Aix-Marseille Université

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES
E.D.184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
Docteur en Sciences D'AIX-MARSEILLE Université

Spécialité : Mathématiques

sujet :
Continuité des $*$-représentations et opérateurs de Hankel

Réalisée par : **Al Homsi Wael**
sous la direction du : Professeur **EL Hassan Youssfi**
soutenue le 08/11/2013
après avis des rapporteurs :

M. Friedrich Haslinger, University of Vienna
M. Mohamed Zarrabi, Université de Bordeaux 1

devant le jury composé de :

M.	Alexandre Borichev	Aix-Marseille Université	(Examinateur)
M	El Fallah Omar	Université de Rabat, Maroc	(Examinateur)
M.	Friedrich Haslinger	University of Vienna, Austria	(Rapporteur)
M.	El Hassan Youssfi	Aix Marseille Université :	(Directeur)
M.	Mohamed Zarrabi	Université de Bordeaux 1	(Rapporteur)

16 octobre 2013

Aix-Marseille Université

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES
E.D.184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
Docteur en Sciences D'AIX-MARSEILLE Université

Spécialité : Mathématiques

sujet :
Continuité des $*$-représentations et opérateurs de Hankel

Réalisée par : **Al Homsi Wael**
sous la direction du : Professeur **EL Hassan Youssfi**
soutenue le 08/11/2013
après avis des rapporteurs :

M. Friedrich Haslinger, University of Vienna
M. Mohamed Zarrabi, Université de Bordeaux 1

devant le jury composé de :

M.	Alexandre Borichev	Aix-Marseille Université	(Examinateur)
M	El Fallah Omar	Université de Rabat, Maroc	(Examinateur)
M.	Friedrich Haslinger	University of Vienna, Austria	(Rapporteur)
M.	El Hassan Youssfi	Aix Marseille Université :	(Directeur)
M.	Mohamed Zarrabi	Université de Bordeaux 1	(Rapporteur)

Table des matières

0.1 Introduction générale 5

1 Présentation générale **10**
1.1 Fonction définie positive dans un semi-groupe 10
1.1.1 propriétés 10
1.2 Fonctions exponentiellement bornées et définies positives dans un semi-groupe abélien 14
1.3 Problème des moments 16
1.3.1 Introduction 16
1.3.2 Les problèmes faible des moments 19
1.3.3 L'unicité et l'existence des problème faible 19
1.3.4 Les problèmes forts des moments 21
1.3.5 L'unicité du problème fort 21
1.4 Opérateurs de Hankel de symbole anti-holomorphe 23
1.5 Opérateurs d'espaces de Hilbert et classes de Schatten 27
1.5.1 Opérateurs adjoints et théorème spectral 28
1.5.2 Opérateurs compacts 31
1.5.3 Classes de Schatten 33
1.6 Fonction de Macdonald 36
1.6.1 Équation de Bessel 36
1.6.2 Fonction de Bessel 37
1.6.3 L'équation de Bessel modifiée 37
1.6.4 Fonction de Bessel modifiée 38
1.6.5 Les intégrales de fonction de Bessel modifiée d'ordre entier . 38
1.6.6 Généralisation de la méthode de Laplace 39
1.7 Polynômes de Laurent orthogonaux 40

2 $*$-représentation de Semi-Groupes **43**
2.1 Introduction : 43
2.2 Préliminaires 44
2.3 La preuve des principaux résultats : 46
2.4 Applications 49

2.5 Exemples 54

3 Opérateurs de Hankel **56**
3.1 Préliminaires 56
3.2 Symboles anti-méromorphes 60
3.3 Application 66
3.4 Remarques et exemples 74

0.1 Introduction générale

Cette thèse comporte deux parties indépendantes. Nous commençons par un chapitre introductif ayant pour but de rassembler les principaux résultats.
Dans la première partie de ce travail, nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une $*$-représentation d'un semi-groupe topologique commutatif $\mathbb{S}$ soit continue à l'identité e de $\mathbb{S}$.
Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et soit $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ la $\mathcal{C}^*$-algèbre de tous les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ et soit T^* l'adjoint de T, on pose

$$\Re T := \frac{1}{2}(T + T^*) \; et \; ImT := \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Soient S et T deux opérateurs hermitiens. Nous allons écrire $S \leq T$ si

$$(Sx, x) \leq (Tx, x), \quad \text{pour tout x} \in \mathbb{H}.$$

Soit $(\mathbb{S}, +, *)$ un $*$-semi-groupe ; c'est-à-dire, un semi-groupe commutatif $(\mathbb{S}, +)$ d'identité e et d'involution $*$ vérifiant $(s+t)^* = s^* + t^*$ et $(s^*)^* = s$.
On suppose que $\mathbb{S}$ est topologique ; c'est-à-dire que $\mathbb{S}$ est muni d'une topologie qui rend continue l'application $(s,t) \to s + t^*$.
Une $*$-représentation de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ est une application $\varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui satisfait :

$$\varrho(s + t^*) = \varrho(s)(\varrho(t))^* \; et \; \varrho(e) = I.$$

pour tous $s, t \in \mathbb{S}$, où I est l'opérateur identité.
Un $*$-homomorphismes de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ est une application $h : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui satisfait :

$$h(s + t^*) = h(s) + (h(t))^*, \; pour \; tous \; s, t \in \mathbb{S}.$$

On dit que h est hermitien si $h(s^*) = h(s), \;$ pour tout $s \in \mathbb{S}$.
On considère une $*$-représentation de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ et on pose

$$\alpha(s) := \| \varrho(s) \|, \; \text{pour tout s} \in \mathbb{S}.$$

Alors α est une valeur absolue sur $\mathbb{S}$. Et

$$\alpha(e) = 1, \; et \; \alpha(s + t^*) \leq \alpha(s)\alpha(t), \; \text{pour tous s, t} \in \mathbb{S}.$$

On dit qu'une fonction $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ est α-bornée s'il existe une constante positive $\mathcal{C}$ telle que $| \varphi(s) | \leq \mathcal{C}\alpha(s)$ pour tout $s \in \mathbb{S}$.

Un semi-caractère dans $\mathbb{S}$ est une fonction non nulle $\gamma : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ qui satisfait $\gamma(s + t^*) = \gamma(s)\overline{\gamma(t)}$ pour tous $s, t \in \mathbb{S}$. On note par $\mathbb{S}^*$ l'ensemble de tous les semi-caractères dans $\mathbb{S}$ et par $\Gamma = \Gamma(\varrho)$ l'ensemble de tous les semi-caractères α-bornés dans $\mathbb{S}$. On équipe $\mathbb{S}^*$ de la topologie de la convergence simple, qui est complètement régulière et induit une topologie compacte sur Γ.
Les principaux résultats de la première partie de la thèse sont les suivants :
Théorème A : Soit $(\mathbb{S}, +, *)$ un $*$-semi-groupe topologique et $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Soit V un voisinage de l'identité e dans $\mathbb{S}$ et soient $\delta, m > 0$ et considérons $H(V, \delta, m)$ la collection de tous les $*$-homomorphismes $h : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui satisfont :

$$\| \Re h(s) \| \leq m \; et \; \| \Im h(s) \| \leq \frac{2\pi}{3}, \text{ pour tout s} \in \text{V}. \qquad (3.1)$$

Alors $H(V, \delta, m)$ est équicontinue à l'identité e. En particulier, un $*$-homomorphisme hermitien $h : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est continue à l'identité si et seulement s'il est borné sur un voisinage de e.
Ce qui nous permet d'avoir le résultat suivant :
Théorème B : Soit $(\mathbb{S}, +, *)$ un $*$-semi-groupe topologique et soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Alors une $*$-représentation $\varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est continue à l'identité e si et seulement s'il existe un voisinage V de e dans $\mathbb{S}$ et des constantes positives δ, m telles que :

$$\delta I \leq \Re \varrho(s) \leq mI, \text{ pour tout s} \in \text{V}. \qquad (3.2)$$

De plus, la collection $\Omega(V, \delta, m)$ de toutes les $*$-représentations $\varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui vérifie (3.2) est équicontinue à l'identité e.

Dans le deuxième partie, nous étudions les propriétés spectrales des opérateurs de Hankel sur une couronne ce qui nous permet en particulier d'obtenir des exemples d'opérateurs de Hankel de symboles non-polynômiaux. Notre méthode repose sur l'utilisation de la théorie des polynômes de Laurent ainsi que la notion de moments forts.
Le cas des symboles antiholomorphes a été étudié par plusieurs auteurs voir [1], [6], [10], [14], [71], [76], [78] et [80], Schneider [66] a étudié ces opérateurs dans le cas d'une seule variable complexe lorsque le symbole est un polynôme, sa méthode consiste à estimer la norme de l'opérateur de Hankel en calculant son expression pour les monômes $z^k, k \in \mathbb{N}$.
Dans [15] et [16] ce résultat a été généralisé dans le cadre multidimensionnel en liaison étroite avec les moments de Stieltjes.
On peut remarque que ces travaux, en étudiant les propriétés spectrales de l'opérateur de Hankel, conduisent dans le cadre des espaces de Bergman et des espaces de Fock généralisé, à caractériser les fonctions f, telles que l'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ est borné (resp. compact,dans les classes de Schatten) [théorème A,[15]].

On s'intéresse à la possibilité d'obtenir des opérateurs de Hankel bornés (resp. compacts,dans les classes de Schatten) dont le symbole n'est pas nécessairement un polynôme.
On note $\Omega_s = \{z \in \mathbb{C} : R_- <\mid z \mid< R_+\}$ la couronne de rayons R_- et R_+ et on considère la suit des moments forts $s = (s_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ définie par, pour tout $d \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathbf{s}_d = \int_a^b t^d \, d\mu(t) \quad et \quad \mathbf{s}_{-d} = \int_b^a t^{-d} \, d\mu(t) = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} t^d \, d\widetilde{\mu}(t) = \widetilde{\mathbf{s}}_d \qquad (2,2)$$

où $0 \leq a < b \leq +\infty$ et μ est une mesure réelle positive à support dans $[a, b]$ appelée représentante (ou représentation) de s et $\widetilde{\mu}$ l'image de μ via la transformation $t \to \frac{1}{t}$.
On désigne par $\mathcal{A}^2(s)$ l'espace des fonctions $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ holomorphes sur Ω_s telles que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} s_k \mid a_k \mid^2 < +\infty$$

Nous allons montre que l'espace $\mathcal{A}^2(s)$ est la fermeture de l'espace des polynômes de Laurent (définis dans la section 1.7) dans $L^2(\mu_s)$ siμ_s est une mesure représentante de la suit des moments $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. En particulier, $\mathcal{A}^2(s)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_k a_k \overline{b}_k,$$

pour $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ et $g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k z^k$ deux éléments de $\mathcal{A}^2(s)$.
Si $K_s(.,.)$ désigne le noyau reproduisant de cet espace, on note P_s la projection orthogonale associée à $\mathcal{A}^2(s)$ défini pour tout $g \in L^2(\mu_s)$ par :

$$(P_s g) = \int_{\overline{\Omega_s}} K_s(z, w) g(w) d\mu_s(w), \quad z \in \Omega_s$$

où $K_s(z, w)$ est le noyau reproduisant de l'espace $\mathcal{A}^2(s)$.
L'opérateur de Hankel de symbole $\overline{f}$ est défini par densité de $\mathcal{A}^2(s)$ dans $L^2(\mu_s)$, et peut s'écrire sous la forme

$$H_{\overline{f}}(\varphi) = (I - P_s)(\overline{f}\varphi)$$

pour tout polynôme de Laurent φ. Notre première résultat est le suivant :
Théorème C : Soit f un polynôme de Laurent holomorphe. Alors

1) l'opérateur $H_{\overline{f}}$ est borné si et seulement si

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{s_{n+k}}{s_n}-\frac{s_n}{s_{n-k}})<+\infty \text{ et } \sup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{\widetilde{s}_{n+k}}{\widetilde{s}_n}-\frac{\widetilde{s}_n}{\widetilde{s}_{n-k}})<+\infty,\ \forall k\in spec(f).$$

2) l'opérateur $H_{\overline{f}}$ est compact si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{s_{n+k}}{s_n}-\frac{s_n}{s_{n-k}})=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}(\frac{\widetilde{s}_{n+k}}{\widetilde{s}_n}-\frac{\widetilde{s}_n}{\widetilde{s}_{n-k}})=0,\ \forall k\in spec(f).$$

En ce qui concerne l'appartenance de l'opérateur de Hankel aux classes de Schatten on a :
Théorème D : Soit f un polynôme de Laurent holomorphe. Alors l'opérateur $H_{\overline{f}}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{A}^2(\mu_s),L^2(\mu_s))$ si et seulement si :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{s_{n+k}}{s_n}-\frac{s_n}{s_{n-k}})^{\frac{p}{2}}<+\infty \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{\widetilde{s}_{n+k}}{\widetilde{s}_n}-\frac{\widetilde{s}_n}{\widetilde{s}_{n-k}})^{\frac{p}{2}}<+\infty,\ \forall k\in spec(f).$$

Comme application, considérons l'espace $\mathcal{A}(\mu_s)$ avec $\mu_s=e^{-|z|^m-\frac{1}{|z|^m}}dA(z),\ m>0$ et $dA(z)$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le plan complexe

$$\mathcal{A}^2(\mu_m)=\{f\in Hol(\mathbb{C}\setminus\{0\})/\int_{\mathbb{C}^*}|f(z)|^2e^{(-|z|^m-\frac{1}{|z|^m})}dA(z)<+\infty\},$$

où $Hol(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ est l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
les moments de la mesure μ_m sont donnés par :

$$s_d=\int_0^{+\infty}t^d\exp(-t^m-\frac{1}{t^m})dt, d\in\mathbb{Z}$$

pour $f\in\mathcal{A}^2(\mu_m)$ l'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ est défini sur $\chi(m)$ par :

$$H_{\overline{f}}(\varphi)(z)=\int_{\mathbb{C}^*}K_m(z,\omega)\varphi(\omega)[\overline{f}(z)-\overline{f}(\omega)]d\mu_m(\omega)$$

avec $\chi(m)$ la classe des fonctions $f\in\mathcal{A}^2(\mu_m)$ telles que $f\varphi K_m(z,.)\in L^1(\mu_m)$, φ un polynôme de Laurent holomorphe et $K_m(z,.)$ le noyau reproduisant de $\mathcal{A}^2(\mu_m)$.
Un autre résultat principal de cette thèse est le théorème suivant :
Théorème E : Soit $f\in\mathcal{A}^2(\mu_m)$, avec m un réel strictement positif et soit U la transformation définie par $Uf(z)=f(\frac{1}{z})$ alors :
1) les opérateurs $H_{\overline{f}}$ et $H_{\overline{Uf}}$ sont bornés sur $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ si et seulement si f est un polynôme de Laurent de L-degré inférieur ou égal à $2m$.
2)les opérateurs $H_{\overline{f}}$ et $H_{\overline{Uf}}$ sont compacts sur $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ si et seulement si f est un

polynôme de Laurent de L-degré strictement inférieur à $2m$.
3) les opérateurs $H_{\overline{f}}$ et $H_{\overline{Uf}}$ sont dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{A}^2(\mu_m), L^2(\mu_m))$ si et seulement $p > 2$ et f est un polynôme de Laurent de L-degré strictement inférieur à $\frac{2m(p-2)}{p}$.

Pour démontrer ce dernier théorème on introduit le sous-espace $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ formé des fonctions $f \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$ telles que $H_{\overline{f}}$ est borné. On note $\mathcal{M}_\infty$ le sous-espace de $\mathcal{M}$ constitué des symboles f pour lesquels $H_{\overline{f}}$ est compact et,finalement, pour $p \geq 1$ on a

$$\mathcal{M}_p = \{ f \in \mathcal{M}, H_{\overline{f}} \in \mathcal{S}_p(\mathcal{A}^2(\mu_m), L^2(\mu_m)) \}$$

On munit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_p$ respectivement des semi-normes

$$\|f\|_{\mathcal{M}} := \left\|H_{\overline{f}}\right\| + |f(0)|$$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_p} := \left\|H_{\overline{f}}\right\|_{\mathcal{S}_p} + |f(0)| .$$

Ainsi $\mathcal{M}, \mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{M}_p$ sont des espaces de Banach.
Ensuite, nous établissons l'invariance des espaces $\mathcal{M}, \mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{M}_p$ sous l'action des rotations. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, notons R_θ la transformation $R_\theta(z) = e^{i\theta} z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors

Lemme 1 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors l'opérateur $R_\theta f := f \circ R_\theta$ est une isométrie unitaire de $L^2(\mu_m)$ dans lui même, et de $\mathcal{A}^2(\mu)$ dans lui même. De plus on a
1) Si $f \in \mathcal{M},\ R_\theta f \in \mathcal{M}$ et $\|R_\theta f\|_{\mathcal{M}} = \|f\|_{\mathcal{M}}$.
2) Si $f \in \mathcal{M}_\infty,\ R_\theta f \in \mathcal{M}_\infty$.
3) Si $f \in \mathcal{M}_p,\ R_\theta f \in \mathcal{M}_p$ et $\|R_\theta f\|_{\mathcal{M}_p} = \|f\|_{\mathcal{M}_p}$.

Enfin, en utilisant les résultats précédents et les propriétés des espaces $\mathcal{M}, \mathcal{M}_\infty$ et $\mathcal{M}_p$, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 2 : Soit $f \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$. et soit $K \in spac(f)$. Alors :
1) Si $f \in \mathcal{M}$, alors z^k est dans $\mathcal{M}$.
2) Si $f \in \mathcal{M}_\infty$, alors z^k est dans $\mathcal{M}_\infty$.
3) Si $p \geq 1$ et $f \in \mathcal{M}_p$, alors z^k est dans $\mathcal{M}_p$.

Chapitre 1

Présentation générale

1.1 Fonction définie positive dans un semi-groupe

1.1.1 propriétés

Dans cette section, on traite principalement les fonctions définies positives (resp. négatives) sur un semi-groupe abélien et on introduit aussi le concept de semi-groupe arbitraire muni d'une involution.
La classe des fonctions définies positives sur un groupe localement compact se divise en deux catégories totalement différentes, la première catégorie est celle des fonctions définies positives (resp. négatives) sur les groupes abéliens et la deuxième catégorie est celle des fonctions définies positives (resp. négatives) sur les groupes non abéliens. Plusieurs travaux ont été mené pour étudier et caractériser ces fonctions dans le cas des semi-groupes abéliens contrairement au cas non-abélien.

Définition 1.1.1 *Un semi-groupe $(S, \circ)$ est un ensemble non vide muni d'une lois de composition associative $\circ$ et d'un élément neutre e.*
Un semi-groupe involutif (ou $*$-semi-groupe) $(S, \circ, *)$ est un semi-groupe $(S, \circ)$ tel que l'application $* : S \to S$ appelée involution satisfait les deux axiomes suivants

- *(i) $(s \circ t)^* = t^* \circ s^*$ pour tous $s, t \in S$*
- *(ii) $(s^*)^* = s$ pour tout $s \in S$*

Il faut noter que les deux axiomes impliquent que $e = e^*$. En effet : $e^* = e^* \circ e = (e^* \circ e)^* = e$.
Pour un semi-groupe abélien les loi de composition et l'élément neutre sont notés respectivement $+$ et 0, et l'élément neutre est appelé zéro.
Soit $(S, \circ)$, $(T, \circ)$ deux semi-groupes d'éléments neutre e_S et e_T respectivement. Une application $f : S \to T$ est appelée homomorphisme si $f(e_S) = e_T$ et $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ pour tous $x, y \in S$. Si de plus S et T sont des semi-groupes involutifs,

on ajoute la condition $f(s^*) = f(s)^*$ pour tout $s \in S$ et dans ce cas f est appelée $*$-homomorphisme. Un homomorphisme $f : S \to T$ bijectif est appelé isomorphisme. Un semi-groupe $(S, \circ)$ équipé d'une topologie $\mathcal{O}$ noté $(S, \circ, \mathcal{O})$ est dit un semi-groupe topologique si la lois de composition $(s,t) \mapsto s \circ t$ est continue de $S \times S$ dans S. Si de plus S a une involution $*$, alors $s \mapsto s^*$ doit être continue.
Dans le reste de cette section on considère un semi-groupe involutif $S = (S, \circ, *)$.

Définition 1.1.2 *Une fonction $\varphi : S \to \mathbb{C}$ est dite définie positive si le noyau de l'application $(s,t) \mapsto \varphi(s^* \circ t)$ est défini positif dans $S \times S$; c'est à dire si*

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \varphi(s_j^* \circ s_k) \geq 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, \{s_1, ..., s_n\} \subseteq S, \{c_1, ..., c_n\} \subseteq \mathbb{C}$.
φ est dite strictement définie positive si le noyau $\varphi(s_j^* \circ t)$ est strictement défini positif.

On note $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des fonctions définie positive $\varphi : S \to \mathbb{C}$ et $\mathcal{P}_1(S) = \{\varphi \in \mathcal{P}(S) : \varphi(e) = 1\}$.
Il faut noter que dans la définition précédente le concept reste inchangé si on remplace le noyau $\varphi(s^* \circ t)$ par le noyau $\varphi(s \circ t^*)$.
Dans un groupe abélien $(G, +)$ on peut considérer deux involutions différentes, l'involution identique et l'involution $x^* = -x$, pour $x \in G$. On se retrouve donc avec deux notions différentes pour les fonctions définies positives sur G correspondantes à ces deux involutions.
Lorsque G est muni de l'involution identique, on dit que $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est définie positive dans le sens du semi-groupe. Et si G est muni de l'involution $x^* = -x$ pour tout $x \in G$, on dit dans ce cas que φ est définie positive dans le sens du groupe.
On utilisant la remarque [3.1.5,[12]], on déduit que toute fonction φ définie positive est hermitienne, c'est à dire $\varphi(s^*) = \overline{\varphi(s)}$ pour tout $s \in S$, on a :

$$\varphi(s^* \circ s) \geq 0 \; et \; \mid \varphi(s^* \circ t) \mid^2 \leq \varphi(s^* \circ s)\varphi(t^* \circ t). \quad s,t \in S.$$

En particulier

$$\varphi(e) \geq 0 \; et \; \mid \varphi(s) \mid^2 \leq \varphi(e)\varphi(s^* \circ s). \quad s \in S.$$

La dernière inégalité implique que $\varphi \equiv 0$ si $\varphi(e) = 0$.
L'ensemble $\mathcal{P}(S)$ est un cône convexe dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^S$ des fonctions à valeurs complexes dans S. $\mathcal{P}(S)$ est stable pour les produits et fermé dans la topologie de la convergence simple. Le sous-ensemble $\mathcal{P}_1(S)$ est un convexe fermé et constitue une base de $\mathcal{P}(S)$. En effet pour tout $\varphi \in \mathcal{P}(S) \setminus \{0\}$, il existe une unique paire (λ, φ_0) avec $\lambda > 0$ et $\varphi_0 \in \mathcal{P}_1(S)$ tel que $\varphi = \lambda\varphi_0$, à savoir $\lambda = \varphi(e)$ et $\varphi_0 = \lambda^{-1}\varphi$.

Remarque 1.1.1 *(Sz.-Nagy (1960) [56]) Soit H est un espace de Hilbert complexe et soit $B(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés dans H. Une fonction $\Phi : S \to B(H)$ est dite de type positif si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{s_1, ..., s_n\} \subseteq S$ et $\{\xi_1, ..., \xi_n\} \subseteq H$ on a*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \langle \Phi(s_j^* \circ s_k)\xi_k, \xi_j \rangle \geq 0.$$

Si Φ est de type positif, alors Φ est définie positive dans le sens ou toutes les fonctions scalaires $\Phi_\xi(s) = \langle \Phi(s)\xi, \xi \rangle$, $\xi \in H$ sont définies positives. L'inverse n'est pas vrai (Aveson (1969)[7]).

Si $H = \mathbb{C}$ les fonctions de type positif sont exactement les fonctions définies positives. c'est généralement le cas si $\Phi(s)$ est contenue dans une C^*-algèbre commutative de $B(H)$, ce qui montre que les deux notions coïncident.
On peut considérer comme exemple de semi-groupe involutif le cas d'une C^*-algèbre commutative et unitaire, la lois de composition étant la multiplication. Alors, les applications linéaires $\Phi : S \to B(H)$ de type positif sont appelées applications complètement positives.

Définition 1.1.3 *$\alpha : S \to \mathbb{R}_+$ est une fonction valeur absolue si*
- *(i) $\alpha(e) = 1$;*
- *(ii) $\alpha(s \circ t) \leq \alpha(s)\alpha(t)$ pour tous $s, t \in S$;*
- *(iii) $\alpha(s^*) = \alpha(s)$ pour tout $s \in S$.*

On note que la fonction constante $s \mapsto 1$ est une fonction valeur absolue. Si α, β sont valeurs absolues et $k > 0$ alors $\alpha\beta$, $\max(\alpha, \beta)$ et α^k sont valeurs absolues.

