaussian non-hermitian random matrix theory : Phase transition and addition formalism. *Nuclear Physics B*, 501(3) :643 – 669, 1997. - *Cité 1 fois : page 53* -

[104] Klaus Hepp and Elliott H Lieb. On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field : the dicke maser model. *Annals of Physics*, 76(2) :360 – 404, 1973. - *Cité 1 fois : page 53* -

[105] Klaus Hepp and Elliott H. Lieb. Equilibrium statistical mechanics of matter interacting with the quantized radiation field. *Phys. Rev. A*, 8 :2517–2525, Nov 1973. - *Cité 1 fois : page 53* -

[106] Y. K. Wang and F. T. Hioe. Phase transition in the dicke model of superradiance. *Phys. Rev. A*, 7 :831–836, Mar 1973. - *Cité 1 fois : page 53* -

[107] M. Takatsuji. Semiclassical theory of a superradiant phase transition. *Phys. Rev. A*, 10 :1437–1438, Oct 1974. - *Cité 1 fois : page 53* -

[108] William R. Mallory. Superradiant phase transition in the dicke hamiltonian. *Phys. Rev. A*, 11 :1088–1089, Mar 1975. - *Cité 2 fois : pages 53 et 74* -

[109] Krzysztof Gawędzki and Kazimierz Rzążewski. No-go theorem for the superradiant phase transition without dipole approximation. *Phys. Rev. A*, 23 :2134–2136, May 1981. - *Cité 1 fois : page 53* -

[110] K. Rzażewski, K. Wódkiewicz, and W. Żakowicz. Phase transitions, two-level atoms, and the A^2 term. *Phys. Rev. Lett.*, 35 :432–434, Aug 1975. - *Cité 1 fois : page 53* -

[111] R. Gilmore. Persistence of the phase transition in the dicke model with external fields and counter-rotating terms. *Physics Letters A*, 55(8) :459 – 460, 1976. - *Cité 1 fois : page 53* -

[112] J.P. Provost, F. Rocca, G. Vallee, and M. Sirugue. Lack of phase transition in the dicke model with external fields. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 85(1) :202 – 206, 1976. - *Cité 1 fois : page 53* -

[113] G. L. Celardo, N. Auerbach, F. M. Izrailev, and V. G. Zelevinsky. Distribution of resonance widths and dynamics of continuum coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :042501, Jan 2011. - *Cité 1 fois : page 53* -

[114] G. L. Celardo and L. Kaplan. Superradiance transition in one-dimensional nanostructures : An effective non-hermitian hamiltonian formalism. *Phys. Rev. B*, 79 :155108, Apr 2009. - *Cité 1 fois : page 54* -

[115] R G Woolley. Gauge invariance and the thermodynamics of the electromagnetic field. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 9(3) :L15, 1976. - *Cité 1 fois : page 54* -

[116] Joshua Feinberg and A. Zee. Non-hermitian random matrix theory : Method of hermitian reduction. *Nuclear Physics B*, 504(3) :579 – 608, 1997. - *Cité 2 fois : pages 56 et 86* -

[117] Yan V. Fyodorov and Hans-Jurgen Sommers. Statistics of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering : Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. *Journal of Mathematical Physics*, 38(4) :1918–1981, 1997. - *Cité 2 fois : pages 56 et 63* -

[118] Giulio Casati, Giulio Maspero, and Dima L. Shepelyansky. Quantum poincaré recurrences. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :524–527, Jan 1999. - *Cité 1 fois : page 60* -

[119] A. Ossipov, T. Kottos, and T. Geisel. Fingerprints of classical diffusion in open 2d mesoscopic systems in the metallic regime. *Europhys. Lett.*, 62(5) :719–725, 2003. - *Cité 1 fois : page 61* -

[120] A. Ossipov, Tsampikos Kottos, and T. Geisel. Signatures of prelocalized states in classically chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 65 :055209, May 2002. - *Cité 1 fois : page 61* -

[121] Tsampikos Kottos, Alexander Ossipov, and Theo Geisel. Signatures of classical diffusion in quantum fluctuations of two-dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 68 :066215, Dec 2003. - *Cité 1 fois : page 61* -

[122] Oleg A. Starykh, Philippe R. J. Jacquod, Evgenii E. Narimanov, and A. Douglas Stone. Signature of dynamical localization in the resonance width distribution of wave-chaotic dielectric cavities. *Phys. Rev. E*, 62 :2078–2084, Aug 2000. *- Cité 1 fois : page 61 -*

[123] Tsampikos Kottos. Statistics of resonances and delay times in random media : beyond random matrix theory. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 38(49) :10761, 2005. *- Cité 3 fois : pages 61, 63 et 105 -*

