*ENSC-2012/2013*

**THÈSE DE DOCTORAT**
**DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par


## Alain Stricher


pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE**

Sujet de la thèse

# Tolérancement flexible d'Assemblages de grandes Structures aéronautiques

Soutenue à Cachan le 08 Février 2013 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| Alain Rivière | Professeur, SUPMECA Paris | Président |
| Alain Daidié | Professeur, INSA de Toulouse | Rapporteur |
| Jean-Yves Dantan | Professeur, Arts et Métiers ParisTech Metz | Rapporteur |
| Nicolas Chevassus | Ingénieur de Recherche, EADS-IW Suresnes | Examinateur |
| Laurent Champaney | Professeur, ENS de Cachan | Directeur de thèse |
| François Thiebaut | Maître de conférences, IUT de Cachan | Co-encadrant |


**LMT-LURPA-Cachan**
ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

# Table des matières

**Table des matières** **i**

**Table des figures** **v**

**Liste des tableaux** **ix**

**Introduction** **1**
1 Contexte et problématique . . . . . 1
2 Le tolérancement garant de l'assemblage . . . . . 5

**1 Tolérancement, assemblage et simulation** **9**
1 Les technologies d'assemblage aéronautiques . . . . . 11
1.1 Un exemple d'assemblage aéronautique . . . . . 11
1.2 Les gammes de rivetage . . . . . 12
1.3 Les assemblages meccanos . . . . . 14
2 Généralités sur le tolérancement . . . . . 14
2.1 Analyse et synthèse de tolérances . . . . . 14
2.2 Notion de skin-model . . . . . 15
2.3 Expression des exigences géométriques . . . . . 16
2.4 Outils de tolérancement . . . . . 16
3 Les modèles d'assemblage en élements finis . . . . . 18
3.1 Comportement mécanique des pièces . . . . . 18
3.2 Cas des pièces minces : éléments de structure . . . . . 19
3.3 Erreurs dues à la discrétisation . . . . . 21
3.4 Modélisation des liaisons . . . . . 24
4 Le tolérancement de pièces non-rigides . . . . . 28
4.1 Les prémices . . . . . 28
4.2 Méthode des coefficients d'influence . . . . . 28
4.3 Méthode FASTA . . . . . 30
4.4 Séquence d'assemblage . . . . . 33
4.5 Le contact unilatéral . . . . . 35
4.6 La norme NF ISO 10579 . . . . . 36
5 Récapitulatif . . . . . 36
5.1 Modélisation des assemblages . . . . . 36

5.2 Variabilités géométriques . . . . . 37
5.3 Stratégie d'analyse et simulation d'assemblage . . . . . 38

**2 La simulation dans les activités d'assemblage 41**
1 Étude de faisabilité simple . . . . . 44
2 Aide et optimisation de la phase de réglage . . . . . 46
3 Étude de faisabilité avec analyse de la gamme d'assemblage . . . . . 48
4 Détermination de séquence d'assemblage dédiée . . . . . 50
5 Analyse de tolérances . . . . . 52
6 Synthèse de tolérances . . . . . 54
7 Récapitulatif des estimations de coûts de calcul . . . . . 56
8 Conclusions . . . . . 57

**3 La modélisation en vue de la simulation d'assemblage 59**
1 Répercussions de l'idéalisation géométrique sur les tolérances . . . . . 61
2 Défauts globaux . . . . . 64
2.1 Hypothèse d'épaisseurs et de sections constantes . . . . . 64
2.2 Réalisme des instances de skin-model numériques . . . . . 65
2.3 Morphose de maillages . . . . . 66
2.4 Génération des champs d'écart par simulation élastique . . . . 67
2.5 Génération des champs d'écart par superposition de modes amplifiés . . . . . 70
2.6 Application à une poutre 2D . . . . . 72
3 Modèles de liaisons avec défauts locaux . . . . . 76
3.1 Modèles de liaisons à l'état nominal . . . . . 76
3.2 Expression locale des défauts globaux . . . . . 77
3.3 Défauts de liaison . . . . . 78
3.4 Contact unilatéral . . . . . 79
3.5 Relations sur les rotations . . . . . 80
3.6 Jeux dans les liaisons . . . . . 81
4 Conclusion . . . . . 83

**4 La simulation d'assemblage pour le tolérancement de pièces non-rigides 85**
1 Simulation du procédé d'assemblage . . . . . 88
1.1 Prise en compte des variabilités de rigidité . . . . . 89
1.2 Prise en compte du contact unilatéral . . . . . 90
1.3 Formalisation du problème éléments finis . . . . . 90
2 Cas d'étude 2D : Assemblage de poutres nominalement droites . . . . 92
2.1 Modélisation des liaisons . . . . . 92
2.2 Modélisation des défauts géométriques . . . . . 93
2.3 Quantités d'intérêt . . . . . 94
2.4 Récapitulatif de l'étude . . . . . 95

2.5 Analyse de tolérances DMC . . . . . 96
2.6 Synthèse de tolérances . . . . . 101
3 Linéarisation de la simulation d'assemblage . . . . . 106
3.1 Méthode des déformations initiales . . . . . 107
3.2 Application de la méthode des coefficients d'influence sur l'assemblage de poutres 2D . . . . . 108
3.3 Analyse de tolérances MIC . . . . . 110
3.4 Méthode des coefficients d'influence avec actualisation de rigidité 113
3.5 Méthode des coefficients d'influence avec approximation quadratique . . . . . 115
4 Cas d'étude 3D : Assemblage de deux plaques nominalement planes . 118
4.1 Présentation du cas d'étude . . . . . 118
4.2 Synthèse de tolérances . . . . . 119
4.3 Analyse de tolérances . . . . . 120
5 Conclusions . . . . . 124

**5 Application à un cas industriel** **129**
1 Présentation . . . . . 131
2 Modélisation . . . . . 135
2.1 Idéalisation des traverses en modèle poutre . . . . . 135
2.2 Modèles de liaisons . . . . . 137
3 Modélisation des défauts géométriques . . . . . 138
3.1 Défauts de forme . . . . . 138
3.2 Défauts de liaison . . . . . 139
3.3 Récapitulatif des défauts . . . . . 141
4 Analyse de tolérances . . . . . 142
4.1 Stratégie de calcul . . . . . 143
4.2 Estimation de la probabilité de conformité . . . . . 144
4.3 Identification des défauts critiques . . . . . 145
4.4 Identification des défauts peu critiques . . . . . 146
5 Exploitation des résultats . . . . . 147
5.1 Actions correctives sur les tolérances . . . . . 147
5.2 Actions correctives sur la conception . . . . . 147
6 Conclusions . . . . . 148

**Conclusions** **149**

**Perspectives** **153**

**A Calcul de la contrainte de Von Mises dans les vis des liaisons** **157**

# Table des figures


1 *Diagramme illsutratif de la problématique.* . . . . . 4

1.1 *Pièces standards d'un morceau de fuselage d'avion.* . . . . . 11
1.2 *Déroulement d'une gamme de rivetage avec éclatement.* . . . . . 13
1.3 *Analyse et synthese de tolérances.* . . . . . 15
1.4 *Modèle nominal et représentation du skin-model d'une pièce (source : [Ballu* et al.*, 2007]).* . . . . . 15
1.5 *Discrétisations en éléments quadrangulaires d'une pièce mince en 2D.* 19
1.6 *Idéalisation d'une section de plaque munie d'un raidisseur en omega.* 20
1.7 *Cas d'étude pour la comparaison de modèles éléments finis.* . . . . . 22
1.8 *Modèles de liaison entre une pièce et un bâti rigide.* . . . . . 24
1.9 *Conditions aux limites pouvant modéliser des liaisons entre deux pièce.* 25
1.10 *Exemple de covariances matérielles et géométriques d'une plaque (source : [Bihlmaier* et al.*, 1999]).* . . . . . 30
1.11 *Collection de courbes de Bézier aléatoires avec variabilité des positions des points de contrôle (source : [Merkley, 1998]).* . . . . . 31
1.12 *Comparaison de la méthode FASTA à une méthode de Monte-Carlo (source : [Bihlmaier, 1999]).* . . . . . 33

2.1 *Fonction "Simulation d'assemblage".* . . . . . 42
2.2 *Interventions possibles de la simulation d'assemblage au cours du processus de réalisation d'un produit industriel.* . . . . . 42
2.3 *Algorithme d'étude de faisabilité simple.* . . . . . 45
2.4 *Algorithme de simulation de réglages.* . . . . . 47
2.5 *Algorithme d'étude de faisabilité avec analyse de gamme d'assemblage.* 49
2.6 *Algorithme de détermination de séquence d'assemblage pour un jeu de pièces mesurées.* . . . . . 51
2.7 *Algorithme d'analyse de tolérances.* . . . . . 53
2.8 *Algorithme de synthèse de tolérances.* . . . . . 55

3.1 *Exemple d'une cornière partiellement tolérancée et représentation de son skin-model.* . . . . . 62
3.2 *Modèles nominaux géométriques et éléments finis.* . . . . . 62

3.3 *Modèle nominal idéalisé avec spécifications géométriques et représentation d'une instance de skin-model numérique.* . . . . . 63
3.4 *Idéalisation d'une section de plaque d'épaisseur constante avec un défaut de forme.* . . . . . 64
3.5 *Idéalisation d'une section de plaque d'épaisseur non-constante avec des défauts de forme d'allures différentes sur chaque face.* . . . . . 65
3.6 *Instances de skin-model numériques conformes et réalistes ou non pour une poutre 2D.* . . . . . 65
3.7 *Modélisation des défauts par calcul éléments finis à partir de résultats de mesures hypothétiques.* . . . . . 68
3.8 *Exemple de plaque courbe sujette à des défauts de vrillage et de bombé.* 68
3.9 *Champs d'écart non-réalistes obtenus par simulation élastique : vrillage en haut à gauche et défauts de bombé.* . . . . . 69
3.10 *Modes de vrillage et de bombé obtenus pour plaque courbe.* . . . . . 71
3.11 *Défauts de courbure d'une poutre sous forme de superposition de modes.* 73
3.12 *Vérification de l'appartenance d'une poutre i à sa zone de tolérance.* . . 73
3.13 *Tirages aléatoires et domaine de validité pour* $IT = 3mm$. . . . . 75
3.14 *Tirages aléatoires et domaine de validité pour* $IT = 5mm$. . . . . 75
3.15 *Modèle géométrique d'une liaison et modèle éléments-finis d'une connexion.* . . . . . 76
3.16 *Défauts de formes au niveau d'une liaison à assembler.* . . . . . 77
3.17 *Défauts locaux d'une liaison.* . . . . . 78
3.18 *Modèle d'assemblage de deux poutres à l'aide de deux connexions.* . . 80
3.19 *Liaison rivetée avec jeu.* . . . . . 81

4.1 *Représentation du cas d'assemblage de deux poutres à l'état nominal.* 92
4.2 *Représentation des quantités d'intérêt observées sur l'assemblage de deux poutres à géométrie non-nominale.* . . . . . 94
4.3 *Modèle géométrique de l'assemblage de deux poutres.* . . . . . 95
4.4 *Distribution des efforts normaux et moments dans les liaisons complètes.* . . . . . 98
4.5 *Distribution des efforts normaux et des moments dans les liaisons avec jeu.* . . . . . 98
4.6 *Procédure pour la synthèse de tolérances.* . . . . . 103
4.7 *Résultat de synthèse de tolérances.* . . . . . 104
4.8 *Évolution des efforts tangentiels dans les connexions en fonction de chaque amplitudes de modes.* . . . . . 115
4.9 *Évolution du désaxement dans les connexions en fonction de chaque amplitudes de modes.* . . . . . 116
4.10 *Modèle géométrique et modèle éléments finis de l'assemblage de plaques.* 118
4.11 *Modes unitaires de défaut de forme des plaques planes.* . . . . . 119
4.12 *Plaques avec défauts de forme avant et après assemblage.* . . . . . 120

4.13 *Évolution de l'écart maximal de l'assemblage en fonction de l'IT bornant le défaut de forme initial des plaques.* . . . . . 121
4.14 *Évolution des valeurs maximales des composantes normales des efforts de liaison des connexions 1 et 3 en fonction de l'IT des plaques.* 122
4.15 *Densité de probabilité de l'écart maximal.* . . . . . 123
4.16 *Densités de probabilité des composantes normales des efforts transitant dans les connexions numérotées* 1 *et* 3. . . . . 124

5.1 *Modèle géométrique d'un tronçon équipé (source : [Mons, 2013]).* . . . 131
5.2 *Processus d'installation et d'intégration des équipements à l'aide du treillis (source : [Mons, 2013]).* . . . . . 132
5.3 *Modèle géométrique du treillis.* . . . . . 133
5.4 *Types de liaisons dans le treillis.* . . . . . 134
5.5 *Géométrie idéalisée du treillis.* . . . . . 135
5.6 *Traverses idéalisées.* . . . . . 136
5.7 *Modélisation de liaison sous forme de connexion entre poutres.* . . . . 137
5.8 *Modes de courbure et de vrillage d'une traverse numérotée i.* . . . . . 138
5.9 *Défauts de positionnement et d'orientation relatives entre deux traverses.* . . . . . 140
5.10 *Probabilité de conformité statique de l'assemblage.* . . . . . 144
5.11 *Liaisons surcontraintes et fréquence d'apparition pour 2% des cas non-conformes.* . . . . . 145
5.12 *Défauts influents et leur contribution en pourcentage sur la contrainte de Von Mises dans les vis de la liaison n$^o$ 32.* . . . . . 146

A.1 *Calcul de l'effort normal dans les vis.* . . . . . 159
A.2 *Calcul de l'effort tangentiel dans les vis.* . . . . . 159

# Liste des tableaux


4.1 Tableau des modes de courbure des poutres. . . . . 93
4.2 Résultats d'analyse de tolérances. . . . . 97
4.3 Estimations des probabilités de respect des critères indépendamment et du taux de conformité. . . . . 99
4.4 Temps CPU de calcul pour les analyses de tolérances (en centièmes de seconde). . . . . 100
4.5 Table des valeurs des entrées pour chaque simulation. . . . . 108
4.6 Table des coefficients d'influence. . . . . 109
4.7 Comparaison des résultats d'analyse de tolérances entre la méthode de Monte-Carlo et celle des coefficients d'influence. . . . . 110
4.8 Comparaison des estimations des probabilités de respect des critères. 111
4.9 Table des contributions en pourcentage. . . . . 112
4.10 Comparaison des temps CPU de calcul pour les analyses de tolérances (en centièmes de seconde). . . . . 112
4.11 Table des coefficients d'influence calculés avec actualisation de la matrice de rigidité . . . . . 113
4.12 Comparaison des résultats d'analyse de tolérances entre la méthode de Monte-Carlo et celle des coefficients d'influence avec rigidité actualisée. 114
4.13 Comparaison des temps CPU de calcul pour les analyses de tolérances (en centièmes de seconde). . . . . 114
4.14 Comparaison des résultats d'analyse de tolérances entre la méthode de Monte-Carlo et celle des coefficients d'influence avec rigidité actualisée et approximation quadratique. . . . . 116
4.15 Comparaison des temps CPU de calcul pour les analyses de tolérances (en centièmes de seconde). . . . . 117
4.16 Caractéristiques statistiques des densités de probabilité de $Dz_{max}$. . . 123
4.17 Caractéristiques statistiques des densités de probabilité des composantes normales des efforts transitant dans les connexions numérotées 1 et 3. . . . . 124
4.18 Comparaison des coûts de calcul pour 1700 tirages. . . . . 125
4.19 Tableau d'aide au choix d'hypothèses et de méthodes en fonction du critère de conformité à vérifier. . . . . 126

5.1 Tableau récapitulatif des défauts géométriques du treillis. . . . . 141

# Introduction

## 1 Contexte et problématique

Le développement durable, les économies d'énergie, le bilan carbone. Autant de sujets récurrents et issus d'une bien noble cause. Ils alimentent sans cesse la recherche et l'industrie avec des problématiques technologiques toujours plus pointues et qui dérivent parfois vers des domaines qu'on ne soupçonnerait pas. Il s'agit ici du tolérancement de pièces souples.

Motivés par l'économie de carburant, les constructeurs aéronautiques se sont engagés dans une course technologique dont l'enjeu est de minimiser la masse de leurs appareils. L'effort n'est pas tant ciblé sur les équipements de confort que sur les pièces structurelles qui constituent le fuselage. Les choix technologiques se sont naturellement orientés vers l'utilisation de pièces légères dont au moins une des dimension est beaucoup plus petite que les autres, tels que des profilés ou des plaques. Indépendamment, ces dernières présentent donc une grande souplesse pour certaines directions de sollicitation. Ce n'est qu'après leur assemblage que sera garantie la rigidité indispensable aux conditions de fonctionnement, de sécurité et de confort.

Ainsi, loin d'être une simple rhétorique, ces préoccupations écologiques ont engendré des problématiques plus industrielles et technologiques survenant pendant la phase d'assemblage de ces structures.

La phase d'assemblage consiste en une série d'opérations complexes qui requièrent beaucoup de précautions pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la manipulation des pièces et des sous-ensembles est délicate du fait de leur grande taille et de leur souplesse. Ensuite, ce type de structure comporte un très grand nombre d'éléments de fixation tels que des vis et des rivets, et présente donc un très fort degré d'hyperstaticité. Enfin, les pièces ou les sous-ensembles sont sujets à des défauts géométriques qu'on peut catégoriser ainsi : défauts de position, d'orientation ou de forme. Ils sont majoritairement issus des procédés de fabrication, et s'accumulent au fur et à mesure que l'assemblage progresse. Ainsi, chaque opération d'assemblage implique des déformations non négligeables dont découlent fatalement des contraintes résiduelles au sein de la structure.

Les constructeurs automobiles font aussi face à ce type de problématiques, plus particulièrement pour l'assemblage des éléments de carosserie. En effet, les carosse-

ries doivent respecter des critères esthétiques tels que des conditions d'affleurement entre les tôles de carosserie, des critères d'étanchéïté traduits par la répartition de l'appui du pourtour des portières sur leur joint, et bien entendu des critères d'assemblabilité traduisant l'interchangeabilité de ces pièces de grande série.

Outre la taille des structures, une grande différence règne entre les assemblages automobiles et aéronautiques. Il s'agit des technologies de fixation. Pour les éléments de carosserie, on préfèrera généralement le soudage pour des raisons pratiques et esthétiques, ainsi que le clinchage dans certaines zones moins visibles. Ces deux procédés mettent en jeu des phénomènes physiques complexes (thermomécanique, plasticité, endommagement) qui peuvent s'avérer difficiles à maîtriser. Les constructeurs aéronautiques préfèrent utiliser des éléments de fixation tels que des vis et des rivets. Certes, cette solution technologique est moins pertinente vis-à-vis des objectifs de légèreté (il y a par exemple 1,6 millions de rivets sur un A340, ce qui représente une masse supplémentaire assez conséquente) et elle nécessite un plus grand nombre d'opérations (perçage, ébavurage, évacuation des copeaux, dépose de la fixation) qui sont plus difficilement automatisables à cause du grand nombre d'outils. Elle demeure néanmoins plus avantageuse car elle permet un contrôle non destructif fiable et elle reste utilisable malgré l'avènement des matériaux composites pour les pièces de structure. Elle offre également le choix de positionner les fixations par rapport aux pièces indépendamment si un ou plusieurs trous de passage sont pré-percés, ou bien de les positionner par rapport à l'assemblage s'ils sont contre-percés.

Quel que soit le procédé d'assemblage employé, il contribue lui aussi aux défauts géométriques de la structure assemblée à cause d'erreurs de positionnement des outils comme le montrent les analyses de [Ceglarek et Shi, 1995], [Ceglarek et Shi, 1996] et [Camelio *et al.*, 2004]. Dans le cas du rivetage ou du boulonnage, les défauts de positionnement des outils (par exemple des canons ou des grilles de perçage) entraînent des défauts de localisation des trous de passage des vis qui peuvent être critiques vis-à-vis des contraintes d'assemblabilité (les trous des deux pièces positionnés ne sont pas coaxiaux). Afin de rattraper ces défauts, il est possible d'imposer des jeux fonctionnels dans ces liaisons (diamètre des trous plus grands que celui de la vis). Mais cette solution n'est pas toujours envisageable, comme par exemple dans le cas d'assemblage de peaux de fuselage. En effet, ces derniers nécessitant une étanchéité parfaite, une couche de mastic est déposée entre les parties de peaux qui se recouvrent. Afin de préserver ce mastic de sollicitations mécaniques pouvant le détériorer, ces dernières doivent être transmises par les rivets. Les jeux fonctionnels dans les liaisons doivent donc être minimisés. La solution consiste à percer les trous en coïncidence (contre-perçage). Toutefois, cette méthode conduit à un résultat très fortement influencé par la gamme et la séquence d'assemblage choisie et impose l'appairage des pièces.

L'avènement des matériaux composites pour ces éléments de structure engage

également une sérieuse remise en cause des méthodes et procédés d'assemblage. Ces matériaux pouvant remplacer les alliages d'aluminium usuels pour l'aéronautique avec une densité massique moindre, leur utilisation est en parfaite adéquation avec les objectifs de légèreté. Mais contrairement aux panneaux composites, les tôles métalliques offrent l'avantage de pouvoir subir de légères déformations plastiques non détériorantes. Pour certaines opérations d'assemblage critiques, cela permet aux opérateurs de rattrapper des défauts géométriques, limitant ainsi les déformations élastiques nécessaires aux opérations d'assemblage, et donc les contraintes résiduelles après assemblage. Cela n'étant pas possible avec des pièces en composites, les opérateurs ont alors recours soit au calage, soit à l'expertise du bureau d'études afin d'obtenir son aval ou ses recommandations pour continuer l'assemblage. Le calage consiste à combler les jeux entre les pièces avec des pièces intermédiaires rectifiées aux dimensions du jeu (cales). Cela permet d'effectuer l'assemblage sans déformer localement les pièces, donc sans générer de contraintes résiduelles supplémentaires. Mais la mesure des jeux puis la rectification des cales sont des opérations chronophages. Quant à l'expertise du bureau d'étude, elle gèle non seulement une partie de la production, mais aussi du bureau d'étude, d'où la nécessité de pouvoir prédire et contrôler ces jeux et ces contraintes résiduelles avant et pendant l'assemblage.

D'un point de vue purement économique, les objectifs des constructeurs aéronautiques sont d'augmenter la cadence de production étant donné que leurs carnets de commande sont remplis pour les dix prochaines années. Cette cadence de production est limitée par celle de la ligne d'assemblage finale (appellée FAL : *"Final Assembly Line"*) où les tronçons sont assemblés entre eux et équipés. Les délais de production en FAL sont difficilement réductibles parce que le nombre d'opérateurs pour chaque tâche est limité par des contraintes d'accessibilité et d'ordonnancement des opérations. La taille et le prix des outillages et des ressources excluent également les solutions d'automatisation ou de dédoublage de ces lignes d'assemblages.

La stratégie des constructeurs aéronautiques consiste naturellement à viser un taux de réussite de 100% des opérations d'assemblages, mais aussi à externaliser un maximum d'opérations de la FAL en sensibilisant les concepteurs à la modularité (très répandue dans l'industrie de matériel informatique et l'industrie automobile). Il s'agit de dissocier le produit en sous-ensembles *(modules)* dont l'assemblage final doit être le plus simple possible. Cela permet aussi de gagner du temps en maintenance car le temps d'immobilisation de l'avion revient au temps de remplacement du module défectueux, et la réparation peut être réalisée en temps masqué. Le cas d'application industriel présenté au chapitre 5 est d'ailleurs issu des travaux de thèse de [Mons, 2013] sur la conception modulaire.

Par nature, la modularité est très fortement liée à l'interchangeabilité. C'est pourquoi aux techniques d'assemblages impliquant le contre-perçage, on favorisera celles dites *"meccano"* (en référence au jeu de construction). Cela signifie que les trous de passage de vis ou de rivets sont pré-percés afin que les opérations en FAL se réduisent au positionnement des modules et à la pose des éléments de fixation.

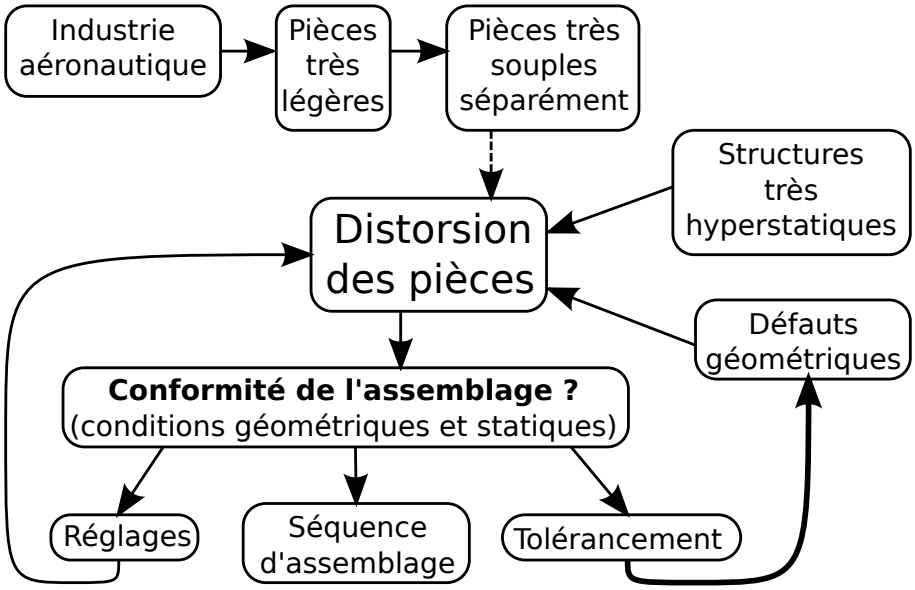



**Figure 1:** *Diagramme illsutratif de la problématique.*

Cependant, les outillages nécessaires à la préparation des pièces pour assemblage meccano (gabarits et grilles de perçage) deviennent excessivement onéreux pour les grandes dimensions, remettant évidemment en cause la rentabilité de ce procédé. C'est pour ces raisons que des études sont menées sur la virtualisation du processus d'assemblage. Cela permet de développer les outillages à moindre coût et de prédire le bon fonctionnement du processus.

En bref, la problématique à l'origine de ces travaux peut être illustrée par le diagramme de la figure 1 et résumée ainsi :

Les structures fortement hyperstatiques constituées de grandes pièces relativement souples et sujettes à des défauts géométriques ne peuvent pas être assemblées sans subir des déformations. Il en résulte un état géométrique et des contraintes installées partiellement maîtrisées.
Afin de garantir la conformité de l'assemblage, plusieurs solutions sont envisagées :

- Au moment de l'assemblage dans l'atelier, il est possible d'utiliser des outillages (ou gabarits) permettant de conformer préalablement les pièces. Mais une fois la structure assemblée, le retour élastique qui suit sa relaxation peut parfois engendrer un état géomérique ou statique non conforme. Ces outillages sont équipés de systèmes de réglage permettant d'ajuster la position, l'orientation, voire même la déformation de la pièce. Grâce à des mesures judicieuses, il est possible d'optimiser les réglages afin d'anticiper ces difficultés d'assemblage comme on peut le voir dans [Breteau *et al.*, 2007]. D'ailleurs les travaux de thèse de [Breteau, 2009] furent à la base du développement du logiciel *FitFlex* par *EADS-IW*. L'aide à l'assemblage par la mesure nécessite cependant de jus-

tifier que le temps gagné pendant l'assemblage sera supérieur au temps perdu pendant les mesures. Par ailleurs ces outils ne fournissent aucune information relative aux contraintes résiduelles pour l'instant.
– La pose séquentielle de bridages et de fixations offre un autre moyen de maîtriser les déformations d'assemblage. Le choix de gammes et séquences pertinentes permet non seulement l'anticipation de difficultés d'accessibilité, de manipulation et d'organisation des opérations d'assemblage, mais aussi la prévention de certaines contraintes résiduelles. Des outils d'aide et de préparation à l'assemblages par la simulation font l'objet de recherches telles que [Camelio *et al.*, 2003], [Tching *et al.*, 2010] ou [Mounaud, 2009] dont les enjeux, les objectifs et les approches sont assez différentes, mais ne concernent que très peu ces travaux.
– Le tolérancement géométrique consiste à définir, dès la conception, des limites à la géométrie réelle de la pièce, autrement dit de borner les défauts admissibles, de manière à ce que la conformité de chaque pièce indépendamment garantisse la conformité de tout l'assemblage. C'est la solution qui nous motive ici.

# 2 Le tolérancement garant de l'assemblage

D'un point de vue géométrique, l'hyperstaticité génère sur l'assemblage de nombreuses contraintes d'assemblabilité en plus des conditions de fonctionnement. Toutes ces exigences sont traduites sous forme de tolérances sur les surfaces fonctionnelles et les dimensions impliquées par ces exigences. Les intervalles de tolérance doivent ensuite être quantifiés au mieux afin de maximiser les défauts admissibles sur chaque pièce. La majorité des méthodes de tolérancement ne tient pas compte des déformations des pièces, et cela engendre généralement une sur-qualité de fabrication, voire même des intervalles de tolérance trop petits par rapport aux capabilités des procédés de fabrication. En théorie, on compte sur le tolérancement et son respect pour que les pièces soient assemblables et interchangeables en minimisant les contraintes résiduelles. Mais le contexte aéronautique n'est pas propice au rebut car il s'agit d'une production en petites séries de grandes pièces généralement très onéreuses. Et jusqu'à présent, on pouvait considérer au moment de la conception que leur souplesse permettra de les assembler nonobstant les écarts de géométrie. Or cette idée est remise en cause, en particulier pour les matériaux composites. D'un point de vue mécanique, les contraintes résiduelles issues de l'assemblage ne sont pas prises en compte lors du dimensionnement autrement que par l'usage de coefficients de sécurité qu'on cherche à minimiser. C'est ainsi que sont atteintes à la fois les limites de l'hypothèse des pièces rigides pour le tolérancement, et celles de l'hypothèse des pièces parfaites pour le dimensionnement, faisant enfin émerger les objectifs de ces travaux.

La solution envisagée est appelée *"tolérancement flexible"* et sous-entend la prise

en compte de la flexibilité des pièces dans le processus de tolérancement. On imagine que les exigences géométriques obtenues ainsi sur les pièces seront moins restrictives (zones de tolérances plus larges), d'où l'attribution délibérée du qualificatif *"flexible"* au tolérancement plutôt qu'aux pièces, aux structures ou aux assemblages. Autrement dit on a affaire à un processus de tolérancement moins contraignant, donc plus flexible.

En introduction de sa thèse, [Merkley, 1998] explique que la communauté anglophones des chercheurs spécialisés dans ce sujet sont adopté le terme *"compliancy"* à la place de *"flexibility"* ou *"deformable"* afin d'éviter toute confusion avec la flexibilité d'une chaîne de fabrication ou d'assemblage, et parce que le terme *"deformable"* a une connotation péjorative par rapport à l'idée de sécurité.

Dans ce mémoire, on parlera aussi bien de pièces non-rigides, souples ou flexibles afin de limiter les répétitons.

Bref, afin d'enrichir les méthodes de tolérancement en y apportant à la fois la prise en compte des déformations et leurs conséquences mécaniques, il faudrait réaliser un modèle virtuel de la structure ou du mécanisme qui contienne des informations relatives aux géométries des pièces ainsi qu'à leurs variabilités, à leurs comportements mécaniques, et aux interactions cinématiques et statiques entre elles. La méthode des éléments finis est un outil à la fois adapté et assez développé pour réaliser cette modélisation.

Dans ces travaux, l'approche consiste d'abord à établir un modèle éléments finis de chaque pièce de la structure à partir de leur modèle géométrique nominal issu de la CAO et des caractéristiques de leurs matériaux. Ensuite des défauts géométriques aléatoires y sont introduits afin d'obtenir un jeu de pièces virtuelles à géométrie non-idéale. Puis leur assemblage est simulé en leur appliquant les conditions aux limites qui correspondent aux liaisons. Les critères de conformité sont alors observés sur le résultat de la simulation.

Comme il s'agit d'une opération déterministe, il faudra la réaliser un grand nombre de fois avec des défauts différents avant de pouvoir en tirer des conclusions quant au tolérancement. Ces simulations intensives soulèvent évidemment la question du compromis entre le coût de calcul et la robustesse du modèle. Vu le type de pièces et la nécessité de diminuer les coûts de calcul, le choix de modélisation s'oriente naturellement sur des éléments de structure tels que des coques et des poutres. Cela nécessite auparavant d'idéaliser la géométrie issue du modèle CAO. Se posent alors plusieurs questions relatives à la modélisation auxquelles ces travaux apportent des éléments de réponse. Par exemple les défauts géométriques, qui concernent des surfaces n'apparaissant pas forcément dans le modèle éléments finis, doivent être imputés sur ces éléments de structure. Il en est de même pour les liaisons car celles-ci sont réalisées par l'interaction mécanique entre des surfaces dématérialisées suite à l'idéalisation.

Ensuite se pose la question de savoir quels sont les phénomènes physiques qu'on souhaîte prendre en compte ou négliger dans la simulation d'assemblage comme le

contact unilatéral ou les non-linéarités géométriques. Quelles sont alors les hypothèses et simplifications correspondantes, ou les paramètres et caractéristiques à renseigner ? Quelle stratégie de calcul adopter ?

Enfin, comment interpréter les résultats des simulations d'assemblage pour en tirer des conclusions sur le tolérancement ?

L'une des ambitions industrielles d'*EADS-IW* vis-à-vis de ces travaux est de développer le logiciel *AnaToleFlex* (pour *ANAlyse de TOLErances FLEXible*). Celui-ci s'appuiera sur l'outil *AnaTole* précédemment développé par *EADS-IW* et intégré à *CATIA V5*. Il s'agit d'un logiciel d'analyse de tolérances avec des hypothèses de solides rigides. L'objectif est donc de l'enrichir avec la prise en compte des déformations des pièces impliquées par leur assemblage et leurs défauts géométriques. En parallèle le développement du logiciel d'aide à l'assemblage *FitFlex* est poursuivi. Fondé sur les travaux de thèse de [Breteau, 2009], ce dernier a pour objectif d'élaborer et d'effectuer des simulations d'assemblage de pièces souples non-idéales afin d'assister les opérateurs pendant les opérations d'assemblage et de réglage.

Le premier chapitre de ce mémoire constitue d'abord une mise en contexte en présentant certaines techniques d'assemblage en aéronautique. S'en suit un ensemble d'états de l'art nécessaires à ces travaux. Les sujets abordés concernent le tolérancement de pièces rigides et non-rigides, la caractérisation et la modélisation des défauts géométriques, et enfin la modélisation des assemblages à l'aide des éléments finis.

À travers ce chapitre, des premiers éléments de réponse seront donnés quant à l'élaboration d'un modèle éléments finis pertinent pour le "tolérancement flexible". Les résultats d'une étude relative au choix de paramètres de modélisation tels que le degré d'idéalisation, le type d'éléments et la finesse de maillage seront notamment présentés.

Le deuxième chapitre expose de manière détaillée les ambitions relatives à la simulation d'assemblage de pièces souples et non-idéales dans un contexte industriel. Il constitue implicitement une base de réflexion pour le développement du logiciel *"AnaToleFlex"*. Les activités industrielles évoquées concernent l'analyse et la synthèse de tolérances, l'élaboration et l'analyse de gamme d'assemblage, et enfin l'assistance aux opérations d'assemblage et de réglage.

Le troisième chapitre revient plus en détail sur le processus d'élaboration du modèle éléments finis pour la simulation d'assemblage de pièces souples et non-idéales. Le premier point clé concerne la méthode choisie pour générer aléatoirement des défauts de forme réalistes. Cette méthode est inspirée du tolérancement modal où le défaut de forme d'une surface est exprimé comme la somme de modes amplifiés. Le second point clé est relatif à la modélisation des liaisons rivetées ou boulonnées sous forme de connexions également sujettes à des variabilités géométriques représentant des défauts de localisation et d'orientation.

Le quatrième chapitre s'articule autour de deux cas d'étude académiques simples permettant de tester les méthodes d'analyse et de synthèse de tolérances de pièces souples par rapport à des critères géométriques, mais aussi statiques. Les influences des défauts géométriques et du contact unilatéral sur le comportement mécanique du système seront évaluées afin de proposer des stratégies de calcul en fonction des critères observés et du coût de calcul admissible.

Le cinquième et dernier chapitre constitue une application des solutions proposées sur un cas d'étude industriel. Il s'agit d'un treillis supportant des câbles et tuyauteries pour un avion. Celui-ci est constitué de longues poutres très légères et souples, et il doit être boulonné à des supports sans avoir recours au contre-perçage. Le "tolérancement flexible" prend ainsi tout son sens. L'élaboration du modèle éléments finis à partir du modèle CAO sera d'abord décrite. Les variabilités géométriques étant nombreuses, une démarche d'interprétation des résultats sera alors proposée. Elle permettra d'identifier d'une part les défauts qui sont préjudiciables à la conformité statique du treillis à l'état assemblé, et pour lesquels on peut envisager de restreindre les tolérances, et d'autre part, ceux dont l'impact est assez négligeable pour qu'on puisse se permettre d'élargir les tolérances.

# Chapitre 1

# Tolérancement, assemblage et simulation

*Ce chapitre a pour objectif de poser les bases des travaux. Tout d'abord une rapide présentation de certaines technologies pour l'assemblage des panneaux de fuselage aéronautiques dévoilera le contexte des travaux, et permettra d'appréhender la complexité de cette phase d'industrialisation. Ensuite, des généralités sur le tolérancement des pièces supposées infiniment rigides seront exposées. Comme l'idée est de simuler l'assemblage de pièces avec défauts géométriques aléatoires, on présentera un état de l'art sur la modélisation des pièces de faible épaisseur par des éléments coques et poutres ainsi que les résultats d'une étude comparative de ces modèles. S'en suivra alors un état de l'art sur le tolérancement des pièces souples.*

# Sommaire


**1 Les technologies d'assemblage aéronautiques . . . . . 11**
1.1 Un exemple d'assemblage aéronautique . . . . . 11
1.2 Les gammes de rivetage . . . . . 12
1.3 Les assemblages meccanos . . . . . 14
**2 Généralités sur le tolérancement . . . . . 14**
2.1 Analyse et synthèse de tolérances . . . . . 14
2.2 Notion de skin-model . . . . . 15
2.3 Expression des exigences géométriques . . . . . 16
2.4 Outils de tolérancement . . . . . 16
**3 Les modèles d'assemblage en élements finis . . . . . 18**
3.1 Comportement mécanique des pièces . . . . . 18
3.2 Cas des pièces minces : éléments de structure . . . . . 19
3.3 Erreurs dues à la discrétisation . . . . . 21
3.4 Modélisation des liaisons . . . . . 24
**4 Le tolérancement de pièces non-rigides . . . . . 28**
4.1 Les prémices . . . . . 28
4.2 Méthode des coefficients d'influence . . . . . 28
4.3 Méthode FASTA . . . . . 30
4.4 Séquence d'assemblage . . . . . 33
4.5 Le contact unilatéral . . . . . 35
4.6 La norme NF ISO 10579 . . . . . 36
**5 Récapitulatif . . . . . 36**
5.1 Modélisation des assemblages . . . . . 36
5.2 Variabilités géométriques . . . . . 37
5.3 Stratégie d'analyse et simulation d'assemblage . . . . . 38

# 1 Les technologies d'assemblage aéronautiques

Contrairement au spectacle que constitue une chaîne d'assemblage automobile, l'assemblage aéronautique peut paraître quelque peu artisanal du fait de sa faible automatisation. En effet, l'implantation de la robotique dans ce contexte amène aussi de sérieuses problématiques à cause de la grande dimension des pièces et des sous-structures, de leur complexité et des difficultés à les manipuler. On peut toutefois observer que beaucoup de travaux d'automatisation ont étés menés avec succès dans les ateliers d'*AEROLIA* (Meaulte 80) où sont fabriquées les pointes avant de différents modèles d'avions *AIRBUS* ainsi que plusieurs types de panneaux de fuselage. Mais dans les ateliers d'*AIRBUS* (Toulouse 31), du fait de leur grande taille, l'assemblage final des tronçons ne permet pas ce niveau d'automatisation et ce sont les opérateurs qui effectuent les tâches d'assemblages. La majorité d'entre elles sont destinées à lier entre eux des éléments du fuselage.

## 1.1 Un exemple d'assemblage aéronautique

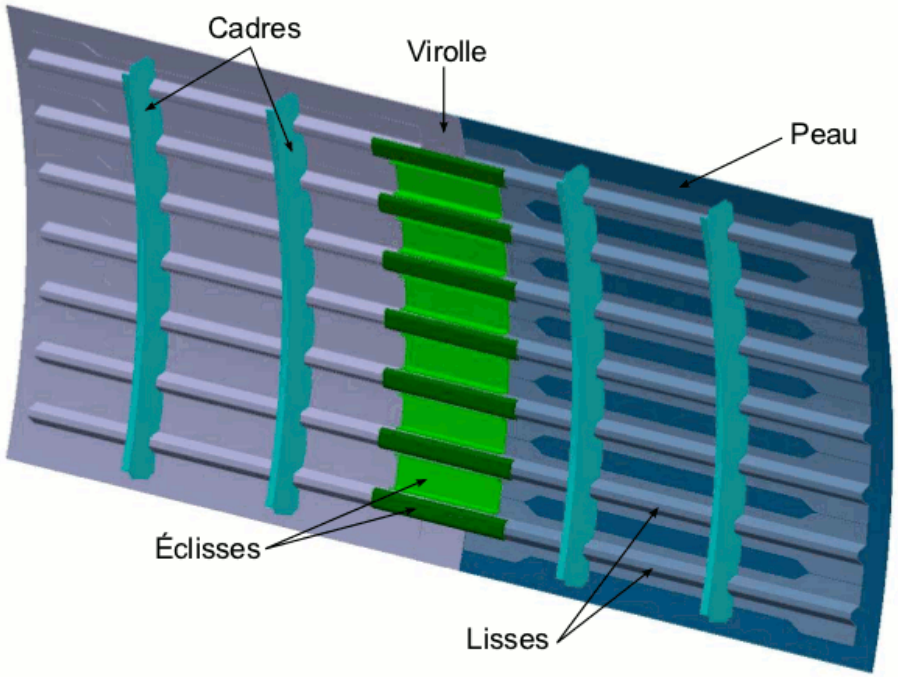



**Figure 1.1:** *Pièces standards d'un morceau de fuselage d'avion.*

La figure 1.1 illustre des constituants standards d'un morceau de fuselage. La peau est l'ensemble des panneaux courbes qui isole l'avion de l'extérieur. Elle est munie de lisses qui sont des raidisseurs longitudinaux, et est fixée sur des cadres

qui sont des raidisseurs circonférentiels. L'assemblage de deux panneaux bord-à-bord est réalisé à l'aide d'une virolle. Il s'agit du panneau recouvrant la zone de liaison et qui est assemblé sur la peau par une ou plusieurs rangées de rivets qu'on appelle une couture. Les coutures doivent d'une part être étanches pour maintenir la pressurisation cabine, et d'autre part ne présenter aucune discontinuité au niveau de la paroi extérieure (affleurement) afin de conserver l'aérodynamisme. Les jonctions permettant la continuité des raidisseurs longitudinaux sont faites par l'intermédiaire des éclisses. Leur assemblage requiert un bon alignement des lisses.

## 1.2 Les gammes de rivetage

La préparation aux opérations de perçage et rivetage consiste à monter les pièces sur des outillages destinés à les positionner les uns par rapport aux autres (balançage). Ces derniers peuvent éventuellement servir à conformer les pièces s'ils sont de type gabarits, et effectuer des réglages s'ils sont équipés de dispositifs d'ajustement. Le balançage et les réglages peuvent d'ailleurs être assistée par ordinateur ([Breteau *et al.*, 2007]). Ensuite, en fonction de l'outillage et du type de fixation, il existe plusieurs manières de procéder au rivetage.

Tout d'abord il y a la gamme d'assemblage avec éclatement, illustrée en neuf étapes sur la figure 1.2. Des trous de références déjà existants sur le premier panneau servent de repère pour contre-percer le second panneau (étapes 1 et 2), instaurant ainsi le positionnement relatif des deux panneaux au travers de la coaxiaité de leurs trous de référence. Leur diamètre est encore inférieur au diamètre final. On procède ensuite à un éclatement, c'est-à-dire que les panneaux sont séparés afin d'être ébavurés et d'évacuer les copeaux. On parle de *"dérochage"* (étape 3). Les panneaux sont ensuite parfaitement repositionnés en remettant en coincidence les trous de référence à l'aide d'une fixation temporaire appelée "épingle" dont la tension est ajustable (étape 4). Elles servent alors à mettre en place une grille de perçage. Il s'agit d'une plaque métallique épaisse et très rigide sur laquelle ont étés usinés de manière extrêmement précise une multitude d'alésages. Ils servent de canons de perçage, ou bien de support pour positionner l'*UPA (Unité de Perçage Autonome)*. Tous les trous de passage des rivets sont alors contre-percés, alésés au diamètre final, puis fraisurés (étape 5). Les grilles et épingles sont retirées des trous de référence afin de permettre leur alésage au diamètre final. Un nouvel éclatement a lieu pour le dérochage ainsi que la dépose d'un mastic appelé *"PR" (Polymérisation Rapide)* qui servira à étanchéifier toute la zone de recouvrement (étape 6). Les panneaux sont ensuite repositionnés. Il y a alors deux possibilités pour finir l'assemblage selon le type de fixations définitives.

S'il s'agit de rivets standards, l'écrasement de l'extrémité ne permet pas le contrôle d'une tension résiduelle dans le rivet. Les panneaux sont donc d'abord

épinglés sur tous les trous et l'ajustement des tensions des épingles permet un étalement homogène du mastic par fluage. Les panneaux restent épinglés ainsi pendant plusieurs heures jusqu'à ce que le mastic ait séché (étape 7). Un certain pourcentage d'épingles uniformément réparti sur la surface est enlevé et remplacé par les fixations définitives (étape 8). Usuellement, on remplace une épingle sur trois. Cette opération est répétée jusqu'à ce que la totalité des fixations définitives soient posées (étape 9).

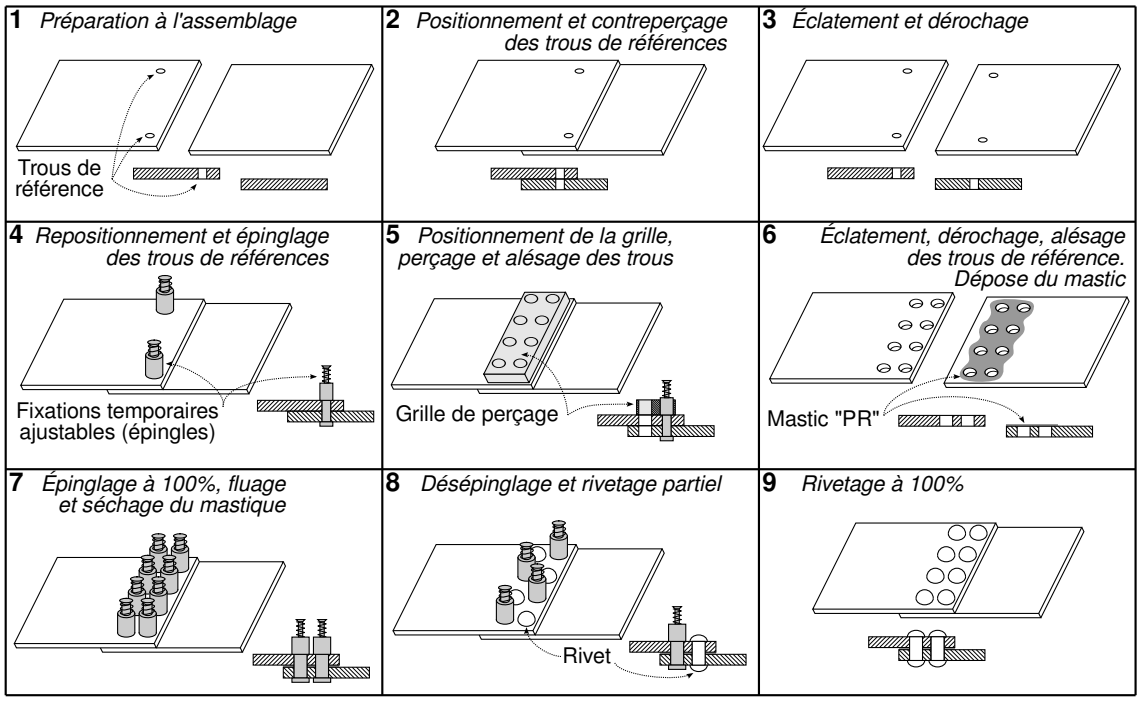



**Figure 1.2:** *Déroulement d'une gamme de rivetage avec éclatement.*

S'il s'agit de rivets aveugles, *LGP (Locking-Grooves Pin ou Lightweight Groove Proportioned)*, ou des vis, leur précontrainte en tension est fixée ou ajustable. La phase d'épinglage n'est donc pas nécessaire pour le fluage et le séchage du mastic. Seuls les trous de références sont épinglés pour le repositionnement des panneaux. Les fixations définitives sont alors mises en places et le mastic flue puis sèche. Enfin, les épingles des trous de références sont remplacées par les fixations définitives.

Il existe également une possibilité d'effectuer le rivetage en s'affranchissant de l'éclatement après perçage de tous les trous. On parle alors d'une gamme de proche en proche sans éclatement. Cette technique n'est possible que si l'accessibilité et l'outillage permettent le clampage qui consiste à serrer les deux panneaux autour de l'endroit où le perçage va être effectué. Cela empêche les copeaux de se loger dans l'interstice entre les panneaux. Ainsi le dérochage n'est à faire que sur les surfaces extérieures et ne nécessite donc pas d'éclatement, ce qui constitue un gain de temps

d'assemblage considérable. On notera également que le mastic est déposé avant le perçage des trous, le joint d'étanchéïté est donc lui aussi contre-percé.

## 1.3 Les assemblages meccanos

La dernière technique qui nous intéresse le plus est appelée *"assemblage meccano"* en référence aux jeux de construction car les trous de passage des vis ou des rivets sont pré-percées. La phase d'assemblage se résume alors à positionner des pièces en mettant les trous en coïncidence puis à poser les éléments de fixation. Comme expliqué dans l'introduction, les assemblages meccanos permettent de gagner du temps en FAL *("Final Assembly Line")*. Toutefois leur inconvénient réside dans la précision de perçage des trous de passage car leurs coïncidences d'une pièce à l'autre génèrent de très nombreuses exigences géométriques d'assemblabilité. Selon le nombre de trous pré-percés, on distingue alors plusieurs niveaux ou degrés de contrainte. Entre fort (tous les trous sont pré-percés) et faible (seuls des trous de référence sont pré-percés), il faut trouver le niveau intermédiaire qui permet de maximiser le nombre de trous pré-percés (relatif au temps d'assemblage gagné) et dont les exigences d'assemblabilité sont réalisables en regard des capabilités du procédé de perçage.

Le tolérancement flexible prend tout son sens à travers l'évaluation de ces exigences tout en tenant compte des déformations et des contraintes résiduelles.

# 2 Généralités sur le tolérancement

## 2.1 Analyse et synthèse de tolérances

Le tolérancement consiste à définir des limites aux défauts géométriques qu'auront les pièces réelles une fois fabriquées. Ces limites doivent être exprimées dans un langage qui permette un dialogue sans abiguïté entre les acteurs de la conception, de la fabrication et du contrôle ou métrologie dimensionnelle. L'objectif est double. Il s'agit d'une part de pouvoir affirmer que si les pièces respectent ces limites, elles pourront être assemblées et interchangeables (critères d'assemblabilité), et elles garantiront le respect des conditions de fonctionnement du système. D'autre part, il faut faire en sorte que ces limites autorisent les défauts géométriques les plus grands possibles afin de laisser un maximum de liberté aux fabricants dans le choix des procédés et processus de fabrication, afin qu'ils puissent privilégier l'économie et/ou la productivité plutôt que la qualité.

Dans la pratique du tolérancement, on distingue deux approches qui sont l'analyse et la synthèse de tolérances. L'analyse consiste à vérifier que les spécifications géométriques des pièces leurs permettent d'assurer les exigences fonctionnelles de

l'assemblage. La synthèse de tolérances quant à elle, vise à quantifier directement les zones de tolérances des pièces en fonction des exigences sur l'assemblage. On parle aussi d'allocation de tolérances. La figure 1.3 illustre brièvement ces concepts.

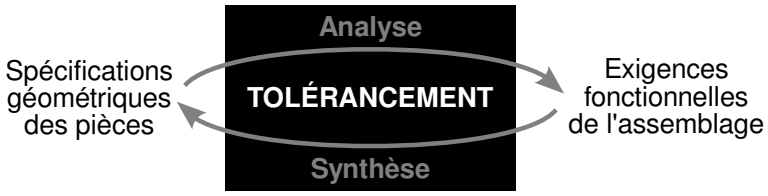



**Figure 1.3:** *Analyse et synthese de tolérances.*

## 2.2 Notion de skin-model

[Ballu *et al.*, 2001] et [Dantan *et al.*, 2001] définissent le *"skin-model"* comme étant un modèle représentant l'interface de la pièce avec son environnement, et qui se distingue du modèle nominal par le fait que les formes de ces interfaces sont considérées géométriquement imparfaites. Il permet de représenter une pièce avec ses surfaces extérieures ayant des défauts géométriques. Cette vision, inspirée des activités de métrologie, sert de support au langage de spécification GeoSpelling [Ballu *et al.*, 2007]. La figure 1.4 illustre cette notion pour une pièce simple. Le skin-model sera nécessaire dans ces travaux car il s'agira d'en générer des instances aléatoires pour ensuite simuler leur assemblage.

