**Université Nice Sophia Antipolis - UFR Sciences**

Ecole doctorale des Sciences Fondamentales et Appliquées

# THÈSE

pour obtenir le titre de

## Docteur en Sciences

de l'Université Nice Sophia Antipolis

**Spécialité : Mathématiques**

présentée et soutenue par

**Damien Broizat**

---

# Existence, unicité, approximations de solutions d'équations cinétiques et hyperboliques

---

Thèse dirigée par Florent Berthelin
et Pierre-Emmanuel Jabin

soutenue le 11 juillet 2013
au laboratoire Jean Alexandre Dieudonné

**Jury :**

| | | |
|---|---|---|
| *Rapporteur* | M. Stéphane Mischler | Université Paris Dauphine |
| *Rapporteur* | M. Pierre Degond | Université Toulouse III |
| *Directeur* | M. Florent Berthelin | Université Nice Sophia Antipolis |
| *Co-directeur* | M. Pierre-Emmanuel Jabin | University of Maryland |
| *Examinateur* | Mme Sylvie Benzoni-Gavage | Université Lyon I |
| *Examinateur* | M. Thierry Goudon | INRIA Sophia Antipolis |



Cette thèse est placée sous licence Creative Commons CC BY-NC-ND 3.0

# Remerciements

Le temps est venu pour moi de faire un bilan de toutes ces années passées au laboratoire Dieudonné, et de remercier chaleureusement les personnes ayant contribué à l'élaboration de cette thèse.

Mes premiers remerciements vont bien évidemment à mes directeurs de thèse, Pierre-Emmanuel Jabin et Florent Berthelin, qui pendant six longues années m'ont patiemment encadré, avec beaucoup de bienveillance et un très grand professionnalisme, en me lançant sur des sujets riches et passionnants qui ont mené à chaque fois à de beaux résultats. J'envierais presque leurs futurs thésards...

Merci également aux Professeurs Stéphane Mischler et Pierre Degond, qui m'ont fait l'honneur de rapporter sur ma thèse. J'ai beaucoup de chance d'avoir bénéficié de l'avis d'experts reconnus.

J'adresse aussi mes remerciements aux Professeurs Sylvie Benzoni-Gavage et Thierry Goudon, qui ont accepté sans hésiter de faire partie de mon jury.

Je remercie vivement l'Inspecteur Général Charles Torossian, qui pendant ma thèse m'a donné la chance d'exercer un métier que j'adore, tout en gardant un œil vigilant sur l'avancement de mes travaux.

Je profite également de cette occasion pour rendre hommage à mes professeurs, qui m'ont transmis leur passion : Jean-Jacques Técourt, François Rouvière, Clemens Berger, Antoine Douai, Bernard Candelpergher, Jean-Paul Speder, Yannick Baraud, Georges Comte, le regretté André Cerezo, et bien d'autres.

Merci aux membres de l'équipe EDP, notamment David Chiron, Stéphane Junca, Magali Ribot, pour leurs conseils et leur aide lors de nombreuses discussions informelles.

Merci aux "voisins du quatrième", Ingo Waschkies, André Galligo, Mohamed Elkadi, Didier Clamond, pour leur sympathie et leur bonne humeur, qui sont toujours les bienvenues dans le quotidien d'un thésard !

Merci à Julien Barré et Joachim Yameogo pour m'avoir guidé dans mes débuts d'enseignant.

Merci à Philippe Maisonobe et à Michel Merle pour avoir suivi de près mon parcours à l'Université, et pour leur conseils empreints de sagesse.

Merci à tous les administratifs du laboratoire Dieudonné, secrétaires, bibliothécaires, et à Jean-Marc Lacroix et Julien Maurin, qui gèrent le réseau informatique d'une main de maître.

Un grand merci à Marie-France Gallorini et Hélène Politano, de l'Ecole Doctorale SFA, qui par leur dévouement m'ont évité bien des complications administratives.

Bien entendu, je n'oublie pas les deux générations de doctorants que j'ai côtoyés au laboratoire. Il y a d'abord les co-locataires du bureau 801 : Michel Raibaut, Delphine Dupont, qui m'ont accueilli très chaleureusement, Cristina Bertone, Pheakdei Mauk, Camilo Garcia, qui sont venus ensuite, et le "petit dernier", Jean-Baptiste Campesato, qui assure la relève. Puis il y a les autres : les plus anciens, Pierre Abbrugiati, Nicolas Basbois, Hugues Zuber, Joan Millès, Benjamin Pergolizzi, Julianna Zsidó, Rémy Oudompheng, et la deuxième génération, Camille Poignard, Marie Martin, Brice Eichwald (qui ont soutenu juste avant moi), et j'en oublie...

Parmi ces compagnons de galère, il y en a deux que je voudrais particulièrement citer : mon ami Gaël Selig que j'ai eu le plaisir de retrouver après sa longue escapade parisienne, et avec qui j'ai partagé les angoisses, doutes, et satisfactions, qui jalonnent la vie d'un thésard ; et enfin, mon ami et beau-frère Alain Olivetti, qui a suivi ma thèse de très près, et m'a témoigné un indéfectible soutien, aussi bien d'un point de vue scientifique qu'humain. Partager nos sciences et nos idées a été et reste toujours un passe-temps privilégié.

Que mes collègues du lycée des Eucalyptus et ceux du lycée Jules Ferry soient remerciés eux aussi, leur soutien a été précieux pendant les trois dernières années, particulièrement intenses. Je salue également mes deux promotions d'étudiants de classes préparatoires, qui m'ont fait aimer le métier d'enseignant, et me donnent le privilège de faire partager mes connaissances.

Je remercie mes beaux-parents, mes amis et ma chère belle-sœur Delphine Olivetti pour leur soutien et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Un très grand merci à mes parents, Jean-Pierre et Marie-José Broizat, qui m'ont transmis la persévérance et le goût du travail bien fait. J'espère les remplir de fierté en ce jour.

Je termine ces remerciements en nommant la personne la plus chère à mes yeux : ma compagne Priscilla, qui a fait de nombreux sacrifices pour que je puisse mener à bien cette thèse. Je te dédie ce travail, il est terminé en partie grâce à toi, qui ne m'a jamais abandonné, même dans les moments les plus difficiles.

# Table des matières

**Introduction** **3**

1 Théorie cinétique et équation de Boltzmann . . . . . 3
1.1 Modélisation . . . . . 4
1.2 Problème de Cauchy . . . . . 8
1.2.1 Propriétés formelles de l'équation de Boltzmann 9
1.2.2 Solutions dispersives de Kaniel, Illner, Shinbrot 10
1.2.3 Solutions renormalisées de DiPerna-Lions . . 11
2 Modèles de coagulation-fragmentation . . . . . 14
2.1 Les modèles classiques . . . . . 15
2.1.1 Modèles homogènes en espace . . . . . 15
2.1.2 Le modèle inhomogène en espace . . . . . 20
2.2 Les modèles cinétiques . . . . . 21
2.2.1 Le modèle cinétique pour la coagulation seule 23
2.2.2 Le modèle cinétique pour la fragmentation seule 25
2.2.3 Couplage coagulation-fragmentation . . . . . 28
3 Méthodes de moments sur des équations cinétiques . . . . . 32
3.1 Présentation du problème . . . . . 32
3.2 Résultats obtenus . . . . . 34
4 Modélisation du trafic routier . . . . . 37
4.1 Les modèles de base . . . . . 38
4.2 Le modèle de Aw-Rascle . . . . . 39
4.3 Les modèles avec contraintes . . . . . 40
4.3.1 Présentation . . . . . 40
4.3.2 Théorie d'existence pour le modèle CPGD . . 42
4.4 Le modèle multi-voies avec contraintes . . . . . 44
Références de l'introduction . . . . . 47

**I A kinetic model for coagulation-fragmentation 55**
1 Introduction . . . 57
1.1 The original model . . . 57
1.2 Spatially inhomogeneous models . . . 59
1.3 Description of the kinetic model and outline of the paper 62
1.4 Different notions of solutions . . . 68
2 *A priori* estimates . . . 69
2.1 Basic physical estimates . . . 70
2.2 $L^q$ bounds . . . 75
3 A stability result . . . 81
3.1 Weak compactness of $(f_n)$ . . . 82
3.2 Weak compactness of the renormalized coalescence term 83
3.3 Weak convergence of the fragmentation term . . . 86
3.4 Strong compactness of $y$-averages . . . 87
3.5 Regularity in time of the limit $f$ . . . 90
3.6 Passing to the limit in a new integral equation . . . 92
References . . . 95

**II Convergence rate for the method of moments with linear closure relations 101**
1 Introduction . . . 103
1.1 Quick presentation of the moments' methods for kinetic equations . . . 103
1.2 Linear closure relations . . . 104
1.3 Basic properties of the method and the main result . . 106
2 Stability and convergence results . . . 108
2.1 Eigenvectors for System (1.12) . . . 108
2.2 Stability estimate and kinetic interpretation of the method . . . 109
2.3 Error estimate . . . 112
3 Proof of Theorems 2.1 and 2.2 . . . 114
3.1 Elementary space decomposition . . . 114
3.2 Study of the condition (3.2) . . . 116
3.3 Study of the condition (3.3) . . . 118
3.4 Study of the condition (3.4) . . . 122
3.5 Choice of $\phi$ on the subspace $V$ . . . 122
3.6 Proof of the theorem (2.2) : Synthesis . . . 123

3.7 From Th. 2.2 to Th. 2.1 : Uniform stability estimate on the BGK model . . . 126
4 Error estimate : Proof of Th. 2.3 and Prop. 2.4 . . . 129
4.1 Estimates provided by the model . . . 129
4.2 Proof of Prop. 2.4 : Error estimate in the smooth case . 131
4.3 Proof of Th. 2.3 : Error estimate in the general case . . 133
5 Proof of Th. 1.1 : Example of the Tchebychev points . . . 135
6 Appendix . . . 137
References . . . 138

**III A model for the evolution of traffic jams in multi-lane 141**
1 Introduction . . . 143
2 The ML-CPGD model . . . 146
3 Clusters dynamics . . . 147
3.1 About uniqueness of the dynamics . . . 150
3.2 Collision between two blocks without change of width . 152
3.3 Narrowing of the road without collision . . . 154
3.4 Enlargement of the road without collision . . . 158
3.5 Compatibility of the dynamics . . . 162
3.5.1 A train of blocks undergoes a narrowing . . . 162
3.5.2 Two blocks collide just before the road narrows 162
3.5.3 A train of blocks undergoes an enlargement . 164
3.5.4 Two blocks collide just after the road widens . 164
3.5.5 The road follows $1 \to 2 \to 1$ faster than the block . . . 165
3.5.6 The road follows $2 \to 1 \to 2$ faster than the block . . . 165
3.6 Block solutions and bounds . . . 165
4 Existence of weak solutions . . . 173
4.1 Approximation of the initial data by sticky blocks . . . 173
4.2 Existence result . . . 174
4.3 Compactness result . . . 178
5 Appendix . . . 179
References . . . 185

# Introduction

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le contexte des systèmes de particules. Nous considérons différents systèmes physiques, dont la dynamique est modélisée par des équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution temporelle de certaines quantités macroscopiques ou microscopiques, selon l'échelle de description envisagée. Cela correspond à une approche continue des systèmes étudiés, qui seront décrits par une distribution statistique de particules, et non pas particule par particule. Les équations étudiées sont des équations cinétiques (mettant en jeu des variables microscopiques, comme la vitesse des particules, ou leur masse) mais aussi des systèmes hyperboliques de lois de conservation (qui portent sur des quantités moyennées, comme la densité d'un fluide ou son champ de vitesse), qui apparaissent par exemple dans l'étude de la dynamique des gaz sans pression.

Le manuscrit est constitué de trois parties, correspondant chacune à un résultat obtenu pendant la thèse.

La première partie de la thèse est constituée d'un preprint de l'article *A kinetic model for coagulation-fragmentation* [Bro10] (travail publié dans le journal *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non-Linéaire*), qui prouve l'existence de solutions renormalisées pour un modèle cinétique de coagulation-fragmentation.

La seconde partie se compose du preprint *Convergence rate for the method of moments with linear closure relations* [BBJ12] (à paraître). On étudie de manière explicite une méthode de moments sur des équations cinétiques linéaires unidimensionnelles, en démontrant la stabilité et en calculant la vitesse de convergence.

Enfin, la troisième et dernière partie, composée du preprint *A model for the evolution of traffic jams in multi-lane* [BB12] (travail publié dans la revue *Kinetic and Related Models*), présente un modèle de trafic routier multi-voies, qui est une adaptation d'un modèle classique de dynamique des gaz, auquel on rajoute des contraintes. On établit l'existence de solutions faibles pour des données initiales quelconques.

# 1 Théorie cinétique et équation de Boltzmann

La théorie cinétique, qui est le contexte général d'une grande partie des travaux de cette thèse, est présentée dans cette section, et nous nous attardons volontairement sur l'équation de Boltzmann. Ce choix s'explique bien entendu par des raisons historiques, des raisons de modélisation, mais aussi

parce que les notions de solutions que nous utiliserons sur les modèles de coagulation-fragmentation ont d'abord été développées pour l'équation de Boltzmann, nous les expliquerons donc dans ce contexte.

## 1.1 Modélisation

Un système avec un grand nombre de particules (comme un gaz, un plasma,...) peut être décrit de manière continue par une distribution de particules $f = f(t,x,v) \geq 0$, où $t$ est la variable temporelle, $x \in \mathbb{R}^D$ est la variable d'espace, et $v \in \mathbb{R}^D$ la variable microscopique. Cette modélisation signifie qu'à chaque instant $t$, la densité de particules occupant un volume infinitésimal $dxdv$ (centré en $(x,v)$) de l'espace des phases est $f(t,x,v) \times dxdv$. Pour tout domaine $\Omega$ de l'espace, la quantité de matière située dans $\Omega$ est donc $\iint_{\Omega \times \mathbb{R}^D} f(t,x,v)dxdv$. L'hypothèse physique que tout domaine borné de l'espace contient une quantité de matière finie se traduira donc par $f(t,.,.) \in L^1(K \times \mathbb{R}^D)$ pour tout $t$ et tout compact $K \subset \mathbb{R}^D_x$. La variable $v$, elle, représente la vitesse des particules (ou l'impulsion, ce qui revient au même si toutes les particules ont même masse) dans le cas d'une dynamique non relativiste. D'autres variables microscopiques (comme la masse, l'énergie interne) peuvent être ajoutées, selon le type d'interactions entre particules étudié.

Les quantités macroscopiques du système étudié peuvent être reconstruites à partir de la densité de particules $f$, en intégrant par rapport à la variable $v$. Ainsi, par exemple, la densité locale est

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^D} f(t,x,v)dv,$$

le champ de vitesse local $u(t,x) \in \mathbb{R}^D$ est donné par la relation

$$\rho u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^D} f(t,x,v)vdv \in \mathbb{R}^D,$$

et la température locale $T(t,x)$ du système est donnée par :

$$\rho|u|^2(t,x) + D\rho T(t,x) = \int_{\mathbb{R}^D} f(t,x,v)|v|^2 dv,$$

cette somme représentant l'énergie totale du système au point $(t,x)$.

Cette modélisation, appelée la théorie cinétique, a été introduite par Maxwell et Boltzmann au XIX$^e$ siècle afin de décrire la dynamique des gaz raréfiés. La célèbre *équation de Boltzmann* s'écrit :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f), \qquad (t, x, v) \in ]0, +\infty[\times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D, \tag{1.1}$$

où $f = f(t, x, v)$ est la densité de particules, et $f \mapsto Q(f, f)$ est l'opérateur de collision de Boltzmann. Parfois, cet opérateur est noté plutôt $\frac{1}{\varepsilon}Q(f, f)$, pour mettre en évidence le libre parcours moyen $\varepsilon > 0$ des particules, et envisager la "limite hydrodynamique" $\varepsilon \to 0$. Mais nous n'aborderons pas cet aspect ici.

Pour une présentation générale des modèles cinétiques, on renvoie à [BGP$^+$00], [Cer88], [CIP94], [Bol64], [PT00], [LDP88].

Expliquons brièvement la forme de l'équation (1.1) et détaillons l'expression de l'opérateur $Q$. Au niveau microscopique, si on néglige dans un premier temps les interactions entre particules et si on suppose que le système n'est soumis à aucune force extérieure, alors, selon le principe fondamental de la dynamique, chaque particule suit un mouvement rectiligne uniforme. Donc, si l'on décrit le système de manière continue, la distribution de particules $f$ est solution d'une équation de transport sans second membre :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0,$$

puisque $f$ est constante le long des droites caractéristiques $s \mapsto (x - vs, v)$. On a donc dans ce cas $f(t, x, v) = f(0, x - vt, v)$. On va maintenant modéliser les collisions entre les particules (en négligeant toujours les actions extérieures au système), selon les hypothèses physiques suivantes :

- On suppose que les seules interactions ayant lieu sont des collisions binaires (qui n'impliquent que deux particules), ce qui revient à supposer que le système (un gaz par exemple) est suffisamment dilué.
- On suppose aussi que les collisions sont localisées en temps et en espace, c'est-à-dire qu'une collision se déroulera "instantanément" en un point $(t, x)$. Cette hypothèse traduit le fait que le temps d'une collision entre particules est petit devant le temps caractéristique associé au libre parcours moyen des particules.
- Ensuite, on supposera les chocs élastiques, c'est-à-dire que la quantité de mouvement sera préservée (ce qui revient à la conservation de la somme des vitesses des particules, puisque celles-ci sont supposées de même masse),

ainsi que l'énergie cinétique. En notant $v, v_* \in \mathbb{R}^D$ les vitesses antérieures à la collision et $v', v'_* \in \mathbb{R}^D$ les vitesses postérieures, on aura donc

$$v' + v'_* = v + v_*, \qquad |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2, \tag{1.2}$$

d'où les expressions paramétriques

$$v' = v - ((v - v_*) \cdot \omega)\,\omega, \qquad v'_* = v_* + ((v - v_*) \cdot \omega)\,\omega, \tag{1.3}$$

où $\omega \in S^{D-1}$ est la déviation causée par le choc. Ces expressions montrent qu'au niveau particulaire, un choc se caractérise par une direction $\omega \in S^{D-1}$ et une vitesse relative $V = v - v_* \in \mathbb{R}^D$.

- On suppose aussi que le processus de collision est réversible, c'est-à-dire que d'un point de vue probabiliste, la probabilité qu'un couple de vitesses $(v, v_*)$ soit transformé en $(v', v'_*)$ est la même que celle correspondant au passage de $(v', v'_*)$ à $(v, v_*)$. On parle de microréversibilité.
- Enfin, on fait l'hypothèse du chaos de Boltzmann, qui exprime que n'importe quelles particules se trouvant au point $(t, x)$ sont susceptibles d'interagir, quelles que soient leurs vitesses. Au niveau continu, cela revient à modéliser la distribution conjointe des couples de particules par un produit tensoriel en vitesse, les variables $(t, x)$ jouant le rôle de paramètres :

$$(f \otimes f)\,(v, v_*) = f(t, x, v) f(t, x, v_*).$$

Sous ces hypothèses, Boltzmann dériva, en 1872, l'équation (1.1), dont le second membre $f \mapsto Q(f, f)$ modélise les collisions. Cet opérateur intégral quadratique est donné par

$$Q(f, f)(t, x, v) = \iint_{\mathbb{R}^D \times S^{D-1}} q(v - v^*, \omega)\,(f' f'_* - f f_*)\,dv_* d\omega,$$

où $f = f(t, x, v)$, $f_* = f_*(t, x, v_*)$, $f' = f(t, x, v')$, $f'_* = f(t, x, v'_*)$, les variables post-collisionnelles $(v', v'_*)$ étant définies par les relations (1.3). Le noyau $q = q(V, \omega) \geq 0$, qui dépend de la vitesse relative $V = v - v_*$ et de la direction de déviation $\omega \in S^{D-1}$, gouverne l'occurence des collisions (de manière déterministe au niveau continu), en fonction de $(V, \omega)$. On pourrait imaginer $q$ comme une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^D \times S^{D-1}$ mais en général cette interprétation est mauvaise car $q$ n'est pas intégrable. En réalité, pour des raisons de symétries, le noyau de collision $q$ (appelé aussi section efficace

de collision) ne dépend que de $|V|$ et de $|V \cdot \omega|$ (qui correspond au cosinus de l'angle de déviation) :

$$q = q(|V|, |V \cdot \omega|) \geq 0.$$

Ceci implique notamment

$$q(v - v_*, \omega) = q(v' - v'_*, \omega),$$

car $|v - v_*| = |v' - v'_*|$, relation qu'on obtient facilement à partir de (1.2). Les exemples typiques de noyaux de collision sont :

- dans le cas des "collisions entre sphères dures" :

$$q(V, \omega) = C|V \cdot \omega|,$$

- dans le cas d'une force d'interaction dérivant d'un potentiel en $\frac{1}{r^s}$ (où $r$ est la distance entre particules et $s > 1$) :

$$q(V, \omega) = C|V|^{\frac{s-5}{s-1}} \times b\left(\frac{V \cdot \omega}{|V|}\right),$$

  (pour $D = 3$) où $b \in L^1(]-1, 1[)$. Il s'agit de l'hypothèse de "cut-off" angulaire de Grad, qui vise à négliger les collisions rasantes (celles pour lesquelles $v'$ est proche de $v$).

On pourra se référer à [Vil02] pour un exposé très complet de la théorie de l'équation de Boltzmann, y compris les différents types de noyaux.

Le second membre représente en quelque sorte la variation du nombre de particules à l'état $(x, v)$ à l'instant $t$. On a

$$Q(f, f) = Q^+(f, f) - Q^-(f, f),$$

où

$$Q^+(f, f) = \iint_{\mathbb{R}^D \times S^{D-1}} q(v - v_*, \omega) f' f'_* dv_* d\omega = \iint_{\mathbb{R}^D \times S^{D-1}} q(v' - v'_*, \omega) f' f'_* dv_* d\omega$$

est le nombre de particules de vitesse $v$ crées au point $(t, x)$, il y en autant que de collisions impliquant des particules en l'état $(v', v'_*)$ (en utilisant toujours les notations précédentes), vu l'hypothèse de microréversibilité.

Enfin, le terme

$$Q^-(f,f) = \iint_{\mathbb{R}^D \times S^{D-1}} q(v-v_*,\omega) f f_* dv_* d\omega,$$

représente le nombre de particules de vitesse $v$ ayant disparu (c'est-à-dire ayant modifié leur vitesse $v$ à cause d'un choc) au point $(t,x)$, il est égal au nombre de collisions impliquant deux particules en l'état $(v,v_*)$. En posant

$$L(f)(t,x,v) = \iint_{\mathbb{R}^D \times S^{D-1}} q(v-v_*,\omega) f(t,x,v_*) dv_* d\omega,$$

on peut réécrire

$$Q^-(f,f)(v) = f(v) Lf(v).$$

L'étude mathématique de l'équation de Boltzmann présente beaucoup de difficultés, notamment pour établir l'existence de solutions globales. Nous allons décrire les méthodes connues pour résoudre le problème de Cauchy associé à (1.1), et nous verrons plus loin comment réutiliser ces techniques lors de l'étude des équations de coagulation-fragmentation. En quelque sorte, l'équation de Boltzmann nous sert de point de départ, aussi bien du point de vue modélisation que du point de vue mathématique.

## 1.2 Problème de Cauchy

On considère ici le problème suivant : une donnée initiale $f^0 = f^0(x,v) \geq 0$ étant fixée, montrer l'existence d'une solution $f = f(t,x,v)$ de l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q^+(f,f) - Q^-(f,f) \tag{1.4}$$

vérifiant $f(0,.,.) = f^0$ (en un sens à préciser, vu que l'ensemble $\{(t,x,v) \in \mathbb{R}^{2D+1},\ t=0\}$ est de mesure nulle).

Il existe plusieurs théories d'existence pour l'équation de Boltzmann. Nous évoquerons rapidement celle des solutions dispersives de Kaniel, Illner, Shinbrot, et nous attarderons plus sur celle des solutions renormalisées de DiPerna-Lions, que nous réutiliserons dans le contexte des équations de coagulation-fragmentation. Mais d'abord, nous allons passer en revue les propriétés formelles de l'équation de Boltzmann, et notamment de l'opérateur de collision $Q$.

### 1.2.1 Propriétés formelles de l'équation de Boltzmann

Tout d'abord, l'opérateur $Q$ satisfait la relation fondamentale suivante, dues aux symétries du noyau $q$ : pour toute solution formelle $f = f(t,x,v) \geq 0$ de (1.1) et pour toute fonction $\varphi = \varphi(v)$ agissant uniquement sur la variable cinétique, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^D} Q(f,f)(t,x,v)\varphi(v)dv$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{S^{D-1}}(f'f'_* - ff_*)(\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*)q(v-v_*,\omega)d\omega dv_* dv \tag{1.5}$$

En choisissant $\varphi(v) = 1$, puis $\varphi(v) = v_i$ (pour $i = 1,\ldots,D$) et $\varphi(v) = |v|^2$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^D}(1, v_i, |v|^2)Q(f,f)(t,x,v)dv = 0.$$

On dit alors que $\varphi(v)$ est un invariant collisionnel. Dans [Cer90], Cercigiani a montré que 1, $v$ et $|v|^2$ sont les seuls invariants de collision.
En intégrant l'équation (1.1) par rapport à $v$ et $x$, on obtient la conservation (formelle) du nombre de particules (ou de la masse, puisque les particules sont supposeés identiques), de la quantité de mouvement, et de l'énergie cinétique du système au cours du temps :

$$\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}^D} f(t,x,v)\begin{pmatrix}1\\ v\\ |v|^2\end{pmatrix}dvdx = \int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}^D} f^0(x,v)\begin{pmatrix}1\\ v\\ |v|^2\end{pmatrix}dvdx.$$

Ensuite, en choisissant $\varphi(v) = \ln(f(v))$ dans (1.5), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^D} Q(f,f)(v)\ln(f(v))dv$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{S^{D-1}}(f'f'_* - ff_*)(\ln(f'f'_*) - \ln(ff_*))q(v-v_*,\omega)d\omega dv_* dv \leq 0$$

,

et donc, en intégrant (1.1) en $v$ et $x$, on établit ainsi la décroissance (formelle) de l'entropie au cours du temps :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}^D} f(t,x,v)\ln(f(t,x,v))dvdx \leq 0,$$

avec un terme dissipatif. Cette propriété est connue sous le nom de $H$-théorème.

Enfin, une propriété importante de l'opérateur de collision est que $Q(f,f) = 0$ si et seulement si $f$ est une fonction d'équilibre thermodynamique appelée Maxwellienne, de la forme

$$f(v) = M_{\rho,u,T}(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{D/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}},$$

où $\rho \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^D$ et $T > 0$ sont des paramètres, pouvant dépendre de $(t,x)$ (le temps et l'espace jouent le rôle de variables locales dans l'opérateur de collision qui n'agit que sur la variable cinétique). Dans le cas de l'équation de Boltzmann spatialement homogène

$$\partial_t f = Q(f,f),$$

les Maxwelliennes de paramètres $(\rho, u, T)$ constants correspondent exactement aux solutions stationnaires (voir [Lu99]).

Toutes ces propriétés formelles de l'équation (1.1) servent de base aux différentes théories d'existence de solutions.

### 1.2.2 Solutions dispersives de Kaniel, Illner, Shinbrot

Cette théorie, développée au début des anneés 80, est basée sur la construction d'une sur-solution Maxwellienne de l'équation (1.1), c'est-à-dire d'une fonction de la forme

$$M(t,x,v) = C(t)\exp(-\alpha|x - vt|^2 - \beta|v|^2)$$

avec $\alpha, \beta > 0$ telle que

$$\partial_t M + v \cdot \nabla_x M \geq Q^+(M,M)$$

(au sens des distributions). Grâce à cette sur-solution $M$, on obtient ainsi un domaine invariant $[0, M]$ pour les solutions de (1.4), c'est-à-dire que pour une donnée initiale $0 \leq f^0 \leq M(0)$, toute solution de (1.4) vérifiera

$$0 \leq f(t,x,v) \leq M(t,x,v).$$

L'existence d'une solution de l'équation (1.4) résulte alors d'un théorème de stabilité : si on se donne une suite $(f_n)$ de solutions de (1.4) qui vérifient

$0 \leq f_n(t,x,v) \leq M(t,x,v)$ pour tout $n \geq 0$, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge au sens des distributions vers une solution $f$ de (1.4) qui vérifie aussi $0 \leq f(t,x,v) \leq M(t,x,v)$.
On peut appliquer ce théorème de stabilité à une suite de problèmes approchés : pour $n \geq 0$ on considère l'équation

$$\partial_t f_n + v \cdot \nabla_x f_n = Q_n(f_n, f_n),$$

où l'opérateur $Q_n$ est obtenu à partir de $Q$ en modifiant le noyau de collision $q$ de manière à modérer la croissance quadratique de $Q_n$. On obtient facilement l'existence d'une solution $f_n$ de ce problème approché, et les $f_n$ sont contrôlées par la sur-solution $M$ uniformément en $n$. Le théorème de stabilité implique alors l'existence d'une solution $f$ (au sens des distributions) de l'équation de Boltzmann telle que $f(0,.,.) = f^0$, pour toute donnée initiale $f^0$ telle que $0 \leq f^0 \leq M(0)$ et pour un noyau $q$ vérifiant certaines hypothèses de croissance.

Cette théorie possède toutefois un défaut : la sur-solution $M$ peut exploser en temps fini (car $C(t)$ est la solution d'une équation différentielle non-linéaire), et pour obtenir des solutions de l'équation de Boltzmann globales en temps, il faut faire une hypothèse de taille sur la donnée initiale $f^0$, ce qui est contraignant.

On renvoie à [KS78], [IS84] et [BT85] pour plus de détails.

### 1.2.3 Solutions renormalisées de DiPerna-Lions

Cette seconde approche, développée par R. DiPerna et P.-L. Lions dans la fin des années 80 (voir l'article fondateur [DL89]), est basée sur la seule utilisation des estimations *a priori* qui découlent des propriétés formelles de l'équation, levant ainsi la contrainte de taille sur la donnée initiale pour l'obtention de solutions globales en temps. La conservation formelle de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, ainsi que la décroissance formelle de l'entropie impliquent, pour toute solution éventuelle $f$, les inégalités (formelles)

$$\sup_{t\geq 0} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}^D} f(t,x,v)(1 + |v|^2 + |x - vt|^2 + |\ln f|)dvdx \leq C_0,$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^D} \mathcal{D}(f)(t,x)dxdt \leq C_0,$$

où $\mathcal{D}(f)$ est le terme dissipatif

$$\mathcal{D}(f)(t,x) := -\int_{\mathbb{R}^D} Q(f,f)(t,x,v)\ln(f(t,x,v))dv \geq 0,$$

et où la constante $C_0 \geq 0$ dépend uniquement de la donnée initiale $f^0$.

On obtient ainsi un cadre naturel pour l'ensemble des éventuelles solutions de (1.4). Mais un problème majeur se pose : si on cherche des solutions $f$ vérifiant uniquement ces bornes, alors il est impossible (même si le noyau $q$ est régulier et à support compact) de définir le second membre $Q(f,f)$ en tant que distribution, et donc de donner un sens à l'équation de Boltzmann. En effet, pour que l'équation ait un sens dans $\mathcal{D}'$, il faudrait au moins avoir $Q(f,f) \in L^1_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D)$, ce qui exigerait une estimation du type

$$f \in L^2_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^D_x; L^1(\mathbb{R}^D_v)),$$

vu le caractère quadratique de $Q$ et les rôles bien distincts des variables ($Q$ mélange une structure de produit ponctuel en $(t,x)$ et une structure de type produit de convolution en $v$). Et une telle estimation *a priori* ne semble pas être vraie. Il est donc nécessaire de recourir à une notion de solution différente de celle de solution au sens des distributions : celle de "solution renormalisée".

On dit que $f \in L^1_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D)$ (positive) est une solution renormalisée de (1.4) si

$$\frac{Q^+(f,f)}{1+f} \in L^1_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}^D), \qquad \frac{Q^-(f,f)}{1+f} \in L^1_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}^D),$$

et si $f$ vérifie l'équation de Boltzmann renormalisée :

$$\partial_t \ln(1+f) + v\cdot\nabla_x \ln(1+f) = \frac{Q(f,f)}{1+f}$$

(au sens des distributions). Evidemment, cette notion de solution est plus générale puisque, si $f$ est telle que $Q(f,f) \in L^1_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}^D)$, alors il y a équivalence entre les notions de solution au sens des distributions et solution renormalisée (voir [DL89] pour les détails). L'introduction de ce nouveau concept permet de compenser le manque d'estimations *a priori* "naturelles" qui permettraient de définir directement $Q$ comme une distribution.

Enonçons précisément le résultat obtenu par DiPerna et Lions sur l'équation de Boltzmann, dans le cadre des solutions renormalisées :

**Théorème 1.1 (DiPerna-Lions, 1989)** *On suppose que le noyau de collision $q$ satisfait l'hypothèse de croissance :*

$$\forall R > 0, \qquad (1+|v|^2)^{-1} \int_{|v_*|\leq R} \int_{S^{D-1}} q(v-v_*,\omega) d\omega dv_* \underset{|v|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*On considère une donnée initiale $f^0 = f^0(x,v)$ telle que*

$$f^0 \geq 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}^D} f^0(x,v)(1+|x|^2+|v|^2+|\ln f^0(x,v)|) dxdv < \infty.$$

*Alors, il existe $f \in C^0([0,+\infty[, L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D))$ telle que $f(0,.,.) = f^0$, ainsi que*

$$\frac{Q^-(f,f)}{1+f} \in L^\infty(]0,+\infty[, L^1(\mathbb{R}^D_x \times B_R)),$$
$$\frac{Q^+(f,f)}{1+f} \in L^1(]0,T[, L^1(\mathbb{R}^D_x \times B_R)),$$

*pour tout $R > 0$, pour tout $T > 0$, et telle que $f$ est une solution renormalisée de (1.4). De plus, on a*

$$f \geq 0, \qquad \sup_{t\geq 0} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}^D} f(t,x,v)(1+|x-vt|^2+|v|^2+|\ln f(t,x,v)|) dxdv < \infty.$$

Ce théorème repose essentiellement sur un résultat de stabilité, comme dans le cas des solutions dispersives, qui s'énonce ainsi : si $(f_n)$ est une suite de solutions renormalisées de (1.4) qui satisfait les estimations uniformes suivantes : pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_T > 0$ (indépendante de $n$) telle que

$$\sup_{n\geq 0} \sup_{t\in]0,T[} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}^D} f_n(t,x,v)(1+|x-vt|^2+|v|^2+|\ln f_n(t,x,v)|) dxdv \leq C_T,$$

$$\sup_{n\geq 0} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^D} \mathcal{D}(f_n)(t,x) dxdt \leq C_T,$$

alors on peut extraire une sous-suite de $(f_n)$ qui converge au sens des distributions vers une fonction $f$ qui est une solution renormalisée de (1.4). De plus, cette limite $f$ vérifie l'estimation :

$$\forall T > 0, \quad \exists C'_T > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}^D} f(t,x,v)(1+|x|^2+|v|^2+|\ln f(t,x,v)|) dxdv \leq C'_T,$$

pp. $t \in ]0, T[$.

L'existence d'une sous-suite convergente résulte simplement des estimations uniformes en $n$, qui impliquent la compacité faible de la suite $(f_n)$ dans $L^1$ (par le théorème de Dunford-Pettis). En revanche, la difficulté majeure de ce résultat de stabilité est évidemment le passage à la limite faible dans le terme de collision (quadratique en $f$). Cela requiert une grande technicité, en combinant des compacités faible et forte (cette dernière étant obtenue grâce à des lemmes de moyenne) dans $L^1$, à des techniques de renormalisation et de dérenormalisation (on établit de la compacité forte sur les moyennes en vitesse de $\frac{1}{\delta}\ln(1+\delta f)$ et en faisant tendre $\delta \to 0$, on obtient de la compacité forte sur les moyennes en vitesse de $f$).

Enfin, ce lemme de stabilité, appliqué à des suites de solutions de problèmes approchés (dont la résolution est classique, par des théorèmes de point fixe) permet d'obtenir une solution renormalisée au problème limite (1.4).

La méthode de DiPerna-Lions fournit donc une théorie d'existence globale en temps satisfaisante pour l'équation de Boltzmann, car elle requiert assez peu d'hypothèses sur le noyau de collision $q$, ainsi que sur la donnée initiale $f^0$ (on se contente juste des bornes "naturelles" fournies par l'équation). Cette méthode s'applique aussi à des variantes de l'équation de Boltzmann (comme l'équation de Boltzmann-Fokker-Planck, voir [DL88]), et à des équations cinétiques modélisant d'autres types d'interaction entre particules, ce que nous allons voir dans la section suivante.

# 2 Modèles de coagulation-fragmentation

On considère maintenant un autre type d'interaction, entre objets de tailles $y \in Y$ variables, qu'on désigne classiquement par le terme "agglomérats". Typiquement, il s'agit de particules solides ou liquides en suspension dans un gaz (par exemple, des gouttelettes dans un spray), mais aussi des suspensions colloïdales, des polymères, ou, à plus grande échelle, des planètes, des étoiles, des astéroïdes. On s'intéresse à la situation où, sous l'effet de certaines forces, ces agglomérats évoluent selon deux mécanismes opposés, qui modifient leur taille : le processus de coagulation, où des agglomérats vont se regrouper pour former un agglomérat de taille plus grande, et le processus de fragmentation, où, grâce à une dynamique interne, un agglomérat se scinde en plusieurs autres, de taille plus petite. La variable "taille", qui représente l'état d'une particule au cours du temps, peut correspondre (selon

le type d'agglomérats) à la masse, au rayon, ou au volume d'une particule (dans ce cas on a une variable continue $y \in ]0, +\infty[$), ou alors au nombre de monomères d'un polymère (la variable $y$ est alors discrète, $y \in \mathbb{N}$). On peut aussi adopter une description plus précise où la variable $y$ intègre plusieurs caractéristiques (par exemple la quantité de mouvement, voire l'énergie interne de la particule, en plus de sa masse), et dans ce cas, on a $y \in \mathbb{R}^D$, avec $D \in \mathbb{N}$.

On va se restreindre au cas des interactions binaires (comme pour l'équation de Boltzmann), qu'on schématisera de la façon suivante :

$$\{y\} + \{y^*\} \longrightarrow \{y'\}$$

pour la coagulation de deux agglomérats de taille $y$ et $y^*$ en un autre de taille $y'$, et réciproquement,

$$\{y'\} \longrightarrow \{y\} + \{y^*\}$$

pour la fragmentation d'un agglomérat de taille $y'$ en deux autres, de taille $y$ et $y^*$. Si la variable $y$ désigne la masse des particules, on aura évidemment la relation $y' = y + y^*$.

Au niveau de la modélisation, on peut décrire un système d'agglomérats de manière continue, suivant la théorie cinétique, au moyen d'une densité de particules $f = f(t, x, y) \geq 0$, où la variable taille $y$ va jouer le rôle de variable microscopique. Nous pouvons alors dériver différents modèles mathématiques de coagulation-fragmentation, sous la forme d'équations integro-différentielles, avec un second membre $Q(f)$ décrivant les interactions entre particules. Dans les sous-sections qui suivent, nous allons décrire brièvement ces différents modèles, du plus simple au plus complexe, ainsi que les principaux résultats connus pour chacun d'eux, et nous présenterons ensuite un modèle purement cinétique (où la variable $y$ intègre la masse, la vitesse et l'énergie des particules), qui fait l'objet de la première partie de cette thèse.

## 2.1 Les modèles classiques

### 2.1.1 Modèles homogènes en espace

Les modèles originels de coagulation datent du début du XX$^{\text{e}}$ siècle : 1916 pour le cas discret des suspensions colloïdales [Smo16], [Smo17], 1928 pour le cas continu [Mü28]. Ce sont des modèles homogènes en espace, où les agglomérats sont caractérisés uniquement par leur masse $y = m \in ]0, +\infty[$. La

densité de particules $f$ ne dépend alors que du temps $t$ (pas de l'espace $x$) et de la masse $y = m$ des particules : on a $f = f(t, m) \geq 0$. A cause de l'hypothèse d'homogénéité spatiale, cette description est plutôt macroscopique, et la seule interaction envisagée entre les particules est la coagulation binaire (la fragmentation est négligée, ainsi que les collisions, ou autres phénomènes de condensation, évaporation,...). On suppose également que le système n'est soumis à aucune force extérieure. Sous ces conditions, la dynamique est décrite par *l'équation de coagulation de Smoluchowski*

$$\partial_t f = Q_c(f, f),$$

où, comme dans l'équation de Boltzmann, le terme de réaction $Q_c(f, f)$ (quadratique en $f$) compte la variation du nombre de particules à l'état $y = m$ à l'instant $t$. On a

$$Q_c(f, f) = Q_c^+(f, f) - Q_c^-(f, f),$$

avec, pour tout $(t, m) \in ]0, +\infty[^2$,

$$\begin{cases} Q_c^+(f, f)(t, m) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^m A(m^*, m - m^*) f(t, m^*) f(t, m - m^*) dm^*, \\ \\ Q_c^-(f, f)(t, m) = \displaystyle\int_0^{+\infty} A(m, m^*) f(t, m) f(t, m^*) dm^*, \end{cases}$$

dans le cas continu. Pour le cas discret (lorsque $y = i \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de composants d'un même agglomérat), le terme de coagulation s'écrit de façon analogue :

$$Q_c(f, f)(t, i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} A(j, i - j) f(t, i) f(t, i - j) - \sum_{j=1}^{+\infty} A(i, j) f(t, i) f(t, j).$$

La fonction $(m, m^*) \to A(m, m^*)$ est appelée noyau de coagulation, elle gouverne l'occurrence des coagulations binaires, en fonction des masses $m, m^*$ des particules mises en jeu. Le noyau originel introduit par Smoluchowski est

$$A(m, m^*) = \left(m^{1/3} + m^{*1/3}\right) \left(m^{-1/3} + m^{*-1/3}\right) \tag{2.1}$$

(pour le cas des suspensions colloïdales), mais en fonction du domaine d'application physique, le taux $A$ peut prendre diverses formes. On pourra consulter [Ald99] à ce sujet. Toutefois, le cas suivant a été beaucoup étudié :

$$A(m, m^*) = m^\alpha m^{*\beta} + m^\beta m^{*\alpha}, \qquad \alpha, \beta \in [0, 1].$$

Le terme $Q_c^+(f,f)$ représente le nombre de particules de masse $m$ qui sont créées à l'instant $t$, provenant de toutes les réactions de coagulation impliquant des particules de masses $m^*$ et $m-m^*$, avec $0 < m^* < m$. Le terme $Q_c^-(f,f)$ compte le nombre de particules de masse $m$ perdues à l'instant $t$, c'est-à-dire toutes celles qui sont impliquées dans des coagulations avec une autre particule de masse $m^* > 0$. Le facteur $\frac{1}{2}$ dans le terme de gain traduit le fait que les réactions de coagulation ne conservent évidemment pas le nombre de particules, elles le divisent par 2. Donc, en moyenne, on perd deux fois plus de particules de masse $m$ que l'on en gagne.

Si on veut également prendre en compte la fragmentation binaire, on ajoute un terme de réaction linéaire au second membre, de la forme

$$Q_f(f) = Q_f^+(f) - Q_f^-(f)$$

$$\begin{cases} Q_f^+(f)(t,m) = \displaystyle\int_m^{+\infty} B(m',m) f(t,m') dm', \\ \\ Q_f^-(f)(t,m) = \dfrac{1}{2} f(t,m) B_1(m), \qquad \text{où} \qquad B_1(m') = \displaystyle\int_0^{m'} B(m',m) dm. \end{cases}$$

dans le cas continu, et

$$Q_f(f)(t,i) = \sum_{j=i+1}^{+\infty} f(t,j) B(j,i) - \frac{1}{2} f(t,i) \sum_{j=1}^{i-1} B(i,j)$$

dans le cas discret. Signalons tout de même que des modèles de fragmentation non-linéaires existent, mais nous ne nous y intéresserons pas ici. La fonction $B$ est le noyau de fragmentation, elle mesure la fréquence des réactions de fragmentation d'un agglomérat de masse $m'$ qui se scinde en deux agglomérats de masses $m$ et $m'-m$, pour $0 < m < m'$. L'exemple le plus courant est

$$B(m',m) = (m')^\gamma \quad \text{ou} \quad (1+m')^\gamma, \qquad 0 < m < m', \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

En dehors de ces exemples, il est difficile de connaître quelles sont les hypothèses physiques pertinentes sur ces noyaux $A$ et $B$. En revanche, les hypothèses de symétrie suivantes sont naturelles :

$$\forall m > 0, \quad \forall m^* > 0, \qquad A(m,m^*) = A(m^*,m), \tag{2.2}$$

$$\forall 0 < m < m', \qquad B(m',m) = B(m',m'-m). \tag{2.3}$$

La modélisation du processus de coagulation-fragmentation se résume au moyen du diagramme suivant :

$$\{m\} + \{m^*\} \overset{A(m,m^*)=A(m^*,m)}{\longrightarrow} \{m'\}$$

$$\{m'\} \overset{B(m',m)=B(m',m^*)}{\longrightarrow} \{m\} + \{m^*\},$$

où $m, m^* > 0$ et $m' = m + m^*$. Avec ces notations, l'équation décrivant l'évolution de la densité de particules $f = f(t, m)$ est donc

$$\partial_t f = Q_c^+(f, f) - Q_c^-(f, f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f) := Q(f), \tag{2.4}$$

c'est *l'équation continue de coagulation-fragmentation homogène en espace*. Il s'agit donc du modèle de base, qui correspond à une approche plutôt macroscopique. Il a été introduit par Melzak dans [Mel57].

Ce modèle possède une propriété physique importante : la conservation formelle de la masse totale des agglomérats au cours du temps, qui s'écrit

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} mf(t, m)dm = 0.$$

Cette conservation vient de la relation (formelle) fondamentale suivante : pour toute fonction $\psi$ n'agissant que sur la variable microscopique $m$, on a

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} \psi(m)f(t, m)dm = \int_0^{\infty} Q(f)(t, m)\psi(m)dm$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (A(m, m^*)ff^* - B(m + m^*, m)f')(\psi' - \psi - \psi^*)dm^*dm,$$

où $\psi = \psi(m)$, $\psi^* = \psi(m^*)$, $\psi' = \psi(m + m^*)$, et $f = f(t, m)$, $f^* = f(t, m^*)$, $f' = f(t, m + m^*)$. Si on pose $\psi(m) = m$, on annule donc la quantité désirée. Signalons toutefois que cette propriété de conservation n'est que formelle (elle s'obtient en dérivant des intégrales à paramètre sans hypothèse de validité). En réalité, il n'y a pas toujours conservation de la masse, c'est-à-dire qu'en notant $M(t) = \int_0^{+\infty} mf(t, m)dm$ la masse totale du système à l'instant $t$, les solutions $f$ du modèle considéré peuvent vérifier $M(t) < M(0)$ à partir d'un certain temps fini $T_g$, appelé le temps de gélification. On peut interpréter ce phénomène de la façon suivante : le processus de coagulation s'emballe, créant des agglomérats de masse de plus en plus grande, jusqu'à créer des

particules de masse infinie (du "gel"), qui ne sont plus prises en compte dans la masse totale du système. Cela correspond donc à une transition de phase du système.

Concernant les résultats d'existence et d'unicité pour le probleme de Cauchy, on renvoie à [Ste89], [Ste90], [Lam04] et à [LM02b] où les hypothèses faites sur les noyaux $A$ et $B$ sont plus générales, donnant le résultat suivant :

**Théorème 2.1 (Laurençot-Mischler, 2001)** *On suppose que les noyaux $A$ et $B$ vérifient les hypothèses de symétrie* (2.2), (2.3), *ainsi que les hypothèses de croissance*

$$\forall (m,m^*) \in ]0,+\infty[^2, \qquad 0 \leq A(m,m^*) \leq K_0(1+m)(1+m^*),$$
$$\forall (m,m^*) \in ]0,+\infty[^2, \qquad 0 \leq B(m+m^*,m) \leq K_0(1+m)(1+m^*),$$
$$\forall m_0 > 0, \qquad \sup_{m\in[0,m_0]} \frac{A(m,m^*)}{m^*} \underset{m^*\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\forall m_0 > 0, \qquad \sup_{m\in[0,m_0]} \frac{B(m+m^*,m^*)}{m^*} \underset{m^*\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Alors, pour toute donnée initiale $f^0 \in L^1(]0,+\infty[,(1+m)dm))$, il existe une fonction positive $f = f(t,m) \in C^0([0,+\infty[;L^1(]0,+\infty[)$ telle que*

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^{+\infty} m f(t,m)dm \leq \int_0^{+\infty} m f^0(m)dm,$$

*$f(0,.) = f^0$, et qui est solution au sens des distributions de l'équation* (2.4).

Pour la question de la conservation de la masse, on dispose de nombreux résultats (avec diverses hypothèses sur la forme des noyaux $A$ et $B$), mais nous ne développerons pas cet aspect ici. On renvoie à [Whi80], [VDE86], [BC90], [Ste91], [PdC95], [DS96], [LM02b], [ELMP03].