[124] Oleg A. Starykh, Philippe R. J. Jacquod, Evgenii E. Narimanov, and A. Douglas Stone. Signature of dynamical localization in the resonance width distribution of wave-chaotic dielectric cavities. *Phys. Rev. E*, 62 :2078–2084, Aug 2000. *- Cité 1 fois : page 63 -*

[125] S. E. Skipetrov and B. A. van Tiggelen. Dynamics of anderson localization in open 3d media. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :043902, Feb 2006. *- Cité 1 fois : page 63 -*

[126] Luis S. Froufe-Pérez, William Guerin, Rémi Carminati, and Robin Kaiser. Threshold of a random laser with cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :173903, May 2009. *- Cité 1 fois : page 68 -*

[127] L. Mehta. *Random matrices and the statistical theory of energy levels*. Academic Press, 1967. *- Cité 2 fois : pages 73 et 81 -*

[128] Léon Van Hove. The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a crystal. *Phys. Rev.*, 89 :1189–1193, Mar 1953. *- Cité 1 fois : page 73 -*

[129] Franz Urbach. The long-wavelength edge of photographic sensitivity and of the electronic absorption of solids. *Phys. Rev.*, 92 :1324–1324, Dec 1953. *- Cité 1 fois : page 73 -*

[130] Franz J. Wegner. Disordered system with n orbitals per site : n=∞ limit. *Phys. Rev. B*, 19 :783–792, Jan 1979. *- Cité 1 fois : page 73 -*

[131] W. Eccleston. Analysis of current flow in polycrystalline tfts. *Electron Devices, IEEE Transactions on*, 53(3) :474–480, 2006. *- Cité 1 fois : page 79 -*

[132] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52 :1–4, Jan 1984. *- Cité 1 fois : page 82 -*

[133] H.-J. Stöckmann and J. Stein. "quantum" chaos in billiards studied by microwave absorption. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :2215–2218, May 1990. *- Cité 1 fois : page 82 -*

[134] A. Hönig and D. Wintgen. Spectral properties of strongly perturbed coulomb systems : Fluctuation properties. *Phys. Rev. A*, 39 :5642–5657, Jun 1989. *- Cité 1 fois : page 82 -*

[135] L. P. Gor'kov and G. M. Eliashberg. Minute metallic particles in an electromagnetic field. *Sov. Phys. JETP*, 21 :940, 1965. - *Cité 1 fois : page 82* -

[136] K.B. Efetov. Supersymmetry and theory of disordered metals. *Advances in Physics*, 32(1) :53–127, 1983. - *Cité 1 fois : page 82* -

[137] Prabhakar Pradhan and S. Sridhar. Correlations due to localization in quantum eigenfunctions of disordered microwave cavities. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :2360–2363, Sep 2000. - *Cité 1 fois : page 82* -

[138] Isa Kh. Zharekeshev and Bernhard Kramer. Asymptotics of universal probability of neighboring level spacings at the anderson transition. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :717–720, Jul 1997. - *Cité 1 fois : page 83* -

[139] E. B. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit. Models of intermediate spectral statistics. *Phys. Rev. E*, 59 :R1315–R1318, Feb 1999. - *Cité 1 fois : page 83* -

[140] R. Graham and M. Höhnerbach. Statistical spectral and dynamical properties of two-level systems. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :1378–1378, Sep 1986. - *Cité 1 fois : page 83* -

[141] Clive Emary and Tobias Brandes. Quantum chaos triggered by precursors of a quantum phase transition : The dicke model. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :044101, Jan 2003. - *Cité 1 fois : page 83* -

[142] Tetsuo Deguchi, Pijush K. Ghosh, and Kazue Kudo. Level statistics of a pseudo-hermitian dicke model. *Phys. Rev. E*, 80 :026213, Aug 2009. - *Cité 1 fois : page 83* -

[143] B. J. Huang and Ten-Ming Wu. Localization-delocalization transition in hessian matrices of topologically disordered systems. *Phys. Rev. E*, 79 :041105, Apr 2009. - *Cité 3 fois : pages 83, 90 et 92* -

[144] Sergey E. Skipetrov and Igor M. Sokolov. Absence of anderson localization of light in a random ensemble of point scatterers. *arXiv*, 1303.4655, 2013. - *Cité 2 fois : pages 85 et 117* -

[145] Joshua Feinberg. Non-hermitian random matrix theory : summation of planar diagrams, the 'single-ring' theorem and the disc-annulus phase transition. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39(32) :10029, 2006. - *Cité 1 fois : page 86* -

[146] M. Müller, F.-M. Dittes, W. Iskra, and I. Rotter. Level repulsion in the complex plane. *Phys. Rev. E*, 52 :5961–5973, Dec 1995. - *Cité 1 fois : page 90* -