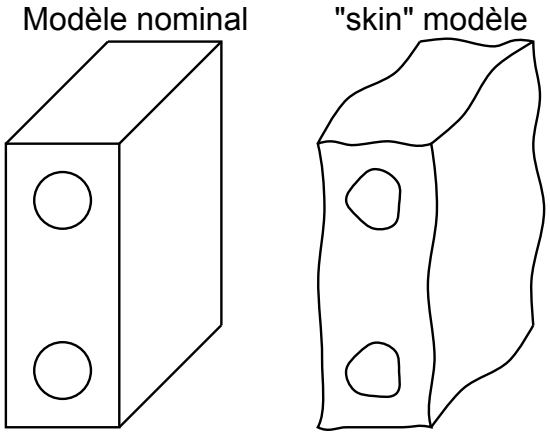



**Figure 1.4:** *Modèle nominal et représentation du skin-model d'une pièce (source : [Ballu* et al.*, 2007]).*

## 2.3 Expression des exigences géométriques

À partir des années 1970, les techniques de tolérancement consistaient à traduire les conditions géométriques de fonctionnement et d'assemblabilité (jeux fonctionnels, ajustements, etc.) sous forme de tolérances sur certaines dimensions des pièces, et à répartir au mieux ces tolérances. Pour cela, des chaînes de cotes unidirectionnelles sont établies sur le dessin de définition du système dont la géométrie nominale est déjà figée. Le transfert des cotes fonctionnelles en cotes de fabrication permet ensuite de comparer la qualité géométrique exigée aux capabilités des moyens de production déjà choisis. Malgré le fait que cette technique permette encore de résoudre un grand nombre de problèmes, sa restriction dimensionnelle présente des lacunes et l'interprétation des cotes laisse place à des ambiguïtés. Afin de lever les doutes sur la définition des géométries admissibles, un langage de spécification normalisé GPS (Geometrical Product Specification) a été mis en place en 1996. Il s'agit de décrire explicitement des zones de tolérance dans lesquelles les entités géométriques réelles doivent être situées pour que la pièce soit considérée apte à remplir les conditions d'interchangeabilité et de fonctionnement du mécanisme.

## 2.4 Outils de tolérancement

Ce langage met en avant la nécessité de développer des outils de tolérancement tridimensionnels. L'idée a été d'introduire des variabilités géométriques dans les modèles cinématiques des assemblages [Thiebaut, 2001], [Marguet, 2001]. Ces variabilités se présentent sous la forme de torseurs des petits déplacements associés aux surfaces fonctionnelles ou aux torseurs de liaison, et permettent de modéliser des défauts de position et d'orientation [Ballot et Bourdet, 1996]. Les composantes variables de ces torseurs sont appellés *"contributeurs"* car elles contribuent aux variabilités géométriques de l'assemblage. Les variabilités de ces contributeurs sont limitées par les zones de tolérance spécifiées sur les pièces indépendantes. Les conditions de fonctionnement et d'assemblabilité sont traduites sous forme de critères sur des quantités d'intérêt telles que la position d'un point, ou l'orientation d'une ligne par rapport à une référence. Le modèle cinématique permet alors d'exprimer les quantités d'intérêt sous forme de combinaison linéaire des contributeurs. Les coefficients affectés aux contributeurs sont appelés *"contributions"*. On entend aussi parler de *"bras de levier"* car ils sont assimilables à des distances remarquables dans le modèle cinématique.

Ainsi, le lien entre les spécifications des pièces et les conditions de fonctionnement de l'assemblage est fait par analyse de sensibilité de ces relations mathématiques. Elles permettent d'identifier les contributeurs les plus influents sur les quantités d'intérêts critiques. Des difficultés apparaissent toutefois lorsqu'on a affaire à des mécanismes hyperstatiques. Dans ces cas, il convient d'analyser un à un les cycles isostatiques du graphe des liaisons.

Ces méthodes devenant fastidieuses avec des mécanismes complexes, des modules intégrés aux logiciels de CAO ont étés développés. Par exemple le module *AnaTole*, fondé sur les travaux de thèse [Marguet, 2001], et développé par *EADS-IW*, ou bien le logiciel *MECAmaster Assembly* [Clozel et Rance, 2007]. Ces deux logiciels sont intégrés à *CATIA V5* et permettent de définir directement sur le modèle d'assemblage CAO, les liaisons, les contributeurs et leurs variabilités, ainsi que des points dont on observera les écarts de position en fonction des valeurs des contributeurs. Il est possible ensuite de réaliser des analyses dites *"pire cas"*, c'est-à-dire identifier les limites des quantités d'intérêt en fonction des domaines de variation des contributeurs, ou bien des analyses statistiques qui permettent d'obtenir les lois de distribution des quantités d'intérêt en fonction de celles des contributeurs, et tout cela avec des temps de calcul très courts.

Toutefois l'un des problèmes du tolérancement est que les pièces ne peuvent être spécifiées que lorsque leur géométrie est définie, c'est-à-dire à la fin de la phase de conception. Et les problèmes issus d'un mauvais tolérancement ne surgissent que lors de la phase d'industrialisation, voire même de la phase de production (bien souvent au moment de l'assemblage). Le délai est donc très court. Or pour être mise en œuvre, la méthode décrite ci-dessus ne nécessite que la connaissance de certaines dimensions et la définition de la cinématique des liaisons. C'est pourquoi ces travaux de recherche ont été étendus de manière à commencer le tolérancement au plus tôt dans la phase de conception et qu'il puisse être déterminant dans les choix technologiques (voir par exemple [Costadoat, 2010]). Le logiciel *GAIA (Graph Analysis for Interfaces of Assemblies)* développé par *EADS-IW* offre une interface représentant le système sous forme de graphes d'assemblages permettant de commencer le tolérancement très tôt et d'assurer sa traçabilité dans le processus de conception.

Il existe bien d'autres travaux de recherche sur le tolérancement présentés dans l'ouvrage [Mathieu et Villeneuve, 2007] qui constitue un recueil de nombreuses approches et méthodes développées en France à la fois pour le tolérancement et pour la métrologie dimensionnelle. L'issue de ces travaux est bien souvent l'implantation de méthodes de tolérancement dans des modeleurs CAO.

Dès la conception, le tolérancement garantit donc l'assemblabilité des pièces et le respect de conditions de fonctionnement principalement géométriques. N'en deumeurent pas moins des conditions de fonctionnement d'ordre mécaniques. Pour les garantir dès la conception, on compte sur le dimensionnement. Il consiste à déterminer les dimensions des pièces afin d'assurer leur résistance aux sollicitations mécaniques en fonction des caractéristiques mécaniques de leur matériau. Là aussi la recherche a permis le développement d'outils poussés dont la méthode des éléments finis [Zienkiewicz et Taylor, 2000] qui permet entre autre le calcul des contraintes et déformations dans des pièces à géométrie complexe. C'est pourquoi on souhaite l'utiliser dans le processus de tolérancement afin de tenir compte de la souplesse des pièces. Comme on restera dans le cadre de la mécanique statique, on distinguera

d'une part les critères de conformité géométrique qui concernent des grandeurs dimensionnelles, et d'autre part les critères de conformité statique qui concernent des actions mécaniques.

# 3 Les modèles d'assemblage en élements finis

De manière pragmatique, l'élaboration d'un modèle éléments finis d'une pièce commence usuellement par la discrétisation du modèle volumique issu de la CAO. Naturellement, sa géométrie est nominale. Il s'agit ensuite d'attribuer aux éléments une relation de comportement dépendant du matériau et des phénomènes que l'on souhaite observer. Ici il s'agit d'étudier des états de déformation et de contrainte en statique. Enfin, il faut modéliser les interactions entre le système et l'environnement extérieur par des conditions aux limites. Dans le cas du tolérancement flexible, les conditions aux limites seront principalement relatives aux mises en position, aux liaisons, aux efforts de pesanteur, et éventuellement aux efforts d'assemblage (efforts exercés par l'opérateur ou les outils pour l'assemblage).

## 3.1 Comportement mécanique des pièces

Dans les assemblages aéronautiques considérés, on distingue deux types de matériaux utilisés : les matériaux métalliques (bien souvent des alliages d'aluminium, des alliages de titane et parfois des aciers) et les matériaux composites (généralement constitués de fibres de carbone et de résines époxy).

Du fait de leur structure hétérogène, et parfois des contraintes résiduelles issues de leur fabrication, les matériaux composites présentent un comportement orthotrope. Ce comportement orthotrope est caractérisé par trois modules de tension, trois modules de cisaillement et trois coefficients de contraction orientés par les directions d'orthotropie [Lemaitre et Chaboche, 2004]. Les techniques d'homogénéisation permettent d'établir des macro-modèles en fonction de la structure et des caractéristiques du composite (épaisseur, orientation et empilement des plis, dimension et densité des fibres, propriétés mécaniques des fibres et de la matrice). Toutefois dans le cas des plaques, il est d'usage d'empiler les couches de fibres de manière à obtenir un comportement globalement isotrope dans les directions orthogonales à l'épaisseur. Concernant le comportement des plaques métalliques, il peut être lui aussi orthotrope, voire hétérogène, en raison de l'écrouissage et des contraintes résiduelles induites par les procédés de formage. Les directions d'orthotropie dépendent alors du procédé d'obtention (par exemple la direction de laminage).

Dans le cas du tolérancement, on suppose que les défauts géométriques sont petits devant les dimensions des pièces. Et dans le contexte de l'assemblage, on considère que les pièces ne doivent pas subir de déformations permanentes ou de détériorations

prématurées. On suppose ainsi que les contraintes et déformations restent dans le domaine élastique. On fera donc l'hypothèse des petites perturbations *(HPP)* et on se contentera d'une loi de comportement élastique linéaire isotrope ou orthotrope selon le matériau.

Si toutefois on craint que les sollicitations mécaniques des opérations d'assemblage ne conduisent à une déformation plastique ou une détérioration prématurée des pièces, dans le cadre du tolérancement flexible, il est possible d'utiliser des critères de dimensionnement comme étant des critères de conformité statique. Pour des pièces metalliques, on pourra utiliser par exemple les critères de Tresca ou Von Mises [Lemaitre et Chaboche, 2004]. Pour des pièces en composites, on pourra utiliser ceux de Tsai-Wu [Tsai et Wu, 1971], Hashin [Hashin, 1980] ou Puck [Puck et Schürmann, 2002].

## 3.2 Cas des pièces minces : éléments de structure

Comme évoqué dans l'introduction, les pièces structurelles aéronautiques ont au moins une dimension très inférieure aux autres, autrement dit il s'agit de pièces de type poutre, profilés, plaques ou coques, souvent munies de raidisseurs. Leurs modèles éléments finis doivent être élaborés à partir de leurs modèles géométriques volumiques issus de la CAO. Or la discrétisation de ce type de pièces à l'aide d'éléments finis volumiques n'est pas recommandée car elle génère un trop grand nombre d'éléments, donc de degrés de liberté, augmentant ainsi fortement le coût de calcul. En effet, la justesse d'un modèle éléments finis est conditionnée à la fois par la régularité géométrique de ses éléments, mais aussi par leur nombre. Une traduction réaliste du comportement des pièces minces nécessite non seulement d'avoir un nombre suffisant d'éléments (généralement plus de dix) dans la direction des petites dimensions (épaisseur), mais aussi une homogénéité dimensionnelle des éléments (distorsion limitée). La figure 1.5 illustre le problème de discrétisation d'une pièce mince en 2D.

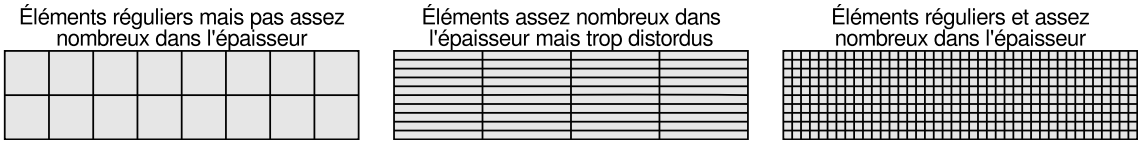



**Figure 1.5:** *Discrétisations en éléments quadrangulaires d'une pièce mince en 2D.*

À cet effet, on utilise des éléments de type poutre, plaques [Batoz et Dhatt, 1993] ou coque [Batoz et Dhatt, 1992] qui ne comportent qu'un élément dans l'épaisseur mais utilisent des cinématiques plus riches. Des hypothèses de comportement faites sur ces éléments permettent de déterminer les contraintes, déplacement et déformation en tout point du volume concerné à partir de celles calculés seulement sur une fibre ou une surface. Ces modèles posent des hypothèses sur :

– La cinématique qui lie le champ de déformation au champ de déplacement.
– Les efforts généralisés utilisés pour représenter les efforts intérieurs.
– La répartition des contraintes dans l'épaisseur.

Le fait d'exprimer l'épaisseur comme une caractéristique de comportement permet une diminution drastique du nombre de degrés de liberté, et donc du coût de calcul. Toutefois, cela nécessite un travail *"d'idéalisation"* de la géométrie c'est-à-dire traduire le modèle géométrique volumique en un modèle géométrique surfacique ou linéique qu'on pourra alors discrétiser plus largement. En pratique, la géométrie apparente issue de l'idéalisation représente généralement le plan neutre, situé entre les deux faces de la coque. L'épaisseur constitue alors un paramètre intrinsèque qui interviendra dans le comportement des coques, comme illustré sur la figure 1.6 avec un exemple de section de plaque munie d'un raidisseur en omega. Dans le cas d'éléments de type poutre, il faut calculer et renseigner les moments quadratiques.

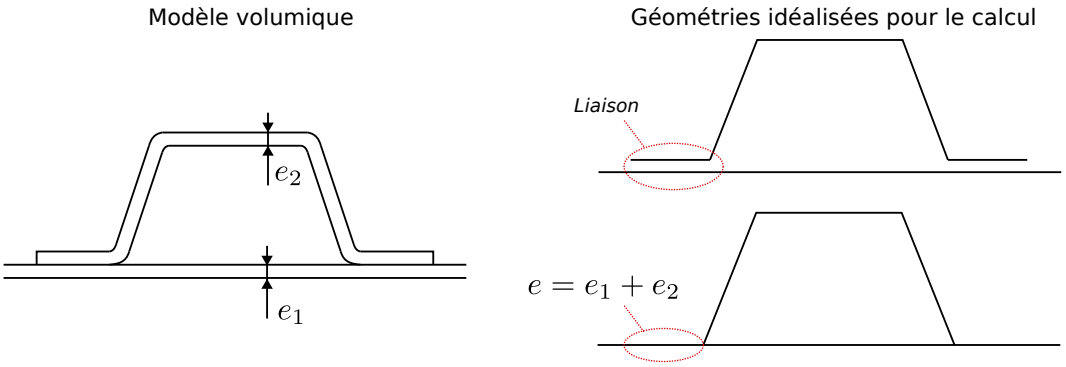



**Figure 1.6:** *Idéalisation d'une section de plaque munie d'un raidisseur en omega.*

Les thèses de [Fine, 2001] et [Foucault, 2008] décrivent en détail des méthodes adéquates à l'élaboration d'un modèle éléments finis à partir d'un modèle géométrique issu de la CAO. Ces pratiques de simplification de géométrie sont courantes pour le dimensionnement des structures. Elles s'accompagnent cependant d'une perte d'informations géométriques qui sont essentielles dans le cadre du tolérancement et de la simulation d'assemblage. Qu'il s'agisse des liaisons, des défauts, ou des critères de conformité géométrique, ce sont bien souvent les surfaces fonctionnelles qui sont concernés par les spécifications. Elles sont matérialisées dans un modèle volumique, mais pas forcément dans celui idéalisé. Des solutions à ce problème seront exposées par la suite.

Remarque : Attention aux confusions entre une *"géométrie idéale"* qui sous-entend une géométrie sans défaut de forme (par exemple une surface parfaitement plane ou parfaitement cylindrique), et une *"géométrie idéalisée"* qui signifie qu'un modèle surfacique ou linéique représente un modèle volumique, mais que l'épaisseur ou la section sont des caractéristiques relatives au comportement mécanique.

## 3.3 Erreurs dues à la discrétisation

Dans le contexte de la simulation d'assemblage pour le tolérancement, les grandeurs importantes sont les composantes des champs de déplacement dans les zones sujettes aux conditions fonctionnelles, les efforts ou contraintes dans les liaisons, et éventuellement les contraintes dans les zones fortement sollicitées. Dans les zones où on souhaite vérifier le respect d'une spécification géométrique, l'erreur en déplacement devra être très inférieure à l'intervalle de tolérance.

Outre les erreurs de modélisation, la taille des éléments peut aussi être une source d'erreur pour les résultats, notamment dans le cas de concentrations de contraintes localisées. Les outils d'optimisation des tailles des éléments sont maintenant assez répandus dans les codes de calcul. Des cartes de tailles de mailles adaptées peuvent être générées grâce à un estimateur d'erreur utilisé a priori (avant la simulation) ou a posteriori (en fonction des résultats de simulation). Dans le cas d'un bouclage de type "simulation - estimation de l'erreur - remaillage", on parle de maillage auto-adaptatif [Florentin *et al.*, 2005]. Ces techniques ont certes été développées pour des maillages volumiques ou surfaciques 2D, mais rarement de manière efficace dans le cas des éléments de structure.

À cet effet, une étude comparative de modèles a été menée en Juillet 2009 dans le cadre d'un stage intitulé *"Critères de choix d'un modèle éléments finis pour la simulation d'assemblage pour le tolérancement flexible"*. Ce stage a été effectué par Nicolas Courrier [Courrier, 2009], et encadré par Laurent Champaney et Alain Stricher. Les travaux ont consisté en l'élaboration et la comparaison de différents modèles éléments finis d'une même pièce typique de fuselage aéronautique. Il s'agit d'un panneau courbe muni de raidisseurs longitudinaux. L'idée était de comparer d'une part la réponse de ces modèles à la même sollicitation, et d'autre part le temps de calcul. Les dimensions et sollicitations sont illustrées sur la figure 1.7. Ainsi l'objectif était de déterminer par comparaison les paramètres de modélisation les plus adéquats pour faire du tolérancement flexible de grandes structures aéronautiques.

Les différences entre les modèles étaient le niveau d'idéalisation de la géométrie ( 3D – Coques – Coques avec raidisseurs poutre ), le type d'éléments, et la densité de maillage (taille des éléments). Le comportement du matériau attribué aux éléments est élastique linéaire et isotrope. Les différents types d'éléments testés sont les suivants :

Modèles non idéalisés : Ici le modèle géométrique 3D a été directement maillé à l'aide d'éléments cubiques à 8 et 20 nœuds et le calcul a été effectué avec *CAST3M* [Le Fichoux, 1998]. Puis, l'opération a été réitérée avec *CATIA V5* qui permet un maillage automatique avec des éléments tétraédriques à 4 nœuds.

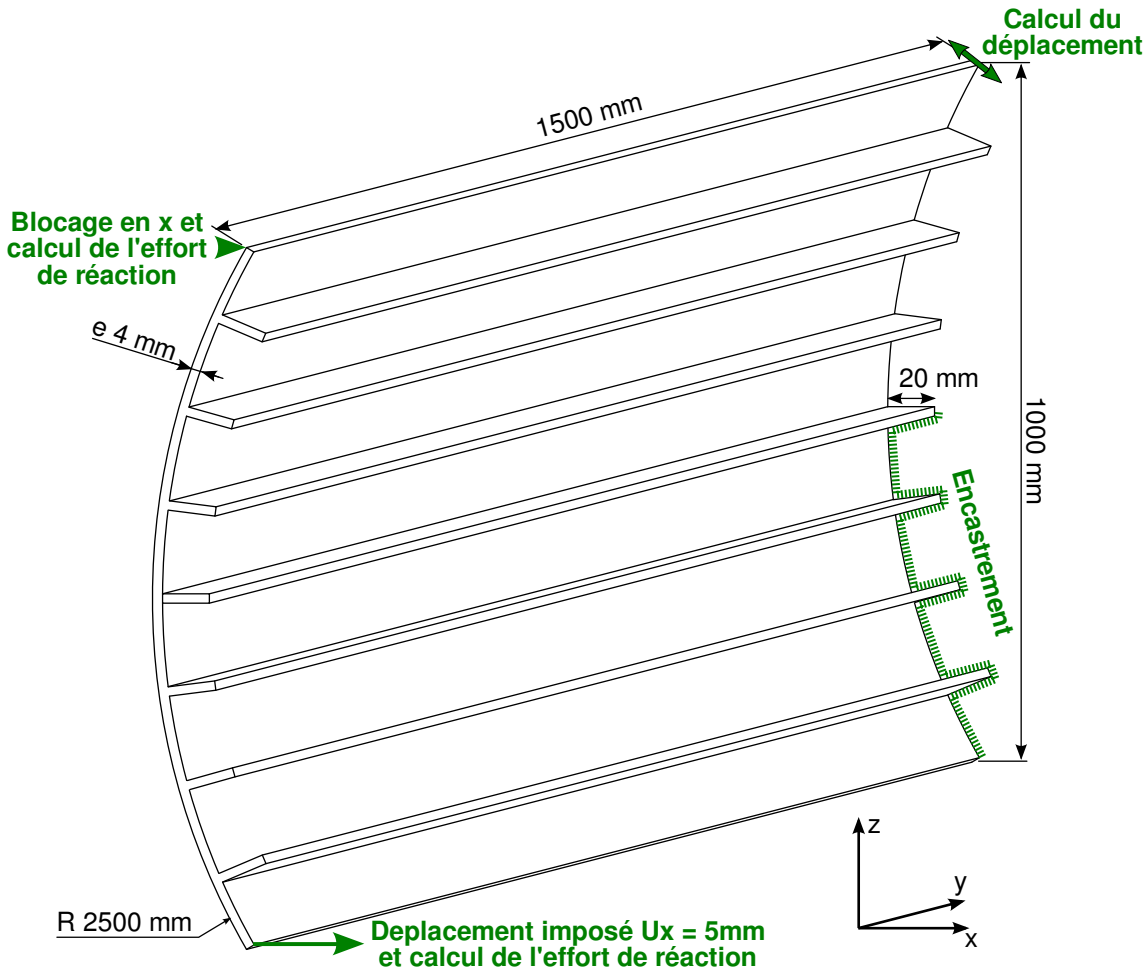



**Figure 1.7:** *Cas d'étude pour la comparaison de modèles éléments finis.*

Modèles faiblement idéalisés : Le premier degré d'idéalisation a consisté à supprimer les épaisseurs du modèle géométrique et la déclarer comme un paramètre intrinsèque au comportement mécanique des éléments qui constitueront le maillage. Divers éléments de type coque disponibles dans *CAST3M* et décrits dans [Batoz et Dhatt, 1992] ont ainsi étés utilisés :

- Éléments triangulaires à 3 nœuds.
- Éléments triangulaires à 6 nœuds.
- Éléments triangulaires à 3 nœuds avec hypothèse de Love-Kirchhoff (DKT).
- Éléments triangulaires à 3 nœuds avec hypothèse de cisaillement transverse (DST).
- Éléments quadrangulaires à 4 nœuds.

Modèles fortement idéalisés : Le second degré d'idéalisation a consisté à supprimer la largeur des raidisseurs en les remplaçant par des poutres dont les dimensions sont déclarées comme paramètres intrinsèques au comportement des éléments poutre par le calcul des moments quadratiques. Quant à la peau, elle reste mo-

délisée avec les éléments coques cités ci-dessus. En revanche, deux hypothèses d'idéalisation concernant la position de la fibre neutre ont étés testés :
- Les poutres sont centrées sur la plaque.
- La fibre neutre des poutres est excentrée par rapport à la plaque.

La comparaison des modèles a été faite par observation de quantités d'intérêt qui sont les efforts au point déplacé, ceux au point encastré, le déplacement du sommet libre, et enfin le coût de calcul chiffré par le temps CPU nécessaire à la résolution de chaque cas. La référence choisie pour juger de la justesse des résultats correspond au modèle volumique maillé à l'aide d'éléments cubiques à 20 nœuds. Les critères d'évaluation définis sont une erreur sur les quantités d'intérêt inférieure à 10% par rapport aux résultats de référence et un temps CPU de calcul inférieur à 650000 ms, soit 11 minutes environ. Le modèle réalisé à l'aide d'éléments coques avec hypothèse de Love-Kirchhoff a rempli ces critères en offrant un temps de calcul de quelques secondes à peine.

Les résultats de cette étude ont évidemment montré que l'idéalisation de la géométrie apporte un gain en temps de calcul car elle conditionne très fortement le nombre de degrés de liberté du problème à résoudre. Cette étape semble essentielle dans le développement d'un modèle éléments finis pour le tolérancement flexible étant donné que la simulation d'assemblage y est pratiquée de manière intensive. Cependant, les résultats obtenus pour les modèles avec des raidisseurs en poutre indiquent qu'une trop forte idéalisation peut dégrader la justesse. De plus, ce degré d'idéalisation a posé quelques difficultés techniques faisant prendre conscience de la vigilance dont il faut faire preuve et de l'expertise à la fois géométrique et mécanique nécessaire à ces transformations. Dans ce dernier cas, il faut établir des liens cinématiques entre les nœuds des raidisseurs et ceux de la plaque, mais aussi définir la position de la fibre neutre.

En ce qui concerne la finesse du maillage, les résultats ont mis en évidence le fait qu'elle est conditionnée par la plus petite dimension du modèle géométrique. En effet, comme évoqué précédemment, une distorsion trop forte des éléments induit des erreurs dans le calcul. Il existe d'ailleurs des critères dimensionnels pour vérifier que la distorsion des éléments du maillage est acceptable. De ce fait, la plus petite dimension géométrique conditionne la taille de tous les éléments du maillage. Par exemple, pour le modèle coque, la plus petite dimension est la hauteur des raidisseurs (20mm), ce qui implique que les éléments des raidisseurs ont un de leurs côtés qui ne dépassera pas 20mm. Lorsque les dimensions des autres côtés de l'élément deviennent trop grandes par rapport à cette valeur limite, c'est-à-dire lorsque les éléments des raidisseurs présentent une forte distorsion, la justesse des résultats décroit fortement. Le même phénomène s'est vérifié avec le modèle 3D où la dimension conditionnant la taille des éléments était l'épaisseur de 4mm de la plaque. Le passage d'un modèle 3D à un modèle coque a permis au maillage de ne plus être conditionné par son

épaisseur. Puis l'idéalisation des raidisseurs en modèle poutre a permis à la densité du maillage de ne plus être conditionnée par leur hauteur. Finalement, ces résultats ont ouvert la perspective de recalage de modèles afin de corriger les erreurs dûes à l'idéalisation et à la discrétisation.

## 3.4 Modélisation des liaisons

Les travaux de thèse de [Cid, 2005], qui se situent dans la lignée des travaux sur la modélisation du comportement des mécanismes présentés au chapitre 2.4 (page 16), sont les précurseurs au LURPA de la prise en compte de la souplesse des pièces, l'objectif étant l'assistance aux opérations de balançage et de réglage. Les systèmes étudiés concernent une pièce souple, sous forme de modèle éléments finis, assemblée sur un bâti rigide en certains points qu'on appellera *"points d'assemblage"*. Les liaisons sont modélisées par trois types de conditions aux limites unidirectionnelles appliquées en ces points. L'auteur distingue un déplacement imposé, un effort imposé et une relation linéaire entre effort et déplacement. Il s'agit d'imposer soit des valeurs aux composantes du déplacement $ux_i$, $uy_i$, $uz_i$ ou aux composantes d'effort $Fx_i$, $Fy_i$ et $Fz_i$, soit d'établir une relation mathématique linéaire entre ces degrés de liberté, ce qui correspond à introduire de l'élasticité dans la liaison. Les équations 1.1, 1.2 et 1.3 régissent ces conditions aux limites et la figure 1.8 les illustre.

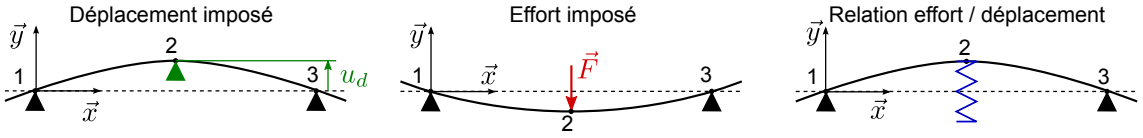



**Figure 1.8:** *Modèles de liaison entre une pièce et un bâti rigide.*

Déplacement imposé :

$$uy_2 = U_d \tag{1.1}$$

Effort imposé :

$$Fy_2 = \vec{F}.\vec{y} \tag{1.2}$$

Relation effort/déplacement :

$$k.uy_2 = -F_0 \tag{1.3}$$

$k$ correspond à la raideur de la liaison dans la direction $\vec{y}$.

$F_0$ correspond à la précharge du ressort en position nominale.

[Breteau, 2009] étend ces travaux au cas des assemblages de plusieurs pièces en introduisant des liaisons entre deux points d'assemblages appartenant à deux pièces différentes. La figure 1.9 illustre ces liaisons sur un exemple d'assemblage de poutres bout à bout en configuration initiale puis assemblée. Les équations 1.4, 1.5 et 1.6 régissent les relations cinématiques représentées.

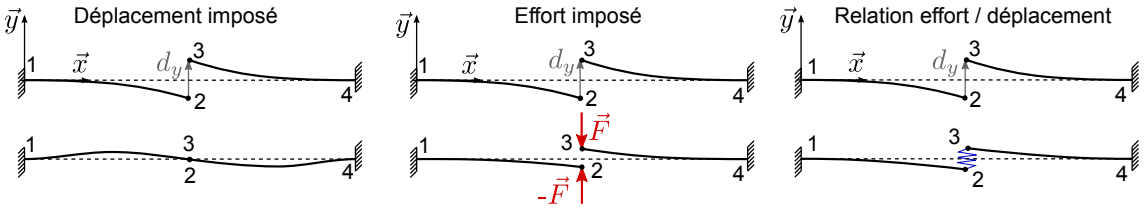



**Figure 1.9:** *Conditions aux limites pouvant modéliser des liaisons entre deux pièce.*

Déplacement imposés :

$$uy_2 - uy_3 = d_y \tag{1.4}$$

Effort imposés :

$$Fy_2 = -Fy_3 = -\vec{F}.\vec{y} \tag{1.5}$$

Relation effort/déplacement :

$$\begin{cases} uy_2 - uy_3 + \dfrac{Fy_2}{k} = \dfrac{F_0}{k} - d_y \\ Fy_2 = -Fy_3 \end{cases} \tag{1.6}$$

$d_y$ correspond à la différence entre les positions des nœuds 2 et 3 suivant $\vec{y}$ à l'état non-nominal en supposant naturellement qu'ils sont coïncidents à l'état nominal. On pourra parler de *"jeu initial"*.

Succédant à ces travaux, [Mounaud, 2009] étudie l'assemblage d'une tuyauterie aéronautique sujette à des défauts de cintrage. Ces derniers correspondent à des dispersions sur les paramètres du procédé de cintrage qui sont la longeur des parties droites entre deux parties cintrées, l'angle entre deux plans de cintrage, et l'angle de cintrage. Il propose un modèle de jonction rigide entre deux tronçons élémentaires dans lesquelles il fait intervenir également les degrés de liberté en rotation $\omega x$, $\omega y$ et $\omega z$, ainsi que les moments de liaison $Mx$, $My$ et $Mz$. Ces modèles sont écrits entre deux points numérotés 1 et 2 correspondant aux deux extrémités coïncidentes de deux différents tronçons de tuyau (cf. équation 1.7). Le tuyau étant modélisé par des tronçons élémentaires droits ou courbes, ce modèle correspond aux relations de cohésion entre ces éléments.

$$\begin{cases} [R_1]\{U_1\} = [R_2]\{U_2\} \\ [R_1]\{\tau_1\} = [R_2]\{\tau_2\} \end{cases} \tag{1.7}$$

$[R_i]$ correspond à la matrice de changement de base pour passer du repère global au repère local lié au tronçon élémentaire au point $i$.

$\{U_i\}$ correspond au torseur des petits déplacements au point $i$ résultant de la simulation d'assemblage. Il contient les composantes en translation $\{u_i\} = \{ux_i, uy_i, uz_i\}$ et en rotation $\{\omega_i\} = \{\omega x_i, \omega y_i, \omega z_i\}$.

$\{\tau_i\}$ correspond au torseur des actions mécaniques appliquées par la pièce auquel appartient le point 1 sur celle auquel appartient le point 2 ou inversement. Il résulte de la simulation d'assemblage et contient les composantes des forces $\{F_i\} = \{Fx_i, Fy_i, Fz_i\}$ et des moments $\{M_i\} = \{Mx_i, My_i, Mz_i\}$.

Il pose ensuite l'équilibre dans chaque cycle du graphe d'assemblage entre le bâti et le tuyau en passant par des attaches situées sur des supports déformables fabriqués en tôle pliée (comportement élastique) et fixés au bâti. Ces attaches sont également sujettes à des défauts de position et d'orientation. L'équilibre est écrit dans l'équation 1.8 entre un point d'assemblage du tuyau au bâti numéroté 1, et le point suivant numéroté 2.

$$\begin{cases} -[R_1]\{U_1\} - [R_2]\{U_2\} = 0 \\ -[R_1]\{\tau_1\} - [R_2]\{\tau_2\} + \{\tau_{ext\,2}\} = 0 \\ [K][R_2]\{U_2\} + \{\tau_{ext\,2}\} = [K]^T[R_2]\{Ud_2\} \end{cases} \tag{1.8}$$

$[R_i]$ correspond à la matrice de changement de base pour passer du repère global au repère local lié au point $i$.

$[K]$ est une matrice diagonale correspondant à la rigidité de l'attache.

$\{Ud_2\}$ correspond au torseur des petits déplacements imposés au point 2. Il contient les composantes de translation imposée $\{ud_i\}$ et celles de rotation imposée $\{\omega_i\}$. Il représente les défauts de localisation et d'orientation des attaches au point d'assemblage 2 par rapport au bâti.

$\{\tau_{ext\,2}\}$ correspond au torseur des actions mécaniques extérieures appliquées au point 2. Il contient les composantes des forces exterieures $\{F_{ext\,2}\}$ et des moments extérieurs $\{M_{ext\,2}\}$.

On a ainsi deux modèles de liaisons sous-jacente dans cette formulation, à savoir une liaison rigide et complète entre les tronçons de tuyau, et une liaison élastique entre le bâti et le tube. Ce qui distingue ces modèles des précédents est qu'ils lient également les composantes de rotation et de moment entre les pièces.

Dans ses travaux de thèse, [Gant, 2011] modélise les incertitudes dans les assemblages boulonnés de plaques. Les modèles des fixations sont des *"connecteurs"* liant deux nœuds de deux pièces différentes. De la même manière que le modèle de l'attache utilisé par [Mounaud, 2009] (cf. équation 1.7), une matrice de rigidité est associée à ce connecteur afin de lui attribuer un comportement élastique linéaire. On peut aussi parler de *"ressort généralisé"*. Ses composantes sont calculées a priori en fonction des épaisseurs et des modules d'élasticité des plaques assemblées, ainsi que du diamètre et du module d'élasticité de la fixation (vis ou rivet). Plus particulièrement, la raideur orthogonale à l'axe du connecteur est calculée avec la formule de Huth [Huth, 1986] , très usitée pour le dimensionnement de structures aéronautiques. Ce comportement est ensuite recalé, idéalement par rapport à des résultats d'essais, ou sinon par rapport à des résultats de simulation avec un modèle plus élaboré.

Les modèles de liaison présentés ici sont tous des modèles simplifiés à l'échelle macroscopique. Ils relient les degrés de liberté de deux nœuds appartenant chacun à une pièce différente. Les liaisons rivetées ou boulonnées peuvent cependant être modélisées de manière plus détaillée à l'échelle mésoscopique [Boucard et Champaney, 2003], [Roulet, 2012], ou à l'échelle microscopique [Alkatan *et al.*, 2007]). Le choix de cette échelle est issue d'un compromis entre le réalisme du modèle et le coût de calcul.

Par la suite, on privilégiera la simplicité des modèles et la rapidité de calcul qu'on jugera essentielles pour le tolérancement flexible.

# 4 Le tolérancement de pièces non-rigides

## 4.1 Les prémices

Aux États-Unis, les premiers travaux sur le tolérancement de pièces non-rigides ont commencé aux alentours de 1994 avec [Gordis et Flannelly, 1994] qui proposent d'effectuer une analyse des modes de vibration afin de prédire les contraintes et déformations résiduelles induites par le désaxement des trous de passage des fixations de pièces souples. Plusieurs équipes de recherche ont ensuite entamé leurs travaux sur la problématique d'assemblage de pièces non-rigides et non-idéales. Les principaux protagonistes sont S. Charles Liu et S. Jack Hu, Kenneth W. Chase et Karl G. Merkley, Dariusz Ceglarek et Jianjun Shi, et enfin Jaime Camelio. Les entreprises porteuses de ces problématiques étaient General Motors, Boeing, l'U.S. Airforce et le bureau de recherche navale *(Office of naval research)*.

Les conclusions issues de l'article [Ceglarek et Shi, 1995] semblent avoir sucité l'intérêt des auteurs pour étudier l'influence de variabilités géométriques sur les assemblages de pièces non-rigides. En effet, les objectifs de ces travaux étaient de réduire les variabilités dimensionnelles de structures automobiles en identifiant leurs causes. L'analyse du processus d'industrialisation et de la production de la ligne d'assemblage (ici du soudage par point) a ainsi mis en exergue l'accumulation des écarts au fur et à mesure des opérations d'assemblages ainsi que le rôle clé des positionnements et des orientations des pièces et des outillages (pistolets de soudage) [Ceglarek et Shi, 1996]. Ainsi, lorsqu'ils ont introduit l'analyse de tolérances dans [Ceglarek et Shi, 1997], les variabilités géométriques ont été modélisées par des vecteurs caractérisant les défauts de position et d'orientation des points de liaison. La nature des pièces de structure automobile et leur complexité les ont poussés à utiliser des modèles éléments finis, mais sans aborder les problématiques de modélisation.

## 4.2 Méthode des coefficients d'influence

C'est à cette époque qu'est formalisée la méthode des coefficients d'influence *(Method of Influence Coefficients)* dans [Liu et Hu, 1997] pour le tolérancement de pièces souples. Cette dernière correspond à une méthode de perturbation où les quantités d'intérêt sont approximées par un développement limité de Taylor à l'ordre 1. Autrement dit, elle consiste à exprimer les quantités d'intérêt qu'on notera $\alpha_j$ comme étant la somme des produits de chaque contributeur qu'on notera $\delta_i$ et de coefficients d'influence $c_{ij}$ déterminés par des simulations d'assemblage. L'équation 1.9 montre cette approximation en notation indicielle et matricielle.

Remarque : Par analogie avec le vocabulaire employé par les outils de tolérancement évoqués au chapitre 2.4 en page 16, on considèrera un contributeur comme étant un scalaire qui caractérise et quantifie une variabilité géométrique.

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\delta_i \qquad ; \qquad \{\alpha\} = [S]\,\{\delta\} \tag{1.9}$$

Les coefficients $c_{ij}$ caractérisent l'influence (supposée linéaire) qu'a le contributeur numéroté $i$ sur la quantité d'intérêt numérotée $j$. Toujours par analogie avec le tolérancement de pièces rigides, on pourra les appeller aussi *"contributions"*.

La matrice $[S]$ est appelée *"matrice de sensibilité"*, elle contient tous les coefficients d'influence $c_{ij}$. Sa dimension est le nombre de quantités d'intérêt $\times$ le nombre de contributeurs, c'est-à-dire $N$.

Les variabilités géométriques sont traduites par les *"efforts d'assemblage"*, c'est-à-dire les efforts à appliquer sur les points d'assemblage ou de bridage pour les mettre en coïncidence. La valeur de ces forces dépend d'une part de la rigidité des pièces, et d'autre part de la distance qui les sépare. Cette distance correspond localement à l'accumulation des défauts géométriques des pièces et des défauts de position des outils. On pourra donc choisir si les contributeurs correspondent à ces défauts, à ces distances, ou à ces efforts d'assemblage.

Pour calculer ces coefficients d'influence, il suffit de réaliser autant de simulations d'assemblages que de nombres de contributeurs. Chaque simulation est effectuée successivement avec un contributeur unitaire ($\delta_i = 1$) et les autres nuls. Le relevé des quantités d'intérêt nous donne directement la valeur des coefficients d'influence. L'équation 1.10 illustre le calcul des coefficients d'influence du premier de trois contributeurs sur deux quantités d'intérêt.

$$\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}c_{11} & c_{21} & c_{31}\\ c_{12} & c_{22} & c_{32}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_{11} = \alpha_1\\ c_{12} = \alpha_2\end{cases} \tag{1.10}$$

L'expression des quantités d'intérêt sous forme d'une combinaison linéaire des contributeurs ramène à un problème similaire aux méthodes de tolérancement de pièces rigides présentées dans le chapitre 2.4 (page 16), et la simulation d'assemblage se résume à calculer les résultats de ces combinaisons linéaires. Cette méthode est donc très largement utilisée dans la recherche en tolérancement de pièces non-rigides car la linéarisation offre des coûts de calculs très faibles.

## 4.3 Méthode FASTA

De son côté, le groupe ADCATS (Association for the Development of Computer-Aided Tolerancing Systems) fondé et dirigé par Kenneth W. Chase a publié ses premières tentatives d'introduction de la déformation des pièces dans l'analyse de tolérances dans [Merkley *et al.*, 1996] avec des exemples très simples. Leurs premiers résultats très aboutis arrivent en 1998 avec la thèse [Merkley, 1998] qui a réalisé un couplage entre MATLAB et le code de calcul éléments finis NASTRAN. NASTRAN sert à calculer la matrice de rigidité condensée de la structure, c'est-à-dire à modéliser la structure sous la forme d'un super élément ne contenant que les degrés de liberté étudiés. Elle est ensuite exportée vers MATLAB qui sert à réaliser une analyse de sensibilité avec une méthode de Monte-Carlo.

Les variabilités géométriques sont introduites au niveau des distances entre les points d'assemblage *(jeux initiaux)*. Or ces points appartiennent à des surfaces non-idéales aléatoires. On parlera de *"champ d'écart"* pour définir l'ensemble des distances entre une surface à l'état nominal et à l'état non-nominal. Le champ des jeux initiaux correspond donc à la somme des valeurs des champs d'écart des deux surfaces aux points d'assemblages considérés.

Merkley remet alors en cause l'attribution d'une variable aléatoire à chacune de ces distances. En effet, lorsque les points d'assemblage sont proches, les tirages aléatoires peuvent mener à des cas de défauts géométriques irréalistes. Il introduit alors le concept de *"covariance géométrique"* de *"covariance matérielle"*. La covariance géométrique représente le lien entre les écarts locaux d'un points d'assemblage et ceux des points voisins de manière à ce que les défauts géométriques générés aléatoirement soient réalistes. La covariance matérielle correspond au lien mécanique entre le déplacement d'un point d'assemblage et ceux des points voisins. La figure 1.10 illustre ce concept.

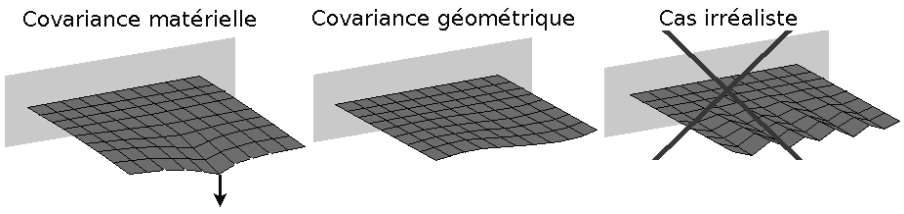



**Figure 1.10:** *Exemple de covariances matérielles et géométriques d'une plaque (source : [Bihlmaier* et al.*, 1999]).*

La covariance matérielle est caractérisée par la matrice de rigidité de la pièce, tandis que la covariance géométrique dépend de son procédé de fabrication, or le tolérancement n'est pas censé être réalisé après que les capabilités des moyens de productions soient identifiées. La solution proposée pour se donner une covariance

géométrique en entrée a consisté à générer aléatoirement des courbes (ou des carreaux) de Bézier. Les variables aléatoires correspondent aux positions de leurs points de contrôle et de leurs extriémités. La limitation du domaine de variation de ces points permet de délimiter la variation des points des courbes dans une région équivalente à une zone de tolérance géométrique de type défaut de forme d'une surface complexe (surface nominale +/- offset normal).

Sur la figure 1.11 issue de [Merkley, 1998], le graphique de gauche montre une collection de courbes de Bézier aléatoires, et celui de droite montre les positions aléatoires des points de contrôles dont 99% sont contenus dans des domaines circulaires. Les variabilités de positions en $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont indépendantes. On remarque bien l'appartenance de ces courbes à une zone de tolérance centrée sur la courbe nominale (exception faite des 1% hors domaine). Il n'y a ici que six variables aléatoires pour décrire toute cette collection, c'est-à-dire deux variables par point de contrôle.

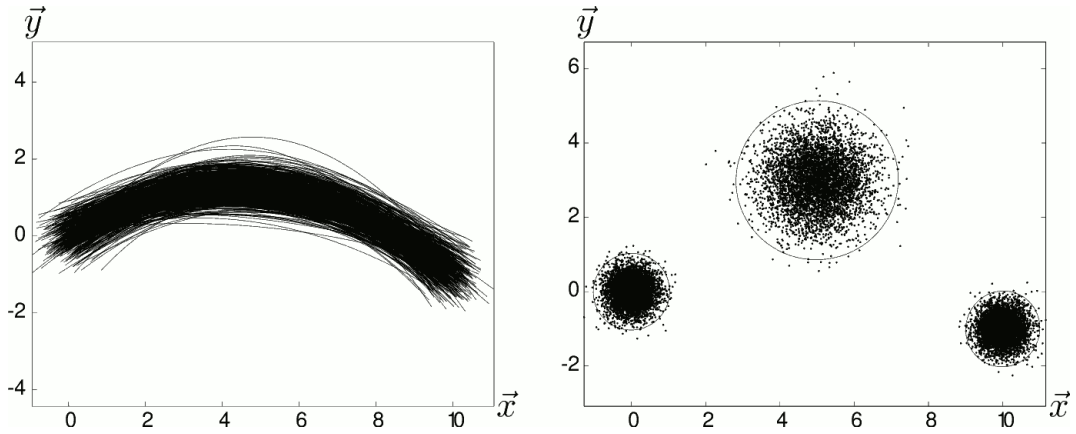



**Figure 1.11:** *Collection de courbes de Bézier aléatoires avec variabilité des positions des points de contrôle (source : [Merkley, 1998]).*

En calculant la covariance des variabilité des positions des points de ces courbes, puis en affectant cette dépendance aux variabilités des distances entre les points d'assemblage, il est possible de générer un champ de jeux initiaux correspondant à la somme de deux champs d'écart respectant une zone de tolérance. Cette méthode semble donc pertinente pour décrire des champs d'écart réalistes avec peu de variables aléatoires, en particulier pour des formes complexes. Cela nécessite cependant un choix judicieux des points de contrôle et de leur domaine de variation.

Un cas d'application industriel est traité dans le dernier chapitre de [Merkley, 1998]. Il s'agit de l'assemblage d'une partie d'un compartiment de passager dans un train. Ce dernier est modélisé par un assemblage de modèles éléments finis de type coques. Le critère limitant est la contrainte maximale admissible par les coques.

À l'issue de cette thèse, de nombreuses perspectives sont annoncées :
– La vérification des hypothèses par comparaison du modèle à des essais expérimentaux.

- Le développement d'une méthode d'optimisation de séquence d'assemblage.
- La reconsidération de l'hypothèse de linéarité de comportement, en particulier pour des mécanismes à petite échelle (par rapport aux défauts).
- Le développement de modèles de liaisons souples (plus réalistes) pour une observation plus pertinente des contraintes installées lors de l'assemblage.
- La définition de différentes fonctions pour décrire des formes d'écart entre deux surfaces à assembler (formes de fuseaux, sinusoïdales et vrillage), puis la confrontation de ce modèle à des résultats expérimentaux.
- L'approfondissement des travaux sur les courbes de Bézier aléatoires et leur lien avec les zones tolérances.
- L'analyse des covariances géométriques.
- La résolution des problèmes d'inter-pénétration entre les pièces à l'aide de conditions de contact unilatéral ainsi que l'utilisation de la méthode des statuts.
- La détection des phénomènes de flambement des pièces autour des zones d'assemblage en prenant en compte les non-linéarités géométriques.
- La prise en compte des variabilités de caractéristiques des matériaux et du modèle (épaisseurs, sections, etc.).

La thèse [Bihlmaier, 1999] qui fut publiée l'année suivante, complémente ces travaux en proposant une autre méthode de description des variabilités géométriques fondée sur l'analyse spectrale. De cette représentation en découle une méthode d'analyse de tolérances appelée FASTA (Flexible Assembly Spectral Tolerance Analysis). Il s'agit en fait de décrire la variabilité des défauts des surfaces sous forme d'un spectre discret dans le domaine fréquentiel. Cela signifie que concrètement, le champ d'écart de la surface correspond à une superposition de sinusoïdes de différentes amplitudes et longueurs d'onde. La matrice de covariance qui caractérise les défauts aléatoires est déduite du spectre et les champs de jeux initiaux sont ainsi générés aléatoirement. La méthode FASTA est comparée à une méthode de Monte-Carlo afin de montrer la similitude des résultats pour un faible nombre de calculs comme l'illustre la figure 1.12.

On remarquera qu'en raison de la faible amplitude des défauts par rapport aux dimensions des pièces, les auteurs de tous ces travaux ont fait l'hypothèse que les variations géométriques n'ont aucune influence sur leurs rigidités. Cela permet de conserver la linéarité du problème, et donc le modèle sous forme de matrice condensée quels que soient les défauts géométriques.

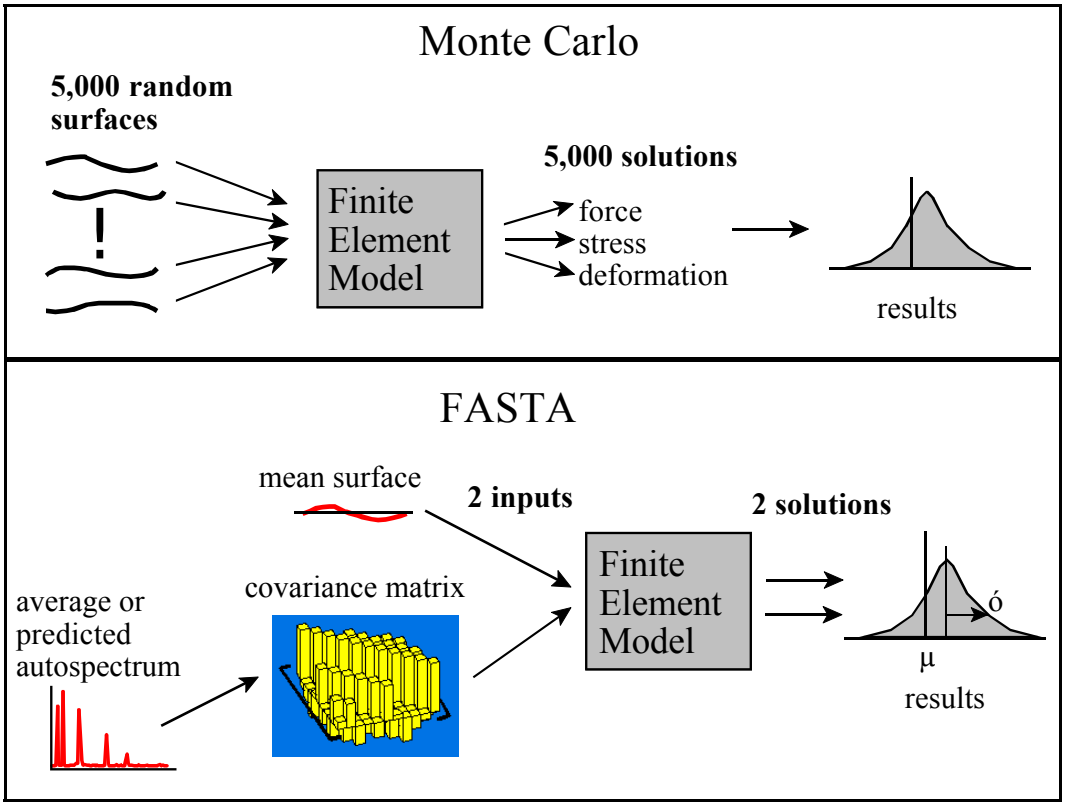



**Figure 1.12:** *Comparaison de la méthode FASTA à une méthode de Monte-Carlo (source : [Bihlmaier, 1999]).*

## 4.4 Séquence d'assemblage

Comme les travaux de [Ceglarek et Shi, 1995] avaient mis en évidence la propagation des défauts géométriques au fur et à mesure des opérations d'assemblage, ces derniers se sont donc focalisés sur l'aspect séquentiel de l'assemblage. Commandités par l'U.S. Airforce, bien que le cas d'étude soit issu de l'industrie automobile, les travaux de [Chang et Gossard, 1997] introduisent alors le concept du cycle *"PCFR"*, qui signifie *Place Clamp Fasten and Release*, pour prendre en compte la séquence d'assemblage. Il s'agit là de décrire une série d'étapes élémentaires d'assemblage décomposées ainsi :

- Place : Positionnement isostatique des pièces les unes par rapport aux autres.
- Clamp : Bridage des pièces (ou conformation).
- Fasten : Soudage (ou pose des fixations).
- Release : Débridage (accompagné d'un retour élastique)

Dans cet article, les auteurs distinguent bien les défauts de forme des pièces et leurs défauts de positions, mais ne tiennent finalement compte que des défauts de positions. Ce choix est argumenté par l'hypothèse que les défauts de forme sont négligeables.

