



# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE BELFORT-MONTBÉLIARD

Contribution à la commande  
non-linéaire robuste des systèmes  
d'alimentation en air des piles à  
combustible de type PEM

■ Imad MATRAJI



# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques  
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE BELFORT-MONTBÉLIARD

N° 2 2 3

THÈSE présentée par

**Imad MATRAJI**

pour obtenir le

Grade de Docteur de

l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

Spécialité : **Automatique**

**Contribution à la commande non-linéaire robuste  
des systèmes d'alimentation en air des piles à  
combustible de type PEM**

Soutenue le 10 Décembre 2013 devant le Jury :

Tarek AHMED-ALI	Rapporteur	Professeur à l'ENSICAEN
Maurice FADEL	Rapporteur	Professeur à l'ENSEEIH
Daniel HISSEL	Examineur	Professeur à l'Université de Franche-Comté
Todor STOILOV	Examineur	Professeur à l'Académie des Sciences de Bulgarie
Maxime WACK	Directeur de thèse	Maitre de Conférences (HDR) à l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard
Salah LAGHROUCHE	Co-Directeur	Maitre de Conférences à l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard



---

---

## *Liste de publications*

---

---

### **Journaux internationaux avec comité de lecture**

1. Salah Laghrouche, Imad Matraji, Fayez Shakil Ahmed, Samir Jemei and Maxime Wack. Load governor based on constrained extremum seeking for PEM fuel cell oxygen starvation and compressor surge protection. *International Journal of Hydrogen Energy*, Vol. 38, Issue 33, pp. 14314-14322, 2013.
2. Imad Matraji, Salah Laghrouche, Samir Jemei, and Maxime Wack. Robust control of the PEM fuel cell air-feed system via sub-optimal second order sliding mode. *Applied Energy*, Vol. 104, pp. 945 - 957, 2013.
3. Imad Matraji, Salah Laghrouche, and Maxime Wack. Pressure control in a PEM fuel cell via second order sliding mode. *International Journal of Hydrogen Energy*, Vol. 37, Issue 21, pp. 16104 - 16116, 2012.

### **Conférences internationales avec comité de lecture**

1. Imad Matraji, Salah Laghrouche, Samir Jemei, and Maxime Wack. Load Governor for PEM Fuel Cell Oxygen Starvation and Compressor Protection : a Constrained Extremum Seeking Approach. In *5th International Conference on Fundamentals and Development of Fuel Cells*, 2013.
2. Imad Matraji, Jianxing Liu, Salah Laghrouche, and Maxime Wack. Adaptive second order sliding mode control of PEM fuel cell air feed system. In *51st IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pp 4133 - 4138, 2012.
3. Mohamed Harmouche, Imad Matraji, Salah Laghrouche, and Mohammed El-Bagdouri. Homogeneous higher order sliding mode control for PEM fuel cell. In *12th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 161 - 166, 2012.

4. Imad Matraji, Fayez Shakil Ahmed, Salah Laghrouche, and Maxime Wack. Extremum seeking control for net power output maximization of a PEM fuel cell using second order sliding mode. In *12th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 331 - 336, 2012.
5. Imad Matraji, Salah Laghrouche, and Maxime Wack. Cascade control of the motor-compressor of a PEM fuel cell via second order sliding mode. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, pp. 633 - 638, 2011.
6. Imad Matraji, Salah Laghrouche, and Maxime Wack. Second order sliding mode control for PEM fuel cells. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 2765 - 2770, 2010.

---

---

## *Remerciement*

---

---

Je pense que cette partie est la plus dur à rédiger dans mon rapport de thèse. Ce travail a été achevé grâce au soutien de plusieurs personnes. Pour cela, je leur dédie ce travail de thèse et je voudrai les en remercier.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse M. Maxime WACK pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche. Je le remercie aussi pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour ses conseils, sa patience et son soutien au cours de mon travail de thèse.

Je tiens aussi à remercier mon encadrant M. Salah LAGHROUCHE. Ce travail ne serait pas ce qu'il est sans sa présence, sa disponibilité, sa générosité, sa rigueur scientifique et ses précieux conseils qui m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions.

Je voudrais remercier également M. le professeur Daniel HISSEL et M. Samir JEMEI pour leur collaboration et pour leur aide dans la valorisation de mes travaux de recherche au sein de laboratoire FCLAB.

Je remercie aussi M. le professeur Daniel HISSEL et M. le professeur Todor STOILOV, d'avoir accepté de participer au jury de la soutenance de ma thèse. Je remercie également les rapporteurs, M. le professeur Maurice FADEL et M. le professeur Tarek AHMED-ALI pour leur intérêt porté à ce travail et pour leurs remarques, leurs commentaires et leurs rapports qui ont permis d'obtenir cette version finale du manuscrit.

Il ne faut pas oublier de remercier mes collègues avec qui j'ai passé le plus de temps au laboratoire IRTES-SET, Fayez Shakil AHMED, Mohamed HARMOUCHE, Adeel MEHMOOD, Adnen El AMRAOUI, Deyun WANG, Athmane KEBAIRI, Jianxing LIU et Zakaria HAMOUDAN.

Je remercie tous mes amis, Wassef, Alaa, Wassim, Nazih, Bilal, Chameau, Chawki, Awni, Rabih, Vahé, Nizar, Mona, Alaa, Salim, Jinan qui m'ont toujours encouragés et

soutenus. De plus, je remercie Noèle PETIT qui m'a soutenu tout au long de mon cursus d'ingénierie et de doctorat à Belfort. Je tiens spécialement à remercier Meryem qui était toujours à coté de moi pour me supporter et m'encourager.

Je tiens à remercier, mes grands parents, mes oncles, mes tantes et mes cousins pour leur empathie et leur soutien durant toutes ces années. Je remercie fortement mes frères, Rachad et Alaa, qui m'ont toujours encouragé et supporté dans les moments difficiles et stressants de cette période.

Finalement, un grand merci à mes parents, ma mère Aida et mon père Abdul-Kader, qui sont toujours la meilleur source d'encouragement et d'inspiration pour atteindre mes objectifs. Malgré la distance, mes parents sont toujours restés proches de mon cœur.



---

---

# *Table des matières*

---

---

Liste de publications	i
Remerciement	iii
Table des matières	v
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xv
Introduction générale	1
<b>1 Etat de l'art d'un système à pile à combustible de type PEM</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction des piles à combustible . . . . .	7
1.2 Les piles à membrane échangeuse de protons . . . . .	8
1.2.1 Principe de fonctionnement de la PàC (PEMFC) . . . . .	8
1.2.2 Tension électrique de la PEMFC . . . . .	10
1.3 Système à pile à combustible . . . . .	13
1.3.1 Système d'alimentation en air . . . . .	13
1.3.2 Système d'alimentation en hydrogène . . . . .	14
1.3.3 Système de refroidissement . . . . .	15
1.3.4 Système d'humidification . . . . .	15
1.3.5 Convertisseur . . . . .	15
1.3.6 Système de contrôle commande . . . . .	15
1.4 Problématiques de la commande dans la PàC . . . . .	16
1.4.1 Maximisation de l'énergie fournie par la PàC . . . . .	16

1.4.2	Gestion de l'eau et de la température . . . . .	17
1.4.3	Dégradation du système à PàC . . . . .	17
1.4.4	Dégradation de la membrane . . . . .	18
1.5	Etat de l'art sur la commande des systèmes à PàC . . . . .	18
1.5.1	Contrôle du système d'alimentation en air . . . . .	18
1.5.2	Protection du système à PàC . . . . .	19
1.5.3	Régulation de la différence de pression anode-cathode . . . . .	20
1.6	Contributions de la thèse . . . . .	21
1.7	Conclusion . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Modélisation du système pile à combustible</b>	<b>25</b>
2.1	Introduction . . . . .	25
2.2	Modèle statique de la pile à combustible . . . . .	26
2.2.1	Tension électrique en boucle ouverte . . . . .	27
2.2.2	Pertes d'activation . . . . .	28
2.2.3	Pertes ohmiques . . . . .	29
2.2.4	Pertes de concentration . . . . .	29
2.2.5	Tension électrique de la PàC . . . . .	29
2.3	Modèle dynamique du système à pile à combustible . . . . .	31
2.3.1	Modèle des collecteurs . . . . .	31
2.3.1.1	Modèle du collecteur d'admission d'air . . . . .	34
2.3.1.2	Modèle du collecteur de retour . . . . .	35
2.3.2	Modèle du cœur d'une pile . . . . .	36
2.3.2.1	Modèle de la cathode . . . . .	36
2.3.2.2	Modèle de l'anode . . . . .	40
2.3.2.3	Modèle de la membrane . . . . .	42
2.3.3	Modèle dynamique réduit . . . . .	44
2.4	Modélisation des compresseurs . . . . .	46
2.4.1	Modélisation du compresseur à double vis . . . . .	48
2.4.1.1	Modélisation . . . . .	48
2.4.1.2	Validation du modèle . . . . .	51
2.4.2	Modélisation du compresseur centrifuge . . . . .	52
2.4.2.1	Modélisation . . . . .	52
2.4.2.2	Validation du modèle . . . . .	56

2.5	Modèle du système d'alimentation en air . . . . .	57
2.5.1	Entrées et sorties du système . . . . .	58
2.5.2	Performance du système . . . . .	60
2.6	Conclusion . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Mode glissant d'ordre supérieur</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Introduction à la commande par mode glissant . . . . .	63
3.2.1	Mode glissant classique . . . . .	64
3.2.2	Phénomène du <i>chattering</i> . . . . .	65
3.3	Commande par mode glissant d'ordre supérieur . . . . .	65
3.3.1	Synthèse de la commande . . . . .	66
3.3.2	Algorithmes par mode glissant d'ordre 2 . . . . .	68
3.3.2.1	Algorithme sous-optimal . . . . .	69
3.3.2.2	Algorithme du <i>Twisting</i> . . . . .	70
3.3.2.3	Algorithme du <i>Super Twisting</i> . . . . .	71
3.3.3	Différentiateur . . . . .	73
3.4	Commande par mode glissant d'ordre 2 adaptative . . . . .	73
3.4.1	Algorithme du <i>Twisting</i> adaptatif (Kochalummootil, et al. [75]) . . . . .	74
3.4.2	Algorithme du <i>Twisting</i> adaptatif (Taleb et al. [134]) . . . . .	75
3.4.3	Algorithme du <i>Super Twisting</i> adaptatif . . . . .	77
3.5	Conclusion . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Commandes robustes du système d'alimentation en air</b>	<b>79</b>
4.1	Introduction . . . . .	79
4.2	Formulation du problème . . . . .	80
4.2.1	Modèle du système d'alimentation en air . . . . .	80
4.2.2	Formalisation des incertitudes . . . . .	81
4.2.3	Objectif de la commande . . . . .	82
4.3	Commande en cascade robuste par mode glissant d'ordre deux . . . . .	82
4.3.1	Boucle externe . . . . .	83
4.3.2	Boucle interne . . . . .	85
4.4	Commande en cascade adaptative par mode glissant d'ordre deux . . . . .	87
4.4.1	Boucle externe . . . . .	88
4.4.2	Boucle interne . . . . .	89

4.5	Validation expérimentale . . . . .	90
4.5.1	Description de la plateforme . . . . .	90
4.5.2	Résultats expérimentaux de la commande robuste . . . . .	91
4.5.3	Résultats expérimentaux de la commande adaptative . . . . .	93
4.6	Conclusion . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Commandes sous contraintes par Extremum Seeking</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Formulation du problème . . . . .	104
5.2.1	Modèle du compresseur centrifuge . . . . .	104
5.2.2	Contraintes de la PàC et du compresseur . . . . .	104
5.3	Gestion de la charge par Extremum Seeking . . . . .	106
5.3.1	Gestionnaire de charge . . . . .	106
5.3.2	La technique d'Extremum Seeking basée sur les modèles . . . . .	107
5.3.3	La technique d'Extremum Seeking basée sur la perturbation sinu- soïdale . . . . .	109
5.4	Application au système à PàC . . . . .	111
5.4.1	Protection du système à PàC piloté par un compresseur à double vis	112
5.4.1.1	Résultats expérimentaux . . . . .	113
5.4.2	Protection du système à PàC piloté par un compresseur centrifuge .	114
5.4.2.1	Résultats expérimentaux . . . . .	116
5.5	Conclusion . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Commande des pressions au cœur de la pile</b>	<b>121</b>
6.1	Introduction . . . . .	121
6.2	Formulation du problème . . . . .	122
6.2.1	Modèle du cœur de la pile . . . . .	122
6.2.2	Formalisation des incertitudes . . . . .	123
6.2.3	Objectif de la commande . . . . .	123
6.3	Synthèse de la loi de commande . . . . .	124
6.3.1	Synthèse de la surface de glissement . . . . .	125
6.3.2	Commande par mode glissant d'ordre deux . . . . .	125
6.4	Résultats de simulation . . . . .	128
6.5	Conclusion . . . . .	129

---

<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>135</b>
<b>Annexe</b>	<b>141</b>
A Paramètres du système . . . . .	141
B Constantes des systèmes . . . . .	142
C Expressions des fonctions certains et incertains . . . . .	144
<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>



---

---

## *Liste des figures*

---

---

<b>Figure 0.1.</b> Première pile à combustible créée par William Robert Grove [48] . . . . .	2
<b>Figure 0.2.</b> Applications récentes des PàC . . . . .	3
<b>Figure 1.1.</b> Principe de fonctionnement de la pile à combustible . . . . .	10
<b>Figure 1.2.</b> Composition d'une cellule élémentaire . . . . .	11
<b>Figure 1.3.</b> Placement des cellules élémentaires . . . . .	11
<b>Figure 1.4.</b> Courbe de polarisation $80^{\circ}\text{C}$ pour une pression de la cathode 1 bar . . . . .	12
<b>Figure 1.5.</b> Système à pile à combustible . . . . .	13
<b>Figure 2.1.</b> Les différentes pertes et la tension totale correspondent à une cellule : (a) pertes d'activation, (b) pertes ohmiques, (c) pertes de concentration et (d) tension totale . . . . .	30
<b>Figure 2.2.</b> Représentation des états dans le système à PàC . . . . .	32
<b>Figure 2.3.</b> Le débit relatif en fonction du rapport de pression . . . . .	34
<b>Figure 2.4.</b> Les débits massiques dans la cathode . . . . .	37
<b>Figure 2.5.</b> Les débits massiques dans l'anode . . . . .	40
<b>Figure 2.6.</b> Les débits massiques dans la membrane . . . . .	44
<b>Figure 2.7.</b> Débit à la sortie de la cathode en fonction du rapport de pression . . . . .	46
<b>Figure 2.8.</b> Turbo-machines . . . . .	47
<b>Figure 2.9.</b> Compresseur volumétriques . . . . .	47
<b>Figure 2.10.</b> Banc d'essai du compresseur à double vis . . . . .	49
<b>Figure 2.11.</b> Cartographie du rendement volumétrique en fonction de la pression à la sortie du compresseur et la vitesse angulaire du compresseur . . . . .	50
<b>Figure 2.12.</b> Cartographie du rendement du compresseur en fonction de la pression à la sortie et du débit d'air du compresseur . . . . .	51

<b>Figure 2.13.</b> Rendement volumétrique du compresseur à double vis par simulation et par expérimentation . . . . .	52
<b>Figure 2.14.</b> Variations de la vitesse du compresseur à double vis en simulation et en expérimentation . . . . .	53
<b>Figure 2.15.</b> Variations du débit du compresseur à double vis en simulation et en expérimentation . . . . .	54
<b>Figure 2.16.</b> Banc d'essai du compresseur centrifuge . . . . .	55
<b>Figure 2.17.</b> Cartographie du rendement du compresseur centrifuge en fonction de la pression à la sortie et du débit d'air du compresseur . . . . .	57
<b>Figure 2.18.</b> Comparaison entre la cartographique du compresseur centrifuge de la simulation et de l'expérimentation . . . . .	58
<b>Figure 2.19.</b> Variations de la vitesse du compresseur centrifuge en simulation et en expérimentation . . . . .	59
<b>Figure 2.20.</b> Variations de la vitesse du compresseur centrifuge en simulation et en expérimentation . . . . .	60
<b>Figure 3.1.</b> Le phénomène du <i>chattering</i> . . . . .	65
<b>Figure 3.2.</b> Allure du régime glissant : MG classique (gauche) et MGOS (droite) . . . . .	66
<b>Figure 3.3.</b> Ensemble de glissement d'ordre 2 . . . . .	67
<b>Figure 3.4.</b> Degré relatif du système augmenté [78] . . . . .	69
<b>Figure 3.5.</b> Algorithme sous-optimal : plan de phase $(s, \dot{s})$ . . . . .	70
<b>Figure 3.6.</b> Algorithme du Twisting : plan de phase $(s, \dot{s})$ . . . . .	71
<b>Figure 3.7.</b> Algorithme du Super Twisting : plan de phase $(s, \dot{s})$ . . . . .	72
<b>Figure 3.8.</b> Structure du différentiateur . . . . .	73
<b>Figure 3.9.</b> Algorithme du Twisting adaptatif [75] : plan de phase $(s, \dot{s})$ . . . . .	75
<b>Figure 3.10.</b> Algorithme du Twisting adaptatif [134] : plan de phase $(s, \dot{s})$ . . . . .	76
<b>Figure 3.11.</b> Algorithme du Super Twisting adaptatif : plan de phase $(s, \dot{s})$ . . . . .	77
<b>Figure 4.1.</b> La puissance nette en fonction du rapport d'excès d'oxygène pour différentes variations de courant fourni par la PàC . . . . .	83
<b>Figure 4.2.</b> Structure de la commande en cascade . . . . .	83
<b>Figure 4.3.</b> Structure de la commande par MGO2 sous-optimal . . . . .	84
<b>Figure 4.4.</b> Structure de la commande adaptative par MGO2 Super Twisting . . . . .	88
<b>Figure 4.5.</b> La structure de simulation Hardware-in-Loop . . . . .	91
<b>Figure 4.6.</b> Variation du courant de la pile à combustible . . . . .	92



<b>Figure 4.7.</b> Variation de la tension de la pile à combustible . . . . .	93
<b>Figure 4.8.</b> Variation du rapport d'excès d'oxygène . . . . .	94
<b>Figure 4.9.</b> Variation de la vitesse angulaire du compresseur . . . . .	95
<b>Figure 4.10.</b> Erreur de la boucle interne . . . . .	96
<b>Figure 4.11.</b> Variation du débit d'air du compresseur . . . . .	96
<b>Figure 4.12.</b> Puissance nette . . . . .	97
<b>Figure 4.13.</b> Variation du courant quadratique du moteur . . . . .	97
<b>Figure 4.14.</b> Comparaison entre le rapport d'excès d'oxygène dans le cas d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur . . . . .	98
<b>Figure 4.15.</b> Comparaison entre le courant quadratique du moteur dans le cas d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur . . . . .	98
<b>Figure 4.16.</b> Comparaison entre le rapport d'excès d'oxygène des commandes robustes et celui de la commande adaptative . . . . .	99
<b>Figure 4.17.</b> Comparaison entre la puissance nette des commandes robustes et celle de la commande adaptative . . . . .	99
<b>Figure 4.18.</b> Comparaison entre le courant quadratique du moteur des commandes robustes et celui de la commande adaptative . . . . .	100
<b>Figure 4.19.</b> Les gains adaptatifs du contrôleur . . . . .	100
<b>Figure 4.20.</b> Comparaison entre le rapport d'excès d'oxygène dans le cas d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur adaptatif . . . . .	101
<b>Figure 4.21.</b> Comparaison entre le courant quadratique du moteur dans le cas d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur adaptatif . . . . .	101
<b>Figure 4.22.</b> Différence entre l'énergie de la commande robuste et celle de la commande adaptative . . . . .	102
<b>Figure 5.1.</b> Rapport d'excès d'oxygène en fonction de la variation de la charge . . . . .	105
<b>Figure 5.2.</b> Cartographie du compresseur centrifuge . . . . .	106
<b>Figure 5.3.</b> Variations de la sortie . . . . .	110
<b>Figure 5.4.</b> Structure de la commande Extremum seeking . . . . .	110
<b>Figure 5.5.</b> Structure du gestionnaire de charge (Load Governor) . . . . .	112
<b>Figure 5.6.</b> Variations de la charge et du courant fourni par la PàC . . . . .	114
<b>Figure 5.7.</b> Variations de la charge et du courant fourni par la PàC . . . . .	115
<b>Figure 5.8.</b> Rapport d'excès d'oxygène sans et avec contrainte . . . . .	116
<b>Figure 5.9.</b> Rapport d'excès d'oxygène sans et avec contrainte . . . . .	117

<b>Figure 5.10.</b> Algorithme d'Extremum Seeking basé sur la perturbation sinusoïdale . . .	117
<b>Figure 5.11.</b> Variations de la charge et du courant fourni par la PàC . . . . .	118
<b>Figure 5.12.</b> Variations de la charge et du courant fourni par la PàC . . . . .	119
<b>Figure 5.13.</b> Rapport d'excès d'oxygène sans et avec contrainte . . . . .	119
<b>Figure 5.14.</b> Cartographie du compresseur centrifuge . . . . .	120
<b>Figure 6.1.</b> Structure de la commande proposée . . . . .	124
<b>Figure 6.2.</b> Variation de la charge . . . . .	128
<b>Figure 6.3.</b> Variation de la tension électrique de la PàC . . . . .	130
<b>Figure 6.4.</b> Variations de la pression de l'anode . . . . .	130
<b>Figure 6.5.</b> Variations de la pression de la cathode . . . . .	131
<b>Figure 6.6.</b> Variations de la différence de pression entre l'anode et la cathode . . . . .	131
<b>Figure 6.7.</b> Variations de la pression à l'entrée de la cathode . . . . .	132
<b>Figure 6.8.</b> Variations de la pression à l'entrée de l'anode . . . . .	132
<b>Figure 6.9.</b> Comparaison entre la différence de pression entre l'anode et la cathode d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur .	133

---

---

## *Liste des tableaux*

---

---

TABLE 1.1 : Différentes technologies de piles à combustible [124] . . . . .	9
TABLE 4.1 : Paramètres incertains du système . . . . .	81
TABLE 6.1 : Paramètres incertains du système . . . . .	124
TABLE .2 : Valeur nominale des paramètres de la simulation . . . . .	151



---

---

## *Introduction générale*

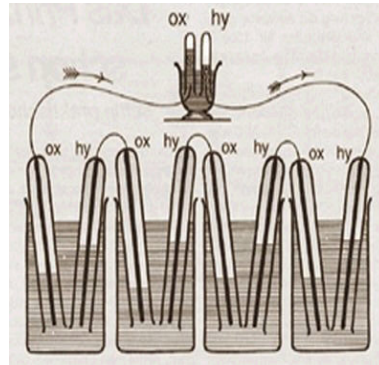
---

---

Les piles à combustible sont des dispositifs électrochimiques qui convertissent en électricité l'énergie issue d'une réaction chimique entre l'hydrogène et l'oxygène [48]. Le principe de fonctionnement de la pile à combustible (PàC) a été découvert par le scientifique allemande Christian Friedrich Schönbein en 1838. William Robert Grove a développé par la suite cette application pour créer la première PàC en 1839 (Fig.0.1). En 1932 Francis T Bacon a repris ces études pour réaliser la première PàC d'une puissance de 1kW en 1953 puis, 5kW en 1959. La PàC a été utilisée dans plusieurs applications stationnaires pour les industries ou l'immobilier [36].

Malgré la réussite de la technologie des PàCs pendant les années 80, la recherche sur les PàCs a été abandonnée dans les applications de transport du fait de leur prix élevé, leur faible durée de vie, leur volume et leur poids, trop important pour ce type d'applications [9]. Cependant, les piles à combustible ont continué à évoluer notamment dans les domaines des électrodes et des catalyseurs. Cette évolution a permis de réduire le prix de fabrication et d'augmenter le rendement et la fiabilité.

Actuellement, les PàCs sont utilisées sous forme de prototype dans les applications de transport (voitures, bus, avions, scooters, bateaux et sous-marins Fig.0.2) [71, 87, 117, 105]. C'est dans le domaine des applications de puissance que les avancées les plus marquantes se font ressentir. L'efficacité énergétique de la PàC est bien meilleure que celle des moteurs thermiques [67]. De plus, la PàC peut produire de l'électricité en continu et cela la rend plus efficace qu'une batterie [62]. Les ressources primaires du système sont peu coûteuses, disponibles et ne produisent pas d'émissions polluantes et de déchets. La réaction chimique dans la PàC produit de l'eau, de la chaleur, de l'azote. Les émissions des autres gaz à effet



**Figure 0.1.** Première pile à combustible créée par William Robert Grove [48]

de serre sont négligeables. Ces avantages expliquent les motivations fortes pour le développement et la recherche dans ce domaine. Dans le futur proche, la technologie des piles à combustible sera considérée comme source d'énergie primaire renouvelable, en particulier pour les applications de transport.

Malgré l'investissement sur cette technologie, plusieurs problématiques restent ouvertes et font l'objet de plusieurs axes d'études comme :

1. la création de centrales pour la production d'hydrogène et l'installation d'infrastructures de distribution.
2. l'amélioration des matériaux de fabrication de la PàC, et surtout de la membrane, afin de prolonger leur durée de vie.
3. la réduction des coûts du système PàC et de sa maintenance.
4. la commande du système en vue d'améliorer ses performances.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés plus particulièrement au quatrième axe, qui traite les problématiques de la commande du système à PàC, afin d'améliorer sa performance et son rendement. Un système à PàC est constitué d'un cœur de pile et d'auxiliaires (compresseur, humidificateur, réservoir d'hydrogène, refroidisseur, etc.). Plus précisément, nous ciblons le système d'alimentation d'air, celui-ci est composé d'un compresseur motorisé (moto-compresseur). Le compresseur est l'auxiliaire qui consomme le plus de puissance. Celle-ci peut atteindre 20% de la puissance fournie par la PàC [118]. Pour ces raisons, le contrôle du compresseur est impératif pour optimiser l'énergie et ainsi augmenter le rendement. Evidemment, comme dans chaque système mécanique, il existe



**Figure 0.2.** *Applications récentes des PàC*

des contraintes physiques, qui peuvent surgir et ainsi endommager le système. Cela nous a conduits à développer un système de contrôle pour protéger la PàC et ses auxiliaires afin de prolonger sa durée de vie. La structure de la thèse est divisée en 6 chapitres.

**Chapitre 1.** Il présente un état de l'art d'un système à pile à combustible dédié aux applications de transport. Les différents types de pile sont discutés, ainsi que leurs auxiliaires. Les problématiques du contrôle sont présentées, comme la gestion de l'eau et de la température, l'optimisation de l'énergie, et la dégradation du système. Finalement, la contribution de la thèse est présentée.

**Chapitre 2.** Il traite la modélisation, du système à pile à combustible et de ses auxiliaires. Dans un premier temps une présentation de la modélisation statique de la pile est proposée. Cela permet de définir la tension électrique fournie par la pile. Ensuite, nous présentons la modélisation dynamique du système à PàC proposée par [118]. Cette modélisation décrit les dynamiques du cœur de la pile, du compresseur et du réservoir d'hydrogène. Dans les chapitres 4 et 5, nous nous sommes intéressés à la gestion de l'air et à la partie cathode de la PàC. Deux types de compresseurs sont considérés lors de ces études, le compresseur à double vis et le compresseur centrifuge.

**Chapitre 3.** Il présente un état de l'art sur les commandes par mode glissant d'ordre

supérieur. Ces lois de commande sont dédiées aux systèmes non-linéaires incertains. D'une part, les lois de commande par mode glissant d'ordre deux "classiques", celles-ci sont connues pour leur robustesse, leur efficacité et leur convergence en temps fini. D'autre part, les lois de commande par mode glissant d'ordre deux "adaptatives", celles-ci sont basées sur des algorithmes classiques et convergents à un voisinage de zéro. Les gains de ces contrôleurs s'adaptent d'une façon dynamique vis-à-vis des perturbations et des incertitudes. Ainsi, il n'est pas nécessaire de connaître les bornes des incertitudes lors de la synthèse de commande.

**Chapitre 4.** Il aborde la problématique de la commande du système d'alimentation en air. L'objectif de la commande est d'optimiser la puissance fournie par la pile malgré les incertitudes. Dans un premier temps, cet objectif est atteint en appliquant la commande robuste par mode glissant d'ordre deux (MGO2). La synthèse de cette commande nécessite la connaissance des bornes sur les incertitudes. Ces dernières sont formalisées et intégrées dans le modèle. Ainsi, le choix des gains du contrôleur garantit sa robustesse vis-à-vis des incertitudes. Dans un deuxième temps, nous avons appliqué la commande adaptative par MGO2. Les gains adaptatifs du contrôleur permettent de synthétiser la commande sans connaître les bornes des incertitudes. Ces travaux ont été validés expérimentalement sur un banc d'essai *Hardware In Loop* (HIL) situé au laboratoire des systèmes pile à combustible FCLAB à Belfort. Une comparaison entre les lois de commande robuste et adaptative est présentée.

**Chapitre 5.** Il traite le problème de protection du système d'alimentation en air de certaines contraintes qui peuvent être fatale au système à PàC. Ces dernières peuvent être engendrées par les variations rapides de la charge. La protection du système est organisée en mettant en œuvre un gestionnaire de charge (*Load Governor*). L'objectif de ce gestionnaire est de fournir une puissance nette maximale, sans violer les contraintes. Cet objectif est atteint en appliquant la technique d'*Extremum Seeking*. Dans ce chapitre, deux systèmes d'alimentation en air de la pile ont été étudiés. Le premier est basé sur l'utilisation d'un compresseur à double vis. Dans ce cas, la contrainte considérée est celle du manque d'oxygène à la cathode. Ainsi, un gestionnaire de charge basé sur la technique d'*Extremum Seeking* basée sur le modèle est appliqué pour éviter cette contrainte. Le deuxième système étudié utilise un compresseur centrifuge. Dans ce cas, les contraintes qui peuvent être violées sont le risque que le compresseur fonctionne hors de sa zone nominale (zone de



pompage) et aussi le manque d'oxygène à la cathode. Ce problème a été résolu en appliquant un gestionnaire de charge basé sur la technique d'*Extremum Seeking* basée sur des perturbations sinusoïdales. Ces travaux ont été validés expérimentalement sur deux bancs d'essai HIL situés au FCLAB.

**Chapitre 6.** Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la régulation des pressions dans les chambres des électrodes de la pile (l'anode et la cathode). Le modèle dynamique du cœur de la pile est présenté avec une formalisation des incertitudes. Cela permet de synthétiser une loi de commande robuste vis-à-vis des paramètres incertains. L'objectif de cette commande, est de réduire la différence de pression entre l'anode et la cathode afin de protéger la membrane. Cet objectif est atteint en appliquant la commande par mode glissant d'ordre deux. Ce travail a été validé par simulation.



# Chapitre 1

---

---

## *Etat de l'art d'un système à pile à combustible de type PEM*

---

---

### 1.1 Introduction des piles à combustible

Les piles à combustible sont constituées de deux électrodes (anode et cathode) séparées par un électrolyte. Ils sont classés selon le type d'électrolyte utilisé. Les caractéristiques de la PàC, comme la puissance, la température de fonctionnement et le rendement, varient selon le type de PàC. Les PàCs peuvent être classées dans les cinq catégories suivantes [63] :

- les piles à combustible alcalines (AFC) sont parmi les premières technologies développées par la NASA pour la production d'électricité et la génération d'eau potable. Elles sont alimentées par l'hydrogène et l'oxygène comprimés, la réaction chimique produit de l'eau potable. L'électrolyte utilisé est l'hydroxyde de potassium. Les températures de fonctionnement sont comprises entre  $50^{\circ}\text{C}$  et  $250^{\circ}\text{C}$ , leur rendement est à peu près de 60%. Cette technologie a été appliquée dans plusieurs missions de la NASA, comme Gemini et Apollo.
- les piles à combustible à électrolyte polymère (PEFC) sont appelées aussi, piles à membrane échangeuse de protons (PEMFC). Elles sont constituées d'une membrane polymère solide et de deux électrodes séparées par des catalyseurs. Elles sont alimentées, d'un côté par de l'hydrogène et de l'autre par l'oxygène de l'air. Les températures de fonctionnement oscillent autour de  $80^{\circ}\text{C}$ . Ce type de pile est connu

du fait de leur rapport poids-puissance très avantageux et elles sont souvent utilisées dans les applications de transport.

- les piles à combustible à acide phosphorique (PAFC) utilisent l'acide phosphorique comme électrolyte. L'acide phosphorique est contenu dans une matrice poreuse de carbure de silicium et de téflon. Les températures de fonctionnement sont comprises entre  $160^{\circ}\text{C}$  et  $220^{\circ}\text{C}$ , leur rendement est à peu près de 45%. Ces piles sont utilisées pour les applications stationnaires.
- les piles à combustible à carbonate fondu (MCFC) fonctionnent à des températures d'environ  $600^{\circ}\text{C}$ . L'électrolyte utilisé est composé de sels de carbonate fondu. Ces piles sont généralement alimentées par du gaz naturel et du charbon dans les applications industrielles. Leur rendement est relativement important par rapport aux autres types de pile. L'hydrogène est reformé dans la pile grâce à leur haute température de fonctionnement, ce qui réduit les coûts.
- les piles à combustible à oxyde solide (SOFC) possèdent un rendement des plus élevé. Ce type de pile est utilisé dans les applications stationnaires. La température de fonctionnement de ces piles peut atteindre  $1000^{\circ}\text{C}$ . L'électrolyte est composé de céramique. Les SOFC permettent de reformer les carburants en interne, ce qui permet l'utilisation d'une grande variété des combustibles et réduit le coût associé à l'ajout d'un reformeur pour le système.

Dans cette thèse nous nous intéressons aux piles à combustible de type PEM. Ces piles à combustible ont pour avantage de fonctionner à une température relativement faible par rapport aux autres. De plus ce type de pile a un volume moins important que les autres, ce qui facilite leur utilisation dans les applications de transport.

## 1.2 Les piles à membrane échangeuse de protons

### 1.2.1 Principe de fonctionnement de la PàC (PEMFC)

Les piles à membrane échangeuse de protons sont alimentées, par de l'air au niveau de la cathode et par de l'hydrogène au niveau de l'anode. Un catalyseur à base de platine est positionné au niveau des électrodes. Ces deux électrodes sont séparées par une

TABLE 1.1: Différentes technologies de piles à combustible [124]

Paramètre	PEMFC	AFC	PAFC	MCFC	SOFC
Puissance électrique	1 W - 250 kW	10 - 50 kW	100 - 200 kW	500 kW - 10 MW	1 kW - 10 MW
Densité de courant	0,6A.cm <sup>-2</sup>	0,09A.cm <sup>-2</sup>	0,18A.cm <sup>-2</sup>	0,13A.cm <sup>-2</sup>	0,25 - 1,25 A.cm <sup>-2</sup>
Rendement	30 - 50 %	40 - 60 %	35 - 45 %	50 - 60 %	50 - 70 %
Durée de vie	5000 h	2000 h	40000 h	20000 h	20000 h
Pression	2 - 5 bar	1 bar	1 bar	1 bar	1 bar
Température	60 - 90 °C	50 - 250 °C	160 - 220 °C	600 - 700 °C	800 - 1000 °C
Electrolyte	Polymère perfluoré (solide)	Hydroxyde de potassium (liquide)	acide phosphorique (liquide)	carbonate de lithium/potassium (liquide)	Céramique (solide)
Catalyseur	Platine	Platine, nickel	Platine	Nickel	Pérovskites
Combustible	Hydrogène pur ou reformé	Hydrogène	Gaz naturel reformé	Reformage interne de gaz naturel	Gaz naturel
Applications	Transports portables, stationnaires	Spatiales transports	Transports stationnaires	Stationnaires	Transports stationnaires

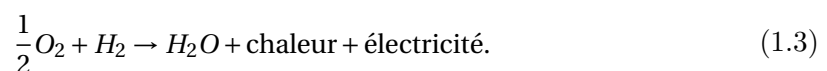
cellule élémentaire. Celle-ci est composée d'un électrolyte. Dans l'anode, l'hydrogène se décompose en proton ( $H^+$ ) et en électron ( $e^-$ ). Au niveau de la cellule élémentaire, les protons traversent la membrane alors que les électrons restent dans l'anode. La réaction à l'intérieur de l'anode est exprimée sous la forme suivante :



Les électrons bloqués dans l'anode traversent un circuit qui permet d'alimenter une charge électrique. La cathode reçoit les électrons passant par le circuit électrique. Ainsi, les protons d'hydrogène traversent la membrane, afin de réagir avec l'oxygène, pour produire de l'eau et de la chaleur. La réaction chimique à l'intérieur de la cathode est exprimée sous la forme suivante :



Ce principe de fonctionnement est présenté sur la Fig.1.1. Le phénomène global de la PàC est donné par la réaction chimique suivante :



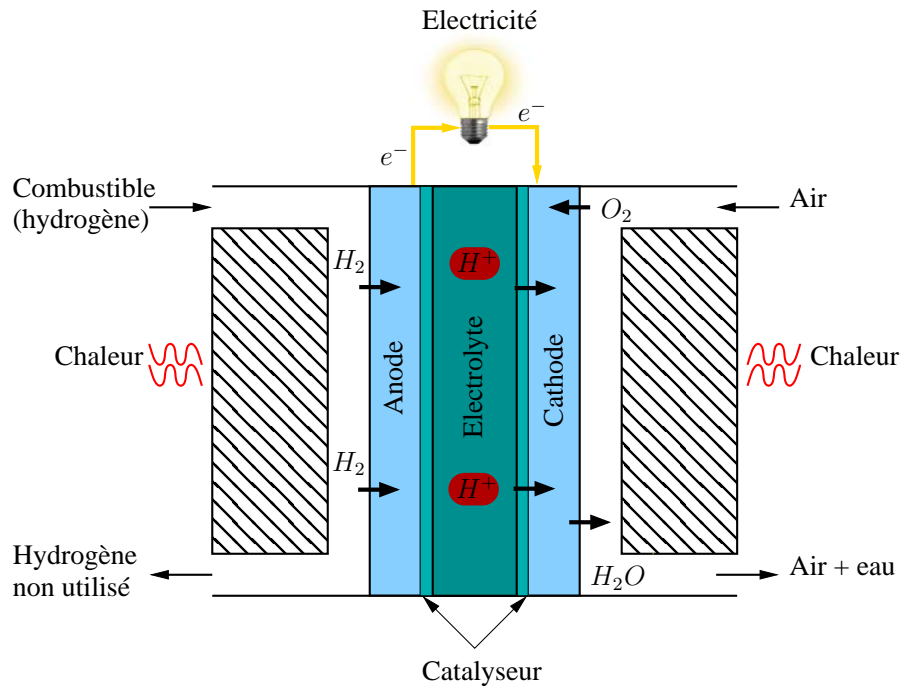


Figure 1.1. Principe de fonctionnement de la pile à combustible

Pour établir la réaction chimique, chaque cellule doit être constituée d'une membrane polymère, d'un catalyseur et d'électrodes. Les électrodes sont en contact avec la membrane qui assure la fonction d'électrolyte. Ainsi, les électrodes (anode et cathode) sont recouvertes par le catalyseur (Fig.1.2). L'air et l'hydrogène sont injectés dans les plaques bipolaires et ils arrivent ainsi aux électrodes de la PEMFC.

La réaction chimique dans une cellule de la PàC produit une tension qui varie entre 0 et 1 V [84]. Afin de rendre la tension suffisamment grande pour des applications électriques, une PàC est constituée de plusieurs cellules élémentaires en série, comme présenté sur la Fig.1.3.

### 1.2.2 Tension électrique de la PEMFC

La tension de la PàC dépend fortement de la charge demandée et aussi de son état de fonctionnement prenant en compte la température, la pression, etc. Les caractéristiques de la PàC sont représentées sous la forme d'une courbe de polarisation. Cette relation est donnée par la tension de la pile en fonction de la densité du courant Fig.1.4. Cette

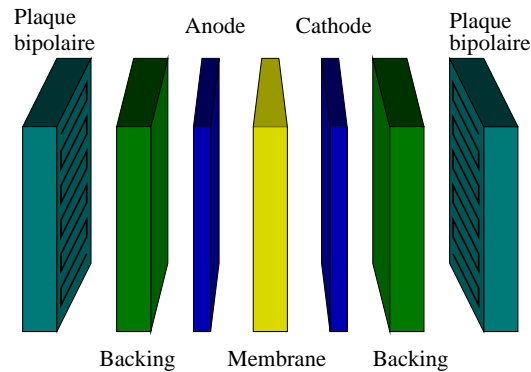


Figure 1.2. Composition d'une cellule élémentaire

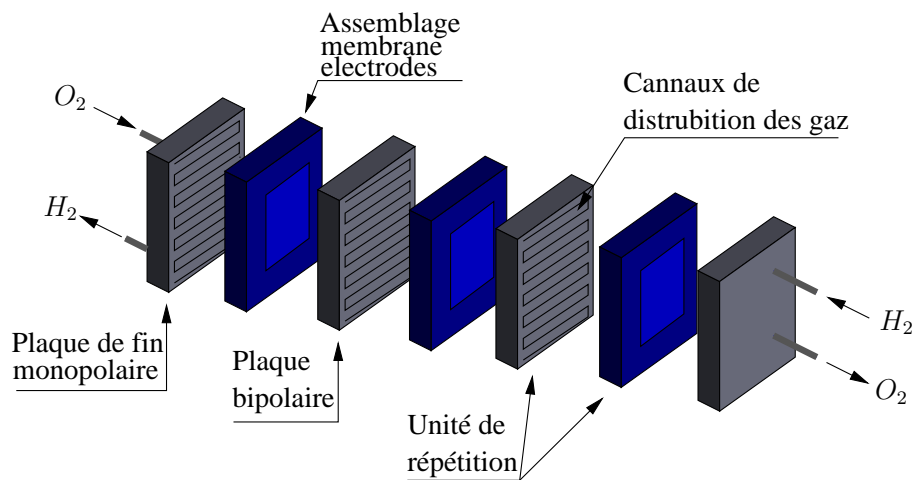
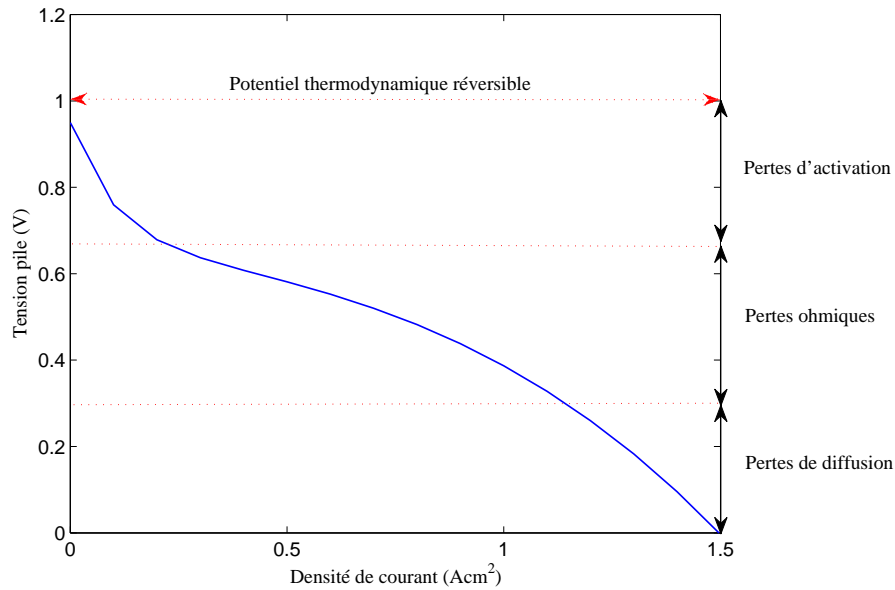


Figure 1.3. Placement des cellules élémentaires

dernière est tracée pour un état de fonctionnement précis, une température de  $80^{\circ}\text{C}$  et une pression de la cathode de 1 bar. La Fig.1.4 montre que pour une densité de courant élevée les pertes augmentent alors que la tension diminue. Ces pertes sont dues à la résistance interne de la PàC, au transport des gaz non réactifs, et à la diminution de la vitesse de réaction. L'efficacité de la PàC est proportionnelle à la tension pour cela il est préférable que le fonctionnement soit à une faible charge afin d'augmenter son efficacité.

La tension de la pile est définie en fonction de : la densité de courant, la pression d'eau dans la cathode, la pression partielle de l'oxygène et de l'hydrogène, la température de la



**Figure 1.4.** Courbe de polarisation  $80^{\circ}\text{C}$  pour une pression de la cathode 1 bar

pile et l'humidité [58], elle est donnée par :

$$V_{fc} = E - V_{act} - V_{ohm} - V_{conc}. \quad (1.4)$$

où  $E$  est la tension potentiel thermodynamique réversible ou la tension de Nernst. Cette tension peut être augmentée en installant des cellules en série. La tension globale de la PàC devient égale à la somme des tensions de chaque cellule, qui est donnée par :

$$V_{st} = nV_{fc}, \quad (1.5)$$

où  $n$  est le nombre de cellules.

Les trois types de pertes apparaissent dans l'équation (1.4) sont,

1. les pertes d'activation  $V_{act}$  qui sont dues à la réaction chimique et aux mouvements des électrons entre les électrodes. Au départ de la réaction chimique, la PàC a besoin d'énergie pour activer cette réaction, mais cela cause une chute de tension.
2. les pertes ohmiques  $V_{ohm}$  sont dues à la résistance de la membrane polymère lors du transfert des protons et à la résistance des électrodes et des connecteurs lors du transfert des électrons.



- les pertes de concentration  $V_{conc}$  se produisent à la chute de la concentration des réactifs consommés dans la réaction. Cela provoque une diminution rapide de la tension pour une densité de courant élevée.

### 1.3 Système à pile à combustible

Le cœur de la PàC ne peut pas fonctionner seul. Il a besoin d'un certain nombre des systèmes auxiliaires qui garantissent la meilleure condition de fonctionnement [118]. Ces auxiliaires sont calibrés pour améliorer les performances et les conditions de fonctionnement de la pile. Les auxiliaires principaux sont : le système d'alimentation en air de la partie cathode, le système d'alimentation en hydrogène de la partie anode, le convertisseur DC/DC à la sortie de la puissance, le refroidisseur, l'humidificateur et le système de contrôle. Le système à PàC est présenté sur la Fig.1.5.

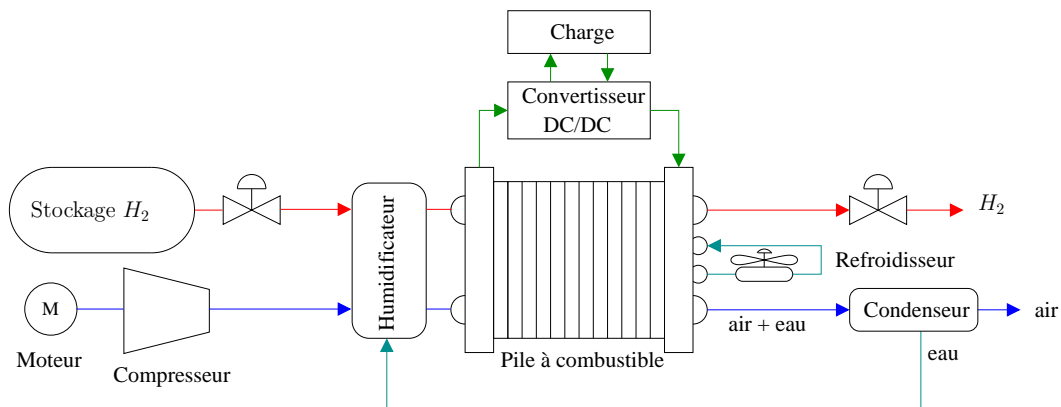


Figure 1.5. Système à pile à combustible

#### 1.3.1 Système d'alimentation en air

Rappelons que la PàC a besoin d'oxygène pour la partie cathode. L'injection de l'oxygène dépend du domaine d'utilisation et de la puissance de la PàC. Par exemple, pour une utilisation sous marine, l'oxygène est stocké dans des réservoirs à haute pression. Les PàC de faible puissance sont alimentées directement par l'air atmosphérique, sachant que l'oxygène représente 21% de l'air. Par contre, pour les PàC à haute puissance utilisées dans les applications de transport, un système moto-compresseur est utile pour injecter

l'air à haut débit.

Pour assurer un bon fonctionnement d'une PàC, il faut atteindre un niveau de pression et de débit d'air suffisant. Ce fonctionnement à haute pression augmente le rendement et la puissance de la pile. Plusieurs types de compresseurs sont utilisables, on peut citer : le compresseur centrifuge, le compresseur à double vis, le compresseur à lobes, etc. [18].

### 1.3.2 Système d'alimentation en hydrogène

La partie anode de la PàC est alimentée en hydrogène pur. Ce dernier n'existe pas à l'état natif dans la nature car il est toujours associé à d'autres éléments. Dans les applications actuelles, deux types de sources en hydrogène sont utilisés, soit l'hydrogène pur stocké dans un réservoir à haute pression (300 à 700 bar) [118], soit un système de reformeur d'hydrogène intégré dans les véhicules à PàC [124]. Pour le premier cas, l'hydrogène est normalement produit à grande échelle de 4 manières différentes :

1. La technologie thermo-chimique : cette technique est la plus utilisée pour la production d'hydrogène. Cette procédure est appelée reformeur et consiste à produire de l'hydrogène à partir de gaz naturels comme : le méthanol, l'éthanol, etc. [57]. Cette technologie n'est pas polluante et plusieurs types de véhicule l'utilisent déjà. L'avantage de cette méthode est d'utiliser les stations essences classiques.
2. La technologie photo-biologique : cette méthode est basée sur la photosynthèse des bactéries et des algues vertes pour produire de l'hydrogène [32]. L'inconvénient, de cette méthode, est que la production de l'hydrogène est relativement faible par rapport aux autres méthodes.
3. La technologie photochimique : cette méthode consiste à produire de l'hydrogène par le biais de panneaux solaires. La lumière du soleil décompose l'eau en hydrogène et en oxygène grâce à un semi-conducteur immergé dans l'eau. Ce procédé est en cours d'étude et de développement [76].
4. La technologie par électrolyseur : cette technique correspond à un système inverse de la PàC, qui dissocie l'eau en hydrogène et en oxygène grâce à l'énergie électrique. Dans ce cas, la production d'hydrogène consomme de l'électricité. Ce qui impose

d'utiliser une source d'énergie renouvelable comme l'éolien, les panneaux solaires, etc.

### 1.3.3 Système de refroidissement

La réaction chimique entre l'oxygène et l'hydrogène produit également de la chaleur. De plus, l'air comprimé à la sortie du compresseur a aussi, une température élevée. Ces deux raisons contribuent à l'augmentation de la température à l'intérieur de la PàC. Afin d'avoir une réaction chimique rentable, la température nominale du système doit être comprises entre  $65^{\circ}\text{C}$  et  $80^{\circ}\text{C}$  [9]. Pour cela un système de refroidissement est recommandé pour gérer la température à l'intérieur de la pile. Ce refroidissement est effectué soit par un ventilateur soit par un circuit fluide [6].

### 1.3.4 Système d'humidification

L'hydrogène et l'air doivent être humidifiés pour hydrater la membrane. Par contre, il ne faut ni sécher ni noyer cette membrane, car autrement cela réduit la tension électrique générée et donc la durée de vie de la PàC. Un seuil minimal d'humidité est indispensable pour garantir la réaction chimique et le passage des électrons à travers la membrane [29]. L'augmentation brusque de la charge, le changement de température, et les variations des pressions des gaz peuvent modifier l'état de l'humidificateur.

### 1.3.5 Convertisseur

La tension délivrée par la PàC doit être adaptée au regard de la charge à fournir. Il faut donc faire appel à un convertisseur pour ajuster l'énergie fournie. Celui-ci permet d'établir l'interface entre la PàC et le bus d'électricité. Ce convertisseur est indispensable dans les véhicules à pile à combustible (ou hybrides). La pile à combustible n'est pas capable de répondre aux variations brusques de la charge. Pour cela des moyens de stockage rapide, comme le super-condensateur ou la batterie, doivent être reliés sur le bus continu pour faire face au régime transitoire [121, 148].