Enfin, le cas où la théorie mathématique est la plus avancée est le modèle discret correspondant au cas où des particules ne peuvent augmenter et diminuer de taille que par addition/soustraction d'un monomère (une particule de taille $i = 1$), ce qui correspond à des noyaux $A$ et $B$ vérifiant :

$$A(i,j) = 0 \quad \text{lorsque } i \neq 1 \text{ et } j \neq 1,$$
$$B(i,j) = 0 \quad \text{lorsque } j \neq 1 \text{ et } j - i \neq 1.$$

Ce modèle a été introduit en 1935 par Becker et Döring [BD35] pour décrire la condensation de gouttelettes de liquide à partir d'une vapeur. Pour les résultats mathématiques sur l'équation de Becker-Döring, on renvoie à [BCP86], ainsi qu'à [LM02d] et aux références incluses.

### 2.1.2 Le modèle inhomogène en espace

Si on prend en compte la position des particules $x \in \mathbb{R}^3$, on accède à une description du processus de coagulation-fragmentation à un niveau plus microscopique. On peut alors supposer que les particules suivent un mouvement Brownien avec un coefficient de diffusion $d(m) \geq 0$ dépendant de leur masse. On supposera aussi que le système étudié n'est pas confiné dans un volume. Au niveau de la densité de particules $f = f(t, x, m)$, cela amène *l'équation continue de coagulation-fragmentation diffusive* :

$$\partial_t f - d(m)\Delta_x f = Q_c^+(f, f) - Q_c^-(f, f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f) := Q(f). \quad (2.5)$$

Un exemple typique de coefficient de diffusion est $d(m) = D_0 m^{-\delta}$, avec $\delta \in ]0, 1]$, $D_0 > 0$, voir [SS88].

Le premier résultat d'existence pour ce modèle a été montré par Laurençot et Mischler dans [LM02a], où deux cadres dans lesquels l'existence et la stabilité peuvent être obtenues. Mais cela exige des hypothèses de structure assez fortes sur les noyaux $A$ et $B$ :

**Théorème 2.2 (Laurençot-Mischler, 2001)** *On suppose que le coefficient de diffusion $d$ vérifie $0 < d \in C^0(]0, +\infty[)$, et que les noyaux $A$ et $B$ vérifient les mêmes hypothèses de symétrie et de croissance que dans le théorème 2.1.*

*i) On fait l'hypothèse supplémentaire, dite* d'équilibre en détails*,*

$$\exists M \in L^1(]0, +\infty[, (1+m)dm), \quad \forall (m, m^*) \in ]0, +\infty[^2,$$

$$A(m, m^*)M(m)M(m^*) = B(m + m^*, m)M(m + m^*).$$

*Pour toute donnée initiale $f^0 = f^0(x, m) \in L^1(\mathbb{R}^3 \times ]0, +\infty[, (1+m)dmdx)$ positive telle que*

$$H(f^0|M) := \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \left[ f^0 \left( \ln \frac{f^0}{M} - 1 \right) + M \right] dmdx < \infty, \quad (2.6)$$

*il existe une solution $0 \leq f \in C^0([0, +\infty[; L^1(\mathbb{R}^3 \times ]0, +\infty[))$ de l'équation (2.5) au sens des distributions, vérifiant $f(0, ., .) = f^0$.*

*ii) On fait l'hypothèse supplémentaire, dite* de monotonie*,*

$$\forall m \geq m^* \geq 0, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} A(m^*, m - m^*) & \leq & A(m^*, m) \\ B(m, m^*) & \leq & C \times A(m^*, m) + \Lambda(m^*), \end{array} \right.$$

*avec* $\Lambda \in L^1(]0,+\infty[)$, $m \mapsto m\Lambda(m) \in L^\infty(]0,+\infty[)$.
*Pour toute donnée initiale* $f^0 = f^0(x,m) \in L^1(\mathbb{R}^3\times]0,+\infty[,(1+m)dmdx)$ *positive, il existe une solution* $0 \leq f \in C^0([0,+\infty[;L^1(\mathbb{R}^3\times]0,+\infty[))$ *de l'équation* (2.5) *au sens des distributions, vérifiant* $f(0,.,.) = f^0$.

La fonction $M$ donnée dans le premier point du théorème est appelée un équilibre de l'équation (2.5) : la fonction $f(t,x,m) = M(m)$ est en effet une solution stationnaire de (2.5). De plus, on a une estimation formelle analogue au $H$-théorème de Boltzmann : toute solution $f$ vérifie (formellement)

$$\frac{d}{dt}H(f|M) \leq 0,$$

avec des termes de dissipation. C'est pourquoi la quantité $H(f|M)$ porte le nom d'entropie relative. Enfin, toujours dans [LM02a], un résultat sur la conservation de la masse et le comportement en temps grand des solutions est obtenu.

Des résultats existent aussi pour les modèles discrets correspondants. On pourra consulter [LW98b], [LW98a] ou [LM02c] pour un résultat plus général.

## 2.2 Les modèles cinétiques

La description précédente, bien que relativement précise, ignore la vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ des particules. C'est pourquoi dans les années 2000, des modèles cinétiques (tenant compte de la variable vitesse) décrivant le processus de coagulation-fragmentation ont été étudiés. Ce genre de modèle présente de nombreux intérêts. Par exemple, l'interaction particule-fluide est plus aisée à décrire au niveau cinétique, les questions d'énergie ne se voient qu'à cette échelle relativement microscopique. Et bien entendu, la dynamique d'un système inhomogène en espace ne suit pas toujours un comportement diffusif.

Dans ces modèles, l'état des particules à un instant $t$ et à une position $x \in \mathbb{R}^3$ est caractérisé par leur masse $m \in ]0,+\infty[$ et leur vitesse $v \in \mathbb{R}^3$. Au niveau microscopique, lors de chaque réaction de coagulation/fragmentation entre deux agglomérats, la masse et la quantité de mouvement sont conservées. La variable microscopique décrivant le plus simplement l'état des particules est donc $y = (m,p)$, où $p = mv \in \mathbb{R}^3$. La densité de particules dépend ici de quatre variables : $f = f(t,x,y) = f(t,x,m,p) \geq 0$, et on a, avec les notations des sous-sections précédentes,

$$\{y\} + \{y^*\} \overset{A(y,y^*)=A(y^*,y)}{\longrightarrow} \{y' = y + y^*\},$$

pour schématiser la coagulation, et

$$\{y'\} \overset{B(y',y)=B(y',y^*)}{\longrightarrow} \{y\} + \{y^* = y' - y\}$$

pour la fragmentation, avec $y^* = (m^*, p^*)$ et $y' = (m', p') = (m + m^*, p + p^*)$.

Mais à la différence des collisions entre particules (contexte de l'équation de Boltzmann), les interactions microscopiques décrites ici ne conservent pas l'énergie cinétique (comme des chocs inélastiques/mous). Plus précisément, lors de la coagulation de deux agglomérats, on a une perte d'énergie cinétique, alors que réciproquement, la fragmentation binaire d'un agglomérat crée de l'énergie cinétique. En effet, l'énergie totale des deux particules $\{y\}$ et $\{y^*\}$ vaut

$$E(y, y^*) = \frac{1}{2} m|v|^2 + \frac{1}{2} m^*|v^*|^2 = \frac{|p|^2}{2m} + \frac{|p^*|^2}{2m^*},$$

alors que celle de la particule $\{y'\} = \{y + y^*\}$ vaut

$$E(y') = \frac{1}{2} m'|v'|^2 = \frac{|p'|^2}{2m'} = \frac{|p + p^*|^2}{2(m + m^*)},$$

et un calcul simple montre que

$$E(y, y^*) - E(y') = \frac{mm^*}{2(m + m^*)}|v - v^*|^2 \geq 0,$$

d'où $E(y, y^*) \geq E(y')$.

Cette modélisation purement cinétique du processus de coagulation - fragmentation se traduit mathématiquement par une équation similaire à l'équation de Boltzmann, à savoir

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f),$$

où l'opérateur de transport remplace l'opérateur de diffusion, et où le second membre $Q(f)$ est le terme de réaction, qui modélise les interactions entre agglomérats. L'opérateur $f \mapsto Q(f)$ est le même que dans l'équation (2.5), sauf qu'il agit sur une variable vectorielle $y = (m, p) \in ]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$.

Nous allons maintenant présenter les travaux existant pour le modèle cinétique de coagulation seule et pour le cas de la fragmentation seule, puis expliquer comment obtenir (dans ce cadre cinétique) une théorie d'existence pour le couplage coagulation-fragmentation.

### 2.2.1 Le modèle cinétique pour la coagulation seule

Le cas de la coagulation seule a été étudié d'abord par Roquejoffre et Villedieu (dans [RV01]) pour le cas homogène en espace ($f = f(t, m, p)$), puis par Escobedo, Laurençot et Mischler dans [ELM04], pour le modèle complet. Présentons rapidement le résultat obtenu dans ce dernier cas. On considère donc *l'équation cinétique de coagulation*, qui s'écrit, dans les variables $(m, p)$ :

$$\begin{cases} \partial_t f + \dfrac{p}{m} \cdot \nabla_x f = Q_c(f, f) \\ \\ t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad y = (m, p) \in Y := ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{2.7}$$

où $f = f(t, x, m, p) \geq 0$, et où le terme de réaction est donné par

$$Q_c(f, f) = Q_c^+(f, f) - Q_c^-(f, f),$$

$$\begin{cases} Q_c^+(f, f)(t, x, m, p) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^m A(y^*, y - y^*) f(t, x, y^*) f(t, x, y - y^*) dm^* dp^*, \\ \\ Q_c^-(f, f)(t, x, m, p) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} A(y, y^*) f(t, x, y) f(t, x, y^*) dm^* dp^*. \end{cases}$$

Bien entendu, dans ce modèle cinétique, le noyau de coagulation $A \geq 0$ dépend aussi de la quantité de mouvement, en plus de la masse des particules. Un exemple d'un tel noyau est

$$A(y, y^*) = (r + r^*)^2 |v - v^*|, \tag{2.8}$$

où $r = m^{1/3}$ est le rayon des particules, et $v = \frac{p}{m}$ leur vitesse. On s'intéresse au problème de l'existence de solutions à l'équation (2.7), qui vérifient une condition initiale donnée

$$f(0) = f^0 \quad \text{pour } (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times Y. \tag{2.9}$$

On fait pour cela, en plus de l'hypothèse classique de symétrie

$$0 < A(y, y^*) = A(y^*, y), \qquad \text{p.p. } (y, y^*) \in Y^2, \tag{2.10}$$

des hypothèses de structure et de croissance sur $A$ :

$$A(y, y^*) \leq A(y, y + y^*) + A(y^*, y + y^*), \qquad \forall (y, y^*) \in Y^2, \tag{2.11}$$

$$\sup_{y^* \in Y_{\delta,R}} \int_{Y_{\delta,R}} A(y,y^*) \mathbb{1}_{A(y,y^*)\geq M} dy \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.12}$$

$$\sup_{p^* \in \mathbb{R}^3,\ m^* \geq R^*} \int_{Y_{\delta,R}} \frac{A(y,y^*)}{|y^*|} dy \underset{R^*\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.13}$$

pour tous $R > \delta > 0$ avec $Y_{\delta,R} := ]\delta, R[ \times B_R \subset Y$. On dispose alors du résultat suivant :

**Théorème 2.3 (Escobedo-Laurençot-Mischler, 2004)** *Supposons que le noyau de coagulation $A$ vérifie* (2.10), (2.11), (2.12) *et* (2.13) *et que la donnée initiale $f^0 = f^0(x,y) \geq 0$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^3 \times Y, (1+m+|p|)dydx)$. Alors, il existe une solution $f \in C^0([0,+\infty[; L^1(\mathbb{R}^3 \times Y)) \geq 0$ de l'équation* (2.7) *au sens des distributions, qui vérifie* (2.9). *De plus, on a la décroissance de la masse totale du système ($M(t) := \int_{\mathbb{R}^3} \int_Y m f(t,x,y) dydx$ ) au cours du temps, et le nombre de particules tend vers* 0 *:*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_Y f(t,x,y) dydx \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les auteurs prouvent aussi la décroissance des normes $L^p$ ($p > 1$) ainsi que de l'énergie cinétique totale ($\int_{\mathbb{R}^3} \int_Y \frac{|p|^2}{2m} f(t,x,y) dydx$) au cours du temps, si celle-ci est finie à l'instant initial.

La démarche développée pour obtenir ce théorème d'existence est la suivante :

- Examiner les propriétés formelles de l'équation (2.7), afin d'obtenir le maximum d'estimations *a priori* sur les éventuelles solutions (c'est-à-dire qu'on cherche des quantités conservées, dissipées ou propagées au cours du temps par l'équation). Cela fournit un cadre fonctionnel dans lequel l'équation est bien définie au sens des distributions (le second membre $Q_c(f,f)$ est dans $L^1_{loc}$) : ici, on obtient l'espace des fonctions $f = f(t,x,m,p)$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_Y \left(\Phi(f) + (1+m+|p|)f\right) dydx < \infty,$$

  pour toute fonction convexe et positive $\Phi$, nulle en 0. Mais ce ne sont pas les seules quantités propagées, il y en a d'autres (notamment des termes dissipatifs quadratiques en $f$).

- Etablir un théorème de stabilité dans ce cadre : étant donnée une suite de solutions $(f_n)$ de l'équation (2.7) vérifiant les bornes précédemment obtenues uniformément en $n$, on peut en extraire une sous-suite qui converge (faiblement dans $L^1$) vers une solution $f$ de (2.7). Autrement dit, on peut passer à la limite dans l'équation. Pour cela :
  * On établit la compacité faible des suites $(f_n)$ et $Q_c(f_n, f_n)$ grâce au théorème de Dunford-Pettis, qui s'applique car pour toute fonction convexe et positive $\Phi$, la norme de Orlicz associée $\int_{\mathbb{R}^3}\int_Y \Phi(f(t,x,y))dydx$ est une fonctionnelle de Lyapunov, et donc la suite $\int_{\mathbb{R}^3}\int_Y \Phi(f_n(t,x,y))dydx$ est bornée uniformément en $n$ (on a donc notamment un contrôle sur les normes $L^p$, $p \in [1,\infty[$).
  * On passe à la limite faible dans le terme d'interaction $Q_c(f_n, f_n)$ : pour cela, de la compacité forte (dans $L^1$) sur les moyennes en $y = (m,p)$ est nécessaire. Elle s'obtient en adaptant les lemmes de moyennes classiques ([DLM91], [BGP$^+$00]) pour les équations de transport.
- Introduire une suite de problèmes approchant (2.7), plus simples à résoudre (l'existence résultant de théorèmes de point fixe), et appliquer le théorème de stabilité précédent à la suite $(f_n)$ de solutions approchées ainsi construites.

Il s'agit donc là de la méthode de DiPerna-Lions (utilisée pour résoudre l'équation de Boltzmann), sauf que la renormalisation est ici inutile, car on dispose de suffisamment d'estimations *a priori* pour donner un sens au terme de réaction $Q_c(f,f)$ en tant que distribution.

Signalons que dans [JK05], Jabin et Klingenberg ont obtenu aussi un théorème d'existence pour ce même modèle, mais dans un cadre très différent (des hypothèses plus restrictives sur la donnée initiale mais moins sur le noyau $A$), donnant ainsi un résultat complémentaire.

La conservation de la masse totale est un problème ouvert pour ce modèle, mais elle a lieu dans le cas homogène en espace pour le noyau donné par (2.8) (voir [FM05]).

### 2.2.2 Le modèle cinétique pour la fragmentation seule

On a vu dans le modèle précédent que le caractère fortement dissipatif de l'équation de coagulation (2.7) est la clef pour obtenir l'existence de solutions. Pour ce qui est du cas de la fragmentation, un problème majeur se pose : lors de chaque fragmentation d'agglomérat, de l'énergie cinétique est créée,

et donc l'énergie cinétique du système $\iint \frac{|p|^2}{2m} f dy dx$ va croître indéfiniment au cours du temps. Pour y remédier, une solution raisonnable est d'introduire une variable supplémentaire pour décrire l'état des agglomérats : leur énergie interne $e > 0$, qui est nécessaire pour créer la dynamique interne responsable de la fragmentation, et qui va être convertie en énergie cinétique lors de la création des deux particules filles. Avec cette modélisation, la variable microscopique est $y = (m, p, e) \in Y := ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3 \times ]0, +\infty[$. On dispose donc d'une "énergie totale" $\frac{|p|^2}{2m} + e$, qui est conservée lors de chaque réaction (en plus de la masse et de la quantité de mouvement), selon le schéma suivant :

$$\{y'\} \overset{B(y',y)}{\longrightarrow} \{y\} + \{y^*\},$$

où, $m' = m + m^*$, $p' = p + p^*$, et $\frac{|p'|^2}{2m'} + e' = \frac{|p|^2}{2m} + e + \frac{|p^*|^2}{2m^*} + e^*$, ce qui se réécrit

$$e' = e + e^* + E, \qquad E = \frac{|m'p - mp'|^2}{2mm'(m' - m)} = \frac{|m^*p - mp^*|^2}{2mm^*(m + m^*)} \geq 0.$$

Introduisons les notations suivantes :

- si $y = (m, p, e)$, $y^* = (m^*, p^*, e^*)$, alors on note

$$y' := y + y^* := (m + m^*, p + p^*, e + e^* + E)),$$

- si $y = (m, p, e)$, $y' = (m', p', e')$, avec $m < m'$ et $e < e' - E$, alors nous dirons que $y < y'$ et nous noterons

$$y^* := y' - y := (m' - m, p' - p, e' - e - E).$$

Le modèle de fragmentation cinétique correspondant est alors *l'équation de Bachelier-Chapman-Kolmogoroff-Smoluchowski* :

$$\partial_t f + \frac{p}{m} \cdot \nabla_x f = Q_f^+(f) - Q_f^-(f) \tag{2.14}$$

où le terme de réaction est donné par

$$\begin{cases} Q_f^+(f)(y) = \displaystyle\int_Y B(y', y) f(y') \mathbb{1}_{\{y' > y\}} dy', \\ \\ Q_f^-(f)(y) = \dfrac{1}{2} B_1(y) f(y), \qquad B_1(y') := \displaystyle\int_Y B(y', y) \mathbb{1}_{\{y < y'\}} dy, \end{cases}$$

où $f = f(t,x,m,p,e) \geq 0$, et $B$ désignant comme d'habitude le noyau de fragmentation. Le fait d'avoir introduit une énergie interne a pour conséquence que ce modèle conserve (formellement, bien entendu) l'énergie totale du système de particules, en plus de la masse et l'impulsion :

$$\frac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\left(m,p,\frac{|p|^2}{2m}+e\right)f(t,x,y)dydx = 0.$$

Le problème de l'existence de solutions pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f + \frac{p}{m}\cdot\nabla_x f = Q_f^+(f) - Q_f^-(f), \qquad (t,x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3\times Y, \\ \\ f(0,x,y) = f^0(x,y) \end{cases} \tag{2.15}$$

a été traité par Jabin et Soler dans [JS06] :

**Théorème 2.4 (Jabin-Soler, 2006)** *On suppose que le noyau de fragmentation $B$ (en plus de l'hypothèse de symétrie $B(y',y) = B(y',y^*)$) vérifie la propriété suivante : il existe $\alpha > 1$ et une fonction sur-linéaire $\Phi : ]0,+\infty[^2 \to ]0,+\infty[$ telle que*

$$\int_Y \left(1+m+\left(\frac{|p|}{m}\right)^\alpha\right)B(y',y)\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dy \leq C\Phi\left(m',\frac{|p'|^2}{2m'}+e'\right), \tag{2.16}$$

$$B(y',y) \leq C\Phi\left(m',\frac{|p'|^2}{2m'}+e'\right). \tag{2.17}$$

*i) On considère une donnée initiale $f^0 = f^0(x,y) \geq 0$ dans $M^1(\mathbb{R}^3\times Y)$ (l'espace des mesures de Radon) telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_Y\left(\left(\frac{|p|}{m}\right)^\alpha + \tilde{\Phi}\left(m',\frac{|p'|^2}{2m'}+e'\right)\right)f^0(x,y)dydx < \infty, \tag{2.18}$$

*où $\tilde{\Phi}$ est une fonction sur-linéaire vérifiant $\frac{\tilde{\Phi}(a,b)}{\Phi(a,b)} \underset{a+b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*
*Alors, pour tout $T > 0$, il existe une mesure positive $f \in L^\infty(]0,T[; M^1(\mathbb{R}^3\times Y))$ qui est solution faible du problème (2.15) (la formulation faible est l'équation intégrale obtenue en intégrant (2.14) contre une fonction test $\psi \in \mathcal{D}([0,T[\times\mathbb{R}^3\times Y)$, où figure un terme de bord traduisant la condition initiale).*

*ii) On suppose de plus que la donnée initiale est une fonction* $f^0 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times Y)$*, qui vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_Y mf^0(x,y)\log f^0(x,y)dydx < \infty, \tag{2.19}$$

*et que la fonction sur-linéaire* $\tilde{\Phi}$ *intervenant dans la condition* (2.18) *vérifie* $\frac{\tilde{\Phi}(a,b)}{\log(a+b)\Phi(a,b)\log\Phi(a,b)} \underset{a+b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *(ce qui est plus restrictif).*
*Alors, pour tout* $T > 0$*, toute solution faible* $f$ *du problème* (2.15) *est dans* $L^\infty(]0,T[; L^1(\mathbb{R}^3 \times Y))$*, et*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_Y mf(t,x,y)\log f(t,x,y)dydx \in L^\infty(]0,T[).$$

La preuve de ce théorème est légèrement différente de l'approche employée par Escobedo-Laurençot-Mischler pour l'équation (2.7) mais on reste quand même dans une théorie d'existence/stabilité. Ici, on travaille d'abord avec des solutions mesures, puis on résout le problème dans $L^1$ grâce à la fonctionnelle $f \mapsto \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} mf\log f dydx$ (qui joue un rôle d'entropie), qui permet d'éviter les concentrations (sa croissance sur-linéaire entraîne l'absolue continuité de $f$ par rapport à la mesure de Lebesgue).

La difficulté dans l'étude de ce modèle cinétique de fragmentation est le faible nombre d'estimations *a priori* (par exemple, la propagation des normes $L^p$ pour $p > 1$ ne semble pas avoir lieu), d'où la nécessité de travailler avec une théorie $L\log L$. Cependant ce cadre fonctionnel est suffisant pour donner un sens à l'équation (2.14) dans $\mathcal{D}'$ sans renormaliser les termes (car elle est linéaire), et la partie stabilité (où l'on passe à la limite dans l'équation) est relativement standard.

Enfin, les hypothèses faites sur le noyau $B$ dans cet étude sont assez générales : on modère seulement sa croissance. De toute façon, il est difficile de connaître exactement la forme des noyaux $B$ physiquement pertinents, dans une telle description, qui comporte beaucoup de paramètres.

### 2.2.3 Couplage coagulation-fragmentation

Pour terminer cette partie consacrée aux modèles de coagulation - fragmentation, on propose une théorie d'existence pour le modèle cinétique complet, couplant les deux processus. On s'intéresse donc au problème de Cauchy

suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f + \dfrac{p}{m} \cdot \nabla_x f = Q_c^+(f,f) - Q_c^-(f,f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f), \\ \\ f = f(t,x,y) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad y = (m,p,e) \in Y := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*, \\ \\ f(0,x,y) = f^0(x,y), \end{cases} \tag{2.20}$$

où les termes de réaction $Q_c^{\pm}(f,f)$, $Q_f^{\pm}(f)$ ont été définis auparavant.

Bien entendu, notre étude s'inspire largement des travaux [ELM04] et [JS06], nous reprenons la même description purement cinétique (tenant compte de l'énergie interne des particules), et nous employons la méthode de stabilité pour prouver l'existence de solutions, mais des obstacles nouveaux apparaissent :

- La différence de structure des termes de réaction (ceux de coagulation sont quadratiques, alors que ceux de fragmentation sont linéaires) rend difficile l'obtention d'estimations *a priori*. Rappelons que le cas de la coagulation seule était favorable (grâce au caractère dissipatif de l'équation (2.7)), alors que celui de la fragmentation seule semblait seulement propager une entropie $\iint_{\mathbb{R}^3 \times Y} mf \log f dydx$ (en plus des lois de conservation de la masse et de l'énergie). Ici, sur le problème complet (2.20), on va pouvoir propager les normes $L^p$, $p > 1$, au prix de quelques hypothèses techniques (qui consistent à équilibrer les contributions de chaque terme de réaction).
- L'ensemble des estimations *a priori* obtenues est quand même insuffisant pour définir l'équation (2.20) dans $\mathcal{D}'$, à cause de la structure quadratique des termes de coagulation. En effet, les hypothèses faites sur $A$ ne suffisent pas à avoir $Q_c^-(f,f) \in L^1_{loc}$. Il est donc nécessaire de réutiliser complètement la méthode de DiPerna-Lions pour l'équation de Boltzmann, en ayant recours aux solutions renormalisées, ce qui n'était pas le cas dans [ELM04] et [JS06], ni dans les autres modèles de coagulation-fragmentation.

Ici, nous avons besoin d'un certain nombre d'hypothèses de structure sur les noyaux $A$ et $B$ :

$$\forall (y, y^\star) \in Y^2, \quad A(y, y^\star) = A(y^\star, y), \tag{2.21}$$

$$\forall (y, y') \in Y^2, \quad y < y', \quad B(y', y) = B(y', y^\star). \tag{2.22}$$

$$\forall (y, y^\star) \in Y^2, \quad A(y, y^\star) \leq A(y, y') + A(y^\star, y'). \tag{2.23}$$

Ces hypothèses sont classiques, ce sont celles de Escobedo-Laurençot-Mischler (pour $A$).

Egalement, nous faisons des hypothèses de croissance sur $A$ et $B$ :

$$\forall R > 0, \qquad \int_{Y_R} \frac{A(y, y^\star)}{|y^\star|} dy \underset{|y^\star| \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.24}$$

$$\forall R > 0, \qquad \int_{Y_R} \frac{B(y', y)}{|y'|} \mathbb{1}_{\{y < y'\}} dy \underset{|y'| \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.25}$$

où $Y_R := ]0, R[ \times B_R \times ]0, R[ \subset Y$.

On suppose également que $A$ et $B_1$ sont localement bornées :

$$\forall R > 0, \qquad A \in L^\infty(Y_R^2), \quad B_1 \in L^\infty(Y_R), \tag{2.26}$$

Un mot sur ces hypothèses : elles sont quand même plus restrictives que (2.12) (2.13), et malheureusement, beaucoup de noyaux "physiques" ne les suivent pas. En fait, ici, on réclame que $A$ soit bornée près de $m = 0$, ce qui exclut par exemple les noyaux du type (1.2) ou (2.8).

On fait également une hypothèse de troncature sur $B$ :

$$\exists C_0 > 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \text{ou} \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} m' > C_0 m \\ \\ e' + \frac{|p'|^2}{2m'} > C_0 \left( e + \frac{|p|^2}{2m} \right) \end{array} \right. \implies \quad B(y', y) = 0. \tag{2.27}$$

Cette hypothèse assez forte sur $B$ semble nécessaire pour propager le nombre de particules $\int_{\mathbb{R}^3} \int_Y f(t, x, y) dy dx$ au cours du temps, ce qui est essentiel pour établir une théorie d'existence dans $L^1$. Physiquement, cela est relativement cohérent : on empêche le processus de fragmentation de s'emballer, évitant ainsi la création de particules infiniment petites (phénomène inverse de la gélification).

Enfin, toujours dans la même idée de limiter le processus de fragmentation, on suppose que $A$ contrôle $B$ au sens suivant :

$$\exists s > 1, \quad \exists 0 < \delta < \frac{1}{6s - 5} < 1,$$

$$\forall y' \in Y, \quad \int_Y \frac{B(y',y)^s}{A(y,y')^{s-1}} \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy \leq 1 + m' + \frac{|p'|^2}{2m'} + e' + \frac{1}{2} B_1 (y')^\delta. \quad (2.28)$$

Cette dernière hypothèse est purement d'ordre technique, elle permet de propager les normes $L^p$ (pour $1 < p$) pour les solutions de (2.20), permettant ainsi d'utiliser les techniques de compacité $L^1$ faible employées dans [ELM04].

Nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 2.5 (Broizat, 2009)** *Soient $A$ et $B$ des noyaux vérifiant* (1.6)−(1.8) *et* (1.10) − (1.15) *et soit $f^0$ une donnée initiale positive qui vérifie*

$$K(f^0) := \iint_{\mathbb{R}^3 \times Y} \left( \left( 1 + m + \frac{|p|^2}{2m} + e + m|x|^2 \right) f^0(x,y) + f^0(x,y)^s \right) dxdy < \infty. \quad (2.29)$$

*Alors, pour tout $T > 0$, il existe $f \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^3 \times Y))$ telle que $f(0) = f^0$ et $f$ est une solution renormalisée de* (2.20)*. De plus,*

$$p.p\ t \in (0,T), \qquad \iint_{\mathbb{R}^3 \times Y} \left( 1 + m + \frac{|p|^2}{2m} + e + m|x|^2 \right) f(t,x,y) dxdy \leq K_T, \quad (2.30)$$

$$p.p\ t \in (0,T), \qquad \iint_{\mathbb{R}^3 \times Y} f(t,x,y)^s dxdy \leq K_T, \quad (2.31)$$

*où la constante $K_T$ dépend seulement de $C_0$, $T$, $K(f^0)$, $s$ et $\delta$ (définis par* (1.12) *et* (1.15)*).*

Ce résultat fait l'objet de l'article *A kinetic model for coagulation - fragmentation* [Bro10], qui constitue la première partie de ce manuscrit. Une première piste de réflexion pour prolonger ce travail serait d'affaiblir les hypothèses sur $A$ et $B$ (notamment l'hypothèse de troncature de $B$ pour obtenir la propagation du nombre de particules), et d'éclaircir l'hypothèse technique de contrôle de $B$ par $A$, qui est assez artificielle. Au-delà de ceci, l'unicité reste un problème ouvert, ainsi que la conservation de la masse (apparition ou non du phénomène de gélification).

# 3 Méthodes de moments sur des équations cinétiques

## 3.1 Présentation du problème

Nous allons maintenant nous intéresser à un autre type de problème de la théorie cinétique, la méthode des moments. On considère une équation cinétique générale

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \tag{3.1}$$

où $f = f(t,x,v) \geq 0$ est la densité de particules, $(t,x,v) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D$ et le second membre $Q(f)$ est un opérateur intégral agissant uniquement sur la variable microscopique $v$ (les variables $(t,x)$ sont locales), qui modélise une quelconque interaction entre particules (comme l'opérateur de collision de Boltzmann par exemple). En général, la résolution numérique de telle équations est très coûteuse, à cause du nombre de dimensions ($2D$ pour l'espace des phases plus le temps), et de la structure souvent compliquée de $Q(f)$.

C'est pourquoi on s'intéresse parfois au simple calcul des moments en vitesse des solutions $f$, donnés par

$$< m, f >:= \int_{\mathbb{R}^D} m(v) f(t,x,v) dv,$$

où $v \mapsto m(v)$ est un polynôme en les variables $v = (v_1, \ldots, v_D)$. En intégrant formellement l'équation (3.1) en $v$, on obtient la famille d'équations

$$\partial_t < m, f > + \nabla_x \cdot < vm(v), f >=< m, Q(f) >, \qquad m \in \mathbb{R}[v]. \tag{3.2}$$

On est donc passé d'une équation en dimension $2D+1$ à une famille d'équations en dimension $D+1$. D'un point du vue physique, la seule connaissance des premiers moments de $f$ suffit parfois, notamment pour reconstituer certaines quantités macroscopiques du système de particules, comme la densité locale $\rho(t,x)$, le champ de vitesse local $u(t,x)$, et la température locale du système $T(t,x)$ donnés par

$$\left(\rho, \rho u, \rho|u|^2 + D\rho T\right) = \int_{\mathbb{R}^D} \left(1, v, |v|^2\right) f(t,x,v) dv.$$

Toutefois, un problème naturel se pose : le système (3.2) n'est jamais fermé car quel que soit le nombre (fini) de polynômes $(m_j(v))_{1 \leq j \leq N}$ que

l'on considère, au moins un des polynômes $vm_i(v)$ aura toujours un degré plus élevé que les autres, et donc ne s'exprimera pas comme combinaison linéaire des autres. On ne peut donc pas écrire un système fini d'équations sur les moments $< m_j, f >$ qui est équivalent à (3.1), à cause du terme de transport. On est obligé, pour écrire un système sur les moments de $f$, de choisir une fermeture, c'est-à-dire de choisir une relation liant les moments $< vm_i, f >$ d'ordre les plus élevés et les autres $< m_j, f >$, pour les indices $i$ tels que $vm_i \notin Vect(m_1, \ldots, m_N)$. Evidemment, la difficulté est de choisir une "bonne fermeture", c'est-à-dire de faire en sorte que le système sur les moments obtenu constitue une bonne approximation de l'équation (3.1). Ce problème a déjà été bien étudié, essentiellement dans le contexte de l'équation de Boltzmann. On peut citer Grad [Gra49] pour les premiers travaux (1949), ainsi que Bobylev [Bob82] et Perthame [Per90], dans les années 80, parmi tant d'autres.

Dans [Lev96], Levermore aborde le problème de manière systématique, en ne se restreignant pas à l'équation (1.1), mais considérant une classe d'opérateurs $f \mapsto Q(f)$ vérifiant les principales propriétés structurelles de l'opérateur de collision de Boltzmann, à savoir l'annulation des premiers moments de $Q(f)$ :

$$< 1, Q(f) >=< v_j, Q(f) >=< |v|^2, Q(f) >= 0, \qquad j \in \{1, \ldots, D\} \quad (3.3)$$

et l'inégalité d'entropie

$$\int_{\mathbb{R}^D} \ln(f) Q(f) dv \leq 0, \quad (3.4)$$

pour toute fonction $f > 0$ appartenant à un certain domaine. Les relations (3.3) impliquent que les premiers moments des solutions de (3.1) vérifient le système de lois de conservation suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \partial_t < 1, f > & + & \nabla_x \cdot < v, f > & = & 0 \\ \partial_t < v, f > & + & \nabla_x \cdot < v \otimes v, f > & = & 0 \\ \partial_t < |v|^2, f > & + & \nabla_x \cdot < |v|^2 v, f > & = & 0 \end{array} \right. , \quad (3.5)$$

qui traduit la conservation locale de la densité, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. C'est pourquoi on recherche en général des fermetures pour des systèmes comprenant au moins ces premiers moments, qui correspondent aux "cinq invariants de collisions de Boltzmann" (pour $D = 3$, ce sont 1, $v_1$, $v_2$, $v_3$ et $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, voir [Cer90]). Toutefois,

les différentes fermetures proposées sont en général complexes, et on a du mal à vérifier que les systèmes de moments obtenus sont bien hyperboliques, et donc bien posés. Dans ces conditions, il est donc évidemment difficile de savoir dans quelle mesure un système fermé de moments approche l'équation (3.1), et de quantifier l'erreur en fonction de la fermeture choisie et du nombre $N$ d'équations qui composent le système de moments.

Notre approche est différente : nous allons analyser une méthode de moments avec la fermeture la plus simple qui soit, à savoir une fermeture linéaire. Bien entendu, il est *a priori* peu pertinent d'employer une telle fermeture pour une équation non-linéaire comme (1.1). En conséquence, nous allons nous restreindre à une équation cinétique linéaire simple :

$$\partial_t f + v\partial_x f = L(f),$$

en dimension 1 (i.e. $(x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), pour pouvoir faire une étude poussée de la méthode. La simplicité de ce contexte va permettre d'obtenir des résultats intéressants, et de calculer explicitement l'erreur commise en approchant l'équation cinétique (3.1) par un système de $N$ moments.

## 3.2 Résultats obtenus

On considère donc le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f = L(f), \qquad (x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \\ L(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} Q(v, v^*) f(t, x, v^*) dv^* - \lambda f \quad , \\ \\ f(t = 0, x, v) = f^0(x, v) \in L^2(\mathbb{R}^2) \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre et l'opérateur linéaire $f \mapsto L(f)$ modélise la situation où des particules qui se déplacent en ligne droite modifient leur vitesse suivant le noyau $Q$. On suppose que la donnée initiale $f^0$ a un support compact en vitesse :

$$\operatorname{supp} f^0 \subset \mathbb{R} \times I, \tag{3.7}$$

où $I$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Afin d'écrire un système exact sur les moments des solutions $f$, on supposera que le noyau $Q(v, v^*)$ est polynomial

en $v^*$, c'est-à-dire que

$$Q(v,v^*) = \left( q(v) \sum_{j=0}^{d} \alpha_j v^{*j} \right) \mathbb{1}_{\{(v,v^*)\in I^2\}}, \tag{3.8}$$

avec $q \in C_c^\infty(\overset{\circ}{I})$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_j)_{0\leq j\leq d} \in \mathbb{R}^{d+1}$. L'équation (3.6) se réécrit donc

$$\partial_t f + v\partial_x f = L(f) = q(v) \sum_{j=0}^{d} \alpha_j \left( \int_I v^{*j} f(t,x,v^*) dv^* \right) - \lambda f. \tag{3.9}$$

Sous ces hypothèses, il est facile de montrer que le problème (3.6) possède une unique solution dans $L^\infty(]0,T[;L^2(\mathbb{R}\times I))$, pour tout $T>0$, dont la régularité Sobolev en $x$ est propagée.

Considérons les moments en vitesse de $f$ sur $I$, par rapport à la base monomiale, notés

$$\mu_i^f(t,x) := \int_I v^i f(t,x,v) dv, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

En intégrant l'équation (3.9) contre les monômes $v^i$ ($i \in \mathbb{N}$), on obtient donc le système

$$\partial_t \mu_i^f + \partial_x \mu_{i+1}^f = \gamma_i \left( \sum_{j=0}^{d} \alpha_j \mu_j^f \right) - \lambda \mu_i^f, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{3.11}$$

où les $\gamma_i$ sont les moments de $q$ :

$$\gamma_i = \mu_i^q = \int_I v^i q(v) dv, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

On ferme donc ce système en considérant un nombre fini $N \in \mathbb{N}^*$ d'équations, et en supposant que le moment d'ordre $N+1$ est combinaison linéaire des autres. On va donc résoudre le problème :

$$\begin{cases} \partial_t \mu_i + \partial_x \mu_{i+1} = \gamma_i \left( \sum_{j=0}^{d} \alpha_j \mu_j \right) - \lambda \mu_i, \qquad i = 0,\dots,N, \\ \mu_{N+1} = \sum_{i=0}^{N} a_i \mu_i, \\ \mu_i(0,x) = \mu_i^{f^0} = \int_I v^i f^0(x,v) dv, \qquad i = 0,\dots,N, \end{cases} \tag{3.13}$$

où $(a_0, \dots, a_N)$ sont des coefficients réels (dépendant de $N$) qui doivent être choisis "de la meilleure façon possible", c'est-à-dire afin que les inconnues $\mu_0, \dots, \mu_N$ soient une bonne approximation des moments $\mu_i^f$ lorsque $N$ est grand. Le système (3.13) peut s'écrire matriciellement :

$$\partial_t M_N + \partial_x (A M_N) = B M_N, \tag{3.14}$$

où $M_N = M_N(t,x) = (\mu_0(t,x), \dots, \mu_N(t,x))^T \in \mathbb{R}^{N+1}$, et les matrices $A, B \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ sont définies par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{N-1} & a_N \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} & \vdots & & 0 \\ & (\gamma_i \alpha_j)_{\substack{0 \le i \le N \\ 0 \le j \le d}} & & \vdots \\ & \vdots & & 0 \end{array}\right) - \lambda I_{N+1}. \tag{3.15}$$

Ce système est hyperbolique si le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = det(X I_{N+1} - A) = X^{N+1} - \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$$

possède $N+1$ racines réelles distinctes, notées

$$spec(A) := \{\lambda_0, \dots, \lambda_N\}.$$

Cela garantit que le système (3.14) est bien posé (existence et unicité de la solution), mais n'assure pas du tout que le système possède de bonnes propriétés de stabilité. Par exemple, les normes des solutions $\sup_{0 \le i \le N} \sup_{t \in [0,T]} \|\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ peuvent exploser quand $N \to +\infty$, ce qui rend difficile toute estimation d'erreur. Le principal enjeu est donc d'abord d'obtenir une estimation de stabilité uniforme en $N$, et ceci en choisissant correctement les coefficients $(a_i)_{0 \le i \le N}$ de la fermeture, ce qui revient évidemment à choisir les valeurs propres $(\lambda_k)_{0 \le k \le N}$. Ensuite, à partir de cette estimation de stabilité, on est capable d'évaluer l'erreur commise sur les premiers moments de $f$, en calculant explicitement la vitesse de convergence.

Ce travail, en collaboration avec P.-E. Jabin et Y. Bourgault, fait l'objet de l'article *Convergence rate for the method of moments with linear closure relations* [BBJ12], dont le contenu figure en deuxième partie de ce manuscrit. Nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 3.1 (Bourgault-Broizat-Jabin, 2012)** *Supposons que la donnée initiale $f^0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie* (3.7) *et que le noyau $Q$ vérifie* (3.8)*. Si on choisit $I = [-1, 1]$ et les $(\lambda_k)_{0\leq k\leq N}$ comme étant les points de Tchebychev :*

$$\lambda_k := \cos\left(\left(\frac{2k+1}{2N+2}\right)\pi\right), \qquad 0 \leq k \leq N, \tag{3.16}$$

*alors la solution du système fermé* (3.14) *vérifie l'estimation de stabilité*

$$\sup_{0\leq i\leq N}\sup_{t\in[0,T]} \|\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{TC_{d,\alpha}\|q\|_{L^2(I)}}\|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.17}$$

*où la constante $C_{d,\alpha} = \sqrt{\pi(d+1)}\left(\sum_{j=0}^{d}{\alpha_j}^2\right)^{1/2}$ est indépendante de $N$.*

*Si de plus $f^0 \in H^k(\mathbb{R}^2)$ et $d = 0$ (l'entier défini par* (3.8)*), alors en notant $f$ la solution de* (3.6) *correspondante et en définissant ses moments par* (3.10)*, nous avons l'estimation d'erreur suivante sur le premier moment de $f$ :*

$$\|\mu_0 - \mu_0^f\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} \leq \frac{C}{N^{k-3/4}} \times \|f^0\|_{H^k(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.18}$$

*où $C \geq 0$ dépend de $T, \lambda, q$ et $k$.*

**Remarque 3.1** *La vitesse de convergence est ici donnée pour le premier moment (et pour un noyau $Q$ avec $d = 0$). On peut faire ce même calcul dans le cas général ($d \in \mathbb{N}$) et pour les moments d'ordre $i \in \mathbb{N}$, on obtient :*

$$\|\mu_i - \mu_i^f\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} \leq \frac{C\,N^{k\,(i+d)/N}}{N^{k-1}} \times \|f^0\|_{H^k(\mathbb{R}^2)}.$$

Nous disposons donc d'une convergence rapide de cette méthode, qui est d'autant meilleure que la donnée initiale est régulière. Mais, dans l'esprit des méthodes spectrales (voir [ST06] par exemple), notre méthode des moments avec fermeture linéaire ne semble pas propager la positivité des moments.

# 4 Modélisation du trafic routier

Les modèles mathématiques de trafic routier se répartissent essentiellement en trois catégories : les modèles particulaires (connus sous le nom de "Follow-The-Leader models" [GHR61], [BHN+95]), où les véhicules sont envisagés comme des particules ponctuelles, les modèles cinétiques ([Pri61],

[PH71], [Nel95], [KW97]) qui décrivent la dynamique microscopique de manière continue, et les modèles "fluides" ([LW55a], [LW55b], [Pay71], [Pay79], [AR00], [Zha02], [Col02], [Hel95]), qui correspondent à une description plus macroscopique. Evidemment, ces modèles sont reliés : par exemple, dans l'article [AKMR02], un modèle fluide est dérivé à partir d'un modèle particulaire. On pourra se référer à [KKW96], [Hel01], ou au récent [BD11] pour comprendre ces connexions. Nous nous intéressons ici aux modèles "fluides", qui décrivent l'évolution de quantités macroscopiques (comme la densité, la vitesse, le flux) dans l'espace au cours du temps. D'abord, nous présentons brièvement l'historique des modèles, en expliquant comment les modèles de base (assez sommaires) ont conduit à une modélisation du trafic routier par des systèmes hyperboliques avec contraintes, qui prennent en compte plus d'effets physiques, et gomment certains défauts de modélisation. Puis nous proposons pour conclure une version "multi-voies" de ces modèles de trafic routier avec contraintes, pour laquelle nous prouvons un théorème d'existence de solutions faibles pour des données initiales quelconques.

## 4.1 Les modèles de base

Les modèles les plus simples de trafic routier sont basés sur la loi de conservation scalaire

$$\partial_t n + \partial_x f(n) = 0,$$

où $n = n(t,x) \geq 0$ est la densité des véhicules à l'instant $t \geq 0$ et au point $x \in \mathbb{R}$ et $f(n)$ le flux associé. Cette équation traduit seulement la conservation du nombre de véhicules. On parle de "modèles du premier ordre". Le premier est dû à Lighthill et Whitham [LW55a], [LW55b] et à Richards [Ric56], dans les années 1950. Avec cette modélisation, la vitesse moyenne des véhicules $V = V(n(t,x))$ est imposée, et définie par la formule $nV(n) = f(n)$ en général (bien qu'on puisse aussi considérer la vitesse de groupe $\frac{\partial f}{\partial n}$). On choisit $V$ comme une fonction décroissante et positive de la densité $n$ pour des raisons de modélisation : la vitesse adoptée par les conducteurs est d'autant plus faible que la voie est saturée. Du coup, ces modèles du premier ordre ne peuvent pas décrire certains phénomènes existants comme des véhicules à faible vitesse sur une voie peu encombrée.

Les "modèles du second ordre" intègrent la vitesse des véhicules $u = u(t,x)$ comme seconde inconnue. Le flux est alors le produit $n(t,x)u(t,x)$, et

le modèle se compose de deux lois de conservations scalaires :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0 & \textit{(conservation de la densité),} \\ \\ \partial_t(nu) + \partial_x(nu^2) = 0 & \textit{(conservation de la quantité de mouvement).} \end{cases}$$

C'est le *système de la dynamique des gaz sans pression.* Le premier modèle utilisant cette approche est celui de Payne-Whitham [Pay71], [Pay79] dans les années 1970.

Mais cette analogie "fluide-véhicules" n'est pas très convaincante dans un premier temps, puisque dans [Dag95], Daganzo montre les faiblesses des modèles d'ordre 2, en exhibant des situations aberrantes créées par ces modèles, comme la non-propagation de la positivité de $u$ (laissant ainsi la possibilité aux véhicules de reculer).

## 4.2 Le modèle de Aw-Rascle

Pour réhabiliter ces modèles du second ordre, Aw et Rascle proposent en 2000 [AR00] un nouveau modèle qui corrige les défauts mis en avant par Daganzo (notamment la propagation de la positivité de $n$ et $u$ qui a lieu).

Les auteurs adoptent le point de vue suivant : les modèles du second ordre de trafic routier classiques créent des effets non physiques car ils veulent imposer les lois de la dynamique des gaz à des véhicules, niant ainsi une différence importante : les gaz sont formés de particules interagissant entre elles dans toutes les directions de l'espace, alors que les véhicules peuvent être assimilés à des particules anisotropes, qui interagissent essentiellement avec les particules qui les précèdent (dans une description unidimensionnelle). Il faut donc modifier le système des gaz sans pression (en fait l'équation de conservation de la quantité de mouvement) pour obtenir un modèle davantage pertinent de trafic routier.

Le modèle de Aw-Rascle consiste donc en les équations :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ (\partial_t + u\partial_x)(u + p(n)) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

ce qui se réécrit sous forme conservative

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_t(n(u + p(n))) + \partial_x(nu(u + p(n))) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

où le nouveau terme $p(n)$, qui s'apparenterait à une pression en dynamique des gaz, représente un "facteur d'anticipation" dans le contexte du trafic routier. En d'autres termes, ce terme va décrire la façon dont un conducteur adapte sa vitesse en fonction du trafic ambiant, c'est-à-dire en fonction de la densité en espace $n(., x)$. La présence de ce terme $p(n)$ (dénommé "décalage de vitesse") dans les modèles du second ordre permet donc de respecter le principe d'anisotropie décrit auparavant. Dans le modèle de Aw-Rascle, $p = p(n)$ est supposée être une fonction croissante de la densité $n$, possédant les propriétés de la fonction puissance $n^\gamma$, avec $\gamma > 0$ (les hypothèses essentielles sont le comportement de $p(n)$ près de $n = 0$, et la stricte convexité de $np(n)$). La somme $u + p(n)$ peut être vue comme la "vitesse préférée", c'est-à-dire la vitesse qu'un conducteur adopterait sur une route dégagée (pour $n$ voisin de 0), et c'est la quantité de mouvement associée à cette vitesse-là qui est conservée par le système.

Signalons également que ce modèle a été obtenu de manière indépendante par Zhang, dans [Zha02], et que dans [AKMR02], une dérivation du modèle de Aw-Rascle à partir d'un modèle particulaire est obtenue.

Mais malgré ces améliorations, ce modèle du second ordre présente encore un défaut de modélisation : il est impossible de limiter la densité de véhicules, c'est-à-dire d'imposer une contrainte du type $n \leq n^*$ (où $n^*$ désigne la densité maximale) au système. En effet, les bornes de la donnée initiale $n^0 = n(0, .)$ ne sont pas propagées au cours du temps.