Le cycle PCFR est ensuite utilisé dans de nombreux travaux, dont [Camelio *et al.*, 2003] qui traite un cas d'assemblage par soudage par points à l'aide de simulations successives où les incertitudes de positionnement des outils par rapport aux pièces sont prises en compte. Au fur et à mesure des étapes de soudage, la distribution de la position de certains points, dont celles des prochains à être assemblés, est estimée. Cette distribution peut être alors injectée comme une variabilité pour l'analyse de l'étape suivante.

[Franciosa *et al.*, 2010] utilisent également le cycle PCFR pour simuler l'assemblage de deux tôles de manière séquencée. Les variabilités géométriques concernent les défauts de forme et sont introduites à l'aide d'une méthode de *"morphose de maillage" (morphing mesh approach)* qui sera détaillée ultérieurement. On notera toutefois que dans ces travaux, l'influence des variabilités sur la rigidité des pièces est prise en compte.

Dans ses travaux de thèse, [Mounaud, 2009] procède tout d'abord à une étape de mise en position isostatique initiale et de balançage géométrique du tuyau (avec hypothèse des solides rigides), et ce en fonction des défauts des supports uniquement. Il identifie alors la position des points d'assemblage sur le tuyau, et peut procèder au calcul de la matrice de sensibilité caractérisant l'influence des défauts du tuyau sur les quantités d'intérêt. Cette matrice de sensibilité dépend ainsi de la mise en position isostatique initale et des défauts des supports. Par ailleurs, les quantités d'intérêt observées concernent entre autre des efforts de maintien de la pièce dans ses supports. Ces efforts ne devant pas dépasser une certaine valeur critique, l'analyse de tolérances réalisée ensuite à l'aide de la méthode des coefficients d'influence permet d'estimer une probabilité de conformité statique.

[Sellem, 2000] propose dans ses travaux le modèle RAI pour *Ressources, Activité, Item* qui décrit de manière ordonnée les opérations d'assemblage sous forme de graphe. Les sommets de ces graphes indiquent l'activité (par exemple la mise en position, le bridage ou le soudage), les ressources (par exemple les brides ou le robot de soudage) et l'item, c'est-à-dire les pièces concernées par l'opération.

Ces travaux aboutissent au développement d'un module de *CATIA V5* appelé *"Tolerance Analysis of Deformable Assemblies"*, *TAA* ou *TADA*. Un peu comme *AnaTole*, *TAA* permet de définir directement sur le modèle d'assemblage CAO, les liaisons, les variabilités géométriques, ainsi que des points dont on observera les écarts de position en fonction des contributeurs (appelées "mesures linéaires"). Pour introduire les variabilités géométriques, l'utilisateur définit des points de contrôle auxquels un déplacement sera imposé dans une direction donnée. Il peut donner à ce déplacement une valeur fixe ou bien une plage de variation. Les liaisons et conditions aux limites peuvent également être imposées dans un ordre donné de manière à tenir compte de la séquence d'assemblage. À l'aide du module de calcul éléments finis, les modèles géométriques sont automatiquement maillés et les différentes opé-

rations d'assemblage sont simulées. Puis les analyses sont faites pour renvoyer les caractéristiques des distributions des mesures linéaires.

## 4.5 Le contact unilatéral

Un assemblage peut être considéré comme un ensemble de pièces en interactions mécaniques qui sont généralement des combinaisons de contact. Une particularité de ces interactions mécaniques réside dans leur caractère unilatéral qu'on souhaitera prendre en compte dans ces travaux. Mais du point de vue du comportement mécanique, le contact unilatéral implique des non-linéarités plus ou moins fortes selon l'échelle considérée, la quantité et/ou l'agencement spatial de ces contacts. Or l'hypothèse du comportement mécanique linéaire des pièces et des liaisons est un fondement de la majorité des travaux sur le tolérancement des pièces souples, à quelques exceptions près.

[Sellem et Gyomard, 2000] utilisent *TAA* pour étudier l'influence du contact unilatéral sur les résultats d'analyses de tolérances. Le module permet en effet de définir des points de contact sur lesquel on peut activer des conditions d'appuis. Sur un exemple d'assemblage de plaques, quatre points de contact ont été définis autour d'une liaison. Malheureusement l'aspect unilatéral n'est pas géré de façon automatique. C'est à l'utilisateur d'activer ou non l'appui en fonction du sens des déplacements ou des efforts de réaction au niveau de ces points de contact. L'une des conclusions de ces travaux étaient que les points de contact n'ont pas d'influence majeure sur le résultat.

Pour gérer le contact unilatéral dans les problèmes éléments finis, il existe des méthodes de résolution comme par exemple la méthode de calcul itératif appelée *"méthode des statuts"* évoquée dans les perspectives de la thèse de [Merkley, 1998]. Elle consiste à effectuer des résolutions successives où on teste pour chaque couple de nœuds en vis-à-vis, le signe de l'effort de réaction ou leur position relative. En fonction des résultats la condition de contact est imposée automatiquement entre ces nœuds et le résultat converge jusqu'à ce qu'il n'y ait aucune inter-pénétration et aucun effort de contact dans le mauvais sens.

Dans [Dahlström et Lindkvist, 2007] un algorithme testant puis empêchant l'inter-pénétration des pièces vient enrichir la Méthode des Coefficients d'Influence afin augmenter la fiabilité des résultats de simulation. La méthode proposée est testée sur un assemblage de plaques, et permet de prendre en compte le contact unilatéral même si les maillages ne sont pas coïncidents. Les quantités d'intérêt observées sont des déplacements de nœuds dans les directions des normales aux plaques. La matrice de sensibilité calculée contient entre autre les degrés de liberté soumis aux conditions de contact. Deux séries de simulations dans lesquelles les variabilités géométriques

sont imputées sont alors réalisées avec une stratégie de Monte-Carlo. Les simulations de la première sont effectuées avec le modèle éléments finis complet, celles de la deuxième série sont faites avec la matrice de sensibilité. Toutes deux nécessitent des résolutions itératives nécessaires à la gestion du contact unilatéral. La comparaison des résultats montre une grande similitude entre les résultats, mais le temps de calcul de leur nouvelle méthode est presque cinq fois plus rapide. Deux autres séries de simulations ont également été faites sans hypothèse du contact unilatéral afin de montrer à quel point cette hypothèse avait de l'influence sur le résultat de l'analyse, contredisant ainsi les conclusions de [Sellem et Gyomard, 2000].

### 4.6 La norme NF ISO 10579

Concernant la normalisation, la norme NF ISO 10579 [AFNOR, 2010] constitue une tentative pour apporter des recommandations quant au tolérancement des pièces non-rigides. Il s'agit soit de définir textuellement sur le plan l'état de contrainte mécanique dans laquelle la spécification géométrique doit être vérifiée, soit d'indiquer à l'aide du symbole Ⓕ sur la spécification qu'elle est à vérifier à l'état libre. Cet état libre est défini comme étant celui où la pièce est soumise uniquement à la force de gravitation. Ces recommandations autorisent donc une liberté complète à la définition des états de contraintes, laissant ainsi la problématique ouverte.

## 5 Récapitulatif

Parmi les travaux passés en revue dans le domaine du tolérancement de pièces non-rigides, on distingue quatre types de problématiques auxquelles les protagonistes de ces travaux ont répondu de manière différentes. Ces problématiques sont relatives à la modélisation du système, la définition et l'introduction de variabilités géométriques, la définition d'une stratégie pour l'analyse de tolérances, et la simulation de l'assemblage. Les paragraphes suivants récapitulent de manière non-exhaustive les différentes solutions proposées dans la littérature.

### 5.1 Modélisation des assemblages

Pour la modélisation, la constante qui revient est l'utilisation de la méthode des éléménts finis avec des éléments de structure de type poutre ([Shiu *et al.*, 1997], [Mounaud, 2009]) souvent pris comme exemple avant d'appliquer les méthodes élaborées sur des modèles de plaques ou de coques ([Franciosa *et al.*, 2010], [Dahlström et Lindkvist, 2007], [Merkley, 1998]). Toutefois l'élaboration d'un modèle éléments finis spécifique au tolérancement à partir du modèle géométrique issu de la CAO

reste souvent un point inabordé. Cela s'explique d'une part par le fait que l'élaboration d'un modèle éléments finis dépend du système étudié, des informations qu'on souhaite en tirer, et de l'expertise de l'acteur de la modélisation. D'autre part, la rédaction d'articles nécessite une certaine concision, tandis qu'il est plus fréquent que les auteurs s'attardent sur ce point dur dans les mémoires de thèse.

Ici on a donné quelques bases pour élaborer un modèle éléments finis pertinent pour le tolérancement flexible dans un cadre assez général d'assemblage de pièces dont la souplesse est fortement tributaire de leurs géométries et leurs dimensions, notamment avec l'étude des paramètres de modélisation du chapitre 3.3 en page 21. En ce qui concerne les liaisons de type rivetées ou boulonnées, on utilisera tout simplement des modèles identiques à ceux proposés dans [Mounaud, 2009], à savoir des relations cinématiques liant les déplacements des points d'assemblage. Ces modèles seront présentés en détail dans le chapitre 3 avant de montrer comment y seront introduites les variabilités géométriques. Par ailleurs, tout comme [Dahlström et Lindkvist, 2007], on tiendra compte des interactions de contact unilatéral entre les pièces dans les zones de recouvrement. On utilisera pour cela la méthode des statuts implémentée dans *CAST3M*.

## 5.2 Variabilités géométriques

Dans la littérature relative au tolérancement de pièces souples, les variabilités géométriques les plus fréquemment introduites concernent les défauts de positionnement des points d'assemblage. Ces derniers sont exprimés comme étant l'empilement des défauts géométriques des pièces et ceux de positionnement des outils. Les variables aléatoires caractérisant l'aléa géométrique sont alors directement donnés en terme d'effort d'assemblage.

L'introduction de variabilités géométriques seront présentées dans le chapitre 3. On y dissociera deux types de défauts : les défauts de localisation des trous de passage, et les défauts de forme des pièces. Les contributeurs caractérisant les défauts de localisation interviendront dans les relations de liaison. Quant au défaut de forme, ils seront directement imputés au maillage comme une variabilité des coordonnées de ses nœuds. En référence à la notion de *skin-model* [Dantan *et al.*, 2001], on parlera ici *"d'instances de skin-model numériques"* pour qualifier des maillages dont la géométrie est non idéale.

La difficulté consiste alors à faire en sorte que les formes obtenues soient réalistes, qu'elles respectent l'appartenance à des zones de tolérances données, et qu'elles soient caractérisées par un minimum de contributeurs. Certains auteurs se distinguent aussi par cette volonté, par exemple [Merkley, 1998], [Bihlmaier, 1999], [Zhang, 2012] et [Franciosa *et al.*, 2010]. D'ailleurs ce dernier a aussi pris en compte les variabilités de rigidité qui découlent des défauts de forme. Le fait d'imputer le défaut de forme par modification des coordonnées des nœuds du maillage permettra ici de faire de même en recalculant la matrice de rigidité.

Ici, la première approche pour modéliser les défauts de forme avec ces contraintes (réalisme, appartenance à une zone de tolérance, caractérisation par peu de contributeurs) a été de définir des points de contrôle sur le maillage nominal, et de simuler la déformation élastique obtenue lorsqu'un déplacement aléatoire leur est imposé dans une direction donnée. Le champ de déplacement obtenu est alors utilisé comme champ d'écart initial. Sa continuité garantit plus ou moins le réalisme, le nombre de contributeurs est limité au nombre de points de contrôle définis, et la plage de variation de leur déplacement peut être définie en fonction d'une zone de tolérance donnée.

Après une remise en cause de cette première approche, une autre technique inspirée du tolérancement modal ([Samper et Formosa, 2007], [Formosa et Samper, 2007]) a été adoptée. Les défauts de forme d'une surface sont exprimés sous la forme d'une superposition de modes définis préalablement, et dont les amplitudes sont aléatoires. Le réalisme des défauts dépend du choix des modes, et leur nombre est égal au nombre de contributeurs. En revanche, pour garantir le respect de la zone de tolérance, le choix a été fait de trier les instances de skin-model après en avoir généré une grande quantité.

Un problème subsiste toutefois : lorsque le défaut de forme d'une surface est bornée par une zone de tolérance, il peut prendre une infinité d'allures différentes, or celles générés par les méthodes citées précédemment dépendent bien souvent de l'expertise de l'utilisateur. Le tolérancement étant effectué dans la phase de conception, il n'est en principe pas possible de préfigurer l'allure des défauts de formes étant donné que les procédés de fabrication des pièces n'est pas censé être connu. Dans le cas de [Mounaud, 2009], le choix du procédé est complètement implicite au vu du produit. Le type de défauts et leurs caractéristiques aléatoires sont alors déduites en s'appuyant sur la norme [AFNOR, 1995] qui donne des prescriptions quant à la capabilité d'un processus de fabrication. Le tolérancement modal offre alors un atout supplémentaire en permettant d'écrire les spécifications sous la forme de bornes sur les amplitudes des modes choisis plutôt que sous la forme d'une zone géométrique.

## 5.3 Stratégie d'analyse et simulation d'assemblage

La stratégie de calcul à adopter pour l'analyse de tolérances dépend beaucoup de la manière avec laquelle l'assemblage des pièces à géométries non-nominales est simulé. La stratégie la plus employée dans la littérature est la méthode des coefficients d'influence. Celle-ci implique toutefois de faire l'hypothèse que le problème est globalement linéaire. Cela signifie d'une part que la réponse de l'assemblage est linéaire face aux sollicitations d'assemblage (les efforts à appliquer pour mettre les points d'assemblage en coïncidence), donc la prise en compte du contact unilatéral n'est pas possible. Et d'autre part, le comportement mécanique des pièces et des

liaisons est invariable face aux défauts géométriques, donc la prise en compte des variabilités de rigidité des pièces (et éventuellement des liaisons) dûes aux variabilités géométriques ne peuvent être prises en compte.

Cependant, la méthode des coefficients d'influence permet une estimation des variabilités de l'assemblage pour un coût de calcul très faible. En effet, l'expression des quantités d'intérêt sous forme d'une combinaison linéaire des contributeurs ramène à un problème similaire aux méthodes de tolérancement de pièces rigides présentées dans le chapitre 2.4 (page 16), et la simulation d'assemblage se résume à calculer les résultats de ces combinaisons linéaires. En revanche, lorsque les hypothèses de linéarité ne sont plus faites, les auteurs s'orientent vers une méthode de Monte-Carlo où une simulation d'assemblage est réalisée à chaque tirage de jeux de valeurs aléatoires pour les contributeurs.

En principe, le choix des hypothèses de calcul pour la simulation d'assemblage devrait être fait en fonction des critères qu'on cherche à vérifier pour en déduire la conformité de l'assemblage. En effet, les valeurs des quantités d'intérêt obtenues à l'issue de la simulation, et conditionnées par ces critères, dépendent des hypothèses de calcul. Presque tous les travaux sur le tolérancement de pièces souples focalisent leurs observations sur les déplacements de certains points dans une direction donnée, à l'exception de [Merkley, 1998] qui observe des contraintes dans certains cas d'application, et [Mounaud, 2009] qui observe des efforts de liaison.

Ici on se proposera d'observer des quantités d'intérêt à la fois géométriques (déplacements de points) et statiques (efforts transitant dans les liaisons). Une grande partie du chapitre 4 fera alors l'objet d'une comparaison des résultats et des temps de calcul obtenus dans le cadre d'une analyse de tolérances d'assemblages de pièces simples. L'analyse sera menée d'une part avec une stratégie de Monte-Carlo pour prendre en compte les phénomènes non-linéaires (contact unilatéral et variabilité des rigidités dûes aux défauts de forme), et d'autre part avec des stratégies supposant la linéarisation du problème (méthode des coefficients d'influence).

Ces études comparatives guideront alors le choix de stratégie et d'hypothèses pour traiter un cas d'étude industriel bien plus complexe dans le chapitre 5. Le grand nombre de variabilités géométriques introduites dans le modèle offrira alors un prétexte pour proposer une méthode d'exploitation des nombreux résultats afin de conclure sur le tolérancement.

Bien que la finalité du cas d'étude industriel soit l'analyse de tolérances, la simulation d'assemblage, telle qu'on la définira, peut toutefois servir à d'autres activités tout au long du cycle d'élaboration d'un produit. Le chapitre 2 recense donc celles dans lesquelles la simulation peut apporter une aide conséquente, et des modes opératoires sont proposés.

# Chapitre 2

# La simulation dans les activités d'assemblage

*Du bureau d'étude jusque dans l'atelier, la simulation d'assemblage peut trouver son utilité dans plusieurs étapes du processus de réalisation d'une structure aéronautique. Ce chapitre en dresse un inventaire et définit la place de la simulation dans les processus de tolérancement, d'élaboration et de validation de gamme ainsi que dans les phases d'assemblage et de réglage.*

## Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| **1** | **Étude de faisabilité simple** | **44** |
| **2** | **Aide et optimisation de la phase de réglage** | **46** |
| **3** | **Étude de faisabilité avec analyse de la gamme d'assemblage** | **48** |
| **4** | **Détermination de séquence d'assemblage dédiée** | **50** |
| **5** | **Analyse de tolérances** | **52** |
| **6** | **Synthèse de tolérances** | **54** |
| **7** | **Récapitulatif des estimations de coûts de calcul** | **56** |
| **8** | **Conclusions** | **57** |

Ici, la simulation d'assemblage sera considérée comme une fonction déterministe représentée sur la figure 2.1. Celle-ci est définie par le modèle éléments finis du système ainsi que les hypothèses de calcul. À partir d'un jeu de valeurs figées des paramètres sujets aux incertitudes $\delta_i$ caractérisant le système à l'état non-assemblé, elle retourne les valeurs de diverses variables d'intérêt $\alpha_j$ caractérisant le système à l'état assemblé.

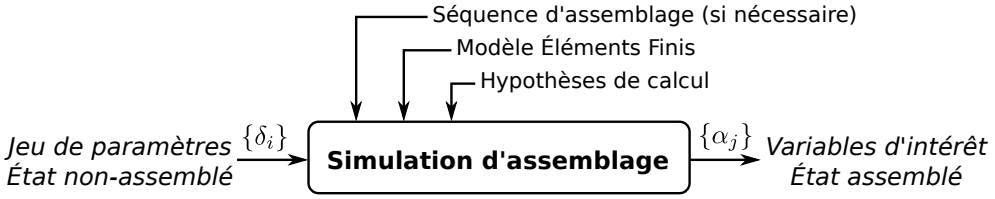



**Figure 2.1:** *Fonction "Simulation d'assemblage".*

Au cours du processus de réalisation d'une structure aéronautique, on distingue plusieurs cas d'application où la simulation d'assemblage de pièces à géométrie imparfaite peut trouver une utilité :

- La synthèse de tolérances.
- L'analyse de tolérances.
- L'élaboration de séquences d'assemblage génériques ou dédiées.
- L'analyse de gamme d'assemblage générique ou dédiée.
- L'étude de faisabilité avec ou sans analyse de gamme.
- L'aide au réglage.

Certaines de ces applications seront présentées et expliquées à l'aide d'un algorithme. L'idée est de montrer comment utiliser la simulation d'assemblage dans un contexte donné et pour atteindre les objectifs annoncés. La figure 2.2 montre dans quelles étapes de ce processus industriel pourront être réalisées ces cas d'application. En revanche l'ordre dans lequel elles seront présentées est tel que la complexité de l'algorithme est croissante.

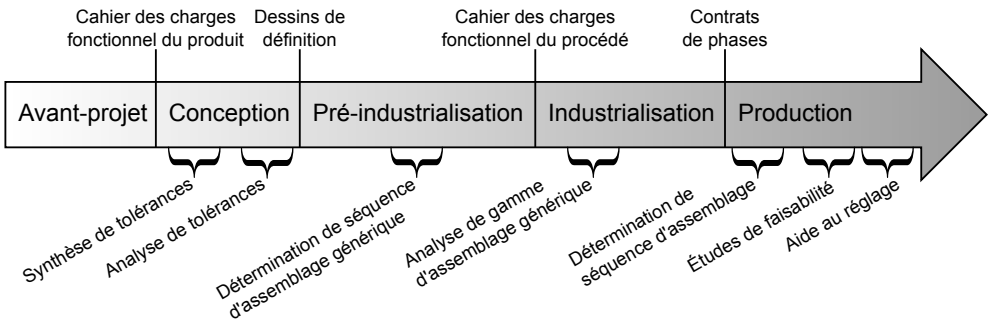



**Figure 2.2:** *Interventions possibles de la simulation d'assemblage au cours du processus de réalisation d'un produit industriel.*

Certaines de ces applications sont dédiées aux acteurs de l'assemblage, en phase de production, lorsqu'ils disposent des pièces réelles fabriquées et mesurées. Les algorithmes comportent une tâche particulière appelée "Modélisation des défauts". Celle-ci consiste à imputer les défauts de forme mesurés au modèle éléments finis initialement nominal. Ainsi, aux erreurs de mesure et de modélisation près, le modèle éléments et les pièces réelles auront la même géométrie. Les mesures à effectuer peuvent être définies de manière à ce que leur saisie informatique permette l'identification automatique des paramètres $\delta_i$ qui caractérisent les défauts.

D'autres applications sont dédiés aux acteurs du tolérancement en phase de conception. Ne disposant que d'un modèle élément finis à géométrie idéale, les études tolérancement consistent à simuler l'assemblage de nombreuses pièces virtuelles à géométrie non-idéale et aléatoire. Il s'agit de *"instances de skin-model numérique"* évoquées précédemment.

Pour chaque algorithme présenté, une estimation du temps de calcul nécessaire $T_c$ sera donné par des formules analytiques où interviendront les valeurs $t_{sa}$, $N_{sa}$, $N_{ea}$.

$t_{sa}$ correspond au temps d'une simulation d'assemblage. Il dépend du nombre de degrés de liberté et du niveau de non-linéarité du problème, donc quels que soient les défauts géométriques considérés, et quelle que soit l'étape d'assemblage traitée, les durées des simulations sont supposées être sensiblement identiques.

$N_{sa}$ correspond au nombre de simulations d'assemblage nécessaires. Il dépend de l'intervalle de confiance qu'on souhaite avoir sur les estimations statistiques, autrement dit sur la fiabilité des résultats.

$N_{ea}$ correspond au nombre d'étapes d'assemblages qu'on souhaite simuler.

# 1 Étude de faisabilité simple

**Contexte et objectifs :**

On se place dans un cas propre à la production en atelier, où les pièces sont réalisées et mesurées. Le but est d'anticiper la conformité de l'état final assemblé en vérifiant que les variables d'intérêt calculées par la simulation d'assemblage respectent les critères donnés. Ce type d'étude est donc destiné aux acteurs de l'assemblage. Cela leur permettrait d'éviter de réaliser un assemblage qui, à coup sûr, ne sera pas conforme, et éventuellement de faire de l'appairage.

**Démarche :**

Cette démarche est représentée sous forme de diagramme sur la figure 2.3. Les défauts géométriques, caractérisés par les valeurs $\delta_i$, sont modélisés à partir du modèle géométrique nominal et des résultats de mesure. Si à ce stade, l'analyse de tolérances a été effectuée auparavant, il est déjà possible de juger de la conformité géométrique des pièces indépendamment. Sinon, la simulation d'assemblage permet de calculer les quantités d'intérêt. On pourra alors vérifier et renseigner à l'avance quels sont les critères de conformité qui seront respectés ou non. Étant donné que la gamme d'assemblage n'est pas prise en compte, cette application est plus pertinente dans le cas d'assemblages de type "meccano", c'est-à-dire lorsque les pièces sont pré-percées.

**Estimation du temps de calcul :**

$$T_c = t_{sa}$$

Remarque : Même si les pièces sont jugées inaptes à l'assemblage par simple confrontation des résultats de mesure aux résultats d'analyse de tolérance, l'étude de faisabilité en atelier peut potentiellement épargner certaines pièces ou sous-assemblages du rebut étant donné leur prix. En effet, elle peut permettre de faire de l'appairage avec d'autres pièces qui auraient été mesurées.

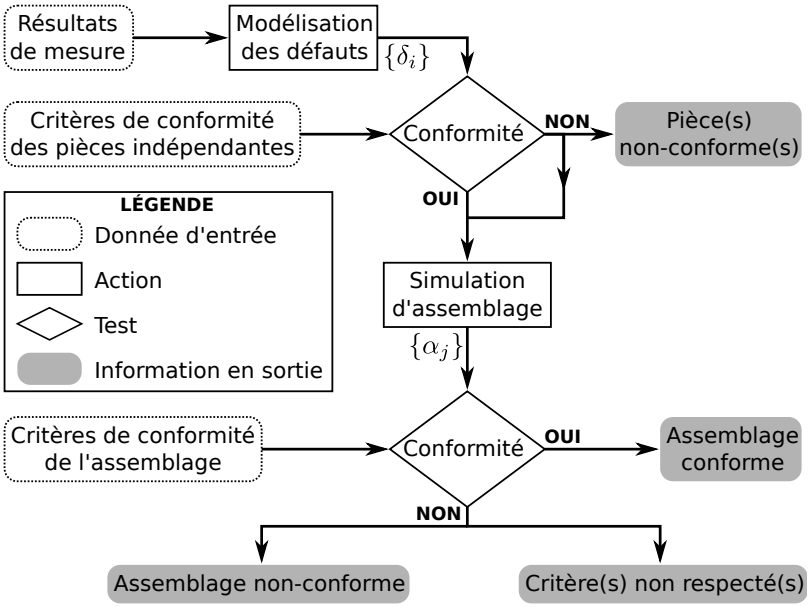



**Figure 2.3:** *Algorithme d'étude de faisabilité simple.*

## 2 Aide et optimisation de la phase de réglage

**Contexte et objectifs :**

On se place dans le cadre où le système est complètement ou partiellement assemblé et mesuré. Ce dernier dispose de liaisons ou de supports ajustables. Leur réglage doit permettre de contrôler la distorsion des pièces et l'état géométrique de l'assemblage afin de le conformer. Ce cas de figure est fréquent pour le cas des *ouvrants* (portes, trappes, etc.) où des liaisons réglables permettent ainsi d'assurer l'étanchéité ou l'affleurement en position fermée. Ici, la simulation a pour but de déterminer l'état assemblé en fonction des valeurs des réglages et des défauts géométriques. Ainsi, on peut l'utiliser pour prédire un jeu de réglage adéquat, voire optimal.

**Démarche :**

Cette application correspond au travaux de [Breteau, 2009]. On considère les valeurs de réglage comme des paramètres d'entrée de la simulation. La modélisation des défauts permettra de déterminer quelles étaient les valeurs de ces paramètres et des variables d'intérêt au moment de la mesure. Ensuite, la simulation de réglage consiste à modifier virtuellement les valeurs des réglages afin de déterminer et quantifier leurs effets sur l'état géométrique et statique du système. Les hypothèse relatives à la méthode développée dans [Breteau, 2009] permettra également d'optimiser la valeur des réglages. La figure 2.4 illustre cette démarche.

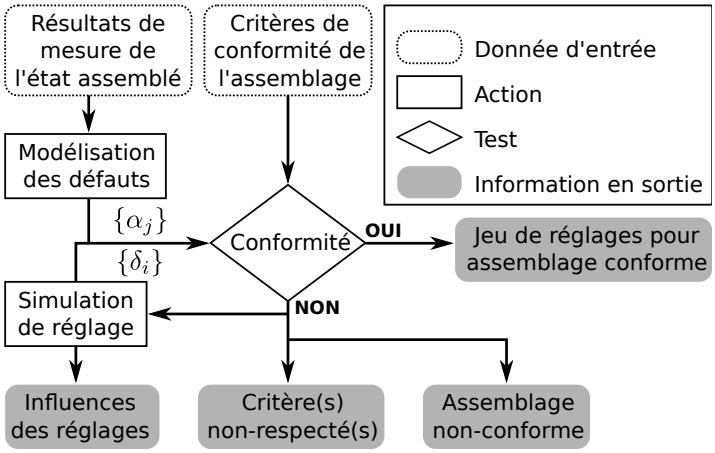



**Figure 2.4:** *Algorithme de simulation de réglages.*

# 3 Étude de faisabilité avec analyse de la gamme d'assemblage

**Contexte et objectifs :**

Comme précédemment, les pièces sont réalisées et mesurées. Pendant les opérations d'assemblage, les opérateurs doivent effectuer des contrôles ou des mesures relatifs à la prochaine opération. Ils peuvent par exemple vérifier que la distance entre deux plaques à rapprocher localement pour y poser une fixation ne dépasse pas une certaine limite donnée par le bureau d'études. Le cas échéant, la production est gelée jusqu'à ce que le bureau d'étude donne ses directives après expertise. C'est pourquoi, en complément de l'anticipation de la conformité de l'état final assemblé, on propose alors de devancer ces problèmes.

**Démarche :**

La démarche est quasiment la même que précédemment, si ce n'est que la simulation d'assemblage est réalisée de manière séquentielle (voir figure 2.5). À chaque étape, les critères relatifs à la prochaine opération sont vérifiés. Du fait de la prise en compte de la gamme d'assemblage, cette application est plus pertinente lorsque les fixations sont posées après contre-perçage.

**Estimation du temps de calcul :**

$$T_c = t_{sa} \times N_{ea}$$

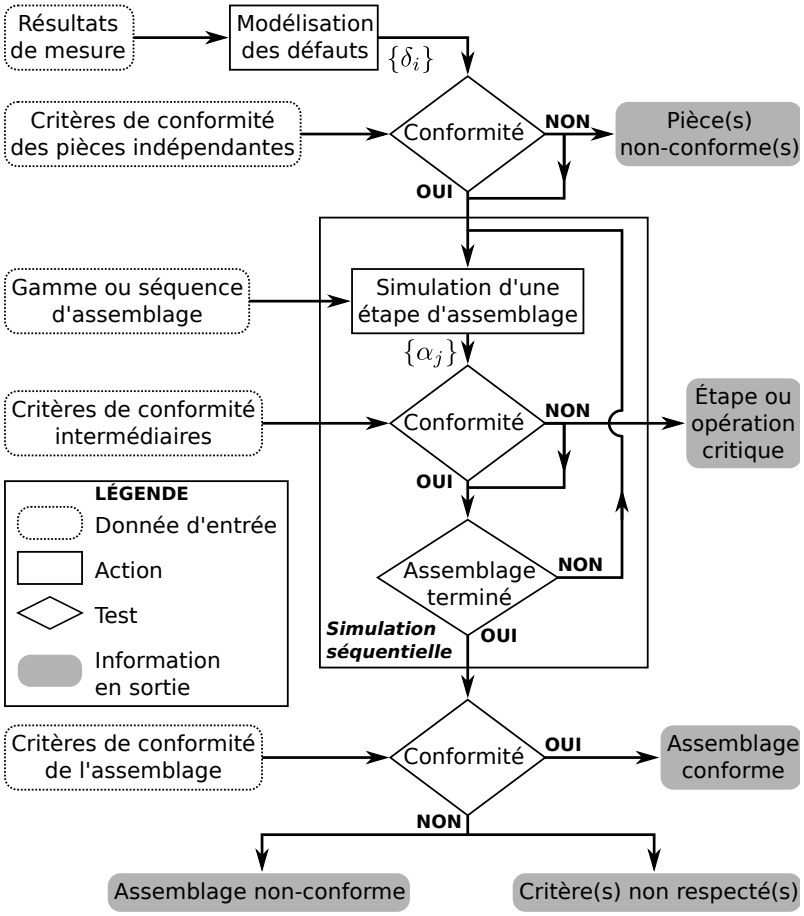



**Figure 2.5:** *Algorithme d'étude de faisabilité avec analyse de gamme d'assemblage.*

# 4 Détermination de séquence d'assemblage dédiée

**Contexte et objectifs :**

On se replace dans le cas où on souhaite assembler des pièces qui ont été réalisées et mesurées. Les gammes et séquences d'assemblages sont imposées par le bureau des méthodes selon des règles établies. On se propose ici d'inventorier les opérations à effectuer pour aboutir à l'assemblage, mais l'ordre d'accomplissement de ces opérations n'est pas défini. L'objectif est de déterminer celui ou ceux qui vérifieront les conformités à chaque étape. On peut éventuellement tenter de déterminer, parmi toutes celles essayées, une gamme ou une séquence qui soit optimale vis-à-vis de critères donnés (par exemple minimiser la contrainte maximale).

**Démarche :**

La démarche est quasiment similaire à celle présentée pour l'analyse de gamme, sauf que les séquences d'assemblage sont générées à partir d'une liste d'opérations à réaliser, puis elles sont testées jusqu'à obtention d'une séquence conforme (voir figure 2.6). On peut également tester toutes les séquences possibles afin de choisir la plus adaptée. La génération des séquences peut être régie par quelques règles qui éviteraient d'avoir à simuler des séquences aberrantes.

**Estimation du temps maximal de calcul :**

$$T_c = t_{sa} \times !N_{ea}$$

Cette estimation concerne le temps de calcul pour lequel toutes les séquences d'assemblage possibles seraient testées.

Remarque : Ces problématiques de détermination de séquence ou gamme d'assemblage par simulation font l'objet d'une thèse *CIFRE* [Andolfatto, 2013] dans le cadre du partenariat *Inno'campus* entre *EADS-IW* et l'*ENS* de Cachan.

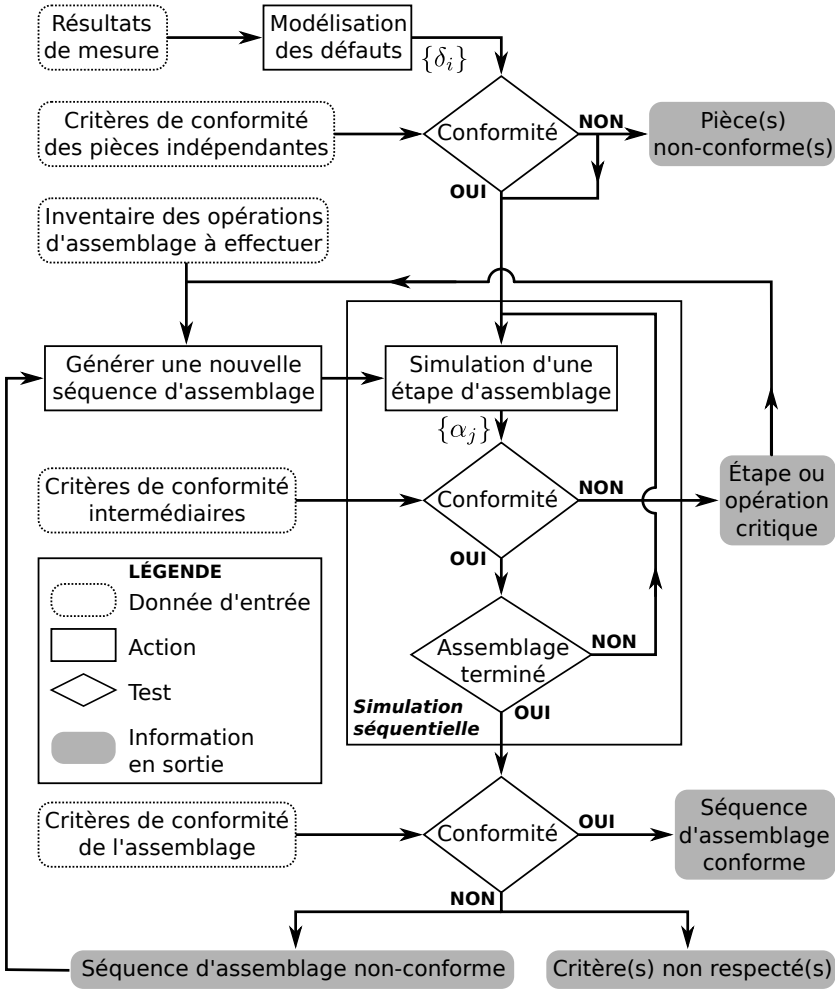



**Figure 2.6:** *Algorithme de détermination de séquence d'assemblage pour un jeu de pièces mesurées.*

# 5 Analyse de tolérances

**Contexte et objectifs :**

On se place maintenant dans la phase de conception de la structure. Le modèle géométrique est établi après dimensionnement des pièces. Des spécifications géométriques sont définies sur les pièces indépendamment et les critères de conformité de l'assemblage sont donnés dans le cahier des charges fonctionnel. On souhaite alors vérifier que des tolérances géométriques données sur les pièces indépendamment garantissent bien la conformité de l'assemblage final.

**Démarche :**

Cette démarche est représentée sous forme de diagramme sur la figure 2.7. Il s'agit de générer aléatoirement une grande quantité d'instances de skin-model numérique. Pour cela on réalise des tirages aléatoires des paramètres $\delta_i$ qui caractérisent les défauts géométriques. Puis il s'agira de ne pratiquer la simulation d'assemblage que pour les instances conformes aux tolérances données. En vérifiant ensuite la conformité des assemblages virtuels, on pourra estimer les distributions des quantités d'intérêt ainsi que la probabilité d'obtenir un assemblage conforme avec ces tolérances.

**Estimation du temps de calcul :**

$$T_c = t_{sa} \times N_{sa}$$

Remarque : La justesse de l'estimation des distributions des quantités d'intérêt dépend non seulement du nombre d'instances de skin-model générés et dont l'assemblage est simulé, mais aussi de la justesse des résultats de ces simulations. Elles seront donc pratiquées avec un souci de précision et de manière intensive. C'est pourquoi on tentera de minimiser le coût de calcul de chaque simulation dans ces travaux.

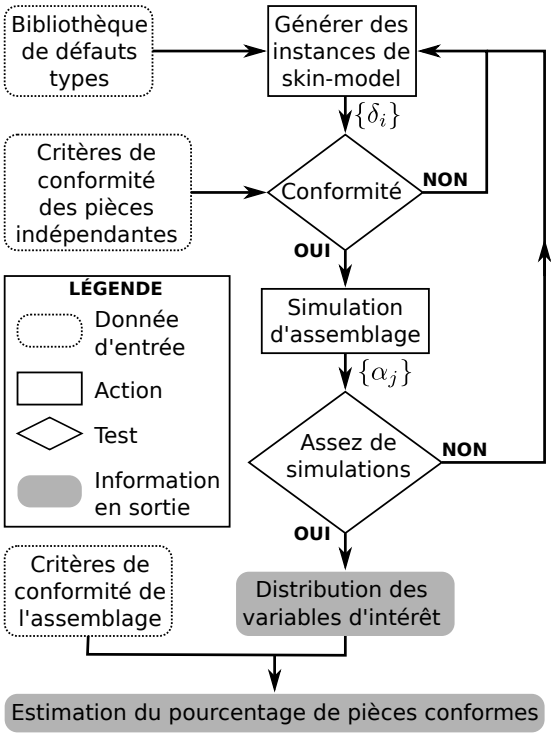



**Figure 2.7:** *Algorithme d'analyse de tolérances.*

# 6 Synthèse de tolérances

**Contexte et objectifs :**

On se place dans le même contexte que précédemment, sauf que les spécifications ne sont pas quantifiées (autrement dit on connait la forme de la zone de tolérance mais pas sa dimension). L'objectif est alors d'estimer au mieux les intervalles de tolérance sur les pièces indépendantes pour qu'une fois assemblées, elles remplissent les conditions de conformité définies.

**Démarche :**

Cette démarche est représentée sous forme de diagramme sur la figure 2.8. De la même manière que précédemment, il faut générer aléatoirement une grande quantité d'instances de skin-model numérique. Ces instances sont d'une part triées en fonction des valeurs de leurs défauts, et d'autre part assemblées (virtuellement) entre elles. Le contrôle de conformité de chacun de ces assemblages virtuels permettra d'approximer progressivement les bornes du domaine variation des paramètres qui occasionnent ou non la conformité de l'assemblage. Autrement dit, on cherche à déterminer l'image du domaine d'admissibilité des quantités d'intérêt (donné par les critères de conformité de l'assemblage) par la transformation que constitue l'assemblage. Il faudra ensuite traduire ce domaine des défauts admissibles sous forme de tolérances géométriques sur les pièces indépendantes.

Remarque : Ici aussi la justesse des estimations exigera des simulations qu'elles soient précises et nombreuses.

**Estimation du temps de calcul :**

Une synthèse de tolérances sera effectuée dans le chapitre 4 (voir page 101). La methode y sera plus détaillée mais il s'agira de réaliser un nombre $N_{at}$ d'analyses de tolérances successives. Celui-ci dépendra de la finesse du tri des instances de skin-model et de la taille des domaines de variation géométrique qu'on souhaite couvrir. Le temps de calcul estimé sera alors :

$$T_c = t_{sa} \times N_{sa} \times N_{at}$$

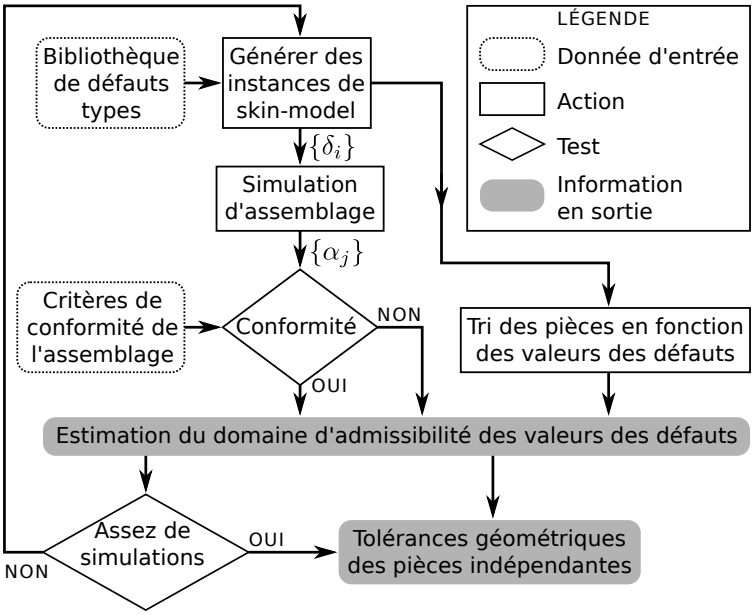



**Figure 2.8:** *Algorithme de synthèse de tolérances.*

# 7 Récapitulatif des estimations de coûts de calcul

Le tableau 7 indique le nombre potentiel d'appels à la simulation d'assemblage pour certains types d'applications évoquées dans ce chapitre.

| **Cas d'application** | **Nombre potentiel de simulations d'assemblage** |
|---|---|
| Étude de faisabilité simple | 1 |
| Étude de faisabilité avec analyse de la gamme d'assemblage | $N_{ea}$ |
| Détermination de séquence d'assemblage dédiée | $!N_{ea}$ |
| Analyse de tolérances | $N_{sa}$ |
| Synthèse de tolérances | $N_{sa} \times N_{at}$ |

$N_{sa}$ correspond au nombre de simulations d'assemblage nécessaires. Il dépend de l'intervalle de confiance qu'on souhaite avoir sur les estimations statistiques, autrement dit sur la fiabilité des résultats.

$N_{ea}$ correspond au nombre d'étapes d'assemblages qu'on souhaite simuler.

$N_{at}$ correspond au nombre d'analyses de tolérances successives à réaliser pour effectuer la synthèse de tolérances.

# 8 Conclusions

La thèse se focalise principalement sur l'analyse de tolérances où l'aspect séquentiel de l'assemblage n'est pas pris en compte, c'est-à-dire que toutes les conditions de liaison seront appliquées simultanément. Toutefois les personnes en charge de déterminer ou de vérifier des gammes d'assemblages génériques pourraient aussi utiliser l'outil d'analyse de tolérances avec une simulation d'assemblage séquentielle. La première solution consisterait à réaliser successivement l'analyse de tolérances de chaque étape d'assemblage comme cela a été fait dans [Camelio *et al.*, 2003]. La seconde solution consisterait à utiliser la simulation d'assemblage séquentielle (voir figures 2.5 et 2.6) au sein même de la boucle d'analyse de tolérances. Cette approche a été employée dans [Mounaud, 2009] pour l'analyse de tolérances d'un système de tuyauterie souple dans un avion. Les avantages offerts par ce cas d'étude sont que les défauts des tuyaux en sortie de production ont pu être clairement identifiés et caractérisés par assez peu de paramètres, que les défauts de forme de ces surfaces tubulaires ont pu être négligés, et que les tubes ont pu être assimilés à des modèles de poutres élastiques peu coûteux en calcul pour la simulation. Cependant, en comparaison à une simulation où on suppose que toutes les liaisons sont imposées simultanément, la simulation séquentielle d'assemblage multiplie le coût de calcul par le nombre d'opérations à réaliser.

Toutes ces applications requièrent une justesse de ses résultats qui soit comparable à celle des résultats de métrologie de ce type de pièces. Certaines d'entre elles nécessitent par ailleurs une pratique intensive de la simulation d'assemblage. On retrouve alors une problématique courante des activités de calcul, à savoir équilibrer la balance entre le coût de calcul et la précision des résultats. Cette dernière est très dépendante des erreurs de modélisation. De plus, ces applications présentent un intérêt pour les constructeurs aéronautiques car elles peuvent offrir un gain de temps certain et un gage de qualité sur les opérations d'assemblage. Un même modèle éléments finis adapté à la simulation d'assemblage et dont les variabilités géométriques sont définies peut être utilisé dans toutes ces applications. C'est pourquoi le chapitre 3 donne d'autres éléments de réponse quant à l'élaboration de modèle éléments finis destiné à la simulation d'assemblage et sur la modélisation des défauts de ses pièces.

# Chapitre 3

# La modélisation en vue de la simulation d'assemblage

*Ce chapitre a pour objectif de présenter la méthode choisie pour générer des instances de skin-modèle numériques aléatoires dont l'assemblage sera simulé, et de justifer ce choix. Seront alors abordées les problématiques relatives à l'idéalisation géométrique, la modélisation de défauts de forme aléatoires et réalistes, ainsi que les modèles de liaison avec variabilités géométriques.*

## Sommaire


**1 Répercussions de l'idéalisation géométrique sur les tolérances . . . . . 61**

**2 Défauts globaux . . . . . 64**

2.1 Hypothèse d'épaisseurs et de sections constantes . . . . . 64

2.2 Réalisme des instances de skin-model numériques . . . . . 65

2.3 Morphose de maillages . . . . . 66

2.4 Génération des champs d'écart par simulation élastique . . . 67

2.5 Génération des champs d'écart par superposition de modes amplifiés . . . . . 70

2.6 Application à une poutre 2D . . . . . 72

**3 Modèles de liaisons avec défauts locaux . . . . . 76**

3.1 Modèles de liaisons à l'état nominal . . . . . 76
3.2 Expression locale des défauts globaux . . . . . 77
3.3 Défauts de liaison . . . . . 78
3.4 Contact unilatéral . . . . . 79
3.5 Relations sur les rotations . . . . . 80
3.6 Jeux dans les liaisons . . . . . 81
**4 Conclusion . . . . . 83**

Comme on l'a vu dans le chapitre 2 pour l'analyse et la synthèse de tolérances (voir pages 52 à 55), on souhaite générer des instances aléatoires de skin-model numérique de pièces pour simuler ensuite leur assemblage. Dans l'étude relative aux paramètres de modélisation présentée au chapitre 1 (voir pages 21 à 24), on a souligné la nécessité d'utiliser un modèle dont la définition géométrique est dégradée afin d'utiliser des éléments de structure de type coques et poutres, et d'alléger ainsi les coûts de calcul. Or on rappelle que le skin-model est défini comme étant un modèle représentant les surfaces extérieures géométriquement imparfaites de la pièce (voir pages 15).

L'idée de générer des instances aléatoires de skin-model numérique d'un modèle idéalisé et de vérifier leur conformité géométrique à l'état assemblé peut donc sembler paradoxale étant donné qu'en principe les surfaces extérieures n'y sont pas matérialisées. Cependant, les hypothèses et paramètres d'idéalisation ainsi que les hypothèses liées à la cinématique de déformation (hypothèse des petites perturbations) permettent de retrouver les surfaces extérieures.

Ce chapitre aborde donc les problématiques liées à la modélisation de défauts géométriques sur un modèle idéalisé et recense quelques méthodes de modélisation des défauts géométriques au niveau de la pièce et au niveau des liaisons.

# 1 Répercussions de l'idéalisation géométrique sur les tolérances

Afin de mettre en exergue les répercussions de l'idéalisation sur le tolérancement, on prendra comme exemple illustratif la cornière représentée à l'état nominal et partiellement tolérancée sur la figure 3.1. Une représentation de son skin-model y figure également. Les surfaces réputées planes sont sujettes à des spécifications de planéité et de perpendicularité restreignant la position des points de ces surfaces dans une zone de tolérance donnée. Quatre trous de passage de vis ont été perçés sur la pièce pour un assemblage ultérieur. Les axes de ces trous sont sujets à une spécification de localisation par rapport aux références liées aux surfaces réputées planes.

À partir de ce modèle nominal, un modèle éléments-finis illustré sur la figure 3.2 est élaboré grâce à une phase d'idéalisation de la géométrie. Les volumes sont ainsi transformés en surfaces médianes discrétisées en éléments coques pour lesquels l'épaisseur devient un paramètre caractéristique de leur comportement mécanique. Quant aux trous de passage, ils deviennent des nœuds remarquables qui sont les points d'assemblage.

On souhaite maintenant intégrer des défauts géométriques en modifiant les coordonnées des nœuds du maillage de manière à ce que ce modèle éléments finis soit

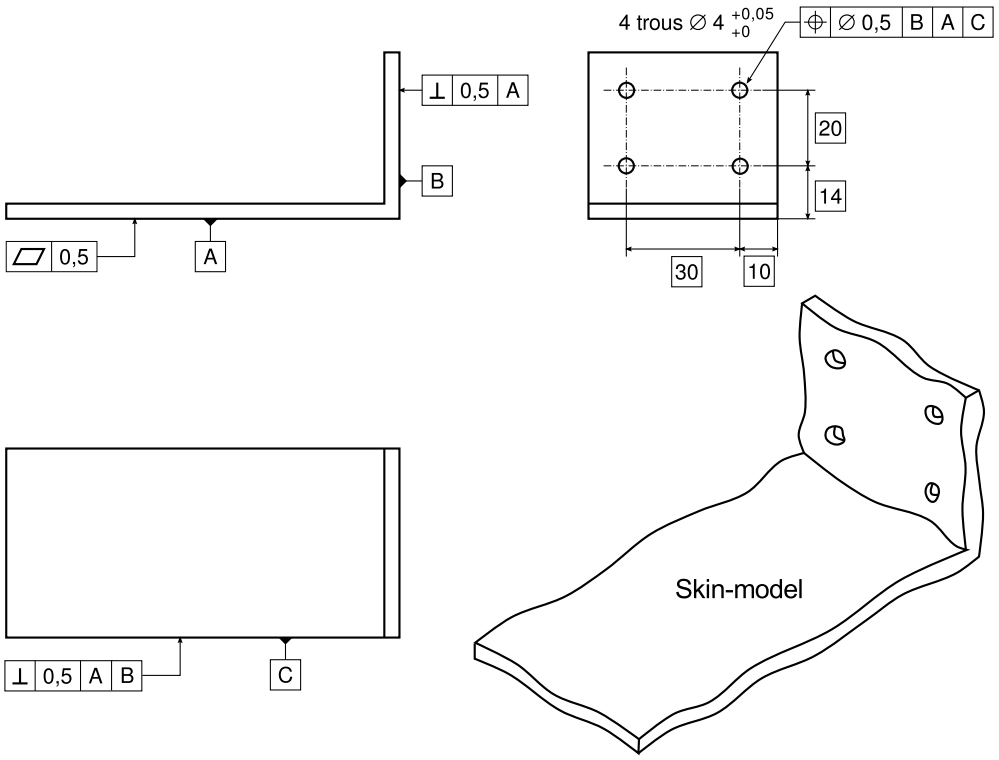



**Figure 3.1:** *Exemple d'une cornière partiellement tolérancée et représentation de son skin-model.*

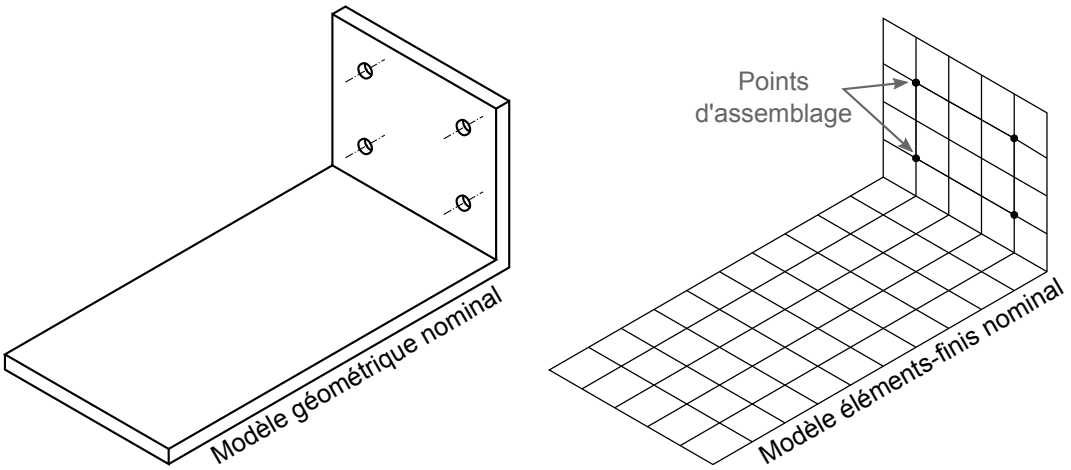



**Figure 3.2:** *Modèles nominaux géométriques et éléments finis.*

représentatif d'une pièce réelle avec défauts géométriques conforme aux spécifications. Cependant les spécifications concernent des surfaces qui n'apparaissent plus sur le modèle géométrique idéalisé. Il faut donc dans un premier temps transposer ces spécifications sur ce modèle en fonction des hypothèses d'idéalisation. La figure 3.3 montre le modèle géométrique idéalisé et une proposition de transposition des

spécifications, ainsi qu'une instance de skin-model numérique, c'est-à-dire un modèle éléments-finis à géométrie non-nominale.