### 1.3.6 Système de contrôle commande

Comme présenté dans les paragraphes précédents, nous pouvons constater que les auxiliaires de la PàC sont très dépendants les uns des autres et que cela rend le système PàC

difficile à contrôler. Il est ainsi indispensable de développer un système de commande pour garantir un bon niveau de performance. Ce système est composé des éléments suivants :

1. Le système de commande du compresseur d'air dont l'objectif est de fournir un débit précis en fonction de la charge.
2. Le système de commande de l'électrovanne du réservoir d'hydrogène, de manière à gérer la pression à l'entrée de l'anode.
3. Le système de commande de la pompe gérant le système de refroidissement à eau de la PàC, où le système de commande d'un ventilateur en cas de refroidissement à air.
4. Le système de commande de la pompe alimentant le circuit d'humidification.
5. Le système de commande du convertisseur pour la gestion d'énergie.

## 1.4 Problématiques de la commande dans la PàC

Le rendement et la performance de la pile à combustible sont liés fortement aux fonctionnements de ses auxiliaires. Quand une charge est alimentée par la PàC, l'oxygène et l'hydrogène sont consommés, puis de la chaleur et de l'eau sont générés dans le système. Ainsi pour bien mener le fonctionnement d'un système PàC, la régulation des débits, des pressions, de la température et de l'eau est exigé.

### 1.4.1 Maximisation de l'énergie fournie par la PàC

Les auxiliaires du système à PàC sont alimentés en électricité par la pile. Le compresseur est l'auxiliaire qui consomme le plus d'énergie. Il peut atteindre jusqu'à 20% de la puissance totale [120]. Pour cela le contrôle du système d'alimentation en air est important, il permet d'optimiser la puissance nette de la PàC. Cette dernière est égale à la différence entre la puissance fournie par la pile à combustible et la puissance consommée par les auxiliaires. D'après [118], la puissance nette optimale est atteinte pour un rapport d'excès d'oxygène compris entre 2 et 2,5. Ce coefficient est égal au rapport entre le débit d'oxygène à l'entrée de la cathode et le débit d'oxygène qui réagit avec l'hydrogène. L'objectif est donc de maintenir un rapport d'excès d'oxygène optimal, afin d'atteindre un niveau de débit d'air suffisant. Cela permet de répondre au besoin nécessaire de la charge et d'optimiser la puissance nette du système à PàC.

### 1.4.2 Gestion de l'eau et de la température

Le problème de la gestion de l'eau est de maintenir un coefficient d'hydratation de la membrane constant. Cette dernière est sensible au séchage et au noyage [101]. Ces deux contraintes ralentissent la vitesse de passage des gaz et dégradent la membrane. Il est démontré expérimentalement qu'un excès d'eau dégrade la tension électrique de sortie de la PàC [102, 127], et un manque d'hydratation réduit sa durée de vie. Par contre, un taux d'humidité élevé est souhaitable pour assurer la conductivité des protons à travers la membrane. Il faut noter qu'une mauvaise gestion de l'eau peut créer une chute de tension de 20% à 40% [24].

Les piles à combustible de type PEM sont sensibles à la température durant le fonctionnement. Une température élevée accélère la réaction chimique et ainsi améliore la performance du système [41]. Mais hélas, comme cet air est injecté dans la PàC, cela va aussi provoquer le séchage de la membrane, il faut donc trouver la température idéale de fonctionnement. Les problématiques d'hydratation du système sont dépendantes de la gestion de l'eau et de la gestion de température, comme traitées dans [111, 146].

### 1.4.3 Dégradation du système à PàC

Le cœur de la pile et le compresseur centrifuge sont sensibles aux variations rapides de la charge [143]. Ces variations, rapides, provoquent un manque d'oxygène dans la cathode d'une part, et violent la zone nominale de fonctionnement du compresseur centrifuge d'autre part. Une augmentation rapide de la charge provoque une diminution de la pression partielle d'oxygène ainsi qu'une chute de la tension électrique de la pile. Cela peut provoquer une zone chaude sur la surface de la membrane et ainsi endommager la PàC. Dans le cas contraire, lors d'une diminution rapide de la charge, le débit du compresseur diminue aussi rapidement. Ainsi la pression à la sortie du compresseur diminue plus lentement que le débit. Ce phénomène positionne le fonctionnement du compresseur dans la zone de pompage et ainsi risque de l'endommager. Pour éviter cela, un gestionnaire de charge (Load Governor) doit être installé. Celui-ci permet de rendre les variations de la charge moins rapides afin de ne pas violer ces contraintes.

#### 1.4.4 Dégradation de la membrane

Dans les applications stationnaires, la PàC est alimentée en hydrogène pur. Celui-ci est stocké dans un réservoir à haute pression. L'oxygène, quand à lui, est fourni en air comprimé [46]. Lors du fonctionnement, il est indispensable de garder la différence entre la pression de l'anode et celle de la cathode inférieure à 0,5 bar. Cette différence peut déformer la membrane et réduire la durée de vie de la PàC. Pour cela, les pressions dans la cathode et dans l'anode sont fixées à une pression donnée. En gardant une pression élevée fixe, la pile ne risque pas un manque d'oxygène dans la cathode lors de la variation de la charge [93]. Cela augmente aussi la puissance fournie par la PàC. Pour cette raison, un système de commande doit être mis en place de manière à contrôler les pressions à l'entrée de l'anode et de la cathode.

### 1.5 Etat de l'art sur la commande des systèmes à PàC

Dans ce paragraphe un état de l'art sur la commande des systèmes à PàC est proposé, il étudie les différents types de solutions pour les problématiques discutées précédemment.

#### 1.5.1 Contrôle du système d'alimentation en air

Ces dernières années, plusieurs stratégies de commandes ont été proposées pour contrôler le système d'alimentation en air de la PàC. Comme présenté dans le paragraphe précédent, la puissance nette maximale est atteinte pour un rapport d'excès d'oxygène compris entre 2 et 2,5. Dans la littérature scientifique, cet objectif a été simplifié et ramené à maintenir le rapport d'excès d'oxygène à 2.

Dans [118], une première modélisation dynamique complète du système à PàC a été développée. Le modèle proposé est constitué de 9 équations dynamiques basées sur des relations thermodynamiques. L'optimisation de la puissance nette est obtenue, en appliquant un contrôleur par anticipation, tout en linéarisant le modèle autour d'un point de fonctionnement. Puis, dans [132] un modèle pour la partie alimentation en air est proposé. Sous certaines hypothèses [132], les auteurs ont réduit le modèle de 9 à 4 états. Ainsi, un régulateur de type proportionnel intégral (PI) est appliqué.

Plusieurs types de commandes prédictives ont été proposés dans [22, 49, 50, 51] pour commander le rapport d'excès d'oxygène. Par exemple, dans [50] une commande non-linéaire prédictive a été proposée en utilisant l'outil série de Volterra. Dans [51], une commande prédictive a été développée dans le but de trouver la tension d'alimentation du moteur qui pilote le compresseur. Dans [47], une implémentation en temps réel de la commande en mode glissant a été appliquée. Des commandes linéaire quadratique gaussienne et linéaire quadratique, tout en linéarisant le modèle dynamique, sont appliquées dans [107].

Dans [135, 136], les auteurs ont réduit le modèle 4 états proposé par [132] à 3 états. Ainsi, l'objectif de la commande a été atteint, en appliquant la commande par mode glissant d'ordre deux en utilisant l'algorithme du *Super Twisting*. Bien que le modèle ait été validé expérimentalement, son domaine de validité est limité à une plage de fonctionnement.

Une méthode d'optimisation de la puissance nette délivrée par la PàC est proposée par [28] et [109] en utilisant la méthode de l'*Extremum Seeking*. Cet algorithme est une méthode effective pour les problèmes d'optimisation, et pour les systèmes dynamiques mal connus.

Dans les travaux cités ci-dessus, les paramètres de la PàC sont considérés constants. Cependant, ces paramètres varient durant le fonctionnement réel, du fait de la réaction chimique, du colmatage des filtres à air et de la contamination des couches de diffusion des gaz [44]. Ainsi les paramètres du système peuvent varier durant le fonctionnement, on peut citer, la température, l'humidité, le volume des électrodes et les paramètres du compresseur. Par exemple dans [78, 79], des variations paramétriques ont été appliquées lors de la validation de la loi de commande. La relation entre le débit d'air du compresseur et le rapport d'excès d'oxygène est supposée statique. Ainsi une commande par mode glissant d'ordre 2 est élaborée pour contrôler le débit d'air du compresseur.

### 1.5.2 Protection du système à PàC

Dans le cas où la pile et le compresseur sont trop sollicités par la charge, le système à PàC risque la destruction lors des variations rapides de la charge. En effet, lors d'une augmentation rapide de la charge, la PàC demande plus d'oxygène pour satisfaire la de-

mande, cela provoque un manque d'oxygène à la cathode. Ce phénomène cause une chute de tension électrique de la pile qui crée ainsi une zone chaude. De ce fait, la surface de la membrane peut brûler et ainsi mettre la PàC en danger où au moins réduire sa durée de vie [118]. Si une chute de charge est provoquée, la PàC demande moins d'oxygène provoquant ainsi une réduction rapide du débit d'air du compresseur. Comme la pression à la sortie du compresseur ne peut pas être réduite de manière dynamique, cette condition met le compresseur centrifuge dans la zone de pompage, ce qui risque de l'endommager.

Pour résoudre ces problèmes, [133, 143, 144] ont implémenté un gestionnaire de charge "Load Governor". La stratégie du gestionnaire de charge consiste à filtrer la charge demandée par la PàC en fonction de ces deux contraintes, en utilisant un filtre linéaire de premier ordre avec un constant de temps ajustable. Dans [133, 143, 144], ce constant a été maximisé à l'aide de la méthode de la bisection, tout en protégeant le système des contraintes. Dans [133], l'implémentation du contrôleur demande de simuler plusieurs fois le modèle en ligne pour chaque échantillon afin de trouver le bon constant de temps. Dans [143], ce constant de temps a été calculé en mode hors-ligne afin de trouver le bon coefficient qui ne viole pas les contraintes. Ensuite il a été appliqué sur un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Dans [144], un super-condensateur a été installé pour compenser la puissance non fournie par la PàC.

### 1.5.3 Régulation de la différence de pression anode-cathode

Dans les piles à combustible, la différence de pression entre l'anode et la cathode peut dégrader la PàC et réduire sa durée de vie. Pour cela, il faut garder les pressions de l'anode et de la cathode égales. C'est un aspect très important de protection de la PàC et de la membrane [9].

Dans [118], sous l'hypothèse que la sortie de l'anode est fermée "Dead-Ended", un contrôleur de type proportionnel est appliqué sur la différence de pression pour maintenir la pression de l'anode et de la cathode égales. Dans [74], les auteurs ont proposé une correction par placement de pôle avec linéarisation par retour d'états. Ce régulateur a été validé et appliqué sur un modèle non-linéaire de la PàC. Une commande robuste de type  $H_\infty$  basée sur une linéarisation exacte par retour d'état utilisant un algorithme de compensation dynamique, a été appliquée dans [93]. Récemment dans [112], les auteurs



ont appliqués la commande par mode glissant du premier ordre pour résoudre ce problème.

Un système de circulation de l'hydrogène entre la sortie et l'entrée de l'anode peut être considéré, il est présenté dans [7, 69]. Dans [8], les auteurs ont appliqué la commande par anticipation pour réduire la différence de pression entre l'anode et la cathode. Une approche de contrôle par retour d'état statique a été appliquée dans [68, 70].

## 1.6 Contributions de la thèse

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'optimisation d'énergie et à la protection du système à PàC. L'objectif est de développer un système de commande d'une part pour optimiser la puissance nette fournie par la PàC en forçant le rapport d'excès d'oxygène à sa valeur optimale, et d'autre part à protéger la PàC, la membrane et le compresseur centrifuge. De plus, ce système de commande devra répondre à deux impératifs : le temps de réponse et la robustesse.

La régulation du rapport d'excès d'oxygène à sa valeur optimale a été notre premier objectif pour optimiser la puissance nette de la PàC. Le rapport d'excès d'oxygène, qui permet de maximiser cette puissance, a été déterminé expérimentalement pour une PàC de 33 kW de puissance. Pour atteindre cet objectif, des lois de commande par mode glissant d'ordre deux (MGO2) ont été utilisées, en agissant sur le système d'alimentation en air. Afin de permettre une synthèse robuste du contrôleur, les incertitudes ont été formalisées et intégrées dans le modèle, pour obtenir un modèle non-linéaire incertain. A partir de là, deux régulateurs par mode glissant d'ordre 2 robuste et adaptatif ont été synthétisés. De plus une comparaison des deux lois de commande a été effectuée. Les deux lois de commande appliquées sont :

1. la commande robuste, en utilisant l'algorithme MGO2 sous-optimal [10]. Ces types de commandes sont connus pour leur robustesse et leur convergence en temps fini. Ils sont particulièrement appliqués quand les bornes des paramètres incertains sont connues.
2. la commande adaptative, en utilisant l'algorithme MGO2 "Super Twisting" adaptatif. L'intérêt d'une commande adaptative est qu'elle est appliquée aux systèmes incertains dont leurs paramètres incertains sont inconnus. Ces types de commandes s'adaptent sur des variations de paramètres incertains et réduisent ainsi l'oscillation

du contrôleur. L'algorithme du "Super Twisting" adaptatif est proposé par [126]. Celui-ci est basé sur l'algorithme du "Super Twisting" proposé par [88] mais en utilisant des gains dynamiques adaptatifs.

Dans les deux cas, le contrôleur est structuré sous forme cascade et est constitué de deux boucles (interne et externe). Les lois de commande par mode glissant d'ordre 2 sont appliquées dans les deux boucles. La boucle externe contrôle le rapport d'excès d'oxygène et fournit ainsi une vitesse angulaire du compresseur de référence. Puis la boucle interne génère la commande du moteur qui assure la convergence de la vitesse angulaire du compresseur à sa référence.

La validation expérimentale des deux lois de commande a été réalisée sur un banc d'essai situé au laboratoire des systèmes pile à combustible (FCLab) à Belfort. Celui-ci est composé d'un compresseur de type double vis et d'un émulateur de la PàC. L'acquisition de données et la commande du système sont installées sur une carte temps réel. Les lois de commande par mode glissant sont introduites dans le chapitre 3. Dans le chapitre 4 des applications sur le système d'alimentation en air sont présentées.

Dans le cinquième chapitre de la thèse, nous présentons des solutions pour éviter le manque d'oxygène de la PàC et maintenir le compresseur centrifuge dans sa zone nominale de fonctionnement. Une solution de type contrôleur de charge basé sur la technique d'*Extremum Seeking*. Le contrôleur de charge consiste en un filtre linéaire du premier ordre, dont le constant de temps est ajustable. Celui-ci doit assurer le meilleur compromis entre la maximisation du courant et la protection de la PàC et du compresseur. La modélisation du gestionnaire de charge a été intégrée dans le modèle de la PàC. Deux types d'algorithmes sont appliqués au système d'alimentation en air. Ils sont basés sur les travaux de [5, 34]. Une validation expérimentale a été effectuée. Le contrôleur a été installé dans un calculateur temps réel.

Le chapitre 6 est consacré à la commande de l'électrovanne de la partie anode et de la partie cathode afin d'éliminer la différence de pression entre ces deux volumes. La difficulté vient des incertitudes paramétriques dus à la réaction chimique et thermodynamique. Ainsi ces paramètres incertains ont été formalisés et intégrés au modèle, pour obtenir un modèle non-linéaire incertain. Cela a permis de prendre en considération ces incertitudes lors de la synthèse de la commande et de développer un contrôleur robuste vis à vis des incertitudes.

Nous avons implémenté une commande robuste non-linéaire par MGO2 pour réduire la différence de pression entre l'anode et la cathode. L'avantage de cette synthèse de la commande est que le contrôleur n'est pas limité autour d'un point de fonctionnement. Ainsi la performance sur toute la plage de fonctionnement de la pile à combustible a été garantie.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents types de piles à combustibles. Nous avons précisé les types de PàC que nous utilisons : PEM. Ce type de piles est alimenté en hydrogène au niveau de l'anode et en air au niveau de la cathode. Nous avons décrit les besoins d'un certain nombre d'auxiliaires comme : l'humidificateur, le système d'alimentation en air et le réservoir d'hydrogène, le refroidisseur et le convertisseur. Nous avons aussi décrit le système de contrôle des auxiliaires pour améliorer le rendement et la performance du système. Les problématiques d'un système PàC ont été discutées. Puis une revue de la littérature sur les différents travaux de recherche qui traitent les problématiques des auxiliaires ont été présentées. Nous nous sommes intéressés à la synthèse des commandes robuste et adaptative du système d'alimentation en air afin d'optimiser la puissance nette fournie par la PàC, tout en considérant les incertitudes paramétriques. Une solution a été proposée pour protéger d'une part le compresseur centrifuge du pompage et d'autre part la PàC du manque d'oxygène. Finalement la commande robuste de la pression de l'anode et de la cathode, en vue de réduire la différence de pression sur la membrane, a été traitée dans le contexte de la commande robuste des systèmes incertains. Dans le chapitre suivant nous présentons dans un premier temps la modélisation statique et dynamique de la PàC proposé par [118]. Puis, nous détaillons le modèle utilisé dans ce travail de thèse pour deux types de système d'alimentation en air.



## *Chapitre 2*

---

---

# *Modélisation du système pile à combustible*

---

---

### **2.1 Introduction**

Dans le chapitre précédent, une introduction générale, sur le système pile à combustible et ses auxiliaires, a été présentée. L'objectif du contrôle pour ce système consiste à atteindre un haut niveau de performance et une durée de vie plus longue. Dans la PEMFC, plusieurs variables doivent être réglées d'une manière précise comme : la quantité d'hydrogène à l'anode, la quantité d'air injecté par le compresseur dans la cathode, la quantité d'eau produite, la température générée par la réaction chimique et l'énergie fournie par la PàC. Ces sous-systèmes sont fortement liés entre eux, ceci rend le système complet fortement non-linéaire et difficile à contrôler. Donc, un modèle bien adapté est très important afin de synthétiser des lois de la commande pour la PEMFC.

Il existe dans la littérature, de nombreux travaux sur la modélisation de la PàC. Ces modèles sont classés dans trois catégories différentes [135] : les modèles qui sont basés sur des équations différentielles aux dérivées partielles, les modèles statiques qui sont basés sur des travaux expérimentaux, et les modèles dynamiques, qui négligent les variations spatiales. Dans [1, 3, 73, 94, 26], plusieurs types de modélisation pour modéliser la réaction électrochimique sont proposés. Le but de ces modélisations est d'obtenir les caractéristiques de polarisation de la PàC, qui sont définis par la tension et le courant de la PàC. Dans la plupart des modélisations le courant de la PàC est considéré comme

une entrée du système. La tension électrique de la PàC est considérée comme une sortie [3, 119, 123, 139, 27]. Des modélisations de type 1D [2, 16, 17] et 2D [35, 53, 128, 131] ont été développées pour le transport des gaz et de l'eau. Dans [65], les auteurs ont proposé une modélisation par réseaux de neurones. Dans [15] et [59] la modélisation de la PàC est basée sur des circuits analogiques électriques. Des modélisations par Bond Graph sont décrites dans [42, 125]. Dans [23, 30], les auteurs ont proposé une modélisation par une approche graphique de la Représentation Energétique Macroscopique (REM). Un modèle orienté contrôle basé sur des relations thermodynamiques et mécaniques est proposé dans [118]. Par la suite, ce modèle a été simplifié sous certaines hypothèses, dans [132] et [137], pour focaliser l'étude sur la partie alimentation en air et la partie cathode. Dans ce travail de thèse, la modélisation que nous utilisons, pour la synthèse de nos contrôleurs est basée sur le modèle proposé par [132].

Dans ce chapitre une présentation du modèle statique de la PàC est présentée. Ce modèle est utile pour calculer la tension fournie par la PàC. Ensuite, une présentation des modèles dynamiques basés sur les travaux de [118] et de [132] est revisitée. Deux types de compresseurs sont utilisés pour le système d'alimentation en air, ce sont, le compresseur à double vis et le compresseur centrifuge. Ces compresseurs sont modélisés et validés expérimentalement à la fin de ce chapitre.

## 2.2 Modèle statique de la pile à combustible

Dans cette partie, la modélisation statique de la PàC est présentée. La tension électrique délivrée par une cellule de la PàC est déterminée en fonction de la densité de courant de la PàC, de la pression de la cathode, de la pression partielle d'oxygène et d'hydrogène, de la température de la PàC et de l'humidité de la membrane. Cette relation est basée sur des effets combinés de thermodynamiques, de cinétiques, de conservation masse et de résistances ohmiques. La performance de la PàC est exprimée par sa courbe de polarisation, celle-ci est définie par la tension électrique de la pile et par la densité de courant [21, 46, 122, 147]. C'est la courbe de polarisation qui nous permet d'identifier le point de fonctionnement de la pile.

### 2.2.1 Tension électrique en boucle ouverte

La PàC est un système qui convertit l'énergie chimique en énergie électrique. Cette énergie générée est calculée par le changement de l'enthalpie libre ( $\Delta g_f$ ) qui est calculée par la différence entre l'enthalpie libre des produits et celle des réactifs. La réaction chimique dans la PàC est définie par :



le changement de l'enthalpie libre  $\Delta g_f$  est donné par :

$$\Delta g_f = g_f \text{ des produits} - g_f \text{ des réactifs} = (g_f)_{H_2O} - (g_f)_{H_2} - (g_f)_{O_2}. \quad (2.2)$$

Le changement d'enthalpie libre varie en fonction de la température et de la pression [84], celui-ci est exprimé par :

$$\Delta g_f = \Delta g_f^0 + RT_{fc} \ln \left[ \frac{p_{H_2} p_{O_2}^{\frac{1}{2}}}{p_{H_2O}} \right], \quad (2.3)$$

où  $\Delta g_f^0$  est le changement d'enthalpie libre de la pression atmosphérique.  $T_{fc}$  est la température de la PàC en Kelvin.  $p_{H_2}$ ,  $p_{O_2}$  et  $p_{H_2O}$  sont respectivement les pressions partielles de l'hydrogène, de l'oxygène et de la vapeur.  $R$  est la constante universelle de gaz. Si la production de l'énergie de la PàC est réversible, toutes les enthalpies libres seront transformées en énergie électrique. Comme, pour chaque mole d'hydrogène, deux électrodes traversent le circuit externe, alors le travail électrique est donné par :

$$W = 2FE, \quad (2.4)$$

où  $F$  est la constante de "Faraday" qui présente la charge électrique d'une mole d'électron et  $E$  la tension électrique de la PàC. Ce travail électrique est égale à l'enthalpie libre, on peut alors exprimer l'équation (2.3) par :

$$\Delta g_f = 2FE. \quad (2.5)$$

Cela permet d'exprimer, la tension réversible en boucle ouverte ou la tension "Nernst" d'une cellule par l'équation :

$$E = \frac{-\Delta g_f^0}{2F} + \frac{RT_{fc}}{2F} \ln \left[ \frac{p_{H_2} p_{O_2}^{\frac{1}{2}}}{p_{H_2O}} \right]. \quad (2.6)$$

En utilisant les valeurs thermodynamiques dans (2.6), la tension réversible sera exprimée comme suit [2] :

$$E = 1,229 - 0,85 \cdot 10^3 (T_{fc} - 298,15) + 4,3085 \cdot 10^{-5} T_{fc} \left[ \ln(p_{H_2}) + \frac{1}{2} \ln(p_{O_2}) \right]. \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Pertes d'activation

Les pertes d'activation sont dues aux déplacements des électrons, entre l'anode et la cathode. La réaction d'oxydation de l'hydrogène dans l'anode est plus rapide que la réaction de réduction de l'oxygène dans la cathode [4]. Donc les pertes d'activation dues à la réaction dans la cathode sont plus importantes que celle dans l'anode. Ces pertes peuvent être exprimées par l'équation de "Tafel" [86] :

$$v_{act} = a \ln \left( \frac{i}{i_0} \right), \quad (2.8)$$

où  $a$  est constante et  $i_0$  est la densité de courant d'échange.  $i$  est la densité de courant, définie par :

$$i = \frac{I_{st}}{A_{fc}}, \quad (2.9)$$

où  $I_{st}$  est le courant fournie par la PàC et  $A_{fc}$  est la surface active d'une cellule.

Une autre équation, pour calculer les pertes d'activation, est proposée par [84] car l'équation de "Tafel" est valable uniquement pour  $i > i_0$ . Ceci peut produire des problèmes lors de la simulation de la PàC. Cette relation est donnée par :

$$v_{act} = v_0 + v_a \left( 1 - e^{-b_1 i} \right), \quad (2.10)$$

où  $i$  est la densité de courant,  $v_0$  est la chute de tension lorsque la densité de courant est nulle,  $v_a$  et  $b_1$  sont des constantes. Cette tension électrique est représentée sur la Fig.2.1(a).



### 2.2.3 Pertes ohmiques

La membrane est équivalente à une résistance qui empêche le déplacement des protons et la décomposition d'hydrogène, ceci réduit la production des électrons. Ces pertes sont connues comme pertes ohmiques. L'expression de ces pertes est proportionnelle à la densité du courant :

$$v_{ohm} = iR_{ohm}, \quad (2.11)$$

où  $R_{ohm}$  est la résistance électrique interne. Cette dernière, est dépendante du degré d'humidité de la PàC [85], de la température et de l'épaisseur de la membrane [3, 106]. L'expression de la résistance électrique interne est donnée comme suit :

$$R_{ohm} = \frac{t_m}{(b_2\lambda_m - b_3) \exp \left[ b_4 \left( \frac{1}{303} - \frac{1}{T_{fc}} \right) \right]}, \quad (2.12)$$

où  $b_2$ ,  $b_3$  et  $b_4$  sont des constantes déterminées par des expérimentations dans [131].  $t_m$  est l'épaisseur de la membrane et  $\lambda_m$  est sa teneur en eau. Des détails supplémentaires sur le paramètre  $\lambda_m$  sont présentés dans le paragraphe 2.3.2.3. La tension électrique des pertes ohmiques est présentée sur la Fig.2.1(b).

### 2.2.4 Pertes de concentration

Les pertes de concentration sont dues à la chute de concentration des réactifs. Ces pertes diminuent rapidement pour une densité du courant élevée. L'expression de ces pertes est donnée comme suit [54] :

$$v_{conc} = i \left( b_5 \frac{i}{i_{max}} \right)^{b_6}, \quad (2.13)$$

où  $b_5$ ,  $b_6$  et  $i_{max}$  sont des constantes. Le paramètre  $i_{max}$  correspond à la densité de courant. Ces pertes provoquent une chute de tension électrique instantanée. La tension  $v_{conc}$  est présentée sur la Fig.2.1(c).

### 2.2.5 Tension électrique de la PàC

La tension électrique d'une cellule élémentaire de la pile à combustible est égale à la différence entre la tension de la PàC en boucle ouverte et les différentes pertes (d'activation,

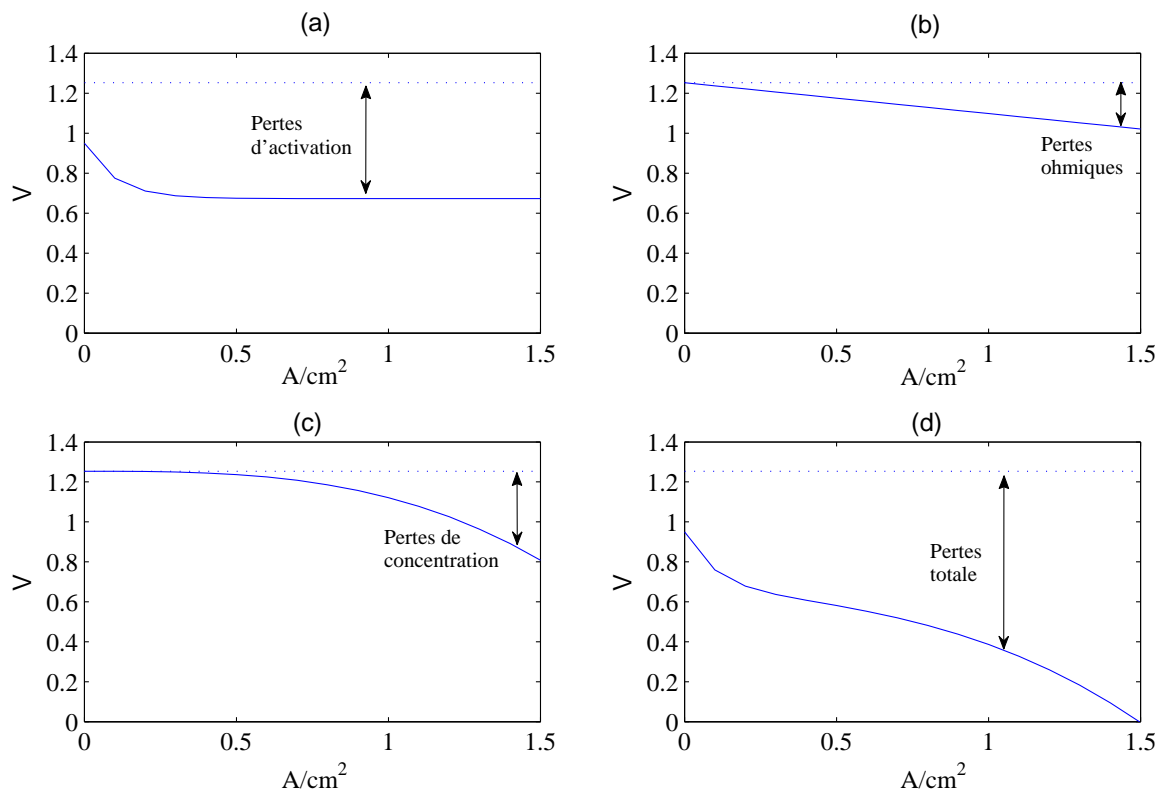
ohmiques, de concentration). La tension électrique d'une cellule est exprimée par l'équation suivante :

$$v_{fc} = E - v_{act} - v_{ohm} - v_{conc}, \quad (2.14)$$

Cette tension est présentée sur la Fig.2.1(d). La tension de la PàC est égale à la somme des tensions de chaque cellule. D'où la tension globale de la PàC est donnée par :

$$v_{st} = n v_{fc}, \quad (2.15)$$

où  $n$  est le nombre de cellules de la pile.



**Figure 2.1.** Les différentes pertes et la tension totale correspondent à une cellule : (a) pertes d'activation, (b) pertes ohmiques, (c) pertes de concentration et (d) tension totale

## 2.3 Modèle dynamique du système à pile à combustible

Le système objet de l'étude est composé du cœur de pile, du système d'alimentation en air et du système d'alimentation en hydrogène. Le système de refroidissement et l'humidificateur ne sont pas pris en compte, car leurs dynamiques sont supposées très lentes que celles des autres systèmes. Sachant que la charge est considérée comme une perturbation mesurable, la dynamique du convertisseur n'est pas considérée dans le modèle.

La modélisation du système à PàC est basée sur les relations thermodynamiques et mécaniques, où les variations spatiales sont négligées. Ce modèle est formé de 9 variables d'états :

$$x = [m_{O_2} \ m_{H_2} \ m_{N_2} \ \omega_{cp} \ p_{sm} \ m_{sm} \ m_{w,an} \ m_{w,ca} \ p_{rm}]^T \quad (2.16)$$

où  $m_{O_2}$ ,  $m_{H_2}$  et  $m_{N_2}$  sont respectivement les masses : d'oxygène, d'hydrogène et d'azote. La vitesse angulaire du compresseur est  $\omega_{cp}$ .  $p_{sm}$  et  $m_{sm}$  sont respectivement la pression et la masse d'air du collecteur d'admission d'air "Supply Manifold".  $m_{w,an}$  et  $m_{w,ca}$  sont les masses d'eau dans l'anode et dans la cathode.  $p_{rm}$  est la pression d'air du collecteur de retour "Return Manifold". La Fig.2.2 présente les emplacements des états modélisés dans le système.

Dans le paragraphe suivant, nous présenterons la modélisation des collecteurs d'entrée et de retour de la partie d'admission d'air. Enfin la modélisation des masses des gaz dans l'anode et dans la cathode est détaillée. La modélisation du compresseur est présentée dans le paragraphe 2.4.

### 2.3.1 Modèle des collecteurs

Les collecteurs sont des tuyauteries qui connectent les dispositifs entre eux. La modélisation des collecteurs est basée sur le principe de conservation de masses et peut être présentée comme suit :

$$\frac{dm}{dt} = W_{in} - W_{out}, \quad (2.17)$$

où  $m$  est la masse de gaz dans le collecteur.  $W_{in}$  et  $W_{out}$  sont les débits à l'entrée et à la sortie du collecteur. Pour calculer la pression dans le collecteur, deux cas sont envisageables. Dans le premier cas, la température est considérée constante dans la tuyauterie

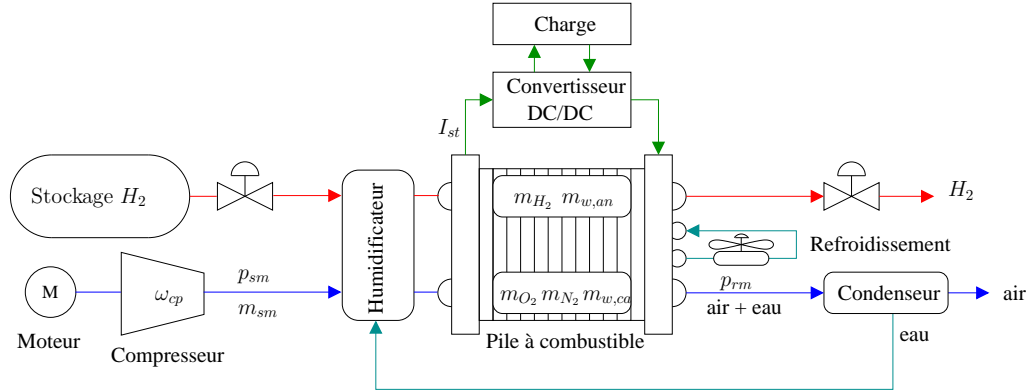


Figure 2.2. Représentation des états dans le système à PàC

et elle est égale à la température à l'entrée du collecteur. La dynamique de la pression est exprimée par l'équation suivante :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R_a T}{V} (W_{in} - W_{out}), \quad (2.18)$$

où  $V$  est le volume du collecteur,  $T$  est la température et  $R_a$  est la constante universelle d'air. Dans le deuxième cas, la température varie dans le collecteur. La dynamique de la pression est donnée comme suit :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\gamma R_a}{V} (W_{in} T_{in} - W_{out} T), \quad (2.19)$$

où  $\gamma$  est le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant.  $T_{in}$  est la température à l'entrée du collecteur.

Le débit du collecteur  $W$  est calculé par l'équation de "Barré de Saint Venant" présenté dans [60]. Ce modèle est un cas du théorème de "Bernoulli", celui-ci consiste à modéliser l'écoulement d'un fluide à travers un orifice. Le débit est exprimé en fonction de la pression en amont  $p_1$  et de la pression en aval  $p_2$  du collecteur et de la température en amont  $T_1$ . Le débit est calculé en fonction du rapport de pression critique, ce dernier est défini par :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} := r_c. \quad (2.20)$$

Dans le cas où le rapport de pression est dans le domaine subsonique :

$$\frac{p_2}{p_1} > r_c, \quad (2.21)$$

le débit à la sortie est exprimé sous la forme suivante :

$$W_{sub} = \frac{C_D A_T}{\sqrt{RT_1}} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.22)$$

Dans le cas critique ou le domaine sonique :

$$\frac{p_2}{p_1} \leq r_c, \quad (2.23)$$

le débit sonique est donné par :

$$W_{sonique} = \frac{C_D A_T p_1}{\sqrt{RT_1}} \gamma^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (2.24)$$

où  $A_T$  est la section de la tuyauterie et  $C_D$  est le coefficient de décharge de l'orifice.

La Fig.2.3 montre le débit relatif en fonction du rapport de pression dans les zones sonique et subsonique. Dans le cas où la différence de pression entre l'amont et l'aval du collecteur est négligeable, le débit reste toujours dans le domaine subsonique. L'équation du débit peut donc être linéarisé comme suit :

$$W = k(p_1 - p_2), \quad (2.25)$$

où  $k$  est la constante de l'orifice du collecteur. La caractéristique graphique est tracée sur la Fig.2.3 et est représentée en pointillés.

Dans le système complet de la PàC présenté par [118], deux collecteurs sont installés. Le premier connecte le compresseur avec la PàC, en passant par l'humidificateur. Le deuxième est le collecteur d'échappement des gaz à la sortie de la cathode. Les modèles de ces collecteurs sont données par la suite.

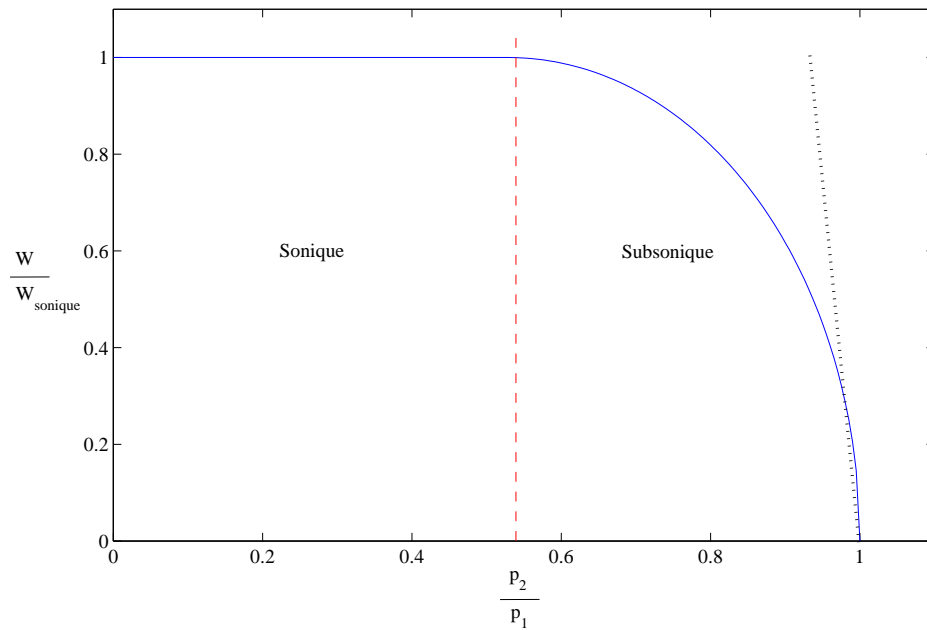


Figure 2.3. Le débit relatif en fonction du rapport de pression

### 2.3.1.1 Modèle du collecteur d'admission d'air

Le collecteur d'admission d'air connecte la sortie d'air du compresseur avec la cathode de la PàC. Le volume du collecteur correspond au volume de la tuyauterie comprise entre le compresseur et la PàC.

En appliquant le principe de conservation de masse, le débit massique dans le collecteur est égal à la différence entre le débit à l'entrée et à la sortie. D'où le débit massique de l'air à l'intérieur du collecteur d'admission est égal à :

$$\frac{dm_{sm}}{dt} = W_{cp} - W_{sm,out}, \quad (2.26)$$

où  $W_{sm,out}$  est le débit à la sortie du collecteur d'admission d'air. Comme le volume du collecteur est petit, et que la différence de pression amont et aval est négligeable, ce débit est donné par l'équation simplifiée :

$$W_{sm,out} = k_{sm,out} (p_{sm} - p_{ca}), \quad (2.27)$$

où  $k_{sm,out}$  est la constante de l'orifice du collecteur d'admission d'air à la sortie,  $p_{sm}$  est la pression du collecteur d'admission d'air et  $p_{ca}$  est la pression de la cathode.

La température à la sortie du compresseur  $T_{cp,out}$  est différente de celle à l'intérieur du collecteur d'admission d'air  $T_{sm}$ . Cette température est donnée par :

$$T_{cp,out} = T_{cp,in} + \frac{T_{cp,in}}{\eta_{cp}} \left[ \left( \frac{p_{cp,out}}{p_{cp,in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right], \quad (2.28)$$

où  $T_{cp,in}$  est la température à l'entrée du compresseur.  $p_{cp,in}$  et  $p_{cp,out}$  sont respectivement les pressions en amont et en aval du compresseur.  $\eta_{cp}$  est le rendement du compresseur issue d'une cartographie. Il est calculé en fonction de la vitesse angulaire du compresseur et du rapport de pression (aval/amont).

La dynamique de la pression d'air de ce collecteur est donnée par :

$$\frac{dp_{sm}}{dt} = \frac{\gamma R_a}{V_{sm}} (W_{cp} T_{cp,out} - W_{sm,out} T_{sm}), \quad (2.29)$$

où  $V_{sm}$  est le volume du collecteur d'admission d'air.

### 2.3.1.2 Modèle du collecteur de retour

Le gaz dans le collecteur de retour est évacué dans l'air atmosphérique. De même que pour le collecteur d'admission d'air, la dynamique de sa pression est calculée par la différence entre le débit à l'entrée et le débit à la sortie du collecteur de retour. Sachant que la température du collecteur de retour  $T_{rm}$  est égale à la température à l'intérieur de la PàC, la dynamique de la pression est donnée comme suit :

$$\frac{dp_{rm}}{dt} = \frac{R_a T_{rm}}{V_{rm}} (W_{ca,out} - W_{rm,out}), \quad (2.30)$$

où  $V_{rm}$  est le volume du collecteur de retour.  $W_{ca,out}$  est le débit massique à la sortie de la cathode, il est donné par :

$$W_{ca,out} = k_{ca,out} (p_{ca} - p_{rm}), \quad (2.31)$$

où  $k_{ca,out}$  est la constante de l'orifice à la sortie de la cathode.  $W_{rm,out}$  est le débit massique du collecteur de retour, il est donné par :

$$W_{rm,out} = \begin{cases} \frac{C_D A_T}{\sqrt{RT_{rm}}} \left( \frac{p_{atm}}{p_{rm}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \frac{p_{atm}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{p_{rm}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right] \right]^{\frac{1}{2}} & \text{pour } \frac{p_{atm}}{p_{rm}} > \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \\ \frac{C_D A_T p_{rm}}{\sqrt{RT_{rm}}} \gamma^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} & \text{pour } \frac{p_{atm}}{p_{rm}} \leq \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \end{cases} \quad (2.32)$$

où  $A_T$  est la section du collecteur et  $C_D$  est le coefficient de décharge de l'ouverture du collecteur.

### 2.3.2 Modèle du cœur d'une pile

Le système du cœur d'une pile est modélisé en trois parties : le modèle de la cathode, le modèle de l'anode et le modèle de la membrane.

#### 2.3.2.1 Modèle de la cathode

Le modèle de la cathode est similaire au modèle du collecteur. L'air émis par le compresseur entre dans la cathode après humidification. L'air est un mélange de gaz, composé principalement de l'azote à 78%, de l'oxygène à 21% et d'autres gaz en quantité négligeable moins de 1% comme : l'argon, le monoxyde de carbone, le dioxyde de carbone, le néon, etc. Nous ne prendrons en compte que les gaz principaux pour la modélisation de la partie cathode, c'est-à-dire l'azote et l'oxygène, auxquels on rajoutera l'eau par l'humidificateur. Plusieurs hypothèses sont présentées pour la modélisation de la cathode. Les gaz sont considérés comme des gaz parfaits. La température est supposée constante, car la variation de la température entre le collecteur d'admission d'air et la PàC est négligeable. Le débit d'eau à la sortie de la cathode est égal à zéro. La pression, la température, l'humidité et la fraction molaire de l'oxygène à la sortie de la cathode sont considérées comme étant égales à celles contenues dans la cathode. Les débits massiques d'oxygène, d'azote et d'eau sont donnés en utilisant le principe de conservation de masse sous la forme suivante :

$$\frac{dm_{O_2}}{dt} = W_{O_2,ca,in} - W_{O_2,ca,out} - W_{O_2,rc}, \quad (2.33)$$

$$\frac{dm_{N_2}}{dt} = W_{N_2,ca,in} - W_{N_2,ca,out}, \quad (2.34)$$

$$\frac{dm_{w,ca}}{dt} = W_{v,ca,in} - W_{v,ca,out} + W_{v,ca,gen} + W_{v,memb} - W_{l,ca,out}, \quad (2.35)$$



où  $W_{O_2,ca,in}$  est le débit massique de l'oxygène à l'entrée de la cathode,  
 $W_{O_2,ca,out}$  est le débit massique de l'oxygène à la sortie de la cathode,  
 $W_{O_2,rct}$  est le débit massique de l'oxygène réagi lors de la réaction chimique,  
 $W_{N_2,ca,in}$  est le débit massique de l'azote à l'entrée de la cathode,  
 $W_{N_2,ca,out}$  est le débit massique de l'azote à la sortie de la cathode,  
 $W_{v,ca,in}$  est le débit massique de la vapeur d'eau à l'entrée de la cathode,  
 $W_{v,ca,out}$  est le débit massique de la vapeur d'eau à la sortie de la cathode,  
 $W_{v,ca,gen}$  est le débit massique de la vapeur d'eau générée lors de la réaction chimique,  
 $W_{v,memb}$  est le débit massique du transfert d'eau à travers la membrane,  
 $W_{l,ca,out}$  est le débit massique de l'eau liquide dans la cathode.  
Ces débits sont représentés sur la Fig.2.4.

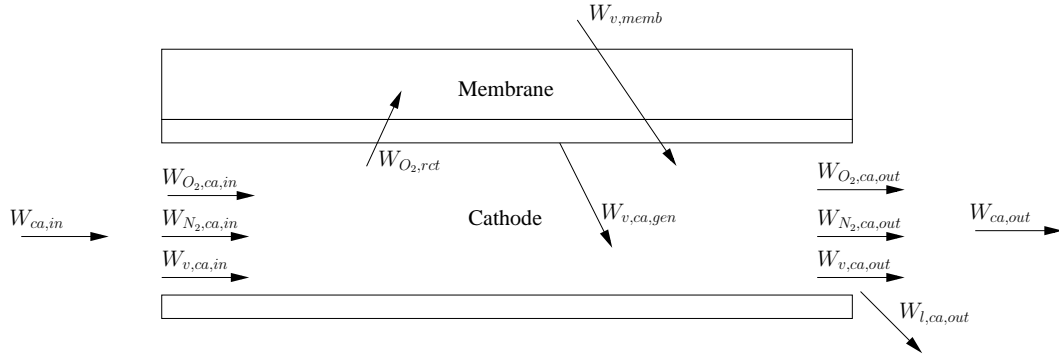


Figure 2.4. Les débits massiques dans la cathode

Les débits à l'entrée de la cathode sont exprimés par :

$$\begin{aligned}
 W_{O_2,ca,in} &= \frac{x_{O_2}}{1 + \omega_{atm}} W_{ca,in}, \\
 W_{N_2,ca,in} &= \frac{1 - x_{O_2}}{1 + \omega_{atm}} W_{ca,in}, \\
 W_{v,ca,in} &= \frac{\omega_{atm}}{1 + \omega_{atm}} W_{ca,in},
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

où  $W_{ca,in}$  est le débit d'air avant l'humidificateur, il est donné par :

$$W_{ca,in} = k_{ca,in}(p_{sm} - p_{ca}), \tag{2.37}$$

$\omega_{atm}$  est le rapport d'humidité et il est exprimé par :

$$\omega_{atm} = \frac{M_v}{M_a} \frac{\phi_{atm} p_{sat}(T_{atm})}{p_{atm} - \phi_{atm} p_{sat}(T_{atm})}, \quad (2.38)$$

où  $x_{O_2}$  est la fraction massique d'oxygène de l'air,  $\phi_{atm}$  est le facteur d'humidité relative atmosphérique,  $T_{atm}$  est la température ambiante et  $k_{ca,in}$  est la constante d'orifice à l'entrée de la cathode.  $M_v$  et  $M_a$  sont respectivement les masses molaires de la vapeur d'eau et de l'air.  $p_{atm}$  et  $p_{sat}(T_{atm})$  sont respectivement la pression atmosphérique et la pression de saturation à la température ambiante.  $p_{ca}$  est la pression de la cathode et elle est donnée par :

$$p_{ca} = p_{O_2} + p_{N_2} + p_{v,ca}, \quad (2.39)$$

où  $p_{O_2}$ ,  $p_{N_2}$  et  $p_{v,ca}$  sont respectivement la pression partielle de l'oxygène, de l'azote et de la vapeur d'eau dans la cathode. Comme les gaz sont parfaits, les pressions partielles sont données par :

$$\begin{aligned} p_{O_2} &= \frac{R_{O_2} T_{fc}}{V_{ca}} m_{O_2}, \\ p_{N_2} &= \frac{R_{N_2} T_{fc}}{V_{ca}} m_{N_2}, \\ p_{v,ca} &= \frac{R_v T_{fc}}{V_{ca}} m_{v,ca}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

où  $R_{O_2}$ ,  $R_{N_2}$  et  $R_v$  sont respectivement les constantes spécifiques d'oxygène, d'azote et de vapeur d'eau.  $T_{fc}$  est la température de la PàC et  $V_{ca}$  est le volume de la cathode.  $m_{v,ca}$  est la masse de la vapeur d'eau dans la cathode. La masse maximale de la vapeur d'eau est calculée en fonction de la pression de saturation :

$$m_{v,max,ca} = \frac{p_{sat}(T_{fc}) V_{ca}}{R_v T_{fc}}, \quad (2.41)$$

où  $p_{sat}(T_{fc})$  est la pression de saturation dans la pile à combustible. Elle est donnée par l'expression suivante [118] :

$$\log_{10}(p_{sat}) = -1,69 \cdot 10^{-10} T_{fc}^4 + 3,85 \cdot 10^{-17} T_{fc}^3 - 3,39 \cdot 10^{-4} T_{fc}^2 + 0,143 T_{fc} - 20,92. \quad (2.42)$$

Si la masse d'eau calculée par l'équation (2.35) est plus grande que la masse maximale de la vapeur d'eau, l'excès d'eau sera condensé en liquide. Ainsi la masse de la vapeur d'eau,

et celle de l'eau liquide sont calculées par :

$$\begin{aligned} \text{si } m_{w,ca} \leq m_{v,max,ca} &\rightarrow m_{v,ca} = m_{w,ca} \quad , \quad m_{l,ca} = 0, \\ \text{si } m_{w,ca} > m_{v,max,ca} &\rightarrow m_{v,ca} = m_{v,max,ca} \quad , \quad m_{l,ca} = m_{w,ca} - m_{v,max,ca}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

$m_{l,ca}$  est la masse de l'eau à l'état liquide.

Le débit des gaz à la sortie de la cathode est donné de la même manière que le débit à l'entrée de la cathode :

$$W_{ca,out} = k_{ca,out}(p_{ca} - p_{rm}), \quad (2.44)$$

où  $k_{ca,out}$  est la constante d'orifice à la sortie de la cathode.

Les débits d'oxygène, d'azote et de vapeur à la sortie de la cathode sont donnés en fonction du débit total et de la fraction de masse de chaque gaz :

$$\begin{aligned} W_{O_2,ca,out} &= \frac{M_{O_2} p_{O_2}}{M_{O_2} p_{O_2} + M_{N_2} p_{N_2} + M_v p_{v,ca}} W_{ca,out}, \\ W_{N_2,ca,out} &= \frac{M_{N_2} p_{N_2}}{M_{O_2} p_{O_2} + M_{N_2} p_{N_2} + M_v p_{v,ca}} W_{ca,out}, \\ W_{v,ca,out} &= \frac{M_v p_{v,ca}}{M_{O_2} p_{O_2} + M_{N_2} p_{N_2} + M_v p_{v,ca}} W_{ca,out}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

où  $M_{O_2}$  et  $M_{N_2}$  sont respectivement les masses molaires de l'oxygène et de l'azote.

Le débit d'oxygène ayant réagi et le débit de l'eau généré, sont calculés à partir des principes électrochimiques, et ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} W_{O_2,ca,rct} &= M_{O_2} \frac{n I_{st}}{4F}, \\ W_{v,ca,gen} &= M_v \frac{n I_{st}}{2F}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

où  $F$  est le nombre de Faraday,  $n$  est le nombre de cellules dans la PàC et  $I_{st}$  est le courant de la PàC.

$W_{v,memb}$  est le débit massique du transfert d'eau à travers la membrane. Ce débit est expliqué en détail dans le paragraphe 2.3.2.3 et le débit de liquide à la sortie de la cathode  $W_{l,ca,out}$  est égal à zéro.