Définition 1.1.4 *Une fonction $f : S \to \mathbb{C}$ est dite bornée par rapport à une valeur absolue α (α-bornée) s'il existe une constante $C > 0$ telle que.*

$$\mid f(s) \mid \leq C\alpha(s) \text{ pour tout } s \in S.$$

Et f est exponentiellement bornée s'il existe une valeur absolue par rapport à laquelle f est bornée.

L'ensemble des fonctions exponentiellement bornées est une algèbre.

Proposition 1.1.1 *Supposons que $\varphi \in \mathcal{P}(S)$ est bornée par rapport à une valeur absolue α. Alors*

$$\mid \varphi(s) \mid \leq \varphi(e)\alpha(s) \text{ pour tout } s \in S.$$

Preuve. Sans perte de généralité, on suppose que $\varphi(e) = 1$, alors $\mid \varphi(s) \mid^2 \leq \varphi(s^* \circ s)$. par itération on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mid \varphi(s) \mid^{2n} \leq \varphi((s^* \circ s)^{2n-1}),$$

En utilisant $\mid \varphi(s) \mid \leq C\alpha(t)$ pour une constante $C > 0$, on a

$$\mid \varphi(s) \mid^{2n} \leq C\alpha((s^* \circ s)^{2n-1}) \leq C\alpha(s)^{2n},$$

par conséquent,

$$\mid \varphi(s) \mid \leq \alpha(s) \lim_{n\to\infty} C^{2-n} = \alpha(s).$$

■

Soit $\varphi \in \mathcal{P}(S)$ et soit H_0 un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}^s$ engendré par les fonctions $\{\varphi_s | s \in S\}$, où $\varphi_s(t) = \varphi(s^* \circ t)$. Alors H_0 équipe d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ tel que

$$\langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = \varphi(s^* \circ t) \quad s, t \in S,$$

De plus, la complémentation H de H_0 (réalisée dans $\mathbb{S}^s$) est un espace de Hilbert induit par le noyau de reproduisant associé à φ.
Pour tout $s \in S$ il existe une transformation linéaire $\pi(s) : H_0 \to H_0$ telle que

$$\pi(s)\varphi_t = \varphi_{s \circ t}, \qquad s, t \in S,$$

où π est une représentation de S dans l'espace $Hom(H_0)$ (l'espace des transformations linéaires de H_0,) c'est à dire

$$\pi(s \circ t) = \pi(s)\pi(t), \ \pi(e) = I \ et \ \pi(s^*) = \pi(s)^*,$$

où la dernière équation signifie que

$$\langle \pi(s)f, g \rangle = \langle f, \pi(s^*)g \rangle \ pour \ tous \ f, g \in H_0.$$

Alors on a :

$$\varphi(s) = \langle \varphi, \pi(s)\varphi \rangle, \quad s \in S.$$

Théorème 1.1.1 *Soit $\varphi \in \mathcal{P}(S)$, et soit $\pi : S \to Hom(H)_0$ une représentation. Alors φ exponentiellement bornée si et seulement si $\pi(s)$ est un opérateur borné dans H_0 pour chaque s.*

Preuve. On suppose que $\pi(s)$ est borné dans H_0 pour tout $s \in S$. Alors
$\alpha(s) := \|\pi(s)\|$ est une valeur absolue dans S et $\mid \varphi(s) \mid = \mid \langle \varphi, \pi(s)\varphi \rangle \mid \leq \|\varphi\|^2 \|\pi(s)\|$, ce qui montre que φ est bornée par rapport à α.
Inversement, on suppose que $\mid \varphi(s) \mid \leq \varphi(e)\alpha(s)$ pour une valeur absolue α. Soit $f = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_{x_j} \in H_0$ et on définit

$$g(s) = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \varphi(x_j^* \circ s \circ x_k), \quad s \in S.$$

Alors $g \in \mathcal{P}(S)$, si $\{y_1, ..., y_m\} \subseteq S, \qquad \{d_1, ..., d_m\} \subseteq \mathbb{C}$ on a

$$\sum_{p,q=1}^{m} d_p \overline{d_q} g(y_p^* \circ y_q) = \sum_{p,q=1}^{m} \sum_{j,k=1}^{n} (d_p c_j)\overline{(d_q c_k)} \varphi((y_p \circ x_j)^* \circ (y_q \circ x_k)) \geq 0.$$

De plus, g est bornée par rapport à α, alors

$$\mid g(s) \mid \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \mid c_j \mid \alpha(x_j) \right)^2 \varphi(e)\alpha(s).$$

Par Proposition 1.1.1 il s'ensuit que

$$\|\pi(s)f\|^2 = g(s^* \circ s) \leq g(e)\alpha(s)^2 = \|f\|^2 \alpha(s)^2,$$

Ce qui montre que $\pi(s)$ est un opérateur borné dans H_0 avec la norme $\leq \alpha(s)$. ■

1.2 Fonctions exponentiellement bornées et définies positives dans un semi-groupe abélien

Dans cette section $S = (S, +, *)$ est un semi-groupe involutif abélien, qui peut être l'identité ou non.

Définition 1.2.1 *La fonction $\rho : S \to \mathbb{C}$ est un semi-caractère si*
- *(i) $\rho(0) = I$;*
- *(ii) $\rho(s + t) = \rho(s)\rho(t)$ pour $s, t \in S$;*
- *(iii) $\rho(s^*) = \overline{\rho(s)}$ pour $s \in S$.*

Un semi-caractère est un homomorphisme de $(S, +*)$ dans le semi-groupe $(\mathbb{C}, ., -)$, où la loi de composition et l'involution sont le multiplication et la conjugaison.
Si l'involution $*$ est l'identité, un semi-caractère est automatiquement de valeur réelle. si $(S, +)$ est un groupe abélien et $s^* = -s$,alors, les valeurs d'un semi-caractère sont dans le groupe de cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | \mid z \mid = 1\}$ et il est un groupe caractère.
S^* c'est l'ensemble des semi-caractère dans S. on équipe S^* avec la topologie héritée de $\mathbb{C}^s$, avec la topologie de la convergence simple. en particulier S^* est un espace de Hausdorff. (puisque $\mathbb{C}^s$ est Complètement régulier et S^* est un sous-ensemble fermée de $\mathbb{C}^s$, alors, S^* est un espace complètement régulier).
On note que S^* est un semi-groupe topologique de multiplication ponctuelle,alors, l'application $\rho \mapsto \overline{\rho}$ est un involution et la fonction 1 est l'élément neutre. On appelle S^* le dual d'un semi-groupe de S.

Chaque semi-caractère est définie positive. On veux savoir si chaque fonction définie positive peut être représentée comme une intégral de semi-caractères. La réponse est négative en général. Toutefois, les fonctions exponentiellement bornées définies positives admettent une représentation intégrale.
Pour $\mu \in M_+^c(S^*)$, l'ensemble des mesures de Radon dans S^* avec une support compact, alors

$$\varphi(s) = \int_{s^*} \rho(s) d\mu(\rho), \quad s \in S$$

est un fonction définie positive. En fait, pour $\{s_1, ..., s_n\} \subseteq S,\ \{c_1, ..., c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ on trouve

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \varphi(s_j + s_k^*) = \int \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \rho(s_j) \right|^2 d\mu(\rho) \geq 0.$$

De plus, pour montre que φ est exponentiellement bornée, on définie une valeur absolue α_k associe avec une sous-ensemble compact $K \subseteq S^*$ par

$$\alpha_k(s) = supp\{\mid \rho(s) \mid \mid \rho \in K\}, \quad s \in S.$$

Et si $K = supp(\mu)$ on trouve

$$\mid \varphi(s) \mid \leq \mu(K)\alpha_k(s) = \varphi(0)\alpha_k(s),\ pour\ s \in S.$$

ce qui montre que φ est bornée par rapport à α_k.

Théorème 1.2.1 *[12] Une fonction $\varphi : S \to \mathbb{C}$ possède une représentation intégrale de la forme*

$$\varphi(s) = \int_{S^*} \rho(s) d\mu(\rho), \qquad (1)$$

où $\mu \in M_+^c(S^*)$ si et seulement si φ est une exponentiellement bornée définie positive.
Si φ possède ces propriétés, alors il y a exactement une mesure $\mu \in M_+(S^*)$ vérifie(1).

On fixe une valeur absolue α et considère l'ensemble $\mathcal{P}^\alpha(S)$ de fonctions α-bornées $\varphi \in \mathcal{P}(S)$, et le sous-ensemble $\mathcal{P}_1^\alpha(S)$ de fonctions $\varphi \in \mathcal{P}^\alpha$ telle que $\varphi(0) = 1$. C'est évidant que $\mathcal{P}^\alpha(S)$ un subcône convexe fermé de $\mathcal{P}(S)$ et $\mathcal{P}_1^\alpha(S)$ est un ensemble convexe fermé, qui est une base par $\mathcal{P}^\alpha(S)$.
On remarque que l'ensemble des fonctions exponentiellement bornées définies positives $\mathcal{P}^e(S)$ donnent par

$$\mathcal{P}^e(S) = \underset{\alpha}{\cup} \mathcal{P}^\alpha(S),$$

où l'union est prise sur l'ensemble des valeurs absolues, alors $\mathcal{P}^e(S)$ est un cône convexe .

Théorème 1.2.2 *Soit α une valeur absolue dans S. Alors $\mathcal{P}_1^\alpha(S)$ est une ensemble convexe et compact qui ses points extrêmes sont précisément les semi-caractères α-bornées.*

Corollaire 1.2.1 *Soit α une valeur absolue dans S. Alors $\mathcal{P}_1^\alpha(S)$ est un simplexe de Bauer.*

Un cas particulier, on considère que la valeur absolue $b(s) = 1,\ s \in S$, alors, la cône $\mathcal{P}^b(S)$ est égale à la cône de fonctions définies positives bornées, et on définit

$$\widehat{S} := S^* \cap \mathcal{P}^b(S) = \{\rho \in S^* | \mid \rho \mid \leq 1 \quad s \in S\},$$

qui est un semi-groupe compact de S^* s'appelle le dual d'un semi-groupe restreint. il est facile de voir que $\widehat{S}$ est l'ensemble des semi-caractères bornés.

Théorème 1.2.3 *L'ensemble $\mathcal{P}_1^b(S)$ de fonctions bornées définies positives φ où $\varphi(0) = 1$ est un simplex de Bauer et l'ensemble de tous les points extrémaux sont $\widehat{S}$. La fonction bornée définie positive possède une représentation intégrale*

$$\varphi(s) = \int_{\widehat{S}} \rho(s) d\mu(\rho), \quad s \in S.$$

où $\mu \in M_+(\widehat{S})$ est uniquement déterminé.

Théorème 1.2.4 *Soit G un groupe abélien discret. Une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est définie positive dans le sens de groupe si et seulement si elle est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon (non négatif) sur le dual d'un groupe compact $\widehat{G}$.*

Théorème 1.2.5 *La trasformation $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ est un homomorphe de $M_+(\widehat{(S)}$ dans $\mathcal{P}^b(S)$.*

1.3 Problème des moments

1.3.1 Introduction

Le problème classique des moments a été au Coeur du développement de l'analyse au cours de la période allant de 1894 (quand Stieltjes a écrit son célèbre mémoire [68]). Il a également posé et résolu le problème suivant, appelé problème des moments (classique ou problème faible).
On peut trouver une fonction $\alpha(x)$ croissante, bornée avec une infinité de points de croissance sur $[0, \infty[$, telle que ses moments

$$\mu_n = \int_0^\infty x^n d\alpha(x) \qquad , n = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{1.1}$$

ont des valeurs prescrites.
Le terme moment trouve ses origines dans la mécanique classique. Les moments μ_1 et μ_2 sont appelés moment statique et moment d'inertie respectivement.
Dans ce chapitre les fonctions mesures α, β et σ doivent être des fonctions croissantes, bornées présentant une infinité de points de croissance sur l'intervalle I où elles sont définies.

- Le problème faible des moments, On peut trouver une fonction $\alpha(x)$ croissante, bornée avec une infinité de points de croissance sur I, telle que ses moments

$$\mu_n = \int_I x^n d\alpha(x) \qquad , n = \mathbb{N} \quad . \tag{1.2}$$

  ont des valeurs prescrites.
- Le problème fort des moments, On peut trouver une fonction $\alpha(x)$ croissante, bornée avec une infinité de points de croissance sur I, telle que ses moments

$$\mu_n = \int_I x^n d\alpha(x) \qquad , n = \mathbb{Z} \quad . \tag{1.3}$$

  ont des valeurs prescrites.

Dans les deux cas on dit que α génère la suit $\{\mu_n\}$.
Stieltjes ([68][69]) a utilisé la théorie des fractions continues pour résoudre le problème (1.1). Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la solution de ce problème est la positivité des déterminants de Hankel $\triangle_n$ et $\triangle_n^{(1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ & & & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \equiv \mid \mu_{i+j} \mid_{i,j}^{n}$$

$$\triangle_n^{(1)} = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+2} \\ & & & \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \dots & \mu_{2n+1} \end{vmatrix} \equiv \mid \mu_{i+j+1} \mid_{i,j}^{n} \tag{1.4}$$

L'extension du problème des moments sur tout l'axe des réels a été faite en 1920-21 par H. L. Hamburger [37]. Il a condidéré le problème de moments

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\alpha(x) \qquad , n = \mathbb{Z} \quad . \tag{1.5}$$

Remarque 1.3.1 *La fonction mesure α présente une infinité de points de croissance dans (1.1),(1.2),(1.3) et (1.5), alors dégénèrent en sommes finies.*

On exige que tous les moments soient finis tout au long de ce document.

Définition 1.3.1 *On dit que les problèmes des moments (1.1) et (1.3) sont déterminés ou uniquement déterminés, s'il existe au plus une seule fonction α qui satisfait (1.1) et (1.3).*
Si les problèmes (1.1) et (1.3) ne sont pas déterminées alors on dit qu'ils sont indéterminées, dans cette situation il y a plus qu'une seule fonction α.

Deux solution α_1 et α_2 sont dites égales si

$$\int_I f(x)d\alpha_1(x) = \int_I f(x)d\alpha_2(x)$$

Pour tout fonction continue f. Ceci est équivalent à ce qu'il existe une constante C telle que $\alpha_1 = \alpha_2 + C$, pour tout point de continuité.
Stieltjes ([68] et [69]) a prouvé que le problème des moments (1.1) est déterminé ou indéterminé, selon qu'une certaine fraction continue est convergente ou divergente.
Hamburger ([37]) a prouvé qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution du problème (1.5) est les déterminants $\triangle_n$ dans (1.4) soient positifs. Il a également précisé les conditions pour que le problème de moments (1.5) soit déterminé ou indéterminé.
M. Riesz [65] a résolu le problème (1.5) en utilisant les polynômes quasi-orthogonaux.
T. Carleman ([21], [22] et [23]) a montré la connexion entre le problème (1.5) et la théorie des fonctions quasi-analytiques et les formes quadratiques en utilisant les séries asymptotiques. W. B. Jones, O. Njastad, W. J. Thron, H. Waadeland ([46] et [47]) ont considérés le problème fort des moments de Stieltjes et le problème fort de moments de Hamburger. Ils ont spécifié et prouvé les conditions nécessaires et suffisants de l'existence et de l'unicité de solutions en utilisant la théorie des fractions continues et les déterminants de Hankel sous une forme plus générale que (1.4).
Pour les problèmes de moment (1.1), (1.2) et (1.3) il y a deux problèmes principaux :

- (i) L'existence d'une solution.
- (ii) L'unicité.

Nous allons maintenant exposer des résultats relatifs aux différents de problèmes de moments.

1.3.2 Les problèmes faible des moments

Soit $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs, et soit $\alpha(t)$ est une fonction croissant bornée avec une infinité de points de croissance, alors pour $n = 0, 1, 2, ...,$

(i) $\mu_n = \int_a^b t^n d\alpha(t) \quad | a |, | b | < \infty$ les problmes des moments de Hausdorff.

(ii) $\mu_n = \int_0^\infty t^n d\alpha(t)$ les problmes des moments de Stieltjes.

(iii) $\mu_n = \int_{-\infty}^\infty t^n d\alpha(t)$ les problmes des moments de Hamburger.

1.3.3 L'unicité et l'existence des problème faible

Théorème 1.3.1 *(T. Carleman ([21], [22] et [23])*
Soit $\alpha(t)$ une fonction croissante bornée définie sur $[0, +\infty[$, on suppose que $\alpha(t)$ a une infinité de points de croissance sur $[0, +\infty[$, et soit

$$\mu_n = \int_0^\infty t^n d\alpha(t) \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Alors si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2n}}} = \infty \tag{2.1}$$

le problème de moment de Stieltjes est uniquement déterminé.

la condition (2.1) s'appelle condition de Carleman.
Preuve. voir [33] ■
Et dans le cas du problème de Hamburger, la théorème qui également été prouvé par Carleman :

Théorème 1.3.2 *(T. Carleman ([21], [22] et [23])*
Soit $\alpha(t)$ une fonction croissante bornée définie sur $]-\infty, +\infty[$, on suppose que $\alpha(t)$ a une infinité de points de croissance sur $]-\infty, +\infty[$, et soit

$$\mu_n = \int_{-\infty}^\infty t^n d\alpha(t) \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Alors si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2n}}} = \infty \tag{2.2}$$

le problème de moment de Hamburger est uniquement déterminé.

La condition (2.2) s'appelle aussi condition de Carleman.
La problème de moment de Hausdorff est toujours uniquement déterminé, en effet, puisque la fonction $\alpha(t)$ est bornée, on peut estimer les μ_n par

$$\mid \mu_n \mid = \left| \int_a^b t^n d\alpha(t) \right| \leq c^n$$

avec c est une constante positive. Ce qui montre que

$$\frac{1}{\mid \mu_n \mid^{\frac{1}{2n}}} \geq \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} > 0$$

et par suit la condition de Carleman (2.1) est réalisée.
En effet, la condition de Carleman (2.1) n'est pas suffisante pour l'existence des solutions dans le cas de Stieltjes, pour le voir, on considère l'exemple suivant :
Soit $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suit de moment, alors le déterminant de Hankel d'ordre 2 est

$$\triangle_1^{(1)} = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} = \mu_1\mu_3 - \mu_2^2 = 3 - 4 < 0$$

Donc, la condition du déterminant n'est pas réalisée, ce qui conduit que le problème de moment généré par $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'admit aucune solution malgré que la condition de Carleman sont satisfait puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2n}}} \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
On considère maintenant le problème de moments généralisé

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda_n} d\alpha(t) = \mu_n, \quad (0 = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n \to \infty) \tag{2.3}$$

et est dit déterminé s'il existe au plus une seule fonction $\alpha(t)$ croissante bornée avec une infinité de points de croissance sur $[0, +\infty[$ qui satisfait (2.3) et normée par $\alpha(0) = 0$.
O n suppose que $\lambda_{n+1} - \lambda_n > c,\ n = 1, 2, ...$, pour certain $c > 0$ et on pose

$$\Psi(r) = \exp(2 \sum_{0<\lambda_j \leq r} \frac{1}{\lambda_j}).$$

Le théorème suivant généralise le théorème de Carleman

Théorème 1.3.3 *(Fuche [33]*
Si il existe une fonction croissante, positive $\Phi(r)$ et des constantes positives A et a telle que

$$\Psi(r) > A(\frac{r}{\Phi(r)})^a$$

et

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\mu_n^{\frac{1}{an}} \Phi(\lambda_{n-1})} = \infty \tag{2.4}$$

alors, le problème (2.3) est uniquement déterminé.

Preuve. Voir [33] et [34] ■
La condition (2.4) s'appelle condition de Fuchs.

1.3.4 Les problèmes forts des moments

Soit $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres positifs, et soit $\alpha(t)$ est une fonction croissant bornée avec une infinité de points de croissance sur un intervalle I avec :

$$\mu_n = \int_I t^n d\alpha(t), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Alors, on a :

$$(i) \quad \mu_n = \int_0^{\infty} t^n d\alpha(t), \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

les problèmes fort des moments de Stieltjes.

$$(ii) \quad \mu_n = \int_a^b t^n d\alpha(t), \quad n \in \mathbb{Z} \quad |\, a \,|, |\, b \,| < \infty \tag{3.2}$$

les problèmes fort des moments de Hausdorff.

$$(iii) \quad \mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\alpha(t), \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

les problèmes fort des moments de Hamburger.

1.3.5 L'unicité du problème fort

Soit $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres positifs et considérons le problème de moments généralisé suivant

$$\mu_n = \int_0^{+\infty} t^{\lambda_n} d\alpha(t), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

avec $(-\infty \leftarrow \lambda_{-k} < ...\lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k \rightarrow +\infty), k = 1, 2, 3, ...$
On dit que le problème de moment (3.4) est déterminé s'il existe au plus une fonction $\alpha(t)$ croissant bornée avec une infinité de points de croissance sur $[0, +\infty[$,

telle que (3.4) est vérifiée et $\alpha(0) = 0$. On suppose que $\lambda_{n+1} - \lambda_n > C, n \in \mathbb{Z}, C > 0$ et que $-\lambda_{-k} = \lambda_k, k = 1, 2, 3...$

on pose

$$\widetilde{\Psi}(r) = (\exp(2 \sum_{0<|\lambda_j|\leq r} \frac{1}{\mid \lambda_j \mid}))^{\frac{1}{2}} = (\exp(4 \sum_{0<\lambda_j\leq r} \frac{1}{\lambda_j}))^{\frac{1}{2}}$$

$$= ((\Psi(r))^2)^{\frac{1}{2}} = \Psi(r)$$

avec $\Psi(r)$ est la fonction définie dans le théorème de Fuchs (1.8.3).

Théorème 1.3.4 *Si il existe une fonction croissante, positive $\Phi(r)$ et des constantes positives A et a telle que*

$$\widetilde{\Psi}(r) > A(\frac{r}{\Phi(r)})^a$$

et

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\mu_n^{\frac{1}{a|\lambda_n|}} \Phi(\mid \lambda_{n-1} \mid)} = \infty \tag{3.5}$$

alors, le problème (3.4) est uniquement déterminé.

La condition (3.5) s'appelle de type Fuchs. Comme conséquence de ce théorème on a le résultat suivant :

Théorème 1.3.5 *Soit $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres positifs, et soit $\alpha(t)$ est une fonction croissant bornée avec une infinité de points de croissance sur $[0, +\infty[$ telle que :*

$$\mu_n = \int_0^{+\infty} t^n d\alpha(t), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

si la condition de type Carleman suivante

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2|n|}}} = \infty \tag{3.6}$$

est vérifiée, alors le problème fort des moments (3.1) est uniquement déterminé.

Preuve. C'est évident, si on choisir $\lambda_n = n, \Phi \equiv 1$ et $a = 2$ dans le théorème (1.9.1). ■

En ce qui concerne le problème fort des moments de Hausdorff (3.2), il est toujours déterminé puisque la condition de type Carleman (3.6) est réalisée, en effet

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2|n|}}} = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2|n|}}} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2n}}} \geq \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2n}}}.$$

et comme la dernière série est divergent, on conclut donc que le problème fort de Hausdorff est toujours déterminé.
Pour le problème fort des moment de Hamburger on a le théorème suivant

Théorème 1.3.6 *Soit $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres positifs, et soit $\alpha(t)$ est une fonction croissant bornée avec une infinité de points de croissance sur $[-\infty,+\infty[$ telle que :*

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n d\alpha(t), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

si la condition de type carleman suivante

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{\mu_n^{\frac{1}{2|n|}}} = \infty$$

est vérifiée, alors le problème fort des moments (3.3) est uniquement déterminé.

Preuve. Voir [[3], page 24] ■

1.4 Opérateurs de Hankel de symbole anti-holomorphe

Une partie de ce travail concerne le problème général qui est d'établir le lien entre les propriétés d'une fonction holomorphe f et la nature du grand opérateur de Hankel de symbole $\overline{f}$.
L'étude des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe possède une longue histoire. Ce sont tout d'abord les opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ du disque unité de $\mathbb{C}$ qui furent étudiés. Comme l'espace orthogonal à $H^2(\mathbb{D})$ ne diffère de l'espace conjugué de $H^2(\mathbb{D})$ que d'une dimension, il n'existe essentiellement qu'un type d'opérateur de Hankel sur l'espace de Hardy.
On désigne par $L^2(\partial\mathbb{D})$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de longueur d'arc sur le cercle unité $\partial\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$. On note $H^2(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy constitué des fonctions dans $L^2(\partial\mathbb{D})$ telles que leurs coefficients de Fourier d'indice strictement négatif soient nuls.
Pour $f \in H^2(\mathbb{D})$, l'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ de symbole $\overline{f}$ est l'opérateur de $H^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\partial\mathbb{D})$ défini par

$$H_{\overline{f}}(g) := (I - P_s)(\overline{f}g) \ \text{ pour tout g} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D}),$$

où P_s est la projection de Szegö, c'est-à-dire la projection orthogonale de $L^2(\partial\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{D})$.
En fait, $H_{\overline{f}}$ est seulement défini sur $H(\mathbb{D})$, l'espace des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$.

