

École Doctorale du Conservatoire National des Arts et Métiers (ED415)

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés.

## THÈSE DE DOCTORAT

*présentée par* : **Thomas MIRAS**

*soutenue le* : **03 Juillet 2013**

*pour obtenir le grade de* : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

*Spécialité* : **Mécanique**

### Effets de la viscosité et de la capillarité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique contenant un liquide incompressible

#### Membres du Jury :

ALFREDO BERMÚDEZ	Rapporteur	<i>Universidade de Santiago de Compostela</i>
GAËL CHEVALLIER	Rapporteur	<i>SUPMECA Paris</i>
ÉTIENNE BALMÈS	Examineur	<i>ENSAM Paris</i>
MICHEL VISONNEAU	Examineur	<i>École Centrale Nantes</i>
JEAN-PIERRE GRISVAL	Invité	<i>ONERA</i>
ROGER OHAYON	Directeur de thèse	<i>CNAM Paris</i>
JEAN-SÉBASTIEN SCHOTTÉ	Encadrant	<i>ONERA</i>

*Para mis abuelos : Francisco, Pilar, Jean, Josiane.*

# Remerciements

Pour réaliser ces travaux de thèse, je dois dire que ma motivation ne m'a pas suffi : je tiens ici à remercier ceux qui ont permis que cette thèse puisse se faire mais également ceux qui m'ont permis d'arriver jusqu'au bout sans trop souffrir !

Je tiens à remercier Jean-Pierre Grisval et Nicolas Piet pour m'avoir accueilli au sein du Département Aéroélasticité et Dynamique des Structures, ainsi que Jean-François Deü du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés.

Je tiens également à remercier ceux qui ont encadré cette thèse, le professeur Roger Ohayon pour ses conseils et sa disponibilité ainsi que Jean-Sébastien Schotté pour m'avoir encadré, soutenu, encouragé. J'ai énormément appris durant ces années, et pour ces longs moments de remplissage de tableaux : encore merci !

Bien entendu, je remercie l'ensemble de mes collègues du département qui ont contribué à une atmosphère agréable, amicale, pour tous ces repas et cafés partagés.

Enfin je souhaite remercier ceux que je ne voyais pas forcément au quotidien mais qui m'ont soutenu, leurs mots d'encouragement dans les moments difficiles ont été plus que précieux : Mes grand-parents Pilar, Francisco, Jean, Josiane et mes parents Dominique et Isidro qui m'ont toujours soutenu et motivé pour mes études. Ma famille, de Marseille à Paris : Norman, Delphine, les deux nouveaux Diego et Paola, Genevieve, Gonzalo, Hugo, Théo, Pascale, Julia, encore Pascale, Patrick, Océane, Maeva, Sandra, Harold, Romain, Severine et la petite Léonie : merci pour tout.

Enfin, je voudrais remercier les copains ! Grâce à vous j'ai pu me changer les idées, décompresser à des moments clés, vous m'avez régalié ! Lolo, Sylv, Fab, Emilie, Nat, David, la coloc ! : JJ - Manu - Nico, Claire, Oliv', Guigui, Marjo, Emeric, Marie, Sam, Clém, Christiiina, Yves (mon jumeau de CV), Juju, PM, Yoyo, John, Cécé, Ouss', Steph', et toute la team Supmeca, encore merci ! Hélas dans mon envie d'en finir avec cette thèse (c'était quand même chouette hein !) il se peut que j'ai oublié quelques personnes, pas grave, vous serez dans la prochaine...

## REMERCIEMENTS

---

# Résumé

Ce travail de recherche traite du couplage entre un liquide incompressible, irrotationnel et son contenant : une structure élastique. Cette interaction Fluide-Structure est traitée dans le cadre des petites déformations autour d'un état d'équilibre.

Dans un premier temps, on présente une méthode d'introduction des sources dissipatives visqueuses dans le liquide à partir des équations du système couplé conservatif en s'appuyant sur une approche de type fluide potentiel généralement utilisée pour traiter les problèmes de couplage fluide-structure linéarisés non amortis. Un modèle d'amortissement diagonal est alors choisi pour le liquide et les effets dissipatifs de celui-ci sont pris en compte en calculant les coefficients d'amortissement modaux. Seuls les effets dissipatifs liés à la viscosité du liquide sont alors pris en compte. Le système couplé dissipatif obtenu possède une matrice d'amortissement non symétrique. Une résolution de ce système à amortissement non classique est alors présentée et les expressions des réponses fréquentielle et temporelle linéarisées sont données pour différents types d'excitations.

Dans un deuxième temps, le liquide est supposé non visqueux et les forces de tension surfacique sont prises en compte. Cette configuration concerne principalement les satellites où le système couplé est en situation de microgravité. Une formulation du problème conservatif permettant de prendre en compte l'incompressibilité du fluide, la condition de continuité à l'interface fluide structure, les effets de capillarité du fluide ainsi que les effets éventuels de précontraintes statiques est alors établie. On se propose pour cela d'utiliser une méthode énergétique via le Principe de Moindre Action. La démarche est alors décomposée en deux étapes : une étude statique afin de déterminer la position de référence, puis une étude dynamique linéarisée autour de cette position d'équilibre. Cette formulation forme notamment une base pour l'introduction des sources dissipatives liées aux effets de capillarité via

## RÉSUMÉ

---

la méthode précédemment introduite.

**Mots clés :** Ballotement, Amortissement diagonal, Modes propres complexes, Synthèse modale, Formulation variationnelle, Principe de Moindre Action, Interaction Fluide Structure, Incompressibilité, Tension Surfaique, Dissipation visqueuse, Capillarité, Microgravité, Ménisque, Vibrations, Éléments finis.



## RÉSUMÉ

---



# Abstract

This study deals with the coupling between an incompressible, irrotational fluid and an elastic container in the context of small amplitude vibrations.

Firstly, we present a method to introduce the viscous dissipative sources in the liquid directly from the equations of the conservative coupled problem using a fluid potential approach generally used to treat linear undamped problems. A diagonal damping model is chosen for the liquid and its dissipative effects are taken into account through modal damping coefficients. Only the viscous effects are considered here. The coupled system obtained has a non symmetric damping matrix. This system with non classical damping is solved and expressions of the frequency and linearized time responses are given for different load examples.

The liquid is then supposed to be inviscid and surface tension forces are considered. This configuration is related to satellite applications where the coupled system is in microgravity conditions. A unified formulation of the conservative problem taking into account the fluid incompressibility, the contact condition at the fluid structure interface, capillarity and pre-stress effects is given. Thus, we propose to use an energy method via the Least Action Principle. The reasoning is then divided into two parts : a static study to determine the reference state and a linearized dynamic study around this equilibrium state. This formulation is a good framework to introduce the dissipative sources associated with the capillary effects by using the method previously introduced.

**Keywords :** Sloshing, Damping, Complex Eigenmodes, Modal Synthesis, Variational formulation, Least Action Principle, Fluid-Structure Interaction, Incompressibility, Sur-

## ABSTRACT

---

face Tension, Viscous dissipation, Capillarity, Microgravity, Meniscus, Vibrations, Finite Elements.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>I Réponse linéaire amortie d'une structure contenant un liquide</b>	<b>25</b>
<b>1 Équations matricielles du modèle fluide-structure complet conservatif</b>	<b>29</b>
<b>2 Équations matricielles du modèle fluide-structure réduit amorti</b>	<b>35</b>
2.1 Modèle réduit de fluide ballotant . . . . .	36
2.2 Équations réduites du système couplé . . . . .	42
2.3 Comparaison entre modèle couplé réduit et modèle complet . . . . .	43
<b>3 Résolution par une méthode de synthèse modale complexe</b>	<b>49</b>
3.1 Modes complexes du système couplé fluide-structure réduit amorti . . . . .	49
3.1.1 Transformation en un problème aux valeurs propres du premier ordre	50
3.1.2 Propriété des modes doubles . . . . .	51
3.1.3 Exemple de calcul des modes complexes d'une cuve axisymétrique .	53
3.2 Réponse fréquentielle par synthèse modale complexe . . . . .	54
3.2.1 Réponse impulsionnelle . . . . .	56
3.2.2 Correction statique . . . . .	58
3.3 Réponse temporelle (linéarisée) par synthèse modale complexe . . . . .	59
3.4 Recomposition de la réponse du fluide . . . . .	61

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.5	Analyse d'un exemple . . . . .	64
3.5.1	Influence de la correction statique . . . . .	64
3.5.2	Convergence de la solution en fonction de la base modale complexe. . . . .	65
3.5.3	Comparaison des synthèses modales complexe et réelle pour le calcul de la réponse en fréquence . . . . .	67
3.5.4	Réponse temporelle . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Estimation des coefficients d'amortissement modaux</b>	<b>73</b>
4.1	Amortissement visqueux aux parois . . . . .	76
4.2	Amortissement visqueux dans le volume du liquide . . . . .	78
4.3	Implémentation et validation . . . . .	79
4.3.1	Notations . . . . .	79
4.3.2	Calcul de $\Delta E_i^\Sigma$ . . . . .	81
4.3.3	Calcul de $\Delta E_i^\Omega$ . . . . .	82
4.3.4	Cas test analytique . . . . .	84
4.3.5	Cas test expérimental . . . . .	84
4.3.6	Influence de l'amortissement des modes de ballonnement sur la synthèse modale. . . . .	89
<b>II</b>	<b>Effets de la capillarité sur les vibrations du système fluide-structure considéré</b>	<b>93</b>
<b>5</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>97</b>
5.1	Introduction aux effets de capillarité . . . . .	97
5.1.1	Énergie d'interface et tension superficielle . . . . .	97
5.1.2	Mouillage . . . . .	99
5.2	Paramétrisation du problème . . . . .	102

## TABLE DES MATIÈRES

---

5.3	Principe de Moindre Action . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Du bilan énergétique à la formulation variationnelle statique non linéaire</b>	<b>107</b>
6.1	Bilan énergétique . . . . .	107
6.1.1	Incompressibilité . . . . .	109
6.1.2	Énergie potentielle de pesanteur du fluide . . . . .	110
6.1.3	Énergie potentielle élastique de la structure . . . . .	111
6.1.4	Énergies surfaciques . . . . .	111
6.1.5	Couplage Fluide-Structure . . . . .	114
6.2	Étude statique . . . . .	115
6.2.1	État d'équilibre du fluide . . . . .	115
6.2.2	État d'équilibre de la structure . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Formulation variationnelle dynamique linéarisée</b>	<b>119</b>
7.1	Linéarisation des équations variationnelles (phase A) . . . . .	120
7.2	Expression des multiplicateurs de Lagrange (phase B) . . . . .	127
7.3	Équation Fluide . . . . .	130
7.4	Équation Structure . . . . .	133
7.5	Synthèse (phase C) . . . . .	135
7.6	Comparaisons . . . . .	137
7.6.1	Dans le cas où les effets de la capillarité sont négligeables . . . . .	137
7.6.2	Dans le cas où les déformations de la structure sont négligeables . . . . .	138
7.7	Équations locales (problème ouvert) . . . . .	139
7.8	Formulation matricielle . . . . .	141
7.9	Symétrisation . . . . .	144
<b>8</b>	<b>Pistes pour la prise en compte de l'amortissement lié aux effets de la</b>	

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>capillarité</b>	<b>145</b>
8.1 Angle de contact Dynamique . . . . .	146
8.2 Écoulements de Marangoni . . . . .	152
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>159</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>160</b>
<b>Annexes</b>	<b>173</b>
<b>A Cas particuliers d’amortissement</b>	<b>173</b>
A.1 Système à amortissement proportionnel . . . . .	174
A.2 Système à amortissement structural . . . . .	175
<b>B Rappels de Mécanique des fluides</b>	<b>177</b>
<b>C Étude de l’équation de Navier-Stokes linéarisée pour un liquide faible- ment visqueux contenu dans un réservoir déformable.</b>	<b>181</b>
<b>D Expression de la variation d’un volume</b>	<b>189</b>
<b>E Fluide ballottant dans un réservoir fixe</b>	<b>191</b>
<b>F Fluide ballottant dans un réservoir élastique</b>	<b>197</b>
<b>G Symétrie des opérateurs de raideur</b>	<b>207</b>
<b>H Linéarisation de l’opérateur de raideur de la ligne triple</b>	<b>213</b>
<b>I Analyse modale d’un problème couplé avec prise en compte de la capil- larité</b>	<b>219</b>

TABLE DES MATIÈRES

---

**J Formulaire**

**223**

## TABLE DES MATIÈRES

---



# Introduction générale

Le problème d'interaction entre un fluide et une structure est un problème récurrent, apparaissant dans de nombreux domaines et pouvant prendre de nombreuses formes. On peut regrouper ces problèmes en deux catégories différentes : lorsque le fluide est en écoulement par rapport à la structure (c'est le cas par exemple des problèmes d'*aéroélasticité*) ou bien lorsque le fluide et la structure évoluent autour d'une configuration d'équilibre statique initiale. On étudie dans ce manuscrit cette seconde catégorie de problème en considérant que le fluide est contenu dans une cavité de la structure et subit de petites perturbations autour de sa position d'équilibre. Plusieurs phénomènes peuvent alors intervenir à des plages de fréquences différentes :

- Aux fréquences les plus basses, des vagues apparaissent à la surface libre du liquide : phénomène que l'on désigne par le terme *ballotement*.
- Pour des fréquences plus élevées, les vibrations de la structure viennent se coupler au liquide considéré comme incompressible : c'est l'*hydroélasticité*.
- Aux fréquences encore plus élevées, des phénomènes acoustiques apparaissent dans le liquide : on parle alors de *vibroacoustique*.

Dès la fin des années 50, on cherche, dans le domaine aérospatial, à évaluer le phénomène de ballotement pour des liquides dans des réservoirs embarqués. On peut notamment citer les travaux importants d' Abramson [1] en 1966 (dont une version actualisée est publiée en 2000 par Dodge [31]). De nos jours, ce problème reste un sujet d'actualité faisant l'objet de nombreuses publications : comme le montrent les ouvrages récents de Faltinsen et al [38] et d'Ibrahim [55]. Ce type d'interaction Fluide-Structure se retrouve dans différents domaines de l'industrie tels que le transport (camions citernes, bateaux super-tanker, etc), le nucléaire (piscine de stockage et autres cuves excitées par des tremblements de terre,

etc) ou bien l'aérospatial (réservoirs d'avions, de lanceurs, de satellites, etc). En effet les avions, et les structures spatiales en général, sont de plus en plus légers et leur autonomie est souhaitée de plus en plus importante (la durée de vie d'un satellite est par exemple directement liée à la quantité de carburant qu'il peut transporter), ainsi les réservoirs contenant le carburant sont de plus en plus imposants et l'influence du liquide interne sur la structure devient primordiale. Les mouvements du liquide peuvent influencer le comportement de la structure principale mais aussi interagir avec d'autres phénomènes destructeurs comme le flottement [40]. Pour un satellite, les liquides internes peuvent être excités par le déploiement d'équipements ou bien par le moteur lors de manoeuvres, et devenir une source de problèmes. Ainsi, plusieurs incidents ont été recensés et ont motivé ces études sur les effets des liquides internes en montrant le besoin de la part des concepteurs de disposer d'outils numériques pour mieux comprendre ces phénomènes d'interaction. On peut par exemple citer le retard de la mission NEAR Shoemaker, les effets inattendus observés sur les satellites Intelsat 4 [46], la perte du satellite ATS 5 peu après sa mise en orbite en 1969 ou bien les problèmes liés à la présence de liquide dans le satellite Gravity Probe B [54].

La particularité du problème lié au fluide ballotant dans un réservoir vient de la présence d'une surface libre qui fait que le domaine occupé par le liquide est lui-même une inconnue du problème. Il existe différents types d'approches pour aborder ce problème et modéliser le comportement du fluide. Certains domaines d'application s'intéressent aux déplacements non-linéaires du liquide et ce sont les grandes déformations du volume liquide et de sa surface libre qui sont étudiées dans le domaine temporel. La résolution de ce problème complexe se fait par une approche "Mécanique des Fluides" via une formulation purement Eulerienne comme pour la méthode Volume Of Fluid (VOF) [50] ou bien à l'aide d'une composante Lagrangienne comme dans la méthode Arbitrary Lagrange Euler (ALE) [32]. Dans [85], l'auteur décrit les différentes approches numériques possibles pour traiter ces cas non-linéaires et les compare entre elles.

Dans certains cas, quand le mouvement du liquide reste de faible amplitude et donc l'hypothèse des petites perturbations reste valide, ces méthodes coûteuses en temps de calcul ne sont pas les plus adaptées. C'est à ce type de cas que l'on va s'intéresser ici. Il sera

en particulier possible de linéariser les équations du système autour de l'état d'équilibre. Cette approche est notamment adaptée au calcul des modes de vibration du système couplé et à la résolution du problème dans le domaine fréquentiel.

En particulier, l'intérêt d'une approche linéarisée est de pouvoir utiliser une méthode de synthèse modale pour construire un modèle réduit linéaire du système fluide-structure. Cette réduction de modèle permet notamment de prendre en compte l'effet du fluide dans l'étude de structures industrielles complexes (modèles d'avions ou de lanceurs complets). Cette approche généralise alors la représentation par des systèmes mécaniques équivalents : masse-ressort-amortisseur ou pendules [91, 2, 84]. L'utilisation de modèles équivalents peut notamment être utile pour dimensionner des systèmes de contrôle [31, 21, 87, 37]. Pour ce genre d'applications (contrôle, stabilité), les méthodes CFD ne fournissent pas toujours des résultats satisfaisants [96].

On souhaite dans ce manuscrit étendre cette approche aux systèmes fluide-structure couplés non conservatifs en s'intéressant à l'aspect amortissement du fluide, ainsi qu'aux systèmes couplés fluide-structure en micro-gravité, c'est à dire lorsque les forces de gravité deviennent du même ordre de grandeur que les forces de tension de surface qui ne sont par conséquent plus négligeables. Les forces de tension de surface vont agir sur les interfaces du système et notamment sur la surface libre du liquide qui va alors former un *ménisque*. Si les applications restent porteuses dans le domaine des satellites : réponse du liquide à un mouvement imposé de la structure, modes propres couplés du système, etc ... peu d'études se sont encore intéressées à ce problème.

La modélisation de l'amortissement des vibrations du système couplé est un élément important permettant de mieux comprendre le comportement du liquide et de prévoir son influence. Cette thématique fait l'objet de recherches récentes. Certaines études visent la réduction de l'influence du liquide en jouant sur la forme du réservoir [70], les propriétés de la structure, comme son élasticité, en ajoutant des rigidités locales [45], ou bien par l'ajout d'amortisseurs passifs ou actifs dans le volume liquide de type *baffle*. On peut notamment citer les travaux de Hernández et Santamarina [49] qui s'intéressent au contrôle actif du fluide (en utilisant une approche modale). La compréhension du comportement du

liquide permet également d’imaginer et de dimensionner des réservoirs pour qu’ils servent eux-mêmes d’amortisseur passif, celui-ci pouvant être rigide ou élastique et contenant un liquide qui vient dissiper l’énergie transmise par les mouvements de la structure [69].

Ces investigations nécessitent une bonne connaissance des effets dissipatifs dans le liquide. Dans [48], l’auteur présente les quatre sources d’amortissement principales dans le liquide. Deux de ces sources concernent les dissipations visqueuses dans le volume liquide et au niveau de l’interface fluide-structure. Les deux autres sources dissipatives, moins ”classiques” sont liées aux effets de capillarité et peuvent dans certains cas jouer un rôle important [26] : la dissipation au niveau de la surface libre du liquide (effets de *Marangoni*) et le frottement du bord de la surface libre sur la paroi du réservoir (phénomène de mouillage).

Ce sont généralement les effets liés à la viscosité qui sont pris en compte, les deux dernières sources d’amortissement liées aux effets de capillarité étant souvent négligées en considérant une surface libre sans impuretés et une condition simplifiée de contact de la surface libre sur la paroi (sans frottement). La dissipation visqueuse est naturellement prise en compte lorsque l’équation de Navier Stokes est utilisée pour décrire le mouvement du fluide, c’est le cas notamment dans les nombreux logiciels CFD et les méthodes non-linéaires introduites précédemment. La difficulté avec ces méthodes CFD vient de la dissipation numérique qui a tendance à engendrer une mauvaise estimation de l’amortissement [66]. Il est notamment difficile d’estimer la dissipation du liquide au niveau des parois sans un raffinement important du maillage de la couche limite (ce qui est pénalisant pour les temps de calcul).

Pour prendre en compte ces sources d’amortissement, dans [52], par analogie avec les problèmes d’acoustique (fluide dans une cavité), l’auteur modifie la condition aux limites classique sur l’interface entre le liquide et la structure (continuité des vitesses normales) pour introduire un terme dissipatif dépendant d’un coefficient d’amortissement. Cette approche justifiée notamment par l’utilisation d’une méthode BEM (Boundary Element Method) nécessite cependant des résultats expérimentaux pour déterminer le coefficient d’amortissement adéquat.

Une autre manière de prendre en compte l’amortissement est de partir du système conservatif pour ensuite introduire *a posteriori* les effets dissipatifs. C’est cette méthode classique

en dynamique des structures qui a été choisie et adaptée au problème d'interaction fluide-structure. On aura ainsi une approche similaire à celle présentée par Utsumi qui, à partir de l'équation conservative, calcule des coefficients d'amortissement modaux (pour les modes de ballonnement du liquide)[101].

La physique des phénomènes dissipatifs est introduite uniquement au niveau du calcul de ces coefficients d'amortissement modaux. L'amortissement lié aux effets de capillarité est rarement pris en compte dans les formulations variationnelles. Cependant, avec l'approche présentée précédemment, une bonne connaissance des effets de capillarité sur le système conservatif et une description simple des phénomènes dissipatifs liés à la capillarité peuvent suffire pour l'introduire. On s'intéressera donc dans un deuxième temps à la mise en place d'une formulation permettant de prendre en compte les effets de la capillarité sur le couplage entre le liquide et la structure. On considère alors les tensions surfaciques au niveau des trois interfaces du système (liquide-solide, liquide-gaz, gaz-solide). Dans [35], El-Kamali donne une formulation variationnelle détaillée du problème statique et dynamique mais en considérant une structure rigide. De même, Wang [102] étudie les modes du liquide en cavité rigide et propose une étude des différentes conditions aux limites de la surface libre sur la paroi, mais en négligeant la courbure de la surface libre du liquide. Dans [106], l'auteur considère des mouvements de corps rigide de la structure mais en se limitant à une géométrie simple et à la première fréquence propre non amortie. Dans l'étude du problème couplé d'une structure élastique avec effets de capillarité du liquide, on peut notamment citer les travaux de Bauer et Chiba [11, 20] ainsi que de Schulkes [94] qui considèrent les effets de la partie rotationnelle du fluide, cependant ces études se limitent à un container considéré comme rigide au niveau de l'intersection avec la surface libre.

Il est à noter que pour la construction d'une formulation variationnelle du problème couplé, parmi les différentes manières possibles, l'utilisation d'une méthode énergétique [4, 65] semble ici la plus appropriée du fait que les équations locales, notamment au niveau du bord de la surface libre, restent méconnues.

L'aspect expérimental a joué un rôle important dans la compréhension du phénomène de ballonnement et reste l'objet de nombreuses études récentes, le but étant la validation de modèles analytiques ou numériques. Cependant, lorsqu'il s'agit d'étudier l'amortissement, les données se limitent souvent à la première fréquence propre amortie, le coefficient d'amortissement étant obtenu par décrement logarithmique [6, 68]. Parmi les expérimentations en condition de microgravité, plusieurs procédures sont possibles : l'utilisation de *Drop Towers*, les vols paraboliques ou bien l'envoi de satellites dans l'espace. Les *Drop Towers* sont un moyen simple de simuler la condition de microgravité : le dispositif expérimental est lâché du haut d'une tour et les données sont enregistrées pendant la chute libre. Cette technique permet de répéter l'expérience, mais offre un très court temps de mesure. Ainsi en 1967, Salzman [90] a été l'un des premiers à proposer des résultats expérimentaux via cette technique (2.3 secondes de chute libre pour cette étude) pour la première fréquence propre et l'amortissement associé, ainsi que le comportement de la surface libre frottant sur les parois du réservoir. Plus récemment, une étude a été réalisée par Yang [107] avec une faible hauteur de 2.18 mètres offrant 0.7 seconde de microgravité et permettant l'étude de la forme de la surface libre à l'état d'équilibre. Les vols paraboliques utilisent le même principe de chute libre à l'aide d'avions spécialement équipés, les chutes sont plus longues (environ 20 secondes) mais la campagne expérimentale est plus coûteuse. La dernière possibilité consiste à envoyer en orbite le dispositif expérimental, comme cela a été fait dans le programme SloshSat. Cette situation idéale reste particulièrement coûteuse et complexe à mettre en oeuvre, les opérations doivent notamment pouvoir s'effectuer sans intervention humaine [34]. Pour toutes ces raisons, les résultats expérimentaux en condition de microgravité restent très limités.

### **Démarche choisie**

On s'intéresse dans ce mémoire à la prise en compte, dans la formulation du problème hydroélastique, des sources dissipatives dans le liquide, ainsi qu'à la prise en compte des effets de capillarité dans le problème couplé conservatif.

On présentera, dans la première partie, l'introduction de l'amortissement dans le système

conservatif. Seules les dissipations visqueuses dans le volume du liquide et au niveau des parois seront prises en compte. Pour décrire cette méthode, on se limitera au cas d'un liquide pesant (sans effet de tension de surface). On s'intéressera alors à la résolution du problème amorti obtenu afin d'obtenir la réponse fréquentielle et temporelle linéarisée du système. Dans cette partie, les apports majeurs de ce travail concernent la formulation du système réduit fluide structure avec amortissement diagonal (chapitre 2), la résolution par synthèse modale complexe adaptée à ce problème (chapitre 3), le calcul par éléments finis des coefficients d'amortissement modaux (chapitre 4).

Dans la deuxième partie, les effets de la capillarité sur les comportements statique et dynamique du système, ainsi que les hypothèses que l'on retiendra, seront présentés. Une formulation du problème couplé conservatif en condition de micro-gravité et avec prise en compte des effets de capillarité sera proposée. Puisque l'influence de la capillarité sur l'ensemble des équations locales du système est mal connue, on utilisera une approche énergétique basée sur le principe de Minimum de l'Énergie Potentielle (en statique) et sur le Principe de Moindre Action (en dynamique). L'incompressibilité du liquide et la condition de contact à l'interface fluide-structure seront prises en compte par des multiplicateurs de Lagrange. L'ensemble de ce chapitre constitue un apport de cette étude dans la mesure où il permet à la fois d'étendre les travaux de El-Kamali [35] au cas des structures déformables et les travaux de Schotté [91] aux conditions de microgravité.

Dans la suite de ce document, on se place dans le cadre des petites perturbations et le fluide est considéré comme irrotationnel, homogène et incompressible.





## Première partie

# Réponse linéaire amortie d'une structure contenant un liquide



# Introduction

On considère dans cette partie l'étude du problème hydroélastique avec un fluide pesant, incompressible, irrotationnel et faiblement visqueux. La modélisation précise de l'ensemble des phénomènes dissipatifs dans le liquide entraînerait nécessairement la construction d'un maillage spécifique (avec couche limite, etc ...) et une résolution temporelle coûteuse de l'équation de Navier-Stokes dans un logiciel de mécanique des fluides. Cette approche n'est pas la plus adaptée lorsque l'on s'intéresse au comportement vibratoire de faible amplitude du système (par exemple en phase de conception ou bien pour la mise au point d'un système de contrôle). Ainsi, on présente ici une méthode permettant d'introduire de l'amortissement dans le fluide à partir du modèle construit pour le système couplé conservatif. On utilisera ici le potentiel de déplacement pour paramétrer le fluide. On rappelle que d'autres formulations existent, utilisant notamment le déplacement du fluide, mais celles-ci peuvent poser des problèmes numériques [12].

L'amortissement de la structure est considéré connu et on s'intéressera uniquement à la modélisation des effets dissipatifs dans le fluide.

Dans le chapitre 1, on présente une formulation variationnelle, puis matricielle, du problème hydroélastique (avec ballonnement) conservatif. Puis, dans le chapitre 2, on propose d'introduire la dissipation dans le fluide sous la forme d'un amortissement modal. Pour cela, les équations du fluide sont projetées sur ses modes de ballonnement. On s'intéressera alors à la comparaison entre la réponse directe en fréquence du modèle réduit obtenu et celle du modèle complet.

La réponse en fréquence par résolution directe pouvant être coûteuse (si les modèles sont de grande taille par exemple) et il est avantageux de mettre en place une méthode de synthèse modale. Il existe alors deux possibilités : utiliser les modes réels du système couplé

---

conservatif associé ou bien les modes complexes du système couplé dissipatif.

Dans le chapitre 3, une étude du problème aux valeurs propres quadratique associé au modèle réduit amorti à amortissement non classique (la matrice d'amortissement du système couplé que l'on obtient est non symétrique) ainsi que les propriétés des vecteurs propres complexes associés sont présentées. En utilisant une méthode de synthèse modale à partir de ces modes complexes, les formulations des réponses fréquentielle et temporelle linéarisées du système pour différents types d'excitation sont établies [8, 57, 41]. Enfin, on présente sur un cas test axisymétrique des exemples de réponses temporelles et de réponses impulsionnelles que l'on compare avec la réponse directe en fréquence du modèle réduit. On s'intéresse notamment à la convergence de la réponse par synthèse modale complexe par rapport à la réponse directe en fonction du choix des bases de projection (base des modes de ballottement du fluide et base des modes propres complexes du système couplé). La réponse en fréquence obtenue en utilisant les modes réels du système conservatif associé et celle obtenue par les modes complexes sont également comparées pour dégager les avantages et les inconvénients de chacune des méthodes.

Les coefficients d'amortissement modaux introduits peuvent être déterminés soit expérimentalement [26, 48, 33], soit numériquement à partir de modèles simples des phénomènes physiques entraînant la dissipation de l'énergie dans le fluide. Une méthode de calcul de ces coefficients ainsi qu'une validation par comparaison avec des résultats analytiques et expérimentaux sont présentées dans le chapitre 4.

# Chapitre 1

## Équations matricielles du modèle fluide-structure complet conservatif

Afin de décrire le système étudié, on distinguera 3 états de référence (Fig. 1.1) :

**L'état naturel** qui est une configuration virtuelle pour laquelle le fluide et la structure ne sont soumis à aucune force. La surface libre est supposée horizontale. Les grandeurs relatives à la configuration naturelle sont indicées par  $^0$ .

**L'état d'équilibre** est l'état de référence autour duquel on étudie les vibrations de faible amplitude du système couplé. Les grandeurs relatives à la configuration d'équilibre sont indicées par le symbole  $*$ . Lorsque le système à l'état naturel est soumis aux différentes forces s'exerçant sur le fluide et la structure, celui-ci se déplace pour atteindre sa position d'équilibre. Ce déplacement est repéré par les champs  $U_*^F$  et  $U_*^S$  (qui sont respectivement les déplacements du fluide et de la structure).

**L'état dynamique** est l'état du système à tout instant de l'analyse dynamique. Dans cet état, le système est soumis à une force excitatrice appliquée sur la structure. Les positions du fluide et de la structure sont définies respectivement par les champs de déplacements  $U^F$  et  $U^S$ .

Comme le montre la figure 1.1, le volume fluide  $\Omega_F$  est délimité par l'interface liquide-gaz (surface libre  $\Gamma$ ) ainsi que l'interface fluide-structure  $\Sigma$ . L'intersection de ces deux interfaces est notée  $\gamma$ . La courbe  $\gamma$ , aussi appelée *ligne triple*, représente l'intersection des

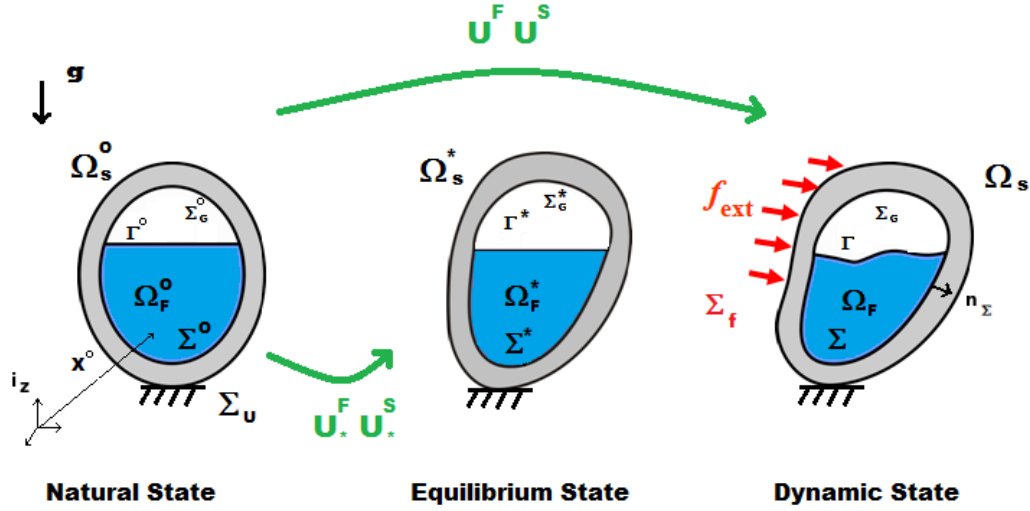


FIGURE 1.1 – Configuration du problème et présentation des trois états : naturel, à l'équilibre et dynamique.

trois phases liquide-solide-gaz. La position du fluide est donnée par le vecteur  $\mathbf{X}$  avec :  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 + \mathbf{U}^F$  où  $\mathbf{X}^0$  représente la position du fluide à l'état naturel. La structure a un volume  $\Omega_S$  et l'interface solide-gaz est notée  $\Sigma_G$ .  $\Sigma_u$  représente la surface sur laquelle sont imposées les éventuelles conditions aux limites en déplacement et  $\Sigma_f$  la surface sur laquelle la structure vient être excitée par des forces extérieures  $\mathbf{f}_{ext}$ . On notera par la suite  $\mathbf{n}_\Sigma$  la normale unitaire sortante du volume fluide au niveau de l'interface fluide-structure et  $\mathbf{n}_F$  la normale unitaire sortante du volume fluide à la surface libre.

On considère ici que la déformation entre l'état naturel et d'équilibre est infinitésimale et les deux géométries des états sont confondues. Ces deux états diffèrent par la présence de précontraintes. Puisque l'état dynamique est proche de l'état d'équilibre on notera  $\mathbf{u}^F$  et  $\mathbf{u}^S$  les petits déplacements du fluide et de la structure tels que  $\mathbf{U}^S = \mathbf{U}_*^S + \mathbf{u}^S$  et  $\mathbf{U}^F = \mathbf{U}_*^F + \mathbf{u}^F$ . Les variables que l'on choisit pour décrire le système sont le potentiel de déplacement du fluide et le déplacement de la structure. Puisque le liquide est considéré irrotationnel, on a alors :  $\mathbf{u}^F = \nabla\varphi^1$ . Dans [78], on retrouve les équations locales linéarisées du problème couplé écrites à partir des équations d'Euler linéarisées. Pour un fluide

1. L'existence du potentiel  $\varphi$  n'est vérifiée que sous certaines hypothèses restrictives sur le domaine  $\Omega_F$ , en particulier pour des domaines  $\Omega_F$  réguliers et simplement connexes [25].

homogène et non visqueux, on a :

$$\Delta\varphi(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \text{sur } \Omega_F^* \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}_\Sigma^*} = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma^*} \quad \text{sur } \Sigma^* \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{i}_z} = -\frac{\ddot{\varphi}}{g} + \frac{\pi(\mathbf{u}^S)}{\rho^F g} \quad \text{sur } \Gamma^* \quad (1.3)$$

$$\varphi(t=0) = \varphi_{\text{ini}} \quad (1.4)$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_{\text{ini}} \quad (1.5)$$

La surface libre étant plane et horizontale, la normale  $\mathbf{n}_\Gamma^*$  est confondue avec le vecteur unitaire vertical  $\mathbf{i}_z$ . Le scalaire  $t$  désigne la variable du temps. Enfin,  $\ddot{\varphi}$  désigne la dérivée seconde de  $\varphi$ .  $\pi$  est une constante assurant l'unicité du potentiel  $\varphi$ . Soit  $l$  une forme linéaire représentant cette condition d'unicité sur  $\varphi$  telle que  $l(\varphi) = 0$  et  $l(1) \neq 0$ . On considère dans la suite la condition d'unicité  $l$  suivante  $l(\varphi) = \int_{\Gamma^*} \varphi \, d\Gamma$ .

En notant  $p_E$  la fluctuation de pression eulérienne dans le fluide, son expression est donnée par [78] :

$$p_E = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi(\mathbf{u}^S) \quad (1.6)$$

Ici, puisque la condition d'unicité  $l$  est fixée, on peut donner une expression de la constante  $\pi$  qui va s'écrire :

$$\pi(\mathbf{u}^S) = -\frac{\rho^F g}{\mathcal{A}(\Gamma)} \int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \, d\Sigma \quad (1.7)$$

$\mathcal{A}(\Gamma)$  désigne l'aire de la surface libre. Pour une condition d'unicité quelconque l'expression de  $\pi$  se trouve dans [78].

On peut écrire la formulation variationnelle du problème à partir de la relation (1.1) que l'on multiplie par une fonction test  $\delta\varphi$ , en intégrant sur  $\Omega_F^*$  puis en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \varphi \in \mathbf{C}_\varphi^*, \forall \delta\varphi \in \mathbf{C}_\varphi^* : \\ \int_{\Omega_F^*} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega_F - \frac{1}{g} \int_{\Gamma^*} \ddot{\varphi} \delta\varphi \, d\Gamma - \int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \delta\varphi \, d\Sigma = 0 \\ \varphi(t=0) = \varphi_{\text{ini}} \quad , \quad \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_{\text{ini}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\mathbf{C}_\varphi = \{\varphi \in H^1(\Omega_F^*)\}$  représente l'espace des solutions  $\varphi$  suffisamment régulières et  $\mathbf{C}_\varphi^* = \{\varphi \in \mathbf{C}_\varphi / \int_{\Gamma^*} \varphi \, d\Gamma = 0\}$ .

Soit  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$  les formes bilinéaires définies par :

$$\mathbf{F}(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\Omega_F^*} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi \, d\Omega_F \quad (1.9)$$

$$\mathbf{S}(\ddot{\varphi}, \delta\varphi) = \frac{1}{g} \int_{\Gamma^*} \ddot{\varphi} \delta\varphi \, d\Gamma \quad (1.10)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta\varphi) = \int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \delta\varphi \, d\Sigma \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{F}$  est lié à l'énergie cinétique du liquide et  $\mathbf{S}$  à son énergie potentielle de ballonnement.  $\mathbf{C}$  désigne la forme bilinéaire de couplage fluide-structure à l'interface. Cette forme bilinéaire de couplage intervient également dans la formulation variationnelle de la structure faiblement amortie que l'on écrit :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{US}, \forall \delta\mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{US}, \\ \mathbf{K}_S^{Hyd}(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) + M_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{C}(\ddot{\varphi}, \delta\mathbf{u}^S) = \mathbf{f}_{ext}(\delta\mathbf{u}^S) \\ \mathbf{u}^S(t=0) = \mathbf{u}_{ini}^S, \quad \dot{\mathbf{u}}^S(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_{ini}^S \end{aligned} \quad (1.12)$$

où l'espace  $\mathcal{C}_{US}$  est défini par  $\mathcal{C}_{US} = \{\mathbf{U}^S \in H^1(\Omega_S^*)^3 / \mathbf{U}^S = 0 \text{ sur } \Sigma_u\}$ .  $M_S$  est la forme bilinéaire de masse de la structure et  $\mathbf{K}_S^{Hyd}$  représente l'élastogravité qui contient l'opérateur de raideur de la structure auquel s'ajoute les opérateurs de précontrainte liés à la gravité [92]. On retrouve plus de détails sur cet opérateur dans la seconde partie du manuscrit.

Ainsi, les relations (1.8) et (1.12) permettent d'écrire la formulation variationnelle du problème couplé en  $(\mathbf{u}^S, \varphi)$  :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+ : \exists(\mathbf{u}^S, \varphi) \in \mathcal{C}_{US} \times \mathcal{C}_\varphi^*, \forall(\delta\mathbf{u}^S, \delta\varphi) \in \mathcal{C}_{US} \times \mathcal{C}_\varphi^* \\ \mathbf{F}(\varphi, \delta\varphi) + \mathbf{S}(\ddot{\varphi}, \delta\varphi) - \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta\varphi) &= 0 \quad (\text{a}) \\ \mathbf{K}_S^{Hyd}(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) + M_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{C}(\ddot{\varphi}, \delta\mathbf{u}^S) &= \mathbf{f}_{ext}(\delta\mathbf{u}^S) \quad (\text{b}) \\ \varphi(t=0) = \varphi_{ini}, \quad \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_{ini} \\ \mathbf{u}^S(t=0) = \mathbf{u}_{ini}^S, \quad \dot{\mathbf{u}}^S(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_{ini}^S \end{aligned}$$

(1.13)

On remarque que cette formulation n'est pas symétrique. Une formulation symétrique équivalente peut être obtenue en utilisant la variable supplémentaire  $\eta = \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z$  qui est le



déplacement vertical de la surface libre du fluide [78].

Résoudre le problème (1.13) pour une géométrie quelconque tridimensionnel nécessite l'utilisation d'outils numériques. Le choix s'est porté sur la méthode des Éléments Finis classique, dans la continuité des travaux antérieurs réalisés au département DADS de l'ONERA. Parmi les nombreux ouvrages détaillant cette méthode des Éléments Finis on peut citer ceux de Zienkiewicz & Taylor [109], Ciarlet [22] et Bathe [10]. Des travaux traitant le problème du point de vue Mathématique comme ceux de Bermúdez et Rodríguez [12] permettent d'établir la convergence des solutions éléments finis et de proposer des estimateurs d'erreur.

Des éléments triangulaires sont le plus souvent utilisés pour la discrétisation des surfaces et des éléments tétraédriques pour le volume fluide. Ce maillage non structuré est généré automatiquement par des logiciels de maillage. Pour représenter la structure, un modèle de plaque est choisi et les matrices de masse et de raideur associées sont générées par le logiciel NASTRAN ©.

Pour un triangle élémentaire  $s_e$ , la géométrie et le champ inconnu seront interpolés à l'intérieur de l'élément à l'aide de fonctions de forme  $N_1(\Xi)$ ,  $N_2(\Xi)$  et  $N_3(\Xi)$ , où  $\Xi$  est une paramétrisation bidimensionnelle décrivant le triangle de référence. On utilise ici les mêmes fonctions de forme pour interpoler la géométrie et les champs inconnus (éléments finis isoparamétriques). Les coordonnées intrinsèques seront notées  $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$  et on se contentera ici de polynômes du premier degré, on aura donc  $N_1 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ ,  $N_2 = \xi_1$  et  $N_3 = \xi_2$ . Ainsi sur l'élément  $s_e$ , le vecteur position  $\mathbf{X}^{s_e}$  décrivant la géométrie, le champ inconnu  $\mathbf{u}^{s_e}$  et les champs test notés également  $\delta\mathbf{u}^{s_e}$ , seront discrétisés en écrivant :

$$\mathbf{X}^{s_e} = \mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{X}^{s_e}, \quad \mathbf{u}^{s_e} = \mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}^{s_e} \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{u}^{s_e} = \mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) \delta\mathbf{u}^{s_e} \quad (1.14)$$

$\mathbf{X}^{s_e}$ ,  $\mathbf{u}^{s_e}$  et  $\delta\mathbf{u}^{s_e}$  sont alors les vecteurs colonnes de taille  $(9 \times 1)$  des valeurs aux nœuds du triangle  $s_e$  de  $\mathbf{X}^{s_e}$ ,  $\mathbf{u}^{s_e}$  et  $\delta\mathbf{u}^{s_e}$ . En regroupant les degrés de liberté de chaque nœud (composantes selon  $\mathbf{i}_x$ ,  $\mathbf{i}_y$ ,  $\mathbf{i}_z$  dans le repère globale) tout en respectant l'ordre conventionnel de numérotation des nœuds du triangle, la matrice des fonctions de forme  $\mathbf{N}$  va s'écrire :

$$\mathbf{N}(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

De même, pour un triangle élémentaire  $s_e$ , les champs scalaires  $\varphi$  et  $\delta\varphi$ , seront discrétisés par :

$$\varphi^{s_e} = [ \mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3 ] \boldsymbol{\Phi}^{s_e} \quad \text{et} \quad \delta\varphi^{s_e} = [ \mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3 ] \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\Phi}^{s_e} \quad (1.16)$$

où  $\boldsymbol{\Phi}^{s_e}$  et  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\Phi}^{s_e}$  sont les vecteurs colonnes formés par les trois valeurs aux nœuds de  $\varphi$  et  $\delta\varphi$ . Pour l'opérateur volumique  $\mathbf{F}$ , les éléments finis utilisés sont des tétraèdres. Ainsi, les champs scalaires  $\varphi$  et  $\delta\varphi$  seront interpolés sur un tétraèdre élémentaire  $v_e$  par :

$$\varphi^{v_e} = [ \mathbf{N}_1^v \quad \mathbf{N}_2^v \quad \mathbf{N}_3^v \quad \mathbf{N}_4^v ] \boldsymbol{\Phi}^{v_e} \quad \text{et} \quad \delta\varphi^{v_e} = [ \mathbf{N}_1^v \quad \mathbf{N}_2^v \quad \mathbf{N}_3^v \quad \mathbf{N}_4^v ] \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\Phi}^{v_e} \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{N}_1^v = 1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$ ,  $\mathbf{N}_2^v = \xi_1$ ,  $\mathbf{N}_3^v = \xi_2$  et  $\mathbf{N}_4^v = \xi_3$ , sont les fonctions d'interpolation linéaires classiques pour un tétraèdre, où les paramètres  $\xi_i$  décrivent le tétraèdre de référence. Les vecteurs  $\boldsymbol{\Phi}^{v_e}$  et  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\Phi}^{v_e}$  contiennent les 4 valeurs de  $\varphi$  et  $\delta\varphi$  aux nœuds du tétraèdre. La géométrie est également interpolée dans le domaine liquide par ces mêmes fonctions de forme :  $\mathbf{X}^{v_e} = \mathbf{N}^{v_e}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{X}^{v_e}$  où  $\mathbf{X}^{v_e}$  est le vecteur colonne de taille  $(12 \times 1)$  des valeurs aux nœuds du tétraèdre  $v_e$  de  $\mathbf{X}^{v_e}$ , en regroupant comme précédemment les degrés de liberté de chaque nœud, la matrice des fonctions de forme  $\mathbf{N}^{v_e}$  a la forme :

$$\mathbf{N}^{v_e}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_2^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_3^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_4^v & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_1^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_2^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_3^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_4^v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_1^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_2^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_3^v & 0 & 0 & \mathbf{N}_4^v \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

On notera  $\mathbf{u}^S$ ,  $\mathbf{u}^F$  et  $\phi$  les inconnues nodales des champs  $\mathbf{u}^S$ ,  $\mathbf{u}^F$  et  $\varphi$ .  $\mathbf{K}_S^{Hyd}$ ,  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{D}_S$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$  sont les matrices associées aux opérateurs de même nom. Le problème matriciel va s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^T & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^S \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Avec  $\mathbf{u}^S = \mathbf{0}$  sur  $\Sigma_u$ ,  $\phi(t=0) = \phi_{ini}$ ,  $\dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}_{ini}$ ,  $\mathbf{u}^S(t=0) = \mathbf{u}_{ini}^S$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^S(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_{ini}^S$  et  $\mathbf{L}^T \phi = \mathbf{0}$  où  $\mathbf{L}$  est l'opérateur discrétisant la condition  $\int_{\Gamma^*} \varphi d\Gamma = 0$ .

## Chapitre 2

# Équations matricielles du modèle fluide-structure réduit amorti

Ayant établi les équations du système couplé fluide-structure conservatif 1.13, on propose ici de représenter l'amortissement du système directement par un terme proportionnel à  $\dot{\varphi}$ . L'opérateur introduit, noté  $\mathbf{D}_F$ , représente donc la conséquence sur l'équation variationnelle du fluide de l'ensemble des phénomènes dissipatifs liés à la viscosité du fluide. On suppose par ailleurs que l'amortissement  $\mathbf{D}_S$  de la structure est connu et que les phénomènes dissipatifs n'entraînent pas de couplage entre la déformation du liquide et celle de la structure. Le système couplé amorti s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 & \forall t \in \mathbb{R}^+ : \exists (\mathbf{u}^S, \varphi) \in \mathcal{C}_{US} \times \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tels que } \forall (\delta \mathbf{u}^S, \delta \varphi) \in \mathcal{C}_{US} \times \mathcal{C}_\varphi^* \\
 & \mathbf{F}(\varphi, \delta \varphi) + \mathbf{D}_F(\dot{\varphi}, \delta \varphi) + \mathbf{S}(\ddot{\varphi}, \delta \varphi) - \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta \varphi) = 0 \quad (\text{a}) \\
 & \mathbf{K}_S^{Hyd}(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \mathbf{D}_S(\dot{\mathbf{u}}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \mathbf{M}_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \mathbf{C}(\dot{\varphi}, \delta \mathbf{u}^S) = \mathbf{f}_{ext}(\delta \mathbf{u}^S) \quad (\text{b}) \\
 & \varphi(t=0) = \varphi_{ini} \quad , \quad \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_{ini} \\
 & \mathbf{u}^S(t=0) = \mathbf{u}_{ini}^S \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}^S(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_{ini}^S
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

En gardant les mêmes conditions initiales et conditions aux limites, l'équation matricielle du problème couplé dissipatif va donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^T & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_F \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}^S \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^S \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

avec  $\mathbf{L}^T \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ .

L'introduction d'un opérateur d'amortissement directement dans l'équation en  $\varphi$  du fluide suppose que malgré la présence de viscosité, le déplacement du fluide reste irrotationnel presque partout. Nous reviendrons sur cette approximation au chapitre 4.

## 2.1 Modèle réduit de fluide ballotant

De la même façon que le comportement dynamique d'une structure peut être avantageusement représenté au travers de ses modes propres vibratoires, de nombreux travaux antérieurs ont montré que le mouvement d'un liquide ballotant peut être représenté par un nombre restreint de modes de ballottement. Nous allons appliquer ce principe à la réponse amortie du fluide.

### Décomposition du potentiel de déplacement du fluide

Les oscillations harmoniques d'un fluide pesant et incompressible dans un réservoir fixe et rigide sont appelés *modes de ballottement*.

Nous allons montrer qu'il est possible d'approximer la réponse amortie du fluide  $\varphi$ , avec une bonne précision, en utilisant une combinaison linéaire des modes de ballottement  $\varphi_i$ , complétée par une réponse quasi-statique  $\varphi^s$  à la déformation de la structure  $\mathbf{u}^S$  (voir Fig. 2.1) [78, 93] :

$$\varphi(t) = \varphi^s(\mathbf{u}^S) + \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i \quad (2.3)$$

$q_i$  est la coordonnée généralisée associée au mode  $\varphi_i$ .

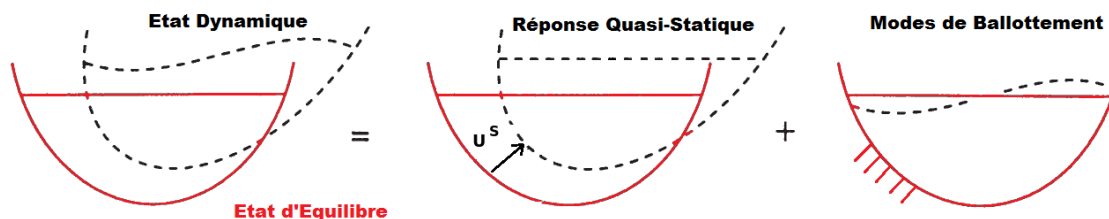


FIGURE 2.1 – Décomposition du potentiel de déplacement du fluide.

En prenant  $\boldsymbol{\phi}^s$  et  $\boldsymbol{\phi}_i$  les vecteurs d'inconnues nodales de  $\varphi^s$  et  $\varphi_i$ , la relation (2.3) peut

## 2.1. MODÈLE RÉDUIT DE FLUIDE BALLOTANT

---

s'écrire matriciellement :

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^s + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} \quad (2.4)$$

où  $\boldsymbol{\Phi}$  est la matrice modale contenant les  $n$  modes sélectionnés  $\{\varphi_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ . Le vecteur  $\mathbf{q}$  contient les coordonnées généralisées  $q_i$  associées à ces modes.

On utilisera dans cette étude soit une solution quasi-statique  $\varphi^s = \varphi_0$  la réponse hydrostatique du fluide, soit  $\varphi^s = \varphi_\infty$ , la solution hydroélastique sans gravité [78].

### Modes de ballottement

Les modes de ballottement sont donc calculés à partir de la relation (a) du problème conservatif (1.13) en prenant  $\mathbf{u}^S = 0$ . Ainsi, le problème aux valeurs propres associé va s'écrire :

$$\text{Trouver } (\varphi_i, \lambda_i) \in \mathbf{C}_\varphi^* \times \mathbb{R} / \quad \forall \delta\varphi \in \mathbf{C}_\varphi^*, \quad \mathbf{F}(\varphi_i, \delta\varphi) - \omega_i^2 \mathbf{S}(\varphi_i, \delta\varphi) = 0 \quad (2.5)$$

où  $\omega_i^2$  est la pulsation propre associée au mode  $\varphi_i$ .

D'après leurs expressions, les formes  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{S}$  sont symétriques, semi-définies et positives, il existe donc une infinité de solutions  $(\varphi_i, \lambda_i > 0)$  formant une base de l'espace  $\mathbf{C}_\varphi^*$ <sup>1</sup>. Une fois normalisées, ces solutions vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\mathbf{F}(\varphi_i, \varphi_j) = \rho^F \int_{\Omega_F^*} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\Omega_F = \mu_i \delta_{i,j} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{S}(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{\rho^F}{g} \int_{\Gamma^*} \varphi_i \varphi_j \, d\Gamma = \frac{\mu_i}{\omega_i^2} \delta_{i,j} \quad (2.7)$$

$\delta_{i,j}$  étant le symbole de Kronecker. On écrira dans la suite la forme discrétisée de ces relations de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \mu_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.8a)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega}^{-2} = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \frac{\mu_i}{\omega_i^2} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.8b)$$

---

1. Morand et Ohayon montrent que la condition  $\int_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma = 0$  contenue dans  $\mathbf{C}_\varphi^*$  assure que  $\omega_i^2 \neq 0$ .

$\mathbf{\Omega}$  et  $\mathbf{\Upsilon}$  sont des matrices diagonales contenant respectivement  $\omega_i$  et  $\mu_i$ .

On souhaite maintenant pouvoir exprimer la quantité  $\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{D}_F \mathbf{\Phi}$ . Plutôt que d'introduire la viscosité directement dans les équations locales du fluide pour tenter de construire intégralement l'opérateur  $\mathbf{D}_F$ , on propose ici d'adopter un modèle simple qui est celui de l'amortissement diagonal de Caughey [19] qui est une généralisation de l'amortissement proportionnel proposé par Rayleigh. Pour une justification physique et une description d'un modèle rhéologique équivalent au modèle de Rayleigh, on pourra se référer aux travaux de Semblat [95].

Ainsi, dans la matrice  $\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{D}_F \mathbf{\Phi}$ , les termes diagonaux sont prépondérants et les termes hors diagonaux négligeables :

$$\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{D}_F \mathbf{\Phi} \simeq \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & d_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

Cette hypothèse d'amortissement diagonal consistant à considérer qu'il n'y a pas de couplage entre les modes par l'amortissement est aussi appelée *hypothèse de Basile*. On peut montrer qu'elle est valable tant que les pics de résonance associés à chacun des modes sont bien séparés, c'est à dire que la largeur de chaque pic (égale, à mi-hauteur, à  $2 d_i \omega_i$ ,  $\omega_i$  étant sa pulsation) est petite devant la distance entre les pics, ce que l'on peut résumer par le critère de séparation des fréquences suivant [42, 105] :

$$\forall \alpha \in \llbracket 1..N \rrbracket, \quad d_i \omega_i \ll |\omega_i - \omega_{i\pm 1}| \quad (2.9)$$

Cette approximation est généralement valable pour des amortissements faibles ce qui limite ce modèle au cas des liquides faiblement visqueux. Dans le cas de groupes de modes qui ne vérifieraient pas le critère (2.9), il reste possible de considérer un modèle de matrice d'amortissement modal par blocs [7].

Par analogie,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{S}$  jouant le rôle respectivement d'opérateurs de raideur et de masse du fluide, on écrit la matrice  $\mathbf{D}_F$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{D}_F = \sum_{j=0}^{N_c-1} a_j (\mathbf{F}\mathbf{S}^{-1})^j \mathbf{S} \quad (2.10)$$

La matrice  $\mathbf{D}_F$  écrite sous cette forme est symétrique et diagonalisable dans la base des modes propres réels de ballottement du fluide (on reviendra dans la section 3.1.1 sur les

notions de modes réels et dans l'annexe A sur l'amortissement de Caughey).

Dans un premier temps, on remarque qu'il est possible de démontrer la relation suivante par récurrence :

$$\Phi^T (\mathbf{F} \mathbf{S}^{-1})^i = \Omega^{2i} \Phi^T \quad (2.11)$$

Puis, en utilisant l'expression de la matrice  $\mathbf{D}_F$  dans (2.10), on a :

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{D}_F \Phi &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \Phi^T (\mathbf{F} \mathbf{S}^{-1})^i \mathbf{S} \Phi \\ &= \Upsilon \sum_{i=0}^{m-1} a_i \Omega^{2(i-1)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pour simplifier cette expression, on introduit le facteur  $\zeta_i$  défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1..n \rrbracket, \quad 2\zeta_i = \frac{1}{\omega_i} \sum_{j=0}^{m-1} a_j \omega_i^{2j} \quad (2.13)$$

où  $\zeta_i$  est le coefficient d'amortissement modale associé à  $\varphi_i$ . Cette relation peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$2\mathbf{Z} = \Omega^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} a_i \Omega^{2i} \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{Z}$  est une matrice diagonale contenant les coefficients  $\zeta_i$ . Il est donc possible d'obtenir à partir de (2.12) et (2.14), une expression de la matrice diagonale  $\Phi^T \mathbf{D}_F \Phi$  :

$$\Phi^T \mathbf{D}_F \Phi = 2 \Upsilon \Omega^{-1} \mathbf{Z} \quad (2.15)$$

### Relations conjuguées

Afin de pouvoir utiliser la décomposition (2.3) pour projeter l'équation du fluide, on doit maintenant exprimer les relations conjuguées entre  $\varphi^s$  ( $\varphi_0$  ou  $\varphi_\infty$ ) et  $\varphi_i$  par rapport aux opérateurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{S}$  :  $\mathbf{F}(\varphi_0, \varphi_i)$ ,  $\mathbf{S}(\varphi_0, \varphi_i)$ ,  $\mathbf{F}(\varphi_\infty, \varphi_i)$  et  $\mathbf{S}(\varphi_\infty, \varphi_i)$ .

On remarque dans un premier temps que la formulation variationnelle du problème quasi statique peut être obtenue à partir de la relation (a) du problème conservatif (1.13) en prenant  $\ddot{\varphi} = 0$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ : \exists \varphi_0 \in \mathbf{C}_\varphi^* / \forall \delta\varphi \in \mathbf{C}_\varphi^*, \quad \mathbf{F}(\varphi_0, \delta\varphi) = \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta\varphi) \quad (2.16)$$

## 2.1. MODÈLE RÉDUIT DE FLUIDE BALLOTANT

---

En prenant  $\delta\varphi = \varphi_i$ , avec  $\varphi_i \in \mathbf{C}_\varphi^*$  on a :

$$\mathbf{F}(\varphi_0, \varphi_i) = \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \varphi_i) \quad (2.17)$$

Pour obtenir la seconde relation conjuguée, on applique dans un premier temps la formule de Green (voir Annexe J) :

$$\int_{\Omega_F^*} (\varphi_0 \Delta \varphi_i - \varphi_i \Delta \varphi_0) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_F^*} (\varphi_0 (\nabla \varphi_i \cdot \mathbf{n}) - \varphi_i (\nabla \varphi_0 \cdot \mathbf{n})) \, d\Sigma \quad (2.18)$$

Pour les potentiels  $\varphi_i$  et  $\varphi_0$ , respectivement solutions du problème aux valeurs propres et du problème quasi-statique, l'incompressibilité du fluide se traduit par  $\Delta \varphi_i = \Delta \varphi_0 = 0$ .

On a donc :

$$\int_{\Gamma^*} \left( \varphi_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{i}_z} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{i}_z} \right) \, d\Gamma + \int_{\Sigma^*} \left( \varphi_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{n}_\Sigma} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{n}_\Sigma} \right) \, d\Sigma = 0 \quad (2.19)$$

Puisque les modes de ballotement sont calculés pour une structure rigide, on a  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{n}_\Sigma} = 0$ .

