AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université Libanaise

École Doctorale
Sciences et Technologies

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Doctorat

THESE EN COTUTELLE

Pour obtenir le grade de Docteur délivré par

L'Université de Lorraine

Et

L'Université Libanaise

L'Ecole Doctorale des Sciences et Technologie

Spécialité :Mathématiques

Géométrie différentielle

Présentée et soutenue publiquement par

EL SAYED SAFAA

Le 10 Juin 2013

Chirurgie et second invariant de Yamabe

Directeurs de thèse :

HUMBERT EMMANUEL

HABIB GEORGE & MEHDI MOHAMAD

Membre du Jury

M. Zindine Djadli, Professeur, Université de Grenoble,	Rapporteur
M. Ahmad EL Soufi, Professeur, Université de Tours,	Examinateur
M. George Habib, MCF, Université Libanaise,	Co-Directeur
M. Oussama Hijazi, Professeur, Université de Lorraine,	Examinateur
M. Emmanuel Humbert, Professeur, Universite de Tours,	Directeur
M. Pierre Jammes, MCF HDR, Université de Nice,	Rapporteur
M. Mustapha Jazar, Professeur, Université Libanaise,	Examinateur
M. Mohamad Mehdi, Professeur, Université Libanaise,	Co-Directeur

Remerciements

Il me sera difficile de remercier tout le monde car je n'aurais jamais pu réaliser ce travail sans le soutien d'un grand nombre de personnes.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Emmanuel Humbert. J'aimerais lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité, sa patience et son encouragement. J'ai appris à ses côtés et je mesure la chance que j'ai eu de faire une thèse sous sa direction. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ces années de thèse. Encore une fois... merci !

Je suis reconnaissante à Zindine Djadli et Pierre Jammes d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour le temps qui y ont consacré et pour le travail qu'ils ont accompli.

Je suis très sensible au grand honneur que m'a fait Ahmad El Soufi en présidant ce jury. Je le remercie tout particulièrement, lui qui a toujous su me changer d'ambiance durant les périodes de stress grâce à sa sympathie, sa patience et son expérience. Merci pour tous les conseils.

En 2009, j'ai eu la chance de connaître Oussama Hijazi en suivant son cours de M2 sur la géométrie spinorielle. C'est grâce à lui que j'ai pu faire rencontrer Emmanuel et trouver un sujet de thèse. Depuis mon premier jour à l'institut Elie Cartan, la porte de son bureau est toujours restée ouverte pour m'écouter et me conseiller à tout moment. Je le remercie infiniment, c'est un grand honneur pour moi qu'il fait partie de mon jury.

Je tiens également à remercier George Habib et Mohamed Mehdi qui étaient mes enseignants à l'université et en Master 2. Ils m'ont orienté et m'ont encouragé à faire une thèse. Enfin je les remercie d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Merci également à Mostafa Jazar, c'est un plaisir pour moi de le compter parmi les membres de mon jury.

Merci à l'école doctorale de l'Université Libanaise et le CNRS Libanais pour le financement de ma thèse durant trois ans. Je remercie Charles Tabet pour la facilité de toutes les démarches administratives avec le CNRS. Je remercie également Zeinab Ibrahim et Amira Haddarah pour l'aide qu'elles m'ont apportée.

Je tiens à remercier l'Institut Elie Cartan à Nancy, mon labo d'origine pour m'avoir accueillie durant mes deux premières années de thèse. J'adresse des remerciements particuliers à mes anciennes co-bureaux Régine Marchand et Aurélie Muller. Merci aux doctorants de l'IECL ainsi que les membres de l'équipe de géométrie différentielle. Un grand merci à Julien Roth, Simon Raulot, Jean-François Grosjean et Marie-Amélie Lawn.

Un grand merci aux membres du laboratoire de mathématiques et Physique théorique de Tours, qui m'ont accueillie très chaleureusement depuis mon arrivée. Je remercie en

particulier Sandrine, Linda, Aouchka, Nathalie, Jérémie pour tous tes passages spéciaux dans notre bureau et pour ton bon humour, merci à Vincent P. pour toutes les discussions qu'on a eu dernièrement. Je pense aussi à Cédric, Said, Jean-Claude P., Olivier D., Marc P. et à tous les gens qui m'ont encouragé pendant la dernière période de stress... et j'en oublie certainement. Qu'ils m'excusent.

Je mesure la chance que j'ai eu d'avoir pu profiter des connaissances de Bernd Ammann et Mattias Dahl. Je les remercie et je remercie plus particulièrement Romain Gicquaud en tant que mathématicien mais autant qu'ami.

Mon travail n'aurait pas pu être mené à bien sans la bonne humeur de tous mes camarades doctorants du LMPT. Un grand merci à vous : Ali, Amine, Andreas, Chuong, Francesco, Hung, Steve, Shuang-Wei, Thao, ... et bien sûr Kévin et Thomas, mes cobureaux. Merci pour tous les bons moments qu'ont a passé ensemble.

Je ne peux pas écrire mes remerciements sans passer par le Liban et penser aux gens avec qui, j'ai grandi là-bas. Un grand merci à toute ma famille, à Nahida, Imane. Merci aussi à tous mes amis d'enfance : en particulier Fatima, Jana, Liliane. Je pense aussi à Mona, Zeina et Hassana. Merci à tous les gens qui m'ont encouragé tout au long de mon parcours,
J'ai une pensée très particulière à ma petite princesse Gala, tu es un rayon de soleil de mes jours. Je ne peux pas oublier le petit Baddoura et la joyeuseté qu'il me donne quand je pense à lui.

J'adresse tous mes remerciements à Sally, ma meilleure amie depuis si longtemps, qui a toujours su me donner le sourire. Merci d'avoir été de mes côtés malgré toutes les distances ces dernières années.

J'ai une pensée très particulière à Christianne, Gilbert, Jean François, Julia, Patricia et ma chère Maëlys. Merci pour votre acceuil, pour tous les week-end et les moments inoubliables que j'ai passé avec vous. Je vous aime.

Un merci tout particulier à Inaam et mohamad El Sayed pour les bons moments partagés ensemble et pour leur hospitalité chaleureuse et leurs accueils à Paris.

Un merci tout spécial à Roger, tu as été un soutien durant ces années. Merci d'avoir répondu présent à chaque fois que j'en ai eu besoin, et de m'avoir tellement soutenue. Un merci tout particulier à Adnan Fawaz qui m'a supporté depuis que j'ai fait sa connaissance, j'espère que tu trouveras tout le bonheur que tu mérites tellement tu es un frère pour moi. C'est également avec joie que je remercie Ahmad Hamdan pour l'amitié qu'il m'a témoignée.

Je souhaite également remercier Rita Eid pour sa bonne humeur qui accompagne toutes les pauses cafés et les sorties.

Ces dernières années auraient été très difficile sans sa présence dans ma vie. Son amitié, c'est la main qui me soutient dans la douleur et désarroi... C'est une oreille qui écoute tantôt ma peine, tantôt ma joie...C'est un regard qui voit jusqu'au profond de mon âme sans jamais se faire juge... C'est un coeur qui s'ouvre et jamais ne se ferme... C'est

comme un refuge. Merci Rym pour tout celà. J'ai une pensée si particulière à sa famille en Tunisie : Merci tante Samira, tonton Mohamad, Rayhane et Aïcha.

Je souhaite remercier de tout mon coeur Mohammad et Walid, les conjoints de mes deux soeurs.
Je finis par des personnes qui occupent une place exceptionnelle dans ma vie et je dédie cette thèse à ma tante et mes parents. Merci à ma tante, qui m'a toujours soutenue quoi que je fasse. Merci d'avoir veillé sur moi et mes soeurs en toute circonstance, dans les bons moments comme dans les mauvais. Mon plus grand remerciement revient naturellement ma maman et mon papa, qui mont donné plus d'amour qu'il n'est possible d'en recevoir. Je ne peux pas oublier ma grand-mère qui pense toujours à moi et qui me manque beaucoup.
Un grand merci à une personne unique au monde, Roa ma petite soeur, ma psychologue et ma confidente. Merci à mon adorable grande soeur, Layal, dont le soutien l'écoute et le coeur sont à mon égard infaillibles.

Table des matières

1 Valeurs propres de L_g et propriétés **15**
1.1 Le laplacien conforme . . . 15
1.2 Valeurs propres de L_g et propriétés . . . 15
1.2.1 Métriques lisses . . . 15
1.2.2 Métriques généralisées . . . 16
1.3 EDP associées à λ_i . . . 19
1.4 Signe de λ_i . . . 21
1.4.1 Le signe de λ_i est un invariant conforme . . . 21
1.4.2 Il n'y a pas d'obstruction topologique à la négativité de λ_k . . . 22

2 Solutions nodales de l'équation de Yamabe **25**
2.0.3 Le cas $\lambda_2 = 0$ . . . 27
2.0.4 Le cas $\lambda_2 > 0$ . . . 27
2.1 Le cas $\lambda_2 < 0$ . . . 36
2.1.1 Preuve du Théorème 2.1.2 . . . 37
2.1.2 Preuve de la Proposition 2.1.1 . . . 44

3 Formule de chirurgie **45**
3.1 Le résultat principal . . . 45
3.2 Recoller deux variétés le long d'une sous-variété . . . 47
3.2.1 Chirurgie sur les variétés . . . 47
3.3 Les constantes $\Lambda_{n,k}$ . . . 49
3.3.1 Définition de $\Lambda_{n,k}$ . . . 49
3.4 Espaces limites et solutions limites . . . 50
3.5 Les estimations L^2 sur des WS-fibrés . . . 51
3.6 Preuve du Théorème 3.1.3 . . . 59
3.6.1 Connexité de N . . . 59
3.6.2 Construction de la métrique g_ϑ . . . 59
3.6.3 Un résultat préliminaire . . . 62
3.6.4 Preuve du Théorème 3.1.3 . . . 70
3.7 Quelques applications . . . 75
3.7.1 Un résultat préliminaire . . . 75

Présentation des résultats

Le but de cette thèse est l'étude des valeurs propres de l'opérateur de Yamabe. Nous montrons comment la géométrie ou la topologie de la variété influe sur leur comportement. Avant d'aller plus loin dans la description de cette étude, nous devons parler du problème de Yamabe qui est à l'origine de ce travail. Son énoncé est le suivant : sur toute variété compacte de dimension $n \geq 3$, peut-on trouver une métrique à courbure scalaire constante dans chaque classe conforme ? Bien que Yamabe eût affirmé avoir une solution en 1960, une erreur critique dans sa preuve a été découverte par Trüdinger en 1968. Les travaux de Trüdinger, Aubin et Schoen fournirent une solution complète du problème en 1984.
Comme nous venons de la rappeler, le problème consiste à trouver sur toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 3$ une métrique $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g \in [g]$, $[g]$ étant la classe conforme de g et u étant une fonction positive de classe C^∞, dont la courbure scalaire $\mathrm{Scal}_{\widetilde{g}}$ est constante. Un calcul direct montre que les courbures scalaires Scal_g et $\mathrm{Scal}_{\widetilde{g}}$ sont reliées par

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + \mathrm{Scal}_g u = \mathrm{Scal}_{\widetilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \tag{1}$$

ce qui ramène le problème à trouver une constante C_0 et une fonction strictement positive u solution de l'équation suivante :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + \mathrm{Scal}_g u = C_0 u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Une stratégie naturelle pour résoudre ce problème est l'approche variationnelle. On introduit la fonctionnelle suivante, dite *fonctionnelle de Yamabe* :

$$Y(u) = \frac{\int_M \frac{4(n-1)}{n-2}|\nabla u|^2 + \mathrm{Scal}_g u^2 \, dv_g}{(\int_M |u|^N \, dv_g)^{\frac{2}{N}}}, \tag{2}$$

où $N = \frac{2n}{n-2}$. On définit ensuite la constante de Yamabe $\mu(M, g)$ comme l'infimum sur toutes les fonctions lisses non nulles de la fonctionnelle I_g. On montre alors que tout minimiseur u, que l'on peut choisir strictement positif par le principe du maximum, et que l'on peut normaliser par $\int_M u^N \, dv_g = 1$, répond au problème avec $C_0 = \mu(M, g)$. La constante de Yamabe est un invariant conforme qui contient un grand nombre d'informations sur la variété, à la fois analytiques, géométriques et topologiques. Nous ne rentrerons pas dans les détails ici et nous invitons le lecteur intéressé à se référer par

exemple à [Aub98, Heb96, LP87].

Venons-en au sujet qui nous intéresse : comme le suggère l'équation (1), les propriétés de l'opérateur

$$L_g := c_n \Delta_g + S_g,$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami, $c_n = \frac{4(n-1)}{n-2}$ et S_g est la courbure scalaire de g, jouent un rôle central dans la résolution du problème de Yamabe. On l'appelle *opérateur de Yamabe* ou *laplacien conforme* en raison de son bon comportement lors d'un changement conforme de métrique. Son spectre est discret. Nous noterons

$$\lambda_1(g) \leq \lambda_2(g) \leq \lambda_3(g) \leq \cdots \leq \lambda_k(g) \cdots \to +\infty$$

ses valeurs propres, la première inégalité étant stricte lorsque la variété M est connexe. Ce sont ces valeurs propres que nous nous proposons d'étudier dans cette thèse. L'un des indices qui fait penser que cette étude présente un véritable intérêt est la formule suivante, valable lorsque $\mu(M, g) \geq 0$:

$$\mu(M, g) = \inf_{\widetilde{g} \in [g]} \lambda_1(\widetilde{g}) \mathrm{Vol}(M, \widetilde{g})^{\frac{2}{n}}, \tag{3}$$

et qui fait le lien entre les valeurs propres de l'opérateur de Yamabe et la constante de Yamabe.
La thèse se divise en trois parties :

1. Dans la première partie, nous établissons les propriétés générales des valeurs propres de l'opérateur de Yamabe. L'une des remarques essentielles que nous faisons est que leur signe est un invariant conforme (voir Proposition 1.4.1). Ce résultat se démontre aisément mais n'en est pas moins important pour la suite. Nous expliquons pourquoi c'est surtout leur positivité qui est importante : nous montrons qu'il n'existe aucune obstruction topologique à leur négativité, tandis que par exemple, et ce fait est bien connu, l'existence d'une métrique telle que la première valeur propre de l'opérateur de Yamabe est positive est équivalente à l'existence d'une métrique à courbure scalaire positive, qui est une contrainte topologique forte dont la description est encore ouverte en dimension plus grande que 4. En dimension 3, la classification de telles variétés a été achevée grâce aux techniques de Perelman (voir [And06]).

   C'est aussi dans cette partie que nous établissons les résultats techniques qui nous serviront tout au long de la thèse : nous élargirons par exemple leur définition aux métriques généralisées, c'est-à-dire aux métriques de la forme $|u|^{N-2}g$ où g est une métrique riemannienne standard et où $u \in L^N$.

2. Dans le deuxième chapitre, nous complèterons une étude initiée par B.Ammann et E.Humbert dans [AH06] visant à éclaircir les liens entre la deuxième valeur propre de l'opérateur de Yamabe et l'existence de solutions nodales de l'équation de Yamabe

$$L_g u = C|u|^{N-2}u$$

où C est une constante. Plus précisément, B.Ammann et E.Humbert dans [AH06], inspirés par la formule (3), ont introduit, lorsque $\mu(M,g) \geq 0$, la *seconde constante de Yamabe* :

$$\mu_2(M,g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_2(\widetilde{g})\mathrm{Vol}(M,\widetilde{g})^{\frac{2}{n}},$$

dont l'étude a mené à l'existence de solutions nodales de l'équation de Yamabe par une méthode nouvelle. Si leurs techniques s'étendent sans difficultés majeures au cas où $\mu(M,g) < 0$ à condition que $\mu_2(M,g)$ reste positive, il faut utiliser une nouvelle approche lorsque $\mu_2(M,g) < 0$ (on a alors $\mu_2(M,g) = -\infty$) pour obtenir le résultat principal du chapitre :

Théorème 0.0.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension $n \geq 3$ dont la constante de Yamabe $\mu(M,g)$ est strictement négative. Notons λ_2 la deuxième valeur propre de L_g. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
– *$\lambda_2 \leq 0$;*
– *$\lambda_2 > 0$, (M,g) non localement conformément plate et $n \geq 6$;*
alors il existe une fonction w qui change de signe, solution de l'équation

$$L_g w = \varepsilon |w|^{N-2} w,$$

où $\varepsilon = +1$ si $\lambda_2 > 0$, $\varepsilon = -1$ si $\lambda_2 < 0$ et $\varepsilon = 0$ si $\lambda_2 = 0$. De plus, $w \in C^{3,\alpha}(M)$, pour tout $\alpha < N-2$.

Nous donnons ensuite des exemples explicites pour lesquels les hypothèses du Théorème 0.0.1 sont satisfaites.

3. Dans le Chapitre 3, nous donnons une formule de chirurgie pour le deuxième invariant de Yamabe. Il convient d'expliquer quelques termes. L'*invariant de Yamabe* $\sigma(M)$ est l'invariant topologique (plus précisément, il dépend aussi de la structure différentiable de M) défini par

$$\sigma(M) := \sup_g \mu(M,g),$$

où le supremum est pris sur toutes les métriques riemanniennes g de M. C'est un invariant qui a suscité un intérêt considérable en raison du résultat suivant, dont la preuve est facile :

Proposition 0.0.2. *Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$. Alors M possède une métrique g à courbure scalaire positive si et seulement si $\sigma(M) > 0$.*

Comme nous l'avons rappelé plus haut, la classification des variétés compactes qui possèdent une métrique à courbure scalaire positive reste un problème ouvert, résolu seulement en dimension 3. La chirurgie est un outil particulièrement adapté à l'étude de $\sigma(M)$, comme l'ont montré les travaux de Gromov-Lawson et Schoen-Yau ([GL80] et [SY79]) :

Théorème 0.0.3. *Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$ telle que $\sigma(M) > 0$. Supposons que N est obtenue de M par une chirurgie de dimension k $(0 \leq k \leq n-3)$. Alors, $\sigma(N) > 0$.*

dont on déduit le

Corollaire 0.0.4. *Toute variété M de dimension $n \geq 5$ simplement connexe et non spin, admet une métrique à courbure scalaire positive.*

On rappelle brièvement qu'une chirurgie sur M est la procédure qui consiste à construire une nouvelle variété

$$N := M \setminus S^k \times B^{n-k} \cup_{S^k \times S^{n-k-1}} \overline{B}^{k+1} \times S^{n-k-1},$$

en supprimant l'intérieur de $S^k \times B^{n-k}$ et en le remplaçant par $\overline{B}^{k+1} \times S^{n-k-1}$ à condition qu'un plongement de $S^k \times B^{n-k}$ soit donné.

Plus tard, Kobayashi, Petean-Yun ont obtenu de nouvelles formules de chirurgie pour $\sigma(M)$. Tous ces travaux ont ensuite été généralisés par B.Ammann, M.Dahl et E. Humbert dans [ADH08] qui ont montré le

Théorème 0.0.5. *Si N est obtenue à partir de M par une chirurgie de dimension $0 \leq k \leq n-3$, alors*

$$\sigma(N) \geq \min(\sigma(M), \Lambda_n),$$

où Λ_n est une constante positive ne dépend que de n.

Ce résultat a pour conséquence le

Corollaire 0.0.6. *Soit M une variété simplement connexe de dimension $n \geq 5$. Alors, l'une au moins de ces hypothèses est vérifiée*

(a) $\sigma(M) = 0$ (ce qui implique que M est spin) ;

(b) $\sigma(M) \geq \alpha_n$, où α_n est une constante positive ne dépend que de n.

Le but du Chapitre 3 est d'établir une formule de chirurgie analogue à celle du Théorème 0.0.5 pour le *second invariant de Yamabe* que l'on définit par :

$$\sigma_2(M) = \sup_g \mu_2(g),$$

où le supremum est pris sur toutes les métriques de M. Plus précisément, notre résultat principal est le suivant

Théorème 0.0.7. *Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$ telle que $\sigma_2(M) > 0$. Supposons que N est obtenue de M par une chirurgie de dimension $0 \leq k \leq n-3$, alors on obtient que*

$$\sigma_2(N) \geq \min(\sigma_2(M), \Lambda_n),$$

où Λ_n est une constante positive qui ne dépend que de n.

Notons que dans [BD03], C. Bär et M. Dahl ont montré que le bas du spectre de l'opérateur de Yamabe sur une variété N obtenue par chirurgie de dimension $0 \leq k \leq n-3$ à partir d'une variété M, peut-être choisi aussi proche que l'on souhaite de celui correspondant à une métrique arbitraire sur M. Ils en déduisent d'intéressantes conclusions topologiques.

La preuve du Théorème 0.0.7 est inspirée de celle du Théorème 3.1.2 mais des difficultés importantes apparaissent. Nous les décrivons assez précisément dans le Chapitre 3 mais de manière schématique, disons que la stratégie générale consiste à regarder les limites de $\lambda_1(g_\alpha)$ et $\lambda_2(g_\alpha)$ pour une suite de métriques (g_α) bien choisie sur N puis à montrer que ces limites sont aussi valeurs propres de l'opérateur de Yamabe d'un espace limite. Les deux principales difficultés sont d'abord de nous assurer que ces deux limites sont finies puis de montrer qu'elles sont distinctes, ce qui permettra de les comparer avec les première et deuxième valeurs propres de l'opérateur de Yamabe sur l'espace limite.

Pour finir, nous utilisons ce théorème pour établir les estimées suivantes de la deuxième valeur propre de l'opérateur de Yamabe :

Corollaire 0.0.8. *Soit M une variété compacte, spin, connexe et simplement connexe de dimension $n \geq 5$ avec $n \equiv 0, 1, 2, 4$ mod 8. Si $|\alpha(M)| \leq 1$, alors*

$$\sigma_2(M) \geq \alpha_n,$$

où α_n est une constante positive dépendant seulement de n et $\alpha(M)$ est le α-genre de M (voir la Section 3.7).

Nous expliquerons plus en détail ce résultat dans le Chapitre 3.

Chapitre 1

Métriques conformes et généralisées, valeurs propres de l'opérateur de Yamabe : caractérisation et propriétés

Le but de ce chapitre est de définir les valeurs propres de l'opérateur de Yamabe et d'établir leurs propriétés de base, qui nous serviront tout au long de la thèse. Plaçons-nous sur une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 3$.

1.1 Le laplacien conforme

Définition 1.1.1. *L'opérateur de Yamabe* ou *laplacien conforme* L_g est défini par

$$L_g(u) := c_n \Delta_g u + S_g u,$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami, $c_n = \frac{4(n-1)}{n-2}$ et S_g est la courbure scalaire de g.

1.2 Valeurs propres de L_g et propriétés

Dans cette partie, on étudie le comportement des valeurs propres de l'opérateur de Yamabe dans une classe conforme. Il sera utile de donner l'expression explicite de ces valeurs propres relativement à une métrique fixée. C'est l'objet de ce paragraphe.

1.2.1 Métriques lisses

Pour toute métrique $\widetilde{g}$ sur M, on note

$$\lambda_1(\widetilde{g}) \leq \lambda_2(\widetilde{g}) \leq \lambda_3(\widetilde{g}) \leq \cdots \leq \lambda_k(\widetilde{g}) \cdots \to +\infty,$$

les valeurs propres de l'opérateur de Yamabe. Pour $u \in L^N \neq 0$, $v \in H_1^2(M)$ telles que $uv \neq 0$, on définit

$$F(u,v) = \frac{\int_M c_n|v|^2 + S_g v^2 \, dv_g}{\int_M v^2 \; u^{N-2} \; dv_g}. \tag{1.1}$$

Ici, et dans tout le texte, $H_k^l(M)$ représentera l'espace de Sobolev des fonctions $L^l(M)$ dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k sont aussi dans $L^l(M)$. Lorsque $\widetilde{g} = u^{N-2}g$ ($u \in C^\infty(M)$, $u > 0$) est conforme à g et d'après [AH06], la $i-$ème valeur propre $\lambda_i(\widetilde{g})$ de $L_{\widetilde{g}}$ est donnée par

$$\lambda_i(\widetilde{g}) = \inf_{V \in Gr_i(H_1^2(M))} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} F(u,v), \tag{1.2}$$

où $Gr_i(H_1^2(M))$ représente l'ensemble de tous les sous-espaces de $H_1^2(M)$ de dimension i. Cette définition exploite le fait que l'opérateur de Yamabe a des propriétés de covariance conforme. Plus précisément, si $\tilde{g} = u^{N-2}g$ et si v est une fonction propre associée à $\lambda_i(\tilde{g})$ alors l'équation $L_{\tilde{g}}v = \lambda_i(\tilde{g})v$ se réecrit dans la métrique g

$$L_g v' = \lambda_i(\tilde{g}) u^{N-2} v'$$

où l'on a posé $v' = uv$. Cette observation permet de travailler dans différentes métriques conformes à g mais avec l'opérateur fixe L_g. C'est aussi cette observation qui conduit à définir les valeurs propres $\lambda_i(\tilde{g})$ avec la Formule (1.2), ce qui nous permettra dans le paragraphe suivant d'étendre la définition à une classe plus large de métriques, dites *métriques généralisées*. Fixons maintenant une fonction u strictement positive et v_1 la première fonction propre associée à $\lambda_1(u^{N-2}g)$. D'après (1.2), elle est caractérisée par

$$\lambda_1(u^{N-2}g) = \inf_v F(u,v).$$

En remarquant que $F(u,v) = F(u,|v|)$, on voit que $|v|$ est aussi fonction propre associée à $L_{\tilde{g}}$. Par le principe du maximum, $v > 0$ sur toute composante connexe de M sur laquelle elle est non nulle. Par orthogonalité des fonctions propres, on obtient aussi que $\lambda_1(u^{N-2}g)$ est simple si M est connexe.