La caractérisation des opérateurs de Hankel de symbole anti-holomorphe bornés sur l'espace de Hardy a été obtenue en 1957 par Z. Nehari [57] et celle des opérateurs de Hankel de symbole anti-holomorphe compacts sur cet espace fut donnée en 1958 par P. Hartman[38].
Plus précisément, Z. Nehari a montré que l'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ défini sur l'espace de Hardy est borné si et seulement si f est dans l'espace BMOA, constitué des fonctions dans $H^2(\mathbb{D})$ possédant une oscillation principale bornée.
Le résultat de P. Hartman donne que l'opérateur $H_{\overline{f}}$ est compact si et seulement si f appartient à l'espace VMOA, constitué des fonctions dans $H^2(\mathbb{D})$ ayant une oscillation principale évanescente.
D'autres caractérisations de la continuité et de la compacité pour les opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy en terme d'action sur les noyaux reproduisant furent établies par F. F. Bonsall dans [17] et F. Holland et D. Walsh dans [43].
L'étude de l'appartenance aux classes de Schatten des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur l'espace de Hardy est dû en 1982 à V. V. Peller [61] dans le cas p $>$ 1, et simultanément à S. Semmes [67] et V. V. Peller [62] en 1984 dans le cas $0 < p < 1$.
Ces auteurs ont montré que pour $p > 0$, l'opérateur $H_{\overline{f}}$ appartient à la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten de $H^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\partial\mathbb{D})$ si et seulement si f appartient à l'espace de Besov $\mathbf{B}_p$ constitué des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\int_{\mathbb{D}} (1- \mid z \mid^2)^p \mid f'(z) \mid^p \frac{1}{(1- \mid z \mid^2)^2} \, d\nu(z) < +\infty$$

où ν désigne la mesure planaire.
Dans le cas de l'espace de Bergman, il existe deux types d'opérateurs de Hankel : le petit opérateur de Hankel et le grand opérateur de Hankel. Ceci provient du fait que l'orthogonal de l'espace de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ du disque unité de $\mathbb{C}$ est bien plus gros que l'espace conjugué de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.
Les petits opérateurs de Hankel sont définis via la projection sur l'espace conjugué de l'espace de Bergman $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$.
Plus précisément, on désigne par $L^2(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$.
On note $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman des fonctions holomorphes dans $L^2(\mathbb{D})$ et $\overline{P}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ dans $\overline{\mathcal{A}^2(\mathbb{D})}$.
Pour $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$,
Le petit opérateur de Hankel $\widetilde{H_{\overline{f}}}$ de symbole $\overline{f}$ est défini pour $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ par :

$$\widetilde{H_{\overline{f}}}(g) := \overline{P}(\overline{f}g).$$

Les petits opérateurs de Hankel se comportent un peu comme les opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy. Dans [31], M. Feldman et R. Rochberg ont même

obtenu des résultats sur les petits opérateurs de Hankel sur l'espace de Bergman de la boule à partir de certaines propriétés des opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy.
En revanche, l'étude des grands opérateurs de Hankel sur l'espace de Bergman est totalement différente de celle des opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy.
On désigne par P la projection de Bergman, à savoir la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D})$ sur $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Pour $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, le grand opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ de symbole $\overline{f}$ est l'opérateur de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\mathbb{D})$, défini par

$$H_{\overline{f}}(g) := (I - P)(\overline{f}g) \text{ pour tout g} \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

L'opérateur $H_{\overline{f}}$ est en fait seulement défini sur un sous-espace de $H^\infty(\mathbb{D})$.
Dans [9], S. Axler montre que $H_{\overline{f}}$ est borné si et seulement si f appartient à l'espace de Bloch, c'est-à-dire si et seulement si

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)|f'(z)| < +\infty.$$

Il établit également que $H_{\overline{f}}$ est compact si et seulement si f est dans le petit espace de Bloch, c'est-à-dire si et seulement si

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1 - |z|^2)|f'(z)| = 0.$$

L'appartenance aux classes de Schatten des opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur l'espace de Bergman du disque unité de $\mathbb{C}$ fut étudiée en 1987 par J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre dans [6].
On voit apparaître un phénomène dit de coupure qui n'existait pas dans le cas de l'espace de Hardy. Plus précisément, pour $p > 1$, l'opérateur $H_{\overline{f}}$ appartient à la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten si et seulement si f appartient à l'espace de Besov $\mathbf{B}_p$.
En revanche, contrairement au cas de l'espace de Hardy, il n'existe pas pour $p \leq 1$, d'opérateur de Hankel de symbole antiholomorphe non trivial appartenant à la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten. En fait, J. Arazy, S. Fisher et J. Peetre traitent le cas plus général des grands opérateurs de Hankel de symbole antiholomorphe sur des espaces de Bergman à poids via la projection de Bergman qui leur est associée.
Plus précisément, pour $\alpha > -1$, on désigne par $L^2_\alpha(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure $(1 - |z|^2)^\alpha d\nu(z)$, où ν est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$. On note $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman à poids constitué des fonctions holomorphes dans $L^2_\alpha(\mathbb{D})$ et P_α la projection de Bergman associée, c'est-à-dire la projection orthogonale de $L^2_\alpha(\mathbb{D})$ sur $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$. Pour $f \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$, l'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ de symbole $\overline{f}$ est l'opérateur de $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ dans $L^2_\alpha(\mathbb{D})$, défini par

$$H_{\overline{f}}(g) := (I - P_\alpha)(\overline{f}g) \text{ pour tout g} \in \mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D}).$$

Dans ce cas, les résultats sont les mêmes que ceux établis dans le cas de l'espace de Bergman classique : $H_{\overline{f}}$ est borné si et seulement si f est dans l'espace de Bloch, compact si et seulement si f est dans le petit espace de Bloch et appartient à la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten si et seulement si f appartient à l'espace de Besov $\mathbf{B_p}$.
Des résultats semblables ont été obtenus dans le cas de l'espace de Bergman de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ par J. Arazy, S. Fisher, S. Janson et J. Peetre [5], R. Wallsten [72], K. T. Hahn et E. H. Youssfi [36] et K. Zhu [78], [80].
pour $n \geq 2$, K.Zhu a montré qu'il existe un opérateur de Hankel de symbole anti-holomorphe non trivial dans la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten si et seulement si $p > 2n$.

On considère maintenant l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ de carré intégrable par rapport à la mesure $d\mu_m = e^{-|z|^m} dV(z)$ (Espace de Fock généralisés), V étant la mesure de Lebesgue normalisée de sorte que le volume de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ soit égal $2n$ et m étant un paramètre positif. On le note

$$\mathcal{A}^2(\mu_m) = \{f \in L^2(\mu_m), \quad f \text{ entire}\}$$

$\mathcal{A}^2(\mu_m)$ étant un sous-espace fermé de $L^2(\mu_m), P_m$ désigne la projection orthogonale de $L^2(\mu_m)$ sur $\mathcal{A}^2(\mu_m)$. L'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ de symbole anti-holomorphe $\overline{f}$ est défini par

$$H_{\overline{f}}(g) := (I - P_m)(\overline{f}g) \text{ pour tout g} \in \mathcal{A}^2(\mu_{\text{m}}).$$

Dans le cas $m = 2$, l'espace $\mathcal{A}^2(\mu_2)$ est appelé espace de Segal-Bargman et l'opérateur de Hankel H_f est un opérateur borné. Bergr et Coburn [13], puis Stroethoff [71] ont caractérisé les symboles f pour lequel H_f est compact. Plus précisément, pour un élément f de $L^2(\mu_m)$, la transformée de Berezin de f est la fonction définie sur $\mathbb{C}^2$ par

$$\widetilde{f}(z) = \langle fk_z, k_z \rangle,$$

où $k_z = \frac{K_2(.,z)}{K_2(z,z)^{\frac{1}{2}}}$ et $K_2(., z)$ étant le noyau reproduisant de $\mathcal{A}^2(\mu_2)$.
L'oscillation moyenne de f est donnée par

$$MO(f)(z) = (\widetilde{|f|^2}(z) - |\widetilde{f}(z)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce cas les opérateurs de Hankel H_f et $H_{\overline{f}}$ sont simultanément compacts si et seulement si $\lim_{|z| \to +\infty} MO(f)(z) = 0$.
L'objectif était ensuite d'étendre ces résultats à des symboles f non bornés.
On considère la classe des fonctions

$$\tau(\mathbb{C}^n) = \{g \in L^2(\mu_2), \quad g(. + z) \in L^2(\mu_2), \quad \forall z \in \mathbb{C}^n\}.$$

Si $f \in \tau(\mathbb{C}^n), H_f$ est défini sur un domaine dense de $\mathcal{A}^2(\mu_2)$ qui contient les fonctions $e^{\langle .,a\rangle}$ pour $a \in \mathbb{C}^n$.
En 2004, Xia et Zheng [76] ont montré que pour $p \geq 1$, H_f et $H_{\overline{f}}$ sont simultanément dans la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten si et seulement si $MO(f)$ est dans l'espace $L^p(\mathbb{C}^n, dV)$.
En 2005, Bauer [10] a établi que H_f et $H_{\overline{f}}$ sont bornées si et seulement si f est à oscillation moyenne bornée, il a aussi montré que H_f et $H_{\overline{f}}$ sont compacts si et seulement si l'oscillation moyenne de f s'annule à l'infini.
Ces caractérisations conduisent pour $f \in \tau(\mathbb{C}^n) \cap \mathcal{A}^2(\mu_2)$ aux résultats suivants : $H_{\overline{f}}$ est borné si et seulement si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, et $H_{\overline{f}}$ est compact si et seulement si f est une fonction constante.
Les méthodes utilisées reposent essentiellement sur l'action du groupe de translation.
Schneider [66] a étudié le cas d'une seule variable complexe, lorsque le symbole est un polynôme et se ramène au cas $f(z) = z$, $k \in \mathbb{N}$. Il a montré que si $m > 2k$, $H_{\overline{z}^k}$ est compact. Sa méthode consiste à calculer $H_{\overline{z}^k}(g)$ pour $g \in \mathcal{A}(\mu_m)$, puis à estimer sa norme.
Ce résultat été généralisé par H. Bommier-Hato et E. H. Youssfi dans [15]et [16] dans le cadre multi-dimensionnel en liaison étroite avec les moments de Stieltjes. Plus précisément, les résultats sont les suivants : L'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ est borné sur l'espace de Fock $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ si et seulement si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\frac{m}{2}$, il est compact si et seulement si f est un polynôme de degré strictement inférieur à $\frac{m}{2}$ et pour $p > 0$, l'opérateur de Hankel $H_{\overline{f}}$ est dans $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten si et seulement si $p > 2n$ et f est un polynôme de degré strictement inférieur à $\frac{m(p-2n)}{2p}$.

1.5 Opérateurs d'espaces de Hilbert et classes de Schatten

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement certains résultats sur les opérateurs d'espaces de Hilbert sans donner les démonstrations. Ces résultats seront utilisés dans le chapitre 3. La référence principale de ce chapitre est le livre de K. Zhu [79].
Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous donnons la définition d'un opérateur adjoint au sens de Von Neumann et rappelons la définition d'un opérateur auto-adjoint.
Nous énonçons également le théorème spectral ainsi qu'un théorème de décomposition spectrale pour les opérateurs auto-adjoints.

Dans le deuxième paragraphe, nous nous intéressons aux opérateurs compacts et notamment à l'existence d'une décomposition de Schmidt pour ces opérateurs. De plus, nous donnons une caractérisation de la compacité spécifique aux opérateurs autoadjoints.

Dans le troisième paragraphe, nous définissons tout d'abord la suite des valeurs singulières d'un opérateur compact et étudions les propriétés de cette suite. Ensuite, nous donnons la définition des classes de Schatten et énonçons plusieurs résultats permettant de caractériser les éléments d'une classe de Schatten suivant leur action sur les bases orthonormales. Enfin, nous discutons de la structure topologique des classes de Schatten.

1.5.1 Opérateurs adjoints et théorème spectral

Par la suite, nous supposerons toujours que les espaces de Hilbert considérés sont des espaces de Hilbert complexes et séparables. De plus, pour un espace de Hilbert H, nous noterons $\langle ., . \rangle_H$ le produit scalaire de $\mathbf{H}$ et $\| \, . \, \|_H$la norme associée.

Soient deux espaces de Hilbert $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$. On note $(T, Dom(T))$ tout opérateur de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$, où $Dom(T)$ désigne le domaine de T. La donnée de $Dom(T)$ est essentielle dans la définition de l'opérateur T.
En effet, si on restreint ce domaine ou si on l'agrandit, on modifie les propriétés de T. Dans le cas où $Dom(T)$ est l'espace de Hilbert H tout entier, on convient de ne pas spécifier $Dom(T)$.
De plus, si $Dom(T)$ est un sous-espace dense dans $\mathbf{H}$ et si T est borné sur $Dom(T)$ pour la norme induite par celle de $\mathbf{H}$, alors il existe une unique application linéaire continue de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$ qui prolonge T. On désignera de nouveau par T ce prolongement continu.

Nous allons maintenant rappeler la définition de l'opérateur adjoint au sens de Von Neumann d'un opérateur non nécessairement borné.
Soient $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$ deux espaces de Hilbert et soit $(T, Dom(T))$ un opérateur de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$ tel que $Dom(T)$ est un sous-espace dense dans $\mathbf{H}$.
On considère l'ensemble des points $y \in \mathbf{G}$ tels que la forme linéaire $x \mapsto \langle Tx, y \rangle_G$ est continue sur $Dom(T)$ pour la norme induite par celle de $\mathbf{H}$. Par densité de $Dom(T)$ dans $\mathbf{H}$, il vient que pour un tel point y, cette forme linéaire se prolonge par continuité à l'espace $\mathbf{H}$ tout entier.
Par conséquent, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément de $\mathbf{H}$, noté $\mathbf{T^*y}$, déterminé par les égalités suivantes :

$$\langle Tx, y \rangle_G = \langle x, T^* y \rangle_H \quad \text{pour tout x} \in \text{Dom(T)}.$$

De cette clause d'unicité, on déduit aisément que T^* est un opérateur, ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 1.5.1 *Soient* $\mathbb{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert et soit* $(T, Dom(T))$ *un opérateur de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$ *tel que* $Dom(T)$ *est un sous-espace dense dans* $\mathbf{H}$.
On pose :

$$Dom(T^*) := \{y \in \mathbf{G} : x \mapsto \langle Tx, y\rangle_G \text{ est borne de } (\mathrm{Dom(T)}, \| \, . \, \|_{\mathrm{H}}) \text{ dans } \mathbb{C}\}.$$

On appelle opérateur adjoint de T *l'opérateur* $T^* : Dom(T^*) \to \mathbf{H}$ *défini par :*

$$\langle Tx, y\rangle_G = \langle x, T^*y\rangle_H$$

pour tout $x \in Dom(T)$ *et tout* $y \in Dom(T^*)$.

Si T est un opérateur linéaire borné de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$, alors T^* a pour domaine $\mathbf{G}$ et T^* est également borné.
Nous renvoyons le lecteur à [19] pour plus d'informations sur cette première partie du paragraphe 2.1 concernant les opérateurs adjoints au sens de Von Neumann.

Désormais, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux opérateurs adjoints d'opérateurs bornés et aux opérateurs auto-adjoints.
Les opérateurs que nous considérons maintenant ont pour domaine l'espace de Hilbert de départ tout entier. Par conséquent on ne précise plus le domaine des opérateurs dont nous parlons.

Pour deux espaces de Hilbert $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$, on désigne par $\mathfrak{L}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ l'espace des opérateurs bornés de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$. On munit cet espace de la norme usuelle $\| \, . \, \|$ définie par :

$$\| \, T \, \| = \sup_{x \in H, \|x\|_H = 1} \| \, T(x) \, \|_G,$$

pour tout opérateur T appartenant à $\mathfrak{L}(H, G)$.
Les propositions suivantes relient la continuité d'un opérateur à celle de son opérateur adjoint.

Proposition 1.5.1 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$. *L'opérateur* T *est borné si et seulement si son opérateur adjoint* T^* *est borné. De plus, si* T *est borné, on a* $\| \, T \, \| = \| \, T^* \, \|$.

Proposition 1.5.2 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert. Soit* T *un opérateur de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$. *L'opérateur* T *est borné si et seulement si l'opérateur* T^*T *est borné. De plus, si* T *est borné, on a* $\| \, T \, \|^2 = \| \, T^*T \, \|$.

Dans la suite de ce paragraphe, on s'intéresse plus particulièrement aux opérateurs auto-adjoints.
Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur borné T de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{H}$ est auto-adjoint si $T^* = T$.

Par exemple, si $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$ sont deux espaces de Hilbert et si T est un opérateur borné de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{H}$, alors l'opérateur T^*T est un opérateur auto-adjoint.

La proposition suivante fournit un exemple important d'opérateurs auto-adjoints.

Proposition 1.5.3 *Soit* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert. Si* T *est un opérateur positif de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{H}$*, c'est-à-dire vérifiant*

$$\langle Tx, T\rangle_H \geq 0 \quad \text{pour tout x} \in \mathbf{H}$$

alors T *est un opérateur auto-adjoint.*

Si T est auto-adjoint sur $\mathbf{H}$, il est facile de voir que $\langle Tx, T\rangle_H$ est réel pour tout $X \in \mathbf{H}$. De plus, on a :

Proposition 1.5.4 *Si* T *est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$*, alors*

$$\| T \| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle_H| : \|x\|_H = 1\}.$$

Définissons maintenant le spectre d'un opérateur borné. Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert et soit $T \in \mathfrak{L}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$. Le spectre de l'opérateur T, noté $\sigma(T)$, est le sous-ensemble des nombres complexes suivant :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \quad \text{n}'\text{est pas inversible } \}$$

où I est l'opérateur identité sur $\mathbf{H}$.

La connaissance du spectre de T fournit beaucoup d'informations sur l'opérateur T.
Le spectre $\sigma(T)$ est mieux compris dans le cas où T est un opérateur auto-adjoint.

Théorème 1.5.1 *Soit* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert. Supposons que* T *soit un opérateur auto-adjoint sur* $\mathbf{H}$*. Pour toute fonction* f *continue sur* $\sigma(T)$*, il existe un unique opérateur* $f(T)$ *sur* $\mathbf{H}$*, satisfaisant la condition suivante :*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

- *i) l'application $f \mapsto f(T)$ est linéaire ;*
- *ii) si $f(z) = z^n$, alors $f(T) = T^n$.*

Ce théorème est parfois appelé théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints. Une des nombreuses conséquences de ce théorème est que, si T est un opérateur autoadjoint, alors $\sigma(T)$ est constitué de nombres réels, et si de plus T est positif, alors $\sigma(T)$ est constitué de nombres positifs ou nuls.

Pour terminer, citons un théorème sur la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints.

Théorème 1.5.2 *Soit* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert. Supposons que T soit un opérateur auto-adjoint sur* $\mathbf{H}$*. Alors pour tout nombre réel t, il existe une projection E_t satisfaisant les conditions suivantes :*

- *i) Si $t \leq s, E_t \leq E_s$ (c'est-à-dire l'image de E_t est contenue dans celle de E_s) ;*
- *ii) $E_t = 0$ pour tout $t < - \parallel T \parallel_{\mathfrak{L}(H,H)}$ et $E_t = I$ pour tout $t > \parallel T \parallel_{\mathfrak{L}(H,H)}$;*
- *iii)$T = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dE_t$, au sens de la convergence en norme des sommes de Riemann ;*
- *iv) si f est une fonction continue sur le spectre $\sigma(T)$ de T, alors*

$$f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dE_t.$$

L'application E est la mesure spectrale de l'opérateur T. Le théorème 2.1.7 implique le corollaire suivant :

Corollaire 1.5.1 *Soit* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert. Supposons que T est un opérateur auto-adjoint sur* $\mathbf{H}$ *et notons E sa mesure spectrale. Pour tout $p \geq 1$, on a :*

$$\langle T^p x, x \rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} t^p d\langle E_t x, x \rangle \quad \text{pour tout x} \in \mathbf{H}.$$

1.5.2 Opérateurs compacts

Commençons par rappeler la définition d'un opérateur compact. Soient $(\mathbb{E}, \parallel \parallel_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, \parallel \parallel_{\mathbb{F}})$ deux espaces vectoriels normés. On note $\overline{\mathbb{B}_{\mathbb{E}}}$ la boule unité fermée de $\mathbb{E}$, c'est-à-dire $\overline{\mathbb{B}_{\mathbb{E}}} := \{x \in \mathbb{E} : \parallel x \parallel_{\mathbb{E}} \leq 1\}$.

Un opérateur linéaire T de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est un opérateur compact si $T(\overline{\mathbb{B}_{\mathbb{E}}})$ est relativement compact dans $\mathbb{F}$.
Un opérateur compact est borné et on peut citer comme exemple simple d'opérateurs compacts les opérateurs de rang fini.
Maintenant, plaçons-nous dans le cadre des espaces de Hilbert.
La proposition suivante relie la compacité d'un opérateur T à celle de l'opérateur T^*T.

Proposition 1.5.5 *Soient* **H** *et* **G** *deux espaces de Hilbert. Soit T un opérateur borné de* **H** *dans* **G**. *L'opérateur T est compact si et seulement si l'opérateur T^*T est compact.*

Le résultat suivant est fondamental. Il montre qu'un opérateur auto-adjoint compact est diagonalisable dans une base orthonormale convenablement choisie.

Théorème 1.5.3 *Si T est un opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert* **H**, *alors il existe une suite décroissante de nombres réels positifs $\{\lambda_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et une suite orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de* **H**, *telles que :*

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(T)\langle x, e_n\rangle_H \; e_n \qquad \text{pour tout x} \in \mathbf{H}.$$

Plus précisément, chaque $\lambda_n(T)$ est la valeur propre associée au vecteur propre e_n de l'opérateur T.

Corollaire 1.5.2 *Soient* **H** *et* **G** *deux espaces de Hilbert. Si T est un opérateur compact de* **H** *dans* **G**, *alors il existe une suite décroissante de nombres réels positifs $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, une suite orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de* **H** *et une suite orthonormale $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de* **G**, *telles que :*

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(T)\langle x, e_n\rangle_H \; f_n \qquad \text{pour tout x} \in \mathbf{H}.$$

La décomposition ci-dessus est appelée décomposition de Schmidt de l'opérateur T.
Plus précisément, on a :

$$s_n(T) = [\lambda_n(T^*T)]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{pour tout n} \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, la suite$\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans toute décomposition de Schmidt d'un opérateur compact T est unique.
Pour finir, nous donnons une caractérisation de la compacité spécifique aux opérateurs auto-adjoints.

Proposition 1.5.6 *Soient* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert et* T *un opérateur auto-adjoint sur* $\mathbf{H}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *i)* T *est compact ;*
- *ii) Pour toute suite orthonormale* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de vecteurs dans* $\mathbf{H}$, *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \langle Te_n, e_n\rangle_H = 0;$$

- *iii) Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe une projection orthogonale* $P_\epsilon \in \mathfrak{L}(H,H)$ *de codimension finie, telle que* $\|P_\epsilon T P_\epsilon\| \leq \epsilon$.

Preuve. . Voir [53]. ■

1.5.3 Classes de Schatten

Dans cette section nous allons nous intéresser au comportement asymptotique des valeurs singulières d'un opérateur compact et aux classes de Schatten.
Commençons tout d'abord par définir la suite des valeurs singulières d'un opérateur compact.

Définition 1.5.2 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert et soit* T *un opérateur compact de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$. *La suite* $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans toute décomposition de Schmidt de l'opérateur* T *est appelée suite des valeurs singulières associée à* T.
Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}, s_n(T)$ *est appelée la* $n^{\text{ème}}$ *valeur singulière de l'opérateur* T.

Proposition 1.5.7 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert. Pour un opérateur compact* T *de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$, *on a :*

- *i)* $s_0(T) = \| T \|$;
- *ii)*$s_n(\lambda T) = |\lambda| s_n(T)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve. . Voir [35]. ■

La proposition suivante donne une interprétation géométrique des valeurs singulières.
Plus précisément, la $n^{\text{ème}}$ valeur singulière d'un opérateur compact T correspond à la distance de T à l'espace des opérateurs de rang inférieur ou égal à n. Cette propriété est souvent utilisée pour estimer les valeurs singulières.

Proposition 1.5.8 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert et soit* T *un opérateur compact de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$. *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n(T) = \inf_{\substack{\mathfrak{L}(H,G) \\ rang(A)\leq n}} \| T - A \| .$$

De cette propriété on déduit la proposition suivante :

Proposition 1.5.9 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert et soient* T_1 *et* T_2 *deux opérateurs compacts de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$*. Alors pour tous* m_1, m_2 *dans* $\mathbb{N}$*, on a :*

$$s_{m_1+m_2}(T_1 + T_2) \leq s_{m_1}(T_1) + s_{m_2}(T_2).$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux classes de Schatten et à leurs propriétés.
Commençons par donner la définition des classes de Schatten.