### 2.3.2.2 Modèle de l'anode

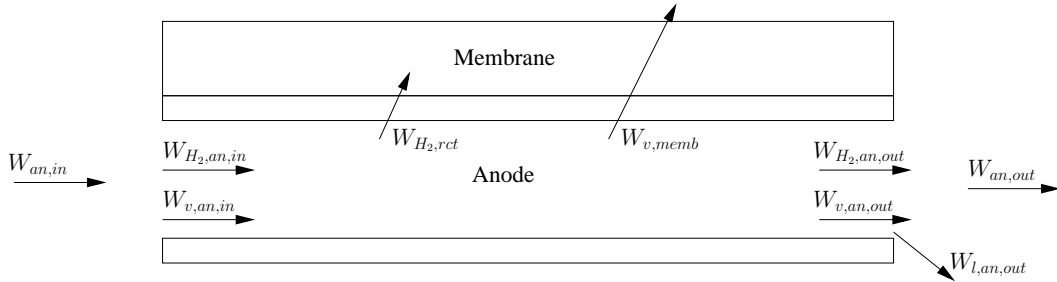
La partie de l'anode est alimentée en hydrogène pur, stockée dans un réservoir à haute pression. Les gaz à l'intérieur de l'anode sont l'hydrogène et la vapeur d'eau. La température dans l'anode est supposée constante et elle est égale à la température à l'entrée de l'anode. La température, la pression et l'humidité à la sortie de l'anode sont considérées égales à celles qui sont à l'intérieur de l'anode. Les équations d'états des gaz de l'anode sont similaires à celles de la cathode [118]. Elles sont calculées par le principe de conservation de masse et elles sont données par les équations dynamiques suivantes :

$$\frac{dm_{H_2}}{dt} = W_{H_2,an,in} - W_{H_2,an,out} - W_{H_2,rct}, \quad (2.47)$$

$$\frac{dm_{w,an}}{dt} = W_{v,an,in} - W_{v,an,out} - W_{v,memb} - W_{l,an,out}. \quad (2.48)$$

où  $W_{H_2,an,in}$  est le débit massique de l'hydrogène à l'entrée de l'anode,  $W_{H_2,an,out}$  est le débit massique de l'hydrogène à la sortie de l'anode,  $W_{H_2,rct}$  est le débit massique de l'hydrogène réagi lors de la réaction chimique,  $W_{v,an,in}$  est le débit massique de la vapeur d'eau à l'entrée de l'anode,  $W_{v,an,out}$  est le débit massique de la vapeur d'eau à la sortie de l'anode,  $W_{v,memb}$  est le débit massique du transfert d'eau à travers la membrane,  $W_{l,an,out}$  est le débit massique de l'eau liquide dans l'anode.

Fig.2.5 présente les différents débits dans l'anode.



**Figure 2.5.** Les débits massiques dans l'anode

Les débits à l'entrée de l'anode sont exprimés par :

$$\begin{aligned} W_{H_2,an,in} &= \frac{1}{1 + \omega_{an,in}} W_{an,in}, \\ W_{v,an,in} &= \frac{\omega_{an,in}}{1 + \omega_{an,in}} W_{an,in}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

où  $W_{an,in}$  est le débit d'hydrogène à l'entrée de l'anode :

$$W_{an,in} = k_{an,in}(p_{an,in} - p_{an}), \quad (2.50)$$

$\omega_{an,in}$  est le rapport d'humidité, il est exprimé par :

$$\omega_{an,in} = \frac{M_v}{M_{H_2}} \frac{\phi_{an,in} p_{sat}(T_{an,in})}{p_{an} - \phi_{atm} p_{sat}(T_{atm})}, \quad (2.51)$$

où  $\phi_{an,in}$  est le facteur d'humidité relative à l'entrée de l'anode,  $T_{an,in}$  est la température à l'entrée de l'anode,  $k_{an,in}$  est la constante d'orifice à l'entrée de l'anode et  $M_{H_2}$  est la masse molaire de l'hydrogène.  $p_{an}$  est la pression de l'anode, elle est donnée par :

$$p_{an} = p_{H_2} + p_{v,an}, \quad (2.52)$$

où  $p_{H_2}$  et  $p_{v,an}$  sont respectivement les pressions partielles de l'hydrogène et de la vapeur d'eau dans l'anode. Ces pressions sont données par :

$$\begin{aligned} p_{H_2} &= \frac{R_{H_2} T_{fc}}{V_{an}} m_{H_2}, \\ p_{v,an} &= \frac{R_v T_{fc}}{V_{an}} m_{v,an}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

où  $R_{H_2}$  est la constante spécifique d'hydrogène et  $V_{an}$  est le volume de l'anode.  $m_{v,an}$  est la masse de vapeur d'eau dans l'anode. Elle est calculée de la même manière que la masse de vapeur d'eau dans la cathode,

$$\text{si } m_{w,an} \leq m_{v,max,an} \rightarrow m_{v,an} = m_{w,an} \quad , \quad m_{l,an} = 0, \quad (2.54)$$

$$\text{si } m_{w,an} > m_{v,max,an} \rightarrow m_{v,an} = m_{v,max,an} \quad , \quad m_{l,an} = m_{w,an} - m_{v,max,an},$$

la masse maximale de vapeur d'eau dans l'anode  $m_{v,max,an}$  est donnée par :

$$m_{v,max,an} = \frac{p_{sat}(T_{fc})V_{an}}{R_v T_{fc}}. \quad (2.55)$$

Le débit de la consommation d'hydrogène est calculé à partir des principes électrochimiques de la manière suivante [118] :

$$W_{H_2,an,rct} = M_{H_2} \frac{nI_{st}}{2F}. \quad (2.56)$$

La sortie de l'anode est normalement utilisée pour purger l'eau et les gaz inutiles. Dans le cadre de cette modélisation, cette sortie est supposée fermée dans le but de consommer

tout l'hydrogène, ce principe est connu sous le nom de "Dead-Ended". Le débit à la sortie est égal à zéro. Le débit d'eau à la sortie de l'anode  $W_{l,an,out}$  est considéré comme égal à zéro. Le débit massique du transfert d'eau à travers la membrane  $W_{v,memb}$  est détaillé dans le paragraphe suivant.

### 2.3.2.3 Modèle de la membrane

La modélisation du passage de l'eau à travers la membrane est donnée par deux différentes relations. Ceux-ci sont dépendantes de la surface de la membrane ( $A_{fc}$ ), de la densité du courant ( $i$ ) et du degré relatif d'humidité. Le débit de transfert de l'eau à travers la membrane est réagi par deux phénomènes différents [106, 131].

Le premier phénomène est le transfert de l'eau de l'anode vers la cathode et s'appelle flux électro-osmotique. Le débit moléculaire de l'eau dans une cellule est donné en fonction de la densité du courant ( $i$ ), du nombre de "Faraday" ( $F$ ) et du coefficient d'électro-osmose ( $n_d$ ). Ce dernier est le nombre de molécules d'eau qui traversent la membrane [108]. Le débit massique de l'eau électro-osmotique pour toutes les cellules est donné par :

$$W_{v,osm} = nM_v A_{fc} n_d \frac{i}{F}. \quad (2.57)$$

Le deuxième phénomène est le transfert d'eau de la cathode vers l'anode et s'appelle rétrodiffusion. Ce transfert d'eau est dû à la différence d'humidité entre les deux électrodes. Le débit massique d'eau de rétrodiffusion est donné par :

$$W_{v,diff} = nM_v A_{fc} D_w \frac{c_{v,ca} - c_{v,an}}{t_m}, \quad (2.58)$$

où  $D_w$  est le coefficient de diffusion d'eau dans la membrane,  $c_{v,ca}$  et  $c_{v,an}$  sont respectivement les concentrations d'eau dans la cathode et dans l'anode.  $t_m$  est l'épaisseur de la membrane.

Les concentrations d'eau dans la cathode et dans l'anode utilisées dans (2.58), sont données comme suit :

$$c_{v,ca} = \frac{\rho_{m,dry}}{M_{m,dry}} \lambda_{ca} \quad , \quad c_{v,an} = \frac{\rho_{m,dry}}{M_{m,dry}} \lambda_{an}, \quad (2.59)$$

où  $\rho_{m,dry}$  est la masse volumique de la membrane sèche et  $M_{m,dry}$  est sa masse équivalente.  $\lambda_{ca}$  et  $\lambda_{an}$  sont respectivement la teneur en eau de la cathode et celle de l'anode.

Le coefficient d'électro-osmose et le coefficient de diffusion de l'eau dans la membrane sont calculés en fonction de sa teneur en eau  $\lambda_m$  [37]. Cette dernière est calculée en fonction du rapport d'activité de la membrane, celui-ci est donné par :

$$a_m = \frac{a_{an} + a_{ca}}{2}. \quad (2.60)$$

$a_{an}$  et  $a_{ca}$  sont respectivement le rapport d'activité de l'anode et celui de la cathode. Ils sont donnés par :

$$a_i = \frac{p_{v,i}}{p_{sat}}, \quad (2.61)$$

Les teneurs en eau sont données par :

$$\lambda_i = \begin{cases} 0,043 + 17,81a_i - 39,85a_i^2 + 36a_i^3 & , 0 < a_i \leq 1 \\ 14 + 1,4(a_i - 1) & , 1 < a_i \leq 3 \end{cases} \quad (2.62)$$

où l'indice (i) se réfère à l'anode (an) ou à la cathode (ca) ou à la membrane (m).

Le coefficient d'électro-osmose ( $n_d$ ) est donné par :

$$n_d = 0,0029\lambda_m^2 + 0,05\lambda_m - 3,14 \cdot 10^{-19}. \quad (2.63)$$

Le coefficient de diffusion de l'eau dans la membrane ( $D_w$ ) est défini par

$$D_w = D_\lambda \exp\left(2416\left(\frac{1}{303} - \frac{1}{T_{fc}}\right)\right), \quad (2.64)$$

où

$$D_\lambda = \begin{cases} 10^{-6} & , \lambda_m < 2 \\ 10^{-6}(1 + 2(\lambda_m - 2)) & , 2 \leq \lambda_m < 3 \\ 10^{-6}(3 - 1,67(\lambda_m - 3)) & , 3 \leq \lambda_m < 4,5 \\ 1,25 \cdot 10^{-6} & , \lambda_m \geq 4,5. \end{cases} \quad (2.65)$$

Le débit global de l'eau à travers la membrane est donné par la différence de débit de ces deux phénomènes sous l'hypothèse que le débit électro-osmotique est plus grand que le débit de rétrodiffusion,

$$W_{v,memb} = W_{v,osm} - W_{v,diff}. \quad (2.66)$$

La Fig.2.6 montre les deux différents débits dans la membrane.

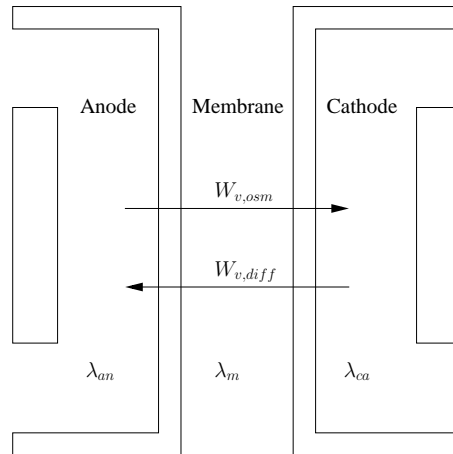


Figure 2.6. Les débits massiques dans la membrane

### 2.3.3 Modèle dynamique réduit

Dans notre travail de thèse, nous nous intéresserons à la commande du système d'alimentation en air de la PàC. Le modèle complet proposé par [118] est fortement non-linéaire, donc la commande est difficile à réaliser pour ce système, notamment pour la commande du système d'alimentation en air. Pour cela le modèle complet a été simplifié à 4 états par [132] sous les hypothèses suivantes :

1. La pression de l'anode est supposée bien contrôlée grâce à une électrovanne qui a une dynamique très rapide par rapport à celle du compresseur. Pour cela la pression de l'anode est considérée égale à la pression de la cathode lors du fonctionnement. Ceci permet de ne pas considérer la masse d'hydrogène ( $m_{H_2}$ ), et de vapeur d'eau dans l'anode ( $m_{v,an}$ ), du modèle.
2. La réaction chimique entre l'hydrogène et l'oxygène produit de l'eau dans la cathode. Alors que, la production d'eau est continue, tout excès d'eau sera transformé en liquide et retiré de la cathode. Cette hypothèse permet de supposer que la masse de vapeur d'eau dans la cathode est toujours égale à la masse maximale de vapeur (voir l'équation (2.43)).

$$m_{v,ca} = m_{v,max,ca}. \quad (2.67)$$

3. La température de l'air à la sortie du compresseur ( $T_{cp,out}$ ) est supposée égale à la température à la sortie du collecteur d'admission d'air ( $T_{sm}$ ). Grâce à cette hypothèse la



pression du collecteur d'admission d'air ( $p_{sm}$ ) sera proportionnel à la masse d'air à l'intérieur du collecteur ( $m_{sm}$ ).

4. Le volume du collecteur de retour est supposé négligeable. Ce qui permet de considérer que la pression du collecteur de retour est égale à la pression atmosphérique.

5. Tous les gaz sont considérés comme des gaz parfaits, ce qui permet de représenter les masses par leurs pressions partielles.

Grâce à ces cinq hypothèses, le modèle de la PàC à 9 états est réduit à 4 états. Les états sont respectivement la pression partielle d'oxygène ( $p_{O_2}$ ), la pression partielle d'azote ( $p_{N_2}$ ), la vitesse angulaire du compresseur ( $\omega_{cp}$ ) et la pression du collecteur d'admission d'air ( $p_{sm}$ ).

Comme la pression du collecteur de retour n'est pas considérée, le débit à la sortie de la cathode est exprimé en fonction de la pression de la cathode (pression en amont) et de la pression atmosphérique (pression en aval). Le débit à la sortie de la cathode est donné par :

$$W_{ca,out} = \begin{cases} \frac{C_D A_T}{\sqrt{RT_{fc}}} \left( \frac{p_{atm}}{p_{ca}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \frac{p_{atm}}{p_{ca}} \frac{\gamma-1}{\gamma} \right] \right]^{\frac{1}{2}} & \text{pour } \frac{p_{atm}}{p_{ca}} > \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \\ \frac{C_D A_T p_{ca}}{\sqrt{RT_{fc}}} \gamma^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} & \text{pour } \frac{p_{atm}}{p_{ca}} \leq \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \end{cases} \quad (2.68)$$

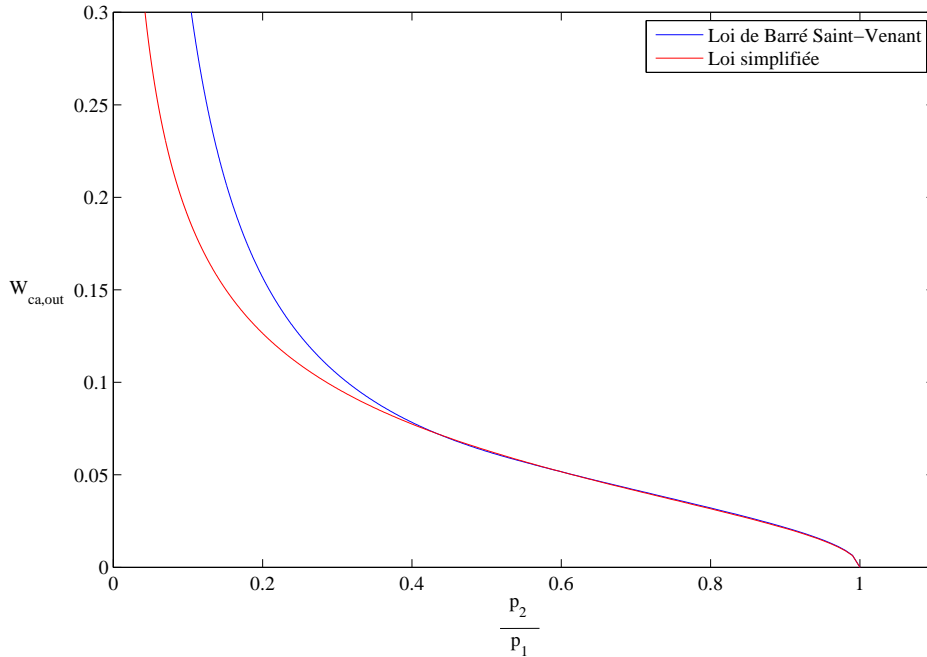
Dans ce travail de thèse, nous supposons que la pression de la cathode ne dépasse pas 2 bar absolue. Cela garantit que le rapport de pression entre la pression atmosphérique (aval) et la pression de la cathode (amont) sont toujours supérieurs au rapport critique de pression.

Pour  $\frac{p_{atm}}{p_{ca}} > \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ , l'équation du débit à la sortie de la cathode peut être simplifiée par :

$$W_{ca,out} = k_{ca,out} \sqrt{p_{ca} - p_{atm}}. \quad (2.69)$$

Les courbes d'équations (2.68) et (2.69) sont tracés sur la Fig.2.7. L'équation simplifiée suit l'équation de Barré de Saint-Venant pour un rapport de pression au plus de 0,4. Le

coefficient d'orifice  $k_{ca,out}$  est calculé par la méthode des moindres carrés tout en variant le courant et le débit. Il est fixé à  $0,945 \cdot 10^{-4} \text{ (kg.m)}^{1/2}$ .



**Figure 2.7.** Débit à la sortie de la cathode en fonction du rapport de pression

Dans la section suivante, nous allons présenter la modélisation de deux types de compresseurs qui alimente la PàC en air, afin d'avoir la dynamique de la vitesse angulaire du compresseur ( $\omega_{cp}$ ).

## 2.4 Modélisation des compresseurs

Différents types de compresseurs peuvent être utilisés pour l'alimentation en air de la pile. Les compresseurs peuvent être présentés en deux grandes familles : les compresseurs de type turbo-machines (Fig.2.8) et les compresseurs de type volumétriques (Fig.2.9) [18, 114, 145]. Les débits d'air émis par les turbo-machines sont modélisés par une fonction non-linéaire du rapport de la pression (aval/amont) du compresseur et de la vitesse angulaire du compresseur. Par contre, les débits d'air émis des compresseurs volumétriques

sont modélisés par une fonction linéaire de la vitesse angulaire du compresseur.

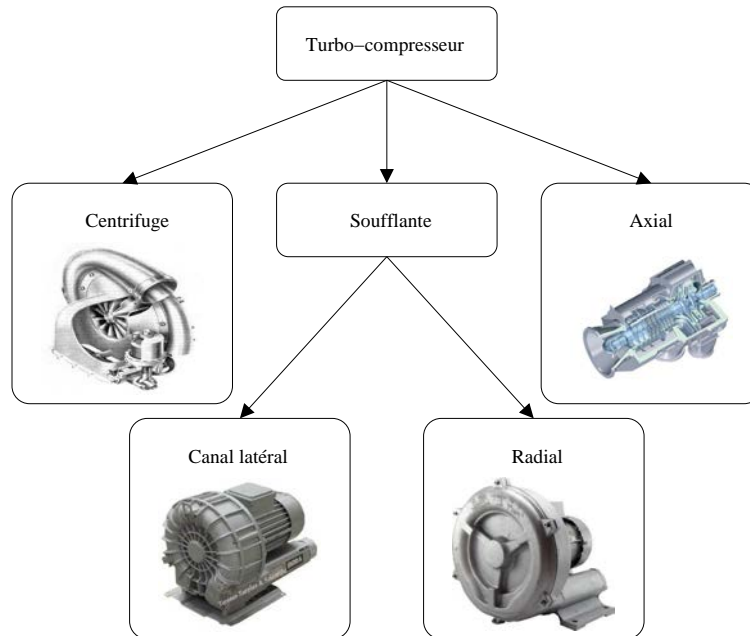


Figure 2.8. Turbo-machines

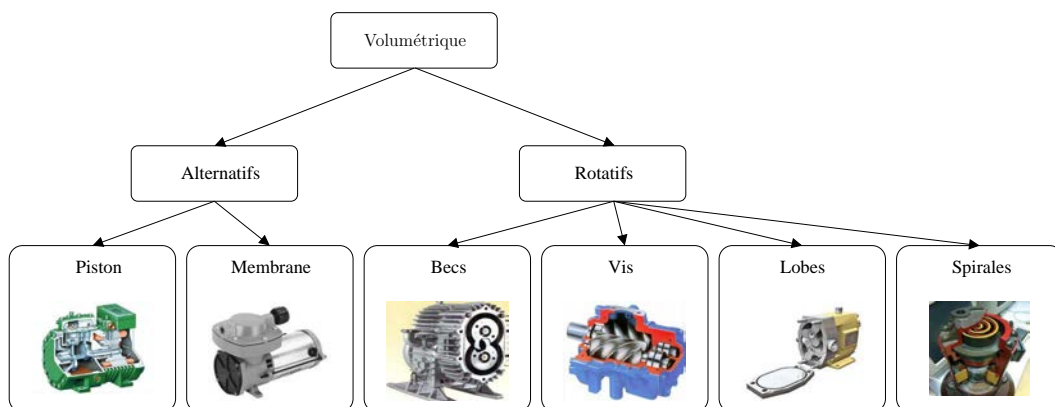


Figure 2.9. Compresseur volumétriques

Deux types de compresseurs ont été utilisés dans le cadre de ce travail de thèse : le compresseur à double vis et le compresseur centrifuge. Ces deux types de compresseurs sont entraînés par un moteur synchrone à aimant permanent. La vitesse du moteur est contrôlée par un onduleur. Ce dernier reçoit une consigne du courant quadratique ( $I_q$ )

générée par le contrôleur (pour plus de détail voir chapitre 4). Grâce à un circuit interne, le courant direct  $I_d$  est forcé à zéro et les courants triphasés  $I_a$ ,  $I_b$  et  $I_c$  sont reconstruits afin d'alimenter le moteur. L'accélération angulaire du moteur  $\dot{\omega}_{cm}$  est donnée par :

$$\dot{\omega}_{cm} = \frac{1}{J_{cp}}(\tau_{cm} - \tau_{cp} - \tau_f), \quad (2.70)$$

où  $\tau_{cm}$ ,  $\tau_{cp}$  et  $\tau_f$  sont respectivement les couples du moteur, du compresseur et du frottement. Ils sont données par :

$$\begin{aligned} \tau_{cm} &= \eta_{cm} k_t I_d, \\ \tau_f &= f \omega_{cp}, \\ \tau_{cp} &= \frac{C_p T_{atm}}{\eta_{cp} \omega_{cp}} \left[ \left( \frac{p_{sm}}{p_{atm}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] W_{cp}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

où  $k_t$  est la constante du moteur,  $f$  est le frottement visqueux du moteur,  $J_{cp}$  est l'inertie du système et  $\eta_{cm}$  est le rendement du moteur (voir [45]).  $W_{cp}$  est le débit d'air du compresseur et  $\eta_{cp}$  est son rendement. Un modèle est proposé pour chaque compresseur dans les deux paragraphes suivants.

## 2.4.1 Modélisation du compresseur à double vis

### 2.4.1.1 Modélisation

Dans cette section, nous allons modéliser le système moto-compresseur à double vis, qui appartient à la famille des compresseurs volumétriques. Celui-ci est fabriqué par la société Opcon Autoroto, spécifiquement pour les systèmes à pile à combustible. Ce compresseur contient deux vis hélicoïdales. Une vis est liée directement au moteur. Cela indique que la vitesse angulaire du compresseur ( $\omega_{cp}$ ) est égale à la vitesse angulaire du moteur ( $\omega_{cm}$ ). Le débit d'air à la sortie du compresseur est continu sur toute la plage de fonctionnement, avec un rendement très élevé. Un système de lubrification est recommandé pour lubrifier la chambre de compression. Un mécanisme dédié au circuit de lubrification assure que l'huile ne se mélange pas à l'air comprimé dans la PàC. Le banc d'essai est représenté sur la Fig.2.10.

Le compresseur que nous étudions, a un débit maximal de 100 g/s pour une vitesse de rotation de 12.000 tr/min. La modélisation du compresseur repose sur deux variables : le

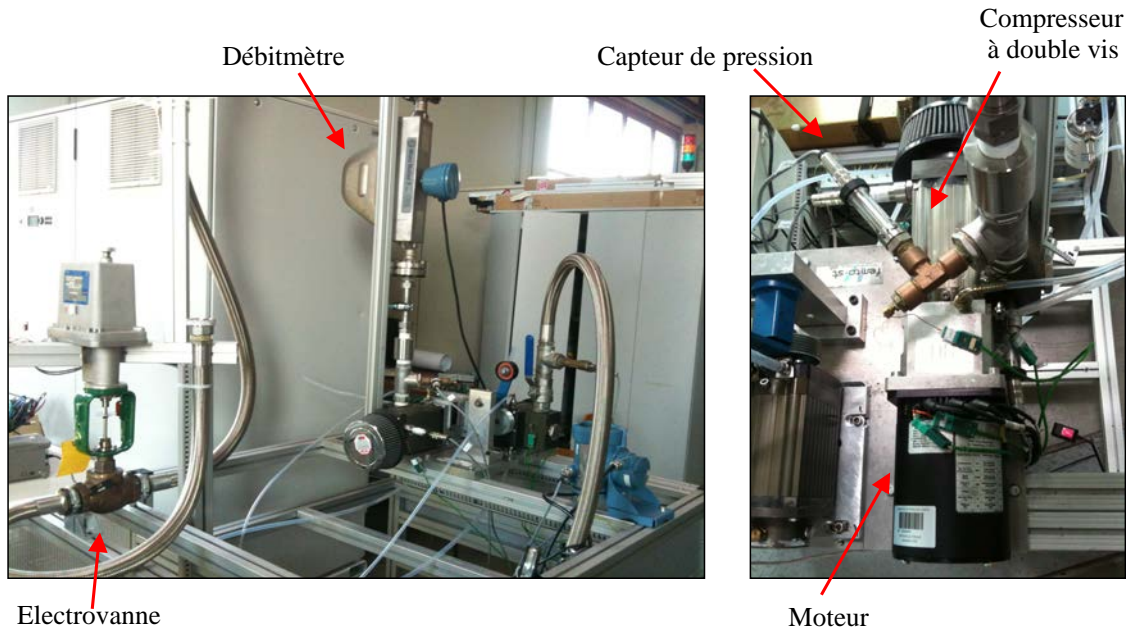


Figure 2.10. Banc d'essai du compresseur à double vis

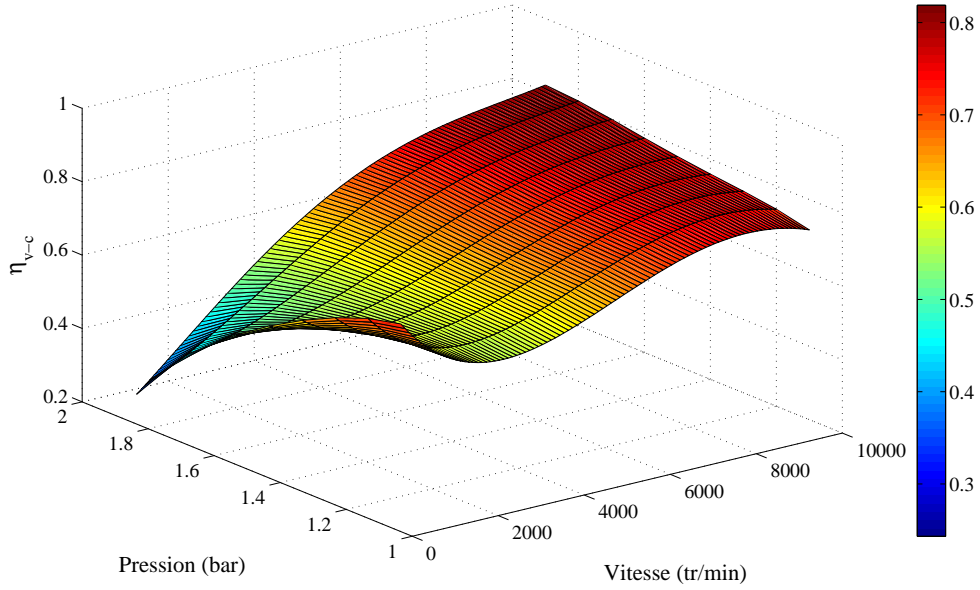
débit  $W_{cp}$  et le rendement du compresseur  $\eta_{cp}$ .

D'après [103], le débit d'un compresseur volumétrique est exprimé en fonction de la vitesse angulaire du compresseur. Le débit du compresseur est donc donné par :

$$W_{cp} = \frac{1}{2\pi} \eta_{v-c} V_{cpr/tr} \rho_a \omega_{cp}, \quad (2.72)$$

où  $\eta_{v-c}$  est le rendement volumétrique,  $V_{cpr/tr}$  est le volume comprimé par tour ( $m^3/tr$ ),  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air ( $kg/m^3$ ) et  $\omega_{cp}$  est la vitesse angulaire du compresseur en ( $rad/s$ ).

Le rendement volumétrique a été modélisé grâce à des données expérimentales. Ces résultats sont obtenus par des essais quasi-statiques, qui ont été effectués pour des pressions de sortie constantes avec une variation de la vitesse angulaire du compresseur. Cela nous a permis de modéliser le rendement volumétrique. Les valeurs expérimentales du rendement sont tracées sur la Fig.2.11 en fonction de la vitesse angulaire et la pression absolue à la sortie du compresseur.



**Figure 2.11.** Cartographie du rendement volumétrique en fonction de la pression à la sortie du compresseur et la vitesse angulaire du compresseur

Grâce à une interpolation, le rendement volumétrique est modélisé sous forme d'un polynôme de degré 4, en fonction de la vitesse angulaire ( $N_{cp}$ ) en tr/min et de la pression à la sortie du compresseur ( $p_{cp,out}$ ). Ce polynôme est donné comme suit :

$$\begin{aligned} \eta_{v-c} = & p_{00} + p_{10}N_{cp} + p_{01}p_{cp,out} + p_{20}N_{cp}^2 + p_{11}N_{cp}p_{cp,out} + p_{02}p_{cp,out}^2 \\ & + p_{30}N_{cp}^3 + p_{21}N_{cp}^2p_{cp,out} + p_{12}N_{cp}p_{cp,out}^2 + p_{03}p_{cp,out}^3 + p_{40}N_{cp}^4 \\ & + p_{31}N_{cp}^3p_{cp,out} + p_{22}N_{cp}^2p_{cp,out}^2 + p_{13}N_{cp}p_{cp,out}^3 + p_{04}p_{cp,out}^4 \end{aligned} \quad (2.73)$$

où  $p_{ij}$  sont des constantes avec  $i = 1,2,3,4$  et  $j = 1,2,3,4$  (voir Annexe A).

Le rendement du compresseur  $\eta_{cp}$  est calculé à partir des données expérimentales, par la relation suivante :

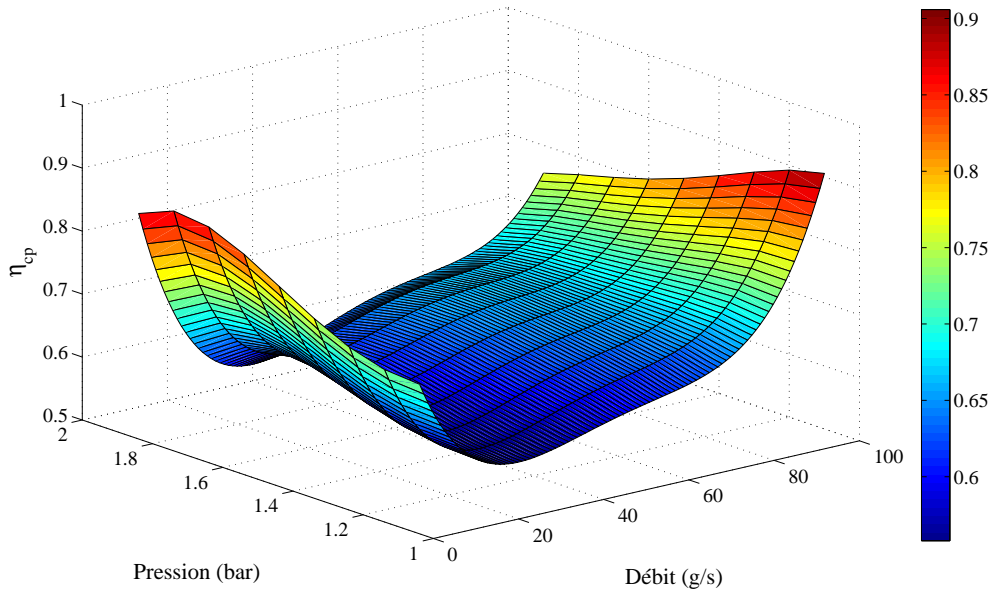
$$\eta_{cp} = \frac{P_{ad}}{P_{méca}}, \quad (2.74)$$

où  $P_{ad}$  et  $P_{méca}$  sont respectivement la puissance adiabatique et mécanique.

En se basant sur ces données, le rendement est tracé, en fonction du débit d'air et de la pression à la sortie du compresseur, sur la Fig.2.12. Grâce à cette interpolation, le rendement du compresseur est modélisé par un polynôme de degré 4 en fonction du débit d'air et de la pression à la sortie du compresseur. Ce polynôme est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \eta_{cp} = & q_{00} + q_{10}W_{cp} + q_{01}p_{cp,out} + q_{20}W_{cp}^2 + q_{11}W_{cp}p_{cp,out} + q_{02}p_{cp,out}^2 + q_{30}W_{cp}^3 \\ & + q_{21}W_{cp}^2p_{cp,out} + q_{12}W_{cp}p_{cp,out}^2 + q_{03}p_{cp,out}^3 + q_{40}W_{cp}^4 + q_{31}W_{cp}^3p_{cp,out} \\ & + q_{22}W_{cp}^2p_{cp,out}^2 + q_{13}W_{cp}p_{cp,out}^3 + q_{04}p_{cp,out}^4, \end{aligned} \quad (2.75)$$

où  $q_{ij}$  sont des constantes avec  $i = 1,2,3,4$  et  $j = 1,2,3,4$  (Annexe A).

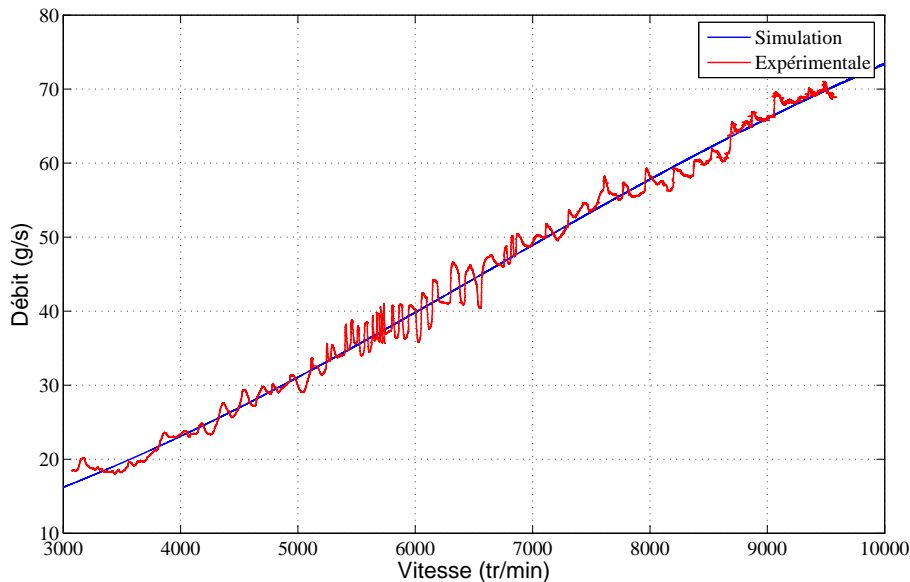


**Figure 2.12.** Cartographie du rendement du compresseur en fonction de la pression à la sortie et du débit d'air du compresseur

#### 2.4.1.2 Validation du modèle

La modélisation du compresseur à double vis est validée expérimentalement en deux étapes. La première étape consiste en la validation statique du modèle en boucle ouverte. La deuxième étape consiste en la validation dynamique du modèle. La validation statique

consiste en une variation lente de la vitesse angulaire du compresseur pour une pression constante à sa sortie. La comparaison entre les résultats de simulation et d'expérimentation est présentée sur la Fig.2.13. Ces deux courbes montrent la validité de l'équation de débit présenté dans (2.72).



**Figure 2.13.** Rendement volumétrique du compresseur à double vis par simulation et par expérimentation

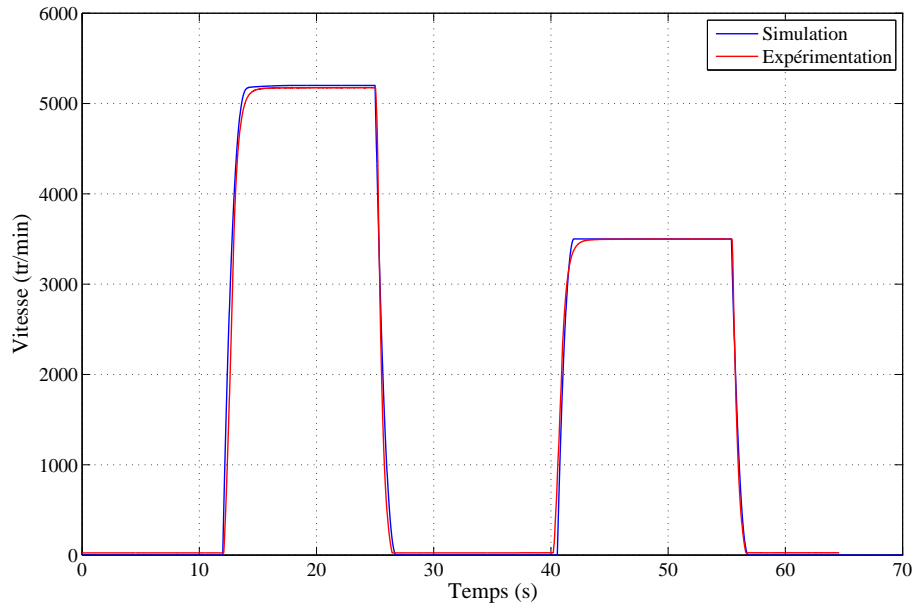
Ensuite, deux échelons de vitesse sont appliqués au système pour valider le modèle en dynamique Fig.2.14. L'erreur entre la vitesse issue du modèle et la vitesse réel est inférieur à 1%. Les réponses des débits à des échelons sont présentés sur la Fig.2.15. En régime dynamique le débit en expérimentation est plus lent que le débit en simulation. Cette différence est due au temps de réponse du débitmètre. Malgré ce retard en régime statique, les deux débits se rejoignent, ce qui valide la modélisation effectuée.

## 2.4.2 Modélisation du compresseur centrifuge

### 2.4.2.1 Modélisation

Dans cette partie, une modélisation du compresseur centrifuge est établie. Le compresseur centrifuge est de la famille turbo-machine. Le compresseur utilisé sur le banc d'essai est fabriqué par la société ROTREX. Le système d'alimentation en air est équipé d'un





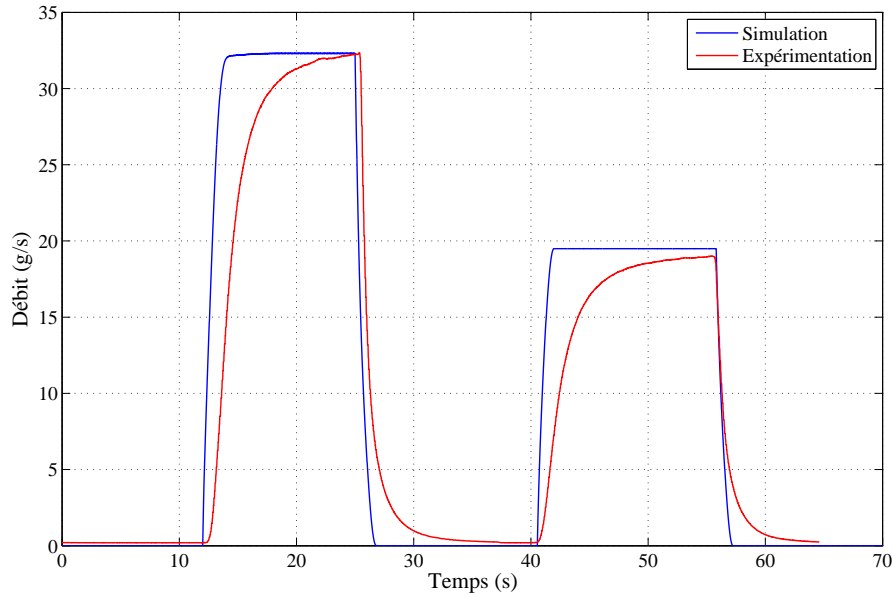
**Figure 2.14.** Variations de la vitesse du compresseur à double vis en simulation et en expérimentation

circuit de lubrification et un refroidisseur. Le moteur utilisé est le même que dans le cas du compresseur à double vis. Le banc d'essai est présenté sur la Fig.2.16.

La vitesse maximale de la roue à aube du compresseur peut atteindre 200.000 tr/min. Ainsi, la vitesse angulaire de l'arbre du compresseur est limitée à 15.900 tr/min. Celui-ci est calculé par le coefficient de réduction du compresseur, donné par le constructeur égal à 12,7. La rotation du compresseur est effectuée par le moteur, à l'aide d'une courroie et d'une poulie. Le compresseur possède une poulie d'un diamètre de 60 mm. Sachant que la vitesse angulaire maximale du moteur est de 12.000 tr/min, le diamètre de la poulie est de 90 mm ce qui donne un rapport de réduction de 1,5. Cela limite le moteur à une vitesse angulaire de 10.600 tr/min. La relation entre la vitesse angulaire du compresseur  $\omega_{cp}$  et du moteur  $\omega_{cm}$  est donnée comme suit :

$$\omega_{cp} = k_r \omega_{cm}, \quad (2.76)$$

où  $k_r$  est le rapport de réduction de la vitesse, il est égal à 19,05.

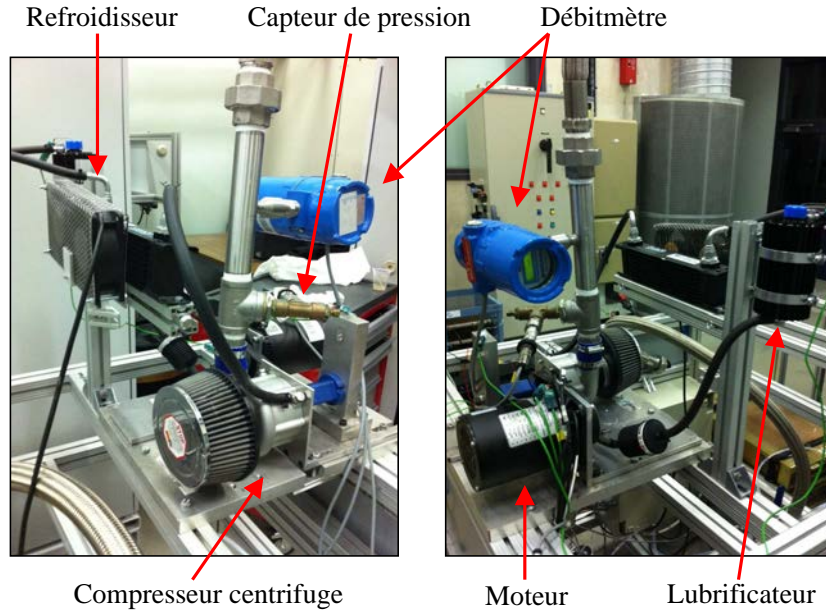


**Figure 2.15.** Variations du débit du compresseur à double vis en simulation et en expérimentation

De même que pour la modélisation du compresseur à double vis, deux grandeurs sont modélisées : le débit d'air du compresseur et son rendement. Le débit d'air est modélisé par la méthode présentée dans [66] et [103]. Ce type de modélisation est dédié aux turbomachines, et plus spécifiquement pour les compresseurs centrifuges. Afin de standardiser le principe de modélisation dans les mêmes conditions (température et pression), il est impératif de corriger les valeurs mesurées. D'après [31] les valeurs corrigées sont la vitesse angulaire du compresseur ( $N_{cr}$ ) en (tr/min) et le débit d'air  $W_{cr}$  en (en kg/s). Ces valeurs corrigées sont utilisées dans la cartographie du compresseur. Elles sont données par :

$$\begin{aligned} N_{cr} &= \frac{N_{cp}}{\sqrt{\theta}}, \\ W_{cr} &= W_{cp} \frac{\sqrt{\theta}}{\delta}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

$N_{cp}$  est la vitesse angulaire du compresseur,  $W_{cp}$  est le débit d'air du compresseur,  $\delta$  est le terme de correction de la pression et  $\theta$  est le terme de correction de la température.



**Figure 2.16.** Banc d'essai du compresseur centrifuge

En utilisant la méthode [66], un paramètre principale doit être défini, et il est donné :

$$\psi = \frac{C_p T_{cp,in} \left[ \left( \frac{p_{cp,out}}{p_{cp,in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]}{\frac{1}{2} U_c^2}, \quad (2.78)$$

où  $C_p$  est la chaleur spécifique,  $T_{cp,in}$  est la température à l'entrée du compresseur et  $p_{cp,in}$  et  $p_{cp,out}$  sont les pressions en amont et en aval du compresseur respectivement.  $U_c$  est la vitesse linéaire ; Elle est calculée en fonction de la vitesse angulaire du compresseur corrigé  $N_{cr}$  :

$$U_c = \frac{\pi}{60} d_c N_{cr} \sqrt{\theta}, \quad (2.79)$$

où  $d_c$  est le diamètre de l'arbre du compresseur.

Le débit normalisé du compresseur est défini comme suit :

$$\Phi = \frac{W_{cr}}{\frac{\pi}{4} \rho_a d_c^2 U_c}, \quad (2.80)$$

où  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air.

Le paramètre principal  $\psi$  et le rendement du compresseur  $\eta_{cp}$  sont exprimés en fonction de  $\Phi$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{k_1 + k_2\Phi}{k_3 - \Phi}, & k_i &= k_{i1} + k_{i2}M, & i &= 1, 2, 3, \\ \eta_{cp} &= a_1\Phi^2 + a_2\Phi + a_3, & a_i &= \frac{a_{i1} + a_{i2}M}{a_{i3} - M}, & i &= 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (2.81)$$

Les coefficients  $k$  et  $a$  sont déterminés par la méthode des moindres carrés, basée sur des données expérimentales et ils sont des fonctions polynomiales en fonction du paramètre  $M$ . Ce dernier est donné par :

$$M = \frac{U_c}{\sqrt{\gamma R_a T_{cp,in}}}. \quad (2.82)$$

Les relevés des données expérimentales ont été pris en fixant la vitesse angulaire du moteur tout en variant la pression à la sortie du compresseur. Les coefficients déduits sont donnés par :

$$\begin{aligned}k_{11} &= -0,0750 & , & & k_{12} &= 1,8815, \\ k_{21} &= -0,8333 & , & & k_{22} &= -3,2360, \\ k_{31} &= -0,0082 & , & & k_{32} &= 0,9977,\end{aligned}\quad (2.83)$$

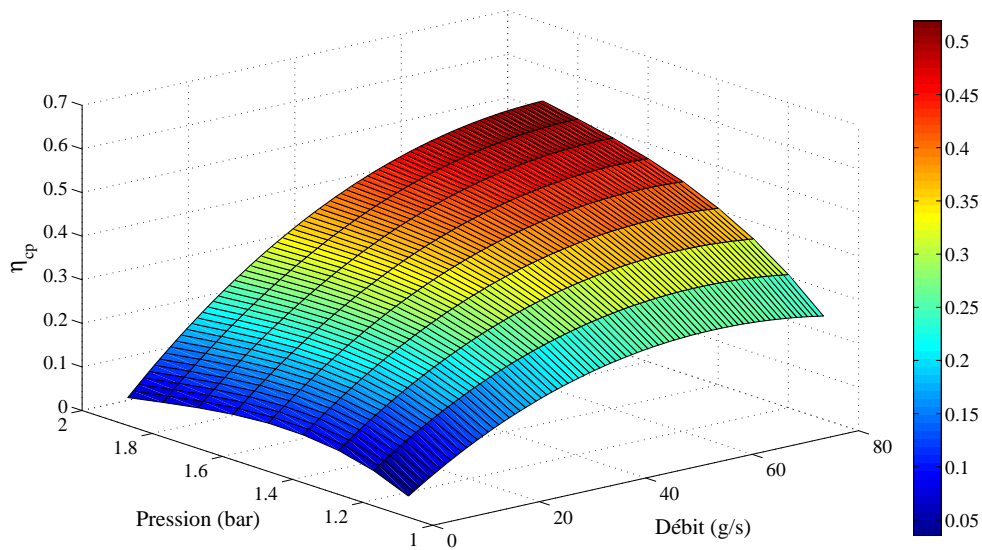
$$\begin{aligned}a_{11} &= -2,5344 & , & & a_{12} &= 28,4594 & , & & a_{13} &= -1,3733, \\ a_{21} &= 0,9564 & , & & a_{22} &= -9,6470 & , & & a_{23} &= -0,9467, \\ a_{31} &= -0,0372 & , & & a_{32} &= 0,1166; & , & & a_{33} &= 1,8831.\end{aligned}\quad (2.84)$$

Le rendement du compresseur est tracé sur la Fig.2.17. Sachant que le débit corrigé du compresseur est égal à :

$$W_{cr} = \frac{\pi}{4} \Phi \rho_a d_c^2 U_c. \quad (2.85)$$

#### 2.4.2.2 Validation du modèle

Afin de valider la modélisation proposée, deux étapes de validation sont effectuées : validation statique et validation dynamique. La validation statique consiste à mesurer le débit tout en fixant la vitesse angulaire du moteur et en variant lentement la pression à la sortie du compresseur. La Fig.2.18 présente une comparaison entre les résultats d'expérimentation et de simulation. D'après la Fig.2.18, les deux courbes sont proches, avec une erreur inférieure à 5%.

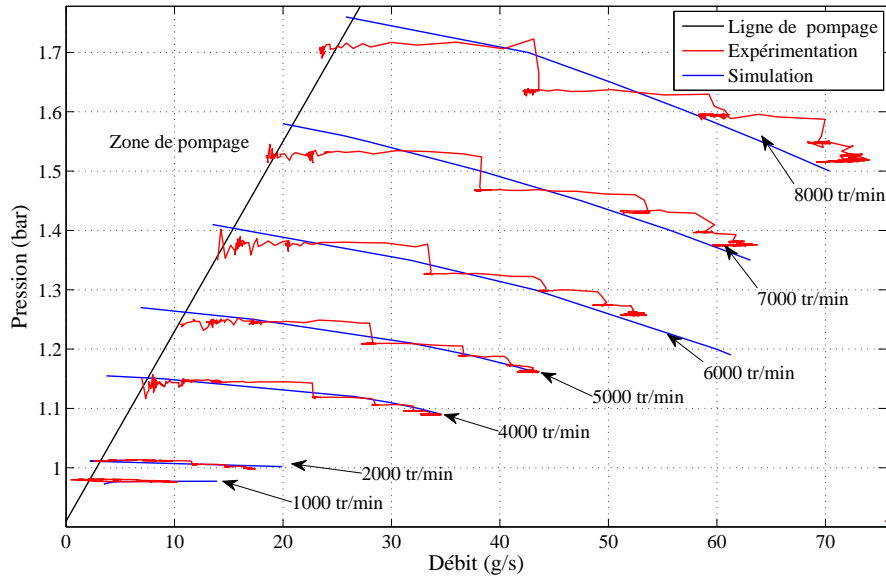


**Figure 2.17.** Cartographie du rendement du compresseur centrifuge en fonction de la pression à la sortie et du débit d'air du compresseur

Dans la deuxième étape, deux échelons de vitesse sont appliqués au système pour comparer les réponses du modèle et du système en dynamique Fig.2.19. La sortie du système est le débit d'air émis par le compresseur. La comparaison de ces deux débits est présentée sur la Fig.2.20. Les deux débits se rejoignent en régime statique. Par contre, en régime dynamique, le débit mesuré par le débitmètre est plus lent du fait du temps de réponse du débitmètre. L'erreur entre le modèle et l'expérimentation est inférieure à 5% ; ce qui valide la modélisation effectuée.