1.2.2 Métriques généralisées

Nous allons montrer que la définition des valeurs propres s'étend aux métriques généralisées, c'est-à-dire aux métriques de la forme $\widetilde{g} = u^{N-2}g$ où $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ et $u \not\equiv 0$, même si l'opérateur de Yamabe $L_{\widetilde{g}}$ n'a plus de sens. Pour cela, on se sert de la caractérisation (1.2) comme l'ont fait Ammann et Humbert dans [AH06] dans le cas où la constante de Yamabe était positive, c'est-à-dire dans le cas où $\lambda_1(g) \geq 0$. La situation sera un peu différente dans le cas où $\lambda_1(g) < 0$. Dans cette situation, la i-ème valeur propre $\lambda_i(\widetilde{g})$, si on la définit avec la formule (1.2) peut ne pas avoir de valeur finie comme le prouve la Proposition 1.2.1.

Proposition 1.2.1. *Supposons que $\lambda_1(g)$, définie à l'aide de la formule (1.2), soit strictement négative. Alors il existe $u \in L^N(M)$, $u \not\equiv 0$, $u \geq 0$ telle que $\lambda_1(u^{N-2}g) = -\infty$.*

La preuve de cette proposition est donnée ci-dessous. Pour que $\lambda_1(\widetilde{g})$ soit finie, on doit supposer de plus que la fonction u est strictement positive.

Proposition 1.2.2. *Soit $u \in L^N(M)$ une fonction presque partout non nulle. Supposons que $\lambda_1(g) < 0$. Alors*

$$\lambda_1(|u|^{N-2}g) > -\infty.$$

La preuve détaillée de cette proposition est donnée à la fin de ce paragraphe.

Notation 1.2.3. *La i-ème valeur propre de L_g, $\lambda_i(\widetilde{g}) = \lambda_i(u^{N-2}g)$ sera notée $\lambda_i(u)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur g.*

Preuve de la Proposition 1.2.1

Puisque $\lambda_1(g) < 0$, il existe une fonction $v \in C^\infty(M)$ telle que

$$\int_M (L_g v)v \, dv_g < 0.$$

Soit P un point de M. Pour $\varepsilon > 0$, on choisit une fonction η_ε vérifiant

$$\begin{cases} 0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1, \\ \eta_\varepsilon = 0 \text{ sur } B_\varepsilon(P), \\ \eta_\varepsilon = 1 \text{ sur } M \backslash B_{2\varepsilon}(P), \\ |\nabla \eta_\varepsilon| \leq \frac{2}{\varepsilon}. \end{cases}$$

où $B_\delta(P)$ désigne la boule de centre P et de rayon δ pour la métrique g. Il est facile de vérifier que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_M (L_g(\eta_\varepsilon v))(\eta_\varepsilon v) \, dv_g = \int_M (L_g v)v \, dv_g.$$

On définit $w := \eta_\varepsilon v$. Par conséquent, pour un $\varepsilon > 0$ petit fixé, on a

$$\int_M (L_g w)w \, dv_g < 0.$$

Soit $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$ de classe C^∞ à support dans $B_\varepsilon(P)$. Pour $\alpha > 0$, puisque $(w+\alpha)u \not\equiv 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \lambda_1(\widetilde{g}) &= \inf_{v'} \frac{\int_M (L_g v')v' \, dv_g}{\int_M u^{N-2} v'^2 \, dv_g} \\ &\leq \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\int_M (L_g(w+\alpha))(w+\alpha) \, dv_g}{\int_M u^{N-2}(w+\alpha)^2 \, dv_g}. \end{aligned}$$

En outre, on a

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_M (L_g(w+\alpha))(w+\alpha) \, dv_g = \int_M (L_g(w))w \, dv_g < 0,$$

et

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_M u^{N-2}(w+\alpha)^2\,dv_g = 0$$

ce qui donne

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\int_M (L_g(w+\alpha))(w+\alpha)\,dv_g}{\int_M u^{N-2}(w+\alpha)^2\,dv_g} = -\infty.$$

Cela finit la preuve de la Proposition 1.2.1.

Preuve de la Proposition 1.2.2

On suppose que $\lambda_1(|u|) < 0$ sinon il n'y a rien à démontrer. Soit $(v_m)_m$ une suite minimisante associée à $\lambda_1(u)$, c'est-à-dire une suite de fonctions $v_m \in H_1^2(M)$ telles que, en notant

$$\lambda_m := \frac{\int_M c_n|\nabla v_m|^2+S_g v_m^2\ dv_g}{\int_M |u|^{N-2}v_m^2\ dv_g},$$

on ait

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\lambda_m = \lambda_1(u) < 0.$$

Puisque $(|v_m|)_m$ est aussi une suite minimisante associée $\lambda_1(u)$, on peut supposer que $v_m \geq 0$. De plus, par homogénéité de la fonctionnelle étudiée, on peut normaliser v_m par

$$\int_M |u|^{N-2}v_m^2\ dv_g = 1. \tag{1.3}$$

On montre que $(v_m)_m$ est bornée dans $H_1^2(M)$. En effet, supposons que ce n'est pas le cas. Posons alors

$$v'_m = \frac{v_m}{\|\ v_m\ \|_{H_1^2(M)}}.$$

La suite $(v'_m)_m$ est bornée dans $H_1^2(M)$, chacune de ces fonctions étant alors de norme 1 dans $H_1^2(M)$. Par compacité pour la topologie faible de la boule unité de $H_1^2(M)$ et par le théorème d'injection compacte de Kondrakov, il existe $v' \in H_1^2(M)$ telle que, quitte à extraire une sous-suite de v'_m, v'_m converge vers v' faiblement dans $H_1^2(M)$ et fortement dans $L^2(M)$. On a

$$c_n\int_M |\nabla v'_m|^2\ dv_g + \int_M S_g v'^2_m\,dv_g = \lambda_m\int_M |u|^{N-2}\,v'^2_m\,dv_g. \tag{1.4}$$

En écrivant

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M |u|^{N-2}(v'-v'_m)^2 dv_g \\ &= \int_M |u|^{N-2}(v')^2 dv_g - 2\int_M |u|^{N-2}v'v'_m dv_g + \int_M |u|^{N-2}(v'_m)^2 dv_g \end{aligned}$$

et en remarquant que par convergence faible dans $H_1^2(M)$,

$$\lim_m \int_M |u|^{N-2}v'v'_m dv_g = \int_M |u|^{N-2}(v')^2 dv_g,$$

on obtient que

$$\int_M |u|^{N-2} v'^2 \, dv_g \leq \lim_{m \longrightarrow \infty} \int_M |u|^{N-2} v_m'^2 \, dv_g.$$

Puisque

$$\|v_m\|_{H_1^2(M)} \longrightarrow \infty,$$

l'équation (1.3) nous dit que la limite du membre droite tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. Il en découle que

$$\int_M |u|^{N-2} v'^2 \, dv_g = 0. \tag{1.5}$$

La fonction u étant non nulle presque partout, on a

$$v' = 0.$$

On écrit

$$1 = \int_M |\nabla v_m'|^2 \, dv_g + \underbrace{\int_M |v_m'|^2 \, dv_g}_{\longrightarrow 0}.$$

On en déduit que

$$\lim_{m \to \infty} \int_M |\nabla v_m'|^2 \, dv_g = 1$$

ce qui contredit le fait que

$$c_n \underbrace{\int_M |\nabla v_m'|^2 \, dv_g}_{\longrightarrow 1} + \underbrace{\int_M S_g v_m'^2 \, dv_g}_{\longrightarrow 0} = \lambda_m \int_M |u|^{N-2} v_m'^2 \, dv_g \leq 0.$$

Cela nous montre que $(v_m)_m$ est bornée dans $H_1^2(M)$. On en déduit immédiatement que $\lambda_1(\widetilde{g}) > -\infty$.

1.3 EDP associées à λ_i

La définition que nous avons donnée des valeurs propres pour des métriques généralisées ne fournit pas de fonctions propres associées, qui sont pourtant nécessaires pour étudier ces valeurs propres. C'est pourquoi nous aurons besoin de la

Proposition 1.3.1. *Pour toute fonction $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$. On suppose que u est non nulle presque partout ou que $\mu(M, g) \geq 0$, il existe des fonctions $v_1 \geq 0$ strictement positive sur une composante connexe de M au moins, et $v_2, \ldots, v_k \in H_1^2(M)$ qui changent de signe, normalisées par*

$$\int_M |u|^{N-2} v_k^2 \, dv_g = 1 \text{ et } \int_M |u|^{N-2} v_i v_j \, dv_g = 0 \text{ pour tous } i \neq j$$

et telles que, au sens des distributions, on ait, pour tout $i \in \{1, \cdots, k\}$

$$L_g v_i = \lambda_i(u) |u|^{N-2} v_i.$$

Preuve : Nous montrons d'abord l'existence de v_1. Soit $(v_m)_m$ une suite minimisante pour $\lambda_1(u)$, c'est-à-dire une suite de fonctions $v_m \in H_1^2(M)$ telle que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \frac{\int_M c_n|\nabla v_m|^2+S_g v_m^2\ dv_g}{\int_M |u|^{N-2}v_m^2\ dv_g} = \lambda_1(u).$$

Montrons d'abord que $(v_m)_m$ est bornée dans $H_1^2(M)$. En raisonnant par l'absurde, comme dans la Preuve de la Proposition 1.2.2, on obtient là-aussi l'équation (1.5), c'est-à-dire que

$$\int_M |u|^{N-2}v'^2 dv_g = 0, \tag{1.6}$$

où v' s'obtient comme limite faible dans $H_1^2(M)$ de

$$v'_m := \frac{v_m}{\|v_m\|_{H_1^2(H)}}.$$

Si u est presque partout non nulle, on en déduit que $v' = 0$. Si $\lambda_1 \geq 0$, on raisonne différemment : supposons $v' \neq 0$. L'équation (1.4) nous dit que, par convergence faible dans $H_1^2(M)$,

$$\int_M c_n|\nabla v'|^2 + S_g(v')^2 dv_g \leq \liminf \int_M c_n|\nabla v'_m|^2 + S_g(v'_m)^2 dv_g = 0.$$

En particulier, en évaluant v' dans la fonctionnelle de Yamabe (2), on obtient que $Y(v') = 0$. C'est une contradiction si $\mu(M,g) > 0$. Si $\mu(M,g) = 0$, v' est un minimiseur de Y et par conséquent $v' > 0$, ce qui contredit (1.6). Dans tous les cas, on a montré que $v' \equiv 0$. On raisonne alors comme dans la preuve de la Proposition 1.2.2 pour obtenir une contradiction. Nous obtenons finalement que (v_m) est bornée dans $H_1^2(M)$. Il existe donc $v \geq 0$ dans $H_1^2(M)$ telle que v_m converge vers v faiblement dans $H_1^2(M)$ et fortement dans $L^2(M)$ (après extraction éventuelle d'une sous-suite près). Montrons maintenant que

$$\int_M |u|^{N-2}v^2\ dv_g = \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_M |u|^{N-2}v_m^2\ dv_g = 1. \tag{1.7}$$

Si u est de classe C^∞, la relation s'obtient directement. Donc supposons que $u \in \text{Ł}^N(M)$, soit A un grand nombre réel et posons $u_A = \inf\{u, A\}$. D'après l'inégalité de Hölder, on écrit

$$\begin{aligned}
\left|\int_M u^{N-2}\left(v_m^2 - v^2\right)\ dv_g\right| &= \left|\int_M \left(u^{N-2} - u_A^{N-2} + u_A^{N-2}\right)\left(v_m^2 - v^2\right)\ dv_g\right| \\
&\leq \left(\int_M u_A^{N-2}|v_m^2 - v^2|\, dv_g + \int_M (u^{N-2} - u_A^{N-2})(|v_m| + |v|)^2\, dv_g\right) \\
&\leq A^{N-2}\int_M |v_m^2 - v^2|\, dv_g \\
&\quad + \left(\int_M (u^{N-2} - u_A^{N-2})^{\frac{N}{N-2}}\, dv_g\right)^{\frac{N-2}{N}} \left(\int_M (|v_m| + |v|)^N\, dv_g\right)^{\frac{2}{N}}.
\end{aligned}$$

La suite $(v_m)_m$ étant bornée dans $H_1^2(M)$, elle l'est aussi dans $L^N(M)$. Il existe donc une constante C telle que

$$\int_M (|v_m| + |v|)^N \, dv_g \leq C.$$

La convergence dans $L^2(M)$ donne

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_M |v_m^2 - v^2| \, dv_g = 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{A \longrightarrow \infty} \int_M \left(u^{N-2} - u_A^{N-2}\right)^{\frac{N}{N-2}} \, dv_g = 0.$$

La relation (1.7) en découle, puisque

$$\lim_m \int_M \langle \nabla v_m, \nabla \varphi \rangle \, dv_g = \int_M \langle \nabla v, \nabla \varphi \rangle \, dv_g,$$

$$\lim_m \int_M S_g v_m \varphi \, dv_g = \int_M S_g v \varphi \, dv_g$$

et

$$\lim_m \int_M |u|^{N-2} v_m \varphi \, dv_g = \int_M |u|^{N-2} v \varphi \, dv_g,$$

(d'après la convergence forte dans $L^2(M)$). On obtient donc qu'au sens des distributions

$$L_g v = \lambda_1(u) |u|^{N-2} v.$$

On définit

$$\lambda_k'(u) = \inf_{\substack{v_k ; |u|^{\frac{N-2}{2}} v_k \not\equiv 0 \\ \int_M |u|^{N-2} v_i v_k \, dv_g = 0 \, \forall i < k}} \frac{\int_M c_n |\nabla v_k|^2 + S_g v_k^2 \, dv_g}{\int_M |u|^{N-2} |v_k|^2 \, dv_g}.$$

Il est clair que $\lambda_k'(u) = \lambda_k(u)$ et la même méthode nous fournit par récurrence les fonctions v_k cherchées pour tout $k \geq 1$. Cela prouve la Proposition 1.3.1. □

1.4 Signe de λ_i

1.4.1 Le signe de λ_i est un invariant conforme

Proposition 1.4.1. *Le signe de λ_i est indépendant du choix de la métrique dans la classe conforme. Plus précisément, pour toute métrique conforme $\widetilde{g} = u^{N-2} g$, où $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$, les valeurs propres $\lambda_i(u)$ et $\lambda_i(1)$ sont de même signe.*

Preuve : On suppose par exemple que $\lambda_i(u) = 0$ et $\lambda_i(1) > 0$, on sait que

$$\lambda_i(u) = \inf_{u_1, \ldots, u_i} \sup_{\lambda_1, \ldots, \lambda_i} \frac{\int_M L_g(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i)(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i) \, dv_g}{\int_M (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i)^2 u^{N-2} \, dv_g},$$

et

$$\lambda_i(1) = \inf_{u_1,\dots,u_i} \sup_{\lambda_1,\dots,\lambda_i} \frac{\int_M L_g(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i)(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i)\ dv_g}{\int_M (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i)^2\ dv_g}.$$

Supposons que $\lambda_i(u)$ est atteinte par $v_1, \dots, v_i$. Puisque les dénominateurs dans ces expressions sont strictement positifs, alors

$$\sup_{\lambda_1,\cdots,\lambda_i} \int_M L_g(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i)(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i)\ dv_g = 0.$$

Ainsi

$$\lambda_i(1) \leq \sup_{\lambda_1,\dots,\lambda_i} \frac{\int_M L_g(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i)(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i)\ dv_g}{\int_M (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i)^2 u^{N-2}\ dv_g} = 0,$$

ce qui donne la contradiction souhaitée. Les autres cas sont traités de manière similaire.

1.4.2 Il n'y a pas d'obstruction topologique à la négativité de λ_k

Dans ce paragraphe, on montre que, sur toute variété et pour tout entier $k \geq 1$, il existe une métrique h telle que la k-ième valeur propre de L_h est négative.

Proposition 1.4.2. *Sur toute variété riemannienne compacte M et pour tout $k \geq 1$ il existe une métrique g telle que*

$$\lambda_k(g) < 0.$$

Preuve : Soit M une variété riemannienne compacte de dimension n. Considérons k sphères de dimension $n = dim(M)$. On munit chacune de ces sphères S^n de la même métrique g, choisie telle que $\mu(g) < 0$. Une telle métrique existe d'après le Théorème 1 page 38 de [Aub98]. Soit $P \in M$, puisque $\mu(g) < 0$, on peut trouver pour tous $\varepsilon, \delta > 0$ assez petits une fonction u à support dans $S^n \backslash B_\varepsilon(P)$ telle que

$$\frac{\int_M c_n|\nabla u|^2 + S_g u^2\ dv_g}{\int_M u^2\ dv_g} < -\delta.$$

En effet, choisissons une fonction η_ε de classe C^∞ telle que $0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1$, $\eta_\varepsilon(B_\varepsilon(P)) = 0$, $\eta_\varepsilon(\mathbb{S}^n \backslash B_{2\varepsilon}(P)) = 1$, $|\nabla \eta_\varepsilon| \leq \frac{2}{\varepsilon}$ et une fonction v qui satisfait

$$Y(v) = \frac{\int_M c_n|\nabla v|^2 + S_g v^2\ dv_g}{\int_M v^2\ dv_g} < -2\delta.$$

Notons que l'existence de la fonction v est justifiée par le fait que $\mu(g) < 0$. La fonction désirée u sera donnée par $\eta_\varepsilon v$, où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. En effet, il est facile de voir que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} Y(\eta_\varepsilon v) = Y(v).$$

Soient $P_1, \cdots, P_k$ des points distincts de M. On considère la somme connexe suivante

$$M' = M \# (\mathbb{S}^n)_1 \# \dots \# (\mathbb{S}^n)_k,$$

de façon à ce que les $(\mathbb{S}^n)_i$ soient attachées en $P \in (\mathbb{S}^n)_i$ et en $P_i \in M$. En d'autres termes, les anses sont attachées sur $B_\varepsilon(P)$ et $B_\varepsilon(P_i)$. Notons que M' est difféomorphe à M. Cette construction nous permet de voir $(\mathbb{S}^n)_i \backslash B_\varepsilon(P_i)$ comme une partie de M'. On prend sur M' une métrique h qui satisfait

$$h|_{(\mathbb{S}^n)_i \backslash B_\varepsilon(P_i)} = g.$$

Sur M', on définit la fonction suivante

$$u_i = \begin{cases} u & \text{sur } (\mathbb{S}^n)_i \backslash B_\varepsilon(P_i) \\ \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Puisque les u_i ont des supports disjoints, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_k(1) &\leq \sup_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} \frac{\int_{M'} L_g(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)\ dv_h}{\int_{M'} (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)^2\ dv_h} \\ &\leq \sup_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} \frac{(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2) \int_M (L_g u) u\ dv_g}{(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2) \int_M u^2\ dv_g} \\ &\leq \frac{\int_M (L_g u) u\ dv_g}{\int_M u^2\ dv_g} < -\delta. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Solutions nodales de l'équation de Yamabe

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte que nous supposerons connexe dans tout le chapitre. Le problème de Yamabe consiste à trouver une métrique $\widetilde{g}$ conforme à g et dont la courbure scalaire $S_{\widetilde{g}}$ est constante. Il a été résolu entre les années 1960 et 1984 par Yamabe, Trüdinger, Aubin et Schoen, [Y60, T68, Aub76, Sch84]. On peut se référer à [LP87, Heb97, Aub98] pour obtenir plus de détails sur le sujet. Résoudre le problème est équivalent à trouver une fonction positive de classe C^∞ et une constante $C_0 \in \mathbb{R}$ telles que

$$L_g(u) = C_0|u|^{N-2}u, \tag{2.1}$$

où $N = \frac{2n}{n-2}$. Afin d'obtenir des solutions de l'équation de Yamabe (2.1), on définit la *constante de Yamabe* par

$$\mu(M, g) := \inf_{u\neq 0, u\in C^\infty(M)} Y(u),$$

où

$$Y(u) = \frac{\int_M c_n|\nabla u|^2 + S_g u^2 \, dv_g}{\left(\int_M |u|^N \, dv_g\right)^{\frac{2}{N}}}.$$

D'après les travaux de Yamabe, Trüdinger, Aubin et Schoen, il existe un minimiseur de classe C^∞ strictement positif u de Y qui, quitte à supposer la normalisation $\|u\|_{L^N(M)} = 1$, vérifie

$$L_g u = \mu(M, g)|u|^{N-2}u.$$

La métrique souhaitée est donnée par $\widetilde{g} = u^{N-2}g$: sa courbure scalaire est une constante égale à $\mu(M, g)$. Quitte à poser $u' = \mu(M, g)^{\frac{n-2}{4}}u$, on obtient une solution positive de

$$L_g u' = \varepsilon|u'|^{N-2}u'$$

où $\varepsilon =$ signe $(\mu(M, g)) =$ signe$(\lambda_1(g))$.

Si $\mu(M, g) \geq 0$, il est facile de voir que

$$\mu(M, g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_1(\widetilde{g}) vol(M, \widetilde{g})^{\frac{2}{n}},$$

où $[g]$ est la classe conforme de g et λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur de Yamabe L_g. Cette approche a inspiré B. Ammann et E. Humbert pour introduire dans [AH06] la *seconde constante de Yamabe*, définie par

$$\begin{aligned}\mu_2(M,g) &= \inf_{\widetilde{g}} \lambda_2(\widetilde{g}) vol(M,\widetilde{g})^{\frac{2}{n}} \\ &= \inf_{u} \lambda_2(u^{N-2}g) \left(\int_M u^N \, dv_g\right)^{\frac{2}{n}}.\end{aligned}$$

Ils ont étudié cet invariant conforme dans le cas où $\mu(M,g) \geq 0$ et ils ont montré que μ_2 est atteint par une métrique généralisée, c'est-à-dire une métrique de la forme $u^{N-2}g$ où $u \in L^N(M)$, $u \geq 0$ qui peut s'annuler, dans les deux cas suivants :
• $\mu(M,g) > 0$, (M,g) est non localement conformément plate et $n \geq 11$.
• $\mu(M,g) = 0$, (M,g) est non localement conformément plate et $n \geq 9$.
Dans ce contexte, ils ont montré que u est la valeur absolue d'une fonction $w \in C^{3,\alpha}(M)$ qui change de signe et solution de l'équation

$$L_g w = \mu_2(M,g)|w|^{N-2}w.$$

De nombreux travaux sont consacrés à l'étude de ce type des solutions, par exemple [AH06], [DJ02], [Hol98], [HV94], [V07]. Voir aussi [BenBou08] pour une étude analogue de l'opérateur Paneitz-Branson. On pose une nouvelle fois $w' = \mu_2(M,g)^{\frac{n-2}{4}} w$ pour obtenir une solution de

$$L_g w' = \varepsilon |w'|^{N-2} w'$$

où $\epsilon = 1 =$ signe $(\mu_2(M,g)) =$ signe $(\lambda_2(g))$. Cette section a pour but d'étendre ce résultat aux métriques pour lesquelles $\lambda_2(g)$ a un signe arbitraire.

Dans le cas où $\lambda_2 < 0$, la réponse est oui sans aucune condition supplémentaire. On obtient un résultat similaire à celui obtenu dans [AH06]. La méthode est cependant différente. Ajoutons que cette hypothèse est satisfaite pour un grand nombre de métriques (voir Proposition 1.4.2). Les méthodes utilisées dans [AH06] restent valables dans le cas où $\mu(M,g) < 0$ et $\lambda_2 \geq 0$. Finalement, le résultat principal de ce chapitre, préparatoire au Chapitre 3, est le suivant :

Théorème 2.0.3. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ dont la constante de Yamabe $\mu(M,g)$ est strictement négative. Notons λ_2 la deuxième valeur propre de L_g. Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*
- *$\lambda_2 \leq 0$,*
- *$\lambda_2 > 0$, (M,g) non localement conformément plate et $n \geq 6$,*

il existe une fonction w qui change de signe, solution de l'équation

$$L_g w = \varepsilon |w|^{N-2} w,$$

où $\varepsilon = +1$ si $\lambda_2 > 0$, $\varepsilon = -1$ si $\lambda_2 < 0$ et $\varepsilon = 0$ si $\lambda_2 = 0$. De plus, $w \in C^{3,\alpha}(M)$, pour tout $\alpha < N-2$.

2.0.3 Le cas $\lambda_2 = 0$

La démonstration est triviale : en effet, la Proposition 1.3.1 fournit une solution nodale v de $L_g v = 0 = \varepsilon |v|^{N-2} v$ où $\varepsilon = 0 =$ signe $(\lambda_2(g))$.

