THÈSE

pour l'obtention du grade de Docteur en Mathématiques
de l'Université Paris Dauphine

Présentée et soutenue publiquement par :

Makram Ben Dbabis

Octobre 2012

Modèles et méthodes actuarielles pour l'évaluation quantitative des risques en environnement

Solvabilité II

JURY :

M. Christian HESS (directeur),	Professeur émerite à l'Université Paris Dauphine
M. Lotfi BELKACEM (rapporteur),	Professeur des université, Université de Sousse, Tunisie
M. Faysal MANSOURI (rapporteur),	Professeur des université, Université de Sousse, Tunisie
M. Fréderic Planchet (Examinateur),	HDR, Université de Lyon 1

L'Université de Paris Dauphine n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse. Ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur.

Remerciements

Je tiens de prime abord à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur le professeur Christian HESS, qui m'a fait le grand honneur d'accepter de diriger cette thèse. Je lui demeure reconaissant pour sa rigueur intellectuelle, ses conseils et surtout sa passion pour la recherche qu'il a su me communiquer tout au long de ces quatres années.

Je remercie vivement Messieurs les Professeurs Lotfi BELKACEM et Faysal MANSOURI pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse.

Enfin, je tiens à exprimer plus particulièrement ma reconnaissance à ma famille à laquelle je dois l'aboutissement de toutes ces années d'études. Je voudrais remercier mon cher papa *Ali*, ma chère maman *Mabrouka* et ma chère épouse pour leur soutien infini tout au long de mes études, sans oublier, mon grand père *Abd-Allah* qui a, jusqu'à ses dernières haures, souhaité qu'il me voit docteur.

Un grand merci à toute ma famille qui a toujours su me guider, me soutenir dans tous les choix que j'ai fait, et m'apporter l'équilibre nécessaire à mon épanouissement. Merci à toute ma belle-famille pour leur accueil, leur gentillesse, leur sympathie et pour tous les bons moments passés ensemble.
Merci aux amis rencontrés à Dauphine ou ailleurs, que je ne vois pour certains que trop peu souvent, mais qu'il est toujours agréable de retrouver.

Résumé

Les nouvelles normes prudentielles Solvabilité II se penchent sur question du contrôle de la solvabilité des acteurs de marché d'assurance et de réassurance. Nous nous sommes proposé dans cette thèse de présenter les moyens techniques permettant la recherche des besoins de couverture de la solvabilité des assureurs se traduisant par la mise en oeuvre d'une probabilité de ruine à moins de 0,5%, dans le cadre des modèles internes.

La première partie, en mettant l'accent sur le problème de valorisation économique des passifs d'assurance vie lié aux options incluses dans les contrats d'assurance et donc d'obtention de la distribution de la situation nette à un 1 an et donc de son quantile d'ordre 0.5%, présentra les différentes approches de modélisation permettant de contourner ces problèmes :

- Approche des simulations dans les simulations pûrement simulatoire et trop coûteuse en temps de calcul,
- Algorithme d'accéleration des simulations dans les simulations pour contourner les limites de la première approche,
- Approche par portefeuille répliquant
- Approche par fonction de perte

Dans une deuxième partie, l'accent sera mis sur la modélisation des risques techniques mal appréhendés par les assureurs en développant deux approches stochastiques pour modéliser, dans le cadre d'un modèle interne, les risques de longévité, de mortalité et aussi le risque dépendance. La troisième partie intéressera à l'optimisation du capital économique en mettant en œuvre la réassurance comme outil de gain en capital économique en proposant des approches de choix optimal en réassurance.

Mots clés : Solvabilité II, modèles internes, probabilité de ruine, risques techniques, reassurance, optimisation dynamique . . .

Abstruct

The new prudential standards, Solvency II, consider the question of controling of insurer and reinsurer's solvency. In this thesis, we've proposed technical solution for solvency capital assessment to keep ruin's probability under the target of 0.5% aimed by the Solvency II project in internal model prospect.

The First part will discuss the problem of economic valorization of life insurance liabilities and will present different modeling approaches to determine the net assets value distribution and assess the 0.5% percentile that can solve it :

- Nested simulation approach which is too much time consumer,
- Nested simulation accelerator,
- Replication portfolio approach,
- Loss function approach.

In the second part, we will focus on biometric risks modeling. Two stochastic modeling approaches was developped in order to model mortality & longevity and morbidity risks. The third part will focuss on capital optimization using reinsurance as a tool of capital reduction.

Keyword : Solvency II, Internal model, ruin's probability, biometric risks, reinsurance, dynamic optimization . . .

"Il y'a dans la création des cieux et de la terre et dans la succession de la nuit et du jour, des signes pour ceux qui sont doués d'intelligence"

Le Coran

Table des matières

Introduction générale **1**

I Quelques approches de modélisation de capital économique d'assurance vie **5**

1 Solvabilité en Assurance Vie **7**

1.1 Introduction 7

1.2 La notion de capital économique 8

1.3 Le bilan économique 11

1.4 Univers risque neutre ou univers historique 13

2 Quelques approches de modélisation du capital économique **15**

2.1 Introduction 15

2.2 Qu'est ce qu'un modèle interne ? 16

2.3 L'approche des simulations dans les simulations 18

2.3.1 Formulation mathématique 19

2.3.2 Passage de l'univers de probabilité historique à l'univers de probabilité risque-neutre 21

2.3.3 Etude du cas PREFON Retraite 28

2.3.4 Avantages et limites 31

2.4 Optimisation des simulations dans les simulations 32

2.4.1 Algorithme de Loisel et Devineau (2009) 32

2.4.2 Approche par quantiles géomètriques . . . 39
2.4.3 Approche par fonction de profondeur . . . 43
2.4.4 Optimisation des simulations secondaires . . . 45
2.5 L'approche de *Replicating Portfolio* . . . 48
2.5.1 Mise en œuvre . . . 49
2.5.2 Avantages et limites . . . 51
2.6 Approche LSMC : Least Square Monte Carlo . . . 52
2.6.1 Mise en œuvre . . . 53
2.6.2 Avantages et limites . . . 58
2.6.3 Application . . . 59
2.7 Conclusion . . . 62

II Modélisation des risques techniques 65

3 Modélisation stochastique de la mortalité 67
3.1 Modèles de mortalité stochastique . . . 69
3.2 Les modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges . . . 70
3.2.1 Le modèle de Denuit et Goderniaux (2005) . . . 70
3.2.2 Le modèle de Coale et Guo (1989) . . . 71
3.2.3 Le modèle de Coale et Kisker (1990) . . . 72
3.2.4 Le modèle de Lundberg (2001) . . . 72
3.2.5 Le modèle logistique . . . 73
3.2.6 Le modèle de Kanisto . . . 73
3.3 Les modèles de mortalité prospective . . . 73
3.3.1 Lee & Carter (1992) . . . 73
3.3.2 La méthode de Poisson Log-bilinéaire . . . 75
3.3.3 Modéle âge-période-cohorte & autres extensions . . . 77
3.4 Modèles d'intensité de mortalité . . . 78
3.5 Modélisation des décès comme un processus de comptage . . . 79
3.6 Intensité stochastique . . . 80
3.7 Les processus doublement stochastiques . . . 81

3.8 Intensité de mortalité et processus de diffusion 81
3.9 Structure affine de mortalité 83
3.10 Intensité de mortalité forward 86
3.11 Modélisation stochastique de la mortalité d'expérience et effets de sélection adverse 86
3.11.1 Données de l'étude 87
3.11.2 Choix de la période d'étude 88
3.11.3 Construction des scénarios de mortalité prospectifs d'expérience 88
3.12 Risque d'antisélection 96
3.12.1 Projection stochastique de provisions mathématique d'un portefeuille de rentes réversibles ou non réversibles 101
3.13 Prise en compte de mortalité catastrophique 103
3.14 Conclusion 104

4 Pilotage du risque dépendance en environnement Solvabilité II 105
4.1 Introduction 105
4.2 Le risque dépendance, risque long difficile à appréhender 107
4.2.1 Définition 107
4.2.2 Les contrats d'assurance dépendance 108
4.2.3 Risque long 109
4.3 Modélisation d'expérience du risque dépendance 110
4.3.1 Données de l'étude 111
4.3.2 Loi d'entrée en dépendance 114
4.3.3 Loi de maintien en dépendance 119
4.4 Tarification et provisionnement du risque dépendance 122
4.4.1 Tarification 122
4.4.2 Provisionnement 125
4.5 Le modèle Stochastique 129
4.5.1 Description 129
4.5.2 L'algorithme 131
4.5.3 Application numérique 133
4.6 Conclusions 144

III Optimisation de la réassurance **147**

5 Optimisation de la réassurance : Approche classique **149**

5.1 Introduction . . . 149
5.2 Approche Moyenne Variance . . . 151
5.2.1 Approche de De Finetti (1940) [29] . . . 151
5.2.2 Approche de Krvavych (2005) . . . 155
5.2.3 Approche de Hess (2000) . . . 167
5.3 Maximisation de l'Utilité . . . 170
5.4 Minimisation de la probabilité de ruine . . . 173
5.4.1 Maximisation du coefficient d'ajustement de Lundberg . . . 175
5.5 Minimisation des mesures de risques . . . 180
5.5.1 Théorème d'optimisation . . . 182
5.6 Maximisation de la probabilité de survie jointe de la cédante et le réassureur . . . 183
5.6.1 Cas des traités excess of loss . . . 184

6 Réassurance optimale et contrôle stochastique **189**

6.1 Introduction . . . 189
6.2 Cadre de travail . . . 190
6.3 Formulation du problème . . . 192
6.4 Equation d'Hamilton Jacobi Bellman . . . 194
6.4.1 Principe de Bellman . . . 194
6.4.2 Dérivation formelle de l'équation d'HJB . . . 196
6.5 Résolution de l'équation d'HJB . . . 198
6.6 Algorithme de résolution . . . 202
6.7 Conclusions . . . 203

Conclution générale **205**

Bibliographie **213**

List of figures **225**

Introduction générale

L'introduction des nouveaux référentiels comptables (IFRS [1]), économiques (MCEV [2]) et prudentiels (Solvabilité II), oblige les acteurs du secteur d'assurance à refléchir à l'évaluation de leurs engagements. Les normes **IFRS** et **MCEV** consistent respectivement à fournir des informations financières comparables sur les niveaux de provisions techniques et capitaux propres d'un assureur et à lui attribuer une valeur économique d'une façon globale en prenant compte la valeur de la compagnie en cas de transaction équilibrée entre deux parties et la rentabilité des affaires en portefeuille. La norme Solvabilité II a pour but de mettre en place un contrôle prudentiel tant au niveau des provisions techniques qu'au niveau des fonds propres afin de limiter la probabilité de ruine à un an de l'assureur et de garantir sa solvabilité à l'égard de ses assurés.

Il est important de signaler que ces approches poursuivent néanmoins le même but de quantification des risques futurs. Une telle orientation s'est exprimée par la volonté de valorisation des actifs et des passifs par référence directe au marché et, lorsque cela est impossible et qu'on utilise des modèles d'évaluation, d'utiliser des paramètres issus du marché.

Une telle réflexion nous amène à distinguer les risques réplicables et les risques non-réplicables. En effet, les prix des risques réplicables se déduisent directement du marché en utilisant les modèles d'évaluation financière. Ces prix contiennent une prime de risque car elle est anticipée par le marché par les fluctuations des valeurs de l'actif. Cependant, les risques non réplicables ne sont, par définition, pas négociés sur un marché financier à l'exception de quelques opérations de titrisation

1. International Financial Reporting Standards, applicables depuis Janvier 2005
2. Market Consistent Embedded Value

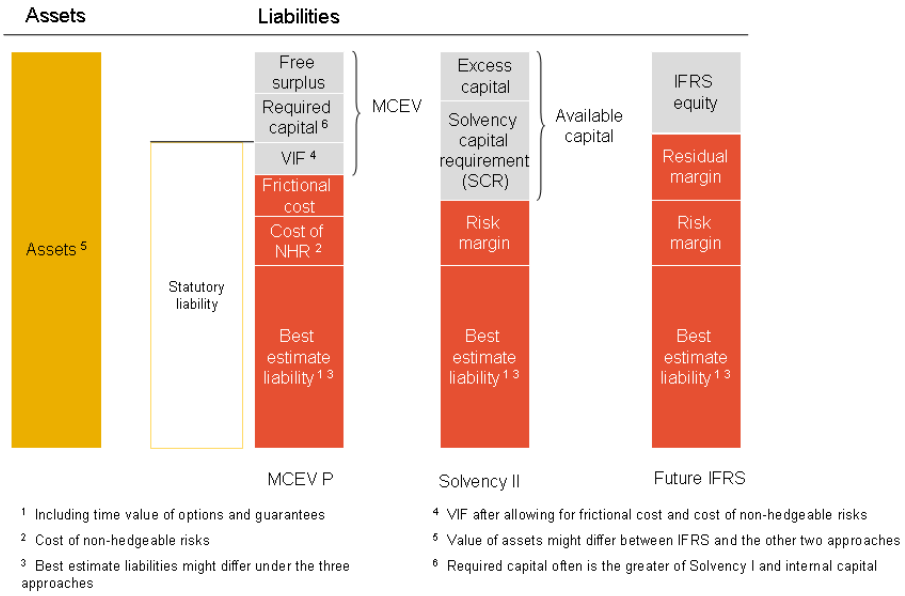


FIGURE 1 – Du bilan Solvabilté I au bilan Solvabilité II

(AXA avec son portefeuille auto et Swiss Re avec ses longevity bonds) et donc leurs prix ne sont pas directement observables. Pour ces risques, les études économiques d'impact, dans le cadre du projet Solvabilité II, ont apporté une solution qui consiste à donner, dans un premier temps, un prix *Best Estimate*[3] auquel on ajoute une marge pour risque déterminée selon une méthode de coût de capital[4].

Il s'avère donc, que les réformes Solvabilité II sont ambitieuses au moins à deux égards ; le périmètre d'application et les moyens techniques à envisager. Il s'agit d'une réforme engagée sur les traces de celle de Bâle II, dont les réflexions ainsi que les travaux d'analyses sont assurés par le **EIOPA**[5]. Toutes les études engagées visent à cerner une manière appropriée d'évaluation du capital requis de solvabilité **SCR**[6] ainsi que la détermination des besoins minimums en capital **MCR**[7].

3. Il s'agit d'un prix qui prend la moyenne des flux futurs actualisés au taux sans risque
4. Le coût de capital ou en anglais *Capital cost* est le montant exprimé en pourcentage annuel, qu'une société doit payer pour obtenir des fonds.
5. Comité européen réunissant les autorités de contrôles des 25 pays associés.
6. Solvency Capital Requirement
7. Minimum Capital Requirement

Or, le calcul de ces agrégats économiques de solvabilité à horizon d'un an n'est pas un problème facile à résoudre surtout lorsqu'il s'agit des engagements d'assurance vie s'étalant sur des horizons largement supérieurs à un an en plus des liens de dépendance entre l'actif et le passif à cause de certaines options comprises dans les contrats (Clauses de Participation aux Bénéfices, rachat, ect. . .). Ce calcul nécessite une estimation de la distribution de l'actif net de l'assureur dans un an afin de déterminer un capital permettant de faire face à une ruine dans 99,5% des cas. Ceci correspond bien à un quantile d'ordre 0,5% de la distribution en question.

Cependant, il est à noter que la distribution de l'actif net à la fin de la première année de projection doit comprendre tous les aléas financiers et non financiers impactant l'actif et le passif avec prise en compte des informations du monde réel (information reflétant au mieux la réalité du marché). Ceci nécessite une table de scénarios économiques mise à jour par rapport à la réalité du marché. Or, l'évaluation ***market consistent*** des engagements d'assurance vie nécessite une deuxième table de scénarios économiques risque-neutre prenant en compte des informations disponibles à horizon d'un an afin de déterminer la valeur économique des engagements à la fin de la première année d'où la nécessité de recalage de ses scénarii par rapport à la table monde réel. Il est donc nécessaire d'effectuer des simulations ***market consistent*** secondaires au sein de simulations de première année dites *simulations monde réel*. Cette approche est connue sous le nom de *"simulations dans les simulations"* ou SdS[8]. Néanmoins, d'autres approches ont été proposées comme alternatives à l'approche SdS.