## 2.5 Modèle du système d'alimentation en air

Sous les hypothèses présentées dans la section 2.3.3, les équations dynamiques (2.33),(2.34), (2.29) et (2.70) peuvent être représentées par le modèle suivant :



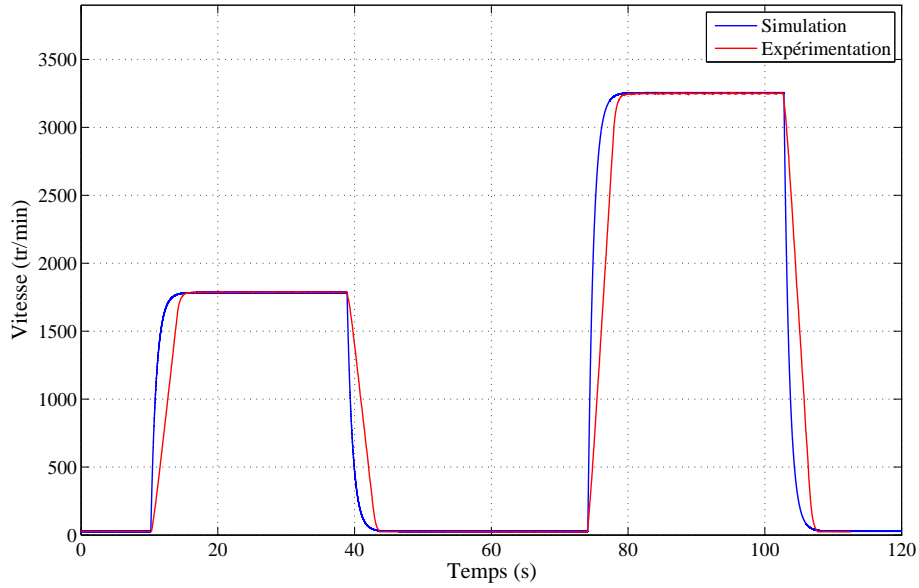
**Figure 2.18.** Comparaison entre la cartographique du compresseur centrifuge de la simulation et de l'expérimentation

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_{O_2}}{dt} &= \frac{R_{O_2} T_{fc}}{V_{ca}} (W_{O_2,ca,in} - W_{O_2,ca,out} - W_{O_2,rct}), \\
 \frac{dp_{N_2}}{dt} &= \frac{R_{N_2} T_{fc}}{V_{ca}} (W_{N_2,ca,in} - W_{N_2,ca,out}), \\
 \frac{d\omega_{cp}}{dt} &= \frac{1}{J_{cp}} (\tau_{cm} - \tau_{cp} - \tau_f), \\
 \frac{dp_{sm}}{dt} &= \frac{R_a T_{cp,out}}{V_{sm}} (W_{cp} - W_{sm,out}).
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

### 2.5.1 Entrées et sorties du système

Les entrées du système sont définies en deux catégories :

- Le courant quadratique ( $I_q$ ) est considéré comme une entrée, c'est la variable de la commande du compresseur. Ce courant se retrouve dans l'équation de l'accélération du compresseur présenté dans (2.70). Il contrôle la vitesse angulaire du compresseur, ainsi que son débit d'air.



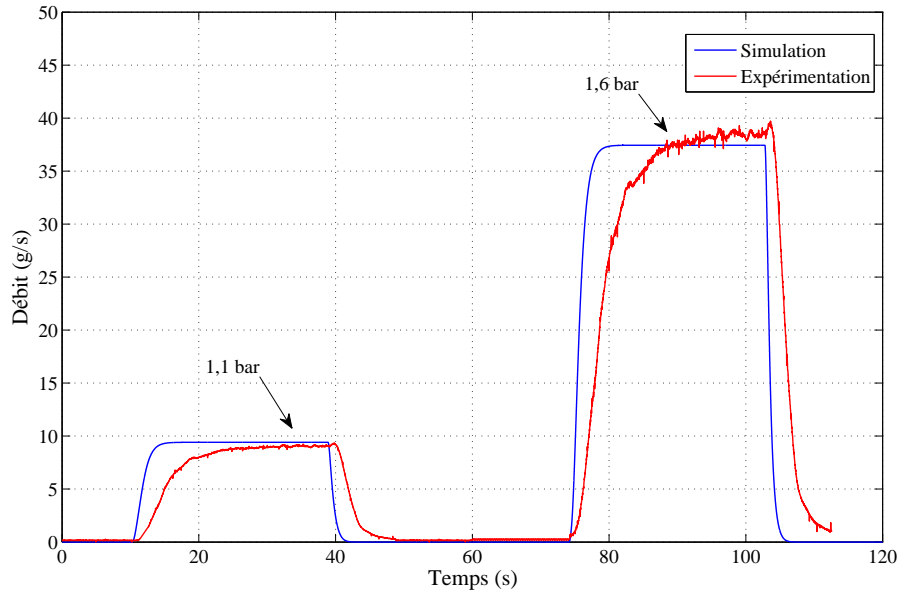
**Figure 2.19.** Variations de la vitesse du compresseur centrifuge en simulation et en expérimentation

- Le courant de la PàC ( $I_{st}$ ) est considéré comme une perturbation mesurable du système. Dans la plupart des modélisations des PEMFC, le courant de la PàC est considéré mesurable. Par contre, dans [139], la tension de la pile est utilisée comme une entrée pour analyser la distribution de la densité de courant.

Les sorties sont des variables mesurables, ils permettent d'apprécier la performance du système. Le vecteur des paramètres mesurables de la PàC est donné par :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{st} \\ p_{sm} \\ W_{cp} \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

où  $y_1$  est la tension de la pile à combustible ( $V_{st}$ ),  $y_2$  est la pression du collecteur d'admission d'air ( $p_{sm}$ ) et  $y_3$  est le débit d'air du compresseur ( $W_{cp}$ ).



**Figure 2.20.** Variations de la vitesse du compresseur centrifuge en simulation et en expérimentation

### 2.5.2 Performance du système

Le vecteur de performance de la PàC est défini par :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{net} \\ \lambda_{O_2} \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

où  $z_1$  est la puissance nette délivrée par la pile ( $P_{net}$ ) et  $z_2$  est le rapport d'excès d'oxygène ( $\lambda_{O_2}$ ).

La puissance nette délivrée par la pile est égale à la différence entre la puissance fournie par la PàC et les puissances consommées par les auxiliaires. Notant que le compresseur est le dispositif qui consomme le plus d'énergie parmi ces auxiliaires, celui-ci atteint une consommation de 20% de la puissance fournie de la PàC [118]. Ainsi, la puissance nette est égale à la différence entre la puissance de la pile ( $P_{st}$ ) et la puissance consommée par le compresseur ( $P_{cm}$ ). Cette relation peut être exprimée par :

$$P_{net} = P_{st} - P_{cm}, \quad (2.89)$$



avec

$$P_{st} = V_{st}I_{st}, \quad (2.90)$$

$$P_{cm} = \tau_{cm}\omega_{cp}.$$

Le rapport d'excès d'oxygène ou le rapport de stœchiométrie présente la relation entre l'oxygène injecté dans la cathode et l'oxygène ayant réagi lors de la réaction chimique. Cette relation est donnée par :

$$\lambda_{O_2} = \frac{W_{O_2,ca,in}}{W_{O_2,rct}}. \quad (2.91)$$

Un rapport d'excès d'oxygène élevé ainsi qu'une pression partielle d'oxygène élevée, améliorent la puissance fournie par la PàC et la puissance nette. Cependant si la valeur optimale de  $\lambda_{O_2}$  est dépassée, le compresseur demande plus de puissance et ainsi réduit la puissance nette fournie par la PàC. Dans la littérature, il est démontré que la puissance nette maximale fournie par la PàC est atteinte pour un rapport d'excès d'oxygène entre 2 et 2,5 [118].

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle statique de la pile à combustible a été présenté. Ainsi deux modélisations dynamiques successives d'un système à pile à combustible ont été abordées. Le modèle complet du système est basé sur les travaux de [118]. En se basant sur plusieurs hypothèses, le modèle a été simplifié par [132]. Ensuite, deux types de compresseurs ont été modélisés pour le système d'alimentation en air, ce sont : le compresseur à double vis et le compresseur centrifuge. Les modèles ont été validés d'une manière satisfaisante sur les bancs d'essai au FCLab. Dans les chapitres 4 et 5, le modèle à 4 états est utilisé pour la synthèse du contrôle commande des systèmes d'alimentation en air. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter une introduction à la commande par mode glissant.



## *Chapitre 3*

---

---

### *Mode glissant d'ordre supérieur*

---

---

#### **3.1 Introduction**

Nous nous intéressons dans ce chapitre, à décrire la commande par mode glissant (MG). Ce type de commande est connu pour le contrôle des systèmes non-linéaires avec des incertitudes telles que présentés par Utkin [141] et Emelyanov et al. [39]. Le but de ce chapitre est d'introduire les notions de bases du MG et de présenter quelques algorithmes par MG d'ordre supérieur. Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie, une synthèse de la commande basée sur les MG classiques, connues par MG d'ordre 1, est présentée. La deuxième partie présente les algorithmes de commandes par mode glissant d'ordre supérieur robustes et adaptatifs.

#### **3.2 Introduction à la commande par mode glissant**

Cette section est principalement basée sur les travaux de [129, 140, 142]. Le principe de la commande par MG est de forcer les trajectoires d'état d'un système à atteindre une surface de glissement en temps fini, ensuite, y rester, grâce à une commande discontinue. Ainsi, après la convergence, la réponse dynamique du système dépend des paramètres et des équations qui définissent cette surface de glissement [129]. Celle-ci est déterminée en fonction des objectifs de la commande, des propriétés statiques et de la dynamique du système en boucle fermée. Il est possible de synthétiser la surface de glissement en fonction d'objectifs de contrôle classique comme : la stabilité globale, l'optimisation, la régulation,

etc. Dans la théorie présentée dans les paragraphes suivants, les systèmes sont non-linéaire, mono-entrée mono-sortie (*SISO*) et affine en la commande.

### 3.2.1 Mode glissant classique

Considérons le système non-linéaire dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u, \\ y(t) &= h(x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  est l'entrée du système.  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonctions incertaines suffisamment différentiable définies sur  $\mathcal{X}$ .  $h(x)$  est la sortie du système avec  $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ .

Soit  $s(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction dérivable, considérée comme une sortie du système (3.1) [129] et appelée la variable de glissement. L'ensemble :

$$S = \{x \in \mathcal{X} : s(x) = 0\},$$

représente une sous-variété de  $\mathcal{X}$  de dimension  $(n - 1)$ , celui-ci est appelé la surface de glissement ou de commutation. Notons que le système doit avoir un degré relatif 1 par rapport à la variable de glissement  $s$  [141]. Le degré relatif d'un système est le nombre de dérivées de la variable de glissement, par rapport au temps, pour obtenir la commande [64]. Une fois que la surface de glissement est atteinte, les trajectoires d'états du système resteront dans un sous-ensemble de l'espace, avec une dimension inférieure à la dimension du système [38, 72].

Dans le but d'atteindre la surface de glissement, la loi de commande  $u$  proposée est discontinue, celle-ci est donnée sous la forme suivante :

$$u = -k \operatorname{sign}(s),\tag{3.2}$$

où  $k$  est une constante positive. Supposant que la loi de commande (3.2), satisfasse la condition d'attractivité suivante, appelée  $\eta$ -attractivité, au voisinage de  $S$  :

$$s\dot{s} \leq -\eta|s|, \quad \text{avec } \eta > 0.\tag{3.3}$$

Sous cette condition, les trajectoires d'états du système (3.1) atteignent la surface de glissement, en temps fini et restent sur la surface.

### 3.2.2 Phénomène du *chattering*

Les discontinuités appliquées à la commande produisent des oscillations à la sortie du système, ce phénomène est appelé *chattering* (Fig.3.1). C'est l'un des inconvénients les plus importants du mode glissant classique. Durant les années 80, plusieurs méthodes ont été proposées pour réduire le *chattering* [19]. Dans [25, 130], les auteurs ont proposé de remplacer la fonction discontinue "signe", par une commande continue comme par exemple, la fonction de saturation, la fonction pseudo-signe, la fonction arctangente ou la fonction tangente hyperbolique. Ces fonctions rendent le contrôle continu, par contre les trajectoires convergentes uniquement vers un voisinage de la surface de glissement [80]. Dans [20, 142], les auteurs ont proposé un observateur pour éliminer ce *chattering*; Cette méthode est intéressante mais sensible aux incertitudes. Dans [40, 91], les auteurs ont proposé le concept de la commande par mode glissant d'ordre deux, celle-ci assure la convergence de la variable de glissement et de sa première dérivée en temps fini vers zéro. Par la suite, cette approche a été développée par [10, 12, 14], d'une part pour réduire le *chattering*, et d'autre part pour assurer la robustesse des systèmes de degré relatif quelconque. Des travaux récents proposent des commandes adaptatives par MG d'ordre 1 et supérieur [115, 126]. Ces lois de commande utilisent des gains dynamiques qui s'adaptent vis-à-vis des perturbations et des incertitudes du système contrôlé.

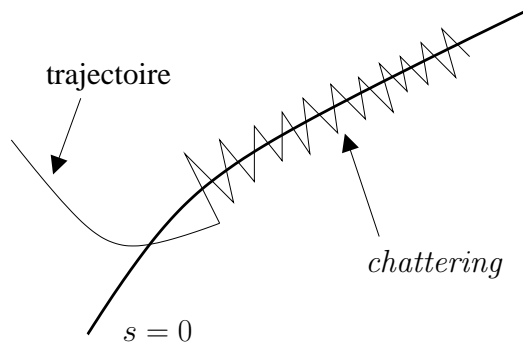
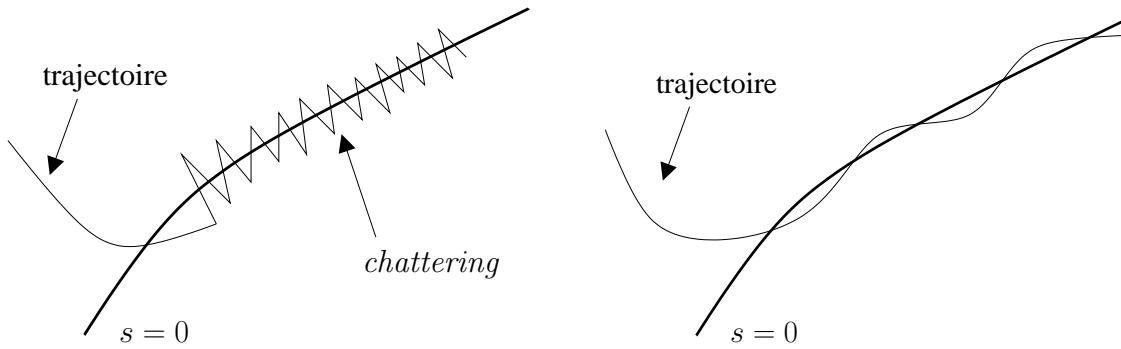


Figure 3.1. Le phénomène du *chattering*

## 3.3 Commande par mode glissant d'ordre supérieur

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté la commande par MG classique et le phénomène du *chattering*. Dans le but d'éviter ce *chattering*, la commande par mode glissant d'ordre supérieur est proposée. Dans cette approche, la commande discontinue

agit sur les dérivées d'ordre supérieur de la variable de glissement. La Fig.3.2 montre que, en appliquant la commande par mode glissant d'ordre supérieur à un système, la surface de glissement est atteinte de manière plus lisse que la commande par MG classique. Cela réduit le *chattering*, tout en conservant les propriétés de la robustesse et de la convergence en temps fini de la commande par mode glissant classique [104].



**Figure 3.2.** Allure du régime glissant : MG classique (gauche) et MGOS (droite)

Par la suite, nous présenterons les principes de commande par mode glissant d'ordre supérieur pour les systèmes *SISO* non-linéaire. En particulier, la théorie des commandes par mode glissant d'ordre 2 (MGO2) est présentée. Cette partie est basée sur les travaux suivants [13, 43, 82, 83, 89, 90, 113].

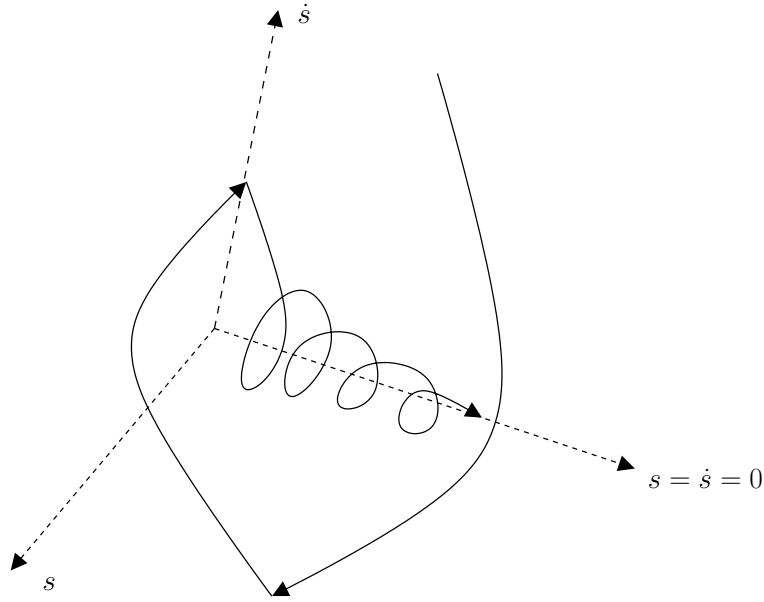
### 3.3.1 Synthèse de la commande

Considérons le système non-linéaire incertain suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g(x, t)u, \\ s &= s(x, t), \\ u &= u(x, t), \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'états,  $u \in \mathbb{R}$  entrée du contrôle.  $f(x, t)$  et  $g(x, t)$  sont des fonctions incertaines, suffisamment différentiables et  $s(x, t) \in \mathbb{R}$  est la sortie, aussi suffisamment différentiable.

L'objectif de la commande par MGO2 est de forcer la variable de glissement et sa première dérivée à zéro. Dans le cas où le degré relatif du système par rapport à la variable de glissement est 1 ou 2,  $s$  et  $\dot{s}$  convergent vers zéro en temps fini. La convergence à l'origine est présentée sur la Fig.3.3 [88].



**Figure 3.3.** Ensemble de glissement d'ordre 2

La synthèse des lois de commande par MGO2 dépend des bornes de fonctions incertaines, qui apparaissent dans la deuxième dérivée de la variable de glissement. Deux cas sont possibles, en fonction du degré relatif du système par rapport à  $s$ . Les degrés relatifs sont d'ordre 1 ou 2 :

- **Cas A** : système de degré relatif 1.

Dans le cas où le degré relatif du système est égale à 1 par rapport à  $s$ , la commande  $u$  apparaît dans la première dérivée de  $s$  par rapport au temps,

$$\dot{s}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} s(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} s(x, t) (f(x, t) + g(x, t)u). \quad (3.5)$$

D'où l'expression de  $\ddot{s}$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\ddot{s}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{s}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}(x, t) (f(x, t) + g(x, t)u) + \frac{\partial}{\partial u} \dot{s}(x, t) \dot{u}(t). \quad (3.6)$$

$$\ddot{s}(x, t) = \phi(x, u, t) + \gamma(x, u, t) \dot{u}(t), \quad (3.7)$$

avec  $\phi(x, u, t)$  et  $\gamma(x, u, t)$  fonctions incertaines bornées. De plus, il existe quatre constantes positives  $s_0$ ,  $K_m$ ,  $K_M$  et  $C$  telles que, dans un voisinage de la surface de glissement, défini par  $|s(x, t)| < s_0$  [88], on a :

$$0 < K_m < \gamma(x, u, t) = \frac{\partial}{\partial u} \dot{s}(x, t) < K_M, \quad (3.8)$$

$$\left| \phi(x, u, t) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{s}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}(x, t)(f(x, t) + g(x, t)u) \right| \leq C.$$

Selon ces bornes, l'équation (3.7) peut être remplacée par l'inclusion différentielle suivante :

$$\ddot{s} \in [-C, C] + [K_m, K_M] \dot{u}. \quad (3.9)$$

– **Cas B** : Système de degré relatif 2.

Dans le cas où le système est de degré relatif 2, la commande  $u$  apparaît dans la deuxième dérivée de  $s$ . Celle-ci est donnée comme suit :

$$\ddot{s}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{s}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}(x, t)(f(x, t) + g(x, t)u). \quad (3.10)$$

Puis, la deuxième dérivée de  $s$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$\ddot{s}(x, t) = \phi'(x, t) + \gamma'(x, t)u(t), \quad (3.11)$$

avec  $\phi'(x, t)$  et  $\gamma'(x, t)$  sont des fonctions incertaines bornées. De même que dans les systèmes de degré relatif 1, il existe quatre constantes positives  $s'_0$ ,  $K'_m$ ,  $K'_M$  et  $C'$  telles que, dans un voisinage de la surface de glissement, défini par  $|s(t)| < s'_0$ , on a :

$$0 < K'_m < \gamma'(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}(x, t)g(x, t) < K'_M, \quad (3.12)$$

$$\left| \phi'(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{s}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{s}(x, t)f(x, t) \right| \leq C'.$$

Selon ces bornes, l'équation (3.11) peut être remplacée par l'inclusion différentielle suivante :

$$\ddot{s} \in [-C', C'] + [K'_m, K'_M]u. \quad (3.13)$$

Les deux relations (3.9) et (3.13), sont très importantes pour l'étude de la robustesse d'un système. Dans les paragraphes suivants, plusieurs algorithmes sont présentés, dans le but d'assurer la convergence en temps fini de  $s$  et  $\dot{s}$  vers zéro.

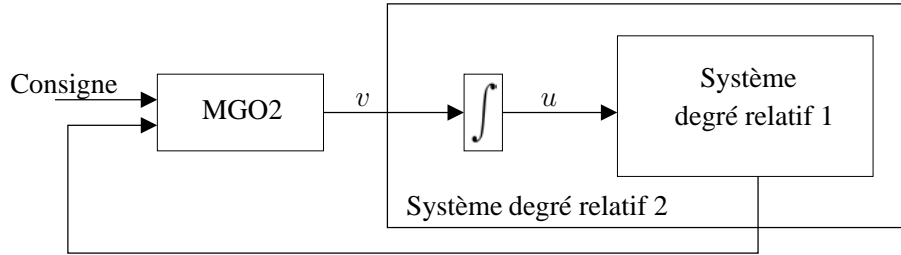
### 3.3.2 Algorithmes par mode glissant d'ordre 2

Plusieurs algorithmes basés sur des lois de commande par mode glissant d'ordre deux (MGO2) ont été proposés. Dans cette section, nous présentons trois algorithmes bien connus. Deux parmi eux sont dédiés aux systèmes de degré relatif 2, qui sont l'algorithme



sous-optimal et l'algorithme du *Twisting*. Le troisième est l'algorithme du *Super-Twisting* et il est dédié aux systèmes de degré relatif 1 par rapport à  $s$ .

*Remarque 1 : Les algorithmes dédiés aux systèmes de degré relatif 2, peuvent être adaptés aux systèmes de degré relatif 1. L'adaptation est effectuée en augmentant le degré relatif du système, cela est effectué en agissant sur la dérivée de  $u$  (Fig.3.4).*



**Figure 3.4.** Degré relatif du système augmenté [78]

### 3.3.2.1 Algorithme sous-optimal

L'algorithme sous-optimal est appliqué aux systèmes de degré relatif 1 et 2 par rapport à  $s(x, t)$ . Cet algorithme est inspiré de la commande optimale de type bang-bang [92]. Il assure la convergence de  $s$  et de  $\dot{s}$  en temps fini vers zéro, en limitant les trajectoires par des arcs paraboliques qui comprennent l'origine (Fig.3.5). Dans le cas où le degré relatif de système est égale à 2 par rapport à  $s(x, t)$ , la loi de commande est définie par :

$$u(t) = -\alpha(t)V_M \text{sign}\left(s(t) - \frac{1}{2}s_M(t)\right), \quad (3.14)$$

où  $V_M$  est une constante positive réglable et  $s_M$  est défini par :

$$s_M(t) = \begin{cases} s(0) & , \quad 0 \leq t < t_{M_1}, \\ s(t_{M_i}) & , \quad t_{M_i} \leq t < t_{M_{i+1}}, \end{cases} \quad (3.15)$$

$i = 1, 2, \dots$

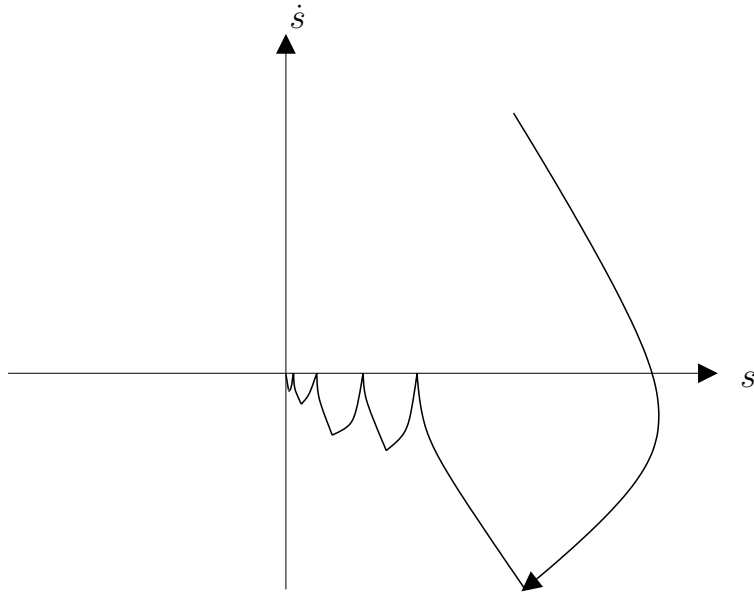
où  $t_{M_i}$  sont les instants où  $\dot{s} = 0$ . Le paramètre  $\alpha(t)$  est défini par :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha^* & , \quad \text{si } \left[s(t) - \frac{1}{2}s_M\right][s_M - s(t)] > 0, \\ 1 & , \quad \text{si } \left[s(t) - \frac{1}{2}s_M\right][s_M - s(t)] \leq 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

où  $\alpha^*$  est une constante positive. Les paramètres du contrôleur,  $\alpha^*$  et  $V_M$ , doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \alpha^* \in (0, 1] \cap \left(0, \frac{3K'_m}{K'_M}\right), \\ V_M = \max\left(\frac{C'}{\alpha^* K'_m}, \frac{4C'}{3K'_m - \alpha^* K'_M}\right). \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $C'$ ,  $K'_m$  et  $K'_M$  sont des bornes donnés dans l'équation (3.12).



**Figure 3.5.** *Algorithme sous-optimal : plan de phase (s , s-dot)*

Suivant la remarque 1, l'algorithme sous-optimal peut être également appliqué aux systèmes de degré relatif 1 par rapport à  $s$  :

$$v(t) = \dot{u} = -\alpha(t)V_M \text{sign}\left(s(t) - \frac{1}{2}s_M(t)\right). \quad (3.18)$$

La deuxième dérivée de la variable de glissement  $s$  et les conditions aux bornes sont celles données dans le cas A de la section 3.3.1. Pour plus de détails sur la synthèse et la preuve de la convergence de l'algorithme voir [12, 13].

### 3.3.2.2 Algorithme du *Twisting*

L'algorithme du *Twisting* est basé sur une commutation de l'amplitude de la commande entre deux valeurs, de telle manière que, cette commutation crée des trajectoires circu-

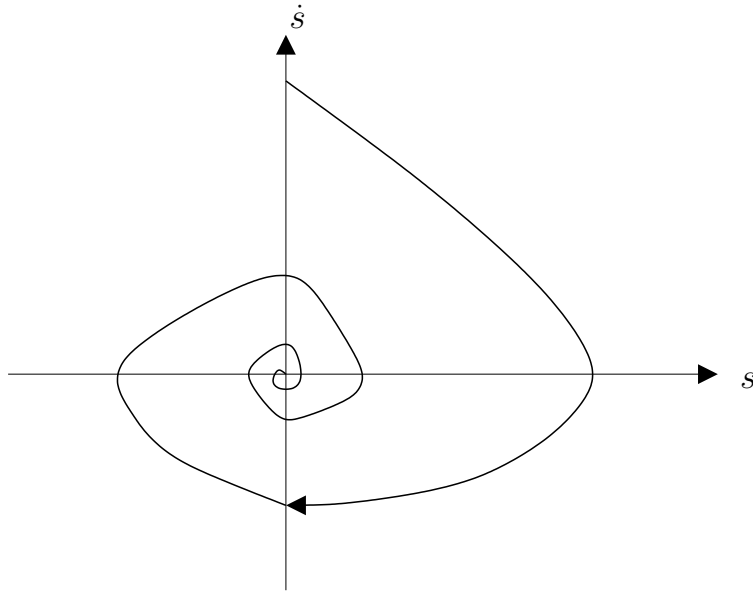
laire jusqu'à la convergence en temps fini à l'origine (Fig.3.6). La loi de commande de l'algorithme est définie comme suit :

$$u(t) = -r_1 \text{sign}(s) - r_2 \text{sign}(\dot{s}), \quad (3.19)$$

$r_1$  et  $r_2$  sont des constantes positives réglables, que satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 - r_2 > \frac{C'}{K'_m}, \\ K'_m(r_1 + r_2) - C' > K'_M(r_1 - r_2) + C'. \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $C'$ ,  $K'_m$  et  $K'_M$  sont des bornes donnés dans l'équation (3.12). Plus de détails sur la preuve et la synthèse de la loi de commande peuvent être trouvés dans [88]. De même que l'algorithme sous-optimal, l'algorithme du *Twisting* peut être appliqué sur les systèmes de degré relatif 1 par rapport à  $s$ .



**Figure 3.6.** Algorithme du *Twisting* : plan de phase ( $s$ ,  $\dot{s}$ )

### 3.3.2.3 Algorithme du *Super Twisting*

L'algorithme du *Super Twisting* est l'algorithme le plus utilisé pour la commande par mode glissant d'ordre 2. Celui-ci n'est applicable qu'aux systèmes qui présentent un degré relatif 1 par rapport à la variable de glissement  $s$  [43]. Cette loi de commande converge en

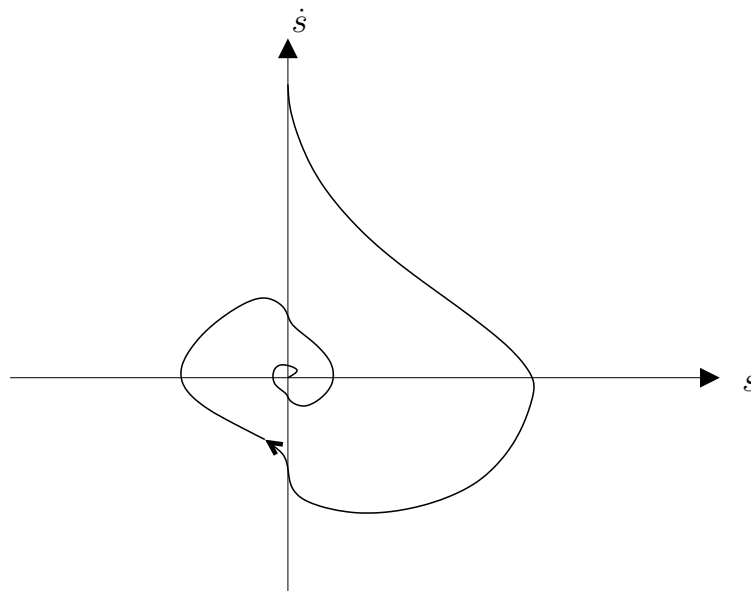
un temps fini avec une trajectoire semblable à celle de l'algorithme du *Twisting* (Fig.3.7). Les avantages principales de cet algorithme sont la continuité de la commande et l'absence du besoin de la dérivée de  $s$ .

La loi de commande du *Super Twisting* est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1 + u_2, \\ \dot{u}_1 &= -\beta \text{sign}(s), \\ u_2 &= -\alpha |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s), \end{aligned} \quad (3.21)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes positives réglables. La preuve de la stabilisation et de la convergence du système est présentée dans [78, 88]. Les conditions suffisantes des paramètres du contrôleur, pour assurer la convergence, sont définies par les bornes présentées dans le cas B section 3.3.1, elles sont données comme suit :

$$\begin{cases} \beta > \frac{C}{K_m}, \\ \alpha^2 \geq \frac{4CK_M(\beta + C)}{K_m^3(\beta - C)}. \end{cases} \quad (3.22)$$



**Figure 3.7.** Algorithme du *Super Twisting* : plan de phase ( $s$ ,  $\dot{s}$ )

### 3.3.3 Différentiateur

L'algorithme sous-optimal et l'algorithme du *Twisting* ont besoin de la première dérivée de la variable de glissement  $s$ . Pour cela, nous utilisons un différentiateur robuste exact qui converge en temps fini [91]. Ce différentiateur est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = -\eta_2 L^{\frac{1}{2}} |z_0 - s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0 - s) + z_1, \\ \dot{z}_1 = -\eta_1 L \text{sign}(z_1 - \dot{z}_0), \end{cases} \quad (3.23)$$

où  $z_0$  and  $z_1$  sont respectivement les estimations en temps réel de  $s$  et  $\dot{s}$ . Les paramètres du différentiateur  $\eta_i$  sont choisis,  $\eta_1 = 1, 1$ ,  $\eta_2 = 1, 5$  d'après [91].  $L$  est le seul paramètre à régler selon la condition suivante :

$$|\dot{s}| \leq L. \quad (3.24)$$

La structure du différentiateur est présentée sur la Fig.3.8.

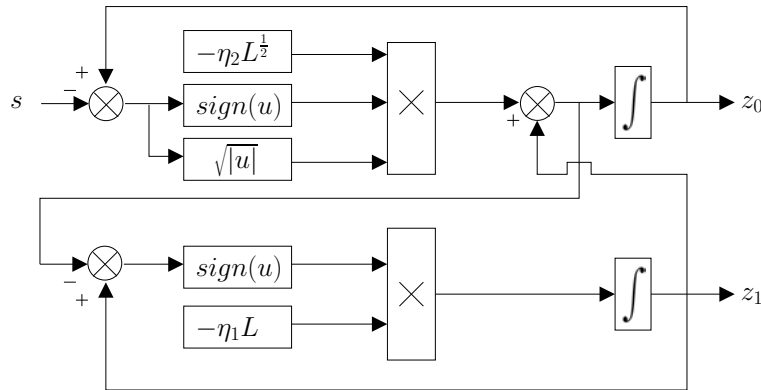


Figure 3.8. Structure du différentiateur

## 3.4 Commande par mode glissant d'ordre 2 adaptative

Dans les sections précédentes, nous avons vu que les gains des algorithmes de la commande par MGO2 dépendent de la connaissance des bornes d'incertitude des fonctions incertaines du système. Dans la vie pratique, il n'est pas toujours possible d'avoir une estimation exacte de ces bornes. Ainsi, il faut souvent régler les gains d'une manière "surestimée". Cette pratique peut avoir des effets sur le système en boucle fermée notamment en terme d'augmentation du *chattering*. Pour cela des commandes adaptatives par MGO2

ont été proposées afin de régler les gains d'une façon dynamique et de réduire de plus le *chattering*. Plusieurs travaux de recherche sur les commandes adaptatives par mode glissant d'ordre 1 ont été proposés comme dans [11, 61, 115, 116]. Mais le problème de discontinuité, qui crée du *chattering* sur la sortie du système, persiste. Pour le résoudre, l'adaptation des commandes a été intégrée sur les algorithmes par mode glissant d'ordre supérieur comme dans [55], et pour l'ordre 2 dans [33, 75, 126, 134]. Les lois de commande adaptatives permettent de réduire le *chattering* sur la sortie du système grâce aux gains du contrôleur qui s'adaptent vis-à-vis des perturbations et des variations paramétriques.

### 3.4.1 Algorithme du *Twisting* adaptatif (Kochalummoottil, et al. [75])

Dans [75], les auteurs ont proposé une approche adaptative de l'algorithme du *Twisting*. La différence avec l'algorithme classique, est que les gains sont dynamique et indépendants des bornes des incertitudes. Cet algorithme est appliqué au système de degrés relatifs 1 et 2 par rapport à la variable de glissement  $s$ . Dans ce travail, les auteurs ont limités leur étude au cas où  $\gamma'(x, t)$  est égale à 1. La deuxième dérivée de la variable de glissement devient :

$$\ddot{s} = \phi'(x, t) + u(t). \quad (3.25)$$

Les gains de l'algorithme du *Twisting* adaptatif sont donnés par :

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \begin{cases} \omega \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \text{sign}(N(s, \dot{s}) - \mu) & \text{si } r_1 \geq r_{min}, \\ \chi & \text{si } r_1 < r_{min}, \end{cases} \\ r_2 &= \frac{r_1}{2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

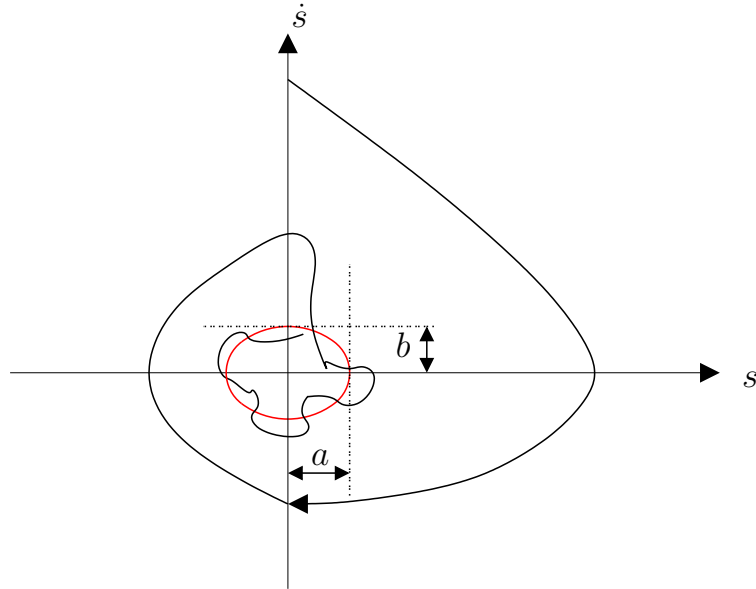
où  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\chi$ ,  $r_{min}$  et  $\mu$  sont des constantes positives arbitraires.  $\omega$  et  $\gamma$  définissent la pente de la dynamique de l'augmentation et de la diminution de  $r_1$ .  $r_{min}$  est la valeur minimale pouvant être atteinte par  $r_1$  et  $\chi$  force  $r_1$  à rester autour de cette valeur minimale.  $\mu$  est le voisinage acceptable de la convergence.

La zone de la convergence de  $(s, \dot{s})$  est définie par  $N(s, \dot{s})$ . Où  $N(s, \dot{s})$  est donné par l'équation suivante :

$$N(s, \dot{s}) = \frac{s^2}{a} + \frac{\dot{s}^2}{b} \quad \text{avec } N(s, \dot{s}) \leq \mu, \quad (3.27)$$

Cette zone est représentée dans le plan de phase  $(s, \dot{s})$  par une ellipse centrée à l'origine. Quand ce domaine est atteint, les gains  $r_1$  et  $r_2$  commencent à diminuer. Par contre, si les

trajectoires du système s'éloignent du domaine, les gains commencent à augmenter afin de forcer les trajectoires du système, à revenir vers l'origine, et ainsi de garder la convergence autour de la surface  $N(s, \dot{s}) = \mu$  (Fig.3.9). De plus amples détails sur la stabilité et la preuve d'algorithme sont présentés dans [75].



**Figure 3.9.** Algorithme du Twisting adaptatif [75] : plan de phase  $(s, \dot{s})$

### 3.4.2 Algorithme du *Twisting* adaptatif (Taleb et al. [134])

Une autre proposition de l'algorithme du *Twisting* adaptatif a été présentée dans [134]. Dans cette approche, le système étudié est de degré relatif 2 par rapport à la variable de glissement  $s$ , identique à celui présenté dans le cas B de la section 3.3.1. Des inégalités supplémentaires sont ajoutées au système,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right| &\leq C'_d, \\ \frac{|\dot{\gamma}|}{\gamma} &\leq K'_d, \end{aligned} \tag{3.28}$$

où  $C'_d$  et  $K'_d$  sont des constantes positives inconnues.

Les gains de l'algorithme du *Twisting* adaptatif sont donnés par :

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \begin{cases} -\alpha\lambda r_1 & \text{si } r_1 > r_m, \\ -\alpha\lambda_m & \text{si } r_{mm} < r_1 \leq r_m, r_1(0) \geq r_{mm}, \\ -\lambda_m & \text{si } r_1 \leq r_{mm}, \end{cases} \\ r_2 &= \beta r_1 \text{ avec } 0,5 < \beta < 1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

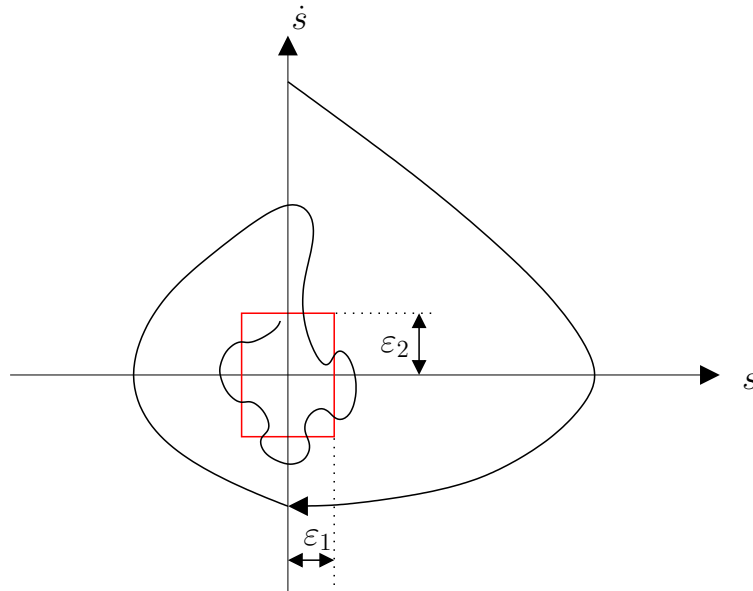
avec

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall t_j \in [t - N_T\tau, t] : |s| \leq \mu r_1(t_j)\tau^2, \\ -1 & \text{si } \exists t_j \in [t - N_T\tau, t] : |s| > \mu r_1(t_j)\tau^2, \end{cases} \quad (3.30)$$

où  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_m$ ,  $\mu$ ,  $N_T$ ,  $r_m$  et  $r_{mm}$  sont des constantes positives arbitraires.  $\tau$  est la période d'échantillonnage. Le zone de convergence en temps fini est défini par :

$$\begin{aligned} s &\leq \varepsilon_1 \text{ avec } \varepsilon_1 = \eta_1\tau^2 r_1(t), \\ \dot{s} &\leq \varepsilon_2 \text{ avec } \varepsilon_2 = \eta_2\tau r_1(t), \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont des constantes positives. Les gain  $r_1$  et  $r_2$  s'adaptent afin d'assurer la convergence au voisinage de la surface de glissement (Fig.3.10). Plus d'informations sur la stabilité et la preuve de cet algorithme sont présentées dans [134].



**Figure 3.10.** Algorithme du *Twisting* adaptatif [134] : plan de phase  $(s, \dot{s})$



### 3.4.3 Algorithme du *Super Twisting* adaptatif

Nous présentons ici l'algorithme du *Super Twisting* adaptatif proposé dans [126]. Les gains du contrôleur ( $\alpha$  et  $\beta$ ) sont dynamiques et les paramètres des contrôleurs sont indépendants des bornes des incertitudes du système. Les gains adaptatifs sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \begin{cases} \omega \sqrt{\frac{\psi}{2}} \text{sign}(|s| - \mu) & , \text{ si } \alpha > \alpha_m, \\ \eta & , \text{ si } \alpha \leq \alpha_m, \end{cases} \\ \beta &= 2\varepsilon\alpha, \end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $\omega$ ,  $\psi$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_m$ ,  $\eta$  et  $\varepsilon$  sont des constantes positives arbitraires.  $\mu$  est l'erreur acceptable de la zone de convergence, normalement ce paramètre est très petit. Pour  $\eta$  positive,  $\alpha$  prend une valeur minimale  $\alpha_m$ . La valeur de  $\alpha$  augmente pour assurer la convergence des trajectoires d'état du système vers un voisinage de la surface de glissement, défini par  $|s| \leq \mu$ . Quand le voisinage de la surface de glissement est atteint la valeur de  $\alpha$  diminue. Les constantes  $\omega$ ,  $\psi$  et  $\varepsilon$  sont présentes pour définir la vitesse de montée et de descente des gains. La convergence de la loi de commande est présentée sur la Fig.3.11. De plus amples détails sur la preuve de stabilité de l'algorithme sont présentés dans [126].

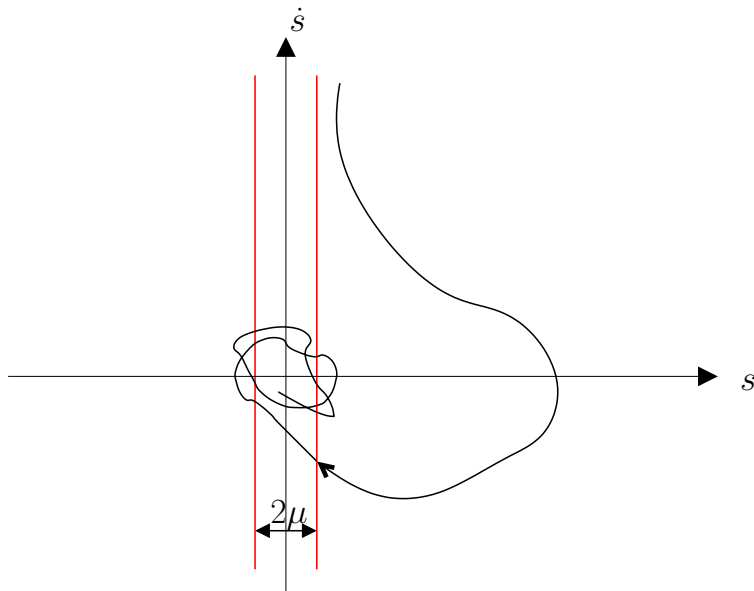


Figure 3.11. Algorithme du *Super Twisting* adaptatif : plan de phase ( $s$ ,  $\dot{s}$ )

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la commande par mode glissant, ses avantages et ses inconvénients. Nous avons abordé les différentes approches qui permettent de réduire le phénomène du *chattering*. Ensuite, nous avons présenté la commande par MGO2. Celle-ci est connue pour sa robustesse et sa convergence en temps fini vis-à-vis des perturbations et des variations paramétriques et la réduction du *chattering*. Les algorithmes les plus utilisés dans la littérature ont été présentés, notamment l'algorithme sous-optimal, l'algorithme du *Twisting* et l'algorithme du *Super Twisting*. Un différentiateur robuste exact est présenté, celui-ci est utilisé dans le but de calculer la dérivée de la variable de glissement pour certains algorithmes. Ensuite des commandes adaptatives par MGO2 ont été présentées, plus particulièrement l'algorithme du *Super Twisting* et l'algorithme du *Twisting*. Ces approches sont utilisées dans le chapitre 4 dans le but de commander le système d'alimentation en air de la pile à combustible et dans le chapitre 6 dans le but de régler la différence de pression entre l'anode et la cathode.

## *Chapitre 4*

---

---

# *Commandes robustes du système d'alimentation en air*

---

---

### **4.1 Introduction**

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une introduction générale de la commande par mode glissant d'ordre 2. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'application de ces commandes au système d'alimentation en air des PàC. L'électricité fournie par la PàC alimente les auxiliaires connectés, comme le compresseur, les électrovannes, le ventilateur, etc. Notons que le compresseur consomme environ 20% de la puissance fournie par la PàC [118]. Ainsi, un des objectifs de la commande d'un système à PàC est de maximiser la puissance fournie par la PàC. Les paramètres du système à PàC sont en général incertains, du fait de la réaction chimique et des effets thermodynamiques. Les paramètres sont amenés à varier durant le fonctionnement et ils sont en général la température, les volumes des électrodes et des collecteurs, le facteur d'humidité, les paramètres du compresseur, etc.

L'utilisation des commandes robustes, permet de prendre en compte les variations de ces paramètres lors de la synthèse de la commande, afin d'assurer les objectifs de la commande avec de bonnes performances. Ainsi, nous nous intéressons dans ce chapitre à la synthèse des contrôleurs robustes basés sur la commande par mode glissant d'ordre deux (MGO2). Dans un premier temps, nous appliquons la commande robuste MGO2. La synthèse de cette commande nécessite la connaissance des bornes sur les incertitudes, ceux-ci sont ainsi formalisées et intégrées dans le modèle. Dans un deuxième temps, la

commande adaptative par MGO2 est appliquée. Les gains de ce contrôleur s'adaptent automatiquement aux variations des paramètres incertains. La validation de ces lois de commande est effectuée sur la plateforme située au laboratoire systèmes pile à combustible (FCLab). Celle-ci est constituée d'un compresseur à double vis et d'un émulateur de PàC en temps réel. A la fin de ce chapitre, une comparaison des performances des deux contrôleurs est présentée.

## 4.2 Formulation du problème

Dans cette section, le modèle et l'objectif de la commande sont présentés.

### 4.2.1 Modèle du système d'alimentation en air

Le modèle utilisé dans ce chapitre est celui à 4 états. Ce dernier décrit le système d'alimentation en air de la pile à base d'un compresseur à double vis, présenté dans (2.86). Le modèle de ce système est donné par le vecteur d'état suivant :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T,$$

où  $x_1$  est la pression partielle de l'oxygène,  $x_2$  est la pression partielle de l'azote,  $x_3$  est la vitesse angulaire du compresseur et  $x_4$  est la pression du collecteur d'admission d'air.

Le système est représenté mathématiquement par les équations dynamiques suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= c_1(x_4 - x_1 - x_2 - c_2) - \frac{c_3 x_1}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} - c_7 \zeta, \\ \dot{x}_2 &= c_8(x_4 - x_1 - x_2 - c_2) - \frac{c_3 x_2}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}}, \\ \dot{x}_3 &= -c_9 x_3 - c_{10} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] + c_{13} u, \\ \dot{x}_4 &= c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21} x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - c_2)], \end{aligned} \tag{4.1}$$

où  $c_1, c_2 \dots$  et  $c_{17}$  sont des paramètres dont leur valeurs nominales sont données dans l'annexe B. La commande  $u$  est le courant quadratique ( $I_q$ ) du moteur qui pilote le compresseur. Le courant électrique fournie par la pile ( $\zeta$ ) est considéré comme une perturbation mesurable. Les pressions  $x_1, x_2$  et  $x_4$  sont physiquement des variables positives. La pression  $x_4$  est plus grande ou égale à la pression atmosphérique. Le débit d'air est unidirectionnelle, donc la vitesse angulaire du compresseur  $x_3$  est toujours positive.

### 4.2.2 Formalisation des incertitudes

Les paramètres  $c_1, c_2 \dots$  et  $c_{17}$  sont amenés à varier par rapport à leur valeurs nominales au fait de la réaction chimique et des effets thermodynamiques. Ainsi, ces variations paramétriques doivent être prises en compte lors de la synthèse du contrôleur pour assurer la robustesse de la commande. Le contrôleur doit donc être robuste vis-à-vis des paramètres incertains et des perturbations. Pour cette raison, les incertitudes sont formalisées et incluses dans le modèle. Les valeurs de ces variations paramétriques sont données dans le Tableau.4.1. Ces différentes variations ont été formalisées de la manière suivante [83] :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= c_{01} + \delta c_1, \\
 c_2 &= c_{02} + \delta c_2, \\
 c_3 &= c_{03} + \delta c_3, \\
 c_6 &= c_{06} + \delta c_6, \\
 c_7 &= c_{07} + \delta c_7, \\
 c_8 &= c_{08} + \delta c_8, \\
 c_9 &= c_{09} + \delta c_9, \\
 c_{10} &= c_{010} + \delta c_{10}, \\
 c_{13} &= c_{013} + \delta c_{13}, \\
 c_{14} &= c_{014} + \delta c_{14}, \\
 c_{17} &= c_{017} + \delta c_{17}, \\
 c_{19} &= c_{019} + \delta c_{19}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

où  $c_{0i}$  est la valeur nominale du paramètre concerné,  $\delta c_i$  est le paramètre incertain sous l'hypothèse que  $|\delta c_i| \leq \delta c_{0i} < |c_{0i}|$ , où  $\delta c_{0i}$  est une borne positive connue.