2.0.4 Le cas $\lambda_2 > 0$

On définit la seconde constante de Yamabe qui a été introduite et étudiée par Ammann et Humbert dans [AH06] par

$$\begin{aligned} \mu_2(M,g) &= \inf_{\widetilde{g}} \lambda_2(\widetilde{g}) \mathrm{Vol}(M,\widetilde{g})^{\frac{2}{n}} \\ &= \inf_{u>0} \lambda_2(u) \left(\int_M u^N \, dv_g \right)^{\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.0.4 ci-dessous, le problème se réduit à trouver un minimiseur de $\mu_2(M,g)$. Le cas où $\mu(M,g) \geq 0$ a été traité dans [AH06]. On s'intéressera au cas où $\mu(M,g) < 0$ (c'est-à-dire $\lambda_1(g) < 0$). Nous montrons que les méthodes d'Ammann et Humbert s'étendent à ce cadre et nous obtenons les trois propositions suivantes :

Proposition 2.0.4. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, telle que $\lambda_2 > 0$. Si*

$$\mu_2(M,g) < \mu(\mathbb{S}^n), \tag{2.2}$$

avec $\mu(\mathbb{S}^n) = n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$, où ω_n désigne le volume de la sphère standard $\mathbb{S}^n$, alors la seconde constante de Yamabe est atteinte par une fonction positive $u \in L^N(M)$ que l'on peut normaliser par $\int_M u^N \, dv_g = 1$. Par conséquent, il existe une fonction w qui change de signe vérifiant au sens des distributions l'équation suivante

$$L_g w = \mu_2(M,g)|u|^{N-2} w, \tag{2.3}$$

où les fonctions u et w sont normalisées par

$$\int_M u^N \, dv_g = 1, \ \int_M u^{N-2} \, w^2 \, dv_g = 1.$$

et

Proposition 2.0.5. *Les deux fonctions u et w données par la Proposition 2.0.4 vérifient*

$$u = |w|.$$

Par les théorèmes standard de régularité, les deux résultats précédents donnent immédiatement

Corollaire 2.0.6. *Supposons $\mu_2(M,g) < \mu(\mathbb{S}^n)$, alors, il existe une fonction $w \in C^{3,N-2}(M)$ solution de*

$$L_g w = \mu_2(M,g)|w|^{N-2} w.$$

Il reste à trouver des conditions pour lesquelles l'hypothèse (2.2) est vérifiée. C'est l'objet du résultat suivant :

Proposition 2.0.7. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 6$, supposons que M est non localement conformément plate et que $\mu(M, g) < 0$, alors*

$$\mu_2(M, g) < \mu(\mathbb{S}^n).$$

Preuve de la Proposition 2.0.4

Le cas où $\mu(M, g) \geq 0$ a été traité dans [AH06]. On limitera donc notre étude au cas où $\mu(M, g) < 0$. Puisque la variété M est connexe, sans perdre de généralité, on peut supposer que $S_g = -1$. Soit $(u_m)_m$ une suite minimisante de $\mu_2(M, g)$, c'est-à-dire, u_m est positive, de classe C^∞ et

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \lambda_2(u_m) \left(\int_M u_m^N dv_g \right)^{\frac{2}{n}} = \mu_2(M, g).$$

La suite $(u_m)_m$ est choisie de telle sorte que $\int_M u_m^N \, dv_g = 1$, si bien que $\mu_2(M, g) = \lim_{m \longrightarrow \infty} \lambda_2(u_m)$. D'après la Proposition 1.3.1, on peut trouver $w_m \in H_1^2(M)$ telle que

$$L_g w_m = \lambda_2(u_m) |u_m|^{N-2} w_m. \tag{2.4}$$

En outre, on peut normaliser $(w_m)_m$ par

$$\int_M |u_m|^{N-2} w_m^2 \, dv_g = 1.$$

Puisque $\int_M u_m^N dv_g = 1$, la suite (u_m) est bornée dans $L^N(M)$ qui est un espace réflexif. Par compacité pour la topologie faible de la boule unité de $L^N(M)$, il existe $u \in L^N(M)$ telle que $(u_m)_m$, ou tout au moins une suite extraite de $(u_m)_m$, converge faiblement vers u dans $L^N(M)$.

• Montrons maintenant que la suite $(w_m)_m$ est bornée dans $H_1^2(M)$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $\|w_m\|_{H_1^2(M)} \longrightarrow \infty$. Posons

$$w'_m = \frac{w_m}{\|w_m\|_{H_1^2(M)}}$$

si bien que $\|w'_m\|_{H_1^2(M)} = 1$. La suite étant $(w'_m)_m$ est bornée dans $H_1^2(M)$, on déduit de la compacité pour la topologie faible de la boule unité de $H_1^2(M)$ et du théorème de Kondrakov que, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(w'_m)_m$, il existe $w' \in H_1^2(M)$ telle que $(w'_m)_m$ converge vers w' faiblement dans $H_1^2(M)$ et fortement dans $L^2(M)$. L'équation (2.4) étant linéaire, w'_m satisfait

$$L_g w'_m = \lambda_2(u_m) \, |u_m|^{N-2} \, w'_m.$$

Pour toute $\varphi \in C^\infty(M)$, on a ainsi :

$$c_n \int_M \langle \nabla w'_m, \nabla \varphi \rangle \, dv_g + \int_M S_g w'_m \varphi \, dv_g = \int_M \lambda_2(u_m) \, |u_m|^{N-2} \, w'_m \varphi \, dv_g.$$

Puisque w'_m tend faiblement vers w' dans $H_1^2(M)$ et puisque $w \longmapsto \langle \nabla w, \nabla \varphi \rangle$ est une forme linéaire sur $H_1^2(M)$,

$$c_n \int_M \langle \nabla w'_m, \nabla \varphi \rangle \, dv_g \longrightarrow c_n \int_M \langle \nabla w', \nabla \varphi \rangle \, dv_g.$$

La suite (w'_m) convergeant fortement vers w' dans $L^2(M)$, on a

$$\int_M S_g w'_m \varphi \, dv_g \longrightarrow \int_M S_g w' \varphi \, dv_g.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on en déduit que $\int_M |u_m|^{N-2} w'_m \varphi \, dv_g \longrightarrow 0$. En effet,

$$\begin{aligned}
\left| \int_M |u_m|^{N-2} w'_m \varphi dv_g \right| &\leq \|\varphi\|_\infty \int_M |u_m|^{\frac{N-2}{2}} |w'_m| \, |u_m|^{\frac{N-2}{2}} \, dv_g \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \left(\int_M |u_m|^{N-2} \, {w'_m}^2 \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |u_m|^{N-2} \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \frac{\left(\int_M |u_m|^{N-2} \, {w_m}^2 \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}}}{\|w_m\|_{H_1^2(M)}} \left(\int_M |u_m|^N \, dv_g \right)^{\frac{N-2}{2N}} \\
&\quad \left(\mathrm{vol(M,g)}^{1-\frac{\mathrm{N-2}}{\mathrm{N}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \frac{1}{\|w_m\|_{H_1^2(M)}} \left(\mathrm{vol(M,g)} \right)^{\frac{1}{N}} \longrightarrow_{m \longrightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$c_n \int_M \langle \nabla w', \nabla \varphi \rangle \, dv_g + \int_M S_g w' \varphi \, dv_g = 0,$$

ce qui implique qu'au sens des distributions, on a

$$L_g w' = 0.$$

Puisque $\lambda_1(1) < 0$ et $\lambda_2(1) > 0$, $0 \notin Sp(L_g)$. Il vient que $w' = 0$. On a aussi

$$\int_M c_n \, |\nabla w'_m|^2 \, dv_g + \int_M S_g {w'_m}^2 \, dv_g = \lambda_2(u_m) \int_M |u_m|^{N-2} \, {w'_m}^2 \, dv_g,$$

avec

$$\lambda_2(u_m) \int_M |u_m|^{N-2} \, {w'_m}^2 \, dv_g = \frac{\lambda_2(u_m)}{\|w_m\|^2_{H_1^2(M)}} \longrightarrow 0$$

et

$$\int_M S_g {w'_m}^2 \, dv_g \longrightarrow \int_M S_g {w'}^2 \, dv_g = 0.$$

Donc

$$\int_M |\nabla w'_m|^2 \, dv_g \longrightarrow 0.$$

On aboutit finalement à

$$\|w'_m\|^2_{H_1^2(M)} = 1 = \int_M |\nabla w'_m|^2 \ dv_g + \int_M {w'_m}^2 \ dv_g \longrightarrow 0$$

d'où la contradiction. Il en découle que $(w_m)_m$ est une suite bornée dans $H_1^2(M)$. Il existe donc $w \in H_1^2(M)$ telle que, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(w_m)_m$, il existe $w \in H_1^2(M)$ telle que $(w_m)_m$ converge vers w faiblement dans $H_1^2(M)$ et fortement dans $L^2(M)$. Ainsi, au sens des distributions, on a

$$L_g w = \mu_2(M,g)\,|u|^{N-2}\,w.$$

Il reste à montrer que w change de signe et qu'elle est différente de zéro.

• Supposons que w ne change pas de signe. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $w \geq 0$. Au sens des distributions, on a

$$c_n \Delta_g w + S_g w = \mu_2(M,g)\,|u|^{N-2}\,w. \tag{2.5}$$

On rappelle que l'on peut supposer que $S_g < 0$ car $\mu(M,g) < 0$ et en intégrant (2.5) sur M, on obtient :

$$\underbrace{\int_M c_n \Delta_g w \ dv_g}_{=0} + \underbrace{\int_M S_g w \ dv_g}_{<0} = \underbrace{\mu_2(M,g) \int_M |u|^{N-2}\, w \ dv_g}_{\geq 0}.$$

On obtient ainsi une contradiction si $w \not\equiv 0$. C'est ce que nous allons montrer dans la suite.

• Supposons que $w = 0$. En se référant à [Heb97] et [Aub76] on a le théorème suivant : Si (M,g) est une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe B_ϵ tel que pour tout $u \in H_1^2(M)$, on a

$$\left(\int_M |u|^N \ dv_g\right)^{\frac{2}{N}} \leq (\mu(\mathbb{S}^n)^{-1} + \epsilon)\left(\int_M c_n\,|\nabla u|^2 \ dv_g + B_\epsilon \int_M u^2 \ dv_g\right).$$

On obtient que

$$\begin{aligned} c_n \int_M |\nabla w_m|^2 \ dv_g + S_g \int_M w_m^2 \ dv_g &= \mu_2(M,g) \int_M |u_m|^{N-2}\, w_m^2 \ dv_g \\ &\leq \mu_2(M,g) \underbrace{\left(\int_M |u_m|^N \ dv_g\right)^{\frac{N-2}{N}}}_{=1} \left(\int_M |w_m|^N \ dv_g\right)^{\frac{2}{N}} \\ \leq \underbrace{\mu_2(M,g)(\mu(\mathbb{S}^n)^{-1} + \epsilon)}_{<1(\text{ si } \varepsilon \text{ est petit suffisamment })} &\left(\int_M c_n\,|\nabla w_m|^2 \ dv_g + B_\epsilon \int_M w_m^2 \ dv_g\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$c_n \underbrace{\left[1-\mu_2(M,g)(\mu(\mathbb{S}^n)^{-1}+\epsilon)\right]}_{>0} \int_M |\nabla w_m|^2 \ dv_g \leq c \underbrace{\int_M w_m^2 \ dv_g}_{\longrightarrow 0},$$

il s'ensuit que $\int_M |\nabla w_m|^2 \ dv_g \longrightarrow 0$, ainsi $\|w_m\|_{H_1^2(M)} \longrightarrow 0$. On obtient que $w_m \longrightarrow 0$ dans $H_1^2(M)$. Cela donne

$$1 = \int_M |u_m|^{N-2} w_m^2 \ dv_g \leq \left(\int_M |u_m|^N \ dv_g\right)^{\frac{N-2}{2}} \underbrace{\int_M w_m^N \ dv_g}_{\longrightarrow 0}.$$

Cette contradiction prouve que $w \neq 0$.

Preuve de la Proposition 2.0.5

Puisque $\lambda_2(g) > 0$, il vient

$$\mu_2(M,g) = \inf_{u>0} \lambda_2(u) \left(\int_M u^N \ dv_g\right)^{\frac{2}{n}} = \inf_{u\geq 0} \lambda_2(u) \left(\int_M u^N \ dv_g\right)^{\frac{2}{n}}.$$

Nous suivons pas à pas la preuve du Lemme 3.3 de [AH06], en prenant $w_1 = w_+ = \sup\{0, w\}$ et $w_2 = w_- = \sup\{0, -w\}$. On peut écrire

$$u = aw_+ + bw_-,$$

où $a, b > 0$. On déduit du Lemme 3.1 que $w \in C^{2,\alpha}$, $u \in C^{0,\alpha}$ et l'étape 4 de la preuve du Théorème 3.4 dans [AH06] entraîne que

$$u = |w|.$$

Puisque w est dans $H_1^2(M)$, le Lemme 3.1 de [AH06] donne que $w \in L^{N+\varepsilon}(M)$, cela vient du fait que w vérifie l'équation

$$L_g w = \mu_2 |w|^{N-2} w.$$

Finalement, des arguments standard de "bootstrap " donnent que $w \in C^{3,\alpha}(M)$ pour tout $\alpha < N-2$.

Preuve de la Proposition 2.0.7

Dans ce paragraphe, on s'intéresse plus particulièrement à une variété M non localement conformément plate de dimension $n \geq 6$, pour obtenir :

$$\mu_2(M,g) < \mu(\mathbb{S}^n).$$

On considère toujours le cas où $\mu(M,g) < 0$. Donc il existe une fonction positive v solution de l'équation de Yamabe

$$L_g v = \mu(M,g) v^{N-1}. \tag{2.6}$$

Soit x_0 un point de M où le tenseur de Weyl ne s'annule pas (un tel point existe puisque l'on a supposé que la variété était non localement conformément plate et que $n \geq 4$) et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées normales en x_0. Pour $x \in M$, notons par $r = d_g(x, x_0)$ la distance au point x_0. Si δ est un nombre petit fixé, soit η une fonction cut-off de classe C^∞ choisie telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1, \\ \eta = 1 \text{ sur } B_\delta(x_0), \\ \eta = 0 \text{ sur } M \backslash B_{2\delta}(x_0), \\ |\nabla \eta| \leq \frac{2}{\delta}. \end{cases}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on définit la fonction v_ε par

$$v_\epsilon = c_\epsilon \eta (\epsilon + r^2)^{\frac{2-n}{2}},$$

où c_ϵ est choisie de façon à ce que

$$\int_M v_\epsilon^N \, dv_g = 1.$$

En se référant à [Aub76]

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} Y(v_\epsilon) = \mu_1(\mathbb{S}^n),$$

où $Y(u)$ est la fonctionnelle de Yamabe définie par

$$Y(u) = \frac{\int_M c_n |\nabla u|^2 + S_g u^2 \, dv_g}{\left(\int_M u^N \, dv_g\right)^{\frac{2}{N}}}.$$

Si (M, g) est non localement conformément plate, on se réfère à un calcul fait dans [Aub76] : il existe une constante $C(M) > 0$ telle que

$$Y(v_\varepsilon) = \begin{cases} \mu_1(\mathbb{S}^n) - C(M)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) & \text{si } n > 6 \\ \mu_1(\mathbb{S}^n) - C(M)\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)| + o(\varepsilon^2 |\ln(\varepsilon)|) & \text{si } n = 6. \end{cases} \tag{2.7}$$

On rappelle que, d'après [Aub76], il existe des constantes a, b, C_1, $C_2 > 0$, telles que

$$a\varepsilon^{\frac{n-2}{4}} \leq c_\varepsilon \leq b\varepsilon^{\frac{n-2}{4}},$$

et

$$C_1 \alpha_{p,\varepsilon} \leq \int_M v_\varepsilon^p \, dv_g \leq C_2 \alpha_{p,\varepsilon} \tag{2.8}$$

où

$$\alpha_{p,\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{2n-(n-2)p}{4}} & \text{si} \quad p > \frac{n}{n-2}; \\ |\ln(\varepsilon)|\varepsilon^{\frac{n}{4}} & \text{si} \quad p = \frac{n}{n-2}; \\ \varepsilon^{\frac{(n-2)p}{4}} & \text{si} \quad p < \frac{n}{n-2} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \mu_2(M,g) &= \inf_u \lambda_2(u) \left(\int_M u^N \, dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \\ &= \inf_{\substack{u \\ w,w'}} \sup_{\lambda,\mu} \frac{\int_M L_g(\lambda w + \mu w')(\lambda w + \mu w') \, dv_g}{\int_M u^{N-2}(\lambda w + \mu w')^2 \, dv_g} \left(\int_M u^N \, dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \\ &= \inf_{\substack{u \\ w,w'}} \sup_{\lambda,\mu} F(u, \lambda w + \mu w'), \end{aligned}$$

où F est définie par (1.1). Soient λ_ϵ, μ_ϵ telles que

$$\lambda_\epsilon^2 + \mu_\epsilon^2 = 1$$

et

$$F(v_\epsilon, \lambda_\epsilon v + \mu_\epsilon v_\epsilon) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} F(v_\epsilon, \lambda v + \mu v_\epsilon),$$

où v est la fonction définie par l'équation (2.6). Écrivons l'expression de $F(v_\epsilon, \lambda_\epsilon v + \mu_\epsilon v_\epsilon)$, on obtient

$$\begin{aligned} F(v_\epsilon, \lambda_\epsilon v + \mu_\epsilon v_\epsilon) &= \frac{\int_M L_g(\lambda_\epsilon v + \mu_\epsilon v_\epsilon)(\lambda_\epsilon v + \mu_\epsilon v_\epsilon) \, dv_g}{\int_M v_\epsilon^{N-2}(\lambda_\epsilon v + \mu_\epsilon v_\epsilon)^2 \, dv_g} \left(\int_M v_\epsilon^N \, dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \\ &= \frac{\lambda_\epsilon^2 \mu(M,g) + \mu_\epsilon^2 Y(v_\epsilon) + 2\lambda_\epsilon \mu_\epsilon \mu(M,g) \int_M v^{N-1} v_\epsilon \, dv_g}{\lambda_\epsilon^2 \int_M v_\epsilon^{N-2} v^2 \, dv_g + \mu_\epsilon^2 + 2\lambda_\epsilon \mu_\epsilon \int_M v_\epsilon^{N-1} v \, dv_g} \\ &= \frac{A_\epsilon}{B_\epsilon}. \end{aligned}$$

Si

$$\lambda_\varepsilon \longrightarrow \lambda \neq 0, \;\; \mu_\varepsilon \longrightarrow \mu \neq 0,$$

alors

$$F(v_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v + \mu_\varepsilon v_\varepsilon) \longrightarrow \frac{\lambda^2 \mu(M,g) + \mu^2 \mu(\mathbb{S}^n)}{\mu^2} < \mu(\mathbb{S}^n).$$

D'une manière similaire, si $\mu = 0$, $\lambda^2 = 1$, le numérateur $A_\varepsilon \sim \mu(M,g) < 0$, tandis que le dénominateur B_ε est positif, ce qui donne encore une fois que

$$F(v_\varepsilon, \lambda_\varepsilon v + \mu_\varepsilon v_\varepsilon) \leq 0 < \mu(\mathbb{S}^n),$$

on obtient ainsi l'inégalité désirée. Dans ce qui suit, on suppose que $\lambda_\varepsilon \longrightarrow 0$ et $\mu_\varepsilon \longrightarrow \pm 1$.

Le cas $n > 6$

D'après (2.8), on a

$$\int_M v^{N-1} v_\varepsilon \, dv_g \sim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon^{\frac{n-2}{4}},$$

$$\int_M v_\varepsilon^{N-2} v^2 \, dv_g \sim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon,$$

et

$$\int_M v_\varepsilon^{N-1} v \, dv_g \sim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon^{\frac{n-2}{4}},$$

où C désigne une constante qui peut changer de valeur d'une ligne à l'autre. On distingue deux cas

• il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\lambda_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}, \tag{2.9}$$

ou

• il existe α_ε telle que

$$|\lambda_\varepsilon| = \alpha_\varepsilon \varepsilon^{\frac{n-2}{4}}, \tag{2.10}$$

et

$$\alpha_\varepsilon \longrightarrow +\infty.$$

(à une sous-suite près).

1. Tout d'abord, supposons que la relation (2.9) est vérifiée. On a, donc

$$|\lambda_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{\frac{n-2}{4}}.$$

Il en découle que $\lambda_\varepsilon^2 = O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})$ et $\mu_\varepsilon^2 = 1 - \lambda_\varepsilon^2 = 1 + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})$. Donc

$$\mu_\varepsilon = 1 + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}).$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned} A_\epsilon &= O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) + (1 + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}))\Big(\mu(\mathbb{S}^n) - C(M)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\Big) + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) \\ &= \mu(\mathbb{S}^n) - C(M)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Puisque $\frac{n-2}{2} > 2$,

$$A_\varepsilon = \mu(\mathbb{S}^n) - C(M)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

et

$$B_\varepsilon = O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}+1}) + 1 + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) = 1 + o(\varepsilon^2).$$

On en déduit donc que

$$\frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon} = \mu(\mathbb{S}^n) - C(M)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) < \mu(\mathbb{S}^n).$$

2. Supposons que la condition (2.10) est satisfaite. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon} &= \frac{\lambda_\varepsilon^2\mu(M,g)+(1-\lambda_\varepsilon^2)Y(v_\varepsilon)+\lambda_\varepsilon O(\varepsilon^{\frac{n-2}{4}})}{\lambda_\varepsilon^2 O(\varepsilon)+(1-\lambda_\varepsilon^2)+2\lambda_\varepsilon\mu_\varepsilon O(\varepsilon^{\frac{n-2}{4}})} \\
&= \frac{\lambda_\varepsilon^2\mu(M,g)+(1-\lambda_\varepsilon^2)Y(v_\varepsilon)+o(\lambda_\varepsilon^2)}{o(\lambda_\varepsilon^2)+(1-\lambda_\varepsilon^2)+o(\lambda_\varepsilon^2)} \\
&= \frac{\lambda_\varepsilon^2\mu(M,g)}{1-\lambda_\varepsilon^2+o(\lambda_\varepsilon^2)}+\frac{Y(v_\varepsilon)}{1+\frac{o(\lambda_\varepsilon^2)}{\mu_\varepsilon^2}}+o(\lambda_\varepsilon^2) \\
&\leq \mu(M,g)\lambda_\varepsilon^2+\mu(\mathbb{S}^n)(1+o(\lambda_\varepsilon^2))+o(\lambda_\varepsilon^2) \\
&\leq \mu(\mathbb{S}^n)+\mu(M,g)\lambda_\varepsilon^2+o(\lambda_\varepsilon^2) \\
&< \mu(\mathbb{S}^n),
\end{aligned}$$

car $\mu(M,g)<0$ et $Y(v_\varepsilon)\leq\mu(\mathbb{S}^n)$.

Le cas $n=6$
Puisque

$$\begin{aligned}
\int_M v_\varepsilon^{N-2}v^2dv_g &\sim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon, \\
\int_M v^{N-1}v_\varepsilon dv_g &\sim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon, \\
\int_M v_\varepsilon^{N-1}vdv_g &\sim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon,
\end{aligned}$$

alors

$$A_\varepsilon=\lambda_\varepsilon^2\mu(M,g)+\mu_\varepsilon^2Y(v_\varepsilon)+2\lambda_\varepsilon\mu_\varepsilon O(\varepsilon),$$
$$B_\varepsilon=\lambda_\varepsilon^2O(\varepsilon)+\mu_\varepsilon^2+2\lambda_\varepsilon\mu_\varepsilon O(\varepsilon).$$

De même, on distingue deux cas

1. Suppsons $|\lambda_\varepsilon|\leq C\varepsilon$. Alors
$$\lambda_\varepsilon^2\leq C\varepsilon^2.$$
Ce qui implique que
$$A_\varepsilon=\mu(\mathbb{S}^n)-C\varepsilon^2|\ln(\varepsilon)|+o(\varepsilon^2|\ln(\varepsilon)|)$$
et
$$B_\varepsilon=1+O(\varepsilon^2)=1+o(\varepsilon^2|\ln(\varepsilon)|).$$
D'où
$$\frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon}<\mu(\mathbb{S}^n).$$
2. Supposons $|\lambda_\varepsilon|=\alpha_\varepsilon\varepsilon$, avec $\alpha_\varepsilon\longrightarrow+\infty$. Puisque $Y(v_\varepsilon)\leq\mu(\mathbb{S}^n)$, on a
$$A_\varepsilon=\alpha_\varepsilon^2\varepsilon^2\mu(M,g)+\mu_\varepsilon^2\mu(\mathbb{S}^n)+o(\alpha_\varepsilon^2\varepsilon^2),$$

et

$$B_\varepsilon = \mu_\varepsilon^2 + o(\alpha_\varepsilon^2 \varepsilon^2).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{A_\varepsilon}{B_\varepsilon} &= \mu(M,g)\frac{\alpha_\varepsilon^2\varepsilon^2}{1+o(1)} + \frac{\mu(\mathbb{S}^n)}{1+o(\alpha_\varepsilon^2\varepsilon^2)} + \frac{o(\alpha_\varepsilon^2\varepsilon^2)}{1+o(1)} \\ &= \mu(M,g)\alpha_\varepsilon^2\varepsilon^2 + \mu(\mathbb{S}^n) + o(\alpha_\varepsilon^2\varepsilon^2) \\ &< \mu(\mathbb{S}^n). \end{aligned}$$

Cela termine la preuve de la Proposition 2.0.7. □

On a donc obtenu une solution w qui change de signe de l'équation

$$L_g w = \mu_2 |w|^{N-2} w.$$

Pour prouver le résultat annoncé dans le Théorème 2.0.3, il suffit de poser

$$w' = \mu_2^{\frac{n-2}{4}} w,$$

si bien que w' vérifie

$$L_g w' = \varepsilon |w'|^{N-2} w',$$

où $\varepsilon = 1 = \text{ signe}(\lambda_2(g))$.

