

THÈSE DE DOCTORAT

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université Paris-Est

Spécialité Informatique

*au titre de l'École Doctorale de Mathématiques
et des Sciences et Techniques de l'Information et de la Communication*

Présentée et soutenue publiquement par

Marc SAGE

le vendredi 22 juin 2012

Combinatoire algébrique et géométrique des nombres d'HURWITZ

Devant le jury composé de

Philippe BIANE	Examineur
Sylvie CORTEEL	Examinatrice
Jean-Christophe NOVELLI	Directeur de thèse
Vlady RAVELOMANANA	Examineur
Gilles SCHAEFFER	Rapporteur
Dimitri ZVONKINE	Rapporteur

Laboratoire d'informatique Gaspard MONGE
UMR 8049 LIGM

5, bd Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

Table des matières

Remerciements	vii
0 Introduction	1
0.1 Problématique	1
0.1.1 Au commencement étaient les graphes	1
0.1.2 Des graphes aux cartes	1
0.1.3 Des cartes aux revêtements ramifiés de la sphère	2
0.1.4 Des revêtements ramifiés de la sphère au problème originel d'HURWITZ	3
0.1.5 Du problème originel au problème actuel d'HURWITZ	4
0.1.6 Du problème d'HURWITZ à une incursion en géométrie algébrique	6
0.2 Contexte	6
0.2.1 Intégrales de HODGE sur les espaces $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ des modules des courbes	7
0.2.2 L'algèbre $\mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right]$	7
0.2.3 Permutations et partitions scindées	8
0.3 Résultats et plan	10
0.3.1 Ce qui était connu	10
0.3.2 Notre contribution	10
0.3.3 Plan	12
1 Préliminaires, partitions et permutations, partitions ensemblistes, permutations scindées et multipartitions	15
1.1 Préliminaires	15
1.1.1 Conventions typographiques	15
1.1.2 Abréviations	16
1.1.3 Sur les ensembles	16
1.1.4 Sur les actions	17
1.1.5 Sur les ordres	17
1.1.6 Puissances monotones et coefficients multinomiaux	18
1.1.7 Fonction Γ d'EULER	19
1.1.8 Fonctions symétriques	19
1.1.9 Coordonnées et coefficients de structure	19
1.2 Groupes symétriques	20
1.2.1 Groupe symétrique d'un ensemble	20
1.2.2 Symétries d'une famille et multi-ensembles	20
1.2.3 Support, orbites et cycles d'une permutation	21
1.2.4 Sous-groupe de YOUNG d'une famille d'ensembles	21
1.3 Algèbre des invariants d'un monoïde sous l'action d'un groupe fini	21
1.3.1 Algèbre d'un monoïde	21
1.3.2 Sous-algèbre des invariants et classes de conjugaison	22
1.3.3 Représentations de groupes finis, formule de FROBENIUS	25
1.4 Partitions d'un entier	25
1.4.1 Partitions d'un entier et diagrammes de YOUNG	26
1.4.2 Résumé des notations	29
1.4.3 Nombre de partitions, l'estimation $ \mathfrak{P}_n \simeq A\sqrt{n}$	30
1.4.4 Structure des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$	30
1.4.5 Éléments de YOUNG-JUCYS-MURPHY	31
1.5 Multipartitions d'un entier	31

1.5.1	Partitions scindées	32
1.5.2	Entiers et partitions associés à une multipartition	32
1.5.3	Récapitulatif des notations	34
1.5.4	Nombre de multipartitions, l'estimation Card $\mathfrak{Y}_n^s \simeq B^n$	35
1.5.5	Les multipartitions de taille ≤ 5 , les contenus	35
1.6	Partitions ensemblistes	37
1.6.1	Définitions sur $\mathfrak{P}_E$	37
1.6.2	Ordre de raffinement sur $\mathfrak{P}_E$	39
1.6.3	Entrelacement	40
1.6.4	Fonction de d'MÖBIUS	42
1.6.5	Structure des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$	42
1.7	Permutations scindées	43
1.7.1	Le monoïde $\mathfrak{S}_n^s$	43
1.7.2	L'algèbre $\mathcal{A}_n$ des invariants : classes de conjugaison et multipartitions	44
1.7.3	Hauteur d'une partition scindée	45
1.7.4	L'isomorphisme $o : \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s] \cong \bigoplus_{\pi \in \mathfrak{P}_n} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$	47
1.7.5	La structure de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$	48
1.7.6	L'exemple de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_4^s]$	49
2	Vers les nombres d'HURWITZ : l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right]$ et l'intégration sur l'espace $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ des modules des courbes	51
2.1	L'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right]$	51
2.1.1	Identités basiques	52
2.1.2	La sous-algèbre $\mathbb{Q}[Y]$	53
2.1.3	La sous-algèbre $\mathbb{Q}[Z]$	54
2.1.4	Un lemme de compacité	56
2.1.5	Asymptotique dans $\mathcal{A}$	56
2.1.6	La Z -égalité dans la partie $\mathcal{A}^Z := \mathcal{A} \setminus \mathbb{Q}[Y]$	58
2.1.7	L'algèbre déformée $\mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{(n+\lambda)^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{(n+\mu)^n}{n!} t^n \right]_{\lambda, \mu}$	59
2.2	Le problème d'HURWITZ	62
2.2.1	Cartes et caractéristique d'EULER	63
2.2.2	Revêtements ramifiés de la sphère et formule de RIEMANN-HURWITZ	65
2.2.3	Monodromie et constellations	67
2.2.4	Cartes, 3-constellations, hypercartes	69
2.2.5	Nombres et séries d'HURWITZ	70
2.3	Intégration sur $\overline{\mathcal{M}}_n^g$	73
2.3.1	L'espace des modules $\mathcal{M}_n^g$ et son compactifié de DELIGNE-MUMFORD $\overline{\mathcal{M}}_n^g$	73
2.3.2	Intégration des classes de cohomologie sur un orbifold compact	73
2.3.3	Les classes de CHERN ψ_i et λ^i	74
2.3.4	Les chevrons de WITTEN $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$ et les intégrales de HODGE	74
2.3.5	Relations des cordes et du dilaton, chevrons sphériques et toriques	75
2.3.6	Un théorème de KONTSEVITCH déterminant tous les chevrons de WITTEN	78
2.3.7	La formule d'EKEDAH-LANDO-SHAPIRO-VAINSHTEIN	78
2.3.8	Un théorème de KAZARIAN donnant les séries $H^g(\lambda)$ dans l'algèbre $\mathcal{A}$	80
3	Asymptotique des nombres d'HURWITZ à plusieurs partitions, nombres d'HURWITZ à deux partitions en genre nul	85
3.1	Asymptotique des nombres d'HURWITZ à une partition	86
3.1.1	Nombres d'HURWITZ à une partition en genres sphérique et torique	86
3.1.2	Les séries d'HURWITZ dans l'algèbre $\mathcal{A}$ en genres sphérique et torique	89
3.1.3	Les séries d'HURWITZ dans l'algèbre $\mathcal{A}$ en genre ≥ 2	93
3.1.4	Asymptotique des nombres d'HURWITZ à une partition	95
3.2	Le lien entre les constantes c_g de l'asymptotique d'HURWITZ et les constantes t_g de BENDER-GAO-RICHMOND	96
3.2.1	Une relation récursive pour calculer les chevrons $\langle \tau_2^{3k} \rangle$ et les constantes c_g	96
3.2.2	L'égalité $c_g = \sqrt{2}^{g-3} t_g$	99
3.3	Asymptotique des nombres d'HURWITZ à plusieurs partitions	100

3.3.1	La formule de réduction	101
3.3.2	Preuve du Z -lemme	107
3.4	La formule de réduction pour $H^0(\lambda a, \lambda b)$	112
3.4.1	Les nombres $f_{\lambda a, \lambda b}^{(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_k)}$	112
3.4.2	Un test de sûreté : $H^0(\lambda a, \lambda 2)$	113
3.4.3	Le calcul général de $H^0(\lambda a, \lambda b)$	114
4	Calcul des nombres d'HURWITZ à une partition	117
4.1	Nombres d'HURWITZ et coefficients de structure de l'algèbre des invariants $\mathcal{A}_n$	117
4.1.1	Les puissances de la classe des transpositions totalement scindées	118
4.1.2	Cas général et exemple de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_3^a]$	118
4.1.3	Diagonalisabilité de la classe $C_{(2)^s}$	120
4.1.4	La formule de FROBENIUS	122
4.1.5	Asymptotique de $h_n^g(\lambda)$ lorsque le genre g devient infiniment grand	123
4.2	Comment calculer les nombres $h_n^g(\lambda)$?	124
4.2.1	Algorithme pour calculer tous les $h_n^g(\lambda \vdash n)$ en complexité uniforme $O(C^n)$	124
4.2.2	Exemples des partitions de taille ≤ 5	125
4.2.3	Table de valeurs des $h_{ \lambda }^g(\lambda)$ pour $ \lambda \leq 5$	129
4.3	Séries d'HURWITZ à plusieurs partitions	131
4.3.1	Lemmes préliminaires	132
4.3.2	Nombres et séries de KAZARIAN	133
4.3.3	Réduction des séries d'HURWITZ <i>via</i> les séries de KAZARIAN	135
4.3.4	Une approche pour calculer tous les nombres d'HURWITZ	139
4.3.5	Une conjecture de KAZARIAN	139
5	Conclusion	141

Remerciements

J'ai rencontré Jean-Christophe NOVELLI en fin de première lors d'un stage Animaths à Labège. L'une de choses que je retiens de son intervention à l'époque est la nécessité, dans la recherche, de l'acte de *sécher*. Je constate, quelque dix années passées, que cet aspect m'a rassuré et porté dans la suite de mon parcours mathématique. Il en va de même pour l'*indépendance* et l'*initiative* laissés au chercheur, tant dans des exercices d'Olympiades ou de prépa que dans mon travail de doctorat. Je suis heureux de pouvoir ici lui témoigner mes remerciements pour ces guides précieux dans mon travail de mathématicien – comme dans celui d'enseignant.

Mon premier contact avec les cartes se fit lors d'un autre stage en fin de terminale avec Dimitri ZVONKINE. Je lui dois de m'avoir guidé vers le seul travail mathématique qui m'aura jamais passionné : un TIPE sur la combinatoire des cartes et l'intégration matricielle. C'est dans la traînée de cet enthousiasme à jamais révolu que je pus être initié aux nombres d'Hurwitz par les bons soins de Gilles SCHAEFFER, trouvant ainsi un travail de recherche pour quelques années. Ma dette envers tous deux est grande : m'avoir permis de dépasser la désillusion d'une passion perdue pour la mathématique. Je suis également touché qu'ils aient accepté, au terme de ce dépassement, d'être les rapporteurs de ce mémoire.

Que dire d'un travail d'équipe sinon, suivant Stella BARUK, que le produit de ses individus ne se réduit pas à leur somme ? Les échanges dans mon laboratoire d'accueil avaient chacun un sens, participant ainsi de la vie d'un organisme. Il m'est impossible de diriger ma gratitude vers une cellule particulière : elle n'en demeurera pas moindre pour ces moments partagés à tous égards.

Comme tout domaine « finitiste », la combinatoire a cela d'avantageux qu'elle permet l'*expérimentation*. Si j'ai appris une chose pendant mon travail de doctorat, c'est bien à commencer par *ouvrir les yeux* – et à transmettre à mes élèves tant la simplicité que l'importance de cette action. La confiance qu'elle permet de retrouver, le contact de la réalité (ici mathématique) avec lequel elle permet de renouer, l'humilité face à cette dernière (« avant d'ouvrir le troisième oeil, commence par ouvrir les deux premiers ») : tous participent d'un bon sens et d'une démarche saine qui m'ont porté pour agir dans la vie.

Il m'est impossible de parler de ce travail d'équipe et de ce bon sens sans mentionner ce dont ils ne sont qu'une réalisation : ma pratique d'aikido sur les tatamis. Ma reconnaissance reste profonde à l'égard de ceux qui m'y ont initié – Romaric, Manon, Régis – et vient se nourrir de tout ce qu'ils m'ont fait découvrir pendant le chantier de ma thèse.

Deux amis enfin doivent être dûment remerciés. Tout d'abord Pierre-Loïc, pour m'avoir accompagné durant ma thèse et en avoir défriché plusieurs pans. Et Laurent qui, conjointement au service Google Traduction, m'a permis de rendre accessible à la communauté francophone le contenu d'un article non publié écrit en russe.

Je terminerai par le commencement : lors du stage de Labège, afin sans doute de nous rassurer face aux doutes soulevés par les maths merveilleuses que nous découvrons, Jean-Christophe nous a affirmé que la question des fondements de la mathématique était réglée depuis plus d'un siècle et que nous pouvions avancer tranquille sans nous en soucier. J'ai dû chercher plus d'une douzaine d'années avant de pouvoir commencer à trouver des éléments de réponse, maudissant à de nombreuses reprises l'auteur de cette affirmation pour le temps qu'il m'avait fait perdre en jetant en l'air cette proposition que rien dans mes recherches ne paraissait pouvoir certifier. En fin de compte, c'est sans doute mieux ainsi : certes, le chemin parcouru et le moteur (l'insatisfaction) sont miens mais je ne peux oublier les éléments déclencheurs, ceux qui donnent l'impulsion et la direction initiales. Si un voyage de mille lieues commence par un pas, alors n'oublions pas ceux qui ont suscité ce premier pas.

Montreuil, le 31 août 2011.

Chapitre 0

Introduction

« Nous sentons que, à supposer que toutes les questions scientifiques possibles soient résolues, les problèmes de notre vie demeurent encore intacts. À vrai dire, il ne reste plus alors aucune question, et cela même est la réponse. » (L. WITTGENSTEIN, *Tractatus Logico-philosophicus*, 6.42)

0.1 Problématique

0.1.1 Au commencement étaient les graphes

Les *graphes* sont parmi les objets mathématiques les plus simples après les nombres entiers. Tout comme ces derniers, leur simplicité n'a d'égale que la difficulté des problèmes qu'ils posent aux mathématiciens. Tout comme les nombres entiers, les graphes sont apparus et étudiés dans des communautés diverses, aux intérêts et langages divers... parfois divergents. Il suffirait d'évoquer les diagrammes de FEYNMAN en physique, les arbres et réseaux en informatique, les dessins d'enfants de GROTHENDIECK en géométrie algébrique, les carquois en algèbre linéaire, l'homologie simpliciale en topologie algébrique, les cartes en matrices aléatoires, en théorie des nœuds, le langage sagittal des catégories...

Pour autant élémentaires qu'ils soient, les graphes possèdent selon nous un atout sur les nombres entiers : les *dessiner* permet de faire appel à notre *intuition spatiale et combinatoire*, laquelle nous désespérons d'utiliser dans des contrées plus abstraites. Comment ne pas saisir l'occasion de profiter d'un *guide intuitif* aussi puissant ?

0.1.2 Des graphes aux cartes

C'est ce qui nous a amené, suivant les conseils avisés de D. ZVONKINE, à travailler sur les *cartes* pour notre TIPE en classes préparatoires.

Pour visualiser une carte, prenons un globe terrestre, repassons les frontières au feutre noir et dessinons des points aux croisements de ces dernières : nous avons dessiné un graphe sur la sphère dont les composantes sont polygonales. Nous pouvons aussi partir des pays (des polygones) et les recoller selon leur frontières (arbitrairement choisies) : nous obtiendrons alors une carte dessinée sur une surface qui peut être sphérique, torique (visualiser un doughnut), ou avec encore plus de trous (penser à une bouée familiale). Le nombre de trous s'appelle le *genre* de la surface (la sphère est ainsi de genre nul). On s'autorisera à déformer ces surfaces en les étirant sans les percer ni les déchirer, ce que notre guide intuitif visualisera aisément comme une *géométrie du caoutchouc*.

Déjà, des problèmes se posent : partant d'un seul pays, combien de cartes sphériques différentes pouvons-nous obtenir – aux déformations sus-autorisées près ? Combien de cartes toriques ? Combien à genre fixé ?

L'article [27] nous a servi d'introduction à la combinatoire des cartes, élevant un pont vers un domaine beaucoup moins immédiatement accessible à l'intuition : l'*intégration matricielle*. On trouvera par exemple dans [10] la réponse à la question ci-dessus *via* un calcul de telles intégrales, témoignant au passage de la difficulté de cette question simple. Pour un éclairage combinatoire de ce résultat – et plus généralement de la combinatoire des cartes en genre supérieur –, on consultera la thèse [4] et ses références.

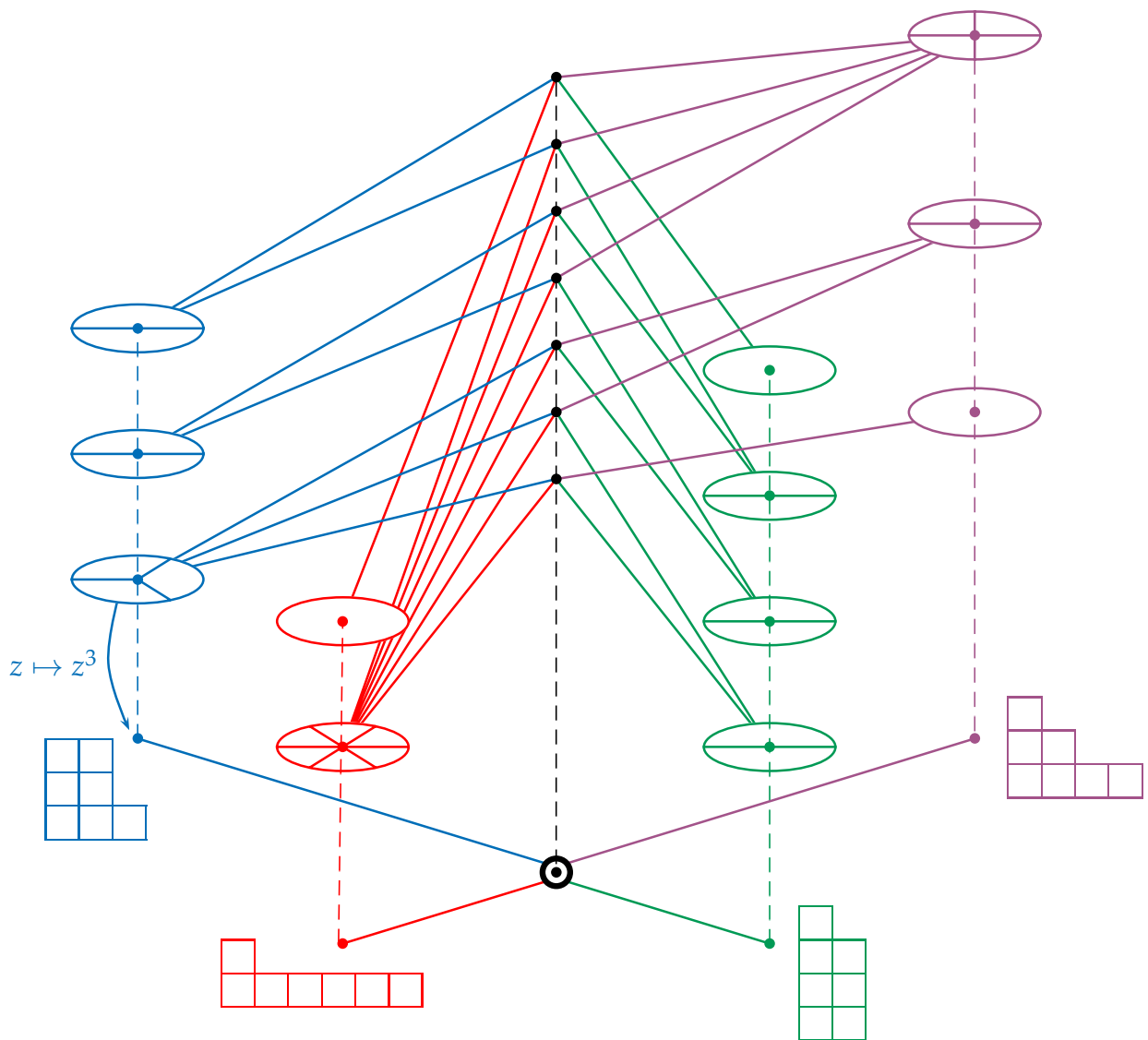
Cette incursion au pays des cartes nous a introduits à la diversité des sources abreuvant le confluent combinatoire. Nous avons ensuite remonté l'affluent topologique pour découvrir, guidés par G. SCHAEFFER, les *revêtements ramifiés de la sphère*.

0.1.3 Des cartes aux revêtements ramifiés de la sphère

Une démarche généralement fructueuse, afin d'étudier des objets, consiste à étudier les *morphismes* entre ces objets. Cela nous mène à l'étude des applications continues entre surfaces sous-jacentes à des cartes (sphères, tores, bouées familiales...). Témoin de la richesse de cette approche : le livre [15] *Graphs on Surfaces and Their Applications* dont le titre est évocateur.

Les revêtements ramifiés ne représentent qu'un genre particulier parmi la faune sus-mentionnée. Nous regarderons plus spécifiquement l'espèce qui ramifie la *sphère*.

Suivant l'adage « a picture is worth a thousand words », nous proposons de découvrir les revêtements ramifiés à travers le dessin suivant.



(Pour le lecteur monochrome, nous précisons que quatre couleurs ont été utilisées dans le dessin précédent. Chaque colonne de disques et petits points reliés par une même ligne en pointillé (à l'exception de la colonne centrale coloriée en noir) ainsi que les arêtes en partance de leurs centres sont ainsi coloriées à l'aide d'une même couleur. De gauche à droite : bleu, rouge, vert, mauve.)

Le gros point noir (encerclé) fait partie de la sphère, au même titre que les quatre arêtes coloriées qui en partent. La sphère étant localement plate (comme la Terre), on visualisera en bas du dessin une *feuille* contenant le gros point noir (qualifié de *point base*), les quatre arêtes en partance de ce dernier ainsi que les quatre points coloriés qui lui sont reliés. Ces points coloriés sont appelés *points de ramification*.

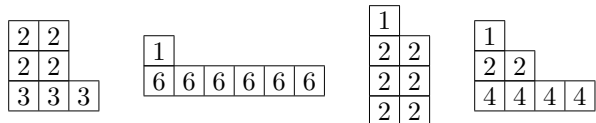
On visualisera de même au-dessus du gros point noir sept *feuillet*s (autant que de petits points noirs), chacun de ces feuillets contenant chacune des quatre arêtes coloriées en partance du petit point noir considéré. En suivant ces feuillets le long d'arêtes d'une même couleur, on voit qu'ils vont se recouper au-dessus des points de ramification selon des disques, de sorte que ces derniers se *ramifient* en sept feuillets.

Comment se rencontrent au juste les feuillets? Observer la flèche $z \mapsto z^3$ partant d'un disque bleu (disque à voir dans le plan complexe) : elle signifie que, lorsqu'un point mobile sur la sphère fait un tour complet autour du point bleu, le point correspondant dans le disque bleu ne fera qu'un tiers de tour. Considérons alors, dans l'un des trois feuillets ramifiant ce disque bleu, un point a en partance du petit point noir associé, qui suit l'arête bleue sur son feuillet : son projeté p sur la sphère en bas part du gros point noir et suit l'arête bleue sur la sphère. Pendant que le projeté p arrive au point bleu, y fait un tour complet puis repart le long de l'arête qui l'y avait amené, le point a ne fait qu'une fraction de tour dans un disque bleu et repart selon une *autre* arête, l'amenant à un *autre* feuillet : c'est uniquement quand le point p aura effectué trois allers retours autour du point de ramification bleu que le point a reviendra à son petit point noir de départ.

Le phénomène sus-observé (appelé *monodromie*) nous permet, en étiquetant les sept feuillets par les petits points noirs, de définir quatre *permutations des feuillets* (autant que de points de ramification autour desquels tourner), le *type cyclique* de ces permutations étant exactement décrits par les ramifications des disques. Ainsi :

1. la permutation associée à la couleur bleue possède un cycle de longueur 3 et deux transpositions ;
2. la permutation rouge est un cycle de longueur 6 (et fixe un septième point) ;
3. la permutation verte est un produit (disjoint) de trois transpositions (et d'un cycle fixe) ;
4. la permutation mauve est le produit d'un 4-cycle par une transposition (et fixe un point).

Ces *types de ramification* sont représentés par les diagrammes



Les longueurs des cycles se lisent sur les *lignes* des diagrammes et comptent le nombre de cases de la ligne considérée. Cette description des partitions en termes de *diagrammes de YOUNG* est usuelle.

Le gros point noir et les quatre arêtes coloriées le quittant dessinent une carte étoilée sur la sphère. En relevant cette carte, on obtient un enchevêtrement de plusieurs copies de cette étoile, d'où le joli nom de *constellations* donné par [15] à ces objets topologiques dont l'étude combinatoire¹ constitue la trame de ce mémoire.

0.1.4 Des revêtements ramifiés de la sphère au problème originel d'HURWITZ

Une question qui se pose naturellement en physique (cf. [29] partie 5) est de compter, à isomorphisme près, le nombre de revêtements ramifiés de la sphère ayant un type donné de ramification. Cela constitue le *problème d'HURWITZ*.

La monodromie permet de traduire ce problème en termes de permutations. Nous avons vu plus haut comment associer à un revêtement ramifié de la sphère des permutations ayant même type cyclique. Puisque la surface revêtant est connexe (c'est une sphère ou un tore à plusieurs trous) et que l'on ne peut passer d'un feuillet à un autre que *via* les disques de ramification, ces permutations doivent permettre de passer d'un feuillet donné à un autre, *i. e.* doivent agir *transitivement* sur l'ensemble des feuillets. Par ailleurs, on observera que chacune de ces permutations correspond à un *lacet* dessiné sur la sphère (le chemin du projeté p) autour du point de ramification associé ; la composée de ces lacets est un lacet entourant tous les points de ramification, donc contractile en le faisant passer « de l'autre côté » de la sphère. Il en résulte que la permutation des feuillets correspondant au produit de ces lacets doit valoir l'identité (sur l'ensemble des feuillets).

On définira par conséquent une *constellation* sur un ensemble E comme tout k -uplet $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ de permutations de E telles que :

1. Nous ne ferons usage d'aucune des considérations topologiques sus-présentées. Elles ne sont présentées que pour comprendre l'origine topologique du problème d'HURWITZ qui se codera entièrement en termes combinatoires – notre cadre d'étude.



FIGURE 1 – A. Hurwitz

1. la composée $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ vaut la permutation identité Id_E ;
2. le sous-groupe engendré $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur E .

Le problème d'HURWITZ revient alors à dénombrer les constellations de type cyclique imposé d'un ensemble fini. Lorsque l'on tient compte des symétries du revêtement (certains feuillets sont indistinguables), on aboutit à un nombre de constellations $\mathbb{h}_n$ de l'ensemble des feuillets divisé par $n!$ (où n est le nombre de feuillets), ce qui explique la notation $h_n := \frac{\mathbb{h}_n}{n!}$ trouvée dans la littérature².

Ainsi A. HURWITZ (1859-1919) se demandait-il, à la fin du XIX^e siècle, de combien de façons l'on pouvait factoriser dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ une permutation de type cyclique λ donné possédant $\ell(\lambda)$ cycles (y compris les cycles fixes) en un produit de transpositions, en nombre minimal, qui engendrent un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_n$. d'HURWITZ à une partition On observera que le type cyclique $\square\square$ des transpositions est le plus simple qui soit non trivial ; en cela le problème originel d'HURWITZ est un premier pas.

En notant $\mathbb{h}_n^0(\lambda)$ le nombre de constellations cherché, HURWITZ nous a légué la jolie formule

$$\frac{\mathbb{h}_n^0(\lambda)}{n! (n + \ell(\lambda) - 2)!} = \frac{1}{|\text{Sym } \lambda|} \left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{\lambda_i!} \right) n^{\ell(\lambda)-3}. \quad (1)$$

Il s'agissait donc de compter les constellations sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ de type $(\lambda, \square\square, \square\square, \dots, \square\square)$ avec un nombre minimal de $\square\square$.

Pour la petite histoire, la formule d'HURWITZ a été publiée en 1891 dans [11] mais non prouvée, ce qui a amené STREHL en 1996 à en rédiger une preuve dans [25] avec des notions toutes familières à HURWITZ. Aucune de ces preuves n'était toutefois bijective. Ce n'est que très récemment qu'E. DUCHI, D. POULALHON et G. SCHAEFFER en ont obtenu une à l'aide d'arbre étiquetés, voir par exemple les transparents aux Journées de Combinatoire de Bordeaux 2012 (disponibles sur la page <http://www.labri.fr/perso/marckert/JCB2012-Schaeffer.pdf>).

0.1.5 Du problème originel au problème actuel d'HURWITZ

Comment obtenir dans le problème d'HURWITZ le nombre minimal de types $\square\square$? L'interprétation topologique des constellations comme tirées-en-arrière d'un graphe étoilé sur la sphère permet de dessiner des cartes et d'en regarder certaines quantités caractéristiques.

Nous rappelons qu'un polyèdre possédant S sommets, A arêtes et F faces vérifie la relation $S - A + F = 2$. Or un polyèdre peut toujours être vu comme une carte sur la sphère et l'on a plus généralement la relation (dite d'EULER)

$$S - A + F = 2 - 2g \quad (2)$$

2. La notation $\mathbb{h}$ est de notre fait. Afin de différencier les nombres *entiers* (de factorisations) de leurs normalisés (*rationnels*), nous avons cherché à évoquer la lettre $\mathbb{N}$ (plus particulièrement son enluminure) dans la lettre h , d'où la notation $\mathbb{h}$.

pour une carte de genre g . Grâce à cette relation, on montre qu'une constellation de type $(\lambda, \square, \square, \dots, \square)$ possède en genre sphérique $T := n + \ell(\lambda) - 2$ transpositions (c'est le dénominateur de la fraction de gauche dans 1).

Plus généralement, une constellation de type $(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ et de genre g vérifie la relation (dite *de RIEMANN-HURWITZ*)

$$2n + 2g' = \sum (n - \ell(\lambda^i)) \quad (3)$$

où l'on a introduit le *genre décrémente* qui intervient à maintes reprises

$$g' := g - 1.$$

Un problème intéressant qui suit le questionnement originel d'HURWITZ est de chercher à énumérer les constellations dont :

1. les premiers facteurs (pas seulement le tout premier) sont de types imposés (pas seulement des transpositions);
2. le genre est lui aussi pris quelconque en rajoutant dans la formule de RIEMANN-HURWITZ des termes $n - \ell(\lambda^i)$ valant 1 (*i. e.* des transpositions).

Le problème général d'HURWITZ.

On se donne deux entiers n et g positifs ainsi que des partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ de n . On leur associe un *nombre T de transpositions* par

$$2n + 2g' = T + \sum (n - \ell(\lambda^i))$$

puis on définit le *nombre d'HURWITZ*

$$\mathbb{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in \mathbb{N}$$

par le nombre de constellations de $\mathfrak{S}_n^{k+T}$ de type

$$(\overline{\lambda^1}, \overline{\lambda^2}, \dots, \overline{\lambda^k}, \underbrace{\square, \square, \dots, \square}_{T \text{ transpositions}})$$

où la barre au-dessus d'une partition signifie que l'on complète cette dernière avec autant de 1 qu'il faut pour atteindre n .

Pour des raisons à venir (mais décelables dans le membre de gauche de la formule d'HURWITZ (1)), on normalisera les nombres $\mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda})$ d'une part par $n!$ (on obtient alors les nombre d'HURWITZ usuellement définis dans la littérature), d'autre part par $T!$, donnant ainsi lieu à des nombres d'HURWITZ *rationnels*

$$h_n^g(\vec{\lambda}) := \frac{\mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda})}{n! T!} \in \mathbb{Q} \quad (4)$$

dont on considérera la série génératrice (en l'indéterminée t)

$$H^g(\vec{\lambda}) = \sum_{n \geq 1} h_n^g(\vec{\lambda}) t^n = \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda})}{T_n!} \frac{t^n}{n!} \quad \text{où l'a posé } T_n := T \quad (5)$$

(cette série est donc la série génératrice exponentielle des nombres $\frac{\mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda})}{T_n!}$).

Cette normalisation par $T_n!$ est justifiée *a posteriori* comme faisant « marcher » toutes les formules. À ce titre, on normalisera en outre par le produit des facteurs $\boxed{\lambda} := \frac{1}{|\text{Sym } \lambda|} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{\lambda_i!}$ apparaissant dans le membre de droite de (1) en posant

$$\mathbb{E}_n^g(\vec{\lambda}) := \frac{h_n^g(\vec{\lambda})}{\boxed{\lambda^1} \boxed{\lambda^2} \dots \boxed{\lambda^k}} \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^g(\vec{\lambda}) := \frac{H^g(\vec{\lambda})}{\boxed{\lambda^1} \boxed{\lambda^2} \dots \boxed{\lambda^k}}. \quad (6)$$

La formule d'HURWITZ (1) se réécrit maintenant de manière beaucoup plus concise :

$$\mathbb{E}_n^0(\lambda) = n^{\ell(\lambda)-3}.$$

Se posent alors plusieurs questions :

1. La formule d'HURWITZ possède-t-elle une interprétation combinatoire directe ?
2. Peut-on trouver des *formules closes* pour les nombres $h_n^g(\vec{\lambda})$ à l'instar de celle de HURWITZ pour $h_n^0(\lambda)$?
3. À défaut d'une formule close, possède-t-on un *algorithme* pour les calculer efficacement ?
4. Comment les nombres $h_n^g(\vec{\lambda})$ se comportent-ils *asymptotiquement* lorsque n est très grand ? Lorsque le genre croît indéfiniment ?
5. Quelles *bornes* possède-t-on pour ces nombres ?
6. Sait-on calculer les séries $H^g(\vec{\lambda})$? Par des formules closes ? Par des algorithmes ?
7. Que peut-on lire dans les séries $H^g(\vec{\lambda})$ au sujet des nombres $h_n^g(\vec{\lambda})$?
8. Peut-on trouver un cadre d'étude plus large englobant les nombres et séries d'HURWITZ afin de *prendre du recul* sur ces derniers ?

0.1.6 Du problème d'HURWITZ à une incursion en géométrie algébrique

Les nombres d'HURWITZ dénombrent certains types de constellations. La monodromie permet de les décrire en termes purement combinatoires dans le groupe symétrique, ce qui en permet une exposition très rapide – bien que privée des origines topologiques sus-décrites. On trouvera une troisième approche des nombres d'HURWITZ dans [17]. Pour une correspondance explicite avec les cartes, on consultera les pages 71-72 de [4].

G. SCHAEFFER et D. ZVONKINE nous guidèrent pendant notre master (M2) à travers quelques articles de ce dernier ([28], [29], [30]) reliant les constellations à deux autres domaines :

1. l'intégration sur l'*espace des modules des courbes* (dont le calcul de la caractéristique d'EULER était l'objet original de [10]), cadre conceptuel du principal résultat de [5], appelé couramment « formule ELSV » dans la littérature, laquelle exprime certains nombres d'HURWITZ comme certains nombres d'intersection ;
2. l'utilisation d'une algèbre remarquable de séries formelles permettant de travailler agréablement l'*asymptotique* du terme général de ses éléments.

Au-delà de la découverte de questions déjà résolues sur les nombres de HURWITZ, ces articles nous ont donné l'occasion de tenter de comprendre l'éclairage géométrico-algébrique que la formule ELSV (7) pouvait apporter à la combinatoire des nombres d'HURWITZ. Nous pensons avoir suffisamment pratiqué ces notions (sans en comprendre les fondements) pour être capable de présenter un abrégé de cet éclairage accessible à des combinatoriciens non versés en géométrie algébrique – ceux à qui le présent mémoire est adressé.

Une question ouverte s'est posée à la fin de notre master : nous avons lu d'une part que les nombres d'HURWITZ pouvaient être codés dans une série appartenant à l'algèbre remarquable sus-mentionnée et d'autre part que cette algèbre permettait d'obtenir l'asymptotique de ses éléments. C'est ainsi mus par le désir de fusionner ces observations – somme toute assez banales – que nous avons commencé notre travail de doctorat, espérant récolter l'asymptotique des nombres d'HURWITZ.

0.2 Contexte

Nous venons d'exposer le contexte topologique des nombres d'HURWITZ $h_n^g(\lambda)$ à travers les revêtements ramifiés. La monodromie de ces derniers permet de les décrire intrinsèquement dans le groupe symétrique.

Le point de départ de notre travail consiste en les articles [29] et [30] introduisant :

1. d'une part la formule ELSV explicitant les nombres $h_n^g(\lambda)$ comme intégrales de HODGE ;
2. d'autre part une algèbre remarquable de séries formelles contenant toutes³ les séries $H^g(\vec{\lambda})$.

P.-L. MÉLIOT nous a par ailleurs indiqué une « bonne » façon de coder la transitivité dans la définition des nombres d'HURWITZ en enrichissant la structure du monoïde $\mathfrak{S}_n$, menant aux *permutations scindées*, appelées indépendamment *permutations colorées* par M. KAZARIAN.

On rappelle la notation $g' := g - 1$.

3. sauf $H^1(\emptyset)$

0.2.1 Intégrales de HODGE sur les espaces $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ des modules des courbes

Les nombres d'HURWITZ ont connu un regain d'intérêt de la part des géomètres algébristes qui étudient certaines quantités appelés *nombre d'intersection*. L'article [5] exprime en effet que certaines combinaisons linéaires de nombres d'intersection se trouvent être des nombres d'HURWITZ, jetant ainsi un regard géométrique sur ces derniers.

La théorème principal de [5], appelé couramment « formule ELSV » dans la littérature, explicite en tout genre⁴ les nombres d'HURWITZ possédant *une seule partition* α (on abrège $\ell := \ell(\alpha)$) :

$$\mathbb{H}_n^g(\alpha) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_n^g} \frac{1 - \lambda^1 + \lambda^2 - \dots + (-1)^g \lambda^g}{(1 - \alpha_1 \psi_1) \dots (1 - \alpha_\ell \psi_\ell)}. \quad (7)$$

Pour comprendre comment « fonctionne » l'intégrale ci-dessus, il suffit de savoir que

1. les $\lambda^1, \dots, \lambda^g$ (qui n'ont rien à voir avec des partitions) sont tous des éléments homogènes de degré pair ($\deg \lambda^j = 2j$) d'une même $\mathbb{Q}$ -algèbre graduée anti-commutative ; de même pour les $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\ell$ qui sont tous de degré 2 ;
2. l'intégrale est une forme linéaire (donc à valeurs *rationnelles*) annulant tous les termes homogènes de degré autre que la dimension $2(3g' + \ell)$ de l'espace $\overline{\mathcal{M}}_\ell^g$ sur lequel on intègre.

Ainsi, en développant « formellement » $\frac{1}{1-\#} = 1 + \# + \#^2 + \#^3 + \dots$, l'intégrale devient une combinaison linéaire *finie* de termes de la forme⁵

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_\ell^g} \lambda^j \psi_1^{d_1} \psi_2^{d_2} \dots \psi_\ell^{d_\ell} \text{ pour des entiers } j, d_1, d_2, \dots, d_\ell \text{ de somme } 3g' + \ell. \quad (8)$$

Ces intégrales (dites *de HODGE*) possèdent des relations combinatoires réduisant le degré $d_1 + \dots + d_\ell$, ce qui permet de les calculer récursivement si l'on connaît suffisamment de choses sur les λ^j . Ce sera le cas en genre 0 et 1, d'où des formules closes pour les nombres $h_n^0(\lambda)$ et $h_n^1(\lambda)$ (on retrouvera bien sûr la formule d'HURWITZ) qui se traduisent immédiatement en formules closes pour les séries $H^0(\lambda)$ et $H^1(\lambda)$.

Que dire en genre supérieur à 2 ?

M. KAZARIAN [14] a repris le cadre d'intégration de la formule ELSV pour expliciter (toujours en genre quelconque⁶) les séries $H^g(\alpha)$ comme polynôme en les générateurs Y et Z de l'algèbre de séries formelles dont nous nous apprêtons à parler :

$$\mathbb{H}^g(\alpha) = Y^{\alpha_1 + \dots + \alpha_\ell} (Z + 1)^{2g' + \ell} P^g(\alpha) \quad (9)$$

où $P^g(\alpha)$ est le polynôme suivant en Z :

$$P^g(\alpha) := \sum_{k=0}^{3g' + \ell} \frac{Z^k}{k!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{\ell+k}^g} \frac{1 - \lambda^1 + \lambda^2 - \dots + (-1)^g \lambda^g}{(1 - \alpha_1 \psi_1) \dots (1 - \alpha_\ell \psi_\ell)} \frac{\psi_{\ell+1}^2 \dots \psi_{\ell+k}^2}{(1 - \psi_{\ell+1}) \dots (1 - \psi_{\ell+k})}. \quad (10)$$

Comme nous allons le voir, décrire explicitement un élément de l'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$ comme polynôme en Y et Z donne un accès immédiat à son asymptotique.

Il serait par conséquent très dommageable pour notre étude de ne pas chercher à comprendre ces outils géométriques.

0.2.2 L'algèbre $\mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right]$

On sait depuis D. ZVONKINE [29] que (presque) toutes les séries d'HURWITZ appartiennent à une même algèbre de séries formelles $\mathcal{A}$ engendrée par deux séries particulières Y et Z . Il se trouve que déterminer l'asymptotique du terme général d'un élément de cette algèbre est immédiat une fois connus ses coefficients

4. Il y a trois exceptions : une partition vide en genre 1, une partition vide ou à une part en genre 0.

5. Il n'a pas été oublié de facteur 2 : le degré de l'intégrande est

$$\deg \lambda^j + d_1 \deg \psi_1 + d_2 \deg \psi_2 + \dots + d_\ell \deg \psi_\ell = 2j + 2d_1 + 2d_2 + \dots + 2d_\ell$$

et doit valoir la dimension $2(3g' + \ell)$ de l'espace $\overline{\mathcal{M}}_\ell^g$.

6. Les exceptions restent les mêmes : une partition vide en genre 1, une partition vide ou à une part en genre 0.

en tant que polynôme en Y et Z , ce qui confère à l'algèbre $\mathcal{A}$ un cadre idéal pour déterminer l'asymptotique des nombres d'HURWITZ.

Munissons l'algèbre des séries formelles $\mathbb{Q}[[t]]$ d'un opérateur de dérivation $D : \sum a_n t^n \mapsto \sum n a_n t^{n-1}$ et d'un pseudo-inverse $D^{-1} : \sum a_n t^n \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} t^n$. On s'intéresse à la sous-algèbre engendrée par la série génératrice exponentielle des arbres de CAYLEY 1-enracinés $Y := \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n$ et sa « dérivée » $Z := DY$ (série génératrice exponentielle des arbres de CAYLEY 2-enracinés), que l'on notera

$$\mathcal{A} := \mathbb{Q}[Y, Z] = \mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right].$$

Cette algèbre, introduite par D. ZVONKINE dans [28] (et indépendamment par D. ZAGIER selon [28]), possède un calcul interne assez aisé :

1. l'identité combinatoire⁷ $Y = te^Y$ permet de linéariser $YZ = Z - Y$, ramenant le calcul dans $\mathbb{Q}[Y, Z]$ à celui dans $\mathbb{Q}[Y]$ et $\mathbb{Q}[Z]$ séparément ;
2. les puissances de Y sont explicites, l'algèbre $\mathbb{Q}[Y]$ est engendrée par les $D^{-1}Z^k$ pour $k \geq 1$;
3. les puissances de Z sont engendrées par les dérivées successives des séries Z et Z^2 (et ce par une récurrence linéaire).

Par ailleurs, l'asymptotique dans l'algèbre $\mathcal{A}$ repose exclusivement⁸ sur le terme de degré dominant en Z ; on montre en effet que

$$\forall i, k \geq 1, \quad \left(\text{coefficient en } t^n \text{ dans } \frac{Y^i}{i} \right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} C_{-1} \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^{-1} \quad \text{où} \quad \frac{1}{C_{-1}} = \sqrt{2\pi} \\ \left(\text{coefficient en } t^n \text{ dans } Z^k \right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} C_k \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^k \quad \text{où} \quad \frac{1}{C_k} = \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}.$$

Le lecteur pourra déjà combiner cette asymptotique avec le théorème de KAZARIAN (formules (9) et (10)) pour récolter celle des nombres $h_n^g(\lambda)$.

On sait depuis D. ZVONKINE [29] que l'algèbre $\mathcal{A}$ contient toutes les séries d'HURWITZ – à l'exception de $H^1(\emptyset)$. L'argument est une récurrence sur le nombre de partitions, s'appuyant dans [30] sur le théorème de KAZARIAN pour l'initialisation.

On imagine par conséquent notre motivation pour *expliciter* la récurrence de D. ZVONKINE, ou tout du moins pour récolter l'information qui nous intéresse pour décrire le terme dominant en Z de la série $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$.

Une autre motivation est la suivante : pour connaître une série de $\mathcal{A}$, il suffit d'en connaître un nombre *fini* de termes (c'est l'avantage des polynômes). Le théorème de KAZARIAN fournit par conséquent un moyen (à g et λ fixés) de calculer *tous* les nombres $h_n^g(\lambda)$ en n'en connaissant qu'une partie *finie*. Cette remarque (de compacité) donne un statut prioritaire à la recherche d'algorithmes pour calculer les nombres $h_n^g(\lambda)$, ce que permettront les permutations scindées.

0.2.3 Permutations et partitions scindées

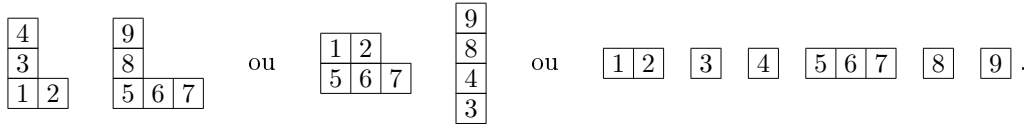
Le problème de FROBENIUS (dans le groupe symétrique) et celui d'enumeration Hurwitz ne diffèrent que par une condition de transitivité. On peut coder cette dernière en retenant dans un produit de permutations $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ les orbites du sous-groupe engendré $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \rangle$.

Pour ce faire, on s'autorise à rajouter à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en parts sur chacune desquelles σ induit une permutation ; on parle alors de *permutation scindée* (on a scindé l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$). On peut aussi visualiser que l'on colorie les cycles de σ à l'aide de plusieurs couleurs, les cycles coloriés avec une même couleur formant une part de la partition, d'où le terme de *permutation coloriée* utilisé par M. KAZARIAN dans [14].

Par exemple, la permutation $(1, 2)(5, 6, 7)$ de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ peut être scindée comme suit :

⁷. couper la racine d'un arbre de CAYLEY enraciné donne une forêt d'arbres de CAYLEY enracinés

⁸. à condition bien sûr de se restreindre à $\mathcal{A} \setminus \mathbb{Q}[Y]$



La dernière coloration des cycles est un procédé général : on peut toujours scinder $\llbracket 1, n \rrbracket$ selon les orbites de σ , ce qui revient à utiliser une et une seule couleur pour chacun de ses cycles. Cet exemple fournit un plongement $\sigma \mapsto \sigma^s$ de $\mathfrak{S}_n$ dans le monoïde $\mathfrak{S}_n^s$ des permutations scindées (pour un produit à définir) :

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_n & \hookrightarrow \mathfrak{S}_n^s \\ \sigma & \mapsto \sigma^s \end{cases}.$$

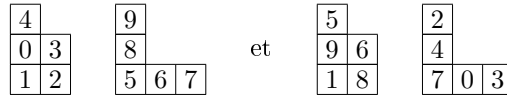
Dans ce cadre, les deux conditions du problème d'HURWITZ $\begin{cases} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k = \text{Id} \\ \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \rangle \text{ transitif} \end{cases}$ se codent par une seule condition

« le produit $\sigma_1^s \sigma_2^s \cdots \sigma_k^s$ vaut l'identité où tous les cycles sont coloriés de la même couleur »,

ce qui permet de décrire les nombres d'HURWITZ en termes de *coefficients de structure* de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$, ou (mieux) comme ceux d'un *quotient* de cette dernière par une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Le rôle des transpositions dans le problème d'HURWITZ donnera un statut tout particulier à la classe des *transpositions totalement scindées* $C_{\square^s} := \sum_{a < b} (a, b)^s$. On est ainsi amené à décrire :

1. les classes de conjugaison des monoïdes $\mathfrak{S}_n^s$;
2. la structure des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$;
3. l'action de la classe $C_{\square^s}$ des transpositions totalement scindées.

1. L'étude des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n^s$ (tout comme celle de $\mathfrak{S}_n$ conduit aux partitions) mène naturellement à la notion de *multipartition*, qui (tout comme les partitions sont des multi-ensembles d'entiers) sont des multi-ensembles de partitions (on parle aussi de *partitions scindées*). Par exemple, les permutations scindées



ont même classe de conjugaison : on ne retiendra que la *forme* des diagrammes (effacer les numéros à l'intérieur).

2. La structure des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ peut être élucidée d'une part grâce à celles des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ (c'est la théorie des représentations du groupe symétrique), d'autre part grâce à une idée tirée de [12] qui étudiait l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n}$ des classes de conjugaison du groupe symétrique (tandis que nous étudions celle $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]^{\mathfrak{S}_n}$).

3. L'action de $C_{\square^s}$ se laisse décrire aisément : d'une part l'on dispose d'un algorithme pour expliciter sa matrice, d'autre part le cadre ci-dessus nous révélera que cette action est *diagonale* avec un multi-spectre connu (les *contenus* des multipartitions). Cela conduira immédiatement à un *algorithme* pour calculer les nombres $h_n^g(\lambda)$ de HURWITZ à une partition, en complexité $O(C^n)$ indépendante du genre g et de la partition λ de n .

En explicitant le résultat de l'algorithme sus-décrit, on obtient une « formule de FROBENIUS » exprimant les nombres $h_n^g(\lambda)$ comme combinaison linéaire de puissances g -ièmes portant sur les multipartitions de n (tout comme le théorème de FROBENIUS pour $\mathfrak{S}_n$ met en jeu une somme sur les partitions de n) :

$$h_n^g(\lambda) = \sum_{\Lambda \models n} \binom{n}{\lambda} \frac{(-1)^{\lg \Lambda - 1} (\lg \Lambda - 1)!}{\prod_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\Lambda)!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\Lambda \cap C_\lambda} \chi^\Lambda(\sigma) \right) \frac{c(\Lambda)^{2n+2g'-\wp(\lambda)}}{\prod_i \prod_{\text{cases } \square} h^{\Lambda_i}(\square)}$$

P.-L. MÉLIOT a remarqué que cette formule revient à opérer un principe d'inclusion-exclusion sur la formule de FROBENIUS dans $\mathfrak{S}_n$ (selon les orbites du sous-groupe engendré) et que les multipartitions traitent parfaitement les symétries du résultat obtenu. Cette formule permet de traiter l'asymptotique des nombres $h_n^g(\lambda)$ à n fixé lorsque g croît indéfiniment.

Précisons enfin que l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ permet d'exprimer les séries d'HURWITZ $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ à *plusieurs* partitions comme polynômes en les séries $H^g(\lambda)$ à *une* partition dont les coefficients sont des coefficients de structure de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$, fournissant une approche pour le calcul effectif de tous les nombres d'HURWITZ.

0.3 Résultats et plan

0.3.1 Ce qui était connu

Ce qui suit n'a pas l'ambition de dresser un état de l'art sur les nombres d'HURWITZ. À titre d'exemple, nous n'avons pas cité les factorisations en étoile de J. IRVING, les approches bijectives de E. DUCHI, D. POULALHON et G. SCHAEFFER, les nombres d'HURWITZ monotones de I. GOULDEN et D. M. JACKSON, les travaux d'A. OKOUNKOV autour des hiérarchies de TODA et de KORTEG-DE VRIES...

Nous nous sommes restreints au terreau primitif constituant le socle de ce mémoire.

La formule ELSV [5] nous donne des formules closes pour les nombres $h_n^0(\lambda)$ et $h_n^1(\lambda)$, d'où (cf. [14]) des formules closes pour $H^0(\lambda)$ et $H^1(\lambda)$ explicitées dans l'algèbre $\mathcal{A}$.

Usant de techniques géométriques, D. ZVONKINE obtient dans [28] quelques nombres d'HURWITZ particuliers concernant en genre nul les partitions $\square\square$ et $\square\square\square$. Les articles [23] et [24] regroupent quelques résultats sur les nombres de HURWITZ à deux partitions.

M. KAZARIAN, cité dans [30], donne les séries $H^g(\lambda)$ comme polynômes en Y et Z dans algèbre $\mathcal{A}$ dont les coefficients sont des intégrales de HODGE, d'où l'asymptotique⁹ des nombres $h_n^g(\lambda)$ lorsque n devient infiniment grand.

D. ZVONKINE a montré dans [28] que les séries $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ sont des polynômes (non explicités) en les séries $H^g(\lambda)$.

La formulation du problème d'HURWITZ en termes de coefficients de structure de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]^{\mathfrak{S}_n}$ était déjà connu de [14] – mais pas de nous.

Il nous faut par ailleurs rappeler que le problème de trouver une interprétation combinatoire à la formule d'HURWITZ a été résolu récemment par E. DUCHI, D. POULALHON et G. SCHAEFFER, lequel a exposé début 2012 ces résultats aux Journées Combinatoires de Bordeaux ainsi qu'au Séminaire Lotharingien de Combinatoire.

0.3.2 Notre contribution

La littérature sur les nombres d'HURWITZ nous semble trop éparse et hétéroclite – de par son interaction avec de nombreux domaines – pour prétendre être synthétisée dans ce mémoire. Nous n'avons d'ailleurs même pas la prétention de l'avoir parcourue exhaustivement. À titre de comparaison, l'on pourra penser à l'omniprésence des cartes des domaines encore plus vastes, dépeinte dans l'introduction de [4].

Nous pensons toutefois avoir effectué une *synthèse* de quelques-unes des idées récoltées au travers de nos lectures et échanges avec la communauté combinatoire (dans un sens très large).

À commencer par le *cadre géométrique* utilisé par D. ZVONKINE et M. KAZARIAN (entre autres) qui pourrait repousser des combinatoriciens effrayés par les mots « géométrie algébrique » ou par l'évocation des noms « HODGE », « WITTEN » ou « KONTSEVITCH ». Nous espérons ainsi avoir présenté suffisamment d'indications pour pouvoir utiliser les chevrons de WITTEN, la formule ELSV et le théorème de KAZARIAN – par exemple en vue de notre résultat [20] sur l'asymptotique des nombres d'HURWITZ.

Nous avons par ailleurs pu profiter du séminaire hebdomadaire de notre laboratoire pour échanger tout particulièrement avec P.-L. MÉLIOT au sujet de l'expression des nombres d'HURWITZ comme coefficients de structure dans l'*algèbre des permutations scindées*. Notre rapporteur commun pour FPSAC 2010 nous a indiqué que notre travail était en partie déjà connu de M. KAZARIAN : ce dernier avait en effet parlé des permutations colorées lors d'un exposé auquel ce rapporteur avait assisté.

Or M. KAZARIAN n'a pas – de ses propres mots à la fin de l'année 2010 – publié ses résultats [14]. Nous avons donc entrepris de traduire ces notes, depuis le russe, ce qui nous a permis de *nourrir de nombreux points* souvent évoqués dans la littérature mais non approfondis/démonstrés de façon satisfaisante à nos yeux, tant sur le cadre géométrique que sur le cadre algébrique sus-mentionnés.

9. En fait, seule l'asymptotique de $h_n^g(\emptyset)$ est explicitée dans cet article ; il n'y a cependant aucun effort à fournir pour passer d'une partition vide à une partition quelconque.

Il nous semble utile de rappeler notre fil directeur initial : penser à utiliser les propriétés asymptotiques de l'algèbre $\mathcal{A}$ pour obtenir l'asymptotique de *tous* les nombres d'HURWITZ lorsque l'on sait que leurs séries génératrices appartiennent à cette algèbre nous semblait du bon sens.

Nous avons *explicité* la formule de récurrence utilisée dans [28] pour exprimer une série d'HURWITZ à k partitions comme polynôme en les séries d'HURWITZ à $k - 1$ partitions :

$$H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k) = \sum_{\vec{\nu}, \vec{g}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \prod_{j=1}^N H^{g_j}(\nu^j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j}) \quad (11)$$

(la somme portant sur certains N -uplets $\vec{\nu}, \vec{g}, \vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k$). Les coefficients $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$ qui apparaissent comptent certaines factorisations vérifiant une *condition d'entrelacement*.

Cette formule permet de tracer précisément la contribution des termes dominants en Z des séries d'HURWITZ, ce qui conduit à l'*asymptotique* des nombres d'HURWITZ ayant un nombre *quelconque* de partitions (publié dans [20]) :

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{H}_n^g(\lambda^1 \sqcup \dots \sqcup \lambda^k) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} c_g \frac{e^n}{n} n^{\frac{5}{2}g'} n^{\ell(\lambda_1) + \dots + \ell(\lambda_k)}. \quad (12)$$

Ainsi l'asymptotique est-elle *invariante par concaténation*.

On retrouve l'*exposant universel* $\frac{5}{2}(g-1)$ de l'asymptotique des cartes (dont G. CHAPUY donne une interprétation combinatoire limpide) ainsi que la *constante universelle* t_g de BENDER-GAO-RICHMOND¹⁰ (dont on trouvera une interprétation probabiliste dans le chapitre 5 de [4]) *via* la relation

$$c_g = \sqrt{2}^{g-3} t_g. \quad (13)$$

Cette formule de récurrence conduit par ailleurs à une expression explicite des séries $H^0(\{a\}, \{b\})$ comme polynômes en Y dont les coefficients sont des sommes que nous ne savons pas simplifier : en posant $c := a + b$, on trouve

$$H^0(\{a\}, \{b\}) = \frac{a^a b^b}{a! b!} \frac{Y^c}{c} + \sum_{0 \leq s \leq a, b} Y^{c-s} \left[\sum_{\substack{l, m, n, o \geq 0 \\ m+n+o=s \\ 1 \leq l+s \leq a, b}} \frac{(-1)^{l+m+n}}{l! m! n! o!} (l-n) \frac{(c-l-m-n)^{c-2l-m-1}}{(c-2l-m)!} \right]. \quad (14)$$

Le cadre des permutations scindées conduit à un *algorithme* pour calculer les nombres $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$ d'HURWITZ à une partition de taille n . Cet algorithme a une complexité $O(C^n)$ qui est *uniforme* en le genre g et en la partition $\lambda \vdash n$.

La théorie soutenant cet algorithme mène à une *formule explicite* indexée sur les multipartitions de taille n permettant de récolter l'*asymptotique* des $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$ lorsque g croît indéfiniment :

$$\mathbb{h}_n^g(\lambda) \stackrel{g \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{z_\lambda} \binom{n}{2}^{n+\ell(\lambda)+2g'}. \quad (15)$$

Enfin, les permutation scindées permettent d'exprimer les séries d'HURWITZ comme *polynômes* en les séries d'HURWITZ à *une* partition dont les coefficients sont des coefficients de structure de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$:

$$H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{P}, \gamma \check{\Delta} \pi_\ell(\bar{\Lambda}), (g_i) \in \mathbb{N}^{\ell(\gamma)}} C_\Lambda^* [C_{\lambda^{1s}} \dots C_{\lambda^{ks}}] \frac{z_{\nu^1} \dots z_{\nu^{\ell(\gamma)}}}{z_\Lambda} \times H^{g_1}(\nu^1) \dots H^{g_{\ell(\gamma)}}(\nu^{\ell(\gamma)}). \quad (16)$$

Ce fait était déjà démontré dans [14]; nous l'avons légèrement généralisé tout en l'adaptant à notre langage. La somme obtenue met en jeu des partitions ν^i soumises à des *condition d'entrelacement* des cycles de la multipartition Λ .

10. On annonce également page 73 une interprétation « combinatoire » de t_g , qui peut effectivement être obtenue en remontant des propriétés vers les définitions (pages 109, 107, 102, 99, 87 et 86). En discutant avec G. CHAPUY, il est apparu d'une part que la somme en question pourrait être développée, d'autre part que le domaine de sommation est de toute façon gigantesque (son cardinal dépasse dix mille dès le genre 2) pour que cette formule soit utilisable.

0.3.3 Plan

Les deux premiers chapitres (1 et 2) posent le socle théorique, les deux derniers chapitres (3 et 4) récoltent les résultats et sont indépendants.

Dans le **chapitre 1**, nous donnons tout d'abord en préliminaires nos *conventions* typographiques, nos *notations* et quelques *définitions* mathématiques usuelles puis nous rappelons quelques rudiments sur les *invariants* par une action de groupe ainsi que sur les *groupes symétriques*.

Un second volet est consacré aux *partitions – entières, ensemblistes, scindées* – ainsi qu'aux *permutations scindées* (mélangeant permutations et partitions ensemblistes). Toutes les quantités associées à une partition entière sont récapitulées dans un tableau tandis que celles associées à une partition scindée le sont sur un exemple.

On traite la *structure des algèbres* d'une part du groupe symétrique (en lien avec les partitions), d'autre part du monoïde des permutations scindées (en lien avec les multipartitions), ce pour préparer le terrain au chapitre 4.

Les partitions ensemblistes servent – outre à définir les permutations scindées – à coder la transitivité en termes d'*entrelacement de partitions orbitales*.

Le **chapitre 2** présente des *outils plus spécifiques* au problème d'HURWITZ.

On commence par présenter l'algèbre $\mathcal{A} := \mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right]$ suivant l'article [29]. Nous introduisons le symbole de Z -égalité $\stackrel{Z}{=}$ afin de retenir, dans des identités entre séries de $\mathcal{A}$, uniquement l'information sur l'*asymptotique* de leur terme général. Nous présentons également une *déformation* de l'algèbre $\mathcal{A}$ qui nous servira au chapitre 3 pour le calcul de la série $H^0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Nous rappelons dans une deuxième partie les *origines topologiques* du problème d'HURWITZ et quelques liens avec les cartes. Plus essentiel, on y définit d'une part les *nombre d'HURWITZ* $h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, d'autre part les *séries d'HURWITZ* $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, ainsi que leurs normalisations par les facteurs $\boxed{\lambda} := \frac{1}{\#\text{Sym } \lambda} \prod \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{\lambda_i!}$.

Nous présentons dans une troisième partie l'*appareil cohomologique* des intégrales de HODGE de la formule ELSV. (Précisons qu'il s'agit bien d'une *présentation* « from scratch » destinée à des *combinatoriciens*, sans aucune prétention à pénétrer en géométrie algébrique.) Nous rappelons les relations (*des cordes* et *du dilaton*) et le théorème (*de KONTSEVITCH*) permettant de coder tous les *chevrons de WITTEN* $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_k} \rangle$. Nous donnons la *formule ELSV* reliant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\lambda)$ aux chevrons de WITTEN. Nous énonçons enfin le *théorème de KAZARIAN* cité dans [30], qui explicite les séries d'HURWITZ $H^g(\lambda)$ à une partition comme polynômes en Y et Z , et en donnons une preuve dans les détails (celle de [14] étant non publiée et un peu rapide à nos yeux).

Le **chapitre 3** est consacré à l'*asymptotique* des nombres de HURWITZ lorsque le degré n croît indéfiniment ainsi qu'au calcul des séries $H^0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ comme polynômes en Y .

On y rappelle les formules connues en genre 0 et 1 pour *une* partition (d'où leur asymptotique) puis on invoque le théorème de KAZARIAN et les propriétés de l'algèbre $\mathcal{A}$ pour le genre quelconque.

Dans une deuxième partie, on relie les constantes asymptotiques c_g en jeu aux constantes t_g de BENDER-GAO-RICHMOND via une *relation récursive* commune (qui revient à une équation de PAINLEVÉ I).

La troisième partie *explicite* la formule de récurrence implicite de [28], d'où l'*asymptotique générale* des nombres $h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ pour un nombre quelconque de partitions. Ce résultat a donné lieu à une publication [20] à FPSAC 2011 et une soumission à IJAC.

La dernière partie reprend la formule explicite utilisée dans la preuve et en déduit la série $H^0(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ dans l'algèbre $\mathbb{Q}[Y]$.

Le **chapitre 4** explore les lieux éclairés par l'algèbre des permutations scindées dans le problème d'HURWITZ. Il s'agit d'un travail effectué en commun avec P.-L. MÉLIOT (dont on trouvera une partie dans sa thèse [16] au chapitre 13) et qui a été éclairé par notre traduction des notes [14] de M. KAZARIAN.

On y présente tout d'abord la vision des nombres d'HURWITZ comme *coefficients de structures* de la sous-algèbre des invariants.

On décrit ensuite l'*action diagonale* de la classes des transpositions totalement scindées, ce qui conduit à un *algorithme* pour calculer les nombres $h_n^g(\lambda)$ et une *formule explicite* décrivant leur forme comme combinaisons

linéaires de puissances $c(\Lambda)^g$ pour Λ décrivant les multipartitions de taille n – d’où leur *asymptotique* quand le genre g devient infiniment grand.

Nous présentons dans une dernière partie une généralisation des nombres de HURWITZ (que nous avons baptisés *nombres de KAZARIAN*) permettant de prendre un peu de recul et d’expliciter les séries $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ comme *polynômes* en les séries $H^g(\lambda)$.

Enfin, nous terminons par une conjecture de D. ZVONKINE et M. KAZARIAN encore ouverte à ce jour.

Chapitre 1

Préliminaires, partitions et permutations, partitions ensemblistes, permutations scindées et multipartitions

Dans ce premier chapitre, nous donnons en préliminaires nos *conventions* typographiques, nos *notations* et quelques *définitions* mathématiques usuelles puis nous rappelons quelques rudiments sur les *invariants* par une action de groupe ainsi que sur les *groupes symétriques*.

Nous traitons ensuite les diverses *partitions* que nous serons amenés à utiliser :

1. les partition *d'entiers*, qui codent les classes de conjugaison des permutations ;
2. les partitions *ensemblistes*, qui serviront d'une part à coder la transitivité en termes d'*entrelacement* de *partitions orbitales*, d'autre part à définir les *permutations scindées* ;
3. les partitions *scindées* (ou multipartitions), qui codent les classes de conjugaison des permutations scindées.

Toutes les quantités associées à une partition entière sont récapitulées dans un tableau (*cf.* section 1.4.2) tandis que celles associées à une partition scindée le sont sur un exemple (*cf.* section 1.5.3).

On traite la *structure des algèbres* d'une part du groupe symétrique (en lien avec les partitions), d'autre part du monoïde des permutations scindées (en lien avec les multipartitions), ce pour préparer le terrain au chapitre 4.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Conventions typographiques

Tous les termes nouvellement définis sont en police **grasse italique**. On donne parfois l'équivalent anglais (*entre parenthèses et en petit italique*) quand le terme nous semble nouveau en français.

Lorsqu'un terme nouveau apparaît *avant* sa définition (ce qui est le cas dans l'introduction), il sera simplement *mis en emphase* comme toute autre portion de texte que nous souhaiterions souligner. Les termes latins le seront systématiquement : *a fortiori*, *cf.*, *extremum*, *id est*...

Seront mis en police **grasse droite** tous les « titres de paragraphes », dont les titres génériques : **chapitres**, **définitions**, **théorèmes**, **remarques**, **démonstrations**... Cette convention est *exclusive* : la police grasse droite ne devra jamais être utilisée pour mettre en emphase une autre portion de texte (qui le sera par la police *emphatique*).

La police *italique* sera utilisée pour énoncer le contenu de définitions ou théorèmes que l'on souhaite dégager du texte – en mode centré ou non.

Au vu de la littérature mathématique rédigée en français, il semble utile de préciser les noms dans cette langue de quatre couples de signes de ponctuation standards, regroupés en anglais sous le terme générique de

« *brackets* » :

$$\begin{array}{lll} \textit{parenthèses} & (b) & \textit{brackets} \\ \textit{crochets} & [a] & \textit{square brackets} \\ \textit{chevrons} & \langle c \rangle & \textit{pointed brackets} \\ \textit{accolades} & \{h\} & \textit{curly brackets} \end{array} \quad (1.1)$$

Nous serons amenés à utiliser un autre couple de symboles, ressemblant à des accolades :

$$\{b, e, e, e, h, n, o, t, v\}. \quad (1.2)$$

Afin de différencier les fonctions de leurs arguments, nous préférons les crochets aux parenthèses pour regrouper les symboles de fonctions, par exemple

$$\begin{aligned} [g \circ f](a) &= g(f(a)), \\ [\Psi \circ \Phi](\xi) &= [\Psi' \circ \Phi](\xi) \times \Phi'(\xi), \\ [[P \times Q](u)](\vec{x}) &= [P(u) \circ Q(u)](\vec{x}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.1.2 Abréviations

On abrégera « *c. q. f. d.* » pour « ce qu'il fallait démontrer » – dont le sens peut être de signaler la fin d'un bout de preuve (à défaut de la preuve entière).

La locution latine *id est* (abrégée *i. e.*), que l'on traduira au choix par « c'est-à-dire » ou « en d'autres termes », dénotera comme chacune des traductions qui précèdent une *équivalence logique* – et non simplement un corollaire.

La quantification $\forall (a, b, c) \in E^3$ pourra être abrégée $\forall^3 a, b, c \in E$ voire $\forall a, b, c \in E$. Même chose avec un autre nombre de symboles quantifiés ou avec un quantificateur existentiel. Par exemple, on écrira :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \nexists^{18} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{18} \in \mathbb{Q}, \frac{1}{1+|a|} + e^b + \text{ch } c + \sum_{i \in \llbracket 1, 18 \rrbracket} \lambda_i^{2i} = 0. \quad (1.4)$$

1.1.3 Sur les ensembles

Le **cardinal** d'un ensemble E sera indifféremment noté $\text{Card } E$, $\#E$ ou $|E|$.

L'**ensemble des applications** d'un ensemble E donné vers un ensemble F donné sera noté F^E . Son cardinal vaut $|F^E| = |F|^{|E|}$.

L'**ensemble des parties** d'un ensemble E sera noté $\mathfrak{P}(E)$.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Lorsque les E_i sont deux à deux disjoints, leur réunion $\bigcup_{i \in I} E_i$ pourra être notée $\bigsqcup_{i \in I} E_i$ (**union disjointe interne**). Dans tous les cas, on définit leur **union disjointe externe** par

$$\bigsqcup_{i \in I} E_i := \bigsqcup_{i \in I} (E_i \times \{i\}). \quad (1.5)$$

La réunion de droite est bien disjointe vu que les secondes coordonnées diffèrent deux à deux, ce qui lève l'ambiguïté interne/externe du symbole $\sqcup$ en identifiant chaque E_i à sa copie $E_i \times \{i\}$.

Étant données une famille d'algèbres (A_i) sur un corps, leur produit tensoriel $\bigotimes A_i$ contient chacune d'entre elles *via* les monomorphismes d'algèbres $A_k \xrightarrow{i_k} \bigotimes A_i$ lorsque k varie où i_k envoie un élément $a \in A_k$ sur le tenseur pur formé uniquement de 1 sauf à la k -ième place où l'on met un a .

1.1.4 Sur les actions

Suivant D. ZAGIER dans l'appendice de [5], on notera l'existence d'un isomorphisme entre deux structures par le symbole lâche $\simeq$, que l'on renforcera en $\cong$ lorsqu'un tel isomorphisme aura été fixé pour la suite (par exemple lorsqu'il est unique, naturel ou canonique).

Un **magma** est un ensemble M muni d'une loi de composition interne $M^2 \longrightarrow M$. Une application $f : M \longrightarrow N$ entre magmas est un **anti-morphisme** si on a $f(m\mu) = f(\mu)f(m)$ pour tous éléments $m, \mu \in M$.

Dans un monoïde, un élément i est un **pseudo-inverse** d'un élément a si

$$iai = i. \quad (1.6)$$

Évidemment, tout inverse à droite ou gauche (*a fortiori* tout inverse) est un pseudo-inverse.

Lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble E , un élément $e \in E$ sera dit **invariant** sous cette action s'il est fixé par toutes les transformations $g \in G$. Les invariants de E forment une partie de E notée en mettant G en exposant :

$$E^G := \{e \in E ; \forall g \in G, g \cdot e = e\}. \quad (1.7)$$

Étant donnée une famille de groupes (G_i) qui agissent sur un même ensemble E , on utilisera le lemme suivant qui décrit la relation de conjugaison sous l'action du groupe engendré $\langle G_i \rangle$.

Lemme 1.1.4.1. (*orbites d'un sous-groupe engendré*)

Soit E un ensemble sur lequel agit une famille (G_i) de groupes. Alors deux éléments $a, b \in E$ sont dans une même orbite du groupe engendré $\langle G_i \rangle$ si et seulement s'il y a une suite finie $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n$ de parties de E telle que :

1. chaque Ω_j est une orbite d'un certain groupe G_i ;
2. les points a et b appartiennent respectivement à Ω_0 et Ω_n ;
3. les orbites Ω_{j-1} et Ω_j se rencontrent pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Démonstration.

Une vision en termes de graphes permettra de faire le lien avec les partitions ensemblistes (définies à la section 1.5). On identifie les éléments de E à des sommets et l'on dessine une arête colorisée i entre deux sommets si et seulement si les éléments correspondants sont dans la même orbite pour l'action du groupe G_i .

Regardons les composantes connexes de ce graphe sans tenir compte des couleurs des arêtes. Deux éléments à distance 1 d'une même composante connexe sont dans une même orbite d'un certain G_{i_0} , donc sont dans une même orbite du groupe engendré $\langle G_i \rangle$, d'où par transitivité l'inclusion de toute la composante connexe dans une même orbite de $\langle G_i \rangle$. Réciproquement, si deux éléments a et b sont conjugués sous l'action d'une transformation $g_n g_{n-1} \dots g_1 g_0$ de $\langle G_i \rangle$ avec g_k dans un certain G_{i_k} pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors on reste dans la même composante connexe en suivant $a = a_0 \xrightarrow{g_0} a_1 \xrightarrow{g_1} a_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{g_{n-1}} a_n \xrightarrow{g_n} b$.

1.1.5 Sur les ordres

Dans un ensemble ordonné¹, on notera

$$a_1, a_2, \dots, a_p \leq b_1, b_2, \dots, b_q \leq c_1, c_2, \dots, c_r \quad (1.8)$$

pour signifier la conjonction des inégalités $a_i \leq b_j \leq c_k$ lorsque les indices i, j, k varient dans $\llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$. Par exemple, la condition $F, G \leq \pi, \varpi, \omega$ est équivalente à l'inégalité $\max \{F, G\} \leq \min \{\pi, \varpi, \omega\}$.

1. non nécessairement total

Dans un ensemble ordonné, les *supremum* (borne supérieure) et *infimum* (borne inférieure) seront notés (sous réserve d'existence) à l'aide des opérateurs respectifs $\vee$ et $\wedge$ (à calquer sur les opérateurs ensemblistes $\cup$ et $\cap$) :

$$\sup = \vee \quad \inf = \wedge. \quad (1.9)$$

On montre aisément que toute partie admet un *infimum* si et seulement si toute partie admet un *supremum*. Un tel ordre sera dit **achevé**. Un **morphisme d'ordres achevés** est une application entre ordres achevés qui préserve le *supremum*. Un morphisme d'ordres achevés est toujours un morphisme d'ordres : si $f : O \rightarrow \Omega$ est un tel morphisme, alors deux éléments $a \leq b$ de O vérifieront $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b) = f(b)$, i. e. $f(a) \leq f(b)$.

