

UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR
Ecole doctorale des sciences exactes et leurs applications

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

Docteur(e) de l'UPPA

Discipline : Génie Civil

par

Laura Beatriz ROJAS SOLANO

Endommagement non-local, interactions et effets d'échelle

soutenue le 07 décembre 2012 devant le jury composé de

GATUINGT Fabrice	Professeur, LMT, ENS Cachan	Rapporteur
MOREL Stéphane	Professeur, I2M, Université de Bordeaux 1	Rapporteur
GRASSL Peter	Senior Lecturer, University of Glasgow	Examineur
GRÉGOIRE David	Maître de Conférences, LFC-R, UPPA	Co-directeur
KONDO Djimedo	Professeur, UPMC, Université Paris 6	Examineur
LOUKILI Ahmed	Professeur, GeM, Centrale Nantes	Examineur
PIJAUDIER-CABOT Gilles	Professeur, LFC-R, UPPA	Directeur

Remerciements

Dire merci semble être si naturel, si courant et parfois tellement banal que tant le "remerciant" comme "le remercié" peuvent oublier de donner la véritable ampleur à la chose. Aujourd'hui j'ai l'opportunité de manifester ouvertement ma gratitude, alors j'en profite.

Traditionnellement, les premières lignes des remerciements dans un document de ce genre vont adressées au directeur de thèse. Ici, ce que l'on pourrait considérer comme un simple formalisme prend pour moi tout son sens. Gilles Pijaudier-Cabot m'a non seulement donné l'opportunité de devenir un membre actif d'une équipe de recherche mais bien plus que cela. Il a su cerner mes capacités, mes difficultés et mes besoins dès le début et a toujours fait son possible pour mettre en place les moyens scientifiques, humains et matériels pour m'accompagner durant ces trois années. Je remercie non seulement sa confiance, sa compréhension et sa patience à toute épreuve; mais également sa disponibilité malgré son agenda toujours aussi chargé. Je crois que ce je tiens vraiment à souligner c'est sa présence dans chaque étape du travail car il ne s'est pas uniquement contenté de donner des directives générales mais il est intervenu activement dans chaque détail de la démarche scientifique ainsi que de ce manuscrit. Merci Gilles pour le bel aperçu que – grâce à votre expérience – vous m'avez donné du monde de la recherche et pour avoir guidé mes premiers pas dans le parcours de chercheur.

Ces trois années ont été riches en expériences et en émotions, en moments durs il faut le dire, mais ô combien de satisfactions accompagnées d'autant de rires, tout ça à côté de mon co-encadrant. David Grégoire et moi sommes arrivés au LFC (aujourd'hui LFC-R) en même temps, à cette époque où nous faisons partie des rares représentants du labo sur la côte. Nous avons partagé le même bureau pendant des longs et froids mois, des journées entières assis côte-à-côte passées à coder et à débbugger, des non moins longues séances d'essais mécaniques devant la Zwick précédées évidemment de tout le boulot de coulage, de démoulage et de stockage des éprouvettes. Nos dos en ont souffert mais ça a valu le coup ! (ohhh non ... maintenant il faut nettoyer !). Je pourrais aussi parler des discussions de travail et de celles de non-travail durant les trajets Pau-Anglet, ou pendant les congrès ou encore pendant les aller-retours des différentes versions de ce présent manuscrit. ... enfin, David a été mon coach scientifique et mon ami. Un encadrant voit évoluer son thésard de la même façon qu'il évolue, lui aussi. Et bien, cela a été mon cas. J'ai pu non seulement voir comme David est passé de postdoctorant à maître de conférences, ou

comme il est passé des cours d'anglais à des cours de MMC, mais je l'ai vu aussi devenir père de famille. Il me semble pertinent maintenant d'adresser quelques mots de remerciement à Marie, Emma et Camille qui ont peut-être "ressenti" un peu les conséquences de cet encadrement. Les filles, je me ferai pardonner, je vous le promets.

Il a tellement évolué "le David" que, à part cette première thèse encadrée, il a maintenant une bonne couvade au bureau 512 car monsieur ne s'est pas contenté de sa première thésarde ... monsieur est devenu un grand garçon et j'ai dû accepter de le partager avec Fadi, Vincent et Laurent. Mais je veux insister sur le fait que, malgré ses occupations croissantes et ses responsabilités, David a été là, vigilant et prêt à m'orienter, me motiver, me tirer les oreilles quand il le fallait (ouuuuh oui, et il a fallu !) ayant comme objectif (du moins c'est ce que je ressens) me tirer vers le haut.

Je remercie également les personnes qui ont bien voulu participer à mon jury de thèse, en particulier Stéphane Morel et Fabrice Gatuingt qui ont accepté la lourde tâche de rapporter ce mémoire. Merci également à Peter Grassl avec qui nous avons eu l'opportunité de collaborer et de compléter nos travaux. Je le remercie de tout ce qu'il a pu nous apporter avec sa façon mésoscopique d'aborder le problème du comportement du béton et d'avoir illustré comment notre base de données expérimentales (dont nous sommes si contents) peut être utilisée dans la validation de modèles numériques. Je le remercie aussi de son accueil lors de mon court séjour scientifique à Glasgow et de son aide pendant ces années d'échange. Enfin je tiens à adresser également un remerciement chaleureux à toute l'équipe du GeM, pour nous avoir accompagné dans les études acoustiques, en amenant dans leurs bagages tout leur matériel et bien évidemment leur savoir-faire.

Je profite de cette occasion pour montrer ma reconnaissance envers Christian La Borderie qui a suivi de très près ma découverte de Cast3m, mes avancements/progrès, mais surtout les (nombreuses) difficultés que j'ai rencontrées dans la phase de modélisation numérique. Toujours présent, à l'écoute et prêt à donner un (grand) coup de main même pendant les vacances, les congrès et tout cela malgré ses occupations. Travailler à tes côtés a été un grand plaisir Christian. Merci pour tout ce que tu as voulu m'apprendre.

Je remercie toute l'équipe enseignante et administrative de l'ISA BTP qui a aussi fait partie importante de mon quotidien.

Les matins se suivaient et se ressemblaient mais cela ne pouvait pas durer ... un jour ils ont débarqué. Ce fut la fin du calme et du silence de la salle 512 soudain remplacés par les déconnales d'Olivier, Romain et Raphaëlle. La paix est partie avec les éclats de rire de Carine et tout le mouvement que Cédric, Bertrand, Fédé et Christelle ont amené dans cette salle (faut cacher la balle ... sinon on ne pourra pas travailler). Vincent, Fadi et Hatem (moins bouillants tout de même) ont su aussi apporter leur touche et leur saveur. Ces deux années de surpopulation dans la salle des thésards sont passées trop vite et j'ai adoré les partager avec vous les jeunes.

Arrivée à ce stade des remerciements, je me dois bien évidemment d'adresser toute ma reconnaissance à cette nombreuse famille qui, depuis La Colombie, a partagé avec moi les bons et les moins bons moments. Merci à mes parents et à mes frères qui m'ont encouragée sans cesse et qui ont dépassé la barrière de la distance pour me faire sentir leur présence. Merci aussi à mes

vieux adoptifs, Jean-Claude et Pierrette, toujours prêts à m'accompagner et à m'épauler en toute circonstance.

Le meilleur pour la fin dit-on. Nicolas ... euh, humm ... pppfff ... tout ce que je pourrais dire me paraît tellement redondant mais bon, je vais suivre le conseil qu'un grand chercheur¹ m'a donné un jour : "il faut dire les évidences". Mon époux, mon ami et mon supporter au quotidien, mon seul et plus fidèle fan. Je ne pourrais pas vivre ce moment de satisfaction pleinement sans toi car grâce à ta présence, ton amour, tes encouragements, tes conseils, tes mots, toute cette confiance que tu as toujours eue en moi ... enfin, TOUTE TON AIDE, j'ai pu aller jusqu'au bout de cette aventure.

Je ne peux m'empêcher de finir cette longue série de remerciements sans adresser une tendre pensée à mon amie Raphaëlle Doré, l'un des plus beaux cadeaux que le Pays Basque m'ait réservé.

*Merci à tou(te)/s
Laura B.*

*a Carlos Mario,
a José Eduardo,
... con todo mi amor*

Table des matières

Remerciements	iii
Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xxi
1 Introduction générale	1
1.1 Introduction et contexte de l'étude	1
1.2 Objectifs et approche scientifique	2
1.3 Organisation du manuscrit	3
2 Matériaux quasi-fragiles et zone d'élaboration	5
2.1 Introduction	6
2.2 Mise en évidence d'une zone d'élaboration	7
2.3 Comportement à la rupture du béton	8
2.3.1 Comportement en compression uniaxiale	8
2.3.2 Comportement en traction uniaxiale	9
2.4 Modélisation du comportement mécanique	11
2.4.1 Modèle d'endommagement du béton	11
2.4.2 La non-localité et le modèle d'endommagement non-local	13
2.5 Questionnements sur le modèle d'endommagement non-local	14
2.5.1 L'effet de bord	14
2.5.2 Description de la discontinuité du déplacement et transition continu/discret	15
2.5.3 L'effet d'échelle	16
2.6 Synthèse et conclusion du chapitre	16
3 Outils pour l'analyse de modèles	17
3.1 Introduction	18

3.2	Rupture dynamique d'une barre en traction	18
3.3	Écaillage	23
3.4	Rupture par flexion 3 points	24
3.4.1	Construction d'une base de données expérimentales pour l'analyse de modèles	24
3.4.1.1	Description du matériau, échantillons et essais mécaniques	24
3.4.2	Résultats expérimentaux	28
3.4.2.1	Éprouvettes entaillées HN	29
3.4.2.2	Éprouvettes entaillées FN	30
3.4.2.3	Éprouvettes non-entaillées UN	30
3.4.3	Modélisation numérique des essais en flexion 3 points	31
3.4.3.1	Description du maillage et des conditions de calcul . . .	31
3.4.3.2	Calibration des paramètres du modèle sur une géométrie de poutre FN	32
3.4.3.3	Capacités du modèle calibré à reproduire l'effet d'échelle et l'effet de bord sur les autres géométries de poutre . .	34
3.5	Analyse des effets d'échelle	35
3.5.1	Une analyse primaire et directe d'effet d'échelle à partir des résultats expérimentaux	38
3.5.2	Analyse par la loi déterministe d'effets d'échelle	39
3.5.2.1	Loi classique de Bažant pour des structures entaillées .	39
3.5.2.2	Loi intrinsèque d'effet d'échelle pour des structures entaillées	42
3.5.2.3	Loi de Bažant pour des structures non-entaillées	44
3.5.2.4	Loi universelle d'effet d'échelle	45
3.6	Synthèse et conclusion du chapitre	46
4	Pistes d'amélioration du modèle d'endommagement non-local	49
4.1	Introduction	50
4.2	Formulations modifiées du modèle d'endommagement non-local	50
4.2.1	Formulations prenant en compte le transfert d'information à travers une zone endommagée	50
4.2.1.1	Atténuation directe d'information non-locale	51
4.2.1.2	Atténuation selon le trajet d'information non-locale . .	51
4.2.2	Formulation basée sur les interactions et la croissance de défauts	52
4.2.3	Formulation prenant en compte l'effet des bords libres	53
4.3	Comparaison entre les différents modèles	54
4.3.1	Résultats obtenus pour chaque modèle à partir de l'exemple de la rupture dynamique d'une barre en traction	55
4.3.1.1	Convergence	56
4.3.1.2	Capacité à décrire une discontinuité forte	56
4.3.1.3	Capacité à décrire la transition continu-discret des champs de déplacement pendant la rupture	56
4.3.2	Performances des modèles combinés	58

4.3.3	Résultats obtenus à partir du test d'écaillage	60
4.4	Synthèse et conclusion du chapitre	62
5	Compréhension du transfert d'information à l'échelle mésoscopique	63
5.1	Introduction	64
5.2	Quel est le rôle de la mésostructure dans la description du comportement mécanique du béton ?	65
5.3	Description du modèle mésoscopique adopté	65
5.3.1	Hypothèses du modèle	65
5.3.2	Construction du maillage	66
5.3.3	Calcul des déplacements des nœuds	66
5.3.4	Modèle d'endommagement utilisé	67
5.4	Modélisation numérique des essais en flexion trois points à l'aide du modèle mésoscopique	69
5.4.1	Description des maillages utilisés	69
5.4.2	Paramètres du modèle et procédure de calcul	70
5.4.3	Résultats des simulation numériques	71
5.5	Synthèse et conclusion du chapitre	72
6	Les interactions à l'échelle macroscopique	75
6.1	Introduction	76
6.2	Interactions et modèle d'endommagement non-local modifié	76
6.2.1	Le concept du calcul d'interactions	77
6.2.2	Formulation du modèle non-local modifié	78
6.3	Validation : cas d'une unique inclusion dans un milieu infini	79
6.3.1	Calcul analytique du champ des déformations	80
6.3.2	Calcul numérique du champ des déformations à partir de la solution d'Eshelby	81
6.4	Cas d'une barre présentant une localisation des défauts	82
6.5	Cas de la rupture dynamique d'une barre en traction	85
6.6	Cas de l'écaillage	88
6.7	Bilan et couplage avec un calcul numérique éléments finis 2D/3D	88
6.8	Premiers calculs en flexion trois points	89
6.9	Synthèse et conclusion du chapitre	91
7	Vers une compréhension plus fine de l'évolution de la FPZ	95
7.1	Introduction	96
7.2	Analyse numérique mésoscopique du béton sous une autre optique	96
7.3	Analyse à partir d'histogrammes	102
7.3.1	Histogrammes de distances relatives entre événements à partir des résultats numériques	102
7.3.2	Analyse expérimentale de la distribution des distances entre points endommagés	106

7.3.2.1	La technique d'émissions acoustiques et le dispositif d'enregistrement	106
7.3.2.2	Essais mécaniques de flexion 3 points avec enregistrement d'émissions acoustiques	109
7.3.3	Histogrammes de distances relatives entre événements à partir de données expérimentales	111
7.3.4	Première comparaison numérique/expérimentale	113
7.4	Synthèse et conclusion du chapitre	113
8	Conclusions générales et perspectives	115
8.1	Conclusion générale	115
8.2	Perspectives	117
A	Détail de la détermination expérimentale des propriétés mécaniques du béton utilisé	127
B	Résultats bruts des essais de flexion 3 points	131
C	Analyse d'effets d'échelle à partir de la base de données expérimentale	135
C.1	Détails de l'analyse avec la loi classique de Bažant pour des structures entaillées	135
C.1.1	Détails de l'analyse avec la loi de Bažant pour des structures non-entaillées	136
C.1.2	Détails de l'analyse avec la loi universelle de Bažant	136
D	Maillages des structures entaillées et non-entaillées pour le modèle classique d'endommagement non-local	139
E	Calcul détaillé des composantes du tenseur d'Eshelby pour le cas d'une inclusion cylindrique dans un milieu infini	143
E.1	Calcul des composantes du tenseur d'Eshelby	143
E.2	Composantes à l'extérieur de l'inclusion	144
E.3	Calcul du tenseur des déformations	146
E.3.1	Déformations à l'intérieur de l'inclusion	146
E.3.2	Déformations à l'extérieur de l'inclusion	146
F	Analyse à partir histogrammes des distances relatives entre points endommagés	149
G	Paramètres des signaux d'émission acoustique	155
H	Essais de flexion 3 points avec enregistrement d'émissions acoustiques – Résultats bruts et caractérisation mécanique	157

I Dépouillement en terme d'histogrammes des distances relatives à partir de données expérimentales

161

Table des figures

2.1	Comportements non linéaires et types de zones de fracturation [7]	7
2.2	Surface seuil du modèle de Mazars dans le plan des contraintes principales [38].	12
2.3	Comportement en traction et en compression du béton [38]	13
2.4	Volume associé au calcul de la moyenne non-locale près d'un bord. . . .	15
3.1	Schéma du cas test d'une barre libre soumise à un chargement de traction et propagation d'une onde de déformation à l'intérieur de la barre. . . .	19
3.2	Évolution temporelle des profils d'endommagement.	21
3.3	Convergence des profils d'endommagement avec le nombre d'éléments. . . .	21
3.4	Distance entre les profils de déformation théorique et calculée.	22
3.5	Évolution de la déformation en fonction du rapport taille d'élément/longueur interne au moment de la rupture.	22
3.6	Schéma du cas test de l'écaillage et propagation de l'onde de déformation à l'intérieur de la barre pour la formation de l'écaille.	23
3.7	Profil d'endommagement au bord - Modèle non-local original [47]. . . .	24
3.8	Courbe granulométrique des composants du mélange utilisé pour la confection des échantillons.	25
3.9	Essai de compression sur l'éprouvette #262, gâchée #2.	26
3.10	Influence de l'âge sur les propriétés mécaniques : (a) résistance à la compression; (b) résistance à la traction par fendage; (c) module de Young; (d) coefficient de Poisson.	27
3.11	Détails de la géométrie des éprouvettes testées pour la construction d'une base de données expérimentale.	28
3.12	Schéma de la mesure du CMOD pour les éprouvettes (a) entaillées; (b) non-entaillées.	28
3.13	Courbes brutes obtenues à partir des mesures de chaque capteur pendant un essai : (a) géométrie et mesures; (b) force-CMOD; (c) force-déflexion; (d) déflexion-CMOD.	29

3.14	Courbes moyennes (a) en effort et (b) en contrainte dans le ligament en fonction du CMOD – poutres HN.	30
3.15	Courbes moyennes (a) en effort et (b) en contrainte dans le ligament en fonction du CMOD – poutres HN.	31
3.16	Courbes moyennes (a) en effort et (b) en contrainte dans le ligament en fonction du CMOD – poutres UN.	31
3.17	Maillage et conditions de bord typiques considérés dans le calcul macroscopique ($n = 4, i = 1$).	32
3.18	Capacité du modèle macroscopique à reproduire l’effet d’échelle sur les éprouvettes de géométrie FN.	33
3.19	Description de l’effet d’échelle des poutres HN avec les paramètres calibrés sur la géométrie FN.	34
3.20	Description de l’effet d’échelle des poutres UN avec les paramètres calibrés sur la géométrie FN.	35
3.21	Influence des conditions de bord sur le modèle calibré.	35
3.22	Nomenclature et géométrie d’une poutre entaillée.	37
3.23	Représentation d’une analyse primaire d’effet d’échelle – $D_0 = 400mm$	38
3.24	Influence du rapport a_0/D sur les paramètres d’effet d’échelle.	41
3.25	Postraitement des échantillons entaillés avec la loi classique d’effets d’échelle.	42
3.26	Interpolation des résultats des géométries FN à partir des résultats des géométries HN.	42
3.27	Postraitement pour le cas de structures entaillées avec la loi intrinsèque d’effet d’échelle.	43
3.28	Postraitement pour des structures non-entaillées avec la loi d’effet d’échelle.	44
3.29	Résultats de l’ajustement des données expérimentales avec la loi universelle de Bažant donnée par l’équation 3.16a.	45
4.1	Schéma du cas test d’une barre libre soumise à un chargement de traction (copie de la figure 3.1).	55
4.2	Résultats des tests de convergence sur les différentes formulations modifiées.	57
4.3	Capacité des formulations modifiées à décrire une discontinuité forte.	58
4.4	Capacité des formulations modifiées à décrire la transition continu-discret.	58
4.5	Comportement en terme de convergence des combinaisons entre formulations modifiées.	59
4.6	Capacité des combinaisons de formulations à décrire une discontinuité forte.	60
4.7	Comparaison de la réponse près d’un bord entre la formulation originale et la combinaison Path_att_old (équation 4.3)–Growing_voids (équation 4.4).	61

5.1	Maillage mésoscopique typique : (a) Ensemble d'éléments (lignes continues) avec les sections transversales (lignes discontinues) obtenues à partir de la tessellation de Voronoi sur le domaine. (b) Arrangement des éléments autour des granulats (inclusions); (c) et (d) Un élément lattice dans le système global de coordonnées [24].	67
5.2	Détails de l'approche mésoscopique [22].	68
5.3	Géométries des poutres modélisées sous un chargement en flexion 3 points. (a) Poutres entaillées (b) Poutres non-entaillées [22].	70
5.4	Comparaison des courbes de chargement numériques et expérimentales pour les poutres entaillées ayant un rapport $\alpha = 0.5$ et pour les quatre tailles $D = 50mm, 100mm, 200mm$ et $400mm$	71
5.5	Comparaison des courbes de chargement numériques et expérimentales pour les poutres entaillées ayant un rapport $\alpha = 0.2$ et pour les quatre tailles $D = 50mm, 100mm, 200mm$ et $400mm$	72
5.6	Comparaison des courbes de chargement numériques et expérimentales pour les poutres entaillées ayant un rapport $\alpha = 0$ et pour les quatre tailles $D = 50mm, 100mm, 200mm$ et $400mm$	73
6.1	Schéma du problème aux conditions aux limites utilisé pour le calcul d'interactions.	77
6.2	Barre en traction vue comme un ensemble d'inclusions.	77
6.3	Schéma de principe du calcul d'interactions.	78
6.4	Conditions aux limites pour le calcul d'interactions.	80
6.5	Maillage utilisé par la validation du calcul des interactions.	80
6.6	Comparaison des déformations principales obtenues numériquement et analytiquement - Cas d'une unique inclusion cylindrique dans un milieu infini.	82
6.7	Comportement de la fonction poids calculée à partir des interactions (endommagement nul).	83
6.8	Contributions non-locales près d'une zone endommagée.	84
6.9	Schéma de l'influence du rapport taille inclusion/largeur de la bande dans la modélisation à partir des interactions.	84
6.10	Convergence du profil d'endommagement obtenu de la formulation basée sur le calcul d'interactions	86
6.11	Vérification de la discontinuité du déplacement. Comparaison entre les modèles : original, combiné, et avec interactions.	87
6.12	Capacité d'un modèle à décrire la transition continu – discret	87
6.13	Influence des effets de bord sur la performance des différentes formulations non-locales	88
6.14	Organigramme de calcul mécanique avec la nouvelle formulation basée sur les interactions.	90
6.15	Maillage et conditions de bord considérés dans le calcul de validation du nouveau modèle en 2D.	91

6.16	Comparaison des courbes de chargement expérimentales et numériques avec le modèle classique et avec le nouveau modèle proposé. En abscisse le CMOD (mm) et en ordonnées l'effort (kN).	91
6.17	Evolution temporelle des répartitions d'endommagement pour les deux formulations étudiées.	92
7.1	Courbe de chargement (moyenne de 100 analyses) pour une poutre entaillée de géométrie HN ($\alpha = 0.5$) et de hauteur $D = 400mm$. La FPZ est observée à trois états différents de chargement [22].	97
7.2	Trajectoire d'endommagement pour l'exemple de la plus grande poutre entaillée de géométrie HN ($\alpha = 0.5, D = 400$). État 1 de chargement indiqué sur la figure 7.1 [22]. Exemple correspondant à trois tirages aléatoires de la méso-structure.	97
7.3	Trajectoire d'endommagement pour l'exemple de la plus grande poutre entaillée de géométrie HN ($\alpha = 0.5, D = 400$). État 2 de chargement indiqué sur la figure 7.1 [22]. Exemple correspondant à trois tirages aléatoires de la méso-structure.	97
7.4	Trajectoire d'endommagement pour l'exemple de la plus grande poutre entaillée de géométrie HN ($\alpha = 0.5, D = 400$). État 3 de chargement indiqué sur la figure 7.1 [22]. Exemple correspondant à trois tirages aléatoires de la méso-structure.	98
7.5	Densité moyenne d'énergie dissipée de 100 analyses aléatoires pour une éprouvette $a_0 = 0.5D, D = 400mm$ pour (a) l'état de chargement 1, (b) l'état de chargement 2, (c) l'état de chargement 3 de la figure 7.1.	98
7.6	Évolution de la densité d'énergie dissipée (a) le long du ligament et (b) perpendiculaire au ligament ($a_0 = 0.5D, D = 400mm$) pour les trois incréments indiqués sur la figure 7.1.	99
7.7	Répartition de la densité d'énergie dissipée (a) le long du ligament et (b) perpendiculaire au ligament ($a_0 = 0.5D, D = 50, 100, 200$ et $400mm$) pour l'incrément 1 indiqué sur la figure 7.1.	99
7.8	Répartition de la densité d'énergie dissipée (a) perpendiculaire au ligament et (b) le long du ligament ($a_0 = 0.2D, D = 50, 100, 200$ et $400mm$) pour l'incrément 1 indiqué sur la figure 7.1.	100
7.9	Répartition de la densité d'énergie dissipée (a) perpendiculaire au ligament et (b) le long du ligament ($a_0 = 0D, D = 50, 100, 200$ et $400mm$) pour l'incrément 1 indiqué sur la figure 7.1.	101
7.10	Comparaison de la répartition de densité d'énergie dissipée le long du ligament pour des poutres $a_0 = 0$ et $a_0 = 0.5D$ ayant la même taille de ligament équivalent de 50, 100, 200 et 400mm pour l'incrément 1 indiqué sur la figure 7.1.	101
7.11	Schéma du choix des deux intervalles indiquant deux incréments d'énergie de fissuration pour l'analyse d'histogrammes.	102
7.12	Histogrammes des distances relatives entre événements pour toutes les tailles de poutre et toutes les géométries considérées.	104

7.13	Histogrammes en échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm. Résultats bruts.	105
7.14	Histogrammes en échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.	105
7.15	Histogrammes en échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent et par le nombre total d'événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.	106
7.16	Dispositif d'acquisition.	107
7.17	Caractéristiques de la fenêtre d'enregistrement des événements acoustiques sur les trois géométries de poutre.	108
7.18	Distribution des événements acoustiques sur les différentes géométries de poutres – Cartes de distribution d'énergie.	110
7.19	Découpage typique de la courbe de chargement expérimental pour l'analyse des distances relatives entre événements.	111
7.20	Histogrammes de distances relatives pour le cas particulier d'une éprouvette HN ($a_0 = 0.5D$) de taille $D = 200mm$	112
7.21	Comparaison numérique / expérimentale des histogrammes des distances relatives calculées juste après le pic.	113
B.1	Courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées HN.	131
B.2	Courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées FN.	132
B.3	Courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes non-entaillées UN.	133
D.1	Maillage et conditions de bord typiques considérés dans le calcul macroscopique ($i = 1$).	139
D.2	Maillage et conditions de bord typiques considérés dans le calcul macroscopique ($i = 2$).	140
D.3	Maillage et conditions de bord typiques considérés dans le calcul macroscopique ($i = 3$).	141
F.1	Définition des incréments d'énergie sur les courbes de chargement pour l'analyse de la distribution des distances relatives.	150
F.2	Histogrammes en l'échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.	151

F.3	Histogrammes en l'échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.	151
F.4	Histogrammes en l'échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent et par le nombre total d'événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.	152
F.5	Histogrammes en l'échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent et par le nombre total d'événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm. – Courbes décalées manuellement.	153
G.1	Représentation d'une salve d'émission acoustique.	155
H.1	Comparaison des courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées HN, $D = 200$	157
H.2	Comparaison des courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées FN, $D = 200$	158
H.3	Comparaison des courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées UN, $D = 200$	159
H.4	Comparaison des courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées UN, $D = 100$	160
I.1	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette HN 1125.	162
I.2	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette HN 1126.	163
I.3	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette HN 1129.	164
I.4	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette FN 1121.	165
I.5	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette FN 1123.	166
I.6	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette FN 1127.	167
I.7	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1122.	168
I.8	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1128.	169

I.9	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1131.	170
I.10	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1132.	171
I.11	Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1133.	172

Liste des tableaux

3.1	Paramètres utilisés dans le calcul 1D d'une barre libre chargée en traction sur les deux extrémités [47].	19
3.2	Paramètres utilisés dans le calcul 1D du cas de l'écaillage [32].	23
3.3	Formulation du béton utilisée pour la fabrication des structures et la construction d'une base de données expérimentales.	25
3.4	Propriétés mécaniques moyennes du béton utilisé.	26
3.5	Incertitudes des différents capteurs utilisés pendant la campagne expérimentale.	28
3.6	Paramètres d'effet d'échelle et de fissuration déterminés avec la loi classique pour des échantillons entaillés.	42
3.7	Détermination des paramètres d'effet d'échelle et de fissuration avec la loi intrinsèque d'effet d'échelle pour des échantillons entaillés.	43
3.8	Détermination des paramètres d'effet d'échelle pour les échantillons non-entaillés.	44
3.9	Détermination des paramètres de la loi d'effet d'échelle universelle.	46
4.1	Caractéristiques et noms des formulations pour l'analyse comparative	54
5.1	Paramètres utilisés dans le calcul à l'aide du modèle mésoscopique.	71
7.1	Dimensions des fenêtres d'enregistrement d'émissions acoustiques en fonction de la taille et de la géométrie des poutres.	108
7.2	Caractéristiques géométriques des échantillons – essais de flexion 3 points avec enregistrement d'émissions acoustiques.	109
7.3	Propriétés mécaniques moyennes du béton utilisé.	109
A.1	Essais de compression – Résistance à la compression	127
A.2	Essais de compression – Coefficient de Poisson	128
A.3	Essais de compression – Module d'Young	128
A.4	Essais de fendage – Résistance à la traction par fendage	129

B.1	Essais de flexion 3 points – Éprouvettes entaillées HN	131
B.2	Essais de flexion 3 points – Échantillons entaillées FN	132
B.3	Essais de flexion 3 points – Échantillons non-entaillées	132
C.1	Contraintes nominales et charges maximales pour les échantillons entaillées comme indiqué dans l'équation 3.10.	135
C.2	Contraintes nominales et charges maximales pour les échantillons non-entaillés comme définit dans l'équation 3.15.	136
C.3	Contraintes nominales et charges maximales pour tous les échantillons d'après l'équation 3.16b.	137
H.1	Essais de compression – Résistance à la compression	159
H.2	Essais de compression – Module d'Young	160
H.3	Essais de fendage – Résistance à la traction par fendage	160

1.1 Introduction et contexte de l'étude

La mécanique des roches est la branche de la géomécanique qui a pour objet la prévision du comportement des roches et des massifs rocheux sous l'action de sollicitations mécaniques, thermiques, chimiques, hydrologiques... L'intérêt de cette discipline prend une ampleur particulière face à des problématiques d'actualité telles que l'exploitation de pétrole et de gaz, le stockage souterrain de déchets radioactifs, la dépollution des sols ou encore le stockage de CO_2 . Il s'agit de situations considérant un matériau poreux au travers duquel un écoulement (un transfert de masse par perméation) a lieu. Les caractéristiques de ce transfert dépendent donc principalement de la perméabilité du matériau.

Dans cette optique, l'analyse des problématiques mettant en jeu des écoulements et des transferts de masse nécessite de la prise en compte de l'évolution de la perméabilité comme un résultat de la modification de la microstructure de la phase solide. Cette évolution peut être due à la modification de la distribution des tailles de pores qui se voit aussi influencée par la micro-fissuration. Malheureusement, les effets de couplage entre la perméabilité intrinsèque du matériau et l'évolution de la distribution de tailles de pores ou de la micro-fissuration ne sont pas tout à fait clairs à l'heure actuelle.

Le projet *FailFlow* - Failure and Fluid Flow in Porous Quasibrittle Materials - soutenu par l'ERC (*European Research Council*) et dont fait partie ce travail de thèse, porte son intérêt sur le phénomène d'écoulement d'un fluide au travers d'un matériau poreux en tenant compte de l'évolution de sa micro-structure. L'objectif général est de comprendre et de décrire les mécanismes et phénomènes de couplage entre l'évolution de la distribution de pores et l'augmentation de la perméabilité intrinsèque de la phase solide. Ce travail de thèse constitue l'un des différents travaux de recherche inscrits dans le cadre du projet *FailFlow*. Il s'intéresse exclusivement à la compréhension du comportement mécanique de la phase solide.

De par leurs caractéristiques structurales et leur réponse mécanique, les roches font partie du groupe des *matériaux quasi-fragiles*, ensemble dans lequel se distinguent également les bétons, la glace, les sables cimentés et le charbon entre autres. D'un point de vue pratique, nous nous servons de cette analogie de comportement entre le béton et la roche pour développer toutes nos analyses et observations sur l'étude de la réponse mécanique du béton, matériau vu dans ce travail comme un matériau modèle, de comportement typiquement quasi-fragile, de fabrication facile et qui a fait l'objet d'une importante activité de recherche durant les soixante dernières années. De plus, dans notre démarche nous avons considéré une partie expérimentale importante difficile à mettre en œuvre avec un matériau rocheux naturel.

1.2 Objectifs et approche scientifique

L'objectif principal de notre travail est de mieux comprendre le comportement mécanique à la rupture du béton. Cependant, une telle compréhension est encore loin d'être complète car l'étude de ce matériau poreux et hétérogène s'avère très complexe.

L'étude du comportement mécanique du béton passe par la modélisation. La modélisation du comportement mécanique du béton peut être abordée à plusieurs échelles, l'échelle mésoscopique et l'échelle macroscopique étant les plus utilisées. Au vu des intérêts du projet *FailFlow* et des limitations des moyens de calcul actuels, nous développerons nos travaux à l'aide de modèles macroscopiques continus. En effet, nous avons en perspectives non pas des calculs simulant le comportement de petites structures à l'échelle du laboratoire dont la taille est d'ordre centimétrique, mais plutôt des simulations de réservoirs qui peuvent atteindre plusieurs kilomètres. Pour une description correcte du processus de rupture prenant en compte le comportement adoucissant typique des matériaux quasi-fragiles, un tel modèle doit principalement :

- reproduire la réponse mécanique globale d'une structure à partir des propriétés du matériau déterminées en laboratoire ;
- représenter l'amorçage et l'évolution de la dégradation du matériau (non-linéarité) dès l'apparition de la micro-fissuration en passant par leur coalescence et leurs interactions pour former une macrofissure jusqu'à la rupture complète ;
- être d'une facile implémentation dans un code de calcul ainsi que peu coûteux en terme de temps de calcul.

Du point de vue de la modélisation macroscopique, parmi les approches existantes dans la littérature, nous nous concentrons sur la description à l'aide de modèles non-locaux qui utilisent des techniques de régularisation par l'introduction d'un paramètre appelé *longueur interne*. Cette longueur permet de définir un périmètre à l'intérieur duquel les "interactions" à l'échelle de la microstructure ont lieu. Ces modèles présentent toutefois un certain nombre de limitations importantes qui restent encore à surmonter. Nous verrons qu'elles sont liées notamment à la difficulté de représenter dif-

férents mécanismes qui apparaissent pendant un chargement mécanique comme par exemple le comportement non-local près d'un bord et la description d'une discontinuité, entre autres. Aucun de ces modèles n'est capable de reproduire le phénomène d'effet d'échelle dans sa généralité typique des matériaux quasi-fragiles. Nous cherchons ainsi à progresser dans la description cohérente du processus de rupture des matériaux quasi-fragiles.

1.3 Organisation du manuscrit

Le présent document s'articule en 6 parties.

Le chapitre 2 présente les généralités de la zone d'élaboration dans les matériaux fissurés. Les particularités propres de cette zone d'élaboration en fonction de la nature du matériau seront exposées. Un bref rappel du comportement à la rupture du béton et des techniques de caractérisation expérimentale est présenté. Nous abordons ensuite la modélisation du point de vue des modèles classiques d'endommagement et d'endommagement non-local. Nous mettons en évidence leurs limitations dans la description du comportement mécanique du béton.

Le chapitre 3 présente les outils dont nous allons nous servir dans le processus d'analyse de modèles cherchant à décrire le comportement mécanique du béton. Ces outils nous permettront de tester les performances des différents modèles ainsi que les méthodes numériques utilisées. Dans un premier temps, nous présenterons l'étude numérique de deux cas test en 1D. Dans un deuxième temps nous aborderons les détails de la construction d'une base de données expérimentales sur des poutres en flexion trois points qui sera vue comme l'outil d'analyse en 2D. Cette base de données a l'avantage de considérer quatre tailles de poutre avec trois géométries différentes à partir de la même formulation de béton. Les résultats expérimentaux seront dépouillés selon la loi d'effet d'échelle de Bažant dans ses différents formats : loi classique, loi intrinsèque, loi pour des structures non-entaillées, et loi universelle.

Dans le chapitre 4 nous rassemblons les formulations modifiées du modèle d'endommagement non-local issues de la littérature afin d'observer leurs avantages et leurs lacunes dans la description de la rupture des matériaux quasi-fragiles. Les détails de chaque formulation sont présentés. On utilisera les outils présentés au chapitre 3 pour observer le comportement de ces formulations ainsi que certaines combinaisons entre elles pour la description du comportement mécanique du béton. Nous verrons que les formulations existantes les plus réalistes sont malheureusement difficiles à mettre en œuvre au delà de simples calculs 1D.

Le chapitre 5 présente l'étude du comportement mécanique du béton à l'échelle mésoscopique. Nous présentons les détails du modèle mésoscopique utilisé ainsi que les résultats numériques confrontés aux données expérimentales issus des essais d'effet

d'échelle. Cette comparaison étant particulièrement favorable, nous allons supposer que c'est la représentation des hétérogénéités (granulats, zones endommagées) qui au niveau macroscopique confère une aptitude au modèle à décrire les diverses interactions qui se développent lors de la rupture.

Dans le chapitre 6 nous présentons un nouveau modèle non-local macroscopique prenant en compte les interactions à l'échelle mésoscopique. Cette prise en compte des interactions se fait par la construction d'une nouvelle fonction poids à introduire dans la formulation macroscopique. D'abord, le cadre théorique pour la construction de la fonction poids basée sur les interactions est présenté, puis nous faisons une première validation du modèle à l'aide de la théorie d'Eshelby. Nous nous servons ensuite des outils de validation numérique et expérimentale présentés dans le chapitre 3 pour tester les performances du nouveau modèle macroscopique proposé.

Dans le chapitre 7 nous utiliserons à nouveau le modèle mésoscopique afin de faire une analyse plus fine du développement de la zone d'élaboration. En effet, la modélisation mésoscopique permet l'accès à une grande quantité d'information qui se perd lors du transfert d'échelle. L'analyse plus poussée des interactions peut faciliter une meilleure compréhension des mécanismes mis en jeu lors du développement de la zone d'élaboration. Pour ce faire, nous faisons une première proposition de posttraitement des résultats numériques. Une série d'essais en flexion trois points avec enregistrement d'émissions acoustiques est également présentée. Nous interprétons ces résultats expérimentaux selon la même procédure que pour les résultats numériques et nous proposons une première confrontation entre eux.

La conclusion de ce travail fait un bilan des travaux effectués accompagné des pistes d'améliorations du modèle proposé. Des futures directions d'investigation pour arriver à mieux comprendre le comportement mécanique à la rupture des matériaux quasi-fragiles sont également proposées.

Materiaux quasi-fragiles et zone d'élaboration

1.1	Introduction et contexte de l'étude	1
1.2	Objectifs et approche scientifique	2
1.3	Organisation du manuscrit	3

2.1 Introduction

La résistance ultime est souvent prise comme le facteur essentiel caractérisant les matériaux soumis à des chargements mécaniques. En effet, cette grandeur permet la détermination d'un état de chargement où le matériau est à la limite de la rupture. Néanmoins, l'analyse du comportement mécanique cherche à comprendre d'autres phénomènes concernant l'apparition puis l'évolution de la dégradation à l'intérieur de la structure. Ainsi, la mesure de la charge maximale doit être accompagnée de la caractérisation de la réponse mécanique après le pic par le suivi de grandeurs telles que les contraintes et les déformations jusqu'à la rupture complète.

La réponse mécanique dépend de la nature du matériau, donc de la façon dont les phénomènes de dégradation évoluent au cours de l'application de la sollicitation. Sous un chargement monotone, cadre dans lequel s'inscrivent les considérations de ce travail de recherche, la caractérisation des matériaux se fait d'une façon générale par la lecture des courbes de chargement construites à partir d'essais mécaniques normalisés (essais de compression et essais de traction, entre autres). Toute réponse mécanique commence par une phase élastique où le matériau revient à son état d'origine s'il est déchargé. Au-delà de la limite élastique, valeur qui dépend évidemment du type de matériau, les déformations ne sont plus réversibles.

Tel qu'il a été mentionné dans la section 1.1 notre intérêt porte principalement sur le comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles. Nous allons concentrer nos observations sur le comportement mécanique du béton, matériau poreux au comportement typiquement quasi-fragile et que nous prenons dans le cadre de cette étude comme matériau modèle.

La dégradation des matériaux quasi-fragiles correspond à l'apparition des micro-fissures qui interagissent entre elles à l'intérieur d'une zone bien particulière appelée *zone d'élaboration* ou **FPZ** (de l'anglais *Fracture Process Zone*). Cette dégradation est un processus continu qui s'amorce par l'apparition de micro-fissures imperceptibles à l'œil nu. Elles évoluent et coalescent à l'intérieur de la zone d'élaboration pour former finalement une macro-fissure qui se propage. Une fois que cette discontinuité est créée, la FPZ se localise en pointe de fissure où la dégradation continue à évoluer. La seule mesure de la macro-fissure étant insuffisante, il est nécessaire de mieux comprendre et de caractériser le processus de dégradation.

Dans la section 2.2 nous présentons plus en détail les caractéristiques de cette zone d'élaboration si importante et déterminante dans le comportement des matériaux. La section 2.3 présente un bref rappel du comportement à la rupture du béton ainsi que des outils expérimentaux pour une telle caractérisation. La section 2.4 est consacrée à la modélisation macroscopique. Nous mentionnerons ici d'une façon sommaire et qualitative les principaux aspects à prendre en compte dans la modélisation ainsi que les approches les plus utilisées. Finalement, dans la section 2.5 nous mettons en avant cer-

taines limitations des approches classiques pour reproduire la réponse mécanique du béton.

2.2 Mise en évidence d'une zone d'élaboration

Tous les matériaux ne réagissent pas de la même manière vis-à-vis d'une sollicitation quelconque. Ainsi, en fonction de la réponse mécanique, et donc des particularités de forme et de taille de ladite zone d'élaboration, les matériaux peuvent être distingués en plusieurs types. La FPZ est une zone où la réponse mécanique devient non linéaire, caractérisée par un adoucissement progressif; c'est-à-dire la décroissance de la contrainte lors de l'augmentation de la déformation. Cette zone est entourée par une zone également non-linéaire mais cette fois-ci non-adoucissante. On observe à cet endroit un durcissement par plasticité par exemple et la contrainte, soit augmente, soit reste constante pour des déformations croissantes. L'ensemble de ces deux zones (adoucissante et non-adoucissante) constitue une seule zone de comportement non-linéaire. C'est en fonction du rapport des tailles de ces deux zones que les matériaux sont classés dans les trois principales catégories : *fragiles*, *ductiles* ou *quasi-fragiles*, voir figure 2.1. Les diagrammes du bas de la figure montrent les distributions de contrainte le long de la ligne de fissure.

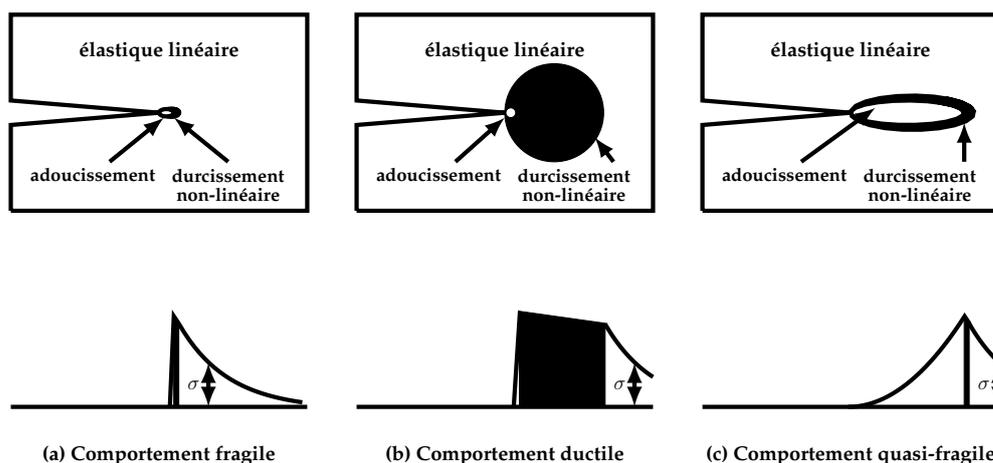


FIGURE 2.1 – Comportements non linéaires et types de zones de fracturation [7]

Dans la figure 2.1.a, la zone non-linéaire (et donc aussi la FPZ) est petite comparée à la taille de la structure. Toute la zone d'élaboration se concentre sur la pointe de la fissure. À part cette petite zone de taille négligeable, toute la structure est élastique et la mécanique linéaire de la rupture (LEFM de l'anglais *Linear Elastic Fracture Mechanics*) peut être appliquée. Ce type de modèle est une bonne approximation pour les matériaux fragiles comme le plexiglass, le verre et les céramiques principalement. Ce comportement est appelé *comportement fragile*.

Dans les figures 2.1.b et 2.1.c, le rapport entre la taille de la zone non-linéaire et celle de la structure n'est plus suffisamment petit pour que la LEFM puisse être appliquée avec pertinence. Lorsque les surfaces de la zone non-linéaire où des phénomènes de durcissement élastoplastique ou de "perfect yielding" apparaissent sont beaucoup plus grandes que la zone dans laquelle la rupture du matériau a lieu, on parle de comportement *ductile*, catégorie dans laquelle on trouve plusieurs métaux ainsi que des alliages. L'étude du comportement des matériaux ductiles se fait à l'aide de la *mécanique élastoplastique de la rupture* qui est en dehors de ce travail de recherche.

Le troisième type de comportement, principal intérêt de ce travail, concerne la situation où la quasi-totalité de la zone de non-linéarité subit un endommagement progressif accompagné de l'adoucissement du matériau dû à la formation et à l'interaction de micro-fissures. La zone de durcissement dans ce type de comportement est souvent négligeable et la transition entre la réponse élastique et l'endommagement est brusque. Tel est le cas des roches, de la glace, des sables cimentés, de certaines céramiques et composites, et des bétons entre autres. Ce type de matériaux est appelé *matériaux quasi-fragiles* car la taille de la FPZ est suffisamment grande pour avoir une influence très significative sur le comportement à la rupture d'une structure. Dans ce cas la LEFM n'est pas applicable.

Nous concentrerons tout notre travail de recherche sur les matériaux quasi-fragiles avec une attention particulière sur le comportement mécanique du béton, vu comme étant un matériau modèle.

2.3 Comportement à la rupture du béton

Le comportement du béton en tant que matériau de structure a été largement étudié au cours des 60 dernières années. L'objectif de ce paragraphe est de rappeler brièvement les propriétés mécaniques macroscopiques caractérisant ce matériau ainsi que les méthodes expérimentales classiques les plus utilisées ; à savoir, les essais de compression simple et de traction indirecte permettant la détermination des résistances et d'autres paramètres comme le module d'Young et le coefficient de Poisson nécessaires dans le calcul des structures et dans la modélisation. Tout cela peut être observé pour une contrainte à la rupture constante.

2.3.1 Comportement en compression uniaxiale

L'essai de compression uniaxiale est largement utilisé pour identifier certaines caractéristiques comme la résistance en compression, le module d'Young et le coefficient de Poisson. La détermination du comportement du béton soumis à compression se fait généralement à l'aide d'une presse hydraulique. Une éprouvette cylindrique normalisée et rectifiée au préalable est placée entre les deux plateaux de la presse. L'effort est appliqué par un vérin dont il est possible de mesurer le déplacement vertical et sur le-

quel une cellule de force permet la mesure de l'effort appliqué. Les déformations sont mesurées à l'aide de capteurs installés sur l'éprouvette avant l'application de la charge.

La réponse mécanique du béton a bien été caractérisée et mise en avant par de nombreux auteurs comme par exemple [38], [40] et [28]. D'après leurs études, il est possible de distinguer plusieurs phases représentant l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation :

- Phase 0 : jusqu'à 10 % de σ_c ¹. Phase de serrage ou de raidissement dû aux fermetures des micro-fissures préexistantes. Cette phase n'existe pas toujours selon l'état initial du matériau.
- Phase 1 : jusqu'à 30 à 50 % de σ_c . Des micro-fissures commencent à apparaître aux interfaces mortier/granulat et le comportement est quasi-linéaire.
- Phase 2 : jusqu'à 70 à 90 % de σ_c . Les micro-fissures se propagent, la non-linéarité et l'irréversibilité apparaissent.
- Phase 3 : jusqu'à σ_c . Forte non-linéarité. Les fissures se propagent dans la matrice parallèlement à la direction de chargement.
- Phase 4 : Au delà de σ_c . Comportement adoucissant avec création de macro-fissures.

Le développement des micro-fissures, phénomène qui est à l'origine de la dégradation des caractéristiques élastiques du matériau, et éventuellement du développement de déformations permanentes peuvent être observées lors d'essais de chargements cycliques. Les déformations transversales peuvent être mesurées en installant des capteurs de déplacement diamétral le long de l'éprouvette.

2.3.2 Comportement en traction uniaxiale

Le béton est un matériau qui doit son succès, en plus de ses avantages économiques et sa facilité de mise en œuvre, à sa capacité à supporter les chargements en compression. En revanche, ses performances en traction sont beaucoup moins remarquables. Malgré la complexité de la réalisation des essais de traction directe, cet aspect a été le centre de nombreuses activités de recherches (voir par exemple [28]) dont les résultats permettent de distinguer les différentes phases de la réponse mécanique :

- Le comportement reste quasiment linéaire du début du chargement jusqu'à 50 ou 60 % de la résistance en traction f_t .
- Après cette phase, la perte de linéarité commence par l'apparition de micro-fissures. La dégradation se traduit par une lente décroissance du module de Young jusqu'à atteindre le pic de contrainte $\sigma = f_t$.

1. σ_c correspond à la contrainte maximale atteinte lors d'un essai de compression simple.

- Durant la phase post-pic ces micro-fissures progressent et interagissent dans la pâte de ciment et dans les interfaces avec les granulats pour s'orienter perpendiculairement au chargement formant ensuite une fissure macroscopique perpendiculaire à la sollicitation. Cette phase est connue comme *phase adoucissante*.

De manière analogue au cas de la compression, des chargements cycliques montrent leur utilité lorsque l'on veut caractériser les déformations inélastiques et permanentes, la perte de raideur du matériau et la répartition des fissures.

La réalisation des essais de traction directe ou de traction par flexion (NF P 18-407) permettent l'observation de l'amorçage, de l'évolution et de la propagation de la fissuration. Ces essais permettent l'estimation des grandeurs comme l'énergie de rupture, la ténacité en fonction de la longueur de la fissure et les propriétés de fracturation du matériau. La technique de traction par fendage ou essai brésilien (NF P 18-408) est plus souvent utilisée dans le cadre de la caractérisation des propriétés mécaniques fournissant comme seule information la résistance à la traction par fendage.

Dans la section 2.1 nous avons mis en avant que le fait de connaître la résistance mécanique ne suffit pas pour bien comprendre le comportement des matériaux face à des sollicitations données. Ainsi par exemple dans l'étude des matériaux quasi-fragiles et, plus particulièrement dans l'étude du comportement mécanique du béton, l'amorçage, l'évolution et la propagation de la fissuration apparaissent comme les phénomènes principaux à observer.

2.4 Modélisation du comportement mécanique

Dans la modélisation du comportement mécanique du béton plusieurs approches sont proposées dans la littérature. Deux principales familles sont distinguées :

- Les approches basées sur la théorie des milieux continus tels que les modèles d'endommagement et les modèles de plasticité.
- Les approches basées sur le concept de fissuration comme étant une discontinuité géométrique macroscopique, donc des modèles discrets.

Plus particulièrement, le cadre de la mécanique des milieux continus permet une modélisation des effets des microfissures sur le comportement à l'échelle de la structure. Ces phénomènes sont représentés par un ensemble de variables internes au travers duquel l'état du matériau est déterminé à chaque instant. Ces variables agissent sur les caractéristiques thermomécaniques et par conséquent, sur le comportement du matériau à l'échelle macroscopique. Dans cette partie du travail nous allons présenter le cadre théorique des approches continues qui nous intéressent : celles qui prennent en compte le développement de l'endommagement.

Gardons en tête que la correcte description du comportement macroscopique du béton nécessiterait de la prise en compte de plusieurs aspects comme :

- (i). le comportement élastique linéaire initial isotrope où il n'y a pas de modification du module d'élasticité, aussi bien en compression qu'en traction;
- (ii). le caractère adoucissant face aux deux types de chargement (traction *et* compression);
- (iii). la dissymétrie du comportement en traction face à celui en compression (rapport de 10 sur les contraintes ainsi que sur les déformations), au pic
- (iv). l'amorçage et l'évolution de l'endommagement dès l'apparition des micro-fissures;
- (v). la caractérisation de la perte de raideur et le développement de déformations permanentes jusqu'à la formation de la macro-fissure, et enfin la ruine de la structure.

2.4.1 Modèle d'endommagement du béton

Le concept d'endommagement a été introduit par Kachanov en 1958 [29]. Ce dernier définit l'endommagement comme étant la dégradation des caractéristiques élastiques en introduisant une variable continue. Plus tard Lemaître & Chaboche [36] ont généralisé cette notion à l'aide de la thermodynamique des processus irréversibles. Ainsi, dans le cas d'un matériau isotrope et d'un endommagement isotrope, les effets de la température et du temps étant négligés, la relation contrainte-déformation peut s'écrire comme :

$$\sigma = (1 - D)C : \varepsilon \quad (2.1)$$

où σ, ε, C sont respectivement le tenseur de contraintes, le tenseur de déformations et le tenseur de raideur. D est ici une variable scalaire qui représente la dégradation du matériau. Cette variable est comprise entre les valeurs limites 0 et 1, $D = 0$ représentant un matériau sain alors que $D = 1$ correspond à un matériau complètement endommagé.

Mazars formule en 1984 un premier modèle élastique endommageable isotrope pour le béton [38]. Celui-ci reprend les postulats donnés par Lemaître & Chaboche [36] et l'hypothèse que le matériau élastique isotrope à l'état sain reste isotrope quand il s'endommage. L'évolution de l'endommagement est pilotée par la déformation équivalente donnée par l'équation 2.2 [39], gouvernée à son tour par la condition de chargement-déchargement de Kuhn-Tucker, voir équation 2.3.

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i \in [1,3]} \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\varepsilon, h) &= \varepsilon_{eq}(\varepsilon) - h \quad , \quad \Gamma(\varepsilon, h) \leq 0 \quad , \quad \dot{h} \geq 0 \quad , \quad \dot{h}\Gamma(\varepsilon, h) = 0 \\ h &= \max(\varepsilon_{D_0}, \max(\varepsilon_{eq})) \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} D(\varepsilon_{eq}, x) &= \sum_{i \in \{t,c\}} \alpha_i \left[1 - (1 - A_i) \frac{\varepsilon_{D_0}}{\varepsilon_{eq}(x)} - A_i \exp(-B_i(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{D_0})) \right] \\ \alpha_i &= \sum_{k \in [1,3]} \left(\frac{\varepsilon_k^i \langle \varepsilon_k \rangle_+}{\varepsilon_{eq}^2} \right)^\beta \end{aligned} \quad (2.3b)$$

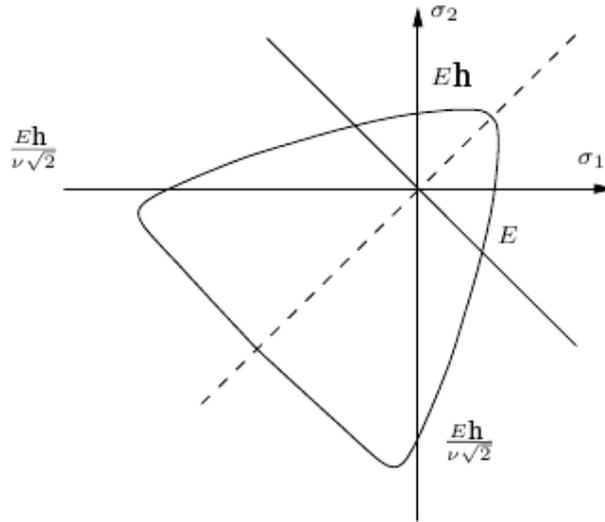


FIGURE 2.2 – Surface seuil du modèle de Mazars dans le plan des contraintes principales [38].

Dans l'équation 2.3a, Γ est la fonction de charge qui définit la limite du domaine élastique, ε_{D_0} est le seuil d'endommagement, h est une variable de l'histoire de chargement équivalente à la plus grande valeur jamais atteinte par la déformation équivalente. La

figure 2.2 présente la trace de la surface seuil décrite dans le plan des contraintes principales. Dans l'équation 2.3b, qui définit la cinématique de croissance de l'endommagement, la variable d'endommagement est divisée en deux parties afin de prendre en compte les différentes réponses mécaniques en traction, $i = t$, et en compression $i = c$, comme proposé par Mazars [39]. La figure 2.3 représente ces deux comportements où D_c et D_t sont les valeurs d'endommagement en compression et en traction calculées à partir de l'équation 2.3b.