Pour la solution quasi-statique, la continuité des déplacements à l'interface fluide-structure s'écrit :  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{n}_\Sigma} = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma$ . De plus, pour la solution quasi-statique, la surface libre étant horizontale, son déplacement est constant en tout point et puisque  $\varphi_i \in \mathbf{C}_\varphi^*$  on a :

$$\int_{\Gamma^*} \varphi_i \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{i}_z} \, d\Gamma = 0 \quad (2.20)$$

Enfin, d'après (1.3) et (1.7), on a :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{i}_z} = \frac{\omega_i^2}{g} \varphi_i \quad (2.21)$$

La relation (2.19) donne donc :

$$\int_{\Gamma^*} \varphi_0 \frac{\omega_i^2}{g} \varphi_i \, d\Gamma - \int_{\Sigma^*} \varphi_i \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma \, d\Sigma = 0 \quad (2.22)$$

Ce qui donne la seconde relation conjuguée :

$$\mathbf{S}(\varphi_0, \varphi_i) = \frac{1}{\omega_i^2} \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \varphi_i) \quad (2.23)$$

De même on peut démontrer les relations de conjugaison pour  $\varphi_\infty$ . Par définition,  $\varphi_\infty$  est défini par le problème suivant [78] :

$\Delta \varphi_\infty = 0 \quad \text{sur } \Omega_F^* \quad \text{(a)}$	(2.24)
$\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial \mathbf{n}_\Sigma^*} = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \quad \text{sur } \Sigma^* \quad \text{(b)}$	
$\varphi_\infty = 0 \quad \text{sur } \Gamma^* \quad \text{(c)}$	



## 2.1. MODÈLE RÉDUIT DE FLUIDE BALLOTANT

---

On a donc directement d'après l'expression de l'opérateur  $\mathbf{S}$  la relation suivante :

$$\mathbf{S}(\varphi_\infty, \varphi_i) = 0 \quad (2.25)$$

À partir du problème (2.24), on peut écrire la formulation variationnelle que vérifie la solution  $\varphi_\infty$ , en introduisant l'espace  $\mathcal{C}_\varphi^0$  défini par  $\mathcal{C}_\varphi^0 = \{\varphi \in \mathcal{C}_\varphi / \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \exists \varphi_\infty \in \mathcal{C}_\varphi^0, \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi : \\ \mathbf{F}(\varphi_\infty, \delta\varphi) + \mathbf{C}(\mathbf{u}^{\mathbf{S}}, \delta\varphi) - \int_{\Gamma^*} \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial\mathbf{i}_z} \delta\varphi d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

De plus, de même que pour  $\varphi_0$ , en utilisant la formule de Green on obtient la relation suivante :

$$\int_{\Gamma^*} \varphi_i \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial\mathbf{i}_z} = - \int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \varphi_i \quad (2.27)$$

En prenant dans (2.26)  $\delta\varphi = \varphi_i$ ,  $\varphi_i \in \mathcal{C}_\varphi$ , et en utilisant la relation (2.27), on en déduit :

$$\mathbf{F}(\varphi_\infty, \varphi_i) = 0 \quad (2.28)$$

La forme discrétisée des expressions (2.17), (2.23), (2.25) et (2.28) s'écrit alors :

$$\Phi^T \mathbf{S} \phi_0 = \Omega^{-2} \Phi^T \mathbf{C}^T \mathbf{u}^{\mathbf{S}} \quad (2.29)$$

$$\Phi^T \mathbf{F} \phi_0 = \Phi^T \mathbf{C}^T \mathbf{u}^{\mathbf{S}} \quad (2.30)$$

$$\Phi^T \mathbf{S} \phi_\infty = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

$$\Phi^T \mathbf{F} \phi_\infty = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

Ces relations permettent alors d'écrire les termes d'amortissement  $\Phi^T \mathbf{D}_F \phi_0$  et  $\Phi^T \mathbf{D}_F \phi_\infty$  :

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{D}_F \phi_0 &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \Phi^T (\mathbf{F} \mathbf{S}^{-1})^i \mathbf{S} \phi_0 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \Omega^{2i} \Phi^T \mathbf{S} \phi_0 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i \Omega^{2(i-1)} \Phi^T \mathbf{C}^T \mathbf{u}^{\mathbf{S}} \\ &= 2 \Omega^{-1} \mathbf{Z} \Phi^T \mathbf{C}^T \mathbf{u}^{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

et

$$\Phi^T \mathbf{D}_F \phi_\infty = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \Omega^{2i} \Phi^T \mathbf{S} \phi_\infty = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

## 2.2 Équations réduites du système couplé

En utilisant la décomposition du potentiel fluide (2.4), les conditions d'orthogonalité (2.8), (2.12) ainsi que les relations de conjugaison (2.29), (2.30), (2.33) et (2.34), on projette le système (2.1) afin d'obtenir l'équation du système réduit. On note alors  $\boldsymbol{\psi}$  la nouvelle inconnue du problème :  $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}^S, \boldsymbol{\kappa})$ .

Les réponses  $\varphi_0$  et  $\varphi_\infty$  sont des fonctions linéaires du déplacement de la structure  $\mathbf{u}^S$ . Ainsi, on peut définir les opérateurs bilinéaires  $\mathbf{M}_0^F$  et  $\mathbf{M}_\infty^F$  de la manière suivante :

$$\mathbf{M}_0^F(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) = \mathbf{C}(\varphi_0(\mathbf{u}^S), \delta\mathbf{u}^S) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{M}_\infty^F(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) = \mathbf{C}(\varphi_\infty(\mathbf{u}^S), \delta\mathbf{u}^S) \quad (2.36)$$

Ayant les propriétés d'un opérateur de masse, ces opérateurs sont également appelés opérateurs de masse ajoutée (respectivement "hydrostatique" et "hydroélastique") [78]. La formulation matricielle de ces relations étant donnée par :

$$\delta\mathbf{u}^{S\top} \mathbf{M}_0^F \mathbf{u}^S = \delta\mathbf{u}^{S\top} \mathbf{C} \phi_0(\mathbf{u}^S) \quad (2.37)$$

$$\delta\mathbf{u}^{S\top} \mathbf{M}_\infty^F \mathbf{u}^S = \delta\mathbf{u}^{S\top} \mathbf{C} \phi_\infty(\mathbf{u}^S) \quad (2.38)$$

### Modèle réduit avec $\phi_0$

L'équation matricielle du système réduit pour une projection avec  $\boldsymbol{\phi} = \phi_0 + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\kappa}$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega}^2 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \boldsymbol{\kappa} \end{pmatrix} + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ 2\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Z} \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{C}^\top & 2\boldsymbol{\Upsilon}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Z} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}^S \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{pmatrix} + \dots \\ \dots \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_0^F & \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{C}^\top & \boldsymbol{\Upsilon} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^S \\ \ddot{\boldsymbol{\kappa}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

### Modèle réduit avec $\phi_\infty$

Pour une projection à l'aide de  $\phi_\infty$ , on va obtenir l'équation matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{C}^\top & \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega}^2 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\boldsymbol{\Upsilon}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Z} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}^S \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} \end{pmatrix} + \dots \\ \dots \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_\infty^F & \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Upsilon} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^S \\ \ddot{\boldsymbol{\tau}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.40)$$

### 2.3. COMPARAISON ENTRE MODÈLE COUPLÉ RÉDUIT ET MODÈLE COMPLET

---

Une expression équivalente peut être établie : en multipliant la deuxième ligne du problème (2.40) par  $\mathbf{\Upsilon}^{-1}\mathbf{C}\Phi$ , on peut obtenir l'expression de  $\mathbf{C}\Phi\ddot{\mathbf{z}}$  que l'on remplace dans la première ligne afin de symétriser les opérateurs de raideur et de masse du problème couplé, on a alors :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K}_S^{Hyd} + \mathbf{C}\Phi^T\mathbf{\Upsilon}^{-1}\Omega^2\Phi\mathbf{C}^T & -\mathbf{C}\Phi\Omega^2 \\ -\Omega^2\Phi^T\mathbf{C}^T & \mathbf{\Upsilon}\Omega^2 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{D}_S & -2\mathbf{C}\Phi\Omega\mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{\Upsilon}\Omega\mathbf{Z} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}^S \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} \end{pmatrix} + \dots \\ \dots \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_\infty^F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Upsilon} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^S \\ \ddot{\boldsymbol{\tau}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.41) \end{aligned}$$

On remarque que puisque  $\varphi^s \in \mathcal{C}_\varphi^*$  et  $\varphi_i \in \mathcal{C}_\varphi^*$ , alors  $\varphi = \varphi^s + \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i$  appartient aussi à  $\mathcal{C}_\varphi^*$  et donc la condition sur la variable discrétisée  $\mathbf{L}^T\phi = 0$  du problème (2.2) est toujours vérifiée et n'apparaît pas dans l'écriture du modèle réduit.

### 2.3 Comparaison entre modèle couplé réduit et modèle complet

Afin de valider le modèle réduit par rapport au modèle complet (2.2), on choisit la formulation (2.40) avec la solution hydroélastique  $\phi_\infty$  et on compare les réponses en fréquence obtenues par les deux modèles.

Dans le cas du modèle réduit, on écrira la matrice de raideur, d'amortissement, et de masse du système couplé à l'aide du symbole ' $\wedge$ '. Il s'agit donc de résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{K}}\boldsymbol{\psi}(t) + \widehat{\mathbf{D}}\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) + \widehat{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\psi}}(t) &= \widehat{\mathbf{F}}(t) \quad (2.42) \\ \boldsymbol{\psi}(t=0) = \boldsymbol{\psi}_{ini} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ini}^S \\ \mathbf{q}_{ini} \end{pmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}}(t=0) = \dot{\boldsymbol{\psi}}_{ini}' &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ini}^{S'} \\ \mathbf{q}_{ini}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\widehat{\mathbf{F}}(t)$  étant la force extérieure appliquée sur le système. On déduit  $\mathbf{q}_{ini}$  et  $\mathbf{q}_{ini}'$  à partir de  $\varphi_{ini}$  et  $\varphi_{ini}'$  par la relation (2.4).

### 2.3. COMPARAISON ENTRE MODÈLE COUPLÉ RÉDUIT ET MODÈLE COMPLET

---

On se propose d'obtenir  $\psi(t)$  en se plaçant dans le domaine de Laplace :

$$\mathcal{L}[\psi(t)] = \psi(s) \quad (2.43)$$

$$\mathcal{L}[\dot{\psi}(t)] = s\psi(s) - \psi_{\text{ini}} \quad (2.44)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{\psi}(t)] = s^2\psi(s) - s\psi_{\text{ini}} - \dot{\psi}_{\text{ini}} \quad (2.45)$$

$$\mathcal{L}[\hat{\mathbf{F}}(t)] = \hat{\mathbf{F}}(s) \quad (2.46)$$

Où  $s$  est la variable complexe de Laplace. On obtient alors l'équation :

$$\underbrace{(s^2\hat{\mathbf{M}} + s\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{K}})}_{\hat{\mathbf{G}}(s)} \psi(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) + \underbrace{(\hat{\mathbf{D}} + s\hat{\mathbf{M}})\psi_{\text{ini}} + \hat{\mathbf{M}}\dot{\psi}_{\text{ini}}}_{\text{Conditions Initiales}} \quad (2.47)$$

La réponse directe en fréquence s'obtient en inversant la matrice  $\hat{\mathbf{G}}$  pour chaque fréquence  $f$  souhaitée en prenant  $s = i2\pi f$ . Pour des conditions initiales nulles, on compare donc la réponse directe en fréquence obtenue à partir du système réduit et du système complet que l'on rappelle ici :

Complet :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^T & \mathbf{F} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_F \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Réduit :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ -\Omega^2 \Phi^T \mathbf{C}^T & \Upsilon \Omega^2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\Upsilon \Omega \mathbf{Z} \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_\infty^F & \mathbf{C} \Phi \\ \mathbf{0} & \Upsilon \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Pour cette validation, on considère un amortissement simplifié de type Rayleigh que l'on définit pour l'équation du fluide en prenant  $\mathbf{D}_F = a_0 \mathbf{S} + a_1 \mathbf{F}$ . On peut ainsi comparer les deux systèmes, la matrice  $\mathbf{D}_F$  et  $\mathbf{Z}$  étant liée par la relation (2.15) :  $\mathbf{Z} = \frac{1}{2} (a_0 \Omega^{-1} + a_1 \Omega)$ .<sup>2</sup>

Le cas test choisi est une cuve parallélépipédique. Ce réservoir est rigide mais il est autorisé à se déplacer suivant l'axe longitudinal uniquement. Un ressort de 1000 [N/m]

---

2. On donne dans l'Annexe A la relation entre les pulsations propres et les coefficients d'amortissement associés aux modes de ballonnement. En considérant les deux premiers modes, on obtient un système de deux équations dont les deux inconnues sont  $a_0$  et  $a_1$ .

### 2.3. COMPARAISON ENTRE MODÈLE COUPLÉ RÉDUIT ET MODÈLE COMPLET

---

dans cette direction est placé au point  $A$  (voir Fig. 2.2) et lié à un bâti rigide, immobile. On ne considère pas dans cet exemple d’amortissement de la structure et seul l’amortissement du fluide est pris en compte via l’amortissement modal des modes de ballottement. Les caractéristiques de la cuve sont données par le tableau 2.3. L’excitation se fait au point  $A$  et dans la direction longitudinale (voir fig.2.2).

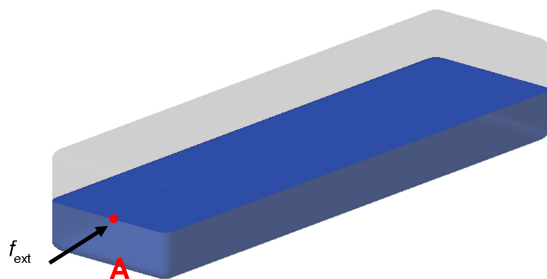


FIGURE 2.2 – Géométrie de la cuve.

<b>Hauteur</b>	0.15 [m]
<b>Longueur</b>	0.83 [m]
<b>Largeur</b>	0.22 [m]
<b>Épaisseur plaque</b>	$10^{-3}$ [m]
<b>Module d’Young</b>	$2.1 \cdot 10^{11}$ [Pa]

FIGURE 2.3 – Caractéristiques de la Cuve.

La figure 2.4 présente quelques exemples de modes couplés du système calculé à partir du modèle réduit (2.40). On représente à l’aide d’un diagramme en barre la participation des 48 premiers modes de ballottement sélectionnés dans le modèle réduit à chacun des modes couplés en affichant la valeur des coordonnées généralisées  $\tau_i$ .

Comme on peut le constater, pour un problème aussi simple, chaque mode du système couplé correspond au couplage entre le mode de vibration du ressort avec un mode de ballottement longitudinal du liquide. On s’intéresse ici au déplacement du point  $A$  dans le domaine fréquentiel. La figure 2.6 présente la comparaison entre le modèle complet et le modèle réduit quand on fait varier le nombre de modes de ballottement que l’on considère dans la base de projection : 10, 30, 50 et 80 modes. La gamme de fréquence recouverte par les modes de ballottement considérés dans chacune des bases est donnée par le tableau 2.5. Le système sans mode de ballottement est également représenté, cette courbe permet de montrer que pour cette cuve, il n’y a qu’un seul mode de structure à environ 2 Hz (celui du ressort) qui va se coupler avec les modes de ballottement sur l’intervalle de fréquence que l’on observe (ici 0 – 5 Hz). Les propriétés de la structure sont telles que celle-ci peut être considérée comme rigide et ce mode correspond au système “réservoir + ressort”. De plus, les conditions aux limites viennent éliminer les modes qui ne sont pas longitudinaux (par exemple les modes 25, 28 de la Fig. 2.4).

### 2.3. COMPARAISON ENTRE MODÈLE COUPLÉ RÉDUIT ET MODÈLE COMPLET

---

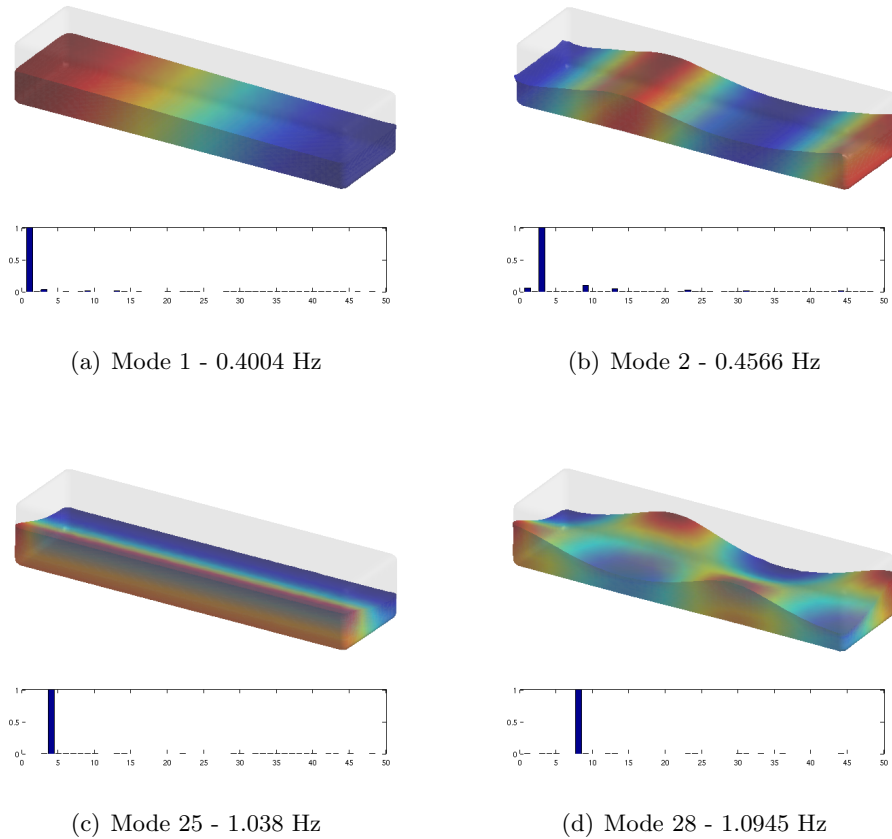


FIGURE 2.4 – Modes propres couplés de la cuve avec la participation des modes de ballottement (coordonnées généralisées). Pour ce modèle, les modes couplés ne font intervenir en général qu'un seul mode de ballottement. La couleur du fluide est donnée par sa pression en tout point.

Nombre de modes de ballottement calculés	Gamme (Hz)
10	0 – 2.2
30	0 – 3.3
50	0 – 3.85
80	0 – 4.5

FIGURE 2.5 – Gamme de fréquence des bases de modes de ballottement considérés.

### 2.3. COMPARAISON ENTRE MODÈLE COUPLÉ RÉDUIT ET MODÈLE COMPLET

---

On constate que la courbe du modèle réduit et du modèle complet se superposent bien dans la gamme de fréquence des modes de ballonnement sélectionnés. Ainsi, si l'on veut correctement représenter le système sur une gamme de fréquence donnée, il faudrait calculer l'ensemble des modes de ballonnement sur cette gamme de fréquence, ce qui n'est pas possible car la densité modale augmente fortement avec la fréquence. On remarque sur le modèle complet que l'influence des modes de ballonnement de plus haute fréquence devient quasiment nulle ce qui fait qu'en pratique, entre 30 et 50 modes suffisent pour bien représenter le modèle complet.

### 2.3. COMPARAISON ENTRE MODÈLE COUPLÉ RÉDUIT ET MODÈLE COMPLET

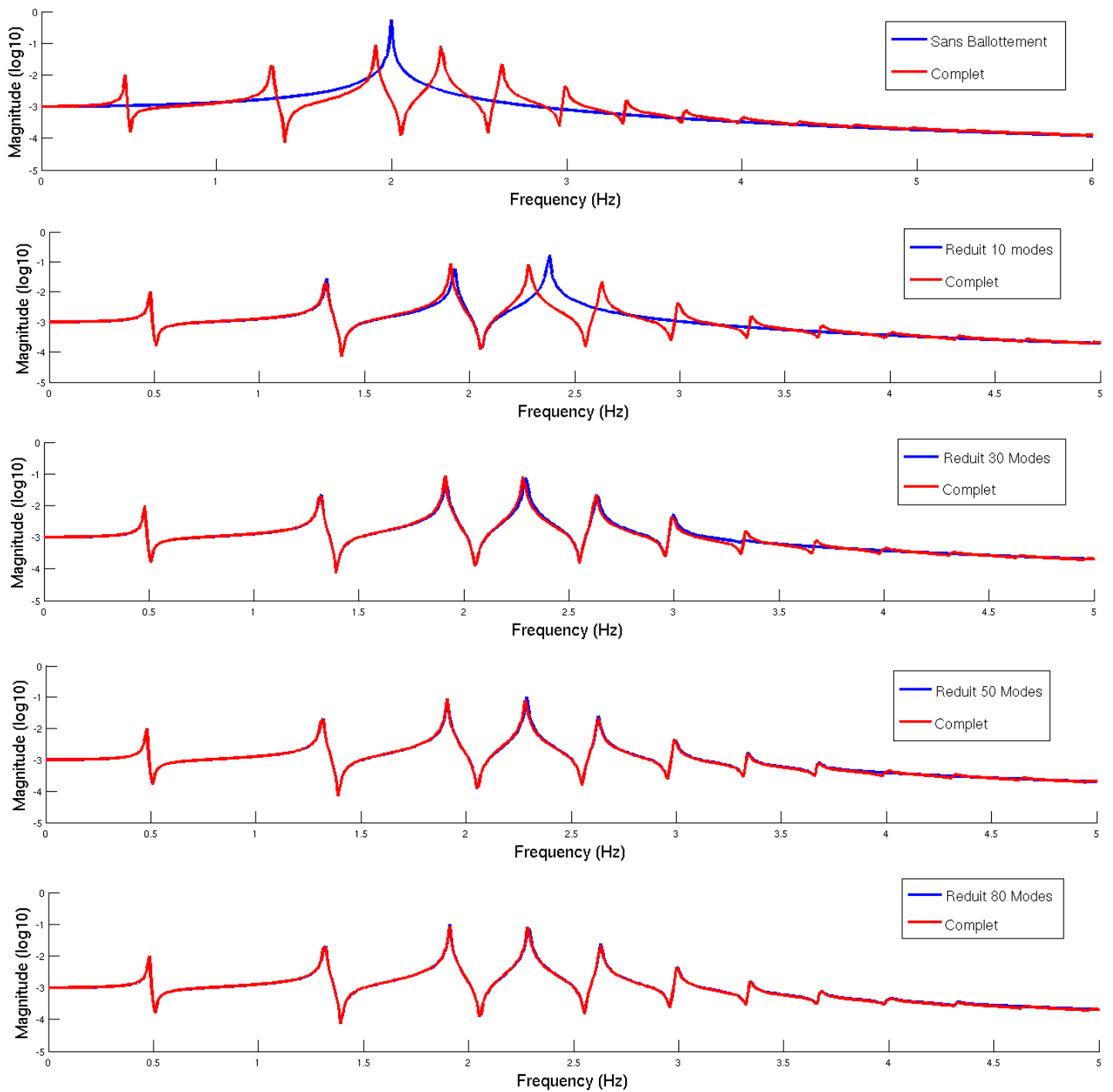


FIGURE 2.6 – Réponse en fréquence (amplitude du déplacement) donnée au point  $A$  dans la direction longitudinale entre le modèle réduit (courbe bleu) et le modèle complet (courbe rouge) avec 10, 30, 50 et 80 modes de ballotement pour un effort unitaire en  $A$  et dans la même direction.



## Chapitre 3

# Résolution par une méthode de synthèse modale complexe

### 3.1 Modes complexes du système couplé fluide-structure réduit amorti

On s'intéresse ici au problème aux valeurs propres du **second ordre** pour des matrices de raideur, d'amortissement et de masse  $(\widehat{\mathbf{K}}, \widehat{\mathbf{D}}, \widehat{\mathbf{M}})$  réelles, associées aux problèmes couplés réduits présentés dans la partie 2.2, où au moins une des matrices  $(\widehat{\mathbf{K}}, \widehat{\mathbf{D}}, \widehat{\mathbf{M}})$  n'est pas symétrique. Les solutions à droite et à gauche sont donc différentes et deux problèmes aux valeurs propres peuvent être écrits de la façon suivante :

$$\text{Trouver } (\mathbf{x}_i, \lambda_i) \text{ tels que : } (\lambda_i^2 \widehat{\mathbf{M}} + \lambda_i \widehat{\mathbf{D}} + \widehat{\mathbf{K}}) \mathbf{x}_i = 0 \quad \mathbf{x}_i \neq 0 \quad (3.1)$$

$$\text{Trouver } (\mathbf{y}_i, \lambda_i) \text{ tels que : } \mathbf{y}_i^* (\lambda_i^2 \widehat{\mathbf{M}} + \lambda_i \widehat{\mathbf{D}} + \widehat{\mathbf{K}}) = 0 \quad \mathbf{y}_i \neq 0 \quad (3.2)$$

$\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{y}_i$  et  $\lambda_i$  sont respectivement les modes propres à droite, à gauche et leurs valeurs propres associées,  $\mathbf{y}_i^*$  étant la transposée conjuguée de  $\mathbf{y}_i$ .  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{y}_i$  sont complexes. Les propriétés des vecteurs et valeurs propres vont notamment dépendre des propriétés de la matrice d'amortissement  $\widehat{\mathbf{D}}$ . On distingue quatre types d'amortissement différents les plus couramment utilisés :

- Amortissement non classique
- Amortissement visqueux
- Amortissement proportionnel
- Amortissement structural

### 3.1. MODES COMPLEXES DU SYSTÈME COUPLÉ FLUIDE-STRUCTURE RÉDUIT AMORTI

---

On ne traite ici que l'amortissement non classique qui nous concerne directement, les trois autres types sont présentés dans l'Annexe A.

#### 3.1.1 Transformation en un problème aux valeurs propres du premier ordre

Dans le cas où  $\widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$  : on se ramène facilement à un problème aux valeurs propres généralisé du premier ordre en prenant  $\lambda_i^2 = -p_i$ .

$$\text{Trouver } (\mathbf{x}_i, \lambda_i) \text{ tels que : } (\widehat{\mathbf{K}} - p_i \widehat{\mathbf{M}}) \mathbf{x}_i = 0 \quad \mathbf{x}_i \neq 0 \quad (3.3)$$

$p_i$  et  $\mathbf{x}_i$  sont les valeurs et vecteurs propres. Lorsque  $\widehat{\mathbf{K}}$  et  $\widehat{\mathbf{M}}$  sont symétriques positives de taille  $N \times N$  on peut trouver au maximum  $N$  valeurs propres par résolution de l'équation caractéristique  $\det(\widehat{\mathbf{K}} - p \widehat{\mathbf{M}}) = 0$ , polynôme en  $p$  à coefficients réels de degré  $N$ . Si de plus  $\widehat{\mathbf{M}}$  est définie positive, il existe  $N$  solutions  $p_1, \dots, p_N$  réelles positives (et donc  $2N$  solutions  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}$  imaginaires pures deux à deux conjuguées) et les vecteurs  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ <sup>1</sup> sont réels et forment une base orthogonale par rapport au produit scalaire défini par :

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)_M = \mathbf{x}_j^T \widehat{\mathbf{M}} \mathbf{x}_i \quad (3.4)$$

On pose classiquement :  $\lambda_i = i\omega_i$  où  $\omega_i$  est la pulsation propre réelle du mode conservatif. Ainsi, la matrice  $\mathbf{x}$  contenant les vecteurs propres  $\mathbf{x}_i$  diagonalise simultanément les matrices  $\widehat{\mathbf{K}}$  et  $\widehat{\mathbf{M}}$  avec :

$$\mathbf{x}^T \widehat{\mathbf{M}} \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^T \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{p} \quad (3.5)$$

$\mathbf{p}$  et  $\boldsymbol{\mu}$  sont des matrices diagonales.  $\mathbf{p}$  contient les valeurs propres  $p_i = \omega_i^2$  et  $\boldsymbol{\mu}$  contient les masses modales  $\mu_i$ .

Dans un cas plus général où  $\widehat{\mathbf{D}}$  est une matrice non nulle : les modes complexes  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{y}_i$  solutions de (3.1) et (3.2) ne diagonalisent pas nécessairement les matrices  $\widehat{\mathbf{K}}$ ,  $\widehat{\mathbf{M}}$  et  $\widehat{\mathbf{D}}$ , ce qui les rend difficilement exploitables dans une méthode de synthèse modale. Il est cependant possible de transformer ce système pour se ramener à un système du premier ordre en passant dans l'espace d'états [72, 56]. Cette transformation permet de passer d'un problème aux valeurs propres quadratique à un problème aux valeurs propres généralisé du premier

---

1. Le mode  $\mathbf{x}_i$  est à la fois vecteur propre de  $\lambda_i$  et  $\bar{\lambda}_i$

### 3.1. MODES COMPLEXES DU SYSTÈME COUPLÉ FLUIDE-STRUCTURE RÉDUIT AMORTI

---

ordre mais de taille double dont les modes propres ont des propriétés d'orthogonalité. Soit  $\Theta$  la variable d'états définie par :

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Le problème d'ordre deux (2.42) se réécrit :

$$\mathbf{B}\dot{\Theta}(t) - \mathbf{A}\Theta(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{F}} \quad , \quad \Theta(t=0) = \Theta_{ini} = \begin{pmatrix} \psi_{ini} \\ \dot{\psi}_{ini} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Avec :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{K}} \\ -\hat{\mathbf{K}} & -\hat{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{I}$  étant la matrice identité. Puisque au moins une des matrices  $(\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{D}})$  n'est pas symétrique, le problème (3.7) ne l'est pas non plus et les problèmes aux valeurs propres à gauche et à droite vont s'écrire :

$$\text{Trouver } (\mathbf{X}_i, \lambda_i) \text{ tels que : } (\lambda_i \mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{X}_i = \mathbf{0} \quad \mathbf{X}_i \neq \mathbf{0} \quad (3.8)$$

$$\text{Trouver } (\mathbf{Y}_i, \lambda_i) \text{ tels que : } \mathbf{Y}_i^*(\lambda_i \mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{Y}_i \neq \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Ces problèmes sont des problèmes aux valeurs propres généralisés du premier ordre et de taille double, équivalents aux problèmes (3.1) et (3.2), et leurs valeurs propres  $\lambda_i$  sont donc identiques. Il existe différents moyens de construire les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  [98], la forme choisie ici va permettre d'écrire la relation simple suivante entre les vecteurs propres  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  et  $(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i)$  :

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \lambda_i \mathbf{x}_i \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_i \\ \bar{\lambda}_i \mathbf{y}_i \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$\bar{\lambda}_i$  étant la valeur conjuguée de  $\lambda_i$ . On vérifie en effet facilement qu'en développant (3.8) et (3.9) avec les relations (3.10), on obtient bien sur le bloc supérieur les problèmes (3.1) et (3.2).

#### 3.1.2 Propriété des modes doubles

Soit  $P(\lambda)$  le polynôme matriciel de degré 2 défini par :

$$P(\lambda) = \lambda^2 \hat{\mathbf{M}} + \lambda \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{K}} \quad (3.11)$$

### 3.1. MODES COMPLEXES DU SYSTÈME COUPLÉ FLUIDE-STRUCTURE RÉDUIT AMORTI

---

$\lambda$  étant une variable complexe. On note  $S(P)$  le spectre de  $P(\lambda)$  avec :

$$S(P) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \det(P(\lambda)) = 0\} \quad (3.12)$$

$S(P)$  contient donc les valeurs propres solutions de l'équation (3.1). Le polynôme caractéristique est définie par  $\det(P(p))$ .

$P(\lambda)$  est de taille  $N \times N$  et de degré 2 et le terme de plus haut degré du polynôme caractéristique est donné par  $\det(\widehat{\mathbf{M}})p^{2N}$ . Si la matrice  $\widehat{\mathbf{M}}$  est non singulière,  $P(\lambda)$  admet  $2N$  valeurs propres dans  $\mathbb{C}$ . Lorsque  $\widehat{\mathbf{M}}$  est de rang  $r$ ,  $P(\lambda)$  admet  $r$  valeurs propres dans  $\mathbb{C}$  avec  $r < 2N$  et  $2N - r$  valeurs propres infinies.

Il est à noter que  $P(\lambda)$  peut avoir deux valeurs propres distinctes pour un même vecteur propre, dans ce cas, le nombre de vecteurs propres indépendants sera inférieur à  $2N$  [44]. Dans notre cas d'étude, les matrices  $\widehat{\mathbf{K}}$ ,  $\widehat{\mathbf{M}}$ , et  $\widehat{\mathbf{D}}$  sont réelles, le spectre de  $P(\lambda)$  est alors symétrique par rapport à l'axe des abscisses du plan complexe : les valeurs propres sont donc réelles ou apparaissent par paires complexes conjuguées. Si les valeurs propres complexes sont associées aux modes de vibration, les valeurs propres réelles sont souvent associées à un amortissement modal  $\xi_i$  dit *surcritique* ou bien à une loi de comportement particulière comme pour les solides viscoélastiques que l'on ne considère pas ici. Le système que l'on étudie étant faiblement amorti, seules les solutions complexes conjuguées sont prises en compte.

Dans la suite, la matrice modale  $\mathbf{x}$  est de taille  $N \times m$  et contient les vecteurs propres  $\mathbf{x}_i$  solutions du problème (3.1) à partie imaginaire positive avec  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $2m$  étant le nombre de modes  $\mathbf{x}_i$  calculés. Ainsi, la base  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2m})$  que l'on considère est telle que  $(\mathbf{x}_{m+1}, \dots, \mathbf{x}_{2m}) = (\bar{\mathbf{x}}_1, \dots, \bar{\mathbf{x}}_m)$ . De même,  $\mathbf{y}$  contient les  $\mathbf{y}_i$  à partie imaginaire positive et  $\boldsymbol{\lambda}$  une matrice diagonale contenant les  $m$  valeurs propres correspondantes.

Les vecteurs  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{Y}_i$  qui se construisent à partir de  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{y}_i$  vont avoir des propriétés remarquables qui vont nous permettre de simplifier et de résoudre le système (3.7). Soit  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  les matrices modales contenant les vecteurs  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{Y}_i$ , on peut écrire  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  en fonction de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  d'après la relation (3.10) :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}\boldsymbol{\lambda} & \bar{\mathbf{x}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y}\boldsymbol{\lambda} & \bar{\mathbf{y}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.1. MODES COMPLEXES DU SYSTÈME COUPLÉ FLUIDE-STRUCTURE RÉDUIT AMORTI

---

On suppose ici que les valeurs propres sont distinctes. En pratique, même si le système a des propriétés de symétrie et est donc susceptible d'avoir des valeurs propres doubles, la discrétisation par éléments finis rompt cette symétrie et les valeurs propres du système sont toutes uniques (mais regroupables par deux).

Dans ces conditions, les vecteurs propres  $\mathbf{X}_i$  et  $\mathbf{Y}_i$  sont dits bi-orthogonaux par rapport aux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  qui sont alors diagonalisables à l'aide des matrices modales  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  [98, 89], et on notera :

$$\mathbf{Y}^* \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{\Upsilon}_B & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{\Upsilon}}_B \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}^* \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{M}_B \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Upsilon}_B \boldsymbol{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{\Upsilon}}_B \bar{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

#### 3.1.3 Exemple de calcul des modes complexes d'une cuve axisymétrique

Afin d'illustrer sur un cas test le calcul de modes propres complexes, on considère une cuve cylindrique déformable remplie à ras bord avec de l'eau. Ce cas simple permet notamment de s'intéresser aux réservoirs axisymétriques ayant des valeurs propres doubles en théorie comme c'est le cas pour une majorité de réservoirs. Le fond de la cuve est maintenu de façon à bloquer les mouvements de corps rigide. La structure étant représentée par un modèle de plaque (voir Fig. 3.1).

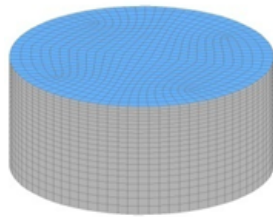


FIGURE 3.1 – Géométrie.

<b>Hauteur</b>	2 [m]
<b>Rayon</b>	2 [m]
<b>Épaisseur plaque</b>	$5.10^{-3}$ [m]
<b>Module d'Young</b>	$2.10^{11}$ [Pa]

FIGURE 3.2 – Caractéristiques de la Cuve.

Les modes complexes sont calculés à l'aide du logiciel NASTRAN © en utilisant le langage DMAP afin de modifier la *Solution 107* : "Solution Sequence Direct Complex Eigenvalue". L'algorithme de Lanczos complexe par bloc est alors utilisé. Le maillage du fluide et de la structure sont ici coïncidents.

Le tableau 3.3 représente les premières valeurs propres obtenues, ainsi que la fréquence propre associée et la figure 3.4 présente quelques exemples de modes couplés obtenus à partir du modèle réduit (2.40). Pour chacun des modes complexes, on représente à

### 3.2. RÉPONSE FRÉQUENTIELLE PAR SYNTHÈSE MODALE COMPLEXE

l'aide d'un diagramme la participation des différents modes de ballottement que l'on prend en compte (ici 48 modes sont utilisés dans la matrice  $\Phi$ ) en représentant la valeur des coordonnées généralisées.

Indice	Valeur propre	Valeur propre	Fréquence propre (Hz)	Mode associé
1		$-0.000003 + i*2.515683$	0.400383	1
2		$-0.000003 - i*2.515683$	0.400383	1
3		$-0.005341 + i*2.868858$	0.456592	2
4		$-0.005341 - i*2.868858$	0.456592	2
5		$-0.005345 - i*2.870555$	0.456863	2
6		$-0.005345 + i*2.870555$	0.456863	2
7		$-0.006045 + i*3.624131$	0.576798	3
8		$-0.006045 - i*3.624131$	0.576798	3
9		$-0.006050 - i*3.625230$	0.576973	3
10		$-0.006050 + i*3.625230$	0.576973	3

FIGURE 3.3 – Premières valeurs propres du système couplé.

Ainsi, on remarque que pour les modes axi-symétriques comme le mode 1, deux valeurs propres conjuguées sont calculées et pour les autres modes qui sont des modes doubles on calcule 4 valeurs propres comme par exemple pour le mode 2 et 3 qui ont la même déformée modale mais orientés différemment. Leur fréquence propre qui en théorie est identique diffère légèrement.

On remarque de plus que pour calculer correctement le mode couplé 28, qui fait intervenir principalement trois modes de ballottement, il faut suffisamment enrichir la base de modes de ballottement.

### 3.2 Réponse fréquentielle par synthèse modale complexe

Il s'agit maintenant de construire la réponse temporelle et la réponse fréquentielle à l'aide des modes propres complexes du système couplé.

Un moyen d'obtenir la réponse fréquentielle consiste à utiliser les modes réels  $\mathbf{x}_i$  du système conservatif associé aux formulations (2.39) ou (2.41). Ainsi, pour des conditions initiales nulles, la relation (2.47) s'écrit après projection sur les modes réels :

$$\left( s^2 \mathbf{x}^T \widehat{\mathbf{M}} \mathbf{x} + s \mathbf{x}^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{x} \right) \mathbf{r} = \mathbf{x}^T \widehat{\mathbf{F}}(s) \quad \text{avec } \boldsymbol{\psi} = \mathbf{x} \mathbf{r} \quad (3.15)$$

D'après les propriétés d'orthogonalité des modes réels calculés à partir de  $\widehat{\mathbf{K}}$  et  $\widehat{\mathbf{M}}$ ,

### 3.2. RÉPONSE FRÉQUENTIELLE PAR SYNTHÈSE MODALE COMPLEXE

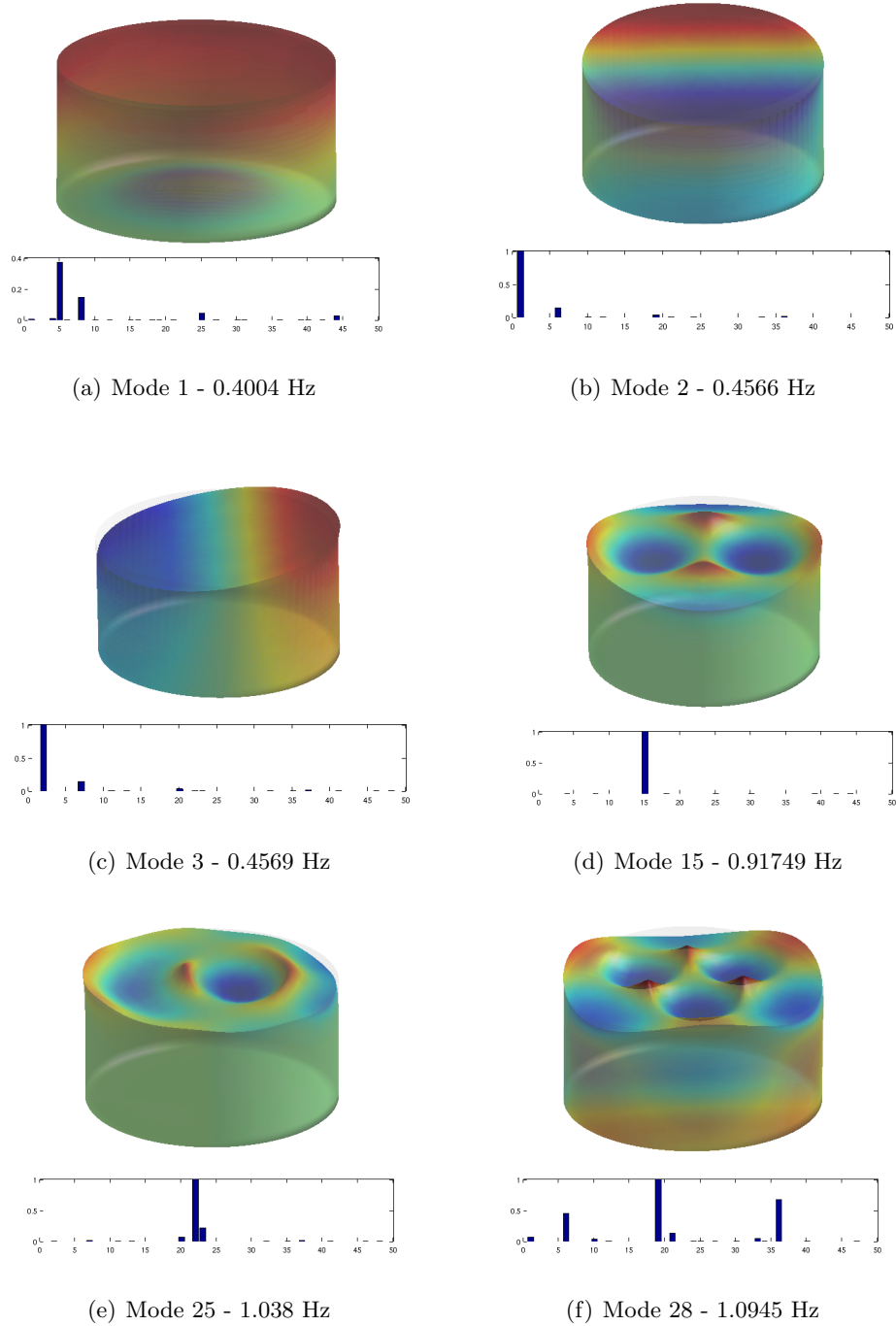


FIGURE 3.4 – Modes propres couplés de la cuve avec la participation des modes de ballonnement (coordonnées généralisées). La couleur du fluide est donnée par la fluctuation de sa pression en tout point.

$\mathbf{x}^\top \widehat{\mathbf{M}} \mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}^\top \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{x}$  sont diagonales alors que  $\mathbf{x}^\top \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{x}$  est une matrice pleine.

Il est alors possible de calculer la réponse directe en fréquence. Cette solution est moins coûteuse qu'une réponse directe en fréquence du système complet car la projection va considérablement réduire la taille du système. Cependant, en utilisant cette méthode on ne peut pas écrire la réponse fréquentielle de manière analytique. L'utilisation des modes complexes a l'avantage de mener à une formule analytique des réponses fréquentielles et temporelles pour certains types d'excitations comme on pourra le voir. C'est cette méthode que l'on présente ici, en utilisant les vecteurs propres complexes calculés précédemment. On résout donc l'équation (3.7) dans le domaine de Laplace avec :

$$\mathcal{L}[\Theta(t)] = \Theta(s) \quad (3.16)$$

afin d'exprimer la réponse fréquentielle du système.

### 3.2.1 Réponse impulsionnelle

On utilise alors une méthode de projection de Petrov-Galerkin dans laquelle,  $\Theta$  est projeté sur la base des modes propres à droite  $\mathbf{X}_i$ , et les équations du système sont projetées sur les modes propres à gauche  $\mathbf{Y}_i$  (définis par (3.10)) :

$$\Theta(s) = \sum_{i=1}^{2m} \mathbf{X}_i Q_i(s) \quad (3.17)$$

$2m$  étant le nombre de modes complexes conjugués sélectionnés<sup>2</sup>.  $Q_i$  étant la coordonnée généralisée associée au vecteur propre  $\mathbf{X}_i$ . On note  $\mathbf{Q}$  le vecteur contenant les coefficients  $Q_i$ . D'où :

$$\Theta(s) = \mathbf{X} \mathbf{Q}(s) \quad (3.18)$$

$$\text{De plus : } \mathcal{L}[\dot{\Theta}(t)] = s\Theta(s) - \Theta_{ini} = s\mathbf{X} \mathbf{Q}(s) - \mathbf{X} \mathbf{Q}_{ini} \quad (3.19)$$

$$\mathcal{L}[\widehat{\mathbf{F}}(t)] = \widehat{\mathbf{F}}(s) \quad (3.20)$$

En prémultipliant les équations par  $\mathbf{Y}^*$ , on a :

$$\mathbf{Y}^*(s\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{X} \mathbf{Q}(s) = \mathbf{Y}^* \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{F}}(s) + \mathbf{Y}^* \mathbf{B} \Theta_{ini} \quad (3.21)$$

---

2. L'erreur introduite par la troncature modale sera traitée dans la section suivante.



### 3.2. RÉPONSE FRÉQUENTIELLE PAR SYNTHÈSE MODALE COMPLEXE

---

Les relations de biorthogonalité décrites précédemment en (3.14) permettent de simplifier l'équation (3.21), on obtient :

$$\mathbf{Q}(s) = (s\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{Y}^* \left( \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{F}}(s) + \mathbf{B}\boldsymbol{\Theta}_{ini} \right) \quad (3.22)$$

On en déduit  $\boldsymbol{\Theta}(s)$  en utilisant (3.17) :

$$\boldsymbol{\Theta}(s) = \mathbf{X}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{Y}^* \left( \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{F}}(s) + \mathbf{B}\boldsymbol{\Theta}_{ini} \right) \quad (3.23)$$

À partir de la relation entre  $\boldsymbol{\Theta}$  et  $\boldsymbol{\psi}$  donnée par l'équation (3.6) et de la relation entre  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  et  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  donnée par (3.13), on déduit  $\boldsymbol{\psi}(s)$  en fonction des matrices modales  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  en développant l'équation (3.23) :

$$\boldsymbol{\psi}(s) = \mathbf{T}_2 \widehat{\mathbf{F}}(s) - \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{T}_1 \boldsymbol{\psi}_{ini} + \widehat{\mathbf{M}}\mathbf{T}_2 \boldsymbol{\psi}'_{ini} \quad (3.24)$$

Avec :

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{x}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda})^{-1} \boldsymbol{\Upsilon}_B^{-1} \mathbf{y}^* + \bar{\mathbf{x}}(s\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\lambda}})^{-1} \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}_B^{-1} \bar{\mathbf{y}}^* \quad (3.25)$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{x}\boldsymbol{\lambda}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda})^{-1} \boldsymbol{\Upsilon}_B^{-1} \mathbf{y}^* + \bar{\mathbf{x}}\bar{\boldsymbol{\lambda}}(s\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\lambda}})^{-1} \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}_B^{-1} \bar{\mathbf{y}}^* \quad (3.26)$$

La réponse impulsionnelle  $\mathbf{H}$  du système couplé fluide-structure amorti en fonction de la pulsation  $\omega$  (obtenue en considérant des conditions initiales nulles et la force  $\widehat{\mathbf{F}}$  unitaire) peut s'écrire :

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{x}(i\omega\mathbf{I} - \boldsymbol{\lambda})^{-1} \boldsymbol{\Upsilon}_B^{-1} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{y}^* + \bar{\mathbf{x}}(i\omega\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\lambda}})^{-1} \bar{\boldsymbol{\Upsilon}}_B^{-1} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \bar{\mathbf{y}}^* \quad (3.27)$$

Cette expression peut également s'écrire sous forme d'une somme :

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \frac{\lambda_i}{(i\omega - \lambda_i) \Upsilon_{B_i}} \mathbf{y}_i^* + \bar{\mathbf{x}}_i \frac{\bar{\lambda}_i}{(i\omega - \bar{\lambda}_i) \bar{\Upsilon}_{B_i}} \bar{\mathbf{y}}_i^* \quad (3.28)$$

#### Cas particulier des modes réels

On vérifie que l'expression précédente est compatible avec le cas particulier sans amortissement, les matrices de masse et de raideur étant symétriques. Dans ce cas, le système étudié est symétrique et les valeurs propres sont imaginaires pures et les modes  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{y}_i$

### 3.2. RÉPONSE FRÉQUENTIELLE PAR SYNTHÈSE MODALE COMPLEXE

---

sont réels et identiques.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{x}_i \\ \bar{\mathbf{y}}_i &= \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i \\ \lambda_i &= i\omega_i \\ \bar{\lambda}_i &= -i\omega_i\end{aligned}$$

$\omega_i$  étant la pulsation propre du système associée au mode  $i$ . De plus, d'après la relation (3.14) on déduit la relation entre les masses modales du système de taille double  $\Upsilon_{Bi}$  et les masses modales du système  $(\widehat{\mathbf{K}}, \widehat{\mathbf{M}})$  notées  $\mu_i$  et données par les relations (3.5) :

$$\begin{aligned}\Upsilon_{Bi} &= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_i \\ \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{y}}_i \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} -\widehat{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{-\mathbf{x}_i^\top \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{x}_i}_{-\omega_i^2 \mu_i} - \omega_i^2 \underbrace{\mathbf{x}_i^\top \widehat{\mathbf{M}} \mathbf{x}_i}_{\mu_i} \\ &= -2\omega_i^2 \mu_i\end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans (3.28), on obtient la réponse impulsionnelle pour un système non amorti classique  $\mathbf{H}(\omega)$  :

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\mu_i (\omega_i^2 - \omega^2)} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \quad \text{avec } \omega \neq \omega_i \quad (3.29)$$

#### 3.2.2 Correction statique

Afin d'améliorer la convergence de la décomposition modale (3.17), il peut être utile comme on le verra dans la partie 3.5, d'ajouter un terme de correction statique [57, 41]. Soit  $2N$  le nombre de modes maximum que l'on puisse calculer (correspondant à la taille du système). Pour une telle base la réponse impulsionnelle  $\mathbf{H}(s)$  va s'écrire :

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{x}_i \frac{\lambda_i}{(s - \lambda_i) \Upsilon_{Bi}} \mathbf{y}_i^* + \bar{\mathbf{x}}_i \frac{\bar{\lambda}_i}{(s - \bar{\lambda}_i) \Upsilon_{Bi}} \bar{\mathbf{y}}_i^* \right) \quad (3.30)$$

### 3.3. RÉPONSE TEMPORELLE (LINÉARISÉE) PAR SYNTHÈSE MODALE COMPLEXE

---

En considérant une troncature modale à  $2m$  modes, cette expression peut s'écrire en introduisant le résidu  $\mathbf{R}_m$  :

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^m \left( \mathbf{x}_i \frac{\lambda_i}{(s - \lambda_i)\Upsilon_{Bi}} \mathbf{y}_i^* + \bar{\mathbf{x}}_i \frac{\bar{\lambda}_i}{(s - \bar{\lambda}_i)\bar{\Upsilon}_{Bi}} \bar{\mathbf{y}}_i^* \right) + \mathbf{R}_m \quad (3.31)$$

avec  $\mathbf{R}_m = \sum_{i=m+1}^N \left( \mathbf{x}_i \frac{\lambda_i}{(s - \lambda_i)\Upsilon_{Bi}} \mathbf{y}_i^* + \bar{\mathbf{x}}_i \frac{\bar{\lambda}_i}{(s - \bar{\lambda}_i)\bar{\Upsilon}_{Bi}} \bar{\mathbf{y}}_i^* \right)$

En considérant que  $|s| \ll |\lambda_k|$  pour  $k > m$ , c'est à dire lorsque les fréquences propres associées aux modes du résidu sont suffisamment grandes par rapport à la plage de fréquence d'intérêt, on peut simplifier l'expression de  $\mathbf{R}_m$  :

$$\mathbf{R}_m = - \sum_{i=m+1}^N \left( \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*}{\Upsilon_{Bi}} + \frac{\bar{\mathbf{x}}_i \bar{\mathbf{y}}_i^*}{\bar{\Upsilon}_{Bi}} \right) = -2\text{Re} \left( \sum_{i=m+1}^N \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*}{\Upsilon_{Bi}} \right)$$

Par définition, on peut écrire  $\mathbf{H}(s)$  comme une matrice inverse :  $\mathbf{H}(s) = \left( \widehat{\mathbf{K}} + s\widehat{\mathbf{D}} + s^2\widehat{\mathbf{M}} \right)^{-1}$ .

En prenant  $s = 0$ , on en déduit d'après (3.30) la relation suivante :

$$\mathbf{H}(0) = \widehat{\mathbf{K}}^{-1} = - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*}{\Upsilon_{Bi}} + \frac{\bar{\mathbf{x}}_i \bar{\mathbf{y}}_i^*}{\bar{\Upsilon}_{Bi}} \right) = -2\text{Re} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*}{\Upsilon_{Bi}} \right)$$

$\mathbf{R}_m$  peut donc s'écrire :

$$\mathbf{R}_m = -2\text{Re} \left( \sum_{i=m+1}^N \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*}{\Upsilon_{Bi}} \right) = \widehat{\mathbf{K}}^{-1} + 2\text{Re} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^*}{\Upsilon_{Bi}} \right) \quad (3.32)$$

En remplaçant (3.32) dans (3.31), on obtient l'expression de  $\mathbf{H}$  avec correction statique :

$$\mathbf{H}(s) = \widehat{\mathbf{K}}^{-1} + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \frac{s}{(s - \lambda_i)\Upsilon_{Bi}} \mathbf{y}_i^* + \bar{\mathbf{x}}_i \frac{s}{(s - \bar{\lambda}_i)\bar{\Upsilon}_{Bi}} \bar{\mathbf{y}}_i^* \quad (3.33)$$

### 3.3 Réponse temporelle (linéarisée) par synthèse modale complexe

Après retour dans le domaine temporel par transformée de Laplace inverse, le deuxième et troisième termes de l'équation (3.24) correspondent à la réponse libre du système qui dépend des conditions initiales en déplacement et vitesse  $\psi_{ini}$  et  $\psi'_{ini}$ . Le premier terme dépend de la force d'excitation et correspond, dans le domaine temporel, à la réponse

### 3.3. RÉPONSE TEMPORELLE (LINÉARISÉE) PAR SYNTHÈSE MODALE COMPLEXE

---

transitoire et à la réponse forcée du système. On obtient de même à partir de l'équation (3.23) la réponse forcée temporelle :

$$\Theta(t) = \mathbf{x}e^{\Lambda t}\mathbf{M}_B^{-1}\mathbf{Y}^* * (\mathbf{B}\Theta_{ini}\delta(t) + \widehat{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{F}}(t)) \quad (3.34)$$

\* représentant le produit de convolution et  $\delta(t)$  la distribution de Dirac. L'expression de  $\psi$  se déduit de la relation (3.24). En effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2(t) &= \left( \mathbf{x}\lambda e^{\lambda t}\mathbf{r}_B^{-1}\mathbf{y}^* + \bar{\mathbf{x}}\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{r}}_B^{-1}\bar{\mathbf{y}}^* \right) h(t) = 2\text{Re} \left( \mathbf{x}\lambda e^{\lambda t}\mathbf{r}_B^{-1}\mathbf{y}^* \right) h(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \mathbf{x}_i \frac{\lambda_i e^{\lambda_i t}}{\Upsilon_{Bi}} \mathbf{y}_i^* + \bar{\mathbf{x}}_i \frac{\bar{\lambda}_i e^{\bar{\lambda}_i t}}{\bar{\Upsilon}_{Bi}} \bar{\mathbf{y}}_i^* \right) h(t) \end{aligned}$$

$$\text{de même } \mathbf{T}_1(t) = 2\text{Re} \left( \mathbf{x}e^{\lambda t}\mathbf{r}_B^{-1}\mathbf{y}^* \right) h(t) = \sum_{i=1}^m \left( \mathbf{x}_i \frac{e^{\lambda_i t}}{\Upsilon_{Bi}} \mathbf{y}_i^* + \bar{\mathbf{x}}_i \frac{e^{\bar{\lambda}_i t}}{\bar{\Upsilon}_{Bi}} \bar{\mathbf{y}}_i^* \right) h(t)$$

$h(t)$  étant la fonction Heaviside qui vaut 0 pour  $t < 0$  et 1 pour  $t \geq 0$ .

L'expression de  $\psi(t)$  est donnée par  $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\psi(s)]$  :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 2\text{Re} \left( \int_0^t \mathbf{x}\lambda e^{\lambda(t-\tau)}\mathbf{r}_B^{-1}\mathbf{y}^* \widehat{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \right) \\ &\quad - 2\widehat{\mathbf{K}}\text{Re} \left( \mathbf{x}e^{\lambda(t-\tau)}\mathbf{r}_B^{-1}\mathbf{y}^* \right) h(t)\psi_{ini} + 2\widehat{\mathbf{M}}\text{Re} \left( \mathbf{x}\lambda e^{\lambda(t-\tau)}\mathbf{r}_B^{-1}\mathbf{y}^* \right) h(t)\psi'_{ini} \end{aligned}$$

Cette expression peut être calculée analytiquement pour des excitations simples : harmonique, créneau ou Dirac (en supposant les conditions initiales nulles par souci de simplicité) :

$$\text{Excitation Harmonique : } \widehat{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}_0 \cos \alpha t \quad (3.35)$$

$$\psi(t) = \text{Re} \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \frac{\lambda_i}{\mathbf{r}_B^{-1}} \left( \frac{e^{\lambda_i t} - e^{-i\alpha t}}{\lambda_i + i\alpha} - \frac{e^{\lambda_i t} - e^{i\alpha t}}{\lambda_i - i\alpha} \right) \mathbf{y}_i^* \mathbf{F}_0 \right) h(t)$$

$$\text{Excitation Heaviside : } \widehat{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}_0 h(t) \quad (3.36)$$

$$\psi(t) = \text{Re} \left( \sum_{i=1}^m 2 \mathbf{x}_i \frac{(e^{\lambda_i t} - 1)}{\mathbf{r}_B^{-1}} \mathbf{y}_i^* \mathbf{F}_0 \right) h(t)$$

$$\text{Excitation Dirac : } \widehat{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}_0 \delta(t) \quad (3.37)$$

$$\psi(t) = \text{Re} \left( \sum_{i=1}^m 2 \mathbf{x}_i \frac{e^{\lambda_i t}}{\mathbf{r}_B^{-1}} \mathbf{y}_i^* \mathbf{F}_0 \right) h(t)$$

### 3.4 Recomposition de la réponse du fluide

La réponse temporelle et la réponse fréquentielle que l'on obtient ici se font via la variable  $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}^S, \mathbf{q})$  (avec  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa}$  ou  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\tau}$  selon que l'on utilise  $\varphi_0$  ou bien  $\varphi_\infty$  dans le modèle réduit du fluide). La difficulté vient du fait que les équations réduites du système ont été établies de manière à ce que les modes à droite du système complet puissent être reconstitués à partir des modes à droite du système réduit par les relations suivantes :

$${}_d\phi_i = \phi_0({}_d\mathbf{u}_i^S) + \Phi_d \boldsymbol{\kappa}_i \quad (3.38)$$

$${}_d\phi_i = \phi_\infty({}_d\mathbf{u}_i^S) + \Phi_d \boldsymbol{\tau}_i \quad (3.39)$$

mais, le lien entre les modes à gauche du système réduit et complet n'est pas immédiat. Nous établirons dans la suite, pour chacun des deux modèles réduits envisagés (avec  $\phi_0$  et  $\phi_\infty$ ), une formule de recomposition qui permet d'assurer ce lien.

#### Dans le cas où $\varphi_\infty$ est utilisé

On note  $({}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S, {}_g\bar{\phi}_i)$  un mode à gauche du système complet :

$$\left( \begin{array}{cc} {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S{}^\top & {}_g\bar{\phi}_i{}^\top \end{array} \right) \left( \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^\top & \mathbf{F} \end{array} \right] + \lambda_i \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_F \end{array} \right] + \lambda_i^2 \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{M}_S & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{array} \right] \right) = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

avec  $\mathbf{L}^\top {}_g\phi_i = 0$ . On considère la décomposition de  ${}_g\phi_i$  suivante :

$${}_g\phi_i = -\lambda_i^2 \phi_\infty({}_g\mathbf{u}_i^S) + \Phi \Omega^2 {}_g\boldsymbol{\tau}_i \quad (3.41)$$

Les relations d'orthogonalité (2.8) et (2.12), les relations de conjugaison (2.31), (2.32) et (2.34) ainsi que l'expression de la matrice de masse ajoutée (2.38) permettent alors de développer le problème (3.40). En multipliant la seconde ligne à droite par  $\Phi$ , on a :

$$\left[ \begin{array}{c} {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S{}^\top \mathbf{K}_S^{Hyd} + \lambda_i^2 \phi_\infty{}^\top \mathbf{C}^\top - {}_g\bar{\boldsymbol{\tau}}_i{}^\top \Omega^2 \Phi^\top \mathbf{C}^\top + \lambda_i {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S{}^\top \mathbf{D}_S + \lambda_i^2 {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S{}^\top \mathbf{M} \\ {}_g\bar{\boldsymbol{\tau}}_i{}^\top \Omega^2 \boldsymbol{\Upsilon} + 2 \lambda_i {}_g\bar{\boldsymbol{\tau}}_i{}^\top \boldsymbol{\Upsilon} \Omega \mathbf{Z} + \lambda_i^2 {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S{}^\top \mathbf{C} \Phi + \lambda_i^2 {}_g\bar{\boldsymbol{\tau}}_i{}^\top \boldsymbol{\Upsilon} \end{array} \right] = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

On obtient alors le problème suivant, identique à (2.40) :

$$\left( \begin{array}{cc} {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S{}^\top & {}_g\bar{\boldsymbol{\tau}}_i{}^\top \end{array} \right) \left( \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ -\Omega^2 \Phi^\top \mathbf{C}^\top & \boldsymbol{\Upsilon} \Omega^2 \end{array} \right] + \lambda_i \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\boldsymbol{\Upsilon} \Omega \mathbf{Z} \end{array} \right] + \dots \right. \\ \left. \dots \lambda_i^2 \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_\infty^F & \mathbf{C} \Phi \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Upsilon} \end{array} \right] \right) = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

### 3.4. RECOMPOSITION DE LA RÉPONSE DU FLUIDE

Ce qui montre que les coefficients  ${}_g\boldsymbol{\tau}_i$  utilisés dans (3.41) sont bien solutions du problème aux valeurs propres réduit à gauche et permettent bien de recomposer le potentiel de déplacement des modes à gauche  ${}_g\boldsymbol{\phi}_i$  du problème (3.40).

