UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences

École doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de **Docteur en Sciences** de
l'Université de Nice Sophia Antipolis
Discipline : Physique
présentée et soutenue par
Alphonse LEROUX

MISE EN ÉVIDENCE DE NOUVEAUX TYPES DE VAGUES DE TRÈS GRANDES AMPLITUDES

Jury :

M. RABAUD Marc	Rapporteur
M. COSTE Christophe	Rapporteur
M. COUPEZ Thierry	Examinateur
M. CHARRU Francois	Examinateur
M. CLAMOND Didier	Examinateur
M. RAJCHENBACH Jean	Examinateur

"Marin, tu chériras toujours la mer..."

Corto Maltese

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèses Jean et Didier pour m'avoir accompagner tout au long de ce parcours qui fut long et douloureux.

Je remercie ensuite les deux rapporteurs de cette thèse Marc Rabaud et Christophe Coste qui ont grandement contribué à sa qualité.

Je remercie également tout le personnel du LPMC dans son ensemble.

Merci à la région PACA et au CNRS pour le financement de ce projet.

Une pensée particulière à tous ceux qui ont défendu avec moi les couleurs du rugby club Antibes ces cinq dernières années.

Je pense aussi à mes camarades de bureau Cora et Geo qui ont égayé le quotidien du laboratoire.

Merci à ma famille, père, mère, Théo et Jeanne pour leur soutien sans faille.

Et enfin un grand merci à ma compagne Héloïse qui m'a offert le plus beau cadeau qu'un homme puisse recevoir, notre fille Roxane.

Table des matières

Introduction **1**

Chapitre 1
Ondes de gravité à la surface d'un fluide

1.1 Introduction 6
1.2 Etat de l'art 7
1.3 Etablissement des équations des vagues dans l'approximation d'écoulement potentiel 8
1.3.1 Linéarisation des équations dans l'approximation potentielle 10
1.3.2 Résolution du système linéaire 11
1.3.3 Relation de dispersion 13
1.3.4 Trajectoires 14
1.4 Ondes cnoïdales et ondes solitaires dans l'approximation de Korteweg De Vries 15
1.5 Amortissement d'une vague en eau peu profonde 18
1.5.1 Longueur d'atténuation visqueuse 19
1.5.2 Amortissement d'une onde de gravité en eau profonde 21
1.6 Conclusion 22

Chapitre 2
Instabilité de Faraday

2.1 Introduction 24
2.2 Excitation paramétrique d'onde de surface 24
2.2.1 Introduction 24
2.2.2 Etablissement des équations 25
2.3 Equation de Mathieu 27
2.3.1 Equation de Mathieu non amortie 27

2.3.2 Equation de Mathieu amortie 30
2.4 Equation d'amplitude et formation de structure 32
2.4.1 Equation aux amplitudes 33
2.5 Conclusion 35

Chapitre 3
Ondes solitaires excitées par instabilité de Faraday

3.1 Introduction 38
3.2 Montage expérimental 39
3.3 Observations et mesures expérimentales 40
3.4 Résultats expérimentaux 44
3.5 Analyse théorique 44
3.6 Conclusion 56

Chapitre 4
Solitons enveloppes en géométrie Hele-Shaw

4.1 Introduction 60
4.2 Expérience 60
4.2.1 Le soliton enveloppe, solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire 60
4.2.2 Comparaison de la forme du soliton "enveloppe" observé en configuration Hele-Shaw avec le soliton enveloppe de NLS. 63
4.3 Conclusion 66

Chapitre 5
Ondes de Faraday en cellule tri-dimensionnelle

5.1 Ondes en cuve cylindrique 68
5.1.1 Ondes axisymétriques 68
5.2 Etude expérimentale en cuve cylindrique 71
5.3 Technique de visualisation de la surface 71
5.4 Résultats 72
5.5 Brisure de symétrie et apparition de motifs 75
5.6 Autres symétries observées 78
5.7 Interprétation qualitative : modèle résonant à trois vagues 79
5.8 Effet de la taille de la cuve 85

5.9 Effet de la forme de la cuve 87

Conclusion **89**

Annexes **91**

Annexe A Dérivation rigoureuse de l'équation d'amplitude **91**

A.1 Méthode des échelles multiples 91

Annexe B Méthode multi-échelles pour l'analyse en géométrie Hele-Shaw **93**

B.1 Mise en équation 93

B.2 Développement en échelle multiple 94

B.2.1 Premier ordre 95

B.2.2 Deuxième ordre 97

B.2.3 Troisième ordre 100

Annexe C Equation de Korteweg de Vries et soliton **101**

C.1 Mise en place du problème 101

C.2 Résolution 102

C.3 Solutions 105

C.4 Découverte du soliton 105

Bibliographie **109**

Introduction

Depuis des siècles, les marins du monde entier ont rapporté, de leurs périples à travers les océans, des histoires de vagues géantes qui longtemps ont été considérées comme du folklore maritime. Cependant, des mesures effectuées à partir de bouées instrumentées, ou par des radars depuis des satellites, ou bien des films pris depuis des navires ou des plateformes pétrolières ont convaincus les scientifiques de la réalité de ce genre de phénomène, qu'on dénomme maintenant "vagues scélérates".

Un autre type de vagues extrêmes est représenté par les tsunamis. La prévision de ceux-ci représente un enjeu de grande importance et on comprend qualitativement les mécanismes qui gouvernent leur formation et leur propagation à travers des modèles simplifiés. Par conséquent, les pertes humaines et les dégats matériels causés par les vagues extrêmes, ainsi que la curiosité, ont depuis près de deux siècles maintenant, invité la communauté scientifique à s'intéresser à ces phénomènes.

Le présent mémoire concerne l'étude expérimentale en laboratoire de la formation et de la dynamique de vagues très non-linéaires. Les expériences que nous avons menées consistent à produire en laboratoire des ondes de grandes amplitudes dans des cuves vibrées verticalement. Notre but est de caractériser les modes non-linéaires d'ondes de surface qui apparaissent et d'identifier les mécanismes conduisant à leur formation. La difficulté du problème réside dans le fait que la description théorique des ondes de surface n'est simple que dans la limite des faibles amplitudes. Les études antérieures destinées à rendre compte des effets non-linéaires procèdent de développement en amplitude qui

ne tiennent compte que des premières non linéarités et par conséquent sont impropres à décrire des ondes de très grandes amplitudes.

Dans le premier chapitre, je rappellerai les modèles classiques servant à décrire les ondes linéaires ou faiblement non-linéaires à la surface d'un fluide. Je vais présenter les travaux classiques sur le sujet. Je rappellerai comment sont dérivées les équations qui gouvernent la dynamique des vagues et les résoudrai dans l'approximation linéaire. Je mentionnerai aussi les mécanismes de dissipation qui mènent à l'amortissement des vagues puis j'introduirai enfin les modèles de vagues faiblement non-linéaires.

Dans le deuxième chapitre, je présenterai en détail la méthode expérimentale qui nous permet d'étudier les vagues en laboratoire. Nous réalisons une expérience de résonance paramétrique d'ondes de surface qui mène à la création de "vagues de Faraday". Le principe en est simple : nous soumettons une cuve remplie de liquide à une agitation périodique verticale. Quand l'énergie injectée par le forçage permet de vaincre la dissipation visqueuse du fluide, des ondes stationnaires se forment à la surface de celui-ci. La première note concernant de telles ondes de surface excitées par forçage paramétrique est due à M. Faraday en 1831 [1]. Celui-ci avait noté que les vagues excitées de cette manière peuvent s'organiser en formant des structures géométriquement ordonnées qui vibrent à la fréquence moitiée de celle du forçage.

Dans le chapitre trois, je présenterai des résultats expérimentaux obtenus en soumettant une cellule dite de Hele-Shaw à des vibrations verticales de grandes amplitudes. Je montrerai que dans cette configuration peuvent apparaitre des nouveaux types d'ondes solitaires. Nous proposerons ensuite un modèle simplifié reposant sur l'écriture d'une équation aux amplitudes. Cette approximation permet de comprendre :

- l'existence d'une hystérésis pour le seuil d'instabilité correspondant à l'apparition de vagues, et
- pourquoi le domaine d'existence des ondes solitaires s'identifie à la zone d'hystérésis.

Nous montrerons aussi qu'il existe dans la même configuration expérimentale des 'solitons enveloppes' stationnaires qui ne sont pas les solitons décrits dans le cadre d'une équation de Schrödinger non-linéaire.

Dans le chapitre suivant, je présenterai des expériences réalisées dans des cellules tridimensionnelles au cours desquelles nous avons mis en évidence des vagues subharmoniques alternativement en forme d'étoiles et de polygones dans une couche d'eau peu profonde. Nous suggérons qu'un mécanisme d'intéraction résonante à trois vagues pourrait être à l'origine de cette géométrie, quoique la possibilité d'une telle intéraction pour des vagues purement gravitaires fut niée dans le passé.

Enfin, dans le dernier chapitre, qui sera notre conclusion, nous suggérerons d'autres études utiles pour parfaire notre connaissance du sujet, et nous pointerons les insuffisances des méthodes théoriques existant à ce jour.

Chapitre 1

Ondes de gravité à la surface d'un fluide

Sommaire

1.1 Introduction 6

1.2 Etat de l'art 7

1.3 Etablissement des équations des vagues dans l'approximation d'écoulement potentiel 8

1.3.1 Linéarisation des équations dans l'approximation potentielle . . 10

1.3.2 Résolution du système linéaire 11

1.3.3 Relation de dispersion 13

1.3.4 Trajectoires 14

1.4 Ondes cnoïdales et ondes solitaires dans l'approximation de Korteweg De Vries 15

1.5 Amortissement d'une vague en eau peu profonde 18

1.5.1 Longueur d'atténuation visqueuse 19

1.5.2 Amortissement d'une onde de gravité en eau profonde 21

1.6 Conclusion 22

1.1 Introduction

Les vagues observées à la surface d'un fluide correspondent à des oscillations de cette surface. Lorsque la surface horizontale (correspondant à l'état d'équilibre), est perturbée, deux forces (la gravité et la tension superficielle) agissent pour rappeler la surface vers cet état d'équilibre. Lorsqu'une onde de gravité se propage, il n'y a pas de flux de matière (ceci tout au moins dans l'approximation linéaire), les déplacements des volumes élémentaires du fluide décrivent des orbites fermées. En fait, seules se propagent la quantité de mouvement et l'énergie. Dans le cas d'une onde monochromatique, l'intervalle temporel et l'intervalle spatial au bout desquels un point du liquide se retrouve dans le même état dynamique (défini par son énergie, la pression locale, la hauteur de la surface libre) sont respectivement la période et la longueur d'onde. La vitesse de propagation de l'état dynamique est la vitesse de phase, elle est égale au rapport de la longueur d'onde et de la période. Si la vitesse de phase dépend de la longueur d'onde, l'onde est dite dispersive.

La difficulté du problème réside dans le fait que les équations qui gouvernent les vagues de surface sont non-linéaires et ne sont pas intégrables. Rappelons aussi qu'il s'agit d'un problème à frontière libre. Les non-linéarités des équations qui régissent le mouvement trouvent leur source dans le terme advectif de l'accélération de l'équation de Navier-Stokes, et dans le terme advectif de l'équation décrivant la conservation de la matière au niveau de la surface libre. La résolution approchée de ces équations nécessite l'application de méthodes d'approximation. Enfin, rappelons que les enjeux liés à la connaissance du comportement des vagues sont considérables, tant pour le dimensionnement des installations portuaires ou des plate formes pétrolières, que pour la prévision des tsunamis, par exemple.

Dans ce chapitre, je rappellerai les équations qui gouvernent les ondes de gravité à la surface des fluides : ce sont respectivement les équations de conservation de la matière et de l'impulsion, ainsi que celle qui décrivent les conditions aux limites. Ces équations forment un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Dans un premier

temps, nous rappellerons la méthode standard de résolution de ces équations dans l'approximation linéaire et dans le cadre d'un formalisme potentiel. Dans un second temps, nous incorporerons l'effet des non-linéarités à l'ordre le plus bas. Nous rappellerons aussi comment ces effets non-linéaires peuvent conduire à l'apparition de vagues solitaires.

1.2 Etat de l'art

Depuis les travaux pionniers d'Euler [2, 3, 4] sur les écoulements fluides au 18ème siècle, nombre de scientifiques se sont intéressés aux phénomènes d'onde à la surface des fluides. Lagrange [5] dériva les équations linéarisées gouvernant des vagues de faible amplitude et obtint une solution dans le cas limite d'une onde plane en eau peu profonde. Il trouve que la vitesse de propagation de ces ondes est $\sqrt{gh}$, où g est l'accélération de la gravité et h la profondeur de liquide. La vitesse des vagues pour les faibles profondeurs et dans la limite des amplitudes infinitésimales ne dépend pas de la longueur d'onde. Ces travaux ont ensuite été poursuivis par Poisson et Cauchy [6] au début du 19ème siècle qui introduisirent l'analyse par transformation de Fourier [7] ainsi que des méthodes d'approximations asymptotiques. Quand aux vagues en eau profonde, c'est Airy [8] qui en donne une première description linéarisée dans le cadre d'un modèle de fluide non visqueux, incompressible et irrotationnel. C'est lui qui en premier introduisit la notion de potentiel de vitesse (qui s'avéra par la suite un outil très utile pour résoudre nombre de problèmes d'écoulements). Ses travaux restent fondamentaux pour l'ingéniérie océanique et cotière.

Ensuite, Stokes s'intéressa à l'effet des non-linéarités sur les vagues en profondeur finie et grande. Il montra comment la dispersion dépend de l'amplitude de l'onde (à l'ordre le plus bas), et mit en évidence analytiquement l'existence d'un courant de dérive (c'est-à-dire d'un flux de matière) lié aux effets non-linéaires. A cause de cette dispersion liée aux amplitudes des diverses composantes, Stokes pensait que seule une vague sinusoïdale



FIGURE 1.1 – Houle non linéaire se propageant en eau profonde, modèle de Stokes (1847) [9].

pouvait se propager sans changer de forme (en eau profonde). Il pensait aussi qu'une impulsion ne pouvait se propager en maintenant sa forme invariante et fut dans un premier temps très sceptique par rapport aux travaux de J. Scott Russell qui observa une onde solitaire de forte amplitude se propageant dans un canal sur une longue distance en conservant sa forme [10].
Ce n'est que bien plus tard, grâce aux travaux de Boussinesq (1871) [11] et Rayleigh (1876) [12] qui trouvent une solution approchée décrivant une onde solitaire se propageant sans déformation que Stokes changea d'avis.

1.3 Etablissement des équations des vagues dans l'approximation d'écoulement potentiel

Considérons d'abord un fluide parfait, de densité ρ constante, incompressible et en écoulement irrotationnel. Dans nos notations, t désigne le temps, x et y les coordonnées horizontales et z la coordonnée verticale orientée vers le haut. La surface libre du fluide a pour équation $z = \eta(x, y, t)$. Le niveau moyen (au repos) est situé en $z = 0$ et le fond, imperméable et horizontal, est en $z = -h$. On note le champ de vitesse $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ et la pression $p(x, y, z, t)$. L'accélération de la gravité g est orientée dans la direction z négative. On note $\boldsymbol{j}$ le vecteur unitaire suivant Oz orienté vers le haut.

L'incompressibilité du fluide se traduit pour le champ de vitesse par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{1.1}$$

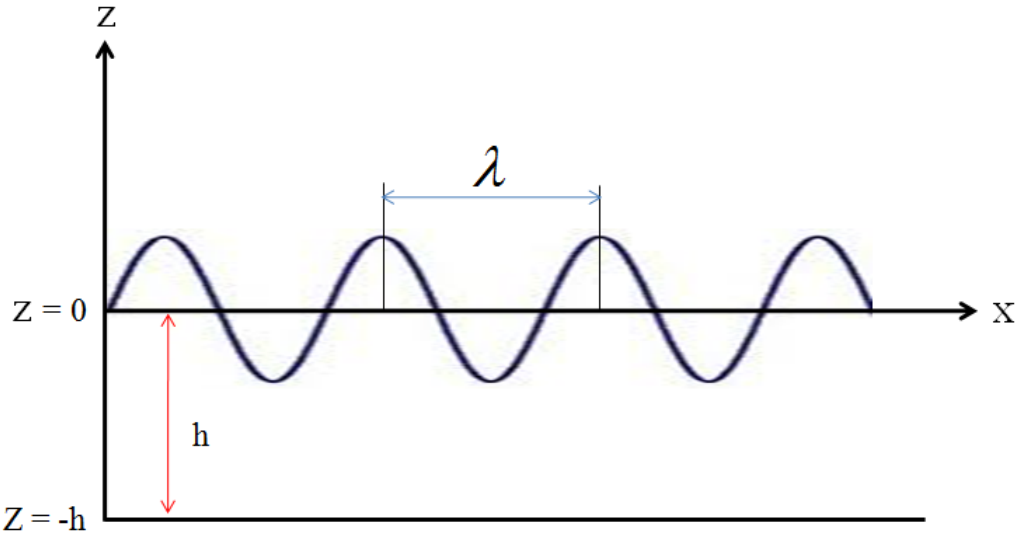

FIGURE 1.2 – Repère adopté.

L'équation d'Euler relative à la conservation de l'impulsion pour un fluide inviscide s'écrit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{j} \tag{1.2}$$

L'écoulement étant supposé irrotationnel, il est pratique d'introduire un potentiel des vitesses défini par $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$. L'incompressibilité du fluide donne alors une équation de Laplace pour le potentiel des vitesses :

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1.3}$$

L'équation d'Euler devient, après intégration par rapport aux variables d'espace :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = B(t) \tag{1.4}$$

Où p_0 est la pression atmosphérique et la constante B(t) peut-être intégrée dans la défi-

nition de ϕ. On a donc,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0 \tag{1.5}$$

Pour fermer ce système d'équations, il convient maintenant d'introduire les conditions aux limites. Dans le cas d'un fond plat, la condition d'imperméabilité s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}, \qquad z = -h \tag{1.6}$$

L'autre condition concerne la conservation de la masse, que l'on écrit au niveau de la surface libre. Elle traduit le fait que la vitesse de déplacement de surface libre est égale à la vitesse normale de déplacement du fluide. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = \eta \tag{1.7}$$

Il est maintenant intéressant de regarder ce que devient l'équation (1.5) à la surface libre. La pression est prise nulle à la surface, donc le terme $p - p_0$ s'annule. L'équation ainsi obtenue (qui est une équation de Bernoulli dynamique) s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + g\eta = 0, \qquad z = \eta \tag{1.8}$$

1.3.1 Linéarisation des équations dans l'approximation potentielle

Nous recherchons dans ce paragraphe des solutions de petites amplitudes proche du repos ($\phi = 0$, $\eta = 0$), pour lesquelles les termes non-linéaires sont négligeables. La linéarisation consiste à éliminer les termes d'ordre supérieur à un. On abandonne ainsi les termes $\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}$ dans l'équation (1.7), et $\frac{1}{2}(\nabla \phi)^2$ dans l'équation (1.8).
Les équations obtenues ainsi ne sont linéaires qu'en apparence puisqu'il faut les appliquer

en $z = \eta$. En développant ces équations autour de $z = \eta$, on engendre des termes d'ordre supérieur. Dans ce cas précis, la linéarisation consiste donc à écrire les conditions aux limites non pas en $z = \eta$ mais en $z = 0$, ce qui est consistent avec une approximation de très petites amplitudes. On obtient de la sorte le système linéarisé suivant :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, \qquad z = 0 \tag{1.10}$$

Il est aisé d'éliminer η en dérivant la deuxième équation en $z = 0$. On obtient alors le système d'équations linéaires suivant :

$$\Delta\phi = 0, \qquad -h \leq z \leq 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = 0 \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = -h \tag{1.13}$$

Pour le calcul, on peut se référer à l'ouvrage de François Charru, instabilités hydrodynaques [13]

1.3.2 Résolution du système linéaire

Cherchons des solutions périodiques en espace et en temps décrivant une onde plane se propageant dans la direction Ox en posant :

$$\eta = A\cos(kx - \omega t) \tag{1.14}$$

$$\phi = Z(z)\sin(kx - \omega t) \tag{1.15}$$

En injectant dans le laplacien, on obtient une équation linéaire du second ordre pour la fonction Z : $Z''(z) - k^2 Z(z) = 0$.

$Z(z)$ se construit donc comme une combinaison linéaire de exp(kz) et exp(-kz).

Grâce à la condition au fond (1.13) portant sur la dérivée de ϕ par rapport à z, on trouve aisément :

$$\phi = C^{ste}\cosh[k(h+z)]\sin(kx - \omega t) \tag{1.16}$$

De ce potentiel de vitesse, on peut tirer une propriété importante : si la longueur d'onde des ondes de surface est grande devant la profondeur de la nappe de liquide h, la dépendance de ϕ en z et donc celle du champ de vitesse $\boldsymbol{u}$ en z sera faible.

Utilisant la relation $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = -g\eta$, la constante dans l'expression de ϕ peut être exprimé à l'aide de A. On trouve finalement, pour le potentiel des vitesses :

$$\phi = \frac{-gA}{\omega\cosh(kh)}\cosh[k(h+z)]\sin(kx - \omega t) \tag{1.17}$$

On accède ensuite au champ de vitesse par dérivation du potentiel. On trouve pour le champ de vitesse :

$$u = \frac{gAk}{\omega}\frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)}\cos(kx - \omega t) \tag{1.18}$$

$$w = \frac{-gAk}{\omega}\frac{\sinh[k(h+z)]}{\cosh(kh)}\sin(kx - \omega t) \tag{1.19}$$

Nous n'avons pas encore utilisé la relation $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = 0$. Nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'elle nous donne la relation entre ω et k qui est précisement la relation de dispersion.

1.3.3 Relation de dispersion

Avec les solutions précédentes adoptées pour ϕ, l'équation $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ nous donne directement $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\omega^2\phi$. On a aussi $\frac{\partial\phi}{\partial z} = k\tanh(kh)\phi$ pour $y = 0$ dans le cas d'une profondeur h finie, et $\frac{\partial\phi}{\partial z} = k\phi$ lorsque la profondeur devient infinie.
La condition à la surface libre sera toujours satisfaite tant que ω et k seront reliés par la relation de dispersion qui s'écrit :

$$\omega^2 = gk\tanh(kh) \tag{1.20}$$

Cette relation se simplifie dans deux cas limites, la limite de l'eau peu profonde, c'est-à-dire $h << \lambda$, c'est-à-dire $kh << 1$, où elle devient $\omega \approx \sqrt{gh}k$. Dans ce cas, la vitesse des ondes c est constante ($c = \sqrt{gh}$), il n'y a pas de dispersion. L'autre cas limite est celui où la profondeur est très grande devant la longueur d'onde, on a $\tanh(kh) \approx 1$, et on a $\omega = \sqrt{gk}$. La relation de dispersion (1.20) nous permet d'obtenir directement la vitesse de phase de l'onde de surface définie par : $c = \frac{\omega}{k}$.

Effets capillaires

Une "bosse" ou un "creux" dans la surface libre correspondent à une augmentation de l'aire de celle-ci. Par conséquent la tension superficielle agit comme une force de rappel vers la position d'équilibre (de surface libre plate). Le grandient de pression (suivant Ox) lié à la variation du rayon de courbure R de la surface libre est donné par la loi de Laplace : $\nabla p = \left(\frac{\gamma}{R}\right)$. Afin de tenir compte de la tension superficielle, il faut ajouter le terme supplémentaire $-\frac{\gamma}{\rho}\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial^2 x\partial z}\right)_{z=0}$ dans l'équation (1.12). Ceci conduit à la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = gk\tanh(kh)\left[1 + \frac{\gamma}{\rho g}k^2\right] \tag{1.21}$$

où γ est la tension superficielle.

Notons que les effets capillaires n'interviennent notablement dans la relation de dispersion

que lorsque la longueur d'onde se compare à, ou est petite devant la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$.

1.3.4 Trajectoires

On s'intéresse maintenant aux trajectoires des particules fluides. Celle-ci sont définies par les équations :

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{1.22}$$

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1.23}$$

Etant donné que nous considérons une vague de très faible amplitude, nous pouvons considérer que la position instantannée (x, z) d'une particule s'éloigne très peu de la position moyenne (x_0, z_0), on écrit :

$$x = x_0 + \epsilon x_1(x_0, z_0, t) + ..., \qquad z = z_0 + \epsilon y_1(x_0, z_0, t) + ... \tag{1.24}$$

Les trajectoires sont alors définies par :

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + t.o.s \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + t.o.s \tag{1.26}$$

L'abréviation $t.o.s$ désigne les termes d'odre supérieur. Dans le cadre l'approximation ci-dessus, linéaire, et en utilisant la relation de dispersion, nous trouvons :

$$x = x_0 - A\sin(kx_0 - \omega t)\frac{\cosh[k(h + z_0)]}{\sinh(kh)} \tag{1.27}$$

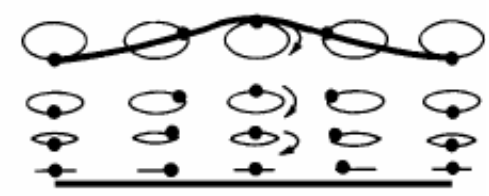

FIGURE 1.3 – Mouvements orbitaux dans les houles progressives. Les orbites sont des ellipses d'autant plus aplaties que la profondeur d'eau est faible ou que les particules fluides sont proches du fond. A la fin de chaque cycle de houle, chaque particule revient à sa position initiale.

$$z = z_0 + A\cos(kx_0 - \omega t)\frac{\sinh[k(h+z_0)]}{\sinh(kh)} \tag{1.28}$$

ce qui donne :

$$\frac{(x-x_0)^2}{\cosh^2[k(z_0+h)]} + \frac{(z-z_0)^2}{\sinh^2[k(z_0+h)]} = \frac{A^2}{\sinh^2(kh)} \tag{1.29}$$

Donc les trajectoires des particules fluides sont des ellipses fermées dans cette approximation linéaire. Plus on se rapproche du fond, plus les ellipses s'applatissent jusqu'à ce que les particules n'aient plus de mouvement vertical au fond. En profondeur infinie, les trajectoires sont des cercles.

1.4 Ondes cnoïdales et ondes solitaires dans l'approximation de Korteweg De Vries

Les effets non-linéaires doivent être pris en compte lorsque l'élévation de la surface A n'est plus très petite devant la longueur caractéristique de l'onde. Lorsque la longueur d'onde est grande devant la profondeur, la prise en compte des effets non-linéaires et dispersifs à l'ordre le plus bas amène à la fameuse équation de Korteweg De Vries (KdV).

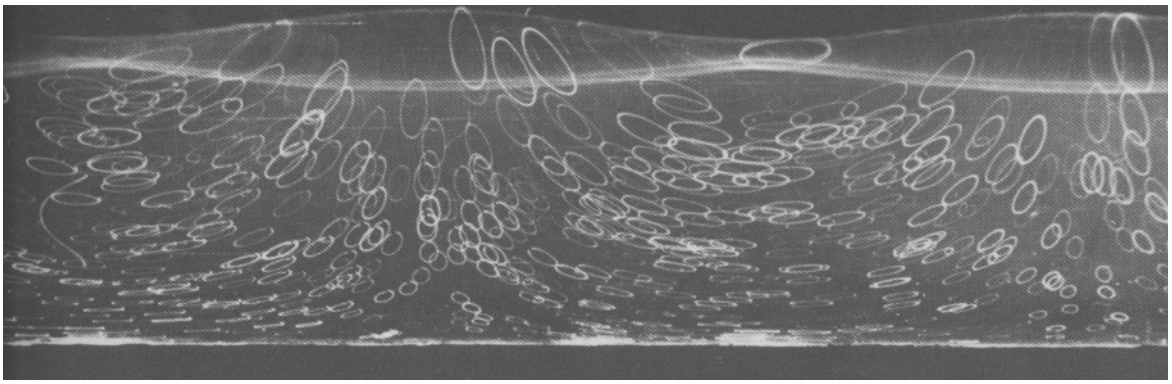

FIGURE 1.4 – Mouvement des particules de fluide dans une onde plane périodique en présence d'un certain taux d'ondes stationnaires en eau peu profonde, d'après Van Dyke [14].