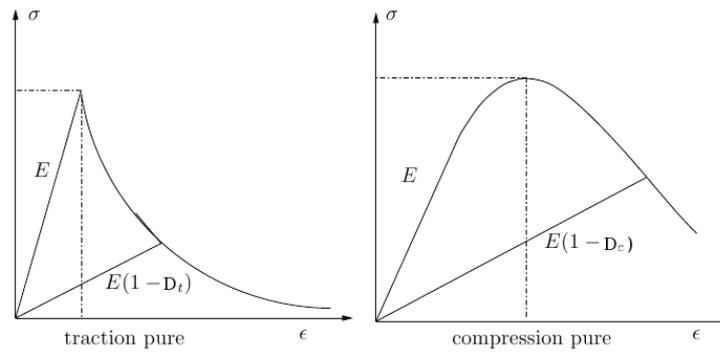


FIGURE 2.3 – Comportement en traction et en compression du béton [38]

Les coefficients α_t et α_c sont définis comme étant des fonctions des déformations principales des tenseurs de déformation ε^t et ε^c dues aux contraintes positives et négatives. Ainsi, dans le cas de traction uniaxiale $\alpha_t = 1, \alpha_c = 0$ et en compression uniaxiale $\alpha_t = 0, \alpha_c = 1$. Les constantes $A_t, B_t, A_c, B_c, \beta$ sont des paramètres du modèle représentant l'adoucissement exponentiel du matériau.

En général, les modèles d'endommagement local présentent certaines limitations majeures liées notamment à une forte dépendance au maillage lors d'un calcul aux éléments finis. Une telle dépendance de la discrétisation spatiale se traduit par la concentration des déformations sur une bande très fine fonction de la taille de l'élément. Ainsi, lorsque l'on raffine le maillage, la taille de la zone de localisation tend vers zéro et l'énergie totale dissipée à la rupture tend à être nulle, ce qui est physiquement inacceptable (voir par exemple [44] et [42]).

2.4.2 La non-localité et le modèle d'endommagement non-local

Le problème de la localisation des déformations dû à l'adoucissement est usuellement abordé à l'aide de techniques de régularisation. Ces dernières consistent à enrichir la description mécanique du milieu pour décrire la rupture. La plupart des techniques, par exemple les modèles de type non-local intégral [44], introduisent une longueur caractéristique dans le modèle continu, grandeur qui est liée à la taille de la FPZ et aux interactions entre deux points voisins : la valeur effective d'une variable en un point x sera égale à la moyenne pondérée de cette même variable calculée sur un voisinage du

point x .

D'autres formulations introduisent un gradient d'ordre deux, et parfois supérieur, des déformations, des contraintes, ou des variables internes du modèle [19]. Cela veut dire que l'on introduira le gradient d'une variable comme une variable supplémentaire du modèle [19].

Les modèles non-locaux ont été appliqués sur une large gamme de problèmes incluant la description de l'endommagement dans les matériaux adoucissants quasi-fragiles [44], la plasticité adoucissante [4, 23, 54], le fluage [50] ou la dégradation des composites [20].

La formulation non-locale utilisée dans notre travail est de type intégrale et correspond à celle proposée en 1987 par Pijaudier-Cabot et Bazant [44]. La déformation équivalente locale est remplacée par sa moyenne pondérée par le biais d'une distribution gaussienne.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{eq} &= \frac{1}{\Omega_r(x)} \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad , \quad \Omega_r(x) = \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) d\xi \\ \psi_0(x, \xi) &= \exp \left(- \left(\frac{2\|x - \xi\|}{l_{c0}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ici Ω représente le volume de la structure, Ω_r est un volume caractéristique introduit afin que l'opérateur non-local n'affecte pas un champ uniforme de déformation, $\bar{\varepsilon}_{eq}$ est la déformation non-locale, ε_{eq} est la déformation équivalente de l'équation 2.2, ψ_0 est une fonction poids de type gaussienne et l_{c0} est la longueur interne du modèle liée à la taille de la FPZ [6].

2.5 Questionnements sur le modèle d'endommagement non-local

Bien que le modèle d'endommagement non-local permette de s'affranchir des problèmes liés à la localisation des déformations mentionnées précédemment, trois types de limitations majeures demeurent.

2.5.1 L'effet de bord

Le modèle d'endommagement non-local est capable de fournir une description de la réponse mécanique du matériau acceptable quand les grandeurs non-locales sont calculées loin des bords. Classiquement [44], près des bords, contrairement à l'intérieur du solide, le volume associé au calcul de la moyenne est tronqué comme le montre la figure 2.4. Cependant, on peut démontrer que sur un bord du solide la déformation équivalente non-locale $\bar{\varepsilon}_{eq}$ doit être égale à la déformation équivalente locale ε_{eq} [47].

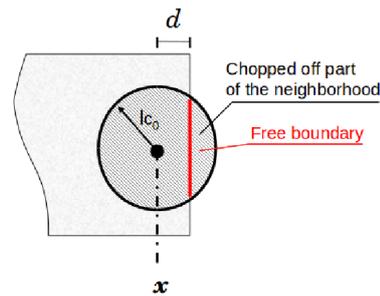


FIGURE 2.4 – Volume associé au calcul de la moyenne non-locale près d'un bord.

Quels éléments doivent être introduits dans la formulation continue afin de surmonter une telle limitation et de mieux décrire les effets de bord ? Nous y reviendrons dans le chapitre 4.

2.5.2 Description de la discontinuité du déplacement et transition continu/discret

La pertinence du modèle d'endommagement non-local devient discutable aussi avec l'apparition de macro-fissures car celles-ci sont à leur tour des nouveaux bords libres et nous sommes ramenés au problème précédent. Cet aspect peut être plutôt abordé en considérant une fissure comme une discontinuité du champ de déplacement plutôt que comme un nouveau bord libre. En effet, un bord de la structure est un bord qui n'est pas endommagé a priori. Une macro-fissure en revanche, est un bord qui évolue dans sa topologie et qui jouxte une zone endommagée qui résulte de la zone d'élaboration. La façon de considérer ces deux types de bords dans un modèle mécanique doit donc être différente.

Les travaux de Bažant [3] et de Pijaudier-Cabot et Berthaud [46] par exemple, ont aussi mis en évidence que l'existence de la non-localité est due à la croissance et aux interactions entre défauts pendant le chargement. La description de la transition du champ de déplacement de continu à discret inclue aussi le transfert d'informations au travers d'une zone endommagée [47]. Une macro-fissure est un endroit de l'espace où il n'y a pas de matière et plus aucune interaction ne peut être échangée entre les points du solide de part et d'autre de la fissure. Ceci est connu comme *l'effet d'écran*.

Une description complète du phénomène d'endommagement doit donc prendre en compte deux mécanismes :

- la croissance des défauts et leurs interactions
- l'atténuation du transfert d'information au cours de la rupture et l'effet d'écran

Comment peut-on prendre en compte ces observations dans la formulation non-locale de l'endommagement ? Nous reprendrons cet argument dans le chapitre 4.

2.5.3 L'effet d'échelle

Le phénomène connu comme *effet d'échelle* est une caractéristique propre aux matériaux quasi fragiles liée notamment aux particularités de taille et de forme de la FPZ. Pour des structures géométriquement similaires et de tailles différentes, le fait que la zone d'élaboration en pointe de fissure ne change pas de taille d'une structure à l'autre, fait que le rapport ($taille_{FPZ}/taille_{structure}$) n'est pas constant. Ceci entraîne une décroissance de la résistance apparente de la structure avec l'augmentation de sa taille : plus la structure est grande, moins elle est résistante.

L'effet d'échelle constitue un élément fondamental de validation de modèles car, pour décrire correctement le comportement des matériaux quasi-fragiles, un modèle doit être capable de reproduire ce phénomène. Malheureusement, nous ne disposons pas à l'heure actuelle d'une base de données expérimentales suffisamment complète qui permette d'entreprendre cette démarche de comparaison et de validation. Nous y reviendrons dans le chapitre 3.

2.6 Synthèse et conclusion du chapitre

On a mis en évidence la présence d'une zone d'élaboration. Après avoir rappelé brièvement le comportement à la rupture du béton nous avons présenté quelques modèles classiques utilisés pour décrire le comportement dont le modèle d'endommagement de Mazars puis le modèle non-local intégral à fonction poids gaussienne. Nous avons décrit brièvement les limitations possibles de ce modèle classique à savoir, la prise en compte des effets de bord, la description de la transition continu/discret et l'effet d'échelle. Nous allons tenter de lever au moins partiellement ces limitations dans les chapitres suivants.

Outils pour l'analyse de modèles

2.1	Introduction	6
2.2	Mise en évidence d'une zone d'élaboration	7
2.3	Comportement à la rupture du béton	8
2.3.1	Comportement en compression uniaxiale	8
2.3.2	Comportement en traction uniaxiale	9
2.4	Modélisation du comportement mécanique	11
2.4.1	Modèle d'endommagement du béton	11
2.4.2	La non-localité et le modèle d'endommagement non-local	13
2.5	Questionnements sur le modèle d'endommagement non-local	14
2.5.1	L'effet de bord	14
2.5.2	Description de la discontinuité du déplacement et transition continu/discret	15
2.5.3	L'effet d'échelle	16
2.6	Synthèse et conclusion du chapitre	16

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, le but principal est de présenter des outils d'analyse utilisés pour tester les performances des différents modèles et méthodes numériques dans le cadre de la rupture de matériaux quasi-fragiles. Dans ce domaine, il est courant d'utiliser des cas tests unidimensionnels assez simples qui permettent de mettre en évidence certaines caractéristiques ou lacunes de ces modèles. Nous considérerons trois outils :

1. Dans la section 3.2, l'étude numérique d'une barre soumise à un chargement de traction permettra de voir l'aptitude d'un modèle à décrire le développement de la FPZ du à l'interaction et à la croissance des défauts. Nous adopterons trois critères pour analyser le modèle d'endommagement non-local : (a) *la convergence numérique*, (b) *la capacité à décrire la transition continu-discret du champ de déplacement* et (c) *la convergence vers une discontinuité forte*.
2. Dans la section 3.3 l'étude du cas de l'*écaillage* permettra de tester le comportement des modèles près d'un bord libre ainsi que leur aptitude à localiser précisément la position de l'écaille.
3. Dans la section 3.4 l'étude expérimentale de poutres en flexion 3 points et la production des courbes de chargement de structures homothétiques entaillées et non entaillées, permettra de disposer de données pour vérifier si un modèle est capable de reproduire le comportement adoucissant après le pic caractéristique des matériaux quasi-fragiles ainsi que les effets d'échelle.

Dans les chapitres 4 et 5, ces outils seront utilisés pour analyser des modèles améliorés issus de la littérature. Dans le chapitre 6, ces outils seront utilisés pour analyser un nouveau modèle développé durant cette thèse.

À titre d'illustration nous allons montrer dans ce chapitre quelques résultats obtenus avec le modèle d'endommagement non-local intégral original. Les essais de flexion 3 points seront aussi analysés à la lumière de lois d'effets d'échelle.

3.2 Rupture dynamique d'une barre en traction

Dans l'optique d'analyser les performances de différents modèles numériques, un benchmark basé sur une barre sollicitée en traction a été utilisé par Pijaudier-Cabot et Bažant [44]. Plus précisément, une onde de traction est appliquée aux deux extrémités d'une barre, comme indiqué sur la figure 3.1. Les ondes de déformation créées à l'intérieur de la barre se propagent vers le centre dans un régime élastique linéaire. Quand les deux ondes se rencontrent au centre, l'amplitude de la déformation devient le double, le matériau entre dans un régime adoucissant et la rupture se produit soudainement. Les paramètres du problème sont résumés dans le tableau 3.1 où L est la longueur de la barre, ρ est la masse volumique, E est le module d'Young, v est la vitesse de sollicitation, A_t et B_t sont deux paramètres pour le calcul de l'endommagement en traction, ε_{D_0}

est le seuil d'endommagement, l_c est la longueur interne, $N_{\text{éléments}}$ est le nombre d'éléments considérés dans le calcul et Δ_t est le pas de temps utilisé (intégration en temps explicite).

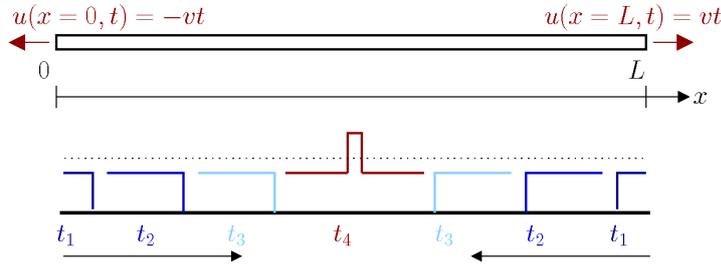


FIGURE 3.1 – Schéma du cas test d'une barre libre soumise à un chargement de traction et propagation d'une onde de déformation à l'intérieur de la barre.

Paramètre	$L[cm]$	$\rho[kg/cm^3]$	$E[N/cm^2]$	$v[cm/s]$	A_t	B_t	ε_{D_0}	l_c	$N_{\text{éléments}}$	$\Delta_t[s]$
Valeur	30	1	1	0.7	1	2	1	4	99	0.3

TABLE 3.1 – Paramètres utilisés dans le calcul 1D d'une barre libre chargée en traction sur les deux extrémités [47].

On peut utiliser ce test pour observer la façon dont le modèle est capable de décrire l'ouverture de fissure. Cette dernière est calculée à l'aide de la méthode proposée dans [16] qui compare le profil de déformation obtenu avec le modèle non-local et le profil correspondant à une discontinuité forte. Nous faisons ici un bref rappel de cette méthode.

L'endroit où la fissure apparaît est supposé connu et déterminé en fonction des conditions aux limites et du chargement. Supposons que la fissure apparaît au point $x = x_0$ au milieu de la barre. Dans ce modèle simplifié, l'apparition de la fissure correspond à la rupture locale (contrainte nulle). Lors de la rupture, la barre se divisera en deux parties complètement déchargées dont le mouvement suit celui d'un corps rigide. Nous appellerons ceci une *discontinuité forte*. Le profil de déplacement associé à cette discontinuité forte est donné par l'équation 3.1¹ où, H_Γ est la fonction Heaviside et $\llbracket U \rrbracket$ est le saut de déplacement correspondant à la fissure. La déformation associée à cette discontinuité peut être calculée en dérivant cette équation 3.1. Nous obtenons donc l'équation 3.2 où $\delta(x - x_0)$ est la fonction Dirac.

$$u_{sd}(x, x_0) = \llbracket U \rrbracket H_\Gamma(x - x_0) \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{sd}(x, x_0) = \llbracket U \rrbracket \delta(x - x_0) \tag{3.2}$$

1. L'indice *sd* indique qu'il s'agit d'une discontinuité forte, de l'anglais "strong discontinuity".

Le saut de déplacement est calculé en comparant le profil de la déformation non-locale effective $\bar{\varepsilon}_{eq}(x, x_0)$ avec celui correspondant à la déformation non-locale associée à la discontinuité forte $\bar{\varepsilon}_{sd}(x, x_0, \llbracket U \rrbracket)$ comme l'indique l'équation 3.3. Ici $\bar{\varepsilon}_{sd}(x, x_0, \llbracket U \rrbracket)$ est donnée par l'équation 3.4 où Ω_R est le volume représentatif et ψ_0 est la fonction poids du modèle non-local.

$$\Delta(x, x_0, \llbracket U \rrbracket) = \bar{\varepsilon}_{sd}(x, x_0, \llbracket U \rrbracket) - \bar{\varepsilon}_{eq}(x, x_0) \quad (3.3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{sd}(x, x_0) = \frac{1}{\Omega_R} \llbracket U \rrbracket \psi(x, x_0) \quad (3.4)$$

Ainsi,

$$\llbracket U \rrbracket = \frac{\bar{\varepsilon}_{sd}(x_0, x_0) \Omega_R}{\psi_0(x_0, x_0)} \quad (3.5)$$

L'écart entre les profils est calculé avec l'équation 3.6. Nous l'utilisons dans notre analyse pour déterminer si le modèle est capable de s'approcher d'une description discontinue.

$$\Delta(x) = \frac{\int_{\Omega} \|\bar{\varepsilon}_{sd}(x, s) - \bar{\varepsilon}_{eq}(x)\| ds}{\int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{eq}(x) ds} \quad (3.6)$$

Cette méthode permet d'estimer la discontinuité mais aussi de déterminer la distance entre les deux profils de déformation. Cette distance est un indicateur d'erreur, mesurant la proximité entre le profil de déformation calculé et le profil théorique résultant d'une discontinuité forte.

Les profils d'endommagement obtenus avec le modèle non-local intégral et avec les paramètres choisis, sont présentés sur la figure 3.2. On observe que l'endommagement apparaît et se développe au milieu de la barre dans une bande d'environ 6cm de large. En effet, l'introduction de la fonction poids et de la longueur interne dans le calcul de la déformation équivalente non-locale, permettent de surmonter les limitations dues à la localisation des déformations et à la dépendance du maillage du modèle d'endommagement local (équations 2.2 et 2.3).

Nous allons analyser maintenant le comportement du modèle d'endommagement non-local à l'aide des trois critères suivants :

(i). *Convergence numérique :*

En terme de convergence, cinq raffinements du maillage ont été considérés. La

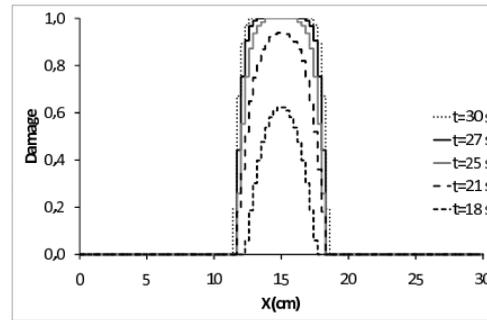


FIGURE 3.2 – Évolution temporelle des profils d'endommagement.

figure 3.3, présentant les résultats du calcul numérique, permet d'observer que la distribution non-locale de l'endommagement est indépendante du maillage. Le modèle d'endommagement non-local converge numériquement.

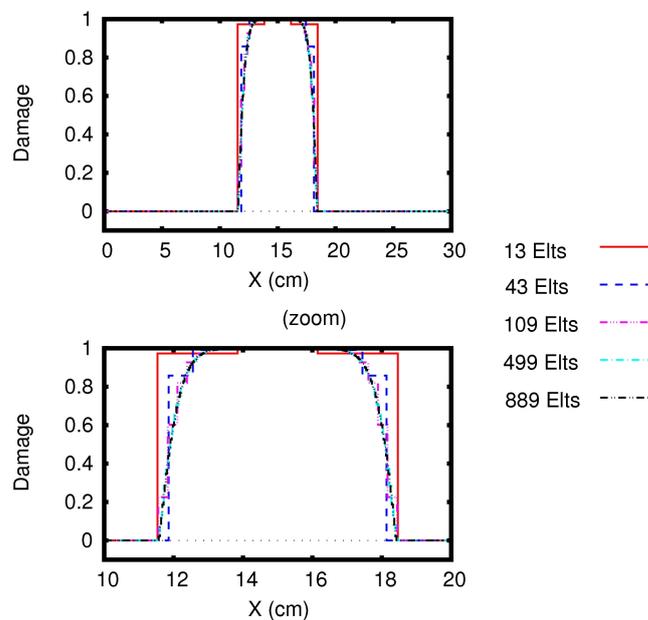
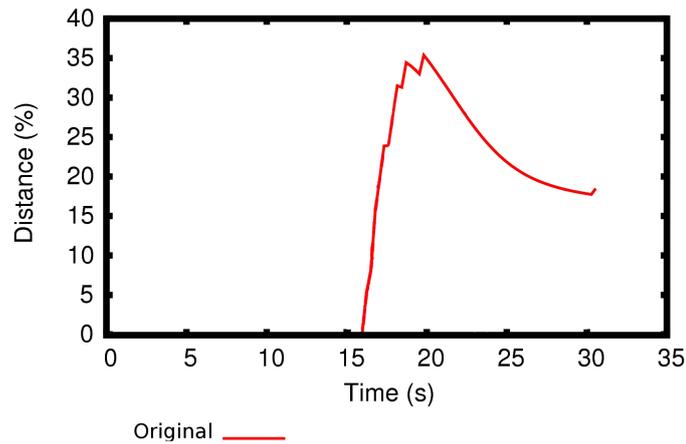


FIGURE 3.3 – Convergence des profils d'endommagement avec le nombre d'éléments.

(ii). Capacité à décrire la transition continu-discret du champ de déplacement :

L'évolution de l'écart entre le profil de déformation calculé avec le modèle et le profil théorique résultant d'une discontinuité forte au cours du chargement est présentée sur la figure 3.4. Cette distance, calculée à l'aide de l'équation 3.6, augmente au cours du temps pour suivre une tendance presque constante à partir du pas de temps $t = 30s$. Cette différence entre les deux profils montre que le modèle d'endommagement non-local ne représente pas la transition continu-discret.



(a)

FIGURE 3.4 – Distance entre les profils de déformation théorique et calculée.

(iii). *Convergence vers une discontinuité forte* :

À la rupture complète, l'ouverture de fissure calculée en utilisant la technique décrite dans [16] ne doit pas dépendre de la taille de l'élément. Sur un exemple simple unidimensionnel, en supposant que la fissure se crée dans un élément (déformation constante), l'ouverture de fissure est calculée comme $[[U]] \approx \varepsilon h$ où $[[U]]$ est l'ouverture de fissure dans l'élément fissuré, ε correspond à la déformation dans ce même élément et h , à sa taille. Après la rupture, la déformation dans l'élément fissuré doit évoluer de façon inversement proportionnelle à sa taille (pour une déformation constante dans cet élément car les autres éléments sont déchargés au moment de la rupture). La figure 3.5 montre que ce rapport n'est pas respecté. Le modèle n'est donc pas capable de décrire la discontinuité forte.

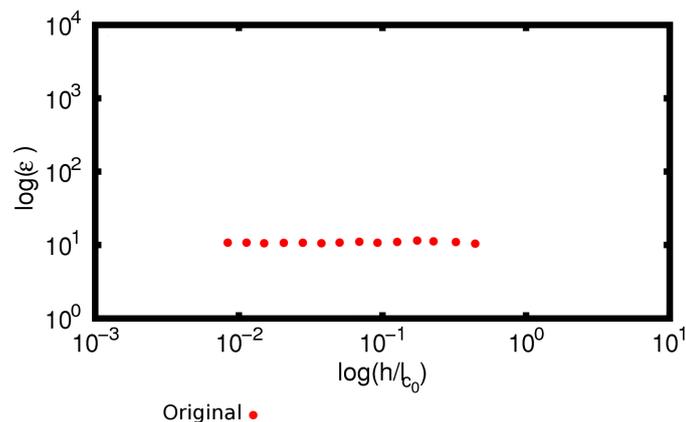


FIGURE 3.5 – Évolution de la déformation en fonction du rapport taille d'élément/longueur interne au moment de la rupture.

3.3 Écaillage

Un deuxième exemple unidimensionnel utilisé pour observer la réponse près d'un bord est le problème de l'écaillage. Ce test, développé par Kolsky [31] (inspiré du modèle de la *barre de Hopkinson*), est utilisé pour la caractérisation du comportement mécanique des matériaux et souvent adapté pour des tests en fissuration dynamique. Dans le cas de l'analyse de formulations non-locales, ce cas test a été utilisé par Krayani et ses collaborateurs [32].

Un projectile vient percuter une des extrémités, générant une onde compressive qui se propage le long de la barre sous un régime élastique. Quand cette onde de compression atteint l'autre extrémité de la barre, elle devient une onde de traction et s'ajoute à l'onde de compression, voir figure 3.6. Ces deux ondes s'annulent jusqu'à ce que l'onde de traction atteigne une distance au bord égale à la moitié de la longueur du signal initial. La rupture apparaît à cet endroit si l'amplitude est plus grande que la résistance à la traction. L'écaillage apparaîtra à une distance du bord contrôlée par la durée du signal initial.

Le tableau 3.2 rappelle les paramètres de ce deuxième cas test. Les notations sont similaires au tableau 3.1.

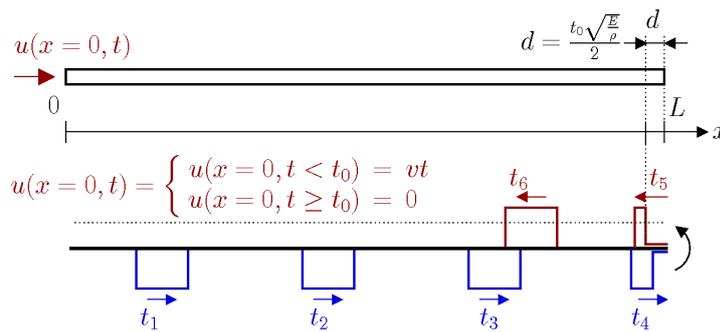


FIGURE 3.6 – Schéma du cas test de l'écaillage et propagation de l'onde de déformation à l'intérieur de la barre pour la formation de l'écaillage.

Paramètre	$L[cm]$	$t_0[s]$	$v[cm/s]$	$E[MPa]$	$\rho[kg/m^3]$	$l_{c0}[cm]$	ε_{D_0}	α_t	A_t	B_t	α_c
Valeur	20	4	1.5	1	1	4	1	1	1	2	0

TABLE 3.2 – Paramètres utilisés dans le calcul 1D du cas de l'écaillage [32].

De l'analyse micro-mécanique faite par Krayani et ses collaborateurs [32], il ressort que le comportement non-local doit être de moins en moins accentué dans la proximité d'un bord et que, au bord même et sur la normale à celui-ci, la réponse doit être locale. En effet, un instant avant la création de l'écaillage les deux ondes, incidente (compression)

et réfléchi (traction), s'annulent. Durant le processus d'écaillage, la déformation au bord de la barre reste nulle et, en conséquence, l'endommagement doit l'être aussi. La figure 3.7 montre les profils d'endommagement obtenus pour deux durées d'application d'onde différentes. On observe que l'endommagement atteint sa valeur maximale au bord de la barre pour les deux instants considérés. Le modèle d'endommagement non-local ne représente pas convenablement le comportement près d'un bord.

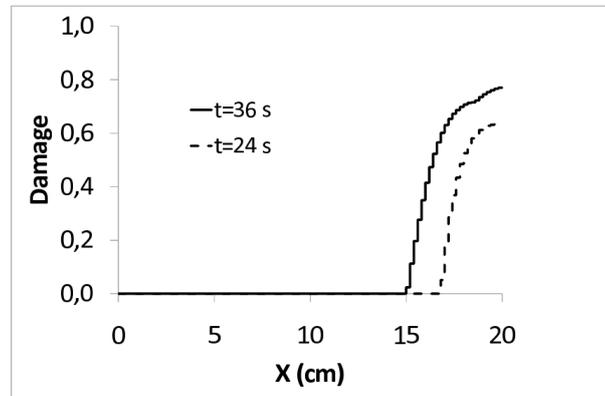


FIGURE 3.7 – Profil d'endommagement au bord - Modèle non-local original [47].

3.4 Rupture par flexion 3 points

La description correcte de la rupture du béton passe par la simulation numérique de la réponse mécanique obtenue expérimentalement. Afin de disposer de ces données expérimentales nous avons mené une campagne d'essais de poutres en flexion trois points. Dans cette section nous commencerons par montrer les détails de cette campagne expérimentale ainsi que les résultats obtenus. Ensuite, nous utiliserons cette information pour observer la capacité du modèle d'endommagement non-local à reproduire les données expérimentales.

3.4.1 Construction d'une base de données expérimentales pour l'analyse de modèles

Cette section est consacrée à la présentation de la campagne expérimentale menée sur des poutres homothétiques, entaillées et non-entaillées faites du même matériau. Nous avons considéré trois géométries différentes afin de prendre en compte les effets d'échelle et les effets de bord.

3.4.1.1 Description du matériau, échantillons et essais mécaniques

La formulation du béton est basée sur un mélange commercial obtenu chez Unibéton (www.unibeton.fr) et qui est utilisé couramment dans la construction de chaussées.

La formulation du mélange est détaillée dans le tableau 3.3 et les courbes granulométriques du sable, des granulats et du mélange sont présentés sur la figure 3.8.

Produit	Désignation	Masse (kg)
Sable	Cemex 0/4	740
Granulats	Gravier 4/10	1140
Ciment	Calcia CEM II/A	286
Adjuvant	Axim Cimplast 115	1
Eau	Eau claire	179
Total		2346

TABLE 3.3 – Formulation du béton utilisée pour la fabrication des structures et la construction d'une base de données expérimentales.

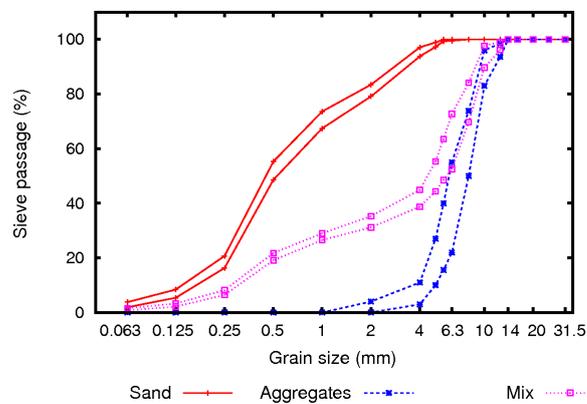


FIGURE 3.8 – Courbe granulométrique des composants du mélange utilisé pour la confection des échantillons.

Les essais mécaniques réalisés ici sont des essais de flexion trois points réalisés sur des poutres de différentes tailles, toutes de même formulation que celle décrite dans le tableau 3.3. La confection des éprouvettes a nécessité le coulage de huit gâchées à l'aide d'un malaxeur d'une capacité de 150L. Une fois démoulés, les échantillons ont été stockés immergés dans l'eau à 20°C. Afin de caractériser les propriétés du matériau et de vérifier la répétabilité globale, des essais de compression et de fendage ont été réalisés en suivant les standards Européens (EN 12390-1-3-6²). Pour ce faire, 51 éprouvettes cylindriques ont été confectionnées avec un rapport³ $h/r = 2$. La résistance à la compression, la résistance à la traction par fendage, le module d'Young et le coefficient de Poisson sont présentés dans le tableau 3.4. Les tableaux A.1, A.3, A.2 et A.4 résument les différentes propriétés mécaniques mesurées pour chaque gâchée.

2. Essais sur le béton durci – Partie 1, Partie 3 et Partie 6.

3. h = hauteur du cylindre, r = rayon du cylindre.

La figure 3.9 présente la courbe de compression obtenue pour l'éprouvette cylindrique #262 de la gâchée #2. Les essais de caractérisation ainsi que ceux en flexion trois points ont été faits sur des éprouvettes de même âge plus ou moins deux jours et aucune influence marquée de l'âge n'a été observée comme on peut s'en rendre compte sur la figure 3.10.

Résistance à la compression			Module Young			Coefficient de Poisson			Résistance à la traction		
μ	σ	c_v	μ	σ	c_v	μ	σ	c_v	μ	σ	c_v
(MPa)	(MPa)	(%)	(GPa)	(GPa)	(%)	(-)	(-)	(%)	(MPa)	(MPa)	(%)
42.3	2.8	6.6	37.0	0.9	2.4	0.21	0.02	8.7	3.9	0.2	6.0

(μ – moyenne; σ – écart type; $c_v = \mu/\sigma$ – coefficient de variation)

TABLE 3.4 – Propriétés mécaniques moyennes du béton utilisé.

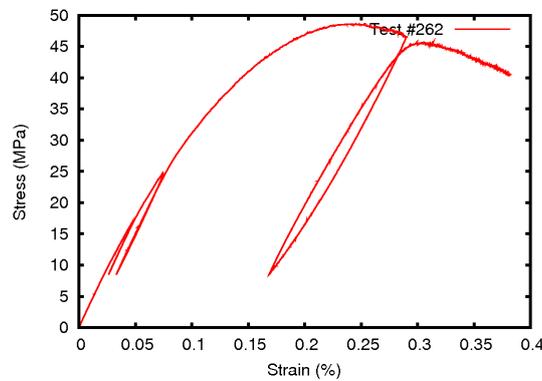


FIGURE 3.9 – Essai de compression sur l'éprouvette #262, gâchée #2.

Les poutres homothétiques ont été testées en flexion 3 points. Quatre différentes tailles sont considérées, présentant toutes un rapport $S/D = 2.5$, où S est la distance entre appuis et D est la hauteur de la poutre, dont les valeurs sont comprises entre 50 et 400mm. La profondeur, quant à elle a été choisie constante et égale à 50 mm. Afin de mettre en évidence les effets de bord, des entailles centrales ont été moulées sur les éprouvettes. Trois longueurs d'entaille ont été considérées avec une largeur constante de 2 mm pour tous les échantillons. Les poutres ont été nommées d'après le type d'entaille, nous avons donc :

- UN pour *UnNotched*, correspondant aux éprouvettes non-entailées, le rapport entaille/hauteur vaut 0;
- FN pour *Fifth-Notch*, correspondant aux éprouvettes avec une petite entaille, rapport entaille/hauteur vaut 0.2, et
- HN pour *Half-Notch*, correspondant aux éprouvettes avec une longue entaille, rapport entaille/hauteur vaut 0.5.

Pour chaque taille et chaque configuration d'entaille trois échantillons ont été fabriqués avec la même formulation du béton (voir table 3.3). Au total, 34 essais en flexion trois points ont été réalisés. Les détails des différentes géométries sont présentées sur la fi-

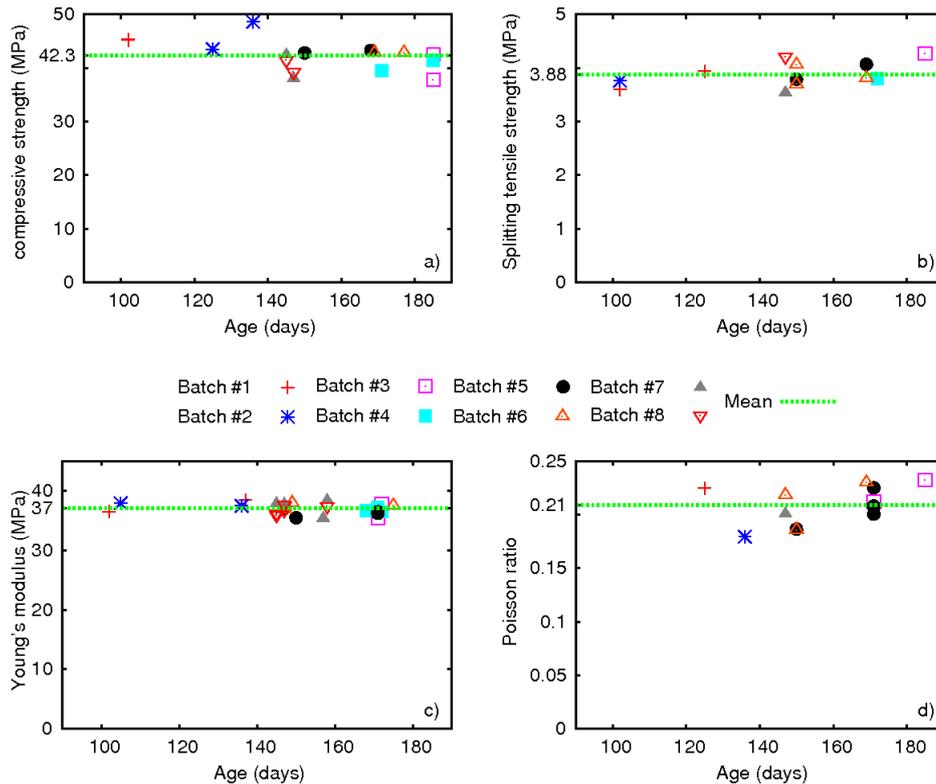


FIGURE 3.10 – Influence de l'âge sur les propriétés mécaniques : (a) résistance à la compression ; (b) résistance à la traction par fendage ; (c) module de Young ; (d) coefficient de Poisson.

gure 3.11.

Les essais ont été menés à l'aide d'une machine hydraulique (HB250, Zwick/Roell). Pour éviter la propagation instable de la fissure dans la phase post-pic, les essais sont pilotés en ouverture d'entaille (CMOD). La mesure du CMOD consiste à enregistrer la distance entre deux plaques d'aluminium collées sur la face inférieure de la poutre de chaque côté de l'entaille. Pour le cas des échantillons non-entailés, les plaques d'aluminium ont été collées à une distance équivalente à la moitié de la hauteur à partir du milieu de la poutre pour s'assurer que la fissure apparait entre ces deux plaques (voir figure 3.12). Bien que cette mesure ne soit pas le CMOD dans le cas des poutres non-entailées, nous allons l'appeler comme tel pour des raisons de simplicité tout en nous assurant de comparer la même grandeur lors d'études numériques. La force est mesurée avec une cellule de force de capacité de 250 kN. La déflexion de la fibre neutre est mesurée à l'aide d'un capteur laser installé de telle sorte que l'on obtient une mesure indépendante de la déformation au niveau des appuis. Tous les signaux ont été enregistrés et synchronisés grâce à un contrôleur digital. La figure 3.13 présente différentes données brutes mesurées par chaque capteur pendant l'essai correspondant à $(i, n) = (2, 2)$ (voir figure 3.11). Le tableau 3.5 résume les incertitudes des différents capteurs.

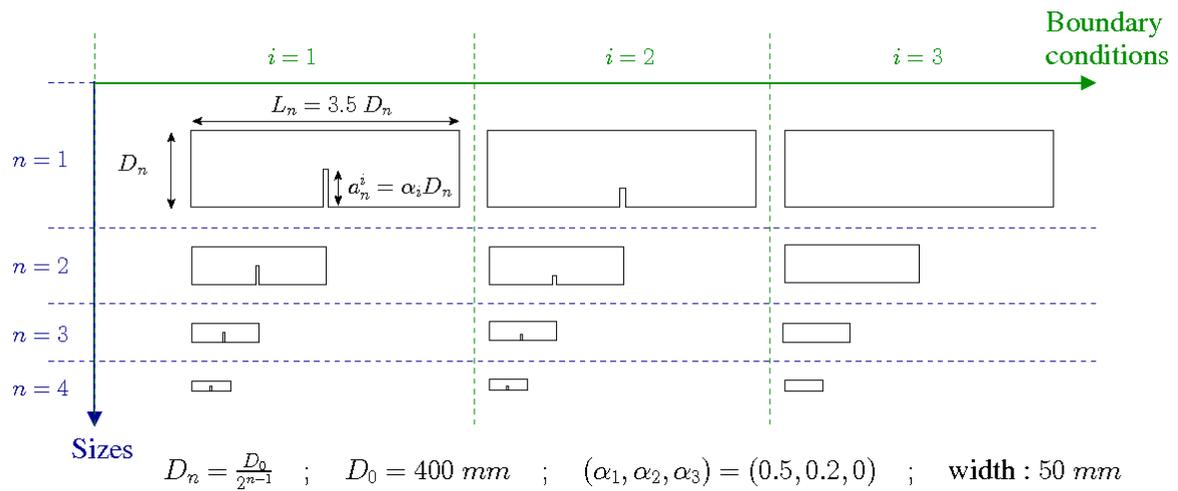


FIGURE 3.11 – Détails de la géométrie des éprouvettes testées pour la construction d'une base de données expérimentale.

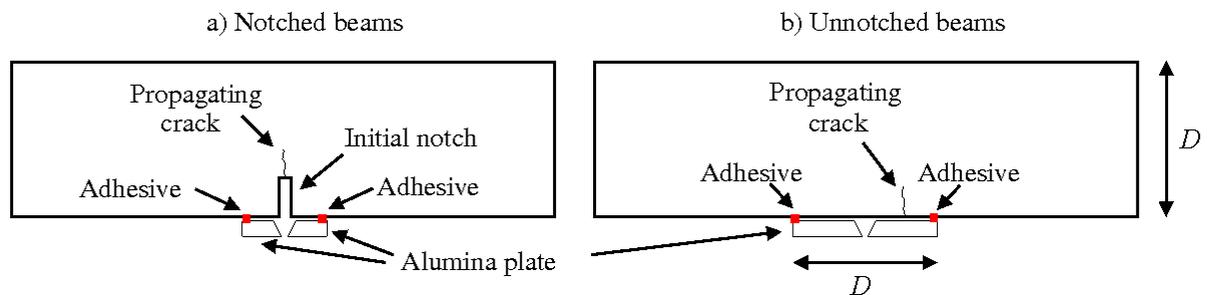


FIGURE 3.12 – Schéma de la mesure du CMOD pour les éprouvettes (a) entaillées ; (b) non-entaillées.

Incertitude relative		Incertitude absolue	
Mesure	Incertitude	Mesure	Incertitude
CMOD	$\pm 0.25 \%$	Déplacement	$\pm 0.5 \text{ mm}$
Force (250kN)	$\pm 0.25 \%$	Force (50kN)	$\pm 25 \text{ N}$
		Déflexion	$\pm 0.5 \mu\text{m}$

TABLE 3.5 – Incertitudes des différents capteurs utilisés pendant la campagne expérimentale.

3.4.2 Résultats expérimentaux

Nous présenterons dans ce paragraphe les résultats obtenus lors de la campagne expérimentale.

La figure 3.11 montre les détails de la géométrie des échantillons testés. Les informations concernant la fabrication des poutres et les caractéristiques des dispositifs de mesure ont été exposées dans la section 3.4.1.1.

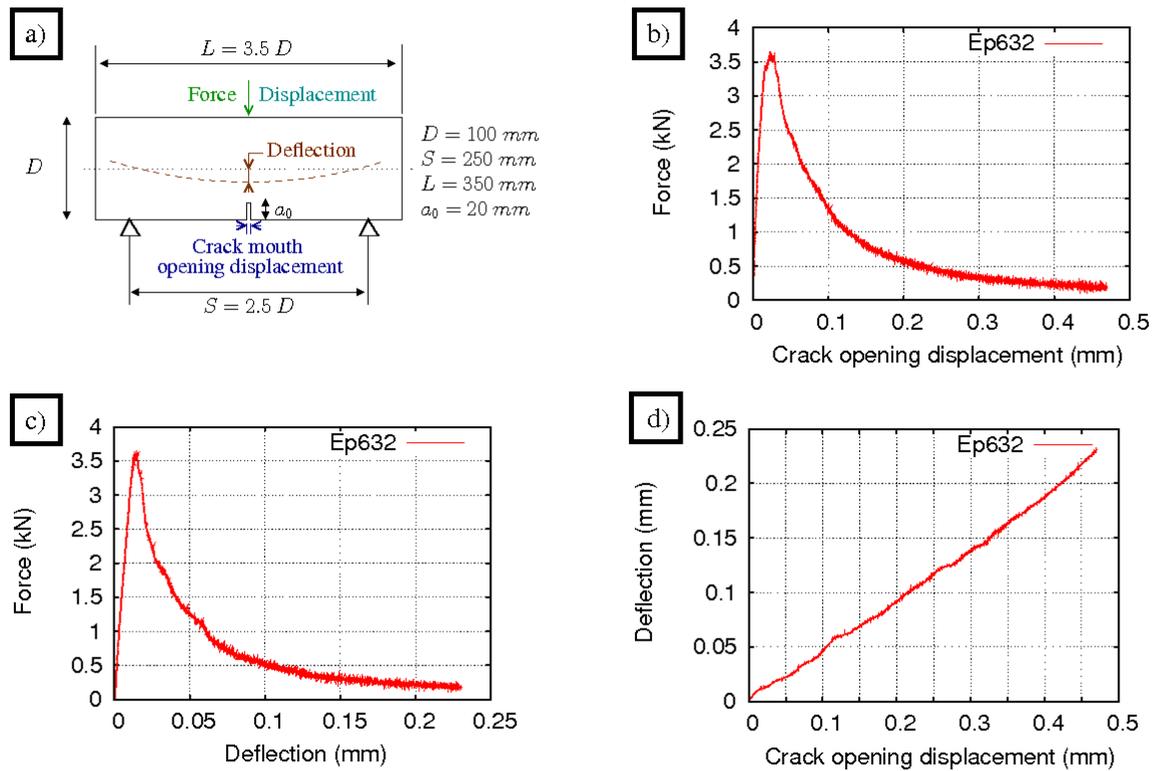


FIGURE 3.13 – Courbes brutes obtenues à partir des mesures de chaque capteur pendant un essai : (a) géométrie et mesures ; (b) force-CMOD ; (c) force-déflexion ; (d) déflexion-CMOD.

3.4.2.1 Éprouvettes entaillées HN

Ce type d'échantillons correspond aux éprouvettes où la taille d'entaille est grande, dans notre cas le rapport entre la longueur d'entaille (a_0) et la hauteur de poutre D vaut 0.5. Treize éprouvettes de ce type ont été testées. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau B.1 en annexe. Les données Force vs. CMOD sont également présentées en annexe dans la figure B.1.

Une première analyse des effets d'échelle consiste à estimer la résistance du ligament (c'est-à-dire la longueur qui correspond à la hauteur de la poutre moins l'entaille), pour chaque spécimen en comparant sa valeur au pic de chargement. La résistance du ligament σ_{HN} est définie ici comme étant la contrainte maximale dans le ligament :

$$\sigma_{HN} = \frac{3FS}{2bh^2} = \frac{15F}{bD} \quad (3.7)$$

où F est le chargement et S, b, h, D sont respectivement la portée, la profondeur et la longueur du ligament et la hauteur de la poutre.

La figure 3.14 montre l'évolution du chargement et de la contrainte maximale dans le ligament en fonction du CMOD moyen sur toutes les poutres de cette même géométrie. Elle permet de remarquer que la résistance (ou contrainte nominale) du ligament

dépend de la taille de la structure. Ici, les structures les plus petites sont les plus résistantes.

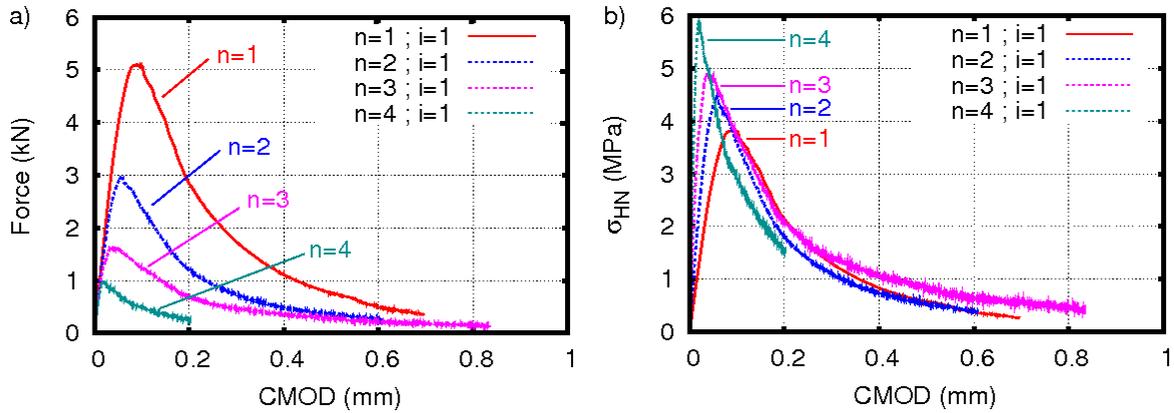


FIGURE 3.14 – Courbes moyennes (a) en effort et (b) en contrainte dans le ligament en fonction du CMOD – poutres HN.

3.4.2.2 Éprouvettes entaillées FN

Pour cette deuxième catégorie – celle des *petites* entailles – le rapport a_0/D vaut 0.2. Onze éprouvettes de ce type ont été testées et les résultats complets sont là encore résumés le tableau B.2 en annexe. L'évolution de la force en fonction du CMOD est présentée sur la figure B.2. La résistance du ligament est alors notée σ_{FN} et se calcule comme suit :

$$\sigma_{FN} = \frac{3 FS}{2 bh^2} = \frac{375 F}{64 bD} \quad (3.8)$$

En observant la figure 3.15, qui représente l'évolution du chargement et de la résistance du ligament en fonction du CMOD, il est possible tirer la même conclusion que précédemment, c'est-à-dire que la résistance du ligament dépend également dans ce cas de la taille de la structure : elle décroît lorsque la taille de la structure augmente.

3.4.2.3 Éprouvettes non-entaillées UN

Dix éprouvettes non entaillées ont enfin été testées. Les géométries et les charges maximales sont résumées dans le tableau B.3, et la figure B.3 représente l'évolution de la force en fonction du CMOD.

On note maintenant σ_{UN} la résistance du ligament pour les poutres non-entaillées, elle est calculée comme suit :

$$\sigma_{UN} = \frac{3 FS}{2 bh^2} = \frac{15 F}{4 bD} \quad (3.9)$$

Comme dans les deux cas précédents, la figure 3.16 présente la charge maximale et la contrainte dans le ligament en fonction de l'ouverture d'entaille moyennée sur toutes

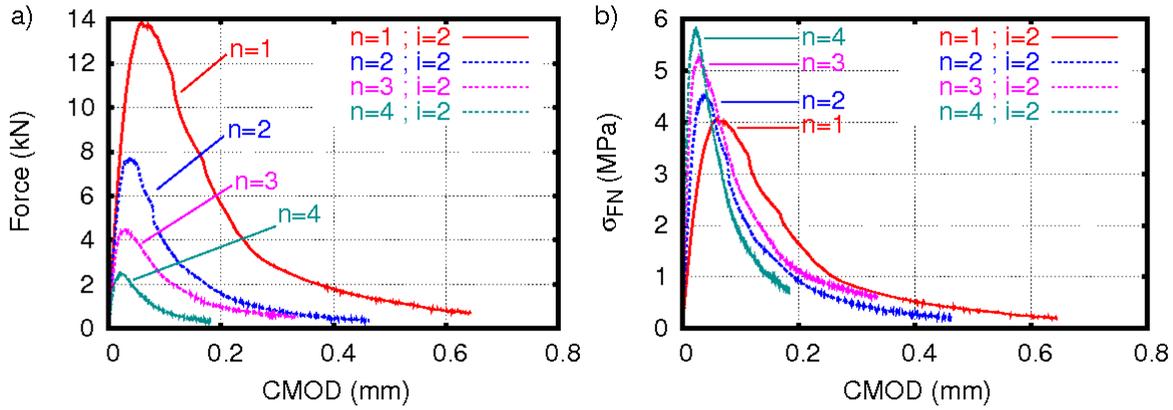


FIGURE 3.15 – Courbes moyennes (a) en effort et (b) en contrainte dans le ligament en fonction du CMOD – poutres HN.

les éprouvettes de la même géométrie. Encore une fois, l’effet d’échelle est observé. La résistance du ligament décroît quand la taille de la structure augmente.

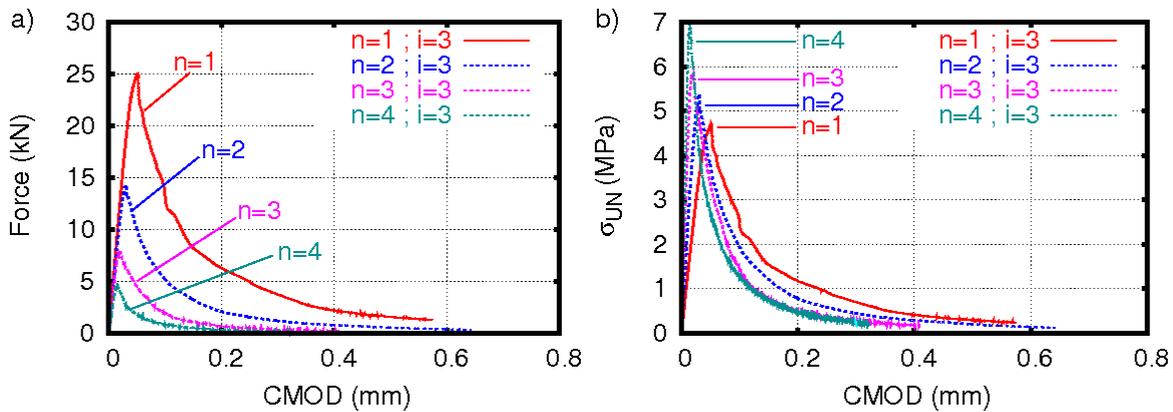


FIGURE 3.16 – Courbes moyennes (a) en effort et (b) en contrainte dans le ligament en fonction du CMOD – poutres UN.

3.4.3 Modélisation numérique des essais en flexion 3 points

Dans cette section nous étudions les performances du modèle non-local classique implémenté dans Cast3M pour la description et la reproduction de la réponse mécanique des poutres en flexion 3 points.

3.4.3.1 Description du maillage et des conditions de calcul

Des maillages en deux dimensions ont été utilisés pour chaque configuration de poutre. Les structures sont homothétiques. La figure 3.17 montre les caractéristiques du maillage et des conditions aux limites pour le cas particulier de la plus petite taille de poutre de type HN ($n = 4, i = 1$ dans la figure 3.11).

Les maillages correspondant à toutes les autres configurations sont présentés en an-

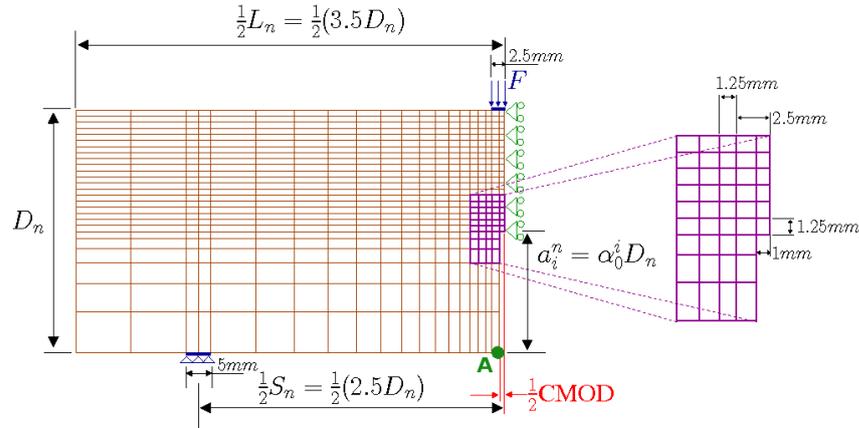


FIGURE 3.17 – Maillage et conditions de bord typiques considérés dans le calcul macroscopique ($n = 4$, $i = 1$).

nexe sur les figures D.1, D.2 et D.3. Afin de limiter les biais liés à la discrétisation, la taille d'élément est maintenue constante dans le voisinage de l'entaille et de la FPZ sur tous les échantillons. La taille caractéristique a été choisie égale à $(1 \times 1,25) \text{ mm}^2$. Les éléments utilisés dans le calcul sont de type rectangulaire à quatre nœuds et à quatre points d'intégration.

Du fait de la symétrie du problème, seule la moitié de l'échantillon est décrite par le calcul. Cette symétrie est spécifiée dans les conditions aux limites. Les charges sur les appuis sont réparties le long d'une ligne finie de 5mm afin de représenter les conditions de chargement appliquées expérimentalement. Les tests numériques sont contrôlés en CMOD pour tous les échantillons. À l'exception des poutres non-entailées, le CMOD sera calculé comme étant deux fois le déplacement du point A sur la figure 3.17.

3.4.3.2 Calibration des paramètres du modèle sur une géométrie de poutre FN

La calibration des paramètres du modèle a été faite suivant la méthode proposée dans [34]. Ainsi, un premier ajustement sur les poutres de géométrie $n = i = 2$ est fait de façon itérative jusqu'à ce qu'une bonne description de la courbe de chargement⁴ soit atteinte. Dans ce processus d'ajustement, un intérêt tout particulier est porté aux valeurs des charges maximales. En effet, on veut analyser ces résultats également du point de vue du phénomène d'effet d'échelle, où la seule information qui est prise en compte est la valeur de la charge au pic. Les valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson sont celles déterminées expérimentalement et présentées dans le tableau 3.4 du chapitre 3, à savoir : $E = 37\text{GPa}$, $\nu = 0.21$. Nous considérons qu'il n'y

4. Effort appliqué en fonction de l'ouverture d'entaille.

a pas d'endommagement en compression dans la partie supérieure de la poutre. Ainsi, nous prenons des valeurs typiques des paramètres prenant en compte la compression afin de reproduire la courbe de compression de la figure 3.9 ($A_c = 1.15$ et $B_c = 370$).

À ce stade, la longueur interne l_{c_0} est considérée comme une constante égale à trois fois la taille du plus gros granulat [6]. Cette valeur est ensuite modifiée itérativement en suivant l'analyse de sensibilité proposée dans [34] jusqu'à obtenir un ajustement satisfaisant pour les tailles $n = 4$ et $n = 3$. Les valeurs des paramètres du modèle calibrées – voir l'équation (2.3b) dans le paragraphe 2.4.1 – sont :

- $\varepsilon_{D_0} = 10^{-5}$,
- $A_t = 0.75$,
- $B_t = 7000$, et
- $l_{c_0} = 40\text{mm}$.