#### Dans le cas où $\varphi_0$ est utilisé

En considérant la décomposition de  ${}_g\boldsymbol{\phi}_i$  suivante :

$${}_g\boldsymbol{\phi}_i = -\bar{\lambda}_i^2 \boldsymbol{\phi}_0({}_g\mathbf{u}_i^S) - \bar{\lambda}_i^2 \boldsymbol{\Phi} {}_g\boldsymbol{\kappa}_i \quad (3.44)$$

Les relations de conjugaison (2.29), (2.30) et (2.33) ainsi que l'expression de la matrice de masse ajoutée (2.37) permettent alors de développer le problème (3.40). En multipliant la seconde ligne à droite par  $\boldsymbol{\Phi}$  on a :

$$\begin{bmatrix} {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^{S\top} \mathbf{K}_S^{Hyd} + \lambda_i^2 {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^{S\top} \mathbf{M}_0^F + \lambda_i {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^{S\top} \mathbf{D}_S + \lambda_i^2 {}_g\bar{\boldsymbol{\kappa}}_i^\top \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{C}^\top + \lambda_i^2 {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^{S\top} \mathbf{M} \\ -\lambda_i^2 {}_g\bar{\boldsymbol{\kappa}}_i^\top \boldsymbol{\Upsilon} - 2 \lambda_i^3 {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^{S\top} \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Z} \boldsymbol{\Omega}^{-1} - 2 \lambda_i^3 \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{Z} - \lambda_i^4 {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^{S\top} \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^{-2} - \lambda_i^4 \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega}^{-2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

En prenant  $\lambda_i \neq 0$ , on multiplie la seconde ligne par  $-\frac{1}{\lambda_i^2} \boldsymbol{\Omega}^2$ , on obtient le système (3.46) qui est le transposé du problème aux valeurs propres associé à (2.39) :

$$\begin{pmatrix} {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^{S\top} & {}_g\bar{\boldsymbol{\kappa}}_i^\top \end{pmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega}^2 \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{D}_S & 2 \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Z} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{0} & 2 \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Z} \end{bmatrix} \lambda_i^2 + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_0^F & \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{C}^\top & \boldsymbol{\Upsilon} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

Ainsi, on remarque que le potentiel  ${}_g\boldsymbol{\phi}_i$  peut être reconstruit en utilisant la décomposition (3.44) où les coordonnées généralisées  ${}_g\boldsymbol{\kappa}_i$  sont calculées à partir du problème (3.46) qui est le problème aux valeurs propre transposé (2.40). En prenant la transposée de (3.46) on a :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^{Hyd} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega}^2 \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ 2 \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Z} \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{C}^\top & 2 \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{Z} \end{bmatrix} \lambda_i^2 + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_0^F & \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{C}^\top & \boldsymbol{\Upsilon} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} {}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S \\ {}_g\bar{\boldsymbol{\kappa}}_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Les coordonnées généralisées  ${}_g\boldsymbol{\kappa}_i$  peuvent être déduites de  ${}_d\boldsymbol{\kappa}_i$  d'où :

$${}_g\boldsymbol{\phi}_i = -\bar{\lambda}_i^2 \boldsymbol{\phi}_0({}_d\bar{\mathbf{u}}_i^S) - \bar{\lambda}_i^2 \boldsymbol{\Phi} {}_d\bar{\boldsymbol{\kappa}}_i \quad (3.48)$$

Dans le cas où  $\lambda_i = 0$ , on montre facilement que cette expression reste valable car  $({}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S, {}_g\boldsymbol{\phi}_i)$ , avec  ${}_g\bar{\mathbf{u}}_i^S$  un mode de corps rigide et  ${}_g\boldsymbol{\phi}_i = 0$ , est bien solution à gauche de (3.40) avec  $\lambda_i = 0$ .

### Expression des solutions quasi-statiques

Pour obtenir la réponse complète du fluide, il reste à exprimer la réponse quasi-statique  $\phi_0$  ou  $\phi_\infty$ . On pourra notamment se référer à l'ouvrage [78] qui donne l'expression de ces solutions particulières que l'on rappelle ici.

En considérant le problème conservatif (1.19) et la définition de la solution  $\varphi_\infty$  donnée par (2.24) on obtient la relation sur  $\phi_\infty$  suivante :

$$\mathbf{F}\phi_\infty = \mathbf{C}^\top \mathbf{u}^S \quad \text{avec} \quad \phi_\infty = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma^* \quad (3.49)$$

La matrice  $\mathbf{F}$  est inversible si l'on supprime les degrés de liberté associés à la surface libre [78]. En notant par un indice  $*$  les matrices et vecteurs pour lesquels on supprime ces degrés de liberté, on a :

$$\phi_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{SL} \\ \mathbf{F}^{*-1} \mathbf{C}^{*\top} \mathbf{u}^S \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$\mathbf{0}_{SL}$  étant un vecteur de zéros de la taille du nombre de degrés de liberté de la surface libre.

Dans [91], l'auteur montre que  $\phi_0$  est solution de l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{F}\phi_0 = (\mathbf{C}^\top - \mathbf{R}^\top) \mathbf{u}^S \quad (3.51)$$

où  $\mathbf{R}$  étant la matrice associée à l'opérateur  $\mathbf{R}$  défini par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}^S, \delta\varphi) = \frac{\rho^F}{A(\Gamma)} \left( \int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \right) \left( \int_{\Gamma^*} \delta\varphi d\Gamma \right) \quad (3.52)$$

avec  $A(\Gamma)$  l'aire de la surface libre. Cet opérateur permet d'écrire  $\phi_0$  en considérant une condition d'unicité quelconque.

De plus, on remarque que l'opérateur  $\mathbf{F}(\varphi, \delta\varphi)$  associé à la matrice  $\mathbf{F}$  s'annule si et seulement si  $\varphi$  est une constante :

$$\int_{\Omega_F^*} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi d\Omega_F = 0 \quad \iff \varphi = \text{constante} \quad (3.53)$$

Le noyau de  $\mathbf{F}$  est donc de dimension 1 et est généré par le vecteur colonne  $\mathbf{1}_{N_\varphi}$  ne contenant que des 1. Ainsi, toute sous-matrice de  $\mathbf{F}$  obtenue par suppression d'une ou plusieurs lignes et des colonnes correspondantes est inversible. On choisit de supprimer le premier degré

de  $\Phi$  [78]. On notera également  $\mathbf{C}_2$  et  $\mathbf{R}_2$  les matrices obtenues en supprimant la colonne correspondante de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{R}$ , et  $\mathbf{F}_{22}$  la matrice obtenue en éliminant les lignes et les colonnes correspondantes de  $\mathbf{F}$ . On a alors :

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{22}^{-1} (\mathbf{C}_2^\top - \mathbf{R}_2^\top) \mathbf{u}^S \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

## 3.5 Analyse d'un exemple

On a pu comparer dans le chapitre 2.3 la réponse en fréquence par une méthode directe obtenue par le modèle complet et réduit. On souhaite maintenant étudier la méthode de synthèse modale qui permet d'écrire la réponse impulsionnelle à l'aide des modes propres complexes du système couplé  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{y}_i$ . On va donc comparer cette solution avec la réponse directe en fréquence du modèle réduit. Afin de mettre en évidence l'amortissement du fluide et ses effets, on choisit de prendre une matrice d'amortissement de la structure nulle.

### 3.5.1 Influence de la correction statique

On considère dans un premier temps la cuve rectangulaire présentée dans la partie 2.3. La figure 3.5 présente une comparaison entre la réponse directe en fréquence et les réponses obtenues par synthèse modale à partir des modes propres complexes du système réduit, on utilise ici les 50 premiers modes de ballottements. On s'intéresse au déplacement  $\mathbf{u}^S$  de la structure suivant l'axe longitudinale de la cuve ainsi qu'au potentiel de déplacement  $\varphi$  du fluide au point  $A$ .

On constate que pour ce cas test, la méthode de synthèse modale permet de bien approcher la réponse directe en fréquence pour le déplacement de la structure avec ou sans correction statique alors que pour le potentiel de déplacement du fluide, la correction statique est indispensable. La réponse obtenue avec correction statique est bonne dans la gamme de fréquence des modes de ballonnement calculés (3.85 Hz pour 50 modes, voir Fig. 2.5).



### 3.5. ANALYSE D'UN EXEMPLE

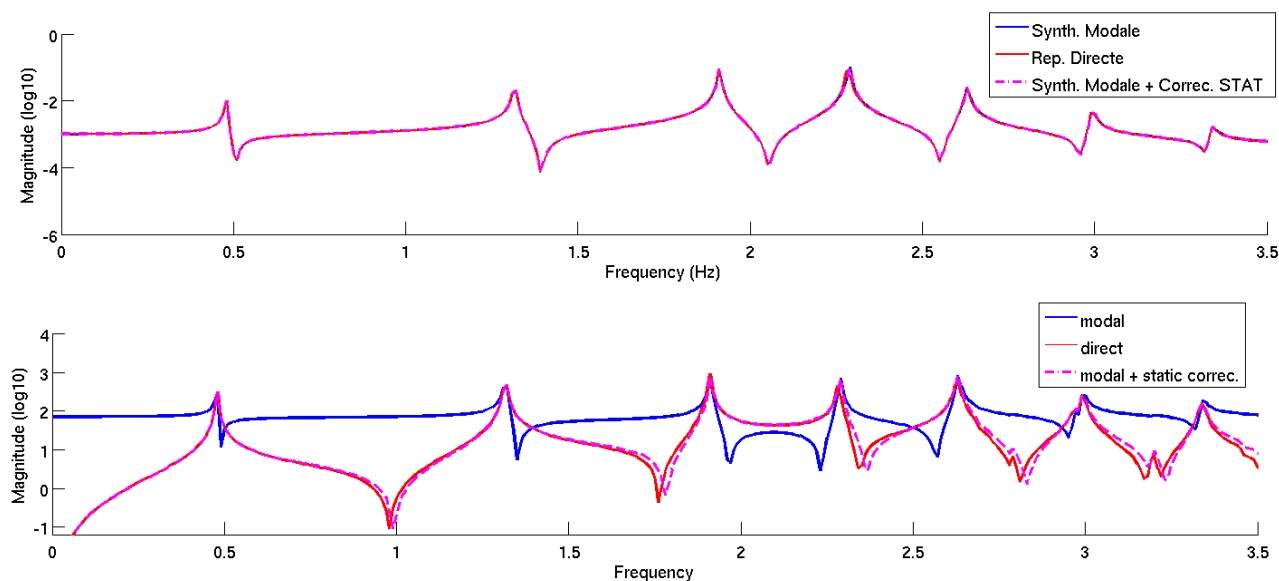


FIGURE 3.5 – Comparaison entre la réponse impulsionnelle obtenue par synthèse modale avec et sans correction statique (courbes violette et bleue) et la réponse directe en fréquence (courbe rouge) pour le déplacement de la structure (figure du haut) dans la direction radiale et le potentiel de déplacement du fluide (en bas) au point  $A$ .

#### 3.5.2 Convergence de la solution en fonction de la base modale complexe.

Afin d'étudier l'influence du nombre de modes complexes calculés sur la réponse en fréquence on va considérer cette fois-ci la cuve cylindrique présentée dans la partie 3.1.3. Les figures 3.7 et 3.8 représentent les réponses en fréquence obtenues pour le déplacement de la structure dans la direction radiale au point  $A$  et pour le potentiel de déplacement au point  $A$  (Fig. 3.6). La première configuration utilise un modèle réduit avec 48 modes de ballonnement et la seconde 100 modes. Dans chacun des cas on trace la réponse directe en fréquence du modèle réduit ainsi que les réponses obtenues par synthèse modale en faisant varier le nombre de modes complexes calculés.

On remarque dans un premier temps que pour ce modèle de cuve, on distingue bien la gamme de fréquence dans laquelle vont intervenir les modes de ballonnement (jusque 1.5 Hz environ) puis ce sont les modes hydroélastique qui interviennent (pics prononcés car non amortis). Pour le modèle réduit à 100 modes de ballonnement, les résonances et anti-résonances sont plus importantes (on considère plus de modes de ballonnement) mais

### 3.5. ANALYSE D'UN EXEMPLE

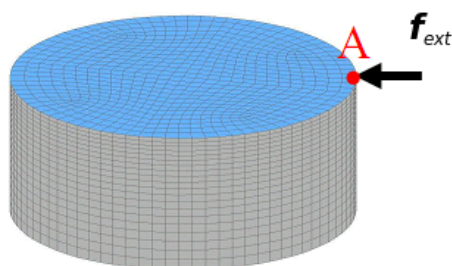


FIGURE 3.6 – Géométrie et point d'excitation.

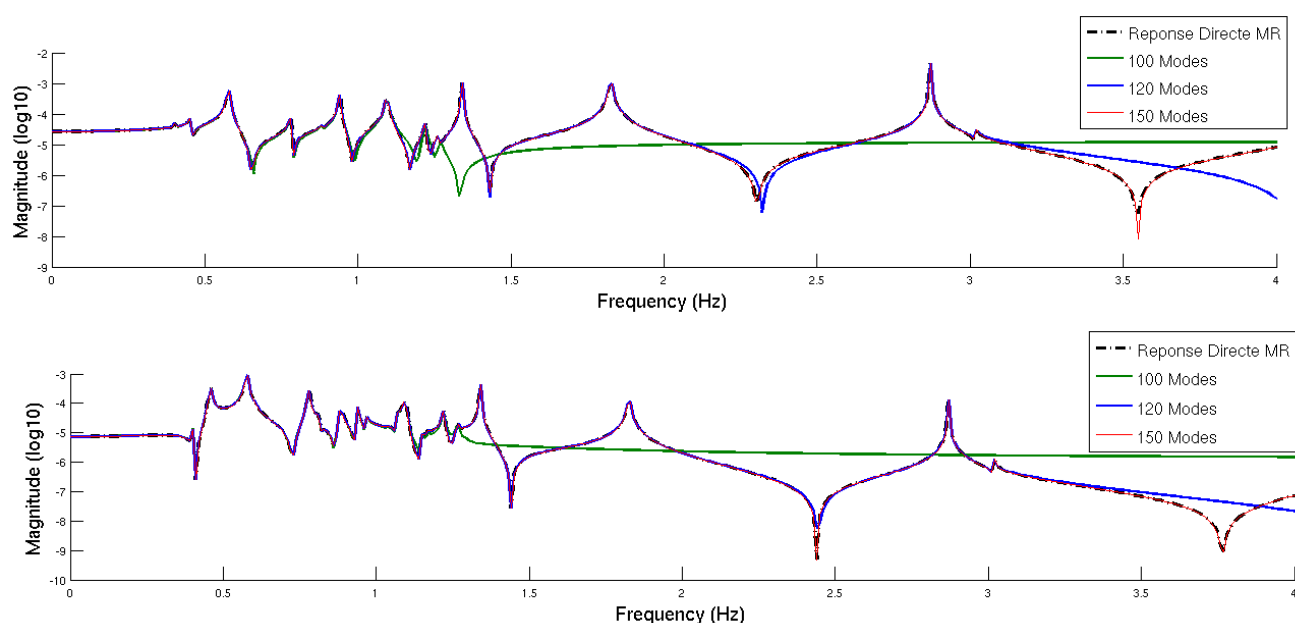


FIGURE 3.7 – Comparaison pour le déplacement de la structure (en haut) et le potentiel de déplacement du fluide (en bas) de la réponse directe en fréquence avec une méthode de synthèse modale pour un modèle réduit utilisant 48 modes de ballonnement. On utilise 100, 120 et 150 modes complexes.

deviennent négligeables à partir de 1.5 Hz.

Les premiers modes complexes calculés correspondent aux modes de ballonnement introduits, ainsi, plus on met des modes de ballonnement dans la base de projection plus le nombre de modes complexes à calculer pour obtenir une réponse fréquentielle satisfaisante doit être important. Afin de bien approcher la réponse directe il faut au moins dépasser la gamme de fréquence des modes de ballonnement. Puisque chaque mode complexe apparaît avec son conjugué, il faut dépasser le double du nombre de mode de ballonnement : 150

### 3.5. ANALYSE D'UN EXEMPLE

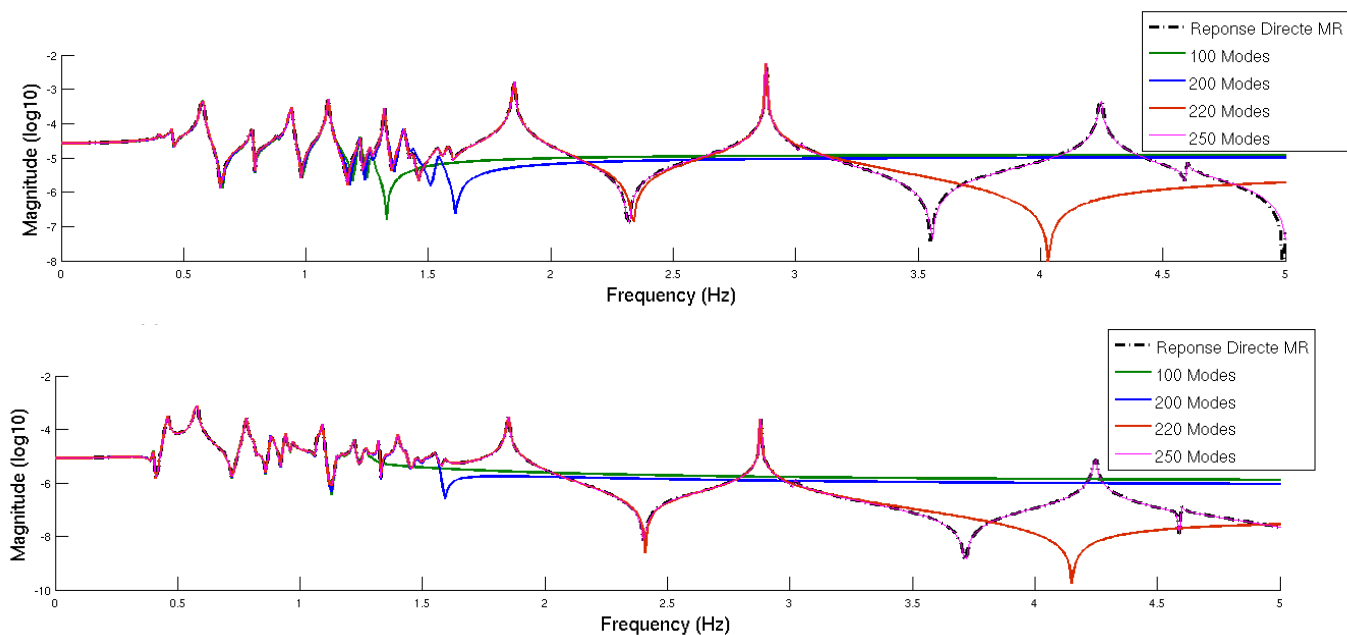


FIGURE 3.8 – Comparaison pour le déplacement de la structure (en haut) et le potentiel de déplacement du fluide (en bas) de la réponse directe en fréquence avec une méthode de synthèse modale pour un modèle réduit utilisant 100 modes de ballottement. On utilise 100, 200, 220 et 250 modes complexes.

modes complexes à partie imaginaire positive permettent d'approcher la réponse directe pour 48 modes de ballottement (voir Fig. 3.7) et 250 modes complexes pour 100 modes de ballottement (voir Fig. 3.8)

#### 3.5.3 Comparaison des synthèses modales complexe et réelle pour le calcul de la réponse en fréquence

Pour une cuve cylindrique dont la géométrie est identique à celle présentée dans la partie 3.5.2 on présente dans la figure 3.9, une comparaison entre la réponse fréquentielle obtenue à partir des modes réels (la méthode étant présentée au début du chapitre 3.2) et la réponse fréquentielle obtenue par synthèse modale utilisant les modes complexes. Pour la première méthode, le calcul des modes réels et la réponse directe en fréquence du système projeté sur ces modes est faite avec le logiciel NASTRAN ©qui va automatiquement gérer l'enrichissement de la base des modes réels en ajoutant des modes résiduels. Ainsi, en calculant 100 modes réels, 127 modes résiduels sont calculés afin de corriger les effets

### 3.5. ANALYSE D'UN EXEMPLE

statiques et on constate que la réponse obtenue coïncide parfaitement avec la réponse calculée avec les modes complexes (avec correction statique).

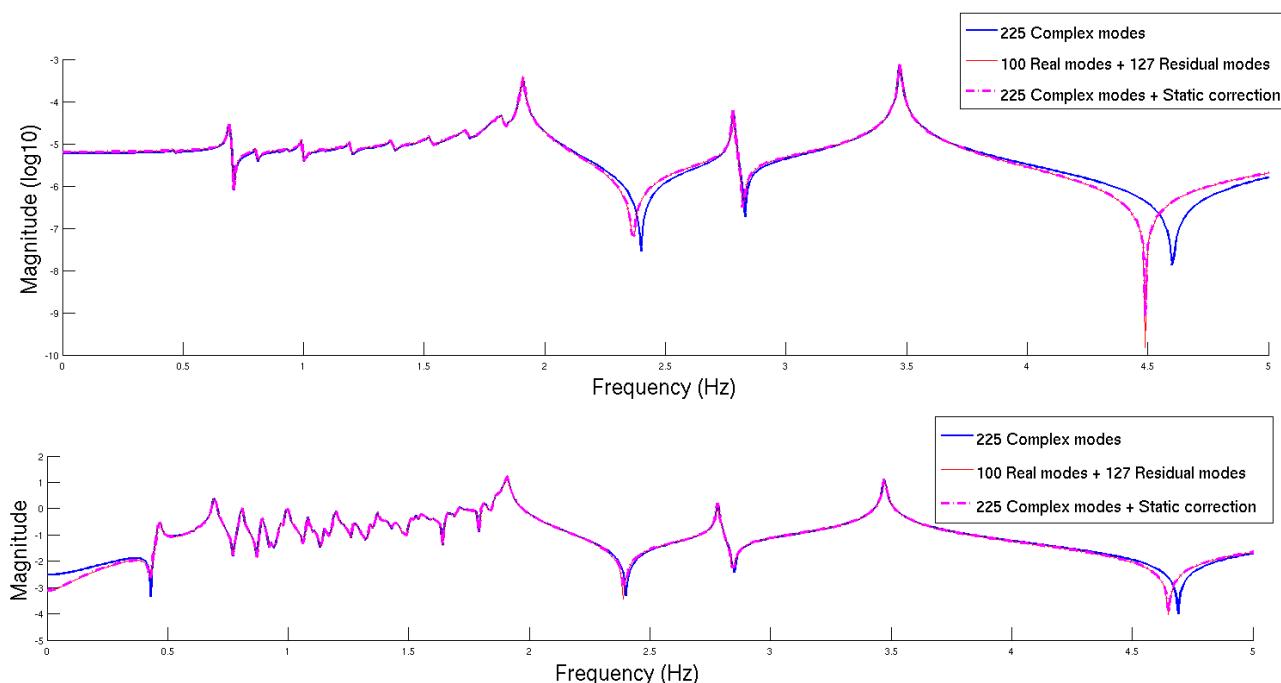


FIGURE 3.9 – Réponse fréquentielle par synthèse modale utilisant les modes réels ou les modes complexe (avec et sans correction statique) du système. Déplacement de la structure au point d'excitation  $A$  dans la direction radiale en haut et potentiel de déplacement du fluide en bas. Le module d'Young de la cuve est ici de  $8.10^{11}$  Pa.

Les deux méthodes peuvent être considérées comme équivalentes au niveau du résultat, les temps de calcul des modes réels et de la réponse directe sont comparables avec ceux des modes complexes. L'utilisation des modes complexes présente l'avantage de fournir une expression analytique de la réponse fréquentielle ainsi que de la réponse temporelle, ce qui permet de reconstruire de manière instantanée ces réponses quelle que soit l'excitation (ou les conditions aux limites) imposée.

#### 3.5.4 Réponse temporelle

À l'aide des formules (3.35), (3.36) et (3.37), on représente le déplacement du point  $A$  et  $B$  (voir Fig. 3.10) en fonction du temps pour différents types d'excitation : harmonique, créneau et Dirac (voir Fig. 3.11). L'excitation harmonique se fait à la fréquence

### 3.5. ANALYSE D'UN EXEMPLE

---

0.77 Hz. Dans cette partie, l'amortissement du fluide étant très faible, on ne néglige plus l'amortissement de la structure et on introduit un amortissement de type Rayleigh.

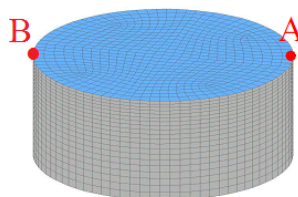


FIGURE 3.10 – Points d'observation :  $A$  et  $B$  et point d'excitation  $A$ .

Pour chaque courbe on observe une phase transitoire et un régime permanent. Pour l'excitation harmonique, les oscillations sont entretenues et en opposition de phase (les points  $A$  et  $B$  sont diamétralement opposés). Pour une excitation en créneau ou Dirac, le système tend vers une position statique. Pour une excitation de type créneau, seul le point  $A$  est déplacé et sa position statique diffère du point  $B$ .

Une représentation de la phase transitoire de l'excitation harmonique à la fréquence 0.4506 Hz est également représentée par la figure 3.12. La flèche noire de la première image illustre le point d'application et la direction du chargement. Le fluide est alors au repos, puis commence à être excité par la force appliquée.

### 3.5. ANALYSE D'UN EXEMPLE

---

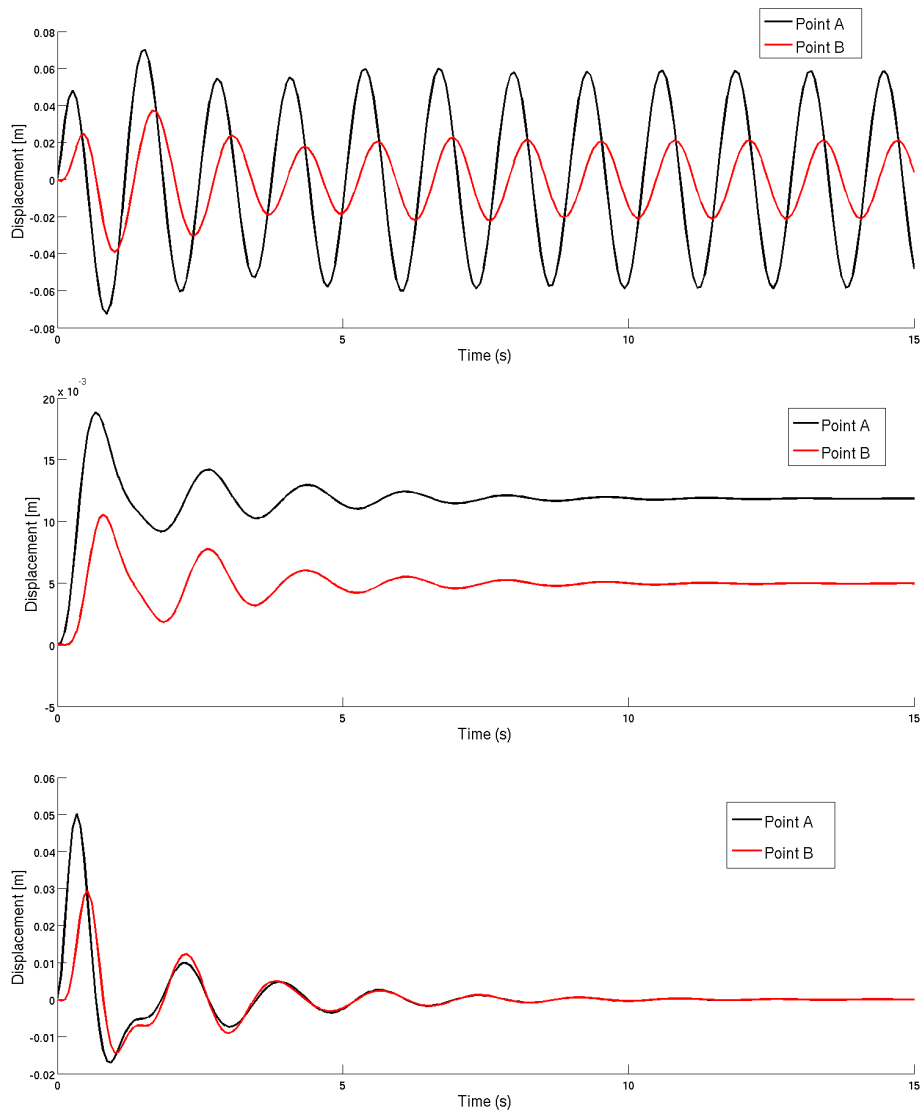


FIGURE 3.11 – Réponse temporelle du déplacement du point *A* et *B* dans la direction radiale pour une excitation harmonique à la fréquence 0.77 Hz (en haut), un créneau (milieu) et un Dirac (bas).  $F_0 = 3000N$

### 3.5. ANALYSE D'UN EXEMPLE

---

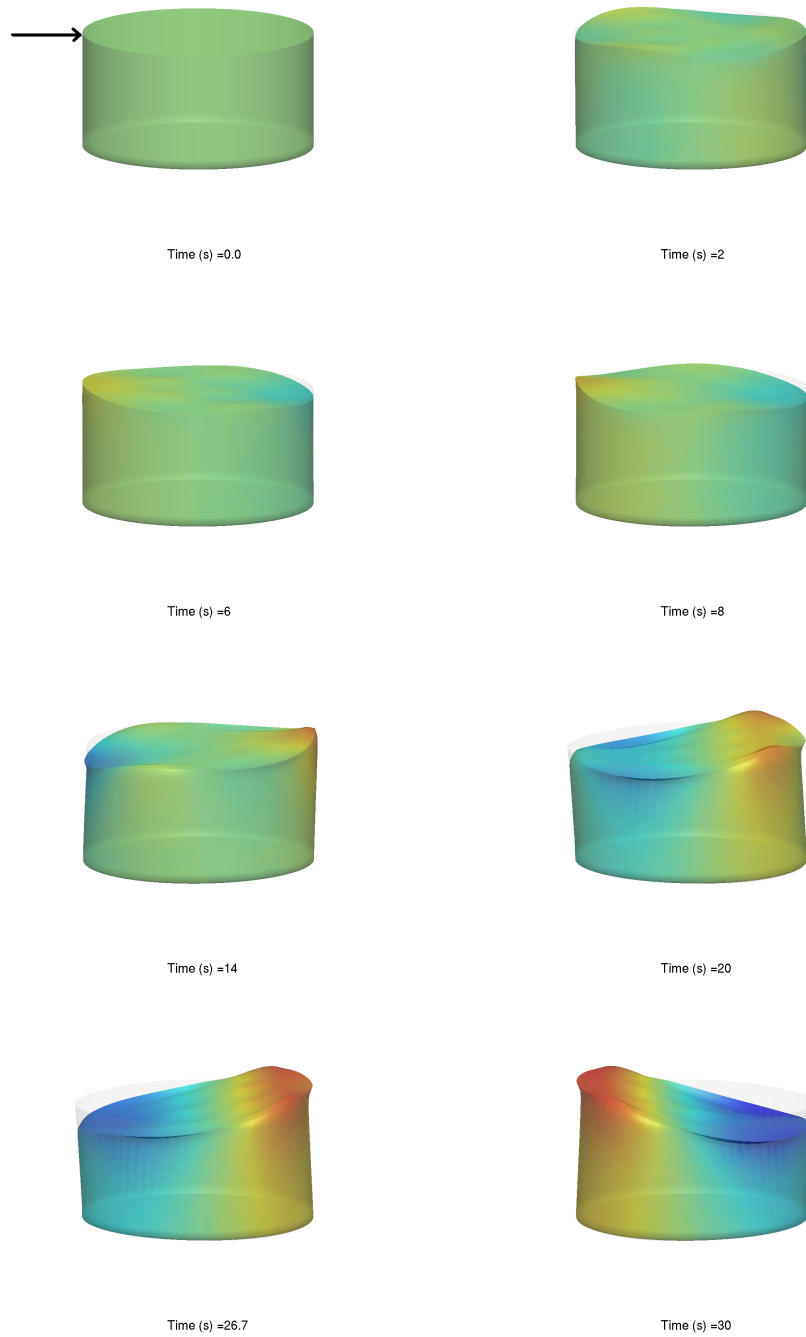


FIGURE 3.12 – Représentation de la déformation du liquide à plusieurs instants pour une excitation harmonique à la fréquence 0.4506 Hz. La structure n'est pas représentée. La couleur du fluide est liée à la fluctuation de pression en tout point.

### 3.5. ANALYSE D'UN EXEMPLE

---



## Chapitre 4

# Estimation des coefficients d'amortissement modaux

La projection de l'équation du fluide sur ses modes de ballonnement ainsi que le choix d'un amortissement diagonal ont permis de réduire la modélisation des phénomènes dissipatifs dans le fluide à la simple détermination de la matrice  $\mathbf{Z}$  qui apparaît dans les équations (2.39) ou (2.41). Cette matrice diagonale contient les coefficients d'amortissement modaux  $\zeta_i$  que l'on souhaite maintenant calculer en les reliant à la physique des phénomènes dissipatifs dans le fluide [23].

Comme le rappellent Henderson et Miles [48], l'énergie dissipée dans un fluide dépend principalement de quatre phénomènes :

- La dissipation visqueuse au contact des parois du réservoir,
- La dissipation visqueuse dans le volume du liquide,
- La dissipation visqueuse à la surface libre du liquide,
- L'hystérésis due au frottement du bord de la surface libre sur la paroi du réservoir (phénomène de mouillage).

Avec le modèle d'amortissement diagonal, chaque mode de ballonnement peut être considéré comme un oscillateur simple dont le degré de liberté généralisé associé  $q_i$  vérifie l'équation différentielle du second ordre en temps :

$$\mu_i \ddot{q}_i + 2\mu_i\omega_i\zeta_i \dot{q}_i + \mu_i\omega_i^2 q_i = g(\mathbf{u}^S) \quad (4.1)$$

Cette relation découle du modèle réduit (2.48) où le terme de couplage de la matrice de raideur est mis dans le second membre. L'équation homogène associée s'écrit donc :

$$\ddot{q}_i + 2\omega_i\zeta_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \quad (4.2)$$

Les solutions complexes  $\lambda_i$  de l'équation caractéristique associée à (4.2) sont alors de la forme :

$$\lambda_{i\pm} = -\omega_i \zeta_i \pm \omega_i \sqrt{\zeta_i^2 - 1} \quad (4.3)$$

Le cas qui nous intéresse ici est le cas où le coefficient d'amortissement  $\zeta_i$  est tel que  $\zeta_i < 1$  et  $\lambda_i$  est complexe. La solution  $q_i(t)$  de l'équation (4.2) peut alors s'écrire :

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i\omega_i t} \left[ A \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i t\right) + B \sin\left(\sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i t\right) \right] \quad (4.4)$$

On constate que la réponse du système garde un caractère oscillant mais à une *pulsation propre amortie*  $\omega_i^d = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$  légèrement inférieure à la pulsation propre  $\omega_i$ <sup>1</sup>. L'amplitude des oscillations, ainsi que la racine carrée de l'énergie  $E_i$  du système, quant à eux décroissent à chaque période  $2\pi/\omega_i^d$  d'un coefficient dont le logarithme est appelé *décrément logarithmique*, noté  $\delta_i$  :

$$\delta_i = \ln \left( \frac{q_i(t)}{q_i(t + \frac{2\pi}{\omega_i^d})} \right) = \ln \left( \sqrt{\frac{E_i(t)}{E_i(t + \frac{2\pi}{\omega_i^d})}} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\Delta E_i}{E_i} \right) \quad (4.5)$$

où  $\Delta E_i < 0$  est la diminution d'énergie dans le système à chaque période. D'après l'expression (4.4), on peut établir un lien entre le décrétement logarithmique  $\delta_i$  et le coefficient d'amortissement  $\zeta_i$  :

$$\delta_i = \ln \left( \frac{1}{e^{-2\pi \zeta_i \frac{\omega_i}{\omega_i^d}}} \right) = \frac{2\pi \zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \quad (4.6)$$

En considérant un amortissement faible ( $\Delta E_i \ll E_i$  et  $\zeta_i \ll 1$ ), on peut obtenir une relation approchée simple entre le coefficient d'amortissement  $\zeta_i$  d'un oscillateur faiblement amorti et la fraction d'énergie dissipée sur une période  $\Delta E_i/E_i$  :

$$\boxed{\zeta_i \simeq \frac{-\Delta E_i}{4\pi E_i} \ll 1} \quad (4.7)$$

1. Remarquons que l'influence de l'amortissement sur les fréquences propres est du second ordre et en pratique cet effet est négligeable [9]

où  $\Delta E_i$  est la somme des énergies dissipées sur une période par les différentes sources de dissipation d'énergie et  $E_i$  est l'énergie totale associée à un mode de ballonnement. Cette énergie totale peut être calculée comme le maximum de l'énergie cinétique du fluide (ou comme le maximum de son énergie potentielle) :

$$E_i = \frac{\rho^F \omega_i^2}{2} \int_{\Omega_F^*} (\nabla \varphi_i)^2 d\Omega = \frac{\omega_i^2}{2} \mathbf{F}(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{\omega_i^2}{2} \mu_i \quad (4.8)$$

Parmi les quatres sources précédemment citées, on ne prendra en compte dans un premier temps que la dissipation visqueuse dans le volume fluide  $\Delta E^\Omega$  et aux parois  $\Delta E^\Sigma$ . On a donc :

$$\Delta E_i = \Delta E_i^\Sigma + \Delta E_i^\Omega \quad (4.9)$$

On propose d'utiliser une approche MSE (Modal Strain Energy) pour calculer les taux d'amortissement modaux. Cette méthode consiste à supposer que les modes de ballonnement amortis et non amortis ont des formes proches, de façon à pouvoir utiliser les modes propres non amortis pour estimer la dissipation d'énergie associée à chaque mode amorti [59]<sup>2</sup>.

Pour justifier cette approximation, on s'inspire de la démarche de [5], pour étudier le champ de vitesse dans un fluide faiblement visqueux et incompressible contenu dans un reservoir.

En appliquant la décomposition de Helmholtz, on écrit la vitesse du fluide  $\mathbf{v}^F$  dans le volume fluide sous la forme [43] :

$$\mathbf{v}^F = \nabla \dot{\varphi}^\nu + \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad (4.10)$$

$\Omega_F$  étant domaine simplement connexe de frontière  $\partial\Omega_F$ .  $\dot{\varphi}^\nu$  et  $\mathbf{A}$  sont respectivement un champ scalaire et un champ vectoriel définis sur  $\Omega_F$ . Puis, on développe ces 2 champs dans le cas d'un liquide faiblement amorti en fonction du petit paramètre  $\epsilon$  avec :

$$\epsilon = \frac{l_\nu}{L} \quad (4.11)$$

$l_\nu$  représente la longueur caractéristique des phénomènes visqueux [48] :  $l_\nu = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_i}}$  ( $\nu$  étant le coefficient de viscosité cinématique du fluide) et  $L$  la longueur caractéristique du

2. Dans [99], l'auteur étudie l'influence de l'hypothèse MSE et montre que celle-ci peut être pertinente même pour des grandes valeurs de coefficient d'amortissement (jusqu'à 20%).

problème. Le développement au première ordre donne :

$$\varphi^\nu = \varphi_0^\nu + \epsilon\varphi_1^\nu + o(\epsilon) \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \epsilon\mathbf{A}_1 + o(\epsilon) \quad (4.12)$$

On peut démontrer ensuite (Annexe C) que  $\mathbf{rot}\mathbf{A}_0$  décroît exponentiellement lorsque l'on s'éloigne des parois et que lorsque la viscosité  $\nu$  tend vers 0 ( $\epsilon$  tend vers 0), le potentiel de déplacement du fluide visqueux  $\varphi^\nu$  tend vers le potentiel de déplacement du fluide non visqueux  $\varphi$  excepté dans la couche limite (dont l'épaisseur tend elle-même vers 0). Pour des petits déplacements, le fluide faiblement amorti peut donc être considéré comme quasi irrotationnel excepté dans la couche limite. Cependant, celle-ci est suffisamment fine pour pouvoir confondre le volume où le fluide est considéré comme irrotationnel avec le volume total du fluide [102, 61].

## 4.1 Amortissement visqueux aux parois

La dissipation visqueuse générée dans les couches limites de liquide au contact avec les parois du réservoir a été longtemps considérée comme la principale source d'amortissement du ballonnement. Comme indiqué précédemment, l'épaisseur de ces couches limites est en général suffisamment faible et on peut calculer les propriétés de l'écoulement avec un bon degré d'approximation en considérant localement la paroi comme une plaque plane infinie en contact avec un liquide en écoulement (laminaire) parallèle à ce plan (modèle de Stokes). Cette approximation est bien sûr valable uniquement si le rayon de courbure de la paroi est grand devant la longueur  $l_\nu$  (Pour information :  $l_\nu = 0.6$  mm pour le ballonnement de l'eau à une période de 1 seconde).

Le modèle classique de couche limite de Stokes est présenté dans [88], la *vitesse à l'infini*  $\mathbf{v}_\infty^F$  introduite dans ce modèle (qui est en pratique la vitesse du liquide à l'extérieur de la couche limite) peut être considérée dans notre cas comme étant égale à la vitesse du liquide à la paroi calculée par la théorie classique de fluide irrotationnel non visqueux. Ainsi pour le mode  $i$  on aura :

$$\mathbf{v}_\infty^F = \nabla\dot{\varphi}_i \quad (4.13)$$

La vitesse  $\mathbf{v}_\infty$  vérifie donc la propriété de glissement sur la paroi :

$$\mathbf{v}_\infty^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad (4.14)$$

On définit les axes  $\mathbf{i}_x$  et  $\mathbf{i}_y$  du plan tangent à la paroi tel que  $\mathbf{i}_x$  soit colinéaire à  $\mathbf{v}_\infty^F$  et  $(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, -\mathbf{n}_\Sigma)$  soit un repère orthonormé direct (voir Fig. 4.1).

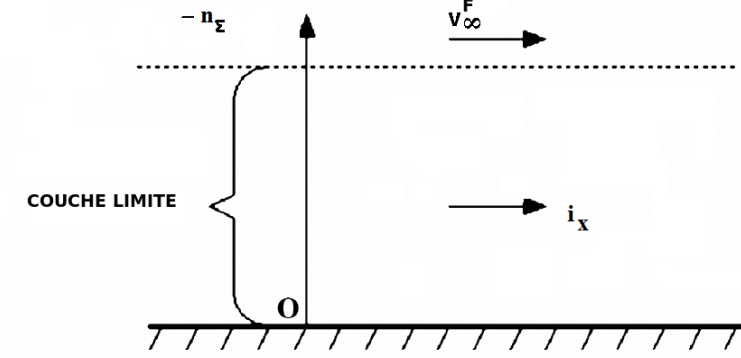


FIGURE 4.1 – Schéma de la couche limite de Stokes

Dans ce cas, le vecteur vitesse  $\mathbf{v}_i^F$  pour le mode  $i$ , dans le modèle de couche limite de Stokes est donné par [88] :

$$\mathbf{v}_i^F(z, t) = \begin{pmatrix} v_i^x(z, t) = \left[ \cos \omega_i t - e^{-\frac{z}{l_\nu}} \cos \left( \omega_i t - \frac{z}{l_\nu} \right) \right] |\mathbf{v}_\infty^F| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$z$  étant ici la coordonnée suivant  $\mathbf{n}_\Sigma$ . Le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{d}$  (on utilise aussi la notation  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ ) du liquide dans la couche limite s'exprime alors dans le même repère par :

$$2\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dv_i^x}{dz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_i^x}{dz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

avec

$$\frac{dv_i^x}{dz}(z, t) = \frac{1}{l_\nu} e^{-\frac{z}{l_\nu}} \left[ \cos \left( \omega_i t - \frac{z}{l_\nu} \right) - \sin \left( \omega_i t - \frac{z}{l_\nu} \right) \right] |\mathbf{v}_\infty^F| \quad (4.17)$$

Comme il est rappelé dans l'Annexe B, la dissipation instantanée d'énergie dans un fluide visqueux incompressible peut être calculée par :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega_F^*} 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d} \, d\Omega \quad (4.18)$$

Puisque le domaine fluide considéré ici est la couche limite  $e^L$  que l'on prend égale à  $2\pi l_\nu$  sur toute l'interface fluide-structure  $\Sigma^*$ , cette expression se réécrit :

$$\frac{dE_i}{dt} = -\rho^F \nu \int_{\Sigma^*} \int_{z=0}^{e^L} \left( \frac{dv_i^x}{dz} \right)^2 dz \, d\Sigma \simeq -\rho^F \nu \int_{\Sigma^*} \int_{z=0}^{\infty} \left( \frac{dv_i^x}{dz} \right)^2 dz \, d\Sigma \quad (4.19)$$

L'intégration sur  $z$  allant jusqu'à l'infini se justifie ici par le fait que l'intégrande tend vers 0 exponentiellement. On peut donc calculer l'énergie moyenne dissipée sur une période par les effets visqueux dans la couche limite à la paroi du réservoir et retrouver l'expression donnée par [48] :

$$\Delta E_i^\Sigma = \int_0^{2\pi} \frac{dE_i}{dt} dt = -\rho^F \nu \frac{2\pi}{\omega_i} \int_{\Sigma^*} (\nabla \dot{\varphi}_i)^2 \int_{z=0}^{\infty} \frac{1}{l_\nu^2} e^{-\frac{2z}{l_\nu}} dz d\Sigma = -\frac{\rho^F \pi}{2} l_\nu \int_{\Sigma^*} (\nabla \dot{\varphi}_i)^2 d\Sigma \quad (4.20)$$

Cette expression s'écrit à partir du potentiel de déplacement du fluide sous la forme :

$$\Delta E_i^\Sigma = -\frac{\rho^F \pi}{2} l_\nu \omega_i^2 \int_{\Sigma} (\nabla \varphi_i)^2 d\Sigma \quad (4.21)$$

avec  $(\nabla \dot{\varphi}_i)^2 = \omega_i^2 (\nabla \varphi_i)^2$ .

## 4.2 Amortissement visqueux dans le volume du liquide

Bien que l'amortissement aux parois et l'amortissement dans le volume du liquide soient respectivement proportionnels à  $\epsilon$  et  $\epsilon^2$ , on montre que leurs contributions peuvent être parfois comparables [71] et l'ajout du terme de dissipation dans le volume fluide permet dans ce cas d'améliorer les comparaisons calculs-essais des coefficients d'amortissement.

Henderson *et al.* proposent une modélisation de ce phénomène plus simple que celle de Martel *et al.* à partir des travaux de Lamb [63].

Ainsi, contrairement à ce qu'une confusion courante entre viscosité et irrotationnalité amène à penser, les mouvements irrotationnels d'un liquide incompressible visqueux génèrent une dissipation visqueuse donnée par l'équation (B.24), rappelée en Annexe (B).

Pour le mode  $i$  on a :

$$\frac{dE_i}{dt} = - \int_{\Omega_F^*} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} d\Omega = - \int_{\partial\Omega_F^*} \rho^F \nu \nabla(\mathbf{v}^{F^2}) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\partial\Omega_F^*} \rho^F \nu \omega_i^2 \nabla((\nabla \varphi_i)^2) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.22)$$

$\boldsymbol{\tau}$  désignant les contraintes visqueuses et  $\mathbf{n}$  la normale sortante au volume  $\Omega_F^*$  sur son bord. L'énergie moyenne  $\Delta E_i^\Omega$  dissipée (sur une période) dans le volume d'un liquide incompressible visqueux vaut donc :

$$\Delta E_i^\Omega = \int_0^{2\pi} \left( \frac{dE_i}{dt} \right) \cos^2(\omega_i t) dt \quad (4.23)$$

### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

---

Soit :

$$\Delta E_i^\Omega = -\frac{\rho^F \pi}{2} l_\nu^2 \omega_i^2 \int_{\partial\Omega_F} \nabla ((\nabla \varphi_i)^2) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (4.24)$$

Le calcul du gradient n'est ici pas très précis ; l'environnement logiciel dans lequel a été développé ce module de calcul des énergies dissipées ne supporte en effet que les éléments finis de fluide linéaires. Ceci pose un problème car le champ  $\nabla \varphi$  n'est alors pas continu entre les éléments. Une procédure de lissage des valeurs de  $\nabla \varphi$  entre les éléments permet de restituer cette continuité mais au prix d'une erreur qu'il conviendrait de quantifier dans des travaux ultérieurs via des méthodes d'estimation d'erreurs a posteriori.

Pour le calcul de  $\Delta E_i^\Omega$  on préférera utiliser la formule 4.18 qui a priori est plus précise.

$$\Delta E_i^\Omega = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_i}} \left( \frac{dE_i}{dt} \right) \cos^2(\omega_i t) \, dt = -\frac{2\pi}{\omega_i} \int_{\Omega_F} \rho^F \nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_i^F) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_i^F) \, d\Omega_F \quad (4.25)$$

et donc :

$$\Delta E_i^\Omega = -2\pi \omega_i \int_{\Omega_F} \rho^F \nu \boldsymbol{\epsilon}(\nabla \varphi_i) : \boldsymbol{\epsilon}(\nabla \varphi_i) \, d\Omega_F \quad (4.26)$$

## 4.3 Implémentation et validation

Pour estimer numériquement les valeurs des intégrales contenues dans les expressions de  $\Delta E_i^\Sigma$  et  $\Delta E_i^\Omega$ , on discrétise par la méthode des éléments finis les domaines d'intégration, à savoir, le volume liquide  $\Omega_F^*$ , l'interface fluide-structure  $\Sigma^*$  et la surface libre  $\Gamma^*$ .

### 4.3.1 Notations

On appellera  $T$  la bijection qui associe à un point de l'élément de référence  $E_R$  de coordonnées  $\boldsymbol{\Xi}$ , un point du domaine physique de coordonnées  $\mathbf{X}^*$  de l'élément  $E$  :

$$\mathbf{X}^* = T(\boldsymbol{\Xi}) \simeq \sum_{\beta=1}^n N_\beta(\boldsymbol{\Xi}) X_\beta^* = \mathbf{X}^* \mathbf{N} \quad (4.27)$$

où  $\mathbf{N}$  est le vecteur colonne de dimension  $n$  (nombre de noeuds de l'élément fini considéré) constitué par les  $n$  fonctions de base  $N_\beta$  exprimées dans les coordonnées intrinsèques de l'élément, et  $(X_\beta)_{\beta \in [1..n]}$  sont les coordonnées des  $n$  sommets de l'élément constituant les colonnes de la matrice  $\mathbf{X}^*$ . Si on considère des éléments isoparamétriques, l'interpolation

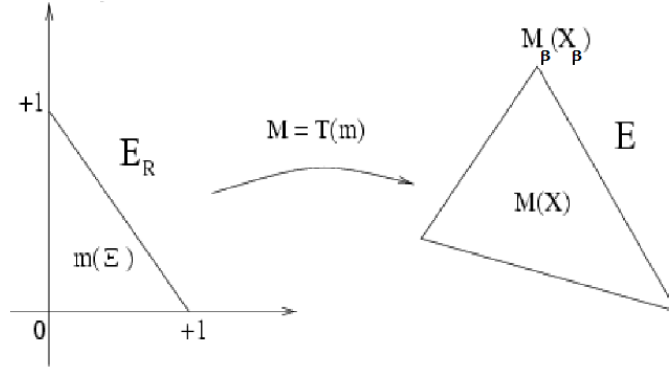


FIGURE 4.2 – Élément de référence et interpolation géométrique

du champ inconnu  $\varphi$  en tout point de l'élément, à partir des valeurs  $\phi_\beta$  aux noeuds, s'écrit directement en coordonnées intrinsèques à partir des mêmes fonctions de forme  $N_\beta$  :

$$\varphi(\mathbf{X}^*) \simeq \sum_{\beta=1}^n N_\beta(\Xi) \phi_\beta = \mathbf{N}^T \phi \quad (4.28)$$

où  $\phi$  est le vecteur colonne des valeurs discrètes  $\phi_\beta$ . La formule de dérivation des fonctions composées permet d'exprimer le gradient de  $\varphi$  par rapport aux coordonnées physiques  $\mathbf{X}^*$ , en fonction de son gradient par rapport aux coordonnées intrinsèques  $\Xi$  et de la matrice des dérivées partielles de la transformation (ou matrice jacobienne)  $T$  que l'on notera  $\mathbf{D}_\Xi T$  :

$$\nabla \varphi(\mathbf{X}^*) = \nabla_\Xi \varphi(\Xi) [\mathbf{D}_\Xi T]^{-1} \quad (4.29)$$

où  $\nabla_\Xi \varphi$  et  $\mathbf{D}_\Xi T$  peuvent être exprimés, de manière approchée, à partir des positions des noeuds  $\mathbf{X}^*$  et des valeurs de  $\varphi$  aux noeuds  $\phi$ , grâce à (4.27) et (4.28) :

$$\nabla_\Xi \varphi(\Xi) \simeq \phi^T \nabla_\Xi \mathbf{N} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{D}_\Xi T \simeq \mathbf{X}^* \nabla_\Xi \mathbf{N} \quad (4.31)$$

Dans le cas où  $T$  est une transformation dont l'image est une variété de dimension inférieure à 3 (courbes, surfaces) de l'espace physique, il faut, pour exprimer sa matrice jacobienne, effectuer un changement de variable et se placer dans le repère local à l'élément (les coordonnées des noeuds de l'élément dans ce repère seront alors notées  $\mathbf{X}_{\text{loc}}^*$ ). Dans ce cas, la formule (4.27) est remplacée par :

$$\mathbf{X}_{\text{loc}}^* = T(\Xi) = \sum_{\beta=1}^n N_\beta(\Xi) \mathbf{X}_{\text{loc}\beta}^* = \mathbf{X}_{\text{loc}}^* \mathbf{N} \quad (4.32)$$



### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

---

La matrice jacobienne<sup>3</sup> et le gradient surfacique (ou linéique) sont alors donnés par :

$$\mathbf{D}_{\Xi}T \simeq \mathbf{X}_{\text{loc}}^* \nabla_{\Xi} \mathbf{N} \quad (4.33)$$

$$\nabla_S \varphi(\mathbf{X}^*) \simeq \boldsymbol{\phi}^T \nabla_{\Xi} \mathbf{N} [\mathbf{D}_{\Xi}T]^{-1} \quad (4.34)$$

#### 4.3.2 Calcul de $\Delta E_i^{\Sigma}$

Les modes de ballonnement  $\varphi_i$  étant calculés en cavité rigide, on a  $\mathbf{n}_{\Sigma}^* \cdot \nabla \varphi_i = 0$  sur  $\Sigma^*$ , ce qui, d'après la définition du gradient surfacique  $\nabla_S$  ( $\mathbf{I}$  étant l'identité) :

$$\nabla_S \varphi_i = [\mathbf{I} - \mathbf{n}_{\Sigma}^* \otimes \mathbf{n}_{\Sigma}^*] \nabla \varphi_i = \nabla \varphi_i - (\mathbf{n}_{\Sigma}^* \cdot \nabla \varphi_i) \mathbf{n}_{\Sigma}^* = \nabla \varphi_i \quad \text{sur } \Sigma^* \quad (4.35)$$

montre que, sur l'interface  $\Sigma^*$ , le gradient de  $\varphi_i$  est en réalité un gradient surfacique. Ainsi, l'expression (4.21) peut finalement se réécrire :

$$\Delta E_i^{\Sigma} = -\frac{\pi}{2} \rho^F \omega_i^2 \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_i}} \int_{\Sigma^*} (\nabla_S \varphi_i)^2 d\Sigma \quad (4.36)$$

Pour calculer la valeur de  $\Delta E_i^{\Sigma}$  pour chaque mode de ballonnement  $\varphi_i$ , on va discrétiser, par la méthode des éléments finis, l'opérateur  $\mathcal{A}$  défini par :

$$\mathcal{A}(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\Sigma^*} \nabla_S \varphi \cdot \nabla_S \delta\varphi d\Sigma \quad \text{tel que} \quad \Delta E_i^{\Sigma} = -\frac{\pi}{2} \rho^F \omega_i^2 \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_i}} \mathcal{A}(\varphi_i, \varphi_i) \quad (4.37)$$

On obtient une valeur approchée de  $\mathcal{A}$  en sommant les valeurs  $\mathcal{A}^E$  obtenues à partir des interpolations de  $\varphi$  (4.28) construites sur chaque élément fini de surface  $\Sigma_E^*$  constituant le domaine d'intégration  $\Sigma_i$  :

$$\mathcal{A}(\varphi, \delta\varphi) \simeq \sum_E \mathcal{A}^E(\varphi, \delta\varphi) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}^E(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\Sigma_E^*} \nabla_S \varphi \cdot \nabla_S \delta\varphi d\Sigma \quad (4.38)$$

Cette sommation peut être effectuée directement sous forme matricielle à partir des valeurs  $\boldsymbol{\phi}$  de  $\varphi$  aux noeuds du maillage et de la matrice  $\mathbf{A}$  construite en assemblant les matrices élémentaires  $\mathbf{A}^E$  des opérateurs élémentaires  $\mathcal{A}^E$  :

$$\Delta E_i^{\Sigma} \simeq -\frac{\pi}{2} \rho^F \omega_i^2 \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_i}} \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{A} \boldsymbol{\phi}_i \quad (4.39)$$

---

3. T étant une bijection, cette matrice est inversible.

### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

---

La construction d'une matrice élémentaire  $\mathbf{A}^E$  nécessite de transporter l'intégration sur l'élément de référence  $E_R$  par le changement de variable (4.32). En utilisant les relations (4.33) et (4.34), on obtient l'expression de la matrice élémentaire  $\mathbf{A}^E$  associée à la forme bilinéaire  $\mathcal{A}_E$  :

$$\mathbf{A}^E = \int_{E_R} \nabla_{\Xi} \mathbf{N} [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-1} [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-1\top} [\nabla_{\Xi} \mathbf{N}]^{\top} \det(\mathbf{D}_{\Xi} T) d\Xi \quad (4.40)$$

- dans le cas d'éléments finis triangulaires  $P_1$  :  $\nabla_{\Xi} \mathbf{N}$ ,  $\det(\mathbf{D}_{\Xi} T)$  et  $\mathbf{D}_{\Xi} T$  sont constants (indépendants de  $\Xi$ ) et le calcul effectif de  $\mathbf{A}^E$  ne nécessite pas d'intégration numérique. On obtient directement :

$$\mathbf{A}^E = \frac{1}{2} \nabla_{\Xi} \mathbf{N} [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-1} [\mathbf{D}_{\Xi} T]^{-1\top} [\nabla_{\Xi} \mathbf{N}]^{\top} \det(\mathbf{D}_{\Xi} T) \quad (4.41)$$

- dans le cas d'éléments finis quadrangulaires  $Q_1$  :  $\nabla_{\Xi} \mathbf{N}$ ,  $\det(\mathbf{D}_{\Xi} T)$  et  $\mathbf{D}_{\Xi} T$  dépendent des coordonnées  $\Xi$ . Du fait de la présence des deux termes  $\mathbf{D}_{\Xi} T$ , la fonction à intégrer est une fraction rationnelle de dénominateur égal à  $\det(\mathbf{D}_{\Xi} T)$ . Une intégration numérique par les méthodes de Newton-Cotes ou de Gauss<sup>4</sup> est donc nécessaire [10].

On peut signaler, d'autre part, qu'on aurait pu calculer  $\Delta E_i^{\Sigma}$  d'une autre manière, en remarquant que :

$$\Delta E_i^{\Sigma} = -\frac{\pi}{2} \rho^F \omega_i^2 \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_i}} \mathbf{C}((\nabla_S \varphi_i)^2, \mathbf{n}_{\Sigma}^*) \quad (4.42)$$

où  $\mathbf{C}$  est l'opérateur de couplage sur l'interface. Cependant, cette approche nécessite de construire  $\nabla_S \varphi_i$  et la normale  $\mathbf{n}_{\Sigma}^*$  en tout noeud de l'interface  $\Sigma^*$ . On verra dans la partie 4.3.3 que le calcul de  $\nabla \varphi_i$  à partir de  $\varphi_i$  est possible mais peu précis, du fait des discontinuités de surface entre les éléments du maillage de l'interface, la notion de "normale aux noeuds" n'est pas bien définie (contrairement à la notion de normale aux éléments), ce qui rend cette approche caduque.

#### 4.3.3 Calcul de $\Delta E_i^{\Omega}$

On propose de calculer  $\Delta E_i^{\Omega}$  à partir de l'expression (4.25) obtenue précédemment. On remarque que cette relation peut se récrire :

$$\Delta E_i^{\Omega} = -2 \pi \omega_i \mathbf{K}^{\Omega}(\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_i) \quad (4.43)$$

---

4. Rappelons que ces méthodes intègrent exactement des polynômes de degré  $2k - 1$  avec  $k$  points d'intégration.

### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

---

avec  $\mathcal{K}^\Omega$  défini par :

$$\mathcal{K}^\Omega(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_F^*} \rho^F \nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega_F \quad (4.44)$$

On observe que  $\mathbf{K}^\Omega$  n'est autre que l'opérateur de raideur élastique d'un solide isotrope occupant le volume du liquide  $\Omega_F$ , de module d'Young égal à  $2\rho^F \nu$  et de coefficient de Poisson nul (en effet, dans ce cas, le tenseur des contraintes vaut  $\boldsymbol{\sigma} = 2\rho^F \nu \boldsymbol{\epsilon}$ ). La matrice  $\mathbf{K}^\Omega$  associée à l'opérateur  $\mathbf{K}^\Omega$  peut donc être obtenue simplement, à partir du maillage du volume liquide, par n'importe quel code éléments finis structure.

D'autre part, la valeur de  $\nabla\varphi_i$  en tout point du liquide peut être obtenue en calculant dans un premier temps la valeur de  $\nabla\varphi_i$  sur chaque élément du volume liquide, grâce à (4.29) et (4.30), puis en moyennant<sup>5</sup> les valeurs obtenues en chaque noeud pour les différents éléments ayant ce noeud en commun. On construit ainsi la matrice  $[\nabla]$  de l'opérateur qui permet d'obtenir, à partir de  $\phi_i$ , la valeur de son gradient en chaque noeud  $\nabla\phi_i$  :

$$\nabla\phi_i = [\nabla] \phi_i \quad (4.45)$$

On peut écrire finalement que :

$$\Delta E_i^\Omega \simeq -2\pi\omega_i \phi_i^\top [\nabla]^\top \mathbf{K}^\Omega [\nabla] \phi_i \quad (4.46)$$

On peut cependant signaler qu'on aurait pu calculer  $\Delta E_i^\Omega$  d'une autre manière, à partir de l'expression (4.24), en remarquant que :

$$\Delta E_i^\Omega = \pi \rho^F \nu \omega_i \int_{\Sigma^* \cup \Gamma^*} \nabla((\nabla\varphi_i)^2) \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \pi \rho^F \nu \omega_i \mathbf{C}_{\Sigma^* \cup \Gamma^*}(1, \nabla((\nabla\varphi_i)^2)) \quad (4.47)$$

où  $\mathbf{C}_{\Sigma^* \cup \Gamma^*}$  serait un opérateur équivalent à  $\mathbf{C}$ , mais intégré sur les interfaces  $\Sigma^*$  et  $\Gamma^*$ . Cependant, on constate qu'il faudrait calculer le gradient de la norme au carré du gradient de  $\varphi_i$ , ce qui pourrait être fait à partir de l'opérateur  $[\nabla]$  décrit précédemment. Cependant les erreurs liées au calcul de 2 gradients consécutifs vont se cumuler et le résultat sera probablement de moins bonne qualité qu'avec la première méthode proposée.

---

5. Cette procédure de construction du gradient aux noeuds nécessite un maillage assez fin pour être précise.

#### 4.3.4 Cas test analytique

La table 4.3 montre une comparaison des résultats analytiques donnés dans [18] pour une cuve cylindrique de petite taille (voir Fig. 4.4<sup>6</sup>) avec des résultats numériques obtenus par un calcul éléments finis des intégrales (4.21)) et (4.26). On constate un bon accord entre les deux approches.