## 4.3 Les modèles avec contraintes

### 4.3.1 Présentation

Durant la décennie 2000, des modèles avec contraintes ont été développés afin d'imposer des bornes sur les solutions de ces systèmes hyperboliques non-linéaires, issus de la dynamique des gaz. Les premiers résultats ont été obtenus dans [BBCR00], [Ber02], [BB03] (ainsi que dans [Ber03], pour une version numérique d'un problème de contrainte), dans des contextes non spécifiques au trafic routier.

Plus récemment (2008), Berthelin, Degond, Delitala et Rascle ont développé dans [BDDR08] un autre modèle de trafic routier, qui lui préserve la contrainte sur la densité $n \leq n^*$ au cours du temps. La dérivation de ce modèle est basée sur les idées suivantes :

- on modifie la "pseudo-pression" $p(n)$ (qui représente le décalage entre la

"vitesse préférée" $u + p(n)$ et la vitesse réelle $u$) dans le modèle de Aw-Rascle pour avoir

$$\lim_{n \to n^{*-}} p(n) = +\infty,$$

où $n^*$ est le seuil maximal de la densité de véhicules ($n = n^*$ correspond à la situation où la voie est saturée, et les voitures avancent collées l'une à l'autre). On crée donc une singularité en $n = n^*$, en remplaçant $p(n) = n^\gamma$ (pour laquelle on avait $p(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$) par la fonction

$$p(n) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^*}\right)^{-\gamma}, \qquad 0 < n < n^*, \qquad \gamma > 0,$$

(qui reste croissante et équivalente à $n^\gamma$ en $n = 0$).

Ceci s'interprète de la façon suivante : le décalage de vitesse $p(n)$ est relié à la vitesse à laquelle l'information donnée par les perturbations du trafic se propage *en arrière* et conditionne les réactions des conducteurs qui adaptent leur vitesse. Ainsi, dans un trafic normal (non saturé), cette information circule lentement comparé à la vitesse des véhicules, puisque les conducteurs ajustent leur vitesse de manière régulière, sans réaction rapide. Au contraire, dans un trafic dense, les temps de réaction des conducteurs sont plus courts : l'information se propage à grande vitesse. D'où le choix de l'hypothèse $p(n) \to +\infty$ quand $n \to n^{*-}$. On obtient ainsi un "modèle de Aw-Rascle modifié".

- on "rescale" ensuite le modèle de Aw-Rascle modifié, en changeant $p(n)$ en $\varepsilon p(n_\varepsilon)$, et on prend la limite (formelle) quand $\varepsilon \to 0^+$ de la famille de systèmes

$$\begin{cases} , \partial_t n_\varepsilon + \partial_x(n_\varepsilon u_\varepsilon) = 0, \\ \partial_t(n_\varepsilon(u_\varepsilon + \varepsilon p(n_\varepsilon))) + \partial_x(n_\varepsilon u_\varepsilon(u_\varepsilon + \varepsilon p(n_\varepsilon))) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

En notant $(n, u)$ la limite de $(n_\varepsilon, u_\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0^+$, on voit formellement que $(n, u)$ est solution du système de la dynamique des gaz sans pression

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_t(nu) + \partial_x(nu^2) = 0, \end{cases}$$

dans les zones où $n(t, x) < n^*$, puisque $\varepsilon p(n_\varepsilon) \to 0$. A l'inverse, dans les zones où $n = n^*$, la limite de $\varepsilon p(n_\varepsilon)(t, x)$ peut très bien ne pas être nulle (vu que $p$ possède une singularité en $n^*$) et finie, on la note $\overline{p}(t, x) \geq 0$.

Cette nouvelle quantité $\overline{p}$ joue donc le rôle de multiplicateur de Lagrange de la contrainte $n \geq n^*$, et elle est non nulle seulement lorsque la contrainte est saturée ($n = n^*$), c'est-à-dire $(n^* - n)\overline{p} = 0$.
Finalement, la limite formelle des systèmes (4.3) lorsque $\varepsilon \to 0^+$ est le système avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_t(n(u+\overline{p})) + \partial_x(nu(u+\overline{p})) = 0, \\ 0 \leq n \leq n^*, \quad \overline{p} \geq 0, \quad (n^* - n)\overline{p} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

On l'appelle *modèle de dynamique des gaz sans pression avec contraintes* (en anglais *Constrained Pressureless Gas Dynamics* model, désigné par l'acronyme CPGD).

La troisième inconnue $\overline{p} = \overline{p}(t,x)$ de ce modèle CPGD peut s'interpréter comme la vitesse "en réserve" non utilisée par des véhicules lorsque la voie est saturée et que les véhicules à l'avant imposent une vitesse inférieure à leur vitesse préférée.

Pour plus de détails sur la dérivation du modèle CPGD, on se réfèrera à [BDDR08], où le cas étudié est celui où la densité maximale $n^*$ est une constante. Le cas où $n^*$ dépend de la vitesse ($n^* = n^*(u)$) est plus réaliste (on peut en effet supposer que la densité maximale de véhicules sur une voie de circulation est d'autant plus faible que la vitesse est grande, pour des raisons évidentes de sécurité), et il est traité dans [BDLB$^+$08]. Dans [DD08] et [DHN11], des simulations numériques sont réalisées.

### 4.3.2 Théorie d'existence pour le modèle CPGD

Nous allons ici présenter brièvement la méthode utilisée pour établir l'existence de solutions faibles pour le modèle CPGD, écrit sous sa forme conservative (4.4). Le résultat obtenu dans [BDDR08] est le suivant :

**Théorème 4.1 (Berthelin, Degond, Delitala, Rascle, 2008)**
*Soit $n^0 = n^0(x) \in L^1(\mathbb{R})$ une densité initiale telle que $0 \leq n^0 \leq n^*$, où $n^*$ est la densité maximale (constante), et soit $u^0 = u^0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ une vitesse initiale. Alors, il existe $(n, u, \overline{p})$ tel que*

$$n \in L^\infty_t(]0,+\infty[, L^\infty_x(\mathbb{R}) \cap L^1_x(\mathbb{R})), \quad u, \overline{p} \in L^\infty_t(]0,+\infty[, L^\infty_x(\mathbb{R})),$$

*qui satisfait les équations et contraintes* (4.4)*, et les conditions initiales*

$$(n,u)(t=0,.) = (n^0, u^0)$$

*(au sens des distributions). De plus, cette solution* $(n, u, \overline{p})$ *vérifie*

$$\partial_x u(t,x) \leq \frac{1}{t},$$

$$essinf_y u^0(y) \leq u(t,x) \leq esssup_y u^0(y),$$
$$0 \leq \overline{p}(t,x) \leq esssup_y u^0(y).$$

*Enfin, si on impose* $u^0 \geq 0$*, on a* $u \geq 0$ *(le modèle propage la positivité de la vitesse).*

La stratégie de la preuve est la suivante : on construit d'abord explicitement des solutions faibles pour des données initiales $(n^0, u^0)$ particulières (appelées "bouchons collants", qui sont des fonctions constantes par morceaux ne prenant que les valeurs 0 et $n^*$), puis on montre que les solutions obtenues sont stables. Enfin, on utilise le fait que n'importe quelle donnée initiale peut être approchée au sens des distributions par une suite de fonctions indicatrices (voir [Ber02] pour une preuve). Signalons que le concept de "particules collantes", qui a un rôle crucial dans l'existence de solutions pour les modèles avec contraintes, a été introduit dans [BBCR00].

La première étape de ce résultat d'existence est donc d'étudier la dynamique d'une solution $(n, u, \overline{p})$ constituée d'une succession de "bouchons" (c'est-à-dire de segments $[a_i(t), b_i(t)] \subset \mathbb{R}_x$ évoluant au cours du temps et dans lesquels $n = n^*$, et $(u, \overline{p})$ sont constants) et de vide (zones où $n = 0$). Le point clef est d'étudier ce qu'il se passe lorsqu'un bloc rapide rencontre un plus lent qui le précède : comment le choc va-t-il faire évoluer les valeurs de $u$ et de $\overline{p}$, pour que le triplet $(n, u, \overline{p})$ soit solution de (4.4) ? Par ailleurs, le choix de la dynamique *ad hoc* des bouchons collants est motivé par l'étude des problèmes de Riemann, également développée dans l'article [BDDR08].

Une fois les solutions "bouchons collants" construites, il faut démontrer ensuite la stabilité d'une telle suite de solutions, c'est-à-dire qu'il faut être capable de passer rigoureusement à la limite dans le système : étant donné une suite $(n_k, u_k, \overline{p}_k)$ de solutions qui vérifient certaines bornes, peut-on en extraire une sous-suite qui converge (au sens de la topologie $L^\infty$ faible $*$, qui est le cadre naturellement adapté au problème, puisqu'on cherche des solutions bornées) vers une solution $(n, u, \overline{p})$ du même système ? La difficulté vient évidemment des termes non-linéaires (les produits $nu$, $n\overline{p}$, $nu(u + \overline{p})$), dans lesquels le passage à la limite faible $*$ se fait en utilisant une technique de compacité par compensation, développée dans [Ber02].

## 4.4 Le modèle multi-voies avec contraintes

Pour terminer, nous présentons ici une nouvelle version du modèle CPGD, qui se propose de modéliser le trafic routier sur plusieurs voies. L'idée est d'utiliser la densité maximale $n^*$ pour représenter le nombre de voies. La contrainte $n^*$ va donc dépendre cette fois-ci de la variable spatiale $x \in \mathbb{R}$ : sur une portion de route à deux voies, $n^*$ sera deux fois plus grand que sur une portion ne comportant qu'une seule voie. Nous considérons donc ici une densité maximale $n^*$ constante par morceaux, donnée par :

$$n^*(x) = \sum_{j=0}^{M} n_j^* \mathbb{1}_{]r_j, r_{j+1}[}(x)$$

où $n_j^* \in \{1, 2\}$ (pour simplifier), $(r_j)_{1 \leq j \leq M}$ une suite strictement croissante de nombres réels, $r_0 = -\infty$ et $r_{M+1} = +\infty$. Les points $(r_j)_{1 \leq j \leq M}$ sont les transitions entre les portions à une et deux voies (on suppose qu'il y a un nombre fini $M < \infty$ de changements du nombre de voies).

Une légère modification des équations du modèle CPGD va permettre de mettre en évidence des phénomènes de trafic multi-voies, sans avoir besoin de considérer des systèmes compliqués impliquant un nombre d'équations proportionnel au nombre de voies. En comparaison des modèles étudiés dans [BDDR08] et [BDLB$^+$08], les nouveaux comportements qui apparaissent dans ce modèle CPGD multi-voies sont essentiellement :

- la possibilité pour les véhicules d'accélérer (quand la route s'élargit) et de modifier leur vitesse préférée,
- la possibilité de créer des "zones de vide" dans un bouchon, lorsque la route s'élargit (l'accélération des véhicules à l'avant d'un bouchon n'est pas nécessairement suivie par les véhicules à l'arrière, qui ne possèdent peut-être pas une réserve suffisante de vitesse).

Ce nouveau modèle CPGD (désigné par *Multi-Lane CPGD model*) se présente sous la forme conservative suivante :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_t(n(u+p)I_\alpha) + \partial_x(nu(u+p)I_\alpha) = 0, \\ 0 \leq n \leq n^*(x), \quad u \geq 0, \quad p \geq 0, \quad (n^*(x) - n)p = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

où la fonction $I_\alpha = I_\alpha(x)$ est définie par

$$I_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n^*(x) = 1, \\ 1/\alpha & \text{si} \quad n^*(x) = 2. \end{cases}$$

Le nombre $\alpha \geq 1$ représente le ratio entre les vitesses sur les portions à deux-voies et celles sur les portions à une voie. Ainsi, un véhicule seul (non impliqué dans un bouchon) roulant à la vitesse $u$ sur une route à une voie passera à la vitesse $\alpha u$ sur la portion à deux voies. La vitesse préférée $p$ va elle aussi dépendre du nombre de voies, à travers le paramètre $\alpha$, qui est la modification essentielle du système. On a donc seulement modifié la conservation de la quantité de mouvement, et pas l'équation de conservation de la densité.

Evidemment, ce modèle peut se généraliser aux cas avec des portions de route à trois, quatre voies, ou plus. Dans le cas de portions à trois voies, $n_j^* \in \{1, 2, 3\}$ et $I_\alpha$ est remplacée par

$$I_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n^*(x) = 1, \\ 1/\alpha & \text{si} \quad n^*(x) = 2, \\ 1/\beta & \text{si} \quad n^*(x) = 3, \end{cases}$$

avec $\beta \geq \alpha \geq 1$, $\alpha$ étant le rapport des vitesses sur une voie et sur deux voies, et $\beta/\alpha$ le rapport de celles sur deux et trois voies.

Nous obtenons pour ce modèle CPGD-ML les résultats d'existence et de stabilité suivants :

**Théorème 4.2 (Berthelin, Broizat, 2012)**

*i) Soient $(n^0, u^0, p^0)$ des données initiales telles que*

$$n^0 \in L^1(\mathbb{R}), \qquad u^0, p^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}),$$

*avec $0 \leq u^0$, $0 \leq p^0$, $0 \leq n^0 \leq n^*(x)$ et $(n^*(x) - n^0)p^0 = 0$.*
*Alors, il existe $(n, u, p)$ tel que*

$$n \in L^\infty_t(]0, +\infty[, L^\infty_x(\mathbb{R}) \cap L^1_x(\mathbb{R})), \quad u, p \in L^\infty_t(]0, +\infty[, L^\infty_x(\mathbb{R})),$$

*qui satisfait les équations et contraintes (4.5), et les conditions initiales*

$$(n, u, p)(t = 0, .) = (n^0, u^0, p^0)$$

*(au sens des distributions). La solution obtenue vérifie aussi les estimations :*

$$0 \leq u(t, x) \leq 2\alpha \left( esssup_y u^0(y) + esssup_y p^0(y) \right),$$
$$0 \leq p(t, x) \leq 2\alpha \left( esssup_y u^0(y) + esssup_y p^0(y) \right).$$

*ii) On considère une suite de solutions* $(n_k, u_k, p_k)$ *de* (4.5) *telles que*

$$n \in L^\infty_t(]0,+\infty[, L^\infty_x(\mathbb{R}) \cap L^1_x(\mathbb{R})), \quad u, p \in L^\infty_t(]0,+\infty[, L^\infty_x(\mathbb{R})),$$

*et qui vérifient les estimations uniformes suivantes :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p.p.\ (t,x) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad 0 \leq u_k(t,x) \leq C_\alpha,$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p.p.\ (t,x) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad 0 \leq p_k(t,x) \leq C_\alpha,$$

$$\forall K = [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad p.p.\ t \in ]0,+\infty[, \quad TV_K(u_k(t,.)) \leq C_{\alpha,M,K},$$

$$\forall K = [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad p.p.\ t \in ]0,+\infty[, \quad TV_K(p_k(t,.)) \leq C_{\alpha,M,K},$$

*où* $C_\alpha$ *(resp.* $C_{\alpha,M,K}$*) est une constante strictement positive ne dépendant que de* $\alpha$ *(resp.* $\alpha$*,* $M$ *et* $K$*).*
*Alors, quitte à extraire une sous-suite, on a* $(n_k, u_k, p_k) \rightharpoonup (n, u, p)$ *dans* $L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$*, où* $(n, u, p)$ *est une solution du système* (4.5)*. Cette solution* $(n, u, p)$ *vérifie aussi*

$$p.p.\ (t,x) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad 0 \leq u(t,x) \leq C_\alpha,$$

$$p.p.\ (t,x) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad 0 \leq p(t,x) \leq C_\alpha.$$

Ce travail, en collaboration avec F. Berthelin, fait l'objet de l'article *A model for the evolution of traffic jams in multi-lane* [BB12], dont le contenu figure en troisième et dernière partie de ce manuscrit.

Dans cet article, nous adaptons la méthode de [BDDR08] pour obtenir le théorème d'existence, mais des difficultés supplémentaires apparaissent, car les dynamiques des bouchons collants sont bien plus complexes, à cause des élargissements et rétrécissement de voies, qu'il faut combiner avec les éventuelles collisions entre bouchons. De plus, une adaptation du lemme d'approximation de la donnée initiale par des bouchons collants est nécessaire.

# Références de l'introduction


[AKMR02] A. Aw, A. Klar, T. Materne, and M. Rascle. Derivation of continuum traffic flow models from microscopic Follow-the-Leader models. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(1) :259–278, 2002.

[Ald99] D. Aldous. Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation and coagulation) : a review of the mean-field theory for probabilists. *Bernoulli*, 5(1) :3–48, February 1999.

[AR00] A. Aw and M. Rascle. Resurrection of "Second order" models of traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(3) :916–938, February 2000.

[BB03] F. Berthelin and F. Bouchut. Weak solutions for a hyperbolic system with unilateral constraint and mass loss. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, 20(6) :975–997, 2003.

[BB12] F. Berthelin and D. Broizat. A model for the evolution of traffic jams in multi-lane. *Kinetic and Related Models*, 5(4) :697–728, 2012.

[BBCR00] F. Bouchut, Y. Brenier, J. Cortes, and J.-F. Ripoll. A hierarchy of models for two-phase flows. *Journal of Nonlinear Science*, 10(6) :639–660, 2000.

[BBJ12] Y. Bourgault, D. Broizat, and P.-E. Jabin. Convergence rate for the method of moments with linear closure relations. *arXiv :1206.4831*, June 2012.

[BC90] J.M. Ball and J. Carr. The discrete coagulation-fragmentation equations : existence, uniqueness, and density conservation. *J. Stat. Phys.*, 61 :203–234, 1990.

[BCP86] J.M. Ball, J. Carr, and O. Penrose. The Becker-Döring cluster equations : basic properties and asymptotic behaviour of solutions. *Commun. Math. Phys.*, 104 :657–692, 1986.

[BD35] R. Becker and W. Döring. Kinetische behandlung der keimbildung in übersättigten dämpfen. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 24 :719–752, 1935.

[BD11] N. Bellomo and C. Dogbe. On the modeling of traffic and crowds : A survey of models, speculations, and perspectives. *SIAM Rev.*, 53(3) :409–463, 2011.

[BDDR08] F. Berthelin, P. Degond, M. Delitala, and M. Rascle. A model for the formation and evolution of traffic jams. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 187(2) :185–220, 2008.

[BDLB+08] F. Berthelin, P. Degond, V. Le Blanc, S. Moutari, M. Rascle, and J. Royer. A traffic-flow model with constraints for the modeling of traffic jams. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 18(suppl.) :1269–1298, 2008.

[Ber02] F. Berthelin. Existence and weak stability for a two-phase model with unilateral constraint. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 12(2) :249–272, 2002.

[Ber03] F. Berthelin. Numerical flux-splitting for a class of hyperbolic systems with unilateral constraint. *M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(3) :479–494, 2003.

[BGP+00] F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, B. Perthame, and L. Desvillettes. *Kinetic equations and asymptotic theory.* Gauthier-Villars, 2000.

[BHN+95] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review E*, 51(2) :1035–1042, February 1995.

[Bob82] A. V. Bobylev. The Chapman-Enskog and Grad methods for solving the Boltzmann equation. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, 262 :71–75, 1982.

[Bol64] L. Boltzmann. *Lectures on Gas Theory.* University of California Press, Berkeley - Los Angeles, Calif., 1964.

[Bro10] D. Broizat. A kinetic model for coagulation–fragmentation. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 27(3) :809–836, May 2010.

[BT85] N. Bellomo and G. Toscani. On the Cauchy problem for the nonlinear Boltzmann equation global existence uniqueness and asymptotic stability. *Journal of Mathematical Physics*, 26 :334–338, February 1985.

[Cer88] C. Cercignani. *The Boltzmann Equation and Its Applications*. Springer, 1988.

[Cer90] C. Cercignani. Are there more than five linearly-independent collision invariants for the Boltzmann equation ? *Journal of Statistical Physics*, 58(5) :817–823, 1990.

[CIP94] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*. Springer, 1994.

[Col02] R. M. Colombo. A $2 \times 2$ hyperbolic traffic flow model. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(5-6) :683–688, 2002.

[Dag95] Carlos F. Daganzo. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow. *Transportation Research Part B : Methodological*, 29(4) :277–286, August 1995.

[DD08] P. Degond and M. Delitala. Modelling and simulation of vehicular traffic jam formation. *Kinetic and Related Models*, 1(2) :279–293, 2008.

[DHN11] P. Degond, J. Hua, and L. Navoret. Numerical simulations of the euler system with congestion constraint. *Journal of Computational Physics*, 230 :8057–8088, 2011.

[DL88] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. On the Fokker-Planck-Boltzmann equation. *Communications in Mathematical Physics (1965-1997)*, 120(1) :1–23, 1988.

[DL89] R. J. DiPerna and P. L. Lions. On the Cauchy Problem for Boltzmann Equations : Global Existence and Weak Stability. *The Annals of Mathematics*, 130(2) :321–366, 1989.

[DLM91] R. J Diperna, P. L Lions, and Y. Meyer. $L^p$ regularity of velocity averages. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire*, 8(3-4), 1991.

[DS96] P. B. Dubovskii and I. W Stewart. Existence, uniqueness and mass conservation for the Coagulation–Fragmentation equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 19(7) :571–591, 1996.

[ELM04] M. Escobedo, Ph. Laurençot, and S. Mischler. On a kinetic equation for coalescing particles. *Communications in Mathematical Physics*, 246(2) :237–267, 2004.

[ELMP03] M. Escobedo, Ph. Laurençot, S. Mischler, and B. Perthame. Gelation and mass conservation in coagulation-fragmentation models. *J. Differential Equations*, 195(1) :143–174, 2003.

[FM05] N. Fournier and S. Mischler. A spatially homogeneous Boltzmann equation for elastic, inelastic and coalescing collisions. *J. Math. Pures Appl.*, 84(9) :1173–1234, 2005.

[GHR61] D. C. Gazis, R. Herman, and R. W. Rothery. Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations Research*, 9 :545–567, 1961.

[Gra49] H. Grad. On the kinetic theory of rarefied gases. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2(4) :331–407, 1949.

[Hel95] D. Helbing. Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic. *Physical Review E*, 51(4) :3164–3169, April 1995.

[Hel01] D. Helbing. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of Modern Physics*, 73 :1067–1141, 2001.

[IS84] R. Illner and M. Shinbrot. The Boltzmann equation : Global existence for a rare gas in an infinite vacuum. *Communications in Mathematical Physics*, 95(2) :217–226, 1984.

[JK05] P.-E. Jabin and Ch. Klingenberg. Existence to solutions of a kinetic aerosol model. 371 :181–192, 2005.

[JS06] P.-E. Jabin and J. Soler. A kinetic description of particle fragmentation. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 16(6) :933–948, 2006.

[KKW96] A. Klar, R. D. Kühne, and R. Wegener. Mathematical models for vehicular traffic. *Surveys on Mathematics for Industry*, 6(3) :215–239, 1996.

[KS78] S. Kaniel and M. Shinbrot. The Boltzmann equation. *Communications in Mathematical Physics*, 58(1) :65–84, 1978.

[KW97] A. Klar and R. Wegener. Enskog-like kinetic models for vehicular traffic. *Journal of Statistical Physics*, 87(1-2) :91–114, 1997.

[Lam04] W. Lamb. Existence and uniqueness results for the continuous coagulation and fragmentation equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 27(6) :703–721, 2004.

[LDP88] P.-L. Lions and R.J. Di Perna. Global weak solutions of kinetic equations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 46(3) :259–288, 1988.

[Lev96] C. Levermore. Moment closure hierarchies for kinetic theories. *Journal of Statistical Physics*, 83(5) :1021–1065, 1996.

[LM02a] Ph. Laurençot and S. Mischler. The continuous Coagulation-Fragmentation Equations with diffusion. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 162(1) :45–99, 2002.

[LM02b] Ph. Laurençot and S. Mischler. From the discrete to the continuous coagulation-fragmentation equations. *Proceedings Section A : Mathematics - Royal Society of Edinburgh*, 132(5) :1219–1248, 2002.

[LM02c] Ph. Laurençot and S. Mischler. Global existence for the discrete diffusive coagulation-fragmentation equations in $L^1$. *Revista Matemática Iberoamericana*, 18(3), 2002.

[LM02d] Ph. Laurençot and S. Mischler. The Lifshitz-Slyozov-Wagner asymptotic of the Becker-Döring equation. *J. Statist. Phys.*, 106(5-6) :957–991, 2002.

[Lu99] X. Lu. Conservation of energy, entropy identity, and local stability for the spatially homogeneous boltzmann equation. *Journal of Statistical Physics*, 96(3) :765–796, 1999.

[LW55a] M. J. Lighthill and G. B. Whitham. On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers. *Proceedings of the Royal Society. London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 229 :281–316, 1955.

[LW55b] M. J. Lighthill and G. B. Whitham. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society. London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 229 :317–345, 1955.

[LW98a] Ph. Laurençot and D. Wrzosek. The Becker-Döring model with diffusion. II. Long time behaviour. *J. Differential. Equations*, 148 :268–291, 1998.

[LW98b] Ph. Laurençot and D. Wrzosek. Fragmentation-diffusion model. existence of solutions and asymptotic behaviour. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 128 :759–774, 1998.

[Mel57] Z. A. Melzak. A scalar transport equation. *Trans. Amer. Math. Soc*, 85 :547–560, 1957.

[Mü28] H. Müller. Zur allgemeinen Theorie ser raschen Koagulation. *Fortschrittsberichte über Kolloide und Polymere*, 27(6) :223–250, 1928.

[Nel95] P. Nelson. A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions. *Transport Theory and Statistical Physics*, 24(1-3) :383–409, 1995.

[Pay71] H. J. Payne. Models Of Freeway Traffic And Control. *Mathematical Models Of Public Systems*, 1971.

[Pay79] H. J. Payne. FREFLO : a Macroscopic Simulation Model Of Freeway Traffic. *Transportation Research Record*, (722), 1979.

[PdC95] F. Pestana da Costa. Existence and uniqueness of density conserving solutions to the coagulation-fragmentation equations with strong fragmentation. *J. Math. Anal. Appl.*, 192 :892–914, 1995.

[Per90] B. Perthame. Boltzmann type schemes for gas dynamics and the entropy property. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27(6) :1405–1421, December 1990.

[PH71] I. Prigogine and R. Herman. Kinetic Theory Of Vehicular Traffic. 1971.

[Pri61] I. Prigogine. *A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow.* Elsevier, Amsterdam, 1961.

[PT00] B. Perthame and A. Tzavaras. Kinetic formulation for systems of Two Conservation laws and elastodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 155(1) :1–48, 2000.

[Ric56] P. I. Richards. Shock waves on the highway. *Operations Research*, 4(1) :42–51, January 1956.

[RV01] J.M Roquejoffre and P. Villedieu. A kinetic model for droplet coalescence in dense sprays. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11 :867–882, 2001.

[Smo16] M. von Smoluchowski. Drei Vortrage uber Diffusion, Brownsche Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Zeitschrift fur Physik*, 17 :557–585, 1916.

[Smo17] M. von Smoluchowski. Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen. 1917.

[SS88] S. Simmons and D.R. Simpson. The effect of particle coagulation on the diffusive relaxation of a spatially inhomogeneous aerosol. *J. Phys. A*, 21 :3523–3536, 1988.

[ST06] J. Shen and T. Tang. *Spectral and high-order methods with applications*, volume 3 of *Mathematics Monograph Series*. Science Press Beijing, Beijing, 2006.

[Ste89] I. W. Stewart. A global existence theorem for the general coagulation–fragmentation equation with unbounded kernels. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 11(5) :627–648, 1989.

[Ste90] I. W. Stewart. A uniqueness theorem for the Coagulation-Fragmentation equation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 107(03) :573–578, 1990.

[Ste91] I.W. Stewart. Density conservation for a coagulation equation. *Z. Angew. Math. Phys.*, 42 :746–756, 1991.

[VDE86] P.G.J Van Dongen and M.H. Ernst. On the occurrence of a gelation transition in smoluchowski's coagulation equation. *J. Stat. Phys.*, 44 :785–792, 1986.

[Vil02] C. Villani. *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory*, volume 1. North-Holland, 2002.

[Whi80] W.H. White. A global existence theorem for Smoluchowski's coagulation equations. *Proc. Am. Math. Soc.*, 80, 1980.

[Zha02] H.M. Zhang. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research Part B : Methodological*, 36(3) :275–290, March 2002.

# Première partie

# A kinetic model for coagulation-fragmentation

**Abstract**

The aim of this paper is to show an existence theorem for a kinetic model of coagulation-fragmentation with initial data satisfying the natural physical bounds, and assumptions of finite number of particles and finite $L^p$-norm. We use the notion of renormalized solutions introduced dy DiPerna and Lions in [3], because of the lack of *a priori* estimates. The proof is based on weak-compactness methods in $L^1$, allowed by $L^p$-norms propagation.

# 1 Introduction

Coalescence and fragmentation are general phenomena which appear in dynamics of particles, in various fields (polymers chemistry, raindrops formation, aerosols, ...). We can describe them at different scales, which lead to different mathematical points of view. First, we can study the dynamics at the microscopic level, with a system of $N$ particles which undergo successives mergers/break ups in a random way. We refer to the survey [1] for this stochastic approach. Another way to describe coalescence and fragmentation is to consider the statistical properties of the system, introducing the statistical distribution of particles $f(t, m)$ of mass $m > 0$ at time $t \geq 0$ and studying its evolution in time. This approach is rather macroscopic. But we can put in an intermediate level, by considering a density $f$ which depends on more variables, like position $x$ or velocity $v$ of particles, and this description is more precise. Here, we start by discussing models with density, from the original (with $f = f(t, m)$) to the kinetic one (with $f = f(t, x, m, v)$), which is the setting of this work.

Depending on the physical context, the mass variable is discrete (polymers formation) or continuous (raindrops formation). It leads to two sorts of mathematical models, with $m \in \mathbb{N}^\star$ or $m \in (0, +\infty)$, but we focus on the continuous case. To understand the relationship between discrete and continuous equations, see [16].

## 1.1 The original model

The discrete equations of coagulation have been originally derived by Smoluchowski in [21, 22], by studying the Brownian motion of colloidal particles. It had been extended to the continuous setting by Müller [20], giving

the following mathematical model, called the *Smoluchowski's equation of coagulation* :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,m) = Q_c^+(f,f) - Q_c^-(f,f), \qquad (t,m) \in (0,+\infty)^2. \tag{1.1}$$

This equation describes the evolution of the statistical mass distribution in time. At each time $t > 0$, the term $Q_c^+(f,f)$ represents the gain of particles of mass $m$ created by coalescence between smaller ones, by the reaction

$$\{m^\star\} + \{m - m^\star\} \to \{m\}.$$

The term $Q_c^-(f,f)$ is the depletion of particles of mass $m$ because of coagulation with other ones, following the reaction

$$\{m\} + \{m^\star\} \to \{m + m^\star\}.$$

Namely, we have

$$\begin{cases} Q_c^+(f,f)(t,m) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^m A(m^\star, m-m^\star) f(t,m^\star) f(t,m-m^\star) dm^\star, \\ \\ Q_c^-(f,f)(t,m) = \displaystyle\int_0^{+\infty} A(m,m^\star) f(t,m) f(t,m^\star) dm^\star, \end{cases}$$

where $A(m,m^\star)$ is the coefficient of coagulation between two particles, which governs the frequency of coagulations, according to the mass of clusters. In his original model, Smoluchowski derived the following expression for $A$ :

$$A(m,m^\star) = \left(m^{1/3} + m^{\star 1/3}\right)\left(m^{-1/3} + m^{\star -1/3}\right). \tag{1.2}$$

In many cases, coalescence is not the only mechanism governing the dynamics of particles, and other effects should be taken into account. A classical phenomenon which also occurs is the fragmentation of particles in two (or more) clusters, resulting from an internal dynamic (we do not deal here with fragmentation processes induced by particles collisions). This binary fragmentation is modeled by linear additional reaction terms in equation (1.1), namely

$$\begin{cases} Q_f^+(f)(t,m) = \displaystyle\int_m^{+\infty} B(m',m) f(t,m') dm', \\ \\ Q_f^-(f)(t,m) = \dfrac{1}{2} f(t,m) B_1(m), \qquad \text{where} \qquad B_1(m') = \displaystyle\int_0^{m'} B(m',m) dm. \end{cases}$$

The function $B(m', m)$ is the fragmentation kernel, it measures the frequency of the break-up of a mass $m'$ in two clusters $m$ and $m' - m$, for $m < m'$. So, at each time $t$, the term $Q_f^+(f)$ is the gain of particles of mass $m$, resulting from the following reaction of fragmentation :

$$\{m'\} \to \{m\} + \{m' - m\},$$

whereas $Q_f^-(f)$ stands for the loss of particles of mass $m$, because of a break-up into two smaller pieces, by the following way :

$$\{m\} \to \{m^\star\} + \{m - m^\star\}, \quad \text{with} \quad m^\star < m.$$

Thus, the continuous *coagulation-fragmentation equation* writes

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,m) = Q_c^+(f,f) - Q_c^-(f,f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f), \qquad (t,m) \in (0,+\infty)^2. \tag{1.3}$$

In the 90's, many existence and uniqueness results have been proved about this problem, see for instance [23, 24], or [13] for an approach by the semi-groups of operators theory. These results are true under various growth hypotheses on kernels $A$ and $B$, but these assumptions often allow unbounded kernels, which is important from a physical point of view.

However, this coagulation-fragmentation model do not take the spatial distribution of particles into account. This leads to "spatially inhomogeneous" mathematical models, where the density of particles $f(t, x, m)$ depends also of a space variable $x \in \mathbb{R}^3$.

## 1.2 Spatially inhomogeneous models

A first example consists of diffusive models, corresponding to the situation where particles follow a Brownian motion at the microscopic scale, with

a positive and mass-dependent coefficient of diffusion $d(m)$. From a physical point of view, it implies that particles are sufficiently small to undergo the interaction with the medium, i.e the shocks with the molecules of the fluid in which the particles evolve. In the statistical description, a spatial-laplacian appears, giving the *diffusive coagulation-fragmentation equation* :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,m) - d(m)\Delta_x f(t,x,m) = Q_c^+(f,f) - Q_c^-(f,f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f),$$

$$(t,x,m) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty). \tag{1.4}$$

We refer to [15] for a global existence theorem for the discrete diffusive coagulation-fragmentation equation in $L^1$, and to [17] for the continuous one, improved in [19] (with less restrictive conditions on the kernels), then in [2] (with uniqueness of the solution).

The second way to correct the spatially homogeneous problem is to assume that the particles are transported with a deterministic velocity $v$. At the statistical level, this adds a linear transport term $v.\nabla_x f$ to the equation (1.3). This velocity can be a given velocity $v = v(t,x,m)$ or the inner velocity of the particles. The first case has been studied in [6], with an existence and uniqueness theorem, and furthermore the continuous dependance on the initial data. Physically, it corresponds to the dynamics of particles with rather low mass which follow a velocity drift depending only on the surrounding fluid. In the second case, particles are also identified by their momentum $p \in \mathbb{R}^3$ in addition to their mass $m$ (with $v = p/m$) : we have a kinetic model, which is relevant to describe the dynamics of particles of varying size/mass according to coagulation/fragmentation events, like in aerosols. At the microscopic scale, the coagulation/fragmentation processes become "multi-dimensional", with mass-momentum conservation at each merger/break up according to the following scheme :

$$\begin{array}{lccc} \textit{Coagulation}: & \{m\}+\{m^\star\} & \to & \{m'\} \\ & \{p\}+\{p^\star\} & \to & \{p'\} \\ \textit{Fragmentation}: & \{m'\} & \to & \{m\}+\{m^\star\} \\ & \{p'\} & \to & \{p\}+\{p^\star\} \end{array}$$

where $m' := m + m^\star$, $m > 0$, $m^\star > 0$, and $p' := p + p^\star$.

Thus, in the statistical description, the density depends on time, position, mass and momentum : $f = f(t, x, m, p)$. But even if this kind of kinetic models provides a rather good description of phenomena, it is harder to study, so there are less results than for the diffusive ones. Moreover, it is difficult to know the exact physical form of the kernels. And finally, the numerical aspects are a real problem on these models : because of a high dimension (at least 7 plus time), it seems to be very difficult, maybe impossible, to compute the solutions on a long time.

Concerning the results, a global existence theorem for the sole coagulation has been demonstrated in [7]. The proof is based on $L^p$-norms dissipation for any formal solution, and on weak-compactness methods in $L^1$. This result has been extended to a more general class of coalescence operators in [12] (but under stronger restriction on the initial data), with a very different method of proof. For the sole fragmentation, a difficulty is due to the blow-up of kinetic energy, which grows at each microscopic event. Thus, it is reasonable to take the internal energy of particles into account, which balances the gain of kinetic energy during a break up. With that modeling, the work [11] provides global existence for a kinetic fragmentation model, with general growth assumptions on the kernel $B$, by using correct entropies.

The aim of this work is to combine both of these analysis. We deal with assumptions which are similar to [7], but a little bit more restrictive concerning the kernel $A$. The obtaining of *a priori* estimates is strongly inspired from [7], with a big difference however. The authors obtained refined estimates, including a dissipative quadratic term thanks to which coagulation bilinear terms make sense, but which is unfortunately not present here because of the balance problems between coagulation and fragmentation operators. Thus, this lack of estimates does not allows us to define well the reaction term of coagulation with only the *a priori* bounds (specifically, we can not say that the bilinear loss term $Q_c^-(f, f)$ lies in $L^1_{loc}$, as it is shown in subsection 3.2). That is why we use the DiPerna-Lions theory of renormalized solutions, introduced in [3] to show global existence for Boltzmann equation, which presents similar problems.

## 1.3 Description of the kinetic model and outline of the paper

Now, let us describe precisely the model we study. The parameters which describe the state of a particle are denoted by

$$y := (m, p, e) \in Y := (0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty),$$

$m$ for the mass, $p$ the impulsion, and $e$ the internal energy. At the microscopic scale, coalescence and fragmentation conserve total energy (kinetic energy + internal energy), thus we can compute the internal energy of daughter(s) particle(s).

$$Coagulation: \quad \{e\} + \{e^\star\} \quad \to \quad \{e'\}$$

We have

$$\frac{|p|^2}{2m} + e + \frac{|p^\star|^2}{2m^\star} + e^\star = \frac{|p + p^\star|^2}{2(m + m^\star)} + e',$$

thus

$$e' = e + e^\star + E_-(m, m^\star, p, p^\star), \quad \text{where} \quad E_-(m, m^\star, p, p^\star) := \frac{|m^\star p - m p^\star|^2}{2mm^\star(m + m^\star)} \geq 0$$

($E_-$ is the loss of kinetic energy resulting from the merger).

$$Fragmentation: \quad \{e'\} \quad \to \quad \{e\} + \{e^\star\}$$

We have

$$\frac{|p'|^2}{2m'} + e' = \frac{|p|^2}{2m} + e + \frac{|p' - p|^2}{2(m' - m)} + e^\star,$$

thus

$$e^\star = e' - e - E_+(m', m, p', p), \quad \text{where} \quad E_+(m', m, p', p) := \frac{|m' p - m p'|^2}{2mm'(m' - m)} \geq 0$$

($E_+$ is the gain of kinetic energy resulting from the break up).

**Remark 1.1** *Let us point out the following symmetries :*

$$E_-(m^\star, m, p^\star, p) = E_-(m, m^\star, p, p^\star),$$

$$E_+(m', m, p', p) = E_+(m', m' - m, p', p' - p),$$

*and the relation*

$$E_-(m, m^\star, p, p^\star) = E_+(m + m^\star, m, p + p^\star, p),$$

*which is consistent with the two phenomena's reciprocity.*

We use the following notations :

– if $y = (m, p, e)$, $y^\star = (m^\star, p^\star, e^\star)$, then we denote

$$y' := y + y^\star := (m + m^\star, p + p^\star, e + e^\star + E_-(m, m^\star, p, p^\star)),$$

– if $y = (m, p, e)$, $y' = (m', p', e')$, with $m < m'$ and $e < e' - E_+(m', m, p', p)$, then we say that $y < y'$ and we denote

$$y^\star := y' - y := (m' - m, p' - p, e' - e - E_+(m', m, p', p)).$$

With this formalism, we naturally have $(y' - y) + y = y'$, but note carefully that $y < y'$ is not an order relation on $Y$.

**Remark 1.2** *For all $y' \in Y$,*

$$\{y \in Y, \quad y < y'\} \subset (0, m') \times B_{\sqrt{2m'e' + |p'|^2}} \times (0, e').$$

*Denoting $Y_R := (0, R) \times B_R \times (0, R) \subset Y$, we have*

$$y < y', \quad y' \in Y_R \quad \Longrightarrow \quad y \in (0, R) \times B_{\sqrt{3}R} \times (0, R) \subset Y_{2R}. \tag{1.5}$$

Finally, we point out that the map $(m', m, p', p, e', e) \mapsto (m', m^\star, p', p^\star, e', e^\star)$ is a diffeomorphism with $C^\infty$ regularity whithin the domain

$$\{0 < m < m', \ p, p' \in \mathbb{R}^3, \ 0 < e < e' - E_+(m', m, p', p)\} \subset Y^2$$

which preserves volume.

We denote by $f(t, x, m, p, e) = f(t, x, y)$ the particles density, which is a nonnegative function depending on time $t \geq 0$, position $x \in \mathbb{R}^3$, and the mass-momentum-energy variable $y$. To shorten the notations, we set for each

$t$,$x$, $f(y) = f(t,x,y)$, or $f = f(t,x,y)$, $f^\star = f(t,x,y^\star)$, and $f' = f(t,x,y')$. The complete model then reads :

$$\begin{cases} \partial_t f + \dfrac{p}{m}.\nabla_x f = Q_c^+(f,f) - Q_c^-(f,f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f), \qquad (ECF) \\ \\ t \in (0,+\infty), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad y = (m,p,e) \in Y, \end{cases}$$

with

$$\begin{cases} Q_c^+(f,f)(y) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_Y A(y^\star, y-y^\star) f(y^\star) f(y-y^\star) \mathbb{1}_{\{y^\star < y\}} dy^\star, \\ \\ Q_c^-(f,f)(y) = f(y) L f(y), \qquad Lf(y) := \displaystyle\int_Y A(y,y^\star) f(y^\star) dy^\star, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} Q_f^+(f)(y) = \displaystyle\int_Y B(y',y) f(y') \mathbb{1}_{\{y' > y\}} dy', \\ \\ Q_f^-(f)(y) = \dfrac{1}{2} B_1(y) f(y), \qquad B_1(y') := \displaystyle\int_Y B(y',y) \mathbb{1}_{\{y < y'\}} dy. \end{cases}$$

Functions $A$ et $B$ are respectively the coagulation and fragmentation kernels. They are nonnegative functions, independent of $(t,x)$, which satisfy the natural properties of symmetry :

$$\forall (y,y^\star) \in Y^2, \quad A(y,y^\star) = A(y^\star,y), \tag{1.6}$$

$$\forall (y,y') \in Y^2, \quad y < y', \quad B(y',y) = B(y',y^\star). \tag{1.7}$$

The kernel $A(y,y^\star)$ represents the coalescence rate between two particles $y$ and $y^\star$, whereas $B(y',y)$ is the fragmentation rate for a particle $y'$ which breaks in two clusters $y$ and $y^\star$.

We assume that $A$ fulfils the following structure assumption :

$$\forall (y,y^\star) \in Y^2, \quad A(y,y^\star) \leq A(y,y') + A(y^\star,y'). \tag{1.8}$$

**Remark 1.3** *We can insist on the fact that this assumption is more general than the classical Galkin-Tupchiev monotonicity condition :*

$$\forall y < y^\star, \quad A(y, y^\star - y) \leq A(y, y^\star). \tag{1.9}$$

*In the "monodimensional" case, the Smoluchowski kernel given by* (1.2) *do not satisfy* (1.9) *but satisfies* (1.8)*, that's why the first existence result established in [17] under Galkin-Tupchiev condition was extended in [19] to kernels which satisfy* (1.8) *only.*

We also require that $A$ and $B$ have a mild growth :

$$\forall R > 0, \qquad \int_{Y_R} \frac{A(y, y^\star)}{|y^\star|} dy \underset{|y^\star| \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.10}$$

$$\forall R > 0, \qquad \int_{Y_R} \frac{B(y', y)}{|y'|} \mathbb{1}_{\{y < y'\}} dy \underset{|y'| \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.11}$$

and $B$ is truncated as :

$$\exists C_0 > 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \text{or} \\ \\ \end{array} \right. \begin{array}{l} m' > C_0 m \\ \\ e' + \frac{|p'|^2}{2m'} > C_0 \left( e + \frac{|p|^2}{2m} \right) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad B(y', y) = 0. \tag{1.12}$$

**Remark 1.4** *The physical interpretation of this truncature assumption is to prevent the creation of too small clusters compared to the mother particle. From a mathematical point of view, it allows the total number of particles (the $L^1$-norm of $f$) to be finite at each time $t > 0$.*

We also need to have $B_1$ locally bounded :

$$\forall R > 0, \qquad B_1 \in L^\infty(Y_R), \tag{1.13}$$

as well as $A$ :

$$\forall R > 0, \qquad A \in L^\infty(Y_R^2). \tag{1.14}$$

**Remark 1.5** *Unfortunately, these assumptions of growth and boundedness are more restrictive, and in the monodimensional case, the Smoluchowski kernel* (1.2) *doesn't satisfy them any more. The examples given in [7] for the sole coagulation, namely*

$$A(m,m^\star,p,p^\star)=(m^\alpha+m^{\star\alpha})^2\left|\frac{p}{m}-\frac{p^\star}{m^\star}\right|,\quad 0\le\alpha<1/2,$$

*(for the dynamics of liquid droplets carried by a gaseous phase) or*

$$A(m,m^\star,p,p^\star)=\left(\frac{m+m^\star}{mm^\star}\right)^\alpha\left|\frac{p}{m}-\frac{p^\star}{m^\star}\right|^\gamma,\quad 0\le\alpha\le 1,\quad -3<\gamma\le 0,$$

*(for a stellar dynamics context) do not fit neither. Here, we need coalescence kernels which are bounded when* $m,m^\star\to 0$. *But it is difficult to know the exact physical form of the kernels* $A$ *and* $B$ *because of the complexity of this kinetic model. Nevertheless, simple kernels given by* $A(m,m^\star)=m^\alpha+m^{\star\alpha}$ *with* $0<\alpha<1$ *fit.*

Finally, we assume that $A$ controls $B$ in the following sense :

$$\exists s>1,\quad \exists 0<\delta<\frac{1}{6s-5}<1,$$

$$\forall y'\in Y,\quad \int_Y\frac{B(y',y)^s}{A(y,y')^{s-1}}\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dy\le 1+m'+\frac{|p'|^2}{2m'}+e'+\frac{1}{2}B_1(y')^\delta. \quad (1.15)$$

**Remark 1.6** *This last assumption is more technical, but seems necessary to balance the contributions of the interaction terms* $Q_c(f,f)$ *and* $Q_f(f)$, *which are difficult to compare because* $Q_c(f,f)$ *is quadratic whereas* $Q_f(f)$ *is linear.*

The paper consists in the proof of the following theorem.

**Theorem 1.7** *Let* $A$ *and* $B$ *be kernels satisfying* (1.6) − (1.8) *and* (1.10) − (1.15) *and let* $f^0$ *be a nonnegative initial data which satisfies*

$$K(f^0):=\iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\left(\left(1+m+\frac{|p|^2}{2m}+e+m|x|^2\right)f^0(x,y)+f^0(x,y)^s\right)dxdy<\infty. \quad (1.16)$$

*Then for all $T > 0$, there exists $f \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^3 \times Y))$ such that $f(0) = f^0$ and $f$ is a renormalized solution to $(ECF)$. Moreover,*

$$a.e\ t \in (0,T), \qquad \iint_{\mathbb{R}^3 \times Y} \left(1 + m + \frac{|p|^2}{2m} + e + m|x|^2\right) f(t,x,y)dxdy \leq K_T, \tag{1.17}$$

$$a.e\ t \in (0,T), \qquad \iint_{\mathbb{R}^3 \times Y} f(t,x,y)^s dxdy \leq K_T, \tag{1.18}$$

*where the constant $K_T$ depends only on $C_0$, $T$, $K(f^0)$, $s$ and $\delta$ (defined in* (1.12) *and* (1.15)*).*

Beyond existence problems, there are lots of others interesting subjects to explore. A first one concerns the mass conservation of the solution $f$, which is still an open problem for such kinetic models, even for the case of the sole coagulation. In the spatially homogeneous case, it has been shown in [5] that total mass is preserved in time under mild growth hypotheses on kernels. But we know that in case of strong coagulation (typically the case of multiplicative kernels), a phenomenon of gelation occurs, which force the total mass of the system to decay from a certain time $T_g < +\infty$. Then, problems of convergence to an equilibrium have been already studied for the spatially homogeneous equation [18], under a detailed balance condition between kernels $A$ and $B$. We can also mention existence of self-similar solutions [8, 9, 14], always for the spatially homogeneous case.