Nous avons adopté cette stratégie de calibration car le plus souvent, les cas traités dans la littérature ne prennent en compte que trois tailles et le calcul de quatre tailles avec un même jeu de paramètres est difficile avec ce modèle classique d'endommagement non-local. L'algorithme automatique proposé dans [34] aurait pu être mis en œuvre afin de parvenir à une calibration de meilleure qualité. Nous considérons toutefois que l'ajustement actuel est suffisamment précis pour l'objectif d'illustration que nous nous sommes fixé. Le comportement de la plus grosse éprouvette est obtenu à l'aide des paramètres déterminés sur les trois tailles inférieures.

La figure 3.18 montre la comparaison entre les courbes obtenues numériquement pour

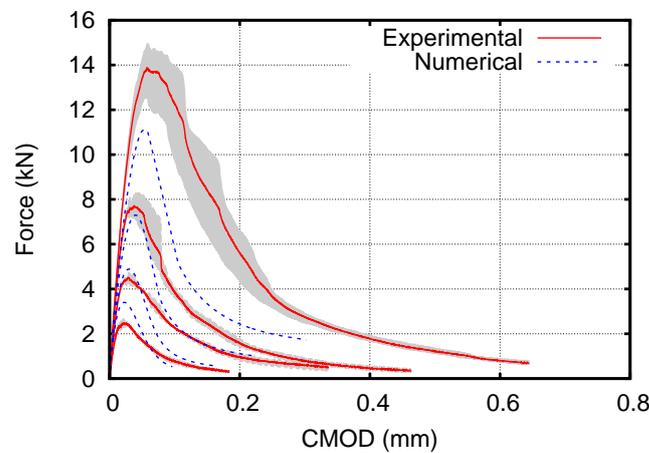


FIGURE 3.18 – Capacité du modèle macroscopique à reproduire l'effet d'échelle sur les éprouvettes de géométrie FN.

le cas des géométries FN et les résultats expérimentaux correspondants. Ces résultats montrent que, avec le jeu de paramètres choisis, seules les charges au pic pour les tailles intermédiaires ($n = 2$ et $n = 3$) sont correctement décrites. En revanche, les charges

au pic des plus petites et des plus grandes structures sont moins bien représentées. Ce fait met en évidence la difficulté du modèle non-local classique à reproduire l'effet d'échelle sur les quatre différentes tailles d'éprouvettes. De plus, la partie adoucissante sur chaque courbe numérique reste éloignée de la courbe expérimentale correspondante.

3.4.3.3 Capacités du modèle calibré à reproduire l'effet d'échelle et l'effet de bord sur les autres géométries de poutre

Les paramètres du modèle ont été calibrés sur une géométrie particulière. La question est maintenant de savoir *dans quelle mesure le modèle calibré est capable de décrire le comportement mécanique des structures de géométries différentes ?* On veut donc observer l'incidence de la modification des conditions de bord sur la description de l'effet d'échelle et du comportement mécanique général.

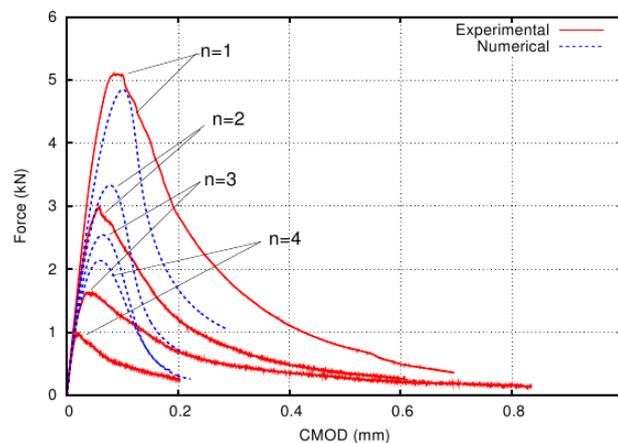


FIGURE 3.19 – Description de l'effet d'échelle des poutres HN avec les paramètres calibrés sur la géométrie FN.

La figure 3.19 montre la comparaison entre les courbes numériques et expérimentales pour le cas des poutres HN. Il est clair que le modèle non local ne fournit pas une bonne description de l'effet d'échelle pour cette géométrie.

Une méthodologie inverse, c'est-à-dire la calibration des paramètres du modèle à partir de la géométrie HN puis la simulation sur des éprouvettes FN, présente le même inconvénient. La description du comportement des poutres non-entaillées quant à elles est présentée sur la figure 3.20. À l'exception de la plus petite taille, une sous-estimation des valeurs de charges maximales est observée et la partie adoucissante du chargement n'est pas bien décrite par le modèle.

Pour une taille d'échantillon donnée $n = 2$, la figure 3.21 montre la capacité du modèle calibré sur les poutres FN à reproduire la réponse mécanique sur d'autres géométries

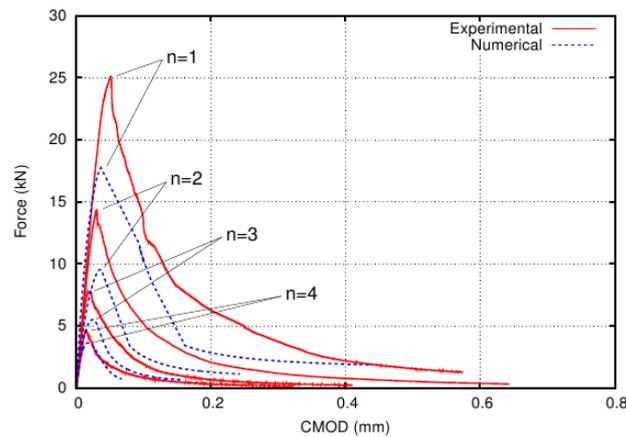


FIGURE 3.20 – Description de l'effet d'échelle des poutres UN avec les paramètres calibrés sur la géométrie FN.

de la même taille (poutres HN $i = 1$ et UN $i = 3$). La valeur numérique de la charge maximale est proche de la valeur expérimentale dans le cas de la plus longue entaille alors qu'elle est très éloignée dans le cas de l'éprouvette non entaillée.

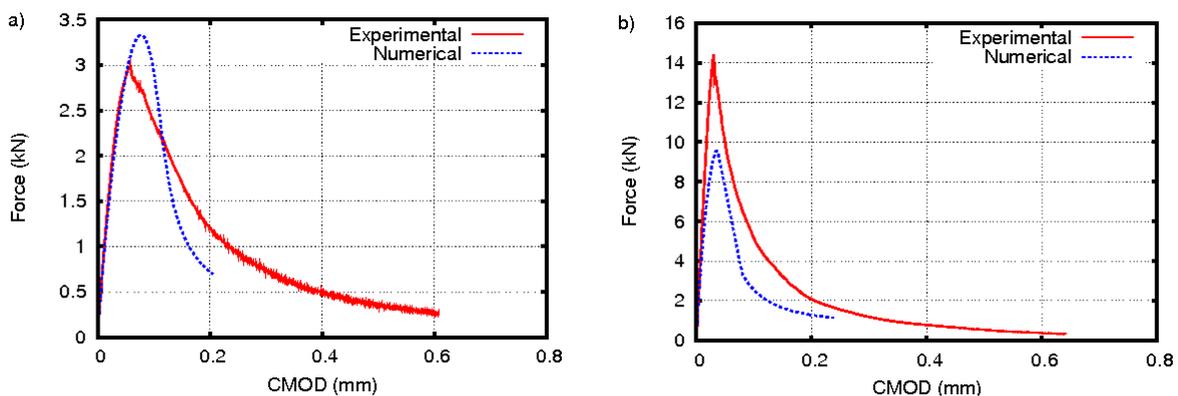


FIGURE 3.21 – Influence des conditions de bord sur le modèle calibré.

Ces calculs suggèrent que le modèle non-local ne peut pas décrire avec précision le processus de rupture dans un cadre plus général que celui utilisé pour la calibration du modèle. Ces résultats sont en accord avec les calculs présentés dans [32] et requièrent donc une amélioration du modèle macroscopique.

3.5 Analyse des effets d'échelle

Puisque c'est un phénomène lié à la nature quasi-fragile du béton, la description de l'effet d'échelle est vue de nos jours comme un élément indispensable à la validation de modèles. La littérature rapporte des nombreux travaux portant sur ce phénomène dans

différents contextes et pour différents matériaux ; les pionniers étant Leonardo da Vinci (1452-1519), Galileo Galilei (1564-1642) ainsi que Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707-1788) entre autres. Cependant, c'est seulement à partir du milieu du 20^{ème} siècle que les études sur les effets d'échelle se sont intensifiées notamment après la publication des travaux de Weibull [60], de Volkov [57] ou encore de Walsh [58]. Pour un historique complet et détaillé des travaux sur ce sujet, le lecteur peut se référer à [7].

Encore plus récemment l'effet d'échelle a été le centre de diverses études expérimentales sur de nombreux matériaux quasi-fragiles ou non. On peut citer par exemple les travaux de Gettu [21] et de Karihaloo [30] qui se sont concentrés sur le béton ; de Le Bellégo et collaborateurs [35] qui ont travaillé sur le mortier ; le travail de Wang et collaborateurs [59] sur le marbre ; celui de Van Vliet et collaborateurs [56] sur le grès, de Ficher et collaborateurs [18] sur les céramiques fragiles, de Morel et collaborateurs [41] sur le bois ou encore le travail de Luna et collaborateurs [37] sur les polymères.

Le phénomène d'effet d'échelle a suscité tellement d'intérêt dans la communauté scientifique que de nombreuses théories pour le décrire ont été proposées. La littérature répertorie les différentes propositions en trois grandes familles :

- les théories fondées sur une approche *énergétique-statistique* [1, 7, 41] ;
- les propositions supportées par les principes topologiques de la théorie *fractale* [13] ;
- les propositions en accord avec la théorie *statistique* de Weibull [56].

Ces trois théories d'effets d'échelle sont utilisées aujourd'hui. Cependant, le débat concernant leur pertinence et validité est encore intense, l'une des principales raisons étant le manque de données expérimentales qui permettent de faire un choix objectif à ce sujet. En effet, la plupart des théories présentent des résultats similaires à partir des données obtenues sur de petits échantillons (structures à l'échelle du laboratoire) et non pas sur des structures à grande échelle.

La validation de modèles numériques par le biais des effets d'échelle se fait traditionnellement à l'aide des résultats des essais de flexion 3 points. On considère des poutres homothétiques pré-entaillées (avec un rapport $\alpha = a_0/D$ fixé, où a_0 est la longueur de l'entaille et D la hauteur de la poutre) et non-entaillées ($a_0 = 0$). Leur réponse mécanique sert de base pour la calibration des paramètres du modèle d'endommagement [12, 34].

L'influence de la géométrie de la structure sur l'effet d'échelle est un autre facteur non moins important à prendre en compte lors de la validation d'un modèle car les caractéristiques de la FPZ ne sont pas les mêmes près d'une entaille ou d'un bord plat. Lors d'un essai de flexion trois points, l'existence d'une pré-entaille assure une concentration des contraintes et la macro-fissure se crée en pointe d'entaille. En revanche, si l'échantillon n'est pas pré-entaillé, l'application de la charge génère de la traction ac-

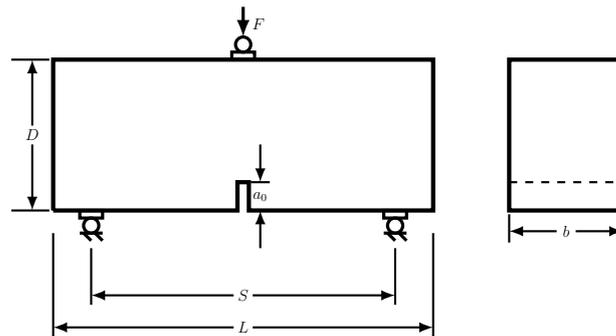


FIGURE 3.22 – Nomenclature et géométrie d'une poutre entaillée.

compagnée par l'apparition et l'interaction de micro-fissures qui se distribuent dans une bande sur la partie inférieure de la poutre. Une macro-fissure se crée ensuite, donnant lieu à la concentration des contraintes en pointe de fissure. Ces deux mécanismes d'amorçage du processus de rupture sont pris en compte dans la théorie déterministe d'effets d'échelle de Bazant et deux lois distinctes ont été proposées : une pour les cas d'amorçage de la fissure à partir d'une entaille et une autre pour ceux où la fissure s'amorce à partir d'une surface plane [7].

Un modèle décrivant correctement le processus de fissuration doit être capable de décrire ces deux effets : l'effet d'échelle et l'influence de la géométrie sur l'effet d'échelle en même temps. Autrement dit, et puisque l'analyse d'effets d'échelle utilise comme information principale les charges au pic, les valeurs des charges maximales obtenues à l'aide des simulations numériques, aussi bien pour des échantillons entaillés et non-entaillés, doivent (dans l'idéal) coïncider avec les charges maximales obtenues expérimentalement. Insistons sur le fait que la description de la réponse de ces structures doit prendre en compte également l'ensemble du comportement adoucissant même si dans ce paragraphe nous portons un intérêt spécial sur l'effet d'échelle.

Bien que les expériences qui incluent l'effet d'échelle soient nombreuses, elles sont restreintes à une géométrie spécifique et très souvent elles ne considèrent pas le même matériau pour toutes les géométries. La plupart du temps, le rapport a_0/D (voir figure 3.22) tend vers zéro mais il n'atteint jamais cette valeur, voir par exemple [15, 52]. Les échantillons non-entaillés sont étudiés séparément dans des campagnes expérimentales indépendantes avec des matériaux différents par rapport aux échantillons entaillés, voir par exemple [5]. D'autres auteurs présentent des études prenant en compte les deux types d'échantillons (voir par exemple [10, 30]) mais dans le but de développer une théorie spécifique, non pas de construire une base de données générale. Les résultats sont alors incomplets dans le sens où toutes les configurations d'entaille ne sont pas étudiées pour toutes les tailles de poutre.

Nous utiliserons ici les données obtenues de la campagne expérimentale décrite dans

la section 3.4.1. Une base de données suffisamment documentée représentant pour le même matériau l'effet d'échelle (donc plusieurs tailles des structures) et l'effet de bord (donc plusieurs tailles d'entaille incluant le cas non-entailé) n'existe pas à notre connaissance. Fournir cette base de données expérimentales complète figure aussi parmi nos objectifs.

3.5.1 Une analyse primaire et directe d'effet d'échelle à partir des résultats expérimentaux

Cette simple analyse d'effet d'échelle consiste à collecter les résistances du ligament pour chaque éprouvette puis à faire une moyenne pour chaque géométrie et pour chaque taille. Les résultats sont présentés sur la figure 3.23. Les abscisses correspondent à la taille de la structure (plus le rapport D_0/D est grand, plus la structure est petite) et l'indice $i \in \{1, 2, 3\}$ est utilisé pour caractériser la géométrie comme cela a été présenté dans la figure 3.11.

De cette représentation graphique des résultats, il est possible de constater que les

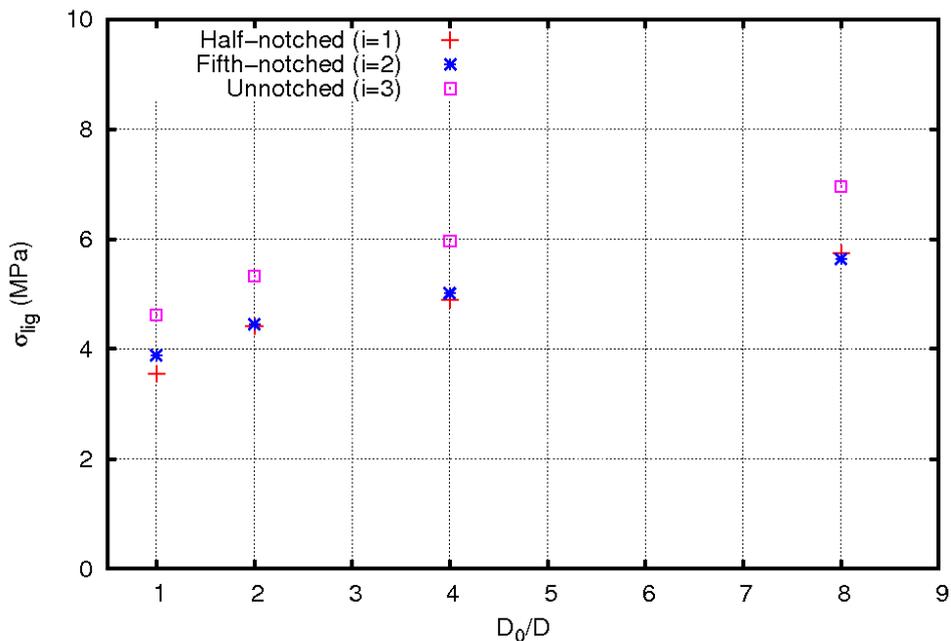


FIGURE 3.23 – Représentation d'une analyse primaire d'effet d'échelle – $D_0 = 400\text{mm}$.

valeurs de résistance augmentent quand la taille de la structure diminue. Il est possible également de voir l'influence de la géométrie sur l'effet d'échelle. En effet, les résistances des structures non-entailées se situent au-dessus de celles correspondant aux structures entaillées.

3.5.2 Analyse par la loi déterministe d'effets d'échelle

Dans tout ce qui suit, les résultats expérimentaux sont post-traités suivant la démarche proposée par Bažant [7]. Il est important de noter que parmi les nombreuses lois d'effet d'échelle proposées dans la littérature, ce post-traitement a été choisi dans un but illustratif. En effet, des analyses similaires auraient pu être effectuées en se basant sur d'autres lois d'échelle reposant sur d'autres fondements théoriques.

La loi d'effets d'échelle de Bažant considère dans un premier temps deux procédures indépendantes d'analyse d'effets d'échelle : *une* pour les échantillons entaillés et *une autre* propre aux structures non-entaillés. De plus, une *loi intrinsèque d'effet d'échelle* est aussi proposée afin de faire une seule analyse sur des structures entaillées mais avec un rapport d'entaille différent. Nous allons aussi utiliser cette loi dans notre démarche car nous considérerons des échantillons entaillés avec des rapports d'entaille $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.2$ différents.

Dans des travaux plus récents Bažant a proposé une loi avec une unique expression mathématique tenant compte de toutes les propriétés asymptotiques pour les cas des grandes et des petites tailles pour des échantillons aussi bien entaillés que non entaillés. Il a appelé cette loi *La loi universelle d'effet d'échelle* [8]. À l'heure actuelle et à notre connaissance cette loi n'est pas validée expérimentalement à cause du manque d'information car une base de données contenant plus de trois tailles et différentes conditions de bord pour un même matériau n'existe pas. Ici nous disposons d'une telle information et nous pourrions donc calibrer cette loi universelle complètement.

Les différentes lois d'effets d'échelle seront présentées dans les sections suivantes rapportant uniquement les résultats principaux. Les détails sur l'analyse complète sont donnés dans l'annexe C.

3.5.2.1 Loi classique de Bažant pour des structures entaillées

Pour des échantillons homothétiques entaillés, la loi classique de Bažant est donnée par :

$$\sigma_N = \frac{B f_t}{\sqrt{1 + \frac{D}{D_0}}} \quad \text{avec} \quad \sigma_N = \frac{3 F S}{2 b D^2} \quad (3.10)$$

où σ_N est la contrainte nominale calculée sur la hauteur de la poutre. Cette contrainte nominale n'est pas la même que celle qui a été calculée avec les équations 3.7, 3.8 ou 3.9 car ici il est nécessaire de prendre en compte la hauteur de la poutre et non pas le ligament équivalent. B est une constante adimensionnelle, D_0 est une longueur constante, f_t est la résistance à la traction du matériau, F est le chargement appliqué; S , b et D sont respectivement la portée, la profondeur et la hauteur de la poutre. Ici B et D_0 dépendent des propriétés de fissuration du matériau et de la géométrie de la structure.

L'équation 3.10 est valable uniquement pour des structures ayant un rapport a_0/D ⁵ comprise entre 0.15 et 0.5. D'après [7] les paramètres de fissuration G_f et c_f sont liés aux paramètres d'effet d'échelle D_0 et Bf_t :

$$G_f = \frac{B^2 f_t^2}{c_N^2 \tilde{E}} D_0 g(\alpha_0) \quad \text{et} \quad c_f = \frac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} D_0 \quad \text{avec} \quad (3.11)$$

$$g(\alpha_0) = \pi \alpha_0 c_N^2 (F(\alpha_0))^2 \quad ; \quad \alpha_0 = \frac{a_0}{D} \quad ; \quad c_N = \frac{3S}{2D} \quad ; \quad \tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

où D_0 et Bf_t sont les paramètres définis par l'équation 3.10; G_f et c_f sont l'énergie de fissuration et la longueur effective de la FPZ définies dans [7]. On appelle *énergie de fissuration* le taux de libération d'énergie nécessaire pour la croissance d'une fissure. La *longueur effective de la FPZ* est la distance entre la pointe de l'entaille et la pointe de la fissure équivalente dans un modèle de rupture mécanique linéaire élastique sur un échantillon de taille infinie. De plus, g et F sont deux fonctions qui dépendent de la géométrie et de la forme de l'échantillon, c'est-à-dire du rapport a_0/D ; c_N est le rapport S/D ; E et ν sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

La littérature propose différentes fonctions de géométrie et de forme $F(\alpha)$. Ainsi pour un rapport $S/D = 2.5$ on a par exemple :

$$F(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{1.83 - 1.65x + 4.76x^2 - 5.3x^3 + 2.51x^4}{(1+2x)(1-x)^{1.5}} \right) \quad [52] \quad (3.12a)$$

ou

$$F(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{p_\infty(x) + \frac{4D}{S} [p_4(x) - p_\infty(x)]}{(1+2x)(1-x)^{1.5}} \right) \quad (3.12b)$$

avec $p_\infty(x) = 1.989 - x(1-x)(0.448 - 0.458(1-x) + 1.226(1-x)^2)$
 et $p_4(x) = 1.9 - x(-0.089 + 0.603(1-x) - 0.441(1-x)^2 + 1.223(1-x)^3)$
 [7] suivant [43]

Nous avons choisi la dernière expression, soit l'équation 3.12b, car elle a l'avantage d'être applicable à des structures avec un rapport S/D quelconque avec une précision de 0.5% pour tout rapport a_0/D .

La détermination des paramètres de fissuration à partir des effets d'échelle en utilisant l'équation 3.10 ne peut se faire que pour des structures avec le même rapport S/D et a_0/D pour tous les échantillons. En effet, les paramètres d'effets d'échelle dépendent du rapport a_0/D par l'équation 3.13, voir figure 3.24. Cela signifie que le posttraitement pour les échantillons entaillés doit se faire séparément pour des structures avec différents rapports a_0/D . Cette difficulté peut être surmontée par l'utilisation de la loi intrinsèque d'effets d'échelle incluant directement les paramètres du matériau G_f et c_f .

5. où a_0 est la longueur de l'entaille et D la hauteur de la poutre.

$$B(\alpha_0) = \sqrt{\frac{g'(0)}{g'(\alpha_0)}} \quad \text{et} \quad D_0(\alpha_0) = \frac{g'(\alpha_0)}{g(\alpha_0)} c_f \quad (3.13)$$

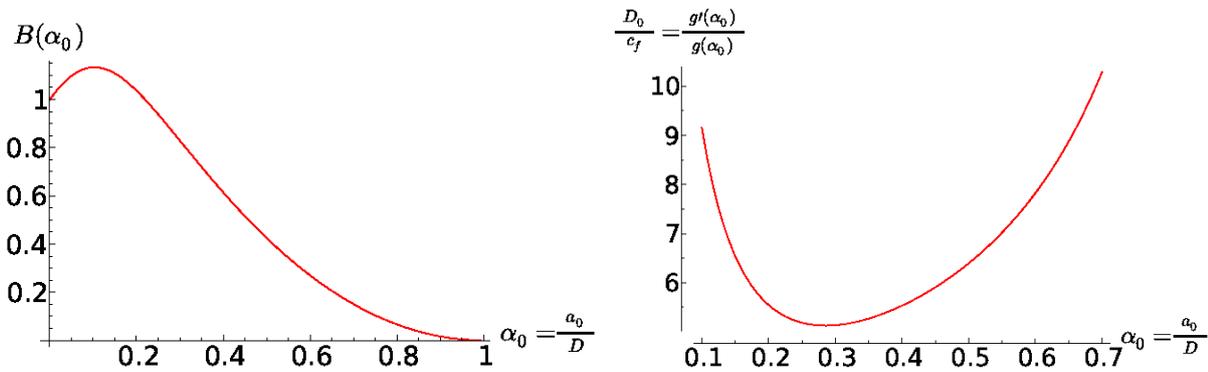


FIGURE 3.24 – Influence du rapport a_0/D sur les paramètres d'effet d'échelle.

La figure 3.25 présente la courbe d'effets d'échelle classique (équation 3.10) pour des échantillons entaillés (contrainte nominale normalisée en fonction de la taille normalisée). Les paramètres de fissuration estimés à travers les deux ajustements non linéaires sont présentés dans le tableau 3.6. Si l'analyse des échantillons HN ($\alpha = 0.5$) et FN ($\alpha = 0.2$) montrent des résultats acceptables séparément, il y a quelques divergences dans les valeurs de G_f et c_f obtenues des données expérimentales correspondant aux différents rapports a_0/D . Par exemple, la calibration conduit à $D_0(0.5) \leq D_0(0.2)$ tandis que les calculs théoriques de la figure 3.24 montrent exactement le contraire. La contrainte nominale et l'énergie de fissuration calibrées dépendent de la géométrie de la structure, ce qui ne devrait pas être le cas en théorie.

Puisque les propriétés des matériaux des différents échantillons sont similaires, ces divergences viennent de la calibration de la loi d'effets d'échelle. Une petite variation des données expérimentales conduit à une grande variation du paramètre d'effet d'échelle D_0 . Donc, la détermination de cette donnée à partir de l'analyse d'effet d'échelle sur une seule géométrie peut ne pas être très précise du fait de la dispersion des résultats expérimentaux. Par ailleurs, la calibration sur une géométrie spécifique et l'extension sur d'autres géométries peut engendrer des conséquences inattendues tel qu'il est montré sur la figure 3.26. La prévision de la contrainte nominale des échantillons avec un rapport d'entaille $\alpha = 0.5$ (ou HN) à partir de ceux en ayant un de $\alpha = 0.2$ (ou FN) conduit à la sous-estimation de la contrainte nominale, ce qui peut être critique pour le calcul prédictif des structures.

i	α_0	$B(\alpha_0)$	f_t	$D_0(\alpha_0)$	G_f	c_f
#	(-)	(-)	(MPa)	(mm)	(Nm ⁻¹)	(mm)
1	0.5	0.42	3.76	173.0	33.7	27.1
2	0.2	1.04	3.79	242.4	55.3	43.7

TABLE 3.6 – Paramètres d'effet d'échelle et de fissuration déterminés avec la loi classique pour des échantillons entaillés.

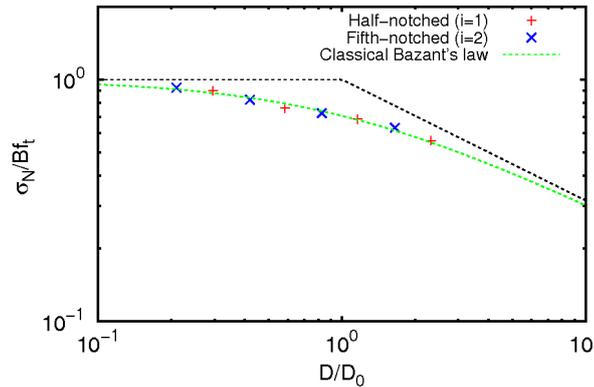


FIGURE 3.25 – Postraitement des échantillons entaillés avec la loi classique d'effets d'échelle.

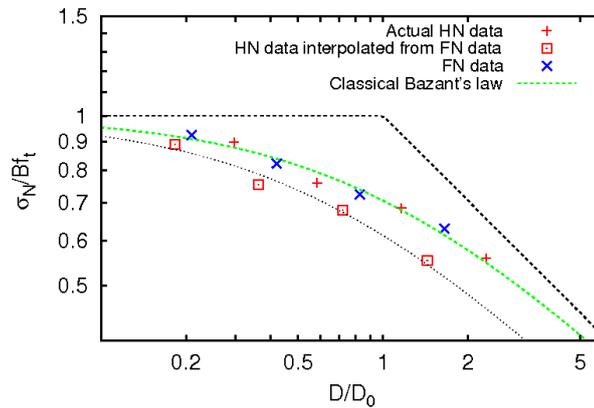


FIGURE 3.26 – Interpolation des résultats des géométries FN à partir des résultats des géométries HN.

3.5.2.2 Loi intrinsèque d'effet d'échelle pour des structures entaillées

L'une des grandes limitations de la loi classique d'effet d'échelle est que les paramètres B et D_0 dépendent fortement de la géométrie de la structure et plus particulièrement du rapport a_0/D . Ces paramètres ne peuvent pas être utilisés pour la détermination directe de la résistance ou de l'énergie de fissuration du matériau avec précision. Cela peut s'éviter en utilisant la loi intrinsèque d'effet d'échelle [7]. Au lieu d'identifier les paramètres d'effet d'échelle à partir de l'équation 3.10, les paramètres de fissuration G_f et c_f , ou d'une façon équivalente K_{Ic} et c_f , sont directement identifiés à l'aide d'une représentation intrinsèque donné par l'équation 3.14.

$$\bar{\sigma}_N = \sqrt{\frac{\tilde{E}G_f}{c_f + \bar{D}}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{c_f + \bar{D}}} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_N = \frac{\sigma_N}{c_N} \sqrt{g'(\alpha_0)} \\ \bar{D} = D \frac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} \\ G_f = \frac{K_{Ic}^2}{E} \end{cases} \quad (3.14)$$

Ici $\bar{\sigma}_N$ et \bar{D} sont respectivement la contrainte nominale intrinsèque et la hauteur de poutre intrinsèque. Les paramètres \tilde{E} , G_f , c_f , g , α_0 et c_N sont définis dans l'équation 3.11. Le principal avantage de cette formulation intrinsèque est qu'elle ne dépend pas de la géométrie et différents échantillons avec des rapports a_0/D différents peuvent être post-traités ensembles.

La figure 3.27 présente la courbe d'effet d'échelle pour des structures entaillées. Les paramètres de fissuration estimés à partir de l'ajustement non linéaire sont résumés dans le tableau 3.7. Avec cette procédure la résistance à la traction obtenue de la calibration de la loi intrinsèque, $f_t = 3.73 \text{ MPa}$, est cohérente avec la résistance à la traction par fendage reportée par la caractérisation du matériau où nous avons trouvé $f_t^{\text{fendage}} = 3.9 \pm 0.2 \text{ MPa}$. C'est le cas aussi pour les ajustements à partir de la loi classique.

i	α_0	$B(\alpha_0)$	f_t	$D_0(\alpha_0)$	G_f	c_f
#	(-)	(-)	(MPa)	(mm)	(Nm ⁻¹)	(mm)
2	0.2	1.04	3.73	201.8		

TABLE 3.7 – Détermination des paramètres d'effet d'échelle et de fissuration avec la loi intrinsèque d'effet d'échelle pour des échantillons entaillés.

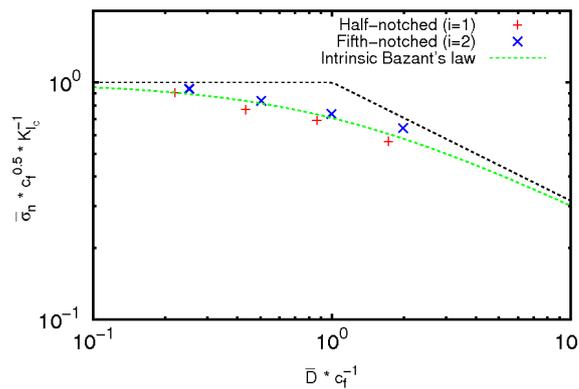


FIGURE 3.27 – Post-traitement pour le cas de structures entaillées avec la loi intrinsèque d'effet d'échelle.

3.5.2.3 Loi de Bažant pour des structures non-entailées

Pour des échantillons homothétiques non-entailés la loi d'effet d'échelle de Bažant est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_N = \sigma_B \left(1 + \frac{1}{\gamma + \frac{D}{2l_{f_0}}} \right) \quad \text{où} \quad \sigma_N = \frac{3 FS}{2 b D^2} = \frac{15 F}{4 b D} \quad (3.15)$$

Ici σ_N est la contrainte nominale, σ_B représente la résistance à la flexion, l_{f_0} est un paramètre de longueur lié à la taille de la FPZ, γ^6 est une constante positive qui doit être calibrée expérimentalement, F est le chargement, S, b et D sont respectivement la portée, la profondeur et la hauteur de la poutre.

La figure 3.28 présente la courbe d'effet d'échelle pour les échantillons non-entailés (contrainte nominale normalisée en fonction de la taille normalisée). Les paramètres d'effet d'échelle issus de l'identification non-linéaire sont présentés dans le tableau 3.8. Ici $\sigma_B \approx \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} B(\alpha_0) f_t = f_t$.

i	α_0	σ_B	l_{f_0}	γ
#	(-)	(MPa)	(mm)	(-)
3	0	3.88	47.8	0.74

TABLE 3.8 – Détermination des paramètres d'effet d'échelle pour les échantillons non-entailés.

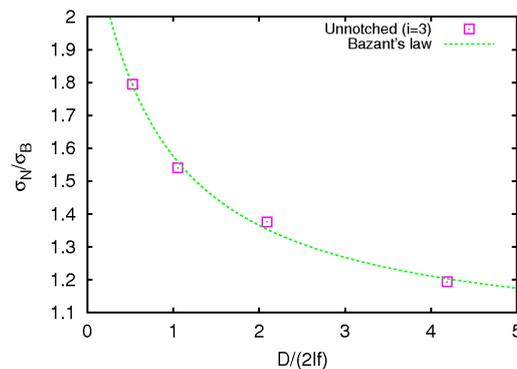


FIGURE 3.28 – Postraitement pour des structures non-entailées avec la loi d'effet d'échelle

6. Cette constante est introduite pour éviter que la contrainte nominale devienne infinie quand $D \rightarrow 0$.

3.5.2.4 Loi universelle d'effet d'échelle

La Loi Universelle d'effet d'échelle est donnée par l'équation 3.16a :

$$\sigma_N(D, \alpha_0) = \left[\frac{E'G_f}{g'_0(\alpha_0)c_f + g_0(\alpha_0)D} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{rc_f^2g''_0e^{-k\alpha_0^2}}{4(l_p + D)(g_0(\alpha_0)D + g'_0(\alpha_0)c_f)} \right]^{1/r} \quad (3.16a)$$

avec

$$\sigma_N = \frac{3 PS}{2 bD^2} = \frac{15 P}{4 bD} \quad (3.16b)$$

et

$$g(\alpha_0) = \pi\alpha_0c_N^2(F(\alpha_0))^2 \quad ; \quad \alpha_0 = \frac{a_0}{D} \quad ; \quad c_N = \frac{3 S}{2 D} \quad ; \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.16c)$$

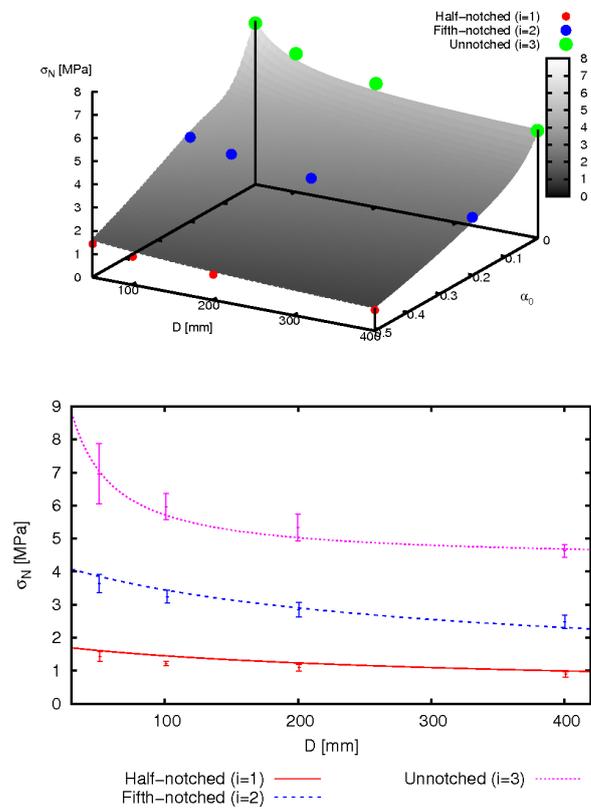


FIGURE 3.29 – Résultats de l'ajustement des données expérimentales avec la loi universelle de Bazant donnée par l'équation 3.16a.

où σ_N est la contrainte maximale élastique dans une poutre non-entallée. P est la charge appliquée, S , b et D sont respectivement la portée, la profondeur et la hauteur de la poutre. E et ν sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. G_f et c_f sont l'énergie de fissuration et la longueur effective de la FPZ. g et F sont les

fonctions de géométrie définies par l'équation 3.12b, c_N est le rapport S/D , r et k sont des paramètres libres et l_p est une longueur caractéristique du matériau, voir [8] pour plus de détails. La figure 3.29 montre la comparaison entre les résultats expérimentaux présentés dans l'annexe C.1.

Tous les paramètres ont été déterminés par un ajustement non-linéaire. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.9. À partir de cet ensemble de paramètres, la résistance à la traction peut être estimée à l'aide de l'équation 3.17. Cette valeur est cohérente avec la résistance à la traction par fendage déterminée expérimentalement dans le tableau 3.4. De plus, il est indiqué dans [8] que la longueur caractéristique du matériau l_p doit être proche de la taille du plus gros granulat ce qui est en accord avec la granulométrie présentée à la figure 3.8. La valeur de l'énergie de fissuration est cohérente avec celle estimée de la figure 3.13.c ($G_f \approx 45 \text{ N/m}$).

$$f_t = c_N \sqrt{\frac{E'G_f}{c_f g'(0)}} \quad (3.17)$$

G_f	c_f	r	k	l_p	f_t
(N/m)	mm	(-)	(-)	(mm)	(MPa)
42.6	25.7	0.11	113	12.9	4.34

TABLE 3.9 – Détermination des paramètres de la loi d'effet d'échelle universelle.

La figure 3.29 montre la comparaison entre les résultats expérimentaux présentés dans la section 3.4.1.1 et la loi universelle d'effet d'échelle donnée par l'équation 3.16a avec l'ensemble des paramètres du tableau 3.9. On observe que l'ajustement entre ces deux types de résultats prenant en compte les trois différentes géométries considérées est satisfaisant.

3.6 Synthèse et conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons proposé trois outils de validation de modèles d'endommagement :

- Une barre en traction dynamique nous permettra de tester la capacité des modèles à décrire la transition continu/discret ainsi que de reproduire une discontinuité forte à la rupture.
- La modélisation de l'écaillage nous permettra de tester le comportement des modèles près d'un bord libre et leur capacité à localiser la position d'une écaille.
- Un troisième outil consistant en une base de données expérimentale permet de tester la capacité des modèles à décrire précisément le processus complet de rupture de l'amorçage à la rupture totale pour des poutres entaillées et non-entaillées.

Cette campagne expérimentale originale a été également dépouillée en terme d'effets d'échelle. On a pu montrer que la loi universelle de Bažant décrit très correctement la

rupture en terme de contraintes maximales au pic pour plusieurs tailles d'éprouvettes et trois géométries différentes (longue entaille ou HN, petite entaille ou SN et non-entaillées ou UN). Ce type de dépouillement n'avait jamais été réalisé pour des éprouvettes homothétiques entaillées et non-entaillées confectionnées à partir de la même formulation de béton.

Ces trois outils ont été utilisés pour analyser le comportement du modèle d'endommagement non-local intégral et plusieurs limitations ont été mises en évidence :

- L'incapacité de décrire la transition continu/discret.
- L'incapacité à reproduire une discontinuité forte.
- L'incapacité à localiser précisément une écaïlle près d'un bord libre.
- L'incapacité à décrire précisément à la fois la contrainte maximale à la rupture et la phase adoucissante pour des poutres homothétiques entaillées et non-entaillées avec le calage du modèle. Ce calage pourrait être amélioré pour faire une nouvelle modélisation. Dans le cadre de notre travail et avec les paramètres du modèle utilisés la description en contrainte maximale et le comportement adoucissant n'est pas atteinte.

Pistes d'amélioration du modèle d'endommagement non-local

3.1 Introduction	18
3.2 Rupture dynamique d'une barre en traction	18
3.3 Écaillage	23
3.4 Rupture par flexion 3 points	24
3.4.1 Construction d'une base de données expérimentales pour l'analyse de modèles	24
3.4.1.1 Description du matériau, échantillons et essais mécaniques	24
3.4.2 Résultats expérimentaux	28
3.4.2.1 Éprouvettes entaillées HN	29
3.4.2.2 Éprouvettes entaillées FN	30
3.4.2.3 Éprouvettes non-entaillées UN	30
3.4.3 Modélisation numérique des essais en flexion 3 points	31
3.4.3.1 Description du maillage et des conditions de calcul	31
3.4.3.2 Calibration des paramètres du modèle sur une géométrie de poutre FN	32
3.4.3.3 Capacités du modèle calibré à reproduire l'effet d'échelle et l'effet de bord sur les autres géométries de poutre	34
3.5 Analyse des effets d'échelle	35
3.5.1 Une analyse primaire et directe d'effet d'échelle à partir des résultats expérimentaux	38
3.5.2 Analyse par la loi déterministe d'effets d'échelle	39
3.5.2.1 Loi classique de Bažant pour des structures entaillées	39
3.5.2.2 Loi intrinsèque d'effet d'échelle pour des structures entaillées	42
3.5.2.3 Loi de Bažant pour des structures non-entaillées	44
3.5.2.4 Loi universelle d'effet d'échelle	45
3.6 Synthèse et conclusion du chapitre	46

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence des limitations du modèle d'endommagement non-local classique pour décrire correctement le comportement mécanique à la rupture des matériaux quasi-fragiles. Dans ce chapitre nous allons présenter en détail quelques formulations modifiées du modèle d'endommagement non-local ayant pour but de combler ces lacunes. Leurs performances et limitations seront étudiées à la lumière des outils de validation proposés dans le chapitre précédent.

Les améliorations proposées par ces formulations se font essentiellement par la modification de la longueur interne l_c nécessaire dans le calcul de la fonction poids définie par l'équation 2.4 pour rendre compte de divers phénomènes (la croissance des défauts, l'effet d'écran induit par une fissure, l'effet de bord...).

Une fois que nous aurons examiné chaque formulation, nous allons combiner certaines d'entre elles afin de tester la réponse mécanique obtenue par la prise en compte de plusieurs mécanismes à la fois.

4.2 Formulations modifiées du modèle d'endommagement non-local

On distingue principalement trois familles de formulations modifiées. Les premières prennent en compte le *transfert d'information* entre les points du matériau pendant l'endommagement. En deuxième lieu, il y a les formulations qui cherchent plutôt à décrire la *croissance des défauts* (micro-fissuration) pendant le chargement. Finalement, nous observons les formulations prenant en compte le comportement mécanique dans la proximité d'un *bord libre*. Nous détaillons ces trois types de formulations dans les paragraphes suivants.

4.2.1 Formulations prenant en compte le transfert d'information à travers une zone endommagée

Imaginons un solide quelconque et distinguons deux points (A) et (B) à l'intérieur du domaine. Supposons maintenant que l'endommagement au point (A) augmente. Dans quelle mesure le point (B) peut se voir affecté par l'endommagement de son voisin ? D'une façon intuitive on peut penser que si (B) est très proche de (A), il sera "très affecté". (B) sera donc "moins affecté" s'il est loin de (A). Le point (B) ressentira moins l'endommagement de son voisin s'ils sont séparés par une zone endommagée même s'il sont proches l'un de l'autre. En effet, l'information donc, la perturbation de (A) sur (B), sera plus facilement transmise à travers une zone saine qu'à travers une zone endommagée.

Les formulations modifiées appartenant à cette famille affirment que : la contribution de la déformation équivalente au point (A) sur la valeur de la déformation non-locale d'un point voisin (B) est égale à la déformation équivalente en (A) multipliée par une fonction qui dépend de la distance entre (A) et (B).

Dans cet ordre d'idées, la fonction poids du modèle intégral serait cette fonction dite d'atténuation de la transmission d'information entre (A) et (B). De plus, dans le processus de fissuration, la quantité d'information qui peut être transmise entre deux points voisins peut changer en fonction de l'endommagement de la zone les séparant.

Par la suite, deux stratégies différentes pour introduire l'atténuation dans le modèle sont considérées. Dans les deux cas le comportement redevient local quand une bande avec un endommagement proche de 1 se crée :

1. La longueur interne est modifiée en prenant en compte l'endommagement au point où la grandeur non-locale est estimée. La longueur interne décroît quand l'endommagement augmente. Quand l'endommagement est égal à un, la longueur interne tend vers zéro et plus aucune information ne peut être transmise à travers la bande complètement endommagée. Ce cas sera appelé "atténuation directe d'information non-locale".
2. La longueur interne reste constante mais la distance entre deux points séparés par une zone endommagée est incrémentée artificiellement. Cet incrément est fonction des valeurs d'endommagement le long de la ligne droite reliant les deux points. Quand l'endommagement atteint la valeur de 1, la distance fictive entre les deux points tend vers l'infini. Ce cas sera appelé "atténuation selon le trajet d'information non-locale".

4.2.1.1 Atténuation directe d'information non-locale

Cette stratégie consiste à modifier directement la longueur interne en fonction de l'endommagement là où les grandeurs non-locales sont estimées. La longueur interne diminue quand l'endommagement augmente et tend vers zéro quand l'endommagement est égal à 1. Dans une bande endommagée où l'endommagement est proche de 1 la non-localité disparaît. Ce comportement se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{eq} &= \frac{1}{\Omega_r(x)} \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad , \quad \Omega_r(x) = \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) d\xi \\ \psi_0(x, \xi) &= \exp \left(- \left(\frac{2\|x - \xi\|}{l_c(x)} \right)^2 \right) \quad , \quad l_c(x) = l_{c0} \sqrt{(1 - D(x))} \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $D(x) = D(\bar{\varepsilon}_{eq}, x)$ comme le définit l'équation 2.3b.

4.2.1.2 Atténuation selon le trajet d'information non-locale

Cette stratégie a été proposée dans [47]. Ici la longueur interne est maintenue constante mais lorsqu'il y a de l'endommagement, la distance entre deux points séparés par une

zone endommagée augmente en accord avec l'équation 4.2 :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{eq} &= \frac{1}{\Omega_r(x)} \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad , \quad \Omega_r(x) = \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) d\xi \\ \psi_0(x, \xi) &= \exp \left(- \left(\frac{2}{l_{c0}} \int_{\Omega} \frac{\|x - d\xi\|}{\gamma(\xi)} \right)^2 \right) \quad , \quad \gamma(\xi) = \sqrt{1 - D^{local}(\xi)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $D^{local}(\xi) = D(\varepsilon_{eq}, \xi)$ comme il a été défini dans l'équation 2.3b et $\gamma(\xi)$ est la fonction d'atténuation.

Avec cette formulation, l'endommagement ajouterait alors une *distance fictive* entre deux points : plus la valeur de l'endommagement est importante le long de cette trajectoire, moins la quantité d'information transmise entre deux points est importante. Ce raisonnement qualitatif discuté dans [14] implique que la fonction d'atténuation dépende de l'endommagement. La difficulté qui en résulte est que la formulation devient alors implicite.

Pour garder une certaine simplicité du modèle, dans [47] la valeur locale de l'endommagement a été choisie même si l'atténuation de la propagation de l'information devrait prendre en compte plutôt la valeur non-locale.

Avec ces considérations, la fonction d'atténuation de l'équation 4.2 a été donc modifiée pour prendre en compte la valeur non-locale de l'endommagement. On prendra alors la valeur estimée au pas de temps précédent dans un calcul aux éléments finis pour conserver une formulation explicite :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{eq} &= \frac{1}{\Omega_r(x)} \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad , \quad \Omega_r(x) = \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) d\xi \\ \psi_0(x, \xi) &= \exp \left(- \left(\frac{2}{l_{c0}} \int_x^{\xi} \frac{\|x - du\|}{\gamma(u)} \right)^2 \right) \quad , \quad \gamma(\xi) = \sqrt{1 - D^{old}(\xi)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec $D^{old}(\xi) = D(\bar{\varepsilon}_{eq}^{old}, \xi)$ où cette fois-ci $D^{old}(\xi)$ et $\bar{\varepsilon}_{eq}^{old}$ sont respectivement l'endommagement non-local et la déformation non-locale estimés au pas de temps précédent.

4.2.2 Formulation basée sur les interactions et la croissance de défauts

Une interaction existe s'il y a plusieurs micro-fissures dans le matériau et elle devient plus importante avec la taille des micro-fissures. Cette considération peut suggérer des lois de comportement dans lesquelles l'action du point (A) sur le point (B) devient plus importante avec l'endommagement au point (A) (en plus de la déformation et la contrainte sur ce point). La longueur interne doit alors augmenter au cours de l'endommagement.

Pijaudier-Cabot et ses collaborateurs [48] ont montré expérimentalement par des analyses d'émissions acoustiques que la taille de la FPZ augmente avec le taux d'endommagement. Si la longueur interne est liée à la taille de la FPZ, elle doit aussi augmenter au cours de l'endommagement. D'après l'analyse de bifurcation, Pijaudier-Cabot et Benallal [45] montrent que la longueur interne est proportionnelle à la FPZ. De plus, Pijaudier-Cabot et collaborateurs [48] ont montré à l'aide de l'analyse micro-mécanique que les effets non-locaux augmentent avec l'endommagement. Ils ont ainsi proposé d'améliorer la formulation non-locale originale présentée dans l'équation 2.4 sachant que, en un point donné, l'influence non-locale d'un autre point à proximité dépend de la présence de vides ou de défauts (micro-fissures) dans ce voisinage. Cette influence non-locale disparaît s'il n'y a pas de défauts (par exemple quand l'endommagement local est égal à zéro) et augmente quand la taille des défauts augmente et quand ces défauts interagissent entre eux (par exemple quand l'endommagement local augmente). Différentes formulations peuvent décrire ce phénomène mais pour des raisons de simplicité, nous allons supposer que la longueur interne est proportionnelle à l'endommagement local.

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{eq} &= \frac{1}{\Omega_r(x)} \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad , \quad \Omega_r(x) = \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) d\xi \\ \psi_0(x, \xi) &= \exp\left(-\left(\frac{2\|x - \xi\|}{l_c(\xi)}\right)^2\right) \quad , \quad l_c(\xi) = l_{c_0} D(\xi)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Ici, $D(\xi) = D(\varepsilon_{eq}, \xi)$ comme défini dans l'équation 2.3b et l_{c_0} est là encore la longueur interne du modèle introduite dans l'équation 2.4

4.2.3 Formulation prenant en compte l'effet des bords libres

Rappelons-nous que la représentation du comportement près d'un bord est l'une des défaillances du modèle non-local classique du fait que le volume associé au calcul de la moyenne à cet endroit n'est pas correcte. En plus, une étude récente [47] a montré que le comportement au bord doit être local.

La formulation modifiée présentée ici et proposée dans [32] se base sur les observations commentées ci-dessus. Formellement, cette proposition se traduit par l'équation 4.5 :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{eq} &= \frac{1}{\Omega_r(x)} \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad , \quad \Omega_r(x) = \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) d\xi \\ \psi_0(x, \xi) &= \exp\left(-\left(\frac{2\|x - \xi\|}{l_c(\xi)}\right)^2\right) \quad , \quad l_c(x) = \min_{\partial\Omega}(l_{c_0}; dist(x, \partial\Omega))\end{aligned}\tag{4.5}$$

où $\partial\Omega$ est le bord du solide et $dist(x, \partial\Omega)$ est le minimum de la distance du point considéré à tous les bords.

4.3 Comparaison entre les différents modèles

En examinant les formulations présentées dans les sections précédentes on s'aperçoit que chacune propose une variation différente de la longueur interne. Ainsi par exemple, tandis que le transfert d'information à travers une zone endommagée conduit à une décroissance de la longueur interne au cours de l'endommagement, la croissance des défauts indique l'augmentation de cette même longueur interne. Il est clair que la description de la rupture nécessite de la prise en compte aussi bien du transfert d'information que de l'interaction et de la croissance des défauts. Néanmoins, aucune des formulations examinées jusqu'à maintenant sont capables d'inclure ces deux comportements dans un même modèle non-local.

Nous allons examiner en détail chaque modèle afin d'analyser les performances et défaillances puis en tirer des éléments nous guidant dans l'amélioration des modèles non-locaux nous permettant d'avancer dans notre démarche et d'arriver à un modèle non-local qui décrive proprement le comportement des matériaux quasi-fragiles. Pour toutes les études numériques, chaque modèle est nommé par les caractéristiques du mécanisme pris en compte au cours du chargement. Le tableau 4.1 résume les différentes caractéristiques des modèles.

Nom	Original	Dir_att	Path_att	Path_att_old	Growing_voids
Comportement de la longueur interne	constant	décroissant	décroissant	décroissant	incrémental
Équation de référence	2.4	4.1	4.2	4.3	4.4

TABLE 4.1 – Caractéristiques et noms des formulations pour l'analyse comparative

Afin d'observer la pertinence des différents modèles et leurs capacités à décrire la rupture progressive ainsi que la rupture totale de la structure dans des calculs aux éléments finis, nous utiliserons ici les mêmes critères d'analyse qui ont été proposés dans le chapitre 3 et que nous rappelons ici.

(i). *Convergence* :

Les distributions non-locales doivent être indépendantes du maillage avec une dissipation d'énergie non nulle à convergence.

(ii). *Capacité à décrire la transition continu-discret des champs de déplacement* :

Pendant l'endommagement, l'ouverture de fissure peut être estimée à l'aide de la méthode proposée dans [16] puis comparée au profil d'une fissure idéale à partir de la description d'une discontinuité forte. La comparaison se fait par le calcul de l'écart entre les deux profils. Cela montre à quel point les distributions de la déformation et de l'endommagement sont proches de celles correspondant à une seule fissure entourée d'une zone d'élaboration. La méthode utilisée a été exposée dans la section 3.2. L'écart entre les profils est calculé comme :

$$\Delta(x) = \frac{\int_{\Omega} \|\bar{\varepsilon}_{sd}(x, s) - \bar{\varepsilon}_{eq}(x)\| ds}{\int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{eq}(x) ds} \quad (4.6)$$

Cet écart doit être le plus faible possible un fois la structure rompue.

(iii). *Convergence vers une discontinuité forte :*

À la rupture complète, l'ouverture de fissure calculée d'après la technique décrite précédemment doit être indépendante de la taille de l'élément. Sur un exemple simple unidimensionnel, en supposant que la fissure se crée dans un élément (déformation constante), l'ouverture de fissure est égale à la déformation multipliée par la taille de l'élément. En conséquence, après la rupture, la déformation dans l'élément fissuré doit évoluer de façon inversement proportionnelle à la taille de l'élément (pour une déformation constante dans l'élément) $[U] \approx \varepsilon h = C^{te}$ où $[U]$ est l'ouverture de fissure dans l'élément qui contient la fissure (car les autres éléments sont totalement déchargés au moment de la rupture). Ici, ε est la déformation dans cet élément et h est la taille de l'élément.

4.3.1 Résultats obtenus pour chaque modèle à partir de l'exemple de la rupture dynamique d'une barre en traction

Le cas test correspond à celui exposé dans la section 3.2 et utilisé auparavant dans [44], voir figure 4.1. Dans tous les calculs, le pas de temps a été choisi égal au pas de temps critique pour la taille de l'élément h qui sera gardée constante. Le pas de temps critique est calculé de la manière suivante :

$$\Delta t_c = \frac{h}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (4.7)$$

où E est le module d'Young du matériau et ρ sa densité.

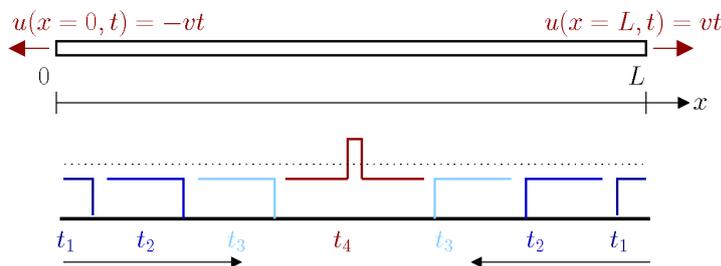


FIGURE 4.1 – Schéma du cas test d'une barre libre soumise à un chargement de traction (copie de la figure 3.1).