Proposition 1.5.10 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert et soit* $0 < p < 1$*. On définit la* $p^{\text{ème}}$ *classe de Schatten de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$*, notée* $\mathcal{S}_p(H, G)$*, comme l'ensemble de tous les opérateurs compacts* T *de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$ *tels que la suite des valeurs singulières de* $T, \{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$*, vérifie :*

$$\|T\|_{\mathcal{S}_p(H,G)} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} [s_n(T)]^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Autrement dit, pour $p > 0$, un opérateur compact T de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$ appartient à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(H, G)$ si et seulement si la suite $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est p-sommable.
Par exemple, d'après la proposition (1.3.3), les opérateurs de rang fini appartiennent à la $p^{\text{ème}}$ classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, pour tout $p > 0$.
Usuellement, la classe $\mathcal{S}_1$ est appelée classe des opérateurs à trace. Plus précisément, si $T \in \mathcal{S}_1$, alors la trace de T, notée $tr(T)$, est définie par :

$$tr(T) = \|T\|_{\mathcal{S}_1} := \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(T).$$

De même, la classe $\mathcal{S}_2$ est plus communément appelée classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
Les valeurs singulières étant souvent difficiles à déterminer, nous cherchons désormais à caractériser les éléments des classes de Schatten suivant leur action sur des bases orthonormales.

Théorème 1.5.4 *Soit* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert. Si* T *est un opérateur compact positif de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{H}$*, alors :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Te_n, en\rangle_H,$$

pour toute base orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbf{H}$ *.*

Par conséquent, si T est un opérateur compact positif sur $\mathbf{H}$, alors T appartient à $\mathcal{S}_1(H,H)$ si et seulement s'il existe une base orthonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{H}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Te_n, e_n\rangle_H < \infty$.
Le théorème suivant, qui découle du théorème (1.3.6), nous permet de définir autrement la trace d'un opérateur appartenant à la classe $\mathcal{S}_1$.

Théorème 1.5.5 *Soit* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert. Si* $T \in \mathcal{S}_1(H,H)$*, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Te_n, e_n\rangle_H$ *converge absolument pour toute base orthonormale* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbf{H}$*.*
De plus, la somme est indépendante du choix de la base orthonormale et est égale à la trace de T*.*

Ensuite, le théorème 1.3.8 ramène l'étude de l'appartenance d'un opérateur positif T à une classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, où $p > 0$, à celle de l'appartenance de l'opérateur T^p à la classe de Schatten $\mathcal{S}_1$. L'intérêt de ce résultat est que l'appartenance d'un opérateur à la classe des opérateurs à trace est totalement caractérisée par son action sur les bases orthonormales.

Théorème 1.5.6 *Soit* $\mathbf{H}$ *un espace de Hilbert et soit* $p > 0$*. Si* T *est un opérateur compact positif de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{H}$ *, alors* $T \in \mathcal{S}_p(H,G)$ *si et seulement si* $T^p \in \mathcal{S}_1(H,H)$*. De plus, on a*

$$\|T\|^p_{\mathcal{S}_p(H,H)} = \|T^p\|_{\mathcal{S}_1(H,H)}.$$

De même, le théorème 1.3.9 ramène l'étude de l'appartenance d'un opérateur T à une classe de Schatten $\mathcal{S}_p$, où $p \geq 1$, à celle de l'appartenance de l'opérateur $(T^*T)^{\frac{p}{2}}$ à la classe de Schatten $\mathcal{S}_1$.

Théorème 1.5.7 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert et soit* $1 \leq p < \infty$*. Si* T *est un opérateur compact de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$*, alors* $T \in \mathcal{S}_p(H,G)$ *si et seulement si* $(T^*T)^{\frac{p}{2}} \in \mathcal{S}_1(H,H)$*. De plus, si* $T \in \mathcal{S}_p(H,G)$*, on a :*

$$\|T\|^p_{\mathcal{S}_p(H,G)} = \|(T^*T)^{\frac{p}{2}}\|_{\mathcal{S}_1(H,H)}.$$

Corollaire 1.5.3 *Soient* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{G}$ *deux espaces de Hilbert et soit* $1 \leq p < \infty$*. Supposons que* T *soit un opérateur de* $\mathbf{H}$ *dans* $\mathbf{G}$*. Alors* T *appartient à* $\mathcal{S}_p(H,G)$ *si et seulement si* $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left\langle (T^*T)^{\frac{p}{2}}e_n, e_n\right\rangle_H < \infty$ *pour toute base orthonormale* $\{e_n\}_n \in \mathbb{N}$ *de* $\mathbf{H}$*. De plus, si* $T \in \mathcal{S}_p(H,G)$*, on a :*

$$\|T\|^p_{\mathcal{S}_p(H,G)} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left\langle (T^*T)^{\frac{p}{2}}e_n, e_n\right\rangle_H.$$

Autrement dit, pour $p \geq 1$, l'appartenance d'un opérateur T à la classe de Schatten $\mathcal{S}_p$ est totalement caractérisée par l'action de $(T^*T)^{\frac{p}{2}}$ sur les bases orthonormales.
Pour finir, nous allons étudier la structure topologique des classes de Schatten.
Nous allons voir que les structures diffèrent dans les cas $p \geq 1$ et $0 < p < 1$.

Proposition 1.5.11 *Soient* **H** *et* **G** *deux espaces de Hilbert et soit* $p \geq 1$. *L'espace* $\left(\mathcal{S}_p(H,G), \| \, . \, \|_{\mathcal{S}_p(H,G)}\right)$ *est un espace de Banach.*

Il est évident que $\| \, . \, \|_{\mathcal{S}_p(H,G)}$ n'est pas une norme sur $\mathcal{S}_p(H,G)$ lorsque $0 < p < 1$.
Néanmoins, pour $0 < p < 1$, l'espace $\mathcal{S}_p(H,G)$ est un espace métrique complet, qui possède une autre structure que celle d'un espace normé, à savoir une structure d'espace quasi-Banach.
Commençons par rappeler la définition d'une quasi-norme et d'un espace quasi-Banach.

Définition 1.5.3 *Soit* X *un espace vectoriel complexe. Une application* A *de* X *dans* $\mathbb{R}^+$ *est appelée quasi-norme si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *i)* $A(x) = 0$ *implique* $x = 0$ *pour tout* $x \in X$.
- *ii)* $A(\alpha x) = |\alpha| A(x)$ *pour tour* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et tout* $x \in X$.
- *iii) Il existe une constante* $\mathcal{C} > 0$ *tel que* $A(x_1 + x_2) \leq \mathcal{C}[A(x_1) + A(x_2)]$ *pour tout* $x_1, x_2 \in X$.

En outre, on dira que A est une p-norme, pour $0 < p \leq 1$, si on a de plus : $[A(x_1 + x_2)]^p \leq [A(x_1)]^p + [A(x_2)]^p$ pour tous x_1, x_2 dans X. Bien sûr, si $p = 1$, alors A est une norme.

Définition 1.5.4 *Soit* X *un espace vectoriel complexe muni d'une quasi-norme* A. *Si* A *définit sur* X *une topologie métrisable complète, alors on dira que* X *est un espace quasi-Banach. Si de plus* A *est une p-norme, pour* $0 < p \leq 1$, *on dira que* X *est un espace quasi-Banach p-normé.*

Théorème 1.5.8 *Soient* **H** *et* **G** *deux espaces de Hilbert et soit* $0 < p < 1$. *L'espace* $\left(\mathcal{S}_p(H,G), \| \, . \, \|_{\mathcal{S}_p(H,G)}\right)$ *est un espace quasi-Banach p-normé.*

Preuve. . Voir [48] et [63]. ■

1.6 Fonction de Macdonald

1.6.1 Équation de Bessel

La fonction de Kummer (de première espèce) $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ est dèfinie par :

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)n}{(\gamma)n} \frac{z^n}{n!}$$

où z, α sont deux nombres complexes et $\gamma \notin -\mathbb{N}$.
On introduit aussi la fonction de Kummer modifiée :

$$\Phi^*(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\Phi(\alpha, \gamma, z)$$

qui est une fonction entière dépendant des variables α, γ, z. La fonction $U_1(z) = \phi^*(\alpha, \gamma, z)$ est une solution de l'équation différentielle (appelée équation de Kummer) :

$$zU'' + (\gamma - z)U' - \alpha U = 0$$

On suppose que $\gamma = 2\alpha$ et on pose $\alpha = \frac{1}{2}+\nu$, donc $\gamma = 1+2\nu$, et $u(z) = z^{-\nu}e^{\frac{z}{2}}\nu(\zeta)$, où $z = 2i\zeta$. Alors on obtient l'équation de Bessel :

$$\nu''(\zeta) + \frac{\nu'(\zeta)}{\zeta} + (1 - \frac{\nu^2}{\zeta^2})\nu(\zeta) = 0$$

1.6.2 Fonction de Bessel

La **fonction de Bessel de première espèce est définie par** :

$$J_\nu(z) = \sum_{\mu\geq 0}\frac{(-1)^\mu}{\mu!\Gamma(\nu+\mu+1)}(\frac{z}{2})^{\nu+2\mu}, \quad |\arg z| < \pi \qquad \nu \in \mathbb{C}$$

On vérifie facilement que J_ν et $J_{-\nu}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation :

$$z^2U'' + zU' + (z^2 - \nu^2)U = 0$$

Fonction de Bessel de deuxième espèce : La fonction de Bessel de deuxième espèce notée par $N_\nu(z)$ et définie dans $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ par :

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

Fonctions de Bessel de troisième espèce $H_\nu^{(1)}(z),\ H_\nu^{(2)}(z)$ **:** Les fonctions de Bessel de troisième espèce ou fonctions de Hankel sont définies par :

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z),\ H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - N_\nu(z)$$

où $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0],\ \nu \in \mathbb{C}$.

1.6.3 L'équation de Bessel modifiée

Si on remplace z par $\pm iz$ dans l'équation de Bessel, on obtient l'équation de Bessel modifiée d'ordre ν :

$$z^2\nu'' + z\nu' - (z^2 + \nu^2)\nu = 0 \qquad (*)$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel modifiées (voir [4], [29]).

1.6.4 Fonction de Bessel modifiée

1. **La fonction de Bessel modifiée de première espèce**
   La fonction de Bessel modifiée de première espèce est définie par :

$$I_\nu(z) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{\mu! \Gamma(\nu + \mu + 1)} (\frac{z}{2})^{\nu+2\mu}, \quad | \arg z | < \pi$$

   dans $\mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$ pour chaque $\nu \in \mathbb{C}$. elle est une fonction entière par rapport à ν pour z fixé. Pour chaque $\nu \notin \mathbb{Z}$, le couple $(I_\nu, I_{-\nu})$ est un système fondamental pour l'équation $(*)$. Lorsque $\nu = n \in \mathbb{Z}$, on a $I_{-n} = I_n$.
2. **La fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce où Fonction de Macdonald :**
   Il existe une autre solution de l'équation $(*)$.
   si $| \arg z | < \pi$, alors la fonction de Macdonald est définie par :

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu} \qquad \nu \notin \mathbb{Z}.$$
$$K_n(z) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(z) \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

1.6.5 Les intégrales de fonction de Bessel modifiée d'ordre entier

Pour le premier type :

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) \exp(z \cos\theta)\ d\theta.$$

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(z \cos\theta)\ d\theta.$$

$$I_1(z) = \frac{dI_0(z)}{dz} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sinh(z \cos\theta) \cos\theta\ d\theta.$$

Pour le deuxième type :

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi}(z \backslash 2)^n}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\infty \sinh^{(2n)} t \exp(-z \cosh t)\ dt, \quad z > 0.$$

$$K_n(z) = \int_0^\infty \cosh(nt) \exp(-z \cosh t)\ dt, \quad z > 0.$$

1.6.6 Généralisation de la méthode de Laplace

On considère les intégrales du type suivant : (voir [25], [55], [58])

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x)\ e^{\nu h(x)}\ dx$$

Quand $\nu \to \infty$, où $h(x)$ possède un unique maximum ξ dans l'intervalle $\alpha \leq x \leq \beta$. On peut généraliser la méthode de Laplace au intégrales de la forme :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x,\nu)\ e^{h(x,\nu)}\ dx$$

où $\Phi(x,\nu)$ est bornée quand $\nu \to \infty$ et $h(x,\nu)$ possède un unique maximum ξ. Il faut noté que ξ n'est plus fixé il peut varier avec ν.
Dans le cas de fonction de Bessel [[29], page 25 (15), et [74], page 235]

$$K_\nu(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu x - \alpha\cosh x}\ dx.$$

où ν, α sont des réels positifs et ν est grand. On peut pas appliquer la méthode de Laplace avec la factorisation $h(x) = x$ et $\Phi(x) = e^{-\alpha\cosh x}$. Puisque $h(x)$ n'admet pas de maximum, et $\nu x - \alpha\cosh x$ admet un unique maximum à $x = \sinh^{-1}(\nu/\alpha)$ qui varie par rapport à ν, si on pose

$$x = \sinh^{-1}(\nu/\alpha) + t$$

Alors

$$K_\nu(\alpha) = \frac{1}{2}\{\frac{\nu + \sqrt{\nu^2+\alpha^2}}{\alpha}\}^\nu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu(t-e^t)}\Phi(t,\nu)\ dt.$$

Où $\Phi(t,\nu) = \exp[-\alpha^2\coth t/\{\nu + \sqrt{\nu^2+\alpha^2}\}]$.
La fonction $t - e^t$ possède un unique maximum à $t = 0$. Comme $\Phi(t,\nu)$ est continue dans l'intervalle $-\alpha \leq t \leq \alpha$ et

$$\Phi(\alpha,\nu) \leq \Phi(t,\nu) \leq \Phi(0,\nu).$$

où $\Phi(t,\nu) \to 1$ quand $\nu \to \infty$ uniformément en t. Et $\Phi(t,\nu) \leq 1 \quad \forall t,\nu$. Alors, on obtient :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\nu(t-e^t)}\Phi(t,\nu)\ dt = \Phi(t_0,\nu)\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\nu(t-e^t)}\ dt.$$

Où $-\alpha \leq t_0 \leq \alpha$ et

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\nu(t-e^t)}\Phi(t,\nu)\ dt \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(t-e^t)}\ dt$$

$$\sim e^{-\nu}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\nu t^2}\ dt$$

$$= e^{-\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}.$$

Pour montrer que la contribution des intervalles $t \geq \alpha$ et $t \leq -\alpha$ est petite, on écrit $t = \alpha + \tau$ et comme $\Phi(t,\nu) \leq 1$ pour tous t, ν. Alors, par l'inégalité $e^\tau \geq 1 + \tau, \quad (\tau \geq 0)$ on a :

$$0 \leq \int_{\alpha}^{\infty} e^{\nu(t-e^t)}\Phi(t,\nu)\ dt \leq e^{\nu(\alpha-e^\alpha)}\int_{0}^{\infty} e^{\nu\tau-\nu e^{\alpha(e^\tau-1)}}\ d\tau$$

$$\leq e^{\nu(\alpha-e^\alpha)}\int_{0}^{\infty} e^{-\nu\tau(e^\alpha-1)}\ d\tau = \frac{e^{-\nu(e^\alpha-\alpha)}}{\nu(e^\alpha-1)} = o(\frac{e^{-\nu}}{\nu}).$$

Comme $e^\alpha - \alpha > 1$, la même chose avec $t \leq -\alpha$.
Quand α est positif et $\nu \to +\infty$ on a :

$$K_\nu(\alpha) \sim \frac{\{\nu + \sqrt{\nu^2+\alpha^2}\}^\nu}{2\alpha^\nu} e^{-\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}.$$

Plus

$$K_\nu(\alpha) \sim \frac{2^\nu \nu^\nu e^{-\nu}}{\alpha^\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{2\nu}}.$$

1.7 Polynômes de Laurent orthogonaux

La théorie de Polynômes de Laurent orthogonal est Un outil important dans l'étude des problèmes fortes des moments . En 1980 William B.Jones, W. J. Thron et Haakon Waadeland ont publié un article très important intitulé " Strong Stieltjes Moment Problem", cette étude du problème fort des moments conduit à l'apparition des polynômes de Laurent (L-polynômes) [24], et de nombreux résultats vont très vite se succéder mettant le point sur les différents aspects théoriques et élargissant les champs d'application de ces polynômes.

Définition 1.7.1 *Une polynôme de Laurent est une fonction d'une variable complexe z de la forme* $P_L(z) = \sum_{j=m}^{n} \lambda_j z^j, \quad m, n \in \mathbb{Z}$ *avec* $m \leq n$, *et* $\lambda_j \in \mathbb{C}$ *pour* $j = m, ..., n$.

On note Λ l'ensemble des polynômes de Laurent et $\Lambda_{m,n}$ représente l'ensemble des polynômes de Laurent contenus dans $span\{z^j\}_{n=j=m}^{n}$. Deux classe de polynômes de Laurent sont particulièrement importantes

$$\Lambda_{2n} = \{P_l \in \Lambda_{-n,n} \quad \text{tel que le coefficient de z}^{\text{n}} \text{ est non nul } \}$$

et

$$\Lambda_{2n+1} = \{P_l \in \Lambda_{-n-1,n} \quad \text{tel que le coefficient de z}^{-\text{n}-1} \text{ est non nul } \}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Proposition 1.7.1 *Pour chaque* $P_L \in \Lambda$, *il existe un entier unique* $k \in \mathbb{Z}_0^+$ *tel que* $P_L \in \Lambda_k$.

Preuve. Soit $P_L(z) = \sum_{j=m}^{n} \lambda_j z^j$ avec $\lambda_m \lambda_n \neq 0$. Donc $\mid m \mid \leq n$ ou $\mid m \mid > n$.
Si $\mid m \mid \leq n$ alors $P_L \in \Lambda_{2n}$ et $P_L \notin \Lambda_k$ pour $k \neq 2n$.
Si $\mid m \mid > n$ alors $P_L \in \Lambda_{2\mid m \mid -1}$ et $P_L \notin \Lambda_k$ pour $k \neq 2 \mid m \mid -1$. ■

Définition 1.7.2 *Un polynôme de Laurent* P_L *est dit de L-degré* q, *si* $P_L \in \Lambda_q, \quad q \in \mathbb{Z}_0^+$.

Alors que le degré d'un polynôme est la plus grande puissance des monômes z^j, ce n'est pas le cas pour le L-degré d'un polynôme de Laurent. En fait, le L-degré d'un polynôme est le double de son degré.
Le concept d'orthogonalité est introduit relativement à une fonctionnelle linéaire $\mathcal{L} : \Lambda \to \mathbb{C}$. Soit $\{\mu_n\}$ une suite de nombres complexes et soit $\mathcal{L}$ une fonction à valeurs complexe définie sur Λ par

$$\mathcal{L}[P_L(z)] = \sum_{j=m}^{n} \lambda_j \mu_j, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Pour $P_L(z) = \sum_{j=m}^{n} \lambda_j z^j$ dans Λ. Noter que $\mathcal{L}[z^n] = \mu_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
La fonctionnelle $\mathcal{L}$ s'appelle fonctionnelle fort de moments déterminée par la suit $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Définition 1.7.3 *Une suite* $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *est dite suite de polynômes de Laurent orthogonaux correspondant à la fonctionnelle* $\mathcal{L}$ *si* $P_k(z) \in \Lambda_k$ *pour chaque* $k \in \mathbb{Z}_0^+$ *et* $\mathcal{L}[P_m(z)P_n(z)] = K_n\delta_n, \quad m,n \in \mathbb{Z}_0^+$, *avec* $K_n \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}_0^+$ *et* $\delta_{m,n}$ *le symbole de Kronecker.*
Si $K_n = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}_0^+, \quad \{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *est une suit de polynômes de Laurent orthonormaux correspondant à la fonctionnelle* $\mathcal{L}$.

Pour plus de détails sur la théorie des polynômes de Laurent consulter [24],[26] et [47].

Chapitre 2

$*$-représentation de Semi-Groupes

2.1 Introduction :

Dans cette partie du travail, nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une $*$-représentation d'un semi-groupe topologique commutatif $\mathbb{S}$ soit continue à l'identité e de $\mathbb{S}$.
Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et soit $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ la $\mathcal{C}^*$-algèbre de tous les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ et T^* l'adjoint de T. On pose :

$$\Re T := \frac{1}{2}(T + T^*) \; et \; ImT := \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Soient S et T deux opérateurs hermitiens. Nous allons écrire $S \leq T$ si

$$(Sx, x) \leq (Tx, x) \; pour \; tous \; x \in \mathbb{H}.$$

Soit $(\mathbb{S}, +, *)$ un $*$-semi-groupe ; c'est-à-dire, un semi-groupe commutatif $(\mathbb{S}, +)$ d'identité e et d'involution $*$ vérifiant $(s+t)^* = s^* + t^*$ et $(s^*)^* = s$.
On suppose que $\mathbb{S}$ est topologique ; c'est-à-dire que $\mathbb{S}$ est muni d'une topologie qui rend continue l'application $(s,t) \to s + t^*$.
Une $*$-représentation de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ est une application $\varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui satisfait :

$$\varrho(s + t^*) = \varrho(s)(\varrho(t))^* \; et \; \varrho(e) = I.$$

pour tous $s, t \in \mathbb{S}$, où I est l'opérateur identité. $*$-Homomorphismes de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ est une application $h : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui satisfait :

$$h(s + t^*) = h(s) + (h(t))^* \; pour \; s, t \in \mathbb{S}.$$

On dit que h est hermitien si $h(s^*) = h(s)$, pour tout $s \in \mathbb{S}$.
On considère une $*$-représentation de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ et on pose

$$\alpha(s) := \| \varrho(s) \|, \text{ pour tout s} \in \mathbb{S}.$$

Alors α est une valeur absolue sur $\mathbb{S}$. Puisque

$$\alpha(e) = 1 \text{ et } \alpha(s + t^*) \leq \alpha(s)\alpha(t) \text{ pour tous } s, t \in \mathbb{S}.$$

On dit qu'une fonction $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ est α-bornée s'il existe une constante positive $\mathcal{C}$ telle que $\mid \varphi(s) \mid \leq \mathcal{C}\alpha(s)$ pour tous $s \in \mathbb{S}$.
Un semi-caractère dans $\mathbb{S}$ est une fonction non nulle $\gamma : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ qui satisfait $\gamma(s + t^*) = \gamma(s)\overline{\gamma(t)}$ pour tous $s, t \in \mathbb{S}$. On note par $\mathbb{S}^*$ l'ensemble de tous les semi-caractères dans $\mathbb{S}$ et par $\Gamma = \Gamma(\varrho)$ l'ensemble de tous les semi-caractères α-bornés dans $\mathbb{S}$. On équipe $\mathbb{S}^*$ de la topologie de la convergence simple, qui est complètement régulière et induit une topologie compacte sur Γ.
Les principaux résultats de cette partie sont les suivants :

Théorème 2.1.1 *Soit $(\mathbb{S}, +, *)$ un $*$-semi-groupe topologique et soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Soit V un voisinage de l'identité e dans $\mathbb{S}$, et soient $\delta, m > 0$, et soit $H(V, \delta, m)$ la collection de tous les $*$-homomorphismes $h : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui satisfont :*

$$\parallel \Re h(s) \parallel \leq M \text{ et } \parallel \Im h(s) \parallel \leq \frac{2\pi}{3}, \text{ pour tout s} \in \text{V}. \tag{2.1}$$

Alors $H(V, \delta, M)$ est équicontinue à l'identité e. En particulier, un $*$-homomorphisme hermitien $h : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est continue à l'identité si et seulement s'il est borné sur un voisinage de e.

Théorème 2.1.2 *Soit $(\mathbb{S}, +, *)$ un $*$-semi-group topologique et soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert. Alors une $*$-représentation $\varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est continue à l'identité e si et seulement s'il existe un V de e dans $\mathbb{S}$ et des constantes positives δ, M telles que :*

$$\delta I \leq \Re\varrho(s) \leq MI, \text{ pour tout s} \in \text{V}. \tag{2.2}$$

De plus, la collection $\Omega(V, \delta, M)$ de toutes $*$-représentations $\varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui verifie (2.2) est équicontinue à l'identité e.

2.2 Préliminaires

Nous commençons dans cette section par la collecte des données de base sur la théorie spectrale des opérateurs normaux et les $*$-représentations des semi-groupes.

Nous rappelons qu'un opérateur $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est appelé normal si $NN^* = N^*N$.
La résolvante de N est l'ensemble de tous les nombres complexes z pour lesquels l'opérateur $N - zI$ est inversible. Le Spectre $\sigma(N)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant de N par rapport à $\mathbb{C}$. C'est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$.
Nous avons les lemmes suivants sur les opérateurs normaux [19].

Lemme 2.2.1 *Soit $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ un opérateur normal. Alors le nombre complexe z est dans $\sigma(N)$ si et seulement s'il existe une suite $\{x_n\}$ des vecteurs unitaires dans $\mathbb{H}$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \| Nx_n - zx_n \| = 0, \tag{2.3}$$

où $\| \ . \ \|$ est la norme associée au produit scalaire de $\mathbb{H}$.

Lemme 2.2.2 *Soit $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ un opérateur normal. Alors il existe une mesure spectrale unique F dans $\sigma(N)$ telle que :*

$$N = \int_{\mathbb{C}} z \ dF(z). \tag{2.4}$$

De plus, on a $supp(F) = \sigma(N)$.

Le résultat suivant a été obtenu par Berg et Maserick [11].