Cependant, même si la théorie financière offre plusieurs approches pour la modéli-sation des actifs, les engagements d'assurance restent fortement liées au comportement des assurés dont la description fidèle demeure un exercice compliqué. Il s'agit des risques techniques et d'assurance tels que le rachat, les transferts, la mortalité, la longévité, la pandémie, la dépendance, l'incapacité. Cette thèse propose des méthodes de modélisation des risques de longévité, pandémique et de dépendance dans le cadre de modèle interne permettant ainsi la prise en compte de l'expérience de l'assureur et des statistiques observées.

8. En anglais *Nested Simulation*

Par comparaison à la norme Solvabilité I, la charge de capital risque de s'alourdir pour les assureurs qui font toujours face à une concurrence accrue sur le marché et à des exigences de rentabilité de la part des actionnaires. Donc, la recherche des effets de levier permettant d'optimiser les capital de solvabilité est d'une extrême importance. Parmi ces leviers, la réassurance reste sans doûte le principal outil de transfert des risques. Cette dernière peut se présenter comme procédé d'optimisation du capital économique. Plus loin dans cette thèse, sont proposées des approches d'optimisation de la richesse de l'assureur par la réassurance.

Première partie

Quelques approches de modélisation de capital économique d'assurance vie

Chapitre 1

Solvabilité en Assurance Vie

1.1 Introduction

Etant l'un des projets les plus importants actuellement menés par la Commission et les États membres dans le secteur de l'assurance, Solvabilité II consiste à mettre au point un nouveau système, mieux ajusté aux risques, permettant d'évaluer la solvabilité globale des compagnies d'assurance. Ce système doit doter les autorités de contrôle des instruments appropriés, d'un point de vue quantitatif et qualitatif, pour évaluer la "'solvabilité globale" des compagnies d'assurance. Il se fonde sur une structure à trois piliers comme le projet Bâle II, dont les règles de solvabilité doivent faire appel à une approche axée sur les risques, incitant ainsi les assureurs à mieux les mesurer. Il s'agit, d'un passage d'une vision implicite de risque, celle de Solvabilité I, à une vision explicite qui intègre tous les acquis de gestion des risques, remédiant ainsi les limites des méthodes forfaitaires par lesquelles on assiste à une exigence de marge de solvabilité forfaitaire, une prise en compte forfaitaire de la réassurance et une limitation de l'investissement à des actifs sûrs, liquides, diversifiés et rentables.

Solvabilité II tient à fixer deux exigences de fonds propres ou capitaux économiques ; un niveau de capital souhaitable et un niveau de capital minimal ou "garde fou". Le premier doit permettre à la compagnie de fonctionner avec une probabilité de ruine très faible en prenant en considération tous les risques auxquels la compagnie d'assurance est exposée. Tandis que le "'garde fou" consti-

tue un élément d'intervention de dernier ressort, il s'agit d'un minimum de fonds propres requis.

Il est à noter que les mesures techniques de ce projet de directive européenne ont été mises au point en 2004 par le EIOPA [1] en deux phases ; une première phase de réflexion sur les principes généraux et une deuxième phase de mise au point détaillée des méthodes de prise en compte des différents risques. En effet, afin de mener à bien ce projet, des études quantitatives d'impact ont été établies par le EIOPA pour apprécier l'applicabilité, la cohérence, la comparabilité et les implications des approches possibles pour mesurer la solvabilité des assureurs. Dans cette optique, les études quantitatives d'impact, un véritable aller et retour entre la théorie et la pratique, permettent de recueillir des retours quantitatifs et qualitatifs auprès des acteurs du marché afin d'harmoniser la gestion des risques d'assurance au niveau européen.

Cependant, Solvabilité II offre aux compagnies d'assurance la faculté d'adoption d'un modèle interne permettant une modélisation adéquate des différents risques et ayant en "*output*" un bilan économique à horizon d'un an illustrant le niveau de capital de solvabilité qui repose sur la notion de distribution des fonds propres à cet horizon. Or, en assurance vie, les engagements s'étalent sur des horizons beaucoup plus longs qu'un an. Si on ajoute à cela l'interaction actif-passif ainsi que la complexité de leurs liens de dépendance découlant des mécanismes de participation aux bénéfices, la garantie de taux, la possibilité d'un remboursement anticipé ainsi que des comportement de rachat des assurés [2], l'obtention d'une distribution des fonds propres économique à un an sera une tâche délicate.

1.2 La notion de capital économique

À la différence d'un bilan Solvabilité I établi en valeur historique (actif en coût d'achat, passif estimé par une projection des engagements au taux technique, sans prise en compte des options cachées), un bilan Solvabilité II est établi en valeur économique (actif en valeur de marché si pos-

1. Committe of European and Occupational Pensions Supervisors
2. Ces clauses, implicites dans des nombreux contrats d'assurance, sont souvent appelées des options cachées, elles ont été négligées pendant longtemps ce qui a participé aux difficultés rencontrées par de nombreuses compagnies aux années 80. Il s'agit des engagements des assureurs envers les assurés apparaissant au passif.

sible sinon en "*mark to model*", passif en "*mark to model*" [3]). Dans cette optique, le capital économique correspond à un niveau de fonds propres dont doit disposer la compagnie afin de faire face à une ruine économique à 0,5% [4]. L'instant de ruine peut être défini comme étant celui où les fonds propres seront au dessous de 0 (ruine économique) ou aux exigences minimales des autorités de contrôle (insolvabilité réglementaire) ou des agences de notation (risque de réputation) suite à un sinistre exceptionnel. Cette notion de ruine économique implique une évaluation des actifs en valeur de marché et des passifs en *fair value*. Cette dernière correspond à l'espérance de la valeur actuelle nette des *cash flows* de passifs. Cette espérance doit porter sur l'ensemble des aléas du modèle.

Pour le calcul du SCR [5], les compagnies d'assurance ont la possibilité d'utiliser deux approc hes différentes : soit la formule standard, soit un modèle interne. La première approche est unique pour l'ensemble des utilisateurs, de forme paramétrique et facile à utiliser. Cependant, une telle approche n'est pas sans inconvénient dans la mesure où elle n'est pas forcément adaptée à l'activité de l'entreprise d'assurance considérée et elle ne permet pas une gestion fixe des risques. La deuxième approche offre à la compagnie d'assurance la possibilité de construire son modèle interne de gestion de risque partiel ou intégral. Ce modèle devra répondre à un certain nombre d'exigences, et servira en particulier au calcul du SCR et du MCR. Il sera soumis à la validation de l'autorité de contrôle en question [6]. Il permet entre autre de projeter tout les risques supportés par l'assureur ou le réassureur en question sur la base d'hypothèses qui doivent être contrôlées de façon centralisée afin notamment de s'assurer de leur cohérence et de leur mise à jour [7].

Cependant, en général, les compagnies modélisent les différents risques d'une manière séparée tout en prenant en compte les effets de diversification intra-risques, puis agrègent ces risques en prenant en considération les dépendances inter-risques. Mais, le niveau de prise en compte des dépendances (entre entités, entre risques ou entre contrats) dépend de la structure du modèle mis

3. L'évaluation de passif en juste valeur, *Fair Value*, incluant les options relatives au contrat évalué ainsi qu'une marge pour risque.

4. Le capital économique est évalué comme étant la VaR à 99,5% des fonds propres calculé selon une approche modulaire permettant d'évaluer quantitativement l'ensemble des risques quantifiables relatifs à l'activité d'assurance.

5. Solvency Capital Requirement ou capital économique

6. Dans les figures 4.1 et 4.2 FP représente les fonds propres et VBIF est la valeur boursière de l'*in force* ou des nouvelles affaires.

7. En pratique, certaines hypothèses pourront être choisies à dire d'expert ou bien basées sur les données du marché.

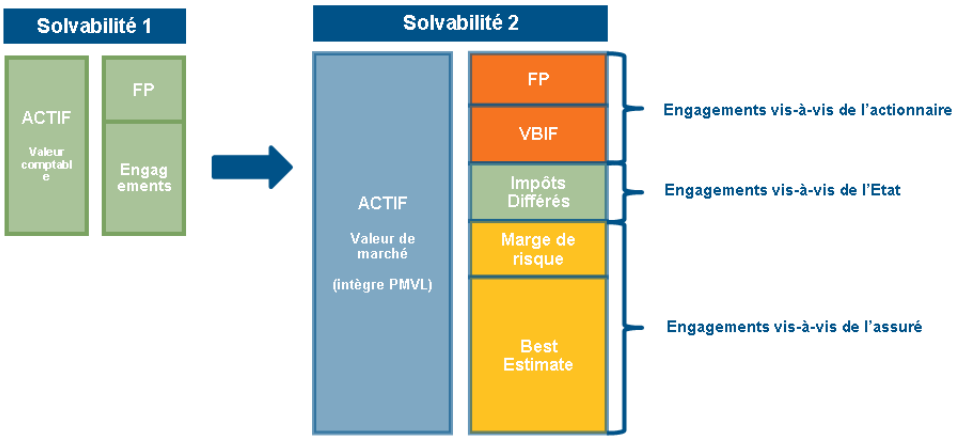


FIGURE 1.1 – Bilan Solvabilité 1 vs Solvabilité II

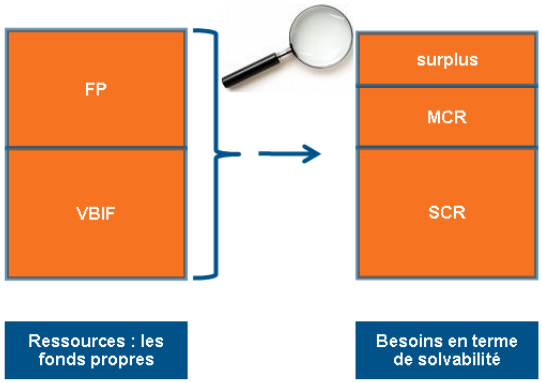


FIGURE 1.2 – Zoom sur la structure des fonds propres

en place. On peut faire intervenir plusieurs approches par exemple les copules ou les matrices de corrélation.

Le modèle doit donc permettre de disposer d'une distribution de la situation nette [8] en fin de la première année de projection. Or, l'estimation de l'actif net à la fin de la première période nécessite la valorisation de l'actif en valeur de marché, la valorisation économique des passifs d'assurance à l'aide d'un modèle de projection actif/passif (projection des prestations y compris la participation aux bénéfices, les frais et les commissions, part de l'assuré dans le bilan résiduel en fin de projection).

Une évaluation *Market Consistent* (c'est à dire compatible avec les prix des instruments financiers similaires observés sur les marchés) repose sur un choix judicieux des univers de probabilité ainsi que les techniques d'actualisation (Univers *risque-neutre* et actualisation au taux sans risque ou Univers *monde réel* et actualisation à l'aide des *déflateurs*).

Les deux questions suivantes se posent donc.Comment calculer l'actif net futur et en déterminer sa distribution ? Quel impact aura le choix de la méthode utilisée sur l'architecture du modèle interne ?

1.3 Le bilan économique

Soit t l'indice du temps. L'information financière disponible s'accroît en fonction du temps. Pour caractériser cette dernière, définissons la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\leq 0}$ dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ où Q représente une probabilité risque neutre qui sera sujet de discussion plus loin dans ce chapitre.

Nous avons signalé précédemment que le but de la nouvelle directive est de limiter la probabiliré d'une ruine économique à horizon d'un an. Cela, nous ramène naturellement à la définition de la notion d'un bilan économique simplifié dont les composantes évoluent au cours du temps. Adoptons les notations suivantes [9] :

- MAV_t : la valeur du marché des actifs à l'instant t,
- NAV_t : la situation nette en valeur économique à l'instant t ou fonds propres économiques,

8. valeur de marché des actifs diminuée de la valeur économique des passifs
9. La même formulation mathématique a été adoptée par Loisel et al (2009).

– LFV_t : la valeur économique des engagements de l'assureur.

Le principe comptable de la partie double reposant sur le postulat de base "*toute ressource de l'entreprise est employée à quelque chose et tout emploi a pour origine une ressource*", se trouve aussi applicable en version économique du bilan dans la mesure ou à l'équilibre pour tout t :

$$MAV_t = NAV_t + LFV_t \tag{1.1}$$

En $t = 0$, la MAV_0 est généralement observable sur le marché alors que la LFV_0 sera calculé comme étant l'espérance de la somme des cash flows futurs du passif (prestations, frais, commissions, impôts,...) sachant l'information disponible à cet instant. La NAV_0 est donc déduite par différence en utilisant (1.1). Or, les cash-flows futurs de passif représentent des paiements aléatoires relatifs à plusieurs natures d'aléas, à savoir l'aléa financier, démographique, ect. et donc évoluant dans plusieurs espaces de probabilité. La définition de la *LFV* adoptée dans ce rapport est la suivante, la somme sur toute la durée de projection, des espérance des éléments suivants :

– les prestations (décès, rachats, arrivées à échéance, ect.) versées aux assurés,
– les commissions versées aux réseaux et autres apporteurs d'affaire,
– les frais généraux attachés aux contrats,
– les prélèvements sociaux.

En pratique, lorsque la date de fin des projections est antérieure à l'extinction de la dernière police, la valeur économique des passifs est augmentée de la valeur actuelle :

– du reliquat de provisions mathématiques présent en fin de projection,
– de la part des assurés dans la richesse résiduelle.

Ces éléments devraient être, soit actualisés au taux sans risque instantané ce qui permet d'obtenir une espérance sous une probabilité *risque-neutre* notée Q, espérance estimée par le calcul de la moyenne arithmétique des valeurs issues des trajectoires générées par un générateur économique utilisant la méthode Monte-Carlo, soit actualisés grâce à une fonction d'actualisation elle même stochastique, *le déflateur* permettant ainsi d'obtenir une valorisation "*Market Consistent*" des flux projetés. Ainsi, en appliquant cette approche aux flux probabilisés du passif, dans une logique de couverture, on obtient la valeur du portefeuille d'actif répliquant au mieux les risques contenus dans ces flux. Il s'agit donc de la "*Fair Value*" du passif. On peut ainsi définir la ruine économique

par l'évènement suivant $\{NAV_1 < 0\}$. Il faut donc résoudre l'inéquation suivante :

$$\mathbb{P}\left(NAV_1 < 0\right) \leq 0,5\% \tag{1.2}$$

Quelle que soit la méthode utilisée pour la valorisation de la "*Net Assets Value*" ou fonds propres économiques, le niveau du capital économique nécessaire pour assurer l'inéquation (1.2) est déterminé par différence entre une valeur moyenne et le quantile d'ordre $0,995\%$ de la distribution de cette dernière à horizon d'un an [10]. Or, cette dernière distribution devrait être obtenue sous un univers "*monde réel*" car dans une optique Solvabilité II, les aléas de première période doivent suivre les mouvements observés dans la réalité.

1.4 Univers risque neutre ou univers historique

Une question qui revient souvent est la suivante : *Comment choisir entre l'utilisation de la probabilité historique et la probabilité risque neutre ?* En effet, si on veut déterminer le prix aujourd'hui des flux futurs incertains, le principe sera de mener les calculs en probabilité risque neutre dans une logique de couverture. Cela signifie qu'on cherche aujourd'hui un portefeuille permettant de répliquer les *cash flows* futurs. Cependant, l'utilisation d'une telle approche n'est pas sans limites dans la mesure où :

- Il faut réunir des conditions peu réalisables telles que des instruments financiers liquides sur un marché profond [11],
- Il existe des modèles dans lesquels l'unicité de la mesure de probabilité risque neutre n'est pas assurée, ce qui implique que la couverture est imparfaite.

Cela nous ramène naturellement à la définition des marchés incomplets dont la présence rend l'évaluation du prix des flux futurs plus complexe. En effet, dans une telle situation, on ne peut déduire des observations du marché un unique processus qui permet d'associer un montant à un flux aléatoire. Or, pour l'essentiel des engagements des assureurs (hors épargne), la situation d'incomplétude est la norme.

10. Distribution des fonds propres économiques à an.

11. Se dit d'un marché où l'on peut aisément céder ou acheter des titres en grande quantité sans voir le cours s'envoler ou s'effondrer. La profondeur du carnet d'ordres est importante. Autrement dit, il existe beaucoup d'acheteurs et de vendeurs sur une large plage de prix. Sur certaines valeurs, le carnet d'ordres peut être totalement vide tant le titre n'est pas liquide.

Il est important de signaler que l'utilisation des diffusions dans les modèles financiers classiques assure la complétude. Mais cette propriété sera remise en cause dès lors que l'on a complexifié un peu le modèle à l'exemple des processus à sauts.