4.3.1.1 Convergence

La figure 4.2 présente globalement la qualité des différents modèles en terme de convergence des profils d'endommagement. Cette convergence signifie que l'énergie dissipée dans le processus de rupture converge vers une constante, égale à la somme de l'énergie dissipée par l'endommagement à chaque point de la bande endommagée. Tous les profils d'endommagement sont cohérents à l'exception du modèle *Growing_voids* (équation 4.4) où la longueur interne augmente avec l'endommagement. La largeur de la bande endommagée augmente avec le nombre d'éléments. Cela ne veut cependant pas dire que le modèle ne converge pas. En effet, si la taille de la bande endommagée augmente avec le nombre d'éléments, sa vitesse de croissance converge vers une vitesse limite avec le nombre d'éléments. Cela est cohérent avec les résultats obtenus dans [48] qui correspondent à des calculs faits en statique. En dynamique, ce modèle ne devrait donc pas être utilisé seul mais combiné avec d'autres modèles où la longueur interne augmente au cours de l'endommagement. On ne vérifiera pas ses performances dans la capacité à décrire la rupture progressive et complète.

4.3.1.2 Capacité à décrire une discontinuité forte

La figure 4.3 présente les performances des différents modèles en terme de capacité à décrire la rupture complète. Pour tous les maillages considérés, la taille de l'élément est plus petite que la longueur interne et le rapport maximal $l_c/\text{taille_élément}$ est environ égal à 100. À la rupture, la déformation est censée évoluer inversement à la taille de l'élément. Seules les formulations *Path_att* (équation 4.2) et *Growing_voids* (équation 4.4) sont capables de décrire ce phénomène. Les formulations originale et *Dir_att* (équation 4.1) en sont loin. La formulation *Path_att_old* (équation 4.3) montre le comportement attendu mais seulement pour des maillages grossiers. En approximant l'allure donnée par les différents points avec une droite, on peut mesurer la valeur du CMOD correspondant. La formulation *Path_att* (équation 4.2) fournit alors un CMOD $[U] = 36\text{cm}$.

4.3.1.3 Capacité à décrire la transition continu-discret des champs de déplacement pendant la rupture

La figure 4.4 présente l'historique de CMOD ($[U]$) et la distance entre profils (Δ) pour un maillage de 109 éléments (voir équation 3.6 et [16] pour plus de détails). Après la rupture complète les formulations *Path_att* (équation 4.2) et *Path_att_old* (équation 4.3) fournissent une bonne estimation du CMOD avec une distance entre profils de moins de 20% et pour la formulation *Path_att* (équation 4.2) l'historique de CMOD est conforme avec la valeur obtenue à partir de la figure 4.3. Les autres modèles ne sont pas capables de décrire correctement le processus de rupture avec des écarts entre profils compris entre 30% et 40%. La formulation originale et le modèle *Dir_att* (équation 4.1) semblent ne pas être capables de décrire le processus de rupture correctement car la

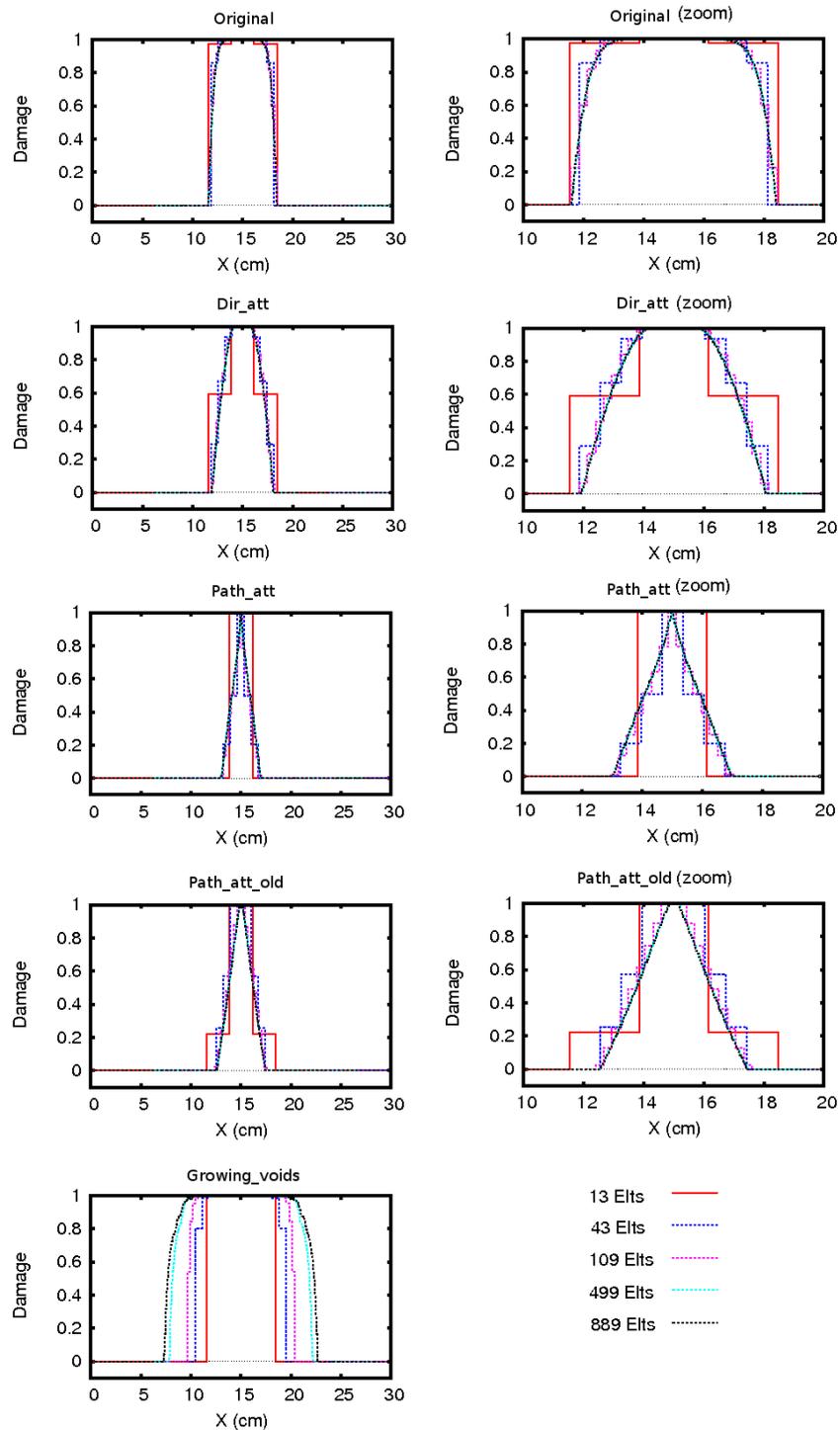


FIGURE 4.2 – Résultats des tests de convergence sur les différentes formulations modifiées.

distance dans la figure 4.4b atteint une valeur seuil qui ne diminue pas avec le temps.

Par la suite, on décide donc de combiner les modèles Path_att (équation 4.2) et Path_att_old

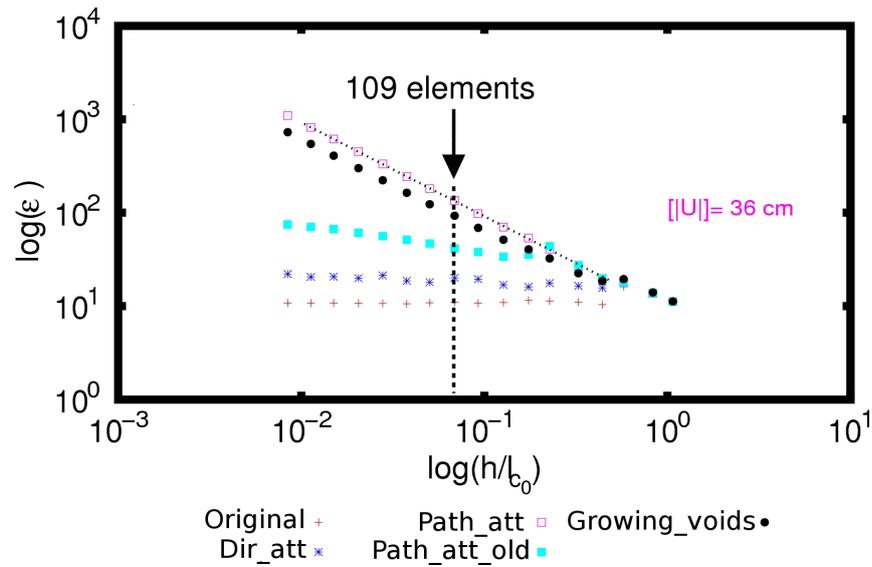


FIGURE 4.3 – Capacité des formulations modifiées à décrire une discontinuité forte.

(équation 4.3) avec la formulation Growing_voids (équation 4.4) pour étudier la concurrence entre l'incrément et la décroissance de la longueur interne au cours de l'endommagement.

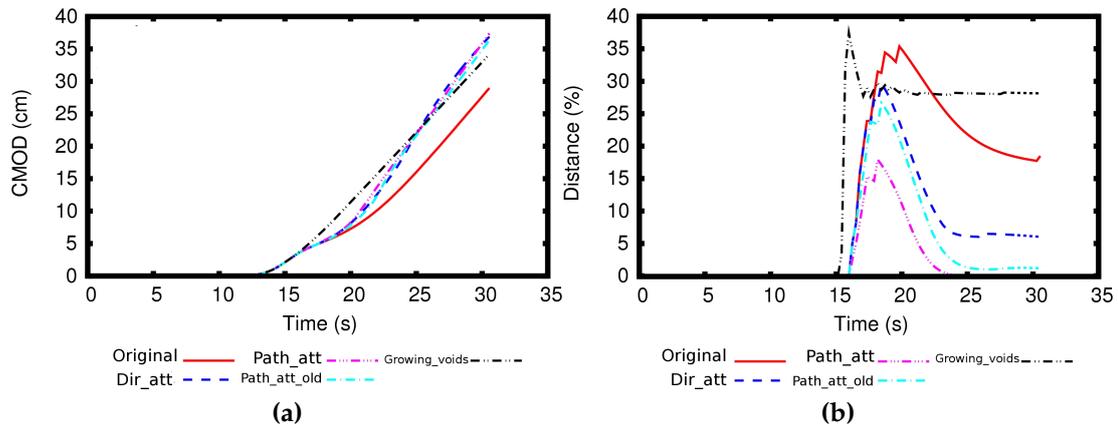


FIGURE 4.4 – Capacité des formulations modifiées à décrire la transition continu-discret.

4.3.2 Performances des modèles combinés

La combinaison se fait en remplaçant dans les équations 4.2 et 4.3 la longueur interne avec la formule donnée par l'équation 4.4 ($l_c(\xi) = l_{c_0}D(\xi)$). La figure 4.5 présente les capacités des modèles combinés (Path_att (équation 4.2)–Growing_voids (équation 4.4) et Path_att_old (équation 4.3)–Growing_voids (équation 4.4)) en terme de convergence des profils d'endommagement.

En combinaison avec Growing_voids (équation 4.4), Path_att (équation 4.2) perd sa propriété de convergence et les profils d'endommagement ne sont plus cohérents par rapport au raffinement du maillage comme dans le cas du modèle Growing_voids (équation 4.4). Au contraire, la distribution d'endommagement est indépendante du maillage avec la combinaison Path_att_old (équation 4.3)-Growing_voids (équation 4.4).

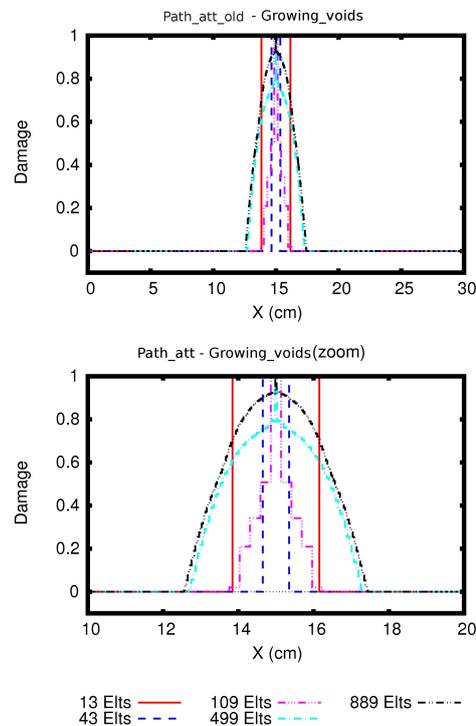


FIGURE 4.5 – Comportement en terme de convergence des combinaisons entre formulations modifiées.

La figure 4.6 présente les performances des modèles combinés en terme de capacité à décrire la rupture progressive et totale. La figure 4.6a présente l'évolution de la déformation dans l'élément fissuré en fonction de la taille de l'élément divisée par la longueur interne l_{c_0} . Les deux combinaisons, Path_att (équation 4.2)-Growing_voids (équation 4.4) et Path_att_old (équation 4.3)-Growing_voids (équation 4.4) sont capables de décrire l'évolution (inversement proportionnelle) de la déformation avec la taille de l'élément. La régression linéaire effectuée sur les résultats de la figure 4.6a fournit une valeur de $[U] = 42cm$ ce qui est cohérent avec l'évolution temporelle du CMOD présentée sur la figure 4.6b. Dans la figure 4.6c, on vérifie que les deux formulations sont capables de fournir une bonne estimation du CMOD avec une distance entre profils estimée de moins de 2%.

Finalement, seule la combinaison Path_att_old (équation 4.3)-Growing_voids (équation 4.4) semble être en mesure de décrire correctement la rupture progressive et totale en prenant en compte le transfert d'information à travers une zone endommagée, les

interactions entre vides et l'effet de croissance des vides.

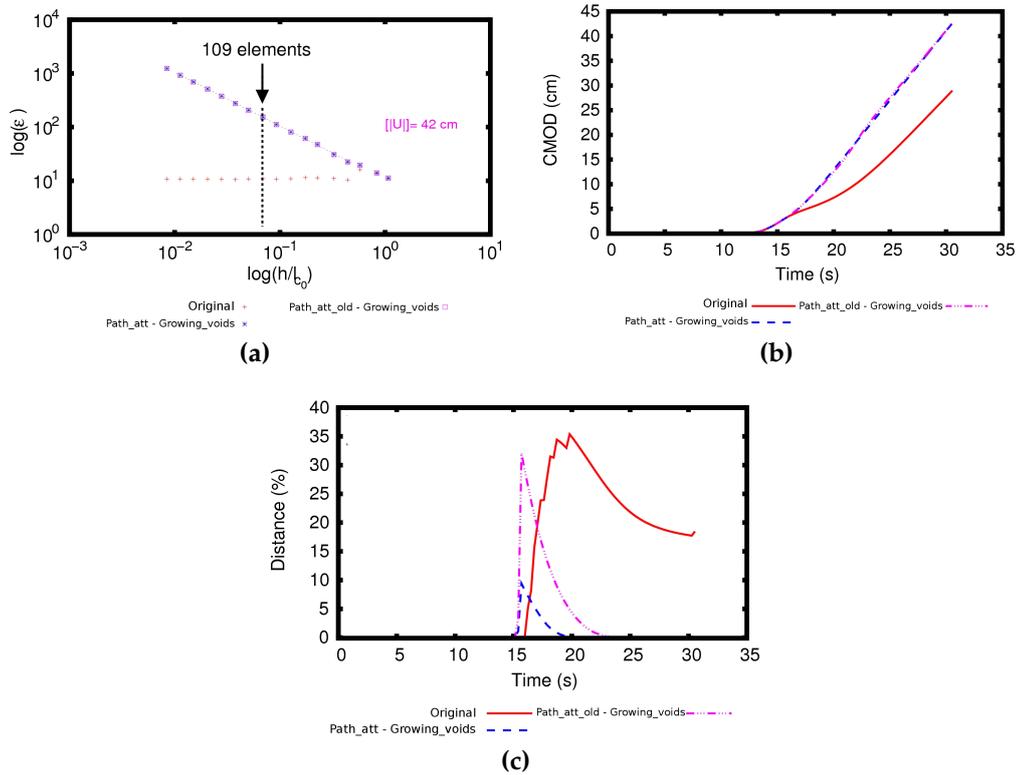


FIGURE 4.6 – Capacité des combinaisons de formulations à décrire une discontinuité forte.

4.3.3 Résultats obtenus à partir du test d'écaillage

Ce deuxième exemple unidimensionnel, déjà illustré dans la section 3.3, nous sert de test pour évaluer la capacité des formulations à représenter le comportement mécanique près d'un bord libre. Dans ce cas, le pas de temps a là encore été choisi égal au pas de temps critique correspondant à la taille de l'élément, voir l'équation 4.7.

La figure 4.7 montre que pour le modèle Original (équation 2.4), l'endommagement maximal est atteint exactement au bout de la barre alors que l'écaillage est censé être à 2cm du bord. Le modèle combiné optimisé Path_att_old (équation 4.3)–Growing_voids (équation 4.4) présente un maximum d'endommagement localisé à l'endroit où l'écaillage apparaît. Ces résultats peuvent s'expliquer par le fait que la bande endommagée induit l'effet d'écran. Cependant, le comportement local au bord n'est pas assuré en contraste avec le modèle proposé par Krayani et collaborateurs [32] (équation 4.5) où le comportement local au bord a été explicitement introduit par la décroissance de la longueur interne. Si l'écaillage était plus proche du bord, le modèle combiné présenterait les mêmes difficultés que le modèle original, c'est-à-dire, on obtiendrait une valeur d'endommagement non nulle au bord. Une combinaison plus performante pourrait être celle prenant

en compte en même temps l'atténuation de l'information, la croissance des défaut et la décroissance de la longueur interne dans la proximité d'un bord (équations 4.3, 4.4 et 4.5).

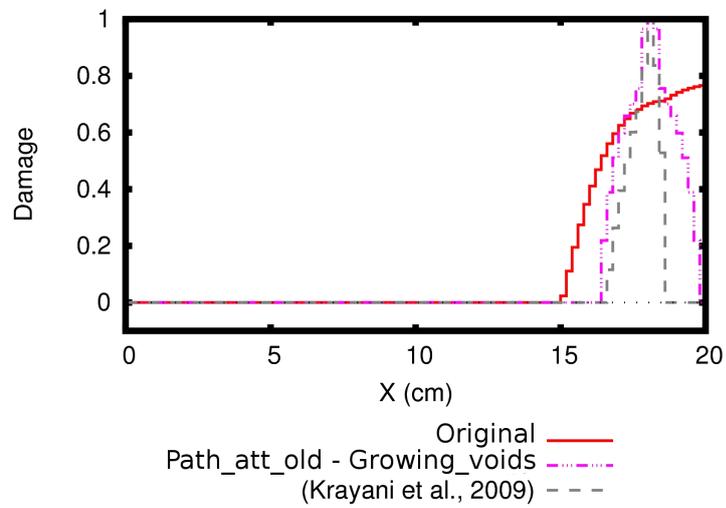


FIGURE 4.7 – Comparaison de la réponse près d'un bord entre la formulation originale et la combinaison *Path_att_old* (équation 4.3)–*Growing_voids* (équation 4.4).

4.4 Synthèse et conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié les performances des modèles modifiés issus de la littérature, basés sur le modèle d'endommagement non-local classique mais ayant pour but de corriger les défauts en jouant sur le paramètre longueur interne afin de rendre compte de la croissance des défauts, de l'effet d'écran et de l'effet de bord. Des nouvelles combinaisons des modèles ont été proposées et nous avons montré que la combinaison Path_att_old (équation 4.3)–Growing_voids (équation 4.4) donne des résultats très satisfaisants pour le cas numérique d'une barre en traction. Cependant les résultats obtenus du cas test de l'écaillage pour décrire le comportement près d'un bord ne le sont pas. Des résultats meilleurs sont obtenus avec une formulation combinant trois mécanismes différentes : l'atténuation du transfert selon la trajectoire de l'information, la croissance des défaut et la décroissance de la longueur interne dans la proximité d'un bord (équations 4.3, 4.4 et 4.5)

Malheureusement, l'extension de cette nouvelle formulation considérée est difficile en 2D et donc il est impossible de tester la capacité de ce modèle à reproduire les résultats expérimentaux en flexion 3 points. En effet, la difficulté réside dans le calcul de la distance fictive séparant les deux points x et ξ . La déformation non-locale définie par l'équation 4.8 en terme de cette distance s'écrit comme :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \frac{1}{\Omega_r} \int_{\Omega} \psi_0(x, u(\xi)) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad (4.8)$$

où $u(\xi)$ est la distance fictive qui est calculée en 1D par l'équation 4.9

$$u(\xi) = \int_x^{\xi} \frac{dv}{\gamma(v)} \quad (4.9)$$

En 2D, cette distance est à définir selon une trajectoire curviligne à partir de l'équation 4.10

$$u(\xi) = \oint_x^{\xi} \frac{dv}{\gamma(v)} \quad (4.10)$$

où la fonction γ est calculée selon la trajectoire employée pour le calcul de u définie à l'équation 4.2.

Le chemin pour calculer la distance entre x et ξ en 1D est évident et défini par la géométrie du problème de calcul. Par contre, en 2D l'existence d'un nombre infini de trajectoires liant les deux points en question fait que l'implémentation numérique devient problématique.

Compréhension du transfert d'information à l'échelle mésoscopique

4.1	Introduction	50
4.2	Formulations modifiées du modèle d'endommagement non-local	50
4.2.1	Formulations prenant en compte le transfert d'information à travers une zone endommagée	50
4.2.1.1	Atténuation directe d'information non-locale	51
4.2.1.2	Atténuation selon le trajet d'information non-locale	51
4.2.2	Formulation basée sur les interactions et la croissance de défauts	52
4.2.3	Formulation prenant en compte l'effet des bords libres	53
4.3	Comparaison entre les différents modèles	54
4.3.1	Résultats obtenus pour chaque modèle à partir de l'exemple de la rupture dynamique d'une barre en traction	55
4.3.1.1	Convergence	56
4.3.1.2	Capacité à décrire une discontinuité forte	56
4.3.1.3	Capacité à décrire la transition continu-discret des champs de déplacement pendant la rupture	56
4.3.2	Performances des modèles combinés	58
4.3.3	Résultats obtenus à partir du test d'écaillage	60
4.4	Synthèse et conclusion du chapitre	62

5.1 Introduction

De l'analyse comparative présentée dans le chapitre précédent on peut se rendre compte que pour arriver à une description numérique satisfaisante du comportement des matériaux quasi-fragiles, il est nécessaire de prendre en compte plusieurs mécanismes à la fois. En effet, les résultats ont montré qu'une combinaison des propositions incluant l'atténuation du transfert d'information, les interactions et la croissance des défauts est capable de décrire le phénomène de la rupture d'une barre en traction. L'utilisation de cette combinaison semble utile et pratique dans le domaine de la modélisation de problèmes unidimensionnels. Cependant, son extension à des cas en 2D et 3D dans des codes de calcul aux éléments finis n'est pas aisée [26]. Il est nécessaire d'arriver à un modèle d'endommagement non-local applicable à des cas autres que unidimensionnels incluant ces deux aspects mis en avant dans le chapitre 4 à savoir, *le transfert d'information et la croissance et interactions des défauts*.

Le béton est un matériau hétérogène composé essentiellement par trois phases avec des comportements mécaniques distincts : la *matrice*, les *granulats* et l'*interface* entre les deux. Ainsi, la modélisation numérique du processus de rupture du béton peut être abordée sous différents points de vue et à différentes échelles. Bien que dans ce travail de thèse on s'intéresse plus particulièrement à la description de la rupture avec des modèles macroscopiques continus de type intégral (voir section 2.4.2 et chapitre 4), il est toutefois possible d'utiliser d'autres approches pour comprendre toute la complexité du phénomène en question.

Nous avons choisi de changer notre échelle d'observation. L'idée est de comprendre la façon dont l'endommagement apparaît et se développe en regardant les comportements mécaniques de chaque composante du béton et la façon dont ils interagissent. Ainsi, un modèle prenant en compte les détails de la mésostructure du matériau a été adopté afin d'étudier la description du processus de rupture à une plus petite échelle (voir [24] pour plus de détails). Cette formulation représentant le comportement mécanique individuel de chaque composant décrit explicitement les interactions qui ont lieu à l'intérieur du matériau. Ceci revient à dire que ce type d'approche est capable de tenir compte intrinsèquement des phénomènes pouvant donner naissance à un comportement non-local, qui se développent pendant le chargement et jusqu'à la rupture totale de la structure.

5.2 Quel est le rôle de la mésostructure dans la description du comportement mécanique du béton ?

Le béton est un matériau représenté ici comme un composite constitué de granulats, de mortier et d'une zone de transition ou interface entre les deux. Une telle idéalisation prend en compte la mésostructure et toutes les particularités de chaque composant pour décrire la réponse mécanique globale du matériau. Autrement dit, un modèle de type mésoscopique vise à décrire les conséquences au niveau macroscopique du désordre initial local à l'intérieur du matériau. Par ailleurs, les approches mésoscopiques présentent l'avantage de faciliter l'étude de la fissuration progressive par la prise en compte du placement aléatoire des granulats et du champ des propriétés mécaniques, aspect d'une grande importance dans l'étude de l'apparition et de l'évolution de la FPZ [23, 25, 24]. La description du comportement local de chaque composant se fait le plus souvent grâce à des modèles simples suivant des lois de comportement comme l'élasticité ou la parfaite fragilité par exemple.

Cette partie de notre travail a été faite en collaboration avec le Professeur Peter Grassl de l'Université de Glasgow. Les données expérimentales présentées dans la section 3.4.1, ont été comparées aux résultats numériques obtenus à partir du calcul mésoscopique.

5.3 Description du modèle mésoscopique adopté

Le modèle mésoscopique utilisé pour décrire le processus de fracturation dans le béton en 2D en contrainte planes se base sur la discrétisation de la structure à l'aide d'éléments de type barre ou poutre formant un réseau ou *lattice*. Le but de cette partie n'est pas de présenter le modèle mésoscopique de façon exhaustive, mais d'indiquer les points importants de sa construction, ainsi on décrira successivement les hypothèses mésoscopiques qui caractérisent le modèle, la discrétisation de la structure, la cinématique et enfin la loi de comportement adoptée nécessaire à la détermination de l'endommagement.

5.3.1 Hypothèses du modèle

La méso-structure est idéalisée comme un ensemble de granulats noyés dans une matrice de mortier, et séparés de cette dernière par des zones de transition appelées aussi interfaces. Ici, seuls les granulats les plus gros sont considérés et leurs tailles sont déterminées par la distribution granulométrique utilisée pour la confection des poutres dans notre campagne expérimentale, voir figure 3.8. La position des granulats dans la structure est déterminée de façon aléatoire. De plus, on suppose qu'ils suivent un comportement élastique linéaire isotrope et qu'ils sont plus rigides que la matrice, alors que l'interface est supposée quant à elle moins rigide et plus fragile. Les constantes matériaux des trois différentes phases du béton ont été choisies en s'assurant que l'on

retrouve le comportement macroscopique en traction. Par exemple, les granulats ont été considérés comme deux fois plus rigides que la matrice, qui à son tour est deux fois plus rigide et ductile que l'interface [53, 55].

La modélisation a été limitée à deux dimensions et les granulats sont en conséquence considérés comme des inclusions cylindriques [24]. Les calculs ont enfin été menés en considérant l'hypothèse de contraintes planes.

5.3.2 Construction du maillage

Les nœuds du maillage définissant la matrice sont placés de façon aléatoire dans le domaine, en respectant néanmoins la contrainte d'une distance minimale d_{min} entre eux. Les éléments sont eux obtenus à l'aide d'une triangulation de Delaunay, les faces des triangles sont représentés par les lignes solides sur la figure 5.1a. Les lignes pointillées représentent quant à elles le diagramme de Voronoï, graphe dual de la triangulation de Delaunay, dont les arêtes sont les sections transversales des arêtes des triangles de Delaunay.

Pour la discrétisation du granulat, les nœuds des éléments ne sont dans ce cas pas placés de façon aléatoire, mais de telle sorte que les arêtes des polygones de Voronoï définissent l'interface entre les granulats et le mortier [11] comme le représente la figure 5.1b.

5.3.3 Calcul des déplacements des nœuds

Chaque nœud possède trois degrés de liberté : deux en déplacement et un en rotation. Dans le système de coordonnées global, les degrés de liberté des nœuds 1 et 2, $\mathbf{u}_e = (u_1, v_1, \phi_1, u_2, v_2, \phi_2)^T$ sont liés aux déplacements au niveau de la discontinuité $\mathbf{u}_c = (u_c, v_c, \phi_c)^T$ dans le système local de coordonnées au point C situé au centre de la section transversale de l'élément intermédiaire, voir les figures 5.1c et 5.1d. La relation entre les degrés de liberté et le déplacement au point C est :

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{B}\mathbf{u}_e \quad (5.1)$$

où B est définie comme :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & -e & \cos \alpha & \sin \alpha & e \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & h/2 & \cos \alpha & \sin \alpha & -h/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{I/A} & 0 & 0 & -\sqrt{I/A} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Cette matrice dépend donc de l'orientation de l'élément dans le système global de coordonnées définie par l'angle α , du déplacement e de la discontinuité, de la distance entre nœuds h , de la section transversale A de l'élément ainsi que du moment d'inertie I de cette section. La matrice de raideur de l'élément lattice est donc de la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \frac{A}{h} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (5.3)$$

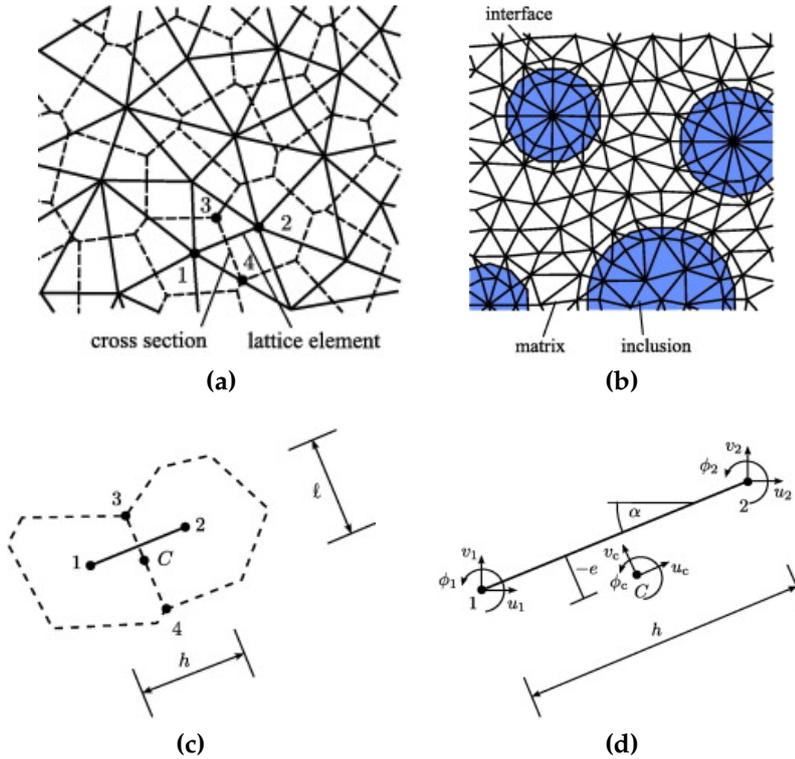


FIGURE 5.1 – Maillage mésoscopique typique : (a) Ensemble d'éléments (lignes continues) avec les sections transversales (lignes discontinues) obtenues à partir de la tessellation de Voronoi sur le domaine. (b) Arrangement des éléments autour des granulats (inclusions); (c) et (d) Un élément lattice dans le système global de coordonnées [24].

où \mathbf{D} est la matrice de raideur du matériau. Cette matrice permet donc de calculer les degrés de liberté nodaux \mathbf{u}_e , et par suite d'obtenir les déplacements au point C en utilisant la relation (5.1).

5.3.4 Modèle d'endommagement utilisé

Le calcul des déplacements au point C permet alors d'écrire la déformation ε correspondante :

$$\varepsilon = (\varepsilon_n, \varepsilon_s, \varepsilon_\phi)^T = \frac{\mathbf{u}_c}{h} \quad (5.4)$$

Un modèle d'endommagement isotrope est utilisé pour caractériser la réponse des zones d'interface et du mortier. Ainsi, le champ de contrainte est relié au champ de déformation par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_n, \sigma_s, \sigma_\phi)^T = (1 - \omega)\mathbf{D}_e\varepsilon = (1 - \omega)\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \gamma E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

où ω est la variable d'endommagement, D_e la matrice de raideur élastique qui dépend des paramètres matériaux E et γ , et $\bar{\sigma}$ la contrainte effective. Pour plus de détails sur l'expression de D_e , le lecteur est invité à se référer à Grassl *et al.* [22]. La valeur de la déformation équivalente est alors donnée par l'expression :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{2}\varepsilon_0(1-c) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0(c-1) + \varepsilon_n\right)^2 + \frac{c\gamma^2\varepsilon_s^2}{q}} \quad (5.7)$$

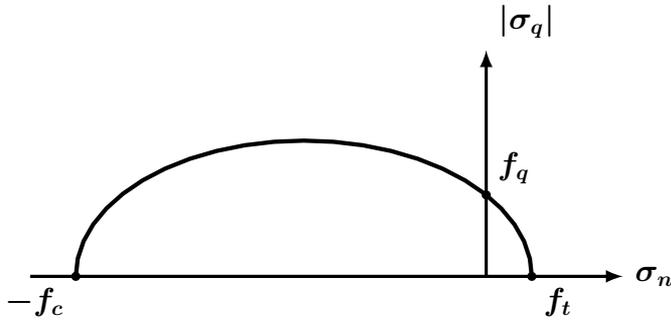
où ε_0 , c et q sont trois paramètres du modèle directement liés à la résistance de l'élément.

Cette définition de la déformation équivalente implique une surface seuil dans le plan des contraintes principales de type elliptique, comme on peut le constater sur la figure 5.2. Ainsi, dans le cas de la traction pure, la contrainte est limitée par la résistance à la traction $f_t = E\varepsilon_0$. Dans les cas de cisaillement pur et de compression pure, la contrainte est limitée respectivement par la résistance au cisaillement $f_q = qf_t$ et la résistance à la compression $f_c = cf_t$.

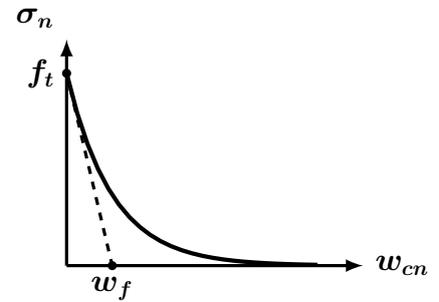
Dans le modèle utilisé, le paramètre d'endommagement ω est obtenu en considérant le cas de la traction pure. Ici, la courbe d'adoucissement 5.2b a été choisie de type exponentielle :

$$\sigma_n = f_t \exp\left(-\frac{w_{cn}}{w_f}\right) \quad (5.8)$$

où $w_{cn} = \omega h \varepsilon_n$ représente l'ouverture d'entaille dans le cas de la traction pure. Le paramètre w_f quant à lui détermine la pente initiale de la courbe d'adoucissement et est relié à l'énergie de fracturation $G_f = f_t w_f$ à l'échelle mésoscopique.



(a) Surface seuil du modèle mésoscopique dans le plan des contraintes principales.



(b) Courbe exponentielle de la contrainte normale en fonction de l'ouverture de fissure.

FIGURE 5.2 – Détails de l'approche mésoscopique [22].

La relation contrainte-déformation peut également s'exprimer à l'aide de l'expression (5.5) réécrite dans le cas de la traction pure :

$$\sigma_n = (1 - \omega)E\varepsilon_n \quad (5.9)$$

Ainsi, en utilisant les deux relations contrainte-déformation (5.8) et (5.9), on obtient l'expression qui régit l'évolution de la variable d'endommagement :

$$(1 - \omega)\kappa = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{\omega h \kappa}{w_f}\right) \quad (5.10)$$

où ε_n a été remplacé par κ qui est une variable d'évolution, déterminée par le chargement (5.11a) et les conditions de chargement-déchargement (5.11b) :

$$f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon_{eq}(\varepsilon) - \kappa \quad (5.11a)$$

$$f \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad \dot{\kappa} f = 0 \quad (5.11b)$$

La résolution itérative de l'équation (5.10), typiquement à l'aide de la méthode de Newton-Raphson, permet finalement d'obtenir la valeur de l'endommagement ω dans tout le domaine.

5.4 Modélisation numérique des essais en flexion trois points à l'aide du modèle mésoscopique

Dans un premier temps on décrit les détails de la géométrie, des conditions de chargement et des conditions aux limites du problème. On présente ensuite les résultats des simulations numériques sur des structures entaillées et non-entaillées ainsi que leur comparaison avec les expériences.

5.4.1 Description des maillages utilisés

Les figures 5.3a et 5.3b schématisent les géométries des structures utilisées dans la modélisation. En accord avec les essais expérimentaux (voir figure 3.11), différentes tailles et différentes géométries ont été considérées : la hauteur de la structure prendra les valeurs $D = 50, 100, 200$ et $400mm$ pour trois rapports (α) entre la longueur de l'entaille (a_0) et la hauteur de poutre (D) de 0, 0.2 et 0.5. La profondeur de la poutre est quant à elle gardée constante, à savoir $b = 0.05m$.

L'épaisseur de l'entaille est supposée nulle, ce qui idéalise le mode de fabrication des structures où une plaque métallique mince d'épaisseur constante a été installée au moment du moulage. Le chargement et les réactions aux appuis sont appliqués et distribués par des plaques d'une largeur de $5mm$.

La discrétisation pour l'analyse mésoscopique des poutres entaillées a été faite sur une zone limitée entourant la pointe de l'entaille comme cela est indiqué sur la figure 5.3a. Sur les poutres non-entaillées, la méso-discretisation s'étale sur une surface entourant l'endroit où la macro-fissure est susceptible de se développer, voir figure 5.3b. Pour les structures non-entaillées et pour les plus petites tailles ($D = 50$ et $100mm$), la mésostructure couvrira toute la hauteur de la poutre. En contraste, pour les plus grandes tailles

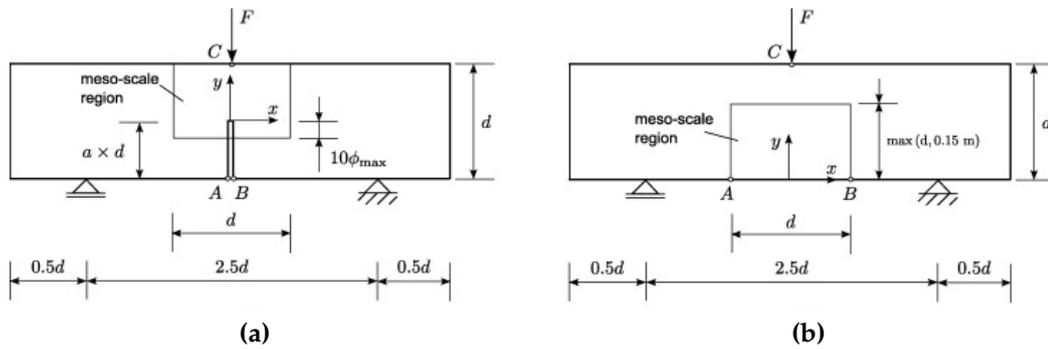


FIGURE 5.3 – Géométries des poutres modélisées sous un chargement en flexion 3 points. (a) Poutres entaillées (b) Poutres non-entaillées [22].

($D = 200$ et 400mm) la discrétisation n'atteint pas le bord supérieur de la structure afin éviter de rendre le calcul trop lourd et coûteux.

Les parties en dehors de la fenêtre de méso-discrétisation ont été maillées aussi avec le même type d'élément. Les propriétés mécaniques sont dans ce cas la moyenne des propriétés de l'ensemble des trois phases : granulats, pâte et interfaces.

Le placement aléatoire des granulats obéit à un processus itératif d'essai et d'erreur qui assure la non-superposition des granulats. En revanche l'intersection entre granulats avec les frontières des spécimens et l'entaille est autorisée. Les détails de la détermination de la distribution de diamètres et le placement de granulats sont exposés dans [25].

5.4.2 Paramètres du modèle et procédure de calcul

Les paramètres du modèle pour les trois différents composants sont résumés dans le tableau 5.1. Ces valeurs correspondent aux moyennes des champs aléatoires des résistances à la traction f_t et des énergies de fracturation G_f respectivement. Le module d'Young E et la résistance à la traction f_t ont été obtenus de la modélisation d'un essai en traction pure avec le modèle mésoscopique présenté ici. Les valeurs de q , c et G_f sont issus de la calibration des paramètres du modèle. La calibration se fait sur les courbes de chargement d'une géométrie spécifique, HN dans notre cas, puis la représentation de toutes les autres avec les paramètres issus de la calibration.

Les analyses ont été pilotées en ouverture d'entaille (CMOD), grandeur définie comme le déplacement horizontal relatif des points A et B de la figure 5.3. Pour les éprouvettes entaillées ($\alpha = 0.2$ et 0.5), les points ont été situés sur chaque extrémité de l'entaille. Sur les échantillons non-entaillés ($\alpha = 0$) ces deux points A et B sont fixés à une distance de $D/2$ à partir du milieu de la poutre afin de couvrir une zone suffisamment large où la macro-fissure peut se former. Le CMOD a été augmenté progressivement jusqu'à la

	$E[GPa]$	ν	$f_t[MPa]$	q	c	$G_f[N/m]$
Matrice	44	0.33	3.8	2	10	86
Interface	58.7	0.33	1.9	2	10	43
Granulat	88	0.33	-	-	-	
Moyenne	63	0.33	-	-	-	

TABLE 5.1 – Paramètres utilisés dans le calcul à l'aide du modèle mésoscopique.

rupture totale de la structure¹. Pour le cas des échantillons sans entaille où la région dans laquelle la méso-discrétisation est appliquée est plus petite que la hauteur de la poutre ($D = 200$ et $400mm$), les analyses sont arrêtées lorsque la macro-fissure atteint la frontière, c'est-à-dire peu après le pic de la courbe de chargement. Pour chaque type d'éprouvette 100 calculs ont été exécutés. Ils correspondent à 100 tirages aléatoires des granulats et des champs autocorrélés des propriétés mécaniques.

5.4.3 Résultats des simulation numériques

Les courbes de chargement obtenues pour toutes les tailles de poutre et toutes les géométries (entaillées et non-entaillées) ont été comparées avec les courbes expérimentales sur les figures 5.4, 5.5 et 5.6. Les barres d'erreur des résultats numériques correspondent à la moyenne plus ou moins un écart-type calculé à partir des 100 analyses faites.

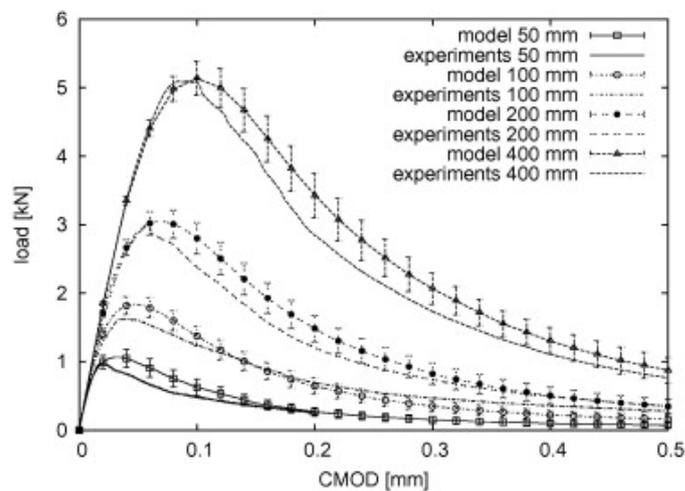


FIGURE 5.4 – Comparaison des courbes de chargement numériques et expérimentales pour les poutres entaillées ayant un rapport $\alpha = 0.5$ et pour les quatre tailles $D = 50mm, 100mm, 200mm$ et $400mm$.

1. La rupture totale est atteinte quand la valeur de la charge résiduelle est inférieure à 1/100 de la valeur de la charge au pic.

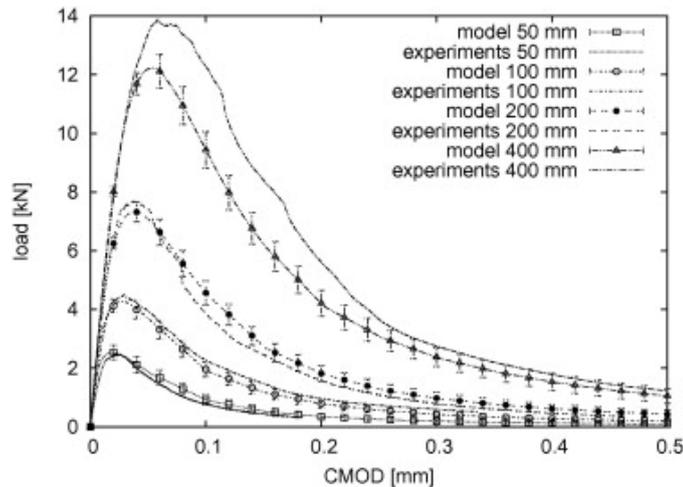


FIGURE 5.5 – Comparaison des courbes de chargement numériques et expérimentales pour les poutres entaillées ayant un rapport $\alpha = 0.2$ et pour les quatre tailles $D = 50\text{mm}$, 100mm , 200mm et 400mm .

Considérant le fait qu'un même ensemble de paramètres du modèle a été utilisé pour l'obtention des douze courbes de chargement, l'ajustement entre les résultats numériques obtenus à l'aide du *modèle mésoscopique* et les résultats expérimentaux est très satisfaisant. On observe toutefois un certain écart dans les valeurs des charges maximales mais seulement pour certaines tailles de poutre. Ainsi par exemple, pour les poutres avec $\alpha = 0.5$ (ou HN) les charges au pic sont surestimées notamment pour les tailles les plus petites, voir figure 5.4. Dans le cas des poutres avec $\alpha = 0.2$ (ou FN) et les non-entaillées (ou UN), les charges maximales sont sous-estimées pour les plus grands échantillons tel qu'il peut être observé sur les figures 5.5 et 5.6 cependant cela reste toujours dans l'enveloppe expérimentale. En terme général, il est possible de conclure que les valeurs des charges maximales et la phase adoucissante sont bien reproduites par le modèle mésoscopique.

5.5 Synthèse et conclusion du chapitre

Le modèle mésoscopique permet de mettre en évidence l'avantage tiré d'une formulation à une échelle plus fine, qui permet de prendre en compte plus de phénomènes liés à la physique de la rupture, notamment l'interaction entre les différents composants du matériau. Ainsi le modèle mésoscopique est capable de reproduire les courbes de chargement complètes, à la fois la contrainte maximale à la rupture et la phase adoucissante.

Les bonnes performances obtenues par le modèle mésoscopique sont liées au fait que cette formulation est plus riche en informations, notamment par la prise en compte intrinsèque des interactions entre les composants.

On s'intéressera par la suite à tirer parti de cette observation pour proposer des mo-

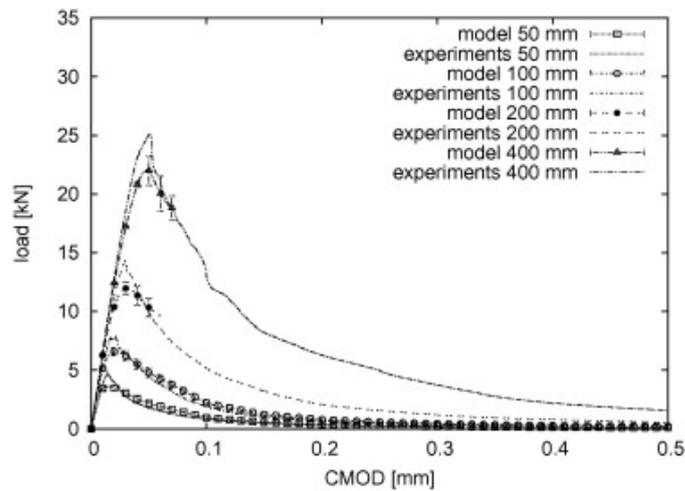


FIGURE 5.6 – Comparaison des courbes de chargement numériques et expérimentales pour les poutres entaillées ayant un rapport $\alpha = 0$ et pour les quatre tailles $D = 50\text{mm}$, 100mm , 200mm et 400mm .

dèles continus non-locaux plus performants, notamment par la prise en compte d'interactions. Enfin, si les modèles mésoscopiques donnent des résultats très satisfaisants ils s'avèrent cependant très gourmands en ressources informatiques. On ne peut espérer pour l'instant les utiliser dans le contexte de "grandes" structures.

Les interactions à l'échelle macroscopique

5.1	Introduction	64
5.2	Quel est le rôle de la mésostructure dans la description du comportement mécanique du béton ?	65
5.3	Description du modèle mésoscopique adopté	65
5.3.1	Hypothèses du modèle	65
5.3.2	Construction du maillage	66
5.3.3	Calcul des déplacements des nœuds	66
5.3.4	Modèle d'endommagement utilisé	67
5.4	Modélisation numérique des essais en flexion trois points à l'aide du modèle mésoscopique	69
5.4.1	Description des maillages utilisés	69
5.4.2	Paramètres du modèle et procédure de calcul	70
5.4.3	Résultats des simulation numériques	71
5.5	Synthèse et conclusion du chapitre	72

6.1 Introduction

Le succès de l'approche mésoscopique présentée dans le chapitre précédent est dû à la richesse en informations qu'elle contient. En effet, la définition explicite des granulats, du mortier et des interfaces permet d'obtenir, en dépit des fortes ressources informatiques que cela nécessite, une description fidèle du processus de rupture dès l'amorçage jusqu'à la rupture totale. La clé de cette approche réside dans la prise en compte des interactions qui existent entre les composants.

Dans ce chapitre, on cherche à transposer cette prise en compte des interactions de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique afin de construire un nouveau modèle non-local intégral. Il prendra en compte intrinsèquement ces interactions au travers d'une nouvelle fonction poids à définir. Pour reproduire ces interactions on va décrire le matériau comme étant un ensemble d'inclusions qui sont successivement dilatées afin de caractériser le transfert d'information au sein du matériau et de reconstruire la fonction poids à introduire dans le nouveau modèle.

Dans la section 6.2, on présente le cadre théorique permettant la reconstruction de la fonction poids. Dans la section 6.3, nous validerons tout d'abord la méthode de calcul des interactions en la comparant à la solution théorique d'Eshelby dans le cas d'une inclusion unique. Dans la section 6.4, on étudiera le cas unidimensionnel d'une barre en traction pour reproduire le comportement de cette nouvelle fonction poids basée sur les interactions au bord, à cœur et à proximité d'une zone endommagée. Dans la section 6.5 on étudiera le cas de la rupture dynamique d'une barre en traction. Ceci nous permettra d'observer la capacité de ce nouveau modèle à décrire la transition continu/discret et la discontinuité du déplacement. Dans la section 6.6, on examinera le cas de l'écaillage ayant pour objectif de caractériser le comportement mécanique près d'un bord ainsi que la capacité à localiser l'écaillage. Dans la section 6.8, on étudiera le cas de la rupture par flexion 3 points d'une poutre de hauteur $D = 50mm$ avec une entaille $a_0 = 0.5D$ et on comparera la réponse obtenue à l'amorçage de la rupture avec les résultats expérimentaux de notre base de données.

6.2 Interactions et modèle d'endommagement non-local modifié

À titre d'illustration et pour guider le raisonnement partons du cas unidimensionnel simple d'une barre de longueur totale L , fixée sur une de ses extrémités et soumise à une distribution constante de chargement de traction sur l'autre, comme indiqué sur la figure 6.1. Dans ce cas simplifié, on considérera que la réponse du matériau est bilinéaire adoucissante.

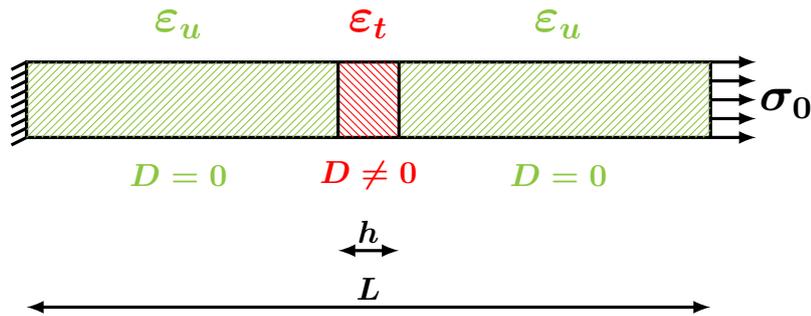


FIGURE 6.1 – Schéma du problème aux conditions aux limites utilisé pour le calcul d'interactions.

On travaillera ici sous l'hypothèse que l'endommagement est contrôlé par la déformation non-locale effective. Pour retrouver le comportement adoucissant, la localisation de l'endommagement sera supposée avoir lieu dans une bande endommagée centrée au milieu de la barre introduite à cet effet. La largeur h de cette bande est fixée de façon arbitraire mais elle est proportionnelle à la longueur interne du modèle. La distribution de la déformation et de l'endommagement sont homogènes à l'intérieur de la bande. Les déformations ε_u et ε_t sont calculées à partir d'une loi de comportement bilinéaire qui dépend du module d'Young E et du module adoucissant κ . On suppose que ε_u et ε_t sont calculées comme dans [9].

6.2.1 Le concept du calcul d'interactions

Considérons à présent que la barre de la figure 6.1 contient une série d'inclusions circulaires du rayon a donné et qu'elles sont centrées sur les points situés sur l'axe longitudinal, voir figure 6.2. Les inclusions localisées à l'intérieur de la bande endommagée sont donc moins rigides que celles au dehors de la bande à cause de la dégradation du module d'Young. Sur les deux extrémités, le centre de l'inclusion est localisé exactement sur le bord du solide et une *demie-inclusion* est considérée à ces deux endroits en particulier.

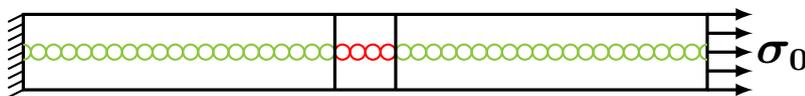


FIGURE 6.2 – Barre en traction vue comme un ensemble d'inclusions.

Le but est maintenant de calculer les interactions entre les points localisés au centre de chaque inclusion. Par interaction nous entendons l'effet qu'aura une déformation induite sur un récepteur localisé au point x par la dilatation d'une inclusion de rayon a localisée au point ξ , voir figure 6.3. Cela revient aussi à dire qu'une interaction cor-

respond à la quantité d'énergie de déformation transmise de ξ à x . Cette interaction dépendra de la géométrie de la structure, de la taille de l'inclusion, des propriétés élastiques du matériau à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion ainsi que du rapport entre elles.

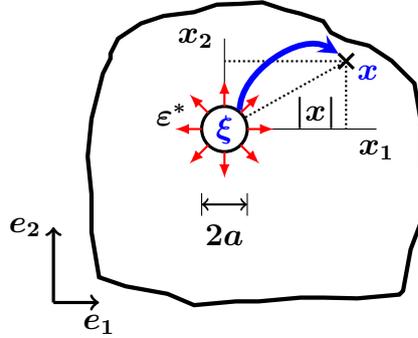


FIGURE 6.3 – Schéma de principe du calcul d'interactions.

Formellement, la quantité représentative de l'énergie A transmise en un point x par la dilatation ε^* d'une inclusion localisée en ξ s'écrit :

$$A(x, \xi, \varepsilon^*) = \|\varepsilon^*\| A^*(x, \xi) \quad (6.1)$$

où A^* est l'interaction entre les points x et ξ .

6.2.2 Formulation du modèle non-local modifié

Dans le modèle d'endommagement non-local original (section 2.4.2) la déformation non-locale équivalente est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}(x) = \frac{1}{\Omega_r(x)} \int_{\Omega} \psi_0(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad (6.2)$$

Un point x ressentira avec plus ou moins d'intensité la déformation du point voisin ξ si le poids $\psi_0(x, \xi)$ est plus ou moins important. Cette fonction poids est de type gaussienne et elle introduit une grandeur appelée *la longueur interne* définissant le voisinage perturbé par l'endommagement d'un point du solide.

Dans la formulation non-locale modifiée, on suppose qu'il y a une similitude entre la fonction d'interaction indiquée à l'équation 6.1 et la nouvelle fonction poids. Ainsi :

$$\psi_0(x, \xi) = A^*(x, \xi) = \frac{A(x, \xi, \varepsilon)}{\|\varepsilon^*\|} \quad (6.3)$$

En pratique, le calcul des interactions est réalisé à l'aide du code éléments finis Cast3M¹ en dilatant thermiquement ($\varepsilon^* = \alpha \Delta T \mathbb{I}$), chacune à leur tour, toutes les inclusions de la structure. La fonction poids d'interactions est reconstruite en considérant en un point donné l'énergie de déformation élastique induite par la dilatation thermique successive de toutes les inclusions de la structure, voir figure 6.3. Si la structure possède n inclusions, n calculs élastiques d'interactions sont réalisés pour reconstruire la fonction poids à chaque pas de chargement.