2.1 Le cas $\lambda_2 < 0$

Dans cette section, on montre que dans tous les cas, il existe une solution nodale de l'équation

$$L_g w = C_0 |w|^{N-2} w,$$

où C_0 est une constante négative.

D'abord, puisque $\mu < 0$ et puisque M est connexe, on peut supposer que la courbure scalaire de la métrique g est égale à -1. Dans ce contexte, l'approche sera différente. En effet, dans ce cas, la seconde constante de Yamabe n'est plus définie comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.1.1. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Supposons que $\lambda_2 < 0$, alors*

$$\inf_u \lambda_2(u) \left(\int_M u^N \, dv_g \right)^{\frac{2}{n}} = -\infty.$$

La preuve de cette proposition est détaillée à la fin de ce paragraphe. Introduisons une nouvelle fonctionnelle

$$I_g(u) = \frac{\left(\int_M |L_g u|^{\frac{2n}{n+2}} \, dv_g \right)^{\frac{n+2}{n}}}{\left| \int_M u L_g u \, dv_g \right|}.$$

Étudions $\alpha := \inf I_g(u)$ où l'infimum est pris sur toutes les fonctions $u \in H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)$ telle que

$$\int_M uL_g u \, dv_g < 0,$$

sous la contrainte suivante

$$\int_M |u|^{N-2} u \, v \, dv_g = 0,$$

pour toute fonction $v \in \ker L_g$. Alors on montre que

Théorème 2.1.2. *Le nombre α est un invariant conforme. L'infimum dans sa définition est toujours atteint par une fonction u telle que la fonction*

$$v := |L_g u|^{\frac{-4}{n+2}} L_g u$$

vérifie les propriétés suivantes :

- *v est une solution de l'équation*

$$L_g v = \alpha' |v|^{N-2} v,$$

  où $\alpha' < 0$ (c'est-à-dire a le même signe que λ_2) ;
- *v change de signe ;*
- *v est de classe $C^{3,a}(M)$ ($a < N-2$)*

2.1.1 Preuve du Théorème 2.1.2

Invariance conforme de α

Soit $\widetilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ une métrique conforme, φ une fonction positive de classe C^∞. Alors

$$dv_{\widetilde{g}} = \varphi^{\frac{2n}{n-2}} dv_g,$$

et

$$L_{\widetilde{g}} u = \varphi^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u\varphi),$$

pour toute fonction u.

1. Remarquons que $I_{\widetilde{g}}(u) = I_g(u\varphi)$.

$$\begin{aligned}
I_{\widetilde{g}}(u) &= \frac{\left(\int_M |L_{\widetilde{g}} u|^{\frac{2n}{n+2}} \, dv_{\widetilde{g}}\right)^{\frac{n+2}{n}}}{|\int_M uL_{\widetilde{g}} u \, dv_{\widetilde{g}}|} \\
&= \frac{\left(\int_M |\varphi|^{\frac{-2n}{n-2}} |L_g(u\varphi)|^{\frac{2n}{n+2}} \varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{|\int_M u\varphi^{\frac{-(n+2)}{n-2}} L_g(u\varphi)\varphi^{\frac{2n}{n-2}} \, dv_g|} \\
&= \frac{\left(\int_M |L_g(u\varphi)|^{\frac{2n}{n-2}} \, dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{|\int_M u\varphi L_g(u\varphi) \, dv_g|} \\
&= I_g(u\varphi),
\end{aligned}$$

ce résultat provient du fait que

$$\begin{aligned}\int_M uL_{\widetilde{g}}u\ dv_{\widetilde{g}} &= \int_M u\varphi^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g(u\varphi)\varphi^{\frac{2n}{n-2}}\ dv_g \\ &= \int_M (u\varphi)L_g(u\varphi)\ dv_g.\end{aligned}$$

2. Supposons que pour toute $v \in \ker L_{\widetilde{g}}$, on a

$$\int_M |u|^{N-2}uv\ dv_{\widetilde{g}} = 0.$$

Ainsi, pour toute fonction $v' \in \ker L_g$, on a

$$\int_M |u\varphi|^{N-2}(u\varphi)v'\ dv_g = \int_M |u|^{N-2}u(v'\varphi^{-1})\ dv_{\widetilde{g}} = 0,$$

car

$$L_{\widetilde{g}}(v'\varphi^{-1}) = \varphi^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g(v') = 0,$$

c'est-à-dire

$$v'\varphi^{-1} \in Ker\ L_{\widetilde{g}}.$$

□

L'infimum de la fonctionnelle I_g est atteint

Soit $(u_m)_m$ une suite minimisante, c'est-à-dire,

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} I_g(u_m) = \alpha,$$

avec

$$\int_M |u_m|^{N-2}\ u_m\ v\ dv_g = 0,\ \ \forall\ v \in \ker L_g.$$

On peut supposer que

$$\int_M u_m L_g u_m\ dv_g = -1. \tag{2.11}$$

D'où

$$\alpha = \lim_{m\longrightarrow\infty}\left(\int_M |L_g u_m|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}.$$

On montre que $(u_m)_m$ est une suite bornée dans $H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)$. On raisonne par l'absurde et on suppose que, à une sous-suite près, $\lim \|u_m\|_{H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = +\infty$. Soit

$$v_m = \frac{u_m}{\|u_m\|_{H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)}}.$$

Puisque $\|v_m\|_{H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)} = 1$, $(v_m)_m$ est une suite bornée dans $H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)$, il existe $v \in H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)$ telle que après restriction à une sous-suite

$$v_m \rightharpoonup v \text{ dans } H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M),$$

$$v_m \longrightarrow v \text{ dans } L^2(M).$$

Des arguments standard disent que

$$\left(\int_M |L_g v|^{\frac{2n}{n+2}}\, dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}} \leq \underbrace{\liminf_m \left(\int_M |L_g v_m|^{\frac{2n}{n+2}}\, dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}_{=0},$$

ce qui implique que

$$L_g v = 0.$$

Ainsi

$$v \in \ker L_g.$$

Pour toute fonction $v' \in \ker L_g$, on a

$$\int_M |v_m|^{N-2} v_m v'\, dv_g = \frac{\int_M |u_m|^{N-2} u_m v'\, dv_g}{\|u_m\|^{N-1}_{H_2^{\frac{2n}{n+2}}}} = 0.$$

En particulier, pour $v' = v$,

$$\int_M |v_m|^{N-2} v_m v\, dv_g = 0 \longrightarrow_{m\to\infty} \int_M v^N\, dv_g,$$

donc

$$v = 0. \tag{2.12}$$

D'après un théorème standard de régularité (voir Théorème 3.57 dans [Aub98]), on a

$$1 = \|v_m\|_{H_2^{\frac{2n}{n+2}}} \leq C \left[\underbrace{\|L_g v_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}}_{\longrightarrow 0} + \|v_m\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}\right].$$

Passons à la limite pour obtenir

$$\int_M v^{\frac{2n}{n+2}}\, dv_g \geq \frac{1}{C},$$

ce qui contredit (2.12). On en déduit que $(u_m)_m$ est une suite bornée dans $H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)$. Cela montre l'existence de $u \in H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)$ telle que, quitte à extraire une sous-suite, u_m

converge vers u faiblement dans $H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)$, faiblement dans $H_1^2(M)$, et fortement dans $L^2(M)$. De plus, on a

$$\left(\int_M |L_g u|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}} \leq \liminf_m \left(\int_M |L_g u_m|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}.$$

En outre,

$$\begin{aligned}\int_M uL_g u\ dv_g &= \int_M |\nabla u|^2\ dv_g - \int_M u^2\ dv_g \\ &\leq \liminf_m \int_M |\nabla u_m|^2\ dv_g - \int_M u_m^2\ dv_g \\ &= \liminf_m \int_M u_m L_g u_m\ dv_g = -1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Donc

$$\int_M uL_g u\ dv_g < 0,$$

et

$$u \neq 0.$$

Finalement, la relation (2.13) entraîne que

$$\begin{aligned} I_g(u) &= \frac{\left(\int_M |L_g u|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{|\int_M uL_g u\ dv_g|} \\ &\leq \liminf_m \frac{\left(\int_M |L_g u_m|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{|\int_M u_m L_g u_m\ dv_g|} = \liminf_m I_g(u_m) = \alpha, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de cette étape et montre que $I_g(u) = \alpha$.

Équation d'Euler

Notons que

$$\int_M |u|^{N-2}\ u\ v'\ dv_g = 0, \text{ pour toute fonction } v' \in \ker L_g.$$

En particulier, $\alpha \neq 0$. Remarquons aussi que

$$\int_M uL_g u\ dv_g = -1.$$

En effet, la relation $\int_M uL_g u\ dv_g < -1$ implique que $I_g(u) < \lim I_g(u_m) = \alpha$. Écrivons l'équation d'Euler de u. Soit $\{u_1, \ldots, u_k\}$ une base de $\ker L_g$. D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ pour lesquels, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, on a

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} I_g(u + t\varphi) = \Sigma_i \lambda_i \frac{d}{dt}|_{t=0} g_i(u + t\varphi),$$

où

$$g_i(u) = \int_M |u|^{N-2}\ u\ u_i\ dv_g.$$

Posons $a = \left(\int_M |L_g u|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}$, un calcul facile montre que

$$2a^{\frac{2}{n+2}} \int_M |L_g u|^{\frac{-4}{n+2}} L_g u L_g \varphi\ dv_g + 2a \int_M \varphi L_g u\ dv_g = (N-1)\Sigma_i \lambda_i \int_M |u|^{N-2}\ \varphi\ u_i\ dv_g.$$

On tire de la dernière équation que pour $\varphi \in \ker L_g$, on a

$$\Sigma_i \lambda_i \int_M |u|^{N-2}\ \varphi\ u_i\ dv_g = 0.$$

Il s'ensuit que pour $\varphi = \Sigma_i \lambda_i\ u_i \in \ker L_g$, on a

$$\int_M |u|^{N-2}\ \varphi^2\ dv_g = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |u|^{N-2}\ \varphi^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad |u|^{N-2}\ \varphi = 0 \\ &\Rightarrow \quad \Sigma_i\ \lambda_i\ |u|^{N-2}\ u_i = 0. \end{aligned}$$

On déduit alors que pour toute fonction φ (dans $\ker L_g$ ou non)

$$\Sigma_i \lambda_i \int_M |u|^{N-2} \varphi\ u_i\ dv_g = 0.$$

D'après ce qui précède, on voit que, au sens des distributions,

$$L_g\left(|L_g u|^{\frac{-4}{n+2}} L_g u\right) = \alpha' L_g u, \tag{2.14}$$

où

$$\alpha' = -\alpha^{\frac{n}{n+2}} = -\int_M |L_g u|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g.$$

Posons maintenant

$$v = |L_g u|^{\frac{-4}{n+2}} L_g u \in L^N(M).$$

Ainsi

$$|v| = |L_g u|^{1-\frac{4}{n+2}} = |L_g u|^{\frac{n-2}{n+2}}.$$

Cela montre que

$$L_g u = |v|^{N-2}\ v.$$

Remplaçons chaque terme par sa valeur dans l'équation (2.14), on obtient que

$$L_g v = \alpha' |v|^{N-2}\ v.$$

Régularité de v

On sait que $u \in H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M)$, ainsi $L_g u \in L^{\frac{2n}{n+2}}(M)$. Par conséquent, $v \in L^N(M)$. Puisque $|v|^N = |L_g u|^{\frac{2n}{n+2}}$ et comme v vérifie l'équation suivante

$$L_g v = \alpha' |v|^{N-2}\, v, \tag{2.15}$$

on obtient que

$$|L_g v| = |\alpha'||v|^{N-1}.$$

Cela donne que $L_g v \in L^{\frac{N}{N-1}}(M) = L^{\frac{2n}{n+2}}(M)$. On obtient ainsi que $v \in H_2^{\frac{2n}{n+2}}(M) \subset H_1^2(M)$. Avec le Lemme 3.1 de [AH06], on en déduit que

$$v \in L^{N+\varepsilon}(M),$$

D'après des arguments standard de "bootstrap", on obtient que $v \in C^{3,\alpha}(M)(\alpha < N-2)$. Calculons maintenant $I_g(v)$. D'après (2.15), on a

$$\begin{aligned}
I_g(v) &= \frac{\left(\int_M |L_g v|^{\frac{2n}{n+2}}\, dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{\left|\int_M v L_g v\, dv_g\right|} \\
&= \frac{\alpha'^2 \left(\int_M |v|^{(N-1)\times\frac{2n}{n+2}}\, dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{|\alpha'|\int_M |v|^N\, dv_g} \\
&= \alpha^{\frac{n}{n+2}} \frac{\left(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_g} \\
&= \alpha^{\frac{n}{n+2}} \left(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n}} \\
&= \alpha^{\frac{n}{n+2}} \left(\int_M |L_g u|^{\frac{2n}{n+2}}\, dv_g\right)^{\frac{2}{n}} \\
&= \alpha^{\frac{n}{n+2}} \alpha^{\frac{2}{n+2}} = \alpha.
\end{aligned}$$

Pour toute fonction $v' \in \ker L_g$, il est facile de voir que

$$\int_M |v|^{N-2} v v'\, dv_g = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_M |v|^{N-2}\, v\, v'\, dv_g &= \int_M L_g u\, v'\, dv_g \\
&= \int_M u\, L_g v'\, dv_g \\
&= 0.
\end{aligned}$$

• v change de signe

On raisonne par l'absurde et on suppose que $v \geq 0$. Puisque $v \neq 0$, d'après le principe du maximum, on obtient que $v > 0$. La relation (2.15) implique qu'il existe un i tel que $\alpha' = \lambda_i(v)$. Mais seules les fonctions propres associées à la première valeur propre λ_1 sont positives et par conséquent, α doit être égal à la première valeur propre $\lambda_1(v)$. La Proposition 1.3.1 fournit l'existence d'une fonction w solution de l'équation

$$L_g w = \lambda_2(v)|v|^{N-2}w,$$

et que l'on normalise par

$$\int_M |v|^{N-2}w^2 dv_g = 1.$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} I_g(w) &= \frac{\left(\int_M |L_g w|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{|\int_M wL_g w\ dv_g|} \\ &= \frac{|\lambda_2(v)|^2\left(\int_M |v|^{(N-2)\times\frac{2n}{n+2}}|w|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}}}{|\lambda_2(v)|\int_M |v|^{N-2}\ w^2\ dv_g}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{n+2}{n}$ et $q = \frac{n+2}{2}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_M |v|^{(N-2)\times\frac{2n}{n+2}}\ |w|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g &= \int_M |v|^{(N-2)\times\frac{n}{n+2}}\ |w|^{\frac{2n}{n+2}}\ |v|^{(N-2)\times\frac{n}{n+2}}\ dv_g \\ &\leq \left(\int_M |v|^{N-2}\ w^2\ dv_g\right)^{\frac{n}{n+2}}\left(\int_M |v|^{\frac{4}{n-2}\times\frac{n}{2}}\ dv_g\right)^{\frac{2}{n+2}}. \end{aligned}$$

D'où

$$I_g(w) \leq |\lambda_2(v)|\left(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g\right)^{\frac{2}{n}}$$

Comme $\lambda_1(v) < \lambda_2(v) < 0$ et par définition de v, on obtient

$$\begin{aligned} I_g(w) &< |\lambda_1(v)|\left(\int_M |L_g u|^{\frac{2n}{n+2}}\ dv_g\right)^{\frac{2}{n}} \\ &= \alpha^{\frac{n}{n+2}}\alpha^{\frac{2}{n+2}} = \alpha, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\lambda_1(v) = \alpha' = -\alpha^{\frac{n}{n+2}}$. Cette inégalité contredit la définition de α. Ainsi v est une solution nodale de l'équation

$$L_g v = \alpha'|v|^{N-2}v,$$

où $\alpha' < 0$. Posons maintenant

$$v' := |\alpha|^{\frac{n-2}{4}}v,$$

il en découle que v' est solution de l'équation

$$L_g v' = \varepsilon|v'|^{N-2}v'$$

où $\varepsilon = -1 =$ signe $(\lambda_2(g))$. Cela termine la preuve du Théorème 2.0.3.

2.1.2 Preuve de la Proposition 2.1.1

Supposons que $\lambda_2(g) < 0$ et choisissons $u > 0$. D'après la Proposition 1.3.1, il existe deux fonctions v_1 et v_2 solutions des équations suivantes

$$L_g v_1 = \lambda_1(u)|u|^{N-2}v_1,$$

et

$$L_g v_2 = \lambda_2(u)|u|^{N-2}v_2,$$

telles que

$$\int_M |u|^{N-2}v_1 v_2 \, dv_g = 0.$$

Soit v_ε la fonction définie dans la preuve de la Proposition 2.0.7 et soit $V = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$. Pour toute $v \in V$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_M v_\varepsilon^{N-2} v^2 \, dv_g = 0.$$

Puisque $\lambda_1(u) < 0$ et $\lambda_2(u) < 0$, alors pour ε petit suffisamment, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sup_{v \in V} \frac{\int_M (L_g v)(v) \, dv_g}{\int_M v_\varepsilon^{N-2} v^2 \, dv_g} \right) = -\infty.$$

Cela implique finalement que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf_u \lambda_2(u) \left(\int_M u^N \, dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \right) = -\infty.$$

□

Chapitre 3

Une formule de chirurgie pour le second invariant de Yamabe

3.1 Le résultat principal

Dans cette partie, nous étudions comment la topologie de la variété influe sur le comportement de la seconde valeur propre de l'opérateur de Yamabe. Pour cela, on définit le *second invariant de Yamabe* par :

$$\sigma_2(M) = \sup_g \mu_2(g),$$

où le supremum est pris sur toutes les métriques de M. Le but de ce chapitre est d'établir le résultat suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$ telle que $\sigma_2(M) > 0$. Supposons que N est obtenue de M par une chirurgie de dimension $0 \leq k \leq n-3$, alors*

$$\sigma_2(N) \geq \min(\sigma_2(M), \Lambda_n),$$

où $\Lambda_n > 0$ ne dépend que de n.

L'énoncé de ce théorème est analogue à celui démontré par B.Ammann, M.Dahl et E. Humbert dans [ADH08] pour l'invariant de Yamabe

$$\sigma(M) = \sup_g \mu(M, g),$$

et qui dit :

Théorème 3.1.2. *Si N est obtenue à partir de M par une chirurgie de dimension $0 \leq k \leq n-3$, alors*

$$\sigma(N) \geq \min(\sigma(M), \Lambda_n),$$

où $\Lambda_n > 0$ ne dépend que de n.

Avant de parler des applications du résultat, il faut indiquer où se trouvent les difficultés de la preuve du Théorème 3.1.1 par rapport à celle du Théorème 3.1.2, dont elle est largement inspirée. Rappelons la stratégie générale : d'abord, ce que l'on démontre exactement est le

Théorème 3.1.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne, compacte de dimension $n \geq 3$ telle que $\mu_2(M, g) > 0$ et soit N une variété obtenue à partir de M par une chirurgie de dimension $0 \leq k \leq n-3$. Alors, il existe une suite de métriques g_ϑ telle que*

$$\liminf_{\vartheta \to 0} \mu_2(N, g_\vartheta) \geq \min(\mu_2(M, g), \Lambda_n),$$

où $\Lambda_n > 0$ ne dépend que de n.

En effet, pour obtenir le résultat du Théorème 3.1.1, il suffit d'appliquer le Théorème 3.1.3 avec une métrique g telle que $\mu_2(M, g)$ est arbitrairement proche de $\sigma_2(M)$. La conclusion s'obtient facilement car $\mu_2(N, g_\vartheta) \leq \sigma_2(M)$. C'est un théorème analogue qui permettait de démontrer le Théorème 3.1.2. Pour cela, il fallait commencer par construire la suite de métriques $(g_\vartheta)_\vartheta$. Cette suite est la même dans la preuve des deux théorèmes. Le but est d'étudier les première et deuxième valeurs propres $\lambda_1(u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta)$ et $\lambda_2(u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta)$ de $L_{u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta}$ où u_ϑ est une fonction bien choisie, par exemple telle que

$$\mu_2(g_\vartheta) = \lambda_2(u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta) \mathrm{Vol}_{u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta}(M)^{2/n}.$$

La stratégie consiste à montrer que les $\lambda_i := \lim_\vartheta \lambda_i(u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta)$ sont des valeurs propres de l'opérateur de Yamabe sur des "espaces limites" que l'on connaît bien.

- Une fois cette équation limite établie, il était immédiat dans [ADH08] de dire que $\lambda_i \geq \mu_1$ où μ_1 est la première valeur propre de l'opérateur de Yamabe sur l'espace limite. Dans ce contexte cependant, il peut arriver que $\lambda_1 = \lambda_2$ et la difficulté est d'exclure le fait que λ_2 n'est pas la première valeur propre de l'opérateur de Yamabe sur l'espace limite mais bien la seconde (au moins).
- Une autre difficulté importante est la suivante. Lorsque u_ϑ est choisie, comme dans [ADH08], pour que la métrique $u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta$ minimise $\mu(M, g_\vartheta)$, il est assez facile de montrer que $\lambda_1(u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta)$ est bornée. Ici de même, en choisissant u_ϑ pour que la métrique $u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta$ minimise $\mu_2(M, g_\vartheta)$, il est facile de montrer que $\lambda_2(u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta)$ est bornée. Par contre, il est difficile d'exclure le fait que $\lambda_1(u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta)$ soit bornée, ce dont on a besoin comme nous l'avons expliqué ci-dessus.

Venons-en aux applications du Théorème 3.1.1. Une fois établie une telle formule de chirurgie, il est naturel d'utiliser la théorie du cobordisme. Pour schématiser, deux variétés sont dans la même classe de cobordisme si et seulement si elles s'obtiennent l'une de l'autre par un nombre fini de chirurgies. Tout le jeu va être de se débrouiller pour que les chirurgies qui interviennent soient de dimension $k \in \{0, \cdots, n-3\}$ et alors, nous pourrons utiliser toute la richesse algébrique de la théorie. C'est cette approche qui a permis d'obtenir le Corollaire 0.0.4 à partir du Théorème 0.0.3 présenté au début de la thèse. Avec ces outils, le Théorème 3.1.2 implique :

Corollaire 3.1.4. *Soit M une variété simplement connexe de dimension $n \geq 5$. Alors, l'une au moins de ces hypothèses est vérifiée*

1. $\sigma(M) = 0$ *(ce qui implique que M est spin) ;*
2. $\sigma(M) \geq \alpha_n$*, où α_n est une constante positive ne dépend que de n.*

De même, le Théorème 3.1.1 permet d'obtenir

Corollaire 3.1.5. *Soit M une variété compacte, spin, connexe et simplement connexe de dimension $n \geq 5$ avec $n \equiv 0, 1, 2, 4$ mod 8. Si $|\alpha(M)| \leq 1$, alors*

$$\sigma_2(M) \geq \alpha_n,$$

où α_n est une constante positive dépendant seulement de n et $\alpha(M)$ est le α-genre de M (voir le Paragraphe 3.7).

Si M est non-spin, la conclusion du corollaire est une application directe du Corollaire 3.1.4 et du fait que $\sigma_2(M) \geq \sigma(M)$. L'un des intérêts de ce résultat est que son champ d'applications est plus large que celui du Corollaire 3.1.4. En particulier, notons que :

• En dimensions $1, 2$ mod 8, $\alpha(M) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que la condition sur le α-genre $|\alpha(M)| \leq 1$ est toujours satisfaite. D'où, on obtient sur toute variété connexe, simplement connexe (non nécessairement spin) de dimension $n \equiv 1, 2$ mod 8

$$\sigma_2(M) \geq \alpha_n,$$

avec $\alpha_n > 0$ qui dépend seulement de n.
• En dimensions 0 mod 8, si M est spin, $\alpha(M) = \hat{A}(M)$, où $\hat{A}$ est le $\hat{A}$-genre. Par conséquent, si M est simplement connexe (pas nécessairement spin) connexe de dimension $n \equiv 0$ mod 8, $|\hat{A}| \leq 1$ alors

$$\sigma_2(M) \geq \alpha_n,$$

où α_n est une constante positive ne dépend que de n.
• En dimensions 4 mod 8, si M est spin, on a : $\alpha(M) = \frac{1}{2}\hat{A}(M)$. Quand M est spin et $\hat{A}(M) \leq 2$, on obtient que $|\alpha(M)| \leq 1$ et par conséquent, pour toute variété M connexe, simplement connexe (pas nécessairement spin) de dimension $n \geq 5$, $n \equiv 4$ mod 8 avec $|\hat{A}| \leq 2$, on obtient que

$$\sigma_2(M) \geq \alpha_n,$$

où α_n est une constante positive ne dépend que de n.

La suite du chapitre est consacré à la preuve du Théorème 3.1.3 et de ses corollaires.

3.2 Recoller deux variétés le long d'une sous-variété

3.2.1 Chirurgie sur les variétés

Définition 3.2.1. Une chirurgie sur une variété M de dimension n est une procédure qui permet de construire une nouvelle variété N de dimension n

$$N = (M \setminus f(S^k \times B^{n-k})) \cup (\overline{B}^{k+1} \times S^{n-k-1})/\sim,$$

en supprimant $f(S^k \times B^{n-k}) \subset M$ et en la remplaçant par $\overline{B}^{k+1} \times S^{n-k-1}$, où $f : S^k \times B^{n-k} \to M$ est un plongement. La notation $\sim$ signifie que le recollement se fait le long du bord. Il y a une manière canonique de construire sur l'espace topologique N une structure différentiable qui est en fait une variété différentielle. On dit que N est obtenue à partir de M par une chirurgie de dimension k et on utilisera la notation $M \overset{k}{\to} N$.