Cependant, le dispositif Solvabilité 2 implique la prise en compte des sauts à l'actif pour remédier aux limites des de valorisations classiques développés sous l'hypothèse sous-jacente de rendements gaussiens tels que le modèle de ***Black & Scholes***. Une telle hypothèse a été remise en cause à travers plusieurs études empiriques qui ont démontré que les prix observés sur les marchés ont un comportement très éloigné de la normalité. Le défaut majeur de cette dernière réside donc dans la sous estimation des variations à grande amplitude du rendement (les extrêmes). Cette sous-estimation est problématique lorsqu'on se place dans un référentiel Solvabilité 2 pour déterminer le capital de solvabilité (SCR : Solvency capital requirement) dont le critère retenu est le contrôle de la probabilité de ruine au niveau de 0,5% [12]. Ainsi un modèle interne ne saurait faire l'économie d'une modélisation de l'actif en considérant le caractère non gaussien des rendements. Nous discuterons dans le prochain chapitre comment travailler conjointement dans deux univers de probabilité différents à savoir l'univers historique et celui risque neutre.

Dans ce premier chapitre, on a abordé la définition du capital économique dans une optique Solvabilité II tout en mettant l'accent sur les problèmes liés à la valorisation des engagements d'assurance vie. Dans le second chapitre, on traitera différentes approches permettant la construction d'un bilan économique au sens de Solvabilité II tout en présentant les avantages et les inconvénients de chacune.

12. Cette sous estimation de l'actif induit une sous estimation du SCR

Chapitre 2

Quelques approches de modélisation du capital économique

2.1 Introduction

Comme on l'a indiqué précédemment, la directive solvabilité II autorise l'utilisation d'indicateurs internes de risque pour justifier un niveau suffisant de capitalisation des assureurs ou le niveau de prudence dans leurs réserves. Cependant, des conditions seront imposées par les autorités prudentielles, à savoir la pertinence du modèle du point de vue de l'Actif & Passif, ainsi que du besoin en capital.

En assurance vie, les projections des cash flows futurs reposent sur un modèle *ALM* [1] prenant en compte les interactions entre les deux compartiments du bilan (l'actif et le passif). "*Ces interactions comprennent l'impact du comportement des actifs investis sur les provisions techniques tels que la participation aux bénéfices ou le déclenchement des garanties de taux de rendement minimum, sur le comportement des assurés tels que le rachat conjoncturel ou le décès, ou encore sur les décisions managériales à l'instar de la réalisation de plus-values latentes*". Il est aussi important à signaler qu'un tel modèle est alimenté par des tables de scénarios (scénarios de marché ou scénarios économiques, scénarios de mortalité) ainsi que des lois de comportements (loi de rachat, ect.). Ceci signifie qu'une trajectoire de flux

1. un modèle ALM signifie un modèle de projection actif passif.

d'actifs ou de passifs sera la résultante d'un paramétrage des différents *inputs* du modèle tels que le scénario de marché (évolution de la courbe de taux, des actions, de l'inflation, ect), un scénario de mortalité, il s'agit donc d'une simulation.

Les *cash flows* ainsi projetés vont servir à la valorisation des deux compartiments du bilan. Cette valorisation doit être cohérente à la valeur donnée par le marché pour le même jeu de cash flows futurs. Ceci implique que pour un actif coté, sa valeur devrait être égale à la valeur observable sur le marché alors que pour les *cash flows* de passifs réplicables par un portefeuille d'actifs investis, la "*Market Consistent Value*" doit être elle aussi égale à la valeur de marché observable de ce portefeuille répliquant.

Le challenge est donc de valoriser les différents compartiments du bilan en adéquation avec le dispositif Solvabilité II et d'en déduire la distribution des fonds propres économiques à horizon d'un an. On verra ainsi l'impact de la méthodologie adoptée sur l'architechture d'un modèle interne. Dans cette thèse, nous présentons et discutons plusieurs approches possibles.

2.2 Qu'est ce qu'un modèle interne ?

Si on reprend la définition de l'*International Association of Insurance Supervisors*, un modèle interne est un outil de gestion de risque développé par un assureur pour quantifier les risques qu'il encourt et déterminer le capital requis pour y faire face [2]. En général, pour modéliser l'activité d'une compagnie d'assurance ou de réassurance, on fait appel à l'analyse dite "stochastique". Ce type de modèle permet de tester la robustesse financière d'une société suivant un grand nombre de scénarios pouvant correspondre à des situations réelles. Ces scénarios prennent en compte différents facteurs tels que, par exemple, une sinistralité exceptionnelle pouvant traverser l'ensemble du portefeuille, une volatilité importante des marchés boursiers ou la défaillance de réassureurs.

De plus de fournir une mesure de la solidité financière de la société, ces modèles stochastiques constituent une aide à la décision stratégique. L'utilisation de ces modèles peut amener à des améliorations sensibles dans de nombreux domaines, au titre desquels figurent :

2. "Internal model is a risk management system developed by an insurer to analyse the overall risk position, to quantify risks and to determine the economic capital required to meet those risks"

- l'adéquation et l'allocation de capital,
- l'achat de la réassurance,
- les fusions acquisitions,. . .

Avant d'aborder l'optique de modèle interne, plusieurs questions stratégiques doivent être posées :

- Quel objectif ? Le projet doit d'abord commenrcer par la définition de l'objectif global. Les risques à considérer et à mesurer dans l'ensemble du processus doivent être définis dès le début. Le management de la société doit fixer une mesure du risque et déterminer l'aversion au risque de cette société. Actuellement, cela n'est parfois pas explicitement défini ou pour le moins communiqué.
- Comment commenrcer ? Les compagnies doivent se demander dans quelles mesures elles disposent déjà en interne des ressources et des qualifications requises pour effectuer cette étude ou si elles doivent avoir recours à une aide extérieure. Il faut ensuite définir un budget, évaluer les besoins en formation et s'assurer que ce nouveau projet n'entre pas en conflit avec d'autres projets ou des systèmes internes existants. Une démarche, suivie par la plupart des sociétés, a été d'effectuer un projet pilote sur un segment de portefeuille avant de se lancer directement dans le projet grandeur nature. Ceci permet aux différents intervenants de s'organiser pour comprendre tous les éléments du processus et les conséquences qui en découlent avant d'étendre la démarche au reste de la société.
- Quelles erreurs éviter ? Une erreur assez répandue est de commencer le processus de quantification de risque en construisant ou en utilisant des modèles qui sont insuffisamment flexibles et/ou ne permettent pas de futurs développements. Un autre écueil est d'envisager un niveau de détail si élevé que les modèles ne peuvent jamais être achevés. Il est recommandé que la société vérifie en interne que le modèle inclut bien tous les risques nécessaires à la réalisation de l'objectif fixé, qu'il est complet, vérifiable et flexible, et enfin que la piste d'audit existe. Une problématique d'une nature particulière est la corrélation qui existe entre les différents risques. Par exemple, il existe une corrélation positive entre la taille d'une catastrophe et la défaillance potentielle des réassureurs. Ne pas prendre en compte ce facteur dans la modélisation peut avoir un impact significatif sur le résultat et la décision du management qui en découle. Le 11 Septembre 2001 a démontré combien certains intervenants du marché avaient sous-estimé l'interdépendance entre risques et comment ceci pouvait entraîner des pertes en

cascade.

– Quels sont les facteurs de risque clés de la société considérée ?

Un modèle interne approuvé par le régulateur peut donc être utilisé pour le calcul de capital requis dans le cadre de Solvabilité II. L'assureur a la faculté d'utiliser un modèle interne partiel ou complet. Le superviseur peut exiger le développement d'un modèle interne s'il estime que la formule standard n'est pas appropriée. En tout état de cause, ce modèle doit fournir le quantile à $99,5\%$ de la distribution des fonds propres au sens du bilan prudentiel. Cependant, l'article 122 de la directive précise que le seuil et l'horizon peuvent être différents, pourvu que cela conduise à une mesure de risque "équivalente". En pratique cette "équivalence" parait difficile à établir, et les modèles internes s'en tiennent à la mesure préconisée dans la directive pour le calcul du SCR.

Dans cette thèse, nous illustrons plusieurs approches différentes de modèle interne, nous discutons l'applicabilité et la conformité de chaque approche par rapport à la directive Solvabilité II et aux spécificités du marché français.

2.3 L'approche des simulations dans les simulations

Sachant que l'objectif est toujours la détermination de la distribution de l'actif net en fin de première année, le principe de la méthode des simulations dans les simulations est d'estimer chaque réalisation composant cette distribution à l'aide de simulations de Monte-Carlo. En effet, les exigences Solvabilité II nécessitent de considérer sur la première année une évolution *monde réel* de tous les risques et une valorisation en juste valeur [3] des différentes composantes de bilan.

Pour mettre en œuvre cette approche, il est donc nécessaire de disposer d'un modèle actif/passif permettant de déterminer les valeurs de l'actif de la compagnie en fin de la première période. Cependant, la détermination de la valeur économique du passif en fin de première année est une tâche beaucoup plus délicate à cause des liens de dépendances actif/passif issus des options dans les contrats d'assurance vie. Donc, le recours à des méthodes type Monte-Carlo est à ce jour incontournable pour estimer la valeur économique des passifs.

3. Valeur *Market consistent* ou valeur économique

Le modèle interne doit être capable de générer des simulations en monde réel à un horizon d'un an puis à l'issue de chacune d'elles, d'effectuer de nouveau des simulations dites secondaires à horizon de 30 à 50 ans, pour en déduire la distribution des fonds propres économiques à un an. Ces simulations secondaires servent à la valorisation "*market consistent*" des éléments de passifs du bilan. Dans cet univers, nous pouvons raisonner suivant la théorie risque neutre qui considère que tous les actifs ont le même rendement, le taux sans risque, les agents étant neutres face au risque. Ceci permet d'actualiser tous les flux au taux sans risques pertinent tout en restant en cohérence avec les valeurs de marché. En revance, les résultats ne sont interprétables qu'en moyenne.

La valorisation des engagements d'assurance vie s'effectuera en utilisant une probabilité risque neutre. Cependant, si l'assureur choisit une modélisation dans l'univers de probabilité historique, il doit impérativement utiliser le déflateur approprié. Ce dernier est une fonction d'actualisation stochastique qui capte l'aversion au risque implicitement contenue dans la valeur de marché des actifs risqués. Il permet d'obtenir une valorisation "Market Consistent" des flux projetés.

Soit $\left(\mathcal{F}_t^{(r)}\right)_{t\geq 0}$ la filtration représentant l'information *monde réel* relative et définissons l'espace de probabilité filtré $(\Omega^r, \mathcal{F}^r, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ représente la mesure de probabilité historique. Les simulations primaires sont donc lancées dans cet espace de probabilité alors que chacun des jeux de simulations secondaires est conditionné par la simulation primaire qui lui correspond ou en d'autres mots par l'information *monde réel* de première période représentée par la tribu $\mathcal{F}_1^r$. Ces dernières simulations sont générées souvent sous la probabilité risque neutre, c'est à dire sous l'espace de probabilité défini dans 1.3.

2.3.1 Formulation mathématique

Soient :

- $cf_{p,s}(t)$: les *cash flows* de passif issus de la simulation secondaire $s \in \{1, \ldots, m\}$ associée à la simulation primaire $p \in \{1, \ldots, n\}$ pour $t > 1$,
- γ_t : le facteur d'actualisation en $t > 0$,
- $sp_{p,s}(t)$: le surplus relatif à la simulation secondaire $s \in \{1, \ldots, m\}$ associée à la simulation primaire $p \in \{1, \ldots, n\}$ pour $t > 1$,

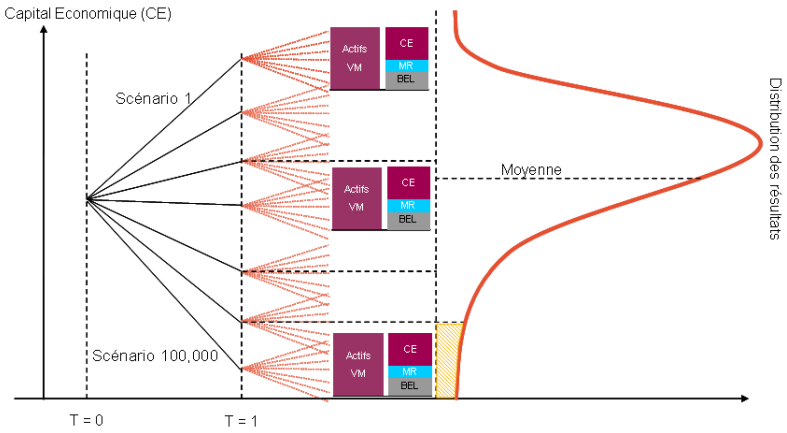


FIGURE 2.1 – Méthode des simulations dans les simulations

– $sp_p(1)$: le surplus de première période associé à la simulation primaire $p \in \{1, \ldots, n\}$.

On peut ainsi définir la valeur économique des passifs par :

$$LFV_p(1) = E\left[\sum_{t>1} \frac{\gamma_t}{\gamma_1} cf_{p,s}(t) \mid \mathcal{F}_1^r\right] \tag{2.1}$$

Cette dernière espérance peut être approximée par la moyenne arithmétique de la somme actualisée des *cash flows* de passif relatifs à chacune des simulations partant de $t = 1$. Formellement :

$$LFV_p(1) \approx \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} \sum_{t\geq 2} \frac{\gamma_t}{\gamma_1} cf_{p,s}(t) \tag{2.2}$$

D'une manière générale, dans cette optique, la juste valeur des passifs en fin de première période peut être définie comme étant l'espérance des prestations versées aux assurés actualisées au taux sans risque, augmentée de l'espérance des frais généraux et commissions associées aux contrats également actualisées aux taux sans risque. L'univers de probabilité utilisé ici est l'univers risque-neutre et non pas l'univers historique. La détermination de la distribution de l'actif net s'effectue en deux étapes :

– simulation de n situations nettes en fin de première période,
– pour chaque point du *n-échantillon* précédent, il faut calculer la valeur économique des passifs en lançant m simulations s'étalant sur le reste de l'horizon de projection en utilisant des tables

de scénarios économiques prenant en compte la situation des marchés en fin de la première période.

Une fois la distribution de l'actif nette déterminée, nous serions capable de calculer l'écart entre sa Value-at-Risk au niveau 99.5% et sa moyenne. Cet écart multiplié par le prix d'un zéro-coupon de à un an donne le capital de solvabilité.

En conclusion, il est donc nécessaire de produire en total $n \times m$ simulations en fin de la première période. Il s'agit donc d'une méthode qui consiste à simuler les différents aléas sur la première période en utilisant une table de scénarios économiques dite *table "monde réel"*. Ensuite pour, déterminer la valeur économique des passifs, un autre jeu de simulations à partir des simulations de première période, sera lancé. Cela nécessite un recalibrage de la table de scénarios économiques dite *table "market consitent"* qui doit être ajustée afin de tenir compte des aléas réalisés ou autrement dit de la situation des marchés observée en date 1 pour la simulation courante. On assiste ainsi à un changement des univers de probabilité, c'est à dire, d'un passage de la probabilité historique à la probabilité risque-neutre. Pour assurer ce changement de probabilité, il existe deux approches différentes que nous allons discuter dans les paragraphes suivants.

2.3.2 Passage de l'univers de probabilité historique à l'univers de probabilité risque-neutre

Chaque jeu de simulations secondaires est conditionné par la simulation primaire correspondante. La mise en œuvre de cette approche soulève la problèmatique de l'articulation des scénarios primaires générés sous une mesure de probabilité historique et des scénarios secondaire souvent générés sous la probabilité risque neutre. Il s'agit donc d'un changement d'univers de probabilité. En théorie, une nouvelle calibration du générateur de scénarios stochastiques est nécessaire à l'issue de chacune des simulations primaires afin d'impacter le paramétrage des différents processus de diffusions pour simuler à nouveau des scénarios économiques. Ceci est un exercice compliqué et très couteux en temps de calcul. Dans ce qui suit, nous proposons une méthode analytique permettant de réajuster les simulations risques neutes.