Finalement on a :

$$\varepsilon^* = \alpha \Delta T \mathbb{I} \quad (6.4a)$$

$$\psi_0(x, \xi) \equiv A^*(x, \xi) = \frac{A(x, \xi, \varepsilon^*)}{\|\varepsilon^*\|} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^3 |\varepsilon_i|^2}}{\|\varepsilon^*\|} \quad (6.4b)$$

$$e_{NL}(x, \xi) = A^*(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) \quad (6.4c)$$

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\int_{\Omega} A_0^*(x, \xi) d\xi} \int_{\Omega} A^*(x, \xi) \varepsilon_{eq}(\xi) d\xi \quad (6.4d)$$

où ε^* est la déformation thermique, ψ_0 est la fonction poids, A^* est la fonction d'interactions définie à l'équation 6.3, A est l'énergie de déformation élastique mesurée à l'aide de la norme 2 des déformations, e_{NL} est la contribution non-locale issue de l'équation 2.4, $\bar{\varepsilon}$ est la nouvelle déformation non-locale macroscopique construite de telle sorte que l'opérateur non-local n'affecte pas un champ de déformation uniforme pour un endommagement nul.

Puisque nous avons choisi d'écrire ce problème de calcul d'interactions en déplacement, pour chaque calcul thermique, les bords libres de la structure sont considérés bloqués en déplacement pour ne pas modifier les conditions limites en déplacement du problème mécanique original, voir figure 6.4. D'autres choix sont possibles et le problème aurait pu être écrit en contrainte par exemple. Un organigramme du calcul mécanique complet est présenté dans la section 6.7.

6.3 Validation : cas d'une unique inclusion dans un milieu infini

On cherche ici à valider l'implémentation du calcul d'interaction dans Cast3M. On considère le problème bidimensionnel décrit sur la figure 6.5 qui correspond à une approximation du cas théorique de milieu infini. Il s'agit de deux surfaces circulaires

1. Cast3M est un code de calcul pour l'analyse de structures par la méthode des éléments finis et la modélisation en mécanique des fluides développé par le Département de Mécanique et de Technologie du Commissariat français à l'Énergie Atomique (CEA).

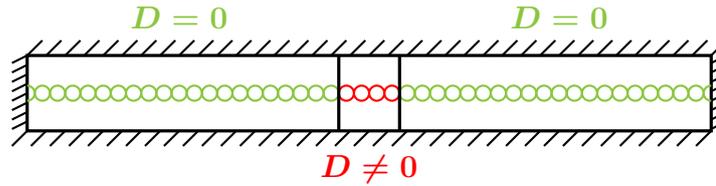


FIGURE 6.4 – Conditions aux limites pour le calcul d'interactions.

concentriques représentant un milieu infini (grand cercle) qui contient une inclusion (petit cercle). Dans une démarche de validation, on cherche à comparer l'énergie de déformation élastique A (équation 6.4b) avec celle obtenue à l'aide de la théorie d'Eshelby² (proposée en 1957) qui permet de calculer la perturbation mécanique due à une inclusion ellipsoïdale dans un milieu infini [17].

La figure 6.5 représente la projection en deux dimensions du problème tridimensionnel d'un cylindre de hauteur infinie qui contient au milieu une inclusion également cylindrique et de hauteur infinie. Ce problème étant axisymétrique, il est suffisant d'étudier seulement un quart du domaine comme cela est représenté sur la figure 6.5. On commence par faire le calcul analytique du tenseur des déformations à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion et ces résultats théoriques seront comparés aux résultats numériques obtenus avec le code Cast3M, ce qui permettra d'évaluer la pertinence de notre modèle numérique vis-à-vis de la théorie d'Eshelby dans le calcul d'une interaction dans un milieu infini.

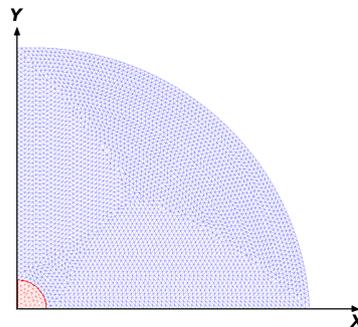


FIGURE 6.5 – Maillage utilisé par la validation du calcul des interactions.

6.3.1 Calcul analytique du champ des déformations

Ici, on s'intéresse à la détermination quantitative de l'effet d'une inclusion cylindrique, on présente donc le résultat du calcul analytique.

2. John Douglas Eshelby (1916 - 1988). Scientifique anglais connu pour ses apports à la micro-mécanique et aux théories des milieux hétérogènes.

Le tenseur des déformations aux points à l'intérieur de l'inclusion est donné par :

$$\varepsilon^I = \alpha \Delta T \frac{1 + \nu}{2(1 - \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Le tenseur des déformations aux points à l'extérieur de l'inclusion est donné par :

$$\varepsilon^E = \alpha \Delta T \frac{a^2 (1 - \nu)}{x^2 2(1 - \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

où a es le rayon de l'inclusion et x la distance au point d'intérêt.

Dans les deux expressions (6.5) et (6.6), α est le coefficient de dilatation thermique, ΔT la variation de la température appliquée et ν le coefficient de Poisson.

Les détails des calculs pour obtenir l'expression du tenseur de déformation à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion sont donnés dans l'annexe E.

6.3.2 Calcul numérique du champ des déformations à partir de la solution d'Eshelby

Le calcul numérique a été effectué en considérant l'hypothèse de déformations planes. Des éléments finis de type triangulaires à 3 nœuds et un point de Gauss ont été considérés et le modèle de résolution utilisé est le modèle *élastique isotrope*. La symétrie du problème a été quant à elle prise en compte dans les conditions aux limites.

La déformation thermique est générée à l'intérieur de l'inclusion par l'imposition d'une température T . Cette déformation est transmise au reste du maillage par des déplacements nodaux. Il est alors possible de connaître les contraintes associées aux déplacements nodaux pour après, à partir de l'intégration de ce champ, déterminer les forces nodales. Le problème *mécanique élastique isotrope* peut être alors résolu ce qui permet d'obtenir les champs des déplacements et de déformations dans tout le domaine.

Les paramètres utilisés pour le calcul ont été choisis de façon arbitraire et sont les suivants :

- Module d'Young $E = 10.06 \cdot 10^9 Pa$
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.21$
- Coefficient de dilatation thermique $\alpha = 1 K^{-1}$
- Température dans l'inclusion $T = 1 K$

Les déformations principales calculées analytiquement et numériquement sont présentées dans la figure 6.6. Ce sont ces déformations principales qui entrent dans l'énergie de déformation A présenté à l'équation 6.4b. La superposition des deux types de

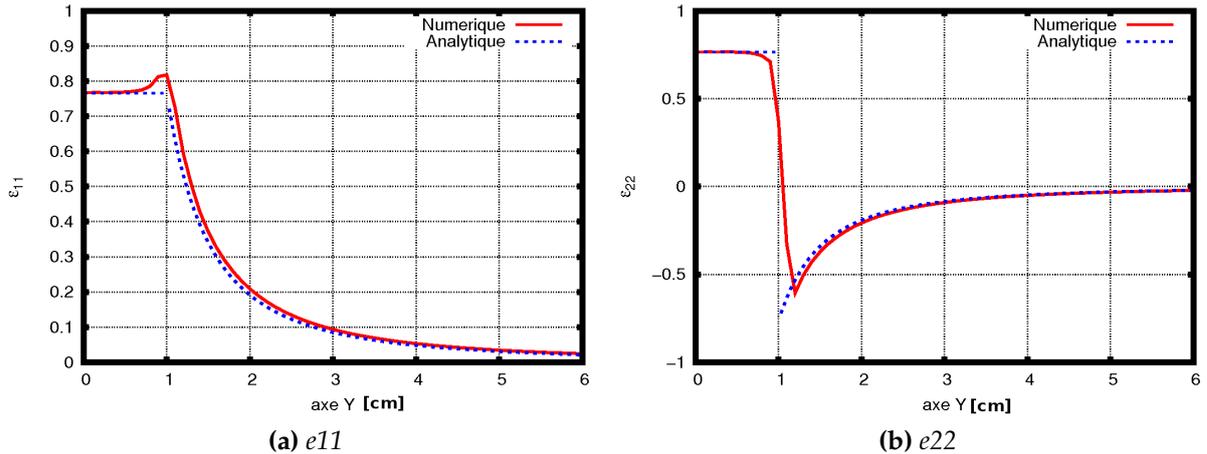


FIGURE 6.6 – Comparaison des déformations principales obtenues numériquement et analytiquement - Cas d'une unique inclusion cylindrique dans un milieu infini.

résultats est satisfaisante, ce qui permet de valider le calcul numérique d'une simple inclusion cylindrique infinie à l'aide de Cast3M. Ainsi, on pourra par la suite utiliser cette démarche pour calculer la fonction poids basée sur les interactions entre plusieurs inclusions.

6.4 Cas d'une barre présentant une localisation des défauts

Une fois que l'implémentation numérique a été validée sur le problème modèle de l'inclusion cylindrique, on revient sur le cas de la barre en traction présentant une bande endommagée localisée (figures 6.2 et 6.4) pour calculer les contributions non-locales (6.4c). On étudiera également l'influence de la taille des inclusions.

La figure 6.7a montre l'évolution de la fonction poids pour différentes tailles d'inclusion au centre de la barre pour un endommagement nul. Lorsque le rayon a de l'inclusion devient de plus en plus petit, la fonction poids au centre de l'inclusion devient de plus en plus importante alors qu'elle décroît en dehors de l'inclusion en $\frac{1}{x^2}$ ce qui est cohérent avec la théorie d'Eshelby.

La figure 6.7b montre le comportement de la fonction poids estimée à l'aide de l'équation 6.4b au bord de la barre pour différentes tailles d'inclusion. Ces résultats montrent que, par la prise en compte des interactions, le comportement local est retrouvé lorsque la taille des inclusions tend vers zéro. En effet, plus l'inclusion est petite, plus la valeur de la fonction poids au bord est importante. Ce comportement local attendu sur le bord libre du solide est cohérent avec les arguments avancés dans le chapitre 4.

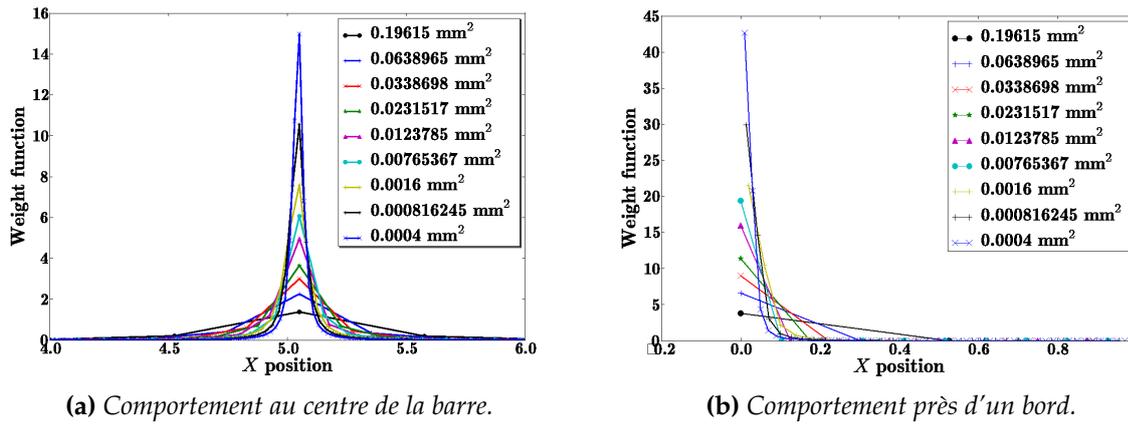


FIGURE 6.7 – Comportement de la fonction poids calculée à partir des interactions (endommagement nul).

La figure 6.8 permet de comparer les comportements des contributions non-locales près d'une zone endommagée obtenus à partir de la formulation originale et de la formulation prenant en compte les interactions. Pour cette dernière, ces contributions non-locales sont calculées à l'aide de l'équation 6.4c. On a ici :

$$e_{NL}(x, \xi) = A^*(x, \xi)\varepsilon_{eq}(\xi) = \begin{cases} A^*(x, \xi)\varepsilon_t & \text{si } \xi \in \text{zone endommagée} \\ A^*(x, \xi)\varepsilon_u & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.7)$$

où ε_t et ε_u sont définis à la figure 6.1.

Pour tous les taux d'endommagement considérés dans la bande – respectivement $D = 0$, $D = 0.5$ et $D = 0.99$ – la contribution non-locale calculée à partir de la formulation originale se voit fortement amplifiée avec la valeur de l'endommagement à proximité de la zone endommagée. La nouvelle formulation prenant en compte les interactions ne montre en revanche pas cette amplification. Ces observations permettent ainsi de conclure que la nouvelle formulation est capable de décrire l'effet d'écran mentionné dans les chapitres 2 et 4. En effet, le point x étant situé juste en dehors de la zone endommagée, il ne doit pas transmettre d'information au travers de cette zone.

Dans la nouvelle formulation, cet effet d'écran existe si la taille de l'inclusion est plus petite que la bande endommagée. En effet, comme l'illustre la figure 6.9, l'effet d'écran n'existe pas quand la largeur de la zone est plus petite que la taille de l'inclusion car, au moment de la dilatation thermique, les points A et B localisés de part et d'autre de la fissure subissent la même perturbation et l'effet d'écran dû à la fissure disparaît. Pour retrouver l'effet d'écran induit dans une zone endommagée, la taille de la source ne doit plus être constante mais elle doit décroître dans la bande endommagée comme

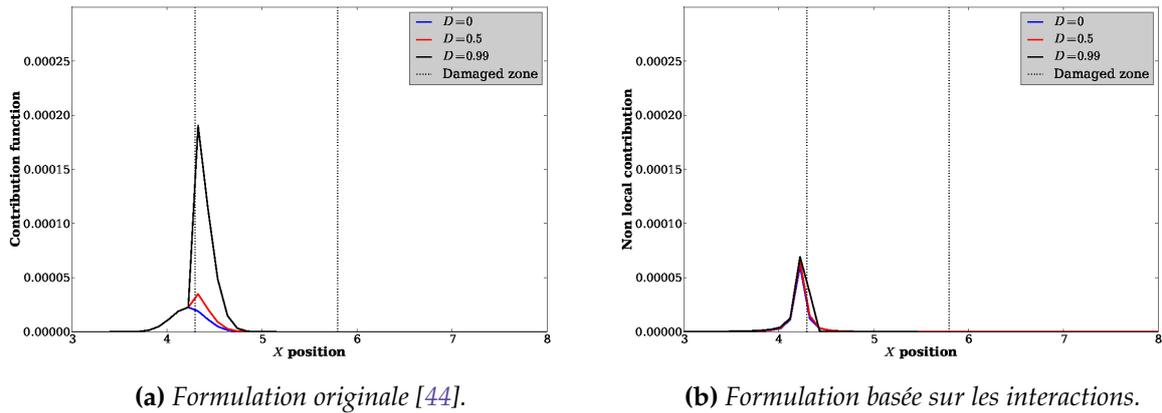


FIGURE 6.8 – Contributions non-locales près d'une zone endommagée.

une fonction du taux d'endommagement au point source. Nous avons choisi de calculer cette nouvelle taille comme $a(x) = a_0\sqrt{1 - D(x)}$ où a_0 est la taille initiale de la source.

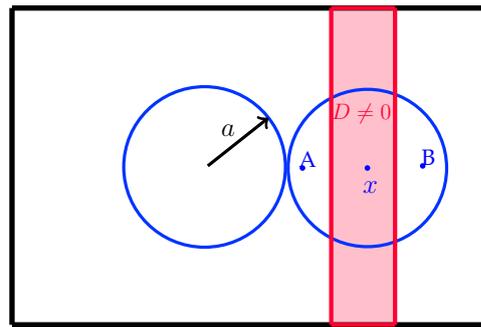


FIGURE 6.9 – Schéma de l'influence du rapport taille inclusion/largeur de la bande dans la modélisation à partir des interactions.

Par ailleurs, nous avons vu dans la section 4.2.3 qu'une formulation prenant en compte les effets des bords libres doit faire intervenir une décroissance de la longueur interne à proximité des bords (équation 4.5). Puisque notre modèle représente intrinsèquement un comportement local sur un bord libre lorsque la taille de l'inclusion tends vers zéro, voir figure 6.7b, il suffit pour avoir une formulation satisfaisante de faire décroître cette taille d'inclusion au bord.

Finalement :

$$a(x) = \min_{\partial\Omega}(a_0\sqrt{1 - D(x)}; \text{dist}(x, \partial\Omega)) \quad (6.8)$$

où $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ est le minimum de la distance du point considéré à tous les bords.

En pratique, les inclusions circulaires de rayon a ne seront pas explicitement introduites par le maillage. On choisit plutôt de venir dilater directement tous les points de Gauss d'un maillage quelconque situé dans une boule de rayon a .

6.5 Cas de la rupture dynamique d'une barre en traction

L'exemple de calcul qui est examiné ici correspond à celui étudié dans le chapitre 4 pour la comparaison des modèles non-locaux modifiés. Il est repris dans cette section pour la validation de la nouvelle formulation prenant en compte les interactions en utilisant les mêmes critères de validation, à savoir la *convergence*, la *capacité pour décrire la discontinuité du déplacement* et enfin la *capacité de décrire la transition continu-discret*.

Afin de coupler notre code simple unidimensionnel représentant la rupture dynamique d'une barre en traction et de calculer les interactions réalisées sous Cast3M, on projette à chaque pas de chargement le champ d'endommagement issu du calcul dynamique 1D sur un maillage 2D Cast3M compatible³. Ensuite, on effectue n calculs élastiques (où n est le nombre de points de Gauss) afin de reconstruire la fonction poids en chaque point de Gauss. Ceci se fait par la dilatation d'une boule de rayon a défini à l'équation 6.8 centrée sur le point de Gauss en question. Enfin, on projette le champ de la fonction poids issus de Cast3M sur le maillage 1D afin de déterminer la déformation non-locale dans le calcul dynamique.

On a vu auparavant dans le chapitre 4 qu'une combinaison de deux des formulations présentait de meilleurs résultats que chaque formulation considérée indépendamment. On compare maintenant le modèle original, la combinaison optimisée de formulations et le modèle basé sur les interactions.

(i). *Convergence* :

Les profils d'endommagement non-local doivent être indépendants de la taille de l'élément.

La figure 6.10 résume les résultats obtenus pour le modèle basé sur les interactions. On observe bien une convergence de l'état d'endommagement non-local lorsque l'on raffine le maillage.

(ii). *Capacité à décrire la discontinuité du déplacement*

Au moment de la rupture complète, l'ouverture de fissure doit être indépendante de la taille de l'élément. Pour vérifier cette discontinuité, après la rupture, la déformation dans l'élément fissuré doit évoluer en proportion inverse de la taille de l'élément, et avec la condition suivante :

3. Dans la direction orthogonale à la barre un nombre suffisant d'éléments est utilisé pour ne pas avoir d'effet de bord au niveau de la ligne moyenne.

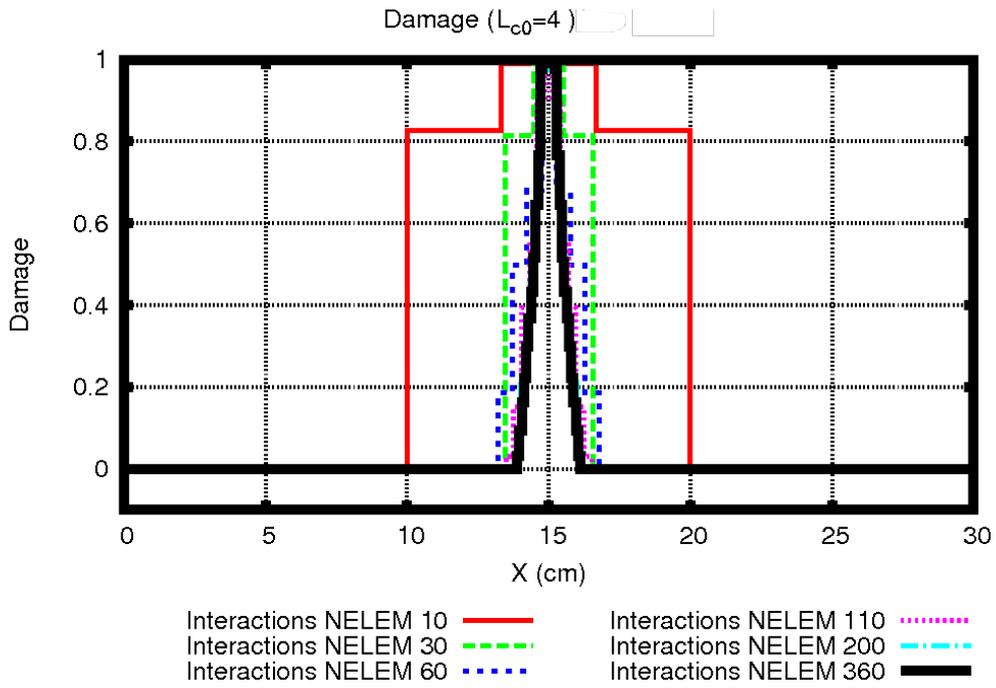


FIGURE 6.10 – Convergence du profil d'endommagement obtenu de la formulation basée sur le calcul d'interactions

$$[[U]] \approx \varepsilon h = \text{cste} \quad (6.9)$$

La figure 6.11 présente ce résultat :

On remarque que la formulation basée sur les interactions décrit bien la discontinuité forte du champ de déplacement. On note cependant une certaine limitation lorsque la taille de l'élément est proche de celle de la taille de la boule contenant les points de Gauss dilatés. La formulation avec interactions nécessite au moins deux éléments contenus dans cette boule pour pouvoir décrire correctement les interactions et donc la rupture et ainsi respecter le critère (6.9).

(iii). *Capacité à décrire la transition continu-discret :*

Pendant l'endommagement, le CMOD peut être estimé à partir de la méthode proposée par Dufour et Pijaudier-Cabot [16], et comparé au profil d'ouverture d'une fissure idéale à partir d'une forte discontinuité. Les détails de l'évaluation de ce critère ont été mentionnés dans la section 4.3.

La figure 6.12 résume les résultats caractérisant les performances des différents modèles pour ce critère.

Les évolutions temporelles de l'erreur par rapport à une fissure idéale sont donc représentées. On remarque ici que l'erreur est très faible pour la nouvelle formulation et elle tend à s'estomper au cours du temps, contrairement à la formulation

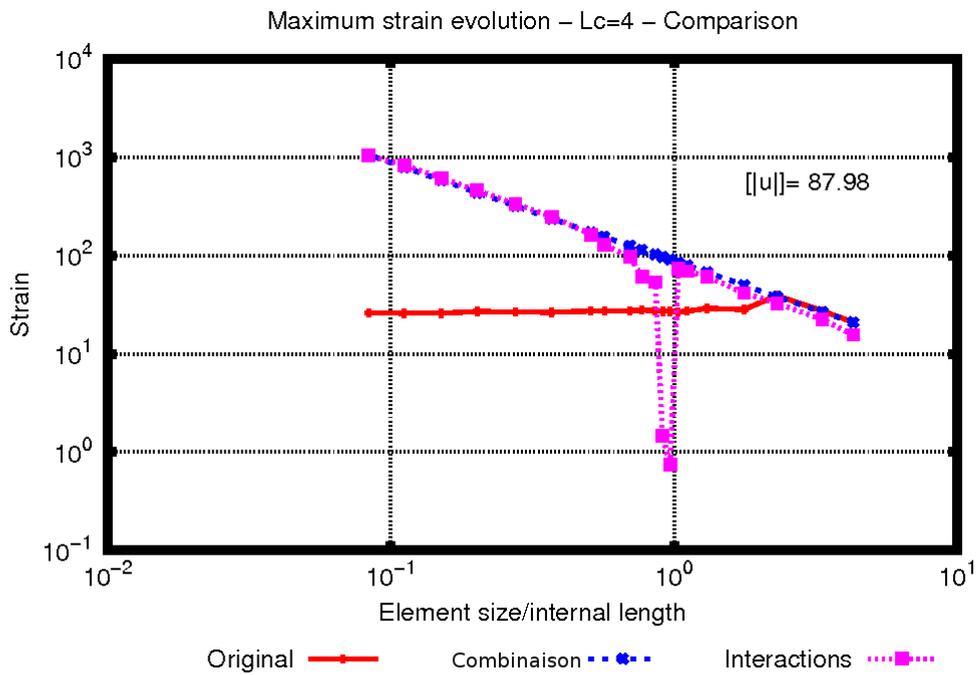


FIGURE 6.11 – Vérification de la discontinuité du déplacement. Comparaison entre les modèles : original, combiné, et avec interactions.

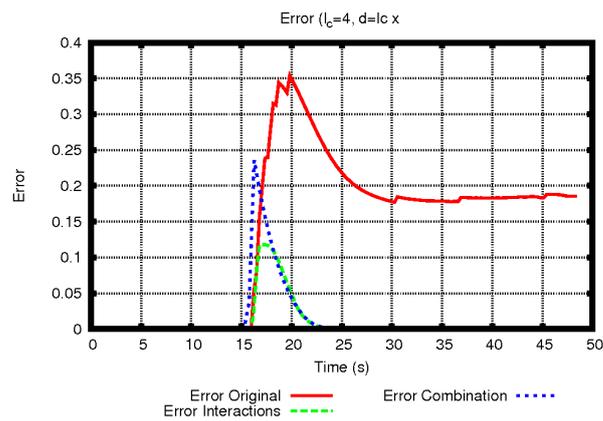


FIGURE 6.12 – Capacité d'un modèle à décrire la transition continu – discret

originale qui, elle, détermine l'ouverture d'entaille avec une erreur assez importante. De ce critère, on observe donc que la formulation modifiée décrit correctement la transition continu-discret.

6.6 Cas de l'écaillage

Pour tester la capacité du nouveau modèle à décrire le comportement au bord, on reprend le cas de l'écaillage déjà présenté auparavant dans le paragraphe 4.3.3. Lorsque l'on modifie la durée d'application de l'onde dynamique, on peut arbitrairement choisir la position où les ondes incidentes et réfléchies se rencontreront, c'est-à-dire la position où la rupture aura lieu. Ainsi, avec une durée judicieusement choisie, on peut créer la rupture près du bord libre. La même stratégie de projection des champs d'endommagement du maillage 1D au maillage 2D Cast3M et des champs de fonction poids du maillage 2D Cast3M au maillage 1D est utilisé ici.

Les mêmes calculs que précédemment sont donc effectués et les résultats correspondants aux deux positions de la rupture sont présentés sur la figure 6.13. On observe que la nouvelle formulation basée sur les interactions localise correctement l'écaillage et assure un comportement local au bord.

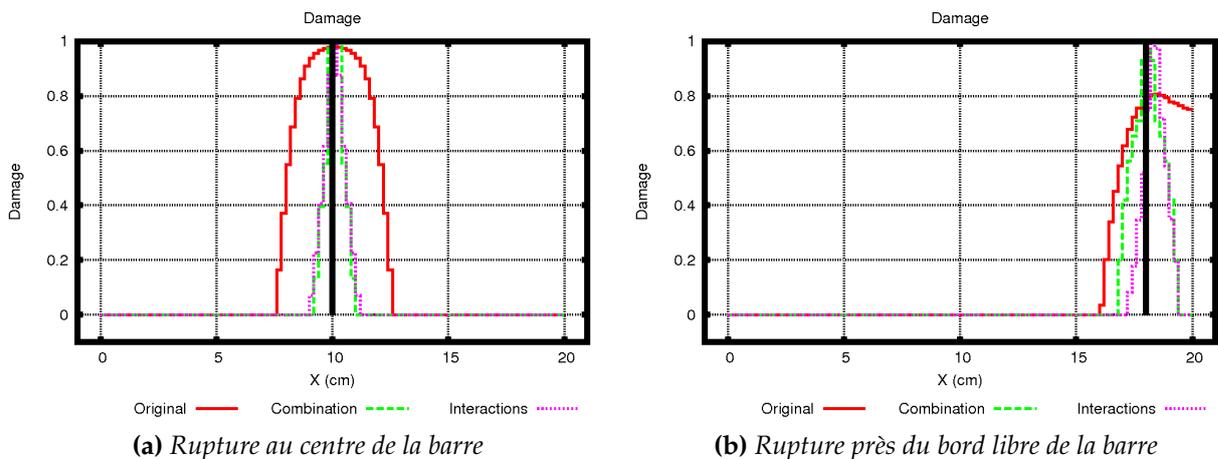


FIGURE 6.13 – Influence des effets de bord sur la performance des différentes formulations non-locales

6.7 Bilan et couplage avec un calcul numérique éléments finis 2D/3D

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que le nouveau modèle macroscopique valide les critères que nous nous sommes fixés en 1D tout comme la combinaison

optimisée au chapitre 4. De plus, puisque l'estimation de la nouvelle fonction poids basée sur les interactions est réalisée au sein d'un code éléments finis 2D, son couplage avec un calcul mécanique quelconque est aisé contrairement à la combinaison optimisée qui mettrait en jeu des intégrales de chemin (voir section 4.4). Dans ce but la figure 6.14 présente un organigramme de calcul mécanique complet avec la nouvelle formulation.

6.8 Premiers calculs en flexion trois points

Nous avons vu jusqu'ici que le modèle proposé présente de bons résultats à partir des cas de validation en 1D. Nous cherchons dans cette section à évaluer la capacité du nouveau modèle à reproduire les courbes de chargement obtenues de notre campagne expérimentale. Dans cette nouvelle phase de modélisation nous utiliserons à nouveau le code de calcul Cast3M considérant le maillage en deux dimensions illustré sur la figure 6.15. Par souci de simplicité et rapidité de calcul nous nous sommes concentrés sur la plus petite poutre de géométrie HN ($n = 4, i = 1$). La taille de l'élément dans le voisinage de l'entaille et de la FPZ est fixée à $(1 \times 5) \text{ mm}^2$. Les éléments utilisés sont de type rectangulaire à quatre points d'intégration. Malgré la symétrie du problème, nous devons travailler avec la totalité du maillage. En effet, le blocage de l'axe de symétrie dans les conditions aux limites nécessaire pour la construction de la fonction poids contraindrait les interactions entre les points situés de part et d'autre de cet axe.

Le chargement et les réactions sur les appuis sont répartis le long d'une ligne finie de 5 mm afin de représenter les conditions de chargement appliquées expérimentalement. Les calculs ont été contrôlés en CMOD.

On présente ici les résultats obtenus avec la formulation originale comparée à la formulation modifiée qui construit la fonction poids à l'aide du calcul d'interactions. La figure 6.16 montre les courbes de chargement jusqu'au pic où on s'aperçoit que le nouveau modèle basé sur les interactions présente une meilleure reproduction des mesures expérimentales en utilisant les paramètres obtenus de la calibration du modèle original mentionnés dans la section 3.4.3.2. La charge maximale mesurée expérimentalement est de 1 kN et celle obtenue avec le modèle proposé est très proche ayant une valeur de 1.05 kN . En revanche, la charge maximale obtenue à partir du modèle classique est de 2.2 kN soit plus de deux fois la valeur expérimentale.

La comparaison en terme d'évolution de l'endommagement sur la plus petite éprouvette est présentée dans la figure 6.17. On observe que l'amorçage de l'endommagement apparait de façon plus localisée avec la nouvelle formulation. De la même façon, l'évolution de l'endommagement se concentre autour de la fissure définissant une FPZ moins étendue que celle obtenue à partir du modèle classique. Cette nouvelle formulation est capable de représenter la croissance naturelle de la FPZ résultat de la croissance des défauts. L'effet de bord est aussi mieux décrit par la nouvelle formulation. La figure

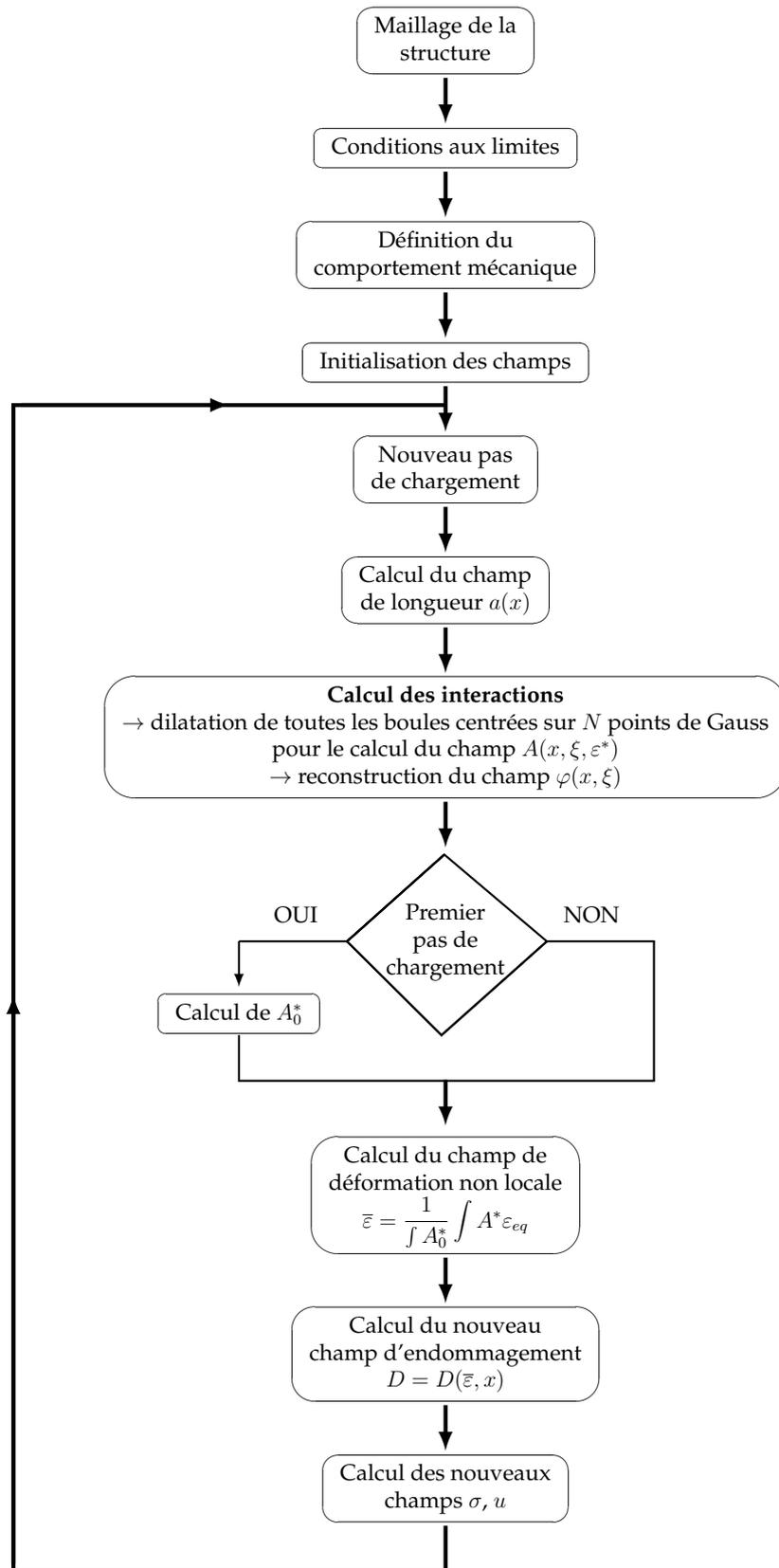


FIGURE 6.14 – Organigramme de calcul mécanique avec la nouvelle formulation basée sur les interactions.

6.16 montre que avec le modèle original, l'endommagement se voit très vite contraint par le bord supérieur de l'éprouvette alors que avec la formulation basée sur les interactions, la FPZ a le temps de se développer suivant cette croissance des défauts.

Seuls les résultats pour une éprouvette de hauteur $D = 50\text{mm}$ et une longueur d'entaille $a_0 = 0.5D$ sont présentés dans ce document. Les calculs numériques considérant les autres configurations de poutres sont encore à réaliser.

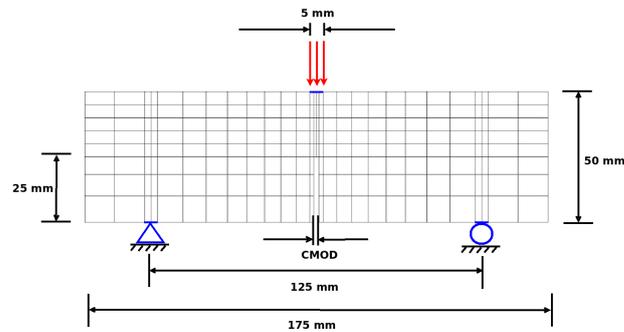


FIGURE 6.15 – Maillage et conditions de bord considérés dans le calcul de validation du nouveau modèle en 2D.

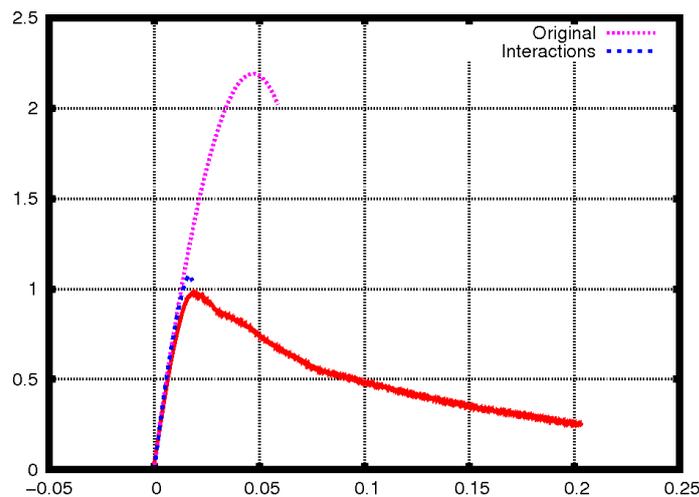


FIGURE 6.16 – Comparaison des courbes de chargement expérimentales et numériques avec le modèle classique et avec le nouveau modèle proposé. En abscisse le CMOD (mm) et en ordonnées l'effort (kN).

6.9 Synthèse et conclusion du chapitre

Dans ce chapitre on a réussi à transposer à l'échelle macroscopique la prise en compte des interactions observées à l'échelle mésoscopique. Le modèle donne des résultats satisfaisants pour tous les outils de validation décrits précédemment notamment

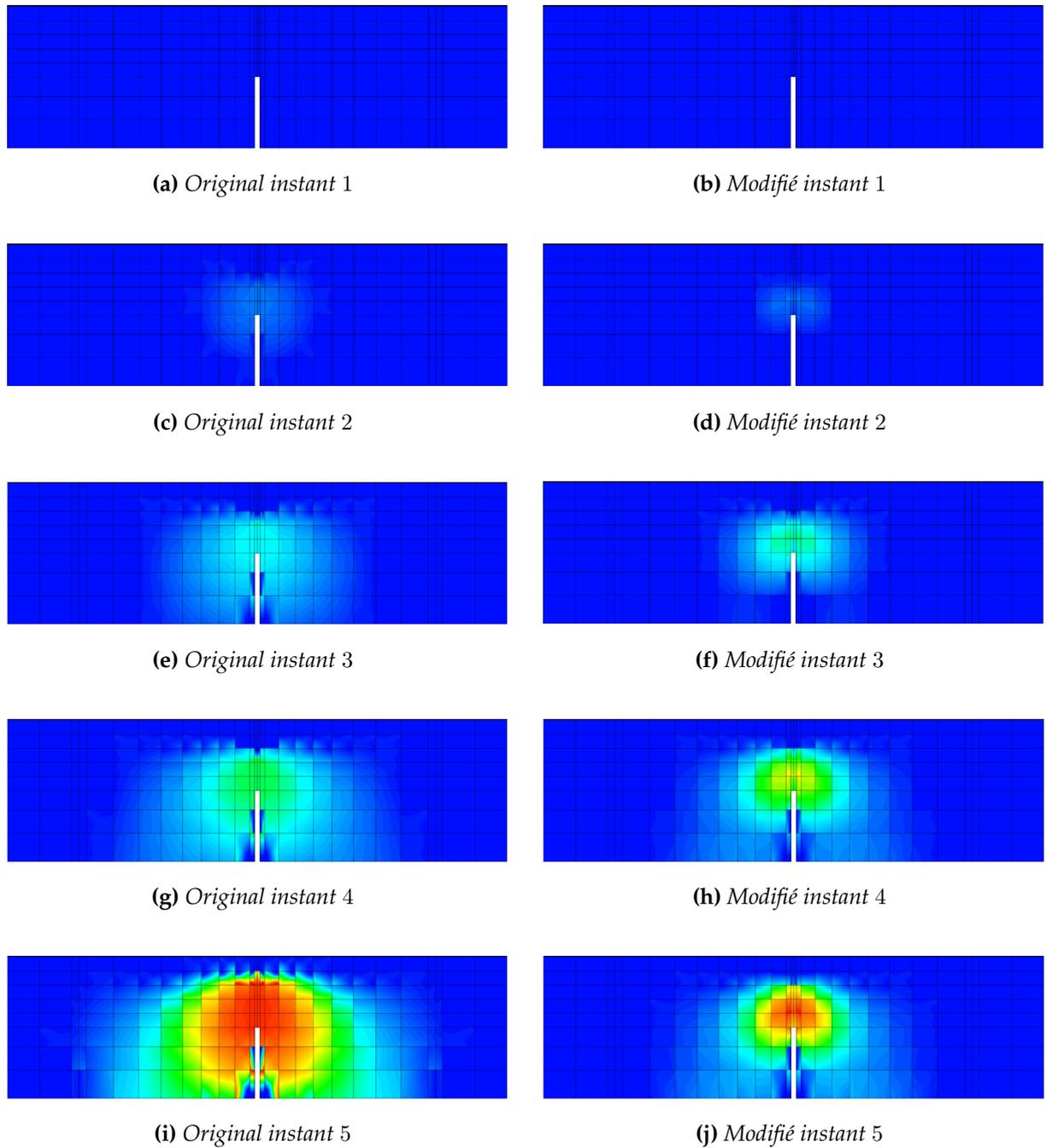


FIGURE 6.17 – Evolution temporelle des répartitions d'endommagement pour les deux formulations étudiées.

dans le cas de la flexion 3 points où un premier résultat présente une bonne description de la charge maximale de la plus petite éprouvette. Des calculs supplémentaires restent à finaliser. Ils permettront d'observer la capacité de ce nouveau modèle dans la description de la phase adoucissante et de l'effet d'échelle.

Vers une compréhension plus fine de l'évolution de la FPZ

6.1	Introduction	76
6.2	Interactions et modèle d'endommagement non-local modifié	76
6.2.1	Le concept du calcul d'interactions	77
6.2.2	Formulation du modèle non-local modifié	78
6.3	Validation : cas d'une unique inclusion dans un milieu infini	79
6.3.1	Calcul analytique du champ des déformations	80
6.3.2	Calcul numérique du champ des déformations à partir de la solution d'Eshelby	81
6.4	Cas d'une barre présentant une localisation des défauts	82
6.5	Cas de la rupture dynamique d'une barre en traction	85
6.6	Cas de l'écaillage	88
6.7	Bilan et couplage avec un calcul numérique éléments finis 2D/3D	88
6.8	Premiers calculs en flexion trois points	89
6.9	Synthèse et conclusion du chapitre	91

7.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons construit un nouveau modèle non-local macroscopique prenant en compte explicitement les interactions. Lors de ce passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique, des informations importantes sont perdues notamment celles liées à la zone d'élaboration. Dans ce chapitre, nous allons réutiliser le modèle mésoscopique à l'échelle des hétérogénéités afin d'approfondir la compréhension des phénomènes mis en jeu dans le développement de cette zone d'élaboration. Ceci permettrait de comprendre la corrélation entre les fissures qui se créent pendant un chargement et, éventuellement déboucher sur une estimation plus précise de la longueur interne l_c dans les modèles intégrales ou du paramètre *taille de source* dans le nouveau modèle macroscopique présenté dans le chapitre 6.

Dans la section 7.2, nous montrerons quelles informations supplémentaires sur la forme et l'évolution de la FPZ peuvent être apportées par l'échelle mésoscopique. Ceci sera fait dans un premier temps du point de vue de la distribution spatiale de la densité d'énergie dissipée. Dans la section 7.3 l'évolution de la FPZ sera analysée en considérant les distances relatives entre points endommagés au cours d'un incrément de chargement. Cette étude des distances relatives sera faite à partir de résultats numériques et expérimentaux. En effet une nouvelle campagne expérimentale de poutres en flexion trois points avec analyse d'émissions acoustiques a été mise en place et sera exposée dans cette section.

7.2 Analyse numérique mésoscopique du béton sous une autre optique

La représentation de la méso-structure permet de cartographier les endroits où une micro-fissure apparaît et de suivre son évolution au cours du chargement, rendant possible la description fine de la FPZ. Les résultats que nous rappelons ont été obtenus avec P. Grassl [22]. On choisit de détailler ce qui se passe dans les trois incréments de chargement représentés sur la figure 7.1. L'évolution des fissures (donc de la FPZ) est modélisée par l'endommagement des éléments lattice. La répartition de ces fissures aux trois instants choisis est représentée sur les figures 7.2, 7.3 et 7.4.

Les lignes en couleur rouge représentent les fissures actives, c'est-à-dire, les sections transversales des éléments où l'endommagement augmente. En contraste, les lignes en couleur grise correspondent aux fissures inactives donc aux sections transversales des éléments où l'endommagement existe mais n'augmente pas pendant ce même incrément de chargement; on obtient ainsi une visualisation assez précise de la FPZ. Cette analyse a été faite sur chacune des géométries (HN, FN et UN) et chacune des tailles de poutre considérées (entre 50mm et 400mm). Dans le but d'illustrer la démarche suivie, nous détaillons ici les figures correspondant à une éprouvette $a_0 = 0.5D$, $D = 400mm$.

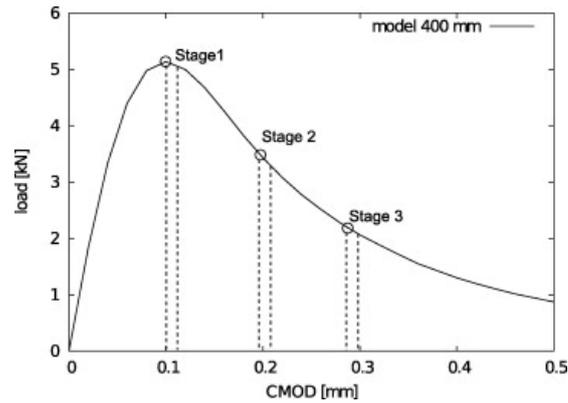


FIGURE 7.1 – Courbe de chargement (moyenne de 100 analyses) pour une poutre entaillée de géométrie HN ($\alpha = 0.5$) et de hauteur $D = 400\text{mm}$. La FPZ est observée à trois états différents de chargement [22].

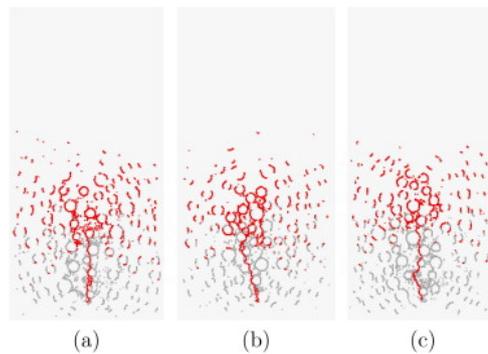


FIGURE 7.2 – Trajectoire d'endommagement pour l'exemple de la plus grande poutre entaillée de géométrie HN ($\alpha = 0.5$, $D = 400$). État 1 de chargement indiqué sur la figure 7.1 [22]. Exemple correspondant à trois tirages aléatoires de la méso-structure.

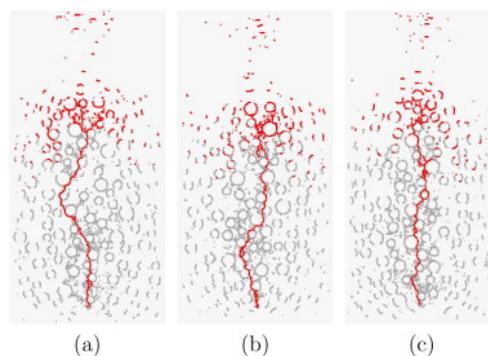


FIGURE 7.3 – Trajectoire d'endommagement pour l'exemple de la plus grande poutre entaillée de géométrie HN ($\alpha = 0.5$, $D = 400$). État 2 de chargement indiqué sur la figure 7.1 [22]. Exemple correspondant à trois tirages aléatoires de la méso-structure.

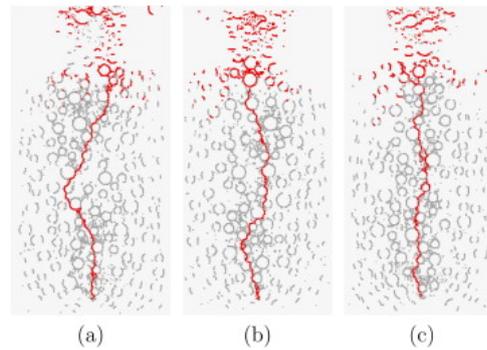


FIGURE 7.4 – Trajectoire d'endommagement pour l'exemple de la plus grande poutre entaillée de géométrie HN ($\alpha = 0.5$, $D = 400$). État 3 de chargement indiqué sur la figure 7.1 [22]. Exemple correspondant à trois tirages aléatoires de la méso-structure.

Cette représentation de l'endommagement dans la mésostructure du béton permet la visualisation de l'avancée de la fissure au cours du chargement. On s'aperçoit que la formation et l'évolution de la FPZ se localise en pointe de fissure et elle est confinée par le bord libre de la structure.

Concentrons nous sur l'analyse de la distribution de l'énergie dissipée, voir figure 7.5. Ces résultats correspondent à la moyenne de 100 calculs pour chaque incrément de la figure 7.1 indiquant la distribution spatiale de la densité d'énergie dissipée, soit la FPZ à chaque incrément. La valeur maximale de cette densité apparaît à l'endroit de l'entaille ($x = y = 0$) et, le long du ligament ($y > 0$) la FPZ s'élargit et la densité devient localement moins importante.

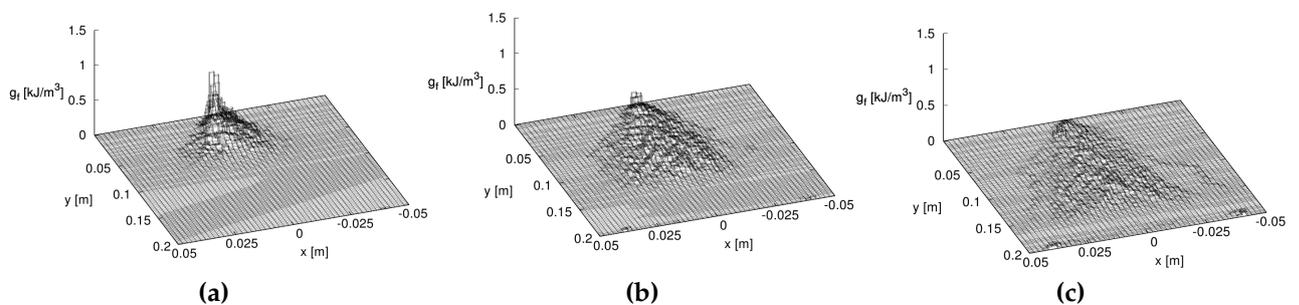


FIGURE 7.5 – Densité moyenne d'énergie dissipée de 100 analyses aléatoires pour une éprouvette $a_0 = 0.5D$, $D = 400\text{mm}$ pour (a) l'état de chargement 1, (b) l'état de chargement 2, (c) l'état de chargement 3 de la figure 7.1.

La figure 7.6 présente l'évolution de la densité d'énergie dissipée dans les directions horizontale et verticale respectivement. Ces distributions unidimensionnelles sont obtenues de l'intégration de la densité d'énergie dissipée dans la direction opposée.

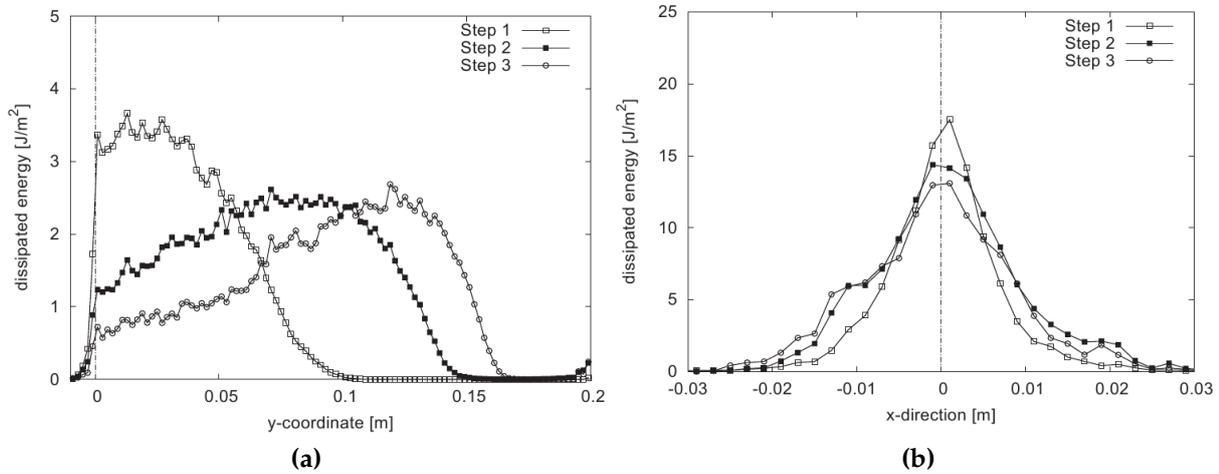


FIGURE 7.6 – Évolution de la densité d'énergie dissipée (a) le long du ligament et (b) perpendiculaire au ligament ($a_0 = 0.5D$, $D = 400\text{mm}$) pour les trois incréments indiqués sur la figure 7.1.

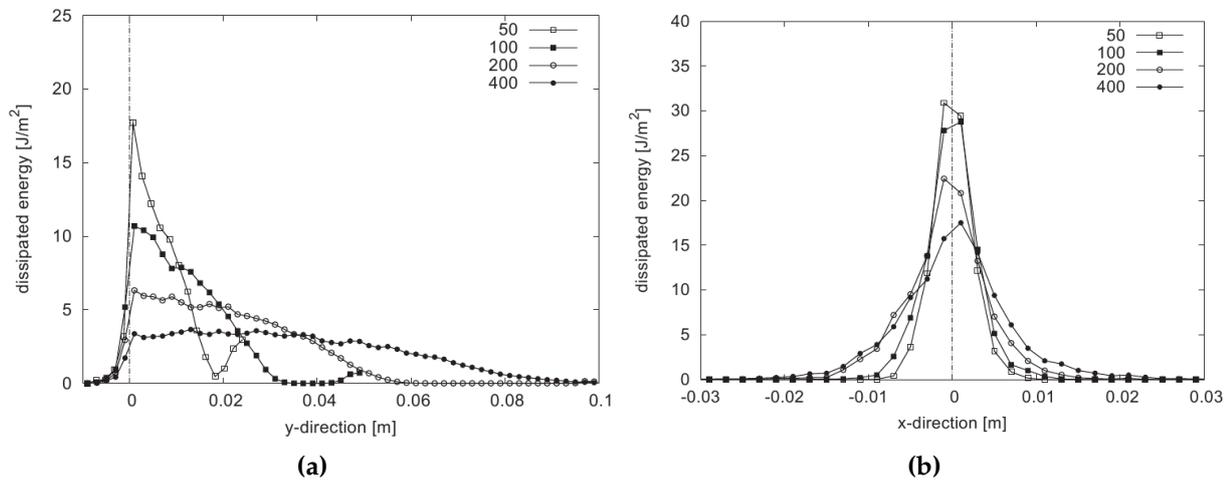


FIGURE 7.7 – Répartition de la densité d'énergie dissipée (a) le long du ligament et (b) perpendiculaire au ligament ($a_0 = 0.5D$, $D = 50, 100, 200$ et 400mm) pour l'incrément 1 indiqué sur la figure 7.1.

On observe que la FPZ évolue le long du ligament vers la partie supérieure de la poutre, tandis que la distribution dans la direction perpendiculaire au ligament reste presque constante avec une largeur aux alentours de 4cm . Au pic, la densité d'énergie présente des valeurs maximales près de l'entaille pour décroître ensuite le long du ligament. La longueur de la FPZ continue à croître significativement une fois le pic dépassé. Elle passe d'environ 9cm au stade 1 à presque 17cm au stade 3.