Numéro du mode	Calcul Éléments Finis ( $10^{-3}$ )	Calcul Analytique ( $10^{-3}$ )
1-2	5.0	4.9
3-4	6.2	6.1
5	2.9	2.9
6-7	7.1	7.1
8-9	7.8	7.8

FIGURE 4.3 – Comparaison des coefficients d’amortissement obtenus analytiquement et numériquement.

#### 4.3.5 Cas test expérimental

On souhaite ici comparer la méthode de calcul de l’amortissement présentée précédemment avec un résultat expérimental simple. On considère donc une cuve parallélépipédique (voir Fig. 4.6) dont les dimensions sont données par le tableau 4.5.

Cette géométrie présente l’avantage d’avoir une solution analytique simple. Les pulsa-

6. Pour chaque mode de ballonnement, on peut associer une pression eulérienne en tous points que l’on déduit à partir de l’équation (1.6) :  $p_E = \rho^F \omega_i^2 \varphi_i + \pi_i$

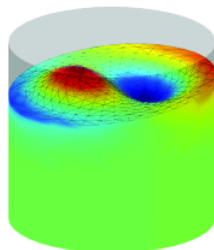


FIGURE 4.4 – Exemple de mode propre de ballonnement obtenu. Dimension de la cuve : diamètre 5.532 cm, hauteur 3.80 cm. La couleur du fluide est donnée par sa fluctuation de pression en tout point.

### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

---

<b>Hauteur (H)</b>	0.67
<b>Hauteur de la surface libre (h)</b>	0.5695
<b>Largeur (l)</b>	0.118
<b>Longueur (L)</b>	0.946

FIGURE 4.5 – Dimension de la cuve (en mètres).

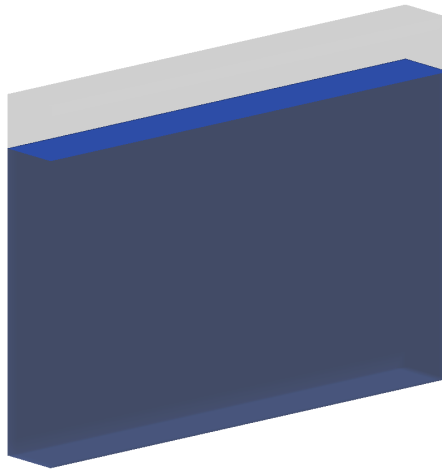


FIGURE 4.6 – Représentation du modèle numérique de la cuve étudiée.

tions propres vont ainsi avoir la forme suivante [1] :

$$\omega_{m,n}^2 = g k \tanh(k h) \quad \text{avec} \quad k^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{P^2} \right), (m, n) \in \mathbb{N} \quad (4.48)$$

Le tableau 4.7 présente un comparatif entre la valeur analytique et numérique des 10 premiers modes de la cuve que l'on étudie. Certains de ces modes sont représentés dans la figure 4.8.

L'expérience, réalisée sur le banc expérimental de la société Bureau Veritas, consiste à exciter la cuve dans le sens longitudinal de façon sinusoïdale à la fréquence du premier mode de ballottement dont la valeur analytique est de 0.888 Hz (c'est le déplacement de la cuve que l'on impose ici). Une fois le régime permanent atteint, la cuve est bloquée et l'on observe la surface libre osciller. Une caméra placée sur le côté enregistre le mouvement du liquide.

Les 14 premières oscillations ont ainsi pu être enregistrées. En mesurant la hauteur

### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

$N^{\circ}$	Mode (m,n)	Valeur analytique (Hz)	Valeur numérique (Hz)	Erreur (%)
1	(1,0)	0.8880	0.8881	0.01
2	(2,0)	1.2840	1.2848	0.06
3	(3,0)	1.5734	1.5754	0.13
4	(4,0)	1.8168	1.8209	0.23
5	(5,0)	2.0313	2.0383	0.34
6	(6,0)	2.2252	2.2362	0.49
7	(7,0)	2.4034	2.4197	0.68
8	(8,0)	2.5694	2.5789	0.37
9	(0,1)	2.5721	2.5888	0.65
10	(1,1)	2.5821	2.5921	0.39

FIGURE 4.7 – Comparaison des 10 premières fréquences propres de ballotement calculées avec leur valeur analytique.

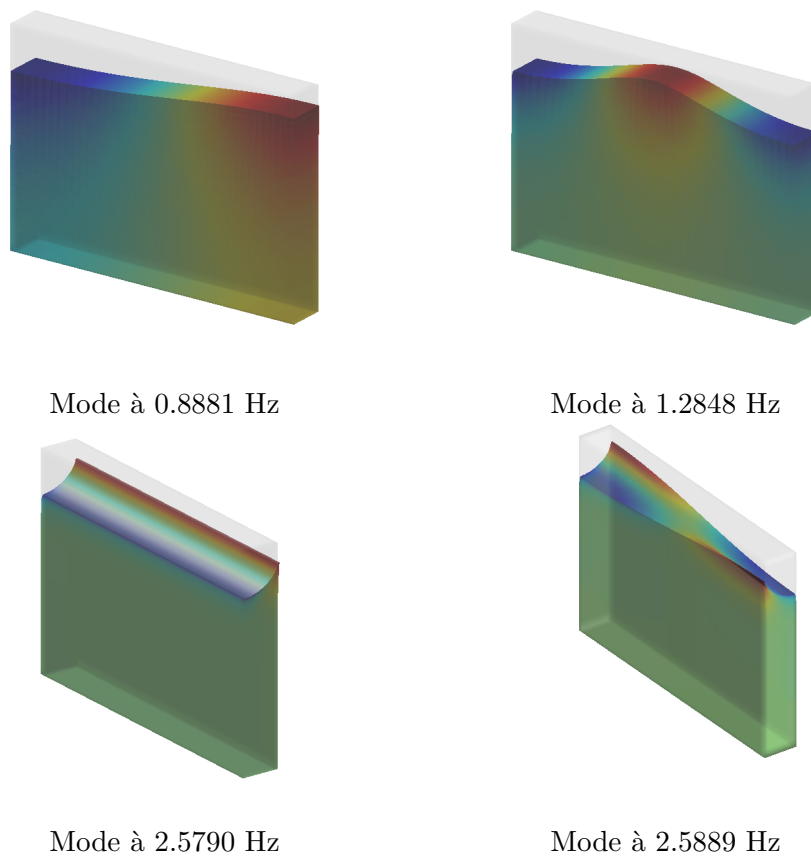


FIGURE 4.8 – Exemples de mode de ballotement de la cuve.

de la surface libre (notée  $z$ ) sur le côté de la cuve (voir Figure 4.9), on peut calculer le

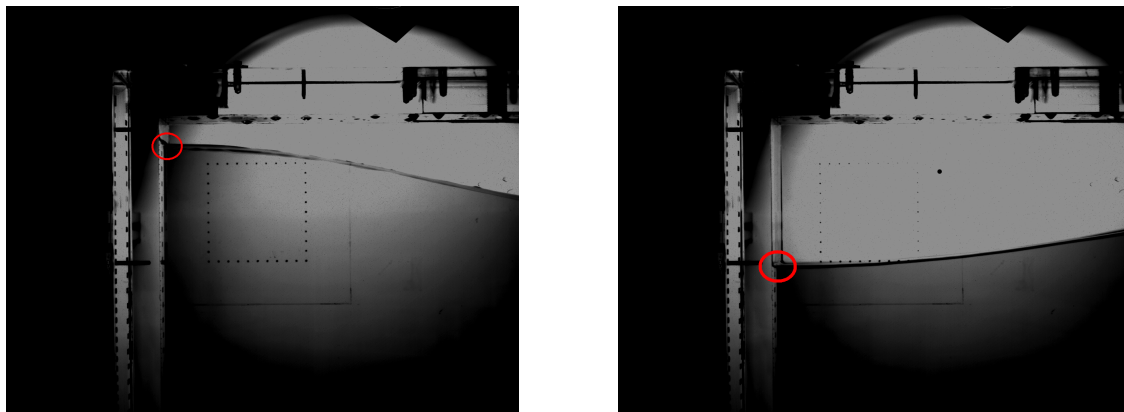


FIGURE 4.9 – Exemples de photographies du maximum (à gauche) et du minimum (à droite) d’une oscillation de la surface libre. Entourée en rouge, l’intersection entre la surface libre et la paroi de la cuve, correspondant au point de mesure de l’altitude  $z$ .

décroissement logarithmique que l’on définit de la manière suivante :

$$\delta_i = \frac{1}{r} \ln \left( \frac{z(t = t_i^{max}) - z(t = t_i^{min})}{z(t = t_i^{max} + rT) - z(t = t_i^{min} + rT)} \right) \quad (4.49)$$

$z(t = t_i^{max})$  et  $z(t = t_i^{min})$  correspondent respectivement à l’altitude maximum et minimum de la surface libre pour l’oscillation  $i$ , atteint au temps  $t = t_i^{max}$  et  $t = t_i^{min}$ .  $T$  correspond à la période de l’oscillation et  $r$  est un nombre entier naturel non nul quelconque. On choisit ici  $r = 6$ . Ce qui permet d’avoir 7 mesures du décroissement tout en lissant chaque estimation de  $\delta_i$  sur 6 périodes. À partir de ces valeurs, on en déduit la valeur de l’amortissement  $\zeta_i$  pour chaque oscillation  $i$  définie par :

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\delta_i}\right)^2}} \quad (4.50)$$

Le graphique 4.11 présente les résultats expérimentaux obtenus. En moyennant ces valeurs on obtient une mesure de l’amortissement pour le premier mode à  $3.659 \cdot 10^{-3}$ .

En utilisant la méthode présentée précédemment, on obtient le résultat numérique illustré par la figure 4.10 où l’amortissement modal pour les 10 premiers modes est donné. Comme on a pu le remarquer dans la partie 4.2, la contribution de l’amortissement associé à la viscosité du fluide dans le volume du liquide est ici bien plus faible.

Ainsi, la valeur numérique de l’amortissement pour le premier mode est de  $2.848 \times 10^{-3}$  ce qui correspond à une erreur d’environ 22 %. Si l’ordre de grandeur a pu être atteint,

### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

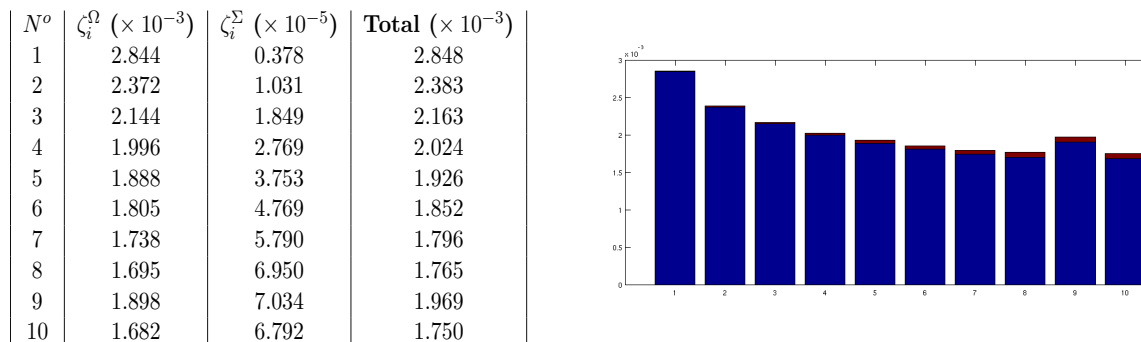


FIGURE 4.10 – Valeurs des coefficients d’amortissement pour les 10 premiers modes dans le volume fluide notés  $\zeta_i^\Omega$  et représentés en rouge, et la contribution de l’amortissement aux parois notée  $\zeta_i^\Sigma$  et représentée en bleu.

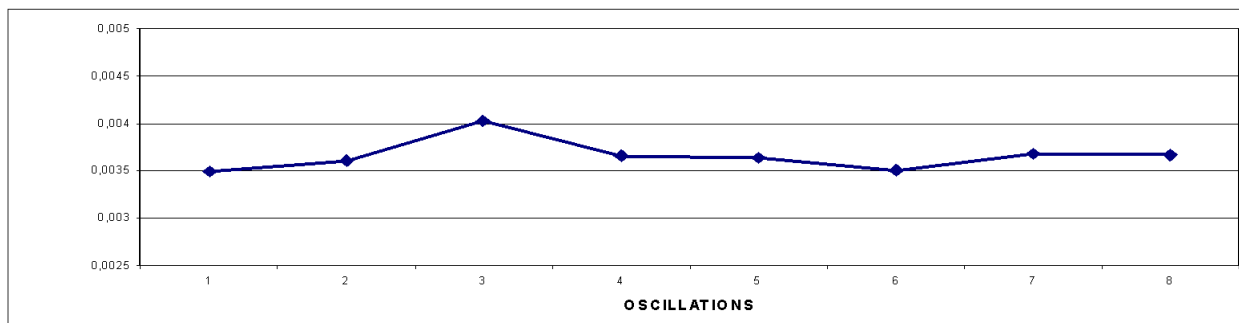


FIGURE 4.11 – Valeur du coefficient d’amortissement en fonction du numéro de l’oscillation.

la valeur calculée reste nettement en dessous de la valeur mesurée, ce qui est en accord avec le fait que les autres sources d’amortissement manquantes introduites au début du chapitre et liées aux effets de capillarité n’ont pas été prises en compte. Ce problème a été constaté par un grand nombre d’auteurs.

En effet, il est très difficile d’éviter que la surface libre d’un liquide en contact avec une atmosphère non contrôlée soit ”polluée” par la présence d’impuretés (éventuellement dues à des phénomènes physico-chimiques imprévus). Cette *contamination* n’est pas forcément observable à l’oeil nu mais il a été montré expérimentalement qu’elle joue un rôle significatif sur l’amortissement des vagues à la surface du liquide [26, 33] puisqu’elle lui donne un comportement viscoélastique. La présence d’impuretés a tendance à empêcher toute déformation de la surface [15].

De plus, à la suite d’observations expérimentales effectuées sur des bassins de petites tailles contenant des liquides de natures différentes (mouillants ou non mouillants), Keulegan a



### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

identifié l'adhérence du liquide sur la paroi (liée à la tension de surface) comme une source de dissipation [60]. Un certain nombre de travaux ont mis en évidence que l'énergie dissipée par ces phénomènes de capillarité à la ligne de contact ("damping by wetting") peut excéder celle qui est dissipée par la viscosité [51] et est donc essentielle à prendre en compte en particulier quand le fluide est peu visqueux [81].

#### 4.3.6 Influence de l'amortissement des modes de ballonnement sur la synthèse modale.

On a pu voir que les coefficients d'amortissement des modes de ballonnement dépendent du coefficient de viscosité cinématique, en faisant varier ce coefficient on trace la réponse en fréquence du déplacement dans la direction radiale de la structure pour les différentes matrices  $\mathbf{Z}$  obtenues pour 48 modes de ballonnement calculés. L'amortissement de la structure n'étant pas pris en compte, seul les effets dissipatifs du fluide ont une influence sur les courbes. Trois valeurs pour la viscosité cinématique sont considérées :  $10^{-4}$  [ $m^{-2}/s$ ],  $10^{-3}$  [ $m^{-2}/s$ ], et  $10^{-2}$  [ $m^{-2}/s$ ]. Pour chaque valeur on trace la réponse directe et la réponse obtenue par synthèse modale.

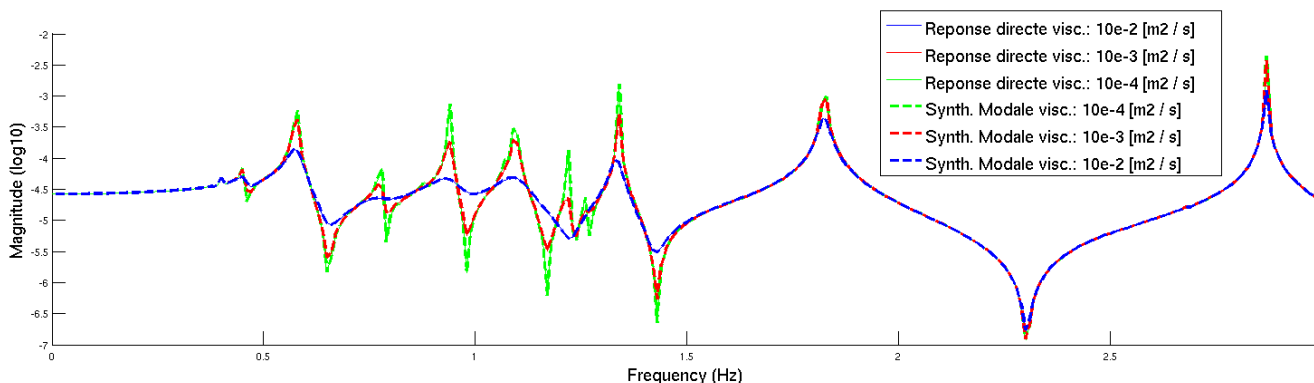


FIGURE 4.12 – Réponse en fréquence du déplacement de la structure par synthèse modale (pointillés) et réponse directe en fréquence (traits continus) pour différents coefficients de viscosité cinématique.

On remarque dans un premier temps que sur les deux courbes 4.12 et 4.13, la synthèse modale et la réponse directe se superposent parfaitement même pour une viscosité élevée. De plus, on voit que l'amortissement du fluide peut avoir une influence sur les premiers modes hydroélastiques pour des grandes valeurs du coefficient de viscosité. En effet, dans la

### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

formulation 2.41 utilisée, les modes de ballonnement du fluide apportent un terme dissipatif (bloc extra diagonal de la matrice d'amortissement du système couplé) dans l'équation de la structure, ce qui a pour effet d'amortir les modes propres de structure. Cependant, cet amortissement décroît rapidement lorsque l'on sort de la gamme de fréquence d'influence des modes de ballonnement qui va dans ce cas jusque 1.5 Hz et à partir de 2.5 Hz la structure reste non amortie et le fluide n'a plus d'influence.

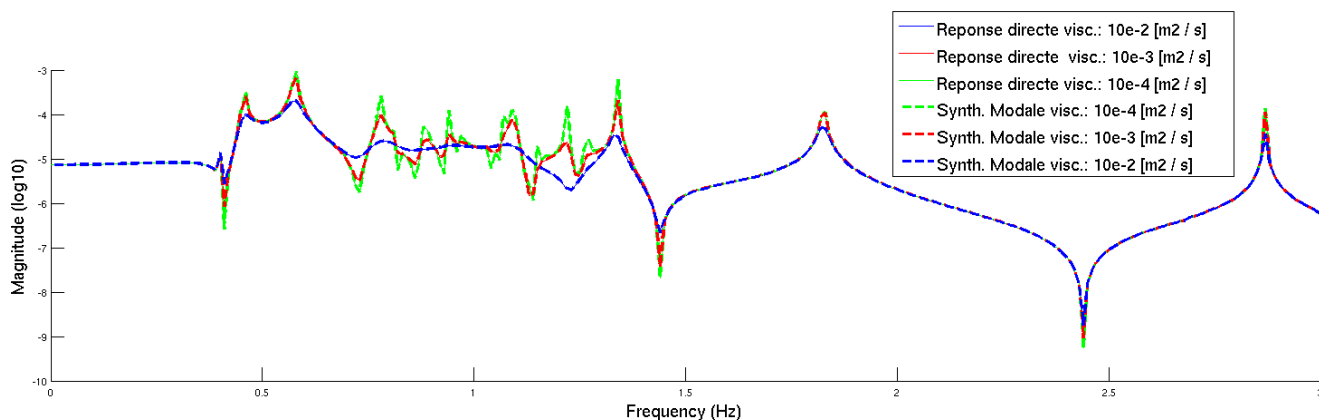


FIGURE 4.13 – Réponse en fréquence du potentiel de déplacement du fluide par synthèse modale (pointillés) et réponse directe en fréquence (traits continus) pour différents coefficient de viscosité cinématique.

En effet, dans la formule de décomposition du potentiel de déplacement du fluide (2.4), on voit que celui-ci peut être amorti via les coordonnées généralisées ou bien par la solution quasistatique qui dépend du déplacement de la structure. Pour notre cas d'étude, le modèle réduit du fluide utilise  $\phi_\infty$ , par définition, lorsque la fréquence augmente le potentiel  $\phi$  tend vers  $\phi_\infty$ . Puisque l'amortissement de la structure n'est pas pris en compte, le potentiel de déplacement du fluide n'est pas amorti lorsque l'on augmente en fréquence à partir de 2.5 Hz (voir Fig. 4.13).

# Conclusion

Dans cette partie, on a établi les équations linéarisées du système fluide-structure amorti considéré. Le fluide étant représenté par un modèle réduit (par projection sur ses modes de ballonnement), un modèle d'amortissement diagonal a été proposé afin d'introduire, via les coefficients d'amortissement des modes de ballonnement, les sources dissipatives visqueuses. La méthode utilisée présente l'avantage d'être "souple" et permet d'introduire le nombre de sources dissipatives souhaité en sommant les coefficients d'amortissement associés à chaque source.

La réponse directe en fréquence du modèle réduit obtenu a pu être comparée avec celle du modèle complet ; avec une base de modes de ballonnement suffisamment enrichie le modèle réduit permet de bien représenter le système couplé.

On s'est ensuite intéressé à l'étude du problème aux valeurs propres quadratique avec un opérateur d'amortissement non symétrique. Les modes calculés ne sont pas orthogonaux et ne diagonalisent pas nécessairement les matrices  $\hat{\mathbf{M}}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}$  et  $\hat{\mathbf{D}}$ . Cependant, en passant dans l'espace d'Etat, il est possible de retrouver des propriétés de bi-orthogonalité entre les modes à droite et les modes à gauche du système de taille double, ce qui permet une résolution du problème par une approche de type synthèse modale. Les modes complexes du système amorti permettent d'établir l'expression analytique des réponses fréquentielle et temporelle (linéarisées). Cette formulation permet de bien approcher la réponse directe en fréquence à condition d'ajouter une correction statique. Les réponses temporelles que l'on présente ici sous forme d'un déplacement serviront de base pour une comparaison avec d'éventuels résultats expérimentaux.

Enfin, une méthode pour déterminer des coefficients d'amortissement des modes de ballonnement a été proposée en utilisant des modèles de mécanique des fluides simples. L'utilisa-

### 4.3. IMPLÉMENTATION ET VALIDATION

---

tion de cette méthode sur des exemples simples a permis de valider l'approche, cependant, les premières comparaisons avec des mesures expérimentales mettent en avant la nécessité d'introduire les phénomènes de capillarité qui peuvent jouer un rôle non négligeable sur l'amortissement du fluide. Dans la seconde partie de ce manuscrit, on s'intéressera à la formulation du problème conservatif couplé avec prise en compte des effets de capillarité.

## Deuxième partie

# Effets de la capillarité sur les vibrations du système fluide-structure considéré



# Introduction

Cette deuxième partie rassemble les travaux théoriques qui ont été menés pour élargir la formulation couplé fluide-structure utilisée précédemment (structure élastique et fluide pesant incompressible) aux cas où les phénomènes de tension de surface (appelés aussi capillarité) joueraient un rôle non négligeable (par exemple pour des réservoirs en micro-gravité).

Une des difficultés réside dans le fait que gravité et capillarité agissent sur les états dynamiques mais aussi sur l'état statique du système, ce qui génère des effets de précontrainte qui doivent être modélisés.

Cette étude du problème couplé s'inscrit dans la continuité des travaux réalisés dans ce domaine par l'ONERA en collaboration avec le CNAM/LMSSC depuis plusieurs années par Schotté et El-Kamali [35, 36, 91]. Les précédentes études se sont intéressées à des cas particuliers du problème énoncé ici : dans [35], la structure est considérée comme rigide et immobile et dans [91], les effets de la capillarité ne sont pas pris en compte. L'objectif de cette partie est donc de regrouper l'ensemble des travaux dans une formulation unifiée. On peut donc s'attendre à retrouver des opérateurs identiques (raideur, couplage,...etc), ou bien des similitudes dans la forme finale du problème couplé. Il sera donc intéressant d'effectuer tout au long de cette étude, certains rapprochements.

Puisque les équations locales du problème couplé ne sont *a priori* pas connues (notamment au niveau de la ligne triple : intersection entre la surface libre et la structure), on se propose d'utiliser une méthode énergétique comme cela avait été initié dans l'étude statique [35]. Cette approche sera généralisée en dynamique en utilisant le principe de moindre action. Les contraintes telles que l'incompressibilité du fluide et la condition de continuité à l'interface fluide-structure seront introduites dans l'expression du Lagrangien par des

---

multiplicateurs de Lagrange. Cette approche vise à découpler les variables du problème afin d'obtenir une formulation variationnelle facilement différentiable.

Dans un premier temps, les différents phénomènes liés à la capillarité, la paramétrisation du problème ainsi que le Principe de Moindre Action sont présentés (chapitre 5). Dans le chapitre 6, un bilan de l'ensemble des énergies et des contraintes que l'on souhaite prendre en compte est établi. La variation au premier ordre de chacune des énergies permet d'obtenir la formulation variationnelle non linéaire du problème statique. On s'intéresse à la formulation du problème dynamique linéarisé dans le chapitre 7. Enfin, on proposera dans le chapitre 8 des pistes pour prendre compte les phénomènes dissipatifs dans le liquide liés à la capillarité.



# Chapitre 5

## Préliminaires

### 5.1 Introduction aux effets de capillarité

La *capillarité* désigne la science des surfaces et notamment des interfaces entre un liquide et un gaz ou bien entre deux liquides. Cette discipline, a fait l'objet de nombreuses publications, on peut notamment citer les travaux de P.-G. De Gennes dans ce domaine [28, 27]. On ne souhaite pas décrire ici de manière précise les phénomènes complexes liés aux forces capillaires mais on cherchera plutôt à introduire une modélisation simplifiée plus adaptée aux études mécaniques.

On présente donc dans cette partie les principaux phénomènes connus liés à la présence de tensions surfaciques (sur l'état dynamique mais aussi sur la configuration statique), les paramètres pouvant jouer un rôle important, les hypothèses que l'on considèrera ainsi que leurs domaines de validité.

#### 5.1.1 Énergie d'interface et tension superficielle

Pour fracturer un matériau condensé (solide ou liquide), il faut fournir au minimum l'énergie correspondant à la séparation de deux plans d'atomes [83]. Soit  $V$  l'énergie à fournir pour séparer une paire d'atomes, et  $E_S$  l'énergie correspondant à la formation de l'interface  $S$  entre le corps et son environnement. L'énergie  $E_S$  est alors proportionnelle au nombre d'atomes sur la surface. De plus, le matériau étant considéré homogène, le nombre d'atome est ici proportionnel à la surface de  $S$ . On notera alors  $\alpha_S$  le coefficient

## 5.1. INTRODUCTION AUX EFFETS DE CAPILLARITÉ

---

de proportionnalité entre  $E_S$  et l'aire  $\mathcal{A}_S$  de  $S$  et on a :

$$E_S = \alpha_S \mathcal{A}_S \quad (5.1)$$

$\alpha_S$  est l'énergie par unité de surface du matériau.

Ces considérations peuvent être généralisées à toute interface entre deux milieux dont au moins un est condensé. Ci-dessous le tableau 5.1 donne quelques valeurs de tension surfacique pour différents liquides (à 20° C) [83] :

<b>Liquide</b>	Alcane	Éthanol	Eau	Mercure
$\alpha$ (mN/m)	$\simeq 20$	23	72	485

FIGURE 5.1 – Exemples de valeurs pour la densité d'énergie superficielle.

Chaque interface est donc associée à une énergie et est soumise à une tension qui tend à minimiser cette énergie. Sur Terre, même si la force de pesanteur prédomine, les forces de tension surfacique sont non nulles (cf. Fig. 5.3<sup>1</sup>). Cependant, si l'on vient se placer dans un espace où la gravité devient du même ordre de grandeur que les forces de tension surfacique, la surface libre va se courber et minimiser son énergie en formant un ménisque. Ce phénomène intervient lorsque la gravité devient faible mais peut être également observé sur Terre lorsque les dimensions du système sont suffisamment petites (cf. Fig. 5.4<sup>2</sup>).

La densité surfacique de force associée à cette énergie d'interface peut être mise en évidence par une expérience simple (cf. Fig. 5.2) : on considère un film de savon de surface  $\Sigma$  fixé sur un cadre rectangulaire en fer dont un des côtés de longueur  $L$  est mobile.

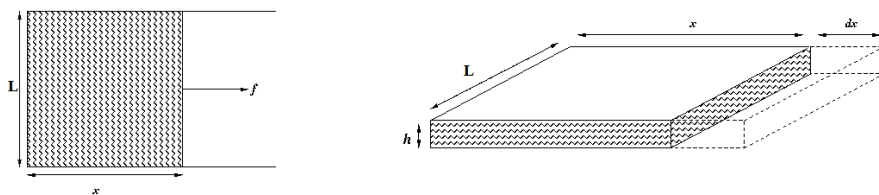


FIGURE 5.2 – Expérience du film de savon.

Si l'on déplace ce côté d'une longueur  $dx$ , d'après l'expression 5.1, l'énergie superficielle

---

1. Crédits Photo : David Hu and Nathan J. Mlot  
 2. Crédits Photo : PRHaney

## 5.1. INTRODUCTION AUX EFFETS DE CAPILLARITÉ

---

du film augmente d'une quantité  $\Delta E_S$  :

$$\Delta E_S = 2\alpha_S L dx \quad (5.2)$$

Cette augmentation d'aire correspond au travail d'une force de rappel  $f$  qui est la force de tension exercée sur les deux faces et qui s'écrit :

$$dW = 2 f dx \quad (5.3)$$

on a donc :

$$f = \alpha_S L \quad (5.4)$$

La *tension superficielle*  $f$  est donc la force par unité de longueur qui vient tendre l'interface  $\Sigma$ .

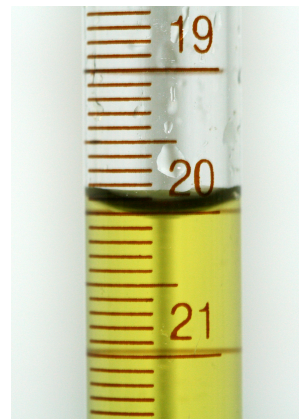


FIGURE 5.3 – Fourmi marchant sur l'eau. FIGURE 5.4 – Ménisque dans un tube à essai.

### 5.1.2 Mouillage

Dans notre étude, on considère un système constitué d'un fluide (F) ayant une surface libre en contact avec un gaz (G) et une structure (S) (cf. Fig.5.5), trois énergies d'interfaces sont donc à considérer. Dans la suite on notera  $\alpha_L$  le coefficient de tension superficielle entre le liquide et le solide,  $\alpha_G$  celui entre le solide et le gaz, et  $\alpha$  celui entre le liquide et le gaz.

On se place maintenant sur la ligne triple  $\gamma$  définie comme étant l'intersection des trois interfaces : chacune des forces de tension agissant sur  $\gamma$  tend à minimiser la surface de

## 5.1. INTRODUCTION AUX EFFETS DE CAPILLARITÉ

l'interface correspondante, l'équilibre des forces de tension s'exerçant sur un élément  $d\gamma$  de masse nulle est donc donné par :

$$\alpha_G d\gamma \boldsymbol{\nu}_\Sigma - \alpha_L d\gamma \boldsymbol{\nu}_\Sigma - \alpha d\gamma \boldsymbol{\nu}_\Gamma + f_{S/L} \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

où  $f_{S/L}$  désigne l'amplitude de la force exercée par la structure sur  $d\gamma$ , on suppose que le fluide glisse sur la paroi et  $f_{S/L}$  est donc orientée suivant la normale  $\mathbf{n}_\Sigma$ . Les vecteurs  $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$  et  $\boldsymbol{\nu}_\Gamma$  (appelés *normales géodésiques*) sont perpendiculaires à  $\gamma$  respectivement tangents à l'interface liquide-structure et à la surface libre. La projection de cette relation d'équilibre sur  $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$  donne la relation de Young :

$$\alpha_G - \alpha_L = \alpha \cos \theta_S \quad (5.6)$$

où  $\theta_S$  désigne l'*angle de contact* statique (cf. Fig.5.6). En statique, cet angle ne dépend que des 3 milieux considérés.

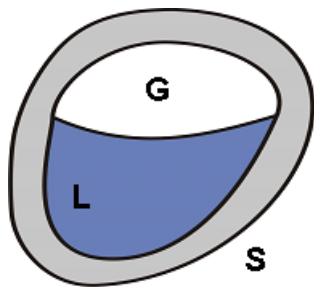


FIGURE 5.5 – Système étudié.

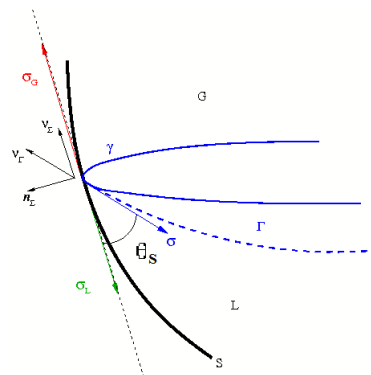


FIGURE 5.6 – Angle de contact.

En prenant  $\boldsymbol{\nu}_\Gamma = \cos(\theta_S) \boldsymbol{\nu}_\Sigma + \sin(\theta_S) \mathbf{n}_\Sigma$  (voir Fig. 5.2), en projetant suivant la normale  $\mathbf{n}_\Sigma$  on remarque que le liquide exerce sur le solide au niveau de la ligne triple une force que l'on note  $\mathbf{f}_{F/S}$  et de norme  $\alpha \sin(\theta_S)$ .  $\mathbf{f}_{F/S}$  est une force attractive qui vient "tirer" sur  $\gamma$  et vient équilibrer la ligne triple suivant  $\mathbf{n}_\Sigma$  :

$$\mathbf{f}_{F/S} = -\mathbf{f}_{S/F} = -\alpha \sin(\theta_S) \mathbf{n}_\Sigma \quad (5.7)$$

On notera la singularité venant du fait qu'en théorie classique d'un solide élastique en trois dimensions, une force ponctuelle entraînerait des déformations infinies. La condition aux

limites sur un solide élastique en trois dimensions s'écrit sur sa surface extérieure  $\Sigma_S$  (de normale  $\mathbf{n}_\Sigma$ ) de la manière suivante :

$$\sigma(\mathbf{u}^S) \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{f}_S \quad (5.8)$$

$\sigma$  représente le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\mathbf{f}_S$  représente les forces surfaciques extérieures exercées sur le solide (par exemple : présence du fluide, excitation extérieure,...). Dans le cas où le solide est déformable, il est donc nécessaire de traiter l'interaction entre le fluide et le solide à une échelle microscopique afin de lever cette singularité et calculer d'éventuelles déformations liées à la présence de la force linéique  $\mathbf{f}_{F/S}$ . Dans [24], l'auteur met en évidence la force normale exercée par le solide sur le liquide et propose un modèle permettant de caractériser l'attraction existante entre les molécules de solide et celles du liquide en prévoyant une distribution de force exercée sur l'épaisseur de la ligne triple. Cette distribution surfacique serait alors intégrée dans la force  $\mathbf{f}_S$ . Puisque le problème est ici traité à un échelle macroscopique, on gardera l'utilisation des forces linéiques. Dans [104], l'auteur donne une expression des déformations locales microscopiques de la structure. Pour les structures que l'on considère, le module d'Young est suffisamment élevé (à partir de  $10^{12}$  Pa.) pour négliger les déformations de la structure dues à la force  $\mathbf{f}_{F/S}$ .

Si l'étude le problème du mouillage statique est bien connue, l'étude de la dynamique d'une ligne triple sur un substrat reste complexe. D'une manière générale, lorsque la ligne triple est en mouvement, l'angle de contact dynamique  $\theta_D$  que l'on observe varie. Ainsi, en dynamique, l'équilibre des forces obtenu en statique sur la ligne triple (5.5) n'est plus respecté. En notant  $\mathbf{F}_c$  la force provoquant le déplacement de la ligne triple on a :

$$\mathbf{F}_c = (\alpha_G - \alpha_L - \alpha \cos \theta_D) \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad (5.9)$$

La relation (5.6) permet d'écrire :

$$\mathbf{F}_c = \alpha(\cos \theta_S - \cos \theta_D) \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad (5.10)$$

On remarque dans un premier temps que pour un liquide visqueux, une difficulté intervient alors au niveau de la ligne triple où deux conditions macroscopiques contradictoires

## 5.2. PARAMÉTRISATION DU PROBLÈME

---

apparaissent : le non glissement du fluide sur la paroi et le déplacement de la ligne triple [53, 103].

La force  $\mathbf{F}_c$  vient ici s'opposer à la force de frottement de la surface libre sur la paroi. Dans un premier temps, on prendra  $\theta_D = \theta_S$ . La ligne triple glisse "librement" sur la paroi du réservoir avec un angle dynamique égal à sa valeur statique. C'est une condition aux limites relativement naturelle du point de vue de la modélisation puisqu'elle revient à conserver en dynamique la condition aux limites utilisée en statique. Cette condition semble particulièrement justifiée dans le cas où la longueur de capillarité est très faible devant la dimension caractéristique du réservoir :  $l_c \ll L$  ou bien lorsque la fréquence d'oscillation est très basse ( $\omega \rightarrow 0$ ) [108].  $l_c$  est donné par :

$$l_c = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho^F g}} \quad (5.11)$$

La force  $\mathbf{F}_c$  et donc la force de frottement sur la ligne triple sont alors nulles. Ce comportement ne dissipe pas d'énergie. C'est ce comportement et ce cadre d'étude que l'on considèrera dans ce manuscrit, dans la continuité des travaux initiés par El Kamali [35]. Dans la suite, on désignera donc par  $\theta$  l'angle statique  $\theta_S$ .

## 5.2 Paramétrisation du problème

Dans un premier temps, la variable utilisée pour décrire le système sera la position du fluide et de la structure. Ce choix permet d'écrire facilement la condition de continuité à l'interface entre le fluide et la structure.

De même que pour l'étude du problème hydroélastique présenté dans la première partie, on distinguera 3 états de référence du système Fluide-Structure (Fig. 5.7) :

**L'état naturel** où la surface libre est supposée horizontale. Les grandeurs relatives à la configuration naturelle sont indicées par  $^0$ .

**L'état d'équilibre** est l'état de référence autour duquel on souhaite étudier les vibrations du système couplé. La détermination de l'état d'équilibre constitue la première étape de l'étude. Les grandeurs relatives à la configuration d'équilibre sont indicées par le symbole  $*$ . Lorsque le système à l'état naturel est soumis aux diffé-

## 5.2. PARAMÉTRISATION DU PROBLÈME

rentes forces s'exerçant sur le fluide et la structure, celui-ci se déplace pour atteindre sa position d'équilibre. Ce déplacement est repéré par les champs  $U_*^F$  et  $U_*^S$  (qui sont respectivement les déplacements du fluide et de la structure). On remarque que la surface libre n'est ici pas nécessairement plane et forme un ménisque du fait de la capillarité.

**L'état dynamique** est l'état du système à tout instant de l'analyse dynamique. Le fluide et la structure sont définis respectivement par les champs de déplacement  $U^F$  et  $U^S$ . Ces grandeurs sont dans un premier temps non linéaires mais, dans un deuxième temps on supposera que l'état dynamique reste proche de l'état d'équilibre de façon à pouvoir linéariser les équations dynamiques du système autour de cet état d'équilibre.

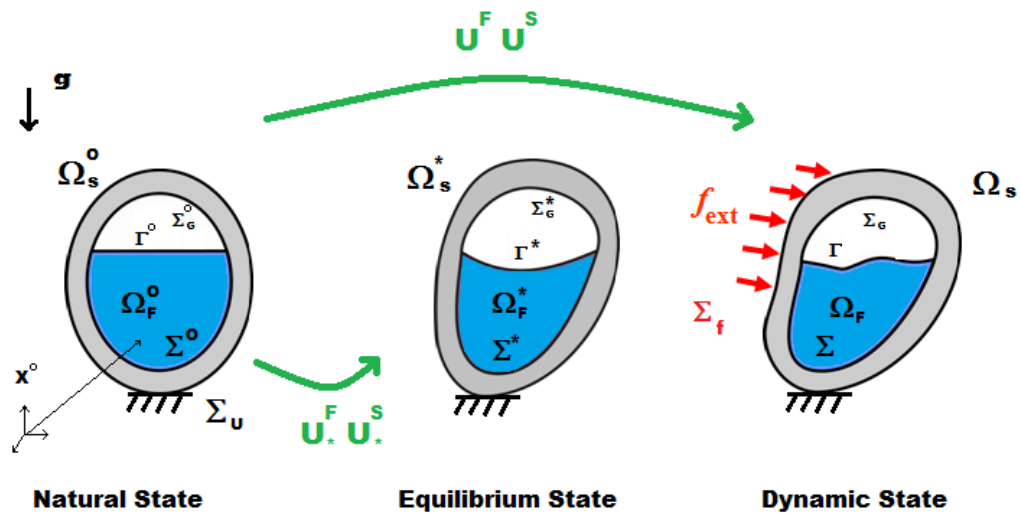


FIGURE 5.7 – Configuration du problème et présentation des trois états : naturel, à l'équilibre et dynamique.

Comme le montre la figure 5.7, le volume fluide  $\Omega_F$  est délimité par les interfaces  $\Gamma$  et  $\Sigma$  et l'intersection de ces deux interfaces est notée  $\gamma$ . La ligne triple  $\gamma$  représente l'intersection des trois phases liquide-solide-gaz. La structure a un volume  $\Omega_S$  et l'interface solide-gaz est notée  $\Sigma_G$ . Sur la ligne triple on utilisera le repère présenté figure 5.8 :  $\nu_\Sigma$  et  $\nu_\Gamma$  sont les vecteurs unitaires orthogonaux à  $\gamma$  et respectivement tangents à  $\Sigma$  et  $\Gamma$  (normales géodésiques à  $\gamma$  sur  $\Sigma$  et  $\Gamma$ ).  $t_\gamma$  représente le vecteur unitaire tangent à  $\gamma$  tel

que  $\mathbf{t}_\gamma = \boldsymbol{\nu}_\Sigma \wedge \mathbf{n}_\Sigma$ .

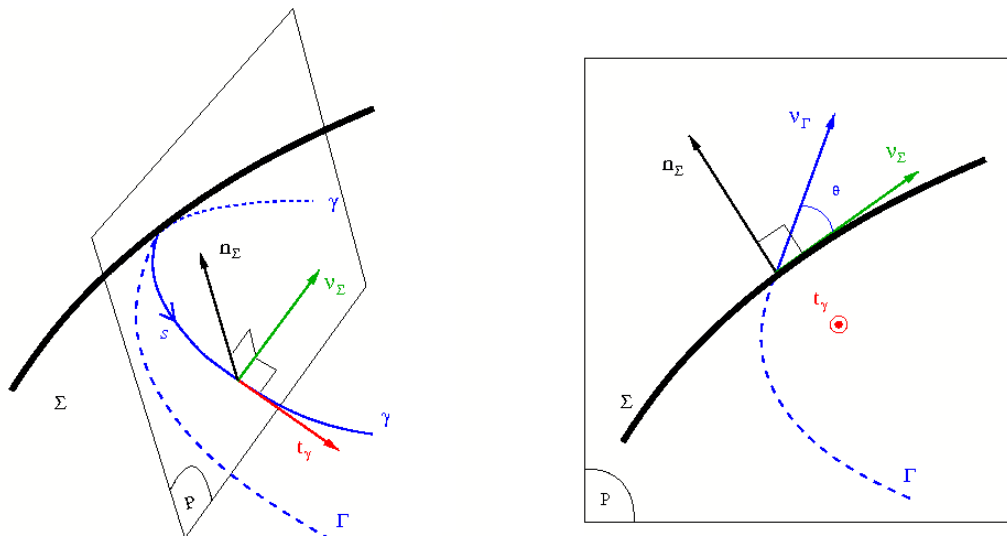


FIGURE 5.8 – Repère local utilisé sur la ligne triple  $\gamma$ . Cette base est également appelée Trièdre de Darboux-Ribaucour

### 5.3 Principe de Moindre Action

Le Lagrangien d'un système mécanique est défini comme étant la différence entre l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  et l'énergie potentielle  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \mathcal{T} - \mathcal{V} \quad (5.12)$$

où  $\mathbf{Q}$  est la variable décrivant la position du fluide et de la structure. Soit  $\delta \mathbf{q}$  une petite variation de  $\mathbf{Q}$  cinématiquement admissible. L'action  $\mathcal{S}$  se présente alors comme une intégrale par rapport au temps du Lagrangien entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (5.13)$$

Le principe de moindre action stipule que la trajectoire réelle suivie dans le plan de phase par le système étudié entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  correspond à un extremum de l'action. La détermination du trajet réel  $(\mathbf{Q}(t), \dot{\mathbf{Q}}(t))$  se fait donc par une approche variationnelle : on fait varier les trajets et les petites variations de trajet  $\delta \mathbf{q}$ ,  $\delta \dot{\mathbf{q}}$  sont telles que  $\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = \delta \dot{\mathbf{q}}(t_1) = \delta \dot{\mathbf{q}}(t_2) = 0$  (voir Fig. 5.9).



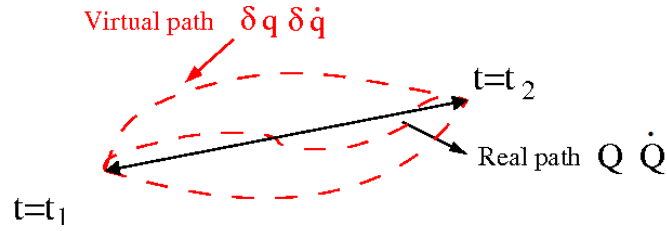


FIGURE 5.9 – Le trajet réel pris par le système est celui pour lequel l'action est extrémale.

Les trajets physiquement admis sont ceux pour lesquels l'action présente un extremum. On définit cette variation comme étant la dérivée directionnelle par rapport aux variables  $Q$  et  $\dot{Q}$  de la fonction  $\mathcal{S}$  dans les directions  $\delta q$  et  $\delta \dot{q}$  :

$$D_Q \mathcal{S}(\delta q, \delta \dot{q}) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Q}(\delta q) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{Q}}(\delta \dot{q}) \quad (5.14)$$

Pour simplifier les écritures on remplacera par la suite  $D_Q \mathcal{S}$  par  $\delta[\mathcal{S}]$ . Le principe de moindre action s'écrira alors :

$$\delta[\mathcal{S}(Q, \dot{Q})](\delta q, \delta \dot{q}) = 0 \quad \forall (\delta q, \delta \dot{q}) \quad (5.15)$$

On souhaite de plus prendre en compte dans notre problème une contrainte  $g(Q, \dot{Q})$  que l'on introduit via un multiplicateur de Lagrange que l'on note ici  $\mathbf{X}_C$ . Ce multiplicateur est alors une variable du problème. Le Lagrangien sous contrainte va s'écrire :

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, \mathbf{X}_C) = \mathcal{T} - \mathcal{V} + \mathbf{X}_C g(Q, \dot{Q}) \quad (5.16)$$

Le principe de moindre action est donné par<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \delta[\mathcal{S}(Q, \dot{Q}, \mathbf{X}_C)](\delta q, \delta \dot{q}) &= 0 \quad \forall (\delta q, \delta \dot{q}) \\ \delta[\mathcal{S}(Q, \dot{Q}, \mathbf{X}_C)](\delta x_C) &= 0 \quad \forall \delta x_C \end{aligned} \quad (5.17)$$

---

3. On applique dans les annexes E et F le Principe de Moindre Action sur des cas simples illustrant la méthode : l'étude à parois fixes du problème linéaire de ballonnement pour un fluide pesant et l'étude statique et dynamique du problème couplé pour un fluide pesant correspondant au problème étudié dans [91].

### 5.3. PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

---

## Chapitre 6

# Du bilan énergétique à la formulation variationnelle statique non linéaire

On définit dans cette partie les énergies potentielles du système, les contraintes que l'on souhaite prendre en compte, ainsi que leurs variations autour de l'état statique.

### 6.1 Bilan énergétique

Dans la suite, on utilisera les espaces  $\mathcal{C}_{UF}^0$ ,  $\mathcal{C}_{US}^0$ ,  $\mathcal{C}_{UF}$ ,  $\mathcal{C}_{US}$ ,  $\mathcal{C}_{UF}^*$  et  $\mathcal{C}_{US}^*$  les espaces définis par :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{UF}^0 &= \{\mathbf{U}^F \in H^1(\Omega_F^0)^3\} \\ \mathcal{C}_{UF}^* &= \{\mathbf{U}^F \in H^1(\Omega_F^*)^3\} \\ \mathcal{C}_{UF} &= \{\mathbf{U}^F \in H^1(\Omega_F)^3\} \\ \mathcal{C}_{US}^0 &= \{\mathbf{U}^S \in H^1(\Omega_S^0)^3 / \mathbf{U}^S = 0 \text{ sur } \Sigma_{\mathbf{u}}\} \\ \mathcal{C}_{US}^* &= \{\mathbf{U}^S \in H^1(\Omega_S^*)^3 / \mathbf{U}^S = 0 \text{ sur } \Sigma_{\mathbf{u}}\} \\ \mathcal{C}_{US} &= \{\mathbf{U}^S \in H^1(\Omega_S)^3 / \mathbf{U}^S = 0 \text{ sur } \Sigma_{\mathbf{u}}\}\end{aligned}$$

On considère pour le problème d'interaction fluide-structure étudié, l'énergie potentielle de pesanteur du liquide que l'on note  $E_{pes}$ , ainsi que l'énergie potentielle élastique de la structure  $E_{elas}$ . Les effets de capillarité sont introduits en considérant les énergies d'interfaces associées à  $\Sigma$ ,  $\Sigma_G$  et  $\Gamma$ , leur somme est notée  $E_{Stot}$ . Comme évoqué dans [35],

## 6.1. BILAN ÉNERGÉTIQUE

---

il est difficile de prendre en compte la contrainte d'incompressibilité directement dans le calcul de la variation du Lagrangien. On choisit donc d'introduire dans l'expression (5.12) un terme supplémentaire, que l'on notera  $\mathcal{I}$ , permettant de prendre en compte la condition d'incompressibilité à l'aide d'une nouvelle variable local : le multiplicateur de Lagrange local  $\Lambda$  défini dans tout le volume liquide. De même, afin de pouvoir différentier le Lagrangien par rapport à  $\mathbf{u}^S$  et  $\mathbf{u}^F$  sans avoir à se soucier de leur liaison, la condition de contact à l'interface  $\Sigma$  est prise en compte à l'aide de la contrainte  $\mathcal{C}_\Sigma$  et du multiplicateur de Lagrange local  $M$ . Si les forces s'exerçant sur  $\Sigma$  sont des forces surfaciques, on a pu voir dans la partie 5.1 que le bord  $\gamma$  est soumis à des forces linéiques, on introduit donc dans le Lagrangien une contrainte supplémentaire  $\mathcal{C}_\gamma$  permettant de prendre en compte la condition de contact sur  $\gamma$ . Le multiplicateur de Lagrange associé étant noté  $M_\gamma$ . L'expression de ces énergies et de ces contraintes est détaillée dans la suite. Le Lagrangien sous contrainte s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{U}^S, \mathbf{U}^F, \Lambda, M, M_\gamma) = & \left( E_C^F(\mathbf{U}^F) + E_C^S(\mathbf{U}^S) \right) - \left( E_{elas}(\mathbf{U}^S) + E_{pes}(\mathbf{U}^F) + E_{Stot}(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S) \right) \\ & + \mathcal{I}(\mathbf{U}^F, \Lambda) + \mathcal{C}_\Sigma(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, M) + \mathcal{C}_\gamma(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, M_\gamma) + F_{ext}(\mathbf{U}^S) \end{aligned} \quad (6.1)$$

où  $E_C^F$  et  $E_C^S$  sont respectivement les énergies cinétiques du fluide et de la structure.  $F_{ext}$  représente le travail de la force extérieure  $\mathbf{f}_{ext}$  sur la surface  $\Sigma_f$  de la structure (voir Fig. 5.7).

Le Principe de Moindre Action introduit dans la partie 5.3 permet d'écrire la formulation variationnelle du problème, il s'agit de trouver :  $(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, \Lambda, M, M_\gamma) \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}^0 \times \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S}^0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , tels que :

$\delta_{\mathbf{U}^F, \dot{\mathbf{U}}^F} [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) = 0$	$\forall (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F} \times \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}$	(6.2)
$\delta_{\mathbf{U}^S, \dot{\mathbf{U}}^S} [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^S, \delta \dot{\mathbf{u}}^S) = 0$	$\forall (\delta \mathbf{u}^S, \delta \dot{\mathbf{u}}^S) \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S} \times \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S}$	
$\delta_\Lambda [\mathcal{S}] (\delta \lambda) = 0$	$\forall \delta \lambda \in \mathbb{R}$	
$\delta_M [\mathcal{S}] (\delta \mu) = 0$	$\forall \delta \mu \in \mathbb{R}$	
$\delta_{M_\gamma} [\mathcal{S}] (\delta \mu_\gamma) = 0$	$\forall \delta \mu_\gamma \in \mathbb{R}$	

Les deux premières relations correspondent à l'équation du fluide et celle de la structure, les trois dernières correspondent aux contraintes considérées.

## 6.1. BILAN ÉNERGÉTIQUE

---

Le cadre de notre étude se limite cependant aux vibrations linérisées autour de l'état d'équilibre du système. On s'intéresse donc dans un premier temps à la recherche de la configuration d'équilibre, c'est à dire la position du liquide et de la structure minimisant l'énergie potentielle du système. En notant  $\mathcal{L}_S$  le Lagrangien sous contrainte défini par la relation (6.1) avec des énergies cinétiques nulles. Le problème statique se ramène donc à la recherche d'un extremum de  $\mathcal{L}_S$ . On utilisera également l'indice  $*$  pour désigner les multiplicateurs de Lagrange à l'état statique. Aussi, l'expression  $\delta [f]^* (\boldsymbol{\delta u})$  désigne la dérivée directionnelle de la fonction  $f$  dans la direction  $\boldsymbol{\delta u}$  dans la configuration d'équilibre. Il s'agit donc de trouver :  $(\mathbf{U}_*^F, \mathbf{U}_*^S, \Lambda^*, M^*, M_\gamma^*) \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}^0 \times \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S}^0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , tels que :

$$\begin{array}{rcl}
 \delta_{\mathbf{U}^F} [\mathcal{L}_S]^* (\boldsymbol{\delta u}^F) & = & 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta u}^F \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}^* \\
 \delta_{\mathbf{U}^S} [\mathcal{L}_S]^* (\boldsymbol{\delta u}^S) & = & 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta u}^S \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S}^* \\
 \delta_\Lambda [\mathcal{L}_S]^* (\delta \lambda) & = & 0 \quad \forall \delta \lambda \in \mathbb{R} \\
 \delta_M [\mathcal{L}_S]^* (\delta \mu) & = & 0 \quad \forall \delta \mu \in \mathbb{R} \\
 \delta_{M_\gamma} [\mathcal{L}_S]^* (\delta \mu_\gamma) & = & 0 \quad \forall \delta \mu_\gamma \in \mathbb{R}
 \end{array} \tag{6.3}$$

### 6.1.1 Incompressibilité

On considère un volume fluide qui ne dépend que du déplacement  $\mathbf{U}^F$ . L'incompressibilité en tout point du volume fluide peut être traduite en tout point de  $\Omega_0^F$  par :

$$\det(\mathbf{F}(\mathbf{U}^F)) = 1 \tag{6.4}$$

$\mathbf{F}$  représente le gradient de la déformation volumique entre les domaines  $\Omega_F^0$  et  $\Omega_F$  :

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}_{\mathbf{X}_0} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \tag{6.5}$$

$\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}_0$  désignant respectivement la position d'un point de  $\Omega_F$  et  $\Omega_F^0$ . On définit donc le terme lié à la contrainte d'incompressibilité par :

$$\mathcal{I}(\mathbf{U}^F, \Lambda) = \int_{\Omega_F^0} \Lambda (\det(\mathbf{F}) - 1) \, d\Omega_F^0 \tag{6.6}$$

La variation du terme d'incompressibilité par rapport à  $\mathbf{U}^F$  s'écrit donc :

$$\delta_{\mathbf{U}^F} [\mathcal{I}] (\boldsymbol{\delta u}^F) = \int_{\Omega_F^0} \Lambda \delta [\det(\mathbf{F})] (\boldsymbol{\delta u}^F) \, d\Omega_F^0 \tag{6.7}$$

## 6.1. BILAN ÉNERGÉTIQUE

---

On donne dans l'annexe D l'expression de la variation de  $\det(\mathbf{F})$  :

$$\delta[\det(\mathbf{F})](\delta\mathbf{u}^F) = \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}^F)\det(\mathbf{F}) \quad (6.8)$$

La variation de la contrainte  $\mathcal{I}$  s'écrit donc :

$$\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F) = \int_{\Omega^F} \Lambda \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}^F) \, d\Omega_F \quad (6.9)$$

Ce qui permet de retrouver que pour des petits déplacements  $\delta\mathbf{u}^F$  d'un fluide incompressible, la contrainte d'incompressibilité se traduit par  $\operatorname{div}(\delta\mathbf{u}^F) = 0$ . On peut alors réécrire ce terme autour de l'état d'équilibre en intégrant par parties avec  $\partial\Omega_F^* = \Gamma^* \cup \Sigma^*$  :

$$\delta[\mathcal{I}]^*(\delta\mathbf{u}^F) = \int_{\Gamma^*} \Lambda^* \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* \, d\Gamma + \int_{\Sigma^*} \Lambda^* \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \, d\Sigma - \int_{\Omega_F^*} \nabla\Lambda^* \cdot \delta\mathbf{u}^F \, d\Omega_F \quad (6.10)$$

### 6.1.2 Énergie potentielle de pesanteur du fluide

Soit  $\Omega_F^0$  la configuration initiale du volume fluide repérée par le vecteur position  $\mathbf{X}_0$  (cf. Fig. 5.7). Pour une configuration quelconque  $\Omega_F(\mathbf{U}^F)$  repérée par le vecteur  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}^F$ , l'énergie potentielle de pesanteur du fluide s'écrit alors :

$$E_{pes}(\mathbf{U}^F) = \rho^F g \int_{\Omega_F(\mathbf{U}^F)} \mathbf{X} \cdot \mathbf{i}_z \, d\Omega_F \quad (6.11)$$

Il est à noter que puisque la condition d'invariance du volume du liquide est imposée dans le Lagrangien par un terme de contrainte (voir partie 6.1.1), la conservation de la masse du fluide sera prise en compte en prenant  $\rho^F$  constant.

La variation de l'énergie potentielle dans la direction  $\delta\mathbf{u}^F$  va donc s'écrire :

$$\delta_{\mathbf{U}^F} [E_{pes}](\delta\mathbf{u}^F) = \rho^F g \int_{\Omega_F} \delta[\mathbf{X}](\delta\mathbf{u}^F) \cdot \mathbf{i}_z \, d\Omega_F + \rho^F g \int_{\Omega_F} \mathbf{X} \cdot \mathbf{i}_z \delta[d\Omega_F](\delta\mathbf{u}^F) \quad (6.12)$$

En utilisant le résultat obtenu dans l'Annexe D : on a  $\delta[d\Omega_F](\delta\mathbf{u}^F) = \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}^F)d\Omega$  et la relation (6.12) va s'écrire :

$$\delta[E_{pes}](\delta\mathbf{u}^F) = \rho^F g \int_{\Omega_F} \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z \, d\Omega_F + \rho^F g \int_{\Omega_F} Z \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}^F) d\Omega_F \quad (6.13)$$

$$(6.14)$$

## 6.1. BILAN ÉNERGÉTIQUE

---

avec  $Z = \mathbf{X} \cdot \mathbf{i}_z$ . En remarquant la relation :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(Z \delta \mathbf{u}^F) &= Z \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}^F) + \delta \mathbf{u}^F \cdot \nabla Z \\ &= Z \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}^F) + \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (6.15)$$

On en déduit :

$$\delta [E_{pes}] (\delta \mathbf{u}^F) = \rho^F g \int_{\Omega_F} \operatorname{div}(Z \delta \mathbf{u}^F) \, d\Omega_F \quad (6.16)$$

En utilisant la formule d'Ostrogradsky, on écrit la variation de l'énergie de pesanteur autour du domaine fluide à l'équilibre  $\Omega_F^*$  dont le bord s'écrit  $\partial\Omega_F^* = \Gamma^* \cup \Sigma^*$  on a :

$$\delta [E_{pes}]^* (\delta \mathbf{u}^F) = \rho^F g \int_{\Gamma^*} Z^* \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}^* \, d\Gamma + \rho^F g \int_{\Sigma^*} Z^* \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* \, d\Sigma \quad (6.17)$$

### 6.1.3 Énergie potentielle élastique de la structure

On considérera une énergie potentielle élastique de la structure  $E_{elas}$ , le résultat de la variation de cette énergie que l'on exprime autour de  $\Omega_S^*$  dans la direction  $\delta \mathbf{u}^S$  est donnée classiquement par :

$$\delta_{US} [E_{elas}]^* (\delta \mathbf{u}^S) = \int_{\Omega_S^*} \operatorname{Tr} \left[ \sigma(\mathbf{U}_*^S) (\mathbf{D}_{\mathbf{X}_S} \delta \mathbf{u}^S)^\top \right] \, d\Omega_S = \int_{\Omega_S^*} \sigma(\mathbf{U}_*^S) : \boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{u}^S) \, d\Omega_S \quad (6.18)$$

$\operatorname{Tr}$  est ici l'opérateur trace,  $\mathbf{X}_S$  le vecteur position de la structure,  $\sigma$  représente le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_{\mathbf{X}_S} \delta \mathbf{u}^S$  le tenseur des déformations.