Proposition 2.2.1 *Il existe une mesure spectrale unique E_ϱ dans Γ telle que :*

$$\varrho(s) = \int_{\Gamma} \gamma(s) dE_\varrho(\gamma), \tag{2.5}$$

pour tout $s \in \mathbb{S}$.

De plus, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable bornée de Borel, on définit la fonction d'opérateur $f \circ \varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ par

$$(f \circ \varrho)(s) := \int_{\Gamma} (f \circ \gamma)(s) dE_\varrho(\gamma), \tag{2.6}$$

pour tout $s \in \mathbb{S}$.
Si V est un sous-ensemble de $\mathbb{S}$ et K est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{C}$, alors, on pose :

$$\Gamma(V, K, f) := \{\gamma \in \Gamma : (f \circ \gamma)(s) \in K, \ \textit{pour tout } s \in V\}.$$

Lemme 2.2.3 *Soit ϱ une $*$-représentation qui satisfait :*

$$((f \circ \varrho)(s)x, x) \in K, \tag{2.7}$$

pour tout $s \in V$, et tout vecteur unitaire $x \in \mathbb{H}$. Alors, on a :

$$(f \circ \varrho)(s) := \int_{\Gamma(V,K,f)} (f \circ \gamma)(s) dE_\varrho(\gamma), \tag{2.8}$$

pour tout $s \in \mathbb{S}$.

Preuve. Pour $s \in V$, soit F_s la mesure image de E_ϱ via l'application $\gamma \to (f \circ \gamma)(s)$. Alors, F_s est une mesure spectrale à support compact sur $\mathbb{C}$ qui satisfait :

$$(f \circ \varrho)(s) := \int_{\mathbb{C}} z dF_s(z). \tag{2.9}$$

Donc F_s est la résolution spectrale de l'opérateur normale $N = (f \circ \varrho)(s)$, et ainsi $supp(F_s) = \sigma((f \circ \varrho)(s))$. Par le lemme 2.2.1 et l'hypothèse(2.7) on obtient $\sigma((f \circ \varrho)(s))$ est contenu dans K. Alors, pour tout $s \in V$ on a :

$$(f \circ \varrho)(s) = \int_K z dF_s(z) = \int_{\Gamma(V,K,f)} (f \circ \gamma)(s) dE_\varrho(\gamma),$$

pour tout $s \in V$. ■

2.3 La preuve des principaux résultats :

Soit V un voisinage de l'identité e dans $\mathbb{S}$, et soit $\Omega(V)$ l'ensemble de tous les $*$-représentation ϱ qui satisfait :

$$\| \arg[\varrho(s)] \| \leq \frac{2\pi}{3}, \tag{2.10}$$

pour tout $s \in V$. Pour $\delta, M > 0$, soit $\Omega_1(\delta, M, V)$ l'ensemble composée de tous ceux $*$-représentation ϱ qui satisfait :

$$\frac{\delta}{2} \| x \|^2 \leq \left\langle \mid \varrho \mid (s).x, x \right\rangle \leq M \| x \|^2 \tag{2.11}$$

pour tous $s \in V,\ x \in \mathbb{H}$.

Lemme 2.3.1 *Pour chaque entier strictement positif N et chaque voisinage V de l'identité e dans $\mathbb{S}$, il existe un voisinage V_N de e telle que :*

$$| \arg[\varrho(s + t^*)] | \leq \frac{2\pi}{3N}, \tag{2.12}$$

pour tous $s, t \in V_{N,\varrho} \in \Omega(V)$, et

$$\| \mid \varrho \mid (s) - \mid \varrho \mid (t) \| \leq 2\frac{\sqrt{2}M}{N\sqrt{\delta}}. \tag{2.13}$$

pour tous $s, t \in V_N, \quad \varrho \in \Omega(\delta, M, V)$.

Preuve. Par (2.9) et le lemme 2.2.3 on obtient :

$$(\arg \varrho)(s) = \int_{\Gamma(V)} \arg[\gamma(s)] dE_\varrho(\gamma), \tag{2.14}$$

pour tout $s \in V$, où $\Gamma(V)$ est l'ensemble de tous les semi-caractères $\gamma \in \mathbb{S}^*$ qui satisfait :

$$| \arg[\gamma(s)] | \leq \frac{2\pi}{3}, \qquad s \in V.$$

Soit V_N un voisinage de e tel que si $s \in V_N$ alors $s^* \in V_N$, donc,

$$\underbrace{V_N + ... + V_N}_{2N \ times} \subseteq V.$$

Alors pour tous $s, t \in V_N$ et $n \leq N$ on a $n(s + t^*) \in V$, alors par le preuve de le lemme 2.1 dans [77], et pour $\gamma \in \Gamma(V), s \in V_N$ alors, on a :

$$| \arg[\gamma(s + t^*)] | \leq \frac{2\pi}{3N}. \tag{2.15}$$

Alors par (2.13) et (2.14) on obtient le (2.11). Pour prouver (2.12), soit $x \in \mathbb{H}$ et soit $s, t \in V_N$ alors, on a :

$$y := \big[\mid \varrho \mid (s) - \mid \varrho \mid (t) \big].x.$$

Alors, pour $\varrho \in \Omega_1(\delta, M, V)$ on a :

$$\begin{aligned}
4M^2 \parallel x \parallel^2 &\geq \Big\| \big[\mid \varrho \mid (Ns) - \mid \varrho \mid (Nt) \big].x \Big\|^2 \\
&= \Big\langle \big[\mid \varrho \mid (Ns) - \mid \varrho \mid (Nt) \big]^2.x, x \Big\rangle \\
&= \left\langle \left[\sum_{j=0}^{N-1} \mid \varrho \mid \Big(js + (N-j-1)t \Big) \right]^2 .y, y \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=0}^{N-1} \Big\langle \mid \varrho \mid \big[(j+k)s + (2N-j-k-2)t \big].y, y \Big\rangle \\
&\geq \frac{\delta}{2} N^2 \parallel y \parallel^2 = \frac{\delta}{2} N^2 \Big\| \big[\mid \varrho \mid (s) - \mid \varrho \mid (t) \big] \Big\|^2 \parallel x \parallel^2 .
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve de (2.12). ■

Lemme 2.3.2 *La famille* $\Omega(\delta, M, V) := \Omega_1(\delta, M, V) \cap \Omega(V)$ *est équicontinue à l'identité* e *dans* $\mathbb{S}$. *En particulier, chaque élément de* $\Omega(V, M, \delta)$ *est continue.*

Preuve. Pour chaque entier strictement positif N on choisit un voisinage V_N qui vérifie les inégalités dans le lemme 2.3.1 Alors, pour tous $s,t \in V_N$, on a :

$$\left\| e^{i(\arg \varrho(s))} - e^{i(\arg \varrho(t))} \right\| \leq \left\| \int_{\Gamma(V)} [e^{i(\arg \gamma(s))} - e^{i(\arg \gamma(t))}] dE_\varrho(\gamma) \right\|$$

$$= \left\| \int_{\Gamma(V)} \mid (\arg \gamma(s+t^*) \mid dE_\varrho(\gamma) \right\|$$

$$Par\ (2.12) \quad \leq \frac{2\pi}{3N}.$$

Alors on a :

$$\left\| \varrho(s) - \varrho(t) \right\| = \left\| \mid \varrho \mid (s) e^{i(\arg \varrho(s))} - e^{i(\arg \varrho(t))} \right\|$$

$$\leq \left\| \big[\mid \varrho \mid (s) - \mid \varrho \mid (t) \big] e^{i(\arg \varrho(s))} \right\| + \left\| \mid \varrho \mid (t) \big[e^{i(\arg \varrho(s))} - e^{i(\arg \varrho(t))} \big] \right\|$$

$$\leq \| \mid \varrho \mid (s) - \mid \varrho \mid (t) \| + \| \mid \varrho \mid (t) \| \left\| e^{i(\arg \varrho(s))} - e^{i(\arg \varrho(s))} \right\|$$

$$\leq 2\frac{\sqrt{2}M}{N\sqrt{\delta}} + M\frac{2\pi}{3N},$$

■

Preuve. (Théoreme 2.1.1) Soit $\delta > 0$ et V un voisinage de e. Alors on a

$$H(V,M,\delta) = \left\{ h \in \mathbb{S} : M \geq \|\Re h(s)\| \ \ et\ \|\Im h(s)\| \leq \frac{2\pi}{3},\ \text{pour tout s} \in \text{V} \right\}$$

est un sous-ensemble fermé de $\Omega(V,M,\delta)$, de plus, $H(V,M,\delta) \subseteq \Omega(V,M,\delta)$. Et par lemme 2.3.2 on voit que $H(V,M,\delta)$ est équi-continue.
Soit h est borné sur un voisinage V de e, alors $h \in H$, donc h est continue.
On suppose que h est continue, et soit W est un voisinage de e dans $\mathbb{S}$ telle que :

$$M \geq \|\Re h(s)\| \ \ et\ \|\Im h(s)\| \leq \frac{2\pi}{3}$$

Alors

$$\liminf_{s \to e} \Re h(s) := \sup_{s \in W} \inf \Re h(s) > 0$$

et

$$\limsup_{s \to e} \Re h(s) := \inf_{s \in W} \sup \Re h(s) < \infty$$

Soit V est un voisinage de e dans $\mathbb{S}$ telle que $s + t^* \in W$ pour tous $s,t \in V \times V$. Alors, $\|h(s)\| \leq C$ pour tout $s \in V$ et $C > 0$ donc h est borné sur v. ■

Preuve. (Théorème 2.1.2) Il suffi de choisir $\varrho(s) = e^{h(s)}$ dans le théorème (2.1.1).

■

2.4 Applications

Soit $(\mathbb{S}, +, e, *)$ un semi-groupe topologique commutatif d'identité e et d'involution $*$ vèrifiant $(s+t)^* = s^* + t^*$ et $(s^*)^* = s$.
La $*$-représentation de $\mathbb{S}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ est l'application $\varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ qui satisfait :

$$\varrho(s + t^*) = \varrho(s)(\varrho(t))^* \; et \; \varrho(e) = I$$

On suppose que $\mathbb{S}$ est topologique ; c'est-à-dire que $\mathbb{S}$ est muni d'une topologie qui soit continue par l'application $(s,t) \to s + t^*$. On fixe une valeur absolue α dans $\mathbb{S}$. il s'agit d'un ensemble $\alpha(s) := \| \varrho(s) \|$, $s \in \mathbb{S}$, qui satisfait $\alpha(e) = 1$ et $\alpha(s + t^*) \leq \alpha(s)\alpha(t)$.
une fonction $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ est dite α-bornée (ou bornée par rapport à α) s'il y a un constat C positif tel que $| \varphi(s) | \leq C\alpha(s)$ pour tous $s \in \mathbb{S}$. Une fonction complexe dans $\mathbb{S}$ est dite exponentiellement bornée si elle est bornée par rapport à une valeur absolue.
Un semi-caractère dans $\mathbb{S}$ est une fonction non nul $\gamma : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ satisfait $\gamma(s+t^*) = \gamma(s)\overline{\gamma(t)}$ pour tous $s, t \in \mathbb{S}$. On dènote par $\mathbb{S}^*$ l'ensemble des semi-caractères dans $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}^*_\alpha$ l'ensemble de tous semi-caractères α-bornées dans $\mathbb{S}$.
On équipe $\mathbb{S}^*$ avec la topologie de la convergence simple, qui est une topologie tout à fait régulière et induit une topologie compacte dans $\mathbb{S}^*_\alpha = \{\gamma \in \mathbb{S}^* : | \gamma | \leq \alpha\}$.

Théorème 2.4.1 *Soit $(\mathbb{G}, +, e)$ un groupe abélien localement compact, et soit $(\mathbb{S}, +, e)$ un semi-groupe de $(\mathbb{S}, +, e)$ est muni d'une involution continue $*$. On suppose que $e \in \overline{Int(\mathbb{S})}$ et e possède une base dénombrable des voisinages dans $\mathbb{S}$. Soit α une valeur absolue localement bornée dans $\mathbb{S}$ et on note par Γ l'espace topologique complètement régulier de tous les semi-caractères α-bornées dans $\mathbb{S}$ qui sont continues au e. Si $\varrho : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est une représentation définie positive α-bornée, alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

- *(1) ϱ est continue en e.*
- *(2) ϱ est continue sur $\{e\} \cup Int(\mathbb{S})$.*
- *(3) ϱ est continue sur $\mathbb{S}$.*
- *(4) il existe une mesure spectrale E dans Γ tel que*

$$\varrho(s) = \int_\Gamma \gamma(s) dE(\gamma), \qquad s \in \mathbb{S}.$$

Preuve. (3) $\Rightarrow$ (1) et (3) $\Rightarrow$ (2) c'est évident.
Par le théoreme 2.1.2, et le lemme 2.2.3 on voit que (1) équivaut (4) ■
Pour l'autre implication, on considère un espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{V}$ muni d'une involution linéaire $*$ et on considère aussi les ensembles suivants

$$\mathbb{V}_1 := \{v \in \mathbb{V} : v^* = v\} \; et \; \mathbb{V}_2 := \{v \in \mathbb{V} : v^* = -v\}.$$

Si on considère l'espace vectoriel complexifié $\mathbb{W} := \mathbb{V} + i\mathbb{V}$ et $\mathbb{W}_j := \mathbb{V}_j + i\mathbb{V}_j$, $j = 1, 2$, alors on a :

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \qquad et \qquad \mathbb{W}_2 = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2.$$

Dans $\mathbb{V}$ on choisit un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ pour lequel les sous-espaces $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ sont orthogonaux. On étend ce produit scalaire à un produit scalaire hermitien dans $\mathbb{W}$ et on note par $|\ .\ |$ la norme associé à ce produit scalaire .
Soit $\mathbb{S}$ une sous-ensemble de $\mathbb{V}$ qui est stable par l'addition et par l'involution et contient 0. Alors $(\mathbb{S}, +, *, 0)$ est un semi-groupe involutif commutatif avec l'identité $e = 0$.
On dit que $(\mathbb{S}, +, *, 0)$ est un semi-groupe de type conique dans $(\mathbb{V}, +, *, 0)$ si pour tout $x \in \mathbb{S}$ il existe un nombre réel positif $t_0(x) \geq 0$ tel que

$$t \geq t_0(x) \Rightarrow tx \in \mathbb{S}.$$

Soit $\mathbb{F} := \mathbb{V}_1 + i\mathbb{V}_1$, et soit α une valeur absolue dans $\mathbb{S}$, alors

$$\mathbb{F}_\alpha := \{\zeta \in \mathbb{F} : \langle x, Re\zeta \rangle \leq \log \alpha(x) \text{ pour tout x} \in \mathbb{S}\}.$$

Théorème 2.4.2 *On Suppose que $0 \in \overline{Int(\mathbb{S})}$ et soit D un sous-ensemble ouvert connexe de $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ et $(a, b) \in \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$ avec $z_0 := a + ib \in D$. On suppose que Ω est un voisinage ouvert de z_0 dans $\mathbb{W}$ qui contient D et soit f une fonction à valeur opérateurs définie sur $\Omega \cup (z_0 + \mathbb{S})$ qui satisfait les affirmations suivantes :*

- *(1) f est holomorphe dans Ω.*
- *(2) la fonction $f : \mathbb{S} \to \mathcal{L}(\mathbb{H})$ est définie positive α-bornée.*

Alors il existe une mesure spectrale E dans $\mathbb{F}_\alpha$ telle que la fonction

$$F(z) = \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle z, \zeta \rangle} dE(\zeta), \qquad z \in \mathbb{T},$$

définit une extension continue de f au tube

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(D, \mathbb{S}) := ch(D) + co(\mathbb{S}_1) + i\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2,$$

où $co(\mathbb{S}_1)$ est le cône convexe dans $\mathbb{V}_1$ engendré par $\mathbb{S}_1$ et $ch(D)$ est l'enveloppe convexe de D. De plus, F est holomorphe à l'intérieur du $\mathbb{T}(D, \mathbb{S})$.

Preuve. L'existence d'une mesure spectrale E dans $\mathbb{F}_\alpha$ telle que la fonction

$$f(x) = \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle x, \zeta \rangle} dE(\zeta), \qquad x \in \mathbb{S},$$

est garantie par le théorème 2.4.1. Nous allons montrer que

$$F(z) := \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle z,\zeta\rangle} dE(\zeta), \qquad z \in \mathbb{T},$$

se prolonge à $\mathbb{T}$.

On va procéder en deux étapes.

1) Le cas particulier, on prend $\mathbb{H} = \mathbb{C}$ et on pose $dE(\zeta) = d\lambda(\zeta)$. On suppose que Ω et D sont des boules centrées en $a + ib$ et de même rayon, par le théorème 2.4.1 il existe une mesure spectrale λ dans $\mathbb{F}_\alpha$ telle que :

$$f(x + a + ib) = \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle x,\zeta\rangle} d\lambda(\zeta), \qquad x \in \mathbb{S}.$$

Soit $h = h_1 + ih_2$ où $h_1 \in \mathbb{V}_1, h_2 \in \mathbb{V}_2$ tels que $h + a + ib \in D$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ et un sous-ensemble ouverte U de Ω tel que $\overline{U} \subset \Omega$ et

$$a + ib + wh \in U \qquad \text{pour} \qquad | \text{ w } | < 1 + \epsilon.$$

Alors,

$$\Psi(w) := f(wh + a + ib), \qquad | \, w \, | < 1 + \epsilon$$

est holomorphe dans le disque centré en 0 et de rayon $1 + \epsilon$. Donc $\psi(w)$ possède un développement en séries entièrres

$$\Psi(w) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m, \qquad | \, w \, | < 1 + \epsilon$$

En particulier, on a

$$c_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dw^m} \Psi(w)_{|w=0} \; et \; \sum_{m=0}^{\infty} | \, c_m \, | < \infty. \qquad (1)$$

Alors, il existe un sous-ensemble non vide ouvert V_1 de $int(\mathbb{S}_1)$ et une boule ouverte V_2 centrée à 0 dans $\mathbb{V}_2$ tels que

$$f(x_1 + y + a + ib) = \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle z_1, Re\zeta\rangle - i\langle y, Im\zeta\rangle} d\lambda(\zeta),$$

pour tous $z \in sV_1 + itV_1$, $y \in V_2$, pour tous $s, t \in [0, 1[$. Donc λ possède des moments de tous les ordres et pour tout entier positif m on a :

$$\frac{d^m}{dt^m} f(tz_1 + ty + a + ib)_{|t=0} = \int_{\mathbb{F}_\alpha} \big(\langle z_1, Re\zeta\rangle - i\langle y, Im\zeta\rangle\big)^m d\lambda(\zeta),$$

pour tous $z_1 \in V_1 + iV_1,\ y \in V_2$. Par la propriété d'unicité des fonctions holomorphes il s'en suit que

$$\frac{d^m}{dt^m} f(tz + a + ib)_{|t=0} = \int_{\mathbb{F}_\alpha} \big(\langle P_1 z, Re\zeta\rangle - i\langle P_2 z, Im\zeta\rangle\big)^m d\lambda(\zeta), \qquad (2)$$

pour tout $z \in \mathbb{W}$ et $m \in \mathbb{N}$. Et par (1) et (2) on a :

$$c_m = \frac{1}{m!} \int_{\mathbb{F}_\alpha} \big(\langle h_1, Re\zeta\rangle + \langle h_2, Im\zeta\rangle\big)^m d\lambda(\zeta)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Big| \int_{\mathbb{F}_\alpha} \big(\langle h_1, Re\zeta\rangle + \langle h_2, Im\zeta\rangle\big)^m d\lambda(\zeta)\Big| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \mid c_m \mid < \infty.$$

Par suite

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \Big| \int_{\mathbb{F}_\alpha} \big(\langle h_1, Re\zeta\rangle + \langle h_2, Im\zeta\rangle\big)^{2m} d\lambda(\zeta)\Big| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \mid c_m \mid < \infty.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{F}_\alpha} \cosh\big(\langle h_1, Re\zeta\rangle + \langle h_2, Im\zeta\rangle\big) d\lambda(\zeta) < \infty$$

Et

$$\int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{(\langle h_1, Re\zeta\rangle + \langle h_2, Im\zeta\rangle)} d\lambda(\zeta) < \infty.$$

Posons

$$d\mu(\zeta) := e^{-\langle h_1, Re\zeta\rangle - \langle h_2, Im\zeta\rangle} d\lambda(\zeta) = e^{-\langle z_0, \zeta\rangle} d\lambda(\zeta),$$

Alors, on a

$$\int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle P_1 v, Re\zeta\rangle + \langle P_2 v, Im\zeta\rangle} d\mu(\zeta) < \infty.$$

pour tout $v \in D$. Ce qui nous donne, pour tout $z \in \mathbb{T} = D + co(\mathbb{S}_1) + i\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$, on a

$$\int_{\mathbb{F}_\alpha} \big|e^{\langle P_1 z, Re\zeta\rangle - \langle P_2 z, Im\zeta\rangle}\big| d\mu(\zeta) < \infty.$$

Donc, la fonction

$$F(z) := \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle P_1 z, Re\zeta\rangle - \langle P_2 z, Im\zeta\rangle} d\mu(\zeta).$$

est holomorphe dans $Int(\mathbb{T})$ pour tout $z \in \mathbb{T}$, et satisfait

$$F(x + a + ib) = \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle P_1 x + a, Re\zeta\rangle - \langle P_2 x + ib, Im\zeta\rangle} d\mu(\zeta).$$

$$= \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle P_1 x, Re\zeta\rangle - \langle P_2 x, Im\zeta\rangle} d\mu(\zeta).$$
$$= f(x+a+ib), \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{S}.$$

2) Pour le cas général, Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.1 *Pour tous $v, w \in \mathbf{H}$, toute mesure spectrale E sur $\mathbb{C}$ et tout borélien A de $\mathbb{C}$ on a*

$$\langle E(A)v, w\rangle = \frac{1}{4}\langle E(A)(v+w), v+w\rangle + \frac{1}{4}\langle E(A)(v-w), v-w\rangle$$
$$-\frac{i}{4}\langle E(A)(v+iw), v+iw\rangle + \frac{i}{4}\langle E(A)(v-iw), v-iw\rangle$$

Preuve. On utilise la linéarité de $E(A)$ et l'égalité

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\Big[\langle v+w, v+w\rangle - \langle v-w, v-w\rangle\Big] - \frac{i}{4}\Big[\langle v+iw, v+iw\rangle - \langle v-iw, v-iw\rangle\Big]$$

■ Le cas général, pour chaque $v \in \mathbb{H}$, on pose

$$d\lambda_v(\zeta) := \langle dE(\zeta)v, v\rangle.$$

Alors λ_v est mesure positive sur $\mathbb{F}_\alpha$ telle que :

$$f_v(x+a+ib) := \langle f(x+a+ib)v, v\rangle = \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle x,\zeta\rangle} d\lambda_v(\zeta), \qquad x \in \mathbb{S}.$$

Alors par la première étape, f_v se prolonge en une fonction

$$F_v(z) = \langle f(x+a+ib)v, v\rangle = \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle z,\zeta\rangle} d\langle E(\zeta)v, v\rangle, \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Par le lemme 2.4.1 et le théorème de Riesz il existe une fonction F à valeurs opórateurs telle que pour tous $v, w \in \mathbb{H}$ on ait

$$\langle F(z)v, w\rangle = \frac{1}{4}\Big[F_{v+w} - F_{v-w}) - iF_{v+iw} + iF_{v-iw})\Big], \quad z \in \mathbb{T}.$$

pour chaque $v, w \in \mathbb{H}$ et on a

$$\langle F(z)v, w\rangle = \int_{\mathbb{F}_\alpha} e^{\langle z,\zeta\rangle} d\langle E(\zeta)v, w\rangle, \qquad z \in \mathbb{T}.$$

on voit que F_v est bien définie sur $\mathbb{T}$ et holomorphe dans l'intérieur de $\mathbb{T}$. ■

2.5 Exemples

La demi-droite fermée $S = (\mathbb{R}_+, +)$ est un semi-groupe abélien muni de l'involution est l'identité $x = x^*$. Puisque $\mathbb{R}_+$ est 2-divisible (c'est à dire pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on peut écrire $x = 2y$, pour $y \in \mathbb{R}_+$), on peut montrer facilement qu'une fonction définie positive dans $\mathbb{R}_+$ est positive et si elle est continue et bornée, donc, elle est complément monotone.
Pour $a \in [0, \infty]$ alors, on définit $\rho_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\rho_a(s) = e^{-as}$ avec la convention $0.\infty = 0,\ a.\infty = \infty$ pour $a > 0$, c'est à dire $\rho_\infty = 1_{\{0\}}$. Alors ρ_∞ est un semi-caractère borné, continu quand $a \in [0, \infty[$ et discontinu quand $a = \infty$. Inversement, si ρ est un semi-caractère borné, alors $0 \leq \rho(s) \leq 1$, alors il existe $a \in [a, \infty]$ telle que $\rho = e^{-a}$. De plus, l'application $a \to \rho_a$ est bijective de $[0, \infty]$ dans $\widehat{S}$ (l'ensemble des semi-caractŔres continus et bornés sur S), et elle est continue quand $[0, \infty]$ et considérée comme un point compactification de $[0, \infty[$. En effet, si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation fonctionnelle $h(x + y) = h(x) + h(y),\ x, y \in \mathbb{R}$, alors $\exp(h)|\mathbb{R}_+$ est un semi-caractère, et tout $\rho \in S^* \setminus \{\rho_\infty\}$ est donné de cette façon. Pour plus de détail sur ces ntions voir le livre de Berg-Christensen et Ressel [11].