Réajustement des scénarios risque-neutre

Pour mettre en place cette approoche, trois étapes sont nécessaires :

- Génération de la table de scénarios stochastiques monde réel ui sera utilisée pour les simulations primaires.
- Génération d'une table de scénarios stochastiques market consistent de référence nomée table de base. Ces deux jeux de scénarios sont calibrés et générés en $t = 0$.
- Ajustement de la table de base en appliquant des coefficients de proportionnalité qui dépendent des conditions économiques de fin de première période.

L'obtention de ces coefficients par des formules mathématiques fermées est conditionnée au modèle de taux d'intérêt utilisé dans les scénarios économique. Lorsque cela n'est pas possible, on peut chercher des solutions approchées. En revanche ces transformations mathématiques seront étudiées, en faisant l'hypothèse que les modèles sous-jacents utilisés reposent sur des paramètres de volatilité déterministe. L'avantage de la deuxième méthode par rapport à la première réside dans le fait que la prise en compte des nouvelles conditions économiques en fin de première période est totalement objective et mécanique de sorte que les facteurs d'ajustement sont calculés de la même manière et indépendamment des conditions économiques à chaque nœud.

L'ajustement des scénarios économiques en début de la deuxième période s'effectue par rapport aux prix *forward* des zéro-coupon. En effet, on a une table de base de scénarios économiques notée précédemment *"table monde réel"* et une table *"risque-neutre"* à l'origine[4]. Dans ces tables, on a besoin des courbes de taux pour déterminer les prix des zéro-coupon à différentes maturités. Or, le prix d'un zéro-coupon noté ZC de maturité $m \geq 0$ à l'instant $t \geq 0$ est donné par la fonction suivante :

$$ZC(t, m) = e^{-rf(t,m)\times m} \tag{2.3}$$

- $rf(t, m)$ représente le taux d'intérêt forward dans t année et de maturité m. Ce taux est à déterminer à partir de la courbe de taux de la manière suivante :

$$e^{rs(t+m)\times(t+m)} = e^{rs(t)\times t + rf(t,m)\times m} \tag{2.4}$$

4. Table de scénarios économiques risque neutre de départ.

– $rs(t)$ représente le taux spot t-années.

Ajustement des prix zéros coupons

Si on note les zéros-coupon de la table *"monde réel"* ainsi que ceux de la table *"risque-neutre"* respectivement par ZC et ZC^{rn}, les prix des zéros-coupon ajustés seront déterminés comme suit :

$$\widehat{ZC}(t+s,m) = ZC(t+s,m)\,\frac{\frac{ZC(t,s+m)}{ZC(t,s)}}{\frac{ZC^{rn}(t,s+m)}{ZC^{rn}(t,s)}} \tag{2.5}$$

Les facteurs d'actualisation ajustés seront déduits des prix zéro-coupon de la manière suivante :

$$\widehat{\gamma}_t(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \widehat{ZC}(t+i,1) \tag{2.6}$$

Il est important de vérifier si cette transformation sur les zéros-coupon satisfait les conditions de market consistency. Il s'agit dans un premier lieu de vérifier si l'égalité suivante est vérifiée :

$$E(\widehat{\gamma}_{t+s}) = ZC^{rn}(t,s) \tag{2.7}$$

Cela signifie que le facteur d'actualisation en t pour un flux de date $t+s$ doit correspondre au prix réellement observé à la date t dans le "monde réel" pour un zéro-coupon de maturité s.

$$\begin{aligned}
E(\widehat{\gamma}_{t+s}) &= E\left(\prod_{i=0}^{s-1} \widehat{ZC}(t+i,1)\right) \\
&= E\left(\prod_{i=0}^{s-1} ZC^{rn}(t+i,1)\,\frac{\frac{ZC(t,i+1)}{ZC(t,i)}}{\frac{ZC^{rn}(t,i+1)}{ZC^{rn}(t,i)}}\right) \\
&= E\left(\left(\prod_{i=0}^{s-1} ZC^{rn}(t+i,1)\right)\frac{ZC(t,s)}{ZC^{r}(t,s)}\right) \\
&= \frac{ZC(t,s)}{ZC^{rn}(t,s)} E(\gamma^{rn}(t+s)) \\
&= \frac{ZC(t,s)}{ZC^{rn}(t,s)} ZC^{rn}(t,s) \\
&= ZC(t,s)
\end{aligned}$$

Les développements ci-dessus montre qu'en utilisant le facteur ajustement sur les zéros-coupon, il y a bien réconciliation avec la courbe initiale. Cependant, il faut aussi montrer que les prix zéros-coupon respectent la propriété de martingale. Or, nous avons :

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{\gamma}(t+s)\widehat{ZC}\left(t+s,m\right)\right) &= E\left(ZC^{rn}\left(t+s,m\right)\prod_{i=0}^{s-1}\widehat{ZC}\left(t+i,1\right)\frac{\frac{ZC(t,s+m)}{ZC(t,s)}}{\frac{ZC^{rn}(t,s+m)}{ZC^{rn}(t,s)}}\right) \\ &= \frac{ZC\left(t,s+m\right)}{ZC^{rn}\left(t,s+m\right)}ZC^{rn}\left(t,s+m\right) \\ &= ZC\left(t,s+m\right) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que le test de martingale est vérifier sur les prix des zéros-coupon ajustés.

Ajustement de l'indice action

La même méthode utilisée précédemment peut être étendue pour ajuster l'indice action ainsi que l'inflation. Si on note $\widehat{I}(t)$ l'indice action ajusté de la période t. Cet indice est obtenu en appliquant la transformation suivante :

$$\widehat{I}(t+s) = I^{rn}\left(t+s\right) \times \frac{\gamma^{rn}\left(t\right)}{\widehat{\gamma}\left(t\right)} \times \frac{I\left(t\right)}{I^{rn}\left(t\right)} \tag{2.8}$$

$I\left(t\right)$ représente l'indice action et $\gamma\left(t\right)$ le facteur d'actualisation issus de la table monde réel initiale et $I^{rn}\left(t\right)$ et $\gamma^{rn}\left(t\right)$ le facteur d'actualisation issus de la table risque-neutre initiale. La vérification de la market consistency de l'indice action ajusté s'effectue de la même manière que précédemment.

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{\gamma}(t+s)\widehat{I}(t+s)\right) &= E\left(\widehat{\gamma}(t+s) \times I^{rn}\left(t+s\right) \times \frac{\gamma^{rn}\left(t\right)}{\widehat{\gamma}\left(t\right)} \times \frac{I\left(t\right)}{I^{rn}\left(t\right)}\right) \\ &= E\left(I^{rn}\left(t+s\right)\gamma^{rn}\left(t+s\right)\right) \times \frac{I\left(t\right)}{I^{rn}\left(t\right)} \\ &= I^{rn}\left(t\right) \times \frac{I\left(t\right)}{I^{rn}\left(t\right)} \\ &= I\left(t\right) \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc la valeur de l'indice action initiale monde réel.

Avantages et inconvénients

L'approche de réajustement des tables de scénarii économiques est parfaitement gérable dans un modèle interne. Elle est plus avantageuse que celle consistant à rejouer les scénarios à chaque nœud de première période mais elle reste une approche rustique. Toutefois l'utilisation de cette approche doit être contrôlée. Il convient de vérifier que la table ainsi ajustée respecte les volatilités et la struture de dépendance des différents risques générés dans la table risque neutre initiale. Ceci dépend des modèles de diffusion choisis pour la modélisation des actions et des taux (voir même immobilier et inflation).

Détermination du prix de marché du risque

Planchet (2010) [93] indique que *"l'approche market consistent implique, en pratique, que le montant de la provision soit homogène au prix de la couverture financière parfaitement possible à mettre en œuvre dans le cadre d'un passif d'assurance couvrable"*. Il rappelle aussi que le passage de l'un à l'autre des univers de probabilité est possible en itroduisant la notion du prix de marché du risque. Cependant, ce dernier est lié à la nature du risque modélisé (risque de taux, risque action, risque de spread,. . .). En pratique, sa détermination passe par l'analyse de l'excès de rendement par rapport au taux de rendement sans risque respectif. En effet, le changement de mesure de probabilité d'un univers à un autre s'effectue classiquement à l'aide des deux outils théoriques présentés ci-dessous :

Théoreme 1 (Critère de Novikov). *Soit $(\lambda_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien. Si $\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T |\lambda_t|^2\, dt}\right] < \infty$, alors le processus $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ suivant est une martingale sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$:*

$$Z_t = e^{\int_0^t \lambda_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2\, ds} \forall 0 \leq t \leq T \tag{2.9}$$

Théoreme 2 (Théorème de Girsanov). *Soit $(\lambda_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que le processus Z_t défini ci-après soit une martingale :*

$$Z_t = e^{\int_0^t \lambda_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2\, ds} \tag{2.10}$$

Z_t est strictement positif, adapté par construction et permet de définir, en tant que densité de Radon-Nykodim, une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ par la relation $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$ sous laquelle le processus $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \lambda_s ds$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$.

Notons $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration monde réel [5] et définissons l'espace de probabilité filtré représentatif du marché $(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ représente la probabilité historique.

Une probabilité $\mathbb{Q}$ est dite mesure martingale ou risque-neutre si elle est équivalente à $\mathbb{P}$ et si les actifs risqués actualisés du marché sont des $\mathbb{Q}$-martingales.

Théoreme 3 (Absence d'opportunité d'arbitrage)**.** *L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) sur le marché est équivalente à l'existence d'une probabilité risque-neutre.*

Théoreme 4 (complétude du marché)**.** *La complétude du marché (tout actif risqué est réplicable par un protefeuille autofinancé) est équivalente à l'existence et l'unicité d'une probabilité risque-neutre.*

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'un processus $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ appelé prime de risque qui est le prix de marché du risque. Ce processus intervient dans le cas du passage de la probabilité historique à la probabilité risque neutre grâce au théorème de Girsanov. Bien qu'étant une caractéristique intrinsèque du marché, le processus λ_t est souvent appelé prime de risque. Si nous prennons l'exemple d'un modèle de taux d'intérêt de type Vasicek, la dynamique dans un univers historique peut s'écrire de la façon suivante dans un espace de probabilité historique (Ω, F, P) [6], avec trois paramètres a, b et *sigma* et un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$:

$$dr_t = a\ (b - r_t)\ dt\ +\ \sigma\, dW_t$$

En univers risque neutre menu de l'espace de probabilité filtré (Ω, F, Q) [7], cette même dynamique s'écrit comme suit :

$$dr_t = a\ (b_\lambda - r_t)\ dt\ +\ \sigma\, dW_t^Q$$

Avec b_λ défini en fonction d'un paramètre λ et des trois autres paramètres de la dynamique en univers historique b, a et σ de la manière suivante :

$$b_\lambda = b - \frac{\lambda\,\sigma}{a}$$

Il en résulte une dynamique des taux définie par quatre paramètres a, b, λ et σ :

5. suite croissante au sens de l'inclusion de tribus représentant l'information financière disponible au cours du temps
6. P est la mesure de probabilité historique.
7. Q est la mesure de probabilité historique.

$$dr_t = a\left(b - \frac{\lambda\,\sigma}{a} - r_t\right)dt \;+\; \sigma\,dW_t^Q$$

Nous pouvons utiliser le théorème de Girsanov pour spécifier le changement de probabilité permettant de passer d'un univers historique à un univers de probabilité risque neutre en utilisant un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à spécifier de la manière suivante :

$$\frac{dQ}{dP} = exp\left(\int_0^T X_t\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T X_t^2\,dW_t\right)$$

Dans notre cas de modèle de taux, Ce processus est $(-\lambda_t)_{t\geq 0}$. Dans ce cadre de modèle de taux et dans un univers risque neutre, le prix d'un zéro coupon sera donné par :

$$P(t,T) = exp\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\left(b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t\right) - (T-t)\left(b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right)$$

Il se revèle donc que le prix d'un zéro coupon se traduit en fonction des paramètres de la dynamique de taux en univers historique et du prix du risque λ. D'une manière générale, Duffee et Stanton (2004) [38] ont déterminé le prix du risque pour les dynamiques affines des taux d'intérêt dans un univers risque neutre :

$$dr_t = (ab - ar_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}_t^Q$$

Pour passer en univers historique, le prix de marché du risque choisi est :

$$\lambda_t = \lambda_1\sqrt{r_t} + \lambda_2 r_t$$

Donc, la dynamique de taux en univers historique n'est plus affine :

$$dr_t = \left(ab - ar_t + \lambda_1\sqrt{r_t} + \lambda_2 r_t\right)dt + \sigma\sqrt{r_t}d\tilde{W}_t$$

Il aussi important de signaler que les primes de risque se distinguent en fonction des produits financiers et des facteurs de risque qu'ils encourent chacun d'entre eux dans la mesure où nous pouvons définir pour les produits de taux la prime de risque de crédit, d'illiquidité ou de corrélation alors que pour les produits actions, nous distingons les primes de risque sur l'augmentation de dividendes, sur le taux de change, ainsi que sur le ratio dividende/prix. Il est donc naturel que les méthodes de détermination de cette prime de risque varient selon les actifs et les risques sous-jacents. Cependant, nous pouvons mentionner les techniques CAPM, APT ainsi que

plusieurs autres techniques. Nous invitons le lecteur à visiter les travaux d'AHMED et WILMOTT (2006). Donc, en résumé, l'utilisation des prix de marché du risque peut se présenter comme une solution cohérente permettant de passer d'un univers de probabilité historique à un univers risque neutre. Cependant, le cas échéan, les scénarios économiques utilisés dans la gestion actif-passif des (re)assureurs sont générés par des générateurs économiques. Rappelons qu'un scénario économique correspond à une projection des grandeurs économiques et financières sur un horizon d'intérêt tel que préconisent Planchet et al (2011) [90]. Ce générateur doit imiter le comportement des actifs financiers dans le monde réel en captant leurs principales caractéristiques. En pratique, un générateur de scénarios économiques permet de projeter les prix de plusieurs actifs financiers à la fois, à savoir, les prix des zéros coupons via un modèle de diffusion des taux d'intérêt, le prix de actions via un modèle brownien, un indice immobilier. En somme, plusieurs diffusions sont modélisées en prenant compte des éventuels effets de dépendance sous un univers de probabilité déterminé (univers historique ou univers risque-neutre). Pour passer donc d'un univers à un autre, il faut déterminer un processus aléatoire qui appliqué aux scénarios historiques permet d'avoir des scénarios économiques vérifiant les propriétés de Market Consistency. En effet, pour évaluer que des scénarios économiques vérifient les conditions de Market Consistency, il suffit de vérifier que la valorisation des instruments financiers via ces scénarii soit cohérente avec leurs prix de marché. Il y a deux approches de vérification souvent nommées tests de Market Consistency :

- Vérifier la propriété de Martingale des différents instruments financiers représentés dans ces scénarios économiques
- Vérifier que valorisation des instruments dérivés est cohérente avec leurs valeurs de marché.

En ce qui concerne le premier point, il s'agit de vérifier que les prix générés sont des martingales. Le deuxième point consiste à s'assurer que le prix recalculé d'un produit dérivé dont le sous-jacent est un actif modélisé via les scénarios économiques, soit égal au prix de marché. Dastarac et al (2010) [28] ont explicité la forme du processus dans le cas où d'indépendance entre les différentes browniens des actifs modélisés ainsi que dans le cas de corrélation entre ces derniers. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter Dastarac et al (2010) [28].

2.3.3 Etude du cas PREFON Retraite

Le régime de retraite PREFON accorde un nombre de points fonction du montant de la cotisation, de la valeur d'acquisition du point lors de l'exercice de versement de la prime, de l'âge du

cotisant et de son choix de réversibilité de ses droits. Ces points cumulés donnent lieu, au moment de la liquidation, à une rente viagère dont le montant est le produit du nombre de points acquis, éventuellement abattu pour anticipation de la retraite, par une valeur de service définie annuellement. Les cotisations et les rentes servies relèvent d'un canton unique isolé dans les comptes de l'assureur. La valeur des engagements de service de la rente est appelée PMT (Provision Mathématique Théorique). Elle est déterminée à partir d'un taux technique et d'une table de mortalité encadrés réglementairement. Pour évaluer l'équilibre du régime, cette PMT est mise en regard de la PTS (Provision Technique Spéciale) qui est un bilan à la date considérée de la richesse du régime, hors apports de l'assureur destinés à garantir la pérennité du régime (Provision Technique Spéciale Complémentaire PTSC ou Provision pour Risque d'Exigibilité PRE). La PTS est créditée des primes pures perçues, des résultats financiers et administratifs et débitée des prestations versées. Lorsque l'équilibre PTS/PMT le permet, la valeur de service peut être revalorisée. Elle ne peut cependant pas être réduite. La réglementation impose que l'assureur apporte au régime une PTSC au cas où la PTS du régime ne parvient pas à couvrir la PMT, afin de garantir le service des prestations dues. Ces provisions complémentaires ne sont toutefois pas acquises au régime qui doit alors œuvrer à rétablir une situation d'équilibre et permettre ainsi la reprise de la PTSC par l'assureur. La convention du régime peut prévoir la constitution d'autres provisions, comme la PGA (Provision de Gestion Administrative) ou une Provision pour Risques d'Aléas Financiers qui sont autant de réserves constituées en marge de la PTS et dédiées à renforcer la pérennité du régime. Elles sont alimentées par des chargements sur primes ou sur encours, au bénéfice de l'assureur, et financent pour l'assureur une provision de gestion ou une réserve en cas de dégradation exceptionnelle du taux de couverture.