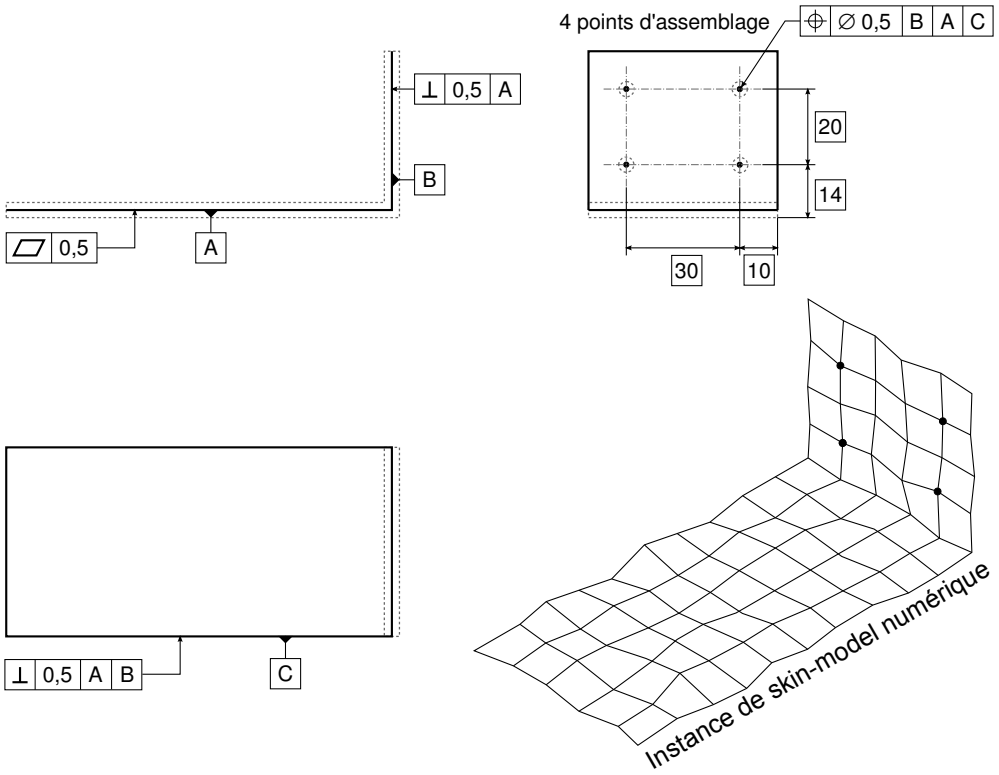



**Figure 3.3:** *Modèle nominal idéalisé avec spécifications géométriques et représentation d'une instance de skin-model numérique.*

On constate qu'une fois transposées sur le modèle idéalisé et discrétisé, les spécifications concernent des nœuds indépendants, ou des ensembles de nœuds appartenant à une même surface ou ligne. Par exemple, les spécifications de localisation des axes des trous de passage sont maintenant transposées sur les points d'assemblage. Quant à la spécification de planéité, elle concerne une surface qui, une fois discrétisée, est assimilable à un ensemble de nœuds. On pourra ainsi distinguer deux sortes de défauts qu'on souhaitera introduire dans le modèle, à savoir les défauts locaux qui concernent des nœuds isolés, et les défauts globaux qui concernent un ensemble de nœuds.

# 2 Défauts globaux

## 2.1 Hypothèse d'épaisseurs et de sections constantes

Si les défauts des surfaces extérieures en vis-à-vis d'une pièce de type poutre ou coque sont identiques, autrement dit que son épaisseur est constante, on peut directement transférer ce défaut sur la surface idéalisée, comme illustré sur la figure 3.4. Dans le cas des tôles métalliques ou des panneaux en composites, l'hypothèse d'épaisseur constante n'est pas aberrante vis-à-vis des procédés de fabrication.

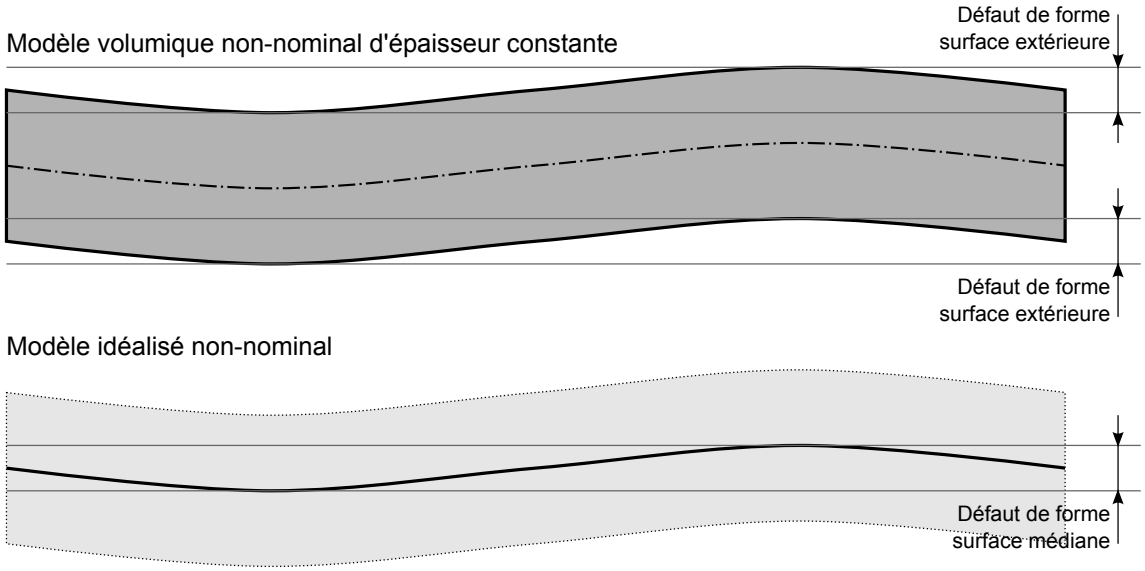



**Figure 3.4:** *Idéalisation d'une section de plaque d'épaisseur constante avec un défaut de forme.*

Dans la suite de ces travaux, on maintiendra l'hypothèse des épaisseurs et sections constantes. Celle-ci n'est pas indispensable, mais le modèle s'en trouve fortement simplifié. Si toutefois les variations d'épaisseur ne sont pas négligeables, il est nécessaire de renseigner les paramètres d'épaisseur (ou de section et de moments quadratiques pour les poutres) de chaque élément. Le défaut de forme attribué ensuite à la surface moyenne devra respecter la propriété d'équidistance comme illustré sur la figure 3.5.

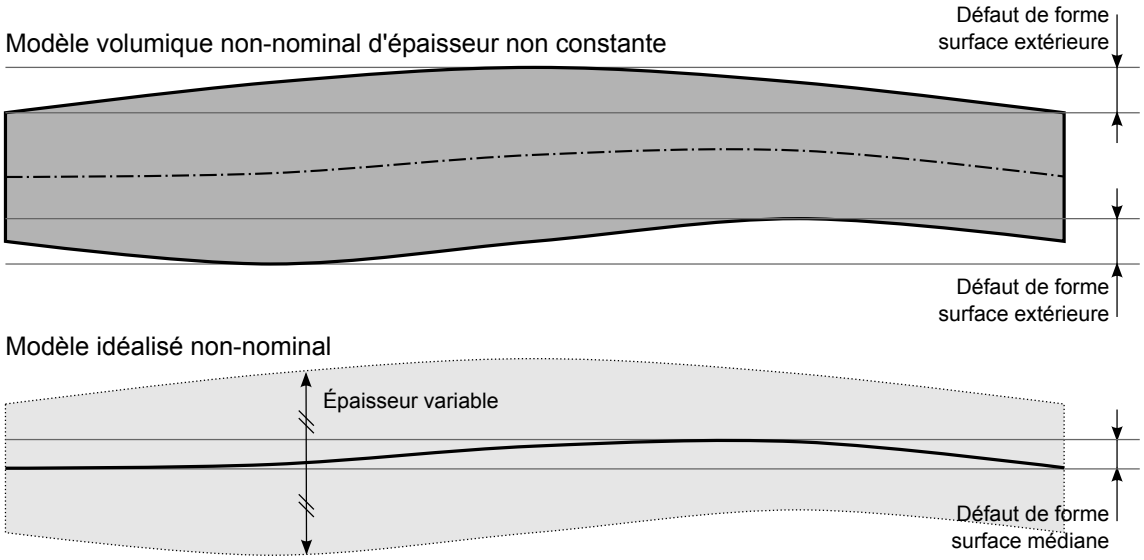



**Figure 3.5:** *Idéalisation d'une section de plaque d'épaisseur non-constante avec des défauts de forme d'allures différentes sur chaque face.*

## 2.2 Réalisme des instances de skin-model numériques

Les zones de tolérances construites à partir des spécifications contiennent une infinité de surfaces non-idéales acceptables mais pas forcément réalistes. Quant à la physique des matériaux et des procédés de fabrication, elle implique une certaine continuité de la surface réelle. Afin d'éviter de simuler l'assemblage de pièces non-réalistes, le contrôle des variabilités géométriques globales doit être fait de manière à ce que les champs d'écart soient continus, réalistes, et, si possible, représentatifs des défauts de fabrication. La figure 3.6 illustre des instances de skin-model numériques d'un modèle poutre en 2D sujet à des des défauts de forme.

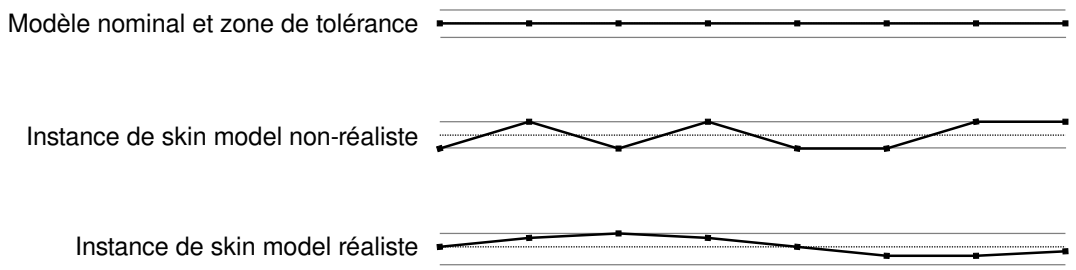



**Figure 3.6:** *Instances de skin-model numériques conformes et réalistes ou non pour une poutre 2D.*

Les instances sont conformes à une tolérance, mais pas forcément réalistes. On remarque que ce réalisme est lié à la continuité de la forme, elle même dépendante du ratio entre la longueur d'onde du défaut et la finesse du maillage. C'est pourquoi

il faut que la taille des éléments soit nettement inférieure à la longueur d'onde du défaut de forme auquel la pièce réelle pourrait être sujette.

Les travaux de [Zhang *et al.*, 2010], [Zhang *et al.*, 2011] et [Zhang, 2012] mettent en exergue ces problématiques de génération d'instances de skin-model numériques en accord avec les spécifications géométriques. Les surfaces sont discrétisées et des variables aléatoires sont attribuées à la position des points dans la direction de la normale à la surface nominale. Plusieurs méthodes pour le tirage aléatoire de ces variables sont proposées, dont la méthode de Gibbs fondée sur les chaînes de Markov. Les tirages aléatoires sont effectués de manière incrémentale et conditionnés par les tirages précédents de manière à assurer la normalité des distributions ainsi que le respect des spécifications géométriques. Quant au réalisme des surfaces générées, il est assuré par l'utilisation de matrices de covariance (cf. covariance géométrique figure 1.10 page 30). L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite un grand nombre de variables aléatoires.

## 2.3 Morphose de maillages

Une autre approche a été proposée dans [Franciosa *et al.*, 2010] pour générer des instances de skin-model numériques par morphose de maillage *(mesh-morphing)*. Il s'agit de définir des points de contrôle $Pc_i$ parmi les nœuds du maillage, et de leur attribuer une variabilité de position aléatoire $\Delta Pc_i$ ainsi qu'une fonction $f(d)$ donnant les variations de position des nœuds situés à une distance $d$ du point de contrôle. La continuité de cette fonction permet de conserver un certain réalisme des défauts (covariance géométrique). Le choix de ces points de contrôle et de ces fonctions doit toutefois être fait de manière à ce que les champs d'écart obtenus soient représentatifs des défauts. Ici, le nombre de variables aléatoires est réduit au nombre de points de contrôle.

## 2.4 Génération des champs d'écart par simulation élastique

Dans l'optique de poursuivre les travaux de [Cid, 2005] et [Breteau, 2009] sur l'aide à l'assemblage par la mesure, la première approche a consisté à élaborer un problème éléments finis à partir des résultats hypothétiques d'une mesure. Cette approche est illustrée sur la figure 3.7. D'une part on imagine une pièce réelle non-rigide disposée sur un montage de mesure de préférence isostatique, et mesurée sous pesanteur en quelques points. D'autre part on prend le modèle éléments finis nominal en apesanteur auquel on attribue des conditions aux limites représentatives du montage de mesure. Il s'agit alors de lui appliquer des déplacements imposés aux nœuds les plus proches des points mesurés. L'attribution de variables aléatoires à ces déplacements imposés permet de donner le caractère aléatoire de l'instance de skin-model. Le résultat du calcul est un champ de déplacement continu et passant par les points mesures. On actualise alors la géométrie du modèle élément finis en ajoutant ce champ de déplacement aux coordonnées des nœuds du maillage nominal, et on obtient une instance de skin-model numérique représentative de la pièce réelle hypothétique sous pesanteur.

Il est possible de se contenter de cette instance en négligeant les effets de la pesanteur. Sinon il suffit d'appliquer au modèle actualisé un champ d'effort nodal réparti correspondant à l'opposé de la pesanteur afin d'obtenir une instance de skin-model numérique représentative de la pièce réelle en apesanteur.

Un avantage d'ordre technique de cette méthode est qu'il est possible de rester dans un environnement de simulation éléments finis (par exemple *CAST3M* qui a été utilisé ici) ou la manipulation des champs vectoriels et des géométries est techniquement aisée. Toutefois, les instances de skin-model par simulation élastique dépendent fortement de la rigidité du modèle éléments finis, donc de ses caractéristiques mécaniques, de sa géométrie et du maillage, mais aussi de la définition de l'hypothétique montage de mesures et du choix des points de mesure. La définition des défauts géométriques nécessite donc une certaine expertise, tant en mécanique qu'en métrologie.

Ce problème s'est révélé pour un exemple de plaque courbe en 3D qu'on souhaite soumettre à un défaut de vrillage et un défaut de bombé comme représenté sur la figure 3.8. L'idée est de définir des conditions aux limites de mise en position et d'imposer des déplacements au sommet supérieur gauche pour le vrillage et au centre pour le bombé.

La figure 3.9 illustre différents champs d'écart obtenus par simulation élastique pour différents montages de mesures choisis. Ces formes obtenues (vrillage en haut à gauche, bombé pour les autres) ne sont pas représentatives des défauts souhaités. La difficulté à choisir des conditions aux limites adéquates et leur forte influence sur le défaut généré a ainsi remis en cause le choix de cette méthode. Le choix a donc

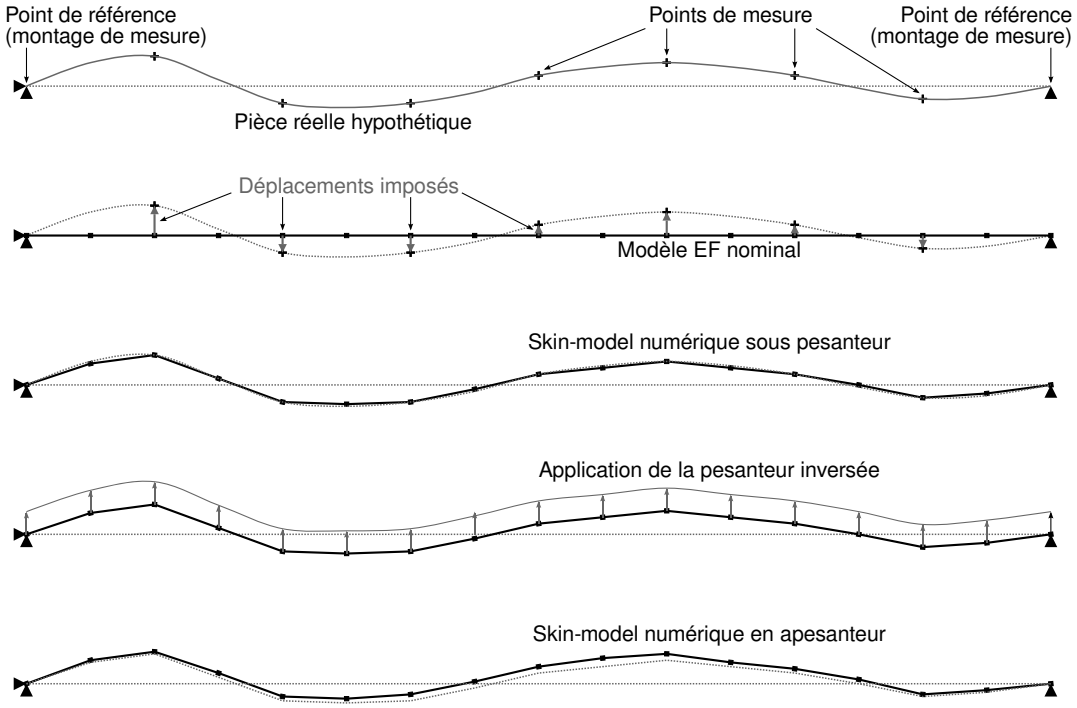



**Figure 3.7:** *Modélisation des défauts par calcul éléments finis à partir de résultats de mesures hypothétiques.*

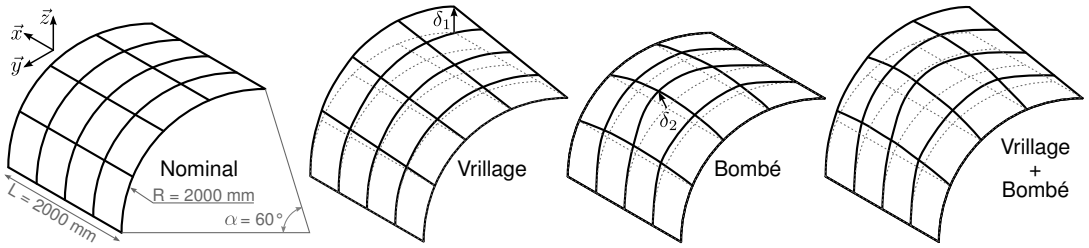



**Figure 3.8:** *Exemple de plaque courbe sujette à des défauts de vrillage et de bombé.*

été fait de définir les défauts géométriques sous forme de superposition de modes amplifiés.

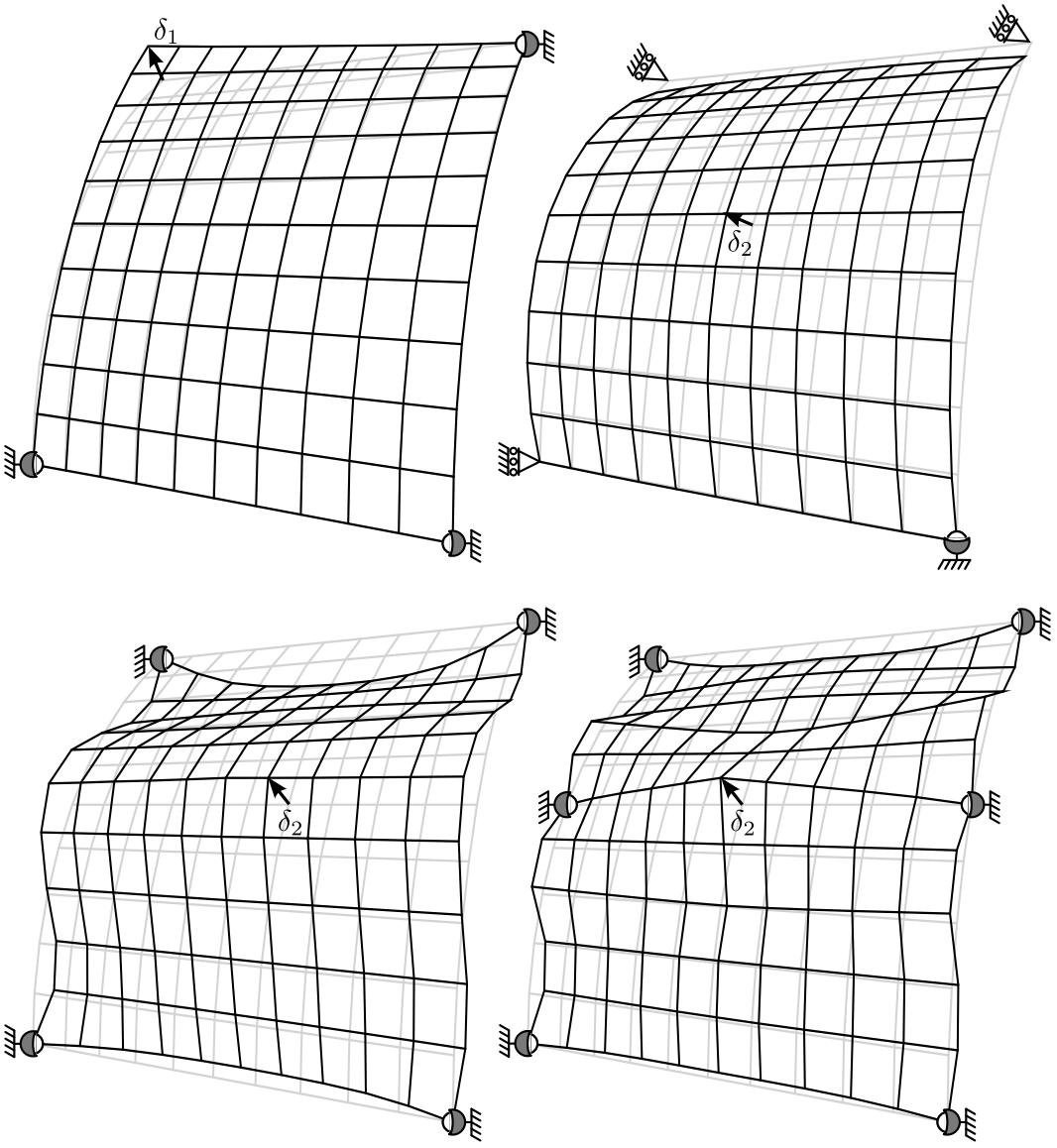



**Figure 3.9:** *Champs d'écart non-réalistes obtenus par simulation élastique : vrillage en haut à gauche et défauts de bombé.*

## 2.5 Génération des champs d'écart par superposition de modes amplifiés

Le tolérancement modal introduit par [Samper *et al.*, 2003] propose d'identifier les défauts de forme grâce à des modes. L'hypothèse de départ est qu'en pour tout point $M$ de coordonnées $(x, y, z)$ appartenant à la surface concernée par le défaut de forme, l'écart $\overrightarrow{Ec}(M)$ peut être décrit comme la somme de modes orthogonaux $\overrightarrow{\phi_i}(M)$ d'amplitude $\delta_i$, comme exprimé dans l'équation 3.1. Il s'agit d'abord de définir une base modale orthogonale de dimension $N$, puis d'y projeter les résultats de mesure afin d'identifier ces amplitudes $\delta_i$. En exprimant les tolérances par des bornes sur ces amplitudes de modes, il est possible de juger de la conformité de la pièce mesurée [Favreliere, 2009].

$$\overrightarrow{Ec}(M) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i \, \overrightarrow{\phi_i}(M) \tag{3.1}$$

L'idée est d'utiliser cette description des défauts de forme avec $N$ modes $\overrightarrow{\phi_i}(M)$ issus d'une base modale choisie, et dont les amplitudes $\delta_i$ seront aléatoires selon des lois de distribution prédéfinies aussi. Cela permet tout d'abord de choisir les modes en fonction de leur pertinence, et de limiter le nombre de variables aléatoires au nombre de modes sélectionnés. Ainsi les amplitudes de modes correspondront à une partie des contributeurs pour le problème de tolérancement. Concernant la base modale, plusieurs choix s'offrent à l'utilisateur :

**Modes de Fourier :** Ils sont facilement définissables pour des géométries simples.

**Modes propres de vibration :** À basses fréquences, ils sont assez représentatifs de défauts d'ondulation. Ils sont également assez faciles à obtenir avec le même code de calcul éléments-finis servant à faire la simulation d'assemblage (ici CAST3M), même dans le cas de géométries complexes ou de sous-assemblages.

**Modes de flambement :** A priori ils semblent assez réalistes mais n'ont pas été testés dans ces travaux.

**Modes prédéfinis :** Cette description est idéale si on connait le procédé de fabrication de la pièce, qu'on dispose d'une certaine expérience dessus, et qu'on sait décrire mathématiquement les champs d'écart qu'on souhaite obtenir. Il est préférable de faire en sorte que l'ensemble des modes choisis forment une base orthogonale si on souhaite exprimer les tolérances géométriques sous forme de bornes sur les amplitudes des modes puis effectuer le contrôle des pièces réelles en identifiant ces amplitudes par la mesure et projection sur la base modale.

Pour caractériser les défauts de position et d'orientation, il est également possible de définir des modes de translation et de rotation qui viendront enrichir la base choisie.

La figure 3.10 illustre deux modes de défauts de vrillage et de bombé qui ont été prédéfinis de manière à être représentatifs de ce qu'on souhaitait. L'équation 3.2 donne les deux modes unitaires $\overrightarrow{\phi_1}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{\phi_2}(x,y,z)$ projetés sur la normale à la surface $\vec{n}$. La multiplication de ces modes unitaires par des variables aléatoires $\delta_1$ et $\delta_2$, puis leur superposition donnera un champ d'écart $\overrightarrow{Ec}(x,y,z)$ aléatoire et réaliste.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\phi_1}(x,y,z)\} = \dfrac{x}{L}\,\dfrac{\arctan(z/y)}{\alpha}\,\vec{n} \\ \overrightarrow{\phi_2}(x,y,z)\} = 16\,\dfrac{x}{L}\,\dfrac{L-x}{L}\,\dfrac{\arctan(z/y)}{\alpha}\,\dfrac{\alpha-\arctan(z/y)}{\alpha}\,\vec{n} \end{cases} \tag{3.2}$$

Remarque : Le mode $\overrightarrow{\phi_1}$ est qualifié d'unitaire car il est défini de manière à ce que l'écart dans le coin supérieur droit soit égal à 1mm. Ainsi, le contributeur $\delta_1$ est directement correllé à cet écart en mm. De manière très pragmatique, on pourra quantifier le défaut de vrillage comme étant la valeur en mm de cet écart. Il en est de même pour le mode $\overrightarrow{\phi_2}$ pour lequel l'écart au centre de la plaque soit égal à 1mm.

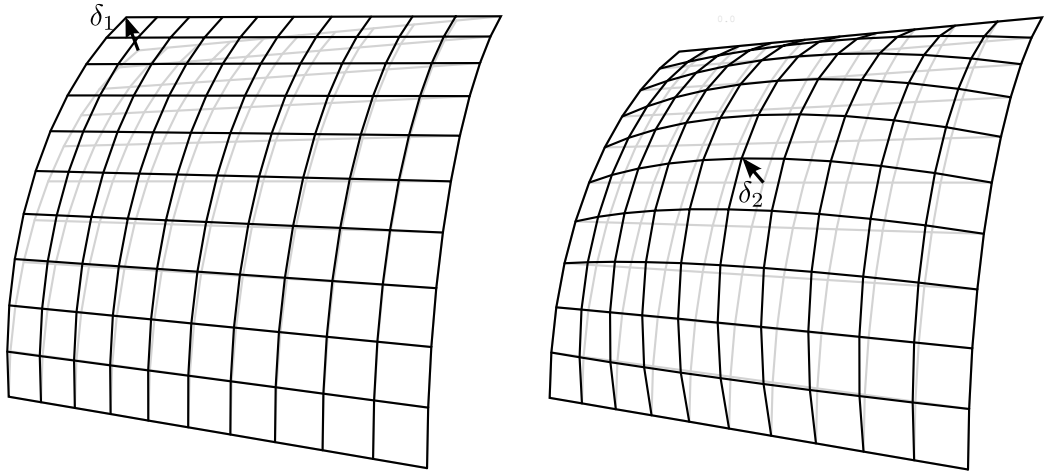



**Figure 3.10:** *Modes de vrillage et de bombé obtenus pour plaque courbe.*

Le fait de définir les écarts uniquement dans la direction de la normale implique une légère variation de l'aire de la surface de la pièce (ou de sa longueur dans le cas d'une poutre). Prenons l'exemple de cette plaque courbe dont l'aire à l'état nominal est d'environ $4,19m^2$. Pour un défaut de vrillage seul de 1mm ($\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = 0$), l'aire de la plaque augmente de $5,11cm^2$, soit environ $0,01\%$ de l'aire initiale. Pour un défaut de bombé seul de 1mm ($\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 1$), l'aire augmente de $9,32cm^2$, soit environ $0,02\%$ de la surface initiale.

En réalité, les procédés de fabrication n'entraînent pas forcément ce genre de variations. En ce sens, le réalisme des instances de skin-model peut être discutable.

Ici on choisit de négliger ces variations. Mais en supposant que le procédé de fabrication n'est pas censé avoir cet effet, on pourra définir les modes de manière à ce que la surface d'une coque (ou la longueur d'une poutre) demeure constante.

## 2.6 Application à une poutre 2D

Dans cet exemple en deux dimensions, on modélisera des défauts de courbure d'une poutre nominalement rectiligne, de longueur $L = 1050mm$. L'écart $\overrightarrow{Ec}(x)$ entre le modèle nominal et l'instance de skin-model en un point $M$ d'abscisse $x$ est donné par l'équation 3.3. Cet écart dépend des $N$ modes unitaires $\overrightarrow{\phi_i}$ qui caractérisent le défaut, et de leurs amplitudes respectives $\delta_i$ qui le quantifient. Ces amplitudes pourront donc être appelées *"contributeurs"* par analogie avec le tolérancement de pièces rigides.

$$\overrightarrow{Ec}(x) = \sum_{i=1}^{N=2} \delta_i \, \overrightarrow{\phi_i}(x) \tag{3.3}$$

On choisira deux modes unitaires $\overrightarrow{\phi_1}$ et $\overrightarrow{\phi_2}$ correspondant aux deux premiers modes de Fourier donnés par l'équation 3.4. L'écart maximal relevé pour chacun de ces modes unitaires est de $1mm$. La figure 3.11 illustre cette modélisation de défauts de courbure sous forme de superposition de modes amplifiés.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\phi_1}(x) = \sin \dfrac{x\,\pi}{L}\,\vec{y} \\ \overrightarrow{\phi_2}(x) = \sin \dfrac{2x\,\pi}{L}\,\vec{y} \end{cases} \tag{3.4}$$

Dans le cadre du tolérancement, on souhaite générer des instances de skin-model numériques aléatoires géométriquement conforme vis-à-vis d'une zone de tolérance donnée. Les contributeurs $\delta_i$ sont donc des variables aléatoires indépendantes qui suivent une distribution donnée. Ici la zone de tolérance est centrée sur l'état nominal et a une largeur égale à l'intervalle de tolérance donné. La vérification de l'appartenance à la zone sera effectuée en comparant la valeur maximale de l'écart au demi-intervalle de tolérance comme illustré sur la figure 3.12. Si l'écart maximal est inférieur au demi-intervalle de tolérance, alors on peut considérer que l'instance appartient à la zone de tolérance. Cette condition est traduite dans l'équation 3.5.

$$Ec_{max} = \max_x \{\, | \, \overrightarrow{Ec}(x) \,.\, \vec{y} \, | \,\} \leq \frac{IT}{2} \tag{3.5}$$

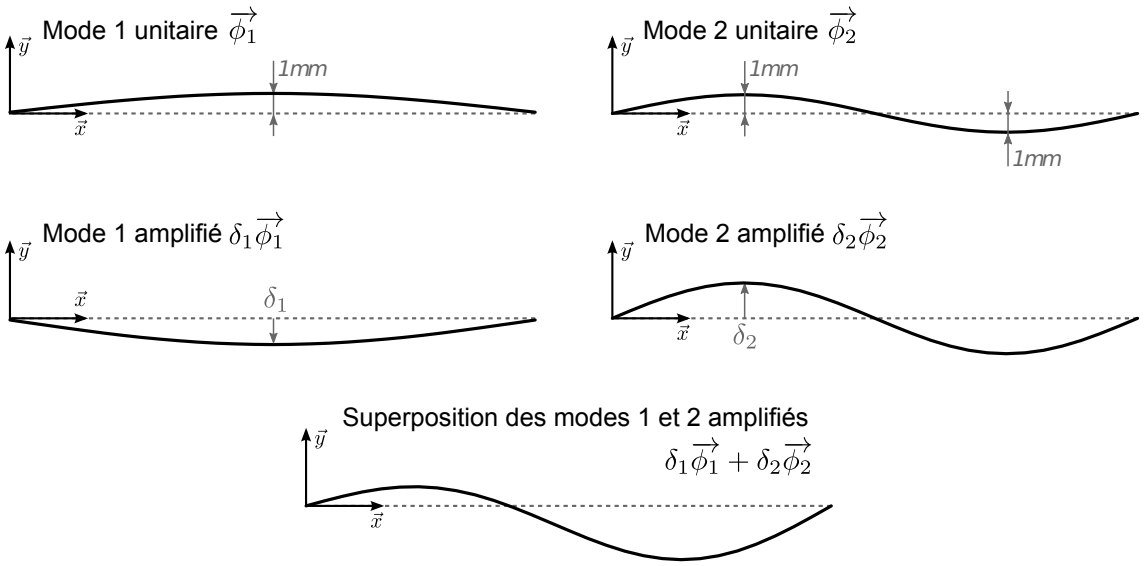



**Figure 3.11:** *Défauts de courbure d'une poutre sous forme de superposition de modes.*

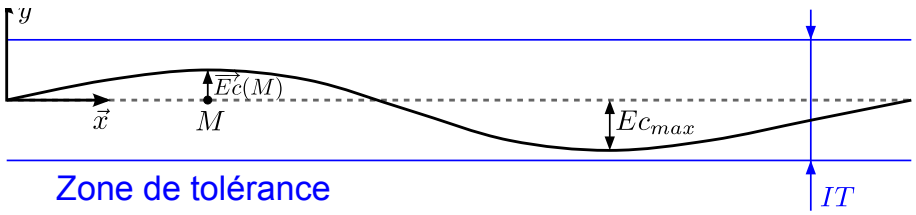



**Figure 3.12:** *Vérification de l'appartenance d'une poutre i à sa zone de tolérance.*

Comme on travaille avec des géométries discrétisées, on relève l'écart en chaque nœud du maillage. On identifie alors l'écart maxi parmi la liste obtenue. On se permettra donc de parler de *"métrologie virtuelle"* dans le sens où on vérifie l'appartenance à une zone de tolérance en traitant les valeurs des champs aux nœuds et leurs coordonnées comme si ces derniers constituaient un nuage de points résultats de métrologie.

Les distributions choisies ici pour les contributeurs $\delta_1$ et $\delta_2$ est une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 1$. Le fait de n'avoir pris que deux contributeurs nous permet d'illustrer les domaines de variation de ces amplitudes aléatoires qui permettent l'appartenance à ces zones de tolérance. On trace dans les plans $(\delta_1, \delta_2)$ les droites d'équations 3.6 (où $\overrightarrow{Ec}(x_k)$ correspond à la valeur du champ d'écart au nœud numéroté $k$ et d'abscisse $x_k$).

$$\overrightarrow{Ec}(x_k) \,.\, \vec{y} = \sum_{i=1}^{2} \delta_i \, \overrightarrow{\phi_i}(x_k) \,.\, \vec{y} = \pm \frac{IT}{2} \tag{3.6}$$

Ces droites représentent, pour chaque nœud du maillage, la condition que celui-ci soit situé aux limites de la zone de tolérance. La figure 3.13 illustre ainsi un domaine de validité des contributeurs pour un intervalle de tolérance de $3mm$. Les deux milles tirages aléatoires effectués y sont également représentés sous forme de croix. Parmi eux, seuls 1203 *"vecteurs aléatoires"* ou *"variable aléatoire multidimensionnelle"* $(\delta_1, \delta_2)$ donnent une instance conforme à la zone de tolérance. La figure 3.14 représente la même chose, sauf que l'intervalle de tolérance $IT$ est égal à 5mm et que 1812 vecteurs aléatoires $(\delta_1, \delta_2)$ sont valides.

On remarque que le domaine de validité des vecteurs aléatoires $(\alpha_1, \alpha_2)$ a une forme complexe. Ainsi, pour générer des instances de skin-model conformes par superposition de modes amplifiés aléatoirement, il faudrait instaurer une relation de dépendance des variables aléatoires. Par facilité, on choisira de trier les instances, c'est-à-dire qu'on en génère une collection dans laquelle on ne retiendra que les instances conformes. Cette solution nécessite toutefois de bien choisir les dispersions des variables aléatoires $\delta_i$ en fonction du nombre de modes $N$ et de l'intervalle de tolérance $IT$.

Dans notre cas où le choix s'est porté sur des distributions gaussiennes, la plage de normalité à niveau de confiance $99,7\%$ est $[\,\mu - 3\sigma\,,\,\mu + 3\sigma\,]$. L'écart maximal de chaque mode unitaire étant égal à 1mm, cela signifie que l'écart maximal relevé sur chaque mode amplifié par une de ces variables aléatoire sera inférieur à $3 \times \sigma \times 1mm = 3mm$ dans $99,7\%$ des cas. Mais en superposant les modes amplifiés, la position de l'écart maximal peut changer.

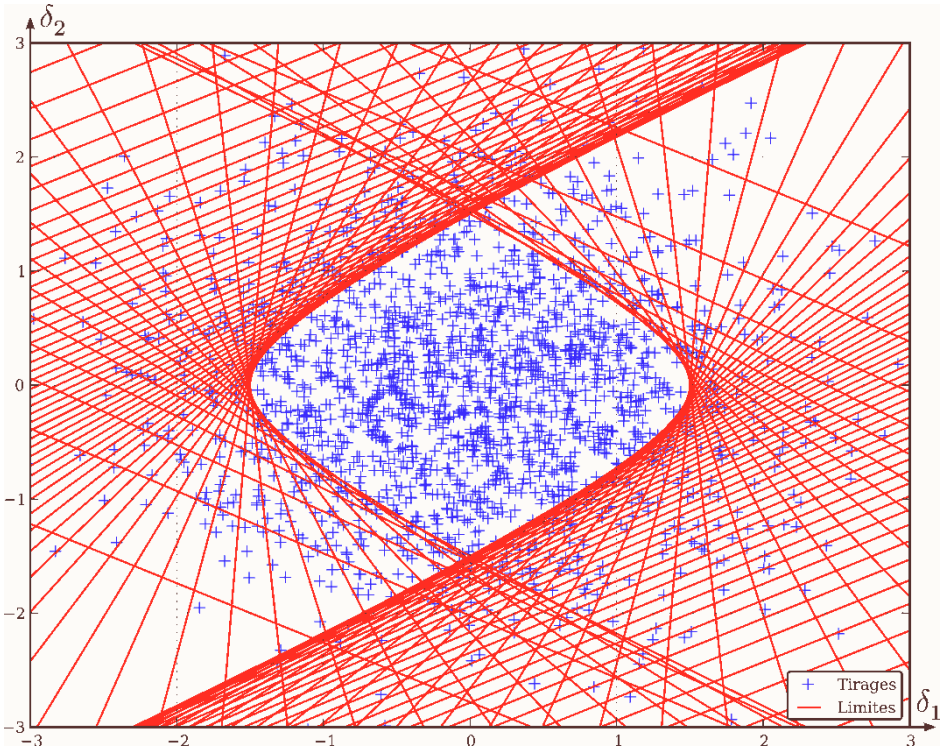



**Figure 3.13:** *Tirages aléatoires et domaine de validité pour $IT = 3mm$.*

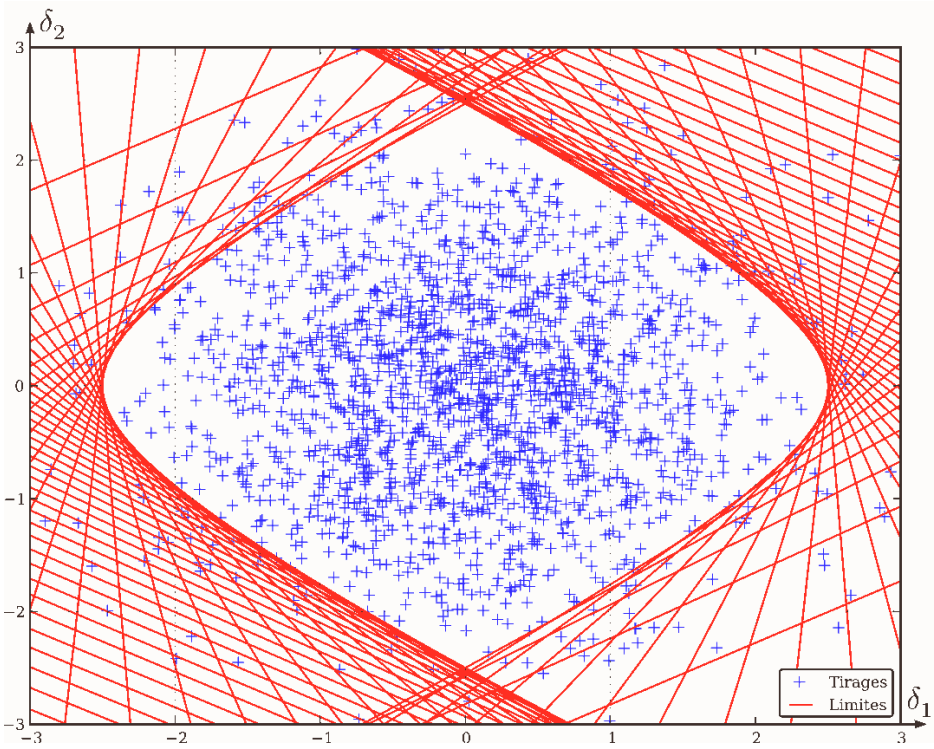



**Figure 3.14:** *Tirages aléatoires et domaine de validité pour $IT = 5mm$.*

# 3 Modèles de liaisons avec défauts locaux

On cherche à modéliser des liaisons rivetées ou boulonnées entre des modèles idéalisés de type coque ou poutre comme illustré sur la figure 3.15. Parmi les modèles de liaison présentés dans les pages 24 à 28, le choix a été fait d'utiliser des relations cinématiques liant les degrés de liberté de deux points d'assemblage de pièces différentes. On parlera de *"connexions"* pour désigner ces modèles de liaisons. Une modélisation plus riche des liaisons n'a pas été mise en œuvre, mais cela fait partie des perspectives pour la suite des travaux.

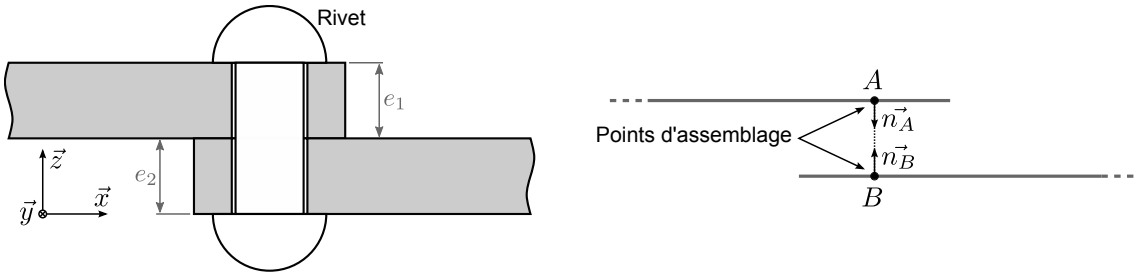



**Figure 3.15:** *Modèle géométrique d'une liaison et modèle éléments-finis d'une connexion.*

Ici on définira les vecteurs $\vec{n_A}$ et $\vec{n_B}$ représentés sur la figure 3.15 sur deux points en vis-à-vis dans la configuration nominale. Ces vecteurs sont unitaires, normaux aux surfaces de contact entre les pièces et chacun est dirigé vers l'autre pièce. En considérant que l'assemblage nominal est réalisé sans déformations, il advient que $\vec{n_A} = -\vec{n_B}$). L'hypothèse des épaisseurs (et sections) constantes implique également que $\vec{n_A}$ et $\vec{n_B}$ sont aussi normaux aux surfaces du modèle idéalisé.

## 3.1 Modèles de liaisons à l'état nominal

À l'état nominal, les relations cinématiques entre deux points d'assemblages en vis-à-vis A et B sont donnés par l'équation 3.7. On considèrera qu'il s'agit d'encastrements rigides et sans jeux, supposant ainsi que le serrage ne permet pas la rotation autour de l'axe du rivet. D'un point de vue statique, l'équation 3.8 qui traduit le fait que les actions mécaniques appliquées par une pièce sur l'autre via la liaison s'opposent, sera toujours valide.

$$\begin{cases} \vec{\omega_B} = \vec{\omega_A} \\ \vec{u_B} = \vec{u_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega_A} \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\{\tau_{A/B}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{A/B}} \\ \overrightarrow{M_{A/B}} \end{Bmatrix} = -\{\tau_{B/A}\} \tag{3.8}$$

$\vec{u_A}$ et $\vec{\omega_A}$ correspondent respectivement aux composantes de translation $ux_A$, $uy_A$, $uz_A$, et de rotation $\omega x_A$, $\omega y_A$ et $\omega z_A$ du torseur des petits déplacements $\{\mathcal{U}_A\}$ du point $A$ dans le repère global $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Il en est de même pour le point $B$.

Le terme $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega_A}$ permet de traduire les petits déplacement induits par les petites rotations étant donné que les deux points d'assemblage ne sont pas confondus. Ce terme devient négligeable quand les épaisseurs des pièces sont très faibles.

$\{\tau_{A/B}\}$ correspond au torseur d'efforts généralisés qui transitent dans la liaison. Il faudra toutefois prendre garde à ne pas négliger les précharges des vis et des rivets dans le cas où les critères de conformité statique sont relatifs à leur sollicitation mécanique.

## 3.2 Expression locale des défauts globaux

Étant donné que les pièces sont sujettes aux défauts de forme, les positions et orientations des points d'assemblage entrent en compte dans les relations cinématiques sous forme de jeux initiaux. Ces jeux initiaux correspondent aux distances et aux écarts angulaires entre les projections des points d'assemblages sur les surfaces extérieures en contact. La figure 3.16 illustre une liaison entre deux pièces à l'état non-nominal et non-assemblé, et montre le jeu initial. L'équation 3.9 montre comment les termes dépendant des défauts globaux sont introduits dans la relation cinématique de liaison.

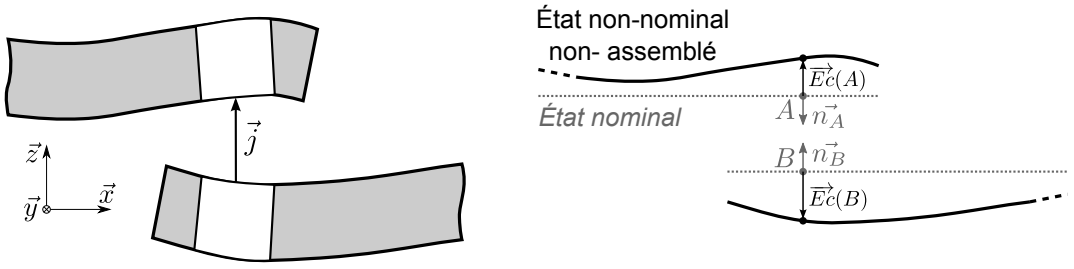



**Figure 3.16:** *Défauts de formes au niveau d'une liaison à assembler.*

$$\begin{cases} \vec{\omega_A} - \vec{\omega_B} = \vec{\theta} \\ \vec{u_A} - \vec{u_B} - \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega_A} = \vec{j} \end{cases} \tag{3.9}$$

$\vec{j}$ et $\vec{\theta}$ contiennent respectivement les composantes de translation $jx$, $jy$ et $jz$, et de rotation $\theta x$, $\theta y$ et $\theta z$ de ce qu'on appellera le *"torseur de jeu initial"* $\{\mathcal{J}\}$ exprimé dans le repère global $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Les composantes de $\vec{j}$ dépendent du champ d'écart aux points A et B de coordonnées respectives $(x_A, y_A, z_A)$ et $(x_B, y_B, z_B)$ comme exprimé sur l'équation 3.10 :

$$\vec{j} = \overrightarrow{Ec}(x_A, y_A, z_A) - \overrightarrow{Ec}(x_B, y_B, z_B) \tag{3.10}$$

Le vecteur $\vec{\theta}$ correspond à la différence d'orientation locale entre les points d'assemblage. En faisant l'hypothèse des sections droites, et pour une surface nominale de normale $\vec{z}$ ces composantes de rotation correspondent aux dérivées des composantes en translation (voir équation 3.11 :

$$\begin{cases} \theta x = \dfrac{d}{dy}\left(\overrightarrow{Ec}(x_A, y_A, z_A)\,.\,\vec{z}\right) - \dfrac{d}{dy}\left(\overrightarrow{Ec}(x_B, y_B, z_B)\,.\,\vec{z}\right) \\ \theta y = \dfrac{d}{dx}\left(\overrightarrow{Ec}(x_A, y_A, z_A)\,.\,\vec{z}\right) - \dfrac{d}{dx}\left(\overrightarrow{Ec}(x_B, y_B, z_B)\,.\,\vec{z}\right) \end{cases} \tag{3.11}$$

## 3.3 Défauts de liaison

Ici on souhaite introduire les défauts de localisation des trous de passage ainsi que les éventuels défauts d'orientation relative des deux pièces assemblées comme illustré sur la figure 3.17. Les défauts de position $Tx_A$ et $Ty_A$ du premier trou de passage s'additionnent respectivement avec ceux de l'autre $Tx_B$ et $Ty_B$ pour donner le défaut de position relatif des deux pièces $Tx$ et $Ty$ qu'on rangera parmi les contributeurs.

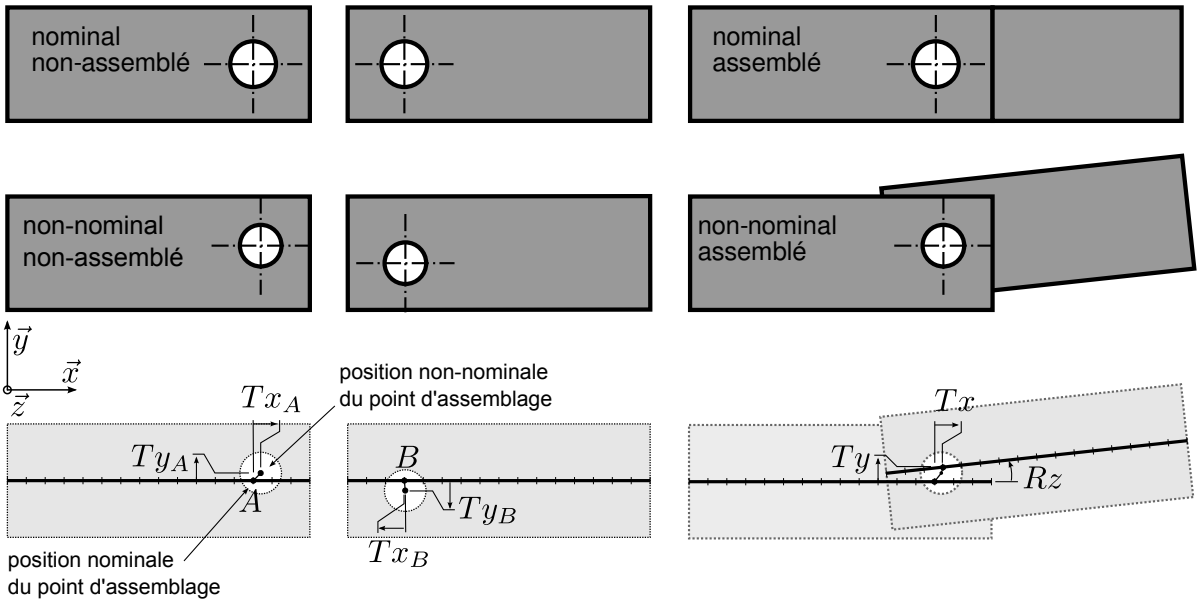



**Figure 3.17:** *Défauts locaux d'une liaison.*

Lorsqu'une connexion modélise une seule fixation comme illustré ici, les défauts d'orientation relatifs peuvent être dûs à un mauvais positionnement des pièces l'une

par rapport à l'autre au moment du serrage de la fixation (boulon, épingles ou rivets précontraints). Dans le cas de l'application industrielle traitée à la fin de ce mémoire, les connexions modélisent des ensembles de fixation. Les défauts d'orientation relative des pièces peuvent alors être dûs aux défauts de position des trous de passage les uns par rapport aux autres (cf. chapitre 5.3.2 page 139). Ces défauts d'orientation constitueront également une partie des contributeurs ($Rz$) pour le problème de tolérancement.