TABLE 4.1: Paramètres incertains du système

Paramètres	Variations
Température de la PàC ( $T_{fc}$ )	+10% en °C
Température atmosphérique ( $T_{atm}$ )	+10% en °C
Volume de la partie cathode ( $V_{ca}$ )	+5%
Volume du collecteur d'admission ( $V_{sm}$ )	-10%
Constante d'orifice à l'entrée de la cathode ( $k_{ca,in}$ )	+5%
Constante d'orifice à la sortie de la cathode ( $k_{ca,out}$ )	+5%

### 4.2.3 Objectif de la commande

Rappelons que la performance d'un système à pile à combustible sont : la puissance nette de la PàC ( $z_1$ ) et le rapport d'excès d'oxygène ( $z_2$ ). Nous avons détaillé ces paramètres dans le paragraphe 2.5. Ces deux paramètres sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \zeta - c_{18} x_3 u \\ z_2 &= \frac{c_{19}}{c_{20} \zeta} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'objectif de la commande est de maximiser la puissance nette  $z_1$  fournie par la PàC. Selon le courant demandé par la charge, la valeur maximale de la puissance nette est obtenue pour un rapport d'excès d'oxygène entre 2 et 2,5 [118]. La maximisation de la puissance nette correspond donc à maintenir le rapport d'excès d'oxygène à sa valeur optimale lors du fonctionnement. Dans le but de déterminer la valeur optimale de  $z_2$ , nous avons étudié les variations de  $z_2$  et de  $z_1$  en régime statique, à partir des résultats expérimentaux, pour différents courants de la charge  $\zeta$  (Fig.4.1). Grace aux résultats expérimentaux, la valeur optimale de  $z_2$ , notée par  $z_{2,ref}$ , est représentée sous forme d'un polynôme du troisième degré en la variable  $\zeta$ ,

$$z_{2,ref} = 5 \cdot 10^{-8} \zeta^3 - 2,87 \cdot 10^{-5} \zeta^2 + 2,23 \cdot 10^{-3} \zeta + 2,5. \quad (4.4)$$

Dans les deux sections suivantes, deux types de contrôleurs pour la régulation de  $z_2$  sont développés. Le premier est basé sur la commande robuste par mode glissant d'ordre 2 et le deuxième est basé sur la commande adaptative par mode glissant d'ordre 2.

## 4.3 Commande en cascade robuste par mode glissant d'ordre deux

En raison de la complexité du système, nous avons structuré notre contrôleur sous forme cascade contenant deux boucles (Fig.4.2). La boucle externe contrôle le rapport d'excès d'oxygène, en générant une consigne de vitesse angulaire du compresseur. Puis, la boucle interne contrôle la vitesse angulaire du compresseur en agissant sur le moteur synchrone à aimant permanent.

Les contrôleurs de la boucle externe et de la boucle interne sont basés sur l'algorithme par mode glissant d'ordre deux sous-optimal décrit dans le chapitre 3. La structure de la commande est présentée sur la Fig.4.3. Les calculs détaillés de chaque boucle sont présentés dans les paragraphes suivants.

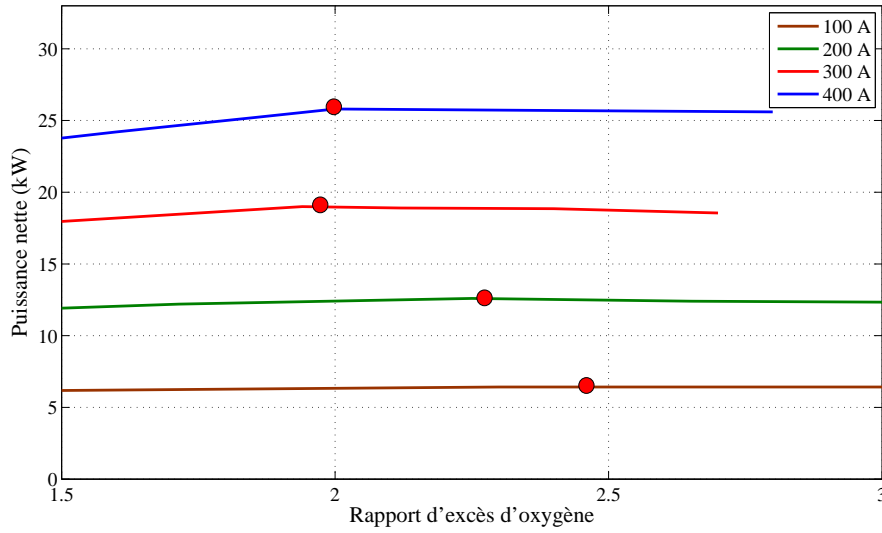


Figure 4.1. La puissance nette en fonction du rapport d'excès d'oxygène pour différentes variations de courant fourni par la PàC

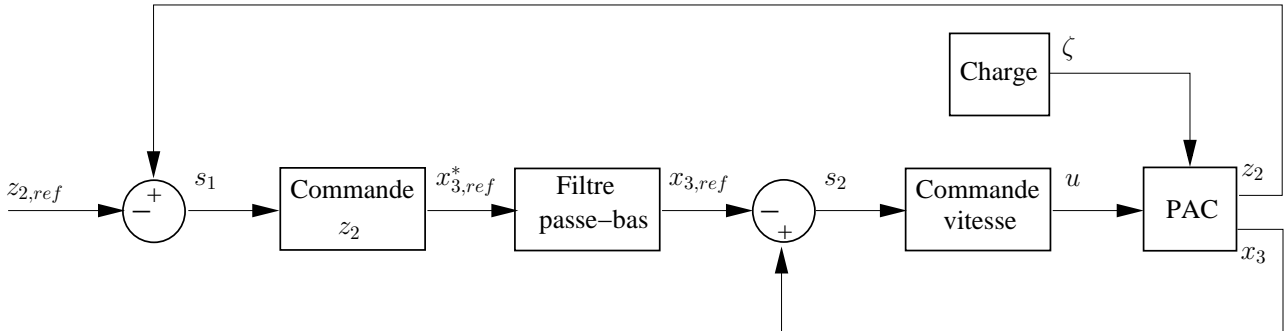


Figure 4.2. Structure de la commande en cascade

#### 4.3.1 Boucle externe

La boucle externe consiste à forcer le rapport d'excès d'oxygène à sa valeur optimale, en agissant sur la vitesse angulaire du compresseur. Cette dernière est considérée comme une entrée fictive. La variable de glissement de la boucle externe est donnée par :

$$\begin{aligned}
 s_1 &= z_2 - z_{2,ref}, \\
 &= \frac{c_{19}}{c_{20}\zeta} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2) - z_{2,ref}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

La vitesse angulaire du compresseur se retrouve dans la première dérivée de la variable

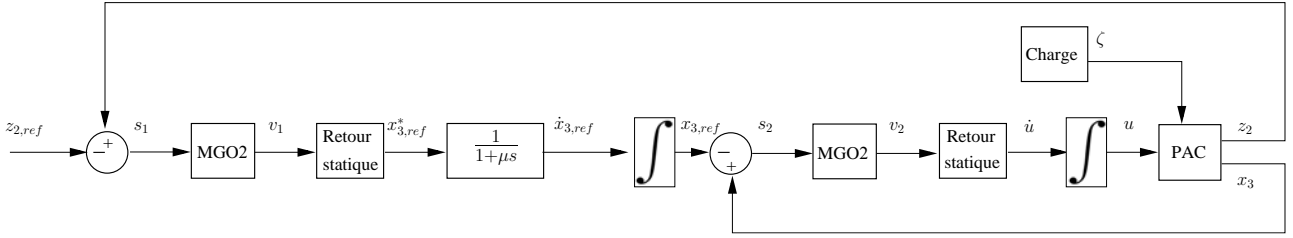


Figure 4.3. Structure de la commande par MGO2 sous-optimal

de glissement  $s_1$ , alors le système est de degré relatif 1 par rapport à  $s_1$ . Afin d'adapter l'algorithme par MGO2 sous optimal, nous augmentons le degré relatif du système, en ajoutant un intégrateur à son entrée. Cela permet de réduire le *chattering* et d'obtenir une loi de commande continue. Pour cela, nous dérivons deux fois  $s_1$  afin d'obtenir la commande  $\dot{x}_{3,ref}^*$ ,

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 = & \frac{c_{19}}{c_{20}\zeta} \left( c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21}x_{3,ref}^* - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] \right. \\ & \left. - (c_1 + c_8)(x_4 - x_1 - x_2 - c_2) + \frac{c_3(x_1 + x_2)}{c_4x_1 + c_5x_2 + c_6} c_{17}\sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} + c_7\zeta \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

La deuxième dérivée de  $s_1$  est une fonction de la première dérivée de la vitesse du compresseur, qui est considérée comme une commande fictive pour forcer  $s_1$  et sa première dérivée vers zéro. D'après la notation définie dans le chapitre précédent, la deuxième dérivée de  $s_1$  peut être écrite comme suit :

$$\ddot{s}_1 = \phi_1 + \gamma_1 \dot{x}_{3,ref}^*, \quad (4.7)$$

où

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{01} + \delta\phi_1, \\ \gamma_1 &= \gamma_{01} + \delta\gamma_1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\phi_{01}$  et  $\gamma_{01}$  sont des expressions bien connues, tandis que  $\delta\phi_1$  et  $\delta\gamma_1$  sont des fonctions incertaines (voir l'annexe C pour plus de détail).

Considérons le retour d'état :

$$\dot{x}_{3,ref}^* = \gamma_{01}^{-1} [v_1 - \phi_{01}], \quad (4.9)$$

Le terme  $-\gamma_{01}^{-1}\phi_{01}$  est la commande nominale qui permet de linéariser le système. Cependant, à cause des incertitudes, cette commande ne permet qu'une élimination partielles des incertitudes [141].  $v_1$  est la nouvelle loi de commande :



$$\ddot{s}_1 = v_1 + \delta\phi_1 + \delta\gamma_1 \dot{x}_{3,ref}^* \quad (4.10)$$

On applique l'algorithme sous-optimal (3.14). La commande de la boucle externe peut être écrite comme suit :

$$v_1 = -\alpha_1(t)V_1 \text{sign}(s_1(t) - \frac{1}{2}s_{1M}(t)), \quad (4.11)$$

On applique l'équation (4.9) sur (4.7), la dérivée seconde de la variable de glissement peut être écrite comme suit :

$$\ddot{s}_1 = \hat{\phi}_1 - \hat{\gamma}_1 \alpha_1(t)V_1 \text{sign}(s_1(t) - \frac{1}{2}s_{1M}(t)), \quad (4.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1 &= \delta\phi_1 - \phi_{01} \frac{\delta\gamma_1}{\gamma_{01}}, \\ \hat{\gamma}_1 &= 1 + \frac{\delta\gamma_1}{\gamma_{01}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Les gains du contrôleur sont réglés de façon à satisfaire les conditions (3.8) et (3.17),

$$\begin{cases} 0 < K_{m1} \leq \hat{\gamma}_1 \leq K_{M1}, & |\hat{\phi}_1| \leq C_1, \\ \alpha_1^* \in (0, 1] \cap (0, \frac{3K_{m1}}{K_{M1}}), \\ V_1 = \max\left(\frac{C_1}{\alpha_1^* K_{m1}}, \frac{4C_1}{3K_{m1} - \alpha_1^* K_{M1}}\right). \end{cases} \quad (4.14)$$

Le contrôleur est suivi par un filtre linéaire de premier ordre pour rendre la vitesse angulaire de référence lisse. L'équation du filtre est donnée par :

$$\mu \dot{x}_{3,ref} = x_{3,ref}^* - x_{3,ref}, \quad (4.15)$$

où  $\mu$  est la constante de temps du filtre.

### 4.3.2 Boucle interne

La boucle interne consiste à forcer la vitesse angulaire du compresseur à sa référence, en agissant sur le courant quadratique  $I_q$  du moteur. La variable de glissement de la boucle interne est définie par :

$$s_2 = x_3 - x_{3,ref}. \quad (4.16)$$

La commande  $u$  apparaît dans la première dérivée de la variable de glissement  $s_2$ , alors que le système est de degré relatif 1 par rapport à  $s_2$ . Pour cela, nous augmentons le degré

relatif du système, afin d'appliquer l'algorithme par MGO2 sous-optimal.

Considérons la première et la seconde dérivée de  $s_2$  :

$$\begin{aligned}\dot{s}_2 &= -c_9 x_3 - c_{10} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] + c_{13} u - \dot{x}_{3,ref}, \\ \ddot{s}_2 &= c_9^2 x_3 + c_9 c_{10} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] - c_9 c_{13} u + c_{13} \dot{u} \\ &\quad - c_{10} \left( c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] \right) \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} - \ddot{x}_{3,ref},\end{aligned}\tag{4.17}$$

où la dérivée seconde de la vitesse angulaire du compresseur  $\ddot{x}_{3,ref}$  est donnée par :

$$\ddot{x}_{3,ref} = \frac{1}{\mu} \left( \gamma_{01}^{-1} [v_1 - \phi_{01}] - \frac{x_{3,ref}^* - x_{3,ref}}{\mu} \right).\tag{4.18}$$

La dérivée seconde de  $s_2$ , peut être écrite en fonction de la commande  $\dot{u}$  :

$$\ddot{s}_2 = \phi_2 + \gamma_2 \dot{u},\tag{4.19}$$

où

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \phi_{02} + \delta \phi_2, \\ \gamma_2 &= \gamma_{02} + \delta \gamma_2,\end{aligned}\tag{4.20}$$

$\phi_{02}$  et  $\gamma_{02}$  sont des expressions bien connues, tandis que  $\delta \phi_2$  et  $\delta \gamma_2$  sont des fonctions incertaines (voir l'annexe C pour plus de détail).

Considérons le retour d'état de la même manière que la boucle externe :

$$\dot{u} = \gamma_{02}^{-1} [v_2 - \phi_{02}],\tag{4.21}$$

où  $v_2$  est la nouvelle commande :

$$\ddot{s}_2 = v_2 + \delta \phi_2 + \delta \gamma_2 \dot{u},\tag{4.22}$$

On applique l'algorithme par MGO2 sous-optimal (3.14). La commande de la boucle interne peut être écrite comme suit :

$$v_2 = -\alpha_2(t) V_2 \text{sign}(s_2(t) - \frac{1}{2} s_{2M}(t)),\tag{4.23}$$

En appliquant l'équation (4.21) à (4.19), la dérivée seconde de la variable de glissement  $s_2$  devient :

$$\ddot{s}_2 = \hat{\phi}_2 - \hat{\gamma}_2 \alpha_2(t) V_2 \text{sign}(s_2(t) - \frac{1}{2} s_{2M}(t)), \quad (4.24)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2 &= \delta\phi_2 - \phi_{02} \frac{\delta\gamma_2}{\gamma_{02}}, \\ \hat{\gamma}_2 &= 1 + \frac{\delta\gamma_2}{\gamma_{02}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Les mêmes conditions sont appliquées au contrôleur de la boucle interne pour trouver les gains du contrôleur, et elles sont données comme suit :

$$\begin{cases} 0 < K_{m2} \leq \hat{\gamma}_2 \leq K_{M1}, & |\hat{\phi}_2| \leq C_2, \\ \alpha_2^* \in (0, 1] \cap (0, \frac{3K_{m2}}{K_{M2}}), \\ V_2 = \max\left(\frac{C_2}{\alpha_2^* K_{m2}}, \frac{4C_2}{3K_{m2} - \alpha_2^* K_{M2}}\right). \end{cases} \quad (4.26)$$

Les résultats de cette loi de commande seront présentés dans la sous section 4.5.2. Dans la section suivante, nous présenterons la synthèse de la commande adaptative.

## 4.4 Commande en cascade adaptative par mode glissant d'ordre deux

Dans cette section, nous allons contrôler le système d'alimentation en air, dans le cas où les bornes d'incertitudes sont inconnues. Pour cela, la commande adaptative est appliquée, dans le même esprit que la commande robuste sous forme cascade. Ce type de commande permet de réduire le *chattering* sur la sortie. De plus, il ne nécessite pas une formalisation des incertitudes, donc il est indépendant de la connaissance des bornes d'incertitudes. L'algorithme appliqué est celui du *Super Twisting* adaptatif présenté dans la sous section 3.4.3. Rappelons que les systèmes, de la boucle externe et de la boucle interne, ont respectivement un degré relatif 1 par rapport à  $s_1$  et  $s_2$ . Ainsi dans ce cas, l'algorithme par MGO2 *Super Twisting* adaptatif va agir directement sur les premières dérivées de  $s_1$  et de  $s_2$ . La structure de la commande est présentée sur la Fig.4.4. Les boucles externe et interne sont détaillées ci-après.

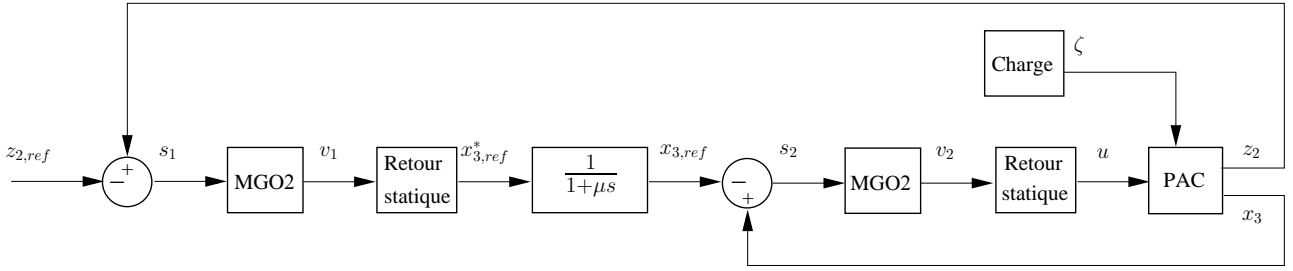


Figure 4.4. Structure de la commande adaptative par MGO2 Super Twisting

#### 4.4.1 Boucle externe

Prenons la même variable de glissement de la boucle externe que dans le cas de la commande robuste :

$$\begin{aligned} s_1 &= z_2 - z_{2,ref}, \\ s_1 &= \frac{c_{19}}{c_{20}\zeta}(x_4 - x_1 - x_2 - c_2) - z_{2,ref}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

En dérivant une fois  $s_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \frac{c_{19}}{c_{20}\zeta} \left( c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21}x_{3,ref} - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] \right. \\ &\quad \left. - (c_1 + c_8)(x_4 - x_1 - x_2 - c_2) + \frac{c_3(x_1 + x_2)}{c_4x_1 + c_5x_2 + c_6} c_{17}\sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} + c_7\zeta \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

La vitesse angulaire de référence  $x_{3,ref}$  apparaît dans la première dérivée. La vitesse angulaire de référence est considérée comme une commande fictive pour cette boucle, et ainsi force  $s_1$  vers un voisinage de zéro. La première dérivée de la variable de glissement peut être calculée comme suit :

$$\dot{s}_1 = \phi'_1 + \gamma'_1 x_{3,ref}^*, \quad (4.29)$$

Considérons le retour d'état :

$$x_{3,ref}^* = \gamma'_{01}{}^{-1} [v'_1 - \phi'_{01}], \quad (4.30)$$

où  $v'_1$  est la loi de la commande par MGO2 du *Super Twisting* adaptatif (3.21). La commande de la boucle externe peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_{11} + v_{12}, \\ \dot{v}_{11} &= -\beta_1 \text{sign}(s_1), \\ v_{12} &= -\alpha_1 |s_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_1). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Les gains adaptatifs  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont exprimés par les équations suivantes :

$$\dot{\alpha}_1 = \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\psi_1}{2}} \text{sign}(|s| - \mu_1) & , \text{ si } \alpha_1 > \alpha_{1m}, \\ \eta_1 & , \text{ si } \alpha_1 \leq \alpha_{1m}, \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\beta_1 = 2\varepsilon_1 \alpha_1.$$

Comme il est présenté dans le chapitre 3, dans le cas de la commande adaptative, les gains sont indépendants des bornes des fonctions incertaines. De même que pour la boucle externe, dans le cas de la commande robuste, le contrôleur est suivi par un filtre linéaire du premier ordre.

#### 4.4.2 Boucle interne

Prenons la même variable de glissement de la boucle interne que dans le cas de la commande robuste :

$$s_2 = x_3 - x_{3,ref}. \quad (4.33)$$

Considérons la première dérivée de  $s_2$  :

$$\dot{s}_2 = -c_9 x_3 - c_{10} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] + c_{13} u - \dot{x}_{3,ref}. \quad (4.34)$$

L'objectif de la commande  $u$  est de forcer  $s_2$  au voisinage de zéro. La première dérivée de la variable glissement  $s_2$  peut être calculée comme suit :

$$\dot{s}_2 = \phi'_2 + \gamma'_2 u, \quad (4.35)$$

Considérons le retour d'état :

$$I_q = \gamma_0'^{-1} (v'_2 - \phi'_0), \quad (4.36)$$

où  $v'_2$  est la loi de la commande par MGO2 du *Super Twisting* adaptatif (3.21). La loi de commande de la boucle interne est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} v'_2 &= v_{21} + v_{22}, \\ \dot{v}_{21} &= -\beta_2 \text{sign}(s_2), \\ v_{22} &= -\alpha_2 |s_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_2). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les gains adaptatifs  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  sont exprimés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2 &= \begin{cases} \omega_2 \sqrt{\frac{\psi_2}{2}} \text{sign}(|s| - \mu_2) & , \text{ si } \alpha_2 > \alpha_{2m}, \\ \eta_2 & , \text{ si } \alpha_2 \leq \alpha_{2m}, \end{cases} \\ \beta_2 &= 2\varepsilon_2 \alpha_2. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Les gains du contrôleur sont présentés dans la sous section 3.4.3.

## 4.5 Validation expérimentale

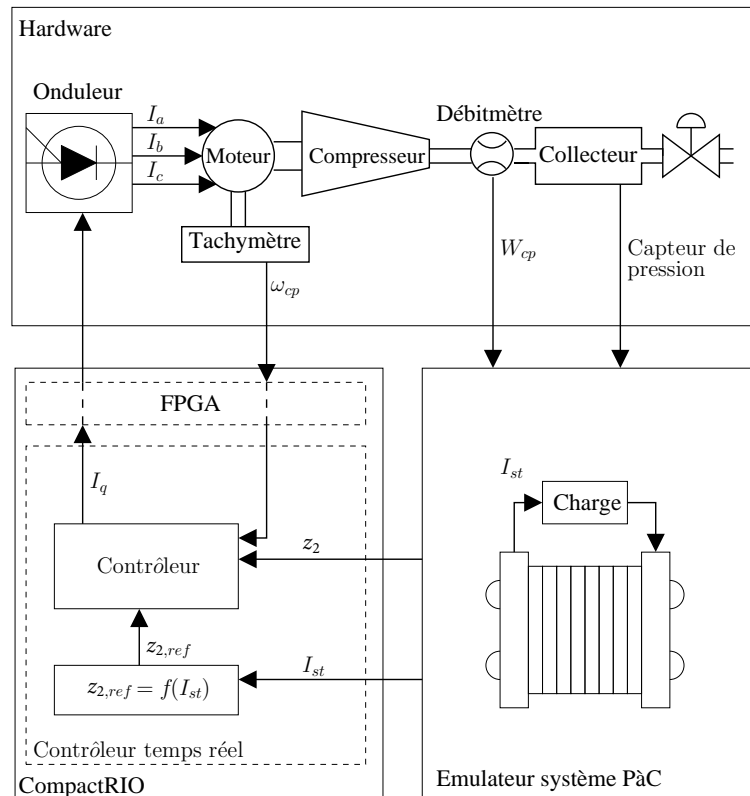
Dans cette section nous présentons le banc d'essai utilisé pour la validation expérimentale. Les résultats d'implémentation des commandes synthétisées précédemment sont discutés. Enfin les performances de ces lois de commandes sont comparées.

### 4.5.1 Description de la plateforme

Les expériences ont été menées sur un banc d'essai *Hardware-in-Loop* (HIL), celui-ci se compose d'un compresseur à double vis et d'un émulateur de système à pile à combustible en temps réel. La pile émulée est de puissance de 33 kW composée de 90 cellules en série. Le compresseur à double vis est entraîné par un moteur synchrone à aimant permanent et dispose d'un débit maximum de 100 g/s à une vitesse maximale de 12.000 tr/min. Le banc d'essai est équipé avec un processeur temps réel National Instruments CompactRIO. Celui-ci est utilisé pour la commande et l'acquisition de données du système. La structure de simulation HIL est représentée sur la Fig.4.5.

La PàC émulée fournit les états  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_4$  comme sorties. Le débit d'air du compresseur ( $W_{cp}$ ) est mesuré par un débitmètre. La commande en cascade est implémentée dans le processeur temps réel, pour générer successivement, la vitesse et le courant quadratique de référence. Ce courant quadratique est converti en 3 phases et il est appliqué sur le moteur du compresseur à travers l'onduleur.

Afin d'évaluer la performance de nos contrôleurs, l'émulateur a été mis sous une charge, cela varie entre 100 et 400 A (Fig.4.6). Ainsi, la tension électrique de la pile varie entre 55 et 70 V, comme le montre la Fig.4.7. Les valeurs nominales des paramètres de la simulation sont présentées dans l'annexe A. Nous rappelons que l'objectif de la commande est de maintenir le rapport d'excès d'oxygène à sa valeur optimale donnée par (4.4). Celui ci est

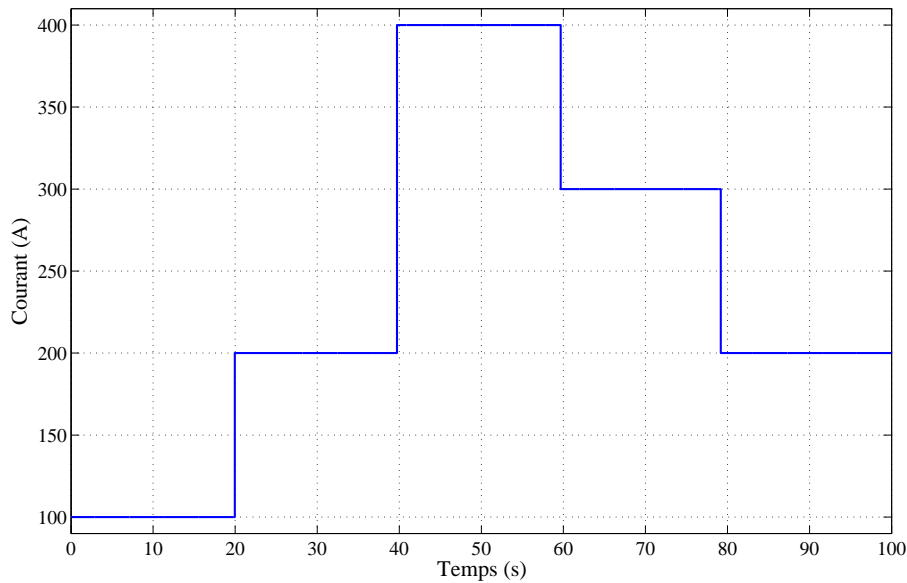


**Figure 4.5.** La structure de simulation Hardware-in-Loop

atteint en agissant sur la vitesse angulaire du compresseur. Dans les deux sous sections successives, nous présenterons les résultats des lois de commande robuste et adaptative.

#### 4.5.2 Résultats expérimentaux de la commande robuste

La Fig.4.8 montre la variable de performance du système ( $z_2$ ). Celle-ci est commandée par la boucle externe pour suivre le rapport d'excès d'oxygène de référence. Le contrôleur atteint l'objectif de la commande avec un temps de réponse compris entre 2 et 4 s sans dépassement. La vitesse angulaire de référence du compresseur et la vitesse angulaire réelles sont représentées sur la Fig.4.9. La différence de ces vitesses est présentée sur la Fig.4.10. Nous pouvons constater que la vitesse du compresseur suit sa référence et qu'elle converge en moins d'une seconde. Une fois la boucle interne stabilisée, elle reste stable dans la suite de l'expérience. Le débit d'air fourni par le compresseur a le même comportement que la vitesse et il est représenté sur la Fig.4.11.



**Figure 4.6.** Variation du courant de la pile à combustible

La Fig.4.12 présente la puissance nette ( $z_1$ ). Cette dernière est comparée à la puissance nette obtenue dans le cas où l'objectif de la commande est simplifié et ramené à suivre un rapport d'excès d'oxygène égale à 2 [135]. Nous pouvons constater que la puissance obtenue dans notre cas est augmentée par rapport à celle dans [135]. Cela montre l'intérêt de déterminer la valeur optimale du rapport d'excès d'oxygène en fonction de la charge, afin d'améliorer le rendement de la PàC. La commande du système (courant quadratique du moteur) varie entre 0 et 5 A, comme indiqué dans la Fig.4.13. Ensuite, afin de valider la propriété de robustesse de la commande, certains paramètres du modèle émulé ont été modifiés selon le Tableau.4.1. La Fig.4.14 montre le comportement du rapport d'excès d'oxygène sous variations de charge et d'incertitudes. Le rapport d'excès d'oxygène atteint sa valeur optimale en 4 s. La Fig.4.15 montre l'évolution de la commande du système perturbé en le comparant au cas nominal non perturbé. La commande du système perturbé est représentée par la courbe désignée par  $I_q(Inc)$ . Nous pouvons constater que, la commande évolue, afin de compenser les variations paramétriques. Notons que dans la Fig.4.14 et la Fig.4.15, la ligne en pointillé représente le comportement en présence d'incertitude, alors que la ligne continue montre le comportement du système nominal. Nous pouvons conclure de ces résultats que le contrôleur proposé maintient de bonnes performances mal-



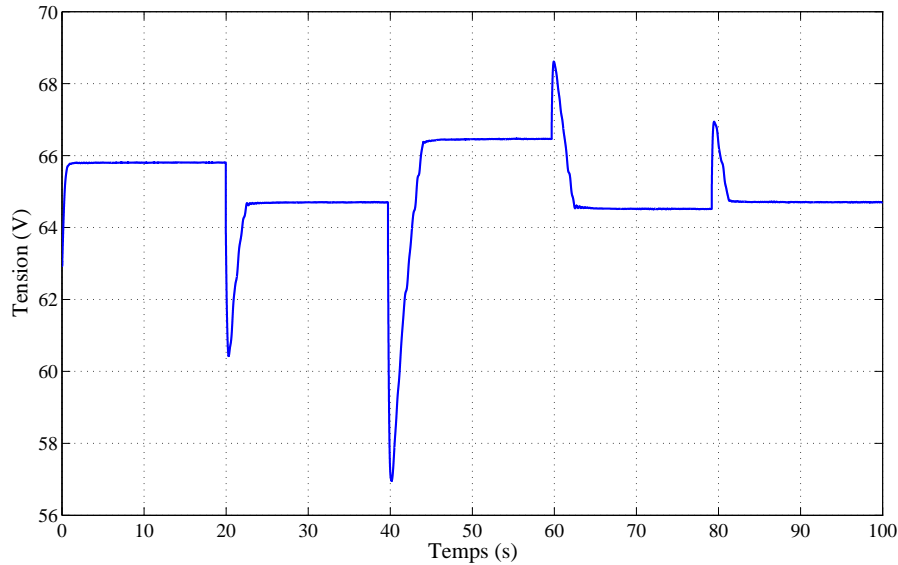
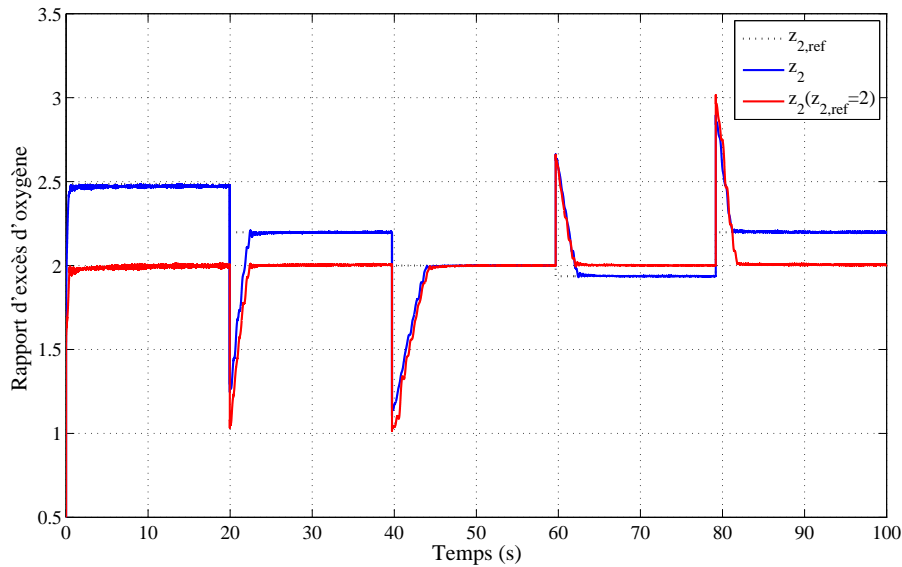


Figure 4.7. Variation de la tension de la pile à combustible

gré les variations paramétriques et la variation de la charge, sans aucun changement dans les gains du contrôleur.

### 4.5.3 Résultats expérimentaux de la commande adaptative

Dans cette sous-section, nous présenterons les résultats de notre contrôleur adaptatif, celui-ci sera comparé à deux types du contrôleur robuste. Dans notre expérimentation, nous comparons les lois de commande suivantes : l'algorithme sous-optimal (SUB), l'algorithme du *Super Twisting* (ST) et l'algorithme du *Super Twisting* adaptatif (STA). Les performances du système, le rapport d'excès d'oxygène et la puissance nette, sont présentées sur les figures Fig.4.16 et Fig.4.17. D'après ces figures, nous pouvons constater que le phénomène du *chattering* en utilisant l'algorithme STA est le plus réduit. Le courant quadratique du moteur, qui est la commande du système, est représenté sur la Fig.4.18. Nous pouvons constater que le *chattering* diminue dans le cas de l'utilisation de la commande adaptative en régime permanent. Le fait de cette réduction du *chattering* est dû aux gains dynamiques du contrôleur qui diminuent quand le système rejoint le voisinage de la surface de glissement. Les gains de la boucle externe et de la boucle interne sont représentés sur la Fig.4.19. Les mêmes variations des paramètres incertains ont été appli-



**Figure 4.8.** Variation du rapport d'excès d'oxygène

quées afin de valider l'adaptation du contrôleur à ces incertitudes. La Fig.4.20 représente le rapport d'excès d'oxygène pour le système nominal et le système incertain. Le rapport d'excès d'oxygène avec incertitudes est désigné par (Inc). Nous pouvons constater que le rapport d'excès d'oxygène suit la référence. Les lois de commande sont représentées sur la Fig.4.21. La commande appliquée lors des incertitudes est désigné par (Inc). De la même manière que dans le cas de la commande robuste, la loi de commande du système incertain évolue afin de compenser les variations paramétriques. On peut donc conclure de ces résultats, que la commande adaptative proposée maintient de bonnes performances malgré les perturbations et les variations paramétriques, sans aucun changement dans les gains du contrôleur. De plus, moins de *chattering* permet de réduire l'énergie consommée du système. La différence entre l'énergie de la commande robuste (ST) et celle de la commande adaptative (STA) est représentée sur la Fig.4.22. Cette différence est toujours positive et le gain d'énergie à la fin du test est égal à 4 kW.

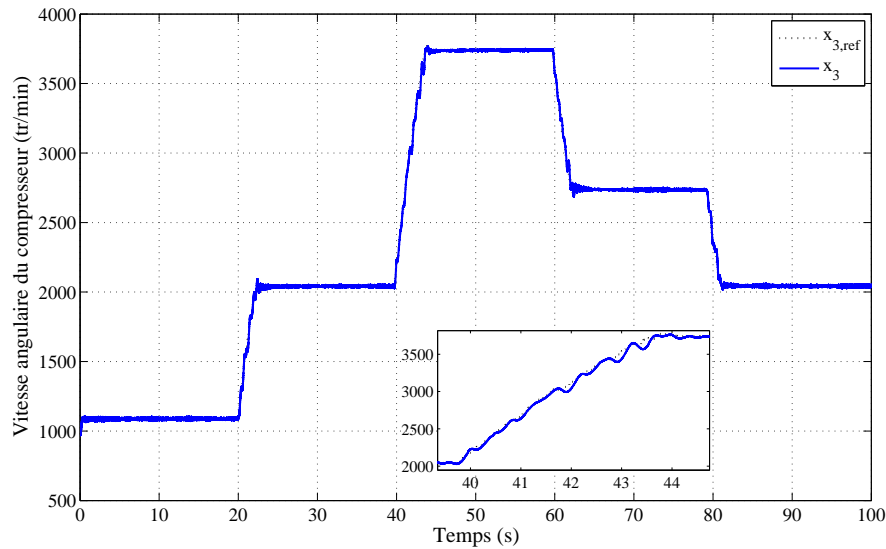


Figure 4.9. Variation de la vitesse angulaire du compresseur

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la commande du système d'alimentation en air des piles à combustible de type PEM. La problématique abordée est la maximisation de la puissance nette fournie par la PàC. Cette dernière est atteinte en contrôlant le rapport d'excès d'oxygène à sa valeur optimale. Le modèle PàC est basé sur 4 équations d'état représentant le système d'alimentation en air et la partie cathode. Les paramètres du système à PàC sont en général incertains. Pour cela, les incertitudes ont été formalisées et intégrées dans le modèle dynamique. La commande par mode glissant d'ordre deux est appliquée en forme de cascade. Ensuite deux types de contrôleur, robuste et adaptatif, ont été synthétisés et testés expérimentalement. Les contrôleurs proposés ont été validés sur un banc d'essai *Hardware-In-Loop*, ceci est constitué d'un compresseur à double vis et d'un émulateur de PàC en temps réel. Les résultats obtenus montrent que les contrôleurs proposés ont de bonnes performances malgré les variations paramétriques et la variation de la charge. De plus, en utilisant la commande adaptative, le *chattering* a été réduit à la sortie du système, ainsi l'énergie fournie par la PàC a été maximisée. Ce chapitre a fait l'objet de plusieurs papiers journaux et papiers conférences [96, 98, 100]. Dans le chapitre suivant, nous aborderons les problèmes de protection des systèmes à PàC en fonction des contraintes dues à la commande des systèmes d'alimentation en air.

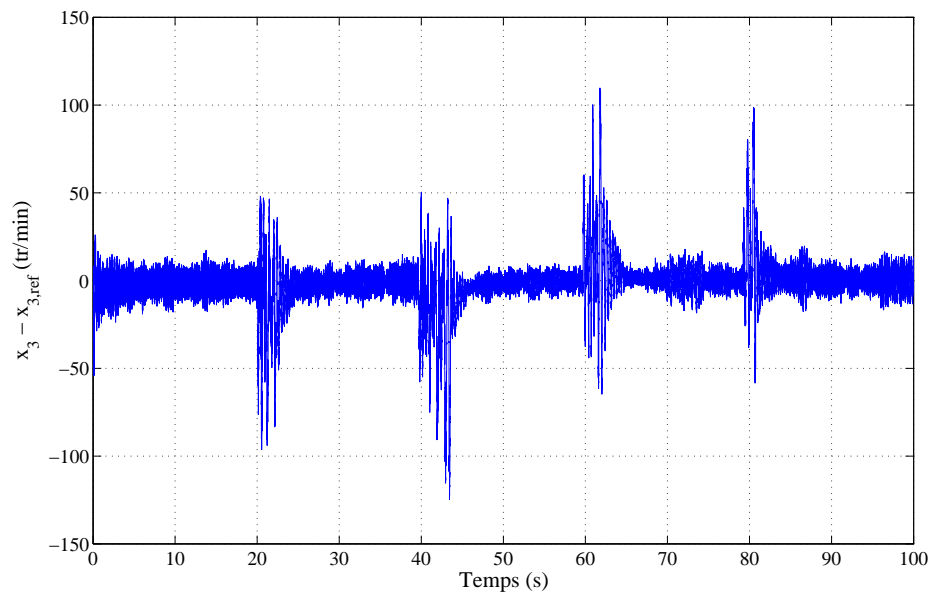


Figure 4.10. Erreur de la boucle interne

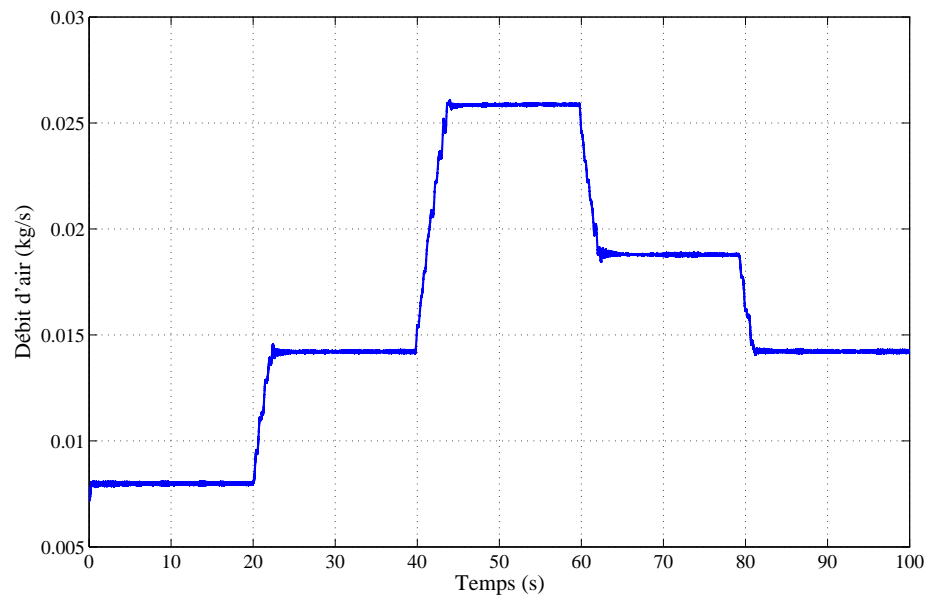


Figure 4.11. Variation du débit d'air du compresseur

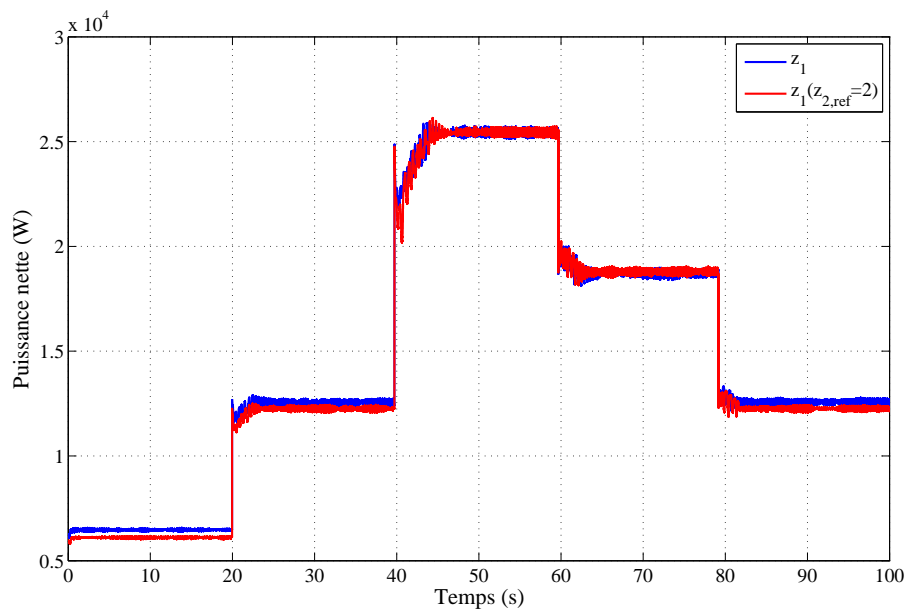


Figure 4.12. *Puissance nette*

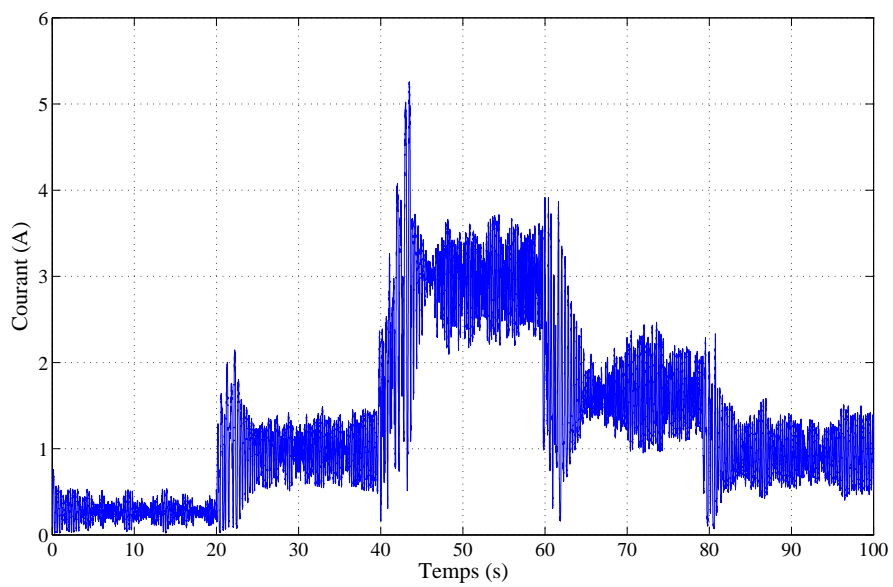
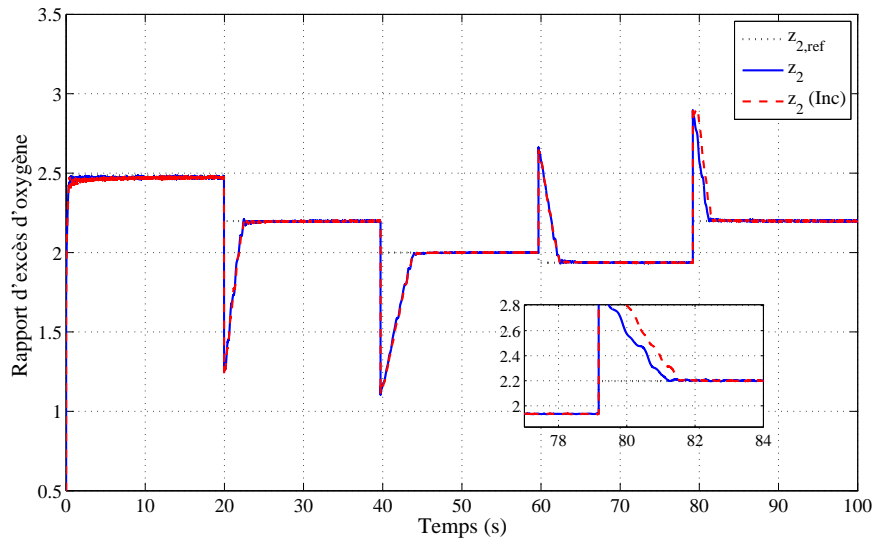
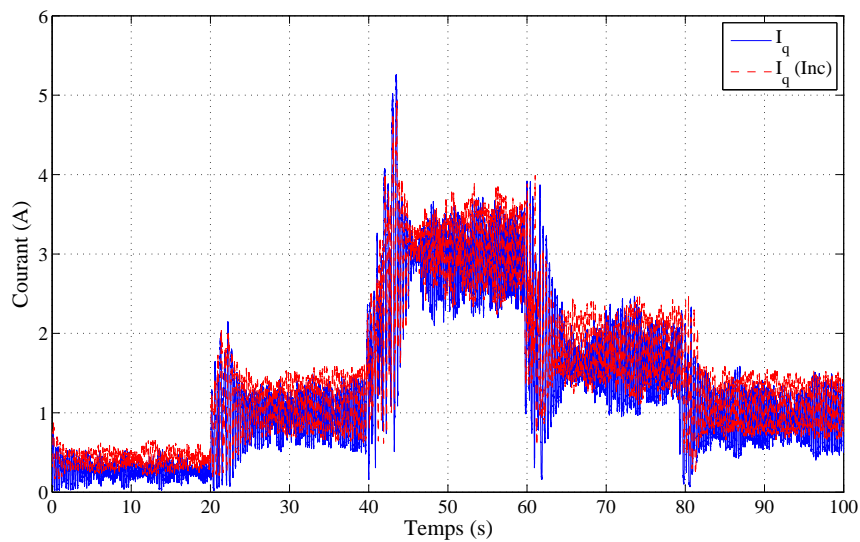


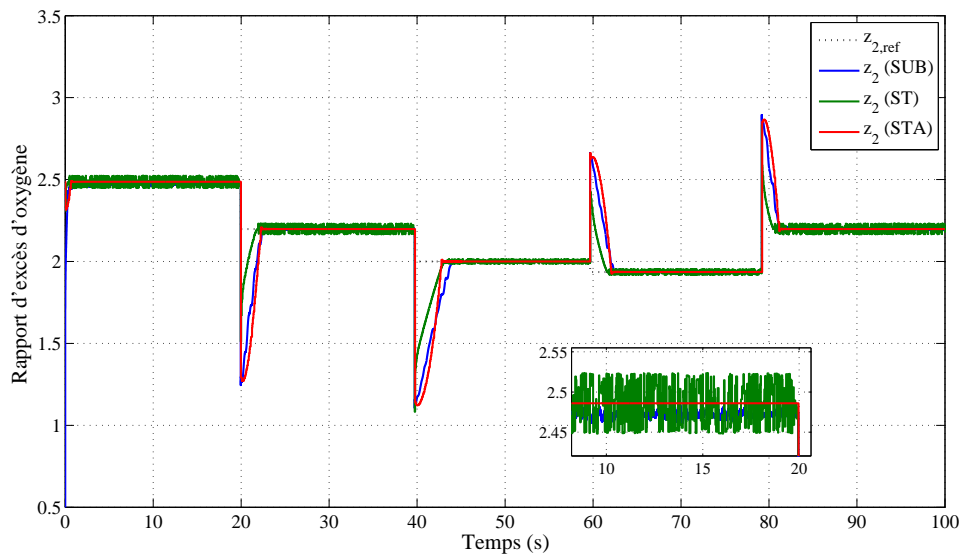
Figure 4.13. *Variation du courant quadratique du moteur*



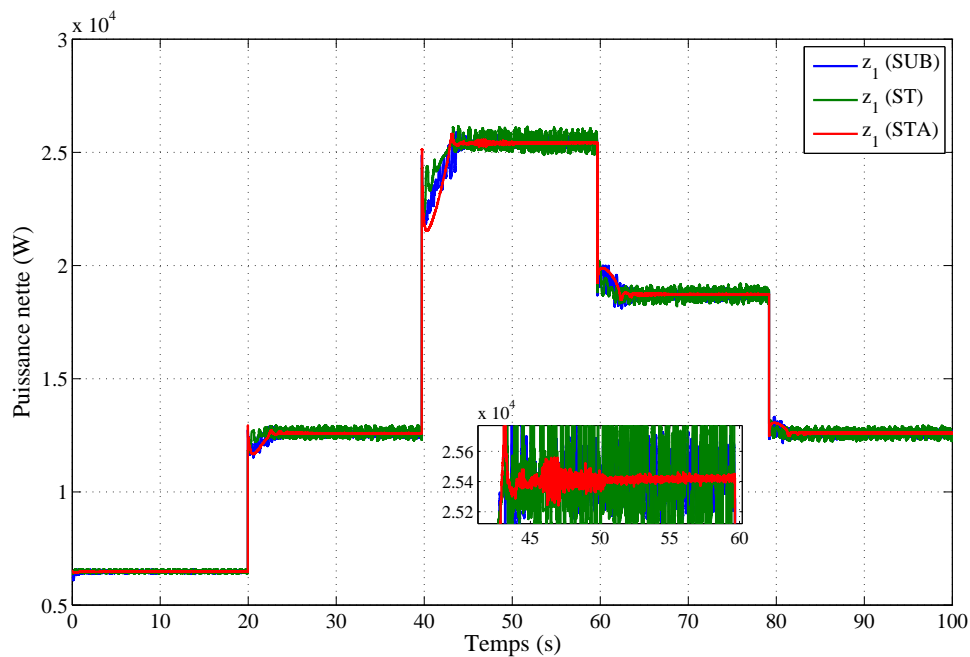
**Figure 4.14.** Comparaison entre le rapport d'excès d'oxygène dans le cas d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur



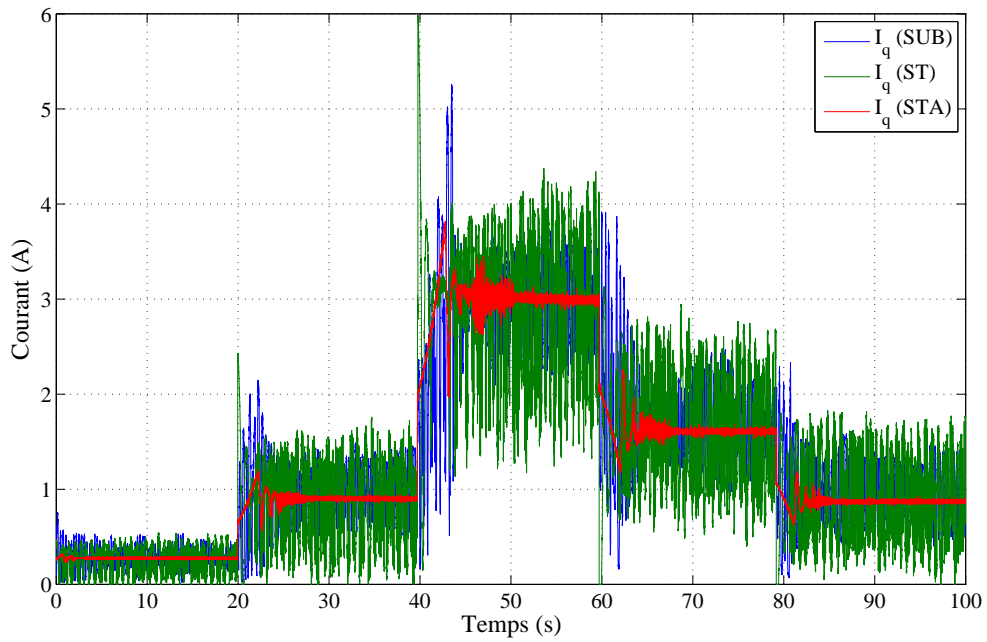
**Figure 4.15.** Comparaison entre le courant quadratique du moteur dans le cas d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur



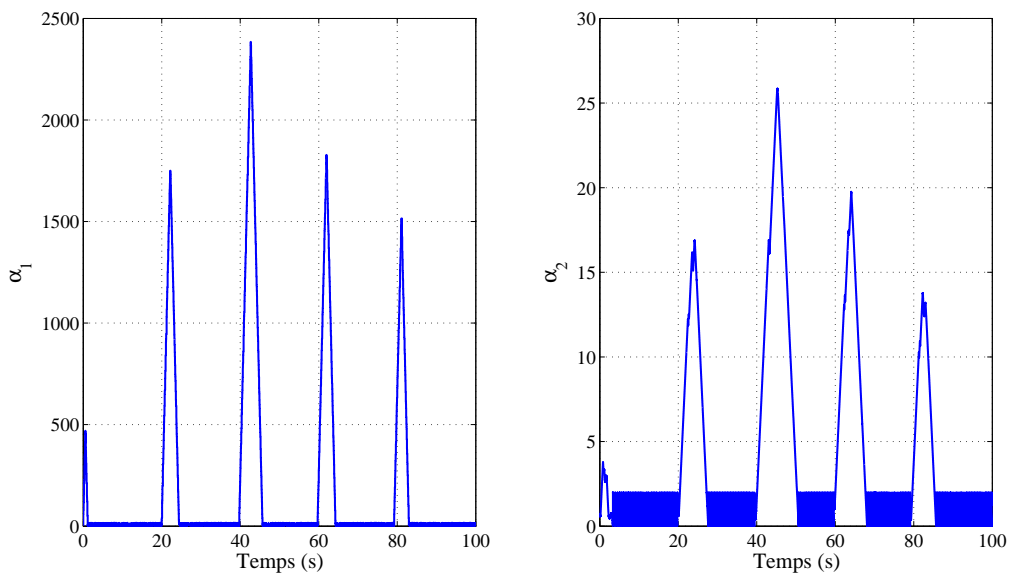
**Figure 4.16.** Comparaison entre le rapport d'excès d'oxygène des commandes robustes et celui de la commande adaptative



**Figure 4.17.** Comparaison entre la puissance nette des commandes robustes et celle de la commande adaptative

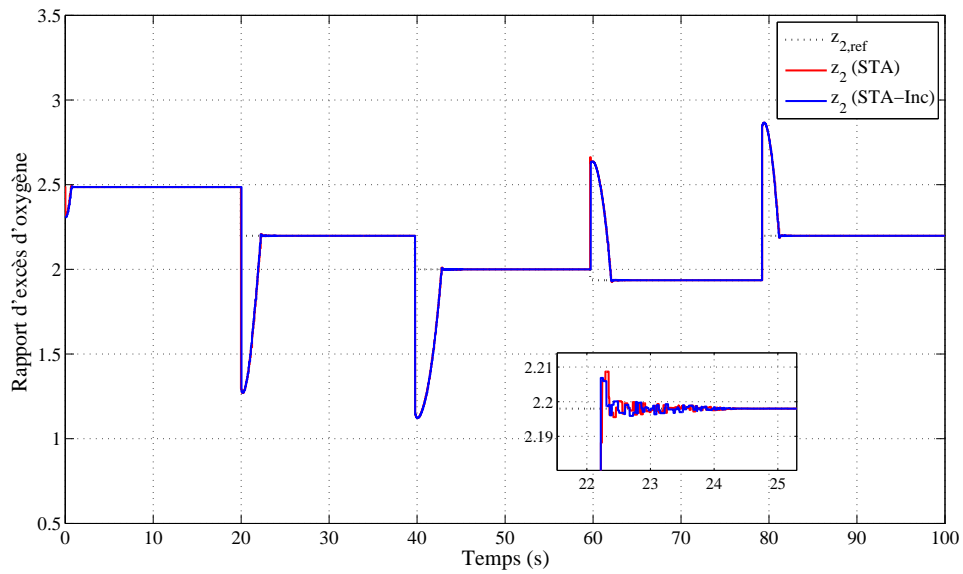


**Figure 4.18.** Comparaison entre le courant quadratique du moteur des commandes robustes et celui de la commande adaptative

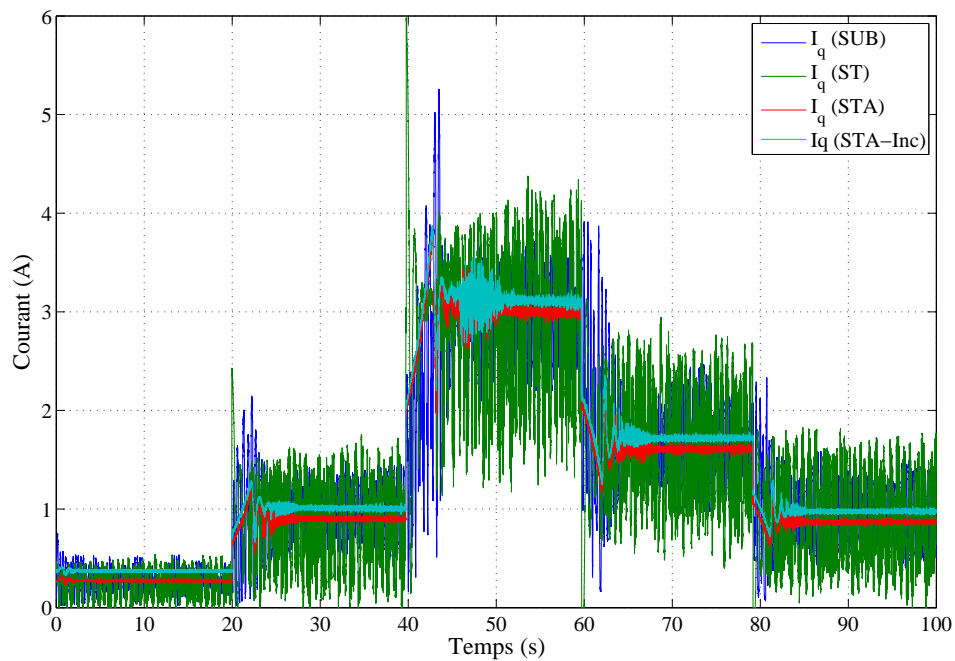


**Figure 4.19.** Les gains adaptatifs du contrôleur





**Figure 4.20.** Comparaison entre le rapport d'excès d'oxygène dans le cas d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur adaptatif



**Figure 4.21.** Comparaison entre le courant quadratique du moteur dans le cas d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur adaptatif

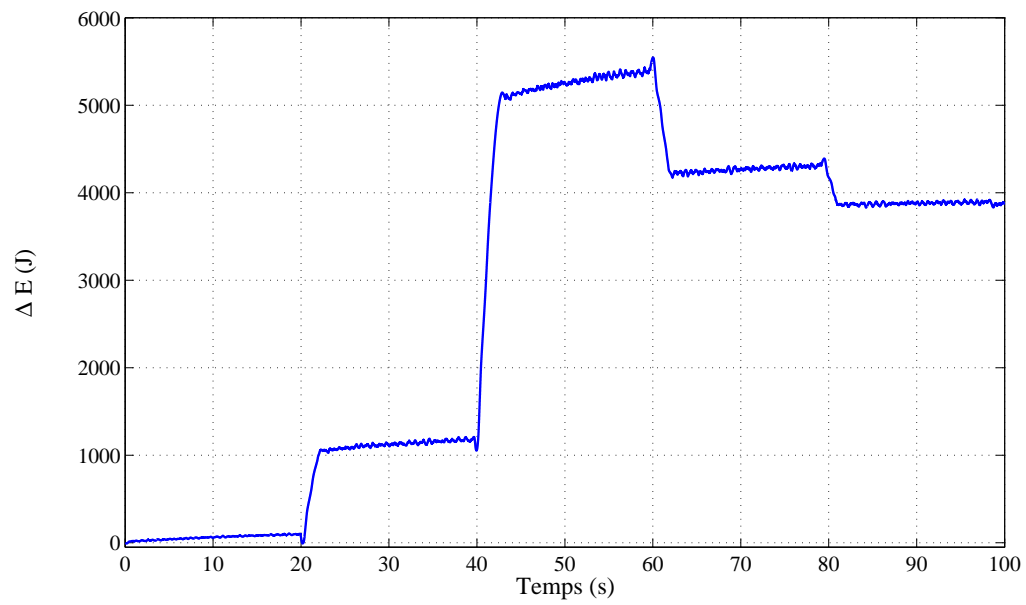


Figure 4.22. Différence entre l'énergie de la commande robuste et celle de la commande adaptative

## Chapitre 5

---

---

# *Commandes sous contraintes par Extremum Seeking*

---

---

### 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons abordé la problématique de maximisation de puissance en contrôlant le compresseur à double vis. Cette optimisation est obtenue en forçant le rapport d'excès d'oxygène à sa valeur de référence optimale. Cependant, durant les variations rapides de la charge, des contraintes physiques peuvent provoquer un manque d'oxygène au niveau de la cathode. Dans le cas d'un compresseur centrifuge, ces contraintes peuvent entraîner le compresseur hors de sa zone nominale de fonctionnement (zone de pompage). Afin de protéger le système de ces contraintes, un gestionnaire de charge (*Load Governor*) doit être installé pour filtrer les variations rapides de la charge [133].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'élaboration d'un gestionnaire de charge en se basant sur la technique d'*Extremum Seeking* (ES) [5, 34]. Le but est de maximiser la puissance fournie par la PàC sous des contraintes imposées au système pour le protéger. Deux algorithmes sont synthétisés dans ce chapitre. Le premier algorithme est basé sur une approche basée sur le modèle du système, comme présenté dans [34] et [52]. Dans cet algorithme, les contraintes du système sont reformulées sous la forme de fonctions de pénalité. Le deuxième algorithme est basé sur la technique de la perturbation sinusoïdale, proposée dans [5]. Cet algorithme consiste à moduler un signal de perturbation en sortie.

L'avantage de cet algorithme est qu'il est indépendant du modèle et ne nécessite que la mesure de la sortie. Cette méthode a été appliquée pour des systèmes avec contraintes comme il est présenté dans [28].

Le travail de ce chapitre est basé sur le modèle à 4 états. Dans un premier temps, nous allons aborder le problème de la protection du système à PàC du manque d'oxygène dans le cas d'utilisation d'un compresseur à double vis en utilisant l'approche basée sur le modèle. Par la suite, l'approche basée sur la perturbation sinusoïdale est appliquée sur le système à PàC équipé d'un compresseur centrifuge pour protéger la PàC à la fois du manque d'oxygène et du risque que le compresseur rentre dans sa zone de pompage. Ces deux travaux ont été validés expérimentalement sur le banc d'essai au laboratoire FCLAB.

## 5.2 Formulation du problème

Dans cette section, nous présenterons la modélisation du compresseur centrifuge et la représentation mathématique du problème.

### 5.2.1 Modèle du compresseur centrifuge

Deux types du compresseur sont utilisés dans cette étude. Le premier compresseur est le compresseur à double vis et le deuxième est le compresseur centrifuge. Le modèle de la PàC avec le compresseur à double vis est présenté dans le chapitre 4 par (4.1). Le modèle de la PàC avec le compresseur centrifuge change seulement au niveau de l'équation dynamique de la vitesse angulaire du compresseur. Celle-ci est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{x}_3 = -c'_9 x_3 - \frac{c'_{10}}{x_3} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] + c'_{13} u, \quad (5.1)$$

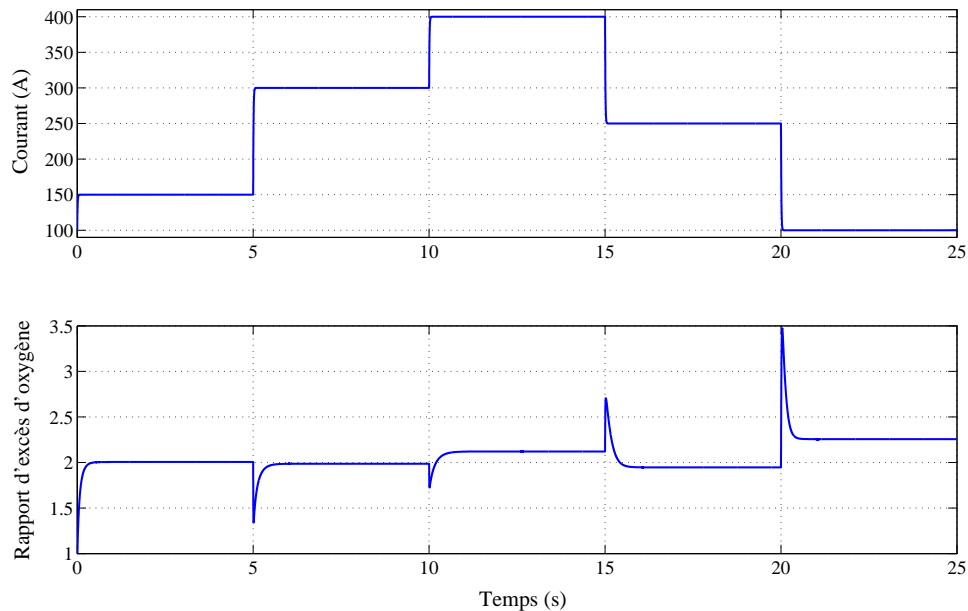
$c'_9$ ,  $c'_{10}$  et  $c'_{13}$  sont des paramètres données dans l'annexe B.

### 5.2.2 Contraintes de la PàC et du compresseur

Rappelons que la PàC est sensible aux variations rapides de la charge. Nous présentons les deux types de variations qui peuvent être demandés à la PàC.

1. Comme présenté dans le chapitre 2, l'électricité fournie par la PàC dépend de la pression partielle d'oxygène [9, 118] et le point de fonctionnement optimal de la PàC se trouve à un rapport d'excès d'oxygène compris entre 2 et 2,5. Une augmentation

rapide de la puissance demandée nécessite plus d'oxygène. Pour cela, il faut toujours approvisionner la cathode avec un excès d'oxygène. Dans le cas d'une chute prolongée en  $\lambda_{O_2}$ , un manque d'oxygène est susceptible de se produire. Nous entendons par manque d'oxygène un  $\lambda_{O_2}$  inférieur à 1. Cette réaction crée des points chauds sur la surface de la membrane qui endommage la PàC [118]. La Fig.5.1 montre un exemple de simulation de la variation du rapport d'excès d'oxygène pour une variation de la charge. Nous pouvons constater que  $\lambda_{O_2}$  chute jusqu'à 1,3, cela peut mener la PàC vers le manque d'oxygène. Pour ces raisons, le seuil de sécurité de ce rapport est fixé à 1,8 [133].



**Figure 5.1.** Rapport d'excès d'oxygène en fonction de la variation de la charge

2. Le compresseur centrifuge a des limites de fonctionnement, qui sont définies par la zone de pompage et la zone d'étouffement. Ces limites sont présentées sur la cartographie du compresseur, cette dernière est donnée par le rapport de pression (aval/amont) du compresseur et son débit d'air (Fig.5.2). En pratique, le compresseur peut entrer dans la zone d'étouffement en cas d'augmentation rapide de la charge. On peut donc dire que la protection du compresseur de l'étouffement est équivalente à la protection contre le manque d'oxygène. Par contre, si la charge diminue rapidement, le compresseur va entrer dans la zone de pompage parce que la dynamique de la

pression du collecteur d'admission est plus lente que la dynamique du débit d'air (Fig.5.2). Les seuils de sécurité de la zone de pompage et de la zone d'étouffement sont donnés respectivement par les équations suivantes :

$$p_{sm} = (32W_{cp} + 0,91)10^5,$$

$$p_{sm} = (13,5W_{cp} + 0,8)10^5.$$

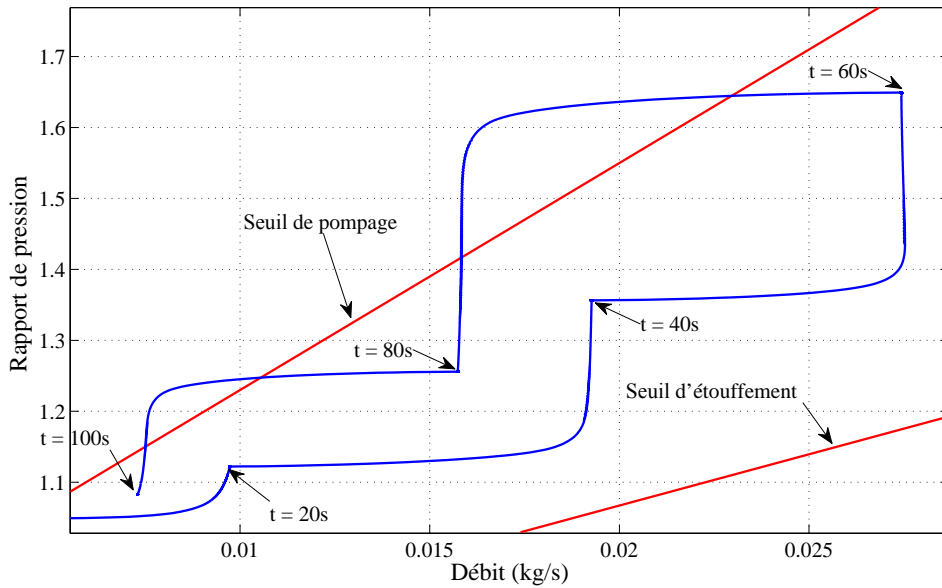


Figure 5.2. Cartographie du compresseur centrifuge

## 5.3 Gestion de la charge par Extremum Seeking

### 5.3.1 Gestionnaire de charge

Pour éviter les risques présentés dans la section précédente, il est indispensable d'équiper le système de contrôle d'un gestionnaire de charge pour gérer la charge demandée par la pile. Le gestionnaire de charge est un filtre du premier ordre modélisé par :

$$\dot{x}_5 = -\theta(x_5 - \zeta), \quad (5.2)$$

où  $\zeta$  est le courant demandé par la charge ( $I_d$ ), et  $x_5$  est le courant fourni par la PàC ( $I_{st}$ ).  $\theta$  est la constante de temps du filtre. Lors du fonctionnement normal,  $\theta$  doit augmenter

pour que  $I_{st}$  soit égale à  $I_d$ . Dans le cas contraire,  $\theta$  doit diminuer afin de filtrer le courant demandé de la PàC tout en évitant les contraintes.

Notre objectif dans ce chapitre est de développer un gestionnaire de charge, pour protéger le système à PàC et minimiser la différence entre  $x_5$  et  $\zeta$  dans le cas où les contraintes sont violées, en agissant sur la constante de temps  $\theta$ . Dans le cas d'utilisation d'un compresseur à double vis, la contrainte à respecter est exprimée par :

$$\text{Min}(I_d - I_{st})^2 \text{ telle que } z_2 > 1,8. \quad (5.3)$$

Tandis que, dans le cas d'utilisation d'un compresseur centrifuge, les contraintes à respecter sont exprimées par :

$$\text{Min}|I_{st} - I_d| \text{ telle que } \begin{cases} z_2 > 1,8, \\ p_{sm} < (32W_{cp} + 0,91)10^5. \end{cases} \quad (5.4)$$

Dans la suite nous allons présenter la technique d'*Extremum Seeking* qui permettra de trouver la valeur optimale de  $\theta$ .

### 5.3.2 La technique d'Extremum Seeking basée sur les modèles

Dans [34, 52], les auteurs ont proposé l'algorithme *Extremum Seeking* (ES) avec contraintes. Celui-ci est dédié aux systèmes non-linéaires dont les dynamiques et les contraintes sont connues. Cette technique est appliquée pour minimiser les critères convexes avec contraintes.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p(x) \\ f_q(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_p(x) \\ 0 \end{bmatrix} \theta, \quad (5.5)$$

où  $x_p \in \mathbb{R}$ ,  $x_q \in \mathbb{R}^n$  sont les vecteurs d'états du système.  $\theta \in \mathbb{R}$  est l'entrée.  $G_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions.

Le critère à minimiser est présenté comme suit :

$$\text{Min}_{x_p \in \mathbb{R}} p(t, x_p) \text{ telle que } \xi(t, x_p, x_q) \leq 0. \quad (5.6)$$

avec  $x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $p$  est une fonction convexe en  $x_p$ .  $\xi(t, x_p, x_q)$  est une fonction qui représente les contraintes du système. Les fonctions  $p$  et  $\xi(t, x_p, x_q)$  sont supposées de

classe  $C^2$  en  $x_p$  et  $x_q$ , uniformément pour  $t \in [0, \infty)$ .

Le critère à minimiser sous contraintes (5.6) est reformulé par un critère augmenté, celui-ci contient le critère à minimiser et les fonctions de pénalités correspondants aux contraintes. Le critère augmenté est donné par :

$$p_a(t, x_p, x_q) = p(t, x_p) + \eta_h \phi(\xi(t, x_p, x_q)), \quad (5.7)$$

où  $\eta_h$  est une constante positive arbitraire.

La fonction de pénalité  $\phi$  est choisie pour qu'elle soit convexe et satisfasse la condition suivante :

$$\phi(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ > 0, & z > 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

Par exemple, on peut prendre  $\phi(z) = \max(0, z)^2$ .

La commande  $\theta$  est choisie par un analyse de *Lyapunov*, celle-ci est exprimée par :

$$V = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial p_a}{\partial x_p}(t, x_p, x_q) \right\|^2. \quad (5.9)$$

La dérivée de la fonction de *Lyapunov* est calculée par :

$$\dot{V} = \frac{\partial p_a}{\partial x_p} \left[ \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial t} + \left[ \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial x_q} \right]^T \dot{x}_q + \frac{\partial^2 p_a}{\partial^2 x_p} (f_p(x) + G_p(x)\theta) \right]. \quad (5.10)$$

Afin d'obtenir une fonction de *Lyapunov* décroissante, la loi de commande est choisie de la manière suivante :

$$\theta = -k G_p(x)^{-1} \frac{\frac{\partial p_a}{\partial x_p} \frac{\partial^2 p_a}{\partial^2 x_p} - \frac{\frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial t} + \left[ \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p \partial x_q} \right]^T \dot{x}_q + \frac{\partial^2 p_a}{\partial^2 x_p} f_p(x)}{G_p(x) \frac{\partial^2 p_a}{\partial^2 x_p}}, \quad (5.11)$$

où  $k$  est une constante positive arbitraire. La dérivée temporelle de la fonction de *Lyapunov* sera exprimée comme suit :

$$\dot{V} = -k \left[ \frac{\partial p_a}{\partial x_p} \frac{\partial^2 p_a}{\partial x_p^2} \right]^2. \quad (5.12)$$

Ce qui signifie que le système (5.5) bouclé par la commande  $\theta$  est asymptotiquement stable. Ainsi l'expression de la loi de commande choisie assure l'objectif en minimisant le critère donné par l'équation (5.6).



### 5.3.3 La technique d'Extremum Seeking basée sur la perturbation sinusoïdale

L'algorithme de l'*extremum seeking* basé sur la perturbation sinusoïdale est présenté dans le travail de Kistić et Ariyur dans la référence [5] et de Kistić et Wang dans la référence [77]. Dans cette sous section, une présentation générale sur la théorie de cet algorithme est donnée. Celui-ci fait partie des méthodes du contrôle adaptatif qui ne se basent pas sur le modèle.

Considérons le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x), \end{cases} \quad (5.13)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des états,  $u \in \mathbb{R}$  est la commande du système,  $y \in \mathbb{R}$  est la sortie du système,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . La commande du système est supposée lisse, paramétrisée par  $\theta$ . La loi de commande est donnée par :

$$u = \alpha(x, \theta). \quad (5.14)$$

où  $\theta$  est la commande par *Extremum Seeking*. On peut représenter, la dynamique en boucle fermée du système par :

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x, \theta)), \quad (5.15)$$

Plusieurs hypothèses ont été imposées pour le système en boucle fermé, elles sont :

**Hypothèse 1.** *Il existe une fonction lisse  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :*

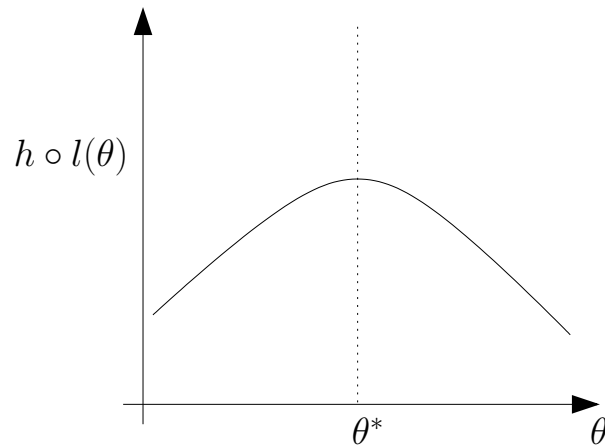
$$f(x, \alpha(x, \theta)) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = l(\theta). \quad (5.16)$$

**Hypothèse 2.** *Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , l'équilibre  $x = l(\theta)$  du système (5.15) est localement exponentiellement stable.*

**Hypothèse 3.** *Il existe une valeur  $\theta^* \in \mathbb{R}$  telle que :*

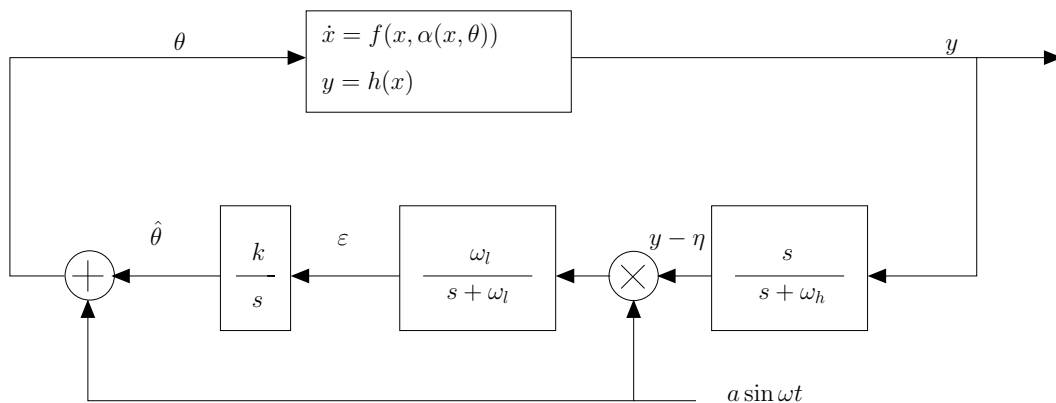
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(l(\theta^*)) &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} h(l(\theta^*)) &< 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

La dynamique du modèle peut être présentée sous forme statique que l'on retrouve sur la Fig.5.3. L'hypothèse 3, assure ainsi que la sortie a un maximum pour  $\theta = \theta^*$ .



**Figure 5.3.** Variations de la sortie

La structure de l'algorithme de l'ES est présentée sur la Fig.5.4. Dans cette structure de commande, une perturbation périodique lente est ajoutée à la commande  $\hat{\theta}$ . Le but de cette perturbation est de trouver la commande estimée  $\theta^*$ , qui maximise la sortie. Un filtre passe-haut est ajouté après la sortie du système. Puis la sortie du filtre ( $y - \eta$ ) est multiplié avec le même signale de perturbation qui est suivi par un filtre passe-bas. Celui-ci permet de laisser passer les basses fréquences et la composante continue, et de rejeter les hautes fréquences. La composante continue notée par  $\varepsilon$  peut être plus grande ou plus petite que zéro. Elle correspond à  $\theta < \theta^*$  ou à  $\theta > \theta^*$  respectivement. Dans la continuité, la sortie de l'intégrateur  $\hat{\theta}$  va augmenter quand  $\varepsilon > 0$ , et diminuer quand  $\varepsilon < 0$ . Ceci va garantir la convergence de  $\hat{\theta}$  à  $\theta^*$ .



**Figure 5.4.** Structure de la commande Extremum seeking

Les paramètres sont sélectionnés comme suit :

$$\begin{cases} \omega_h = \omega\omega_H = \omega\delta\omega'_H, \\ \omega_l = \omega\omega_L = \omega\delta\omega'_L, \\ k = \omega K = \omega\delta K'. \end{cases} \quad (5.18)$$

où  $\omega$  et  $\delta$  sont des constantes positives de faibles valeurs et  $\omega'_H$ ,  $\omega'_L$  et  $K'$  sont des constantes positives. Les fréquences de coupure  $\omega_h$  et  $\omega_l$  doivent être inférieures à la fréquence du signal de perturbation  $\omega$ . Par contre les paramètres  $a$  et  $k$  doivent être petits. Dans le cas où l'extremum est un minimum, le paramètre  $k$  doit être négatif et petit.

La boucle fermée du système présenté dans la Fig.5.4 est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \alpha(x, \hat{\theta} + a \sin(\omega t))), \\ \dot{\hat{\theta}} = k\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} = -\omega_l\varepsilon + \omega_l(y - \eta) a \sin(\omega t), \\ \dot{\eta} = -\omega_h\eta + \omega_h y. \end{cases} \quad (5.19)$$

En introduisant de nouvelles variables qui représentent les erreurs du système :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \hat{\theta} - \theta^*, \\ \tilde{\eta} &= \eta - h(l(\theta^*)). \end{aligned} \quad (5.20)$$

En utilisant le théorème 5.4 donné dans [5], les erreurs du système (5.20) convergent vers zéro exponentiellement pour un  $a$  suffisamment petit et l'objectif de la commande  $\theta = \theta^*$  est atteint.

Dans le cas où le système a des contraintes, celles-ci sont représentés sous forme d'inégalités. Puis, la sortie du système est augmentée par des fonctions de pénalités. Le concept de ces fonctions peut être trouvé dans les travaux de [28, 110, 138].

## 5.4 Application au système à PàC

Dans cette section nous abordons la synthèse de commande sous contraintes pour le système à pile à combustible. Nous utiliserons les algorithmes de l'ES présentés dans le paragraphe 5.3.2 et 5.3.3. La structure de la commande est présentée sur la Fig.5.5. La commande du rapport d'excès d'oxygène est synthétisée en appliquant une structure similaire à celle-ci présentée dans le chapitre précédent. Dans ce cas, la boucle externe

contient un contrôleur par anticipation *Feedforward* qui fournit une vitesse angulaire de référence du compresseur à double vis et du compresseur centrifuge. Leurs expressions sont données respectivement par :

$$\begin{aligned}\omega_{cp,ref} &= 9,75 I_{st} - 128, \\ \omega_{cp,ref} &= 4,351 I_{st} + 1059,5.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Ensuite, la boucle interne contient une commande de type MGO2. Celle-ci permet de forcer les vitesses angulaires à leurs références.

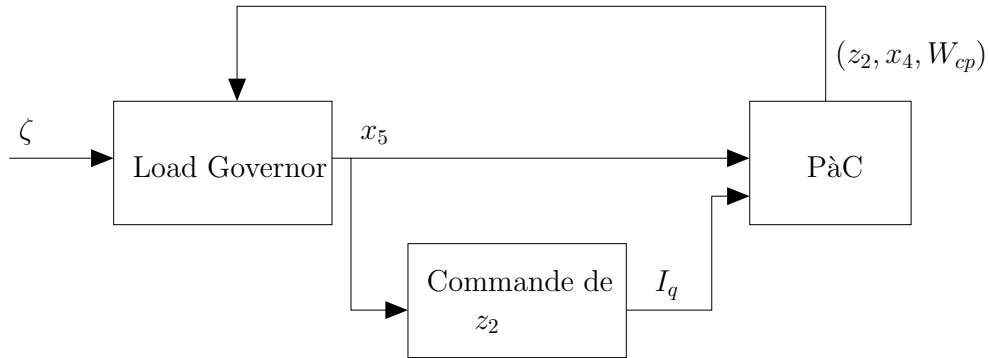


Figure 5.5. Structure du gestionnaire de charge (Load Governor)

#### 5.4.1 Protection du système à PàC piloté par un compresseur à double vis

Dans le cas d'un compresseur à double vis pour le système d'alimentation en air, la seule contrainte qui peut être provoquée est le manque d'oxygène dans la cathode. Ainsi la loi de commande doit être synthétisée d'une manière que la contrainte (5.3) soit satisfaite. En appliquant l'algorithme du contrôleur présenté dans le paragraphe 5.3.2, l'état  $x_p$  est équivalent à  $x_5$  où la commande  $\theta$  apparaît dans sa dynamique.  $x_q$  est équivalent au vecteur d'état qui représente le modèle de la pile à combustible  $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ . Ainsi les fonctions  $f_p$  et  $G_p$  sont données par :

$$\begin{aligned}f_p(x) &= 0, \\ G_p(x) &= -(x_5 - \zeta).\end{aligned}\quad (5.22)$$

La contrainte du système est fixée de manière à garder le rapport d'excès d'oxygène supérieur à 1,8, ainsi la fonction  $\xi(t, x_p, x_q)$  est donnée comme suit :

$$\xi(t, x_p, x_q) = 1,8 - \frac{c_{19}}{c_{20}x_5}(x_4 - x_1 - x_2 - c_2).\quad (5.23)$$

Le critère à minimiser est donnée par :

$$p(t, x_p) = (x_5 - \zeta)^2. \quad (5.24)$$

La fonction de pénalité  $\phi$  est choisie par :

$$\phi(\xi(t, x_p, x_q)) = \max\left(0; 1, 8 - \frac{c_{19}}{c_{20}x_5}(x_4 - x_1 - x_2 - c_2)\right). \quad (5.25)$$

Le critère augmenté est donné par :

$$p_a(t, x_5, x_q) = x_5^2 - 2\zeta x_5 + \zeta^2 + \eta_h \max\left(0; 1, 8 - \frac{c_{19}}{c_{20}x_5}(x_4 - x_1 - x_2 - c_2)\right). \quad (5.26)$$

Lorsque toutes les fonctions de l'algorithme sont identifiées, la commande  $\theta$ , basée sur l'analyse de *Lyapunov* utilisée dans la démonstration (5.9), est calculée comme suit :

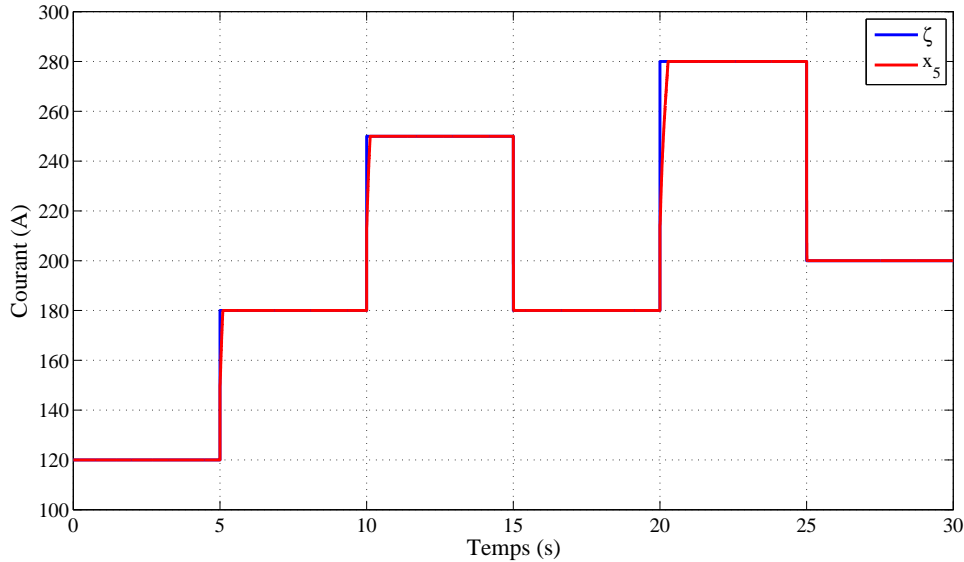
$$\theta = \begin{cases} -k(\zeta - x_5)^{-1} \left( 2x_5 - 2\zeta + \frac{\eta_h c_{19}}{c_{20}x_5^2}(x_4 - x_1 - x_2 - d_2) \right) \left( 2 - \frac{2\eta_h c_{19}}{c_{20}x_5^3}(x_4 - x_1 - x_2 - d_2) \right) \\ \quad \left( \frac{\eta_h c_{19}}{c_{20}x_5^2}(\dot{x}_4 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right) \\ \quad \left( \zeta - x_5 \right) \left( 2 - \frac{2\eta_h c_{19}}{c_{20}x_5^3}(x_4 - x_1 - x_2 - d_2) \right), & \text{si } \phi(\xi(t, x_p, x_q)) > 0, \\ 4k, & \text{si } \phi(\xi(t, x_p, x_q)) = 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

#### 5.4.1.1 Résultats expérimentaux

La commande proposée est simulée sur l'émulateur *Hardware in Loop* sur le même banc d'essai présenté dans le chapitre précédent. Une variation de charge est simulée, elle consiste en des variations rapides entre 120 et 280 Ampères.

La charge et le courant fourni par la PàC sont représentés sur La Fig.5.6. La courbe en pointillée présente le courant ( $x_5$ ) fourni par la PàC durant les augmentations rapides de la charge. La Fig.5.7 montre un zoom sur les variations rapides de la charge. La Fig.5.8 et la Fig.5.9 montrent le comportement du rapport d'excès d'oxygène sans et avec le gestionnaire de charge. Sur les figures, la notation "FF" représente la réponse sans le gestionnaire de charge et la notation "ES+FF" signifie que la réponse obtenue est avec le gestionnaire de charge en utilisant l'algorithme *Extremum Seeking*. D'après les simulations, nous pouvons constater que la loi de commande proposée permet d'éviter le manque d'oxygène

au niveau de la cathode comme il est présenté sur la Fig.5.9. Le courant fourni par la PàC  $I_{st}$  est filtré de manière à garder le rapport d'excès d'oxygène à 1,8. Ce filtrage nous assure que le maximum de courant permis ne violera pas les contraintes imposées à la PàC.



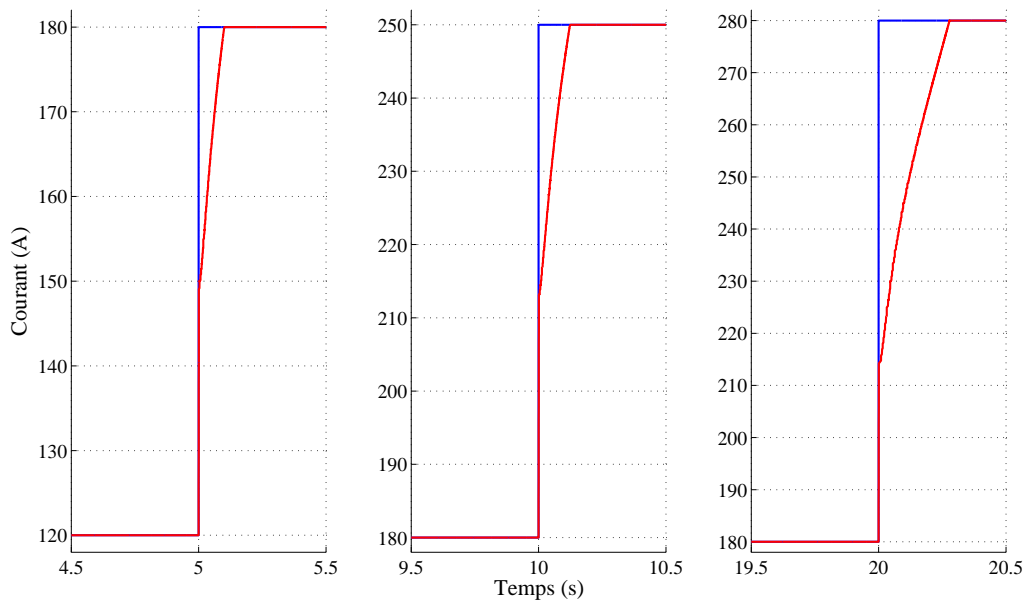
**Figure 5.6.** Variations de la charge et du courant fourni par la PàC

#### 5.4.2 Protection du système à PàC piloté par un compresseur centrifuge

Dans le cas où l'alimentation en air est assurée par un compresseur centrifuge, deux contraintes peuvent survenir, le manque d'oxygène et le risque d'entraîner le compresseur dans la zone de pompage. Dans ce cas, nous allons appliquer le gestionnaire de charge en utilisant l'algorithme de l'ES basé sur la perturbation sinusoïdale. Ainsi nous protégerons le système et maximiserons le courant fourni par la PàC.

Comme présenté dans le paragraphe 5.3.3, dans le cas où le système fonctionne sous contraintes, la sortie du système est augmentée, par des fonctions de pénalités. Celles-ci sont présentées sous forme quadratique. La sortie augmentée est donc donnée par :

$$J = |\zeta - x_5| + J_{z_2} + J_{comp}, \quad (5.28)$$



**Figure 5.7.** Variations de la charge et du courant fourni par la PàC

où  $J_{z_2}$  est la fonction de pénalité par rapport à la contrainte du manque d'oxygène et  $J_{comp}$  est la fonction de pénalité par rapport à la zone de pompage du compresseur. Ces fonctions sont données par :

$$\begin{aligned}
 J_z &= 90000 \max\left(\frac{1,8 - z_2}{1,8}; 0\right)^2, \\
 J_{comp} &= 1000 \max(x_4 - 32 \cdot 10^5 W_{cp} - 0,91 \cdot 10^5; 0)^2.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

La structure de la commande appliquée sur le système à PàC est présentée sur la Fig.5.10.

Les paramètres de l'algorithme sont fixés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \omega &= 0,2 \text{ rad/s}, \\
 \omega_l &= 0,15 \text{ rad/s}, \\
 \omega_h &= 0,09 \text{ rad/s}, \\
 a &= 0,2, \\
 k &= 0,001.
 \end{aligned}$$

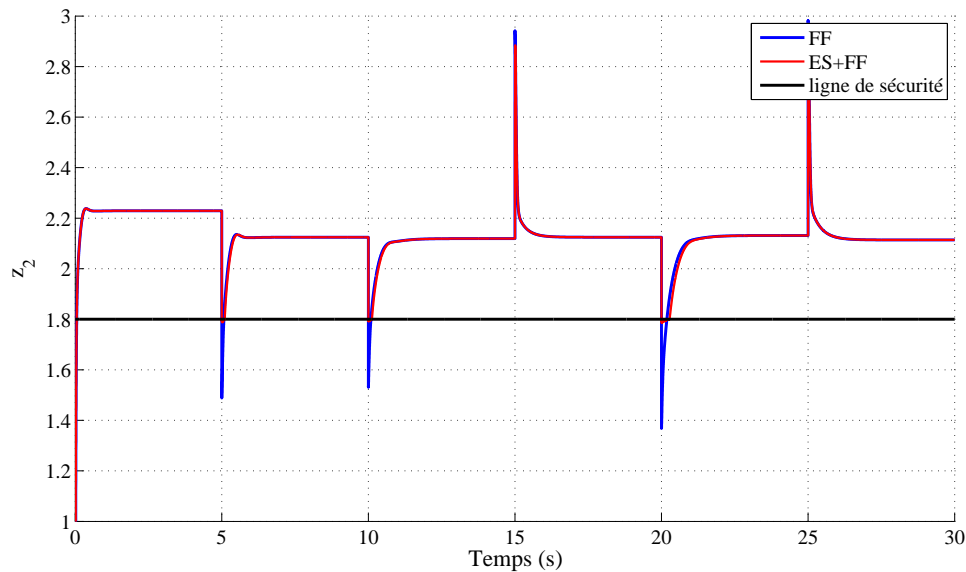


Figure 5.8. Rapport d'excès d'oxygène sans et avec contrainte

#### 5.4.2.1 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux ont été obtenus sur un banc d'essai *Hardware-in-Loop*, celui-ci est constitué d'un compresseur centrifuge et d'un émulateur de PàC. L'algorithme d'ES basé sur la perturbation sinusoïdale est implanté dans un contrôleur temps réel pour ainsi gérer le courant fourni par la PàC.

Une variation de la charge a été appliquée au système PàC, dans le but de mettre le système dans une situation critique. Le courant demandé, est composé de variations rapides entre 100 A et 400 A (Fig.5.1). Le débit d'air du compresseur correspondant à la puissance demandée, est équivalent à une variation entre 5 et 27 g/s. La Fig.5.11 et Fig.5.12 montrent la charge et le courant fourni par la PàC. Nous pouvons constater que le courant fourni est filtré. Par exemple, pour  $t = 20$ s, une augmentation rapide de la charge est demandée, le rapport d'excès d'oxygène a chuté vers 1,6 puis a convergé vers la zone de sécurité comme présenté sur la Fig.5.13. Cela assure la protection de la PàC contre le manque d'oxygène. Dans le cas où une diminution rapide de la charge est demandée, la Fig.5.14 montre que le fonctionnement du compresseur ne dépasse pas la zone de pompage



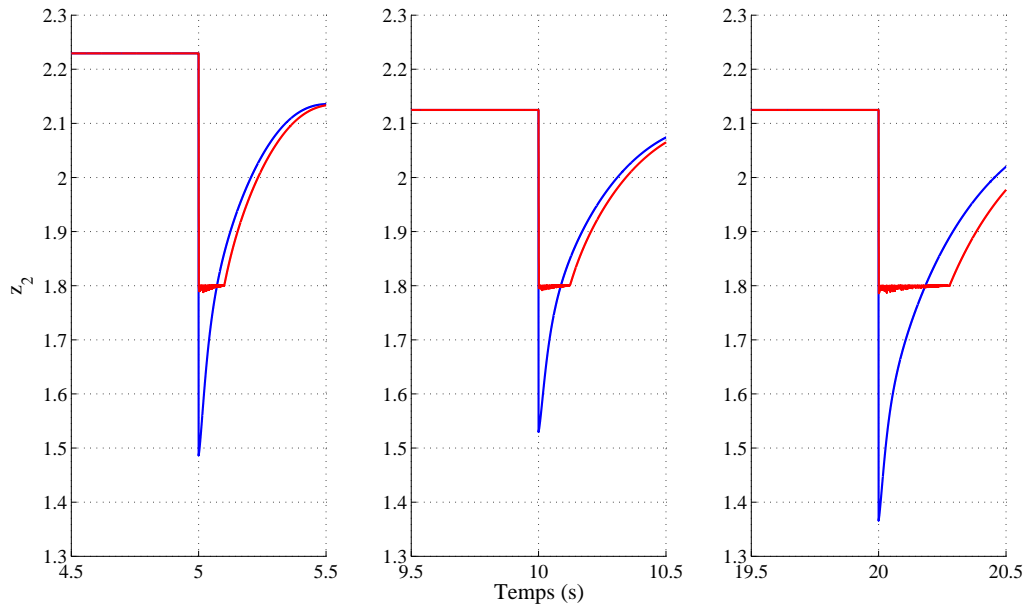


Figure 5.9. Rapport d'excès d'oxygène sans et avec contrainte

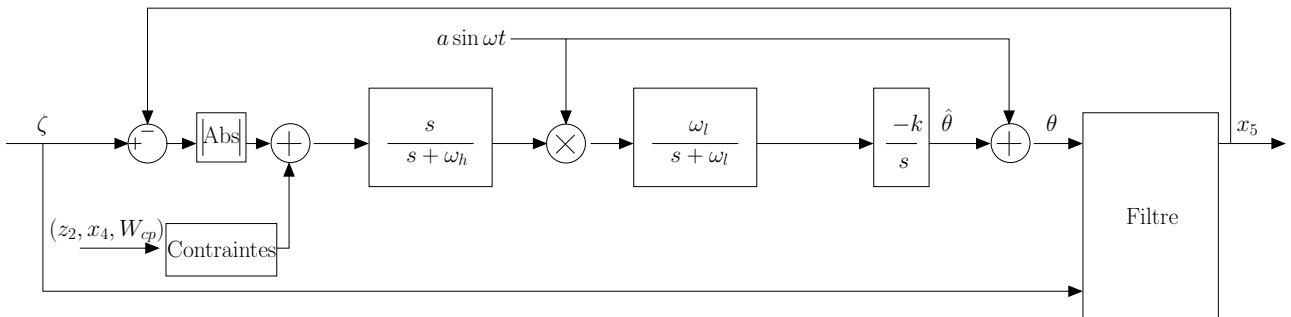
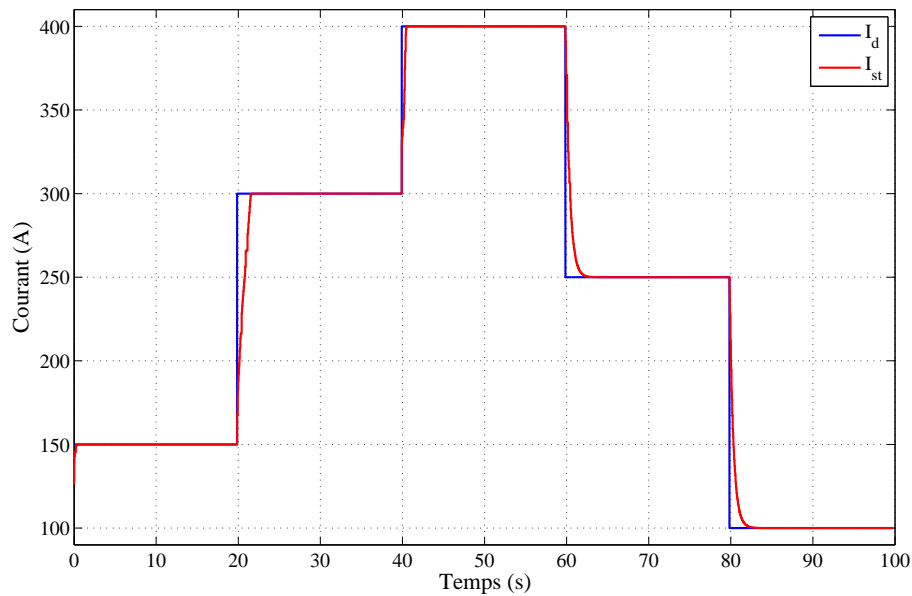


Figure 5.10. Algorithme d'Extremum Seeking basé sur la perturbation sinusoïdale

et ainsi le compresseur est protégé.