### 6.1.4 Énergies surfaciques

Soit  $S$  l'interface entre un corps et son milieu environnant. Comme on l'a vu dans la partie précédente, l'énergie d'interface  $E_S$  correspondant à  $S$  va s'écrire :

$$E_S = \alpha_S \mathcal{A}_S \quad (6.19)$$

$\mathcal{A}_S$  désigne l'aire de la surface  $S$  et  $\alpha_S$  est la densité surfacique d'énergie de surface que l'on supposera constante. Soit  $\mathbf{U}$  un champs vectoriel de déplacement défini sur la surface  $S$ . La variation de cette énergie dans la direction  $\delta \mathbf{u}$  s'écrira :

$$\delta_U [E_S] (\delta \mathbf{u}) = \alpha_S \delta_U [\mathcal{A}_S] (\delta \mathbf{u}) \quad (6.20)$$

## 6.1. BILAN ÉNERGÉTIQUE

---

Or on démontre que la variation de l'aire dans la direction  $\delta \mathbf{u}$  s'écrit (Chap. 9 [30]) :

$$\delta [\mathcal{A}_S] (\delta \mathbf{u}) = \int_S \operatorname{div}_S(\delta \mathbf{u}) dS \quad (6.21)$$

où  $\operatorname{div}_S$  est la divergence surfacique définie sur la surface  $S$  (supposée différentiable). En décomposant  $\delta \mathbf{u}$  en une partie tangente à  $S$  que l'on note  $\delta \mathbf{u}^{\parallel}$  et une partie  $\delta \mathbf{u}^{\perp}$  suivant la normale  $\mathbf{n}$  à la surface (voir Fig. 6.1), on en déduit une expression de  $\operatorname{div}_S(\delta \mathbf{u})$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_S(\delta \mathbf{u}) &= \operatorname{div}_S(\delta \mathbf{u}^{\parallel} + \delta \mathbf{u}^{\perp}) \\ &= \operatorname{div}_S(\delta \mathbf{u}^{\parallel}) + (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ &= \operatorname{div}_S(\delta \mathbf{u}^{\parallel}) + (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{div}_S(\mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot \nabla_S(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Le gradient surfacique  $\nabla_S$  étant toujours tangent à la surface, le produit scalaire  $\mathbf{n} \cdot \nabla_S(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$  est toujours nul. De plus, on notera par définition :

$$\operatorname{div}_S(\mathbf{n}) = 2H_S \quad (6.23)$$

$H_S$  étant la courbure moyenne à la surface  $S$  (on gardera la convention  $H_S < 0$  si le centre de courbure se situe dans le milieu où pointe la normale  $\mathbf{n}$ ). La relation (6.21) s'écrit alors :

$$\delta [\mathcal{A}_S] (\delta \mathbf{u}) = \int_S \operatorname{div}_S(\delta \mathbf{u}^{\parallel}) dS + \int_S 2H_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.24)$$

En écrivant  $\partial S$  le bord de  $S$  et en utilisant la formule d'Ostrogradsky on a :

$$\delta [\mathcal{A}_S] (\delta \mathbf{u}) = \oint_{\partial S} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_S dS + \int_S 2H_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.25)$$

Le premier terme représente la variation de la surface  $S$  due aux déplacements tangents de son bord, le second représente la variation de la surface  $S$  due aux déplacements suivant la normale  $\mathbf{n}$  qui est proportionnelle à la courbure moyenne de la surface.

Il est à noter que pour des surfaces anguleuses, c'est à dire pour lesquelles il existe une ligne de discontinuité  $\mathcal{C}^1 \mathcal{R}$  ( $\mathcal{R}$  étant une courbe séparant la surface  $\mathcal{A}_S$  en deux surfaces  $\mathcal{A}_S^1$  et  $\mathcal{A}_S^2$ ), la normale  $\mathbf{n}$  présente alors une discontinuité et il est nécessaire de rajouter à l'expression (6.25) un terme supplémentaire :

$$\delta [\mathcal{A}_S] (\delta \mathbf{u}) = \oint_{\partial S} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_S dS + \oint_{\mathcal{R}} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\nu}_S^1 + \boldsymbol{\nu}_S^2) d\mathcal{R} + \int_S 2H_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.26)$$



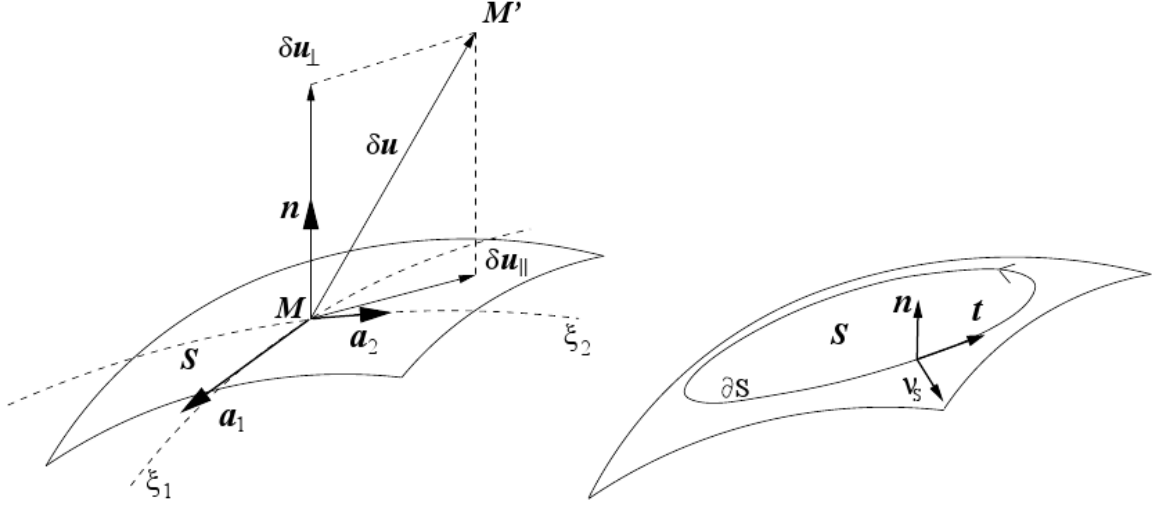


FIGURE 6.1 – Repères utilisés pour la définition de la variation de l'aire de la surface  $S$ . On paramètre la surface par  $\xi_1$  et  $\xi_2$ ,  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont les vecteurs tangents à  $S$ .  $\mathbf{t}$  est tangent à  $\partial S$  et  $\boldsymbol{\nu}_S = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ .

où  $\boldsymbol{\nu}_S^1$  et  $\boldsymbol{\nu}_S^2$  sont respectivement les normales géodésiques à  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{A}_S^1$  et  $\mathcal{A}_S^2$ .

Soient  $E_\Sigma$ ,  $E_{\Sigma_G}$  et  $E_\Gamma$  les énergies de tension de surface associées aux interfaces  $\Sigma$ ,  $\Sigma_G$  et  $\Gamma$ , on associe respectivement à ces énergies les densités surfaciques d'énergie  $\alpha_L$ ,  $\alpha_G$ ,  $\alpha$ .  $E_{S_{tot}}$  désignant la somme de ces énergies.

$\delta \mathbf{u}^F$  caractérise une perturbation de la position du fluide, en particulier de la surface libre  $\Gamma$  et du bord  $\gamma$ .  $\delta \mathbf{u}^S$  caractérise une perturbation de la position de la structure, en particulier de  $\Sigma_G$ . Concernant l'interface fluide-structure  $\Sigma$ , il faut choisir de paramétrer son déplacement soit par  $\delta \mathbf{u}^F$ , soit par  $\delta \mathbf{u}^S$ , on peut cependant montrer que les deux choix sont équivalents. On choisit ici de paramétrer  $\Sigma$  par  $\delta \mathbf{u}^S$ . La variation de ces énergies autour de l'état d'équilibre va donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \delta [E_\Gamma]^* (\delta \mathbf{u}^F) &= \alpha \oint_{\gamma^*} \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\nu}_\Gamma^* d\gamma + \alpha \int_\Gamma 2H_\Gamma^* \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* d\Gamma \\
 \delta [E_\Sigma]^* (\delta \mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^S) &= \alpha_L \oint_{\gamma^*} \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma^* d\gamma + \alpha_L \int_{\Sigma^*} 2H_\Sigma^* \delta \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \\
 \delta [E_{\Sigma_G}]^* (\delta \mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^S) &= -\alpha_G \oint_{\gamma^*} \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma^* d\gamma + \alpha_G \int_{\Sigma_G^*} 2H_{\Sigma_G}^* \delta \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma_G}^* d\Sigma_G
 \end{aligned}
 \tag{6.27}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{U}^F} [E_{S_{tot}}]^* (\delta \mathbf{u}^F) &= \alpha \delta [\mathcal{A}_\Gamma]^* (\delta \mathbf{u}^F) + \alpha_L \delta [\mathcal{A}_\Sigma]^* (\delta \mathbf{u}^F) + \alpha_G \delta [\mathcal{A}_{\Sigma_G}]^* (\delta \mathbf{u}^F) \\ \delta_{\mathbf{U}^S} [E_{S_{tot}}]^* (\delta \mathbf{u}^S) &= \alpha_G \delta [\mathcal{A}_{\Sigma_G}]^* (\delta \mathbf{u}^S) + \alpha_L \delta [\mathcal{A}_\Sigma]^* (\delta \mathbf{u}^S)\end{aligned}$$

### 6.1.5 Couplage Fluide-Structure

À l'interface  $\Sigma$  :

De même que pour l'incompressibilité, la prise en compte de la contrainte assurant le couplage entre le fluide et la structure au niveau de l'interface  $\Sigma$ , introduit dans la relation (6.1), se fait à l'aide d'un terme supplémentaire  $\mathcal{C}_\Sigma(M, \mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S)$ . On retrouve cette méthode dans de nombreuses études pour des cas linéaires ou non linéaires [62, 29, 67]. On définit ici cet opérateur sur la surface  $\Sigma$  tel que :

$$\delta_{\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S} [\mathcal{C}_\Sigma] (\delta \mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^S) = \int_{\Sigma} M (\delta \mathbf{u}^S - \delta \mathbf{u}^F) \cdot \mathbf{n}_\Sigma d\Sigma \quad (6.28)$$

$M$  étant un multiplicateur de Lagrange local défini sur  $\Sigma$ . La partie intervenant dans l'équation du fluide (obtenue en prenant  $\delta \mathbf{u}^S = 0$ ) est l'opposée de celle intervenant dans la structure (action réciproque).

L'intérêt de prendre en compte cette contrainte de manière faible dans la formulation variationnelle est de permettre que les champs  $\delta \mathbf{u}^F$  et  $\delta \mathbf{u}^S$  appartiennent à des espaces libérés de ces contraintes.

Dans le cas des grandes déformations, la condition de continuité doit s'écrire à l'aide des vitesses normales [39]. Puisque l'on s'intéresse aux petites déformations autour d'un état de référence, on gardera l'écriture en déplacement. Comme on le verra lors de l'étude dynamique, écrite sous cette forme, la contrainte de couplage permet de prendre en compte les échanges d'efforts à l'interface ainsi que les effets de précontraintes statiques. En écrivant la relation (6.28) autour de la position statique on a :

$$\boxed{\delta_{\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S} [\mathcal{C}_\Sigma]^* (\delta \mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^S) = \int_{\Sigma^*} M^* (\delta \mathbf{u}^S - \delta \mathbf{u}^F) \cdot \mathbf{n}_{\Sigma^*}^* d\Sigma} \quad (6.29)$$

### Sur le bord de la surface libre $\gamma$ :

L'étude des énergies surfaciques dans la partie 6.1.4 a permis de mettre en évidence les forces capillaires s'exerçant sur la ligne triple  $\gamma$ . En effet, la variation au premier ordre de  $E_{S_{tot}}$  traduit le travail de forces surfaciques (sur  $\Gamma$ ,  $\Sigma$  et  $\Sigma_G$ ) mais aussi linéiques sur le bord  $\gamma$  comme le montre l'encadré (6.27).

Le multiplicateur de Lagrange  $M$ , introduit précédemment pour coupler le fluide et la structure sur l'interface  $\Sigma$  est homogène à une force surfacique, il ne permet cependant pas de coupler le fluide et la structure sur le bord  $\gamma$ . On introduit donc un terme de couplage supplémentaire linéique  $\mathcal{C}_\gamma$  défini sur la ligne triple  $\gamma$  :

$$\delta_{U^F, U^S} [\mathcal{C}_\gamma] (\delta \mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^S) = \oint_{\gamma} M_\gamma (\delta \mathbf{u}^S - \delta \mathbf{u}^F) \cdot \mathbf{n}_\Sigma d\gamma \quad (6.30)$$

L'expression de la variation de  $\mathcal{C}_\gamma$  autour de la position d'équilibre est alors donnée par :

$$\delta_{U^F, U^S} [\mathcal{C}_\gamma]^* (\delta \mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^S) = \oint_{\gamma^*} M_\gamma^* (\delta \mathbf{u}^S - \delta \mathbf{u}^F) \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\gamma \quad (6.31)$$

## 6.2 Étude statique

### 6.2.1 État d'équilibre du fluide

On souhaite maintenant exprimer la formulation variationnelle du fluide associée au problème (6.3), en considérant les relations (6.10), (6.17), (6.27), (6.29) et (6.31) on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_*^F} \nabla \Lambda^* \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Omega^F - \int_{\Gamma^*} (\Lambda^* - \rho^F g Z^* - \alpha 2H_\Gamma^*) \mathbf{n}_\Gamma^* \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Gamma \\ & - \int_{\Sigma^*} (\Lambda^* - M^* - \rho^F g Z^*) \mathbf{n}_\Sigma^* \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Sigma + \oint_{\gamma^*} (\alpha \sin(\theta) + M_\gamma^*) \mathbf{n}_\Sigma^* \cdot \delta \mathbf{u}^F d\gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^F \in \mathcal{C}_{U^F}^* \end{aligned} \quad (6.32)$$

En prenant des fonctions test  $\delta \mathbf{u}^F$  nulles sur le bord  $\partial\Omega_*^F$  on en déduit :

$$\nabla \Lambda^* = 0 \Rightarrow \Lambda^* \text{ constant sur } \Omega_*^F$$

La relation (6.32) permet d'obtenir une expression des multiplicateurs de Lagrange en fonction des variables du problème pour le système à l'équilibre en prenant respectivement

## 6.2. ÉTUDE STATIQUE

---

des fonctions tests  $\delta \mathbf{u}^F$  nulles sur  $\Sigma$  et  $\gamma$ ,  $\Gamma$  et  $\gamma$  :

$$\begin{cases} \Lambda^* = \rho^F g Z^* + \alpha 2H_\Gamma^* & \text{sur } \Gamma^* & (a) \\ M^* = \Lambda^* - \rho^F g Z^* & \text{sur } \Sigma^* & (b) \\ M_\gamma^* = -\alpha \sin(\theta) & \text{sur } \gamma^* & (c) \end{cases} \quad (6.33)$$

D'après la relation (a) sur la surface libre  $\Gamma^*$ , le terme  $\rho^F g Z^* + \alpha 2H_\Gamma^*$  est constant. On rappelle l'équation de Laplace-Young qui s'écrit sous la forme :

$$P - P_G = \alpha 2H_\Gamma^* \quad \text{sur } \Gamma^* \quad (6.34)$$

où  $P$  est ici la pression dans le liquide et  $P_G$  la pression du gaz ( $\alpha 2H_\Gamma^*$  représente donc le saut de pression à l'interface liquide-gaz). Étant donné que  $P = P_{Z=0} - \rho^F g Z^*$ , en considérant  $P_{Z=0}$  la pression de l'origine de l'axe des  $Z$ , on a donc la relation suivante :

$$P_{Z=0} - P_G = \Lambda^* \quad (6.35)$$

La constante  $\Lambda^*$  peut donc être considérée comme la différence de pression entre le gaz et l'origine des axes.

Le multiplicateur  $M^*$  donné par la relation (b) peut ici être considéré comme une pression statique s'exerçant sur la paroi  $\Sigma^*$ . De même, le multiplicateur  $M_\gamma^*$  représente l'amplitude de la force statique exercée sur  $\gamma^*$  et égale à l'amplitude de  $\mathbf{f}_{F/S}$  introduite dans la partie 5.1.2.

### Remarque

À partir de l'équation (6.32) et des résultats obtenus dans la partie 5.1.2 concernant l'équilibre des forces sur le bord  $\gamma^*$ , on remarque que le champ  $\delta \mathbf{u}^F$  ne travaille pas dans la direction  $\mathbf{t}_\gamma$  (il n'y a pas de variation de l'énergie potentielle du système). De plus, sur la surface libre  $\Gamma^*$ , les déplacements tangentiels ne travaillent également pas. On verra dans la suite que cette indétermination dans ces directions conduit à un problème singulier pour lequel ces degrés de liberté doivent être bloqués.

### 6.2.2 État d'équilibre de la structure

Pour la structure, les relations (6.18), (6.27), (6.29) et (6.31) donnent :

$$\int_{\Omega_S^*} \sigma(\mathbf{U}_*^S) : \epsilon(\delta \mathbf{u}^S) d\Omega_S + \int_{\Sigma^*} (2H_\Sigma^* - M^*) \mathbf{n}_\Sigma^* \cdot \delta \mathbf{u}^S d\Sigma \\ + \alpha_G \int_{\Sigma_G^*} 2H_{\Sigma_G^*} \delta \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma_G^*}^* d\Sigma_G - \oint_{\gamma^*} M_\gamma^* \mathbf{n}_\Sigma^* \cdot \delta \mathbf{u}^S d\gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{US}^* \quad (6.36)$$

Les formulations (6.32) et (6.36) sont non linéaires ( $\mathbf{U}_*^F$  et  $\mathbf{U}_*^S$  peuvent être grands). Une résolution de ce problème couplé peut être obtenu par une méthode itérative de Newton-Raphson. En considérant que le déplacement entre chacune des étapes de calcul est faible, une linéarisation des opérateurs du problème est possible et on se ramène à une suite de calculs linéaires. La linéarisation des opérateurs que l'on retrouve dans les formulations (6.32) et (6.36) est présentée dans l'étude dynamique du problème. Dans le cas d'un système en micro-gravité avec une structure suffisamment rigide, le déplacement de la structure entre l'état naturel et l'état d'équilibre sera suffisamment faible pour considérer les deux volumes  $\Omega_0^S$  et  $\Omega_*^S$  comme étant confondus.

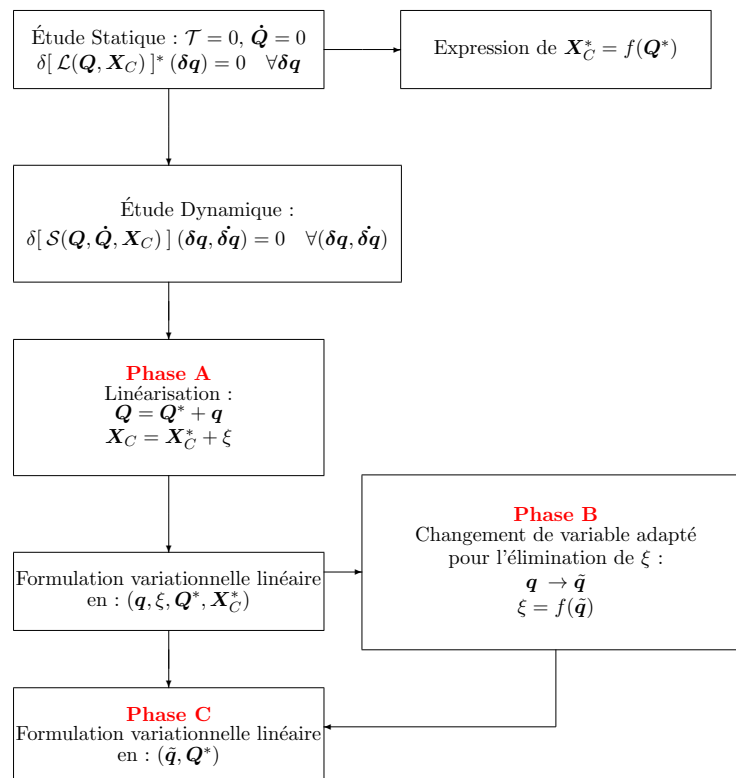
Concernant l'état d'équilibre du fluide, le problème (6.32) que l'on obtient correspond au problème statique présenté dans [35] où la structure est considérée rigide. L'auteur présente une application de la résolution itérative de Newton-Raphson permettant d'obtenir la surface libre  $\Gamma^*$ . On ne redéveloppera pas ici cette méthode et on considère que la surface  $\Gamma^*$  est connue.



# Chapitre 7

## Formulation variationnelle dynamique linéarisée

Ci-dessous, on récapitule la démarche de l'étude permettant d'aboutir à la formulation variationnelle linéarisée.



On linéarise dans un premier temps les équations variationnelles obtenues dans l'étude statique (phase A), puis, en utilisant un changement de variable adapté, on élimine de la formulation les multiplicateurs de Lagrange (phase B) afin de pouvoir se ramener à une expression classique du problème couplé (phase C).

## 7.1 Linéarisation des équations variationnelles (phase A)

On cherche dans cette partie à écrire les équations linéarisées de la dynamique du système fluide-structure en prenant en compte l'énergie cinétique du système. On s'intéressera donc dans un premier temps à la linéarisation des énergies introduites précédemment ainsi que des énergies cinétiques en décomposant les variables du problème  $(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, \Lambda, M, M_\gamma)$  autour de la position d'équilibre :

$$\begin{array}{l} \mathbf{U}^F = \mathbf{U}_*^F + \mathbf{u}^F \\ \mathbf{U}^S = \mathbf{U}_*^S + \mathbf{u}^S \\ \Lambda = \Lambda^* + \lambda \\ M = M^* + \mu \\ M_\gamma = M_\gamma^* + \mu_\gamma \end{array} \quad (7.1)$$

où  $(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S, \lambda, \mu, \mu_\gamma)$  représentent les petits déplacements et les petites variations des multiplicateurs de Lagrange autour de la position de référence. On s'intéresse donc au problème (6.2) présenté précédemment, le Lagrangien sous contrainte étant défini par (6.1).

D'après les expressions de la variation des énergies données dans la partie 6.1, on voit que la première équation (celle du fluide) est une fonction des variables  $\mathbf{U}^F$ ,  $\Lambda$  et  $M$ . La linéarisation de cette expression autour de l'état statique est donc donnée par le développement limité suivant :

$$\begin{aligned} \delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F, \delta\dot{\mathbf{u}}^F) &= \delta[\mathcal{S}]^*(\delta\mathbf{u}^F, \delta\dot{\mathbf{u}}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \dots \\ &\dots \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\Lambda}(\lambda) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial M}(\mu) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Cette expression peut être simplifiée en considérant le problème statique (6.3) :

$$\delta[\mathcal{S}]^*(\delta\mathbf{u}^F, \delta\dot{\mathbf{u}}^F) = \delta[\mathcal{S}]^*(\delta\mathbf{u}^F) = \int_{t_1}^{t_2} \delta[\mathcal{L}_S]^*(\delta\mathbf{u}^F) dt = 0 \quad (7.3)$$



## 7.1. LINÉARISATION DES ÉQUATIONS VARIATIONNELLES (PHASE A)

Ainsi, en procédant de même pour le reste des équations, le problème (6.2) peut être remplacé par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\dot{\mathbf{u}}^F)]^*}{\partial\dot{\mathbf{U}}^F}(\dot{\mathbf{u}}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\Lambda}(\lambda) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial M}(\mu) &= 0 \quad (\text{a}) \\
 \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\dot{\mathbf{u}}^S)]^*}{\partial\dot{\mathbf{U}}^S}(\dot{\mathbf{u}}^S) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial M}(\mu) &= 0 \quad (\text{b}) \\
 \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\lambda)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) &= 0 \quad (\text{c}) \\
 \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mu)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mu)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= 0 \quad (\text{d}) \\
 \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mu_\gamma)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mu_\gamma)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= 0 \quad (\text{e})
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

On souhaite maintenant exprimer ces dérivées pour chacune des énergies afin d'écrire la formulation variationnelle du problème linéarisé.

La linéarisation des énergies va nous permettre de mettre en évidence dans certains cas des opérateurs bilinéaires de rigidité (opérateurs tangents) que l'on notera  $\mathbf{K}$ , une étude de leur symétrie est proposée dans l'annexe G.

On introduit dans ce qui suit le vecteur  $\boldsymbol{\tau}_S$ , définit pour un vecteur quelconque  $\mathbf{u}$  sur un élément de surface  $dS$  de normale  $\mathbf{n}_S$ , par :

$$\boldsymbol{\tau}_S(\mathbf{u}) dS = \delta[\mathbf{n}_S dS](\mathbf{u}) \tag{7.5}$$

### Énergie cinétique

L'énergie cinétique du fluide  $E_C^F$  dépend du champ de vitesse du fluide  $\dot{\mathbf{U}}^F$ . Le volume  $\Omega_F$  est ici déformable, par définition on a :

$$E_C^F(\dot{\mathbf{U}}^F, \mathbf{U}^F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(\mathbf{U}^F)} \rho^F (\dot{\mathbf{U}}^F)^2 d\Omega_F \tag{7.6}$$

La variation de l'énergie cinétique suivant  $\mathbf{U}^F$  et  $\dot{\mathbf{U}}^F$  va s'écrire :

$$\delta \left[ E_C^F(\mathbf{U}^F, \dot{\mathbf{U}}^F) \right] (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) = \int_{\Omega_F(\mathbf{U}^F)} \rho^F \dot{\mathbf{U}}^F \delta \dot{\mathbf{u}}^F \, d\Omega_F + \frac{1}{2} \int_{\Omega_F(\mathbf{U}^F)} \rho^F (\dot{\mathbf{U}}^F)^2 \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}^F) \, d\Omega_F$$

En dérivant cette expression par rapport à  $\mathbf{U}^F$  et  $\dot{\mathbf{U}}^F$  respectivement dans la direction  $\mathbf{u}^F$  et  $\dot{\mathbf{u}}^F$ , autour de la position d'équilibre avec  $\dot{\mathbf{U}}_*^F = 0$ , on retrouve l'expression classique de la variation d'énergie cinétique autour d'un état fixe de référence  $\Omega_F^*$  pour des petits déplacements  $\mathbf{u}^F$  et  $\delta \mathbf{u}^F$  :

$$\frac{\partial [\delta [E_C^F] (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F)]^*}{\partial \mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial [\delta [E_C^F] (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F)]^*}{\partial \dot{\mathbf{U}}^F}(\dot{\mathbf{u}}^F) = \int_{\Omega_F^*} \rho^F \dot{\mathbf{u}}^F \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}^F \, d\Omega_F \quad (7.7)$$

L'expression de l'énergie cinétique de la structure de masse volumique  $\rho^S$  a une forme identique et est donnée par :

$$\frac{\partial [\delta [E_C^S] (\delta \mathbf{u}^S, \delta \dot{\mathbf{u}}^S)]^*}{\partial \mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) + \frac{\partial [\delta [E_C^S] (\delta \mathbf{u}^S, \delta \dot{\mathbf{u}}^S)]^*}{\partial \dot{\mathbf{U}}^S}(\dot{\mathbf{u}}^S) = \int_{\Omega_S^*} \rho^S \dot{\mathbf{u}}^S \cdot \delta \dot{\mathbf{u}}^S \, d\Omega_S \quad (7.8)$$

### Énergie potentielle de pesanteur du fluide

L'expression non linéaire (6.17) nous donne la variation de l'énergie potentielle de pesanteur. Cette expression ne dépend que du champs  $\mathbf{U}^F$  et on cherche uniquement sa dérivée par rapport à  $\mathbf{U}^F$ . On aura donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\delta [E_{pes}] (\delta \mathbf{u}^F)]^*}{\partial \mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) &= \delta \left[ \rho^F g \int_{\Gamma} Z \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} \, d\Gamma + \rho^F g \int_{\Sigma} Z \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} \, d\Sigma \right]^* (\mathbf{u}^F) \\ &= \int_{\Gamma^*} \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma^*} \rho^F g Z^* \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Gamma}^*(\mathbf{u}^F) \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Sigma^*} \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* \, d\Sigma + \int_{\Sigma^*} \rho^F g Z^* \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Sigma}^*(\mathbf{u}^F) \, d\Sigma \end{aligned} \quad (7.9)$$

En introduisant l'opérateur  $\mathbf{K}_S^g$  défini sur la surface  $S$  de normale  $\mathbf{n}$  par :

$$\mathbf{K}_S^g(\mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^F) = \int_S \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (7.10)$$

La relation (7.9) s'écrit donc à l'aide de l'opérateur  $\mathbf{K}_S^g$  en remplaçant  $S$  par  $\Gamma^*$  et  $\Sigma^*$  :

$$\frac{\partial [\delta [E_{pes}] (\delta \mathbf{u}^F)]^*}{\partial \mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) = \mathbf{K}_{\Gamma}^g(\mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^F) + \mathbf{K}_{\Sigma}^g(\mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^F) \quad (7.11)$$

### Énergies surfaciques

L'expression (6.27) est une fonction du déplacement du fluide  $\mathbf{U}^F$  et de la structure  $\mathbf{U}^S$ . Pour l'énergie  $E_\Gamma$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[E_\Gamma](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) &= \delta\left[\alpha\oint_{\gamma}\delta\mathbf{u}^F\cdot\nu_\Gamma d\gamma + \alpha\int_{\Gamma}2H_\Gamma\delta\mathbf{u}^F\cdot\mathbf{n}_\Gamma d\Gamma\right]^*(\mathbf{u}^F) \\ &= \alpha\oint_{\gamma^*}\delta\mathbf{u}^F\cdot\delta[\nu_\Gamma d\gamma]^*(\mathbf{u}^F) + \alpha\int_{\Gamma^*}\delta\mathbf{u}^F\cdot\delta[2H_\Gamma\mathbf{n}_\Gamma d\Gamma]^*(\mathbf{u}^F) \\ &= \alpha\oint_{\gamma^*}\delta\mathbf{u}^F\cdot\delta[\nu_\Gamma d\gamma]^*(\mathbf{u}^F) + \alpha\int_{\Gamma^*}\delta[2H_\Gamma]^*(\mathbf{u}^F)\delta\mathbf{u}^F\cdot\mathbf{n}_\Gamma d\Gamma \\ &+ \alpha\int_{\Gamma^*}2H_\Gamma\delta\mathbf{u}^F\cdot\tau_\Gamma^*(\mathbf{u}^F)d\Gamma \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F) &= \alpha\oint_{\gamma^*}\delta\mathbf{u}^F\cdot\delta[\nu_\Gamma d\gamma]^*(\mathbf{u}^F) \\ &+ \alpha\int_{\Gamma^*}\delta[2H_\Gamma]^*(\mathbf{u}^F)\delta\mathbf{u}^F\cdot\mathbf{n}_\Gamma d\Gamma + \alpha\int_{\Gamma^*}2H_\Gamma\delta\mathbf{u}^F\cdot\tau_\Gamma^*(\mathbf{u}^F)d\Gamma \end{aligned} \quad (7.12)$$

où  $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F)$  est l'opérateur de raideur de la surface libre associé à la capillarité présenté dans [35].

Pour l'énergie  $E_\Sigma$  on va retrouver une raideur ayant la même forme, cette fois-ci définie sur l'interface  $\Sigma^*$  et associée au coefficient  $\alpha_L$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[E_\Sigma](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) &= \alpha_L\oint_{\gamma}\delta\mathbf{u}^F\cdot\delta[\nu_\Sigma d\gamma]^*(\mathbf{u}^F) \\ \frac{\partial[\delta[E_\Sigma](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= \alpha_L\int_{\Sigma^*}\delta\mathbf{u}^S\cdot\delta[2H_\Sigma]^*(\mathbf{u}^S)\mathbf{n}_\Sigma d\Sigma \\ &+ \alpha_L\int_{\Sigma^*}2H_\Sigma\delta\mathbf{u}^S\cdot\tau_\Sigma^*(\mathbf{u}^S) d\Sigma \end{aligned} \quad (7.13)$$

De même pour l'énergie  $E_{\Sigma_G}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[E_{\Sigma_G}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) &= -\alpha_G\oint_{\gamma^*}\delta\mathbf{u}^F\cdot\delta[\nu_\Sigma d\gamma]^*(\mathbf{u}^F) \\ \frac{\partial[\delta[E_{\Sigma_G}](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= \alpha_G\int_{\Sigma_G^*}\delta\mathbf{u}^S\cdot\delta[2H_{\Sigma_G}]^*(\mathbf{u}^S)\mathbf{n}_{\Sigma_G} d\Sigma_G \\ &+ \alpha_G\int_{\Sigma_G^*}2H_{\Sigma_G}\delta\mathbf{u}^S\cdot\tau_{\Sigma_G}^*(\mathbf{u}^S) d\Sigma_G \end{aligned} \quad (7.14)$$

## Incompressibilité

La condition d'incompressibilité  $\mathcal{I}$  est une fonction des deux variables  $\Lambda$  et  $\mathbf{U}^F$ . En considérant le résultat obtenu dans l'étude statique :  $\nabla \Lambda^* = 0$  et en prenant  $\delta[\Lambda](\lambda) = \lambda$ , la linéarisation de  $\delta[\mathcal{I}](\delta \mathbf{u}^F)$  donnée par (6.10) s'écrit à l'aide de la forme bilinéaire  $\mathbf{K}_S^\Lambda$  défini sur la surface  $S$  par :

$$\mathbf{K}_S^\Lambda(\mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^F) = \int_S \Lambda^* \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_S(\mathbf{u}^F) dS \quad (7.15)$$

En remplaçant  $S$  par  $\Gamma^*$  et  $\Sigma^*$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta \mathbf{u}^F)]^*}{\partial \mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta \mathbf{u}^F)]^*}{\partial \Lambda}(\lambda) &= \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^F) + \mathbf{K}_\Sigma^\Lambda(\mathbf{u}^F, \delta \mathbf{u}^F) \quad (7.16) \\ &+ \int_{\Gamma^* \cup \Sigma^*} \lambda \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}^* dS - \int_{\Omega_F^*} \nabla \lambda \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Omega_F \end{aligned}$$

On remarque que seul le terme  $\mathcal{I}$  donné par (6.6) dépend de  $\Lambda$ , la relation (c) du problème (7.4) va donc s'écrire :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta \lambda)]^*}{\partial \mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) = \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta \lambda)]^*}{\partial \mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) = \int_{\Omega_F^*} \delta \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}^F) d\Omega \quad (7.17)$$

## Couplage Fluide-Structure

### À l'interface $\Sigma$ :

La condition aux limites au niveau de l'interface  $\Sigma$  est donné par l'opérateur  $\mathcal{C}_\Sigma$  et la relation (6.28) que l'on souhaite linéariser. On se place dans un premier temps du point de vue du fluide ( $\delta \mathbf{u}^S = 0$ ) l'énergie introduisant le couplage s'écrit :

$$\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta \mathbf{u}^F) = - \int_\Sigma M \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma d\Sigma \quad (7.18)$$

On linéarise cette expression en considérant des petits déplacements du fluide autour de l'interface  $\Sigma^*$  c'est à dire que l'on considère que l'interface  $\Sigma^*$  suit les particules de fluide (voir Fig. 7.1), on aura donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta \mathbf{u}^F)]^*}{\partial \mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) &= - \int_{\Sigma^*} M^* \delta \mathbf{u}^F \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma d\Sigma]^*(\mathbf{u}^F) \\ &= - \int_{\Sigma^*} M^* \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Sigma^*}^*(\mathbf{u}^F) d\Sigma \quad (7.19) \end{aligned}$$

## 7.1. LINÉARISATION DES ÉQUATIONS VARIATIONELLES (PHASE A)

---

L'opérateur  $\mathcal{C}_\Sigma$  est également une fonction de la pression  $M$  et on note  $\mu$  les petites fluctuations de pression entre  $\Sigma^*$  et  $\Sigma$ , on a  $\delta[M](\mu) = \mu$ . Puisque l'on considère ici que l'interface  $\Sigma$  suit le déplacement des particules de fluide, on utilisera la notation  $\mu_F$  pour désigner cette fluctuation de pression :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial M}(\mu_F) = - \int_{\Sigma^*} \mu_F \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \quad (7.20)$$

Dans l'équation de la structure, on notera alors  $\mu_S$  la pression s'exerçant sur le solide en considérant des petits déplacements du solide autour de l'interface  $\Sigma^*$ . Ainsi, la linéarisation du terme de couplage pour l'équation de la structure s'écrit de manière similaire :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial \mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial M}(\mu_S) = \int_{\Sigma^*} M^* \delta\mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma^*(\mathbf{u}^S) d\Sigma + \int_{\Sigma^*} \mu_S \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \quad (7.21)$$

Le schéma 7.1 représente les surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma^*$ . Soit  $P$  un point de la surface  $\Sigma$  et les déplacements  $\mathbf{u}^F$  et  $\mathbf{u}^S$  sont tels que  $\overrightarrow{P_i P} = \mathbf{u}^F$  et  $\overrightarrow{P_i P'} = \mathbf{u}^S$ .  $P$  et  $P'$  sont donc les points suivant respectivement le fluide et la structure. Si  $M^*$  représente une pression statique,  $\mu_S$  représente la fluctuation lagrangienne de pression entre  $P_i$  et  $P'$  et  $\mu_F$  celle entre  $P_i$  et  $P$  [78]. Ainsi, la différence entre  $\mu_S$  et  $\mu_F$  traduit le saut de pression entre  $P'$  et  $P$ . La relation entre ces deux quantités peut alors s'écrire en prenant le développement limité de la pression autour de  $P$  :

$$\mu_S = \mu_F + \boldsymbol{\nabla} M^* \cdot (\mathbf{u}^S - \mathbf{u}^F) \quad (7.22)$$

On remarque que seul le terme  $\mathcal{C}_\Sigma$  dépend de  $M$ . La relation (d) du problème (7.4) est donc obtenue à partir des relations (7.20) et (7.21) écrites pour des déplacements  $\mathbf{u}^F$  et  $\mathbf{u}^S$  et une dérivée par rapport à  $M$  dans la direction  $\delta\mu$  :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mu)]^*}{\partial \mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mu)]^*}{\partial \mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) = \int_{\Sigma^*} \delta\mu (\mathbf{u}^S - \mathbf{u}^F) \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \quad (7.23)$$

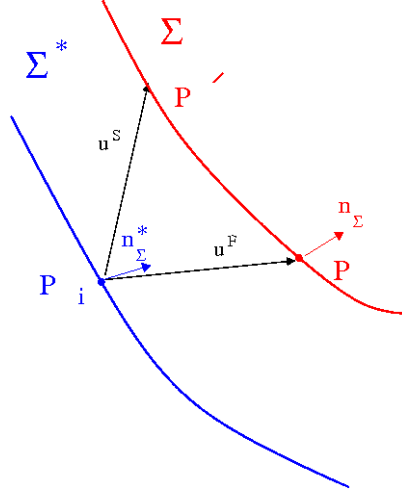


FIGURE 7.1 – Représentation des interfaces  $\Sigma^*$  et  $\Sigma$ , du point  $P_i$  ainsi que son emplacement après un déplacement en suivant une particule de fluide ( $P$ ), ou un déplacement en suivant la structure ( $P'$ ).

#### Sur le bord de la surface libre $\gamma$ :

On considère la même démarche pour calculer les linéarisations associées au terme  $\mathcal{C}_\gamma$  :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\gamma](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) = - \oint_{\gamma^*} M_\gamma^* \delta\mathbf{u}^F \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^*(\mathbf{u}^F) \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\gamma](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial M_\gamma}(\mu_\gamma^F) = - \oint_{\gamma^*} \mu_\gamma^F \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\gamma \quad (7.25)$$

On aura alors pour l'équation de la structure :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\gamma](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) = \oint_{\gamma^*} M_\gamma^* \delta\mathbf{u}^S \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^*(\mathbf{u}^S) \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\gamma](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial M_\gamma}(\mu_\gamma^S) = \oint_{\gamma^*} \mu_\gamma^S \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\gamma \quad (7.27)$$

avec :

$$\mu_\gamma^S = \mu_\gamma^F + \nabla M_\gamma^* \cdot (\mathbf{u}^S - \mathbf{u}^F) \quad (7.28)$$

Enfin, puisque que seul le terme  $\mathcal{C}_\gamma$  dépend de  $M_\gamma$ , la relation (e) du problème (7.4) est donc obtenue à partir des relations (7.25) et (7.27) écrites pour des déplacements  $\mathbf{u}^F$  et  $\mathbf{u}^S$  et une dérivée par rapport à  $M_\gamma$  dans la direction  $\delta\mu_\gamma$  :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\gamma](\delta\mu_\gamma)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\gamma](\delta\mu_\gamma)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) = \int_{\gamma^*} \delta\mu_\gamma (\mathbf{u}^S - \mathbf{u}^F) \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\gamma \quad (7.29)$$

Ainsi, les équations (c), (d) et (e) du problème 7.4 redonnent les relations  $\text{div}(\mathbf{u}^F) = 0$  dans le volume fluide  $\Omega_F^*$  et  $\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^*$  à l'interface fluide-structure, ce sont les expressions classiques des contraintes linéarisées exprimant l'incompressibilité du fluide et la condition de contact sur l'interface fluide-structure [4, 12].

### Énergie potentielle élastique de la structure

La linéarisation de la variation d'énergie potentielle élastique de la structure introduite dans la partie 6.1.3 est donnée par :

$$\frac{\partial[\delta[E_{elas}](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) = \mathbf{K}_E(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{K}_G(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) \quad (7.30)$$

où  $\mathbf{K}_E$  représente la raideur élastique classique de la structure définie sur le domaine volumique  $\Omega_S^*$ .  $\mathbf{K}_G$  est la raideur géométrique également définie sur  $\Omega_S^*$  et liée aux pré-contraintes présentes dans la structure à l'état d'équilibre. Ces raideurs sont déterminées pour une structure seule sans la présence du fluide, on rappelle leurs expressions qui sont données dans [91] par rapport à la position initiale  $\Omega_S^0$  que l'on suppose ici proche de  $\Omega_S^*$  :

$$\mathbf{K}_E(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) = \int_{\Omega_S^*} \text{Tr} [C \varepsilon_{\mathbf{X}_S}(\mathbf{u}^S) \varepsilon_{\mathbf{X}_S}(\delta\mathbf{u}^S)] d\Omega_S \quad (7.31)$$

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) = \int_{\Omega_S^*} \text{Tr} [D_{\mathbf{X}_S} \mathbf{u}^S \sigma_0(D_{\mathbf{X}_S} \delta\mathbf{u}^S)^T] d\Omega_S \quad (7.32)$$

où  $\varepsilon$  représente le champ tensoriel des déformations linéarisées,  $\sigma_0$  le tenseur des contraintes de Cauchy dans l'état initial et  $C$  le tenseur constant d'ordre 4 des coefficients élastiques caractérisant la loi de comportement de la structure.

## 7.2 Expression des multiplicateurs de Lagrange (phase B)

En regroupant les énergies linéarisées exprimées dans la partie précédente il est maintenant possible d'écrire la formulation variationnelle du fluide et de la structure (équations (a) et (b) de 7.4). Les variables de ce problème linéarisé sont maintenant  $(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S, \lambda, \mu, \mu_\gamma)$ . En écrivant l'équation du fluide dans un premier temps, on peut alors exprimer les multiplicateurs de Lagrange  $(\lambda, \mu, \mu_\gamma)$  en fonction des variables du problème. La relation

(a) du l'encadré (7.4) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega_F^*} \rho^F \mathbf{u}^F \delta \dot{\mathbf{u}}^F d\Omega_F - \int_{\Omega_F^*} \nabla \lambda \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Omega_F + \right. \\
 & \int_{\Gamma^*} \left( -\rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) - \alpha \delta [2H_\Gamma]^*(\mathbf{u}^F) + \lambda \right) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* d\Gamma + \int_{\Gamma^*} \underbrace{\left( -\rho^F g Z^* - \alpha 2H_\Gamma^* + \Lambda^* \right)}_A \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma^* d\Gamma + \\
 & \int_{\Sigma^*} \left( -\rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) + \lambda - \mu_F \right) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma + \int_{\Sigma^*} \underbrace{\left( -\rho^F g Z^* + \Lambda^* - M^* \right)}_B \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma^* d\Sigma \\
 & \left. - \oint_{\gamma^*} \mu_\gamma^F \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\gamma + \oint_{\gamma^*} \underbrace{\left( -\alpha \sin \theta - M_\gamma^* \right)}_C \delta \mathbf{u}^F \cdot \delta [\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^*(\mathbf{u}^F) \right] dt = 0 \quad (7.33)
 \end{aligned}$$

Les termes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont nuls d'après l'étude statique et les relations (6.33). Cependant on conservera dans la formulation finale le terme  $A$  afin de laisser apparaître les termes de raideurs introduits précédemment. Car, un des objectifs est ici d'obtenir une formulation variationnelle du système couplé symétrique, et pour cela on souhaite se servir de la symétrie de ces opérateurs.

Ainsi, on pourra de plus comparer cette formulation avec celle obtenue par une méthode différente telle que la linéarisation de l'équation de Laplace-Young développée dans [35].

Le terme d'énergie cinétique est modifié en intégrant par parties ce qui permet d'avoir un terme sans dérivée temporelle de la fonction test  $\delta \mathbf{u}^F$  :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_F^*} \rho^F \mathbf{u}^F \delta \dot{\mathbf{u}}^F d\Omega_F dt = \underbrace{\left[ \int_{\Omega_F^*} \rho^F \mathbf{u}^F \delta \mathbf{u}^F \right]}_A \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_F^*} \rho^F \ddot{\mathbf{u}}^F \delta \mathbf{u}^F d\Omega_F dt \quad (7.34)$$

Le terme  $A$  est ici nul car  $\delta \mathbf{u}^F(t_1) = \delta \mathbf{u}^F(t_2) = 0$ . Puisque la relation (7.33) est définie pour n'importe quelle fonction test  $\delta \mathbf{u}^F$ , on fait disparaître l'intégrale en temps :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_F^*} \left( -\rho^F \ddot{\mathbf{u}}^F - \nabla \lambda \right) \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Omega_F + \\
 & \int_{\Gamma^*} \left( -\rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) - \alpha \delta [2H_\Gamma]^*(\mathbf{u}^F) + \lambda \right) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* d\Gamma + \\
 & \int_{\Sigma^*} \left( -\rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) + \lambda - \mu_F \right) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma + \\
 & \oint_{\gamma^*} \mu_\gamma^F \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^F \in \mathcal{C}_{UF} \quad (7.35)
 \end{aligned}$$



## 7.2. EXPRESSION DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE (PHASE B)

---

Avec des fonctions test  $\delta \mathbf{u}^F$  nulles sur le bord du domaine  $\Omega_F^*$ , on en déduit la relation :

$$\nabla \lambda = -\rho^F \ddot{\mathbf{u}}^F \quad \text{sur } \Omega_F^* \quad (7.36)$$

On remarque qu'en prenant le rotationnel de cette expression, on montre que pour des conditions initiales irrotationnelles, le fluide reste irrotationnel et  $\text{rot}(\mathbf{u}^F) = 0$ . En effet, les déplacements étant de faible amplitude et la viscosité négligée, on retrouve le cadre des équations d'Euler linéarisées pour lesquelles le déplacement du fluide est irrotationnel.

En reportant (7.36) dans (7.35) on obtient l'expression de la variable  $\mu_F$  en considérant des fonctions test nulles sur  $\Gamma^*$  et  $\gamma^*$  :

$$\mu_F = \lambda - \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \quad \text{sur } \Sigma^* \quad (7.37)$$

De même, l'équation de la surface libre est obtenue en considérant des fonctions test nulles sur  $\Sigma^*$  et  $\gamma^*$  :

$$\lambda = \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) + \alpha \delta [2H_\Gamma]^* (\mathbf{u}^F) \quad \text{sur } \Gamma^* \quad (7.38)$$

Enfin, on en déduit des équations (7.38), (7.37) et (7.36) :

$$\mu_\gamma^F = 0 \quad (7.39)$$

En effet, on suppose dans cette étude que l'angle de contact est constant et la variation d'amplitude de la force linéique  $\mathbf{f}_{F/S}$  normale à l'interface est nulle. La prise en compte de la variation de l'angle de contact dans l'étude dynamique entraînerait :

$$\mu_\gamma^F = -\alpha \delta [\sin \theta] (\mathbf{u}^F) \quad (7.40)$$

De plus, puisque  $M_\gamma^* = \alpha \sin \theta$  est constant, d'après la relation (7.28), on a directement  $\mu_\gamma^S = 0$ .

On souhaite maintenant éliminer les multiplicateurs de Lagrange par introduction d'une nouvelle variable à la place de  $\mathbf{u}^F$  : les petits mouvements irrotationnels du fluide seront alors décrits par un potentiel de déplacement  $\varphi$ , on pose :

$$\mathbf{u}^F = \nabla \varphi \quad \text{sur } \Omega_F^* \quad (7.41)$$

L'unicité de  $\varphi$  est assurée par la forme linéaire  $l$  telle que  $l(\varphi) = 0$  et  $l(1) \neq 0$ . Le choix de  $l(\varphi)$  sera explicité ultérieurement. On gardera cependant sur le bord du domaine fluide

$(\Sigma, \Gamma, \gamma)$  le champs  $\mathbf{u}^F$ . On peut alors donner une expression de  $\lambda$ , d'après (7.36).  $\nabla\lambda$  est une fonction de  $\mathbf{u}^F$  uniquement et  $\lambda$  est donc un scalaire défini à une constante près, cette constante pouvant dépendre linéairement de  $\mathbf{u}^S$ . On notera  $\pi$  cette constante et on a :

$$\lambda = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi(\mathbf{u}^S) \quad (7.42)$$

D'après la relation (7.36) et l'expression du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  dans (7.42) on remarque que celui-ci peut être assimilé à la pression Eulerienne du fluide [78].

Les relations (7.38) et (7.37) s'écrivent donc :

$$-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi = \rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) + \alpha\delta [2H_\Gamma]^*(\mathbf{u}^F) \quad \text{sur } \Gamma^* \quad (7.43)$$

$$\mu_F = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi - \rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \quad \text{sur } \Sigma^* \quad (7.44)$$

La relation (7.43) donne l'équation de la surface libre décrivant les petites vibrations autour d'une surface courbe  $\Gamma^*$ . Avec (7.44), on retrouve l'expression classique de la fluctuation de pression lagrangienne du fluide [78].

## 7.3 Équation Fluide

$\lambda$  et  $\mu$  sont donc des fonctions des variables  $\mathbf{u}^F$  et  $\mathbf{u}^S$ , on souhaite maintenant supprimer ces multiplicateurs de Lagrange dans la formulation variationnelle pour se ramener à une expression classique du problème couplé en  $(\varphi, \mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S)$ . Il s'agit donc d'exprimer le Lagrangien réduit qui n'est plus qu'une fonction de  $(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S)$  et on s'intéresse alors à la réécriture des termes d'incompressibilité  $\mathcal{I}$  et de couplage  $\mathcal{C}_\Sigma$  et  $\mathcal{C}_\gamma$ .

Il est à noter qu'en supprimant les multiplicateurs de Lagrange, on supprime les équations (c), (d) et (e) du problème (7.4). Ainsi, le nouveau problème que l'on écrit est équivalent si l'on considère la condition d'incompressibilité  $\text{div}(\mathbf{u}^F) = 0$  dans  $\Omega_F^*$  et la condition aux limites à l'interface fluide structure  $\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^*$  de manière forte. On définit l'espace  $\mathcal{C}_C$  par :

$$\mathcal{C}_C = \{(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S) \in C_{U^F}^* \times C_{U^S}^* / \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^*\} \quad (7.45)$$

### 7.3. ÉQUATION FLUIDE

On se ramène au problème suivant :

$$\begin{array}{l}
 \exists(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S) \in \mathcal{C}_C \text{ tels que } \forall(\delta\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^S) \in \mathcal{C}_C : \\
 \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\dot{\mathbf{u}}^F)]^*}{\partial\dot{\mathbf{U}}^F}(\dot{\mathbf{u}}^F) = 0 \quad \text{(a)} \\
 \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\dot{\mathbf{u}}^S)]^*}{\partial\dot{\mathbf{U}}^S}(\dot{\mathbf{u}}^S) = 0 \quad \text{(b)} \\
 \text{div}(\mathbf{u}^F) = 0 \quad \text{sur } \Omega_F^* \quad \text{(c)}
 \end{array} \tag{7.46}$$

À partir de la formule (6.6), on déduit la relation suivante :

$$\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F) = \int_{\Omega_F} \Lambda \text{div}(\delta\mathbf{u}^F) d\Omega_F + \int_{\Omega_F^0} \delta[\Lambda](\delta\mathbf{u}^F) (\det(\mathbf{F}) - 1) d\Omega_F^0 \tag{7.47}$$

La linéarisation de cette expression est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= \int_{\Omega_F^*} \delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S) \text{div}(\delta\mathbf{u}^F) d\Omega_F \\
 &+ \int_{\Gamma^* \cup \Sigma^*} \Lambda^* \delta\mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_S^*(\mathbf{u}^F) dS + \underbrace{\int_{\Omega_F^*} \delta[\Lambda]^*(\delta\mathbf{u}^F) \text{div}(\mathbf{u}^F) d\Omega_F}_A \tag{7.48}
 \end{aligned}$$

$\lambda$  étant par définition une petite perturbation de  $\Lambda$  autour de  $\Lambda^*$ , pour une petite perturbation  $(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S)$  du système on a :

$$\delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S) = \lambda(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S) \tag{7.49}$$

En comparaison avec (7.16), la relation (7.48) présente un terme supplémentaire  $A$ . On choisira ici de garder ce terme en  $\text{div}(\mathbf{u}^F)$  qui permet d'obtenir en intégrant par parties la formulation variationnelle du fluide. Ainsi, certains termes de (7.48) peuvent être exprimés par :

$$\begin{aligned}
 \delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S) = \lambda &= -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi \\
 \delta[\Lambda]^*(\delta\mathbf{u}^F) &= -\rho^F \delta\ddot{\varphi}
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

### 7.3. ÉQUATION FLUIDE

En remplaçant (7.50) dans (7.48) il est possible d'écrire le terme d'incompressibilité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= 2 \int_{\Omega_F^*} \rho^F \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\ddot{\varphi} d\Omega_F \\ &+ \int_{\Gamma^* \cup \Sigma^*} \Lambda^* \delta\mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_S^*(\mathbf{u}^F) dS + \int_{\Gamma^* \cup \Sigma^*} (-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi) \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}^* dS \\ &- \int_{\Gamma^*} \rho^F \delta\ddot{\varphi} \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* d\Gamma - \int_{\Sigma^*} \rho^F \delta\ddot{\varphi} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \end{aligned} \quad (7.51)$$

Par ailleurs, à partir des relations (7.44) et (6.33), le terme de couplage dans l'équation du fluide (relation (a) du problème (7.46)) va s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= - \int_{\Sigma^*} \underbrace{(\Lambda^* - \rho^F g Z^*)}_{M^*} \delta\mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma^*(\mathbf{u}^F) d\Sigma \\ &- \int_{\Sigma^*} \underbrace{(-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi - \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z))}_{\mu_F} \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \end{aligned} \quad (7.52)$$

On remarque également que dans (7.7), l'énergie cinétique du fluide est une intégrale d'une fonction de  $\mathbf{u}^F$  sur le volume  $\Omega_F^*$ . En considérant  $\delta\mathbf{u}^F = \nabla\delta\varphi$ , le changement de variable (7.42) va alors donner :

$$\frac{\partial[\delta[E_C^F](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) = \int_{\Omega_F^*} \rho^F \dot{\mathbf{u}}^F \cdot \delta\dot{\mathbf{u}}^F d\Omega_F = - \int_{\Omega_F^*} \nabla\dot{\varphi} \cdot \nabla\delta\dot{\varphi} d\Omega_F \quad (7.53)$$

Enfin, l'opérateur  $\mathcal{C}_\gamma$  s'écrit simplement en remplaçant  $M_\gamma^*$  par sa valeur dans la relation (7.24) et on a :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\gamma](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) = - \oint_{\gamma^*} \alpha \sin\theta \delta\mathbf{u}^F \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^*(\mathbf{u}^F) \quad (7.54)$$

Finalement, la relation (a) du problème (7.46) va donner deux formulations correspondant aux deux variables utilisées pour le fluide  $\mathbf{u}^F$  et  $\varphi$ . On introduit l'espace d'admissibilité  $\mathcal{C}_\varphi$  des fonctions  $\varphi$  et  $\delta\varphi$  suffisamment régulières, et l'espace  $\mathcal{C}_\varphi^*$  des fonctions  $\varphi$  vérifiant la condition d'unicité introduite par la forme linéaire  $l$  :

$$\mathcal{C}_\varphi^* = \{\varphi \in \mathcal{C}_\varphi / l(\varphi) = 0, l(1) \neq 0\} \quad (7.55)$$

En considérant uniquement les termes en  $\delta\varphi$  (c'est à dire les équations (7.51) et (7.53)), on obtient la formulation variationnelle dans le volume liquide :

$$\boxed{\underbrace{\int_{\Omega_F^*} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\ddot{\varphi} d\Omega_F^*}_{F(\varphi, \delta\ddot{\varphi})} - \underbrace{\int_{\Gamma^*} \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* \delta\ddot{\varphi} d\Gamma}_{B(\mathbf{u}^F, \delta\ddot{\varphi})} - \underbrace{\int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \delta\ddot{\varphi} d\Sigma}_{C(\mathbf{u}^S, \delta\ddot{\varphi})} = 0 \quad \forall \delta\ddot{\varphi} \in \mathcal{C}_\varphi^*} \quad (7.56)$$

## 7.4. ÉQUATION STRUCTURE

$\mathbf{F}$  est donc l'opérateur associé à l'énergie cinétique du fluide,  $\mathbf{B}$  l'opérateur de couplage entre le potentiel de déplacement et le déplacement normale à la surface libre.  $\mathbf{C}$  est l'opérateur de couplage fluide structure à l'interface. On remarque que la relation (7.56) est écrite en  $\delta\ddot{\varphi}$  et non  $\delta\varphi$ . On peut cependant remplacer  $\delta\ddot{\varphi}$  par  $\delta\varphi$  dans la mesure où (7.56) est vraie pour tout  $\delta\ddot{\varphi}$  dans  $\mathcal{C}_\varphi^*$ .

De même, on regroupe les termes en  $\delta\mathbf{u}^F$  dans l'expression des énergies linéarisées présentées dans cette partie. Ainsi, les équations (7.9), (7.12), (7.51), (7.52) et (7.54) vont donner :

$$\begin{aligned} & \underbrace{- \int_{\Gamma^*} \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* d\Gamma - \int_{\Gamma^*} \rho^F g Z^* \delta\mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma^* d\Gamma}_{-K_\Gamma^g(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F)} - \alpha \underbrace{\int_{\Gamma^*} \delta\mathbf{u}^F \cdot \delta [2H_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma d\Gamma]^* (\mathbf{u}^F)}_{-K_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F) + K_\gamma^\theta(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F)} \\ & + \underbrace{\int_{\Gamma^*} \Lambda^* \delta\mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma^* d\Gamma}_{+K_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F)} - \underbrace{\int_{\Gamma^*} \rho^F \ddot{\varphi} \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* d\Gamma}_{-B(\ddot{\varphi}, \delta\mathbf{u}^F)} + \underbrace{\pi \int_{\Gamma^*} \delta\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* d\Gamma}_{+\pi R_\Gamma(\delta\mathbf{u}^F)} = 0 \quad (7.57) \end{aligned}$$

où la relation (7.12) a permis d'exprimer le terme suivant :

$$- \alpha \int_{\Gamma^*} \delta\mathbf{u}^F \cdot \delta [2H_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma d\Gamma]^* (\mathbf{u}^F) = -K_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F) + \alpha \underbrace{\oint_{\gamma^*} \delta\mathbf{u}^F \cdot \delta [\boldsymbol{\nu}_\Gamma d\gamma]^* (\mathbf{u}^F)}_{K_\gamma^\theta(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F)} \quad (7.58)$$

On donne une expression de l'opérateur de bord  $K_\gamma^\theta$  dans l'annexe H.

## 7.4 Équation Structure

On souhaite maintenant écrire l'équation de la structure. Pour cela, il faut dans un premier temps préciser le terme de couplage  $\mathcal{C}_\Sigma$ . En considérant la relation (7.22), on exprime d'abord  $\mu_S$  en fonction des variables choisies pour décrire le système  $(\mathbf{u}^S, \varphi)$ .  $M^*$  est donné par (6.33), puisque  $\nabla \Lambda^* = 0$  et en remarquant que  $\nabla M^* = -\rho^F g \mathbf{i}_z$ , on a alors :

$$\mu_S = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi - \rho^F g (\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{i}_z) \quad (7.59)$$

#### 7.4. ÉQUATION STRUCTURE

on retrouve alors pour  $\mu_S$  l'expression de la fluctuation lagrangienne de pression pour un point de la structure [78]. L'expression (7.21) va s'écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\Sigma](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) = \\ & \int_{\Sigma^*} \underbrace{(\Lambda^* - \rho^F g Z^* - \alpha_L 2H_\Sigma^*)}_{M^*} \delta\mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma^*(\mathbf{u}^S) d\Sigma + \int_{\Sigma^*} \underbrace{(-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi - \rho^F g (\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{i}_z))}_{\mu_S} \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \end{aligned} \quad (7.60)$$

Enfin, l'opérateur  $\mathcal{C}_\gamma$  s'écrit simplement en remplaçant  $M_\gamma^*$  par sa valeur dans (7.26) et on a :

$$\frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_\gamma](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) = \oint_{\gamma^*} \alpha \sin \theta \delta\mathbf{u}^S \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^*(\mathbf{u}^S) \quad (7.61)$$

La relation (b) du problème (7.46), en utilisant les équations (7.8), (7.30), (7.60) et (7.61), donne :

$$\begin{aligned} & - \underbrace{\int_{\Omega_S^*} \ddot{\mathbf{u}}^S \cdot \delta\mathbf{u}^S d\Omega_S}_{M_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta\mathbf{u}^S)} - (\mathbf{K}_E(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{K}_G(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S)) + \int_{\Sigma^*} (\Lambda^* - \rho^F g Z^*) \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma \\ & + \int_{\Sigma^*} (-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi - \rho^F g (\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{i}_z)) \delta\mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\tau} d\Sigma - \oint_{\gamma^*} \alpha \sin \theta \delta\mathbf{u}^S \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^*(\mathbf{u}^S) \\ & - \alpha_G \int_{\Sigma_G^*} \delta\mathbf{u}^S \cdot \delta[2H_{\Sigma_G} \mathbf{n}_{\Sigma_G} d\Sigma_G]^*(\mathbf{u}^S) - \alpha_L \int_{\Sigma^*} \delta\mathbf{u}^S \cdot \delta[2H_\Sigma \mathbf{n}_\Sigma d\Sigma]^*(\mathbf{u}^S) = - \int_{\Sigma_f^*} \mathbf{f}_{ext} \cdot \delta\mathbf{u}^S d\Sigma_f \end{aligned} \quad (7.62)$$

Le terme d'énergie cinétique donne l'opérateur de masse  $M_S$ . Il est alors possible de regrouper certains termes et de faire apparaître les opérateurs introduits précédemment :

$$\begin{aligned} & M_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{K}_E(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{K}_G(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) \\ & + \underbrace{\int_{\Sigma^*} \rho^F g Z^* \delta\mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma^* d\Sigma + \int_{\Sigma^*} \rho^F g (\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{i}_z) \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma + \alpha_L \int_{\Sigma^*} \delta\mathbf{u}^S \cdot \delta[2H_\Sigma \mathbf{n}_\Sigma d\Sigma]^*(\mathbf{u}^S)}_A \\ & \quad - \underbrace{\int_{\Sigma^*} \Lambda^* \delta\mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma^* d\Sigma}_D + \underbrace{\int_{\Sigma^*} \rho^F \ddot{\varphi} \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma}_{C(\ddot{\varphi}, \delta\mathbf{u}^S)} - \underbrace{\pi \int_{\Sigma^*} \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma}_{\pi \mathbf{R}_\Sigma(\delta\mathbf{u}^S)} \\ & + \oint_{\gamma^*} \alpha \sin \theta \delta\mathbf{u}^S \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma^* d\gamma](\mathbf{u}^S) + \underbrace{\alpha_G \int_{\Sigma_G^*} \delta\mathbf{u}^S \cdot \delta[2H_{\Sigma_G} \mathbf{n}_{\Sigma_G} d\Sigma_G]^*(\mathbf{u}^S)}_E = \underbrace{\int_{\Sigma_f^*} \mathbf{f}_{ext} \cdot \delta\mathbf{u}^S d\Sigma_f}_{\mathbf{F}_{ext}} \end{aligned} \quad (7.63)$$

## 7.5. SYNTHÈSE (PHASE C)

---

où  $C$  est l'opérateur de couplage introduit dans (7.56). Le terme  $A$  s'écrit de la même manière que le terme de raideur  $\mathbf{K}_\Gamma^g$  cette fois-ci appliqué sur la surface  $\Sigma^*$  et pour les champs  $\delta \mathbf{u}^S$  et  $\mathbf{u}^S$ . On écrit alors :  $A = \mathbf{K}_\Sigma^g(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S)$ . L'opérateur  $\mathbf{K}_\Sigma^g$  est également défini dans l'étude [91] et est lié à la présence des forces suiveuses de pression hydrostatiques sur l'interface liquide solide.