Plutôt que d'effectuer une modification supplémentaire des coordonnées des points d'assemblage et risquer de générer des aberrances dans le maillage ainsi que des modifications de rigidité qui n'ont pas lieu d'être, on choisira d'introduire ces défauts de liaison dans la relation cinématique comme montré dans l'équation 3.12. On remarque qu'ainsi, ces défauts s'intègrent à la relation de la même manière que les jeux initiaux vus précédemment en page 77.

$$\begin{cases} \vec{\omega_A} - \vec{\omega_B} = \vec{R} \\ \vec{u_A} = \vec{u_B} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega_A} = \vec{T} \end{cases} \tag{3.12}$$

$\vec{R}$ et $\vec{T}$ contiennent respectivement les composantes de translation $Tx$, $Ty$ et $Tz$, et de rotation $Rx$, $Ry$ et $Rz$ de ce qu'on appellera le *"torseur de défauts de liaison"* $\{\mathcal{D}\}$ exprimé dans le repère global $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

## 3.4 Contact unilatéral

De la même manière que pour les connexions, on tiendra compte du contact unilatéral pour des couples de points en vis-à-vis au niveau des zones de recouvrement. En cas de décollement, on considère que les deux points sont libres, et en cas de contact, on considère qu'ils sont en liaison ponctuelle, c'est-à-dire que les efforts et déplacements sont liés dans la direction des normales aux surfaces d'appui. Pour des raisons de simplicité, on ne liera pas les rotations en cas de contact. L'équation 3.13 montre l'écriture d'une telle condition dans une configuration géométrique nominale.

$$\begin{cases} \vec{u_A} \,.\, \vec{n_A} - \vec{u_B} \,.\, \vec{n_A} \geq 0 & \textit{décollement} \\ \overrightarrow{F_{A/B}} \,.\, \vec{n_A} = \overrightarrow{F_{B/A}} \,.\, \vec{n_B} \geq 0 & \textit{contact} \end{cases} \tag{3.13}$$

Les positions non nominales de ces points entrent aussi en compte dans les conditions de contact unilatéral sous forme de jeu initial, comme exprimé dans l'équation 3.14.

$$\begin{cases} \vec{u_A} \,.\, \vec{n_A} - \vec{u_B} \,.\, \vec{n_A} \geq -\vec{j} \,.\, \vec{n_A} & \textit{décollement} \\ \overrightarrow{F_{A/B}} \,.\, \vec{n_A} = \overrightarrow{F_{B/A}} \,.\, \vec{n_B} \geq 0 & \textit{contact} \end{cases} \tag{3.14}$$

Remarque : Cette méthode pour tenir compte du contact unilatéral nécessitera des maillages qu'ils soient compatibles aux interfaces. Cela signifie que les nœuds des deux pièces doivent être en face les uns des autres dans la zone de recouvrement.

## 3.5 Relations sur les rotations

Après avoir testé différents types de relations cinématiques relatives à celles proposées dans [Breteau, 2009], [Cid, 2005] et [Mounaud, 2009], et ce avec ou sans prise en compte du contact unilatéral, on a pu constater que le fait de lier les rotations, autrement dit d'imposer localement la tangence des pièces, offre deux avantages. Si le contact unilatéral n'est pas pris en compte, cela limite l'interpénétration des pièces autour de la connexion et mène à un résultat géométrique plus réaliste. La figure 3.18 illustre ce phénomène. Cette interpénétration est d'autant plus limitée lorsque les connexions sont proches, ce qui est le cas des assemblages de panneaux aéronautiques rivetés. Et si le contact unilatéral est pris en compte, la méthode des statuts converge plus rapidement étant donné que la solution géométrique sans contact est plus proche de la solution avec contact.

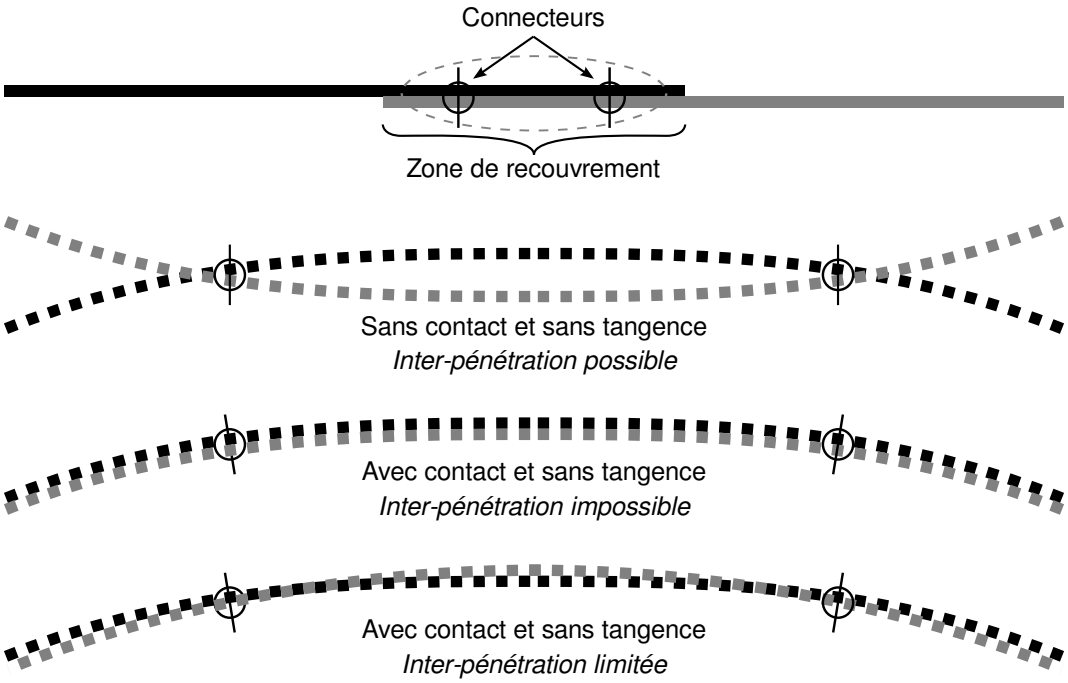



**Figure 3.18:** *Modèle d'assemblage de deux poutres à l'aide de deux connexions.*

## 3.6 Jeux dans les liaisons

Grâce aux conditions de contact unilatéral, il est également possible de faire intervenir des jeux dans les liaisons localisées. Par exemple pour la liaison rivetée de la figure 3.19, la relation régissant les déplacements des points d'assemblage s'écrit telle que dans l'équation 3.15. Cette relation permet de restreindre le déplacement relatif des deux points d'assemblage dans un disque. Son diamètre dépend des dimensions des diamètres des trous de passage $D_A$ et $D_B$ et du rivet $D_r$, il est possible de considérer le terme $\frac{D_A+D_B}{2} - D_r$ comme un contributeur caractérisant le jeu de liaison.

Ce disque correspond à ce qu'on appelle *"domaine jeu"* d'une liaison [Giordano *et al.*, 2007]. Il s'agit de l'ensemble des positions et orientations que peut prendre une pièce par rapport à une autre en fonction des contacts entre les surfaces fonctionnelles intervenant dans la liaison. Ce domaine peut être approximé et représenté sous forme d'un polytope en plusieurs dimensions (jusqu'à six) qui correspondent à certaines des six composantes du *"torseur jeu"* (3 composantes de translation et trois composantes de rotation) [Teissandier *et al.*, 1999].

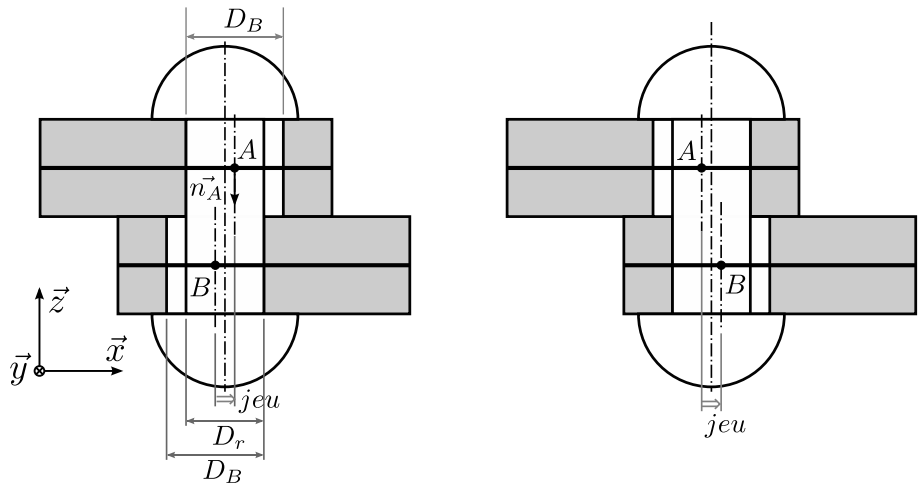



**Figure 3.19:** *Liaison rivetée avec jeu.*

$$||\vec{u_A} \wedge \vec{n_A} - \vec{u_B} \wedge \vec{n_A}|| \leq \frac{D_1 + D_2}{2} - D_r \tag{3.15}$$

Une telle relation ne peut pas être implémentée dans *CAST3M* car la commande `"RELA"` utilisée pour le contact unilatéral est restreinte à des inéquations pour des combinaisons linéaires des degrés de liberté. Autrement dit le déplacement relatif des deux points d'assemblage ne peut être borné que de manière unidirectionnelle. Il est donc nécessaire d'écrire deux inéquations pour chaque direction de bloquage, et

donc d'approximer la frontière du domaine jeu par un polygone. Par exemple, pour la connexion illustrée en figure 3.19, l'équation 3.16 correspond aux conditions de contact unilatéral relatives à une approximation du domaine jeu par un carré inscrit au disque de rayon $\frac{D_A+D_B}{2} - D_r$.

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{8}(D_A + D_B + 2\,D_r) & \leq ux_A - ux_B & \leq \frac{\sqrt{2}}{8}(D_A + D_B + 2\,D_r) \\ -\frac{\sqrt{2}}{8}(D_A + D_B + 2\,D_r) & \leq uy_A - uy_B & \leq \frac{\sqrt{2}}{8}(D_A + D_B + 2\,D_r) \end{cases} \tag{3.16}$$

Dans ces travaux, la modélisation des jeux dans les liaisons n'a pas été mise en œuvre. Il s'agit pourtant d'une perspective à court terme pour la suite de ces travaux étant donné qu'il est possible de se baser sur la méthode des domaines [Giordano *et al.*, 2007]. Chacune des facettes du polytope approximant le domaine jeu peut être traduite par une condition de contact unilatéral dans une direction donnée. Il faut toutefois prendre garde car chaque facette d'un domaine jeu amènera un degré de liberté supplémentaire au problème, augmentant ainsi le coût de calcul assez rapidement.

Par ailleurs, le concept du domaine jeu ayant été enrichi avec la théorie du contact de Hertz (on parle alors de "domaine jeu élastique" [Samper *et al.*, 2007]), la prise en compte à la fois des jeux et de l'élasticité dans les liaisons peut aussi être envisageable par la suite.

# 4 Conclusion

Les défauts géométriques aléatoires dans des modèles de pièces idéalisées en éléments de structure de type coque ou poutre ont été définis de deux manières. En premier lieu, les défauts de forme sont définis par des champs d'écart qui, ici, sont portés par la normale à la surface. Grâce à leur définition sous forme de superposition de modes, le contrôle du réalisme de ces défauts demeure aisé, et le nombre de variables aléatoires peut être limité.

Une méthode similaire aux pratiques de métrologie a alors été proposée pour être à même de juger de la conformité des instances de skin-model numériques aléatoires vis à vis d'une ou plusieurs zones de tolérance données. Cela permettra de trier les instances afin de procéder à de l'analyse ou de la synthèse de tolérances. Il est cependant préférable de lier les écarts types des amplitudes de modes à l'intervalle de tolérance du défaut de forme. Dans le cas contraire, on risque soit de ne pas bien couvrir l'intervalle de tolérance, soit de générer beaucoup d'instances hors tolérance.

Par ailleurs, les coordonnées du maillage pourront être modifiées via ces champs d'écart de manière à actualiser la rigidité de la pièce.

En second lieu, des modèles de liaisons rigides ont été établis de manière à ce que les défauts de localisation et d'orientation des liaisons y soient introduits directement. Ces défauts n'affectent pas le maillage par souci de cohérence vis-à-vis du comportement mécanique des pièces. Toutefois on a pu constater que ces défauts s'intègrent dans les relations de connexion de la même manière que les jeux initiaux dûs aux défauts de forme. L'équation 3.17 caractérise le comportement d'une liaison complète sujette à la fois aux défauts de forme et aux défauts de liaison. Ces modèles de connexion correspondent à des liaisons rigides et sans jeu, toutefois des perspectives d'enrichissement de ces liaisons ont été données.

$$\begin{cases} \vec{\omega_A} - \vec{\omega_B} = \vec{\theta} + \vec{R} \\ \vec{u_A} = \vec{u_B} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega_A} = \vec{j} + \vec{T} \end{cases} \tag{3.17}$$

La modélisation des pièces, des liaisons et de leurs variabilités géométriques étant maintenant définies, le chapitre suivant traite donc de la stratégie et des hypothèses de calcul à adopter pour pouvoir pratiquer l'analyse et la synthèse de tolérances.

# Chapitre 4

# La simulation d'assemblage pour le tolérancement de pièces non-rigides

*Ce chapitre a pour objet la confrontation des hypothèses de simulation aux stratégies de calcul sur des cas d'étude simples. La finalité est d'orienter les choix des hypothèses en fonction des critères de conformité qu'on cherche à vérifier, et d'en déduire la stratégie de calcul la moins coûteuse.*

## Sommaire


**1 Simulation du procédé d'assemblage . . . . . 88**
1.1 Prise en compte des variabilités de rigidité . . . . . 89
1.2 Prise en compte du contact unilatéral . . . . . 90
1.3 Formalisation du problème éléments finis . . . . . 90
**2 Cas d'étude 2D : Assemblage de poutres nominalement droites . . . . . 92**
2.1 Modélisation des liaisons . . . . . 92
2.2 Modélisation des défauts géométriques . . . . . 93
2.3 Quantités d'intérêt . . . . . 94
2.4 Récapitulatif de l'étude . . . . . 95

2.5 Analyse de tolérances DMC . . . . . 96
2.6 Synthèse de tolérances . . . . . 101
**3 Linéarisation de la simulation d'assemblage . . . . . 106**
3.1 Méthode des déformations initiales . . . . . 107
3.2 Application de la méthode des coefficients d'influence sur l'assemblage de poutres 2D . . . . . 108
3.3 Analyse de tolérances MIC . . . . . 110
3.4 Méthode des coefficients d'influence avec actualisation de rigidité . . . . . 113
3.5 Méthode des coefficients d'influence avec approximation quadratique . . . . . 115
**4 Cas d'étude 3D : Assemblage de deux plaques nominalement planes . . . . . 118**
4.1 Présentation du cas d'étude . . . . . 118
4.2 Synthèse de tolérances . . . . . 119
4.3 Analyse de tolérances . . . . . 120
**5 Conclusions . . . . . 124**

Les principales recommandations relatives à l'élaboration de modèles éléments finis avec variabilités géométriques étant faites, il s'agit maintenant de tester les stratégies de calcul et les hypothèses de la simulation d'assemblage sur deux cas d'étude académiques. Le premier est un problème 2D d'assemblage de deux poutres nominalement rectilignes à l'aide de deux connexions. Le second est un problème 3D d'assemblage de deux plaques nominalement planes à l'aide d'une rangée de 5 connexions.

On commencera tout d'abord par poser le problème éléments finis relatif à la simulation d'assemblage de manière à tenir compte d'une part du caractère unilatéral des phénomènes de contact, et d'autre part des variabilités de rigidité induites par les variabilités géométriques.

Une première stratégie d'analyse de tolérances s'appuyant sur la méthode de Monte-Carlo et où la simulation d'assemblage est considérée comme un problème globalement non-linéaire est présentée. S'en suit une méthode de synthèse de tolérances où des analyses successives sont effectuées. Enfin, deux tentatives d'enrichissement de la méthode des coefficients d'influence sont présentées. Leur objectif est de tenir compte des variabilités du comportement mécanique impliqué par les variabilités géométriques.

# 1 Simulation du procédé d'assemblage

De manière générale, un problème de calcul de structures se traduit par les équations 4.1 issues de la modélisation de la géométrie en éléments de structure.

$$\begin{cases} \left[K\right]\left\{u\right\} = \left\{F\right\} \\ \left[C\right]\left\{u\right\} = \left\{D\right\} \end{cases} \tag{4.1}$$

$\{K\}$ correspond à la matrice de rigidité des pièces.

$\{u\}$ est le champ de déplacement solution de la simulation.

$\{F\}$ constitue une partie du second membre contenant les composantes des efforts extérieurs appliqués.

$\{C\}$ est une matrice booléenne qui selectionne les degrés de liberté sujet à des conditions aux limites et les conditions de liaison.

$\{D\}$ constitue l'autre partie du second membre contenant les valeurs imposés sur les degrés de liberté impliqués dans ces relations.

Dans notre cas, on considèrera le comportement mécanique des pièces comme étant élastique linéaire. En effet, comme expliqué dans le chapitre 1 en page 18, on suppose qu'en phase d'assemblage, les pièces ne sont pas censées être déformées plastiquement. On fera également l'hypothèse des petites perturbations car les défauts géométriques considérés sont censés être très petits par rapport à la taille des pièces. Sous ces conditions, la matrice de rigidité d'un modèle élément fini est calculée grâce aux maillages, aux caractéristiques du matériau (module d'Young et coefficient de Poisson), ainsi que des caractéristiques de modélisation dans le cas des éléments coques (épaisseur) et poutre (moments quadratiques). Le comportement mécanique du système dépend de cette matrice de rigidité, mais aussi des conditions aux limites ou des conditions de liaison affectées sur certaines parties du maillage. Comme ce maillage est une représentation de la géométrie sujette à des variations, on s'efforcera de tenir compte de leur impact sur le comportement mécanique.

De plus, un assemblage étant par nature un ensemble de contact entre les surfaces des pièces, on s'efforcera d'introduire des conditions de contact unilatéral dans nos équations. En conséquence, le comportement mécanique des structures sera non-linéaire, et ces conditions de contact unilatéral seront elles aussi impactées par les variabilités géométriques.

## 1.1 Prise en compte des variabilités de rigidité

Pour prendre en compte l'influence de ces variabilités géométriques sur la rigidité, on calculera tout d'abord les coordonnées des nœuds du maillages de l'instance de skin-model (voir figure 3.3). Pour ce faire, on additionne aux coordonnées de chaque nœud du maillage nominal, les valeurs des composantes du champ d'écart exprimées en ces nœuds dans le repère global $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (voir équations 4.2 et 4.3).

$$\begin{cases} x_k = x_k^n + \overrightarrow{Ec}(x_k, y_k, z_k) \,.\, \vec{x} \\ y_k = y_k^n + \overrightarrow{Ec}(x_k, y_k, z_k) \,.\, \vec{y} \\ z_k = z_k^n + \overrightarrow{Ec}(x_k, y_k, z_k) \,.\, \vec{z} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\overrightarrow{Ec}(x_k, y_k, z_k) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i \, \overrightarrow{\phi_i}(x_k^n, y_k^n, z_k^n) \tag{4.3}$$

$x_k$, $y_k$ et $z_k$ correspondent aux coordonnées des nœuds numérotés $k$ du maillage de l'instance de skin-model numérique.

$x_k^n$, $y_k^n$ et $z_k^n$ correspondent aux coordonnées des nœuds numérotés $k$ du maillage nominal.

$\overrightarrow{\phi_i}$ correspond aux modes (voir page 70) de défaut de forme.

$\delta_i$ correspond aux amplitudes aléatoires des modes. Il s'agit des contributeurs relatifs aux défauts de forme.

$N$ correspond au nombre de modes.

Avec ce maillage actualisé, ainsi que les caractéristiques du matériau et des modèles, on peut calculer la nouvelle matrice de rigidité à l'aide du code de calcul éléments finis. Cette matrice appelée $\{K\}$ dans la première partie de l'équation 4.1 s'écrira alors comme la somme de la matrice de rigidité nominale $\{K_n\}$ dépendant en partie des coordonnées nominales $(x_k^n, y_k^n, z_k^n)$, et d'une matrice $\{K_d\}$ contenant les termes modifiés par l'actualisation de la géométrie avec défauts et dépendant en partie du champ d'écart $\overrightarrow{Ec}$ (voir équation 4.4).

$$\Big[K_n + K_d\Big] \Big\{u\Big\} = \Big\{F\Big\} \tag{4.4}$$

De plus, la modification des coordonnées des noeuds aura pour conséquence de modifier des valeurs du terme $\{D\}$ de l'équation 4.1.

Remarque : Afin de qualifier le phénomène de dépendance de la rigidité aux défauts de forme, on se permettra de parler de *"non-linéarité géométrique"* en faisant toutefois attention à ne pas confondre avec l'hypothèse des grands déplacements.

## 1.2 Prise en compte du contact unilatéral

Sur les zones dites de recouvrement, c'est-à-dire là où les pièces risquent d'entrer en contact, des conditions de contact unilatéral sont imposées, mais sans frottement. Comme on a pu le voir dans le chapitre précédent, en page 79, les conditions de contact unilatéral se traduisent par des inéquations affectées à des degrés de liberté de nœuds en vis-à-vis. La résolution sera effectuée en utilisant la méthode des statuts évoquée dans le chapitre 1 en page 35. Avec *CAST3M*, cette méthode est appliquée automatiquement dans le processus de résolution.

## 1.3 Formalisation du problème éléments finis

Le problème mécanique d'assemblage où l'on tient compte des variations de rigidité et du contact unilatéral se traduit donc par les équations 4.5 issues de la discrétisation et la modélisation en éléments finis.

$$\begin{cases} \left[K_n + K_d\right]\left\{u\right\} = \left\{F\right\} \\ \left[C_1\right]\left\{u\right\} = \left\{\Delta\right\} \\ \left[C_2\right]\left\{u\right\} \leq \left\{J\right\} \end{cases} \tag{4.5}$$

$\{K_n\}$ correspond à la matrice de rigidité nominale.

$\{K_d\}$ est une matrice qui contient les termes modifiés de la rigidité par l'actualisation de la géométrie avec défauts. Concrètement, on ne manipule pas $[K_d]$, on calcule directement la rigidité $[K_n + K_d]$ du maillage actualisé avec *CAST3M*.

$\{u\}$ est le champ de déplacement solution de la simulation. Il contient les composantes des torseurs des petits déplacements $\{\mathcal{U}_k\}$ de chaque nœud $k$ du maillage.

$\{F\}$ constitue une partie du second membre contenant les efforts extérieurs appliqués. Il pourrait s'agir d'un chargement extérieur ou de la pesanteur, mais dans notre cas, ces efforts sont nuls.

$\{C_1\}$ est une matrice booléenne qui selectionne les degrés de liberté sujets à des conditions aux limites, à des relations cinématiques de connexion.

$\{C_2\}$ est une matrice booléenne qui selectionne les degrés de liberté sujet à des conditions de contact unilatéral. On notera qu'il faut éviter d'introduire à la fois une relation de connexion et une condition de contact unilatéral à un même couple de nœuds. La redondance des relations risque d'empêcher la résolution, ce qui fût le cas avec *CAST3M*.

$\{\Delta\}$ constitue une autre partie du second membre qui contient à la fois les composantes des torseurs de jeu initial $\{\mathcal{J}\}$ et celles des torseurs de défauts de liaison $\{\mathcal{D}\}$ pour toutes les connexions (voir pages 77 et 79). L'équation 4.6 détaille le calcul de $\{\Delta\}$.

$\{J\}$ constitue la dernière partie du second membre qui contient les composantes de translation $jx$, $jy$ et $jz$ des torseurs de jeu initial $\{\mathcal{J}\}$ pour les couples de nœuds sujets aux conditions de contact unilatéral. L'équation 4.7 détaille le calcul de $\{J\}$.

$$\Big\{\Delta\Big\} = -\sum_{i=1}^{N_f} \delta_i^f \Big[C_1\Big] \Big\{\Phi_i\Big\} + \sum_{i=1}^{N_l} \delta_i^l \Big\{\Psi_i\Big\} \tag{4.6}$$

$$\Big\{J\Big\} = -\sum_{i=1}^{N_f} \delta_i^f \Big[C_2\Big] \Big\{\Phi_i^f\Big\} \tag{4.7}$$

$N_f$ correspond au nombre de modes de défauts de formes.

$N_l$ correspond au nombre de défauts de liaisons.

$\delta_i^f$ sont les contributeurs relatifs aux défauts de forme, c'est-à-dire les amplitudes de chaque mode.

$\delta_i^l$ sont les contributeurs relatifs aux défauts de liaison.

$\{\Phi_i^f\}$ est la matrice contenant tous les modes unitaires des défauts de forme.

$\{\Psi_i^l\}$ est la matrice qui contient les défauts de liaison unitaires sur les degrés de liberté concernés. On considèrera ici qu'un défaut unitaire de localisation correspond à une distance de $1mm$ entre les trous de passage dans une direction donnée, et qu'un défaut unitaire d'orientation correspond à un écart angulaire d'$1^o$ entre la position nominale assemblée et la position non-nominale assemblée (voir figure 3.17 en page 78).

# 2 Cas d'étude 2D : Assemblage de poutres nominalement droites

On se propose maintenant d'appliquer les méthodes d'analyse puis de synthèse de tolérances à un cas simple d'assemblage. Il s'agit d'un problème 2D d'assemblage de deux poutres illustré sur la figure 4.1. Ces poutres sont identiques à celle prise comme exemple pour la modélisation des défauts de forme en page 72. Les poutres sont encastrées sur un bâti rigide à leurs extrémités opposées et assemblées au milieu à l'aide de deux connexions espacées de 50 mm. Autour des connexions, il y a une zone de recouvrement de 100mm sur laquelle il y a potentiellement contact entre les deux poutres et où les maillages sont compatibles. Ce modèle ne tient pas compte de l'épaisseur des poutres dans le sens où les axes des deux poutres nominales sont coïncidents.

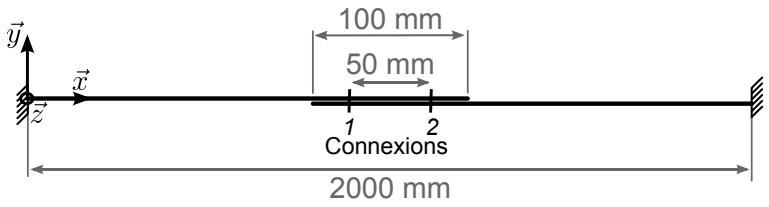



**Figure 4.1:** *Représentation du cas d'assemblage de deux poutres à l'état nominal.*

Les paramètres considérés pour le modèle des poutres sont une section carrée $10mm \times 10mm$, un matériau élastique linéaire isotrope correspondant à un acier classique dont le module d'Young diffère légèrement pour chaque poutre. Ces modules d'élasticité sont de 220 000 Mpa pour la poutre de gauche, et de 180 000 MPa pour celle de droite. Leurs coefficients de Poisson sont identiques et égaux à 0,3.

## 2.1 Modélisation des liaisons

On reste dans le cadre des liaisons rivetées ou boulonnées, c'est-à-dire qu'on imagine que les points d'assemblage sont représentatifs des trous de passage des rivets ou des vis. Les connexions modélisent soit des liaisons complètes sans jeux (tous les degrés de liberté sont liés) régies par l'équation 4.8, soit des liaisons glissières 2D d'axe $\vec{x}$ régies par l'équation 4.9 (Les connexions y sont numérotées 1 et 2 et on appellera $Ai$ et $Bi$ les couples de points d'assemblage de la connexion $i$).

$$\begin{cases} ux_{Ai} - ux_{Bi} = jx_i \ (= 0) \\ uy_{Ai} - uy_{Bi} = jy_i \\ \omega z_{Ai} - \omega z_{Bi} = \theta_i \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} uy_{Ai} - uy_{Bi} = jy_i \\ \omega z_{Ai} - \omega z_{Bi} = \theta_i \end{cases} \tag{4.9}$$

Selon le type de connexion, on pourra alors observer soit les efforts tangentiels, soit l'écart entre les deux points d'assemblage qui représente un glissement ou un désaxement entre les trous de passage. L'intérêt de ne pas lier le déplacement suivant l'axe $\vec{x}$ est de modéliser une liaison rivetée ou boulonnée avec un jeu radial, certes infini, mais sans nécessité d'établir des conditions de contact unilatéral comme évoqué en pages 81 et 82. Ces liaisons glissières 2D correspondraient à des appuis-plans locaux en 3D. L'observation du glissement ou du désaxement des trous de passage permet de quantifier des jeux radiaux fonctionnels à prévoir dans ces liaisons pour minimiser les efforts radiaux qui transitent dans les connexions, et ce sans surcoût de calcul. Les conditions de contact unilatéral (sans frottement) seront toutefois testées sur la zone de recouvrement afin de juger de la pertinence de cette hypothèse vis-à-vis des résultats.

## 2.2 Modélisation des défauts géométriques

Dans cet exemple, on ne modélisera que des défauts de forme. Il s'agit des défauts de courbure présentés dans l'exemple du chapitre précédent et illustrés sur la figure 3.11 en page 73. On a donc quatre modes unitaires $\phi_i$ qui ont été définis de manière à ce que l'écart maxi avec le nominal soit égal à 1mm. Le tableau 4.1 décrit ces modes unitaires. Les formules y sont données pour un repère local lié à chaque poutre où l'axe $\vec{x}$ est celui de la poutre. $x_k$ correspond à l'abscisse du nœud $k$. $L_1$ et $L_2$ correspondent respectivement aux longueurs des poutres de gauche et de droite.

| **Mode** | | **Formule** |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{\phi_1}$ | Premier mode de courbure de la poutre de gauche | $\overrightarrow{\phi_1} = \sin\dfrac{x_k\,\pi}{L_1}\,.\,\vec{y}$ |
| $\overrightarrow{\phi_2}$ | Second mode de courbure de la poutre de gauche | $\overrightarrow{\phi_2} = \sin\dfrac{2x_k\,\pi}{L_1}\,.\,\vec{y}$ |
| $\overrightarrow{\phi_3}$ | Premier mode de courbure de la poutre de droite | $\overrightarrow{\phi_3} = \sin\dfrac{x_k\,\pi}{L_2}\,.\,\vec{y}$ |
| $\overrightarrow{\phi_4}$ | Second mode de courbure de la poutre de droite | $\overrightarrow{\phi_4} = \sin\dfrac{2x_k\,\pi}{L_2}\,.\,\vec{y}$ |

**Table 4.1:** Tableau des modes de courbure des poutres.

## 2.3 Quantités d'intérêt

Afin de juger de la conformité de l'assemblage via les simulations, il faut se fixer des critères de conformité géométrique ou statique et les comparer aux quantités d'intérêt extraites à partir du champ de déplacement $\{u\}$ résultat de la simulation. On supposera ici que la conformité statique est associée à des critères sur les efforts de liaison, et que la conformité géométrique est associée d'une part à des critères d'enveloppe du champ $\{u\}$, et d'autre part aux écarts entre les deux points d'assemblage (représentatifs des glissements ou des désaxements entre les trous de passage) dans le cas où celui-ci est autorisé (liaisons avec jeu).

Pour l'exemple proposé ici, les quantités d'intérêt observées et illustrées sur la figure 4.2 sont les suivantes :

- Les composantes $Fx_1$, $Fy_1$, $Mz_1$, $Fx_2$, $Fy_2$ et $Mz_2$ des deux torseurs d'effort généralisés $\{\tau_1\}$ et $\{\tau_2\}$ qui transitent dans les connexions 1 et 2.
- Les glissements (ou désaxements) $Dx_1$ et $Dx_2$ entre les deux points d'assemblage 1 et 2 suivant l'axe $\vec{x}$.
- Les écarts $Dy_k$ entre un nœud $k$ appartenant à l'une des poutres à l'état nominal assemblé et ce même noeud à l'état non-nominal assemblé. Il s'agit d'un champ discret qui, étant donné que le maillage est actualisé, dépend des composantes en translation suivant $\vec{y}$ du champ d'écart initial $\overrightarrow{Ec}(x_k, y_k, z_k)$ en chaque nœud $k$ du maillage, et des composantes en translation suivant $\vec{y}$ du champ de déplacement $u$ résultat de la simulation (voir équation 4.10). Parmi toutes ces valeurs, c'est l'écart maximal qui nous intéressera étant donné qu'ici on voudra associer à l'assemblage une zone de tolérance située entre deux droites parallèles équidistantes de la position nominale des poutres. Cette zone de tolérance est illustrée sur la figure 4.2.

$$Dy_{max} = \max_k (Dy_k) = \max_k \left( \mid \overrightarrow{Ec_k} . \vec{y} + uy_k \mid \right) \tag{4.10}$$

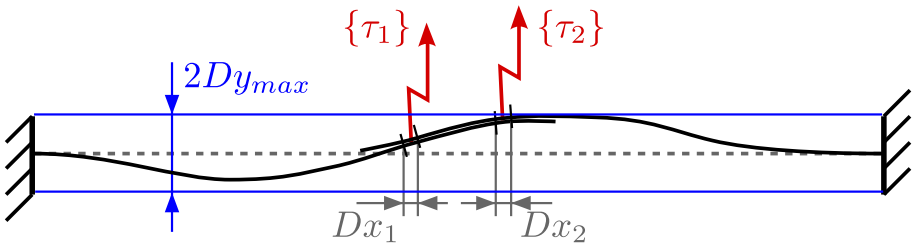



**Figure 4.2:** *Représentation des quantités d'intérêt observées sur l'assemblage de deux poutres à géométrie non-nominale.*

## 2.4 Récapitulatif de l'étude

La figure 4.3 illustre l'idée générale des études effectuées sur cet exemple. Leurs objectifs sont soit de vérifier (analyse), soit de chiffrer (synthèse) les valeurs des intervalles de tolérances $IT_1$ et $IT_2$ de manière à obtenir un certain taux de conformité des assemblages vis-à-vis de leurs critères de conformité (qui seront donnés par la suite dans le tableau 4.3 en page 99).

Il s'agit tout d'abord de générer une collection d'instances de skin-model en affectant des défauts de forme aléatoires à chaque poutre. Ces instances sont triées en fonction de leur appartenance à une zone de tolérance donnée via ce qu'on a évoqué comme étant de la *"métrologie virtuelle"* dans le chapitre précédent (voir page 3.12). Puis on simule maintes fois l'assemblage d'instances sélectionnées aléatoirement parmi les collections générées, et on compare les quantités d'intérêt résultantes aux critères de conformité géométrique et statique de l'assemblage afin d'estimer des probabilités de conformité. Celles-ci permettront finalement soit de valider, soit de quantifier les spécifications géométriques des pièces indépendamment.

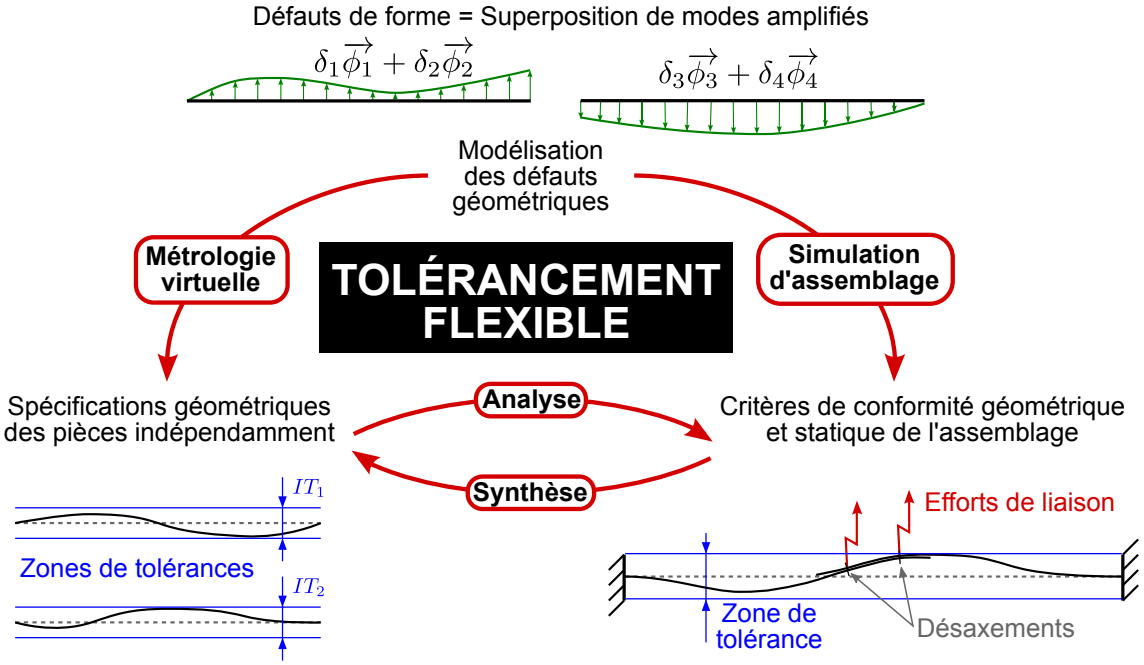



**Figure 4.3:** *Modèle géométrique de l'assemblage de deux poutres.*

## 2.5 Analyse de tolérances DMC

L'analyse de tolérances est réalisée avec une méthode de Monte-Carlo (on empruntera à [Dahlström et Lindkvist, 2007] l'acronyme *"DMC"* pour *Direct Monte-Carlo*). Il s'agit de procéder au tirage aléatoire de 2000 vecteurs aléatoires $(\delta_1, \delta_2)$ et 2000 vecteurs aléatoires $(\delta_3, \delta_4)$ dont les composantes suivent indépendamment la même loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 1$. Étant donné que l'écart maximal relevé sur chaque mode unitaire $\overrightarrow{\phi_i}$ est de 1mm (voir figure 3.11 page 73), la valeur des contributeurs est représentative de l'écart maximal en mm du mode amplifié. De ce fait, on a une forte correllation entre l'écart type $\sigma$ des distributions des valeurs aléatoires que peuvent prendre les contributeurs et la probabilité de conformité des pièces indépendamment (voir figures 3.13 et 3.14 en 75)

Les tirages des vecteurs aléatoires $(\delta_1, \delta_2)$ et $(\delta_3, \delta_4)$ sont triés de manière à ne garder que ceux permettant de générer une instance de skin-model conforme vis-à-vis des zones de tolérance ($IT_1 = 3mm$ pour la poutre de gauche et $IT_2 = 5mm$ pour la poutre de droite). On dispose alors d'une collection de 1203 instances aléatoires de skin-model de la poutre de gauche, et d'une collection de 1812 instances pour celle de droite.

On suppose a priori que 1000 simulations d'assemblage seront suffisantes pour obtenir une estimation fiable des probabilités d'assemblabilité. Il s'agit donc de selectionner 1000 couples d'instances de skin-model à assembler, c'est-à-dire 1000 vecteurs aléatoires $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$. Pour cela, chaque instance conforme est numérotée, et on procède aux tirages aléatoires de deux numéros d'instances dans leur liste respective en suivant une loi de probabilité uniforme. Il faudrait effectuer ces tirages sans remise pour s'assurer de ne pas faire plusieurs fois la même simulation, autrement dit de tirer plusieurs fois le même vecteur aléatoire $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$, mais la probabilité de le faire n'est que de $1203^{-1} \times 1812^{-1} \times 999 = 4,6.10^{-4}$.

Les mêmes 1000 simulations d'assemblage ont été réalisées avec les deux types de liaison et la prise en compte ou non du contact unilatéral, ce qui fait quatre configurations au niveau des conditions aux limites :

- Liaisons complètes et contact unilatéral (sans frottement) sur la zone de recouvrement.
- Liaisons complètes et pas de contact unilatéral.
- Liaisons avec jeu radial infini (glissière 2D) et contact unilatéral sur la zone de recouvrement..
- Liaisons avec jeu radial infini et pas de contact unilatéral.

Le tableau 4.2 recense les moyennes $\mu$ et écarts-types $\sigma$ des quantités d'intérêt observées à l'issue des 1000 simulations dans ces quatre cas de figure.

| | **Liaisons complètes** | | | | **Liaisons avec jeu** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **avec contact** | | sans contact | | **avec contact** | | sans contact | |
| | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ |
| $Fx_1(N)$ | 1256.5 | 3699.8 | 1223.7 | 3698.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fx_2(N)$ | -1703.5 | 3566.4 | -1666.9 | 3562.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fy_1(N)$ | -903.6 | 1530.4 | -35.6 | 507.1 | -885.4 | 1508.8 | -34.7 | 493.6 |
| $Fy_2(N)$ | -673.2 | 1273.9 | 33.9 | 505.8 | -669.5 | 1281.4 | 33.0 | 491.3 |
| $Mz_1(Nm)$ | 19.55 | 15.35 | -1.43 | 31.10 | 19.38 | 15.20 | -1.39 | 30.77 |
| $Mz_2(Nm)$ | -16.93 | 15.43 | -0.19 | 27.79 | -17.02 | 15.49 | -0.20 | 27.88 |
| $Dx_1(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.2 | 8.5 | 4.2 | 8.5 |
| $Dx_2(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 5.0 | 8.2 | 4.9 | 8.2 |
| $Dy_{max}(mm)$ | 4.17 | 2.68 | 4.19 | 2.69 | 4.17 | 2.67 | 4.18 | 2.68 |

**Table 4.2:** Résultats d'analyse de tolérances.

On constate tout d'abord que les efforts tangentiels sont bien nuls dans le cas des liaisons avec jeu, et les désaxements sont bien nuls dans le cas des liaisons complètes. Toutefois ces deux types de liaisons semblent donner des résultats similaires pour les efforts normaux $Fy_1$ et $F_y2$ et les moments $Mz_1$ et $Mz_2$.

On remarque également que la prise en compte du contact unilatéral a peu d'influence sur le calcul des efforts tangentiels ainsi que sur les quantités d'intérêt d'ordre géométrique, c'est-à-dire les désaxements des points d'assemblage $Dx_1$ et $Dx_2$, et l'écart maxi $Dy_{max}$ de l'assemblage par rapport au nominal. En revanche, le calcul des efforts normaux $Fy_1$ et $Fy_2$ et des moments $Mz_1$ et $Mz_2$ transitants dans les liaisons sont très fortement influencés par le contact unilatéral. En effet, dans les cas où les défauts tendent à éloigner les poutres, tous les efforts transitent dans la connexion, alors que dans les cas où les défauts tendent à rapprocher les poutres, les efforts se répartissent sur la zone de recouvrement à travers le contact unilatéral. D'ailleurs lorsqu'il y a contact sur la zone de recouvrement, l'effort normal et le moment qui transitent dans les connexions deviennent fortement dépendants linéairement. Ce phénomène est mis en exergue sur les figures 4.4 et 4.5 qui représentent les couples $(Fy_i, Mz_i)$ issus des simulations d'assemblage, et ce pour les deux connexions et pour les deux types de liaisons. On remarque aussi la similitude des valeurs obtenues pour ces quantités d'intérêt, et ce malgré le fait que les liaisons sont différentes.

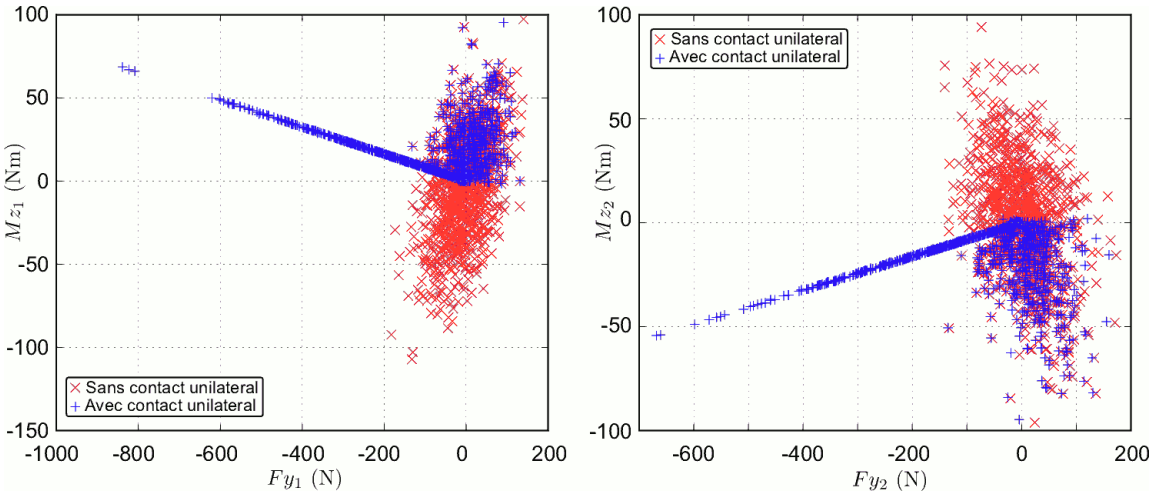



**Figure 4.4:** *Distribution des efforts normaux et moments dans les liaisons complètes.*

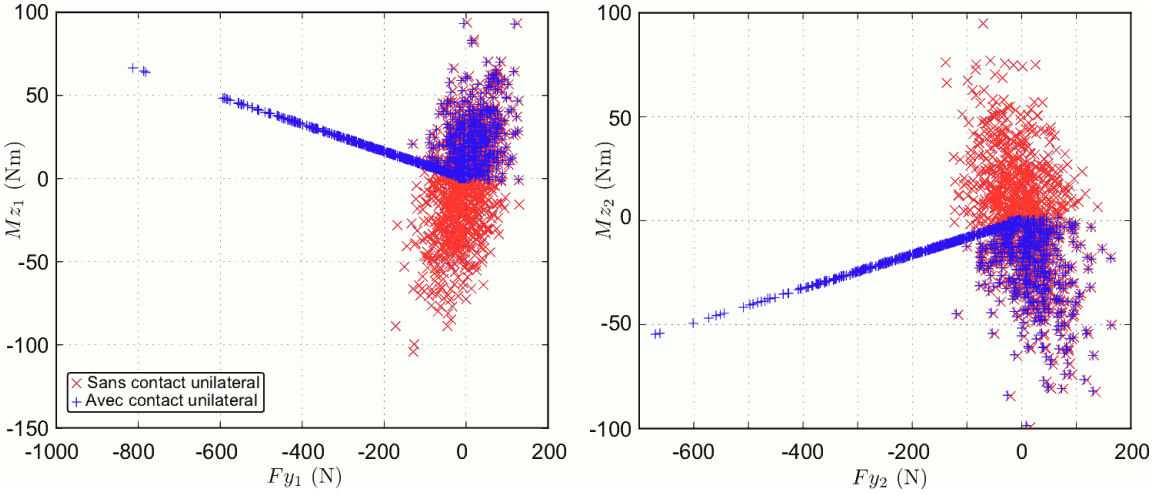



**Figure 4.5:** *Distribution des efforts normaux et des moments dans les liaisons avec jeu.*

À titre d'exemple, on se donnera des critères de conformité statique et géométrique afin d'estimer les probabilités de conformité des assemblages et finaliser ainsi l'analyse de tolérances. Les critères de conformité statique seront des valeurs limites que les quantités d'intérêt relatives aux efforts et moments ne devront pas dépasser. De même pour les critères de conformité géométrique, ils concernent les quantités d'intérêt de type géométriques (désaxements et écarts maxis). Le tableau 4.3 donne des critères, une estimation de la probabilité qu'ils soient respectés indépendamment, et une estimation de la probabilité de la conformité à la fois statique et géométrique traduisant le fait qu'ils soient tous respectés. On parlera de taux de conformité.

| | **Liaisons complètes** | | **Liaisons avec jeu** | |
|---|---|---|---|---|
| **Critère** | **avec contact** | sans contact | **avec contact** | sans contact |
| $Fx_1 \leq 12kN$ | 97.4 % | 97.6 % | 100 % | 100 % |
| $Fx_2 \leq 12kN$ | 97.6 % | 97.7 % | 100 % | 100 % |
| $Fy_1 \leq 5,4kN$ | 98.3 % | 100 % | 98.4 % | 100 % |
| $Fy_2 \leq 5,4kN$ | 99.3 % | 100 % | 99.3 % | 100 % |
| $Mz_1 \leq 60Nm$ | 97.9 % | 94.4 % | 98.0 % | 94.7 % |
| $Mz_2 \leq 60Nm$ | 97.5 % | 95.9 % | 97.5 % | 95.9 % |
| $Dx_1 \leq 30\mu m$ | 100 % | 100 % | 97.7 % | 97.7 % |
| $Dx_2 \leq 30\mu m$ | 100 % | 100 % | 97.7 % | 97.7 % |
| $Dy_{max} \leq 10mm$ | 96.9 % | 96.8 % | 97.0 % | 96.9 % |
| Conformité | 90.7 % | 88.0 % | 90.4 % | 88.1 % |

**Table 4.3:** Estimations des probabilités de respect des critères indépendamment et du taux de conformité.

De cette manière, on peut identifier les critères les plus restrictifs et choisir entre restreindre le ou les intervalles de tolérances et retenter l'analyse, ou bien revoir le dimensionnement ou la solution technologique des liaisons. Mais bien évidemment, l'estimation de la probabilité de conformité est largement tributaire des hypothèses de calcul, en particulier la conformité statique. Ici par exemple, avec les hypothèses de contact unilatéral, le critère le plus restrictif est celui sur l'écart maxi $Dy_{max}$, alors que sans contact unilatéral, c'est celui sur le moment $Mz_1$. Mais généralement, plus les hypothèses sont réalistes, plus les simulations sont coûteuses en temps de calcul.

Le tableau 4.4 montre le temps CPU nécessaire aux 1000 simulations (ainsi qu'aux réactualisations de rigidité). On constate bien qu'il est fortement augmenté avec la prise en compte du contact unilatéral. En effet, la méthode des statuts étant itérative, une simulation nécessite plusieurs résolutions successives du système alors qu'il n'en suffit que d'une lorsqu'on ne tient pas compte du contact unilatéral. Comme il s'agit d'un exemple simple, ces temps de calcul sont peu élevés, et leur différence, bien que significative, n'est pas représentative de ce qu'il adviendrait pour un modèle bien plus complexe.

| | **Liaisons complètes** | **Liaisons avec jeu** |
|---|---|---|
| **avec contact** | 1822 | 1787 |
| **sans contact** | 549 | 546 |

**Table 4.4:** Temps CPU de calcul pour les analyses de tolérances (en centièmes de seconde).

## 2.6 Synthèse de tolérances

L'objectif de la synthèse de tolérances est de déterminer des ensembles d'intervalles de tolérances qui assurent de la conformité de l'assemblage. Parmi ces ensembles, on pourra choisir celui qui convient le mieux selon des critères de coût de fabrication. Le problème se complique car on cherche maintenant à estimer la réponse de la simulation d'assemblage non plus face à des variations bornées de défauts, mais face à des variations de ces bornes.

Pour ce cas d'application, on réalisera plusieurs analyses successives pour lesquelles des couples d'intervalles de tolérances $(IT_1^k, IT_2^k)$ seront incrémentés et serviront à trier des instances de skin-model.

Tout d'abord, il s'agit de générer des instances de skin-model aléatoires et de les ranger dans des collections. Ce tri est fait en fonction de la taille de la zone de tolérance qu'elles respectent. Dans cet exemple, 2000 vecteurs aléatoires $(\delta_1, \delta_2)$ et 2000 vecteurs aléatoires $(\delta_3, \delta_4)$ ont été générés. Pour chacune des instances de skin-model qu'ils caractérisent, on calcule l'écart maximal $Ec_{1\,max}$ et $Ec_{2\,max}$ comme dans l'équation 3.5 en page 72.

Ensuite, il s'agit de créer les intervalles de tolérances $IT_1^k$ et $IT_2^k$ caractérisant les collections d'instances. On initialise d'abord $IT_1^0 = 1mm$ et $IT_2^0 = 1mm$. Puis $IT_1^k$ et $IT_2^k$ sont incrémentés de manière croissante par pas de 1mm, c'est à dire que $IT_i^{k+1} = IT_i^k + 1$.

À chacun de ces incréments, le tri est effectué en parcourant les listes des écarts maximaux $Ec_{1\,max}$ et $Ec_{2\,max}$ et en inventoriant ceux qui vérifient l'inéquation 4.11.

$$\frac{IT_i^k}{2} < Ec_{i\,max} \leq \frac{IT_i^{k+1}}{2} \tag{4.11}$$

Cette procédure est répétée jusqu'à ce que les collections obtenues contiennent moins de 100 pièces. De cette manière, on s'assure que pour chaque analyse de tolérance qui sera effectuée, on disposera d'au moins $100 \times 100 = 10000$ combinaisons d'assemblage possibles. Sachant que chaque analyse de tolérance sera effectuée avec 1000 simulations, la probabilité de de simuler deux fois le même assemblage sera strictement inférieure à $100^{-1} \times 100^{-1} \times 999 = 9,99\%$.