Ce régime est réassuré en quote-part chez AXA, AGF et Groupama. La quote-part de la CNP est de 37% sachant que la gestion administrative et technique incombe à la CNP alors que les actifs représentatifs sont gérés par la cédante et les réassureurs. Il s'agit d'environ 8,5 MD d'euros au total. Afin de donner des ordres de grandeur, la provision mathématique théorique de régime s'élève au 31/12/2008 à 8,25 MD d'euro contre une provision technique spéciale égale à 8,59 MD d'euro d'où un taux de couverture de 104,15 %. Dans cette section, nous présentons les résultats de calcul du SCR marché, pour le régime PREFON de retraite des fonctionnaires, en utilisant la

formules standard [8] et un modèle interne partiel se basant sur l'approche des simulations dans les simulation [9].

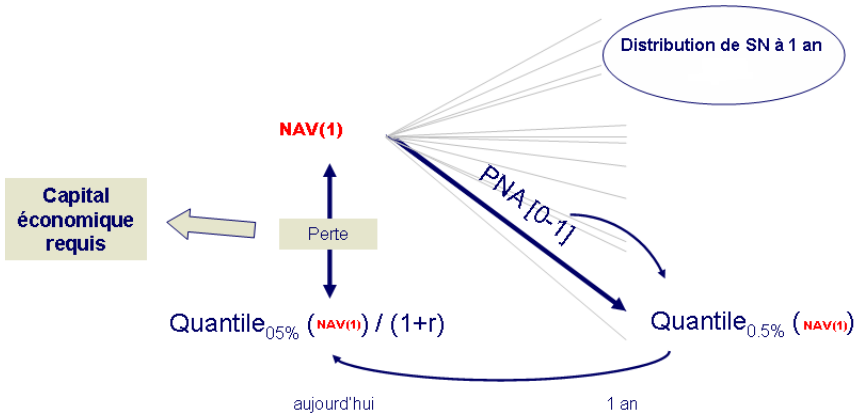


FIGURE 2.2 – Rappel de l'approche SdS

Le calcul des SdS (en prenant en compte uniquement le risque de marché : les risques action, immobilier et taux) réalisé sur les 5000 simulations monde-réel de la CNP couplées à 500 simulations secondaires risque-neutre permet de nous fournir la distribution de fonds propres en 1 an suivante (scénario central) :

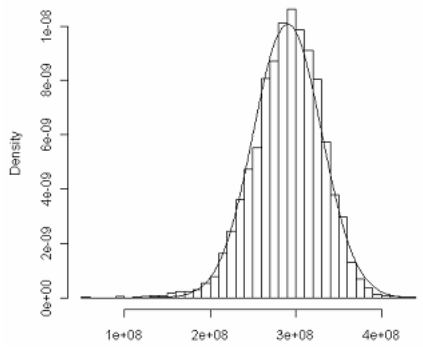


FIGURE 2.3 – Distribution de Situation nette à 1 an

8. Résultats du QIS4 au 31 Décembre 2009.
9. Approche justifiée par la participation aux bénéfices

Il est à rappeler que le capital économique est déterminé par :

$$C \approx \left[Mean\left(NAV_1\right) - VaR_{0,5\%}\left(NAV_1\right)\right] \times e^{-r} \tag{2.11}$$

$\tilde{r}$ est le taux de rendement des fonds propres comprenant une prime de risque. Le tableau suivant illustre les résultats (en million d'euro) :

Mean (NAV_1)	$VaR_{0,5\%}\left(NAV_1\right)$	Capital économique
275	161,9	119,5

Or, un zoom sur les résultats de SCR marché de l'approche QIS4 est illustré dans le tableau suivant :

SCR action	SCR taux	SCR Immobilier	total corrélé
83	143	6	170

On constate dans le calcul de solvabilité lié au risque de marché (limité aux risques taux, action et immobilier), un écart relatif négatif de l'approche SdS par rapport au calcul QIS4 égal à -29%. L'approche SdS permet donc d'économiser du capital par rapport à l'approche standard de QIS4.

Les chocs du QIS 4 sont supposés correspondre aux quantiles à 99,5% ou 0,5% des facteurs de risque :

- Quantile à 0,5% sur le facteur de risque de baisse des actions
- Quantile à 0,5% sur le facteur de risque de baisse des taux zéro-coupon
- Quantile à 99,5% sur le facteur de risque de hausse des taux zéro-coupon

Plusieurs explications peuvent être apportées à cet écart. Les données utilisées pour le calibrage du EIOPA ne sont pas nécessairement cohérentes avec les données utilisées par la CNP pour calibrer les scénarios monde-réel de première année. De plus, la corrélation définie par le EIOPA peut ne pas être adéquate avec la corrélation réelle des facteurs de risques.

2.3.4 Avantages et limites

Malgré les avantages que propose l'approche des simulations dans les simulations et sa conformité aux exigences de la directive Solvabilité II, cette méthode n'est pas sans défauts. En effet, elle

requiert un temps de calcul extrêmement long allant jusqu'à compromettre son application pour certaines compagnies. De plus le recalibrage des tables de scénarios par rapport à l'information disponible en fin de la première période nécessite, soit une regénération de ces scénarios, soit un réajustement des tables générées en amont. Cependant, régénérer les scénarios économiques induirait une ré-estimation des paramètres de diffusion ceci ralentit en plus l'exécution de calcul et impacte l'architecture du modèle mais demeure plus précis que de prendre en compte des ratios d'ajustement détaillés ci-dessus. Par exemple, si dans la simulation primaire, on injecte une table de scénarios économiques avec un indice action modélisé en utilisant un processus à saut au lieu d'un brownien géométrique, la complétude n'est plus assurée et la probabilité risque neutre n'est plus unique (voir 1.4).

2.4 Optimisation des simulations dans les simulations

Les temps de calcul trop important que nécessite l'approche par simulations dans les simulations exhaustive a mené au développement de plusieurs méthodes d'accélération de cet algorithme. Ces dernières visent toutes à faire appel le moins de fois possible au moteur ALM. Deux solutions complémentaires sont possibles dans cette optique :

- une réduction du nombre des simulations primaires (monde réel)
- une réduction du nombre des simulations secondaires (risque-neutre)

2.4.1 Algorithme de Loisel et Devineau (2009)

Toujours dans le but d'estimer la Value-at-Risk à 0.5% de la distribution des fonds propres économiques à un an, **Devineau & Loisel (2009)** [34] ont présenté un algorithme permettant un gain considérable en temps d'exécution de l'approche SdS [10] en réduisant significativement le nombre des simulations primaires. Cet algorithme est connu sous le nom d'accélérateur SdS. Leur idée de base réside dans le fait que pour estimer un quantile d'ordre $0,5\%$ à partir des simulations primaires, on n'a pas besoin de toute la distribution. En effet, à l'issue de n simulations primaires, ce quantile correspond empiriquement à la $n \times 0,5\%^{\text{éme}}$ pire valeur lorsque les réalisations sont classées par ordre croissant. Donc, pour accélérer les calculs, il faut identifier les situations les plus

10. SdS Simulations dans les simulations

adverses en terme de solvabilité et prioriser celles présentant une intensité de risque plus élevée sans effectuer un jeu complet de simulations. En effet, on associe à chaque scénario de première période une norme afin de traduire son niveau d'adversité.

Mise en œuvre

La présente méthodologie est basée sur trois étapes :

- Extraction des facteurs de risques (financier & technique) permettant de traduire l'intensité de risque pour chaque simulation primaire,
- Construction d'une région de confiance à seuil fixé permettant de définir un ordre d'exécution des simulations [11] dans la mesure où les simulations primaires dont les facteurs de risques sont à l'extérieur de la région de confiance sont effectuées,
- Itérer sur le seuil de la région de confiance de manière à exclure à chaque itération un nombre de points fixé et donc arrêt de l'algorithme lorsque les *pires valeurs* de la distribution des fonds propres à 1 an sont stabilisées [12].

La première étape consiste à définir pour chaque risque véhiculé par la simulation des facteurs de risques simples et comparable permettant d'illustrer son intensité. Selon **Devineau & Loisel (2009)** [34], les facteurs de risques financiers sont des bruits gaussiens centrés réduits, forment un vecteur gaussien [13] et correspondent aux accroissements des browniens des diffusions (actions, taux...). Cependant, comme le signalent les auteurs, il est toujours possible de se ramener à des marginales centrées réduite mais en plus une distribution jointe normale ce qui constitue une hypothèse forte. Ces facteurs peuvent être stockés au moment de la génération des scénarios économiques ou déterminés a posteriori. Le premier cas illustre l'exemple d'une compagnie qui connait exactement la modélisation adoptée pour ses risques. Alors que dans le second cas, la compagnie dispose uniquement des tables de scénarios, donc il faut estimer les paramètres des diffusions stochastiques et puis extraire les aléas [14].

Une fois les facteurs de risques bien identifiés [15], les situations les plus adverses seront localisées en périphérie du nuage de points [16]. Les projections à prioriser seront donc définies par celles

11. une simulation veut dire une projection et donc une trajectoire.
12. Définition du critère d'arrêt.
13. Cette hypothèse suppose que la copule des facteurs de risque est une copule gaussienne.
14. *Devineau L. & Loisel S.(2009)propose un exemple d'obtention des facteurs de risque a posteriori.*
15. L'applicabilité repose sur un choix judicieux des facteurs de risque.
16. voir l'exemple numérique proposé par *Loisel et al (2009)* illustrant cette approche sur un portefeuille d'épargne en euro.

qui commencent par les points les plus éloignés de l'origine. Donc, formellement, si on note à titre d'exemple ϵ_a et ϵ_z deux variables aléatoires représentant respectivement les bruits relatifs aux actions et aux zéros-coupons et le vecteur $Z = (\epsilon_a, \epsilon_z)$ un vecteur gaussien, alors les couples les plus adverses en terme de solvabilité correspondront à ceux dont la densité jointe $f_Z(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}$ est la plus faible.

Lemme 1. *Soit la norme* $\|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2-2\rho xy}$. *Plus cette norme est élevée plus la densité jointe est faible.*

Démonstration 1. *Soit k la ligne de niveau de la densité jointe* f_Z. *Cette ligne est d'équation :*

$$L_k := \{(x,y) \mid k = f_Z(x,y)\} \tag{2.12}$$

Ceci implique que :

$$k = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{e^{-\frac{\|(x,y)\|}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}$$

Il en résulte donc plus la norme est élevée, plus la densité est faible.

Soit la région d'exécution de niveau k notée R_k et définie par :

$$R_k := \{(x,y) \mid \|(x,y)\| \geq k\} \tag{2.13}$$

Lancer les simulations par ordre d'adversité revient à définir des régions d'exécution R_k pour un k de plus en plus faible. La figure ci-dessous illustre les régions d'exécution pour différents niveaux de $k = 2,\ 1.5,\ 1$ pour un couple de facteur de risque représentant l'intensité du risque action [17] et du risque de taux [18].

Il en résulte donc l'algorithme suivant : à chaque région d'exécution, les $n \times 0,5\%$ pires valeurs des réalisations des fonds propres issues des simulations primaires seront stockées dans un vecteur. Si ce dernier vecteur reste stable d'une région à une autre qui le suit, l'algorithme est arrêté. Comme on l'a mentionné ci-dessus, cette méthode repose sur le fait que le choix des facteurs de

17. L'action est modélisée à l'aide d'un brownien géométrique,
18. Le taux est modélisé par un modèle CIR.

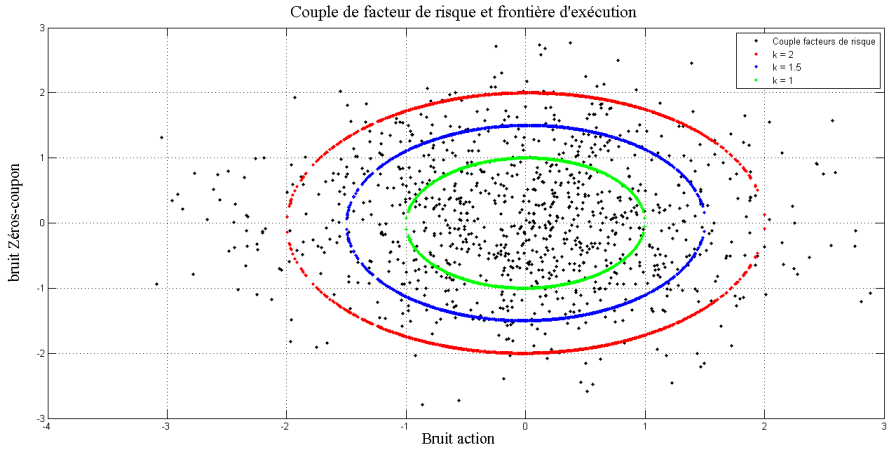


FIGURE 2.4 – Couple de facteur de risque et frontière d'exécution

risque devrait ramener les situations les plus adverses sur le périphérie des nuages des points des réalisations des ces facteurs.

Avantages et limites

- Il est évident que l'avantage principal de cette approche *"accélérateur SdS"* est la réduction importante du temps de calcul. Selon l'application de Devineau & Loisel (2009) [34] sur un portefeuille d'épargne en euro, l'algorithme converge entre 300 et 500 simulations primaire plutôt d'en faire 5000 simulations dans une approche SdS exhaustive. Dans ce cas de figure, il est possible d'étendre la méthodologie sur un grand nombre de portefeuilles.
- Cette approche permet aussi la consolidation et la prise en compte des effets de diversification dans la mesure où elle ne régionalise pas l'analyse du risque. Il est clair que chaque région d'exécution permet de balayer des scénarios à la hausse et à la baisse (voir figure (2.4)).
- Grâce aux propriétés de la loi normale multivariée, la présente approche peut se généraliser facilement en dimension supérieure à deux si on arrive à isoler des facteurs de risques gaussiens et identifier la matrice Σ variance-covariance qui les relie :

$$f_Z(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z'.\Sigma.z}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{det(\Sigma)}} \tag{2.14}$$

Il est important de signaler que des améliorations possibles sont envisagées pour accélérer de plus en plus les calculs sachant qu'il n'est pas nécessaire de calculer la valeur économique des passifs à chaque nœud de simulation primaire pour des scénarios entraînant une faible valeur des passifs. Il s'agit donc de définir une autre région d'exécution de l'algorithme pour les simulations secondaires. Cette région est sans doute la zone associée aux scénarii les plus favorables. Cependant, cette approche n'est pas sans limites :

- La traduction de sévérité des risques par des facteurs de risques gaussiens avec une corrélation linéaire sous estime le quantile d'orde $0,05\%$ recherché de la distribution des fonds propres à an.
- Est-it toujours possible de construire un facteur de risque gaussien pour des risques techniques (risque de rachat, risque opérationnel, ...) ?
- Dans des cas multidimensionnels, il n'est pas évident que le quantile recherché sera sur la périphérie des nuages des points.
- De plus, pendant longtemps, le modèle de référence en assurance pour la modélisation de l'actif risqué a été celui de **Black & Scholes(1973)**. Il s'agit du mouvement brownien géométrique avec toutes les hypothèses restrictives à savoir la continuité des trajectoires, la constance de la volatilité du support, la log-normalité des rendements...Cependant dans un référentiel Solvabilité II, un inconvénient majeur est accordé à cette modélisation qui est l'insuffisance de l'épaisseur de la queue de distribution et la non prise en compte des chocs à la hausse ou à la baisse sur les cours. Cela peut avoir des conséquences importantes sur l'appréciation du capital économique (la queue de distribution des fonds propres économiques). Planchet et al (2006) [95] ont proposé une alternative comparable au modèle de Black & Scholes, initialement proposé par Merton (1976) [78]. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ espace de probabilité filtré, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration, donc la dynamique de l'actif risqué S_t est définie par Black et Scholes par :

$$S_t = S_0 \, exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \tag{2.15}$$