De même que pour la relation (7.58) où l'on introduit la raideur  $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha$  définie sur  $\Gamma^*$ , les termes  $B$  et  $E$  peuvent se réécrire pour des champs  $\delta \mathbf{u}^S$  et  $\mathbf{u}^S$  en introduisant les termes  $\mathbf{K}_{\Sigma_G}^{\alpha_G}$  et  $\mathbf{K}_{\Sigma^*}^{\alpha_L}$  ayant la même forme que  $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha$  mais cette fois-ci définis respectivement pour les surfaces  $\Sigma_G^*$  et  $\Sigma^*$ , avec les coefficients  $\alpha_G$  et  $\alpha_L$ . On écrit alors :

$$B = \alpha_L \int_{\Sigma^*} \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [2H_{\Sigma} \mathbf{n}_{\Sigma} d\Sigma]^* (\mathbf{u}^S) = \mathbf{K}_{\Sigma^*}^{\alpha_L}(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) - \alpha_L \oint_{\gamma^*} \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\boldsymbol{\nu}_{\Sigma} d\gamma]^* (\mathbf{u}^S) \quad (7.64)$$

$$E = \alpha_G \int_{\Sigma_G^*} \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [2H_{\Sigma_G} \mathbf{n}_{\Sigma} d\Gamma]^* (\mathbf{u}^S) = \mathbf{K}_{\Sigma_G^*}^{\alpha_G}(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \alpha_G \oint_{\gamma^*} \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\boldsymbol{\nu}_{\Sigma} d\gamma]^* (\mathbf{u}^S) \quad (7.65)$$

De même, le terme  $D$  correspond au terme d'incompressibilité sur la surface  $\Sigma^*$  et à la même forme que l'opérateur  $\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda$ . On a alors :  $D = \mathbf{K}_{\Sigma^*}^\Lambda(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S)$ . L'équation (7.63) va se réécrire :

$$M_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \left( \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_{\Sigma^*}^{\alpha_L} + \mathbf{K}_{\Sigma_G^*}^{\alpha_G} + \mathbf{K}_{\Sigma^*}^g - \mathbf{K}_{\Sigma^*}^\Lambda \right) (\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) + C(\ddot{\varphi}, \delta \mathbf{u}^S) - \pi \mathbf{R}_\Sigma(\delta \mathbf{u}^S) + \underbrace{\oint_{\gamma^*} \alpha \sin \theta \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^* (\mathbf{u}^S) + \oint_{\gamma^*} \alpha \cos \theta \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\boldsymbol{\nu}_\Sigma d\gamma]^* (\mathbf{u}^S)}_{\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S)} = \mathbf{F}_{ext}(\delta \mathbf{u}^S) \quad (7.66)$$

## 7.5 Synthèse (phase C)

On récapitule ici les formulations variationnelles du fluide et de la structure pour ensuite mettre sous forme matricielle le problème et le symétriser.

### Formulation variationnelle

Si l'on considère une fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi \in \mathcal{C}_\varphi$ , celle-ci peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$\varphi = \varphi^* + c \quad (7.67)$$

## 7.5. SYNTHÈSE (PHASE C)

---

où  $c$  est une constante et  $\varphi^*$  appartient à l'espace  $\mathcal{C}_\varphi^*$ . En effet, si l'on applique la forme linéaire  $l$  à la relation (7.67) on peut déterminer de façon unique la constante  $c$  :

$$c = \frac{l(\varphi)}{l(1)} \quad (7.68)$$

Il est donc possible de décomposer l'espace  $\mathcal{C}_\varphi$  de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}_\varphi^* \oplus \mathbb{R} \quad (7.69)$$

Ainsi, (7.56) peut s'écrire comme un ensemble de deux équations variationnelles distinctes obtenues en prenant dans un premier temps des fonctions test  $\delta\varphi$  dans l'espace  $\mathcal{C}_\varphi^*$  :

$$\mathbf{F}(\varphi, \delta\varphi) - \mathbf{B}(\mathbf{u}^F, \delta\varphi) - \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta\varphi) = 0 \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi^* \quad (7.70)$$

puis des fonctions test constantes  $\delta\pi \in \mathbb{R}$ , ce qui donne :

$$\int_{\Gamma^*} \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* \delta\pi \, d\Gamma + \int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \delta\pi \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta\pi \in \mathbb{R} \quad (7.71)$$

que l'on écrit :

$$\delta\pi \left( \mathbf{R}_\Gamma(\delta\mathbf{u}^F) + \mathbf{R}_\Sigma(\delta\mathbf{u}^S) \right) = 0 \quad \forall \delta\pi \in \mathbb{R} \quad (7.72)$$

Enfin, on introduit  $\mathbf{K}_F$  et  $\mathbf{K}_S$  les opérateurs de raideur de fluide et de la structure définis par :

$$\mathbf{K}_F(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F) = \left( \mathbf{K}_\Gamma^g + \mathbf{K}_\Gamma^\alpha - \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda - \mathbf{K}_\gamma^\theta \right) (\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F) \quad (7.73)$$

$$\mathbf{K}_S(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) = \left( \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_\Sigma^{\alpha L} + \mathbf{K}_{\Sigma G}^{\alpha G} + \mathbf{K}_\Sigma^g - \mathbf{K}_\Sigma^\Lambda + \mathbf{K}_\gamma^\theta \right) (\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) \quad (7.74)$$

Les équations du fluide et de la structure sont données par (7.57), (7.66), (7.70) et (7.72). On remarque alors que le déplacement du fluide n'intervient que sur la surface libre, on notera  $\mathbf{u}_\Gamma^F$  cette restriction. Soit  $\mathcal{C}_{u^F, u^S}$ , l'espace des fonctions  $(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S)$  suffisamment régulières. On introduit alors l'espace  $\mathcal{C}_{u^F, u^S}^C$  défini par :

$$\mathcal{C}_{u^F, u^S}^C = \{ (\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S) \in \mathcal{C}_{u^F, u^S} / \mathbf{u}_\Gamma^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \text{ sur } \gamma^* \text{ et } \mathbf{u}^S = \mathbf{0} \text{ sur } \Sigma_u \} \quad (7.75)$$



Le problème couplé va donc s'écrire :

$\exists(\mathbf{u}_\Gamma^F, \mathbf{u}^S, \varphi, \pi) \in \mathcal{C}_{u^F, u^S}^C \times \mathcal{C}_\varphi^* \times \mathbb{R}, \forall(\delta\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta\mathbf{u}^S, \delta\varphi, \delta\pi) \in \mathcal{C}_{u^F, u^S}^C \times \mathcal{C}_\varphi^* \times \mathbb{R}$	
$\mathbf{F}(\varphi, \delta\varphi) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta\varphi) - \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta\varphi)$	= 0 (a)
$\mathbf{K}_F(\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta\mathbf{u}_\Gamma^F) + \mathbf{B}(\ddot{\varphi}, \delta\mathbf{u}_\Gamma^F) - \pi \mathbf{R}_\Gamma(\delta\mathbf{u}_\Gamma^F)$	= 0 (b)
$\mathbf{K}_S(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{M}_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{C}(\ddot{\varphi}, \delta\mathbf{u}^S) - \pi \mathbf{R}_\Sigma(\delta\mathbf{u}^S)$	= $\mathbf{F}_{ext}(\delta\mathbf{u}^S)$ (c)
$\delta\pi \left( \mathbf{R}_\Gamma(\delta\mathbf{u}_\Gamma^F) + \mathbf{R}_\Sigma(\delta\mathbf{u}^S) \right)$	= 0 (d)

(7.76)

### Remarque

Il faudrait ici préciser les espaces admissibles car, pour un solide en trois dimensions, un problème de définition de la trace normale sur la courbe  $\gamma^*$  se pose. Cependant, il est à noter qu'en pratique, on utilise des théories de plaques ou de coques pour modéliser le solide. Les matrices  $\mathbf{K}_E$  et  $\mathbf{K}_G$  sont issues de telles théories et dans le cas présent, on utilise pour la structure des éléments finis de plaque fournis par le logiciel NASTRAN ©.

## 7.6 Comparaisons

### 7.6.1 Dans le cas où les effets de la capillarité sont négligeables

Le problème couplé (7.76) permet de prendre en compte l'ensemble des effets liés aux forces de pesanteur et de tension de surface. La formulation établie peut être comparée dans un premier temps aux travaux [91] dans lesquels les effets de capillarité ont été négligés (le système n'est pas en situation de micro-gravité) mais le couplage et les effets de précontrainte dus à la gravité ont été pris en compte. Pour cela on néglige dans l'étude précédente les effets de capillarité ce qui revient à supprimer les énergies surfaciques dans l'expression du Lagrangien sous contrainte (6.1). On obtient alors à partir de (6.33) :

$$\begin{cases} \Lambda^* = \rho^F g Z^* & \text{sur } \Gamma^* \\ M^* = \Lambda^* - \rho^F g Z^* & \text{sur } \Sigma^* \end{cases} \quad (7.77)$$

En se plaçant dans les mêmes conditions que pour [91], on suppose que les effets de précontraintes sont définis sur la surface  $\Sigma^0$  (l'état initial et statique sont confondus) et on considerera  $Z^* \simeq Z^0$ . La surface libre est ici plane ( $\mathbf{n}_\Gamma^* = \mathbf{i}_z$ ) et en choisissant l'origine du repère au niveau de la surface libre à l'état statique on a  $Z^0 = 0$  et donc  $\Lambda^* = 0$ . La formulation (7.76) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & \exists (\mathbf{u}_\Gamma^F, \mathbf{u}^S, \varphi, \pi) \in \mathcal{C}_{u^F, u^S}^C \times \mathcal{C}_\varphi^* \times \mathbb{R}, \\
 & \forall (\delta \mathbf{u}_\Gamma^F, \delta \mathbf{u}^S, \delta \varphi, \delta \pi) \in \mathcal{C}_{u^F, u^S}^C \times \mathcal{C}_\varphi^* \times \mathbb{R} : \\
 & \mathbf{F}(\varphi, \delta \varphi) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta \varphi) - \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta \varphi) = 0 \quad (\text{a}) \\
 & \mathbf{K}_F^{Hyd}(\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta \mathbf{u}_\Gamma^F) + \mathbf{B}(\ddot{\varphi}, \delta \mathbf{u}_\Gamma^F) - \pi \mathbf{R}_\Gamma(\delta \mathbf{u}_\Gamma^F) = 0 \quad (\text{b}) \\
 & \mathbf{K}_S^{Hyd}(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \mathbf{M}_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \mathbf{C}(\ddot{\varphi}, \delta \mathbf{u}^S) - \pi \mathbf{R}_\Sigma(\delta \mathbf{u}^S) = \mathbf{F}_{ext}(\delta \mathbf{u}^S) \quad (\text{c}) \\
 & \delta \pi \left( \mathbf{R}_\Gamma(\delta \mathbf{u}_\Gamma^F) + \mathbf{R}_\Sigma(\delta \mathbf{u}^S) \right) = 0 \quad (\text{d})
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

Les opérateurs  $\mathbf{K}_F^{Hyd}$  et  $\mathbf{K}_S^{Hyd}$  sont obtenus en éliminant les termes de capillarité dans les expressions de  $\mathbf{K}_F$  (7.73) et  $\mathbf{K}_S$  (7.74) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_F^{Hyd}(\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta \mathbf{u}_\Gamma^F) &= \int_{\Sigma^*} \rho^F g (\mathbf{u}_\Gamma^F \cdot \mathbf{i}_z) \delta \mathbf{u}_\Gamma^F \cdot \mathbf{i}_z \\
 \mathbf{K}_S^{Hyd}(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) &= \left( \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_\Sigma^g \right) (\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) - \mathbf{K}_\Sigma^\Lambda(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S)
 \end{aligned}$$

On retrouve donc la formulation présentée dans [91], Chap. 6<sup>1</sup>, qui est en  $(\mathbf{u}^S, \eta, \varphi, \pi)$  où  $\eta$  est le déplacement vertical de la surface libre du fluide défini par  $\eta = \mathbf{u}_\Gamma^F \cdot \mathbf{i}_z$ . Dans l'équation (b) du problème (7.78), les champs  $\mathbf{u}_\Gamma^F$  et  $\delta \mathbf{u}_\Gamma^F$  sont systématiquement projetés selon  $\mathbf{i}_z$  et il suffit de remplacer  $\mathbf{u}_\Gamma^F \cdot \mathbf{i}_z$  par  $\eta$  et  $\delta \mathbf{u}_\Gamma^F \cdot \mathbf{i}_z$  par  $\delta \eta$  pour retrouver une formulation en  $(\mathbf{u}^S, \eta, \varphi, \pi)$ .

### 7.6.2 Dans le cas où les déformations de la structure sont négligeables

Dans [36], l'auteur étudie les vibrations d'un liquide dans un réservoir rigide en situation de microgravité. Les tensions surfaciques ne sont donc plus négligées. À partir des équations

1. Dans [91], un terme supplémentaire y apparaît permettant de prendre en compte d'éventuels effets de forces suiveuses.

## 7.7. ÉQUATIONS LOCALES (PROBLÈME OUVERT)

---

locales et de l'équation de Laplace-Young, une formulation variationnelle du problème en  $(\mathbf{u}_\Gamma^F, \varphi, \pi)$  est donnée. On remarque alors que l'on retrouve une formulation variationnelle identique en supprimant dans (7.76) les termes en  $\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S$ . On obtient alors le problème suivant :

$$\begin{array}{l}
 \exists(\mathbf{u}_\Gamma^F, \varphi, \pi) \in \mathcal{C}_{u^F}^C \times \mathcal{C}_\varphi^* \times \mathbb{R}, \\
 \forall(\delta\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta\varphi, \delta\pi) \in \mathcal{C}_{u^F}^C \times \mathcal{C}_\varphi^* \times \mathbb{R} : \\
 \mathbf{F}(\varphi, \delta\varphi) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_\Gamma, \delta\varphi) = 0 \quad (\text{a}) \\
 \mathbf{K}_F(\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta\mathbf{u}_\Gamma^F) + \mathbf{B}(\ddot{\varphi}, \delta\mathbf{u}_\Gamma) - \pi \mathbf{R}_\Gamma(\delta\mathbf{u}_\Gamma^F) = 0 \quad (\text{b}) \\
 \delta\pi \mathbf{R}_\Gamma(\delta\mathbf{u}_\Gamma^F) = 0 \quad (\text{d})
 \end{array} \tag{7.79}$$

Soit  $\mathcal{C}_{u^F}$ , l'espace des fonctions  $\mathbf{u}^F$  suffisamment régulières. On introduit alors l'espace  $\mathcal{C}_{u^F}^C$  défini par  $\mathcal{C}_{u^F}^C = \{\mathbf{u}^F \in \mathcal{C}_{u^F} / \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* = 0 \text{ sur } \gamma^*\}$ .

La formulation (7.76) obtenue est donc une formulation unifiée qui englobe les travaux [91, 35].

## 7.7 Équations locales (problème ouvert)

Nous allons effectuer une dérivation des équations locales du problème, en prenant en compte les effets de capillarité, à partir de la formulation variationnelle (7.76). En ce qui concerne la condition sur la ligne triple, le problème reste entièrement ouvert mais nous allons ici effectuer une dérivation *heuristique* en introduisant une *régularisation* au voisinage de la ligne triple à l'aide d'une distribution de Dirac. La formulation (7.76) s'écrit :

$$\begin{array}{l}
 \exists \mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{u^S}^C \text{ tel que } \forall \delta\mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{u^S}^C \\
 \mathbf{K}_S(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) + M_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta\mathbf{u}^S) + C(\ddot{\varphi}, \delta\mathbf{u}^S) - \pi \mathbf{R}_\Sigma(\delta\mathbf{u}^S) = \mathbf{F}_{ext}(\delta\mathbf{u}^S)
 \end{array} \tag{7.80}$$

Soit  $\mathcal{C}_{u^S}$ , l'espace des fonctions  $\mathbf{u}^S$  suffisamment régulières. On introduit alors l'espace  $\mathcal{C}_{u^S}^C$  défini par  $\mathcal{C}_{u^S}^C = \{\mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{u^S} / \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* = \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* \text{ sur } \gamma^* \text{ et } \mathbf{u}^S = \mathbf{0} \text{ sur } \Sigma_u\}$ . Cette

## 7.7. ÉQUATIONS LOCALES (PROBLÈME OUVERT)

formulation s'écrit également sous forme intégrale :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_S^*} \text{Tr} [C \varepsilon_{\mathbf{X}_S}(\mathbf{u}^S) (\mathbf{D}_{\mathbf{X}_S} \delta \mathbf{u}^S)^T + \mathbf{D}_{\mathbf{X}_S} \mathbf{u}^S \sigma_0 (\mathbf{D}_{\mathbf{X}_S} \delta \mathbf{u}^S)^T] d\Omega_S + \int_{\Omega_S^*} \rho^S \ddot{\mathbf{u}}^S \cdot \delta \mathbf{u}^S d\Omega_S \\
& + \int_{\Sigma^*} (\Lambda^* - \rho^F g Z^* - \alpha_L 2H_\Sigma^*) \delta \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* d\Sigma + \int_{\Sigma^*} (-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi - \rho^F g (\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{i}_z) - \alpha_L \delta [2H_\Sigma]^* (\mathbf{u}^S)) \delta \mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\tau} d\Sigma \\
& - \oint_{\gamma^*} \alpha \sin \theta \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^* (\mathbf{u}^S) - \alpha_G \int_{\Sigma_G^*} \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [2H_{\Sigma_G} \mathbf{n}_{\Sigma_G} d\Sigma_G]^* (\mathbf{u}^S) - \int_{\Sigma_f^*} \mathbf{f}_{ext} \cdot \delta \mathbf{u}^S d\Sigma_f = 0
\end{aligned} \tag{7.81}$$

On pose :

$$\tilde{\sigma} = C \varepsilon_{\mathbf{X}_S}(\mathbf{u}^S) + \mathbf{D}_{\mathbf{X}_S} \mathbf{u}^S \sigma_0 \tag{7.82}$$

En appliquant la formule de Green (J.8) :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_S^*} (\text{Div } \tilde{\sigma} - \rho^S \ddot{\mathbf{u}}^S) \cdot \delta \mathbf{u}^S d\Omega_S = \\
& \int_{\Sigma^*} \left[ \tilde{\sigma} \mathbf{n}_\Sigma^* - (\rho^F g \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{i}_z + \alpha_L \delta [2H_\Sigma]^* (\mathbf{u}^S) + \rho^F \ddot{\varphi} - \pi) \mathbf{n}_\Sigma^* - (\rho^F g Z^* + \alpha_L 2H_\Sigma^* - \Lambda^*) \boldsymbol{\tau}_\Sigma^* (\mathbf{u}^S) \right] \cdot \delta \mathbf{u}^S d\Sigma \\
& \quad - \oint_{\gamma^*} \alpha \sin \theta \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^* (\mathbf{u}^S) + \int_{\Sigma^*} [\tilde{\sigma} \mathbf{n}_\Sigma^* - \mathbf{f}_{ext}] \delta \mathbf{u}^S d\Sigma_f \\
& \quad - \int_{\Sigma_G^*} \left[ \tilde{\sigma} \mathbf{n}_{\Sigma_G}^* - (\alpha_G \delta [2H_{\Sigma_G}]^* (\mathbf{u}^S) \mathbf{n}_{\Sigma_G}^* + \alpha_G 2H_{\Sigma_G}^* \boldsymbol{\tau}_{\Sigma_G}^* (\mathbf{u}^S)) \right] \cdot \delta \mathbf{u}^S d\Sigma_G = 0
\end{aligned} \tag{7.83}$$

On réécrit maintenant l'intégrale linéique en introduisant une longueur non nulle  $\epsilon$  égale à la "largeur" de la ligne triple telle que  $\gamma^* \times \epsilon$  définisse une surface  $\Sigma_\gamma^*$  et  $\Sigma_\gamma^* \subset \Sigma^*$ . On introduit alors la fonction  $f_\epsilon$  et la distribution  $\delta_\gamma$  de Dirac définies en tout point  $x$  de  $\Sigma_\gamma^*$  par :

$$f_\epsilon = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{sur } \Sigma_\gamma^* \\ 0 & \text{sur } \partial\Omega_S^*/\Sigma_\gamma^* \end{cases} \quad \text{avec } \delta_\gamma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) \tag{7.84}$$

On réécrit alors l'intégrale linéique en utilisant  $M_\gamma^* = -\alpha \sin \theta$  pour simplifier les notations :

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma^*} M_\gamma^* \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\mathbf{n}_\Sigma d\gamma]^* (\mathbf{u}^S) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma^* \times \epsilon} \frac{M_\gamma^*}{\epsilon} \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\mathbf{n}_\Sigma d\gamma \times \epsilon]^* (\mathbf{u}^S) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma^*} f_\epsilon M_\gamma^* \delta \mathbf{u}^S \cdot \delta [\mathbf{n}_\Sigma d\Sigma]^* (\mathbf{u}^S) \\
&= \int_{\Sigma^*} \delta_\gamma(x) M_\gamma^* \delta \mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma^* (\mathbf{u}^S) d\Sigma
\end{aligned} \tag{7.85}$$

L'écriture à l'aide de la distribution  $\delta_\gamma$  est pratique et permet de représenter la discontinuité des efforts exercés sur la structure. En prenant successivement  $\delta \mathbf{u}^S = 0$  sur  $\Sigma_G^* \cup \Sigma^*$  puis

## 7.8. FORMULATION MATRICIELLE

---

sur  $\Sigma^*$  et enfin  $\Sigma_G^*$  on écrit les équations locales de la structure (on utilise les notation  $M^*$ ,  $M_\gamma^*$  et  $\mu_S$  introduites dans (6.33), et (7.59)) :

$\text{Div } \tilde{\sigma} = \rho^S \ddot{\mathbf{u}}^S$	sur $\Omega_S^*$	(a)
$\tilde{\sigma} \mathbf{n}_\Sigma^* = -\mu_S \mathbf{n}_\Sigma^* + \alpha_L \delta [2H_\Sigma]^* (\mathbf{u}^S) \mathbf{n}_\Sigma^* - M^* \boldsymbol{\tau}_\Sigma^* + \alpha_L 2H_\Sigma^* \boldsymbol{\tau}_\Sigma^* + \delta_\gamma M_\gamma^* \boldsymbol{\tau}_\Sigma^*$	sur $\Sigma^*$	(b)
$\tilde{\sigma} \mathbf{n}_{\Sigma_G}^* = \alpha_G \delta [2H_{\Sigma_G}]^* (\mathbf{u}^S) \mathbf{n}_{\Sigma_G}^* + \alpha_G 2H_{\Sigma_G}^* \boldsymbol{\tau}_{\Sigma_G}^*$	sur $\Sigma_G^*$	(c)
$\tilde{\sigma} \mathbf{n}_{\Sigma_f}^* = \mathbf{f}_{ext}$	sur $\Sigma_f^*$	(d)
$\mathbf{u}^S = 0$	sur $\Sigma_u$	(e)

$\mathbf{n}_{\Sigma_f}^*$  étant la normale unitaire rentrante à la surface  $\Sigma_f$ . Comme énoncé dans la partie 6.1.5, la force linéique d'amplitude  $M_\gamma^*$  représente une singularité dans la distribution des efforts appliqués sur le solide. On peut faire apparaître cette singularité dans les équations locales à l'aide de la distribution  $\delta_\gamma$  de Dirac. Dans les applications qui nous intéressent, cette singularité est généralement levée en utilisant un modèle de plaque pour la structure.

## 7.8 Formulation matricielle

De même que précédemment, on utilise la méthode des éléments finis pour résoudre le problème (7.76) (voir chapitre 1).

Du fait de la géométrie complexe de la surface libre, des éléments triangulaires sont le plus souvent utilisés pour la discrétisation des surfaces et des éléments tétraédriques pour le volume fluide. Ce maillage non structuré est généré automatiquement par des logiciels de maillage. Pour représenter la structure, un modèle de plaque est choisi et les matrices de masse et de raideur associées sont générées par le logiciel NASTRAN ©(matrices  $\mathbf{K}_E$  et  $\mathbf{M}_S$  du problème 7.76). Le maillage du fluide et de la structure sont ici coïncidents.

On donne ci-dessous les écritures matricielles correspondant aux différents opérateurs :

$$M_S(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) \implies \delta \mathbf{u}^{S^T} \mathbf{M}_S \mathbf{u}^S \quad (7.86)$$

$$\mathbf{K}_F(\mathbf{u}_\Gamma^F, \delta \mathbf{u}_\Gamma^F) \implies \delta \mathbf{u}_\Gamma^{F^T} \mathbf{K}_F \mathbf{u}_\Gamma^F \quad (7.87)$$

$$\mathbf{K}_S(\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) \implies \delta \mathbf{u}^{S^T} \mathbf{K}_S \mathbf{u}^S \quad (7.88)$$

$$\mathbf{B}(\varphi, \delta \mathbf{u}_\Gamma^F) \implies \delta \mathbf{u}_\Gamma^{F^T} \mathbf{B} \Phi \quad (7.89)$$

$$\mathbf{C}(\varphi, \delta \mathbf{u}^S) \implies \delta \mathbf{u}^{S^T} \mathbf{C} \Phi \quad (7.90)$$

$$\mathbf{F}(\varphi, \delta \varphi) \implies \delta \Phi^T \mathbf{F} \Phi \quad (7.91)$$

$$\mathbf{R}_\Gamma(\delta \mathbf{u}_\Gamma^F) \implies \delta \mathbf{u}_\Gamma^{F^T} \mathbf{R}_\Gamma \quad (7.92)$$

$$\mathbf{R}_\Sigma(\delta \mathbf{u}^S) \implies \delta \mathbf{u}^{S^T} \mathbf{R}_\Sigma \quad (7.93)$$

$$\mathbf{F}_{ext}(\delta \mathbf{u}^S) \implies \delta \mathbf{u}^{S^T} \mathbf{f}_{ext} \quad (7.94)$$

La formulation matricielle du problème (7.76) va alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_\Sigma \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_\Gamma \\ -\mathbf{C}^T & -\mathbf{B}^T & \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_\Sigma^T & -\mathbf{R}_\Gamma^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \mathbf{u}_\Gamma^F \\ \Phi \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^S \\ \ddot{\mathbf{u}}_\Gamma^F \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.95)$$

On remarque dans un premier temps que dans le problème (7.95),  $\varphi$  et  $\delta \varphi$  appartiennent à  $\mathcal{C}_\varphi^*$  et il reste à prendre en compte cette contrainte en imposant une relation linéaire entre les composantes de  $\Phi$ . Puisque cette relation peut être arbitraire, on choisit de supprimer le premier degré de liberté et on note  $\Phi_2$  le vecteur  $\Phi$  que l'on a tronqué. Par conséquent, on notera également  $\mathbf{C}_2$  et  $\mathbf{B}_2$  les matrices obtenues en supprimant la première colonne de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$ , et  $\mathbf{F}_{22}$  la matrice obtenue en éliminant la première ligne et la première colonne de  $\mathbf{F}$ . Le problème (7.95) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_\Sigma \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_\Gamma \\ -\mathbf{C}_2^T & -\mathbf{B}_2^T & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_\Sigma^T & -\mathbf{R}_\Gamma^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^S \\ \mathbf{u}_\Gamma^F \\ \Phi_2 \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^S \\ \ddot{\mathbf{u}}_\Gamma^F \\ \ddot{\Phi}_2 \\ \ddot{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.96)$$

## 7.8. FORMULATION MATRICIELLE

On introduit maintenant les matrices  $\mathbf{K}_G$ ,  $\mathbf{M}_G$ ,  $\mathbf{C}_G$ ,  $\mathbf{R}_G$  ainsi que les vecteurs  $\mathbf{u}_G$  et  $\mathbf{f}_G$  définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} & \mathbf{M}_G &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \mathbf{C}_G &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_G &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Sigma \\ \mathbf{R}_\Gamma \end{bmatrix} & \mathbf{u}_G &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}^S \\ \mathbf{u}_\Gamma^F \end{bmatrix} & \mathbf{f}_G &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.97)$$

Le problème (7.96) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_G & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_G \\ -\mathbf{C}_G^T & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_G^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^G \\ \Phi_2 \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_G & \mathbf{C}_G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^G \\ \ddot{\Phi}_2 \\ \ddot{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_G \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.98)$$

Les déplacements  $\mathbf{u}_\Gamma^F$  et  $\mathbf{u}^S$  respectivement définis sur la surface libre et sur la structure, vérifient sur  $\gamma^*$  la condition  $\mathbf{u}_\Gamma^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^* = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^*$ . On considère alors la matrice  $\mathbf{Q}$  telle que :

$$\mathbf{u}^G = \mathbf{Q}\mathbf{u}_\diamond \quad (7.99)$$

où  $\mathbf{u}_\diamond$  est le vecteur d'inconnus obtenu après réduction des degrés de liberté compte tenu de cette liaison<sup>2</sup>. Le problème (7.98) se réécrit donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_\diamond & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_\diamond \\ -\mathbf{C}_\diamond^T & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_\diamond^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\diamond \\ \Phi_2 \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\diamond & \mathbf{C}_\diamond & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_\diamond \\ \ddot{\Phi}_2 \\ \ddot{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_\diamond \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.100)$$

avec  $\mathbf{K}_\diamond$ ,  $\mathbf{M}_\diamond$ ,  $\mathbf{C}_\diamond$ ,  $\mathbf{f}_\diamond$  et  $\mathbf{R}_\diamond$  les matrices données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\diamond &= \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_G \mathbf{Q} \\ \mathbf{M}_\diamond &= \mathbf{Q}^T \mathbf{M}_G \mathbf{Q} \\ \mathbf{C}_\diamond &= \mathbf{Q}^T \mathbf{C}_G \\ \mathbf{R}_\diamond &= \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_G \\ \mathbf{f}_\diamond &= \mathbf{Q}^T \mathbf{f}_G \end{aligned} \quad (7.101)$$

2. Cette liaison est en pratique prise en compte au travers de relations linéaires imposées aux degrés de liberté de  $\mathbf{u}_\Gamma^F$  et  $\mathbf{u}^S$ .

## 7.9 Symétrisation

On se propose maintenant de rétablir la symétrie du système. Dans (7.100), la deuxième équation peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_{22}\Phi_2 = \mathbf{C}_\diamond^\top \mathbf{u}_\diamond \quad (7.102)$$

Comme démontré précédemment, le noyau de  $\mathbf{F}$  est de dimension 1, ainsi, toute sous-matrice de  $\mathbf{F}$  obtenue par suppression d'une ou plusieurs lignes et des colonnes correspondantes est inversible [78].  $\mathbf{F}_{22}$  est donc inversible et on a :

$$\Phi_2 = \mathbf{F}_{22}^{-1} \mathbf{C}_\diamond^\top \mathbf{u}_\diamond \quad (7.103)$$

Le système (7.100) va donc se réécrire (en multipliant la dernière ligne par  $-1$ ) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_\diamond & -\mathbf{R}_\diamond \\ -\mathbf{R}_\diamond^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\diamond \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\diamond + \mathbf{C}_\diamond \mathbf{F}_{22}^{-1} \mathbf{C}_\diamond^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_\diamond \\ \ddot{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_\diamond \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.104)$$

Le système conservatif (7.104) est bien symétrique, en effet, les opérateurs associés aux matrices  $\mathbf{K}_F$  et  $\mathbf{K}_S$  sont symétrique (voir annexe G) et donc la matrice  $\mathbf{K}_G$  l'est également. La manipulation faite sur la matrice  $\mathbf{K}_G$  (équation (7.101)) se fait de la même manière sur les colonnes et les lignes, et la matrice  $\mathbf{K}_\diamond$  est donc symétrique.

Une des finalités de cette étude est le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de ce système couplé.

Le problème spectral associé à (7.104) s'écrit avec  $\Psi = (\mathbf{u}_\diamond, \pi)$  :

Trouver  $(\lambda_i, \Psi_i)$ ,  $\Psi_i \neq 0$  :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\diamond & -\mathbf{R}_\diamond \\ -\mathbf{R}_\diamond^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\diamond + \mathbf{C}_\diamond \mathbf{F}_{22}^{-1} \mathbf{C}_\diamond^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \Psi_i = 0 \quad (7.105)$$

On présente dans l'annexe I les premiers résultats (analyse modale sur un cas test sphérique) que l'on obtient à partir de cette formulation.



## Chapitre 8

# Pistes pour la prise en compte de l'amortissement lié aux effets de la capillarité

La formulation du problème couplé conservatif obtenue précédemment peut servir de cadre pour l'introduction des effets dissipatifs liés à la viscosité du liquide comme cela a été fait dans le chapitre 2. Cependant, pour prendre en compte les sources dissipatives combinant viscosité et capillarité au niveau de la surface libre et de la ligne triple (mises en évidence dans [48]), il faut remettre en cause certaines hypothèses considérées dans cette étude : l'homogénéité du coefficient de capillarité sur la surface libre et la constance de l'angle de contact dynamique (égal à l'angle de contact statique). On présente dans cette partie les effets de ces modifications qui seront étudiées dans des travaux futurs.

Il est à noter que d'autres paramètres peuvent avoir une grande importance dans l'amortissement des vibrations du liquide comme la rugosité du réservoir. Dans [18], Case et Parkinson, qui présentent une comparaison entre des résultats analytiques et expérimentaux soulèvent notamment l'importance que peut avoir cette rugosité à l'intérieur de la paroi du réservoir, ce que l'on retrouve également dans [101]. Un traitement de surface par polissage permet d'améliorer nettement la comparaison des résultats.

## 8.1 Angle de contact Dynamique

Comme on a pu le voir dans la section 5.1.2, lorsque la ligne triple est en mouvement, l'angle de contact dynamique  $\theta_D$  que l'on observe varie. L'équilibre des forces capillaires donné par (5.5) n'est donc plus valable. Et la force  $\mathbf{F}_c$  provoquant le déplacement de la ligne triple s'écrit d'après (5.10) :

$$\mathbf{F}_c = \alpha(\cos \theta_S - \cos \theta_D)\boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad (8.1)$$

La figure 8.1 présente des valeurs expérimentales illustrant la relation entre l'angle de contact dynamique et la vitesse de mouillage  $v_m$  définie par  $v_m = \mathbf{v}^F \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma$ ,  $\mathbf{v}^F$  étant la vitesse du fluide.

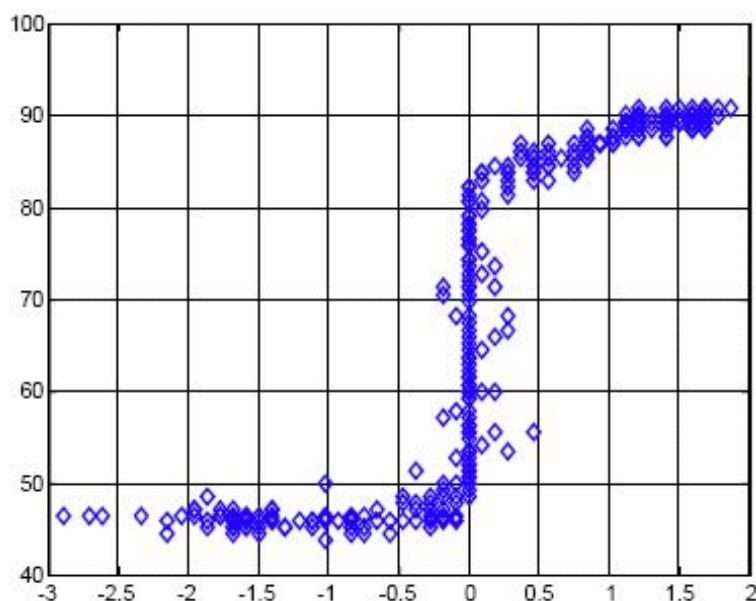


FIGURE 8.1 – Valeurs expérimentales de l'angle dynamique en fonction de la vitesse normalisée de déplacement de la ligne de contact  $v_m$  (extrait de [13])

Pour une vitesse  $v_m$  constante, deux forces opposées vont s'appliquer sur la ligne triple : la force  $\mathbf{F}_c$  donnée par (8.1) et une force visqueuse au voisinage de la ligne de contact notée  $\mathbf{F}_\nu$ . Cette force est exprimée dans [28] par :

$$\mathbf{F}_\nu = -\frac{3\nu l_c}{\theta_D} v_m \boldsymbol{\nu}_\Sigma \quad (8.2)$$

la longueur caractéristique des phénomènes de capillarité  $l_c$  est donnée par (5.11). Ainsi,

## 8.1. ANGLE DE CONTACT DYNAMIQUE

la relation  $\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_\nu = \mathbf{0}$  donne, pour des angles faibles, la relation suivante :

$$v_m = \frac{\alpha}{6\nu l_c} (\theta_D^2 - \theta_S^2) \theta_D \quad (8.3)$$

Cette relation en  $\theta^3$  correspond bien à l'allure de la courbe donnée par la figure 8.1<sup>1</sup>.

Cette description du mouillage considère des surfaces solides homogènes. En réalité, les défauts de la surface solide comme la rugosité, vont entraîner la non unicité de l'angle de contact statique  $\theta_S$ . Le comportement de la ligne de contact présenté par la figure 8.1 peut alors être décomposé en différentes phases schématisées par la figure 8.2 [17] :

- Zone 1 : Zone hystérétique 1 où l'angle de contact peut varier jusqu'à une valeur critique  $\theta_c$  tout en gardant une vitesse de mouillage nulle.
- Zone 2 : Zone de variation linéaire entre  $\theta_D$  et  $v_m$ .
- Zone 3 : Zone de saturation pour des vitesses supérieures à une vitesse critique  $v_c$  où l'angle  $\theta_D$  prend une valeur maximale inférieure à sa valeur maximale physique  $\pi$  [16].

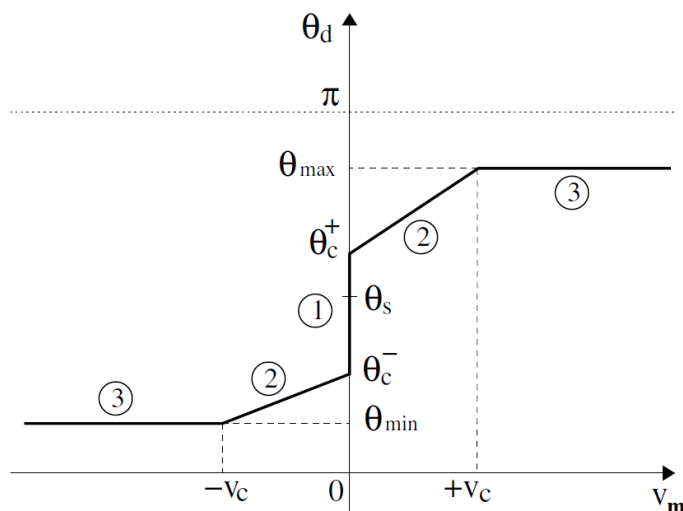


FIGURE 8.2 – Modélisation schématique des variations de l'angle de contact dynamique  $\theta_D$  en fonction de la vitesse de mouillage  $v_m$

À partir de cette schématisation, il est possible de représenter chaque comportement par un modèle simplifié :

1. Cette loi a été vérifiée expérimentalement pour un liquide "mouillant" ( $\theta_S = 0$ ) jusqu'à des grandes valeurs de  $\theta_D$  (plus de 100 degrés) [79, 83]

### Comportement "ligne de contact fixe"

Dans cette configuration représentée par la figure 8.3, le bord de la surface libre reste immobile et on ne sort pas du domaine hystérétique. La condition aux limites sur le bord de la surface libre s'écrit alors  $\mathbf{v}_F \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma = 0$ .

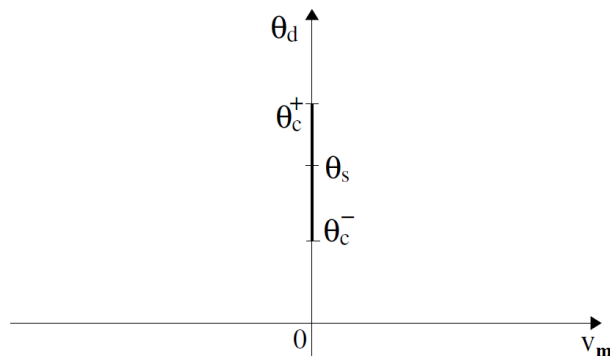


FIGURE 8.3 – Comportement "ligne de contact fixe" ( $\theta_D \in [\theta_c^-, \theta_c^+]$ ,  $v_m = 0$ )

L'intervalle  $[\theta_c^-, \theta_c^+]$  va notamment dépendre de la nature du liquide (mouillant ou non) et de la rugosité de la paroi [58]. Ce comportement représente bien le mouvement de la ligne triple lorsque la fréquence des oscillations devient importante : le front de liquide a de moins en moins de temps pour glisser sur la paroi et tend à rester immobile [108].

La dissipation d'énergie associée à une ligne triple immobile est nulle du fait que la vitesse de déplacement de la ligne est nulle. Il est à noter que les fréquences propres amorties augmentent lorsque la ligne triple est immobile [11].

### Comportement mouillant linéaire

Il apparaît dans certains cas, notamment pour des liquides mouillants qui ont tendance à glisser continuellement sur une très fine pellicule de liquide laissée sur la paroi, on peut supposer qu'il n'y a pas d'hystérésis de l'angle de contact. Si de plus, la norme de la vitesse de mouillage reste inférieure à la valeur limite de saturation  $v_c$ , alors on peut considérer que l'angle de contact est une fonction linéaire de la vitesse de mouillage (voir Fig. 8.4).

Miles [73] propose ainsi de décrire ce comportement en écrivant une relation linéaire

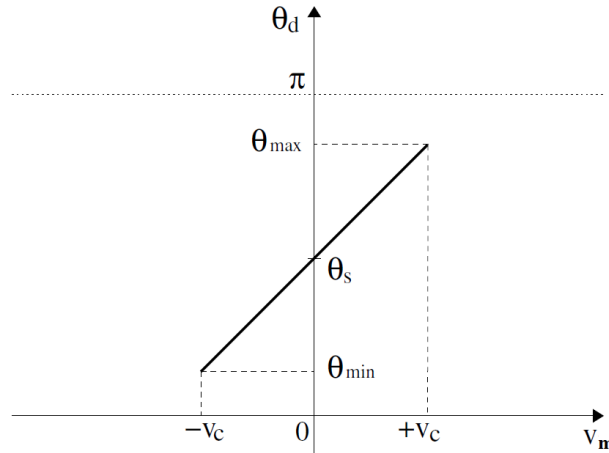


FIGURE 8.4 – Comportement "mouillant" linéaire

entre la vitesse de mouillage et le cosinus de l'angle de contact (plutôt que l'angle de contact lui-même). Le comportement linéaire représenté par la figure 8.4 est alors retrouvé pour des angles  $\theta_D$  et des vitesses  $v_m$  petites. On a alors :

$$\cos \theta_D - \cos \theta_S = -\xi \frac{v_w}{v_c} \quad (8.4)$$

Cette relation revient à équilibrer la force  $\mathbf{F}_c$  introduite précédemment avec une force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse  $\mathbf{R}$  ( $\xi$  étant un coefficient réel positif et sans dimension). On a alors  $\mathbf{R} + \mathbf{F}_c = \mathbf{0}$ . La présence sur la ligne de contact de cette force de frottement dissipative donne une explication physique simple à l'origine de l'amortissement par "mouillage" qui découle de ce modèle [16].

Si l'on considère le cas particulier d'un problème bi-dimensionnel et pour de faibles variations de l'angle dynamique autour d'une valeur statique égale à  $\pi/2$ , la vitesse de mouillage va s'écrire  $v_m = \partial\eta/\partial t$  et l'angle de contact  $\theta_d - \pi/2 \simeq \partial\eta/\partial x$  ( $\eta$  est l'élévation de la surface libre et  $x$  la coordonnée normale à la paroi). Ainsi, Hocking [51] propose de réécrire la relation (8.4) :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad (8.5)$$

$\lambda$  étant un coefficient réel positif (homogène à une vitesse) tel que :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\xi}{v_c} \quad (8.6)$$

Il est alors possible d'explicitier la dépendance de ce modèle par rapport à la fréquence d'oscillation  $\omega$  de la ligne triple et par rapport aux phénomènes de capillarité, Young &

## 8.1. ANGLE DE CONTACT DYNAMIQUE

Davis proposent ainsi d'adimensionnaliser l'équation (8.5) en introduisant les grandeurs adimensionnelles  $\eta'$ ,  $x'$  et  $t'$  [108] :

$$\eta = A \eta', \quad x = l_c x', \quad t = \omega^{-1} t' \quad (8.7)$$

où  $A$  est une dimension caractéristique de l'amplitude de  $\eta$ . On obtient alors la relation suivante :

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} = \frac{\lambda}{\omega l_c} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \quad (8.8)$$

On constate alors que, lorsque la fréquence ou la longueur de capillarité  $l_c$  tendent vers l'infini, le modèle *mouillant* se rapproche du modèle à *ligne de contact fixe*, tandis qu'il se rapprochera du modèle à *bords libres* lorsque la fréquence ou la longueur de capillarité tendent vers 0.

Il est possible de combiner ce comportement linéaire avec une hystérésis de l'angle  $\theta_D$  pour se ramener à la configuration présentée par la figure 8.5 (comportement *mouillant avec hystérésis*).

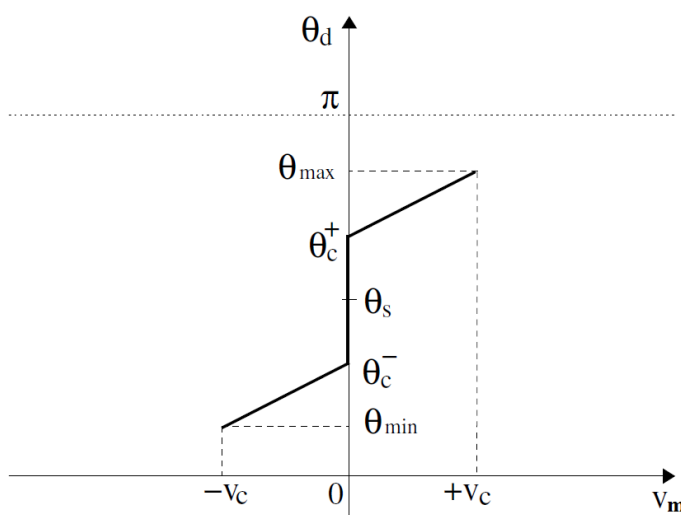
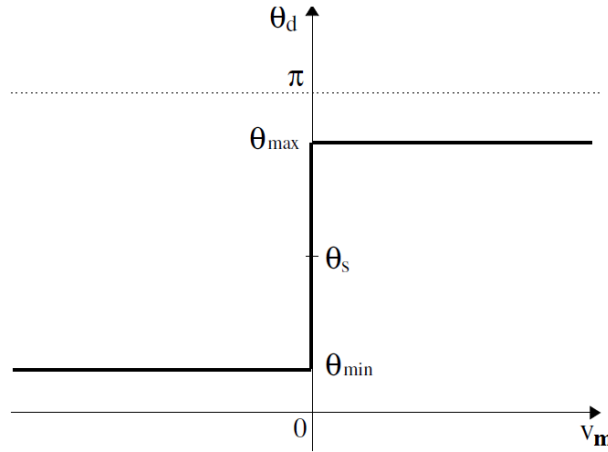


FIGURE 8.5 – Comportement "mouillant" linéaire avec hystérésis symétrique ( $\theta_c^+ - \theta_s = \theta_s - \theta_c^-$ )

Si de plus la vitesse critique est faible par rapport à la vitesse de mouillage on se ramène à un comportement "saturé" (voir Fig. 8.6).

Miles propose alors de modéliser ce comportement en réécrivant la relation 8.4 de la


 FIGURE 8.6 – Comportement "saturé" ( $v_c = 0$ )

manière suivante :

$$\cos \theta_D - \cos \theta_S = -\xi \frac{v_m}{|v_m|} \quad (8.9)$$

### Déphasage entre l'angle de contact et la vitesse de mouillage

Les modèles présentés jusqu'à présent ne permettent pas de représenter le phénomène de déphasage entre l'angle de contact et la vitesse de mouillage qui apparaît lorsque la fréquence augmente. Ce déphasage est illustré par la figure 8.7 extraite de [13]. L'angle de contact dynamique et la vitesse de mouillage ont été considérés jusqu'à maintenant comme étant en phase, ce qui se traduit par des coefficients  $\lambda$  et  $\xi$  réels. Pour représenter un certain déphasage, Miles propose d'utiliser plutôt des coefficients complexes.

Pour illustrer ce concept, considérons le modèle de mouillage linéaire et une vitesse de mouillage comme une fonction sinusoïdale du temps  $t$  :

$$v_m(t) = v_m \cos \omega t = v_m \operatorname{Re}[e^{i\omega t}] \quad (8.10)$$

La relation (8.4) va alors se réécrire :

$$\cos \theta_D(t) - \cos \theta_S = -\operatorname{Re} \left[ \xi \frac{v_m}{v_c} e^{i\omega t} \right] \quad (8.11)$$

Ainsi, si  $\xi$  est réel,  $\cos \theta_D(t)$  est en phase avec  $v_m(t)$  :

$$\cos \theta_D(t) - \cos \theta_S = -\xi \frac{v_m}{v_c} \cos \omega t \quad (8.12)$$

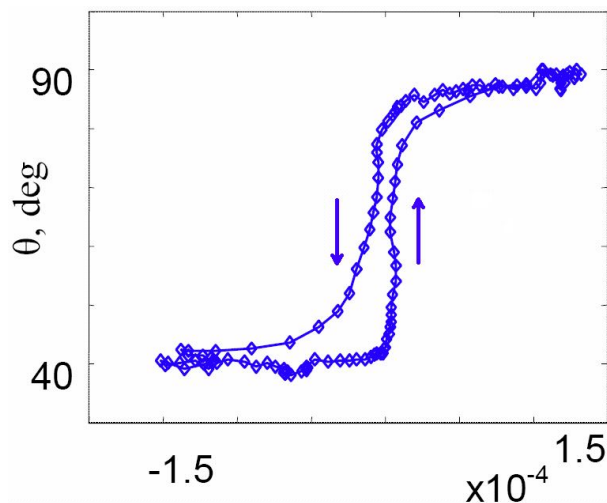


FIGURE 8.7 – Courbe polaire tracée à partir des mesures expérimentales de l’angle de contact dynamique en fonction de la vitesse de mouillage (représentée par la valeur  $\mu v_m/\alpha$  en abscisse)

et si  $\xi$  est un complexe  $\xi^* = \xi e^{i\varphi}$ , le déphasage  $\varphi_d$  apparaît :

$$\cos \theta_D(t) - \cos \theta_S = -\xi \frac{v_m}{v_c} \cos(\omega t + \varphi_d) \quad (8.13)$$

Ainsi, le choix d’une loi de comportement simplifiée entre l’angle de contact et la vitesse de glissement peut permettre une bonne approximation même pour des angles de contact assez grands. Cette loi de comportement permet pour certaines géométries simples d’utiliser des coordonnées sphériques ou cylindriques et d’obtenir des valeurs analytiques du problème [61] (fréquences propres et coefficients d’amortissement).

D’autre part, en utilisant l’expression de la force de frottement sur la ligne triple  $\mathbf{R}$ , il est possible de calculer simplement l’énergie dissipée pour chacun des modes de ballotement en prenant :

$$\frac{dE}{dt} = \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}^F dl \quad (8.14)$$

## 8.2 Écoulements de Marangoni

Dans [15], l’auteur présente une démarche permettant d’établir les équations locales d’une surface libre de normale  $\mathbf{n}$  entre un gaz parfait et un liquide visqueux. La pression



dans ces deux milieux étant respectivement notée  $P_G$  et  $P_{SL}$ , on a :

$$(P_{SL} - P_G)\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = 2\alpha H \mathbf{n} - \nabla_S \alpha \quad (8.15)$$

La projection de cette équation sur la normale  $\mathbf{n}$  permet d'obtenir l'équation de Laplace en dynamique pour un liquide visqueux, équivalente à celle obtenue dans le chapitre 7 [64] :

$$P_{SL} - P_G - \tau_{nn} = 2\alpha H \quad (8.16)$$

où  $\tau_{nn} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}$  est la composante normale à la surface libre du vecteur de contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}$ . En éliminant cette composante normale de l'équation (8.15), on obtient l'équation d'équilibre des composantes tangentielles associées :

$$(\boldsymbol{\tau}\mathbf{n})_S = \nabla_S \alpha \quad (8.17)$$

où  $(\boldsymbol{\tau}\mathbf{n})_S = \boldsymbol{\tau}\mathbf{n} - \tau_{nn} \mathbf{n}$  est la composante tangentielle de  $\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}$ .

Cette relation montre que seules les contraintes visqueuses équilibrent les efforts dus aux gradients de tension superficielle. Par conséquent, un équilibre statique de la surface libre ne peut pas exister quand de tels gradients existent : des mouvements de fluide à la surface libre sont générés par les gradients de tension superficielle. C'est ce que l'on appelle l'effet *Marangoni* (cf lecture 2 de [15]).

L'énergie dissipée associée aux écoulements de *Marangoni* dépend notamment de ce gradient surfacique du coefficient  $\alpha$  que l'on a supposé constant dans cette étude. Le choix d'une loi de comportement est alors nécessaire [14]. Dans [48], Henderson précise que parmi les quatre sources d'amortissement présentes dans le liquide, l'amortissement sur la surface libre peut devenir important, notamment pour les modes élevés en fréquence, dès que la surface libre du liquide est contaminée par des impuretés (éventuellement dus à des phénomènes physico-chimiques) car celles-ci provoquent de forts gradients surfaciques du coefficient de capillarité  $\alpha$ .



# Conclusion

On a proposé dans le chapitre 6 une approche énergétique basée sur le Principe de Moindre Action, en intégrant, dans l'expression du Lagrangien, des contraintes telles que l'incompressibilité et le couplage à l'interface fluide-structure au travers de multiplicateurs de Lagrange. Puis, on a défini la formulation variationnelle du problème statique : cette formulation est non linéaire et permet d'obtenir la géométrie du système à l'état d'équilibre. Une méthode de résolution itérative de Newton-Raphson ainsi que les différents problèmes liés à la recherche de cette solution sont présentés dans [35].

On s'est ensuite intéressé dans le chapitre 7 à l'établissement des équations de la dynamique pour des petits déplacements autour de cette géométrie de référence. La formulation matricielle de ces équations est donnée par (7.100). On symétrise alors en supprimant le potentiel de déplacement  $\Phi$  pour finalement obtenir le problème spectral du système conservatif étudié.

Cette étude théorique constitue une base pour l'ajout des sources dissipatives liées aux effets de capillarité à l'aide de modèles physiques simplifiés, comme exposé dans le chapitre 8.



## Conclusions et perspectives



Dans ces travaux, on s'est intéressé au problème d'interaction entre un liquide et la structure déformable le contenant. Dans un premier temps, on s'est focalisé sur les aspects dissipatifs du liquide et sur leur prise en compte à partir de la formulation variationnelle conservative du problème. Cette méthode se base sur l'introduction d'un amortissement modale pour le liquide. La résolution du système couplé dissipatif non symétrique obtenu est ensuite présentée. Une approche par synthèse modale permet de donner une expression explicite de la réponse fréquentielle et temporelle du système. Une validation du calcul par éléments finis des coefficients d'amortissement des modes de ballonnement est donnée sur un cas analytique tri-dimensionnel mais une comparaison avec des mesures expérimentales montre la nécessité d'introduire les sources d'amortissement liées aux phénomènes de capillarité.

Dans un second temps, on s'est donc intéressé aux effets de la capillarité et aux forces de tension de surface du liquide couplé avec la structure. La formulation variationnelle non linéaire du problème statique ainsi que la formulation variationnelle linéarisée du problème dynamique conservatif ont été établies. Cette formulation unifiée permet via une méthode énergétique de retrouver les cas précédemment étudiés par J.-S. Schotté [91] et M. El-Kamali [35]. La contrainte d'incompressibilité et la condition de contact entre le liquide et la structure ont été prises en compte via des multiplicateurs de Lagrange. On a montré que ces multiplicateurs ont également permis de prendre en compte les effets de précontraintes statiques dans la formulation variationnelle. Ces études ont fait l'objet de publications [75, 77] et de communications dans des congrès [74, 76].

Parmi les différentes sources d'amortissement, seuls les effets liés purement à la viscosité ont été pris en compte pour l'instant mais l'ensemble de ces travaux constituent une base pour l'ajout de sources dissipatives liées aux effets de la capillarité au niveau de la surface libre et de la ligne triple. La modélisation de ces sources dissipatives présentées dans le chapitre 8 reste encore à explorer. Une fois l'ensemble des effets dissipatifs pris en compte, une comparaison avec des données expérimentales deviendrait alors plus pertinente (les sources dissipatives ne pouvant pas être mesurées séparément).

Une autre piste pour de futurs travaux concerne la construction de modèles réduits à partir de la formulation hydroélastique avec capillarité établie au chapitre 7 qui viendra remplacer le modèle réduit présenté dans la section 2.1 afin d'étendre la formulation du problème réduit couplé amorti (2.39) ou (2.41) aux systèmes en microgravité.

Par ailleurs, certains problèmes numériques restent à résoudre : lors de l'application numérique de la formulation variationnelle sur différents cas tests on a pu observer une sensibilité des résultats en fonction de la finesse du maillage. De plus, pour des angles de contact faibles, il est difficile d'obtenir un maillage en accord avec la géométrie théorique ce qui entraîne une erreur sur l'opérateur de bord  $\mathbf{K}_\gamma^\theta$ . Ainsi, l'utilisation d'éléments NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) permettant de mieux représenter les courbures d'une géométrie semble être une piste pour optimiser les temps de calcul et leur précision. On peut également penser à utiliser des éléments finis d'ordre supérieur afin notamment d'améliorer la précision des expressions contenant un gradient.

À plus long terme, on pourrait imaginer introduire d'autres sources d'amortissement tels que les phénomènes de cassure de vague et d'impact sur les parois du réservoir. Cela nécessiterait de pouvoir représenter de grandes amplitudes d'oscillations de la surface libre. Pour cela, Faltinsen et al. proposent une approche modale non linéaire [38]. Une approche par Nonlinear Normal Modes pourrait également s'appliquer [82].

Finalement, une meilleure connaissance du comportement dynamique du liquide permettra d'imaginer des techniques de réduction de son influence. Cette problématique riche et multidisciplinaire reste ouverte et offre de nombreuses perspectives d'études.