De cette manière, 11 collections pour la poutre de gauche $(1mm \leq IT_1^k \leq 12mm)$ et 9 collections pour celle de droite $(1mm \leq IT_2^k \leq 12mm)$ ont été obtenues. On retrouve ici la nécessité de bien choisir l'écart-type des contributeurs afin de bien couvrir le domaine d'étude des variations géométriques.

Une fois les instances de skin-model triées, la procédure qui suit est appliquée. Elle est illustrée en six étapes sur la figure 4.6 :

1. On dispose de deux collections d'instances aléatoires triées. 1000 vecteurs aléatoires $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ sont sélectionnés aléatoirement comme expliqué dans le chapitre 2.5 en page 96. On parlera de *"zone d'analyse"*, représentée en gris sur la figure 4.6.
2. L'analyse de tolérance est effectuée pour cette zone d'analyse avec la méthode de Monte-Carlo, c'est à dire que les 1000 simulations d'assemblages sont réalisées et les distributions des quantités d'intérêt $\alpha_j$ sont estimées.
3. On choisit ici d'identifier la valeur maximale $\alpha_{j\,max}$ des quantités d'intérêt obtenues et de l'associer à cette zone d'analyse. On supposera ainsi que les quantités d'intérêt issues des assemblages d'instances conformes à $(IT_1^k, IT_2^k)$ ne dépasseront pas cette valeur maximale. Il s'agit bien entendu d'une approximation dont la fiabilité dépend entre autre du nombre de simulations.
4. On incrémente un intervalle de tolérance (ici $IT_1^{k+1}$). Une nouvelle zone d'analyse est ainsi obtenue et 1000 couples d'instances sont à nouveau sélectionnées aléatoirement. Les écarts maximums $Ec_{1\,max}$ et $Ec_{2\,max}$ de chacune de ces instances sont donc compris entre le demi-intervalle de tolérance précédent et le nouveau (voir équation 4.11).
5. Les 1000 simulations d'assemblages sont réalisées et les distributions des quantités d'intérêt sont estimées derechef.
6. La valeur maximale est identifiée parmi ces nouvelles quantités d'intérêt. On compare cette valeur à celles attribuées aux trois zones d'analyses contiguës dont l'un des intervalles de tolérances est plus petit. On attribuera à cette zone d'analyse la plus grande de ces quatres valeurs. En effet, des pièces appartenant à des zones de tolérances d'intervalle $IT_i^k$ appartiennent aussi à celles d'intervalle $IT_i^{k+1}$.

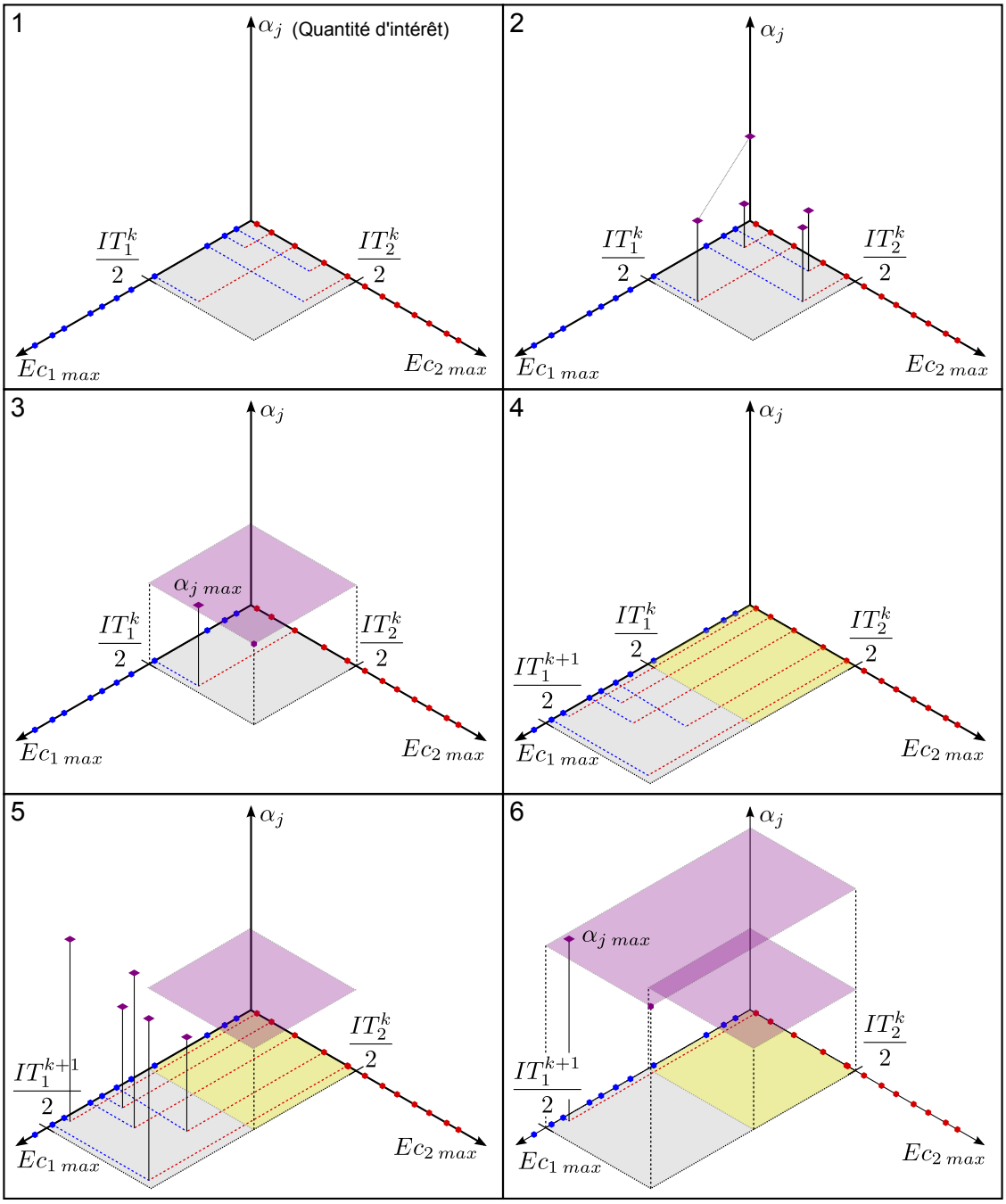



**Figure 4.6:** *Procédure pour la synthèse de tolérances.*

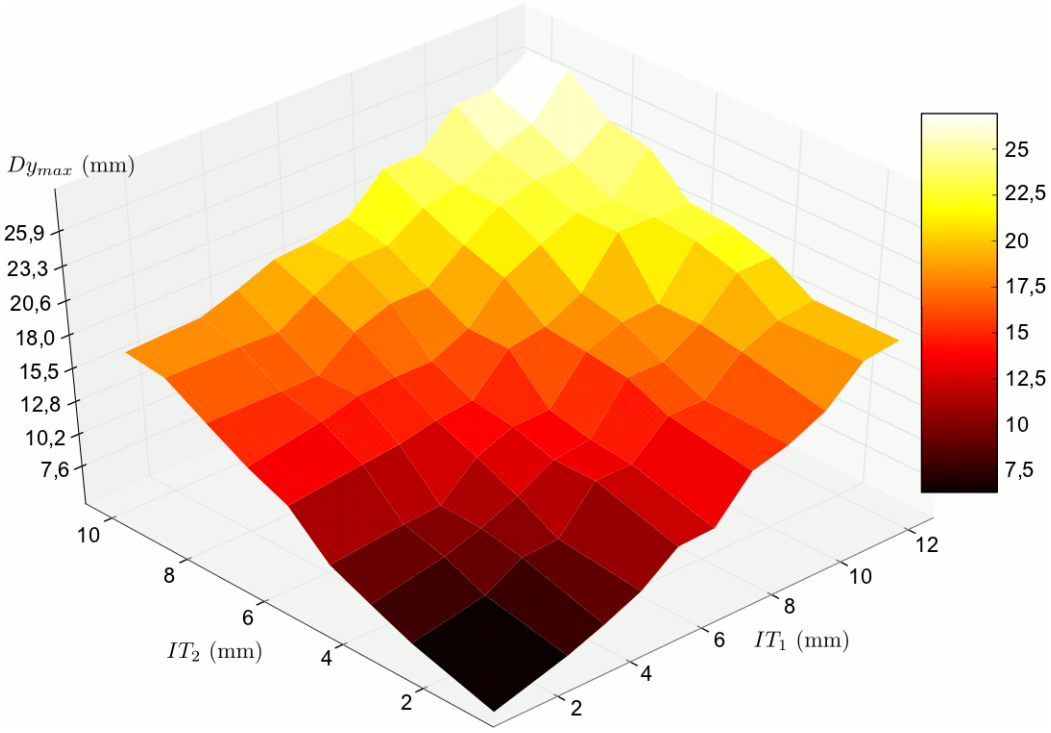



**Figure 4.7:** *Résultat de synthèse de tolérances.*

La figure 4.7 montre le résultat ainsi obtenu. Il correspond à l'approximation de la fonction $\max(Dy_{max}) = f(IT_1, IT_2)$ sous forme d'une surface 3D par interpolation linéaire. Grâce à cette approximation, on peut choisir les valeurs des intervalles de tolérances permettant la conformité de l'assemblage vis-à-vis de ce critère. En traçant une fonction de ce genre pour chaque critère, il est possible d'approximer un domaine de validité des couples $(IT_1, IT_2)$ afin d'en choisir un convenable.

On peut choisir d'attribuer aux zones d'analyse une autre valeur que le maxi obtenu par simulations. Par exemple si la quantité d'intérêt observée s'avère suivre une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart type $\sigma$, on peut approximer la fonction $\mu \pm 3\sigma = f(IT_1, IT_2)$. Cela reviendrait à supposer que pour un couple d'intervalles de tolérances donné, on estime que 99,7 % des cas assemblages ne dépasseront pas la valeur prescrite par la surface d'approximation.

Le temps CPU de calcul pour cette synthèse de tolérances est de 236839 centièmes de seconde pour des liaisons complètes avec prise en compte du contact unilatéral. Effectivement, $9 \times 11 = 99$ analyses ont été effectuées avec 1000 simulations d'assemblage et réactualisation de rigidité chacune. Sachant que le temps CPU de calcul d'une telle analyse a été chiffré à 1822 centièmes de seconde (cf. tableau 4.4), on retrouve un temps CPU de 180378 centièmes de seconde pour 99 analyses. La différence s'explique par le temps perdu pendant les opérations de gestion de la mémoire par CAST3M.

Bref, la synthèse de tolérances par analyses successives est faisable mais extrêmement coûteuse, d'autant plus que le coût de calcul augmente de manière exponentielle avec le nombre d'intervalles de tolérances à déterminer. Ici il n'y en a que deux donc le coût de calcul reste raisonnable, et les résultats peuvent encore être représentés graphiquement. Mais pour un problème plus complexe et avec plus de tolérances à chiffrer, la synthèse de tolérances par analyses successives n'est plus envisageable sans tenter de diminuer les coûts de calcul des simulations et des analyses. On se focalisera maintenant sur cet objectif.

# 3 Linéarisation de la simulation d'assemblage

L'application des méthodes d'analyse et de synthèse de tolérances ont mis en exergue la problématique des forts coûts de calculs liés à la simulation d'assemblage intensive. Ces simulations intensives sont impliqués par l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo dont les résultats convergent lentement, et chaque simulation est relativement coûteuse du fait de la prise en compte des non-linéarités géométriques et de contact unilatéral. On se penchera alors sur la diminution des coûts de calcul.

Comme évoqué précédemment, les travaux de recherche sur le tolérancement de pièces souples sont majoritairement réalisés à l'aide de la méthode des coefficients d'influence introduite par [Liu et Hu, 1997] et présentée en page 28. Comme elle consiste à linéariser le problème de manière à exprimer les quantités d'intérêt comme une combinaison linéaire des contributeurs (voir équation 1.9 page 29), une fois que la matrice de sensibilité est identifiée, le coût de calcul pour obtenir les valeurs des quantités d'intérêt en fonction de valeurs données des contributeurs est très faibles en comparaison au coût de calcul d'une simulation non-linéaire d'assemblage. On souhaite donc l'utiliser afin de comparer les résultats avec ceux obtenus précédemment. Toutefois la linéarisation implique les hypothèses suivantes :

- Les dimensions des défauts de forme sont très petites devant les dimensions des pièces donc leur influence sur la rigidité est négligeable. Dans l'équation 4.5 page 90, cela se traduit par le fait que $[K_d] = 0$.
- Les phénomènes de contact unilatéral et de frottement ne sont pas pris en compte.

Dans les travaux de recherche utilisant la méthode des coefficients pour le tolérancement de pièces souples, les variabilités considérées (ou les contributeurs), correspondent à des efforts d'assemblage et les quantités d'intérêt concernent des valeurs du champ de déplacement en certains nœuds considérés. Dans les équations traduisant un problème éléments finis (voir équation 4.1 page 88), ces variabilités interviennent dans la partie $\{F\}$ du second membre. Dans notre cas, les contributeurs sont des amplitudes $\delta_i$ des modes $\overrightarrow{\phi_i}$. Ils interviennent également dans le second membre, mais cela sous forme de jeux initiaux dans la partie $\{D\}$. Quant aux quantités d'intérêt, inventoriées dans le chapitre 2.3 à la page 94, il s'agit pour la plupart d'entre-elles de composantes d'efforts généralisés de connexion.

L'objectif consiste donc à adapter la méthode des coefficients d'influence pour l'analyse de tolérances de notre cas d'étude puis de comparer ses résultats et son coût de calcul à ceux obtenus précédemment avec la méthode de Monte-Carlo et les simulations non-linéaires (cf. tableau 4.2 en page 97). On commencera donc par formaliser le problème éléments finis de la simulation d'assemblage avec les mêmes hypothèses que la méthode des coefficients d'influence.

## 3.1 Méthode des déformations initiales

La méthode des déformations initiales est communément utilisée pour les calculs de thermomécanique sur des assemblages de pièces dont les coefficients de dilatation diffèrent. Les champs de dilatation des pièces sont appliqués sous forme d'un champ de contraintes ou d'un champ d'effort nodal aux pièces assemblées à l'état nominal.

On se propose de procéder de la même manière plutôt que de réactualiser les coordonnées initiales des nœuds des maillages. Il s'agit de construire le champ d'effort nodal $\{F_f\}$ qui contient les composantes des forces et des moments qu'il faut appliquer en chaque nœud des modèles nominaux pris indépendamment (c'est-à-dire sans les conditions de connexion ou de contact) pour que leur déformée soit identique à la géométrie avec défauts de forme. L'équation 4.12 montre comment calculer ce champ d'effort nodal $\{F_f\}$ à partir du champ d'écart initial discret $\{Ec\}$ et de la matrice de rigidité nominale $[K_n]$.

$$\{F_f\} = [K_n] \,.\, \{Ec\} \tag{4.12}$$

$\{F_f\}$ est un vecteur contenant les composantes du champ d'efforts nodal qu'il faut appliquer aux poutres nominales indépendamment pour qu'elles prennent la même forme que l'instance de skin-model. On notera que ce champ contient des composantes d'effort et de moment.

$\{K_n\}$ correspond à la matrice de rigidité nominale.

$\{Ec\}$ est un vecteur qui contient les composantes du champ d'écart initial $\overrightarrow{Ec}(x_k, y_k, z_k)$ exprimées en chaque nœud $k$, ainsi que les composantes en rotation relatives aux variations locales d'orientation.

Il faut ensuite appliquer ce champ d'effort nodal au modèle nominal à l'état assemblé. Le problème mécanique d'assemblage linéarisé se traduit alors par les équations 4.13. Les composantes du champ d'effort nodal $\{F_f\}$ s'additionnent à celles des efforts extérieurs $\{F\}$ pour former le second membre. Les conditions aux limites correspondent aux conditions de connexion et les conditions de contact unilatéral ne sont pas prises en compte.

$$\begin{cases} \big[K_n\big]\big\{u\big\} = \big\{F\big\} + \big\{F_f\big\} \\ \big[C_1\big]\big\{u\big\} = \big\{\Delta\big\} \end{cases} \tag{4.13}$$

En considérant que l'assemblage des pièces à l'état nominal se fait sans déformation (pas de jeu initial), et sachant que la géométrie n'a pas été actualisée, le terme

$\{\Delta\}$ ne contient plus que les défauts de liaisons, comme exprimé dans l'équation 4.14.

$$\left\{\Delta\right\} = \sum_{i=1}^{N_l} \delta_i^l \left\{\Psi_i\right\} \tag{4.14}$$

$N_l$ correspond au nombre de défauts de liaisons.

$\delta_i^l$ sont les contributeurs relatifs aux défauts de liaison.

$\{\Psi_i^l\}$ est la matrice qui contient les défauts de liaison unitaires sur les degrés de liberté concernés.

## 3.2 Application de la méthode des coefficients d'influence sur l'assemblage de poutres 2D

Les hypothèses faites pour la simulation d'assemblage la ramenant à un problème globalement linéaire, il est possible d'utiliser la méthode des coefficients d'influence présentée au chapitre 1.4.2 (page 28). Les quantités d'intérêt seront ainsi exprimées sous forme d'une combinaison linéaire des contributeurs qui sont les amplitudes $\delta_i$ des modes $\overrightarrow{\phi_i}$ (cf. équation 1.9 page 29).

Il s'agit donc d'effectuer autant de simulations d'assemblage que de contributeurs (ici quatre). Pour ces simulations, les valeurs des contributeurs sont données dans le tableau 4.5, c'est-à-dire que les défauts de forme en entrée correspondent à chacun des quatre modes unitaires. À l'issue de chacune de ces simulation, les quantités d'intérêt sont relevées afin d'obtenir les coefficients d'influence de la matrice de sensibilité (voir équation 1.10 en page 29).

| | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $\delta_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Simulation 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Simulation 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Simulation 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Simulation 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Table 4.5:** Table des valeurs des entrées pour chaque simulation.

L'écart maximal $Dy_{max}$ ne peut pas être exprimé directement à l'aide de coefficients d'influence étant donné qu'il s'agit d'un maximum. Néanmoins, il est possible d'approximer le champ d'écart sur lequel sera identifiée la valeur maximale suivant la normale (ici $\vec{y}$) sous forme de combinaison linéaire des contributeurs et des champs de déplacement $\{u_i\}$ obtenus à l'issue de chaque simulation $i$ (voir équation 4.15).

Cela revient finalement à calculer tous les coefficients d'influence des amplitudes de modes $\delta_i$ sur le déplacement vertical de chaque nœud de la poutre.

$$Dy_{max} = \max\left(\sum_{i=1}^{4} \delta_i \{u_i\}.\vec{y}\right) \tag{4.15}$$

Le tableau 4.6 recense les coefficients d'influence des amplitudes de modes sur les quantités d'intérêt $Fx_i$, $Fy_i$, $Mz_i$ et $Dx_i$ obtenus avec quatre simulations dans le cas de liaisons complètes, et quatre autres pour le cas des liaisons avec jeu.

| | **Liaisons complètes** | | | | **Liaisons avec jeu** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $\delta_4$ | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $\delta_4$ |
| $Fx_1(N)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fx_2(N)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fy_1(N)$ | -36.6 | 351.2 | -49.4 | -323.0 | -36.6 | 351.2 | -49.4 | -323.0 |
| $Fy_2(N)$ | 52.3 | -319.8 | 36.7 | 354.3 | 52.3 | -319.8 | 36.7 | 354.3 |
| $Mz_1(Nm)$ | 1.71 | 27.07 | 5.14 | 9.72 | 1.71 | 27.07 | 5.14 | 9.72 |
| $Mz_2(Nm)$ | 6.79 | -8.20 | 1.99 | -25.66 | 6.79 | -8.20 | 1.99 | -25.66 |
| $Dx_1(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Dx_2(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

**Table 4.6:** Table des coefficients d'influence.

On remarque tout de suite que les contributions sur les efforts tangentiels $Fx_i$ et les désaxements $Dx_i$ sont nulles dans tous les cas. Cela s'explique par le fait que les poutres ne subissent alors aucune sollicitation suivant l'axe $\vec{x}$. En effet, la géométrie nominale étant droite, la matrice de rigidité $[K_n]$ ne contient aucun terme liant les contraintes de flexion avec celles de compression. Ainsi, les composantes suivant $\vec{x}$ des champs d'efforts $\{F_f\}$ sont nulles puisque celles du champ d'écart initial $\overrightarrow{Ec}(x)$ le sont aussi. La méthode des coefficients d'influence ne permet donc ni d'estimer les composantes tangentielles des efforts tangentiels transitant dans les connexions, ni le désaxements des points d'assemblage.

On remarque également que les coefficients d'influence sont identiques pour les deux types de liaisons. En effet, comme il n'y a ni effort tangentiel ni déplacement au niveau des connexions, qu'il y ait ou non une relation cinématique liant les déplacements horizontaux des points d'assemblage ne change rien aux résultats des simulations d'assemblage.

## 3.3 Analyse de tolérances MIC

La matrice de sensibilité $S$ étant maintenant calculée, on peut obtenir les quantités d'intérêt à moindre coût (cf. équation 1.9). Afin de comparer les résultats avec ceux des analyses DMC sans contact unilatéral, on calculera les quantités d'intérêt pour les mêmes valeurs aléatoires de $\delta_i$. Les caractéristiques de leurs distributions sont recencées et comparées dans le tableau 4.7.

Remarque : Bien que l'on utilise aussi une méthode de Monte-Carlo avec un modèle linéarisé, on emploiera l'acronyme *"MIC"* pour *Method of Influence Coefficients*, à nouveau emprunté à [Dahlström et Lindkvist, 2007].

| | **Liaisons complètes** | | | | **Liaisons avec jeu** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **DMC** | | **MIC** | | **DMC** | | **MIC** | |
| | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ |
| $Fx_1(N)$ | 1223.7 | 3698.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fx_2(N)$ | -1666.9 | 3562.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fy_1(N)$ | -35.6 | 507.1 | -34.7 | 493.6 | -34.7 | 493.6 | -34.7 | 493.6 |
| $Fy_2(N)$ | 33.9 | 505.8 | 33.0 | 491.3 | 33.0 | 491.3 | 33.0 | 491.3 |
| $Mz_1(Nm)$ | -1.43 | 31.10 | -1.39 | 30.78 | -1.39 | 30.77 | -1.39 | 30.78 |
| $Mz_2(Nm)$ | -0.19 | 27.79 | -0.20 | 27.88 | -0.20 | 27.88 | -0.20 | 27.88 |
| $Dx_1(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.2 | 8.5 | 0.0 | 0.0 |
| $Dx_2(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.9 | 8.2 | 0.0 | 0.0 |
| $Ec_{max}(mm)$ | 4.19 | 2.69 | 4.18 | 2.68 | 4.18 | 2.68 | 4.18 | 2.68 |

**Table 4.7:** Comparaison des résultats d'analyse de tolérances entre la méthode de Monte-Carlo et celle des coefficients d'influence.

Outre les effets des observations précédemment faites vis-à-vis des contributions sur les efforts tangentiels et les désaxements, on constate que les distributions des efforts normaux $Fx_i$ et des moments $Mz_i$ sont identiques pour les deux méthodes dans le cas des liaisons avec jeu. Cela s'explique par le fait qu'avec ou sans la réactualisation de rigidité, le phénomène de couplage flexion-compression n'est pas suscité. La translation étant autorisée dans les connexions, on a, à la place, un couplage flexion-déplacement lorsque la matrice de rigidité est actualisée (DMC). D'un point de vue statique, les résultats sont donc similaires. Pour le cas des liaisons complètes, on retrouve à peu près les mêmes valeurs caractéristiques de ces distributions. Quant aux écarts maxis $Ec_{max}$, les résultats coïncident.

Observons maintenant ce que nous donnent ces résultats vis-à-vis des critères de conformité définis précédemment. Le tableau 4.8 rappelle ces critères, et recense les estimations des probabilités de leur respect indépendamment, ainsi que le taux de conformité. La comparaison est faites entre ces résultats obtenus précédemment avec la méthode DMC et ceux obtenus avec la méthode des coefficients d'influence.

| | **Liaisons complètes** | | **Liaisons avec jeu** | |
|---|---|---|---|---|
| **Critère** | **DMC** | **MIC** | **DMC** | **MIC** |
| $Fx_1 \leq 12kN$ | 97.6 % | 100 % | 100 % | 100 % |
| $Fx_2 \leq 12kN$ | 97.7 % | 100 % | 100 % | 100 % |
| $Fy_1 \leq 5,4kN$ | 100 % | 100 % | 100 % | 100 % |
| $Fy_2 \leq 5,4kN$ | 100 % | 100 % | 100 % | 100 % |
| $Mz_1 \leq 60Nm$ | 94.4 % | 94.7 % | 94.7 % | 94.7 % |
| $Mz_2 \leq 60Nm$ | 95.9 % | 95.9 % | 95.9 % | 95.9 % |
| $Dx_1 \leq 30\mu m$ | 100 % | 100 % | 97.7 % | 100 % |
| $Dx_2 \leq 30\mu m$ | 100 % | 100 % | 97.7 % | 100 % |
| $Ec_{max} \leq 10mm$ | 96.8 % | 96.9 % | 96.9 % | 96.9 % |
| Conformite | 88.0 % | 89.5 % | 88.1 % | 89.5 % |

**Table 4.8:** Comparaison des estimations des probabilités de respect des critères.

On remarque que le taux de conformité est légèrement surestimé avec la méthode des coefficients d'influence, ce qui est cohérent étant donné qu'elle ne permet pas de détecter les assemblages qui ne respectent pas les critères sur les efforts tangentiels et les désaxements. Pour les autres critères, les résultats sont sensiblement identiques. Ici aussi on remarque que le critère le plus restrictif concerne les moments $Mz_i$.

Afin d'identifier les contributeurs les plus influents sur les moments transitant dans les connexions, on peut se référer à la table des contributions (cf. tableau 4.6). Pour faciliter son exploitation, il est d'usage d'exprimer les coefficients d'influence sous forme de pourcentage de leur somme pour une quantité d'intérêt, comme le décrit l'équation 4.16.

$$c_{ij}^{(\%)} = 100 \times \frac{|c_{ij}|}{\sum_i |c_{ij}|} \tag{4.16}$$

Le tableau 4.9 est la variante épurée de la table des contributeurs exprimés en pourcentage. On a conservé uniquement les contributions sur $Fy_i$ et $Mz_i$ étant donné

que les amplitudes de modes $\delta_i^f$ sont censés n'avoir aucune influence sur $Fx_i$ et $Dx_i$ et on ne fait plus le distingo sur le type de liaisons étant donné que les coefficients d'influence calculés sont identiques. Cette table met en évidence la forte influence qu'ont les deuxièmes modes sur les quantités d'intérêt de manière générale, et en particulier sur les moments qui sont sujets aux critères les plus restrictifs.

| | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $\delta_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $Fy_1$ | 4.8 % | 46.2 % | 6.5 % | 42.5 % |
| $Fy_2$ | 6.9 % | 41.9 % | 4.8 % | 46.4 % |
| $Mz_1$ | 3.9 % | 62.0 % | 11.8 % | 22.3 % |
| $Mz_2$ | 15.9 % | 19.2 % | 4.7 % | 60.2 % |

**Table 4.9:** Table des contributions en pourcentage.

Comme la linéarisation et la méthode des coefficients d'influence avaient pour objectif de diminuer le coût de calcul, les temps CPU des différentes analyses sont comparés sur le tableau 4.10. Celui de l'analyse de tolérances avec la méthode des coefficients d'influence comprend le temps des quatres simulations d'assemblage et le temps de calcul des quantités d'intérêt des 1000 tirages aléatoires. On constate que l'analyse est environ deux fois plus rapide avec la méthode des coefficients d'influence. Mais ce gain promet d'être bien plus important pour des problèmes plus complexes.

| | **Liaisons complètes** | **Liaisons avec jeu** |
|---|---|---|
| **DMC contact** | 1822 | 1787 |
| **DMC** | 549 | 546 |
| **MIC** | 235 | 235 |

**Table 4.10:** Comparaison des temps CPU de calcul pour les analyses de tolérances (en centièmes de seconde).

En fin de compte, la méthode des coefficients d'influence offre des résultats fiables pour un faible coût de calcul, sauf pour les quantités d'intérêt tributaires de la non-linéarité géométrique. C'est le cas ici des efforts et déplacements horizontaux car les géométries nominales sont droites et qu'un défaut de courbure, même très faible, ajoute des termes de couplage de flexion-compression à la matrice de rigidité, or ces termes étaient nuls dans la matrice de rigidité nominale. On se propose donc de pallier ce problème en essayant de conserver l'avantage du faible coût de calcul offert par la méthode des coefficients d'influence.

## 3.4 Méthode des coefficients d'influence avec actualisation de rigidité

Afin de ne pas négliger les effets de couplage de flexion-compression, l'idée est d'effectuer les simulations nécessaires au calcul des coefficients d'influence en réactualisant la géométrie puis la rigidité. Comme chacune de ces simulations sont effectuées avec un seul mode unitaire en guise de défaut de forme, la matrice de rigidité dépendra successivement du mode $\overrightarrow{\phi_i}$ considéré. Afin de réactualiser la rigidité, on réactualise la géométrie et on peut reprendre la formulation du problème éléments finis présentée au chapitre 1.3 en page 90 à la différence près qu'on ne tient pas compte du contact unilatéral (voir équation 4.17). Les coefficients d'influence ainsi calculés sont recensés dans le tableau 4.11.

$$\begin{cases} \left[K_n + K_d\right]\left\{u\right\} = \left\{F\right\} \\ \left[C_1\right]\left\{u\right\} = \left\{\Delta\right\} = -\sum_{i=1}^{N_f} \delta_i^f \left[C_1\right]\left\{\Phi_i\right\} + \sum_{i=1}^{N_l} \delta_i^l \left\{\Psi_i\right\} \end{cases} \tag{4.17}$$

| | **Liaisons complètes** | | | | **Liaisons avec jeu** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $\delta_4$ | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $\delta_4$ |
| $Fx_1(N)$ | 463.5 | 659.8 | -775.9 | -777.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fx_2(N)$ | -764.0 | -778.8 | 471.3 | 629.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fy_1(N)$ | -37.5 | 353.0 | -50.6 | -325.3 | -36.6 | 351.2 | -49.4 | -323.0 |
| $Fy_2(N)$ | 53.3 | -321.7 | 37.8 | 356.5 | 52.3 | -319.8 | 36.7 | 354.3 |
| $Mz_1(Nm)$ | 1.72 | 27.13 | 5.20 | 9.76 | 1.71 | 27.07 | 5.14 | 9.72 |
| $Mz_2(Nm)$ | 6.86 | -8.25 | 2.00 | -25.74 | 6.79 | -8.20 | 1.99 | -25.66 |
| $Dx_1(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Dx_2(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

**Table 4.11:** Table des coefficients d'influence calculés avec actualisation de la matrice de rigidité

On constate bien que cette fois-ci, les coefficients d'influence des amplitudes de mode sur les efforts tangentiels $Fx_i$ ne sont pas nuls pour des liaisons complètes, et ceux sur les désaxements $Dx_i$ non plus pour des liaisons avec jeu. Comme précédemment, on va donc comparer, dans le tableau 4.12, les résultats d'analyse avec stratégie de Monte-Carlo et simulations non-linéaires avec ceux obtenus à l'aide de cette nouvelle méthode qu'on désignera tout simplement *MIC2*.

| | Liaisons complètes | | | | Liaisons avec jeu | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | DMC | | MIC2 | | DMC | | MIC2 | |
| | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ |
| $Fx_1(N)$ | 1223.7 | 3698.2 | -94.3 | 1368.5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fx_2(N)$ | -1666.9 | 3562.2 | 90.4 | 1368.4 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fy_1(N)$ | -35.6 | 507.1 | -34.9 | 496.7 | -34.7 | 493.6 | -34.7 | 493.6 |
| $Fy_2(N)$ | 33.9 | 505.8 | 33.2 | 494.4 | 33.0 | 491.3 | 33.0 | 491.3 |
| $Mz_1(Nm)$ | -1.43 | 31.10 | -1.39 | 30.86 | -1.39 | 30.77 | -1.39 | 30.77 |
| $Mz_2(Nm)$ | -0.19 | 27.79 | -0.20 | 27.98 | -0.20 | 27.88 | -0.20 | 27.88 |
| $Dx_1(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.2 | 8.5 | 0.1 | 5.0 |
| $Dx_2(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.9 | 8.2 | 0.0 | 5.0 |
| $Ec_{max}(mm)$ | 4.19 | 2.69 | 4.19 | 2.68 | 4.18 | 2.68 | 4.18 | 2.68 |

**Table 4.12:** Comparaison des résultats d'analyse de tolérances entre la méthode de Monte-Carlo et celle des coefficients d'influence avec rigidité actualisée.

Comme précédemment, les résultats relatifs à $Fy_i$, $Mz_i$ et $Ec_{max}$ sont assez similaires. En revanche, ceux obtenus pour les efforts tangentiels $Fx_i$ et les désaxements $Dx_i$ ne sont pas convainquants quant à la fiabilité de la méthode. On se penchera donc sur la justesse de l'approximation linéaire pour ces deux quantités d'intérêt.

Concernant le coût de calcul, l'objectif qui était de le garder aussi faible qu'avec la méthode des coefficients d'influence est plutôt atteint. En effet, on peut voir sur le tableau 4.13 qu'il n'a que très faiblement augmenté du fait de l'actualisation des géométries et des rigidités pour les quatre simulations initiales.

| | Liaisons complètes | Liaisons avec jeu |
|---|---|---|
| **DMC contact** | 1822 | 1787 |
| **DMC** | 549 | 546 |
| **MIC** | 235 | 235 |
| **MIC2** | 264 | 262 |

**Table 4.13:** Comparaison des temps CPU de calcul pour les analyses de tolérances (en centièmes de seconde).

## 3.5 Méthode des coefficients d'influence avec approximation quadratique

Afin de mieux observer l'effet du couplage flexion-compression sur les efforts tangentiels et les désaxements dans les connexions, des nouvelles simulations d'assemblage avec hypothèse de non-linéarité géométrique et sans contact unilatéral ont été effectuées en faisant varier chaque amplitude de mode $\delta_i$ indépendamment. Les évolutions des efforts tangentiels $Fx_1$ et $Fx_2$ et des désaxements $Dx_1$ et $Dx_2$ ont ainsi été observées et tracées sur les figures 4.8 et 4.9.

Ces résultats mettent en exergue le comportement quadratique des efforts tangentiels $Fx_i$ et désaxements $Dx_i$ en fonction des amplitudes de modes $\delta_i$ pris indépendamment. On a donc remplacé les approximations linéaires par des approximations quadratiques données par l'équation 4.18, mais uniquement pour ces quantités d'intérêt. Les résultats de ces approximations ont été superposés aux résultats des simulations d'assemblage successives avec hypothèse de non-linéarité géométrique sur les courbes des figures 4.8 et 4.9.

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{4} (\delta_i)^2 \, c_{ij} \qquad \alpha_j \in \{Fx_1 \; Fx_2 \; Dx_1 \; Dx_2\} \tag{4.18}$$

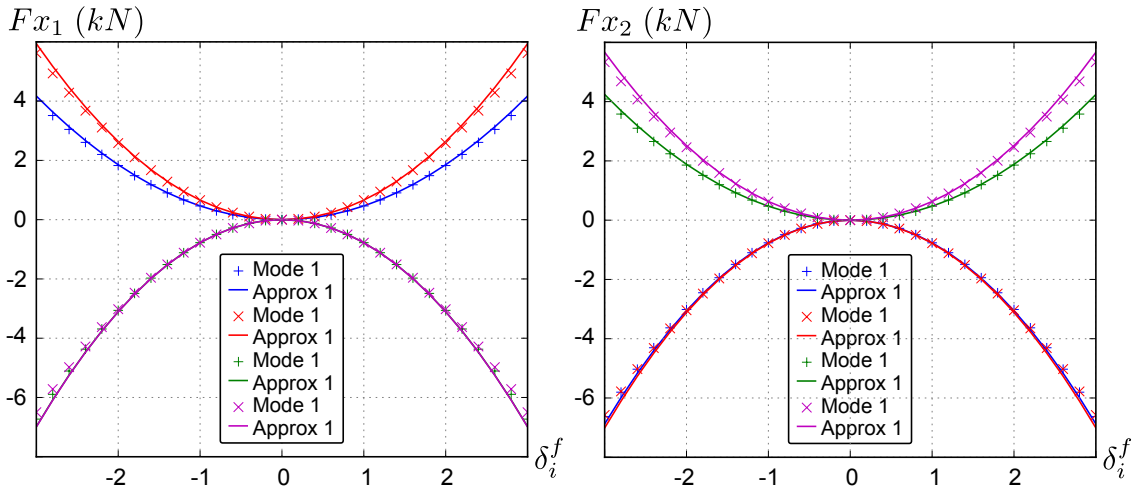



**Figure 4.8:** *Évolution des efforts tangentiels dans les connexions en fonction de chaque amplitudes de modes.*

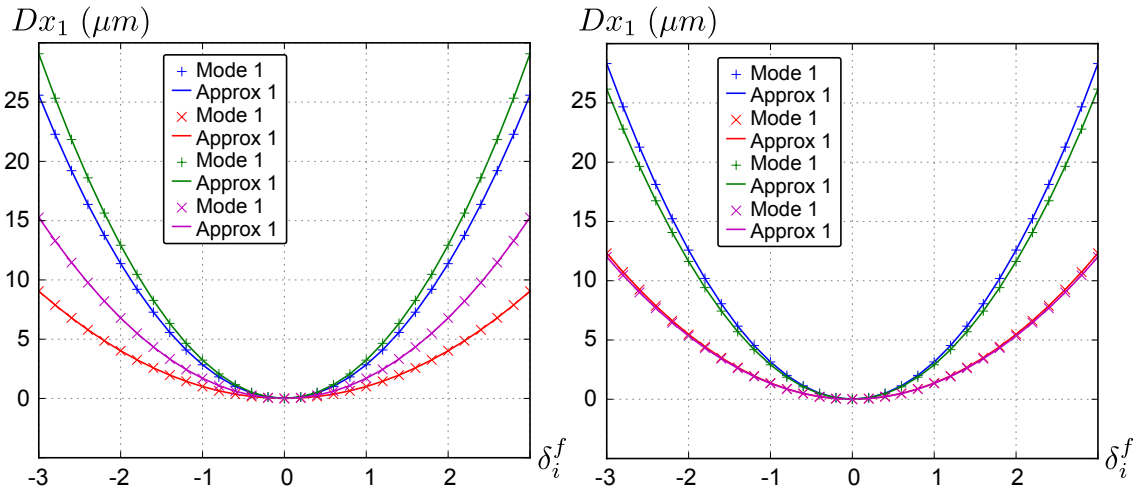



**Figure 4.9:** *Évolution du désaxement dans les connexions en fonction de chaque amplitudes de modes.*

On constate que cette approximation est très fiable lorsque les modes sont pris indépendamment. C'est pourquoi on la teste pour l'analyse de tolérances et, comme précédemment, on compare les résultats avec ceux de la stratégie de Monte-Carlo (DMC) dans le tableau 4.14. On ne présentera que les caractéristiques des distributions des quantités d'intérêt $Fx_1$, $Fx_2$, $Dx_1$ et $Dx_2$ étant donné que ce sont les seules pour lesquelles on a modifié l'approximation. On comparera également les temps CPU de calcul dans le tableau 4.15.

| | **Liaisons complètes** | | | | **Liaisons avec jeu** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **DMC** | | **MIC3** | | **DMC** | | **MIC3** | |
| | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ | $\mu$ | $\sigma$ |
| $Fx_1(N)$ | 1223.7 | 3698.2 | -317.9 | 2075.7 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Fx_2(N)$ | -1666.9 | 3562.2 | -599.6 | 2081.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $Dx_1(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.2 | 8.5 | 9.2 | 7.3 |
| $Dx_2(\mu m)$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 4.9 | 8.2 | 9.2 | 7.3 |
| $Ec_{max}(mm)$ | 4.19 | 2.69 | 4.19 | 2.68 | 4.18 | 2.68 | 4.18 | 2.68 |

**Table 4.14:** Comparaison des résultats d'analyse de tolérances entre la méthode de Monte-Carlo et celle des coefficients d'influence avec rigidité actualisée et approximation quadratique.

| | **Liaisons complètes** | **Liaisons avec jeu** |
|---|---|---|
| **DMC contact** | 1822 | 1787 |
| **DMC** | 549 | 546 |
| **MIC** | 235 | 235 |
| **MIC2** | 264 | 262 |
| **MIC3** | 269 | 270 |

**Table 4.15:** Comparaison des temps CPU de calcul pour les analyses de tolérances (en centièmes de seconde).

Malgré le fait que l'approximation soit fiable pour les modes pris indépendamment, les résultats obtenus quand on les superpose ne sont pas satisfaisants. Le temps de calcul reste certes faible, comme le montre le tableau 4.13, mais réussir à traduire les non-linéarités géométriques de ce problème dans une approximation avec aussi peu de simulations n'est pas réaliste.

Une solution intermédiaire consiste à créer une surface de réponse et s'en servir ensuite pour l'analyse statistique. Une surface de réponse est généralement créée avec un plan d'expérience, le plus classique étant le plan factoriel. Dans notre cas, avec les quatre paramètres $\delta_i$, il faudrait réaliser $2^4$, soit 16 simulations. Cette solution serait certes plus coûteuse en termes de calculs que la méthode des coefficients d'influence, mais elle serait plus fiable en termes de résultats. Cependant, le nombre d'expériences à réaliser dans un plan factoriel augmente de manière exponentielle avec le nombre de contributeurs. Une solution moins coûteuse a été utilisée dans [Areny, 2012] pour un problème de mécanique avec un nombre d'incertitudes assez élévé. Il s'agit du plan latin hypercube [Olsson *et al.*, 2002] qui permet de choisir un nombre limité de simulations à réaliser, soit pour construire la surface de réponse, soit pour approximer directement les valeurs caractéristiques des distributions.

# 4 Cas d'étude 3D : Assemblage de deux plaques nominalement planes

On se propose maintenant d'effectuer une nouvelle comparaison de résultats obtenus avec ou sans les hypothèses relatives au contact unilatéral et à la non-linéarité géométrique, mais cette fois-ci, le cas d'étude est en trois dimensions.

## 4.1 Présentation du cas d'étude

Il s'agit d'un assemblage de deux plaques planes identiques, de dimension $1000mm \times 1000mm$ illustrées sur la figure 4.10. Elles sont liées à l'aide de cinq connexions situées sur une zone de recouvrement, et l'ensemble est maintenu de manière isostatique par rapport à un bâti rigide. Ces connexions modélisent des liaisons pivots rigides, sans jeux, et d'axe normal aux plaques. Elles sont ainsi représentatives de rivets ou de boulons sans serrage.

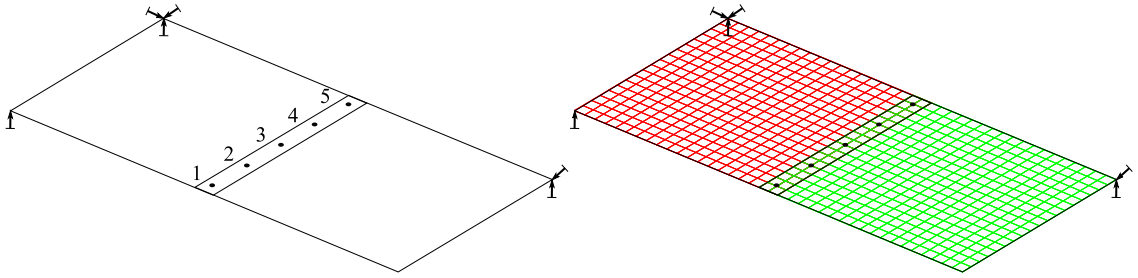



**Figure 4.10:** *Modèle géométrique et modèle éléments finis de l'assemblage de plaques.*

De même que pour le cas d'étude d'assemblage des poutres, on considère ici que les plaques ne sont sujettes qu'à des défauts de forme (aucun défaut de liaison). Ces défauts de forme sont générés pour chaque plaque par superposition de huit modes d'amplitude aléatoire. Ces modes sont représentés sur la figure 4.11.

Les simulations ont été faites avec quatre types d'hypothèses :

1. **Géométrie nominale sans contact :** Les maillages et les rigidités respectent la géométrie nominale et les défauts de forme sont appliqués via la méthode des déformations initiales. Il n'y a pas de condition de contact unilatéral sur la zone de recouvrement, donc l'interpénétration des plaques y est possible.
2. **Géométrie nominale avec contact :** Les maillages et les rigidités respectent la géométrie nominale et les défauts de forme sont appliqués via la méthode des déformations initiales. Des conditions de contact unilatéral sans frottements sont imposées sur la zone de recouvrement.

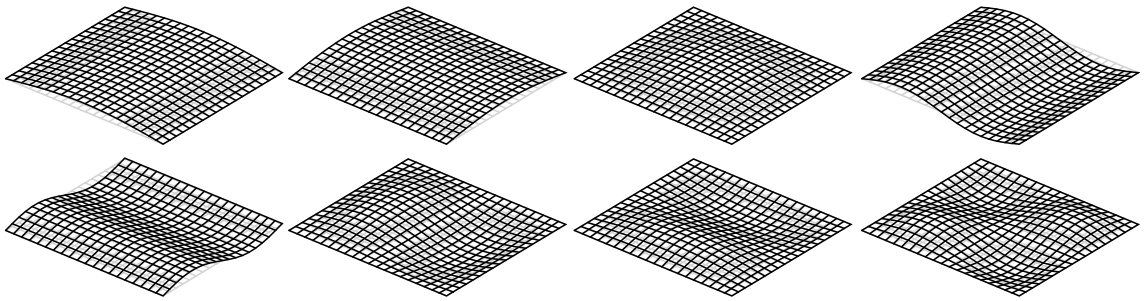


**Figure 4.11:** *Modes unitaires de défaut de forme des plaques planes.*

3. **Géométrie actualisée sans contact :** Les maillages et les rigidités sont actualisées afin de respecter la géométrie avec défauts de forme. Il n'y a pas de condition de contact unilatéral sur la zone de recouvrement.
4. **Géométrie actualisée avec contact (référence) :** Les maillages et les rigidités sont actualisées afin de respecter la géométrie avec défauts de forme. Des conditions de contact unilatéral sans frottements sont imposées sur la zone de recouvrement. Les résultats issus de ces hypothèses seront considérés comme résultats de référence pour la comparaison ultérieure.

## 4.2 Synthèse de tolérances

On se propose d'étudier d'une part l'évolution de l'écart maximal $Dz_{max}$ entre les plaques non-nominales assemblées et leur position nominale, et d'autre part l'évolution des composantes normales $Fn_1$ et $Fn_3$ des efforts transitant dans les connexions 1 et 3, et ce en fonction de l'intervalle de tolérance $IT$ qui limite le défaut de forme de chaque plaque prise indépendamment. Les deux plaques étant identiques, on leur attribuera le même intervalle de tolérance $IT$. La figure 4.12 représente deux instances de skin-model dont le défaut de forme est borné par le même $IT$ avant assemblage puis après assemblage.

Pour ce faire, des collections de défauts de forme sont générées par superposition des huit modes dont les amplitudes aléatoires respectent des lois de distributions normales de moyenne nulle. Après superposition, les instances de skin-model sont triées en fonction de l'intervalle de tolérance $IT$ qu'elles respectent. Pour chaque valeur d'$IT$ retenue, 1700 simulations d'assemblage sont effectuées et les valeurs maximales des quantités d'intérêt sont retenues.

La courbe de la figure 4.13 montre l'évolution de $Dz_{max}$ en fonction de $IT$ avec les quatres hypothèses différentes. Comme dans le cas des poutres, on remarque que les résultats d'ordre géométriques sont relativement similaires quelles que soient les hypothèses de calcul, surtout lorsque les défauts de forme sont petits.

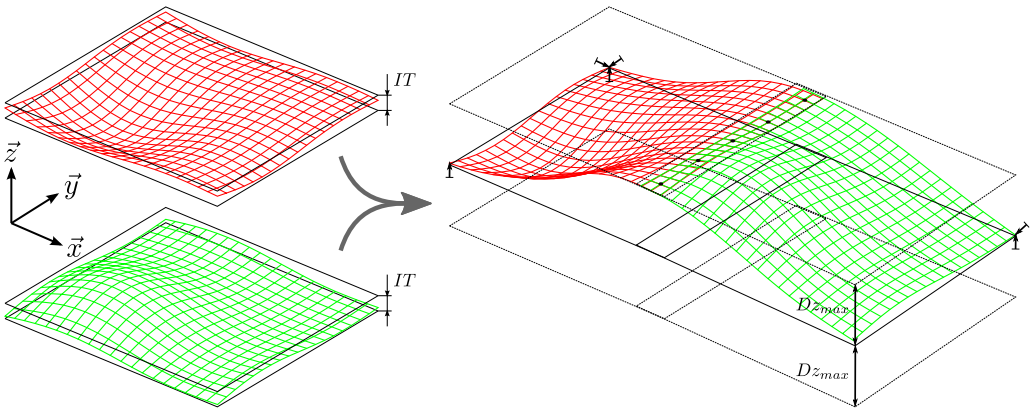



**Figure 4.12:** *Plaques avec défauts de forme avant et après assemblage.*

Les courbes de la figure 4.14 représentent l'évolution des valeurs maximales de la composante normale aux plaques de l'effort de liaison dans les connexions numérotées 1 et 3 enregistrées pour chaque série de simulations. Les phénomènes non-linéaires apparaissent clairement sur ces graphes. On observe une meilleure correspondance des résultats pour la connexion numéro 3 qui est située au milieu de la ligne de connexion que pour la connexion numéro 1 qui est à l'extrémité. Lorsque les défauts de forme sont petits, les hypothèses les plus simples (ni contact unilatéral, ni réactualisation de géométrie et de rigidité) permettent d'obtenir une estimation correcte de cette composante de l'effort de liaison.

## 4.3 Analyse de tolérances

L'objectif ici est de comparer les fonctions de densité de probabilité des quantités d'intérêt construites pour 1700 situations d'assemblage de plaques avec défauts aléatoires. L'intervalle de tolérance $IT$ que respecte chaque plaque indépendamment est de 5mm, soit $0,5\%$ de leur longueur. Les courbes de la figure 4.15 correspondent aux densités de probabilité de $Dz_{max}$ et le tableau 4.16 recense les moyennes $\mu$ et écarts-types $\sigma$ des distributions ainsi obtenues.

On remarque que le type de simulation a très peu d'influence sur le résultat global. Des informations statistiques convenables relatives à ce critère géométrique peuvent donc être obtenues en utilisant les hypothèses les moins coûteuses (ni contact unilatéral, ni réactualisation de géométrie et de rigidité). Si on choisit comme référence les résultats de la simulation avec contact unilatéral et réactualisation des géométries et des rigidités, l'erreur relative maximale est inférieure à 3% sur la moyenne, et inférieure à 5% avec ces hypothèses.

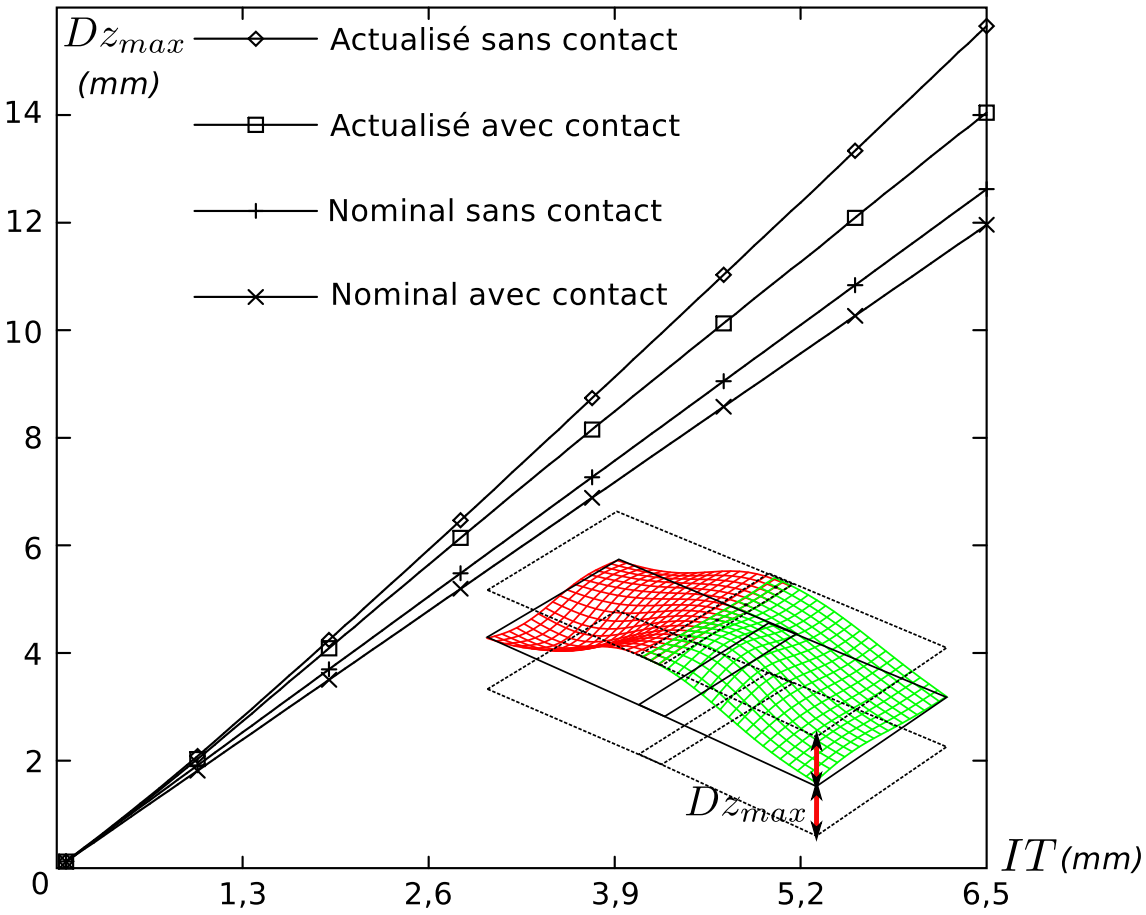



**Figure 4.13:** *Évolution de l'écart maximal de l'assemblage en fonction de l'IT bornant le défaut de forme initial des plaques.*

Les courbes de la figure 4.16 représentent les densités de probabilité de la composante normale des efforts transitant dans les connexions numérotées 1 et 3 pour les quatre types de simulation. Le tableau 4.17 compare les moyennes et écart-types de ces distributions.