Une application des théorèmes 1.2.3 et 2.4.2 conduit au résultat suivant :

Proposition 2.5.1 *Une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est définie positive et bornée si et seulement si elle a la forme*

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-as} d\mu(a) + b\rho_\infty(s), \qquad s \geq 0$$

où $\mu \in M_+^b(\mathbb{R}_+)$ et $b \geq 0$. Alors, la paire (μ, b) est uniquement déterminée par φ.

Si, de plus, φ se prolonge holomorphiquement à un disque $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$ contenant 0, alors φ se prolonge aussi holomorphiquement au domaine tube $\mathbb{D} + \mathbb{R}_+ + i\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque 2.5.1 *La fonction*

$$s \mapsto \int_0^\infty e^{-sa} d\mu(a)$$

c'est la transformée de Laplace de μ et on la note par $\mathcal{L}\mu$. Cette fonction est bien définie dans le demi-plan droit $\Re z \geq 0$ par la formule

$$\mathcal{L}\mu(z) = \int_0^\infty e^{-za} d\mu(a),$$

et elle est continue et holomorphe dans le demi-plan ouvert $\Re z > 0$. de plus

$$(\mathcal{L}\mu)^{(n)}(z) = \int_0^\infty (-a)^n e^{-za} d\mu(a), \quad \Re z > 0,\ n \geq 0,$$

en particulier

$$(-1)^n(\mathcal{L}\mu)^{(n)}(x) \geq 0, \ \textit{pour } x > 0.$$

On peut généraliser l'exemple précdent au cas multi-dimensionnel. Soit $S = (\mathbb{R}_+^k, +)$. Alors, pour $s = (s_1, ..., s_k) \in \mathbb{R}_+^k$ et $a = (a_1, ..., a_k) \in [0, \infty]^k$, on met $\langle s, a\rangle = \sum_{j=1}^k s_j a_j$ et on définit $\rho_a : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ par $\rho_a(s) = e^{-\langle s,a\rangle}$. Alors, l'application $a \mapsto \rho_a$ est homomorphe et isomorphe de $([0, \infty]^k, +)$ dans $(\widehat{S}, .)$. Alors, le semi-caractère ρ_a est continue dans $\mathbb{R}_+^k$ quand $a \in \mathbb{R}_+^k$ et discontinu quand $a \in [0, \infty]^k \setminus \mathbb{R}_+^k$. Pour $\mu \in M_+^b(\mathbb{R}_+^k)$, alors la fonction

$$\mathcal{L}\mu(s) = \int_{\mathbb{R}_+^k} e^{-\langle s,a\rangle} d\mu(a), \quad s \in \mathbb{R}_+^k.$$

c'est la transformée de Laplace de μ. Voir [11]. Un énocé analoque à celui de la proposition précédente reste valable.

Chapitre 3

Opérateurs de Hankel

3.1 Préliminaires

Une distribution $d\psi(t)$ est dite distribution forte dans $(a,b) \subset [0,+\infty)$ si $\psi(t)$ est une fonction réelle, bornée et croissante présentant une infinité de points de croissance sur (a,b) , dans ce cas tous les moments

$$\mathbf{s}_k = \int_a^b t^k \, d\psi(t), \qquad\qquad k \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

existent.
De telles distributions sont appelées distributions fortes de Stieltjes, elles ont été introduites dès 1982 dans le cadre de l'étude du problème fort des moments [46] qui consiste, étant donnée une suite de nombres réels $\{\mathbf{s}_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, d'avoir des conditions nécèssaires et suffisantes sur $\psi(t)$ dans $(0,+\infty)$, telles que (3.1) est satisfaite.
La théorie des polynômes orthogonaux de Laurent voit son apparition plus tard avec sa liaison étroite avec les différents types du problème forts des moments [24], [42], [47] et [59].
D'autres extensions de ce problème ont été développées dans le cadre de cette théorie, particulièrement le cas des fonctions à décroissance rapide [28].
On considère dans ce travail les opérateurs de Hankel dans un espace de Hilbert de fonctions méromorphes relativement liés à une suite de moments forts. Plus précisément la suite $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ définie par :

$$\mathbf{s}_d = \int_a^b t^d \, d\mu(t) \text{ et } \mathbf{s}_{-\mathrm{d}} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{t}^{-\mathrm{d}} \, \mathrm{d}\mu(\mathrm{t}) = \int_{\frac{1}{\mathrm{b}}}^{\frac{1}{\mathrm{a}}} \mathrm{t}^{\mathrm{d}} \, \mathrm{d}\widetilde{\mu}(\mathrm{t}) = \widetilde{\mathbf{s}}_{\mathrm{d}} \tag{3.2}$$

avec $d \in \mathbb{N}$ et $0 \leq a < b \leq +\infty$.
μ étant une mesure réelle positive a support dans $[a, b]$ appelée représentation de $\mathbf{s}$ et $\widetilde{\mu}$ l'image de μ via la transformation $t \to \frac{1}{t}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ces suites et $\mathcal{S}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathcal{S}$.

Proposition 3.1.1 *Soit* $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^*$. *Alors : La suite* $(\frac{\mathbf{s}_{d+1}}{\mathbf{s}_d})_{d\geq 0}$ *est croissante et converge lorsque* $d \to +\infty$ *vers le rayon de convergence* r_+ *de la série entière suivante :*

$$\mathbf{F}_+(\lambda) = \sum_{d=0}^{+\infty} \frac{\lambda^d}{\mathbf{s}_d} \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

De même, la suite $(\frac{\widetilde{\mathbf{s}}_{d+1}}{\widetilde{\mathbf{s}}_d})_{d\geq 0}$ *est croissante et converge lorsque* $d \to +\infty$ *vers le rayon de convergence* r_- *de la série entière suivante :*

$$\mathbf{F}_-(\lambda) = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\lambda^d}{\widetilde{\mathbf{s}}_d} \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Preuve. On suppose que $U_d = \frac{S_{d+1}}{S_d}$. Alors

$$U_d - U_{d-1} = \frac{S_{d+1}}{S_d} - \frac{S_d}{S_{d-1}} = \frac{S_{d+1}S_{d-1} - S_d^2}{S_d S_{d-1}}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\Big| \int t^d d\mu(t) \Big|^2 \leq \int \big|t^{(d+1)}\big| d\mu(t) \int \big|t^{(d-1)}\big| d\mu(t)$$

Ainsi, $S_d^2 \leq S_{d+1}S_{d-1}$ et $\frac{S_{d+1}}{S_d} - \frac{S_d}{S_{d-1}} \geq 0$. Ce qui montre que la suite U_d est croissante. De plus, le rayon de convergence de la série $\mathbf{F}_+(\lambda) = \sum_{d=0}^{+\infty} \frac{\lambda^d}{\mathbf{s}_d}$ est $R^{-1} = \lim \frac{S_d}{S_{d+1}}$ lorsque $d \to +\infty$.
La démonstration de 2 se fait de la mêmes manière. ■
On pose :

$$\mathbf{R}+ := \lim_{d\to+\infty} \sqrt{\frac{\mathbf{s}_{d+1}}{\mathbf{s}_d}} = \sqrt{\lim_{d\to+\infty} \mathbf{s}_d^{\frac{1}{d}}}$$

$$\frac{1}{\mathbf{R}-} := \lim_{d\to+\infty} \sqrt{\frac{\widetilde{\mathbf{s}}_{d+1}}{\widetilde{\mathbf{s}}_d}} = \sqrt{\lim_{d\to+\infty} \widetilde{\mathbf{s}}_d^{\frac{1}{d}}}$$

On suppose que $r_- < r_+$ et on définit la série

$$\mathbf{F}_s(\lambda) := \mathbf{F}_+(\lambda) + \mathbf{F}_-(\frac{1}{\lambda}) \qquad r_-^{-1} <\mid \lambda \mid< r_+$$

On note $\Omega_s = \left\{ z \in \mathbb{C}/\mathbf{R}_- <\mid z \mid< \mathbf{R}_+ \right\}$ la couronne de rayons $\mathbf{R}-$ et $\mathbf{R}_+$ et désignons par $\mathcal{A}^2(s)$ l'espace de Hilbert des fonctions $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ holomorphes sur Ω_s telles que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} s_k \mid a_k \mid^2 < +\infty$$

muni naturellement du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_k a_k \bar{b}_k,$$

avec $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ et $g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k z^k$ deux éléments de $\mathcal{A}^2(s)$.
Soit maintenant σ une mesure de probabilité invariante par rotation sur le cercle unité et μ la représentation de s. On note encore par μ_s la mesure image dans $\mathbb{C}$, de $\mu \otimes \sigma$ via l'application $(t, \xi) \to \sqrt{t}\xi$ de $[a, b] \times [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$.
On considère l'espace de Hilbert $L^2(\mu_s)$ des fonctions complexes de carré intégrable par rapport à la mesure μ_s muni de la norme

$$\|f\|^2_{L^2(\mu_s)} := \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\mu_s(z)$$

Nous considérons de plus l'ensemble des polynômes de Laurent noté Λ, c'est l'ensemble des polynômes de la forme

$$P(z) = \sum_{j=m}^{n} a_j z^j, \quad \text{avec m, n} \in \mathbb{Z}, \text{m} \leq \text{n et a}_\text{j} \in \mathbb{C}.$$

On note $\Lambda_{m,n}$ l'ensemble des polynômes de Laurent appartenant à

$$\Lambda_{m,n} = span \left\{ z^j \ / m \leq j \leq n \right\}.$$

Deux classes de polynômes de Laurent sont particulièrement intéréssantes :

$$\Lambda_{2n} = \{P \in \Lambda_{-n,n} \text{ tel que le coéfficient de } z^n \text{ est différent de zéro}\}$$

et

$$\Lambda_{2n+1} = \{P \in \Lambda_{-n-1,n} \text{ tel que le coéfficient de } z^{-n-1} \text{ est différent de zero}\}$$

On peut définir un produit scalaire sur Λ par :

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega_s} f(z)\overline{g(z)}d\mu_s,\ \forall f, g \in \Lambda$$

pour $P \in \Lambda$, il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \Lambda_k$, dans ce cas P est dit de L-degré k, en particulier le L-degré d'un polynôme est le double de son degré.
L'étude de ces polynômes apparait en liaison avec le problème fort des moments [46], et sera développé rapidement plus tard voir [47] et [59]. La théorie des polynômes de Laurent s'étend maintenant vers d'autre champs d'application, notamment pour les formules quadratiques [20] et approximation de Padé ([26] et [50]). Pour plus de détails sur la théorie des polynômes de Laurent voir [24].

Théorème 3.1.1 *Le support de μ_s est $\overline{\Omega}_s$. Et pour tout compact $K \subset \Omega_s$, il existe $M = M(K) > 0$ tel que :*

$$\sup_{z\in K}|f(z)| \leq M \left\|f\right\|_{L^2(\mu_s)}$$

pour tout polynôme de Laurent f holomorphe sur Ω_s. En outre, $\mathcal{A}^2(s)$ coïncide avec la fermeture dans $L^2(\mu_s)$ des polynômes de Laurent holomorphes et son noyau reproduisant est donné par

$$K_s(z, \omega) = F_s(z\overline{\omega}),\ z, \omega \in \Omega_s.$$

Preuve. Soit r un nombre réel positif, tel que $\mu_s(]r, b[) = 0$. Alors pour tout $d \in \mathbb{N}$, on a $s_d \leq r^d\ \mu_s(]a, b[)$ et donc $\limsup_d s_d^{\frac{1}{d}} \leq r$, ce qui montre que le rayon de convergence r_+ de la série F_+ vérifie

$$r_+ \leq \inf\{r/\ \mu_s(]r, b[) = 0\}.$$

Inversement, soit $r > a$ vérifiant $\mu_s(]r, b[) > 0$. Alors

$$r^d\mu_s(]r, b[) \leq s_d$$

Ainsi

$$r \leq \liminf_d s_d^{\frac{1}{d}} \leq \limsup_d s_d^{\frac{1}{d}}$$

Puisque

$$\inf\{r/\ \mu_s(]r, b[) = 0\} = \sup\{r/\ \mu_s(]r, b[) > 0\}$$

on déduit que $r = R_+^2 = \lim_{d\to+\infty} s_d^{\frac{1}{d}}$. En utilisant les mêmes arguments conçernant la suite $\widetilde{s}_d$ on montre que $r_- = R_-^{-2} = \lim_{d\to+\infty} \widetilde{s}_d^{\frac{1}{d}}$. Par conséquent le support de la

mesure μ_s est $\overline{\Omega}_s$ et pour tout $z \in \Omega_s$, la serie

$$K_s(z,\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s_d} (z\overline{\omega})^d,\ \omega \in \Omega_s$$

converge dans $\overline{\Omega}_s$.
De plus, en utilisant l'orthogonalité des polynômes de Laurent on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\Omega}_s} |K_s(z,\omega)|^2 \, d\mu_s(\omega) &\leq \liminf_{N\to+\infty} \int_{\overline{\Omega}_s} \left| \sum_{-N}^{N} \frac{1}{s_d} (z\overline{\omega})^d \right|^2 d\mu_s(\omega) \\
&\leq \liminf_{N\to+\infty} \int_{\overline{\Omega}_s} \sum_{-N}^{N} \left| \frac{1}{s_d} (z\overline{\omega})^d \right|^2 d\mu_s(\omega) \\
&\leq K_s(z,z)
\end{aligned}$$

Ainsi pour z fixé dans Ω_s, les séries $K_s(z,\omega)$ convergent dans $L^2(\mu_s)$. En plus pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\int_{\overline{\Omega}_s} \omega^k K_s(z,\omega) d\mu_s(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s_d} \int_{\overline{\Omega}_s} \omega^k (z\overline{\omega})^d d\mu_s(\omega) = z^k,$$

ce qui montre que le noyau $K_s(z,\omega)$ reproduit les polynômes de Laurent holomorphes et que

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq \sqrt{K_s(z,z)}\, \|f\|_{L^2(\mu_s)}$$

pour tout polynôme de Laurent holomorphe f et tout compact $K \subset \Omega_s$. ■

3.2 Symboles anti-méromorphes

On considère la projection orthogonal associée à $\mathcal{A}^2(s)$ donnée pour tout $g \in L^2(\mu_s)$ par

$$(P_{\mu_s} g)(z) = \int_{\overline{\Omega}_s} K_s(z,\omega) g(\omega) d\mu_s(\omega),\ z \in \Omega_s \tag{3.3}$$

cette intégrale peut s'étendre naturellement aux fonctions g telles que $K_s(z,.)g \in L^1(\mu_s)$ pour tout $z \in \Omega_s$. Ce qui nous permet de bien définir les opérateurs de Hankel. En effet, on note $\chi(s)$ la classe des fonctions $f \in \mathcal{A}^2(s)$ telles que $f\varphi K_s(z,.) \in L^1(\mu_s)$ pour tout polynôme de Laurent holomorphe φ et $z \in \Omega_s$ et donc

$$H_{\overline{f}}(\varphi)(z) = \int_{\overline{\Omega}_s} K_s(z,\omega)\varphi(\omega)[\overline{f}(z) - \overline{f}(\omega)] d\mu_s(\omega),\ z \in \Omega_s \tag{3.4}$$

est un opérateur défini par densité de $\mathcal{A}^2(s)$ dans $L^2(\mu_s)$, appelé opérateur de Hankel de symbole $\overline{f}$ et peut s'écrire sous la forme

$$H_{\overline{f}}(\varphi) = (I - P_{\mu_s})(\overline{f}\varphi)$$

pour tout polynôme de Laurent holomorphe φ.
Pour $f \in \chi(s)$, on note $spec(f)$ l'ensemble des indices $k \in \mathbb{Z}$ tels que le coéfficient du développement de Laurent de f est non nul. Il est clair que $\chi(s)$ contient tous les polynômes de Laurent holomorphes.
Dans cette section on donne l'expression des l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ et $H^*_{\overline{z}^k}H_{\overline{z}^k}$ pour les polynômes de Laurent holomorphes.

Proposition 3.2.1 *Soit $k, l \in \mathbb{Z}$, et g le monôme $g(z) = z^l$ alors :*
Si $k \geq 0$

$$P_{\mu_s}(\overline{z}^k g) = \begin{cases} \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-k)!}{l!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} g & si\ l \geq k \\ (-1)^k \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(-l-1)!}{(-l+k-1)!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} g & si\ l < 0 \end{cases}$$

et Si $k < 0$

$$P_{\mu_s}(\overline{z}^k g) = \begin{cases} \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(-l+k)!}{(-l)!} U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U g & si\ l \leq k \\ (-1)^k \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-1)!}{(l-k-1)!} U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U g & si\ l > 0 \end{cases}$$

avec U la transformation définie par $Ug(z) = g(\frac{1}{z})$.

Preuve. Soit $g(z) = z^l$, $l \in \mathbb{Z}$ et soit h un polynôme de Laurent holomorphe, en utilisant les propriétés de P_{μ_s} on a

$$\langle P_{\mu_s}(\overline{z}^k g), h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}} = \langle g, z^k h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}}$$

particulièrement si $h(z) = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$, on a $\langle P_{\mu_s}(\overline{z}^k g), h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}} = 0$ lorsque $l \neq k+m$.
On pose donc $l = k + m$, et on distingue les deux cas suivant :
Cas $k \geq 0$
Si $l \geq k$, alors

$$\langle P_{\mu_s}(\overline{z}^k g), h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}} = \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-k)!}{l!} \langle \frac{\partial^k}{\partial z^k} g, h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}}$$

Si $l < 0$, alors en remarquant que $\frac{\partial^k}{\partial z^k} z^l = (-1)^k \frac{(-l+k-1)!}{(-l-1)!} z^{l-k}$ on a :

$$\langle P_{\mu_s}(\overline{z}^k g), h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}} = (-1)^k \frac{(-l-1)!}{(-l+k-1)!} \frac{\widetilde{s}_{-l}}{\widetilde{s}_{-l+k}} \langle \frac{\partial^k}{\partial z^k} g, h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}}$$

et par suite, pour $g = z^l$, $l \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 0$ on a

$$P_{\mu_s}(\overline{z}^k g) = \begin{cases} \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-k)!}{l!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} g & si\ l \geq k \\ (-1)^k \frac{(-l-1)!}{(-l+k-1)!} \frac{\widetilde{s}_{-l}}{\widetilde{s}_{-l+k}} \frac{\partial^k}{\partial z^k} g & si\ l < 0 \end{cases}$$

et comme $\widetilde{s}_{-l} = s_l$, alors

$$P_{\mu_s}(\overline{z}^k g) = \begin{cases} \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-k)!}{l!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} g & \text{si } l \geq k \\ (-1)^k \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(-l-1)!}{(-l+k-1)!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} g & \text{si } l < 0 \end{cases}$$

Cas $k < 0$
on considère la transformation suivante $Uf(z) = f(\frac{1}{z})$.
Si $l \leq k$ alors

$$\langle P_{\mu_s}(\overline{z}^k g), h \rangle_{L^2_{(\mu_s)}} = \langle g, z^k h \rangle_{L^2_{(\mu_s)}} = \langle Ug, z^{-k} Uh \rangle_{L^2_{(\widetilde{\mu}_s)}}$$

et par suite

$$\langle P_{\mu_s}(\overline{z}^k g), h \rangle_{L^2_{(\mu_s)}} = \frac{\widetilde{s}_{-l}}{\widetilde{s}_{-l+k}} \frac{(-l+k)!}{(-l)!} \langle U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} Ug, h \rangle_{L^2_{(\mu_s)}}$$

Si $l > 0$ alors en remarquant que $\frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} z^{-l} = (-1)^k \frac{(l-k-1)!}{(l-1)!} z^{-l+k}$ on a

$$\langle P_{\mu_s}(\overline{z}^k g), h \rangle_{L^2_{(\mu_s)}} = (-1)^k \ \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-1)!}{(l-k-1)!} \langle \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} Ug \ , Uh \rangle_{L^2_{(\widetilde{\mu}_s)}}$$

et par suite, pour $g = z^l$, $l \in \mathbb{Z}$ et $k < 0$ on a

$$P_{\mu_s}(\overline{z}^k g) = \begin{cases} \frac{\widetilde{s}_{-l}}{\widetilde{s}_{-l+k}} \frac{(-l+k)!}{(-l)!} U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} Ug & si\ l \leq k \\ (-1)^k \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-1)!}{(l-k-1)!} U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} Ug & si\ l > 0 \end{cases}$$

et comme $\widetilde{s}_{-l} = s_l$ alors

$$P_{\mu_s}(\overline{z}^k g) = \begin{cases} \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(-l+k)!}{(-l)!} U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} Ug & \text{si } l \leq k \\ (-1)^k \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-1)!}{(l-k-1)!} U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} Ug & \text{si } l > 0 \end{cases}$$

■

Proposition 3.2.2 *Soit $k, l \in \mathbb{Z}$ et soit le monôme $g(z) = z^l$ Alors l'opérateur de Hankel s'écrit :*
Si $k \geq 0$

$$(H_{\overline{z}^k} g)(\xi) = \begin{cases} \overline{\xi}^k \xi^l - \frac{s_l}{s_{l-k}} \xi^{l-k} & si\ l \geq k\ ou\ si\ l < 0 \\ \\ \overline{\xi}^k \xi^l & si\ 0 \leq l < k \end{cases}$$

Si $k < 0$

$$(H_{\overline{z}^k} g)(\xi) = \begin{cases} \overline{\xi}^k \xi^l - \frac{s_l}{s_{l-k}} \xi^{l-k} & si\ l \leq k\ ou\ si\ l > 0 \\ \\ \overline{\xi}^k \xi^l & si\ k < l \leq 0 \end{cases}$$

Preuve.
Puisque $H_{\overline{f}}(\varphi) = (I - P_{\mu_s})(\overline{f}\varphi)$ pour tout polynôme de Laurent holomorphe φ, et compte tenu de la proposition précédente on déduit que
Cas $k \geq 0$:
L'opérateur de Hankel s'écrit de la façon suivante

$$(H_{\overline{z}^k} g)(\xi) = \begin{cases} \overline{\xi}^k g(\xi) - \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-k)!}{l!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} g(\xi) & si\ l \geq k \\ \\ \overline{\xi}^k g(\xi) - (-1)^k \frac{(-l-1)!}{(-l+k-1)!} \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{\partial^k}{\partial z^k} g & si\ l < 0 \end{cases}$$

en particulier pour $g = z^l$, $l \in \mathbb{Z}$ on a :

$$(H_{\overline{z}^k} g)(\xi) = \begin{cases} \overline{\xi}^k \xi^l - \frac{s_l}{s_{l-k}} \xi^{l-k} & si\ l \geq k \text{ ou } si\ l < 0 \\ \\ \overline{\xi}^k \xi^l & si\ 0 \leq l < k \end{cases}$$

Cas $k < 0$:
Dans ce cas l'opérateur de Hankel s'écrit comme suite :

$$(H_{\overline{z}^k} g)(\xi) = \begin{cases} \overline{\xi}^k g(\xi) - \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(-l+k)!}{(-l)!} U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U g & si\ l \leq k \\ \\ \overline{\xi}^k g(\xi) - (-1)^k \frac{s_l}{s_{l-k}} \frac{(l-1)!}{(l-k-1)!} U \frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U g & si\ l > 0 \end{cases}$$

particulièrement pour $g = z^l$, $l \in \mathbb{Z}$ on a

$$(H_{\overline{z}^k} g)(\xi) = \begin{cases} \overline{\xi}^k \xi^l - \frac{s_l}{s_{l-k}} \xi^{l-k} & si\ l \leq k \text{ ou } si\ l > 0 \\ \\ \overline{\xi}^k \xi^l & si\ k < l \leq 0 \end{cases}$$

■

Lemme 3.2.1 *On suppose que u, v et g sont des polynômes de Laurent holomorphes. Alors*

$$H^*_{\overline{v}} H_{\overline{u}} g = P_{\mu_s}(v\overline{u}g) - vP_{\mu_s}(\overline{u}g)$$

Preuve.
En effet pour $h \in \mathcal{A}^2(s)$,

$$\begin{aligned}\langle H_{\overline{u}} g, H_{\overline{v}} h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}} &= \langle \overline{u}g - P_{\mu_s}(\overline{u}g), \overline{v}h - P_{\mu_s}(\overline{v}h)\rangle_{L^2_{(\mu_s)}} \\ &= \langle v\overline{u}g, h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}} - \langle P_{\mu_s}(\overline{u}g), \overline{v}h\rangle_{L^2_{(\mu_s)}} + \langle (P_{\mu_s} - I)\overline{u}g, P_{\mu_s}(\overline{v}h)\rangle_{L^2_{(\mu_s)}}\end{aligned}$$