Les chirurgies sont en fait des cas particuliers de sommes connexes le long d'une sphère de dimension k. Essayons de décrire la situation un peu plus précisément, en essayant, puisque l'on travaille avec des métriques riemanniennes, d'adapter la construction à ce cadre. Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes complètes de dimension n. Soit W une variété compacte de dimension k, où $0 \leq k \leq n$. On considère des plongements lisses $\bar{w}_i : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to TM_i$, $i = 1, 2$. Supposons que la restriction de $\bar{w}_i$ sur $W \times \{0\}$ prend ses valeurs dans la section nulle de TM_i (que l'on l'identifie avec M_i). Cela donne ainsi un plongement $W \to M_i$. L'image de ce plongement sera notée W_i'. En outre, on suppose que la restriction de $\bar{w}_i$ est un isomorphisme $\{p\} \times \mathbb{R}^{n-k} \to N_{\bar{w}_i(p,0)} W_i'$ pour tout $p \in W_i$, où NW_i' désigne le fibré normal de W_i' défini en utilisant g_i. On pose $w_i := \exp^{g_i} \circ \overline{w}_i$. Cela nous fournit des plongements $w_i : W \times B^{n-k}(R_{\max}) \to M_i$ pour $R_{\max} > 0$ et $i = 1, 2$. On a $W_i' = w_i(W \times \{0\})$. On définit l'union disjointe

$$(M, g) := (M_1 \amalg M_2, g_1 \amalg g_2),$$

et

$$W' := W_1' \amalg W_2'.$$

Notons r_i la fonction sur M_i indiquant la distance à W_i'. Autrement dit, $r_1 \circ w_1(p, x) = r_2 \circ w_2(p, x) = |x|$ pour $p \in W$, $x \in B^{n-k}(R_{\max})$. Soit r la fonction sur M définie par $r(x) := r_i(x)$ où $x \in M_i$, $i = 1, 2$. Pour $0 < \varepsilon$, on pose $U_i(\varepsilon) := \{x \in M_i : r_i(x) < \varepsilon\}$ et $U(\varepsilon) := U_1(\varepsilon) \cup U_2(\varepsilon)$. Pour $0 < \varepsilon < \vartheta$ On définit

$$N_\varepsilon := (M_1 \setminus U_1(\varepsilon)) \cup (M_2 \setminus U_2(\varepsilon))/\sim,$$

et

$$U_\varepsilon^N(\vartheta) := (U(\vartheta) \setminus U(\varepsilon))/\sim$$

où $\sim$ signifie que nous identifions $x \in \partial U_1(\varepsilon)$ et $w_2 \circ w_1^{-1}(x) \in \partial U_2(\varepsilon)$. Alors

$$N_\varepsilon = (M \setminus U(\vartheta)) \cup U_\varepsilon^N(\vartheta).$$

On dit que N_ε est obtenue à partir de M_1, M_2 (et $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$) par une somme connexe le long de W avec ε comme paramètre.
Le type de difféomorphisme de N_ε est indépendant de ε, d'où la notation $N = N_\varepsilon$. Mais dans certains cas où subsiste une ambigüité, on gardera la notation N_ε. Par exemple, la fonction $r : M \to [0, \infty)$ donne une fonction continue $r_\varepsilon : N_\varepsilon \to [\varepsilon, \infty)$ dont le domaine dépend de ε. Il sera important aussi de garder l'indice ε de $U_\varepsilon^N(\vartheta)$ puisque l'on va donner des estimations cruciales des solutions de l'équation de Yamabe sur cet ensemble.

Dans le cas particulier où $M_1 = M$, $M_2 = S^n$, $W = S^k$, $w_1 : S^k \times B^{n-k} \to M$ un plongement définissant une chirurgie et $w_2 : S^k \times B^{n-k} \to S^n$ le plongement canonique de $S^k \times B^{n-k}$ comme voisinage tubulaire d'une grande sphère S^k dans S^n. Puisque $S^n \setminus w_2(S^k \times B^{n-k})$ est difféomorphe à $\overline{B^{k+1}} \times S^{n-k-1}$, on peut vérifier que (voir [Kos93, Section VI, 9]) la variété N ainsi obtenue est la difféomorphe à celle que l'on obtient en faisant une chirurgie sur M à partir de w_1.

3.3 Les constantes $\Lambda_{n,k}$

3.3.1 Définition de $\Lambda_{n,k}$

Dans ce paragraphe, on définit les constantes $\Lambda_{n,k}$ de la même manière que dans [ADH08]. La seule différence est que les fonctions étudiées ne sont plus forcément positives. Plus présicément, soit (M, h) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$. Pour $i = 1, 2$ on note $\Omega^{(i)}$ l'ensemble des fonctions v de classe C^2 (pas nécessairement positives) solutions de l'équation

$$L_h v = \mu |v|^{N-2} v,$$

où $\mu \in \mathbb{R}$. On suppose que v vérifie

- $v \not\equiv 0$,
- $\|v\|_{L^N(M)} \leq 1$,
- $v \in L^\infty(M)$,

avec

- $v \in L^2(M)$, pour $i = 1$,

ou

- $\mu \|v\|^{N-2}_{L^\infty(M)} \geq \dfrac{(n-k-2)^2(n-1)}{8(n-2)}$, pour $i = 2$.

Pour $i = 1, 2$, posons

$$\mu^{(i)}(M, h) := \inf_{v \in \Omega^{(i)}(M,h)} \mu(v).$$

Si $\Omega^{(i)}(M, h) = \{\emptyset\}$, on pose $\mu^{(i)} = \infty$.

Définition 3.3.1. Pour $n \geq 3$ et $0 \leq k \leq n-3$, définissons

$$\Lambda^{(i)}_{n,k} := \inf_{c \in [-1,1]} \mu^{(i)}(\mathbb{H}^{k+1}_c \times \mathbb{S}^{n-k-1}),$$

et

$$\Lambda_{n,k} := \min(\Lambda^{(1)}_{n,k}, \Lambda^{(2)}_{n,k}),$$

où

$$\mathbb{H}^{k+1}_c := (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}, \eta^{k+1}_c = e^{2ct}\xi^k + dt^2)$$

En considérant des fonctions positives v, B. Ammann, M. Dahl et E. Humbert ont montré dans [ADH08] que ces constantes sont positives. Il est facile de vérifier que la positivité de v ne joue aucun rôle dans la preuve et donc, il reste vrai que $\Lambda_{n,k} > 0$. Ils ont donné aussi explicitement des bornes inférieures de ces constantes. La plupart de leurs techniques restent valables dans ce contexte mais nous ne discuterons pas ce fait ici. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se référer à [ADH], [ADH1] et [ADH2].

3.4 Espaces limites et solutions limites

Dans ce paragraphe, nous présentons un lemme technique qui nous sera utile par la suite.

Lemme 3.4.1. *Soit M une variété de dimension n. Soit (g_ϑ) une suite de métriques qui converge dans C^2 vers g sur tout compact $K \subset M$ quand $\vartheta \to 0$. Supposons que v_ϑ est une suite de fonctions telles que $\|v_\vartheta\|_{L^\infty(M)}$ est bornée et $\|L_{g_\vartheta} v_\vartheta\|_{L^\infty(M)}$ tend vers 0. Alors, il existe une fonction v de classe C^∞, solution de l'équation*

$$L_g v = 0$$

telle que v_ϑ tend vers v dans C^1 sur tout compact $K \subset\subset V$.

Preuve : Soient K, K' des compacts de M tels que $K' \subset K$. On a

$$-g_\vartheta^{ij}\left(\partial_i\partial_j v_\vartheta - \Gamma_{ij}^k \partial_k v_\vartheta\right) + \frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{Scal}_{g_\vartheta} v_\vartheta = f_\vartheta \to 0.$$

Le Théorème 9.11 de [GT77] nous donne une constante $C > 0$ telle que

$$\|v_\vartheta\|_{H^{2,p}(K',g)} \leq C(\|L_{g_\vartheta} v_\vartheta\|_{L^p(K,g_\vartheta)} + \|v_\vartheta\|_{L^p(K,g_\vartheta)}).$$

Il s'ensuit que v_ϑ est bornée dans $H^{2,p}(K', g)$ pour tout $p \geq 1$. Le théorème de Kondrakov nous donne l'existence d'une fonction $v_{K'}$ telle que v_ϑ tend vers $v_{K'}$ dans $C^1(K')$. Prenons une suite croissante de compacts K_m tels que $\cup_m K_m = M$ et tels que (v_ϑ) converge vers v_m sur $C^1(K_m)$. Définissons $v := v_m$ sur K_m. En utilisant le procédé d'extraction diagonale, on déduit que v_ϑ tend vers v dans C^1 sur tout compact. Puisque, pour toute fonction lisse φ à support compact, on a

$$\int_M L_{g_\vartheta}\varphi v_\vartheta dv_{g_\vartheta} \to \int_M L_g \varphi v dv_g,$$

et

$$\|L_{g_\vartheta} v_\vartheta\|_{L^\infty(M)} \to 0,$$

on obtient que $L_g v = 0$ au sens des distributions. Les théorèmes de régularité standard impliquent que v est de classe C^∞.

3.5 Les estimations L^2 sur des WS-fibrés

Dans ce paragraphe, on établit des estimations sur certains types de fibrés. Ces estimations se trouvent déjà dans [ADH08] et seulement quelques détails doivent être modifiés pour être adaptés à ce cadre. Pour éviter au lecteur de chercher lui-même ces détails, nous donnons une preuve complète de ces estimées. On suppose que le produit $P := I \times W \times S^{n-k-1}$ est muni d'une métrique g_{WS} de la forme

$$g_{\mathrm{WS}} = dt^2 + e^{2\varphi(t)}h_t + \sigma^{n-k-1}$$

et on désigne par WS-fibré ce produit, où h_t est une famille des métriques lisses sur W et qui dépendent de t, où φ est une fonction sur I. Soit $\pi : P \to I$ la projection sur la première composante et $F_t = \pi^{-1}(t) = \{t\} \times W \times S^{n-k-1}$. La métrique induite sur F_t est définie par

$$g_t := dt^2 + e^{2\varphi(t)}h_t + \sigma^{n-k-1}.$$

Soit H_t la courbure moyenne de F_t en P. Elle est donnée par

$$H_t = -\frac{k}{n-1}\varphi'(t) + e(h_t),$$

où $e(h_t) := \frac{1}{2}tr_{h_t}(\partial_t h_t)$. La dérivée de l'élément de volume de F_t est

$$\partial_t dv_{g_t} = -(n-1)H_t dv_{g_t}.$$

Les courbures scalaires de h_t et de g_{WS} sont liées par la formule suivante (pour plus de détails sur ce calcul, le lecteur pourra se référer à l'Appendice A.2 dans [ADH08])

$$\begin{aligned} Scal^{g_{\mathrm{WS}}} \quad = \quad & e^{-2\varphi(t)}Scal^{h_t} + (n-k-1)(n-k-2) \\ & -k(k+1)\varphi'(t)^2 - 2\varphi''(t) - (k+1)\varphi'(t)tr(h_t^{-1}\partial_t h_t) \\ & +\frac{3}{4}tr((h_t^{-1}\partial_t h_t)^2) - \frac{1}{4}(tr(h_t^{-1}\partial_t h_t))^2 - tr(h_t^{-1}\partial_t^2 h_t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

D'après la définition de H_t, quand $t \to h_t$ est constante, on obtient que

$$H_t = -\frac{k}{n-1}\varphi'(t).$$

Définition 3.5.1. On dit que la condition (A_t) est vérifiée si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$$\begin{array}{ll} 1.) & t \mapsto h_t \text{ est constante,} \\ 2.) & e^{-2\varphi(t)} \inf_{x\in W} \mathrm{Scal}^{h_t}(x) \geq -\frac{n-k-2}{32}a, \\ 3.) & |\varphi'(t)| \leq 1, \\ 4.) & 0 \leq -2k\varphi''(t) \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-k-2)^2. \end{array} \tag{A_t}$$

De même, dit que la condition (B_t) est vérifiée si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$$\begin{array}{ll} 1.) & t \mapsto \varphi(t) \text{ est constante,} \\ 2.) & \inf_{x\in F_t} \mathrm{Scal}^{g_{\mathrm{WS}}}(x) \geq \frac{1}{2}\mathrm{Scal}^{\sigma^{n-k-1}} = \frac{1}{2}(n-k-1)(n-k-2), \\ 3.) & \frac{(n-1)^2}{2}e(h_t)^2 + \frac{n-1}{2}\partial_t e(h_t) \geq -\frac{3}{64}(n-k-2). \end{array} \tag{B_t}$$

Théorème 3.5.2. *Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$ telles que $[\alpha, \beta] \subset I$. On suppose que l'une des deux conditions (A_t) et (B_t) est satisfaite. On suppose également que les fonctions $u, v \in C^2$ sont liées par*

$$L^{g_{\mathrm{WS}}} v = a\Delta^{g_{\mathrm{WS}}} v + \mathrm{Scal}^{g_{\mathrm{WS}}} v = \mu u^{N-2} v + d^* A(dv) + Xv + \varepsilon \partial_t v - sv \tag{3.2}$$

où $s, \varepsilon \in C^\infty(P)$, $A \in \mathrm{End}(T^*P)$, et $X \in \Gamma(TP)$ sont des termes de perturbation qui proviennent de la différence entre G et g_{WS}. On suppose que l'endomorphisme A est symétrique et que X et A sont verticaux, c'est-à-dire que $dt(X) = 0$ et $A(dt) = 0$. Enfin, on suppose que

$$\mu \|u\|_{L^\infty(P)}^{N-2} \leq \frac{(n-k-2)^2(n-1)}{8(n-2)},$$

Alors, il existe $c_0 > 0$ indépendante de α, β, et φ, telle que si

$$\|A\|_{L^\infty(P)}, \|X\|_{L^\infty(P)}, \|s\|_{L^\infty(P)}, \|\varepsilon\|_{L^\infty(P)}, \|e(h_t)\|_{L^\infty(P)} \leq c_0,$$

on a

$$\int_{\pi^{-1}((\alpha+\gamma,\beta-\gamma))} v^2 \, dv_{g_{\mathrm{WS}}} \leq \frac{4\|v\|_{L^\infty}^2}{n-k-2} \left(\mathrm{Vol}^{g_\alpha}(F_\alpha) + \mathrm{Vol}^{g_\beta}(F_\beta) \right),$$

où $\gamma := \frac{\sqrt{32}}{n-k-2}$.

Remarquons que l'on doit avoir la relation $\beta - \alpha > 2\gamma$ pour obtenir notre résultat et notons que ce théorème nous donne une estimation de $\|v\|_{L^2}$.

Preuve : Le laplacien $\Delta^{g_{\mathrm{WS}}}$ sur P est calculé en fonction du laplacien Δ^{g_t} sur F_t, et on a :

$$\Delta^{g_{\mathrm{WS}}} = \Delta^{g_t} - \partial_t^2 + (n-1) H_t \partial_t.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{F_t} v\Delta^{g_{\mathrm{WS}}} v \, dv_{g_t} &= \int_{F_t} \left(v\Delta^{g_t} v - v(\partial_t^2 v) + (n-1) H_t v(\partial_t v) \right) dv_{g_t} \\ &= \int_{F_t} \left(|d_{\mathrm{vert}} v|^2 - v(\partial_t^2 v) + (n-1) H_t v(\partial_t v) \right) dv_{g_t}. \end{aligned}$$

À partir de la dernière équation et de l'équation (3.2), on a

$$\begin{aligned} a \int_{F_t} v(\partial_t^2 v) \, dv_{g_t} &= \int_{F_t} a \left(|d_{\mathrm{vert}} v|^2 + (n-1) H_t v(\partial_t v) - v\Delta^{g_{\mathrm{WS}}} v \right) dv_{g_t} \\ &= \int_{F_t} \Big(a|d_{\mathrm{vert}} v|^2 + a(n-1) H_t v \partial_t v \\ &\quad - \langle d_{\mathrm{vert}} v, A(d_{\mathrm{vert}} v) \rangle - vXv - \varepsilon v \partial_t v \\ &\quad + (\mathrm{Scal}^{g_{\mathrm{WS}}} + s) v^2 - \mu u^{N-2} v \Big) \, dv_{g_t}. \end{aligned}$$

On introduit $S_t := \inf_{F_t} \mathrm{Scal}^{g_{\mathrm{WS}}}$, dans la suite, $\delta(c_0)$ désigne une constante positive qui tend vers 0 quand c_0 tend vers 0. En utilisant l'inégalité $2\int |ab| \leq \int a^2 + b^2$, on obtient

$$\begin{aligned} a\int_{F_t} v(\partial_t^2 v)\, dv_{g_t} \quad &\geq \quad \int_{F_t} \Big((a-\delta(c_0))|d_{\mathrm{vert}}v|^2 + a(n-1)H_t v\partial_t v \\ &\quad -\delta(c_0)(\partial_t v)^2 + (S_t - \delta(c_0))v^2 - \mu u^{N-2}v^2\Big)\, dv_{g_t}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On pose

$$w(t) := \|v\|_{L^2(F_t)}.$$

On a

$$w^2(t) = \int_{F_t} v^2\, dv_{g_t}.$$

Dérivons pour obtenir :

$$2w'(t)w(t) = \int_{F_t} \Big(2v(\partial_t v) - (n-1)H_t v^2\Big)\, dv_{g_t}. \tag{3.4}$$

Supposons que la condition (A_t) est vérifiée. Dans ce cas, on a

$$H_t = -\frac{k}{n-1}\varphi'(t),$$

ce qui implique que

$$w(t)w'(t) = \int_{F_t} v(\partial_t v)\, dv_{g_t} + \frac{k}{2}\varphi'(t)w(t)^2. \tag{3.5}$$

On dérive une deuxième fois pour obtenir

$$\begin{aligned} w(t)w''(t) + w'(t)^2 \quad &= \quad \int_{F_t} (\partial_t v)^2\, dv_{g_t} + \int_{F_t} v\partial_t^2 v\, dv_{g_t} + \frac{k}{2}\varphi''(t)w(t)^2 \\ &\quad +k\varphi'(t)w'(t)w(t) + \int_{F_t} kv(\partial_t v)\varphi'(t)\, dv_{g_t} \\ &= \quad \frac{k}{2}\varphi''(t)w(t)^2 + k\varphi'(t)w'(t)w(t) \\ &\quad + \int_{F_t} \big((\partial_t v)^2 + v\partial_t^2 v - (n-1)H_t v\partial_t v\big)\, dv_{g_t}. \end{aligned}$$

La relation (3.3) nous donne :

$$\begin{aligned} w(t)w''(t) + w'(t)^2 \quad &\geq \quad \left(\frac{k}{2}\varphi''(t) + \frac{1}{a}\left(S_t - \delta(c_0)\right)\right) w(t)^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{\delta(c_0)}{a}\right)\int_{F_t} (\partial_t v)^2\, dv_{g_t} \\ &\quad -\frac{1}{a}\int_{F_t} \mu u^{N-2}v^2\, dv_{g_t} + k\varphi'(t)w'(t)w(t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à l'équation (3.5), on obtient

$$\left(w'(t)w(t)-\frac{k}{2}\varphi'(t)w(t)^2\right)^2=\left(\int_{F_t}v(\partial_t v)\,dv_{g_t}\right)^2\leq w(t)^2\int_{F_t}(\partial_t v)^2\,dv_{g_t}.$$

Il vient que

$$\left(w'(t)-\frac{k}{2}\varphi'(t)w(t)\right)^2\leq\int_{F_t}(\partial_t v)^2\,dv_{g_t}. \tag{3.7}$$

On a

$$\mu\,\|u\|_{L^\infty}^{N-2}\leq\frac{(n-k-2)^2(n-1)}{8(n-2)},$$

et donc

$$\frac{\mu}{a}\int_{F_t}|u|^{N-2}\,v^2\,dv_{g_t}\leq\frac{(n-k-2)^2(n-1)}{8a(n-2)}w(t)^2.$$

On obtient

$$\frac{\mu}{a}\int_{F_t}|u|^{N-2}\,v^2\,dv_{g_t}\leq\frac{(n-k-2)^2}{32}w(t)^2. \tag{3.8}$$

En injectant les deux équations (3.7) et (3.8) dans (3.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}w'(t)^2+w(t)w''(t)\;\geq\;&\left(1-\frac{\delta(c_0)}{a}\right)\left(w'(t)-\frac{k}{2}\varphi'(t)w(t)\right)^2\\&+\left(\frac{k}{2}\varphi''(t)+\frac{1}{a}\left(S_t-\delta(c_0)\right)\right)w(t)^2\\&-\frac{(n-k-2)^2}{32}w(t)^2+k\varphi'(t)w'(t)w(t),\end{aligned}$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned}w(t)w''(t)\;\geq\;&-\frac{\delta(c_0)}{a}\left(w'(t)-\frac{k}{2}\varphi'(t)w(t)\right)^2\\&+\underbrace{\left(\frac{k}{2}\varphi''(t)+\frac{1}{a}\left(S_t-\delta(c_0)\right)+\frac{k^2}{4}\varphi'(t)^2-\frac{(n-k-2)^2}{32}\right)}_{D}w(t)^2.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Maintenant, on veut estimer le terme D. En se référant à l'équation 3.1 et à l'hypothèse (1) de (A_t), on trouve que $e(h_t)=0$. On obtient alors que

$$\begin{aligned}D\;=\;&\frac{1}{a}\left(e^{-2\varphi(t)}\mathrm{Scal}^{h_t}-k(k+1)\varphi'(t)^2-2k\varphi''(t)+(n-k-1)(n-k-2)\right)\\&-\frac{\delta(c_0)}{a}+\frac{k}{2}\varphi''(t)+\frac{k^2}{4}\varphi'(t)^2-\frac{(n-k-2)^2}{32}\\=\;&\frac{1}{a}e^{-2\varphi(t)}\mathrm{Scal}^{h_t}+\frac{1}{a}\left((n-k-1)(n-k-2)-\delta(c_0)\right)+\frac{k}{2(n-1)}\varphi''(t)\\&-\frac{k}{4(n-1)}(n-k-2)\varphi'(t)^2-\frac{(n-k-2)^2}{32}.\end{aligned}$$

On tire des hypothèses 2.) et 3.) de (A_t) que

$$\begin{aligned} D &\geq -\frac{n-k-2}{32} + \frac{1}{a}\left((n-k-1)(n-k-2) - \delta(c_0)\right) + \frac{k}{2(n-1)}\varphi''(t) \\ &\quad -\frac{k}{4(n-1)}(n-k-2) - \frac{(n-k-2)^2}{32} \\ &= \frac{1}{4(n-1)}\left((n-1)(n-k-2)^2 + 2k\varphi''(t)\right) \\ &\quad -\frac{n-k-2}{32} - \frac{(n-k-2)^2}{32} - \frac{\delta(c_0)}{a}. \end{aligned}$$

En utilisant 4.) de (A_t) et le fait que $n-k-2 \geq 1$, on obtient de plus que

$$\begin{aligned} D &\geq \frac{1}{4(n-1)}\left(\frac{1}{2}(n-1)(n-k-2)^2\right) \\ &\quad -\frac{(n-k-2)^2}{32} - \frac{(n-k-2)^2}{32} - \frac{\delta(c_0)}{a} \\ &= \frac{(n-k-2)^2}{16} - \frac{\delta(c_0)}{a}. \end{aligned}$$

En injectant cette dernière inégalité dans (3.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} w(t)w''(t) &\geq -\frac{\delta(c_0)}{a}\left(w'(t) - \frac{k}{2}\varphi'(t)w(t)\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{(n-k-2)^2}{16} - \frac{\delta(c_0)}{a}\right)w(t)^2 \\ &\geq -\frac{2\delta(c_0)}{a}w'(t)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{2\delta(c_0)}{a}\frac{k^2}{4}\varphi'(t)^2 + \frac{(n-k-2)^2}{16} - \frac{\delta(c_0)}{a}\right)w(t)^2, \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$. Puisque $|\varphi'| \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} w(t)w''(t) &\geq -\frac{2\delta(c_0)}{a}w'(t)^2 \\ &\quad + \left(\frac{(n-k-2)^2}{16} - \frac{\delta(c_0)}{a}\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)\right)w(t)^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Fixons $\hat{\delta} > 0$ petit, puis choisissons $c_0 > 0$ suffisamment petit pour que $\delta(c_0)$ le soit aussi. L'équation (3.10) donne

$$w(t)w''(t) \geq \frac{(n-k-2)^2}{32}w(t)^2 - \hat{\delta}w'(t)^2. \tag{3.11}$$

On pose $\widetilde{w}(t) = w(t)^{1+\hat{\delta}}$. on dérive cette égalité pour obtenir

$$\begin{aligned} \widetilde{w}''(t) &= \hat{\delta}(1+\hat{\delta})w'(t)^2 w(t)^{\hat{\delta}-1} + (1+\hat{\delta})w''(t)w(t)^{\hat{\delta}} \\ &\geq (1+\hat{\delta})\frac{(n-k-2)^2}{32}w(t)^{1+\hat{\delta}} \\ &\geq \frac{(n-k-2)^2}{32}\widetilde{w}(t). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la condition (B_t) est vérifiée, alors

$$H_t = e(h_t),$$

et au lieu d'avoir la relation (3.4), on a

$$w(t)w'(t) = \int_{F_t} \left(v(\partial_t v) + \frac{n-1}{2} e(h_t) v^2 \right) dv_{g_t}. \tag{3.12}$$

D'où

$$\begin{aligned} w(t)w''(t) + w'^2(t) \quad = \quad & \int_{F_t} \Bigg((\partial_t v)^2 + (n-1)e(h_t) v \partial_t v \\ & + \left(\frac{(n-1)^2}{2} e(h_t)^2 + \frac{n-1}{2} \partial_t e(h_t) \right) v^2 \Bigg) dv_{g_t} \\ & + \int_{F_t} \left(v \partial_t^2 v - (n-1) H_t v \partial_t v \right) dv_{g_t}. \end{aligned}$$

Les hypothèses (2) et (3) de la condition (B_t) donnent

$$\begin{aligned} w(t)w''(t) + w'(t)^2 \quad \geq \quad & \int_{F_t} \left(\left(1 - \frac{\delta(c_0)}{a} \right) (\partial_t v)^2 + (n-1)e(h_t) v \partial_t v - \frac{\mu}{a} u^{N-2} v^2 \right) dv_{g_t} \\ & + \left(\frac{1}{2a}(n-k-1)(n-k-2) - \frac{3}{64}(n-k-2) - \frac{\delta(c_0)}{a} \right) w(t)^2. \end{aligned}$$

Avec la relation (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} w'(t)^2 + w(t)w''(t) \quad \geq \quad & \int_{F_t} \left(\left(1 - \frac{\delta(c_0)}{a} \right) (\partial_t v)^2 + (n-1)e(h_t) v \partial_t v \right) dv_{g_t} \\ & + \Bigg(\frac{1}{2a}(n-k-1)(n-k-2) - \frac{3}{64}(n-k-2) \\ & - \frac{1}{32}(n-k-2)^2 - \frac{\delta(c_0)}{a} \Bigg) w(t)^2 \\ \geq \quad & \int_{F_t} \left(\left(1 - \frac{\delta(c_0)}{a} \right) (\partial_t v)^2 + (n-1)e(h_t) v \partial_t v \right) dv_{g_t} \quad (3.13) \\ & + \left(\frac{1}{32}(n-k-2)(n-k-3/2) - \frac{\delta(c_0)}{a} \right) w(t)^2 \\ \geq \quad & \int_{F_t} \left(\left(1 - \frac{\delta(c_0)}{a} \right) (\partial_t v)^2 + (n-1)e(h_t) v \partial_t v \right) dv_{g_t} \\ & + \left(\frac{1}{32}(n-k-2)^2 + \frac{1}{64} - \frac{\delta(c_0)}{a} \right) w(t)^2. \end{aligned}$$

Définissons maintenant $E_t := \sup_{F_t} |e(h_t)|$, d'après (3.12), on a

$$\begin{aligned} w(t)^2 \int_{F_t} (\partial_t v)^2 \, dv_{g_t} &\geq \left(\int_{F_t} v(\partial_t v) \, dv_{g_t} \right)^2 \\ &= \left(w'(t)w(t) - \frac{n-1}{2} \int_{F_t} e(h_t) v^2 \, dv_{g_t} \right)^2 \\ &= \left(w'(t)w(t) \right)^2 + \left(\frac{n-1}{2} \int_{F_t} e(h_t) v^2 \, dv_{g_t} \right)^2 \\ &\quad -(n-1) w'(t) w(t) \int_{F_t} e(h_t) v^2 \, dv_{g_t} \\ &\geq w'(t)^2 w(t)^2 - \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 E_t^2 w(t)^4 \\ &\quad -(n-1)|w'(t)| w(t) \int_{F_t} |e(h_t)| v^2 \, dv_{g_t} \\ &\geq w'(t)^2 w(t)^2 - \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 E_t^2 w(t)^4 \\ &\quad -(n-1) E_t |w'(t)| w(t)^3. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{F_t} (\partial_t v)^2 \, dv_{g_t} &\geq w'(t)^2 - \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 E_t^2 w(t)^2 - (n-1) E_t |w'(t)| w(t) \\ &\geq w'(t)^2 - \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 E_t^2 w(t)^2 - \frac{n-1}{2} E_t \left(w'(t)^2 + w(t)^2 \right) \\ &= \left(1 - \frac{n-1}{2} E_t \right) w'(t)^2 - \left(\frac{n-1}{2} E_t + \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 E_t^2 \right) w(t)^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{F_t} e(h_t) v \partial_t v \, dv_{g_t} \right| &\leq \int_{F_t} |e(h_t) v \partial_t v| \, dv_{g_t} \\ &\leq E_t \int_{F_t} \left(\frac{v^2 + (\partial_t v)^2}{2} \right) dv_{g_t}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{F_t} (n-1) e(h_t) v \partial_t v \, dv_{g_t} \geq -\frac{n-1}{2} E_t \int_{F_t} \left(v^2 + (\partial_t v)^2 \right) dv_{g_t}. \tag{3.15}$$

Quitte à injecter (3.14) et (3.15) dans (3.13), on a également

$$\begin{aligned} w(t)w''(t)+w'(t)^2 &\geq \int_{F_t}\left(1-\frac{\delta(c_0)}{a}-\frac{n-1}{2}E_t\right)(\partial_t v)^2\,dv_{g_t} \\ &\quad +\left(\frac{1}{32}(n-k-2)^2+\frac{1}{64}-\frac{\delta(c_0)}{a}-\frac{n-1}{2}E_t\right)w(t)^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{32}(n-k-2)^2+\frac{1}{64}-\frac{\delta(c_0)}{a}-\frac{n-1}{2}E_t\right)w(t)^2 \\ &\quad +\left(1-\frac{\delta(c_0)}{a}-\frac{n-1}{2}E_t\right)\left(1-\frac{n-1}{2}E_t\right)w'(t)^2 \\ &\quad -\left(1-\frac{\delta(c_0)}{a}-\frac{n-1}{2}E_t\right)\left(\frac{n-1}{2}E_t+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2E_t^2\right)w(t)^2. \end{aligned}$$

Fixons encore une fois $\hat{\delta}, c_0 > 0$ suffisamment petits pour obtenir

$$w(t)w''(t) \geq \frac{(n-k-2)^2}{32}w(t)^2 - \hat{\delta}w'(t)^2.$$

Par conséquent, dans les deux cas (A_t) et (B_t), la fonction $\widetilde{v}(t) = w(t)^{1+\hat{\delta}}$ vérifie

$$v''(t) \geq v(t)/\gamma^2,$$

où $\gamma^2 := \frac{32}{(n-k-2)^2}$. Maintenant, appliquons le Lemme 3.5.3 énoncé à la fin de ce paragraphe et dont la preuve se trouve dans [ADH08] à la fonction $K(t) := \widetilde{w}(t+\frac{\beta+\alpha}{2})$ en prenant $T = \frac{\beta-\alpha}{2} - \gamma$ et $m = \frac{2}{1+\hat{\delta}}$. On obtient

$$\int_{-T}^{T} K^m\,dt \leq \frac{\gamma}{m}\left(K(T+\gamma)^m + K(-T-\gamma)^m\right). \tag{3.16}$$

On a aussi

$$\int_{-T}^{T} K^m\,dt = \int_{-\frac{\beta-\alpha}{2}+\gamma}^{\frac{\beta-\alpha}{2}-\gamma}\left(w^{(1+\hat{\delta})}\right)^m\left(t+\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\,dt$$

Posons $s = t + \frac{\beta+\alpha}{2}$. Nous obtenons

$$\int_{-T}^{T} K^m\,dt = \int_{\alpha+\gamma}^{\beta-\gamma} w^2\,ds = \int_{\pi^{-1}((\alpha+\gamma,\beta-\gamma))} v^2\,dv_{g_{\mathrm{WS}}}.$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} \left(K(T+b)^m + K(-T-b)^m\right) &= \int_{F_\alpha} v^2\,dv_{g_\alpha} + \int_{F_\beta} v^2\,dv_{g_\beta} \\ &\leq \|v\|^2_{L^\infty(P)}\left(\mathrm{Vol}^{g_\alpha}(F_\alpha) + \mathrm{Vol}^{g_\beta}(F_\beta)\right). \end{aligned}$$

Pour $\hat{\delta}$ petit, on peut supposer que $m \geq \sqrt{2}$, ainsi l'équation (3.16) nous donne

$$\int_{\pi^{-1}((\alpha+\gamma,\beta-\gamma))} v^2\,dv_{g_{\mathrm{WS}}} \leq \frac{4\|v\|^2_{L^\infty}}{n-k-2}\left(\mathrm{Vol}^{g_\alpha}(F_\alpha) + \mathrm{Vol}^{g_\beta}(F_\beta)\right).$$

Cela termine la preuve du théorème. Il ne nous reste qu'à énoncer le lemme que nous avons utilisé ci-dessus.

Lemme 3.5.3. *Supposons T un réel positif. Soit $w : [-T-\gamma, T+\gamma] \to \mathbb{R}$ une fonction positive qui satisfait*

$$w''(t) \geq \frac{w(t)}{\gamma^2}. \tag{3.17}$$

Alors

$$\int_{-T}^{T} w(t)^m \, dt \leq \frac{\gamma}{m} \left(w(T+\gamma)^m + w(-T-\gamma)^m\right) \tag{3.18}$$

pour tout $m \geq 1$.

3.6 Preuve du Théorème 3.1.3

Cette section est consacrée à la preuve du Théorème 3.1.3.

3.6.1 Connexité de N

Pour les applications, nous aurons besoin d'appliquer le Théorème 3.1.3 soit quand M est connexe et dans ce cas N l'est aussi, soit quand M est l'union disjointe d'une variété M' connexe telle $\sigma(M') > 0$ et d'une variété V qui porte une métrique à courbure scalaire nulle. Dans ce cas, la variété N sera la somme connexe de M' et de V et sera donc encore une fois connexe. Dans toute la suite, nous considèrons donc que N est connexe.

3.6.2 Construction de la métrique g_ϑ

Modification de la métrique g

Pour des raisons techniques, nous aurons besoin dans la preuve du Théorème 3.1.3 que $\mu(g) \neq 0$. Pour résoudre cette difficulté, nous utiliserons le résultat suivant :

Proposition 3.6.1. *Il existe sur M une métrique g' arbitrairement proche de g dans C^2 telle que $\mu(g') \neq 0$.*

En effet, supposons que le Théorème 3.1.3 est vrai si $\mu(g) \neq 0$ et montrons que le résultat reste valable si $\mu(g) = 0$. On vérifie aisément que si g' est suffisamment proche de g dans C^2, $\mu_2(g')$ est proche de $\mu_2(g)$. Considérons une métrique g' donnée par la Proposition 3.6.1 assez proche de g de telle sorte que $\mu_2(g') > \mu_2(g) - \varepsilon > 0$ pour un ε suffisamment petit. Appliquons le Théorème 3.1.3 à g' : on obtient une suite de métriques g_ϑ sur N telle que

$$\liminf_{\vartheta \to 0} \mu_2(N, g_\vartheta) \geq \min(\mu_2(M, g'), \Lambda_n) \geq \min(\mu_2(M, g) - \varepsilon, \Lambda_n).$$

Il suffit de faire tendre ε vers 0 pour obtenir le Théorème 3.1.3. Il ne reste qu'à montrer la Proposition 3.6.1.

Preuve de la Proposition 3.6.1 : D'abord, afin de simplifier les notations, on considère g comme étant une métrique sur $M \amalg S^n$, égale à la métrique standard σ^n

sur S^n. Puisque $\mu(g) = 0$, on peut supposer que $\mathrm{Scal}_g = 0$, quitte à faire un changement conforme de métriques. Considérons une métrique h pour laquelle Scal_h est constante strictement négative, et dont l'existence est donnée par le Théorème 1 page 38 de [Aub98]. Considérons la famille analytique de métriques $g_t := th+(1-t)g$. Comme la première valeur propre λ_t de L_{g_t} est simple, la fonction $t \to \lambda_t$ est analytique (voir par exemple le Théorème VII.3.9 dans [Kat95]). Puisque $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 < 0$, on obtient que pour un t choisi assez proche de 0, $\lambda_t \neq 0$. Cela démontre la Proposition 3.6.1 puisque $\mu(g_t)$ a le même signe que λ_t.

Définition de la métrique g_ϑ

Comme on l'a mentionné ci-dessus, on va utiliser la même construction que celle faite dans [ADH08]. Par conséquent, on donne la définition de g_ϑ sans explication supplémentaire. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [ADH08]. Là encore, on considère que la métrique g est définie sur $M \amalg S^n$ et est égale à la métrique standard σ^n sur S^n. Nous gardons les notations introduites dans la Section 3.2. Soit h_1 la restriction de g à la sphère $S'_1 \subset M$ et h_2 la restriction de la métrique standard $\sigma^n = g$ de S^n à $S'_2 \subset S^n$. Définissons $S' := S'_1 \amalg S'_2$ et $h := h_1 \amalg h_2$ sur S'. Dans tout ce qui suit, r désigne la fonction distance à S' dans $(M \amalg S^n, g \amalg \sigma^n)$. En coordonnées polaires, la métrique g est de la forme

$$g = h + \xi^{n-k} + T = h + dr^2 + r^2\sigma^{n-k-1} + T \tag{3.19}$$

sur $U(R_{\max}) \setminus S' \cong S' \times (0, R_{\max}) \times S^{n-k-1}$. Ici, T est un $(2,0)$-tenseur symétrique s'annulant sur S' et qui est le terme d'erreur qui mesure le fait que g n'est pas en général une métrique produit (au moins au voisinage de S'_1). On définit aussi la métrique produit

$$g' := h + \xi^{n-k} = h + dr^2 + r^2\sigma^{n-k-1}, \tag{3.20}$$

sur $U(R_{\max}) \setminus S'$ de telle sorte que $g = g' + T$. Comme dans [ADH08], on a

$$\begin{cases} |T(X,Y)| & \leq & Cr|X|_{g'}|Y|_{g'}, \\ |(\nabla_U T)(X,Y)| & \leq & C|X|_{g'}|Y|_{g'}|U|_{g'}, \\ |(\nabla^2_{U,V})T(X,Y)| & \leq & C|X|_{g'}|Y|_{g'}|U|_{g'}|V|_{g'}, \end{cases}$$

pour $X, Y, U, V \in T_xM$ et $x \in U(R_{\max})$. On définit $T_1 := T|_M$ et $T_2 := T|_{S^n}$. On fixe $R_0 \in (0, R_{\max})$, $R_0 < 1$ et on choisit une fonction positive lisse $F : M \setminus S' \to \mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in M \setminus U_1(R_{\max}) \amalg S^n \setminus U_2(R_{\max})\,; \\ r(x)^{-1}, & \text{si } x \in U_i(R_0) \setminus S'. \end{cases}$$

Ensuite, on choisit une suite de nombres positifs $\theta = \theta_j$ tendant vers 0. Pour tout θ, on choisit un nombre $\delta_0 = \delta_0(\vartheta) \in (0, \vartheta)$ assez petit pour que les arguments ci-dessous soient corrects. Pour tout $\vartheta > 0$, si δ_0 est suffisamment petit, il existe $A_\vartheta \in [\vartheta^{-1}, (\delta_0)^{-1})$ et une fonction lisse $f : U(R_{\max}) \to \mathbb{R}$ qui dépend seulement de r telle que

$$f(x) = \begin{cases} -\ln r(x), & \text{si } x \in U(R_{\max}) \setminus U(\vartheta)\,; \\ \ln A_\vartheta, & \text{si } x \in U(\delta_0), \end{cases}$$

et qui vérifie

$$\left| r\frac{df}{dr} \right| = \left| \frac{df}{d(\ln r)} \right| \leq 1, \quad \text{et} \quad \left\| r\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr} \right) \right\|_{L^\infty} = \left\| \frac{d^2 f}{d^2(\ln r)} \right\|_{L^\infty} \to 0 \tag{3.21}$$

quand $\vartheta \to 0$. Posons $\varepsilon = e^{-A_\vartheta}\delta_0$ que l'on peut supposer plus petit que 1 et utilisons cet ε pour construire M comme dans la Section 3.2. Sur $U_\varepsilon^N(R_{\max}) = (U(R_{\max}) \setminus U(\varepsilon))/\sim$, on définit t par

$$t := \begin{cases} -\ln r_1 + \ln \varepsilon, & \text{sur } U_1(R_{\max}) \setminus U_1(\varepsilon)\,; \\ \ln r_2 - \ln \varepsilon, & \text{sur } U_2(R_{\max}) \setminus U_2(\varepsilon). \end{cases}$$

On vérifie que

- $r_i = e^{|t| + \ln \varepsilon} = \varepsilon e^{|t|}$;
- $F(x) = \varepsilon^{-1} e^{-|t|}$ pour $x \in U(R_0) \setminus U^N(\vartheta)$, ou bien si $|t| + \ln \varepsilon \leq \ln R_0$. On peut donc réécrire
$$F^2 g = \varepsilon^{-2} e^{-2|t|}(h + T) + dt^2 + \sigma^{n-k-1}$$
sur $U(R_0) \setminus U^N(\vartheta)$;
- et
$$f(t) = \begin{cases} -|t| - \ln \varepsilon, & \text{si } \ln \vartheta - \ln \varepsilon \leq |t| \leq \ln R_{\max} - \ln \varepsilon\,; \\ \ln A_\vartheta, & \text{si } |t| \leq \ln \delta_0 - \ln \varepsilon. \end{cases}$$

On a $|df/dt| \leq 1$, $\|d^2 f/dt^2\|_{L^\infty} \to 0$. Maintenant, choisissons une fonction de cut-off $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que $\chi = 0$ sur $(-\infty, -1]$, $|d\chi| \leq 1$, et $\chi = 1$ sur $[1, \infty)$. Finalement, on définit

$$g_\vartheta := \begin{cases} F^2 g_i, & \text{sur } M_i \setminus U_i(\vartheta)\,; \\ e^{2f(t)}(h_i + T_i) + dt^2 + \sigma^{n-k-1}, & \text{sur } U_i(\vartheta) \setminus U_i(\delta_0)\,; \\ A_\vartheta^2 \chi(t/A_\vartheta)(h_2 + T_2) + A_\vartheta^2(1 - \chi(t/A_\vartheta))(h_1 + T_1) & \\ \quad + dt^2 + \sigma^{n-k-1}, & \text{sur } U_\varepsilon^N(\delta_0). \end{cases}$$

La métrique g peut s'écrire sous la forme suivante :

$$g_\vartheta := g'_\vartheta + \widetilde{T}_t \text{ sur } U^N(R_0),$$

où g'_ϑ est la métrique sans terme d'erreur égale à

$$g'_\vartheta = e^{2f(t)}\widetilde{h}_t + dt^2 + \sigma^{n-k-1},$$

où la métrique $\widetilde{h}_t$ est donnée par

$$\widetilde{h}_t := \chi(\frac{t}{A_\vartheta})h_2 + (1 - \chi(\frac{t}{A_\vartheta}))h_1,$$

Le terme d'erreur $\widetilde{T}_t$ s'écrit

$$\widetilde{T}_t := e^{2f(t)}(\chi(\frac{t}{A_\vartheta})T_2 + (1 - \chi(\frac{t}{A_\vartheta}))T_1).$$

En outre, le terme d'erreur $\widetilde{T}_t$ possède les propriétés suivantes

$$\begin{cases} |\widetilde{T}(X,Y)| & \leq & Cr|X|_{g'_\vartheta}|Y|_{g'_\vartheta}, \\ |\nabla\widetilde{T}_t|_{g'_\vartheta} & \leq & Ce^{-f(t)}, \\ |\nabla^2\widetilde{T}_t|_{g'_\vartheta} & \leq & Ce^{-f(t)}, \end{cases}$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique g'_ϑ, pour tout X, $Y \in T_xN$ et $x \in U^N(R_0)$.

3.6.3 Un résultat préliminaire

Pour montrer le Théorème 3.1.3, on commence par montrer les résultats suivants.

Théorème 3.6.2.
Première partie : *Soit (u_ϑ) une suite de fonctions satisfaisant*

$$L_{g_\vartheta}u_\vartheta = \lambda_\vartheta|u_\vartheta|^{N-2}u_\vartheta,$$

et telles que $\int_N |u_\vartheta|^N dv_{g_\vartheta} = 1$ et $\lambda_\vartheta \to_{\vartheta\to 0} \lambda_\infty$, où $\lambda_\infty \in \mathbb{R}$. Alors, au moins l'une des deux assertions suivantes est vraie

1. *$\lambda_\infty \geq \Lambda_n$, où $\Lambda_n > 0$ dépend seulement de n ;*
2. *il existe une fonction $u \in C^\infty(M \amalg S^n)$, $u \equiv 0$ sur S^n, $u \not\equiv 0$ sur M solution de*

$$L_g u = \lambda_\infty|u|^{N-2}u,$$

avec

$$\int_M |u|^N dv_g = 1$$

telle que, pour tout compact $K \subset M \amalg S^n \setminus S'$ (notons que l'on peut considérer K comme une partie de N), $F^{\frac{n-2}{2}}u_\vartheta$ tend vers u dans $C^2(K)$, où F est définie dans la Section 3.6.2. De plus,

(a) La norme L^2 de u_ϑ est uniformément bornée en ϑ ;

(b) $\lim_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \sup_{U^N(b)} u_\vartheta = 0$;

(c) $\lim_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \int_{U^N(b)} u_\vartheta^N \, dv_{g_\vartheta} = 0$.

Deuxième partie : *Soit u_ϑ la fonction définie dans la première partie ci-dessus et supposons que la deuxième assertion soit satisfaite. Soit v_ϑ une suite de fonctions vérifiant*

$$L_{g_\vartheta}v_\vartheta = \mu_\vartheta|u_\vartheta|^{N-2}v_\vartheta,$$

telle que $\int_N v_\vartheta^N dv_{g_\vartheta} = 1$, $\mu_\vartheta \to \mu_\infty$ où $\mu_\infty < \mu(\mathbb{S}^n)$. Dans ce cas, il existe une fonction $v \in C^\infty(M \amalg S^n)$, $v \equiv 0$ sur S^n, $v \not\equiv 0$ sur M solution de

$$L_g v = \mu_\infty|u|^{N-2}v$$

avec

$$\int_M |v|^N dv_g = 1$$

telle que, pour tout compact $K \subset M \amalg S^n \setminus S'$, $F^{\frac{n-2}{2}}v_\vartheta$ tend vers v dans $C^2(K)$. De plus,

1. *La norme L^2 de v_ϑ est uniformément bornée en ϑ ;*
2. $\lim_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \sup_{U^N(b)} v_\vartheta = 0$;
3. $\lim_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \int_{U^N(b)} v_\vartheta^N \, dv_{g_\vartheta} = 0$.

Preuve du Théorème 3.6.2 Première partie

Soit (u_ϑ) une suite de fonctions qui satisfont

$$L_{g_\vartheta} u_\vartheta = \lambda_\vartheta |u_\vartheta|^{N-2} u_\vartheta,$$

et telles que $\int_N |u_\vartheta|^N \, dv_{g_\vartheta} = 1$ et $\lambda_\vartheta \to_{\vartheta\to 0} \lambda_\infty$, où $\lambda_\infty \in \mathbb{R}$. On procède de la même manière que dans [ADH08], où ici, la variété M_2 est la sphère S^n munie de la métrique standard σ^n, W est la sphère S^k. La différence est que les fonctions u_ϑ peuvent changer de signe. Comme on va le voir, les cas étudiés dans [ADH08] seront les mêmes et se traiteront de la même manière à l'exception du cas II.1.2 où il faudra travailler plus. Avant de passer à la preuve proprement dite, remarquons que :

Remarque 3.6.3. Dans la preuve du théorème principal dans [ADH08], il a été montré que

$$\lambda_\infty > -\infty.$$

Ici, on se place dans l'hypothèse où λ_∞ a une limite. Si nous ne faisions pas cette hypothèse, il faudrait le montrer mais, comme le lecteur peut s'en convaincre, il n'y a aucune raison pour que ce soit vrai sans hypothèses supplémentaires.

L'argument du Corollaire 7.7 dans [ADH08] reste valable ici et on obtient que

$$\liminf_{\vartheta} \|u_\vartheta\|_{L^\infty(N)} > 0. \tag{3.22}$$

Plusieurs cas sont étudiés :

Cas I. $\limsup_{\vartheta\to 0} \|u_\vartheta\|_{L^\infty(N)} = \infty$.

Posons $m_\vartheta := \|u_\vartheta\|_{L^\infty(N)}$ et choisissons $x_\vartheta \in N$ tel que $u_\vartheta(x_\vartheta) = m_\vartheta$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{\vartheta\to 0} m_\vartheta = \infty$. On doit étudier les deux sous-cas suivants.

Sous-cas I.1. Il existe $b > 0$ tel que $x_\vartheta \in N \setminus U^N(b)$ pour un nombre infini de ϑ.

Sous-cas I.2. Pour tout $b > 0$, $x_\vartheta \in U^N(b)$ pour ϑ suffisamment petit.

Cas II. Il existe une constante C_0 telle que $\|u_\vartheta\|_{L^\infty(N)} \leq C_0$ pour tout ϑ.