  μ est le rendement de l'actif, σ sa volatilité, S_0 son prix initial et $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Cepedant, le modèle proposé par Merton(1976) [79] ajoute à cette dynamique (2.15) une composante de saut de sorte à avoir deux modèles

toujours comparables :

$$S_t = S_0\, exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right) \tag{2.16}$$

N_t un processus de poisson d'intensité λ, U_k une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale d'espérance nulle et d'écart type σ_u tels que N, U et W sont indépendantes. On remarque que le modèle (2.16) propose des cas particuliers à savoir si $\sigma_u = 0$, on retrouve le modèle (2.15). Dans ce cadre, la loi de S_t sera donnée par :

$$\mathbb{P}\left(S_t \leq s\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{log\frac{s}{S_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sqrt{n\sigma_u^2 + t\sigma^2}}\right) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{2.17}$$

Si on est amené à comparer les deux modèles ci-dessus, il faut avoir égalité des deux premiers moments de la distribution de S_t (espérance et variance). Or, l'espérance du rendement du modèle avec saut est $m = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ alors que la part de la variance liée à la composante de saut est donnée par α^2 telle que $\alpha = \frac{\sigma_u\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m_1}}$ avec m_2 la variance totale du rendement. La figure ci-dessous illustre un le modèle à saut et celui de Black & Scholes :
Si on isole le facteur de risque [19] associé au processus à saut de type (2.16) et celui associé au processus de type Black & Scholes (2.15). L'ajustement par rapport à une loi des deux facteurs de risques obtenus à l'issu de 1000 simulation est illustré par les *probability plot* ci-dessous.
On remarque bien (fig 2.6) que l'ajustement gaussien est médiocre sur la queue inférieure de la distribution du facteur de risque action modélisé à l'aide d'un processus à saut (2.16). Alors que pour le deuxième cas (fig 2.7), cet ajustement est parfait. Donc, si on complexifie un peu le générateur de marché, le facteur de risque ne serait plus une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite. Or, selon Planchet et al (2006) [92], l'utilisation des processus à saut semble préserver la simplicité d'utilisation de celle de premier modèle, tout en améliorant de manière sensible l'adéquation aux données historiques des marchés. Par ailleurs, il semble d'autant plus intéressant qu'il permet d'intégrer à la modélisation de l'actif des propriétés telles que

19. Il s'agit d'un n-échantillon de réalisation de la différence réduite entre le rendement espéré et le rendement théorique d'un actif risqué à an tel qu'est défini dans l'approche SdS.

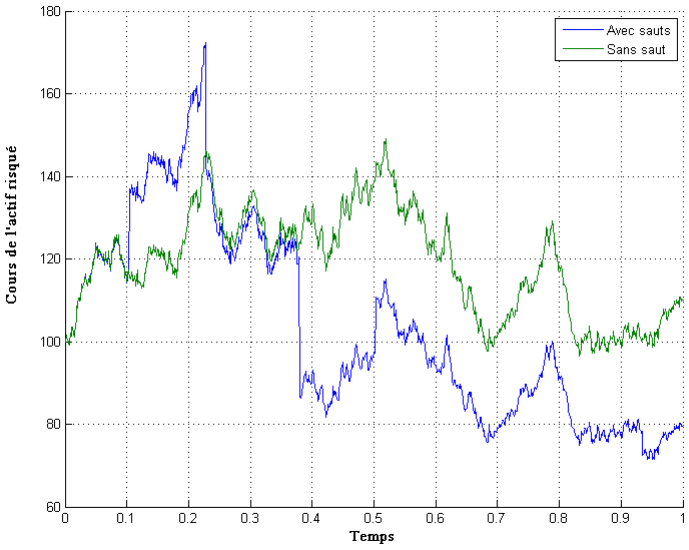


FIGURE 2.5 – Modélisation de l'actif risqué

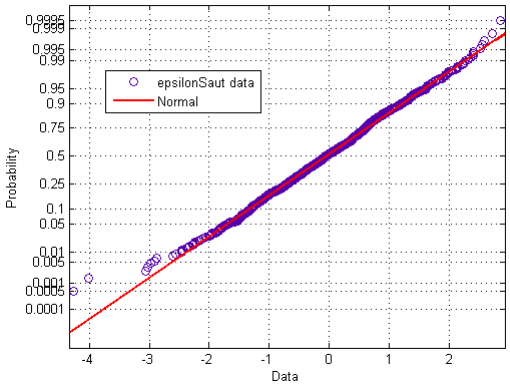


FIGURE 2.6 – Ajustement Normal du facteur de risque action modélisé avec un processus à saut

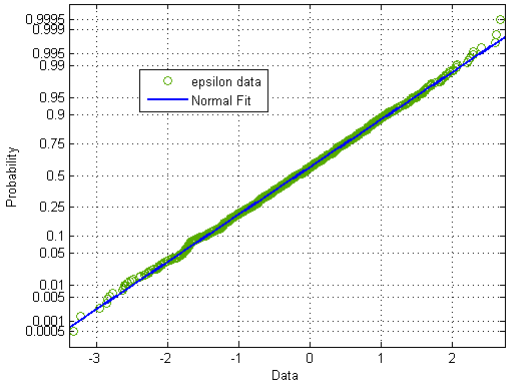


FIGURE 2.7 – Ajustement Normal du facteur de risque action modélisé avec un brownien géométrique

l'asymétrie des queues de distribution plus épaisses que celle de la loi normale. De telles propriétés ont des conséquences sur l'appréciation du niveau de capital de solvabilité. Donc un modèle interne ne peut pas économiser une telle approche. Il en résulte donc que même pour le risque action, le facteur de risque est loin d'avoir un comportement gaussien.

En résumé, les faiblesses de cette approche sont nombreuses. Il faut savoir qu'en tout état de cause nous avons besoin de plusieurs simulations en univers historiques pour mieux apréhender les queues de distribution. Il est donc plus intéressant de trouver des axes d'optimisation des simulations secondaires permettant de calculer le Best Estimate des provisions techniques dans un an car on s'intéresse plutôt à une valeur moyenne et non pas à un quantile de la distribution.

2.4.2 Approche par quantiles géomètriques

L'idée sous-jacente de l'algorithme de Loisel et Devineau repose sur le constat que la connaissance de la distribution complète des fonds propres économiques à 1 an n'est pas nécessaire pour en déterminer le quantile à 0,5%. Seule la queue de distribution s'avère utile. De manière concrète, à l'issue des P simulations primaires, le quantile empirique correspond à la partie entière de 0,5%*S pire valeur du S-uplet des situations nettes simulés. L'approche par quantiles géomètriques repose sur la localisation des scenarios les plus adverses en terme de solvabilité.

Les quantiles univariés font partie des outils techniques classiques en actuariat. Estimés selon un critère d'ordre sur les observations, ils servent notemment à l'élaboration d'intervalles de confiance. Cependant aucune définition naturelle de quantile multivarié n'est possible pour des vecteurs aléatoires du fait de l'absence d'ordre total sur R^d, avec $d \geq 2$. Le vecteur quantile, dit arithmétique, dont les composantes sont les quantiles marginaux ne possède pas les qualités de cohérence et de robustesse du quantile univarié, en particulier il n'est pas invariant par rotation et ne tient pas compte des liens de dépendance entre les différentes composantes du vecteur d'observation. Ainsi lorsque les observations sont à valeurs dans R^d, définir une notion de quantile cohérente n'est pas chose aisée. Nous présenterons ci-dessous le concept de quantile géomètrique [1], qui malgré quelques faiblesses, constitue une extension utile du concept de quantile univarié.

Formulation mathématique

Soit X une variable aléatoire réelle, la fonction quantile se définit à partir de l'inverse généralisée de sa fonction de répartition, notée $F^{\leftarrow}$. Le quantile de niveau α de X est défini par :

$$q_X(\alpha) = F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in R,\ F(x) \geq \alpha\} \tag{2.18}$$

Plaçons nous dans un cadre multidimensionnel, avec $Y \in R^d$, D'apres Chaouch (2008) [22], quand la distribution de Y est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (ie à densité) avec $d \geq 2$, $Q(u)$, le quantile spatial de Y associé au vecteur u, est l'unique solution de l'équation suivante dont l'inconnue est y :

$$E(\frac{y - Y}{\|y - Y\|}) = u \tag{2.19}$$

La fonction quantile est alors définie comme suit :

$$array)Q : B^d \longmapsto R^d u \longmapsto Q(u) = y \text{avec } B^d \text{la boule ouverte unité de dimension d} \tag{2.20}$$

Soit F_n la distribution empirique calculée à partir de $(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \in R^d$ en donnant des poids égaux à $\frac{1}{n}$ à tous les points. L'estimateur du quantile spatial, pour $u \in R^d$ fixé, noté $Q_n(u)$, satisfait

l'équation suivante en y :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y-Y_i}{\|y-Y_i\|}=u \tag{2.21}$$

Inversement, par l'équation précédente et quitte à retirer une observation pour ne pas obtenir de singularité, à tout point $y \in R^d$, on peut calculer le vecteur $u \in R^d$ correspondant, ce qui permet d'associer un vecteur "niveau" de la boule unité de R^d à toute observation. Ce vecteur $u \in R^d$ permet de donner des informations sur le quantile $Q_n(u)$. Pour déterminer l'ordre du quantile, il suffit de calculer la norme de u (appelé "extent of deviation") :

- Si $\|u\| \approx 1$ alors $Q_n(u)$ est un quantile extrême
- Si $\|u\| \approx 0$ alors $Q_n(u)$ est un quantile central
- u etant un vecteur de Bd , sa direction indique la position du quantile par rapport à la mediane

Cependant, il faut savoir que :

- $\|u\|$ n'est pas à interpréter en terme de probabilité
- La région $Q_n(u)$, $\|u\| < 1/2$ ne contient pas nécessairement 50% des observations, contrairement au cas univarié. Chaouch et al (2008) [22] démontrent que $Q_n(u)$ est un estimateur consistent du quantile géométrique $Q(u)$ avec une vitesse de convergence de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. De plus, cet estimateur est asymptotiquement normal. Cependant, l'inconvénient majeur du quantile géométrique est qu'il n'est pas invariant par transformation affine. Aussi si les composantes qui forment le vecteur Y n'ont pas les mêmes unités de mesure ou qu'elles ont des variations assez différentes les unes des autres, l'estimation du quantile géométrique ne donne pas des résultats convenables.

  Pour remédier à cette défaillance (lorsque l'on s'éloigne du cadre d'une distribution sphérique des données), une technique d'estimation, dite de Transformation - Retransformation (TR), est proposée dans la littérature. Cette approche a été introduite, dans un premier temps pour construire des tests de signe multivariés invariants par transformation affine. Ensuite, elle a été utilisée pour donner une version invariante par transformation affine de la médiane spatiale et la médiane spatiale conditionnelle. Chakraborty (2010) [21] a généralisé cette technique dans le cadre de l'estimation du quantile géométrique. Soient $(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \in R^d$ avec $n > d+1$. On note $\alpha = i_0, i_1, ..., i_d$un sous-ensemble de $(d+1)$ indices inclus $1, 2, ..., n$. On définit la matrice suivante $Y(\alpha) = [Y_{i1} - Y_{i0}, Y_{i2} - Y_{i0}, ..., Y_{in} - Y_{i0}]$. Cette matrice de

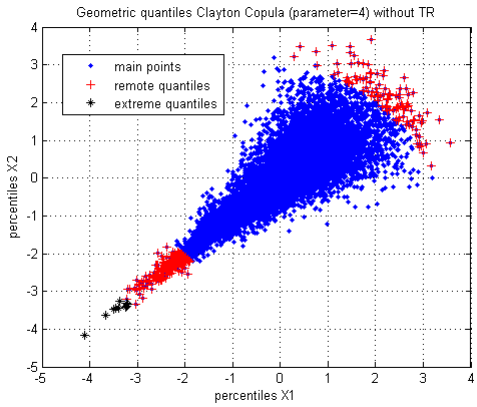


FIGURE 2.8 – Détection des scénarii adverses par quantiles géomètriques sans TR

dimension d*d sert à transformer le reste des points $(Y_j)_{,j\notin\alpha}$, en les exprimant dans un nouveau système de coordonnées de la façon suivante : $(Y_j^{\alpha} = [Y(\alpha)]^{-}1_{,j\notin\alpha})$, c'est l'étape de la transformation (T). Notons que, si la distribution de probabilité des Y_j est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur R^d, la matrice $Y(\alpha)$ est inversible. Cette étape de transformation des données nécessite également une transformation du vecteur u qui indexe le quantile géométrique $Q(u)$. Sur les graphiques suivants, les quantiles éloignés épousent mieux la forme de la distribution de la copule de Clayton du fait de l'étape de Transformation Retransformation.

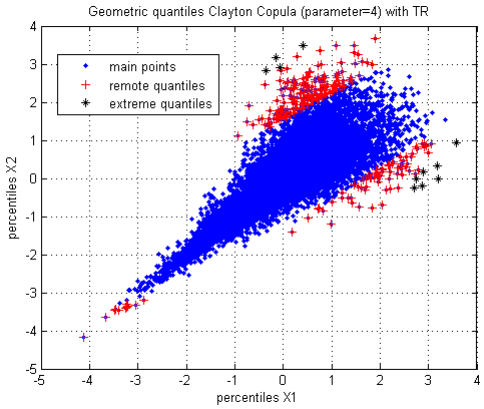


FIGURE 2.9 – Détection des scénarii adverses par quantiles géomètriques avec TR

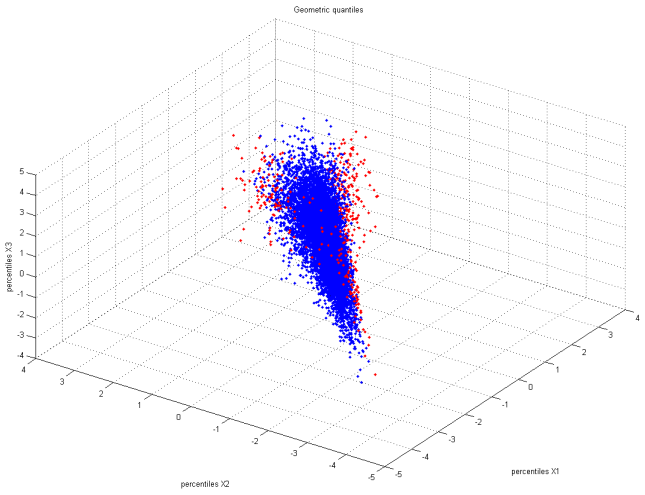


FIGURE 2.10 – Détection des scénarii adverses par quantiles géomètriques dans R^3 avec TR

Si les quantiles géomètriques offrent des résultats satisfaisant y compris pour des distributions non elliptiques via l'étape de Transformation Retransformation, un autre outil théorique peut être utilisé pour répondre à la problématique de détection de réalisation *éloignées* d'un vecteur aléatoire. Il s'agit les fonctions de profondeur.

2.4.3 Approche par fonction de profondeur

Chaouch (2008) [22] reprend le concept de fonction de profondeur spatiale, utilisé au préalable par Tukey (1975) [117] avec la fonction de profondeur par demi-plan. Elle est définie pour tout point x dans R^d comme le minimum de la probabilité portée par tout demi-plan fermée contenant x. Formellement, soit F une fonction de répartition et P la probabilité associée :

$$D_h(x,F) = inf\{P(H)\ \forall\ H\ demi-plan\ ferm,\ x \in H\}$$

Si l'on dispose de n réalisations $x_1, ..., x_n$ d'un vecteur aléatoire de R^d, chacune étant associée à un poids de $\frac{1}{n}$. $D_h(x,F_n) = \frac{Min(\frac{1}{n})}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\ \forall u.x_i \geq u.x$. Ainsi les points situés en périphérie ont des fonctions de profondeur par demi-plan plus faibles que les points situés au centre. La fonction de profondeur caractérise le degré d'isolement du point par rapport à un nuage de

point. Comme à chaque point est associé un niveau (compris entre 0 et 1), il est possible de détecter des régions de niveau et de classer les observations comme dans le cas univarié. Il est également possible de définir des fonctions de profondeur en utilisant d'autres secteurs du plan que des demi-plan. Les graphiques ci-dessous permettent d'illustrer cette approche.