La comparaison des densités d'énergie dissipée pour des poutres avec différentes tailles et une même géométrie permet d'observer l'influence de ces deux paramètres (à un même stade de chargement) sur les caractéristiques de la FPZ. La figure 7.7 montre cette comparaison pour une poutre ayant une longueur d'entaille $a_0 = 0.5D$ et pour toutes les tailles de poutre au stade 1 du chargement. On observe ici que la longueur au pic de la FPZ dépend fortement de la taille de la poutre ce qui peut être expliqué par la diminution du gradient de contraintes qui va confiner la FPZ avec l'augmentation de la taille de la poutre. Quant à la largeur de la FPZ, on observe qu'elle est beaucoup moins dépendante de la taille de la poutre. La figure 7.8 permet de faire la même analyse sur le comportement de la FPZ sur des poutres FN avec une plus petite entaille ($a_0 = 0.2D$). On observe des tendances similaires à celles remarquées sur les poutres HN ($a_0 = 0.5D$) avec une longueur de la FPZ un peu plus importante.

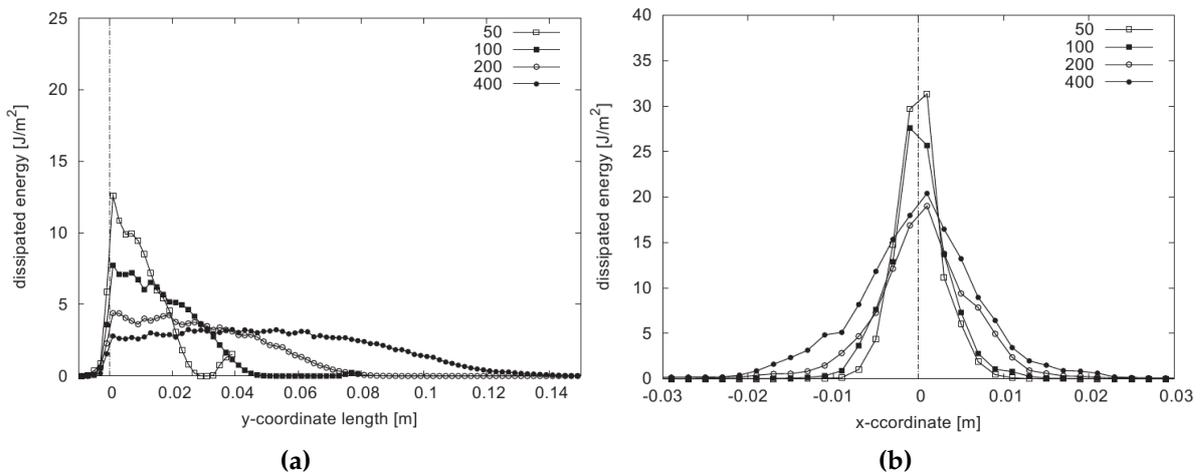


FIGURE 7.8 – Répartition de la densité d'énergie dissipée (a) perpendiculaire au ligament et (b) le long du ligament ($a_0 = 0.2D$, $D = 50, 100, 200$ et 400mm) pour l'incrément 1 indiqué sur la figure 7.1.

En ce qui concerne les poutres non-entailées, les résultats de cette analyse sont présentés dans la figure 7.9. Comme dans les cas précédents, la taille de la poutre influence fortement la longueur de la FPZ. Cependant et au contraire des cas des poutres entaillées, la largeur de la FPZ dépend de la taille de la poutre. Plus la poutre est grande, plus la FPZ est large.

Les résultats pour une même taille de poutre avec différents types d'entaille sont dif-

faciles à comparer car la longueur du ligament équivalent n'est pas la même. La figure 7.10 montre les résultats correspondant aux poutres HN et UN ayant la même longueur de ligament équivalent. Les distributions d'énergie se superposent pour une même longueur de ligament, quelque soit la géométrie et donc l'effet de bord semble négligeable sur la répartition le long du ligament.

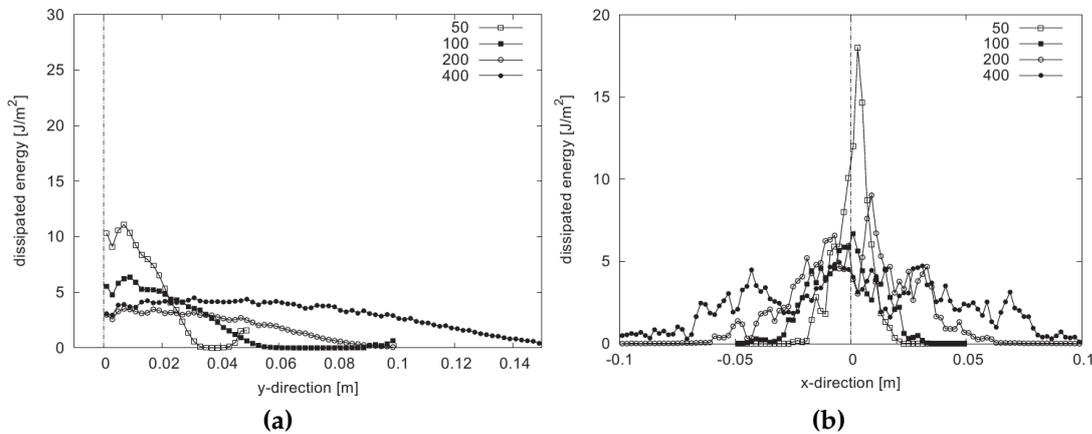


FIGURE 7.9 – Répartition de la densité d'énergie dissipée (a) perpendiculaire au ligament et (b) le long du ligament ($a_0 = 0D$, $D = 50, 100, 200$ et 400mm) pour l'incrément 1 indiqué sur la figure 7.1.

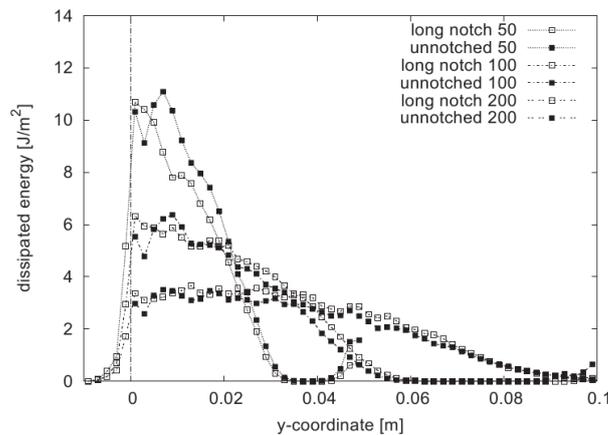


FIGURE 7.10 – Comparaison de la répartition de densité d'énergie dissipée le long du ligament pour des poutres $a_0 = 0$ et $a_0 = 0.5D$ ayant la même taille de ligament équivalent de 50, 100, 200 et 400mm pour l'incrément 1 indiqué sur la figure 7.1.

Nous allons maintenant utiliser les avantages de l'approche mésoscopique non pas pour analyser la distribution de l'énergie dissipée mais pour faire l'analyse des distributions des distances relatives entre les points qui s'endommagent au cours du chargement. Ceci nous permettra de voir la façon dont les événements sont corrélés entre eux pendant la rupture au sein de la FPZ.

7.3 Analyse à partir d'histogrammes

Dans cette partie, nous allons chercher à mettre en place un posttraitement de l'information obtenue à l'échelle mésoscopique nous permettant de trouver des indications pour la représentation de la corrélation à l'intérieur de la FPZ. L'observation de la façon dont les points qui s'endommagent lors du chargement sont corrélés permet de mieux comprendre les interactions ayant lieu au sein du matériau et donc, d'avoir une meilleure connaissance de la non-localité.

Pour ce faire, deux procédures ont été suivies :

1. D'abord, les résultats de la modélisation numérique des essais de poutres en flexion trois points avec le modèle mésoscopique seront utilisés pour construire des histogrammes de distances relatives entre les points qui s'endommagent pendant un incrément de chargement. La construction de ces histogrammes se basera sur des considérations énergétiques du même ordre que celles présentées dans la section 7.2.
2. Ensuite, une nouvelle campagne expérimentale basée sur la détection d'événements acoustiques sera présentée. Les résultats obtenus seront là encore interprétés sous forme d'histogrammes et comparés avec les résultats numériques mésoscopiques.

7.3.1 Histogrammes de distances relatives entre événements à partir des résultats numériques

On considère ici deux incréments d'énergie dissipée ΔG_f à deux instants du chargement. La valeur de l'incrément a été choisie de façon arbitraire égale à $0.25 J/m^3$ (~ 10 fois plus important à celle utilisée dans le chapitre précédent).

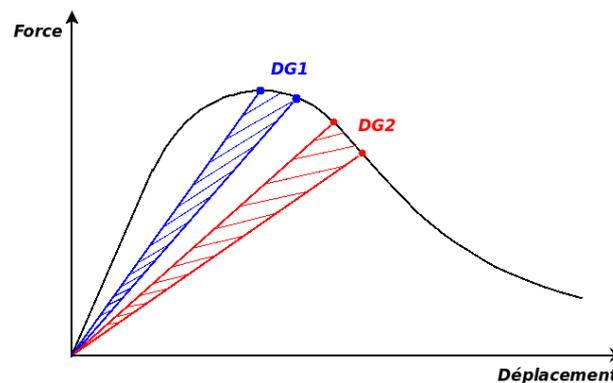


FIGURE 7.11 – Schéma du choix des deux intervalles indiquant deux incréments d'énergie de fissuration pour l'analyse d'histogrammes.

La figure 7.11 schématise la courbe de chargement et les deux incréments d'énergie dissipée. Le premier point de l'incrément d'énergie ΔG_{f1} correspond à la charge maximale et le deuxième a été défini plus loin sur la courbe de telle sorte que la valeur fixée

soit respectée. Le deuxième incrément ΔG_{f_2} commence 10 pas de temps après la fin de ΔG_{f_1} . $\Delta G_{f_1} \equiv DG_1$ et $\Delta G_{f_2} \equiv DG_2$ à la figure 7.11.

Pour chaque géométrie et chaque taille d'éprouvette, 10 analyses mésoscopiques sont réalisés et les incréments d'énergie dissipée ΔG_{f_1} et ΔG_{f_2} sont définis pour chaque analyse comme à la figure 7.11. On trouvera à l'annexe F le détail de ces incréments d'énergie pour les éprouvettes HN, FN et UN de tailles 100 et 200mm. Les deux points signalés sur chaque courbe (deux sur la figure de gauche et deux sur les figures de droite) correspondent aux points initiaux et finaux de chaque incrément d'énergie ΔG_f . Étant donné que chaque courbe de chargement correspond à des caractéristiques particulières à chaque méso-discrétisation, la localisation des points définissant les incréments d'énergie peut être sensiblement différente sur chacune des courbes.

Le posttraitement présenté ici consiste à construire des histogrammes en extrayant les coordonnées des points qui subissent une croissance de l'endommagement dans un incrément d'énergie ΔG_f . On appelle par la suite *événement* l'augmentation de l'endommagement à un point du maillage. Ainsi, on va pouvoir calculer toutes les distances relatives entre événements et rapporter les résultats sous forme d'histogrammes.

La figure 7.12 présente les histogrammes obtenus pour l'ensemble de tailles et de géométries considérées on peut effectuer les observations suivantes :

- Comme à la figure 7.6a, les figures 7.12c et 7.12d montrent qu'il y a beaucoup plus d'événements dans la direction Y à l'amorçage ΔG_{f_1} que durant la propagation ΔG_{f_2} . Cela n'est pas le cas dans la direction X comme le montrent également la figure 7.12a et 7.12b.
- La répartition des points endommagés est cohérente avec le sens de propagation de la fissure. En effet, on remarque plus d'événements dans le sens vertical que dans le sens horizontal.
- Enfin, l'évolution du nombre d'événements est lié à la taille du ligament équivalent. Plus le ligament équivalent est grand, plus on recense d'événements.

Les figures 7.13, 7.14 et 7.15 montrent une représentation selon une échelle logarithmique des résultats obtenus par les simulations numériques avec le modèle mésoscopique pour l'incrément d'énergie ΔG_{f_1} . Les histogrammes correspondant à l'incrément ΔG_{f_2} sont à l'annexe F. On observe sur les courbes brutes 7.13 et F.2 un regroupement des courbes correspondant au même ligament équivalent. La normalisation de la distance relative par le ligament équivalent correspondant à chaque géométrie et taille de poutre, permet l'alignement des courbes dans la directions des abscisses. Ceci est présenté par les figures 7.14 et F.3. Par ailleurs, du fait de la différence de taille des poutres analysées, la quantité d'événements n'est pas constante. En effet, on recensera plus d'événements dans les poutres avec un ligament équivalent de 100mm que sur une de 50mm par exemple. Afin de faire une comparaison plus objective, il convient maintenant de normaliser les ordonnées par le nombre total d'événements. Ceci est présenté par les figures 7.15 et F.4.

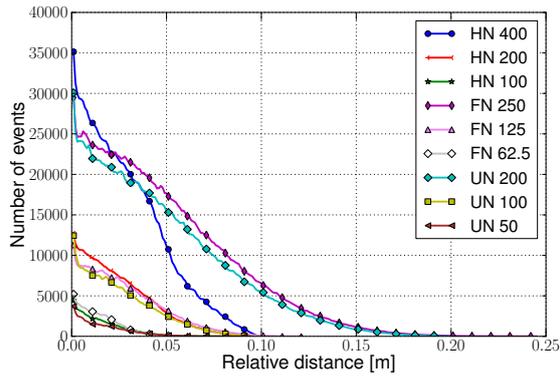
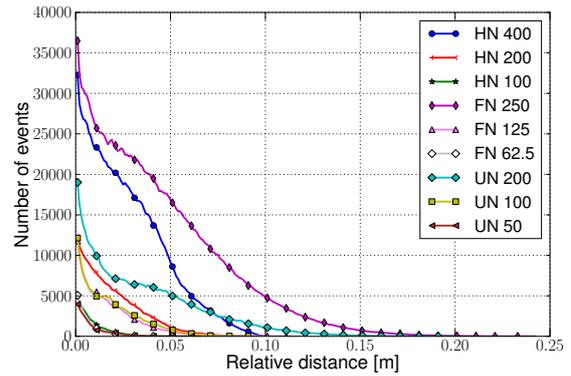
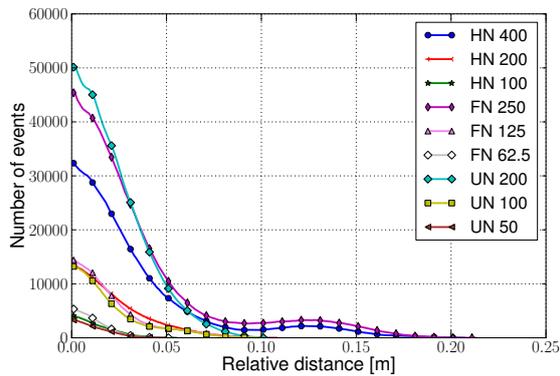
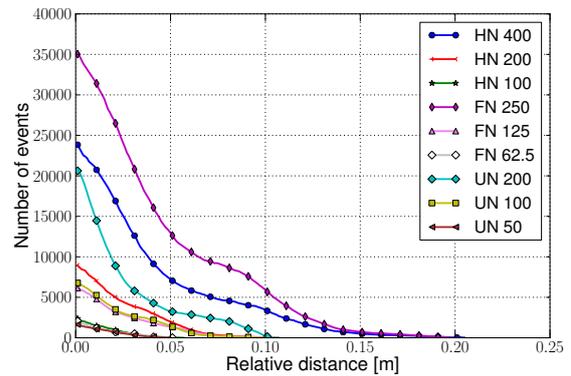
(a) Projection en direction X de la distance ΔG_{f1} (b) Projection en direction X de la distance ΔG_{f2} (c) Projection en direction Y de la distance ΔG_{f1} (d) Projection en direction Y de la distance ΔG_{f2}

FIGURE 7.12 – Histogrammes des distances relatives entre événements pour toutes les tailles de poutre et toutes les géométries considérées.

On observe que malgré la normalisation les courbes ne se superposent pas verticalement. Il semblerait qu'il y a des éléments qui restent à prendre en compte pour arriver à une comparaison objective entre les poutres avec un même ligament équivalent en terme de nombre d'événements. Nous avons corrigé ce décalage manuellement en multipliant le nombre d'événements recensés par un coefficient de proportionnalité et nous avons obtenu les courbes présentées dans la figure F.5 (annexe F). Des analyses supplémentaires sont nécessaires afin d'éclaircir cette différence entre histogrammes.

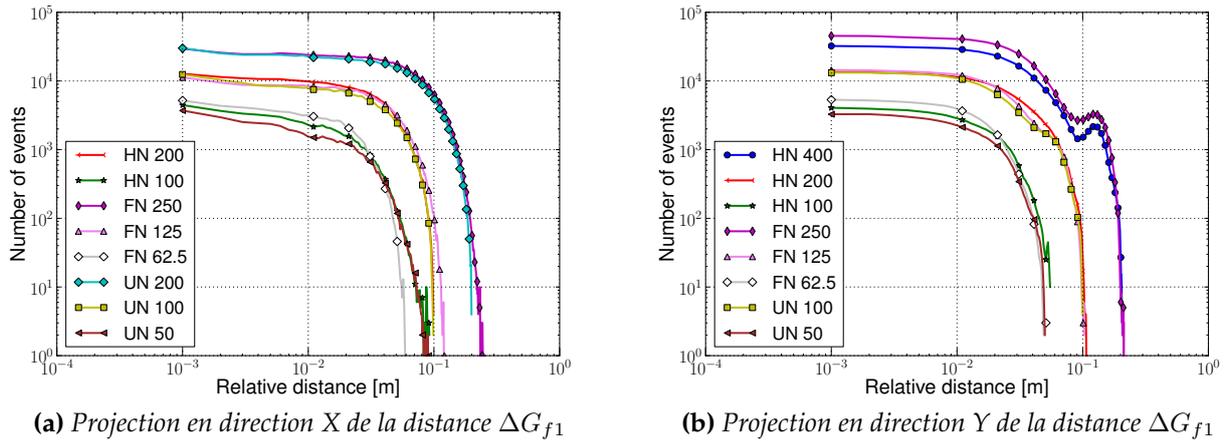


FIGURE 7.13 – Histogrammes en échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm. Résultats bruts.

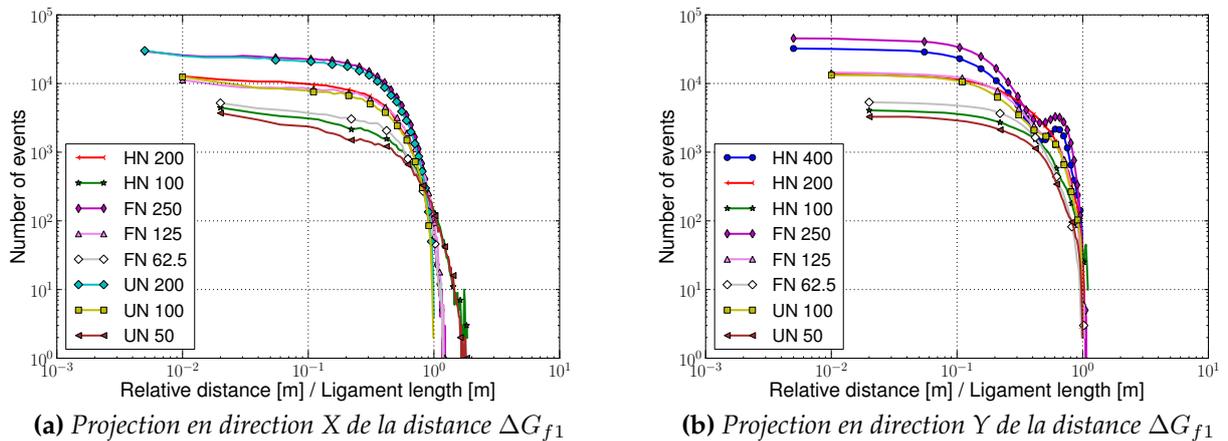


FIGURE 7.14 – Histogrammes en échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.

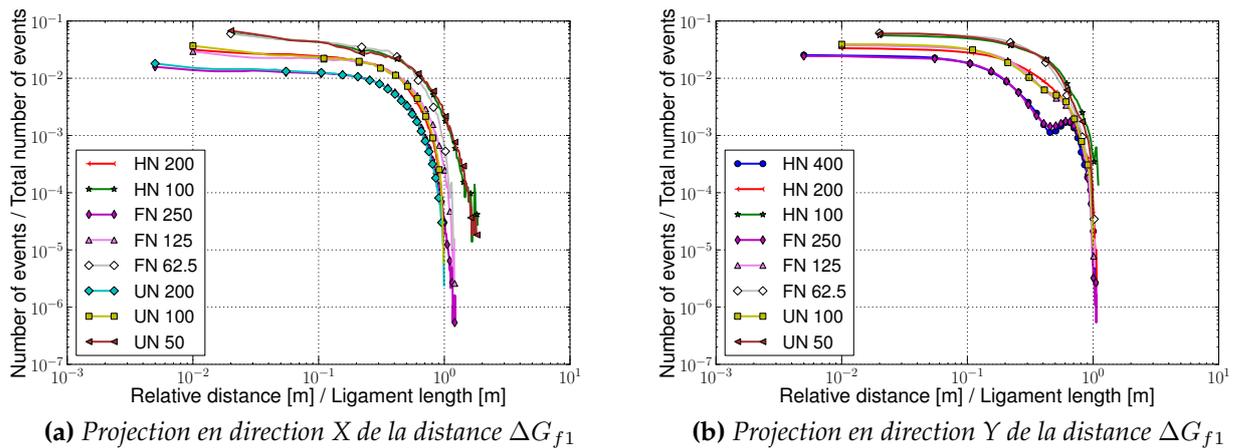


FIGURE 7.15 – Histogrammes en échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent et par le nombre total d'événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.

7.3.2 Analyse expérimentale de la distribution des distances entre points endommagés

Dans cette section, nous cherchons à reproduire la même analyse à partir de données expérimentales. Pour ce faire, une deuxième série d'essais en flexion trois points a été réalisée avec cette fois-ci un enregistrement des émissions acoustiques lors du processus de rupture nous permettant d'appréhender les phénomènes de fissuration au niveau de la mésostructure.

Dans la suite de cette section nous commencerons par un bref rappel sur la technique d'enregistrement et d'analyse des émissions acoustiques, avant de décrire le dispositif et montage d'acquisition. Ensuite, les détails de la campagne expérimentale ainsi que les résultats du posttraitement seront exposés.

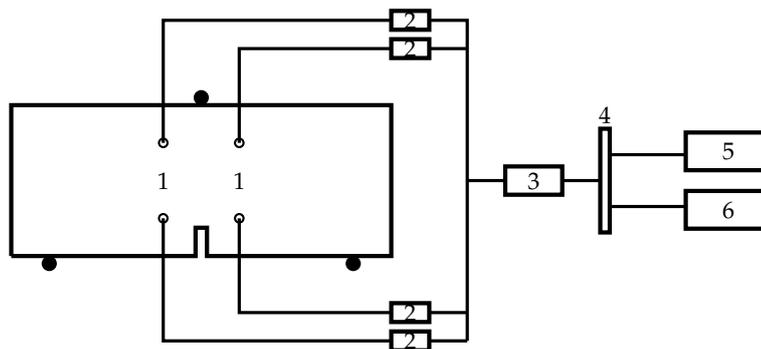
7.3.2.1 La technique d'émissions acoustiques et le dispositif d'enregistrement

L'enregistrement et l'analyse d'émissions acoustiques est une technique de caractérisation non destructive habituellement utilisée afin de suivre l'endommagement des matériaux soumis à des sollicitations mécaniques. Grâce à cette technique, il est possible de détecter des processus dynamiques associés à la dégradation locale du matériau. Une émission acoustique (EA) est une onde micro-sismique engendrée par un relâchement d'énergie élastique stockée. Le relâchement d'énergie se fait de façon soudaine et il peut être lié à de nombreux phénomènes irréversibles à l'intérieur d'un matériau sous des conditions de contrainte données.

Les ondes micro-sismiques sont captées grâce à des transducteurs piézoélectriques, dis-

positifs chargés de les convertir en des signaux électriques. Au cours d'un essai de flexion, l'apparition et l'évolution de la FPZ, comme résultat de la formation et de l'interaction entre micro-fissures, peuvent être mises en évidence par la détection des signaux acoustiques [33].

Sur chaque éprouvette de flexion, quatre capteurs ont été installés autour de la zone où la formation de la fissure est attendue, ceci sur un seul des deux cotés de la poutre, voir figure 7.16. Les sources d'EA sont ainsi localisées grâce un logiciel comportant un algorithme de localisation planaire. La localisation se fait par la triangulation des différents temps de propagation sur chacun des quatre capteurs. La localisation de la source nécessite alors l'enregistrement d'une salve¹ par au moins trois capteurs. La figure 7.16 schématise les composants du dispositif d'enregistrement utilisé dans la campagne expérimentale. Ces signaux sont amplifiés grâce à des amplificateurs de type 1220A, avec un gain de $60dB$ dans une bande de fréquence comprise entre 20 et 1200 kHz. Les signaux sont numérisés par une carte PCI-DSP4 pour être ensuite transmis à l'ordinateur qui permet l'affichage en temps réel, le stockage et le post-traitement [27].



1. Capteurs R15/C (150 kHz)
2. Préamplificateurs 1220 A (40 ou 50 dB de gain – fréquence [20 – 1200] kHz)
3. Carte PCI – DSP4
4. Bus PCI
5. 10–100 Base T – extension
6. Micro-ordinateur (stockage et post-traitement)

FIGURE 7.16 – Dispositif d'acquisition.

Les dimensions de la *fenêtre d'enregistrement* définie par la localisation des 4 capteurs varient en fonction de la géométrie de l'éprouvette (longueur d'entaille). Les capteurs sont installés de telle sorte qu'une distance minimale de $1.25cm$ par rapport à l'endroit où la fissure est susceptible d'apparaître soit respectée (la pointe de l'entaille dans le cas des poutres entaillées, ou le bord de la poutre dans le cas des poutres non-entaillées). La figure 7.17 montre la position des capteurs sur chaque type d'éprouvette. Le tableau

1. Les signaux successifs enregistrés lors des différentes expériences sont appelés salves. Un court rappel sur les paramètres des signaux d'émission acoustique est donné en annexe G.

7.1 résume les dimensions des fenêtres d'enregistrement pour chaque géométrie (avec une précision de $\pm 1mm$).

$D[cm]$	α	$h[cm]$	$l[cm]$	$S[cm^2]$
20	0.5	7.5	12	90
20	0.2	10.5	12	126
20	0	11	12	132
10	0	6	12	72

TABLE 7.1 – Dimensions des fenêtres d'enregistrement d'émissions acoustiques en fonction de la taille et de la géométrie des poutres.

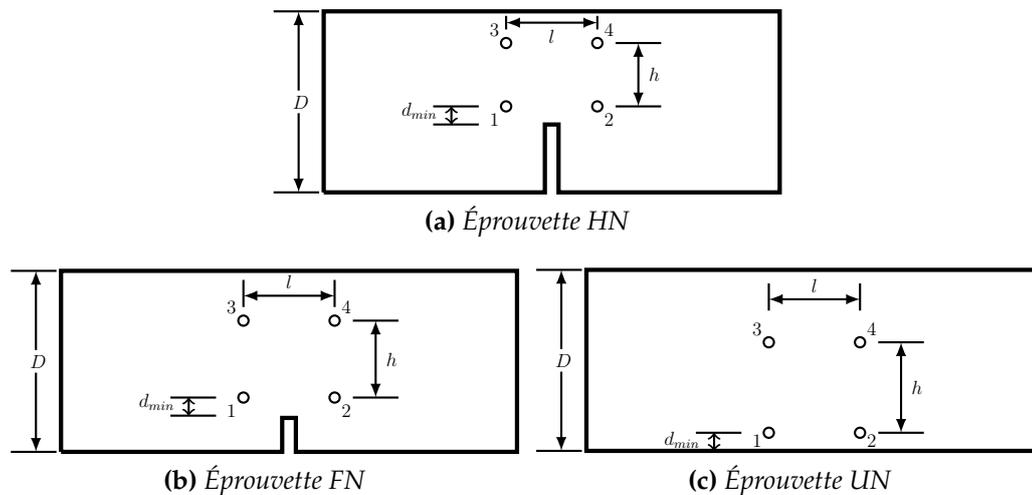


FIGURE 7.17 – Caractéristiques de la fenêtre d'enregistrement des événements acoustiques sur les trois géométries de poutre.

Le couplage entre les capteurs et la surface de la poutre a été obtenu par l'application d'une fine couche de graisse de silicone afin de garantir la transmission correcte des signaux acoustiques entre la surface de l'éprouvette et la surface du capteur. La validation de ce couplage a été faite conformément à la norme NF EN 1330. Il s'agit d'un exercice simple qui consiste à vérifier si la position d'un signal en surface généré par la rupture d'une mine de crayon est correctement déterminée par le logiciel d'enregistrement et de traitement des signaux.

L'enregistrement des temps d'arrivée et de fin des salves se fait à partir d'un seuil de détection. Si le seuil fixé est trop faible, il permettrait d'enregistrer un grand nombre de signaux de faible intensité ou bruit, fait pouvant entraîner une saturation du système d'acquisition. Un seuil trop élevé réduit le nombre de signaux détectables et donc la précision de la localisation. Celui-ci a été choisi égal à 35 dB, il est ajusté en accord avec [49] en fonction du bruit de fond.

7.3.2.2 Essais mécaniques de flexion 3 points avec enregistrement d'émissions acoustiques

Dans cette partie du travail, on ne s'intéressera pas à l'analyse d'effet d'échelle mais plutôt à l'estimation d'une longueur de corrélation à partir des interactions entre les composants de la méso-structure du matériau et la façon dont celle-ci peut être influencée par les conditions des bords. Pour cette raison, la confection d'éprouvettes entaillées et non-entaillées a consisté uniquement aux tailles $D = 100$ et 200mm . Le tableau 7.2 résume les caractéristiques géométriques des éprouvettes². Trois échantillons de chaque type de structure ont été testés et les résultats ont été moyennés. La formulation du

$D[\text{mm}]$	n	i	Quantité
200	2	1	3
200	2	2	3
200	2	3	3
100	3	3	3

TABLE 7.2 – Caractéristiques géométriques des échantillons – essais de flexion 3 points avec enregistrement d'émissions acoustiques.

béton utilisée pour la construction de la base de données de validation décrite dans le chapitre 3 et l'annexe A a été conservée. Les courbes de chargement et les résultats de la caractérisation mécanique sont donnés en annexe H. Le protocole d'essai et la procédure de mesure suivis sont les mêmes que ceux utilisés dans la première campagne expérimentale décrite dans la section 3.4.1.1. La résistance à la compression, la résistance à la traction par fendage, le module d'Young et le coefficient de Poisson sont présentés dans le tableau 7.3.

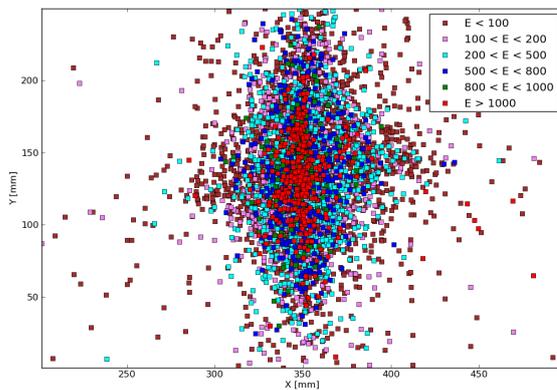
Résistance à la compression			Module Young			Résistance à la traction		
μ	σ	c_v	μ	σ	c_v	μ	σ	c_v
(MPa)	(MPa)	(%)	(GPa)	(GPa)	(%)	(MPa)	(MPa)	(%)
38.6	5.71	14.8	38.17	1.22	3.2	4.16	0.22	5.23
(μ – moyenne ; σ – écart type ; $c_v = \mu/\sigma$ – coefficient de variation)								

TABLE 7.3 – Propriétés mécaniques moyennes du béton utilisé.

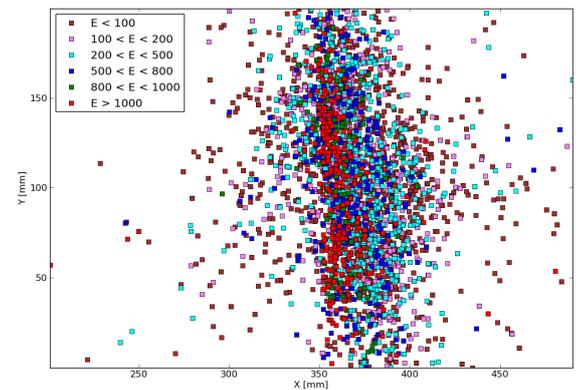
L'apparition et la distribution des événements en fonction de l'énergie dissipée peut être suivie visuellement pendant l'essai. L'accès à cette information permet la construction de cartes d'énergie comme celles de la figure 7.18. Ici il est possible de constater les étapes du processus de fissuration que nous avons évoquées dans la section 2.3.2. En effet, le processus commence par l'apparition des événements de faible énergie distribués de façon diffuse. On observe ensuite une concentration d'événements avec une

2. Les conventions de taille et de géométrie n et i sont celles introduites dans la figure 3.11

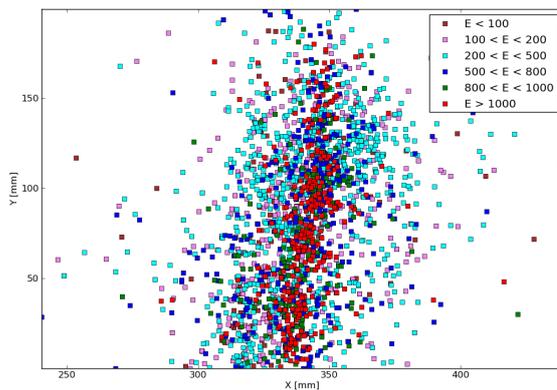
augmentation du taux d'énergie dissipée permettant ainsi de distinguer la zone d'élaboration où les micro-fissures continuent à apparaître et interagissent entre elles. L'apparition et le parcours de la macro-fissure se caractérise par une forte concentration et par l'alignement des événements les plus énergétiques.



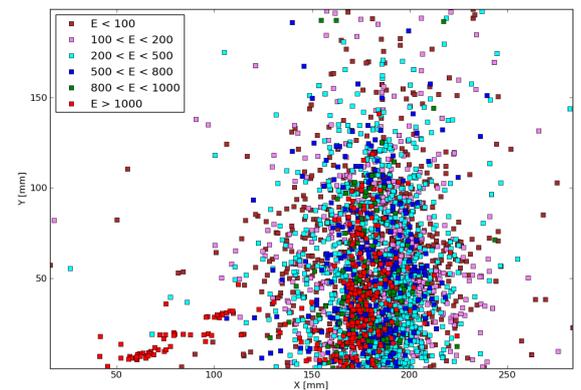
(a) Éprouvette 1125 – $D = 200\text{mm}$, $\alpha = 0.5$



(b) Éprouvette 1121 – $D = 200\text{mm}$, $\alpha = 0.2$



(c) Éprouvette 1122 – $D = 200\text{mm}$, $\alpha = 0$



(d) Éprouvette 1131 – $D = 100\text{mm}$, $\alpha = 0$

FIGURE 7.18 – Distribution des événements acoustiques sur les différentes géométries de poutres – Cartes de distribution d'énergie.

Les informations disponibles après cette deuxième campagne d'essais concernent non seulement la réponse macroscopique du matériau (efforts et déplacements), mais aussi les informations locales correspondant à l'emplacement de chaque événement acoustique au cours du temps et en conséquence, le développement de la FPZ. Nous avons alors les éléments nécessaires pour calculer les distances relatives entre les événements en suivant le raisonnement exposé dans la section 7.3.1.

Pendant les expériences le chargement a été piloté en ouverture d'entaille. Nous avons choisi de calculer les distances relatives entre les événements qui apparaissent pendant des intervalles $\Delta_{CMOD} = 15\mu m$ dans l'étape post-pic. Ainsi, une fois dépassée la force maximale, nous avons donc découpé la courbe de chargement en n tranches correspondant aux intervalles ou incréments Δ_{CMOD} comme l'illustre la figure 7.19.

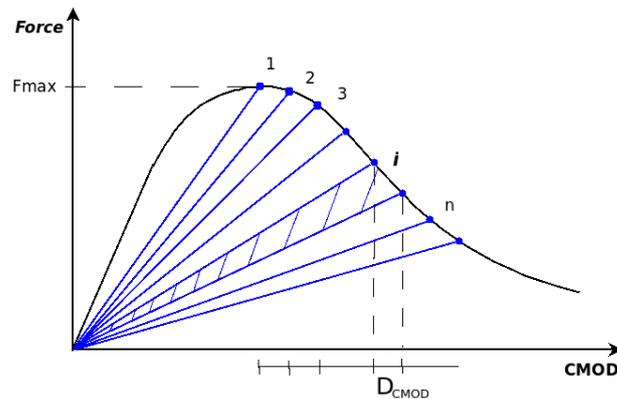


FIGURE 7.19 – Découpage typique de la courbe de chargement expérimental pour l'analyse des distances relatives entre événements.

7.3.3 Histogrammes de distances relatives entre événements à partir de données expérimentales

Nous avons fait l'analyse décrite dans la section 7.3.1 sur les résultats obtenus des essais des poutres en flexion trois points. Chaque courbe de chargement été découpée en tranches de la même largeur, les distances entre les événements apparaissant dans cet espace de temps sont calculées et représentés sur la forme d'histogrammes. La figure 7.20 montre les résultats obtenus pour une éprouvette avec une longueur d'entaille $a_0 = 0.5D$ et hauteur $D = 200mm$. Cette figure montre la superposition des histogrammes des distances relatives pour chaque incrément considéré jusqu'à la fin de l'application du chargement. Les événements les plus énergétiques sur la figure 7.20b permettent de suivre la trajectoire de la fissure. Les courbes correspondant à certains intervalles Δ_{CMOD} ont été supprimées car trop peu d'événements avaient été enregistrés durant cet intervalle. Elles présentaient des comportements complètement incohérents avec des pics très élevés et des zones plates rendant illisible la figure. Un dépouillement similaire a été effectué pour tous les échantillons et se trouve en annexe I.

Dans cette première représentation de résultats, la plupart des événements pour tous les incréments considérés sont séparées entre eux par des petites distances aux alentours de $15mm$. Les histogrammes décroissent rapidement suivant une tendance exponentielle pour se stabiliser vers une horizontale.

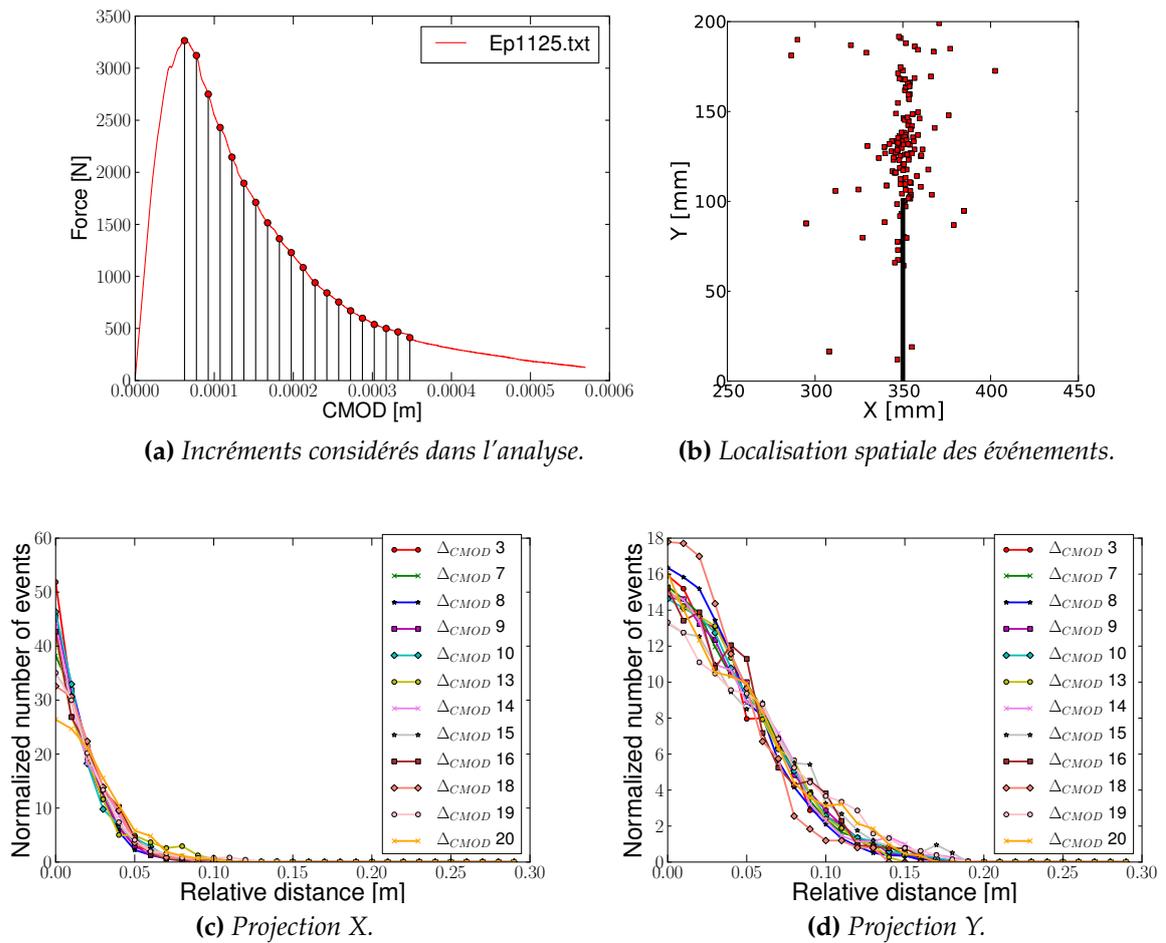


FIGURE 7.20 – Histogrammes de distances relatives pour le cas particulier d'une éprouvette HN ($a_0 = 0.5D$) de taille $D = 200\text{mm}$.

7.3.4 Première comparaison numérique/expérimentale

La figure 7.21 présente la comparaison entre les résultats obtenus par le calcul numérique mésoscopique et ceux obtenus expérimentalement pour le cas des poutres avec un ligament équivalent de 100mm . Cette figure correspond à une représentation brute des résultats et aucune normalisation n'a été considérée. Les courbes obtenues sont très similaires. Cette similarité permet de conclure que le calcul mésoscopique est aussi adapté pour décrire le processus de rupture au niveau local car il est capable de reproduire le processus de fissuration enregistré expérimentalement. Le modèle mésoscopique utilisé est capable non seulement de fournir des informations sur des résultats macroscopiques comme la contrainte maximale au pic et la description de la phase adoucissante, mais aussi de décrire des phénomènes à une échelle plus fine qui permettent l'accès à des informations capitales dans le comportement et l'évolution de l'endommagement et de la zone d'élaboration.

Avec une analyse plus approfondie on pourrait arriver à l'estimation de la longueur de corrélation et à une meilleure description des interactions et des mécanismes non-locaux mis en jeu pendant le chargement.

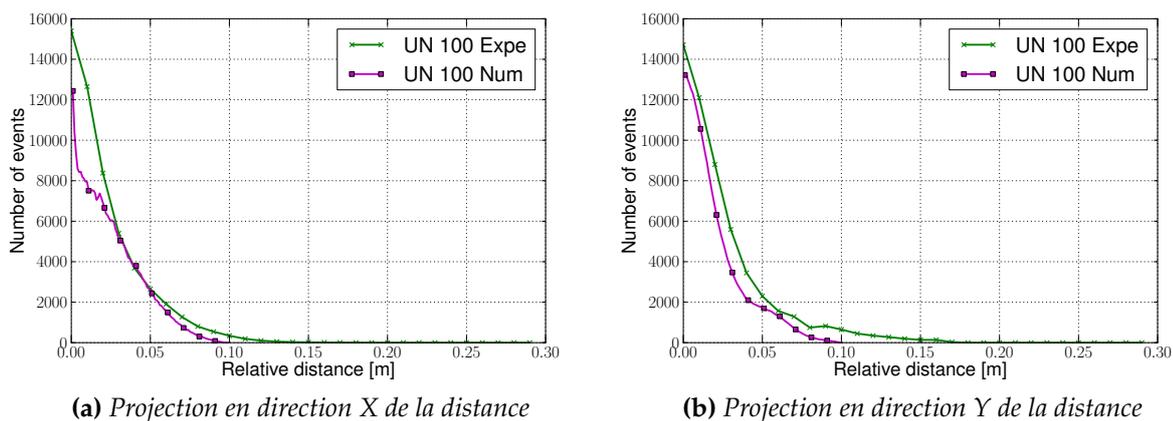


FIGURE 7.21 – Comparaison numérique/ expérimentale des histogrammes des distances relatives calculées juste après le pic.

7.4 Synthèse et conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons fait une analyse plus détaillée du processus de rupture en s'attachant aux informations fournies par l'étude de la mésostructure du béton. L'analyse numérique de la distribution spatiale de la densité d'énergie dissipée confirme la localisation de la dissipation le long de la trajectoire de la fissure et confirme que la valeur maximale est autour de l'entaille initiale.

Les analyses faites sur des résultats numériques et expérimentaux en terme d'histogrammes de distances relatives entre événements, montrent qu'il y a une forte similitude entre eux et donc que le modèle mésoscopique donne des informations pertinentes quant au processus local de la fissuration.

En perspective on souhaite approfondir ces résultats afin de mettre en évidence une longueur de corrélation entre événements et de faire le lien avec la longueur interne nécessaire à la description macroscopique du processus de fissuration. Pour cela, des travaux supplémentaires s'avèrent indispensables.

Conclusions générales et perspectives

8.1 Conclusion générale

L'intérêt de ce travail de recherche a porté sur le comportement mécanique et sur le comportement à la rupture des matériaux quasi-fragiles dès l'amorçage de l'endommagement, en passant par la formation et l'évolution de la zone d'élaboration (FPZ) jusqu'à la rupture totale.

Dans le chapitre 2 nous nous sommes concentrés sur la zone d'élaboration où la dégradation des matériaux a lieu. Les particularités de cette zone en fonction de la nature du matériau ont été abordées et les caractéristiques propres à la zone d'élaboration dans les matériaux quasi-fragiles ont été mises en avant. Nous avons rappelé rapidement le comportement à la rupture du béton et les techniques expérimentales les plus utilisées pour sa caractérisation mécanique. La modélisation du comportement mécanique du béton, l'endommagement et la non-localité ont été introduits. Les limitations du modèle d'endommagement non-local classique ont été mises en avant.

Dans le chapitre 3 nous avons proposé des outils de validation des différents modèles d'endommagement non-local rapportés dans la littérature. Le but était d'évaluer la capacité de chacun à représenter le phénomène d'endommagement. D'un point de vue numérique nous avons utilisé deux cas test pour examiner la capacité de chaque modèle à décrire la transition continu/discret, à reproduire une discontinuité forte à la rupture, à décrire le comportement près d'un bord libre et à localiser la position d'une écaille. Un troisième outil de validation consistant en une base de données expérimentales à partir d'essais de flexion 3 points a été élaboré.

Un modèle décrivant proprement l'endommagement dans le béton doit être capable de reproduire les courbes issues de cette campagne expérimentale. Pour une même formulation de béton, nous avons considéré trois géométries et quatre tailles différentes à savoir : les premières entaillées jusqu'à la moitié de la hauteur (HN), d'autres jusqu'au cinquième de la hauteur (FN) et les dernières non-entaillées (UN). Les tailles de ces

échantillons homothétiques sont de 400mm , 200mm , 100mm et 50mm . La construction de cette base de données originale a permis également de montrer que la loi universelle de Bažant décrit très correctement la rupture en terme de contraintes maximales au pic. Cette comparaison expérimentale n'avait pas été faite auparavant.

À partir de ces trois outils d'analyse il a été possible de mettre en évidence plusieurs limitations du modèle d'endommagement non-local intégral :

- L'incapacité de décrire la transition continu/discret.
- L'incapacité à reproduire une discontinuité forte.
- L'incapacité à localiser précisément une écaille près d'un bord libre.
- L'incapacité à décrire précisément à la fois la contrainte maximale à la rupture et la phase adoucissante pour des poutres homothétiques entaillées et non-entaillées.

Le chapitre 4 a été consacré à la présentation de plusieurs modèles non-locaux modifiés issus de la littérature. Nous avons examiné les capacités de ces modèles améliorés qui cherchent à prendre en compte les différents mécanismes ayant lieu pendant le processus d'endommagement. Cette validation a été faite à la lumière des outils de validation présentés dans les chapitre 3. Les modèles non-locaux examinés sont de type intégral basés sur le modèle d'endommagement non-local classique. Ils cherchent à prendre en compte les différents mécanismes mis en jeu lors du processus d'endommagement en faisant varier la longueur interne de la fonction poids. Chaque modèle présente des améliorations par rapport à la description obtenue à partir du modèle classique. Cependant, aucun d'entre eux n'est capable de décrire en même temps la croissance des défauts, l'effet d'écran et l'effet de bord. De nouvelles combinaisons de ces modèles ont été proposées et nous avons montré qu'une combinaison donne de bons résultats pour tous les cas numériques étudiés. La limitation principale de cette combinaison réside principalement dans la difficulté de son extension en 2D rendant ainsi impossible son exploitation par le calcul macroscopique de structure.

Le chapitre 5 aborde la problématique de la description du comportement mécanique du béton à l'échelle mésoscopique. Nous avons choisi de changer l'échelle d'analyse pour observer en détail les mécanismes ayant lieu au sein de la mésostructure du béton. À l'aide d'un modèle mésoscopique et des données expérimentales acquies lors de la campagne expérimentale, nous avons pu constater que la prise en compte des phénomènes de rupture de chaque composante du béton ainsi que les interactions entre eux permettent d'arriver à une description réaliste de toutes les phases du chargement dès la partie linéaire en passant par l'écrouissage avant le pic, la description du pic puis la partie adoucissante. Au contraire du modèle macroscopique classique, le modèle mésoscopique utilisé est capable de prédire les courbes expérimentales complètes.

Dans le chapitre 6, nous proposons un nouveau modèle macroscopique d'endommagement non-local basé sur les interactions. Nous avons transposé la prise en compte des interactions de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique au travers de la fonction poids. Les interactions au niveau macroscopique sont estimées en décrivant

le matériau comme étant un ensemble d'inclusions qui interagissent entre elles lors du chargement. Ces inclusions sont dilatées successivement afin de caractériser le transfert d'information au sein du matériau et de reconstruire la fonction poids à introduire dans le nouveau modèle. La validation de notre proposition a été faite en utilisant les outils d'analyse présentés dans le chapitre 3. On a constaté que le nouveau modèle d'endommagement non-local issu des interactions est capable de décrire la transition continu/discret et la discontinuité du déplacement et de retrouver le comportement local sur un bord. De plus, les premiers résultats des simulations numériques en 2D montrent que le nouveau modèle décrit la partie non linéaire avant le pic et la valeur maximale de la charge pour une poutre de géométrie HN (entaillée jusqu'à la moitié de sa hauteur) et de hauteur $D = 50mm$. Des calculs supplémentaires restent à finaliser pour valider complètement ce modèle. Ils permettront d'observer ces capacités dans la description de la phase adoucissante et de l'effet d'échelle.

Dans le chapitre 7 nous avons cherché à exploiter la richesse en information du modèle mésoscopique afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu dans le développement de cette zone d'élaboration. Une première analyse de la distribution spatiale de la densité de dissipation d'énergie a permis de suivre la formation et l'évolution de la fissure ainsi que d'observer que la largeur de la FPZ ne dépend pas de la longueur de l'entaille de l'éprouvette mais de la taille de l'échantillon. De plus, nous avons montré qu'il y avait peu d'effet de bord en ce qui concerne la formation de la FPZ dans l'axe de propagation de fissure. Une deuxième analyse numérique en terme de distances relatives entre points qui s'endommagent au cours du chargement, a permis de construire des histogrammes de distances relatives qui se rassemblent en une courbe unique lorsque l'on les normalise par la longueur du ligament. Par ailleurs la même démarche de construction d'histogrammes de distances relatives entre points endommagés a été mise en œuvre sur des résultats expérimentaux de flexion trois points où l'évolution de l'endommagement a été mesurée par des émissions acoustiques. La comparaison des histogrammes numérique et expérimental est très encourageante et montre que le modèle mésoscopique pourrait fournir des informations pertinentes quant au processus local de fissuration.

8.2 Perspectives

Les analyses et les développements présentés dans ce travail de recherche permettent de répondre à des questionnements concernant la compréhension du comportement mécanique du béton. Les résultats finaux de toute notre démarche nécessitent de travaux complémentaires visant l'amélioration de la description macroscopique du phénomène d'endommagement dans les matériaux quasi-fragiles.

Les résultats que nous avons obtenus avec le modèle d'endommagement non-local basé sur les interactions ne concernent à présent que la valeur de la charge maximale supportée par une poutre de hauteur $D = 50mm$ avec une longueur d'entaille $a_0 = 0.5D$. Des

calculs supplémentaires incluant toutes les tailles de poutres et toutes les géométries entaillées et non-entaillées sont indispensables pour finaliser l'analyse. Cette modélisation permettra de connaître la capacité du nouveau modèle à décrire le comportement adoucissant typique des matériaux quasi-fragiles. Avec l'obtention des charges au pic pour toutes les poutres analysées, il sera possible également de mener une analyse à la lumière de la théorie d'effets d'échelle.

Maintenant que la pertinence des informations locales du processus de fissuration issues du modèle mésoscopique a été démontrée par comparaison expérimentale, nous souhaitons approfondir cette analyse afin de mettre en évidence la longueur de corrélation entre événements, et de faire la lien avec la longueur interne nécessaire à la description macroscopique du processus de fissuration.

Bibliographie

- [1] BAŽANT, Z. P. Size Effect in Blunt Fracture : Concrete, Rock, Metal. *Journal of Engineering Mechanics* 110, 4 (Apr. 1984), 518–535.
- [2] BAŽANT, Z. P. Size-effect method for determining fracture energy and process zone size of concrete. *Materials and Structures (submitted by RILEM Committee TC 89-FMT, chaired by S.P. Shah) Committee TC 89-FMT, chaired by S.P. Shah* 23, 6 (Nov. 1990), 461–465.
- [3] BAŽANT, Z. P. Nonlocal Damage Theory Based on Micromechanics of Crack Interactions. *Journal of Engineering Mechanics* 120, 3 (1994), 593–617.
- [4] BAŽANT, Z. P., AND JIRASEK, M. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage : Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics* 128, 11 (Nov. 2002), 1119–1149.
- [5] BAŽANT, Z. P., AND LI, Z. Zero-brittleness size-effect method for one-size fracture test of concrete. *Journal of engineering mechanics* 122, 5 (1996), 458 – 468.
- [6] BAŽANT, Z. P., AND PIJAUDIER-CABOT, G. Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum. *Journal of Engineering Mechanics* 115, 4 (Apr. 1989), 755–767.
- [7] BAŽANT, Z. P., AND PLANAS, J. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-brittle Materials*. 1998.
- [8] BAŽANT, Z. P., AND YU, Q. Universal Size Effect Law and Effect of Crack Depth on Quasi-Brittle Structure Strength. *Journal of engineering mechanics* 135, 2 (2009), 78–84.
- [9] BAZANT, Z. P. Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 102, 2 (1976), 331–344.
- [10] BIOLZI, L., LABUZ, J. F., AND MUCIACCIA, G. A problem of scaling in fracture of damaged rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 48, 3 (Apr. 2011), 451–457.

- [11] BOLANDER JR., J. E., AND BERTON, S. Simulation of shrinkage induced cracking in cement composite overlays. *Cement and Concrete Composites* 26, 7 (Oct. 2004), 861–871.
- [12] CARMELIET, J. Optimal estimation of gradient damage parameters from localization phenomena in quasi-brittle materials. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 4, 1 (1999), 1–16.
- [13] CARPINTERI, A., CHIAIA, B., AND FERRO, G. Size effects on nominal tensile strength of concrete structures : multifractality of material ligaments and dimensional transition from order to disorder. *Mechanics of Materials* 28 (1995), 311–317.
- [14] DESMORAT, R., AND GATUINGT, F. Introduction of an internal time in nonlocal integral theories. In *Computational Modelling of Concrete Structures*. CRC Press, Mar. 2010, pp. 121–128.
- [15] DUAN, K., HU, X., AND WITTMANN, F. H. Scaling of quasi-brittle fracture : Boundary and size effect. *Mechanics of Materials* 38 (2006), 128–141.
- [16] DUFOUR, F., PIJAUDIER-CABOT, G., CHOINSKA, M., AND HUERTA, A. Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Computers and Concrete* 4 (2008), 375–388.
- [17] ESHELBY, J. D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 241, 1226 (1957), 376–396.
- [18] FISCHER, H., RENTZSCH, W., AND MARX, R. A modified size effect model for brittle nonmetallic materials. *Science* 69 (2002), 781–791.
- [19] FRÉMOND, M., AND NEDJAR, B. Damage in concrete : the unilateral phenomenon. *Nuclear Engineering and Design* 156, 1 (1995), 323–335.
- [20] GERMAIN, N., BESSON, J., AND FEYEL, F. Composite layered materials : Anisotropic nonlocal damage models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196, 41-44 (Sept. 2007), 4272–4282.
- [21] GETTU, R., SALDIVAR, H., AND KAZEMI, T. Implications of the size effect method for analyzing the fracture of concrete, 1998.
- [22] GRASSL, P., GRÉGOIRE, D., ROJAS SOLANO, L., AND PIJAUDIER-CABOT, G. Meso-scale modelling of the size effect on the fracture process zone of concrete. *International Journal of Solids and Structures* 49, 13 (June 2012), 1818–1827.
- [23] GRASSL, P., AND JIRÁSEK, M. Plastic model with non-local damage applied to concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 30, 1 (Jan. 2006), 71–90.
- [24] GRASSL, P., AND JIRÁSEK, M. Meso-scale approach to modelling the fracture process zone of concrete subjected to uniaxial tension. *International Journal of Solids and Structures* 47, 7-8 (Apr. 2010), 957–968.
- [25] GRASSL, P., AND REMPLING, R. A damage-plasticity interface approach to the meso-scale modelling of concrete subjected to cyclic compressive loading. *Engineering Fracture Mechanics* 75, 16 (Nov. 2008), 4804–4818.

- [26] GRÉGOIRE, D., ROJAS-SOLANO, L. B., AND PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum to discrete transition in non local damage models. *IJMCE* (2010).
- [27] HAIDAR, K., PIJAUDIER-CABOT, G., DUBÉ, J., AND LOUKILI, A. Correlation between the internal length, the fracture process zone and size effect in model materials. *Materials and Structures* 38, 2 (Mar. 2005), 201–210.
- [28] J.M. TORRENTI. *Comportement multiaxial du béton : aspects expérimentaux et modélisation*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1987.
- [29] KACHANOV, L. M. Time of the rupture process under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk. {S.S.R.} Otd. Tech. Nauk.* 8 (1958), 26–31.
- [30] KARIHALOO, B. L., ABDALLA, H. M., AND XIAO, Q. Z. Size effect in concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), 979–993.
- [31] KOLSKY, H. An Investigation of the Mechanical Properties of Materials at very High Rates of Loading. *Proceedings of the Physical Society. Section B* 62, 11 (1949).
- [32] KRAYANI, A., PIJAUDIER-CABOT, G., AND DUFOUR, F. Boundary effect on weight function in nonlocal damage model. *Engineering Fracture Mechanics* 76, 14 (Sept. 2009), 2217–2231.
- [33] LANDIS, E. N., AND SHAH, S. P. The influence of microcracking on the mechanical behavior of cement based materials. *Advanced Cement Based Materials* 2, 3 (May 1995), 105–118.
- [34] LE BÉLLEGO, C., DUBÉ, J. F., PIJAUDIER-CABOT, G., AND GÉRARDE, B. Calibration of nonlocal damage model from size effect tests. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 22, 1 (Jan. 2003), 33–46.
- [35] LE BELLÉGO, C., GÉRARD, B., AND PIJAUDIER-CABOT, G. Chemo-mechanical effects in mortar beams subjected to water hydrolysis. *Journal of engineering mechanics* 126, 3 (2000), 266–272.
- [36] LEMAÎTRE, J., AND CHABOCHE, J. L. *Mécanique des matériaux solides*. Sciences Sup. Dunod, 1994.
- [37] LUNA, P., BERNAL, C., CISILINO, A., FRONTINI, P., COTTERELL, B., AND MAI, Y.-W. The application of the essential work of fracture methodology to the plane strain fracture of ABS 3-point bend specimens. *Polymer* 44, 4 (Feb. 2003), 1145–1150.
- [38] MAZARS, J. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. PhD thesis, Université Paris VI, 1984.
- [39] MAZARS, J. A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics* 25, 5–6 (1986), 729–737.
- [40] MAZARS, J. Mécanismes physiques de rupture et modèles de comportement mécanique du béton hydraulique - Chapitre 17. In *Le béton hydraulique. Connaissance et pratique*, Presses ENPC, Ed. Paris, 1995.
- [41] MOREL, S., AND DOURADO, N. Size effect in quasibrittle failure : Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model. *International Journal of Solids and Structures* 48, 10 (Jan. 2011), 1403–1412.

- [42] NEEDLEMAN, A. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 67, 1 (1988), 69–85.
- [43] PASTOR, J., GUINEA, G., PLANAS, J., AND ELICES, M. Nueva expresión de la flexibilidad para la probeta de flexión en tres puntos. *Anales de mecanica de la fractura* 13 (1996), 69–74.
- [44] PIJAUDIER-CABOT, G., AND BAŽANT, Z. P. Nonlocal Damage Theory. *Journal of Engineering Mechanics* 113, 10 (1987), 1512–1533.
- [45] PIJAUDIER-CABOT, G., AND BENALLAL, A. Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *International Journal of Solids and Structures* 30, 13 (1993), 1761–1775.
- [46] PIJAUDIER-CABOT, G., AND BERTHAUD, Y. Effets des interactions dans l'endommagement d'un milieu fragile. Formulation non locale. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre* 310, 12 (1990), 1577–1582.
- [47] PIJAUDIER-CABOT, G., AND DUFOUR, F. Non local damage model. Boundary and evolving boundary effects. *European Journal of Environmental and Civil engineering* 14, 6-7 (2010), 729–749.
- [48] PIJAUDIER-CABOT, G., HAIDAR, K., AND DUBÉ, J.-F. Non-local damage model with evolving internal length. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28, 78 (June 2004), 633–652.
- [49] RILEM TC. RILEM TC 212-ACD : Acoustic emission and related NDE techniques for crack detection and damage evaluation in concrete. *Materials and Structures* 43, 9 (2010), 1183–1186 LA – English.
- [50] SAANOUNI, K., CHABOCHE, J. L., AND LESNE, P. M. On the creep crack-growth prediction by a non local damage formulation. *European journal of mechanics. A. Solids* 8, 6 (1989), 437–459.
- [51] SHAH, S. Size-effect method for determining fracture energy and process zone size of concrete. *Materials and Structures* 23, 6 (Nov. 1990), 461–465.
- [52] TANG, T., BAŽANT, Z. P., YANG, S., AND ZOLLINGER, D. Variable-notch one-size test method for fracture energy and process zone length. *Engineering Fracture Mechanics* 55, 3 (Oct. 1996), 383–404.
- [53] THOMAS, T. C. Tensile bond strength between aggregate and cement paste or mortar. In *ACI Journal Proceedings* (1963), vol. 60, ACI.
- [54] TVERGAARD, V., AND NEEDLEMAN, A. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures* 32, 8–9 (Apr. 1995), 1063–1077.
- [55] VAN MIER, J. *Fracture processes of concrete. Assessment of material for fracture models*, 1 ed. CRC Press, Boca Raton, USA, 1997.
- [56] VAN VLIET, M. R. A., AND VAN MIER, J. G. M. Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. *Engineering Fracture Mechanics* 65 (2000), 165–188.

-
- [57] VOLKOV, S. *Statistical strength theory*. Gordon and Breach, New York, 1962.
- [58] WALSH, P. F. Fracture of plain concrete. *Indian Concrete Journal* 46, 11 (1972), 469,470,476.
- [59] WANG, Q. Z., ZHANG, S., AND XIE, H. P. Rock Dynamic Fracture Toughness Tested with Holed-Cracked Flattened Brazilian Discs Diametrically Impacted by SHPB and its Size Effect. *Experimental Mechanics* 50, 7 (July 2009), 877–885.
- [60] WEIBULL, W. *A statistical theory of the strength of materials*. Ingeniörsvetenskapsakademiens handlingar. Generalstabens litografiska anstalts förlag, 1939.

Annexes

Détail de la détermination expérimentale des propriétés mécaniques du béton utilisé

Essai #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Diamètre (mm)	Âge (jours)	Résistance à la compression (MPa)	Incertitude (MPa)	Incertitude (%)
171	1	308.0	160.4	102	45.2	0.4	0.9
174	1	310.0	160.3	102	45.3	0.4	0.9
252	2	218.0	119.4	125	43.5	0.2	0.3
262	2	87.9	38.8	136	48.6	0.2	0.3
351	3	219.0	115.4	185	42.5	0.2	0.3
352	3	214.0	117.4	185	37.8	0.1	0.3
453	4	215.0	116.6	185	41.4	0.2	0.3
461	4	88.1	38.8	171	39.6	0.2	0.3
561	5	96.3	38.6	168	43.3	0.2	0.3
581	5	141.9	73.6	150	42.8	0.2	0.3
682	6	140.9	73.7	169	42.8	0.2	0.3
683	6	141.9	73.6	177	42.9	0.2	0.3
751	7	213.6	113.0	145	42.4	0.2	0.3
783	7	137.7	73.6	147	38.1	0.2	0.3
852	8	213.1	112.9	145	41.5	0.2	0.3
881	8	147.5	74.3	147	39.2	0.2	0.3

TABLE A.1 – Essais de compression – Résistance à la compression

Essai #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Diamètre (mm)	Âge (jours)	Coefficient de Poisson (-)	Incertitude (-)	Incertitude (%)
172	1	307.0	160.5	125	0.22	0.003	1
263	2	96.0	38.5	136	0.18	0.002	1
351	3	219.0	115.4	185	0.23	0.003	1
361	3	92.4	38.6	171	0.21	0.003	1
552	5	209.0	113.2	171	0.20	0.003	1
562	5	96.6	38.4	171	0.22	0.003	1
563	5	96.0	38.9	171	0.21	0.003	1
583	5	144.5	74.1	150	0.19	0.002	1
652	6	209.0	113.2	147	0.22	0.003	1
661	6	97.4	38.7	150	0.19	0.002	1
682	6	140.9	73.7	169	0.23	0.003	1
783	7	137.7	73.6	147	0.20	0.003	1

TABLE A.2 – Essais de compression – Coefficient de Poisson

Essai #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Diamètre (mm)	Âge (jours)	Module d'Young (GPa)	Incertitude (GPa)	Incertitude (%)
152	1	212.2	110.8	137	38.4	0.6	1.5
253	1	191.2	112.8	102	36.5	0.6	1.6
262	2	87.9	38.8	105	37.9	0.5	1.1
263	2	96.0	38.5	136	37.5	0.5	1.1
361	3	92.4	38.6	171	35.3	0.4	1.1
362	3	91.5	38.8	172	37.8	0.51	1.1
454	4	216.0	113.7	168	36.7	0.6	1.5
461	4	88.1	38.8	171	37.3	0.5	1.1
462	4	88.6	38.6	172	36.4	0.4	1.1
551	5	219.0	117.4	171	36.2	0.6	1.5
552	5	209.0	113.2	171	36.5	0.6	1.5
553	5	215.0	113.6	147	37.1	0.6	1.5
583	5	144.5	74.1	150	35.4	0.4	1.1
651	6	217.7	113.7	175	37.5	0.6	1.5
652	6	209.0	113.2	147	36.8	0.6	1.5
653	6	201.5	113.1	147	37.3	0.6	1.6
681	6	141.9	73.6	149	37.9	0.4	1.1
751	7	213.6	113.0	145	37.8	0.6	1.5
762	7	83.2	38.2	147	37.7	0.5	1.1
783	7	137.7	73.6	147	37.7	0.4	1.1
786	7	143.3	74.6	158	38.4	0.4	1.1
7510	7	215.0	112.9	157	35.4	0.6	1.5
852	8	213.1	112.9	145	35.9	0.6	1.5
853	8	214.8	113.3	145	36.2	0.6	1.5
861	8	86.9	38.8	147	36.8	0.4	1.1
881	8	147.5	74.3	147	37.6	0.4	1.1
8530	8	216.4	113.1	158	37.4	0.6	1.5

TABLE A.3 – Essais de compression – Module d'Young

Essai #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Diamètre (mm)	Âge (jours)	Résistance à la traction par fendage (MPa)	Incertitude (MPa)	Incertitude (%)
151	1	194.0	113.2	102	3.6	0.02	0.5
172	1	307.0	160.5	125	3.9	0.03	0.6
251	2	217.0	112.8	102	3.8	0.02	0.4
353	3	197.7	111.8	185	4.3	0.02	0.4
452	4	215.0	112.6	172	3.8	0.02	0.4
554	5	217.2	113.1	150	3.8	0.02	0.4
556	5	218.1	113.2	169	4.1	0.02	0.4
654	6	216.6	113.8	150	4.1	0.02	0.4
655	6	216.4	112.9	150	3.7	0.02	0.4
656	6	218.4	112.5	169	3.8	0.02	0.4
758	7	214.7	113.2	147	3.5	0.02	0.4
857	8	210.0	113.3	147	4.2	0.02	0.4

TABLE A.4 – Essais de fendage – Résistance à la traction par fendage

Résultats bruts des essais de flexion 3 points

Essai #	n	i	Gâchée #	Hauteur (mm)	Distance entre appuis (mm)	Profondeur (mm)	Longueur d'entaille (mm)	Âge (jours)	Charge pic (kN)	Charge pic corrigée (kN)	Incertitude		Vitesse de chargement ($\mu\text{m/s}$)
											(N)	(%)	
111	1	1	1	400.3	1000	54.0	200.3	123	4.5	4.7	11.2	0.25	1
211	1	1	2	402.0	1000	56.1	198.6	123	5.1	5.3	12.7	0.25	1
212	1	1	2	400.8	1000	59.0	200.1	123	6.0	6.2	14.9	0.25	1
121	2	1	1	201.1	500	53.1	99.6	112	2.8	2.9	7.1	0.25	0.5
122	2	1	1	201.2	500	52.1	100.6	109	2.7	2.8	6.9	0.25	0.25
721	2	1	7	200.8	500	51.5	101.1	153	3.2	3.3	8.1	0.25	0.3
823	2	1	8	200.7	500	52.0	101.1	152	2.9	3.3	7.4	0.25	0.3
134	3	1	1	101.0	250	50.2	50.7	122	1.7	3.0	4.3	0.25	0.5
235	3	1	2	101.0	250	50.1	50.7	119	1.6	1.7	3.9	0.25	0.5
722	2	1	7	199.9	500	51.5	101.1	153	3.3	1.6	8.2	0.25	0.4
145	4	1	1	51.7	125	49.9	25.7	122	0.9	0.9	2.4	0.25	0.25
146	4	1	1	50.9	125	49.9	25.5	122	0.9	0.9	2.4	0.25	0.25
246	4	1	2	51.0	125	50.3	25.7	122	1.1	1.1	2.8	0.25	0.25

où n et i sont définis dans la figure 3.11.

Les valeurs des charges pic ont été corrigées prenant en compte le poids de l'échantillon comme indiqué [51].

TABLE B.1 – Essais de flexion 3 points – Éprouvettes entaillées HN

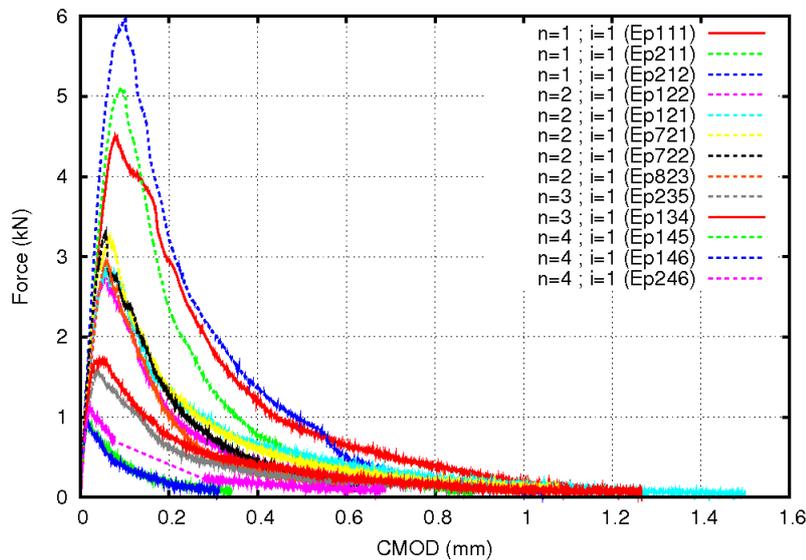


FIGURE B.1 – Courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées HN.

Essai #	<i>n</i> #	<i>i</i> #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Distance entre appuis (mm)	Profondeur (mm)	Longueur d'entaille (mm)	Âge (jours)	Charge pic (kN)	Charge pic corrigée (kN)	Incertitude (N) (%)	Vitesse de chargement ($\mu\text{m/s}$)
511	1	2	5	400.8	1000	54.1	80.1	161	14.9	15.1	37.3 0.25	0.4
522	2	2	5	200.4	500	51.5	39.9	155	7.7	7.7	19.2 0.25	0.3
523	2	2	5	200.5	500	50.6	40.3	155	8.3	8.4	20.9 0.25	0.3
531	3	2	5	101.5	250	50.5	20.2	154	4.7	4.7	11.8 0.25	0.2
541	4	2	5	50.7	125	50.4	10.0	155	2.4	2.4	5.9 0.25	0.1
612	1	2	6	400.3	1000	53.7	80.2	161	14.6	14.8	36.5 0.25	0.4
613	1	2	6	400.0	1000	53.3	80.6	161	12.6	12.8	31.5 0.25	0.4
621	2	2	6	201.1	500	51.4	40.1	155	7.3	7.4	18.3 0.25	0.3
642	4	2	6	51.0	125	50.1	10.0	155	2.7	2.7	6.6 0.25	0.1
733	3	2	7	101.8	250	51.0	20.0	152	4.3	4.3	10.7 0.25	0.2
832	3	2	8	102.1	250	50.4	19.7	153	4.5	4.6	11.4 0.25	0.2

où *n* et *i* sont définis dans la figure 3.11.

Les valeurs des charges pic ont été corrigées prenant en compte le poids de l'échantillon comme indiqué [51].

TABLE B.2 – Essais de flexion 3 points – Échantillons entaillés FN

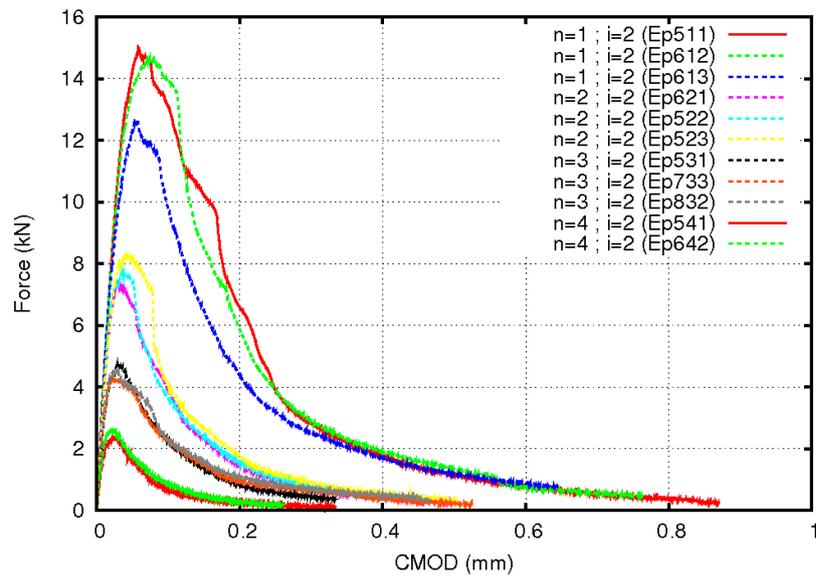


FIGURE B.2 – Courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées FN.

Essai #	<i>n</i> #	<i>i</i> #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Distance entre appuis (mm)	Profondeur (mm)	Longueur d'entaille (mm)	Âge (jours)	Charge pic (kN)	Charge pic corrigée (kN)	Incertitude (N) (%)	Vitesse de chargement ($\mu\text{m/s}$)
311	1	3	3	400.3	1000	51.5	0	181	26.0	26.2	65.1 0.25	0.4
321	2	3	3	200.2	500	51.1	0	174	14.0	14.1	35.0 0.25	0.5
322	2	3	3	199.5	500	51.2	0	175	13.7	13.7	34.2 0.25	0.3
331	3	3	3	101.0	250	50.5	0	179	8.8	8.8	21.9 0.25	0.2
341	4	3	3	50.3	125	50.3	0	180	4.3	4.3	10.7 0.25	0.1
342	4	3	3	50.8	125	49.8	0	180	5.2	5.2	13.0 0.25	0.1
413	1	3	4	400.0	1000	51.5	0	181	24.4	24.6	61.1 0.25	0.4
423	2	3	4	200.3	500	50.8	0	175	15.7	15.8	39.3 0.25	0.3
432	3	3	4	100.7	250	50.2	0	179	8.0	8.0	20.0 0.25	0.2
433	3	3	4	101.0	250	50.1	0	178	7.6	7.6	19.0 0.25	0.2

où *n* et *i* sont définis dans la figure 3.11.

Les valeurs des charges pic ont été corrigées prenant en compte le poids de l'échantillon comme indiqué [51].

TABLE B.3 – Essais de flexion 3 points – Échantillons non-entaillés

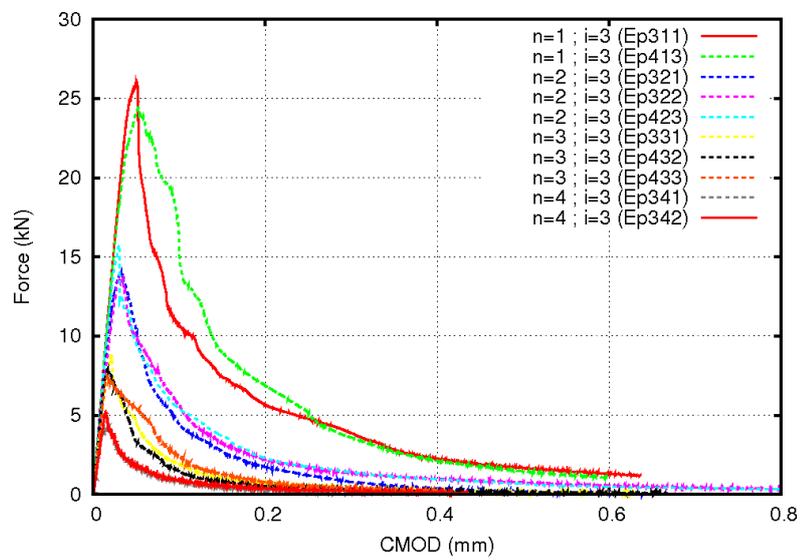


FIGURE B.3 – Courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes non-entailées UN.



Analyse d'effets d'échelle à partir de la base de données expérimentale

C.1 Détails de l'analyse avec la loi classique de Bažant pour des structures entaillées

Le tableau C.1 résume les contraintes nominales estimées à l'aide de l'équation 3.10 ainsi que les valeurs des charges pic¹ moyennées par tailles pour tous les échantillons entaillés. Toutes les procédures expérimentales ont été menées suivant les recommandations du RILEM [2].

n	i	Force (F)			contrainte nominale (σ_N)			Taille (D)		
		μ	σ	c_v	μ	σ	c_v	μ	σ	c_v
#	#	(kN)	(kN)	(%)	(MPa)	(MPa)	(%)	(mm)	(mm)	(%)
1	1	5.4	0.75	13.9	0.9	0.08	9.4	401.0	0.90	0.22
2	1	3.1	0.24	7.9	1.1	0.10	9.3	200.7	0.51	0.26
3	1	1.7	0.10	5.8	1.2	0.07	5.7	101.0	0.04	0.04
4	1	1.0	0.10	9.8	1.4	0.15	10.2	51.2	0.44	0.86
1	2	14.3	1.25	8.8	2.5	0.20	8.0	400.3	0.38	0.10
2	2	7.8	0.53	6.7	2.9	0.22	7.9	200.7	0.37	0.18
3	2	4.5	0.23	5.0	3.2	0.19	5.8	101.8	0.30	0.29
4	2	2.5	0.20	7.9	3.6	0.28	7.6	50.8	0.18	0.36
(μ – moyenne ; σ – écart type ; $c_v = \mu/\sigma$ – coefficient de variation)										

TABLE C.1 – Contraintes nominales et charges maximales pour les échantillons entaillés comme indiqué dans l'équation 3.10.

1. Ces valeurs ont été corrigées prenant en compte le poids de l'échantillon comme indiqué dans [2].

C.1.1 Détails de l'analyse avec la loi de Bažant pour des structures non-entaillées

La tableau C.2 résume les contraintes nominales estimées à partir de l'équation 3.15 ainsi que les valeurs moyennées des charges pic pour toutes les tailles des échantillons non-entaillés.

n	i	Force (F)			contrainte nominale (σ_N)			taille (D)		
		μ	σ	c_v	μ	σ	c_v	μ	σ	c_v
#	#	(kN)	(kN)	(%)	(MPa)	(MPa)	(%)	(mm)	(mm)	(%)
1	3	25.4	1.13	4.5	4.6	0.20	4.4	400.1	0.18	0.04
2	3	14.5	1.10	7.6	5.3	0.41	7.7	200.0	0.41	0.20
3	3	8.1	0.59	7.2	6.0	0.40	6.7	100.9	0.17	0.17
4	3	4.7	0.66	13.9	7.0	0.91	13.1	50.6	0.38	0.76
(μ – moyenne; σ – écart type; $c_v = \mu/\sigma$ – coefficient de variation)										

TABLE C.2 – Contraintes nominales et charges maximales pour les échantillons non-entaillés comme définit dans l'équation 3.15.

C.1.2 Détails de l'analyse avec la loi universelle de Bažant

TABLE C.3 – Contraintes nominales et charges maximales pour tous les échantillons d'après l'équation 3.16b.

n	i	Force (F)			contrainte nominale (σ_N)			taille (D)		
		μ	σ	c_v	μ	σ	c_v	μ	σ	c_v
#	#	(kN)	(kN)	(%)	(MPa)	(MPa)	(%)	(mm)	(mm)	(%)
1	1	5.4	0.75	13.9	0.9	0.08	9.4	401.0	0.90	0.22
2	1	3.1	0.24	7.9	1.1	0.10	9.3	200.7	0.51	0.26
3	1	1.7	0.10	5.8	1.2	0.07	5.7	101.0	0.04	0.04
4	1	1.0	0.10	9.8	1.4	0.15	10.2	51.2	0.44	0.86
1	2	14.3	1.25	8.8	2.5	0.20	8.0	400.3	0.38	0.10
2	2	7.8	0.53	6.7	2.9	0.22	7.9	200.7	0.37	0.18
3	2	4.5	0.23	5.0	3.2	0.19	5.8	101.8	0.30	0.29
4	2	2.5	0.20	7.9	3.6	0.28	7.6	50.8	0.18	0.36
1	3	25.4	1.13	4.5	4.6	0.20	4.4	400.1	0.18	0.04
2	3	14.5	1.10	7.6	5.3	0.41	7.7	200.0	0.41	0.20
3	3	8.1	0.59	7.2	6.0	0.40	6.7	100.9	0.17	0.17
4	3	4.7	0.66	13.9	7.0	0.91	13.1	50.6	0.38	0.76

(μ – moyenne; σ – écart-type; $c_v = \mu/\sigma$ – coefficient de variation)



Maillages des structures entaillées et non-entaillées pour le modèle classique d'endommagement non-local

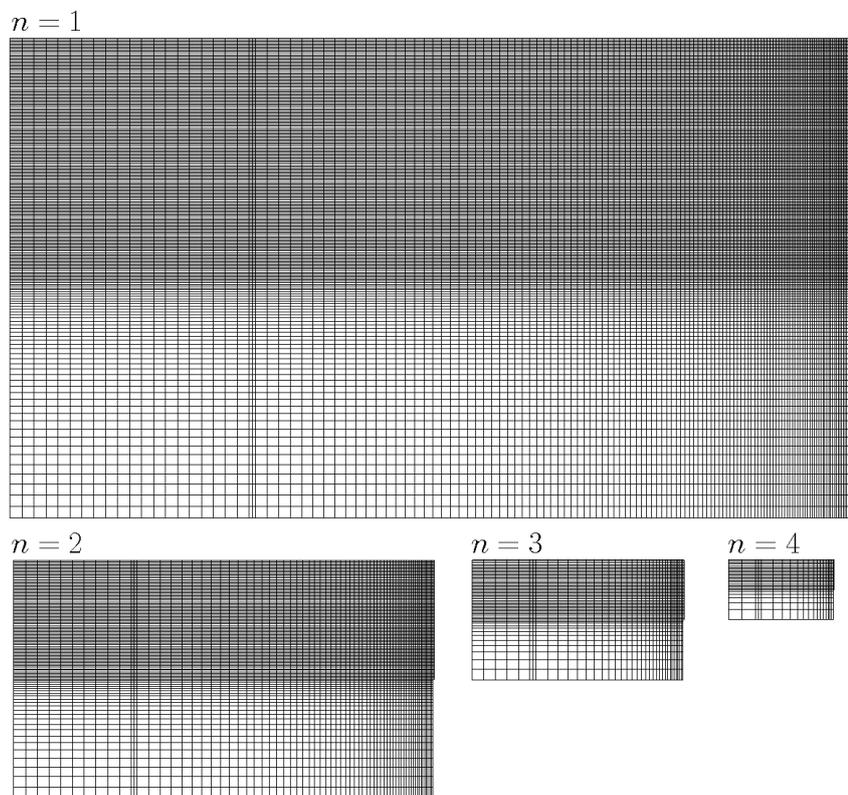


FIGURE D.1 – Maillage et conditions de bord typiques considérés dans le calcul macroscopique ($i = 1$).

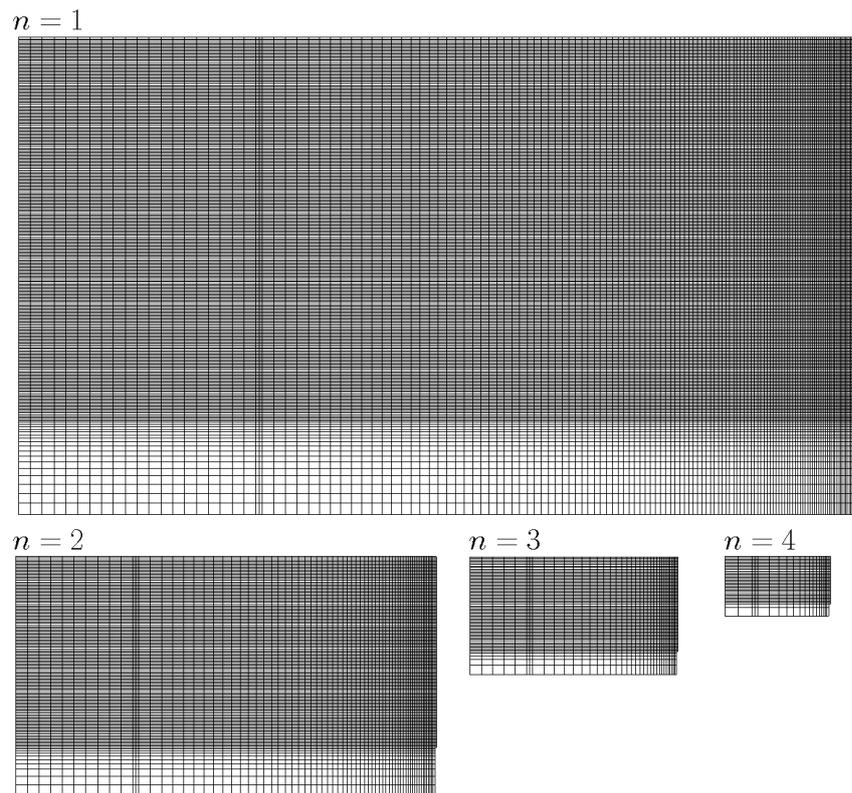


FIGURE D.2 – Maillage et conditions de bord typiques considérés dans le calcul macroscopique ($i = 2$).

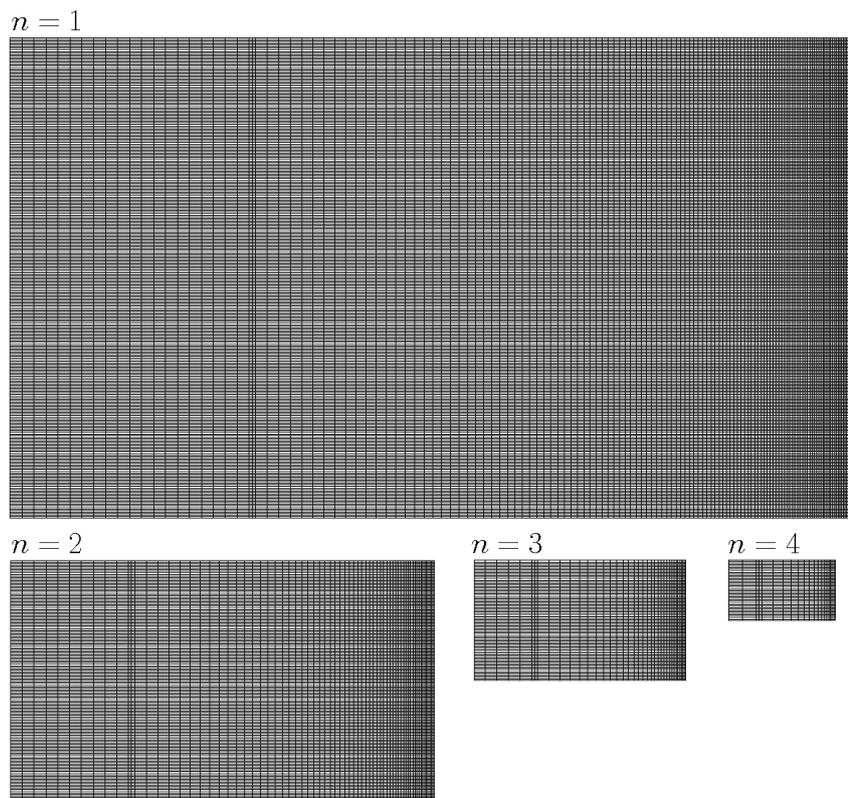


FIGURE D.3 – Maillage et conditions de bord typiques considérés dans le calcul macroscopique ($i = 3$).



Calcul détaillé des composantes du tenseur d'Eshelby pour le cas d'une inclusion cylindrique dans un milieu infini

E.1 Calcul des composantes du tenseur d'Eshelby

Les expressions pour le calcul des composantes du tenseur sont :

$$\begin{aligned} S_{ijmn}^I &= \frac{4\nu - 1}{8(1 - \nu)} \delta_{ijmn} + \frac{3 - 4\nu}{8(1 - \nu)} (\delta_{imjn} + \delta_{injm}) \\ S_{i3j3}^I &= \frac{1}{4} \delta_{ij} \\ S_{ij33}^I &= \frac{\nu}{2(1 - \nu)} \delta_{ij} \end{aligned} \quad i, j, m, n \in [1, 2] \quad (\text{E.1})$$
$$\begin{aligned} S_{3jmn}^I = S_{33mn}^I &= S_{3j33}^I = S_{ij3n}^I = 0 \\ S_{333n}^I = S_{3333}^I &= S_{3jmn}^I = S_{ji3n}^I = 0 \\ S_{33mn}^I = S_{333n}^I &= S_{3j33}^I = S_{3333}^I = 0 \end{aligned}$$

Les autres composantes peuvent être obtenues par permutation circulaire des indices :

$$S_{ijmn} = S_{jimn} = S_{ijnm}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 S_{1111}^I &= \frac{5-4\nu}{8(1-\nu)} \\
 S_{1122}^I &= \frac{4\nu-1}{8(1-\nu)} \\
 S_{1133}^I &= \frac{\nu}{2(1-\nu)} \\
 S_{2222}^I &= \frac{5-4\nu}{8(1-\nu)} \\
 S_{2233}^I &= \frac{\nu}{(1-\nu)} \\
 S_{1211}^I = S_{1222}^I &= S_{1233}^I = S_{1311}^I = 0 \\
 S_{1322}^I = S_{1333}^I &= S_{2311}^I = S_{2322}^I = 0 \\
 S_{2333}^I = S_{3311}^I &= S_{3322}^I = S_{3333}^I = 0
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

E.2 Composantes à l'extérieur de l'inclusion

À l'extérieur de l'inclusion les composantes du tenseur sont :

$$\begin{aligned}
 S_{ijmn}^E &= \frac{a^2}{8(1-\nu)x^4} \left[(4\nu x^2 - 2x^2 + a^2)\delta_{ij}\delta_{mn} + (-4\nu x^2 + 2x^2 + a^2)(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) \right. \\
 &\quad - 4(2\nu x^2 - x^2 + a^2)\delta_{mn}x_i^0x_j^0 + 4(x^2 - a^2)\delta_{ij}x_m^0x_n^0 + 4(\nu x^2 - a^2) \\
 &\quad \left. (\delta_{im}x_j^0x_n^0 + \delta_{in}x_j^0x_m^0 + \delta_{jm}x_i^0x_n^0 + \delta_{jn}x_i^0x_m^0) + 8(3a^2 - 2x^2)x_i^0x_j^0x_m^0x_n^0 \right] \\
 S_{i3j3}^E &= \frac{a^2}{4x^2} (\delta_{ij} - 2x_i^0x_j^0) \\
 S_{ij33}^E &= \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{a^2}{x^2} (\delta_{ij} - 2x_i^0x_j^0) \\
 S_{3jmn}^E = S_{ji3n}^E = S_{33mn}^E &= S_{333n}^E = S_{3j33}^E = S_{3333}^E = 0
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

$i, j, m, n \in [1, 2]$.

Ici a est le rayon de la source, $x_1^0 = r_1 = \cos\theta$ et $x_2^0 = r_2 = \sin\theta$.

Les autres composantes peuvent être obtenues par permutation circulaire des indices :

$$S_{ijmn} = S_{jimn} = S_{ijnm}$$

On obtient :

$$S_{1111}^E = \frac{a^2}{8(1-\nu)x^2} \left[\left(3\frac{a^2}{x^2} - 4\nu + 2 \right) + 8r_1^2 \left(1 + \nu - 3\frac{a^2}{x^2} \right) + 8r_1^4 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \right]$$

$$S_{1211}^E = \frac{a^2}{2(1-\nu)x^2} r_1 r_2 \left[1 - 3\frac{a^2}{x^2} + 2r_1^2 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \right]$$

$$S_{2111}^E = S_{1211}^E$$

$$S_{1122}^E = \frac{a^2}{8(1-\nu)x^2} \left[\left(\frac{a^2}{x^2} + 4\nu - 2 \right) + 4r_2^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) + 4r_1^2 \left(1 - 2\nu - \frac{a^2}{x^2} \right) + 8r_1^2 r_2^2 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \right]$$

$$S_{1222}^E = \frac{a^2}{2(1-\nu)x^2} r_1 r_2 \left[1 - 3\frac{a^2}{x^2} + 2r_2^2 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \right]$$

$$S_{2122}^E = S_{1222}^E$$

$$S_{2211}^E = \frac{a^2}{8(1-\nu)x^2} \left[\left(\frac{a^2}{x^2} + 4\nu - 2 \right) + 4r_1^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) + 4r_2^2 \left(1 - 2\nu - \frac{a^2}{x^2} \right) + 8r_2^2 r_1^2 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \right]$$

$$S_{2222}^E = \frac{a^2}{8(1-\nu)x^2} \left[\left(3\frac{a^2}{x^2} - 4\nu + 2 \right) + 8r_2^2 \left(1 - 3\frac{a^2}{x^2} + \nu \right) + 8r_2^4 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \right]$$

$$\begin{aligned} S_{1333}^E &= S_{3133}^E = 0 \\ S_{1311}^E &= S_{3111}^E = 0 \\ S_{1322}^E &= S_{3122}^E = 0 \\ S_{3211}^E &= S_{3222}^E = S_{3233}^E = 0 \\ S_{3311}^E &= S_{3322}^E = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{3333}^E &= 0 \\ S_{1133}^E &= \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{a^2}{x^2} (1 - 2r_1^2) \\ S_{1233}^E &= -\frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{a^2}{x^2} r_1 r_2 \\ S_{2133}^E &= S_{1233}^E \\ S_{2233}^E &= \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{a^2}{x^2} (1 - 2r_2^2) \end{aligned}$$

E.3 Calcul du tenseur des déformations

E.3.1 Déformations à l'intérieur de l'inclusion

Le tenseur des déformations est tel que :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^I &= \varepsilon^*(S_{1111}^E + S_{1122}^E + S_{1133}^E) \\
 \varepsilon_{12}^I &= \varepsilon^*(S_{1211}^E + S_{1222}^E + S_{1233}^E) \\
 \varepsilon_{13}^I &= \varepsilon^*(S_{1311}^I + S_{1322}^I + S_{1333}^I) \\
 \varepsilon_{22}^I &= \varepsilon^*(S_{2211}^I + S_{2222}^I + S_{2233}^I) \\
 \varepsilon_{23}^I &= \varepsilon^*(S_{2311}^I + S_{2322}^I + S_{2333}^I) \\
 \varepsilon_{33}^I &= \varepsilon^*(S_{3311}^I + S_{3322}^I + S_{3333}^I)
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^I &= \varepsilon^* \frac{\nu + 1}{2(1 - \nu)} \\
 \varepsilon_{12}^I &= 0 \\
 \varepsilon_{13}^I &= 0 \\
 \varepsilon_{22}^I &= \varepsilon^* \frac{\nu + 1}{2(1 - \nu)} \\
 \varepsilon_{23}^I &= 0 \\
 \varepsilon_{33}^I &= 0
 \end{aligned}$$

Le tenseur des déformations aux points à l'intérieur de l'inclusion peut être écrit comme :

$$\varepsilon^I = \alpha \Delta T \frac{1 + \nu}{2(1 - \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E.3.2 Déformations à l'extérieur de l'inclusion

Le tenseur des déformations est tel que :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^E &= \varepsilon^*(S_{1111}^E + S_{1122}^E + S_{1133}^E); & \varepsilon_{12}^E &= \varepsilon^*(S_{1211}^E + S_{1222}^E + S_{1233}^E) \\
 \varepsilon_{13}^E &= \varepsilon^*(S_{1311}^E + S_{1322}^E + S_{1333}^E); & \varepsilon_{22}^E &= \varepsilon^*(S_{2211}^E + S_{2222}^E + S_{2233}^E) \\
 \varepsilon_{23}^E &= \varepsilon^*(S_{2311}^E + S_{2322}^E + S_{2333}^E); & \varepsilon_{33}^E &= \varepsilon^*(S_{3311}^E + S_{3322}^E + S_{3333}^E) \\
 & & \varepsilon_{23}^E &= \varepsilon_{32}^E; \quad \varepsilon_{31}^E = \varepsilon_{13}^E
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^E &= \varepsilon^*(S_{1111}^E + S_{1122}^E + S_{1133}^E); & \varepsilon_{12}^E &= \varepsilon^*(S_{1211}^E + S_{1222}^E); \\
& & \varepsilon_{13}^E &= \varepsilon_{13} = 0; \\
\varepsilon_{22}^E &= \varepsilon^*(S_{2211}^E + S_{2222}^E + S_{2233}^E); & \varepsilon_{23}^E &= 0; \\
& & \varepsilon_{32}^E &= \varepsilon_{32} = 0; \\
& & \varepsilon_{33}^E &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^E &= \varepsilon^* \frac{a^2}{8(1-\nu)x^2} \left[\left(3\frac{a^2}{x^2} - 4\nu + 2 \right) + 8r_1^2 \left(1 + \nu - 3\frac{a^2}{x^2} \right) + 8r_1^4 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{a^2}{x^2} + 4\nu - 2 \right) + 4r_2^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) + 4r_1^2 \left(1 - 2\nu - \frac{a^2}{x^2} \right) + 8r_1^2 r_2^2 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) + 4\nu (1 - 2r_1^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12}^E = \varepsilon^* \frac{a^2}{2(1-\nu)x^2} r_1 r_2 \left[1 - 3\frac{a^2}{x^2} + 2r_1^2 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) + 1 - 3\frac{a^2}{x^2} + 2r_2^2 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \right]$$

$$\overrightarrow{r_1=0, r_2=1, \varepsilon^*=\alpha\Delta T} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{12}^E = 0}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22}^E &= \varepsilon^* \frac{a^2}{8(1-\nu)x^2} \left[\left(3\frac{a^2}{x^2} - 4\nu + 2 \right) + 8r_2^2 \left(1 - 3\frac{a^2}{x^2} + \nu \right) + 8r_2^4 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) + \left(\frac{a^2}{x^2} + 4\nu - 2 \right) \right. \\
&+ \left. 4r_1^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) + 4r_2^2 \left(1 - \nu - \frac{a^2}{x^2} \right) + 8r_1^2 r_2^2 \left(3\frac{a^2}{x^2} - 2 \right) + 4\nu \right]
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{r_1=0, r_2=1, \varepsilon^*=\alpha\Delta T} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{22} = -\alpha\Delta T \frac{a^2 (1-\nu)}{x^2 2(1-\nu)}}$$

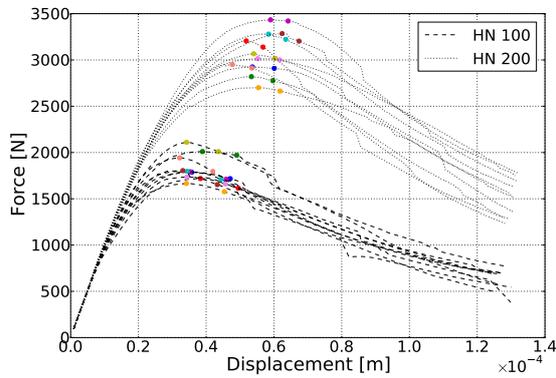
Finalement le tenseur des déformations subies par les points à l'extérieur de l'inclusion quand $r_1 = 0, r_2 = 1, \varepsilon^* = \alpha\Delta T$ peut être écrit comme :

$$\varepsilon^E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\Delta T \frac{a^2 (1-\nu)}{x^2 2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\Delta T \frac{a^2 (1-\nu)}{x^2 2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

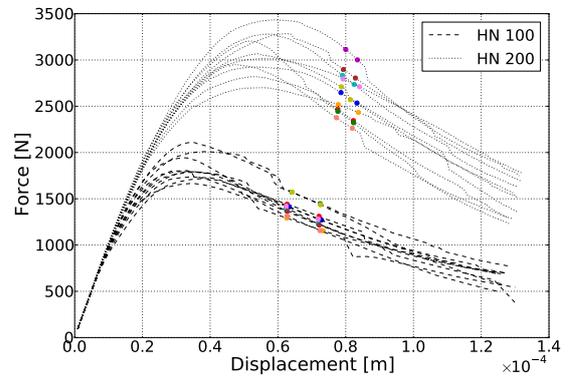
$$\varepsilon^E = \alpha \Delta T \frac{a^2 (1 - \nu)}{x^2 2(1 - \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F

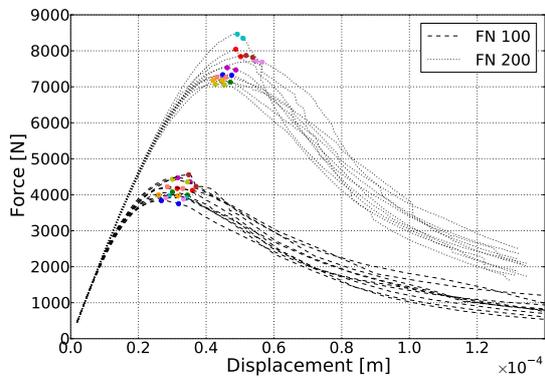
**Analyse à partir histogrammes des distances relatives
entre points endommagés**



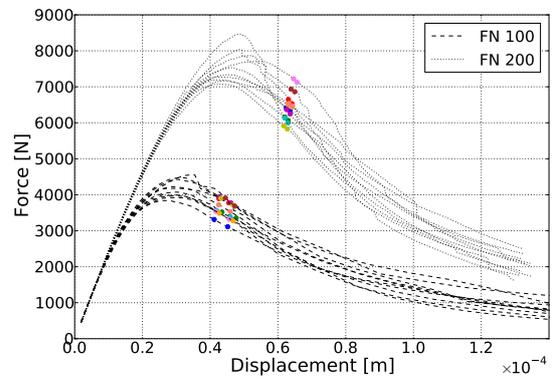
(a) Éprouvettes HN, $D = 200 \text{ mm}$ et $100 \text{ mm} - \Delta G_{f1}$.



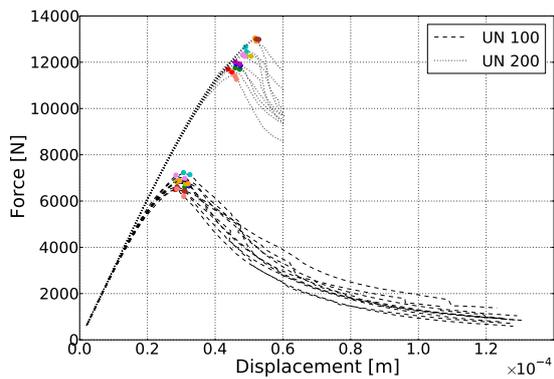
(b) Éprouvettes HN, $D = 200 \text{ mm}$ et $100 \text{ mm} - \Delta G_{f2}$.



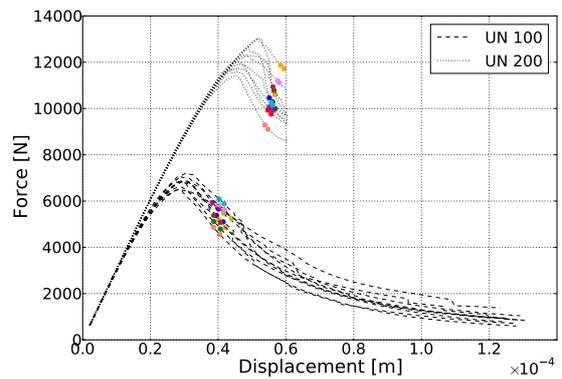
(c) Éprouvettes FN, $D = 200 \text{ mm}$ et $100 \text{ mm} - \Delta G_{f1}$.



(d) Éprouvettes FN, $D = 200 \text{ mm}$ et $100 \text{ mm} - \Delta G_{f2}$.



(e) Éprouvettes UN, $D = 200 \text{ mm}$ et $100 \text{ mm} - \Delta G_{f1}$.



(f) Éprouvettes UN, $D = 200 \text{ mm}$ et $100 \text{ mm} - \Delta G_{f2}$.

FIGURE E.1 – Définition des incréments d'énergie sur les courbes de chargement pour l'analyse de la distribution des distances relatives.

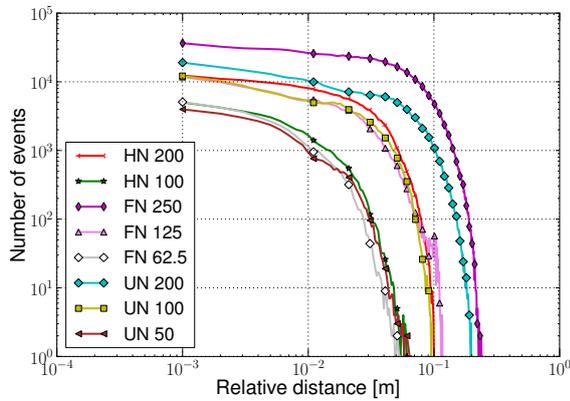
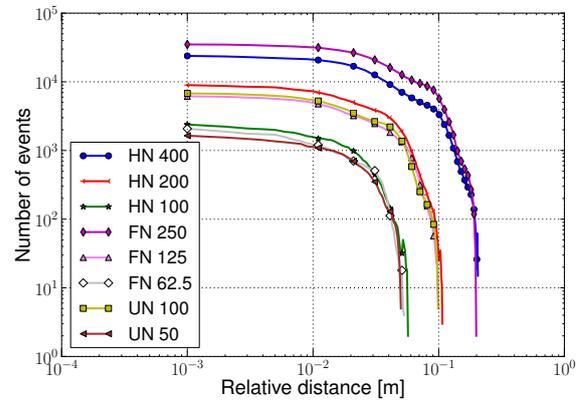
(a) Projection en direction X de la distance ΔG_{f_2} (b) Projection en direction Y de la distance ΔG_{f_2}

FIGURE F.2 – Histogrammes en l'échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.

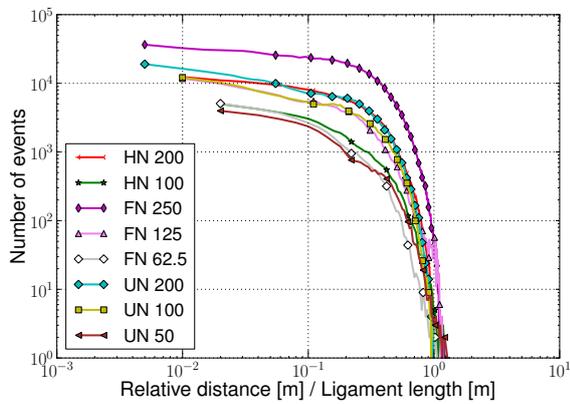
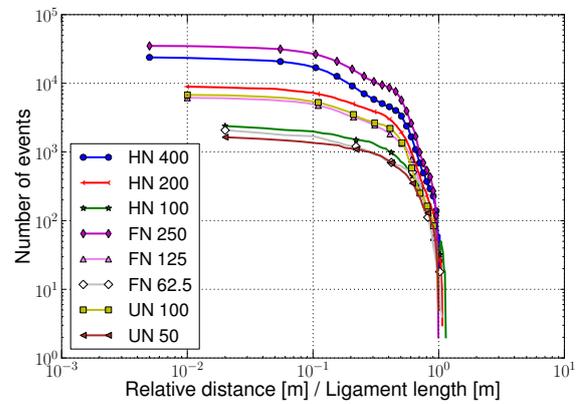
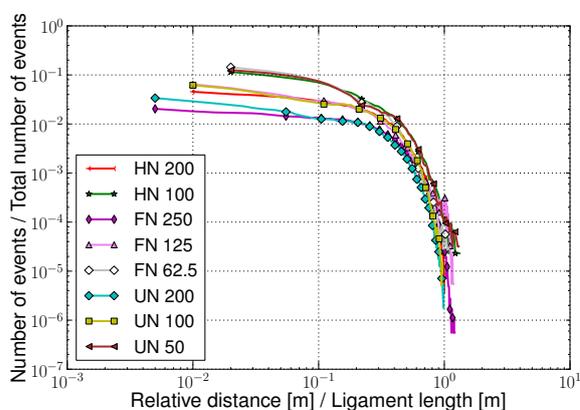
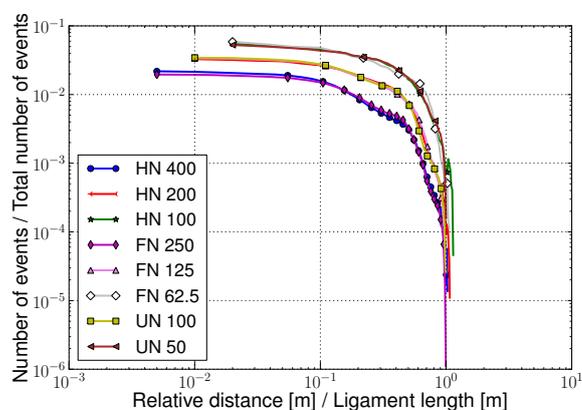
(a) Projection en direction X de la distance ΔG_{f_2} (b) Projection en direction Y de la distance ΔG_{f_2}

FIGURE F.3 – Histogrammes en l'échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.



(a) Projection en direction X de la distance ΔG_{f2}



(b) Projection en direction Y de la distance ΔG_{f2}

FIGURE F.4 – Histogrammes en l'échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent et par le nombre total d'événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm.