Sous-cas II.1. Il existe $b > 0$ tel que

$$\liminf_{\vartheta\to 0} \left(\lambda_\vartheta \sup_{U^N(b)} {u_\vartheta}^{N-2} \right) < \frac{(n-k-2)^2(n-1)}{8(n-2)}.$$

Sous-cas II.1.1. $\limsup_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \sup_{U^N(b)} u_\vartheta > 0$.

Sous-cas II.1.2. $\lim_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \sup_{U^N(b)} u_\vartheta = 0$.

Sous-cas II.2.

$$\lambda_\vartheta \sup_{U^N(b)} {u_\vartheta}^{N-2} \geq \frac{(n-k-2)^2(n-1)}{8(n-2)}$$

Dans les deux sous-cas I.1 et I.2, il a été montré dans [ADH08] que $\lambda_\infty \geq \mu(\mathbb{S}^n)$. La preuve reste valable quand u_ϑ change de signe. Dans les sous-cas II.1.1 et II.2, on obtient que $\lambda_\infty \geq \Lambda_{n,k}$ où $\Lambda_{n,k}$ est un nombre positif qui ne dépend que de n et k. La définition des $\Lambda_{n,k}$ dans [ADH08] est l'infimum des énergies de solutions positives de l'équation de Yamabe sur des espaces modèles (voir la Section 3.3). Cette définition doit être légèrement modifiée quand on étudie des solutions nodales, mais la preuve du fait que $\Lambda_{n,k} > 0$ reste la même.

Dans les sous-cas I.1, I.2, II.1.1 et II.2, on obtient alors que $\lambda_\infty \geq \Lambda_n$, où

$$\Lambda_n := \min_{k\in\{0,\cdots,n-3\}} \{\Lambda_{n,k}, \mu\}.$$

En particulier, l'assertion 1) de la première partie du Théorème 3.6.2 est vraie. Examinons maintenant le sous-cas II.1.2., l'hypothèse du sous-cas II.1 permet d'obtenir comme dans [ADH08] que

$$\int_N u_\vartheta^2 dv_{g_\vartheta} \leq C. \tag{3.23}$$

pour $C > 0$. Les hypothèses du sous-cas II.1.2 sont telles que

$$\sup_N(u_\vartheta) \leq C \tag{3.24}$$

et

$$\limsup_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \sup_{U^N(b)} u_\vartheta = 0. \tag{3.25}$$

Étape 1. *On montre que* $\lim_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \int_{U^N(b)} |u_\vartheta|^N dv_{g_\vartheta} = 0$.

Soit $b > 0$. Par la relation (3.23), on a

$$\int_{U^N(b)} |u_\vartheta|^N dv_{g_\vartheta} \leq A_0 \sup_{U^N(b)} |u_\vartheta|^{N-2},$$

où A_0 est un nombre positif qui ne dépend pas de b et ϑ. Le résultat découle alors de (3.25).

Étape 2. *Convergence C^2 sur tous les compacts de $M \amalg S^n \setminus S'$.*

Soit $(\Omega_j)_j$ une suite croissante d'ouverts de $(M \amalg S^n \setminus S', g)$ à bords lisses tels que $\bigcup_j \Omega_j = M \amalg S^n \setminus S'$, $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$. La norme $\|u_\vartheta\|_{L^\infty(N)}$ est bornée, donc $\|u_\vartheta\|_{L^\infty(\Omega_{j+1})}$ l'est aussi. En utilisant les résultats standard de régularité (pour plus de détails, voir par exemple [GT77]), on voit que la suite (u_ϑ) est bornée dans l'espace de Sobolev $H^{2,p}(\Omega'_j)$ $\forall p \in (1,\infty)$ où Ω'_j est un domaine tel que $\overline{\Omega}_j \subset \Omega'_j \subset \overline{\Omega'_j} \subset \Omega_{j+1}$. Les injections de Sobolev impliquent que (u_ϑ) est bornée dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega_j})$ pour tout $\alpha \in (0,1)$. (Voir le Théorème 4.12 dans [AF03] pour plus d'informations sur les théorèmes d'injection de Sobolev).
En utilisant le procédé d'extraction diagonale, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on prouve que (u_ϑ) converge vers $\widetilde{u_j} \in C^1(\overline{\Omega_j})$ telle que $\widetilde{u_j}|_{\overline{\Omega}_{j-1}} = \widetilde{u}_{j-1}$.
On définit

$$\widetilde{u} = \widetilde{u_j} \text{ on } \overline{\Omega_j}.$$

En prenant une sous-suite diagonale de u_ϑ, on aura que u_ϑ tend vers $\widetilde{u}$ dans C^1 sur tout compact de $M \amalg S^n \setminus S'$ et la convergence C^1 des fonctions u_ϑ, implique que la fonction $\widetilde{u}$ satisfait l'équation suivante

$$L_{g_\vartheta}\widetilde{u} = \lambda_\infty |\widetilde{u}|^{N-2}\widetilde{u} \text{ sur } M \amalg S^n \setminus S'. \tag{3.26}$$

On rappelle que $g_\vartheta = F^2 g = (F^{\frac{n-2}{2}})^{\frac{4}{n-2}} g$ sur $U^N(b)$. L'invariance conforme de l'opérateur de Yamabe nous donne que pour tout v

$$L_{F^2 g} v = F^{-\frac{n+2}{2}} L_g (F^{\frac{n-2}{2}} v).$$

Maintenant, on pose

$$u = F^{\frac{n-2}{2}}\widetilde{u}.$$

On obtient que

$$\begin{aligned} L_g u &= F^{\frac{n+2}{2}} L_{F^2 g}\widetilde{u} \\ &= F^{\frac{n+2}{2}} \lambda_\infty |\widetilde{u}|^{N-2}\widetilde{u} \\ &= \lambda_\infty |u|^{N-2} u. \end{aligned}$$

Ceci montre que u est solution sur $(M \amalg S^n \setminus S', g)$ de l'équation suivante

$$L_g u = \lambda_\infty |u|^{N-2} u.$$

En utilisant l'étape 1 et le fait que $\int_N u_\vartheta^N dv_{g_\vartheta} = 1$, la fonction u vérifie

$$\begin{aligned} \int_{M \amalg S^n} u^N \, dv_g &= \int_{M \amalg S^n \setminus S'} \widetilde{u}^N \, dv_g \\ &= \lim_{b\to 0} \lim_{\vartheta \to 0} \int_{U^N(b)} u_\vartheta^N \, dv_{g_\vartheta} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Étape 3. *Enlèvement de la singularité*

La prochaine étape consiste à montrer que u est une solution sur $M \amalg S^n$ de

$$L_g u = \lambda_\infty |u|^{N-2} u. \tag{3.27}$$

Pour prouver la dernière égalité sur $M \amalg S^n$, on montrera que pour tout $\varphi \in C^\infty(M \amalg S^n)$, on a

$$\int_{M \amalg S^n} L_g u\varphi \, dv_g = \int_{M \amalg S^n} \lambda_\infty |u|^{N-2} u\varphi \, dv_g.$$

Tout d'abord, remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{M \amalg S^n} uL_g\varphi \, dv_g &= \int_{M \amalg S^n} uL_g(\varphi - \chi_\varepsilon\varphi + \chi_\varepsilon\varphi) \, dv_g \\ &= \int_{M \amalg S^n} uL_g(\chi_\varepsilon\varphi) \, dv_g + \int_{M \amalg S^n} uL_g((1-\chi_\varepsilon)\varphi) \, dv_g, \end{aligned}$$

où

$$\left| \begin{array}{ll} \chi_\varepsilon = 1 & \text{si } d_g(x, S') < \varepsilon, \\ \chi_\varepsilon = 0 & \text{si } d_g(x, S') \geq 2\varepsilon, \\ |d\chi_\varepsilon| < \frac{2}{\varepsilon}. & \end{array} \right.$$

Puisque $(1 - \chi_\varepsilon)$ est à support compact dans $M \amalg S^n \setminus S'$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{M \amalg S^n} uL_g((1-\chi_\varepsilon)\varphi) \, dv_g &= \int_{M \amalg S^n} (L_g u)(1-\chi_\varepsilon)\varphi \, dv_g \\ &\to \int_{M \amalg S^n} L_g u\varphi \, dv_g = \int_{M \amalg S^n} \lambda_\infty |u|^{N-2} u\varphi \, dv_g. \end{aligned}$$

Donc, il reste à prouver

$$\int_{M \amalg S^n} uL_g(\chi_\varepsilon\varphi) \, dv_g \to 0.$$

On a

$$\begin{aligned} L_g(\chi_\varepsilon\varphi) &= C_n\Delta(\chi_\varepsilon\varphi) + \mathrm{Scal}_g(\chi_\varepsilon\varphi) \\ &= C_n\Delta\chi_\varepsilon\varphi + C_n\Delta\varphi\chi_\varepsilon + \mathrm{Scal}_g(\chi_\varepsilon\varphi) - 2\langle\nabla\chi_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle \\ &= \chi_\varepsilon L_g\varphi + C_n(\Delta\chi_\varepsilon)\varphi - 2\langle\nabla\chi_\varepsilon, \nabla\varphi\rangle. \end{aligned}$$

Du théorème de Lebesgue, on déduit que

$$\int_{M \amalg S^n} u\chi_\varepsilon L_g\varphi \, dv_g \to 0 \text{ p.p.}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{M \amalg S^n} uL_g(\chi_\varepsilon\varphi) \, dv_g \right| &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{C_\varepsilon} u \, dv_g \qquad (3.28) \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \left(\int_{C_\varepsilon} u^2 \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}} (\mathrm{Vol}(Supp(C_\varepsilon)))^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.29) \end{aligned}$$

où $C_\varepsilon = \{x \in M \amalg S^n; \varepsilon < d(x, S') < 2\varepsilon\} = U^N(2\varepsilon) \setminus U^N(\varepsilon)$.
La relation (3.23) permet d'écrire

$$\int_N \widetilde{u}^2 \, dv_{F^2 g} < +\infty,$$

ce qui implique que

$$\int_{C_\varepsilon} \widetilde{u}^2 \, dv_{F^2 g} < +\infty.$$

Calculons maintenant

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} \widetilde{u}^2 \, dv_{g_\vartheta} &= \int_{C_\varepsilon} \left(F^{\frac{n-2}{2}}\right)^{\frac{2n}{n-2}} F^{-(n-2)} u^2 \, dv_g \\ &= \int_{C_\varepsilon} F^2 u^2 \, dv_g < +\infty. \end{aligned}$$

Rappelons que $F = \frac{1}{r}$ sur C_ε. Revenons à la relation (3.28), pour déduire que

$$\begin{aligned} \left| \int_M u L_g(\chi_\varepsilon \varphi) \, dv_g \right| &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \left(\int_{C_\varepsilon} \frac{u^2 F^2}{F^2} \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}} (\mathrm{Vol}(C_\varepsilon))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \times \varepsilon \times \varepsilon^{\frac{n-k}{2}} = C\varepsilon^{\frac{n-k}{2}-1}. \end{aligned}$$

Puisque $k \leq n-3$, on a

$$\frac{n-k}{2} - 1 > 0,$$

il en découle que

$$\int_{M \amalg S^n} u L_g(\chi_\varepsilon \varphi) \, dv_g \to 0.$$

Finalement, on obtient que u est une solution sur $M \amalg S^n$ de l'équation

$$L_g u = \lambda_\infty |u|^{N-2} u.$$

Étape 4. *On a : soit $u \equiv 0$ sur $\mathbb{S}^n$, soit $\lambda_\infty \geq \mu(\mathbb{S}^n)$.*

Notons que la fonction u vérifie

$$\int_{M \amalg S^n} |u|^N \, dv_g \leq 1. \tag{3.30}$$

Ceci vient du fait que

$$\begin{aligned} \int_{M \amalg S^n} |u|^N \, dv_g &= \int_{M \amalg S^n} |\widetilde{u}|^N \, dv_{g_\vartheta} \\ &\leq \int_N |\widetilde{u}|^N \, dv_{g_\vartheta} \\ &\leq \lim_{\vartheta \to 0} \int_N |u_\vartheta|^N \, dv_{g_\vartheta} = 1. \end{aligned}$$

Supposons que $u \not\equiv 0$ sur $\mathbb{S}^n$. Posons $w = u_{|\mathbb{S}^n}$, les relations (3.27) et (3.30) montrent que

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{S}^n) \leq Y(w) &= \frac{\lambda_\infty \int_{\mathbb{S}^n} w^N \, dv_g}{\left(\int_{\mathbb{S}^n} w^N \, dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &= \lambda_\infty \left(\int_{\mathbb{S}^n} w^N \, dv_g\right)^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_\infty.\end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda_\infty \geq \mu(\mathbb{S}^n)$, ce qui prouve la première partie du Théorème 3.6.2.

Preuve du Théorème 3.6.2 Deuxième partie

Considérons une fonction v_ϑ satisfaisant

$$L_{g_\vartheta} v_\vartheta = \mu_\vartheta |u_\vartheta|^{N-2} v_\vartheta, \tag{3.31}$$

avec

$$\int_N |v_\vartheta|^N \, dv_{g_\vartheta} = 1.$$

On commence tout d'abord par remarquer que $U^N(b)$ est un WS-fibré, pour tout $b > 0$ (comme dans le Lemme 7.6 de [ADH08]). Puisque u_ϑ vérifie la relation suivante

$$\lim_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \sup_{U^N(b)} u_\vartheta = 0.$$

Il s'ensuit que, pour tout b assez petit, on a

$$\mu_\vartheta \|u_\vartheta\|^{N-2}_{U^N(b)} \leq \frac{(n-k-2)^2(n-1)}{8(n-2)}.$$

On peut appliquer le Théorème 3.5.2 sur $U^N(b)$ et la preuve du Lemme 7.6 dans [ADH08] nous donne l'existence de nombres $c_1, c_2 > 0$ qui ne dépendent pas de ϑ et tels que

$$\int_N |v_\vartheta|^2 \, dv_{g_\vartheta} \leq c_1 \|v_\vartheta\|^2_{L^\infty(N)} + c_2. \tag{3.32}$$

En conséquence, on tire que

$$\liminf_{\vartheta\to 0} \|v_\vartheta\|_{L^\infty(N)} > 0.$$

En effet, supposons que

$$\lim_{\vartheta\to 0} \|v_\vartheta\|_{L^\infty(N)} = 0.$$

D'après l'équation (3.32), on a

$$\begin{aligned}1 = \int_N |v_\vartheta|^N \, dv_{g_\vartheta} &\leq \|v_\vartheta\|^{N-2}_{L^\infty(N)} \int_N |v_\vartheta|^2 \, dv_{g_\vartheta} \\ &\leq \|v_\vartheta\|^{N-2}_{L^\infty(N)} (c_1 \|v_\vartheta\|^2_{L^\infty(N)} + c_2) \to 0,\end{aligned}$$

quand $\vartheta \to 0$. On obtient ainsi la contradiction désirée. Pour le reste de la preuve, nous allons étudier plusieurs cas. Dans tout ce qui suit, seul le cas II.1.2 pose un vrai problème : la plupart des arguments pour résoudre les sous-cas I.1, I.2 et II.1 sont contenus dans [ADH08]. Pour ces cas, on ne donnera que de brèves explications.

Cas I. $\limsup_{\vartheta\to 0}\|v_\vartheta\|_{L^\infty(N)}=\infty$.

Posons $m_\vartheta:=\|v_\vartheta\|_{L^\infty(N)}$ et choisissons $x_\vartheta\in N$ avec $v_\vartheta(x_\vartheta)=m_\vartheta$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{\vartheta\to 0} m_\vartheta=\infty$.

Sous-cas I.1. Il existe $b>0$ tel que $x_\vartheta\in N\setminus U^N(b)$ pour un nombre infini de ϑ.

Quitte à extraire une sous-suite, on suppose qu'il existe un $\bar{x}\in M\amalg S^n\setminus U(b)$ tel que $\lim_{\vartheta\to 0}x_\vartheta=\bar{x}$. On définit $\tilde{g}_\vartheta:=m_\vartheta^{\frac{4}{n-2}}g_\vartheta$. Pour $r>0$, [ADH08] nous donne pour ϑ assez petit, l'existence d'un difféomorphisme

$$\Theta_\vartheta : B^n(0,r)\to B^{g_\vartheta}(x_\vartheta, m_\vartheta^{-\frac{2}{n-2}}r)$$

telle que la suite de métriques $(\Theta_\vartheta^*(\tilde{g}_\vartheta))$ converge vers la métrique plate ξ^n dans $C^2(B^n(0,r))$, où $B^n(0,r)$ est la boule standard de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon r. En posant $\tilde{u}_\vartheta:=m_\vartheta^{-1}u_\vartheta$, $\tilde{v}_\vartheta:=m_\vartheta^{-1}v_\vartheta$, on obtient

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}_\vartheta}\tilde{v}_\vartheta &= \lambda_\vartheta\tilde{u}_\vartheta^{N-2}\tilde{v}_\vartheta \\ &= \frac{\lambda_\vartheta}{m_\vartheta^{N-2}}{u_\vartheta}^{N-2}\tilde{v}_\vartheta. \end{aligned}$$

Puisque $\|u_\vartheta\|_{L^\infty(N)}\leq C$, il s'ensuit que $\|L_{\tilde{g}_\vartheta}\tilde{v}_\vartheta\|_{L^\infty(N)}$ tend vers 0. En appliquant le Lemme 3.4.1, on obtient une solution $v\not\equiv 0$ sur $\mathbb{R}^n$ de l'équation $L_{\xi^n}v=0$. Comme $\mathrm{Scal}_{\xi^n}=0$, v est une fonction harmonique et qui admet un maximum au point $x=0$. En conséquence, v est constante égale à $v(0)=1$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\|v\|_{L^N}\leq 1$.

Sous-cas I.2. pour tout $b>0$, $x_\vartheta\in U^N(b)$ pour ϑ suffisamment petit.

On procède comme dans le sous-cas I.2 dans [ADH08]. De même que le sous-cas I.1 ci-dessus, d'après le Lemme 3.4.1, il vient que la fonction v est harmonique sur $\mathbb{R}^n$ et admet un maximum au point $x=0$. On obtient ainsi une contradiction.

Cas II. Il existe une constante C_0 telle que $\|v_\vartheta\|_{L^\infty(N)}\leq C_0$ pour tout ϑ.

Par la relation (3.32), il existe une constante A_0 indépendante de ϑ telle que

$$\|v_\vartheta\|_{L^2(N,g_\vartheta)}\leq A_0. \tag{3.33}$$

On divise le traitement du cas II en deux sous-cas.

Sous-cas II.1. $\limsup_{b\to 0}\limsup_{\vartheta\to 0}\sup_{U^N(b)}v_\vartheta>0$.

Répétons ce qui a été fait dans [ADH08] : d'après le Lemme 3.4.1, on obtient l'existence d'une fonction v solution de $L_{G_c}v=0$ sur $\mathbb{R}^{k+1}\times S^{n-k-1}, G_c$ pour $c\in[-1,1]$ où $G_c=e^{2cs}\xi^k+ds^2+\sigma^{n-k-1}$. Dans les sous-cas I.1 et I.2, en se servant du fait que $\frac{\lambda_\vartheta}{m_\vartheta^{N-2}}$ tend vers 0, on montre qu'en passant à la limite : $L_{G_c}v=0$. Ici, on argumente d'une

manière différente : d'abord, posons $\alpha_0 := \frac{1}{2} \limsup_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \sup_{U^N(b)} v_\vartheta > 0$. On peut supposer qu'il existe une suite de nombres positifs (b_i) et (ϑ_i) telle que

$$\sup_{U^N(b_i)} v_{\vartheta_i} \geq \alpha_0,$$

pour tout i. Pour simplifier, on écrit ϑ et b à la place de ϑ_i et b_i. Prenons $x'_\vartheta \in \overline{U^N(b_\vartheta)}$ tel que

$$v_\vartheta(x'_\vartheta) \geq \alpha_0.$$

Pour $r, r' > 0$, on définit

$$U_\vartheta(r, r') := B^{\widetilde{h}_{t_\vartheta}}(y_\vartheta, e^{-f(t_\vartheta)}r) \times [t_\vartheta - r', t_\vartheta + r'] \times S^{n-k-1}.$$

Comme dans [ADH08], la fonction v est obtenue comme étant la limite de v_ϑ sur chaque $U_\vartheta(r, r')$ (avec $r, r' > 0$). En remarquant que

$$\sup_{U_\vartheta(r,r')} |u_\vartheta| = 0,$$

il en découle que $L_{G_c} v = 0$, puis que

$$|u_\vartheta|^{N-2} v_\vartheta \to 0 \text{ uniformément sur } U_\vartheta(r, r').$$

Sous-cas II.2. $\lim_{b\to 0} \limsup_{\vartheta\to 0} \sup_{U^N(b)} v_\vartheta = 0$.

En utilisant la même méthode que celle de la Section 3.6.3, on obtient qu'il existe une fonction v solution de l'équation suivante

$$L_g v = \mu_\infty |u|^{N-2} v,$$

telle que

$$\int_N v^N \, dv_g \leq 1.$$

On suppose que $v \not\equiv 0$ sur $\mathbb{S}^n$, ce qui donne

$$\mu(\mathbb{S}^n) \leq Y(v) = \mu_\infty \frac{\int_{\mathbb{S}^n} u^{N-2} v^2 \, dv_g}{(\int_{\mathbb{S}^n} v^N \, dv_g)^{\frac{2}{N}}} = 0$$

la nullité du terme de droite provenant du fait que $u \equiv 0$ sur S^n. C'est une contradiction qui prouve que $v \not\equiv 0$ sur $\mathbb{S}^n$. Par le même argument que dans la première partie, on a : $\int_M |v|^N dv_g = 1$. On obtient finalement que la fonction v répond à toutes les conclusions données par la Deuxième partie du Théorème 3.6.2.