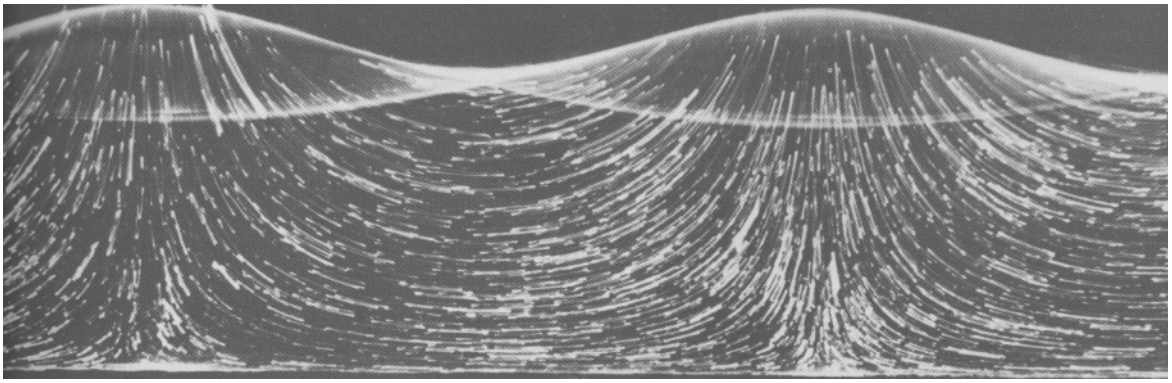

FIGURE 1.5 – Mouvement des particules de fluide dans une onde plane stationnaire en eau peu profonde. Les orbites sont d'aire nulle dans la description linéaire d'après Van Dyke [14].

Cette équation KdV prédit l'existence d'une onde solitaire qui se propage sans déformation et dont la vitesse dépend de l'amplitude.

Pour établir l'équation KdV, on part des équations (1.7) et (1.8) qui prennent en compte les non-linéarités liées aux termes de dérivées eulériennes dans les équations de conservation de la masse et de l'impulsion. Le lecteur pourra trouver la dérivation détaillée de l'équation KdV dans l'annexe B. Nous nous contenterons ici d'esquisser la démarche. Partant des équations (1.7) et (1.8) et ne retenant que la première non-linéarité, on arrive, au moyen d'une méthode de perturbation, à l'équation suivante pour l'amplitude η de la

déformation de la surface libre :

$$\frac{1}{c_0}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3\eta}{2h}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \tag{1.30}$$

Avec $c_0 = \sqrt{gh}$.

On reconnait dans l'équation ci-dessus une vitesse d'onde qui dépend de l'amplitude en :

$$c = \frac{\omega}{k} = c_0 \left(1 + \frac{3}{2}\frac{A}{h}\right) \tag{1.31}$$

et un terme correctif dans la relation de dispersion qui s'écrit pour des modes sinusoïdaux comme :

$$\omega = c_0 k \left(1 - \frac{1}{6}k^2 h^2\right) \tag{1.32}$$

en accord avec (1.20).

L'équation KdV admet deux types de solutions. Une solution périodique, dite *cnoïdale*, de la forme

$$\eta = \eta_2 + H\,\mathrm{cn}^2\left[2\frac{K}{\lambda}(x - ct)\right] \tag{1.33}$$

où cn est le cosinus elliptique de Jacobi et η_2 et H sont des paramètres. Cette équation admet aussi une solution de type onde solitaire qui s'écrit :

$$\eta = A\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3A}{4h^3}}(x - ct)\right] \tag{1.34}$$

où sech est la fonction sécante hyperbolique.

La stabilité temporelle de cette solution découle de la compétition entre les termes dispersifs qui tendent à "étaler" le paquet d'onde et le terme non-linéaire de dépendance de vitesse avec l'amplitude qui tend à le "raidir".

On peut décrire simplement la compétition entre ces deux mécanismes. Considérons un

paquet d'onde constitué de vecteurs d'onde k compris entre 0 et $\frac{2\pi}{\lambda}$. D'après (1.32), les ondes ayant des nombres d'onde différents se propagerons à des vitesses différentes. D'un autre coté, d'après la relation (1.31), la vitesse de l'onde augmente avec l'amplitude de la composante de Fourier qui contribue au paquet d'onde. Il existe donc une forme idéale d'implusion donnée par (1.34) telle que la décomposition en série de Fourier correspond à une compensation à tout moment des effets non-linéaires et dispersifs. Notons aussi que comme le montre la relation $\eta = A\ \mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3A}{4h^3}}(x-ct)\right]$, un soliton KdV devient plus étroit (dans l'espace direct) et se propage plus vite [en $c_0\left(1+\frac{3A}{2h}\right)$] lorsque son amplitude augmente.

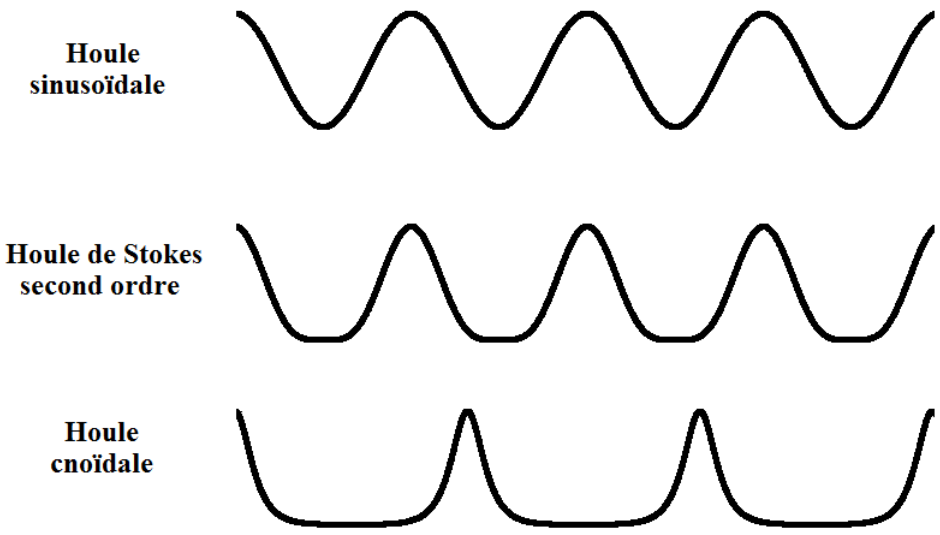

FIGURE 1.6 – Modèles de houle linéaire, de Stokes et cnoïdale. Le modèle linéaire a un profil sinusoïdal et une faible amplitude. Le modèle de Stokes présente un profil non-linéaire et une plus forte amplitude. Le modèle de houle cnoïdale s'éloigne du modèle de Stokes avec des crêtes plus 'raides' et des creux plus 'applatis'.

1.5 Amortissement d'une vague en eau peu profonde

La viscosité conduit à l'amortissement des vagues. Il est donc important d'estimer le terme d'atténuation, dans les deux limites de l'eau peu profonde ($\lambda << h$) et de

l'eau profonde ($\lambda >> h$). Dans un premier temps, nous allons rappeler le phénomène d'atténuation des ondes de cisaillement dans un fluide visqueux au voisinage d'une plaque oscillante, afin de définir la longueur d'atténuation visqueuse.

1.5.1 Longueur d'atténuation visqueuse

Nous allons maintenant rappeler le concept de "couche limite visqueuse", c'est-à-dire définir la longueur sur laquelle les ondes de cisaillement s'amortissent. Pour cela, considérons le mouvement d'un fluide newtonien au voisinage d'une plaque oscillant dans son plan (avec une amplitude A).

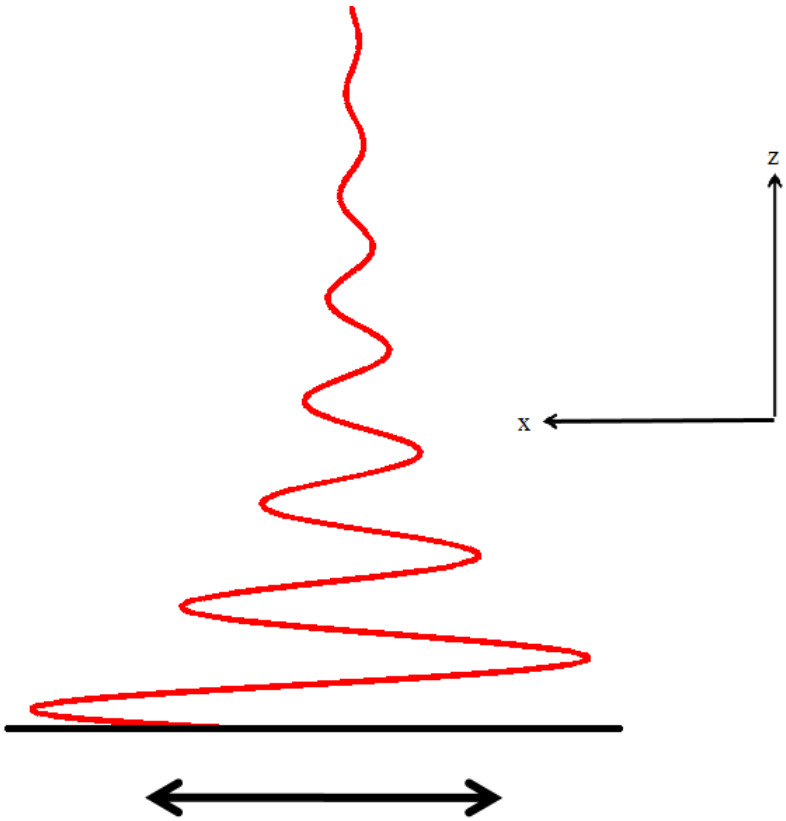

FIGURE 1.7 – Une plaque oscillante immergée dans un fluide crée une onde de cisaillement qui se propage en s'atténuant sur une longueur appelée longueur d'atténuation visqueuse.

L'équation de Navier-Stokes se réduit à une équation de diffusion qui s'écrit pour la composante horizontale u du champ de vitesse :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.35}$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide. Nous supposons le fluide immobile à l'infini. L'autre condition aux limites est celle de non-glissement au voisinage de la plaque ($z = 0$). On a donc (en notation complexe) :

$$u(z = 0) = u_0 e^{i\omega t} \tag{1.36}$$

$$u(z \to \infty) = 0 \tag{1.37}$$

En posant $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$, nous trouvons un profil de vitesse de la forme :

$$u = u_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)} \tag{1.38}$$

On voit donc que l'oscillation de la plaque se propage à l'intérieur du fluide en s'amortissant exponentiellement sur la longueur δ. La quantité δ est la longueur d'atténuation visqueuse.

Dans un fluide newtonien la contrainte visqueuse s'écrit $\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}$, où $\mu = \rho\nu$ est la viscosité dynamique du fluide. On en déduit donc :

$$\sigma_{xz} = \Re\left[\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\rho}(i-1)u_0 e^{-i\omega t} e\frac{z}{\delta}^{(i-1)}\right] = \Re\left[\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\rho}(i-1)u(z)\right] \tag{1.39}$$

Au voisinage de la plaque, $z = 0$, elle est :

$$\sigma_{xz} = \Re\left[\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\rho}(i-1)u_0 e^{-i\omega t}\right] \tag{1.40}$$

Elle s'écrit donc :

$$\sigma_{xz} = \sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\rho}u_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \tag{1.41}$$

La vitesse de la plaque étant $u = u_0 \cos(\omega t)$, il existe donc un déphasage entre la contrainte visqueuse et le champ de vitesse.

Le travail des forces visqueuses, moyenné sur une période temporelle et intégré suivant Oz, s'écrit (par unité de surface) :

$$\dot{W}_{visc} = \sigma_{xz} u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\rho}u_0^2 \tag{1.42}$$

Il est maintenant aisé d'estimer l'énergie de la vague dissipée dans la couche limite visqueuse au voisinage du fond dans le cas de l'eau peu profonde (avec la condition $\delta << h$). En effet, on est ramené au problème ci-dessus en se plaçant dans le repère de la plaque oscillante. L'énergie visqueuse dissipée (par unité de surface et de temps) est égale à :

$$\dot{W} = \left[\frac{1}{8}\mu\omega\rho\right]^{\frac{1}{2}} u_0^2 \tag{1.43}$$

Cette quantité est à comparer à l'énergie totale du fluide, qui est le double de l'énergie cinétique (par unité de surface horizontale) de la vague $E_c = \frac{1}{2}\rho h u_0^2$. On peut montrer que le coefficient d'atténuation pour l'amplitude de la vague [15] s'écrit :

$$\gamma \approx \frac{\sqrt{\omega\nu}}{h} \tag{1.44}$$

dans le cas d'une vague se propageant en eau peu profonde.

1.5.2 Amortissement d'une onde de gravité en eau profonde

Nous considérons une onde de gravité se propageant à la surface d'un fluide visqueux en eau profonde. L'essentiel de la dissipation visqueuse ne se produit alors pas au voisinage du fond, comme dans le cas précédent, mais au cœur même du fluide. Nous ferons ici

l'approximation que les trajectoires sont peu modifiées par la viscosité. Nous allons donc calculer les pertes visqueuses correspondants aux trajectoires trouvées dans l'approximation potentielle en suivant la méthode proposée par Landau [15] :

La puissance dissipée par la viscosité sur un volume de contrôle v est donnée par :

$$W = \frac{1}{2}\rho\nu \int [\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}]^2 dv \tag{1.45}$$

Ce qui correspond à une perte de l'énergie totale du fluide :$\frac{dE}{dt} = -W$. Comme précédemment, on définit le facteur d'amortissement visqueux comme : $\frac{d\bar{E}}{dt} = 2\gamma\bar{E}$, où les barres dénotent des quantités moyennées sur une longueur d'onde.
En considérant l'écoulement est potentiel, il vient $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$. Nous obtenons :

$$W = \frac{1}{2}\rho\nu \int 4[\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial x \partial z}]^2 dv = 8\rho\nu k^4 \int \bar{\phi}^2 dv \tag{1.46}$$

Nous écrivons maintenant l'énergie totale de l'onde qui est le double de son énergie cinétique (équipartition de l'énergie) :

$$\bar{E} = 2\bar{E}_c = \rho \int \mathbf{u}^2 dv = 2\rho k^2 \int \bar{\phi}^2 dv \tag{1.47}$$

En comparant (1.46) et (1.47) on trouve donc $\gamma = 2\nu k^2$, c'est-à-dire que l'onde s'amortit avec un temps caractérisque $\frac{1}{2\nu k^2}$.

1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons introduit les ondes de gravité à la surface des fluides. Nous avons expliqué les mécanismes conduisant à l'apparition d'onde solitaire en eau peu profonde. Nous avons également expliqué les phénomènes d'amortissement des vagues. Les sujets qui ont été traités dans ce chapitre nous seront nécessaires par la suite.

Chapitre 2

Instabilité de Faraday

Sommaire

2.1 Introduction 24

2.2 Excitation paramétrique d'onde de surface 24

2.2.1 Introduction 24

2.2.2 Etablissement des équations 25

2.3 Equation de Mathieu 27

2.3.1 Equation de Mathieu non amortie 27

2.3.2 Equation de Mathieu amortie 30

2.4 Equation d'amplitude et formation de structure 32

2.4.1 Equation aux amplitudes 33

2.5 Conclusion 35

2.1 Introduction

Dans nos expériences, nous créons des vagues à la surface libre d'un liquide en soumettant le récipient qui le contient à un mouvement d'oscillations verticales. Autrement dit, la gravité varie périodiquement dans le référentiel lié au récipient. Ces ondes de surface subissent donc une excitation paramétrique. Depuis que Faraday les observa en 1831 [1], on les appelle : "ondes de Faraday". L'instabilité de Faraday correspond au phénomène suivant : lorsque l'amplitude d'excitation dépasse une certaine valeur-seuil, la surface libre du fluide se déstabilise en ondes de surface stationnaires qui oscillent à la fréquence moitié de celle du forçage (voir figure 2.1). La première modélisation théorique ne fut proposée que bien plus tard par Benjamin et Ursell (1954) [18], et ceci dans le cadre d'un formalisme potentiel qui néglige la viscosité. Comme l'ont montré ces derniers, dans le cadre de l'approximation linéaire, les ondes de surface obéissent à une équation de Mathieu.

Dans ce chapitre, nous détaillerons la dynamique des ondes de surface excitées paramétriquement. Nous rappellerons comment se dérive l'équation de Mathieu à partir des équations de la mécanique des fluides et dans l'approximation d'écoulement potentiel. A l'aide d'arguments phénoménologiques, nous obtiendrons une équation aux amplitudes qui décrit l'instabilité de surface correspondant à l'apparition de vagues de surface. Nous rappellerons comment certaines propriétés de symétrie et d'invariance présentées par cette équation peuvent, dans certains cas simples, expliquer la symétrie du réseau de vagues de surface.

2.2 Excitation paramétrique d'onde de surface

2.2.1 Introduction

En 1831, Faraday publie un article sur le comportement d'un matériau granulaire posé sur une plaque vibrée verticalement [1]. Dans l'appendice, il note aussi qu'un fluide vibré verticalement présente des "crispations" (des vagues) présentant une symétrie rectangu-

laire, et ceci avec une extrême régularité. Il note également que les vagues oscillent à fréquence moitié de celle de l'excitation.

Ces observations sont confirmées par Rayleigh qui, après avoir réitéré les expériences, pense qu'il y a un lien avec l'équation de Mathieu, établie pour décrire les vibrations d'une membrane élastique elliptique (1883) [17]. Ce n'est qu'un siècle plus tard qu'un modèle analytique apte à décrire les ondes de Faraday fut développé par Benjamin et Ursell [18]. Dans le cas d'une nappe de fluide inviscide de profondeur infinie, ils montrent que c'est l'amplitude de chaque mode $\boldsymbol{k}$ des ondes de surface qui obéit à une équation de Mathieu.

Dans cette partie, nous allons montrer comment on obtient cette équation de Mathieu à partir des équations linéarisées de l'hydrodynamique. Enfin nous tenterons d'inclure les premiers termes non-linéaires, ce qui nous conduira à une équation aux amplitudes pertinente pour décrire les vagues de Faraday de petites amplitudes.

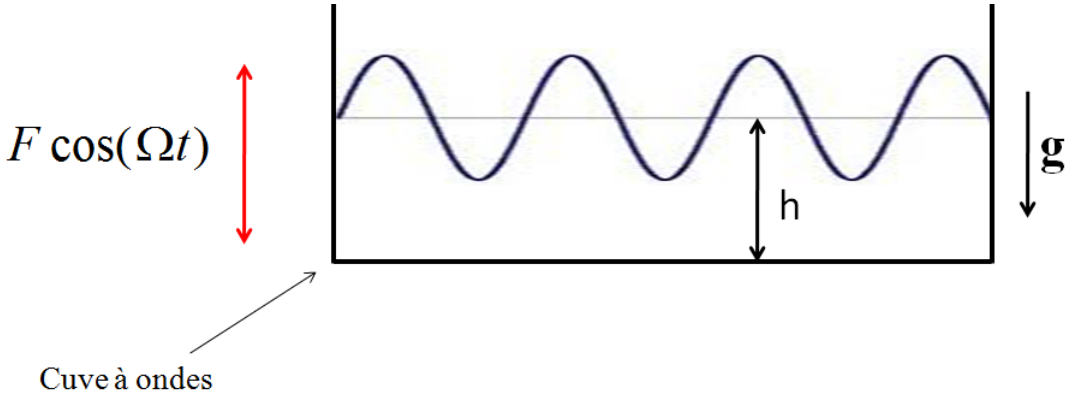

FIGURE 2.1 – Schéma de l'expérience, une cuve est remplie de liquide et placée sur un vibreur qui lui transmet une agitation périodique dans la direction verticale.

2.2.2 Etablissement des équations

Pour décrire l'excitation des modes de vibration de cette surface, nous allons écrire les équations de l'hydrodynamique pour le mode de surface de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Nous allons voir que l'amplitude de ce mode obéit à une équation de Mathieu dans le cas d'un

fluide parfait, incompressible et en écoulement irrotationnel. Nous nous plaçons dans les mêmes conditions qu'au chapitre 1, à la différence que nous nous plaçons dans le référentiel vibrant avec la nappe de liquide. Cela revient donc à considérer que la nappe est soumise à une gravité effective $\tilde{g}$ modulée dans le temps que l'on écrit : $\tilde{g}(t) = g[1 + Fcos(\Omega t)]$, où g est l'accélération de la gravité, F est l'amplitude (adimensionnée) du forçage et Ω la fréquence de forçage. Nous allons voir que dans le cadre d'une approximation linéaire et potentielle, ce système se ramène à une équation de Mathieu pour l'amplitude de chaque mode de vibration de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ de la surface libre. La recherche d'une solution à variables d'espace et de temps séparées pour le potentiel des vitesses nous donne une dépendance en $\cosh[k(h+z)]$ pour la variable verticale z (voir chapitre 1), on trouve alors pour ϕ :

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2} \frac{\cosh[k(h+z)]}{k \cosh(kh)} S_k(x, y) \tag{2.1}$$

où les fonctions $\zeta_k(t)$ et $S_k(x, y)$ sont définies par : $\eta(x, y, t) = \zeta_k(t) S_k(x, y)$. En injectant les expressions de η et ϕ dans l'équation de Bernoulli dynamique établie au chapitre 1 qui s'écrit $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + g\eta = 0$, nous trouvons pour l'amplitude du mode excité l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2} + \omega_0^2 [1 + F \cos(\Omega t)] \zeta_k = 0 \tag{2.2}$$

avec $\omega_0 = gk \tanh(kh)$. Cette équation est appelée équation de Mathieu. Le fluide étant considéré non visqueux, il n'y a pas de terme de dissipation dans l'équation. Le paragraphe suivant est consacré à l'étude de cette équation.

2.3 Equation de Mathieu

Dans cette section, je vais rappeler les propriétés classiques de l'équation de Mathieu non amortie, entre autre que ses solutions périodiques se présentent comme les frontières de "langues de résonance" au cœur desquelles les solutions divergent. Ces langues sont approximativement centrées autour des fréquences $n\Omega = 2\omega_0$.

2.3.1 Equation de Mathieu non amortie

Résonance sous-harmonique

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la première résonance (mode sous-harmonique), qui apparaît lorsque Ω est très proche de $2\omega_0$. Nous notons $\Omega = 2\omega_0 + \epsilon$, avec $\epsilon << \omega_0$. Nous cherchons donc une solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2} + \omega_0^2[1 + F\cos(2\omega_0 + \epsilon)t]\zeta_k = 0 \tag{2.3}$$

sous la forme $\zeta(t) = A(t)\cos(2\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t + B(t)\sin(2\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t$. Portons cette solution dans l'équation du mouvement en conservant uniquement les termes d'ordre ϵ et en supposant que $\frac{\partial A}{\partial t} = \mathcal{O}(\epsilon)$ et $\frac{\partial B}{\partial t} = \mathcal{O}(\epsilon)$. En ne gardant que les termes résonants sous-harmoniques, nous trouvons :

$$-(2\frac{dA}{dt}+\epsilon B+\frac{1}{2}F\omega_0 B)\omega_0 \sin(2\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t+(2\frac{dB}{dt}-\epsilon A+\frac{1}{2}F\omega_0 A)\omega_0 \cos(2\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t = 0 \tag{2.4}$$

Les fonctions cosinus et sinus étant orthogonales, cette égalité est valable à condition que les pré-facteurs de ces fonctions trigonométriques s'annulent simultanément. Nous avons donc pour les coefficients A et B un système de deux équation algébriques linéaires :

$$-(2\frac{dA}{dt} + \epsilon B + \frac{1}{2}F\omega_0 B) = 0 \tag{2.5}$$

$$(2\frac{dB}{dt} - \epsilon A + \frac{1}{2}F\omega_0 A) = 0 \tag{2.6}$$

Nous cherchons une solution pour A et B proportionnelle à e^{st} et la condition de solvabilité des équations s'écrit :

$$s^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}F\omega_0\right)^2 - \epsilon^2\right] \tag{2.7}$$

La condition de résonance est que s soit réél ($s^2 > 0$). La résonance survient donc dans l'intervalle :

$$-\frac{1}{2}F\omega_0 < \epsilon < \frac{1}{2}F\omega_0 \tag{2.8}$$

centré sur $\frac{\omega_0}{2}$.

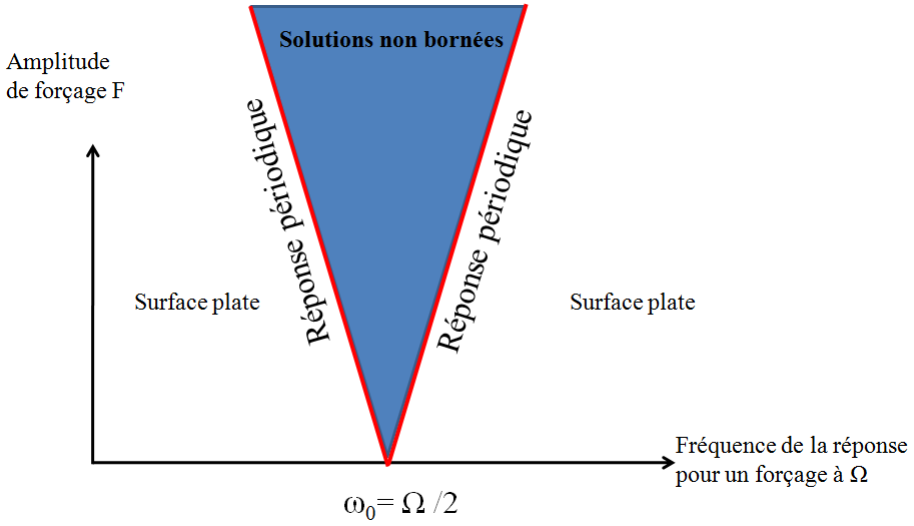

FIGURE 2.2 – Solution de l'équation de Mathieu non amortie pour le mode sous-harmonique.

Ce diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu non amortie montre qu'il existe un domaine définit par $-\frac{1}{2}F\omega_0 < \epsilon < \frac{1}{2}F\omega_0$ pour lequel l'amplitude de la réponse ζ diverge. Notons néanmoins qu'il existe des solutions périodiques sous-harmoniques et bornées

(s=0) sur la frontière de cette première langue de Mathieu. Cette frontière a pour équation (en forçage faible) :

$$\omega = \frac{\Omega}{2} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{F}{4}\right) \tag{2.9}$$

La relation (2.9) constitue la relation de dispersion des deux modes périodiques situés sur la frontière de la première langue de résonance. En remplaçant ω_0 par $gk\tanh(kh)$, on obtient :

$$\omega_+ = \left(1 + \frac{F}{4}\right) gk\tanh(kh) \tag{2.10}$$

$$\omega_- = \left(1 - \frac{F}{4}\right) gk\tanh(kh) \tag{2.11}$$

Il est intéressant de remarquer que dans le cas de vagues de surface **paramétriquement forcées**, la **relation de dispersion** relative à la résonance sous-harmonique $\omega(k)$ **présente deux branches**, c'est-à-dire que le forçage la modifie par rapport à celle des "vagues libres".