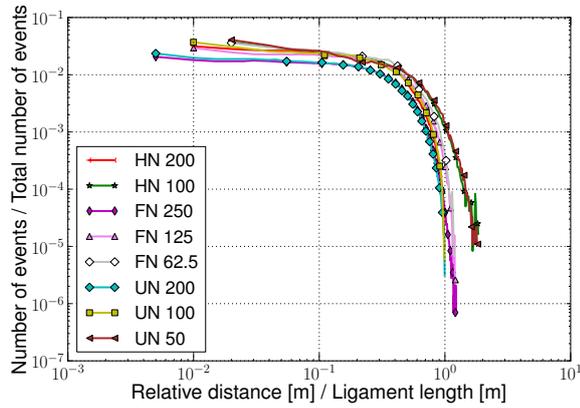
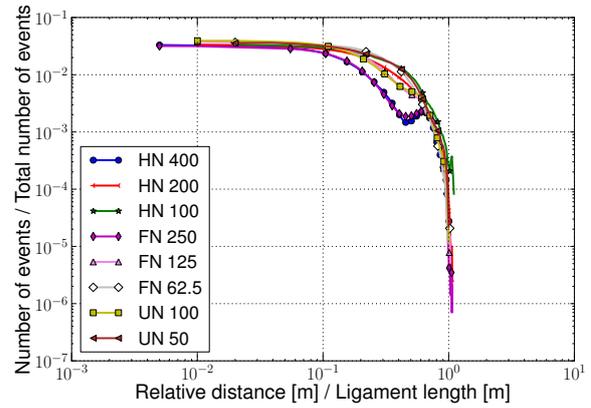
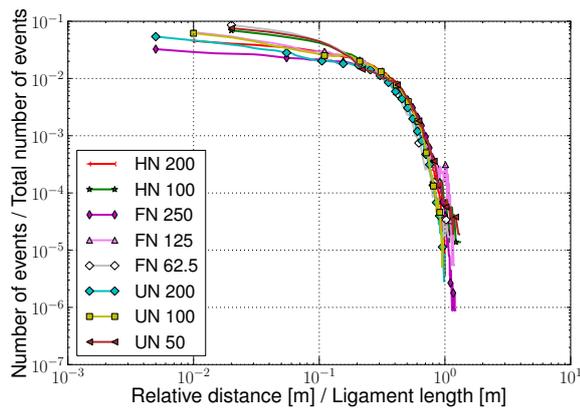
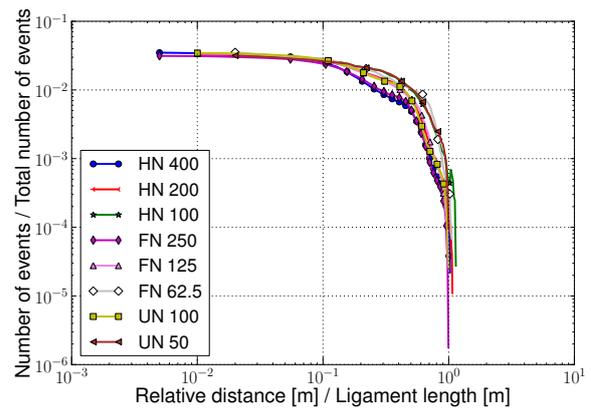
(a) Projection en direction X de la distance ΔG_{f1} (b) Projection en direction Y de la distance ΔG_{f1} (c) Projection en direction X de la distance ΔG_{f2} (d) Projection en direction Y de la distance ΔG_{f2}

FIGURE F.5 – Histogrammes en l'échelle logarithmique des projections horizontale et verticale des distances relatives entre événements normalisés par la longueur du ligament équivalent et par le nombre total d'événements pour toutes les géométries HN, FN, UN pour les poutres ayant une longueur de ligament équivalent de 50, 100 et 200mm. – Courbes décalées manuellement.

Paramètres des signaux d'émission acoustique

Les signaux successifs enregistrés lors des différentes expériences sont appelés salves (G.1). Pour être enregistrée, une salve doit dépasser un seuil de déclenchement défini par l'opérateur permettant de s'affranchir le plus possible du bruit du fond tout en conservant le maximum d'information provenant du système étudié. Une salve est constituée d'un ou plusieurs coups qui sont appelés aussi "alternances". Le nombre de coups correspond au nombre de fois où l'amplitude a dépassé le seuil choisi par l'opérateur. Le coup de plus forte amplitude d'une salve définit l'amplitude de celle-ci. La durée d'une salve correspond au temps écoulé entre le premier et le dernier coup. Le temps de montée, ou le Rise Time, est associé au temps compris entre le déclenchement de la salve et le coup de plus forte amplitude. Parmi les autres caractéristiques enregistrées il faut signaler la fréquence et l'énergie du signal qui sont reliées à la fonction de transfert du système et à l'énergie des phénomènes actifs. Le "count to peak" est en fait le nombre de coups compris entre le déclenchement et le coup de plus forte amplitude.

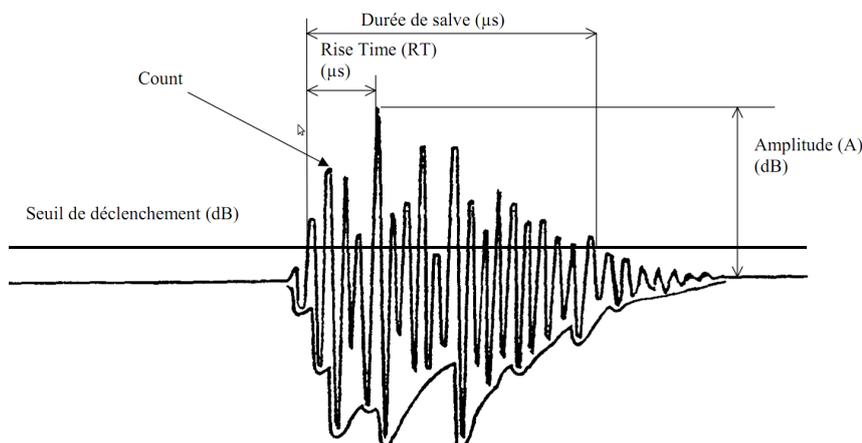


FIGURE G.1 – Représentation d'une salve d'émission acoustique.

Essais de flexion 3 points avec enregistrement d'émissions acoustiques – Résultats bruts et caractérisation mécanique

Les figures H.1, H.2, H.3 et H.4 montrent la comparaison entre les courbes expérimentales de la première (en bleu) et deuxième (en rouge) campagnes.

Les tableaux H.1, H.2 et H.3 compilent les résultats de la caractérisation mécanique du mélange utilisé pour la confection des échantillons.

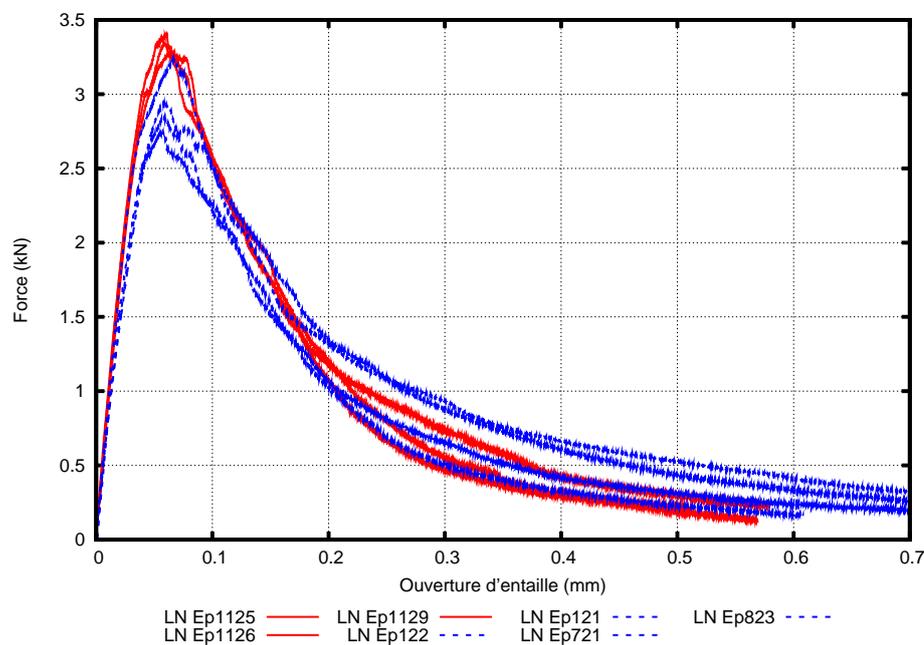


FIGURE H.1 – Comparaison des courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées HN , $D = 200$.

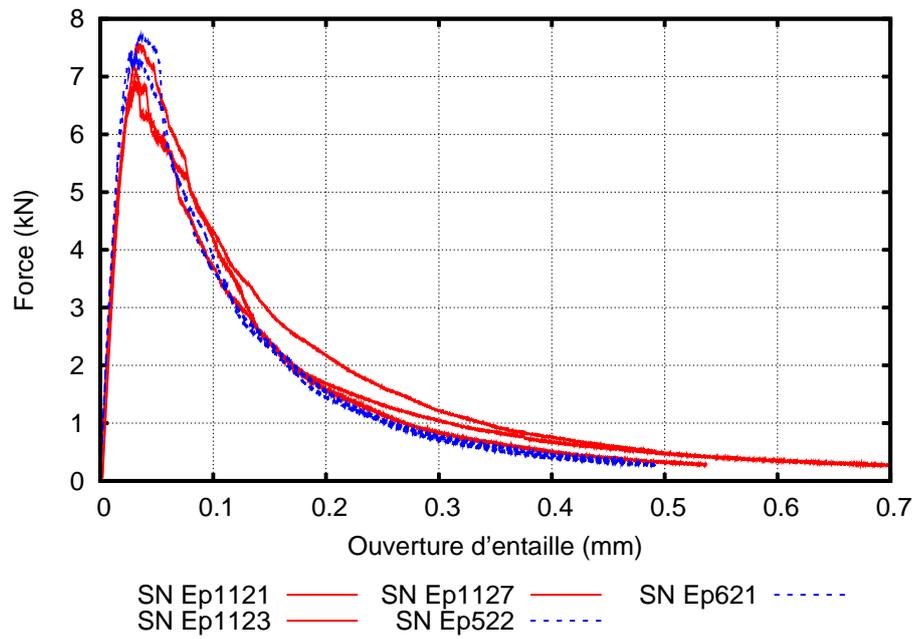


FIGURE H.2 – Comparaison des courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées FN , $D = 200$.

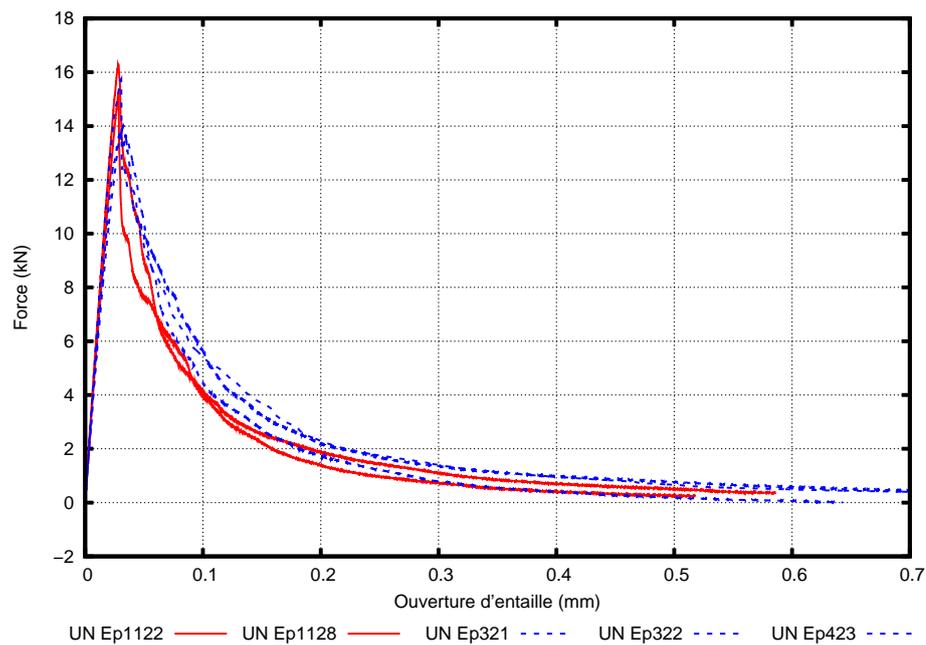


FIGURE H.3 – Comparaison des courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées UN, $D = 200$.

Essai #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Diamètre (mm)	Âge (jours)	Résistance à la compression (MPa)	Incertitude (MPa)	Incertitude (%)
1151	11	216.0	114.0	226	36.3	0.10	0.27
1152	11	216.0	113.0	226	31.6	0.24	0.27
1185	11	145.0	74.0	226	35.04	0.1	0.28
1186	11	159.0	74.0	226	32.9	0.09	0.28
953	9	214.0	113.0	226	46.0	0.12	0.27
958	9	215.0	113.0	226	46.4	0.12	0.27
952	9	219.0	113.0	226	42.02	0.12	0.27

TABLE H.1 – Essais de compression – Résistance à la compression

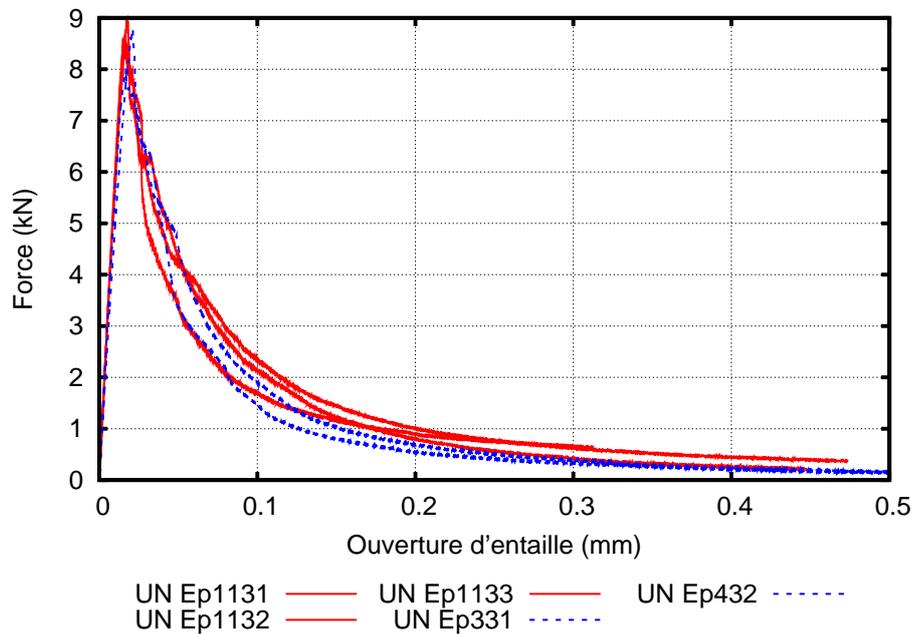


FIGURE H.4 – Comparaison des courbes brutes Force / CMOD – Éprouvettes entaillées UN, $D = 100$.

Essai #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Diamètre (mm)	Âge (jours)	Module d'Young (GPa)	Incertitude (GPa)	Incertitude (%)
1185	11	145.0	73.8	226	40.0	0.42	1.04
1186	11	159.0	73.9	226	37.6	0.62	1.66
1151	11	218.0	113.0	226	37.41	0.55	1.48
953	9	215.0	113.0	226	40.0	0.59	1.48
952	9	219.0	113.0	226	39.26	0.59	1.47

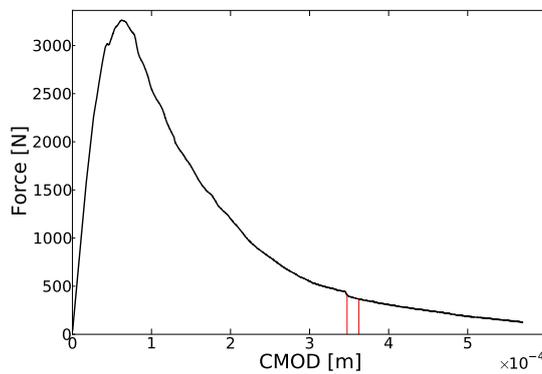
TABLE H.2 – Essais de compression – Module d'Young

Essai #	Gâchée #	Hauteur (mm)	Diamètre (mm)	Âge (jours)	Résistance à la traction par fendage (MPa)	Incertitude (MPa)	Incertitude (%)
1154	11	216.0	113.0	227	4.01	0.015	0.37
1155	11	214.0	113.0	227	4.32	0.016	0.365
956	9	210.0	113.0	227	3.78	0.015	0.389
957	9	210.0	113.0	227	4.23	0.016	0.374

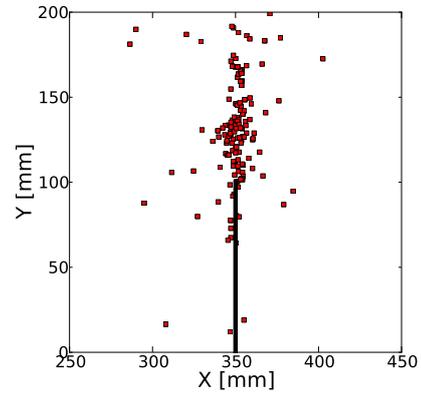
TABLE H.3 – Essais de fendage – Résistance à la traction par fendage

I

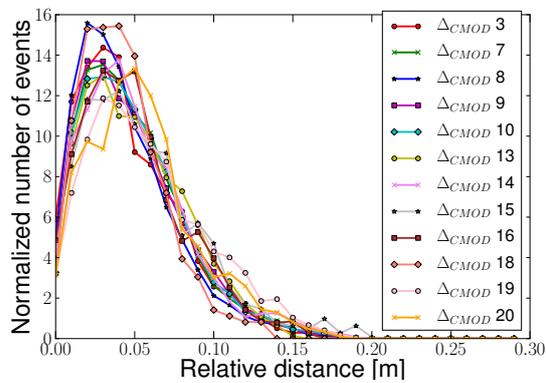
**Dépouillement en terme d'histogrammes des distances
relatives à partir de données expérimentales**



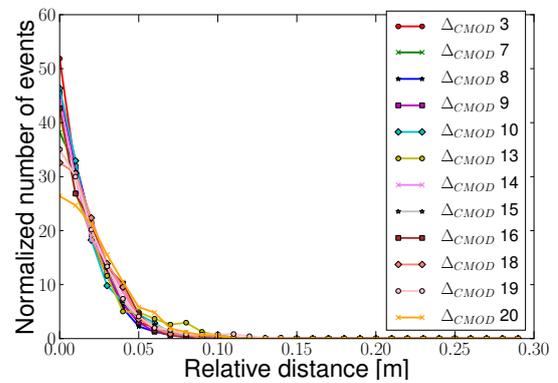
(a) Incrément de temps en cours d'analyse



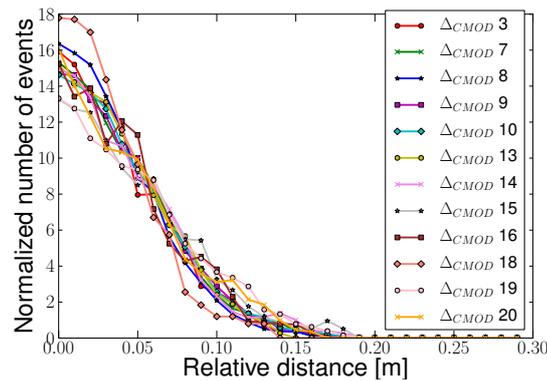
(b) Localisation des événements avec $G_f \geq 700 J/m$



(c) Distance relative entre événements



(d) Distance relative entre événements – projection X



(e) Distance relative entre événements – projection Y

FIGURE I.1 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette HN 1125.

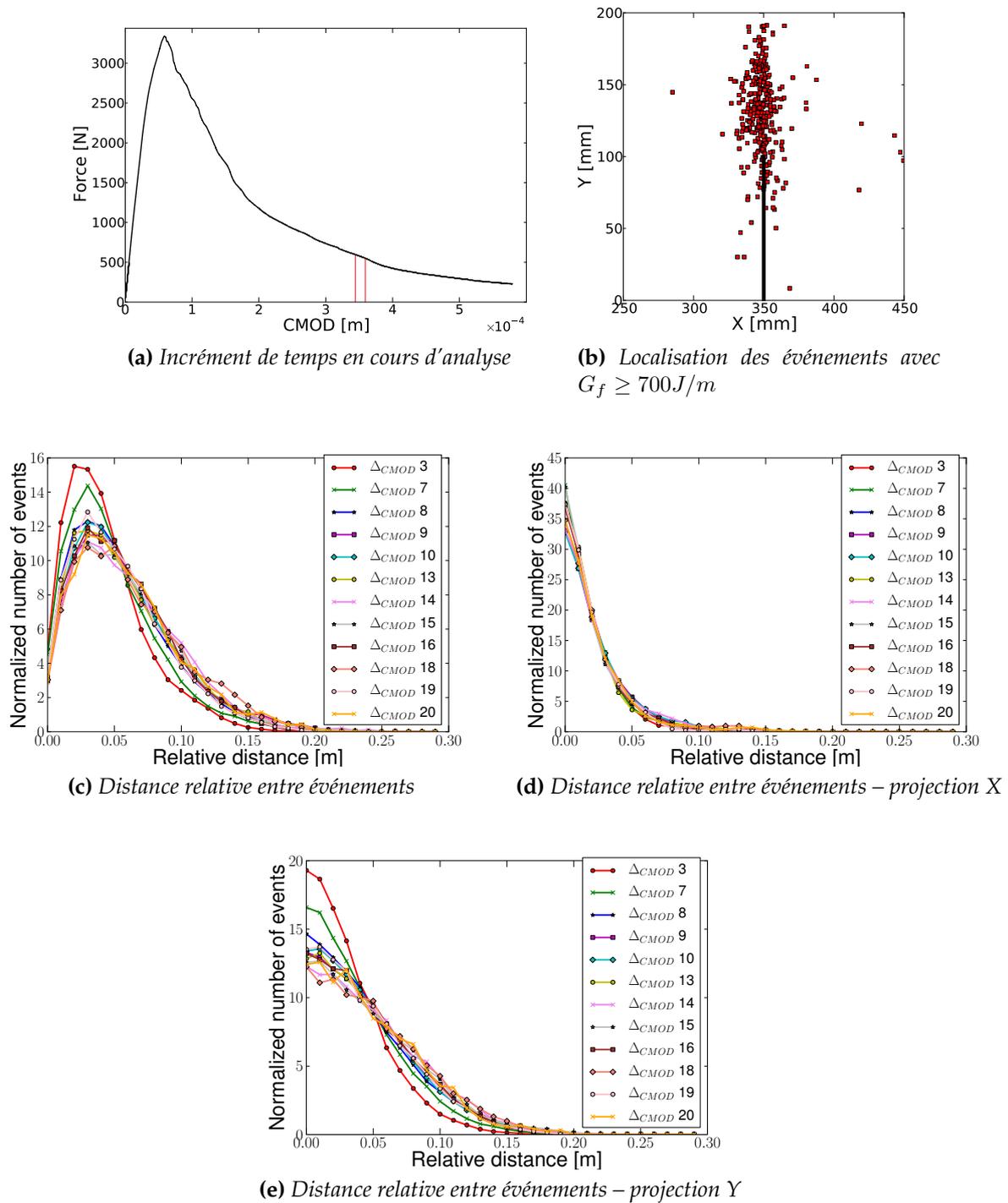
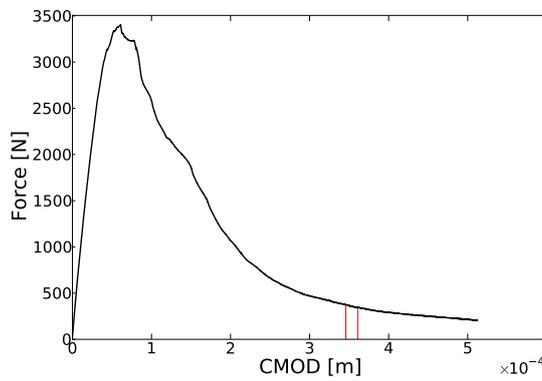
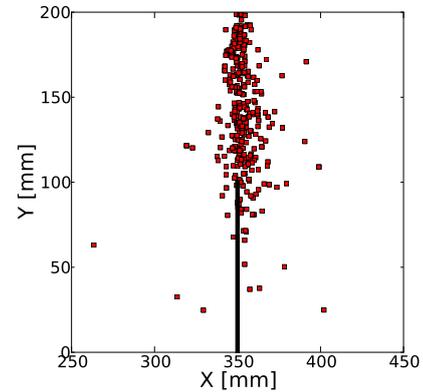


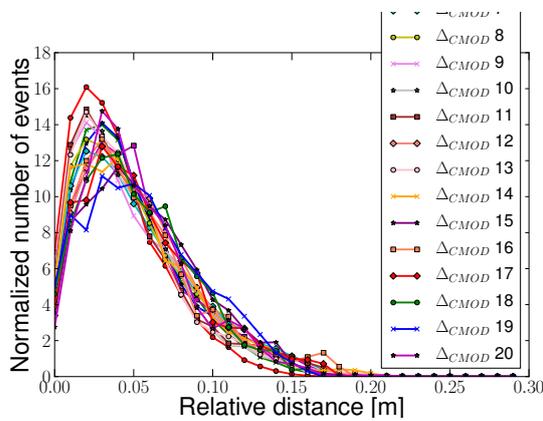
FIGURE I.2 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette HN 1126.



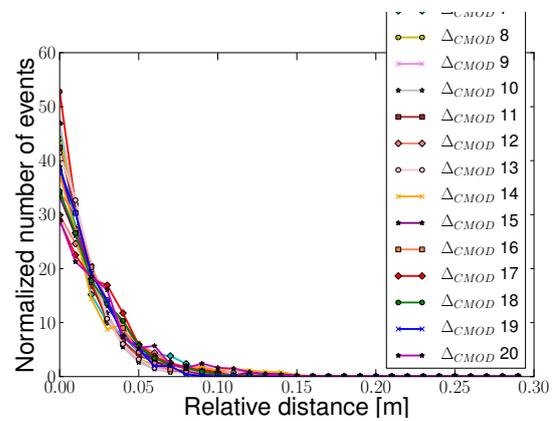
(a) Incrément de temps en cours d'analyse



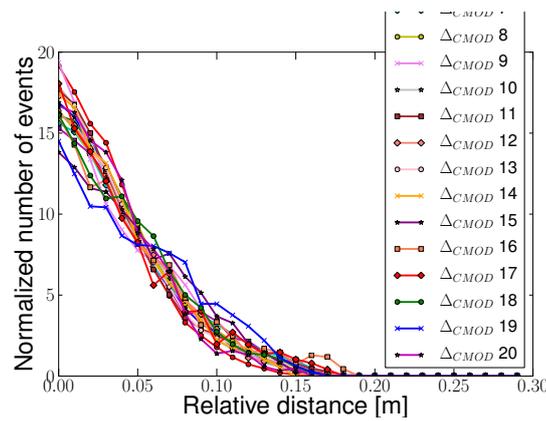
(b) Localisation des événements avec $G_f \geq 700 J/m$



(c) Distance relative entre événements



(d) Distance relative entre événements – projection X



(e) Distance relative entre événements – projection Y

FIGURE I.3 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette HN 1129.

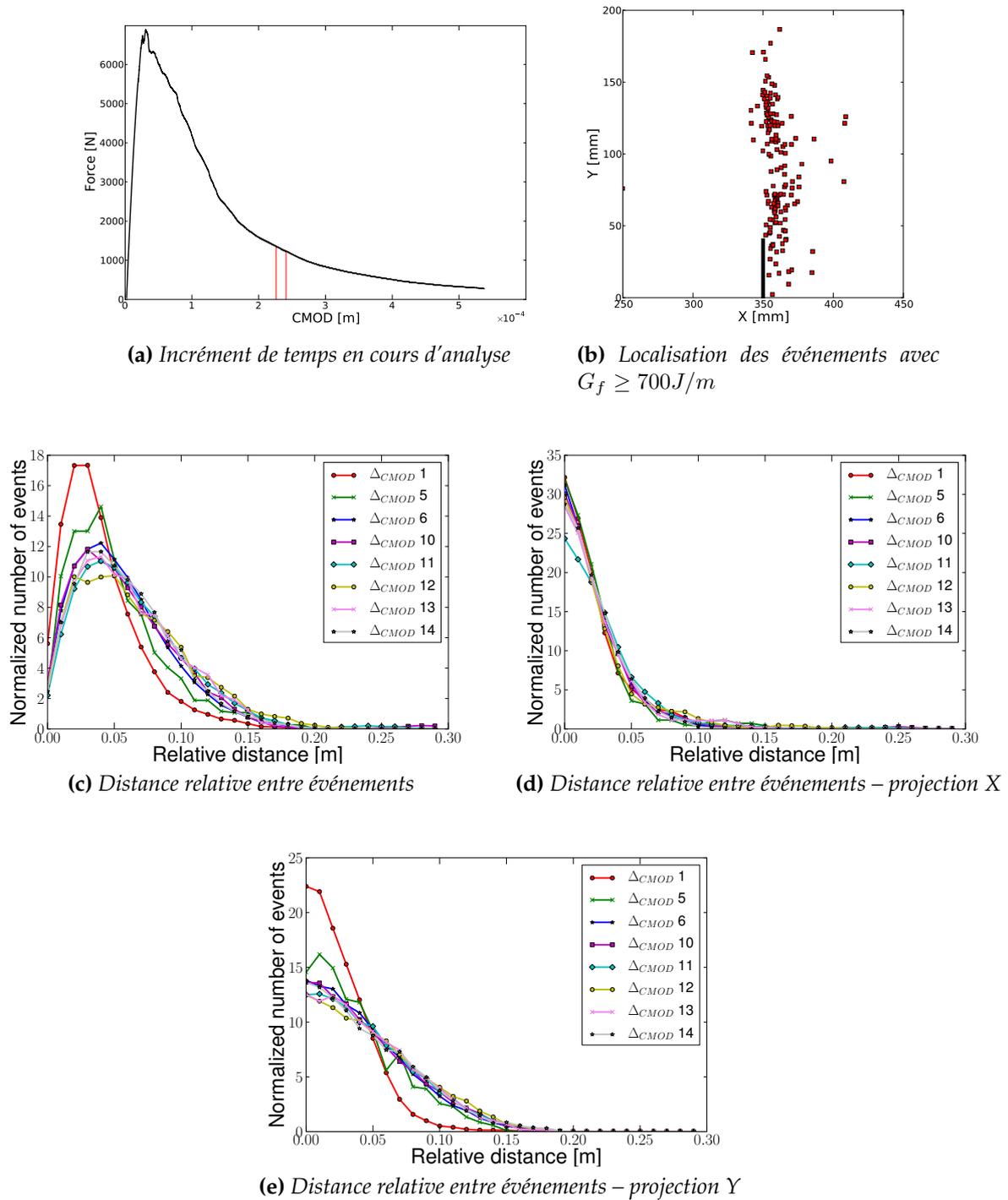
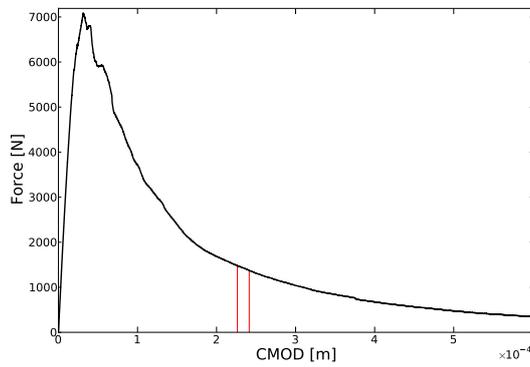
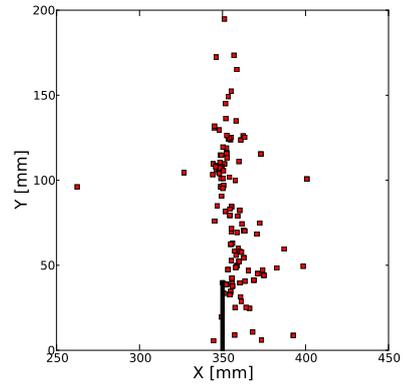


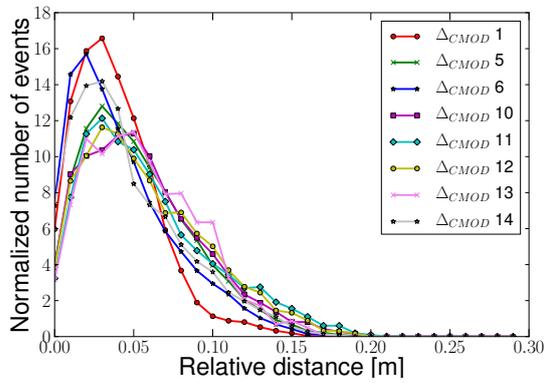
FIGURE I.4 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette FN 1121.



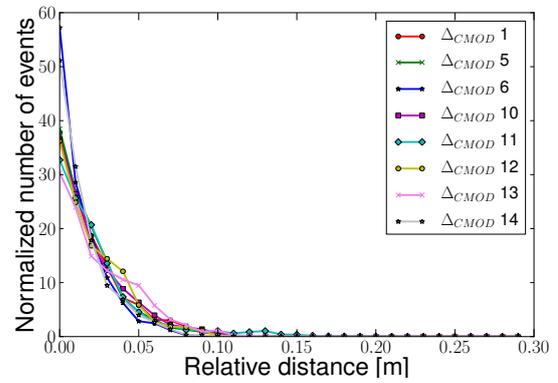
(a) Incrément de temps en cours d'analyse



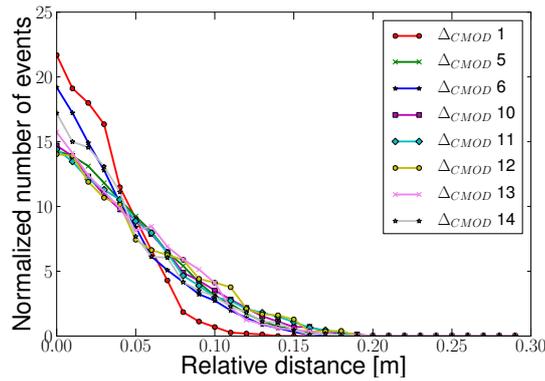
(b) Localisation des événements avec $G_f \geq 700 J/m$



(c) Distance relative entre événements



(d) Distance relative entre événements – projection X



(e) Distance relative entre événements – projection Y

FIGURE I.5 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette FN 1123.

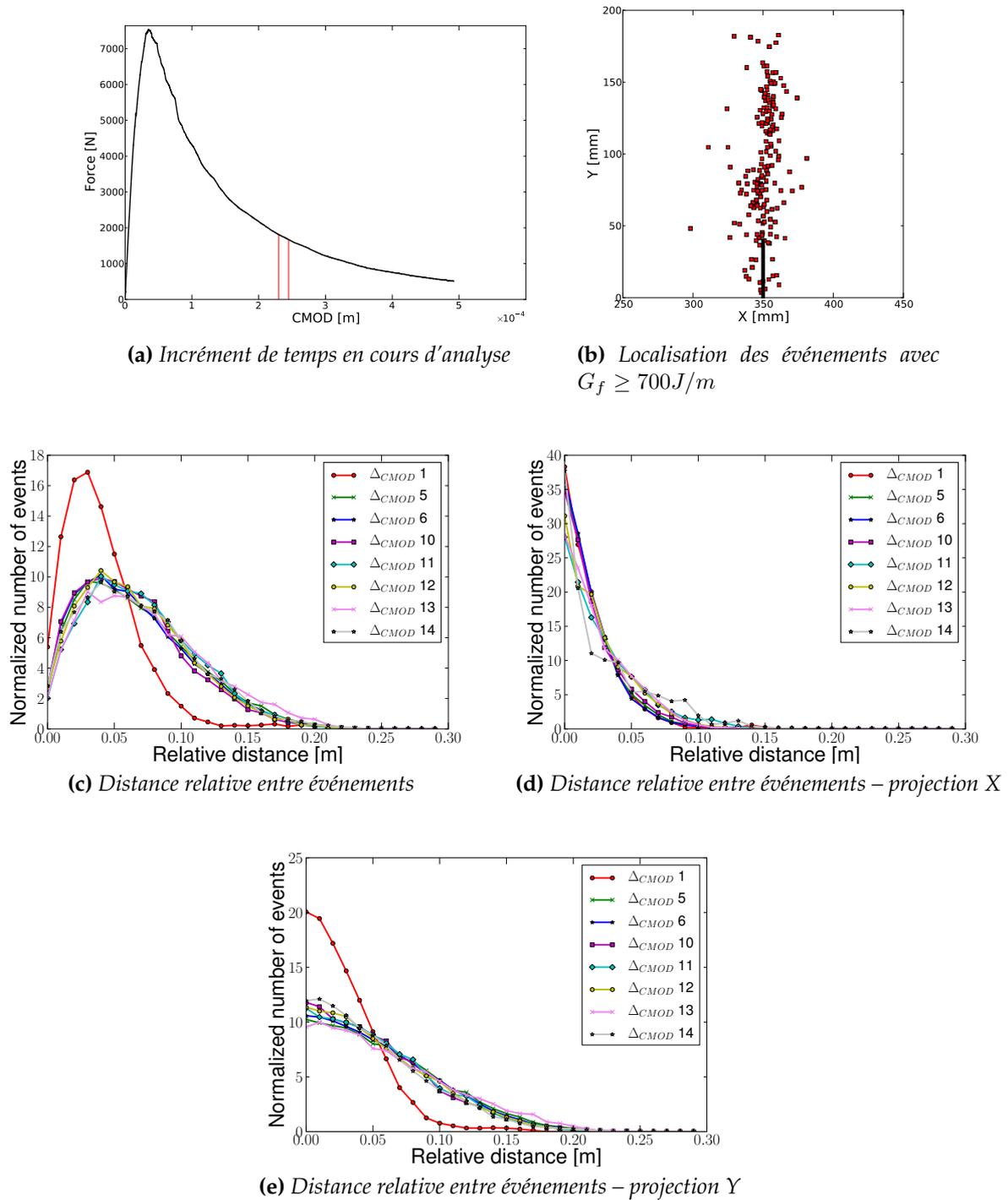


FIGURE I.6 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette FN 1127.

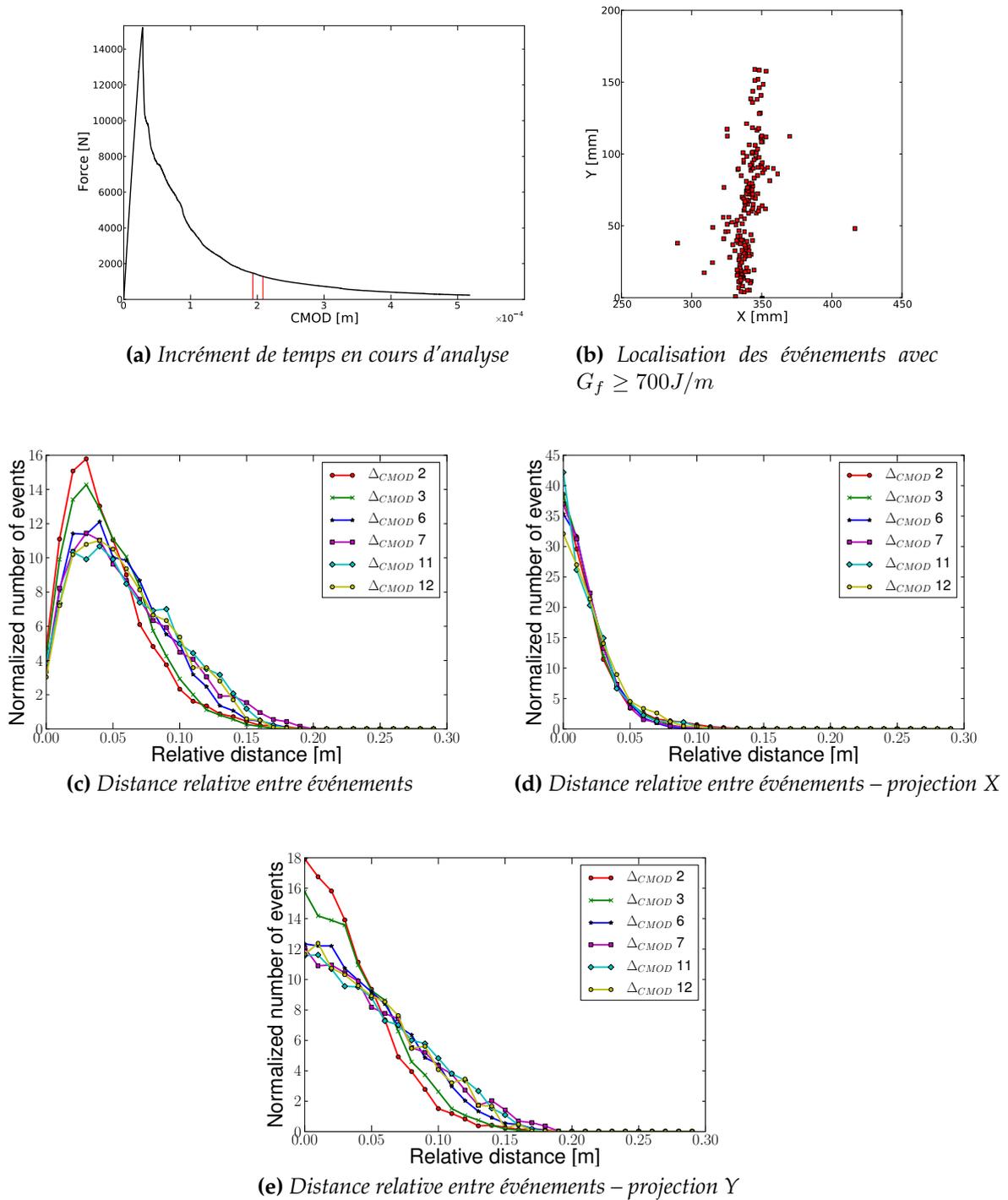


FIGURE I.7 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1122.

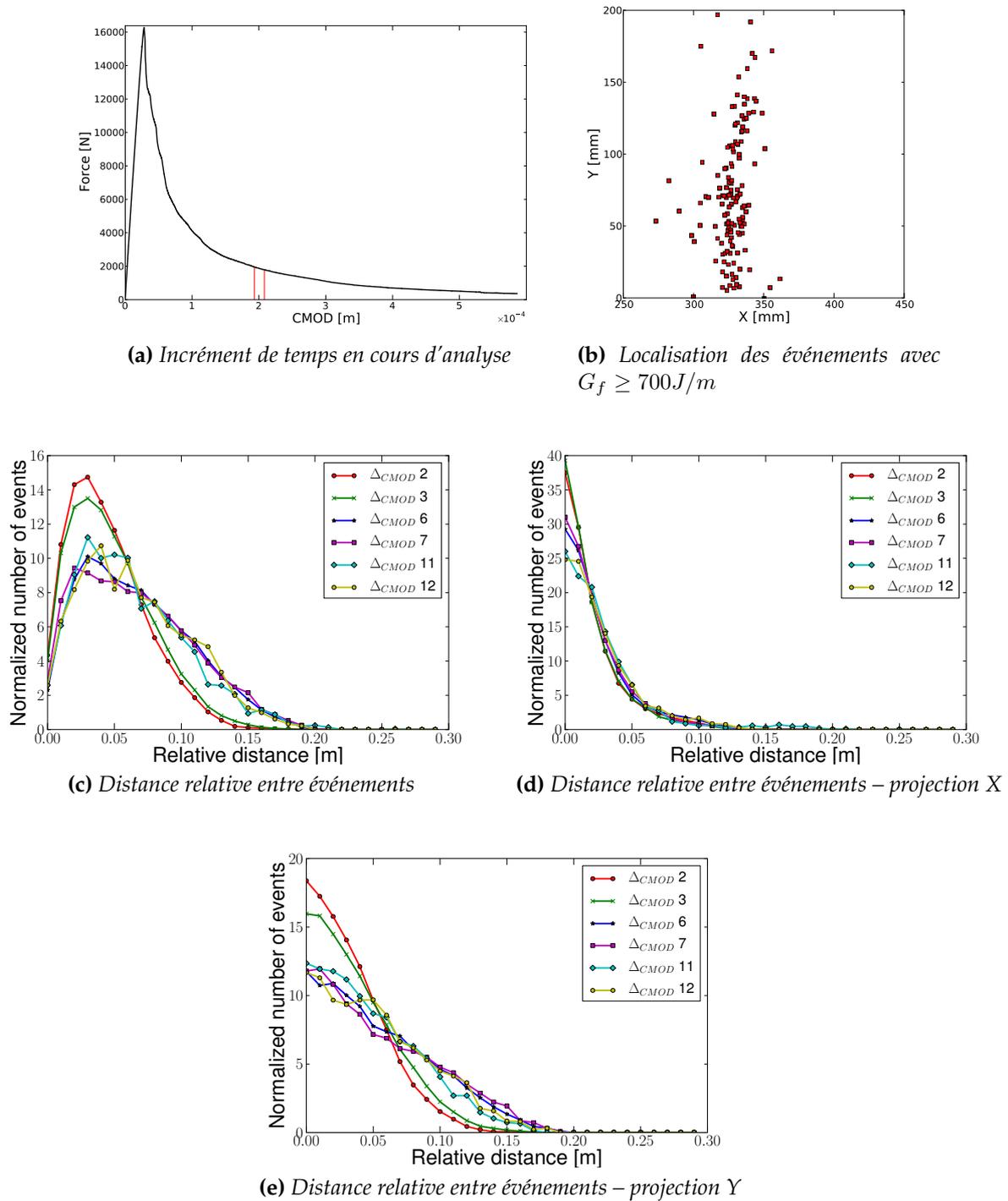
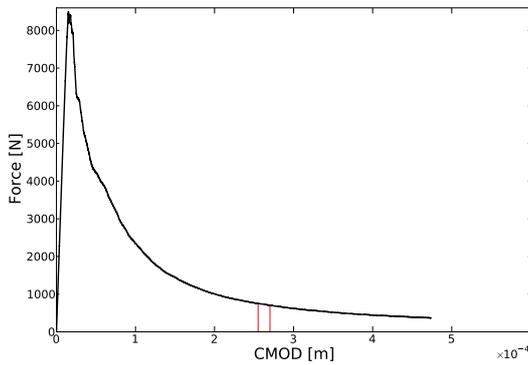
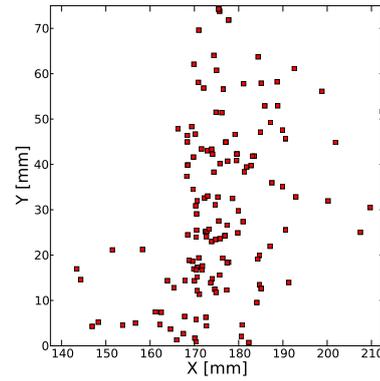


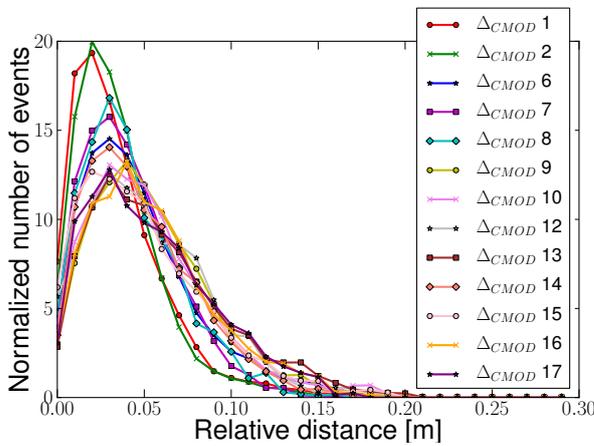
FIGURE I.8 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1128.



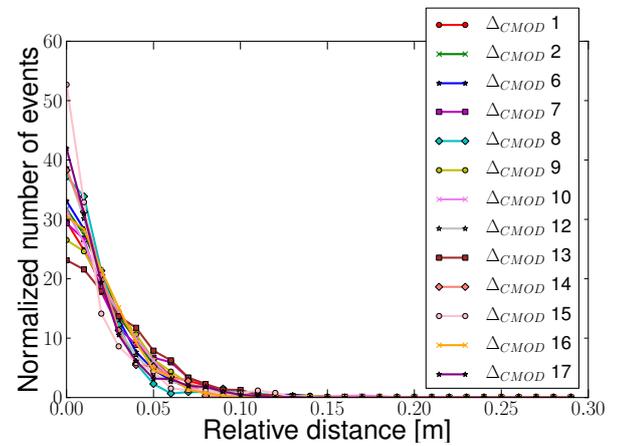
(a) *Incrément de temps en cours d'analyse*



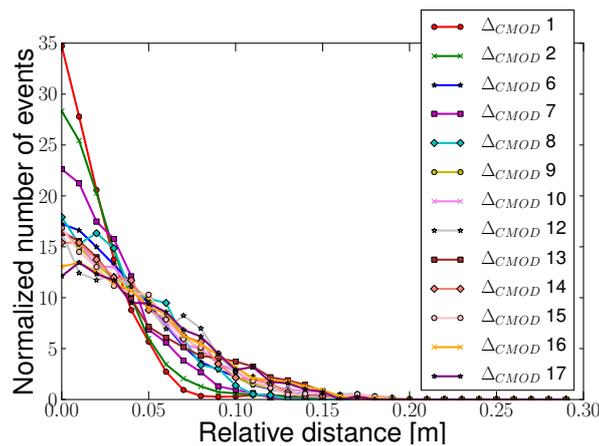
(b) *Localisation des événements avec $G_f \geq 700 \text{ J/m}$*



(c) *Distance relative entre événements*



(d) *Distance relative entre événements – projection X*



(e) *Distance relative entre événements – projection Y*

FIGURE I.9 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1131.

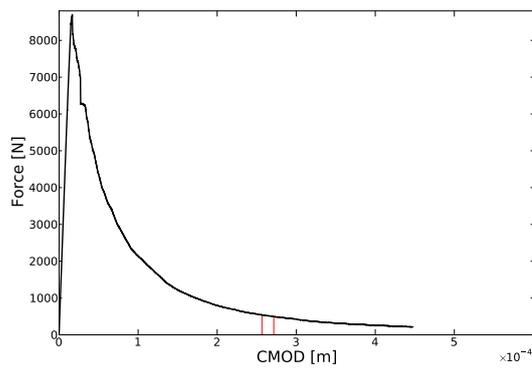
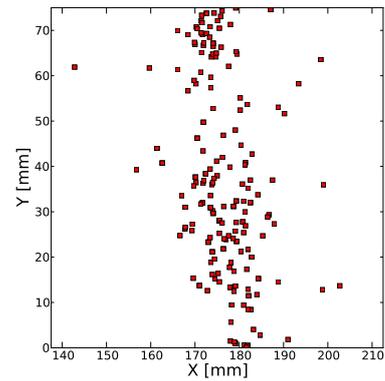
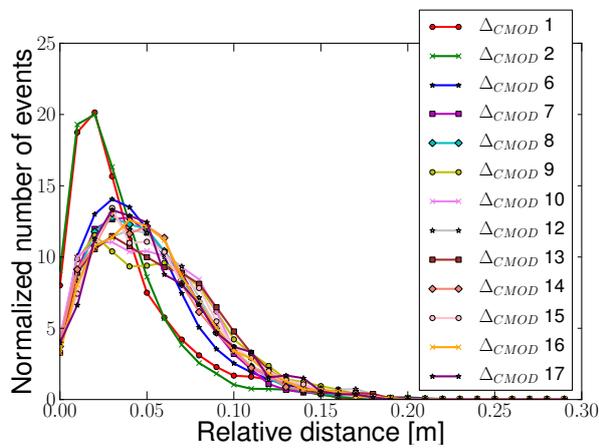
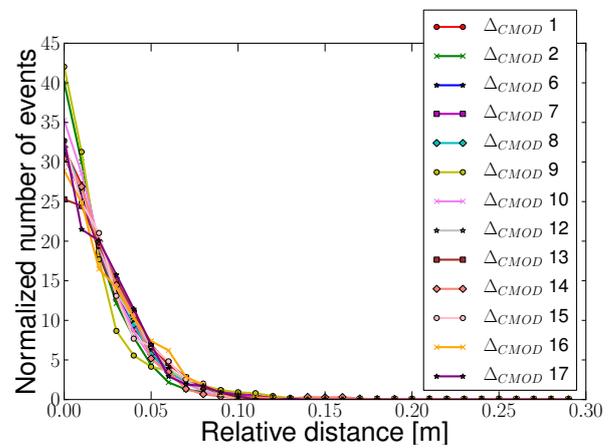
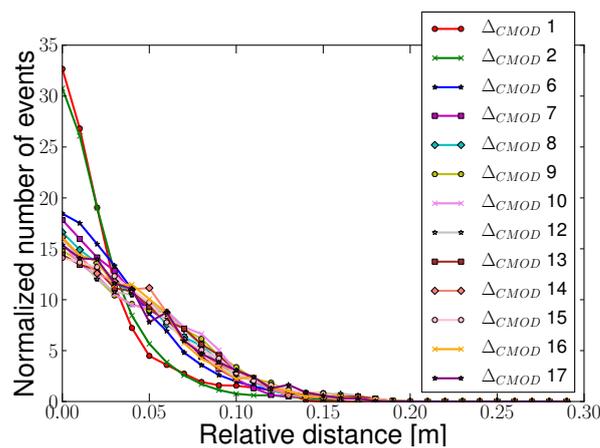
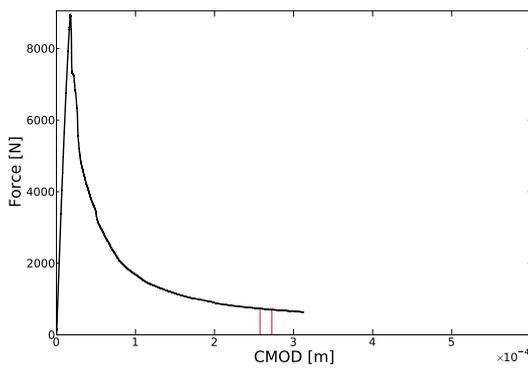
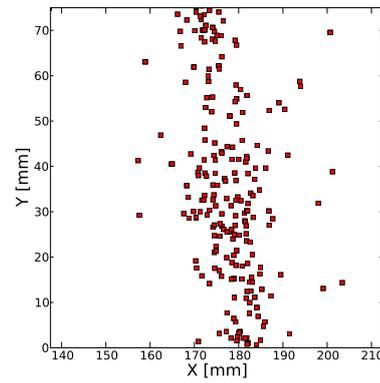
(a) *Incrément de temps en cours d'analyse*(b) *Localisation des événements avec $G_f \geq 700 \text{ J/m}$* (c) *Distance relative entre événements*(d) *Distance relative entre événements – projection X*(e) *Distance relative entre événements – projection Y*

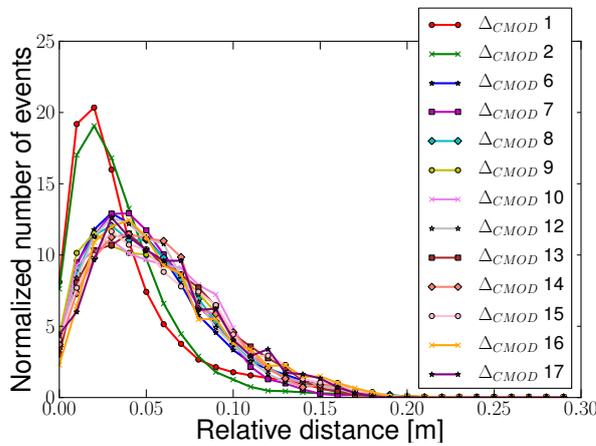
FIGURE I.10 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1132.



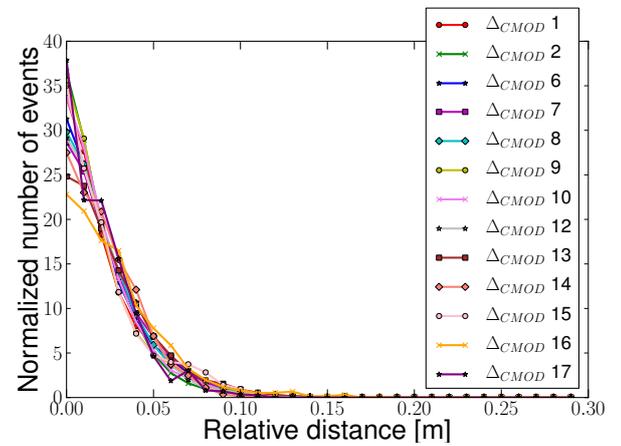
(a) *Incrément de temps en cours d'analyse*



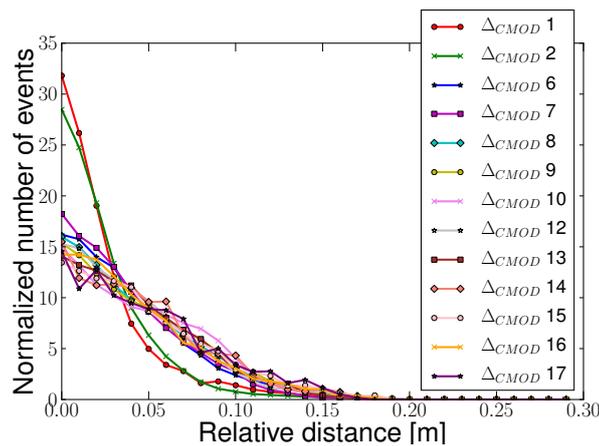
(b) *Localisation des événements avec $G_f \geq 700 \text{ J/m}$*



(c) *Distance relative entre événements*



(d) *Distance relative entre événements – projection X*



(e) *Distance relative entre événements – projection Y*

FIGURE I.11 – Histogrammes de distances relatives et composantes en la direction horizontale et verticale – Cas particulier de l'éprouvette UN 1133.