[147] V.V. Sokolov and V.G. Zelevinsky. Dynamics and statistics of unstable quantum states. *Nuclear Physics A*, 504(3) :562 – 588, 1989. - *Cité 2 fois : pages 90 et 92* -

[148] Pedro de Vries, David V. van Coevorden, and Ad Lagendijk. Point scatterers for classical waves. *Rev. Mod. Phys.*, 70 :447–466, Apr 1998. - *Cité 2 fois : pages 96 et 101* -

[149] Jing Wang and Azriel Z. Genack. Transport through modes in random media. *Nature*, 471 :345–348, March 2011. - *Cité 1 fois : page 96* -

[150] G.L. Celardo, F.M. Izrailev, V.G. Zelevinsky, and G.P. Berman. Transition from isolated to overlapping resonances in the open system of interacting fermions. *Physics Letters B*, 659(12) :170 – 175, 2008. - *Cité 1 fois : page 97* -

[151] G. L. Celardo, F. M. Izrailev, V. G. Zelevinsky, and G. P. Berman. Open system of interacting fermions : Statistical properties of cross sections and fluctuations. *Phys. Rev. E*, 76 :031119, Sep 2007. - *Cité 1 fois : page 97* -

[152] V.V. Sokolov and V.G. Zelevinsky. On a statistical theory of overlapping resonances. *Physics Letters B*, 202(1) :10 – 14, 1988. - *Cité 1 fois : page 97* -

[153] J. Topolancik, B. Ilic, and F. Vollmer. Experimental observation of strong photon localization in disordered photonic crystal waveguides. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :253901, Dec 2007. - *Cité 1 fois : page 97* -

[154] N. Garcia and A. Z. Genack. Crossover to strong intensity correlation for microwave radiation in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 63 :1678–1681, Oct 1989. - *Cité 1 fois : page 97* -

[155] A.P. Gero. *Cooperative effects in the multiple scattering of light*. PhD thesis, Technion Israel institute of technology, December 2007. - *Cité 2 fois : pages 107 et 128* -

[156] B J Last and D J Thouless. Evidence for power law localization in disordered systems. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 7(4) :699, 1974. - *Cité 1 fois : page 107* -

[157] F. Wegner. Inverse participation ratio in $2 + \epsilon$ dimensions. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 36(3) :209–214, 1980. - *Cité 1 fois : page 108* -

[158] N. Lambert, C. Emary, and T. Brandes. Entanglement and entropy in a spin-boson quantum phase transition. *Phys. Rev. A*, 71 :053804, May 2005. - *Cité 1 fois : page 108* -

[159] J T Edwards and D J Thouless. Numerical studies of localization in disordered systems. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 5(8) :807, 1972. - *Cité 1 fois : page 108* -

[160] R. H. Lehmberg. Radiation from an n-atom system. i. general formalism. *Phys. Rev. A*, 2 :883–888, Sep 1970. - *Cité 2 fois : pages 118 et 119* -

[161] T. G. Rudolph, Z. Ficek, and B. J. Dalton. Two-atom resonance fluorescence in running- and standing-wave laser fields. *Phys. Rev. A*, 52 :636–656, Jul 1995. - *Cité 1 fois : page 118* -

[162] M. Kiffner, M. Macovei, J. Evers, and C. H. Keitel. Vacuum-induced processes in multi-level atoms. In Emil Wolf (ed.), editor, *Progress in Optics*, volume 55 of *Progress in Optics*, pages 85 – 197. Elsevier, Amsterdam, 2010. - *Cité 1 fois : page 120* -

[163] E. Ressayre and A. Tallet. Quantum theory for superradiance. *Phys. Rev. A*, 15 :2410–2423, Jun 1977. *- Cité 1 fois : page 121 -*

[164] V. Ernst and P. Stehle. Emission of radiation from a system of many excited atoms. *Phys. Rev.*, 176 :1456–1479, Dec 1968. *- Cité 1 fois : page 121 -*

[165] Julien Chabé, Gabriel Lemarié, Benoît Grémaud, Dominique Delande, Pascal Szriftgiser, and Jean Claude Garreau. Experimental observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :255702, Dec 2008. *- Cité 1 fois : page 128 -*

[166] H. Bender, C. Stehle, S. Slama, R. Kaiser, N. Piovella, C. Zimmermann, and Ph. W. Courteille. Observation of cooperative mie scattering from an ultracold atomic cloud. *Phys. Rev. A*, 82 :011404, Jul 2010. *- Cité 1 fois : page 133 -*

[167] S. Bux, E. Lucioni, H. Bender, T. BienaimÃ©, K. Lauber, C. Stehle, C. Zimmermann, S. Slama, Ph.W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser. Cooperative scattering by cold atoms. *Journal of Modern Optics*, 57(19) :1841–1848, 2010. *- Cité 1 fois : page 134 -*