Puisque $P_{\mu_s}(\overline{v}h) \in \mathcal{A}^2(\mu_s)$ et $(P_{\mu_s} - I)(\overline{u}g)$ est orthogonal à $\mathcal{A}^2(\mu_s)$ alors

$$H^*_{\overline{v}} H_{\overline{u}} g = P_{\mu_s}(v\overline{u}g) - vP_{\mu_s}(\overline{u}g).$$

■

En tenant compte du lemme précédent, on déduit l'expression de l'opérateur $H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}$ donnée comme suite :

Proposition 3.2.3 *Soit $k \in \mathbb{Z}$ et soit g un polynôme de Laurent holomorphe alors si $k \geq 0$ on a :*

$$H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}(g) = \begin{cases} \sum_{l\geq 0} \hat{g}(l) \left[\frac{s_{l+k}}{s_l}\frac{(l)!}{(l+k)!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z^{k+l}) - \frac{s_l}{s_{l-k}}\frac{(l-k)!}{l!} z^k \frac{\partial^k}{\partial z^k} z^l\right] \\ +(-1)^k \sum_{l<-k} \hat{g}(l) \left[\frac{(-l-k-1)!}{(-l-1)!}\frac{s_{l+k}}{s_l}\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z^{k+l}g) - \frac{(-l-1)!}{(-l+k-1)!}\frac{s_l}{s_{l-k}} z^k \frac{\partial^k}{\partial z^k} z^l\right] \end{cases}$$

Si $k < 0$ alors on a

$$H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}(g) = \begin{cases} \sum_{l\leq 0} \hat{g}(l) \left[\frac{s_{l+k}}{s_l}\frac{(-l)!}{(-l-k)!} U\frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U(z^{k+l}) - \frac{s_l}{s_{l-k}}\frac{(-l+k)!}{(-l)!} z^k U\frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U z^l\right] \\ +(-1)^k \sum_{l>-k} \hat{g}(l) \left[\frac{s_{l+k}}{s_l}\frac{(l+k-1)!}{(l-1)!} U\frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U(z^{k+l}) - \frac{s_l}{s_{l-k}}\frac{(l-1)!}{(l-k-1)!} U\frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U z^k\right] \end{cases}$$

Preuve.
Il suffit de prendre $g(z) = z^l$ et de remarquer que si $k \geq 0$,

$$P_{\mu_s}(z^p\overline{z}^k g) = \begin{cases} \frac{s_{l+p}}{s_{l+p-k}}\frac{(l+p-k)!}{(l+p)!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z^p g) & si\ l+p \geq k \\ (-1)^k\ \frac{(-l-p-1)!}{(-l-p+k-1)!}\frac{s_{l+p}}{s_{l+p-k}}\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z^p g) & si\ l+p < 0 \end{cases}$$

et que pour $k < 0$ on a :

$$P_{\mu_s}(z^p\overline{z}^k g) = \begin{cases} \frac{s_{l+p}}{s_{l+p-k}}\frac{(-l-p+k)!}{(-l-p)!} U\frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U(z^p g) & si\ l+p \leq k \\ (-1)^k\ \frac{s_{l+p}}{s_{l+p-k}}\frac{(l+p-1)!}{(l+p-k-1)!} U\frac{\partial^{-k}}{\partial z^{-k}} U(z^p g) & si\ l+p > 0 \end{cases}$$

et d'utiliser le lemme précédent pour conclure. ■
En particulier pour $g = \xi^l,\ l \in \mathbb{Z}$ on déduit que pour $k \geq 0$

$$(H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k} g)(\xi) = \begin{cases} (\frac{s_{l+k}}{s_l} - \frac{s_l}{s_{l-k}})\xi^l & si\ l \geq k \\ \frac{s_{l+k}}{s_l}\xi^l & si\ 0 \leq l < k \\ -\frac{s_l}{s_{l-k}}\xi^l & si\ -k \leq l < 0 \\ (\frac{s_{l+k}}{s_l} - \frac{s_l}{s_{l-k}})\xi^l & si\ l < -k \end{cases}$$

et pour $k < 0$,

$$(H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k} g)(\xi) = \begin{cases} (\frac{s_{l+k}}{s_l} - \frac{s_l}{s_{l-k}})\xi^l & si\ l \leq k \\ \frac{s_{l+k}}{s_l}\xi^l & si\ k < l \leq 0 \\ -\frac{s_l}{s_{l-k}}\xi^l & si\ 0 < l \leq -k \\ (\frac{s_{l+k}}{s_l} - \frac{s_l}{s_{l-k}})\xi^l & si\ l > -k \end{cases}$$

Ce qui nous permet de déduire la valeur propre associée à l'opérateur $H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}$, d'étudier les propriétés spectrales de cet opérateur et nous conduit au résultat suivant

Théorème 3.2.1 *Soit f un polynôme de Laurent holomorphe. Alors*
1) *l'opérateur $H_{\overline{f}}$ est borné si et seulement si*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{s_{n+k}}{s_n} - \frac{s_n}{s_{n-k}}) < +\infty \ et \sup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{\widetilde{s}_{n+k}}{\widetilde{s}_n} - \frac{\widetilde{s}_n}{\widetilde{s}_{n-k}}) < +\infty,\ \forall k \in spec(f).$$

2) *l'opérateur $H_{\overline{f}}$ est compact si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{s_{n+k}}{s_n} - \frac{s_n}{s_{n-k}}) = 0 \ et \lim_{n\to+\infty}(\frac{\widetilde{s}_{n+k}}{\widetilde{s}_n} - \frac{\widetilde{s}_n}{\widetilde{s}_{n-k}}) = 0,\ \forall k \in spec(f).$$

3) *l'opérateur $H_{\overline{f}}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{A}^2(\mu_s), L^2(\mu_s))$ si et seulement si :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{s_{n+k}}{s_n} - \frac{s_n}{s_{n-k}})^{\frac{p}{2}} < +\infty \ et \sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{\widetilde{s}_{n+k}}{\widetilde{s}_n} - \frac{\widetilde{s}_n}{\widetilde{s}_{n-k}})^{\frac{p}{2}} < +\infty,\ \forall k \in spec(f).$$

Preuve.
Il suffit de constater que la valeur propre de l'opérateur $H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}$ s'écrit comme suit :
Si $k \geq 0$

$$\lambda_l = \begin{cases} \frac{s_{l+k}}{s_l} - \frac{s_l}{s_{l-k}} & si\ l \geq k \\ \frac{s_{l+k}}{s_l} & si\ 0 \leq l < k \\ -\frac{\widetilde{s}_{-l}}{\widetilde{s}_{-(l-k)}} & si\ -k \leq l < 0 \\ \frac{\widetilde{s}_{-(l+k)}}{\widetilde{s}_{-l}} - \frac{\widetilde{s}_{-l}}{\widetilde{s}_{-(l-k)}} & si\ l < -k \end{cases} \tag{3.5}$$

Si $k < 0$

$$\lambda_l = \begin{cases} \frac{\widetilde{s}_{-(l+k)}}{\widetilde{s}_{-l}} - \frac{\widetilde{s}_{-l}}{\widetilde{s}_{-(l-k)}} & si\ l \leq k \\ \frac{\widetilde{s}_{-(l+k)}}{\widetilde{s}_{-l}} & si\ k < l \leq 0 \\ -\frac{s_l}{s_{l-k}} & si\ 0 < l \leq -k \\ \frac{s_{l+k}}{s_l} - \frac{s_l}{s_{l-k}} & si\ l > -k \end{cases} \tag{3.6}$$

ainsi on a le résultat du théorème puisque l'opérateur $H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}$ est borné si et seulement si la suite $\sup |\lambda_l|$ est bornée et $H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}$ est compact si et seulement si la suite $\sup |\lambda_l|$ tend vers zéros. ■

3.3 Application

Dans cette section, on considère l'espace $\mathcal{A}^2(\mu_m)$, avec $\mu_m = e^{-|z|^m - \frac{1}{|z|^m}} d\delta(z)$, $m > 0$ et δ la mesure de Lebesgue normalisée sur le plan complexe

$$\mathcal{A}^2(\mu_m) = \{f \in Hol(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \ / \ \int_{\mathbb{C}^*} |f(z)|^2 \exp(-|z|^m - \frac{1}{|z|^m}) d\delta(z) < +\infty\} \ \ m > 0$$

On pose $T = H^*_{\overline{z}^k} H_{\overline{z}^k}$, alors T est bien définie sur l'espace des polynômes de Laurent holomorphes qui est dense dans $\mathcal{A}^2(\mu_m)$, la valeur propre correspondant à T est donnée par les relations (3.5) et (3.6).
Les moments de la mesure μ_m sont donnés par :

$$s_d = \int_0^{+\infty} t^d \exp(-t^m - \frac{1}{t^m}) dt, \ d \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

de plus on a $\widetilde{s}_n = s_{-n} = s_{n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t^m - \tfrac{1}{t^m})dt \quad = \tfrac{1}{m}\int_0^{+\infty} t^{\frac{n+1}{m}-1}\exp(-t-\tfrac{1}{t})dt$$

par suite $s_n = \frac{2}{m}K_{\frac{n+1}{m}}(2)$ avec K_ν est la fonction définie par

$$K_\nu(z) = \int_0^{+\infty} \exp(z\cosh(t))\cosh(\nu t)dt, \tag{3.8}$$

Cette fonction, appelée fonction de Bessel modifiée du second type ou fonction de Macdonald, est l'une des solutions de l'équation différentielle de Bessel modifiée, elle a été étudiée par plusieurs auteurs, voir [4], [29], [55], [73], [74] et [75] plus pré cisément, d'après la relation 1.66 et 1.67 [8] on a :

$$\begin{array}{ll} \Gamma_b(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\exp(-t-\frac{b}{t})dt. & (\Re(b)>0; b=0, \Re(\alpha)>0) \\ K_\alpha(2\sqrt{b}) = \frac{1}{2b^{\alpha/2}}\Gamma_b(\alpha). & (\Re(b)>0, \mid \arg(\sqrt{b}) \mid < \pi) \end{array}$$

Alors

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}(\frac{z}{2})^\nu \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}\exp(-t-\frac{z^2}{4t})dt$$

La valeur propre associée à T correspondant au vecteur propre ξ^l est donnée par les relations (3.5) et (3.6), ce qui nous permet d'étudier asymptotiquement ces valeurs propres et par suite déduire les propriétés spectrales de l'opérateur T. Pour y parvenir on donne dans le lemme suivant l'approximation de la fonction de Macdonald pour ν assez grand.

Lemme 3.3.1 *Soient α, β et ν des nombres réels. Alors pour $\nu \to +\infty$ et z fixé on a :*

$$\frac{K_{\nu+\alpha}(z)}{K_{\nu+\beta}(z)} = (\frac{1}{2}z)^{\beta-\alpha}\nu^{\alpha-\beta}[1 + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{2\nu} + \mathcal{O}(\frac{1}{\nu^2})] + o(1) \tag{3.9}$$

Preuve.
Soient α, β des nombres réels et $\nu \to +\infty$, on a (d'après [58] relation 9.37 page 234) la relation asymptotique suivante

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu)(\frac{z}{2})^{-\nu}, \Re(\nu) > 0 \text{ et} z \to 0$$

cette estimations a toujours lieu si z est fixé et $\nu \to +\infty$. On peut utiliser une autre estimation de $K_\nu(z)$ lorsque z est fixé et $\nu \to +\infty$, voir [[25], page 44] lorsque $\nu \to +\infty$ et z positif on a

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2^\nu \nu^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-\nu}}{z^\nu}$$

en utilisant le fait que :

$$\frac{\Gamma(\nu+\alpha)}{\Gamma(\nu+\alpha)} = \nu^{\alpha-\beta}[1+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{2\nu}+\mathcal{O}(\frac{1}{\nu^2})],\ \text{lorsque } \nu\to+\infty$$

et puisque la fonction $K_\nu(z)$ ne s'annule pas presque partout au voisinage de l'infini, alors

$$\frac{K_{\nu+\alpha}(z)}{K_{\nu+\beta}(z)} = (\frac{1}{2}z)^{\beta-\alpha}\nu^{\alpha-\beta}[1+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{2\nu}+\mathcal{O}(\frac{1}{\nu^2})]+o(1)$$

■

Maintenant, sachant que $H_{\overline{z}^k}$ est borné (resp. compact) ssi $H^*_{\overline{z}^k}H_{\overline{z}^k}$ est borné (resp.compact) on peut énoncer les propriétés spectrales de l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ comme suite :

Théorème 3.3.1 *Soit $k\in\mathbb{Z}$ et m un nombre réel positif. Alors :*
1) L'opérateur de Hankel $H_{\overline{z}^k}$ est borné sur l'espace $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ si et seulement si $k\leq m$.
2) L'opérateur de Hankel $H_{\overline{z}^k}$ est compact sur l'espace $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ si et seulement si $k<m$.
3) L'opérateur de Hankel $H_{\overline{z}^k}$ est dans la classe de schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{A}^2(\mu_m),L^2(\mu_m))$, $p>0$, si et seulement si $pk<m(p-2)$.

Preuve.
En utilisant le théorème 3.2.1, et Puisque les moments sont symétriques alors l'opérateur $H_{\overline{z}^k}$ est borné si et seulement si $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\frac{s_{n+k}}{s_n}-\frac{s_n}{s_{n-k}})<+\infty$.
Et comme

$$\begin{aligned}(\frac{s_{n+k}}{s_n}-\frac{s_n}{s_{n-k}}) &= \frac{K_{\frac{n+k+1}{m}}(2)}{K_{\frac{n+1}{m}}(2)}-\frac{K_{\frac{n+1}{m}}(2)}{K_{\frac{n-k+1}{m}}(2)}\\ &= \frac{K_{\frac{n+1}{m}+\frac{k}{m}}(2)}{K_{\frac{n+1}{m}}(2)}-\frac{K_{\frac{n+1}{m}}(2)}{K_{\frac{n+1}{m}-\frac{k}{m}}(2)}\end{aligned}$$

d'après le lemme précèdent on a :

$$A=\frac{K_{\frac{n+1}{m}+\frac{k}{m}}(2)}{K_{\frac{n+1}{m}}(2)}=(\frac{1}{m})^{\frac{k}{m}}(n+1)^{\frac{k}{m}}[1+\frac{k(k-m)}{2m(n+1)}+\mathcal{O}(\frac{1}{(n+1)^2})]$$

De même

$$B=\frac{K_{\frac{n+1}{m}}(2)}{K_{\frac{n+1}{m}-\frac{k}{m}}(2)}=(\frac{1}{m})^{\frac{k}{m}}(n+1)^{\frac{k}{m}}[1-\frac{k(k+m)}{2m(n+1)}+\mathcal{O}(\frac{1}{(n+1)^2})]$$

Par suite

$$\begin{aligned}(\tfrac{s_{n+k}}{s_n}-\tfrac{s_n}{s_{n-k}}) &= (\tfrac{1}{m})^{\frac{k}{m}}(n+1)^{\frac{k}{m}}([1+\tfrac{k(k-m)}{2m(n+1)}+\mathcal{O}(\tfrac{1}{(n+1)^2})]-[1-\tfrac{k(k+m)}{2m(n+1)}+\mathcal{O}(\tfrac{1}{(n+1)^2})])\\ &= (\tfrac{1}{m})^{\frac{k}{m}}(n+1)^{\frac{k}{m}}[\tfrac{k^2}{m(n+1)}+\mathcal{O}(\tfrac{1}{(n+1)^2})]\end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur de Hankel $H_{\overline{z}^k}$ est borné si et seulement si $\frac{k}{m}-1\leq 0$, il est compact si et seulement si $\frac{k}{m}-1<0$.
En remarquant que $\lambda_n=\mathcal{O}((n+1)^{\frac{k}{m}-1})$ on déduit que l'opérateur de Hankel $H_{\overline{z}^k}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{A}^2(\mu_m),L^2(\mu_m))$, $p>0$, si et seulement si $pk<m(p-2)$. ■
On note $\mathcal{M}$ le sous espace des fonctions $f\in\mathcal{A}^2(\mu_m)$ telles que $H_{\overline{f}}$ est borné dans $\mathcal{A}^2(\mu_m)$. On muni cet espace de la semi-norme

$$\|f\|:=\left\|H_{\overline{f}}\right\|+|f(0)|$$

le sous-espace de $\mathcal{M}$ constitué par les fonctions f telles que $H_{\overline{f}}$ est compact est noté par $\mathcal{M}_\infty$. Il est facile de constater que $\mathcal{M}_\infty$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{M}$. Si $p>0$, on note $\mathcal{M}_p$ le sous espace des $f\in\mathcal{M}$ telles que $H_{\overline{f}}$ est dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{A}^2(\mu_m),L^2(\mu_m))$. On munit cet espace de la semi-norme

$$\|f\|:=\left\|H_{\overline{f}}\right\|_{\mathcal{S}_p}+|f(0)|$$

Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on pose R_θ la transformation dans $\mathbb{C}$ par $R_\theta(z)=e^{i\theta}z$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

Lemme 3.3.2 *Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Alors l'opérateur $R_\theta f:=f\circ R_\theta$ est une isométrie unitaire de $L^2(\mu_m)$ dans lui même, et de $\mathcal{A}^2(\mu)$ dans lui même. De plus on a*
1) Si $f\in\mathcal{M}$, $R_\theta f\in\mathcal{M}$ et $\|R_\theta f\|_{\mathcal{M}}=\|f\|_{\mathcal{M}}$.
2) Si $f\in\mathcal{M}_\infty$, $R_\theta f\in\mathcal{M}_\infty$.
3) Si $f\in\mathcal{M}_p$, $R_\theta f\in\mathcal{M}_p$ et $\|R_\theta f\|_{\mathcal{M}_p}=\|f\|_{\mathcal{M}_p}$.

Preuve.
Il est clair que $R_\theta f$ est une isométrie unitaire de $L^2(\mu_m)$ dans lui même, et de $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ dans lui même. Soit $f\in\mathcal{M}$ et $\theta\in\mathbb{R}$, $R_\theta f\in\mathcal{A}^2(\mu_m)$ et soit g un polynôme de Laurent holomorphe alors

$$\begin{aligned}H_{\overline{R_\theta f}}(g)(z)&=(I-P_{\mu_m})(\overline{R_\theta f}\,g)(z)=(I-P_{\mu_m})(\overline{f}\,(R_\theta z)g(z))\\ &=(I-P_{\mu_m})(\overline{f}\,(R_\theta z)g(R_{-\theta}R_\theta z))\\ &=(I-P_{\mu_m})(\overline{f}\,R_{-\theta}g)(R_\theta z)\\ &=(R_\theta H_{\overline{f}}R_{-\theta})(g)(z)\end{aligned}\tag{3.10}$$

ce qui montre que :

$$\left\|H_{\overline{R_\theta f}}\right\| = \left\|H_{\overline{f}}\right\|$$

et par suite :

$$\|R_\theta f\|_{\mathcal{M}} = \|f\|_{\mathcal{M}}$$

La démonstration de 2 et 3 du lemme se fait de la même manière. ■

Lemme 3.3.3 *Les espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_p$, $p \geq 1$ sont des espaces de Banach. Si $0 < p < 1$ alors $\mathcal{M}_p$ est un espace quasi-Banach.*

Preuve.
Soit $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}$; sans perdre de généralité on peut supposer que $f_q(0) = 0\ \forall q \in \mathbb{N}$. La suite $(H_{\overline{f_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'opérateurs bornés dans $\mathcal{A}^2(\mu_m)$; il existe donc $T \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$ tel que la suite $(H_{\overline{f_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ converge en norme d'opérateur vers T.
On pose $f_q := \overline{T(1)}$ le conjugué de l'image par T de la fonction constante 1, puisque $H_{\overline{f_q}}(1) = \overline{f_q}$, alors

$$\begin{aligned}\|f_q - f\|_{L^2(\mu_m)} &= \left\|\overline{f_q} - T(1)\right\|_{L^2(\mu_m)} = \left\|H_{\overline{f_q}}(1) - T(1)\right\|_{L^2(\mu_m)} \\ &\leq \left\|H_{\overline{f_q}} - T\right\|_{L^2(\mu_m)} . \|1\|_{L^2(\mu_m)}\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{q\to+\infty} \|f_q - f\|_{L^2(\mu_m)} = 0$ et ainsi $f \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$.
Reste à montrer que l'opérateur $H_{\overline{f}}$ est borné, soit g un polynôme de Laurent holomorphe. Alors on a :

$$\left|P_{\mu_m}((\overline{f} - \overline{f_q})g)(z)\right| \leq \|f_q - f\|_{L^2(\mu_m)} \|gK_m(z,.)\|_{L^2(\mu_m)}$$

Par suite $\lim_{q\to+\infty} P_{\mu_m}((\overline{f} - \overline{f_q})g)(z) = 0$ et puisque $\lim_{q\to+\infty} \|f_q - f\|_{L^2(\mu_m)} = 0$ alors

$$\lim_{q\to+\infty} (H_{\overline{f_q}} - H_{\overline{f}})(g)(z) = 0,$$

ce qui montre que $T = H_{\overline{f}}$ et que $\mathcal{M}$ est espace de Banach.
La preuve du reste du lemme se fait on utilisant les mêmes arguments. ■

Lemme 3.3.4 *Supposons que $f \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$ et $H_{\overline{f}}$ est borné dans $\mathcal{A}^2(\mu_m)$. Alors pour tout $g \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$, l'application $\theta \mapsto H_{\overline{R_\theta f}}(g)$ est continue de $[0, 2\pi]$ dans $L^2(\mu_m)$.*

Preuve.
Soit $g \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$, $g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$. Si $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ alors d'une part on a

$$\begin{aligned} H_{\overline{R_\theta f}} - H_{\overline{R_\varphi f}} &= R_\theta H_{\overline{f}} R_{-\theta} - R_\varphi H_{\overline{f}} R_{-\varphi} \\ &= R_\theta H_{\overline{f}} R_{-\theta} - R_\theta H_{\overline{f}} R_{-\varphi} + R_\theta H_{\overline{f}} R_{-\varphi} - R_\varphi H_{\overline{f}} R_{-\varphi} \\ &= R_\theta H_{\overline{f}} (R_{-\theta} - R_{-\varphi}) + (R_\theta - R_\varphi) H_{\overline{f}} R_{-\varphi} \end{aligned}$$

D'autre part

$$\left\| H_{\overline{R_\theta f}}(g) - H_{\overline{R_\varphi f}}(g) \right\|_{L^2(\mu_m)} \leq \left\| H_{\overline{f}} \right\| \left\| (R_{-\theta} - R_{-\varphi}) g \right\|_{L^2(\mu_m)} + \left\| (R_\theta - R_\varphi) H_{\overline{f}} R_{-\varphi} g \right\|_{L^2(\mu_m)}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| (R_{-\theta} - R_{-\varphi}) g \right\|^2_{L^2(\mu_m)} &= \left\| g(R_{-\theta} z) - g(R_{-\varphi} z) \right\|^2_{L^2(\mu_m)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 \left\| (R_{-\theta} z)^k - (R_{-\varphi} z)^k \right\|^2_{L^2(\mu_m)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 s_k \left| e^{-ik\theta} - e^{-ik\varphi} \right|^2 < +\infty \end{aligned}$$

ainsi

$$\lim_{\theta\to\varphi} \left\| (R_{-\theta} - R_{-\varphi}) g \right\|_{L^2(\mu_m)} = 0.$$

De la même manière, on montre que $\lim_{\theta\to\varphi} \left\| (R_\theta - R_\varphi) H_{\overline{f}} R_{-\varphi} g \right\|_{L^2(\mu_m)} = 0$ ce qui prouve que :

$$\lim_{\theta\to\varphi} \left\| H_{\overline{R_\theta f}}(g) - H_{\overline{R_\varphi f}}(g) \right\|_{L^2(\mu_m)} = 0.$$

■

Lemme 3.3.5 *Soit $f \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$.*
1) Si $f \in \mathcal{M}$, alors pour tout $k \in spec(f)$, z^k est dans $\mathcal{M}$.
2) Si $f \in \mathcal{M}_\infty$, alors pour tout $k \in spec(f)$, z^k est dans $\mathcal{M}_\infty$.
3) Si $p \geq 1$ et $f \in \mathcal{M}_p$, alors pour tout $k \in spec(f)$, z^k est dans $\mathcal{M}_p$.