In a first section, we will derive the *a priori* estimates from the equation, giving the proper setting of the problem. Then, the proof of theorem is based on a well-known stability principle which says that if we are able to pass to the limit in the equation (the set of solutions is closed in a certain sense), then it would be easy to show the existence of a solution, applying the stability result to a sequence of approached problems which we can solve. So, the aim of the last section is to prove rigorously such a stability result and in fact, we work in the context of renormalized solutions, because the reaction term can not be defined as a distribution simply using the *a priori* estimates.

## 1.4 Different notions of solutions

We discuss here on different notions of solutions, recalling the DiPerna-Lions results. We set $Q(f,f) = Q_c^+(f,f) - Q_c^-(f,f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f)$.

**Definition 1.8** *Let $f$ be a nonnegative function, such that*

$$f \in L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y).$$

*We say that $f$ is a renormalized solution of (ECF) if*

$$\frac{Q_c^\pm(f,f)}{1+f} \in L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y), \qquad \frac{Q_f^\pm(f)}{1+f} \in L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y),$$

*and if the function $g := \log(1+f)$ satisfies the renormalized equation*

$$\partial_t g + \frac{p}{m}.\nabla_x g = \frac{Q(f,f)}{1+f} \qquad (ECFR)$$

*in $\mathcal{D}'((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y)$.*

The renormalization makes passing to the limit impossible because of the quotients in the reaction term, that is why we also need another notion of solution : the mild solutions, which only require local integrability in time and provide Duhamel's integral formulations to the problem in which we are able to pass to the limit.

**Definition 1.9** *Let $f$ be a nonnegative function, such that*

$$f \in L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y).$$

*We say that $f$ is a mild solution of (ECF) if for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}^3\times Y$,*

$$\forall T>0, \qquad Q_c^\pm(f,f)^\sharp(t,x,y) \in L^1((0,T)), \qquad Q_f^\pm(f)^\sharp(t,x,y) \in L^1((0,T)),$$

*and*

$$\forall 0<s<t<\infty, \quad f^\sharp(t,x,y) - f^\sharp(s,x,y) = \int_s^t Q(f,f)^\sharp(\sigma,x,y)d\sigma, \quad (1.19)$$

*where $h^\sharp$ denotes the restriction to the characteristic lines of the equation :*

$$h^\sharp(t,x,m,p,e) := h(t,x+t\frac{p}{m},m,p,e).$$

The following results are proved in [3] :

**Lemma 1.10**

*(i) If $Q_c^{\pm}(f,f)$ and $Q_f^{\pm}(f)$ are in $L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y)$, then the following assertions are equivalent :*

- *$f$ is a solution of $(ECF)$ in the sense of distributions.*
- *$f$ is a renormalized solution of $(ECF)$.*
- *$f$ is a mild solution of $(ECF)$.*

*(ii) If $f$ is a renormalized solution of $(ECF)$, then for all function $\beta \in C^1([0,+\infty))$ such that $|\beta'(u)| \leq \frac{C}{1+u}$, the composed function $\beta(f)$ is a solution of*

$$\partial_t \beta(f) + \frac{p}{m}.\nabla_x \beta(f) = \beta'(f)Q(f,f)$$

*in the sense of distributions (here, the right side lies in $L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y)$).*

*(iii) $f$ is a renormalized solution of $(ECF)$ if and only if $f$ is a mild solution of $(ECF)$ and $\frac{Q_c^{\pm}(f,f)}{1+f}, \frac{Q_f^{\pm}(f)}{1+f} \in L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y)$.*

# 2 *A priori* estimates

We consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} (ECF) \\ f(0,x,y) = f^0(x,y). \end{cases} \tag{2.1}$$

We suppose in this section that (2.1) admit a sufficiently smooth solution $f$ in order to handle some formal quantities which are conserved or propagated by the equation $(ECF)$. More precisely, we will show the propagation of $L^q$ bounds for the solution along time :

**Proposition 2.1** *If the initial data $f^0$ satisfies*

$$K(f^0) := \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \left( \left( 1 + m + \frac{|p|^2}{2m} + e + m|x|^2 \right) f^0(x,y) + f^0(x,y)^s \right) dxdy < \infty, \tag{2.2}$$

*then for all $T > 0$, any classical solution of the Cauchy problem (2.1) satisfies*

$$\sup_{t\in[0,T]} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \left( \left( 1 + m + \frac{|p|^2}{2m} + e + m|x|^2 \right) f(t,x,y) + f(t,x,y)^q \right) dxdy \leq K_T, \tag{2.3}$$

*for all the exponents* $q \in (\, 5/6\,,\, s\,]$, *and also*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left( D_1(f(t,x)) + D_2(f(t,x)) \right) dxdt \leq K_T, \tag{2.4}$$

*where*

$$D_1(f(t,x)) := \frac{1}{2} \iint_{Y\times Y} A(y,y^\star) \sup(f,f^\star) \inf(f,f^\star)^s dy^\star dy \geq 0, \tag{2.5}$$

$$D_2(f(t,x)) := \frac{s-\delta}{2} \iint_{Y\times Y} B(y',y) f(t,x,y')^s \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy'dy \geq 0, \tag{2.6}$$

*and the constant* $K_T$ *depends only on* $C_0$, $T$, $K(f^0)$, $s$ *and* $\delta$.

## 2.1 Basic physical estimates

We start with a fundamental formula, which gives the variation in time of some integral quantities involving the solution $f$.

**Lemma 2.2** *Let* $H(u)$ *be a function with* $C^1$ *regularity on* $[0,+\infty)$ *and* $\Phi(y)$ *a real or vectorial function. We have*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \Phi(y) H(f(t,x,y)) dxdy \\ = \quad & \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Aff^\star \left( \Phi' d_u H(f') - \Phi d_u H(f) - \Phi^\star d_u H(f^\star) \right) dy^\star dydx \\ + \quad & \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf' \left( \Phi d_u H(f) + \Phi^\star d_u H(f^\star) - \Phi' d_u H(f') \right) \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dydy'dx, \end{aligned} \tag{2.7}$$

*where* $d_u H = \dfrac{dH}{du}$.

Proof : Using $(ECF)$, we have

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)H(f)dxdy &= \iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)\,\partial_t f dydx\\ &= \iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)\,\left(Q_c^+(f,f)-Q_c^-(f,f)\right)dydx\\ &+ \iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)\,\left(Q_f^+(f)-Q_f^-(f)\right)dydx\\ &- \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} div_x(-\Phi(y)H(f)\tfrac{p}{m})dydx.\end{aligned}$$

The integral with divergence vanishes thanks to Stokes' formula. Whence

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)H(f)dxdy &= \iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)\,\left(Q_c^+(f,f)-Q_c^-(f,f)\right)dydx\\ &+ \iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)\,\left(Q_f^+(f)-Q_f^-(f)\right)dydx.\end{aligned}$$

Using Fubini's theorem (formally), we can write

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)H(f)dxdy\\ =\;& \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)\,A(y^\star,y-y^\star)f(y^\star)f(y-y^\star)\mathbb{1}_{\{y^\star<y\}}dy^\star dydx\\ -\;& \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)A(y,y^\star)f(y)f(y^\star)dy^\star dydx\\ +\;& \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)\,B(y',y)f(y')\mathbb{1}_{\{y'>y\}}dy'dydx\\ -\;& \tfrac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y')\,d_uH(f')B_1(y')f(y')dy'dx.\end{aligned}$$

If we change variables $(y^\star, y-y^\star)\to(y^\star,y)$ in the first integral, we obtain

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\Phi(y)H(f)dxdy\\ =\;& \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y}\Phi(y+y^\star)\,d_uH(f(y+y^\star))\,A(y^\star,y)f(y^\star)f(y)dy^\star dydx\\ -\;& \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)A(y,y^\star)f(y)f(y^\star)dy^\star dydx\\ +\;& \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y}\Phi(y)\,d_uH(f)\,B(y',y)f(y')\mathbb{1}_{\{y'>y\}}dy'dydx\\ -\;& \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y}\Phi(y')\,d_uH(f')\,B(y',y)f(y')\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dydy'dx.\end{aligned}$$

The symmetry of $A$ allows us to write

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \Phi(y)\, d_u H(f) A(y,y^\star) f(y) f(y^\star) dy^\star dy dx \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \Phi(y)\, d_u H(f) A(y,y^\star) f(y) f(y^\star) dy^\star dy dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \Phi(y^\star)\, d_u H(f^\star) A(y,y^\star) f(y) f(y^\star) dy^\star dy dx,
\end{aligned}$$

using the change of variables $(y, y^\star) \to (y^\star, y)$.

The same applies to $B$ with $(y', y) \to (y', y' - y)$ :

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \Phi(y)\, d_u H(f)\, B(y',y) f(y') \mathbb{1}_{\{y'>y\}} dy' dy dx \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \Phi(y)\, d_u H(f)\, B(y',y) f(y') \mathbb{1}_{\{y'>y\}} dy' dy dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \Phi(y'-y)\, d_u H(f(y'-y))\, B(y',y) f(y') \mathbb{1}_{\{y'>y\}} dy' dy dx.
\end{aligned}$$

□

Applying this lemma with $H(u) = u$, it gives

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \Phi(y) f dx dy &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A f f^\star \left(\Phi' - \Phi - \Phi^\star\right) dy^\star dy dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} B f' \left(\Phi + \Phi^\star - \Phi'\right) \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy' dy dx.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Choosing $\Phi(y) = m$, we obtain mass conservation :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} m f(t,x,y) dx dy = 0. \tag{2.9}$$

With $\Phi(y) = p$, we also get the momentum conservation :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} p f(t,x,y) dx dy = 0. \tag{2.10}$$

Then, choosing $\Phi(y) = \frac{|p|^2}{2m} + e$, we recover the total energy conservation :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \left(\frac{|p|^2}{2m} + e\right) f(t,x,y) dx dy = 0. \tag{2.11}$$

Moreover, we can control space momenta :

**Lemma 2.3** *For all $T > 0$, there exists a constant $C_T > 0$ that*

$$\forall t \in [0,T], \quad \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} m|x|^2 f(t,x,y)dxdy \leq C_T. \tag{2.12}$$

Proof : In view of the equation $(ECF)$ and the Stokes formula, we have

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} m|x|^2 f dxdy &= -\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} |x|^2 p.\nabla_x f dxdy \\
&= 2\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} x.p\ f(t,x,y)dxdy \\
&\leq 2\left(\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} m|x|^2 f dxdy\right)^{1/2}\left(\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \tfrac{|p|^2}{m} f dxdy\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

and we conclude with (2.11) and Gronwall's lemma. □

Finally, we can control the number of particles in finite time :

**Lemma 2.4** *We set*

$$N_0 := \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^0(x,y)dxdy, \quad M_0 := \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} m f^0(x,y)dxdy,$$

$$E_0 := \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \left(\frac{|p|^2}{2m} + e\right) f^0(x,y)dxdy.$$

*Then, there exists a constant $C > 0$ depending only on $C_0$ that for all $T > 0$ and for all $t \in [0,T]$,*

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y)dxdy \leq (N_0 + CT(M_0+E_0))e^{CT} + M_0 + E_0. \tag{2.13}$$

Proof : We use formula (2.8) with $\Phi(y) = \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}}$. Since $\Phi$ is non-negative and subadditive in the sense of coalescence (ie $\Phi' \leq \Phi + \Phi^\star$), we have

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} f dydx &\leq \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'\left(\Phi + \Phi^\star - \Phi'\right)\mathbb{1}_{\{y<y'\}} dydy'dx \\
&= \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'\left(\Phi - \tfrac{\Phi'}{2}\right)\mathbb{1}_{\{y<y'\}} dydy'dx \\
&\leq \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'\Phi\mathbb{1}_{\{y<y'\}} dydy'dx \\
&= \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'\mathbb{1}_{\{y<y',\ m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} dydy'dx.
\end{aligned}$$

In the last integral, if $m' > C_0$, then, since $m \leq 1$, we have $B(y', y) = 0$ according to assumption (1.12). The same applies if $e' + \frac{|p'|^2}{2m'} > C_0$. Thus,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} dydx \\
&\quad \leq \quad \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \left(\int_Y B(y',y)\mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy\right) f(t,x,y') \mathbb{1}_{\{m'\leq C_0,\ e'+\frac{|p'|^2}{2m'}\leq C_0\}} dy'dx \\
&\quad = \quad \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} B_1(y') f(t,x,y') \mathbb{1}_{\{m'\leq C_0,\ e'+\frac{|p'|^2}{2m'}\leq C_0\}} dy'dx.
\end{aligned}$$

Denoting $C := \sup_{y'\in Y_{2C_0}} B_1(y')$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} dydx \\
&\quad \leq \quad C \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) dydx \\
&\quad \leq \quad C \left( \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} dydx + \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} m f(t,x,y) dydx \right. \\
&\qquad \left. + \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \left(e + \tfrac{|p|^2}{2m}\right) f(t,x,y) dydx \right).
\end{aligned}$$

Using (2.9) and (2.11), we have

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} dydx \\
&\qquad \leq \ C \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} dydx + C(M_0 + E_0).
\end{aligned}$$

We integrate this inequality in time. Then, Gronwall's lemma provides

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} dydx \leq (N_0 + CT(M_0 + E_0)) e^{CT},$$

for all $T > 0$ and forall $t \in [0, T]$.

We conclude noting that

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) dydx \ &\leq \ \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y) \mathbb{1}_{\{m\leq 1,\ e+\frac{|p|^2}{2m}\leq 1\}} dydx \\
&+ \ \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \left(m + e + \tfrac{|p|^2}{2m}\right) f(t,x,y) dydx,
\end{aligned}$$

and using (2.9) and (2.11) again. □

To summarize, if we set $E(x,y) = 1 + m + \frac{|p|^2}{2m} + e + m|x|^2$, and if we suppose that the initial data satisfies

$$K(f^0) := \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} E(x,y) f^0(x,y) dxdy < +\infty,$$

then, for all $T > 0$, there exists a constant $K_T$ (depending on $T$, $C_0$ and $K(f^0)$) such that

$$\sup_{t\in[0,T]} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} E(x,y) f(t,x,y) dxdy \leq K_T. \tag{2.14}$$

**Remark 2.5** *For $\gamma > 5$, we have*

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \frac{1}{E^\gamma(x,y)} dxdy < +\infty. \tag{2.15}$$

*It will be very useful to show that some $L^q$ bounds of $f$ (for $5/6 < q < 1$ and $q = s > 1$) also propagate in time.*

## 2.2 $L^q$ bounds

Obtaining $L^q$ bounds propagation is more technical, that is why we split the proof in several lemmas.

**Lemma 2.6** *Let $\beta \in (5/6, 1)$. Then, for all $T > 0$, there exists a constant $K_T$ (depending on $T$, $C_0$ and $K(f^0)$) such that*

$$\sup_{t\in[0,T]} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^\beta(t,x,y) dxdy \leq K_T. \tag{2.16}$$

Proof : Writing

$$\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^\beta(t,x,y) dxdy = \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^\beta(t,x,y) \frac{E^\beta(x,y)}{E^\beta(x,y)} dxdy,$$

we use Young inequality

$$\forall \alpha > 1, \quad \forall u \geq 0, \quad \forall v \geq 0, \qquad uv \leq \frac{u^\alpha}{\alpha} + \frac{v^{\alpha^\star}}{\alpha^\star} \tag{2.17}$$

with $u = f^\beta(t,x,y)E^\beta(x,y)$, $v = \dfrac{1}{E^\beta(x,y)}$, and $\alpha = \dfrac{1}{\beta} > 1$, and obtain

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^\beta(t,x,y)dxdy &\leq \beta \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} E(x,y)f(t,x,y)dxdy \\ &+ (1-\beta)\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \frac{1}{E^{\frac{\beta}{1-\beta}}(x,y)}dxdy.\end{aligned}$$

We conclude with (2.14) and (2.15). □

**Lemma 2.7** *For any convex and nonnegative function $H \in C^1([0,+\infty))$ such that $H(0) = 0$, and for all $t > 0$, we have*

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} H(f(t,x,y))dxdy \\ &\leq \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} H(f^0(x,y))dxdy \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\sup(f,f^\star)H(\inf(f,f^\star))dy^\star dydxd\tau \qquad (2.18)\\ &+ \int_0^t\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A'H\left(\frac{B}{A'}\right)f'\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dydy'dxd\tau \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'd_uH(f')\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dydy'dxd\tau,\end{aligned}$$

*where $A = A(y,y^\star)$, $A' = A(y,y')$, $B = B(y',y)$.*

Proof : The formula (2.7) yields

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} H(f)dxdy &= \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Aff^\star\left(\frac{d_uH(f')}{2} - d_uH(f)\right)dy^\star dydx \\ &+ \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'\left(d_uH(f) - \frac{d_uH(f')}{2}\right)\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dydy'dx. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Let us rewrite the term $I_1 := \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Aff^\star d_uH(f')dy^\star dydx$, by the following way :

$$I_1 = \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\inf(f,f^\star)\sup(f,f^\star)d_uH(f')dy^\star dydx.$$

We use the Young inequality :

$$\forall u > 0, \quad \forall v > 0, \quad uv \leq H(u) + H^\star(v) \tag{2.20}$$

with $u = \sup(f, f^\star)$ and $v = d_u H(f')$, where $H^\star$ stands for the convex conjugate function of $H$. A simple calculus shows that

$$H^\star(d_u H(u)) = u d_u H(u) - H(u),$$

and this quantity is nonnegative, by the assumptions on $H$. We denote

$$\Theta(u) := H^\star(d_u H(u)) \geq 0.$$

It leads to the inequality :

$$\begin{aligned} I_1 \quad \leq \quad & \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A \inf(f, f^\star) H(\sup(f, f^\star)) dy^\star dy dx \\ + \quad & \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A \inf(f, f^\star) \Theta(f') dy^\star dy dx. \end{aligned}$$

We can dominate the second term of the right member using the hypothesis (1.8) by the following way :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A \inf(f, f^\star) \Theta(f') dy^\star dy dx \\ \leq \quad & \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} (A(y, y + y^\star) + A(y^\star, y + y^\star)) \inf(f, f^\star) \Theta(f') dy^\star dy dx \\ \leq \quad & \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A(y, y + y^\star) f \Theta(f') dy^\star dy dx \\ + \quad & \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A(y^\star, y + y^\star) f^\star \Theta(f') dy^\star dy dx \\ = \quad & 2 \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A(y^\star, y + y^\star) f(y^\star) \Theta(f(y + y^\star)) dy^\star dy dx \\ = \quad & 2 \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A(y^\star, y) f(y^\star) \Theta(f(y)) \mathbb{1}_{\{y^\star < y\}} dy^\star dy dx \end{aligned}$$

(the last identity resulting from the change of variables $(y^\star, y + y^\star) \to (y^\star, y)$).

This yields

$$\begin{aligned} I_1 \quad \leq \quad & \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A \inf(f, f^\star) H(\sup(f, f^\star)) dy^\star dy dx \\ + \quad & 2 \iiint_{\mathbb{R}^3 \times Y \times Y} A f^\star \Theta(f) \mathbb{1}_{\{y^\star < y\}} dy^\star dy dx. \end{aligned}$$

Thus, we have the following control of the coagulation contribution in (2.19) :

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Aff^\star \left(\tfrac{d_uH(f')}{2} - d_uH(f)\right) dy^\star dydx \\
\leq\quad & \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\inf(f,f^\star)H(\sup(f,f^\star))dy^\star dydx \\
+\quad & \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Af^\star\Theta(f)\mathbb{1}_{\{y^\star<y\}}dy^\star dydx - \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Aff^\star d_uH(f)dy^\star dydx.
\end{aligned}$$

Now, we can write the right member of this inequality by the following way :

$$\begin{aligned}
=\quad & -\ \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\sup(f,f^\star)H(\inf(f,f^\star))dy^\star dydx \\
& +\ \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} AfH(f^\star)dy^\star dydx + \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Af^\star H(f)dy^\star dydx \\
& +\ \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Af^\star\Theta(f)\mathbb{1}_{\{y^\star<y\}}dy^\star dydx - \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Aff^\star d_uH(f)dy^\star dydx \\
=\quad & -\ \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\sup(f,f^\star)H(\inf(f,f^\star))dy^\star dydx \\
& +\ \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Af^\star\Theta(f)\mathbb{1}_{\{y^\star<y\}}dy^\star dydx - \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Af^\star\Theta(f)dy^\star dydx.
\end{aligned}$$

We deduce

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Aff^\star \left(\tfrac{d_uH(f')}{2} - d_uH(f)\right) dy^\star dydx \\
\leq\quad & -\ \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\sup(f,f^\star)H(\inf(f,f^\star))dy^\star dydx \\
& +\ \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Af^\star\Theta(f)\mathbb{1}_{\{y^\star<y\}}dy^\star dydx - \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Af^\star\Theta(f)dy^\star dydx.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Then, we can also control the fragmentation contribution :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'd_uH(f)\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dydy'dx - \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'\tfrac{d_uH(f')}{2}\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dydy'dx.$$

We rewrite the first term by the following way :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf'd_uH(f)\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dydy'dx = \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \tfrac{B}{A'}A'f'd_uH(f)\mathbb{1}_{\{y<y'\}}dydy'dx$$

and we use (2.20) again, with $u = \frac{B}{A'}$ and $v = d_u H(f)$, whence

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf' \left( d_u H(f) - \tfrac{d_u H(f')}{2} \right) \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy dy' dx \\
\leq\ & \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} H\left(\tfrac{B}{A'}\right) A'f' \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy dy' dx + \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A'f'\Theta(f) \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy dy' dx \\
-\ & \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf' \tfrac{d_u H(f')}{2} \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy dy' dx.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Eventually, using (2.19), (2.21) and (2.22), we infer

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} H(f(t,x,y)) dx dy \ \leq\ & - \tfrac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A \sup(f,f^\star) H(\inf(f,f^\star)) dy^\star dy dx \\
& - \iiint_{\mathbb{R}^3\times (Y^2 - (\{y<y^\star\}\cup\{y^\star<y\}))} Af^\star \Theta(f) dy dy^\star dx \\
& + \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A' H\left(\tfrac{B}{A'}\right) f' \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy dy' dx \\
& - \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} Bf' \tfrac{d_u H(f')}{2} \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy dy' dx.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

□

**Lemma 2.8** *Forall $T > 0$, there exists a constant $C_T > 0$ depending only on $T$, the initial values $N_0$,$M_0$,$E_0$ and the truncature parameter $C_0$ such that for all $t \in [0,T]$,*

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y)^s dx dy \ \leq\ & \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^0(x,y)^s dx dy + C_T \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A \sup(f,f^\star) \inf(f,f^\star)^s dy^\star dy dx d\tau \\
& - \left| \frac{s-\delta}{2} \right| \int_0^T \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} B\,(f')^s\, \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dy' dy dx d\tau,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

*where $s$ and $\delta$ are given by (1.15).*

Proof : We use the previous lemma with $H(u) = u^s$. We obtain

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y)^s dxdy &\leq \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^0(x,y)^s dxdy \\ &- \tfrac{1}{2}\int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\sup(f,f^\star)\inf(f,f^\star)^s dy^\star dydxd\tau \\ &+ \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \left(\tfrac{B^s}{A'^{s-1}}\right) f' \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dydy'dxd\tau \\ &- \tfrac{s}{2}\int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} B_1(y')(f')^s dy'dxd\tau.\end{aligned}$$

According to (1.15) and (2.14),

$$\begin{aligned}&\int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} \left(\tfrac{B^s}{A'^{s-1}}\right) f' \mathbb{1}_{\{y<y'\}} dydy'dxd\tau \\ &\leq \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \left(1 + m' + \tfrac{|p'|^2}{2m'} + e'\right) f' dy'dxd\tau + \tfrac{1}{2}\int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} B_1(y')^\delta f' dy'dxd\tau \\ &\leq TK_T + \tfrac{1}{2}\int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} B_1(y')^\delta f'^{s\delta} f'^{1-s\delta} dy'dxd\tau.\end{aligned}$$

We apply the Young inequality again with the exponent $1/\delta > 1$ :

$$\begin{aligned}B_1(y')^\delta f'^{s\delta} f'^{1-s\delta} &\leq \frac{\left(B_1(y')^\delta f'^{s\delta}\right)^{1/\delta}}{1/\delta} + \frac{\left(f'^{1-s\delta}\right)^{(1/\delta)^\star}}{(1/\delta)^\star} \\ &= \delta B_1(y') f'^s + (1-\delta) f'^{\frac{1-s\delta}{1-\delta}}.\end{aligned}$$

Thus we deduce

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y)^s dxdy &\leq \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^0(x,y)^s dxdy \\ &- \tfrac{1}{2}\int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\sup(f,f^\star)\inf(f,f^\star)^s dy^\star dydxd\tau \\ &+ TK_T + \tfrac{1-\delta}{2}\int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f'^{\frac{1-s\delta}{1-\delta}} dy'dxd\tau \\ &+ \tfrac{\delta-s}{2}\int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} B_1(y')(f')^s dy'dxd\tau.\end{aligned}$$

We can use (2.16) since $\frac{1-s\delta}{1-\delta} \in (\,5/6\,,\,1\,)$ :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y)^s dxdy \;\leq\; & \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f^0(x,y)^s dxdy + C_T \\ & - \tfrac{1}{2}\int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3\times Y\times Y} A\sup(f,f^\star)\inf(f,f^\star)^s dy^\star dydxd\tau \\ & + \tfrac{\delta-s}{2}\int_0^t \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} B_1(y')(f')^s dy'dxd\tau.\end{aligned}$$

We conclude noting that $\delta < \frac{1}{6s-5} < 1 < s$. □

# 3 A stability result

The proof of theorem 1.7 relies on a stability theorem, which claims that we can pass to the limit in the equation $(ECF)$ in a certain sense, namely in an integral formulation.

**Definition 3.1** *Let $T > 0$ and let $f^0$ be a nonnegative initial data which satisfies (2.2). A weak solution of (2.1) is a nonnegative function*

$$f \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^3 \times Y)),$$

*verifying the estimates (2.3) and (2.4), satisfying $(ECF)$ in $\mathcal{D}'((0,+\infty)\times \mathbb{R}^3\times Y)$, and such that $f(0) = f^0$.*

Now let us state the result we will prove in this section :

**Theorem 3.2** *Let $(f_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of weak solutions of (2.1), with initial data $f_n^0$, and such that*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n \in W^{1,1}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 1}\sup_{t\in[0,T]} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} \Bigg( \left(1 + m + \frac{|p|^2}{2m} + e + m|x|^2\right) f_n(t,x,y) \\ + f_n(t,x,y)^q \Bigg) dxdy \leq K_T,\end{aligned} \tag{3.2}$$

*for all the exponents* $q \in (\,5/6\,,\,s\,]$, *and also*

$$\sup_{n\geq 1}\int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}^3}\left(D_1(f_n(t,x))+D_2(f_n(t,x))\right)dxdt \leq K_T. \tag{3.3}$$

*(the a priori estimates hold uniformly in* $n$*).*

*Then, up to a subsequence,* $f_n \rightharpoonup f$ *weakly in* $L^1((0,T)\times\mathbb{R}^3_{loc}\times Y)$, *where* $f$ *is a renormalized solution of (ECF). Furthermore,* $f \in C([0,T],L^1(\mathbb{R}^3\times Y))$.

## 3.1 Weak compactness of $(f_n)$

Let $0<T<\infty$. The bounds on $f_n$ provides some weak compactness, and thus the existence of a limit $f$ after extraction.

**Lemma 3.3** *For all* $R>0$, *the sequence* $(f_n)_{n\geq 1}$ *is weakly compact in* $L^1((0,T)\times B_R\times Y)$.

Proof : We set $\Phi(\xi):=\xi^s$ and $\Psi\,(m,p,e):=m+\frac{|p|^2}{2m}+e$. The function $\Phi$ is nondecreasing, nonnegative and $\Phi(\xi)/\xi \underset{\xi\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\Psi$ is nonnegative and $\Psi(y) \underset{|y|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. The estimate (3.2) gives

$$\sup_{n\geq 1}\int_0^T\!\!\int_{B_R}\!\!\int_Y \left((1+\Psi(y))\,f_n+\Phi\,(f_n)\right)dtdxdy<+\infty,$$

and we conclude by Dunford-Pettis theorem. □

Thus, there exists a nonnegative function $f$ such that for all $R>0$,

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^1((0,T)\times B_R\times Y)$$

for a subsequence (not relabeled). Moreover, we can show easily (diagonal extraction) that the subsequence is not depending on $R$. Then we notice that in fact, $f\in L^\infty((0,T),L^1(\mathbb{R}^3\times Y))$ and

$$a.e\ t\in(0,T), \qquad \iint_{\mathbb{R}^3\times Y}\left(1+m+\frac{|p|^2}{2m}+e+m|x|^2\right)f(t,x,y)dxdy\leq K_T. \tag{3.4}$$

Moreover, since the function $\xi\mapsto|\xi|^s$ is convex, we have

$$a.e\ t\in(0,T), \qquad \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f(t,x,y)^s dxdy\leq K_T. \tag{3.5}$$

## 3.2 Weak compactness of the renormalized coalescence term

The bounds on $f_n$ are not enough to define the term $Q_c^-(f_n, f_n)$ as a distribution, unlike the term $Q_c^+(f_n, f_n)$. In fact, since for all $R, T > 0$,

$$\int_0^T \int_{B_R} \int_{Y_R} Q_c^-(f_n, f_n) dy dx dt = \int_0^T \int_{B_R} \int_{Y_R} \int_Y A(y, y^\star) f_n(y) f_n(y^\star) dy^\star dy dx dt,$$

we have a bound on the contribution corresponding to $\inf(f_n, f_n^\star) > 1$ due to the estimate (2.4). But the other contribution, where $\inf(f_n, f_n^\star) \leq 1$, requires strong integrability assumptions on $A$ to be finite, which are not reasonable. So, it seems that renormalization is necessary to obtain well-defined and weakly compact coalescence terms.

**Lemma 3.4** *For all $R > 0$, the sequence $(Q_c^+(f_n, f_n))_{n\geq 1}$ is weakly compact in $L^1((0,T) \times B_R \times Y_R)$, where $Y_R := (0,R) \times B_R \times (0,R)$.*

Proof : Let $E$ be a measurable subset of $(0,T) \times B_R \times Y_R$. We set

$$\varphi(t,x,y) := \mathbb{1}_E(t,x,y).$$

Performing the change of variables $(y, y^\star) \to (y^\star, y - y^\star)$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{Y_R} Q_c^+(f_n, f_n)(y)\varphi(y) dy \\
&= \tfrac{1}{2} \textstyle\int_{Y_R} \int_Y A(y^\star, y - y^\star) f_n(y^\star) f_n(y - y^\star) \varphi(y) \mathbb{1}_{\{y^\star < y\}} dy^\star dy \\
&= \tfrac{1}{2} \iiint_{\substack{0<m<R \\ p\in\mathbb{R}^3 \\ 0<e<R}} \iiint_{\substack{0<m^\star<R-m \\ p^\star\in B(-p,R) \\ 0<e^\star<R-e-E_-(m,m^\star,p,p^\star)}} A(y, y^\star) f_n(y) f_n(y^\star) \varphi(y + y^\star) dy^\star dy.
\end{aligned}$$

In fact, we only integrate over $p \in B_{2R}$ because

$$\frac{|p|^2}{2m} \leq \frac{|p|^2}{2m} + \frac{|p^\star|^2}{2m^\star} = \frac{|p + p^\star|^2}{2(m + m^\star)} + E_-(m, m^\star, p, p^\star) \leq \frac{R^2}{2(m + m^\star)} + R,$$

which yields

$$|p|^2 \leq R^2 \frac{m}{m+m^\star} + 2mR \leq 3R^2$$

(and the same applies to $p^\star$ because of the symmetry in the previous computation). Thus we have

$$\int_{Y_R} Q_c^+(f_n,f_n)(y)\varphi(y)dy = \tfrac{1}{2} \iiint_{\substack{0<m<R \\ p\in B_{2R} \\ 0<e<R}} \iiint_{\substack{0<m^\star<R-m \\ p^\star\in B(-p,R) \\ 0<e^\star<R-e-E_-(m,m^\star,p,p^\star)}} Af_nf_n^\star\varphi' dy^\star dy.$$

Using the inequality

$$\begin{aligned} Af_nf_n^\star \leq \frac{1}{M^{s-1}} A\sup(f_n,f_n^\star)\inf(f_n,f_n^\star)^s \mathbb{1}_{\{\inf(f_n,f_n^\star)>M\}} \\ + MA\sup(f_n,f_n^\star)\mathbb{1}_{\{\inf(f_n,f_n^\star)\leq M\}}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

we obtain

$$\begin{aligned} \int_{Y_R} Q_c^+(f_n,f_n)(y)\varphi(y)dy &\leq \tfrac{D_1(f_n(t,x))}{M^{s-1}} + \tfrac{M}{2}\int_{Y_{2R}}\int_{Y_{2R}} A\sup(f_n,f_n^\star)\varphi' dy^\star dy \\ &\leq \tfrac{D_1(f_n(t,x))}{M^{s-1}} + M\int_{Y_{2R}}\int_{Y_{2R}} Af_n\varphi' dy^\star dy \\ &\leq \tfrac{D_1(f_n(t,x))}{M^{s-1}} + M\|A\|_{\infty,Y_{2R}^2}\int_{Y_{2R}}\int_{Y_{2R}} f_n\varphi' dy^\star dy. \end{aligned}$$

We fix $\varepsilon>0$ and choose $M$ such that $1/M^{s-1}\leq\varepsilon$. So, we can write

$$\begin{aligned} \int_{Y_R} Q_c^+(f_n,f_n)(y)\varphi(y)dy &\leq \varepsilon D_1(f_n(t,x)) + M\|A\|_{\infty,Y_{2R}^2}\int_{Y_{2R}}\int_{Y_{2R}} f_n\varphi' dy^\star dy \\ &\leq \varepsilon D_1(f_n(t,x)) + M\|A\|_{\infty,Y_{2R}^2}\int_{Y}\int_{Y} f_n\varphi^\star dy^\star dy. \end{aligned}$$

Eventually, in view of (3.2) and (3.3), we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_{B_R}\int_{Y_R} Q_c^+(f_n,f_n)\varphi dy dx dt &\leq M\|A\|_{\infty,Y_{2R}^2}\int_0^T\int_{B_R}\int_Y\int_Y f_n\varphi^\star dy^\star dy dx dt \\ &+ \varepsilon K_T. \end{aligned}$$

We conclude by letting $mes(E)\to 0$ and using the weak compactness of $(f_n)$. $\square$

**Corollary 3.5** *For all $R > 0$, the sequence $\left(\frac{Q_c^+(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)_{n\geq 1}$ is weakly compact in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$, where $Y_R := (0,R)\times B_R \times (0,R)$.*

Proof : It's obvious by the previous lemma and Dunford-Pettis theorem since

$$\frac{Q_c^+(f_n,f_n)}{1+f_n} \leq Q_c^+(f_n,f_n).$$

□

**Lemma 3.6** *For all $R > 0$, $Lf_n \rightharpoonup Lf$ weakly in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$, where $Y_R := (0,R)\times B_R \times (0,R)$.*

Proof : Let $\varphi(t,x,y) \in L^\infty((0,T)\times B_R \times Y_R)$. We have

$$\int_{Y_R} Lf_n(y)\varphi(y)dy = \int_{Y_R}\int_Y A(y,y^\star)f_n(y^\star)\varphi(y)dy^\star dy.$$

We fix $\varepsilon > 0$ and, in view of the assumptions (1.6) and (1.10), we choose $R^\star > 0$ such that

$$\forall |y^\star| > R^\star, \qquad \int_{Y_R} \frac{A(y,y^\star)}{|y^\star|}dy \leq \varepsilon.$$

We can write

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{B_R}\int_{Y_R} Lf_n\,\varphi dydxdt &= \int_0^T\int_{B_R}\int_{Y_R}\int_{Y_{R^\star}} A(y,y^\star)f_n(y^\star)\varphi(y)dy^\star dydxdt \\ &+ \int_0^T\int_{B_R}\int_{Y_R}\int_{Y-Y_{R^\star}} A(y,y^\star)f_n(y^\star)\varphi(y)dy^\star dydxdt.\end{aligned}$$

First,

$$\int_0^T\int_{B_R}\int_{Y_R}\int_{Y_{R^\star}} Af_n(y^\star)\varphi(y)dy^\star dydxdt \underset{n}{\longrightarrow} \int_0^T\int_{B_R}\int_{Y_R}\int_{Y_{R^\star}} Af(y^\star)\varphi(y)dy^\star dydxdt.$$

Indeed, setting $\theta(t,x,y^\star) = \int_{Y_R} A(y,y^\star)\varphi(t,x,y)dy$, we have

$$\int_0^T\int_{B_R}\int_{Y_R}\int_{Y_{R^\star}} Af_n(y^\star)\varphi(y)dy^\star dydxdt = \int_0^T\int_{B_R}\int_{Y_{R^\star}} \theta(t,x,y^\star)f_n(t,x,y^\star)dy^\star dxdt$$

and we conclude by lemma 3.3, because the assumption (1.14) implies $\theta \in L^\infty((0,T)\times B_R \times Y_{R^\star})$.

Moreover,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \int_{B_R} \int_{Y_R} \int_{Y-Y_{R^\star}} Af_n(y^\star)\varphi(y)dy^\star dydxdt\right| \\
&\quad \leq \varepsilon \|\varphi\|_\infty \int_0^T \int_{B_R} \int_{Y-Y_{R^\star}} |y^\star| f_n(y^\star)dy^\star dxdt \\
&\quad \leq \varepsilon T \|\varphi\|_\infty K_T,
\end{aligned}$$

and the inequality (3.4) yields

$$\left|\int_0^T \int_{B_R} \int_{Y_R} \int_{Y-Y_{R^\star}} Af(y^\star)\varphi(y)dy^\star dydxdt\right| \leq \ \varepsilon\, T \|\varphi\|_\infty K_T.$$

Finally, we infer

$$\left|\int_0^T \int_{B_R} \int_{Y_R} Lf_n\, \varphi dydxdt - \int_0^T \int_{B_R} \int_{Y_R} Lf\, \varphi dydxdt\right| \leq \underset{n\to+\infty}{o(1)} + C(T,R,\varphi)\varepsilon.$$

□

**Corollary 3.7** *For all $R > 0$, the sequence $\left(\frac{Q_c^-(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)_{n\geq 1}$ is weakly compact in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$, where $Y_R := (0,R)\times B_R \times (0,R)$.*

Proof : It's obvious because $\frac{Q_c^-(f_n,f_n)}{1+f_n} = \frac{f_n}{1+f_n} Lf_n \leq Lf_n$. □

## 3.3 Weak convergence of the fragmentation term

Since they are linear, the fragmentation terms easily pass to the limit, and we have the following lemma.

**Lemma 3.8** *For all $R > 0$, we have*
*(i) $Q_f^+(f_n) \rightharpoonup Q_f^+(f)$ weakly in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$,*
*(ii) $Q_f^-(f_n) \rightharpoonup Q_f^-(f)$ weakly in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$,*
*where $Y_R := (0,R)\times B_R \times (0,R)$.*

Proof : The part (ii) results immediately from (1.13), and the proof of (i) is the same as lemma 3.6. □

## 3.4 Strong compactness of $y$-averages

Strong compactness is needed to pass to the limit in coalescence terms (because they are quadratic), that's why we use the following averaging lemma, inspired by [7], [3], and [4] :

**Theorem 3.9** *Let $(g_n)$ be a bounded sequence in $L^1((0,T)\times\mathbb{R}^3\times Y)$ and weakly compact in $L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)$, for all $R>0$. Let $(G_n)$ be a bounded sequence in $L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)$ for all $R>0$. We assume that*

$$\partial_t g_n + \frac{p}{m}.\nabla_x g_n = G_n \quad in \quad \mathcal{D}'((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y).$$

*Then, for any function $\Psi\in L^\infty(Y^2)$, with compact support, the sequence*

$$\left(\int_Y g_n(t,x,y)\Psi(y,y^\star)dy\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*is strongly compact in $L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)$, for all $R>0$.*

This result can be improved :

**Corollary 3.10** *With the assumptions of theorem 3.9, we also have : for all $R>0$ and for any function $\Psi\in L^\infty((0,T)\times B_R\times Y_R^2)$, the sequence*

$$\left(\int_Y g_n(t,x,y)\Psi(t,x,y,y^\star)dy\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*is strongly compact in $L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)$.*

Proof : The case of separated variables is obvious. Then, we proceed by a density argument as in [3]. □

**Corollary 3.11** *With the assumptions of theorem 3.9, we also have : for all $R>0$ and for any sequence $(\Psi_n)$ bounded in $L^\infty((0,T)\times B_R\times Y_R)$ which converges a.e to $\Psi\in L^\infty((0,T)\times B_R\times Y_R)$, the sequence*

$$\left(\int_Y g_n(t,x,y)\Psi_n(t,x,y)dy\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

*is strongly compact in $L^1((0,T)\times B_R)$.*

Proof : Let $\varepsilon > 0$. The sequence $(g_n)$ being weakly compact in $L^1((0,T) \times B_R \times Y_R)$, there exists $\delta > 0$ such that

$$\forall E \in \mathcal{B}((0,T) \times B_R \times Y_R), \quad |E| < \delta, \qquad \sup_n \iiint_E |g_n| dt dx dy \leq \varepsilon.$$

Then, by Egoroff theorem, there exists $E_0 \in \mathcal{B}((0,T) \times B_R \times Y_R)$ such that $|E_0| < \delta$ and $\Psi_n$ converge uniformly to $\Psi$ on $E_1 := ((0,T) \times B_R \times Y_R) \setminus E_0$. Whence

$$\begin{aligned} \left\| \int_{Y_R} g_n \Psi_n dy - \int_{Y_R} g_n \Psi dy \right\|_{L^1((0,T)\times B_R)} &\leq \int_0^T \int_{B_R} \int_{Y_R} |g_n| |\Psi_n - \Psi| dy dx dt \\ &\leq 2C\ \varepsilon + \sup_{E_1} |\Psi_n - \Psi| \iiint_{E_1} |g_n| \\ &= 2C\ \varepsilon + \underset{n\to+\infty}{o(1)}\ . \end{aligned}$$

We infer

$$\left\| \int_{Y_R} g_n \Psi_n dy - \int_{Y_R} g_n \Psi dy \right\|_{L^1((0,T)\times B_R)} \overset{n}{\longrightarrow} 0.$$

The sequence $\left( \int_{Y_R} g_n \Psi dy \right)$ being compact in $L^1((0,T) \times B_R)$ in view of corollary 3.10, the results follows. □

Now, we are able to establish the strong compactness of the sequence of $f_n$ $y$-averages, and also the $(Lf_n)$ one.

**Lemma 3.12** *For all $R > 0$, and for all function $\Psi \in L^\infty(Y)$ with compact support,*

$$\int_Y f_n(t,x,y)\Psi(y)dy \overset{n}{\longrightarrow} \int_Y f(t,x,y)\Psi(y)dy \quad in \quad L^1((0,T) \times B_R).$$

Proof : Since it is not clear that $\left(Q_c^-(f_n, f_n)\right)_n$ is bounded in $L^1((0,T) \times B_R \times Y_R)$, we can not directly apply theorem 3.9 to the sequence $(f_n)$.

For $\nu > 0$, we consider the sequence $g_n^\nu := \frac{1}{\nu} \log(1 + \nu f_n)$ and we set

$$G_n^\nu := \frac{Q_c^+(f_n, f_n)}{1 + \nu f_n} - \frac{Q_c^-(f_n, f_n)}{1 + \nu f_n} + \frac{Q_f^+(f_n)}{1 + \nu f_n} - \frac{Q_f^-(f_n)}{1 + \nu f_n}.$$

By the assumptions on $(f_n)$, we have

$$\partial_t g_n^\nu + \frac{p}{m}.\nabla_x g_n^\nu = G_n^\nu \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y). \tag{3.7}$$

Since $0 \le g_n^\nu \le f_n$, the weak compactness of $(f_n)$ established in the lemma 3.3 implies that $(g_n^\nu)$ is also weakly compact. Similarly, the sequence $(g_n^\nu)$ is bounded in $L^1((0,T)\times\mathbb{R}^3\times Y)$. Then, by corollaries 3.5, 3.7 and lemma 3.8, $(G_n^\nu)$ is bounded in $L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)$. Therefore, theorem 3.9 applies to $(g_n^\nu)$ for all $\nu>0$. In particular, for all function $\Psi\in L^\infty(Y)$ with compact support and for all $\nu>0$, the sequence $\left(\int_Y g_n^\nu(t,x,y)\Psi(y)dy\right)_n$ is compact in $L^1((0,T)\times B_R)$, thus, by the uniqueness of weak limit,

$$\int_Y g_n^\nu(t,x,y)\Psi(y)dy \xrightarrow{n} \int_Y g^\nu(t,x,y)\Psi(y)dy \quad \text{in} \quad L^1((0,T)\times B_R), \tag{3.8}$$

where $g^\nu$ is the weak limit of $(g_n^\nu)$ (up to an extraction).

The result follows because

$$\sup_n \sup_{t\in[0,T]} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} |g_n^\nu - f_n| dydx \underset{\nu\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{3.9}$$

which implies the strong compactness in $L^1((0,T)\times B_R)$ of the sequence $\left(\int_Y f_n(t,x,y)\Psi(y)dy\right)_n$.

To show (3.9), we can use the inequality

$$\forall M>0, \qquad 0 \le u - \frac{1}{\nu}\log(1+\nu u) = \frac{\nu M}{2} u \mathbb{1}_{\{u\le M\}} + u\mathbb{1}_{\{u>M\}}. \tag{3.10}$$

Then we obtain, for all $n$ and for all $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} |g_n^\nu - f_n| dydx &\le \tfrac{\nu M}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f_n dydx + \iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f_n \mathbb{1}_{\{f_n>M\}} dydx \\ &\le \tfrac{\nu M}{2} K_T + \tfrac{1}{M^{s-1}}\iint_{\mathbb{R}^3\times Y} f_n^s dydx \le \left(\tfrac{\nu M}{2} + \tfrac{1}{M^{s-1}}\right) K_T. \end{aligned}$$

We conclude by letting $\nu\to 0$, and $M\to+\infty$. □

**Proposition 3.13** *We set $\rho_n(t,x) := \int_Y f_n(t,x,y)dy$ and $\rho(t,x) := \int_Y f(t,x,y)dy$. Then, up to a subsequence, we have, for all $R>0$,*

$$\rho_n \longrightarrow \rho \quad \textit{in} \quad L^1((0,T)\times B_R) \quad \textit{and} \quad \textit{a.e.} \tag{3.11}$$

Proof : We have

$$\rho_n = \rho_n^M + \sigma_n^M, \quad \text{where} \quad \rho_n^M := \int_{Y_M} f_n(t,x,y)dy.$$

By the preceding lemma, $\rho_n^M \underset{n}{\longrightarrow} \rho^M := \int_{Y_M} f(t,x,y)dy$ in $L^1((0,T)\times B_R)$ for all $M>0$, and

$$\begin{aligned}\sigma_n^M := \int_{Y-Y_M} f_n(t,x,y)dy &\leq \tfrac{1}{M}\int_{Y-Y_M}|y|f_n(t,x,y)dy \\ &\leq \tfrac{Cte}{M}\int_Y \left(m+\tfrac{|p|^2}{2m}+e\right)f_n(t,x,y)dy,\end{aligned}$$

whence $\sigma_n^M \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ in $L^1((0,T)\times B_R)$, uniformly in $n$. □

**Lemma 3.14** *For all $R>0$, we have, up to a subsequence,*

$$Lf_n \longrightarrow Lf \quad in \quad L^1((0,T)\times B_R\times Y_R) \quad and \quad a.e. \tag{3.12}$$

Proof : Applying the corollary 3.10 with $\Psi(y,y^\star) = A(y,y^\star)\mathbb{1}_{\{y\in Y_R\}}\mathbb{1}_{\{y^\star\in Y_{R^\star}\}}$, we infer that the sequence $\left(\int_{Y_{R^\star}} g_n^\nu(t,x,y^\star)A(y,y^\star)dy^\star\right)_n$ is compact in $L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)$ for all $R^\star>0$. Using (3.9) again, we obtain, for all $R^\star>0$, the compactness of $\left(\int_{Y_{R^\star}} f_n(t,x,y^\star)A(y,y^\star)dy^\star\right)_n$ in $L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)$. We conclude similarly as for the proof of lemma 3.6, establishing

$$\lim_{R^\star\to+\infty}\sup_n \left\| \int_{Y_{R^\star}} Af_n^\star dy^\star - \int_Y Af_n^\star dy^\star \right\|_{L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)} = 0,$$

and identifying the weak limits. □

## 3.5 Regularity in time of the limit $f$

In this subsection, we show the continuity in time of the limit $f$, which gives a sense to the Cauchy data $f(0)=f^0$.