## 5.5 Conclusion

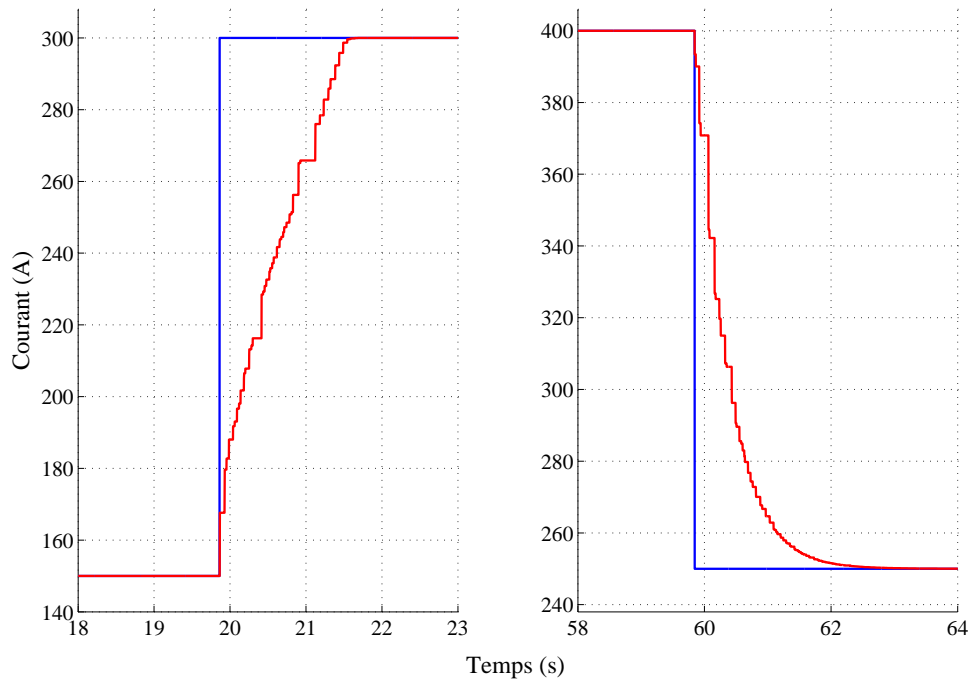
Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la commande du système à PàC sous contraintes. Ces dernières sont dues du fait des variations rapides de la charge. Les violations de ces contraintes peuvent endommager le système à PàC et provoquer le manque d'oxygène dans la cathode et entraîner le compresseur dans sa zone de pompage. Afin de



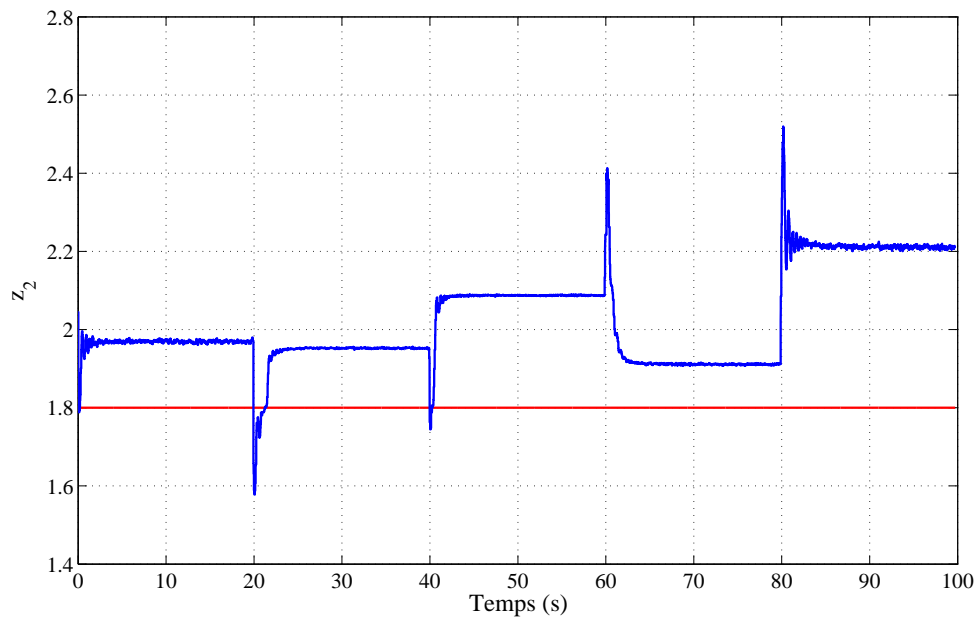
**Figure 5.11.** Variations de la charge et du courant fourni par la PàC

respecter ces contraintes lors des variations rapides de la charge, la PàC a été équipée par un gestionnaire de charge. Celui-ci est modélisé sous la forme d'un filtre linéaire du premier ordre dont la constante de temps est ajustable. L'objectif de la commande est ainsi de maximiser le courant fourni par la PàC tout en protégeant le système des contraintes.

Dans un premier temps, nous avons considéré le système à PàC piloté par un compresseur à double vis. Dans ce cas, la seule contrainte est le manque d'oxygène. La protection de ce système est assurée en utilisant la technique *Extremum Seeking* basée sur le modèle de la PàC. Ensuite, le système à PàC piloté par un compresseur centrifuge est étudié. Dans ce cas, les contraintes sont le manque d'oxygène et le fonctionnement du compresseur dans sa zone de pompage. La protection de ce système est assurée en utilisant la technique *Extremum Seeking* basée sur la perturbation sinusoïdale. Les lois de commande sont validées par un simulateur *Hardware in Loop*. Celui-ci consiste en compresseurs à double vis ou centrifuge et d'un émulateur de PàC en temps réel. Les résultats expérimentaux montrent que les lois de commande proposées ont bien protégé les deux systèmes étudiés des contraintes. Ce travail a fait l'objet d'un papier journal [81] et d'un papier conférence [95]. Dans le chapitre suivant, nous nous sommes intéressés à la protection de la membrane de la PàC, en gérant la différence de pression entre la cathode et l'anode.



**Figure 5.12.** Variations de la charge et du courant fourni par la PàC



**Figure 5.13.** Rapport d'excès d'oxygène sans et avec contrainte

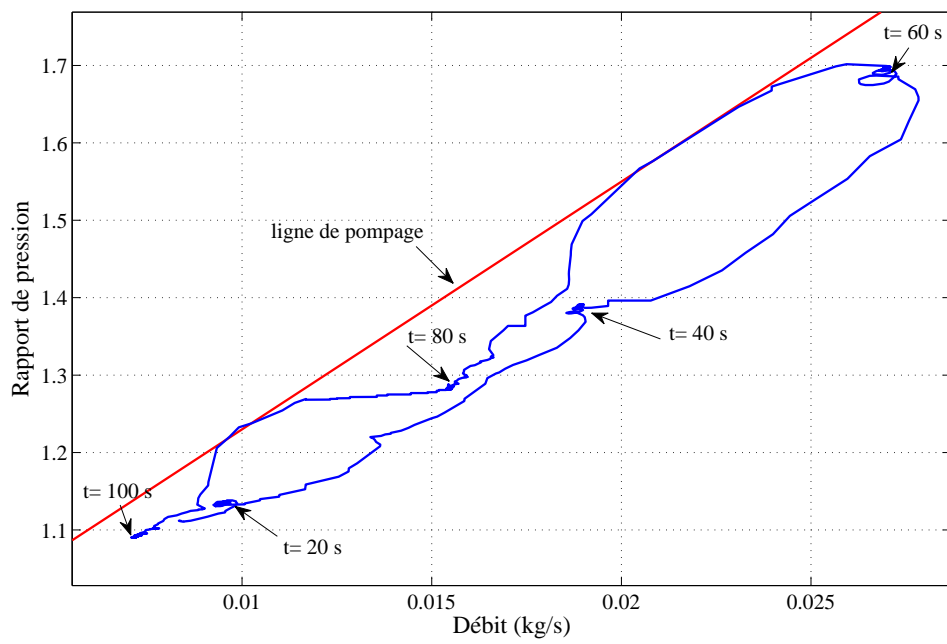


Figure 5.14. Cartographie du compresseur centrifuge

## Chapitre 6

---

---

# *Commande des pressions au cœur de la pile*

---

---

### 6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés à la commande et à la protection des systèmes d'alimentation en air dans les systèmes à PàC. Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème de régulation des pressions au niveau du cœur de pile dans les applications stationnaires [74, 112]. Rappelons que le cœur de pile consiste en l'anode, la cathode et la membrane. L'hydrogène et l'air sont supposés stockés dans des réservoirs à haute pression. Lors des changements de la charge demandée, la réaction chimique s'accélère, ainsi les pressions à l'anode et à la cathode varient. Notant que la membrane est sensible à une différence de pression entre ces deux électrodes, une importante différence de pression entre les deux chambres peut endommager la membrane [93, 118]. Donc, un contrôle de pression de l'anode et de la cathode est indispensable afin d'équilibrer les pressions sur les deux cotés de la membrane. Le système de contrôle doit fonctionner dans toutes les conditions, notamment en présence des variations paramétriques et en présence d'incertitudes. L'objectif de ce chapitre, est donc de développer une loi de commande robuste qui répond à cet objectif.

Notre choix de commande s'est orienté encore vers la technique de commande par mode glissant d'ordre deux. Dans l'objectif de proposer une loi de commande robuste, nous avons formellement pris en compte lors de notre synthèse les variations paramétriques et

les incertitudes qui peuvent survenir lors du fonctionnement. Ainsi ces incertitudes ont été formulées et intégrées dans le modèle. Ensuite une loi de commande basée sur les MGO2 multivariables (MIMO) a été développée et validée par simulations. Finalement, les qualités de robustesse de ces lois de commande ont été démontrées par des simulations.

## 6.2 Formulation du problème

Dans cette section, nous présentons le modèle dynamique du cœur de la pile, la formalisation des incertitudes et leur intégration dans le modèle ainsi que l'objectif de la commande.

### 6.2.1 Modèle du cœur de la pile

Les différentes pressions au cœur de la pile peuvent être décrites par les états suivants [74] :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T. \quad (6.1)$$

où  $x_1$  est la pression partielle de l'hydrogène ( $p_{H_2}$ ),  $x_2$  est la pression partielle de la vapeur d'eau à l'anode ( $p_{v,an}$ ),  $x_3$  est la pression partielle de l'oxygène ( $p_{O_2}$ ),  $x_4$  est la pression partielle de l'azote ( $p_{N_2}$ ) et  $x_5$  est la pression partielle de la vapeur d'eau à la cathode ( $p_{v,ca}$ ). Leurs dynamiques sont représentées par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= d_1 \left[ d_{19} d_{11} (u_{an} - x_1 - x_2) - d_9 \zeta \right], \\ \dot{x}_2 &= d_2 \left[ \frac{d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} d_{11} (u_{an} - x_1 - x_2) - f(\zeta, x_2, x_5) \right], \\ \dot{x}_3 &= d_3 \left[ d_{12} d_{13} d_{20} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) - \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15} - d_{16} \zeta} \right], \\ \dot{x}_4 &= d_4 \left[ (1 - d_{12}) d_{13} d_{20} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) - \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right], \\ \dot{x}_5 &= d_5 \left[ \frac{d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} d_{13} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) - \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\ &\quad \left. - d_{18} \zeta + f(\zeta, x_2, x_5) \right], \end{aligned} \quad (6.2)$$

où  $f(\zeta, x_2, x_5)$  représente le débit de l'eau à travers la membrane (2.66).  $u_{an}$  et  $u_{ca}$  sont respectivement les pressions à l'entrée de l'anode et de la cathode. Elles sont considérées

comme des commandes pour le système. Le vecteur de la sortie du système est donné par :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 := p_{an} \\ y_2 := p_{ca} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

où  $p_{an}$  est la pression de l'anode et  $p_{ca}$  est la pression de la cathode.  $\zeta$  est le courant fourni par la PàC.  $d_1, d_2, d_3 \dots d_{20}$  sont des paramètres détaillées dans l'annexe B.

### 6.2.2 Formalisation des incertitudes

Les paramètres de la PàC varient durant le fonctionnement. Afin de synthétiser une loi de commande robuste, il est nécessaire de formaliser ces incertitudes et de les intégrer dans le modèle dynamique. Ces paramètres incertains sont exprimés en fonction du pourcentage de leurs valeurs nominales dans le Tableau.6.1. En se basant sur [83], nous avons choisis la formalisation suivante :

$$\begin{aligned} d_1 &= d_{01} + \delta d_1, \\ d_2 &= d_{02} + \delta d_2, \\ d_3 &= d_{03} + \delta d_3, \\ d_4 &= d_{04} + \delta d_4, \\ d_5 &= d_{05} + \delta d_5, \\ d_{11} &= d_{011} + \delta d_{11}, \\ d_{13} &= d_{013} + \delta d_{13}, \\ d_{14} &= d_{014} + \delta d_{14}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

où  $d_{0i}$  représente la valeur nominale du paramètre concerné,  $\delta d_i$  représente son incertitude, sous l'hypothèse  $|\delta d_i| \leq \delta d_{0i} < |d_{0i}|$ , avec  $\delta d_{0i}$  borne positive connue.

### 6.2.3 Objectif de la commande

L'objectif de la commande est de réduire la différence de pression entre l'anode et la cathode, telle que :

$$\begin{aligned} p_{an} - p_{ca} &= 0, \\ p_{ca} - p_{ref} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dans la section suivante, nous présentons, la synthèse de la loi de commande.

TABLE 6.1: Paramètres incertains du système

Paramètres	Variations
Température de la PàC ( $T_{fc}$ )	+10% en °C
Volume de la chambre de la cathode ( $V_{ca}$ )	+5%
Volume de la chambre de l'anode ( $V_{an}$ )	+5%
Constante d'orifice à l'entrée de la cathode ( $k_{ca,in}$ )	+5%
Constante d'orifice à l'entrée de l'anode ( $k_{ca,in}$ )	+5%
Constante d'orifice à la sortie de la cathode ( $k_{ca,out}$ )	+5%

### 6.3 Synthèse de la loi de commande

Afin d'atteindre l'objectif de la commande, nous développons un contrôleur MIMO par MGO2, pour contrôler la pression de l'anode et de la cathode. La synthèse se déroule en deux étapes : (1) maintenir la pression de la cathode à une valeur de référence donnée, (2) maintenir la différence de pression entre l'anode et la cathode inférieur à 0,5 bar [118]. La structure de la commande est représentée sur la Fig.6.1.

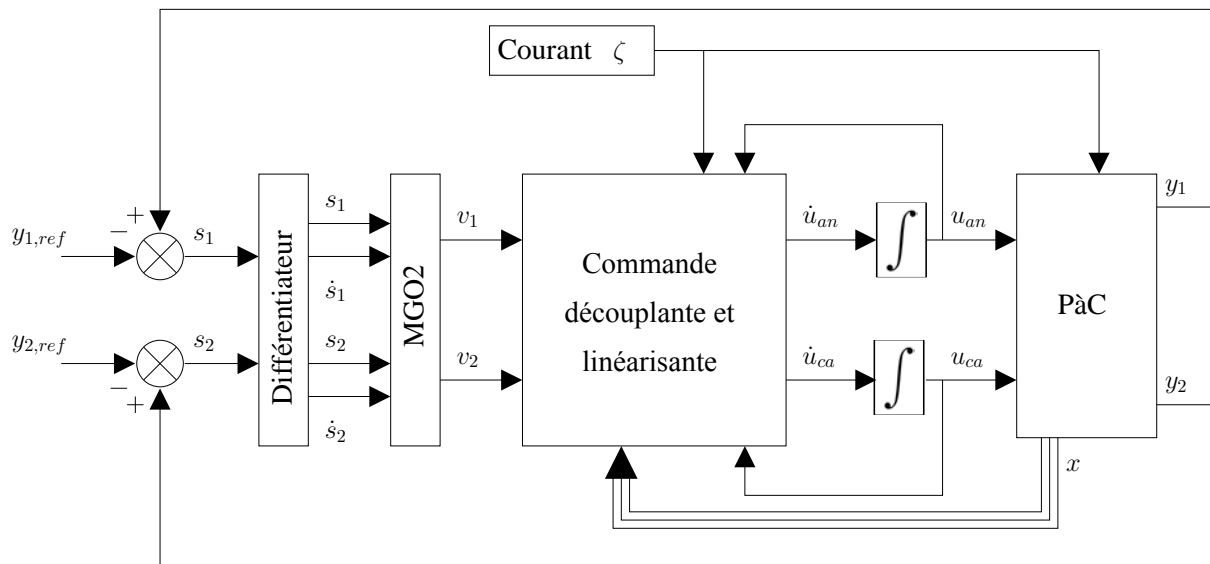


Figure 6.1. Structure de la commande proposée



### 6.3.1 Synthèse de la surface de glissement

Les variables de glissements sont choisies pour forcer les pressions  $y_1$  et  $y_2$  à leurs points d'équilibres  $y_{1,ref}$  et  $y_{2,ref}$ . La consigne de la pression de la cathode ( $y_{2,ref}$ ) est choisie à 2 bar. La consigne de la pression de l'anode ( $y_{1,ref}$ ) est égale à la pression de la cathode.

Les variables de glissements sont données par :

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 - y_{1,ref} := p_{an} - p_{ca}, \\ s_2 &= y_2 - y_{2,ref} := p_{ca} - 2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Les commandes  $u_{an}$  et  $u_{ca}$  apparaissent respectivement dans la première dérivée de  $s_1$  et de  $s_2$ . Le système possède donc un vecteur de degré relatif  $[1 \ 1]^T$  par rapport aux vecteurs de sortie  $[s_1 \ s_2]^T$ . Pour éviter le problème du *chattering*, nous augmentons le degré relatif du système, en rajoutant un intégrateur sur chaque sortie. Ainsi les discontinuités de la commande MGO2 vont agir sur les dérivées des commandes ( $\dot{u}_{an}$  et  $\dot{u}_{ca}$ ). Considérons la deuxième dérivée du vecteur  $[s_1 \ s_2]^T$  [83] :

$$\begin{bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_{an} \\ \dot{u}_{ca} \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

où

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta A_1 \\ \delta A_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{110} & B_{120} \\ 0 & B_{220} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta B_{11} & \delta B_{12} \\ 0 & \delta B_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

où  $A_{10}$ ,  $A_{20}$ ,  $B_{110}$ ,  $B_{120}$  et  $B_{220}$  sont des fonctions bien connues, et  $\delta A_1$ ,  $\delta A_2$ ,  $\delta B_{11}$ ,  $\delta B_{12}$  et  $\delta B_{22}$  sont des fonctions incertaines. Les expressions détaillées sont présentées dans l'annexe C.

### 6.3.2 Commande par mode glissant d'ordre deux

Comme le terme  $B_{12}$  est non nul, nous pouvons déduire que le système (6.7) est couplé, ce qui nécessitera un découplage. Ce problème est résolu en appliquant la commande découplante et linéarisante.

Considérons le retour d'état :

$$\dot{u} = B_0^{-1}[v - A_0]. \quad (6.9)$$

avec  $v := [v_1 \ v_2]^T$ , la nouvelle commande. Le terme  $-B_0^{-1}A_0$  de l'équation (6.9) permet l'élimination partielle des non-linéarités du fait de la présence d'incertitudes [141].

En appliquant (6.9) à (6.7), les variables de glissements peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ 0 & \hat{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= \delta A_1 - A_{10} \frac{\delta B_{11}}{B_{110}} + A_{20} \left[ \frac{\delta B_{11} B_{120}}{B_{110} B_{220}} - \frac{\delta B_{12}}{B_{220}} \right], \\ \hat{A}_2 &= \delta A_2 - A_{20} \frac{\delta B_{22}}{B_{220}}, \\ \hat{B}_{11} &= 1 + \frac{\delta B_{11}}{B_{110}}, \\ \hat{B}_{12} &= \frac{\delta B_{12}}{B_{220}} - \frac{\delta B_{11} B_{120}}{B_{110} B_{220}}, \\ \hat{B}_{22} &= 1 + \frac{\delta B_{22}}{B_{220}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Sous les hypothèses de bornitude suivantes,  $|\delta A_1| < |A_1|$ ,  $|\delta A_2| < |A_2|$ ,  $|\delta B_{11}| < |B_{11}|$ ,  $|\delta B_{12}| < |B_{12}|$  et  $|\delta B_{22}| < |B_{22}|$ , il existe alors des constantes positives  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $K_{11m}$ ,  $K_{11M}$ ,  $K_{22m}$ ,  $K_{22M}$  et  $K_{12}$ , telles que :

$$\begin{aligned} |\hat{A}_1| &\leq C_1 \quad , \quad 0 < K_{11m} < \hat{B}_{11} < K_{11M}, \\ |\hat{A}_2| &\leq C_2 \quad , \quad 0 < K_{22m} < \hat{B}_{22} < K_{22M}, \\ |\hat{B}_{12}| &\leq K_{12} \quad . \end{aligned} \quad (6.12)$$

La commande (6.9) permet, sous la condition  $\min(\hat{B}_{11}) > \max(\hat{B}_{12})$ , d'éliminer une partie des non-linéarités et de découpler suffisamment les commandes  $u_{an}$  et  $u_{ca}$ .

**Proposition I :** Supposons que les lois de commande  $[v_1 \ v_2]^T$  sont synthétisés pour stabiliser le système. Elles sont basées sur l'algorithme du *Twisting* avec ( $1 \leq i \leq 2$ ),

$$v_i = -\alpha_i \text{sign}(s_i), \quad \alpha_i = \begin{cases} -\alpha_{M,i}, & s_i \dot{s}_i > 0, \\ -\alpha_{m,i}, & s_i \dot{s}_i < 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

si la condition suivante :

$$\min(\hat{B}_{11}) > \frac{\alpha_{M,2}}{\alpha_{m,1}} \max(\hat{B}_{12}), \quad (6.14)$$

est satisfaite, il sera possible de choisir les paramètres de chaque contrôleur  $v = [v_1 \ v_2]^T$ , dans le but de forcer les variables de glissements et leurs dérivées ( $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\dot{s}_1$ ,  $\dot{s}_2$ ) à zéro.

L'équation (6.14) est équivalente à

$$K_{11m} > \frac{\alpha_{M,2}}{\alpha_{m,1}} K_{12}. \quad (6.15)$$

**Preuve :** Considérons la première équation du (6.10)

$$\ddot{s}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B}_{11} v_1 + \hat{B}_{12} v_2. \quad (6.16)$$

Ainsi l'équation (6.16) peut être écrite en fonction du signe de  $s_1$  et  $s_2$ ,

$$\ddot{s}_1 = \hat{A}_1 + \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \text{sign}(s_1 \cdot s_2) \hat{B}_{12} + \hat{B}_{11} \right] (-\alpha_1 \text{sign}(s_1)). \quad (6.17)$$

D'après les conditions (3.20), il existe des constantes positives  $K_{1m}$  et  $K_{1M}$  pour le système (6.10),

$$\begin{aligned} K_{1m} &= \frac{\alpha_{M,2}}{\alpha_{m,1}} \max(\hat{B}_{12}) + \min(\hat{B}_{11}), \\ K_{1M} &= -\frac{\alpha_{M,2}}{\alpha_{m,1}} \max(\hat{B}_{12}) + \max(\hat{B}_{11}), \end{aligned} \quad (6.18)$$

alors

$$K_{1m} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \text{sign}(s_1 \cdot s_2) \hat{B}_{12} + \hat{B}_{11} < K_{1M}, \quad (6.19)$$

Notons  $b = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \text{sign}(s_1 \cdot s_2) \hat{B}_{12} + \hat{B}_{11}$  et  $v_1 = -\alpha_1 \text{sign}(s_1)$ , l'équation (6.17) peut être écrite comme suit :

$$\ddot{s}_1 = \hat{A}_1 + b v_1, \quad (6.20)$$

En appliquant l'algorithme du *Twisting* (3.20), les conditions suffisantes, qui assurent la convergence en temps fini de la variable de glissement  $s_1$  et de sa dérivée, peuvent être définies comme suit :

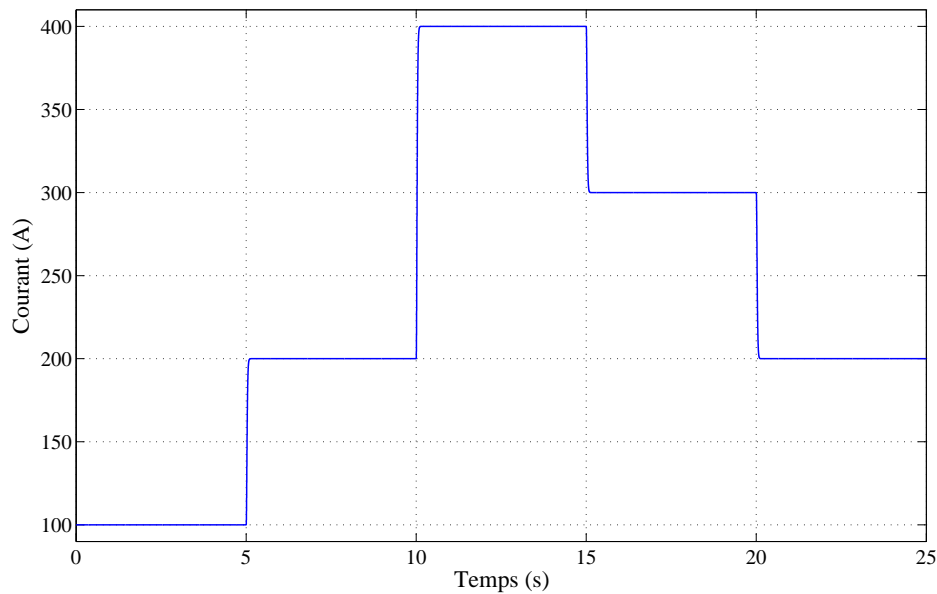
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \alpha_{m,1} < \alpha_{M,1}, \\ \alpha_{m,1} > \frac{C_1}{K_{1m}}, \\ K_{1m} \alpha_{M,1} - C_1 > K_{1M} \alpha_{m,1} + C_1, \\ K_{11m} > \frac{\alpha_{M,2}}{\alpha_{m,1}} K_{12}. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

De même les conditions suffisantes qui assurent la convergence en temps fini de la variable de glissement  $s_2$  et de sa dérivée sont données comme suit :

$$\begin{cases} 0 < \alpha_{m,2} < \alpha_{M,2}, \\ \alpha_{m,2} > \frac{C_2}{K_{22m}}, \\ K_{22m}\alpha_{M,2} - C_2 > K_{22M}\alpha_{m,2} + C_2. \end{cases} \quad (6.22)$$

## 6.4 Résultats de simulation

Le contrôleur proposé est simulé sur Matlab. Les valeurs nominales de la simulation sont présentées en annexe A. La variation de la charge est supposée entre 100 et 400 A. Le courant de la PàC est représenté sur la Fig.6.2. La tension électrique fournie par la PàC est représentée sur la Fig.6.3. Nous supposons que la température de la PàC est bien contrôlée et qu'elle est fixée à  $80^{\circ}C$ .



**Figure 6.2.** *Variation de la charge*

La Fig.6.4 et la Fig.6.5 montrent respectivement que la pression de l'anode et la pression de la cathode suivent leurs références. La Fig.6.6 montre la valeur absolue de la différence entre la pression de l'anode et celle à la cathode. Il se trouve que le temps de réponse est de 0,05 s avec un dépassement de 0,2 bar. Cela indique que la commande par mode

glissant d'ordre deux réalise une bonne performance, en termes de temps de réponse et de dépassement. La Fig.6.7 et la Fig.6.8 présentent les réponses dynamiques des commandes (les pressions à l'entrée de la cathode et de l'anode). Il est à remarquer que la pression à l'entrée de la cathode est plus grande que celle à l'entrée de l'anode. Afin de prouver la robustesse du contrôleur, des variations paramétriques sont ajoutés sur le modèle. La Fig.6.9 montre que la différence entre la pression de l'anode et la pression de la cathode est bien contrôlée et qu'elle est toujours inférieure à 0,5 bar. Nous pouvons ainsi montrer la robustesse du contrôleur proposé sous variations de charge et d'incertitudes. La courbe en pointillée représente la trajectoire du système en présence d'incertitudes, et la ligne bleue montre le comportement du système avec les paramètres nominaux. Nous pouvons conclure de ces résultats, que le contrôleur proposé est robuste et a un temps de réponse rapide sous variations de charge et d'incertitudes.

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la commande par mode glissant d'ordre deux a été synthétisée pour assurer la régulation des pressions dans la PàC. L'objectif de la commande est de minimiser la différence de pression entre l'anode et la cathode. La synthèse de la commande robuste prend en compte les variations paramétriques et les incertitudes, et assure une performance optimale sur toute la plage de fonctionnement. La propriété de robustesse est prouvée en montrant que le contrôleur est insensible aux incertitudes. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication journal [99] et deux papiers conférences [56, 97]. Les résultats de simulation vérifient cette conclusion et montre que le contrôleur a une bonne réponse en régime transitoire sous variations de charge et d'incertitudes.

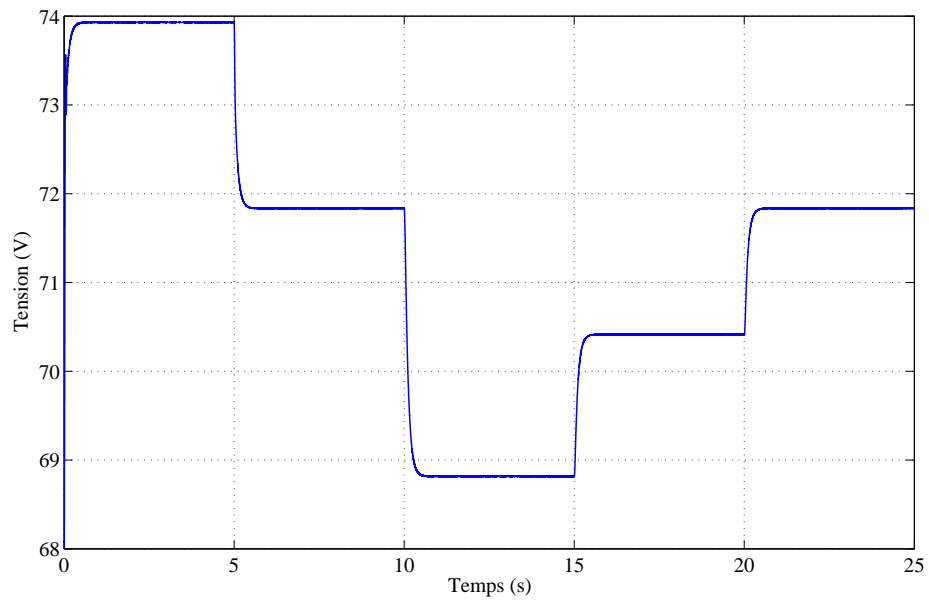


Figure 6.3. Variation de la tension électrique de la PàC

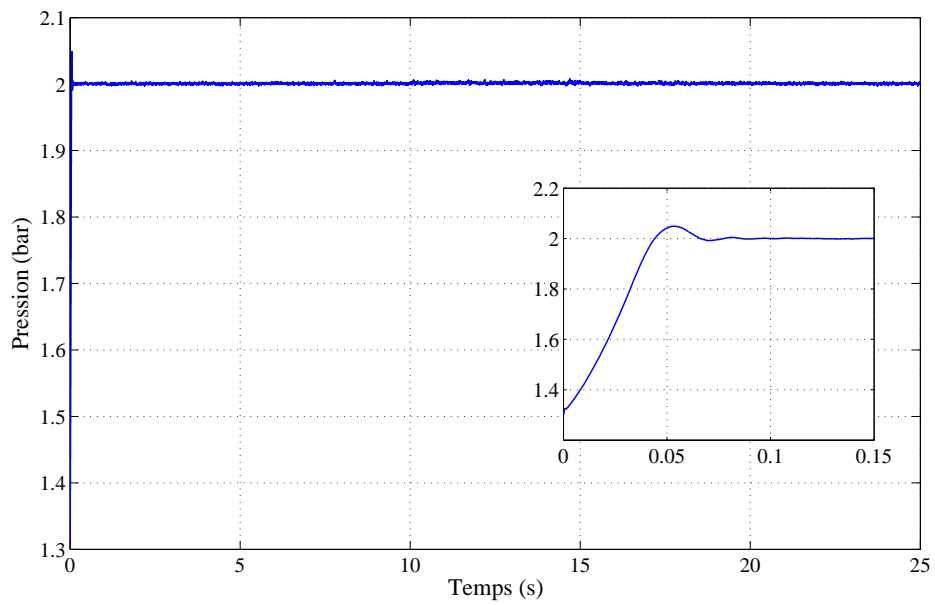


Figure 6.4. Variations de la pression de l'anode

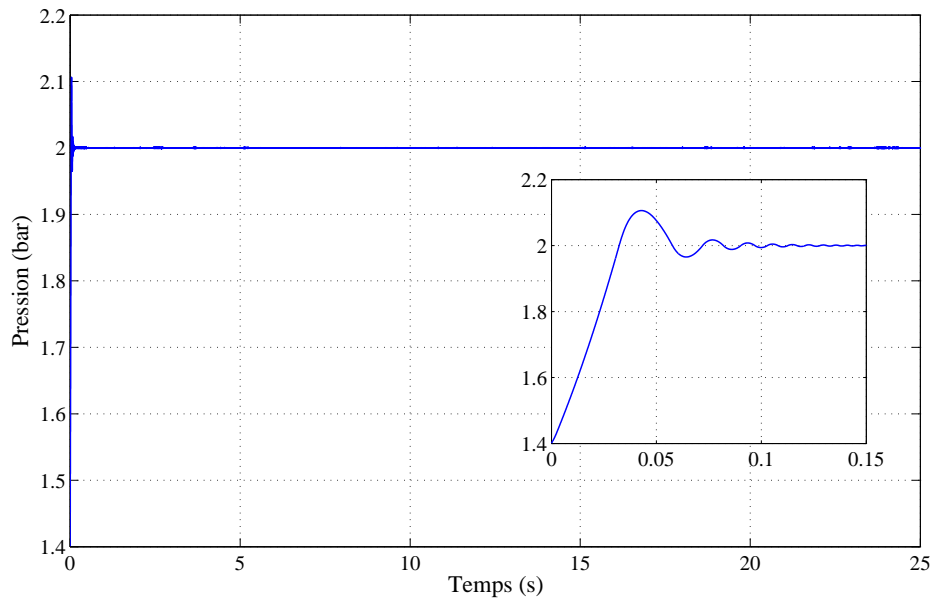


Figure 6.5. Variations de la pression de la cathode

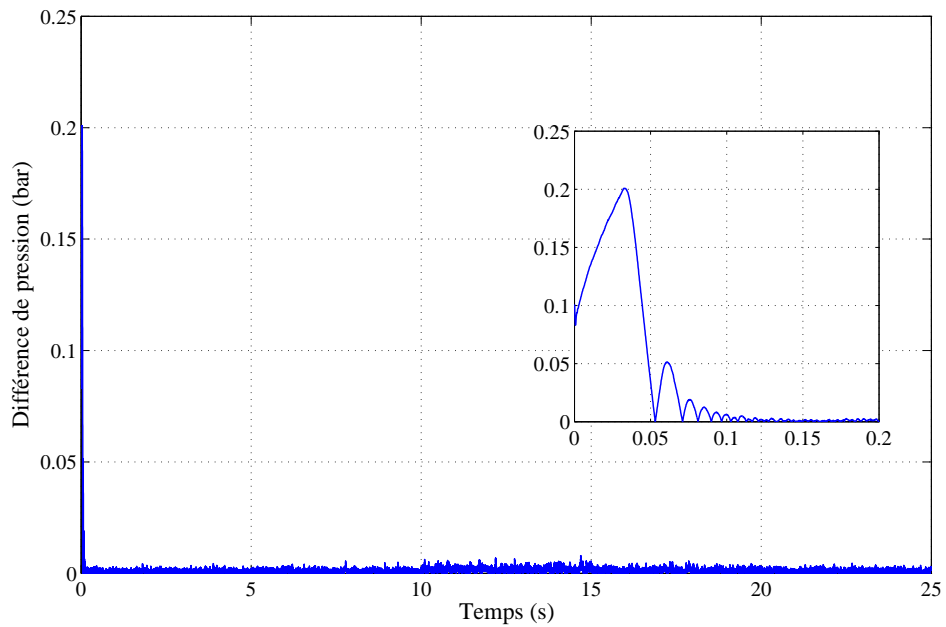
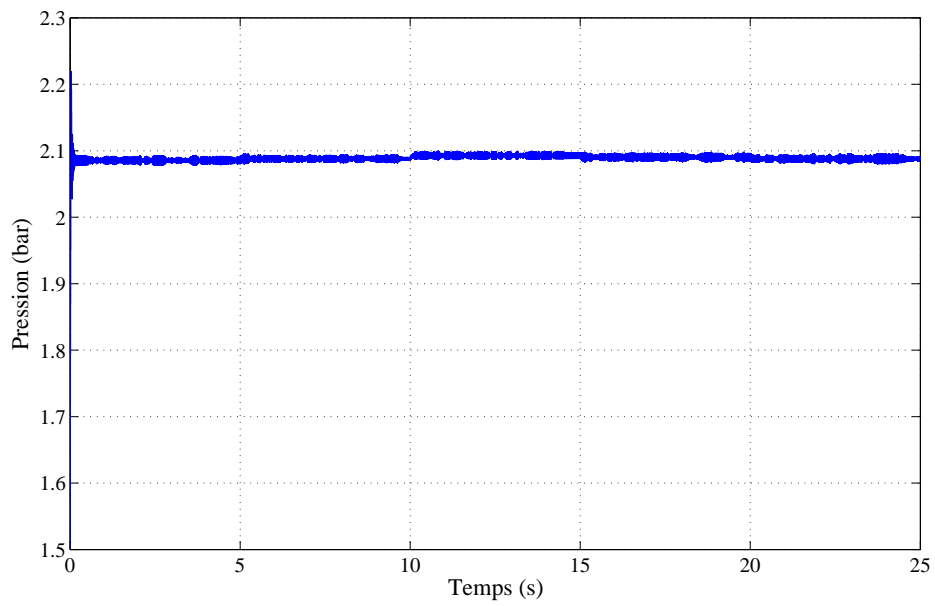
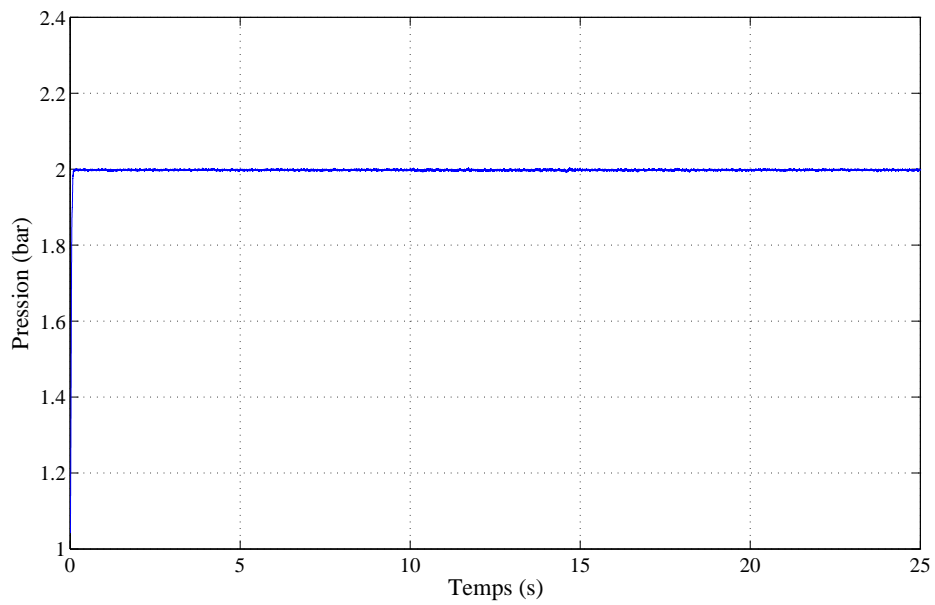


Figure 6.6. Variations de la différence de pression entre l'anode et la cathode

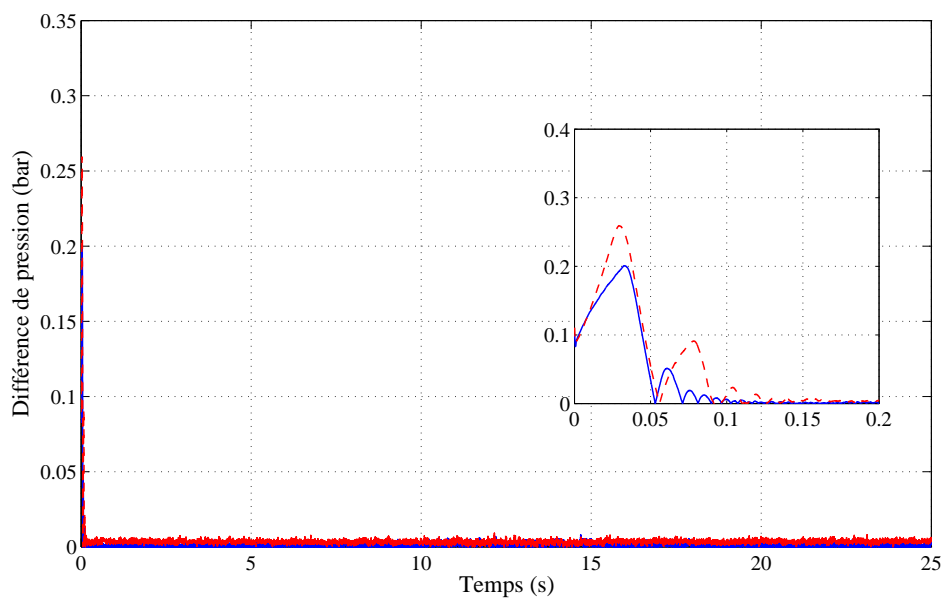


**Figure 6.7.** Variations de la pression à l'entrée de la cathode



**Figure 6.8.** Variations de la pression à l'entrée de l'anode





**Figure 6.9.** *Comparaison entre la différence de pression entre l'anode et la cathode d'un système nominal et d'un système incertain pour un même contrôleur*



---

---

## *Conclusion générale et perspectives*

---

---

### **Bilan**

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés aux systèmes à pile à combustible dans le cadre d'applications de transport. Nous avons étudié trois problématiques importantes de la commande des systèmes à pile à combustible.

Notre première problématique était la maximisation de la puissance nette fournie par la PàC, en présence des incertitudes dans le système. Pour cela, nous avons synthétisé des lois de commande par mode glissant d'ordre deux (MGO2). Ceux-ci sont connus pour leur robustesse vis-à-vis des incertitudes. Des algorithmes par MGO2 classique ont été appliqués dans le cas où les bornes des paramètres incertains sont connues. Dans le cas contraire, des algorithmes par MGO2 adaptatif ont été appliqués. Ces lois de commande ont été implémentées sur un banc d'essai *Hardware In Loop*. Ce dernier consiste en un compresseur à double vis et un émulateur du système de pile à combustible en temps réel. Les résultats expérimentaux ont montré une bonne performance des algorithmes utilisés contre les perturbations et les variations de la charge.

La deuxième problématique était de protéger le cœur de la pile et le compresseur. Cela consiste à respecter certaines contraintes physiques du système surtout lors des variations rapides de la charge. Pour résoudre ce problème, un gestionnaire de charge a été intégré dans le modèle pour gérer la charge demandée par la PàC. Il consiste en un filtre du premier ordre avec une constante de temps ajustable. Le contrôle de ce paramètre permet de maximiser le courant fourni par la PàC sans violer les contraintes. Deux types de compresseur ont été étudiés dans ce travail : le compresseur à double vis et le compresseur

centrifuge. Dans le premier cas la seule contrainte est le manque d'oxygène. L'algorithme utilisé pour régler le filtre est basé sur la méthode d'*Extremum Seeking* basée sur le modèle de la PàC. Dans le deuxième cas, deux contraintes peuvent survenir : le manque d'oxygène et le fonctionnement du compresseur dans sa zone de pompage. Pour cela nous avons développé un algorithme d'*Extremum Seeking* qui peut trouver la bonne constante de temps de filtrage en temps réel. Cet algorithme est basé sur la technique de la perturbation sinusoïdale ajoutée au système. Les résultats d'expérimentations montrent l'efficacité des deux algorithmes proposés pour la protection des systèmes à PàC.

La dernière problématique concernait les systèmes à PàC utilisés dans le domaine stationnaire. Dans ce cas, il est recommandé de faire fonctionner les piles à une pression constante à la cathode. Notons que la membrane est sensible à la différence de pression entre anode et cathode. Ainsi, nous proposons une synthèse de commande robuste qui permet de maintenir la pression entre l'anode et la cathode au voisinage de zéro. Pour cela, des paramètres incertains ont été formalisés et intégrés dans le modèle. Ensuite, un algorithme robuste par MGO2 a été appliqué pour réduire la différence de pressions. Les résultats de la simulation montrent que la loi de commande proposée révèle un bon comportement en présence de perturbations et d'incertitudes.

## Perspectives

Dans ce travail, nous avons abordé les contributions au niveau théorique et expérimental pour la commande du système à PàC. Plusieurs pistes restent ouvertes suite à nos travaux.

- Le modèle utilisé dans ce travail est basé sur plusieurs hypothèses comme la régulation de la température, de l'humidité et de la gestion de l'eau. Il serait intéressant de travailler sur un modèle plus complet, qui prenne en compte la dynamique de tous ces paramètres. Dans ce cas le modèle deviendrait un système multivariables, plus proche de la réalité.
- Pour ajuster la stratégie du système de contrôle du système à PàC, ce dernier nécessite la connaissance des états et des paramètres de la PAC. La mesure de ces états et de ces paramètres peut s'avérer difficile, voir impossible. C'est pourquoi, l'utilisation d'observateurs et d'estimateurs de paramètres serait assurément un bon

moyen pour s'affranchir de ce problème. Ainsi, l'utilisation d'observateurs adaptatifs permet à la fois d'estimer les états et les paramètres. Une étude formelle du couplage de la commande et de l'observateur serait alors indispensable.