Tout ordre fini O admet (cf. [19]) une **fonction de MÖBIUS** $\mu : O^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant la **formule d'inversion de ROTA** pour toutes fonctions f et f^* définies sur O à valeurs dans un groupe abélien G :

$$f^* = \sum_{o \geq \cdot} f(o) \implies f = \sum_{o \geq \cdot} \mu \left(\begin{smallmatrix} \cdot \\ o \end{smallmatrix} \right) f^*(o). \quad (1.10)$$

Si l'on veut expliciter la fonction de MÖBIUS, pour $a, b \in O$, en notant $c_\ell \binom{a}{b}$ le nombre de suites finies strictement croissantes de longueur ℓ commençant en a et finissant en b , on posera

$$\mu \binom{a}{b} := \sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell c_\ell \binom{a}{b}. \quad (1.11)$$

1.1.6 Puissances monotones et coefficients multinomiaux

Pour tout entier $k \geq 0$, les k -ièmes **puissances (dé)croissantes** d'un scalaire a seront notées

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{\uparrow k} := \prod_{0 \leq i < k} (a + i) = a(a+1)(a+2) \cdots (a+k-1) \\ a^{\uparrow \uparrow k} := \prod_{0 \leq i < k} (a + 2i) = a(a+2)(a+4) \cdots (a+2k-2) \\ a^{\downarrow k} := \prod_{0 \leq i < k} (a - i) = a(a-1)(a-2) \cdots (a-k+1) \\ a^{\downarrow \downarrow k} := \prod_{0 \leq i < k} (a - 2i) = a(a-2)(a-4) \cdots (a-2k+2) \end{array} \right. \quad \text{où chaque produit comporte } k \text{ facteurs.} \quad (1.12)$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 0$ et tout scalaire a , la **factorielle** de n , le **coefficient binomial** « n parmi a » et la **double**² **factorielle** de n peuvent être définis par

$$n! := n^{\downarrow n}, \quad \binom{a}{n} := \frac{a^{\downarrow n}}{n!} \quad \text{et} \quad n!! := n^{\downarrow \downarrow \lceil \frac{n}{2} \rceil}. \quad (1.13)$$

On observera les valeurs « frontière »

$$1! = 0! = 1 \quad \text{et} \quad 1!! = 0!! = (-1)!! = 1. \quad (1.14)$$

On dispose des formules

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{\uparrow(p+q)} = a^{\uparrow p} (a+p)^{\uparrow q} \\ a^{\downarrow(p+q)} = a^{\downarrow p} (a-p)^{\downarrow q} \end{array} \right. \quad \text{pour tous entiers } p, q \geq 0. \quad (1.15)$$

Afin qu'elles restent valides pour les entiers négatifs, on doit poser³

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{\uparrow(-n)} := \frac{1}{(a-n)^{\uparrow n}} = \frac{1}{(a-1)^{\downarrow n}} \\ a^{\downarrow(-n)} := \frac{1}{(a+n)^{\downarrow n}} = \frac{1}{(a+1)^{\uparrow n}} \end{array} \right. \quad \text{pour tout entier } n \geq 0. \quad (1.16)$$

2. au lieu de « double », on devrait plutôt dire « doublement espacée »

3. Pour ceux qui demandant la factorielle de -42 , ces relations imposent la nullité de $\frac{1}{(-n)!}$ et (resp. $\frac{1}{(-n)!!}$) pour tout entier n supérieur à 1 (resp. 2).

On définit enfin pour toute suite finie d'entiers $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ de somme n un *coefficient multinomial*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.17)$$

On remarquera pour $k = 2$ la relation (prendre $p + q = n$)

$$\binom{n}{p, q} = \binom{n}{p} = \binom{n}{q}. \quad (1.18)$$

1.1.7 Fonction Γ d'EULER

La *fonction Gamma d'EULER* sera notée $\Gamma : z \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^z}{e^t} \frac{dt}{t}$. Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles sont $0, -1, -2, -3, \dots$. Elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}), \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \quad (1.19)$$

À l'aide de la valeur classique $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, on déduit

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right)^{\downarrow k} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}. \quad (1.20)$$

1.1.8 Fonctions symétriques

Les *fonctions symétriques élémentaires (moyennes)* seront notées avec la lettre e :

$$e_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad (1.21)$$

$$\tilde{e}_k(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{\binom{n}{k}} e_k(x_1, \dots, x_n). \quad (1.22)$$

Les *fonctions symétriques puissances* le seront avec un p :

$$p_k(x_1, \dots, x_n) := x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k. \quad (1.23)$$

1.1.9 Coordonnées et coefficients de structure

Étant donné un espace vectoriel muni d'une base (b) , on notera la b -ième coordonnée d'un vecteur x indifféremment par

$$b^*[x] \text{ ou } \text{Coef}_b[x]. \quad (1.24)$$

De fait, l'on réservera la notation $\text{Coef}_{t^n}[P(t)]$ aux espaces de polynômes et la notation $C^*[C_1 C_2 \dots C_k]$ aux algèbres engendrées par des classes de conjugaison. On observera le comportement des coordonnées après re-normalisation d'un des vecteurs de base :

$$[\lambda b]^* = \frac{b^*}{\lambda}.$$

On rappelle que les *coefficients de structure* d'une algèbre dans une base $\mathcal{B}$ sont les coordonnées d'un produit quelconque d'éléments de $\mathcal{B}$. (La connaissance de ces coefficients détermine par linéarité le produit de l'algèbre et – partant – sa structure, d'où la terminologie.)

1.2 Groupes symétriques

1.2.1 Groupe symétrique d'un ensemble

On notera $\mathfrak{S}_E$ le **groupe symétrique** d'un ensemble E défini par le groupe des bijections de E dans lui-même muni de la composition. Les éléments de $\mathfrak{S}_E$ sont appelées **permutations** de E . On rappelle que les injections $A \hookrightarrow B$ d'un ensemble fini A dans un ensemble fini B sont en nombre

$$\# \text{Inj} (A, B) = |B|^{\downarrow |A|}, \quad (1.25)$$

d'où l'on déduit en prenant $A = E = B$ finis⁴ le cardinal

$$|\mathfrak{S}_E| = |E|^{\downarrow E} = |E|!. \quad (1.26)$$

Les groupes symétriques de deux ensembles équipotents $E \stackrel{\mathcal{L}}{\simeq} F$ sont naturellement isomorphes *via* la conjugaison

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_E & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{S}_F \\ \sigma & \mapsto & \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \end{array} \right. \text{ . Attention : } \begin{array}{l} \text{cet isomorphisme } \mathfrak{S}_E \cong \mathfrak{S}_F \\ \text{dépend de la bijection } E \stackrel{\mathcal{L}}{\simeq} F. \end{array} \quad (1.27)$$

Ainsi, on notera sans ambiguïté $\mathfrak{S}_\kappa$ le groupe symétrique de n'importe quel ensemble de cardinal κ . En particulier, $\mathfrak{S}_n$ désignera pour tout entier $n \geq 0$ le groupe symétrique de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1.2.2 Symétries d'une famille et multi-ensembles

On définit une **symétrie** (ou un **automorphisme**) d'une famille $(a_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble I par une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_I$ fixant la famille $(a_i) = (a_{\sigma(i)})$. Une symétrie permute nécessairement les éléments ayant même valeur fixée et réciproquement ce processus donne bien une symétrie. L'ensemble $\text{Sym} (a_i)$ des symétries d'une famille (a_i) est donc en bijection avec le produit des groupes symétriques des multiplicités de la famille :

$$\text{Sym} (a_i) \cong \prod_{v \in \{a_i\}_{i \in I}} \mathfrak{S}_{\#\{i \in I ; a_i = v\}}. \quad (1.28)$$

Un **multi-ensemble** (à valeurs dans un ensemble A donné) est une famille $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ considérée *modulo* l'action fonctionnelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_I$ sur les indices. En termes intuitifs :

1. un ensemble ne voit ni ordre ni répétition, il est noté entre accolades ;
2. une famille voit ordre et répétition, elle est notée entre parenthèses ;
3. un multi-ensemble voit la répétition mais pas l'ordre, il sera noté entre symboles $\wr$; ces derniers symboles n'étant toutefois pas extensibles en hauteur, on pourra les remplacer au besoin par des crochets, typiquement pour enfermer des diagrammes de YOUNG : $\left[\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right]$, $\left[\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right]$, $\left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right]$ ou $\left[\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right]$ en oubliant les virgules séparatrices pour alléger la lecture.

En appelant **arrangement** tout multi-ensemble sans répétition (lequel peut être identifié à une famille strictement monotone, tout comme un multi-ensemble peut être identifié à une famille monotone), on peut récapituler pour tous entiers $0 \leq p \leq n$ le nombre de « parties » formées de p éléments choisis parmi n selon le type de la « partie » :

type de « parties »	notation	cardinal
familles	$(a_1, a_2, \dots, a_p)$	n^p
arrangements	$(a_1 < \dots < a_p)$ $\{a_1 < \dots < a_p\}$ ou	$n^{\downarrow p}$
ensembles	$\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$	$\binom{n}{p} = \frac{n^{\downarrow p}}{p!}$
multi-ensembles	$\wr a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p \wr$ $[a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p]$ ou	$\binom{n+p-1}{p}$

(1.29)

4. Lorsque E est infini, on peut montrer que $|\mathfrak{S}_E| = |E^E| = |\mathfrak{P}(E)| = 2^{|E|}$ lorsque toutes ses parties infinies sont équipotentes à leur carré (ce qui sera toujours vérifié avec l'axiome du choix).

En observant les symétries d'un coefficient multinomial, on peut réécrire ce dernier à l'aide d'un multi-ensemble :

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n}{\{n_i\}_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}}.$$

1.2.3 Support, orbites et cycles d'une permutation

Le **support** d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ est le complémentaire $S\sigma = \text{Supp } \sigma$ dans E de l'ensemble $\text{Fix } \sigma$ des points fixés par σ :

$$S\sigma = \text{Supp } \sigma := \{e \in E ; \sigma(e) \neq e\} = E \setminus \text{Fix } \sigma. \quad (1.30)$$

Ainsi, une permutation σ peut toujours être vue dans $\mathfrak{S}_{S\sigma}$ et plus généralement dans $\mathfrak{S}_{\sigma \sqcup A}$ pour n'importe quel ensemble A . Deux permutations à supports disjoints commutent – et leur produit commutatif est alors parfois qualifié de **produit disjoint**.

Le **groupe symétrique infini** $\mathfrak{S}_\infty$ est défini par les permutations de $\mathbb{N}^*$ (ou $\mathbb{N}$) à support fini :

$$\mathfrak{S}_\infty := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}^*} ; S\sigma \text{ fini}\}. \quad (1.31)$$

Il contient tous les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 0$ *via* les inclusions $\llbracket 1, n \rrbracket \subset \mathbb{N}^*$.

Fixons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. Ses **orbites** sont les orbites du sous-groupe $\langle \sigma \rangle \subset \mathfrak{S}_E$ engendré par σ qui agit sur E de manière fonctionnelle. Un **cycle** de σ est la restriction de σ à l'une de ses orbites, prolongée à tout E par l'identité en-dehors. La **longueur** d'un cycle est le cardinal de l'orbite correspondante. Par abus de langage, on pourra appeler **cycle** de σ l'une de ses orbites. (En revanche, une orbite désignera toujours une *partie* de E , jamais une application.). Par **cycle fixe**, on désigne tout cycle (ou toute orbite) de longueur 1 (*i. e.* un point fixe) ; par **transposition**, on désigne tout cycle de longueur 2. Lorsque E est fini, σ se décompose de manière unique en produit disjoint de cycles non fixes (donc qui commutent).

1.2.4 Sous-groupe de YOUNG d'une famille d'ensembles

Le **sous-groupe de YOUNG** associé à une famille d'ensembles (E_i) est le groupe produit $\prod \mathfrak{S}_{E_i}$, que l'on pourra voir comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\sqcup E_i}$.

1.3 Algèbre des invariants d'un monoïde sous l'action d'un groupe fini

On fixe pour cette section un anneau A unitaire commutatif (qui vaudra $\mathbb{Q}$ dans toutes les applications).

1.3.1 Algèbre d'un monoïde

Étant donné un monoïde M , on identifie le monoïde M à son image par l'injection

$$\begin{cases} M & \hookrightarrow A^{(M)} \\ m & \mapsto \delta_m \end{cases} \quad (1.32)$$

où le **Dirac** δ_m en un $m \in M$ est défini par

$$\delta_m : \begin{cases} M & \longrightarrow A \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = m \\ 0 & \text{si } x \neq m \end{cases} \end{cases}. \quad (1.33)$$

En munissant $A^{(M)}$ du **produit de convolution** $*$ défini, par exemple lorsque M est fini, pour tous $f, g \in A^{(M)}$ et tout $m \in M$ par

$$[f * g](m) = \sum_{xy=m} f(x)g(y), \quad (1.34)$$

l'injection ci-dessus devient un morphisme multiplicatif, ce qui légitime le plongement du monoïde M dans l'algèbre $A^{(M)}$ (munie de sa structure d'espace vectoriel produit). On peut alors définir la **A -algèbre (formelle) engendrée** par le monoïde M comme celle $A[M]$ engendrée par son image dans $A^{(M)}$.

Il nous servira de calculer l'algèbre engendrée par un produit (fini) de monoïdes. Cela est immédiat *via* l'isomorphisme suivant (M et N désignent des monoïdes)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A[M \times N] & \cong & A[M] \otimes A[N] \\ (m, n) & \leftrightarrow & m \otimes n \end{array} \right. . \quad (1.35)$$

Par la suite, on se ramènera toujours à des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ de groupes symétriques finis sur le corps des rationnels.

1.3.2 Sous-algèbre des invariants et classes de conjugaison

Soit $\mathcal{A}$ une A -algèbre munie d'une action de groupe G qui respecte les lois de $\mathcal{A}$, *i. e.* dont toutes les transformations $g \in G$ sont des morphismes de A -algèbres. Rappelons que l'**algèbre des invariants** est définie par

$$\mathcal{A}^G := \{a \in A ; \forall g \in G, g \cdot a = a\}. \quad (1.36)$$

Un exemple de telle algèbre $\mathcal{A}$ est l'algèbre $A[M]$ d'un monoïde fini M **réduit**⁵ (*i. e.* dont le seul idempotent est 1) sur lequel agit un groupe G (comprendre : on se donne un morphisme de groupes $\left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_M \\ g & \longmapsto & m \mapsto g \cdot m \end{array} \right\}$) de manière distributive (comprendre : toutes les transformations sont des automorphismes du monoïde M). En effet, l'action sur M se prolonge par A -linéarité sur toute l'algèbre $A[M]$ en une action linéaire et distributive, cette dernière propriété étant une autre façon de dire que cette action respecte le produit de $A[M]$.

On se donne un tel monoïde M et un tel groupe G .

Notons $C_m := G \cdot m = \{g \cdot m\}_{g \in G}$ la classe de conjugaison dans M d'un élément $m \in M$. On se permettra abusivement de voir chaque classe de conjugaison C de manière plus enrichie comme la somme de ses éléments dans l'algèbre $A[M]$:

$$C := \sum_{m \in C} m \quad (1.37)$$

(cela suppose que toutes les classes de conjugaison soient finies). Les classes de conjugaison étant par ailleurs (ensemblément) disjointes dans M et globalement invariantes par tous les $g \in G$, elles forment une famille libre de $A[M]^G$.

On fait l'hypothèse supplémentaire que G est fini (alors les C_m le sont également) et que les entiers (non nuls) sont inversibles dans l'anneau A . On définit alors pour tout $m \in M$ sa **classe normalisée** par

$$\tilde{C}_m := \frac{C_m}{|C_m|}. \quad (1.38)$$

Pour tenir compte des multiplicités des $g \cdot m$ dans la classe C_m , on introduit le **fixateur** (ou **stabilisateur**) d'un $m \in M$ par la partie

$$\text{Fix } m := \{g \in G ; g \cdot m = m\}. \quad (1.39)$$

Donnons-nous une classe C_m de cardinal k dont on note les éléments $g_1 \cdot m, \dots, g_k \cdot m$. Alors un élément quelconque $g \cdot m$ vaudra un $g_i \cdot m$ si et seulement si $g_i^{-1} \cdot (g \cdot m) = m$, *i. e.* si et seulement si $g_i^{-1}g \in \text{Fix } m$, ou encore si et seulement si $g \in g_i(\text{Fix } m)$. Par conséquent, le nombre d'éléments $g \cdot m$ valant un certain $g_i \cdot m$ dans C_m vaut $|g_i(\text{Fix } m)| = |\text{Fix } m|$.

5. cette hypothèse sert uniquement pour montrer que l'action de G préserve les unités

En d'autres termes, la surjection $\begin{cases} G & \twoheadrightarrow & C_m \\ g & \mapsto & g \cdot m \end{cases}$ a toutes ses fibres de même cardinal $|\text{Fix } m|$, d'où par le lemme du berger l'égalité $|G| = |\text{Fix } m| |C_m|$. On en déduit

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot m = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in C_m} \sum_{\substack{g \in G \\ g \cdot m = c}} g \cdot m = \frac{1}{|G|} \sum_{c \in C_m} c \sum_{\substack{g \in G \\ g \cdot m = c}} 1 = \frac{|\text{Fix } m|}{|G|} C_m = \frac{C_m}{|C_m|} = \tilde{C}_m. \quad (1.40)$$

Ainsi, tout invariant i du monoïde M est égal à la moyenne de ses conjugués

$$i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot i = \frac{C_i}{|C_i|} = \tilde{C}_i \quad (1.41)$$

et tout élément invariant $\sum_m a_m m$ de l'algèbre $A[M]$ s'écrit $\sum_m a_m \tilde{C}_m$, ce qui montre que l'algèbre des invariants est linéairement engendrée par les classes de conjugaison (normalisées).

Conclusion 1.3.2.1.

On se donne :

1. un monoïde M où pour tout $m \in M$ l'équation $xy = m$ n'a qu'un nombre fini de solutions en l'inconnue (x, y) ;
2. un groupe fini G qui agit sur M de manière distributive ;
3. un anneau A où tous les entiers non nuls sont inversibles.

Alors

$$\text{les classes de conjugaisons de } M \text{ forment une base linéaire de l'algèbre des invariants } A[M]^G. \quad (1.42)$$

Dans ces conditions, on dispose également d'un projecteur $A[M]^G$ -linéaire sur les invariants :

$$p : \begin{cases} A[M] & \twoheadrightarrow & A[M]^G \\ a & \mapsto & \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot a \end{cases} \quad \text{avec } p(m) = \tilde{C}_m \text{ pour tout } m \in M. \quad (1.43)$$

Démonstration (le projecteur $A[M]^G$ -linéaire sur $A[M]^G$).

Montrons le caractère $A[M]^G$ -linéaire. Soit i invariant et $a \in A[M]$. On a alors

$$\begin{aligned} p(ia) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot (ia) \stackrel{\text{action de } G}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g \cdot i) (g \cdot a) \\ &\stackrel{i \text{ invariant}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} i (g \cdot a) = i \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g \cdot a) = i p(a). \end{aligned}$$

Montrons que $\text{Im } p \subset A[M]^G$. Soit $a \in A[M]$ et $g_0 \in G$: alors

$$\begin{aligned} g_0 \cdot p(a) &= g_0 \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot a \right) \stackrel{\text{action de } G}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_0 \cdot (g \cdot a) \\ &\stackrel{\text{associative}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g_0 g) \cdot a = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in g_0 G = G} h \cdot a = p(a). \end{aligned}$$

Montrons que $A[M]^G \subset \text{Im } p$. Soit i un invariant. Alors

$$i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} i \stackrel{i \text{ invariant}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot i = p(i) \in \text{Im } p.$$

Montrons enfin que p est idempotent. Soit $a \in A[G]$. Puisque $i := p(a) \in \text{Im } p = A[M]^G$, on a (en supposant de plus⁶ M réduit)

$$p^2(a) = p(i \cdot 1) \stackrel{A[M]^G\text{-linéarité}}{=} i p(1) \stackrel{\text{action de } G \text{ préserve } 1}{=} i = p(a), \text{ ce qui conclut.}$$

Finissons par un lemme reliant les coefficients de structure à certaines factorisations.

Lemme 1.3.2.2. (*factorisations et coefficients de structure*)

Dans les conditions de la conclusion ci-dessus, on considère des classes de conjugaisons $C, C_1, \dots, C_k$. Alors

1. le nombre de k -uplets $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_k$ dont le produit $a_1 \dots a_k$ tombe dans C vaut le coefficient de structure de $C_1 \dots C_k$ dans l'algèbre des invariants en la classe normalisée $\tilde{C} = \frac{C}{|C|}$:

$$\# \{ \vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k ; a_1 \dots a_k \in C \} = \tilde{C}^* [C_1 \dots C_k] ; \quad (1.44)$$

2. le coefficient de structure $C^* [C_1 C_2 \dots C_k]$ vaut le nombre de k -uplets $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_k$ dont le produit $a_1 \dots a_k$ vaut n'importe quel élément fixé de la classe C :

$$\forall c_0 \in C, C^* [C_1 \dots C_k] = \# \{ \vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k ; a_1 \dots a_k = c_0 \}. \quad (1.45)$$

Démonstration.

1. On développe le produit des classes de conjugaison :

$$C_1 C_2 \dots C_k = \left(\sum_{a_1 \in C_1} a_1 \right) \left(\sum_{a_2 \in C_2} a_2 \right) \dots \left(\sum_{a_k \in C_k} a_k \right) = \sum_{\vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k} a_1 \dots a_k.$$

Puisque ce produit reste invariant, il vaut son projeté

$$\begin{aligned} p(C_1 \dots C_k) &= \sum_{\vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k} p(a_1 \dots a_k) = \sum_{\vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k} \text{classe normalisée de } (a_1 \dots a_k) \\ &= \sum_{C \text{ classe}} \sum_{\substack{\vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k \\ a_1 \dots a_k \in C}} \tilde{C} = \sum_{C \text{ classe}} \# \{ \vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k ; a_1 \dots a_k \in C \} \times \tilde{C}, \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

2. Lorsque c_0 décrit C , les ensembles $\{ \vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k ; a_1 \dots a_k = c_0 \}$ sont tous en bijection *via* des conjugaisons échangeant les c_0 correspondant (car l'action est distributive). Ils ont donc même cardinal $\sum_{\substack{\vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k \\ a_1 \dots a_k = c_0}} 1$, lequel vaut la moyenne de leur somme

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k \\ a_1 \dots a_k = c_0}} 1 &= \frac{1}{|C|} \sum_{c \in C} \sum_{\substack{\vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k \\ a_1 \dots a_k = c}} 1 = \frac{1}{|C|} \sum_{\substack{\vec{a} \in C_1 \times \dots \times C_k \\ a_1 \dots a_k \in C}} 1 \\ &\stackrel{\text{point 1}}{=} \frac{1}{|C|} \tilde{C}^* [C_1 \dots C_k] = C^* [C_1 \dots C_k], \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

6. Sans cette hypothèse, développer directement $p(p(a))$; le calcul est juste plus long.

1.3.3 Représentations de groupes finis, formule de FROBENIUS

L'étude d'un groupe passe naturellement par l'étude des morphismes de source ce dernier. Lorsque le groupe but est un groupe linéaire, l'on parle de **représentation linéaire**, identifiée abusivement à l'espace vectoriel sous-jacent. Une représentation d'un groupe G par un groupe linéaire $GL(V)$ revient à une représentation de son algèbre engendrée $A[G]$ par une algèbre matricielle $L(V)$.

Une représentation V est dite **irréductible** si elle n'admet aucune **sous-représentation** propre, *i. e.* de représentation W telle que $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$. On pourra noter une analogie avec la définition des nombres premiers :

représentation de dimension finie	somme directe	sous- représentation	supplémentaire	représentation irréductible
nombre entier naturel	produit	diviseur	diviseur complémentaire	nombre premier

On a de fait un théorème de décomposition en « facteurs » irréductibles attribué à MASCHKE :

*toute représentation d'un groupe fini de dimension finie
est somme directe de représentations irréductibles,
avec unicité (à isomorphisme près) à l'ordre des facteur près.*

La démonstration calquée sur celle des entiers requiert de montrer qu'une représentation V réductible, *i. e.* admettant une sous-représentation propre $0 \subsetneq W \subsetneq V$, est somme directe de W et d'une autre sous-représentation propre (chez les entiers, c'est automatique : si d est un diviseur propre de n , alors $\frac{n}{d}$ aussi et leur produit fait n), ce qui fait l'objet du lemme dit de MASHKE⁷. Ce dernier peut être démontré de façon expéditive sur le corps des réels par des arguments euclidiens.

On définit le **caractère** χ^V d'une représentation V par l'application qui, à un élément de G , associe la trace de son représenté dans $GL(V)$. Nous renvoyons au classique [22] et à l'appendice par D. ZAGIER de [15] pour plus de précisions, en particulier concernant la preuve du théorème suivant attribué à FROBENIUS.

Théorème 1.3.3.1. (FROBENIUS [15])

Étant données des classes de conjugaisons $C_1, C_2, \dots, C_k$ dans un groupe fini G , le nombre de factorisations de l'élément neutre dont les facteurs tombent dans les classes C_i vaut

$$C_1^* [\tilde{C}_1 \cdots \tilde{C}_k] = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \text{ caractère irréductible}} \frac{\chi(C_1) \cdots \chi(C_k)}{\chi(1)^{k-2}}. \quad (1.46)$$

(La description de ce nombre de factorisations comme un coefficient de structure découle du lemme 1.3.2.2.)

Le problème d'HURWITZ rajoute une condition de transitivité aux factorisations dénombrées. Selon une discussion avec P.-L. MÉLIOT, on peut effectuer un principe d'inclusion/exclusion sur les orbites du groupe engendré pour obtenir une formule analogue à (1.46) (*cf.* théorème 4.1.4.1) pour les nombres d'HURWITZ. Les *multipartitions* introduites à la section 1.5 permettent une gestion commode des symétries de cette formule.

1.4 Partitions d'un entier

De combien de façon peut-on décomposer un entier $n \geq 0$ donné comme somme d'entiers strictement positifs ? Une façon de formuler le problème est de dénombrer les suites finies à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont les termes ont pour somme n – on parle alors de **composition** de n . Cependant, vu la commutativité de l'addition des entiers, il

7. Deux ingrédients permettent de le démontrer. Idée 1 : lorsque deux endomorphismes commutent, l'image et le noyau de l'un sont stables par l'autre. On cherche donc un endomorphisme commutant avec G dont les noyau et image soient W et un supplémentaire de W , par exemple un projecteur sur W qui commuterait avec G (son noyau répondrait alors au problème). Idée 2 : commuter, c'est être invariant par conjugaison intérieure. On part donc d'un projecteur p sur F et on le moyenne en posant $\tilde{p} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp g^{-1}$. On vérifie ensuite que $\tilde{p}$ est bien un projecteur sur F . La démonstration est la même que pour notre projecteur $A[M]^G$ -linéaire plus haut.

est légitime de ne pas tenir compte de l'ordre dans une composition : on dénombrera alors les multi-ensembles dont la somme des éléments vaut n – ce que l'on va appeler des *partitions*. Afin d'éviter de travailler avec une action de groupe, on choisira grâce à l'ordre des entiers un représentant dans chaque multi-ensemble : celui dont les éléments décroissent.

1.4.1 Partitions d'un entier et diagrammes de YOUNG

Une *partition* est un multi-ensemble fini d'entiers strictement positifs, que l'on identifiera avec son unique représentant décroissant. Si l'on note λ une telle suite décroissante et n la somme de ses termes, on dit aussi que λ *partitionne* n et l'on note

$$\lambda \vdash n. \quad (1.47)$$

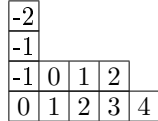
On représente souvent une partition $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ sous la forme d'un **diagramme de YOUNG** (ou **de Ferrers**) formé de ℓ lignes superposées justifiées à gauche où, pour tout entier $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, la i -ième ligne en partant du bas possède λ_i cases. Par exemple, le diagramme  représente la partition $(5, 4, 2)$.

L'*équerre* associée à une case de coordonnées entières positives $\binom{x}{y}$ est formée des cases dont les coordonnées $\binom{i}{j}$ vérifient $\binom{i \geq x}{j = y}$ où $\binom{i = x}{j \geq y}$. Le nombre de cases de l'équerre d'une case $\square$ donnée d'un diagramme de YOUNG λ sera noté $h^\lambda(\square)$. Par exemple, dans le diagramme $\alpha :=$ , l'équerre associée à la case $\boxtimes$ possède $h^\alpha(\boxtimes) = 6$ cases.

Le **contenu** d'une case de coordonnées $\binom{x}{y}$ est l'entier relatif $x - y$, le **contenu** $c(\lambda)$ d'une partition λ est la somme des contenus des cases de son diagramme de YOUNG.

On peut expliciter en sommant sur les lignes : la première contient les contenus $0, 1, 2, \dots, \lambda_1 - 1$, la deuxième les contenus $-1, 0, 1, \dots, \lambda_2 - 2$, la troisième $-2, -1, 0, \dots, \lambda_3 - 3$... et plus généralement

$$c(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\lambda_i} (k - i) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{\lambda_i(\lambda_i + 1)}{2} - i\lambda_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \lambda_i(\lambda_i - 2i + 1). \quad (1.48)$$

Par exemple, la partition associée au diagramme  a pour contenu

$$\frac{5(5 - 2 + 1) + 4(4 - 4 + 1) + 2(2 - 6 + 1)}{2} = 9 = \sum_{\square \text{ case}} c(\square). \quad (1.49)$$

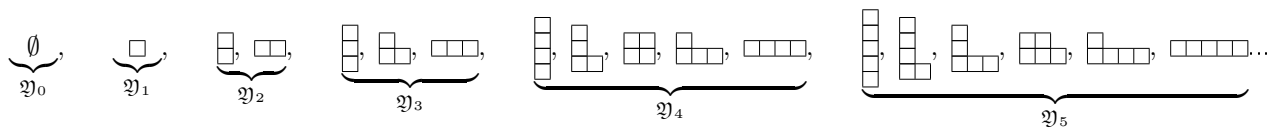
Pour tout entier $n \geq 0$, on notera⁸

$$\mathfrak{Y}_n := \{\lambda ; \lambda \vdash n\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Y} := \bigsqcup_{m \geq 0} \mathfrak{Y}_m \quad (1.50)$$

respectivement l'ensemble des diagrammes de YOUNG à n cases et celui de toutes les partitions.

On ordonne totalement $\mathfrak{Y}_n$ par ordre lexicographique, d'où un ordre total sur $\mathfrak{Y}$ en triant par taille croissante. (1.51)

Cet ordre total commence comme suit (on liste les partitions de taille inférieure ou égale à 5) :



Remarquons qu'une partition est vide si et seulement si sa taille (définie juste après) est nulle :

$$\lambda = \emptyset \iff \lambda \vdash 0 \iff |\lambda| = 0.$$

8. le $\mathfrak{Y}$ est un Y majuscule gothique pour rappeler **YOUNG**

Fixons une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$.

Ses **parts** (ou **cycles**) sont les entiers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$.

Un **cycle fixe** est une part égale à 1.

Sa **longueur** $\ell(\lambda)$ est le nombre de parts.

Sa **taille** $|\lambda|$ est la somme $\sum \lambda_i$ des parts.

Sa **factorielle** $\lambda!$ vaut le produit $\prod \lambda_i!$ de celles des parts.

Sa **ramification** ${}^9 \wp(\lambda)$ est la somme $\sum (\lambda_i - 1) = |\lambda| - \ell(\lambda)$ des parts décrementées. (L'origine topologique de ce terme sera donné à la section 2.2.2.)

Sa **signature** $\varepsilon(\lambda)$ vaut le signe $(-1)^{\wp(\lambda)}$.

Son **facteur d'HURWITZ** $\boxtimes$ dénotera le rationnel $\frac{1}{\#\text{Sym } \lambda} \prod \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{\lambda_i!}$.

Son **sous-groupe de YOUNG** $\mathfrak{S}_\lambda$ est le produit $\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_\ell}$ vu dans $\mathfrak{S}_{|\lambda|}$.

La **permutation standard** σ_λ associée à λ est la permutation de son sous-groupe de YOUNG $\mathfrak{S}_\lambda$ formée des $\ell(\lambda)$ cycles $(1 + D_i, 2 + D_i, 3 + D_i, \dots, \lambda_i + D_i)$ pour $i \in \llbracket 1, \ell(\lambda) \rrbracket$ où l'on a défini un décalage $D_i := \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{i-1}$.

Enfin, sa **dimension** $\dim \lambda$ est définie par le quotient $\frac{n!}{\prod_{\square} h^\lambda(\square)}$ où l'on fait le produit sur toutes les cases $\square$ du diagramme de YOUNG associé à λ . (La section 1.4.4 en donnera une interprétation en termes de dimension d'un espace vectoriel dépendant de λ .)

La **(k-ième) multiplicité** $m_k(\lambda)$ d'un entier k est le nombre de parts valant k . Ainsi, le nombre de symétries de λ vaut

$$\#\text{Sym } \lambda = \text{Card} \left(\prod_{k \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell\}} \mathfrak{S}_{\#\{i ; \lambda_i=k\}} \right) = \prod_{k \geq 1} \#\mathfrak{S}_{m_k(\lambda)} = \prod_{k \geq 1} m_k(\lambda)! \quad (1.52)$$

et le facteur d'HURWITZ s'exprime par

$$\boxed{\lambda} = \frac{1}{\prod_{k \geq 1} m_k(\lambda)!} \prod_{k \geq 1} \left(\frac{k^k}{k!} \right)^{m_k(\lambda)} = \prod_{k \geq 1} \frac{k^{k \cdot m_k(\lambda)}}{m_k(\lambda)! \cdot k!^{m_k(\lambda)}}. \quad (1.53)$$

On remarquera que les multiplicités fournissent une autre description, multiplicative, des partitions *via* la bijection

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)} \\ \lambda & \mapsto & (m_k(\lambda))_{k \geq 1} \\ \prod_{k \geq 1} k^{m_k} & \longleftarrow & (m_k)_{k \geq 1} \end{array} \right. \quad (1.54)$$

La partition λ est dite **réduite** si elle ne contient pas de 1, i. e. si $m_1(\lambda) = 0$.

Sa **(partition) réduite** $\check{\lambda}$ est la partition obtenue en retirant¹⁰ tous les 1.

Lorsque qu'un entier $n \geq |\lambda|$ est donné par le contexte, on définit sa **(partition) complétée** $\bar{\lambda}$ par la partition de taille n obtenue en ajoutant autant de 1 que nécessaire.

La **concaténée** $\lambda \sqcup \mu$ de deux partitions λ et μ est la partition dont les parts (comptées avec multiplicité) sont celles de λ union-disjointe celles de μ . Les longueur, taille et ramification sont des morphismes de la concaténation vers l'addition et peuvent par conséquent être étendues aux suites finies de partitions en concaténant ces dernières :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\lambda \sqcup \mu| = |\lambda| + |\mu| \\ \ell(\lambda \sqcup \mu) = \ell(\lambda) + \ell(\mu) \\ \wp(\lambda \sqcup \mu) = \wp(\lambda) + \wp(\mu) \end{array} \right. \quad (1.55)$$

9. À défaut de produire un r minuscule ronde (comme le ℓ pour la longueur), nous prendrons la lettre $\wp$ (attribuée à une fonction elliptique de WEIERSTRASS) que nous lirons comme un ρ .

10. La réduction est une opération usuelle correspondant à regarder le support d'une permutation. Il est plus aisé de voir les parts restantes d'une partition après réduction si l'on rejette les 1 en toute fin, ce que permet la convention d'ordonner les parts de façon *décroissante*.

Le **profil** ou **type (cyclique)** d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est la partition type σ de n dont les parts sont les longueurs des cycles de σ . Par exemple, le profil d'un produit disjoint de deux permutations est la concaténation de leurs types cycliques

$$\text{type} \left(\sigma \sqcup_{\text{disjoint}}^{\text{produit}} \rho \right) = \text{type } \sigma \sqcup \text{type } \rho \quad (1.56)$$

et le cardinal du support d'une permutation est égal à la taille de la réduite de son profil

$$|S\sigma| = \left| \overbrace{\text{type } \sigma}^{\circ} \right|. \quad (1.57)$$

On notera également que la permutation σ_λ a pour profil λ :

$$\text{type } \sigma_\lambda = \lambda. \quad (1.58)$$

La **ramification** et la **signature** d'une permutation sont définies comme celles de son type cyclique.

On montre que la ramification (alors aussi appelée **hauteur** ou **rang**) est le nombre minimal de transpositions nécessaires pour factoriser la permutation considérée (il en faut et suffit $\ell - 1$ pour chaque cycle de longueur ℓ).

On rappelle que deux permutations de deux groupes symétriques $\mathfrak{S}_E$ et $\mathfrak{S}_F$ ont même profil si et seulement si elles sont conjuguées par une bijection $E \simeq F$. Cela découle d'une part de la formule de conjugaison d'un cycle (par une bijection $E \xrightarrow{\varphi} F$)

$$\varphi \circ (a_1 \mapsto a_2 \mapsto \dots \mapsto a_\ell \mapsto a_1) \circ \varphi^{-1} = (\varphi(a_1) \mapsto \varphi(a_2) \mapsto \dots \mapsto \varphi(a_\ell) \mapsto \varphi(a_1)), \quad (1.59)$$

d'autre part de la décomposition d'une permutation en produit disjoint de cycles non fixes.

On dénotera par C_λ à la fois la classe de conjugaison dans le groupe $\mathfrak{S}_{|\lambda|}$ des permutations de profil λ ainsi que (de manière plus enrichie) la somme de ses permutations dans l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{|\lambda|}]$:

$$C_\lambda := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{|\lambda|} \\ \text{type } \sigma = \lambda}} \sigma. \quad (1.60)$$

On peut dénombrer C_λ en faisant agir $\mathfrak{S}_n$ dessus par conjugaison, d'où l'on tire (section 1.3.2) $|C_\lambda| = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|\text{Fix } \sigma_\lambda|}$ où $\text{Fix } \sigma_\lambda$ n'est autre que le commutant de σ_λ . Décrivons ce dernier. En appelant $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$ les cycles de σ_λ , une permutation φ est dans $\text{Fix } \sigma_\lambda$ si et seulement si

$$\sigma_\lambda = \varphi \sigma_\lambda \varphi^{-1}, \quad \text{i. e. si et seulement si} \quad \prod_{i=1}^{\ell} \gamma_i = \prod_{i=1}^{\ell} \varphi \gamma_i \varphi^{-1},$$

ce qui revient à l'égalité pour toute longueur $k \geq 1$ des ensembles $\{\gamma_i\}_{i \in [1, \ell]}^{|\gamma_i|=k}$ et $\{\varphi \gamma_i \varphi^{-1}\}_{i \in [1, \ell]}^{|\gamma_i|=k}$, ou encore à l'existence d'une permutation $i \mapsto j$ telle que $\gamma_j = \varphi \gamma_i \varphi^{-1}$. En décrivant les cycles $\begin{cases} \gamma_i = (a_1, \dots, a_k) \\ \gamma_j = (b_1, \dots, b_k) \end{cases}$, l'égalité précédente s'écrit $b_p = \varphi(a_p)$ pour tout $p \in [1, k]$. Choisir φ à ce niveau revient à dire sur quel b_p est envoyé a_1 , d'où k choix ; ceci tenant pour chacun des $m_k(\lambda)$ cycles de longueur k , on a en fait $k^{m_k(\lambda)}$ choix. En rajoutant le choix des $m_k(\lambda)!$ permutations $i \mapsto j$ de ces cycles, on trouve finalement que le **centralisateur** de type λ a pour cardinal

$$z_\lambda := \prod_{k \geq 1} m_k(\lambda)! k^{m_k(\lambda)}, \quad \text{d'où l'on tire } |C_\lambda| = \frac{n!}{z_\lambda}. \quad (1.61)$$

On observera que le choix d'une permutation de type λ de l'ensemble $[1, n]$ revient à choisir d'une part une partie à $|\lambda|$ éléments (son support), d'autre part une permutation de type λ de cette partie. Il en résulte l'identité

$$|C_\lambda| = \binom{n}{\lambda} |C_{\tilde{\lambda}}|.$$

1.4.2 Résumé des notations

Résumons toutes les notations utilisées pour une partition λ , notée au choix additivement $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell$ ou multiplicativement $1^{m_1} 2^{m_2} \dots$ (la *partition ensembliste standard* π_λ sera introduite plus tard) :

partitionne	$\lambda \vdash n \iff \lambda \in \mathfrak{Y}_n$	
longueur	$\ell(\lambda) := \sum_{k \geq 1} m_k$	
taille	$ \lambda := \sum \lambda_i = \sum_{k \geq 1} k m_k$	
(k -ième) multiplicité	$m_k(\lambda) := \#\{i ; \lambda_i = k\}$	
concaténation	$\lambda \sqcup \mu := \prod_{k \geq 1} k^{m_k(\lambda) + m_k(\mu)}$	
(n -)complétée	$\check{\lambda} := \lambda \sqcup 1^{n - m_1(\lambda)}$	
réduite	$\dot{\lambda} := \lambda \setminus 1^{m_1(\lambda)}$	
factorielle	$\lambda! := \prod \lambda_i! = \prod_{k \geq 1} k!^{m_k(\lambda)} = \check{\lambda}!$	
cardinal du centralisateur	$z_\lambda := \prod_{k \geq 1} m_k(\lambda)! k^{m_k(\lambda)}$	
nombre de symétries	$\#\text{Sym } \lambda := \prod_{k \geq 1} m_k(\lambda)!$	
facteur d'HURWITZ	$\mathfrak{A} := \frac{1}{\#\text{Sym } \lambda} \prod \frac{\lambda_i!}{\lambda_i!}$	(1.62)
sous-groupe de YOUNG	$\mathfrak{S}_\lambda := \prod \mathfrak{S}_{\lambda_i} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{ \lambda }$	
ramification	$\wp(\lambda) := \lambda - \ell(\lambda) = \sum (\lambda_i - 1)$	
signature	$\varepsilon(\lambda) := (-1)^{\wp(\lambda)} = \prod (-1)^{\lambda_i - 1}$	
permutation standard	$\sigma_\lambda := \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \text{cycle } (1, 2, 3, \dots, \lambda_i)$ décalé de $\sum_{x=1}^{i-1} \lambda_x$	
partition (ensembliste) standard	$\pi_\lambda := \text{Orb } \sigma_\lambda$	
dimension	$\dim \lambda := \frac{n!}{\prod h^\lambda(\square)}$	
contenu	$c(\lambda) := \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \lambda_i (\lambda_i - 2i + 1)$	
classes de conjugaison	$C_\lambda := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{ \lambda } \atop \text{type } \sigma = \lambda} \sigma \quad C_\lambda = \frac{ \lambda !}{z_\lambda}$	

Prenons l'exemple de la partition $(5, 4, 4, 2, 1, 1, 1)$. Les diagrammes et tableaux suivants représentent respectivement

le diagramme de YOUNG associé		le diagramme de YOUNG de la réduite $(5, 4, 4, 2)$		les contenus		les nombres d'équerres	
	,		,		,		.

Elle s'écrit multiplicativement $1^3 2 4^2 5$, a pour contenu -11 , longueur 7, taille 18, ramification 11 et signature -1 .

Sa réduite s'écrit $2 4^2 5$, a pour contenu 4, est de longueur 4, taille 15, ramification 11 et signature -1 .

Les factorielles $\lambda!$ et $\dot{\lambda}!$ valent toutes deux $2!4!2!5! = 138\,240$.

Les cardinaux des centralisateurs et des classes de conjugaison de type λ et $\dot{\lambda}$ valent respectivement

$$\begin{aligned} z_\lambda &= 3! \times 2 \times 2!4^2 \times 5 = 1920 & \text{et} & \quad |C_\lambda| = \frac{18!}{z_\lambda} = 2^9 3^7 5^2 7^2 11 13 17 \\ z_{\dot{\lambda}} &= 2 \times 2!4^2 \times 5 = 320 & \text{et} & \quad |C_{\dot{\lambda}}| = \frac{15!}{z_{\dot{\lambda}}} = 2^5 3^6 5^2 7^2 11 13 \end{aligned}$$

On vérifiera bien l'égalité $\frac{|C_\lambda|}{|C_{\dot{\lambda}}|} = \binom{18}{15} = 816$.

Les permutation et partition ensembliste standards associées à λ sont

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda &= (1, 2, 3, 4, 5) (6, 7, 8, 9) (10, 11, 12, 13) (14, 15) \in \mathfrak{S}_{18} \\ \text{et } \pi_\lambda &= \{\llbracket 1, 5 \rrbracket, \llbracket 6, 9 \rrbracket, \llbracket 10, 13 \rrbracket, \llbracket 14, 15 \rrbracket, \{16\}, \{17\}, \{18\}\} \end{aligned}$$

et peuvent se représenter par le tableau

18
17
16
14 15
10 11 12 13
6 7 8 9
1 2 3 4 5

1.4.3 Nombre de partitions, l'estimation $|\mathfrak{Y}_n| \simeq A^{\sqrt{n}}$

Le nombre de partitions de taille n vaut (pour $n = 1, \dots, 10$)

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, \dots \quad (1.63)$$

et son asymptotique est donnée par la **formule d'HARDY et RAMANUJAN** (cf. [7] VIII. 6)

$$|\mathfrak{Y}_n| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4\sqrt{3n}}. \quad (1.64)$$

On en déduit qu'il y a deux constantes $\alpha, A > 0$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha^{\sqrt{n}} \leq |\mathfrak{Y}_n| \leq A^{\sqrt{n}}. \quad (1.65)$$

(L'asymptotique nous dit que tout choix $0 < a < e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}} \leq A$ vérifiera l'inégalité (1.65) à partir d'un certain rang N ; en-deça de ce rang, les quantités $\mathfrak{Y}_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ sont pour $n \leq N$ encadrées dans $\mathbb{R}_+^*$ et il suffit d'ajuster le choix précédent en conséquence). Asymptotiquement, on peut prendre $A := e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}} \simeq 13,002$ et α aussi proche de A que souhaité.

1.4.4 Structure des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$

Fixons un entier $n \geq 1$. La structure de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ peut être entièrement élucidée grâce à la théorie des représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Nous rappelons quelques résultats, tous tirés de [13]

Appelons **tableau standard** de taille n tout diagramme de YOUNG (appelé alors **forme** du tableau) dont les cases sont remplies chacune avec un entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de sorte que les suites correspondantes sur chaque ligne et sur chaque colonne soient strictement croissantes.

Pour tout tableau standard T de taille n , l'**idempotent de YOUNG** e_T est défini par le produit de deux facteurs :

1. la somme de tous les éléments du sous-groupe de YOUNG associé aux lignes¹¹ de T ;
2. la somme alternée de tous les éléments du sous-groupe de YOUNG associé aux colonnes de T .

Par exemple, pour le tableau standard $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & & \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$, on trouvera le produit

$$\begin{aligned} & (\text{Id}_{\{1,3,4\}} + (1,3) + (1,4) + (3,4) + (1,3,4) + (1,4,3)) \circ (\text{Id}_{\{2,5\}} + (2,5)) \circ \text{Id}_{\{6\}} \\ & \times (\text{Id}_{\{1,2,6\}} - (1,2) - (1,6) - (2,6) + (1,2,6) + (1,6,2)) \circ (\text{Id}_{\{3,5\}} - (3,5)) \circ \text{Id}_{\{4\}}. \end{aligned}$$

Les représentations $e_T \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ sont alors irréductibles et leurs classes d'isomorphisme sont formées des tableaux de même forme donnée. Pour toute partition $\lambda \vdash n$, on appelle **module de SPECHT** de type λ n'importe laquelle des représentations $e_T \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ où T est un tableau standard de forme λ ; il sera dénoté par

$$V_\lambda := e_T \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n] \quad \text{où } T \text{ tableau standard de forme } \lambda. \quad (1.66)$$

Son caractère sera noté χ^λ et sa dimension vaut¹² $\dim \lambda$, d'où l'on déduit successivement les relations

$$\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n] \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (V_\lambda)^{\dim \lambda} \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \vdash n} (\dim \lambda)^2 = n!. \quad (1.67)$$

Si l'on pose $e_\lambda := \sum_{\text{forme}(T)=\lambda} e_T$, alors les $\frac{\dim \lambda}{n!} e_\lambda$ sont des idempotents centraux de somme 1, d'où une décomposition

$$\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n] = \bigoplus_{\lambda \vdash n} E_\lambda \quad \text{où l'on a posé } E_\lambda := e_\lambda \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]. \quad (1.68)$$

11. La lecture des entiers d'une ligne à λ_i cases correspond au choix d'une part de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal λ_i . On considère le sous-groupe de Young de la famille d'ensembles ainsi obtenue.

12. ce qui motive la définition de $\dim \lambda$

La projection sur le bloc E_λ sera noté

$$\text{pr}_\lambda := \frac{\dim \lambda}{n!} e_\lambda \text{Id}. \quad (1.69)$$

Par ailleurs, les e_λ sont reliés aux caractères χ^λ par l'identité

$$e_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma) \sigma = \sum_{\mu \vdash n} \chi^\lambda(\mu) C_\lambda. \quad (1.70)$$

1.4.5 Éléments de YOUNG-JUCYS-MURPHY

L'entier $n \geq 1$ est toujours fixé. Ce qui suit est un extrait succinct de [16] (chapitre 1, section 1.5).

Les **éléments de YOUNG-JUCYS-MURPHY** sont définis dans l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par

$$\xi_k := \sum_{1 \leq a < k} (a, k). \quad (1.71)$$

Ils commutent deux à deux (mais pas avec tout $\mathfrak{S}_n$) : on montre plus généralement¹³ que ξ_k commute avec $\mathfrak{S}_{k-1} \cong \{\sigma \in \mathfrak{S}_k ; \sigma(k) = k\}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En effet, lorsque l'on conjugue ξ_k par une permutation $\varphi \in \mathfrak{S}_{k-1}$, l'on obtient

$$\varphi \circ \xi_k \circ \varphi^{-1} = \sum_{1 \leq a < k} \varphi \circ (a, k) \circ \varphi^{-1} = \sum_{1 \leq a < k} (\varphi(a), \varphi(k)) \stackrel{\varphi(k)=k}{=} \sum_{1 \leq a < k} (\varphi(a), k) \stackrel{a \leftarrow \varphi^{-1}(a)}{=} \sum_{1 \leq a < k} (a, k) = \xi_k.$$

On peut donc former le produit commutatif $\prod_{i=1}^n (1 + t\xi_i)$ dans $\mathbb{Z}[t]$. En décrivant $\mathfrak{S}_{n+1}$ comme la réunion disjointe de $\mathfrak{S}_n$ et des $\{\sigma \circ (i, n+1)\}_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient par une récurrence immédiate l'identité

$$(1 + t\xi_1)(1 + t\xi_2) \cdots (1 + t\xi_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\wp(\sigma)} \sigma. \quad (1.72)$$

En récupérant pour un $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donné le coefficient en t^k , on obtient l'identité

$$e_k(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\wp(\sigma)=k} \sigma. \quad (1.73)$$

Cette dernière somme étant invariante par conjugaison (il s'agit de toutes les permutations ayant un nombre $n-k$ fixé de cycles), les $e_k(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sont dans le centre de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$, donc la sous-algèbre qu'ils engendrent est centrale. Il en résulte par le lemme de SCHUR¹⁴ que tout polynôme symétrique en les $\xi_1, \dots, \xi_n$ a une action diagonale dans l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$.

Plus précisément, on peut montrer que l'élément ξ_n agit diagonalement sur chaque $\mathfrak{S}_n$ -module V_λ et y a pour spectre l'ensemble des contenus des **coins** du diagramme de YOUNG associé à λ , i. e. des cases de coordonnées (i, λ_i) . Par ailleurs, tout sous-espace propre de ξ_n inclus dans V_λ est isomorphe au $\mathfrak{S}_{n-1}$ -module $V_{\lambda \setminus (i, \lambda_i)}$, ce qui permet de continuer la décomposition spectrale avec les $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ restants.

On retiendra de ce qui précède que, si P est un polynôme symétrique à n indéterminées, alors

$$\text{l'élément } P(\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ agit sur le bloc } E_\lambda \text{ par homothétie de rapport } P(\text{contenus de } \lambda). \quad (1.74)$$

Nous utiliserons cette propriété au chapitre 4 en rapport avec la classe $p_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ des transpositions.

1.5 Multipartitions d'un entier

Les nombres d'HURWITZ font simultanément apparaître plusieurs partitions. Afin d'en contrôler les symétries, il est utile d'introduire les *multipartitions*.

13. c'est d'ailleurs le pourquoi de leur introduction

14. on devrait en toute rigueur se placer sur une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ pour s'assurer de la non-vacuité du spectre mais ce qui suit montre que cette précaution est inutile

1.5.1 Partitions scindées

Une **multipartition** est un multi-ensemble fini de partitions (ses *parts*), lequel est identifié à son unique représentant formé d'une suite finie décroissante. On peut également suivre M. KAZARIAN et voir une multipartition Λ comme une partition $\sqcup \Lambda$ (sa **concaténée**) dont l'on a *colorié* les cycles en autant de couleurs que Λ a de parts.

Afin d'harmoniser les définitions et notations, une multipartition Λ de taille n (où l'on a fixé un entier $n \geq 0$) sera également appelée **partition scindée** (*split partition*) de n . Leur ensemble sera noté $\mathfrak{Y}_n^s$. On dit aussi que Λ **multi-partitionne** n et l'on note

$$\Lambda \models n \text{ lorsque } \Lambda \in \mathfrak{Y}_n^s. \quad (1.75)$$

L'ensemble de toutes les multipartitions sera dénoté par

$$\mathfrak{Y}^s := \bigsqcup_{m \geq 0} \mathfrak{Y}_m^s. \quad (1.76)$$

1.5.2 Entiers et partitions associés à une multipartition

Toute fonction $f : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathbb{N}$ induit une fonction $\left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{Y}^s \\ (\lambda^i) \end{array} \right\} \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{Y} \\ \lambda^i \end{array} \right\} \neq 0$. On prendra pour f surtout les fonctions *taille*, *longueur* et *ramification*, ce qui amène plusieurs définitions.

Fixons une multipartition $\Lambda = \wr \Lambda_i$.

Son **contenu** $c(\Lambda)$ est la somme des contenus de ses parts, lequel ne vaut pas en général le contenu de sa concaténée :

$$c(\Lambda) := \sum c(\Lambda_i) \neq c(\sqcup \Lambda). \quad (1.77)$$

Son **profil** est la partition $|\Lambda| = \wr |\Lambda_i|$. Sa **taille** est celle de sa concaténée

$$||\Lambda|| = |\sqcup \Lambda|. \quad (1.78)$$

Sa λ -ième **multiplicité** est (ayant fixé une partition λ) le nombre de parts égales à λ :

$$m_\lambda(\Lambda) := \# \{i ; \Lambda_i = \lambda\}. \quad (1.79)$$

Une **part** de Λ est l'une des partition Λ_i , un **cycle** de Λ est un cycle d'une de ses parts, un **cycle s-fixe**¹⁵ de Λ est une part de taille 1. On observera qu'un cycle fixe (d'une part) de Λ n'est pas nécessairement un cycle s-fixe de Λ .

Sa **longueur** (ou **nombre de couleurs**) est le nombre de parts

$$\lg \Lambda := \ell(\ell(\Lambda)) = \ell(|\Lambda|). \quad (1.80)$$

Son **nombre de cycles** est

$$\text{cy } \Lambda := |\ell(\Lambda)| = \ell(\sqcup \Lambda). \quad (1.81)$$

Sa **ramification** est celle de sa concaténée

$$\text{rf } \Lambda := \wp(\sqcup \Lambda) = ||\Lambda|| - |\ell(\Lambda)| = \wp(|\Lambda|) - \wp(\ell(\Lambda)) = |\wp(\Lambda)|. \quad (1.82)$$

Son **défait de coloriage** vaut la différence entre nombre de cycles et nombre de couleurs

$$\text{dc } \Lambda := \wp(\ell(\Lambda)) = \text{cy } \Lambda - \lg \Lambda. \quad (1.83)$$

Enfin sa **hauteur** est définie par l'entier

$$\text{ht } \Lambda := \wp(|\Lambda|) + \wp(\ell(\Lambda)) = \text{rf } \Lambda + 2 \text{dc } \Lambda. \quad (1.84)$$

¹⁵. La lettre *s* vient de « *scindé* » car un cycle *s*-fixe n'est rattaché à aucune autre part.

La hauteur sera interprétée comme nombre minimal de transpositions décomposant une certaine permutation scindée (cf. section 1.7.3).

Parmi les quantités que l'on peut former à l'aide des trois fonctions *taille*, *longueur* et *ramification*, au moins deux nous restent sans sens combinatoire : $\wp(|\Lambda|) = ||\Lambda|| - \lg \Lambda$ et $\wp(\wp(\Lambda))$. Nous n'en aurons toutefois pas usage.

On dira que Λ est **totalelement scindée** (*totally split*) lorsque toutes ses parts ont longueur 1, i. e. quand son défaut de coloriage est nul. Par exemple, lorsqu'une partition $\lambda = (\lambda_i)$ est donnée avec un entier $n \geq |\lambda|$, on définit la **partition (totalelement) scindée associée** λ^s comme la partition totalement scindée

$$\lambda^s := \wr (\lambda_1) \geq (\lambda_2) \geq \cdots \geq (\lambda_{\ell(\lambda)}) \geq \underbrace{\square \geq \square \geq \cdots \geq \square}_{n-|\lambda| \text{ partitions } \square}. \quad (1.85)$$

L'application $\lambda \mapsto \lambda^s$ fournit un plongement des partitions sur les multipartitions ayant un défaut de coloriage nul, qui est un inverse à droite de la concaténation $\Lambda \mapsto \sqcup \Lambda$ et un morphisme pour la concaténation :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P} & \xrightarrow{\sim} & \{\Lambda \in \mathfrak{P}^s ; \text{dc } \Lambda = 0\} \\ \lambda = \sqcup \lambda^s & \mapsto & \lambda^s \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (\lambda \sqcup \mu)^s = \lambda^s \sqcup \mu^s. \quad (1.86)$$

Ce morphisme préserve le profil, la taille, la longueur ou nombre de cycles ainsi que la ramification ou hauteur (mais pas le contenu en général) :

$$|\lambda^s| = \lambda \quad \text{et} \quad ||\lambda^s|| = |\lambda| \quad \text{et} \quad \ell(\lambda^s) = \ell(\lambda) = \text{cy } \lambda^s \quad \text{et} \quad \wp(\lambda^s) = \wp(\lambda) = \text{ht } \lambda^s. \quad (1.87)$$

On observera que les cycles de λ^s sont ceux de λ .

On pourra considérer un autre plongement $\lambda \mapsto \wr \lambda^s$ des partitions sur les multipartitions à une seule part :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P} & \xrightarrow{\sim} & \{\Lambda \in \mathfrak{P}^s ; \lg \Lambda = 1\} \\ \lambda = \sqcup \wr \lambda^s & \mapsto & \wr \lambda^s \end{array} \right. . \quad (1.88)$$

Ce dernier conserve le contenu mais pas la longueur et n'est pas un morphisme pour la concaténation

La partition Λ est dite **réduite** lorsqu'elle ne contient pas de cycles $\mathfrak{s}$ -fixes. Sa **réduite** $\mathring{\Lambda}$ est la multipartition obtenue en retirant tous les cycles $\mathfrak{s}$ -fixes. Lorsqu'un entier $n \geq |\Lambda|$ est donné par le contexte, on définit sa **complétée** $\bar{\Lambda}$ par la multipartition de taille n obtenue en ajoutant autant de cycles $\mathfrak{s}$ -fixes que nécessaire. La réduction et la complétion ne changent pas la ramification :

$$\wp(\mathring{\Lambda}) = \wp(\Lambda) = \wp(\bar{\Lambda}). \quad (1.89)$$

On remarquera que le nombre de parts qui ne sont pas des cycles $\mathfrak{s}$ -fixes est donné par

$$\lg \mathring{\Lambda} = \ell(\wp(\Lambda)) = \ell(\wp(\mathring{\Lambda})). \quad (1.90)$$

La **permutation standard** σ_Λ associée à Λ est le produit des permutations standards associées à ses parts (dans le sous-groupe de YOUNG associé à son profil) :

$$\sigma_\Lambda := \prod_{i=1}^{\lg \Lambda} \sigma_{\Lambda_i} \in \mathfrak{S}_{|\Lambda|}. \quad (1.91)$$

Une **symétrie scindée** de Λ est la donnée pour tout entier $k \geq 1$ d'une permutation des parts de Λ de taille k modulo les permutations de ces dernières (la motivation de cette définition apparaîtra clairement dans la section 1.6.5). Leur ensemble¹⁶ sera noté $\text{Sym}^s \Lambda$. Par exemple, la multipartition $[\square \square \square \square]$ possède trois symétries scindées correspondant au réordonnement des trois parts de taille 2 (mais elle ne possède que deux symétries). Plus généralement, la définition mène à la formule

$$|\text{Sym}^s \Lambda| = \prod_{\ell \geq 1} \binom{m_\ell(|\Lambda|)}{\wr m_\ell(\Lambda)} = \frac{\prod_{\ell \geq 1} m_\ell(|\Lambda|)!}{\prod_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\Lambda)!}. \quad (1.92)$$

16. à ne pas confondre avec celui $\text{Sym } \Lambda$ des symétries du multi-ensemble Λ

Nous calculerons à la section 1.7.2 le cardinal du *centralisateur de type* Λ , qui sera noté

$$z_\Lambda := z_{\Lambda_1} z_{\Lambda_2} \cdots z_{\Lambda_{\lg \Lambda}}. \quad (1.93)$$

On définit enfin un **nombre de blocs** $b(\Lambda)$ et l'image $\mu(\Lambda)$ par une **fonction de MÖBIUS** (qui nous serviront dans la théorie des représentations des sous-groupes de YOUNG $\mathfrak{S}_{|\Lambda|}$) par les relations

$$||\Lambda||! = |\Lambda|! b(\Lambda) \prod_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\Lambda)! \quad \text{et} \quad (1.94)$$

$$\mu(\Lambda) := \varepsilon(|\Lambda|) \prod_{k \geq 1} (k-1)!^{m_k(|\Lambda|)}. \quad (1.95)$$

1.5.3 Récapitulatif des notations

Récapitulons sur un exemple :

Λ		nombre de blocs $b(\Lambda) = \frac{21!}{5! 4! 4! 4! 2! 4!} = 21$	nombre de symétries scindées $\text{Sym}^s \Lambda = \frac{3! 4!}{2! 1!} = 72$
$ \Lambda $	5 4 4 4 1 1 1 1	taille $ \Lambda = 21$	hauteur $\text{ht } \Lambda = 19$
$\ell(\Lambda)$	3 2 2 3 1 1 1 1	$\wp(\Lambda) = 13 = \Lambda - \lg \Lambda$	$= \wp(\Lambda) + \wp(\ell(\Lambda))$
$\wp(\Lambda)$	2 2 2 1	longueur $\lg \Lambda = 8 = \ell(\Lambda) = \ell(\ell(\Lambda))$	défait de coloriage $\text{dc } \Lambda = \wp(\ell(\Lambda)) = 6$
contenu	-2 2 2 -2 0 0 0 0	nombre de cycles $\text{cy } \Lambda = \ell(\Lambda) = 14$	contenu $c(\Lambda) = 0$
		ramification $\text{rf } \Lambda = 7 = \wp(\Lambda) = \wp(\Lambda) - \wp(\ell(\Lambda))$	

(1.96)

En élaguant les quatre colonnes du tableau ci-dessus correspondant aux cycles $\mathfrak{s}$ -fixes de Λ , on obtient la multipartition réduite $\mathring{\Lambda}$ (observer les quantités qui changent ou non après réduction) :

$\mathring{\Lambda}$		nombre de symétries scindées $\text{Sym}^s \mathring{\Lambda} = \frac{3!}{2!} = 3$	nombre de cycles $\text{cy } \mathring{\Lambda} = \ell(\mathring{\Lambda}) = 14$
$ \mathring{\Lambda} $	5 4 4 4	ramification $\text{rf } \mathring{\Lambda} = 7 = \text{rf } \Lambda$ $= \wp(\Lambda) = \wp(\mathring{\Lambda}) $	défait de coloriage $\text{dc } \mathring{\Lambda} = 6 = \text{dc } \Lambda$
$\ell(\mathring{\Lambda})$	3 2 2 3	$\wp(\wp(\Lambda)) = 3$	taille $ \mathring{\Lambda} = 17$
$\wp(\mathring{\Lambda})$	2 2 2 1	parts $\neq$ cycles $\mathfrak{s}$ -fixes $\ell(\wp(\Lambda)) = 4 = \ell(\mathring{\Lambda})$	hauteur $\text{ht } \mathring{\Lambda} = 19 = \text{ht } \Lambda$

(1.97)

On retrouve les taille, nombre de cycle et ramification dans la concaténée $\sqcup \Lambda$:

$\sqcup \Lambda :$		taille $ \sqcup \Lambda = 21 = \Lambda $
		ramification $\text{rf } \Lambda = \wp(\sqcup \Lambda) = 7$
		nombre de cycles $\text{cy } \Lambda = \ell(\sqcup \Lambda) = 14 = \ell(\Lambda) $

On donne également la permutation standard associée au Λ ci-dessus et, pour la complétude de ce résumé, la *partition ensembliste standard* associée (qui sera définie plus tard comme celle associée à la partition $|\Lambda|$) :

$$\begin{aligned} \sigma_\Lambda &= (1, 2) \circ (3, 4) \circ (6, 7, 8) \circ (10, 11, 12) \circ (14, 15), \\ \pi_\Lambda &= \{\llbracket 1, 5 \rrbracket, \llbracket 6, 9 \rrbracket, \llbracket 10, 13 \rrbracket, \llbracket 14, 17 \rrbracket, \{18\}, \{19\}, \{20\}, \{21\}\}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Ces deux dernières peuvent être représentées ensemble à l'aide des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 9 & & \\ \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 13 & & & \\ \hline 10 & 11 & 12 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 17 \\ \hline 16 \\ \hline 14 & 15 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 18 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 19 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 20 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 21 \\ \hline \end{array} . \quad (1.99)$$

1.5.4 Nombre de multipartitions, l'estimation $\text{Card } \mathfrak{Y}_n^s \simeq B^n$

La suite des $|\mathfrak{Y}_n^s|$ va comme suit lorsque n croît :

$$1, 3, 6, 14, 27, 58, 111, 223, 424, 817 \dots \quad (1.100)$$

Pour un entier $n \geq 1$ donné, regrouper les multipartitions de taille n selon leur profil montre que

$$|\mathfrak{Y}_n^s| = \sum_{\lambda \vdash n} \# \{ \Lambda \in \mathfrak{Y}_n^s ; |\Lambda| = \lambda \}.$$

En invoquant à $\lambda \vdash n$ fixé la surjection $\left\{ \begin{array}{c} \prod_{i \geq 1} \mathfrak{Y}_{\lambda_i} \\ (\lambda^i) \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \{ \Lambda \in \mathfrak{Y}_n^s ; |\Lambda| = \lambda \} \\ \{\lambda^i\} \end{array} \right\}$, ce qui revient à remettre l'ordre sur les parts de Λ , on obtient la majoration

$$|\mathfrak{Y}_n^s| = \sum_{\lambda \vdash n} \# \{ \Lambda \in \mathfrak{Y}_n^s ; |\Lambda| = \lambda \} \leq \sum_{\lambda \vdash n} \left| \prod_{i \geq 1} \mathfrak{Y}_{\lambda_i} \right| = \sum_{\lambda \vdash n} \prod_i |\mathfrak{Y}_{\lambda_i}|.$$

En se rappelant la majoration $|\mathfrak{Y}_k| \leq A^{\sqrt{k}}$ valide pour tout entier $k \geq 1$, on continue à majorer

$$\leq \sum_{\lambda \vdash n} \prod_i A^{\sqrt{\lambda_i}} \leq \sum_{\lambda \vdash n} \prod_i A^{\lambda_i} = A^n \sum_{\lambda \vdash n} 1 \leq A^{n+\sqrt{n}}.$$

Par conséquent, le nombre de multipartitions de taille n est toujours plus petit que B^n pour une certaine constante $B > 0$:

$$\exists B > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |\mathfrak{Y}_n^s| \leq B^n. \quad (1.101)$$

Asymptotiquement, on peut prendre $B = \sup_{n \geq 1} \frac{\ln |\mathfrak{Y}_n^s|}{n} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. (La preuve ci-dessus montre que nous avons besoin, même pour l'asymptotique des $|\mathfrak{Y}_n^s|$, d'une constante A qui marche sur *tous* les entiers et pas seulement asymptotiquement.)

1.5.5 Les multipartitions de taille ≤ 5 , les contenus

Pour lister les multipartitions de $\mathfrak{Y}_n^s$, on peut procéder récursivement par profil décroissant. Le premier profil est (n) , ce qui donne les multipartition $\{\lambda\}$ pour λ décrivant $\mathfrak{Y}_n$. Ensuite, les profils suivants ont toutes leurs parts $< n$, ce qui permet d'obtenir une multipartition ayant un tel profil λ en prenant le multi-ensemble associé aux ℓ -uplets de $\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \mathfrak{Y}_{\lambda_i}$.

Pour $n = 1$:

$$\text{profil } \square \quad \mathfrak{Y}_1 \quad [\square].$$

Pour $n = 2$:

$$\begin{array}{l} \text{profil } \square \square \quad \mathfrak{Y}_2 \quad [\square \square], \\ \text{profil } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (\mathfrak{Y}_1)^2 \quad [\square \square]. \end{array}$$

Pour $n = 3$, les six multipartitions de $\mathfrak{Y}_3^s$ sont données par les trois profils de $\mathfrak{Y}_5$:

$$\begin{array}{l} \text{profil } \square \square \square \quad \mathfrak{Y}_3 \quad [\square \square \square], [\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}], [\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}], \\ \text{profil } \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \mathfrak{Y}_2 \times \mathfrak{Y}_1 \quad [\square \square \square], [\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \square], \\ \text{profil } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (\mathfrak{Y}_1)^3 \quad [\square \square \square]. \end{array}$$

1.6 Partitions ensemblistes

On se donne pour toute cette section un ensemble E . Les *partitions ensemblistes* de E permettront d'évaluer le « degré de transitivité » d'un groupe agissant sur E .

Rappelons qu'une **partition** de E est la donnée d'une *famille* (E_i) de parties de E non vides le recouvrant. On préférera oublier l'ordre des parties, d'où la définition suivante où l'on a remplacé « *famille* » par « *ensemble* ».

1.6.1 Définitions sur $\mathfrak{P}_E$

On appelle **partition ensembliste** (*set partition*) de E toute partie de $\mathfrak{P}(E)$ dont les éléments, appelés **parts** ou **orbites** (voire **cycles**) de la partition, ont une réunion disjointe qui vaut tout E . On note $\mathfrak{P}_E$ l'ensemble des partitions ensemblistes de E .

Une bijection induit par image directe (deux fois) une bijection des ensembles de partitions ensemblistes associés :

$$E \xrightarrow{\sim} F \implies \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}_E & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{P}_F \\ \{\pi_i\} & \mapsto & \{\varphi(\pi_i)\} \end{array} \right. . \quad (1.103)$$

On pose également pour tout entier $n \geq 0$

$$\mathfrak{P}_n := \mathfrak{P}_{[1,n]}. \quad (1.104)$$

Dorénavant et par abus de langage, on dira « *partition* » tout court pour « *partition ensembliste* » et on laissera le contexte lever l'ambiguïté des cas (rares) où il nous faudra considérer la *famille* des parts.

Signalons à simple titre culturel que les partitions permettent d'exprimer les dérivées successives d'une composée :

$$[g \circ f]^{(k)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} \left[g^{(\#\pi)} \circ f \right] \times \prod_{p \in \pi} f^{(\#p)} = \sum_{\lambda \vdash k} \frac{1}{\#\text{Sym } \lambda} \binom{k}{\lambda} \left[g^{(\ell(\lambda))} \circ f \right] \times \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} f^{(\lambda_i)}. \quad (1.105)$$

Soit $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\ell\}$ dans $\mathfrak{P}_E$ où l'on suppose E fini. Le **type** ou **profil** de π est la partition type π de l'entier $|E|$ donnée par les cardinaux des orbites :

$$\text{type } \pi := \{|\pi_1|, |\pi_2|, \dots, |\pi_\ell|\} \text{ partitionne } \sum |\pi_i|. \quad (1.106)$$

Le nombre de partitions de E de type λ fixé vaut le multinomial

$$\#\{\pi \in \mathfrak{P}_E ; \text{type } \pi = \lambda\} = \binom{|E| = |\lambda|}{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}}. \quad (1.107)$$

Une partition ensembliste revient donc à se donner une partition entière (*i. e.* un diagramme de YOUNG) et une numérotation injective de cases croissant selon chaque ligne. Par exemple, le tableau

5
2 9
3 4 6
1 3 7 10

décrit la partition $\{\{1, 3, 7, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 4, 6\}, \{5\}\}$.

Les **longueur** $\ell(\pi)$, **taille** $|\pi|$, **multiplicités** $m_k(\pi)$ pour tout entier $k \geq 1$, **ramification** $\wp(\pi)$, **signature** $\varepsilon(\pi)$ et **factorielle** $\pi!$ de π sont définies comme celles de son profil – *cf.* résumé des notations sur les partitions.

En revanche, son **sous-groupe de YOUNG** $\mathfrak{S}_\pi$ est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{|E|}$ formé des permutations induisant des bijections sur chacune des parts de π (à différencier du sous-groupe de YOUNG $\mathfrak{S}_{\text{type } \pi}$ associé à son profil, même s'ils sont conjugués) : il est donc isomorphe au sous-groupe de YOUNG de toute partition/famille dont les parts sont les cardinaux de celles de π (si l'on numérote les parts différemment, on identifie les sous-groupes de YOUNG associés *via* la permutation qui échange les deux numérotations).

On choisit une **numérotation standard** en ordonnant les parts π_i d'abord par taille décroissante¹⁷ puis par n'importe quoi (par exemple par *minimum*). On peut donc écrire

$$\mathfrak{S}_\pi := \prod_i \mathfrak{S}_{\pi_i} \quad \text{où le produit est indexé par la numérotation standard de } \pi. \quad (1.108)$$

Par exemple, tout groupe G agissant sur E donne lieu à une **partition orbitale**

$$\text{Orb } G := \left\{ \{g \cdot e\}_{g \in G} \right\}_{e \in E} \quad (1.109)$$

donnée par les orbites de G . En particulier, lorsque G est engendré par une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$, on note $\text{Orb } \sigma$ la partition orbitale associée, dont le profil vaut

$$\text{type Orb } \sigma = \text{type } \sigma. \quad (1.110)$$

Cela permet de compléter le résumé sus-indiqué : la **partition (ensembliste) standard** π_λ associée à une partition λ d'un entier est la partition orbitale de sa permutation standard :

$$\pi_\lambda := \text{Orb } \sigma_\lambda. \quad (1.111)$$

On définit de même la **partition (ensembliste) standard** π_Λ associée à une multipartition Λ par celle de la partition $|\Lambda|$:

$$\pi_\Lambda := \pi_{|\Lambda|} = \text{Orb } \sigma_{|\Lambda|}. \quad (1.112)$$

On observera que les partition (ensembliste) standard $\pi_\Lambda = \pi_{|\Lambda|}$, permutation standard $\sigma_{|\Lambda|}$ et partition (scindée) Λ ont même profil, lequel n'est pas en général celui de la permutation standard σ_Λ (sauf si Λ n'a qu'une seule part) :

$$\text{type } \pi_\Lambda = \text{type } \sigma_{|\Lambda|} = \text{type } \Lambda = |\Lambda| \neq \sqcup \Lambda = \text{type } \sigma_\Lambda. \quad (1.113)$$

On remarquera de même que les partition (ensembliste) standard π_λ et permutation standard σ_λ associées à une partition (entière) λ ont pour profil λ :

$$\text{type } \pi_\lambda = \lambda = \text{type } \sigma_\lambda. \quad (1.114)$$

On a également égalité des sous-groupes de YOUNG (alors qu'en général $\mathfrak{S}_\pi \neq \mathfrak{S}_{\text{type } \pi}$)

$$\mathfrak{S}_{\pi_\lambda} = \mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\text{type } \pi_\lambda}. \quad (1.115)$$

En revanche, la partition standard associée à la concaténée $\sqcup \Lambda$ n'est pas en général égale à celle de la permutation standard associée σ_Λ :

$$\pi_{\sqcup \Lambda} \neq \pi_{\sigma_\Lambda}. \quad (1.116)$$

La raison est que la concaténation mélange l'ordre des cycles existant dans chacune des parts, comme le montre l'exemple de la multipartition $\left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \end{array} \quad \square \right]$ pour laquelle

$$\begin{cases} \pi_{\sqcup \Lambda} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\} \\ \pi_{\sigma_\Lambda} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\}\} \end{cases}. \quad (1.117)$$

17. Ce choix est uniquement justifié par la convention qui ordonne les parts d'une multipartition par taille décroissante.