**Proposition 3.15** *In fact, we have $f\in C([0,T],L^1(\mathbb{R}^3\times Y))$.*

Proof : We use the integral formulation. Each $g_n^\nu$ is a distributional solution of the renormalized equation, by (3.7), so a mild solution. Therefore we have, for $a.e\ (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times Y$, and for all $t, t+h \in [0,T]$,

$$g_n^{\nu\sharp}(t+h,x,y) - g_n^{\nu\sharp}(t,x,y) = \int_t^{t+h} G_n^\nu(\sigma,x,y)d\sigma,$$

thus

$$\|g_n^{\nu\sharp}(t+h) - g_n^{\nu\sharp}(t)\|_{L^1(B_R\times Y_R)} \leq \iint_{B_R\times Y_R} \int_t^{t+h} |G_n^\nu(\sigma,x,y)|\, d\sigma.$$

Moreover, by the subsections 3.2 and 3.3, the sequence $(G_n^\nu)_n$ is weakly compact in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$, thus for all $t \in [0,T]$,

$$\lim_{h\to 0} \sup_n \|g_n^{\nu\sharp}(t+h) - g_n^{\nu\sharp}(t)\|_{L^1(B_R\times Y_R)} = 0.$$

Therefore the sequence $(g_n^{\nu\sharp})$ is equicontinuous in $C([0,T], L^1(B_R \times Y_R))$. By the compactness of $[0,T]$, this sequence is in fact uniformly equicontinuous, thus

$$\lim_{h\to 0} \sup_n \sup_{t\in[0,T]} \|g_n^{\nu\sharp}(t+h) - g_n^{\nu\sharp}(t)\|_{L^1(B_R\times Y_R)} = 0.$$

Then, (3.9) and the estimate (3.2) yield

$$\lim_{h\to 0} \sup_n \sup_{t\in[0,T]} \|f_n^{\sharp}(t+h) - f_n^{\sharp}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times Y)} = 0.$$

Ascoli theorem entails that the sequence $(f_n^\sharp)$ is compact in

$$C([0,T], L^1(\mathbb{R}^3 \times Y)).$$

The uniqueness of the limit in $\mathcal{D}'((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y)$ yields

$$f^\sharp \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^3 \times Y)),$$

and so $f \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^3 \times Y))$ by change of variables. □

## 3.6 Passing to the limit in a new integral equation

Even if the renormalization provides weak compactness, a new problem appears : we will not be able to pass to the weak limit in $(ECFR)$, because of the non-linearity of the factor $f_n/(1+f_n)$. That's why we need another formulation to our problem, which avoids the renormalization. But, remember that the term $Q_c^-(f,f)$ can not be defined as a distribution, so we will use an integral equation which doesn't involve this term. We proceed as in [10].

We denote by $T$ the linear transport operator

$$T = \partial_t + \frac{p}{m}.\nabla_x.$$

Let $T^{-1}$ be the resolvant of transport operator, defined by : for $g(t,x,y)$, we set $u = T^{-1}g$ if $u|_{t=0} = 0$ and $Tu = g$. So, we have

$$T^{-1}g(t,x,m,p,e) := \int_0^t g(s, x-(t-s)p/m, m, p, e)ds.$$

$T^{-1}$ satisfies the following properties :

(i) Forall $R > 0$, $T^{-1}\big(L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)\big) \subset C([0,T], L^1(B_R \times Y_R))$ continuously and weakly continuously.

(ii) $T^{-1}$ is nonnegative ($\forall g \geq 0, T^{-1}g \geq 0$).

Forall $F \in C([0,T], L^1(B_R \times Y_R))$ such that $TF \geq 0$, we set

$$T_F^{-1} = e^{-F}T^{-1}e^F.$$

This operator is well defined from $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$ to $C([0,T], L^1(B_R \times Y_R))$ and has the same continuity properties as $T^{-1}$.

Moreover, if $(F_n)$ is a bounded sequence in $C([0,T], L^1(B_R \times Y_R))$ such that $TF_n \geq 0$, if $F_n(t,x,y) \to F(t,x,y)$ for all $t$ and $a.e\,(x,y)$, and if $g_n \rightharpoonup g$ weakly in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$, then

$$\forall t \in [0,T], \qquad T_{F_n}^{-1}g_n(t) \rightharpoonup T_F^{-1}g(t) \quad \text{weakly in} \quad L^1(B_R \times Y_R).$$

The operator $T_F^{-1}$ allows us to build an new formulation of our problem, which is better because it only involves $Q_c^+(f_n,f_n)$, $Q_f^+(f_n)$, $Q_c^-(f_n)$ :

**Lemma 3.16** *$f \in C([0,T], L^1(\mathbb{R}^3 \times Y))$ is a mild solution of $(ECF)$ with initial data $f(0) = f^0$ if and only if*

$$f = e^{-F} f^0(x - tp/m, y) + T_F^{-1}(Q_c^+(f,f)) + T_F^{-1}(Q_f^+(f)) - T_F^{-1}(Q_c^-(f)), \quad (3.13)$$

*where $F := T^{-1}(Lf)$.*

Proof : The result is deduced from the following fact : if $f$ is a distributional solution of $(ECF)$, then

$$T(e^F f) = TFe^F f + e^F Tf = e^F(f\,Lf + Q_c^+(f,f) - Q_c^-(f,f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f))$$
$$= e^F(Q_c^+(f,f) + Q_f^+(f) - Q_f^-(f)).$$

□

Now, we can finish the proof of theorem 3.2.

End of the proof of theorem 3.2 : We will pass to the weak limit in the following equation, satisfied by each $(f_n)$ :

$$f_n = e^{-F_n} f_n^0(x - tp/m, y) + T_{F_n}^{-1}(Q_c^+(f_n, f_n)) + T_{F_n}^{-1}(Q_f^+(f_n)) - T_{F_n}^{-1}(Q_c^-(f_n)), \quad (3.14)$$

where $F_n := T^{-1}(Lf_n)$.

Notice that in view of (3.12) and the continuity properties of $T^{-1}$, the sequence $(F_n)$ is bounded in $C([0,T], L^1(B_R \times Y_R))$, and $F_n(t,x,y) \to F(t,x,y)$ for all $t$ and $a.e\,(x,y)$. Thus, we can pass to the weak limit in the terms $T_{F_n}^{-1}(Q_f^+(f_n))$ and $T_{F_n}^{-1}(Q_c^-(f_n))$ thanks to the lemma 3.8.

The term $e^{-F_n} f_n^0(x - tp/m, y)$ can be treated with the continuity in $t = 0$ (for the $L^1$-norm) of each $f_n$ and $f$, established in the previous section. Eventually, the last term $T_{F_n}^{-1}(Q_c^+(f_n, f_n))$ also pass to the weak limit thanks to the following lemma and proposition, which use the $a.e$ convergence of the $y$-averages obtained in the previous subsection.

**Lemma 3.17** *For all $R > 0$ and for all function $\varphi \in L^\infty((0,T) \times B_R \times Y_R)$, we have, up to a subsequence,*

$$\frac{\int_Y Q_c^+(f_n, f_n)(t,x,y)\varphi(t,x,y)dy}{1 + \rho_n(t,x)} \xrightarrow{n} \frac{\int_Y Q_c^+(f,f)(t,x,y)\varphi(t,x,y)dy}{1 + \rho(t,x)}$$

*in $L^1((0,T) \times B_R)$ and a.e.*

Proof : We have

$$\frac{\int_Y Q_c^+(f_n,f_n)\varphi dy}{1+\rho_n} = \frac{1}{2}\int_Y f_n(t,x,y^\star)\left(\int_Y \frac{f_n(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y+y^\star)dy}{1+\rho_n(t,x)}\right)dy^\star.$$

Now, we apply the corollary 3.10 with

$$\Psi(t,x,y,y^\star) = A(y,y^\star)\varphi(t,x,y+y^\star)$$

(notice that $\Psi \in L^\infty((0,T)\times B_R \times Y_{2R}^2)$ thanks to (1.5)).

Therefore, the sequence $\left(\int_Y g_n^\nu(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y')dy\right)_n$ is compact in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$, and we have

$$\int_Y g_n^\nu(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y')dy \xrightarrow{n} \int_Y g^\nu(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y')dy \tag{3.15}$$

in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$, for all $\nu > 0$.

Using (3.9) again, we obtain, up to a subsequence, that

$$\int_Y f_n(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y')dy \xrightarrow{n} \int_Y f(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y')dy \tag{3.16}$$

in $L^1((0,T)\times B_R \times Y_R)$ and a.e.

Up to another extraction, we infer, by (3.16) and (3.11),

$$\int_Y \frac{f_n(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y')dy}{1+\rho_n(t,x)} \xrightarrow{n} \int_Y \frac{f(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y')dy}{1+\rho(t,x)} \tag{3.17}$$

a.e in $(t,x,y) \in (0,T)\times B_R \times Y_R$.

Applying the corollary 3.11 with

$$\Psi_n(t,x,y^\star) := \int_Y \frac{f_n(t,x,y)A(y,y^\star)\varphi(t,x,y')dy}{1+\rho_n(t,x)}$$

(which satisfies the required assumptions because $\varphi$ is compact supported and $A$ is locally bounded), we obtain the compactness of the sequence

$$\left(\int_Y g_n^\nu(t,x,y^\star)\Psi_n(t,x,y^\star)dy^\star\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } L^1((0,T)\times B_R),$$

and so, by (3.9), we deduce that $\left(\int_Y f_n(t,x,y^\star)\Psi_n(t,x,y^\star)dy^\star\right)_{n\in\mathbb{N}}$ is compact.

Finally, we conclude that

$$\int_Y f_n(t,x,y^\star)\Psi_n(t,x,y^\star)dy^\star \xrightarrow{n} \int_Y f(t,x,y^\star)\Psi(t,x,y^\star)dy^\star \quad \text{in} \quad L^1((0,T)\times B_R).$$

□

**Proposition 3.18** *Up to a subsequence, we have, for all $R>0$,*

$$Q_c^+(f_n,f_n) \rightharpoonup Q_c^+(f,f) \quad \textit{weakly in} \quad L^1((0,T)\times B_R\times Y_R).$$

Proof : We know by the lemma 3.4 that there exists $\overline{Q}(t,x,y)$ such that for all $R>0$,

$$Q_c^+(f_n,f_n) \rightharpoonup \overline{Q} \quad \text{weakly in} \quad L^1((0,T)\times B_R\times Y_R).$$

By (3.11) and a standard integration argument (we can refer to [17] for a proof), it leads to

$$\frac{Q_c^+(f_n,f_n)}{1+\rho_n} \rightharpoonup \frac{\overline{Q}}{1+\rho} \quad \text{weakly in} \quad L^1((0,T)\times B_R\times Y_R).$$

Moreover, the previous lemma shows that

$$\frac{Q_c^+(f_n,f_n)}{1+\rho_n} \rightharpoonup \frac{Q_c^+(f,f)}{1+\rho} \quad \text{weakly in} \quad L^1((0,T)\times B_R\times Y_R).$$

We conclude identifying weak limits. □

We have shown that $f$ is a mild solution of $(ECF)$. Since $Q_c^+(f_n,f_n)$, $Q_f^+(f_n)$ and $Q_f^-(f_n)$ converge weakly to $Q_c^+(f,f)$, $Q_f^+(f)$ and $Q_f^-(f)$ respectively, these three terms lie in $L^1_{loc}$, and *a fortiori*,

$$\frac{Q_c^+(f,f)}{1+f}, \frac{Q_f^+(f)}{1+f}, \frac{Q_f^-(f)}{1+f} \in L^1_{loc}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^3\times Y).$$

The term $\frac{Q_c^-(f,f)}{1+f}$ is automatically in $L^1_{loc}$ because $Lf\in L^1((0,T)\times B_R\times Y_R)$ for all $R>0$ and $\frac{Q_c^-(f,f)}{1+f}\le Lf$.

Thus, $f$ is indeed a renormalized solution of $(ECF)$. □

# References


[1] D.J. Aldous : *Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation and coagulation) : a review of the mean-field theory for probabilists.* Bernoulli 5 (1), 1999, 3-48.

[2] H. Amann, C. Walker : *Local and global strong solutions to continuous coagulation-fragmentation equations with diffusion.* J. Differential Equations 218 (2005), no. 1, 159-186.

[3] R.J. DiPerna, P.L. Lions : *On the Cauchy problem for Boltzmann equations : Global existence and weak stability.* Annals of Mathematics, 130 (1989), 321-366.

[4] R.J. DiPerna, P.L. Lions, Y. Meyer : *$L^p$ regularity of velocity averages.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 8 (1991), 271-287.

[5] P.B. Dubovski, I. W. Stewart : *Existence, uniqueness and mass conservation for the coagulation-fragmentation equation.* Math. Methods Appl. Sci. 19 (1996), no. 7, 571-591.

[6] P.B. Dubovski : *Solubility of the transport equation in the kinetics of coagulation and fragmentation.* Izv. Math. 65 (2001), no. 1, 1-22.

[7] M. Escobedo, P. Laurençot, S. Mischler : *On a kinetic equation for coalescing particles.* Comm. Math. Phys., 246 No 2 (2004), 237-267.

[8] M. Escobedo, S. Mischler, M. Rodriguez-Ricard : *On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 22 (2005), no. 1, 99-125.

[9] N. Fournier, P. Laurençot : *Existence of self-similar solutions to Smoluchowski's coagulation equation.* Comm. Math. Phys. 256 (2005), no. 3, 589-609.

[10] P. Gérard : *Solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann.* Séminaire Bourbaki, 1987-1988, exp. no. 699, 257-281.

[11] P.E. Jabin, J. Soler : *A kinetic description of particle fragmentation.* Math. Models Methods Appl. Sci. 16 (2006), no. 6, 933-948.

[12] P.E. Jabin, C. Klingenberg : *Existence to solutions of a kinetic aerosol model.* Nonlinear partial differential equations and related analysis, 181-192, Contemp. Math., 371, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[13] W. Lamb : *Existence and uniqueness results for the continuous coagulation and fragmentation equation.* Math. Methods Appl. Sci. 27 (2004), no. 6, 703-721.

[14] P. Laurençot : *Self-similar solutions to a coagulation equation with multiplicative kernel.* Phys. D 222 (2006), no. 1-2, 80-87.

[15] P. Laurençot, S. Mischler : *Global existence for the discrete diffusive coagulation-fragmentation equations in $L^1$.* Rev. Mat. Iberoamericana 18 (2002), no. 3, 731-745.

[16] P. Laurençot, S. Mischler : *From the discrete to the continuous coagulation-fragmentation equations.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A 132 (2002), no. 5, 1219-1248.

[17] P. Laurençot, S. Mischler : *The continuous coagulation-fragmentation equations with diffusion.* Arch. Rational. Mech. Anal., 162 (2002), 45-99.

[18] P. Laurençot, S. Mischler : *Convergence to equilibrium for the continuous coagulation-fragmentation equation.* Bull. Sci. Math. 127 (2003), no. 3, 179-190.

[19] S. Mischler, M. Rodriguez-Ricard : *Existence globale pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 336 (2003), no. 5, 407-412.

[20] H. Müller : *Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation.* Kolloidchemische Beihefte 27 (1928), 223-250.

[21] M. Smoluchowski : *Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen.* Physik Zeitschr. 17 (1916), 557-599.

[22] M. Smoluchowski : *Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen.* Zeitschrift f. physik. Chemie 92 (1917), 129-168.

[23] I.W. Stewart : *A global existence theorem for the general coagulation-fragmentation equation with unbounded kernels.* Math. Methods Appl. Sci. 11 (1989), no. 5, 627-648.

[24] I.W. Stewart : *A uniqueness theorem for the coagulation-fragmentation equation.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107 (1990), no. 3, 573-578.

# Deuxième partie

# Convergence rate for the method of moments with linear closure relations

**Abstract**

We study linear closure relations for the moments' method applied to simple kinetic equations. The equations are linear collisional models (velocity jump processes) which are well suited to this type of approximation. In this simplified, 1 dimensional setting, we are able to prove stability estimates for the method (with a kinetic interpretation by a BGK model). Moreover we are also able to obtain convergence rates which automatically increase with the smoothness of the initial data.

# 1 Introduction

## 1.1 Quick presentation of the moments' methods for kinetic equations

We study here an unusual but very simple choice of closure for the moments' method where we can completely characterize the stability and convergence rates of the approximation. As far as we know this very simple situation was never considered before. Before presenting this choice though, let us very briefly give the main ideas behind the method of moments.

Moments' methods have been introduced in [10] in the context of the Boltzmann equation. This well known equation is posed on the density $f(t,x,v)$ of particles in the phase space and reads

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \tag{1.1}$$

where $Q$ is a non linear operator (in the velocity variable $v$) which expresses how the velocity of a particle may change when it has a random collision.

Solving numerically an equation like (1.1) is in general very costly. The structure of the righthand side $Q$ is non local in $v$ and moreover the equation is posed in phase space which means that one has to work in dimension $2d+1$ if $x, v \in \mathbb{R}^d$ (7 for instance if $x \in \mathbb{R}^3$).

The moments' method is one possible answer to this problem and it consists in solving equations on the polynomial moments of $f$. Let $m(v)$ be polynomial in $v$ then

$$\partial_t < m, f > + \nabla_x \cdot < v\, m(v), f > = < m, Q(f) >, \tag{1.2}$$

where we denote

$$< m, f >= \int m(v)\, f(t,x,v)\, dv. \tag{1.3}$$

Now instead of solving one equation in dimension $2d+1$, one has to solve several equations but in dimension $d+1$. Moreover in general one can expect that $< m,\, Q(f) >$ is not too complicated to compute.

However the system given by (1.2) is not closed as $vm$ is always one degree higher than $m$. Therefore no matter how many moments $m_i$ one chooses, it is never possible to express all the $v\, m_j$ in terms of the $m_i$. This is the closure problem and it means that (1.1) is never equivalent to (1.2) for any finite number of moments.

Instead one typically chooses a closure equation, *i.e.* a relation between $< vm_i,\, f >$ and the $< m_j, f >$ for those $i$ where $vm_i$ cannot be expressed in terms of the $m_j$.

The first big difficulty for this type of method is how to choose the closure in order to ensure that the corresponding moments' system has good properties and gives a good approximation of Eq. (1.1). This problem was of course recognized early on, see for instance [3], as well as the role of entropy, see [15] among many others.

One of the first systematic ways of finding a closure was introduced in [12] and [13]. It is still not easy to actually compute the relation which means that it is often computed numerically instead (see [18], [6], [7]). Different closures can of course be used (see [21] for example).

Theoretically even checking that the corresponding method leads to a hyperbolic system is not easy (we refer for instance to [4], [5]). Proving convergence rates seems to be out of reach for the time being although in practice it seems to be a good approximation (see [11] for a numerical study).

Let us also mention that the methods of moments has also been used for theoretical purposes (as in [9]) and not only numerical computations.

We conclude this very brief overview by refering to [2], [17] or [19] for more on numerical simulations for kinetic equations in this context.

## 1.2 Linear closure relations

The guiding question in this article is whether it can make sense to consider a linear closure relation. This is certainly delicate in the nonlinear case of Boltzmann eq. (1.1). Instead we choose a simplified 1d setting where it is possible to fully analyze the method.

Instead of (1.1), we consider the linear model

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f = L(f), \qquad (x,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ \\ L(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} Q(v,v^*) f(t,x,v^*) dv^* - \lambda f \end{cases}, \tag{1.4}$$

with $\lambda > 0$ and where the operator $Q$ corresponds to a velocity jump process. While much simplified with respect to (1.1), it is not uninteresting in itself, with applications to physics (see [8], [23]) or biology (see [14] for example). The equation had to be supplemented with some initial data, which for simplicity we assume to be compactly supported in velocity

$$f(t=0,x,v) = f^0(x,v) \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp}\, f^0 \subset \mathbb{R}\times I. \tag{1.5}$$

In general $Q$ could even be assumed to depend on $t$ and $x$. Here we make the additional approximation

$$Q(v,v^*) = \left( q(v) \sum_{j=0}^{d} \alpha_j v^{*j} \right) \mathbb{1}_{\{(v,v^*)\in I^2\}}, \tag{1.6}$$

with $q$ smooth and compactly supported in some interval $I$, $d \in \mathbb{N}^*$ and $(\alpha_j)_{0\le j\le d} \in \mathbb{R}^{d+1}$. With this special form, one of course expects to be in a very favorable situation for the method of moments. Hence this should be seen as a simple toy model where the method can easily be tested.

Denoting the moments of the solution $f$ by

$$\mu_i^f(t,x) := \int_I v^i f(t,x,v) dv, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{1.7}$$

Eq. (1.4) simply becomes

$$\partial_t f + v\partial_x f = L(f) = q(v) \sum_{j=0}^{d} \alpha_j \mu_j^f - \lambda f. \tag{1.8}$$

As we work in dimension 1, the structure of the hierarchy of equations on the moments is also very simple

$$\partial_t \mu_i^f + \partial_x \mu_{i+1}^f = \gamma_i \left( \sum_{j=0}^{d} \alpha_j \mu_j^f \right) - \lambda \mu_i^f, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{1.9}$$

where we truncate at order $N$ and we define the moments of $q$

$$\gamma_i = \mu_i^q = \int_I v^i q(v) dv, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

In order to close the system, it would be necessary to be able to express $\mu_{N+1}^f$ in terms of the $\mu_i^f$ for $i \leq N$. The linear closure relation that we study here consists in assuming that $\mu_{N+1}^f$ is a linear combination of the lower moments.

That means that instead of (1.8) or (1.9), we solve

$$\begin{cases} \partial_t \mu_i + \partial_x \mu_{i+1} = \gamma_i \left( \sum_{j=0}^{d} \alpha_j \mu_j \right) - \lambda \mu_i, \qquad i = 0, \dots, N \\ \mu_{N+1} = \sum_{i=0}^{N} a_i \mu_i. \end{cases}, \tag{1.11}$$

with $(a_0, \dots, a_N)$ given real coefficients that one should choose in the "best" possible way.

One can rewrite (1.11) in matrix form as

$$\partial_t M_N + \partial_x (A M_N) = B M_N, \tag{1.12}$$

where $M_N = M_N(t,x) = (\mu_0(t,x), \dots, \mu_N(t,x))^T \in \mathbb{R}^{N+1}$, and $A, B \in M_{N+1}(\mathbb{R})$ are defined by

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & a_{N-1} & a_N \end{pmatrix}, \quad B = \left( \begin{array}{c|c} \vdots & 0 \\ (\gamma_i \alpha_j)_{\substack{0 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq d}} & \vdots \\ \vdots & 0 \end{array} \right) - \lambda I_{N+1}. \tag{1.13}$$

## 1.3 Basic properties of the method and the main result

Given the simple form of (1.11) or (1.12), some properties are obvious. Given its linear nature, the system is hyperbolic if the characteristic polynomial

$$\chi_A(X) = det(X I_{N+1} - A) = X^{N+1} - \sum_{i=0}^{N} a_i X^i \tag{1.14}$$

has $N+1$ real roots, denoted by

$$spec(A) = \{\lambda_0, \dots, \lambda_N\}. \tag{1.15}$$

This is enough to guarantee the well posedness of the numerical system (1.12) but not necessarily good stability properties. Norms of the numerical appoximation could for instance grows fast as $N$ increases. If the initial data is compactly supported in $x$ then the solution is as well and the support propagates with speed $\max_k |\lambda_k|$.

On the other hand, the major inconvenients of such a method are also pretty clear. For instance positivity of the even moments will likely not be preserved. Even the positivity of the macroscopic density $\mu_0^f$ has no reason to be propagated.

However a careful analysis can in fact reveal that it is possible to choose appropriately the coefficients $a_i$ in order to have not only stability but also very fast convergence.

For simplicity, assume that $I = [-1,\ 1]$ (just rescale and translate otherwise) and choose the Tchebychev polynomial for $\chi_A$ or

$$\forall 0 \le k \le N, \qquad \lambda_k = \cos\left(\left(\frac{2k+1}{2N+2}\right)\pi\right), \tag{1.16}$$

or

$$\chi_A^{(N+1)}(X) = \prod_{k=0}^{N}\left(X - \cos\left(\left(\frac{2k+1}{2N+2}\right)\pi\right)\right). \tag{1.17}$$

Then it is possible to show :

**Theorem 1.1** *Assume that $f^0$ satisfies* (1.5)*, that $Q$ satisfies* (1.6)*. Then the solution to the truncated moments' hierarchy* (1.11) *where the coefficients $a_i$ are chosen according to* (1.16) *or* (1.17) *satisfies*

$$\sup_{0\le i\le N}\sup_{t\in[0,T]} \|\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le e^{TC_{d,\alpha}\|q\|_{L^2(I)}}\|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.18}$$

*where $C_{d,\alpha} = \sqrt{\pi(d+1)}\left(\sum_{j=0}^{d}{\alpha_j}^2\right)^{1/2}$ is independent of $N$.*

*In addition if $f^0 \in H^k(\mathbb{R}^2)$, $d = 0$, denoting by $f$ the corresponding solution to* (1.4) *and defining its moments by* (1.7)*, one has*

$$\|\mu_0 - \mu_0^f\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} \le \frac{C}{N^{k-3/4}} \times \|f^0\|_{H^k(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.19}$$

*where $C \ge 0$ depends on $T, \lambda, q$ and $k$.*

**Remark 1.2** *The convergence result is given for the first moment and $d = 0$. Higher moments would lose small powers of $N$ so the same proof would give*

$$\|\mu_i - \mu_i^f\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} \leq \frac{C\, N^{k\,(i+d)/N}}{N^{k-1}} \times \|f^0\|_{H^k(\mathbb{R}^2)}.$$

*We do not know whether those results are optimal or not and in particular whether the numerical value* $3/4$ *in* (1.19) *is optimal (though actual numerical simulations do suggest it is).*

Hence in this setting, the conclusion of this analysis is that the linear method of moments should be seen in the same light as spectral methods (see [16] for instance). It is stable, converges automatically at order $k - 3/4$ if the initial data is in $H^k$ but does not propagate any additional property (positivity being probably the most important).

The next section is a more detailed presentation of the stability and convergence analysis in the general case (without necessarily choosing the Tchebychev points). The corresponding technical justifications and calculations are presented in two separate sections. Theorem 1.1 is proved in section 5. The last section is an appendix and recalls some well known results.

# 2 Stability and convergence results

We present here in more details the kind of stability and convergence results that can be proved for the method (1.11) without assuming any particular choice of the eigenvalues (like (1.16)). We give here the main ideas in the approach and leave the technical proofs to further sections.

## 2.1 Eigenvectors for System (1.12)

As they enter in some of the estimates, we start by a short parenthesis about the eigenvectors for the matrix $A$. Define $P \in M_{N+1}(\mathbb{R})$ the matrix of the eigenvectors ; then

$$P_{i,j} = \lambda_j^i, \qquad 0 \leq i, j \leq N. \tag{2.1}$$

Its inverse $P^{-1}$ can be computed as easily and

$$P^{-1}_{i,j} = \frac{\tilde{p}_{i,j}}{\pi_i}, \qquad 0 \leq i, j \leq N, \tag{2.2}$$

where

$$\pi_i = \prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j), \qquad \tilde{p}_{i,j} = (-1)^{N-j} \sum_{\substack{k_1<\ldots<k_{N-j} \\ k_l\neq i \ \forall l}} \prod_{l=1}^{N-j} \lambda_{k_l} = \sum_{l=0}^{j} \frac{a_l}{\lambda_i^{j-l+1}}. \quad (2.3)$$

with the convention that $\tilde{p}_{i,N} = 1$.

Moreover, an easy computation shows that :

$$\tilde{p}_{i,j} = \lambda_i^{N-j} - a_N\lambda_i^{N-j-1} - \cdots - a_{j+2}\lambda_i - a_{j+1}, \qquad 0 \leq i,j \leq N. \quad (2.4)$$

We can notice that $\tilde{p}_{i,j}$ is an homogeneous polynomial of degree $N-j$ in the eigenvalues $(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)$.

## 2.2 Stability estimate and kinetic interpretation of the method

Let us first state our main stability estimate.

**Theorem 2.1** *Assume* (1.5) *and that* $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\} \subset I$. *Moreover assume that there exists a function* $\rho_N(v)$, *positive on* $I$, *such that*

$$\int_I \frac{R(v)}{\rho_N(v)} dv = \sum_{k=0}^{N} R(\lambda_k), \qquad \forall R \in \mathbb{R}_{2N+1}[X]. \quad (2.5)$$

*Then, the hyperbolic system* (1.12) *is stable and*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\sum_{k=0}^{N} \lambda_k^{2i}\right)^{1/2} \times e^{TC_N(q)} \times C_N(f^0), \qquad i = 0, \ldots, N \quad (2.6)$$

*where*

$$C_N(f^0) = \left(\iint_{\mathbb{R}\times I} |f^0(x,v)|^2 \rho_N(v) dxdv\right)^{1/2}, \quad (2.7)$$

$$C_N(q) = \Lambda_{N,d} \left(\int_I |q(v)|^2 \rho_N(v) dv\right)^{1/2} - \lambda, \quad (2.8)$$

$$\Lambda_{N,d} = \sqrt{\sum_{j=0}^{d} \alpha_j^2} \sqrt{\sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{N} \lambda_k^{2j}} = \sqrt{\sum_{j=0}^{d} \alpha_j^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \frac{1-\lambda_k^{2d+2}}{1-\lambda_k^2}}. \quad (2.9)$$

This result does not assume any particular distribution on the eigenvalues but of course it is by no means guaranteed in general that one could find $\rho_N$ satisfying (2.5). Notice that the corresponding relation is really a quadrature formula for computing integrals on $I$ which we ask to be exact for polynomials of degree $2N+1$.

We do not prove this result directly on the system (1.12). Instead we show a corresponding result on a linear BGK problem (see [1] for the simplification of collision kernels into BGK models).

For any $\varepsilon > 0$ and $N \geq d$, consider the equation

$$\begin{aligned} &\partial_t f_N^\varepsilon + v\partial_x f_N^\varepsilon = \frac{M^{(N)}\, f_N^\varepsilon - f_N^\varepsilon}{\varepsilon} + L(f_N^\varepsilon) \\ &f_N^\varepsilon(0,x,v) = f_0(x,v), \end{aligned} \tag{2.10}$$

where the linear operator $L$ is defined by (1.8) and the Maxwellian $M^{(N)} : f \mapsto M^{(N)} f$ satisfies the moment conditions

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \displaystyle\int_I v^i M^{(N)}\, f dv & = & \displaystyle\int_I v^i f dv & i = 0, \ldots, N, \\ \displaystyle\int_I v^{N+1} M^{(N)}\, f dv & = & \displaystyle\sum_{i=0}^N a_i \int_I v^i f dv & \end{array} \right. . \tag{2.11}$$

This problem is a kinetic approximation of the macroscopic problem (1.11) as formally when $\varepsilon \longrightarrow 0$ then one recovers (1.11) from (2.10).

Indeed, multiplying (2.10) by $v^i$ and integrating over $v \in I$, we obtain

$$\partial_t \mu_i^\varepsilon + \partial_x \mu_{i+1}^\varepsilon = \gamma_i \left( \sum_{j=0}^d \alpha_j \mu_j^\varepsilon \right) - \lambda \mu_i^\varepsilon \quad \text{for } i = 0, \ldots, N,$$

where $\mu_i^\varepsilon := \int_I v^i f_N^\varepsilon dv$ for $i \in \mathbb{N}$. Moreover, when $\varepsilon \to 0$, we have formally

$$\mu_{N+1}^\varepsilon = \int_I v^{N+1} f_N^\varepsilon dv \sim \int_I v^{N+1} M^{(N)} f_N^\varepsilon dv = \sum_{i=0}^N a_i \int_I v^i f_N^\varepsilon dv = \sum_{i=0}^N a_i \mu_i^\varepsilon,$$

which is our closure relation.

The interest of (2.10) is to make some computations more transparent and easier to follow and in addition at the kinetic level which is more natural

given the original equation. If we can prove stability estimates for (2.10) that are uniform in $\varepsilon$ then simply by passing to the limit, we will obtain estimates for (1.12)-(1.11).

The most obvious choice for the maxwellian is simply

$$M^{(N)} f = \sum_{i=0}^{N} \left( \int_I v^i f dv \right) m_i, \tag{2.12}$$

where the $v \mapsto m_i(v)$, $i = 0, \ldots, N$, are any functions satisfying

$$\int_I v^j m_i(v) dv = \delta_{i,j}, \quad 0 \leq j \leq N, \qquad \int_I v^{N+1} m_i(v) dv = a_i. \tag{2.13}$$

The conditions (2.13) ensure that (2.11) holds.

There are obviously many ways to choose the $m_i$ s.t. (2.13) is satisfied. What we are looking for is a choice compatible with an inner product $\Phi_N$ such that the application $M^{(N)}$ is an orthogonal projection for $\Phi_N$. Formally this implies that for any $f$

$$\Phi_N(f, M^{(N)} f) \leq \Phi_N(f, f).$$

In addition this inner product should have good symmetry properties s.t. for $f$ and $g$

$$\Phi_N(f, vg) = \Phi_N(vf, g).$$

The simplest way to ensure this is to look for a weight $\rho_N$ s.t.

$$\Phi_N(f, g) = \int_I f(v)\, g(v)\, \rho_N(v)\, dv.$$

In that case formally

$$\Phi_N(f, v\partial_x f) = \frac{1}{2} \partial_x\, \Phi_N(f, vf).$$

Therefore if $f_N^\varepsilon$ solves (2.10) then one expects that

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \Phi_N(f_N^\varepsilon, f_N^\varepsilon)\, dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} \Phi_N(f_N^\varepsilon,\, L(f_N^\varepsilon))\, dx.$$

This is the strategy that we implement. Find appropriate conditions on $\rho_N$ and the $m_i$ to obtain the correct structure and then simply bound $\Phi_N(f, L(f))$ in terms of $\Phi_N(f)$.

For the first part of this strategy we actually prove

**Theorem 2.2** *Let $\rho_N(v)$ a positive function on $I$ such that*

$$\int_I \frac{R(v)}{\rho_N(v)} dv = \sum_{k=0}^{N} R(\lambda_k), \qquad \forall R \in \mathbb{R}_{2N+1}[X]. \tag{2.14}$$

*We set*

$$E_N = L^2(I, \rho_N(v)dv) = \left\{ f \text{ measurable}, \quad \int_I |f(v)|^2 \rho_N(v) dv < \infty \right\}.$$

*Then, the map $\phi_N$ defined by*

$$\phi_N(f,g) = \int_I f(v)g(v)\rho_N(v)dv, \qquad (f,g) \in E_N^2 \tag{2.15}$$

*is an inner product on $E_N$, and the Maxwellian $M^{(N)} : E_N \to E_N$, defined by*

$$M^{(N)} f = \sum_{i=0}^{N} \left( \int_I v^i f(v) dv \right) \frac{\tilde{T}_i(v)}{\rho_N(v)}, \qquad f \in E_N,$$

*is an orthogonal projection and satifies* (2.11)*, where $(\tilde{T}_i)_{0 \le i \le N}$ is the basis of $\mathbb{R}_N[X]$ defined by :*

$$\tilde{T}_i(X) = \sum_{k=0}^{N} Q_{k,i} X^k, \qquad 0 \le i \le N.$$

*with $Q = (P^T)^{-1} P^{-1}$.*

*Furthermore, with that choice of $M^{(N)}$, any solution $f_N^\varepsilon$ of the problem* (2.10) *formally satisfies :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \phi_N(f_N^\varepsilon, f_N^\varepsilon) dx \le 2 \int_{\mathbb{R}} \phi_N(f_N^\varepsilon, L(f_N^\varepsilon)) dx. \tag{2.16}$$

## 2.3 Error estimate

We now turn to the convergence of the method of moments to the solution. For simplicity we state the results here for the case $d = 0$ in (1.6), namely

$$Q(v, v^*) = q(v) \mathbb{1}_{\{(v,v^*) \in I^2\}}.$$

We also assume that $I \subset [-1,\ 1]$, still for simplicity.

The convergence results of course require a stability estimate. However in themselves, they do not use the specific form of the closure.

Therefore here we do not assume any specific closure relation. Instead we assume that we have a well defined methods of moments, *i.e.*, some way of computing $\mu_i$ which satisfy

$$\begin{array}{l} \partial_t \mu_i + \partial_x \mu_{i+1} = \gamma_i \mu_0 - \lambda \mu_i, \qquad i = 0, \dots, N \\ \mu_{N+1} = F(\mu_1, ..., \mu_N). \end{array}, \tag{2.17}$$

where

$$\gamma_i = \int_I v^i q(v) dv.$$

Moreover we assume that the corresponding method has good stability estimates in the sense that

$$\begin{array}{l} \exists C,\ \gamma \geq 0,\ \text{For any } (\mu_i)_{i=0..N} \text{ and } (\tilde{\mu}_i)_{i=0..N} \text{ solutions to (1.11) for } f^0,\ \tilde{f}^0, \\ \text{then} \qquad \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \|\mu_i - \tilde{\mu}_i\|_{L^\infty([0,T],\ H^k(\mathbb{R}))} \leq C N^\gamma \|f^0 - \tilde{f}^0\|_{L^2(I,\ H^k(\mathbb{R}))}, \end{array} \tag{2.18}$$

where $C,\ \gamma$ may depend on $T$, $q$, $\lambda$ but not on $N$ or $f^0$.

Note that Th. 2.1 can indeed be expected to imply such a result. The exponent $\gamma$ will depend on the choice of the coefficients in our method. Of course Th. 2.1 controls only the $L^2$ norm of the $\mu_i$. However as the method (1.11) is linear, the $\partial_x^k \mu_i$ are also a solution to the same system and an estimate like (2.18) can be derived. For a more detailed analysis of how to obtain (2.18) from Th. 2.1, we refer to Section 5 where it is performed when the $\lambda_k$ are the Tchebychev points.

For any method that satisfies (2.18), then one has the following convergence result

**Theorem 2.3** *Assume* (1.5) *with* $I \subset [-1,\ 1]$, *that the method* (2.17) *satisfies* (2.18) *for some* $\gamma \geq 0$ *and that* $f^0 \in H^k(\mathbb{R}^2)$, *with* $k \in \mathbb{N}^*$. *Consider* $f$ *the solution to* (1.4) *with* $d = 0$ *and the corresponding solution* $\mu_i$ *to* (2.17). *Then, for all* $T \geq 0$ *and for all* $N \geq 1$, *we have the estimate*

$$\|\mu_0 - \mu_0^f\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} \leq \frac{C}{N^{k-\gamma}} \times \|f^0\|_{H^k(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.19}$$

*where* $C \geq 0$ *depends on* $T, \lambda, q$ *and* $k$ *but not on* $N$.

This error estimate is a sort of interpolation between the stability bounds and the following result for $C^\infty$ solution to (2.17)

**Proposition 2.4** *Assume that the* $(\mu_i)_{i=0...N+1}$ *solve*

$$\partial_t \mu_i + \partial_x \mu_{i+1} = \gamma_i \, \mu_0 - \lambda \mu_i, \qquad i = 0, ..., N, \tag{2.20}$$

*with* $\mu_i(t=0) = 0$ *for* $i = 0...N$. *Then, for all* $T \geq 0$ *and for all* $N \geq 1$, *we have the estimate*

$$\|\mu_0 - \mu_0^f\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} \leq C \times \frac{T^N}{N!} \sum_{i=0}^{N} \|\partial_x^N \mu_i\|_{L^\infty([0,T],\ L^2(\mathbb{R}))}, \tag{2.21}$$

*where* $C \geq 0$ *depends on* $T$, $\lambda$, $q$.

# 3 Proof of Theorems 2.1 and 2.2

To simplify the presentation, we omit here the subscript $N$ in $E_N$, $\phi_N$, $\rho_N$, and the superscript $N$ in $M^{(N)}$.

## 3.1 Elementary space decomposition

The difficulty is to combine the fact that $M$ has to be an orthogonal projection for $\Phi$ with the symmetry property on $\Phi$. We take here a slighty more general approach by not assuming directly that $\Phi$ satisfies (2.15).

Consider a Maxwellian which has the form (2.12) and satisfies (2.13). First, such an application $M$ is a projection because $M \circ M = M$, which is a straightforward consequence of

$$M(m_i) = \sum_{j=0}^{N} \left( \int_I v^j m_i dv \right) m_j = m_i, \qquad i = 0, \ldots, N.$$

Moreover, one has that

$$Ker M = \left\{ f \in E, \quad \int_I v^i f(v) dv = 0, \quad i = 0, \ldots, N \right\} := K,$$

$$Ker(M - I) = Im(M) = Span(m_0, m_1, \ldots, m_N) := V,$$

and we have the space decomposition

$$E = V \oplus K,$$

with

$$dim(V) = codim(K) = N + 1.$$

We start by a more detailed explanation of the sufficient conditions to obtain Th. 2.2

**Lemma 3.1** *Assume that the inner product $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ satisfies*

$$K = V^{\perp,\phi}, \textit{ (i.e. the decomposition } V \oplus K \textit{ becomes orthogonal).}$$

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \phi(vf, g) = \phi(vg, f). \tag{3.1}$$

*Then, for any solution $f_N^\varepsilon = f_N^\varepsilon(t,x,v)$ of the problem* (2.10)*, inequality* (2.16) *formally holds :*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \|f_N^\varepsilon(t,x,.)\|_\phi^2 dx \le 2\int_{\mathbb{R}} \phi(f_N^\varepsilon, L(f_N^\varepsilon))dx.$$

Proof :

Take a smooth $f = f(t,x,v)$ such that $\partial_t f + v\partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}(Mf - f) + L(f)$. We have

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \|f(t,x,.)\|_\phi^2 dx &= 2\int_{\mathbb{R}} \phi(f, \partial_t f)dx \\ &= 2\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \phi(f, Mf - f)dx - \int_{\mathbb{R}} \phi(f, v\partial_x f)dx + \int_{\mathbb{R}} \phi(f, L(f))dx\right).\end{aligned}$$

Since $Mf - f \in K$ and $Mf \in V$, we have $\phi(Mf, Mf - f) = 0$, thus

$$\phi(f, Mf - f) = \phi(f - Mf, Mf - f) = -\|f - Mf\|_\phi \le 0.$$

We deduce

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \|f(t,x)\|_\phi^2 dx \le -2\int_{\mathbb{R}} \phi(f, v\partial_x f)dx + 2\int_{\mathbb{R}} \phi(f, L(f))dx.$$

Thus, having $\int_{\mathbb{R}} \phi(f, v\partial_x f)dx = 0$ is sufficient to obtain (2.16).

Since $\phi(f, v\partial_x f) = \partial_x \phi(f, vf) - \phi(\partial_x f, vf)$, we can write

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(f, v\partial_x f) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\phi(f, v\partial_x f) - \phi(vf, \partial_x f)\right) dx.$$

Therefore the symmetry condition (3.1) on $\phi$ is enough to conclude. If $f$ is not smooth enough to follow the previous steps, one simply regularizes it by convolution in $x$. As the equation is linear and $x$ is only a parameter in $M$ and $L$ then the regularized function solves the same equation. Therefore it satisfies (2.16) and letting the regularizing parameter vanish, one recovers the same inequality for $f$. □

Now, take a inner product $\phi$ on $E$ such that $K = V^{\perp,\phi}$, *i.e.* $K$ and $V$ are orthogonal for this inner product. The symmetry condition (3.1) is obviously equivalent to

$$\forall (f, g) \in V^2, \qquad \phi(vf, g) = \phi(vg, f), \tag{3.2}$$

$$\forall (f, g) \in K \times V, \qquad \phi(vf, g) = \phi(vg, f), \tag{3.3}$$

$$\forall (f, g) \in K^2, \qquad \phi(vf, g) = \phi(vg, f). \tag{3.4}$$

We study each of those conditions in the following subsections.

## 3.2 Study of the condition (3.2)

**Proposition 3.2** *The condition* (3.2) *is equivalent to*

$$A^T Q = QA,$$

*where $A$ is the matrix defined by* (1.13) *and $Q$ is the symmetric definite positive matrix defined by*

$$Q_{i,j} = \phi(m_i, m_j), \qquad 0 \leq i, j \leq N.$$

Proof : The condition (3.2) is equivalent to

$$\phi(vm_i, m_j) = \phi(m_i, vm_j), \qquad \forall\, 0 \leq i, j \leq N.$$

Let $(i, j) \in \{0, \ldots, N\}^2$. Since $m_j \in V$, he have

$$\phi(vm_i, m_j) = \phi(M(vm_i), m_j).$$

Moreover, (2.13) implies

$$M(vm_i) = m_{i-1} + a_i m_N, \qquad 0 \le i \le N, \tag{3.5}$$

with the convention $m_{-1} = 0$. Thus

$$\phi(vm_i, m_j) = \phi(m_{i-1}, m_j) + a_i \phi(m_N, m_j) = Q_{i-1,j} + a_i Q_{N,j}.$$

But

$$(A^T Q)_{i,j} = \sum_{k=0}^{N} A_{k,i} Q_{k,j} = Q_{i-1,j} + a_i Q_{N,j},$$

with the convention $Q_{-1,j} = 0$. Therefore, we have

$$\phi(vm_i, m_j) = (A^T Q)_{i,j}.$$

Thus, (3.2) amounts to the matrix $A^T Q$ be (real and) symmetric, i.e. $A^T Q = QA$, since $Q$ is symmetric. □

This result suggests a particular way of defining the inner product on $V$ :

**Corollary 3.3** *Choose $\phi$ s.t.*

$$Q = (P^{-1})^T P^{-1} = (PP^T)^{-1},$$

*where $P$ is defined by* (2.1)*. This choice implies*

$$\phi(m_i, m_j) = Q_{i,j} = \sum_{k=0}^{N} P^{-1}_{k,i} P^{-1}_{k,j}. \tag{3.6}$$

Proof. We have, denoting by $D = diag(\lambda_0, \ldots, \lambda_N)$ :

$$\begin{aligned} A^T Q =& A^T (P^{-1})^T P^{-1} = (P^{-1} A)^T P^{-1} = (DP^{-1})^T P^{-1} = (P^{-1})^T (DP^{-1}) \\ &= (P^{-1})^T P^{-1} A = QA, \end{aligned}$$

thus $Q$ satisfies $A^T Q = QA$. Moreover, it is easy to check that $Q$ is symmetric, definite, and positive. □

In the rest of the proof, we always choose $\Phi$ according to (3.6).

## 3.3 Study of the condition (3.3)

Now, we assume (3.6) to be satisfied and analyze (3.3).

**Proposition 3.4** *Assume* (3.6)*, and consider the following polynomials*

$$T_i(X) = \frac{1}{Q_{0,N}} \sum_{k=0}^{N} Q_{k,i} X^k, \qquad 0 \leq i \leq N, \tag{3.7}$$

*where the matrix* $Q \in M_{N+1}(\mathbb{R})$ *is defined by* (3.3)*.*

*Then, the condition* (3.3) *is equivalent to*

$$T_N(v) m_i(v) = T_i(v) m_N(v), \qquad v \in I, \qquad 0 \leq i \leq N-1, \tag{3.8}$$

$$\forall f \in K, \qquad \phi_{|K} \left( \frac{1}{Q_{0,N}} \times \frac{\chi_A(v) m_N(v)}{T_N(v)}, f \right) = \int_I v^{N+1} f(v) dv. \tag{3.9}$$

The proof of this proposition is split in several lemmas. First we find two equivalent conditions to (3.3).

**Lemma 3.5** *The condition* (3.3) *is equivalent to*

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad v m_i - m_{i-1} - a_i m_N = \frac{Q_{i,N}}{Q_{0,N}} (v m_0 - a_0 m_N) \tag{3.10}$$

$$\forall f \in K, \quad \phi_{|K} \left( \frac{1}{Q_{0,N}} (v m_0 - a_0 m_N), f \right) = \int_I w^{N+1} f(w) dw, \tag{3.11}$$

We then have to study conditions (3.10) and (3.11).

Proof of Lemma 3.5 : The condition (3.3) is obviously equivalent to

$$\phi(v m_i, f) = \phi(m_i, v f), \qquad 0 \leq i \leq N, \quad f \in K.$$

Let $i \in \{0, \ldots, N\}$ and $f \in K$. Since $f \in K$, he have

$$\phi(v m_i, f) = \phi_{|K}(v m_i - M(v m_i), f) = \phi_{|K}(v m_i - m_{i-1} - a_i m_N, f),$$

using (3.5). Similarly, since $m_i \in V$,

$$\phi(m_i, v f) = \phi_{|V}(m_i, M(v f)) = Q_{i,N} \int_I w^{N+1} f(w) dw,$$

where the last equality is deduced from

$$\forall f \in K, \qquad M(vf) = \left( \int_I w^{N+1} f(w) dw \right) m_N,$$

recalling that $\int w^n f \, dv = 0$, $\forall n \leq N$.