# Annexes





---

---

## *Annexe*

---

---

### A Paramètres du système

$$\begin{aligned} p_{00} &= -2,635 & , & \quad p_{10} = -0,0003518, \\ p_{01} &= 9,935 & , & \quad p_{20} = 9,158 \cdot 10^{-8}, \\ p_{11} &= 5,219 \cdot 10^{-5} & , & \quad p_{02} = -10,26, \\ p_{30} &= -7,382 \cdot 10^{-12} & , & \quad p_{21} = -2,274 \cdot 10^{-8}, \\ p_{12} &= 3,848 \cdot 10^{-5} & , & \quad p_{03} = 4,607, \\ p_{40} &= 1,018 \cdot 10^{-16} & , & \quad p_{31} = 2,747 \cdot 10^{-12}, \\ p_{22} &= -1,105 \cdot 10^{-8} & , & \quad p_{13} = 2,999 \cdot 10^{-5}, \\ p_{04} &= -0,8139 & , & \quad q_{00} = 0,5192, \\ q_{10} &= -68,92 & , & \quad q_{01} = 2,698, \\ q_{20} &= 664,1 & , & \quad q_{11} = 100,7, \\ q_{02} &= -5,098 & , & \quad q_{30} = -8,552, \\ q_{21} &= 42,11 & , & \quad q_{12} = -70,76, \\ q_{03} &= 3,499 & , & \quad q_{40} = 52380, \\ q_{31} &= -2101 & , & \quad q_{22} = 92,4, \\ q_{13} &= 13,98 & , & \quad q_{04} = -0,7859. \end{aligned}$$

## B Constantes des systèmes

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{RT_{fc}k_{ca,in}}{V_{ca}M_{O_2}} \frac{x_{O_2}}{(1 + \omega_{atm})} & ; & \quad c_2 = p_{sat} \\
c_3 &= \frac{RT_{fc}}{V_{ca}} & ; & \quad c_4 = M_{O_2} \\
c_5 &= M_{N_2} & ; & \quad c_6 = M_v p_{sat} \\
c_7 &= \frac{RT_{fc}n}{V_{ca}4F} & ; & \quad c_8 = \frac{RT_{fc}k_{ca,in}}{V_{ca}M_{N_2}} \frac{1 - x_{O_2}}{(1 + \omega_{atm})} \\
c_9 &= \frac{f}{J_{cp}} & ; & \quad c_{10} = \frac{C_p T_{atm}}{J_{cp} \eta_{cp}} \frac{1}{2\pi} \eta_{v-c} V_{cpr/tr} \rho_a \\
c_{11} &= p_{atm} & ; & \quad c_{12} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \\
c_{13} &= \frac{\eta_{cm} k_t}{J_{cp}} & ; & \quad c_{14} = \frac{RT_{atm}}{M_a V_{sm}} \\
c_{15} &= \frac{1}{\eta_{cp}} & ; & \quad c_{16} = k_{ca,in} \\
c_{17} &= k_{ca,out} & ; & \quad c_{18} = \eta_{cm} k_t \\
c_{19} &= k_{ca,in} \frac{x_{O_2}}{(1 + \omega_{atm})} & ; & \quad c_{20} = \frac{n M_{O_2}}{4F} \\
c_{21} &= \frac{1}{2\pi} \eta_{v-c} V_{cpr/tr} \rho_a & ; & \quad c'_9 = \frac{\eta_{cm} k_t k_v}{J_{cp} R_{cm}} \\
c'_{10} &= \frac{C_p T_{atm}}{J_{cp} \eta_{cp}} & ; & \quad c'_{13} = \frac{\eta_{cm} k_t}{J_{cp} R_{cm}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{R_{H_2} T_{fc}}{V_{an}} & ; & \quad d_2 = \frac{R_v T_{fc}}{V_{an}} & ; & \quad d_3 = \frac{R_{O_2} T_{fc}}{V_{ca}} & ; & \quad d_4 = \frac{R_{N_2} T_{fc}}{V_{ca}} \\
d_5 &= \frac{R_v T_{fc}}{V_{ca}} & ; & \quad d_6 = M_{O_2} & ; & \quad d_7 = M_{N_2} & ; & \quad d_8 = M_v \\
d_9 &= M_{H_2} \frac{n}{2F} & ; & \quad d_{10} = \varphi_{an} p_{sat}(T_{fc}) & ; & \quad d_{11} = k_{an,in} & ; & \quad d_{12} = x_{O_2} \\
d_{13} &= k_{ca,in} & ; & \quad d_{14} = k_{ca,out} & ; & \quad d_{15} = p_{atm} & ; & \quad d_{16} = M_{O_2} \frac{n}{4F} \\
d_{17} &= \varphi_{atm} p_{sat}(T_{atm}) & ; & \quad d_{18} = M_v \frac{n}{2F} & ; & \quad d_{19} = \frac{1}{1 + \omega_{an,in}} & ; & \quad d_{20} = \frac{1}{1 + \omega_{atm}}
\end{aligned}$$



## C Expressions des fonctions certains et incertains

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{c_{19}}{c_{20}\zeta} \left( c_{14} \left[ c_{12} c_{15} \left( c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] \right] \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} \right] \right. \\
&\quad [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] + c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \left[ -c_{16} c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \\
&\quad [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] + c_{16} (c_1 + c_8) (x_4 - x_1 - x_2 - c_2) \\
&\quad \left. - c_{16} \frac{c_3 (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} - c_{16} c_7 \zeta \right] - (c_1 + c_8) \left( c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \\
&\quad [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] - (c_1 + c_8) (x_4 - x_1 - x_2 - c_2) \\
&\quad \left. + \frac{c_3 (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} + c_7 \zeta \right) \\
&\quad \left. + \left( c_1 (x_4 - x_1 - x_2 - c_2) - \frac{c_3 x_1}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} - c_7 \zeta \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{c_3 (c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6) - c_4 c_3 (x_1 + x_2)}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6)^2} \right. \\
&\quad \left. c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} + \left( c_8 (x_4 - x_1 - x_2 - c_2) - \frac{c_3 x_2}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{c_3 (c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6) - c_5 c_3 (x_1 + x_2)}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6)^2} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} + \frac{c_3 (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} \right. \\
&\quad \left. c_{17} (c_1 + c_8) (x_4 - x_1 - x_2 - c_2) - \frac{c_{17} c_3 (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} - c_{17} c_7 \zeta \right) \\
&\quad \left. \frac{\phantom{c_{17} (c_1 + c_8) (x_4 - x_1 - x_2 - c_2) - \frac{c_{17} c_3 (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}} - c_{17} c_7 \zeta}}{\sqrt{x_1 + x_2 + c_2 - c_{11}}} \right) \\
\gamma_1 &= \frac{c_{14} c_{19} c_{21}}{c_{20} \zeta} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \\
\phi_{01} &= \frac{c_{019}}{c_{20} \zeta} \left( c_{014} \left[ c_{12} c_{15} \left( c_{014} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02})] \right] \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} \right] \right. \\
&\quad [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02})] + c_{014} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \left[ -c_{16} c_{014} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \\
&\quad [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02})] + c_{16} (c_{01} + c_{08}) (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02}) \\
&\quad \left. - c_{16} \frac{c_{03} (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}} - c_{16} c_{07} \zeta \right] - (c_{01} + c_{08}) \left( c_{014} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \\
&\quad [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02})] - (c_{01} + c_{08}) (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02}) \\
&\quad \left. + \frac{c_{03} (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}} + c_{07} \zeta \right) \\
&\quad \left. + \left( c_{01} (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02}) - \frac{c_{03} x_1}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}} - c_{07} \zeta \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{c_{03} (c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}) - c_4 c_{03} (x_1 + x_2)}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06})^2} \right. \\
&\quad \left. c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}} + \left( c_{08} (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02}) - \frac{c_{03} x_2}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{c_{03} (c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}) - c_5 c_{03} (x_1 + x_2)}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06})^2} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}} + \frac{c_{03} (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}} \right. \\
&\quad \left. c_{17} (c_{01} + c_{08}) (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02}) - \frac{c_{17} c_{03} (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}} - c_{17} c_{07} \zeta \right) \\
&\quad \left. \frac{\phantom{c_{17} (c_{01} + c_{08}) (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02}) - \frac{c_{17} c_{03} (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_{06}} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}} - c_{17} c_{07} \zeta}}{\sqrt{x_1 + x_2 + c_{02} - c_{11}}} \right) \\
\gamma_{01} &= \frac{c_{014} c_{019} c_{21}}{c_{20} \zeta} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right]
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\delta\phi_1 = & \frac{\delta c_{19}}{c_{20}\zeta} \left( (c_{014} + \delta c_{14}) \left[ c_{12}c_{15} \left( (c_{014} + \delta c_{14}) \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))] \right] \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} \right] \right] \right. \\
& \left. [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))] + (c_{014} + \delta c_{14}) \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \\
& \left. \left[ -c_{16}(c_{014} + \delta c_{14}) \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right] \right. \\
& \left. [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))] + c_{16}((c_{01} + \delta c_1) + (c_{08} + \delta c_8))(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) \right. \\
& \left. - c_{16} \frac{(c_{03} + \delta c_3)(x_1 + x_2)}{c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} - c_{16}(c_{07} + \delta c_7)\zeta \right] \\
& \left. - ((c_{01} + \delta c_1) + (c_{08} + \delta c_8)) \left( (c_{014} + \delta c_{14}) \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \right. \\
& \left. [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))] - ((c_{01} + \delta c_1) + (c_{08} + \delta c_8))(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) \right. \\
& \left. + \frac{(c_{03} + \delta c_3)(x_1 + x_2)}{c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} + (c_{07} + \delta c_7)\zeta \right) \\
& \left. + \left( (c_{01} + \delta c_1)(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) - \frac{(c_{03} + \delta c_3)x_1}{c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} \right. \right. \\
& \left. c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} - (c_{07} + \delta c_7)\zeta \right) \\
& \left. \frac{(c_{03} + \delta c_3)(c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)) - c_4(c_{03} + \delta c_3)(x_1 + x_2)}{(c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6))^2} \right. \\
& \left. c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} + ((c_{08} + \delta c_8)(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) \right. \\
& \left. - \frac{(c_{03} + \delta c_3)x_2}{c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} \right) \\
& \left. \frac{(c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)) - c_5(c_{03} + \delta c_3)(x_1 + x_2)}{(c_{03} + \delta c_3)(c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)) - c_5(c_{03} + \delta c_3)(x_1 + x_2)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} \right. \\
& \left. + \frac{(c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6))^2}{(c_{03} + \delta c_3)(x_1 + x_2)} c_{17}((c_{01} + \delta c_1) + (c_{08} + \delta c_8))(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) \right. \\
& \left. + \frac{c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)}{\sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}}} \right. \\
& \left. \frac{c_{17}(c_{03} + \delta c_3)(x_1 + x_2)}{c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} - c_{17}(c_{07} + \delta c_7)\zeta \right) \\
& \left. - \frac{\sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}}}{\sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}}} \right) \\
& + \frac{c_{019}}{c_{20}\zeta} \left( \delta c_{14} \left[ c_{12}c_{15} \left( \delta c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \right. \right. \\
& [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))] \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} \right] \left. \right] [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))] \\
& c_{014} \left[ c_{12}c_{15} \left( \delta c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right] [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - \delta c_2)] \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} \right] \right] \\
& [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - \delta c_2)] + \delta c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \\
& \left[ -c_{16}\delta c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))] \right. \\
& \left. + c_{16}(\delta c_1 + \delta c_8)(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) \right. \\
& \left. - c_{16} \frac{\delta c_3(x_1 + x_2)}{c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} - c_{16}\delta c_7\zeta \right] \\
& \left. - (\delta c_1 + \delta c_8) \left( (c_{014} + \delta c_{14}) \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \right. \right. \\
& [c_{21}x_3 - c_{16}(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))] - (\delta c_1 + \delta c_8)(x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) \\
& \left. + \frac{\delta c_3(x_1 + x_2)}{c_4x_1 + c_5x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} + \delta c_7\zeta \right) \right)
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \delta c_1 (x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) - \frac{\delta c_3 x_1}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} \right. \\
& c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} - \delta c_7 \zeta \left. \frac{\delta c_3 (c_4 x_1 + c_5 x_2 + (c_{06} + \delta c_6)) - c_4 \delta c_3 (x_1 + x_2)}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + (c_{06} + \delta c_6))^2} \right. \\
& c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} + \left( \delta c_8 (x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2)) \right. \\
& \left. - \frac{\delta c_3 x_2}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} \right) \\
& \left. \frac{\delta c_3 (c_4 x_1 + c_5 x_2 + (c_{06} + \delta c_6)) - c_5 \delta c_3 (x_1 + x_2)}{(c_4 x_1 + c_5 x_2 + (c_{06} + \delta c_6))^2} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} \right. \\
& \left. + \frac{\delta c_3 (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} \frac{c_{17} (\delta c_1 + \delta c_8) (x_4 - x_1 - x_2 - (c_{02} + \delta c_2))}{\sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}}} \right. \\
& \left. - \frac{c_{17} \delta c_3 (x_1 + x_2)}{c_4 x_1 + c_5 x_2 + (c_{06} + \delta c_6)} c_{17} \sqrt{x_1 + x_2 + (c_{02} + \delta c_2) - c_{11}} - c_{17} \delta c_7 \zeta \right) \\
\delta \gamma_1 & = (c_{014} \delta c_{19} + \delta c_{14} c_{019}) \frac{c_{21}}{c_{20} \zeta} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] \\
\phi_2 & = c_9^2 x_3 + c_9 c_{10} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] - c_9 c_{13} u \\
& - c_{10} \left( c_{14} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] \right) \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} - \ddot{x}_{3,ref} \\
\gamma_2 & = c_{13} \\
\phi_{02} & = c_{09}^2 x_3 + c_{09} c_{010} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] - c_{09} c_{013} u \\
& - c_{010} \left( c_{014} \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_{02})] \right) \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} - \ddot{x}_{3,ref} \\
\gamma_{02} & = c_{013} \\
\delta \phi_2 & = 2 c_{09} \delta c_9 x_3 + (\delta c_9 c_{010} + c_{09} \delta c_{10}) \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] - (\delta c_9 c_{013} + c_{09} \delta c_{13}) u - \ddot{x}_{3,ref} \\
& - (\delta c_{10} c_{014} + c_{010} \delta c_{14}) \left( \left[ 1 + c_{15} \left[ \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}} - 1 \right] \right] [c_{21} x_3 - c_{16} (x_4 - x_1 - x_2 - c_2)] \right) \left( \frac{x_4}{c_{11}} \right)^{c_{12}-1} \\
\delta \gamma_2 & = \delta c_{13}
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= d_1 \left[ d_{19} d_{11} (-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right] + d_2 \left[ \frac{-d_{10} \dot{x}_1 - d_{10} \dot{x}_2}{(x_1 + x_2 - d_{10})^2} d_{11} (u_{an} - x_1 - x_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} d_{11} (-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dot{f}(\xi, x) \right] \\
&\quad d_3 \left[ d_{12} d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) - \frac{d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 + d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_6 x_3 \dot{x}_4 - d_8 d_6 x_3 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \right. \\
&\quad \left. \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{14} \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] - d_4 \left[ (1 - d_{12}) d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_6 d_7 x_3 \dot{x}_4 + d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4 - d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 - d_8 d_7 x_4 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{14} \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
&\quad - d_5 \left[ d_{13} d_{17} \frac{-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5}{(x_3 + x_4 + x_5 - d_{17})^2} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) + \frac{d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} (\dot{u}_{ca} - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_6 d_8 x_3 \dot{x}_5 + d_7 d_8 x_4 \dot{x}_5 - d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{14} \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} + \dot{f}(\xi, x) \right] \\
B_{11} &= d_1 d_{19} d_{11} + \frac{d_2 d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} d_{11} \\
B_{12} &= -d_3 d_{12} d_{13} d_{20} - d_4 (1 - d_{12}) d_{13} d_{20} - \frac{d_5 d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} \\
A_2 &= d_3 \left[ d_{12} d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) - \frac{d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 + d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_6 x_3 \dot{x}_4 - d_8 d_6 x_3 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \right. \\
&\quad \left. d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{14} \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] + d_4 \left[ (1 - d_{12}) d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_6 d_7 x_3 \dot{x}_4 + d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4 - d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 - d_8 d_7 x_4 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{14} \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
&\quad + d_5 \left[ d_{13} d_{17} \frac{-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5}{(x_3 + x_4 + x_5 - d_{17})^2} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) + \frac{d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} (\dot{u}_{ca} - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_6 d_8 x_3 \dot{x}_5 + d_7 d_8 x_4 \dot{x}_5 - d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{14} \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} + \dot{f}(\xi, x) \right] \\
B_{22} &= d_3 d_{12} d_{13} d_{20} + d_4 (1 - d_{12}) d_{13} d_{20} + \frac{d_5 d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}}
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
A_{10} &= d_{01} \left[ d_{19} d_{011} (-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right] + d_{02} \left[ \frac{-d_{10} \dot{x}_1 - d_{10} \dot{x}_2}{(x_1 + x_2 - d_{10})^2} d_{011} (u_{an} - x_1 - x_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} d_{011} (-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dot{f}(\xi, x) \right] \\
&\quad d_{03} \left[ d_{12} d_{013} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) - \frac{d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 + d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_6 x_3 \dot{x}_4 - d_8 d_6 x_3 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \right. \\
&\quad \left. d_{014} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{014} \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2 \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] - d_{04} \left[ (1 - d_{12}) d_{013} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_6 d_7 x_3 \dot{x}_4 + d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4 - d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 - d_8 d_7 x_4 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{014} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{014} \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2 \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
&\quad - d_{05} \left[ d_{013} d_{17} \frac{-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5}{(x_3 + x_4 + x_5 - d_{17})^2} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) + \frac{d_{013} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} (\dot{u}_{ca} - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_6 d_8 x_3 \dot{x}_5 + d_7 d_8 x_4 \dot{x}_5 - d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{014} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{014} \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2 \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} + \dot{f}(\xi, x) \right] \\
B_{110} &= d_{01} d_{19} d_{011} + \frac{d_{02} d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} d_{011} \\
B_{120} &= -d_{03} d_{12} d_{013} d_{20} - d_{04} (1 - d_{12}) d_{013} d_{20} - \frac{d_{05} d_{013} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} \\
A_{20} &= d_{03} \left[ d_{12} d_{013} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) - \frac{d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 + d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_6 x_3 \dot{x}_4 - d_8 d_6 x_3 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \right. \\
&\quad \left. d_{014} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{014} \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2 \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] + d_{04} \left[ (1 - d_{12}) d_{013} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_6 d_7 x_3 \dot{x}_4 + d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4 - d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 - d_8 d_7 x_4 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{014} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{014} \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2 \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
&\quad + d_{05} \left[ d_{013} d_{17} \frac{-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5}{(x_3 + x_4 + x_5 - d_{17})^2} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) + \frac{d_{013} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} (\dot{u}_{ca} - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_6 d_8 x_3 \dot{x}_5 + d_7 d_8 x_4 \dot{x}_5 - d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{014} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
&\quad \left. - d_{014} \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2 \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} + \dot{f}(\xi, x) \right] \\
B_{220} &= d_{03} d_{12} d_{013} d_{20} + d_{04} (1 - d_{12}) d_{013} d_{20} + \frac{d_{05} d_{013} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}}
\end{aligned}$$

(27)



$$\begin{aligned}
\delta A_1 = & \delta d_1 \left[ d_{19} d_{11} (-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right] + \delta d_2 \left[ \frac{-d_{10} \dot{x}_1 - d_{10} \dot{x}_2}{(x_1 + x_2 - d_{10})^2} d_{11} (u_{an} - x_1 - x_2) \right. \\
& + \left. \frac{d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} d_{11} (-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dot{f}(\xi, x) \right] \\
& d_{01} \left[ d_{19} \delta d_{11} (-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right] + d_{02} \left[ \frac{-d_{10} \dot{x}_1 - d_{10} \dot{x}_2}{(x_1 + x_2 - d_{10})^2} \delta d_{11} (u_{an} - x_1 - x_2) \right. \\
& + \left. \frac{d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} \delta d_{11} (-\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right] \\
& - \delta d_3 \left[ d_{12} d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) - \frac{d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 + d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_6 x_3 \dot{x}_4 - d_8 d_6 x_3 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \right. \\
& d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \\
& - d_{14} \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \left. - \delta d_4 \left[ (1 - d_{12}) d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \right. \\
& - \left. \frac{d_6 d_7 x_3 \dot{x}_4 + d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4 - d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 - d_8 d_7 x_4 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
& \left. - d_{14} \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
& - \delta d_5 \left[ d_{13} d_{17} \frac{-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5}{(x_3 + x_4 + x_5 - d_{17})^2} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) + \frac{d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} (\dot{u}_{ca} - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
& - \left. \frac{d_6 d_8 x_3 \dot{x}_5 + d_7 d_8 x_4 \dot{x}_5 - d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
& - d_{14} \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} + \dot{f}(\xi, x) \left. - d_{03} \left[ d_{12} \delta d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \right. \\
& - \left. \frac{d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 + d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_6 x_3 \dot{x}_4 - d_8 d_6 x_3 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \delta d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
& \left. - \delta d_{14} \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] - d_{04} \left[ (1 - d_{12}) \delta d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
& - \left. \frac{d_6 d_7 x_3 \dot{x}_4 + d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4 - d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 - d_8 d_7 x_4 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \delta d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
& \left. - \delta d_{14} \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
& - d_{05} \left[ \delta d_{13} d_{17} \frac{-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5}{(x_3 + x_4 + x_5 - d_{17})^2} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) \right. \\
& + \frac{\delta d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} (\dot{u}_{ca} - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) - \frac{d_6 d_8 x_3 \dot{x}_5 + d_7 d_8 x_4 \dot{x}_5 - d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \\
& \left. \delta d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} - \delta d_{14} \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
\delta B_{11} = & \delta d_1 d_{19} d_{011} + d_{01} d_{19} \delta d_{11} + \delta d_1 d_{19} \delta d_{11} + \frac{\delta d_2 d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} d_{011} \\
& + \frac{d_{02} d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} \delta d_{11} + \frac{\delta d_2 d_{10}}{x_1 + x_2 - d_{10}} \delta d_{11} \\
\delta B_{12} = & -\delta d_3 d_{12} d_{013} d_{20} - d_{03} d_{12} \delta d_{13} d_{20} - \delta d_3 d_{12} \delta d_{13} d_{20} - \delta d_4 (1 - d_{12}) d_{013} d_{20} \\
& - d_{04} (1 - d_{12}) \delta d_{13} d_{20} \\
& - \delta d_4 (1 - d_{12}) \delta d_{13} d_{20} - \frac{\delta d_5 d_{013} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} \\
& - \frac{d_{05} \delta d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} - \frac{\delta d_5 \delta d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}}
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\delta A_2 = & \delta d_3 \left[ d_{12} d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) - \frac{d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 + d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_6 x_3 \dot{x}_4 - d_8 d_6 x_3 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \right. \\
& d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \\
& \left. - d_{14} \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] + \delta d_4 \left[ (1 - d_{12}) d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
& \frac{d_6 d_7 x_3 \dot{x}_4 + d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4 - d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 - d_8 d_7 x_4 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \\
& \left. - d_{14} \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
& + \delta d_5 \left[ d_{13} d_{17} \frac{-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5}{(x_3 + x_4 + x_5 - d_{17})^2} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) \right. \\
& \frac{d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} (\dot{u}_{ca} - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \\
& \left. - \frac{d_6 d_8 x_3 \dot{x}_5 + d_7 d_8 x_4 \dot{x}_5 - d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
& \left. - d_{14} \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} + \dot{f}(\xi, x) \right] \\
& + d_{03} \left[ d_{12} \delta d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
& \frac{d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 + d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_6 x_3 \dot{x}_4 - d_8 d_6 x_3 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \delta d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \\
& \left. - \delta d_{14} \frac{d_6 x_3}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] + d_{04} \left[ (1 - d_{12}) \delta d_{13} d_{20} (-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \right. \\
& \frac{d_6 d_7 x_3 \dot{x}_4 + d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4 - d_6 d_7 x_4 \dot{x}_3 - d_8 d_7 x_4 \dot{x}_5}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \delta d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \\
& \left. - \delta d_{14} \frac{d_7 x_4}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
& + d_{05} \left[ \delta d_{13} d_{17} \frac{-\dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5}{(x_3 + x_4 + x_5 - d_{17})^2} (u_{ca} - x_3 - x_4 - x_5) \right. \\
& \frac{\delta d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} (\dot{u}_{ca} - \dot{x}_3 - \dot{x}_4 - \dot{x}_5) \\
& \left. - \frac{d_6 d_8 x_3 \dot{x}_5 + d_7 d_8 x_4 \dot{x}_5 - d_6 d_8 x_5 \dot{x}_3 - d_7 d_8 x_5 \dot{x}_4}{(d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5)^2} \delta d_{14} \sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}} \right. \\
& \left. - \delta d_{14} \frac{d_8 x_5}{d_6 x_3 + d_7 x_4 + d_8 x_5} \frac{\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5}{2\sqrt{x_3 + x_4 + x_5 - d_{15}}} \right] \\
\delta B_{22} = & \delta d_3 d_{12} d_{013} d_{20} + d_{03} d_{12} \delta d_{13} d_{20} + \delta d_3 d_{12} \delta d_{13} d_{20} + \delta d_4 (1 - d_{12}) d_{013} d_{20} \\
& + d_{04} (1 - d_{12}) \delta d_{13} d_{20} + \delta d_4 (1 - d_{12}) \delta d_{13} d_{20} \\
& + \frac{\delta d_5 d_{013} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} + \frac{d_{05} \delta d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}} + \frac{\delta d_5 \delta d_{13} d_{17}}{x_3 + x_4 + x_5 - d_{17}}
\end{aligned} \tag{29}$$

TABLE .2: Valeur nominale des paramètres de la simulation

Symbole	Paramètre	Valeur
n	nombre de cellules de la PàC	90
R	constante universelle de gaz	8,314 J/(mol.K)
R <sub>a</sub>	constante universelle d'air	286,9 J/(kg.K)
R <sub>O<sub>2</sub></sub>	constante d'oxygène	259,8 J/(kg.K)
R <sub>H<sub>2</sub></sub>	constante d'hydrogène	4124,3 J/(kg.K)
R <sub>N<sub>2</sub></sub>	constante d'azote	296,8 J/(kg.K)
R <sub>v</sub>	constante de vapeur d'eau	461,5 J/(mol.K)
p <sub>atm</sub>	pression atmosphérique	1,01325 10 <sup>5</sup> Pa
T <sub>atm</sub>	température ambiante	298,15 K
T <sub>fc</sub>	température de la PàC	353,15 K
F	constante de Faraday	96485 C/mol
M <sub>a</sub>	masse molaire d'air	28,9644 10 <sup>-3</sup> kg/mol
M <sub>O<sub>2</sub></sub>	masse molaire d'oxygène	32 10 <sup>-3</sup> kg/mol
M <sub>N<sub>2</sub></sub>	masse molaire d'azote	28 10 <sup>-3</sup> kg/mol
M <sub>H<sub>2</sub></sub>	masse molaire d'hydrogène	2 10 <sup>-3</sup> kg/mol
M <sub>v</sub>	masse molaire de vapeur	18,02 10 <sup>-3</sup> kg/mol
C <sub>D</sub>	coefficient de décharge du collecteur	0,0083
A <sub>T</sub>	section du collecteur	0,00138 m <sup>2</sup>
γ	rapport des chaleurs spécifiques	1,4
J <sub>cp</sub>	inertie du moto-compresseur	671,9 10 <sup>-5</sup> kg.m <sup>2</sup>
f	frottement du moteur	0,00136 V/(rad/s)
k <sub>t</sub>	constante du moteur	0,31 N.m/A
C <sub>p</sub>	coefficient de la chaleur spécifique à pression constante	1004 J/(kg.K)
η <sub>cm</sub>	rendement du moteur	98%
V <sub>ca</sub>	volume de la cathode	0,0015 m <sup>3</sup>
V <sub>sm</sub>	volume du collecteur d'admission	0,003 m <sup>3</sup>
V <sub>an</sub>	volume de l'anode	0,0005 m <sup>3</sup>
V <sub>cpr/tr</sub>	volume comprimé par tour	5 10 <sup>-4</sup> m <sup>3</sup> /tr
k <sub>ca,in</sub>	constante d'orifice à l'entrée de la cathode	0,3629 10 <sup>-5</sup> kg/(Pa.s)
k <sub>ca,out</sub>	constante d'orifice à la sortie de la cathode	0,945 10 <sup>-4</sup> kg/(Pa.s)
k <sub>an,in</sub>	constante d'orifice à l'entrée de l'anode	0,21 10 <sup>-5</sup> kg/(Pa.s)
ρ <sub>a</sub>	densité d'air	1,23 kg/m <sup>3</sup>
x <sub>O<sub>2</sub>,ca,in</sub>	fraction massique d'oxygène	0,23



---

---

## *Bibliographie*

---

---

- [1] M. A.R. Sadiq Al-Baghdadi. Modelling of proton exchange membrane fuel cell performance based on semi-empirical equations. *Renewable Energy*, 30(10) :1587 – 1599, 2005.
- [2] J. C. Amphlett, R. M. Baumert, R. F. Mann, B. A. Peppley, and P. R. Roberge. Performance modeling of the ballard mark IV solid polymer electrolyte fuel cell. *Journal of The Electrochemical Society*, 142 :9 – 15, 1995.
- [3] J.C. Amphlett, R.M. Baumert, R.F. Mann, B.A. Peppley, P.R. Roberge, and A. Rodrigues. Parametric modelling of the performance of a 5-kW proton-exchange membrane fuel cell stack. *Journal of Power Sources*, 49(1-3) :349 – 356, 1994.
- [4] A.J. Appleby. Fuel cell handbook. 1988.
- [5] K.B. Ariyur and M. Krstic. *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. Wiley, 2003.
- [6] R. Atan and W.A. Najmi W.M. Temperature profiles of an air-cooled pem fuel cell stack under active and passive cooling operation. *Procedia Engineering*, 41(0) :1735 – 1742, 2012.
- [7] C. Bao, M. Ouyang, and B. Yi. Modeling and control of air stream and hydrogen flow with recirculation in a PEM fuel cell system – I. control-oriented modeling. *International Journal of Hydrogen Energy*, 31(13) :1879 – 1896, 2006.
- [8] C. Bao, M. Ouyang, and B. Yi. Modeling and control of air stream and hydrogen flow with recirculation in a PEM fuel cell system – II. linear and adaptive nonlinear control. *International Journal of Hydrogen Energy*, 31(13) :1897 – 1913, 2006.

- [9] F Barbir. *PEM Fuel Cells : Theory and Practice*. Elsevier, 2005.
- [10] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant, and E. Usai. On second order sliding mode controllers. *Variable Structure Systems, sliding mode and nonlinear control*, 247 :329–350, 1999.
- [11] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Pisano, and E. Usai. Adaptive reduction of the control effort in chattering-free sliding-mode control of uncertain nonlinear systems. *Applied Mathematics and computer science*, 8(1) :51–71, 1998.
- [12] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2) :241–246, 1998.
- [13] G. Bartolini, A. Pisano, E. Punta, and E. Usai. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control*, 76(9-10) :875–892, 2003.
- [14] G Bartolini, A Pisano, and E Usai. Variable structure control of nonlinear sampled data systems by second order sliding modes. In K.D. Young and Ü. Özgüner, editors, *Variable structure systems, sliding mode and nonlinear control*, volume 247, pages 43–67. Springer London, 1999.
- [15] M. Becherif, D. Hissel, S. Gaagat, and M. Wack. Three order state space modeling of proton exchange membrane fuel cell with energy function definition. *Journal of Power Sources*, 195(19) :6645 – 6651, 2010.
- [16] D.M. Bernardi and M.W. Verbrugge. A mathematical model of the solid-polymer-electrolyte fuel cell. *Journal of The Electrochemical Society*, 139(9) :2477–2491, 1992.
- [17] D. Bevers, M. Wohr, K. Yasuda, and K. Oguro. Simulation of a polymer electrolyte fuel cell electrode. *Journal of Applied Electrochemistry*, 27(11) :1254–1264, 1997.
- [18] B. Blunier. *Modélisation de moto-compresseurs en vue de la gestion de l'air dans les systèmes pile à combustible : simulation et validation expérimentale*. PhD thesis, University of Technology Belfort Montbéliard, 2007.
- [19] I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano, and E. Usai. Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(11) :2085–2102, 2007.

- [20] A.G. Bondarev, S.A. Bondarev, N.E. Kostyleva, and V.I. Utkin. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Automation and remote control*, 46(6) :679–684, 1985.
- [21] A.M. Borbely and J.F. Kreider. *Distributed generation : the power paradigm for the new millennium*. CRC, 2001.
- [22] C. Bordons, A. Arce, and A.J. DelReal. Constrained predictive control strategies for PEM fuel cells. In *American Control Conference, Minneapolis, USA*, pages 2486–2491, 2006.
- [23] L. Boulon, M.C. Pera, D. Hissel, A. Bouscayrol, and P. Delarue. Energetic macroscopic representation of a fuel cell-supercapacitor system. In *IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference, 2007. VPPC 2007*, pages 290 –297, 2007.
- [24] Felix N Büchi and Supramaniam Srinivasan. Operating proton exchange membrane fuel cells without external humidification of the reactant gases fundamental aspects. *Journal of Electrochemical Society*, 144(8) :2767–2772, 1997.
- [25] J.A. Burton and Alan S.I. Zinober. Continuous approximation of variable structure control. *International journal of systems science*, 17(6) :875–885, 1986.
- [26] S. Caux, W. Hankache, M. Fadel, and D. Hissel. {PEM} fuel cell model suitable for energy optimization purposes. *Energy Conversion and Management*, 51(2) :320 – 328, 2010.
- [27] S. Caux, J. Lachaize, M. Fadel, P. Shott, and L. Nicod. Modelling and control of a fuel cell system and storage elements in transport applications. *Journal of Process Control*, 15(4) :481 – 491, 2005.
- [28] Y.A. Chang and S.J. Moura. Air flow control in fuel cell systems : An extremum seeking approach. In *American Control Conference, Saint Louis, USA*, pages 1052–1059, 2009.
- [29] D. Chen, W. Li, and H. Peng. An experimental study and model validation of a membrane humidifier for PEM fuel cell humidification control. *Journal of Power Sources*, 180(1) :461 – 467, 2008.
- [30] D. Chrenko, M.C. Péra, and D. Hissel. Inversion-based control of a pem fuel cell system using energetic macroscopic representation. *ASME Journal of Fuel Cell Science and Technology*, 2008.

- [31] J.M. Cunningham, M.A. Hoffman, R.M. Moore, and D.J. Friedman. Requirements for a flexible and realistic air supply model for incorporation into a fuel cell vehicle (FCV) system simulation. *SAE transactions*, 108(6, Part 2) :3191–3196, 2000.
- [32] D. Das and T.N. Veziroglu. Hydrogen production by biological processes : a survey of literature. *International Journal of Hydrogen Energy*, 26(1) :13 – 28, 2001.
- [33] A. Dávila, J.A. Moreno, and L. Fridman. Variable gains super-twisting algorithm : a lyapunov based design. In *American Control Conference (ACC), 2010*, pages 968–973, 2010.
- [34] D. DeHaan and M. Guay. Extremum-seeking control of state-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 41(9) :1567 – 1574, 2005.
- [35] M.D. Di Benedetto and P. Lucibello. Inversion of nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(8) :1259 –1264, 1993.
- [36] D.L. Douglas and H.A. Liebhafsky. Fuel cells : History, operation, and applications. *Physics Today*, 13 :26, 1960.
- [37] Sandip Dutta, Sirivatch Shimpalee, and J.W. Van Zee. Numerical prediction of mass-exchange between cathode and anode channels in a PEM fuel cell. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(11) :2029–2042, 2001.
- [38] S. Emelyanov. *Variable Structure Control Systems*. Nauka, Moscow, 1957.
- [39] S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, and A. Levant. Higher-order sliding modes in control systems. *Differential Equations*, 29(11) :1627–1647, 1993.
- [40] S.V. Emel’Yanov, S.K. Korovin, and L.V. Levantovskii. Higher-order sliding modes in binary control systems. In *Soviet Physics Doklady*, volume 31, pages 291–293, 1986.
- [41] M. fonk, D. Wetter, D. Masten, and A. Bosco. PEM fuel cell system solutions for transportation. *SAE International paper 2000-01-0373*, 2000.
- [42] G. Fontes, C. Turpin, R. Saisset, T. Meynard, and S. Astier. Interactions between fuel cells and power converters influence of current harmonics on a fuel cell stack. In *2004 IEEE 35th Annual Power Electronics Specialists Conference*, volume 6, pages 4729 – 4735, 2004.



- [43] L. Fridman and A. Levant. Higher order sliding modes. In Wilfrid Perruquetti and Jean-Pierre Barbot, editors, *Sliding mode control in engineering*, volume 11, pages 53–102. CRC Press, 2002.
- [44] H. Görgün, M. Arcaç, and F. Barbir. An algorithm for estimation of membrane water content in PEM fuel cells. *Journal of Power Sources*, 157(1) :389–394, 2006.
- [45] R. Genre-Grandpierre. *Alimentation en air d’une pile à combustible : Conception du système, caractérisation, modélisation*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, Centre Régional Franche- Comté, FEMTO-ST/ENISYS - FCLAB, 2008.
- [46] B. Gou, B. Diong, and W. Ki Na. *Fuel cells : modeling, control, and applications*. CRC, 2009.
- [47] W. Gracia-Gabin, F. Dorado, and C. Bordons. Real time implementation of a sliding mode controller for air supply on a PEM fuel cell. *Journal of Process Control*, 20(3) :325–336, 2010.
- [48] W. Grove. A small voltaic battery of great energy. *Philosophical Magazine*, 15 :287–293, 1839.
- [49] J.K. Gruber, C. Bordons, and F. Dorado. Nonlinear control of the air feed of a fuel cell. In *American Control Conference, Seattle, Washington, USA*, pages 1121–1126, 2008.
- [50] J.K Gruber, C. Bordons, and A. Oliva. Nonlinear MPC for the airflow in a PEM fuel cell using a volterra series model. *Control Engineering Practice*, 20(2) :205–217, 2012.
- [51] J.K. Gruber, M. Doll, and C. Bordons. Design and experimental validation of a constrained MPC for the air feed of a fuel cell. *Control Engineering Practice*, 17(8) :874 – 885, 2009.
- [52] M. Guay and T. Zhang. Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties. *Automatica*, 39 :1283–1293, 2003.
- [53] V. Gurau, H. Liu, and S. Kakac. Mathematical model for proton exchange membrane fuel cells. *Proceedings of the 1998 ASME advanced Energy Systems Division*, pages 205 – 214, 1998.

- [54] L. Guzzella. Control oriented modelling of fuel-cell based vehicles. In *Presentation in NSF Workshop on the Integration of Modeling and Control for Automotive systems*, 1999.
- [55] M. Harmouche, S. Laghrouche, and Y. Chitour. Robust and adaptive higher order sliding mode controllers. In *2012 IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6436–6441, 2012.
- [56] M. Harmouche, I. Matraji, S. Laghrouche, and M. El-Bagdouri. Homogeneous higher order sliding mode control for PEM fuel cell. In *12th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pages 161 –166, 2012.
- [57] A. Haryanto, S. Fernando, N. Murali, and S. Adhikari. Current status of hydrogen production techniques by steam reforming of ethanol : a review. *Energy & Fuels*, 19(5) :2098–2106, 2005.
- [58] C.J. Hatziadoniu, A.A. Lobo, F. Pourboghrat, and M. Daneshdoost. A simplified dynamic model of grid-connected fuel-cell generators. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 17(2) :467 – 473, 2002.
- [59] A. Hernandez, D. Hissel, and R. Outbib. Electric equivalent model for a hydrogen fuel cell PEFC. In *Electrimacs 2005 Conference, Hammamet, Tunisia*, 2005.
- [60] J.B. Heywood. *Internal combustion engine fundamentals*. 1988.
- [61] Y.J. Huang, T.C. Kuo, and S.H. Chang. Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*,, 38(2) :534–539, 2008.
- [62] EG&G Technical Services Inc. *Fuel cell handbook*. US department of Energy, Morgantown, West Virginia, sixth edition, 2002.
- [63] EG&G Technical Services Inc. *Fuel cell handbook*. US department of Energy Office of fossil Energy, Morgantown, West Virginia, 7th edition, 2004.
- [64] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, London, 1995.
- [65] S. Jemei, D. Hissel, M.-C. Pera, and J.M. Kauffmann. A new modeling approach of embedded fuel-cell power generators based on artificial neural network. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(1) :437 –447, 2008.

- [66] J.P. Jensen, A.F. Kristensen, S.C. Sorenson, N. Houbak, and E. Hendricks. Mean value modeling of a small turbocharged diesel engine. In *SAE International 910070*, 1991.
- [67] K. Jost. *Fuel cell concepts and technology*. Automotive engineering international, 2000.
- [68] A.Y. Karnik, A.G. Stefanopoulou, and J. Sun. Water equilibria and management using a two-volume model of a polymer electrolyte fuel cell. *Journal of Power Sources*, 164(2) :590–605, 2007.
- [69] A.Y. Karnik and J. Sun. Modeling and control of an ejector based anode recirculation system for fuel cells. In *Third International Conference on Fuel Cell Science, Engineering and Technology*, 2005.
- [70] A.Y. Karnik and J. Sun. Humidity and pressure regulation in a PEM fuel cell using a gain-scheduled static feedback controller. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(2) :283 – 297, 2009.
- [71] A. Kazim. Introduction of PEM fuel-cell vehicles in the transportation sector of the United Arab Emirates. *Applied Energy*, 74(1-2) :125 – 133, 2003.
- [72] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd edition. Prentice Hall, New York, 2002.
- [73] J. Kim, S.M. Lee, S. Srinivasan, and C.E. Chamberlin. Modeling of proton exchange membrane fuel cell performance with an empirical equation. *Journal of The Electrochemical Society*, 142(8) :2670–2674, 1995.
- [74] W. KiNa and B. Gou. Feedback linearization based nonlinear control for PEM fuel cells. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 23(1) :179 – 190, 2008.
- [75] J. Kochalummoottil, Y. B Shtessel, J. A Moreno, and L. Fridman. Adaptive twist sliding mode control : A lyapunov design. In *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*,, pages 7623–7628, 2011.
- [76] S. Meher Kotay and D. Das. Biohydrogen as a renewable energy resource—prospects and potentials. *International Journal of Hydrogen Energy*, 33(1) :258 – 263, 2008.
- [77] M. Kristic and H.H. Wang. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36 :595–601, 2000.

- [78] C. Kunusch, P. Puleston, and M. Mayosky. *Sliding-Mode Control of PEM Fuel Cells*. Springer, 2012.
- [79] C. Kunusch, P.F Puleston, M. Mayosky, and J. Riera. Sliding mode strategy for PEM fuel cell stacks breathing control using a super twisting algorithm. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(1) :167 – 174, 2009.
- [80] S. Laghrouche. *Commande par modes glissants d'ordre supérieur : théorie et application*. PhD thesis, L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes, 2004.
- [81] S. Laghrouche, I. Matraji, F.S. Ahmed, S. Jemei, and M. Wack. Pressure control in a PEM fuel cell via second order sliding mode. *In press, International Journal of Hydrogen Energy*.
- [82] S. Laghrouche, F. Plestan, and A. Glumineau. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode. *Automatica*, 43(3) :531–537, 2007.
- [83] S. Laghrouche, F. Plestan, A. Glumineau, and R. Boisliveau. Robust second order sliding mode control for a permanent magnet synchronous motor. In *IEEE American Control Conference*, volume 5, pages 4071 – 4076, 2003.
- [84] J. Larminie and A. Dicks. *Fuel Cell Systems Explained*. Wiley, 2002.
- [85] F. Laurencelle, R. Chahine, J. Hamelin, K. Agbossou, M. Fournier, T.K. Bose, and A. Laperriere. Characterization of a ballard mk5-e proton exchange membrane fuel cell stack. *Fuel Cells*, 1(1) :66–71, 2001.
- [86] J.H. Lee, T.R. Lalk, and A.J. Appleby. Modeling electrochemical performance in large scale proton exchange membrane fuel cell stacks. *Journal of Power Sources*, 70(2) :258 – 268, 1998.
- [87] T.J. Leo, J.A. Durango, and E. Navarro. Exergy analysis of PEM fuel cells for marine applications. *Energy*, 35(2) :1164 – 1171, 2010.
- [88] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6) :1247–1263, 1993.
- [89] A. Levant. Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9) :1447–1451, 2001.
- [90] A. Levant. Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43(4) :576–586, 2007.

- [91] A. Levant and L. Fridman. Robustness issues of 2-sliding mode control. In *Variable Structure Systems : From Principles to Implementation, IEE, UK*, pages 129–153, 2004.
- [92] F.L. Lewis. *Optimal Control*. Wiley, New York, 1986.
- [93] Q. Li, W. Chen, Y. Wang, J. Jia, and M. Han. Nonlinear robust control of proton exchange membrane fuel cell by state feedback exact linearization. *Journal of Power Sources*, 194(1) :338–348, 2009.
- [94] R.F. Mann, J.C. Amphlett, M.A.I. Hooper, H. M. Jensen, B.A. Peppley, and P.R. Roberge. Development and application of a generalised steady-state electrochemical model for a pem fuel cell. *Journal of Power Sources*, 86(1-2) :173 – 180, 2000.
- [95] I. Matraji, S. Laghrouche, S. Jemei, and M. Wack. Load governor for pem fuel cell oxygen starvation and compressor protection : a constrained extremum seeking approach. In *5th International Conference on Fundamentals and Development of Fuel Cells, FDFC2013, Karlsruhe, Germany.*, 2013.
- [96] I. Matraji, S. Laghrouche, S. Jemei, and M. Wack. Robust control of the PEM fuel cell air-feed system via sub-optimal second order sliding mode. *Applied Energy*, 104 :945 – 957, 2013.
- [97] I. Matraji, S. Laghrouche, and M. Wack. Second order sliding mode control for PEM fuel cells. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2765 –2770, 2010.
- [98] I. Matraji, S. Laghrouche, and M. Wack. Cascade control of the moto-compressor of a PEM fuel cell via second order sliding mode. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, pages 633 –638, 2011.
- [99] I. Matraji, S. Laghrouche, and M. Wack. Pressure control in a PEM fuel cell via second order sliding mode. *International Journal of Hydrogen Energy*, 37(21) :16104 – 16116, 2012.
- [100] I. Matraji, J. Liu, S. Laghrouche, and M. Wack. Adaptive second order sliding mode control of PEM fuel cell air feed system. In *51st IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4133 –4138, 2012.

- [101] B.A. McCain. *Modeling and analysis for control of reactant and water distributions in fuel cells*. PhD thesis, Department of mechanical engineering, The university of Michigan, 2008.
- [102] D.A. McKay, J.B. Siegel, W. Ott, and A.G. Stefanopoulou. Parameterization and prediction of temporal fuel cell voltage behavior during flooding and drying conditions. *Journal of Power Sources*, 178(1) :207 – 222, 2008.
- [103] Paul Moraal and Ilya Kolmanovsky. Turbocharger modeling for automotive control applications. *SAE Technical Paper*, (1999-01-0908), 1999.
- [104] J.A. Moreno and M. Osorio. A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [105] Ahmed Neffati, Mouloud Guemri, Stéphane Caux, and Maurice Fadel. Energy management strategies for multi source systems. *Electric Power Systems Research*, 102(0) :42 – 49, 2013.
- [106] T.V. Nguyen and R.E. White. A water and heat management model for proton-exchange-membrane fuel cells. *Journal of the Electrochemical Society*, 140(8) :2178–2186, 1993.
- [107] A. Niknezhadi, M. Allué-Fantova, C. Kunusch, and C. Ocampo-Martínez. Design and implementation of LQR/LQG strategies for oxygen stoichiometry control in PEM fuel cells based systems. *Journal of Power Sources*, 196(9) :4277–4282, 2011.
- [108] Ryan P O’Hayre, Suk-Won Cha, Whitney Colella, and Fritz B Prinz. *Fuel cell fundamentals*. John Wiley & Sons New York ;, 2006.
- [109] J. OŠRourke, M. Arcak, and M. Ramani. Real-time optimization of net power in a fuel cell system. *Journal of Power Sources*, 187(2) :422 – 430, 2009.
- [110] P.Y. Papalambros and D.J. Wilde. *Principles of Optimal Design : Modeling and Computation 2nd ed.* New York, NY : Cambridge University Press, 2007, ch. 7.
- [111] M. Paquin and L.G. Fréchette. Understanding cathode flooding and dry-out for water management in air breathing PEM fuel cells. *Journal of Power Sources*, 180(1) :440 – 451, 2008.
- [112] G. Park and Z. Gajic. Sliding mode control of a linearized polymer electrolyte membrane fuel cell model. *Journal of Power Sources*, 212 :226–232, 2012.

- [113] A. Pisano, A. Davila, L. Fridman, and E. Usai. Cascade control of PM DC drives via second-order sliding-mode technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(11) :3846–3854, 2008.
- [114] S. Pischinger, O.r Lang, and H. Kindl. Development of fuel cell system air management utilizing HIL tools. 2002.
- [115] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Bregeault, and A. Poznyak. New methodologies for adaptive sliding mode control. *International journal of control*, 83(9) :1907–1919, 2010.
- [116] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Brégeault, and A. Poznyak. Sliding mode control with gain adaptation—application to an electropneumatic actuator. *Control Engineering Practice*, 21(5) :679 – 688, 2013.
- [117] J.W. Pratt, L.E. Klebanoff, K.Munoz-Ramos, A.A. Akhil, D.B. Curgus, and B.L. Schenkman. Proton exchange membrane fuel cells for electrical power generation on-board commercial airplanes. *Applied Energy*, 101 :776 – 796, 2013.
- [118] J. Pukrushpan, A. Stefanopoulou, and H. Peng. *Control of Fuel Cell Power Systems : Principles, Modeling and Analysis and Feedback Design*. Springer, 2004.
- [119] J.T. Pukrushpan, H. Peng, and A.G. Stefanopoulou. Control-oriented modeling and analysis for automotive fuel cell systems. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and control*,, 126(1) :14 – 25, 2004.
- [120] J.T. Pukrushpan, A.G. Stefanopoulou, and Huei Peng. Control of fuel cell breathing. *IEEE Control Systems*,, 24(2) :30 – 46, apr 2004.
- [121] K. Rajashekara. Propulsion system strategies for fuel cell vehicles. *SAE International paper 2000-01-0369*, 2000.
- [122] K. Rajashekara. *Propulsion system strategies for fuel cell vehicles*. SAE International, 2000.
- [123] S. Rodatz, G. Paganelli, and L. Guzzella. Optimizing air supply control of a PEM fuel cell system. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, volume 3, pages 2043 – 2048, 2003.
- [124] Nicolas Romani. *Modélisation et Commande du Système d’Alimentation en Air pour le Module de Puissance d’un Véhicule à Pile à Combustible avec Reformeur Em-*

- barqué. PhD thesis, École Doctorale, Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes, 2007.
- [125] R. Saisset, G. Fontes, C. Turpin, and S. Astier. Bond graph model of a PEM fuel cell. *Journal of Power Sources*, 156(1) :100 – 107, 2006.
- [126] Y. Shtessel, M. Taleb, and F. Plestan. A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller : methodology and application. *Automatica*, 48(5) :759–769, 2012.
- [127] J.B. Siegel, D.A. McKay, and A.G. Stefanopoulou. Modeling and validation of fuel cell water dynamics using neutron imaging. In *American Control Conference*, pages 2573 –2578, 2008.
- [128] D. Singh, D.M. Lu, and N. Djilali. A two-dimensional analysis of mass transport in proton exchange membrane fuel cells. *International Journal of Engineering Science*, 37(4) :431 – 452, 1999.
- [129] H. Sira-Ramirez. Differential geometric methods in variable-structure control. *International Journal of Control*, 48(4) :1359–1390, 1988.
- [130] J. Slotine. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [131] T.E. Springer, T.A. Zawodzinski, and S. Gottesfeld. Polymer electrolyte fuel cell model. *Journal of The Electrochemical Society*, 138 :2334–2342, 1991.
- [132] K. Won Suh. *Modeling, Analysis and control of Fuel Cell Hybrid Power Systems*. PhD thesis, Department of mechanical engineering, The university of Michigan, 2006.
- [133] J. Sun and I.V. Kolmanovsky. Load governor for fuel cell oxygen starvation protection : a robust nonlinear reference governor approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(6) :911 – 920, 2005.
- [134] M. Taleb, A. Levant, and F. Plestan. Pneumatic actuator control : Solution based on adaptive twisting and experimentation. *Control Engineering Practice*, 21(5) :727 – 736, 2013.
- [135] R. Talj, M. Hilaret, and R. Ortega. Second order sliding mode control of the moto-compressor of a PEM fuel cell air feeding system, with experimental validation. In *Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics*, pages 2790 – 2795, 2009.
- [136] R. Talj, D. Hissel, R. Ortega, M. Becherif, and M. Hilaret. Experimental validation of a PEM fuel-cell reduced-order model and a moto-compressor higher order sliding-



- mode control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 57(6) :1906 – 1913, 2010.
- [137] Reine Talj. *Modélisation et commandes non linéaires du système d'air des piles à combustible type PEM (Proton Exchange Membrane)*. PhD thesis, Université Paris-Sud 11, L2S, LGEP, 2009.
- [138] Y. Tan, D. Nežić, and I. Mareels. On the choice of dither in extremum seeking systems : A case study. *Automatica*, 44(5) :1446 – 1450, 2008.
- [139] S. Um, C.Y. Wang, and K.S. Chenb. Computational fluid dynamics modeling of proton exchange membrane fuel cells. *Journal of The Electrochemical Society*, 147(12) :4485–4493, 2000.
- [140] V.I. Utkin. *Sliding Modes their application in variable structure systems*. Mir, Moscow, 1978.
- [141] V.I. Utkin. *Sliding Mode Control and Optimization*. Springer, 1992.
- [142] V.I. Utkin, J. Gulder, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electro- mechanical Systems*. Taylor & Francis, London, 1999.
- [143] A. Vahidi, I. Kolmanovsky, and A. Stefanopoulou. Constraint handling in a fuel cell system : A fast reference governor approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(1) :86–98, 2007.
- [144] A. Vahidi, A. Stefanopoulou, and H. Peng. Current management in a hybrid fuel cell power system : A model-predictive control approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(6) :1047 –1057, 2006.
- [145] A. Wiartalla, S. Pischinger, W. Bornscheuer, K. Fieweger, and J. Ogrzewalla. Compressor/expander units for fuel cell systems. *SAE Paper, Fuel Cell Power for Transportation*, pages 149–153, 2000.
- [146] Z. Williamson, D. Kim, D.K. Chun, T. Lee, and C. Squibb. Experimental evaluation of cell temperature effects on miniature, air-breathing PEM fuel cells. *Applied Thermal Engineering*, 31(17,18) :3761 – 3767, 2011.
- [147] X.D. Xue, K.W.E. Cheng, and D. Sutanto. Unified mathematical modelling of steady-state and dynamic voltage-current characteristics for PEM fuel cells. *Electrochimica acta*, 52(3) :1135–1144, 2006.

- [148] W. Yang, B. Bates, N. Fletcher, and R. Pow. Control challenges and methodologies in fuel cell vehicle development. *SAE International paper 98C054*, 1998.

## Résumé :

La pile à combustible (PàC) est un dispositif qui produit de l'électricité à partir d'une réaction chimique entre l'hydrogène et l'oxygène. Le système à PàC nécessite un certain nombre d'auxiliaires pour fonctionner. Pour cela, un système de commande est indispensable pour optimiser la performance de la PàC.

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à trois types de problématiques de commande de la PàC. La première est celle de l'optimisation de la puissance délivrée par la PàC en contrôlant le rapport d'excès d'oxygène via le débit d'air du compresseur ; en prenant en compte les variations paramétriques, les incertitudes et les perturbations externes. Ce problème est résolu en utilisant la commande non-linéaire par mode glissant d'ordre 2. Deux types d'algorithmes sont synthétisés, l'algorithme du mode glissant d'ordre 2 sous-optimal et l'algorithme du *Super Twisting* adaptatif. Les performances de ces lois de commande ont été validées grâce à un simulateur *Hardware In Loop*. La deuxième concerne la maximisation de la puissance nette fournie par la pile, tout en maintenant le fonctionnement du compresseur centrifuge dans sa zone nominale et tout en évitant le manque d'oxygène à la cathode, lors des variations rapides de charge. La solution proposée pour résoudre ce problème est un gestionnaire de charge qui consiste en un filtre à coefficient de filtrage ajustable. Deux approches d'ajustement de ce coefficient basées sur la technique de l'*Extremum Seeking* sont appliquées, comparées et validées expérimentalement. La troisième problématique abordée dans cette thèse est celle de la régulation de la différence de pression entre l'anode et la cathode, lors de variations de charge en présence de variations paramétriques et d'incertitudes. Une solution basée sur un contrôleur multi-variable par mode glissant d'ordre 2 associé à une étude de robustesse est proposée.

**Mots clés :** pile à combustible PEM, commande robuste et adaptative par mode glissant d'ordre supérieur, *Hardware In Loop*, contrôle en cascade, gestionnaire de charge, *Extremum Seeking* avec contraintes, régulation des pressions.

## Abstract:

The PEM fuel cell is a device which generates electricity from a chemical reaction between hydrogen and oxygen. The PEM fuel cell requires many ancillaries to operate the system. A control system is needed to optimize the performance of the PEMFC.

This thesis is focused upon three specific control problems related to PEM fuel cell systems. The first problem is the control of the air (oxygen source) entering in the cathode side of fuel cell. The objective is to regulate the oxygen excess ratio in order to maintain the optimum net power output. This problem has been addressed using nonlinear second order sliding mode controllers, which are robust against parametric uncertainty and external disturbance. The SOSM controllers are based on two algorithms: sub-optimal and adaptive Super Twisting. Their performance is validated through Hardware In Loop simulation. The second problem is to maintain the centrifugal compressor in its operating zone, while avoiding the oxygen starvation in the cathode side during rapid load variations. The proposed solution to this problem is a load governor, which is similar to a variable bandwidth first order linear filter. Two adjustment algorithms have been applied for the bandwidth coefficient, based on the Extremum Seeking technique. Their performance has been validated experimentally. The third problem addressed in this thesis is the regulation of the pressure difference between the anode and the cathode during load variations. The control objective is achieved using second order sliding mode MIMO controller, which has been shown to be robust against parametric uncertainty and external disturbance.

**keywords :** PEM Fuel Cell, robust and adaptive second order sliding mode control, Hardware In Loop, cascade control, Load Governor, constrained Extremum Seeking, pressure equalization.

The logo for SPIM (École doctorale SPIM) features a stylized 'S' followed by the letters 'PIM' in a large, white, sans-serif font.

■ École doctorale SPIM - Université de Technologie Belfort-Montbéliard

F - 90010 Belfort Cedex ■ tél. +33 [0]3 84 58 31 39

■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr