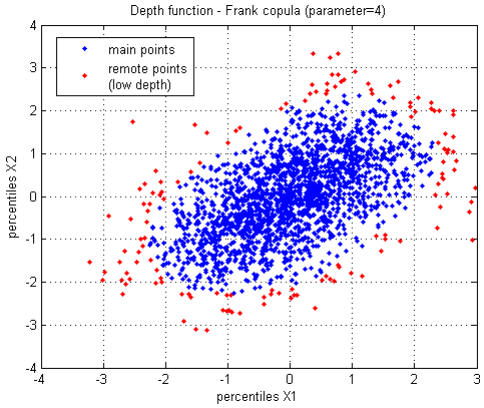


FIGURE 2.11 – Détection des scénarii adverses par fonction de profondeur

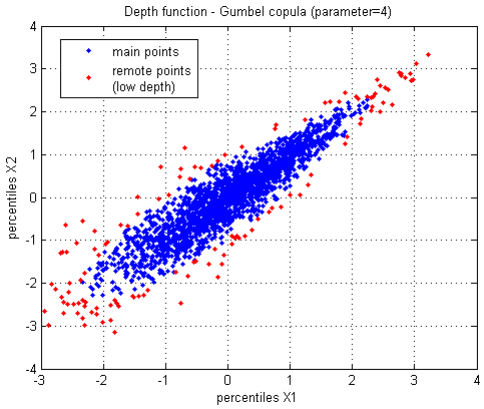


FIGURE 2.12 – Détection des scénarii adverses par fonction de profondeur

Toutefois cette approche souffre de deux inconvénients majeurs :

– Sur le plan théorique, elle nécessite d'avoir un nuage de points convexe pour garder un

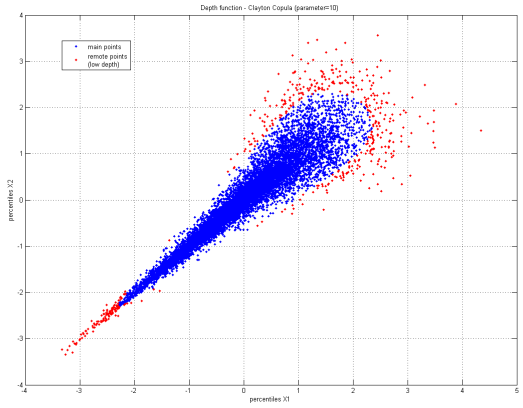


FIGURE 2.13 – Détection des scénarii adverses par fonction de profondeur

sens.

– Sur le plan pratique, sa mise en œuvre devient quasi impossible en dimension supérieure à 3.

2.4.4 Optimisation des simulations secondaires

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les simulations secondaires ont pour but de déterminer pour chaque simulation primaire de première année, la valeur économique des engagements d'assurance. Celle-ci correspond au Best Estimate des flux de passif défini précédemment. Il s'agit d'un calcul d'une espérance mathématique approximée grâce à l'utilisation des techniques de simulation de Monte Carlo à une moyenne. Dans ce qui suit, nous illustrons quelques approches différentes permettant d'accélerer le calcul de la valeur économiques des passifs.

Une première approche a été développé par Planchet et Nteukam (2010) [89] qui ont proposé une technique d'optimisation du temps de calcul de la valeur des options observées sur les contrats d'assurance vie dans le cadre des simulation Monte-Carlo. Cette technique consiste à regrouper le faisceau des trajectoires du processus initial en fonction des quantiles. Il s'agit d'une discrétisation en fonction de la norme L2 du processus en question qui sera ensuite utilisée dans l'évaluation des Best Estimate.

Dans le cadre des simulations Monte-Carlo, un modèle ALM requiert un volume de calcul considérable car chaque trajectoire des variables de marché implique la simulation de tous les éléments de passif du fait des interactions fortes dues aux options et garanties des contrats d'assurance vie (participation aux bénéfices, rachat,. . .). L'objectif est donc de proposer une technique de construction des trajectoires caractéristiques de l'évolution des actifs d'une manière optimale et de fournir une mesure d'impact sur le résultat de cette simplification.

L'idée est donc de définir un processus discrétisé à partir d'un processus $(S_t)_{tgeq0}$ continu à valeur dans $[0,T]$ [20] qui pourra représenter le rendement actions, un processus de taux d'intérêt. . .Planchet et Nteukam (2010) [89] proposent de remplacer le faisceau de trajectoires de ce processus par un processus simplifié construit de la manière suivante :

- à chaque instant $t \in [0,T]$, on fixe une partition $\left\{[\ S_{t,j-1}, S_{t,j}\ [\ , 1 \geq j \geq p\right\}$ du domaine de définition $\Omega = [\ 0, +\infty\ [\ \times\ ]-\infty, +\infty\ [$ du processus $(S_t)_{t\geq 0}$,
- on pose $\psi_j(t) = E\left(S(t)\,|S(t) \in [\ S_{t,j-1}, S_{t,j}\ [\right)$,
- on définit $(\psi_t)_{t\geq 0}$ comme processus clone de $(S_t)_{t\geq 0}$, en choisissant l'une des p trajectoires, chaque trajectoire étant pondérée par les probabilités usuelles $\pi_{t,j} = P\left(S_t \in [\ S_{t,j-1}, S_{t,j}\ [\right)$.

Autrement dit, il faut effectuer des regroupements de trajectoires en fonction des quantiles empiriques du processus S. Un choix par défaut peut être de choisir les bornes des intervalles de sorte que $\pi_{t,j} = \frac{1}{p}$. La figure ci-dessous illustre le principe de discrétisation proposé.

Planchet et Nteukam (2010) [89] rappellent que cette discrétisation est en général effectuée dans un univers risque neutre permettant d'optimiser le calcul des options et garanties des contrats d'assurance vie. Cette technique pourrait donc être utilisée dans le cadre de calcul SdS pour la détermination des provisions techniques à 1 an et donc d'améliorer le temps de calcul des simulations dans le simulations pour déterminer la distribution des fonds propres économiques.

Planchet et Nteukam (2010) [89] ont mis en œuvre cette technique dans le cadre d'un portefeuille d'épargne avec taux garanti. Dans le cadre de leur travaux, la comparaison du faisceau de trajectoires du processus initial à celui du processus discrétisé montre que ce dernier sous-estime fortement les valeurs extrêmes du processus initial mais peut donner une bonne estimation de la valeur moyenne dans une logique *best estimate*.

20. T représente l'horizon de projection (dans le cadre des contrats d'assurance vie, cet horizon pourraint atteindre 30 à 50 ans)

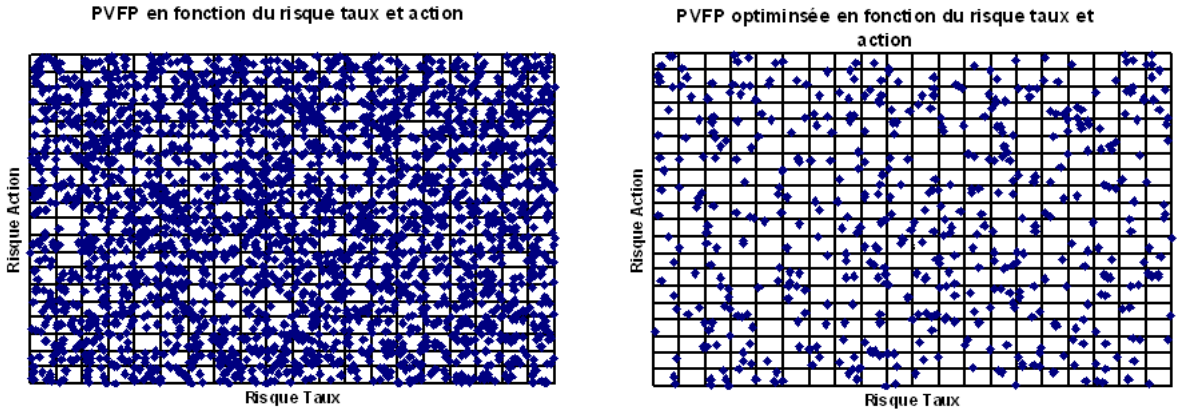


FIGURE 2.14 – Optimisation du calcul des options et garanties

D'autres méthodes d'optimisation du calcul de la valeur de provisions techniques Best Estimate via des formules fermées ont été proposées par Planchet et al (2012) [88] dans le cadre de modélisation d'un portefeuille d'épargne en euro. Ces formules permettent de retrouver directement le niveau de Best Estimate des engagements liées à la commercialisation des produits d'épargne en euro en fonction des provisions mathémariques initiales aussi bien en présence des rachats conjoncturelles. En effet, en partant du constat la valeurăbest estimateădes engagements d'un contrat d'épargne se situe en général dans une fourchette de 95% à 105% de la valeur de la provision mathématique, Planchet et al (2012) [88] proposentăune approximation analytique du coefficient permettant de transformer une PM enăbest estimate. Ils résduisent le problème à la résolution de l'équation différentielle représentant l'écart entre le taux servi et le taux sans risque pour trouver des formules fermées pour le BE en fonction des provisions mahématiques initiales. Cet écart est souvent modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dans la mesure où la plupart de temps la cible de revalorisation est le taux sans risque (TME, OAT 10 ans, dots). Les graphiques ci-dessous permettent d'illustrer ces formules fermées en absence d'opportunité d'arbitrage et en présence d'opportunité d'arbitrage et en absence de rachat conjoncturelle.

D'autres approches qui reposeent sur l'utilisation des techniques statistiques de regression pour estimer une fonction mathématique permettant d'exprimer la valeur économique des

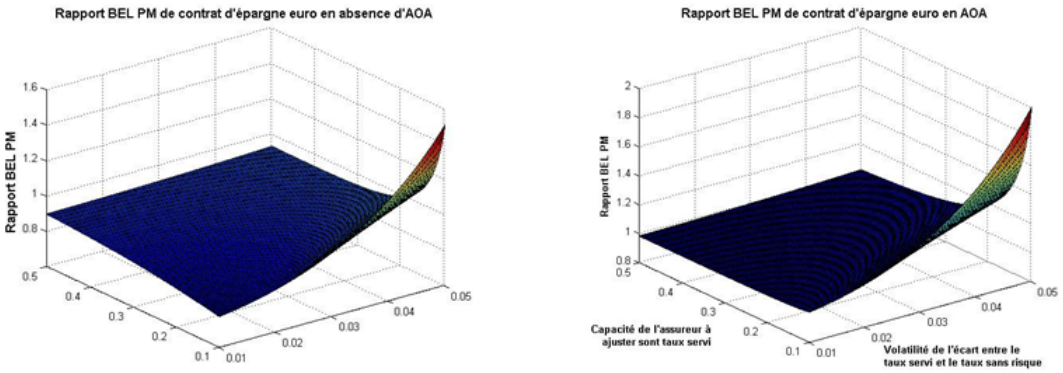


FIGURE 2.15 – Rapport BE par rapport aux PM

passifs en fonction des facteurs de risques clés ont été développées.

2.5 L'approche de *Replicating Portfolio*

Depuis la fin des années 70, la littérature actuarielle s'est intéressée au problème d'évaluation des produits d'assurance vie en s'appuyant notamment sur l'analogie entre garanties vie et les dérivés financiers pour chercher à valoriser ces contrats. Les spécification techniques du QIS4 viennent renforcer l'intérêt de la valorisation des actifs et des passifs d'assurance en référence au marché en imposant une hiérarchie dans les méthodes d'évaluation qui favorise les méthodes *mark to market* [21] autrement dit une évaluation en référence directe au marché, ensuite les méthodes *Market Consistent Mark to Model* s'agissant de mettre en œuvre des modèles mathématiques basés sur des formules de calcul, alimentées certes par des données de marché mais aussi par des données plus subjectives (risque de crédit). Il en résulte donc que la méthodologie SdS rentre dans la case des méthodes ou *Mark to Model*. Il est aussi important à signaler que le QIS4 précise le cadre dans lequel les engagements d'assurance peuvent être valorisés en utilisant l'approche financière classique *Mark to Market*. Il s'agit des risques réplicables, d'où l'utilisation des portefeuilles répliquants.

21. *A measure of the fair value of accounts that can change over time, such as assets and liabilities. Mark to market aims to provide a realistic appraisal of an institution's or compagny's current financial situation.*

2.5.1 Mise en œuvre

L'approche des portefeuilles répliquants est une extension d'une technique connue sous la dénomination anglophone *"Asset-Liability Matching"*. Elle a pour objectif de modéliser les passifs d'un assureur en référence à des actifs financiers permettant ainsi de donner une valeur de marché à ces engagements. Cette technique a eu un intérêt particulier dans la littérature actuarielle au début des années 80. Wilkie (1985) [120] et Wise (1984a [121], 1984b [122], 1987a [123], 1987b [124]) ont étudié cette technique dans un objectif de gestion actif-passif. Cependant dans une optique de détermination de la valeur de marché [22] des engagements d'un assureur. L'idée de répliquer ces engagements réside dans le fait que les produits d'assurance partagent plusieurs caractéristiques avec les dérivés financiers standards. Prenant par exemple la clause de participation aux bénéfices, celle ci n'est mis en place que si les taux de rendements financiers sont élevés, ce qui est similaire à un *Call* sur swaption. En plus, une garantie plancher sur un contrat en unité de compte n'est rien d'autre qu'un *Put* européen sur le sous-jacent du contrats. Donc, aux yeux des spécialistes financiers, plusieurs garanties des contrats d'assurance vie peuvent être traduites par des produits financiers. Donc, par définition un portefeuille répliquant est un portefeuille d'instruments financiers représentant les engagements (cash flow) futures relatifs à un contrat d'assurance permettant ainsi de capter le profile de risque. Il s'agit donc d'un ensemble d'actifs candidats générant à tout instant, des *cash flows* similaires aux engagements de l'assureur et cela sous tout état de la nature possible. La provision technique est alors égale au prix observable du portefeuille d'actif répliquant.

Retrouver le portefeuille répliquant signifie la résolution d'un problème d'optimisa-tion sous contraintes défini ci-dessous. Si on adopte la même notation que celle de 2.3.1, $cf_p(s,t)$ les *cash flows* de passif relatifs à l'instant t et au scénario s et $cf_{a,k}(s,t)$ le cash flow à l'instant t relatif

22. En l'absence d'un marché organisé de dettes d'assurance, la valeur de marché des engagements d'assurance ne peut être que théorique. Cette valeur comprend la valeur des prestations y compris les prélèvements sociaux (capitaux décès, rachats totaux, rachats partiaux, arrivées à échéance, participation aux bénéfices. . .), les commissions versées aux réseaux de distribution des contrats, les d'administration et gestion des contrats

au scénario s de l'actif $k \in \{1, \ldots, N\}$, le portefeuille répliquant composé de N instruments financiers dont les poids $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ sont déterminés par la résolution du problème suivant :

$$\begin{array}{c} min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{S} \left\{ cf_p(s,t) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \times cf_{a,k}(s,t) \right\}^2 \\ s \,/\, c \qquad \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{t=1}^{T} \delta^t \, \alpha_k \, cf_{a,k}(t) \right) = MCEV\left(cf_p\right) \\ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1 \end{array} \tag{2.22}$$

On note par $MCEV\left(cf_p\right)$ la valeur *market consistent* des passifs. Or, en vue de comparer cette approche avec celle des simulations dans les simulations, la figure ci-dessous permet néanmoins d'appréhender la différence. Une fois déterminé, le portefeuille répliquant va permettre de faciliter plusieurs calculs. Normalement, les engagements d'assurance ne peuvent être évalués qu'avec des simulations Monte Carlo sous plusieurs scénarios et cela consomme énormément de temps de calcul et est difficilement réalisable en pratique (les limites de l'approche SdS). Cependant en traduisant les engagements par un simple portefeuille d'instruments financiers pour lequel une valeur de marché est disponible ou facile à déterminer via des formules de valorisation analytiques, l'évaluation des engagements sera relativement simple et par la suite le capital économique sera aisément obtenu (voir la figure 2.16).