Résonance harmonique

Il est aussi d'intérêt de déterminer les frontières de la seconde langue de Mathieu, qui correspond à la résonance du mode fondamental ($\omega = \Omega$). Pour ce faire, nous reprenons le calcul précédent en nous plaçant au voisinage de ω_0, c'est-à-dire $\Omega = \omega_0 + \epsilon$, avec $\epsilon << \omega_0$. Nous devons donc chercher une solution de l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2} + \omega_0^2[1 + F\cos(\omega_0 + \epsilon)t]\zeta_k = 0 \tag{2.12}$$

On cherche une solution de la forme :

$$\zeta(t) = A(t)\cos(\omega_0+\epsilon)t + B(t)\sin(\omega_0+\epsilon)t + A_1(t)\cos[2(\omega_0+\epsilon)t] + B_1(t)\sin[2(\omega_0+\epsilon)t] \tag{2.13}$$

Les frontières de la seconde langue de Mathieu, qui correspond à la résonance fondamentale sont définies par :

$$-\frac{5}{24}F^2\omega_0 < \epsilon < \frac{1}{24}F^2\omega_0 \tag{2.14}$$

On obtient la relation suivante :

$$1 - \frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{F^2}{12} = \pm\frac{F^2}{8} \tag{2.15}$$

Les frontières de cette langue correspondent à deux modes périodiques qui ont respectivement pour relation de dispersion :

$$\Omega_+ = \left(1 + \frac{F^2}{24}\right) gk\tanh(kh) \tag{2.16}$$

$$\Omega_- = \left(1 - \frac{5F^2}{24}\right) gk\tanh(kh) \tag{2.17}$$

2.3.2 Equation de Mathieu amortie

Nous avons déterminé au chapitre 1 le terme d'atténuation visqueuse associé aux ondes de gravité dans les deux cas limites $kh >> 1$ et $kh << 1$ dans le cadre d'une approximation potentielle. Pour tenir compte de la viscosité, nous allons l'introduire de façon phénoménologique dans l'équation (2.2) en supposant la dissipation très faible. Nous

obtenons alors :

$$\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2} + 2\mu \partial_t \zeta_k + \omega_0^2 [1 + F\cos(\Omega t)]\zeta_k = 0 \tag{2.18}$$

où μ est l'inverse du temps associé à l'amortissement visqueux. Rappelons que le terme d'atténuation visqueuse s'écrit comme :

$\mu = \nu k^2$ dans la limite de l'eau profonde.

$\mu = \frac{1}{h}\sqrt{\omega\nu}$ dans la limite de l'eau peu profonde ($kh << 1$).

La transformation $\xi_k = e^{-\mu t}\zeta_k$ permet d'éliminer le second terme de droite de l'équation (2.18) qui devient :

$$\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} + \omega_0'^2 [1 + F'\cos(\Omega t)]\xi_k = 0 \tag{2.19}$$

avec $F' = \frac{F\omega_0^2}{\omega_0^2 \mu^2}$ et $\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \mu^2$.

En présence de dissipation, les équations des frontières des langues de Mathieu sont donc modifiées et deviennent :

$$\left[1 - \frac{\Omega}{\omega_0}\right]^2 = \frac{F^2}{16} - \frac{\mu^2}{\omega_0^2} \tag{2.20}$$

pour le mode sous-harmonique, et :

$$\left[1 - \frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{F^2}{12}\right]^2 = \frac{F^4}{64} - \frac{\mu^2}{\omega_0^2} \tag{2.21}$$

pour le mode fondamental. Il faut noter que la prise en compte de la dissipation visqueuse entraine l'apparition d'un seuil (non nul) pour l'amplitude de forçage. Ce seuil correspond à l'énergie minimale qu'il faut injecter dans le système pour vaincre la dissipation visqueuse et pouvoir ainsi déstabiliser la surface libre.

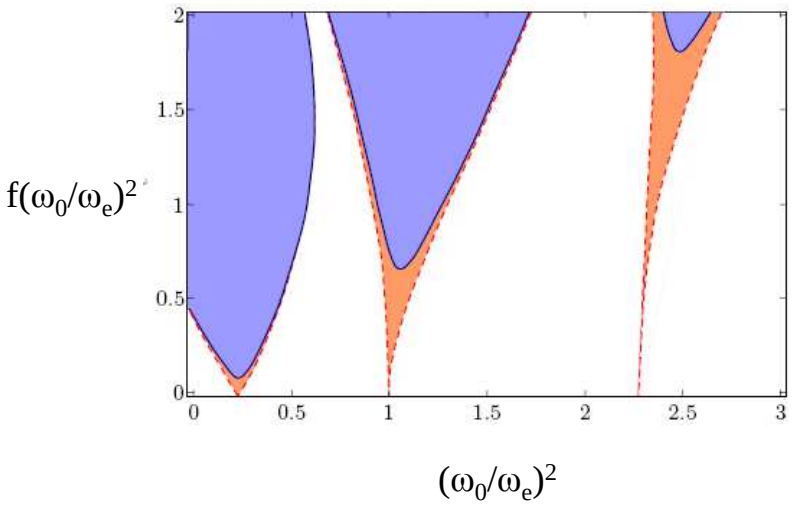

FIGURE 2.3 – Diagramme d'instabilité des solutions de l'équation de Mathieu. Les frontières entre les zones stables (blanches) et instables (colorées) sont représentées en l'absence de dissipation (en pointillé) et en présence d'une faible dissipation (en trait plein).

2.4 Equation d'amplitude et formation de structure

Aux cours de ses expériences Faraday a observé que les crêtes des vagues s'arrangeaient avec une symétrie rectangulaire. Il a ouvert à ce moment-là un problème qui stimule encore la curiosité scientifique, à savoir la formation de structures liée au développement d'une instabilité.

En effet, de précédentes études ont montré que le réseau d'ondes stationnaires créé à la surface du fluide pouvait adopter différentes géométries, à savoir celle correspondant à des bandes [19, 20, 21], des carrés [20, 22, 23, 24, 25, 26, 27], des triangles (avec une symétrie d'ordre 6), des hexagones [28, 29] ou même des structures quasi cristallines.

D'un point de vue théorique, l'écriture d'une équation aux amplitudes permet de décrire la dynamique du mode k linéairement instable. Elle permet également de décrire l'interaction non-linéaire entre modes de surface conduisant à la formation de motif.

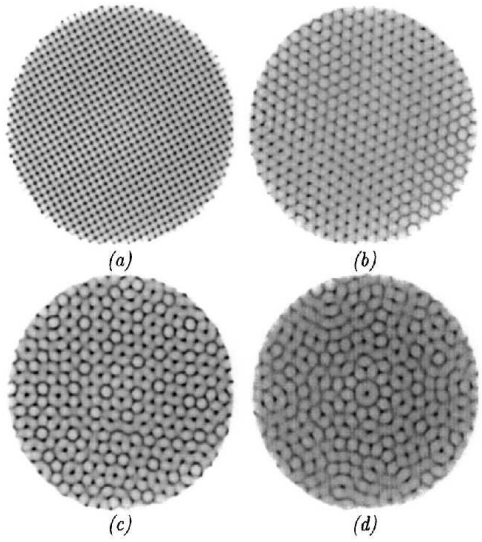

FIGURE 2.4 – Exemple d'ondes stationnaires formées par instabilité de Faraday. (a) Motif carré composé de deux ondes stationnaires forcées à 45 Hz, (b) Motif triangulaire composé de trois ondes stationnaires forcées à 30 Hz, (c) Motif composé de quatre ondes stationnaires forcées à 29 Hz, (d) Motif composé de cinq ondes stationnaires forcées à 27 Hz. Photographies tirées de la thèse de M.T. Westra [30].

2.4.1 Equation aux amplitudes

Au chapitre 4, nous dériverons l'équation aux amplitudes pour les modes de Faraday à partir des équations de l'hydrodynamique. Dans un premier temps, nous allons prévoir la forme que doit adopter cette équation en utilisant des arguments de symétrie. Nous considérons qu'un seul mode $\zeta(x, y, t)$ de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ est instable. On écrit la surface libre :

$$\zeta(x, y, t) = Ae^{i\omega t}S(x, y) + c.c. \tag{2.22}$$

La méthode standard est de considérer l'évolution de l'amplitude du mode instable lente comparée à l'échelle de temps du système (la période). Dans un premier temps considérons un système non forcé et cherchons une equation d'évolution pour A de la forme :

$$\frac{dA}{dt} = F(A) \tag{2.23}$$

Cette équation doit être invariante par translation quelconque dans le temps (ce qui revient à changer l'origine du temps). La transformation $t \to t + \tau$ correspond à un changement de phase de l'amplitude A, c'est-à-dire $A \to Ae^{-i\omega\tau}$. Ceci n'autorise, en se limitant à l'ordre 3, que la forme :

$$\frac{dA}{dt} = -(\alpha_1 + i\alpha_2)A + (\alpha_3 + i\alpha_4)|A|^2 A \tag{2.24}$$

Dans l'approximation linéaire, la solution est :

$$\zeta = A_0 S(x, y) e^{-\alpha_1 t} e^{i(\alpha_2 + \omega)t} \tag{2.25}$$

Ici α_1 est associé à l'amortissement visqueux du mode, et $\alpha_2 - \omega$ est un décalage en fréquence. Les coefficients α_3 et α_4 peuvent être directement interpretés comme la dissipation et le décalage en fréquence du mode $\mathbf{k}$ du aux effets non-linéaires. Pour des ondes stationnaires, on a :

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{8}(kA^2)\right] \tag{2.26}$$

Vu que la fréquence d'oscillation des vagues excités paramétriquement est $\frac{\Omega}{4\pi}$, on a nécessairement $\alpha_2 = \omega_0 - \frac{\Omega}{2}$ (où ω_0 est la fréquence du mode $\mathbf{k}$ dans la limite des vagues d'amplitude infinitésimale). Le système est alors invariant par inversion du temps $t \to -t$, ce qui correspond à $A \to \bar{A}$, et l'invariance de l'équation impose $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$.

Maintenant intéressons nous au système forcé. La réponse étant sous-harmonique, l'am-

plitude s'inverse lors de la translation dans le temps $t \to t + \frac{2\pi}{\Omega}$. Pour tenir compte du forçage, il faut donc rajouter un terme proportionnel à A^* (l'astérisque dénote le complexe conjugué). On obtient donc :

$$\frac{dA}{dt} = -(\alpha_1 + i\alpha_2)A + \alpha A^* + (\alpha_3 + i\alpha_4)|A|^2 A \tag{2.27}$$

L'intérêt de cette démarche est d'obtenir directement une équation décrivant l'amplitude des modes instables, qui, de plus, décrit toute instabilité dont les symétries sont identiques, indépendamment de sa nature physique. Cette équation aux amplitudes est caractéristique d'un système présentant une bifurcation sous-harmonique.

Interprétation des coefficients

Le coefficient α_1 est relié à la dissipation, α_2 correspond au décalage entre la fréquence du mode $\mathbf{k}$ *sans forçage et sans dissipation* et la demi fréquence de forçage, α est relié à l'amplitude (réelle) du forçage paramétrique. α_3 peut-être interpréter comme un terme de dissipation non linéaire et α_4 correspond au décalage non-linéaire de la fréquence avec l'amplitude, cet écart à résonance découle directement de la propriété de tout oscillateur non-linéaire d'avoir une fréquence propre qui dépend de son amplitude.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que dans l'approximation linéaire, l'amplitude des ondes de Faraday obéit à une équation de Mathieu, équation qui présente la condition de résonance $n\Omega = 2\omega_0$, avec n entier. Les ondes excitées de cette manière auront donc les fréquences $\frac{\Omega}{2}$, Ω, $\frac{3\Omega}{2}$, etc...
Nous avons aussi montré comment le forçage et la dissipation visqueuse modifient la relation de dispersion des ondes de surface excitées paramétriquement. Enfin, la prise en compte des non-linéarités via l'écriture d'une équation aux amplitudes permet de saturer l'amplitude de la réponse.

Dans la suite du présent manuscrit vont être présentés nos travaux expérimentaux sur les ondes de Faraday, notamment une étude en cellule de type Hele-Shaw (qui permet de se ramener à une étude en deux dimensions), dans lesquelles ont été mis en évidence des ondes solitaires stationnaires de grande amplitude d'un type nouveau.

Puis je présenterais des expériences faites dans des cuves en trois dimensions de différentes géométries. Ces expériences, réalisées en eau peu profonde, présentent elles aussi des vagues d'un type totalement nouveau, gouvernées par des non-linéarités d'ordre élevé.

Chapitre 3

Ondes solitaires excitées par instabilité de Faraday

Sommaire

3.1 Introduction 38

3.2 Montage expérimental 39

3.3 Observations et mesures expérimentales 40

3.4 Résultats expérimentaux 44

3.5 Analyse théorique 44

3.6 Conclusion 56

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un travail expérimental au cours duquel nous avons mis en évidence deux nouveaux types d'ondes solitaires à la surface de l'eau. Il s'agit de structures stationnaires localisées dans l'espace, qui oscillent périodiquement dans le temps. Ces structures sont créées à partir d'un forçage paramétrique, et, comme nous allons le voir par la suite, la dissipation joue un rôle important pour leur formation. Ces ondes stationnaires appartiennent donc à la catégorie des "solitons dissipatifs", selon la terminologie introduite par N. Akhmediev et A. Ankiewicz [31].

D'un point de vue théorique, H. Brandt [32] et I.V. Barashenkov [33] avaient décrit l'apparition de telles structures localisées dissipatives, le premier dans un formalisme utilisant une équation de Swift-Hohenberg à coefficients complexes, et le second en utilisant une équation de Schrödinger non-linéaire, supplémentée d'un terme de forçage et de dissipation. Néanmoins, il convient de souligner que pour les ondes de Faraday que nous étudions, les équations de l'hydrodynamique ne peuvent se réduire à de telles équations-type.

Dans ces expériences, nous avons étudié l'instabilité de Faraday pour une nappe de liquide confinée verticalement dans une cellule de Hele-Shaw. La cellule utilisée est un récipient parallélépipédique dans lequel l'épaisseur horizontale (typiquement 1 mm) dans laquelle est confiné le fluide est très faible comparée à la hauteur de remplissage et à la largeur horizontale de la cuve. Historiquement, les cellules de Hele-Shaw ont servi à caractériser des écoulements potentiels - en particulier le comportement de fluides en mouvement autour d'obstacle-, mais elles sont aussi utilisées pour étudier certaines instabilités hydrodynamiques (comme l'instabilité de Saffman Taylor). Dans le cas de l'instabilité de Faraday, comme je le détaillerai dans la suite du présent chapitre, l'intérêt de ce type de cellule est double. Premièrement, elle augmente considérablement le domaine d'existence de ces ondes de surface très localisées car la dissipation varie comme l'inverse du carré de l'épaisseur. Deuxièmement, elle légitime une description potentielle du champ de vitesse

qui prend en compte la dissipation visqueuse.

3.2 Montage expérimental

Le système que nous étudions est constitué par une couche de fluide (eau distillée) de 5 cm d'épaisseur confinée dans une cellule de Hele-Shaw (de 30 cm de longueur). La cellule est consituée de deux plaques de verre dont les parois ont été traitées à l'acide persulfurique afin de les rendre moins mouillantes. L'intervalle séparant les parois frontales de la cellule est de 1 mm. La cellule de Hele-Shaw est ensuite fixée sur un vibreur (Brüel et Kjaer - Modal Exciter Type 4824). Ce vibreur est relié à un générateur de fonction Tektronix (AFG 3102) lui-même relié à un amplificateur de puissance (Brüel et Kjaer - Power Amplifier Type 2732). Le mouvement de la cuve est vertical. Un accéléromètre placé sous la cuve permet de mesurer l'accélération. Nous avons vérifié que le mouvement pouvait être considéré comme sinusoidal avec une très bonne précision (l'écart à la sinusoïde est de moins de 1 %). L'amplitude des vibrations peut atteindre 2 cm, et la zone explorée pour les fréquences de forçage s'étend de 6 à 20 Hz.

Les déformations de la surface libre sont filmées à l'aide d'une caméra rapide (250 im/s) placée parallèlement à la cellule de Hele-Shaw. La cuve est éclairée par derrière par un écran blanc diffusant de la lumière émise par des lampes halogènes alimentées en continu.

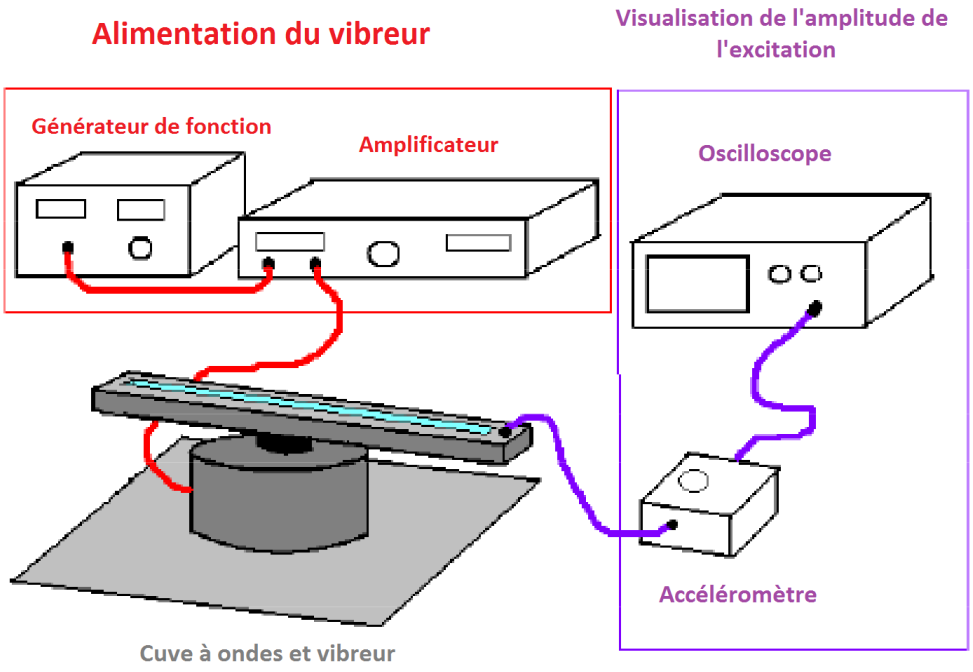

FIGURE 3.1 – Montage expérimental.

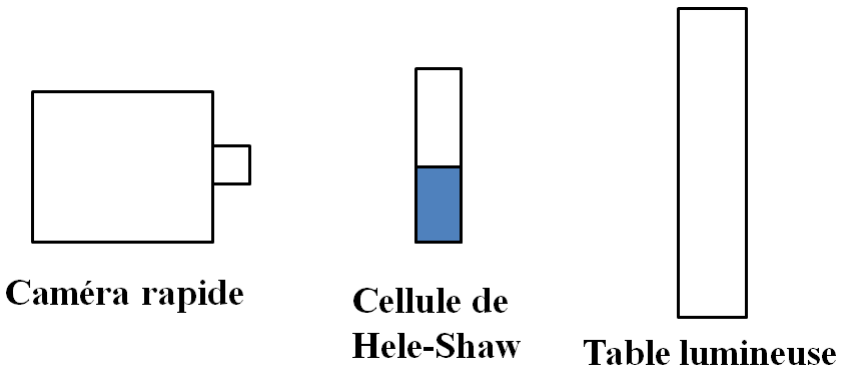

FIGURE 3.2 – Disposition des éléments pour la visualisation de la surface libre.

3.3 Observations et mesures expérimentales

Dans un premier temps, nous avons, pour une fréquence donnée (dans la gamme 6-20 Hz), augmenté progressivement l'amplitude de vibration jusqu'à ce que l'état de surface libre horizontale devienne instable et qu'apparaissent des ondes stationnaires périodiques

dans l'espace vibrant avec une fréquence moitié de celle du forçage. Pour une fréquence de forçage de 10Hz, l'amplitude de vibration de la cuve mesurée qui correspond à ce premier seuil est 5,5 mm, ce qui correspond à une accélération de $\Gamma_\uparrow = 2,24$ (exprimée en unité de g). Pour cette accélération seuil, il apparaît un système spatialement périodique d'ondes stationnaires (fig 3.3), et qui a une amplitude finie de l'ordre du centimètre. En notant $\frac{\Omega}{2\pi}$ la fréquence d'excitation, les vagues oscillent à la fréquence $\omega_0 = \frac{\Omega}{4\pi}$. Notons que ces vagues sont très non-linéaires ; en effet le profil de la surface libre s'écarte notablement d'une sinusoïde (fig 3.3). Le fait que le système d'ondes de surface apparaisse avec une amplitude finie dès le seuil montre que la transition est ***sous-critique***. Une fois apparu ce système d'ondes stationnaires, on diminue progressivement l'amplitude de forçage et on mesure cette fois-ci le seuil d'accélération pour lequel les vagues de surface disparaissent, c'est-à-dire pour lequel l'état de surface libre horizontale est retrouvé. Nous notons alors une valeur de l'accélération de la cuve égale à $\Gamma_\downarrow = 1,13$ (en unité de g), notablement différente de la précédente valeur correspondant à l'apparition des vagues. La transition est donc ***hystérétique*** (voir figure 3.4). Par conséquent, il existe un intervalle d'accélération de forçage définit par $\Gamma_\downarrow < \Gamma < \Gamma_\uparrow$ pour lequel la surface libre peut-être soit au repos, soit le lieu d'ondes de surface spatialement périodiques et stationnaires, son état dépendant de l'historique de propagation.

Nous nous sommes alors posé la question : comment répond la surface libre au repos dans la région $\Gamma_\downarrow < \Gamma < \Gamma_\uparrow$ si nous la soumettons à une perturbation extérieure ? Pour cela, nous partons d'un système au repos ($\Gamma = 0$). Ensuite nous augmentons progressivement l'accélération à laquelle est soumise la cellule pour nous placer dans la zone $\Gamma_\downarrow < \Gamma < \Gamma_\uparrow$. Pour cette préparation et à cette accélération, la surface libre est donc horizontale. Enfin, nous perturbons localement la surface en l'agitant avec un bâtonnet que nous ôtons rapidement (voir figure 3.5). Il apparaît alors un mode de vibration de la surface libre très localisé, qui oscille subharmoniquement par rapport au forçage (voir figures 3.6 et **??**).

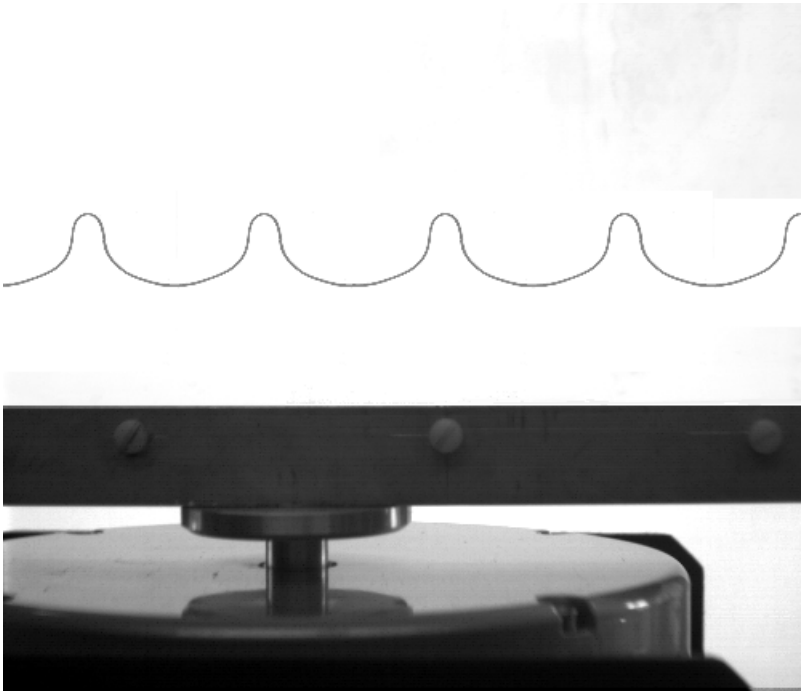

FIGURE 3.3 – Vagues de Faraday observées au seuil de l'instabilité. Nous pouvons voir clairement sur cette photo le profil non-linéaire des vagues au sens où le profil de la surface libre n'est pas sinusoïdal : le rayon de courbure aux crêtes est plus petit que celui aux creux. La valeur du rayon de courbure observé aux crêtes est le l'ordre du rayon capillaire ($2,7$ mm). Le rayon de courbure correspondant aux creux est très supérieur (de l'ordre de 2 cm).
Ici, la longueur d'onde mesurée est de 2,3 cm alors que celle prédite par la relation de dispersion des ondes de gravité en eau profonde est 2,5 cm. La différence entre ces deux valeurs n'est pas très grande (environ 10%), mais c'est dans ces 10% que réside toute la difficulté du problème.

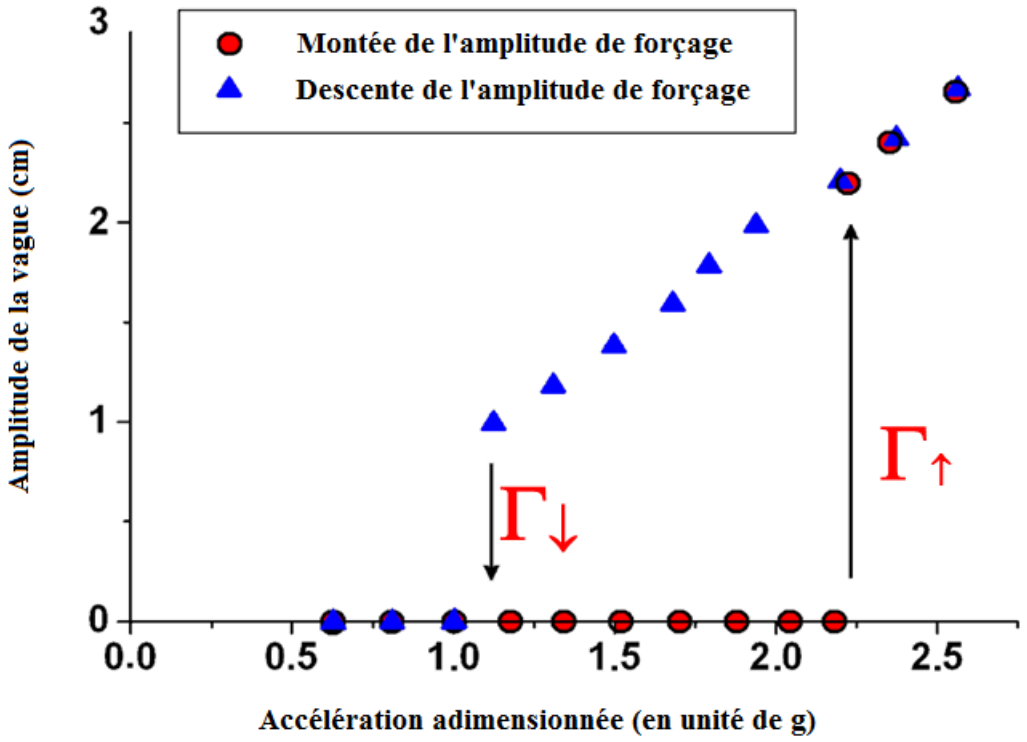

FIGURE 3.4 – Mise en évidence d'une zone de bistabilité liée à un phénomène d'hystérésis.

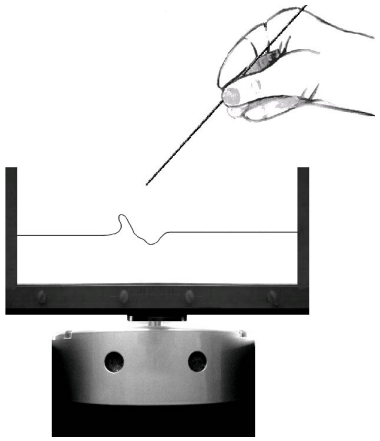

FIGURE 3.5 – Schéma du dispositif expérimental. La cellule de Hele-Shaw subit des oscillations verticales. On augmente l'amplitude de ces oscillations depuis le repos jusqu'à atteindre la région de bistabilité. Ensuite, la surface libre verticale est perturbée localement au moyen d'un bâtonnet. Il apparaît alors une onde stationnaire très localisée, qui peut être soit de symétrie paire, soit de symétrie impaire.

3.4 Résultats expérimentaux

Nous présentons ici les résultats Le mode qui apparait peut être soit de symétrie paire (fig 3.6), soit impaire (fig 3.6). Nous n'avons pas réussi à contrôler la parité de l'onde localisée en jouant sur le mode de préparation. Il faut noter que nous utilisons ici avec un léger abus de langage le terme impair, parce que dans ce dernier cas, les crêtes et les creux n'ont pas exactement la même amplitude. Il est possible que le motif pair puisse résulter de l'accrochage de deux motifs impairs.
Sur la figure 3.7 nous présentons l'évolution temporelle des deux ondes paires et impaires. Dans les deux cas on peut remarquer une tendance au déferlement (c'est-à-dire l'existence d'un "surplomb" sous la crête) pendant un certain laps de temps, mais ce déferlement est inhibé à la fois par la tension superficielle et par la force de rappel vers l'état de surface libre horizontale due au mouvement ascendant de la cuve.

3.5 Analyse théorique

Comme nous l'avons annoncé plus haut, plusieurs types d'équations aux amplitudes, telle que l'équation de Schrödinger Non-Linéaire additionnée de termes de forçage et de dissipation [33, 34] ou l'équation de Swift–Hohenberg à coefficients complexes [32, 35] présentent des solutions stationnaires très localisées dans l'espace. De ces modélisations théoriques il ressort que l'ingrédient indispensable pour obtenir une solution localisée est l'existence d'une bistabilité qui autorise à la fois l'existence d'une solution oscillante et d'une solution d'amplitude nulle pour les mêmes conditions d'excitation. En effet, on peut interpréter - suivant en cela l'idée de A. Newell et Y. Pomeau [36] - cette oscillation localisée comme résultant de l'existence simultanée dans l'espace de deux solutions : celle oscillante et celle correspondant à la surface libre au repos. Néanmoins il nous apparaît important de souligner que les équations aux amplitudes sont adaptées pour décrire des ondes sinusoidales de faible amplitude et de grande extension spatiale. Elles sont donc

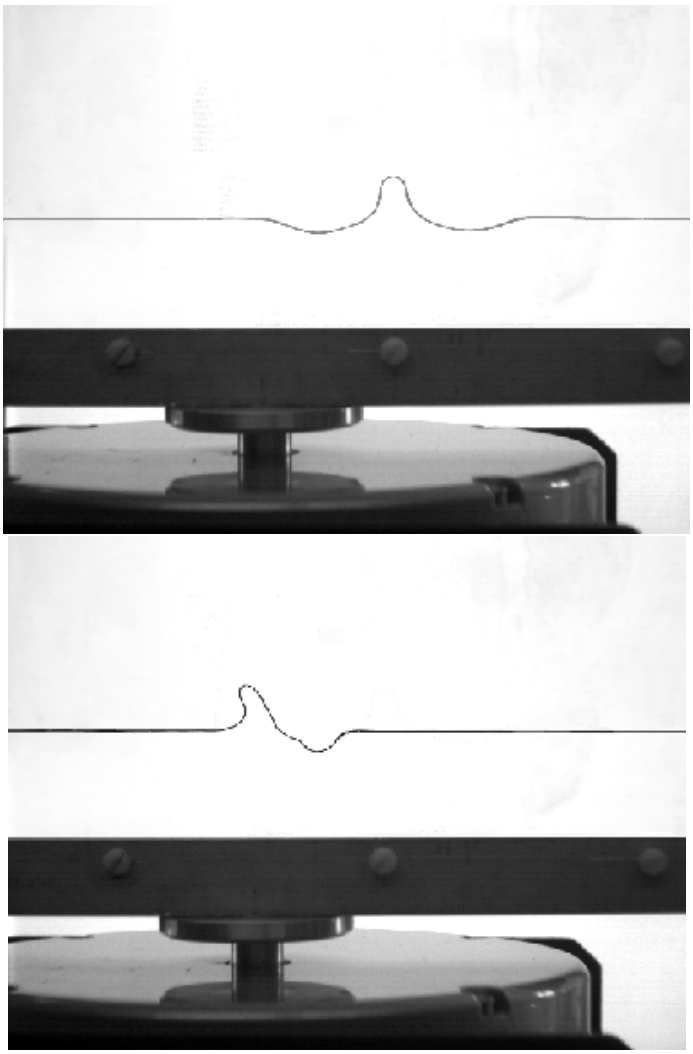

FIGURE 3.6 – Onde solitaire paire et impaire. Dans la zone d'hystérésis, la surface libre peut être soit plate, soit ondulée, suivant le mode de préparation. Si l'on augmente l'amplitude depuis zéro, et si on perturbe la surface libre avec un bâtonnet, on voit apparaitre un mode très localisé qui peut être soit 'pair', soit 'impaire'.

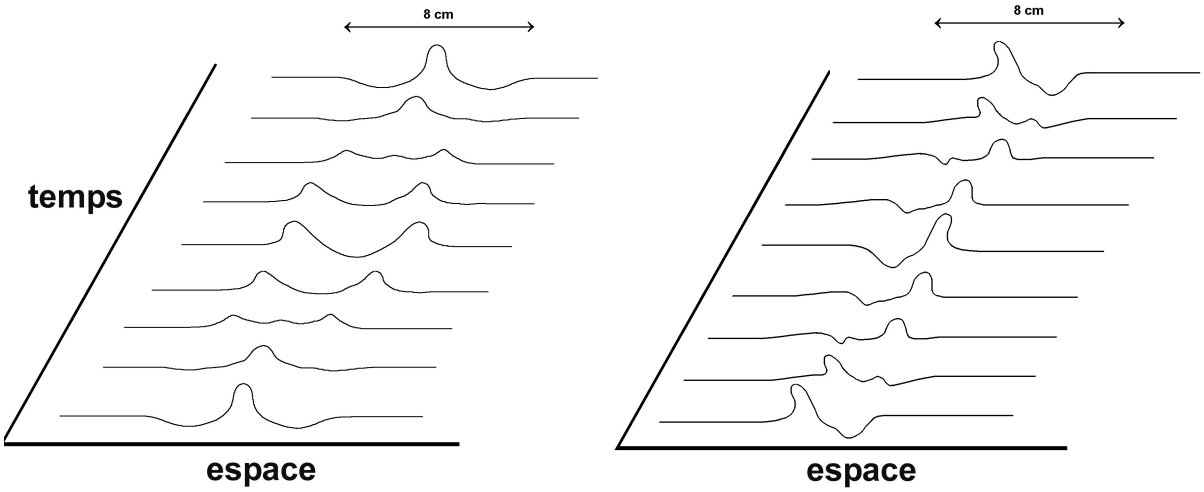

FIGURE 3.7 – Evolution spatio-temporelle des deux ondes solitaires observées. Les motifs sont très stables et résistent à des perturbations des paramètres de forçage. Sur la figure sont représentées deux périodes de l'excitation (car la surface répond sous-harmoniquement. Si on augmente la fréquence légèrement, le motif garde le même aspect tout en subissant une contraction dans l'espace. Si on augmente légèrement l'amplitude tout en restant dans la zone d'hystérésis, l'amplitude du motif augment selon le diagramme présenté en figure (3.4).

pertinentes pour décrire des "solitons-enveloppes" comptant un grand nombre d'arches sous l'enveloppe. Par contre, dans le cas présent, l'extension spatiale totale des 'solitons' observés est de l'ordre de une ou deux tailles d'arche. On ne peut guère alors parler de solitons-enveloppes, et la résolution d'une équation de Schrödinger Non-Linéaire dissipative et forcée apparaît ici inadaptée. En effet, l'équation NLS, qui admet des solutions de type 'soliton-enveloppe' ne se justifie que dans le cadre d'une hypothèse d'enveloppe large par rapport à la longueur d'onde $\frac{2\pi}{k}$ de la porteuse. Sa dérivation, comme nous le verrons dans la suite du présent chapitre, repose sur un développement limité au deuxième ordre de la relation de dispersion $\omega^2 = gk$ au voisinage de $k = k_0$. Néanmoins, l'écriture d'une équation aux amplitudes pour un mode d'extension spatiale infinie présente l'intérêt pédagogique de rendre compte de l'hystérésis observée pour l'apparition ou la disparition des ondes de surface stationnaires. C'est pour cette raison que nous allons établir ci-dessous l'équation aux amplitudes correspondant aux ondes de Faraday en configuration Hele-

Shaw. Les équations de base de notre problème sont l'équation de Navier-Stokes ainsi que la condition d'incompressibilité. On a pour le champ de vitesse **U**(x,y,z,t) :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla \mathbf{P} - \tilde{\boldsymbol{g}} + \nu \nabla^2 \mathbf{U} \tag{3.2}$$

où $\tilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g} - 4\Omega^2 a_e \cos(\Omega t)$ est l'accélération de la pesanteur ressentie par le liquide dans le référentiel lié à la cuve, avec Ω la fréquence d'excitation et a_e l'amplitude de l'excitation. En géométrie de Hele-Shaw, il est utile d'introduire la vitesse $\boldsymbol{u}$ des particules de fluide moyennée dans l'épaisseur qui sépare les parois frontales. Rappelons que cette distance ℓ est très petite comparée à la profondeur h de la couche de fluide, à la longueur d'onde typique des vagues spatialement étendues, et à la longueur totale de la cellule. La moyenne $\boldsymbol{u}$ est calculée en supposant que le profil de vitesse est parabolique dans l'intervalle ℓ (profil de Poiseuille). On écrit le champ de vitesse :

$$U = (\frac{3}{2} - \frac{6y^2}{\ell^2})\, u(x,z,t), \qquad V = 0, \qquad W = (\frac{3}{2} - \frac{6y^2}{\ell^2})\, w(x,z,t) \tag{3.3}$$

On intègre maintenant l'équation de Navier-Stokes entre les parois frontales (entre $-\frac{\ell}{2}$ et $\frac{\ell}{2}$) et le champ de vitesse moyennée $\boldsymbol{u}(x,z,t)$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \; + \; \Gamma(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \tilde{\boldsymbol{g}} \; - \; \gamma \boldsymbol{u}, \tag{3.4}$$

où $\gamma = 12\nu/\ell^2$ est la *viscosité externe de Rayleigh*. Par définition, $\Gamma = \dfrac{\overline{\boldsymbol{u}^2}}{(\bar{\boldsymbol{u}})^2}$, où les barres désignent les quantités moyennées dans l'épaisseur de la cuve, est le "facteur de forme de vitesse". $\Gamma = 1$ si l'écoulement est uniforme dans la direction y, $\Gamma > 1$ dans les autres cas.

Ici $\Gamma = \frac{6}{5}$. Physiquement, le "facteur de forme de vitesse" caractérise une augmentation des effets non-linéaires dus à la couche visqueuse dans la direction y.

Nous avons négligé ci-dessus les effets dus à la tension superficielle, car la longueur capillaire de l'eau ($\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 2.7$ mm) est petite devant la longueur d'onde typique de l'onde stationnaire périodique pour les fréquences d'excitation ($\lambda \approx 5$ cm).

Remarque :

- le temps de croissance de l'instabilité est ici de quelques périodes de forçage.
- l'épaisseur des couches de Stokes à la paroi est égale $\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \approx 0.25$mm.

Dans l'équation (3.4), le terme habituel de diffusion visqueuse $\nu\nabla^2\boldsymbol{u}$ apparaît négligeable comparé à $\gamma\boldsymbol{u}$. En effet, l'essentiel de la dissipation visqueuse se produit dans la direction normale aux parois, et pour les longueurs d'onde étudiées, le temps d'atténuation γ^{-1} est environ 200 fois plus faible que le temps de diffusion visqueuse $(\nu k^2)^{-1}$ associé au terme $\nu\nabla^2\boldsymbol{u}$. On peut aussi noter que pour cette gamme de fréquence où apparaîssent ces modes localisés, le temps d'atténuation est de l'ordre de $\gamma^{-1} \simeq 0.08$ s. Ceci signifie que toute vorticité initiale aura disparu au bout d'un temps γ^{-1}. On peut donc légitimement supposer l'écoulement *irrotationnel* en régime permanent, et considérer par conséquent que le champ de vitesse $\mathbf{u}$ dérive d'un potentiel ϕ dans l'approximation d'incompressibilité. On peut alors intégrer l'équation (3.4) et la réécrire sous la forme d'une équation de Bernoulli dynamique :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{3}{5}(\nabla\phi)^2 + \gamma\phi + \tilde{g}\eta = 0, \qquad z = \eta \tag{3.5}$$

Les autres équations qui ferment le problème consistent en l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses, et les conditions aux limites à la surface libre du liquide et au fond

de la cellule :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{pour} \quad -h \leqslant z \leqslant \eta, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = -h, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \eta, \tag{3.8}$$

dans lesquelles x et z sont respectivement les variables d'espaces horizontale et verticale, t est le temps, et où $z = \eta(x,t)$, $z = 0$ et $z = -h$ sont les ordonnées de la surface libre, de la surface libre au repos, et du fond (supposé plat). Nous ajoutons de plus la condition de pression nulle au niveau de la surface libre.

Tout d'abord, traitons le système d'équations (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8) dans le cadre d'une approximation linéaire. Nous écrivons la transformée de Fourier $\zeta(k,t)$ de la surface libre :

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(k,t)e^{ikx}dk \tag{3.9}$$

et l'on obtient pour celle-ci :

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \left[\omega_0^2 - \tfrac{1}{4}\gamma^2 - \omega_0^2 F\cos(\Omega t)\right]\zeta = 0, \tag{3.10}$$

où $\omega_0^2 = gk\tanh(kh)$. L'équation de Mathieu a été primitivement établie par Benjamin et Ursell [18] dans le cas inviscide ($\gamma = 0$). Ultérieurement, le terme de dissipation a été rajouté de manière heuristique. Dans le cas présent, le terme de dissipation est directement dérivé des équations exactes, ce que permet la configuration de Hele-Shaw.

Il convient ensuite d'étudier les effets non-linéaires. Afin d'alléger les calculs, nous nous plaçons dans la limite de couche très profonde. Cette approximation est légitime car la longueur d'onde du motif spatialement périodique est de l'ordre de 5 cm, ce qui se compare à la profondeur ($h \approx 5$ cm). On a donc $\tanh(kh) \approx \tanh(2\pi) \approx 1$, ce qui

justifie l'approximation de profondeur infinie. Nous considérons un seul nombre d'onde k pour l'onde stationnaire de surface. Nous nous plaçons dans le cas faible forçage et faible dissipation. Nous résolvons l'ensemble d'équations (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8) via une méthode perturbative utilisant un développement multi-échelle [38]. On écrit la surface libre :

$$\eta(x,t) = \Sigma_{m=1}^{\infty}\Sigma_{n=0}^{\infty}\epsilon^{m+2n}[\eta_{m,n}^{c}(t,\epsilon^2 t,...)\cos(mkx) + \eta_{m,n}^{s}(t,\epsilon^2 t,...)\sin(mkx)] \tag{3.11}$$

Où ϵ est un petit paramètre. Grâce à cette méthode, nous résolvons le système d'équations pour chaque puissance d'ϵ indépendamment. A l'ordre dominant, on écrit la surface libre :

$$\eta(x,t) = Re[A(t)]\cos(kx) + Re[B(t)]\sin(kx) + \mathrm{O}(\epsilon^2) \tag{3.12}$$

Où les coefficients de Fourier A et B obéissent aux équations :

$$\frac{dA}{dt}+(\frac{\gamma}{2}-i\omega_0)A+i\frac{\Omega^2}{\omega_0}ka_e e^{2i\Omega t}A^*+\frac{i}{4}(1-\frac{\Gamma}{2})\omega_0 k^2|A|^2A-\frac{i}{4}\Gamma\omega_0 k^2|B|^2A+\frac{i}{4}(1+\frac{\Gamma}{2})B^2A^*=0 \tag{3.13}$$

$$\frac{dB}{dt}+(\frac{\gamma}{2}-i\omega_0)B+i\frac{\Omega^2}{\omega_0}ka_e e^{2i\Omega t}B^*+\frac{i}{4}(1-\frac{\Gamma}{2})\omega_0 k^2|B|^2B-\frac{i}{4}\Gamma\omega_0 k^2|A|^2B+\frac{i}{4}(1+\frac{\Gamma}{2})A^2B^*=0 \tag{3.14}$$

Pour les détails de la méthode utilisée pour dériver ces équations, se référer à l'annexe B.

Nous pouvons, à partir des relations (B.39) et (B.40) retrouver les résultats classiques de Stokes et de Rayleigh concernant la première correction non-linéaire à la relation de dispersion des ondes progressives ou stationnaires non dissipatives et non forcées.

Si on ne prend pas en compte le forçage et la dissipation ($\gamma = 0, \Gamma = 1$ et $F = 0$),

nous trouvons une onde stationnaire en posant par exemple $B = 0$ et $A = ae^{i\omega t}$, où a est l'amplitude (positive) de la vague. Cette étude non-linéaire montre que la fréquence de la vague est modifiée par les non-linéarités et dépend de son amplitude. On a la relation de dispersion :

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{8}(ka)^2 + t.o.s\right] \tag{3.15}$$

De la même manière, on peut trouver une onde progressive en posant : $B = iA$ et $A = ae^{i\omega t}$. La relation de dispersion devient alors :

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2}(ka)^2 + t.o.s\right] \tag{3.16}$$

Il s'agit maintenant de prendre en compte le forçage et la dissipation visqueuse. Cherchons une solution onde stationnaire sous la forme : $B = 0$ et $A = ae^{i\omega t - i\delta}$. On obtient alors la fréquence de la vague via la relation :

$$\left[1 - \frac{2-\Gamma}{8}(ka)^2 - \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2 = (ka_e)^2\Big(\frac{\omega}{\omega_0}\Big)^4 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} \tag{3.17}$$

Nous adimensionnons ensuite l'amplitude du forçage : $F \equiv \dfrac{4\omega^2 a_e}{g}$, et en remarquant qu'en profondeur infinie on a : $\omega_0^2 = gk$, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\left[1 - \frac{2-\Gamma}{8}(ka)^2 - \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2 = \frac{F^2}{16} - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} \tag{3.18}$$

La partie droite de l'équation (3.18) doit être positive, on obtient alors pour F la condition suivante :

$$F \geq F_{\downarrow} = \frac{2\gamma}{\omega_0} \tag{3.19}$$

et (comme l'amplitude a est positive) :

$$F \leq F_{\uparrow} = \frac{4}{\omega_0}\sqrt{\left[\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right]^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \tag{3.20}$$

Les deux bornes $F_{\downarrow}$ et $F_{\uparrow}$ définissent les frontières du domaine d'hystérésis.

Posant que les deux amplitudes A et B des ondes contrapropagatives des équations (3.11) et (3.12) sont égales, on trouve finalement pour l'équation aux amplitudes du mode k oscillant à $\dfrac{\Omega}{2}$:

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \left[-\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0 - \Omega)\right]\mathcal{A} + \frac{\Omega^2}{\omega_0}kF\mathcal{A}^* - \frac{i}{8}(2-\Gamma)\omega_0 k^2|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} \tag{3.21}$$

En utilisant le fait que $\Gamma = \dfrac{6}{5}$ et $\omega_0^2 = gk$, cette équation peut se réécrire

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \ (-\alpha_1 + i\alpha_2)\,\mathcal{A} \ + \ \alpha_3\,\mathcal{A}^* \ - \ i\,\alpha_4\,|\mathcal{A}|^2\,\mathcal{A}, \tag{3.22}$$

où l'astérisque dénote le complexe conjugué et où les α_n sont réels. On a $\alpha_1 = \gamma/2$, $\alpha_2 = \omega_0 - \Omega/2$, $\alpha_3 = \omega_0 F/4$ et $\alpha_4 = \omega_0 k^2/10$. Dans l'équation (3.22), le coefficient α_1 est relié à la dissipation visqueuse, le coefficient α_2 correspond au décalage entre la fréquence naturelle du mode k dans la limite des amplitudes infinitésimales et la demi-fréquence du forçage, le terme en A^* est lié à l'amplitude du forçage paramétrique, et le dernier terme correspond au phénomène non linéaire de décalage en fréquence du mode k avec l'amplitude de ce mode.

Nous allons effectuer une analyse de stabilité linéaire et non-linéaire de cette équation [39]. Nous verrons que suivant la valeur des paramètres, l'instabilité conduisant à la formation d'une onde de surface peut être soit de type Hopf supercritique soit de type Hopf sous-critique.

Etude de la stabilité linéaire

Séparons les parties réelle et imaginaire de $\mathcal{A} = X + iY$. En ne retenant que les termes linéaires de l'équation (3.22), on obtient le système différentiel suivant :

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{\gamma}{2}X - \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right)Y + \frac{\omega_0 F}{4}X \tag{3.23}$$

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{\gamma}{2}Y + \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right)X - \frac{\omega_0 F}{4}Y \tag{3.24}$$

Afin de déterminer l'appartition de l'instabilité, il convient de calculer les valeurs propres s_+ et s$_-$ de ce système différentiel :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{\gamma}{2} + \frac{\omega_0 F}{4}) - s & -(\omega_0 - \frac{\Omega}{2}) \\ \omega_0 - \frac{\Omega}{2} & (-\frac{\gamma}{2} + \frac{\omega_0 F}{4}) - s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Les valeurs propres de ce système sont :

$$s_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2 F^2}{16} - \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right)^2} \tag{3.26}$$

En décomposant l'amplitude $\mathcal{A} = X + iY$ sur la base des vecteurs propres associés aux valeurs propres s_+ et s$_-$, on réalise que cette amplitude diverge dès que $Re(s_+)$ devient positive. Ceci est la signature de l'instabilité, qui se produit lorsque le forçage est supérieur à la valeur :

$$F_c = \frac{4}{\omega_0}\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \left(\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right)^2} \tag{3.27}$$

c'est-à-dire lorsque la partie réelle de s_+ est nulle. Ici, ω_0 est la fréquence propre des vagues libres (non forcées) dans la limite d'amplitude infinitésimale. Naturellement, pour obtenir la valeur finie atteinte par l'amplitude au-delà de l'instabilité, il faut au moins

tenir compte de la première non-linéarité.

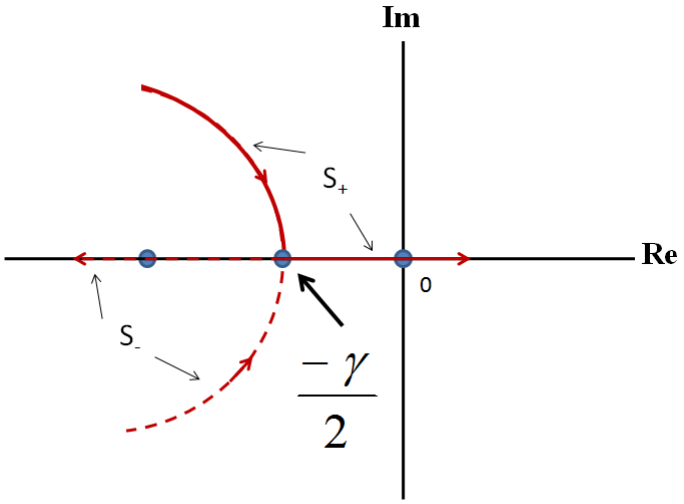

FIGURE 3.8 – Trajectoire des valeurs propres du système différentiel (3.23), (3.34) lorsque le forçage augmente. Les valeurs propres sont complexes conjuguées tant que $\frac{\omega_0 F}{4} < (\omega_0 - \frac{\Omega}{2})$, et se cofondent sur l'axe réél lorsque $\frac{\omega_0 F}{4} = (\omega_0 - \frac{\Omega}{2})$ où $s_\pm = -\frac{\gamma}{2}$. Ensuite, s_+ suit une trajectoire sur l'axe réél vers la droite et s_- vers la gauche. L'instabilité se produit quand s_+ devient positif.

Au-delà du seuil d'instabilité, on peut déterminer l'amplitude $|\mathcal{A}|$ du mode, en posant $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0$ et en écrivant l'amplitude sous forme polaire : $\mathcal{A} = |\mathcal{A}|e^{i\theta}$. Nous trouvons :

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{10}{\omega_0 k^2}\left[\omega_0 - \frac{\Omega}{2} \mp \sqrt{\frac{\omega_0^2 F^2}{16} - \frac{\gamma^2}{4}}\right] \tag{3.28}$$

Nous discutons maintenant la nature des solutions en terme de bifurcations. Nous distinguons trois cas :

- Pour $\omega_0 < \frac{\Omega}{2}$, l'instabilité conduisant à la formation d'une onde de surface est de type 'surcritique'. Il s'agit d'une transition du second ordre (sans hystérésis), vu qu'il peut exister au dessus du seuil des solutions d'amplitude aussi petite que l'on veut.

– Pour $\omega_0 > \dfrac{\Omega}{2}$, la bifurcation est sous-critique et il y a deux solutions pour $|\mathcal{A}|$. Ce cas est celui qui nous intéresse car c'est dans cette situation qu'il y a une hystérésis. En effet, lorsque le forçage atteint la valeur critique $F_c = \dfrac{4}{\omega_0}\sqrt{\left[\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right]^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$, le système subit une transition du premier ordre et passe de la solution triviale (surface libre plate), à une autre, d'amplitude finie. Après, si l'on décroit lentement le forçage, l'amplitude de la surface libre passe brutalement à zéro quand $F = \dfrac{2\gamma}{\omega_0} \neq F_c$ (voir figure (3.9)). Lorsque le forçage atteint la valeur $F = \dfrac{2\gamma}{\omega_0}$, l'amplitude de la surface libre passe du point a au point b brutalement (voir figure (3.9)), subissant une bifurcation sous-critique.

  Ici, ω_0 est la fréquence propre des vagues libres dans l'approximation linéaire, c'est-à-dire lorsque les vagues ont une amplitude infinitésimale. En fait, comme nous l'avons vu précédemment, la fréquence des vagues stationnaires dépend de l'amplitude a comme $\omega = \omega_0[1 - \dfrac{2-\Gamma}{8}(ka)^2]$ lorsqu'on tient compte de la première non-linéarité (la correction due au forçage et à la dissipation figure dans la relation (3.18)). Lorsque le terme de forçage dépasse la valeur critique, des oscillations de la surface libre à la fréquence $\dfrac{\Omega}{2}$ apparaissent. Contrairement à un pendule paramétrique, l'ensemble des longueurs d'onde formant un continuum, il existe toujours un mode k correspndant à la fréquence $\dfrac{\Omega}{2}$. Pour des amplitudes bornées, on a toujours $\dfrac{\Omega}{2} < \omega_0$. En fait, dans notre expérience de vagues paramétriquement forcées, nous avons **toujours** affaire à avec une **bifurcation sous-critique**, étant donné le signe du décalage en fréquence dû aux effets non-linéaires ($\omega = \omega_0[1 - \dfrac{2-\Gamma}{8}(ka)^2]$).

  Le résultat remarquable est qu'il existe un domaine de bistabilité défini par $\Omega < 2\omega_0$, $2\gamma/\omega_0 < F < (4/\omega_0)\left\{[\omega_0 - (\Omega/2)]^2 + (\gamma^2/4)\right\}^{1/2}$ pour lequel les **deux solutions** (celle à surface plate ou bien celle correspondant à une vague de surface d'amplitude non-nulle vibrant avec la fréquence $\Omega/4\pi$) **sont** simultanément **stables**.

En fait, comme l'ont suggéré Pomeau [40], Fauve et Thual [41], l'onde localisée peut être comprise comme résultant de la coexistence simultanée dans l'espace des deux solu-

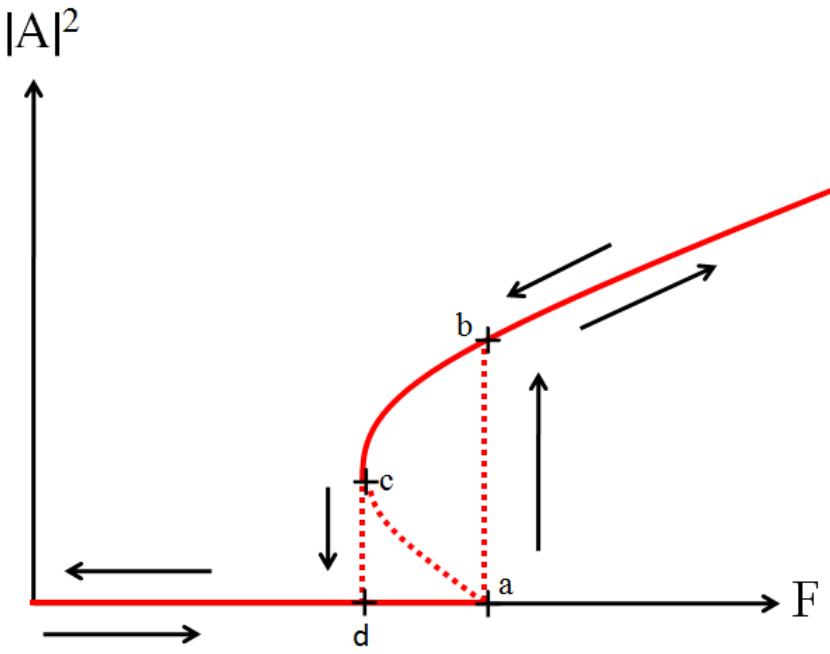

FIGURE 3.9 – Diagramme de bifurcation dans le cas sous-critique. Lorsque nous augmentons l'amplitude du forçage, la surface libre du fluide se déstabilise en formant un réseau d'ondes spatialement périodiques quand $F = \frac{4}{\omega_0}\sqrt{\left[\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right]^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$ (au point a), l'amplitude des vagues passe. Au point a, c'est-à-dire pour $F = \frac{4}{\omega_0}\sqrt{\left[\omega_0 - \frac{\Omega}{2}\right]^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$, la surface libre du fluide se déstabilise en formant un réseau d'ondes spatialement périodiques.

tions, celle à surface plate et celle périodique dans l'espace.

3.6 Conclusion

Dans cette section, nous avons mis en évidence deux nouveaux types d'ondes solitaires à la surface de l'eau au moyen d'un protocole expérimental original. L'étude théorique de l'instabilité de Faraday en cellule de Hele-Shaw montre que l'ingrédient crucial pour obtenir de telles ondes localisées est l'existence d'une hystérésis.

Il convient cependant de poser quelques limite à notre modèle.

– Notre développement en perturbation est limité à la première non-linéarité.

– Nous avons discuté l'existence de vagues d'amplitude constante dans l'espace, nous n'avons pas étudié l'existence de modes localisés. Ce serait très difficile, car ces modes localisés défient une décomposition en série de Fourier.

Néanmoins, cette discussion permet de justifier qualitativement l'existence de l'hystérésis observée et l'apparition de modes localisés [43].

Chapitre 4

Solitons enveloppes en géométrie Hele-Shaw

Sommaire

4.1 Introduction 60

4.2 Expérience 60

4.2.1 Le soliton enveloppe, solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire 60

4.2.2 Comparaison de la forme du soliton "enveloppe" observé en configuration Hele-Shaw avec le soliton enveloppe de NLS. 63

4.3 Conclusion 66

4.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons d'autres résultats obtenus en cellule de Hele-Shaw, suivant le même protocole expérimental qu'au chapitre précédent. Nous montrons qu'en nous plaçant dans le domaine d'hystérésis et en perturbant la surface libre au repos, peuvent apparaitre des modes localisés stationnaires rappelant le soliton enveloppe solution de Schrödinger non-linéaire (NLS), à la différence près qu'il s'agit d'un mode stationnaire. Une autre différence notable est que, dans le cas du mode enveloppe qu'on observe ici, les crêtes de la porteuse ont un rayon de courbure plus faible que celui présenté par les creux. Nous présentons ici nos résultats expérimentaux et nous comparons leurs profils à celui de certaines formes de solitons bien connus (NLS et KdV). Les résultats montrent que les modèles existants de solitons enveloppes sont loin de décrire nos résultats expérimentaux.

4.2 Expérience

Dans ces expériences, la longueur l'onde des vagues est comparable à la profondeur de la nappe de liquide, pour les fréquences des vagues observées, les longueurs d'onde sont de l'ordre de 5 cm, la hauteur de remplissage aussi. Nous pouvons donc considérer que $\tanh(\frac{2\pi h}{\lambda}) \approx \tanh(2\pi) \approx 1$, et cela correspond à des vagues en en profondeur infinie. Nous présentons ci-dessous quelques photographies représentant ce soliton enveloppe.

4.2.1 Le soliton enveloppe, solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire

Nous rappelons brièvement ci-dessous la méthode d'obtention de l'équation de Schrödinger non-linéaire et du soliton NLS. La dérivation de cette équation à partir des équations de l'hydrodynamique repose sur le fait que l'on considère la propagation *unidirec-*

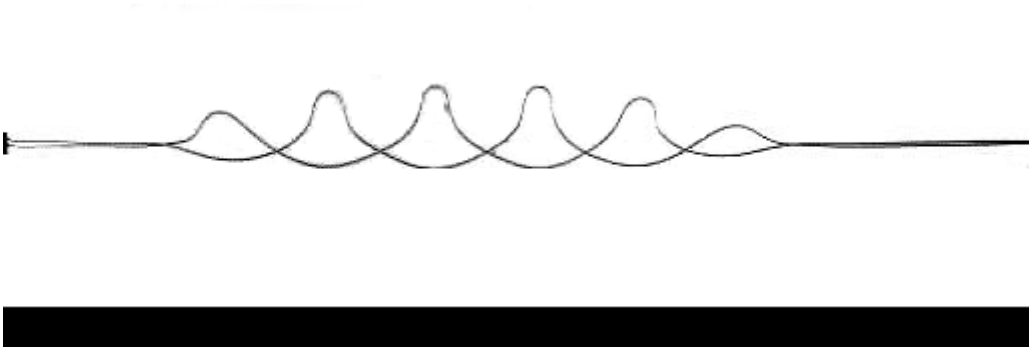

FIGURE 4.1 – Profil de la surface libre pour une fréquence de forçage de 11Hz. Nous avons superposé deux images décalées d'une demi période.

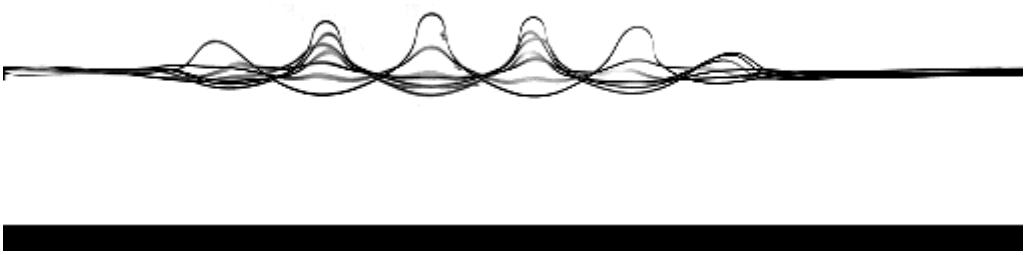

FIGURE 4.2 – Sur cette image, nous avons superposé les photographies de la surface libre à différents moments sur plusieurs périodes de l'onde. On voit clairement qu'il n'existe pas de nœuds de vibrations.

tionnelle d'un paquet d'onde large devant la longueur d'onde de la porteuse sinusoïdale.

Equation de Schrödinger non-linéaire

Pour dériver l'équation NLS, on considère l'évolution d'un paquet d'onde de surface de nombre d'onde k centré autour de $k = k_0$, se propageant en eau profonde et la longueur d'onde du paquet ℓ est grande comparée à celle de l'onde modulée λ ($\Delta k << k$). De plus, pour des raisons de simplicité, nous négligeons les effets de tension superficielle (onde de gravité) et la dissipation visqueuse. Nous reprenons ici le raisonnement présenté par Infeld et Rowlands [47].

La dispersion s'écrit :

$$\omega(k) - \omega(k_0) = (k - k_0)\frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{1}{3}(k - k_0)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \tag{4.1}$$

où $\frac{\partial \omega}{\partial k} \mid_{k=k_0} = \mathbf{U}$ représente la vitesse de groupe et $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \alpha$ la dispersion. Nous nous plaçons dans le référentiel de l'enveloppe et nous posons : $\Omega = \omega - \omega_0, K = k - k_0$. Nous obtenons la relation de dispersion suivante : $\Omega(K) = \alpha K^2$. Après, nous ajoutons la non-linéarité due à la dépendance de la fréquence avec l'amplitude : $\Omega(K) = \Omega_0(k) - \beta|A|^2$.

$$\frac{\partial A}{\partial T} = i\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - i\beta|A|^2 A \tag{4.2}$$

Cette équation, dite de Schrödinger non linéaire, admet une très riche variété de solutions. Une des solutions de cette équation possède une forme en sécante hyperbolique. Nous allons voir par la suite que l'onde enveloppe observée au cours de nos expériences présente des caractéristiques très différente de celles de ce 'soliton enveloppe' solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire.

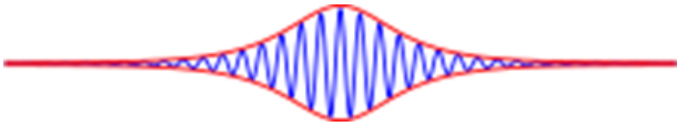

FIGURE 4.3 – Soliton enveloppe solution de l'équation NLS. En rouge est représentée l'onde enveloppe qui adopte une forme en sécante hyperbolique, en bleu, la porteuse sinusoïdale.

Dans le cas des ondes de Faraday, plusieurs auteurs [48] ont proposé de supplémenter l'équation de Schrödinger non-linéaire par un terme de forçage et de dissipation. Une équation de ce type présente une très grande variété de solutions qui n'ont pas encore été toutes explorées.

Néanmoins, il convient de souligner deux points importants :

– Premièrement, les crêtes et les creux de la porteuse sous l'enveloppe présentent le même rayon de courbure.

– Deuxièmement, et ceci est un point essentiel, **l'équation de Schrödinger non-linéaire forcée et dissipative est impropre à décrire les vagues de Faraday**. En effet, pour des ondes stationnaires qui résultent de l'intéraction entre deux ondes contrapropagatives, les termes de dérivée seconde en espace se compensent exactement.

4.2.2 Comparaison de la forme du soliton "enveloppe" observé en configuration Hele-Shaw avec le soliton enveloppe de NLS.

Les caractéristiques de l'onde observée sont les suivantes :

– L'extension de l'onde est de quelques arches.

– L'onde présente une nette dissymétrie haut/bas, plus précisément elle a un rayon de courbure plus grand aux creux qu'aux crêtes. Cette caractéristique révèle des propriétés de non-linéarités qui sont au delà de l'approximation qui conduit à une solution de type soliton NLS propagatif. Dans ce dernier cas, on trouve une sinusoïde enveloppée par une forme en sécante hyperbolique.

– L'onde ne présente pas à proprement parler de nœud de vibrations. Comme on peut le constater sur la figure 5.6, il n'existe pas de lieu où l'amplitude de vibration est strictement nulle.

Nous allons maintenant voir si l'enveloppe du soliton se compare avec les modèles de soliton classique (en sech comme dans le cas NLS ou sech^2 comme dans le cas KdV). Curieusement, l'ajustement s'accordant le mieux à nos expériences est un arc de parabole (cf. fig 4.6). En effet, ni un profil en sécante hyperbolique (fig 4.4 haut), ni en sécante hyperbolique carrée (fig 4.4 bas), ni lorentzien (fig 4.5 bas), ou bien gaussien (fig 4.5 haut) ne peuvent décrire correctement la forme de l'enveloppe observée expérimentalement.
Bien évidemment une enveloppe parabolique présente deux singularités au niveau de son intersection avec l'axe des amplitudes nulles ; les discontinuités de pente ne sont pas physique. Néanmoins, notons que nous ne connaissons aucun modèle théorique capable à ce

jour d'expliquer un tel profil d'enveloppe.

Les ajustements sont faits à la main en plaçant le sommet de la courbe au niveau du maximum d'amplitude de la vague et en ajustant au mieux les autres paramètres de fit. Les déformations de la surface libre représentée sur ces images correspondent à la surperposition de deux photographies séparées par un intervalle de temps d'une période de forçage (ce qui correspond à deux demies périodes des vagues).

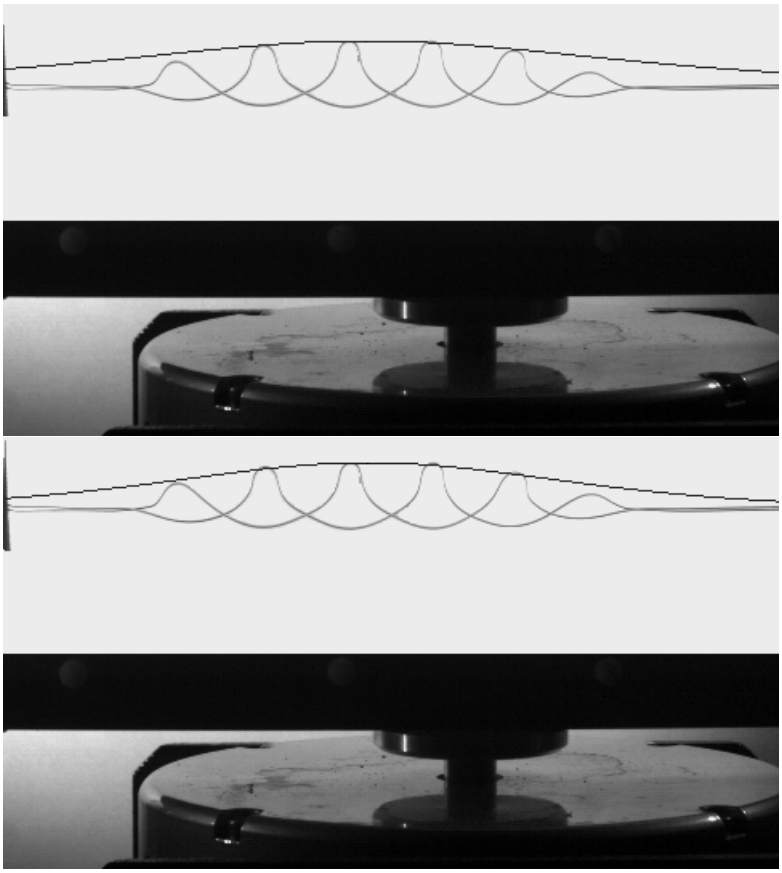

FIGURE 4.4 – Fit sécante hyperbolique (en haut) et sécante hyperbolique carrée (en bas) de l'enveloppe.

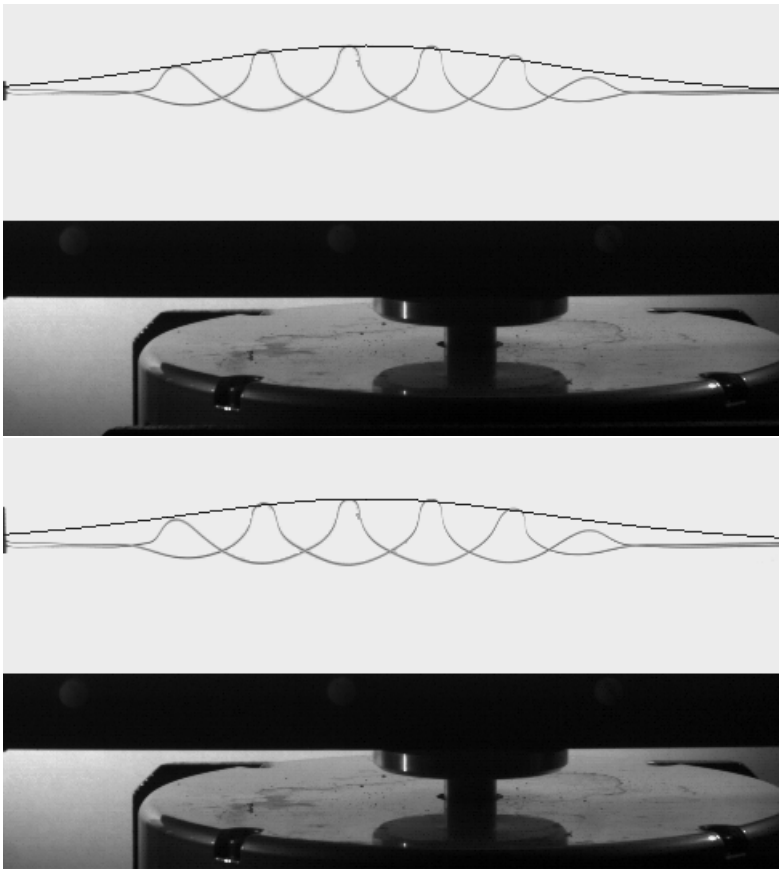

FIGURE 4.5 – Fit gaussien (en haut) et lorentzien (en bas) de l'enveloppe.

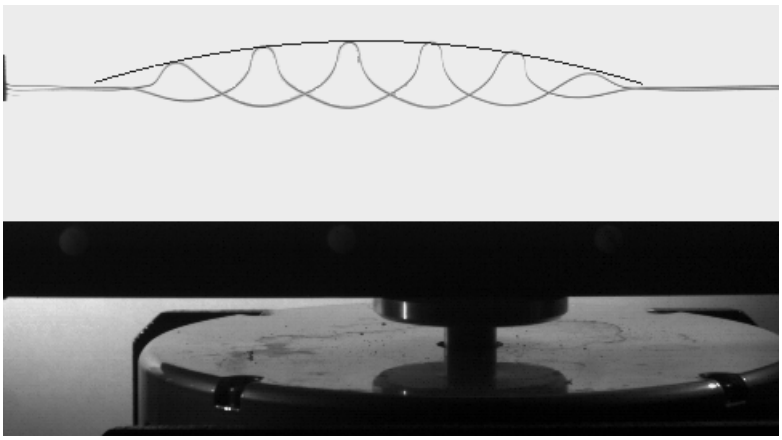

FIGURE 4.6 – Fit parabolique de l'enveloppe.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence l'existence d'un 'soliton enveloppe' à la surface de l'eau, ceci en géométrie de Hele-Shaw. Cette structure ne ressemble pas à la solution "soliton enveloppe" de l'équation de Schrödinger non-linéaire (qui, de plus, rappelons le, correspond à une onde propagative). La courbure dans les creux de la porteuse est plus faible que dans les crêtes, et l'enveloppe n'est pas de la forme sécante hyperbolique. Nous en déduisons que le modèle basé sur l'écriture d'une équation NLS forcée et dissipative est trop simple. Pour rendre compte de nos observations, il faudrait résoudre une équation aux amplitudes à partir des équations premières de la mécaniques des fluides, dont on sait qu'elle présentera des non-linéarités et des termes de dérivées spatiales d'ordre supérieur à ceux contenu dans NLS. C'est une tâche extremement complexe que nous réservons pour des travaux futurs.

Chapitre 5

Ondes de Faraday en cellule tri-dimensionnelle

Sommaire

5.1 Ondes en cuve cylindrique 68

5.1.1 Ondes axisymétriques 68

5.2 Etude expérimentale en cuve cylindrique 71

5.3 Technique de visualisation de la surface 71

5.4 Résultats 72

5.5 Brisure de symétrie et apparition de motifs 75

5.6 Autres symétries observées 78

5.7 Interprétation qualitative : modèle résonant à trois vagues . 79

5.8 Effet de la taille de la cuve 85

5.9 Effet de la forme de la cuve 87

Dans ce chapitre, je vais décrire des expériences d'excitation paramétrique d'ondes de surface réalisées en géométrie tri-dimensionnelle. Dans le passé, la plupart des études concernant l'instabilité de Faraday ont surtout concerné le domaine des vagues gravito-capillaires (voir figure 5.1), c'est-à-dire que leurs longueurs d'onde se comparaient à la longueur capillaire $\ell_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ ($\ell_c \approx 2,7$ mm pour l'eau). Il s'agissait aussi de vagues en eau profonde (longueur d'onde $\ll$ profondeur). Ces expériences ont montré que les ondes de surface pouvaient présenter des structures obéissant à certaines symétries (en forme de bandes, de carrés, d'hexagones [28, 44] et éventuellement de structures quasi-crystallines [22, 46]). Ces structures sont engendrées par les effets non-linéaires et plus précisément par les couplages entre modes. Le schéma théorique utilisé actuellement pour expliquer la formation de telles structures passe par l'écriture d'une équation aux amplitudes limitée aux premières non-linéarités, et celles-ci gouvernent les symétries observées. Le terme non-linéaire décrit le couplage des modes.

Contrairement aux études antérieures, nous nous intéressons ici à des ondes de types gravitaires ($\lambda >> \ell_c$) et en eau peu profonde. La fréquence de forçage varie de 6 à 20 Hz (typiquement 10 Hz), et par conséquent la longueur d'onde des vagues subharmoniques est de l'ordre de plusieurs centimètres ($\approx$ 5 cm pour un forçage à 10 Hz). La tension de surface joue sans doute un rôle pour régulariser le profil de la surface libre pour des longueurs comparables à la longueur capillaire, mais a peu d'effet quant à la géométrie des motifs que nous avons mis en évidence.

5.1 Ondes en cuve cylindrique

5.1.1 Ondes axisymétriques

Nous allons décrire ci-dessous des expériences qui ont été réalisées en cuve de géométrie cylindrique. Rappelons dans un premier temps la forme que prend l'équation des vagues

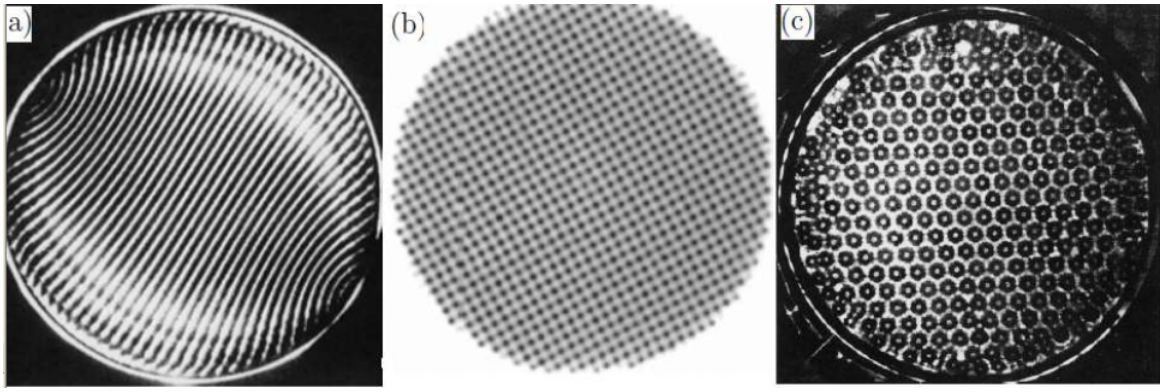

FIGURE 5.1 – Exemple de structure formée par des vagues capillaires déclenchées par l'instabilité de Faraday. Sur la figure a, une structure en bande. Sur la figure b, une structure en carré. Sur la figure c, une structure hexagonale. Images tirées de l'article [28].

en symétrie cylindrique, afin de retrouver les modes libres (c'est-à-dire non forcés) de propagation pour des vagues linéaires, d'amplitude infinitésimale, non dissipatives (et non forcées) en eau peu profonde. Le champ de vitesse s'écrit $\boldsymbol{u} = (u, w)$ (ici u est la vitesse radiale et w la vitesse verticale) et la surface libre du fluide en coordonnées et symétrie cylindrique a pour équation $z = \eta(r, t)$.

La conservation de la matière s'écrit (en négligeant les termes du second ordre), voir Lamb §189 [45] :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} \tag{5.1}$$

L'équation d'Euler linéarisée et l'hypothèse de pression nulle au niveau de la surface libre donnent :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -g\ \vec{\text{grad}}\eta \tag{5.2}$$

En éliminant u dans les équations ci-dessus, on retrouve l'équation d'onde en eau peu profonde :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -gh\Delta\eta \tag{5.3}$$

qui s'écrit en coordonnées cylindriques, avec une symétrie axiale :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + gh\Big[\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}\Big] = 0 \tag{5.4}$$

Nous recherchons une solution à variables séparées de temps et d'espace de l'équation (5.4) de la forme $\eta(r,t) = R(r)\cos(\omega t + \epsilon)$. En utilisant la relation de dispersion des vagues en eau peu profonde $\omega^2 = ghk^2$ (voir section 1.3.3), on obtient alors pour la fonction radiale R(r) l'équation de Helmotz :

$$\Delta R + k^2 R = 0 \tag{5.5}$$

que l'on réécrit en coordonnées cylindriques (r,z) et en supposant l'onde axisymétrique :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + k^2 R = 0 \tag{5.6}$$

On reconnait ici une équation de Bessel d'ordre 0 dont la solution générale s'écrit $R(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr)$, où J_0 et Y_0 sont les fonctions de Bessel et de Neuman d'ordre 0. Retournant à la variable $\eta(r,t)$, la solution générale décrivant des vagues axisymétriques s'écrit donc :

$$\eta(r) = AJ_0(kr)\left\{\begin{array}{c}\cos\omega t\\ \\ \sin\omega t\end{array}\right\} + BY_0(kr)\left\{\begin{array}{c}\cos\omega t\\ \\ \sin\omega t\end{array}\right\} \tag{5.7}$$

où les accolades désignent une combinaison linéaire.

Dans le cas d'oscillations libres (non amorties, non forcées) de la surface libre dans une cuve de rayon R, la condition d'imperméabilité de la paroi latérale implique que la vitesse radiale du fluide est nulle pour $r = R$, c'est-à-dire que cette frontière correspond à

un maximum de R(r). *Cette condition définit les modes propres naturels* d'oscillation de la surface libre dans une cuve de rayon donné.

Il est intéressant de s'interroger sur la pertinence et le caractère physique (ou non-physique) de la divergence présentée en $r = 0$ par la fonction de Neuman d'ordre 0. L'usage est de rejeter cette solution en arguant la nature non physique d'une telle divergence. Nous discuterons de ce point ultérieurement, en section 5.2 lorsque je présenterais mes résultats expérimentaux.

5.2 Etude expérimentale en cuve cylindrique

Dans ce chapitre, toutes les expériences menées sont réalisées avec le même fluide. Il s'agit d'une huile de silicone de comportement rhéologique newtonien. La viscosité cinématique est : $\nu = 1.06 \times 10^{-5}$ m^{2}s^{-1} ($\approx 10\,\nu_{eau}$) et sa tension superficielle
$\sigma = 20 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}. Les paramètres de contrôle de l'expérience sont : (i) la profondeur de la nappe de fluide, (ii) la fréquence d'excitation, (iii) l'amplitude d'excitation et (iv) la géométrie et la taille de la cellule expérimentale. Cette première étude est réalisée en utilisant une cuve cylindrique de 9.8 cm de diamètre rempli par une nappe de liquide dont nous faisons varier l'épaisseur entre 7 mm et 11 mm. La cellule est vibrée verticalement, avec une accélération γ qui peut atteindre jusqu'à quatre fois l'accélération de la gravité g. La fréquence $\dfrac{\Omega}{2\pi}$ de vibration de la cellule est comprise entre f=7 Hz et 12 Hz. Rappelons que les vagues créées oscillent à la fréquence $\dfrac{\Omega}{4\pi}$.

5.3 Technique de visualisation de la surface

Pour cette étude où nous nous intéressons aux mouvements de la surface libre du fluide dans des cuves tri-dimensionnelles, les méthodes de prise de vue sont donc différentes de celles utililsées pour les expériences menées en cellule de Hele-Shaw. Le fond des cuves

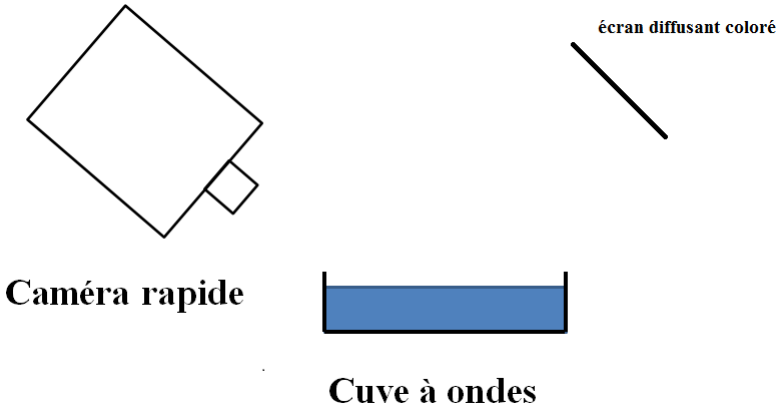

FIGURE 5.2 – Pour la visualisation de la surface libre, la caméra surplombe la cuve et est inclinée d'un angle d'environ 45 degrés.

utilisées a été noirci afin de pouvoir mieux observer les reliefs de la surface libre. Pour la prise de vue, la caméra est placée au dessus de la cuve et est inclinée d'un angle de 45 degrés. Nous éclairons la cuve en réflexion. Nous avons placé un panneau coloré au dessus de la cuve sur lequel nous envoyons la lumière.

5.4 Résultats

Pour de petites amplitudes d'excitation (inférieures à celle déclenchant l'instabilité), nous observons à la surface libre du fluide des 'ondes de ménisque' issues de la ligne de contact entre la surface libre et la paroi verticale de la cellule qui se propagent vers le centre de la cuve. Ces ondes oscillent *harmoniquement* avec la fréquence de forçage. Ensuite, lorsque l'amplitude du forçage atteint une valeur typique de 3.9 g pour une fréquence de forçage de 8 Hz, la surface libre se déstabilise. Nous observons deux vagues axisymétriques contra-propagatives qui oscillent sous-harmoniquement avec le forçage (voir figure 5.3).

Il convient de nous interroger sur l'apparition de ces deux ondes contrapropagatives, dont il est fait peu mention dans la littérature concernant les modes propres linéaires de vibration en symétrie cylindrique. La plupart des auteurs se bornent à mentionner la solution de type $J_0(kr)$. La raison en est la suivante : ces auteurs, à juste titre, s'intéressent

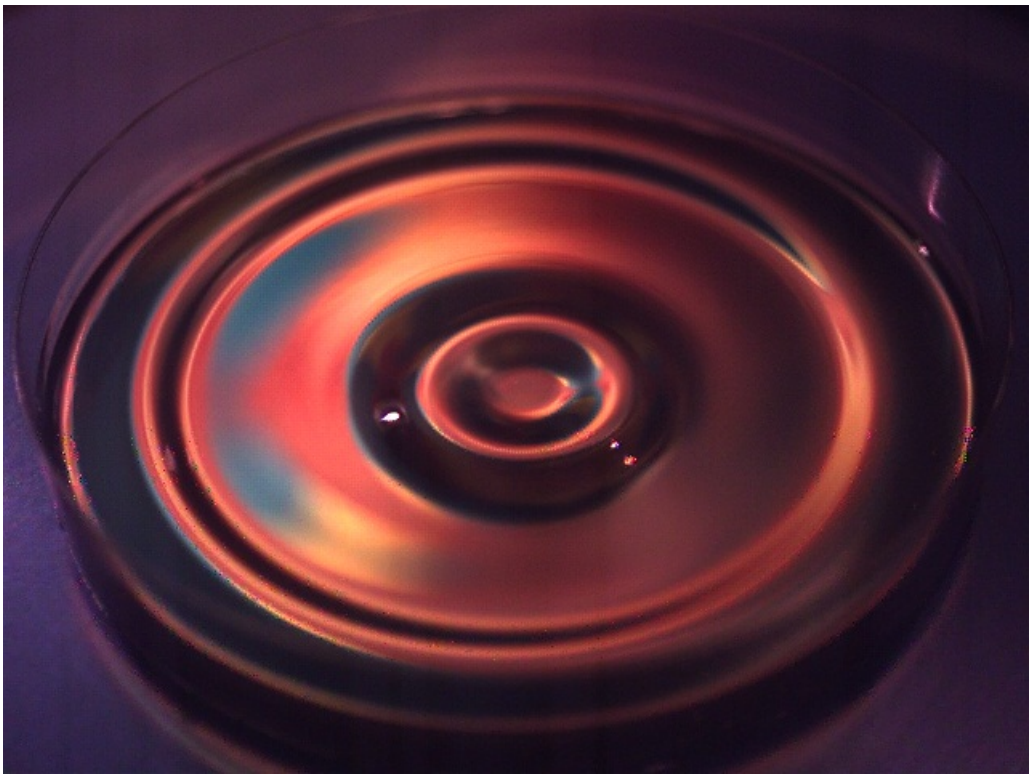

FIGURE 5.3 – Motif axisymétrique composé de deux ondes contrapropagatives. Les conditions expérimentales sont : fréquence de forçage à $f = 8$Hz, amplitude du forçage $A = 1.70$ mm, profondeur de la nappe de liquide $h = 7$ mm.

aux modes naturels de vibration de la surface libre dans un bassin circulaire. Le diamètre du bassin sélectionne alors les vecteurs d'onde **k** des modes propres (qui sont selectionnés par la condition d'imperméabilité de la paroi latérale).

Dans notre cas, le forçage paramétrique sélectionne les modes qui oscillent à $\frac{\Omega}{2}$ (et aussi $\frac{n\Omega}{2}$ si l'amplitude de vibration est suffisante). Les modes k excités sont alors déterminés *non pas par le diamètre du bassin*, mais par la fréquence de forçage. Ces modes (sauf coïncidence fortuite) ne vérifient donc pas en général la précédente condition sur k prescrite par le diamètre du bassin. Néanmoins, la condition d'imperméabilité à la paroi doit être respectée, et requiert la superposition de deux ondes contrapropagatives (toutes deux de vecteur d'onde $|\vec{k}| = \frac{1}{\sqrt{gh}}\frac{\Omega}{2}$ dans l'approximation linéaire).

Il est aisé d'écrire l'amplitude $\eta(r,t)$ de ces deux ondes propagatives en combinant les

fonctions de Bessel J_0 et de Neuman Y_0. On a pour l'onde centrifuge :

$$\eta(r,t) \propto J_0(kr)\sin(\omega t) - Y_0(kr)\cos(\omega t) \tag{5.8}$$

et pour l'onde centripète :

$$\eta(r,t) \propto J_0(kr)\sin(\omega t) + Y_0(kr)\cos(\omega t) \tag{5.9}$$

Utilisant les comportement asymptotiques à longue distance ($r \to \infty$) des fonctions de Bessel et de Neuman qui sont :

$$J_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\cos(r - \frac{\pi}{4}), \qquad Y_0(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\sin(r - \frac{\pi}{4}) \tag{5.10}$$

on trouve (dans la limite $r \to \infty$) que les amplitudes des ondes centripètes (5.8) et centrifuges (5.9) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \eta(r,t) &\propto \frac{1}{\sqrt{r}}\cos\big[\omega(t + \frac{r}{c}) - \frac{\pi}{4}\big] \\ \eta(r,t) &\propto \frac{1}{\sqrt{r}}\cos\big[\omega(t - \frac{r}{c}) - \frac{\pi}{4}\big] \end{aligned} \tag{5.11}$$

A ce point, il faut noter que l'on observe la formation d'un jet vertical de très grande amplitude (environ 3 cm) qui se produit lorsque l'onde centripète se focalise au centre de la cuve (voir figure 5.4). Cette divergence de l'amplitude est liée à la divergence en $r = 0$ de la fonction de Neumann $Y_0(r)$. Notons cependant qu'une description exacte de la forme du jet requerrait d'aller bien au-delà de l'approximation linéaire utilisée ci-dessus.

Sur le diagramme spatio-temporel présenté en figure 5.5, on peut noter qu'un retard de phase apparait au moment où les deux crêtes contrapropagatives se croisent. Au moment du croisement, les deux ondes contra-propagatives ne se superposent pas simplement (ce qui serait le cas pour des ondes linéaires). En effet, nous remarquons qu'au lieu de simple-

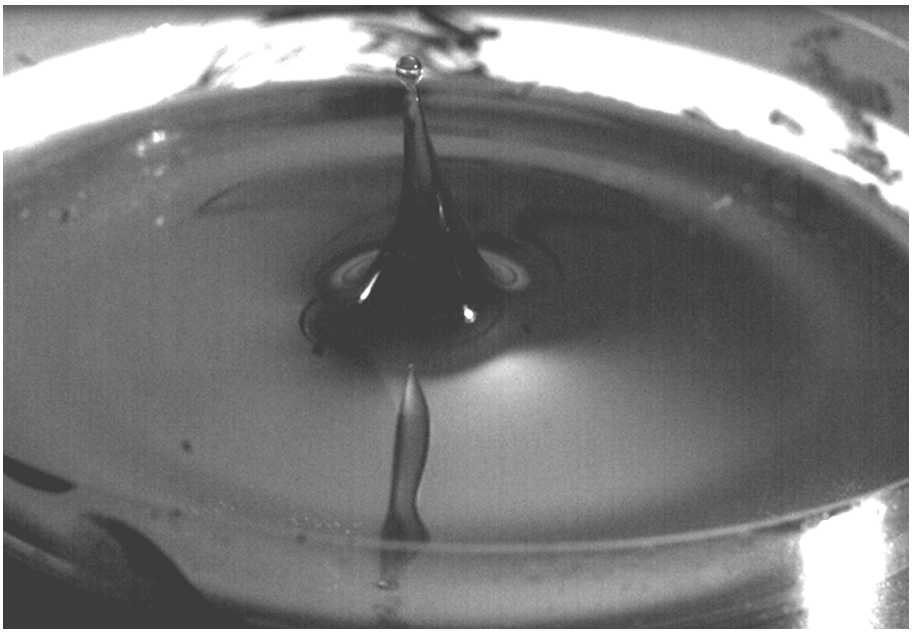

FIGURE 5.4 – Expulsion d'un jet au centre de la cuve due à l'onde centripète.

ment se croiser, les ondes repartent en ayant accumulé un certain retard. Plus précisément, les crêtes des vagues restent en coïncidence spatiale pendant 0.05 s dans les conditions expérimentales ci-dessus. Clairement, ce déphasage est la signature d'une forte interaction non-linéaire entre les deux vagues. Rappelons que ce phénomène de déphasage est bien connu dans le cas du croisement de deux ondes solitaires [47] de type Korteweg De Vries. Par exemple, nous montrons sur la figure 5.6 une photo prise par M. Ablowitz [50] montrant ce phénomène lors du croisement oblique de deux solitons KdV. La modélisation théorique a été effectuée par J.W. Miles [49].

5.5 Brisure de symétrie et apparition de motifs

Une fois le régime avec les deux ondes contra-propagatives établi, nous augmentons encore l'amplitude de forçage jusqu'à atteindre une accélération de 4.6 g. Nous observons

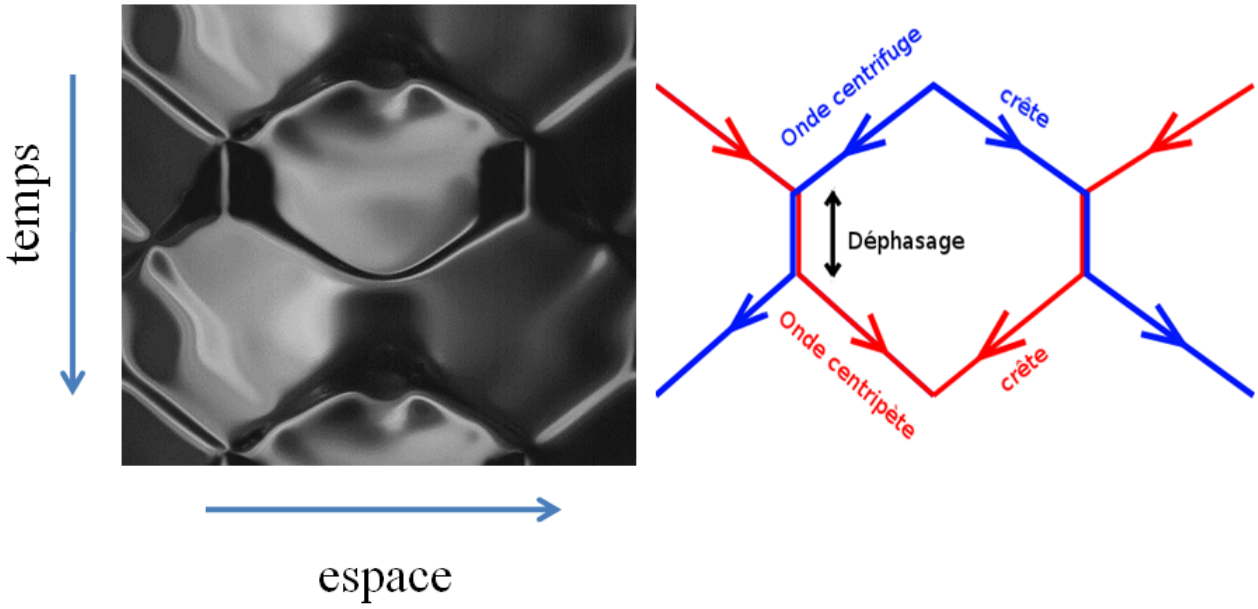

FIGURE 5.5 – Diagramme espace temps sur lequel sont représentées les lignes de pixels passant par le centre de la cuve pour chaque image du film. Sur ce graphique, nous voyons les deux ondes avancer l'une vers l'autre, se croiser, puis repartir en ayant accumuler un retard au moment de l'intéraction.



FIGURE 5.6 – Exemple de croisement de deux ondes solitaires en eau peu profonde [50].

à ce moment-là une brisure de la symétrie rotationnelle par l'apparition de 'coins' sur les crêtes des vagues centripètes et centrifuges (voir figure 5.7). Ceci est la signature d'une brisure de la symétrie rotationnelle. Enfin, lorsque l'amplitude de la cuve atteint la valeur de 4.6 g, il apparait un motif qui présente alternativement l'aspect d'une étoile à

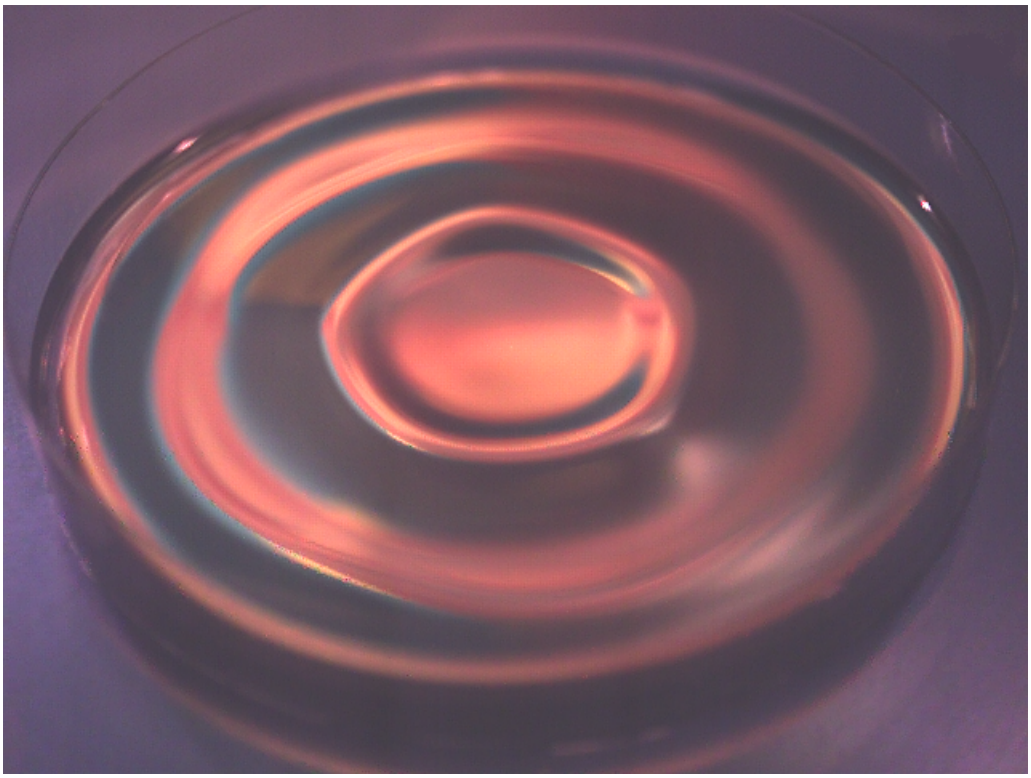

FIGURE 5.7 – Nous voyons sur cette photo l'apparition de 'coins' qui brise la symétrie rotationnelle des vagues en cuve cylindrique. Les conditions expérimentales sont : fréquence de forçage à $f = 8$Hz, amplitude du forçage $A = 1.85$ mm, profondeur de la nappe de liquide $h = 7$ mm.

cinq branches et d'un pentagone, ces deux géométries étant séparées par un intervalle de temps égal à $\frac{2\pi}{\Omega}$.

Nous pouvons observer d'autres symétries pour d'autres amplitudes de forçage. Nous avons mis en évidence des symétries rotationnelles d'ordre 2, 3, 4, 5 et 6 (voir figures 5.8 à 5.11).

Cependant, il ne nous est pas possible d'établir un diagramme de phase montrant les symétries observées en fonction des paramètres de contrôle. En effet, il nous a été possible d'observer des motifs de symétries différentes en répétant des expériences utilisant des paramètres de contrôle identiques. En fait, le motif établi dépend de l'historique du forçage. Nous discuterons ultérieurement des mécanismes susceptibles d'être à l'origine de ce phénomène d'hystérésis.

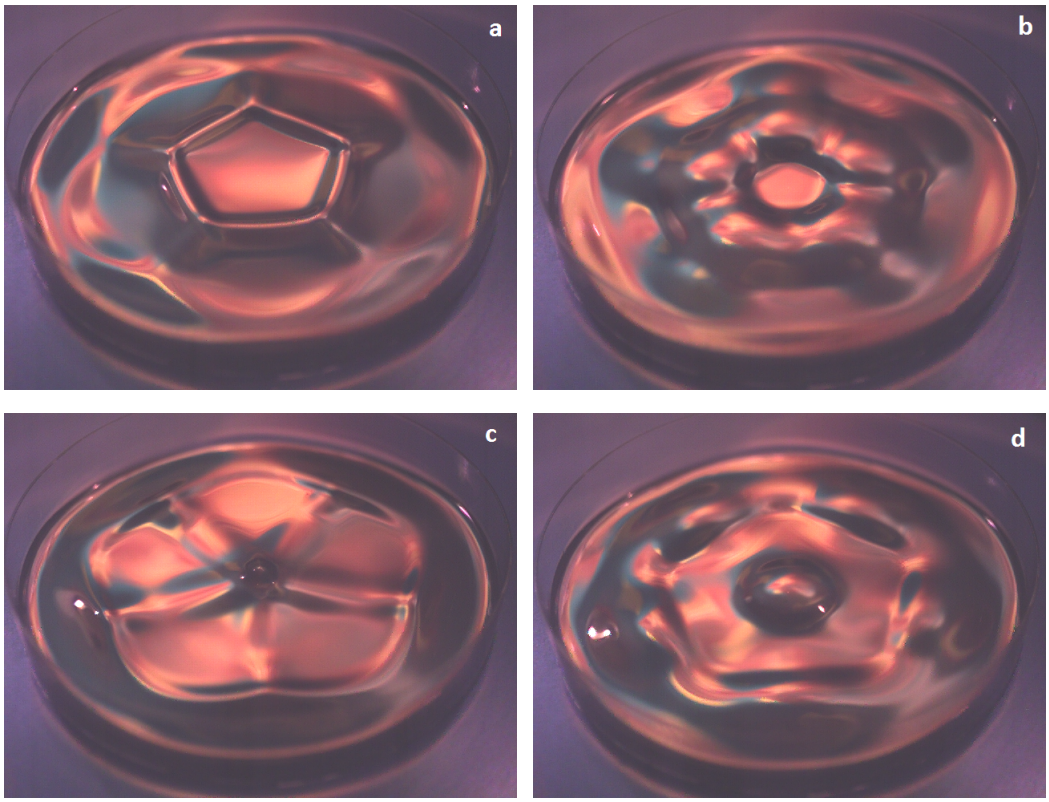

FIGURE 5.8 – Motif pentagonal. (a)t=0,(b)t=T/4,(c)t=T/2,(d)t=3T/4. Les conditions expérimentales sont : fréquence de forçage à $f = 8$Hz, amplitude du forçage $A = 1.95$ mm, profondeur de la nappe de liquide $h = 7$ mm.

Notons que nous caractérisons ces vagues "extrêmes" car :

- L'amplitude de la vague peut atteindre jusqu'à deux fois le niveau moyen de liquide.
- Dans les creux, la hauteur de liquide est réduite à une couche de moins de 1 mm.
- Le rapport longueur d'onde/profondeur de liquide, entre 5 et 7 est grand.

5.6 Autres symétries observées

Je vais présenter dans cette section les autres motifs observés au cours de nos expériences. Il nous a été possible, en jouant sur les paramètres de forçage (fréquence et amplitude), d'observer des motifs présentant des symétries d'ordre 3, 4, 6. Le motif en triangle est obtenu en forçant le système à 9 Hz avec une amplitude de 0,91 mm. Le

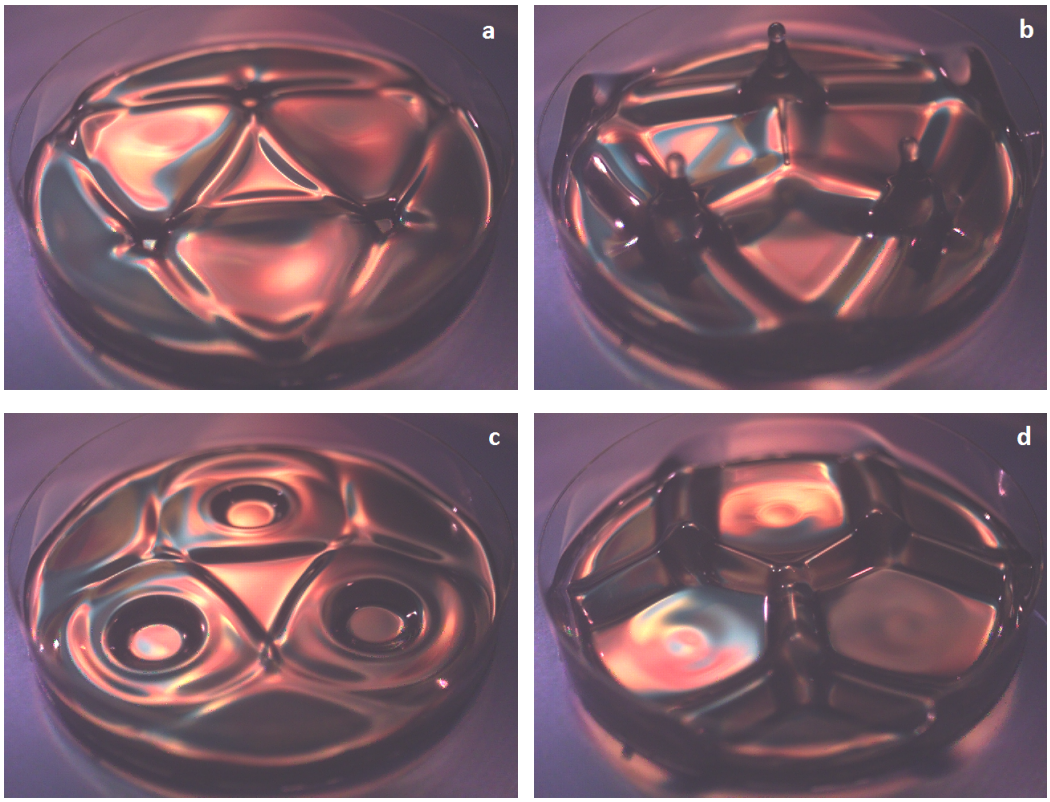

FIGURE 5.9 – Motif triangulaire. (a)t=0,(b)t=T/4,(c)t=T/2,(d)t=3T/4. Les paramètres de forçage sont : fréquence 9 Hz, amplitude 2.15 mm.

motif représentant un carré est obtenu avec les paramètres suivant : fréquence 11,9 Hz, amplitude 1,05 mm. Le motif hexagonal quand à lui est obtenu lorsque nous forçons à 12 Hz avec une amplitude de 1,55 mm.

5.7 Interprétation qualitative : modèle résonant à trois vagues

L'établissement des équations aux amplitudes part d'une décomposition en mode de Fourier du profil de la surface libre $\eta_k = \int \eta(r) e^{-ikr} dr$. Cette description a tout son sens dans le cas des vagues en eau profonde - la dérivation de l'équation NLS, qui décrit le comportement de "paquet d'onde" s'inscrit dans le même esprit. Dans notre cas, il s'agit d'ondes très non-linéaires en eau peu profonde. Dans ce cas là, les modes de Fourier ne

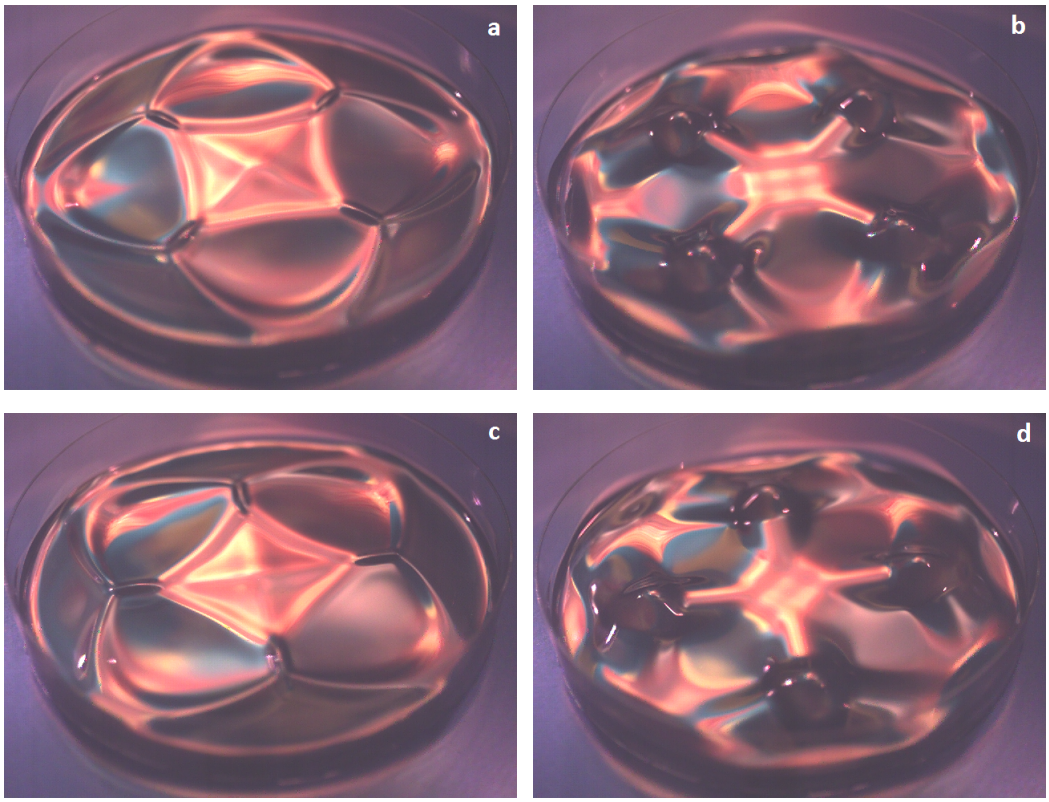

FIGURE 5.10 – Motif carré. (a)t=0,(b)t=T/4,(c)t=T/2,(d)t=3T/4. Les paramètres de forçage sont : fréquence 11.9 Hz, amplitude 2.40 mm.

sont pas des modes propres de propagation et par conséquent, ils ne permettent pas de rendre compte exactement des motifs observés en fonction de la valeur des paramètres de forçage. Cependant ils permettent de comprendre qualitativement la brisure de symétrie et l'apparition de structures obéissant à certaines symétries. Une telle description n'a de légitimité que dans la limite des vagues d'amplitude infinitésimale.

Nous allons proposer ici une explication très qualitative qui montre comment de telles symétries peuvent être générées. Ce schéma explicatif s'inspire des travaux de Mermin et Troian [51], Newell et Passot [52] et Pomeau et Newell [36] portant sur la génèse des quasi-cristaux, et aussi ceux d'Edwards et Fauve [20, 46], ainsi que les travaux de Müller [26, 53], relative à la formation de motifs quasi-cristallins dans des ondes capillaires. Ce schéma repose sur l'hypothèse d'interactions non-linéaires résonantes entre trois vagues de vecteur d'onde $\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$, $\mathbf{k_3}$. Pour obtenir une telle interaction résonante, les conditions

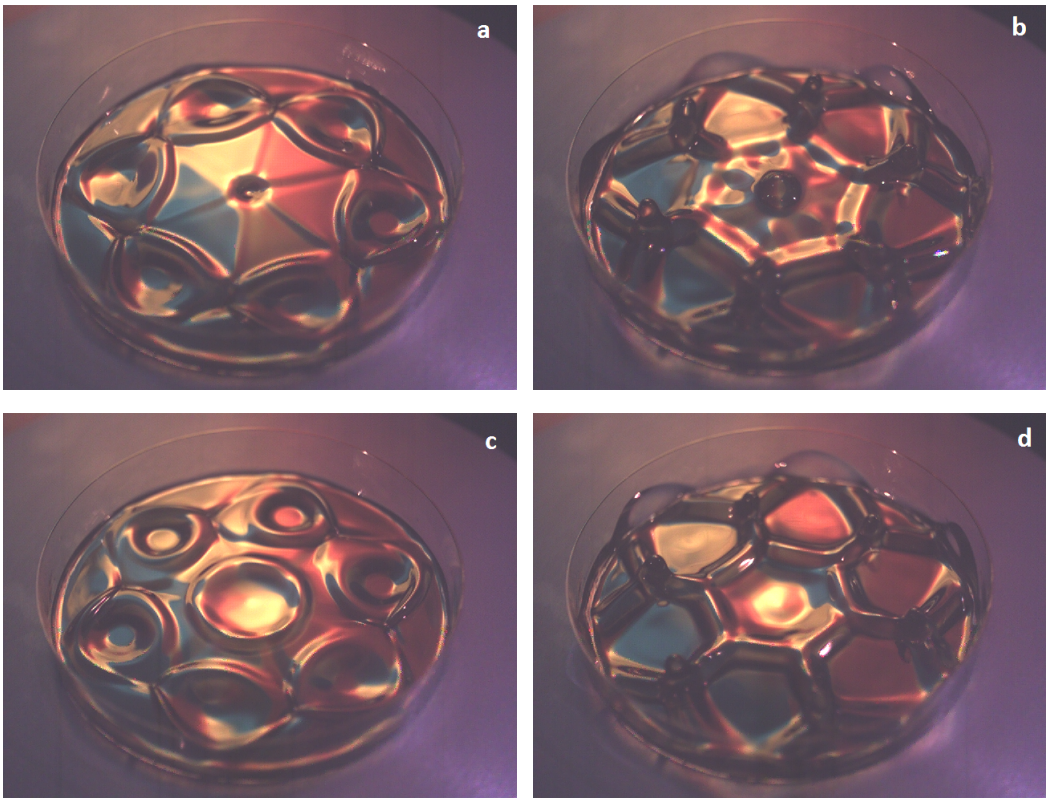

FIGURE 5.11 – Motif hexagonal. (a)t=0,(b)t=T/4,(c)t=T/2,(d)t=3T/4. Les paramètres de forçage sont : fréquence 12 Hz, amplitude 2.90 mm.

suivantes portant sur les fréquences et les vecteurs d'onde des trois vagues doivent être satisfaites [16, 54] :

$$\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0 \tag{5.12}$$

$$\mathbf{k_1} \pm \mathbf{k_2} \pm \mathbf{k_3} = 0 \tag{5.13}$$

Notons que les conditions ci-dessus peuvent être satisfaites simultanément pour des ondes de type gravito-capillaires [55], car la courbe de dispersion $\omega(k)$ est convexe ($\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} > 0$). Par contre, pour des ondes de gravité, la relation de dispersion est de type $\omega \propto |\mathbf{k}|^\alpha$, avec $\alpha \leq 1$ ($\alpha = 1$ en eau peu profonde et $\alpha = \frac{1}{2}$ en eau profonde). La possibilité d'observer des résonances à trois vagues dans le cas d'ondes purement gravitaire a donc

été contestée [54]. Par contre, on sait qu'il existe des processus de résonance à quatre ondes [54, 47].

En fait, comme nous l'avons vu au chapitre 2, il est ici important de réaliser que la relation de dispersion des ondes de gravité est modifiée à la fois par le forçage et par la dissipation. En effet, il est abusif de dériver une équation de Mathieu pour les ondes de surface à partir des équations de la mécanique, et de lui adjoindre la relation de dispersion de type 'ondes libres' $\omega^2 = gk\tanh(kh)$ comme cela a été souvent fait dans le passé. En fait, comme nous l'avons vu plus haut (voir chapitre 2), la dissipation modifie la relation de dispersion. C'est aussi le cas pour le forçage. La relation de dispersion pour des vagues dissipatives et forcées nous est donnée par les fonctions propres de l'équation de Mathieu amortie (5.14). Nous allons montrer que pour ces solutions (dans les limites de l'approximation sinusoïdale), un mécanisme de résonance à trois ondes est possible. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'amplitude des ondes de surface excitées paramétriquement $\zeta(k,t)$ est modélisée par l'équation de Mathieu [18, 28, 56, 57, 58] (dans la limite des amplitudes infinitésimales) suivante :

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + 2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \omega_0^2[1 - F\cos(\Omega t)]\zeta = 0 \tag{5.14}$$

où μ est associé à l'atténuation visqueuse de l'onde, Ω est la fréquence du forçage, F est l'amplitude adimensionnée du forçage et $\omega_0 = \omega_0(k)$ est la fréquence naturelle des vagues sans forçage et sans dissipation (pour des vagues linéaires en profondeur finie h : $\omega_0^2 = gk\tanh(kh)$). Le terme d'atténuation visqueuse μ tient compte à la fois de l'amortissement dans le volume ($\propto \nu k^2$) et du frottement avec le fond de la cuve ($\propto \frac{\nu}{h^2}$) (voir chapitre 1 et 2).

L'équation de Mathieu amortie (5.14) est linéaire. Elle a été dérivée pour des vagues paramétriquement forcées d'amplitude infinitésimale. Ici, nous sommes en présence d'ondes de grande amplitude en eau peu profonde. Par conséquent la validité de cette équation est très limitée. Nous allons voir cependant qu'elle nous permet de rendre compte de la

brisure de symétrie rotationnelle qui apparait lors de nos expériences.

Nous écrivons de nouveau les relations de dispersion dérivées au chapitre 2 (section 2.3) :

$$\omega_0 \simeq \frac{\Omega}{2}\left[1 \pm \sqrt{\frac{F^2}{16} - \frac{4\mu^2}{\Omega^2}}\right] \tag{5.15}$$

pour le mode sous-harmonique forcé et amorti ; et

$$\omega_0 \simeq \Omega\left[1 + \frac{F^2}{12} \pm \sqrt{\frac{F^4}{64} - \frac{\mu^2}{\Omega^2}}\right] \tag{5.16}$$

pour le mode fondamental forcé et amorti.

La prescription que la quantité sous le radical doit être positive permet d'obtenir le seuil pour l'amplitude de forçage en-dessous duquel nous ne pouvons exciter d'ondes de surface. Dans la limite faible forçage et faible dissipation, ce seuil est : $F_1 = \dfrac{8\mu}{\Omega}$ pour le mode sous-harmonique ($n = 1$) et $F_2 = \sqrt{\dfrac{8\mu}{\Omega}}$ pour le mode fondamental ($n = 2$).

Un point important est que les relations de dispersion (5.15) et (5.16) montrent que deux ondes de nombre d'onde différent peuvent osciller à la même fréquence. Ceci n'est pas le cas pour des ondes de gravité non forcées et non dissipatives. Nous pouvons donc distinguer plusieurs cas :

- Pour $F < F_1$, il n'y a pas de solution à la relation de dispersion (5.15). Ceci signifie que le seuil d'instabilité n'est pas atteint. L'énergie injectée via le forçage n'est pas suffisante pour vaincre la dissipation visqueuse.

- Pour $F_1 < F < F_2$, les seuls modes excités sont les sous-harmoniques (ceux qui oscillent à $\dfrac{\Omega}{2}$). Si un nombre infini de vagues ayant le même nombre d'onde $\mathbf{k_1^-}$ sont excitées, nous observons une onde axisymmetrique stationnaire ou deux ondes axisymétriques contrapropagatives. En effet, dans une cuve cylindrique, la condition à la paroi verticale ne privilégie aucune direction.

- Pour $F_2 < F$, des modes sous-harmoniques et fondamentaux sont excités simul-

tanément et peuvent se coupler via les non-linéarités. Il y a deux nombres d'onde $\mathbf{k_1^-}$ et $\mathbf{k_1^+}$ ($\mathbf{k_1^-} < \mathbf{k_1^+}$) associés au mode sous-harmonique, et deux nombres d'onde $\mathbf{k_2^-}$ et $\mathbf{k_2^+}$ ($\mathbf{k_2^-} < \mathbf{k_2^+}$) associés au mode harmonique. Tous ces modes intéragissent non-linéairement. Pour expliquer la formation de vagues ayant une symétrie d'ordre m, le mécanisme le plus simple à considérer est celui d'un couplage résonant à trois vagues. Deux vagues sous-harmoniques de vecteurs d'onde différent $\mathbf{k_1^-}$ et $\mathbf{k_1^+}$ et de fréquence identique $\omega_1 = \dfrac{\Omega}{2}$, intéragissent entre elles mais aussi avec une des vagues associées au mode harmonique de vecteur d'onde $\mathbf{k_2^-}$ ou $\mathbf{k_2^+}$ et de fréquence $\omega_2 = \Omega$. La condition $\omega_1(\mathbf{k_1^-}) + \omega_1(\mathbf{k_1^+}) = \omega_2(\mathbf{k_2^-})$ est alors automatiquement satisfaite. La condition supplémentaire à remplir concerne la somme des vecteurs d'onde des modes sous harmoniques :

$$\mathbf{k_1^-} + \mathbf{k_1^+} = \mathbf{k_2^-}, \qquad \text{ou bien} \qquad \mathbf{k_1^-} + \mathbf{k_1^+} = \mathbf{k_2^+} \tag{5.17}$$

Ces conditions de résonance à trois vagues sélectionnent un angle particulier, celui défini par $(\mathbf{k_1^-}, \mathbf{k_1^+})$, ce qui brise l'invariance par rotation. La multiplicité des conditions de résonance (5.17) à trois vagues peut être une des causes de l'hystérésis observée. Une autre cause qui peut être avancée pour engendrer de l'hystérésis est que, comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'instabilité paramétrique est sous-critique ; par conséquent, il existe des effets de mémoire [43, 59].

En outre, le motif composé alternativement d'une étoile à m-branches et d'un polygone à m-côtés correspond à la sélection d'un angle $\Theta = \dfrac{2\pi}{m}$, avec m entier. Une fois le nombre entier m accroché, la symétrie du motif survit à des variations modérées des paramètres de contrôle.

Limite de notre modèle

Si ce schéma explicatif nous permet d'expliquer la sélection d'une symétrie à partir d'un mécanisme de résonance à trois vagues - notons que jusqu'à présent ce mécanisme était considéré comme non-pertinent pour des ondes purement gravitaires - il nous faut aussi souligner les limites de cette approche. Premièrement, nous avons considéré une

approximation sinusoïdale pour le profil de vagues en eau peu profonde et de grandes amplitudes. Il serait plus approprié de considérer un profil cnoïdal. De plus, nous avons considéré une approximation sinusoïdale pour la dépendance en temps des fonctions de Mathieu.

Dans le paragraphe suivant nous allons exposer nos résultats d'expériences obtenus en faisant varier la taille - ou la forme - de la cuve.

5.8 Effet de la taille de la cuve

Les résultats exposés précédemment étaient relatifs à des expériences réalisées dans un récipient cylindrique de 9,8 cm de diamètre. Nous présentons sur la figure (5.12) une photo obtenue en utilisant un récipient cylindrique de 17 cm de diamètre, avec les mêmes paramètres de vibration et de remplissage que ceux qui nous ont permis d'obtenir la photo présentée en figure 5.8 (fréquence 8 Hz, amplitude de vibration 1,95 mm, hauteur de liquide 7 mm, viscosité du fluide $1,06.10^{-5}$ m^2s^{-1}).



FIGURE 5.12 – Pour les mêmes paramètres expérimentaux que ceux utilisés pour la cellule précédente, le motif est indépendant de la taille de la cellule. Ici, les expériences sont réalisées dans une cuve cylindrique de 17 cm de diamètre.

Nous obtenons alors un *pavage* de vagues en étoiles à 5 branches. La taille de l'étoile obtenue se compare à celle obtenue en petite cellule. Nous en concluons que le motif élémentaire apparait indépendamment de la taille de la cellule.
La taille réélle de l'étoile est de 3.15cm pour la petite cellule et de 3.2cm pour la grande cellule. La taille du motif ne dépend donc pas de la taille de cellule aux incertitudes expérimentales près.

Il nous a été également possible d'observer, en adaptant la fréquence de forçage, et utilisant cette grande cuve de 17 cm de diamètre, d'observer un motif comparable à celui observé en cuve petite (9,8 cm de diamètre).

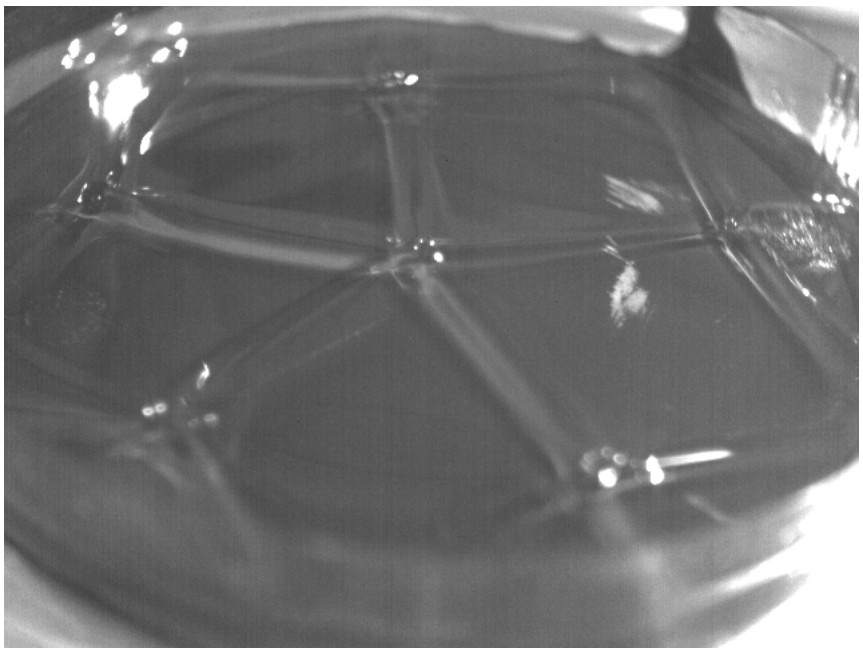

FIGURE 5.13 – En adaptant la fréquence de vibration (ce qui revient à modifier la longueur d'onde des vagues excitées) ainsi que l'amplitude de forçage, il nous est possible d'obtenir le même motif, c'est-à-dire un motif composé alternativement d'une étoile à cinq branches et d'un pentagone dans une cuve de diamètre plus grand. Ici, la cuve possède un diamètre de 17 cm et la fréquence de vibration est de 6 Hz.

5.9 Effet de la forme de la cuve

Nous avons aussi réalisé des expériences en utilisant un récipient carré, de 17 cm de côté. A faible amplitude de vibration ($F_1 < F < F_2$) nous obtenons deux couples de vagues se propageant dans une direction parallèle au côté (5.14). A plus forte amplitude de forçage, nous obtenons un pavage de vagues présentant alternativement un aspect d'étoile ou de pentagone. Les tailles de ces étoiles ou pentagones apparaissent indépendantes de la forme du récipient. Sur la figure (5.15), nous montrons une structure présentant un pavage alterné d'étoiles et de pentagones. Les deux motifs en forme d'étoile ou de pentagone qui sont adjacents correspondent à une solution acceptable, car chacun oscille sous-harmoniquement avec la fréquence de forçage. Par conséquent, il apparait que la forme de la cuve n'a que peu d'effet sur le motif observé, ce qui est pour le moins étonnant pour des ondes. Il faut noter que Edwards et Fauve [46] avaient aussi noter cette non-dépendance avec la forme du récipient lors de l'obtention de quasi-patterns. Nos expériences différent de celles menées par Fauve et Edwards, parce que i) leurs expériences concernaient des vagues gravito capillaires, et ii) ces ondes de surface étaient excitées au moyen de deux fréquences $n\omega$ et $m\omega$, avec n et m premiers entre eux.

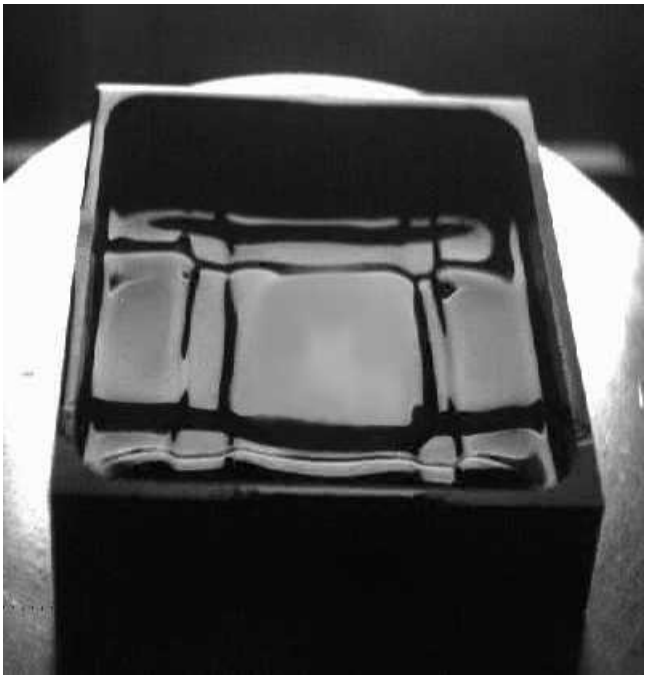

FIGURE 5.14 – Premier motif observé au-delà du seuil d'instabilité, on peut voir deux ondes contrapropagatives.

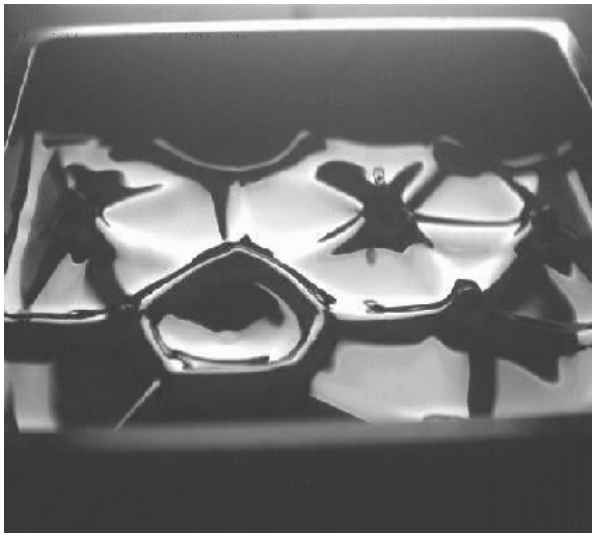

FIGURE 5.15 – Pour des paramètres expérimentaux identiques à ceux nous ayant permis d'obtenir le motif représenté sur la figure (5.8), le motif est indépendant de la forme de la cellule. Ici, les expériences sont réalisées dans une cuve carrée de 17 cm de côté.

Conclusion

L'objectif de cette thèse était d'étudier les vagues extrêmes au moyen d'une expérience de laboratoire : l'instabilité de Faraday. Par vagues extrêmes, on entend vagues de grande amplitude, ce qui signifie que la hauteur des vagues est du même ordre de grandeur ou plus grande que les longueurs caractéristiques du problème (longueur d'onde, profondeur de la nappe de liquide).

Grâce à une variante originale de l'instabilité de Faraday, pour laquelle nous venons perturber extérieurement la surface libre du fluide initialement au repos, nous avons pu observer deux ondes solitaires stationnaires localisées dans l'espace d'un type totalement nouveau. L'étude théorique a montré que l'ingrédient essentiel pour obtenir ce type d'ondes localisées est l'existence d'une hystérésis. La description complète de la forme des vagues observées nécessiterait l'établissement de nouveaux modèles mathématiques permettant d'aller plus loin dans le non-linéaire que les modèles actuellement disponibles.

L'apport d'une perturbation extérieure de la surface libre initialement au repos nous a également permis de mettre en évidence des vagues solitaires de type 'soliton enveloppe'. Jusqu'à présent, le seul modèle mathématique expliquant les 'solitons enveloppes' à la surface des fluides est celui donné par l'équation de Schrödinger non-linéaire qui possède une solution propagative dont l'enveloppe adopte une forme en sécante hyperbolique avec une porteuse sinusoïdale. L'onde que nous avons mis en évidence ne présente rien de

commun avec le soliton NLS : en effet, (i) elle est stationnaire, (ii) l'enveloppe n'adopte pas une forme en sécante hyperbolique, (iii) la porteuse n'est pas sinusoïdale.

Enfin, nous avons réalisé une étude de l'instabilité de Faraday en géométrie tridimensionnelle lorsqu'elle est pleinement développée. Au cours de cette étude, nous avons mis en évidence une nouvelle phénoménologie de motifs résultant d'intéractions nonlinéaires fortes entre les différents modes excités. Notons que dans la gamme des amplitudes d'excitation auxquelles nous travaillons (jusqu'à 5 g), il nous a été possible d'exciter à la fois les modes sous-harmoniques et les modes fondamentaux pour une même fréquence de forçage.

Annexe A

Dérivation rigoureuse de l'équation d'amplitude

A.1 Méthode des échelles multiples

Partant de l'équation de Mathieu que l'on écrit :

$$\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2} + 2f\frac{\partial \eta_k}{\partial t} + \omega_0^2(k)[1 + Fcos(\Omega t)]\eta_k = 0 \tag{A.1}$$

et s'intéressant uniquement à un mode résonant à $\Omega = 2\omega$, nous allons obtenir une équation d'amplitude par la méthode des échelles multiples. Les trois paramètres importants de l'équation sont la dissipation, le forçage et le décalage en fréquence. On considère que ces termes sont petits et du même ordre de grandeur, on écrit :

- $F \rightarrow \epsilon F$
- $\delta = \frac{\Omega}{2} - \omega_0 \rightarrow \epsilon\delta$
- $f \rightarrow \epsilon f$

La méthode des échelles multiples consiste à développer η en fonction d'un petit paramètre. Pour cela, on écrit :

$$\eta(t) = \sqrt{\epsilon}[\eta_0(t,T) + \sqrt{\epsilon}\eta_1(t,T) + ...] \tag{A.2}$$

Où T est l'échelle de variation temporelle lente de l'amplitude $T = \epsilon t$. et à résoudre les équation aux différents ordres.

A l'ordre le plus bas, on obtient :

$$\frac{d^2\eta_0}{dt^2} + \omega_0^2\eta_0 = 0 \tag{A.3}$$

Qui a comme solution :

$$\eta_0 = A(T)e^{i\omega_0 t} + c.c.$$

A l'ordre suivant, on trouve :

$$\frac{d^2\eta_2}{dt^2} + \omega_0^2\eta_2 = -2\frac{\partial^2\eta_0}{\partial t\partial T} - 2f\frac{\partial\eta_0}{\partial t} - \omega_0^2 F\eta_0 \sin\Omega t + \frac{1}{6}\omega_0^2\eta_0^3 \tag{A.4}$$

La condition de solvabilité pour résoudre cette équation en éliminant les termes résonants s'écrit :

$$\frac{dA}{dt} = -fA + \frac{\omega_0 F}{4}\bar{A}e^{-4i\delta\omega_0 T} - i\frac{\omega_0}{4}|A|^2\bar{A} \tag{A.5}$$

Par un changement de variable approprié, $A = Be^{-2i\delta\omega_0 T}$, nous obtenons l'équation d'amplitude :

$$\frac{dB}{dt} = (-f + i2\delta)A + \mu\bar{B} - i\frac{\omega_0}{4}|B|^2\bar{B} \tag{A.6}$$

Annexe B

Méthode multi-échelles pour l'analyse en géométrie Hele-Shaw

B.1 Mise en équation

On considère un fluide parfait, incompressible et avec surface libre en écoulement irrotationnel. t désigne le temps, x la coordonnée horizontale et z la variable verticale ascendante. La surface libre du fluide est d'équation $z = \eta(x, y, t)$. Le niveau moyen (repos) est situé en $z = 0$ et le fond imperméable en $z = -h$. L'écoulement étant irrotationnel, on introduit un potentiel des vitesses ϕ.

Le système d'équations résultant est alors le suivant (voir chapitre 3) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \qquad -h \leq z \leq \eta \tag{B.1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = -h \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = \eta \tag{B.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \tilde{g}\eta + \frac{3}{5}(\nabla\phi)^2 + \gamma\phi = 0, \qquad z = \eta \tag{B.4}$$

où g est l'accélération de la gravité ressentie par le fluide dans le référentiel lié à la cuve. $\tilde{g} = g[1 - F\cos(\Omega t)]$. $\gamma = 12\frac{\nu}{l^2}$.

B.2 Développement en échelle multiple

Il s'agit donc de résoudre de façon perturbative un système d'équation non-linéaire. Puisqu'on s'attend à une variation de la pulsation associée à une longueur d'onde en fonction de l'amplitude, il est pratique d'utiliser une méthode multi échelle [60, 61, 62]. Pour résoudre ce système, nous prenons en compte les différentes échelles d'évolution, rapide pour la porteuse, lente pour l'enveloppe, nous utilisons une méthode multi échelle , en considérant plusieurs échelles de temps (t_0, t_2, t_4,....).

$$t_n = \epsilon^n t, \qquad n = 0, 2, 4, ... \tag{B.5}$$

Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \epsilon^4\frac{\partial}{\partial t_4} + ... \tag{B.6}$$

Une solution évidente de ce système est le repos, ($\phi = 0$ et $\eta = 0$). On cherche donc une approximation voisine du repos développable en série entière d'un paramètre ϵ lié à la cambrure de l'onde. On développe les variables ϕ et η comme :

$$\phi = \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + ... \tag{B.7}$$

$$\eta = \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + ... \tag{B.8}$$

et on effectue un développement de Taylor au voisinage de $\eta = 0$ des quantités à la surface,

$$\phi(z=\eta) = \phi(z=0) + \eta \left[\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]_{z=0} + \frac{\eta^2}{2}\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right]_{z=0} + ... \tag{B.9}$$

Pour simplifier les calculs, nous introduisons le forcage et la dissipation à l'ordre 2 en ϵ, i.e.

$$\gamma = \epsilon^2 \gamma_2 \tag{B.10}$$

$$F = \epsilon^2 F_2 \tag{B.11}$$

Ensuite, on injecte ces expressions dans le système d'équations que l'on résoud pour chaque puissance de ϵ indépendamment.

B.2.1 Premier ordre

On ne conservant que les termes d'ordre ϵ, le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0, \qquad -h \leq z \leq 0 \tag{B.12}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0, \qquad z = -h \tag{B.13}$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t_0} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0, \qquad z = 0 \tag{B.14}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t_0} + g\eta_1 = 0, \qquad z = 0 \tag{B.15}$$

Nous cherchons une solution générale de ce problème sous la forme :

$$\eta_1 = A_1(t_0, t_2, ...)\cos(kx) + B_1(t_0, t_2, ...)\sin(kx) \tag{B.16}$$

$$\phi_1 = C_1(t_0, t_2, ...)\cosh[k(h+z)]\cos(kx) + D_1(t_0, t_2, ...)\cosh[k(h+z)]\sin(kx) \quad \text{(B.17)}$$

pour la dépendance de ϕ_1 en z, se référer au chapitre 1.

En injectant ces relations dans les équations (B.13) et (B.14), nous trouvons pour la dépendance en t_0 de A_1 et B_1 les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial t_0^2} + \omega^2 A_1 = 0 \quad \text{(B.18)}$$

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial t_0^2} + \omega^2 B_1 = 0 \quad \text{(B.19)}$$

avec $\omega^2 = gk\tanh(kh)$. On a donc des dépendances en $\cos(\omega t_0)$ et $\sin(\omega t_0)$. On a :

$$A_1 = A_{1,1}(t_2, t_4, ...)\cos(\omega t_0) + A_{1,2}(t_2, t_4, ...)\sin(\omega t_0) \quad \text{(B.20)}$$

et

$$B_1 = B_{1,1}(t_2, t_4, ...)\cos(\omega t_0) + B_{1,2}(t_2, t_4, ...)\sin(\omega t_0) \quad \text{(B.21)}$$

les A_{ij} et B_{ij} étant des nouvelles constantes à déterminer. On trouve pour η_1 :

$$\eta_1 = A_{1,1}(t_2, t_4, ...)\cos(\omega t_0)\cos(kx) + A_{1,2}(t_2, t_4, ...)\sin(\omega t_0)\cos(kx) \quad \text{(B.22)}$$

$$+B_{1,1}(t_2, t_4, ...)\cos(\omega t_0)\sin(kx) + B_{1,2}(t_2, t_4, ...)\sin(\omega t_0)\sin(kx) \quad \text{(B.23)}$$

Les coefficients A_1 et B_1 donnent accès à C_1 et D_1 et on trouve pour ϕ_1 :

$$\phi_1 = \frac{\omega}{k\sinh(kh)} \times \tag{B.24}$$

$$\cosh[k(h+z)][-A_{1,1}(t_2,t_4,....)\sin(\omega t_0) + A_{1,2}(t_2,t_4,....)\cos(\omega t_0)]\cos(kx) \tag{B.25}$$

$$+\frac{\omega}{k\sinh(kh)} \times \tag{B.26}$$

$$\cosh[k(h+z)][-B_{1,1}(t_2,t_4,....)\sin(\omega t_0) + B_{1,2}(t_2,t_4,....)\cos(\omega t_0)]\sin(kx) \tag{B.27}$$

Nous avons trouvé la dépendance en t_0 de η_1 et ϕ_1. Pour trouver la dépendance en t_2, il nous faut résoudre le système à l'ordre ϵ^2.

B.2.2 Deuxième ordre

A l'ordre ϵ^2, le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2} = 0, \qquad -h \leq z \leq 0 \tag{B.28}$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial z} = 0, \qquad z = -h \tag{B.29}$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t_0} - \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = -\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}, \qquad z = 0 \tag{B.30}$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial t_0} + g\eta_2 = -\frac{3}{5}(\nabla\phi_1)^2 - \eta_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z\partial t_0}, \qquad z = 0 \tag{B.31}$$

On a un système linéaire non homogéne, la partie homogéne se résoud de la manière que précédemment. La solution est donc la somme de la solution générale est d'une solution particulière. Nous écrivons la solution générale des équations (B.27) et (B.28) sans second

membre (elle est similaire à celle trouvée à l'ordre ϵ) :

$$\eta_{2general} = A_{2,1}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(kx) + A_{2,2}(t_2)\sin(\omega t_0)\cos(kx) \tag{B.32}$$

$$+B_{2,1}(t_2)\cos(\omega t_0)\sin(kx) + B_{2,2}(t_2)\sin(\omega t_0)\sin(kx) \tag{B.33}$$

Il nous reste à trouver une solution particulière de l'équation avec second membre :

$$\eta_2 = \eta_{2general} + \eta_{2part} \tag{B.34}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière. Pour cela, nous calculons le second membre de l'équation (B.31) par exemple. Ce dernier fait intervenir un polynome de Fourier du second ordre à 2 variables, nous introduisons une solution particulière la plus générale sous la forme d'un polynome de ce type qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
\eta_{2part} = A_{2,1,1}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(2kx) + A_{2,1,2}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(kx) \\
+A_{2,1,3}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(0\times kx) + A_{2,1,4}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(2kx) \\
+A_{2,1,5}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(0\times kx) + A_{2,1,6}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(2kx) \\
+A_{2,1,7}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(kx) + A_{2,1,8}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(0\times kx) \\
+A_{2,2,1}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(2kx) + A_{2,2,2}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(kx) \\
+A_{2,2,3}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(0\times kx) + A_{2,2,4}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(2kx) \\
+A_{2,2,5}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(0\times kx) + A_{2,2,6}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(2kx) \\
+A_{2,2,7}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(kx) + A_{2,2,8}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(0\times kx) \\
B_{2,1,1}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(2kx) + B_{2,1,2}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(kx) \\
+B_{2,1,3}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(0\times kx) + B_{2,1,4}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(2kx) \\
+B_{2,1,5}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(0\times kx) + B_{2,1,6}(t2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(2kx) \\
+B_{2,1,7}(t2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(kx) + B_{2,1,8}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(0\times kx) \\
+B_{2,2,1}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(2kx) + B_{2,2,2}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(kx) \\
+B_{2,2,3}(t_2)\cos(2\omega t_0)\cos(0\times kx) + B_{2,2,4}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(2kx) \\
+B_{2,2,5}(t_2)\cos(\omega t_0)\cos(0\times kx) + B_{2,2,6}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(2kx) \\
+B_{2,2,7}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(kx) + B_{2,2,8}(t_2)\cos(0\times \omega t_0)\cos(0\times kx) \\
+\text{toutes les combinaisons sinus} \times \text{sinus et cosinus} \times \text{sinus}
\end{aligned}$$

Ensuite nous procédons à une identification terme à terme. Une forme similaire est utilisé pour la recherche de ϕ_2, soit un polynome de Fourier du second à trois variables (pas expliciter ici de part sa complexité). A ce stade là, on peut encore résoudre les équations à la main, mais cela s'avère impossible à l'ordre suivant.

B.2.3 Troisième ordre

A l'ordre 3, les équations et les calculs deviennent trop lourds, on utilise alors Maple mais la méthode reste la même. Je donne ici le système à résoudre pour trouver les équations données au chapitre 3.

$$\frac{\partial^2\phi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_3}{\partial z^2}=0, \qquad -h\leq z\leq 0 \tag{B.35}$$

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial z}=0, \qquad z=-h \tag{B.36}$$

$$\frac{\partial\eta_3}{\partial t_0}-\frac{\partial\phi_3}{\partial z}=-\frac{\partial\eta_1}{\partial t_2}-\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\eta_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\eta_2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}+\frac{\eta_1^2}{2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}-\eta_1\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}, \qquad z=0 \tag{B.37}$$

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial t_0}+g\eta_3=-gF_2\cos(\Omega t)\eta_1-\gamma_2\phi_1-\frac{\partial\phi_1}{\partial t_2}-\eta_1\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z\partial t_0}-\eta_2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z\partial t_0}-\frac{\eta_1^2}{2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z\partial t_0}, \qquad z=0 \tag{B.38}$$

Une fois la résolution à l'ordre trois effectuée, on se ramène pour l'amplitude aux équations suivantes :

$$\frac{dA}{dt}+(\frac{\gamma}{2}-i\omega_0)A+i\frac{\Omega^2}{\omega_0}ka_e e^{2i\Omega t}A^*+\frac{i}{4}(1-\frac{\Gamma}{2})\omega_0k^2|A|^2A-\frac{i}{4}\Gamma\omega_0k^2|B|^2A+\frac{i}{4}(1+\frac{\Gamma}{2})B^2A^*=0 \tag{B.39}$$

$$\frac{dB}{dt}+(\frac{\gamma}{2}-i\omega_0)B+i\frac{\Omega^2}{\omega_0}ka_e e^{2i\Omega t}B^*+\frac{i}{4}(1-\frac{\Gamma}{2})\omega_0k^2|B|^2B-\frac{i}{4}\Gamma\omega_0k^2|A|^2B+\frac{i}{4}(1+\frac{\Gamma}{2})A^2B^*=0 \tag{B.40}$$

Annexe C

Equation de Korteweg de Vries et soliton

Nous nous intéressons ici aux ondes de grande longueur d'onde par rapport à la profondeur de liquide.

C.1 Mise en place du problème

Lorsque la longueur d'onde des vagues est grande devant la profondeur de la nappe de liquide, nous avons montré au chapitre 1 que ces vagues ont une vitesse égale à $c_0 = \sqrt{gh}$. Ces ondes étant longues, nous ramenons les échelles horizontales et verticales au même niveau via la distorsion :

$$\xi = \epsilon(x - c_0 t) \tag{C.1}$$

où ϵ est un paramètre non précisé. Nous avons vu au chapitre que la vitesse de l'onde dépend de son amplitude. Pour pouvoir prendre en compte les effets non-linéaires, nous introduisons également une distorsion sur l'échelle de temps :

$$\tau = \epsilon^3 t \tag{C.2}$$

L'amplitude de l'onde est donc d'ordre ϵ^2. On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \tag{C.3}$$

Le système d'équation à résoudre est le suivant :

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \ -h \leq z \leq \eta \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \ z = -h \tag{C.5}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \epsilon c_0 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \epsilon^3 \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \epsilon^2 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0, \ z = \eta \tag{C.6}$$

$$g\eta - \epsilon c_0 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \epsilon^3 \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\epsilon^2}{2} (\frac{\partial \phi}{\partial \xi})^2 + + \frac{1}{2} (\frac{\partial \phi}{\partial z})^2 = 0, \ z = \eta \tag{C.7}$$

Nous résolvons ce système d'équations de manière itérative via les développements en séries entières suivant :

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^3 \phi_3 + ..., \qquad \eta = \epsilon^2 \eta_2 + \epsilon^4 \eta_4 + ... \tag{C.8}$$

C.2 Résolution

Pour résoudre ce système, nous procédons par itération, c'est-à-dire que nous résolvons les équations pour chaque puissance d'ϵ indépendament.

A l'ordre ϵ on a :

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0, z = -h \tag{C.9}$$

Donc ϕ_1 ne dépend pas de z. A l'ordre ϵ^2, on a

$$g\eta_2 - c_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = 0 \tag{C.10}$$

soit

$$\eta_2 = \frac{c_0}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = 0 \tag{C.11}$$

A l'ordre ϵ^3, on a

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0 \tag{C.12}$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial z} = 0, z = -h \tag{C.13}$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial z}\Big|_{z=0} + c_0 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} = 0 \tag{C.14}$$

On trouve :

$$\phi_3 = \phi_3(\xi, \tau) - \frac{(z+h)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} \tag{C.15}$$

et

$$\Big(\frac{c_0^2}{g} - h\Big) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} = 0 \tag{C.16}$$

qui admet une solution physique non triviale si :

$$c_0 = \pm\sqrt{gh} \tag{C.17}$$

on retrouve donc la célérité des vagues en eau peu profonde. A l'ordre ϵ^4, on a la relation :

$$g\eta_4 - c_0\frac{\partial\phi_3}{\partial\xi} + \frac{c_0h^2}{2}\frac{\partial^3\phi_1}{\partial\xi^3} + \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\big(\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}\big)^2 = 0 \tag{C.18}$$

A l'ordre ϵ^5, on obtient

$$\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi_5}{\partial z^2} = 0 \tag{C.19}$$

$$\frac{\partial\phi_5}{\partial z}\Big|_{z=-h} = 0 \tag{C.20}$$

$$\frac{\partial\phi_5}{\partial z}\Big|_{z=0} + \eta_2\frac{\partial\phi_3}{\partial z}\Big|_{z=0} + c_0\frac{\partial\eta_4}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta_2}{\partial\tau} - \frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi} = 0 \tag{C.21}$$

$$\phi_5 = \phi_5(\xi,\tau) - \frac{(z+h)^2}{2}\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\xi^2} + \frac{(z+h)^4}{24}\frac{\partial^4\phi_1}{\partial\xi^4} \tag{C.22}$$

On obtient au final pour le potentiel des vitesses ϕ_1 :

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\xi\partial\tau} + \frac{c_0h^2}{6}\frac{\partial^4\phi_1}{\partial\xi^4} + \frac{3}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\xi^2} = 0 \tag{C.23}$$

et pour la surface libre η_2 :

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial\tau} + \frac{c_0h^2}{6}\frac{\partial^3\eta_2}{\partial\xi^3} + \frac{3g}{2c_0}\eta_2\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi} = 0 \tag{C.24}$$

Nous avons obtenu notre équation pour la surface libre, nous revenons maintenant aux variables physiques. Ce faisant, nous obtenons la célèbre équation de Korteweg De Vries qui s'écrit :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{3g}{2c_0}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{c_0h^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0 \tag{C.25}$$

C.3 Solutions

Une solution bien connue de l'équation de KdV est une onde solitaire qui s'écrit :

$$\eta = a\,\mathrm{sech}^2[\sqrt{\frac{3a}{4h^3}}(x-ct) \tag{C.26}$$

avec $c = c_0(1+\frac{a}{2h}) = \sqrt{g(a+h)}$ la vitesse de l'onde et a son amplitude.
L'équation KdV et l'onde solitaire sont à la base du concept de soliton introduit bien plus tard par Zabuski et Kruskal (1965)[63].
Il existe aussi des solutions périodiques à cette équation. Il s'agit des ondes cnoïdales qui sont périodiques et de formes permanentes en eau peu profonde. L'onde solitaire est un cas particulier des ondes cnoïdales. L'expression mathématique de ces vagues utilise la fonction elliptique de Jacobi cn. L'amplitude des vagues cnoïdales solutions de KdV s'écrit :

$$\eta = \eta_2 + H\,\mathrm{cn}^2\left[2\frac{K}{\lambda}(x-ct)\right] \tag{C.27}$$

où H est la hauteur crête-creux, K est l'intégrale elliptique complète de première espèce, λ la longueur d'onde. Concernant la théorie des ondes cnoïdales, on peut se référer par exemple aux études de Keulegan et Patterson [64], Keller [65], Littman [66], Benjamin et Lighthill [67], Iwasa [68] ou encore Wiegel [69].

C.4 Découverte du soliton

Un soliton est une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif. On l'observe dans de nombreux phénomènes physiques ; il est solution de nombreuses équations aux dérivées partielles non linéaires. Il possède une énergie localisée dans l'espace et il se révèle extrêmement stable en présence de perturbations. C'est l'équilibre entre dispersion et non linéarité qui permet à cette vague de conserver sa

forme. Le phénomène associé a été décrit pour la première fois par l'Écossais John Scott Russell en 1834, qui l'a observé initialement en se promenant le long du Canal de l'Union qui relie Édimbourg à Forth-Clyden : une onde de forte amplitude générée par l'arrêt brusque d'une barge. Il a suivi pendant plusieurs kilomètres cette vague qui remontait le courant et qui ne semblait pas vouloir faiblir. Il constata que la forme et la vitesse de la vague restaient inchangées durant sa propagation.

"Je ne puis donner une idée plus nette du phénomène qu'en décrivant les circonstances dans lesquelles il m'apparut pour la première fois. J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup, mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal ; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 miles à l'heure et conservant sa forme initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1 et 1/2 de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie sur un mile ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal."

Pendant longtemps l'onde solitaire fut considérée comme une curiosité mathématique sans importance réelle. Ces ondes solitaires qui peuvent se traverser les unes les autres tout en conservant leurs formes initiales et leurs célérités après collision furent appelées solitons pour souligner cette propriété remarquable propre aux quasi-particules. Les solitons sont des entités remarquablement stables qui préservent leur identité à travers de nombreuses interactions. Il n'existe pas une définition précise d'un soliton mais on pourrait donner celles-ci :

- Toute onde non linéaire localisée qui interagit avec une autre perturbation locale et qui retrouve asymptotiquement sa forme initiale et sa vitesse est un soliton.
- Le soliton découvert numériquement par Zabusky et Kruskal est une impulsion cohérente de grande amplitude ou une onde solitaire très stable. Il est la solution exacte d'une équation d'ondes non linéaire dont le profil et la célérité ne sont pas modifiés par une collision avec d'autres ondes solitaires.

Les manifestations physiques des solitons sont multiples. On peut citer les vagues scélérates, les mascarets ou le morning glory cloud. Ce mode de propagation d'une vague sur de longues distances explique aussi la propagation des tsunamis (ou raz-de- marée). Ceux-ci se déplacent pratiquement sans effet notoire en eaux profondes. Le transport par soliton explique que les tsunamis, imperceptibles pour les navires en mer, puissent naître d'un séisme sur une côte de l'océan Pacifique et avoir des effets sur la côte opposée. Ces structures qui se retrouvent dans différents domaines de la physique ont un caractère universel.

Bibliographie

[1] M. Faraday, On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 52, 319-340 (1831).

[2] L. Euler, 1757a. Principes généraux du mouvement des fluides. Mém. Acad. Sci. Berlin 11(1755) :271-315. 1954. Leonhardi Euleri Opera Omnia Ser. 2, XII, ed. CA Truesdell, Lausanne : Orell Füssli.

[3] L. Euler, 1757b. Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides. Mém. Acad. Sci. Berlin 11(1755) :316-61. Also Op. Omn.

[4] L. Euler, 1761. Principia motus fluidorum. Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae 6(1756/7) :271-311. Also Op. Omn.

[5] J.L Lagrange, Sur la manière de rectifier deux entroits des Principes de Newton relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes. Nouv. Mém. Acad. Berlin. 1889. Also 1867-1892. Oeuvres de Lagrange 5 :591-609. Paris : Gauthier-Villars, (1786).

[6] A.L. Cauchy, Mémoire sur la théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. Mém. Présentés Divers Savans Acad. R. Sci. Inst. France (Prix Acad. R. Sci., concours de 1815 et de 1816) I :3-312, (1827).

[7] J. Fourier, Théorie Analytique de la Chaleur. Paris : Firmin Didot, 1822.

[8] M. H. Airy, Tides and waves, B Fellows (1842).

[9] GG Stokes, On the theory of oscillatory waves. Trans. Camb. Philos. Soc. 8 :441-55, 1847.

[10] J Russell, Report on Waves, Rep. Brit. Assoc. for the Advancement of Science (1844), 311-390.

[11] J. V. Boussinesq, Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. C. R. Acad. Sci. Paris 72 :755-59 (1871).

[12] J.W. Strutt (Lord Rayleigh), On waves, Philos. Mag. (5) 1 :257-79 (1876).

[13] F. Charru, Instabilités hydrodynamiques. EDP Sciences, 2007.

[14] M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion* (Parabolic, Stanford, CA) (1982).

[15] L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Fluids Mechanics*, Pergamon Press.

[16] J. Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge (U.K.) (1978).

[17] J.W. Strutt (Lord Rayleigh), "On maintained vibrations", Philosophical Magazine, vol. 15, pages 229-235 (1883).

[18] T. B. Benjamin et F. Ursell, The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, Proc. Roy. Soc. London A, 225, 505 (1954).

[19] L. Daudet, V. Ego, S. Manneville et Bechhoever, J. Secondary instabilities of surface waves on viscous fluids in the Faraday instability. Europhys. Lett. 32 (1995), 313-18.

[20] W.S. Edwards et S. Fauve, Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. J. Fluid Mech. 278 (1994), 123-48.

[21] S. Fauve, K. Kumar, C. Laroche, D. Beysens et Garrabos, Y. Parametric instability of a liquid-vapour interface close to the critical point. Phys. Rev. Lett. 68 (1992), 3160-3.

[22] B. Christiansen, P. Alstrom et M. Levinsen, Ordered capillary-wave states : quasicrystals, hexagons, and radial waves. Phys. Rev. Lett. 68 (1992), 2157-60.

[23] S. Ciliberto, S. Douady et S. Fauve, Investigating space-time chaos in Faraday instability by means of the fluctuations of the driving acceleration. Europhys. Lett. 15 (1991), 23-8.

[24] A. Ezerskii, M. Rabinovich, V. Reutov et I. Starobinets, Spatiotemporal chaos in the parametric excitation of a capillary ripple. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 91 (1986), 2070-83. (Sov. Phys. JETP 64, 1228-36 (1986)).

[25] R.J. Lang, Ultrasonic Atomization of Liquids, Acoust. Soc. Am. 34, pp. 6-8 (1962).

[26] H. Müller, Periodic triangular patterns in the Faraday experiment. Phys. Rev. Lett. 71 (1993), 3287-90.

[27] N. Tufillaro, R. Ramshankar et J. Gollub, Order-disorder transition in capillary ripples. Phys. Rev. Lett. 62 (1989), 422-5.

[28] A. Kudrolli et J. Gollub, Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves : a systemetic survey at large aspect ratio. Physica D 97 (1996), 133-54.

[29] K. Kumar et K. Bajaj, Competing patterns in the Faraday experiment. Phys. Rev. E 52 (1995), R4606-9.

[30] M.T. Westra, Patterns and Weak Turbulence in Surface Waves, Thèse de doctorat d'université, Eindhoven (2001).

[31] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Dissipative Solitons*, Springer, Berlin (2005).

[32] H. Sakaguchi et H.R. Brand, Localized patterns for the quintic complex Swift-Hohenberg equation, Europhys. Lett. 38, 341 (1997) and Physica D 117, 95 (1998).

[33] I.V. Barashenkov, E.V. Zemlyanaya et M. Baer, Travelling Solitons in the Parametrically Driven Nonlinear Schroedinger Equation, Phys. Rev. E 64, 6603 (2001).

[34] M. Umeki, Parametric Dissipative Nonlinear Schrodinger Equation, J. Phys. Soc. Jpn. Vol. 60. pp. 146-167 (1991).

[35] C. Crawford et H. Riecke, Oscillon-type structures and their interaction in a Swift-Hohenberg model, Physica D 129, 83 (1999).

[36] Y.Pomeau et A.C. Newell, Turbulent crystals in macroscopic systems, J. Phys. A 26, L429 (1993).

[37] M. Abramowitz et I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover 1970.

[38] A.H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, New York, 1981.

[39] E. Meron, Parametric excitation of multimode dissipative systems, Phys. Rev. A, 35, 4892-4895 (1987).

[40] Y. Pomeau, Physica (Amsterdam) 23D, 3 (1986).

[41] S. Fauve and O. Thual, Phys. Rev. Lett. 64, 282 (1990).

[42] E. Infeld et G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, deuxième édition, Cambridge university press (2000).

[43] A. Leroux, D. Clamond et J. Rajchenbach, New standing solitary waves in water Phys. Rev. Lett. 107, 024502 (2011).

[44] M. C. Cross et P. C. Hohenberg, Pattern formation outside of equilibrium, Rev. Mod. Phys. 65, 851-1112 (1993).

[45] Lamb Horace, *Hydrodynamics*, sixième édition, Cambridge university press (1932).

[46] W.S. Edwards et S. Fauve, Parametrically excited quasi-crystalline surface waves, Physical Review E 47 (2) R788-R791 (1993).

[47] E. Infeld et G. Rowlands, Nonlinear waves, solitons and chaos, Cambridge University Press (1990).

[48] I. V. Barashenkov, M. M. Bogdan et V. I. Korobov, Stability Diagram of the Phase-Locked Solitons in the Parametrically Driven, Damped Nonlinear Schrodinger Equation, Europhys. Lett., 15 (Z), pp. 113-118 (1991)

[49] J.W. Miles, Resonantly interacting solitary waves, Journal of Fluid Mechanics, 79, PP 171-179 (1977).

[50] M. J. Ablowitz et D.E. Baldwin, Nonlinear shallow ocean-wave soliton interactions on flat beaches, Physical Review E 86, 036305 (2012).

[51] N.D. Mermin et S.M. Troian, Mean-field theory of quasicrystalline order, Phys. Rev. Lett. 54, 1524 (1985).

[52] T. Passot et A.C. Newell, Towards a universal theory for natural patterns, Physica D : Nonlinear Phenomena, Volume 74, Issues 3-4, 15 July 1994, Pages 301-352.

[53] H. W. Müller, Model equations for two-dimensional quasipatterns, Phys. Rev. E 49, 1273 (1994).

[54] O.M. Phillips, On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude Part 1. The elementary interactions, J. Fluid Mech. 9, 193 (1960).

[55] S.T.Milner, Square patterns and secondary instabilities in driven capillary waves, J. Fluid Mech., 225, 81-100 (1992).

[56] J. Miles et D. Henderson, Parametrically forced surface waves, Ann. Rev. Fluid Mech. 22, 143-165 (1990).

[57] F. Simonelli et J.P. Gollub, Surface waves mode interactions, effects of symmetry and degeneracy, J. Fluid Mech. 199, 471-494 (1989).

[58] S. Ciliberto et J.P. Gollub, Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves, J. Fluid Mech. 158, 381 (1985).

[59] A.D.D. Craik et J.G.M. Armitage, Faraday excitation, hysteresis and wave instability in a narrow rectangular wave tank, Fluid Dynamics Research 15, 129 (1995).

[60] A. H. Nayfeh, Perturbation Methods (Wiley Classics Library,1995).

[61] P. Glendinning : Stability, instability, Chaos : an introduction to the theory of nonlinear equations, Cambridge Universitry Press 1994.

[62] C.M. Bender and S.P. Orszag Advanced theoretical methods for Scientists and Engeneers : Asymptotic Methods and Perturbation Theory Mc Graw Hill 1999.

[63] N.J. Zabusky et M.D. Kruskal, Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Lett. 15, 240-243 (1965).

[64] G. H. Keulegan et G. W. Patterson, Mathematical theory of irrotational translation waves, J. Res. Nat. Bur. Stand., U.S. Dep. Commerce, 24, 47-101, (1940).

[65] J.B. Keller, The solitary wave and periodic waves in shallow water, Commun. appl. Math, 1, 323-339, (1948).

[66] W. Littman, On the existence of periodic waves near critical speed, Commun. Pure appl. Math, 10, 241-269, (1957).

[67] T.B. Benjamin et M.J. Lighthill, On cnoidal waves and bores, Proc. Roy. Soc. A, 224, 448-460, (1954).

[68] Y. Iwasa, On cnoidal waves and bores, 17 4, Memoire of Faculty of Engineering, Kyoto Univ. (Japan), (1955).

[69] R.L. Wiegel, A presentation of cnoidal wave theory for practical application, J. Fluid Mech., 7, 273-286, (1960).

MISE EN ÉVIDENCE DE NOUVEAUX TYPES DE VAGUES DE TRÈS GRANDES AMPLITUDES

Au moyen d'une expérience d'excitation paramétrique d'onde de surface, nous mettons en évidence l'existence de nouveaux types d'ondes solitaires et stationnaires à la surface de l'eau. Ces ondes de grande amplitude sont très non-linéaires et l'étude théorique réalisée ne permet pas de rendre compte de la forme des vagues mais permet de comprendre l'origine du phénomène d'hystérésis observé qui est nécessaire à la compréhension des phénomènes observés. En effet, l'existence de ces ondes (dans notre configuration expérimentale) est conditionnée par la présence d'un domaine de bistabilité dans le plan amplitude d'excitation - amplitude des vagues au cœur duquel nous avons montrer qu'il était possible d'avoir coexistence de deux solutions, une d'amplitude nulle et une d'amplitude non nulle. Ces expériences en géométrie Hele-Shaw ont aussi permis de mettre en évidence des ondes enveloppes qui ne sont encore décrit par aucun modèle existant. Il s'agit à notre connaissance de la première onde enveloppe stationnaire observé à la surface de l'eau.

Nous mettons aussi en évidence des ondes de gravité de très grande amplitude, qui sont formées alternativement d'étoiles et de polygones. Nous montrons que la symétrie du motif (nombre de branche de l'étoile) est indépendante de la taille et de la forme du récipient vibré. Nous montrons qu'un mécanisme de couplage non-linéaire résonant à trois ondes peut expliquer cette géométrie, bien que cette possibilité fut rejetée pour des ondes purement gravitaire.

Mots-clés : Ondes de Faraday, Ondes solitaires, Ondes de surface, Excitation paramètrique.

EXPERIMENTAL EVIDENCE OF NEW TYPES OF LARGE AMPLITUDES WAVES

By means of the parametric excitation of water waves in a Hele-Shaw cell, we report the existence of two new types of highly localized, standing surface waves of large amplitude. They are respectively of odd and even symmetries. Both solitary waves oscillate subharmonically with the forcing frequency. They are highly nonlinear, and dier strongly from the other types of localized patterns. Moreover, to our knowledge, such a solitary waves of odd symmetry has never been reported hitherto.

We report a new type of standing gravity waves of large amplitude, having alternatively the shape of a star and of a polygon. This wave is observed by means of a laboratory experiment by vibrating vertically a tank. The symmetry of the star (i.e. the number of branches) is independent of the container form and size, and can be changed according to the amplitude and frequency of the vibration. We show that this wave geometry results from nonlinear resonant couplings between three waves, although this possibility has been denied for pure gravity waves up to now.

Key-words : Faraday waves, Solitary waves, Surface waves, Parametric excitation.