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{M}$ et on écrit $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ on a :

$$a_k z^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R_\theta z) e^{-ik\theta} d\theta, \ \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

et soit g un polynôme de Laurent holomorphe, et $h \in L^2(\mu_m)$, en appliquant le téorème de Fubini on déduit que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle H_{\overline{R_\theta f}}(g), h\rangle_{L^2(\mu_m)} e^{-ik\theta} d\theta = \langle H_{\overline{a_k z^k}}(g), h\rangle_{L^2(\mu_m)} \tag{3.11}$$

et par les lemmes 3.4.2 et 3.4.3 il existe une constante C telle que

$$\left\| H_{\overline{a_k z^k}}(g)\right\|_{L^2(\mu_m)} \leq C \left\|g\right\|_{L^2(\mu_m)}$$

et par suite $H_{\overline{a_k z^k}}$ est borné et $a_k z^k \in \mathcal{M}$. Ainsi $z^k \in \mathcal{M}$ pour tout $k \in spec(f)$. On suppose maintenant que $f \in \mathcal{M}_\infty$ et soit $(g_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ convergant faiblement vers 0.

$$\lim_{q\to+\infty} \left\| H_{\overline{R_\theta f}}(g_q)\right\|_{L^2(\mu_m)} = 0,\ \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

et puisque

$$\left\| H_{\overline{a_k z^k}}(g_q)\right\|_{L^2(\mu_m)} \leq \int_0^{2\pi} \left\| H_{\overline{R_\theta f}}(g_q)\right\|_{L^2(\mu_m)} d\theta$$

on constate que

$$\lim_{q\to+\infty} \left\| H_{\overline{a_k z^k}}(g_q)\right\|_{L^2(\mu_m)} = 0$$

et par suite $z^k \in \mathcal{M}_\infty$ pour tout $k \in spec(f)$. Si T est un opérateur compact de $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ dans $L^2(\mu_m)$ alors les nombres singuliers $\nu_q(T),\ q \in \mathbb{N}$ de T sont donnés par :

$$\nu_q(T) := \inf_{A\in\mathcal{R}_q} \|T - A\|$$

où $\mathcal{R}_q$ est l'espace de tous les opérateurs de rang fini inférieur ou égal à q de $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ dans $L^2(\mu_m)$. Soit $f \in \mathcal{M}_p$, alors la suite $(\nu_q(H_{\overline{f}}))_q$ est dans l^p et il existe un système $(u_q)_q$ orthonormal dans $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ et un système $(v_q)_q$ dans $L^2(\mu_m)$ tels que :

$$H_{\overline{f}} = \sum_{q=0}^{+\infty} \nu_q(H_{\overline{f}}) \langle ., u_q\rangle v_q$$

voir proposition 16.3 [[53]], si q est un entier positif, on considère l'opérateur de rang au plus égal à q suivant

$$A_q := \sum_{j=0}^{q-1} \nu_j(H_{\overline{f}}) \langle ., u_{k_j}\rangle v_{k_j},$$

avec

$$u_{k_j}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (R_\theta u_j)(z) e^{-ik\theta} d\theta \text{ et } v_{k_j}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (R_\theta v_j)(z) e^{-ik\theta} d\theta$$

en utilisant le théorème de convergence dominée et les relations (3.7) et (3.9), on déduit pour $h \in L^2(\mu_m)$ et $g \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$ que :

$$\langle (H_{\overline{a_k z^k}}(g) - A_q), h\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{j=q}^{+\infty}\nu_j(H_{\overline{f}})\langle R_{\overline{\theta}}g, u_j\rangle\langle v_j, R_{\overline{\theta}}h\rangle e^{-ik\theta}d\theta$$

et puisque les systèmes $(u_j)_j$ et $(v_j)_j$ sont orthonormaux et que la suite $(\nu_j(H_{\overline{f}}))_j$ est décroissante, alors on a :

$$\left|\sum_{j=q}^{+\infty}\nu_j(H_{\overline{f}})\langle R_{\overline{\theta}}g, u_j\rangle\langle v_j, R_{\overline{\theta}}h\rangle\right| \leq \nu_q(H_{\overline{f}})\,\|g\|_{\mathcal{A}^2(\mu_m)}\,\|h\|_{L^2(\mu_m)}\,,\ h \in L^2(\mu_m) \text{ et } g \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$$

donc

$$\left\|H_{\overline{a_k z^k}}(g) - A_q)\right\| \leq \nu_q(H_{\overline{f}})$$

ce qui implique que :

$$\nu_q(H_{\overline{a_k z^k}}) \leq \nu_q(H_{\overline{f}})$$

et par suite $z^k \in \mathcal{M}_p$ pour tout $k \in spec(f)$. ■

On peut maintenant grâce aux résultats précédents en particulier le théorème 3.3.1 et le lemme 3.4.5, avoir le théorème suivant :

Théorème 3.3.2 *Soit $f \in \mathcal{A}^2(\mu_m)$, avec m un réel strictement positif et soit U la transformation définie par $Uf(z) = f(\frac{1}{z})$. Alors :*
1) les opérateurs $H_{\overline{f}}$ et $H_{\overline{Uf}}$ sont bornés sur $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ si et seulement si f est un polynôme de Laurent de L-degré inférieur ou égal à $2m$.
2)les opérateurs $H_{\overline{f}}$ et $H_{\overline{Uf}}$ sont compacts sur $\mathcal{A}^2(\mu_m)$ si et seulement si f est un polynôme de Laurent de L-degré strictement inférieur à $2m$.
3) les opérateurs $H_{\overline{f}}$ et $H_{\overline{Uf}}$ sont dans la classe de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{A}^2(\mu_m), L^2(\mu_m))$ si et seulement $p > 2$ et f est un polynôme de Laurent de L-degré strictement inférieur à $\frac{2m(p-2)}{p}$.

Preuve.
Daprès le théorème 3.4.1 on a $\mathbf{H}_{\overline{z}^k}$ est bornée si et seulement si $k \leq m$. Soit $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ et $spec(f) = \{k/a_k \neq 0\}$. En utilisant le lemme 3.4.5, pour $f \in M$ on a $z^k \in M$ pour tout $k \in spec(f)$. Alors on peut passer de la $\overline{z}^k$ de la fonction $\overline{f}$, et comme on sait que le L-degré d'un polynôme est le double de son degré, cet qui montre que $\mathbf{H}_{\overline{f}}$ sont bornées si et seulement si $k \leq 2m$.
Et par le lemme 3.4.2 on a Si $f \in \mathcal{M}$ alors $Uf \in \mathcal{M}$ et $\|Uf\|_{\mathcal{M}} = \|f\|_{\mathcal{M}}$. Donc $\mathbf{H}_{\overline{Uf}}$ sont bornées si et seulement si $k \leq 2m$.
La démonstration de 2 et 3 du lemme se fait de la même manière. ■

3.4 Remarques et exemples

Dans cette section nous allons donner des exemples de familles de moments fort de Stieltjes qui nous permettons d'avoir des opérateurs de Hankel de symboles anti-méromorphe même si ces moments ne sont pas symétriques (relativement à la transformation $u(z) = \frac{1}{z}$).
Considérons la suite de moments de Stieltjes suivant :

$$s_n = \int_0^1 t^n e^{-\frac{1}{t^m}} dt + \int_1^{+\infty} t^n e^{-t^m} dt,\ n \in \mathbb{Z},\ m > 0.$$

Pour les moments positifs on a

$$I^+ = \int_1^{+\infty} t^n e^{-t^m} dt \leq \int_0^1 t^n e^{-\frac{1}{t^m}} dt + \int_1^{+\infty} t^n e^{-t^m} dt = s_n.$$

et puisque

$$\int_0^1 t^n e^{-\frac{1}{t^m}} dt = \int_1^{+\infty} t^{-n-2} e^{-t^m} dt \leq \int_1^{+\infty} t^n e^{-t^m} dt$$

alors

$$I^+ \leq s_n \leq 2I^+.$$

De même pour les moments négatifs, on pose $k = -n,\ k \geq 1$, alors

$$I^- = \int_0^1 t^{-k} e^{-\frac{1}{t^m}} dt \leq \int_0^1 t^{-k} e^{-\frac{1}{t^m}} dt + \int_1^{+\infty} t^{-k} e^{-t^m} dt = s_{-k}.$$

Ainsi

$$I^- \leq s_{-k} \leq 2I^-,\ k \geq 1.$$

En faisant un changement de variables adéquat on peut exprimer les intégrales I^- et I^+ comme suite :

$$\begin{aligned} I^+ &= \int_1^{+\infty} t^n e^{-t^m} dt = \frac{1}{m} \int_1^{+\infty} t^{\frac{n+1}{m}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{m} \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{n+1}{m}-1} e^{-t} dt - \int_0^1 t^{\frac{n+1}{m}-1} e^{-t} dt \right). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} I^- &= \int_0^1 t^{-k} e^{-\frac{1}{t^m}} dt = \frac{1}{m} \int_1^{+\infty} t^{\frac{k-1}{m}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{m} \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{k-1}{m}-1} e^{-t} dt - \int_0^1 t^{\frac{k-1}{m}-1} e^{-t} dt \right). \end{aligned}$$

Par suit on a

$$I^+ = \frac{1}{m}\Big(\Gamma(\frac{n+1}{m}) - \int_0^1 t^{\frac{n+1}{m}-1}e^{-t}dt\Big).$$

$$I^- = \frac{1}{m}\Big(\Gamma(\frac{k-1}{m}) - \int_0^1 t^{\frac{k-1}{m}-1}e^{-t}dt\Big).$$

Et puisque $0 < \int_0^1 t^{\frac{n+1}{m}-1}e^{-t}dt \leq 1$ et $0 < \int_0^1 t^{\frac{k-1}{m}-1}e^{-t}dt \leq 1$ on a directement les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{m}\Big(\Gamma(\frac{n+1}{m}) - 1\Big) \leq I^+ \leq \frac{1}{m}\Gamma(\frac{n+1}{m}).$$

$$\frac{1}{m}\Big(\Gamma(\frac{k-1}{m}) - 1\Big) \leq I^- \leq \frac{1}{m}\Gamma(\frac{k-1}{m}).$$

Et supposant par example que $\frac{n+1}{m} \geq 3$ et $\frac{k-1}{m} \geq 3$ et comme

$$\Gamma(\frac{n+1}{m}) - 1 \geq \frac{1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{m}) \; et \; \Gamma(\frac{k-1}{m}) - 1 \geq \frac{1}{2}\Gamma(\frac{k-1}{m}).$$

On a alors le résultat suivant

$$\frac{1}{2m}\Gamma(\frac{n+1}{m}) \leq s_n \leq \frac{2}{m}\Gamma(\frac{n+1}{m}), \; n \geq 1.$$

Et

$$\frac{1}{2m}\Gamma(\frac{k-1}{m}) \leq s_{-k} \leq \frac{2}{m}\Gamma(\frac{k-1}{m}), \; k \geq 1.$$

Considérons maintenant l'espace

$$\mathcal{A}^2(\mu_m) = \{f \in Hol(\mathbb{C}\backslash\{0\}/ \int_{\mathbb{C}^*} |f(z)|^2 d\mu_m(z) < +\infty\}$$

avec μ_m la représentation des moments

$$s_n = \int_0^1 t^n e^{-\frac{1}{t^m}}dt + \int_1^{+\infty} t^n e^{-t^m}dt, \; n \in \mathbb{Z}, \; m > 0.$$

Ainsi on a les inégalités suivantes

$$\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{m}+\frac{k}{m})}{\Gamma(\frac{n+1}{m})} - 4\frac{\Gamma(\frac{n+1}{m})}{\Gamma(\frac{n+1}{m}-\frac{k}{m})} \leq \frac{s_{n+k}}{s_n} - \frac{s_n}{s_{n-k}} \leq 4\frac{\Gamma(\frac{n+1}{m}+\frac{k}{m})}{\Gamma(\frac{n+1}{m})} - \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{m})}{\Gamma(\frac{n+1}{m}-\frac{k}{m})}$$

et

$$\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{m}+\frac{k}{m})}{\Gamma(\frac{n-1}{m})} - 4\frac{\Gamma(\frac{n-1}{m})}{\Gamma(\frac{n-1}{m}-\frac{k}{m})} \leq \frac{\widetilde{s}_{n+k}}{\widetilde{s}_n} - \frac{\widetilde{s}_n}{\widetilde{s}_{n-k}} \leq 4\frac{\Gamma(\frac{n-1}{m}+\frac{k}{m})}{\Gamma(\frac{n-1}{m})} - \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{m})}{\Gamma(\frac{n-1}{m}-\frac{k}{m})}$$

et comme on a la propriété de la fonction Gamma suivante

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x+z)} = x^{y-z}\left(1 + \frac{(y-z)(y+z-1)}{2x} + \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})\right) \text{ lorsque x} \to +\infty$$

on peut alors avoir une estimation comme celle obtenue dans le section précédente des expressions du théorème 3.3.1 et caractériser les propriétés spectrales des opérateurs de Hankel sur $\mathcal{A}^2(\mu_m)$. Dans ce cas on obtient les même résultats que le théorème 3.4.2.

Remarque 3.4.1 *On peut généralement considérer les moments*

$$s_n = \int_0^1 t^n e^{-\phi(\frac{1}{t})}dt + \int_1^{+\infty} t^n e^{-\phi(t)}dt,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Dans le cass où $\phi(t) = \phi(\frac{1}{t})$, on revient au cas symétrique relativement à la transformation $Uf(z) = f(\frac{1}{z})$ (i.e $\widetilde{s}_n = \widetilde{s}_{-n-2}$) comme la fonction $\phi(t) = \phi(\frac{1}{t}) = e^{-t-\frac{1}{t}}$ par exemple.
On peut, en s'inspirant de l'exemple qu'on vient de traiter ci-dessus, imposer des conditions sur la fonction ϕ de sorte à pouvoir faire des estimations de $\frac{s_{n+k}}{s_n} - \frac{s_n}{s_{n-k}}$ et $\frac{\widetilde{s}_{n+k}}{\widetilde{s}_n} - \frac{\widetilde{s}_n}{\widetilde{s}_{n-k}}$ et ainsi caractériser les propriétés spectrales des opérateurs de Hankel.

Bibliographie

[1] P. Ahern, E.H. Youssfi, K. Zhu, Compactness of Hankel operators on Hardy. Sobolev spaces of the polydisk, J. Operator Theory 61 (2009) 301.312

[2] N. I. Akhiezer, "The Classical Moment Problem," Hafner, New York, 1965.

[3] E. Aldén, A survey of waek and strong moment problems with generalization, 1985.

[4] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special functions, Encylopedia of mathematics and applications.

[5] J. Arazy, S. Fisher, S. Janson, J. Peetre, Membership of Hankel operators on the ball in unitary ideals, J. London. Math. Soc. (2),43 no. 3,(1991),485-508.

[6] J. Arazy, S.D. Fisher, J. Peetre, Hankel operators on weighted Bergman spaces, Amer. J. Math. 110 (1988) 989.1053.

[7] Arveson, W.B. (1969). subalgebras of C^*-algebras. Acta Math. 123, 141-224. MULTIVARIABLE OPERATOR THEORY

[8] M. Aslam Chaudhry, Syed M. Zubair, On class of incomplete Gamma functions with applications.

[9] S. Axler, The Bergman space, the Block space, and commutators of multiplication operators, Duke. Math. J. ? 53 no 2, (1986), 315-332.

[10] W. Bauer, Mean oscillation and Hankel operators on the segal-Bargmann space, Integral Equations operatortheory 52 (2005) 1-15.

[11] C.Berg and P.H. Maerick, Exponentially bounded positive define functions,Illinois J. Math. 28 No 1 (1984), 162-179.

[12] C. Berg, J. P. R. Christensen, and P. Ressel, "Harmonic Analysis on Semigroups," Graduate Texts in Math., Vol. 100, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1984.

[13] C.A. Berger, L. Coburn, Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space, Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1987), 813-829.

[14] C.A. Berger, L. Coburn, K. Zhu, Toeplitz operators and function theory in n-dimensions, Lecture notes in Math., vol. 1256, springer, 1987.

[15] H. Bommier-Hato, E.H. Youssfi, Hankel operators on weighted Fock spaces,integral equations operator theory 59(2007) 1-17.

[16] H. Bommier-Hato, E.H. Youssfi, Hankel operators and Stieljes moment problem, Journal of functional analysis 258(2010) 978-998.

[17] F. F. Bonsall, Boundedness of Hankel matrices, J. LONDON mATH. Soc., 29 no 2, (1984), 289-300.

[18] L. G. Brown, R. G. Douglas, P. A. Fillmor, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions on $\mathcal{C}^*$-algebas, Lecture Notes in Mathematice, 345, Springer Verlag Berlin, 1973.

[19] H. Buchwalter, D. Tarral, Théorie spectrale, Publ. Dép. M ath. Lyon, 1982.

[20] A. Bultheel, C. Diaz-Mendoza, P. Gonzalez-Vera and R. Orive, On the convergence of certain Gauss type quadrature formulas for unbounded intervals, Mathematics of computation, volume 69, Number 230, pages 721-747.

[21] T. Carleman, Sur le problèm des moments. compactes rendus, 174 (1922), 1680-1682.

[22] T. Carleman, Sur les équations intégrales sinqulières a noyau réel et symétriques. Uppsala universits Årsskrift (1923).

[23] T. Carleman, Weyl's theorem for non normal operators. Research notes in mathematics.

[24] L. Cochran, S. Clement Cooper, Orthogonal Laurent polynomials on the real line, in : Continued fractions and orthogonal functions (Loen, 1992) eds. S. Clement Cooper and W. J. Thron, Lecture notes in pure and appl.math, 154, Dekker, N. Y, 1994, pp.47-100.

[25] E. T. Copson, Asymptotic expansions, Combridge tracts in mathematics ans mathematical physics. 1965.

[26] C. Diaz-Mendoza, P. Gonzalez-Vera and M. Jiménez-Paiz, Strong stieltjes distributions and orthogonal Laurent polynomials with applications to quadratures and padé approximants. Math. Of Computation, volume 74, number 252, pages 1843-1870.

[27] N. Dunford and J. Schwartz, "Linear Operators, II. Spectral Theory," Interscience, New York, 1963.

[28] A. L. Duran, R. Estrada, Strong moment problems for rapidly decreasing smooth functions, Proceeding of American Mathematical Society, volume 120, 1994, pp.529-534.

[29] A. Erdélyi, Higher transcendental functions, volume 2, Mc graw-Hill, New York, 1959.

[30] Evans, D. E. and J. T. Lewis (1977). Dilation of Irreversible Evolution in Algebric Quantum Theory. Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A, No. 24, Dublin.

[31] M. Feldman, R. Rochberg, Singular values estimates for commutators and Hankel operators on the unit ball and the Heisenberg group, Lecture Notes in pure and appl. Math., 122, Dekker New York, (1990), 121-159.

[32] G. Freud, Orthogonal Polynomials, Pergamon Press, New York, 1971.

[33] H. W. J. Fuche, on a generalization of the Stieltjes moment problem. Bull. Math. Soc. 52 (1946), 1057-1059.

[34] H. W. J. Fuche, On the closure of $\{e^{-t}t^{a\nu}\}$. Proc. Cambridgephilo. Soc. 42 (1946), 91-105.

[35] I. Gohberg ,M. G. Krein Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, American mathematical society. Translations of mathematical monographs,0018, 1969.

[36] K. T. Hahn ,E.H. Youssfi, Möbius invariant Besov p-spaces and Hankel operators in the Bergman space on the ball in Cn, Complex Variables Theory Appl., 17 no 1-2, (1991), 89-104.

[37] H. L. Hamburger, Über eine Erweinderung des Stieltjes-schen moment problems. Mathematische Annalen, 81 (1920) 31-45.

[38] P. Hartman, On completely continuous Hankel matrices, Proc. Math. Amer. Soc., 9, (1958), 862-866.

[39] F. Haslinger, The canonical solution operator to $\overline{\partial}$ restricted to Bergman spaces and spaces of entire functions, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 11 (2002) 57–70.

[40] F. Haslinger, B. Helfer, Compactness of the solution operator to $\overline{\partial}$ in weighted L^2 -spaces, J. Funct. Anal. 243 (2007) 679–697.

[41] F. Haslinger, B. Lamel, Spectral properties of the canonical solution operator to $\overline{\partial}$, J. Funct. Anal. 255 (2008) 13–24.

[42] E. Hendriksen, A characterization of classical orthogonal Laurent polynomials, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math, 50, no.2 (1988) 165-180.

[43] F. Holland, D. Walsh, Hankel operators in von-Neumann-Schatten Classes, III. J. Math., 32, (1988), 1-22.

[44] W. B. Jones, O. Njřastad, and W. J. Thron, Two-point Padťe expansions for a family of analytic functions, J. Comp. Appl. Math. 9 (1983), 105-123.

[45] L. Hormander, "An Introduction to Complex Analysis in Several Variables," North-Holland, Amsterdam, 1973.

[46] W. B. Jones, W. J. Thron and H. Waadeland, The strong stieltjes moment problem, Trans. Amer. Math. Soc. 261 (1980) pp. 503-528.

[47] W. B. Jones, W. J. Thron, Orthogonal Laurent polynomials and Gaussian quadrature, in : Quantum Mechanics in Mathematics, Chemistry and Physics, eds. K.e E. Gustafson and W. P. Reinhardt, Plenum Press, New York, 1981, pp 449-455.

[48] N. J. Kalton, Plurisubharmonic functions on quasi-Banach spaces, Studia Math., 84, (1986), 297-324.

[49] W. Knirsch, G. Schneider, Continuity and Schatten–von Neumann p-class membership of Hankel operators with antiholomorphic symbols on (generalized) Fock spaces, J. Math. Anal. Appl. 320 (2006) 403–414.

[50] G. L. Lopes, On the convergence of padé approximants for stieltjes type functions, Math. USSR-Sb. 39 (1981), 281-288.

[51] S. Lovera, E.H. Youssfi, Spectral properties of the $\overline{\partial}$-canonical solution operator, J. Funct. Anal. 208 (2004) 360–376.

[52] P. H. Maserick, Moments of measures on convex bodies, Pacific J. Math. 68 (1977), 135-152.

[53] R. Meise, D. Vogt, introduction to functional analysis, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2, The Clarendon Press, Oxford university Press, New York, 1997.

[54] Mlak, W. (1978). Dilations of Hilbert space operators (general theory). Dissertiones Math. 153, 1-6.

[55] J. D. Murray, Asymptotic analysis, Applied mathematical sciences, volume 48.

[56] Sz.-Nagy, B. (1960). Extensions of Linear Transformations in Hilbert Space which Extend Beyond this Space. New York : Ungar.

[57] Z. Nehari, On bounded linear form, Ann. Math., 65,(1957), 153-162.

[58] Nico M. Temme, An introduction to the classical Functions of mathematical physics,Library of Congress Cataloging in Publication Data, ISBN : 0-471-11313-1.

[59] O. Njastad and W. J. Thron, The theory of sequences of orthogonal L-polynomials, Det Kong. Norske Vid. Selsk. 1 (1983) 54-91.

[60] H. L. Pedersen, Stieltjes moment problems and the Friedrichs extension of a positive definite operator, J. Approx. Theory 83 (1995), 289-307.

[61] V. V. Peller, Hankel operators of class $\mathcal{C}_p$ and their applications (rational approximation, Gaussian processes, the problem of majorizing operators), Math. USSR-Sbornik, 41, (1982), 443-479.

[62] V. V. Peller, A description of Hankel operators of class $\mathcal{C}_p$ for $p > 0$, an investigation of the rate of rational approximation and ather applications, Math. USSR-Sbornik, 50, (1985), 465-494.

[63] A. Pietsch, Operator ideals, North-Holland Publishing Co., Amsterdam ; New York ; Oxford, 1980.

[64] P. Ressel, Bochner's theorem for finite dimensional conelike semigroups, Math. Ann. 296 (1993), 431-440.

[65] Riesz, M. 1923. Sur le problème des moments. Troisième note. ArC. Mat. Astronomi. Fys., 17, No. 16 (1923).

[66] G. Schneider, Hankel operators with antiholomorphic symbols on the Fock space, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004) 2399–2409.

[67] S. Semmes, Trace ideal criteria for Hankel operators and applications to Besov spaces, Integral Equations and Operator theory, 7, (1989), 531-565.

[68] T. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Anns. Fac. Sci. Univ. Toulouse 8 (1894-1895), J1-J122 ; 9, A5-A47.

[69] T. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Sér. 6, 4 no. 2 (1995), p. J36-J75

[70] M. H. Stone, "Linear Transformations in Hilbert Space," Amer. Math. Soc. Colloq., Publ. XV, New York, 1932.

[71] K. Stroethoff, Hankel and toeplitz operators on the Fock space, Michigan Math. J. 39 (1992) 3-16.

[72] R. Wallsten Hankel operators between weighted Bergman spaces in the ball, Ark. Math., 28 no 1, (1990), 183Ű192.

[73] Z. X. Wang, D. R. Guo, Special functions, World scientific publishing. Co. Pte. Ltd. ISBN. 9971-50-659-9.

[74] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Combridge at the university press. 1944.

[75] E. T. Whittaker, G. N. Watson, A course of modern analysis (An introduction to the general theory of infinite processe of analytic functions with an accunt of the principal transcendental functions), Comridge university press. 1996, ISBN. 0521588073.

[76] J. Xia, D. Zheng, Standard deviation and Schatten class Hankel operators on the Segal–Bargmann space, Indiana Univ. Math. J. 53 (2004) 1381–1399.

[77] E. H. Youssfi, Pull-back properties of moment functions and a generalization of Bochner-Weill's theorem, Math. Ann. 300 (1994), 435-450.

[78] K. Zhu, Hilbert–Schmidt Hankel operators on the Bergman space, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990) 721–730.

[79] K. Zhu, Operator Theory in Function Spaces, Marcel Dekker, New York, 1990.

[80] K. Zhu, Schatten class Hankel operators on the Bergman space of the unit ball, Amer. J. Math. 113 (1991) 147–167.