Ces résultats concernant les efforts de liaison sont moins satisfaisants que ceux concernant la géométrie pour deux raisons :

- Comme dans l'exemple d'assemblage des poutres, lorsque les conditions de contact unilatéral ne sont pas prises en compte, des phénomènes d'interpénétration peuvent survenir, et la composante normale des efforts de liaison peut être calculée négative alors qu'elle devrait être positive à cause du contact. Ainsi, sa distribution est centrée sur zéro lorsque les conditions de contact ne sont pas prises en compte.
- Sur une ligne de connexions, il y a une grande différence de comportement entre les connexions au milieu de la ligne et celles aux bords. Les distributions

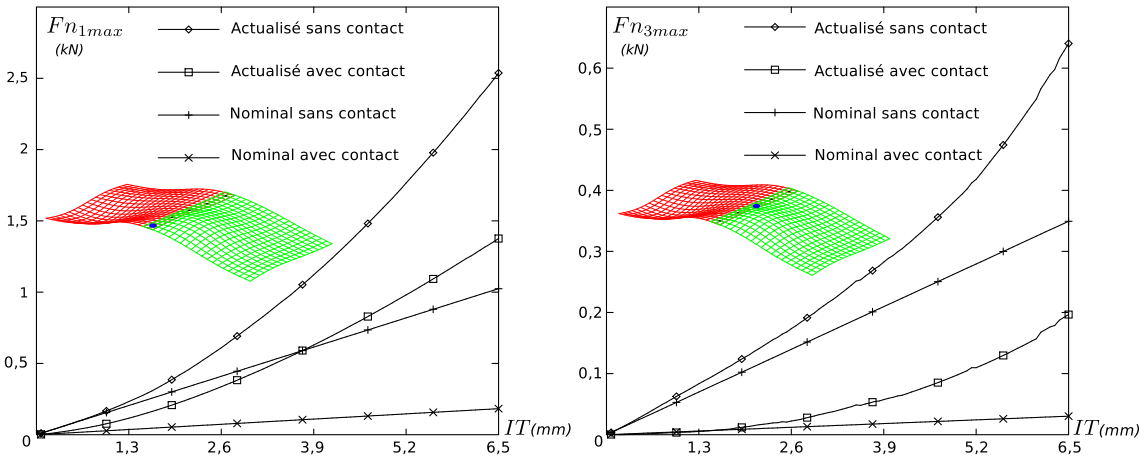



**Figure 4.14:** *Évolution des valeurs maximales des composantes normales des efforts de liaison des connexions 1 et 3 en fonction de l'IT des plaques.*

avec et sans réactualisation de géométrie et rigidité sont plus comparables pour la connexion numéro 3 (au milieu) que pour la connexion numéro 1 (au bord) car les connexions voisines (numérotées 2 et 4) limitent l'interpénétration (voir figure 3.18 en page 80). L'erreur relative maximale sur la moyenne est inférieure à 8% pour la connexion numéro 3, contre 18% pour la connexion numéro 1.

Le tableau 4.18 compare les temps de calcul normalisés des différents types de simulation. Les temps de référence sont ceux du calcul sans réactualisation de géométrie et rigidité. On constate alors les surcoûts qu'impliquent la prise en compte du contact unilatéral et la réactualisation de la géométrie et de la rigidité. Par ailleurs, ce surcoût est bien plus important pour cet exemple en 3D que pour l'exemple 2D d'assemblage des poutres. Si toutefois on ne s'intéresse qu'à un critère géométrique du même type que $Dz_{max}$, on peut commodément se passer de cette hypothèse dont le calcul est beaucoup plus coûteux pour faible erreur relative sur la moyenne.

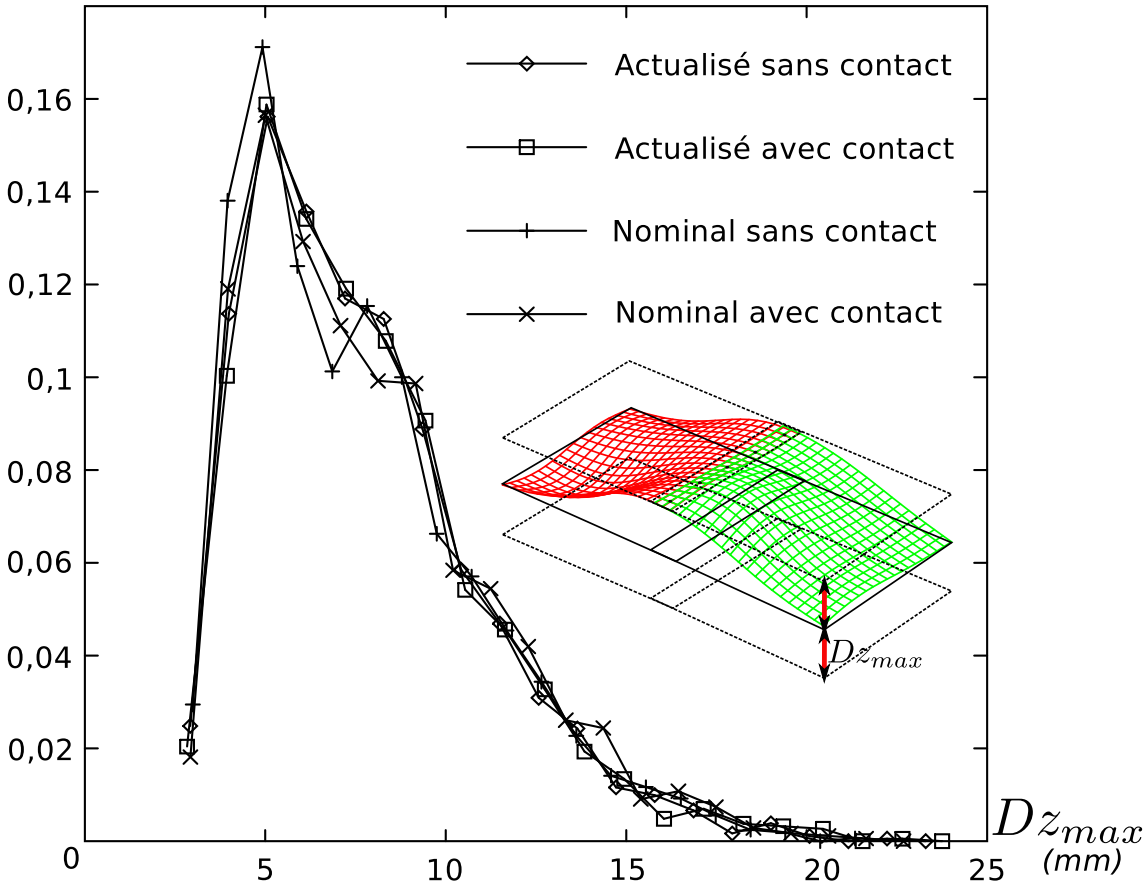



**Figure 4.15:** *Densité de probabilité de l'écart maximal.*

| Géométries et rigidités | Contact | Moyenne | | Écart-type | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nominales | Sans | 7,83 mm | + 2,7 % | 3,31 mm | + 5,0 % |
| Nominales | Avec | 7,56 mm | - 0,8 % | 3,23 mm | + 2,8 % |
| Actualisées | Sans | 7,72 mm | + 1,2 % | 3,22 mm | + 2,1 % |
| Actualisées | Avec | 7,62 mm | **0 %** | 3,15 mm | **0 %** |

**Table 4.16:** Caractéristiques statistiques des densités de probabilité de $Dz_{max}$.

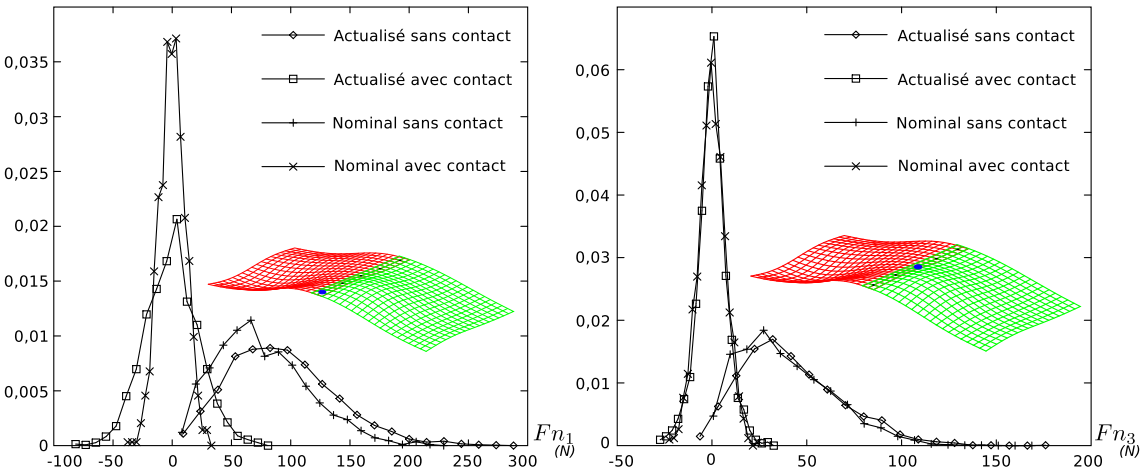



**Figure 4.16:** *Densités de probabilité des composantes normales des efforts transitant dans les connexions numérotées* 1 *et* 3.

| Connexion | Géom. et rigi. | Contact | Moyenne | | Écart-type | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Nominales | Sans | 76,1 N | -18,2 % | 38,6 N | -13,3 % |
| | Actualisées | Avec | 93,0 N | **0 %** | 44,5 N | **0 %** |
| 3 | Nominales | Sans | 38,6 N | -7,5 % | 24,6 N | 6,7 % |
| | Actualisées | Avec | 41,7 N | **0 %** | 26,4 N | **0 %** |

**Table 4.17:** Caractéristiques statistiques des densités de probabilité des composantes normales des efforts transitant dans les connexions numérotées 1 et 3.

# 5 Conclusions

Des stratégies de calcul ont été proposées dans ce chapitre pour effectuer des analyses et synthèses de tolérances d'assemblages de pièces souples. La méthode employée pour la synthèse de tolérance consiste à effectuer des analyses de tolérances successives avec des instances de skin-model triés. Cette stratégie, bien que très pragmatique et relativement facile à mettre en oeuvre, implique un nombre de simulations et un coût de calcul excessifs. Elle n'a malheureusement été appliquée que sur un cas d'étude très simple ne comportant que deux tolérances à quantifier. Cela a permis de construire des approximations des valeurs maximales des quantités d'intérêt en fonction des intervalles de tolérances, puis de les afficher sur des graphiques en 3D facilement interprétables. Il serait toutefois intéressant de se pencher sur des problèmes avec plus d'intervalles de tolérances et sur la manière d'exploiter les résultats.

Lorque les critères limitants pour l'analyse de tolérances concernent des quantités d'intérêt peu tributaires des phénomènes non-linéaires, la méthode des coefficients d'influence est très pertinente étant donné que la linéarisation mène à des résultats

| **Géométries et rigidités** | **Contact** | **Temps normalisés** | |
|---|---|---|---|
| Nominales | Sans | **1** | 0,3 |
| Nominales | Avec | 3,3 | **1** |
| Actualisées | Sans | 7,9 | 2,4 |
| Actualisées | Avec | 14,8 | 4,5 |

**Table 4.18:** Comparaison des coûts de calcul pour 1700 tirages.

fiables et que le coût de calcul est très faible. Mais lorsque les quantités d'intérêt sont très affectées par les phénomènes de contact unilatéral, par exemple les composantes normales des efforts de connexion vus dans les cas d'études, ou par des non-linéarités géométriques, par exemple les composantes tangentielles des efforts de connexion ou les désaxements vus dans le cas d'études d'assemblage de poutres, il faut opter pour une autre méthode car la linéarisation ne permet pas une approximation fiable.

Par ailleurs, on a pu constater avec l'exemple des plaques 3D que cette fiabilité d'approximation est elle même tributaire des effets de bord. Autrement dit, lorsqu'on étudie un ensemble assez dense de fixations, ce qui est souvent le cas pour les coutures de fuselage réalisées par plusieurs rangées de rivets, le comportement des connexions qui ne sont pas au bord pourra certainement être approximé avec justesse par une relation linéaire.

Le choix d'une stratégie et des hypothèses de calcul adéquates pour mener à bien une analyse ou une synthèse de tolérances de pièces souples nécessite l'identification des quantités d'intérêt dépendant fortement du contact unilatéral, des variabilités de rigidité, voir même des phénomènes de frottement qui font partie des perspectives pour la poursuite de ces travaux. Le tableau 4.19 a pour objectif d'aider au choix des hypothèses et des stratégies de calcul en fonction du ou des critères de conformité qu'on cherche à vérifier. Naturellement, il ne s'agit que d'une ébauche établie à partir des résultats obtenus pour les deux cas d'étude traités ici et de l'expérience accumulée au cours de ces travaux, mais cela pourra servir de base à compléter par la suite.

Pour l'instant, la seule stratégie de calcul proposée ici pour tenir compte du contact unilatéral est la méthode de Monte-Carlo. Bien que facile à mettre en œuvre, celle-ci est très coûteuse en temps de calcul car elle nécessite beaucoup de réalisations et les résultats convergent lentement. Pour tenter de diminuer le coût de calcul d'une analyse de tolérances où le contact unilatéral est pris en compte, plusieurs pistes peuvent être envisagées. En se penchant sur les méthodes de calcul statistique, on peut envisager d'utiliser par exemple la méthode d'hypercube latin [Olsson *et al.*, 2002] où les tirages des variables aléatoires d'entrée sont effectués de manière à ce que l'estimation des lois de probabilité des variables de sortie converge plus rapidement. Autrement, il serait judicieux d'adapter certaines méthodes de réduction de modèle permettant d'établir entre les quantités d'intérêt et les contributeurs, des relations

| Critère de conformité | | | Quantités d'intérêt | Hypothèses | | Méthode | Coût | Justesse |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Rigidité | Contact unilatéral | | | |
| Géométrique | Global | Zone de tolérance | Champ de déplacement normal | Nominale | Sans | MIC | - - | + |
| | | Affleurement | Champ de déplacement normal | Nominale | Avec | DMC | + | ++ |
| | Local | Jeu ou distance entre pièces | Déplacement normal de points | | | | | |
| | | Glissement ou désaxement | Déplacement tangentiel de points | Actualisée | Sans | MIC2 / MIC3 | - | + |
| Statique | Global | Contrainte maximale | Champ de contrainte | Actualisée | Avec | DMC | ++ | ++ |
| | Local | Effort de liaison | Composante normale | | | | | |
| | | | Composante tangentielle | Actualisée | Sans | MIC2 / MIC3 | - | + |

**Table 4.19:** Tableau d'aide au choix d'hypothèses et de méthodes en fonction du critère de conformité à vérifier.

plus élaborées que la combinaison linéaire des coefficients d'influence. Par exemple les méthodes *"POD" (Proper Orthogonal Decomposition)* [Chatterjee, 2000] et *"PGD" (Proper Generalized Decomposition)* [Chinesta *et al.*, 2009] permettent de construire des approximations des quantités d'intérêt sous forme de sommes de fonctions des contributeurs. La fiabilité de l'approximation augmente avec le nombre de résultats de simulations à partir desquels sont contruites ces fonctions.

En ce qui concerne les variabilités de rigidité liées aux variabilités de géométrie, l'enrichissement de la méthode des coefficients d'influence proposé ici permet de ne pas négliger ce phénomène de non-linéarité géométrique, même si les approximations manquent de justesse. Les perspectives relatives aux méthodes statistiques et à la réduction de modèle énoncées ci-dessus devraient permettre de tenir compte des non-linéarités géométriques tout en offrant une meilleure justesse des approximations.

*In fine*, quelle que soit la stratégie employée, le coût de calcul élevé d'une analyse de tolérances découle directement du nombre de contributeurs. En effet, le nombre de simulations à effectuer pour approximer les distributions des quantités d'intérêt augmente avec le nombre de contributeurs. La méthode des coefficients d'influence demeure sans doute la moins coûteuse. Elle ne nécessite qu'une seule simulation par

contributeur car l'approximation est linéaire. Les méthodes de réduction de modèle n'offriront sans doute pas un tel ratio.

Ainsi, une autre difficulté de l'analyse de tolérances d'un assemblage de pièces souples réside la définition des défauts géométriques considérés car le nombre de contributeurs augmente très rapidement avec la complexité du système. Le cas d'application industriel traité dans le chapitre suivant ne comporte pas moins de 243 contributeurs. Pourtant les défauts considérés sont assez peu nombreux, mais le système étudié comporte seize pièces et quarante-sept liaisons. On verra alors comment traiter un tel système avec la méthode des coefficients d'influence qui offrira un coût de calcul raisonnable.

# Chapitre 5

# Application à un cas industriel

*Ce dernier chapitre montre comment les travaux ont étés appliqués sur l'analyse de tolérances d'une structure aéronautique industrielle. À partir d'un modèle géométrique 3D issu de la CAO, les étapes pour élaborer un modèle éléments finis, modéliser les défauts géométriques, définir les quantités d'intérêt et simuler l'assemblage y sont d'abord décrites. Puis une exploitation des résultats est proposée. Elle permet d'identifier les défauts susceptibles de compromettre la conformité statique et ceux qui, au contraire, ne le sont pas.*

## Sommaire


**1 Présentation . . . . . 131**

**2 Modélisation . . . . . 135**

2.1 Idéalisation des traverses en modèle poutre . . . . . 135

2.2 Modèles de liaisons . . . . . 137

**3 Modélisation des défauts géométriques . . . . . 138**

3.1 Défauts de forme . . . . . 138

3.2 Défauts de liaison . . . . . 139

3.3 Récapitulatif des défauts . . . . . 141

**4 Analyse de tolérances . . . . . 142**

4.1 Stratégie de calcul . . . . . 143
4.2 Estimation de la probabilité de conformité . . . . . 144
4.3 Identification des défauts critiques . . . . . 145
4.4 Identification des défauts peu critiques . . . . . 146
**5 Exploitation des résultats . . . . . 147**
5.1 Actions correctives sur les tolérances . . . . . 147
5.2 Actions correctives sur la conception . . . . . 147
**6 Conclusions . . . . . 148**

# 1 Présentation

L'application industrielle destinée à la validation de ces travaux consiste en une analyse de tolérances d'un treillis non-rigide. La conception de ce treillis est issue des travaux de thèse de [Mons, 2013] effectuée dans le cadre d'un partenariat entre *EADS-IW* et l'*ENS* de Cachan. Ce treillis doit positionner et soutenir sous le plancher de l'avion 280 kg d'équipements tels que des cables électriques, des conduits de ventilation ou des canalisations hydrauliques. La figure 5.1 montre le modèle géométrique de ce treillis équipé et sur le point d'être assemblé sous le plancher de la pointe avant d'un *AIRBUS A350*.

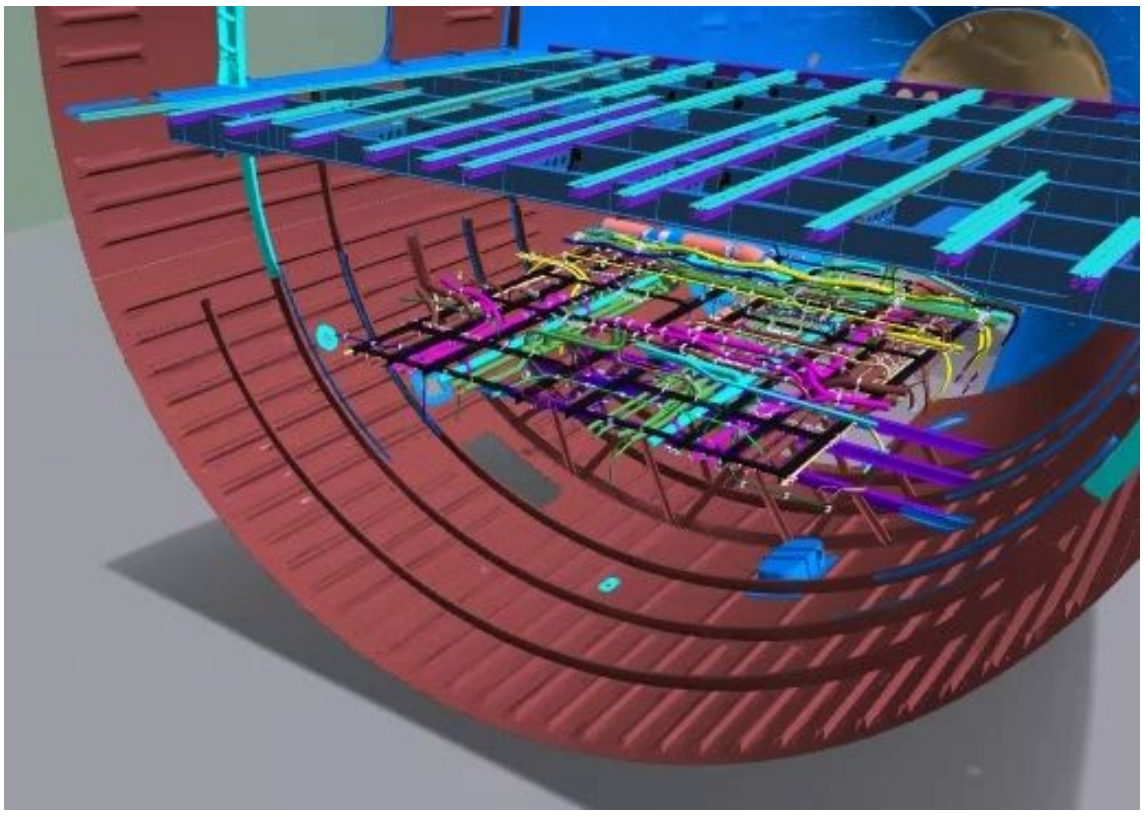


**Figure 5.1:** *Modèle géométrique d'un tronçon équipé (source : [Mons, 2013]).*

Usuellement les installations de ces câbles, conduits et canalisations sont effectuées directement sur le tronçon assemblé en FAL *(Final Assembly Line)* et sans besoin de ce treillis. Or dans le cas présent, le treillis est d'abord assemblé indépendamment hors de l'avion par boulonnage des traverses entre elles, puis les équipements y sont fixés. Ces étapes sont réalisées à l'aide d'un outillage d'installation offrant une meilleure accessibilité et ergonomie aux opérateurs que s'ils avaient eu à le faire directement dans l'avion. Le treillis équipé est ensuite transféré de son outillage d'installation vers un outillage d'intégration à l'aide duquel le treillis équipé est enfin positionné et boulonné sous le plancher du tronçon. De ce fait, les opérations de fixations et de câblages sont réalisées en temps masqué (hors FAL). Le temps d'installation des systèmes en FAL est donc réduit au temps de positionnement et de boulonnage du treillis, ainsi que du temps d'évacuation de l'outillage d'intégration. La figure 5.2 illustre ce processus.

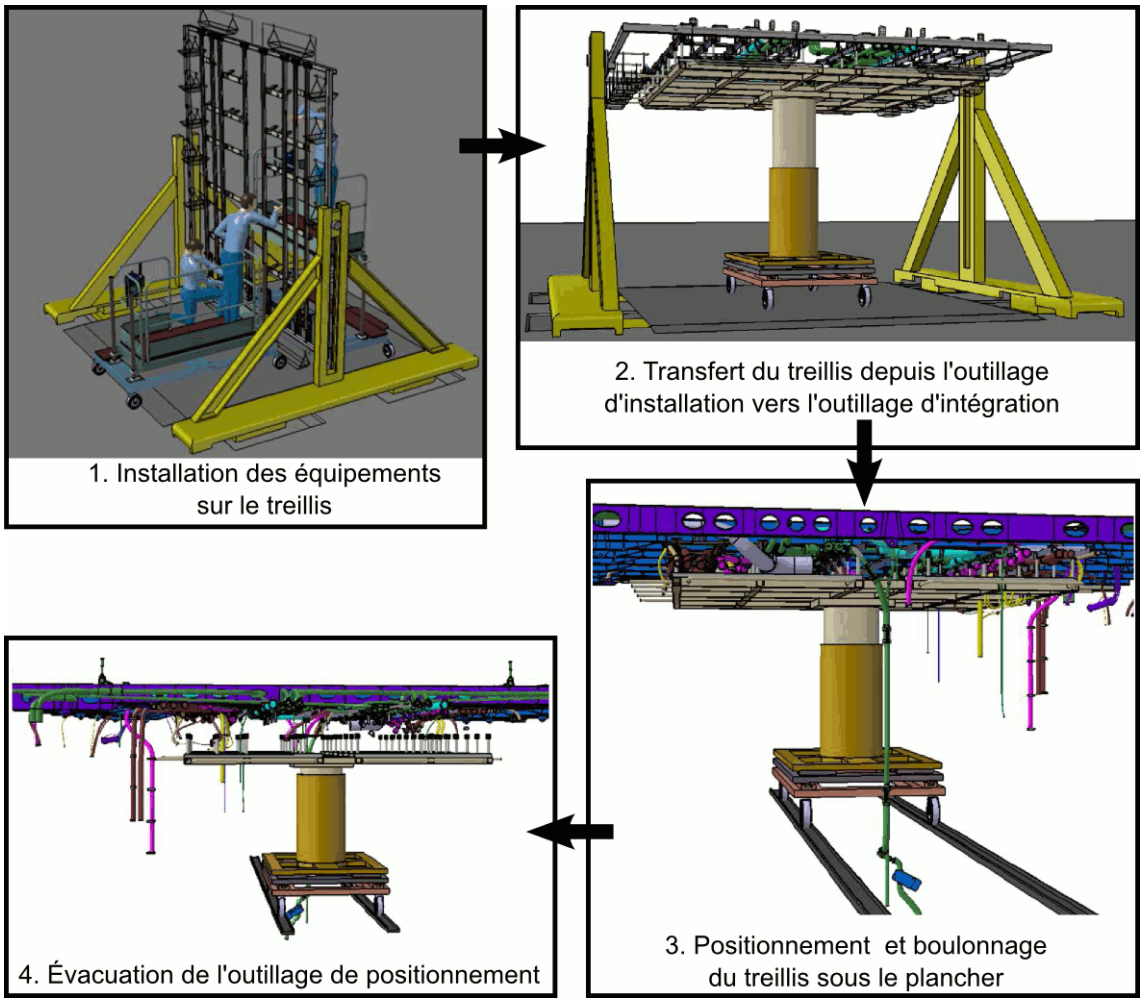



**Figure 5.2:** *Processus d'installation et d'intégration des équipements à l'aide du treillis (source : [Mons, 2013]).*

Au moment du boulonnage du treillis sous le plancher, le contreperçage des trous de passage est prohibé à cause du risque de dispersion de copeaux dans les nappes électriques. Tous les trous de passage des vis doivent donc être pré-percés. Autrement dit l'assemblage de ce sous-ensemble "treillis équipé" est de type *"meccano"*, et sa conformité statique et géométrique à l'état assemblé dépend plus des défauts géométriques initiaux que de la gamme d'assemblage. Le tolérancement du treillis prend ainsi tout son sens. La garantie de l'interchangeabilité de ces sous-ensembles via le tolérancement entraîne un gain de temps considérable à la fois sur les opérations d'assemblage, mais aussi pour la maintenance.

Au début de cette étude, on dispose d'un modèle 3D géométrique issu de la CAO de ce treillis représenté sur la figure 5.3. Celui-ci est constitué de quatre traverses longitudinales droites et de section en T, de six traverses transversales droites de section en L, et de six traverses transversales en oméga de section en L. Les variabilités géométriques globales correspondent aux défauts des traverses imaginés a priori comme étant une composition de courbure et de vrillage.

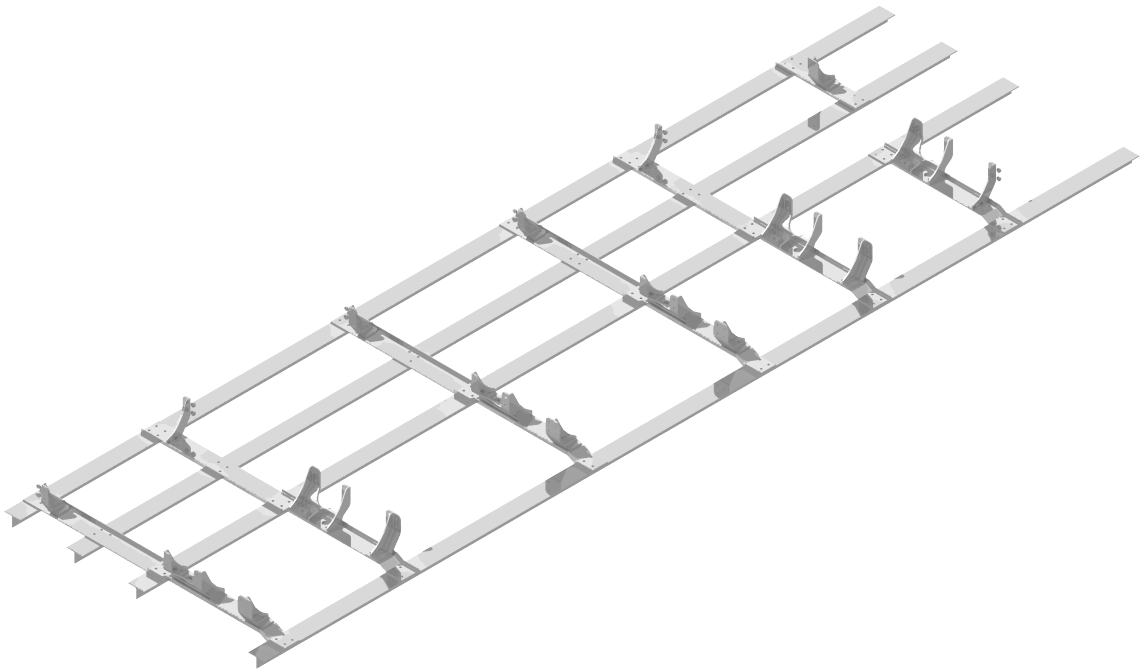


**Figure 5.3:** *Modèle géométrique du treillis.*

Ces seize traverses sont assemblées entre-elles à l'aide de liaisons boulonnées, et sont fixées sous le plancher de l'avion à l'aide de dix-huit pièces intermédiaires appelées *"sabots"*. La figure 5.4 représente les trois types de liaisons boulonnées auxquelles on a affaire :

- 29 Liaisons traverse-traverse à quatre vis (à gauche).
- 12 liaisons traverse-sabot à quatre vis (au milieu).
- 6 Liaisons traverse-sabot à six vis (à droite).

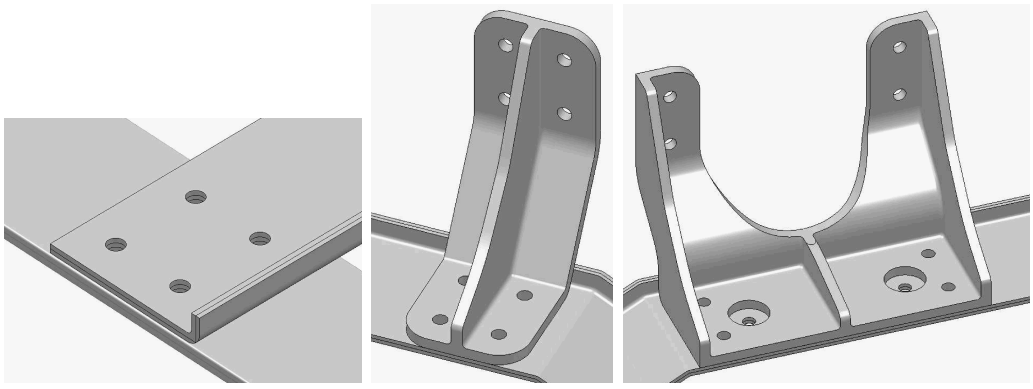


**Figure 5.4:** *Types de liaisons dans le treillis.*

Les variabilités géométriques locales considérés pour les liaisons correspondent à des défauts de position et d'orientation relatives des pièces. Ils dérivent directement des défauts de localisation des trous de passage des vis.

L'objectif de l'étude est de vérifier la conformité statique du treillis avec des variabilités géométriques données. Cette conformité statique se traduira par un niveau de contrainte critique dans les liaisons. Il s'agira donc dans un premier temps d'identifier les liaisons à risque. Et dans un second temps, d'identifier les défauts géométriques responsables de ces surcontraintes. De cette manière on pourra choisir d'élargir les intervalles tolérances bornant les défauts les moins influents, et/ou réduire ceux des défauts les plus influents.

# 2 Modélisation

Il s'agit pour commencer de définir un modèle éléments finis adapté au tolérancement de pièces non-rigides à partir du modèle CAO. Étant donné que les pièces sont des longs profilés à sections constantes, on optera pour un modèle poutre, ce qui nécessite une étape d'idéalisation de la géométrie.

## 2.1 Idéalisation des traverses en modèle poutre

La géométrie résultant de l'idéalisation est l'ensemble des segments et des points représentés sur la figure 5.5. Les points correspondent aux points d'assemblage réalisant les liaisons entre deux traverses ou entre une traverse et un sabot.

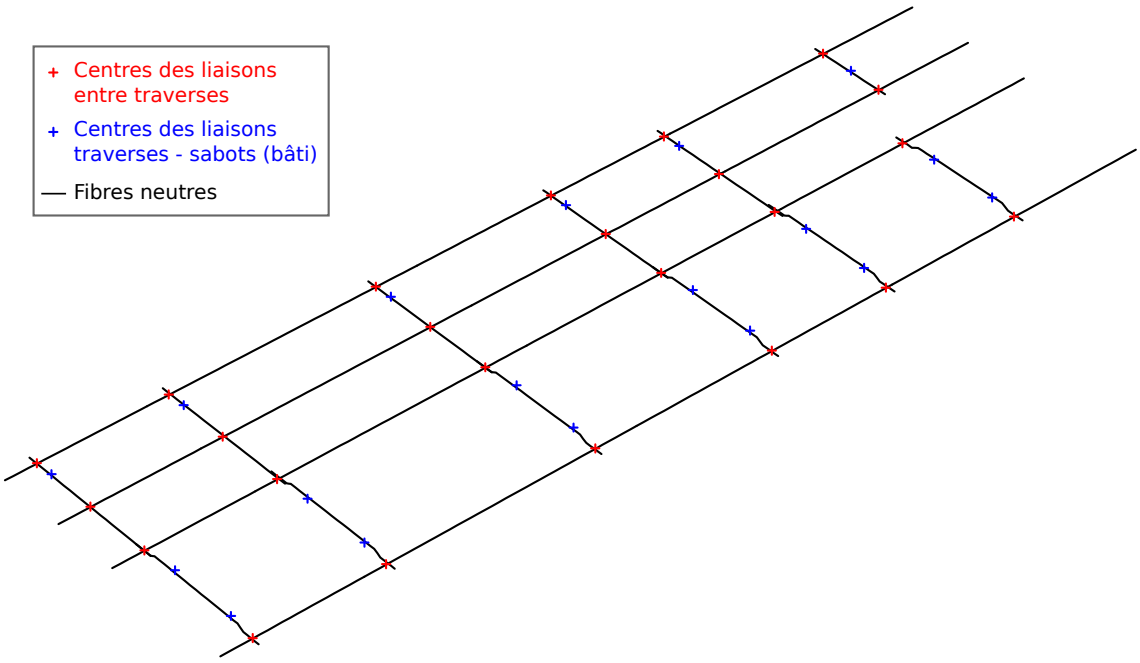



**Figure 5.5:** *Géométrie idéalisée du treillis.*

Concrètement, le travail effectué a consisté à construire des modèles géométriques constitués de segments et de points sur CATIA, et ce en s'appuyant sur le modèle géométrique du treillis. Ces modèles exportés en format ".stp" sont ensuite épurés à l'aide d'un éditeur de texte afin de construire le modèle élément finis sur CAST3M.

Les centres des liaisons sont tout d'abord construits comme étant équidistants des trous de passage des vis. Pour les traverses à section en T, la fibre considérée pour le modèle poutre correspond à l'intersection des deux plans médians des deux branches du T. Pour les traverses à section en L, la fibre considérée est l'intersection

entre le plan médian de la grande branche du L et le plan perpendiculaire passant par les centres de liaisons. Les points d'assemblages construits correspondent aux projections des centres de liaison sur les poutres. La figure 5.6 illustre ces constructions.

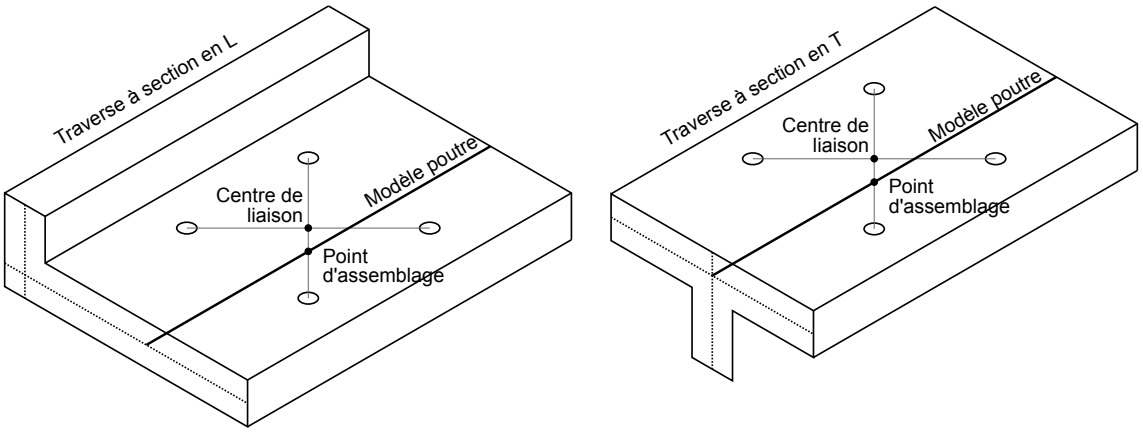



**Figure 5.6:** *Traverses idéalisées.*

Une fois la géométrie des traverses obtenue sous forme de segments et de points, il s'agit de les discrétiser en éléments poutre et de renseigner d'une part les caractéristiques matériaux (module d'Young et coefficient de poisson) sachant que les traverses sont en alliage d'aluminium, et d'autre part les caractéristiques géométriques (section et moments quadratiques). Ainsi, le comportement mécanique des traverses en élasticité linéaire est complètement défini. On remarquera toutefois que le moment quadratique étant calculé sur la fibre considérée, cela suppose un comportement symétrique par rapport à cette fibre, bien que ce ne soit pas réellement le cas pour les traverses à section en forme de L. Ce choix est celui de la simplicité. Des éléments finis plus évolués pourraient cependant être utilisés.

## 2.2 Modèles de liaisons

Les liaisons décrites précédemment sont modélisées à l'aide de relations cinématiques entre les points d'assemblage comme illustré sur la figure 5.7. On distingue deux types de modèles de liaisons : les connexions entre traverses qui lient localement les déplacements et rotation des traverses, et celles entre traverses et sabots où il s'agit simplement de bloquer tous les degrés de liberté des nœuds des traverses correspondants (les sabots ne sont pas matérialisés). On fera attention à ce que les connexions respectent un mouvement de corps rigide, c'est-à-dire que le segment entre les points d'assemblage conserve sa longueur (deux demi-épaisseurs) et reste localement perpendiculaire aux deux poutres.

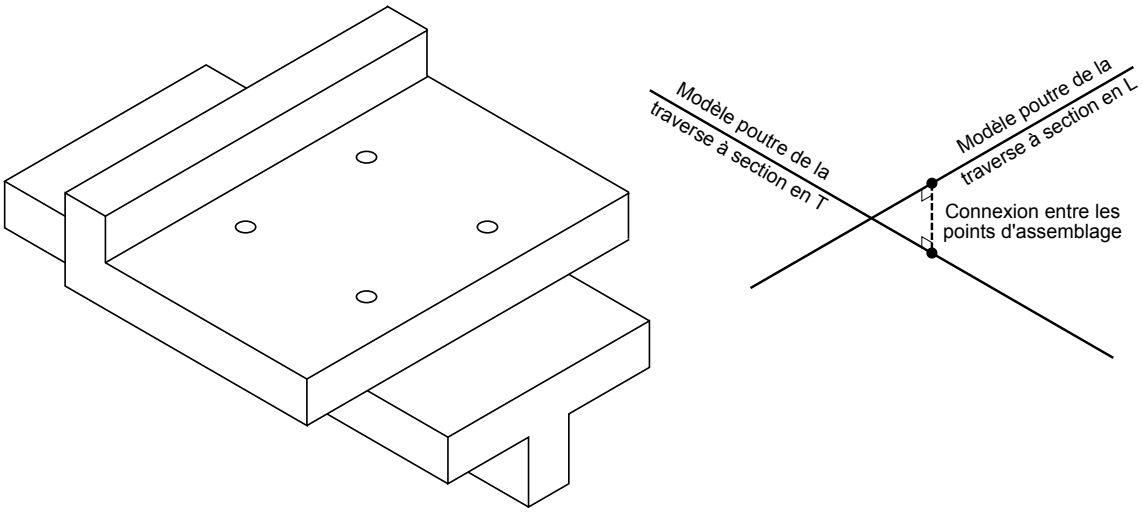



**Figure 5.7:** *Modélisation de liaison sous forme de connexion entre poutres.*

# 3 Modélisation des défauts géométriques

## 3.1 Défauts de forme

On considère que chaque traverse est sujette à des défauts de courbure et de vrillage. On modélise ces défauts par la superposition de trois modes représentatifs : deux modes projetant le défaut de courbure dans les plans orthogonaux à l'axe de la poutre, et un mode représentant le vrillage autour de l'axe de la poutre. La figure 5.8 illustre ces trois modes.

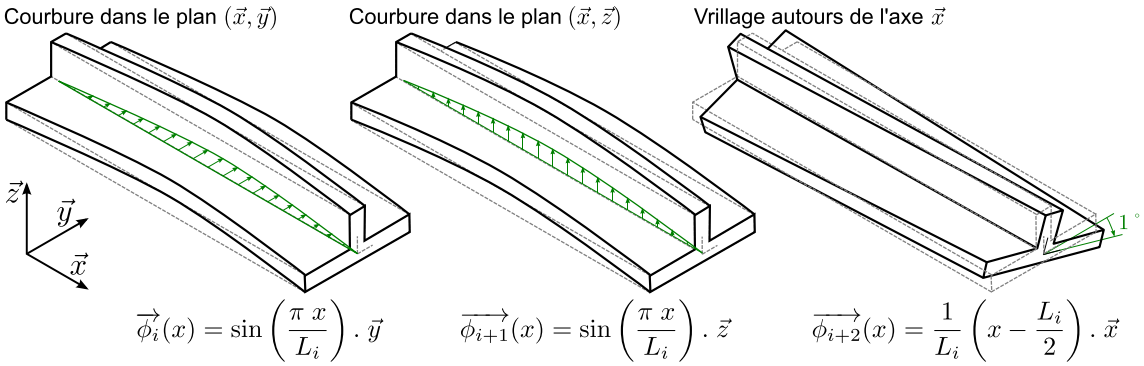



**Figure 5.8:** *Modes de courbure et de vrillage d'une traverse numérotée $i$.*

En considérant un repère local $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ associé à une poutre de direction principale $\vec{x}$, sa géométrie est donc actualisée en modifiant les coordonnées $(x_k, y_k, z_k)$ de ses nœuds $k$ dans le plan $(\vec{y}, \vec{z})$ comme indiqué dans l' équation 5.1. Avec ces 16 traverses, on a déjà 32 variables aléatoires caractérisant les défauts de courbure.

$$\begin{cases} y_k = & y_k^n + \delta_i \overrightarrow{\phi_i}(x_k).\vec{y} & = y_k^n + \delta_i \left(\sin \dfrac{x_k\, \pi}{L_i}\right) \\ z_k = & z_k^n + \delta_{i+1} \overrightarrow{\phi_{i+1}}(x_k).\vec{z} & = z_k^n + \delta_{i+1} \left(\sin \dfrac{x_k\, \pi}{L_i}\right) \end{cases} \tag{5.1}$$

Le mode de vrillage autour de l'axe $\vec{x}$ est défini par l'équation 5.2. Les coordonnées des nœuds ne sont pas affectées par le mode de vrillage. Pour des raisons de facilité, on considère qu'il n'a pas d'impact sur la rigidité, sinon il faudrait modifier les moments quadratiques de chaque élément de poutre en fonction de l'orientation de la section. En revanche, la valeur locale de la rotation de la section autour de son axe au niveau des liaisons sera prise en compte dans les relations cinématiques de connexion. La caractérisation de ces défauts de vrillage nécessite alors 16 variables aléatoires supplémentaires.

$$\overrightarrow{\phi_{i+2}}(x) = \frac{1}{L_i}\left(x - \frac{L_i}{2}\right).\vec{x} \tag{5.2}$$

Toutes ces variables aléatoires suivent une loi de probabilité gaussienne dont la moyenne $\mu = 0$ et l'écart-type $\sigma = 0,33$. En considérant la dispersion égale à $6\sigma$, on obtient des instances de skin-model de poutre dont $99,4\%$ ont leur ligne moyenne comprise dans une zone de tolérance de section carrée $2mm \times 2mm$ centrée sur le nominal.

## 3.2 Défauts de liaison

Toutes les liaisons sont supposées sujettes à des défauts géométriques entraînant des défauts de position et d'orientation relatives entre les deux traverses. Pour chacune des 29 liaisons entre traverses on aura deux composantes pour la localisation et une pour la rotation. Pour chacune des 18 liaisons avec les sabots, on aura trois composantes pour la localisation et trois autres pour l'orientation. Cela nous donne 195 variables aléatoires supplémentaires.

La figure 5.9 illustre les défauts de positionnement relatifs et les défauts d'orientation relative entre deux traverses. Ces défauts englobent les défauts de localisation des trous de passage des vis sur la première traverse et ceux sur la deuxième traverse (ou sur le sabot). Autrement dit on suppose que les trous de passage des vis sont correctement positionnés les uns par rapport aux autres (utilisation d'une grille de perçage) mais que l'ensemble a des défauts de localisation et d'orientation par rapports aux pièces sur lesquels ils sont percés. La somme des défauts de localisation donne le défaut de positionnement relatif des deux pièces. La somme des défauts d'orientation des groupes de trous sur leur pièce respective donne le défaut d'orientation relatif des deux pièces.

Les trois autres composantes de défauts dans les liaisons entre traverses et sabots correspondent au défaut de localisation de la surface du sabot sur laquelle est appuyée la traverse. On suppose qu'elle peut subir un décalage suivant l'axe $\vec{z}$ et un défaut d'orientation caractérisé par deux petites rotations autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Ici aussi on affectera à toutes ces variables aléatoires une loi gaussienne de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0,33$. En considérant la dispersion égale à $6.\sigma$, cela signifie que les centres de liaisons sur les deux pièces sont compris dans des carrés. Si on considère que la dispersion des défauts de localisation et d'orientation des groupes de trous sur leur pièce respective sont les mêmes, alors chaque centre de liaison est contenu dans un carré de $2mm \times 2mm$ centré sur le nominal.

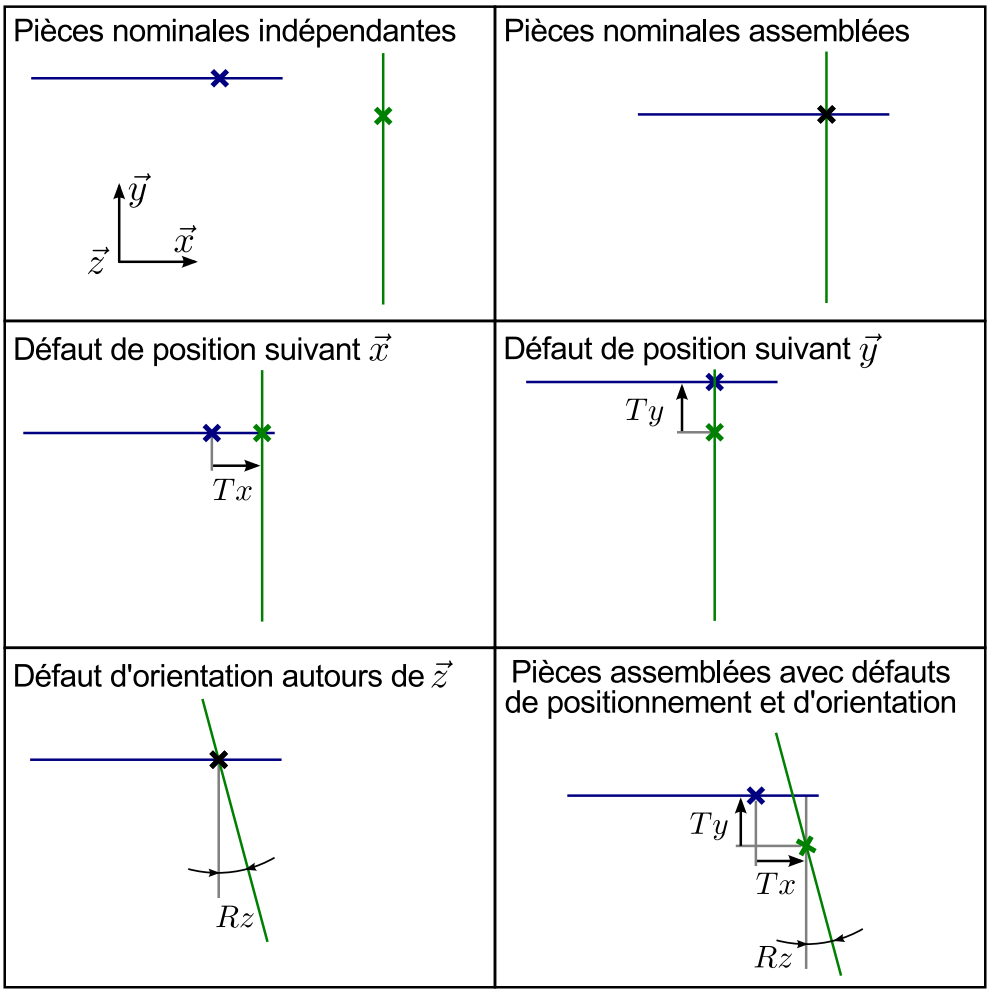



**Figure 5.9:** *Défauts de positionnement et d'orientation relatives entre deux traverses.*

## 3.3 Récapitulatif des défauts

Le tableau 5.1 recence tous les défauts avec leur notation, leur description et leur numérotation. Les défauts de forme sont donnés dans des repères locaux liés aux traverses ($\vec{x}$ est l'axe de la poutre). Les défauts de liaison sont donnés dans le repère global ($\vec{z}$ est l'axe des vis).

| Notation | Description | Numérotation |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{\phi_{3i-2}}$ | Défaut de courbure de la traverse $i$ dans le plan $(\vec{x},\vec{y})$ | $i \in \{1,...,16\}$ |
| $\overrightarrow{\phi_{3i-1}}$ | Défaut de courbure de la traverse $i$ dans le plan $(\vec{x},\vec{z})$ | |
| $\overrightarrow{\phi_{3i}}$ | Défaut de vrillage de la traverse $i$ autour de l'axe $\vec{x}$ | |
| $Tx_j$ | Défaut de positionnement relatif de la liaison $j$ entre les deux traverses dans la direction $\vec{x}$ | $j \in \{1,...,29\}$ |
| $Ty_j$ | Défaut de positionnement relatif de la liaison $j$ entre les deux traverses dans la direction $\vec{y}$ | |
| $Rz_j$ | Défaut d'orientation relative de la liaison $j$ entre les deux traverses autour de l'axe $\vec{z}$ | |
| $Tx_j$ | Défaut de positionnement relatif de la liaison $j$ entre la traverse et le sabot dans la direction $\vec{x}$ | $j \in \{30,...,47\}$ |
| $Ty_j$ | Défaut de positionnement relatif de la liaison $j$ entre la traverses et le sabot dans la direction $\vec{y}$ | |
| $Tz_j$ | Défaut de localisation de la surface d'appui du sabot de la liaison $j$ dans la direction $\vec{z}$ | |
| $Rx_j$ | Défaut d'orientation de la surface d'appui du sabot de la liaison $j$ autour de l'axe $\vec{x}$ | |
| $Ry_j$ | Défaut d'orientation de la surface d'appui du sabot de la liaison $j$ autour de l'axe $\vec{y}$ | |
| $Rz_j$ | Défaut d'orientation relative de la liaison $j$ entre la traverses et le sabot autour de l'axe $\vec{z}$ | |

**Table 5.1:** Tableau récapitulatif des défauts géométriques du treillis.

# 4 Analyse de tolérances

L'objectif étant de statuer sur la conformité statique, les quantités d'intérêt observées en sortie de simulation sont les composantes des torseurs d'efforts généralisés qui transitent dans les liaisons numérotées $j$, c'est-à-dire $Fx_j$, $Fy_j$, $Fz_j$, $Mx_j$, $My_j$ et $Mz_j$.