3.6.4 Preuve du Théorème 3.1.3

Soit (g_ϑ) la suite de métriques définies sur N dans la Section 3.6.2.
Étape 1 : Pour ϑ petit suffisamment, on montre que

$$\lambda_k(M, g) > 0 \Rightarrow \lambda_k(N, g_\vartheta) > 0.$$

Remarque 3.6.4. Cette étape montre un résultat intéressant en soi : la propriété pour une variété compacte de porter une métrique pour laquelle λ_k est positive est préservée par chirurgie de dimension $k \in \{0, \cdots, n-3\}$. Ce fait était déjà connu depuis les travaux de Baï et Dahl [BD03]. Nous en donnons ici une nouvelle preuve.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $\lambda_k(N, g_\vartheta) \leq 0$. Soit $u_\vartheta > 0$ une solution minimisante du problème de Yamabe. D'après la Proposition 1.3.1, il existe des fonctions $v_{\vartheta,1} = u_\vartheta, v_{\vartheta,2}, \cdots, v_{\vartheta,k}$ solutions sur N de l'équation suivante

$$L_{g_\vartheta} v_{\vartheta,i} = \lambda_{\vartheta,i} u_\vartheta^{N-2} v_{\vartheta,i},$$

où

$$\lambda_{\vartheta,i} = \lambda_i(N, u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta),$$

et telles que

$$\int_N {v_{\vartheta,i}}^N \, dv_{g_\vartheta} = 1 \text{ et } \int_N {u_\vartheta}^{N-2} v_{\vartheta,i} v_{\vartheta,j} \, dv_{g_\vartheta} = 0 \text{ pour tout } i \neq j.$$

Par invariance conforme du signe des valeurs propres de l'opérateur de Yamabe (voir Proposition 1.4.1),

$$\lambda_{\vartheta,i} := \lambda_i(N, u_\vartheta^{N-2} g_\vartheta) \leq 0.$$

De plus, par construction, il est facile de vérifier que $\lambda_{\vartheta,1} = \mu_\vartheta$ où $\mu_\vartheta = \mu(N, g_\vartheta)$ est la constante de Yamabe de la métrique g_ϑ. Le théorème principal dans [ADH08] implique que $\lim_{\vartheta \to 0} \lambda_{\vartheta,1} = \lim_{\vartheta \to 0} \mu_\vartheta > -\infty$. Il s'ensuit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $-C \leq \lambda_{\vartheta,1} \leq \cdots \leq \lambda_{\vartheta,k} \leq 0$. Alors, pour tout i, $\lambda_{\vartheta,i}$ est bornée. Après restriction à une sous-suite on peut supposer que $\lambda_{\infty,i} := \lim_{\vartheta \to 0} \lambda_{\vartheta,i}$ existe. Les deux parties du Théorème 3.1.3 fournissent des fonctions $u = v_1 > 0, \cdots, v_k$ définies sur M, avec $v_i \neq 0$ pour tout i et telles que $F^{\frac{n-2}{2}} v_{\vartheta,i}$ tend vers v_i dans C^1 sur tout compact $K \subset M \amalg S^n \setminus S'$. Les fonctions v_i sont solutions de l'équation

$$L_g v_i = \lambda_{\infty,i} u^{N-2} v_i.$$

En outre, on a

$$\int_M |v_i|^N \, dv_g \leq 1 \text{ et } \lim_{b \to 0} \limsup_{\vartheta \to 0} \int_{U_\varepsilon^N(b)} |v_{\vartheta,i}|^N \, dv_g = 0.$$

Montrons que pour tout $i \neq j$, on a

$$\int_M u^{N-2} v_i v_j \, dv_g = 0.$$

Posons

$$\widetilde{u}_\vartheta = F^{\frac{n-2}{2}} u_\vartheta,$$

et

$$\widetilde{v}_{\vartheta,i} = F^{\frac{n-2}{2}} v_{\vartheta,i}.$$

Pour $b>0$ petit et en se servant du fait que $dv_{g_\vartheta}=F^n dv_g$, on a pour $i\neq j$

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus U(b)} u^{N-2}v_iv_j\,dv_g &= \lim_{\vartheta\to 0}\int_{M\setminus U(b)=N\setminus U_\varepsilon^N(b)} \widetilde{u}_\vartheta^{N-2}\widetilde{v}_{\vartheta,i}\widetilde{v}_{\vartheta,j}dv_g\\ &= \lim_{\vartheta\to 0}\int_{M\setminus U(b)=N\setminus U_\varepsilon^N(b)} u_\vartheta^{N-2}v_{\vartheta,i}v_{\vartheta,j}dv_{g_\vartheta}\end{aligned}$$

En utilisant maintenant le fait que $\int_N u_\vartheta^{N-2}v_{\vartheta,i}v_{\vartheta,j}\,dv_{g_\vartheta}=0$, on obtient que

$$\begin{aligned}\left|\int_{M\setminus U(b)} u^{N-2}v_iv_j\,dv_g\right| &= \left|\lim_{\vartheta\to 0}\int_{N\setminus U_\varepsilon^N(b)} u_\vartheta^{N-2}v_{\vartheta,i}v_{\vartheta,j}\,dv_{g_\vartheta}\right|\\ &= \lim_{\vartheta\to 0}\left|\int_{U_\varepsilon^N(b)} u_\vartheta^{N-2}v_{\vartheta,i}v_{\vartheta,j}\,dv_{g_\vartheta}\right|.\end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned}\left|\int_{U_\varepsilon^N(b)} u_\vartheta^{N-2}v_{\vartheta,i}v_{\vartheta,j}\,dv_{g_\vartheta}\right| \leq{}& \left(\int_{U_\varepsilon^N(b)} u_\vartheta^N\,dv_{g_\vartheta}\right)^{\frac{N-2}{N}}\left(\int_{U_\varepsilon^N(b)}|v_{\vartheta,i}|^N\,dv_{g_\vartheta}\right)^{\frac{1}{N}}\\ &\left(\int_{U_\varepsilon^N(b)}|v_{\vartheta,j}|^N\,dv_{g_\vartheta}\right)^{\frac{1}{N}}.\end{aligned}$$

Avec

$$\lim_{b\to 0}\limsup_{\vartheta\to 0}\int_{U_\vartheta^N(b)} v_{\vartheta,i}^N\,dv_{g_\vartheta}=0.$$

Nous obtenons que

$$\lim_{b\to 0}\limsup_{\vartheta\to 0}\left|\int_{U_\varepsilon^N(b)} u_\vartheta^{N-2}v_{\vartheta,i}v_{\vartheta,j}\,dv_{g_\vartheta}\right|=0.$$

Il vient finalement

$$\left|\int_M u^{N-2}v_iv_j\,dv_g\right|=\lim_{b\to 0}\left|\int_{M\setminus U(b)} u^{N-2}v_iv_j\,dv_g\right|=0 \text{ pour tout } i\neq j.$$

On écrit maintenant

$$\begin{aligned}0<\lambda_k(M,g) &\leq \sup_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq(0,\cdots,0)} F(u,\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k)\\ &= \sup_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq(0,\cdots,0)}\frac{\int_M(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k)L_g(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k)\,dv_g}{\int_M u^{N-2}(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k)^2\,dv_g}\\ &= \sup_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq(0,\cdots,0)}\frac{\alpha_1^2\int_M v_1L_gv_1\,dv_g+\cdots+\alpha_k^2\int_M v_kL_gv_k\,dv_g}{\alpha_1^2\int_M u^{N-2}v_1^2\,dv_g+\cdots+\alpha_k^2\int_M u^{N-2}v_k^2\,dv_g}\\ &= \sup_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq(0,\cdots,0)}\frac{\alpha_1^2\lambda_{\infty,1}\int_M u^{N-2}v_1^2\,dv_g+\cdots+\alpha_k^2\lambda_{\infty,k}\int_M u^{N-2}v_k^2\,dv_g}{\alpha_1^2\int_M u^{N-2}v_1^2\,dv_g+\cdots+\alpha_k^2\int_M u^{N-2}v_k^2\,dv_g}\\ &\leq 0,\end{aligned}$$

puisque chaque $\lambda_{\infty,i}\leq 0$. On obtient ainsi la contradiction désirée.

Remarque 3.6.5. Notons que, pour $i \geq 2$, il est possible d'avoir $\int_M u^{N-2} v_i^2 dv_g = 0$ si M n'est pas connexe.

Étape 2 : Conclusion
Puisque $\mu_2(M, g) > 0$, d'après l'étape 1, on obtient que $\mu_2(N, g_\vartheta) > 0$. Supposons que $\mu_2(N, g_\vartheta) < \mu(\mathbb{S}^n)$ (sinon, on obtient le résultat demandé). Le Corollaire 2.0.6 nous fournit une suite (v_ϑ) de solutions de

$$L_{g_\vartheta} v_\vartheta = \mu_2(N, g_\vartheta)|v_\vartheta|^{N-2} v_\vartheta,$$

telles que

$$\int_N v_\vartheta^N \, dv_{g_\vartheta} = 1.$$

D'après la Première partie du Théorème 3.6.2, on a $\lim_{\vartheta \to 0} \mu_2(N, g_\vartheta) \geq \Lambda_n$ (et donc la conclusion du Théorème 3.1.3 est vraie) ou bien, et c'est ce que nous supposerons dans la suite, il existe une fonction v solution sur M de l'équation :

$$L_g v = \mu_\infty |v|^{N-2} v,$$

avec $\mu_\infty = \lim_\vartheta \mu_2(N, g_\vartheta) \geq 0$ et

$$\int_M |v|^N \, dv_g = 1.$$

Grâce au Paragraphe 3.6.2, on peut supposer que $\mu(g) \neq 0$. Il y a donc deux cas à considérer.

Cas 1 : $\mu(g) < 0$.
Supposons que M est connexe et montrons que v change de signe. On raisonne par l'absurde en supposant que $v \geq 0$. Le principe du maximum donne que $v > 0$. Soit u une solution positive de l'équation de Yamabe sur M, c'est à dire

$$L_g u = \mu(g) u^{N-1}.$$

Comme $v > 0$, on peut écrire :

$$L_g v = \underbrace{\mu_\infty}_{\geq 0} |v|^{N-2} v = \mu_\infty v^{N-1}.$$

Multiplions la seconde équation par u et intégrons, on obtient

$$\underbrace{\mu(g)}_{<0} \int_M u^{N-1} v \, dv_g = \int_M L_g u v \, dv_g = \int_M u L_g v \, dv_g = \underbrace{\mu_\infty}_{\geq 0} \int_M v^{N-1} u \, dv_g, \tag{3.34}$$

d'où la contradiction. Par conséquent v change de signe ce qui implique que

$$\mu_2(M, g) \leq \sup_{\alpha, \beta} F(v, \alpha v^+ + \beta v^-) = \mu_\infty.$$

Si M n'est pas connexe, le minimiseur de Yamabe u est positif sur une composante connexe de M. Si $uv \not\equiv 0$, La démonstration reste la même. Si $uv \equiv 0$, alors

$$\mu_2(M,g) \leq \sup_{\alpha,\beta} F(v, \alpha u + \beta v) = \mu_\infty$$

Dans tous les cas, on aboutit à la conclusion du Théorème 3.1.3.
Cas 2 : $\mu(M,g) > 0$,
et donc $\lambda_1(N, g_\vartheta) > 0$. La Proposition 1.4.1 nous dit que le signe des valeurs propres de l'opérateur de Yamabe est un invariant conforme. Par conséquent, $\lambda_1(N, v_\vartheta^{N-2} g_\vartheta) > 0$. Posons $\mu_1 = \lambda_1(N, v_\vartheta^{N-2} g_\vartheta)$ et soit u_ϑ la fonction associée à μ_1. La fonction u_ϑ étant associée à la première valeur propre de l'opérateur de Yamabe, elle est strictement positive sur au moins une composante connexe de N (et 0 ailleurs). Par ailleurs, u_ϑ est solution de l'équation

$$L_{g_\vartheta} u_\vartheta = \mu_1 |v_\vartheta|^{N-2} u_\vartheta,$$

et telle que

$$\int_N u_\vartheta^N \, dv_{g_\vartheta} = 1 \text{ et } \int_N |v_\vartheta|^{N-2} u_\vartheta v_\vartheta \, dv_{g_\vartheta} = 0.$$

D'après la Deuxième partie du Théorème 3.6.2, il existe une fonction $u \neq 0$ solution sur M de l'équation suivante

$$L_g u = \mu_{\infty,1} |v|^{N-2} u,$$

où $\mu_{\infty,1} := \lim_\vartheta \mu_1$. Notons que cette limite existe après extraction éventuelle d'une sous-suite puisque $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2(N, g_\vartheta)$. En procédant comme à l'étape 1, on montre que

$$\int_M |v|^{N-2} uv \, dv_g = 0. \tag{3.35}$$

Puisque $u \geq 0$, $u \neq 0$, le principe de maximum implique que $u > 0$ sur au moins une composante connexe $\tilde{M}$ de M. Ainsi, u et v satisfont les équations

$$L_g u = \mu_{\infty,1} |v|^{N-2} u,$$

et

$$L_g v = \mu_\infty |v|^{N-2} v.$$

Remarquons que v n'est pas nulle sur $\tilde{M}$ sinon, $L_g(u) = 0$ sur $\tilde{M}$. Cela implique que 0 est une valeur propre de L_g. Comme par ailleurs $\mu(g) < 0$, L_g possède aussi une valeur propre strictement négative ce qui implique que $\mu_2(g) < 0$ et contredit les hypothèses que nous avons faites. Ces deux équations montrent que $\mu_{\infty,1}$ et μ_∞ sont des valeurs propres de la métrique généralisée $|v|^{N-2} g$ (voir le Chapitre 1). La fonction u étant positive sur $\tilde{M}$, elle est associée à la première valeur propre de $L_{|v|^{N-2} g}$ sur $\tilde{M}$. L'équation (3.35) nous montre que, puisque $\lambda_1(\tilde{M}, |v|^{N-2} g)$ est simple, que μ_∞ est au moins la deuxième valeur propre de $L_{|v|^{N-2} g}$ sur $\tilde{M}$ et donc sur M aussi. Finalement, en utilisant que

$$\mathrm{Vol}_{|v|^{N-2} g}(M) = \int_M |v|^N dv_g = 1,$$

on obtient l'inégalité

$$\mu_2(M,g) \leq \lambda_2(M,|v|^{N-2}g)\mathrm{Vol}_{|v|^{N-2}g}(M)^{\frac{2}{n}} \leq \mu_\infty,$$

qui prouve le Théorème 3.1.3.

Remarque 3.6.6. La raison pour laquelle nous supposons, grâce au Paragraphe 3.6.2, que $\mu \neq 0$ est la suivante : si $\mu(g) = 0$, nous essayons de nous raccrocher à l'un des deux cas de la preuve. Dans le premier cas, il est immédiat de voir que l'équation (3.34) ne donne plus aucune contradiction. Dans le deuxième cas, ce qui ne fonctionne plus dans la preuve est plus subtil : nous avons besoin du fait que $\lambda_1(v_\vartheta^{N-2}g_\vartheta)$ est bornée. Lorsque $\mu(g) > 0$, ceci est vrai parce que

$$0 \leq \lambda_1(v_\vartheta^{N-2}g_\vartheta) \leq \lambda_2(v_\vartheta^{N-2}g_\vartheta) = \mu_2(N,g_\vartheta) \to \mu_\infty.$$

Si $\mu(g) = 0$, on ne peut rien plus dire à propos du signe de $\lambda_1(v_\vartheta^{N-2}g_\vartheta)$. En particulier, si ce signe est négatif, nous n'avons pas réussi à montrer que $\lambda_1(v_\vartheta^{N-2}g_\vartheta)$ est minorée et la preuve s'écroule.

3.7 Quelques applications

Dans cette section, on donne quelques applications du Théorème 3.1.1.

3.7.1 Un résultat préliminaire

Un résultat intéressant pour la suite est donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.7.1. *Soit V, M deux variétés compactes telles que V admette une métrique g dont la courbure scalaire* Scal_g *est nulle et telles $\sigma(M) > 0$, alors*

$$\sigma_2(V \amalg M) \geq \min(\mu_2(g), \sigma(M)) > 0.$$

Preuve : Sur $V \amalg M$, soit $G = \lambda g + \mu h$, où λ et μ sont deux constantes positives et pour ε petit, h est une métrique choisie telle que $\sigma(M) \leq \mu(M,h) + \varepsilon$. On sait que

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(L_G) &= \mathrm{Spec}(L_{\lambda g}) \cup \mathrm{Spec}(L_{\mu h}) \\ &= \lambda^{-1}\mathrm{Spec}(L_g) \cup \mu^{-1}\mathrm{Spec}(L_h) \\ &= \{\lambda^{-1}\lambda_1, \lambda^{-1}\lambda_2, \cdots\} \cup \{\mu^{-1}\lambda_1', \mu^{-1}\lambda_2', \cdots\}\end{aligned}$$

où λ_i (resp. λ_i') désignent les i-ème valeurs propres de L_g (resp. L_h). Notre hypothèse nous permet de déduire que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_1' > 0$. Par conséquent, on en déduit que $\lambda_2(L_G) = \min\{\lambda^{-1}\lambda_2, \mu^{-1}\lambda_1'\}$.
On sait que

$$\mathrm{Vol}_G(V \amalg M) = \lambda^{\frac{n}{2}}\mathrm{Vol}_g(V) + \mu^{\frac{n}{2}}\mathrm{Vol}_h(M).$$

• Pour $\mu = 1$ et $\lambda \to +\infty$, on a

$$\lambda_2(L_G) = \lambda^{-1}\lambda_2.$$

$$\begin{aligned}\lambda_2(L_G)\mathrm{Vol}_G{}^{\frac{2}{n}}(V \amalg M) &= \lambda^{-1}\lambda_2\left(C + \lambda \mathrm{Vol}_g{}^{\frac{2}{n}}(V)\right)\\ &\to_{\lambda\to+\infty} \lambda_2 \mathrm{Vol}_g{}^{\frac{2}{n}}(V) = \mu_2(g).\end{aligned}$$

• Lorsque $\lambda = 1$ et $\mu \to +\infty$, on écrit

$$\lambda_2(L_G) = \mu^{-1}\lambda_1'.$$

D'où

$$\begin{aligned}\lambda_2(L_G)\mathrm{Vol}_G{}^{\frac{2}{n}}(V \amalg M) &= \mu^{-1}\lambda_1'\left(C + \mu \mathrm{Vol}_h{}^{\frac{2}{n}}\right)\\ &\to_{\mu\to+\infty} \lambda_1' \mathrm{Vol}_h{}^{\frac{2}{n}} = \mu(M,h) \geq \sigma(M) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\sigma_2(V \amalg M) \geq \min(\mu_2(g), \sigma(M)).$$

Remarque 3.7.2.

1. Il est facile de voir que si $\sigma(M) > 0$ et $\sigma(N) > 0$, alors

$$\sigma(M \amalg N) = \min(\sigma(M), \sigma(N)),$$

où $M \amalg N$ est l'union disjointe de M et N.

2. Soit V avec $\sigma(V) \leq 0$. Pour $k \geq 2$, on a

$$\sigma_2(\underbrace{V \amalg \cdots \amalg V}_{k \text{ fois}} \amalg M) \leq 0.$$

En effet, soit une métrique $g = g_1 \amalg g_2 \amalg \cdots \amalg g_k \amalg g_n$ sur $V \amalg \cdots \amalg V \amalg M$. Soit v_i la fonction propre associée à $\lambda_1(g_i)$ qui est une fonction positive par hypothèse. Les fonctions $\tilde{v_i} = 0 \amalg \cdots 0 \amalg \underbrace{v_i}_{i^{eme}\text{position}} \amalg 0 \cdots \amalg 0$ sont linéairement indépendantes et satisfont $L_g(\tilde{v_i}) = \lambda_1(g_i)v_i$. Ce sont donc des fonctions propres de L_g. Cela implique que $\lambda_k(g) \leq 0$ et comme $k \geq 2$, $\lambda_2(g) \leq 0$.

Cette remarque explique le choix de la condition $|\alpha(M)| \leq 1$ dans le Corollaire 3.1.5. En effet, en raisonnant comme dans la preuve de la Proposition 3.7.5, nous pouvons montrer que M s'obtient par un nombre fini de chirurgies de dimension $k \in \{0, \cdots, n-3\}$ d'une variété de la forme $V \amalg \cdots ... \amalg V \amalg N$ où V possède une métrique à courbure scalaire nulle et $\sigma(N) > 0$. Pour appliquer le Théorème 3.1.1, il faut que $\sigma_2(V \amalg \cdots ... \amalg V \amalg N) > 0$, c'est-à-dire, compte-tenu de la remarque précédente, il faut que le nombre de facteurs V dans $V \amalg \cdots ... \amalg V \amalg N$ soit au plus 1. C'est ce qu'assure la condition $|\alpha(M)| \leq 1$.

On rappelle que le α-genre est un homomorphisme de l'anneau de cobordisme spin Ω_*^{Spin} dans l'anneau $KO_*(pt)$ provenant de la K-théorie

$$\alpha : \Omega_*^{\mathrm{Spin}} \to KO_*(pt).$$

Rappelons que les lois d'addition et de multiplication sur Ω_*^{Spin} sont respectivement l'union disjointe et le produit cartésien. L'anneau $KO_*(pt)$ est un anneau gradué égal à $\mathbb{Z}$ en dimensions $0, 4$ mod 8, égal à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en dimensions $1, 2$ mod 8 et nul dans les autres dimensions. Rappelons aussi que α est égal au $\hat{A}$-genre en dimensions 0-mod 8 et à $\frac{1}{2}\hat{A}$-genre en dimensions 4 mod 8.
Dans [BD02], la Proposition 3.5 nous dit qu'en dimensions $n = 0, 1, 2, 4$ mod 8, il existe une variété V telle $\alpha(V) = 1$ et qui possède g à courbure scalaire nulle.
• Quand $\alpha(M) = 0$, on se retrouve dans le cadre d'application des résultats de [ADH08] et on obtient que $\sigma(M) \geq \alpha_n$ où α_n ne dépend que de n.
Pour la suite, nous avons besoin de rappeler le

Théorème 3.7.3. *[Sto92] Soit M une variété spin. Alors $\alpha(M) = 0$ si et seulement si elle est cobordante à une variété N qui admet une courbure scalaire positive.*

On rappelle qu'un cobordisme entre M et N est une variété à bord dont le bord W est l'union disjointe de M et N. Selon que l'on parle de cobordisme orientée ou spin, on impose de plus que $\partial W = M \amalg (-N)$ et que W possède une structure spin qui coïncide avec les structures spin données de M et $-N$ quand on la restreint au bord. Nous aurons aussi besoin de

Théorème 3.7.4. *[Mil65] Si M est cobordante à N et si M est connexe, simplement connexe, alors M est s'obtient de N par un nombre fini de chirurgies de dimension $0 \leq k \leq n - 3$.*

Proposition 3.7.5. *Soit M une variété spin, connexe, simplement connexe de dimension $n \geq 5$, si $n = 0, 1, 2, 4$ mod 8 et $|\alpha(M)| \leq 1$, alors*

$$\sigma_2(M) \geq \alpha_n,$$

où α_n est une constante positive qui dépend seulement de n.

Preuve : La Proposition 3.5 dans [BD02] donne que pour chaque $n = 0, 1, 2, 4$ mod 8, $n \geq 1$, il existe une variété V de dimension n telle que V possède une métrique g telle que $\text{Scal}_g = 0$ et $\alpha(V) = 1$.
• **Premier cas :** Si $\alpha(M) = 0$, alors M est cobordante à une variété N qui porte une métrique g telle que $\text{Scal}_g > 0$. D'après ce qui précède, on peut obtenir M à partir de N par un nombre fini de chirurgies de dimension $k \leq n - 3$. Ainsi, d'après le Corollaire 3.1.4, $\sigma(M) \geq c_n$ où c_n est une constante positive qui dépend seulement de n.
• **Deuxième cas :** Si $\alpha(M) = 1$, alors $\alpha(M \amalg (-V)) = 0$, d'où l'existence d'une variété N avec $\text{Scal}_g > 0$ telle que $M \amalg (-V)$ est cobordante à N ce qui équivalent à dire que M est cobordante à $V \amalg N$. En conséquence, M est obtenue de $V \amalg N$ par un nombre fini de chirurgies de dimension $k \leq n-3$. Il suffit d'appliquer le théorème principal pour obtenir le résultat souhaité.

Bibliographie

[AF03] R.A. Adams and J.J.F. Fournier, *Sobolev spaces*, 2nd edition, Pure and Applied Mathematics, 140, Academic Press, Amsterdam, 2003.

[AH06] B. Ammann and E. Humbert, *The second Yamabe invariant*, J. funct. anal. **235** (2006), no. 2, 377–412. MR 2225458 (2007a :53073).

[ADH] B. Ammann, M. Dahl, and E. Humbert, *Low-Dimensional surgery and the Yamabe invariant*, arXiv :1204.1197.

[ADH1] ——, *Square-Integrability of solutions of the Yamabe equation*, arXiv :1111.2780.

[ADH08] ——, *Smooth Yamabe invariant and surgery*, Prépublications de l'institut Elie Cartan, 58 pages, 2008.

[ADH09] ——, *Surgery and the spinorial τ-invariant*, Comm. Part. Diff. Eq., **34** (2009), 1147–1179.

[ADH2] ——, *The conformal Yamabe constant of product manifolds*, to appear in Proc. AMS.

[And06] M.T.Anderson, *Canonical metrics on 3-manifolds and 4-manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 127–163, MR2213687, Zbl pre05170984.

[Aub76] T.Aubin, *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl.(9) **55**(1976), no. 3, 269-296.

[Aub98] ——, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR 1636569 (99i :58001)

[BD03] C. Bär and M. Dahl, *Small eigenvalues of the conformal Laplacian*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 3, 483-508. MR 1995796 (2004d :58042)

[BD02] ——, *Surgery and the spectrum of the Dirac operator*, J. Reine Angew. Math., **552** (2002), 53–76.

[BGM05] C. Bär, P. Gauduchon, and A. Moroianu, *Generalized cylinders in semi-riemannian and spin geometry*, Math. Z. **249** (2005), 545–580.

[BenBou08] M.Benalili and H.Boughazi, *On the second Paneitz-Branson invariant*, Houston J. Math. **36** (2010), no. 2, 393-420. MR 2661253 (2011h :58047)

[DJ02] Z. Djadli and A. Jourdain, *Nodal solutions for scalar curvature type equations with perturbation terms on compact Riemannian manifolds*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) **5** (2002), no. 1, 205-226. MR 1881932 (2002k :53061)

[GT77] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, no. 224, Springer-Verlag, 1977.

[GL80] M. Gromov and H. B. Lawson, *The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. of Math. (2) 111 (1980), 423–434, MR0577131, Zbl 0463.53025.

[Heb96] E. Hebey, *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1635, Berlin : Springer, 1996.

[Heb97] ——, *Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés*, Diderot Editeur, Arts et Sciences, out of print, no longer sold, 1997.

[HV94] E. Hebey and M. Vaugon, *Existence and multiplicity of nodal solutions for nonlinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, J. Funct. Anal. **119** (1994), no. 2, 298-318. MR 1261094 (94j :35052).

[Hol98] D. Holcman, *Solutions nodales sur les variétés riemanniennes*, J. Funct. Anal. **161** (1999), no. 1, 219-245. MR 1670226 (99m :58205)

[Kat95] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators*, Reprint of the 1980 edition, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1995).

[Kob87] O. Kobayashi, *Scalar curvature of a metric with unit volume*, Math. Ann. **279** (1987), 253–265, MR0919505, Zbl 0611.53037.

[Kos93] A. A. Kosinski, *Differential manifolds*, Pure and Applied Mathematics, vol. 138, Academic Press Inc., Boston, MA, 1993.

[LP87] J. M. Lee and T. H. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** (1987), no. 1, 37-91. MR 888880 (88f :53001)

[Mil65] J. W Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow Princeton Mathematical Notes. Princeton, N.J. : Princeton University Press. 113 p. (1965).

[PY99] J. Petean and G. Yun, *Surgery and the Yamabe invariant*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 1189–1199, MR1736933, Zbl 0976.53045.

[Sch84] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 2, 479-495. MR 788292 (86i :58137)

[Sto92] S. Stolz, *Simply connected manifolds of positive scalar curvature*, Ann. Math., II. Ser. **36** (1992), 511–540.

[SY79] R. Schoen and S. T. Yau, *On the structure of manifolds with positive scalar curvature*, Manuscripta Math. **28** (1979), 159–183, MR0535700. Zbl 0423.53032.

[T68] N. S. Trudinger, *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22** (1968), 265-274.

[V07] J. Vétois, *Multiple solutions for nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds*, Internat. J. Math. **18** (2007), no. 9, 1071-1111. MR 2360648 (2009f :53051)

[Y60] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. **12** (1960), 21-37.

Mes prépublications

[ES12] S. El Sayed, *A surgery formula for the second Yamabe invariant*, arXiv :1211.6617.

[ES12] ——-, *Second eigenvalue of the Yamabe operator and applications*, arXiv :1204.1268.