# Bibliographie

- [1] H. N. Abramson. The dynamic behaviour of liquids in moving containers. *NASA SP-106*, 1966. 17, 85
- [2] H. N. Abramson, W.-H. Chu, and G. E. Ransleben. Representation of fuel sloshing in cylindrical tanks by an equivalent mechanical model. *ARS Journal*, 31 :1697–1705, December 1961. 19
- [3] S. Adhikari. *Damping models for structural vibration*. PhD thesis, Trinity College Cambridge University, September 2000. 174
- [4] O. Adrianarison and R. Ohayon. Compressibility and gravity effects in internal fluid-structure vibrations : Basic equations and appropriate variational formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :1958–1972, 2006. 21, 127
- [5] L. Anquez. Etude de l’amortissement des vibrations dans un liquide peu visqueux. *Acta Astronautica*, 1 :1475–1485, 1974. 75, 181, 182, 185, 188
- [6] T. Arndt and M. Dreyer. Damping behaviour of sloshing liquid in laterally excited cylindrical propellant vessels. In *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, Cincinnati, July 2007. 22
- [7] E. Balmès. New results on the identification of normal modes from experimental complex modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11 :229–243, 1997. 38
- [8] E. Balmès. *Methods for Vibration Design and Validation (Course Notes, Ecole Centrale Paris)*, 1997-2005. <http://www.sdtools.com/Publications.html>. 28
- [9] H. Baoyin, J. Li, Y. Gao, and Z. Wang. Damping computation of liquid sloshing in containers aboard spacecraft. *Acta Mechanica Sinica*, 19(2) :189–192, April 2003. 74

- [10] K.-J. Bathe. *Finite-Element Procedures in Engineering Analysis*. Prencil-Hall, 1982. 33, 82
- [11] H. F. Bauer. Vibration of hydroelastic system consisting of a sector shell and viscous liquid in zero gravity. *Journal of Fluids and Structures*, 12 :367–385, 1998. 21, 148
- [12] A. Bermúdez and R. Rodríguez. Finite element analysis of sloshing and hydroelastic vibrations under gravity. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, 33 :305–327, 1999. 27, 33, 127
- [13] X. Bian, W. W. Schultz, and M. Perlin. Liquid slug motion and contact lines in an oscillatory capillary tube. *Journal of Fluid Dynamics (under revision)*, <http://www-personal.umich.edu/~schultz/Manuscripts/BianSchultzPerlin.pdf>. 146, 151
- [14] G. C. Buscaglia and R. F. Ausas. Variational formulations for the surface tension, capillarity and wetting. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200 :3011–3025, 2011. 153
- [15] J. W. M. Bush. Surface tension module (lectures 1-6), department of mathematics, mit. <http://web.mit.edu/1.63/www/Lec-notes/Surfacetension/>. 88, 152, 153
- [16] B. Cacciari, S. Faetti, and C. Festa. Experimental investigation of capillarity effects on surface gravity waves : non-wetting boundary conditions. *Journal of Fluid Mechanics*, 231 :325–343, 1991. 147, 149
- [17] B. Cacciari, S. Faetti, and M. Nobili. Capillary effects on surface gravity waves in cylindrical container : wetting boundary conditions. *Journal of Fluid Mechanics*, 231 :325–343, 1991. 147
- [18] K. M. Case and W. C. Parkinson. Damping of surface waves in an incompressible liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 172–184, 1957. 84, 145
- [19] T. Caughey. Classical normal modes in damped linear systems. *Journal of Applied Mechanics*, pages 269–271, 1960. 38, 174
- [20] M. Chiba and H. Watanabe. Hydroelastic coupled vibrations in a cylindrical container with a membrane bottom, containing liquid with surface tension. *Journal of Sound and Vibration*, 251 :717–740, 2002. 21

- [21] S. Cho, N. H. Mc Clamroch, and M. Reyhanoglu. Feedback control of a space vehicle with unactuated fuel slosh dynamics. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Denver, CO, August 2000. 19
- [22] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1979. 33
- [23] François Axisa and Jose Antunes. *Modeling of Mechanical Systems : Fluid Structure Interaction Vol. 3*. Butterworth-Heinemann, 2006. 73
- [24] S. Das, A. Marchand, B. Andreotti, and J. H. Snoeijer. Elastic deformation due to tangential capillary forces. *Physics of Fluids*, 23, 2011. 101
- [25] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 5. Masson, 1988. 30, 184
- [26] J. T. Davies and R. W. Vose. On the damping of capillary waves by surface films. In *Proceedings of the Royal Society of London. Serie A. Mathematical and Physical Sciences*, volume 286, pages 218–234, 1965. 20, 28, 88
- [27] P. G. de Gennes. Wetting : statics and dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 57 :827–863, 1985. 97
- [28] P. G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, M. Fermigier, and C. Clanet. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin Paris, 2002. 97, 146
- [29] J.-F. Debonnie. On a purely lagrangian formulation of sloshing and fluid-induced vibrations of tanks. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 58 :1–18, 1986. 114
- [30] M. C. Delfour and J.-P. Zolésio. *Shapes and Geometries. Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011. 112
- [31] F. T. Dodge. The new "dynamic behaviour of liquids in moving containers". *Southwest Research Institute*, 2000. 17, 19
- [32] J. Donea. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33 :689–723, 1982. 18

- [33] W. G. Van Dorn. Boundary dissipation of oscillatory waves. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 24 :769–779, 1966. 28, 88
- [34] K. Eckhardt and G. Netter. Experiment for investigation of the dynamic behaviour of fluid in a surface tension tank under microgravity condition. *Acta Astronautica*, 9 :565–571, 1982. 22
- [35] M. El-Kamali. *Ballottement des liquides avec tension superficielle : Etudes dynamique et statique*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, France, Mars 2010. 21, 23, 95, 102, 107, 117, 123, 128, 139, 155, 159, 218, 220
- [36] M. El-Kamali, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Three dimensional modal analysis of sloshing under surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, pages 87–105, 2010. 95, 138, 210
- [37] P. J. Enright and E. C. Wong. Propellant slosh models for the cassini spacecraft. Technical Report AIAA-94-3730-CP, Research Report, 1994. 19
- [38] O. M. Faltinsen and A. N. Timokha. *Sloshing*. Cambridge University Press, 2009. 17, 160
- [39] T. Fanion, M. Á. Fernández, and P. Le Tallec. *Deriving Adequate Formulations for Fluid Structure Interaction Problems : from ALE to Transpiration*, 2000. <http://hal.inria.fr/inria-00072774/PDF/RR-3879.pdf>. 114
- [40] C. Farhat, E. K. Chiu, D. Amsallem, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. On the modelling of fuel sloshing and its physical effect on flutter. *AIAA Journal*, page accepted, 2013. 18
- [41] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, 1996. 28, 58
- [42] R.-J. Gibert. *Vibrations des Structures*. Editions Eyrolles, Paris, 1988. 38
- [43] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1981. 75, 184
- [44] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. *Matrix Polynomials*. Academic Press, 1982. 52

- [45] Marija Gradinscak. *Liquid sloshing in containers with flexibility*. PhD thesis, Faculty of Health, Engineering and Science, Victory University, Melbourne, May 2009. 19
- [46] T.D. Guyenne, J. Cendral, and J.L. Marce. *Attitude Control of Space Vehicles : Technological and Dynamical Problems Associated with the Presence of Liquids : Proceedings of an International Conference Held at Toulouse, 10-12 October 1977*. ESA SP. ESA Scientific and Technical Publications Branch, 1977. 18
- [47] H.Bufler. Conservative systems, potential operators and tangent stiffness : reconsideration and generalization. *Archive of Applied Mechanics*, 63 :51–58, 1993. 207
- [48] D. M. Henderson and J. W. Miles. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line. *Journal of Fluid Mechanics*, 275 :285–299, 1994. 20, 28, 73, 75, 78, 145, 153
- [49] E. Hernández and D. Santamarina. Active control of sloshing in containers with elastic baffle plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91 :604–621, 2012. 19
- [50] C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39 :201–225, 1981. 18
- [51] L. M. Hocking. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 179 :253–266, 1987. 89, 149
- [52] S. Huang, W.-Y. Duan, and X. Zhu. Time-domain simulation of tank sloshing pressure and experimental validation. In *9th International conference on Hydrodynamics*, 2010 Shanghai, China, October 11-15. 20
- [53] C. Huh and L. E. Scriven. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line. *Journal of Colloid and Interface Science*, 35(1) :85–101, 1971. 102
- [54] R. J. Hung, C. Lee, and F. W. Leslie. Response of gravity level fluctuations on the gravity probe-B spacecraft propellant system. *Journal of Propulsion and Power*, 7 :556–564, 1991. 18
- [55] R. A. Ibrahim. *Liquid Sloshing Dynamics : Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2005. 17

- [56] T. Igusa, A. Der Kiureghian, and J.-L. Sackman. Modal decomposition method for stationary response of non-classically damped systems. *Earthquake engineering and Structural Dynamics*, 12 :121–136, 1984. 50
- [57] J.-F. Imbert. *Analyse des structures par éléments finis*. CEPADUES Ed., 1979. 28, 58
- [58] Kalvis M. Jansons. Moving contact lines on a two-dimensional rough surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 154 :1–28, 1985. 148
- [59] C. D. Johnson, D. A. Kienholz, and L. C. Rogers. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. *Shock and Vibration Bulletin*, pages 71–82, 2003. 75
- [60] G. H. Keulegan. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins. *Journal of Fluid Mechanics*, 1 :33–50, 1959. 89
- [61] R. Kidambi. Capillary damping of inviscid surface waves in a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 323–340, 2009. 76, 152
- [62] E. Kock and L. Olson. Fluid-structure interaction analysis by the finite element method - a variational approach. *International journal for numerical methods in engineering*, 31 :463–491, 1991. 114
- [63] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932 (last edition : 2006). 78, 178, 179
- [64] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of theoretical physics. vol. 6 : Fluid mechanics*. Oxford, 1987. 153
- [65] O. Limarchenko, G. Matarazzo, and V. V. Yasinsky. *Dynamics of rotational structures with liquid*. 2002. 21
- [66] R. Luppés, J. A. Helder, and A. E. P. Veldman. The numerical simulation of liquid sloshing in microgravity. In *European Conference on Computational Fluid Dynamics*, TU Delft, The Netherlands, 2006. 20
- [67] C. A. Felippa M. R. Ross, M. A. Sprague and K. C. Park. Treatment of acoustic fluid-structure interaction by localized lagrange multipliers and comparison to alternative

- interface-coupling methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 198 :986–1005, 2009. 114
- [68] B. Marsell, S. Gangadharan, and Y. Chatman. Using CFD techniques to predict slosh force frequency and damping rate. In *Proceedings of the 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Palm Spring, California, May 2009. 22
- [69] A. Marsh, M. Prakash, E. Semercigil, and O. F. Turan. A numerical investigation of energy dissipation with a shallow depth sloshing absorber. *Applied Mathematical Modelling*, 34 :2941–2957, 2010. 20
- [70] A. Marsh, M. Prakash, E. Semercigil, and O. F. Turan. Energy dissipation through sloshing in an egg-shaped shell. In *17th Australasian Fluid Mechanics Conference*, Auckland, New Zeland, December 2010. 19
- [71] C. Martel, J. A. Nicolás, and J. M. Vega. Surface-wave damping in a brimful circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 360 :213–228, 1998. 78
- [72] L. Meirovitch. *Fundamentals of Vibration*. McGraw-Hill, 2001. 50
- [73] J. W. Miles. Surface-wave damping in closed basins. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, volume 297, pages 459–475, 1967. 148, 178
- [74] T. Miras, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Amortissement du ballonnement d’un liquide dans un réservoir élastique. In *Actes du 10ème Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (Var), France, Mai 2011. 159
- [75] T. Miras, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Energy approach for static and linearized dynamic studies of elastic structures containing incompressible liquids with capillarity : A theoretical formulation. *Computational Mechanics*, 50 :729–741, 2012. 159
- [76] T. Miras, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Linear vibration of structures containing viscous liquids. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, Vienna, Austria, September 2012. 159
- [77] T. Miras, J.-S. Schotté, and R. Ohayon. Liquid sloshing damping in an elastic container. *Journal of Applied Mechanics*, 79, 2012. 159

- [78] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Fluid-Structure Interaction : Applied Numerical Methods*. Wiley, 1995. 30, 31, 33, 36, 37, 40, 42, 63, 64, 125, 130, 134, 144, 192, 194, 196, 215
- [79] X. Noblin. *Mouillage et Démouillage Inertiels : Triplons, Flaques vibrées, Ondes de chocs*. PhD thesis, Université Paris 6, Octobre 2004. 147
- [80] R. Ohayon and C. Soize. *Structural acoustics and vibration : Mechanical models, variational formulations and discretization*. Academic press, 1997. 173
- [81] M. Perlin and W. W. Schultz. Capillary effects on surface waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32 :241–274, 2000. 89
- [82] C. Pierre, D. Jiang, and S. Shaw. Nonlinear normal modes and their application in structural dynamics. *Mathematical Problems in Engineering*, DOI :10.1155/MPE/2006/10847 :1–15, 2005. 160
- [83] D. Quéré. *Lois du mouillage et de l ’ imprégnation*, 2003. Techniques de l’Ingénieur. 97, 98, 147
- [84] R. Ranganathan, Y. Ying, and J. B. Miles. Development of a mechanical analogy model to predict the dynamic behavior of liquids in partially filled tank vehicles. *SAE Paper*, (942307), 1994. 19
- [85] S. Rebouillat and D. Liksonov. Fluid-structure interaction in partially filled liquid containers : A comparative review of numerical approaches. *Computers and Fluids*, 39 :739–746, 2010. 18
- [86] M. Richardson and R. Potter. Viscous vs. structural damping in modal analysis. In *46th Shock and Vibration Symposium*, October 1975. 175
- [87] B. Robu. *Active vibration control of a fluid/plate system*. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, France, December 2010. 19
- [88] L. Rosenhead, editor. *Laminar Boundary Layers*. Dover Pubns, 1988. 76, 77
- [89] Y. Saad. *Numerical methods for Large Eigenvalue Problems*. Halsted Press, 1992. 53



- [90] J. A. Salzman, T. L. Labus, and W. J. Masica. An experimental investigation of the frequency and viscous damping of liquids during weightlessness. *Nasa Technical Note*, 1967. 22
- [91] J.-S. Schotté. *Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique contenant un liquide incompressible*. PhD thesis, CNAM Paris, France, December 2001. 19, 23, 63, 95, 105, 127, 135, 137, 138, 139, 159, 197, 205
- [92] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Incompressible hydroelastic vibrations : finite element modelling of the elastogravity operator. *Computers and Structures*, 83 :209–219, 2005. 32
- [93] J.-S. Schotté and R. Ohayon. Various modelling levels to represent internal liquids in the vibratory analysis of complex structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009. 36
- [94] R. M. S. M. Schulkes and C. Cuvelier. On the computation of normalmodes of a rotating, viscous, incompressible fluid with a capillary free boundary. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92 :97–120, 1991. 21
- [95] J.-F. Semblat. Rheological interpretation of rayleigh damping. *Journal of Sound and Vibration*, 5 :741–744, 1997. 38
- [96] A. Shekhawat, C. Nichkawde, and N. Ananthkrishnan. Modeling and stability analysis of coupled slosh-vehicle dynamics in planar atmospheric flight. In *AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, 2006. 19
- [97] M. Thomas and F. Laville. *Simulation des vibrations mécaniques par Matlab Simulink et Ansys*. Presses de l'Université du Québec, 2007. 175
- [98] F. Tisseur and K. Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review*, pages 235–286, 2001. 51, 53
- [99] M. H. Tsai and K. C. Chang. A study on modal strain energy method for viscoelastically damped structures. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 24 :311–320, 2001. 75
- [100] M. Utsumi. Sloshing and fluid structure vibration. In *The 1989 ASME pressure vessels and piping conference*, Honolulu, Hawaii, 1989. 219, 220

- [101] M. Utsumi. Theoretical determination of modal sloshing using a variational method. *Journal of pressure vessel technology*, 133, 2011. 21, 145
- [102] W. Wang, J. Li, and T. Wang. Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM. *Journal of Sound and Vibration*, 317 :739–759, 2008. 21, 76
- [103] X. Wang, X. Peng, Y. Duan, and B. Wang. Dynamics of spreading of liquid on solid surface. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 15(5) :730–737, 2007. 102
- [104] Lee R. White. The contact angle on an elastic substrate. 1. the role of disjoining pressure in the surface interface. *Journal of Colloid and Interface Science*, 258 :82–96, 2003. 101
- [105] J. Woodhouse. Linear damping models for structural vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 215 :547–569, 1998. 38
- [106] Cheng X.-D. Dynamic characteristics of liquid forced sloshing in a turning spherical tank with a spacer under low gravity. *Journal of hydrodynamics*, 20 :202–209, 2008. 21
- [107] A.-S. Yang. Investigation of liquid-gas interfacial shapes in reduced gravitational environments. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50 :1304–1315, 2008. 22
- [108] G. W. Young and S. H. Davis. A plate oscillating across a liquid interface : effects of contact angle hysteresis. *Journal of Fluid Mechanics*, 174 :327–356, 1987. 102, 148, 150
- [109] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*. Mc Graw-Hill, 2000. 33

# Annexes



## Annexe A

# Cas particuliers d'amortissement

On considère ici un problème aux valeurs propres propres (PVP) du second ordre de taille  $N$ , pour des matrices de raideur, d'amortissement et de masse  $(\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{M})$  symétriques et à coefficients réels. Les solutions du (PVP) peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\text{Trouver } (\mathbf{x}_i, \omega_i) \text{ tels que : } (-\omega_i^2 \mathbf{M} + i\omega_i \mathbf{D} + \mathbf{K})\mathbf{x}_i = 0 \quad \mathbf{x}_i \neq 0 \quad (\text{A.1})$$

$\omega_i$  et  $\mathbf{x}_i$  étant respectivement la pulsation propre et le vecteur propre du système. Dans la suite, on notera  $\mathbf{x}_i^R$  les modes calculés à partir du système conservatif, c'est à dire en prenant  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  dans (A.1).  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}_R$  sont les matrices modales contenant respectivement les modes  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_i^R$ .

Écrite sous cette forme, la matrice  $\mathbf{D}$  du problème (A.1) est une matrice d'amortissement visqueux. Lorsque la matrice  $\mathbf{D}$  dépend de la fréquence, l'amortissement est dit avec mémoire [80]. Dans le cas où  $\mathbf{D}$  est à coefficients constants, l'amortissement visqueux est dit sans mémoire.

La projection  $\mathbf{x}_R^T \mathbf{D} \mathbf{x}_R$  contient a priori des termes extra-diagonaux qui viennent coupler les modes réels. Sous certaines hypothèses que l'on fait, on va pouvoir utiliser directement la base des modes  $\mathbf{x}_i^R$  pour simplifier le système  $(\mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{M})$ . On considère ici des cas particuliers d'amortissement avec ou sans mémoire : l'amortissement proportionnel (partie A.1) et l'amortissement structural (partie A.2).

## A.1 Système à amortissement proportionnel

Dans le cas d'un amortissement sans mémoire, l'amortissement proportionnel (aussi appelé amortissement de Rayleigh ou classique) est une façon couramment utilisée de modéliser numériquement les effets dissipatifs. Elle consiste à construire une matrice  $\mathbf{D}$  comme une combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de raideur :

$$\mathbf{D} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, si  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont diagonalisables dans la même base par les modes propres réels du système conservatif,  $\mathbf{D}$  est également diagonalisable dans cette base.

Pour des matrices  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{D}$  définies positives, Caughey [19] généralise ce résultat et donne la condition nécessaire et suffisante pour que le système amorti puisse également être diagonalisé dans la base des modes propres du système conservatif associé. Cette condition s'écrit<sup>1</sup> :

$$\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{DM}^{-1}\mathbf{K} \quad (\text{A.3})$$

$\mathbf{D}$  s'écrit alors comme une série (série de Caughey) :

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} \sum_{j=0}^{N_c-1} c_j (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^j \quad (\text{A.4})$$

$\mathbf{D}$  est symétrique et on peut également écrire :

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D} = \sum_{j=0}^{N_c-1} c_j (\mathbf{KM}^{-1})^j \mathbf{M} \quad (\text{A.5})$$

On retrouve l'amortissement de Rayleigh en prenant  $N_c = 2$ .

Il est donc possible pour un amortissement proportionnel de diagonaliser simultanément les matrices  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{D}$  avec les modes réels. On écrit classiquement :

$$\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & 2\xi_i \omega_i & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

---

1. Dans [3], l'auteur généralise la condition (A.3) pour des systèmes ayant une matrice de masse singulière.

où  $\xi_i$  représente le coefficient d'amortissement associé au mode  $i$ . À partir des équations (A.2) et (A.4), on peut également donner une expression de  $\xi_i$  pour l'amortissement de Rayleigh et de Caughey en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c_j$  :

$$\begin{aligned} \text{Rayleigh :} \quad & \xi_i = \frac{a}{2\omega_i} + \frac{b\omega_i}{2} \\ \text{Caughey :} \quad & \xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \sum_{j=0}^{m-1} c_j \omega_j^{2j} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

En prémultipliant l'équation (3.1) par  $\mathbf{x}_i^T$ ,  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on obtient  $N$  équations polynomiales découplées du second ordre avec pour variable complexe  $\lambda_i$  et à coefficients réels constants. Ce qui nous permet de calculer les  $2N$  solutions conjuguées (On s'intéresse ici au cas  $\xi_i \ll 1$ ) :

$$\lambda_i = -\xi_i \omega_i \pm i \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Système à amortissement structural

On s'intéresse au cas où  $\mathbf{D}$  s'écrit sous la forme  $\mathbf{D} = \frac{\eta}{\omega} \mathbf{K}$  avec  $\omega \neq 0$ ,  $\eta$  étant un coefficient réel constant. Ce cas particulier d'amortissement, aussi appelé amortissement structural [97], peut être distingué de l'amortissement visqueux [86] du fait que son mécanisme de dissipation d'énergie est différent : la force d'amortissement structural est ici proportionnelle au déplacement et non à la vitesse.

Pour ce type d'amortissement, on considèrera donc le problème aux valeurs propres suivant :

$$\text{Trouver } (\mathbf{x}_i^R, \omega_i) \text{ tels que : } (\mathbf{K}_c - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{x}_i^R = 0 \quad \mathbf{x}_i^R \neq 0 \quad \text{avec } \mathbf{K}_c = \mathbf{K} + i\eta \mathbf{K} \quad (\text{A.9})$$

De même que pour l'amortissement proportionnel, puisque le système ne dépend que des matrices de masse et de raideur, celui-ci va être diagonalisable dans la base des modes propres réels  $\mathbf{x}_i^R$ . Il est alors possible de calculer à partir des  $2N$  équations obtenues, les  $2N$  valeurs propres complexes conjuguées deux à deux :

$$\lambda_i = -\frac{\eta \omega_i^2}{2\sqrt{\frac{\omega_i^2}{2} (1 + \sqrt{1 + \eta^2})}} \pm i \sqrt{\frac{\omega_i^2}{2} (1 + \sqrt{1 + \eta^2})} \quad (\text{A.10})$$





## Annexe B

# Rappels de Mécanique des fluides

En mécanique des fluides, le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  est défini comme le déviateur du tenseur des contraintes internes au fluide  $\boldsymbol{\sigma}$  par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{B.1})$$

où  $p$  est la pression dans le liquide.

Dans le cas des fluides Newtoniens, le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  est supposé être une fonction linéaire isotrope du tenseur des taux de déformation  $\mathbf{d}$  défini à partir du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  par :

$$2\mathbf{d} = (\mathbf{D}\mathbf{v}) + (\mathbf{D}\mathbf{v})^T \quad (\text{B.2})$$

Cette relation de linéarité s'écrit classiquement à partir de 2 paramètres  $\mu$  et  $\kappa$ , appelés respectivement *viscosité dynamique* et *viscosité en volume*<sup>1</sup> :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{d} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \quad (\text{B.3})$$

Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement du liquide (équation de Navier-Stokes) rappelée ici :

$$\rho^F \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho^F \mathbf{g} \quad (\text{B.4})$$

les forces visqueuses  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$  s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= \mu (\nabla \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla)) + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ &= \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\frac{\mu}{3} + \kappa\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

---

1. Dans la pratique,  $\kappa$  est souvent considéré comme nulle.

---

En utilisant la relation suivante :

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) \quad (\text{B.6})$$

et en faisant intervenir la vecteur de vorticité  $\vec{\omega}$  défini par :

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} \quad (\text{B.7})$$

on obtient une expression équivalente :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mu \nabla \wedge \boldsymbol{\omega} + \left( \frac{4}{3} \mu + \kappa \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.8})$$

De plus, on définit la dissipation instantanée d'énergie liée aux frottements visqueux dans le fluide par :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega_F^*} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \, d\Omega = - \int_{\Omega_F^*} \boldsymbol{\tau} : (\nabla \otimes \mathbf{v}) \, d\Omega \quad (\text{B.9})$$

En utilisant (B.3), on peut adapter cette expression au cas d'un fluide Newtonien :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega_F^*} \mu D_v \, d\Omega \quad (\text{B.10})$$

où  $D_v$  est la fonction de dissipation visqueuse volumique définie par :

$$D_v = \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = 2 \mathbf{d} : \mathbf{d} + \left( \frac{\kappa}{\mu} - \frac{2}{3} \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \quad (\text{B.11})$$

Dans son ouvrage, Lamb propose cependant une expression alternative [63, 73]. En effet, en intégrant par parties l'expression (B.9), on obtient :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega_F^*} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_F^*} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma \quad (\text{B.12})$$

Les expressions sont ici données pour une normale sortante.

## Liquide incompressible

Dans le cas d'un liquide incompressible, on a la relation :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Dans ce cas, en utilisant (B.3), (B.5) et (B.8), le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  se réduit à :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{d} \quad (\text{B.14})$$

et les forces visqueuses  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$  s'écrivent :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} = -\mu \nabla \wedge \vec{\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{B.15})$$

L'expression de la fonction de dissipation visqueuse (B.11) se simplifie en  $D_v = 2 \mathbf{d} : \mathbf{d}$ , et la dissipation d'énergie liée aux frottements visqueux dans le fluide est obtenue par :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega_F^*} 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d} \, d\Omega \quad (\text{B.16})$$

Précisons que l'expression de  $D_v$  en coordonnées cartésiennes est [63] :

$$D_v = 2 \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \quad (\text{B.17})$$

En utilisant les expressions de  $\boldsymbol{\tau}$  (B.14) et de  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$  (B.15), Lamb obtient à partir de (B.12) l'expression suivante ( $\kappa$  est supposé nul) :

$$\frac{dE}{dt} = -\mu \int_{\Omega_F^*} \boldsymbol{\omega}^2 \, d\Omega + \mu \int_{\partial\Omega_F^*} 2\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}) + \nabla \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma \quad (\text{B.18})$$

## Liquide incompressible et irrotationnel

Dans le cas d'un liquide incompressible et irrotationnel, le vecteur de vorticité est nul :

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \wedge \mathbf{v} = 0 \quad (\text{B.19})$$

on introduit alors<sup>2</sup> un potentiel de vitesse  $\chi$  tel que :

$$\mathbf{v}(t) = \nabla \chi \quad (\text{B.20})$$

ce qui donne comme expression du tenseur de taux de déformation  $\mathbf{d}$  :

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \nabla \chi + (\nabla \otimes \nabla \chi)^\top) = (\nabla \otimes \nabla) \chi \quad (\text{B.21})$$

2. La relation (B.20) ne définit pas  $\chi$  de manière unique.

Par conséquent, les forces visqueuses  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$  sont nulles :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mu \nabla \wedge \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad (\text{B.22})$$

Mais les contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  ne le sont pas :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{d} = 2\mu (\nabla \otimes \nabla)\chi \quad (\text{B.23})$$

L'expression obtenue en introduisant la relation (B.23) dans (B.16) montre que de tels mouvements irrotationnels génèrent une dissipation visqueuse :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega_F^*} \mu D_v d\Omega = - \int_{\Omega_F^*} 2\mu (\nabla \otimes \nabla)\chi : (\nabla \otimes \nabla)\chi d\Omega \quad (\text{B.24})$$

Précisons qu'en coordonnées cartésiennes, l'expression de  $D_v$  est donnée par :

$$D_v = 2 \left[ \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)^2 \right] + 4 \left[ \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{B.25})$$

D'autre part, dans le cas d'un fluide incompressible irrotationnel, on peut simplifier l'expression donnée par Lamb (B.12) en utilisant (B.22) :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= - \int_{\partial\Omega_F^*} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Sigma = - \int_{\partial\Omega_F^*} \mu ((\nabla \otimes \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \otimes \nabla)\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Sigma \\ &= - \int_{\partial\Omega_F^*} \mu \nabla \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n} d\Sigma = - \int_{\partial\Omega_F^*} \mu \nabla ((\nabla \chi)^2) \cdot \mathbf{n} d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

## Annexe C

# Étude de l'équation de Navier-Stokes linéarisée pour un liquide faiblement visqueux contenu dans un réservoir déformable.

### Présentation du problème

On reprend ici pour un réservoir de révolution déformable, la démarche suivie par l'article [5] pour un réservoir rigide et immobile. Le réservoir contient un liquide de volume  $\Omega_F^*$  considéré comme pesant, incompressible et faiblement visqueux. Le mouvement du

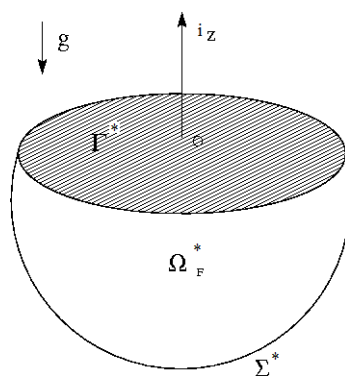


FIGURE C.1 – Schéma du réservoir étudié.

ETUDE DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES LINÉARISÉE POUR UN LIQUIDE FAIBLEMENT VISQUEUX CONTENU DANS UN RÉSERVOIR DÉFORMABLE.

---

fluide est solution de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad \text{sur } \Omega_F^* \quad (\text{C.1})$$

$\mathbf{v}$  représente le vecteur vitesse d'un point du fluide,  $p$  sa pression,  $\rho$  et  $\nu$  sont la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide.  $\mathbf{g}$  est le vecteur de force gravitationnelle opposé au vecteur unitaire  $\mathbf{i}_z$  (voir Fig. C.1). En plus de l'équation (C.1), on considère l'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible qui s'écrit :

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_F^* \quad (\text{C.2})$$

On adimensionnera par la suite les variables en prenant une longueur et un temps caractéristique :  $L$  étant une dimension caractéristique de la surface libre  $\Gamma$  et  $f_1$  la première fréquence de vibration d'un fluide parfait placé dans les mêmes conditions [5]. On a alors :

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{L f_1}, \quad \bar{t} = t f_1, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho L^2 f_1^2} \quad (\text{C.3})$$

On définit alors le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  et de Froude  $\mathcal{F}_0$  en fonction de ces paramètres :

$$\mathcal{R} = \frac{f_1 l^2}{\nu} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_0 = \frac{f_1^2 l}{g} \quad (\text{C.4})$$

On posera par la suite  $\eta = \frac{1}{\mathcal{R}}$ . On montre que  $\eta = \frac{l_\nu^2}{L^2}$  où  $l_\nu$  représente la longueur caractéristique des phénomènes visqueux (ce paramètre est introduit dans le chapitre 4).

Dans le domaine  $\Omega_F^*$ , les équations (C.1) et (C.2) s'écrivent donc en fonction des variables adimensionnées :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{t}} = -\nabla \bar{p} + \eta \Delta \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\mathcal{F}_0} \mathbf{i}_z \quad (\text{C.5})$$

$$\text{div}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.6})$$

On remarque qu'en prenant dans l'équation (C.5)  $\eta = 0$ , on obtient l'équation d'Euler linéarisée. L'hypothèse de fluide faiblement visqueux se traduira donc par un paramètre  $\eta$  petit.

Les conditions aux limites du problème sont :

- Adhérence du liquide à la paroi  $\Sigma^*$ .
- Annulation des contraintes tangentielles et normales sur la surface libre  $\Gamma^*$ .

La première condition se traduit par :  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_s$  sur  $\Sigma^*$ ,  $\mathbf{v}_s$  étant la vitesse de déplacement connue de la structure. La seconde condition va s'écrire :

$$-\bar{p} + \mathbf{n} \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n}) = 0 \quad \text{Contrainte normale nulle} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{n} \wedge \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n} = 0 \quad \text{Contrainte tangentielle nulle} \quad (\text{C.8})$$

$\bar{\boldsymbol{\tau}}$  est le tenseur des contraintes visqueuses adimensionné et  $\mathbf{n}$  la normale sortante à la surface libre. On a alors :

$$\mathbf{n} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{n}) = 2\eta \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{d}} \mathbf{n} \quad (\text{C.9})$$

$\bar{\mathbf{d}}$  est ici le tenseur du taux de déformation défini par :

$$2\bar{\mathbf{d}} = (\mathbf{D}\bar{\mathbf{v}}) + (\mathbf{D}\bar{\mathbf{v}})^\top \quad (\text{C.10})$$

où  $\otimes$  est le produit tensoriel.

## Décomposition de Helmholtz

On considère dans la suite la pulsation complexe  $\omega$  telle que, dans le domaine fréquentiel,  $\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}$  s'écrit  $\omega \bar{\mathbf{v}}$ . Pour  $\omega$  différent de 0, on écrit l'équation (C.5) sous la forme :

$$\bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\omega} \nabla \bar{p} + \frac{\eta}{\omega} \Delta \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\mathcal{F}_0 \omega} \nabla z \quad (\text{C.11})$$

$z$  étant l'abscisse suivant l'axe vertical  $\mathbf{i}_z$ . L'équation de conservation de la masse (C.6) entraîne :

$$\Delta \bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \quad (\text{C.12})$$

Dans (C.11), en remplaçant  $\Delta \bar{\mathbf{v}}$  par le résultat (C.12), on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= -\frac{1}{\omega} \nabla \bar{p} - \frac{\eta}{\omega} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\mathcal{F}_0 \omega} \nabla z \\ &= \nabla \left( -\frac{\bar{p}}{\omega} - \frac{z}{\mathcal{F}_0 \omega} \right) + \mathbf{rot} \left( -\frac{\eta}{\omega} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

On pose pour la suite :

$$\chi = -\frac{\bar{p}}{\omega} - \frac{z}{\mathcal{F}_0 \omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = -\frac{\eta}{\omega} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}} \quad (\text{C.14})$$

$\chi$  est un potentiel scalaire et  $\mathbf{A}$  un potentiel vectoriel. Ainsi,  $\bar{\mathbf{v}}$  se décompose classiquement sous la forme :

$$\bar{\mathbf{v}} = \nabla\chi + \mathbf{rot}\mathbf{A} \quad (\text{C.15})$$

On pourra se référer à [25, 43] pour une démonstration de l'existence et des conditions d'unicité des potentiels  $\chi$  et  $\mathbf{A}$  de la décomposition (aussi appelée décomposition de Helmholtz).  $\Omega_F$  est ici un domaine simplement connexe.

À partir de l'expression de  $\bar{\mathbf{v}}$  donnée par (C.15), on déduit  $\mathbf{rot}\bar{\mathbf{v}}$  :

$$\mathbf{rot}\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{A} \quad (\text{C.16})$$

Avec l'expression de  $\mathbf{A}$  donnée par (C.14) on en déduit l'équation suivante :

$$\omega\mathbf{A} + \eta\mathbf{rot}\mathbf{rot}\mathbf{A} = 0 \quad \text{sur } \Omega_F \quad (\text{C.17})$$

L'équation de conservation de la masse va alors s'écrire (en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (C.15)) :

$$\Delta\chi = 0 \quad \text{sur } \Omega_F \quad (\text{C.18})$$

On se ramène donc à un problème exprimé en fonction des potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\chi$ , les équations (C.5) et (C.6) donnant (C.17) et (C.18).

La condition aux limites sur la paroi  $\Sigma$  peut alors s'écrire (continuité des vitesses normales et tangentielles) :

$$(\nabla\chi + \mathbf{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{C.19})$$

$$(\nabla\chi + \mathbf{rot}\mathbf{A}) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{v}_S \wedge \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{C.20})$$

Les conditions aux limites (C.7) et (C.8) sur la surface libre  $\Gamma$  donnent les relations :

$$\omega^2\chi + \frac{1}{\mathcal{F}_0}\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} + 2\eta\omega\nabla(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{C.21})$$

$$\eta(\nabla(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{rot}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n})) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{C.22})$$

## Méthode des perturbations

À partir de l'expression de la vitesse donnée par (C.15) et en prenant  $\eta = 0$  c'est à dire en considérant un fluide parfait, l'expression de  $\mathbf{A}$  dans (C.14) nous donne  $\mathbf{A} = 0$  et



donc :

$$\bar{\mathbf{v}} = \nabla \chi \quad (\text{C.23})$$

Le potentiel  $\mathbf{A}$ , qui exprime la partie rotationnelle du fluide, est donc induit par les phénomènes visqueux.

On souhaite maintenant caractériser le comportement de  $\mathbf{A}$  dans le volume en utilisant la méthode des perturbations.

L'équation (C.17) ainsi que les conditions aux limites (équations (C.19) à (C.22)) peuvent s'écrire sous la forme :

$$E_0(w) + \eta E_1(w) + o(\eta) = 0 \quad (\text{C.24})$$

$w$  est un vecteur contenant les inconnues du problème,  $E_0$  et  $E_1$  des applications, et  $\eta$  un petit paramètre. On développe alors  $w$  autour d'une valeur  $w_0$  solution des équations du mouvement et des conditions initiales pour  $\eta = 0$ .  $w$  va s'écrire :  $w = w_0 + \eta w_1 + \dots$ . On s'intéresse ainsi à l'effet de petites perturbations autour de la valeur  $w_0$ .

Cependant, en prenant  $\mathbf{A}_0$ ,  $\chi_0$  et  $\omega_0$  les premiers termes des développements de  $\mathbf{A}$ ,  $\chi$  et  $\omega$ , on obtient un système (équations (C.17) à (C.22)) insoluble :

$$\Delta \chi_0 = 0 \quad \text{sur } \Omega_F \quad (\text{C.25})$$

$$\omega_0 \mathbf{A}_0 = 0 \quad \text{sur } \Omega_F \quad (\text{C.26})$$

$$(\nabla \chi_0 + \mathbf{rot} \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{C.27})$$

$$(\nabla \chi_0 + \mathbf{rot} \mathbf{A}_0) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{v}_S \wedge \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{C.28})$$

$$\omega_0 \chi_0 + \frac{1}{\mathcal{F}_0} (\nabla \chi_0 + \mathbf{rot} \mathbf{A}_0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{C.29})$$

En effet, l'équation (C.26) donne  $\mathbf{A}_0 = 0$ , les équations (C.25), (C.27) et (C.29) donnent  $\chi_0$  et  $\omega_0$  mais l'équation (C.28) ne peut pas être vérifiée.

On peut en effet retrouver les équations locales dans le volume fluide pour un fluide parfait en faisant tendre vers 0 le coefficient de viscosité  $\nu$ , cependant, les conditions aux limites du problème visqueux et non visqueux sont différentes (adhérence du fluide à la paroi ou non) et on ne peut passer d'un problème à l'autre par un simple passage à la limite.

On fait alors un changement de variable en fonction du paramètre  $\eta$  [5] afin de ramener au même ordre  $\omega \mathbf{A}$  et une des dérivées d'ordre supérieur de  $\eta \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{A}$  de l'équation (C.17).

On se place dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  où  $\xi_1$  et  $\xi_2$

ETUDE DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES LINÉARISÉE POUR UN LIQUIDE FAIBLEMENT VISQUEUX CONTENU DANS UN RÉSERVOIR DÉFORMABLE.

---

sont les coordonnées d'un point de la surface  $\Sigma$  et  $\xi_3$  l'abscisse du point selon la normale à  $\Sigma$ . Soit un vecteur  $\mathbf{M}$  de l'espace :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{pmatrix} \quad (\text{C.30})$$

On définit alors les coefficients  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  :

$$h_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \xi_i} \right\| \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.31})$$

On considère les trois vecteurs  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  suivant :

$$\mathbf{e}_i = h_i^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \xi_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.32})$$

Les vecteurs  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  forment une base orthonormée. Soit  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  les coordonnées du potentiel  $\mathbf{A}$  dans cette base, le rotationnel s'écrit alors :

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2} \frac{\partial A^3}{\partial \xi_2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial A^2}{\partial \xi_3} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial A^1}{\partial \xi_3} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial A^3}{\partial \xi_1} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial A^2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial A^1}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.33})$$

On en déduit l'expression de  $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{A}$  :

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial A^2 h_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial A^1 h_1}{\partial \xi_2} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left( \frac{\partial A^1 h_1}{\partial \xi_3} - \frac{\partial A^3 h_2}{\partial \xi_1} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial A^3 h_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial A^2 h_2}{\partial \xi_3} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial A^2 h_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial A^1 h_1}{\partial \xi_2} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \frac{h_2}{h_3 h_1} \left( \frac{\partial A^1 h_1}{\partial \xi_3} - \frac{\partial A^3 h_3}{\partial \xi_1} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial A^3 h_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial A^2 h_2}{\partial \xi_3} \right) \right\} \right] \end{pmatrix} \quad (\text{C.34})$$

En posant  $q = \frac{\xi_3}{\epsilon}$  avec  $\epsilon = \sqrt{\eta} = \frac{l_\nu}{L}$  on peut ramener une des dérivées d'ordre élevée au même ordre que  $\omega \mathbf{A}$  (ce sont les dérivées secondes par rapport à la variable  $\xi_3$ ). L'expression (C.17) va alors s'écrire au premier ordre en  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \omega_0 A_0^1 - \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 A_0^1}{\partial q^2} &= 0 \\ \omega_0 A_0^2 - \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 A_0^2}{\partial q^2} &= 0 \\ \omega_0 A_0^3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

On obtient alors :

$$A_0^1 = C^1(\xi_1, \xi_2) \exp\left(-\frac{h_3\sqrt{\omega_0}\xi_3}{\epsilon}\right) \quad (\text{C.36})$$

$$A_0^2 = C^2(\xi_1, \xi_2) \exp\left(-\frac{h_3\sqrt{\omega_0}\xi_3}{\epsilon}\right)$$

$$A_0^3 = 0$$

Il est alors possible de déterminer  $C^1$  et  $C^2$  avec la condition aux limites (C.28). Le gradient de  $\chi_0$  s'écrit dans la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  :

$$\nabla\chi_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_3} \end{vmatrix} \quad (\text{C.37})$$

On a donc :

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_1} + \frac{h_3\sqrt{\omega_0}}{\epsilon} C^2 = v_1^S \quad (\text{C.38})$$

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_2} - \frac{h_3\sqrt{\omega_0}}{\epsilon} C^1 = v_2^S \quad (\text{C.39})$$

( $v_1^S, v_2^S, v_3^S$ ) étant les coordonnées du vecteur  $\mathbf{v}^S$  dans la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . On obtient :

$$C^1 = \frac{\epsilon}{h_2\sqrt{\omega_0}} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_2} - \frac{\epsilon}{\sqrt{\omega_0}} v_2^S \quad \text{et} \quad C^2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{\omega_0}} v_1^S - \frac{\epsilon}{h_1\sqrt{\omega_0}} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_1} \quad (\text{C.40})$$

En injectant ces valeurs dans (C.36), il est possible d'en déduire les expressions de  $\mathbf{A}_0$  et  $\mathbf{rot}\mathbf{A}_0$  :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{vmatrix} \frac{\epsilon}{\sqrt{\omega_0}} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_2} - v_2^S \right)_{\Sigma} \exp\left(-h_3 \frac{\sqrt{\omega_0}\xi_3}{\epsilon}\right) \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{\omega_0}} \left( v_1^S - \frac{1}{h_1} \frac{\partial\chi_0}{\partial\xi_1} \right)_{\Sigma} \exp\left(-h_3 \frac{\sqrt{\omega_0}\xi_3}{\epsilon}\right) \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{C.41})$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{A}_0 = \begin{vmatrix} \left( -\frac{\sqrt{\omega_0}}{\epsilon} - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_3} \right) C^2 \exp\left(-h_3 \frac{\sqrt{\omega_0}\xi_3}{\epsilon}\right) \\ \left( -\frac{\sqrt{\omega_0}}{\epsilon} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_3} \right) C^1 \exp\left(-h_3 \frac{\sqrt{\omega_0}\xi_3}{\epsilon}\right) \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} C^2 + h_2 \frac{\partial C^2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} C^1 + h_1 \frac{\partial C^1}{\partial \xi_2} \right) \exp\left(-h_3 \frac{\sqrt{\omega_0}\xi_3}{\epsilon}\right) \end{vmatrix} \quad (\text{C.42})$$

On observe que  $\mathbf{A}_0$  tend vers 0 lorsque la viscosité tend vers 0 (c'est à dire  $\epsilon$  tend vers 0).

De plus,  $\mathbf{rot}\mathbf{A}_0$  décroît exponentiellement lorsque l'on s'éloigne de la paroi. Le calcul des

ETUDE DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES LINÉARISÉE POUR UN LIQUIDE FAIBLEMENT VISQUEUX CONTENU DANS UN RÉSERVOIR DÉFORMABLE.

---

termes  $\omega_0$  et  $\chi_0$  peut alors se faire en utilisant les formules (C.25), (C.27) et (C.29) [5].

En conclusion, on retiendra que le champ de vitesse (et de déplacement) dans un fluide faiblement visqueux tend vers celui d'un fluide non visqueux irrotationnel, partout sauf dans une couche limite proche de la paroi (sur une épaisseur de quelques  $l_\nu$ ).

## Annexe D

# Expression de la variation d'un volume

Soit  $\Omega^0$  la configuration initiale d'un domaine volumique repéré par le vecteur position  $\mathbf{X}_0$ . Pour une configuration quelconque  $\Omega(\mathbf{U})$  repérée par le vecteur  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}$  étant le déplacement entre  $\Omega^0$  et  $\Omega$ . Le volume  $V$  du domaine  $\Omega$  est donné par :

$$V(\mathbf{U}) = \int_{\Omega(\mathbf{U})} d\Omega = \int_{\Omega^0} \det(\mathbf{F}(\mathbf{U})) d\Omega^0 \quad (\text{D.1})$$

$\mathbf{F}$  représente le gradient de la déformation volumique que l'on définit par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}_{\mathbf{X}_0} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0} \quad (\text{D.2})$$

La variation du volume  $V$  dans une direction quelconque  $\delta \mathbf{u}$  va donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{U}} [V] (\delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \delta [d\Omega] (\delta \mathbf{u}) \\ &= \int_{\Omega^0} \delta [\det(\mathbf{F})] (\delta \mathbf{u}) d\Omega^0 \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\delta [\det(\mathbf{F})] (\delta \mathbf{u}) = \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{U}} (\delta \mathbf{u}) = \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} (\delta \mathbf{u}) = \frac{\partial \det(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} (\delta [\mathbf{F}] (\delta \mathbf{u})) \quad (\text{D.3})$$

On cherche donc à calculer la dérivée de  $\det(\mathbf{F})$  par rapport à  $\mathbf{F}$  dans la direction  $\delta [\mathbf{F}] (\delta \mathbf{u})$ . Puisque  $\det(\mathbf{F})$  est le rapport non nul entre deux volumes élémentaires,  $\mathbf{F}$  est inversible

---

et on a :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{F} + \epsilon \delta[\mathbf{F}](\boldsymbol{\delta u})) &= \det(\mathbf{F}(\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\boldsymbol{\delta u}))) \\
&= \det(\mathbf{F}) \det(\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\boldsymbol{\delta u})) \\
&= \det(\mathbf{F}) (1 + \epsilon \operatorname{Tr}(\mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\boldsymbol{\delta u}))) + o(\epsilon) \quad (\text{D.4})
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\delta[\det(\mathbf{F})](\boldsymbol{\delta u}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\det(\mathbf{F} + \epsilon \delta[\mathbf{F}](\boldsymbol{\delta u})) - \det(\mathbf{F})}{\epsilon} = \det(\mathbf{F}) \operatorname{Tr}(\mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\boldsymbol{\delta u})) \quad (\text{D.5})$$

Or  $\mathbf{F}$  peut écrire  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}_0}$ , et on a donc :

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{F}^{-1} \delta[\mathbf{F}](\boldsymbol{\delta u})) = \operatorname{Tr}\left(\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \mathbf{X}_0}\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\delta u}}{\partial \mathbf{X}}\right) = \operatorname{Tr}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\delta u}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\delta u}) \quad (\text{D.6})$$

On peut donc réécrire l'expression (D.3) :

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{U}}[V](\boldsymbol{\delta u}) &= \int_{\Omega^0} \delta[\det(\mathbf{F})](\boldsymbol{\delta u}) d\Omega^0 \\
&= \int_{\Omega^0} \operatorname{div}(\boldsymbol{\delta u}) \det(\mathbf{F}) d\Omega^0 \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\delta u}) d\Omega \quad (\text{D.7})
\end{aligned}$$

## Annexe E

# Fluide ballottant dans un réservoir fixe

On s'intéresse dans cette annexe à l'étude d'un fluide pesant et non visqueux ballottant dans un réservoir à parois rigides; on souhaite établir les équations de ce système conservatif.

Les systèmes à l'état naturel et à l'équilibre sont supposés identiques, avec une surface libre plane. On notera  $\Omega_0^F$ ,  $\Gamma_0$  et  $\Sigma_0$  respectivement le domaine fluide, la surface libre et l'interface Fluide-Structure dans l'état d'équilibre qui est l'état de référence. Ainsi, seule la surface libre est en mouvement et on note  $\Gamma$  la surface en mouvement autour de  $\Gamma_0$  (Fig. E.1).

La démarche jusqu'alors utilisée consistait à définir la formulation variationnelle en fonction d'un déplacement  $\mathbf{U}^F$  quelconque (étude statique) puis à linéariser cette formulation autour de l'état statique pour des petits déplacements  $\mathbf{u}^F$ . Ici, l'état d'équilibre est connu et les déplacements du fluide sont de faible amplitude et directement notés  $\mathbf{u}^F$ .

### Expression du Lagrangien

Dans cette étude, le fluide est considéré comme incompressible et l'interface  $\Sigma_0$  est fixe. On introduit ces deux contraintes à l'aide de multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  et  $\mu$ .

Dans le cadre des petits déplacements, ces contraintes s'expriment en fonction du déplacement et non des vitesses. Ainsi, l'incompressibilité du fluide est donnée par  $\text{div}(\mathbf{u}^F) = 0$  dans le volume  $\Omega_0^F$  et la condition aux limites aux parois s'écrit :  $\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 = 0$  sur  $\Sigma_0$ .

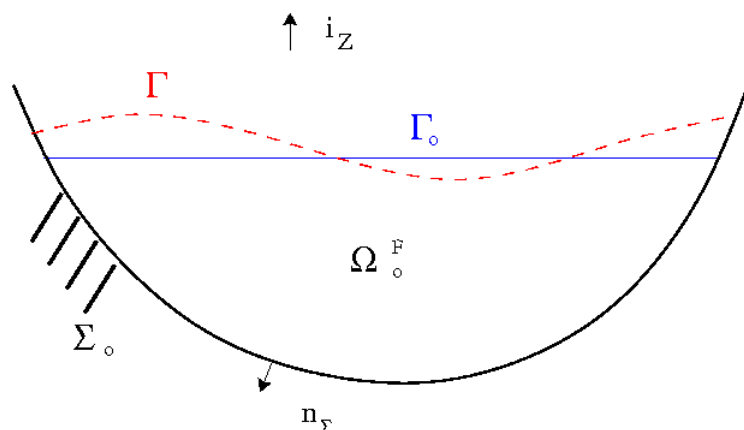


FIGURE E.1 – Configuration du problème.  $\mathbf{n}_\Sigma$  est la normale sortante à l'interface fixe  $\Sigma_0$  et  $\mathbf{i}_z$  le vecteur unitaire selon la vertical. Seul le fluide est en mouvement et peut balloter.

En notant  $E_P$  et  $E_C$  l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du système, le Lagrangien va donc s'écrire :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^F, \dot{\mathbf{u}}^F, \lambda, \mu) = E_C(\dot{\mathbf{u}}^F) - E_P(\mathbf{u}^F) + \int_{\Sigma_0} \mu \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma d\Sigma + \int_{\Omega_0^F} \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}^F) d\Omega \quad (\text{E.1})$$

L'énergie cinétique du système est l'énergie cinétique du fluide qui s'écrit classiquement sous la forme quadratique :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^F} \rho^F (\dot{\mathbf{u}}^F)^2 d\Omega \quad (\text{E.2})$$

avec  $\rho^F$  la masse volumique du fluide et  $\dot{\mathbf{u}}^F$  la dérivée temporelle de  $\mathbf{u}^F$ .

De plus, la seule énergie potentielle en jeu est ici l'énergie potentielle de pesanteur du fluide. Cette énergie peut également s'écrire sous forme quadratique en fonction de l'élévation verticale de la surface libre [78] :

$$E_P = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z)^2 d\Gamma \quad (\text{E.3})$$

$g$  étant la pesanteur terrestre constante.

Enfin, on notera respectivement  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  les deux intégrales de l'expression (E.1) servant à introduire les contraintes de continuité à l'interface fluide-structure et d'incompressibilité.

## Étude dynamique

On applique alors le principe de moindre action introduit dans la partie 5.3, avec  $\mathcal{S}$  l'action (voir relation (5.15)). Le Lagrangien dépend des variables  $(\mathbf{u}^F, \dot{\mathbf{u}}^F, \mu, \lambda)$  et les



équations du système sont donc données par :

$\delta_{\mathbf{u}^F} [\mathcal{S}(\mathbf{u}^F, \dot{\mathbf{u}}^F, \mu, \lambda)] (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}^0 \times \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}^0$	(a)	(E.4)
$\delta_{\mu} [\mathcal{S}(\mathbf{u}^F, \dot{\mathbf{u}}^F, \mu, \lambda)] (\delta \mu) = 0 \quad \forall \delta \mu \in \mathbb{R}$	(b)	
$\delta_{\lambda} [\mathcal{S}(\mathbf{u}^F, \dot{\mathbf{u}}^F, \mu, \lambda)] (\delta \lambda) = 0 \quad \forall \delta \lambda \in \mathbb{R}$	(c)	

$\mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}^0 = \{\mathbf{U}^F \in H^1(\Omega_F^0)^3\}$  étant l'espace des fonctions admissibles  $\mathbf{u}^F$ . Les relations (b) et (c) donnent les conditions  $\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^0 = 0$  sur  $\Sigma_0$  et  $\text{div}(\mathbf{u}^F) = 0$  sur  $\Omega_F^0$ . En utilisant la relation (7.34), on écrit l'équation (a) de (E.4) :

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega_F^0} \rho^F \ddot{\mathbf{u}}^F \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Omega - \int_{\Gamma_0} \rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_Z) (\delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_Z) d\Gamma \\
 + \int_{\Sigma_0} \mu \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} d\Sigma + \int_{\Omega_F^0} \lambda \text{div}(\delta \mathbf{u}^F) d\Omega = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^F \in \mathcal{C}_u
 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

La surface libre étant plane et horizontale (les énergies surfaciques sont négligées) on choisit le vecteur  $\mathbf{i}_z$  pour désigner la normale sortante de la surface  $\Gamma_0$ . En intégrant par parties le terme d'incompressibilité on a :

$$\int_{\Omega_F^0} \lambda \text{div}(\delta \mathbf{u}^F) d\Omega = - \int_{\Omega_F^0} \nabla \lambda \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Omega + \int_{\Sigma_0} \lambda \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Sigma} d\Sigma + \int_{\Gamma_0} \lambda \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_Z d\Gamma \quad (\text{E.6})$$

À l'aide des relations (E.5) et (E.6) on peut exprimer les multiplicateurs de Lagrange  $\mu$  et  $\lambda$ . Pour cela, on considère dans un premier temps des fonctions test  $\delta \mathbf{u}^F$  nulles sur le bord du domaine  $\Omega_0^F$ , on en déduit la relation :

$$\nabla \lambda = -\rho^F \ddot{\mathbf{u}}^F \quad \text{sur } \Omega_0^F \quad (\text{E.7})$$

En prenant le rotationnel de cette expression, on montre que le fluide est irrotationnel et  $\text{rot}(\mathbf{u}^F) = 0$ .

En réinjectant la relation (E.7) dans (E.5), on déduit les relations suivantes sur  $\Gamma_0$  et  $\Sigma_0$  en prenant respectivement des fonctions test  $\delta \mathbf{u}^F$  nulles sur  $\Sigma_0$  puis  $\Gamma_0$  :

$$\lambda = \rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_Z) \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{E.8})$$

$$\mu = -\lambda \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (\text{E.9})$$

On souhaite maintenant éliminer les multiplicateurs de Lagrange par l'introduction d'une variable inconnue  $\varphi$  à la place de  $\mathbf{u}^F$ . Afin de décrire le mouvement irrotationnel du fluide

on pose :

$$\mathbf{u}^F = \nabla \varphi \quad (\text{E.10})$$

$\varphi$  étant défini à une constante près, on choisit la condition d'unicité définie par la forme linéaire  $l$  tel que  $l(\varphi) = 0$  et  $l(1) \neq 0$ . On note  $\mathcal{C}_\varphi$  l'espace d'admissibilité des fonctions  $\varphi$  et  $\mathcal{C}_\varphi^*$  l'espace d'admissibilité avec prise en compte de cette condition d'unicité. La solution recherchée  $\varphi$  appartient donc à  $\mathcal{C}_\varphi^*$ .

Les relations (E.7), (E.8) et (E.9) vont alors s'écrire :

$$\lambda = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi \quad \text{sur } \Omega_0^F \quad (\text{E.11})$$

$$\lambda = \rho^F g(\nabla \varphi \cdot \mathbf{i}_Z) \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{E.12})$$

$$\mu = \rho^F \ddot{\varphi} - \pi \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (\text{E.13})$$

$\pi$  étant une constante d'intégration. La relation (E.11) est valable sur le domaine  $\Omega_0^F$  et donc sur  $\Gamma_0$ . En reportant l'expression de  $\lambda$  donnée par (E.11) dans (E.12), on retrouve l'équation locale de la surface libre donnée dans [78] :

$$\rho^F g(\nabla \varphi \cdot \mathbf{i}_Z) = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{E.14})$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont donc des fonctions de  $\mathbf{u}^F$  et l'on souhaite maintenant donner une expression du problème en  $\varphi$ , c'est à dire en supprimant les multiplicateurs de Lagrange. Il s'agit donc d'exprimer le Lagrangien réduit qui n'est alors plus qu'une fonction de  $\mathbf{u}^F$ . En supprimant les multiplicateurs de Lagrange, on supprime les équations (b) et (c) du problème (E.4). Le nouveau problème que l'on écrit est équivalent si l'on considère la condition d'incompressibilité  $\text{div}(\mathbf{u}^F) = 0$  dans  $\Omega_F^0$  et la condition aux limites à l'interface fluide structure  $\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 = 0$ . Le problème (E.4) se réécrit :

$\delta [\mathcal{S}(\mathbf{u}^F)]^0(\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) \in \mathcal{C}_{UF}^0 \times \mathcal{C}_{UF}^0$	(a)	(E.15)	
$\text{div}(\mathbf{u}^F) = 0$	sur $\Omega_F^0$		(b)
$\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 = 0$	sur $\Sigma^0$		(c)

En considérant  $\delta \mathbf{u}^F = \nabla \delta \varphi$ , le terme d'incompressibilité  $\mathcal{I}$  de la formule (E.1) va s'écrire :

$$\delta [\mathcal{I}]^0(\delta \mathbf{u}^F) = \int_{\Omega_F} \lambda \text{div}(\delta \mathbf{u}^F) d\Omega_F + \int_{\Omega_F^0} \delta [\lambda] (\delta \mathbf{u}^F) \text{div}(\mathbf{u}^F) d\Omega_F \quad (\text{E.16})$$

Avec :

$$\delta [\lambda]^0 (\delta \mathbf{u}^F) = -\rho^F \delta \ddot{\varphi} \quad (\text{E.17})$$

En utilisant le changement de variable (E.10), l'expression (E.16) peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \delta [\mathcal{I}]^0 (\delta \mathbf{u}^F) = & 2 \int_{\Omega_F^0} \rho^F \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \ddot{\varphi} d\Omega_F + \int_{\Gamma^0 \cup \Sigma^0} (-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi) \nabla \delta \varphi \cdot \mathbf{n}^* dS \\ & - \int_{\Gamma^0 \cup \Sigma^0} \rho^F \delta \ddot{\varphi} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

De même, à l'aide de la relation (E.13), on réécrit le terme de couplage  $\mathcal{C}$  :

$$\delta [\mathcal{C}]^0 (\delta \mathbf{u}^F) = - \int_{\Sigma^0} (-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi) \nabla \delta \varphi \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 d\Sigma + \int_{\Sigma^0} \rho^F \delta \ddot{\varphi} \nabla \delta \varphi \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 d\Sigma \quad (\text{E.19})$$

On réécrit également le terme d'énergie cinétique du fluide à l'aide du changement de variable (E.10) :

$$\delta [E_C^F]^0 (\delta \mathbf{u}^F) = \int_{\Omega_F^0} \rho^F \nabla \dot{\varphi} \cdot \nabla \delta \dot{\varphi} d\Omega_F^* \quad (\text{E.20})$$

La relation (a) du problème (E.15) s'écrit :

$$\delta [\mathcal{S}(\mathbf{u}^F)] (\delta \mathbf{u}^F) = 0 = \int_{\Omega_0^F} \rho^F \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \ddot{\varphi} d\Omega + \int_{\Gamma^0} \rho^F \delta \ddot{\varphi} (\nabla \varphi \cdot \mathbf{i}_z) d\Gamma \quad \forall \delta \varphi \in \mathcal{C}_\varphi \quad (\text{E.21})$$

En utilisant l'équation de la surface libre (E.14) on a :

$$\int_{\Omega_0^F} \rho^F \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \ddot{\varphi} d\Omega + \frac{\rho^F}{g} \int_{\Gamma_0} \ddot{\varphi} \delta \ddot{\varphi} d\Gamma - \frac{1}{g} \int_{\Gamma_0} \pi \delta \ddot{\varphi} d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \varphi \in \mathcal{C}_\varphi \quad (\text{E.22})$$

Cette formulation est en  $\delta \ddot{\varphi}$  et on remplace dans la suite  $\delta \ddot{\varphi}$  par  $\delta \varphi$ , car cette équation variationnelle est vraie pour tout  $\delta \ddot{\varphi}$ .

On remarque de plus que pour  $\delta \varphi = 1$ , la condition d'unicité permet d'obtenir :

$$\int_{\Gamma_0} \pi d\Gamma = 0 \quad (\text{E.23})$$

et donc :  $\pi = 0$ .

Enfin, en prenant des fonctions test  $\delta \varphi$  dans  $\mathcal{C}_\varphi^*$  l'expression (E.22) se simplifie et la formulation variationnelle du fluide va s'écrire :

$$\exists \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^* \text{ tel que : } \int_{\Omega_0^F} \rho^F \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \varphi d\Omega + \frac{\rho^F}{g} \int_{\Gamma_0} \varphi \delta \varphi d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \varphi \in \mathcal{C}_\varphi^* \quad (\text{E.24})$$

On rappelle comme le montre la relation (7.69),  $\mathcal{C}_\varphi^*$  est un sous espace de  $\mathcal{C}_\varphi$ . On remarque que l'on peut restreindre l'espace des fonctions test  $\mathcal{C}_\varphi$  à  $\mathcal{C}_\varphi^*$  puisque le cas où  $\delta \varphi$  est constant n'apporte pas d'information supplémentaire ( $0 = 0$ ).

## Conclusion

Dans l'étude de ce cas simplifié, on a pu appliquer le Principe de Moindre Action afin de déterminer la formulation variationnelle du problème conservatif pour un fluide pesant ballottant en cavité rigide. On retrouve bien les opérateurs obtenus à partir de l'équation d'Euler linéarisé dans [78].

De plus, on remarque l'importance d'introduire la loi de comportement du fluide (ici l'incompressibilité) par un multiplicateur de Lagrange. En effet, sans ce terme, on voit que l'équation (E.7) n'a plus de sens et donne  $\ddot{\mathbf{u}}^F = 0$  dans  $\Omega_0^F$ .

## Annexe F

# Fluide ballottant dans un réservoir élastique

On s'intéresse dans cette annexe à l'étude d'un fluide pesant ballottant dans un réservoir élastique. Ce cas a été étudié dans [91] en prenant en compte les effets de précontraintes statiques sur l'interface fluide-structure. L'auteur utilise cependant une méthode différente en partant des équations locales pour arriver à une formulation variationnelle linéarisée autour d'un état fixe en utilisant le transport Lagrangien. On souhaite ici obtenir une formulation identique en utilisant le principe de moindre action afin d'illustrer la manière par laquelle se fait le couplage entre l'équation du fluide et de la structure avec l'utilisation d'un multiplicateur de Lagrange. On utilisera donc les expressions des énergies déjà introduites dans les chapitres 6 et 7, ainsi que la paramétrisation détaillée dans la partie 5.2.