Thus, the condition (3.3) amounts to for any $0 \leq i \leq N$ and $f \in K$

$$\phi_{|K}(vm_i - m_{i-1} - a_i m_N, f) = Q_{i,N} \int_I w^{N+1} f(w) dw.$$

from which we deduce (3.11), and

$$\phi_{|K} \left( \frac{1}{Q_{i,N}} (vm_i - m_{i-1} - a_i m_N) - \frac{1}{Q_{0,N}} (vm_0 - a_0 m_N), f \right) = 0.$$

Therefore, for all $i \in \{1, \ldots, N\}$, we have

$$\frac{1}{Q_{i,N}} (vm_i - m_{i-1} - a_i m_N) - \frac{1}{Q_{0,N}} (vm_0 - a_0 m_N) \in K \cap K^{\perp,\phi} = \{0\},$$

which shows the relation (3.10).
Conversely, the conditions (3.10)+(3.11) imply (3.3) just by following the previous steps in reverse order. □

We start with condition (3.10)

**Lemma 3.6** *Consider the polynomial*

$$D(X) = \sum_{i=0}^{N} \beta_i X^i,$$

*where*

$$\beta_i = \frac{Q_{i,N}}{Q_{0,N}} = \frac{\phi(m_i, m_N)}{\phi(m_0, m_N)}, \qquad 0 \leq i \leq N.$$

*The condition* (3.10) *is equivalent to*

$$D(v) m_i(v) = T_i(v) m_N(v), \qquad v \in I, \qquad 0 \leq i \leq N,$$

*where* $(T_i)_{0 \leq i \leq N}$ *are the following polynomials :*

$$\begin{aligned} &T_N(X) = D(X), \\ &T_{i-1}(X) = XT_i(X) - a_i D(X) - \beta_i \chi_A(X), \qquad 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Proof. Setting $\beta_i = \frac{Q_{i,N}}{Q_{0,N}}$ for $i \in \{0, \dots, N\}$, we deduce from (3.10) the recursive formula

$$m_{i-1} = vm_i - (a_i - \beta_i a_0)m_N - \beta_i(vm_0), \qquad i = 1 \dots, N,$$

which leads to, for any $0 \leq i \leq N$

$$m_i = \left( v^{N-i} - \sum_{k=0}^{N-i-1} v^k (a_{i+k+1} - \beta_{i+k+1} a_0) \right) m_N - \left( \sum_{k=1}^{N-i} \beta_{i+k} v^k \right) m_0.$$

Thus

$$D(v)m_0(v) = \left( v^N - \sum_{k=0}^{N-1} (a_{k+1} - \beta_{k+1} a_0) v^k \right) m_N(v),$$

where

$$D(v) := \beta_0 + \beta_1 v + \cdots + \beta_N v^N.$$

We deduce

$$vD(v)m_0(v) = (\chi_A(v) + a_0 D(v))\, m_N(v).$$

Thus, it comes from the recursive formula on the $m_i$ that

$$D(v)m_{i-1}(v) = vD(v)m_i(v) - (a_i D(v) + \beta_i \chi_A(v))m_N(v), \qquad i = 1 \dots, N,$$

which is exactly

$$D(v)m_i(v) = T_i(v)m_N(v), \qquad i = 0, \dots, N, \tag{3.13}$$

with

$$T_N(X) = D(X),$$

$$T_{i-1}(X) = XT_i(X) - a_i D(X) - \beta_i \chi_A(X), \quad i = 1, \dots N.$$

Conversely, if the functions $(m_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfy these relations, then (3.10) is obvious, almost everywhere $v \in I$ (except at the roots of the polynomial $D$). □

**Remark 3.7** *We notice that*

$$XT_0(X) - a_0 D(X) = \chi_A(X). \tag{3.14}$$

*Furthermore, the formula* (3.12) *implies :*

$$1 + deg(T_i) \leq max(deg(T_{i-1}), N + 1), \qquad 1 \leq i \leq N.$$

*But* $T_0 \in \mathbb{R}_N[X]$*, thus* $T_i \in \mathbb{R}_N[X]$ *for all* $i \in \{0, \dots, N\}$.

We can now prove

**Lemma 3.8** *We have the explicit formula* (3.7) *for the* $(T_i)_{0\leq i\leq N}$ *which is recalled here*

$$T_i(X) = \frac{1}{Q_{0,N}} \sum_{k=0}^{N} Q_{k,i} X^k, \qquad 0 \leq i \leq N.$$

Proof : First, according to the definition of $D$ in Lemma 3.6, we have, for all $k \in \{0, \ldots, N\}$,

$$\begin{aligned} D(\lambda_k) =& \frac{1}{Q_{0,N}} \sum_{i=0}^{N} Q_{i,N} \lambda_k^i = \frac{1}{Q_{0,N}} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} P_{j,i}^{-1} P_{j,N}^{-1} P_{i,k} = \frac{1}{Q_{0,N}} P_{k,N}^{-1} \\ =& \frac{1}{Q_{0,N}\ \pi_k}. \end{aligned}$$

Then, the recursive formula (3.12) easily implies :

$$T_j(\lambda_k) = (\lambda_k^{N-j} - a_N \lambda_k^{N-j-1} - \cdots - a_{j+2}\lambda_k - a_{j+1}) D(\lambda_k), \qquad 0 \leq j \leq N$$

which gives (according to (2.2)-(2.4))

$$T_j(\lambda_k) = \tilde{p}_{k,j} D(\lambda_k) = \frac{\tilde{p}_{k,j}}{Q_{0,N}\ \pi_k} = \frac{P_{k,j}^{-1}}{Q_{0,N}}, \qquad 0 \leq j, k \leq N. \tag{3.15}$$

Since each polynomial $T_i$ have a degree equal to $N$, it is enough to check equality (3.7) on the set $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\}$, which allows to conclude. □

**Remark 3.9** *The formula* (3.7) *shows that the polynomials* $(T_i)_{0\leq i\leq N}$ *are a basis of* $\mathbb{R}_N[X]$ *since the matrix* $Q$ *is invertible.*

We may finally characterize (3.11)

**Lemma 3.10** *We assume that* (3.10) *holds. Then, the condition* (3.11) *is equivalent to*

$$\forall f \in K, \qquad \phi_{|K}\left(\frac{1}{Q_{0,N}} \times \frac{\chi_A(v) m_N(v)}{T_N(v)}, f\right) = \int_I v^{N+1} f(v) dv.$$

Proof : It is straightforward using (3.13) and the formula (3.14). □

We now have all what is needed to prove Prop. 3.4

Proof of Prop. 3.4 : By Lemma 3.5, condition (3.3) is equivalent to (3.10)-(3.11). By Lemma 3.6, condition (3.10) is equivalent to (3.8) provided that the $T_i$ are defined by (3.12). Lemma 3.8 shows that the recursive formula (3.12) actually gives the explicit formula (3.7). Finally by Lemma 3.10, we know that condition (3.11) is equivalent to (3.9) thus concluding the proof. □

## 3.4 Study of the condition (3.4)

We prove

**Proposition 3.11** *Assume* (3.6)+(3.8)+(3.9). *Then, setting*

$$\rho(v) := \frac{Q_{0,N} T_N(v)}{m_N(v)}, \tag{3.16}$$

*and*

$$\phi_{|K}(f,g) = \int_I f(v)g(v)\rho(v)dv, \qquad \forall (f,g) \in K^2,$$

*the condition* (3.4) *is satisfied.*

Proof : This choice is compatible with (3.11), since (3.11) can also be written as

$$\forall f \in K, \qquad \phi_{|K}\left(\frac{\chi_A}{\rho}, f\right) = \int_I v^{N+1} f(v)dv,$$

and since we have $\int_I \chi_A(v)f(v)dv = \int_I v^{N+1}f(v)dv$ since $f \in K$.

Moreover, (3.4) is obviously satisfied with this choice. □

## 3.5 Choice of $\phi$ on the subspace $V$

For the moment $\Phi$ is defined as a weighted $L^2$ type inner product on $K$ by Prop. 3.11 and on $V$ by Corollary 3.3.

We wish to define $\Phi$ as a weighted inner product on the whole $K \oplus V$. The following lemma shows that provided $\rho$ satisfies the right relations then $\Phi$ as defined by Prop. 3.11 and Corollary 3.3 is automatically of the right form.

**Lemma 3.12** *Assume* (3.6), (3.8), (3.9), (3.16), *and assume that the weight* $\rho$ *satisfies the moment conditions :*

$$\int_I \frac{R(v)}{\rho(v)} dv = \sum_{k=0}^{N} R(\lambda_k), \qquad R \in \mathbb{R}_{2N}[X].$$

*Then, we have :*

$$\phi_{|V}(f,g) = \int_I f(v)g(v)\rho(v)dv. \tag{3.17}$$

Proof : It is sufficient to show that the formula (3.17) holds for $(f,g) = (m_i, m_j)$. We have, for $(i,j) \in \{0,\dots,N\}^2$,

$$\int_I m_i(v)m_j(v)\rho(v)dv = \int_I \left(\tilde{T}_i\tilde{T}_j\right)(v) \times \frac{dv}{\rho(v)},$$

setting

$$\tilde{T}_i = Q_{0,N}T_i, \qquad 0 \le i \le N.$$

Moreover, we have

$$\phi(m_i,m_j) = Q_{i,j} = \sum_{k=0}^{N} P_{k,i}^{-1}P_{k,j}^{-1} = \sum_{k=0}^{N} \left(\tilde{T}_i\tilde{T}_j\right)(\lambda_k),$$

according to (3.6) and (3.15).

Since the $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ polynomials $(\tilde{T}_i\tilde{T}_j)_{0\le i\le j\le N}$ are in $\mathbb{R}_{2N}[v]$, we see that the assumption on $\rho$ guarantees that (3.17) is satisfied. □

## 3.6 Proof of the theorem (2.2) : Synthesis

We summarize here all the definitions and check rigorously that they are compatible.

So, assume there exists a function $\rho = \rho(v)$, positive on $I$ and satisfying the moment conditions :

$$\int_I \frac{R(v)}{\rho(v)} dv = \sum_{k=0}^{N} R(\lambda_k), \qquad \forall R \in \mathbb{R}_{2N+1}[X]. \tag{3.18}$$

Note that this in particular implies that $1/\rho$ is integrable on $I$.

The space $E = L^2(I, \rho(v)dv)$ is a Hilbert space, for the inner product

$$\phi(f,g) = \int_I f(v)g(v)\rho(v)dv, \qquad (f,g) \in E^2.$$

We define the map $M : E \to E$ by

$$Mf = \sum_{i=0}^{N} \left( \int_I v^i f(v)dv \right) \frac{\tilde{T}_i(v)}{\rho(v)}, \qquad f \in E,$$

where

$$\tilde{T}_i(X) = \sum_{k=0}^{N} Q_{k,i} X^k, \qquad 0 \le i \le N,$$

and $Q = (P^T)^{-1}P^{-1}$ (the matrix $P$ is defined by (2.1)).

- First, the map $M$ is well defined as $\forall f \in E,\ \forall i \in \{0, \dots, N\}$

$$\left| \int_I v^i f(v)dv \right| \le \left( \int_I \frac{|v|^{2i}}{\rho(v)} dv \right)^{1/2} \left( \int_I |f(v)|^2 \rho(v)dv \right)^{1/2},$$

  and thus $Mf$ makes sense. Moreover, for $f \in E$, we have $Mf \in E$ because

$$\begin{aligned} \int_I |Mf(v)|^2 \rho(v)dv &= \int_I \left| \sum_{i=0}^{N} \left( \int_I w^i f(w)dw \right) \frac{\tilde{T}_i(v)}{\rho(v)} \right|^2 \rho(v)dv \\ &\le \int_I \left( \sum_{i=0}^{N} \left| \int_I w^i f(w)dw \right|^2 \right) \left( \sum_{i=0}^{N} \left| \frac{\tilde{T}_i(v)}{\rho(v)} \right|^2 \right) \rho(v)dv \\ &\le \left( \sum_{i=0}^{N} \left| \int_I w^i f(w)dw \right|^2 \right) \times \sum_{i=0}^{N} \int_I \frac{|\tilde{T}_i(v)|^2}{\rho(v)} dv \quad < \ \infty. \end{aligned}$$

- It is obvious that $M$ is linear. We check that $M$ is a projection : let $f \in E$, we have, for $0 \le j \le N$,

$$\begin{aligned} \int_I v^j Mf(v)dv &= \sum_{i=0}^{N} \left( \int_I w^i f(w)dw \right) \left( \int_I \frac{v^j \tilde{T}_i(v)}{\rho(v)} dv \right) \\ &= \sum_{i=0}^{N} \left( \int_I w^i f(w)dw \right) \left( \sum_{k=0}^{N} \lambda_k^j \tilde{T}_i(\lambda_k) \right). \end{aligned}$$

Moreover, we have

$$\lambda_k^j = P_{j,k}, \qquad \tilde{T}_i(\lambda_k) = P_{k,i}^{-1}, \qquad 0 \leq i,j,k \leq N,$$

thus

$$\sum_{k=0}^{N} \lambda_k^j \tilde{T}_i(\lambda_k) = \delta_{i,j}, \qquad 0 \leq i,j \leq N.$$

We deduce

$$\int_I v^j M f(v) dv \;=\; \int_I w^j f(w) dw, \qquad 0 \leq j \leq N,$$

which implies $M \circ M = M$.

- $M$ is an orthogonal projection (for the inner product $\phi$), because it is a self-adjoint projector :

$$\begin{aligned}\phi(Mf,g) &= \int_I Mf(v)g(v)\rho(v)dv \\ &= \sum_{i=0}^{N} \left(\int_I w^i f(w)dw\right)\left(\int_I \tilde{T}_i(v)g(v)dv\right) \\ &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} Q_{k,i}\left(\int_I w^i f(w)dw\right)\left(\int_I v^k g(v)dv\right) \;=\; \phi(f,Mg),\end{aligned}$$

as the matrix $Q$ is symmetric.

- The Maxwellian $M$ satisfies moment conditions :

$$\left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\int_I v^i M f(v)dv &=& \displaystyle\int_I v^i f(v)dv \qquad\qquad i = 0,\ldots,N, \\ \\ \displaystyle\int_I v^{N+1} M f(v)dv &=& \displaystyle\sum_{i=0}^{N} a_i \int_I v^i f(v)dv \end{array}\right. .$$

In fact, the first conditions have been already established, and the second ones result from the following formula, using (3.18) and since $\chi_A(v)\tilde{T}_i(v)$ is a polynomial of degree $2N+1$,

$$\begin{aligned}\int_I \chi_A(v) M f(v) \;&=\; \sum_{i=0}^{N}\left(\int_I w^i f(w)dw\right)\int_I \frac{\chi_A(v)\tilde{T}_i(v)}{\rho(v)}dv \\ &=\; \sum_{i=0}^{N}\left(\int_I w^i f(w)dw\right)\sum_{k=0}^{N}\chi_A(\lambda_k)\tilde{T}_i(\lambda_k) = 0.\end{aligned}$$

- By Corollary 3.3, Prop. 3.11 and Lemma 3.12, the inner product $\Phi$ satisfies the assumptions of Lemma 3.1. This concludes the proof of Theorem 2.2. □

## 3.7 From Th. 2.2 to Th. 2.1 : Uniform stability estimate on the BGK model

The first point is to control the collision term which is done by

**Lemma 3.13** *Define $\rho$ and $\Phi$ as per Th. 2.2 then*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_I f_N^\varepsilon L(f_N^\varepsilon)\rho(v)dvdx \leq \left(\Lambda_{N,d}\left(\int_I |q(v)|^2\rho(v)dv\right)^{1/2} - \lambda\right) \int_{\mathbb{R}}\int_I |f_N^\varepsilon|^2\rho(v)dvdx, \tag{3.19}$$

*with*

$$\Lambda_{N,d} = \sqrt{\sum_{j=0}^d \alpha_j^2}\sqrt{\sum_{j=0}^d\sum_{k=0}^N \lambda_k^{2j}} = \sqrt{\sum_{j=0}^d \alpha_j^2}\sqrt{\sum_{k=0}^N \frac{1-\lambda_k^{2d+2}}{1-\lambda_k^2}}.$$

Proof : We have

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_I f_N^\varepsilon(t,x,v)L(f_N^\varepsilon)(t,x,v)\rho(v)dvdx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_I f_N^\varepsilon(t,x,v)q(v)\sum_{j=0}^d \alpha_j\left(\int_I w^j f_N^\varepsilon(t,x,w)dw\right)\rho(v)dvdx \\
&\quad - \lambda\int_{\mathbb{R}}\int_I |f_N^\varepsilon(t,x,v)|^2\rho(v)dvdx.
\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_I f_N^\varepsilon(t,x,v)L(f_N^\varepsilon)(t,x,v)\rho(v)dvdx \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx\left(\sum_{j=0}^d \alpha_j\int_I w^j f_N^\varepsilon(t,x,w)dw\right)\left(\int_I f_N^\varepsilon(t,x,v)q(v)\rho(v)dv\right) \\
&\quad - \lambda\int_{\mathbb{R}}\int_I |f_N^\varepsilon(t,x,v)|^2\rho(v)dvdx.
\end{aligned}$$

We can control the moments of $f_N^\varepsilon$ in the following way :

$$\left|\int_I w^j f_N^\varepsilon(t,x,w)dw\right|^2 \leq \left(\int_I \frac{w^{2j}}{\rho(w)}dw\right)\left(\int_I |f_N^\varepsilon(t,x,w)|^2\rho(w)dw\right),$$

and the assumption (2.14) implies

$$\left|\int_I w^j f_N^\varepsilon(t,x,w)dw\right|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^N \lambda_k^{2j}\right)\phi(f_N^\varepsilon, f_N^\varepsilon).$$

We deduce that

$$\left|\sum_{j=0}^d \alpha_j \int_I w^j f_N^\varepsilon(t,x,w)dw\right|^2 \leq \left(\sum_{j=0}^d \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j=0}^d\sum_{k=0}^N \lambda_k^{2j}\right)\phi(f_N^\varepsilon, f_N^\varepsilon).$$

Moreover, we have

$$\left|\int_I f_N^\varepsilon(t,x,v)q(v)\rho(v)dv\right|^2 = \phi(f_N^\varepsilon, q)^2 \leq \phi_N(q,q)\,\phi(f_N^\varepsilon, f_N^\varepsilon).$$

Thus, combining the last two inequalities and using Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_I f_N^\varepsilon L(f_N^\varepsilon)\rho(v)dvdx \leq & \sqrt{\sum_{j=0}^d \alpha_j^2}\sqrt{\sum_{j=0}^d\sum_{k=0}^N \lambda_k^{2j}}\sqrt{\phi(q,q)}\int_{\mathbb{R}}\phi(f_N^\varepsilon, f_N^\varepsilon)dx \\ & - \lambda\int_{\mathbb{R}}\phi(f_N^\varepsilon, f_N^\varepsilon)dx,\end{aligned}$$

which is the desired estimate. □

Combining Th. 2.2 and Lemma 3.13, we can obtain stability estimates for (2.10) uniform in $\varepsilon$ :

**Proposition 3.14** *Let $f_N^\varepsilon$ a solution of* (2.10) *with* (1.5). *Then, the following estimate holds for any $t > 0$*

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}}\int_I |f_N^\varepsilon(t,x,v)|^2\rho(v)dvdx \leq e^{tC_{N,q}}\int_{\mathbb{R}}\int_I |f^0(x,v)|^2\rho(v)dvdx, \quad (3.20)$$

*where*

$$C_{N,q} = 2\left(\Lambda_{N,d}\left(\int_I |q(v)|^2\rho(v)dv\right)^{1/2} - \lambda\right),$$

*and we recall*

$$\Lambda_{N,d} = \sqrt{\sum_{j=0}^{d}\alpha_j^2}\sqrt{\sum_{j=0}^{d}\sum_{k=0}^{N}\lambda_k^{2j}} = \sqrt{\sum_{j=0}^{d}\alpha_j^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{N}\frac{1-\lambda_k^{2d+2}}{1-\lambda_k^2}}.$$

Proof : It is straightforward using Gronwall lemma, as according to (2.16) and (3.19), we have

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\int_I |f_N^\varepsilon(t,x,v)|^2\rho(v)dvdx \leq 2\left(\Lambda_{N,d}\left(\int_I |q(v)|^2\rho(v)dv\right)^{1/2} - \lambda\right) \int_{\mathbb{R}}\int_I |f_N^\varepsilon(t,x,v)|^2\rho(v)dvdx.$$

□

We are now ready to conclude the proof of Th. 2.1 Now, we show that we can pass to the limit $\varepsilon \to 0$ in the BGK model (2.10) to obtain a stability estimate on the hyperbolic system (1.12).

We fix $N \geq d$. Using (3.20), we can see that the family $(f_N^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is bounded in the space $L^2(]0,+\infty[_{loc}\times\mathbb{R}_x\times I_v, \rho(v)dtdxdv)$. Thus there exists a sequence $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ such that

$$f_N^{\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} f_N \in L^2\left(]0,+\infty[_{loc}\times\mathbb{R}_x\times I_v, \rho_N(v)dtdxdv\right).$$

Therefore

$$\partial_t f_N^{\varepsilon_k} + v\partial_x f_N^{\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \partial_t f_N + v\partial_x f_N, \qquad L(f_N^{\varepsilon_k}) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} L(f_N) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(]0,\infty[\times\mathbb{R}\times I),$$

from which we deduce

$$M(f_N^{\varepsilon_k}) - f_N^{\varepsilon_k} = \varepsilon_k(\partial_t f_N^{\varepsilon_k} + v\partial_x f_N^{\varepsilon_k} - L(f_N^{\varepsilon_k})) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(]0,\infty[\times\mathbb{R}\times I),$$

and thus

$$M(f_N^{\varepsilon_k}) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} f_N \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(]0,\infty[\times\mathbb{R}\times I).$$

Hence, passing to the limit in (2.11), we show that the function $f_N$ is a kinetic interpretation of the system (1.12), in the sense that $\left(\mu_i = \int_I v^i f_N dv\right)_{0\leq i\leq N}$ satisfies (1.12). As this system is linear, hyperbolic, it has a unique solution for a given initial data. That means that any solution of (1.12) can consequently be obtained as the moments of a limit $f_N$ of $f_N^\varepsilon$.

Moreover, $f_N$ also satisfies the bound (3.20) :

$$\forall t>0, \qquad \int_{\mathbb{R}}\int_I |f_N(t,x,v)|^2\rho(v)dvdx \leq e^{tC_{N,q}} \int_{\mathbb{R}}\int_I |f^0(x,v)|^2\rho(v)dvdx.$$

Thus we obtain the estimate (2.6), since

$$|\mu_i(t,x)|^2 = \left|\int_I v^i f_N(t,x,v)dv\right|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^N \lambda_k^{2i}\right)\int_I |f_N(t,x,v)|^2\rho(v)dv,$$

according to the assumptions on $\rho_N$. The proof of Th. 2.1 is now complete. □

# 4 Error estimate : Proof of Th. 2.3 and Prop. 2.4

## 4.1 Estimates provided by the model

In order to prove Th. 2.3, we will need good smoothness properties on the solution to the exact equation (1.4). Fortunately this model is very simple to manipulate and the estimates we need easy to obtain in that case.

Let us first start with the support in velocity

**Proposition 4.1** *Assume* (1.5), (1.6) *with* $I \subset [-1,\ 1]$. *Then the solution to* (1.4) *satisfies*

$$\forall t\geq 0, \qquad a.e.\ x\in\mathbb{R}, \qquad \mathrm{supp_v}\, f(t,x,.)\subset I\subset[-1,\ 1].$$

Proof : If $f$ is a solution of (1.4) with $d=0$, then, using the Stokes formula, we have, formally

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}|f(t,x,v)|^2dx &= 2\int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)q(v)\left(\int_I f(t,x,v^*)dv^*\right)dx\\ &\quad - 2\lambda\int_{\mathbb{R}}|f(t,x,v)|^2dx\\ &\leq 2q(v)\int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)\left(\int_I f(t,x,v^*)dv^*\right)dx.\end{aligned}$$

Therefore, integrating in time, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t,x,v)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f^0(x,v)|^2 dx + 2q(v) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s,x,v) \left( \int_I f(s,x,v^*) dv^* \right) dx ds,$$

and since $\operatorname{supp} q \subset I$, we get the result. □

The model (1.4) also propagates the $H^k$-norm of the solution

**Proposition 4.2** *Assume* (1.5), (1.6) *with* $I \subset [-1,\ 1]$. *Then the solution to* (1.4) *satisfies*

$$\forall t \geq 0, \qquad \|f(t)\|_{H^k(\mathbb{R},\ L^2(I))} \leq e^{Ct} \|f^0\|_{H^k(\mathbb{R},\ L^2(I))},$$

*where* $C = \|q\|_{L^2(I)} - \lambda$.

Proof : First note that for any $k$, $\partial_x^k f$ is also a solution to (1.4) with $\partial_x^k f^0$ as initial data. Then

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\|^2_{H^k(\mathbb{R},\ L^2(I))} = 2 \sum_{p=0}^{k} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \partial_x^p f(t,x,v) q(v) dv \right) \left( \int_I \partial_x^p f(t,x,v^*) dv^* \right) - 2\lambda \|f(t)\|^2_{H^k(\mathbb{R},\ L^2(I))}.$$

Using Prop. (4.1) and Hölder inequality, we easily obtain

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\|^2_{H^k(\mathbb{R},\ L^2(I))} \leq 2 \left( \|q\|_{L^2(I)} - \lambda \right) \|f(t)\|^2_{H^k(\mathbb{R},\ L^2(I))},$$

and a simple Gronwall lemma gives the result. □

We may finally conclude from Props. 4.1-4.2 that

**Corollary 4.3** *Assume* (1.5), (1.6) *with* $I \subset [-1,\ 1]$. *Then the moments of solution to* (1.4) *satisfy*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0, \qquad \|\mu_i^f(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{Ct} \|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{4.1}$$

*and*

$$\sum_{i=0}^{N} \|\mu_i^f(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (2N+1)^{1/2}\, e^{Ct}\, \|f^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

*where* $C = \|q\|_{L^2(I)} - \lambda$.

Proof. Notice that

$$|\mu_i^f| \leq \int_{-1}^{1} |v|^i f(t,x,v)\,dv \leq \frac{1}{\sqrt{2i+1}} \left( \int_{-1}^{1} |f(t,x,v)|^2\,dv \right)^{1/2},$$

by Cauchy-Schwarz. Hence

$$\|\mu_i^f(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{2i+1}} \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

and one concludes by using Prop. 4.2. □

## 4.2 Proof of Prop. 2.4 : Error estimate in the smooth case

Since the functions $(\mu_i)$ are smooth in the space variable, we have by (2.17), for all $0 \leq i \leq N$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mu_i(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= 2\int_{\mathbb{R}} \mu_i(t,x)\partial_t\mu_i(t,x)dx \\ &= -2\int_{\mathbb{R}} \mu_i(t,x)\partial_x\mu_{i+1}(t,x)dx \\ &+ 2\gamma_i \int_{\mathbb{R}} \mu_i(t,x)\mu_0(t,x)dx - 2\lambda\int_{\mathbb{R}} |\mu_i(t,x)|^2 dx, \end{aligned} \quad ,$$

or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mu_i(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq 2\|\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\partial_x\mu_{i+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &+ 2|\gamma_i|\ \|\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\mu_0(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} - 2\lambda\|\mu_i(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Thus, we obtain

$$\frac{d}{dt}\|\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \leq \quad \|\partial_x\mu_{i+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + |\gamma_i|\ \|\mu_0(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} - \lambda\|\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Of course the same computation can be performed on the $\partial_x^k\mu_i$, obtaining

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{0,\dots,N\}, \\ &\frac{d}{dt}\|\partial_x^k\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\partial_x^{k+1}\mu_{i+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + |\gamma_i|\ \|\partial_x^k\mu_0(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\qquad - \lambda\|\partial_x^k\mu_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

This sequence of inequalities lets us control $\|\mu_0(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ in term of the "last derivatives", namely $\left(\|\partial_x^N \mu_i\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)_{0\leq i\leq N}$. To do that, we set

$$\forall t \geq 0, \quad \forall k \in \{0,\dots,N\}, \qquad H_k(t) := \sum_{i=0}^{k} \|\partial_x^k \mu_i\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

The coefficients $\gamma_i$ are easily bounded by $\|q\|_{L^2}$. Hence the inequalities (4.2) imply

$$\forall t \geq 0, \quad \forall k \in \{0,\dots,N\}, \quad \frac{d}{dt} H_k(t) \leq H_{k+1}(t) + \left(2\|q\|_{L^2(I)} - \lambda\right) H_k(t). \tag{4.3}$$

We now use

**Lemma 4.4** *Let $(H_k(t))_{k\geq 1}$ be a sequence of nonnegative $C^1$ functions such that :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0, \qquad \begin{cases} H_k'(t) \leq C H_k(t) + H_{k+1}(t) \\ H_k(0) = 0 \end{cases},$$

*where $C > 0$ is a numerical constant independant of $k$.*
*Then, we have :*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \geq 0, \qquad H_0(t) \leq \frac{1}{(p-1)!} \int_0^t (t-s)^{p-1} e^{C(t-s)} H_p(s) ds.$$

Proof : First, the assumption may be rewritten as

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(H_k(t) e^{-Ct}\right) \leq H_{k+1}(t) e^{-Ct},$$

thus, integrating in $t$, we obtain :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0, \qquad H_k(t) \leq \int_0^t e^{C(t-s)} H_{k+1}(s) ds.$$

A simple recursion allows to conclude. □

End of the proof of prop (2.4) : Applying the previous lemma, we obtain

$$\forall t \geq 0, \qquad H_0(t) \leq \frac{1}{(N-1)!} \int_0^t (t-s)^{N-1} e^{(2\|q\|_{L^2(I)} - \lambda)(t-s)} H_N(s) ds,$$

and thus, for all $t \in [0,T]$,

$$\|\mu_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{(N-1)!}\int_0^t (t-s)^{N-1} e^{(2\|q\|_{L^2(I)}-\lambda)(t-s)} \sum_{i=0}^N \|\partial_x^N \mu_i(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} ds$$
$$\leq \frac{e^{(2\|q\|_{L^2(I)}-\lambda)T}}{(N-1)!}\int_0^t (t-s)^{N-1} \sum_{i=0}^N \|\partial_x^N \mu_i(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} ds$$

which gives

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\mu_0(t,.)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\frac{T^N}{N!} \times \sum_{i=0}^N \|\partial_x^N \mu_i\|_{L_t^\infty L_x^2}, \tag{4.4}$$

where the constant $C$ depends on $T$, $\lambda$ and $q$. This concludes the proof of Prop. 2.4. □

## 4.3 Proof of Th. 2.3 : Error estimate in the general case

The general idea for the proof is to regularize the initial data. Then we have to bound 3 terms. First the error between the exact solution and the truncated hierarchy for this regularized initial data. This term is controlled by Prop. 2.4. The next term is the difference between the solution for the non regularized initial data and the solution for the regularized one, both solutions to the exact equation (1.4). This is bounded using the estimates for (1.4). The final term is the difference between the solution for the non regularized initial data and the solution for the regularized one, but both solutions to the truncated hierarchy (2.17). We bound this term thanks to assumption (2.18).

– *Step* 1 *: Regularization of the initial data*
We fix $\varepsilon > 0$ and we choose $f_\varepsilon^0 \in H^k(\mathbb{R}^2)$, with $\mathrm{supp_v}\, f_\varepsilon^0 \subset I$, and such that (see the appendix for more details)

$$a.e.\ v \in I, \quad f_\varepsilon^0(.,v) \in C^\infty(\mathbb{R}),$$
$$\|f_\varepsilon^0(v) - f^0(v)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_k \varepsilon^k \|f^0(v)\|_{H^k(\mathbb{R})}, \tag{4.5}$$
$$\|f_\varepsilon^0(v)\|_{H^m(\mathbb{R})} \leq C_k \varepsilon^{k-m} \|f^0(v)\|_{H^k(\mathbb{R})} \quad \forall m > k.$$

Let $f_\varepsilon = f_\varepsilon(t,x,v)$ be the unique solution to Eq. (1.4) with $f_\varepsilon(t=0) = f^0_\varepsilon$. We define the moments as usual

$$\mu_i^{f_\varepsilon}(t,x) = \int_I v^i \, f_\varepsilon(t,x,v)\, dv, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Of course, those moments still satisfy the hierarchy

$$\partial_t \mu_i^{f_\varepsilon} + \partial_x \mu_{i+1}^{f_\varepsilon} = \gamma_i \mu_0^{f_\varepsilon} - \lambda \mu_i^{f_\varepsilon} \qquad i \in \mathbb{N}.$$

We denote by $\mu_i^\varepsilon$ the solution to the truncated hierarchy (2.17) for the initial data

$$\mu_i^\varepsilon(t=0,x) = \mu_i^{f^0_\varepsilon}(x) = \int_I v^i f^0_\varepsilon(x,v)\, dv, \qquad 0 \le i \le N. \tag{4.6}$$

– *Step 2 : Error estimates in term of $\varepsilon$.* First note that $\mu_i^\varepsilon - \mu_i^{f_\varepsilon}$ satisfies the assumptions of Prop. 2.4. On the one hand

$$\begin{aligned}\sum_{i\le N} \|\partial_x^N(\mu_i^\varepsilon - \mu_i^{f_\varepsilon})\|_{L^2} &\le \sum_{i\le N} \Big( \|\partial_x^N \mu_i^\varepsilon\|_{L^2} + \|\partial_x^N \mu_i^{f_\varepsilon}\|_{L^2} \Big) \\ &\le \sum_{i\le N} \|\partial_x^N \mu_i^\varepsilon\|_{L^2} + e^{Ct}\,(2N+1)^{1/2} \|\partial_x^N\, f^0_\varepsilon\|_{L^2},\end{aligned}$$

by Corollary 4.3. On the other hand by applying (2.18) to $\mu_i^\varepsilon$ and 0, one gets

$$\sum_{i\le N} \|\partial_x^N \mu_i^\varepsilon\|_{L^\infty_t L^2_x} \le C\, N^\gamma \, \|\partial_x^N f^0_\varepsilon\|_{L^2_{x,v}}.$$

So applying Prop. 2.4, we have for $\gamma' = \max(\gamma, 1/2)$

$$\begin{aligned}\|\mu_0^\varepsilon - \mu_0^{f_\varepsilon}\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} &\le C\, \frac{N^{\gamma'} T^N}{N!} \times \|\partial_x^N f^0_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\le C_k\, \varepsilon^{k-N}\, \frac{N^{\gamma'} T^N}{N!} \times \|f^0\|_{H^k_x\, L^2_v},\end{aligned} \tag{4.7}$$

by (4.5).
We can use the stability estimate (2.18) to control

$$\|\mu_0^\varepsilon - \mu_0\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} \le C N^\gamma \|f^0 - f^0_\varepsilon\|_{L^2} \le C_k\, N^\gamma\, \varepsilon^k \|f^0\|_{H^k_x\, L^2_v}, \tag{4.8}$$

again by (4.5).

At last, we can control $\|\mu_0^f - \mu_0^{f_\varepsilon}\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))}$ according to Corollary 4.3

$$\begin{aligned}\|\mu_0^f - \mu_0^{f_\varepsilon}\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} = \|\mu_0^{f-f_\varepsilon}\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} &\leq C\|f^0 - f_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_k\,\varepsilon^k\,\|f^0\|_{H_x^k\,L_v^2}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

– *Step 3 : Choice of the parameter $\varepsilon$*
We deduce from (4.7), (4.8) and (4.9) the complete error estimate

$$\|\mu_0 - \mu_0^f\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} \leq C\,\left(N^{\gamma'}\,\frac{T^N}{N!}\,\varepsilon^{k-N} + N^\gamma\,\varepsilon^k\right)\,\|f^0\|_{H_x^k\,L_v^2}, \tag{4.10}$$

where the numerical constant $C \geq 0$ depends on $k$, $T$, $q$, and $\lambda$.
We of course choose the "best" value of $\varepsilon$, which minimizes the error. When $N > k$, we get for $\gamma \geq 1/2$

$$\varepsilon = \varepsilon^* = \left(\frac{T^N}{N!}\right)^{1/N} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{eT}{N}.$$

If $\gamma < 1/2$ then one takes instead

$$\varepsilon = \varepsilon^* = \left(\frac{T^N\,N^{1/2-\gamma}}{N!}\right)^{1/N} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{eT}{N},$$

with the same asymptotic behaviour.
In both cases

$$\begin{aligned}\|\mu_0 - \mu_0^f\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}))} &\leq C_{T,q,\lambda,k}\,N^\gamma\,(\varepsilon^*)^k \\ &\underset{N\to\infty}{\sim} \frac{C_{T,q,\lambda,k}}{N^{k-\gamma}},\end{aligned} \tag{4.11}$$

which concludes the proof of Theorem 2.3. □

# 5 Proof of Th. 1.1 : Example of the Tchebychev points

We now make the assumptions in Th. 1.1 and in particular that $d = 0$ and that the $\lambda_k$ satisfy (1.16).

The constant $\Lambda_{N,0}$ defined by (2.9) satisfies

$$\Lambda_{N,0} = (N+1)^{1/2}. \tag{5.1}$$

Moreover we define

$$\rho_N(v) = \frac{\pi}{N+1}\sqrt{1-v^2}.$$

In fact, the function $\frac{1}{\rho_N}$ is a normalization of the Tchebychev weight.

As the $\lambda_k$ gives the usual method of integration we have

**Proposition 5.1** *We have, for all $N \geq 1$ and for all $R \in \mathbb{R}_{2N+1}[X]$ :*

$$\int_I \frac{R(v)}{\rho_N(v)} dv = \frac{N+1}{\pi} \int_{]-1,1[} \frac{R(v)}{\sqrt{1-v^2}} dv = \sum_{k=0}^{N} R(\lambda_k), \qquad \forall R \in \mathbb{R}_{2N+1}[X]. \tag{5.2}$$

We may therefore apply Th. 2.1 to this choice of $\lambda_k$ and for this choice of $\rho_N$.

Compute

$$C_N(q) = \sqrt{N+1}\,\left(\int_{-1}^{1} |q(v)|^2 \rho_N(v)\, dv\right)^{1/2} \leq C\,\|q\|_{L^2}.$$

Similarly

$$C_N(f^0) \leq C\,N^{-1/2}\,\|f^0\|_{L^2}.$$

So by Th. 2.1

$$\sup_{i\leq N} \|\mu_i(t)\|_{L^2} \leq C\,e^{C\,T\,\|q\|_{L^2}}\,\|f^0\|_{L^2}\,N^{-1/2}\,\left(\sum_{k\leq N} \lambda_k^{2i}\right)^{1/2} \leq C\,e^{C\,T\,\|q\|_{L^2}}\,\|f^0\|_{L^2},$$

which is exactly (1.18). Moreover

$$\sum_{i\leq N} \|\mu_i(t)\|_{L^2} \leq C\,\|f^0\|_{L^2}\,N^{-1/2} \sum_{i\leq N}\left(\sum_{k\leq N} \lambda_k^{2i}\right)^{1/2}.$$

Of course by Cauchy-Schwarz, we have, for all $0 \leq L \leq N$,

$$N^{-1/2} \sum_{i\leq N}\left(\sum_{k=L\ldots N-L} \lambda_k^{2i}\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\leq N}\sum_{k=L\ldots N-L} \lambda_k^{2i}\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{L\leq k\leq N-L} \frac{1}{1-|\lambda_k|^2}\right)^{1/2}$$

Note that

$$1-|\lambda_k|^2 \geq \frac{(k+1)^2}{C\,N^2} \quad \text{if } k \leq N/2, \quad 1-|\lambda_k|^2 \geq \frac{(N-k+1)^2}{C\,N^2} \quad \text{if } k \geq N/2.$$

Hence, if $L \leq N/2$,

$$N^{-1/2} \sum_{i\leq N} \left( \sum_{k=L\ldots N-L} \lambda_k^{2i} \right)^{1/2} \leq C \left( \sum_{L\leq k\leq N/2} \frac{N^2}{(k+1)^2} \right)^{1/2} \leq C\,\frac{N}{L^{1/2}}.$$

Therefore

$$\sum_{i\leq N} \|\mu_i(t)\|_{L^2} \leq C\,\|f^0\|_{L^2}\,(N^{1/2}\,L^{1/2} + N\,L^{-1/2}),$$

and choosing $L = \sqrt{N}$ we obtain that this method satisfies the estimate (2.18) with $\gamma = 3/4$. It only remains to apply Th. 2.3 to conclude. □

# 6 Appendix

The natural way to regularize is by convolution. However to obtain high order approximation, it is necessary to choose correctly the mollifier. In the $L^2$ framework though, things are quite simple by truncating in Fourier.

**Proposition 6.1** *Let $k$ a positive integer, $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$ and $\varepsilon > 0$. It exists $f_\varepsilon \in H^\infty(\mathbb{R}^d)$ such that*

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^k \|D^k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.1}$$

$$\|D^m f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{k-m} \|D^k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{6.2}$$

Proof : We use Fourier's analysis. We consider $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^d)$ defined by

$$\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \mathbb{1}_{\{|\xi|\leq 1/\varepsilon\}}.$$

First, we have

$$\begin{aligned} \|\widehat{f} - \widehat{f_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \left( \int_{|\xi|>1/\varepsilon} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{2k} |\xi|^{2k} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \varepsilon^k \|\widehat{D^k f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

which proves (6.1).

On the other hand, for all $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \||\xi|^m \widehat{f}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \left( \int_{|\xi| \le 1/\varepsilon} |\xi|^{2m} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \le \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{2k-2m} |\xi|^{2k} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \varepsilon^{k-m} \|\widehat{D^k f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

thus, $f_\varepsilon \in H^m(\mathbb{R}^d)$ and the estimate (6.2) holds. $\square$

# References


[1] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. A model for collision processes in gases. I. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.*, **94**(3), 511–525, 1954.

[2] G. A. Bird, Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow. *Oxford Engineering Science Series, Vol. 42* (Oxford, 1994).

[3] A. V. Bobylev. The Chapman-Enskog and Grad methods for solving the Boltzmann equation. *Sov. Phys. Dokl.*, **27**(1), 29–31, 1982.

[4] F. Brini. Hyperbolicity region in extended thermodynamics with 14 moments. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **13**(1), 1–8, 2001.

[5] Z. Cai, Y. Fan, and R. Li. Globally hyperbolic regularization of Grad's moment system in one dimensional space. *arXiv : 1111.3409*, 2012.

[6] Z. Cai and R. Li. Numerical regularized moment method of arbitrary order for Boltzmann-BGK equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, **32**(5), 2875–2907, 2010.

[7] Z. Cai, R. Li, and Y. Wang. An efficient NRxx method for Boltzmann-BGK equation. *J. Sci. Comput.*, **50**(1), 103–119, 2012.

[8] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy. *Rev. Mod. Phys.* **15**, 2–89, 1943.

[9] L. Desvillettes, Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equations. *Archive Rat. Mech. Anal.* **123**, 387–404, 1993.

[10] H. Grad. On the kinetic theory of rarefied gases. *Comm. Pure Appl. Math.*, **2**(4), 331–407, 1949.

[11] P. Le Tallec and J. P. Perlat. Numerical analysis of Levermore's moment system. Rapport de recherche 3124, INRIA Rocquencourt, March 1997.

[12] C.D. Levermore, Moment Closure Hierarchy for Kinetic Theories. *J. Statist. Phys.* **83**, no. 5-6, (1996), 1021–1065.

[13] C.D. Levermore, W.J. Morokoff, The Gaussian moment closure for gas dynamics. *SIAM J. Appl. Math.* **59** (1999), no. 1, 72–96.

[14] H.G. Othmer, S.R. Dunbar, W. Alt, Models of dispersal in biological systems. *J. Math. Biol.*, **26** (3), 263–298, 1988.

[15] B. Perthame, Boltzmann type schemes for gas dynamics and the entropy property. *SIAM J. Numer. Anal.* **27**, 1405–1421, 1990.

[16] J. Shen and T. Tang. Spectral and High-Order Methods with Applications, volume 3 of Mathematics Monograph Series. Science Press, Beijing, P. R. China, 2006.

[17] H. Struchtrup. Macroscopic Transport Equations for Rarefied Gas Flows : Approximation Methods in Kinetic Theory. Springer, 2005.

[18] H. Struchtrup and M. Torrilhon. Regularization of Grad's 13 moment equations : Derivation and linear analysis. *Phys. Fluids*, **15**(9), 2668–2680, 2003.

[19] E. F. Toro. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics - A practical introduction - 3nd edition. Springer, 2009.

[20] M. Torrilhon. Two dimensional bulk microflow simulations based on regularized Grad's 13-moment equations. *SIAM Multiscale Model. Simul.*, **5**(3), 695–728, 2006.

[21] M. Torrilhon. Hyperbolic moment equations in kinetic gas theory based on multivariate Pearson-IV-distributions. *Commun. Comput. Phys.*, **7**(4), 639–673, 2010

[22] D. Vernon Widder, The Laplace transform. Princeton University Press 1946.

[23] G.M. Wing, An introduction to transport theory. New-York, Wiley, 1962.

# Troisième partie

# A model for the evolution of traffic jams in multi-lane

**Abstract**

In [8], Berthelin, Degond, Delitala and Rascle introduced a traffic flow model describing the formation and the dynamics of traffic jams. This model consists of a Pressureless Gas Dynamics system under a maximal constraint on the density and is derived through a singular limit of the Aw-Rascle model. In the present paper we propose an improvement of this model by allowing the road to be multi-lane piecewise. The idea is to use the maximal constraint to model the number of lanes. We also add in the model a parameter $\alpha$ which model the various speed limitations according to the number of lanes. We present the dynamical behaviour of clusters (traffic jams) and by approximation with such solutions, we obtain an existence result of weak solutions for any initial data.

# 1 Introduction

Classical models of traffic are splitted into three main categories : particle models (or "car-following" models) [16, 3], kinetic models [25, 26, 22, 20], and fluid dynamical models [21, 23, 24, 2, 28, 12, 17]. Obviously, these models are related ; for example in [1], a fluid model is derived from a particle model. See also [19] and for recent review on this topic, see [4] and [18]. Here, we are interested in the third approach, which describes the evolution of macroscopic variables (like density, velocity, flow) in space and time. Let us recall briefly the history of such models.

The simplest fluid models of traffic are based on the single conservation law

$$\partial_t n + \partial_x f(n) = 0,$$

where $n = n(t, x)$ is the density of vehicles and $f(n)$ the associated flow. This model only assumes the conservation of the number of cars. Such models are called "first order" models, and the first one is due to Lighthill and Whitham [21] and Richards [27].

If we take the flux $f(n) = nu$ with $u = u(t, x)$ the velocity of the cars, we add a second equation of equilibrium related to the conservation of momentum. This approach starts with the Payne-Whitham model [23, 24].

But the analogy fluid-vehicles is not really convincing : in fact, in the paper [13], Daganzo shown the limits of this analogy, exhibiting absurdities which

are implied by classical second-order models, for example, vehicles going backwards. To rehabilitate these models, Aw and Rascle proposed in [2] a new one which corrects the deficiencies pointed out by Daganzo. In particular, the density and velocity remain nonnegative.
The Aw-Rascle model is given by

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ (\partial_t + u\partial_x)(u + p(n)) = 0, \end{cases}$$

or in the conservative form

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_t(n(u + p(n))) + \partial_x(nu(u + p(n))) = 0, \end{cases}$$

where $p(n) \sim n^\gamma$ is the velocity offset, which bears analogies with the pressure in fluid dynamics.
In fact, this model can be derived from a microscopic "car-following" model, as it has been shown in [1]. But even the Aw-Rascle model exhibits some unphysical feature, namely the non-propagation of the upper bound of the density $n$, making a constraint such that $n \leq n^*$ impossible (where $n^*$ stands for a maximal density of vehicles).
Some constraints models have been developed these last years in order to impose such bounds in hyperbolic models. See [10], [5], [7] for the first results of this topic and [6] for a numerical version of this kind of problem.
That is why recently, Berthelin, Degond, Delitala and Rascle [8] proposed a new second-order model, which aim is to allow to preserve the density constraint $n \leq n^*$ at any time. The main ideas are :

- modifying the Aw-Rascle model, changing the velocity offset into

$$p(n) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^*}\right)^{-\gamma}, \qquad n < n^*,$$

  thus $p(n)$ is increasing and tends to infinity when $n \to n^*$;
- rescaling this modified Aw-Rascle model (changing $p(n)$ into $\varepsilon p(n_\varepsilon)$) and taking the formal limit when $\varepsilon \to 0^+$.

This process leads to a limit system on $(n, u)$ which corresponds to the *Pressureless Gas Dynamics system* :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_t(nu) + \partial_x(nu^2) = 0, \end{cases}$$

in areas where $n < n^*$. But a new quantity appears, due to the singularity of the velocity offset in $n = n^*$. In fact, denoting by $\overline{p}(t,x)$ the formal limit of $\varepsilon p(n_\varepsilon)(t,x)$ when $\varepsilon \to 0^+$, we may have $\overline{p}$ non zero and finite at a point $(t,x)$ such that $n(t,x) = n^*$. Thus, the function $\overline{p}$ turns out to be a Lagrangian multiplier of the constraint $n \leq n^*$. Finally, we obtain the *Constrained Pressureless Gas Dynamics* (designed as CPGD) model :

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_x(nu) = 0, \\ \partial_t(n(u+\overline{p})) + \partial_x(nu(u+\overline{p})) = 0, \\ 0 \leq n \leq n^*\,, \quad \overline{p} \geq 0\,, \quad (n^* - n)\overline{p} = 0. \end{cases}$$

The term $\overline{p}$ represents the speed capability which is not used if the road is blocked and that the cars in front imposes a speed smaller than that desired. We refer to [8] for more details on the derivation of the CPGD system in the case of the maximal density $n^*$ being constant. The case where $n^*$ depends on the velocity ($n^* = n^*(u)$) is more realistic (taking into account the fact that the maximal number of cars is smaller as the velocity is great, for safety reasons) and is treated in [9]. In [14], a numerical treatment of traffic jam is done.

In this paper, we propose another type of improvement based on the following idea : the idea is to use the maximal constraint to model the number of lanes. The constraint $n^*$ will depend on the number of lanes in the portion of the road. Indeed, in a two-lane portion, $n^*$ can be twice greater than it is in a one-lane portion of the road. This idea simplifies the model dramatically and we no longer need to consider as many equations of lanes which makes the modeling and use much simpler while reporting the same phenomenon. The new emerging behaviors which are obtained compared to previous models [8] and [9] are the following :

- possibility for cars to accelerate (when the road widens) and then to change their maximum/wanted velocity,
- creation of a void area in a jam (the acceleration of the leading car is not necessarily followed if there is not a sufficient reserve of speed),
- this point represents also an approach to model some kind of stop and go waves which is new in such model,
- and of course, the multi-lane approach.

The paper is organized as follows : in the next section, we make a modification of the CPGD system to model traffic jams in multi-lane. In section 3, we present the dynamics of jams. By approximation with such data, it is used in section 4 to prove the existence of weak solutions for any initial data.

## 2 The ML-CPGD model

We consider a piecewise constant maximal density of vehicles, given by

$$n^*(x) = \sum_{j=0}^{M} n_j^* \mathbb{1}_{]r_j, r_{j+1}[}(x)$$

where

$$n_j^* \in \{1, 2\}, \quad (r_j)_{1 \le j \le M} \text{ an increasing sequence of real numbers,}$$

$$r_0 = -\infty, \quad r_{M+1} = +\infty.$$

It means that we set on a road with one or two lanes, the road transitions (change of number of lanes) being at points $(r_j)_{1 \le j \le M}$. On a one-lane section, the maximal density is one (in view of simplification), whereas on a two-lane section, the maximal allowed density is two. It is the first improvement of our model : the constraint density changes with $x$ to model the fact that there is one or two lanes. Evolution equations are given by the *Multi-lane Constrained Pressureless Gas Dynamics* system (designed by ML-CPGD), whose conservative form is

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\partial_t(n(u+p)I_\alpha) + \partial_x(nu(u+p)I_\alpha) = 0\,, \tag{2.2}$$

$$0 \le n \le n^*(x)\,, \quad u \ge 0\,, \quad p \ge 0\,, \quad (n^*(x) - n)p = 0\,, \tag{2.3}$$

where the function $I_\alpha = I_\alpha(x)$ is defined by

$$I_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n^*(x) = 1, \\ 1/\alpha & \text{if} \quad n^*(x) = 2. \end{cases}$$

The number $\alpha \ge 1$ stands for the rate between two-lane velocities and one-lane velocities. Thus a single car (we mean a car not into a jam) with speed $u$ on a one-lane road will pass to the speed $\alpha u$ on a two-lane road. This represents the fact that on a two-lane section, the average velocity is higher than on a one-lane (on a highway, you drive faster than on a road even if you are alone). The preferred velocity depends on the road width according to $\alpha$. It can also be understood as the speed limitation on the various kind of roads. This is the second improvement of our model. It only act on the

second equation since it is the momentum quantity which has to be changed and not the conservation of the number of cars (first equation).

Of course, this model can be extended to case with three-lane, four-lane portion... In the case of three lanes, $n_j^* \in \{1,2,3\}$ and $I_\alpha$ is replaced by $I_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } n^*(x)=1, \\ 1/\alpha & \text{if } n^*(x)=2, \\ 1/\beta & \text{if } n^*(x)=3, \end{cases}$ with $\beta \geq \alpha \geq 1$, $\alpha$ being the rapport of speed between one and two lanes and $\beta/\alpha$ the rapport between three and two lanes.

# 3 Clusters dynamics

In this section, we present some particular solutions $(n,u,p)$ of (2.1)-(2.3) which are clusters solutions. For these functions, $n = n(t,x)$ take as only values 0 and $n^*(x)$.
In some sense, they are an extension of sticky particles of [11, 15] playing a crucial role in the proof of existence of solutions for constraint models. They have been introduced in [10] and used with various dynamics in [5, 7, 8, 9].
Let us consider the density $n(t,x)$, the flux $n(t,x)u(t,x)$ and the pressure $n(t,x)p(t,x)$ given respectively by

$$n(t,x) = n^*(x) \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)}, \tag{3.1}$$

$$n(t,x)u(t,x) = n^*(x) \sum_{i=1}^{N} u_i \mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)}, \tag{3.2}$$

$$n(t,x)p(t,x) = n^*(x) \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)}, \tag{3.3}$$

with

$$N \in \mathbb{N}^*, \qquad u_i \geq 0, \qquad p_i \geq 0,$$

as long as there is no collision and no change of $n^*(x)$. That is to say

$$a_1(t) < b_1(t) \leq a_2(t) < b_2(t) < \ldots \leq a_N(t) < b_N(t)$$

and the number of blocks $N$ is constant until there is a shock or a change of width (thus we have $N = N(t)$).

This type of piecewise constant solution writes as a superposition of blocks with $(n, u, p) = (n^*, u_i, p_i)$ constant. Each block evolves according to the interactions with the other blocks and the changes of width.
We have to explain three dynamics :

- What happens when two blocks collide ? (how to describe a shock)
- What happens when the road narrows ($n^*(x)$ was 2 and becomes 1) ?
- What happens when the road widens ($n^*(x)$ was 1 and becomes 2) ?

First, let us present some technical properties that will be used in the various cases.

**Lemma 3.1** *Let be* $s, \sigma \in [0, +\infty[$, $a, b \in C^1(]inf(s,\sigma), sup(s,\sigma)[)$ *and* $\varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[\times\mathbb{R})$. *We set*

$$J(s, \sigma, a, b, u) := \int_s^\sigma \int_{a(t)}^{b(t)} (\partial_t \varphi(t,x) + u(t)\partial_x \varphi(t,x)) dx dt.$$

*Then we get*

$$\begin{aligned} J(s,\sigma,a,b,u) \;=\; & \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \varphi(\sigma,x)\,dx - \int_{a(s)}^{b(s)} \varphi(s,x)\,dx \\ & + \int_s^\sigma \varphi(t,b(t))\,(u(t) - b'(t))\,dt + \int_s^\sigma \varphi(t,a(t))\,(a'(t) - u(t))\,dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Proof : We have

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(t,x)\,dx\right] = \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t\varphi(t,x)\,dx + \varphi(t,b(t))\,b'(t) - \varphi(t,a(t))\,a'(t),$$

thus

$$\begin{aligned} \int_s^\sigma \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t\varphi(t,x)\,dx\,dt = & \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \varphi(\sigma,x)\,dx - \int_{a(s)}^{b(s)} \varphi(s,x)\,dx \\ & - \int_s^\sigma \varphi(t,b(t))\,b'(t)\,dt + \int_s^\sigma \varphi(t,a(t))\,a'(t)\,dt. \end{aligned}$$

Moreover $\displaystyle\int_s^\sigma \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_x\varphi(t,x)\,dx\,dt \;=\; \int_s^\sigma \varphi(t,b(t))\,dt - \int_s^\sigma \varphi(t,a(t))\,dt$ and the result follows. □

**Remark 3.2** *We notice that*

$$J(\sigma, s, a, b, u) = -J(s, \sigma, a, b, u), \tag{3.5}$$

$$J(s, \sigma, b, a, u) = -J(s, \sigma, a, b, u). \tag{3.6}$$

*If we have* $a' = b' = u$, *then*

$$J(s, \sigma, a, b, u) = \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)} \varphi(\sigma, x)\, dx - \int_{a(s)}^{b(s)} \varphi(s, x)\, dx. \tag{3.7}$$

*If we have* $a' = u$ *and* $c$ *is constant, then*

$$J(s, \sigma, a, c, u) = \int_{a(\sigma)}^{c} \varphi(\sigma, x)\, dx - \int_{a(s)}^{c} \varphi(s, x)\, dx + \int_{s}^{\sigma} \varphi(t, c)u(t)dt. \tag{3.8}$$

**Lemma 3.3** *We have the following formulas :*
*If* $a' = b' = c' = u$, *then*

$$\begin{aligned} J(s, \sigma, a, b, u) + J(\sigma, \tau, a, c, u) = &- \int_{a(s)}^{b(s)} \varphi(s, x)\, dx \\ &+ \int_{c(\sigma)}^{b(\sigma)} \varphi(\sigma, x)\, dx + \int_{a(\tau)}^{c(\tau)} \varphi(\tau, x)\, dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

*If* $a' = b' = u$ *and* $c = b(\sigma) = a(\tau)$, *then*

$$J(s, \sigma, a, b, u) + J(\sigma, \tau, a, c, u) = - \int_{a(s)}^{b(s)} \varphi(s, x)dx + \int_{\sigma}^{\tau} u(t)\varphi(t, c)dt. \tag{3.10}$$

Proof : We have

$$
\begin{aligned}
& J(s,\sigma,a,b,u)+J(\sigma,\tau,a,c,u) && (3.11)\\
= & \int_{a(\sigma)}^{b(\sigma)}\varphi(\sigma,x)\,dx-\int_{a(s)}^{b(s)}\varphi(s,x)\,dx && (3.12)\\
& +\int_s^\sigma \varphi(t,b(t))\,(u(t)-b'(t))\,dt+\int_s^\sigma \varphi(t,a(t))\,(a'(t)-u(t))\,dt && (3.13)\\
& +\int_{a(\tau)}^{c(\tau)}\varphi(\tau,x)\,dx-\int_{a(\sigma)}^{c(\sigma)}\varphi(\sigma,x)\,dx && (3.14)\\
& +\int_\sigma^\tau \varphi(t,c(t))\,(u(t)-c'(t))\,dt+\int_\sigma^\tau \varphi(t,a(t))\,(a'(t)-u(t))\,dt && (3.15)\\
= & -\int_{a(s)}^{b(s)}\varphi(s,x)\,dx+\int_\sigma^\tau \varphi(t,c(t))\,(u(t)-c'(t))\,dt && (3.16)\\
& +\int_{c(\sigma)}^{b(\sigma)}\varphi(\sigma,x)\,dx+\int_{a(\tau)}^{c(\tau)}\varphi(\tau,x)\,dx && (3.17)\\
& +\int_s^\sigma \varphi(t,b(t))\,(u(t)-b'(t))\,dt+\int_s^\tau \varphi(t,a(t))\,(a'(t)-u(t))\,dt && (3.18)
\end{aligned}
$$

Since $a'=b'=u$, the two last terms vanish and we have

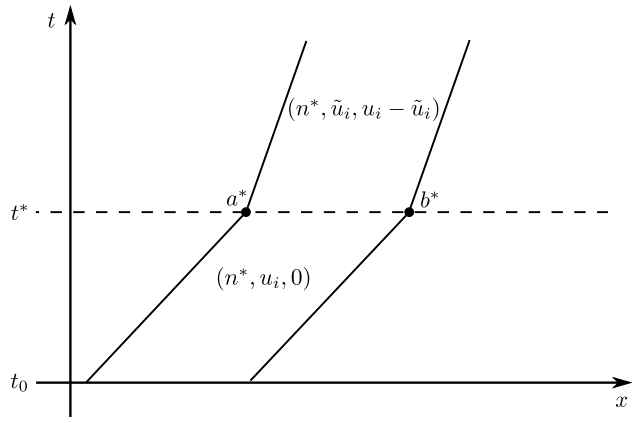
$$
\begin{aligned}
J(s,\sigma,a,b,u)+J(\sigma,\tau,a,c,u) = & -\int_{a(s)}^{b(s)}\varphi(s,x)\,dx\\
& +\int_\sigma^\tau \varphi(t,c(t))\,(u(t)-c'(t))\,dt\\
& +\int_{c(\sigma)}^{b(\sigma)}\varphi(\sigma,x)\,dx+\int_{a(\tau)}^{c(\tau)}\varphi(\tau,x)\,dx.
\end{aligned}
$$

The formulas (3.9) and (3.10) follow. □

## 3.1 About uniqueness of the dynamics

In order to work with the most realistic solution, it is necessary to impose a certain number of criteria on the dynamics in question. This discussion also improve the paper [8].

A single block for which $u+p$ stays constant is a solution, for example the function corresponding to the following figure :



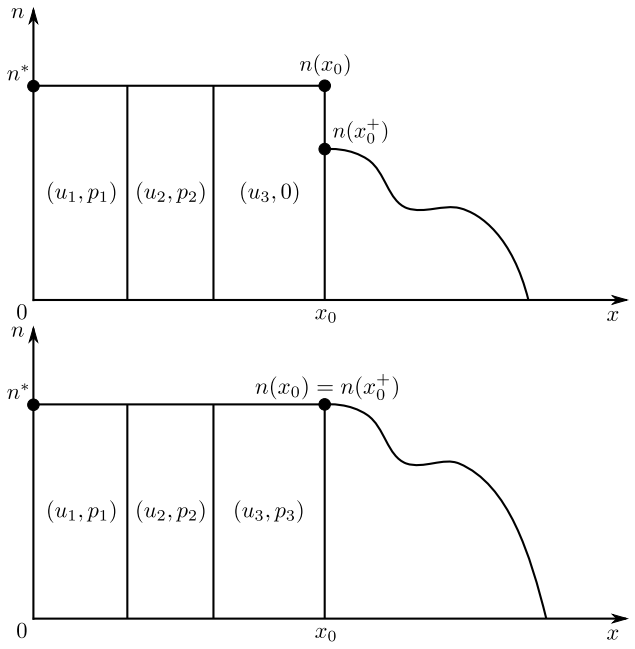

**Remark 3.4** *To understand the meaning of the dynamics, for every figure, the term* $(n, u, p)$ *on a zone corresponds to the constant values of the functions on a block.*

In fact, in an open subset $\Omega \subset ]0, +\infty[_t \times \mathbb{R}_x$, where $n^*$ is constant, it is very easy to see that the dynamic displayed on figure satisfies (2.1)-(2.3), for any value of $0 \leq \tilde{u}_i \leq u_i$.
Now, remember that the term $p$ represents the speed capability which is not used if the road is blocked and that the cars in front imposes a speed smaller than that desired. The term is 0 if the density is not $n^*(x)$ since in this case the car can go to its preferred velocity. Thus there is no reason for a single car to have a nonzero pressure term if there is no one before him. And the relation $(n^*(x) - n)p = 0$ do not impose $p = 0$ for the first car of the jam. This is why we assume that the blocks satisfy the additional constraint :

$$(n^*(x) - n(x^+))p = 0, \tag{3.19}$$

in zones where $n^*$ is constant. In this property, we denote by $n(x^+)$ the limit, if it exists, of $n(y)$ when $y \to x$ with $y > x$. With this condition, the dynamics of the previous figure is a solution only if $\tilde{u}_i = u_i$.

The interpretation is the following : if the first car of the jam has the opportunity to use its preferred velocity, it uses it and $p$ becomes zero. If not, $p$ is not necessarily zero.
This is why for various blocks sticking one after the other, the constraint (3.19) on $p$ gives the two situations of the above figures.

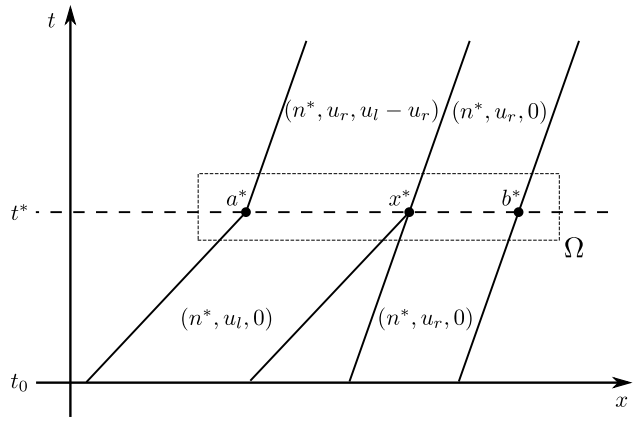



In fact, an other criteria than (3.19) related to the minimization of $p \geq 0$ can be used. It is clear than choosing $p = 0$ minimize the $p$ term in the previous described situations. When the constraint (3.19) cannot be imposed, uniqueness criteria which is natural is the minimization of $p \geq 0$.

We now detail the various cases that can appear in the dynamic of clusters.

## 3.2 Collision between two blocks without change of width

In a zone where $n^*(x) = n^*$ is constant, we consider two blocks $(n^*, u_l, 0)$ and $(n^*, u_r, 0)$, with $u_l > u_r$. Thus, at a time $t^* > 0$, the left block reaches the right one, and collide with it. The dynamic is displayed in the following figure.




The density $n(t,x)$, the flux $n(t,x)u(t,x)$ and the function $p(t,x)$ are locally given respectively by

$$n(t,x) = \begin{cases} n^* \mathbb{1}_{a_l(t)<x<b_l(t)} + n^* \mathbb{1}_{a_r(t)<x<b_r(t)} & \text{if} \quad t < t^*, \\ n^* \mathbb{1}_{\tilde{a}_l(t)<x<\tilde{b}_l(t)} + n^* \mathbb{1}_{a_r(t)<x<b_r(t)} & \text{if} \quad t > t^*, \end{cases}$$

$$n(t,x)u(t,x) = \begin{cases} n^* u_l \mathbb{1}_{a_l(t)<x<b_l(t)} + n^* u_r \mathbb{1}_{a_r(t)<x<b_r(t)} & \text{if} \quad t < t^*, \\ n^* u_r \mathbb{1}_{\tilde{a}_l(t)<x<\tilde{b}_l(t)} + n^* u_r \mathbb{1}_{a_r(t)<x<b_r(t)} & \text{if} \quad t > t^*, \end{cases}$$

and

$$n(t,x)p(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t < t^*, \\ n^*(u_l - u_r)\mathbb{1}_{\tilde{a}_l(t)<x<\tilde{b}_l(t)} & \text{if} \quad t > t^*, \end{cases}$$

with the linear functions $a_l$, $b_l$, $a_r$, $b_r$, $\tilde{a}_l$, $\tilde{b}_l$ are given by

$$\frac{d}{dt}a_l(t) = \frac{d}{dt}b_l(t) = u_l, \quad a_l(t^*) = a^*, \quad b_l(t^*) = x^*,$$

$$\frac{d}{dt}a_r(t) = \frac{d}{dt}b_r(t) = u_r, \quad a_r(t^*) = x^*, \quad b_r(t^*) = b^*,$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}_l(t) = \frac{d}{dt}\tilde{b}_l(t) = u_r, \quad \tilde{a}_l(t^*) = a^*, \quad \tilde{b}_l(t^*) = x^*,$$

and

$$u_l > u_r.$$

The left block obtains the velocity of the one being immediately on its right when they collide. We extend this when more than two blocks collide at a time $t^*$, by forming a new block with the velocity of the block on the right of the group.

**Lemma 3.5** *The previous dynamic satisfies* (2.1)-(2.3).

Proof : Let $\Omega$ be an open neighborhood of the shock zone (displayed in the previous figure). Then, we have, for any continuous function $S$ and any test function $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\langle\ \partial_t(nS(u,p,I_\alpha)) + \partial_x(nuS(u,p,I_\alpha)), \varphi\ \rangle \\
&\quad = \quad -\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} n(t,x)S(u(t,x),p(t,x),I_\alpha(x))(\partial_t\varphi + u\partial_x\varphi)dxdt \\
&\quad = \quad -n^*S(u_l,0,I_\alpha)J(0,t^*,a_l,b_l,u_l) \\
&\qquad -n^*S(u_r,u_l-u_r,I_\alpha)J(t^*,\infty,\tilde{a}_l,\tilde{b}_l,u_r) \\
&\qquad -n^*S(u_r,0,I_\alpha)J(0,\infty,a_r,b_r,u_r) \\
&\quad = \quad (-n^*S(u_l,0,I_\alpha) + n^*S(u_r,u_l-u_r,I_\alpha))\int_{a^*}^{x^*}\varphi(t^*,x)dx.
\end{aligned}$$

For $S(u,p,I_\alpha) = 1$, we get

$$\langle\ \partial_t n + \partial_x(nu), \varphi\ \rangle = 0.$$

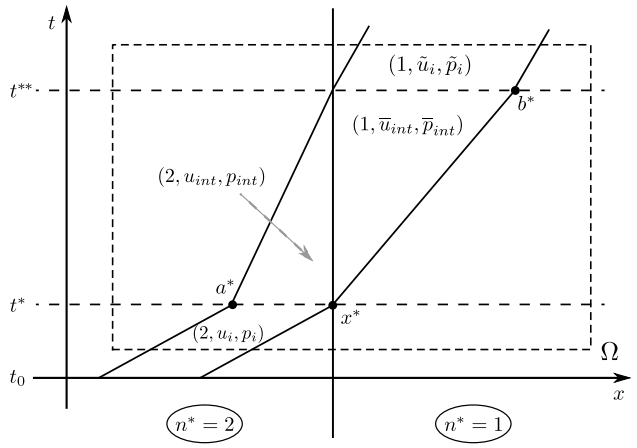
For $S(u,p,I_\alpha) = (u+p)I_\alpha$, we get

$$\langle\ \partial_t(n(u+p)I_\alpha) + \partial_x(nu(u+p)I_\alpha), \varphi\ \rangle \quad = \quad 0.$$

□

## 3.3 Narrowing of the road without collision

Let us move to the situation where the road narrows ($n^*(x)$ was 2 and becomes 1). Here, we describe the evolution of a block which undergoes this narrowing. The speed will be divided by $\alpha$.
The dynamic of the block is exhibited in the following figure.




The density $n(t,x)$, the flux $n(t,x)u(t,x)$ and the functional $p(t,x)$ are locally given respectively by

$$n(t,x) = \begin{cases} 2\mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)} & \text{if } \ t < t^*, \\ 2\mathbb{1}_{a_{int}(t)<x<x^*} + \mathbb{1}_{x^*<x<\bar{b}_{int}(t)} & \text{if } \ t^* < t < t^{**}, \\ \mathbb{1}_{\tilde{a}_i(t)<x<\tilde{b}_i(t)} & \text{if } \ t > t^{**}, \end{cases}$$

$$n(t,x)u(t,x) = \begin{cases} 2u_i\mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)} & \text{if } \ t < t^*, \\ 2u_{int}\mathbb{1}_{a_{int}(t)<x<x^*} + \overline{u}_{int}\mathbb{1}_{x^*<x<\bar{b}_{int}(t)} & \text{if } \ t^* < t < t^{**}, \\ \tilde{u}_i\mathbb{1}_{\tilde{a}_i(t)<x<\tilde{b}_i(t)} & \text{if } \ t > t^{**}, \end{cases}$$

and

$$n(t,x)p(t,x) = \begin{cases} 2p_i\mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)} & \text{if } \ t < t^*, \\ 2p_{int}\mathbb{1}_{a_{int}(t)<x<x^*} + \overline{p}_{int}\mathbb{1}_{x^*<x<\bar{b}_{int}(t)} & \text{if } \ t^* < t < t^{**}, \\ \tilde{p}_i\mathbb{1}_{\tilde{a}_i(t)<x<\tilde{b}_i(t)} & \text{if } \ t > t^{**}, \end{cases}$$

with

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_i(t) = \frac{d}{dt}b_i(t) = u_i, \quad a_i(t^*) = a^*, \quad b_i(t^*) = x^*, \\ \frac{d}{dt}a_{int}(t) = u_{int}, \quad a_{int}(t^*) = a^*, \quad a_{int}(t^{**}) = x^*, \\ \frac{d}{dt}\bar{b}_{int}(t) = \overline{u}_{int}, \quad \bar{b}_{int}(t^*) = x^*, \quad \bar{b}_{int}(t^{**}) = b^*, \\ \frac{d}{dt}\tilde{a}_i(t) = \frac{d}{dt}\tilde{b}_i(t) = \tilde{u}_i, \quad \tilde{a}_i(t^{**}) = x^*, \quad \tilde{b}_i(t^{**}) = b^*. \end{aligned}$$

**Lemma 3.6** *The previous dynamic satisfies* (2.1)-(2.3) *if and only if*

$$p_{int} = u_i + p_i - u_{int}, \quad (\overline{u}_{int}, \overline{p}_{int}) = \left(2u_{int}, \frac{u_i + p_i}{\alpha} - 2u_{int}\right), \quad \tilde{p}_i = \frac{u_i + p_i}{\alpha} - \tilde{u}_i,$$

*with*

$$0 \leq u_{int} \leq \frac{u_i + p_i}{2\alpha}, \quad 0 \leq \tilde{u}_i \leq \frac{u_i + p_i}{\alpha}.$$

Proof : We have, for any continuous function $S$ and any function $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\langle\ \partial_t(nS(u,p,I_\alpha) + \partial_x(nuS(u,p,I_\alpha)), \varphi\ \rangle \\
&\quad = \quad -\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} n(t,x)S(u(t,x),p(t,x),I_\alpha(x))(\partial_t\varphi + u\partial_x\varphi)dxdt \\
&\quad = \quad -2S(u_i,p_i,1/\alpha)J(0,t^*,a_i,b_i,u_i) \\
&\qquad -2S(u_{int},p_{int},1/\alpha)J(t^*,t^{**},a_{int},x^*,u_{int}) \\
&\qquad -S(\overline{u}_{int},\overline{p}_{int},1)J(t^*,t^{**},x^*,\overline{b}_{int},\overline{u}_{int}) - S(\tilde{u}_i,\tilde{p}_i,1)J(t^{**},\infty,\tilde{a}_i,\tilde{b}_i,\tilde{u}_i) \\
&\quad = \quad -2S(u_i,p_i,1/\alpha)\int_{a^*}^{x^*}\varphi(t^*,x)dx \\
&\qquad -2S(u_{int},p_{int},1/\alpha)\left(-\int_{a^*}^{x^*}\varphi(t^*,x)dx + u_{int}\int_{t^*}^{t^{**}}\varphi(t,x^*)dt\right) \\
&\qquad -S(\overline{u}_{int},\overline{p}_{int},1)\left(\int_{x^*}^{b^*}\varphi(t^{**},x)dx - \overline{u}_{int}\int_{t^*}^{t^{**}}\varphi(t,x^*)dt\right) \\
&\qquad +S(\tilde{u}_i,\tilde{p}_i,1)\int_{x^*}^{b^*}\varphi(t^{**},x)dx,
\end{aligned}$$

thus we have

$$\begin{aligned}
&\partial_t(nS(u,p,I_\alpha) + \partial_x(nuS(u,p,I_\alpha)) \\
&\quad = \quad 2\left(S(u_{int},p_{int},1/\alpha) - S(u_i,p_i,1/\alpha)\right)\mathbb{1}_{[a^*,x^*]}(x)\delta(t-t^*) \\
&\qquad + \left(S(\tilde{u}_i,\tilde{p}_i,1) - S(\overline{u}_{int},\overline{p}_{int},1)\right)\mathbb{1}_{[x^*,b^*]}(x)\delta(t-t^{**}) \\
&\qquad + \left(\overline{u}_{int}S(\overline{u}_{int},\overline{p}_{int},1) - 2u_{int}S(u_{int},p_{int},1/\alpha)\right)\mathbb{1}_{[t^*,t^{**}]}(t)\delta(x-x^*).
\end{aligned}$$

For $S(u,p,I_\alpha)=1$, we get

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = (\overline{u}_{int} - 2u_{int})\, \mathbb{1}_{[t^*,t^{**}]}(t)\delta(x-x^*).$$

For $S(u,p,I_\alpha)=(u+p)I_\alpha$, we get

$$\begin{aligned}
&\partial_t(n(u+p)I_\alpha) + \partial_x(nu(u+p)I_\alpha) \\
&\quad = \frac{2}{\alpha}\left(u_{int}+p_{int}-u_i-p_i\right)\mathbb{1}_{[a^*,x^*]}(x)\delta(t-t^*) \\
&\qquad + \left(\tilde{u}_i+\tilde{p}_i-\overline{u}_{int}-\overline{p}_{int}\right)\mathbb{1}_{[x^*,b^*]}(x)\delta(t-t^{**}) \\
&\qquad + \left(\overline{u}_{int}(\overline{u}_{int}+\overline{p}_{int}) - 2u_{int}\left(\tfrac{u_{int}+p_{int}}{\alpha}\right)\right)\mathbb{1}_{[t^*,t^{**}]}(t)\delta(x-x^*).
\end{aligned}$$

Therefore, $(n,u,p)$ is a solution of (2.1)-(2.2) if and only if

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\overline{u}_{int} & = & 2u_{int} \\
u_{int}+p_{int} & = & u_i+p_i \\
\tilde{u}_i+\tilde{p}_i & = & \overline{u}_{int}+\overline{p}_{int} \\
\overline{u}_{int}+\overline{p}_{int} & = & \frac{1}{\alpha}(u_{int}+p_{int})
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}
\overline{u}_{int} & = & 2u_{int} \\
u_{int}+p_{int} & = & u_i+p_i \\
\overline{u}_{int}+\overline{p}_{int} & = & \frac{1}{\alpha}(u_i+p_i) \\
\tilde{u}_i+\tilde{p}_i & = & \frac{1}{\alpha}(u_i+p_i)
\end{array}\right. .$$

Since $u_{int}, p_{int}, \overline{u}_{int}$ and $\overline{p}_{int}$ are nonnegative, it concludes the proof of lemma. □

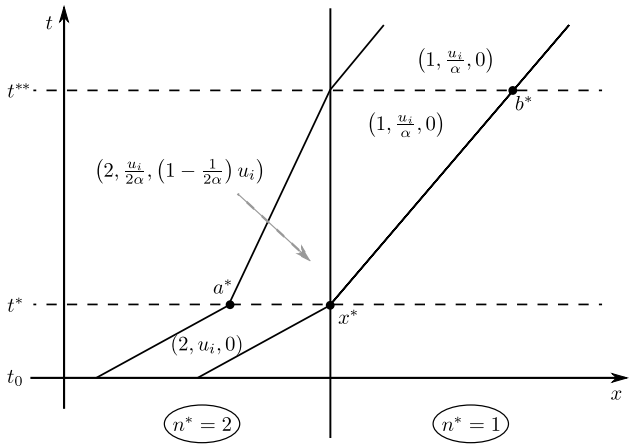
Now, we can find the dynamics governing a single block $(n^*,u_i,0)$ which undergoes a narrowing of the road : according to subsection 3.1 and additional constraint (3.19), we have

$$p_i = 0, \qquad \tilde{p}_i = 0, \qquad \overline{p}_{int} = 0,$$

in the relations of lemma 3.6, which leads to

$$p_{int} = u_i - u_{int}, \quad \overline{u}_{int} = 2u_{int}, \quad u_{int} = \frac{u_i}{2\alpha}, \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{\alpha}.$$

Finally, the only dynamics compatible with (3.19) for a narrowing is :

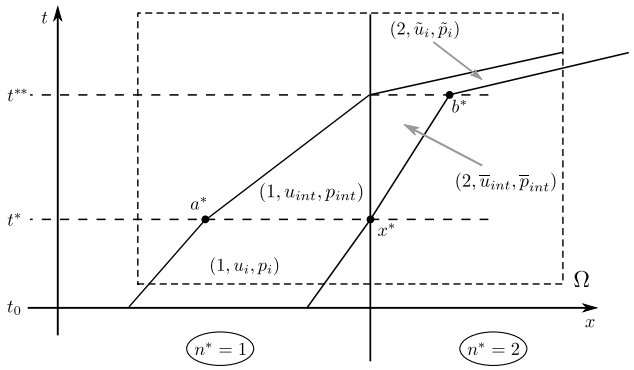



**Remark 3.7** *In this situation, there is a backward propagation of the queue : before the narrowing of the road, the cluster size was $x^* - a^*$ and during the intermediate state, it increases linearly up to $b^* - x^*$, with finite speed $\dfrac{u_i}{2\alpha} = \dfrac{d}{dt}(\bar{b}_{int}(t) - a_{int}(t))$. Concerning the velocity $u$ into the cluster, the information travels at infinite speed and the velocity at the end of the block pass instantly from $u$ to $u/(2\alpha)$.*

## 3.4 Enlargement of the road without collision

Now we explain what happens for a block when the road widens ($n^*(x)$ was 1 and becomes 2).

In fact, the block (which comes with $n = n^* = 1$) becomes a block with $n = n^* = 2$, but its speed will be multiplied by the parameter $\alpha$. The dynamic is exhibited hereafter :



The density $n(t,x)$, the flux $n(t,x)u(t,x)$ and the functional $p(t,x)$ are locally given respectively by

$$n(t,x) = \begin{cases} \mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)} & \text{if } t < t^*, \\ \mathbb{1}_{a_{int}(t)<x<x^*} + 2\mathbb{1}_{x^*<x<\bar{b}_{int}(t)} & \text{if } t^* < t < t^{**}, \\ 2\mathbb{1}_{\tilde{a}_i(t)<x<\tilde{b}_i(t)} & \text{if } t > t^{**}, \end{cases}$$

$$n(t,x)u(t,x) = \begin{cases} u_i \mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)} & \text{if } t < t^*, \\ u_{int}\mathbb{1}_{a_{int}(t)<x<x^*} + 2\overline{u}_{int}\mathbb{1}_{x^*<x<\bar{b}_{int}(t)} & \text{if } t^* < t < t^{**}, \\ 2\tilde{u}_i \mathbb{1}_{\tilde{a}_i(t)<x<\tilde{b}_i(t)} & \text{if } t > t^{**}, \end{cases}$$

and

$$n(t,x)p(t,x) = \begin{cases} p_i \mathbb{1}_{a_i(t)<x<b_i(t)} & \text{if } t < t^*, \\ p_{int}\mathbb{1}_{a_{int}(t)<x<x^*} + 2\overline{p}_{int}\mathbb{1}_{x^*<x<\bar{b}_{int}(t)} & \text{if } t^* < t < t^{**}, \\ 2\tilde{p}_i \mathbb{1}_{\tilde{a}_i(t)<x<\tilde{b}_i(t)} & \text{if } t > t^{**}, \end{cases}$$

with

$$\frac{d}{dt}a_i(t) = \frac{d}{dt}b_i(t) = u_i, \quad a_i(t^*) = a^*, \quad b_i(t^*) = x^*,$$

$$\frac{d}{dt}a_{int}(t) = u_{int}, \quad a_{int}(t^*) = a^*, \quad a_{int}(t^{**}) = x^*,$$

$$\frac{d}{dt}\bar{b}_{int}(t) = \overline{u}_{int}, \quad \bar{b}_{int}(t^*) = x^*, \quad \bar{b}_{int}(t^{**}) = b^*,$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}_i(t) = \frac{d}{dt}\tilde{b}_i(t) = \tilde{u}_i, \quad \tilde{a}_i(t^{**}) = x^*, \quad \tilde{b}_i(t^{**}) = b^*.$$

**Lemma 3.8** *The previous dynamic satisfies* (2.1)-(2.3) *if and only if*

$$p_{int} = u_i + p_i - u_{int}, \quad (\overline{u}_{int}, \overline{p}_{int}) = \left(\frac{u_{int}}{2}, \alpha(u_i+p_i) - \frac{u_{int}}{2}\right), \quad \tilde{p}_i = \alpha(u_i+p_i) - \tilde{u}_i,$$

*with*

$$0 \le u_{int} \le u_i + p_i, \quad 0 \le \tilde{u}_i \le \alpha(u_i+p_i).$$

Proof : We have, for any continuous function $S$ and any function $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
&\langle\ \partial_t(nS(u,p,I_\alpha)+\partial_x(nuS(u,p,I_\alpha)),\varphi\ \rangle\\
&\quad= -\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} n(t,x)S(u(t,x),p(t,x),I_\alpha(x))(\partial_t\varphi+u\partial_x\varphi)dxdt\\
&\quad= -S(u_i,p_i,1)J(0,t^*,a_i,b_i,u_i)-S(u_{int},p_{int},1)J(t^*,t^{**},a_{int},x^*,u_{int})\\
&\qquad -2S(\overline{u}_{int},\overline{p}_{int},1/\alpha)J(t^*,t^{**},x^*,\overline{b}_{int},\overline{u}_{int})\\
&\qquad +2S(\tilde{u}_i,\tilde{p}_i,1/\alpha)J(t^{**},\infty,\tilde{a}_i,\tilde{b}_i,\tilde{u}_i)\\
&\quad= -S(u_i,p_i,1)\int_{a^*}^{x^*}\varphi(t^*,x)dx\\
&\qquad -S(u_{int},p_{int},1)\left(-\int_{a^*}^{x^*}\varphi(t^*,x)dx+u_{int}\int_{t^*}^{t^{**}}\varphi(t,x^*)dt\right)\\
&\qquad -2S(\overline{u}_{int},\overline{p}_{int},1/\alpha)\left(\int_{x^*}^{b^*}\varphi(t^{**},x)dx-\overline{u}_{int}\int_{t^*}^{t^{**}}\varphi(t,x^*)dt\right)\\
&\qquad +2S(\tilde{u}_i,\tilde{p}_i,1/\alpha)\int_{x^*}^{b^*}\varphi(t^{**},x)dx,
\end{aligned}
$$

thus we have, in $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(nS(u,p,I_\alpha)+\partial_x(nuS(u,p,I_\alpha))\\
&\quad= \left(S(u_{int},p_{int},1)-S(u_i,p_i,1)\right)\mathbb{1}_{[a^*,x^*]}(x)\delta(t-t^*)\\
&\qquad +2\left(S(\tilde{u}_i,\tilde{p}_i,1/\alpha)-S(\overline{u}_{int},\overline{p}_{int},1/\alpha)\right)\mathbb{1}_{[x^*,b^*]}(x)\delta(t-t^{**})\\
&\qquad +\left(2\overline{u}_{int}S(\overline{u}_{int},\overline{p}_{int},1/\alpha)-u_{int}S(u_{int},p_{int},1)\right)\mathbb{1}_{[t^*,t^{**}]}(t)\delta(x-x^*).
\end{aligned}
$$

For $S(u,p,I_\alpha)=1$, we get

$$\partial_t n+\partial_x(nu)=(2\overline{u}_{int}-u_{int})\,\mathbb{1}_{[t^*,t^{**}]}(t)\delta(x-x^*).$$

For $S(u,p,I_\alpha)=(u+p)I_\alpha$, we get

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(n(u+p)I_\alpha)+\partial_x(nu(u+p)I_\alpha)\\
&\quad= \left(u_{int}+p_{int}-u_i-p_i\right)\mathbb{1}_{[a^*,x^*]}(x)\delta(t-t^*)\\
&\qquad +\tfrac{2}{\alpha}\left(\tilde{u}_i+\tilde{p}_i-\overline{u}_{int}-\overline{p}_{int}\right)\mathbb{1}_{[x^*,b^*]}(x)\delta(t-t^{**})\\
&\qquad +\left(2\overline{u}_{int}\left(\tfrac{\overline{u}_{int}+\overline{p}_{int}}{\alpha}\right)-u_{int}(u_{int}+p_{int})\right)\mathbb{1}_{[t^*,t^{**}]}(t)\delta(x-x^*).
\end{aligned}
$$

Therefore, such a function $(n, u, p)$ is a solution of (2.1)-(2.2) if and only if

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\overline{u}_{int} & = & u_{int} \\ u_{int}+p_{int} & = & u_i+p_i \\ \tilde{u}_i+\tilde{p}_i & = & \overline{u}_{int}+\overline{p}_{int} \\ \overline{u}_{int}+\overline{p}_{int} & = & \alpha(u_{int}+p_{int}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2\overline{u}_{int} & = & u_{int} \\ u_{int}+p_{int} & = & u_i+p_i \\ \overline{u}_{int}+\overline{p}_{int} & = & \alpha(u_i+p_i) \\ \tilde{u}_i+\tilde{p}_i & = & \alpha(u_i+p_i) \end{array}\right. ,$$

and we conclude as in lemma 3.6. □

Now, if a single block $(n^*, u_i, 0)$ undergoes a enlargement of the road, we have

$$p_i = 0, \qquad \tilde{p}_i = 0$$

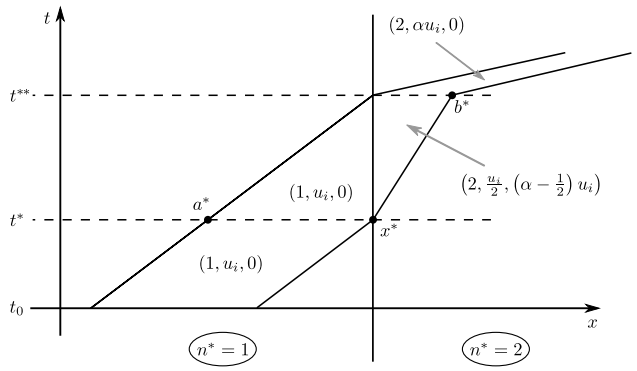
in the relations of lemma 3.8, which leads to

$$p_{int} = u_i - u_{int}, \quad (\overline{u}_{int}, \overline{p}_{int}) = \left(\frac{u_{int}}{2}, \alpha u_i - \frac{u_{int}}{2}\right), \quad \tilde{u}_i = \alpha u_i,$$

with

$$0 \leq u_{int} \leq u_i.$$

In this case, we can't impose $\overline{p}_{int} = 0$ since it would imply $u_{int} = 2\alpha u_i$ and then $p_{int} < 0$ which is impossible. Then, we use the second criteria of section 3.1 which is the minimization of $p_{int}$ in this case. Here $p_{int} = 0$ is possible, that is the choice $u_{int} = u_i$, and the dynamics for a enlargement is the following :



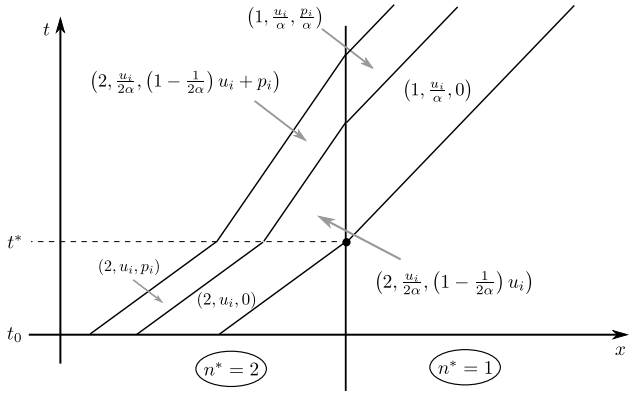

This situation is the only case where (3.19) can't be additionally asked. The physical explanation is that the increasing of the speed of the car going from $u_i$ to $\alpha u_i$ is not instantaneous and has to be in two steps. Thus, in the intermediate state, the car is not yet at its preferred velocity and there is still a $p$ term.

**Remark 3.9** *We notice that the dynamics for enlargement is exactly the reverse process of the narrowing. Moreover, the ML-CPGD model allows cars to accelerate, which was not the case in [8] and [9] (where a maximum principle held for the velocity u).*

## 3.5 Compatibility of the dynamics

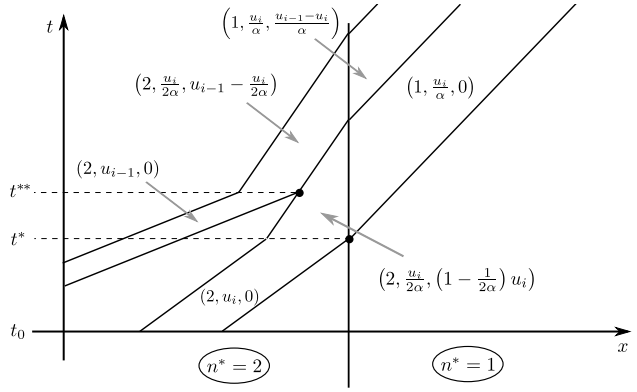
Since the previous dynamics are not instantaneous, they can interact before they are completed. In this subsection, we present the various compatibilities between these dynamics. Note that it is not just a superposition of various cases. In order to simplify the presentation, we only show figures that describe the various interactions.

### 3.5.1 A train of blocks undergoes a narrowing

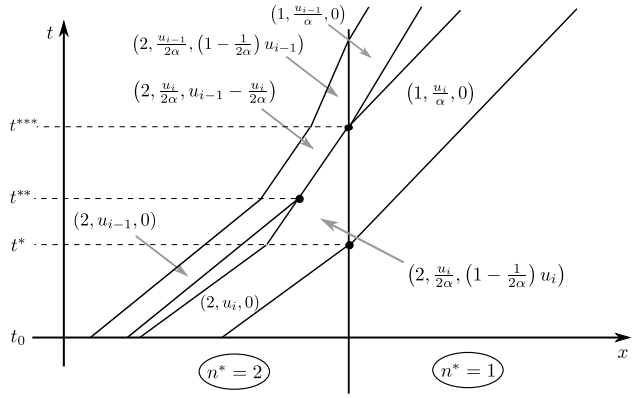



### 3.5.2 Two blocks collide just before the road narrows

Case with $u_{i-1} > u_i$ :

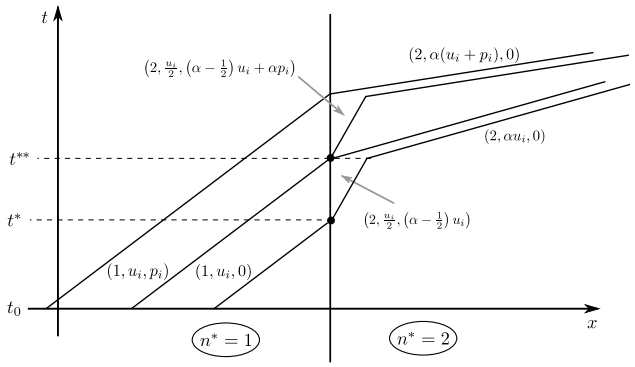



Case with $\frac{u_i}{2\alpha} < u_{i-1} \leq u_i$ :

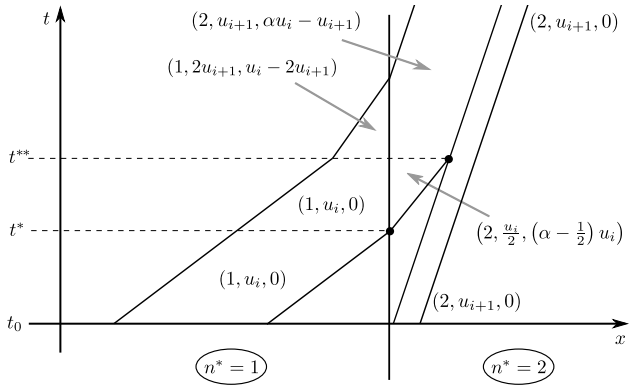



Note that in this case, there is creation of a void area in a jam due to the fact that the acceleration of the leading car is not necessarily followed if there is not a sufficient reserve of speed. It represents also an approach to model some kind of stop and go waves which is new in such model. It will be also the case in the following situation.

### 3.5.3 A train of blocks undergoes an enlargement



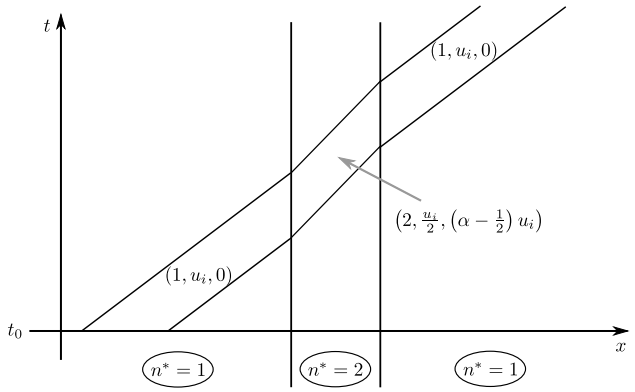

### 3.5.4 Two blocks collide just after the road widens



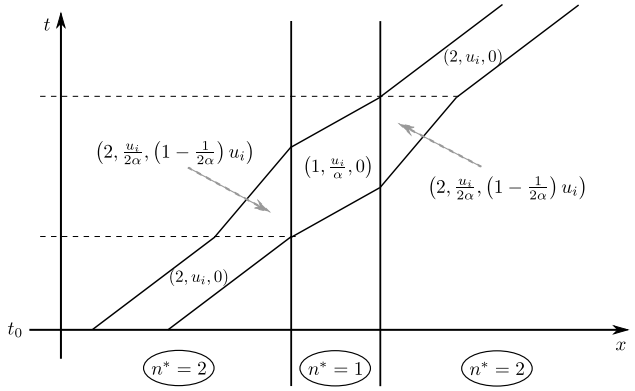

Here, we have $\frac{u_i}{2} > u_{i+1}$, thus

$$\alpha u_i - u_{i+1} \geq u_i - 2u_{i+1} > 0.$$

### 3.5.5 The road follows $1 \to 2 \to 1$ faster than the block




### 3.5.6 The road follows $2 \to 1 \to 2$ faster than the block




## 3.6 Block solutions and bounds

Using the above sections, we are able to state some results on the dynamics of blocks.

**Remark 3.10** *The velocity $u$ is assumed to be extended linearly in the vacuum (areas such that $n = 0$) between two successive blocks. Moreover, we assume that $u$ is constant at $\pm\infty$. But concerning $p$, the constraint $(n^* - n)p = 0$ implies that $p = 0$ in the vacuum, and at $\pm\infty$. Thus, the computations of total variation in $x$ of $u$ and $p$ are different.*

The previous computations show the following results :

**Theorem 3.11** *With the various above dynamics, the quantities* $n(t,x)$, $u(t,x)$ *and* $p(t,x)$ *defined by (3.1)-(3.3) and Remark 3.10 are solutions to* (2.1), (2.2), (2.3).

We can also establish some bounds on these solutions :

**Proposition 3.12** *We still denote by* $n(t,x)$, $u(t,x)$ *and* $p(t,x)$ *the functions of (3.1)-(3.3) and Remark 3.10. These functions satisfy the maximum principle*

$$0 \leq u(t,x) \leq 2\alpha \left( esssup_y u^0(y) + esssup_y p^0(y) \right), \tag{3.20}$$

$$0 \leq p(t,x) \leq 2\alpha \left( esssup_y u^0(y) + esssup_y p^0(y) \right). \tag{3.21}$$

*If we assume furthermore that the initial data in the blocks* $u_i^0$ *and* $p_i^0$ *are BV functions, then we have, for all* $t \in [0,T]$,

$$TV_K(u(t,.)) \leq 4\alpha M \left( TV_{\tilde{K}}(u^0) + TV_{\tilde{K}}(p^0) + \|u^0\|_{L^\infty} \right), \tag{3.22}$$

$$TV_K(p(t,.)) \leq 4\alpha M \left( TV_{\tilde{K}}(u^0) + TV_{\tilde{K}}(p^0) + \|u^0\|_{L^\infty} \right), \tag{3.23}$$

*for any compact* $K = [a,b]$ *and with*

$$\tilde{K} = [a - t\,(esssup_y u^0), b - t\,(essinf_y u^0)],$$

*where* $TV_K$ *(resp.* $TV_{\tilde{K}}$*) denotes the total variation on the set* $K$ *(resp.* $\tilde{K}$*), and* $M$ *is the number of road transitions (supposed to be finite).*

**Remark 3.13** *The estimate* (3.20) *reflects the fact that cars can accelerate in the present model. In [8] and [9], we simply have the estimate*

$$essinf_y u^0(y) \leq u(t,x) \leq esssup_y u^0(y).$$

Proof : We treat some examples which represent the critical cases. In these cases, we compute the total variation on $\mathbb{R}$ to simplify the presentation.

- Case of collisions without change of width :
  We obtain the bounds corresponding to the classical CPGD model (like in [9]).
  We assume the following dynamics : at time $t = 0$, there are $N$ blocks (denoted by $B_1, \ldots, B_N$) with velocities $u_1^0 > u_2^0 > \cdots > u_N^0$ (which is the case with the most collisions) and pressures $p_1^0, \ldots, p_N^0 \geq 0$, thus

$$TV(u^0) = \sum_{i=1}^{N-1} |u_i^0 - u_{i+1}^0|, \qquad TV(p^0) = 2\sum_{i=1}^{N} p_i^0.$$

Let $t > 0$ such that in the time interval $[0, t]$, the $j$ first blocks $B_1, \ldots, B_j$ collide successively at $t_1 < \cdots < t_{j-1} \leq t$ for instance (i.e. $B_i$ collide with $B_{i+1}$ at the time $t_i$ for all $1 \leq i \leq j-1$) and then the $q-j+1$ following blocks $B_j, \ldots, B_q$ collide at the same time $t_j$, with $t_{j-1} < t_j \leq t$. At the time $t$, the last $N-q+1$ blocks $B_q, \ldots, B_N$ have not collided yet.
We have the relations

$$\forall k \in \{1, \ldots, j\}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}, \qquad p_i^{t_k} + u_i^{t_k} = p_i^0 + u_i^0,$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, q\}, \qquad u_i^{t_j} = u_q^0, \qquad p_i^{t_j} = u_i^0 + p_i^0 - u_q^0,$$

$$\forall i \in \{q+1, \ldots, N\}, \qquad u_i^{t_j} = u_i^0, \qquad p_i^{t_j} = p_i^0.$$

Then we get

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &= |u_1^{t_j} - u_2^{t_j}| + \cdots + |u_{j-1}^{t_j} - u_j^{t_j}| \\ &\quad + |u_j^{t_j} - u_{j+1}^{t_j}| + \cdots + |u_{q-1}^{t_j} - u_q^{t_j}| \\ &\quad + |u_q^{t_j} - u_{q+1}^{t_j}| + \cdots + |u_{N-1}^{t_j} - u_N^{t_j}| \\ &= |u_q^0 - u_q^0| + \cdots + |u_q^0 - u_q^0| \\ &\quad + |u_q^0 - u_{q+1}^0| + \cdots + |u_{N-1}^0 - u_N^0| \\ &\leq TV(u^0). \end{aligned}$$

Now, for $p$, we have

$$
\begin{aligned}
TV(p(t,.)) &= p_1^{t_j} + |p_1^{t_j} - p_2^{t_j}| + \cdots + |p_{j-1}^{t_j} - p_j^{t_j}| \\
&+ \quad |p_j^{t_j} - p_{j+1}^{t_j}| + \cdots + |p_{q-1}^{t_j} - p_q^{t_j}| \\
&+ \quad p_q^{t_j} \quad + \quad 2\left(p_{q+1}^{t_j} + \cdots + p_N^{t_j}\right) \\
&= u_1^0 + p_1^0 - u_q^0 + |u_1^0 + p_1^0 - u_2^0 - p_2^0| \\
&+ \cdots + |u_{j-1}^0 + p_{j-1}^0 - u_j^0 - p_j^0| \\
&+ \quad |u_j^0 + p_j^0 - u_{j+1}^0 - p_{j+1}^0| \\
&+ \cdots + |u_{q-1}^0 + p_{q-1}^0 - u_q^0 - p_q^0| \\
&+ \quad p_q^0 \quad + \quad 2\left(p_{q+1}^0 + \cdots + p_N^0\right) \\
&\leq u_1^0 - u_q^0 + |u_1^0 - u_2^0| + \cdots + |u_{q-1}^0 - u_q^0| \\
&+ \quad 2\left(p_1^0 + p_2^0 + \cdots + p_N^0\right) \\
&\leq 2TV(u^0) + TV(p^0).
\end{aligned}
$$

- Case of enlargement of the road without collision :
  We assume the following dynamics : at time $t = 0$, we consider two blocks $B_1 = (u_1^0, p_1^0)$ and $B_2 = (u_2^0, p_2^0)$, in a section of road where $n^* = 1$.
  We have

$$TV(u^0) = |u_2^0 - u_1^0|, \qquad TV(p^0) = 2(p_2^0 + p_1^0).$$

  At time $t_1 > 0$, the block $B_1$ reach the two-lane section, and undergoes the change of width during the time interval $[t_1, t_2]$. Then, later in the interval $[t_3, t_4]$ (with $t_3 > t_2$) the block $B_2$ enter in the two-lane section.

For all $t \in ]t_1, t_2[$, we have (with the notations of section 3.4)

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &= |u_2^0 - u_{1,int}| + |u_{1,int} - \overline{u_{1,int}}| \\ &= |u_2^0 - u_{1,int}| + \frac{u_{1,int}}{2} \\ &\leq |u_2^0 - u_1^0| + |u_1^0 - u_{1,int}| + \frac{u_{1,int}}{2}. \end{aligned}$$

Since $u_{1,int} \leq u_1^0$ we obtain

$$TV(u(t,.)) \leq |u_2^0 - u_1^0| + u_1^0 - \frac{u_{1,int}}{2} \leq TV(u^0) + \|u^0\|_{L^\infty}.$$

Moreover

$$TV(p(t,.)) = 2p_2^0 + p_{1,int} + |p_{1,int} - \overline{p_{1,int}}| + \overline{p_{1,int}},$$

but

$$\overline{p_{1,int}} - p_{1,int} = (\alpha - 1)(u_1^0 + p_1^0) + \frac{u_{1,int}}{2} \geq 0,$$

thus

$$TV(p(t,.)) = 2(p_2^0 + \overline{p_{1,int}}) = 2(p_2^0 + \alpha(u_1^0 + p_1^0) - \frac{u_{1,int}}{2}),$$

and we deduce

$$TV(p(t,.)) \leq 2\alpha(p_1^0 + p_2^0) + 2\alpha u_1^0 \leq \alpha TV(p^0) + 2\alpha\|u^0\|_{L^\infty}.$$

For all $t \in ]t_2, t_3[$, we have

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) = |u_2^0 - \alpha u_1^0| &\leq |u_2^0 - u_1^0| + |(1-\alpha)u_1^0| \\ &\leq TV(u^0) + (\alpha - 1)\|u^0\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

and

$$TV(p(t,.)) = 2p_2^0 + 2\alpha p_1^0 \leq \alpha TV(p^0).$$

For all $t \in ]t_3, t_4[$, we have

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &= |u_{2,int} - \overline{u_{2,int}}| + |\overline{u_{2,int}} - \alpha u_1^0| \\ &= \frac{u_{2,int}}{2} + |\frac{u_{2,int}}{2} - \alpha u_1^0| \\ &\leq \frac{u_{2,int}}{2} + |\frac{u_{2,int}}{2} - \alpha u_2^0| + |\alpha u_2^0 - \alpha u_1^0|. \end{aligned}$$

Since $u_{2,int} \leq u_2^0$, we obtain

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &\leq \frac{u_{2,int}}{2} - \frac{u_{2,int}}{2} + \alpha u_2^0 + |\alpha u_2^0 - \alpha u_1^0| \\ &\leq \alpha TV(u^0) + \alpha \|u^0\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Moreover

$$\begin{aligned} TV(p(t,.)) &= p_{2,int} + |p_{2,int} - \overline{p_{2,int}}| + \overline{p_{2,int}} + 2\alpha p_1^0 \\ &= 2(\overline{p_{2,int}} + \alpha p_1^0) \\ &= 2(\alpha(u_2^0 + p_2^0) - \frac{u_{2,int}}{2} + \alpha p_1^0), \end{aligned}$$

and we deduce

$$TV(p(t,.)) \leq 2\alpha(p_1^0 + p_2^0) + 2\alpha u_2^0 \leq \alpha TV(p^0) + 2\alpha \|u^0\|_{L^\infty}.$$

At least, for $t > t_4$, we have

$$TV(u(t,.)) = |\alpha u_2^0 - \alpha u_1^0| = \alpha TV(u^0),$$

and

$$TV(p(t,.)) = 2\alpha p_2^0 + 2\alpha p_1^0 = \alpha TV(p^0).$$

Finally, the bound is

$$TV(u(t,.)) \leq \alpha(TV(u^0) + \|u^0\|_{L^\infty}),$$

$$TV(p(t,.)) \leq \alpha(TV(u^0) + 2\|u^0\|_{L^\infty}),$$

for all $t > 0$.
In the general case (if we follow $N$ blocks along the time), we shall obtain the same bound because only one block at a time undergoes every change $n^* = 1 \to 2$.
But it is possible that many blocks undergo this enlargement together at different places. That is why the general estimate is the following :

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &\leq \alpha(TV(u^0) + M\|u^0\|_{L^\infty}), \\ TV(p(t,.)) &\leq \alpha(TV(p^0) + 2M\|u^0\|_{L^\infty}), \end{aligned}$$

where $M$ is the number of lane transitions.

- Case of narrowing of the road without collision :
The computations are similar to the previous case. With the notations of section 3.3, we have :
For all $t \in ]t_1, t_2[$,

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &= |u_2^0 - u_{1,int}| + |u_{1,int} - \overline{u_{1,int}}| \\ &= |u_2^0 - u_{1,int}| + u_{1,int} \\ &\leq |u_2^0 - u_1^0| + |u_1^0 - u_{1,int}| + u_{1,int}. \end{aligned}$$

Since $u_{1,int} \leq u_1^0$ we obtain

$$TV(u(t,.)) \leq |u_2^0 - u_1^0| + u_1^0 \leq TV(u^0) + \|u^0\|_{L^\infty}.$$

Moreover,

$$TV(p(t,.)) = 2p_2^0 + p_{1,int} + |p_{1,int} - \overline{p_{1,int}}| + \overline{p_{1,int}},$$

but this time, $\overline{p_{1,int}} \leq p_{1,int}$, thus

$$TV(p(t,.)) = 2(p_2^0 + p_{1,int}) = 2(p_2^0 + u_1^0 + p_1^0 - u_{1,int}),$$

and we deduce

$$TV(p(t,.)) \leq 2(p_1^0 + p_2^0) + 2u_1^0 \leq TV(p^0) + 2\|u^0\|_{L^\infty}.$$

For all $t \in ]t_2, t_3[$, we have

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &= |u_2^0 - \frac{1}{\alpha}u_1^0| \leq |u_2^0 - u_1^0| + |(1 - \frac{1}{\alpha})u_1^0| \\ &\leq TV(u^0) + (1 - \frac{1}{\alpha})\|u^0\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

and

$$TV(p(t,.)) = 2p_2^0 + \frac{2}{\alpha}p_1^0 \leq TV(p^0).$$

For all $t \in ]t_3, t_4[$, we have

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &= |u_{2,int} - \overline{u_{2,int}}| + |\overline{u_{2,int}} - \frac{1}{\alpha}u_1^0| \\ &= u_{2,int} + |2u_{2,int} - \frac{1}{\alpha}u_1^0| \\ &\leq u_{2,int} + |2u_{2,int} - \frac{1}{\alpha}u_2^0| + |\frac{1}{\alpha}u_2^0 - \frac{1}{\alpha}u_1^0|. \end{aligned}$$

Since $u_{2,int} \leq u_2^0$, we obtain

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &\leq u_{2,int} + 2u_2^0 - 2u_{2,int} + (2 - \frac{1}{\alpha})u_2^0 + \frac{1}{\alpha}|u_2^0 - u_1^0| \\ &\leq 4u_2^0 + \frac{1}{\alpha}TV(u^0) \\ &\leq 4\|u^0\|_{L^\infty} + \frac{1}{\alpha}TV(u^0). \end{aligned}$$

Moreover

$$\begin{aligned} TV(p(t,.)) &= p_{2,int} + |p_{2,int} - \overline{p_{2,int}}| + \overline{p_{2,int}} + \frac{2}{\alpha}p_1^0 \\ &= 2(p_{2,int} + \frac{1}{\alpha}p_1^0) \\ &= 2(u_2^0 + p_2^0 - u_{2,int} + \frac{1}{\alpha}p_1^0), \end{aligned}$$

and we deduce

$$TV(p(t,.)) \leq 2(p_1^0 + p_2^0) + 2u_2^0 \leq TV(p^0) + 2\|u^0\|_{L^\infty}.$$

At least, for $t > t_4$, we have

$$TV(u(t,.)) = |\frac{1}{\alpha}u_2^0 - \frac{1}{\alpha}u_1^0| = \frac{1}{\alpha}TV(u^0),$$

and

$$TV(p(t,.)) = \frac{2}{\alpha}p_2^0 + \frac{2}{\alpha}p_1^0 = \frac{1}{\alpha}TV(p^0).$$

Finally, the bound is

$$TV(u(t,.)) \leq TV(u^0) + 4\|u^0\|_{L^\infty},$$

$$TV(p(t,.)) \leq TV(u^0) + 2\|u^0\|_{L^\infty},$$

for all $t > 0$.
Now $\|u^0\|_{L^\infty}$ can appear on every lane transition and the estimate is then

$$\begin{aligned} TV(u(t,.)) &\leq TV(u^0) + 4M\|u^0\|_{L^\infty}, \\ TV(p(t,.)) &\leq TV(p^0) + 2M\|u^0\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

where $M$ is the number of lane transitions.

- The general situation is a superposition of these cases and it gives the Proposition. □

# 4 Existence of weak solutions

In this section, we prove the existence of weak solutions using previous clusters dynamics, an approximation lemma of the initial data by these sticky blocks and a compactness result.

## 4.1 Approximation of the initial data by sticky blocks

We have the following lemma, which is widely inspired from the ones in [5] and [9], but here, $n^*$ is piecewise constant, and constant at $\pm\infty$. We can see the Appendix for the proof of this variant.

**Lemma 4.1** *Let $n^0 \in L^1(\mathbb{R})$, $u^0, p^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ such that $0 \leq n^0 \leq n^*(x)$, $0 \leq u^0$, $0 \leq p^0$ and $(n^*(x) - n^0)p^0 = 0$. Then, there exists a sequence of block initial data $(n_k^0, u_k^0, p_k^0)_{k\geq 1}$ such that for all $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} n^0(x)dx, \tag{4.1}$$

$$essinf\ u^0 \leq u_k^0 \leq esssup\ u^0, \quad essinf\ p^0 \leq p_k^0 \leq esssup\ p^0, \tag{4.2}$$

$$TV(u_k^0) \leq TV(u^0), \quad TV(p_k^0) \leq TV(p^0), \tag{4.3}$$

*and for which the convergences $n_k^0 \rightharpoonup n^0$, $n_k^0 u_k^0 \rightharpoonup n^0 u^0$ and $n_k^0 p_k^0 \rightharpoonup n^0 p^0$ hold in the distribution sense. Moreover, the sequence $(n_k^0, u_k^0, p_k^0)$ satisfies the constraint :*

$$(n^*(x) - n_k^0)p_k^0 = 0, \qquad \forall k \geq 1.$$

## 4.2 Existence result

Let us recall the ML-CPGD system :

$$\partial_t n + \partial_x(nu) = 0\,, \tag{4.4}$$
$$\partial_t(n(u+p)I_\alpha) + \partial_x(nu(u+p)I_\alpha) = 0\,, \tag{4.5}$$
$$0 \le n \le n^*(x)\,, \quad u \ge 0\,, \quad p \ge 0\,, \quad (n^*(x)-n)p = 0\,. \tag{4.6}$$

We prove now the existence of weak solutions. The idea is first to approximate the initial data in the distributional sense by sticky blocks. These special initial data give a sequence of solutions. Then we perform a compactness argument on this sequence of solutions. Finally, we prove that the obtained limit is a solution for the wanted initial data. The regularity of the solutions are

$$n \in L^\infty(]0,+\infty[_t, L^\infty(\mathbb{R}_x) \cap L^1(\mathbb{R}_x)), \tag{4.7}$$
$$u, p \in L^\infty(]0,+\infty[_t, L^\infty(\mathbb{R}_x)). \tag{4.8}$$

**Theorem 4.2** *Let $(n^0, u^0, p^0)$ be some initial data such that*

$$n^0 \in L^1(\mathbb{R}), \qquad u^0, p^0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}),$$

*with $0 \le u^0$, $0 \le p^0$, $0 \le n^0 \le n^*(x)$ and $(n^*(x)-n^0)p^0 = 0$. Then there exists $(n,u,p)$ with regularities (4.7), (4.8), solution to the system (4.4)−(4.6), with initial data $(n^0,u^0,p^0)$. The obtained solution also satisfies*

$$0 \le u(t,x) \le 2\alpha \left(esssup_y u^0(y) + esssup_y p^0(y)\right), \tag{4.9}$$

$$0 \le p(t,x) \le 2\alpha \left(esssup_y u^0(y) + esssup_y p^0(y)\right). \tag{4.10}$$

Proof : Let $n_k^0$, $u_k^0$, $p_k^0$ ($k \in \mathbb{N}^*$) be the block initial data associated respectively to $n^0$, $u^0$, $p^0$ provided by Lemma 4.1. For all $k$, the results of section 3 allow us to get $(n_k, u_k, p_k)$ solutions of (4.4) − (4.6) with initial data $(n_k^0, u_k^0, p_k^0)$, with regularities (4.7), (4.8), and which satisfy the bounds

$$0 \le u_k(t,x) \le 2\alpha \left(esssup_y u_k^0(y) + esssup_y p_k^0(y)\right), \tag{4.11}$$

$$0 \le p_k(t,x) \le 2\alpha \left(esssup_y u_k^0(y) + esssup_y p_k^0(y)\right), \tag{4.12}$$

$$TV_K(u_k(t,.)) \le 4\alpha M \left(TV_{\tilde{K}}(u_k^0) + TV_{\tilde{K}}(p_k^0) + \|u_k^0\|_{L^\infty}\right), \tag{4.13}$$

$$TV_K(p_k(t,.)) \le 4\alpha M \left(TV_{\tilde{K}}(u_k^0) + TV_{\tilde{K}}(p_k^0) + \|u_k^0\|_{L^\infty}\right). \tag{4.14}$$

Since $(n_k)$ is bounded in $L^\infty$, then there exists a subsequence such that

$$n_k \rightharpoonup n \text{ in } L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}). \tag{4.15}$$

Thanks to (4.11), (4.12) and the bounds on $u_k^0, p_k^0$ provided by Lemma 4.1, the sequence $(u_k)$ and $(p_k)$ are bounded in $L^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$, then, up to subsequences, we have

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}), \tag{4.16}$$

$$p_k \rightharpoonup p \text{ in } L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}). \tag{4.17}$$

Next step is now to prove the passage to the limit in the equation.
First, for the sequence $(n_k)_{k\geq 1}$, we can obtain more compactness using the following lemma and the estimate :
$\forall T>0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x), \quad \forall t,s \in [0,T], \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} (n_k(t,x)-n_k(s,x))\varphi(x)dx\right| \\ \leq \quad n^* \sup_{k\geq 1} \|u_k^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x)} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_x \varphi| dx\right) |t-s|,\end{aligned} \tag{4.18}$$

which can be obtained by integrating (4.4).

**Lemma 4.3** *Let $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ be a bounded sequence in $L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})$ which satisfies : for all $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$, the sequence $\left(\int_{\mathbb{R}} n_k(t,x)\varphi(x)dx\right)_k$ is uniformly Lipschitz continuous on $[0,T]$, i.e.*

$$\exists C_\varphi > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall s,t \in [0,T],$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (n_k(t,x)-n_k(s,x))\varphi(x)dx\right| \leq C_\varphi |t-s|.$$

*Then, up to a subsequence, it exists $n \in L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})$ such that $n_k \to n$ in $C([0,T], L^\infty_{w*}(\mathbb{R}_x))$, i.e.*

$$\forall \Gamma \in L^1(\mathbb{R}_x), \quad \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_{\mathbb{R}} (n_k(t,x)-n(t,x))\Gamma(x)dx\right| \underset{k}{\longrightarrow} 0.$$

Proof : It is a classical argument of equicontinuity. We can see Appendix for the details. □
Following of the proof of Theorem 4.2 : According to (4.6) and (4.18), the lemma 4.3 applies to the sequence $(n_k)_{k\geq 1}$, and thus

$$n_k \to n \text{ in } C([0,T], L^\infty_{w*}(\mathbb{R}_x)), \text{ for all } T>0. \tag{4.19}$$

As the same, we obtain (integrating (4.5)) an estimate similar to (4.18) for the sequence $(n_k(u_k+p_k)I_\alpha)_{k\geq 1}$, thus it exists $q \in L^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ such that

$$n_k(u_k+p_k)I_\alpha \to q \text{ in } C([0,T], L^\infty_{w*}(\mathbb{R}_x)), \text{ for all } T>0. \tag{4.20}$$

Now, the key point of the proof is passing to the limit in the products and is treated by the following technical lemma :

**Lemma 4.4** *Let us assume that $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence in $L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})$ that tends to $\gamma$ in $L^\infty_{w*}(]0,T[\times\mathbb{R})$, and satisfies for any $\Gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$,*

$$\int_{\mathbb{R}} (\gamma_k - \gamma)(t,x)\Gamma(x)dx \underset{k}{\longrightarrow} 0, \tag{4.21}$$

*either i) a.e. $t \in ]0,T[$ or ii) in $L^1(]0,T[_t)$.*
*Let us also assume that $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence in $L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})$ that tends to $\omega$ in $L^\infty_{w*}(]0,T[\times\mathbb{R})$, and such that for all compact interval $K=[a,b]$, there exists $C>0$ such that the total variation (in x) of $\omega_k$ and $\omega$ over $K$ satisfies*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad TV_K(\omega_k(t,.)) \leq C, \qquad TV_K(\omega(t,.)) \leq C. \tag{4.22}$$

*Then, $\gamma_k\omega_k \rightharpoonup \gamma\omega$ in $L^\infty_{w*}(]0,T[\times\mathbb{R})$, as $k \to +\infty$.*

**Remark 4.5** *This is a result of compensated compactness, which uses the compactness in x for $(\omega_k)_k$ given by (4.22) and the weak compactness in t for $(\gamma_k)_k$ given by (4.21) to pass to the weak limit in the product $\gamma_k\omega_k$.*

Proof : We can refer to [5] for a complete proof, even in the case where

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad TV_K(\omega_k(t,.)) \leq C(1+\frac{1}{t}), \qquad TV_K(\omega(t,.)) \leq C(1+\frac{1}{t}),$$

which is more general. □

End of the proof of Theorem 4.2 : The convergence (4.19) allows to apply Lemma 4.4 with $\gamma_k = n_k$. Moreover, thanks to (4.13) and the $BV$ bounds on $u_k^0$ provided by Lemma 4.1, we can set $\omega_k = u_k$ in Lemma 4.4 (in fact, the sequence $u_k(t,.)$ is uniformly bounded in $BV$ with respect to $t$, and also $u(t,.)$ thanks to the lower semi-continuity to the $BV$ norm). Thus, we have

$$n_k u_k \rightharpoonup nu \text{ in } L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}). \tag{4.23}$$

The same applies to the sequences $(\gamma_k,\omega_k) = (n_k,p_k)$ and $(\gamma_k,\omega_k) = (n_k(u_k+p_k)I_\alpha,u_k)$ : we have

$$n_k p_k \rightharpoonup np \text{ in } L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}), \tag{4.24}$$

$$n_k(u_k+p_k)I_\alpha u_k \rightharpoonup qu \text{ in } L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}). \tag{4.25}$$

Furthermore, we easily have

$$n_k(u_k+p_k)I_\alpha \rightharpoonup n(u+p)I_\alpha \text{ in } L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}),$$

thus $q = n(u+p)I_\alpha$, and

$$n_k u_k(u_k+p_k)I_\alpha \rightharpoonup nu(u+p)I_\alpha \text{ in } L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}). \tag{4.26}$$

We deduce that $(n,u,p)$ satisfies (4.4), (4.5) in $\mathcal{D}'(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$, and the constraints (4.6).
The last step is to show that $(n^0,p^0,u^0)$ is really the initial data of the problem, according to the weak formulation :

$$\forall\varphi\in C^\infty_c([0,+\infty[_t\times\mathbb{R}_x),$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}} \left(n\partial_t\varphi + nu\partial_x\varphi\right)(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} n^0(x)\varphi(0,x)dx = 0,$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_{\mathbb{R}} \left(n(u+p)I_\alpha\partial_t\varphi + nu(u+p)I_\alpha\partial_x\varphi\right)(t,x)dxdt$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} n^0(x)(u^0(x)+p^0(x))I_\alpha(x)\varphi(0,x)dx = 0.$$

It comes easily, because we have, for all $k \geq 1$ :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty([0,+\infty[_t \times \mathbb{R}_x),$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(n_k \partial_t \varphi + n_k u_k \partial_x \varphi\right)(t,x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)\varphi(0,x)dx = 0,$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(n_k (u_k + p_k) I_\alpha \partial_t \varphi + n_k u_k (u_k + p_k) I_\alpha \partial_x \varphi\right)(t,x) dx dt$$

$$+ \qquad \int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)(u_k^0(x) + p_k^0(x)) I_\alpha(x)\varphi(0,x)dx = 0,$$

and we can pass to the limit when $k \to +\infty$ because of the convergences $n_k^0 \rightharpoonup n^0$, $n_k^0 u_k^0 \rightharpoonup n^0 u^0$ and $n_k^0 p_k^0 \rightharpoonup n^0 p^0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, and the convergences (4.23), (4.25) and (4.26) in $L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$. □

## 4.3 Compactness result

To finalize the paper, we set a compactness result which is contained into the proof of the previous existence Theorem.

**Theorem 4.6** *Let us consider a sequence of solutions $(n_k, u_k, p_k)$ with regularity* (4.7), (4.8), *satisfying* (4.4) − (4.6), *and the following bounds :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a.e.\ (t,x) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad 0 \leq u_k(t,x) \leq C_\alpha,$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a.e.\ (t,x) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad 0 \leq p_k(t,x) \leq C_\alpha,$$

$$\forall K = [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a.e.\ t \in ]0,+\infty[, \qquad TV_K(u_k(t,.)) \leq C_{\alpha,M,K},$$

$$\forall K = [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a.e.\ t \in ]0,+\infty[, \qquad TV_K(p_k(t,.)) \leq C_{\alpha,M,K},$$

*with $C_\alpha$ (resp. $C_{\alpha,M,K}$) some positive constant depending only on $\alpha$ (resp. $\alpha$, $M$ and $K$).*
*Then, up to a subsequence, $(n_k, u_k, p_k) \rightharpoonup (n,u,p)$ in $L^\infty_{w*}(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$, where $(n,u,p)$ is a solution to the system* (4.4) − (4.6). *This solution $(n,u,p)$ also satisfies*

$$a.e.\ (t,x) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad 0 \leq u(t,x) \leq C_\alpha,$$

$$a.e.\ (t,x) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad 0 \leq p(t,x) \leq C_\alpha.$$

# 5 Appendix

Proof of the approximation lemma 4.1 : Up to a negligible set, we can write

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} I_j,$$

where $I_j = ]a_j, a_{j+1}[$ is a bounded interval, $n^*(x) = n_j^*$ for $x \in I_j$, and $n_j^* \in \{1, 2\}$ (the assumption $n^*$ constant at $\pm\infty$ implies that the sequence $(n_j^*)_{j\in\mathbb{Z}}$ is stationnary).
For all $k \in \mathbb{N}^*$, we can divide (up to a negligible set) each interval $I_j$ like this :

$$I_j = \bigsqcup_{i=0}^{k-1} ]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[, \qquad a_{j,i}^{(k)} = a_j + \frac{i}{k}(a_{j+1} - a_j), \qquad i = 0, \dots, k.$$

For $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^*$, and $0 \le i \le k-1$, we set

$$m_{j,i}^{(k)} = \frac{1}{n_j^*} \int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)dx.$$

Since $0 \le n^0 \le n^*$, we have $0 \le m_{j,i}^{(k)} \le \frac{meas(I_j)}{k}$. thus

$$]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i}^{(k)} + m_{j,i}^{(k)}[ \subset ]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[.$$

We set

$$n_k^0(x) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=0}^{k-1} n_j^* \mathbb{1}_{]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i}^{(k)} + m_{j,i}^{(k)}[}(x).$$

Obviously $n_k^0$ satisfies (4.1).
Moreover, we can notice that

$$n_k^0 \equiv 0 \text{ a.e. on } ]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[ \quad \Longleftrightarrow \quad n^0 \equiv 0 \text{ a.e. on } ]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[,$$

and

$$n_k^0 \equiv n_j^* \text{ a.e. on } ]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[ \quad \Longleftrightarrow \quad n^0 \equiv n_j^* \text{ a.e. on } ]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[.$$

We also define

$$n_k^0(x)u_k^0(x) = \sum_{j=-k}^{k} \sum_{i=0}^{k-1} n_j^* u_{j,i}^{(k)} \mathbb{1}_{]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i}^{(k)} + m_{j,i}^{(k)}[}(x),$$

where $u_{j,i}^{(k)} = \underset{]a_{j,i}^{(k)},a_{j,i+1}^{(k)}[}{essinf}\ u^0$, which makes sense because $u^0 \in BV(\mathbb{R})$. We have

$$a.e.\ x \in ]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[, \qquad n_k^0(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad u_k^0(x) = u_{j,i}^{(k)}.$$

We extend $u_k^0$ linearly in the vacuum (areas where $n_k^0 = 0$) and at infinity, as in Remark 3.10.
Thus, areas where $n_k^0 = 0$ have no influence on the total variation and we have

$$\begin{aligned} TV(u_k^0) &= |u_{-k,0}^{(k)} - u_{-k,1}^{(k)}| + \cdots + |u_{-k,k-2}^{(k)} - u_{-k,k-1}^{(k)}| \\ &+ |u_{-k,k-1}^{(k)} - u_{-k+1,0}^{(k)}| \\ &+ |u_{-k+1,0}^{(k)} - u_{-k+1,1}^{(k)}| + \cdots + |u_{k-1,k-1}^{(k)} - u_{k,0}^{(k)}| \\ &+ |u_{k,0}^{(k)} - u_{k,1}^{(k)}| + \cdots + |u_{k,k-2}^{(k)} - u_{k,k-1}^{(k)}| \\ &\leq TV_{[a_{-k},a_{k+1}]}(u^0), \end{aligned}$$

which shows that $u_k^0$ satisfies (4.3). We also have (4.2).
For any test function $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)\varphi(x)dx &= \sum_{|j|\leq k} \sum_{i=0}^{k-1} n_j^* \int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i}^{(k)}+m_{j,i}^{(k)}} \varphi(x)dx \\ &= \sum_{|j|\leq k} \sum_{i=0}^{k-1} n_j^* \left( m_{j,i}^{(k)}\, \varphi(a_{j,i}^{(k)}) + \frac{{m_{j,i}^{(k)}}^2}{2}\, \varphi'(\xi_{j,i}^{(k)}) \right) \end{aligned}$$

with $a_{j,i}^{(k)} < \xi_{j,i}^{(k)} < a_{j,i}^{(k)} + m_{j,i}^{(k)}$ (if $m_{j,i}^{(k)} \neq 0$). Thus, we can rewrite

$$\int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)\varphi(x)dx = \sum_{|j|\leq k} \sum_{i=0}^{k-1} \left( \int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)\varphi(a_{j,i}^{(k)})dx + \frac{n_j^* {m_{j,i}^{(k)}}^2}{2}\, \varphi'(\xi_{j,i}^{(k)}) \right).$$

Let $j_0 \in \mathbb{N}^*$ such that $supp(\varphi) \subset \bigsqcup_{|j|\leq j_0} I_{j_0}$ (it is possible because $\inf_{j\in\mathbb{Z}}(meas(I_j)) > 0$). Then we have, for all $k \geq j_0$,

$$\int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)\varphi(x)dx = \sum_{|j|\leq j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)\varphi(a_{j,i}^{(k)})dx + \frac{n_j^* {m_{j,i}^{(k)}}^2}{2}\varphi'(\xi_{j,i}^{(k)})\right).$$

We also have

$$\int_{\mathbb{R}} n^0(x)\varphi(x)dx = \sum_{|j|\leq j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)\varphi(x)dx.$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} n^0(x)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)\varphi(x)dx\right| \\
&\leq \sum_{|j|\leq j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)|\varphi(x)-\varphi(a_{j,i}^{(k)})|dx + \|\varphi'\|_\infty \sum_{|j|\leq j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{n_j^* {m_{j,i}^{(k)}}^2}{2} \\
&\leq \|\varphi'\|_\infty \sum_{|j|\leq j_0}\sum_{i=0}^{k-1} n_j^*\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}}(x-a_{j,i}^{(k)})dx + \|\varphi'\|_\infty \sum_{|j|\leq j_0}\sum_{i=0}^{k-1} {m_{j,i}^{(k)}}^2 \\
&\leq 2\|\varphi'\|_\infty \sum_{|j|\leq j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{meas(I_j)}{k}\right)^2 \\
&\leq C(\varphi, j_0)\times\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Moreover, we have similarly

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)u_k^0(x)\varphi(x)dx \\
&= \sum_{|j|\leq j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)u_{j,i}^{(k)}\varphi(a_{j,i}^{(k)})dx + \frac{n_j^* {m_{j,i}^{(k)}}^2}{2}u_{j,i}^{(k)}\varphi'(\xi_{j,i}^{(k)})\right)
\end{aligned}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} n^0(x)u^0(x)\varphi(x)dx \;=\; \sum_{|j|\le j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)u^0(x)\varphi(x)dx\ .$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} n^0(x)u^0(x)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}} n_k^0(x)u_k^0(x)\varphi(x)dx\right| \\
&\quad\le \sum_{|j|\le j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)u_{j,i}^{(k)}|\varphi(x)-\varphi(a_{j,i}^{(k)})|dx \\
&\qquad+ \|\varphi'\|_\infty \sum_{|j|\le j_0}\sum_{i=0}^{k-1} u_{j,i}^{(k)}\frac{n_j^* {m_{j,i}^{(k)}}^2}{2} \\
&\qquad+ \sum_{|j|\le j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} n^0(x)|u^0(x)-u_{j,i}^{(k)}||\varphi(x)|dx \\
&\quad\le C(\varphi,j_0)\times\|u_0\|_\infty\times\frac{1}{k} \;+\; 2\|\varphi\|_\infty\sum_{|j|\le j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}}|u^0(x)-u_{j,i}^{(k)}|dx.
\end{aligned}$$

Therefore we just need to show that the last term vanishes when $k \to \infty$. This is raised because

$$\begin{aligned}
&\sum_{|j|\le j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}} |u^0(x)-u_{j,i}^{(k)}|dx\right)\\
&\le \sum_{|j|\le j_0}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_{j,i}^{(k)}}^{a_{j,i+1}^{(k)}}\left|\sup_{]a_{j,i}^{(k)},a_{j,i+1}^{(k)}[} u^0 - \inf_{]a_{j,i}^{(k)},a_{j,i+1}^{(k)}[} u^0\right| dx\\
&\le \sum_{|j|\le j_0}\frac{meas(I_j)}{k}\left(\sum_{i=0}^{k-1} TV_{]a_{j,i}^{(k)},a_{j,i+1}^{(k)}[}\left(u^0\right)\right)\\
&\le \sum_{|j|\le j_0}\frac{meas(I_j)}{k}\, TV_{I_j}\left(u^0\right)\\
&\le TV(u^0)\times C(j_0)\times\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

We established that $< n_k^0, \varphi > \to < n^0, \varphi >$ and $< n_k^0 u_k^0, \varphi > \to < n^0 u^0, \varphi >$. Finally, we define $p_k^0$ the same way as $u_k^0$ :

$$n_k^0(x)p_k^0(x) = \sum_{j=-k}^{k}\sum_{i=0}^{k-1} n_j^* p_{j,i}^{(k)} \mathbb{1}_{]a_{j,i}^{(k)},a_{j,i}^{(k)}+m_{j,i}^{(k)}[}(x),$$

where $p_{j,i}^{(k)} = \underset{]a_{j,i}^{(k)},a_{j,i+1}^{(k)}[}{essinf}\ p^0$. But in the vacuum (areas where $n_k^0 = 0$) we set $p_k^0 = 0$. Thus, we have $p_k^0 \equiv p_{j,i}^{(k)}$ on each interval $]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[$. In fact, there are two cases :

- If $n^0 \equiv n_j^*$ a.e. on $]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[$, then $n_k^0 \equiv n_j^*$ and $p_k^0 \equiv p_{j,i}^{(k)}$.
- Else, it exists a non negligible subset $\omega \subset ]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[$ where $n^0 < n_j^*$, and $p^0 \equiv 0$ a.e. on $\omega$, which implies $p_{j,i}^{(k)} = 0$, and $p_k^0 \equiv 0 = p_{j,i}^{(k)}$ a.e. on $]a_{j,i}^{(k)}, a_{j,i+1}^{(k)}[$.

We easily deduce that $p_k^0$ satisfies properties (4.2) and (4.3).

For the convergence $< n_k^0 p_k^0, \varphi > \to < n^0 p^0, \varphi >$, the proof is exactly the same as $n_k^0 u_k^0$. Finally, the last point is obvious because $n_k^0(x) \in \{0, n_j^*\}$ for

all $x \in \mathbb{R}$, thus we have

$$(n^*(x) - n_k^0)p_k^0 = 0, \qquad \forall k \geq 1.$$

□

Proof of the lemma 4.3 : Let $(\varphi_m)_{m\geq 1}$ be a countable set dense in $\mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$ for the $L^1$-norm, which exists because of the separability of $L^1(\mathbb{R}_x)$. We denote

$$g_{k,m}(t) := \int_{\mathbb{R}} n_k(t,x)\varphi_m(x)dx.$$

The sequence $(g_{k,1})_{k\geq 1}$ is bounded and equicontinuous in $C([0,T],\mathbb{R})$, thus, the Ascoli Theorem entails that it exists an extraction $\sigma_1(k)$ such that

$$g_{\sigma_1(k),1} \underset{k}{\longrightarrow} l_1 \quad \text{in} \quad C([0,T],\mathbb{R}).$$

The same applies to $(g_{\sigma_1(k),2})_{k\geq 1}$, thus it exists an extraction $\sigma_2$ such that

$$g_{\sigma_1(\sigma_2(k)),2} \underset{k}{\longrightarrow} l_2 \quad \text{in} \quad C([0,T],\mathbb{R}).$$

A simple recursion shows that we can build a sequence of extractions $\sigma_m$ such that

$$g_{\sigma_1(\sigma_2(\ldots\sigma_m(k))\ldots),m} \underset{k}{\longrightarrow} l_m \quad \text{in} \quad C([0,T],\mathbb{R}).$$

Therefore, setting $\sigma(k) := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k(k)$, we have (by diagonal extraction)

$$\forall m \geq 1, \qquad g_{\sigma(k),m} \underset{k}{\longrightarrow} l_m \quad \text{in} \quad C([0,T],\mathbb{R}). \tag{5.1}$$

Now, we can identify the limit $l_m$ because since $(n_{\sigma(k)})_k$ is bounded in $L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})$, there exists a subsequence (still denoted by the same way) such that $n_{\sigma(k)} \rightharpoonup n$ in $L^\infty_{w*}(]0,T[\times\mathbb{R})$. Thus, we have, for all $m \geq 1$, and for all $\psi \in \mathcal{D}(]0,T[_t)$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} n_{\sigma(k)}(t,x)\psi(t)\varphi_m(x)dxdt \underset{k}{\to} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} n(t,x)\psi(t)\varphi_m(x)dxdt,$$

which rewrites

$$\int_0^T g_{\sigma(k),m}(t)\psi(t)dt \underset{k}{\to} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} n(t,x)\varphi_m(x)dx\right)\psi(t)dt.$$

Moreover, (5.1) easily implies that

$$\int_0^T g_{\sigma(k),m}(t)\psi(t)dt \underset{k}{\to} \int_0^T l_m(t)\psi(t)dt,$$

thus $l_m(t) = \int_{\mathbb{R}} n(t,x)\varphi_m(x)dx$, a.e. $t \in [0,T]$, from which we can deduce

$$\forall m \geq 1, \qquad \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_{\mathbb{R}} (n_{\sigma(k)}(t,x) - n(t,x))\varphi_m(x)dx \right| \underset{k}{\longrightarrow} 0.$$

Finally, this convergence stays available for all $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)$, because of the inequality

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_{\mathbb{R}} (n_{\sigma(k)} - n)(t,x)\varphi(x)dx \right|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_{\mathbb{R}} (n_{\sigma(k)} - n)(t,x)\varphi_m(x)dx \right| + C\|\varphi - \varphi_m\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

where

$$C := \sup_{k\geq 1}(\|n_k\|_{L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})}) + \|n\|_{L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})} < +\infty.$$

We conclude that it is also true for $\Gamma \in L^1(\mathbb{R}_x)$ by density, using the same inequality. □

# References


[1] A. Aw, A. Klar, A. Materne, M. Rascle, *Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models*, SIAM J. Appl. Math. 63 (2002), 259-278.

[2] A. Aw, M. Rascle, *Resurrection of second order models of traffic flow*, SIAM J. Appl. Math. 60 (2000), 916-938.

[3] M. Bando, K. Hesebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, *Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation*, Phys. Rev. E, 51 (2) (1995), 1035-1042.

[4] N. Bellomo, C. Dogbe, *On the modeling of traffic and crowds : A survey of models, speculations, and perspectives*, SIAM Rev., 53 (3) (2011), 409-463.

[5] F. Berthelin, *Existence and weak stability for a two-phase model with unilateral constraint*, Math. Models & Methods in the Applied Sciences, 12 (2002), 249-272.

[6] F. Berthelin, *Numerical flux-splitting for a class of hyperbolic systems with unilateral constraint*, Math. Mod. and Numer. Anal. 37 (3) (2003), 479-494.

[7] F. Berthelin, F. Bouchut, *Weak solutions for a hyperbolic system with unilateral constraint and mass loss*, Annales de l'Institut H. Poincaré, Anal. non linéaire 20 (2003), 975-997.

[8] F. Berthelin, P. Degond, M. Delitala, M. Rascle, *A model for the formation and evolution of traffic jams*, ARMA, Arch. Ration. Mech. Anal. 187 no. 2 (2008), 185-220.

[9] F. Berthelin, P. Degond, V. Le Blanc, S. Moutari, M. Rascle, J. Royer, *A traffic-flow model with constraints for the modeling of traffic jams*, Math. Models Methods Appl. Sci. 18 (2008), suppl., 1269-1298.

[10] F. Bouchut, Y. Brenier, J. Cortes, J.F. Ripoll, *A hierarchy of models for two-phase flows*, J. Nonlinear Science 10 (2000), 639-660.

[11] Y. Brenier, E. Grenier, *Sticky particles and scalar conservations laws*, SIAM J. Numer. Anal. 35 no. 6 (1998), 2317-2328.

[12] R.M. Colombo, *On a $2 \times 2$ hyperbolic traffic flow model*, Math. Comp. modeling, 35 (2002), 683-688.

[13] C. Daganzo, *Requiem for second order fluid approximations of traffic flow*, Transp. Res. B, 29B (1995), 277-286.

[14] P. Degond, M. Delitala, *Modelling and simulation of vehicular traffic jam formation*, Kinetic and Related Models 1 (2008), 279-293.

[15] W. E, Y.G. Rykov, Y.G. Sinai, *Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics*, Comm. Math. Phys. 177 no. 2 (1996), 349-380.

[16] D.C. Gazis, R. Herman, R. Rothery, *Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow*, Operations Res., 9 (1961), 545-567.

[17] D. Helbing, *Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic*, Phys. Rev. E, 51 (1995), 3164-3169.

[18] D. Helbing, *Traffic and related self-driven many-particle systems*, Reviews of Modern Physics 73 (2001), 1067-1141.

[19] A. Klar, R.D. Kühne, R. Wegener, *Mathematical models for vehicular traffic*, Surveys Math. Ind., 6 (1996), 215-239.

[20] A. Klar, R. Wegener, *Enskog-like kinetic models for vehicular traffic*, J. Stat. Phys., (1997), 91-114.

[21] M.J. Lighthill, J.B. Whitham, *On kinematic waves. I : flow movement in long rivers. II : A theory of traffic flow on long crowded roads*, Proc. Roy. Soc., A229 (1955) 1749-1766.

[22] P. Nelson, *A kinetic model of vehicular traffic and its associated bimodal equilibrium solutions*, Transp. Theory Stat. Phys., 24 (1995), 383-408.

[23] H.J. Payne, *Models of Freeway Traffic and Control*, Simulation Council, New York, 1971.

[24] H.J. Payne, *FREFLO : A macroscopic simulation model of freeway traffic*, Transportation Research Record, 722 (1979), 68-75.

[25] I. Prigogine, *A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow*, Theory of traffic flow, R. Herman (ed.), 1961, 158-164.

[26] I. Prigogine, R. Herman, *Kinetic theory of vehicular traffic*, American Elsevier publishing co, New York, 1971.

[27] P.I. Richards, *Shock waves on a highway*, Operations research, 4 (1956), 42-51.

[28] M. Zhang, *A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior*, Transportation Res. B, 36 (2002), 275-298.

## Résumé

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le contexte des systèmes de particules. Nous considérons différents systèmes physiques, décrits de manière continue, et dont la dynamique est modélisée par des équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution temporelle de certaines quantités macroscopiques ou microscopiques, selon l'échelle de description envisagée.

Dans une première partie, nous nous intéressons à une équation de type coagulation-fragmentation cinétique. Nous obtenons un résultat d'existence globale en temps, dans le cadre des solutions renormalisées de DiPerna-Lions, pour toute donnée initiale vérifiant les estimations naturelles et possédant une norme $L^1$ et une norme $L^p$ $(p > 1)$ finies.

La deuxième partie traite de méthodes de moments. L'objectif de ces méthodes est d'approcher un modèle cinétique par un nombre fini d'équations portant sur des quantités dépendant uniquement de la variable d'espace, et la question est de savoir comment fermer le système obtenu pour obtenir une bonne approximation de la solution du modèle cinétique. Dans un cadre linéaire, nous obtenons une méthode de fermeture explicite conduisant à un résultat de convergence rapide.

Enfin, dans une troisième partie, nous travaillons sur la modélisation du trafic routier avec prise en compte de la congestion à l'aide d'un système hyperbolique avec contraintes, issu de la dynamique des gaz sans pression. En modifiant convenablement ce système, nous parvenons à modéliser des phénomènes de trafic routier "multi-voies", comme l'accélération, et la création de zones de vide. Un résultat d'existence et de stabilité des solutions de ce modèle modifié est démontré.



**Mots-clés :** *Equations cinétiques, modèles de coagulation-fragmentation, solutions renormalisées, méthodes de moments, systèmes hyperboliques, modèles avec contraintes, trafic routier.*



## Abstract

The context of this thesis is particle systems. We deal with different physical systems, described continuously, whose dynamics are modeled by partial differential equations. These equations follow the evolution in time of macroscopic or microscopic quantities, according to scale description.

In the first part, we consider a kinetic model for coagulation-fragmentation. We obtain a global existence result, using the notion of DiPerna-Lions renormalized solutions, for initial data satisfying the natural physical bounds, and assumptions of finite $L^1$ and $L^p$ norm (for some $p > 1$).

The second part deals with methods of moments. The aim of these methods is to approximate a kinetic model by a finite number of equations whose unknowns depend only on the space variable. The question is : how to close this system to get a good approximation of the solution of the kinetic model ? In a linear setting, we obtain an explicit method with linear closure relations, which leads to a fast convergence result.

In the last part, we work on modeling of traffic jam taking into account the congestion, using a hyperbolic system with constraints, which occurs in the dynamics of a pressureless gas. By suitably modifying this system, we can model "multi-lane" phenomena, like acceleration, and creation of vacuum. An existence and stability result is proved on this new model.



**Keywords :** *Kinetic equations, coagulation-fragmentation models, renormalized solutions, methods of moments, hyperbolic systems, constrained models, traffic jam.*