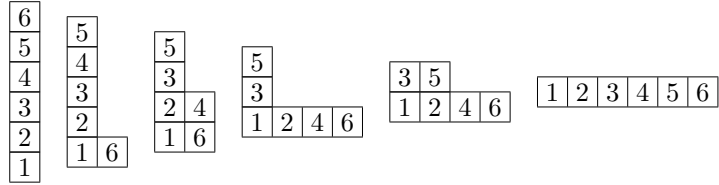
1.6.2 Ordre de raffinement sur $\mathfrak{P}_E$

Soient π et ϖ (lire « *pi* et *pi script* ») deux partitions dans $\mathfrak{P}_E$. On dit que π **est plus fine que** (*is finer than*) ϖ si toute part de π est incluse dans une part de ϖ ; on dira également que ϖ **est plus grossière que** (*is coarser than*) π .

La relation « est plus grossière que » est un ordre partiel sur $\mathfrak{P}_E$, appelé **ordre de grossièreté**¹⁸ (*coarse order*) (son ordre opposé est dit **de raffinement** (*refinement order*)). Il admet un *minimum* $\{\{e\}\}_{e \in E}$ et un *maximum* $\{E\}$. En particulier :

$$\min \mathfrak{P}_n = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}\} \quad \text{et} \quad \max \mathfrak{P}_n = \{\llbracket 1, n \rrbracket\}. \quad (1.118)$$

Par exemple, les partitions suivantes sont de plus en plus grossières :



Cette suite possède une propriété particulière : on passe d'un tableau à un autre en fusionnant deux lignes. C'est dire qu'on ne peut y insérer d'autres éléments tout en respectant la stricte monotonie.

Une fois $\mathfrak{P}_E$ muni de cet ordre, on montre que l'application $G \mapsto \text{Orb } G$ est croissante :

$$G \subset H \implies \text{Orb } G \leq \text{Orb } H \quad (1.119)$$

(en effet, toute part $\{g \cdot e\}_{e \in E}$ de $\text{Orb } G$ est trivialement incluse dans la part $\{h \cdot e\}_{h \in H}$ de $\text{Orb } H$.)

Proposition 1.6.2.1. ($\mathfrak{P}_E$ achevé, description du supremum)

1. *L'ordre de raffinement est achevé.*
On se donne une famille de partitions (π^i) .
2. *Le supremum des (π^i) est l'ensemble des orbites du groupe engendré par des groupes quelconques dont les ensembles d'orbites sont les π^i .*
3. *Deux éléments $a, b \in E$ sont dans une même part de $\bigvee \pi^i$ si et seulement s'il y a une suite finie de parts de certains π^i telle que la première contienne a , la dernière contienne b et telle que deux successives se rencontrent.*

Démonstration.

Montrons le point 2, duquel découle le point 1 (trivialement) et le point 3 (à l'aide du lemme 1.1.4).

Pour tout i , notons G^i un groupe tel que $\text{Orb } G^i = \pi^i$ (par exemple le sous-groupe de $\text{YOUNG } \prod_j \mathfrak{S}_{\pi_j^i}$ qui agit transitivement sur chaque part π_j^i par transpositions). Montrons que

$$\bigvee \text{Orb } G^i = \text{Orb } \langle G^i \rangle.$$

$\leq$ Puisque $G^{i_0} \subset \langle G^i \rangle$ pour tout i_0 , on a par croissance de Orb la majoration $\text{Orb } G^{i_0} \leq \text{Orb } \langle G^i \rangle$, d'où l'inégalité $\leq$ en prenant le *supremum* sur les i_0 .

$\geq$ Soit π une partition majorant tous les π^i . Il s'agit de montrer que $\text{Orb } \langle G^i \rangle \leq \pi$, i. e. que toute part de $\text{Orb } \langle G^i \rangle$ est incluse dans une part de π .

Soit p une part de $\text{Orb } \langle G^i \rangle$ et a un point fixé dans p . Considérons un autre point $x \in p$. Le lemme 1.1.4 nous donne une suite finie $\Omega_0, \dots, \Omega_n$ d'orbites de certains G^i telle que $(a, x) \in \Omega_0 \times \Omega_n$ et telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\Omega_{k-1} \cap \Omega_k \neq \emptyset$. Puisque π majore tous les G^i , chaque part Ω_k est incluse dans une part π_k de π . Or la condition de jonction $\Omega_{k-1} \cap \Omega_k \neq \emptyset$ montre que les parts π_{k-1} et π_k se rencontrent, donc sont égales; ceci tenant pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les parts π_k sont toutes égales.

On vient de montrer que a et x étaient dans une même part π_x de π . Mais les parts π_x (lorsque x varie) se rencontrant toutes en a , elles doivent coïncider. Ainsi, tous les points $x \in p$ sont dans une même part de π , c. q. f. d..

18. à défaut de trouver un terme plus convenable (le dictionnaire de synonymes CRISCO ne nous y a pas aidé)

Remarques 1.6.2.2. (*partitions, graphes et orbites*)

On gagnera à regarder orbites de sous-groupes et parts de partitions sous le même œil : celui d'un graphe où deux sommets sont reliés si et seulement si les éléments correspondants sont dans la même orbite/part. La proposition qui précède montre que le *supremum* de partitions se décrit aisément en termes en composantes connexes (*cf.* démonstration du lemme 1.1.4).

Nous avons montré que l'application Orb, définie sur l'ordre des sous-groupes (d'un gros groupe agissant sur E) à valeurs dans l'ordre achevé $\mathfrak{P}_E$, transforme l'engendré en *supremum*. Mais puisque l'engendré n'est autre que le *supremum* pour l'inclusion dans les sous-groupes, cela montre que

$$\text{Orb est un morphisme d'ordres achevés : } \quad \text{Orb} \left(\bigvee G_i \right) = \bigvee \text{Orb } G_i. \quad (1.120)$$

Lorsque deux ensembles $E \stackrel{\circ}{\sim} F$ sont équipotents, l'isomorphisme associé $\Phi : \mathfrak{P}_E \cong \mathfrak{P}_F$ préserve l'ordre de raffinement. On pourra donc identifier les *ordres* $\mathfrak{P}_E$ et $\mathfrak{P}_F$ (mieux que d'identifier les ensembles). On peut être précis, à savoir montre que Φ est un isomorphisme d'ordres *achevés* :

$$\forall (\pi^i) \in (\mathfrak{P}_E)^I, \quad \Phi(\sup \pi^i) = \sup \Phi(\pi^i). \quad (1.121)$$

Démonstration (Φ croît).

On fixe deux partitions $\pi, \varpi \in \mathfrak{P}_E$ et on déroule les équivalences :

$$\begin{aligned} \Phi(\pi) \leq \Phi(\varpi) &\iff \forall i, \exists j, [\Phi(\pi)]_i \subset [\Phi(\varpi)]_j \\ &\iff \forall i, \exists j, \varphi(\pi_i) \subset \varphi(\varpi_j) \\ &\iff \forall i, \exists j, \pi_i \subset \varpi_j \\ &\iff \pi \leq \varpi. \end{aligned}$$

Démonstration (Φ achevé).

On fixe deux éléments $a, b \in E$ et on déroule les équivalences :

$$\begin{aligned} &a \text{ et } b \text{ sont dans une même part de } \bigvee \Phi(\pi^i) \\ \begin{array}{l} \text{remarque 1.6.2.2} \\ \iff \\ \text{définition de } \Phi \end{array} &\iff \text{il y a une suite finie de parts de certains } \Phi(\pi^i), \text{ mettons } \varphi(\pi_0), \dots, \varphi(\pi_n) \\ &\text{telle que } (a, b) \in \varphi(\pi_0) \times \varphi(\pi_n) \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(\pi_{k-1}) \cap \varphi(\pi_k) \neq \emptyset \\ \begin{array}{l} \varphi \text{ bijective} \\ \iff \end{array} &\iff \text{il y a une suite finie } \pi_0, \dots, \pi_n \text{ de parts de certains } \pi^i \text{ telle que} \\ &(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) \in \pi_0 \times \pi_n \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \pi_{k-1} \cap \pi_k \neq \emptyset \\ \begin{array}{l} \text{remarque 1.6.2.2} \\ \iff \end{array} &\iff \varphi^{-1}(a) \text{ et } \varphi^{-1}(b) \text{ sont dans une même part } p \text{ de } \bigvee \pi^i \\ \begin{array}{l} \varphi \text{ bijective} \\ \iff \\ \text{définition de } \Phi \end{array} &\iff a \text{ et } b \text{ sont dans une même part } \varphi(p) \text{ de } \Phi\left(\bigvee \pi^i\right). \end{aligned}$$

1.6.3 Entrelacement

On dira que des partitions de E sont *entrelacées* (*interlaced*) si leur *supremum* vaut $\max E$. On notera l'entrelacement de deux partitions π et ϖ par le symbole de relation $\tilde{\bowtie}$:

$$\pi \tilde{\bowtie} \varpi \iff \text{par déf. } \pi \text{ et } \varpi \text{ entrelacées.}$$

En termes géométriques, des partitions π^i sont entrelacées si et seulement si le groupe engendré par des groupes quelconques dont les ensembles d'orbites sont les π^i agit *transitivement* sur E .

En remarquant que des partitions sont entrelacées si et seulement si leur *supremum* ne possède qu'une part, on obtient le critère suivant : *des partitions π^i sont entrelacées si et seulement si, pour tous éléments $a, b \in E$, il y a une suite finie de parts de certains π^i telle que la première contienne a , la dernière contienne b et telle que deux successives se rencontrent.*

Par exemple, les partitions $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}$ et $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ sont entrelacées. On peut aller de 1 à 6 en suivant les parts $\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$.

On peut alléger ce critère en ne retenant que les parts (au lieu des points).

Proposition 1.6.3.1. (*critère d'entrelacement*)

Deux partitions π et ϖ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont entrelacées si et seulement si, pour tout $i \neq j$, il y a une suite finie de parts de π ou ϖ telle que la première soit π_i , la dernière soit π_j et telle que deux successives se rencontrent.

Démonstration.

$\Rightarrow$ On prend deux points $(a, b) \in \pi_i \times \pi_j$ et on utilise la proposition 1.6.2.1 d'où la suite cherchée (en rajoutant π_i au début et π_j à la fin).

$\Leftarrow$ On prend deux points a et b distincts, il tombent tous deux dans des parts π_i et π_j . Si ces parts coïncident, c'est fini, sinon on utilise l'hypothèse, ce qui donne la suite cherchée.

On peut contrôler le nombre de parts de deux partitions entrelacées. La proposition suivante est évoquée dans [14] mais non démontrée.

Proposition 1.6.3.2. ([14]) (*longueurs de deux partitions entracées*)

Soient π et ϖ deux partitions entrelacées de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\ell(\pi) + \ell(\varpi) \leq n + 1. \quad (1.122)$$

Démonstration.

On raisonne par récurrence sur $\ell(\pi)$.

Puisqu'une partition d'un ensemble E contient moins de parts que E ne contient d'éléments, on a toujours $\ell(\varpi) \leq n$, d'où l'on tire la relation annoncée lorsque $\ell(\pi) = 1$.

Soit à présent un entier $\ell > 1$ et supposons le résultat acquis pour toutes partitions entrelacées π et ϖ telle que $\ell(\pi) < \ell$. Donnons-nous deux partitions entrelacées π et ϖ telles que $\ell(\pi) = \ell$. Puisque $\ell \geq 2$, on peut considérer deux parts de π distinctes π_a et π_b . Prenons deux éléments $(a, b) \in \pi_a \times \pi_b$. Par entrelacement, il y a une suite $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_k$ comme dans la proposition 1.6.3.1. Les parts de π étant disjointes, nécessairement la première orbite Ω_0 est une part ϖ_0 de ϖ . On définit alors un nouveau couple de partitions π' et ϖ' en remplaçant dans π les deux parts π_a et π_b par leur réunion et en remplaçant dans ϖ la part ϖ_0 par deux parts $\{a\}$ et $\varpi_0 \setminus \{a\}$. Si l'on montre que π' et ϖ' sont entrelacées, on pourra alors appliquer notre hypothèse de récurrence vu que $\ell(\pi') = \ell(\pi) - 1 < \ell$, ce qui donnera

$$n + 1 \geq \ell(\pi') + \ell(\varpi') = (\ell(\pi) - 1) + (\ell(\varpi) + 1) = \ell(\pi) + \ell(\varpi), \text{ c. q. f. d..}$$

Soient donc x et y deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Par entrelacement de π et ϖ , il y a une suite $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_p$ comme dans le critère ci-dessus. Si aucune des orbites ω_i n'est l'une des trois parts ϖ_0, π_1 ou π_2 , alors on a une suite d'orbites de π' et ϖ' comme dans le critère, ce qui conclut. Si l'un des ω_i vaut π_1 ou π_2 , on le remplace très avantageusement par la part $\pi_1 \sqcup \pi_2$ de π' . Reste le cas d'un ω_i valant ϖ_0 : s'il rencontre ω_{i-1} (on pose au besoin $\omega_{-1} := \{a\}$) en autre chose que a , on peut le remplacer sans problème par la part $\varpi_0 \setminus \{a\}$ de ϖ' . Sinon, on remplace ω_{i-1} par la suite (qui relie le point a au reste de ϖ_0) $\pi_1 \sqcup \pi_2, \Omega_n, \Omega_{n-1}, \dots, \Omega_1, \varpi_0 \setminus \{a\}$.

Pour une démonstration plus expéditive, on rappelle qu'un graphe connexe possédant S sommets et A arêtes vérifie la relation $S \leq A + 1$; on considère alors le graphe dont les sommets sont les parts de nos deux partitions, deux parts étant reliées par une arête lorsqu'elles se rencontrent (il y a donc autant d'arêtes que d'éléments dans l'ensemble partitionné, à savoir n).

1.6.4 Fonction de d'MÖBIUS

On peut expliciter la fonction de MÖBIUS sur chacun des ordres $\mathfrak{P}_n$. Pour $\pi \leq \varpi$, on a

$$\mu\left(\frac{\pi}{\varpi}\right) = \varepsilon(\pi\varpi) \prod_{\ell \geq 1} (\ell - 1)!^{m_\ell(\pi\varpi)} \quad (1.123)$$

où $\pi\varpi$ est la partition ensembliste de l'ensemble des parts de π regroupées selon les parts de ϖ .

On vérifiera que le nombre $\mu(\Lambda)$ associé à une multipartition Λ correspond à la valeur de μ entre la partition maximale (la plus grossière) et celle standard associée à Λ :

$$\mu(\Lambda) = \mu\left(\frac{\pi_\Lambda}{\llbracket 1, |\Lambda| \rrbracket}\right). \quad (1.124)$$

1.6.5 Structure des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$

On demande de se rappeler pour toute partition λ les notations des « idempotents » $e_\lambda \in \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{|\lambda|}]$, blocs $E_\lambda \subset \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{|\lambda|}]$ et projecteurs $\text{pr}_\lambda \in L(\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{|\lambda|}])$ de la section 1.4.4.

Vu que nous allons travailler sur le groupe symétrique de plusieurs parties distinctes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (les parts π_i), nous rappellerons la partie correspondante P par un exposant en écrivant pour toute partition $\lambda \vdash |P|$

$$e_\lambda^P, \quad E_\lambda^P := \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_P] e_\lambda^P \quad \text{et} \quad \text{pr}_\lambda^P : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_P] & \twoheadrightarrow & E_\lambda^P \\ x & \mapsto & \frac{E_\lambda^P}{|P|!} e_\lambda^P x \end{array} \right. \quad (1.125)$$

Fixons une partition $\pi \in \mathfrak{P}_n$ dont on numérottera les parts (π_i) de façon standard.

L'isomorphisme $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi] \cong \bigotimes_i \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{\pi_i}]$ nous permet de plonger les $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{\pi_i}]$ dans $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ et ainsi de voir, pour toute famille $\vec{\lambda}$ de partition $(\lambda^i \vdash |\pi_i|)$, les « idempotents » $e_{\vec{\lambda}}^{\pi_i}$ et les blocs $E_{\vec{\lambda}}^{\pi_i}$ respectivement comme des éléments et des parties de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$.

Selon cette vision, on peut définir le produit (commutatif)

$$e_{\vec{\lambda}}^\pi := \prod_i e_{\lambda^i}^{\pi_i} \quad (1.126)$$

ainsi que le bloc

$$E_{\vec{\lambda}}^\pi := \bigotimes_i E_{\lambda^i}^{\pi_i} = \bigotimes_i \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{\pi_i}] e_{\lambda^i}^{\pi_i} = \left(\prod_i e_{\lambda^i}^{\pi_i} \right) \bigotimes_i \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{\pi_i}] \cong e_{\vec{\lambda}}^\pi \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]. \quad (1.127)$$

Cela permet de décomposer l'algèbre du sous-groupe de YOUNG $\mathfrak{S}_\pi$

$$\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi] \cong \bigotimes_i \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{\pi_i}] \cong \bigotimes_i \bigoplus_{\lambda^i \vdash |\pi_i|} E_{\lambda^i}^{\pi_i} \cong \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{P}_{|\pi_i|}} \bigotimes_i E_{\lambda^i}^{\pi_i} = \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{P}_{|\pi_i|}} E_{\vec{\lambda}}^\pi. \quad (1.128)$$

Vu la définition de $e_{\vec{\lambda}}^\pi$ qui ne dépend pas de l'ordre des λ^i , les blocs $E_{\vec{\lambda}}^\pi \cong e_{\vec{\lambda}}^\pi \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ à multipartition $\{\lambda^i\}$ fixée sont deux à deux isomorphes – notons $E_{\vec{\lambda}^i}^\pi$ n'importe lequel d'entre eux et observons que $\{\lambda^i\}$ et π ont même profil. Or la numérotation standard des parts π_i montre que les $\vec{\lambda}$ apparaissant sont formées de partitions *décroissant* en taille – mais non nécessairement rangées par ordre lexicographique. Par conséquent, si l'on fixe une multipartition Λ de profil type π , il y aura autant de familles $\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{P}_{|\pi_i|}$ telles que $\{\lambda^i\} = \Lambda$ que de symétries scindées de Λ , d'où¹⁹ $|\text{Sym}^\pi \Lambda|$ blocs isomorphes à E_Λ^π .

Il en résulte la décomposition

$$\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi] \cong \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{P}_{|\pi_i|}} E_{\vec{\lambda}}^\pi \cong \bigoplus_{|\Lambda| = \text{type } \pi} \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{P}_{|\pi_i|}}^{\{\lambda^i\} = \Lambda} E_\Lambda^\pi \cong \bigoplus_{|\Lambda| = \text{type } \pi} (E_\Lambda^\pi)^{\oplus |\text{Sym}^\pi \Lambda|}. \quad (1.129)$$

19. Ce paragraphe motivira – on l'espère – la définition de $|\text{Sym}^\pi \Lambda|$.

Remarque 1.6.5.1.

La projection $\text{pr}_{\vec{\lambda}}^{\pi} := \bigotimes_i \text{pr}_{\lambda^i}^{\pi_i}$ sur le bloc $E_{\vec{\lambda}}^{\pi}$ agit par

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\vec{\lambda}}^{\pi} &= \bigotimes_i \text{pr}_{\lambda^i}^{\pi_i} = \bigotimes_i \frac{\dim \lambda^i}{|\lambda^i|!} e_{\lambda^i}^{\pi_i} \text{Id}^{\pi_i} = \left(\prod_i \frac{\dim \lambda^i}{|\lambda^i|!} \right) \left(\bigotimes_i e_{\lambda^i}^{\pi_i} \right) \left(\bigotimes_i \text{Id}^{\pi_i} \right) \\ &= \frac{\dim \vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|!} e_{\vec{\lambda}}^{\pi} \text{Id}^{\pi} \text{ avec les notations évidentes.} \end{aligned} \quad (1.130)$$

1.7 Permutations scindées

Cette notion a été suggérée par J.-Y. THIBON et V. FÉRAY lors du séminaire hebdomadaire de l'IGM puis développée par P.-L. MÉLIOT à la fin 2009. Les permutations scindées correspondent exactement aux permutations colorées de M. KAZARIAN dans [14].

On fixe un entier $n \geq 0$ pour toute la section.

1.7.1 Le monoïde $\mathfrak{S}_n^s$

Une **permutation scindée** (*split permutation*) de taille n est un couple (σ, π) de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{P}_n$ telle que $\text{Orb } \sigma \leq \pi$, ce qui revient à dire $\sigma \in \mathfrak{S}_{\pi}$. On note $\mathfrak{S}_n^s$ l'ensemble des permutations scindées de taille n . Le **type** ou **profil** d'une permutation scindée (σ, π) de taille n est la multipartition formée des profils des restrictions de σ aux parts de π ; on la note

$$\text{type} \left(\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \right) := \{ \text{type } \sigma|_{\pi_i} \} \models n \quad (1.131)$$

(la numérotation (π_i) des parts est quelconque).

En comptant à π fixé, on obtient le cardinal

$$|\mathfrak{S}_n^s| = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_n} \prod_i |\pi_i|!. \quad (1.132)$$

En comptant à σ fixé, on obtient $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B_{\#\text{cycles de } \sigma}$ où B_k est le k -ième nombre de BELL (correspondant au « coloriage » de certains cycles de σ pour obtenir π), d'où en regroupant les σ selon leur classe de conjugaison

$$|\mathfrak{S}_n^s| = \sum_{\lambda \vdash n} |C_{\lambda}| B_{\ell(\lambda)}. \quad (1.133)$$

La suite des $|\mathfrak{S}_m^s|$ pour $m \geq 1$ va comme suit :

$$1, 3, 13, 73, 501, 4051, 37633, 394353, 4596553, 58941091... \quad (1.134)$$

Les ensembles $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{P}_n$ étant des monoïdes pour (respectivement) la composition $\circ$ et le *supremum* $\vee$, l'ensemble des permutations scindées a une structure naturelle de monoïde produit donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \rho \\ \varpi \end{pmatrix} \right) := \left(\begin{pmatrix} \sigma \circ \rho \\ \pi \vee \varpi \end{pmatrix} \right). \quad (1.135)$$

Il faut vérifier pourquoi $\pi \vee \varpi$ est plus grossière que $\text{Orb } (\sigma \circ \rho)$:

$$\pi \vee \varpi \stackrel{\pi \geq \text{Orb } \sigma}{\geq} \text{Orb } \sigma \vee \text{Orb } \rho \stackrel{\text{Orb } \text{achevé}}{=} \text{Orb } \langle \sigma, \rho \rangle \stackrel{\text{Orb } \text{croit}}{\geq} \text{Orb } \langle \sigma \circ \rho \rangle = \text{Orb } (\sigma \circ \rho).$$

1.7.2 L'algèbre $\mathcal{A}_n$ des invariants : classes de conjugaison et multipartitions

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{P}_n$ respectivement par conjugaison et image directe (deux fois) :

$$g \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g \circ \sigma \circ g^{-1} \\ g(\pi) := \{g(\pi_i)\} \end{pmatrix}. \quad (1.136)$$

Il est immédiat de vérifier que la partition $g(\pi)$ est plus grossière que $\text{Orb}(g\sigma g^{-1})$ (utiliser l'isomorphisme de conjugaison $\mathfrak{S}_{\pi_i} \cong \mathfrak{S}_{g(\pi_i)}$ induit par la bijection $\pi_i \xrightarrow{g} g(\pi_i)$).

De même, il est aisé de montrer que les actions de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{P}_n$ sont distributives : celle de la conjugaison est classique, celle de l'action sur $\mathfrak{P}_n$ découle de l'isomorphisme des ordres $\mathfrak{P}_E$ et $\mathfrak{P}_F$ lorsque $E = F = \llbracket 1, n \rrbracket$ sont mis en bijection par une transformation quelconque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Il en résulte la distributivité de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n^s$:

$$g \cdot \left[\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \varpi \end{pmatrix} \right] = g \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \times g \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \varpi \end{pmatrix} \quad (1.137)$$

On peut donc affirmer (cf. conclusion 1.3.2.1) que l'algèbre des invariants $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]^{\mathfrak{S}_n}$ est engendrée par les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_n^s$.

À quoi ressemblent ces dernières ?

Donnons-nous une permutation scindée $\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}$ et un conjugué $\begin{pmatrix} g\sigma g^{-1} \\ g(\pi) \end{pmatrix}$ par un $g \in \mathfrak{S}_n$. Alors les permutations $\sigma|_{\pi_i}$ et $g\sigma g^{-1}|_{g(\pi_i)}$ ont même profil pour tout $i = 1, \dots, \ell(\pi)$ puisqu'elles sont conjuguées (c'est l'isomorphisme $\mathfrak{S}_{\pi_i} \cong \mathfrak{S}_{g(\pi_i)}$ induit par g), donc le conjugué $\begin{pmatrix} g\sigma g^{-1} \\ g(\pi) \end{pmatrix}$ a même type que $\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}$.

Soit réciproquement une permutation scindée $\begin{pmatrix} \rho \\ \varpi \end{pmatrix}$ de type $\ell(\text{type } \sigma|_{\pi_i})$. Par définition d'un multi-ensemble, on peut numérotter les parts de π et ϖ de sorte que $(\text{type } \rho|_{\varpi_i}) = (\text{type } \sigma|_{\pi_i})$ pour tout $i = 1, \dots, \ell(\pi)$. Pour un tel i , les permutations $\rho|_{\varpi_i}$ et $\sigma|_{\pi_i}$ sont donc conjuguées, d'où une bijection $g_i : \varpi_i \simeq \pi_i$ telle que $\rho|_{\varpi_i} = g_i \circ \sigma|_{\pi_i} \circ g_i^{-1}$. En recollant les g_i , on obtient une bijection $\sqcup g_i : \sqcup \varpi_i \simeq \sqcup \pi_i$, i. e. une permutation $g \in \mathfrak{S}_n$. Les flèches $\varpi_i \xrightarrow[g]{g_i} \pi_i \xrightarrow{\sigma} \pi_i \xrightarrow[g^{-1]}{g_i^{-1}} \varpi_i$ permettent alors (à i fixé) d'écrire $[g \circ \sigma \circ g^{-1}]|_{\varpi_i} = g_i \circ \sigma \circ g_i^{-1} = \rho|_{\varpi_i}$, d'où (faisant varier i) l'égalité $g \circ \sigma \circ g^{-1} = \rho$. Il en résulte que la permutation scindée $\begin{pmatrix} \rho \\ \varpi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\sigma g^{-1} \\ g(\pi) \end{pmatrix}$ est conjuguée à $\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}$.

Conclusion 1.7.2.1. (les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n^s$)

Deux permutations scindées sont conjuguées si et seulement si elles ont même type.

On note C_Λ la classe de conjugaison correspondant à une multipartition Λ , avec le même abus de notation que pour les C_λ , ce qui nous permet de décrire l'algèbre des invariants :

$$\mathcal{A}_n := \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\Lambda \models n} \mathbb{Q}C_\Lambda \quad \text{avec } C_\Lambda := \sum_{\text{type } S = \Lambda} S. \quad (1.138)$$

La projection $\text{pr}_{\mathcal{A}_n}$ sur $\mathcal{A}_n$ (qui est $\mathcal{A}_n$ -linéaire) envoie un élément $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ sur la moyenne de ses conjugués :

$$\text{pr}_{\mathcal{A}_n} : \begin{cases} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s] & \twoheadrightarrow \mathcal{A}_n \\ S & \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} g \cdot S \\ \sigma^s \in C_\Lambda & \mapsto \tilde{C}_\Lambda := \frac{C_\Lambda}{|C_\Lambda|} \end{cases} \quad (1.139)$$

Dénombrons la classe C_Λ . Choisir un élément de type Λ , c'est choisir d'abord choisir un partition ensembliste $\pi \in \mathfrak{P}_n$ puis un $\text{lg } \Lambda$ -uplet de permutations ayant pour type $(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{\text{lg } \Lambda})$ dans le sous-groupe de YOUNG $\mathfrak{S}_\pi$, ce qui se fait en $\binom{|\Lambda|}{|\Lambda|} |C_{\Lambda_1}| |C_{\Lambda_2}| \cdots |C_{\Lambda_{\text{lg } \Lambda}}|$ choix. On en déduit l'équivalence de la définition (1.93) avec l'identité

$$z_\Lambda = \frac{||\Lambda||!}{|C_\Lambda|}. \quad (1.140)$$

Remarque 1.7.2.2. (quantités associées à une permutation scindée)

On pourra associer à toute permutation scindée n'importe laquelle des quantités que l'on a définies sur les partitions scindées en considérant son type : taille, nombre de couleurs (longueur), nombre de cycles, défaut de coloriage, ramification, hauteur...

Rappelons que, dans le monoïde $\mathfrak{S}_n$, l'algèbre des invariants $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}C_\lambda$ constitue précisément le centre de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$. En remplaçant le monoïde $\mathfrak{S}_n$ par $\mathfrak{S}_n^s$, la proposition suivante montre que la commutativité sera préservée.

Proposition 1.7.2.3. (*caractère abélien de l'algèbre $\mathcal{A}_n$*)

L'algèbre des invariants $\mathcal{A}_n$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$.

Démonstration.

Commençons par observer qu'une algèbre est abélienne si et seulement si l'identité de cette algèbre est un anti-morphisme multiplicatif : il s'agit en effet de comparer les éléments

$$ab = \text{Id}(ab) \text{ et } ba = \text{Id}(b) \text{ Id}(a).$$

Considérons alors l'involution linéaire I définie sur le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ par $I(\frac{\sigma}{\pi}) := (\frac{\sigma^{-1}}{\pi})$. Il s'agit de l'application produit de : « prendre l'inverse » dans $\mathfrak{S}_n$ et l'identité de $\mathfrak{P}_n$. Ces dernières étant des morphismes anti-multiplicatifs (le produit $\vee$ commute dans $\mathfrak{P}_n$), il en est de même pour I . De plus, l'involution I préserve le type, donc induit une permutation sur chaque classe de conjugaison, ce qui permet de montrer qu'elle fixe chacune de ces dernières (vue comme somme de ses éléments), *a fortiori* agit comme l'identité sur le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathcal{A}_n$ qu'elles engendrent. L'observation préliminaire permet de conclure.

1.7.3 Hauteur d'une partition scindée

Bien que la ramification d'une permutation soit le nombre minimal de transpositions la factorisant, la ramification d'une multipartition *n'est pas* en général le nombre minimal de transpositions (totalement scindées) la factorisant. La proposition suivante (tirée de [14]) montre toutefois que cela devient vrai en *corrigant* la ramification à l'aide du (double du) défaut de coloriage. Ce dernier mesure donc le *défait* de l'interprétation de la ramification comme nombre minimal de transpositions factorisantes.

Proposition 1.7.3.1. (KAZARIAN [14]) (*hauteur d'une multipartition et factorisations en transpositions*)

La hauteur d'une multipartition Λ est le nombre minimal de transpositions totalement scindées nécessaires pour factoriser une permutation scindée de profil Λ .

Démonstration.

Appelons m le nombre minimal précisé dans l'énoncé.

Pour montrer l'inégalité $m \leq \text{ht } \Lambda$, il suffit de donner une factorisation d'une permutation scindée $(\frac{\sigma}{\pi})$ de profil Λ en un produit de $\text{ht } \Lambda$ transpositions totalement scindées. On sait déjà que $\wp(\sigma) = |\wp(\Lambda)| = \text{rf } \Lambda$ transpositions suffisent à factoriser σ . En scindant totalement ces transpositions, leur produit vaut $(\frac{\sigma}{\text{Orb } \sigma})$. Afin de joindre les cycles de σ d'une même part de π , il suffit de multiplier par le carré d'une transposition joignant deux cycles de σ successifs (il en suffit de $\ell - 1$ par part de longueur ℓ), ce qui fait $2\wp(\ell(\Lambda)) = 2\text{dc } \Lambda$ transpositions totalement scindées supplémentaires. Il en résulte l'inégalité souhaitée en se rappelant que

$$\text{rf } \Lambda + 2\text{dc } \Lambda = (\wp(|\Lambda|) - \text{dc } \Lambda) + 2\text{dc } \Lambda = \wp(|\Lambda|) + \wp(\ell(\Lambda)) = \text{ht } \Lambda.$$

Pour montrer l'inégalité contraire $\text{ht } \Lambda \leq m$, il suffit de montrer que multiplier une permutation scindée $(\frac{\sigma}{\pi})$ par une transposition totalement scindée $(a, b)^s$ n'augmente pas la hauteur de plus de 1 (on part de l'identité totalement scindée dont la hauteur est nulle). Trois cas se présentent.

1. les éléments a et b appartiennent à un même cycle de σ . Alors ce cycle est coupé en deux, ce qui décrémente la ramification et incrémente le défaut de coloriage.

2. les éléments a et b appartiennent à deux cycles différents de σ situés dans deux parts différentes de π . Alors ces cycles et ces parts sont joints, ce qui ne change pas le défaut de coloriage mais incrémente la ramification.
3. les éléments a et b appartiennent à deux cycles différents de σ situés dans une même part de π . Alors ces cycles sont joints, ce qui incrémente la ramification et décrémente le défaut de coloriage.

Dans ces trois cas, la hauteur n'a pas été augmentée de plus de 1, *c. q. f. d.*

Corollaire 1.7.3.2. (*valeurs prises par la hauteur d'une multipartition*)

1. La hauteur d'une permutation scindée est sous-additive :

$$\forall S, T \in \mathfrak{S}_n^s, \quad \text{ht } ST \leq \text{ht } S + \text{ht } T. \quad (1.141)$$

2. Une multipartition est de hauteur nulle si et seulement si sa réduite est vide :

$$\text{ht } \Lambda = 0 \iff \mathring{\Lambda} = \emptyset. \quad (1.142)$$

3. La hauteur d'une multipartition est inchangée par ajout ou suppression de cycles $\mathfrak{s}$ -fixes :

$$\text{ht } \bar{\Lambda} = \text{ht } \Lambda = \text{ht } \mathring{\Lambda}. \quad (1.143)$$

4. La ramification d'une partition λ vaut la hauteur de la partition totalement scindée associée :

$$\wp(\lambda) = \text{ht } \lambda^s. \quad (1.144)$$

5. La hauteur d'une multipartition non vide est non nulle et majorée par le double de la taille décrémentée de sa réduite :

$$\forall \Lambda \neq \emptyset, \quad 1 \leq \text{ht } \Lambda \leq 2 \left\| \mathring{\Lambda} \right\| - 2. \quad (1.145)$$

6. Une multipartition de taille n est de hauteur maximale $2n - 2$ si et seulement si elle est composée d'une seule partition de ramification minimale 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \text{ht } \Lambda = 2n - 2 \\ \|\Lambda\| = n \end{array} \right\} \iff \Lambda = \wr(1^n)\mathfrak{s}. \quad (1.146)$$

7. La taille d'une multipartition réduite est majorée par le double de sa hauteur

$$\mathring{\Lambda} = \Lambda \implies \|\Lambda\| \leq 2 \text{ht } \Lambda \quad (1.147)$$

avec égalité si et seulement si toutes ses parts sont des $\square\square$:

$$\left\| \mathring{\Lambda} \right\| = \text{ht } \Lambda \implies \mathring{\Lambda} = \wr \square\square \square\square \dots \square\square \mathfrak{s}. \quad (1.148)$$

Démonstration.

1. Immédiat d'après la proposition 1.7.3.1.
2. Le produit vide sur $\mathfrak{S}_n^s$ est réduit à Id^s , d'où l'équivalence en invoquant la proposition 1.7.3.1.
3. La ramification $\text{rf } \Lambda = \wp(\sqcup \Lambda)$ et le défaut de coloriage $\text{dc } \Lambda = \wp(\ell(\Lambda))$ sont inchangés par ajout ou suppression de cycles $\mathfrak{s}$ -fixes. Il en est donc de même pour toute fonction de ces derniers, *a fortiori* la hauteur $\text{ht} = \text{rf} + 2 \text{dc}$.
4. Une partition totalement scindée ayant toutes ses parts de longueur 1, son défaut de coloriage est nul. Par ailleurs, sa ramification vaut celle de sa concaténée $\sqcup \lambda^s = \lambda$, ce qui conclut :

$$\text{ht } \lambda^s = \text{rf } \lambda^s + 2 \text{dc } \lambda^s = \wp(\lambda) + 0.$$

5. On utilise l'expression $\text{ht } \Lambda = \wp(|\Lambda|) + \wp(\ell(\Lambda))$ ainsi que les majorations $\wp(\lambda) \leq |\lambda| - 1$ (valide pour toute partition λ non vide) et $|\ell(\Lambda)| \leq \|\Lambda\|$ (le nombre de cycles est toujours plus petit que la taille) puis on remplace Λ par sa réduite (ce qui ne change pas la hauteur), d'où l'inégalité de droite. (Celle de gauche résulte du point 2.)

6. Le cas d'égalité dans le point 5 force les partitions $|\Lambda|$ et $\ell(\Lambda)$ à être de ramification maximale $n-1$, i. e. à valoir toutes deux le n -cycle $|\Lambda| = (n) = \ell(\Lambda)$, ce qui implique au passage le troisième cas d'égalité $|\ell(\Lambda)| = ||\Lambda||$. On aura donc égalité dans le point 3 si et seulement si : premièrement Λ est formée d'une seule part λ de taille n , secondement le nombre de parts de λ vaut n . Ces deux conditions équivalent bien à $\Lambda = \mathcal{Z}(1^n)\mathcal{S}$.
7. Observer qu'une partition (entière) réduite λ vérifie

$$|\lambda| = \sum \lambda_i \geq \sum 2 = 2\ell(\lambda), \text{ d'où l'on tire } 2\wp(\lambda) = |\lambda| + (|\lambda| - 2\ell(\lambda)) \geq |\lambda|$$

avec égalité si et seulement si toutes les parts λ_i valent 2. Il en résulte $||\Lambda|| = \sum |\Lambda_i| \leq \sum 2\wp(\Lambda_i) = 2\text{rf } \Lambda \leq 2\text{ht } \Lambda$, avec égalité si et seulement si d'une part tous les cycles de Λ sont des $\square\square$ (premier cas d'égalité $|\Lambda_i| = 2\wp(\Lambda_i)$), d'autre part si toutes les parts Λ_i sont de longueur 1 (défaut de coloriage nul). Ces conditions équivalent bien au cas d'égalité annoncé.

1.7.4 L'isomorphisme $o : \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s] \cong \bigoplus_{\pi \in \mathfrak{P}_n} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$

Nous allons voir que la structure de l'algèbre du monoïde $\mathfrak{S}_n^s$ se ramène à celle des algèbres des sous-groupes de YOUNG $\mathfrak{S}_\pi$ où π parcourt les partitions de $[1, n]$.

L'idée utilisée (par P.-L. MÉLIOT) est inspirée très directement d'IVANOV et KEROV [12].

Pour $\pi \in \mathfrak{P}_n$, on définit un **morphisme d'oubli**

$$o^\pi : \begin{cases} \mathfrak{S}_n^s & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi] \\ \left(\frac{\sigma}{\varpi}\right) & \longmapsto & \begin{cases} \sigma \text{ si } \pi \geq \varpi \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (1.149)$$

C'est un morphisme de monoïdes : à $\left(\frac{\sigma}{\varpi}\right), \left(\frac{\rho}{\omega}\right)$ fixés dans $\mathfrak{S}_n^s$, on a en effet

$$\begin{aligned} o^\pi\left(\frac{\sigma}{\varpi}\right) \times o^\pi\left(\frac{\rho}{\omega}\right) &= \begin{cases} \sigma \text{ si } \pi \geq \varpi \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \times \begin{cases} \rho \text{ si } \pi \geq \omega \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \sigma \times \rho \text{ si } \pi \geq \varpi \text{ et } \pi \geq \omega \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma\rho \text{ si } \pi \geq \varpi \vee \omega \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = o^\pi\left(\frac{\sigma\rho}{\omega \vee \varpi}\right) = o^\pi\left(\left(\frac{\sigma}{\varpi}\right)\left(\frac{\rho}{\omega}\right)\right). \end{aligned} \quad (1.150)$$

On peut par conséquent étendre o^π à toute l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ du monoïde $\mathfrak{S}_n^s$ et considérer leur somme (directe externe à l'image).

Proposition 1.7.4.1. (l'isomorphisme o)

1. Le morphisme o suivant est un isomorphisme :

$$o := \sum_{\varpi \in \mathfrak{P}_n} o^\varpi : \begin{cases} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s] & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{\varpi \in \mathfrak{P}_n} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\varpi] \\ \left(\frac{\sigma}{\pi}\right) & \longmapsto & \sum_{\varpi \geq \pi} \sigma \end{cases} \quad (1.151)$$

2. La préimage par o d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_\pi$ d'un bloc $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ fixé est

$$o^{-1}(\sigma) = [o^\pi]^{-1}(\sigma) = \sum_{\varpi \geq \pi} \mu\left(\frac{\pi}{\varpi}\right)\left(\frac{\sigma}{\varpi}\right). \quad (1.152)$$

3. L'isomorphisme o commute aux actions respectives de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n^s$ et $\mathfrak{S}_\pi$ pour tout $\pi \in \mathfrak{P}_n$:

$$\forall (g, x) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n^s, \quad o(g \cdot x) = g \cdot (o(x)). \quad (1.153)$$

Démonstration.

1. Déjà, vu que la dimension de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ est le cardinal de $\mathfrak{S}_n^s$, à savoir $\sum_{\varpi \in \mathfrak{P}_n} \prod_i |\varpi_i|!$, autrement dit la dimension de $\bigoplus_{\varpi \in \mathfrak{P}_n} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\varpi]$, il reste à montrer que o est surjective, *i. e.* qu'elle atteint la base de $\bigoplus_{\varpi \in \mathfrak{P}_n} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\varpi]$ formée des $f(\frac{\sigma}{\varpi}) := \sigma$ pour $(\frac{\sigma}{\varpi})$ décrivant $\mathfrak{S}_n^s$. Mais cela découle de la formule d'inversion de ROTA (1.10) vu la relation $o : (\frac{\sigma}{\pi}) \mapsto \sum_{\varpi \geq \pi} f(\frac{\sigma}{\varpi})$.
2. Il suffit d'explicitier à $\sigma \in \mathfrak{S}_\pi$ fixé la formule de ROTA que nous venons d'invoquer :

$$\sigma = f\left(\frac{\sigma}{\pi}\right) = \sum_{\varpi \geq \pi} \mu\left(\frac{\pi}{\varpi}\right) o\left(\frac{\sigma}{\varpi}\right) = o\left(\sum_{\varpi \geq \pi} \mu\left(\frac{\pi}{\varpi}\right) \left(\frac{\sigma}{\varpi}\right)\right).$$

3. Par ailleurs, à $\pi \in \mathfrak{P}_n$ fixé, pour $g \in \mathfrak{S}_n$ agissant sur un $x := (\frac{\sigma}{\varpi}) \in \mathfrak{S}_n^s$, on a

$$\begin{aligned} g \cdot (o^\pi(x)) &= g \cdot \left(o^\pi\left(\frac{\sigma}{\varpi}\right)\right) = g \cdot \left(\begin{cases} \sigma & \text{si } \pi \geq \varpi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right) = \begin{cases} g \cdot \sigma & \text{si } \pi \geq \varpi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &\stackrel{\text{croissance de}}{=} \begin{cases} g \cdot \sigma & \text{si } g \cdot \pi \geq g \cdot \varpi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \stackrel{\omega \mapsto \{g(\omega_i)\}}{=} o^{g \cdot \pi}\left(\frac{g \cdot \sigma}{g \cdot \varpi}\right) = o^{g \cdot \pi}(g \cdot x), \end{aligned}$$

d'où par somme

$$\begin{aligned} g \cdot o(x) &= g \cdot \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{P}_n} o^\pi(x)\right) = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_n} g \cdot (o^\pi(x)) = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_n} o^{g \cdot \pi}(g \cdot x) \\ &= \sum_{\pi' \in g \cdot \mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_n} o^{\pi'}(g \cdot x) = \sum_{\pi' \in \mathfrak{P}_n} o^{\pi'}(g \cdot x) = o(g \cdot x), \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

1.7.5 La structure de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$

Il résulte de l'isomorphisme o le fait annoncé : la structure de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ se ramène à celle des $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ pour π décrivant $\mathfrak{P}_n$. Or cette dernière a déjà été élucidée section 1.6.5 : il en découle

$$\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s] \stackrel{o}{\cong} \bigoplus_{\pi \in \mathfrak{P}_n} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi] \cong \bigoplus_{\pi \in \mathfrak{P}_n} \bigoplus_{|\Lambda| = \text{type } \pi} (E_\Lambda^\pi)^{\oplus |\text{Sym}^s \Lambda|} \quad (1.154)$$

$$\cong \bigoplus_{\Lambda \models n} \bigoplus_{\text{type } \pi = |\Lambda|}^{\pi \in \mathfrak{P}_n} (E_\Lambda^\pi)^{\oplus |\text{Sym}^s \Lambda|} = \bigoplus_{\Lambda \models n} \left[\bigoplus_{\text{type } \pi = |\Lambda|}^{\pi \in \mathfrak{P}_n} E_\Lambda^\pi \right]^{\oplus |\text{Sym}^s \Lambda|}. \quad (1.155)$$

Fixons une multipartition $\Lambda \models n$. En notant

$$E_\Lambda := E_\Lambda^{\pi_\Lambda}, \quad (1.156)$$

alors tous les E_Λ^π avec π de profil $|\Lambda|$ sont isomorphes à $E_\Lambda \subset \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{\pi_\Lambda}]$ *via* des conjugaisons qui échangent les $e_{\frac{\pi}{\lambda}}^\pi$ correspondant. Or, pour choisir une partition ensembliste de profil $(c_1 \geq \dots \geq c_\ell)$, l'on doit choisir les parts connaissant leurs cardinaux c_i , d'où un multinomial $\binom{n}{c_1 \dots c_\ell}$; mais, une partition ensembliste ne voyant pas l'ordre, l'on doit diviser par les réordonnements des parts choisies de même taille (car ces réordonnements seront indiscernables dans la multipartition associée). Finalement, le nombre de blocs dans $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ isomorphes à E_Λ vaut²⁰

$$\binom{n}{|\lambda^1| \dots |\lambda^\ell|} \frac{|\text{Sym}^s \Lambda|}{\prod_{\ell \geq 1} m_\ell(|\Lambda|)!} = \frac{n!}{|\Lambda|! \prod_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\Lambda)!} = b(\Lambda). \quad (1.157)$$

Par conséquent, on dispose d'un isomorphisme

$$\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s] \cong \bigoplus_{\Lambda \models n} (E_\Lambda)^{\oplus b(\Lambda)}. \quad (1.158)$$

²⁰. ce passage motive la définition du nombre de blocs $b(\Lambda)$

Il ne coûterait pas grand chose d'aller jusqu'aux représentations irréductibles de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$; il suffit de revenir à la définition des

$$E_{\lambda}^{\pi} = \bigotimes_i E_{\lambda^i}^{\pi_i} \cong \bigotimes_i (V_{\lambda^i}^{\pi_i})^{\oplus \dim \lambda^i} \cong \left[\bigotimes_i V_{\lambda^i}^{\pi_i} \right]^{\oplus \prod_i \dim \lambda^i}. \quad (1.159)$$

Les modules $V_{\lambda^i}^{\pi_i}$ étant chacun à i fixé une représentation irréductible de l'algèbre $\mathfrak{S}_{\pi_i}$, leur produit tensoriel est (cf. [22]) une représentation irréductible de leur produit tensoriel $\bigotimes \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{\pi_i}] \cong \mathbb{Q}[\prod_i \mathfrak{S}_{\pi_i}] = \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{\pi}]$. On a donc bien toutes les représentations irréductibles de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$.

1.7.6 L'exemple de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_4^s]$

Les quatorze multipartitions de taille 4 sont (par ordre décroissant)

$$\begin{aligned} & [\square\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], \\ & [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square], [\square\square\square]. \end{aligned}$$

Le seul groupe de symétries scindées non trivial est $\text{Sym}^s[\square\square\square] \cong \mathfrak{S}_2$. Les nombres de blocs correspondant sont donc

$$1, 1, 1, 1, 1, \quad 4, 4, 4, \quad 3, 6, 3, \quad 6, 6, \quad 1.$$

Les dimensions des E_{Λ} sont les carrés des $\dim \lambda$, à savoir les carrés de

$$1, 3, 2, 3, 1, \quad 1, 2, 1, \quad 1, 1, 1, \quad 1, 1, \quad 1.$$

Vérifions que la somme des $b(\Lambda)$ pondérée par les $(\dim \lambda)^2$ fait bien $|\mathfrak{S}_4^s| = 73$:

$$(1 + 9 + 4 + 9 + 1) + 4(1 + 4 + 1) + 3(1 + 2 + 1) + 6(1 + 1) + 1 = 73.$$

Les contenus seront également utiles :

$$6, 2, 0, -2, -6, \quad 3, 0, -3, \quad 2, 0, -2, \quad 1, -1, \quad 0.$$

On peut par ailleurs calculer la matrice de la multiplication par la classe de la multipartition $\square\square\square = \{ \square\square\square\square \}$ dans la base ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \cdot & 3 & 4 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 2 & \cdot & 6 & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable, son spectre en tant que multi-ensemble est formé précisément des quatorze contenus ci-dessus. Ces faits généraux seront démontrés au chapitre 4.

Chapitre 2

Vers les nombres d'HURWITZ : l'algèbre

$$\mathcal{A} = \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right] \text{ et}$$

l'intégration sur l'espace $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ des modules des courbes

Nous présentons dans ce chapitre des outils moins classiques plus spécifiques au problème d'HURWITZ.

On commence par présenter l'algèbre $\mathcal{A} := \mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right]$ suivant l'article [29]. Nous introduisons le symbole de Z -égalité $\stackrel{Z}{=}$ afin de retenir, dans des identités entre séries de $\mathcal{A}$, uniquement l'information sur l'*asymptotique* de leur terme général. Nous présentons également à la section 2.1.7 une *déformation* de l'algèbre $\mathcal{A}$ qui nous servira au chapitre 3 pour le calcul de la série $H^0(\{a\}, \{b\})$.

Nous rappelons dans une deuxième partie les *origines topologiques* du problème d'HURWITZ et quelques liens avec les cartes. Plus essentiel, on y définit à la section 2.2.5 les *nombres d'HURWITZ* $h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ et les *séries d'HURWITZ* $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ ainsi que leurs normalisations par les facteurs $\boxed{\lambda} := \frac{1}{\#\text{Sym } \lambda} \prod \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{\lambda_i!}$.

Nous présentons dans une troisième partie l'*appareil cohomologique* des intégrales de HODGE de la formule ELSV. (Précisons qu'il s'agit bien d'une *présentation* « from scratch » destinée à des *combinatoriciens*, sans aucune prétention à pénétrer en géométrie algébrique.) Nous rappelons les relations (*des cordes* et *du dilaton*) et le théorème (*de* KONTSEVITCH) permettant de coder tous les *chevrons de WITTEN* $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_k} \rangle$. Nous donnons la *formule ELSV* reliant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\lambda)$ aux chevrons de WITTEN. Nous énonçons enfin le *théorème de KAZARIAN* cité dans [30], qui explicite les séries d'HURWITZ $H^g(\lambda)$ à une partition comme polynômes en Y et Z , et en donnons une preuve dans les détails (celle de [14] étant non publiée et un peu rapide à nos yeux).

2.1 L'algèbre $\mathcal{A} = \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right]$

Suivant l'article [29] de D. ZVONKINE, nous présentons ici l'algèbre de séries formelles en l'indéterminée¹ t

$$\mathcal{A} := \mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n \right] \quad (2.1)$$

dont l'étude de l'asymptotique de ses éléments est achevée. Puisque les séries génératrices des nombres d'HURWITZ tombent toutes dedans (sauf une), il en résultera l'asymptotique de ces derniers.

Selon [29] (haut de page 7), la découverte de cette algèbre semble due à D. ZAGIER et (indépendamment) à D. ZVONKINE.

1. L'article originel prenait pour indéterminée q .

2.1.1 Identités basiques

Rappelons qu'un **arbre de CAYLEY** est un arbre dont les n sommets sont numérotés de 1 à n . C'est un fait classique qu'il y a n^{n-2} arbres de CAYLEY à n sommets². La série génératrice exponentielle associée vaut donc $\sum_{n \geq 0} \frac{n^{n-2}}{n!} t^n$. Pour retomber sur les générateurs de $\mathcal{A}$, que nous appellerons

$$Y := \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n \quad \text{et} \quad Z := \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n, \quad (2.2)$$

il suffit compter les arbres de CAYLEY possédant un ou deux sommets marqués : on parle d'**arbres enracinés**. On déduit de cette description l'égalité

$$Y = te^Y. \quad (2.3)$$

En effet, Y est la série génératrice exponentielle pour les arbres de CAYLEY enracinés, donc e^Y est la série génératrice exponentielle pour les forêts de tels arbres. Rajoutons un nouveau sommet à notre forêt et relierons-le aux racines des arbres de cette dernière. On retombe sur un arbre enraciné. La correspondance étant clairement biunivoque, on a montré l'identité.

(Signalons que la série Y n'est autre que la **fonction de LAMBERT** $W : t \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} t^n$ évaluée en $-t$. Cette dernière fonction vérifie l'équation $W(t) e^{W(t)} = t$, est holomorphe sur le disque centré en l'origine de rayon $\frac{1}{e}$ et apparaît dans de nombreux domaines mathématiques et physiques. Elle peut fournir un changement de variable judicieux dans les problèmes combinatoires dendrologiques.)

On remarquera que les coefficients de Z s'obtiennent à partir de ceux de Y par multiplication par n , i. e. en appliquant l'opérateur différentiel

$$D := t \frac{\partial}{\partial t} : (a_n) \mapsto (na_n). \quad (2.4)$$

Cela permet d'écrire

$$Z = DY. \quad (2.5)$$

En remplaçant Y par te^Y , on obtient

$$Z = D(te^Y) = t \cdot e^Y + t \cdot e^Y (DY) = Y(1 + Z),$$

ce qui permet de linéariser le produit

$$YZ = Z - Y. \quad (2.6)$$

Cette dernière égalité permet de se débarrasser des « termes croisés » d'une série de $\mathcal{A}$; en d'autres termes :

$$\mathcal{A} = \mathbb{Q}[Y] + \mathbb{Q}[Z]. \quad (2.7)$$

Ainsi, pour calculer dans $\mathcal{A}$, il suffit de s'intéresser aux puissances de Y et Z .

On remarquera au passage que la relation $YZ = Z - Y$ se réécrit

$$(1 - Y)(1 + Z) = 1,$$

ce qui montre que l'algèbre $\mathcal{A}$ est formellement isomorphe à $\mathbb{Q}[X, X^{-1}]$ avec $\{X, X^{-1}\} := \{1 - Y, 1 + Z\}$.

On établira par des récurrences immédiates sur un entier $k \geq 0$ les identités

$$\begin{cases} Y^k Z = Z - Y - Y^2 - Y^3 - \dots - Y^k \\ YZ^k = Z^k - Z^{k-1} + Z^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} Z + (-1)^k Y \end{cases} \quad (2.8)$$

Par commodité, on utilisera un pseudo-inverse de l'opérateur D , défini par

$$D^{-1} : \sum_{n \geq 0} a_n t^n \mapsto 0 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} t^n. \quad (2.9)$$

2. En marquant deux sommets, il s'agit de mettre en bijection ces arbres avec les applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour ce faire, JOYAL associe à une telle application f une partie E maximale où f est bijective (il suffit de rechercher des cycles). En écrivant $E = (a_0 < \dots < a_p)$ et $f(E) = (a_{\sigma(0)}, \dots, a_{\sigma(p)})$, on range les $a_{\sigma(i)}$ sur une ligne puis on relie les autres nombres en itérant f .

Ce qui va suivre permettra de décrire l'algèbre $\mathcal{A}$ comme suit, ce qui montrera sa stabilité par D :

$$\mathcal{A} = \mathbb{Q}[D, D^{-1}](Z) + \mathbb{Q}[D](Z^2). \quad (2.10)$$

En d'autres termes, si l'on note $Z^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{A_n}{n!} t^n$, toute série de $\mathcal{A}$ s'écrira sous la forme

$$\text{const} + \sum_{n \geq 1} \frac{L(n) n^n + P(n) A_n}{n!} t^n \quad (2.11)$$

où L un polynôme de LAURENT et P un polynôme usuel.

2.1.2 La sous-algèbre $\mathbb{Q}[Y]$

Proposition 2.1.2.1. (ZVONKINE [29]) (polynômes en Y)

1. L'algèbre $\mathbb{Q}[Y]$ est stable par D^{-1} : on a pour tout entier $a \geq 1$

$$D^{-1} \frac{Y^a}{a} = \sum_{n \geq a} \frac{n^{\downarrow a}}{n^{a+2}} \frac{n^n}{n!} t^n = \frac{1}{a} \left(\frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1} \right). \quad (2.12)$$

2. Les puissances de Y sont données par la formule (pour tout entier $k \geq 1$)

$$\frac{Y^k}{k} = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{\downarrow k}}{n^{k+1}} \frac{n^n}{n!} t^n = \sum_{n \geq k} \frac{n^{n-k-1}}{(n-k)!} t^n. \quad (2.13)$$

3. L'algèbre engendrée par Y est linéairement engendrée par les $D^{-k}(Z)$ pour k parcourant $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{Q}[Y] = \mathbb{Q}[D^{-1}](Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{Q} D^{-k}(Z). \quad (2.14)$$

4. La matrice de la base $\left(\frac{Y^k}{k}\right)_{k \geq 1}$ dans la base $(D^{-k}Z)_{k \geq 0}$ est

$$\text{Pass } (D^{-k}Z)_{k \geq 0}, \left(\frac{Y^k}{k}\right)_{k \geq 1} = \left((-1)^j e_j(1, 2, \dots, i)\right)_{i, j \geq 0}. \quad (2.15)$$

Ses six premiers « termes » sont

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & -3 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & -6 & 11 & -6 & \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & -10 & 35 & -50 & 24 & \cdot & \cdots \\ 1 & -15 & 85 & -225 & 274 & -120 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} d'inverse \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & -\frac{7}{4} & \frac{11}{12} & -\frac{1}{6} & \cdot & \cdot & \cdots \\ 1 & -\frac{15}{8} & \frac{85}{85} & -\frac{25}{72} & \frac{1}{24} & \cdot & \cdots \\ 1 & -\frac{31}{16} & \frac{575}{432} & -\frac{415}{864} & \frac{137}{1440} & -\frac{1}{120} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Démonstration.

1. Les séries $D^{-1} \frac{Y^a}{a}$ et $\frac{1}{a} \left(\frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1} \right)$ étant sans terme constant, elles seront égales si et seulement si leur image par D l'est, ce qui est immédiat à vérifier :

$$D \left(\frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1} \right) = (Y^{a-1} - Y^a) DY = Y^{a-1} (1 - Y) Z = Y^a.$$

2. La relation ci-dessus détermine toutes les puissances Y^k puisque leur terme constant est nul. Il suffit donc de montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{\downarrow k}}{n^{k+1}} \frac{n^n}{n!} t^n$ (que l'on voudrait valoir Y^k) vérifient la même condition initiale – ce qui est le cas (elle vaut bien Y pour $k = 1$) – et la même relation de récurrence, ce qui est immédiat :

$$\begin{aligned} & D \left[\left(\sum_{n \geq k} \frac{n^{n-k-1}}{(n-k)!} t^n \right) - \left(\sum_{n > k} \frac{n^{n-k-2}}{(n-k-1)!} t^n \right) \right] \\ &= D \left[\sum_{n \geq k} (n - (n-k)) \frac{n^{n-k-2}}{(n-k)!} t^n \right] \\ &= k \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-k-1}}{(n-k)!} t^n, \text{ c. q. f. d..} \end{aligned}$$

3. En réécrivant le coefficient $\frac{n^{n-k-1}}{(n-k)!}$ comme $n^{\downarrow k} \frac{n^{n-k-1}}{n!}$, i. e. comme $\frac{n^{n-k-1}}{n!}$ par un polynôme en n de degré k , on voit que Y^k est linéairement engendrée par les $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n+l}}{n!} t^n$ où $l \leq -1$, d'où le résultat.
4. En développant le facteur

$$\frac{n^{\downarrow k}}{n^{k+1}} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-1))}{n^{k+1}} = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j e_j(1, \dots, k-1) n^{k-j}}{n^k},$$

on obtient :

$$\frac{Y^k}{k} = \frac{n^{\downarrow k}}{n^{k+1}} \frac{n^n}{n!} t^n = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j e_j(1, \dots, k-1) \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-j}}{n!} t^n, \text{ c. q. f. d..}$$

2.1.3 La sous-algèbre $\mathbb{Q}[Z]$

On peut à présent s'intéresser aux puissances de Z . À notre connaissance, il n'y a pas de formule explicite pour ces dernières. On peut cependant les exprimer comme combinaisons linéaires des séries Z, Z^2 , ainsi que de leur dérivées. Il convient donc d'isoler le coefficient de $Z^2 = \sum \frac{A_n}{n!} t^n$; nous le noterons (comme dans l'article originel [29])

$$A_n := \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 1}} \binom{n}{p, q} p^p q^q. \quad (2.17)$$

Proposition 2.1.3.1. (ZVONKINE [29]) (polynômes en Z)

1. Pour $n \geq 0$ entier, le coefficient A_n vérifie l'identité

$$\frac{A_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n^i}{i!}. \quad (2.18)$$

2. Pour tout entier $k \geq 0$, la série Z^k est combinaison linéaire des k premiers termes de la liste $(Z, Z^2, DZ, DZ^2, D^2Z, D^2Z^2, \dots)$, avec poids $\frac{1}{(k-2)!!}$ pour le k -ième terme.
3. L'algèbre engendrée par Z s'exprime par

$$\mathbb{Q}[Z] = [\mathbb{Q}(D)](Z) + [\mathbb{Q}(D)](Z^2). \quad (2.19)$$

4. Soit $l \geq 1$ un entier. Pour remplir la $(l+2)$ -ième ligne de la matrice de la suite $(D^k Z, D^k Z^2)_{k \geq 0}$ dans la famille $(Z, Z^2, Z^3, Z^4, \dots)$:
- (a) appeler L la l -ième ligne où l'on a multiplié chaque coefficient par son indice de colonne ;
 - (b) appeler respectivement $L \rightarrow$ et $L \rightarrow \rightarrow$ la ligne L décalée respectivement d'une et deux places vers la droite ;

(c) écrire la somme $L + 2L^{\rightarrow} + L^{\rightarrow\rightarrow}$.

On obtient ainsi les premiers « termes »

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 4 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 6 & 12 & 10 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & 20 & 36 & 28 & 8 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 14 & 61 & 124 & 131 & 70 & 15 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 8 & 76 & 236 & 488 & 472 & 236 & 48 & \cdot \end{pmatrix} d'inverse \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -3 & -4 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 5 & -\frac{17}{6} & \frac{43}{12} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & -6 & \frac{12}{5} & -\frac{63}{10} & \frac{38}{15} & -\frac{8}{15} & \frac{1}{15} & \cdot & \cdot \\ \frac{15}{2} & \frac{37}{4} & -\frac{14}{5} & \frac{49}{40} & -\frac{15}{180} & \frac{59}{36} & -\frac{159}{180} & \frac{1}{48} & \cdot \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

5. On a pour tout entier $k \geq 0$

$$Z^{k+1} = \sum_{n \geq 1} \sum_T \binom{h(T)}{k} \frac{t^n}{n!} \quad (2.21)$$

où la somme décrit les arbres de CAYLEY T à n sommets 2-enracinés et où $h(T)$ désigne la distance entre les deux racines d'un tel T .

Démonstration.

1. On montre que la série génératrice du terme de droite vaut Z^2 et on se souvient de l'expression des puissances de Y :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=2}^n \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \right) t^n &= \sum_{i \geq 2} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} t^n = D \left(\sum_{i \geq 2} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-i-1}}{(n-i)!} t^n \right) = D \left(\sum_{i \geq 2} \frac{Y^i}{i} \right) \\ &= D(-\ln(1-Y) - Y) = \frac{DY}{1-Y} - DY = Z((1+Z) - 1) = Z^2, \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

On aurait également pu invoquer une *identité d'ABEL*, à l'instar de (2.49).

2. Il suffit de montrer que la suite $(Z, Z^2, DZ, DZ^2, D^2Z, D^2Z^2, \dots)$ vérifie un système à coefficients dans $\mathbb{N}$ triangulaire en les $(Z, Z^2, Z^3, Z^4, \dots)$ avec une diagonale $((-1)!!, 0!!, 1!!, 2!! \dots)$. Montrons cela par récurrence.

Pour trouver DZ et DZ^2 , on applique D à l'égalité $Z - Y = YZ$:

$$\begin{aligned} DZ - Z &= Y DZ + Z^2, \\ DZ &= \frac{Z(1+Z)}{1-Y} = Z(1+Z)^2, \text{ d'où} \\ DZ^2 &= 2Z DZ = 2Z^2(1+Z)^2. \end{aligned}$$

Pour aller plus loin, on regarde ce qui se passe lorsqu'on applique D à un polynôme en Z :

$$D \left(\sum_{i \geq 0} a_i Z^i \right) = \sum_{i \geq 1} a_i i Z^{i-1} DZ = \sum_{i \geq 1} a_i i Z^i (1+Z)^2 ; \quad (2.22)$$

le degré se trouve augmenté de 2 et le coefficient dominant multiplié par le degré. Ainsi, pour $k = 1, 2, 3, 4, \dots$, la série $D^k Z$ est un polynôme en Z de degré 3, 5, 7, 9, ..., de coefficient dominant $1!!, 3!!, 5!!, 7!!$, ..., tandis que la série $D^k Z^2$ est de degré 4, 6, 8, 10, ... et de coefficient dominant $2!!, 4!!, 6!!, 8!!$, Ceci permet de conclure.

3. La relation matricielle ci-dessus montre que l'algèbre $\mathbb{Q}[Z]$ est engendrée par les séries $D^k Z$ et $D^k Z^2$ pour k décrivant $\mathbb{N}^*$.

4. C'est traduire la relation $D(\sum a_i Z^i) = \sum a_i i Z^i (1+Z)^2$.

5. La série exponentielle Z^{k+1} compte les forêts numérotées de $k+1$ arbres 2-enracinés, tandis que la série exponentielle $\sum_{n \geq 1} \sum_T \binom{h(T)}{k} \frac{t^n}{n!}$ dénombre les arbres 2-enracinés où l'on a marqué k arêtes sur le chemin direct entre les racines. Pour voir la correspondance, prendre une forêt de $k+1$ arbres dont les racines sont notées a_i et b_i et tracer les arêtes $b_1 a_2, b_2 a_3, \dots, b_k a_{k+1}$. On obtient un arbre enraciné en $a = a_1$ et $b = b_k$ avec k arêtes marquées sur le plus court chemin de a à b . C'est une bijection, c. q. f. d..

Remarque 2.1.3.2. (*expression de A_n comme hauteur totale des arbres de CAYLEY*)

On déduit du dernier point ci-dessus une nouvelle expression du coefficient A_n (prendre $k \leftarrow 1$) :

$$A_n = \sum_T h(T). \quad (2.23)$$

Cette dernière quantité est appelée **hauteur totale** des arbres de CAYLEY à n sommets.

Mettre à bout les descriptions des algèbres $\mathbb{Q}[Y]$ et $\mathbb{Q}[Z]$ donne la description annoncée en (2.10).

2.1.4 Un lemme de compacité

Étant donnée une série $S \in \mathcal{A}$ que l'on sait être un polynôme en Z de degré d connu, comment expliciter un tel polynôme ?

D'après le calcul dans $\mathcal{A}$, on peut écrire

$$t = Y e^{-Y} = \frac{Z}{1+Z} e^{-\frac{Z}{1+Z}} \in Z\mathbb{Q}[[Z]], \quad (2.24)$$

de sorte que l'on peut calculer S comme une série en Z . Mais puisque cette série est polynomiale, elle doit valoir son tronqué de TAYLOR à l'ordre d . Ainsi, en notant pour toute fonction f sa troncature de TAYLOR en la variable x de degré d par

$$S = \text{Trunc}_{\deg_x=d} f := \sum_{k=0}^d \frac{x^k}{k!} [\partial_x^k f](0), \quad (2.25)$$

on obtient la formule

$$S = \text{Trunc}_{\deg_Z=d} S \left(\frac{Z}{1+Z} e^{-\frac{Z}{1+Z}} \right). \quad (2.26)$$

Par conséquent, il suffit de connaître les coefficients de la série en t^i pour $0 \leq i \leq d$ pour reconstituer le polynôme en Z et ainsi déterminer *tous* les autres coefficients.

(Cette propriété avait été notée par D. ZVONKINE dans [29] (haut de page 5) au sujet de l'*asymptotique* des nombres d'HURWITZ mais elle tient en fait directement pour leur *calcul* : cf. la proposition 2.3.8.3.)

2.1.5 Asymptotique dans $\mathcal{A}$

Nous savons que toute série dans $\mathcal{A}$ s'écrit comme un polynôme en Y plus un polynôme en Z . Nous allons voir que, du point de vue de l'asymptotique du terme général, seule la partie en Z compte ; mieux, seul le terme *dominant* en Z compte.

Proposition 2.1.5.1. (ZVONKINE [29]) (*asymptotique dans $\mathcal{A}$*)

Pour tout entier $i \geq 1$, la suite des termes généraux de la suite de séries $\left(\frac{Y^i}{i}, Z, Z^2, Z^3, Z^4, \dots \right)$ forme une échelle de comparaison suivant les puissances ≥ -1 de $\sqrt{n}$, à un facteur $\frac{e^n}{n}$ près :

$$\forall i, k \geq 1, \quad \frac{\text{Coef}_{t^n} \left[\frac{Y^i}{i} \right]}{\text{Coef}_{t^n} [Z^k]} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} C_{-1} \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^{-1} \quad \text{où} \quad \frac{1}{C_{-1}} = \sqrt{2\pi} \quad \frac{1}{C_k} = \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}. \quad (2.27)$$

Remarques 2.1.5.2.

On notera bien que l'asymptotique de $\frac{Y^i}{i}$ ne dépend pas de i .

Pour $k = 1$, la formule donnant C_k n'est qu'une reformulation de l'équivalent de STIRLING de $n!$.

Pour $k = 0$, la série $Z^0 = 1$ a un terme général stationnant à 0, ce qui est cohérent avec (2.27) en faisant tendre k vers 0. La formule reste ainsi valide en définissant $C_0 := \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(z)2^z} = 0$.

La formule reste en fait valide pour $k = -1$ si l'on remplace Γ par $|\Gamma|$ en vertu de l'identité

$$\sqrt{2\pi} = \left| \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{2} \right| = \left| -\frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \right| \sqrt{2} = |\Gamma|\left(-\frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{1}{2}}.$$

Démonstration.

On notera pour tout $n \geq 0$ entier $[S]_n$ le coefficient en t^n d'une série $S \in \mathbb{Q}[[t]]$. Tous les équivalents seront pris lorsque $n \rightarrow \infty$.

1. Commençons par l'asymptotique de Z^2 . Fixons un entier $n \geq 0$ et montrons que

$$[Z^2]_n = \frac{A_n}{n!} \sim \frac{e^n}{2}. \quad (2.28)$$

Notre démonstration est tirée de l'exercice 6.8 (page 117) de [3].

En appliquant la formule de TAYLOR avec reste intégral à l'ordre n à la fonction $\varphi : t \mapsto e^{nt}$ entre 0 et 1, il vient

$$e^n = \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} + \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t) \frac{(1-t)^n}{n!} dt \stackrel{t+u=1}{=} \frac{A_n}{n!} + 2 \frac{n^n}{n!} + \frac{n^{n+1}e^n}{n!} \int_0^1 e^{-nu} u^n du. \quad (2.29)$$

d'où $\frac{A_n}{n!e^n} = 1 - 2 \frac{n^n}{n!e^n} - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (e^{-u}u)^n du$. Vu la limite de

$$\frac{n^n}{n!e^n} \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0, \quad (2.30)$$

il reste à montrer que la quantité $\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (e^{-u}u)^n du$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Or la méthode de LAPLACE nous dit qu'une fonction $f \geq 0$ de classe C^2 sur un segment S atteignant son maximum en un unique point qui est une borne μ de S où $f''(\mu) < 0 < f(\mu)$ vérifie

$$\int_S f^n \sim \frac{f(\mu)^n}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi f(\mu)}{-2f''(\mu)}} \quad (\text{la masse se concentre autour du maximum } \mu). \quad (2.31)$$

En appliquant cela à $f : t \mapsto te^{-t}$, on obtient

$$f' : t \mapsto e^{-t}(1-t) \text{ et } f'' : t \mapsto e^{-t}(t-2), \text{ d'où} \\ \int_0^1 (e^{-u}u)^n du \sim \frac{\frac{1}{e^n}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi \frac{1}{e}}{2 \frac{1}{e}}} = \frac{1}{e^n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \quad (2.32)$$

En multipliant par l'équivalent du facteur $\frac{n^{n+1}}{n!} \sim \frac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ devant l'intégrale, on trouve la limite $\frac{1}{2}$ cherchée.

2. Fixons un $k \geq 1$.

Le terme général de $\frac{Y^k}{k}$ est équivalent à

$$\left[\frac{Y^k}{k} \right]_n = \frac{n^{\downarrow k} n^n}{n^k n!} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^n}{n\sqrt{n}}. \quad (2.33)$$

De même, le terme général de $D^k Z$ est équivalent à

$$[D^k Z]_n = \frac{n^{n+k}}{n!} \sim \frac{n^{n+k}}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} n^k \quad (2.34)$$

et celui des $D^k Z^2$ à

$$[D^k Z^2]_n = \frac{n^k A_n}{n!} \sim \frac{e^n}{2} n^k. \quad (2.35)$$

On a donc une échelle de comparaison (en notant $S \ll T$ pour deux séries S et T vérifiant $[S]_n = o_{n \rightarrow \infty}([T]_n)$)

$$\frac{Y^k}{k} \ll Z \ll Z^2 \ll DZ \ll DZ^2 \ll D^2Z \ll D^2Z^2 \ll D^3Z \ll D^3Z^2 \dots \quad (2.36)$$

Or la suite $(Z, Z^2, Z^3, Z^4, \dots)$ s'exprime à l'aide d'un système triangulaire en la suite $(D^k Z, D^k Z^2)_{k \geq 0}$, de sorte que les termes généraux des k -ièmes séries de ces deux suites sont équivalents à une constante près déterminée par la diagonale du système :

$$\begin{cases} [Z^{2k+1}]_n \sim \frac{1}{(2k-1)!!} [D^k Z]_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}(2k-1)!!} \frac{e^n}{n} n^{\frac{2k+1}{2}} \\ [Z^{2k+2}]_n \sim \frac{1}{(2k)!!} [D^k Z^2]_n \sim \frac{1}{2} \frac{1}{(2k)!!} \frac{e^n}{n} n^{\frac{2k+2}{2}} \end{cases} \quad (2.37)$$

Il reste à se rappeler la formule 1.20 reliant $\Gamma(k + \frac{1}{2})$ aux doubles factorielles pour obtenir les constantes sous la forme voulue :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sqrt{\pi}(2k-1)!! = \sqrt{2}2^k \Gamma(k + \frac{1}{2}) = 2^{\frac{2k+1}{2}} \Gamma(\frac{2k+1}{2}) \\ 2(2k)!! = 2 \cdot 2^k k! = 2^{k+1} \Gamma(k+1) = 2^{\frac{2k+2}{2}} \Gamma(\frac{2k+2}{2}) \end{cases} \quad (2.38)$$

Nous pouvons donc déterminer l'asymptotique de n'importe quelle série de $\mathcal{A}$ pourvu que l'on sache la décomposer selon les générateurs Y et Z .

2.1.6 La Z -égalité dans la partie $\mathcal{A}^Z := \mathcal{A} \setminus \mathbb{Q}[Y]$

La liberté linéaire de Y et Z permettent d'associer à toute série de $\mathcal{A}$ un polynôme en Z au coefficient constant près. Une telle série appartiendra alors à la partie

$$\mathcal{A}^Z := \mathcal{A} \setminus \mathbb{Q}[Y] \quad (2.39)$$

si et seulement si le polynôme en Z correspondant n'est pas constant.

La section qui précède montre que deux séries de $\mathcal{A}^Z$ ont même asymptotique si et seulement si leurs termes dominants en Z sont égaux. Par soucis de commodité, on introduit la notation suivante.

Définition 2.1.6.1. (Z -égalité et notation $\stackrel{Z}{\equiv}$)

Deux séries de $\mathcal{A}^Z = \mathcal{A} \setminus \mathbb{Q}[Y]$ seront dites Z -égales si leurs termes dominants en Z sont égaux. Une telle équivalence sera dénotée par

$$S \stackrel{Z}{\equiv} T \stackrel{\text{déf.}}{\iff} S \text{ et } T \text{ ont mêmes termes dominants en } Z. \quad (2.40)$$

Par exemple, l'on pourra écrire

$$\forall k \geq 0, D^k Z \stackrel{Z}{\equiv} (2k-1)!! Z^{2k+1} \quad (2.41)$$

$$\forall k \geq 0, D^k Z^2 \stackrel{Z}{\equiv} (2k)!! Z^{2k+2} \quad (2.42)$$

$$\forall p, q \geq 1, Z^p Y^q \stackrel{Z}{\equiv} Z^p \quad (2.43)$$

$$\forall (P, q) \in \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{N}^*, P(Z) Y^q \stackrel{Z}{\equiv} P(Z) \quad (2.44)$$

$$\forall P, Q \in \mathbb{Q}[X], P(Z) Q(Y) \stackrel{Z}{\equiv} P(Z) \iff Q(1) \neq 0. \quad (2.45)$$

2.1.7 L'algèbre déformée $\mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{(n+\lambda)^{n-1}}{n!} t^n, \sum_{n \geq 1} \frac{(n+\mu)^n}{n!} t^n \right]_{\lambda, \mu}$

Nous présentons ici une déformation de l'algèbre $\mathcal{A}$ qui nous servira à simplifier certaines sommes dans le calcul des séries de HURWITZ à deux partitions cycliques en genre nul.

On commence par un lemme calculatoire, qui n'est qu'une variante de l'**identité d'ABEL** (cf. [6]) valide dans $\mathbb{Q}(\lambda, \mu)$ pour toutes indéterminées λ, μ :

$$n! \sum_{p+q=n}^{p, q \geq 0} \frac{(p+\lambda)^p}{p!} \frac{(q+\mu)^{q-1}}{q!} \stackrel{\text{ABEL}}{=} \frac{(n+\lambda+\mu)^n}{\mu}. \quad (2.46)$$

Lemme 2.1.7.1. (variations sur ABEL)

On a dans $\mathbb{Q}(\lambda, \mu)$ les identités suivantes³ :

$$n! \sum_{p+q=n}^{p, q \geq 0} \frac{(p+\lambda)^{p-1}}{p!} \frac{(q+\mu)^{q-1}}{q!} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} (n+\lambda+\mu)^{n-1}, \quad (2.47)$$

$$n! \sum_{p+q=n}^{p, q \geq 1} \frac{(p+\lambda)^{p-1}}{p!} \frac{q^{q-1}}{q!} = \frac{(\lambda+1)n(n+\lambda)^{n-2} - n^{n-1}}{\lambda}, \quad (2.48)$$

$$n! \sum_{p+q=n}^{p, q \geq 0} \frac{(p+\lambda)^p}{p!} \frac{(q+\mu)^q}{q!} = \sum_{k=0}^n \frac{(n+\lambda+\mu)^k}{k!}. \quad (2.49)$$

Démonstration.

- Notons S la somme de gauche et dérivons l'identité d'ABEL (2.46) selon λ :

$$\begin{aligned} \frac{n(n+\lambda+\mu)^{n-1}}{\mu} &= n! \sum_{p+q=n}^{p, q \geq 0} \frac{(p+\lambda-\lambda)(p+\lambda)^{p-1}}{p!} \frac{(q+\mu)^{q-1}}{q!} \\ &= n! \sum_{p+q=n}^{p, q \geq 0} \frac{(p+\lambda)^p}{p!} \frac{(q+\mu)^{q-1}}{q!} - \lambda S = \frac{(n+\lambda+\mu)^n}{\mu} - \lambda S, \text{ d'où} \\ \lambda S &= \frac{(n+\lambda+\mu)^n}{\mu} - \frac{n(n+\lambda+\mu)^{n-1}}{\mu} = \frac{(n+\lambda+\mu)^{n-1}}{\mu} (n+\lambda+\mu-n), \text{ d'où } S. \end{aligned}$$

- On déduit du point précédent

$$\begin{aligned} n! \sum_{p+q=n}^{p, q \geq 1} \frac{(p+\lambda)^{p-1}}{p!} \frac{(q+\mu)^{q-1}}{q!} &= \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} (n+\lambda+\mu)^{n-1} - \frac{\mu(n+\mu)^{n-1} + \lambda(n+\lambda)^{n-1}}{\lambda\mu} \\ &= \frac{(n+\lambda+\mu)^{n-1} - (n+\lambda)^{n-1}}{\mu} + \frac{(n+\mu+\lambda)^{n-1} - (n+\mu)^{n-1}}{\lambda} \\ &\xrightarrow{\mu \rightarrow 0} (n-1)(n+\lambda)^{n-2} + \frac{(n+\lambda)^{n-1} - n^{n-1}}{\lambda} \\ &= \frac{(n+\lambda)^{n-2}}{\lambda} ((n-1)\lambda + (n+\lambda)) - \frac{n^{n-1}}{\lambda}, \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Test de sûreté. Faisons tendre $\lambda \rightarrow 0$: on devrait retrouver le coefficient de Y^2 , à savoir $2n^{n-3}n(n-1) = 2n^{n-2}(n-1)$. Pour cela, réécrivons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda+1)n(n+\lambda)^{n-2} - n^{n-1}}{\lambda} &= n \frac{(n+\lambda)^{n-2} - n^{n-2}}{\lambda} + n(n+\lambda)^{n-2} \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} n(n-2)n^{n-3} + n(n)^{n-2} \\ &= n^{n-2}(n-2+n) = 2n^{n-2}(n-1), \text{ ok.} \end{aligned}$$

3. On prendra garde à ce que les indices de la deuxième somme démarrent à 1 au lieu de 0, le terme q^{q-1} n'était pas défini pour $q=0$.

3. Notons $S_n(\lambda_\mu)$ la somme de gauche et réécrivons ABEL (2.46) :

$$\begin{aligned}
\frac{(n + \lambda + \mu)^n}{n!} &= \sum_{p+q=n} \frac{p, q \geq 0}{p!} \frac{(p + \lambda)^p}{p!} (q + \mu - q) \frac{(q + \mu)^{q-1}}{q!} \\
&= \sum_{p+q=n} \frac{p, q \geq 0}{p!} \frac{(p + \lambda)^p}{p!} \frac{(q + \mu)^q}{q!} - \sum_{p+q=n} \frac{p \geq 0, q \geq 1}{p!} \frac{(p + \lambda)^p}{p!} \frac{(q + \mu)^{q-1}}{(q-1)!} \\
&= S_n(\lambda_\mu) - \sum_{p+q=n-1} \frac{p \geq 0, q \geq 0}{p!} \frac{(p + \lambda)^p}{p!} \frac{(q + (\mu + 1))^q}{q!} \\
&= S_n(\lambda_\mu) - S_{n-1}\left(\lambda_{\mu+1}\right), \text{ d'où} \\
S_n(\lambda_\mu) &= \frac{(n + \lambda + \mu)^n}{n!} + S_{n-1}\left(\lambda_{\mu+1}\right) = \frac{(n + \lambda + \mu)^n}{n!} + \frac{(n + \lambda + \mu)^{n-1}}{(n-1)!} + S_{n-2}\left(\lambda_{\mu+2}\right)
\end{aligned}$$

et une récurrence permet de conclure.

Tordons à présent les séries Y et Z en se plaçant dans l'algèbre $\mathbb{Q}(\lambda, \mu)[[t]]$:

$$Y_\lambda := \sum_{n \geq 1} \frac{(n + \lambda)^{n-1}}{n!} t^n \quad \text{et} \quad Z_\mu := \sum_{n \geq 1} \frac{(n + \mu)^n}{n!} t^n. \quad (2.50)$$

On a par exemple

$$Y_0 = Y \quad \text{et} \quad Z_0 = Z. \quad (2.51)$$

On définit également des normalisations

$$y_\lambda := 1 + \lambda Y_\lambda \quad \text{et} \quad z_\mu := 1 + Z_\mu \quad (2.52)$$

et la déformation correspondante du coefficient A_n :

$$A_{n,\nu} := \sum_{k=0}^n \frac{(n + \nu)^k}{k!}. \quad (2.53)$$

Par exemple, on a

$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_0 = 1 + Z \quad \text{et} \quad A_{n,0} = A_n. \quad (2.54)$$

Proposition 2.1.7.2. (*calcul dans l'algèbre déformée*)

On a les neuf identités suivantes :

$$\begin{aligned}
y_\lambda &= e^{\lambda Y} & y_\lambda y_\mu &= y_{\lambda+\mu} & y_\lambda Y &= t y_{\lambda+1} & \forall k \in \mathbb{Z}, Y^k &= t^k y_k & DY_\lambda &= t z_{\lambda+1}. \\
z_\lambda &= (1 + Z) y_\lambda & y_\lambda z_\mu &= z_{\lambda+\mu} & Y z_\mu &= t z_{\mu+1} & z_\lambda z_\mu &= \sum_{n \geq 0} \frac{A_{n,\lambda+\mu}}{n!} t^n
\end{aligned} \quad (2.55)$$

Démonstration.

1. Commençons par montrer que $y_\lambda y_\mu = y_{\lambda+\mu}$. On écrit

$$\begin{aligned}
\lambda Y_\lambda \mu Y_\mu &= \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{p, q \geq 1}{p!} \frac{\lambda (p + \lambda)^{p-1}}{p!} \frac{\mu (q + \mu)^{q-1}}{q!} \\
&\stackrel{(2.47)}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \left((\lambda + \mu) (n + \lambda + \mu)^{n-1} - \lambda (n + \lambda)^{n-1} - \mu (n + \mu)^{n-1} \right) \\
&= (\lambda + \mu) Y_{\lambda+\mu} - \lambda Y_\lambda - \mu Y_\mu, \text{ c. q. f. d..}
\end{aligned}$$

2. On en déduit l'égalité $y_k = y_1^k$ pour tout entier $k \geq 1$. Déduisons-en la forme exponentielle de y_λ : on écrit dans $\mathbb{Q}[[\lambda, t]]$

$$\begin{aligned}
 y_\lambda - 1 &= \lambda Y_\lambda = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda(n+\lambda)^{n-1}}{n!} t^n = \sum_{n \geq 1} \sum_{0 \leq k < n} \frac{\binom{n-1}{k}}{(n-1)!n} \lambda^{k+1} n^{n-1-k} t^n \\
 &\stackrel{k \leftarrow k-1}{=} \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{(n-1)!} \lambda^k n^{n-k-1} t^n = \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^k}{k!} k \sum_{n \geq k} \frac{n^{n-k-1} t^n}{(n-k)!} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n \geq 0} \frac{k(n+k)^{n-1} t^{n+k}}{n!} = \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^k}{k!} t^k y_k = \sum_{k \geq 1} \frac{(ty_1 \lambda)^k}{k!} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{(Y\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda Y} - 1, \text{ c. q. f. d.}
 \end{aligned}$$

3. Il vient immédiatement $Y^k = (te^Y)^k = t^k e^{kY} = t^k y_k$.
4. Montrons $z_\lambda = (1+Z)y_\lambda$ On écrit

$$\begin{aligned}
 \lambda Y_\lambda Z &= \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \sum_{p+q=n}^{p,q \geq 1} n! \frac{\lambda(p+\lambda)^{p-1}}{p!} \frac{q^q}{q!} \stackrel{(2.48)}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \left((n+\lambda)^{n-1} - n^n - \lambda(n+\lambda)^{n-1} \right) \\
 &= Z_\lambda - Z - \lambda Y_\lambda, \text{ c. q. f. d.}
 \end{aligned}$$

Test de sûreté. On devrait obtenir $tz_1 = ty_1(1+Z)$. Or, tout comme nous allons montrer $ty_1 = Y$, on peut montrer $tz_1 = Z$. L'égalité devient donc $Z = Y(1+Z)$, ce qui est connu.

5. Il est immédiat que $y_\lambda Y = e^{\lambda Y} te^Y = te^{(\lambda+1)Y} = ty_{\lambda+1}$.

Test de sûreté. On revient à la définition de la série, dont on décale les indices :

$$ty_1 = t \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} t^n \right) = t \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} t^n = t \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^{n-1} = Y = y_0 Y, \text{ ok.}$$

Test de sûreté. On regarde le développement des premier termes :

$$\begin{aligned}
 y_{-1} Y &= \left(1 - t - \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} + O(t^4) \right) \left(t + t^2 + \frac{3t^3}{2} + \frac{8t^4}{3} + O(t^5) \right) \\
 &= t + O(t^5) = ty_{-1+1}, \text{ ce qui est cohérent.}
 \end{aligned}$$

6. Il vient de suite $Yz_\mu = Yy_\mu(1+Z) = ty_{\mu+1}(1+Z) = tz_{\mu+1}$.
7. On a $DY_\lambda = \frac{Dy_\lambda}{\lambda} = \frac{D(e^{\lambda Y})}{\lambda} = Ze^{\lambda Y} = Y(1+Z)e^{\lambda Y} = Yz_{\lambda+1} = tz_{\lambda+1}$.
- Test de sûreté.** Faire $\lambda \leftarrow 0$ donne $DY = tz_1 = Z$, ce qui est cohérent.
8. Il vient immédiatement $y_\lambda z_\mu = y_\lambda y_\mu z_0 = y_{\lambda+\mu} z_0 = z_{\lambda+\mu}$.
9. Le produit $z_\lambda z_\mu$ tombe en appliquant (2.49) et la définition des $A_{n,\nu}$.

Finissons par une application de cette algèbre déformée qui nous servira au chapitre 4. Il s'agit de réduire le calcul d'une somme de la forme

$$\sum_{a+b+c+\dots+\alpha+\beta+\gamma+\dots=N} \frac{a^{a-1}}{a!} \frac{b^{b-1}}{b!} \frac{c^{c-1}}{c!} \dots \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)!} \frac{\beta^\beta}{(\beta+1)!} \frac{\gamma^\gamma}{(\gamma+1)!} \dots \quad (2.56)$$

à une somme sur trois (au lieu de N) indices. Nous n'avons pas réussi à simplifier cette dernière.

Proposition 2.1.7.3. (un calcul intermédiaire)

On définit une série $X := \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{(n+1)!} t^n$. On a alors $X = \frac{1-y-1}{t} - 1$ et

$$\forall^2 k \geq l \geq 0, \text{Coef}_{t^N} Y^l X^{k-l} = \sum_{m+n+o=k-l} \binom{k-l}{m, n, o} (-1)^{m+n} (l-n) \frac{(N+o)^{N+o-l+n-1}}{(N+o-l+n)!}.$$

Démonstration.

Tout d'abord, on a

$$t + tX := \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{(n+1)!} t^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} t^n = Y_{-1} = 1 - y_{-1}.$$

Ensuite, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} Y^l X^{k-l} &= Y^l \left(\frac{1-y-1}{t} - 1 \right)^{k-l} = t^l y_l \sum_{m+n+o=k-l} \binom{k-l}{m, n, o} \left(\frac{1}{t} \right)^m \left(\frac{-y-1}{t} \right)^n (-1)^o \\ &= \sum_{m+n+o=k-l} \binom{k-l}{m, n, o} t^{-m} (t^{l-n} y_{l-n}) (-1)^{o+n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Coef}_{t^N} Y^l X^{k-l} &= \sum_{m+n+o=k-l} \binom{k-l}{m, n, o} (-1)^{o+n} \text{Coef}_{t^N} (t^{-m} Y^{l-n}) \\ &= \sum_{m+n+o=k-l} \binom{k-l}{m, n, o} (-1)^{o+n} \text{Coef}_{t^{N+m}} Y^{l-n} \\ &= \sum_{m+n+o=k-l} \binom{k-l}{m, n, o} (-1)^{o+n} \frac{l-n}{N+m} \frac{(N+m)^{N+m-l+n}}{(N+m-l+n)!}, \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Quelques cas particuliers sont laissés à titre d'exemple (cf. les formules (3.65) et (3.66)) :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{t} - 1 + \frac{Y^{-1}}{-1}, & X^2 &= \frac{1}{t^2} + 1 - \frac{2}{t} + Y^{-2} - \frac{2Y^{-1}}{t} + 2Y^{-1}, \\ XY &= \frac{Y}{t} - Y - 1, & X^2 Y &= \frac{Y}{t^2} - \frac{Y^{-1}}{t} - \frac{2Y}{t} + Y + 2 - \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

2.2 Le problème d'HURWITZ

Nous pourrions formuler tout de go le problème d'HURWITZ en termes de permutations (cf. définition 2.2.5.1). Nous préférons néanmoins présenter les origines topologiques de ce problème. Nous supposons pour cela que le lecteur possède quelques rudiments de géométrie différentielle.

Par la suite, le terme **surface** désignera une variété réelle compacte connexe sans bord orientée de dimension 2. Un théorème de classification des surfaces nous dit que toute surface est homéomorphe à un tore à g trous (visualiser une bouée familiale) ; g est appelé **genre** de la surface – on parle aussi de **g -tore**. La sphère est de genre nul.

Dans tout ce mémoire, la présence d'un genre $g \in \mathbb{N}$ appellera très souvent son décrément

$$g' := g - 1. \tag{2.57}$$

2.2.1 Cartes et caractéristique d'EULER

Armons-nous d'une mappemonde et traçons les frontières entre pays au gros feutre noir, en rajoutant des points à l'intersection de ces frontières. Voici une **carte** (*map*) : si l'on découpe notre surface (ici une sphère – la Terre) selon les arêtes, on obtient des bouts homéomorphes à des disques, les pays (supposés sans enclave), appelés **faces**. Une **carte** est la donnée d'un graphe tracé sur une surface tel que, d'une part les arêtes ne se coupent pas, d'autre part notre surface privée du graphe dessiné est union disjointe de ses composantes irréductibles, appelées **faces**, chacune étant homéomorphe à un disque ouvert. Une carte sera souvent notée M , en référence à son appellation anglo-saxone.

Le **degré** d'une face est le nombre d'arêtes se situant sur son bord, une face de degré n étant ainsi représentée par un n -gone. Chaque arête apparaissant deux fois dans le découpage, on obtient de suite la relation

$$\sum_{f \text{ face}} \deg f = 2A \quad (2.58)$$

où A désigne le nombre d'arêtes. On notera également S et F le nombre de sommets et de faces. Le même argument de dénombrement montre que

$$\sum_{s \text{ sommet}} \deg s = 2A \quad (2.59)$$

(on peut aussi appliquer la formule qui précède à la **carte duale** d'une carte M , *i. e.* la carte dont les sommets sont les faces de M , deux faces étant reliées si et seulement si elles sont adjacentes).

Il est important de noter qu'une carte contient deux choses :

1. un graphe abstrait, *i. e.* une matrice symétrique à coefficients dans $\{0, 1\}$ dont la diagonale prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$;
2. une surface bien particulière (un g -tore) sur laquelle on **plonge** notre graphe (on parle également de **graphe plongé** pour désigner une carte).

On parlera donc du **genre** d'une carte, mais jamais du genre d'un graphe.

Il est naturel de se demander ce qui, outre la surface associée, différencie une carte de son graphe originel. Puisque l'on plonge notre graphe sur une surface **orientée**, on peut, autour d'un sommet fixé, orienter les arêtes qui lui sont incidentes ; on parle d'**ordre cyclique**. Ce qui est remarquable, c'est que cette donnée est suffisante pour reconstruire la carte de départ. On en déduit qu'il y a priori

$$\prod_{s \text{ sommet}} (\deg s - 1)! \quad (2.60)$$

façons de plonger un graphe (certaines menant bien sûr à des cartes isomorphes).

Construction d'une carte à partir d'un graphe et d'ordre cyclique.

Représentons les sommets du graphe par des ronds-points orientés à la française, chaque sortie correspondant à une fin d'arête, l'ordre des sorties étant déterminé par l'ordre cyclique imposé, puis représentons les arêtes par des tronçons de route orientés également à la française. On a ainsi virtuellement représenté notre graphe par une mini-ville.

Partons alors d'un sommet et déplaçons-nous en prenant toujours la première à droite. On obtient un trajet, qui finit nécessairement par boucler car le nombre d'arêtes est fini. Mais la condition de tourner toujours le plus à droite possible impose que le bouclage se fasse au début de trajet (sinon on aurait pu à un moment tourner plus à droite que ce que l'on a effectivement fait) : on obtient ainsi un cycle orienté dans le sens des aiguilles d'une montre (si l'on le dessine dans le plan).

En recommençant, on obtient un nombre fini de cycles, orientés tous pareil, qui contiennent toutes les arêtes et tous les sommets du graphe considéré (chaque arête étant contenue exactement deux fois dans l'ensemble des cycles), et surtout disjoints (chaque route est tracée sur un unique cycle).

Remplissons alors mentalement l'intérieur de ces cycles pour obtenir des polygones ; en collant ces polygones selon les arêtes communes (les flèches étant appariées en sens contraire), on obtient une 2-variété sans bord (clair si l'on est à l'intérieur des polygones, et clair aussi si l'on est sur les arêtes car on peut « circuler » d'un polygone à l'autre via leur arête commune), compacte (car les polygones, en nombre finis, sont compacts), orientable (car les cycles ont même orientation et le collage des arêtes en sens contraire permet de conserver cette même orientation quand on passe d'un polygone à l'autre), partitionnée par les polygones : c'est donc

un g -tore sur lequel est dessinée une carte représentant le graphe de départ et ayant l'ordre cyclique imposé par construction, *c. q. f. d.*

L'intérêt de la démonstration ci-dessus est qu'elle permet de mettre en évidence la construction de cartes à partir de l'ensemble de ses faces. En se donnant un ensemble de faces de degré total pair (rappelons que l'on doit avoir $\sum_f \deg f = 2A$), on peut appairier les côtés deux à deux pour obtenir une carte. Par exemple, on peut construire le cube à partir de son patron, ensemble de six faces carrées où figurent les côtés devant être appariés. Mais l'on peut également partir de quatre faces hexagonales et ainsi obtenir un plongement du cube (réduit à son graphe) sur le tore.

Un autre type de problème intéressant est de compter, à faces fixées, le nombre de façons d'appairier leurs côtés pour obtenir une carte de genre donné. C'est également un problème difficile. En partant d'un $2n$ -gone, HARER et ZAGIER ont montré dans [10], en calculant un certain type d'intégrales sur des matrices hermitiennes selon des mesures gaussiennes (*cf.* [15], chapitre 3), que ce nombre vaut

$$\varepsilon_g(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-2g)!} \times \text{Coef de } t^{2g} \text{ dans } \left(\frac{\frac{t}{2}}{\text{th } \frac{t}{2}} \right)^{n+1}. \quad (2.61)$$

En introduisant les nombres $C_g(n) := \frac{2^g \varepsilon_g(n)}{\text{Cat}_n}$ où $\text{Cat}_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ est le n -ième nombre de Catalan, on peut en déduire la relation de récurrence

$$C_g(n+1) = C_g(n) + \binom{n+1}{2} C_g(n-1) \quad (2.62)$$

dont G. CHAPUY a contribué à l'interprétation combinatoire dans sa thèse [4] (chapitre 2), répondant en partie aux remarques de D. ZAGIER à la page 159 de [15].

Caractéristique d'EULER d'une carte.

Un polyèdre peut être vu comme une carte de genre nul (*i. e.* tracée sur la sphère). Descartes avait déjà observé que la somme alternée $S - A + F$ du nombres de sommets, arêtes et faces vaut 2. Ce fait, prouvé par EULER en 1752 pour le genre nul, apparaît pour la première fois en genre $g \geq 1$ dans un article de Simon L'HUILIER et GERGONNE (1812). Cet invariant, appelé **caractéristique d'EULER-POINCARÉ**, se généralise en genre quelconque et vaut

$$S - A + F =: \chi = 2 - 2g \text{ (formule d'EULER)} = -2g'. \quad (2.63)$$

Pour se souvenir de l'ordre, on peut observer que l'on va en augmentant la dimension des choses comptées : les sommets sont de dimension 0, les arêtes de dimension 1 et les faces de dimension 2. (On pourrait à ce titre écrire $S - A + F - V = -2g$ où V compte le nombre de volumes délimités par la carte – l'intérieur et l'extérieur.)

Démonstration.

On commence par montrer que si M et M' sont deux cartes sur un g -tore avec $M \subset M'$ (*i. e.* les sommets de M sont des sommets de M' et les arêtes de M sont des chaînes d'arêtes de M'), alors $\chi(M) = \chi(M')$.

En effet, l'on passe de M à M' en rajoutant des arêtes et des sommets à M , ce qui peut s'effectuer à partir des trois opérations élémentaires suivantes : rajouter juste un sommet (nécessairement sur un arête préexistante car les cartes sont connexes), ce qui incrémente S et A ; rajouter juste une arête (nécessairement entre deux sommets préexistants), ce qui incrémente A et F ; rajouter une arête et un sommet exactement (ce qui doit forcément se faire à partir d'un sommet préexistant), ce qui incrémente S et A . On remarque que χ est conservée par ces opérations (et l'on comprend alors le caractère alterné de la caractéristique d'EULER), d'où le résultat.

Considérons alors deux cartes M et M' de même genre. On définit la carte $M \cup M'$, dont les sommets sont ceux de M et M' auxquels on ajoute les points d'intersection des arêtes de M avec celles de M' , et dont les arêtes sont celles de M et M' éventuellement morcelées par leurs intersections. En passant par $M \cup M'$, on voit que M et M' ont même χ , ce qui montre que χ ne dépend que du genre. On considère alors la carte suivante : plonger le carré sur un tore en collant deux à deux ses côtés opposés (ce qui donne une carte à un sommet, deux arêtes et une face), coller g telles cartes bout à bout, puis relier les g sommets le long d'une chaîne de $g - 1$ arêtes. La carte obtenue possède $S = g$ sommets, $A = 2g + (g - 1)$ arêtes, et $F = 1$ face (pour le voir, trancher d'abord les boucles, puis découper le long de la courbe restante comme on ouvrirait une fermeture éclair). On trouve ainsi

$$\chi = S - A + F = g - (2g + (g - 1)) + 1 = 2 - 2g, \text{ c. q. f. d.}$$

La recherche du plus petit genre possible pour plonger tel graphe est un problème qui se pose tout naturellement, et qui est loin d'être facile à résoudre puisqu'il est NP-complet. Certains cas particuliers, de difficulté très variable, sont néanmoins abordables. Pour le n -cube, une simple application de la formule d'EULER permet d'obtenir $g \geq 1 + (n-4)2^{n-3}$, cette valeur étant atteinte pour un certain ordre cyclique (cf. plus bas). Le livre [18] est par ailleurs entièrement consacré à montrer que ce genre minimal, pour le cas du graphe complet K_n , vaut $\left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$.

2.2.2 Revêtements ramifiés de la sphère et formule de RIEMANN-HURWITZ

Comme toujours, pour étudier des objets, il est intéressant d'étudier les morphismes entre ces objets. Cela nous mène à l'étude des applications continues entre surfaces sous-jacentes à des cartes. Nous regarderons plus particulièrement le cas où la surface d'arrivée est la sphère de RIEMANN $\mathbb{S}$.

Définition 2.2.2.1. (revêtement ramifié)

Soit $n \geq 1$ un entier. Un **revêtement ramifié** de degré n de la sphère $\mathbb{S}$ est la donnée d'une projection continue $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}$ depuis une surface Σ soumise aux conditions suivantes :

1. pour toute valeur a de la sphère, il y a un disque ouvert au voisinage de a dont la préimage est homéomorphe à un certain nombre $\ell(a)$ de disques ouverts, appelés **feuillet**s du revêtement ;
2. l'entier $\ell(a)$ vaut constamment n à l'exception d'un nombre fini de certaines valeurs, appelées **valeurs critiques** (ou **points**⁴ de ramification) ;
3. sur chacun de ces $\ell(a)$ disques, f est (à biholomorphisme près) de la forme $z \mapsto z^{d_i}$ pour une partition $\{d_1, \dots, d_{\ell(a)}\} \vdash n$, appelée **type de ramification** de la valeur a ;

Le **type (de ramification)** d'une valeur a est la partition $\{d_1, \dots, d_{\ell(a)}\} \vdash n$, ses **longueur** et (**degré de ramification**) sont celles⁵ $\ell(a)$ et $\varphi(a)$ de son type. La **ramification (totale)** du revêtement f est la somme des ramifications de ses valeurs (critiques).

Deux revêtements $f : X \rightarrow \mathbb{S}$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{S}$ sont **isomorphes** s'il y a un homéomorphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ au-dessus de $\mathbb{S}$, i. e. tel que $g = f \circ \varphi$.

Par exemple, toute fonction méromorphe sur la sphère de RIEMANN donne lieu à un revêtement ramifié de la sphère : elle est localement de la forme $z \mapsto z^k$ pour un entier $k \in \mathbb{Z}$ et la compacité permet de considérer un nombre fini de tels voisinages.

Pour éclairer le terme de *ramification*, on peut faire des dessins en traçant une ligne par feuillet. Les n feuillets se recoupent alors au-dessus des points de ramification et les $\ell(a) < n$

disques au-dessus des points de ramification se ramifient en n feuillets. Selon cette vision, la ramification d'une valeur mesure à quel point cette valeur est ramifiée. En particulier, la valeur n'est pas critique si et seulement (au choix)

1. sa ramification est nulle ;
2. sa longueur vaut le degré du revêtement (i. e. la taille de son type) ;
3. son type ne contient que des 1.

Problème d'HURWITZ.

Une question qui se pose naturellement en physique (cf. [29] partie 5) est de compter, à isomorphisme près, le nombre de revêtements ramifiés de la sphère ayant un type donné. Nous allons voir, grâce à la *monodromie*, comment traduire cette question en termes de permutations. La *formule de RIEMANN-HURWITZ* nous permettra de définir un genre inchangé par reformulation du problème.

4. Gare à la confusion : usuellement, étant donnée une application, les *points* sont les éléments de l'ensemble de départ et les *valeurs* sont les éléments de l'espace d'arrivée.

5. Voilà l'origine topologique de ce que nous avons appelé (**degré de ramification**) d'une partition.

Comment retrouver le genre d'un revêtement $\Sigma \rightarrow \mathbb{S}$? Il suffit de tracer une carte en haut (sur Σ) et de calculer sa caractéristique d'EULER. Pour avoir une carte en haut, on tire en arrière une carte en bas (sur $\mathbb{S}$). Il s'agit alors de voir comment se comportent le nombre de sommets, arêtes et faces lors d'un tiré-en-arrière.

Observons le fait suivant. Considérons une face sur la sphère image ne contenant aucun point de ramification. Alors sa préimage est une copie de n feuillets, *i. e.* n faces. De même pour ses arêtes. Plus généralement, si l'intérieur de la face et l'intérieur de ses arêtes ne contient pas de point de ramification (peut-être ses sommets en sont), la préimage de son intérieur est aussi une copie de n faces « ouvertes », et chaque arête ouverte est également tirée en arrière sur n arêtes. Cela nous suffira.

Considérons un revêtement f de degré n . Appelons $a_1, \dots, a_k$ ses points de ramifications et soit a_0 un autre point de la sphère. Considérons le graphe étoilé en a_0 vers les a_i . Il définit une carte en bas ayant $k+1$ sommets, k arêtes et 1 face. Tirons-la en arrière. D'après notre observation, on obtient une carte ayant n faces et kn arêtes. Le nombre de sommets au-dessus de a_i étant $\ell(a_i)$, on peut calculer le genre de notre revêtement par la formule (2.63) d'EULER :

$$-2g' = (n + \ell(a_1) + \dots + \ell(a_k)) - nk + n = n + \sum_{i=1}^k (n - \wp(a_i)) - nk + n = 2n - \sum \wp(a_i). \quad (2.64)$$

C'est la **formule de RIEMANN-HURWITZ** :

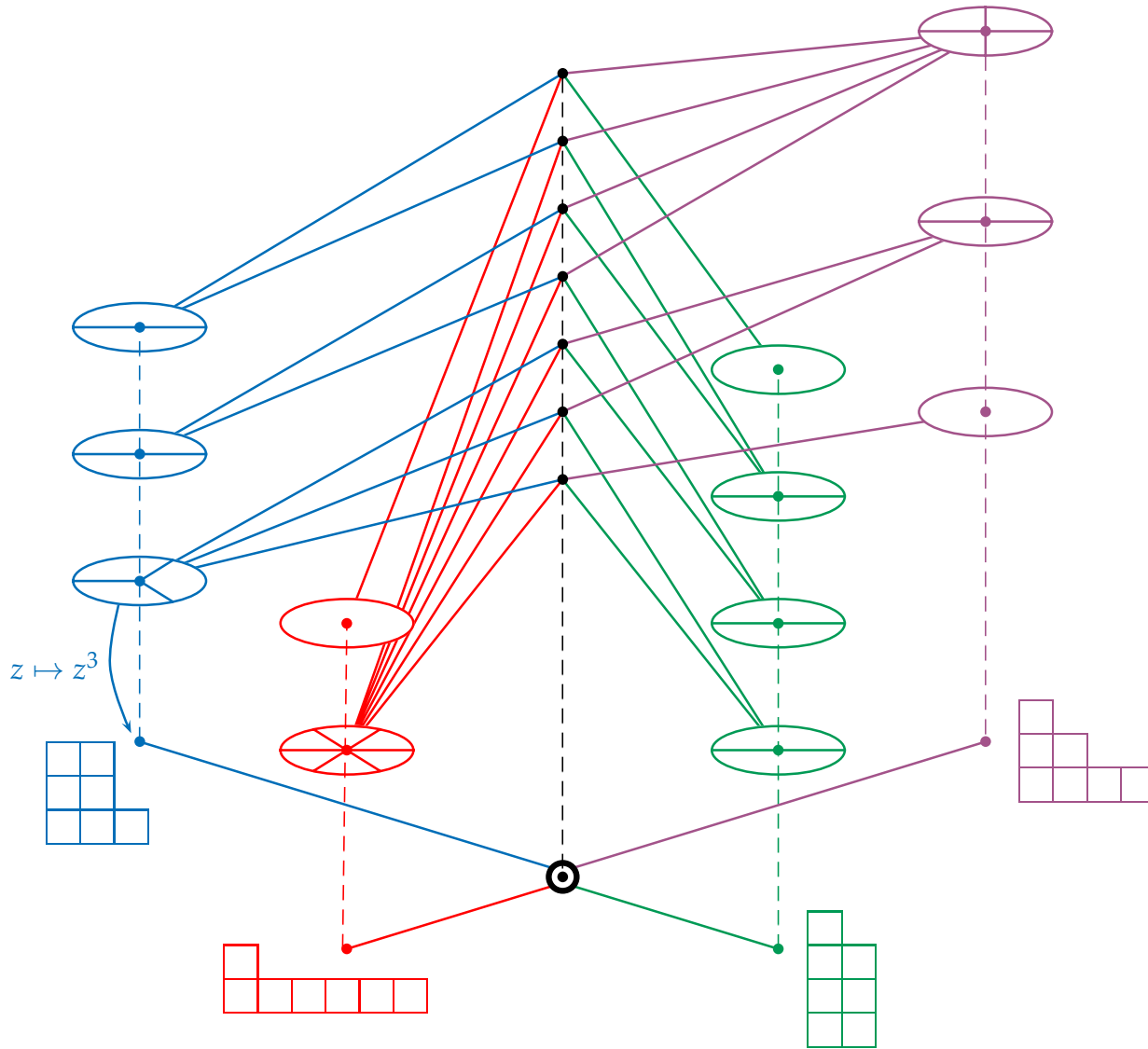
$$\wp = 2n + 2g' \quad \text{ou} \quad g = \frac{\wp(f)}{2} - (n-1). \quad (2.65)$$

On aurait également pu considérer une courbe de JORDAN passant par chacun des points de ramification. La carte en bas aurait eu k sommets, k arêtes, 2 faces. Le même raisonnement aurait donné

$$-2g' = (\ell(a_1) + \dots + \ell(a_k)) - nk + 2n, \text{ d'où la même formule.} \quad (2.66)$$

Remarque 2.2.2.2.

Partant d'un graphe étoilé vers les k points de ramification, sa préimage par un revêtement de degré n est une copie de n étoiles entremêlées au-dessus des points de ramification. Un tel enchevêtrement d'étoiles nous donne envie de parler d'une *constellation*.



2.2.3 Monodromie et constellations

Définissons le cadre combinatoire qui va coder le problème de HURWITZ.

Définition 2.2.3.1. (*constellations*)

Soient E et E' deux ensembles.

Une **constellation** sur E est une suite finie $C = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ de permutations sur E telles que :

1. le groupe engendré $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur E ;
2. le produit $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ vaut l'identité :

$$\sigma_1 \cdots \sigma_k = \text{Id}. \quad (2.67)$$

L'entier k est appelée **longueur** de la constellation (on parle aussi de **k -constellation**), son **degré** est le cardinal de l'ensemble E , son **type**⁶ est la famille des $\text{type } \sigma_i$, sa **ramification** $\wp$ est la somme de celle des σ_i , son **genre** est le nombre g défini par la **formule de RIEMANN-HURWITZ** :

$$\wp = 2n + 2g' \quad \text{ou} \quad g := \frac{\wp}{2} - (n - 1). \quad (2.68)$$

6. également appelé **pasport** dans [15]

Deux constellations $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ sur E et $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_k)$ sur E' sont **isomorphes** s'il y a une bijection $f : E \xrightarrow{\sim} E'$ telle que $\sigma'_i = f\sigma_i f^{-1}$ pour tout i .

Une **symétrie** d'une constellation $C = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ sur E est un automorphisme de C , i. e. une permutation de $\mathfrak{S}_E$ qui commute avec tous les σ_i .

On peut montrer que le nombre g est entier (i. e. que $\wp$ est pair) en prenant la signature de la relation $\sigma_1 \cdots \sigma_k = \text{Id}$:

$$1 = \varepsilon(\text{Id}) = \varepsilon\left(\prod \sigma_i\right) = \prod (-1)^{\wp(\sigma_i)} = (-1)^{\wp}. \quad (2.69)$$

En termes de revêtements ramifiés, il deviendra clair pourquoi g est un entier *positif*.

Remarques 2.2.3.2.

La notion de k -constellation présente peu d'intérêt pour $k \leq 2$. En effet, pour $k = 0$ ou 1 , le **groupe cartographique** $\langle \sigma_i \rangle_{i \in [1, k]}$ est réduit à $\{\text{Id}\}$ qui n'est transitif que si $n = 1$, et pour $k = 2$ les constellations sont toutes de la forme (σ, σ^{-1}) où σ est un n -cycle.

En revanche, les 3-constellations sont déjà d'une grande richesse car elles permettent de coder toutes les cartes, comme nous le verrons par la suite.

Monodromie.

Considérons un revêtement de la sphère ramifié en $a_1, \dots, a_k$. Prenons un autre point a sur la sphère (que l'on appellera **point base**) et regardons le graphe étoilé en a vers les a_i . Modifions légèrement ce graphe pour obtenir un lacet : autour de chaque point de ramification, on fait faire un petit cercle dans le sens trigonométrique avant de revenir en a selon le même chemin. Cela nous donne un **lacet** γ_i basé en a . On impose également que $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ partent de a dans le sens trigonométrique. Le produit $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ est alors un lacet basé en a qui entoure les points de ramification ; comme nous sommes sur une sphère, ce lacet est contractile en passant « de l'autre côté ». Ceci s'écrit aussi

$$\gamma_1 \cdots \gamma_k = 1 \text{ dans } \pi_1(S', a) \text{ avec } S' := \mathbb{S} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}. \quad (2.70)$$

On reconnaît une condition de constellation. Comment passer aux permutations ?

Considérons E la fibre au-dessus du point a . Comme ce dernier est une valeur non critique, E est de cardinal n le degré du revêtement. Soit maintenant γ un lacet tracé sur la sphère image privée des a_i , basé en a . Sa préimage est une copie de n chemins partant chacun d'un point de E et arrivant chacun en un point de E . Mais le point de départ et celui d'arrivée n'ont aucune raison d'être les mêmes : γ induit ainsi une permutation de E , appelé **monodromie** du revêtement. On obtient ainsi un morphisme du π_1 de S' base en a dans $\mathfrak{S}_E$. En notant σ_i l'image des générateurs sus-construits, la relation ci-dessus s'envoie sur

$$\sigma_1 \cdots \sigma_k = \text{Id dans } \mathfrak{S}_E. \quad (2.71)$$

Il ne manque plus que la transitivité du groupe $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$. Prenons deux points e et e' dans E . Notre revêtement Σ étant supposé connexe, il y a un chemin reliant e et e' . L'image de ce chemin est un lacet γ basé en a dont la monodromie envoie e sur e' par construction.

Que se passe-t-il si l'on prend un autre point base a' ? Les π_1 se retrouvent conjugués par n'importe quel chemin c allant de a à a' (notre revêtement étant connexe), disons $\gamma'_i = c\gamma_i c^{-1}$. Les fibres E_a et $E_{a'}$ sont par ailleurs mises en bijection par les préimages de c , mettons $E_a \xrightarrow{\sim} E_{a'}$. On en déduit $\sigma'_i = \varepsilon \sigma_i \varepsilon^{-1}$, de sorte que les constellations associées à a et a' se retrouvent isomorphes.

Conclusion (partielle).

À tout revêtement ramifié de degré n on peut associer une constellation de degré n définie à isomorphisme près.

On observera qu'une symétrie de la constellation revient à une permutation des feuillets qui commute avec la monodromie de chaque point de ramification.

Il est important de noter que *cette correspondance préserve les types*. En effet, fixons un point e de la fibre E au-dessus d'une valeur a non critique. Géométriquement, lorsque le lacet γ_i fait un tour complet autour de la valeur critique a_i , sa préimage partant de e , qui arrive vers un certain point ω de la fibre au-dessus de a_i , ne

tourne que d'un angle $\frac{2\pi}{d}$ autour de ω . On revient ainsi vers un certain point e' au-dessus de a . En réappliquant σ_i , on repartira de e' par le même chemin et tournera encore de $\frac{2\pi}{d}$ autour de ω . Au bout de d itérations (et pas moins), on retombe sur e . Ainsi se décompose cycliquement notre permutation σ_i .

On peut montrer avec un peu plus de travail que, à type fixé, cette correspondance est surjective et que l'application ci-dessus induit une bijection en quotientant *modulo* isomorphismes de revêtements. Nous renvoyons à [15] section 1.2 pour les détails.

Par ailleurs, il est plus aisé (afin de compter) de ne raisonner qu'avec des constellations sur $\mathfrak{S}_n$ (au lieu d'un ensemble E quelconque à n éléments). Fixons un revêtement ramifié f de degré n et regardons les constellations (isomorphes) de $\mathfrak{S}_n$ qui lui sont associées. Soit C une telle constellation. Toute permutation φ de $\mathfrak{S}_n$ induit une autre constellation $\varphi C \varphi^{-1}$ isomorphe à C , qui est la même si et seulement si $\varphi \in \text{Aut} C$. Il y a ainsi $\frac{n!}{|\text{Aut} f|}$ constellations associées à f .

Conclusion 2.2.3.3. (*revêtements ramifiés et constellations*)

Compter les revêtements ramifiés de degré n avec poids $\frac{1}{|\text{Aut}|}$ revient à compter les constellations de $\mathfrak{S}_n$ avec poids $\frac{1}{n!}$. Le problème d'HURWITZ revient donc à trouver le nombre de constellations sur un ensemble fini possédant un type fixé.

La réponse à ce problème, sans la condition de transitivité, est connue grâce à la formule de FROBENIUS (1.46). En effet, se donner un type de constellation dans $\mathfrak{S}_n$, c'est se donner des classes de conjugaison, d'où la possibilité d'appliquer (1.46). Mais la condition de transitivité est bien présente et complique vraiment les choses.

2.2.4 Cartes, 3-constellations, hypercartes

Nous donnons ici quelques liens entre cartes et constellations (à simple titre culturel car nous ne les utiliserons pas).

Reprenons l'étude des ordres cycliques sur une carte. L'image de la ville et des rond-points nous servira.

Au voisinage d'un sommet, vu comme rond-point à la française, il y a des arêtes qui arrivent. On peut voir ces dernières comme des routes. Nous prendrons la convention selon laquelle ces routes sont orientées à l'anglaise, de sorte que l'on tourne autour des faces dans le même sens qu'autour des sommets (même si cela pose de sérieux problèmes de circulation). Une arête se casse ainsi en deux *piques* collées en sens contraire. Nous allons introduire une 3-constellation sur l'ensemble P de ces piques qui permettra de reconstituer notre carte de départ.

L'ordre cyclique autour d'un sommet nous donne une permutation σ des piques de P partant de ce sommet (σ comme « *s*ommet »). L'appariement de deux éléments de P formant une arête nous donne également une permutation α de P (α comme « *a*rête ») qui est une involution sans points fixes (ce qui implique la parité du nombre $|P|$ de piques, ce qui était déjà évident vu que $|P| = 2A$). Enfin, l'ordre cyclique des piques autour d'une face nous donne une troisième permutation φ de P (φ comme « *f*ace »). Il est trivial de constater que le produit $\sigma\alpha\varphi$ vaut l'identité et que la transitivité du groupe $\langle \alpha, \sigma, \varphi \rangle$ revient à la connexité de notre graphe.

Réciproquement, donnons-nous une 3-constellation $(\sigma, \alpha, \varphi)$ d'un ensemble P à $2A$ éléments où α est une involution sans points fixes. On va construire la carte à partir de ses faces. La permutation φ nous permet de partir de polygones (un pour chacun de ses cycles) dont les côtés (orientés) sont des éléments de P , α nous permet de coller ces polygones en préservant l'orientation, et la condition $\sigma\alpha\varphi = \text{Id}$ nous assure que l'ordre cyclique autour des sommets est respecté.

On vérifiera que le genre est conservé :

$$\begin{aligned} \wp &\stackrel{?}{=} \wp(\sigma) + \wp(\alpha) + \wp(\varphi) \\ \iff 2|P| + 2g' &\stackrel{?}{=} (|P| - S) + \left(\frac{|P|}{2}\right) + (|P| - F) \\ \iff S - A + F &\stackrel{?}{=} -2g', \text{ ce qui est vrai par définition de } \chi. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Il est bon de remarquer le dictionnaire entre les deux notions :

un sommet	un cycle de σ
une face	un cycle de φ
le degré d'un sommet	la longueur d'un cycle de σ
le degré d'une face	la longueur d'un cycle de φ
le nombre S de sommets	le nombre de cycles de σ
le nombre F de faces	le nombre de cycles de φ
le nombre A d'arêtes	le demi-degré de la constellation

(2.73)

La construction précédente nous amène à définir une **carte combinatoire** comme une 3-constellation $(\sigma, \alpha, \varphi)$ où σ est une involution sans points fixes (*i. e.* un produit disjoint maximal de transpositions).

Que dire du revêtement ramifié associé à une carte combinatoire? La surface revêtant a le bon genre d'après (2.72), mais peut-on y lire la carte d'origine? La préimage d'une valeur critique de type σ en donnera les sommets avec les bons type cycliques, celle correspondant à α peut à la rigueur être vue comme les milieux des arêtes mais comment interpréter l'appariement des piques correspondant à l'ordre cycliques des *faces*? On remarquera simplement que σ et α suffisent⁷ : en reliant deux valeurs critiques de types σ et α par une arête, la préimage de cette carte-arête donnera la carte de départ.

Finissons par rappeler les pages 71-72 de [4] qui présentent une bijection à genre fixé entre les $(k+1)$ -constellations de degré n et les cartes à n sommets telles que

1. les faces sont coloriées en noir ou blanc sans face adjacente de même couleur ;
2. les faces noires sont de degré k et les faces blanches de degré un multiple de k ;
3. on peut colorier les sommets à l'aide de k couleurs $1, 2, 3, \dots, k$ de sorte que les couleurs lues autour d'une face noire dans le sens horaire soient $1, 2, 3, \dots, n$.

2.2.5 Nombres et séries d'HURWITZ

La question originelle soulevée par HURWITZ dans [11] était d'énumérer le nombre $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$ de constellations de degré n , genre 0 et type $(\lambda, \square, \square, \dots, \square)$. On rappelle son résultat :

$$\mathbb{h}_n^0(\lambda) = \mathbb{N} n! (n + \ell(\lambda) - 2)! n^{\ell(\lambda)-3}. \quad (2.74)$$

Une généralisation fructueuse est de chercher à énumérer les constellations dont

1. les premiers facteurs (pas seulement le tout premier) sont de types imposés (pas seulement des transpositions) ;
2. le genre est lui aussi pris quelconque en rajoutant dans la formule de RIEMANN-HURWITZ des termes $n - \ell(\lambda^i)$ valant 1 (*i. e.* des transpositions).

Définition 2.2.5.1. (les nombres et séries d'HURWITZ $\mathbb{h}_n^g$, h_n^g , H^g et H)

On se donne deux entiers positifs g et n ainsi que des partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ d'entiers.

On définit un nombre $T = T_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ de transpositions par la **formule de RIEMANN-HURWITZ** :

$$2n + 2g' = T + \wp(\lambda^1) + \wp(\lambda^2) + \dots + \wp(\lambda^k) \quad \text{ou} \quad T := 2n + 2g' - \wp. \quad (2.75)$$

On définit deux **nombres d'HURWITZ**⁸

$$h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) := \frac{\mathbb{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)}{n! T_n^g(\vec{\lambda})} \in \mathbb{Q} \quad (2.76)$$

où $\mathbb{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ désigne le nombre de couples (C, F) tels que :

7. La formule de RIEMANN-HURWITZ n'a pas l'air de donner le bon genre (il manque la ramification des faces $\wp(\varphi)$) mais cela est normal : les préimages associées à α ne sont pas des sommets, ce qui invalide notre preuve de la formule de RIEMANN-HURWITZ.

8. La notation de ces nombres avec une lettre h (ou H) s'impose d'elle-même pour honorer **HURWITZ**. Afin de différencier les nombres *entiers* (de factorisations) de leurs normalisés (*rationnels*), nous avons cherché à évoquer la lettre $\mathbb{N}$ (plus particulièrement son enluminure) dans la lettre h , d'où la notation $\mathbb{h}$ (police `bbold`).

1. C est une constellation $(\vec{\sigma}, \vec{\tau}) \in \mathfrak{S}_n^k \times \mathfrak{S}_n^T$ de type $\left\{ \begin{array}{l} \forall i, \text{ type } \sigma_i = \overline{\lambda^i} \\ \forall j, \text{ type } \tau_j = \square \end{array} \right.$;
2. F est un k -uplet de parties dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $\left\{ \begin{array}{l} \forall i, F_i \subset \text{Fix } \sigma_i \\ |F_i| = m_1(\lambda^i) \end{array} \right.$.

Les **séries d'HURWITZ** sont définies par les séries génératrices suivantes de $\mathbb{Q}[[t]]$ et $\mathbb{Q}[[t, u]] \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right]$:

$$H^g(\vec{\lambda}) := \sum_{n \geq 1} h_n^g(\vec{\lambda}) t^n, \quad H(\vec{\lambda}) := \sum_{g \geq 0} H^g(\vec{\lambda}) u^{g' - \frac{\wp(\vec{\lambda})}{2}}, \quad (2.77)$$

$$H^g(\overline{\lambda^1}, \dots, \overline{\lambda^k}) := \sum_{n \geq 1} h_n^g(\overline{\lambda^1}, \dots, \overline{\lambda^k}) t^n \quad (\text{dans le coefficient } h_n^g(\overline{\lambda^1}, \dots, \overline{\lambda^k}), \text{ toutes les partitions sont complétées à l'indice muet } n). \quad (2.78)$$

On notera les nombres et séries d'HURWITZ **normalisés** en encadrant les lettres h et H afin de signifier la division par le facteur d'HURWITZ $\boxed{\vec{\lambda}} := \boxed{\lambda^1} \boxed{\lambda^2} \dots \boxed{\lambda^k}$. Par exemple :

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) := \frac{h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)}{\boxed{\lambda^1} \boxed{\lambda^2} \dots \boxed{\lambda^k}} \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^g(\vec{\lambda}) := \sum_{n \geq 1} \mathbb{H}_n^g(\vec{\lambda}) t^n = \frac{H^g(\vec{\lambda})}{\boxed{\vec{\lambda}}}. \quad (2.79)$$

Remarques 2.2.5.2.

1. Dans la définition ci-dessus, tous les τ_i sont des transpositions et choisir F_i revient à choisir une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ où σ_i peut être vue comme une permutation de type λ^i . Cela permet de garder une trace des cycles fixes de λ^i (que l'on perd après complétion).
2. Le nombre T de transpositions est – tout comme la ramification – inchangé par complétion (*a fortiori* réduction) des partitions :

$$T_n^g(\overline{\lambda^1}, \dots, \overline{\lambda^k}) = T_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = T_n^g(\overset{\circ}{\lambda^1}, \dots, \overset{\circ}{\lambda^k}). \quad (2.80)$$

3. En choisissant d'abord la constellation puis les parties fixes, on obtient

$$\mathfrak{h}_n^g(\vec{\lambda}) := \text{Card} \left\{ \text{constellations } \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \\ \vec{\tau} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n^k \times \mathfrak{S}_n^T \right\}_{\substack{\forall i, \text{ type } \sigma_i = \overline{\lambda^i} \\ \forall j, \text{ type } \tau_j = \square}} \quad (2.81)$$

$$\times \prod_{i=1, \dots, k} \binom{n - (|\lambda^i| - m_1(\lambda^i))}{m_1(\lambda^i)}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\mathfrak{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \mathfrak{h}_n^g(\overline{\lambda^1}, \dots, \overline{\lambda^k}) \times \prod_{i=1}^k \binom{n - |\overset{\circ}{\lambda^i}|}{m_1(\lambda^i)}. \quad (2.82)$$

Vue à travers les séries d'HURWITZ, et en utilisant l'opérateur différentiel D défini en (2.1.1), cette dernière identité devient

$$H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \left[\prod_{i=1}^k \binom{D - |\overset{\circ}{\lambda^i}|}{m_1(\lambda^i)} \right] H^g(\overline{\lambda^1}, \dots, \overline{\lambda^k}). \quad (2.83)$$

Cela va se simplifier en normalisant par les facteurs $\boxed{\lambda^i}$. Fixons λ une partition d'un entier $\geq n$ et abrégeons

$m_1 := m_1(\lambda)$. On a alors $\frac{|\text{Sym } \lambda|}{m_1!} = \frac{|\text{Sym } \bar{\lambda}|}{(m_1+n-|\lambda|)!}$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n-|\lambda|}{m_1(\lambda)}}{\boxtimes} &= \frac{(n-|\lambda|+m_1)!}{m_1!(n-|\lambda|)!} \frac{|\text{Sym } \lambda|}{\prod_{k \geq 2} \left(\frac{k^k}{k!}\right)^{m_k(\lambda)}} \\ &= (n-|\lambda|+m_1)! \frac{|\text{Sym } \lambda|}{m_1!} \frac{1}{\prod_{k \geq 2} \left(\frac{k^k}{k!}\right)^{m_k(\lambda)}} \frac{1}{(n-|\lambda|)!} \\ &= \frac{|\text{Sym } \bar{\lambda}|}{\prod_{k \geq 2} \left(\frac{k^k}{k!}\right)^{m_k(\lambda)}} \frac{1}{(n-|\lambda|)!} \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}} \frac{1}{(n-|\lambda|)!}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Il en résulte, après division par $n!T_n^g(\bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^k) = n!T_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$:

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \frac{\mathbb{H}_n^g(\bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^k)}{\prod_i (n-|\lambda^i|)!}. \quad (2.85)$$

4. Lorsque l'on rajoute une partition contenant ou bien rien, ou bien que des 1 (en nombre p ci-dessous), ou bien un 2, on établira aisément les identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda}, \emptyset) = \mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda}) \\ \mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda}, \wr 1^p) = \binom{n}{p} \mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda}) \\ \mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda}, \square) = \mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda}) \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} H^g(\vec{\lambda}, \emptyset) = H^g(\vec{\lambda}) \\ H^g(\vec{\lambda}, \wr 1^p) = \binom{D}{p} H^g(\vec{\lambda}) \\ H^g(\vec{\lambda}, \square) = (2D + 2g' - \wp(\vec{\lambda})) H^g(\vec{\lambda}) \\ \mathbb{H}^g(\vec{\lambda}, \square) = \left(D + g' - \frac{\wp(\vec{\lambda})}{2}\right) \mathbb{H}^g(\vec{\lambda}) \end{array} \right. \quad (2.86)$$

5. En inversant la relation $\sigma_1 \cdots \sigma_k = \text{Id}$ d'une constellation, on voit immédiatement que

$$\mathbb{h}_n^g(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{k-1}, \lambda^k) = \mathbb{h}_n^g(\lambda^k, \lambda^{k-1}, \dots, \lambda^2, \lambda^1). \quad (2.87)$$

On montrera au chapitre 4 (remarque 4.1.0.3) que l'on peut en fait effectuer *n'importe quelle permutation* des λ^i sans changer la valeur de $\mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda})$.

6. Comme les séries H^g le suggèrent, on considérera toujours le nombre $\mathbb{h}_n^g$ divisé par $T_n!$ car c'est ce qui leur fait vérifier de « bonnes » propriétés : appartenance des séries $H^g(\vec{\lambda})$ à l'algèbre $\mathcal{A}$ (théorème 2.3.8.1), formules de réduction (théorème 3.3.1.1 et corollaire 4.3.3.4) et asymptotique des $\mathbb{h}_n^g(\vec{\lambda})$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (théorème 3.0.8.6).

Cependant, en cas de besoin, on peut obtenir l'asymptotique de $T_n!$ en invoquant STIRLING (dans ce qui suit, les lettres α , β et γ désignent des constantes avec $\gamma > 1$) :

$$T_n^g(\vec{\lambda})! \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\pi} 2^{2g' - \wp(\vec{\lambda}) + 1} \left(\frac{4}{e^2}\right)^n n^{2g' - \wp(\vec{\lambda}) + \frac{1}{2}} n^{2n} = \alpha \frac{n^\beta}{\gamma^n} n^{2n}. \quad (2.88)$$

7. Dans la définition des séries $H(\vec{\lambda})$, nous aurions pu prendre comme exposant en u simplement le genre g . Il apparaît toutefois que les formules « marchent » mieux (cf. par exemple l'identité (3.46)) avec ces deux corrections :

$$\text{décrémenter le genre et soustraire la demi-hauteur.} \quad (2.89)$$

Lorsque l'on prendra du recul avec les séries de KAZARIAN $K(\vec{\Lambda})$ (cf. définition 4.3.2.4) où les Λ^i sont des *multi*-partitions, il apparaîtra que c'est bien la *hauteur* qu'il fallait considérer au lieu de la ramification (les deux coïncident pour des partitions usuelles), cf. les propositions 4.3.2.5 et 4.3.3.4.

8. On observera une correspondance (donnée par la formule de RIEMANN-HURWITZ) entre le genre $g = g_n^T(\vec{\lambda})$ et le nombre de transpositions $T = T_n^g(\vec{\lambda})$ dans les deux écritures suivantes de la série H :

$$\sum_{g \geq 0} h_n^g(\vec{\lambda}) \frac{t^n}{n!} \frac{u^{g' - \frac{v(\vec{\lambda})}{2}}}{T_n^g(\vec{\lambda})!} = H(\vec{\lambda}) = \sum_{T \geq 0} h_n^{g_T}(\vec{\lambda}) \frac{t^n}{n!} \frac{u^{\frac{T}{2} - n}}{T!}. \quad (2.90)$$

9. Une table des nombres $\frac{h_n^g(\lambda)}{n!}$ pour $g \leq 2$ et $|\lambda| \leq 4$ peut être consultée en tout fin de [17]. Nous la compléterons à la section 4.2.3 pour les genres ≤ 5 et partitions complètes de taille $n \leq 5$.

2.3 Intégration sur $\overline{\mathcal{M}}_n^g$

On donne ici quelques définitions et intuitions (empruntées de [31]) de l'espace et de la théorie de l'intégration en jeu dans la formule d'EKEDAHN-LANDO-SHAPIRO-VAINSHTEIN, prouvée dans [5] (*cf.* les formules (2.108) et (2.109)), ainsi que dans un théorème de KAZARIAN, le théorème 3.1 de [14] (*cf.* les formules (2.110) et (2.111)).

2.3.1 L'espace des modules $\mathcal{M}_n^g$ et son compactifié de DELIGNE-MUMFORD $\overline{\mathcal{M}}_n^g$

Appelons *courbe n -marquée* toute variété C complexe compacte connexe de dimension 1 munie d'une famille injective de C^n . Un *isomorphisme* entre deux courbes n -marquées $(C, a_1, \dots, a_n)$ et $(\Gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un isomorphisme $f : C \xrightarrow{\sim} \Gamma$ de variétés complexes tel que $f(a_i) = \alpha_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

On peut montrer qu'une courbe n -marquée de genre g a un groupe d'automorphismes fini si et seulement si

$$[g \geq 2] \quad \text{ou} \quad [g = 1 \text{ et } n \geq 1] \quad \text{ou} \quad [g = 0 \text{ et } n \geq 3], \quad (2.91)$$

ce qui peut être résumé en

$$n + 2g' > 0. \quad \text{Un tel couple } (g, n) \text{ sera dit } \textit{stable}. \quad (2.92)$$

Pour un couple stable (g, n) , on définit *l'espace des modules* $\mathcal{M}_n^g$ (des courbes n -marquées de genre g) par l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes n -marquées de genre g . Par exemple, le fait classique que les homographies agissent 3-transitivement sur la sphere de RIEMANN $\mathbb{S}$ montre que $\mathcal{M}_3^0$ est un point et que $\mathcal{M}_4^0 \simeq \mathbb{S} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Cela explique également pourquoi les couples $(0, n)$ sont instables pour $n \leq 2$ (leur automorphie est infinie).

L'exemple de $\mathcal{M}_4^0$ montre que les espaces $\mathcal{M}_n^g$ ne sont pas toujours compacts. On peut construire une compactification convenable $\overline{\mathcal{M}}_n^g$, appelée le **compactifié de DELIGNE-MUMFORD** de $\mathcal{M}_n^g$, qui est une variété à g fixé pour n assez grand. On peut montrer que, pour tout couple stable (g, n) , l'espace $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ est un *orbifold* compact complexe de dimension $3g' + n$. Intuitivement, un orbifold complexe de dimension d est localement isomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{C}^d$ modulo les orbites d'un groupe fini ; la finitude explique pourquoi nous ne considérerons les espaces $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ que lorsque le couple (g, n) est stable.

2.3.2 Intégration des classes de cohomologie sur un orbifold compact

Sur un orbifold compact, on peut définir une $\mathbb{Q}$ -*algèbre de cohomologie* $H^*(O) = \bigoplus_{k \geq 0} H^k(O)$: c'est une algèbre anti-commutative sur le corps $\mathbb{Q}$, graduée par les $H^k(O)$, dont les éléments sont appelés *classes de cohomologie*. Une classe de cohomologie appartenant à une composante homogène $H^k(O)$ est dit *être de degré pur k* (ou *homogène de degré k*).

On peut alors définir une *théorie de l'intégration* des classes de cohomologie sur un orbifold compact O . Par construction, l'intégrale d'une classe de cohomologie appartenant à $H^k(O)$ est nulle sauf si k vaut la dimension topologique⁹ de O . Par conséquent, si les α_i sont des classes de cohomologie homogènes qui commutent, l'intégrale $\int_O \prod \alpha_i$ s'annulera à moins que $\sum \deg \alpha_i = \dim O$. Cela permet d'écrire des expressions de la forme $\int_O \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{1-\beta}$ en développant formellement les fractions et en filtrant les termes de degré $\dim O$.

9. Rappelons que les dimensions topologiques de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont respectivement 1 et 2.

2.3.3 Les classes de CHERN ψ_i et λ^i

La raison pour laquelle nous avons introduit l'intégration des classes de cohomologie sur $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ réside en deux théorèmes. Ces derniers mettent en jeu :

1. la **première classe de CHERN** $\psi_k \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_n^g)$ du fibré cotangent au k -ième point marqué (pour tout $k = 1, \dots, n$) ;
2. les classes de CHERN $(-1)^i \lambda^i \in H^{2i}(\overline{\mathcal{M}}_n^g)$ du **fibré de HODGE dual** Λ_n^{g*} .

Nous n'aurons pas besoin des définitions précises des classes de CHERN ψ_k et λ^i . Il nous suffira de savoir qu'elles sont de degré pur pair (et par conséquent commutent)

$$\begin{aligned} \forall k = 1, \dots, n, \quad \deg \psi_k &= 2 \\ \forall i = 1, \dots, g, \quad \deg \lambda^i &= 2i \end{aligned} \quad (2.93)$$

Le premier théorème, la formule ELSV [5], exprime $h_n^g(\lambda)$ comme une intégrale des classes sus-mentionnées. Le second théorème, dû à M. KAZARIAN [14], exprime la série $H^g(\lambda)$ comme polynôme en Y et Z dans l'algèbre $\mathcal{A}$ dont les coefficients sont également des intégrales des classes ci-dessus.

Avant d'énoncer ces deux théorèmes, et afin de pouvoir manipuler les classes ψ_i , rappelons quelques propriétés et notations classiques à propos de ces dernières. (Pour des détails et des preuves, voir [31] or [15].)

2.3.4 Les chevrons de WITTEN $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$ et les intégrales de HODGE

Pour des entiers $d_1, \dots, d_n \geq 0$, on notera l'intégrale du produit (commutatif) $\prod \psi_i^{d_i}$ par le **chevron de WITTEN** :

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle := \int_{\overline{\mathcal{M}}_n^g} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n}. \quad (2.94)$$

Noter bien que le n de l'intégrande est le même que le n du $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ sur lequel on intègre (d'où l'importance de ne pas oublier d'écrire les τ_0 même s'ils ne contribuent pas à l'intégrande) et qu'il n'y a aucune ambiguïté sur le genre : pour obtenir autre chose que 0, il faut que le degré total $2(d_1 + \dots + d_n)$ de l'intégrande vaille la dimension topologique $2 \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_n^g = 2(3g' + n)$ de l'espace, ce qui s'écrit

$$3g' + n = \sum d_i \quad \text{ou} \quad 3g' = \sum (d_i - 1) = \wp(\mathcal{I} d_i). \quad (2.95)$$

Par ailleurs, puisque les n points marqués dans $\mathcal{M}_n^g$ jouent des rôles symétriques, les chevrons de WITTEN sont invariants¹⁰ par permutations des d_i .

Par exemple, lorsque l'on considère le chevron $\langle \tau_0^5 \tau_3 \tau_7^2 \rangle$, on doit avoir $n = 5 + 1 + 2$, puis $n + 3g' = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 7$, d'où $(g, n) = (4, 8)$. On intègre par conséquent sur $\overline{\mathcal{M}}_8^4$ la classe $\psi_1^0 \psi_2^0 \psi_3^0 \psi_4^0 \psi_5^0 \psi_6^3 \psi_7^7 \psi_8^7$, ce qui revient à intégrer la classe $\alpha^7 \beta^7 \gamma^3$ pour n'importe quelles α, β, γ classes ψ_i distinctes.

On notera de façon plus générale pour toute classe de cohomologie α homogène

$$\langle \alpha, \tau_{d_1}, \tau_{d_2}, \dots, \tau_{d_n} \rangle := \int_{\overline{\mathcal{M}}_n^g} \alpha \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n} \quad (2.96)$$

où le genre est déterminé par la condition dimensionnelle

$$\dim_{\mathbb{C}} \alpha + \sum d_i = n + 3g'. \quad (2.97)$$

Lorsque α est une classe de CHERN λ^i du fibré de HODGE, le chevron ci-dessus est appelé **intégrale de HODGE**.

On connaît assez peu de choses sur les intégrales de HODGE. Citons quand même un théorème de [15] (page 291) dont un cas particulier nous servira pour expliciter les nombres d'HURWITZ en genre torique.

10. On pourrait donc associer à toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ dont les parts sont autorisées à s'annuler un rationnel $\langle \tau_\lambda \rangle := \langle \tau_{\lambda_1}, \tau_{\lambda_2}, \dots, \tau_{\lambda_\ell} \rangle$ dont le genre associé vérifierait $3g' = \wp(\lambda)$. Nous n'en ferons pas usage.

Théorème 2.3.4.1. ([15]) (l'intégrale de HODGE $\langle \lambda^g, \tau_{2g'} \rangle$)

L'identité suivante est valide en tout genre $g \geq 1$:

$$\langle \lambda^g, \tau_{2g'} \rangle = \left(1 - \frac{1}{2^{2g-1}}\right) \frac{|b_{2g}|}{(2g)!} \quad (2.98)$$

où b_{2g} est un nombre de Bernoulli défini par la série $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n!} t^n$.

On trouvera également une table des intégrales de HODGE dites **primitives**¹¹ (sans τ_0 ni τ_1) en genre $g \leq 2$ à la toute fin de [17].

2.3.5 Relations des cordes et du dilaton, chevrons sphériques et toriques

Des considérations sur les morphismes d'oubli sur les espaces $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ (consistant à « oublier » un point marqué sur une courbe) mènent à deux relations de récurrence sur les chevrons de WITTEN $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$ – récurrence portant sur le nombre d'indices d_i . Leurs noms proviennent de la physique et sont reliés aux modèles topologiques de la gravité (cf. [26], [31] ou [15] pour des détails).

La **relation des cordes** s'applique dès que l'un des indices est nul :

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_0 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_{i-1}}, \tau_{d_i-1}, \tau_{d_{i+1}}, \dots, \tau_{d_n} \rangle \quad (2.99)$$

avec la convention $\tau_{-1} = 0$.

La **relation du dilaton**, elle, peut être utilisée si l'un des indices atteint la valeur 1 :

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n}, \tau_1 \rangle = (2g' + n) \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle. \quad (2.100)$$

Ces deux relations n'ont évidemment de sens que pour un couple (g, n) stable.

Elles tiennent toujours pour les chevrons $\langle \cdot, \lambda^i \rangle$ (la démonstration est en fait inchangée).

(Pour une interprétation combinatoire de ces relations, on consultera la section 3.4 de [15].)

En genres sphérique et torique, lorsque l'on considère des chevrons $\langle \alpha, \tau_{d_1}, \tau_{d_2}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$, la condition dimensionnelle $\dim \alpha + \sum d_i \leq n$ montre que tous les chevrons considérés ont au moins un indice valant 1 ou 0, ce qui permet de les calculer connaissant les valeurs initiales

$$\langle \tau_0^3 \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24}. \quad (2.101)$$

Ces valeurs initiales peuvent être retrouvées « à la main » (cf. [8] pour une démonstration, ou encore [31] page 21) mais également comme corollaire du théorème de KONTSEVITCH (2.107) que nous allons énoncer dans la section suivante.

Proposition 2.3.5.1. ([5]) (chevrons sphériques et toriques, une intégrale de HODGE)

1. Pour tous entiers $d_1, \dots, d_n \geq 0$ et genre $g \in \{0, 1\}$ vérifiant la condition dimensionnelle $n + 3g' = \sum d_i$, on a les identités

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g=0} = \binom{n-3}{d_1, \dots, d_n} \text{ et} \quad (2.102)$$

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g=1} = \frac{1}{24} \binom{n}{d_1, \dots, d_n} \left(1 - \sum_{i=2}^n \frac{\tilde{e}_i(d_1, \dots, d_n)}{i(i-1)}\right). \quad (2.103)$$

2. On a par ailleurs l'égalité suivante en genre torique :

$$\langle \lambda^1, \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle = \frac{1}{24} \binom{n-1}{d_1, \dots, d_n}. \quad (2.104)$$

11. la section qui suit éclairera cette terminologie

Démonstration.

1. En genre sphérique, il suffit de vérifier que la formule ci-dessus vérifie la relation des cordes et la condition initiale (cette dernière étant immédiate). En se donnant $n+1$ indices d_i tels que $d_1 + \dots + d_n + 0 = n-2$, on trouve

$$\sum_{i=1}^n \binom{n-3}{d_1, \dots, d_i-1, \dots, d_n} = \sum_{i=1}^n \frac{(n-3)!}{d_1! \dots d_n!} d_i = \frac{(n-3)!}{d_1! \dots d_n!} \underbrace{\sum_{i=1}^n d_i}_{=n-2} = \binom{n-2}{d_1, \dots, d_n, 0}, \text{ c. q. f. d.}$$

Même argument en genre torique : vérifier les relations des cordes et du dilaton ainsi que les conditions initiales. On trouve immédiatement la même valeur initiale $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24}$ vu que la somme $\sum_{i=2}^n (?)$ dans le membre de droite de (2.103) est réduite à 0.

- (a) La relation des cordes étant linéaire, il suffit de vérifier que chacun des deux termes de l'expression de droite la vérifie. On part de $n+1$ indices $d_1 + \dots + d_n + 0 = n+1$. Laissons de côté la constante $\frac{1}{24}$.

Le premier terme se comporte comme pour le genre sphérique :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{d_1, \dots, d_k-1, \dots, d_n} = \sum_{k=1}^n d_k \frac{n!}{d_1! \dots d_n!} = \frac{(n+1)!}{d_1! \dots d_n! 0!}.$$

Quant au second, en posant $\tilde{e}_i^k := \tilde{e}_i(d_1, \dots, d_k-1, \dots, d_n)$, on calcule

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \binom{n}{d_1, \dots, d_k-1, \dots, d_n} \sum_{i=2}^n \frac{\tilde{e}_i^k}{i(i-1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{n+1} \binom{n+1}{d_1, \dots, d_n, 0} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\tilde{e}_i^k}{i(i-1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{d_1, \dots, d_n, 0} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i(i-1)} \sum_{k=1}^n d_k \tilde{e}_i^k. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n d_k \tilde{e}_i^k \stackrel{?}{=} \tilde{e}_i(d_1, \dots, d_n, 0) \\ \iff & \sum_{k=1}^n d_k e_i^k \frac{i!(n-i)!}{(n+1)n!} \stackrel{?}{=} \frac{i!(n+1-i)!}{(n+1)!} \underbrace{e_i(d_1, \dots, d_n, 0)}_{=e_i} \\ \iff & \sum_{k=1}^n d_k e_i^k \stackrel{?}{=} (n+1-i) e_i. \end{aligned}$$

Partons du terme e_i^k de gauche :

$$\begin{aligned} e_i^k &= \sum_{k_1 < \dots < k_i} d'_{k_1} \dots d'_{k_i} \text{ avec } \begin{cases} d'_k = d_k - 1 \\ d'_j = d_j \text{ si } j \neq k \end{cases} \\ &= \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_1, \dots, k_i \neq k}} d_{k_1} \dots d_{k_i} + \sum_{r=1}^i \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_r = k}} d_{k_1} \dots d_{k_{r-1}} (d_k - 1) d_{k_{r+1}} \dots d_{k_i} \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_1, \dots, k_i \neq k}} d_{k_1} \dots d_{k_i} + \sum_{r=1}^i \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_r = k}} d_{k_1} \dots d_{k_{r-1}} d_k d_{k_{r+1}} \dots d_{k_i}}_{=e_i} \\ &\quad - \sum_{r=1}^i \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_r = k}} d_{k_1} \dots d_{k_{r-1}} d_{k_{r+1}} \dots d_{k_i}. \end{aligned}$$

Appliquer $\sum_{k=1}^n d_k$ multiplie le premier terme e_i par $n+1$. Quant au second terme, il se transforme en

$$\sum_{r=1}^i \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{k_1 < \dots < k_i \\ k_r = k}} d_{k_1} \dots d_{k_{r-1}} d_k d_{k_{r+1}} \dots d_{k_i} = \sum_{r=1}^i \sum_{k_1 < \dots < k_i} d_{k_1} \dots d_{k_i} = \sum_{r=1}^i e_i = i e_i, \text{ c. q. f. d.}$$

- (b) Passons à la relation du dilaton. On part de $n+1$ indices $d_1 + \dots + d_{n+1} = n+1$.
On regarde ce que devient e_i pour $i = 2, \dots, n$ lorsque qu'on lui rajoute un indice $d_{n+1} = 1$:

$$\begin{aligned} e'_{i+1}(d_1, \dots, d_n, 1) &= \sum_{k_1 < \dots < k_{i+1}} d_{k_1} \dots d_{k_{i+1}} \\ &= \sum_{k_1 < \dots < k_{i+1} \leq n} d_{k_1} \dots d_{k_{i+1}} + \sum_{k_1 < \dots < k_i \leq n} d_{k_1} \dots d_{k_i} d_{n+1} \\ &= e_{i+1}(d_1, \dots, d_n) + e_i(d_1, \dots, d_n) \\ &= e_{i+1} + e_i \end{aligned}$$

avec la convention évidente $e_{n+1} = 0$. Passant aux $\tilde{e}_i$, il vient

$$\tilde{e}'_{i+1} = \frac{e'_{i+1}}{\binom{n+1}{i+1}} = \frac{e_{i+1} + e_i}{\frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}} = \frac{(n-i-1)!(i+1)!}{n!} \frac{n-i}{n+1} e_{i+1} + \frac{(n-i)!i!}{n!!} \frac{i+1}{n+1} e_i,$$

i. e.

$$(n+1)\tilde{e}'_{i+1} = (n-i)\tilde{e}_{i+1} + (i+1)\tilde{e}_i.$$

On part alors de l'expression de droite (*modulo* la constante $\frac{1}{24}$) :

$$\binom{n+1}{d_1, \dots, d_n, 1} \left(1 - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\tilde{e}'_i}{i(i-1)} \right) = \binom{n}{d_1, \dots, d_n} (n+1) \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{e}'_{i+1}}{i(i+1)} \right).$$

On veut faire sortir après le multinomial un facteur $2g' + n$ (qui vaut n puisque $g = 1$). Vérifions-le :

$$\begin{aligned} (n+1) \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{e}'_{i+1}}{i(i+1)} \right) &= (n+1) - \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)\tilde{e}'_{i+1}}{i(i+1)} \\ &= (n+1) - \sum_{i=1}^n \frac{(n-i)\tilde{e}_{i+1} + (i+1)\tilde{e}_i}{i(i+1)} \\ &= n \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{e}_{i+1}}{i(i+1)} \right) + 1 - \sum_{i=1}^n \frac{(i+1)\tilde{e}_i - i\tilde{e}_{i+1}}{i(i+1)}. \end{aligned}$$

Le dernier terme se télescope en

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{e}_i}{i} - \frac{\tilde{e}_{i+1}}{i+1} \right) = \tilde{e}_1 = 1,$$

ce qui permet de conclure.

2. Vu la condition de dimension $n+0 = 1 + \sum d_i$, au moins un des d_i est nul, ce qui permet d'appliquer la relation des cordes (et seulement elle).

La condition initiale (quand $n = 1$) est donnée par l'identité (2.98) spécialisée en genre torique :

$$\langle \lambda^1, \tau_0 \rangle = \left(1 - \frac{1}{2^{2-1}} \right) \frac{|b_2|}{(2)!} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{24}.$$

Par ailleurs, on montre comme pour les chevrons sphériques que le multinomial $\binom{n-1}{d_1, \dots, d_n}$ vérifie la relation des cordes (*cf.* premier point), ce qui conclut.

2.3.6 Un théorème de KONTSEVITCH déterminant tous les chevrons de WITTEN

On encode tous les chevrons de WITTEN dans une série génératrice

$$W(t_0, t_1, \dots) := \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ (g, n) \text{ stable}}} \sum_{\substack{d_1 + \dots + d_n = 3g' + n \\ d_1, \dots, d_n \geq 0}} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle \frac{t_{d_1} \dots t_{d_n}}{n!} \quad (2.105)$$

$$= \sum_{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} \langle \tau_0^{m_0}, \tau_1^{m_1}, \tau_2^{m_2}, \dots \rangle \frac{t_0^{m_0}}{m_0!} \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \frac{t_2^{m_2}}{m_2!} \dots \quad (2.106)$$

(la seconde égalité résulte d'un regroupement des n -uplets $(d_1, \dots, d_n)$ ayant même multi-ensemble). Une conjecture de WITTEN (voir [15] et [17]) prouvée par KONTSEVITCH donne une équation différentielle vérifiée par la série W . Cette équation permet, à l'aide des relations des cordes et du dilaton, de calculer récursivement *tous* les chevrons de WITTEN.

Théorème 2.3.6.1. (KONTSEVITCH)

En dénotant une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t_d}$ par un indice d , on a

$$W_{0,1} = \frac{1}{2} W_{0,0}^2 + \frac{1}{12} W_{0,0,0,0}. \quad (2.107)$$

On trouvera dans [17] (page 11) une autre formulation de ce théorème, de laquelle on peut retrouver immédiatement la valeur $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24}$.

Nous seront principalement amenés à utiliser le théorème de KONTSEVITCH pour obtenir une formule de récurrence sur les nombres $\langle \tau_2^{3g'} \rangle$ qui apparaissent dans l'asymptotique des nombres d'HURWITZ.

2.3.7 La formule d'EKEDAH-LANDO-SHAPIRO-VAINSHTEIN

Comme annoncé, l'intégration dans les espaces $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ permet de comprendre l'énoncé de la formule ELSV qui exprime les nombres d'HURWITZ à une partition comme combinaison linéaire de chevrons de WITTEN.

Théorème 2.3.7.1. (formule ELSV [5])

Soient $g, n \geq 0$ des entiers et $\alpha = (a_1, \dots, a_\ell)$ une partition de ramification $\wp$ d'un entier $\leq n$. La formule suivante est valide dès lors que $n + 2g' > \wp$:

$$\mathbb{H}_n^g(\alpha) = \frac{1}{(n - |\alpha|)!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{n-\wp}^g} \frac{1 - \lambda^1 + \lambda^2 - \dots + (-1)^g \lambda^g}{(1 - a_1 \psi_1) \dots (1 - a_\ell \psi_\ell) (1 - \psi_{\ell+1}) \dots (1 - \psi_{n-\wp})}. \quad (2.108)$$

Lorsque la taille $|\alpha|$ est égale à n , la formule devient

$$\mathbb{H}_n^g(\alpha) \stackrel{|\alpha|=n}{=} \int_{\overline{\mathcal{M}}_\ell^g} \frac{1 - \lambda^1 + \lambda^2 - \dots + (-1)^g \lambda^g}{(1 - a_1 \psi_1) \dots (1 - a_\ell \psi_\ell)}. \quad (2.109)$$

En développant la fraction de l'intégrande, on obtient une combinaison linéaire finie d'intégrales de la forme $\int_{\overline{\mathcal{M}}_\ell^g} \lambda^j \psi_1^{k_1} \dots \psi_\ell^{k_\ell}$ pour certains entiers $j, k_1, \dots, k_\ell$.

La formule ELSV exprime les nombres d'HURWITZ à l'aide des chevrons de WITTEN et des classes de HODGE λ^i . On peut inverser cette formule pour exprimer les chevrons de WITTEN à l'aide des nombres de HURWITZ. Nous donnons cette inversion à titre culturel.

Proposition 2.3.7.2. (KAZARIAN [30]) (expression des chevrons de WITTEN par les nombres d'HURWITZ)

Pour tout couple stable (g, ℓ) , le chevron $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_\ell} \rangle$ s'exprime à l'aide de nombres d'HURWITZ dont on contrôle les parts des partitions. Plus précisément :

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_\ell} \rangle = \frac{1}{d_1! \dots d_\ell!} \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq d_1 \\ \vdots \\ 0 \leq k_\ell \leq d_\ell}} \left(\prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{d_i - k_i} \binom{d_i}{k_i} \right) \mathbb{D}_{|\kappa|}^g(\kappa)$$

où κ désigne la partition $(k_1 + 1, \dots, k_\ell + 1)$.

Il est illusoire de chercher à réinverser une telle formule. En effet, il s'agirait d'exprimer les nombres d'HURWITZ à l'aide de chevrons de WITTEN ne mettant pas en jeu le fibré de HODGE, et ELSV nous dit que cela est vraiment très improbable.

Démonstration.

On part du membre de droite et on va faire des considérations de dimensions. L'idée est de casser la liaison des indices k_i du $\mathbb{D}_n^g(\kappa)$ en utilisant ELSV :

$$\sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq d_1 \\ \vdots \\ 0 \leq k_\ell \leq d_\ell}} \left(\prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{d_i - k_i} \binom{d_i}{k_i} \right) \int_{\mathcal{M}_\ell^g} \frac{1 - \lambda^1 + \dots + (-1)^g \lambda^g}{\prod_{i=1}^{\ell} (1 - (k_i + 1) \psi_i)}.$$

En passant tout dans l'intégrale, on factorise un produit de ℓ facteurs de la forme

$$\sum_{0 \leq k \leq d} (-1)^{d-k} \binom{d}{k} \frac{1}{1 - (k+1) \psi_i}.$$

Or la combinaison linéaire ci-dessus ne contient que des monômes en ψ_i d'ordre $\geq d$ (cf. lemme 2.3.7.3 ci-dessous) avec un coefficient 1 pour ψ_i^d , d'où le produit

$$\prod_{i=1, \dots, \ell} \sum_{0 \leq k_i \leq d_i} (-1)^{d_i - k_i} \binom{d_i}{k_i} \frac{1}{1 - (k_i + 1) \psi_i} = \prod_{i=1, \dots, \ell} \left(\psi_i^{d_i} + \text{t.d.s.} \right) = \psi_1^{d_1} \dots \psi_\ell^{d_\ell} + \text{t.d.s.}$$

où « t.d.s. » signifie « termes de degré strictement supérieur ». En multipliant par la classe du fibré de HODGE $\sum_{j=0}^g (-1)^j \lambda^j = 1 + \text{t.d.s.}$, on obtient encore une intégrande de la forme $\psi_1^{d_1} \dots \psi_\ell^{d_\ell} + \text{t.d.s.}$; puisque l'intégrale ne filtre que les termes de dimension $\ell + 3g' = \sum d_i$, il ne reste plus que le chevron cherché.

Lemme 2.3.7.3. (un développement limité)

La combinaison linéaire suivante des $\frac{1}{1-\psi}$, $\frac{1}{1-2\psi}$, ..., $\frac{1}{1-(d+1)\psi}$ tue toutes les puissances de ψ jusqu'à ψ^{d-1} inclus :

$$\sum_{i=0}^d \frac{(-1)^{d-i} \binom{d}{i}}{d!} \frac{1}{1 - (i+1) \psi} = \psi^d + O(\psi^{d+1}).$$

Démonstration du lemme 2.3.7.3.

En développant le terme de gauche, on voit qu'il s'agit donc de montrer que la quantité

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \binom{d}{i} (i+1)^n$$

s'annule pour $n < d$ (et vaut $d!$ pour $n = d$).

La nullité cherchée revient à montrer $\sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \frac{P(i)}{i!(d-i)!} = 0$ pour tout polynôme P de degré $< d$. On le montre sur la base des $X^{\downarrow k}$ pour $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$. En effet, en observant que $X^{\downarrow k}(i) = \frac{i!}{(i-k)!}$ est nul pour $i < k$, on trouve

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \frac{X^{\downarrow k}(i)}{i!(d-i)!} = \sum_{i=k}^d (-1)^{d-i} \frac{1}{(i-k)!(d-i)!} = \sum_{p+q=d-k} (-1)^p \frac{1}{p!q!} = \frac{(1-1)^{d-k}}{(d-k)!} = 0.$$

Quant au terme $n = d$, on le trouve en décomposant $(1 + X)^d \in X^{\downarrow d} + \text{Vect}_{k < n} \{X^{\downarrow k}\}$ et en remarquant que les degrés inférieurs ont une contribution nulle par ce qui précède. Puisque le polynôme $X^{\downarrow d}$ annule les $i < d$, il reste

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d-i} \binom{d}{i} X^{\downarrow d}(i) = X^{\downarrow d}(d) = d!, \text{ c. q. f. d.}$$

2.3.8 Un théorème de KAZARIAN donnant les séries $H^g(\lambda)$ dans l'algèbre $\mathcal{A}$

Donnons pour terminer un théorème de M. KAZARIAN qui explicite les séries $H^g(\lambda)$ comme polynôme de l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{Q}[Y, Z]$. La preuve de [14] n'étant pas publiée et peu étoffée, nous en redonnons les détails (complétés).

Théorème 2.3.8.1. (KAZARIAN [14]) (les séries $H^g(\lambda)$)

Donnons-nous une partition $\alpha = (a_1, \dots, a_\ell)$ d'un entier $a \geq 0$ ainsi qu'un genre $g \geq 0$. On a alors l'égalité suivante dès que le couple (g, ℓ) est stable :

$$\mathbb{H}^g(\alpha) = Y^a (Z + 1)^{2g' + \ell} P^g(\alpha) \quad (2.110)$$

où $P^g(\alpha)$ est la série suivante en Z :

$$P^g(\alpha) := \sum_{k \geq 0} \frac{Z^k}{k!} \int_{\mathcal{M}_{\ell+k}^g} \frac{1 - \lambda^1 + \lambda^2 - \dots + (-1)^g \lambda^g}{(1 - a_1 \psi_1) \dots (1 - a_\ell \psi_\ell)} \frac{\psi_{\ell+1}^2 \dots \psi_{\ell+k}^2}{(1 - \psi_{\ell+1}) \dots (1 - \psi_{\ell+k})}. \quad (2.111)$$

Remarques 2.3.8.2.

On trouvera dans [29] une explication combinatoire du facteur $Y^a (Z + 1)^{2g' + \ell}$. (Essentiellement, une fois construit un certain graphe, la présence de puissances de Y correspond à planter un arbre de CAYLEY sur chaque sommet et la présence des puissances de $1 + Z$ à planter un arbre de CAYLEY (ou rien) sur chaque arête.)

La série $P^g(\alpha)$ ci-dessus est en fait un *polynôme* pour des questions de dimensions : l'intégrande a un degré $\geq 2 + 2 + \dots + 2 = 2k$, lequel degré doit valoir la dimension $3g' + \ell + k$, d'où $3g' + \ell + k \geq 2k$ et $k \leq 3g' + \ell$.

Signalons une conséquence importante du théorème 2.3.8.1 avant de le démontrer ; puisque la série $\frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a (Z + 1)^{2g' + \ell}}$ est un polynôme en Z , on pourra appliquer le lemme de compacité de la section 2.1.4.

Proposition 2.3.8.3. (algorithme pour calculer les séries $\mathbb{H}^g(\lambda)$)

Soit $g \geq 0$ un genre et λ une partition de taille a et longueur ℓ . Pour obtenir la série $\mathbb{H}^g(\lambda)$, il suffit de :

1. calculer les nombres $h_n := \mathbb{H}_{n-a}^g(\lambda)$ pour $n \in \llbracket 0, 3g' + \ell \rrbracket$;
2. tronquer à l'ordre $d := 3g' + \ell$ la série $\frac{\sum_{n=0}^d h_n t^n}{\left[\sum_{n=0}^d \frac{n^n}{n!} t^n\right]^{a+\ell+2g'}}$;
3. effectuer dans la troncature obtenue la substitution $t \leftarrow \frac{Z}{1+Z} e^{-\frac{Z}{1+Z}}$;
4. tronquer la série en Z obtenue à l'ordre d ;
5. multiplier par $Y^a (Z + 1)^{2g' + \ell}$.

Démonstration (de l'algorithme).

On observera que $h_n^g(\lambda)$ est nul pour $n < |\lambda|$, de sorte que la série $\mathbb{H}^g(\lambda)$ est de valuation $\geq a$ et donc la fraction $\frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a}$ reste dans $\mathbb{Q}[[t]]$. Plus précisément, on a les troncatures suivantes à l'ordre d :

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{n=1}^{d+1} \frac{(n-1)^{n-1} n}{(n-1)! n} t^n + o(t^{d+1}) = t \left[\sum_{n=1}^{d+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + o(t^d) \right] \\ &= t \left[\sum_{n=0}^d \frac{n^n}{n!} t^n + o(t^d) \right] = t(1 + Z), \text{ d'où l'on tire} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a(Z+1)^{2g'+\ell}} = \frac{\sum_{n=a}^{a+d} h_n^g(\lambda) t^n + o(t^{a+d})}{[t(1+Z)]^a (1+Z)^{2g'+\ell}} = \frac{\sum_{n=0}^d h_{n-a}^g(\lambda) t^n + o(t^d)}{\left[\sum_{n=0}^d \frac{n^n}{n!} t^n\right]^{a+\ell+2g'} + o(t^d)}.$$

Le résultat découle alors du fait que $\frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a(Z+1)^{2g'+\ell}}$ est un polynôme en Z de degré d .

Démonstration du théorème 2.3.8.1.

Abrégeons $\check{\lambda} := 1 - \lambda^1 + \lambda^2 - \dots \pm \lambda^g$ et

$$\frac{1}{1-a\psi} := \frac{1}{(1-a_1\psi_1)\dots(1-a_\ell\psi_\ell)} \text{ et } a^n := a_1^{n_1}\dots a_\ell^{n_\ell} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^\ell. \quad (2.112)$$

Lorsque l'on encode la formule ELSV dans la série

$$\mathbb{H}^g(\alpha) = \sum_{n \geq a} \frac{t^n}{(n-a)!} \int_{\mathcal{M}_{n-\varphi}^g} \frac{1 - \lambda^1 + \lambda^2 - \dots + (-1)^g \lambda^g}{(1-a_1\psi_1)\dots(1-a_\ell\psi_\ell)(1-\psi_{\ell+1})\dots(1-\psi_{n-\varphi})} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{n \leftarrow a+k}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{t^{a+k}}{k!} \int_{\mathcal{M}_{\ell+k}^g} \frac{\check{\lambda}}{1-a\psi} \frac{1}{(1-\psi_{\ell+1})\dots(1-\psi_{\ell+k})} \\ &= t^a \sum_{k, d_1, \dots, d_k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \int_{\mathcal{M}_{\ell+k}^g} \frac{\check{\lambda}}{1-a\psi} \psi_{\ell+1}^{d_1} \dots \psi_{\ell+k}^{d_k}, \end{aligned} \quad (2.114)$$

on peut rendre les classes ψ_i dans l'intégrale de HODGE de degré $d_i \geq 2$ grâce aux relations des cordes et du dilaton, d'où la forme du polynôme $P^g(\alpha)$ du théorème. Précisons cela.

On définit une série F dans $\mathbb{Q}[[t_0, t_1, \dots]]$ par

$$F(t_0, t_1, \dots) := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \int_{\mathcal{M}_{\ell+k}^g} \left[\frac{\check{\lambda}}{1-a\psi} \sum_{d_1, \dots, d_k \geq 0} (t_{d_1} \psi_{\ell+1}^{d_1}) \dots (t_{d_k} \psi_{\ell+k}^{d_k}) \right] \quad (2.115)$$

$$= \sum_{k, d_1, \dots, d_k \geq 0} \frac{t_{d_1} \dots t_{d_k}}{k!} \int_{\mathcal{M}_{\ell+k}^g} \check{\lambda} \left(\sum_{n_1, \dots, n_\ell \geq 0} a_1^{n_1} \dots a_\ell^{n_\ell} \psi_1^{n_1} \dots \psi_\ell^{n_\ell} \right) \psi_{\ell+1}^{d_1} \dots \psi_{\ell+k}^{d_k} \quad (2.116)$$

$$= \sum_{k, d_1, \dots, d_k, n_1, \dots, n_\ell \geq 0} a^n \frac{t_{d_1} \dots t_{d_k}}{k!} \langle \check{\lambda}, \tau_{n_1}, \tau_{n_2}, \dots, \tau_{n_\ell}, \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_k} \rangle. \quad (2.117)$$

Le théorème est alors une conséquence triviale des deux lemmes suivants (on attire l'attention du lecteur sur le décalage de l'indice minimal dans la série F du lemme 2.3.8.5).

Lemme 2.3.8.4.

On a les identités et équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} H^g(\alpha) = t^a F(t, t, \dots) \\ P^g(\alpha) = F(0, 0, t, \dots) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial_{t_0} F = aF + \sum_{i \geq 0} t_{i+1} \partial_{t_i} F \\ \partial_{t_1} F = (2g' + \ell) F + \sum_{i \geq 0} t_i \partial_{t_i} F \end{cases}. \quad (2.118)$$

Lemme 2.3.8.5. (une équation aux dérivées partielles)

Soient α et β deux scalaires d'un corps K et F une série de $K[[t_1, t_2, \dots]]$ qui vérifie les deux équations

$$\begin{cases} \partial_{t_1} F = \alpha F + \sum_{i \geq 1} t_{i+1} \partial_{t_i} F \\ \partial_{t_2} F = \beta F + \sum_{i \geq 1} t_i \partial_{t_i} F \end{cases}. \quad (2.119)$$

On a alors l'identité suivante dans l'algèbre $K[[Y, Z]]$:

$$t^\alpha F(t, t, t, \dots) = Y^\alpha (1+Z)^\beta F(0, 0, Z, Z, Z, \dots). \quad (2.120)$$

Démonstration du lemme 2.3.8.4.

Lorsqu'on annule $t_i \leftarrow 0$ pour tout $i < N$ (où N est un entier donné), les exposants apparaissant dans le produit $\psi_{\ell+1}^{d_1} \dots \psi_{\ell+k}^{d_k}$ varient de N à ∞ , d'où l'égalité¹²

$$F(\underbrace{0, \dots, 0}_{N \text{ zéros}}, t, t, t, \dots) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \int_{\mathcal{M}_{g, \ell+k}} \frac{\check{\lambda}}{1 - a\psi} \frac{\psi_{\ell+1}^N \dots \psi_{\ell+k}^N}{(1 - \psi_{\ell+1}) \dots (1 - \psi_{\ell+k})}. \quad (2.121)$$

Par exemple, $N = 0$ et $N = 2$ donnent les deux premières identités recherchées

$$H^g(\alpha) = t^a F(t, t, \dots) \text{ et } P^g(\alpha) = F(0, 0, t, \dots).$$

Afin de pouvoir dériver F , regroupons les facteurs t_{d_i} ayant mêmes d_i (comme dans le théorème de KONTSEVITCH).

Le terme général de la somme étant symétrique en les indices d_i , on peut regrouper les termes de la somme ayant même multi-ensemble $\left[\binom{0}{m_0}, \binom{1}{m_1}, \binom{2}{m_2}, \dots \right]$ où l'on a posé $m_i := \# \{n ; d_n = i\}$ pour tout $i \geq 0$. Une fois choisies les multiplicités $(m_0, m_1, m_2, \dots) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, choisir une famille $(d_1, \dots, d_k) \in \bigcup_{\ell \geq 0} \mathbb{N}^\ell$ telle que $k = \sum_{i \geq 0} m_i$ revient à choisir une partition ensembliste de $\llbracket 1, k \rrbracket$ en parts de cardinaux m_i , d'où un multinomial $\binom{k}{\vec{m}}$. On peut donc réécrire

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n \frac{t_0^{m_0}}{m_0!} \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \frac{t_2^{m_2}}{m_2!} \dots \langle \check{\lambda}, \tau_{n_1}, \dots, \tau_{n_\ell}, \tau_0^{m_0}, \tau_1^{m_1}, \tau_2^{m_2}, \dots \rangle \\ &= \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n t^m \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau^m \rangle \text{ avec les abréviations évidentes.} \end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} t_{i+1} \partial_{t_i} F &= \sum_{i \geq 0} \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n \frac{t_0^{m_0}}{m_0!} \dots \frac{t_i^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \frac{t_{i+1}^{m_{i+1}+1}}{m_{i+1}!} \dots \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau_0^{m_0}, \dots, \tau_i^{m_i}, \dots \rangle \\ &\stackrel{m_i \leftarrow m_i+1}{=} \sum_{i \geq 0} \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n \frac{t_0^{m_0}}{m_0!} \dots \frac{t_i^{m_i}}{m_i!} \frac{t_{i+1}^{m_{i+1}+1}}{m_{i+1}!} \dots \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau_0^{m_0}, \dots, \tau_i^{m_i+1}, \dots \rangle. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la dérivée partielle $\partial_{t_0} F$ vaut

$$\begin{aligned} \partial_{t_0} F &= \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n \frac{t_0^{m_0-1}}{(m_0-1)!} \frac{t_1^{m_1}}{m_1!} \frac{t_2^{m_2}}{m_2!} \dots \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau^m \rangle \\ &\stackrel{m_0 \leftarrow m_0+1}{=} \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n t^m \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau^m, \underline{0} \rangle \\ &\stackrel{\text{relation de la corde}}{=} \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n t^m \left(\sum_{j=1, \dots, \ell} \langle \check{\lambda}, \tau_{n_1}, \dots, \tau_{n_{j-1}}, \dots, \tau_{n_j}, \tau^m \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \geq 0} \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau_0^{m_0}, \dots, \tau_i^{m_i+1}, \tau_{i+1}^{m_{i+1}-1}, \dots \rangle \right). \end{aligned}$$

La somme $\sum_{j=1, \dots, \ell} (?)$ vaut (en renommant $n_j \leftarrow n_j + 1$) la série F multipliée par un facteur $\sum_{j=1, \dots, \ell} a_j = a$, la seconde somme $\sum_{i \geq 0} (?)$ vaut (en renommant $m_{i+1} \leftarrow m_{i+1} + 1$) le calcul sus-effectué de $\sum_{i \geq 0} t_{i+1} \partial_{t_i} F$, d'où la première équation différentielle.

12. invoquer dans l'algèbre $\mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_k]]$ l'identité $\sum_{d_1, \dots, d_k \geq N} x_1^{d_1} \dots x_k^{d_k} = \frac{x_1^N \dots x_k^N}{(1-x_1) \dots (1-x_k)}$

D'autre part, la dérivée partielle $\partial_{t_1} F$ vaut

$$\begin{aligned}
\partial_{t_1} F &= \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}, m_1 \geq 1 \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n \frac{t_0^{m_0}}{m_0!} \frac{t_1^{m_1-1}}{(m_1-1)!} \frac{t_2^{m_2}}{m_2!} \cdots \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau^m \rangle \\
&\stackrel{m_1 \leftarrow m_1+1}{=} \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n t^m \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau^m, \tau_1 \rangle \\
&\stackrel{\text{relation du dilaton}}{=} \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n t^m ((2g' + (\ell + k)) \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau^m, \dots \rangle) \text{ où } k := \sum_{i \geq 0} m_i \\
&= (2g' + \ell) F + \sum_{i \geq 0} \sum_{\substack{\vec{m} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \\ n_1, \dots, n_\ell \geq 0}} a^n \frac{t_0^{m_0}}{m_0!} \cdots \frac{t_i^{m_i}}{(m_i-1)!} \cdots \langle \check{\lambda}, \tau_n, \tau^m \rangle \\
&= (2g' + \ell) F + \sum_{i \geq 0} t_i \partial_{t_i} F.
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 2.3.8.5.

On commence par se restreindre à trois variables en posant $f := F(x, y, z, z, z, \dots)$ dans l'algèbre $K[[x, y, z]]$. En dérivant cette dernière définition, on obtient les égalités

$$\begin{cases} \partial_x f = \frac{\partial F(x, y, z, z, z, \dots)}{\partial x} = [\partial_1 F](x, y, z, z, \dots) \\ \partial_y f = \frac{\partial F(x, y, z, z, z, \dots)}{\partial y} = [\partial_2 F](x, y, z, z, \dots) \\ \partial_z f = \frac{\partial F(x, y, z, z, z, \dots)}{\partial z} = \sum_{i \geq 3} [\partial_i F](x, y, z, z, \dots) \end{cases}.$$

Par conséquent, spécialiser les deux équations de l'hypothèse selon $(t_1, t_2, t_{i \geq 3}) = (x, y, z)$ donne

$$\begin{cases} \partial_x f = \alpha f + y \partial_x f + z \partial_y f + z \partial_z f \\ \partial_y f = \beta f + x \partial_x f + y \partial_y f + z \partial_z f \end{cases},$$

que l'on réécrit comme système linéaire en $(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$:

$$\begin{cases} (1-y) \partial_x f - z \partial_y f - z \partial_z f = \alpha f \\ -x \partial_x f + (1-y) \partial_y f - z \partial_z f = \beta f \end{cases}.$$

Ce système (à coefficients non constants) peut se résoudre par la méthode dite **des caractéristiques**.

Posons $g := f(0, y, z)$ dans $K[[y, z]]$. Dériver cette dernière définition et spécialiser $x \leftarrow 0$ dans la deuxième équation (avec β) donne

$$(1-y) \partial_y g - z \partial_z g = \beta g.$$

Cherchons deux séries $\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ dans $K[[s, y, z]]$ vérifiant $\begin{cases} \partial_s \tilde{y} = 1 - \tilde{y} \\ \partial_s \tilde{z} = -\tilde{z} \end{cases}$, afin que la spécialisation de l'équation ci-dessus selon $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ donne

$$\beta g\left(\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}\right) = \partial_s \tilde{y} \times [\partial_y g]\left(\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}\right) + \partial_s \tilde{z} \times [\partial_z g]\left(\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}\right) = \partial_s g\left(\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}\right),$$

d'où l'on déduirait que $g\left(\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}\right)$ est exponentielle en s . Une solution est $\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1-e^{-s}}{1-y} \\ \frac{z}{1-y} e^{-s} \end{pmatrix}$ dans $K\left[\left[s, \frac{z}{1-y}\right]\right]$. Par conséquent, la série $g\left(\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}\right)$ de $K\left[\left[s, \frac{z}{1-y}\right]\right]$ vaut $G\left(\frac{z}{1-y}\right) e^{\beta s}$ pour une certaine série G . Spécialiser $s \leftarrow 0$ donne $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{1-y} \end{pmatrix}\right) = G\left(\frac{z}{1-y}\right)$. Ensuite, spécialiser $s \leftarrow -\ln(1-y)$ donne $\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, d'où

$$g = g\left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}\right) = G\left(\frac{z}{1-y}\right) e^{\beta(-\ln(1-y))} = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{1-y} \end{pmatrix}\right) \frac{1}{(1-y)^\beta}.$$

Nous avons ainsi obtenu l'égalité

$$f(0, y, z) = f\left(0, 0, \frac{z}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^\beta}.$$

Posons à présent $h := f(x, z, z)$ dans $K[[x, z]]$. Dériver la définition de h et spécialiser $y \leftarrow z$ dans la première équation (avec α) donne

$$(1 - z) \partial_x h - z \partial_z h = \alpha h.$$

Comme avant, poser $\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{z}}\right) := \binom{s+u(e^{-s}-1)}{ue^{-s}}$ dans $K[[u, s]]$ afin d'avoir $\begin{cases} \partial_s \tilde{x} = 1 - \tilde{z} \\ \partial_s \tilde{z} = -\tilde{z} \end{cases}$: de l'équation $\partial_s h\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{z}}\right) = \alpha h\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{z}}\right)$, l'on déduit $h\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{z}}\right) = H(u) e^{\alpha s}$ pour une certaine série H . Spécialiser $s \leftarrow 0$ donne $h\left(\frac{0}{u}\right) = H(u)$, puis spécialiser $u \leftarrow s$ donne $h\left(\frac{se^{-s}}{se^{-s}}\right) = h\left(\frac{0}{s}\right) e^{\alpha s}$. Enfin, spécialiser $s \leftarrow Y$ donne $\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{z}}\right) = \binom{\tilde{x}}{t}$, d'où

$$\begin{aligned} h\left(\frac{t}{t}\right) &= h\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{z}}\right) = e^{\alpha Y} h\left(\frac{0}{Y}\right) = \left(\frac{Y}{t}\right)^\alpha f(0, Y, Y) = \left(\frac{Y}{t}\right)^\alpha \frac{1}{(1-Y)^\beta} f\left(0, 0, \frac{Y}{1-Y}\right), \\ i. \ e. \ F(t, t, t, \dots) &= \frac{Y^\alpha}{t^\alpha} (1+Z)^\beta F(0, 0, Z, Z, Z, \dots), \ c. \ q. \ f. \ d.. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Asymptotique des nombres d'HURWITZ à plusieurs partitions, nombres d'HURWITZ à deux partitions en genre nul

Le résultat principal de ce chapitre donne l'asymptotique générale des nombres d'HURWITZ. Ce travail a été publié¹ dans [20] et soumis à IJAC.

Théorème 3.0.8.6. (*S. 2010 [20]*) (*asymptotique des nombres d'HURWITZ*)

Pour toutes partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ et tout genre $g \geq 0$, on a l'asymptotique suivante pour une certaine constante c_g :

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{H}_n^g(\lambda^1 \sqcup \dots \sqcup \lambda^k) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} c_g \frac{e^n}{n} n^{\frac{5}{2}g'} n^{\ell(\lambda_1) + \dots + \ell(\lambda_k)}. \quad (3.1)$$

Les constantes c_g peuvent être déterminées par l'une des quatre caractérisations suivantes.

1. (Explicitation *via* les chevrons de WITTEN)

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_1 = \frac{1}{48}, \quad \text{et} \quad c_{g \geq 2} = \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}g'\right) 2^{\frac{5}{2}g'}}. \quad (3.2)$$

2. (Récursion quadratique)

Posons $\alpha_{g'} = c_g \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) 2^{\frac{5g-1}{2}}$ pour tout genre $g \geq 0$. Les nombres rationnels $\alpha_{k \geq -1}$ vérifient alors la formule récursive pour tout $g \geq 0$:

$$\alpha_g = \frac{25g^2 - 1}{12} \alpha_{g'} + \frac{1}{2} \sum_{p+q=g'}^{p,q \geq 0} \alpha_p \alpha_q \quad \text{avec } \alpha_{-1} = -1. \quad (3.3)$$

3. (Équation de PAINLEVÉ I)

La fonction $u(t) := \sum_{g \geq 0} c_g \frac{\Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right)}{t^{\frac{5g-1}{2}}} = \sum_{g \geq 0} \frac{\alpha_{g'}}{(2t)^{\frac{5g-1}{2}}}$ de $\mathbb{Q}\sqrt{t} + \mathbb{Q}\left[\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]\right]$ vérifie l'équation de PAINLEVÉ I :

$$u(t)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 2t. \quad (3.4)$$

4. (Explicitation *via* les constantes t_g de BENDER-GAO-RICHMOND)

$$c_g = \sqrt{2}^{g-3} t_g. \quad (3.5)$$

1. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, dans notre publication, les nombres d'HURWITZ *n'ont pas encore été normalisés* par le nombre de transpositions. L'allègement qui résulte de cette normalisation est de fait très appréciable.

La démonstration du théorème ci-dessus met en jeu une formule que nous utilisons indépendamment pour décrire les séries $H^0(\lambda a, \lambda b)$ comme polynômes en Y . Les coefficients de ce polynôme s'expriment comme des sommes triples qu'il serait intéressant de simplifier.

Théorème 3.0.8.7. (*S. 2011*) (la série $H^0(\lambda a, \lambda b)$)

Pour tous entiers $a, b \geq 2$ de somme $c := a + b$, on a l'égalité suivante dans $\mathbb{Q}[Y]$:

$$H^0(\lambda a, \lambda b) = \frac{a^a b^b Y^c}{a! b! c} + \sum_{0 \leq s \leq a, b} Y^{c-s} \left[\sum_{\substack{l, m, n, o \geq 0 \\ m+n+o=s \\ 1 \leq l+s \leq a, b}} \frac{(-1)^{l+m+n}}{l! m! n! o!} (l-n) \frac{(c-l-m-n)^{c-2l-m-1}}{(c-2l-m)!} \right]. \quad (3.6)$$

3.1 Asymptotique des nombres d'HURWITZ à une partition

On montre ici l'asymptotique (démontrée dans [30] (page 16) pour une partition vide)

$$h_n^g(\lambda) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} c_g e^n n^{\frac{5}{2}g' + \ell(\lambda) - 1} \text{ où } \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \frac{1}{48} \end{pmatrix} \text{ et } c_{g \geq 2} = \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2}g')} 2^{\frac{5}{2}g'}. \quad (3.7)$$

3.1.1 Nombres d'HURWITZ à une partition en genres sphérique et torique

On rappelle ici comment obtenir les nombres d'HURWITZ $h_n^0(\lambda)$ et $h_n^1(\lambda)$ en partant de la formule ELSV. Les résultats sont déjà connus de [5], nous les codons directement à travers les séries génératrices : *pour toute partition λ de ramification $\wp$ partitionnant un entier a , on a les identités :*

$$\mathbb{H}^0(\lambda) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{\downarrow a}}{n^{\wp+3}} \frac{n^n}{n!} t^n \quad (3.8)$$

$$\mathbb{H}^1(\lambda) = \frac{1}{24} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-\wp}}{(n-a)!} t^n \left(1 - \frac{1}{n} - \sum_{i=2}^{n-\wp} (i-2)! \frac{e_i(\bar{\lambda})}{n^i} \right) \quad (3.9)$$

$$\mathbb{H}^1(\emptyset) = \frac{1}{24} \sum_{n \geq 1} \frac{A_n}{n} \frac{n^n}{n!} t^n. \quad (3.10)$$

Pour le cas sphérique, E. DUCHI, D. POULALHON et G. SCHAEFFER ont récemment obtenu une preuve bijective de la formule d'HURWITZ, voir par exemple les transparents aux Journées de Combinatoire de Bordeaux 2012 (disponibles sur la page <http://www.labri.fr/perso/marckert/JCB2012-Schaeffer.pdf>). Cela permet de contourner les considérations géométrico-algébriques de la formule ELSV que nous allons utiliser pour établir les formules (3.8), (3.9) et (3.10).

Sur la sphère

Reprenons la formule ELSV pour une partition complète $\lambda \vdash n$ de longueur ℓ :

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda) = \int_{\mathcal{M}_\ell^g} \frac{1 - \lambda^1 + \lambda^2 - \dots + (-1)^g \lambda^g}{(1 - \lambda_1 \psi_1) \dots (1 - \lambda_\ell \psi_\ell)}.$$

En genre nul (ce qui impose $\ell \geq 3$ pour la stabilité), le fibré de HODGE disparaît et l'intégrale se développe pour faire apparaître les chevrons de WITTEN :

$$\frac{\mathbb{H}_n^0(\lambda)}{(n+\ell-2)!} = \sum_{k_1, \dots, k_\ell \geq 0} \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_\ell} \rangle \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell}.$$

Or l'on connaît d'après (2.102) la valeur des chevrons sphériques $\langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_\ell} \rangle = \binom{\ell}{k_1, \dots, k_\ell}$. En ne gardant que les indices vérifiant $k_1 + \dots + k_\ell = \ell - 3$, on en vient finalement à développer $(\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell)^{\ell-3} = |\lambda|^{\ell-3}$, ce qui donne la formule d'HURWITZ :

$$\mathbb{H}_n^0(\lambda) = n^{\ell-3}. \quad (3.11)$$

Théorème 3.1.1.1. (HURWITZ [11], ELSV [5]) (les nombres $\mathbb{H}_n^0(\lambda)$ et les séries $\mathbb{H}^0(\lambda)$)

1. La formule précédente (3.11) reste valable pour $\ell \in \{1, 2\}$.
2. Si λ ne partitionne pas entièrement n , on a quand même la formule suivante :

$$\mathbb{H}_n^0(\lambda) = \frac{n^{n-\wp-3}}{(n-|\lambda|)!}.$$

3. On a l'identité

$$\mathbb{H}^0(\lambda) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{\downarrow|\lambda|}}{n^{\wp+3}} \frac{n^n}{n!} t^n.$$

Démonstration.

1. On distinguera deux cas.
 - Pour $\ell = 1$, on obtient la partition $\lambda = (n)$. Le nombre de transpositions supplémentaires vaut alors

$$T_n = n + \ell - 2 = n - 1.$$

On cherche donc les n -constellations de type $(\gamma, \tau_2, \dots, \tau_n)$ avec γ un n -cyle et τ_i des transpositions (*modulo* un facteur $\frac{1}{n!}$). Laissons de côté le cas $n = 1$, pour lequel $\mathbb{H}_1^0(\square) = 1$.

Il est alors utile d'observer le fait suivant : si k permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de $\mathfrak{S}_n$ vérifiant $\sum \wp(\sigma_i) = n-1$ engendrent un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_n$, alors le produit $\prod \sigma_i$, quel que soit l'ordre de ses facteurs, est un n -cyle. Pour le montrer, notons γ le produit $\prod \sigma_i$ et considérons la constellation formée par les σ_i (dans l'ordre correspondant à γ) et γ . La formule de RIEMANN-HURWITZ donne

$$2n + 2g' = \wp = \wp(\vec{\sigma}) + \wp(\gamma) = (n-1) + (n-\ell(\gamma)),$$

d'où $\ell(\gamma) = 1 - 2g \leq 1$ et γ n'a qu'un cycle.

Ce fait montre que nous cherchons exactement les $(\tau_2, \dots, \tau_n)$ qui agissent transitivement. Représentons un tel $(n-1)$ -uplet par un graphe à n sommets numérotés et $n-1$ arêtes marquées, i et j étant reliés si et seulement si la transposition (i, j) apparaît, l'arête en question étant marquée k si et seulement si $\tau_k = (i, j)$. La condition de transitivité revient à la connexité de notre graphe ; comme sa caractéristique d'EULER vaut 1, c'est un arbre. On compte par conséquent les arbres de CAYLEY à n sommets dont les $n-1$ arêtes sont marquées. Il y en a $n^{n-2} (n-1)!$. En tenant compte du facteur $\frac{1}{n!}$, on obtient n^{n-3} .

Or l'on souhaite obtenir

$$(n+\ell-2)! \mathbb{H}_n^0(\lambda) = (n-1)! \frac{n^n}{n!} n^{-2} = n^{n-3}, \text{ c. q. f. d.}$$

- Il reste $\ell = 2$. On se donne deux indices $d \geq 1$ et $n-d$. Le nombre T_n vaut

$$T_n = n - \ell + 2 = n.$$

Ce que l'on souhaite avoir, c'est

$$\frac{(n+\ell-2)!}{|\text{Sym } \lambda|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_\ell^{d_\ell}}{d_1! \dots d_\ell!} n^{\ell-3} = (n-1)! \frac{d^d (n-d)^{n-d}}{d! (n-d)!}.$$

Nous renvoyons à [1] pour la démonstration de ce cas qui est beaucoup plus difficile, référence citée dans la preuve générale [25] de V. STRELH. Beaucoup plus récemment, Seunghyun SEO et Heesung SHIN ont donné dans [21] une preuve bijective *via* les partitions non croisées.

2. On se ramène à la partition complétée $\bar{\lambda} := (d_1, \dots, d_\ell, 1, \dots, 1)$ dont on rappelle (cf. 2.85) la relation avec

$$\mathbb{H}_n^0(\lambda) = \frac{1}{(n - |\lambda|)!} \mathbb{H}_n^0(\bar{\lambda}) = \frac{n^{\ell(\bar{\lambda})-3}}{(n - |\lambda|)!}.$$

Or le nombre de parts vaut

$$\ell(\bar{\lambda}) = \ell + (n - |\lambda|) = n - \wp, \text{ ce qui conclut.}$$

3. Immédiat d'après le point précédent.

Sur le tore

En genre $g \geq 1$, il faut tenir compte des classes de CHERN du fibré de HODGE. Noter que la condition de stabilité $\ell > 0$ est toujours vérifiée pour une partition non vide.

On rappelle que les relations des cordes et du dilaton tiennent toujours pour les chevrons $\langle \lambda^i, \cdot \rangle$, ce qui signifie que pour vérifier la validité d'une formule il suffira de montrer que cette dernière vérifie les deux relations de récurrence et les conditions initiales.

Proposition 3.1.1.2. (ELSV [5]) (les nombres $\mathbb{H}_{|\lambda|}^1(\lambda)$)

Pour toute partition λ d'un entier $n \geq 1$ en $\ell \geq 1$ parts, on a

$$\mathbb{H}_n^1(\lambda) = \frac{1}{24} \left(n^\ell - n^{\ell-1} - \sum_{i=2}^{\ell} (i-2)! e_i(\lambda) n^{\ell-i} \right). \quad (3.12)$$

Démonstration.

On part de ELSV en genre 1 :

$$\mathbb{H}_n^1(\lambda) = \sum_{k_1, \dots, k_\ell \geq 0} (\langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_\ell} \rangle - \langle \lambda^1, \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_\ell} \rangle) \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell}.$$

Dans le second terme, on applique le théorème 2.98 donnant l'intégrale de HODGE $\langle \lambda^1, \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_\ell} \rangle$ et on somme pour $k_1 + \dots + k_\ell = \ell - 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1 + \dots + k_\ell = \ell - 1} \langle \lambda^1, \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_\ell} \rangle \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell} &= \sum_{k_1 + \dots + k_\ell = \ell - 1} \binom{\ell - 1}{k_1, \dots, k_\ell} \frac{1}{24} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell} \\ &= \frac{1}{24} (\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell)^{\ell-1}; \end{aligned}$$

voilà le terme $-n^{\ell-1}$ dans la formule finale.

Quant au premier terme (dans ELSV), on doit sommer sur $k_1 + \dots + k_\ell = \ell$ et on utilise la formule des chevrons toriques :

$$\sum_{k_1 + \dots + k_\ell = \ell} \langle \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_\ell} \rangle \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell} = \sum_{k_1 + \dots + k_\ell = \ell} \frac{1}{24} \binom{\ell}{k_1, \dots, k_\ell} \left(1 - \sum_{i=2}^{\ell} \frac{\tilde{e}_i(\vec{k})}{i(i-1)} \right) \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell}.$$

Le premier terme revient à développer $(\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell)^\ell = n^\ell$. Regardons de plus près les autres :

$$\begin{aligned} \sum_{k_1 + \dots + k_\ell = \ell} \binom{\ell}{k_1, \dots, k_\ell} \sum_{i=2}^{\ell} \frac{\tilde{e}_i(\vec{k})}{i(i-1)} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell} &= \sum_{i=2}^{\ell} \frac{1}{i(i-1)} \sum_{k_1 + \dots + k_\ell = \ell} \binom{\ell}{k_1, \dots, k_\ell} \tilde{e}_i(\vec{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell} \\ \text{que l'on souhaiterait} &\stackrel{?}{=} \sum_{i=2}^{\ell} (i-2)! e_i(\vec{\lambda}) n^{\ell-i}. \end{aligned}$$

En raisonnant à i fixé, on a l'équivalence suivante en divisant par $\binom{\ell}{i}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1+\dots+k_\ell=\ell} \binom{\ell}{k_1, \dots, k_\ell} \tilde{e}_i(\vec{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell} &\stackrel{?}{=} i(i-1)(i-2)! \binom{\ell}{i} \tilde{e}_i(\vec{\lambda}) n^{\ell-i} \\ \iff \sum_{k_1+\dots+k_\ell=\ell} \binom{\ell}{k_1, \dots, k_\ell} e_i(\vec{k}) \cdot \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell} &\stackrel{?}{=} \frac{\ell!}{(\ell-i)!} e_i(\vec{\lambda}) n^{\ell-i}. \end{aligned}$$

On reconnaît à droite $(\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell)^{\ell-i}$: en développant et en rajoutant les i autres facteurs venant de e_i , on devrait pouvoir conclure. Vérifions-le :

$$\begin{aligned} \frac{\ell!}{(\ell-i)!} e_i(\vec{\lambda}) n^{\ell-i} &= \frac{\ell!}{(\ell-i)!} e_i(\vec{\lambda}) (\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell)^{\ell-i} \\ &= \frac{\ell!}{(\ell-i)!} \sum_{r_1 < \dots < r_i} \lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_i} \sum_{s_1 + \dots + s_\ell = \ell-i} \binom{\ell-i}{s_1, \dots, s_\ell} \lambda_1^{s_1} \dots \lambda_\ell^{s_\ell} \\ &= \sum_{r_1 < \dots < r_i} \sum_{s_1 + \dots + s_\ell = \ell-i} \frac{\ell!}{s_1! \dots s_\ell!} \lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_i} \lambda_1^{s_1} \dots \lambda_\ell^{s_\ell}. \end{aligned}$$

À $r_1 < \dots < r_i$ fixé, on réindexe la seconde somme par $k_j = s_j + 1$ pour $j = r_1, \dots, r_i$ et $k_j = s_j$ sinon, ce qui permet de conclure :

$$\begin{aligned} &= \sum_{r_1 < \dots < r_i} \sum_{k_1 + \dots + k_\ell = \ell} \frac{\ell!}{k_1! \dots k_\ell!} k_{r_1} \dots k_{r_i} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell} \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_\ell = \ell} \underbrace{\left(\sum_{r_1 < \dots < r_i} k_{r_1} \dots k_{r_i} \right)}_{=e_i(\vec{k})} \binom{\ell}{k_1, \dots, k_\ell} \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_\ell^{k_\ell}, \text{ c. q. f. d..} \end{aligned}$$

Corollaire 3.1.1.3. (les séries $H^1(\lambda)$)

Pour toute partition λ , on a les identités suivantes

$$\mathbb{H}^1(\lambda) = \frac{1}{24} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-\wp}}{(n-|\lambda|)!} t^n \left(1 - \frac{1}{n} - \sum_{i=2}^{n-\wp} (i-2)! \frac{e_i(\vec{\lambda})}{n^i} \right) \quad (3.13)$$

$$\mathbb{H}^1(\emptyset) = \frac{1}{24} \sum_{n \geq 1} \frac{A_n}{n} \frac{n^n}{n!} t^n. \quad (3.14)$$

Démonstration.

On applique la formule donnant $\mathbb{H}_n^1(\vec{\lambda})$ en rappelant la longueur $\ell(\vec{\lambda}) = n - \wp$ et la relation (2.85).

3.1.2 Les séries d'HURWITZ dans l'algèbre $\mathcal{A}$ en genres sphérique et torique

Nous explicitons à présent les séries $H_n^0(\lambda)$ et $H_n^1(\lambda)$ comme polynômes en Y et Z dans l'algèbre $\mathcal{A}$, ce dont nous n'avons pas trouvé trace dans la littérature (à l'exception de [14] qui n'a pas été publié).

Théorème 3.1.2.1. (KAZARIAN [14]) (les séries $H_n^0(\lambda)$ et $H_n^1(\lambda)$ dans l'algèbre $\mathcal{A}$)

On considère une partition λ de taille a possédant ℓ part.

En genre sphérique, on a l'égalité

$$\mathbb{H}^0(\lambda) = D^{\ell-3} (Y^{a-1} Z). \quad (3.15)$$

En genre torique, on l'identité suivante :

$$24\mathbb{H}^1(\lambda) = D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z^2) + (a-1) D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z) - \sum_{x=2}^{\ell} (x-2)! e_x(\lambda) D^{\ell-x} (Y^{a-x} Z^x). \quad (3.16)$$

Quelques valeurs particulières sont données par les deux tableaux suivants :

$\ell = 0$	$Y - \frac{3}{2} \left(\frac{Y^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Y^3}{3} \right)$
$\ell = 1$	$\frac{1}{a} \left(\frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1} \right)$
$\ell = 2$	$\frac{Y^a}{a}$
$\ell \geq 3$	$D^{\ell-3} (Y^{a-1} Z)$

et

$24\mathbb{H}^1(\emptyset) = D^{-1} Z^2$	$24\mathbb{H}^1(\square) = Z^2$	$24\mathbb{H}^1(\square\square) = Z^2$
$\forall d \in \mathbb{N}, 24\mathbb{H}^1(\wr(d+1)) = Z^2 - Y^2 - 2Y^3 - 3Y^4 - \dots - (d-1)d$		
$24\mathbb{H}^1(\lambda) = D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z^2) + (a-1) D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z) - \sum_{x=2}^{\ell} (x-2)! e_x(\lambda) D^{\ell-x} (Y^{a-x} Z^x)$		

(3.17)

Remarques 3.1.2.2.

La seule série des deux tableaux ci-dessus à ne pas résider dans l'algèbre $\mathcal{A}$ est $\mathbb{H}^1(\emptyset) = D^{-1} Z^2$.

La valeur $\mathbb{H}^0(\emptyset)$ du premier tableau se retrouve dans la troisième ligne de la seconde matrice de (2.16). Par ailleurs, on passe dans le premier tableau d'une ligne à la ligne suivante en appliquant l'opérateur D (avec la spécialisation exceptionnelle $a \leftarrow 1$ pour passer de la première ligne à la deuxième).

Pour les longueurs $\ell \geq 3$, la formule (2.8) rappelle le développement de la série $Y^k Z$ pour tout entier $k \geq 0$.

Démonstrations (tableaux de valeurs).

En partant de $\mathbb{H}_{\ell=3}^0 = D^{3-3} (Y^{a-1} Z) = D \frac{Y^a}{a}$, on obtient de suite

$$\frac{Y^a}{a} = D^{-1} D \frac{Y^a}{a} = D^{-1} \mathbb{H}_{\ell=3}^0 = \mathbb{H}_{\ell=2}^0,$$

d'où l'on tire (cf. proposition 2.1.2.1 point 1) $\mathbb{H}_{\ell=1}^0 = D^{-1} \frac{Y^a}{a} = \frac{1}{a} \left(\frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1} \right)$. Le calcul de $\mathbb{H}^0(\emptyset)$ peut être mené en se souvenant que les opérateurs D et D^{-1} ne voient pas les termes constants :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^0(\emptyset) &= D^{0-3} (Y^{0-1} Z) = D^{-3} \frac{Z}{Y} = D^{-3} \left(\frac{Z}{Y} - 1 \right) = D^{-3} \left(\frac{Z-Y}{Y} \right) = D^{-3} \left(\frac{YZ}{Y} \right) \\ &= D^{-3} Z = D^{-2} Y = D^{-1} \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right) = \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right) \\ &= Y - \frac{3}{2} \left(\frac{Y^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Y^3}{3} \right). \end{aligned}$$

En genre torique, la série d'HURWITZ associée à un cycle non vide $\wr(d+1)$ avec $d \in \mathbb{N}$ donne

$$\begin{aligned} 24\mathbb{H}^1(\wr(d+1)) &\stackrel{a=d+1}{\underset{\ell=1}{=}} Y^d Z^2 + d Y^d Z = Y^d Z (Z + d) = (Y^d Z - Z) (Z + d) + Z^2 + dZ \\ &= - \left(\sum_{p=1}^d Y^p \right) (Z + d) + Z^2 + \sum_{p=1}^d Z = Z^2 + \sum_{p=1}^d (Z - Y^p Z) - d \sum_{p=1}^d Y^p \\ &= Z^2 + \sum_{p=1}^d \sum_{q=1}^p Y^q - d \sum_{q=1}^d Y^q = Z^2 + \left[\sum_{1 \leq q \leq p \leq d} - \sum_{1 \leq p, q \leq d} \right] (Y^q) \\ &= Z^2 - \sum_{1 \leq p < q \leq d} Y^q = Z^2 - \sum_{q=1}^d (q-1) Y^q. \end{aligned}$$

Dans le cas $a \in \{1, 2\}$, i. e. $d \in \{0, 1\}$, on obtient tout simplement Z^2 . Le cas $a = 0$ se traite comme en genre nul : le théorème donne

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^0(\emptyset) &= D^{0-1} (Y^{0-1} Z^2) + (0-1) D^{0-1} (Y^{0-1} Z) - 0 = D^{-1} \left(\frac{Z^2 - Z}{Y} \right) = D^{-1} \left(\frac{Z^2 - Z}{Y} + 1 \right) \\ &= D^{-1} \left(\frac{Z^2 - Z + Y}{Y} \right) = D^{-1} \left(\frac{Z^2 Y}{Y} \right) = D^{-1} Z^2.\end{aligned}$$

Démonstration (genre sphérique).

D'après le théorème d'HURWITZ, la série $\mathbb{H}^0(\lambda)$ s'exprime par

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^0(\lambda) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{H}_n^0(\lambda) t^n = \sum_{n \geq a} \frac{n^{n-\wp-3}}{(n-a)!} t^n = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{\downarrow a}}{n^{\wp+3}} \frac{n^n}{n!} t^n \\ &= D^{a-\wp-2} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{\downarrow a}}{n^{a+1}} \frac{n^n}{n!} t^n = D^{\ell-2} \frac{Y^a}{a},\end{aligned}$$

d'où les résultats pour $\ell \geq 2$.

Pour $\ell = 1$, on vérifie que

$$\begin{aligned}\frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1} &= \sum_{n \geq a} \left(\frac{n^{\downarrow a}}{n^{a+1}} - \frac{n^{\downarrow a+1}}{n^{a+2}} \right) \frac{n^n}{n!} t^n = \sum_{n \geq a} \frac{n^{\downarrow a}}{n^{a+2}} (n - (n-a)) \frac{n^n}{n!} t^n \\ &= a \sum_{n \geq a} \frac{n^{\downarrow a}}{n^{a+2}} \frac{n^n}{n!} t^n = a \mathbb{H}^0(\lambda).\end{aligned}$$

Enfin, pour $\ell = 0$, on a $\mathbb{H}^0(\emptyset) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-3}}{n!} t^n$. En développant

$$\frac{Y^2}{2} = \sum_{n \geq 1} n(n-1) \frac{n^{n-3}}{n!} t^n = Y - \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-2}}{n!} t^n,$$

on déduit $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-2}}{n!} t^n = Y - \frac{Y^2}{2}$, puis en développant

$$\frac{Y^3}{3} = \sum_{n \geq 1} \underbrace{n(n-1)(n-2)}_{=n^3-3n^2+2n} \frac{n^{n-4}}{n!} t^n = Y - 3 \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right) + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-3}}{n!} t^n,$$

on déduit l'expression annoncée pour $H^0(\emptyset) = \mathbb{H}^0(\emptyset)$.

Démonstration (genre torique).

En remarquant que l'égalité $\mathbb{H} m_1(\lambda)! = \overline{\lambda} m_1(\bar{\lambda})!$ se réécrit

$$\frac{\mathbb{H}}{\overline{\lambda}} = \frac{(m_1(\lambda) + n - |\lambda|)!}{m_1(\lambda)!} = \binom{n - (|\lambda| - m_1(\lambda))}{m_1(\lambda)} (n - |\lambda|)!,$$

on en déduit, en utilisant la formule explicite pour $h_n^1(\bar{\lambda})$, les égalités

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_n^1(\lambda) &= \binom{n - (a - m_1(\lambda))}{m_1(\lambda)} \mathbb{H}_n^1(\bar{\lambda}) = \frac{\overline{\lambda}}{\mathbb{H}} \binom{n - (a - m_1(\lambda))}{m_1(\lambda)} \mathbb{H}_n^1(\bar{\lambda}) \\ &= \frac{1}{24} \frac{n^{n-\wp}}{(n-a)!} \left(1 - \frac{1}{n} - \sum_{i=2}^{n-\wp} (i-2)! \frac{e_i(\bar{\lambda})}{n^i} \right).\end{aligned}$$

Lorsque $\lambda = \emptyset$, on peut expliciter un peu plus en travaillant la somme de droite (multipliée par $\frac{n^{n-\varphi}}{(n-a)!} = \frac{n^n}{n!}$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n (i-2)! \binom{n}{i} \frac{n^{n-i}}{n!} &= \sum_{i=2}^n \frac{(i-2)! n!}{i! (n-i)!} \frac{n^{n-i}}{n!} \\
&= \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \frac{n^{n-i-1}}{(n-i-1)!} - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{n^{n-i-1}}{(n-i)!} \frac{1}{i} ((n-i) - n) \\
&= \frac{n(n-1)n^{n-2}}{n!} - \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{n^{n-i}}{(n-i)!} \right) \\
&= \frac{n^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n^i}{i!}.
\end{aligned}$$

Vu l'identité $\sum_{i=0}^{n-2} \frac{n^i}{i!} = \frac{A_n}{n!}$, on en déduit la formule pour $\ell = 0$.

Le cas $\ell > 0$ est nettement plus long à traiter.

Les séries génératrices des deux premiers termes sont aisées à calculer :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-\varphi}}{(n-a)!} t^n &= D^\ell \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-a}}{(n-a)!} t^n = D^\ell (Y^{a-1} Z) \text{ et} \\
\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-\varphi}}{(n-a)!} \frac{1}{n} t^n &= D^\ell \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-a-1}}{(n-a)!} t^n = D^\ell \left(\frac{Y^a}{a} \right) = D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $e_i(\bar{\lambda}) = \sum_{x=0}^{\ell} e_x \binom{n-a}{i-x}$ (certains termes pouvant bien sûr s'annuler selon la position de i par rapport à ℓ et $n-a$), on a

$$24\overline{h}_n^1(\lambda) = \frac{n^{n-\varphi}}{(n-a)!} \left(1 - \frac{1}{n} - \sum_{x=0}^{\ell} e_x \sum_{\substack{i=2 \\ x \leq i \leq x+n-a}}^{n-\varphi} \frac{(i-2)!}{n^i} \binom{n-a}{i-x} \right) \quad (3.18)$$

$$= \frac{n^{n-\varphi}}{n'!} \left(1 - \frac{1}{n} - \sum_{x=0}^{\ell} e_x \sum_{i \geq 2-x, 0}^{n'} \binom{n'}{i} \frac{(i+x')!}{n^{i+x}} \right) \text{ où } \begin{matrix} n' := n-a \\ x' = x-2 \end{matrix}. \quad (3.19)$$

Considérons alors chaque terme de la somme en x .

Regardons les termes pour $x \geq 2$:

$$\frac{n^{n-\varphi}}{n'!} \sum_{i=0}^{n'} \frac{n'!}{i! (n'-i)!} \frac{(i+x')!}{n^{i+x}} = n^{\ell-x} \sum_{i=0}^{n'} x'! \binom{i+x'}{i} \frac{n^{n'-i}}{(n'-i)!}.$$

Prenons la série de ce terme en t^n , ce qui donne $x'!D^{\ell-x}$ appliqué en

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq a} \sum_{i=0}^{n'} \binom{i+x'}{i} \frac{n^{n'-i}}{(n'-i)!} t^n &= \sum_{i \geq 0} \binom{i+x'}{i} \sum_{n \geq i+a} \frac{n^{n-(a+i)}}{(n-(a+i))!} t^n \\
&= \sum_{i \geq 0} \binom{i+x'}{i} Y^{a+i-1} Z \\
&= Y^{a-1} Z \sum_{i \geq 0} \binom{i+x'}{i} Y^i \\
&= Y^{a-1} Z \left(\frac{1}{1-Y} \right)^{x-1} \\
&= Y^{a-1} Z (1+Z)^{x-1} \\
&= Y^{a-x} Z^x.
\end{aligned}$$

Pour $x = 1$, on fait la même chose en remplaçant $x'! \binom{i+x'}{i}$ par $\frac{(i-1)!}{i!} = \frac{1}{i}$ et en démarrant la somme à $i = 1$: la série génératrice devient $D^{\ell-1}$ appliqué sur $Y^{a-1} Z \sum_{i \geq 1} \frac{Y^i}{i}$. Remarquer au passage que

$$D \left(\sum_{i \geq 1} \frac{Y^i}{i} \right) = \sum_{i \geq 0} Y^i Z = \frac{Z}{1-Y} = Z(1+Z).$$

Pour $x = 0$, idem en remplaçant $x'! \binom{i+x'}{i}$ par $\frac{1}{i(i-1)}$: la série devient D^ℓ appliqué en

$$Y^{a-1} Z \sum_{i \geq 2} \left(\frac{Y^i}{i-1} - \frac{Y^i}{i} \right) = Y^{a-1} Z \left[\frac{Y^1}{1} + (Y-1) \sum_{i \geq 1} \frac{Y^i}{i} \right] = Y^a Z - Y^a \sum_{i \geq 1} \frac{Y^i}{i}.$$

Le second terme vaut $-D^{\ell-1}$ appliqué en $aY^{a-1} Z \sum_{i \geq 1} \frac{Y^i}{i} + Y^a Z(1+Z)$: dans cette somme, le premier terme vient tuer la contribution en $x = 1$ (cette dernière est pondérée par $-e_1 = -a$) et le second devient $Y^{a-1} Z^2$.

Ainsi, les quatre premières séries du membre de droite de 3.19 (dont le terme général est de la forme $\frac{n^{n-\varphi}}{n!}$ fois $1 - \frac{1}{n} - e_0? - e_1?$) apportent une contribution

$$\begin{aligned}
&D^\ell (Y^{a-1} Z) - D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z) - [D^\ell (Y^a Z) - D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z^2)] \\
&= D^\ell [Y^{a-1} Z(1-Y)] + D^{\ell-1} [Y^{a-1} (Z^2 - Z)] \\
&= D^{\ell-1} D Y^a + D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z^2) - D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z) \\
&= D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z^2) + (a-1) D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z).
\end{aligned}$$

En additionnant le tout, on obtient le résultat.

3.1.3 Les séries d'HURWITZ dans l'algèbre $\mathcal{A}$ en genre ≥ 2

Le théorème 2.3.8.1 de KAZARIAN explicite les séries $H^g(\lambda)$ lorsque le couple $(g, \ell(\lambda))$ est stable, ce qui règle la question de leur terme dominant en Z .

Vérifions à l'aide du théorème précédent 3.1.2.1 (dont on conserve les notations) que la série $\frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a(Z+1)^{2g'+\ell}}$ appartient bien à $\mathbb{Q}[Z]$ en genres 0 et 1 avec une partition λ de longueur minimale.

En genre sphérique, quand λ est de longueur 3, la relation 3.15 donne

$$\frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a(Z+1)^{2g'+\ell}} = \frac{\mathbb{H}_{\ell=3}^0}{Y^a(Z+1)} = \frac{Y^{a-1} Z}{Y^a(Z+1)} = \frac{Z}{Y(1+Z)} = 1. \quad (3.20)$$

En genre torique, quand $\lambda = (d+1)$ est de longueur 1, le tableau 3.17 donne

$$\frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a(Z+1)^{2g'+\ell}} = \frac{\mathbb{H}^1((d+1))}{Y^{d+1}(Z+1)} = \frac{1}{24} \frac{Y^d Z(Z+d)}{Y^{d+1}(Z+1)} = \frac{Z+d}{24} \frac{Z}{Y(1+Z)} = \frac{Z+d}{24}. \quad (3.21)$$

Couples instables. Lorsque (g, ℓ) est l'un des quatre couples instables, le premier terme du polynôme $P^g(\lambda)$ n'a pas de sens. L'on peut toutefois se demander si la série

$$P^g(\lambda) := \frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a(Z+1)^{2g'+\ell}} = \frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a} (1+Z)^{-(2g'+\ell)} \quad (3.22)$$

est toujours un polynôme en Z (son degré ne pourra bien sûr pas être l'entier strictement négatif $3g' + \ell$, même si l'on verra à la section 3.3.2 un moyen détourné de dire cela).

Proposition 3.1.3.1. *(couples instables dans le théorème 2.3.8.1 de KAZARIAN)*

Les quatre séries $P^g(\lambda) := \frac{\mathbb{H}^g(\lambda)}{Y^a} (1+Z)^{-(2g'+\ell)}$ associées à la condition d'instabilité $2g' + \ell \leq 0$ sont données par le tableau suivant.

$(g, \ell) = (0, 2)$	$P^0(x, a-x) = \frac{1}{a}$
$(g, \ell) = (0, 1)$	$P^0(a) = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{Z}{a+1}\right)$
$(g, \ell) = (0, 0)$	$P^0(\emptyset) = \frac{5Z^2}{12} + \frac{5Z}{6} + \frac{Y}{6}$
$(g, \ell) = (1, 0)$	$P^1(\emptyset) = \frac{D^{-1}Z^2}{24}$

(3.23)

En particulier, la série $P^g(\lambda)$ est un polynôme en Z si et seulement si la partition λ est non vide.

Démonstration.

On part des identités suivantes pour tous λ et a :

$$\frac{1 - \lambda Y}{1 - Y} = \lambda + \frac{1 - \lambda}{1 - Y} = \lambda + (1 - \lambda)(1 + Z) = 1 + (1 - \lambda)Z, \quad (3.24)$$

$$\text{d'où } \frac{\frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1}}{1 - Y} = \frac{Y^a}{a} \frac{1 - \frac{aY}{a+1}}{1 - Y} = \frac{Y^a}{a} \left(1 + \frac{Z}{a+1}\right). \quad (3.25)$$

Lorsque $(g, \ell) = (1, 0)$, on a

$$P^1(\emptyset) = \frac{\mathbb{H}^1(\emptyset)}{Y^a} (1+Z)^{-(2g'+\ell)} = \frac{D^{-1}Z^2}{24}.$$

Lorsque $(g, \ell) = (0, 2)$, on a

$$P^0(x, a-x) = \frac{\mathbb{H}_{\ell=2}^1}{Y^a} (1+Z)^{-(2g'+\ell)} = \frac{Y^a}{Y^a} = \frac{1}{a}.$$

De même, quand $(g, \ell) = (0, 1)$, on a

$$P^0(a) = \frac{\mathbb{H}_{\ell=1}^1}{Y^a} (1+Z)^{-(2g'+\ell)} = \frac{1}{aY^a} \frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1} = \frac{1}{aY^a} \frac{Y^a}{a} \left(1 + \frac{Z}{a+1}\right) = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{Z}{a+1}\right).$$

Enfin, pour $(g, \ell) = (0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} P^0(\emptyset) &= \frac{\mathbb{H}_{\ell=0}^0}{Y^a} (1+Z)^{-(2g'+\ell)} = \frac{\left(Y - \frac{Y^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3}\right)}{(1-Y)^2} = \frac{Y \left(1 + \frac{Z}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{Y^2}{2} \left(1 + \frac{Z}{3}\right)}{1-Y} \\ &= \frac{Y + \frac{Z-Y}{2} - \frac{Y^2}{4} - \frac{Z-Y-Y^2}{12}}{1-Y} = \left(\frac{5Z}{12} + \frac{7Y}{12} - \frac{Y^2}{6}\right) (1+Z) \\ &= \left(\frac{5Z}{12} + \frac{7Y}{12} - \frac{Y^2}{6}\right) + \left(\frac{5Z^2}{12} + \frac{7(Z-Y)}{12} - \frac{Z-Y^2-Y}{6}\right) \\ &= \frac{5Z^2}{12} + \frac{5Z}{6} + \frac{Y}{6}. \end{aligned}$$

3.1.4 Asymptotique des nombres d'HURWITZ à une partition

Proposition 3.1.4.1. (*Z-formule de KAZARIAN*)

Pour toute partition λ de longueur ℓ et genre $g \geq 0$ tels que le couple (g, ℓ) soit stable, on a la Z-égalité suivante :

$$\mathbb{H}^g(\lambda) \stackrel{Z}{=} \frac{\langle \tau_0^\ell \tau_2^{3g'+\ell} \rangle}{(3g' + \ell)!} Z^{5g'+2\ell}. \quad (3.26)$$

Démonstration.

Le théorème 2.3.8.1 de KAZARIAN nous dit $\mathbb{H}^g(\lambda) = Y^a (Z + 1)^{2g'+\ell} P^g(\lambda)$ où le polynôme $P^g(\lambda)$ a pour terme dominant $\frac{Z^d}{d!} \langle \tau_2^d \tau_0^\ell \rangle$ où $d := 3g' + \ell$. Multiplier par $Y^a (Z + 1)^{2g'+\ell} \stackrel{Z}{=} Z^{2g'+\ell}$ donne le résultat.

Corollaire 3.1.4.2. (ZVONKINE [29] p. 32) (*asymptotique des nombres d'HURWITZ à une partition*)

Pour toute partition λ et tous entiers $g, n \geq 0$, on a l'asymptotique

$$h_n^g(\lambda) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} c_g e^n n^{\frac{5}{2}g' + \ell(\lambda) - 1} \text{ où } \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \frac{1}{48} \end{pmatrix} \text{ et } c_{g \geq 2} := \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2}g') 2^{\frac{5}{2}g'}}. \quad (3.27)$$

Démonstration.

L'équivalent de $\mathbb{H}_n^0(\lambda) = \frac{n^{\frac{1}{2}a}}{n^{\frac{1}{2}a+3}} \frac{n^n}{n!}$ est immédiat par STIRLING mais nous préférons utiliser l'asymptotique dans $\mathcal{A}$ et les Z-égalités afin de s'y habituer. Abrégeons $\ell := \ell(\lambda)$.

En genre nul, on a pour tout partition λ la relation

$$\mathbb{H}^0(\lambda) = D^{\ell-3} (Y^{a-1} Z) \stackrel{Z}{=} D^{\ell-3} Z.$$

Son coefficient en t^n est par conséquent (d'après la proposition 2.27) équivalent à $C_1 \frac{e^n}{\sqrt{n}} \sqrt{n}^1$ multiplié par $n^{\ell-3}$:

$$\text{coefficient en } t^n \text{ dans } \mathbb{H}^0(\lambda) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} C_1 \frac{e^n}{\sqrt{n}} n^{\ell-3} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^n n^{\ell-\frac{7}{2}}.$$

En genre torique, le premier terme $D^{\ell-1} (Y^{a-1} Z^2) \stackrel{Z}{=} D^{\ell-1} Z^2$ a un degré $2 + 2(\ell - 1) = 2\ell$ tandis que les termes suivants $D^{\ell-x} (Y^{a-x} Z^x) \stackrel{Z}{=} D^{\ell-x} Z^x$ pour $x \geq 1$ ont un Z-degré $x + 2(\ell - x) = 2\ell - x < 2\ell$. On en déduit $24\mathbb{H}^1(\lambda) \stackrel{Z}{=} D^{\ell-1} Z^2$, d'où l'asymptotique

$$\text{coefficient en } t^n \text{ dans } \mathbb{H}^1(\lambda) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{\ell-1} \times C_2 \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^2 = \frac{1}{2} e^n n^{\ell-1}.$$

Lorsque $g \geq 2$, combiner la formule de KAZARIAN (3.26) avec l'asymptotique dans $\mathcal{A}$ (2.27) donne immédiatement l'asymptotique de tous les $h_n^g(\lambda)$:

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\langle \tau_2^{3g'+\ell} \tau_0^\ell \rangle}{(3g' + \ell)!} C_{5g'+2\ell} \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^{5g'+2\ell} = Cst_g(\lambda) \times e^n n^{\frac{5}{2}g' + \ell - 1}.$$

Montrons que la constante $Cst_g(\lambda) := \frac{\langle \tau_2^{3g'+\ell} \tau_0^\ell \rangle}{(3g' + \ell)!} C_{5g'+2\ell}$ ne dépend pas de λ , comme nous le savons déjà en genre 0 et 1 (on rappelle $Cst_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $Cst_1 = \frac{1}{48}$). On invoque pour cela les équations des cordes et du dilaton :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \tau_2^{3g'+\ell} \tau_0^\ell \rangle}{(3g' + \ell)!} & \stackrel{\text{cordes}}{=} \frac{(3g' + \ell)}{(3g' + \ell)!} \langle \tau_2^{3g'+\ell-1} \tau_1 \tau_0^{\ell-1} \rangle \\ & \stackrel{\text{dilaton}}{=} \frac{(5g' + 2(\ell - 1))}{(3g' + \ell - 1)!} \langle \tau_2^{3g'+\ell-1} \tau_0^{\ell-1} \rangle \\ & \stackrel{\text{récurrence sur } \ell}{=} \frac{(5g')^{\uparrow\uparrow\ell}}{(3g')!} \langle \tau_2^{3g'} \rangle. \end{aligned}$$

De plus, en se rappelant la définition des constantes C_k (2.27) ainsi que l'identité $\Gamma(x + \ell) = x^{\uparrow \ell} \Gamma(x)$, on obtient (poser $G := \frac{5}{2}g'$)

$$\frac{1}{C_{2G+2\ell}} = \Gamma(G + \ell) 2^{G+\ell} = 2^\ell G^{\uparrow \ell} \Gamma(G) 2^G = \frac{(2G)^{\uparrow \uparrow \ell}}{C_{2G}}.$$

Multiplier les deux égalités conclut.

3.2 Le lien entre les constantes c_g de l'asymptotique d'HURWITZ et les constantes t_g de BENDER-GAO-RICHMOND

Dans [2], on rappelle que le nombre de cartes de genre g enracinées à n arêtes est, lorsque n tend vers ∞ , asymptotiquement équivalent à $t_g 12^n n^{\frac{5}{2}g'}$ pour certaines constantes t_g et que l'asymptotique de beaucoup d'autres familles de cartes intéressantes se comporte comme

$$\alpha t_g (\beta n)^{\frac{5}{2}g'} \gamma^n \quad (3.28)$$

pour des constantes α, β, γ dépendant de la famille considérée.

Il est remarquable de retrouver le même exposant universel $\frac{5}{2}g'$ que dans l'asymptotique des nombres d'HURWITZ. Il est tout aussi piquant que la récursion (3.29) que nous allons d'établir ressemble à s'y méprendre à celle donnée par G. CHAPUY à la fin de sa thèse [4] pour les constantes t_g . Point de mystère : en revenant à la définition de t_g dans [2], on obtient la relation très simple $c_g = \sqrt{2}^{g-3} t_g$ exprimée par notre théorème (3.2.2.1).

3.2.1 Une relation récursive pour calculer les chevrons $\langle \tau_2^{3k} \rangle$ et les constantes c_g

On invoque le théorème (2.3.6.1) de KONTSEVITCH pour obtenir une relation de récursion pour les chevrons $\langle \tau_2^{3g'} \rangle$ apparaissant dans les constantes $c_g = \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{2}g') 2^{\frac{5}{2}g'}}$, récursion qui revient à vérifier une équation de PAINLEVÉ I. Notre preuve est, dans les grandes lignes, similaire à celle de [30].

Proposition 3.2.1.1. *(calculer récursivement les chevrons $\langle \tau_2^{3k} \rangle$ et les constantes c_g)*

1. Posons $(\alpha_{-1}, \alpha_0) := (-1, \frac{1}{12})$ et $\frac{\alpha_k}{(5k)(5k+2)} := \frac{\langle \tau_2^{3k} \rangle}{(3k)!}$ pour tout $k \geq 1$. Les nombres α_k vérifient alors la formule récursive pour tout $g \geq 0$:

$$\alpha_g = \frac{25g^2 - 1}{12} \alpha_{g'} + \frac{1}{2} \sum_{p+q=g'}^{p,q \geq 0} \alpha_p \alpha_q. \quad (3.29)$$

2. La fonction $u(t) := \sum_{g \geq 0} c_g \frac{\Gamma(\frac{5g-1}{2})}{t^{\frac{5g-1}{2}}}$ vérifie l'équation de PAINLEVÉ I :

$$u(t)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 2t. \quad (3.30)$$

Démonstration.

Partons tout d'abord de la formule de récursion pour aboutir à l'équation de PAINLEVÉ. Commençons par remarquer que, pour tout $g \geq 2$, on a

$$c_g \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) 2^{\frac{5g-1}{2}} = \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} \frac{\frac{5g-1}{2} \frac{5g-3}{2} \Gamma\left(\frac{5g-5}{2}\right) 2^{\frac{5g-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5g-5}{2}\right) 2^{\frac{5g-5}{2}}} = \alpha_{g'}, \quad (3.31)$$

ce qui reste vrai pour $g \in \{0, 1\}$. Il reste donc à montrer que la fonction $u(t) = \sum_{g \geq 0} \frac{\alpha_{g'}}{(2t)^{\frac{5g-1}{2}}}$ vérifie l'équation (3.30) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}u'' + u^2 &= \frac{1}{6} \sum_{g \geq 0} \frac{\alpha_{g'}}{2^{\frac{5g-1}{2}} t^{\frac{5g-5}{2}}} \left(-\frac{5g-1}{2} \right) \left(-\frac{5g+1}{2} \right) + \sum_{k \geq 0} \sum_{i+j=k}^{i,j \geq 0} \frac{\alpha_{i'} \alpha_{j'}}{(2t)^{\frac{5k-2}{2}}} \\ &= \left(\sum_{g \geq 0} \frac{1}{(2t)^{\frac{5g+3}{2}}} \frac{25g^2-1}{6} \alpha_{g'} \right) + 2t + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2t)^{\frac{5k-2}{2}}} \sum_{i+j=k}^{i,j \geq 0} \alpha_{i'} \alpha_{j'} \\ &= 2t + \sum_{g \geq 0} \frac{2}{(2t)^{\frac{5g+3}{2}}} \left(\frac{25g^2-1}{12} \alpha_{g'} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=g+1}^{i,j \geq 0} \alpha_{i'} \alpha_{j'} \right). \end{aligned}$$

Pour obtenir la nullité de la parenthèse, il suffit d'invoquer la formule de récursion (3.29) et de réécrire la somme $\sum_{i+j=g+1}^{i,j \geq 0} \alpha_{i'} \alpha_{j'}$ comme $-2\alpha_g + \sum_{p+q=g-1} \alpha_p \alpha_q$.

Prouvons à présent la formule de récursion.

On veut les coefficients $\langle \tau_2^k \rangle$ dans $W(t_0, t_1, \dots)$ des puissances de t_2 . On tue donc tous les t_i avec $i \neq 2$ dans le théorème de KONTSEVITCH :

$$W_{0,1}(0, 0, t, 0, 0, \dots) = \frac{1}{2} W_{0,0}^2(0, 0, t, 0, 0, \dots) + \frac{1}{12} W_{0,0,0,0}(0, 0, t, 0, 0, \dots).$$

Lorsque l'on applique sur W un opérateur différentiel $\prod_{i \neq 2} \frac{\partial^{d_i}}{(\partial t_i)^{d_i}}$ avant de tuer tous les $t_{i \neq 2}$, les termes dans W qui contribuent de façon non nulle à $\prod_{i \neq 2} \frac{\partial^{d_i}}{(\partial t_i)^{d_i}} W$ sont nécessairement de la forme $\left(\prod_{i \neq 2} t_i^{d_i} \right) t_2^*$ pour une certaine puissance $*$: après dérivation, les $t_{i \neq 2}$ disparaissent et laissent derrière eux un facteur $\prod_{i \neq 2} d_i!$. Ainsi, lorsque l'on considère $\frac{1}{2} W_{0,0}^2(0, 0, t, 0, \dots)$, les n -uplets de d_i qui contribuent de façon non nulle sont nécessairement tels qu'exactly deux d_i valent 0 et que toutes les $n-2$ autres valeurs valent 2 (cela implique $n \geq 2$). De manière similaire, lorsque l'on considère $W_{0,0,0,0}(0, 0, t, 0, \dots)$, les n -uplets considérés ont quatre d_i valant 0 et tous les autres égaux à 2 (d'où $n \geq 4$). Enfin, les d_i en jeu dans $W_{0,1}(0, 0, t, 0, 0, \dots)$ ont un d_i valant 0, un d_i valant 1 et tous les autres d_i égaux à 2 (d'où $n \geq 2$). On peut par conséquent commencer à expliciter les trois séries ci-dessus. On utilisera les valeurs de certains chevrons qui peuvent être calculées grâce aux équations des cordes et du dilaton (voir lemme 3.2.1.2 en fin de preuve).

1. Pour commencer, on a

$$W_{0,0}(0, 0, t, 0, 0, \dots) = \sum_{n \geq 1, g \geq 0}^{(g,n) \text{ stable}} \frac{1}{n!} \langle \tau_0^2 \tau_2^{n-2} \rangle 2! t^{n-2} \sum_{\substack{\text{deux } d_i \text{ égaux à } 0 \\ \text{tous les autres valent } 2 \\ d_1 + \dots + d_n = 3g' + n}} 1.$$

Le facteur $2!$ provient de la dérivation de t_0^2 . Le choix des d_i donne un binomial $\binom{n}{2}$, lequel tue tous les termes où $n = 1$. La condition dimensionnelle affirme $2n - 2 = 3g' + n$, d'où $n = 3g' + 1$ (et $g \geq 1$ puisque $n \geq 2$). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} W_{0,0}(0, 0, t, 0, 0, \dots) &= \sum_{n=3g'+4, g \geq 1} t^{n-2} \frac{\langle \tau_0^2 \tau_2^{n-2} \rangle}{(n-2)!} = \sum_{g \geq 1} \frac{\langle \tau_0^2 \tau_2^{n-2} \rangle}{(n-2)!} t^{3g'+2} \\ &\stackrel{3.33}{=} t^2 \frac{(2 \cdot 2 - 2)!!}{24} + \sum_{g \geq 2} \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} (5g')^{\uparrow 2} t^{3g'+2} \\ &= t^2 \left(\frac{1}{12} + \sum_{g \geq 2} (5g')^{\uparrow 2} \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} t^{3g'} \right) \\ &= t^2 \sum_{g \geq 1} \alpha_{g'} t^{3g'}. \end{aligned}$$

2. De la même façon, lorsque l'on considère $W_{0,0,0,0}(0,0,t,0,\dots)$, choisir les d_i donne un binomial $\binom{n}{4}$ (tant tous les termes où $n \leq 3$), la relation des dimensions devient $2(n-4) = 3g' + n$, d'où $n = 3g + 5 = 3g' + 8$ et

$$W_{0,0,0,0}(0,0,t,0,\dots) = \sum_{g \geq 0}^{n=3g'+8} \frac{1}{n!} \langle \tau_0^4 \tau_2^{n-4} \rangle 4! t^{n-2} \binom{n}{4} = \sum_{g \geq 0}^{n=3g'+8} \frac{\langle \tau_0^4 \tau_2^{n-4} \rangle}{(n-4)!} t^{3g'+4}.$$

Le lemme 3.33 donne les deux premiers termes

$$t \times (4-3)! (2(4-3)-1)!! + t^4 \times \frac{(2 \cdot 4 - 2)!!}{24} = t + 2t^4$$

ainsi que les coefficients quand $g \geq 2$

$$\frac{\langle \tau_0^4 \tau_2^{n-4} \rangle}{(n-4)!} = \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} (5g')^{\uparrow 4} = \alpha_{g'} (5g' + 4) (5g' + 6) = (25g^2 - 1) \alpha_{g'},$$

(observer que, quand $g = 1$, l'on obtient $24\alpha_0 = 2$), d'où

$$W_{0,0,0,0}(0,0,t,0,\dots) = t + t^4 \sum_{g \geq 1} (25g^2 - 1) \alpha_{g'} t^{3g'}.$$

3. Finalement, la série $W_{0,1}(0,0,t,0,\dots)$ met en jeu un facteur $n(n-1)$ (se débarrassant de tous les termes où $n = 1$) tandis que l'égalité des dimensions $2(n-2) + 1 = 3g' + n$ donne $n = 3g$ (et $g \geq 1$), d'où l'égalité

$$W_{0,1}(0,0,t,0,\dots) = \sum_{g \geq 1}^{n=3g} \frac{1}{n!} \langle \tau_0 \tau_1 \tau_2^{n-2} \rangle t^{n-2} n(n-1) = \sum_{g \geq 1}^{n=3g} \frac{\langle \tau_0 \tau_1 \tau_2^{n-2} \rangle}{(n-2)!} t^{3g'+1}.$$

Le lemme 3.32 fournit le premier terme $\frac{1}{(3-2)!} t$ et les suivants $\frac{(5g')^{\uparrow 2} \langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} t^{3g'+1} = \alpha_{g'} t^{3g'+1}$, d'où

$$W_{0,1}(0,0,t,0,\dots) = t \sum_{g \geq 1} \alpha_{g'} t^{3g'}.$$

Maintenant, l'on peut écrire l'égalité reliant les trois séries ci-dessus :

$$\frac{t}{12} + t \sum_{g \geq 2} \alpha_{g'} t^{3g'} = \frac{1}{2} \left(t^2 \sum_{g \geq 1} \alpha_{g'} t^{3g'} \right)^2 + \frac{t}{12} + t^4 \sum_{g \geq 1} \frac{25g^2 - 1}{12} \alpha_{g'} t^{3g'}.$$

Tuer le $\frac{t}{12}$, simplifier par t^4 , poser $T := t^3$ et $k := g'$ donne

$$\sum_{k \geq 0} \alpha_{k+1} T^k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k \geq 0} \alpha_k T^k \right)^2 + \sum_{k \geq 0} \frac{25g^2 - 1}{12} \alpha_k T^k = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{p+q=k} \alpha_p \alpha_q \right) T^k + \sum_{k \geq 0} \frac{25g^2 - 1}{12} \alpha_k T^k,$$

d'où la formule de récursion annoncée.

Lemme 3.2.1.2.

Pour tout couple stable (g, n) , on a

$$\frac{\langle \tau_0 \tau_1 \tau_2^{n-2} \rangle}{(n-2)!} = \begin{cases} \frac{(5g')^{\uparrow 2} \langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} & \text{si } g \geq 2 \\ \frac{1}{12} & \text{si } g = 1 \end{cases} \quad (3.32)$$

et, pour tout entier $k > 0$,

$$\frac{\langle \tau_0^k \tau_2^{n-k} \rangle}{(3g' + k)!} = \begin{cases} \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} (5g')^{\uparrow k} & \text{si } g \geq 2 \\ \frac{(2k-2)!!}{24} & \text{si } g = 1 \text{ (et } k \geq 1) \\ (2k-7)!! & \text{si } g = 0 \text{ (et } k \geq 3) \end{cases} \quad (3.33)$$

Démonstration du lemme 3.2.1.2.

Toutes les relations peuvent être prouvées en invoquant les relations des cordes et du dilaton.

1. Regardons d'abord $\langle \tau_0 \tau_1 \tau_2^{n-2} \rangle$. La condition dimensionnelle dit que $(n-2)2 + 1 = 3g' + n$, d'où $n = 3g' + 3$. Lorsque $g \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \langle \tau_0 \tau_1 \tau_2^{n-2} \rangle &\stackrel{\text{dilat on}}{=} (2g' + n - 1) \langle \tau_0 \tau_2^{n-2} \rangle \\ &\stackrel{\text{cordes}}{=} (5g' + 2)(n - 2) \langle \tau_1 \tau_2^{n-3} \rangle \\ &\stackrel{\text{dilat on}}{=} (5g' + 2)(n - 2)(5g') \langle \tau_2^{n-3} \rangle \\ &\stackrel{n-3=3g'}{=} (5g')^{\uparrow\uparrow 2} (n - 2)! \frac{\langle \tau_2^{n-3} \rangle}{(3g')!}. \end{aligned}$$

Lorsque $g = 1$, faisons comme ci-dessus à l'exception de la dernière utilisation de l'équation du dilaton (qui n'aurait pas de sens) et invoquons $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24}$:

$$\langle \tau_0 \tau_1 \tau_2^{n-2} \rangle = (5g' + 2)(n - 2) \langle \tau_1 \tau_2^{n-3} \rangle \stackrel{n=3}{=} 2 \cdot 1 \cdot \langle \tau_1 \rangle.$$

2. Regardons à présent $\langle \tau_0^k \tau_2^{n-k} \rangle$. La relation des dimensions donne $(n - k)2 = 3g' + n$, d'où $n = 3g' + 2k$. Lorsque $g \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \langle \tau_0^k \tau_2^{n-k} \rangle &\stackrel{\text{cordes}}{=} (n - k) \langle \tau_0^{k-1} \tau_1 \tau_2^{n-k-1} \rangle \stackrel{\text{dilat on}}{=} (n - k)(2g' + n - 2) \langle \tau_0^{k-1} \tau_2^{n-k-1} \rangle \\ &\stackrel{\text{récurrence sur } k}{=} (3g' + k)^{\downarrow k} (5g' + 2k - 2)^{\downarrow\downarrow k} \langle \tau_2^{n-2k} \rangle = (3g' + k)! (5g')^{\uparrow\uparrow k} \langle \tau_2^{3g'} \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque $g < 2$, faisons la même que ci-dessus jusqu'à juste avant d'utiliser la première équation sans sens. Quand $g = 1$, cela arrive juste avant la dernière équation du dilaton et donne (on rappelle $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24}$) :

$$\langle \tau_0^k \tau_2^{n-k} \rangle_{g=1} = (0 + k)^{\downarrow k} (0 + 2k - 2)^{\downarrow\downarrow(k-1)} \langle \tau_1 \tau_2^0 \rangle = k! (2k - 2)!! \langle \tau_1 \rangle.$$

Quand $g = 0$, on doit s'arrêter lorsqu'on obtient un τ_0 à la puissance 3 (invoquer les relations des cordes et du dilaton $k - 3$ fois), ce qui conclut (on rappelle $\langle \tau_0^3 \rangle = 1$) :

$$\langle \tau_0^k \tau_2^{n-k} \rangle_{g=0} = (-3 + k)^{\downarrow(k-3)} (-5 + 2k - 2)^{\downarrow\downarrow(k-3)} \langle \tau_0^3 \tau_2^{n-2k+2} \rangle = (k - 3)! (2k - 7)!! \langle \tau_0^3 \rangle.$$

3.2.2 L'égalité $c_g = \sqrt{2}^{g-3} t_g$

On compare ici la relation récursive (3.29) avec la définition de t_g dans [2] (Theorem 1) : *poser* $u_0 := \frac{1}{10}$ et *pour tout* $g \geq 1$

$$u_g := u_{g'} + \sum_{i=1}^{g'} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{\uparrow i} \left(\frac{1}{5}\right)^{\uparrow(g-i)} \left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow(i-1)} \left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow(g-i-1)}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{\uparrow g}} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow g'}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow g'}} u_i u_{g-i}; \quad (3.34)$$

alors, on a $t_g 8^{g'} \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) = \left(\frac{25}{12}\right)^g \left(\frac{1}{5}\right)^{\uparrow g} \left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow g'} u_g$ pour tout $g \geq 0$.

Théorème 3.2.2.1. (S. 2011) (relier c_g et t_g)

On a pour tout genre $g \geq 0$ l'égalité

$$c_g = \sqrt{2}^{g-3} t_g. \quad (3.35)$$

Démonstration.

On montre qu'une suite reliée aux t_g vérifie la même récursion et possède les mêmes valeurs initiales que la suite $(\alpha_{g'})$ du théorème précédent.

Si l'on définit $v_g := \left(\frac{1}{5}\right)^{\uparrow g} \left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow g'} u_g$ pour tout $g \geq 0$ et que l'on observe que

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{\uparrow g} \left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow g'}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{\uparrow(g-1)} \left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow(g'-1)}} = \left(\frac{1}{5} + g - 1\right) \left(\frac{4}{5} + g' - 1\right) = \frac{5g - 4}{5} \frac{5g' - 6}{5} = \frac{25g'^2 - 1}{25},$$

la récursion (3.34) devient alors $v_g = \frac{25g'^2-1}{25}v_{g'} + \sum_{i=1}^{g'} v_i v_{g-i}$. Poser $w_g := \left(\frac{25}{12}\right)^g v_g$ pour tout $g \geq 0$ mène à $w_g = \frac{25g'^2-1}{12}w_{g'} + \sum_{i+j=g}^{i,j>0} w_i w_j$. Poser $x_g := 2w_{g+1}$ pour tout $g \geq -1$ conduit à $x_g = \frac{25g'^2-1}{12}x_{g'} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=g+1}^{i,j>0} x_{i-1} x_{j-1}$; la somme précédente pouvant être réécrite $\sum_{p+q=g'}^{p,q \geq 0} x_p x_q$, on obtient la même récursion pour la suite $(x_{g'})$ que pour celle (3.29) définissant $(\alpha_{g'})$. Une fois comparées les valeurs initiales

$$x_{-1} = 2w_0 = 2v_0 = 2u_0 \frac{1}{\left(\frac{4}{5} - 1\right)^{\uparrow 1}} = -10u_0 = -1 = \alpha_{-1},$$

on peut identifier les suites $x_{g'} = 2 \left(\frac{25}{12}\right)^g \left(\frac{1}{5}\right)^{\uparrow g} \left(\frac{4}{5}\right)^{\uparrow g'} u_g = 2t_g 8^{g'} \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right)$ et $\alpha_{g'} = c_g \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) 2^{\frac{5g-1}{2}}$, d'où $t_g 2^{3g'+1} = c_g 2^{\frac{5g-1}{2}}$ et l'égalité annoncée.

Test de sûreté.

On rappelle les valeurs $t_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $t_1 = \frac{1}{24}$, $t_2 = \frac{7}{2^5 3^3 5 \sqrt{\pi}}$, à comparer avec celles données par [30] page 19 :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, c_1 = \frac{1}{48}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{7}{2^5 3^3 5}. \quad (3.36)$$

Remarque 3.2.2.2.

G. CHAPUY donne à la fin de sa thèse quelques pistes pour interpréter combinatoirement la récursion 3.29. Jusqu'à ce que quelqu'un y parvienne (ce qui reviendrait à une compréhension plus profonde de l'équation de PAINLEVÉ I), nous ne pensons pas que grand chose d'autre puisse être dit au sujet des constantes c_g .

3.3 Asymptotique des nombres d'HURWITZ à plusieurs partitions

On montre dans cette section l'équivalent

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{H}_n^g(\lambda^1 \sqcup \dots \sqcup \lambda^k) \quad (3.37)$$

qui ramène l'étude de l'asymptotique des nombres d'HURWITZ à celle des nombres d'HURWITZ à *une* partition – laquelle est connue, cf. section 3.1.4.

Essentiellement, l'équivalent ci-dessus exprime que

$$l'asymptotique des nombres d'HURWITZ est inchangée par concaténation des partitions. \quad (3.38)$$

Nous allons montrer l'équivalent annoncé à l'aide des Z -techniques de l'algèbre $\mathcal{A}$. Plus précisément, il découle immédiatement du « Z -lemme » suivant.

Théorème 3.3.0.3. (S. 2010 [20]) (le Z -lemme)

Pour toutes partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ et tout genre $g \geq 0$, on a la Z -égalité suivante dans la partie $\mathcal{A}^Z$:

$$D^3 \mathbb{H}^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \stackrel{Z}{=} D^{3+m_1(\lambda^k)+\dots+m_1(\lambda^1)} \mathbb{H}^g(\overset{\circ}{\lambda}^1 \sqcup \overset{\circ}{\lambda}^2 \sqcup \dots \sqcup \overset{\circ}{\lambda}^k). \quad (3.39)$$

Corollaire 3.3.0.4. (S. 2010) (le théorème 3.0.8.6)

Pour toutes partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ et tout genre $g \geq 0$, on a l'asymptotique suivante :

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} c_g \frac{e^n}{n} n^{\frac{5}{2}g'} n^{\ell(\lambda^1) + \dots + \ell(\lambda^k)}. \quad (3.40)$$

Démonstration.

Poser $m_1 := \sum m_1(\lambda^i)$ et $\ell := \sum \ell(\lambda^i)$. Le Z -lemme 3.3.0.3 nous donne la Z -égalité

$$D^3 \mathbb{H}^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \stackrel{Z}{=} D^{3+m_1} \mathbb{H}^g(\overset{\circ}{\lambda}^1 \sqcup \overset{\circ}{\lambda}^2 \sqcup \dots \sqcup \overset{\circ}{\lambda}^k),$$

d'où l'asymptotique (observer que $\ell(\overset{\circ}{\lambda}) + m_1(\lambda) = \ell(\lambda)$ pour toute partition λ)

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{m_1} \mathbb{H}_n^g(\overset{\circ}{\lambda}^1 \sqcup \dots \sqcup \overset{\circ}{\lambda}^k) \stackrel{\text{corollaire 3.1.4.2}}{\sim} n^{m_1} c_g e^n n^{\frac{5}{2}g' + (\ell - m_1) - 1} = c_g e^n n^{\frac{5}{2}g' + \ell - 1}.$$

Cette section est la plus technique de ce mémoire. Nous explicitons la formule de récurrence utilisée dans [28] et en déduisons le Z -lemme 3.3.0.3.

3.3.1 La formule de réduction

Commençons par analyser ce que devient une constellation après composition de ses deux premières permutations. Ce qui suit est inspiré directement de [28].

Considérons une constellation $(\sigma, \rho, \sigma^3, \sigma^4, \dots, \sigma^k)$ et posons $\pi := \sigma\rho$. On obtient $k-1$ permutations $\pi, \sigma^3, \dots, \sigma^k$ dont le produit fait l'identité mais l'on perd en général la condition de transitivité. Notons N le nombre d'orbites de notre nouveau groupe $\langle \pi, \sigma^3, \dots, \sigma^k \rangle$. On définit pour toute orbite Ω une permutation σ_Ω^i comme la permutation σ^i restreinte à Ω . On obtient ainsi N constellations $(\pi_\Omega, \sigma_\Omega^3, \dots, \sigma_\Omega^k)$ dont les degrés sont les cardinaux $|\Omega|$.

Nous n'avons pas numéroté les orbites car elles sont *a priori* indistinguables, ce qui expliquera l'apparition d'un facteur de symétrie $\frac{1}{N!}$ dans la formule de réduction.

Observer que le nombre N d'orbites est borné quelle que soit la constellation choisie. Cela est trivial quand $S\sigma \cup S\rho$ est vide (puisqu'on a alors $\sigma = \text{Id}$ and $N = 1$) et expliquons pourquoi, lorsque $S\sigma \cup S\rho$ est non vide, toute orbite doit intersecter cette union (d'où la majoration $N \leq |\overset{\circ}{\lambda}| + |\overset{\circ}{\mu}|$) : si le groupe $\langle \sigma\rho, \sigma^3, \dots, \sigma^k \rangle$ stabilisait une orbite disjointe de $S\sigma \cup S\rho$, alors il en serait de même pour le groupe $\langle \sigma, \rho, \sigma^3, \dots, \sigma^k \rangle$ puisque σ et ρ agissent trivialement en-dehors de $S\sigma \cup S\rho$, or ce dernier groupe est par hypothèse transitif, donc l'orbite considérée doit valoir tout $\llbracket 1, n \rrbracket$, intersectant par conséquent $S\sigma \cup S\rho$, ce qui est une contradiction. Ainsi, on a toujours la majoration

$$N \leq |\overset{\circ}{\lambda}| + |\overset{\circ}{\mu}| + 1. \quad (3.41)$$

Les genres g_Ω vérifient la formule de RIEMANN-HURWITZ $2n_\Omega + 2g'_\Omega = \wp(\pi_\Omega) + \sum_{i=3}^k \wp(\sigma_\Omega^i)$. En sommant ces relations et en se souvenant de celle de la constellation d'origine, on obtient

$$\begin{aligned} 2n + 2 \sum_{\Omega} g'_\Omega &= \sum_{\Omega} \wp(\pi_\Omega) + \sum_{i=3}^k \sum_{\Omega} \wp(\sigma_\Omega^i) \\ \left(\wp(\sigma) + \wp(\rho) + \sum_{i \geq 3} \wp(\sigma^i) - 2g' \right) + 2 \sum_{\Omega} g'_\Omega &= \wp(\pi) + \sum_{i=3}^k \wp(\sigma^i) \\ \sum_{\Omega} g'_\Omega &= g' - \frac{\wp(\lambda) + \wp(\mu) - \wp(\pi)}{2}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En particulier (la fraction est positive), la famille (g_Ω) des genres est bornée quelle que soit la constellation choisie :

$$g'_\Omega \leq \sum_{\Omega} g'_\Omega \leq g'. \quad (3.43)$$

Par ailleurs, vu l'inclusion des supports $S\pi \subset S\sigma \cup S\rho$, on peut considérer le profil ν de la permutation $\pi_{|S\sigma \cup S\rho}$: c'est une partition d'un entier plus petit que $|S\sigma \cup S\rho| \leq |\lambda| + |\mu|$. Plus précisément, en notant ν_Ω le profil de la permutation $\pi_{|S\sigma \cup S\rho}$ induite sur Ω , les partitions ν_Ω sont toutes non vides (à moins que $S\sigma \cup S\rho = \emptyset$, c'est-à-dire à moins que $\check{\lambda} = \check{\mu} = \emptyset$) et leur tailles ont toujours pour somme celle de ν . Alors $\pi_{|S\sigma \cup S\rho}$ possède $m_1(\nu_\Omega)$ cycles fixes dans Ω et la connaissance de ces cycles fixes pour toute orbite Ω permet de reconstruire le support $S\sigma \cup S\rho$ (rajouter pour tout Ω ces $m_1(\nu_\Omega)$ points au support de π_Ω).

On peut par conséquent attribuer à une constellation $(\sigma, \rho, \sigma^3, \sigma^4, \dots, \sigma^k)$ les données suivantes :

1. un entier $N \leq |\check{\lambda}| + |\check{\mu}| + 1$;
2. une partition ensembliste $\mathcal{O} = \{\Omega\}_{\Omega \in \mathcal{O}}$ de l'ensemble sous-jacent en N orbites ;
3. une famille $(g_\Omega)_{\Omega \in \mathcal{O}}$ de genres (tous $\leq g$) vérifiant la relation $\sum_\Omega g'_\Omega = g' - \frac{\wp(\sigma) + \wp(\rho) - \wp(\sigma\rho)}{2}$;
4. une famille (ν_Ω) de partitions dont la taille est $|\nu| \leq |\lambda| + |\mu|$;
5. des familles $(\lambda_\Omega^3), \dots, (\lambda_\Omega^k)$ de partitions telles que $\forall i$, type $(\sigma_i) = \bigsqcup_\Omega \lambda_\Omega^i$.

En regroupant les constellations selon ces données, l'on obtient la formule de réduction utilisée par D. ZVONKINE dans [28] pour montrer que, à l'exception des partitions vides en genre 1, toutes les séries $H^g(\vec{\lambda})$ résident dans l'algèbre $\mathcal{A}$. Cependant, cette formule n'était pas explicitée : or nous voulons précisément le degré en Z de $H^g(\vec{\lambda})$, ce qui nous incite à l'expliciter. La formule de réduction ainsi obtenue met en jeu une famille $(f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}})$ d'entiers que l'on définit juste après avoir exposé la formule de réduction.

Théorème 3.3.1.1. (*S. 2010 [20] (formule de réduction)*)

Considérons un genre $g \geq 0$ et k partitions $\vec{\lambda} = (\lambda, \mu, \lambda^3, \lambda^4, \dots, \lambda^k)$. On a alors la formule de récurrence (sur k) suivante :

$$H^g(\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k) = \sum_{\vec{\nu}, \vec{g}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \prod_{j=1}^N H^{g_j}(\nu^j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j}) \quad (3.44)$$

où les nombres $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$ sont définis en 3.3.1.3 et où l'on somme sur

1. les entiers $N \geq 1$ plus petits que $|\check{\lambda}| + |\check{\mu}| + 1$;
2. les N -uplets $\left(\frac{\vec{\nu}}{\vec{g}}\right)$ tels que $\sum \left(g'_j - \frac{\wp(\nu^j)}{2}\right) = g' - \frac{\wp(\lambda, \mu)}{2}$ (tous les ν^j étant non vides à moins que $\check{\lambda} = \check{\mu} = \emptyset$) ;
3. pour tout $i = 3, \dots, k$ les familles² de partitions $\vec{\lambda}^i = (\lambda^{i,1}, \dots, \lambda^{i,N})$ dont la concaténation $\lambda^{i,1} \sqcup \dots \sqcup \lambda^{i,N}$ vaut λ^i .

Remarques 3.3.1.2. (*variations sur la formule de réduction*)

1. Il est aisé d'adapter la preuve à venir pour obtenir la formule de réduction suivante (on a simplement rajouté des barres sur les partitions λ^i) :

$$H^g(\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \overline{\lambda^3}, \dots, \overline{\lambda^k}) = \sum_{\vec{\nu}, \vec{g}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \prod_{j=1}^N H^{g_j}(\nu^j, \overline{\lambda^{3,j}}, \dots, \overline{\lambda^{k,j}}). \quad (3.45)$$

2. On peut également coder la formule de réduction sans genre, par exemple sous la forme

$$H(\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \overline{\lambda^3}, \dots, \overline{\lambda^k}) = \sum_{\vec{\nu}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \left[\prod_{j=1}^N H(\nu^j, \overline{\lambda^{3,j}}, \dots, \overline{\lambda^{k,j}}) \right], \quad (3.46)$$

2. lorsque $k = 2$, l'on somme (non sur rien mais) sur la liste vide

ce qui donne pour deux partitions :

$$H(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \sum_{\vec{\nu}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \prod_{j=1}^N H(\nu^j). \quad (3.47)$$

Le calcul est immédiat :

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{\nu}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{\vec{\lambda}_3, \dots, \vec{\lambda}_k} \left[\prod_{j=1}^N H(\nu^j, \overline{\lambda^{3,j}}, \dots, \overline{\lambda^{k,j}}) \right] \\ &= \sum_{\vec{\nu}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{\vec{\lambda}_3, \dots, \vec{\lambda}_k} \prod_{j=1}^N \left[\sum_{g \in \mathbb{Z}} H^g(\nu^j, \overline{\lambda^{3,j}}, \dots, \overline{\lambda^{k,j}}) u^{g' - \frac{\wp(\nu^j) + \wp(\lambda^{3,j}) + \dots + \wp(\lambda^{k,j})}{2}} \right] \\ &= \sum_{\vec{\nu}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{\vec{\lambda}_3, \dots, \vec{\lambda}_k} \sum_{\vec{g} \in \mathbb{Z}^N} \prod_{j=1}^N \left[H^{g_j}(\nu^j, \overline{\lambda^{3,j}}, \dots, \overline{\lambda^{k,j}}) u^{g_j' - \frac{\wp(\nu^j) + \wp(\lambda^{3,j}) + \dots + \wp(\lambda^{k,j})}{2}} \right] \\ &= \sum_{\vec{g} \in \mathbb{Z}^N} \sum_{\vec{\nu}, \vec{\lambda}_3, \dots, \vec{\lambda}_k} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \left[\prod_{j=1}^N H^{g_j}(\nu^j, \overline{\lambda^{3,j}}, \dots, \overline{\lambda^{k,j}}) \right] u^{g_1' + \dots + g_N' - \frac{\wp(\vec{\nu}) + \wp(\lambda^3) + \dots + \wp(\lambda^k)}{2}} \\ &= \sum_{g \in \mathbb{Z}} \underbrace{\sum_{\vec{g} \in \mathbb{Z}, \vec{\nu}, \vec{\lambda}_3, \dots, \vec{\lambda}_k} \left[\prod_{j=1}^N H^{g_j}(\nu^j, \overline{\lambda^{3,j}}, \dots, \overline{\lambda^{k,j}}) \right] u^{g_1' + \dots + g_N' - \frac{\wp(\lambda) + \wp(\mu) - \wp(\vec{\nu})}{2}}}_{=H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}^3, \dots, \bar{\lambda}^k) \text{ d'après le théorème 3.3.1.1}}. \end{aligned}$$

3. Il serait tentant d'itérer la formule 3.44 pour décrire les séries $H^g(\vec{\lambda})$ comme polynôme en les séries $H^g(\lambda)$. Les barres semblent constituer un obstacle du fait de l'ordre des partitions mais nous verrons au chapitre 4 que cet ordre n'a pas d'importance. Il serait par conséquent intéressant de terminer cette réduction puis d'étudier les coefficients qui en sortent (des produits de $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$).

Définition 3.3.1.3. (les entiers $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$)

Soit $N > 0$ un entier et $\lambda, \mu, \vec{\nu}$ des partitions en nombre $N + 2$. Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, considérons un ensemble Ω^j de cardinal $|\nu^j|$ ainsi qu'une permutation π^j de type ν^j dans $\mathfrak{S}_{\Omega^j}$. Posons $\Omega := \bigsqcup \Omega^j$ et $\pi := \prod \pi^j$. On définit $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$ comme le nombre de factorisations dans $\mathfrak{S}_{\Omega}$ de la permutation π comme un produit $\sigma\rho$ vérifiant les trois conditions :

1. les profils de σ et ρ sont respectivement $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$;
2. les supports de σ et ρ recouvrent tout Ω , i. e. $\text{Fix } \sigma \cap \text{Fix } \rho = \emptyset$;
3. (**condition d'entrelacement**) pour tout $j \neq j'$, il y a une suite finie $j = j_0, \dots, j_L = j'$ telle que, pour tout $p \in \llbracket 1, L \rrbracket$, il y a un cycle de σ ou ρ qui rencontre les deux orbites $\Omega^{j_{p-1}}$ et Ω^{j_p} .

Remarques 3.3.1.4. (les entiers $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$)

La première condition montre que $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$ ne dépend pas des cycles fixes de λ ou μ :

$$f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}} = f_{\check{\lambda}, \check{\mu}}^{\vec{\nu}}. \quad (3.48)$$

La deuxième condition montre que, dès qu'il existe une telle factorisation, alors $|\vec{\nu}| = |\Omega| = |S\sigma \cup S\rho|$ est plus petit que $|S\sigma| + |S\rho| = |\check{\lambda}| + |\check{\mu}|$. En d'autres termes, on a l'implication

$$f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}} > 0 \implies |\vec{\nu}| \leq |\check{\lambda}| + |\check{\mu}|. \quad (3.49)$$

Lorsque $\vec{\nu}$ ne possède qu'une partition, la condition d'entrelacement disparaît.

Lorsqu'en outre ν est la concatenation de λ et μ , l'égalité ci-dessus $|\vec{\nu}| \leq |\vec{\lambda}| + |\vec{\mu}|$ impose aux deux partitions λ et μ d'être réduites et à supports disjoints. Alors, choisir une factorisation revient à choisir pour tout $k \geq 2$ quel cycle de longueur k de π apparaîtra dans σ . Ainsi, on a $f_{\lambda, \mu}^{\dot{\lambda} \sqcup \dot{\mu}} = \prod_{k \geq 2} \binom{m_k(\lambda) + m_k(\mu)}{m_k(\lambda)}$, ce qui peut être réécrit de manière plus commode (en vue des applications futures) comme

$$\frac{f_{\lambda, \mu}^{\dot{\lambda} \sqcup \dot{\mu}}}{m_1(\lambda)! m_1(\mu)!} \frac{\overline{\dot{\lambda} \sqcup \dot{\mu}}}{\overline{\dot{\lambda}} \overline{\dot{\mu}}} = 1. \quad (3.50)$$

En notant Λ la multipartition $\uparrow \nu^j \downarrow$, la condition d'entrelacement signifie (d'après la proposition 1.6.3.1) que la partition orbitale $\text{Orb } \langle \sigma, \rho \rangle = \text{Orb } \sigma \vee \text{Orb } \rho$ est entrelacée avec la partition standard π_Λ . Les conditions des points 1 et 3 peuvent donc se réécrire dans le monoïde $\mathfrak{S}_\Omega^s$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \text{Orb } \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \text{Orb } \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\Lambda^{-1} \\ \pi_\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \{\Omega\} \end{pmatrix},$$

ce qui montre qu'elles dénombrent dans le monoïde $\mathfrak{S}_\Omega^s$ les factorisations (S, T, U) de l'élément $\begin{pmatrix} \text{Id} \\ \{\Omega\} \end{pmatrix}$ ayant pour types $(\lambda^s, \mu^s, \Lambda)$, ce qui (d'après une légère adaptation du lemme 1.3.2.2) est compté par le coefficient $\frac{1}{C_\Lambda} C_{\uparrow 1 \mid \Omega \downarrow}^* [C_{\lambda^s} C_{\mu^s} C_\Lambda]$. Il serait intéressant de comprendre le rôle du point 2 dans cette interprétation des nombres $f_{\lambda, \mu}^\Lambda$ en termes de coefficients de structure.

Tests de sûreté 3.3.1.5.

Rajoutons une partition vide au début de la liste de partitions. Le σ correspondant est l'identité, d'où $\sigma\rho = \rho$ et $\nu = \dot{\mu}$. La condition d'entrelacement impose alors à tous les cycles d'être dans la même orbite, d'où $N = 1$. La relation entre genres devient alors $\vec{g} = (g)$. Puisque la formule ci-dessus devient $f_{\emptyset, \mu}^{\dot{\mu}} = 1$, la formule de réduction affirme

$$H^g(\emptyset, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k) = H^g(\dot{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k),$$

ce que nous savons être vrai puisque $H^g(\bar{\mu}, \vec{\lambda}) = H^g(\dot{\mu}, \vec{\lambda})$ et puisque retirer les barres au-dessus de $\dot{\mu}$ revient à appliquer l'opérateur $\begin{pmatrix} D - |\dot{\mu}| \\ m_1(\dot{\mu}) \end{pmatrix} = 1$.

Rajoutons à présent la partition $\uparrow 1^\ell \downarrow$ pour un entier $\ell \geq 0$. De même, le σ correspondant vaut Id , d'où $\nu = \dot{\mu}$, $N = 1$, $\vec{g} = (g)$ et $f_{\uparrow 1^\ell \downarrow, \mu}^{\dot{\mu}} = 1$, de sorte que la formule de réduction devient

$$H^g(\uparrow 1^\ell \downarrow, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k) = H^g(\dot{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k).$$

C'était déjà évident puisque $\uparrow 1^\ell \downarrow$ et $\emptyset$ ont même réduite.

Calculons à présent $H^0(\square, \square)$. Cet exemple est détaillé en termes topologiques dans [28] pages 34-35. Fusionner deux transpositions donne ou bien un produit disjoint de transpositions (d'où $N = 1$, $\vec{\nu} = (\square \square)$ et $g^1 = g = 0$), ou bien un 3-cycle (d'où $N = 1$, $\vec{\nu} = (\square \square \square)$ et $g^1 = g - \frac{1+1-2}{2} = 0$), ou bien la permutation identité (d'où deux cas : $N = 2$ et $\vec{\nu} = (\square, \square)$, ou $N = 1$ et $\vec{\nu} = (\square)$). Or la relation entre genres donne dans le dernier cas $-2 \leq g^{1'} (+g^{2'}) = g' - \frac{1+1-0}{2} = -2$, ce qui impose $N = 2$ et $(g^1, g^2) = (0, 0)$. La somme dans la formule de réduction aura donc trois termes. Il est par ailleurs facile de calculer les nombres $f_{\square, \square}^{\begin{pmatrix} \square \square \\ \square \square \end{pmatrix}} = 2$, $f_{\square, \square}^{\begin{pmatrix} \square \square \square \\ \square \square \end{pmatrix}} = 3$ et $f_{\square, \square}^{\begin{pmatrix} \square \square \square \square \\ \square \square \end{pmatrix}} = 1$. Puisque la partition $\square$ n'a pas de cycle fixes, on peut retirer les barres :

$$\begin{aligned} H^0(\square, \square) &= H^0(\overline{\square}, \overline{\square}) = 2H^0(\square, \square) + 3H^0(\square \square) + \frac{1}{2!} H^0(\square)^2 \\ &= 2 \left[\begin{pmatrix} \square \square \\ \square \square \end{pmatrix} \mathcal{H}_{a=4}^0 + 3 \left[\begin{pmatrix} \square \square \square \\ \square \square \end{pmatrix} \mathcal{H}_{a=3}^0 + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \square \square \square \square \\ \square \square \end{pmatrix} \mathcal{H}_{a=1}^0 \right)^2 \right] \\ &= 2 \left(\frac{1}{2!} \frac{2^2 2^2}{2! 2!} \right) \frac{Y^4}{4} + 3 \left(\frac{3^3}{3!} \right) \frac{1}{3} \left(\frac{Y^3}{3} - \frac{Y^4}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1^2}{1!} \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right) \right)^2 \\ &= Y^4 + \frac{9}{2} \left(\frac{Y^3}{3} - \frac{Y^4}{4} \right) + \left(\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{2} + \frac{Y^4}{8} \right) \\ &= Y^3 + \frac{Y^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Or nous savons d'après la formule (2.86) que

$$\begin{aligned} H^g(\square, \square) &= [2D + 2g' - \wp(\square)] H^0(\square) = [2D - 3] \square \mathbb{H}_{a=2}^0 = \frac{2^2}{2!} \left(2 \mathbb{H}_{a=2}^0 - 3 \mathbb{H}_{a=1}^0 \right) \\ &= 2 \left(Y^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right) \right) = Y^3 + \frac{Y^2}{2}, \text{ comme trouvé en 3.51.} \end{aligned}$$

Démonstration (de la formule de réduction).

Deux lemmes se présenteront naturellement à des moments. Nous les donnons en fin de preuve.

Le nombre $h_n^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k)$ compte les constellations $(\sigma, \rho, \sigma^3, \dots, \sigma^k, \tau^1, \dots, \tau^T)$ de degré n , genre g et type $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}^3, \dots, \bar{\lambda}^k, \bar{2}, \dots, \bar{2})$ à un facteur $\frac{1}{n!T!}$ et des binomiaux près. Nous nous appuyerons sur l'analyse effectuée en début de section pour effectuer ce dénombrement. En posant $\pi := \sigma\rho$, on obtient N constellations $(\pi_\Omega, \sigma_\Omega^3, \dots, \sigma_\Omega^k, \tau_\Omega^1, \dots, \tau_\Omega^{T_\Omega})$ sur les orbites Ω , où les τ_Ω^i sont des transpositions avec $\sum_\Omega T_\Omega = T$. Observer que deux transpositions τ_Ω^i et $\tau_{\Omega'}^{i'}$ commutent quand elles appartiennent à différentes orbites $\Omega \neq \Omega'$. Ainsi, en revenant en arrière pour reformer la constellation de départ, on pourra entrelacer les N blocs de transpositions sans changer le produit $\sigma\rho$, d'où $\binom{T}{(T_\Omega)}$ choix possibles.

On calcule à présent $h_n^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k)$ en comptant (à un facteur $\frac{1}{n!T!}$ près) les couples formés d'une part d'une constellation $(\sigma, \rho, \sigma^3, \dots, \sigma^k, \tau^1, \dots, \tau^T)$ de degré n , genre g et type $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}^3, \dots, \bar{\lambda}^k, \bar{2}, \dots, \bar{2})$, d'autre part pour tout $i \geq 3$ d'une partie à $m_1(\lambda^i)$ éléments dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Commençons par choisir la constellation selon les données de l'analyse ci-dessus.

Pour cela, on choisit un nombre d'orbites $N \geq 1$, les orbites Ω , les types (ν_Ω) , les profils (λ_Ω^i) (pour tout $i = 3, \dots, k$) puis les genres (g_Ω) . On obtient jusque là l'opérateur suivant (qui est une somme *finie*)

$$\sum_{N \geq 1} \sum_{\substack{\text{partitions ensembles } \mathcal{O} \\ \text{de } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ en } N \text{ orbites}}} \sum_{\substack{(\nu_\Omega)_{\Omega \in \mathcal{O}} \\ \sum |\nu_\Omega| \leq |\lambda| + |\mu|}} \sum_{\substack{\forall i=3, \dots, k, \\ \sum |\lambda_\Omega^i| = |\lambda^i|}} \sum_{\substack{\sum g'_\Omega \leq g' \\ \forall \Omega, g_\Omega \geq 0}}.$$

Choisissons ensuite pour tout Ω une constellation $(\pi_\Omega, \sigma_\Omega^3, \dots, \sigma_\Omega^k, \tau_\Omega^1, \dots, \tau_\Omega^{T_\Omega})$ sur l'ensemble Ω de genre g_Ω et de type $(\bar{\nu}_\Omega, \bar{\lambda}_\Omega^3, \dots, \bar{\lambda}_\Omega^k, \bar{2}, \dots, \bar{2})$ ainsi que $m_1(\nu_\Omega)$ cycles fixes de π_Ω , ce qui rajoute un opérateur

$$\prod_{\Omega} |\Omega|! T_\Omega! h_{|\Omega|}^{g_\Omega}(\bar{\nu}_\Omega, \bar{\lambda}_\Omega^3, \dots, \bar{\lambda}_\Omega^k, \bar{2}, \dots, \bar{2}) \binom{|\Omega| - |\bar{\nu}_\Omega|}{m_1(\nu_\Omega)} = \prod_{\Omega} |\Omega|! T_\Omega! h_{|\Omega|}^{g_\Omega}(\nu_\Omega, \bar{\lambda}_\Omega^3, \dots, \bar{\lambda}_\Omega^k).$$

Il reste à choisir une factorisation de $\pi := \prod \pi_\Omega$ en un produit $\sigma\rho$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. σ et ρ ont pour profils respectifs $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$;
2. l'union $S\sigma \cup S\rho$ vaut $S\pi$ union les points précédemment choisis ;
3. le groupe $\langle \sigma, \rho, \sigma^3, \dots, \sigma^k, \tau^1, \dots, \tau^T \rangle$ agit transitivement.

Le lemme 3.3.1.6 montre que la troisième condition revient à une **condition d'entrelacement** sur les orbites Ω par les cycles de σ ou ρ ; le lemme 3.3.1.7 montre alors que le nombre $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$ de telles factorisations ne dépend ni de n , ni de g , ni des orbites Ω , ni des permutations π_Ω , ni des points choisis.

Enfin, l'on n'oubliera pas le choix des transpositions.

Une fois choisie la constellation, le choix (à i fixé) des $m_1(\lambda^i) = \sum_\Omega m_1(\lambda_\Omega^i)$ cycles fixes dans $\llbracket 1, n \rrbracket = \bigsqcup \Omega$ revient à choisir pour tout Ω des points de Ω en nombre $m_1(\lambda_\Omega^i)$, d'où pour tout Ω un facteur

$$\prod_{i=3}^k \binom{n_\Omega - |\lambda_\Omega^i|}{m_1(\lambda_\Omega^i)}.$$

Finalement, l'on déduit de tout ce qui précède que le nombre $h_n^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k)$ vaut la somme suivante (pour alléger, les conditions sur les « indices » ont été enlevées)

$$\frac{1}{n!T!} \sum_{\substack{\text{ensembles } \{\Omega\} \text{ d'orbites, familles} \\ (g_\Omega), (\nu_\Omega), (\lambda_\Omega^3), \dots, (\lambda_\Omega^k)}} \left[\prod_{\Omega} |\Omega|! T_\Omega! h_{|\Omega|}^{g_\Omega}(\nu_\Omega, \bar{\lambda}_\Omega^3, \dots, \bar{\lambda}_\Omega^k) \right] f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}} \left(\binom{T}{(T_\Omega)} \prod_{\Omega} \binom{|\Omega| - (|\lambda_\Omega^i| - m_1(\lambda_\Omega^i))}{m_1(\lambda_\Omega^i)} \right).$$

La première somme peut être réécrite comme une somme sur des *ensembles* de $(k+1)$ -uplets $(\Omega, g_\Omega, \nu_\Omega, \lambda_\Omega^3, \dots, \lambda_\Omega^k)$ ou sur des *ensembles* de couples (Ω, u_Ω) où u_Ω désigne le k -uplet $(g_\Omega, \nu_\Omega, \lambda_\Omega^3, \dots, \lambda_\Omega^k)$. Vu que les conditions sur les Ω et sur les u_Ω sont inchangées par permutation et vu qu'elles assurent que les couples (Ω, u_Ω) sont *distincts*, sommer sur des ensembles $\{(\Omega, u_\Omega)\}_\Omega$ vérifiant ces conditions revient à $\frac{1}{N!}$ fois sommer sur des *familles* $((\Omega_j, u_j))_{j=1, \dots, N}$ vérifiant les mêmes conditions. Regrouper alors les orbites selon leurs cardinaux permet de décrire l'opérateur

$$\sum_{\substack{\text{ensembles } \{\Omega\} \text{ d'orbites, familles} \\ (g_\Omega), (\nu_\Omega), (\lambda_\Omega^3), \dots, (\lambda_\Omega^k)}} = \frac{1}{N!} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \sum_{\substack{\vec{g}, \vec{\nu} \\ \text{familles } \vec{\Omega}}} = \frac{1}{N!} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \sum_{n_1 + \dots + n_N = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_N} \sum_{\substack{\text{familles } \vec{\Omega} \text{ telles que} \\ \forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, |\Omega_j| = n_j}}.$$

En intégrant les coefficients binomiaux dans les $h_{|\Omega|}^{g_\Omega}$ et en regroupant selon la famille $(n_1, \dots, n_N)$ de leur cardinaux, le nombre $h_n^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k)$ devient

$$\frac{1}{n!T!} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \frac{1}{N!} \sum_{n_1 + \dots + n_N = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_N} \left[\prod_{j=1}^N n_j! T_j! h_{n_j}^{g_j}(\nu_j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j}) \right] f_{\vec{\lambda}, \mu}^{\vec{\nu}} \left(\begin{matrix} T \\ T_1, \dots, T_N \end{matrix} \right).$$

Après multiplication par t^n , simplification par les deux multinomiaux et distribution des puissances de $t^n = \prod t^{n_j}$, on obtient l'égalité (poser $T_{n_j} := T_j$)

$$h_n^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k) t^n = \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \frac{f_{\vec{\lambda}, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{n_1 + \dots + n_N = n} \left[\prod_j h_{n_j}^{g_j}(\nu_j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j}) t^{n_j} \right].$$

En sommant sur les $n \geq 1$, on obtient par multidistributivité

$$H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k) = \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \frac{f_{\vec{\lambda}, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \prod_j H^{g_j}(\nu_j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j}), \text{ c. q. f. d..}$$

Nous énonçons à présent et démontrons les deux lemmes dont nous avons eu besoin dans notre preuve.

Lemme 3.3.1.6.

Soit $N \geq 1$ un entier et $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ deux à deux disjoints. Poser $\Omega := \sqcup \Omega_j$. Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, soit π_j a permutation de Ω_j et G_j sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_{\Omega_j}$. Supposons le produit (disjoint) $\prod \pi_j = \sigma \rho$ factorisé dans $\mathfrak{S}_\Omega$. Alors le groupe $\langle \sigma, \rho, G_1, \dots, G_N \rangle$ agit transitivement sur Ω si et seulement si, pour tout $j \neq j'$ dans $\llbracket 1, N \rrbracket$, il y a une suite finie $j = j_0, \dots, j_L = j'$ telle que, pour tout $p \in \llbracket 1, L \rrbracket$, il y a un cycle de σ ou ρ qui rencontre les deux orbites $\Omega_{j_{p-1}}$ et Ω_{j_p} .

Lemme 3.3.1.7.

Soient $N \geq 1$ un entier et $\lambda, \mu, \vec{\nu}$ des partitions en nombre $N+2$. Pour tout choix de

1. un entier $n \geq |\vec{\nu}|$;
2. une composition $(n_1, \dots, n_N)$ de n telle que $n_j \geq |\nu_j|$ pour tout j ;
3. une partie $\Omega_j \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal n_j pour tout j tels que les Ω_j soient deux à deux disjoints ;
4. une permutation $\pi_j \in \mathfrak{S}_{\Omega_j}$ de profil $\bar{\nu}_j$ pour tout j ;
5. une partie $F_j \subset \Omega_j$ de $m_1(\nu_j)$ cycles fixes de π_j pour tout j ;

le nombre de factorisations dans $\mathfrak{S}_n$ de $\pi := \prod \pi_j$ en un produit $\sigma \rho$ vérifiant la condition d'entrelacement et les deux égalités type $(\sigma, \rho) = (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ et $S\sigma \cup S\rho = S\pi \sqcup \sqcup F^j$ vaut constamment $f_{\vec{\lambda}, \mu}^{\vec{\nu}}$.

Démonstration du lemme 3.3.1.6.

Une démonstration directe est possible³ mais nous préférons utiliser le lien entre transitivité et entrelacement du chapitre 1.

Le groupe $\langle \sigma, \rho, G_1, \dots, G_N \rangle = \langle \langle \sigma, \rho \rangle, \langle G_1, \dots, G_N \rangle \rangle$ est transitif si et seulement si les partitions ensemblistes $\text{Orb} \langle \sigma, \rho \rangle$ et $\text{Orb} \langle G_1, \dots, G_N \rangle = \{\Omega_i\}$ sont entrelacées, ou encore si et seulement (cf. proposition 1.6.3.1) pour tout $i \neq j$, il y a une suite finie d'orbites Ω_k ou de parts de $\text{Orb} \langle \sigma, \rho \rangle$ telle que la première soit Ω_i , la dernière soit Ω_j et telle que deux successives se rencontrent. Pour conclure, il suffit de montrer que deux orbites Ω_p et Ω_q rencontrent une part de $\text{Orb} \langle \sigma, \rho \rangle$ si et seulement s'il y a une suite d'orbites $\Omega_p, \Omega_{p_1}, \Omega_{p_2}, \dots, \Omega_{p_l}, \Omega_q$ dont chacune est reliée à la précédente/suivante par un cycle de σ ou de ρ .

Puisque un cycle de σ ou de ρ est toujours inclus dans une part de $\text{Orb} \langle \sigma, \rho \rangle$, le sens réciproque est réglé. Par ailleurs, deux éléments a et b sont dans un même part de $\text{Orb} \langle \sigma, \rho \rangle = \text{Orb} \sigma \vee \text{Orb} \rho$ si et seulement si (cf. proposition 1.6.2.1) il y a une suite de cycles de σ ou ρ dont le premier contient a , le dernier contient b et dont deux successifs se rencontrent : en prenant pour chaque point de recontre une orbite Ω_r le contenant, on obtient une suite comme voulu.

Démonstration du lemme 3.3.1.7.

Fixons tout d'abord n et les n_j et posons $\vec{\Omega}, \vec{\pi}, \vec{F}$ et $\vec{\Omega}', \vec{\pi}', \vec{F}'$ comme dans l'énoncé. Puisque π_j et π'_j ont même profil, il y a une bijection φ qui échange leur cycles *non fixes* pour tout j . Puisque F_j and F'_j ont même cardinal et sont fixés par π_j (resp. π'_j), on peut compléter φ de sorte à les échanger pour tout j . Enfin, vu que les orbites Ω_j et Ω'_j ont même cardinal, on peut compléter φ en une permutation de tout $\llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui donne, par conjugaison, une bijection entre les factorisations associées à $(\vec{\Omega}, \vec{\pi}, \vec{F})$ et celles associées à $(\vec{\Omega}', \vec{\pi}', \vec{F}')$.

Fixons à présent n'importe quel $(\vec{\Omega}, \vec{\pi}, \vec{F})$ comme ci-dessus. Posons $F := \sqcup F_j$ et $\Omega := \sqcup \Omega_j$. La condition $S\sigma \cup S\rho = S\pi \sqcup F \subset \Omega$ assure que σ et ρ fixent tout point hors de Ω , de sorte que les trois permutations σ, ρ, π résident dans $\mathfrak{S}_\Omega$ (toutes les conditions se passent donc dans Ω). Ainsi, on a une bijection évidente entre : d'une part, les factorisations associées à $(\vec{\Omega}, \vec{\pi}, \vec{F})$ et une composition donnée $\vec{\pi}$; d'autre part, les factorisations associées à $(\vec{\Omega}, \vec{\pi}, \vec{F})$ et composition *réduite* $(|\nu_j|)$. On pourrait également tout envoyer dans $\mathfrak{S}_\infty$ avec les bijections correspondantes évidentes.

3.3.2 Preuve du Z-lemme

Rappelons le Z-lemme 3.3.0.3 : *pour toutes partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ et tout genre $g \geq 0$, on a la Z-égalité suivante dans l'algèbre $\mathcal{A}^Z$ pour tout entier M assez grand :*

$$D^M \overline{H}^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \stackrel{Z}{=} D^{M+m_1(\lambda^1)+\dots+m_1(\lambda^k)} \overline{H}^g(\mathring{\lambda}^1 \sqcup \mathring{\lambda}^2 \sqcup \dots \sqcup \mathring{\lambda}^k). \quad (3.52)$$

On observera la présence d'un opérateur D^M dans les deux membres, laquelle est inutile pour étudier l'asymptotiques des séries considérées mais très pratique pour se débarrasser des cas exceptionnels. Comme nous aurons souvent recours à cette astuce, donnons-lui un peu de chair avant d'aborder la démonstration du Z-lemme 3.3.0.3.

La D-astuce (the D-trick).

Comme premier exemple, l'information sur le degré en Z de la Z-formule de KAZARIAN (3.26) peut-être énoncée sans la condition de stabilité par la simple égalité

$$\deg_Z D^3 H^g(\lambda) = 5g + 2\ell + 1 \quad (3.53)$$

(il s'agit juste de vérifier les quatre cas exceptionnels).

3. $\Leftarrow$ Soient x, x' deux points dans Ω . Notons ω, ω' et G, G' les orbites et sous-groupes correspondants. Si x et x' résident dans la même orbite, la transitivité de G conclut. S'il y a un cycle de σ ou ρ qui rencontre ω et ω' , mettons en deux points $(y, y') \in \omega \times \omega'$, alors nous avons l'action suivante $x \xrightarrow{G} x' \xrightarrow{\sigma \text{ or } \rho} y' \xrightarrow{G'} x'$ du sous-groupe $\langle \sigma, \rho, G^1, \dots, G^N \rangle$, d'où le résultat en suivant les cycles de la suite $j_0, \dots, j_L$.

$\Rightarrow$ Soient $j \neq j'$ quelconques et considérons un couple (x, x') de points dans $\Omega^j \times \Omega^{j'}$. Nous avons une permutation de $\langle \sigma, \rho, G^1, \dots, G^N \rangle$ qui envoie x sur x' . Écrivons cette permutation sous la forme $a*b*c*\dots*z*$ où toutes les $*$ sont dans $\langle G^1, \dots, G^N \rangle$ et où les lettres $a, b, c, \dots, z$ représentent chacune un élément de $\langle \sigma \rangle$ ou $\langle \rho \rangle$. Puisque les $*$ ne peuvent pas faire sortir d'une orbite donnée Ω_j , seules les permutations $a, b, c, \dots, z$ le peuvent, d'où la suite de cycles cherchée.

Montrons la généralisation suivante *pour tout entier* $M \geq 0$: *si la série* $D^M H^g(\lambda)$ *tombe dans* $\mathcal{A}^Z$, *alors son degré (en* Z *) vaut*

$$\deg_Z D^M H^g(\lambda) = 2M + 5g' + 2\ell. \quad (3.54)$$

En effet, en posant $S := H^g(\lambda)$, on peut écrire d'une part $D^3(D^M S) = 2 \cdot 3 + \deg_Z D^M S$ et d'autre part $D^M(D^3 S) = 2M + 5g' + 2\ell + 6$; égaliser les deux membres mène à la conclusion.

Montrons à présent les équivalences suivantes *pour toute série* S *appartenant à* $\mathcal{A}$:

$$S \in \mathcal{A}^Z \iff \forall M \geq 0, \deg_Z D^M S \geq 2M \iff \exists M \geq 0, \deg_Z D^M S \geq 2M. \quad (3.55)$$

Les sens $\implies$ sont triviaux (cf. proposition 2.1.3.1) et l'on a même des inégalités *strictes*. Réciproquement, si S est un polynôme $P(Y)$, alors $DS = P'(Y)Z$ a un Z -degré ≤ 1 , d'où l'on tire que $D^M S = D^{M-1} DS$ a un degré $\leq 1 + 2(M-1)$.

Enfin, montrons le corollaire suivant du Z -lemme.

Corollaire 3.3.2.1. (*S. 2010 [20]*) (*quelles séries* H^g *tombent dans* $\mathcal{A}^Z$ *)*

Pour toutes partitions non vides $\lambda^1, \dots, \lambda^k, \lambda, \mu$:

1. $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ *tombe toujours dans* $\mathcal{A}^Z$ *lorsque* $k \geq 3$.
2. $H^g(\lambda, \mu)$ *ne tombe pas dans* $\mathcal{A}^Z$ *si et seulement si* $g = 0$ *et si* λ *et* μ *ont toutes deux longueurs* 1.
3. $H^g(\lambda)$ *ne tombe pas dans* $\mathcal{A}^Z$ *si et seulement si* $\binom{g}{\ell(\lambda)} \in \left\{ \binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}, \binom{1}{0} \right\}$.

Démonstration.

Prenons le degré en Z dans la Z -égalité (3.52) donnée et invoquons la relation (3.53) du théorème de KAZARIAN :

$$\begin{aligned} \deg D^M \mathbb{H}^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) &= 2M + 2 \sum m_1(\lambda^i) + \left(5g' + 2 \sum \ell(\lambda^i) \right) \\ &= 2M + 5g' + 2 \sum \ell(\lambda^i). \end{aligned}$$

Puisque toutes les longueurs sont ≥ 1 , le degré ci-dessus est $\geq 2M$ lorsque $k \geq 3$. Quand $k = 2$, le degré ci-dessus est $< 2M$ si et seulement si $g = 0$ et si $\ell(\lambda^i) = 1$ pour $i = 1, 2$. Lorsque $k = 1$, l'on retrouve les cas exceptionnels de la proposition 3.1.4.1.

Nous présentons à présent la preuve du Z -lemme.

Afin d'extraire la Z -égalité souhaitée de la formule de réduction, on s'intéresse à la contribution en Z de chaque produit $\prod H^{g_j}$, ce qui nous invite à procéder par récurrence sur le nombre k de partitions. Nous aurons besoin d'une inégalité (lemme 3.3.2.2) que nous énonçons (et démontrons) en fin de preuve.

Nous montrerons ainsi la formule suivante, dite Z -formule de réduction :

$$H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda_3, \dots, \lambda_k) \stackrel{Z}{=} f_{\lambda, \mu}^{\bar{\lambda} \sqcup \bar{\mu}} H^g(\bar{\lambda} \sqcup \bar{\mu}, \lambda_3, \dots, \lambda_k). \quad (3.56)$$

Observer qu'il s'agit déjà d'une vraie égalité lorsque $\bar{\lambda} = \bar{\mu} = \emptyset$, raison pour laquelle nous laisserons ce cas de côté par la suite. À partir de cette Z -formule de réduction, il sera aisé de conclure. Pour retirer les barres au-dessus

de λ et μ , multiplier par les binomiaux $\binom{D - |\bar{\lambda}|}{m_1(\lambda)} \binom{D - |\bar{\mu}|}{m_1(\mu)}$: puisque l'opérateur D augmente strictement $\deg_Z$, on peut multiplier à la place par $\frac{D^{m_1(\lambda) + m_1(\mu)}}{m_1(\lambda)! m_1(\mu)!}$ tout en conservant une Z -égalité :

$$H^g(\lambda, \mu, \lambda_3, \dots, \lambda_k) \stackrel{Z}{=} \frac{D^{m_1(\lambda) + m_1(\mu)}}{m_1(\lambda)! m_1(\mu)!} f_{\lambda, \mu}^{\bar{\lambda} \sqcup \bar{\mu}} H^g(\bar{\lambda} \sqcup \bar{\mu}, \lambda_3, \dots, \lambda_k).$$

Pour passer de H à $\mathbb{H}$, diviser les deux côté par $\boxtimes \boxtimes \boxtimes \dots \boxtimes$. Invoquer alors la formule (3.50) et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^g(\lambda, \mu, \lambda_3, \dots, \lambda_k) &\stackrel{Z}{=} D^{m_1(\lambda) + m_1(\mu)} \mathbb{H}^g(\bar{\lambda} \sqcup \bar{\mu}, \lambda_3, \dots, \lambda_k) \\ &\stackrel{Z}{=} D^{m_1(\lambda) + m_1(\mu)} D^{0 + m_1(\lambda_3) + \dots + m_1(\lambda_k)} \mathbb{H}^g(\bar{\lambda} \sqcup \bar{\mu} \sqcup \bar{\lambda}_3 \sqcup \dots \sqcup \bar{\lambda}_k), \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Le cas $k = 1$ est un corollaire immédiat de la Z -formule de KAZARIAN. À cause du nombre de cas exceptionnels, le cas $k = 2$ sera le plus long à traiter, le cas $k = 3$ très similaire et bien plus facile, tandis que les k plus grands seront immédiats. Nous commençons par $k \geq 4$ afin de s'habituer à l'idée de la démonstration, puis $k = 3$ et enfin $k = 2$, l'hypothèse de récurrence nous autorisant à utiliser les parts correspondantes du corollaire 3.3.2.1 ci-dessus.

On attire par conséquent l'attention du lecteur sur le fait que le Z -lemme 3.3.0.3 et le corollaire 3.3.2.1 se démontrent *ensemble*.

$$\boxed{k \geq 4}.$$

La formule de réduction nous dit que

$$H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k) = \sum_{\vec{\nu}, \vec{g}} f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \prod_j H^{g_j}(\nu_j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j})$$

où chaque facteur $H^{g_j}(\nu_j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j})$ tombe dans $\mathcal{A}^Z$ par le corollaire 3.3.2.1 (se souvenir que tous les ν_j sont non vides puisque nous avons laissé de côté le cas $\dot{\lambda} = \dot{\mu} = \emptyset$). Par conséquent, le produit $\prod H^{g_j}(\nu_j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j})$ a pour degré en Z

$$\begin{aligned} & \sum_j 5g'_j + 2 \left(\ell(\nu_j) + \sum_{i \geq 3} \ell(\lambda^{i,j}) \right) \\ = & 5g' - 5 \frac{\wp(\mu) + \wp(\mu)}{2} + \frac{5}{2} (|\vec{\nu}| - \ell(\vec{\nu})) + 2\ell(\vec{\nu}) + 2 \sum_{i \geq 3} \ell(\lambda^i) \\ = & 2 \sum_{i \geq 3} \ell(\lambda^i) + 5g' - \frac{5}{2} (\wp(\lambda) + \wp(\mu)) + \frac{5|\nu| - \ell(\nu)}{2}. \end{aligned}$$

Tout est constant sauf $\frac{5|\nu| - \ell(\nu)}{2}$. Le lemme 3.3.2.2 montre alors que la quantité ci-dessus est maximale si et seulement si $\nu = \dot{\lambda} \sqcup \dot{\mu}$; vu que cela implique $N = 1$ et $\vec{g} = (g)$, on en déduit que le terme $\prod_j H^{g_j}(\nu_j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j})$ de degré maximal en Z dans la somme $H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k)$ est précisément $H^g(\dot{\lambda} \sqcup \dot{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k)$, ce qui donne la Z -formule de réduction annoncée.

$$\boxed{k = 3}.$$

On suit la même idée. Fixons un genre $g \geq 0$ et trois partitions λ, μ, ξ . Posons $\ell := \ell(\nu) + \ell(\xi)$ et ℓ_j défini de même pour tout j . La formule de réduction implique alors pour tout entier $M \geq 0$

$$D^M H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \xi) = \sum_{\vec{\nu}, \vec{g}, \vec{\xi}, \vec{M}} f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}} \binom{M}{\vec{M}} \prod_j D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j, \xi^j)$$

où la somme sur $\vec{M}$ est prise sur les N -uplets d'entiers M_j positifs dont la somme vaut M . D'après l'hypothèse de récurrence pour $k = 2$, le terme $D^M H^g(\dot{\lambda} \sqcup \dot{\mu}, \xi)$ tombe dans $\mathcal{A}^Z$ pour M assez grand. Fixons un tel M . On montre alors que tous les autres termes ont un degré en Z plus petit que ce dernier.

D'après le corollaire 3.3.2.1 pour deux partitions, un facteur $D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j, \xi^j)$ appartiendra à $\mathbb{Q}[Y]$ si et seulement si $(g_j, \ell_j, M_j) = (0, 2, 0)$: multiplier par un tel élément fera décroître⁴ le degré en Z . Quant aux autres facteurs, la D -astuce combinée au corollaire 3.3.2.1 pour deux partitions montre que leur degré en Z est $5g'_j + 2\ell_j + 2M_j$. Par conséquent, le produit $\prod_j D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j)$ a un Z -degré $\leq \sum_Z 5g'_j + 2\ell_j + 2M_j$ où l'indice « Z » signifie que $D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j)$ réside dans $\mathcal{A}^Z$ (on indexera sinon « sans Z »).

Posons $e := \#\{j; (g_j, \ell_j, M_j) = (0, 2, 0)\}$ pour le nombre de facteurs (exceptionnels) sans Z . Les trois sommes précédentes $\sum_Z$ peuvent être reliées aux mêmes sommes sans restrictions :

$$\begin{aligned} \sum_Z g'_j &= \sum_{\text{sans } Z} 1 + \sum_j g'_j = e + g' - \frac{\wp(\lambda) + \wp(\mu) - \wp(\vec{\nu})}{2}, \\ \sum_Z \ell_j &= (\ell(\vec{\nu}) - e) + (\ell(\xi) - e) = \ell(\vec{\nu}) + \ell(\xi) - 2e, \\ \sum_Z M_j &= M. \end{aligned}$$

4. strictement si et seulement si ses coefficients en Y ont une somme nulle

On obtient ainsi la majoration

$$\begin{aligned}
\deg_Z \prod_j D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j, \xi^j) &\leq 5 \sum_Z g'_j + 2 \sum_Z \ell_j + 2 \sum_M M_j \\
&= 5e + 5g' - \frac{5}{2} (\wp(\lambda) + \wp(\mu)) + \frac{5|\vec{\nu}| - 5\ell(\vec{\nu})}{2} \\
&\quad + 2\ell(\vec{\nu}) + 2\ell(\xi) - 4e + 2M \\
&= 2M + 5g' - \frac{5}{2} (\wp(\lambda) + \wp(\mu)) + \ell(\xi) + \frac{5|\nu| - \ell(\nu)}{2} + e.
\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, tout est constant à l'exception de $\frac{5|\nu| - \ell(\nu)}{2} + e$: comme il y a (grâce à l'astuce d'avoir appliqué D) au moins un $M_j \geq 1$, on a $e \leq N - 1 \leq 3(N - 1)$ et le lemme 3.3.2.2 tient toujours : le terme $\prod_j D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j, \xi^j)$ de degré en Z maximal dans la somme $D^M H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \xi)$ est précisément $D^M H^g(\bar{\lambda} \sqcup \bar{\mu}, \xi)$. On conclut alors exactement comme dans le cas $k = 4$.

$$\boxed{k = 2}.$$

La preuve suit le même schéma. Fixons un genre $g \geq 0$ et deux partitions λ, μ . La formule de réduction implique pour tout entier $M \geq 0$

$$D^M H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \sum_{\vec{\nu}, \vec{g}, \vec{M}} f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}} \left(\frac{M}{\vec{M}} \right) \prod_j D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j).$$

D'après le corollaire 3.3.2.1, un facteur $D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j)$ appartiendra à $\mathbb{Q}[Y]$ si et seulement si $\begin{pmatrix} g_j \\ \ell_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour les autres facteurs, nous avons déjà dit que leurs degrés en Z étaient $5g'_j + 2\ell_j + 2M_j$.

Par conséquent, le produit $\prod_j D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j)$ a un Z -degré $\leq \sum_Z 5g'_j + 2\ell_j + 2M_j$. Relions maintenant les sommes $\sum_Z$ aux sommes $\sum_{\text{sans } Z}$:

$$\begin{aligned}
\sum_Z g'_j &= \sum_{\text{sans } Z} 1 + \sum g'_j = \# \left\{ j ; \begin{pmatrix} g_j \\ \ell_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + g' - \frac{\wp(\lambda) + \wp(\mu) - \wp(\vec{\nu})}{2}, \\
\sum_Z \ell_j &= \ell(\vec{\nu}) - \# \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 1 \\ M_j = 0 \text{ or } 1 \end{matrix} \right\} - 2\# \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 2 \\ M_j = 0 \end{matrix} \right\}, \\
\sum_Z M_j &= M - \# \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 1 \\ M_j = 1 \end{matrix} \right\}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la majoration

$$\begin{aligned}
\deg_Z \prod_j D^{M_j} H^{g_j}(\nu_j) &\leq 5 \sum_Z g'_j + 2 \sum_Z \ell_j + 2 \sum_M M_j \\
&= 2M + 5g' - \frac{5}{2} (\wp(\lambda) + \wp(\mu)) + \frac{5}{2} (|\nu| - \ell(\nu)) + 2\ell(\nu) \\
&\quad + 5\# \left\{ j ; \begin{pmatrix} g_j \\ \ell_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} - 4\# \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 2 \\ M_j = 0 \end{matrix} \right\} \\
&\quad - 2\# \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 1 \\ M_j = 0 \text{ or } 1 \end{matrix} \right\} - 2\# \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 1 \\ M_j = 1 \end{matrix} \right\} \\
&= 2M + 5g' - \frac{5}{2} (\wp(\lambda) + \wp(\mu)) + \frac{5|\nu| - \ell(\nu)}{2} \\
&\quad + \# \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 1 \\ M_j = 1 \end{matrix} \right\} + 3\# \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 1 \\ M_j = 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ j ; \begin{matrix} g_j = 0 \\ \ell_j = 2 \\ M_j = 0 \end{matrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Les trois ensembles dont les cardinaux sont considérés étant deux à deux disjoints, les sommes correspondantes sont $\leq N$ et l'on peut même remplacer N par $N - 1$ s'il y a au moins un $M_j \geq 2$, ce qui peut être réalisé en prenant $M \geq 2 \left(\left| \overset{\circ}{\lambda} \right| + |\overset{\circ}{\mu}| + 1 \right) \geq 2N$. On peut donc toujours appliquer le lemme 3.3.2.2 et conclure, ce qui termine la preuve du Z-lemme 3.3.0.3.

Lemme 3.3.2.2. *(une inégalité d'entrelacement)*

Soient λ, μ deux partitions et σ, ρ deux permutations de $\mathfrak{S}_\infty$ de profils $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$. On note ν le profil de $\sigma\rho$ restreint à $S\sigma \cup S\rho$. Regroupons les cycles de ν en N orbites de sorte à vérifier la condition d'entrelacement. Alors la quantité $\frac{5|\nu| - \ell(\nu)}{2} + 3(N - 1)$ est maximale si et seulement si σ et ρ ont des supports disjoints. Dans ce cas, on a $N = 1$.

Remarque 3.3.2.3.

Pour voir ce qui se passe, faisons grandir l'intersection des supports $S\sigma$ et $S\rho$ petit à petit à partir de l'ensemble vide (le cas d'égalité annoncé) : lorsqu'on rajoute un élément dans $S\sigma \cap S\rho$, la taille décroît plus vite que la longueur grâce au facteur 5. (Bien sûr, cela n'explique en quoi le facteur 5 suffit à tuer le terme embêtant $3(N - 1)$.)

Démonstration.

Nous dirons qu'un cycle de σ ou ρ est **entrelacé** s'il rencontre un autre cycle de σ ou ρ (deux tels cycles seront alors dits **entrelacés** l'un **avec** l'autre). Appelons c le nombre de cycles entrelacés et c' le nombre de cycles (y compris les cycles fixes) du produit $\sigma\rho$ induit sur les cycles entrelacés (de σ et ρ).

Une observation cruciale est la suivante : pour vérifier la condition d'entrelacement, tout cycle de ν doit être dans la même orbite qu'un cycle entrelacé, d'où l'inégalité $N \leq c'$.

En appelant $k := |S\sigma \cap S\rho|$ le nombre de points de **contact**⁵ des supports, on peut écrire

$$\begin{cases} |\nu| = \left| \overset{\circ}{\lambda} \right| + |\overset{\circ}{\mu}| - k \\ \ell(\nu) = \ell(\overset{\circ}{\lambda}) + \ell(\overset{\circ}{\mu}) - c + c' \end{cases},$$

d'où la quantité à majorer

$$Q := \frac{5(-k) - (c' - c)}{2} + 3(N - 1). \quad (3.57)$$

Lorsque $S\sigma \cap S\rho = \emptyset$, toutes les nombres $c, c', k, N - 1$ valent 0 et donc Q aussi. Il nous faut donc montrer $Q < 0$, i. e. $-2Q \geq 1$, pour tout autre ν que $\overset{\circ}{\lambda} \sqcup \overset{\circ}{\mu}$. D'après l'observation cruciale, il suffit de montrer la même inégalité $5k + c' - c - 2(3N - 3) \stackrel{?}{\geq} 1$ où l'on a remplacé certains N par le même nombre de c' : afin de tuer les c' dans l'inégalité, on remplace un N sur les six, ce qui amène à regarder l'inégalité $5(k + 1 - N) \stackrel{?}{\geq} c$. On va montrer par récurrence sur $|S\sigma| + |S\rho|$ l'inégalité plus forte

$$2(k - N + 1) \stackrel{?}{\geq} c. \quad (3.58)$$

Lorsque $\sigma = \rho = \text{Id}$, alors les trois quantités c, k et $N - 1$ valent 0, d'où l'inégalité (même si l'on est dans le cas exclu $\nu = \overset{\circ}{\lambda} \sqcup \overset{\circ}{\mu}$).

Supposons à présent $\left| \overset{\circ}{\lambda} \right| + |\overset{\circ}{\mu}| > 0$. Grâce à l'hypothèse $\nu \neq \overset{\circ}{\lambda} \sqcup \overset{\circ}{\mu}$, on a $k \geq 1$: prenons un point de contact x dans $S\sigma \cap S\rho$, posons $y := \sigma(x)$ et $\tau := (x, y)$ la transposition échangeant ces points. Écrire enfin $\sigma = \tau\sigma_*$ où $\sigma_* := \tau\sigma$ fixe x et vérifie donc $|S\sigma_*| < |S\sigma|$. On obtient ainsi la décomposition cyclique de $\sigma\rho$ en multipliant celle de $\sigma_*\rho$ par la transposition τ à gauche (et inversement). On notera avec un indice $*$ les quantités c_*, k_*, N_* associées au produit de σ_* par ρ : observer que N_* n'est pas bien défini et peut être choisi arbitrairement dès lors que la condition d'entrelacement est vérifiée. Pour un tel N_* , on a par hypothèse de récurrence

$$c_* \leq 2(k_* - N_* + 1).$$

Nous voulons nous débarrasser des $*$.

5. de même que l'on note en français K un **corps** ou un **compact**

Vu que x est fixé par σ_* , il disparaît des points de contact, d'où $k_* < k$. Par ailleurs, σ_* perd au plus un cycle entrelacé (qui ne peut être que la σ -orbite de x) et ρ perd au plus deux cycles entrelacés (ceux qui sont peut-être entrelacés avec τ), d'où $c_* \geq c - 3$. Mais le cas $c_* = c - 3$ impose la σ -orbite de x d'être une transposition entrelacée avec deux ρ -cycles, chacun d'eux n'étant pas entrelacés avec un autre σ -cycle ; puisque σ et ρ jouent des rôles symétriques (poser $y := \rho(x)$ au lieu de $\sigma(x)$), on peut éviter ce cas et supposer en conséquence $c_* \geq c - 2$.

Regardons ce qui arrive aux cycles de $\sigma\rho$ après composition (à gauche) par τ . Si un $(\sigma\rho)$ -cycle γ est cassé en deux cycles, on les regroupe dans la même orbite que celle de γ (on peut donc prendre $N_* = N$). Si deux cycles sont joints, ou bien ces deux cycles étaient dans la même orbite (ne pas changer alors les orbites, ce qui permet de prendre $N_* = N$) ou bien ils étaient dans des orbites distinctes (fusionner alors ces orbites et ne pas changer les autres, ce qui nous autorise à prendre $N_* = N - 1$). Dans les cas où $N_* = N$, on peut conclure en écrivant

$$c \leq c_* + 2 \leq 2(k_* - N_* + 1) + 2 \leq 2((k - 1) - N + 1) + 2 = 2(k - N + 1), \text{ c. q. f. d..}$$

On supposera donc $N_* = N - 1$, ce qui impose τ joignant deux $\sigma\rho$ -cycles, *i. e.* x et y n'habitant pas la même $\sigma\rho$ -orbite. Mais cela force les σ - et ρ -orbites de x à rester entrelacées pour σ_* et ρ (sinon, itérer $\sigma\rho$ dans une orbite non entrelacée pour joindre x et y), d'où $c_* = c$: l'hypothèse de récurrence donne alors

$$c = c_* \leq 2(k_* - N_* + 1) \leq 2((k - 1) - (N - 1) + 1) = 2(k - N + 1), \text{ c. q. f. d..}$$

3.4 La formule de réduction pour $H^0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$

Prenons deux entiers $a, b \geq 2$ et posons $c := a + b$. On pourrait être surpris que la série $H^0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, qui réside dans $\mathbb{Q}[Y]$ d'après le corollaire 3.3.2.1, puisse être écrite grâce à la formule de réduction comme une somme de $\prod H^{g^j}(\nu^j)$ où chaque produit a de sévères contraintes pour rester dans $\mathbb{Q}[Y]$ (d'après le même corollaire 3.3.2.1) Éclaircissons cela.

Nous laisserons de côté le cas $\vec{\nu} = ((a) \sqcup (b))$ de supports disjoints pour lequel le produit $\prod H^{g^j}(\nu^j) = H^0((a, b))$ tombe dans $\mathbb{Q}[Y]$. Supposons à présent que les cycles de σ et ρ se rencontrent en $k \geq 1$ points où $k := |\sigma\sigma \cap \rho\rho|$ et regardons de plus près la relation des genres (poser $G := \sum g^j$) :

$$\begin{aligned} 0 &= 2(1 + g') = 2 + (\wp(\lambda) + \wp(\mu) - \wp(\vec{\nu})) + \sum g^{j'} \\ &= 2 + (a - 1 + b - 1) - (|\vec{\nu}| - \ell(\vec{\nu})) + 2G - 2N \\ 2N &= (c - |\vec{\nu}|) + \ell(\vec{\nu}) + 2G. \end{aligned}$$

Puisque tout $\sigma\rho$ -cycle réside dans une orbite déterminée (et puisque chaque orbite contient un cycle), on a $N \leq \ell(\vec{\nu})$. Par ailleurs, fusionner deux cycles selon $k \geq 1$ points ne peut pas faire apparaître plus de k cycles dans $\vec{\nu}$, d'où $\ell(\vec{\nu}) \leq k$. Enfin, remarquer que $|\vec{\nu}| = |\sigma\sigma \cup \rho\rho|$ vaut par le principe d'inclusion-exclusion $c - k$.

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est par conséquent $\geq k + N + 0 \geq 2N$, forçant toutes les égalités : $N = \ell(\vec{\nu}) = k$ (d'où $\ell(\nu^j) = 1$ pour tout j) et $G = 0$ (*i. e.* $g^j = 0$ pour tout j). On en déduit l'égalité

$$H^0(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = f_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})} H^0((a, b)) + \sum_{\vec{\nu}} \frac{f_{\vec{\nu}}}{N!} \prod H^0(\nu^j) \quad (3.59)$$

où tous les facteurs $f_{\vec{\nu}}$ sont des entiers positifs et les ν^j des partitions à une part. Cela finit d'éclaircir l'interrogation ci-dessus.

3.4.1 Les nombres $f_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}}^{(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \dots, \mathfrak{c}_2)}$

Précisons les facteurs $f_{\vec{\nu}}$ et les partitions $\vec{\nu}$ en jeu. Notons $x_1, \dots, x_k$ les points de contact numérotés dans l'ordre (*modulo* k) où il apparaissent dans le cycle σ . Suivons x_i selon ρ et appelons x_j le point de contact suivant. Alors la $\sigma\rho$ -orbite de x_i contient x_i et $\rho^{-1}(x_j)$, donc également $\sigma(x_j)$ et par suite x_{j+1} ; puisque $\sigma\rho$ possède autant de cycles que de points de contact, il ne peut y avoir > 1 points de contact dans un $\sigma\rho$ -cycle,

d'où $j + 1 = i$. Finalement, si l'on définit des entiers > 0 minimaux a_i et b_i par $x_{i+1} = \sigma^{a_i}(x_i) = \rho^{b_i}(x_i)$, l'on peut décrire $\vec{\nu}$ comme le k -uplet dont les coordonnées sont les partitions à une part $\lambda(a_i + b_i - 1)$.

Revenant en arrière, étant donné un k -uplet $\vec{\nu}$ de partitions $\lambda(c_i)$ à une part dont les tailles sont des entiers $c_i > 0$ de somme $a + b - k$ ainsi qu'une permutation π de type $\vec{\nu}$ (comme dans la définition des nombres $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$), factoriser π en un produit $\sigma\rho$ avec σ un a -cycle et ρ un b -cycle revient à choisir dans chaque π -cycle un point de départ pour σ (qui sera un point d'arrivée pour ρ). On peut ainsi écrire $f_{\lambda A, \lambda B}^{(\lambda c_i)_{i \in [1, k]}} = \prod_{i=1}^k c_i$ pour toute suite $(c_1, \dots, c_k)$ où $1 \leq k \leq \min\{a, b\}$ et $c_1 + \dots + c_k = c - k$.

On peut par conséquent décrire

$$H^0(\lambda a, \lambda b) = f_{\lambda a, \lambda b}^{(\lambda a \sqcup \lambda b)} H^0(\lambda a, \lambda b) + \sum_{1 \leq k \leq a, b} \frac{1}{k!} \sum_{\forall i, c_i \geq 1} \sum_{c_1 + \dots + c_k = c - k} \prod_{i=1}^k c_i H^0(\lambda c_i). \quad (3.60)$$

Afin d'obtenir $\mathbb{H}^0(\lambda a, \lambda b)$, diviser par $\boxed{\lambda a} \boxed{\lambda b}$: le premier terme devient

$$\frac{f_{\lambda a, \lambda b}^{(\lambda a \sqcup \lambda b)}}{\boxed{\lambda a} \boxed{\lambda b}} \boxed{\lambda a, \lambda b} \cdot \mathbb{H}^0(\lambda a, \lambda b) = 1 \cdot \frac{Y^c}{c}. \quad (3.61)$$

Dans les paragraphes suivants, on s'attèle à simplifier la somme restante.

On renvoie au chapitre 2 section 2.1.7 pour les notations et résultats de l'algèbre déformée, laquelle a été introduite en vue du calcul qui vient.

3.4.2 Un test de sûreté : $H^0(\lambda a, \lambda 2)$

Pour $b = 2$, la formule ci-dessus donne

$$\begin{aligned} H^0(\lambda a, \square\square) &= 1H^0(\lambda a, \lambda 2) + (a+1)H^0(\lambda a+1) + \frac{1}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} uv H^0(\lambda u) H^0(\lambda v) \\ &= \frac{2a^a}{a!} \mathbb{H}_{a+2}^0 + \frac{(a+1)^a}{a!} (a+1) \mathbb{H}^0(\lambda a+1) + \frac{1}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^v}{u! v!} u \mathbb{H}^0(\lambda u) v \mathbb{H}^0(\lambda v). \end{aligned}$$

D'une part, la somme des deux premières séries vaut

$$\frac{2a^a}{a!} \frac{Y^{a+2}}{a+2} + \frac{(a+1)^a}{a!} \left(\frac{Y^{a+1}}{a+1} - \frac{Y^{a+2}}{a+2} \right) = Y^{a+1} \frac{(a+1)^{a-1}}{a!} + Y^{a+2} \frac{2a^a - (a+1)^a}{a!(a+2)}.$$

D'autre part, on peut développer la somme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^v}{u! v!} u \mathbb{H}^0(\lambda u) v \mathbb{H}^0(\lambda v) &= \frac{1}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^v}{u! v!} \left(\frac{Y^u}{u} - \frac{Y^{u+1}}{u+1} \right) \left(\frac{Y^v}{v} - \frac{Y^{v+1}}{v+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^v}{u! v!} \left(\frac{Y^a}{uv} - \frac{Y^{a+1}}{u(v+1)} - \frac{Y^{a+1}}{(u+1)v} + \frac{Y^{a+2}}{(u+1)(v+1)} \right) \\ &= Y^a \frac{1}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^{u-1} v^{v-1}}{u! v!} - Y^{a+1} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^{v-1}}{(u+1)! v!} + Y^{a+1} \frac{1}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^v}{(u+1)! (v+1)!}. \end{aligned}$$

Il s'agit de vérifier les trois identités

$$(\text{coefficient en } Y^a) \frac{a!}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^{u-1} v^{v-1}}{u! v!} = a^{a-1} - a^{a-2}, \quad (3.62)$$

$$(\text{coefficient en } Y^{a+1}) a! \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^{v-1}}{(u+1)! v!} = (a+1)^{a-1} - a^{a-1}, \quad (3.63)$$

$$(\text{coefficient en } Y^{a+2}) \frac{a!}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^v}{(u+1)! (v+1)!} = \frac{(a+1)^a - 2a^a}{a+2}. \quad (3.64)$$

La première identité revient à l'égalité $\frac{Y^2}{2} = \sum_{n \geq k} n^{n-2} (n-1) \frac{q^n}{n!}$.

La deuxième vient du calcul de

$$YX = ty_1 \left(\frac{1-y_{-1}}{t} - 1 \right) = y_1 - ty_1 - 1 = \frac{Y}{t} - Y - 1, \quad (3.65)$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} a! \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^{v-1}}{(u+1)!v!} &= a! \operatorname{Coef}_{t^a} \left[\frac{Y}{t} - Y - 1 \right] = a! (\operatorname{Coef}_{t^{a+1}} [Y] - \operatorname{Coef}_{t^a} [Y]) \\ &= a! \left(\frac{(a+1)^a}{(a+1)!} - \frac{a^{a-1}}{a!} \right) = (a+1)^{a-1} - a^{a-1}, \text{ c. q. f. d..} \end{aligned}$$

La troisième vient du calcul de

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(\frac{1-y_{-1}}{t} - 1 \right)^2 = \frac{1}{t^2} + t^{-2}y_{-2} + 1 - \frac{2t^{-1}y_{-1}}{t} - \frac{2}{t} + 2t^{-1}y_{-1} \\ &= \frac{1}{t^2} + 1 - \frac{2}{t} + Y^{-2} - \frac{2Y^{-1}}{t} + 2Y^{-1}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} &\frac{a!}{2} \sum_{u+v=a}^{u,v \geq 1} \frac{u^u v^v}{(u+1)!(v+1)!} \\ &= \frac{a!}{2} \operatorname{Coef}_{t^a} \left[\frac{1}{t^2} + 1 - \frac{2}{t} + Y^{-2} - \frac{2Y^{-1}}{t} + 2Y^{-1} \right] = a! \left(-\operatorname{Coef}_{t^a} \left[\frac{Y^{-2}}{-2} \right] + \operatorname{Coef}_{t^{a+1}} \left[\frac{Y^{-1}}{-1} \right] - \operatorname{Coef}_{t^a} \left[\frac{Y^{-1}}{-1} \right] \right) \\ &= a! \left(-\frac{a^{a+2-1}}{(a+2)!} + \frac{(a+1)^{a+1+1-1}}{(a+1+1)!} - \frac{a^{a+1-1}}{(a+1)!} \right) = \frac{1}{(a+1)(a+2)} \left(-a^{a+1} + (a+1)^{a+1} - a^a(a+2) \right) \\ &= \frac{1}{(a+1)(a+2)} \left((a+1)^{a+1} - 2a^a(a+1) \right) = \frac{(a+1)^a - 2a^a}{(a+2)}, \text{ c. q. f. d..} \end{aligned}$$

3.4.3 Le calcul général de $H^0(\mathcal{I}a\mathcal{J}, \mathcal{I}b\mathcal{J})$

On renvoie à la proposition 2.1.7.3 du chapitre 2 pour la définition et quelques propriétés de la série X qui intervient dans le calcul suivant.

La somme à $1 \leq k \leq a, b$ fixé vaut

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\forall i, c_i \geq 1 \\ c_1 + \dots + c_k = c-k}} \prod_{i=1}^k \boxed{\mathcal{I}c_i\mathcal{J}} c_i \mathcal{H}^0(\mathcal{I}c_i\mathcal{J}) \\ &= \sum_{\substack{\forall i, c_i \geq 1 \\ c_1 + \dots + c_k = c-k}} \prod_{i=1}^k \frac{c_i^{c_i}}{c_i!} \left(\frac{Y^{c_i}}{c_i} - \frac{Y^{c_i+1}}{c_i+1} \right) = Y^{c-k} \sum_{\substack{\forall i, c_i \geq 1 \\ c_1 + \dots + c_k = c-k}} \prod_{i=1}^k \frac{c_i^{c_i}}{c_i!} \left(\frac{1}{c_i} - \frac{Y}{c_i+1} \right) \\ &= Y^{c-k} \sum_{\substack{\forall i, c_i \geq 1 \\ c_1 + \dots + c_k = c-k}} \sum_{I \sqcup J = \llbracket 1, k \rrbracket} \left(\prod_{i \in I} \frac{c_i^{c_i-1}}{c_i!} \right) \left(\prod_{j \in J} (-Y) \frac{c_j^{c_j}}{(c_j+1)!} \right). \end{aligned}$$

Les termes dans la somme $\sum_{I \sqcup J = \llbracket 1, k \rrbracket}$ ont même contribution pour des parties I de même cardinal (réindexer

la somme $\sum_{c_1+\dots+c_k=c-k}^{\forall i, c_i \geq 1}$ de sorte à échanger deux telles parts l). Il vient donc

$$\begin{aligned}
&= Y^{c-k} \sum_{c_1+\dots+c_k=c-k}^{\forall i, c_i \geq 1} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left(\prod_{i>l} \frac{c_i^{c_i-1}}{c_i!} \right) \left(\prod_{j \leq l} (-Y) \frac{c_j^{c_j}}{(c_j+1)!} \right) \\
&= Y^{c-k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-Y)^l \sum_{c_1+\dots+c_k=c-k}^{\forall i, c_i \geq 1} \left(\prod_{j \leq l} \frac{c_j^{c_j}}{(c_j+1)!} \right) \left(\prod_{i>l} \frac{c_i^{c_i-1}}{c_i!} \right) \\
&= Y^{c-k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-Y)^l \text{Coef}_{t^{c-k}} [X^l Y^{k-l}] \\
&= Y^{c-k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-Y)^l \sum_{m+n+o=k-l} \binom{k-l}{m, n, o} (-1)^{m+n} (l-n) \frac{(c-k+o)^{c-k+o-l+n-1}}{(c-k+o-l+n)!};
\end{aligned}$$

or l'on a $-k+o-l+n = (m+n+o) - (k+l+m) = -2l-m$, d'où la suite du calcul

$$\begin{aligned}
&= Y^{c-k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-Y)^l \sum_{m+n+o=k-l} \binom{k-l}{m, n, o} (-1)^{m+n} (l-n) \frac{(c-k+o)^{c-2l-m-1}}{(c-2l-m)!} \\
&= \sum_{l+m+n+o=k} Y^{c-k+l} \binom{k}{l, m, n, o} (-1)^{k+o} (l-n) \frac{(c-k+o)^{c-2l-m-1}}{(c-2l-m)!}.
\end{aligned}$$

Une fois remis devant l'opérateur $\sum_{1 \leq k \leq a, b} \frac{1}{k!}$, l'on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq k \leq a, b} \frac{1}{k!} \sum_{c_1+\dots+c_k=c-k}^{\forall i, c_i \geq 1} \prod_{i=1}^k \boxed{\mathcal{C}_i} c_i \mathbb{H}^0(\mathcal{C}_i) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq a, b} \frac{1}{k!} \sum_{l+m+n+o=k} Y^{c-k+l} \binom{k}{l, m, n, o} (-1)^{k+o} (l-n) \frac{(c-k+o)^{c-2l-m-1}}{(c-2l-m)!} \\
&= \sum_{1 \leq l+m+n+o \leq a, b} Y^{c-m-n-o} \frac{(-1)^{l+m+n}}{l!m!n!o!} (l-n) \frac{(c-l-m-n)^{c-2l-m-1}}{(c-2l-m)!} \\
&= \sum_{0 \leq s \leq a, b} Y^{c-s} \sum_{\substack{m+n+o=s \\ 1 \leq l+s \leq a, b}} \frac{(-1)^{l+m+n}}{l!m!n!o!} (l-n) \frac{(c-l-m-n)^{c-2l-m-1}}{(c-2l-m)!}. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Remarques 3.4.3.1. (simplifier les sommes obtenues)

Nous avons réussi, grâce au calcul dans la déformation de l'algèbre $\mathcal{A}$, à remplacer une somme $\sum_{c_1+\dots+c_k=c-k}^{\forall i, c_i \geq 1}$ indexée par k indices par une somme indexées par *quatre* indices. Nous pensons que cette dernière pourrait être simplifiée, par exemple en utilisant les méthodes du livre $A=B$ de M. PETKOVSEK, H. WILF et D. ZEILBERGER disponible en ligne. Toutefois, même le cas $b=3$ (le plus simple après $b=2$), à la limite du faisable à la main, conduit à l'expression suivante qui est déjà d'une certaine complexité (et possiblement non exempte d'erreurs) :

$$H^0(\square\square\square, \mathcal{A}) = Y^a \frac{3a^{a-4}}{(a-3)!} + \frac{Y^{a+1}}{a!} \left[\frac{-4(a+1)^{a-1} + 4(a+1)^{a-2}}{+9a^{a-1} - 6a^{a-2}} \right] \tag{3.68}$$

$$+ \frac{Y^{a+2}}{(a+1)!} \left[\frac{(a+2)^{a+1} - 4(a+1)^a}{+(a+2)^a + 3a^{a-1}} \right] \tag{3.69}$$

$$+ \frac{Y^{a+3}}{(a+3)!} \left[\frac{-2(a+2)^{a+2} + 8(a+1)^{a+2} + 8(a+1)^{a+1}}{-12a^{a+2} - 33a^{a+1} - 18a^a} + \frac{3^3 a^a (a+1)(a+2)}{3!} \right]. \tag{3.70}$$

Nous restons donc curieux quant à la forme générale que pourrait prendre les simplifications désirées.

Une autre idée – non nécessairement incompatible – serait de passer des séries $H^0(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ aux nombres $h_n^0(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, c'est-à-dire de remplacer les monômes en Y par leurs valeurs connues (cf. (2.13)) et de travailler

avec la somme restante. Cette dernière comportera un indice supplémentaire mais pourrait apporter des simplifications – comme le montre l'exemple de la série $H^0(\emptyset) = Y - \frac{3}{2} \left(\frac{Y^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Y^3}{3} \right)$ et des nombres $h_n^0(\emptyset) = n^{n-3}$.

On pourra enfin comparer la formule que nous donnons avec les valeurs de l'article [28] données à la page 3 (Theorem 1) puis dresser une table de valeurs pour les nombres d'HURWITZ doubles.

Chapitre 4

Calcul des nombres d'HURWITZ à une partition

Les deux premières sections de ce chapitre constituent un travail commun avec P.-L. MÉLIOT. On en trouvera une autre exposition dans [16] (chapitre 13). Elles aboutissent à un algorithme pour calculer les nombres $\mathfrak{h}_n^g(\lambda)$ pour λ partition complète de n en complexité uniforme $O(C^n)$ ainsi qu'une formule explicite de ces nombres (ressemblant à (1.46)) comme une somme indexée sur les multipartitions de taille n .

La troisième partie est une reprise de [14], donnant un certain recul sur la première partie ainsi que sur notre théorème 3.0.8.6. Combinée à l'algorithme ci-dessus et au lemme de compacité 2.3.8.3, elle fournit une approche intéressante pour le calcul des nombres de HURWITZ.

On fixe un entier $n \geq 0$ dans tout ce chapitre jusqu'à mention explicite du contraire (4.50).

Nous ne prendrons que des partitions complètes de n . On regardera donc les nombres

$$\mathfrak{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \text{ pour des partitions } \lambda^1, \dots, \lambda^k \vdash n. \quad (4.1)$$

On rappelle que C_Λ dénote pour toute multipartition $\Lambda \models n$ la classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n^s$ de type Λ . Sa T -ième puissance sera notée C_Λ^T . Toutes ces classes commutent dans l'algèbre $\mathcal{A}_n$ qu'elles engendrent (cf. proposition 1.7.2.3). Lorsque λ est une partition, on note λ^s sa partition totalement scindée. On remarquera que, à n fixé, la classe de type $\zeta(\emptyset) = \zeta(1^n)$ ne contient pour seul élément la permutation $\left(\begin{smallmatrix} \text{Id} \\ \llbracket 1, n \rrbracket \end{smallmatrix}\right)$ dont tous les cycles sont coloriés de la même couleur.

4.1 Nombres d'HURWITZ et coefficients de structure de l'algèbre des invariants $\mathcal{A}_n$

L'idée originelle d'introduire $\mathfrak{S}_n^s$ était de pouvoir, outre calculer le produit de permutations dans $\mathfrak{S}_n$, contrôler les orbites du sous-groupe engendré par ces permutations – en particulier contrôler sa transitivité. Le nombre de transpositions sera abrégé en (on a remplacé un n par $\wp(\lambda) + \ell(\lambda)$)

$$T := T_n^g(\vec{\lambda}) = 2n + 2g' - \wp(\lambda) = n + \ell(\lambda) + 2g'. \quad (4.2)$$

Proposition 4.1.0.2. (MÉLIOT-S. 2009 [16]) (nombres d'HURWITZ et coefficients de structure de $\mathcal{A}_n$)

1. Soient $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ des partitions de n . Alors le nombre d'HURWITZ $\mathfrak{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ vaut le coefficient en $\left(\begin{smallmatrix} \text{Id} \\ \llbracket 1, n \rrbracket \end{smallmatrix}\right) = C_{\zeta(1^n)} = C_{\zeta(\emptyset)}$ dans le produit $C_{\lambda^{1s}} C_{\lambda^{2s}} \cdots C_{\lambda^{ks}} C_{\square^s}^T$ de l'algèbre des invariants $\mathcal{A}_n = \bigoplus_{\Lambda \models n} \mathbb{Q} C_\Lambda$:

$$\mathfrak{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = C_{\zeta(1^n)}^* [C_{\lambda^{1s}} C_{\lambda^{2s}} \cdots C_{\lambda^{ks}} C_{\square^s}^T]. \quad (4.3)$$

2. Soit λ une partition de n . Le nombre d'HURWITZ $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$ vaut le coefficient en $\tilde{C}_{\lambda\mathcal{S}}$ dans la puissance $C_{\square^s}^T$ de l'algèbre des invariants $\mathcal{A}_n = \bigoplus_{\Lambda \models n} \mathbb{Q}\tilde{C}_\Lambda$:

$$\mathbb{h}_n^g(\lambda) = \tilde{C}_{\lambda\mathcal{S}}^* [C_{\square^s}^T]. \quad (4.4)$$

Démonstration.

1. D'après le lemme 1.3.2.2, le coefficient en $C_{\lambda(1^n)\mathcal{S}} = (\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket})$ dans le produit $C_{\lambda^1 s} C_{\lambda^2 s} \cdots C_{\lambda^k s} C_{\square^s}^T$ compte les $(k+T)$ -uplets $\left((\sigma_1, \dots, \sigma_k), (\tau_1, \dots, \tau_T) \right)$ du produit $C_{\lambda^1 s} \times C_{\lambda^2 s} \times \cdots \times C_{\lambda^k s} \times C_{\square^s}^T$, i. e. les $(k+T)$ -uplets $(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_T)$ de profils $(\lambda^1, \dots, \lambda^k, \square, \square, \dots, \square)$ dont le produit vaut Id et dont le *supremum* des partitions orbitales vaut $\{\llbracket 1, n \rrbracket\}$. Or nous avons déjà vu (cf. 1.120) que le sous-groupe engendré par des groupes G_i agissant sur un même ensemble E agissait transitivement sur E si et seulement si le *supremum* des partitions orbitales $\text{Orb } G_i$ valait la plus grossière partition $\{E\}$. Le résultat en découle.
2. On applique le point précédent en comptant $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$ à la première permutation fixée :

$$\begin{aligned} \mathbb{h}_n^g(\lambda) &= \# \left\{ (\sigma, \tau_1, \dots, \tau_T) \in C_\lambda \times C_{\square^T}^T ; \begin{array}{l} \sigma \tau_1 \cdots \tau_T = \text{Id} \\ \langle \sigma, \tau_1, \dots, \tau_T \rangle \text{ transitif} \end{array} \right\} \\ &= \sum_{\sigma \in C_\lambda} \# \left\{ (\tau_1, \dots, \tau_T) \in C_{\square^T}^T ; \begin{array}{l} \tau_1 \cdots \tau_T = \sigma^{-1} \\ \langle \tau_1, \dots, \tau_T \rangle \text{ transitif} \end{array} \right\} \\ &\stackrel{\sigma \leftarrow \sigma^{-1}}{=} \sum_{\text{type } \sigma = \lambda} \# \left\{ \vec{\tau} \in C_{\square^T}^T ; \left(\bigvee \text{Orb } \tau_i \right) = \left(\begin{array}{c} \sigma \\ \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right) \right\} \\ &= \# \left\{ \vec{\tau} \in C_{\square^T}^T ; \left(\bigvee \text{Orb } \tau_i \right) \in \left\{ \left(\begin{array}{c} \sigma \\ \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right) \right\}_{\sigma \in C_\lambda} \right\} \\ &= \# \left\{ \vec{\tau} \in C_{\square^T}^T ; \tau_1^s \cdots \tau_T^s \in C_{\lambda\mathcal{S}} \right\} \\ &\stackrel{\text{lemme 1.3.2.2}}{=} \text{Coef}_{\tilde{C}_{\lambda\mathcal{S}}} \text{ dans } C_{\square^T}^T, \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Remarque 4.1.0.3. (symétrie des nombres $\mathbb{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$)

Le point 1 montre, en se souvenant que les classes $C_{\lambda^i s}$ commutent deux à deux, que *les nombres d'HURWITZ sont inchangés par permutation des partitions* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda^1, \dots, \lambda^k \vdash n \\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k \end{array} \right., \mathbb{h}_n^g(\lambda^{\sigma(1)}, \dots, \lambda^{\sigma(k)}) = \mathbb{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k). \quad (4.5)$$

Il serait certainement profitable d'éclairer de manière bijective cette symétrie.

4.1.1 Les puissances de la classe des transpositions totalement scindées

Décrivons l'action de $C_{\square^s}$ (par multiplication) sur une classe normalisée $\tilde{C}_\Lambda$ où $\Lambda = \{\lambda^i\}$ est une multipartition donnée de n .

4.1.2 Cas général et exemple de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_3]$

Fixons un élément $(\sigma) \in C_\Lambda$, dont l'image par $\text{pr}_{\mathcal{A}_n}$ vaut donc $\tilde{C}_\Lambda$. On a alors par $\mathcal{A}_n$ -linéarité de $\text{pr}_{\mathcal{A}_n}$

$$\begin{aligned} C_{\square^s} \tilde{C}_\Lambda &= C_{\square^s} \text{pr}_{\mathcal{A}_n}(\sigma) = \text{pr}_{\mathcal{A}_n} \left(C_{\square^s}(\sigma) \right) = \text{pr}_{\mathcal{A}_n} \left(\sum_{a < b} \left(\begin{array}{c} (a, b) \\ \text{Orb } (a, b) \end{array} \right) (\sigma) \right) \\ &= \sum_{a < b} \text{pr}_{\mathcal{A}_n} \left(\left(\begin{array}{c} (a, b) \\ \text{Orb } (a, b) \end{array} \right) (\sigma) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

On regarde donc le profil d'un produit $(\text{Orb}_{(a,b)}^{(a,b)})(\sigma)$ à $a < b$ fixé. Trois cas se distinguent naturellement :

1. Si a et b sont dans des cycles de longueurs λ_k^i et λ_l^j dans des parts différentes π_i et π_j , alors le profil du produit est la multipartition

$$\Lambda \langle \lambda^i \sqcup \lambda^j, \lambda_k^i + \lambda_l^j \rangle \quad (4.7)$$

obtenue en concaténant les partitions λ^i et λ^j puis en remplaçant les deux parts λ_k^i et λ_l^j par leur somme.

2. Si a et b sont dans des cycles de longueurs λ_k^i et λ_l^i dans une même part π_i , alors le produit a pour profil la multipartition

$$\Lambda \langle \lambda_k^i + \lambda_l^i \rangle \quad (4.8)$$

obtenue en remplaçant dans la partition λ^i les deux parts λ_k^i et λ_l^i par leur somme.

3. Si enfin a et b sont dans un même cycle de longueur λ_k^i , le profil cherché est la multipartition

$$\Lambda \langle \lambda_k^i = d + d' \rangle \quad (4.9)$$

où l'on a remplacé dans la partition λ^i la k -ième part par les deux parts $\{d, d'\}$ correspondant aux deux distances entre a et b dans le cycle.

En regroupant les termes $\text{pr}_{\mathcal{A}_n} \left((\text{Orb}_{(a,b)}^{(a,b)})(\sigma) \right)$ selon leur profil (choisir d'abord la/les part(s) puis le(s) cycle(s)), on obtient la proposition suivante.

Une attention spéciale est requise pour le troisième cas. La somme sur les couples $(a < b)$ vaut la *moitié* de celle sur les couples $(a \neq b)$ (puisque le terme général de la somme ne tient pas compte de l'ordre), laquelle donne bien *tous* les couples de distances possibles (d, d') (échanger a et b a pour effet d'échanger d et d'). Cela explique l'apparition du facteur $\frac{1}{2}$ ci-après¹.

Proposition 4.1.2.1. (*action de $C_{\square^s}$ sur la base $\tilde{C}_\Lambda$*)

Pour toute partition scindée $\Lambda = \{\lambda^1, \dots, \lambda^\ell\}$ de n , on a

$$C_{\square^s} \tilde{C}_\Lambda = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell(\lambda^i) \\ 1 \leq l \leq \ell(\lambda^j)}} \lambda_k^i \lambda_l^j \tilde{C}_{\Lambda \langle \lambda^i \sqcup \lambda^j, \lambda_k^i + \lambda_l^j \rangle} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k < l \leq \ell(\lambda^i)}} \lambda_k^i \lambda_l^i \tilde{C}_{\Lambda \langle \lambda_k^i + \lambda_l^i \rangle} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell(\lambda^i) \\ 0 < d < \lambda_k^i}} \lambda_k^i \tilde{C}_{\Lambda \langle \lambda_k^i = d + d' \rangle}. \quad (4.10)$$

La matrice ainsi obtenue est stochastique : les coefficients de chaque colonne ont pour somme $\binom{n}{2}$.

Démonstration.

L'identité découle de l'analyse qui précède. Il suffit de montrer le caractère $\binom{n}{2}$ -stochastique. On reprend pour cela la formule (4.6) à $x \in C_\Lambda$ fixé

$$C_{\square^s} \tilde{C}_\Lambda = \sum_{a < b} \tilde{C}_{\text{type}((\text{Orb}_{(a,b)}^{(a,b)})x)} \text{ qui comporte } \binom{n}{2} \text{ termes.}$$

Test de surété.

Regardons la somme des coefficients dans la formule de la proposition ci-dessus. Le premier terme se factorise tout seul :

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell(\lambda^i) \\ 1 \leq l \leq \ell(\lambda^j)}} \lambda_k^i \lambda_l^j = \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} \left(\sum_{1 \leq k \leq \ell(\lambda^i)} \lambda_k^i \right) \left(\sum_{1 \leq l \leq \ell(\lambda^j)} \lambda_l^j \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} |\lambda^i| |\lambda^j| = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq \ell} |\lambda^i| |\lambda^j|.$$

1. En d'autres termes, une fois choisis un point a dans le cycle et une distance d , rien n'assure que le b correspondant vérifie $a < b$.

Le dernier terme se casse en deux

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell(\lambda^i) \\ 0 < d < \lambda_k^i}} \lambda_k^i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k \leq \ell(\lambda^i)}} (\lambda_k^i - 1) \lambda_k^i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k = l \leq \ell(\lambda^i)}} \lambda_k^i \lambda_l^i - \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell(\lambda^i)} \lambda_k^i}_{= \sum_{i=1}^{\ell} |\lambda^i| = \|\Lambda\|}.$$

Le deuxième terme se factorise alors en y incorporant le $\frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k = l \leq \ell(\lambda^i)}} \lambda_k^i \lambda_l^i$ ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k < l \leq \ell(\lambda^i)}} \lambda_k^i \lambda_l^i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k = l \leq \ell(\lambda^i)}} \lambda_k^i \lambda_l^i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k \neq l \leq \ell(\lambda^i)}} \lambda_k^i \lambda_l^i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k = l \leq \ell(\lambda^i)}} \lambda_k^i \lambda_l^i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq k, l \leq \ell(\lambda^i)}} \lambda_k^i \lambda_l^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{1 \leq k \leq \ell(\lambda^i)} \lambda_k^i \right) \left(\sum_{1 \leq l \leq \ell(\lambda^i)} \lambda_l^i \right) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i = j \leq \ell} |\lambda^i| |\lambda^j|. \end{aligned}$$

Tout additionner donne :

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq \ell} |\lambda^i| |\lambda^j| + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i = j \leq \ell} |\lambda^i| |\lambda^j| - \frac{1}{2} \|\Lambda\| = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \ell} |\lambda^i| \sum_{1 \leq j \leq \ell} |\lambda^j| - \frac{1}{2} \|\Lambda\| = \binom{\|\Lambda\|}{2}, \text{ c. f. q. d..}$$

Exemple de $\mathcal{A}_3$.

Listons les six multipartitions de $\mathfrak{Y}_3^s$ par profil décroissant :

$$[\square\square], [\square], \left[\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}\right], [\square \square], \left[\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}\right], [\square\square\square]. \quad (4.11)$$

La matrice de $C_{\square\square^s}$ dans la base de $\mathcal{A}_3$ formée des classes normalisées associées vaut

$$\text{Mat}_{(\tilde{C}_\Lambda)_{\Lambda=3}} C_{\square\square^s} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right). \quad (4.12)$$

Cette matrice est diagonalisable de multi-spectre $\{-3, -1, 0, 0, 1, 3\}$, lequel est exactement le multi-ensemble des contenus $\{c(\Lambda)\}_{\Lambda=3}$. La proposition suivante 4.1.3.1 montre que ce n'est pas un hasard.

4.1.3 Diagonalisabilité de la classe $C_{(2)^s}$

On utilisera ici abondamment les résultats et notations du chapitre 1 concernant les structures des algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ et $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ pour π décrivant $\mathfrak{P}_n$ (en particulier les sections 1.4.4, 1.6.5, 1.7.4 et 1.7.5).

Proposition 4.1.3.1. (*diagonalisabilité et spectre de $C_{\square\square^s}$ dans $\mathcal{A}_n$*)

La multiplication par $C_{\square\square^s}$ dans l'algèbre $\mathcal{A}_n$ est diagonalisable de spectre le multi-ensemble $\{c(\Lambda)\}_{\Lambda \models n}$.

Démonstration.

La classe $C_{\square\square}$ de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ n'est autre que la somme $p_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ des éléments de YOUNG-JUCYS-MURPHY. Elle agit donc (*cf.* memento (1.74)) sur chaque bloc E_λ de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ par homothétie de rapport $p_1(\text{contenus de } \lambda) = c(\lambda)$.

On en déduit, pour π partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$, que la somme $C_{\square\square}^\pi = \sum_i C_{\square\square}^{\pi_i}$ de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi] \cong \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}} E_{\vec{\lambda}}^\pi$ agit à $\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}$ fixé sur le bloc $E_{\vec{\lambda}}^\pi \cong e_{\vec{\lambda}}^\pi \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ comme suit :

$$\begin{aligned} C_{\square\square}^\pi e_{\vec{\lambda}}^\pi &= \sum_i C_{\square\square}^{\pi_i} \left(\bigotimes_j e_{\lambda^j}^{\pi_j} \right) = \sum_i 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes C_{\square\square}^{\pi_i} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ &= \sum_i e_{\lambda^1}^{\pi_1} \otimes \cdots \otimes e_{\lambda^{i-1}}^{\pi_{i-1}} \otimes c(\lambda^i) e_{\lambda^i}^{\pi_i} \otimes e_{\lambda^{i+1}}^{\pi_{i+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\lambda^\ell}^{\pi_\ell} \\ &= \sum_i c(\lambda^i) e_{\vec{\lambda}}^\pi \\ &= c(\vec{\lambda}) e_{\vec{\lambda}}^\pi. \end{aligned}$$

Ainsi, $C_{\square\square}^\pi$ est somme directe des homothéties $c(\vec{\lambda}) \text{Id}^\pi$ pour $\vec{\lambda}$ décrivant $\prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}$:

$$C_{\square\square}^\pi \text{Id}^\pi = \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}} c(\vec{\lambda}) \text{Id}^\pi. \quad (4.13)$$

Il reste à sommer ces actions diagonales *via* l'isomorphisme $o : \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s] \cong \bigoplus_{\pi \in \mathfrak{P}_n} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ décrit à la section 1.7.4. Observons pour commencer que la décomposition $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi] \cong \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}} E_{\vec{\lambda}}^\pi$ induit une décomposition de l'identité sur $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ comme somme des projecteurs sur les $E_{\vec{\lambda}}^\pi$:

$$\text{Id}^\pi = \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}} \text{pr}_{\vec{\lambda}}^\pi. \quad (4.14)$$

Ensuite, en remarquant pour toute partition $\pi \in \mathfrak{P}_n$ l'identité

$$o^\pi \left(\begin{pmatrix} (a, b) \\ \text{Orb}(a, b) \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} (a, b) & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont dans une même part de } \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (4.15)$$

on déduit l'égalité

$$o(C_{\square\square^s}) = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_n} o^\pi(C_{\square\square^s}) = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_n} C_{\square\square}^\pi, \quad (4.16)$$

d'où l'on tire

$$o(C_{\square\square^s}) \text{Id} = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_n} C_{\square\square}^\pi \text{Id}^\pi = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_n} C_{\square\square}^\pi \sum_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}} \text{pr}_{\vec{\lambda}}^\pi = \sum_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}} c(\vec{\lambda}) \text{pr}_{\vec{\lambda}}^\pi. \quad (4.17)$$

Ceci montre que la multiplication par $C_{\square\square^s}$ est diagonalisable dans $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s] = \bigoplus_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}} E_{\vec{\lambda}}^\pi$. Or le sous-espace $\mathcal{A}_n$ est stable par $C_{\square\square^s}$ (car c'est une algèbre), ce qui montre la diagonalisabilité de $C_{\square\square^s}$ sur $\mathcal{A}_n$.

Le spectre est donné par l'égalité ci-dessus où toute multipartition est bien représentée (prendre la partition ensembliste associée et, sur chaque part, la partition standard associée). Pour contrôler les multiplicités, rappelons que, à $\Lambda \models n$ fixé, les blocs $E_{\vec{\lambda}}^\pi$ de type Λ sont tous isomorphes *via* des *conjugaisons* qui échangent les $e_{\vec{\lambda}}^\pi$ correspondants : la somme de ces $e_{\vec{\lambda}}^\pi$ est donc invariante par conjugaison, ce qui montre que sa préimage par o tombe dans $\mathcal{A}_n$ puisque l'isomorphisme o commute aux actions de $\mathfrak{S}_n$ (d'après (1.153)). Il en résulte pour tout $\Lambda \models n$ que l'intersection de $o(\mathcal{A}_n)$ avec la somme des blocs de type Λ contient une droite ; or on doit avoir égalité pour tout $\Lambda \models n$ vu les dimensions $\dim \mathcal{A}_n = \# \{\Lambda \models n\}$, ce qui conclut.

Remarques 4.1.3.2. (limites de notre méthode)

Il est tentant, afin de calculer les nombres d'HURWITZ à *plusieurs* partitions, de généraliser ce qui précède en cherchant à diagonaliser les classes C_{λ^s} pour des partitions λ autres que $\square\square$. Mais l'on rencontre alors deux obstacles de taille :

1. lorsque λ a au moins deux parts, la décomposition de C_{λ}^π sur le sous-groupe de YOUNG $\mathfrak{S}_\pi$ n'est plus aussi triviale ;
 2. la décomposition des C_{λ} comme fonction symétriques en les éléments de YOUNG-JUCYS-MURPHY met en jeu des fonctions qui dépendent en général de n , d'où différentes actions sur les sous-groupes de YOUNG.
- Nous n'avons pas réussi à passer outre ces écueils.

4.1.4 La formule de FROBENIUS

On peut expliciter l'action diagonale de $C_{\square^s}^T$ dans $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ en tirant en arrière celle de $o(C_{\square^s})$ via l'isomorphisme o :

$$\begin{aligned} C_{\square^s}^T &= \text{pr}_{\mathcal{A}_n}(C_{\square^s}^T) = [\text{pr}_{\mathcal{A}_n} \circ o^{-1}] (o(C_{\square^s}^T) \times 1_{o(\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s])}) \\ &= [\text{pr}_{\mathcal{A}_n} \circ o^{-1}] \left(\sum_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}}^{\pi \in \mathfrak{P}_n} c(\vec{\lambda})^T \text{pr}_{\vec{\lambda}}^{\pi} (1_{o(\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s])}) \right) \\ &= \sum_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}}^{\pi \in \mathfrak{P}_n} c(\vec{\lambda})^T [\text{pr}_{\mathcal{A}_n} \circ o^{-1}] \left(\frac{\dim \vec{\lambda}}{\vec{\lambda}!} e_{\vec{\lambda}}^{\pi} \right). \end{aligned}$$

À $\Lambda \models n$ fixé, regardons les $b(\Lambda)$ couples $(\pi, \vec{\lambda})$ associés. Les éléments $e_{\vec{\lambda}}^{\pi}$ étant tous conjugués et l'action de o commutant à celle de $\mathfrak{S}_n$ (cf. (1.153)) on en déduit que tous les $o^{-1}(e_{\vec{\lambda}}^{\pi})$ ont même projeté e_{Λ} dans $\mathcal{A}_n$.

Par ailleurs, l'élément e_{Λ} peut s'exprimer :

$$e_{\Lambda} = \prod_i e_{\lambda^i}^{[\pi_{\Lambda}]_i} = \prod_i \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[\pi_{\Lambda}]_i}} \chi^{\lambda^i}(\sigma) \sigma = \sum_{\vec{\sigma} \in \prod \mathfrak{S}_{[\pi_{\Lambda}]_i}} \left(\prod \chi^{\lambda^i}(\sigma_i) \right) \left(\prod \sigma_i \right) \quad (4.18)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\Lambda}} \chi^{\Lambda}(\sigma) \sigma \quad (4.19)$$

où l'on a posé $\mathfrak{S}_{\Lambda} := \prod \mathfrak{S}_{[\pi_{\Lambda}]_i}$ et $\chi^{\Lambda}(\sigma) := \prod \chi^{\lambda^i}(\sigma_i)$ pour toute permutation $\sigma = \prod \sigma_i \in \mathfrak{S}_{\Lambda}$ (4.20)

En utilisant l'expression de $[o^{\pi_{\Lambda}}]^{-1}$ obtenue par ROTA en (1.152), on en déduit

$$o^{-1}(e_{\Lambda}) = o^{-1} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\Lambda}} \chi^{\Lambda}(\sigma) \sigma \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\Lambda}} \chi^{\Lambda}(\sigma) [o^{\pi_{\Lambda}}]^{-1}(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\Lambda}}^{\pi \geq \pi_{\Lambda}} \chi^{\Lambda}(\sigma) \mu \left(\frac{\pi_{\Lambda}}{\pi} \right) \left(\frac{\sigma}{\pi} \right).$$

Grâce à ce qui précède, on peut finir d'exprimer

$$\begin{aligned} C_{\square^s}^T &= \sum_{\vec{\lambda} \in \prod_i \mathfrak{Y}_{|\pi_i|}}^{\pi \in \mathfrak{P}_n} c(\vec{\lambda})^T [\text{pr}_{\mathcal{A}_n} \circ o^{-1}] \left(\frac{\dim \vec{\lambda}}{\vec{\lambda}!} e_{\vec{\lambda}}^{\pi} \right) \\ &= \sum_{\Lambda \models n} b(\Lambda) \frac{\dim \Lambda}{|\Lambda|!} c(\Lambda)^T \text{pr}_{\mathcal{A}_n}(o^{-1}(e_{\Lambda})) \\ &= \sum_{\Lambda \models n} b(\Lambda) \frac{\dim \Lambda}{|\Lambda|!} c(\Lambda)^T \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\Lambda}} \chi^{\Lambda}(\sigma) \sum_{\pi \geq \pi_{\Lambda}} \mu \left(\frac{\pi_{\Lambda}}{\pi} \right) \text{pr}_{\mathcal{A}_n} \left(\frac{\sigma}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Fixons une partition $\lambda \vdash n$. Afin d'obtenir le nombre d'HURWITZ $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$, il s'agit de récupérer le coefficient en $\tilde{C}_{\lambda \mathcal{J}}$ dans la somme ci-dessus. Or l'on a à $(\frac{\sigma}{\pi})$ fixé l'équivalence

$$\text{pr}_{\mathcal{A}_n} \left(\frac{\sigma}{\pi} \right) = \tilde{C}_{\lambda \mathcal{J}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in C_{\lambda} \\ \pi = \{[1, n]\} \end{array} \right. .$$

On peut et doit donc restreindre la somme ci-dessus aux permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{\Lambda} \cap C_{\lambda}$ et la partition π la plus grossière. En se rappelant les valeurs de

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda) &= \mu \left(\frac{\pi_{\Lambda}}{[1, |\Lambda|]} \right) = (-1)^{\lg \Lambda - 1} (\lg \Lambda - 1)!, \\ b(\Lambda) &= \frac{n!}{|\Lambda|! \prod_{\lambda \vdash n} m_{\lambda}(\Lambda)!} \quad \text{et} \quad \frac{|\Lambda|!}{\dim \Lambda} = \prod_i \prod_{\text{cases } \square} h^{\Lambda_i}(\square), \end{aligned}$$

l'on obtient la formule suivante.

Théorème 4.1.4.1. (MÉLIOT-S. 2009 [16]) (formule de FROBENIUS pour $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$)

Pour toute partition $\lambda \vdash n$, le nombre de HURWITZ $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$ est donné en tout genre $g \geq 0$ par la formule suivante (les sous-groupe de YOUNG $\mathfrak{S}_\Lambda$ et caractère χ^Λ sont définis en (4.20)) :

$$\mathbb{h}_n^g(\lambda) = \sum_{\Lambda \models n} \frac{\dim \Lambda}{|\Lambda|!} \frac{\mu(\Lambda)}{b(\Lambda)} c(\Lambda)^{2n+2g'-\wp(\lambda)} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\Lambda \cap C_\lambda} \chi^\Lambda(\sigma) \right) \quad (4.21)$$

$$= \sum_{\Lambda \models n} \binom{n}{\wr(\Lambda^i|\mathfrak{J})} \frac{(-1)^{\lg \Lambda - 1} (\lg \Lambda - 1)!}{\prod_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\Lambda)!} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\Lambda \cap C_\lambda} \chi^\Lambda(\sigma) \right) \frac{c(\Lambda)^{2n+2g'-\wp(\lambda)}}{\prod_i \prod_{\text{cases } \square} h^{\Lambda_i}(\square)}. \quad (4.22)$$

Remarque (de P.-L. MÉLIOT).

En appliquant directement, à partir de la formule de FROBENIUS classique (1.46), un principe d'exclusion-inclusion selon le nombre d'orbites du groupe obtenu, on serait tombé sur la même formule. Les multipartitions nous ont permis de traiter clairement les symétries.

4.1.5 Asymptotique de $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$ lorsque le genre g devient infiniment grand

La formule précédente (4.22) permet d'obtenir l'asymptotique des nombres d'HURWITZ à une partition lorsque le genre devient infiniment grand.

Proposition 4.1.5.1. (MÉLIOT-S. 2009) (asymptotique de $\mathbb{h}_n^g(\lambda)$ quand $g \rightarrow \infty$)

On a pour toute partition $\lambda \vdash n$ l'équivalent suivant :

$$\mathbb{h}_n^g(\lambda) \underset{g \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{z_\lambda} \binom{n}{2}^{n+2g'+\ell(\lambda)}. \quad (4.23)$$

Démonstration.

L'entier n étant fixé, la seule dépendance en g dans la formule (4.22) est située dans l'exposant de $c(\Lambda)^{2g}$. Or le contenu maximal en valeur absolue ($2g$ est pair) est réalisé uniquement pour Λ valant l'une des deux multipartitions $\wr(n|\mathfrak{J})$ ou $\wr(1, 1, \dots, 1|\mathfrak{J})$.

Dans les deux cas, le multinomial $\binom{n}{\wr(\Lambda^i|\mathfrak{J})}$ vaut 1, la longueur décrémentée est nulle, les multiplicités $m_\lambda(\Lambda)$ sont toutes nulles sauf une, le sous-groupe de YOUNG $\mathfrak{S}_\Lambda$ est tout $\mathfrak{S}_n$, le caractère χ^Λ est un caractère du groupe symétrique (donc est constant sur $\mathfrak{S}_\Lambda \cap C_\lambda = C_\lambda$), le contenu $c(\Lambda)$ vaut $\pm \binom{n}{2}$ et les nombres d'équerres valent $1, 2, \dots, n$. Chacune de ces multipartitions apporte par conséquent à la somme (4.22) une contribution de la forme

$$|C_\lambda| \chi^\Lambda(\sigma_\lambda) \frac{\binom{n}{2}^{2n+2g'-\wp(\lambda)} (\pm 1)^{\wp(\lambda)}}{n!}. \quad (4.24)$$

Dans le cas $\Lambda = \wr(n|\mathfrak{J})$, le signe ± 1 est un $+$ et la représentation $V_{(n)}$ est triviale (d'où $\chi^\Lambda = 1$) ; dans le cas $\Lambda = \wr(1^n|\mathfrak{J})$, le signe ± 1 est un $-$ et la représentation $V_{(1^n)}$ est la représentation alternée (d'où $\chi^\Lambda = \varepsilon$). Dans les deux cas, le produit $\chi^\Lambda(\sigma_\lambda) (\pm 1)^{\wp(\lambda)}$ n'intervient pas dans le produit. Les deux contributions sont donc égales à $\frac{|C_\lambda|}{n!} \binom{n}{2}^{2n+2g'-\wp(\lambda)}$, d'où le résultat en remarquant que $2n - \wp(\lambda) = n + \ell(\lambda)$ et en se souvenant de la définition de $z_\lambda = \frac{n!}{|C_\lambda|}$.

Remarque 4.1.5.2. (interprétation probabiliste)

La proposition précédente admet une interprétation probabiliste que nous ont signalée indépendamment P.-L. MÉLIOT et D. ZVONKINE. Les deux points sont les suivants : lorsque, à n fixé, l'on multiplie un nombre donné T de transpositions dans le groupe $\mathfrak{S}_n$,

1. l'action de ces transpositions est transitive avec une probabilité tendant vers 1 lorsque le nombre T de transpositions tend vers l'infini ;

2. on obtient une mesure uniforme sur l'ensemble des permutations de signature $(-1)^T$.

Ainsi, la probabilité qu'un T -uplet de transpositions fournisse un produit tombant dans une classe C_λ donnée dans les permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant signature $(-1)^T$ vaut : d'une part le nombre de tels T -uplets divisé par le nombre total de T -uplets de transpositions, d'autre part le nombre d'éléments dans C_λ divisé par le nombre total d'éléments dans $\mathfrak{S}_n$ ayant signature $(-1)^T$. Égaler ces deux rapports donne l'identité $\frac{\mathfrak{h}_n^{g_n^T(\lambda)}(\lambda)}{\binom{n}{2}^T} = \frac{|C_\lambda|}{\frac{n!}{2}}$, ce qui est précisément l'égalité (4.23).

4.2 Comment calculer les nombres $g_n(\lambda)$?

La section précédente donne un algorithme pour calculer $\mathfrak{h}_n^g(\lambda)$:

1. diagonaliser la matrice de $C_{\square^s}^T$ donnée par la proposition 4.1.2.1 (cela revient à résoudre $\# \left\{ c(\Lambda)_{\Lambda \models n} \right\}$ système linéaires puisque l'on connaît le multi-spectre par la proposition 4.1.3.1) ;
2. l'élever à la puissance $T = n + \ell(\lambda) + 2g'$;
3. le nombre $\mathfrak{h}_n^g(\lambda)$ se lit alors comme coefficient en $\tilde{C}_{\lambda\lambda}$ par la proposition 4.1.0.2.

Rappelons l'algorithme naïf consistant à calculer les $\binom{n}{2}^T$ produits de T transpositions et à ne retenir que ceux de type λ . Il nécessite, à (n, T) fixé, de calculer environ

$$n^{2T} = n^{2n+2\ell(\lambda)+4g'}$$

produits de transpositions, ce qui donne accès aux nombres $\mathfrak{h}_n^g(\lambda)$ avec $2g' + \ell(\lambda)$ fixé. On peut éventuellement raffiner en gardant en mémoire les produits déjà calculés à n fixé lorsque l'on incrémente T , ce qui nécessitera (pour T assez grand) au moins

$$n^{2n} \text{ opérations pour obtenir tous les } \mathfrak{h}_n^g(\lambda) \text{ à } n \text{ fixé.} \quad (4.25)$$

Le passage par les multipartitions permet de passer de la complexité hyper-exponentielle n^n de l'algorithme naïf à une complexité exponentielle en C^n .

4.2.1 Algorithme pour calculer tous les $\mathfrak{h}_n^g(\lambda \vdash n)$ en complexité uniforme $O(C^n)$

Proposition 4.2.1.1. (MÉLIOT-S. 2009 [16]) (algorithme pour calculer tous les nombres d'HURWITZ à une partition de degré fixé, de façon uniforme en ce degré)

Soit un genre $g \geq 0$. Pour obtenir la liste des nombres $\mathfrak{h}_n^g(\lambda)$ ordonnée suivant l'ordre décroissant des $\lambda \in \mathfrak{Y}_n$:

1. lister les $|\mathfrak{Y}_n^s|$ multipartitions de n par profil décroissant puis par ordre lexicographique décroissant (induit par l'ordre total sur $\mathfrak{Y}$) ;
2. écrire la matrice M de $C_{\square^s}^T$ dans la base de $\mathcal{A}_n$ formée des classes normalisées (grâce à la proposition 4.1.2.1) ;
3. résoudre les systèmes linéaires $MX = c(\Lambda)X$ en l'inconnue $X \in \mathbb{Q}^{|\mathfrak{Y}_n^s|}$ lorsque Λ décrit les multipartitions de $\mathfrak{Y}_n^s$ et écrire la matrice P d'une base de tels vecteurs propres de M ;
4. écrire la matrice colonne Y du dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{Q}^{|\mathfrak{Y}_n^s|}$ selon les vecteurs formant P (on obtient ainsi la dernière colonne de P^{-1}) ;
5. remplacer dans les $|\mathfrak{Y}_n|$ premiers coefficients de la colonne $P \operatorname{Diag} \left(c(\Lambda)_{\Lambda \models n} \right)^T Y$ chaque coefficient T par la valeur $n + \ell(\lambda) + 2g'$ et le signe $(-1)^T$ par la signature $\varepsilon(\lambda)$.

Cet algorithme a une complexité en $O(C^n)$ pour une certaine constante C .

Démonstration.

L'algorithme calcule les $|\mathfrak{Y}_n|$ premiers coefficients de la dernière colonne de

$$P \operatorname{Diag} \left(c(\Lambda)_{\Lambda \models n} \right)^T P^{-1} = M^T = \operatorname{Mat}_{(\tilde{C}_\Lambda)_{\Lambda \models n}} C_{\square\square^s}^T ;$$

il s'agit donc de regarder quelles multipartitions sont concernées à ces places.

L'intérêt de l'ordre proposé au point 1 est qu'une multipartition de profil λ ne peut donner (par la formule de la proposition 4.1.2.1) que des multipartitions de profil $\lambda \langle \lambda_i + \lambda_j \rangle$ où l'on a remplacé les deux parts distinctes λ_i et λ_j par leur somme ; en remarquant que $\lambda \langle \lambda_i + \lambda_j \rangle$ est toujours plus grande que λ , on voit ainsi que la matrice obtenue au point 2 est triangulaire par blocs (et l'on contrôle en outre les blocs non nuls). De plus, les $|\mathfrak{Y}_n|$ premières multipartitions ainsi listées sont celles de profil (n) , donc sont exactement les $\wr \lambda$ pour λ décrivant $\mathfrak{Y}_n$ (dans le même ordre). Par ailleurs, la partition minimale non vide étant $\square$, la multipartition $\emptyset^s = \wr \square \square \dots \square$ est la dernière à apparaître. Enfin, il vient immédiatement

$$(-1)^T = (-1)^{2n+2g'-\wp(\lambda)} = (-1)^{\wp(\lambda)} = \varepsilon(\lambda).$$

Quant à la complexité, notre algorithme liste les multipartitions de $\mathfrak{Y}_n^s$ dont le nombre est borné par un $O(B^n)$. Comme la résolution de systèmes linéaires est de complexité polynomiale, notre algorithme a bien une complexité en $O(C^n)$ pour une certaine constante C que l'on peut prendre aussi proche de $B := \sup_{n \geq 1} \frac{\ln |\mathfrak{Y}_n|}{n}$ que voulu.

4.2.2 Exemples des partitions de taille ≤ 5

Cas $n = 1$.

C'est immédiat : l'ensemble $\mathfrak{Y}_1^s$ est réduit à la multipartition $\wr \square$ et la matrice associée est (1). Le coefficient récupéré est donc

$$1 = \mathfrak{h}_1^g(\square). \quad (4.26)$$

Cas $n = 2$.

La matrice cherchée dans la base associée à $\wr \square\square$, $\wr \square\square$, $\wr \square\square$ est

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cdot & 1 & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) = P \left(\begin{array}{ccc} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) P^{-1} \text{ avec } P := \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \cdot \\ 1 & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right) \text{ et } P^{-1} = \left(\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{array} \right).$$

Les deux premiers coefficients de la colonne $P \operatorname{Diag} (1, -1, 0)^T \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ valent $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(-1)^T + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(-1)^T + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Les signatures valent $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où les nombres

$$\mathfrak{h}_2^g(\square\square) = 1 = \mathfrak{h}_2^g(\square\square) \quad (4.27)$$

C'est normal : il n'y a qu'une seule transposition dans $\mathfrak{S}_2$ et donc pas beaucoup de constellations. Les nombres $\frac{1}{2!} \mathfrak{h}_2^g(\lambda)$ valent donc $\frac{1}{2}$.

Cas $n = 3$.

Il a été abordé à la section 1.7.6, la matrice trouvée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \text{ se diagonalise en}$$

$$P \operatorname{Diag} (3, -3, 1, -1, 0, 0) P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}(-2)^T - \frac{3}{4}2^T - \frac{1}{4}(-6)^T + \frac{1}{4}6^T \\ -\frac{4}{3}(-3)^T - \frac{4}{3}3^T + \frac{1}{3}(-6)^T + \frac{1}{3}6^T \\ -\frac{9}{8}(-2)^T - \frac{9}{8}2^T + \frac{1}{8}(-6)^T + \frac{1}{8}6^T \\ -6(-1)^T + \frac{3}{4}(-2)^T - \frac{3}{4}2^T + 2(-3)^T - 2 \times 3^T - \frac{1}{4}(-6)^T + \frac{1}{4}6^T + 6 \\ 6(-1)^T - \frac{3}{8}(-2)^T - \frac{3}{8}2^T - \frac{2}{3}(-3)^T - \frac{2}{3}3^T + \frac{1}{24}(-6)^T + \frac{1}{24}6^T + 6 \end{pmatrix}.$$

donne $\begin{pmatrix} 2^{T-4} (3^{T-1} - 1) \\ 3^{T-2} (2^{T-2} - 1) \\ 2^{T-5} 3 (3^{T-2} - 1) \\ \frac{3^{T-1}-1}{2} (2^{T-3} - 1) \\ \frac{3^{T-2}-1}{2} (2^{T-4} - 1) \end{pmatrix}$. En remplaçant les valeurs de $T = 2g + 2 + \ell(\lambda)$ correspondantes on obtient les nombres $\begin{pmatrix} 2g+3 \\ 2g+4 \\ 2g+4 \\ 2g+5 \\ 2g+6 \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{4!} h_4^g \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) = \frac{9^{g+1} - 1}{2} (4^{g+1} - 1) = \frac{1}{4!} h_4^g \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right). \quad (4.33)$$

Cas $n = 5$.

La matrice 27×27 dans la base de $\mathcal{A}_5$ formée des classes normalisées associées aux multipartitions

[illegible]

est la suivante :

[illegible]

Après diagonalisation, on récupère les sept premières lignes voulues :

$$\left(\begin{array}{c} -\frac{4}{5}(-5)^T - \frac{4}{5}5^T + \frac{1}{5}(-10)^T + \frac{1}{5}10^T \\ -\frac{5}{2}(-2)^T + \frac{5}{2}2^T + \frac{5}{4}(-6)^T - \frac{5}{4}6^T - \frac{1}{4}(-10)^T + \frac{1}{4}10^T \\ \frac{10}{3} - \frac{10}{3}(-1)^T - \frac{5}{2}(-2)^T + \frac{5}{2}2^T + \frac{5}{3}(-4)^T - \frac{5}{3}4^T + \frac{2}{3}(-5)^T - \frac{2}{3}5^T - \frac{1}{6}(-10)^T + \frac{1}{6}10^T \\ \frac{10}{3} + \frac{10}{3}(-1)^T - \frac{5}{2}(-2)^T - \frac{5}{2}2^T + \frac{20}{3}(-3)^T + \frac{20}{3}3^T - \frac{5}{3}(-4)^T - \frac{5}{4}4^T \\ + \frac{2}{3}(-5)^T + \frac{2}{3}5^T - \frac{5}{3}(-6)^T - \frac{5}{3}6^T + \frac{1}{6}(-10)^T + \frac{1}{6}10^T \\ \frac{25}{2}(-2)^T + \frac{25}{2}2^T - \frac{5}{2}(-4)^T - \frac{5}{2}4^T - \frac{5}{8}(-6)^T - \frac{5}{8}6^T + \frac{1}{8}(-10)^T + \frac{1}{8}10^T \\ \frac{100}{3}(-1)^T - \frac{100}{3} - 10(-2)^T + 10 \times 2^T - 10(-3)^T + 10 \times 3^T + \frac{10}{3}(-4)^T - \frac{10}{3}4^T \\ - \frac{2}{3}(-5)^T + \frac{2}{3}5^T + \frac{5}{4}(-6)^T - \frac{5}{4}6^T - \frac{1}{12}(-10)^T + \frac{1}{12}10^T \\ - \frac{100}{3}(-1)^T - \frac{100}{3} + 5(-2)^T + 5 \times 2^T + \frac{10}{3}(-3)^T + \frac{10}{3}3^T - \frac{5}{6}(-4)^T - \frac{5}{6}4^T \\ + \frac{2}{15}(-5)^T + \frac{2}{15}5^T - \frac{5}{24}(-6)^T - \frac{5}{24}6^T + \frac{1}{120}(-10)^T + \frac{1}{120}10^T \end{array} \right)$$

Les nombres T et les signatures valent $\begin{pmatrix} 2g+4 \\ 2g+5 \\ 2g+5 \\ 2g+6 \\ 2g+6 \\ 2g+7 \\ 2g+8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} + \\ - \\ - \\ + \\ + \\ - \\ + \end{pmatrix}$. En réinjectant les signatures, le vecteur

ci-dessus devient

$$= \begin{pmatrix} -\frac{8}{5}5^T + \frac{2}{5}10^T \\ 5 \times 2^T - \frac{5}{2}6^T + \frac{1}{2}10^T \\ 5 \times 2^T - \frac{10}{3}4^T - \frac{4}{3}5^T + \frac{1}{3}10^T + \frac{20}{3} \\ -5 \times 2^T + \frac{40}{3}3^T - \frac{10}{3}4^T + \frac{4}{3}5^T - \frac{10}{3}6^T + \frac{1}{3}10^T + \frac{20}{3} \\ 25 \times 2^T - 5 \times 4^T - \frac{5}{4}6^T + \frac{1}{4}10^T \\ 20 \times 2^T + 20 \times 3^T - \frac{20}{3}4^T + \frac{4}{3}5^T - \frac{5}{2}6^T + \frac{1}{6}10^T - \frac{200}{3} \\ 10 \times 2^T + \frac{20}{3}3^T - \frac{5}{3}4^T + \frac{4}{15}5^T - \frac{5}{12}6^T + \frac{1}{60}10^T - \frac{200}{3} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 5^{T-1}(2^{T+1} - 2^3) \\ 2^{T-1}5(2 - 3^T + 5^{T-1}) \\ 2^T5 + 2^2\frac{1}{3}5(2^{T-2}5^{T-1} - 2^{2T-1} - 5^{T-1} + 1) \\ 2^35(3^{T-1} - 2^{T-3} - 2^{T-2}3^{T-1}) + 2^2\frac{1}{3}5(2^{T-2}5^{T-1} + 5^{T-1} - 2^{2T-1} + 1) \\ 2^{T-2}5(2^25 + 5^{T-1} - 2^{T+2} - 3^T) \\ 2^25(2^T + 3^T - 2^{T-3}3^T) + 2^2\frac{1}{3}5(2^{T-3}5^{T-1} + 5^{T-1} - 2^{2T} - 2 \times 5) \\ 2^25(2^{T-1} + 3^{T-1} - 2^{T-4}3^{T-1}) + 2^2\frac{1}{3}5(2^{T-4}5^{T-2} + 5^{T-2} - 2^{2T-2} - 25) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs de T donnent alors

$$\begin{pmatrix} 5^{2g+3}(2^{2g+5} - 2^3) \\ 4^{g+2}5(2 - 3^{2g+5} + 25^{g+2}) \\ 2^{2g+5}5 + 2^2\frac{1}{3}5(2^{2g+3}25^{g+2} - 2^{4g+9} - 25^{g+2} + 1) \\ 2^35(3^{2g+5} - 2^{2g+3} - 4^{g+2}3^{2g+5}) + 2^2\frac{1}{3}5(4^{g+2}5^{2g+5} + 5^{2g+5} - 2^{4g+11} + 1) \\ 4^{g+2}5(2^25 + 5^{2g+5} - 4^{g+4} - 9^{g+3}) \\ 2^25(2^{2g+7} + 3^{2g+7} - 4^{g+2}3^{2g+7}) + 2^2\frac{1}{3}5(4^{g+2}25^{g+3} + 25^{g+3} - 4^{2g+7} - 10) \\ 2^25(2^{2g+7} + 3^{2g+7} - 4^{g+2}3^{2g+7}) + 2^2\frac{1}{3}5(4^{g+2}25^{g+3} + 25^{g+3} - 4^{2g+7} - 10) \end{pmatrix},$$

d'où après division par $5! = 2^33 \times 5$ les nombres

$$\begin{aligned} \frac{1}{5!}h_5^g(\square\square\square\square) &= 25^{g+1}\frac{4^{g+1} - 1}{3}, \\ \frac{1}{5!}h_5^g(\square\square\square) &= 2^{2g+1}\left(\frac{2 + 25^{g+2}}{3} - 9^{g+2}\right), \\ \frac{1}{5!}h_5^g(\square\square\square) &= \frac{4^{g+1}}{3} + \frac{1}{9}\left(4^{g+1}25^{g+2} - 16^{g+2} - \frac{25^{g+2} - 1}{2}\right), \\ \frac{1}{5!}h_5^g(\square\square\square) &= 9^{g+2} - \frac{1}{3}2^{2g+3} - 4^{g+2}9^{g+2} + \frac{1}{9}\left(2^{2g+3}5^{2g+5} - 4^{2g+5} + \frac{1 + 5^{2g+5}}{2}\right), \\ \frac{1}{5!}h_5^g(\square\square\square) &= 2^{2g+1}\frac{2^25 + 5^{2g+5} - 4^{g+4} - 9^{g+3}}{3}, \\ \frac{1}{5!}h_5^g(\square\square\square) &= \frac{4^{g+3}}{3} + \frac{9^{g+3}}{2} - 2^{2g+3}9^{g+3} + \frac{1}{9}\left(2^{2g+3}25^{g+3} + \frac{25^{g+3}}{2} - 2^{4g+13} - 5\right), \\ \frac{1}{5!}h_5^g(\square\square\square) &= \frac{4^{g+3}}{3} + \frac{9^{g+3}}{2} - 2^{2g+3}9^{g+3} + \frac{1}{9}\left(2^{2g+3}25^{g+3} + \frac{25^{g+3}}{2} - 2^{4g+13} - 5\right). \end{aligned}$$

4.2.3 Table de valeurs des $h_{|\lambda|}^g(\lambda)$ pour $|\lambda| \leq 5$

En vertu de l'identité $h_n^g(\lambda) = \binom{n-|\lambda|}{m_1(\lambda)}h_n^g(\bar{\lambda})$ pour $|\lambda| \leq n$, on ne regardera que le cas des partitions complètes.

On observera l'égalité expérimentale des nombres

$$h_n^g(\square\square) = h_n^g(\bar{\emptyset}), \quad (4.34)$$

observation qui est évidente à justifier vu qu'une constellation formée d'une permutation de type $\square\square$ suivie de $T_n^g(\square\square) = T_n^g(\bar{\emptyset}) - 1$ transpositions est exactement une constellation formée de $T_n^g(\bar{\emptyset})$ transpositions.

Commençons par récapituler les résultats de la section précédente sous forme d'une table des nombres $\frac{h_n^g(\lambda)}{n!}$ pour $|\lambda| = n \leq 5$ en fonction du genre g :

	1
	1/2
	1/2
	9^g
	$\frac{9^{g+1}-1}{2}$
	$\frac{9^{g+1}-1}{2}$
	$4^g \frac{9^{g+1}-1}{2}$
	$9^{g+1} (4^{g+1} - 1)$
	$4^g 3 \frac{9^{g+1}-1}{2}$
	$\frac{9^{g+1}-1}{2} (4^{g+1} - 1)$
	$\frac{9^{g+1}-1}{2} (4^{g+1} - 1)$

	$25^{g+1} \frac{4^{g+1}-1}{3}$
	$2^{2g+1} \left(\frac{2+25^{g+2}}{3} - 9^{g+2} \right)$
	$\frac{4^{g+1}}{3} + \frac{1}{9} \left(4^{g+1} 25^{g+2} - 16^{g+2} - \frac{25^{g+2}-1}{2} \right)$
	$9^{g+2} - \frac{1}{3} 2^{2g+3} - 4^{g+2} 9^{g+2} + \frac{1}{9} \left(2^{2g+3} 5^{2g+5} - 4^{2g+5} + \frac{1+5^{2g+5}}{2} \right)$
	$2^{2g+1} \frac{2^{2g+5} 5^{2g+5} - 4^{g+4} - 9^{g+3}}{3}$
	$\frac{4^{g+3}}{3} + \frac{9^{g+3}}{2} - 2^{2g+3} 9^{g+3} + \frac{1}{9} \left(2^{2g+3} 25^{g+3} + \frac{25^{g+3}}{2} - 2^{4g+13} - 5 \right)$
	$\frac{4^{g+3}}{3} + \frac{9^{g+3}}{2} - 2^{2g+3} 9^{g+3} + \frac{1}{9} \left(2^{2g+3} 25^{g+3} + \frac{25^{g+3}}{2} - 2^{4g+13} - 5 \right)$

(4.35)

On spécialise à présent la table ci-dessus pour les genres de 0 à 5. En guise de test de sûreté, l'on croiserait avec la table donnée en toute fin de [17].

Table des $\frac{h_n^g(\lambda)}{n!}$ lorsque $g \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$:

	0	1	2	3	4	5
	1	1	1	1	1	1
	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
	1	9	81	729	6561	59 049
	4	40	364	3280	29 524	265 720
	4	40	364	3280	29 524	265 720
	4	160	5824	209 920	7558 144	272 097 280
	27	1215	45 927	1673 055	60 407 127	2176 250 895
	12	480	17 472	629 760	22 674 432	816 291 840
	120	5460	206 640	7528 620	271 831 560	9793 126 980
	120	5460	206 640	7528 620	271 831 560	9793 126 980
	25	3125	328 125	33 203 125	3330 078 125	333251 953 125
	256	35 840	3956 736	409 108 480	41 394 569 216	4156 871 147 520
	216	26 460	2748 816	277 118 820	27 762 350 616	2777 408 868 780
	1620	234 360	26 184 060	2719 617 120	275 661 886 500	27 700 994 510 280
	1440	188 160	20 160 000	2059 960 320	207 505 858 560	20 803 767 828 480
	8400	1189 440	131 670 000	13 626 893 280	1379 375 197 200	138 543 794 363 520
	8400	1189 440	131 670 000	13 626 893 280	1379 375 197 200	138 543 794 363 520

(4.36)

Un phénomène singulier apparaît en taille 5 lorsque le genre est grand – la répétition des premiers chiffres :

$$g = 10 : \begin{pmatrix} 3333\,332\,538\,604\,736\,328\,125 \\ 41\,666\,074\,368\,999\,377\,862\,656 \\ 27\,777\,774\,435\,133\,627\,575\,216 \\ 277\,773\,055\,828\,467\,664\,193\,820 \\ 208\,331\,556\,252\,681\,492\,234\,240 \\ 1388\,867\,647\,957\,566\,334\,412\,400 \\ 1388\,867\,647\,957\,566\,334\,412\,400 \end{pmatrix},$$

$$g = 20 : \begin{pmatrix} 333\ 333\ 333\ 333\ 257\ 542\ 108\ 185\ 589\ 313\ 507\ 080\ 078\ 125 \\ 4166\ 666\ 664\ 501\ 132\ 551\ 373\ 981\ 747\ 678\ 239\ 633\ 965\ 056 \\ 2777\ 777\ 777\ 777\ 461\ 946\ 619\ 105\ 530\ 880\ 515\ 657\ 520\ 216 \\ 27\ 777\ 777\ 760\ 455\ 083\ 701\ 745\ 634\ 609\ 906\ 456\ 926\ 386\ 020 \\ 20\ 833\ 333\ 326\ 836\ 730\ 781\ 131\ 938\ 695\ 481\ 601\ 860\ 567\ 040 \\ 138\ 888\ 888\ 810\ 937\ 554\ 557\ 251\ 740\ 578\ 285\ 456\ 455\ 856\ 400 \\ 138\ 888\ 888\ 810\ 937\ 554\ 557\ 251\ 740\ 578\ 285\ 456\ 455\ 856\ 400 \end{pmatrix},$$

$$g = 50 : \begin{pmatrix} 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 267\ 594\ 924\ \dots \\ 4166\ 666\ 666\ 666\ 666\ 666\ 666\ 560\ 829\ 049\ 659\ 655\ 179\ \dots \\ 2777\ 777\ 777\ 777\ 777\ 777\ 777\ 777\ 777\ 777\ 503\ 867\ 741\ \dots \\ 27\ 777\ 777\ 777\ 777\ 777\ 777\ 776\ 931\ 076\ 843\ 091\ 236\ 065\ \dots \\ 20\ 833\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 333\ 015\ 820\ 482\ 312\ 298\ 872\ \dots \\ 138\ 888\ 888\ 888\ 888\ 888\ 888\ 885\ 078\ 734\ 683\ 484\ 226\ 276\ \dots \\ 138\ 888\ 888\ 888\ 888\ 888\ 888\ 885\ 078\ 734\ 683\ 484\ 226\ 276\ \dots \end{pmatrix}.$$

Nous donnons enfin une table des nombres $h_n^g(\lambda) = \frac{h_n^g(\lambda)}{n! T_n^g(\lambda)!}$ pour $g \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ et $3 \leq n \leq 5$:

	0	1	2	3	4	5	10
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{81}{4480}$	$\frac{81}{44800}$	$\frac{243}{1971200}$	$\frac{1162261467}{2}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{180}$	$\frac{41}{4536}$	$\frac{671}{907200}$	$\frac{73}{1710720}$	$\frac{7845264902}{3}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{13}{1440}$	$\frac{41}{45360}$	$\frac{671}{10886400}$	$\frac{73}{23950080}$	$\frac{7845264902}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{52}{45}$	$\frac{328}{567}$	$\frac{2684}{14175}$	$\frac{584}{13365}$	$\frac{1364393896}{2143861251406875}$
	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{729}{640}$	$\frac{4131}{8960}$	$\frac{22599}{179200}$	$\frac{19683}{788480}$	$\frac{96914112201}{456841224519680000}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{164}{945}$	$\frac{671}{14175}$	$\frac{292}{31185}$	$\frac{170549237}{2143861251406875}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{41}{72}$	$\frac{11407}{60480}$	$\frac{2263}{51840}$	$\frac{597871}{79833600}$	$\frac{1179123917171}{30879140873011200000}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{96}$	$\frac{41}{720}$	$\frac{11407}{725760}$	$\frac{2263}{725760}$	$\frac{597871}{1277337600}$	$\frac{1179123917171}{802857662698291200000}$
	$\frac{25}{24}$	$\frac{625}{144}$	$\frac{3125}{1472}$	$\frac{1328125}{29056}$	$\frac{12109375}{40384}$	$\frac{48828125}{1486976}$	$\frac{231884002685546875}{43161627946660134912}$
	$\frac{32}{15}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{1472}{135}$	$\frac{29056}{2835}$	$\frac{40384}{6075}$	$\frac{1486976}{467775}$	$\frac{4746281054848}{1766918613796875}$
	$\frac{9}{5}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{303}{40}$	$\frac{15551}{2240}$	$\frac{128401}{28800}$	$\frac{18840109}{8870400}$	$\frac{4388806483177363}{2450725466112000000}$
	$\frac{9}{4}$	$\frac{93}{16}$	$\frac{2309}{320}$	$\frac{6359}{1120}$	$\frac{101995}{32256}$	$\frac{281857901}{212889600}$	$\frac{245769014730289381}{356825627865907200000}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{50}{9}$	$\frac{4064}{945}$	$\frac{964}{405}$	$\frac{155038}{155925}$	$\frac{113007334252}{218761352184375}$
	$\frac{5}{3}$	$\frac{59}{18}$	$\frac{475}{144}$	$\frac{28361}{12960}$	$\frac{382777}{362880}$	$\frac{15547991}{39916800}$	$\frac{184327075431008963}{1445143792856924160000}$
	$\frac{5}{24}$	$\frac{59}{180}$	$\frac{475}{1728}$	$\frac{28361}{181440}$	$\frac{382777}{5806080}$	$\frac{15547991}{718502400}$	$\frac{184327075431008963}{40464026199993876480000}$

4.3 Séries d'HURWITZ à plusieurs partitions

On présente ici une généralisation des nombres d'HURWITZ proposée par M. KAZARIAN dans [14], laquelle consiste essentiellement à regarder *tous* les coefficients de structure de la classe $C_{\lambda(1^n)_S}$ dans l'algèbre $\mathcal{A}_n$. Les définitions présentées ici sont un peu plus générales que celle des notes originelles [14] qui visaient directement le problème d'HURWITZ.

Ces nombres permettent d'obtenir une *formule de réduction* des séries d'HURWITZ à plusieurs partitions (corollaire 4.3.3.4) comme polynômes en les séries d'HURWITZ à une seule partitions, ce qui constitue la motivation principale de cette section.

On fixe dans toute cette section un entier $k \geq 0$ et une famille $\vec{\Lambda}$ de k multipartitions $\Lambda^1, \dots, \Lambda^k$. On continue de garder un entier $n \geq 1$ fixé.

4.3.1 Lemmes préliminaires

Nous allons considérer des séries où n variera. Le lemme suivant (qui n'est qu'une variante du lemme 3.3.1.7) assure que cela n'affectera pas les coefficients de structure de l'algèbre $\mathcal{A}_n$.

(Il serait par conséquent tentant de travailler dans une limite projective des algèbres $\mathcal{A}_n$, à l'instar de celle développée dans [12]. Toutefois, nous aurons besoin de considérer la classe $C_{\zeta(1^n)}$, laquelle est propre à *chaque* algèbre $\mathcal{A}_n$, rendant inutile le travail dans une éventuelle limite projective.)

Lemme 4.3.1.1. (*universalité des coefficients de structure*)

Pour toute multipartition Λ , le coefficient de structure $C_\Lambda^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}]$ où l'on complète les Λ^i jusqu'à la taille $||\Lambda||$ est inchangé par suppression ou ajout de cycles $\mathfrak{s}$ -fixes à Λ . On le notera donc plus simplement

$$C_\Lambda^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}] \text{ ou } C_\Lambda^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}]. \quad (4.38)$$

Démonstration.

Ce coefficient compte (cf. lemme 1.3.2.2) le nombre de k -uplets $(S_1, \dots, S_k) \in C_{\Lambda^1} \times \cdots \times C_{\Lambda^k}$ dont le produit $S_1 \cdots S_k$ vaut un élément *fixé* de type Λ , par exemple $(\frac{\sigma_\Lambda}{\pi_\Lambda})$. Comparons cet ensemble de k -uplets à celui obtenu en réduisant Λ . On a clairement une injection

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_1, \dots, S_k) \in C_{\Lambda^1} \times \cdots \times C_{\Lambda^k} \\ \text{tels que } S_1 \cdots S_k = (\frac{\sigma_\Lambda}{\pi_\Lambda}) \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (S_1, \dots, S_k) \in C_{\Lambda^1} \times \cdots \times C_{\Lambda^k} \\ \text{tels que } S_1 \cdots S_k = (\frac{\sigma_\Lambda}{\pi_\Lambda}) \end{array} \right\}$$

obtenue en rajoutant des cycles $\mathfrak{s}$ -fixes aux S_i . Par ailleurs, si l'on peut écrire $(\frac{\sigma_1 \cdots \sigma_k}{\vee \pi_i}) = (\frac{\sigma_\Lambda}{\pi_\Lambda})$ avec $(\frac{\sigma_i}{\pi_i}) \in C_{\Lambda^i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, alors les cycles fixes de π_Λ sont également des cycles fixes de tout minorant² de π_Λ , *a fortiori* des cycles fixes de chaque π_i , ce qui montre que chaque σ_i est une permutation de la réunion des parts non fixes de π_Λ , laquelle réunion est la même que celle des parts de $\pi_{\hat{\Lambda}}$. L'injection ci-dessus est par conséquent surjective, *c. q. f. d.*

Nous aurons également besoin d'une information lorsque le coefficient ci-dessus $C_\Lambda^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}]$ est non nul. On abrégera

$$\text{ht } \vec{\Lambda} := \text{ht } \Lambda^1 + \text{ht } \Lambda^2 + \cdots + \text{ht } \Lambda^k. \quad (4.39)$$

Lemme 4.3.1.2. (*intégralité d'un genre*)

Pour toute multipartition Λ , on a l'implication suivante :

$$C_\Lambda^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}] \neq 0 \implies \frac{\text{ht } \vec{\Lambda} - \text{ht } \Lambda}{2} \in \mathbb{N}. \quad (4.40)$$

Démonstration.

Supposons factorisé un élément S de type Λ en un produit $S_1 \cdots S_k$ où la permutation scindée $S_i = (\frac{\sigma_i}{\pi_i}) \in \mathfrak{S}_n$ est de type donné Λ^i pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

D'une part, en prenant la hauteur et en utilisant sa sous-additivité (cf. corollaire 1.7.3.2), l'on obtient l'inégalité

$$\text{ht } \Lambda = \text{ht } S = \text{ht } (S_1 \cdots S_k) \leq \text{ht } S_1 + \cdots + \text{ht } S_k = \text{ht } \Lambda^1 + \cdots + \text{ht } \Lambda^k. \quad (4.41)$$

D'autre part, en prenant les signatures dans l'égalité $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_i$, on trouve $(-1)^{\wp(\sigma)} = (-1)^{\sum \wp(\sigma_i)}$; en se souvenant que $\wp(\sigma) = \text{rf } \Lambda = \text{ht } \Lambda - 2 \text{dc } \Lambda$, cela devient $(-1)^{\text{ht } \Lambda} = (-1)^{\sum \text{ht } \Lambda^i}$, ce qui revient à la parité de $\text{ht } \vec{\Lambda} - \text{ht } \Lambda$. Cela suffit pour conclure à l'intégralité de $\frac{\text{ht } \vec{\Lambda} - \text{ht } \Lambda}{2}$.

2. Soit p la part d'un minorant contenant un cycle fixe γ de π_Λ . Cette part est incluse dans une part de $p_\Lambda \in \pi_\Lambda$ et contient γ , donc ce dernier appartient à p_Λ ; or γ est un cycle fixe pour π_Λ , ce qui montre que la part p_Λ (*a fortiori* p) est un singleton $\{\gamma\}$.

4.3.2 Nombres et séries de KAZARIAN

Définition 4.3.2.1. (nombres³ $\mathbb{k}_n, \mathbb{k}_n^T, k_n^T$ de KAZARIAN, genres g_n^T et nombres T_n^g de transpositions)

Pour tous scalaires T et g , on définit un **nombre de transpositions** $T_n^g(\vec{\Lambda})$ et un **genre** $g_n^T(\vec{\Lambda})$ par les formules de RIEMANN-HURWITZ

$$\begin{cases} \text{ht } \vec{\Lambda} + T_n^g(\vec{\Lambda}) = 2n + 2g' \\ \text{ht } \vec{\Lambda} + T = 2n + 2g_n^T(\vec{\Lambda})' \end{cases} \quad (4.42)$$

On définit pour tout entier $T \geq 0$ des **nombres de KAZARIAN**

$$\mathbb{k}_n(\Lambda^1, \dots, \Lambda^k) := C_{\chi(1^n)}^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}], \quad (4.43)$$

$$\mathbb{k}_n^T(\Lambda^1, \dots, \Lambda^k) := \mathbb{k}_n \left(\Lambda^1, \dots, \Lambda^k, \underbrace{\square^s, \square^s, \dots, \square^s}_{T \text{ classes}} \right), \quad (4.44)$$

$$\text{et } k_n^T(\vec{\Lambda}) := \frac{1}{n! T!} \mathbb{k}_n^T(\vec{\Lambda}). \quad (4.45)$$

Remarques 4.3.2.2.

On observera la bijection

$$\begin{cases} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ T & \mapsto & g_n^T(\vec{\Lambda}) \\ T_n^g(\vec{\Lambda}) & \longleftarrow & g \end{cases} \quad (4.46)$$

Par ailleurs, puisque la hauteur $\text{ht } \lambda^s$ d'une partition totalement scindée vaut la ramification $\wp(\lambda)$, on peut écrire

$$2g_n^T(\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks})' + 2n = \text{ht } (\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks}) + T = \wp(\lambda^1, \dots, \lambda^k) + T,$$

ce qui montre, justifiant ainsi la terminologie, que

$$\text{le genre } g_n^T(\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks}) \text{ est celui de toute constellation de degré } n \text{ et de type } (\lambda^1, \dots, \lambda^k, \underbrace{\square, \square, \dots, \square}_{T \text{ transpositions}}). \quad (4.47)$$

En affinant la bijection ci-dessus, on pourra réécrire les *séries de KAZARIAN* (définies plus bas) en sommant au choix sur le genre ou sur le nombre de transpositions (cf. huitième remarque 2.2.5.2). Cela constitue l'unique intérêt du lemme suivant.

Lemme 4.3.2.3. (correspondance genre $\leftrightarrow$ nombre de transpositions)

On a l'implication $k_n^T(\vec{\Lambda}) \neq 0 \implies g_n^T(\vec{\Lambda}) \in \mathbb{N}$ ainsi qu'une bijection

$$\begin{cases} \left\{ T \in \mathbb{N} ; k_n^T(\vec{\Lambda}) \neq 0 \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ g \in \mathbb{N} ; k_n^{T_n^g(\vec{\Lambda})}(\vec{\Lambda}) \neq 0 \right\} \\ T & \mapsto & g_n^T(\vec{\Lambda}) \\ T_n^g(\vec{\Lambda}) & \longleftarrow & g \end{cases} \quad (4.48)$$

Démonstration.

3. La lettre $\mathbb{k}$ est un k minuscule enluminé, analogue du $\mathfrak{h}$ utilisé pour définir les nombres d'HURWITZ entiers.

1. On applique le lemme 4.3.1.2 en prenant $\Lambda = \wr(1^n)$: le coefficient de structure devient

$$C_\Lambda^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k} C_{\square^s}^T],$$

d'où l'appartenance à $\mathbb{N}$ de la fraction (cf. (1.146) pour déterminer $\text{ht } \wr(1^n)$)

$$\frac{\text{ht } (\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^k, \square^s, \square^s, \dots, \square^s) - \text{ht } \wr(1^n)}{2} = \frac{\text{ht } \vec{\Lambda} + T - (2n - 2)}{2} = g_n^T(\vec{\Lambda}), \text{ c. q. f. d.} \quad (4.49)$$

2. L'implication précédente montre que la flèche est une application bien définie. Réciproquement, si $k_n^{T_n^g(\vec{\Lambda})}(\vec{\Lambda}) \neq 0$, alors il existe une certaine factorisation dont le nombre $T_n^g(\vec{\Lambda})$ de transpositions totalement scindées est certainement un entier naturel.

Dorénavant, l'entier n ne sera plus fixé. (4.50)

Définition 4.3.2.4. (les séries $K(\vec{\Lambda})$ de KAZARIAN)

On définit une **série de KAZARIAN** dans l'algèbre $\mathbb{Q}[[t, u]]$ à deux indéterminées t et u par

$$K(\vec{\Lambda}) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} k_n^T(\vec{\Lambda}) t^n u^{\frac{T}{2} - n} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ g \geq 0}} k_n^{T_n^g(\vec{\Lambda})}(\vec{\Lambda}) t^n u^{g' - \frac{\text{ht } \vec{\Lambda}}{2}}. \quad (4.51)$$

La seconde égalité est justifiée par la bijection (4.48) et la relation $\frac{T}{2} - n = g_n^T(\vec{\Lambda})' - \frac{\text{ht } \vec{\Lambda}}{2}$. On notera bien que l'exposant en u est le genre *décrémenté* et *privé de la demi-hauteur* (donc notre série peut contenir du terme en $\frac{1}{u}$ ou $\sqrt{u}$). Cette convention rendra les formules plus aisées à présenter (cf. septième remarque 2.2.5.2).

Les nombres de KAZARIAN permettent de réécrire la proposition 4.1.0.2 sous la forme

$$\mathbb{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \mathbb{k}_n^{T_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)}(\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks}). \quad (4.52)$$

En observant les identités $\begin{cases} T_n^g(\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks}) = T_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \\ \text{ht } (\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks}) = \wp(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \end{cases}$, l'égalité (4.52) se traduit en termes de séries :

$$H(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = K(\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks}). \quad (4.53)$$

Cela montre bien en quoi les nombres de KAZARIAN généralisent ceux d'HURWITZ.

La proposition suivante exprime les séries de KAZARIAN à *plusieurs* multipartitions comme combinaisons linéaires de séries de KAZARIAN à *une* multipartition. Elle a été démontrée [14] par M. KAZARIAN dans le cas de partitions totalement scindées. La démonstration est en fait inchangée dans le cas général qu'est le notre.

Proposition 4.3.2.5. (KAZARIAN-S. [14]) (réduction des séries de KAZARIAN)

On l'égalité suivante où l'on somme sur toutes les multipartitions Λ réduites de hauteur inférieure à la somme des hauteurs des Λ^i :

$$K(\vec{\Lambda}) = \sum_{\Lambda} C_\Lambda^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}] \times K(\Lambda). \quad (4.54)$$

Remarque 4.3.2.6.

Si l'on utilise des séries en genre sans la correction par la demi-hauteur, il sort alors une puissance de u dont l'exposant vaut $\frac{\text{ht } \vec{\Lambda} - \text{ht } \Lambda}{2}$: pour les termes de la somme $\sum_{\Lambda}$ ayant une contribution non nulle, cet exposant est bien entier d'après le lemme 4.3.1.2 et positif (d'où le domaine de sommation annoncé). On observera que la décrémentation du genre n'intervient pas dans cette formule.

Démonstration.

La condition $\text{ht } \Lambda \leq \text{ht } \vec{\Lambda}$ découle du lemme 4.3.1.2. Elle montre que la somme est *finie* d'après l'inégalité $||\Lambda|| \leq 2 \text{ht } \Lambda$ de (1.147).

D'après le lemme 1.3.2.2, on écrire

$$\mathbb{k}_n^T(\vec{\Lambda}) = \sum_{\substack{\vec{S} \in C_{\Lambda^1} \times \dots \times C_{\Lambda^k}, \vec{\tau} \in C_{\frac{\text{Id}}{\{[1,n]\}}}^T \\ S_1 \dots S_k \tau_1^s \dots \tau_T^s = \left(\frac{\text{Id}}{\{[1,n]\}} \right)}} 1.$$

On regroupe ensuite les k -uplets $\vec{S}$ selon le type réduit de leur produit :

$$\begin{aligned} K(\vec{\Lambda}) &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} \mathbb{k}_n^T(\vec{\Lambda}) \frac{t^n u^{\frac{T}{2}-n}}{n! T!} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} \sum_{\substack{\vec{S} \in C_{\Lambda^1} \times \dots \times C_{\Lambda^k}, \vec{\tau} \in C_{\frac{\text{Id}}{\{[1,n]\}}}^T \\ S_1 \dots S_k \tau_1^s \dots \tau_T^s = \left(\frac{\text{Id}}{\{[1,n]\}} \right)}} \frac{t^n u^{\frac{T}{2}-n}}{n! T!} \\ &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} \sum_{\Lambda \text{ réduite}} \sum_{S \in C_{\vec{\Lambda}}} \sum_{\substack{\vec{S} \in C_{\Lambda^1} \times \dots \times C_{\Lambda^k}, \vec{\tau} \in C_{\frac{\text{Id}}{\{[1,n]\}}}^T \\ S_1 \dots S_k = S \text{ et } S \tau_1^s \dots \tau_T^s = \left(\frac{\text{Id}}{\{[1,n]\}} \right)}} \frac{t^n u^{\frac{T}{2}-n}}{n! T!} \\ &= \sum_{\Lambda \text{ réduite}} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} \sum_{\substack{(S, \vec{\tau}) \in C_{\vec{\Lambda}} \times C_{\frac{\text{Id}}{\{[1,n]\}}}^T \\ S \tau_1^s \dots \tau_T^s = \left(\frac{\text{Id}}{\{[1,n]\}} \right)}} \frac{t^n u^{\frac{T}{2}-n}}{n! T!} \sum_{\substack{\vec{S} \in C_{\Lambda^1} \times \dots \times C_{\Lambda^k} \\ S_1 \dots S_k = S}} 1 \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\mathbb{k}_n^T(\Lambda)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=C_{\Lambda}^*[C_{\Lambda^1} \dots C_{\Lambda^k}]} \\ &= \sum_{\Lambda \text{ réduite}} C_{\Lambda}^*[C_{\Lambda^1} \dots C_{\Lambda^k}] \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} \mathbb{k}_n^T(\Lambda) \frac{t^n u^{\frac{T}{2}-n}}{n! T!}, \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

4.3.3 Réduction des séries d'HURWITZ *via* les séries de KAZARIAN

La proposition 4.3.2.5 ramène l'étude des séries de KAZARIAN ayant plusieurs multipartitions (*a fortiori* celle des séries d'HURWITZ à plusieurs partitions) à celle des séries de KAZARIAN ayant *une seule* multipartition. La proposition suivante montre que ces dernières s'expriment comme polynômes en les séries d'HURWITZ possédant *une seule* partition. Nous en déduirons une formule de réduction pour les séries d'HURWITZ, améliorant nettement notre théorème 3.3.1.1.

Tout comme la proposition 4.3.2.5, la démonstration est de M. KAZARIAN et la généralisation est nôtre.

Proposition 4.3.3.1. (KAZARIAN-S. [14]) (*lien entre séries d'HURWITZ et séries de KAZARIAN*)

Pour toute multipartition Λ , on a l'égalité suivante dans $\mathbb{Q}[[t, u]] \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right]$:

$$z_{\vec{\Lambda}} K(\Lambda) = \sum_{\gamma \in \pi_{\ell(\vec{\Lambda})}} z_{\nu^1} \dots z_{\nu^{\ell(\gamma)}} H(\nu^1) \dots H(\nu^{\ell(\gamma)}) \text{ où } \forall i \in [1, \ell(\gamma)], \nu^i := \sharp [\pi_{\sigma_{\Lambda}}]_c \int_{c \in \gamma_i}. \quad (4.55)$$

Exemple 4.3.3.2.

Considérons la multipartition $\left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \square \square \right]$. Elle possède $\text{cy } \Lambda = 9$ cycles que l'on peut numéroté de façon standard :

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 6 \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array}. \quad \text{Observer que } \pi_{\ell(\Lambda)} = \{\llbracket 1, 4 \rrbracket, \llbracket 5, 7 \rrbracket, \{8\}, \{9\}\}.$$

Le choix d'une partition $\gamma \checkmark \pi_{\ell(\Lambda)}$ consiste à regrouper des numéros de cycles, *i. e.* à regrouper des cycles. Les partitions ν^i s'obtiennent alors en concaténant les cycles ainsi regroupés. Par exemple, en considérant la partition

$$\gamma := \{\{1, 4, 8\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 5, 9\}\},$$

les cycles sont regroupés comme suit :

$$\begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline 4 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 6 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline 3 \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline \end{array}.$$

Les partitions correspondantes s'obtiennent en effaçant les numéros, ce qui donne au membre de droite de (4.55) une contribution

$$3! \times 2!2 \times 2!3 H\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) H\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) H\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right).$$

Remarques 4.3.3.3.

Si l'on utilise des séries en genre (décrémenté) sans la correction par la demi-hauteur, il va alors sortir un terme en $u^{\text{dc } \Lambda}$ car la ramification des partitions ν^i vaut celle $\wp(\sqcup \Lambda)$ de la multipartition Λ , à savoir $\text{ht } \Lambda - 2 \text{dc } \Lambda$. Si de plus le genre *n'est pas* décrémenté, il sort alors une puissance de u dont l'exposant vaut

$$\text{dc } \Lambda + 1 - \ell(\gamma) = \text{cy } \Lambda - \lg \Lambda + 1 - \ell(\gamma) = \text{cy } \Lambda + 1 - (\ell(\pi_{\ell(\Lambda)}) + \ell(\gamma)), \quad (4.56)$$

lequel est positif d'après (1.122), de sorte que l'égalité aura lieu dans l'algèbre $\mathbb{Q}[[t, u]]$. C'est sous cette dernière forme que M. KAZARIAN a présenté la proposition 4.3.3.1 ; nous pensons toutefois que notre normalisation rend les formules plus claires – bien que nous devions les considérer dans l'algèbre $\mathbb{Q}[[t, u]] \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right]$.

Pour choisir une partition entrelacée à $\pi_{\ell(\Lambda)}$, il convient d'observer que les parts **cycliques** de Λ (celles de longueur 1, dont font partie ses cycles **s**-fixes) doivent être jointes à une part de longueur au moins 2, de sorte que l'entrelacement porte en fait sur la partition $\pi_{\ell(\tilde{\Lambda})}$ où l'on a remplacé la réduite $\tilde{\Lambda}$ par la **réduite acyclique** $\tilde{\Lambda}$ définie par la multipartition Λ privée de ses parts cycliques. (Mais il faut tenir compte des parts cycliques car elles constituent les partitions ν^i .)

Démonstration.

Fixons $n \geq 1$ et $T \geq 0$. D'après le lemme 1.3.2.2, on peut écrire

$$\mathbb{k}_n^T(\Lambda) = \sum_{\substack{(S, \vec{\tau}) \in C_{\bar{\Lambda}} \times C_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}^T \\ S \tau_1^s \cdots \tau_T^s = \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{Id} \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)_{\{[1, n]\}}} 1. \quad (4.57)$$

Si l'on partitionne le domaine de sommation selon la permutation scindée S , on obtient $|C_{\bar{\Lambda}}|$ parties deux à deux conjuguées (c'est l'ingrédient de la démonstration du lemme 1.3.2.2) et donc de même cardinal. On peut donc *fixer* S dans $C_{\bar{\Lambda}}$, par exemple comme étant égal à $\left(\begin{array}{c} \sigma_{\bar{\Lambda}} \\ \pi_{\bar{\Lambda}} \end{array} \right)$ (permutations et partitions standards associées à $\bar{\Lambda}$). On notera par ailleurs qu'un élément de $C_{\bar{\Lambda}}$ est la donnée d'une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à $\left| \mathring{\Lambda} \right|$ éléments et d'une permutation scindée de type $\mathring{\Lambda}$ de cette partie, d'où l'égalité $|C_{\bar{\Lambda}}| = \left(\left| \mathring{\Lambda} \right| \right) |C_{\mathring{\Lambda}}|$. On regroupe ensuite les T -uplets de transpositions selon leur produit R totalement scindé :

$$\mathbb{k}_n^T(\Lambda) = \left(\left| \mathring{\Lambda} \right| \right) |C_{\mathring{\Lambda}}| \sum_{\substack{S = \left(\begin{array}{c} \sigma_{\bar{\Lambda}} \\ \pi_{\bar{\Lambda}} \end{array} \right) \\ R = \left(\begin{array}{c} \rho \\ \omega \end{array} \right)}} \sum_{\substack{\vec{\tau} \times C_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}^T \\ \tau_1^s \cdots \tau_T^s = R \\ SR = \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{Id} \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)_{\{[1, n]\}}} 1. \quad (4.58)$$

Explicitons chacune des deux sommes ci-dessus.

Première somme.

La condition $SR = (\text{Id}_{\{\llbracket 1, n \rrbracket\}})$ équivaut à $(\sigma_{\bar{\Lambda} \vee \varpi}^{-1}) = (\text{Id}_{\{\llbracket 1, n \rrbracket\}})$, ce qui revient à dire que ρ vaut $\sigma_{\bar{\Lambda}}^{-1}$ et que les partitions $\pi_{\bar{\Lambda}}$ et ϖ sont entrelacées. En observant qu'un cycle $\mathfrak{s}$ -fixe de Λ est représenté par un singleton⁴ dans $\pi_{\bar{\Lambda}}$, l'entrelacement de ϖ et $\pi_{\bar{\Lambda}}$ impose à chaque cycle $\mathfrak{s}$ -fixe de Λ d'être relié *via* ϖ à un cycle de la réduite $\hat{\Lambda}$. Ceci montre que choisir ϖ revient à choisir

1. une partition ω de $\llbracket 1, \|\hat{\Lambda}\| \rrbracket$ entrelacée avec $\pi_{\hat{\Lambda}}$;
2. des entiers $n_1, \dots, n_{\ell(\omega)}$ de somme n (correspondant aux tailles des parts de ϖ) ;
3. pour tout $i \in \llbracket 1, \ell(\omega) \rrbracket$ une partie à $n_i - |\omega_i|$ éléments des $n - \|\hat{\Lambda}\|$ parts cycliques de $\bar{\Lambda}$ (correspondant aux cycles $\mathfrak{s}$ -fixes rajoutées à ω_i pour créer ϖ_i).

Par ailleurs, les partitions ϖ et $\pi_{\bar{\Lambda}}$ sont (par définition d'une permutation scindée) plus grossières que la partition orbitale $\text{Orb } \rho = \text{Orb } \sigma_{\bar{\Lambda}} = \pi_{\sqcup \bar{\Lambda}} = \pi_{\sqcup \hat{\Lambda}}$, ce qui implique qu'un ω comme ci-dessus est (tout comme $\pi_{\hat{\Lambda}}$) plus grossier que $\pi_{\sqcup \hat{\Lambda}}$:

$$\omega \geq \pi_{\sqcup \hat{\Lambda}} \leq \pi_{\hat{\Lambda}}. \quad (4.59)$$

Ainsi, en considérant l'ensemble Cy des cycles de $\sqcup \hat{\Lambda}$, choisir ω revient à choisir une partition de Cy entrelacée avec la partition de Cy donnée par les parts de $\hat{\Lambda}$, ce qui revient encore à

$$\text{choisir une partition } \gamma \text{ de } \llbracket 1, \text{cy } \hat{\Lambda} \rrbracket \text{ entrelacée avec } \pi_{\ell(\hat{\Lambda})}. \quad (4.60)$$

On observera au passage les égalités $\ell(\omega) = \ell(\gamma) = \ell(\varpi)$. Les parts de ω (resp. ϖ) sont alors données en réunissant les cycles de $\pi_{\sigma_{\hat{\Lambda}}}$ (resp. $\pi_{\sigma_{\bar{\Lambda}}}$) à l'aide de γ :

$$\forall i \in \llbracket 1, \ell(\gamma) \rrbracket, \begin{cases} \omega_i = \sqcup_{c \in \gamma_i} [\pi_{\sigma_{\hat{\Lambda}}}]_c \\ \varpi_i = \sqcup_{c \in \gamma_i} [\pi_{\sigma_{\bar{\Lambda}}}]_c \end{cases}. \quad (4.61)$$

De même, on peut exprimer (à i fixé) le type ν^i de la permutation $\rho|_{\varpi_i}$:

$$\forall i \in \llbracket 1, \ell(\gamma) \rrbracket, \nu^i := \# [\pi_{\sigma_{\bar{\Lambda}}}]_c \}_{c \in \gamma_i}. \quad (4.62)$$

On observera que la somme des ramifications des ν^i vaut la ramification de Λ et que les tailles de ν^i et ω_i coïncident :

$$\text{rf } \Lambda = \sum_{i=1}^{\ell(\gamma)} \wp(\nu^i) \text{ et } |\nu^i| = \sum_{c \in \gamma_i} \# [\pi_{\sigma_{\bar{\Lambda}}}]_c = |\omega_i|.$$

En utilisant les considérations et notations ci-dessus, on peut réécrire la somme sur les $R \in \mathfrak{S}_n^{\mathfrak{s}}$ tels que $(\sigma_{\bar{\Lambda}})R = (\text{Id}_{\{\llbracket 1, n \rrbracket\}})$ sous la forme

$$\sum_{\gamma \hat{\varnothing} \pi_{\ell(\hat{\Lambda})}} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_{\ell(\hat{\Lambda})} = n \\ \forall i, n_i \geq 1}} \binom{n - \|\hat{\Lambda}\|}{n_i - |\nu^i|}. \quad (4.63)$$

Seconde somme.

Regardons à présent les transpositions. Comment choisir, à $R = (\frac{\rho}{\varpi})$ fixé dans $\mathfrak{S}_n^{\mathfrak{s}}$, un T -uplet de transpositions dont le produit totalement scindé vaut R ? En se restreignant aux parts de ϖ , on voit que cela revient à choisir pour tout $i \in \llbracket 1, \ell(\varpi) = \ell(\gamma) \rrbracket$ un certain T_i -uplet de transpositions de $\mathfrak{S}_{\varpi_i}$ dont le produit totalement scindé vaut $(\frac{\rho|_{\varpi_i}}{\varpi_i})$, ce qui est compté dans l'algèbre des invariants de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_{n_i}^{\mathfrak{s}}]$ par le coefficient de structure (cf. lemme 1.3.2.2)

$$C_{[\nu^i]}^* [C_{\square \square^{\mathfrak{s}}}^{T_i}] = \frac{\tilde{C}_{[\nu^i]}^* [C_{\square \square^{\mathfrak{s}}}^{T_i}]}{|C_{[\nu^i]}|} \stackrel{\text{proposition 4.1.0.2}}{=} \frac{\mathbb{h}_{n_i}^{g_i}(\nu^i)}{\binom{n_i}{|\nu^i|} |C_{\nu^i}|} \text{ avec } g_i := g_{n_i}^{T_i}(\nu^{i\mathfrak{s}}).$$

4. En fait, les singletons de $\pi_{\bar{\Lambda}}$ correspondent exactement aux parts cycliques de Λ . On pourrait donc remplacer dans la suite la réduite $\hat{\Lambda}$ par la réduite acyclique $\check{\Lambda}$. Mais l'on ne pourrait alors simplifier aussi aisément le binomial $\binom{n}{\|\hat{\Lambda}\|}$ qui viendra lors du calcul.

On peut donc réécrire

$$\sum_{\substack{\vec{\tau} \in C_{\square}^T \\ \tau_1^s \dots \tau_T^s = \left(\frac{\rho}{\varpi}\right)}} = \sum_{\substack{T_1 + \dots + T_{\ell(\gamma)} = T \\ \forall i, T_i \geq 0}} \binom{T}{T_1, \dots, T_{\ell(\gamma)}} \times \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} \underbrace{\frac{h_{n_i}^{g_i}(\nu^i) |\nu^i|!}{n_i! |C_{\nu^i}|}}_{= T_i! h_{n_i}^{g_i}(\nu^i) z_{\nu^i}} (n_i - |\nu_i|)! \quad (4.64)$$

Calcul final.

En mettant bout à bout les relations (4.63) et (4.64), on trouve

$$\begin{aligned} K(\Lambda) &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} \frac{t^n u^{\frac{T}{2}-n}}{n! T!} \times \mathbb{k}_n^T(\Lambda) \\ &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} t^n u^{\frac{T}{2}-n} \times \binom{n}{\|\dot{\Lambda}\|} \frac{|C_{\dot{\Lambda}}|}{n!} \sum_{\substack{S=(\frac{\sigma_{\Lambda}}{\pi_{\Lambda}}), R=(\frac{\rho}{\varpi}) \\ SR=(\{\text{Id}_{[1,n]}\})}} \sum_{\vec{\tau} \times C_{\square}^T = R} \frac{1}{T!} \\ &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} t^n u^{\frac{T}{2}-n} \frac{1}{T!} \frac{|C_{\dot{\Lambda}}|}{\|\dot{\Lambda}\|! (n - \|\dot{\Lambda}\|)!} \sum_{\gamma \notin \pi_{\ell(\dot{\Lambda})}} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_{\ell(\Lambda)} = n \\ \forall i, n_i \geq 1}} \binom{n - \|\dot{\Lambda}\|}{n_i - |\nu^i|} \\ &\quad \times \frac{1}{T!} \sum_{\substack{T_1 + \dots + T_{\ell(\gamma)} = T \\ \forall i, T_i \geq 0}} \binom{T}{T_1, \dots, T_{\ell(\gamma)}} \times \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} z_{\nu^i} T_i! h_{n_i}^{g_i}(\nu^i) (n_i - |\nu_i|)! \\ &= \sum_{\gamma \notin \pi_{\ell(\dot{\Lambda})}} \frac{|C_{\dot{\Lambda}}|}{\|\dot{\Lambda}\|!} z_{\nu^1} \dots z_{\nu^{\ell(\gamma)}} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{\ell(\gamma)} \geq 1 \\ T_1, \dots, T_{\ell(\gamma)} \geq 0}} \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} h_{n_i}^{g_i}(\nu^i) t^{n_i} u^{\frac{T_i}{2}-n_i}. \end{aligned}$$

La seconde somme peut être réécrite

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{\ell(\gamma)} \geq 1 \\ T_1, \dots, T_{\ell(\gamma)} \geq 0}} \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} h_{n_i}^{g_i}(\nu^i) t^{n_i} u^{\frac{T_i}{2}-n_i} &= \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ T \geq 0}} h_n^{g_i}(\nu^i) t^n u^{\frac{T}{2}-n} = \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} K(\nu^i) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} H(\nu^i), \text{ ce qui conclut.} \end{aligned}$$

Corollaire 4.3.3.4. (KAZARIAN [14]) (réduction des séries d'HURWITZ)

On a pour toutes partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ et pour tout genre g l'identité

$$H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{Y}^g, \gamma \notin \pi_{\ell(\Lambda)}, (g_i) \in \mathbb{N}^{\ell(\gamma)}} C_{\Lambda}^* [C_{\lambda^{1s}} \dots C_{\lambda^{ks}}] \frac{z_{\nu^1} \dots z_{\nu^{\ell(\gamma)}}}{z_{\Lambda}} \times H^{g_1}(\nu^1) \dots H^{g_{\ell(\gamma)}}(\nu^{\ell(\gamma)}) \quad (4.65)$$

où l'on somme sur

1. les multipartitions Λ réduites de hauteur $\leq \wp(\lambda^1) + \dots + \wp(\lambda^k)$;
2. les partitions ensemblistes $\gamma \in \mathfrak{P}_{\text{cy } \Lambda}$ entrelacées avec $\pi_{\ell(\Lambda)}$;
3. les familles de genres $(g_i) \in \mathbb{N}^{\ell(\gamma)}$ tels que $\sum_{i=1}^{\ell(\gamma)} \left(g'_i - \frac{\wp(\nu^i)}{2} \right) = g' - \frac{\wp(\vec{\lambda})}{2}$;
4. pour tout $i \in [1, \ell(\gamma)]$ les partitions $\nu^i := \wr \# [\pi_{\sigma_{\Lambda}}]_c \mathcal{J}_{c \in \gamma_i}$.

Démonstration.

Il suffit de mettre bout à bout les propositions 4.3.2.5 et 4.3.3.1 et de sélectionner le terme en $u^{g' - \frac{ht\Lambda}{2}}$:

$$\begin{aligned} H(\lambda^1, \dots, \lambda^k) &= K(\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks}) = \sum_{\Lambda \text{ réduite}} C_{\Lambda}^* [C_{\lambda^{1s}} C_{\lambda^{2s}} \cdots C_{\lambda^{ks}}] \times K(\Lambda) \\ &= \sum_{\Lambda \text{ réduite}, \gamma \in \pi_{\ell(\Lambda)}} C_{\Lambda}^* [C_{\lambda^{1s}} \cdots C_{\lambda^{ks}}] \times \frac{z_{\nu^1} \cdots z_{\nu^{\ell(\gamma)}}}{z_{\Lambda}} \prod_{i=1}^{\ell(\gamma)} H^{g_i}(\nu^i). \end{aligned}$$

Exemples 4.3.3.5.

Les formules ci-dessus permettent de calculer effectivement de nombreuses séries d'HURWITZ. On recopie ici quelques résultats donnés dans [14] (adaptés à notre double correction en l'exposant de u) :

$$\begin{aligned} H(\square\square, \square\square) &= \frac{1}{3} H(\square)^3 + 4H(\square\square)^2 + 3H(\square) H(\square\square\square) + 5H(\square\square\square\square) + 2H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}) \\ &\quad + H(\square\square\square) + 2H(\square) H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}) + 8H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}) + 3H(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 2H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}), \\ H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}, \square\square) &= 3H(\square) H(\square\square\square) + 5H(\square\square\square\square) + 2H(\square\square) H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}) + 4H(\square) H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) \\ &\quad + 4H(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + H(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 3H(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 4H(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}), \\ H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}) &= H(\square\square)^2 + 5H(\square\square\square\square) + H(\square)^2 H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}) + H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix})^2 + 3H(\square) H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) \\ &\quad + 9H(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 4H(\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 2H(\square) H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 6H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 6H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) \\ &\quad + H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix})^2 + 2H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 3H(\square) H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 3H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 2H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}) + 3H(\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}). \end{aligned}$$

4.3.4 Une approche pour calculer tous les nombres d'HURWITZ

Les outils développés dans notre travail aboutissent à un algorithme pour calculer tous les nombres d'HURWITZ à travers leurs séries :

1. le corollaire 4.3.3.4 exprime les séries $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ à plusieurs partitions comme polynômes en les séries $H^{g_i}(\lambda)$ à une seule partition ;
2. l'algorithme 2.3.8.3 montre que le calcul de la série $H^g(\lambda)$ se ramène (par compacité) à celui des nombres $h_n^g(\lambda)$ pour un nombre *borné* de n , à savoir $n - |\lambda| \in \llbracket 0, 3g' + \ell(\lambda) \rrbracket$;
3. l'algorithme 4.2.1.1 permet le calcul des nombres $h_n^g(\lambda)$ pour des petites valeurs de n .

Il serait intéressant d'estimer la complexité de l'algorithme ci-dessus et de l'implémenter afin de dresser une grande table de valeurs des nombres d'HURWITZ, à l'instar de celle donnée dans [14] où des dizaines de nombres d'HURWITZ à plusieurs partitions sont exposés jusqu'en genre 4 (avec un n générique).

4.3.5 Une conjecture de KAZARIAN

Dans l'article [28], D. ZVONKINE montrait que tous les nombres d'HURWITZ⁵ étaient de la forme

$$h_n^g(\vec{\lambda}) = \frac{L(n) n^n + P(n) A_n}{n!} \quad (4.66)$$

pour un polynôme de LAURENT L et un polynôme usuel P . Ce résultat est un corollaire immédiat des proposition 4.3.3.4 et théorème 2.3.8.1.

Il apparaît qu'en genre nul aucun nombre $h_n^0(\vec{\lambda})$ ne contient du A_n . Cette conjecture était déjà mentionnée dans [28] (Conjecture 5.6) et a été précisée par M. KAZARIAN dans [14].

5. à l'exception des $h_n^1(\emptyset) = \frac{1}{24} \frac{A_n}{n!n}$

Conjecture 4.3.5.1. (KAZARIAN, ZVONKINE)

Les nombres $k_n^{T_n^0(\Lambda)}(\Lambda)$ sont tous de la forme

$$k_n^{T_n^0(\Lambda)}(\Lambda) = L(n) \frac{n^{n-\text{ht } \Lambda-3}}{(n-||\Lambda||)!} \quad (4.67)$$

où L est un polynôme de LAURENT à coefficients entiers de degré $\text{dc } \Lambda$.

Par exemple, pour la multipartition

$$\Lambda := (\square \square \square \square \square \square) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & 5 \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$$

de taille 8, dont le défaut de coloriage est nul et donc de hauteur sa ramification $\text{rf } \Lambda = 3$, M. KAZARIAN annonce que

$$k_n^{2n-5}(\Lambda) = \frac{16}{3} (3n+26) \frac{n^{n-9}}{(n-10)!}, \quad (4.68)$$

ce qui se réécrit bien sous la forme $\frac{16}{3} \left(3 + \frac{26}{n}\right) \left(1 - \frac{8}{n}\right) \left(1 - \frac{9}{n}\right) \frac{n^{n-\text{ht } \Lambda-3}}{(n-||\Lambda||)!}$ où le polynôme du milieu est de degré $\text{dc } \Lambda = 0$.

On pourrait penser que la proposition 4.3.3.1 nous aiderait en regardant les produits de $H^0(\nu^i)$ mais il n'en est rien. En effet, dans le développement de la série (annoncé par M. KAZARIAN)

$$\text{Coef}_{u^{-\frac{5}{2}}} K(\square \square \square \square \square \square) = 24H^0\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}\right)^2 + 48H^0\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) H^0\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}\right) + 48H^0(\square) H^0\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right), \quad (4.69)$$

les produits de $H^0(\nu^i)$ qui apparaissent contiennent chacun des termes en A_n : ces derniers ne disparaissent qu'après sommation.

Cette conjecture a été vérifiée par M. KAZARIAN sur des centaines de cas.

Nous ignorons toutefois comment l'aborder. Et c'est avec elle que nous souhaitons clore ce chapitre final.

Chapitre 5

Conclusion

« Continuer quelque chose bon an mal an, par la pluie et le beau temps, sans être perturbé par des idées stériles, bouleversé par l'émotivité, égaré par la cupidité, marcher en avant d'un pas assuré et silencieux, afin de donner le maximum de la vie qu'on a reçue, voilà ce que fera l'homme indépendant et libre. » (I. TSUDA, *La voie du dépouillement*)

Notre présentons dans cette courte conclusion plusieurs perspectives s'ouvrant à la suite de notre travail.

1. *Compiler une table de valeurs* des nombres d'HURWITZ à l'aide des algorithmes trouvés exposés à la section 4.3.4. (Les notes de [14] en contenaient une grande partie.)
2. Préciser la complexité de l'algorithme 4.2.1.1 en *minorant le nombre* $|\mathfrak{Y}_n^s|$ de multipartitions de taille n donnée, à défaut d'en *obtenir une asymptotique* à l'instar de (1.64) (nous conjecturons l'existence d'une constante $b > 0$ indépendante de n telle que $b^n \leq |\mathfrak{Y}_n^s|$).
3. *Finir le calcul* de la série $H^0(\mathfrak{I}a, \mathfrak{I}b)$. Peut-être les techniques de $A = B$ pourraient s'appliquer, peut-être l'accès aux nombres $h_n^0(\mathfrak{I}a, \mathfrak{I}b)$ sera-t-il plus aisé en remplaçant les puissances de Y par leur valeurs connues.
4. Comprendre les *conditions d'entrelacement* apparaissant dans la formule de KAZARIAN (4.65) et notre formule de récurrence 3.3.1.1 explicitée.
5. Calculer des matrices de classes de permutations scindées autres que celle $C_{\square\square^s}$ des transpositions totalement scindées, par exemple celle $C_{\square\square\square^s}$ des 3-cycles totalement scindés, afin de tester la résistance des obstacles théoriques exposés en 4.1.3.2.
6. Comprendre dans la formule de FROBENIUS la somme $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\Lambda \cap C_\lambda}} \chi^\Lambda(\sigma)$, plus précisément le *domaine de sommation* formé des permutations du sous-groupe de YOUNG $\coprod \mathfrak{S}_{[\pi_\Lambda]_i}$ qui sont de type λ . (Nous ne nous faisons pas d'illusion, la complexité de cette somme est au moins celle de la détermination des caractères des parts de la multipartition Λ .)
7. Comprendre mieux les constantes c_g en jeu dans l'asymptotique des nombres d'HURWITZ. Il s'agirait de donner une *interprétation combinatoire* à la récursion

$$\alpha_g = \frac{25g^2 - 1}{12} \alpha_{g-1} + \frac{1}{2} \sum_{p+q=g-1}^{p,q \geq 0} \alpha_p \alpha_q$$

où les α_{g-1} sont une renormalisation des c_g . Cette question a déjà été soulevée à la fin de la thèse [4].

8. *Interpoler les asymptotiques* connues des nombres $h_n^g(\lambda)$ lorsque le degré n et le genre g tendent *simultanément* vers l'infini.
9. Une autre approche algébrique, non mentionnée dans ce mémoire, serait de munir les constellations d'une *structure d'algèbre de HOPF*. Une telle approche s'est déjà révélée fructueuse dans de nombreux autres domaines combinatoires, comme en témoigne le chapitre 2 de la thèse [9] où l'on trouvera une introduction claire aux algèbres de HOPF combinatoires. Ces dernières pourraient par exemple éclairer les preuves des formules de réduction 3.3.1.1 et (4.65) où une constellation se casse en plusieurs constellations par composition de certains de ses facteurs.

10. Prouver la **conjecture de KAZARIAN** selon laquelle, en genre nul, tous les nombres de KAZARIAN sont en genre nul de la forme

$$k_n^{T_n^g(\Lambda)}(\Lambda) \stackrel{?}{=} \frac{P_\Lambda(n) n^n}{n!} \text{ pour un certain polynôme } P_\Lambda.$$

Peut-être mieux comprendre la matrice de passage (2.20) de la suite des puissances de Z à celle des dérivées successives de Z et Z^2 pourrait y contribuer.

11. Prouver les **conjectures de MÉLIOT** sur les *bornes* des nombres d'HURWITZ. Ces conjectures sont apparues lors d'un travail récent de P.-L. MÉLIOT et V. FÉRAY portant sur les cumulants des caractères aléatoires des groupes symétriques. Les auteurs souhaitent, afin de majorer les cumulants, certaines bornes fines sur les nombres d'HURWITZ, lesquelles font l'objet des conjectures de MÉLIOT.

Bibliographie

- [1] V. I. Arnold. Topological classification of complex trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with an equal number of vertices and edges. *Functional Analysis and its Applications*, 30(1) :1–14, 1996.
- [2] Edward A. Bender, Zhicheng Gao, and L. Bruce Richmond. The map asymptotics constant t_g . *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15(1)(R51), Mar 27 2008.
- [3] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, and V. Maillot. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*. Masson, 1997 (2e édition).
- [4] G. Chapuy. Combinatoire bijective des cartes en genre supérieur. Master's thesis, École Polytechnique, Jun 9 2009.
- [5] T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, and A. Vainshtein. Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves. *Inventiones Mathematicae*, 106 :297–327, 2001. arxiv :math.AG/0004096.
- [6] Shalosh B. Ekhad and John E. Majewicz. A short WZ-style proof of abel's identity. *The electronic Journal of Combinatorics*, 3(2)(R16), 1996.
- [7] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [8] E. Getzler. Operads and moduli spaces on genus 0 riemann surfaces, 2008. The Moduli spaces of Curves.
- [9] S. Giraudo. Combinatoire algébrique des arbres. Master's thesis, Université Marne-la-Vallée, Dec 8 2011.
- [10] J. Harer and D. Zagier. The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Inventiones Mathematicae*, 85 :457–485, 1986.
- [11] A. Hurwitz. Über die anzahl der riemann'schen flächen mit gegebenen verzweigungspunkten. *Mathematische Annalen*, 55 :53–66, 1902.
- [12] V. Ivanov and S. Kerov. The algebra of conjugacy classes in symmetric groups, and partial permutations. *Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI*, 256 :95–120, 1999. in Representation Theory, Dynamical Systems, Combinatorial and Algorithmical Methods III.
- [13] G. James and A. Kerber. *The representation of the symmetric group*, volume 141. Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, 1981.
- [14] M. Kazarian. On computations of Hurwitz numbers. Unpublished (in Russian).
- [15] S. Lando and A. Zvonkin. *Graph on surfaces and their applications*. Springer, 2004.
- [16] P.-L. Méliot. Partitions aléatoires et théorie asymptotique des groupes symétriques, des algèbres de Hecke et des groupes de Chevalley finis. Master's thesis, Université Paris-Est, Dec 17 2010.
- [17] A. Okounkov and R. Pandharipande. Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and Matrix models, I. 2001. arXiv :math/0101147v2 [math.AG].
- [18] G. Ringel. *Map Color Theorem*. Springer, 1974.
- [19] G.-C. Rota. On the foundations of combinatorial theory i : Theory of Möbius functions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 2 :340–368, 1964.
- [20] M. Sage. Asymptotics of several-partition Hurwitz numbers. *DMTCS Proceedings, FPSAC*, 2011.
- [21] S. Seo and H. Shin. Annular noncrossing partitions of type b and minimal transitive factorizations of a permutation. 2012. arXiv :1201.5703v1.
- [22] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1998 (5e édition). Paris.
- [23] S. Shadrin, M. Shapiro, and A. Vainshtein. On double hurwitz numbers in genus 0. arXiv :math/0611442.
- [24] S. Shadrin, L. Spitz, and D. Zvonkine. On double hurwitz numbers with completed cycles. arXiv :1103.3120.
- [25] V. Strehl. Minimal transitive products of transpositions – the reconstruction of a proof of a. hurwitz. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, page [http ://www.emis.de/journals/SLC/wpapers/s37strehl.html](http://www.emis.de/journals/SLC/wpapers/s37strehl.html), 1997.

- [26] E. Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. *Journal of differential geometry*, 1 :243–310, 1991.
- [27] A. Zvonkin. Matrix integrals and map enumeration : An accessible introduction. <http://www.labri.fr/perso/zvonkin/Research/matrixint.pdf>.
- [28] D. Zvonkine. Counting ramified coverings and intersection theory on hurwitz spaces II. 2003. arxiv :math.AG/0304251.
- [29] D. Zvonkine. An algebra of power series arising in the intersection theory of the moduli spaces of curves and in the enumeration of ramified coverings of the sphere. 2004. arxiv :math.AG/0403092.
- [30] D. Zvonkine. Enumeration of ramified coverings of the sphere and 2-dimensional gravity. 2005. arxiv :math.AG/0506248.
- [31] D. Zvonkine. Intersection theory of moduli spaces of stable curves, Mar 1 2008. Lecture given during the *Journées mathématiques de Glanon*.

Index

- ABEL (identité), 59
- achevé (ordre), 18
- algèbre
 - $\mathbb{Q}[Y]$, 53
 - $\mathbb{Q}[Z]$, 54
 - déformée $\mathbb{Q}[Y_\lambda, Z_\mu]$, 59
 - de ZAGIER-ZVONKINE $\mathcal{A} := \mathbb{Q}[Y, Z]$, 8, 51
 - de cohomologie $H^*(O)$ d'un orbifold O , 73
 - des invariants $\mathcal{A}_n$ des permutations scindées, 44, 45
 - des invariants A^G sous l'action d'un groupe G , 22
 - engendrée $A[M]$ par un monoïde M , 22
- algorithme pour calculer les nombres d'HURWITZ à une partition, 11, 124
- anti-morphisme, 17
- arbre
 - de CAYLEY, 52
 - enraciné, 52
- arrangement, 20
- asymptotique
 - dans l'algèbre de ZAGIER-ZVONKINE, 56
 - des nombres d'HURWITZ, 11, 85
 - des nombres d'HURWITZ à une partition, 11, 86, 95, 100, 123
 - des puissances de Y et Z , 56
- caractère χ (d'une représentation), 25
- caractéristique χ d'EULER-POINCARÉ, 64
- cardinal
 - Z_Λ du centralisateur d'une multipartition Λ , 34, 44
 - z_λ du centralisateur d'une partition entière λ , 28, 29
 - $\#E$ ou $|E|$ d'un ensemble E , 16
- carte, 1, 63
 - combinatoire, 70
 - duale, 63
- chevron, 16
- chevron $<$ $>$
 - asymptotique $\langle \tau_2^{3k} \rangle$ d'HURWITZ, 85, 96
 - de WITTEN $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$, 74
- classe
 - $C_{(2)}^5$ des transpositions totalement scindées, 9, 118, 120
 - de CHERN (ψ_k ou λ^i), 74
 - de cohomologie (d'un orbifold), 73
 - de degré pur, 73
 - homogène, 73
 - de conjugaison, 22, 23
 - C_Λ de permutations scindées, 9, 44
 - C_λ d'une partition entière λ , 28, 29
- coefficient
 - A_n de la série Z^2 , 54
 - binomial $\binom{a}{n}$, 18
 - de structure, 19, 24
 - de $\mathcal{A}_n$, 117
 - universel $C_\Lambda^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}]$, 132
 - multinomial $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$, 19
- coin (d'un diagramme), 31
- compacité de $\mathbb{Q}[Z]$ dans $\mathbb{Q}[[t]]$, 8, 56, 80, 139
- compactifié $\overline{\mathcal{M}}_n^g$ de DELIGNE-MUMFORD de $\mathcal{M}_n^g$, 73
- complétée
 - $\overline{\Lambda}$ d'une multipartition Λ , 33
 - $\overline{\lambda}$ d'une partition entière λ , 27, 29
- composition (d'un entier), 25
- concaténation $\sqcup$
 - de multipartitions, 32
 - de partitions entières, 27, 29
- condition d'entrelacement, 11, 103, 141
- conjecture
 - de KAZARIAN-ZVONKINE, 139, 142
 - de MÉLIOT, 142
- constante
 - asymptotique c_g d'HURWITZ, 11, 85, 96, 99, 141
 - universelle t_g de BENDER-GAO-RICHMOND, 11, 85, 99
- constellation, 3, 67
- contenu
 - $c(\Lambda)$ d'une multipartition Λ , 32, 34, 36, 120
 - $c(\lambda)$ d'une partition entière λ , 26, 29
 - d'une case (d'un diagramme), 26
- coordonnée $b^*[x]$ d'un vecteur x dans une base (b) , 19
- courbe marquée, 73
- $c. q. f. d.$, 16
- cycle
 - d'une multipartition, 32
 - d'une partition ensembliste, 37
 - d'une partition entière, 27
 - d'une permutation, 21
- cycle fixe
 - d'une partition entière, 27
 - d'une permutation, 21
- cycle $\mathfrak{s}$ -fixe (d'une multipartition), 32
- défaut de coloriage de Λ d'une multipartition Λ , 32, 34
- degré
 - d'une constellation, 67
 - d'une face, 63
- diagramme
 - de FERRERS, 26

- de YOUNG, 3, 26
- dimension $\dim \lambda$ d'une partition entière λ , 27, 29
- Dirac δ_b^a , 21
- éléments ξ_k de YOUNG-JUCYS-MURPHY, 31
- ensemble
 - F^E des applications de E vers F , 16
 - $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E , 16
 - $\mathfrak{P}_E$ ou $\mathfrak{P}_n$ des partitions ensemblistes, 37
 - $\mathfrak{P}$ ou $\mathfrak{P}_n$ des partitions entières, 26
 - $\mathfrak{P}^s$ ou $\mathfrak{P}_n^s$ des multipartitions, 32
- entrelacées $\wr$ (partitions ensemblistes), 40
- entrelacement, 40
- équerre (d'une case), 26
- espace des modules $\mathcal{M}_n^g$, 73
- face (d'une carte), 63
- facteur d'HURWITZ $\boxed{\lambda}$ d'une partition entière λ , 5, 27, 29
- factorielle
 - $\lambda!$ d'une partition entière λ , 27, 29
 - $\pi!$ d'une partition ensembliste π , 37
 - $n!$ d'un entier n , 18
- feuille (d'un revêtement), 3, 65
- fibré de HODGE, 74
- fine (partition ensembliste), 39
- fixateur (sous une action de groupe), 22
- fonction
 - d'EULER Γ , 19
 - de LAMBERT W , 52
 - de MÖBIUS
 - μ d'un ordre fini, 18
 - $\mu(\Lambda)$ d'une multipartition Λ , 34
 - $\mu\left(\frac{\pi}{\varpi}\right)$ entre partitions ensemblistes π et ϖ , 42
- symétrique
 - élémentaire e_k , 19
 - puissance p_k , 19
- forme (d'un tableau), 30
- formule
 - (Z -) de KAZARIAN, 95
 - d'EULER, 64
 - d'HURWITZ, 4, 5
 - de FROBENIUS, 9, 25, 123, 141
 - de HARDY et RAMANUJAN, 30
 - de RIEMANN-HURWITZ, 5, 66, 70, 133
 - de ROTA, 18
 - de réduction, 11, 101, 102, 112, 138, 141
 - ELSV, 6, 78
- g -tore, 62
- genre, 1, 62, 133
 - g' décrétementé, 5, 62
 - d'une carte, 63
 - d'une constellation, 67
- graphe plongé, 63
- grossière (partition ensembliste), 39
- groupe
 - cartographique, 68
 - symétrique $\mathfrak{S}_E$ ou $\mathfrak{S}_n$, 20
- symétrique infini $\mathfrak{S}_\infty$, 21
- hauteur
 - ht Λ d'une multipartition Λ , 32, 34, 45
 - d'un arbre de CAYLEY 2-enraciné, 55
 - d'une permutation, 28
 - totale A_n des arbres de CAYLEY à n sommets, 56
- idempotent de YOUNG e_T d'un tableau T , 30
- i. e.*, 16
- inégalités $F, G \leq \pi, \varpi, \omega$, 17
- infimum* $\wedge$, 18
- instable (couple), 94
- intégrale de HODGE, 7, 74
 - primitive, 75
- intégration des classes de cohomologie (d'un orbifold compact), 73
- invariant (sous une action de groupe), 17
- isomorphisme
 - o d'oubli, 47, 122
 - de constellations, 68
 - de courbes marquées, 73
 - de revêtements, 65
- JOYAL, 52
- lacet (autour d'un point base), 3, 68
- longueur
 - $\ell(\lambda)$ d'une partition entière λ , 27, 29
 - $\ell(\pi)$ d'une partition ensembliste π , 37
 - lg Λ d'une multipartition Λ , 32, 34
 - d'un cycle d'une permutation, 21
 - d'une constellation, 67
 - d'une valeur critique, 65
 - de deux partitions entrelacées, 41
- magma, 17
- méthode des caractéristiques, 83
- module de SPECHT V_λ d'une partition entière λ , 30
- monodromie (d'un revêtement ramifié), 3, 68
- morphisme
 - d'ordres achevés, 18
 - d'oubli, 47
- multi-ensemble $\wr$, 20
- multipartition, 9, 32
- multiplicité
 - $m_\lambda(\Lambda)$ d'une partition λ dans une multipartition Λ , 32
 - $m_k(\lambda)$ d'un entier k dans une partition entière λ , 27, 29
 - $m_k(\pi)$ d'un entier k dans une partition ensembliste π , 37
- nombre
 - de KAZARIAN $\mathbb{k}_n^g$ ou $k_n^g(\Lambda^1, \dots, \Lambda^k)$, 133
 - de blocs $b(\Lambda)$ d'une multipartition Λ , 34
 - de couleurs d'une multipartition, 32
 - de cycles $cy \Lambda$ d'une multipartition Λ , 32, 34
 - de multipartitions $|\mathfrak{P}_n^s|$, 35, 141
 - de partitions ensemblistes $|\mathfrak{P}_n|$, 37

- de partitions entières $|\mathfrak{Y}_n|$, 30
- de symétries $|\mathrm{Sym} \lambda|$ d'une partition entière λ , 29
- de symétries scindées $|\mathrm{Sym}^s \Lambda|$ d'une multipartition Λ , 33, 34
- de transpositions T_n^g , 5, 70, 72, 133
- nombre d'HURWITZ
 - entier $h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, 5, 70, 117, 123, 141
 - normalisé $\mathbb{H}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, 5, 71, 72
 - rationnel $h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, 5, 70
 - simple sphérique $\mathbb{H}_n^0(\lambda)$, 87
 - simple torique $\mathbb{H}_n^1(\lambda)$, 88
- numérotation standard (des parts d'une partition ensembliste), 38
- opérateur différentiel D , 52
- orbifold, 73
- orbite
 - d'un sous-groupe engendré, 17
 - d'une partition ensembliste, 37
 - d'une permutation, 21
- ordre cyclique (des arêtes autour d'un sommet), 63
- ordre de grossièreté, 39
- ordre de raffinement, 39
- PAINLEVÉ I (équation), 85, 96
- part
 - cyclique d'une multipartition, 136
 - d'une multipartition, 32
 - d'une partition ensembliste, 37
 - d'une partition entière, 27
- partie $\mathcal{A}^Z$, 58
- partition
 - (totale) scindée λ^s d'une partition entière λ , 33
 - d'un ensemble, 37
 - ensembliste, 37
 - entière, 26
 - orbitale, 38
 - scindée, 9, 32
- partition ensembliste standard
 - π_Λ d'une multipartition Λ , 34, 38
 - π_λ d'une partition entière λ , 29, 38
- passport (d'une constellation), 67
- permutation, 20
 - colorée, 8, 43
 - scindée, 8, 43
- permutation standard
 - σ_Λ d'une multipartition Λ , 33, 34
 - σ_λ d'une partition entière λ , 27, 29
- pique (demi-arête), 69
- point
 - base, 3, 68
 - de ramification, 3, 65
 - fixe, 21
- problème d'HURWITZ, 3, 5
- produit
 - de convolution, 22
 - disjoint (de permutations), 21
 - tensoriel, 16, 22
- profil
 - $|\Lambda|$ d'une multipartition Λ , 32
 - d'une partition ensembliste, 37
 - d'une permutation, 28
 - d'une permutation scindée, 43
- projecteur (sur les invariants), 23, 44
- pseudo-inverse, 17
 - D^{-1} de l'opérateur différentiel D , 52
- puissance
 - croissante $a^{\uparrow k}$ ou $a^{\uparrow\uparrow k}$, 18
 - décroissante $a^{\downarrow k}$ ou $a^{\downarrow\downarrow k}$, 18
- ramification
 - rf Λ d'une multipartition Λ , 32, 34
 - $\wp(\lambda)$ d'une partition entière λ , 27, 29
 - $\wp(\sigma)$ d'une permutation σ , 28
 - d'un revêtement ramifié, 65
 - d'une constellation, 67
 - d'une partition ensembliste, 37
 - d'une valeur critique, 65
- rang (d'une permutation), 28
- réduit(e)
 - monoïde, 22
 - multipartition, 33
 - partition entière, 27
- réduite
 - $\hat{\Lambda}$ d'une multipartition Λ , 33
 - $\hat{\lambda}$ d'une partition entière λ , 27, 29
 - acyclique $\hat{\Lambda}$ d'une multipartition Λ , 136
- relation
 - d'EULER, 4
 - des cordes, 75
 - du dilaton, 75
- représentation linéaire, 25
 - irréductible, 25
 - des permutations, 30
 - des permutations scindées, 49
- revêtement ramifié (de la sphère), 2, 65
- série
 - $Y := \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n$, 52
 - $Z := \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} t^n$, 52
 - de KAZARIAN $K(\Lambda^1, \dots, \Lambda^k)$, 134, 135
 - de WITTEN $W(t_0, t_1, t_2, \dots)$, 78
- série d'HURWITZ
 - complétée $H^g(\overline{\lambda^1}, \dots, \overline{\lambda^k})$, 71, 102
 - double sphérique $H^0(\langle a \rangle, \langle b \rangle)$, 86, 112, 141
 - normalisée $\mathbb{H}^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, 71
 - simple $\mathbb{H}^g(\lambda)$, 80
 - simple sphérique $\mathbb{H}^0(\lambda)$ ou torique $\mathbb{H}^1(\lambda)$, 89
 - totale $H(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, 71, 72
 - usuelle $H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, 5, 71, 138
- signature
 - $\varepsilon(\lambda)$ d'une partition entière λ , 27, 29
 - $\varepsilon(\pi)$ d'une partition ensembliste π , 37
 - $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ , 28
- sous-groupe de YOUNG
 - $\mathfrak{S}_\lambda$ d'une partition entière λ , 27, 29
 - $\mathfrak{S}_\pi$ d'une partition ensembliste π , 37

- d'une famille d'ensembles, 21
- stabilisateur (sous une action de groupe), 22
- stable (couple), 73
- structure de l'algèbre
 - $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\pi]$ d'un sous-groupe de YOUNG, 42
 - $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ des permutations, 30
 - $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ des permutations scindées, 9, 48
- support $S\sigma$ ou $\text{Supp}\sigma$ d'une permutation σ , 21
- supremum* $\vee$, 18
- surface, 62
- symétrie
 - d'une constellation, 68
 - d'une famille, 20
 - des nombres d'HURWITZ, 118
- symétrie scindée (d'une multipartition), 33, 34
- tableau standard, 30
- taille
 - $|\lambda|$ d'une partition entière λ , 27, 29
 - $||\Lambda||$ d'une multipartition Λ , 34
 - $|\pi|$ d'une partition ensembliste π , 37
- théorème
 - de KAZARIAN, 7, 80
 - de KONTSEVITCH, 78
- totalelement scindée (multipartition), 33
- transposition, 21
- type (cyclique), 3
 - type $\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}$ d'une permutation scindée $\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}$, 43
 - type π d'une partition ensembliste π , 37
 - type σ d'une permutation σ , 28
 - d'une constellation, 67
 - de ramification, 3
 - de ramification (d'une valeur critique), 65
- union disjointe $\sqcup$
 - externe, 16
 - interne, 16
- valeur critique (d'un revêtement ramifié), 65
- Z -égalité $\stackrel{Z}{=}$, 58