### Étude statique

Dans un premier temps, on souhaite écrire la formulation variationnelle qui va nous permettre de calculer l'état de référence autour duquel on va linéariser le problème. On considèrera le déplacement de la structure  $\mathbf{U}_*^S$  et du fluide  $\mathbf{U}_*^F$  entre l'état naturel et l'état d'équilibre (voir Fig. 5.7), comme infinitésimal ( $\Omega_*^F$  est donc confondu avec  $\Omega_0^F$ )

Les énergies potentielles du système sont l'énergie potentielle de pesanteur du fluide  $E_{pes}(\mathbf{U}^F)$  ainsi que l'énergie potentielle élastique de la structure  $E_{elas}(\mathbf{U}^S)$ . De plus, on utilise les multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$  et  $M$  afin d'introduire les contraintes d'incom-

pressibilité et le couplage à l'interface Fluide Structure à l'aide des termes précédemment introduits dans la partie 6 :  $\mathcal{I}(\mathbf{U}^F, \Lambda)$  et  $\mathcal{C}_\Sigma(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, M)$ . L'énergie cinétique est ici nulle et le Lagrangien est donc donné par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, \Lambda, M) = - (E_{pes}(\mathbf{U}^F) + E_{elas}(\mathbf{U}^S)) + \mathcal{I}(\mathbf{U}^F, \Lambda) + \mathcal{C}_\Sigma(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, M) \quad (\text{F.1})$$

Le problème statique va donc s'écrire :

$$\begin{array}{l} \delta_{\mathbf{U}^F} [\mathcal{L}]^0(\delta \mathbf{u}^F) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^F \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}^0 \\ \delta_{\mathbf{U}^S} [\mathcal{L}]^0(\delta \mathbf{u}^S) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S}^0 \\ \delta_\Lambda [\mathcal{L}]^0(\delta \lambda) = 0 \quad \forall \delta \lambda \in \mathbb{R} \\ \delta_M [\mathcal{L}]^0(\delta \mu) = 0 \quad \forall \delta \mu \in \mathbb{R} \end{array} \quad (\text{F.2})$$

$\mathcal{C}_{\mathbf{U}^F}^0, \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S}^0$  étant introduit dans la partie 6.2 (voir relation (6.1)). On souhaite maintenant exprimer la première relation afin d'obtenir une expression des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda^0$  et  $M^0$  à l'état d'équilibre. On rappelle l'expression de la variation de chacune des énergies par rapport à  $\mathbf{U}^F$  autour de l'état d'équilibre :

$$\begin{aligned} \delta [E_{pes}]^0(\delta \mathbf{u}^F) &= \rho^F g \int_{\Gamma^0} Z^0 \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^0 \, d\Gamma + \rho^F g \int_{\Sigma^0} Z^0 \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 \, d\Sigma \\ \delta [\mathcal{I}]^0(\delta \mathbf{u}^F) &= \int_{\Gamma^0} \Lambda^0 \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^0 \, d\Gamma + \int_{\Sigma^0} \Lambda^0 \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 \, d\Sigma - \int_{\Omega_0^F} \nabla \Lambda^0 \cdot \delta \mathbf{u}^F \, d\Omega^F \\ \delta [\mathcal{C}_\Sigma]^0(\delta \mathbf{u}^F) &= - \int_{\Sigma^0} M^0 \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 \, d\Sigma \end{aligned}$$

L'équation fluide du problème (F.2) va s'écrire :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_0^F} \nabla \Lambda^0 \cdot \delta \mathbf{u}^F \, d\Omega^F + \int_{\Gamma^0} (\Lambda^0 - \rho^F g Z^0) \mathbf{n}_\Gamma^0 \cdot \delta \mathbf{u}^F \, d\Gamma + \\ \int_{\Sigma^0} (\Lambda^0 - M^0 - \rho^F g Z^0) \mathbf{n}_\Sigma^0 \cdot \delta \mathbf{u}^F \, d\Sigma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^F \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^F} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

En prenant des fonctions test  $\delta \mathbf{u}^F$  nulles sur le bord  $\partial\Omega_0^F$  on en déduit :

$$\nabla \Lambda^0 = 0 \Rightarrow \Lambda^0 \text{ constant sur } \Omega_0^F$$

La relation (F.3) permet alors d'obtenir une expression des multiplicateurs de Lagrange pour le système à l'équilibre en prenant respectivement des fonctions tests  $\delta \mathbf{u}^F$  nulles sur

$\Sigma$  puis  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} \Lambda^0 = \rho^F g Z^0 & \text{sur } \Gamma^0 \\ M^0 = \Lambda^0 - \rho^F g Z^0 & \text{sur } \Sigma^0 \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

La surface libre étant plane,  $Z^0$  est constant sur  $\Gamma^0$  et on choisira  $Z^0 = 0$  sur  $\Gamma^0$  (choix de l'origine du repère). Le multiplicateur  $M^0$  peut donc être considéré comme la pression statique du fluide s'exerçant sur la paroi  $\Sigma^0$  :

$$\boxed{\begin{aligned} \Lambda^0 &= 0 & \text{sur } \Omega^0 \\ M^0 &= -\rho^F g Z^0 & \text{sur } \Sigma^0 \end{aligned}} \quad (\text{F.5})$$

## Étude dynamique

On souhaite maintenant écrire les équations linéarisées de la dynamique du système fluide structure (en prenant en compte l'énergie cinétique). Il s'agit donc de linéariser les énergies prises en compte en décomposant les variables du problème  $(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, \Lambda, M)$  autour de la position d'équilibre comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{U}^F &= \mathbf{U}_0^F + \mathbf{u}^F = \mathbf{u}^F \\ \mathbf{U}^S &= \mathbf{U}_0^S + \mathbf{u}^S = \mathbf{u}^S \\ \Lambda &= \Lambda^0 + \lambda = \lambda \\ M &= M^0 + \mu \end{aligned}} \quad (\text{F.6})$$

où  $(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S, \lambda, \mu)$  représentent les petits déplacements et les petites variations des multiplicateurs de Lagrange autour de la position de référence. De même que pour l'étude avec capillarité, on utilisera les notations  $\mu_F$  et  $\mu_S$  introduites dans 7.1 pour désigner respectivement les variations suivant le fluide ou le solide. Le Lagrangien du système va donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, \dot{\mathbf{U}}^F, \dot{\mathbf{U}}^S, \Lambda, M) &= \left( E_C^F(\dot{\mathbf{U}}^F) + E_C^S(\dot{\mathbf{U}}^S) \right) - \\ &E_{pes}(\mathbf{U}^F) + \mathcal{I}(\mathbf{U}^F, \Lambda) + \mathcal{C}_\Sigma(\mathbf{U}^F, \mathbf{U}^S, M) \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

où  $E_C^F$  et  $E_C^S$  sont respectivement les énergies cinétiques du fluide et de la structure.

Le principe de moindre action permet alors d'écrire les équations de la dynamique qui sont

données par les relations suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \delta_{U^F} [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{u}^F, \delta \dot{\mathbf{u}}^F) \in \mathcal{C}_{U^F} \times \mathcal{C}_{U^F} \\
 \delta_{U^S} [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^S, \delta \dot{\mathbf{u}}^S) = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{u}^S, \delta \dot{\mathbf{u}}^S) \in \mathcal{C}_{U^S} \times \mathcal{C}_{U^S} \\
 \delta_{\Lambda} [\mathcal{S}] (\delta \lambda) = 0 \quad \forall \delta \lambda \in \mathbb{R} \\
 \delta_M [\mathcal{S}] (\delta \mu) = 0 \quad \forall \delta \mu \in \mathbb{R}
 \end{array} \tag{F.8}$$

$\mathcal{C}_{U^F}$ ,  $\mathcal{C}_{U^S}$  étant introduit dans la partie 6.2.

De même que pour l'étude dynamique faite dans la partie 7, on linéarise le problème (F.8) en écrivant le développement limité pour chacune des relations autour de l'état statique, on obtient :

$$\begin{array}{l}
 \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \dot{\mathbf{u}}^F)]^*}{\partial \dot{U}^F} (\dot{\mathbf{u}}^F) + \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^F)]^*}{\partial U^F} (\mathbf{u}^F) + \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^F)]^*}{\partial \Lambda} (\lambda) + \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^F)]^*}{\partial M} (\mu_F) = 0 \quad \text{(a)} \\
 \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \dot{\mathbf{u}}^S)]^*}{\partial \dot{U}^S} (\dot{\mathbf{u}}^S) + \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^S)]^*}{\partial U^S} (\mathbf{u}^S) + \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \mathbf{u}^S)]^*}{\partial M} (\mu_S) = 0 \quad \text{(b)} \\
 \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \lambda)]^*}{\partial U^F} (\mathbf{u}^F) = 0 \quad \text{(c)} \\
 \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \mu)]^*}{\partial U^F} (\mathbf{u}^F) + \frac{\partial [\delta [\mathcal{S}] (\delta \mu)]^*}{\partial U^S} (\mathbf{u}^S) = 0 \quad \text{(d)}
 \end{array} \tag{F.9}$$

Une expression des dérivées de chacune de ces énergies est donnée par les relations (7.7), (7.8), (7.9), (7.16), (7.20), (7.21) et (7.31).

## Équation Fluide

En écrivant l'équation du fluide dans un premier temps, on peut exprimer les multiplicateurs de Lagrange ( $\lambda$ ,  $\mu_F$ ) en fonction des variables linéarisées du problème ( $\mathbf{u}^F$ ,  $\mathbf{u}^S$ ).



La formulation variationnelle du fluide (équation (a) de (F.9)) s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\Omega_F^0} \rho^F \mathbf{u}^F \delta \dot{\mathbf{u}}^F d\Omega_F - \int_{\Omega_F^0} \nabla \lambda \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Omega_F + \int_{\Gamma^0} \left( -\rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) + \lambda \right) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^0 d\Gamma + \int_{\Sigma^0} \left( \lambda - \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) - \mu_F \right) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 d\Sigma + \int_{\Sigma^0} \underbrace{\left( -\rho^F g Z^0 + M^0 \right)}_A \delta \mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_\Sigma^0 d\Sigma \right) dt = 0 \quad (\text{F.10})$$

Le terme  $A$  s'annule d'après les relations (F.5) obtenues dans l'étude statique. En intégrant par parties le terme d'énergie cinétique, la relation (F.10) étant valable pour toute fonction  $\delta \mathbf{u}^F$  :

$$\int_{\Omega_F^0} \left( -\rho^F \ddot{\mathbf{u}}^F - \nabla \lambda \right) \cdot \delta \mathbf{u}^F d\Omega_F + \int_{\Gamma^0} \left( -\rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) + \lambda \right) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Gamma^0 d\Gamma + \int_{\Sigma^0} \left( -\rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) + \lambda + \mu_F \right) \delta \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 d\Sigma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^F \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}^F} \quad (\text{F.11})$$

Avec des fonctions test  $\delta \mathbf{u}^F$  nulles sur le bord du domaine  $\Omega_F^*$ , on en déduit la relation :

$$\nabla \lambda = -\rho^F \ddot{\mathbf{u}}^F \quad \text{sur } \Omega_F^0 \quad (\text{F.12})$$

En prenant le rotationnel de cette expression, on a  $\text{rot}(\mathbf{u}^F) = 0$  et on montre bien que le fluide est irrotationnel. En reportant (F.12) dans (F.11) on obtient l'expression de la variable  $\mu_F$  en considérant des fonctions test nulles sur  $\Gamma^0$  :

$$\mu_F = \lambda - \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \quad \text{sur } \Sigma^0 \quad (\text{F.13})$$

De même, en prenant des fonctions test nulles sur  $\Sigma^0$  :

$$\lambda = \rho^F g (\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \quad \text{sur } \Gamma^0 \quad (\text{F.14})$$

On souhaite maintenant introduire une nouvelle variable  $\varphi$  (potentiel de déplacement) à la place de  $\mathbf{u}^F$ , on pose :

$$\mathbf{u}^F = \nabla \varphi \quad \text{sur } \Omega_F^0 \quad (\text{F.15})$$

D'après (F.12),  $\nabla \lambda$  est une fonction de  $\mathbf{u}^F$  et  $\lambda$  est un scalaire défini à une constante près, cette constante pouvant dépendre linéairement de  $\mathbf{u}^S$ . On notera  $\pi$  cette constante et on a :

$$\lambda = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi(\mathbf{u}^S) \quad (\text{F.16})$$

L'unicité de la constante  $\pi$  est assurée par la forme linéaire  $l$  telle que  $l(\varphi) = 0$  et  $l(1) \neq 0$ .

On prendra :

$$l(\varphi) = \int_{\Gamma^0} \varphi d\Gamma \quad (\text{F.17})$$

Les relations (F.14) et (F.13) s'écrivent donc :

$$-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi = \rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \quad \text{sur } \Gamma^0 \quad (\text{F.18})$$

$$\mu_F = -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi(\mathbf{u}^S) - \rho^F g(\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{i}_z) \quad \text{sur } \Sigma^0 \quad (\text{F.19})$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont donc des fonctions des variables  $\mathbf{u}^F$  et  $\mathbf{u}^S$ . On souhaite maintenant supprimer ces multiplicateurs de Lagrange et se ramener à une expression classique du problème couplé en  $(\varphi, \mathbf{u}^S)$ . Il s'agit donc d'exprimer le Lagrangien réduit qui n'est alors plus qu'une fonction de  $\mathbf{U}^F$  et  $\mathbf{U}^S$ . On s'intéresse alors à la réécriture des termes d'incompressibilité  $\mathcal{I}$  et de couplage  $\mathcal{C}_\Sigma$ .

En supprimant les multiplicateurs de Lagrange on supprime les équations (c) et (d) du problème (F.9). Le nouveau problème que l'on écrit est équivalent si l'on considère la condition d'incompressibilité  $\text{div}(\mathbf{u}^F) = 0$  dans  $\Omega_F^0$  et la condition aux limites à l'interface fluide structure  $\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0$ .

Le problème (F.9) se réécrit :

$\frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\dot{\mathbf{u}}^F)]^*}{\partial\dot{\mathbf{U}}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) = 0 \quad \forall (\delta\mathbf{u}^F, \delta\dot{\mathbf{u}}^F) \in \mathcal{C}_{U^F} \times \mathcal{C}_{U^F} \quad (\text{a})$
$\frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\dot{\mathbf{u}}^S)]^*}{\partial\dot{\mathbf{U}}^S}(\mathbf{u}^S) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{S}](\delta\mathbf{u}^S)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) = 0 \quad \forall (\delta\mathbf{u}^S, \delta\dot{\mathbf{u}}^S) \in \mathcal{C}_{U^S} \times \mathcal{C}_{U^S} \quad (\text{b})$
$\text{div}(\mathbf{u}^F) = 0 \quad \text{sur } \Omega_F^0 \quad (\text{c})$
$\mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_\Sigma^0 \quad \text{sur } \Sigma^0 \quad (\text{d})$

(F.20)

À partir de la formule (6.4) on déduit la relation suivante :

$$\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F) = \int_{\Omega_F} \Lambda \text{div}(\delta\mathbf{u}^F) d\Omega_F + \int_{\Omega_F^0} \delta[\Lambda](\delta\mathbf{u}^F) (\det(\mathbf{F}) - 1) d\Omega_F^0 \quad (\text{F.21})$$

La linéarisation de cette expression est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= \int_{\Omega_F^*} (\delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^F) + \delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^S)) \operatorname{div}(\delta\mathbf{u}^F) d\Omega_F \\ &+ \int_{\Gamma^* \cup \Sigma^*} \Lambda^* \delta\mathbf{u}^F \cdot \boldsymbol{\tau}_S^*(\mathbf{u}^F) dS + \int_{\Omega_F^*} \delta[\Lambda]^*(\delta\mathbf{u}^F) \operatorname{div}(\mathbf{u}^F) d\Omega_F \quad (\text{F.22}) \end{aligned}$$

Avec :

$$\delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^F) + \delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^S) = \lambda(\mathbf{u}^F, \mathbf{u}^S) \quad (\text{F.23})$$

Ainsi, dans l'expression (F.22) on a :

$$\begin{aligned} \delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^F) + \delta[\Lambda]^*(\mathbf{u}^S) &= -\rho^F \ddot{\varphi} + \pi \\ \delta[\Lambda]^*(\delta\mathbf{u}^F) &= -\rho^F \delta\ddot{\varphi} \quad (\text{F.24}) \end{aligned}$$

Avec les relations (F.15), (F.24) et (F.22), le terme d'incompressibilité va s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\nabla\varphi) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{I}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= 2 \int_{\Omega_F^*} \rho^F \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\ddot{\varphi} d\Omega_F + \\ &\int_{\Gamma^* \cup \Sigma^*} (-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi) \nabla\delta\varphi \cdot \mathbf{n}^* dS - \int_{\Gamma^*} \rho^F \delta\ddot{\varphi} \nabla\varphi \cdot \mathbf{i}_z d\Gamma - \int_{\Sigma^*} \rho^F \delta\ddot{\varphi} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* d\sigma \quad (\text{F.25}) \end{aligned}$$

Le terme de couplage (7.20) dans l'équation du fluide va alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_{\Sigma}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) + \frac{\partial[\delta[\mathcal{C}_{\Sigma}](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^S}(\mathbf{u}^S) &= - \int_{\Sigma^*} \underbrace{(\Lambda^0 - \rho^F g Z^0)}_{M^0} \nabla\delta\varphi \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Sigma}^*(\nabla\varphi) d\Sigma \\ &- \int_{\Sigma^*} \underbrace{(-\rho^F \ddot{\varphi} + \pi - \rho^F g (\nabla\varphi \cdot \mathbf{i}_z))}_{\mu_F} \nabla\delta\varphi \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* d\Sigma \quad (\text{F.26}) \end{aligned}$$

On réécrit également le terme d'énergie cinétique du fluide (7.7) qui est une fonction des vitesses  $\mathbf{u}^F = \nabla\dot{\varphi}$  dans le volume  $\Omega_F^*$ . En considérant  $\delta\mathbf{u}^F = \nabla\delta\dot{\varphi}$ , le changement de variable (7.42) va alors donner :

$$\frac{\partial[\delta[E_C^F](\delta\mathbf{u}^F)]^*}{\partial\mathbf{U}^F}(\mathbf{u}^F) = \int_{\Omega_F^*} \rho^F \nabla\dot{\varphi} \cdot \nabla\delta\dot{\varphi} d\Omega_F^* \quad (\text{F.27})$$

Soit  $\mathcal{C}_{\varphi}$  l'espace d'admissibilité des fonctions  $\delta\varphi$  suffisamment régulières, dans la relation (a) du problème (7.46), on cherche  $\varphi$  dans l'espace défini par  $\mathcal{C}_{\varphi}^* = \{\varphi \in \mathcal{C}_{\varphi} / l(\varphi) = 0, l(1) \neq 0\}$ .

On a alors :

$$\underbrace{\int_{\Omega_F^*} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\ddot{\varphi} d\Omega_F^*}_{\mathbf{F}(\varphi, \delta\ddot{\varphi})} - \underbrace{\int_{\Gamma^*} \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}^* \delta\ddot{\varphi} d\Gamma}_A - \underbrace{\int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* \delta\ddot{\varphi} d\Sigma}_{\mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta\ddot{\varphi})} = 0 \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_{\varphi} \quad (\text{F.28})$$

où  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{C}$  sont les opérateurs introduits dans la partie 7.3. On remarque que la relation (F.28) est en  $\delta\check{\varphi}$  et on remplace dans la suite  $\delta\check{\varphi}$  par  $\delta\varphi$ , car cette équation variationnelle est vraie pour tout  $\delta\check{\varphi}$ . On modifie le terme  $A$  de cette relation afin de faire disparaître le terme en  $\nabla\varphi$  en considérant la relation (F.14). L'équation (F.28) s'écrit donc :

$$\int_{\Omega_F^*} \nabla\varphi \cdot \nabla\delta\varphi d\Omega_F^* + \underbrace{\int_{\Gamma^*} \frac{\rho^F}{g} \check{\varphi} \delta\varphi d\Gamma}_{\mathbf{S}(\check{\varphi}, \delta\varphi)} - \int_{\Gamma^*} \frac{\pi}{g} \delta\varphi d\Gamma - \int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* \delta\varphi d\Sigma = 0 \quad \forall \delta\varphi \in \mathcal{C}_\varphi \quad (\text{F.29})$$

On remarque alors qu'en prenant  $\delta\varphi = 1$  dans (F.29) on peut alors obtenir une expression de  $\pi$ , en notant  $A(\Gamma)$  l'aire de la surface libre on a :

$$\pi = -\frac{\rho^F g}{A(\Gamma)} \int_{\Sigma^*} \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* d\Sigma \quad (\text{F.30})$$

## Équation Structure

Par analogie avec la formulation (7.62) et en considérant la relation (F.26), l'équation de la structure va s'écrire :

$$\begin{aligned} M_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \left( \mathbf{K}_E(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) + \mathbf{K}_G(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S) \right) \\ + \underbrace{\int_{\Sigma^*} \rho^F g Z^* \delta\mathbf{u}^S \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Sigma}^* d\Sigma + \int_{\Sigma^*} \rho^F g (\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{i}_z) \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* d\Sigma}_{\mathbf{K}_{\Sigma}^g(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S)} \\ + \underbrace{\int_{\Sigma^*} \rho^F \check{\varphi} \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* d\Sigma}_{\mathbf{C}(\check{\varphi}, \delta\mathbf{u}^S)} - \underbrace{\pi \int_{\Sigma^*} \delta\mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^* d\Sigma}_{\mathbf{K}_B(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S)} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{Us}^C \quad (\text{F.31}) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}_{Us}^C$  est l'espace d'admissibilité des fonctions  $\delta\mathbf{u}^S$  et  $\mathbf{u}^S$ ,  $\mathcal{C}_{Us}^C = \{\mathbf{u}^S \in \mathcal{C}_{Us}^0 / \mathbf{u}^F \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^0 = \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{n}_{\Sigma}^0 \text{ sur } \Sigma^0\}$ .

## Synthèse

Le problème couplé s'écrit à partir des équations (F.28) et (F.31). En remarquant que la relation (F.28) se simplifie pour des fonctions test appartenant à  $\mathcal{C}_\varphi^*$  on a :

Trouver $(\mathbf{u}^S, \varphi) \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S}^C \times \mathcal{C}_\varphi^*$ tels que $\forall (\delta \mathbf{u}^S, \delta \varphi) \in \mathcal{C}_{\mathbf{U}^S}^* \times \mathcal{C}_\varphi^*$	
$\mathbf{F}(\varphi, \delta \ddot{\varphi}) + \mathbf{S}(\ddot{\varphi}, \delta \varphi) - \mathbf{C}(\mathbf{u}^S, \delta \ddot{\varphi})$	= 0 (a)
$\mathbf{M}_S(\ddot{\mathbf{u}}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \left( \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_B + \mathbf{K}_\Sigma^g \right) (\mathbf{u}^S, \delta \mathbf{u}^S) + \mathbf{C}(\ddot{\varphi}, \delta \mathbf{u}^S)$	= 0 (b)

(F.32)

Cette formulation variationnelle en  $(\mathbf{u}^S, \varphi)$  correspond bien à celle obtenue dans [91].



## Annexe G

# Symétrie des opérateurs de raideur

En théorie des milieux continus, tout système linéaire conservatif est symétrique s'il est exprimé dans le bon jeu de variables [47]. Cependant, dans le cas présent, le système (7.76) a pour inconnues des variables primales (déplacement du fluide sur la surface libre et déplacement de la structure) ainsi qu'une variable duale (le potentiel  $\varphi$ ). Ce choix rend la recherche d'une formulation symétrique non standard d'un point de vue théorique.

On souhaite dans cette annexe démontrer la symétrie des opérateurs  $\mathbf{K}_F(\mathbf{u}^F, \delta\mathbf{u}^F)$  et  $\mathbf{K}_S(\mathbf{u}^S, \delta\mathbf{u}^S)$  définis dans la partie 7.9. On utilisera pour cela l'opérateur défini par :

$$\mathbf{K}_S^k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_S (\mathbf{v} \cdot \nabla k) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_S k \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}_S(\mathbf{v}) \, dS \quad (\text{G.1})$$

où  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont deux vecteurs définis sur une surface  $S$  quelconque de normale  $\mathbf{n}$ ,  $k$  étant un champ scalaire et  $\boldsymbol{\tau}_S$  est le vecteur défini par la relation (7.5).

On souhaite dans un premier temps démontrer la symétrie de cet opérateur. Soit  $\mathbf{v}$  un déplacement de la surface  $S$  tel que  $S' = S + \mathbf{v}$  et  $\mathbf{F}$  le gradient de cette transformation, le transport de cette surface orientée est donné dans l'annexe J (relation (J.9c)) :

$$\mathbf{n}' \, dS' = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{n} \, dS \quad (\text{G.2})$$

On peut décomposer la matrice  $\mathbf{F}$  :  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D}_x \mathbf{v}$  et on a donc, au premier ordre en  $\mathbf{v}$  :  $\det(\mathbf{F}) = 1 + \text{div}(\mathbf{v}) + o(\mathbf{v})$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} &= (1 + \text{div}(\mathbf{v})) (\mathbf{I} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v})^\top) + o(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{I} + \text{div}(\mathbf{v}) \mathbf{I} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v})^\top + o(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

On rappelle ici la définition du vecteur  $\tau_S(\mathbf{v})$  :

$$\tau_S(\mathbf{v})dS = \delta[\mathbf{n} dS](\mathbf{v}) \quad (\text{G.4})$$

À partir des relations (G.2) et (G.3) on a :

$$\tau_S(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{n} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v})^\top \mathbf{n} \quad (\text{G.5})$$

L'opérateur  $\mathbf{K}_S^k(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  va donc s'écrire :

$$\mathbf{K}_S^k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_S (\mathbf{v} \cdot \nabla k) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S k (\operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{w} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v}) \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{G.6})$$

Afin de démontrer la symétrie de cet opérateur, on cherche à exprimer la différence  $\mathbf{K}_S^k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{K}_S^k(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_S^k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{K}_S^k(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_S \underbrace{\left( (\mathbf{v} \cdot \nabla k) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla k) \mathbf{v} \right)}_A \cdot \mathbf{n} dS + \dots \\ &\dots \int_S \underbrace{k \left( \operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{w} - (\mathbf{D}_x \mathbf{v}) \mathbf{w} - \operatorname{div}(\mathbf{w}) \mathbf{v} + (\mathbf{D}_x \mathbf{w}) \mathbf{v} \right)}_B \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{G.7}) \end{aligned}$$

Le terme  $A$  de l'équation (G.7) est transformé grâce à l'identité sur le double produit vectoriel (J.6) :

$$A = \int_S \left( \nabla k \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

On identifie, dans le terme  $B$  de l'équation (G.7), l'identité (J.1) :

$$B = \int_S k \operatorname{rot}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS$$

En utilisant l'identité (J.2), le terme  $B$  va s'écrire :

$$B = \int_S \operatorname{rot}(k \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_S (\nabla k \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} dS$$

La formule de Stokes (J.7), permet alors de reporter une partie de l'expression (G) sur le bord  $\gamma$  de  $S$  :

$$B = \oint_\gamma k (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_S dS - \int_S (\nabla k \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} dS$$

On utilisera sur  $\gamma$  le repère direct de Darboux-Ribaucourt  $(\mathbf{t}_S, \boldsymbol{\nu}_S, \mathbf{n})$  introduit dans (H).

Le vecteur  $\mathbf{t}_S$  est un vecteur unitaire tangent à la courbe fermée  $\gamma$ . On a finalement :

$$\mathbf{K}_S^k(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{K}_S^k(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \oint_\gamma k (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_S dS \quad (\text{G.8})$$



Cette différence s'écrit donc à l'aide d'un terme défini sur le bord de la surface  $S$  ; ce terme peut s'annuler dans différents cas :

- Si  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{v}$  appartiennent au même plan contenant  $\mathbf{t}_S$  alors les 3 vecteurs sont coplanaires et le produit mixte  $(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}_S$  s'annule (en particulier, si les deux vecteurs sont colinéaires).
- Si  $k$  s'annule sur  $\gamma$ .
- Si le bord  $\gamma$  n'existe pas (la surface  $S$  est fermée).

Dans les trois cas, l'opérateur  $\mathbf{K}_S^k$  est donc symétrique.

## Opérateur $\mathbf{K}_F$

On rappelle l'expression de l'opérateur  $\mathbf{K}_F$  pour des champs  $\delta\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}$  quelconques :

$$\mathbf{K}_F(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \left( \mathbf{K}_\Gamma^g + \mathbf{K}_\Gamma^\alpha - \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda - \mathbf{K}_\gamma^\theta \right) (\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad (\text{G.9})$$

L'expression de l'opérateur  $\mathbf{K}_\gamma^\theta$  est donnée dans l'annexe H :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \alpha \oint_{\gamma^*} \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma d\gamma](\mathbf{u}) \\ &= \alpha \cos \theta \oint_{\gamma^*} \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Sigma d\gamma](\mathbf{u}) + \alpha \sin \theta \oint_{\gamma^*} \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma d\gamma](\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Les opérateurs  $\mathbf{K}_\Gamma^g$ ,  $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha$  et  $\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda$  ont été introduits dans la section 7.1, on rappelle leurs expressions :

$$\mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Gamma^*} \rho^F g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_z) \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Gamma^* d\Gamma + \int_{\Gamma^*} \rho^F g Z^* \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma^*(\mathbf{u}) d\Gamma \quad (\text{G.11})$$

$$\mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \alpha \oint_{\gamma^*} \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Gamma d\gamma]^*(\mathbf{u}) + \alpha \int_{\Gamma^*} \delta\mathbf{u} \cdot \delta[2H_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma d\Gamma]^*(\mathbf{u})$$

$$\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Gamma^*} \Lambda^* \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma^*(\mathbf{u}) d\Gamma \quad (\text{G.12})$$

On notera dans la suite  $\widehat{\mathbf{K}}_\Gamma^\alpha$  l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{K}}_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \alpha \int_{\Gamma^*} \delta\mathbf{u} \cdot \delta[2H_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma d\Gamma]^*(\mathbf{u}) \\ &= \alpha \int_{\Gamma^*} \delta\mathbf{u} \cdot \delta[2H_\Gamma]^*(\mathbf{u}) \mathbf{n}_\Gamma d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma^*} 2H_\Gamma \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma^*(\mathbf{u}) d\Gamma \\ &= \mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

$\mathbf{K}_F$  s'écrit donc en fonction des opérateurs  $\mathbf{K}_\Gamma^g$ ,  $\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda$  et  $\widehat{\mathbf{K}}_\Gamma^\alpha$  :

$$\mathbf{K}_F(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \mathbf{K}_\Gamma^g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \widehat{\mathbf{K}}_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \mathbf{K}_\Gamma^\Lambda(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$$

Enfin, on remarque d'après les expressions (G.11) et (G.13) que les opérateurs  $\mathbf{K}_\Gamma^g$  et  $\widehat{\mathbf{K}}_\Gamma^\alpha$  peuvent s'écrire à l'aide de l'opérateur symétrique  $\mathbf{K}_S^k$  qui est donné par l'expression (G.1) :

$$\mathbf{K}_\Gamma^g = \mathbf{K}_S^k \Big|_{k=\rho^F gZ}^{S \equiv \Gamma^*} \quad \widehat{\mathbf{K}}_\Gamma^\alpha = \mathbf{K}_S^k \Big|_{k=\alpha 2H_\Gamma}^{S \equiv \Gamma^*} \quad (\text{G.14})$$

où  $\Gamma^*$  est la surface libre à l'équilibre. De plus, d'après l'étude statique faite dans la partie 6.2, puisque  $\nabla\Lambda^* = 0$  on a :

$$\mathbf{K}_\Gamma^\Lambda = \mathbf{K}_S^k \Big|_{k=\Lambda}^{S \equiv \Gamma^*} \quad (\text{G.15})$$

On a donc :

$$\mathbf{K}_F(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \mathbf{K}_S^k \Big|_{k=\rho^F gZ + \alpha 2H_\Gamma - \Lambda}^{S \equiv \Gamma} \quad (\text{G.16})$$

D'après (G.8), la différence  $\mathbf{K}_F(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \mathbf{K}_F(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u})$  s'écrit alors sur le contour fermé à l'état statique  $\gamma^*$  :

$$\mathbf{K}_F(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \mathbf{K}_F(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \oint_{\gamma^*} \underbrace{(\rho^F gZ^* + \alpha 2H_\Gamma^* - \Lambda^*)}_A (\delta\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{t}_\gamma d\gamma \quad (\text{G.17})$$

Or à l'état statique le terme  $A$  s'annule (voir la relation (6.33)), on en déduit la symétrie de l'opérateur  $\mathbf{K}_F$  pour des champs  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  quelconques.

### Remarque

Dans l'article [36], les auteurs démontrent la symétrie de l'opérateur  $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha$ . En effet, cet opérateur est proportionnel à la double variation (par rapport à  $\delta\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}$ ) de l'aire de la surface  $\Gamma$ .

Pour une surface quelconque  $S$  d'aire  $\mathcal{A}_S$  et de normale  $\mathbf{n}$ , cette double variation est donnée par :

$$\delta^2 [\mathcal{A}_S](\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \mathcal{A}_S(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_S \delta^2[\mathbf{n} dS](\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \int_S \tau_S^\parallel(\delta\mathbf{u}) \cdot \tau_S^\parallel(\mathbf{u}) dS \quad (\text{G.18})$$

où  $\tau_S^\parallel$  est la partie tangentielle du vecteur  $\tau_S$  :  $\tau_S^\parallel = \tau_S - (\tau_S \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ . De part sa forme, l'opérateur  $\mathcal{A}_S$  est symétrique. Si  $S$  est confondue avec la surface libre et puisque  $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha = \alpha \mathcal{A}_S$  on montre bien que l'opérateur  $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$  est symétrique.

## Opérateur $\mathbf{K}_S$

On rappelle l'expression de l'opérateur  $\mathbf{K}_S$  pour des champs  $\delta\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}$  quelconques et définis sur l'ensemble  $\Omega_F^* \cup \Omega_S^*$  :

$$\mathbf{K}_S(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \left( \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_\Sigma^{\alpha L} + \mathbf{K}_{\alpha G}^{\alpha G} + \mathbf{K}_\Sigma^g - \mathbf{K}_\Sigma^\Lambda + \mathbf{K}_\gamma^\theta \right) (\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad (\text{G.19})$$

Dans un premier temps, on remarque que d'après l'expression (7.31) les opérateurs  $\mathbf{K}_E$  et  $\mathbf{K}_G$  sont symétriques de part leur forme. De plus, de même que pour  $\mathbf{K}_\Gamma^\alpha$ , les opérateurs  $\mathbf{K}_\Sigma^{\alpha L}$  et  $\mathbf{K}_{\Sigma G}^{\alpha G}$  sont symétriques (ils sont respectivement proportionnels à la double variation de l'aire  $\Sigma$  et  $\Sigma_G$ )

On introduit l'opérateur intermédiaire  $\mathbf{K}_I$  défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_I(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \left( \mathbf{K}_\Sigma^g - \mathbf{K}_\Sigma^\Lambda + \mathbf{K}_\gamma^\theta \right) (\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \\ &= \underbrace{\left( \mathbf{K}_\Sigma^g - \mathbf{K}_\Sigma^\Lambda - \widehat{\mathbf{K}}_\Gamma^\alpha \right)}_{A(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})} (\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \underbrace{\left( \widehat{\mathbf{K}}_\Gamma^\alpha + \mathbf{K}_\gamma^\theta \right)}_{\mathbf{K}_\Gamma^\alpha(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})} (\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

En considérant la surface  $\Sigma^*$ , le bord  $\gamma^*$  est orienté suivant  $-\mathbf{t}_\gamma$  et on a :

$$\mathbf{A}_I(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) - \mathbf{A}_I(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \oint_{\gamma^*} \underbrace{\left( -\rho^F g Z^* - \alpha 2 H_\Gamma^* + \Lambda^* \right)}_{=0} (\delta\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{t}_\gamma d\gamma \quad (\text{G.21})$$

L'opérateur  $\mathbf{A}_I$  est alors symétrique, ainsi que  $\mathbf{K}_I$  et donc  $\mathbf{K}_S$  en tant que somme d'opérateurs symétriques.



## Annexe H

# Linéarisation de l'opérateur de raideur de la ligne triple

On souhaite ici exprimer la linéarisation du terme de bord défini pour des champs  $\delta \mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}$  par :

$$\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \alpha \oint_\gamma \delta \mathbf{u} \cdot \delta [\boldsymbol{\nu}_\Gamma d\gamma](\mathbf{u}) \quad (\text{H.1})$$

où  $\gamma$  représente le bord fermé de la surface libre  $\Gamma$ . Le déplacement normal est pris en compte : les champs  $\mathbf{u}$  et  $\delta \mathbf{u}$  sont de faibles amplitudes et appartiennent à  $\mathcal{C}_u$ . On se place dans la base locale  $\mathcal{B} = (\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma, \mathbf{n}_\Sigma)$  aussi appelée *Trièdre de Darboux Ribaucour* introduite dans le chapitre II (v. Fig H). On projette le vecteur  $\boldsymbol{\nu}_\Gamma$  dans  $\mathcal{B}$ , l'équation (H.1)

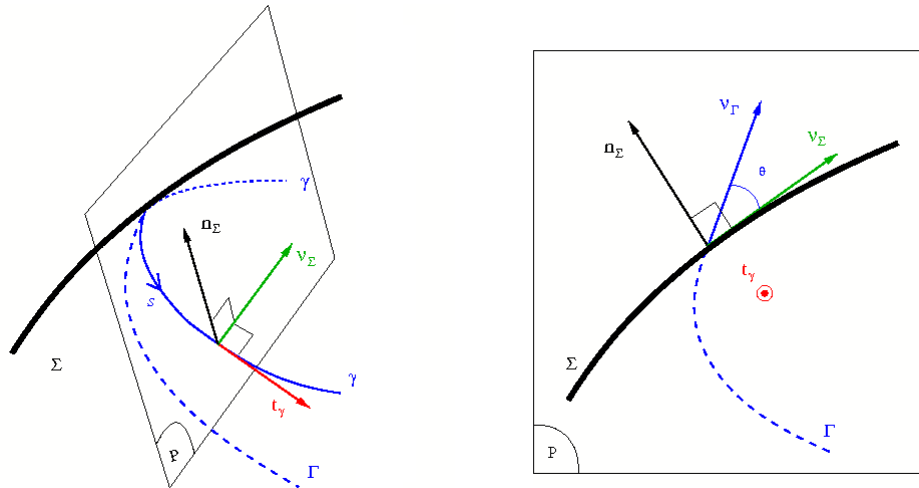


FIGURE H.1 – Repère locale utilisé sur la ligne triple  $\gamma$ .

devient alors :

$$\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\boldsymbol{\nu}_\Sigma d\gamma](\mathbf{u}) + \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma d\gamma](\mathbf{u}) \quad (\text{H.2})$$

L'angle  $\theta$  est supposé constant et en utilisant la relation  $\boldsymbol{\nu}_\Sigma = \mathbf{n}_\Sigma \wedge \mathbf{t}_\gamma$  on se ramène au calcul des quantités  $\delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u})$ ,  $\delta[\mathbf{t}_\gamma](\mathbf{u})$  et  $\delta[d\gamma](\mathbf{u})$ .

### Calcul du terme $\delta[d\gamma](\mathbf{u})$

Soit  $\mathbf{X}$  le vecteur position décrivant la courbe  $\gamma$  et paramétré par une variable  $\xi$ , le vecteur  $\mathbf{a}_\gamma$  tangent au bord est défini par :

$$\mathbf{a}_\gamma = \frac{\partial \mathbf{X}(\xi)}{\partial \xi} \quad (\text{H.3})$$

Et on a :

$$\mathbf{t}_\gamma = \frac{\mathbf{a}_\gamma}{\|\mathbf{a}_\gamma\|} \quad (\text{H.4})$$

Dans l'expression (H.2), la quantité  $d\gamma$  peut s'écrire :  $d\gamma = \|\mathbf{a}_\gamma\| d\xi$  et on a :

$$\delta[d\gamma](\mathbf{u}) = \delta[\|\mathbf{a}_\gamma\|](\mathbf{u}) d\xi \quad (\text{H.5})$$

D'après la définition du vecteur  $\mathbf{a}_\gamma$  dans (H.3) on a :

$$\delta[\mathbf{a}_\gamma](\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \quad (\text{H.6})$$

On en déduit alors l'expression de  $\delta[\|\mathbf{a}_\gamma\|](\mathbf{u})$  :

$$\begin{aligned} \delta[\|\mathbf{a}_\gamma\|](\mathbf{u}) &= \delta[\sqrt{\mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}_\gamma}](\mathbf{u}) \\ &= 2 \delta[\mathbf{a}_\gamma](\mathbf{u}) \cdot \mathbf{a}_\gamma \frac{1}{2 \sqrt{\mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}_\gamma}} \\ &= \delta[\mathbf{a}_\gamma](\mathbf{u}) \cdot \underbrace{\frac{\mathbf{a}_\gamma}{\|\mathbf{a}_\gamma\|}}_{\mathbf{t}_\gamma} \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \mathbf{t}_\gamma \end{aligned} \quad (\text{H.7})$$

L'équation (H.5) s'écrit alors :

$$\delta[d\gamma](\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \mathbf{t}_\gamma d\xi = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{t}_\gamma d\gamma \quad (\text{H.8})$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne de la courbe  $\gamma$ .

### Calcul du terme $\delta [\mathbf{t}_\gamma] (\mathbf{u})$

Les expressions (H.7) et (H.6) associées à la définition du vecteur  $\mathbf{t}_\gamma$  dans (H.4) permettent d'écrire :

$$\delta [\mathbf{t}_\gamma] (\mathbf{u}) = \frac{\delta [\mathbf{a}_\gamma] (\mathbf{u}) \cdot \|\mathbf{a}_\gamma\| - \mathbf{a}_\gamma \cdot \delta [\|\mathbf{a}_\gamma\|] (\mathbf{u})}{\|\mathbf{a}_\gamma\|^2} \quad (\text{H.9})$$

D'où :

$$\boxed{\delta [\mathbf{t}_\gamma] (\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} - \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{t}_\gamma \right) \mathbf{t}_\gamma} \quad (\text{H.10})$$

### Calcul du terme $\delta [\mathbf{n}_\Sigma] (\mathbf{u})$

Soit  $M$  un point de la surface  $\Sigma$  appartenant à la courbe  $\gamma$ . Le tenseur de courbure  $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$  en  $M$  est un endomorphisme du plan tangent à  $\Sigma$  en  $M$ . Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur du plan tangent, il peut alors s'écrire dans la base  $(\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma)$  et par définition :

$$\delta [\mathbf{n}_\Sigma] (\mathbf{v}) = \boldsymbol{\kappa}_\Sigma (\mathbf{v}) \quad (\text{H.11})$$

$\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$  s'écrit dans cette même base :

$$\boldsymbol{\kappa}_\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{\gamma\gamma}} & \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} \\ \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} & \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} \end{bmatrix} \quad (\text{H.12})$$

où  $\frac{1}{R_{\gamma\gamma}}$ ,  $\frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}}$  sont les courbures normales et  $\frac{1}{R_{\gamma\Sigma}}$  la torsion géodésique de la courbe  $\gamma^1$ . On généralisera cette expression dans la suite pour un champ  $\mathbf{u}$  complet ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \neq 0$ ) avec  $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$  qui s'écrit dans la base  $(\mathbf{t}_\gamma, \boldsymbol{\nu}_\Sigma, \mathbf{n}_\Sigma)$  de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\kappa}_\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{\gamma\gamma}} & \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} & 0 \\ \frac{1}{R_{\gamma\Sigma}} & \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{H.13})$$

Dans [78], les auteurs montrent que la variation au premier ordre de la normale  $\mathbf{n}_\Sigma$  dans la direction  $\mathbf{u}$  (champs complet) peut s'écrire :

$$\boxed{\delta [\mathbf{n}_\Sigma] (\mathbf{u}) = \boldsymbol{\kappa}_\Sigma (\mathbf{u}) - \nabla_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma) = \mathbf{N}_\Sigma (\mathbf{u})} \quad (\text{H.14})$$

---

1. La trace de  $\boldsymbol{\kappa}_\Sigma$  est un invariant et on a :  $\frac{1}{R_{\gamma\gamma}} + \frac{1}{R_{\Sigma\Sigma}} = 2H$  où  $H$  est appelé la *courbure moyenne* de la surface  $\Sigma$  en  $M$ .

où  $\nabla_S$  est l'opérateur de gradient surfacique. La variation de la normale  $\mathbf{n}_\Sigma$  appartient donc au plan tangent<sup>2</sup>. Pour simplifier les notations on l'écrira par la suite  $\mathbf{N}_\Sigma(\mathbf{u})$ .

## Expression du terme de bord

On utilise les expressions (H.8), (H.10) et (H.14) obtenues précédemment pour calculer le terme  $\mathbf{K}_\gamma^\theta$  de l'équation (H.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u}) \wedge \mathbf{t}_\gamma d\gamma + \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \wedge \delta[\mathbf{t}_\gamma d\gamma](\mathbf{u}) \\ &\quad + \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u}) d\gamma + \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \delta[d\gamma](\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_\Sigma(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{t}_\gamma d\gamma + \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s} \right) d\gamma \\ &\quad + \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_\Sigma(\mathbf{u}) d\gamma + \alpha \sin(\theta) \underbrace{\oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \left( \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{t}_\gamma \right) d\gamma}_A \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

On remarque que le terme  $A$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$A = \mathbf{n}_\Sigma \left[ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s} \cdot (\boldsymbol{\nu}_\Sigma \wedge \mathbf{n}_\Sigma) \right] = \mathbf{n}_\Sigma \left[ \underbrace{\left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s} \right)}_{\perp \mathbf{n}_\Sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma \right]$$

Or pour un vecteur  $\mathbf{v}$  dans le plan tangent à  $\Sigma$  on peut écrire :

$$(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}_\Sigma) \cdot \mathbf{n}_\Sigma = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{t}_\gamma$$

Avec  $\mathbf{v} = \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s} \right)$ , on en déduit l'expression de  $A$  suivante :

$$A = - \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial s} \right) \wedge \mathbf{t}_\gamma$$

---

2. On retrouve ce résultat en considérant le fait que  $\mathbf{n}_\Sigma$  est un vecteur unitaire, on a  $\mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 1$  et la variation de cette expression dans la direction  $\mathbf{u}$  donne  $\mathbf{n}_\Sigma \cdot \delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u}) = 0$  et  $\delta[\mathbf{n}_\Sigma](\mathbf{u})$  est donc bien une combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{t}_\gamma$  et  $\boldsymbol{\nu}_\Sigma$ .



On en déduit l'expression du terme de bord linéarisé :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \underbrace{(\mathbf{N}_\Sigma(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{t}_\gamma)}_{\parallel \mathbf{n}_\Sigma} d\gamma - \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \underbrace{\left[ \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \right) \wedge \mathbf{t}_\gamma \right]}_{\parallel \mathbf{n}_\Sigma} d\gamma \\
 &+ \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \underbrace{\mathbf{N}_\Sigma(\mathbf{u})}_{\perp \mathbf{n}_\Sigma} d\gamma + \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u} \cdot \underbrace{\left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \right)}_{\perp \mathbf{n}_\Sigma} d\gamma \quad (\text{H.17})
 \end{aligned}$$

Jusqu'ici, les champs  $\delta\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}$  sont des champs "complets", c'est à dire qu'ils ne sont pas contraints et peuvent prendre n'importe quelle direction de l'espace. Aussi, on décomposera ces vecteurs en une partie tangente à la surface  $\Sigma$  que l'on notera avec un indice  $\parallel$  et une partie normale à  $\Sigma$  que l'on indicera à l'aide du symbole  $\perp$ .  $\delta\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}$  s'écrivent donc de manière unique sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \delta\mathbf{u} &= \delta\mathbf{u}_\perp + \delta\mathbf{u}_\parallel \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\parallel
 \end{aligned}$$

D'après la remarque faite dans la partie statique 6.2,  $\delta\mathbf{u}^F$  ne travaille pas dans la direction  $\mathbf{t}_\gamma$ , la composante selon  $\mathbf{t}_\gamma$  peut donc être bloquée. On considèrera ici que  $\delta\mathbf{u}_\parallel$  est un vecteur colinéaire à  $\nu_\Sigma$ .

On introduit maintenant les notations  ${}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta$ ,  ${}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta$ ,  ${}^3\mathbf{K}_\gamma^\theta$  et  ${}^4\mathbf{K}_\gamma^\theta$  de sorte que :

$$\boxed{
 \mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\parallel, \delta\mathbf{u}_\parallel)}_{{}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta} + \underbrace{\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\parallel, \delta\mathbf{u}_\perp)}_{{}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta} + \underbrace{\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\perp, \delta\mathbf{u}_\parallel)}_{{}^3\mathbf{K}_\gamma^\theta} + \underbrace{\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\perp, \delta\mathbf{u}_\perp)}_{{}^4\mathbf{K}_\gamma^\theta} \quad (\text{H.18})
 }$$

À partir des relations (H.14) et (H.17) on donne une expression de ces opérateurs :

$$\begin{aligned}
 {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\parallel, \delta\mathbf{u}_\parallel) &= \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\parallel \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma(\mathbf{u}_\parallel) d\gamma + \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\parallel \cdot \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}_\parallel}{\partial s} \right) d\gamma \\
 {}^2\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\parallel, \delta\mathbf{u}_\perp) &= \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\perp \cdot \left[ \boldsymbol{\kappa}_\Sigma(\mathbf{u}_\parallel) \wedge \mathbf{t}_\gamma \right] d\gamma \\
 &\quad - \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\perp \cdot \left[ \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}_\parallel}{\partial s} \right) \wedge \mathbf{t}_\gamma \right] d\gamma \\
 {}^3\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\perp, \delta\mathbf{u}_\parallel) &= -\alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\parallel \cdot \nabla_S(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma) d\gamma + \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\parallel \cdot \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}_\perp}{\partial s} \right) d\gamma \\
 {}^4\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\perp, \delta\mathbf{u}_\perp) &= -\alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\perp \cdot \left[ \left[ \nabla_S(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma) \right] \wedge \mathbf{t}_\gamma \right] d\gamma \\
 &\quad - \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\perp \cdot \left[ \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}_\perp}{\partial s} \right) \wedge \mathbf{t}_\gamma \right] d\gamma
 \end{aligned} \tag{H.19}$$

On remarque enfin que pour un fluide contenu dans un réservoir à parois rigides (cas de figure étudié dans [35]), c'est à dire pour un champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et un champ de déplacement  $\delta\mathbf{u}$  tangents à la surface  $\Sigma$ , on retrouve le même terme de bord :

$$\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}_\parallel, \delta\mathbf{u}_\parallel) = {}^1\mathbf{K}_\gamma^\theta(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \alpha \sin(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\parallel \cdot \boldsymbol{\kappa}_\Sigma(\mathbf{u}_\parallel) d\gamma + \alpha \cos(\theta) \oint_\gamma \delta\mathbf{u}_\parallel \cdot \left( \mathbf{n}_\Sigma \wedge \frac{\partial\mathbf{u}_\parallel}{\partial s} \right) d\gamma \tag{H.20}$$

## Annexe I

# Analyse modale d'un problème couplé avec prise en compte de la capillarité

Afin d'illustrer sur un cas test le calcul de modes propres couplé avec prise en compte de la capillarité, on considère une sphère remplie d'hydrazine, souvent employé pour la propulsion (voir Fig. I.1). La figure I.4 présente quelques exemples de modes obtenus.

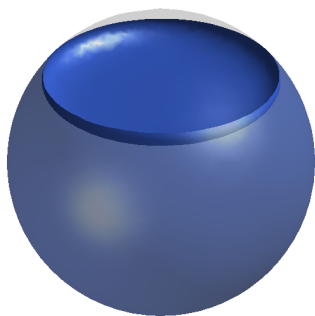


FIGURE I.1 – Géométrie.

<b>Rayon</b>	1 [m]
<b>Épaisseur plaque</b>	$3,5 \cdot 10^{-3}$ [m]
<b>Module d'Young</b>	$6,8 \cdot 10^9$ [Pa]
<b>Accélération de pesanteur <math>g</math></b>	0.0071809 [ $m \cdot s^{-2}$ ]
<b>Masse volumique fluide</b>	1011 [ $kg/m^3$ ]
<b>Angle de contact <math>\theta</math></b>	5 [ $^{\circ}C$ ]
<b>Densité d'énergie superficielle</b>	[N/m]

FIGURE I.2 – Caractéristiques du réservoir

Pour cette géométrie, une paramétrisation en coordonnées sphériques a été proposée par Utsumi [100], ce qui lui permet de résoudre le problème de ballonnement à structure encastrée par une approche semi-analytique. Dans son étude, Utsumi ne prend pas en compte les effets de courbure du réservoir.

Ici, le système est libre, le tableau I.3 représente les premières valeurs propres obtenues en considérant ou non la courbure du réservoir dans l'opérateur  $\mathbf{K}_{\gamma}^{\theta}$ , ainsi qu'une comparaison

avec les résultats de El-Kamali [35] pour une structure encastrée, les effets de courbures n'étant pas pris en compte et avec les résultats d'Utsumi.

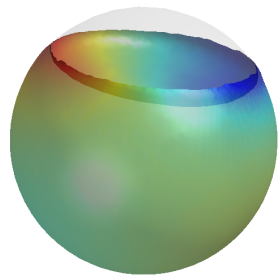
Indice	Fréq. pr. (Hz) avec courbure	Indice	Fréq. pr. (Hz) sans courbure	Indice	Fréq. pr. (Hz) El Kamali	Fréq. pr. (Hz) Utsumi
1	0.000162	-	-	-	-	-
2	0.000125	1	0.000129	-	-	-
3	0.000090	2	0.000096	-	-	-
4	0.002449	3	0.000589	-	-	-
5	0.023593	4	0.023641	1	0.01989	0.019416
6	0.023636	5	0.023679	2	0.01989	0.019416
7	0.026566	6	0.026602	3	0.02662	-
8	0.026611	7	0.026639	4	0.02662	-
9	0.030951	8	0.030977	5	0.03076	0.02992
10	0.032744	9	0.032785	6	0.03280	-
11	0.032767	10	0.032813	7	0.03280	-

FIGURE I.3 – Comparaison des fréquences propres obtenues avec les travaux [35] et [100]. En rouge : les modes pour lesquels la structure à un mouvement de corps rigide.

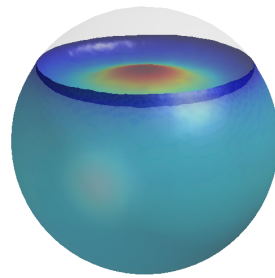
Ainsi, on remarque dans un premier temps que la courbure pour ce cas test n'influence pas véritablement les fréquences propres obtenues, celles-ci ayant tendance à baisser légèrement lorsque la courbure est considérée [35].

De plus, on remarque que pour le calcul avec courbure, sur les 6 modes de corps rigide de la structure les modes 5 et 6 viennent se coupler avec le premier mode de ballonnement (voir Fig. I.4), le mouvement de la structure étant un mouvement de translation dans le plan horizontal. Dans le cas sans courbure, seuls 5 modes de corps rigides ont pu être calculés. Ce résultat peut s'expliquer par le fait qu'en supprimant les termes faisant intervenir la courbure dans  $\mathbf{K}_\gamma^\theta$  on vient modifier la matrice de raideur du fluide  $\mathbf{K}_F$  et on rompt notamment sa symétrie. En dehors des fréquences faisant intervenir les mouvements de corps rigide de la structure les fréquences propres obtenues sont comparables avec celles obtenues par El Kamali ou Utsumi.

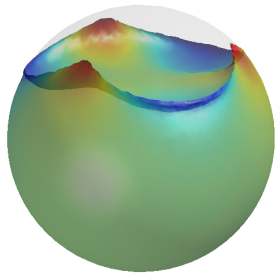
Cependant, le fait que le premier mode de ballonnement vient se coupler avec un mouvement de corps rigide de la structure peut ici poser problème, on s'attend en effet à ce que le liquide se translate également en suivant la structure. Une amélioration sur ce point là pourra être envisagée dans des travaux futurs, notamment en ce qui concerne la précision de la matrice  $\mathbf{K}_\gamma^\theta$ .



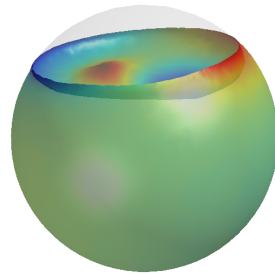
(a) Mode 5 - 0.0235 Hz



(b) Mode 9 - 0.0309 Hz



(c) Mode 11 - 0.0327 Hz



(d) Mode 14 - 0.0403 Hz

FIGURE I.4 – Modes propres du système libre avec prise en compte de la courbure. La couleur du fluide est donnée par sa fluctuation de pression en tout point.

---

## Annexe J

# Formulaire

### Relations vectorielles

Soit 2 vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^3$  et un scalaire  $k$  :

$$\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (D \mathbf{u})\mathbf{v} - (D \mathbf{v})\mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} \quad (\text{J.1})$$

$$\nabla \wedge (k\mathbf{u}) = k\nabla \wedge \mathbf{u} + (\nabla k) \wedge \mathbf{u} \quad (\text{J.2})$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{rot}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{rot}(\mathbf{v}) \quad (\text{J.3})$$

$$\text{div}(k\mathbf{u}) = k \text{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad}(k) \quad (\text{J.4})$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (D \mathbf{u})\mathbf{v} + (D \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \nabla \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \nabla \wedge \mathbf{v} \\ &= [D \mathbf{u}]^T \mathbf{v} + [D \mathbf{v}]^T \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

### Double produit vectoriel

Soit 3 vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  de  $\mathbb{R}^3$ , on a :

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} \quad (\text{J.6})$$

### Formule de Stokes

Soit  $\mathbf{u}$  un champ vectoriel sur une surface  $S$  de normale  $\mathbf{n}$  et de bord  $\partial S$  :

$$\int_S \text{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{J.7})$$

## Formule de Green

Soit  $\mathbf{u}$  un champ vectoriel suffisamment régulier sur un volume  $\Omega$  de normale  $\mathbf{n}$ , et  $A$  un tenseur. En notant  $\partial\Omega$  le bord de  $\Omega$ , la forme intégrale de la formule de Green s'écrit :

$$\int_{\Omega} \text{Div}(A) \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\partial\Omega} (A \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS - \int_{\Omega} \text{Tr}[A^T \mathbf{D}\mathbf{u}] d\Omega \quad (\text{J.8})$$

## Changement de variable dans les intégrales de volume

Soit une application vectorielle bijective régulière  $\Phi$  différentiable et de dérivée  $\mathbf{F}$ , alors les intégrales sur les domaines  $\Omega$  et  $\Phi(\Omega)$  se déduisent l'une de l'autre par la formule de changement de variable suivante :

$$\int_{x \in \Phi(\Omega)} f(x) d\Omega_x = \int_{X \in \Omega} f(\Phi(X)) \det(\mathbf{F}) d\Omega_X \quad (\text{J.9a})$$

Le transport par changement de variable d'un élément de volume s'écrit alors :

$$d\Omega_x = \det(\mathbf{F}) d\Omega_X \quad (\text{J.9ba})$$

## Changement de variable dans les intégrales de surface

Soit une application vectorielle bijective régulière  $\Phi$  différentiable et de dérivée  $\mathbf{F}$ . Soit  $\partial\Omega$ , la frontière du domaine  $\Omega$ ,  $\mathbf{n}_x$  et  $\mathbf{n}_X$  les normales extérieures aux domaines respectivement  $\Phi(\Omega)$  et  $\Omega$ . Alors les intégrales sur les frontières  $\partial\Omega$  et  $\Phi(\partial\Omega)$  se déduisent l'une de l'autre par la formule de changement de variable suivante :

$$\int_{x \in \Phi(\partial\Omega)} f(x) \mathbf{n}_x d\Sigma_x = \int_{X \in \partial\Omega} f(\Phi(X)) \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_X d\Omega_X \quad (\text{J.9bb})$$

Le transport par changement de variable d'un élément de surface orienté s'écrit donc :

$$\mathbf{n}_x d\Sigma_x = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_X d\Sigma_X \quad (\text{J.9c})$$





**Résumé :** Ce travail de recherche traite du couplage entre un liquide incompressible, irrotationnel et son contenant : une structure élastique. Cette interaction Fluide-Structure est traitée dans le cadre des petites déformations autour d'un état d'équilibre.

Dans un premier temps, on présente une méthode d'introduction des sources dissipatives visqueuses dans le liquide à partir des équations du système couplé conservatif en s'appuyant sur une approche de type fluide potentiel généralement utilisée pour traiter les problèmes de couplage fluide-structure linéarisés non amortis. Un modèle d'amortissement diagonal est alors choisi pour le liquide et les effets dissipatifs de celui-ci sont pris en compte en calculant les coefficients d'amortissement modaux. Seuls les effets dissipatifs liés à la viscosité du liquide sont alors pris en compte. Le système couplé dissipatif obtenu possède une matrice d'amortissement non symétrique. Une résolution de ce système à amortissement non classique est alors présentée et les expressions des réponses fréquentielle et temporelle linéarisées sont données pour différents types d'excitations.

Dans un deuxième temps, le liquide est supposé non visqueux et les forces de tension surfacique sont prises en compte. Une formulation du problème conservatif permettant de prendre en compte l'incompressibilité du fluide, la condition de continuité à l'interface fluide-structure, les effets de capillarité du fluide ainsi que les effets éventuels de précontraintes statiques est alors établie. On se propose pour cela d'utiliser une méthode énergétique via le Principe de Moindre Action. La démarche est alors décomposée en deux étapes : une étude statique afin de déterminer la position de référence, puis une étude dynamique linéarisée autour de cette position d'équilibre. Cette formulation forme notamment une base pour l'introduction des sources dissipatives liées aux effets de capillarité via la méthode précédemment introduite.

**Mots clés :** Ballotement, Amortissement diagonal, Modes propres complexes, Synthèse modale, Formulation variationnelle, Principe de Moindre Action, Interaction Fluide Structure, Incompressibilité, Tension Surfaccique, Dissipation visqueuse, Capillarité, Microgravité, Ménisque, Vibrations, Éléments finis.

**Abstract :** This study deals with the coupling between an incompressible, irrotational fluid and an elastic container in the context of small amplitude vibrations.

Firstly, we present a method to introduce the viscous dissipative sources in the liquid directly from the equations of the conservative coupled problem using a fluid potential approach generally used to treat linear undamped problems. A diagonal damping model is chosen for the liquid and its dissipative effects are taken into account through modal damping coefficients. Only the viscous effects are considered here. The coupled system obtained has a non symmetric damping matrix. This system with non classical damping is solved and expressions of the frequency and linearized time responses are given for different load examples.

The liquid is then supposed to be inviscid and surface tension forces are considered. A unified formulation of the conservative problem taking into account the fluid incompressibility, the contact condition at the fluid structure interface, capillarity and pre-stress effects is given. Thus, we propose to use an energy method via the Least Action Principle. The reasoning is then divided into two parts : a static study to determine the reference state and a linearized dynamic study around this equilibrium state. This formulation is a good framework to introduce the dissipative sources associated with the capillary effects by using the method previously introduced.

**Keywords :** Sloshing, Damping, Complex Eigenmodes, Modal Synthesis, Variational formulation, Least Action Principle, Fluid-Structure Interaction, Incompressibility, Surface Tension, Viscous dissipation, Capillarity, Microgravity, Meniscus, Vibrations, Finite Elements.