[168] R. Bachelard, Ph. W. Courteille, R. Kaiser, and N. Piovella. Resonances in mie scattering by an inhomogeneous atomic cloud. *EPL (Europhysics Letters)*, 97(1) :14004, 2012. *- Cité 4 fois : pages 134, 142, 154 et 167 -*

[169] Leslie L. Foldy. The multiple scattering of waves. i. general theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.*, 67 :107–119, Feb 1945. *- Cité 1 fois : page 134 -*

[170] J. R. Ott, M. Wubs, P. Lodahl, N. A. Mortensen, and R. Kaiser. Cooperative fluorescence from a strongly driven dilute cloud of atoms. *Phys. Rev. A*, 87 :061801, Jun 2013. *- Cité 1 fois : page 134 -*

[171] T. Bienaimé, R. Bachelard, J. Chabé, M.T. Rouabah, L. Bellando, Ph.W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser. Interplay between radiation pressure force and scattered light intensity in the cooperative scattering by cold atoms. *Journal of Modern Optics*, 0(0) :1–7, 0. *- Cité 2 fois : pages 135 et 136 -*

[172] Richard Friedberg and Jamal T. Manassah. Analytic expressions for the initial cooperative decay rate and cooperative lamb shift for a spherical sample of two-level atoms. *Physics Letters A*, 374(15-16) :1648 – 1659, 2010. *- Cité 1 fois : page 135 -*

[173] Tom Bienaimé. *Éffets copératifs dans les nuages d'atomes froids*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2011. *- Cité 2 fois : pages 137 et 165 -*

[174] Marlan O. Scully. Collective lamb shift in single photon dicke superradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :143601, Apr 2009. *- Cité 1 fois : page 137 -*

[175] M. C. W. van Rossum and Th. M. Nieuwenhuizen. Multiple scattering of classical waves : microscopy, mesoscopy, and diffusion. *Rev. Mod. Phys.*, 71 :313–371, Jan 1999. - *Cité 1 fois : page 139* -

[176] Steven Chu. Nobel lecture : The manipulation of neutral particles. *Rev. Mod. Phys.*, 70 :685–706, Jul 1998. - *Cité 1 fois : page 145* -

[177] Paul D. Lett, Richard N. Watts, Christoph I. Westbrook, William D. Phillips, Phillip L. Gould, and Harold J. Metcalf. Observation of atoms laser cooled below the doppler limit. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :169–172, Jul 1988. - *Cité 1 fois : page 145* -

[178] William D. Phillips. Nobel lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 70 :721–741, Jul 1998. - *Cité 1 fois : page 145* -

[179] T. Arpornthip, C. A. Sackett, and K. J. Hughes. Vacuum-pressure measurement using a magneto-optical trap. *Phys. Rev. A*, 85 :033420, Mar 2012. - *Cité 1 fois : page 146* -

[180] Carl E. Wieman and Leo Hollberg. Using diode lasers for atomic physics. *Review of Scientific Instruments*, 62(1) :1–20, 1991. - *Cité 1 fois : page 147* -

[181] Sebastian D. Saliba and Robert E. Scholten. Linewidths below 100 khz with external cavity diode lasers. *Appl. Opt.*, 48(36) :6961–6966, Dec 2009. - *Cité 1 fois : page 147* -

[182] G. Reinaudi, T. Lahaye, Z. Wang, and D. Guéry-Odelin. Strong saturation absorption imaging of dense clouds of ultracold atoms. *Opt. Lett.*, 32(21) :3143–3145, Nov 2007. - *Cité 1 fois : page 173* -

[183] T. Bienaimé, R. Bachelard, N. Piovella, and R. Kaiser. Cooperativity in light scattering by cold atoms. *Fortschritte der Physik*, 61(2-3) :377–392, 2013. - *Cité 1 fois : page 175* -

[184] Lev Khaykovich and Nir Davidson. Compression of a cold atomic cloud by on-resonance laser light. *J. Opt. Soc. Am. B*, 16(5) :702–709, May 1999. - *Cité 1 fois : page 175* -

[185] P. W. Anderson. The resonating valence bond state in la2cuo4 and superconductivity. *Science*, 235(4793) :1196–1198, 1987. - *Cité 1 fois : page 186* -

[186] Edwin A. Power. Effect on the lifetime of an atom undergoing a dipole transition due to the presence of a resonating atom. *The Journal of Chemical Physics*, 46(11) :4297–4298, 1967. - *Cité 1 fois : page 198* -

[187] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle. Propagation of sound in a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :553–556, Jul 1997. - *Cité 1 fois : page 204* -

[188] E. Hecht. *Optics*. 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, MA), 1989. - *Cité 1 fois : page 204* -