Il n'est pas envisageable ici d'exploiter les résultats des simulations à l'aide d'une table des contributions étant donné la grande liste de paramètres de défauts $\{\delta\}$ (243 variables aléatoires au total) et du nombre de quantités d'intérêt (282 composantes d'efforts généralisés). On cherchera donc à évaluer la probabilité de la conformité statique.

À cet effet, pour chaque connexion $j$, on calculera un critère de conformité statique à partir des composantes de son torseur d'efforts généralisés $Fx_j$, $Fy_j$, $Fz_j$, $Mx_j$, $My_j$ et $Mz_j$. Le critère choisi est la contrainte maximale de Von Mises dans les vis des liaisons. Cela permet de détecter une éventuelle détérioration d'une de ces vis. Le détail du calcul de ce critère de conformité est donné dans l'annexe A en page 157.

Ainsi les quantités d'intérêt $\alpha^j$ qui correspondaient aux 6 composantes des 47 liaisons, soit 282 quantités d'intérêt au total, correspond aux 47 valeurs de cette contrainte maximale $\sigma^j_{eq}$. La conformité statique se traduit donc par l'évènement *"aucune des contraintes de Von Mises maximales dans les vis $\sigma^j_{eq}$ ne dépasse la valeur critique $\sigma^j_{crit}$ donnée"*. Les vis étant toutes identiques, la valeur critique sera la même pour toutes les contraintes de Von Mises calculées.

## 4.1 Stratégie de calcul

Ayant affaire à un grand nombre de variables aléatoires, une estimation fiable de la probabilité de la conformité statique nécessite un grand nombre de tirages. Comme on ne considère pas de jeux fonctionnels dans les liaisons et que suite à l'idéalisation géométrique on n'a plus de zones de recouvrement, on n'aura pas affaire à des phénomènes de contact unilatéral et les simulations d'assemblage seront des problèmes linéaires. La seule non-linéarité se situe au niveau du problème statistique. Il s'agit des variations de rigidité induites par les défauts de forme. On utilisera donc la méthode des coefficients d'influence avec réactualisation des rigidité et approximation linéaire appelée *MIC2* dans le chapitre précédent (voir page 113), notamment pour les efforts tangentiels dans les liaisons (cf équation 5.3).

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{N} c_{ij}\,\delta_i \qquad ; \qquad \{\alpha\} = [S]\,\{\delta\} \tag{5.3}$$

On calcule donc la matrice de sensibilité avec les 243 simulations nécessaires (une par défaut), puis on réalise 10000 tirages aléatoires pour lesquels on calcule les 6 composantes des efforts généralisés dans les 47 liaisons. Pour chaque liaison et chaque tirage, on calcule les contraintes de Von Mises maximales dans leurs vis.

On remarquera toutefois que le couplage flexion-compression pose à nouveau problème pour les défauts de locaux de positionnement relatif des poutres au niveau des liaisons. En effet, lors du calcul de leurs coefficients d'influence, les poutres sont encore supposées droites, elles sont donc sollicitées en traction ou compression pure. Leurs coefficients d'influence sur les composantes tangentielles des efforts de liaison sont donc surestimés car toutes ces sollicitations sont transmises dans l'effort tangentiel alors qu'en réalité, une partie est absorbée dans la flexion.

Afin de conserver le faible nombre de calculs qu'offre cette méthode tout en tenant compte du couplage flexion-compression dans le calcul des coefficients d'influence des défauts de liaison, une perspective à court terme pour la suite des travaux serait de les calculer sur la structure assujettie aux défauts de forme unitaires. Il s'agirait d'imputer au modèle tous les défauts de forme unitaires $\phi_i$, de calculer la rigidité actualisée $[K_n + K_d]$, d'effectuer une première simulation sans aucun défaut de liaison pour obtenir une première série de quantités d'intérêt $\alpha_j^0$ qui servirait de référence. On réaliserait alors les 195 simulations avec des défauts de liaison unitaires imputés un à un. Les coefficients d'influence correspondraient alors à la différence entre les quantités d'intérêt et celles de référence ($c_{ij} = \alpha_j - \alpha_j^0$). Il n'y aurait finalement qu'une seule simulation supplémentaire.

## 4.2 Estimation de la probabilité de conformité

La courbe de la figure 5.10 montre l'évolution de la probabilité de conformité statique, c'est-à-dire la probabilité de l'évènement *"aucune des contraintes de Von Mises maximales dans les vis ne dépasse la valeur critique donnée"* en fonction de la contrainte critique de Von Mises dans les vis.

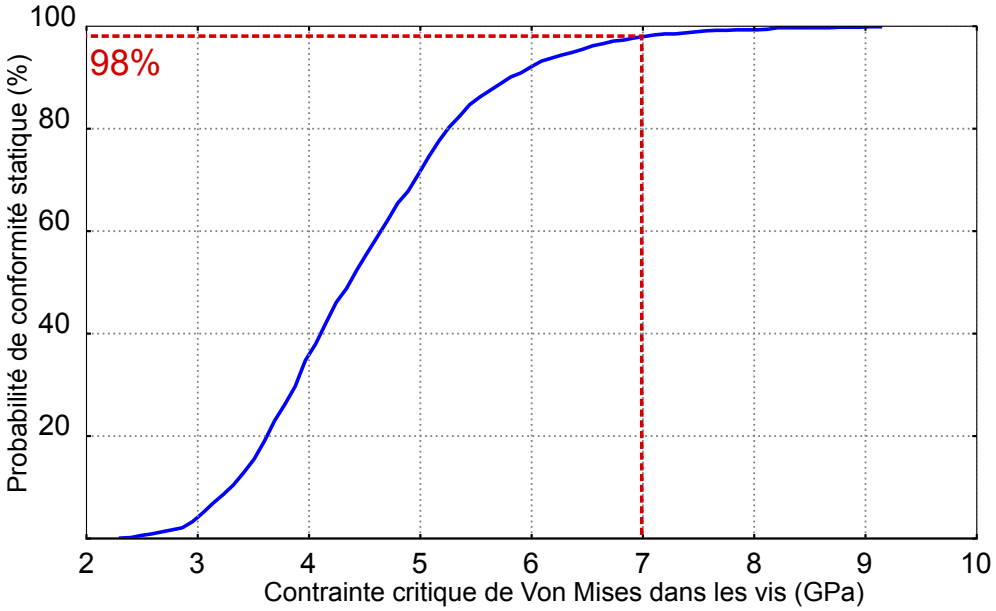



**Figure 5.10:** *Probabilité de conformité statique de l'assemblage.*

On remarque tout d'abord que les valeurs de cette contrainte critique sont très élevées. En effet, pour obtenir un taux de conformité de 98%, il faudrait que certaines vis puissent supporter une contrainte équivalente de Von Mises d'environ 7GPa. En réalité, pour des vis en acier, la limite élastique varie entre 200 MPa et 1300 MPa suivant leur qualité, et entre 200 MPa et 400 MPa pour des vis en titane.

Ces contraintes trop importantes s'expliquent d'une part par le fait que les liaisons sont sans jeux, d'où les composantes tangentielles des efforts de liaison importantes, et d'autre part aux hypothèses de calcul des efforts de cisaillement dans les vis. En effet, on a supposé que tous les efforts tangentiels étaient directement transmis dans les vis par cisaillement alors qu'en réalité ils sont majoritairement transmis par frottement.

## 4.3 Identification des défauts critiques

Malgré cette surestimation, on supposera ces résultats représentatifs des sollicitations des liaisons et on cherchera à identifier d'abord les liaisons problématiques pour une contrainte critique de 7GPa, c'est-à-dire celles qui sont le plus souvent surcontraintes parmi les 2% d'assemblages non-conformes. Puis on identifiera les défauts qui ont le plus d'influence sur la contrainte dans la liaison. Cela permet ainsi de cibler la ou les tolérances à restreindre pour réduire le nombre de cas de non-conformité.

La figure 5.11 montre les liaisons surcontraintes sur le treillis, ainsi qu'un diagramme circulaire indiquant la fréquence de surcontrainte de chaque liaison sur le nombre total de cas de surcontraintes. On remarque que le problème de conformité respècte la règle des 80-20, à savoir qu'environ 80% des cas de non-conformité sont dûs à seulement 4 liaisons fréquemment surcontraintes. Il s'agit des liaisons numérotées 31, 32, 33 et 34 qui sont des liaisons avec des sabots.

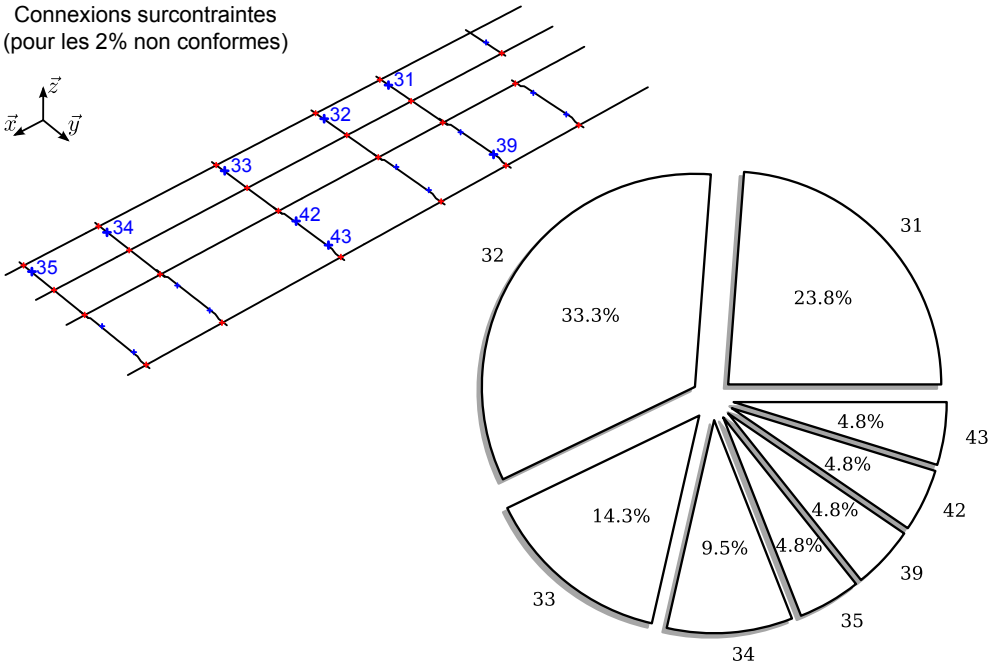



**Figure 5.11:** *Liaisons surcontraintes et fréquence d'apparition pour 2% des cas non-conformes.*

On s'intéressera alors à la liaison numéro 32 qui est la plus fréquemment surcontrainte (dans un cas sur trois). Le diagramme circulaire de la figure 5.12 donne, en pourcentage, les contributions des défauts qui sont représentatifs, c'est-à-dire supérieurs à 2%. $Tx_j$, $Ty_j$ et $Tz_j$ correspondent aux défauts de positionnement relatifs

des traverses entre elles ou avec les sabots sur la liaison numérotée $j$ dans les directions $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$. $Rx_j$, $Ry_j$ et $Rz_j$ correspondent aux défauts d'orientation relative autour des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ pour les liaisons numérotées $j$. Les liaisons relatives à ces défauts apparaissent sur la représentation du treillis.

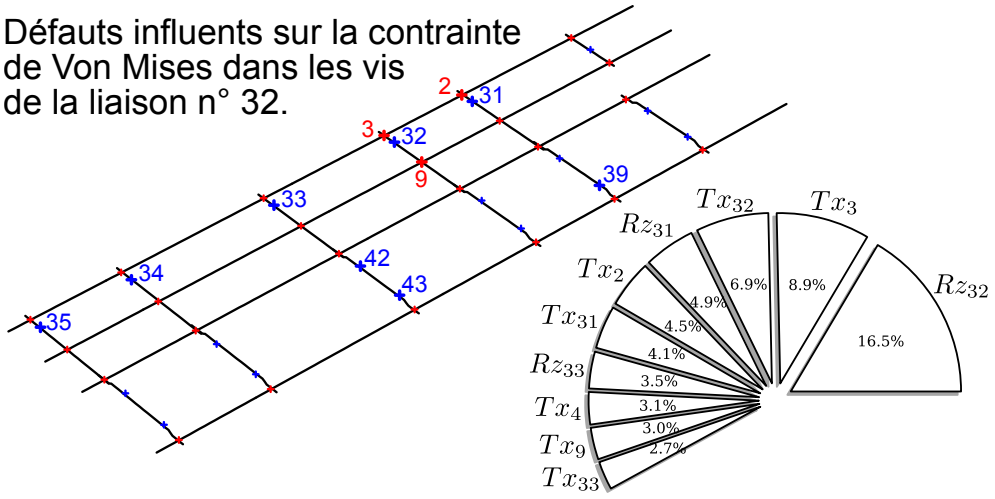



**Figure 5.12:** *Défauts influents et leur contribution en pourcentage sur la contrainte de Von Mises dans les vis de la liaison n$^o$ 32.*

On constate d'une part que le défaut le plus influent $Rz_{32}$ est le défaut d'orientation relative entre le sabot de la liaison et la traverse longitudinale. En effet, ce type de défaut génère beaucoup de contrainte de cisaillement dans les vis. Il en est de même pour les défauts de positionnement relatif $Tx_{32}$ et $Ty_{32}$. On constate d'autre part que l'influence des défauts de forme est inférieure à 2%, mais on sait que les influences des défauts locaux de positionnement relatifs des pièces sont surestimés à cause du couplage flexion-compression non pris en compte dans leur calcul.

## 4.4 Identification des défauts peu critiques

Un autre objectif du tolérancement flexible est de savoir si la souplesse des pièces permet de compenser certains défauts et ainsi de pouvoir élargir les intervalles de tolérance relatifs aux défauts peu critiques. On cherchera alors quels sont les défauts dont toues les contributions sur la contrainte de Von Mises dans les vis de chaque liaison sont négligeables. Ici, on a pu identifier que tous les contributeurs des défauts de courbure et de vrillage des quatre traverses longitudinales sont inférieurs à 2%. On peut donc envisager d'élargir les tolérances de forme limitant ces types de défauts.

# 5 Exploitation des résultats

Ce processus d'identification des défauts critiques peut mener à différentes actions correctives au niveau de la conception ou du tolérancement. L'objectif demeure l'obtention d'un taux de conformité (ou taux d'assemblabilité) égal à 100% pour une qualité géométrique des pièces respectant les capabilités des procédés et un coût de fabrication minimal.

## 5.1 Actions correctives sur les tolérances

Les actions correctives relatives au tolérancement consisteront à optimiser les intervalles de tolérances en fonction de la criticité des défauts concernés et des coûts de fabrication vis-à-vis de la qualité géométrique demandée. Il s'agira donc d'une part de restreindre les tolérances limitant les défauts critiques, cela dans le respect des capabilités des procédés de fabrication de ces pièces et jusqu'à obtention d'un taux d'assemblabilité égal à 100% et d'un coût de fabrication satisfaisant. D'autre part, les tolérances limitant les défauts peu critiques pourront être élargies jusqu'à ce qu'ils deviennent critiques ou que le coût de fabrication soit minimal.

Par exemple, pour ce cas d'application industrielle, il faudra exiger une excellente précision pour le perçage des trous de passage des vis dans les traverses et les sabots et maximiser les jeux fonctionnels de ces liaisons boulonnées. On pourra par ailleurs accepter des coubures et vrillages plus importantes sur les traverses longitudinales si cela présente un intérêt sur leur coût de fabrication.

Il serait possible de formuler mathématiquement ce problème d'optimisation des coûts de fabrication sous contrainte du taux d'assemblabilité et des capabilités des procédés. Cela nécessiterait toutefois de disposer de données précises sur les capabilités des procédés et de fonctions coût de fabrication en fonction des dimensions des zones de tolérances, ce qui n'est sans doute pas chose aisée.

## 5.2 Actions correctives sur la conception

Du point de vue de la conception, les actions correctives envisageables sont de revoir le choix technologique afin de modifier le critère d'admissibilité de conformité. Pour ce treillis par exemple, on pourra envisager de modifier la nature des liaisons en définissant par exemple des trous oblongs pour le passage des vis dans les liaisons traverse-sabot modélisées par les connexion 31, 32 et 33. Dans le modèle, cela se traduirait par la supression d'une ou plusieurs relations cinématiques de connexion liant les degrés de liberté en translation ou en rotation, d'où la mise à zéro d'une composante des torseurs d'efforts généralisés transitant dans ces liaisons, et donc

une diminution de la contrainte de Von Mises dans les vis. Dans la réalité, cela se traduirait par un boulonnage plus facile de ces liaisons et une garantie de tenue mécanique des vis.

# 6 Conclusions

Moyennant un calcul du critère de conformité plus adéquat, cet exemple montre la possibilité de pratiquer une analyse de tolérances d'un assemblage de pièces non-rigides assez complexe de par le nombre de pièces, de liaisons, et surtout du nombre important de variabilités géometriques, et ce en fonction de critères statiques. Les méthodes proposées pour exploiter les résultats permet aisément d'identifier d'une part les cas de non conformité ainsi que les défauts géométriques qui risquent de les causer et d'autre part les défauts qui ont très peu d'influence sur la conformité statique.

L'élaboration de ce modèle élément finis soulève par ailleurs la question du degré d'idéalisation géométrique. En effet, d'après les résultats de l'étude de [Courrier, 2009] relative au choix de caractéristiques de modèle éléments finis pour le tolérancement flexible et évoquée dans le premier chapitre (voir pages 22 à 24), la minimisation du coût de calcul justifie l'utilisation d'éléments poutres. Cela implique que les connexions entre deux points d'assemblage modélisent une liaison réalisée à l'aide de quatre vis. Or on a pu constater que la réanalyse 3D pour le calcul des contraintes de Von Mises dans les vis à partir des efforts généralisés transitant dans les connexions nécessite une modélisation plus riche que celle proposée ici.

# Conclusions

L'objectif de ces travaux était de définir des moyens de prendre en compte la souplesse des pièces dans un processus de tolérancement. L'idée était de partir d'un modèle géométrique 3D tolérancé pour aboutir à différentes conclusions sur les défauts géométriques, et ce en fonction du cas d'application. Ces cas ont été recensés dans le chapitre 2, mais les travaux se sont focalisés principalement sur l'analyse et la synthèse de tolérances. Leur objectif est de pouvoir statuer sur la quantification des intervalles de tolérances ou éventuellement remettre en cause certains choix de conception.

L'approche effectuée a conduit à la définition d'un problème éléments finis sujet à des variabilités géométriques. L'utilisation de la méthode des éléments finis a permis non seulement de prendre en compte les déformations des pièces, mais aussi d'effectuer le tolérancement en fonction de critères mécaniques. L'exploitation de cette possibilité constitue un apport relativement nouveau. En effet, la majorité des travaux de recherche sur le tolérancement de pièces souples se focalisent sur des quantités d'intérêt relatives à la géométrie (déplacements de nœuds).

Une question centrale de ces travaux était de passer d'un modèle géométrique d'assemblage issu de la CAO à un modèle éléments finis pertinent pour le tolérancement flexible. Le contexte aéronautique a guidé les choix de modèle vers des éléments de structure tels que des modèles poutre ou coque, d'où une étape d'idéalisation des pièces et des liaisons. Des préconisations ont donc été données sur le degré d'idéalisation, le choix du type d'éléments de structure en fonction de la justesse du comportement mécanique et du coût de calcul. Quant aux liaisons, elles ont été modélisées par des relations cinématiques appellées connexions entre des nœuds définis comme des points d'assemblage.

L'application industrielle est d'ailleurs très représentative de l'élaboration de modèle. Ses résultats ont par ailleurs mis en évidence la nécessité d'utiliser un modèle plus riche pour la réanalyse 3D locale afin d'évaluer avec justesse les contraintes dans les vis.

De manière générale, deux types de défauts géométriques aléatoires ont été proposés : les défauts de forme (défauts globaux) et les défauts de liaison (défauts locaux). Les défauts de forme sont d'abord établis comme un champ d'écart continu. Puis il est discrétisé aux nœuds du maillage afin d'identifier les modifications à effectuer sur les coordonnées de ces nœuds. De cette manière, la rigidité peut être réactualisée. Un autre méthode consiste à transformer le champ d'écart en champ de contrainte ou d'effort nodal pour être utilisé avec la méthode des déformations initiales.

La première approche pour définir le champ d'écart consistait à déformer le modèle via une simulation élastique. La continuité du champ de déplacement était adéquate au réalisme des défauts. Cependant, les formes obtenues sur un exemple de plaque courbe a remis en question cette méthode. Une nouvelle approche inspirée du tolérancement modale a été alors proposée. Le champ d'écart est obtenu par la superposition de modes choisis pour leur réalisme, et amplifiés aléatoirement. De cette manière, il est possible de générer toute sorte de défauts de forme de manière réaliste et avec un nombre de variables aléatoires qui demeure limité.

La génération de défauts de forme qui soient conformes à une zone de tolérance a également posé problème avec la superposition modale. Deux possibilités sont envisageables. La première consiste à établir des liens entre les amplitudes de mode de manière à réaliser des tirages aléatoires conditionnés. La seconde consiste à trier les instances aléatoires. Pour des raisons de facilité, le choix s'est porté sur le tri. Les champs d'écart discrétisés sont alors traités comme s'il s'agissait d'un nuage de points issu de la métrologie. Cependant, il est nécessaire d'établir un lien entre les dispersions des amplitudes de mode aléatoires et les intervalles de tolérances associés afin d'obtenir une collection d'instances de skin-model qui soit assez complète.

Les défauts de liaison, quant à eux, s'intègrent facilement dans les relations cinématiques de connexion entre les points d'assemblage.

En ce qui concerne les hypothèses de calcul, les phénomènes de contact unilatéral ou de variabilités de rigidité impliquées par les défauts géométriques ont été testées sur le cas d'assemblage des poutres et celui des plaques. Rappelons qu'il s'agissait de perspectives énoncées à l'issue des travaux de [Merkley, 1998] (voir page 32). Des stratégies d'analyse de tolérances ont alors été proposées en fonction des hypothèses nécessaires, et ce de manière à adapter le coût de calcul à la justesse des résultats.

En s'appuyant sur ces deux cas d'application académiques, le tableau 4.19 en page 126 a pu être élaboré, constituant ainsi une première base d'expérience pour aider au choix des hypothèses de calcul en fonction des critères de conformité qu'on cherche à vérifier.

La stratégie de Monte-Carlo est la méthode de référence. Elle est simple à mettre en œuvre mais est très coûteuse. C'est pourquoi la méthode des coefficients d'influence a été adaptée aux modèles de défauts de forme et de liaisons ainsi qu'à

la prise en compte des variabilités de rigidité. Bien que cette méthode ait permis d'atteindre l'objectif de diminution du coût de calcul, elle nécessite de faire des approximations dont la justesse peut être remise en cause. En effet, les approximations faites ici ne sont pas fiables dans le cas du contact unilatéral et des effets de bord (par exemple pour l'extrémité d'une ligne de fixations). Il en est de même dans le cas de non-linéarités géométriques entrainant un couplage de flexion-compression. En fait, les variabilités du comportement mécanique du système sont très localisées et très fortement dépendantes de certains défauts géométrique. C'est pour cette raison que la construction d'une approximation en observant chaque défaut séparément ne mène pas à des résultats fiables.

La mise en œuvre du cas d'application industrielle a mis en exergue la difficulté de traiter un sytème avec un grand nombre de pièces et de liaisons, donc un grand nombre de variables aléatoires. De ce fait, une méthode d'exploitation des résultats d'analyse de tolérances a été proposée et mise en œuvre sur le cas d'application industriel. Il s'agit d'identifier dans un premier temps les critères les plus restrictifs, c'est-à-dire ceux qui détectent le plus fréquemment les non-conformités. Ensuite, une analyse des contributions met en lumière les défauts géométriques qui en sont les princicipaux responsables. Cela permet soit de décider de restreindre des intervalles de tolérance, soit d'effectuer des modifications au niveau des choix technologiques de conception. À l'inverse, cette analyse permet aussi d'identifier les défauts qui n'ont que très peu d'influence sur les quantités d'intérêt sujettes aux critères de conformité. Cela permet de justifier le choix d'élargir les zones de tolérance qui limitent ces défauts.

Une méthode de synthèse de tolérances a également été proposée et appliquée sur le cas d'assemblage des deux poutres. Ce cas présente l'avantage de n'avoir que deux intervalles de tolérances à quantifier. Cette méthode consiste à effectuer d'abord un tri des instances de skin-model en fonction des intervalles de tolérance qu'elles respectent, puis à réaliser des analyses de tolérances successives. Malheureusement, cette stratégie nécessite de faire de la simulation intensive. Plutôt que de poursuivre dans cette voie, les travaux se sont donc focalisés sur la diminution des coûts de calcul et le maintien de la justesse des résultats.

Finalement, le tolérancement de pièces souples et son approche par la simulation d'assemblage de modèles éléments finis soulève un nombre conséquent de problématiques. Ces travaux proposent des réponses qui, pour la plupart, méritent un approfondissement. Des pistes d'enrichissement et d'améliorations sont donc données dans le chapitre des perspectives qui finalise ce mémoire.

# Perspectives

L'amélioration du tolérancement flexible réside dans l'augmentation de la justesse des résultats tout en maintenant des faibles coûts de calcul. Pour ce faire, plusieurs pistes sont à explorer. Dans un premier temps, l'enrichissement des modèles peut accroitre le réalisme des simulations d'assemblage et donc la justesse des résultats d'analyse de tolérance. Dans un second temps, la réduction de ces modèles enrichis, via des approximations pertinentes, diminue le coût de calcul des analyses de tolérances.

Le recalage de modèle constitue une technique intéressante pour augmenter la justesse des résultats de simulation d'assemblage. Il s'agirait ici de réajuster certains paramètres de modélisation en fonction de résultats plus fiables, par exemple des résultats de mesures sur un système réel comme un prototype, ou des résultats de simulation effectuées à l'aide d'un modèle plus réaliste. C'est d'ailleurs dans cette optique que deux stages de Master 2 ont été effectués au LMT.

Le premier a été accompli en 2011 par Guillaume Rosenzveig [Rosenzveig, 2011]. Celui-ci a adapté aux cas de problèmes de mécanique statique, les méthodes de recalage utilisées habituellement pour des problèmes de dynamique et reposant sur la minimisation de l'erreur en relation de comportement ($E^2_{RdC}$) [Decouvreur *et al.*, 2008] [Ladevèze, 2000]. Guillaume Rozenveig entame d'ailleurs la poursuite de nos travaux dans une thèse intitulée *"Modélisation et simulation en calcul des structures pour le tolérancement et l'assistance à l'assemblage de grandes pièces aéronautiques flexibles"*.

Le second stage effectué par Matteo Loffredo en 2012 a consisté à recaler les paramètres caractéristiques de modèles de poutres par rapport à des résultats d'analyse vibratoire effectués sur des modèles éléments finis volumiques de ces mêmes poutres. Cela permet d'ajuster le comportement des modèles de poutre de manière à ce qu'il soit plus réaliste. Cette technique de recalage a d'ailleurs été appliquée sur l'une des quatres poutres longitudinales du treillis traité au chapitre 5.

Bref, ces méthodes de recalage peuvent permettre d'augmenter la justesse des simulations d'assemblage. Le surcoût de calcul entrainé est fixe, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du nombre de simulations.

La principale piste d'enrichissement des modèles concerne les liaisons. Les connexions utilisées ici sont représentatives de liaisons rigides et sans jeux. Or l'état de l'art effectué dans le premier chapitre évoque, en page 27, des modèles de liaisons avec élasticité sous forme de ressorts généralisés dont la raideur est approximable par la formule de Huth [Huth, 1986]. Ces modèles sont d'ailleurs couramment utilisés en calcul de structure aéronautique. Par ailleurs, un modèle de connexion avec jeu a été proposé en page 81 mais n'a pas été exploité dans les applications traitées dans ce mémoire.

L'utilisation de ces modèles améliorerait le réalisme du comportement mécanique des liaisons en permettant de tenir compte de leur élasticité et/ou des jeux. Par ailleurs, certaines incertitudes géométriques comme le diamètre des vis, des rivets, ou des trous de passage, pourraient intervenir dans les lois de comportement mécanique des liaisons. Enfin, le frottement pourrait également y être inclus avec le modèle de Coulomb. Mais parmi ces enrichissements, seule la prise en compte de l'élasticité dans les liaisons demeure en accord avec les hypothèses de linéarité permettant d'utiliser la méthode des coefficients d'influence.

Les travaux de thèse de [Gant, 2011] constituent le meilleur point de départ pour l'enrichissement des modèles de liaisons. Des connecteurs élastiques ont été élaborés dans *Abaqus* via le modèle de Huth [Huth, 1986]. Ils ont ensuite été sujets à un recalage par rapport à des résultats d'essais expérimentaux et de simulations sur des modèles éléments finis volumiques bien plus riches. De plus, des incertitudes y ont été introduites via la théorie des méconnaissances [Enjalbert, 2009].

[Gant, 2011] aborde également les problématiques de réanalyse locale et multi-échelle pour le dimensionnement des structures de grande taille. Il s'agit également d'un problème rencontré avec les modèles de liaison du treillis (voir pages 134 et 137). En effet, on a pu constater que l'estimation de la contrainte de Von Mises dans les vis à partir des efforts généralisés de liaison nécessitait des hypothèses de calcul plus réalistes (voir pages 159, 159 et 144).

Comme les quarante-sept connexions du treillis ne représentent que trois types de liaisons différentes (voir figure 5.4 en page 134), les critères de conformité statique pourraient être réétablis à l'aide de simulations plus ou moins complexes sur les modèles éléments finis en 3D volumiques représentatifs de ces liaisons. Il est d'ailleurs possible d'utiliser les mêmes outils numériques pour ce type de simulation, par exemple *CAST3M*, *Abaqus*, *ASTER*, *NASTRAN*, etc. Bien que cela demande un travail de modélisation supplémentaire et un surcoût de calcul, les résultats d'analyse de tolérances s'en trouveront extrèmement plus fiables et on disposera d'informations plus détaillées pour envisager des modifications technologiques des liaisons.

En ce qui concerne les défauts de forme, leur caractérisation a été contournée par un choix de modes qu'on suppose réalistes, mais cela demande vérification. Une étude de tolérancement ne pourrait pas justifier une campagne de mesures de grandes pièces aéronautiques en sortie de fabrication. De plus, les mesures métrologiques ne permettraient pas d'identifier les contraintes résiduelles dans les pièces alors que ce sont elles qui sont la principale cause des défauts de forme, en particulier pour les matériaux composites. Ici encore, la voie de la simulation des procédés de fabrication peut apporter ces réponses. En effet, [Bognet *et al.*, 2011] propose des méthodes de simulation permettant d'identifier les défauts de forme et contraintes résiduelles qui surviennent suite au refroidissement des matériaux composites après leur mise en forme.

Ainsi, la possibilité d'anticiper les contraintes résiduelles et les défauts de forme des pièces en composites et éventuellement de les corriger grâce à la simulation justifierait une campagne de mesure pour une validation du modèle, mais les résultats de ces simulations permettraient de préparer les études de tolérancement flexible en indiquant les modes de défauts pertinents.

Du point de vue de la stratégie de calcul, lorsque la justesse de la méthode des coefficients n'est pas satisfaisante, il conviendrait de s'orienter vers d'autres approximations reflétant mieux les phénomènes non-linéaires. De nombreux travaux de recherche en mécanique sont menés actuellement sur les méthodes de réduction de modèles. Dans notre cas, celles-ci permettraient de construire une approximation peu coûteuse avec un nombre limité de simulations déterministes. La justesse de l'approximation est conditionnée par le nombre de simulations, mais une fois l'approximation construite, il est possible de l'utiliser pour l'analyse statistique, comme on l'a fait avec la méthode des coefficients d'influence. Ainsi, le nombre de simulations nécessaire est bien moins élevé que si on utilisait une stratégie de Monte-Carlo.

On trouve parmi ces méthodes, la *"POD" (Proper Orthogonal Decomposition)* [Chatterjee, 2000] et la *"PGD" (Proper Generalized Decomposition)* [Chinesta *et al.*, 2009], qui permettent d'approximer les champs issus des résultats de simulation comme étant la somme de modes définis de manière à ce que les variables aléatoires soient séparées. Pour la POD, les modes sont définis *a priori* tandis qu'avec la PGD, les modes sont établis au fur et à mesure des simulations. Habituellement utilisées pour des problèmes de mécanique spatiaux-temporels, elles semblent être adaptables à un problème tel que le notre, à savoir un problème où les variabilités sont géométriques [Safatly *et al.*, 2011].

Pour adapter ces méthodes au tolérancement de pièces souples, il conviendrait sans doute de reposer plus précisément le problème de mécanique des milieux continus d'une part, puis le problème des éléments finis stochastiques d'autre part [Berveiller et Sudret, 2002], [Sudret *et al.*, 2004]. En effet, nos travaux ont été menés avec une approche trop pragmatique pour que le lien avec ces méthodes de réduction de modèle soit évident.

Si celles-ci s'avèrent fructueuses avec le tolérancement flexible, la diminution du coût de calcul permettra de reconsidérer la synthèse de tolérances par analyses successives, mais aussi l'éventualité d'effectuer les simulations d'assemblage en tenant compte de l'aspect séquentiel des opérations, comme ce qui a été vu dans le chapitre 2 (voir figure 2.5 en page 49). En effet, bien que beaucoup plus coûteux en terme de nombre de simulations, le fait de simuler chaque étape du processus d'assemblage plutôt que de simuler directement l'état final assemblé permettrait tout d'abord d'anticiper une opération critique ou une détérioration prématurée des pièces pendant l'assemblage. Mais cela permettrait également de traîter des cas d'assemblages complexes réalisés avec contre-perçage.

Pour terminer, le tolérancement flexible gagnerait beaucoup à être enrichi par les nouvelles méthodes de calcul et de simulation issues de la recherche en mécanique et calcul de structures. Ces gains se mesureront en terme de réalisme des simulations, de fiabilité et justesse des résultats, et de diminution des coûts de calcul.

Mais entre l'exploitation de ces outils numériques et l'augmentation des cadences de la FAL, de nombreux transferts technologiques doivent être menés. Le développement des logiciels dédiés tels que *FitFlex* et *AnaTole Flex* est sans doute le meilleur moyen d'y arriver. Quant aux problématiques d'élaboration des modèles éléments finis et la modélisation des défauts géométriques qui serviront d'entrées à ces logiciels, l'expérience et la formation seront les points clés de l'amélioration et de la fiabilité du tolérancement des pièces souples.

# Annexe A

# Calcul de la contrainte de Von Mises dans les vis des liaisons

À partir des composantes $Fx_j$, $Fy_j$, $Fz_j$, $Mx_j$, $My_j$ et $Mz_j$ du torseur d'efforts généralisés qui transitent dans les liaisons numérotées $j$, on calcule la contrainte de Von Mises dans les vis de chaque liaison afin de détecter une éventuelle détérioration de ces dernières. La contrainte de Von Mises $\sigma_{eq}$ dans une vis dépend de sa section $S$, de l'effort de traction $F_N$ et de l'effort de cisaillement $F_T$ comme indiqué dans l'équation.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{F_N}{S}\right)^2 + 3\left(\frac{F_T}{S}\right)^2} < \sigma_{crit} \tag{A.1}$$

Afin de calculer les efforts $F_N$ et $F_T$ dans chaque vis, on suppose que les efforts généralisés dans les liaisons sont répartis de manière homogène sur chaque vis.

La figure A.1 illustre, pour une liaison à quatre vis, le calcul des efforts normaux dans les vis numérotées 1 à 4 à partir des composantes $Fz$, $Mx$ et $My$ des efforts généralisés dans la liaison.

L'effort normal dans les vis est alors supposé résulter de l'addition de la composante $Fz$ divisée par le nombre de vis, la composante du moment plan $\sqrt{Mx^2 + My^2}$ divisée par le nombre de vis et multipliée par les bras de levier, et une éventuelle précharge $p$ (voir équation A.2).

$$F_N = p + \frac{Fz}{4} \pm \frac{Mx}{4dy} \pm \frac{My}{4dx} \tag{A.2}$$

La figure A.2 illustre, pour la même liaison, le calcul des efforts tangentiels dans les vis à partir des composantes $Fx$, $Fy$ et $Mz$ des efforts généralisés dans la liaison.

L'effort tangentiel dans les vis est alors supposé résulter de l'addition des composantes $Fx$ et $Fy$ divisées par le nombre de vis, et la composante du moment $Mz$ divisée par le nombre de vis et multipliée par les bras de levier (voir équation A.3).

$$F_T = \frac{1}{4}\sqrt{\left(Fx \pm \frac{Mz.dy}{dx^2 + dy^2}\right)^2 + \left(Fy \pm \frac{Mz.dx}{dx^2 + dy^2}\right)^2} \tag{A.3}$$

Pour une liaison $j$ à $Nv$ vis numérotées $i$, on ne s'intéressera qu'à celle dont la contrainte est maximale (voir équation A.4).

$$\sigma_{eq} = \max_{i}^{Nv}\left(\sqrt{\left(\frac{F_N i}{S}\right)^2 + 3\left(\frac{F_T i}{S}\right)^2} < \sigma_{crit}\right) \tag{A.4}$$

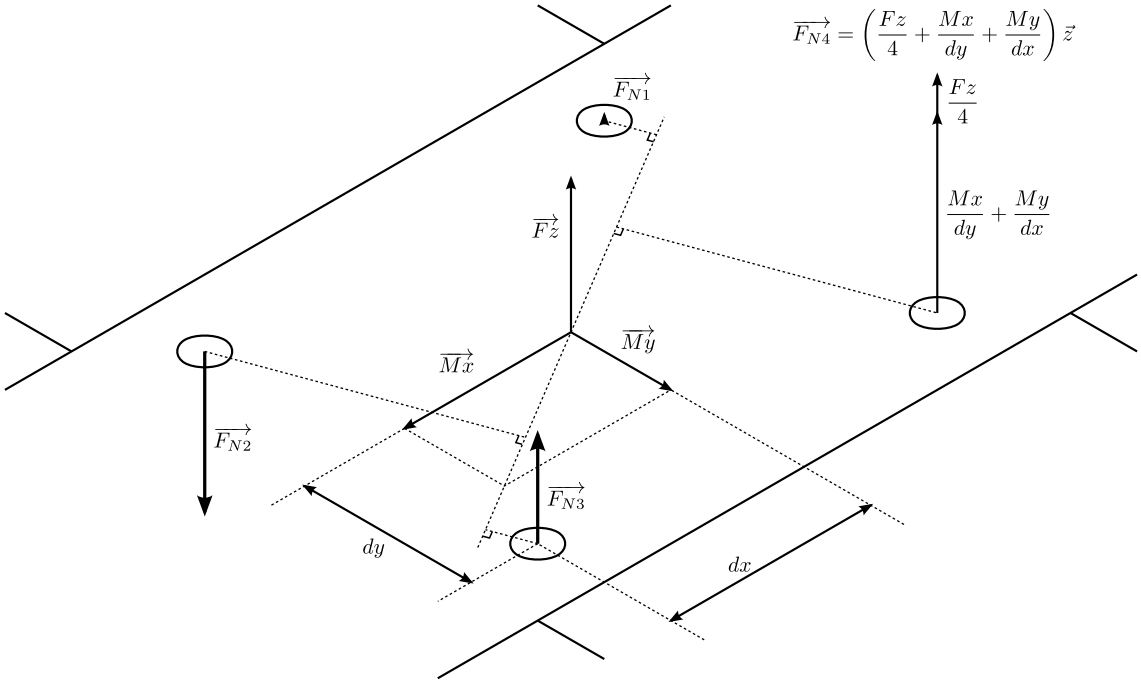



**Figure A.1:** *Calcul de l'effort normal dans les vis.*

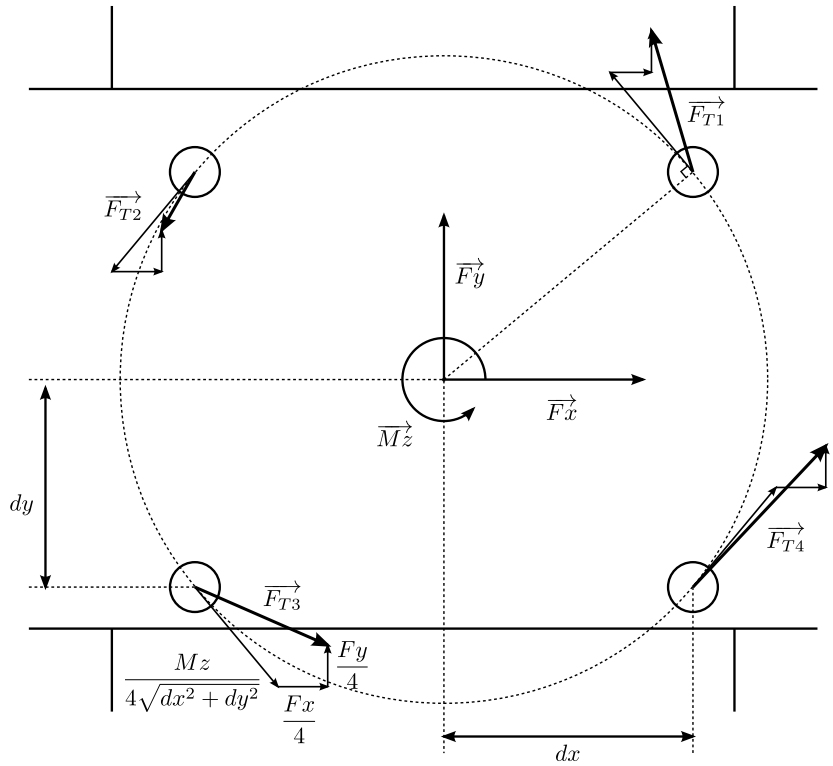



**Figure A.2:** *Calcul de l'effort tangentiel dans les vis.*

# Bibliographie


AFNOR (1995). NF X06-33Aptitude des moyens de production et des processus de fabrication – Généralités.

AFNOR (2010). NF ISO 10579 : Spécification géométrique des produits (GPS) - Cotation et tolérancement - Pièces non rigides.

Alkatan, F., Stephan, P., Daidie, A. et Guillot, J. (2007). Equivalent axial stiffness of various components in bolted joints subjected to axial loading. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43:589 – 598.

Andolfatto, L. (2013). *Assistance à l'Élaboration de Gammes d'Assemblage innovantes de Structures composites*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Areny, P. (2012). *Prise en compte des incertitudes pour la simulation d'essais de structures aéronautiques élancées en compression.* Thèse de doctorat, ENS de Cachan.

Ballot, E. et Bourdet, P. (1996). Présentation à partir d'un exemple du calcul des chaînes de cotes 3D. *Revue Technologies et Formations*, 68(5):23–27.

Ballu, A., Dantan, J.-Y. et Mathieu, L. (2007). *Langage de Spécification : GeoSpelling*, chapitre 2, pages 39–67. Lavoisier, hermes sci édition.

Ballu, A., Mathieu, L. et Dantan, J.-Y. (2001). Global View of Geometrical Specifications. *In 7th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing*, pages 19–30.

Batoz, J.-L. et Dhatt, G. (1992). *Modélisation des structures par éléments finis Volume 3 : Coques*. Hermes édition.

Batoz, J.-L. et Dhatt, G. (1993). *Modélisation des structures par éléments finis Volume 2 : Poutres et plaques*. Hermes édition.

Berveiller, M. et Sudret, B. (2002). Construction de la réponse paramétrique déterministe d'un système mécanique par éléments finis stochastiques. pages 45–50.

Bihlmaier, B. (1999). *Tolerance Analysis of Flexible Assemblies Using Finite Element and Spectral Analysis*. Master thesis, Brigham Young University.

Bihlmaier, B., Chase, K. W. et Smith, C. (1999). Tolerance Analysis of Flexible Assemblies Using Finite Element and Spectral Analysis.

Bognet, B., Chinesta, F., Leygue, A. et Poitou, A. (2011). Proper Generalized Decomposition (PGD) et séparation de variables spatiales pour la résolution en thermoélasticité linéaire appliquée à des plaques composites. *In CMSA 2011 - 10ème colloque National en Calcul des Structures*, pages 1–8.

Boucard, P.-A. et Champaney, L. (2003). A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9):1259–1281.

Breteau, P. (2009). *Simulation d'assemblage flexible par la mesure - Application au domaine de l'aéronautique.* Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Breteau, P., Thiebaut, F., Bourdet, P. et Falgarone, H. (2007). Assembly simulation of flexible parts through the fitting of linkage devices. *In Proc. of the 10 th CIRP Int. Sem. on Computer Aided Tolerancing.*

Camelio, J. A., Hu, S. J. et Ceglarek, D. (2003). Modeling Variation Propagation of Multi-Station Assembly Systems With Compliant Parts. *Journal of Mechanical Design*, 125(4):673–681.

Camelio, J. A., Hu, S. J. et Zhong, W. (2004). Diagnosis of multiple fixture faults in machining processes using designated component analysis. *Journal of Manufacturing Systems*, 23(4):309–315.

Ceglarek, D. et Shi, J. (1995). Dimensional variation reduction for automotive body assembly. *Manufacturing Review*, 8(2):139–154.

Ceglarek, D. et Shi, J. (1996). Fixture Failure Diagnosis for Autobody Assembly Using Pattern Recognition. *Journal of Engineering for Industry*, 118(1):55.

Ceglarek, D. et Shi, J. (1997). Tolerance analysis for sheet metal assembly using a beam-based model. *Journal of Engineering for Industry*, (c).

Chang, M. et Gossard, D. (1997). Modeling the assembly of compliant, non-ideal parts. *Computer-Aided Design*, 29(10):701–708.

Chatterjee, A. (2000). An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78(7):808–817.

Chinesta, F., Ammar, A. et Cueto, E. (2009). Proper generalized decomposition of multiscale models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*

Cid, G. (2005). *Etablissement des relations de comportement de mécanismes avec prise en compte des écarts géométriques et des souplesses des composants.* Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Clozel, P. et Rance, P.-A. (2007). *MECAmaster : un outil de simulation des assemblages dès la conception préliminaire, approche industrielle*, chapitre 10, pages 247–277. Lavoisier, hermes sci édition.

Costadoat, R. (2010). *Contribution à la recherche de spécifications pour la gestion des variations géométriques au plus tôt dans le cycle de conception.* Thèse de doctorat, ENS de Cachan.

Courrier, N. (2009). Critères de choix d'un modèle éléments finis pour la simulation d'assemblage pour le tolérancement flexible.

Dahlström, S. et Lindkvist, L. (2007). Variation simulation of sheet metal assemblies using the method of influence coefficients with contact modeling. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 129(3):615–622.

Dantan, J.-Y., Ballu, A. et Mathieu, L. (2001). Expression des spécifications géométriques des produits - Classification des éléments géométriques. *In Journée thématique PRIMECA*, pages 69–78, Aix-en-Provence, France.

Decouvreur, V., Ladevèze, P. et Bouillard, P. (2008). Updating 3D acoustic models with the constitutive relation error method : A two-stage approach for absorbing material characterization. *Journal of Sound and Vibration*, 310:985–997.

Enjalbert, P. (2009). *Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste.* Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Favreliere, H. (2009). *Tolérancement Modal : De la Métrologie vers les Spécifications.* Thèse de doctorat, Université de Savoie.

Fine, L. (2001). *Processus et méthodes d'adaptation et d'idéalisation de modèles dédiés à l'analyse de structures mécaniques.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.

Florentin, E., Gallimard, L., Pelle, J.-P. et Rougeot, P. (2005). Adaptive meshing for local quality of FE stresses. *Engineering Computations*, 22(2):149–164.

Formosa, F. et Samper, S. (2007). *Modal Expression of form defects*, pages 13–22. Springer Verlag.

Foucault, G. (2008). *Adaptation de modèles CAO paramétrés en vue d'une analyse de comportement mécanique par éléments finis.* Thèse de doctorat, École de Technologie Supérieure, Université du Québec.

Franciosa, P., Gerbino, S. et Patalano, S. (2010). Simulation of variational compliant assemblies with shape errors based on morphing mesh approach. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 53(1-4):47–61.

Gant, F. (2011). *Stratégie de modélisation et de simulation des assemblages de structures aéronautiques en contexte incertain.* Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Giordano, M., Pairel, E. et Samper, S. (2007). *Analyse et synthèse de tolérances : méthode des domaines*, chapitre 7, pages 161–193. Lavoisier, hermes sci édition.

Gordis, J. H. et Flannelly, W. G. (1994). Analysis of stress due to fastener tolerance in assembled components. *AIAA journal*, 32(12):2440–2446.

Hashin, Z. (1980). Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, page 47 :329.

Huth, H. (1986). *Influence of fastener flexibility on the prediction of load transfer and fatigue life for multiple row joints*, pages 221–250.

Ladevèze, P. (2000). Constitutive relation error estimators for time-dependent non-linear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:775–788.

Le Fichoux, E. (1998). *Présentation et Utilisation de CAST3M 2000.*

Lemaitre, J. et Chaboche, J.-L. (2004). *Mécanique des matériaux solides.*

Liu, S. C. et Hu, S. J. (1997). Variation Simulation for Deformable Sheet Metal Assemblies Using Finite Element Methods. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 119(3):368–374.

Marguet, B. (2001). *Contribution à l'analyse des variations géométriques dans les ensembles structuraux en aéronautique : Démarche et outils.* Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Mathieu, L. et Villeneuve, F. (2007). *Tolerancement géométrique des produits.* Lavoisier, hermes sci édition.

Merkley, K. G. (1998). *Tolerance analysis of compliant assemblies.* Thèse de doctorat, Brigham Young University.

Merkley, K. G., Chase, K. W. et Perry, E. (1996). An introduction to tolerance analysis of flexible assemblies. *In Proceedings of the 1996 MSC World Users Conference*, pages 1–14.

Mons, P. (2013). *Concepts et méthode de conception produit/process pour l'installation modulaire des systèmes aéronautiques.* Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Mounaud, M. (2009). *Contribution à l'analyse des défauts géométriques dans le routage d'un réseau hydraulique en aéronautique : Incidences sur la conception.* Thèse de doctorat.

Olsson, A., Sandberg, G. et Dahlblom, O. (2002). On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural safety*, 25(1):47–68.

Puck, A. et Schürmann, H. (2002). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 62(12-13):1633–1662.

Rosenzveig, G. (2011). Recalage de modèles EF de structures aéronautiques légères en vue de la simulation de leur assemblage.

Roulet, V. (2012). *Stratégie multiparamétrique pour la simulation d'assemblages de structures stratifiées.* Thèse de doctorat, ENS de Cachan.

Safatly, E., Chevreuil, M. et Nouy, A. (2011). Proper Generalized Decomposition pour les problèmes aux limites définis sur des domaines incertains. *In CMSA 2011 - 10ème colloque National en Calcul des Structures*, Giens.

Samper, S. et Formosa, F. (2007). Form Defects Tolerancing by Natural Modes Analysis. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 7(1): 44.

Samper, S., Louche, H. et Paccard, P. (2003). Conception d'une cloche. Mise en place d'une démarche de simulation vibratoire. *In Integrated Design and Production*, Meknès, Maroc.

Samper, S., Petit, J. et Giordano, M. (2007). Elastic Clearance Domain and Use Rate Concept Applications to Ball Bearings and Gears. *Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing*, pages 331–340.

Sellem, E. (2000). *Caracterisation probabiliste des assemblages hyperstatiques.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.

Sellem, E. et Gyomard, K. (2000). Outil CATIA pour l'analyse de tolérances des assemblages déformables. *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique*, 18(1):123–131.

Shiu, B., Ceglarek, D. et Shi, J. (1997). Flexible beam-based modeling of sheet metal assembly for dimensional control. *TRANSACTIONS-NORTH AMERICAN MANUFACTURING RESEARCH INSTITUTION OF SME*, XXV:49–54.

Sudret, B., Berveiller, M. et Lemaire, M. (2004). Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire. 332:531–537.

Tching, L., Dumont, G. et Perret, J. (2010). Interactive simulation of CAD models assemblies using virtual constraint guidance. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 4(2):95–102.

Teissandier, D., Delos, V. et Couétard, Y. (1999). Operations on polytopes : application to tolerance analysis. *In 6th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing*, Enschede, Netherlands.

Thiebaut, F. (2001). *Contribution à la définition d'un moyen unifié de gestion de la géométrie réaliste basé sur le calcul des lois de comportement des mécanismes.* Thèse de doctorat.

Tsai, S. W. et Wu, E. M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of composite materials, 5(1) :58.*, 5(1):58.

Zhang, M. (2012). *Discrete Shape Modeling for Geometrical Product Specifications : Contributions and Applications to Skin Model Simulation.* Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Zhang, M., Anwer, N. et Mathieu, L. (2010). Discrete Geometry for Product Specification and Verification. *In IDMME - Virtual Concept*, pages 2–4, Bordeaux, France.

Zhang, M., Anwer, N., Mathieu, L. et Zhao, H. (2011). A Discrete Geometry Framework for Geometrical Product Specifications. *In Interdisciplinary Design : Proceedings of the 21st CIRP Design Conference*, numéro section 2.

Zienkiewicz, O. C. et Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element Method Fifth edition Volume 1 : The Basis*, volume 1. Butterworth-Heinemann.