Si on prend par exemple le cas d'un portefeuille d'épargne en UC avec garantie plancher en cas de décès. L'assuré a payé une prime p investie en $t = 0$ dans une unité de compte (UC) de valeur initiale $UC_0 = p$. Or, le prix de l'unité de compte évolue au cours du temps et l'assuré se voit garantir à tout instant t le montant de l'unité de compte UC_t et s'il décède en $\tau > 0$, le montant assuré est $max\{UC_\tau, p\}$. Le payoff final de cette garantie d'assurance ressemble à une options financière de vente *"Put"* sauf que τ est une variable aléatoire. Cependant, en considérant la mutualisation des décès dans un large portefeuille, il est possible de constituer une couverture même partielle du risque et donc déterminer une valeur de marché des engagements liés à ce contrat d'assurance. En générale, il est possible pour les contrats soumis aux risques financiers de leurs associer une couverture financière. Donc le prix de cette couverture permettra d'évaluer l'engagement qui lui est associé. Les garanties de contrats d'épargne en euro et plus généralement, l'ensemble des contrats avec des clauses de participation au bénéfices financiers ou avec un taux minimum garanti ou taux annuel garanti ainsi que d'autre options telles que la tacite reconduction au delà du terme du contrat

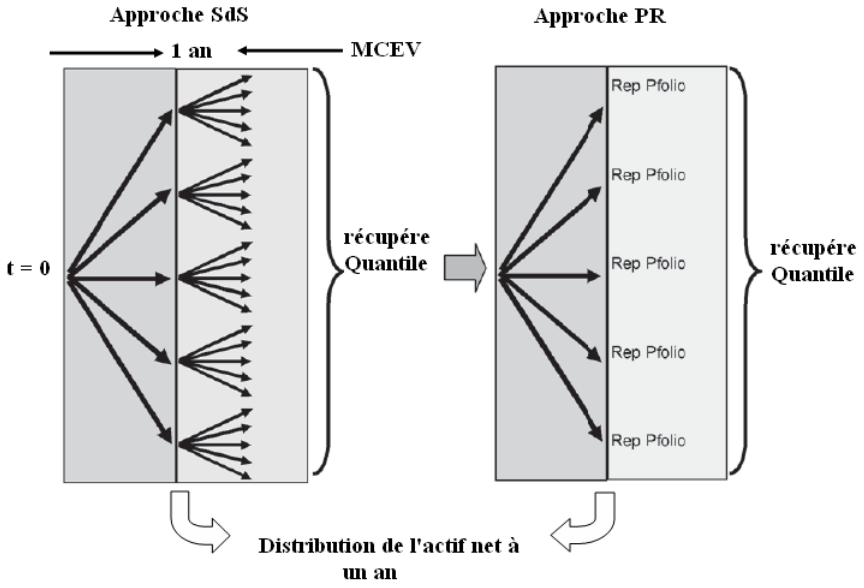


FIGURE 2.16 – Comparaison Sds et portefeuille répliquant

ou la possibilité de rachat partiel ou total moyennant une pénalité limitée, peuvent être interprétées comme des options financières. Si on suppose que l'épargne acquise évolue selon la dynamique suivante d'année en année :

$$PM_{t+1} = PM_t \times (1 + TMG + \alpha \times \{r_t - TMG\}^+) \tag{2.23}$$

Ici, on a r_t le taux servi aux placements, TMG est le taux minimum garanti et α est la part de participation aux bénéfices financiers. De point de vue de l'assuré la clause de participation au bénéfices peut se traduire par une option d'achat européen, la clause de remboursement anticipé quant à elle peut s'interpréter comme une option de vente américaine alors que la garantie de taux sur des versements futurs peut s'interpréter comme des swaptions.

2.5.2 Avantages et limites

Cependant, cette approche de portefeuille répliquant n'est pas sans limite. Outre les limites traditionnelles de la théorie financière, les garanties d'assurance présentent d'autres spécificités :

– le caractère discrétionnaire de la participation aux bénéfices et latitude dans la gestion des rendements financiers,
– un comportement d'assuré différent d'un investisseur rationnel sur un marché organisé (aléa morale),
– interdépendance des risques financiers et non financiers.

2.6 Approche LSMC : Least Square Monte Carlo

Il est important de rappeler que l'objectif ultime de chaque approche proposée dans ce chapitre est de déterminer la distribution du capital économique. L'approche que nous développons dans cette section est une extension de l'approche ICA *Individual Capital Assessment* pratiquée au Royaume uni. En effet, en 2004, la FSA (Financial Services Authority), autorité de contrôle des marchés financiers au Royaume-Uni en charge entres autres de l'Assurance, a établi de nouvelles normes prudentielles. Ces normes ICAS *Individual Capital Adequacy Standards* incluent une définition de la marge de solvabilité en fonction du Risque. Suivant cette nouvelle norme, les sociétés doivent déterminer elles-mêmes le niveau de leur marge de solvabilité, appelée ICA, en fonction de leur propre appréciation de leurs risques et suivant certains principes *rules* et recommandations *guidelines*. En pratique, il s'agit d'une approche basée sur des stress tests sur les risques jugés important par l'assureur *"main risk"* en comptabilisant à chaque scénario la perte sur la NAV *"the net assets value"*. Le capital de solvabilité est déterminé par aggrégation de toutes les pertes ainsi calculées en utilisant une matrice de corrélation.

Dans le cadre des futures normes Solvabilité II, comme dans le cadre ICAS, les sociétés se verront demander de déterminer leur marge de solvabilité en fonction de leur propre appréciation des risques. En effet, Solvabilité II a retenu en première approche la même définition de la marge de solvabilité, à savoir la probabilité que la société soit solvable dans 99,5% des cas au bout de l'année qui suit l'année en cours. De plus, la même liste de risques à prendre en compte a été retenue. Cependant, la détermination de cette marge de solvabilité nécessite détermination de la distribution des fonds propres économiques alors que l'approche ICA prévilège le calcul d'un capital par risque au niveau d'un quantile donné puis les résultats sont aggrégés à l'aide d'une matrice de corrélation. Ce résultat peut être

différent du quantile de la distribution du capital économique. Dans cette section, nous proposons une approche inspirée des normes ICAS permettant de déterminer la distribution du capital économique.

2.6.1 Mise en œuvre

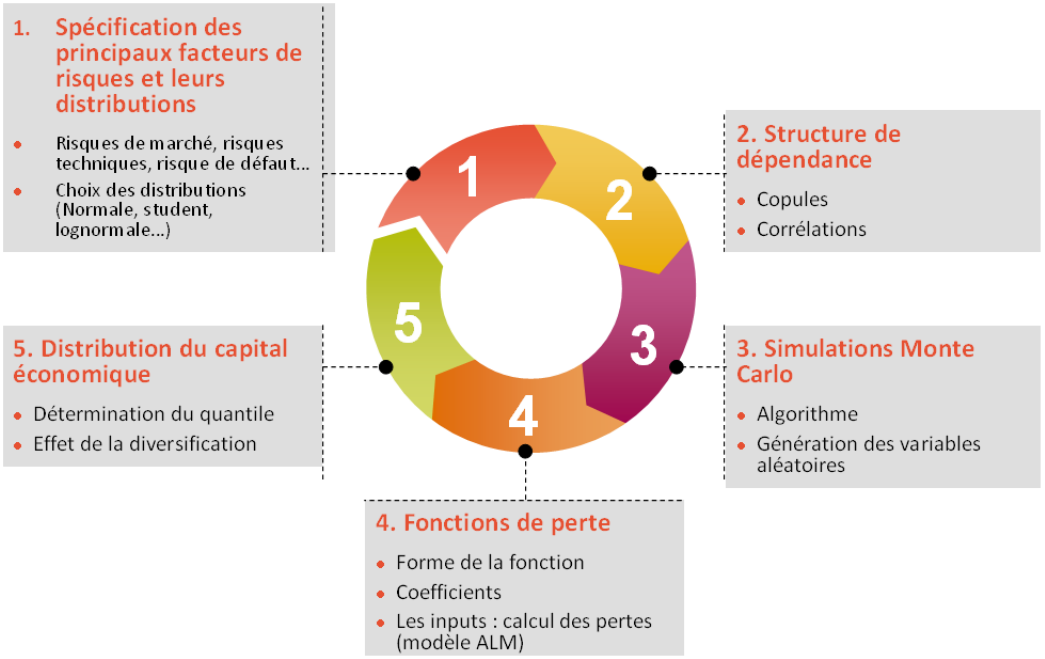


FIGURE 2.17 – Détermination du capital de solvabilité par fonctions des pertes

L'assureur est exposé à plusieurs types de risques qui peuvent se catégoriser en trois familles :

- les risques de marché,
- les risques d'assurance,
- le risque opérationnel,
- le risque de défaut de contrepartie.

Dans chaque famille, l'assureur peut classifier les risques en fonction de leur impact sur sa situation financière. Cependant, sur marché français les risques les plus prépondérants sont le risque de taux, d'action et d'écartement de spread de signature pour la famille des risques

de marché, les risques de rachat, de mortalité et de longévité qui sont aux avant-postes dans la famille des risques d'assurance.

Ces différents risques sont des variables aléatoires dont la distribution est plus ou moins facile à dériver en fonction de la famille à laquelle ils appartiennent. En effet, il est plus facile de déterminer une loi de distribution d'un indice action qu'un taux de rachat dans la mesure où le nombre des observations historiques est plus grand dans un cas que dans l'autre.

Donc, la première étape est de spécifier les principaux facteurs de risque et d'en déterminer les distributions de probabilité. Cependant, ces facteurs de risque interagissent entre eux car par exemple une situation de hausse des taux n'est pas sans impact sur le rendement des actions et le comportement des épargnants en assurance vie. Il s'avère ainsi important de définir la struture de dépendance entre les différents facteurs de risque. Une fois les deux premières étapes terminées, l'assureur peut avoir recours aux techniques de simulations type Monte Carlo pour générer énormement de réalisation des facteurs de risque initialement définis. Cependant, chaque écartement du facteur de risque par rapport à la situation centrale se traduit en pratique par une perte ou un gain sur la NAV. Il faut donc définir une technique permettant de traduire la sévérité du risque en gain ou perte de NAV. C'est la fonction de perte qui permet d'accomplir cette tâche. Nous allons détailler ci-dessous la méthode de sa création ce qui permet de traduire chaque réalisation de facteur de risque par une variation de la NAV et donc de déterminer la distribution du capital économique. Dans ce qui suit nous décrivons en détails cette approche et nous présentons un exemple concret sur le plus grand portefeuille d'épargne sur le marché français.

Spécification des principaux facteurs de risque et de leurs distributions

Comme préciser ci-dessus, la spécification des facteurs est une étape primordiale pour la mise en œuvre de cette approche. Donc, un *mapping* des riques est nécéssaire. Généralement, dans un modèle interne, l'assureur ne peut pas se contenter des risques spécifiés dans la formule standard.

Détermination de la structure de dépendance

Deux options de modélisation de la dépendance existent et se distinguent par leur degré de complexité :

– la matrice de corrélation
– les copules

Simulations des facteurs de risque

Après avoir déterminé la distribution de chaque facteur de risque ainsi que la structure de dépendance, nous allons avoir recours à la technique de simulation pour générer des réalisations.

Donc, en utilisant la technique de simulation Monte Carlo pour la génération de variables aléatoires uniformes tout en respectant la structure de dépendance initialement déterminée, nous pouvons à l'aide de la méthode inverse ou celle de réduction de variance [23] pour simuler les réalisations des facteurs de risques.

Fonction de perte

La fonction de perte ou en anglais *"Loss function"* est une approximation de la perte sur la *"Net Assets Value"* pour un scénario de stress d'un facteur de risque donnée. C'est une technique utilisée pour déterminer la meilleure approximation de la variation de NAV issue d'un vrai modèle ALM. Cette fonction prend comme donnée la valeur du facteur de risque et produit en résultat la variation de la situation nette économique.

Cependant, en la formule standard, le SCR est calculé par aggrégation des SCR pour chaque risque individuel en utilisant *une matrice de corrélation* permettant d'aggréger les SCR modulaires. Cette technique est relativement simple. Cependant, ce calcul se base sur plusieurs hypothèses simplificatrices qui sont typiquement invalides dans un monde réel :

– une relation linéaire entre la perte et le facteur de risque en question,
– tous les risques ont une distribution elliptique (comme la loi normale),
– la dépendance entre les risques peut être représentée par une corrélation constante à chaque point de la distribution.

23. Concernant d'autres méthodes, le lecteur est invité à consulter Rubinstein (1981), Devroye (1986) et Ross (1997).

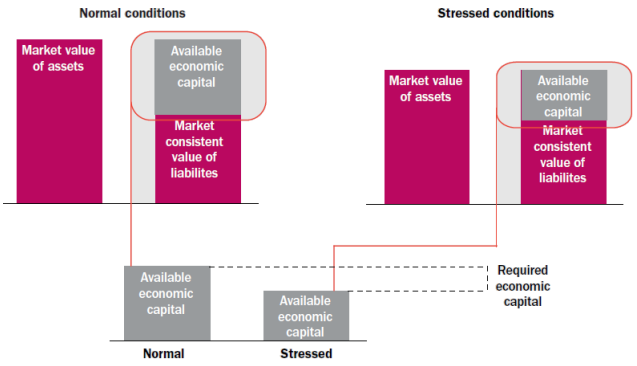


FIGURE 2.18 – Niveau de capital requis pour chaque scénario de stress

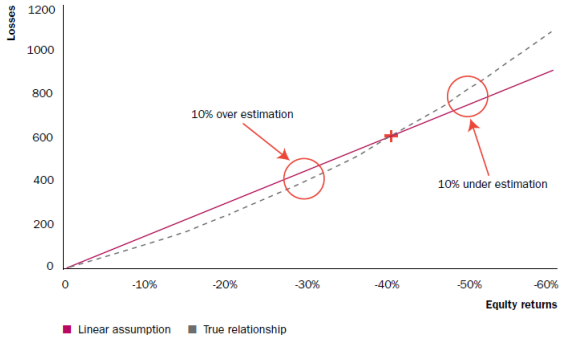


FIGURE 2.19 – Relation entre le risque action et la perte de NAV

Nous avons lancé un stress de -40% sur la valeur de marché des actionsn, il en résulte une perte de 600. La ligne continue représente la fonction de perte implicite dans un calcul de type formule standard. Nous avons en plus lancé plusieurs stress actions à différents niveaux et la courbe en pointillée refléte mieux la réalité.

Donc, en réalité, la perte n'est pas une fonction linéaire du stress. Il faut donc définir une technique permettant de traduire la sévérité du risque en gain ou perte sur la situation nette de l'assureur. C'est la fonction de perte qui permet d'accomplir cette tâche. En effet, il s'agit d'une fonction permettant d'approximer la perte ou le gain au niveau du capital disponible (sur l'actif ou sur le passif) suite à un écartement du facteur de risque par rapport à sa valeur initiale. En pratique, cette fonction permet d'exprimer la perte en fonction du

facteur de risque. Il s'agit en générale d'un polynôme dont les coefficients sont estimés via des techniques de régressions sur des réalisations de perte ou gain déterminées via le modèle ALM. Supposons que x est le niveau de facteur de risque donné, la fonction de perte est donnée par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times x^i \tag{2.24}$$

α_i sont les coefficients de polynômes à estimer en fonction des pertes réelles déterminées via le modèle ALM. En fait, supposons $p_1, p_2, , p_m$ m pertes réelles associées aux niveaux de risque suivants $x_1, x_2, , x_m$, donc $\alpha_1, \alpha_2, , \alpha_n$ sont, si on adopte la méthode des moindres carrés linéaire, la solution du problème d'optimisation suivant :

$$min_{\alpha_1,\alpha_2,,\alpha_n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times x^i - p_k \right)^2 \tag{2.25}$$

Il existe d'autres méthodes d'estimation telle que la méthode de spline. Cependant, si on utilise chaque fonction de perte telle qu'elle est estimée à travers des pertes réelles issues du modèle de projection lors des scénarios de stress sur chaque facteur de risque, les pertes ainsi déterminées ne respectent pas le principe de non séparabilité dans la mesure où la somme de deux pertes issue de deux stress individuels est différente de la perte effective lorsque les deux stress surviennent simultanément. Il faut donc corriger les fonctions de perte pour tenir compte de cette effet et donc de l'intéraction entre les facteurs de risques et de la structure de dépendance que nous avons définit auparavant. En effet, la structure de dépendance reflète la probabilité que deux ou plusieurs risques surviennent au même temps alors que l'intéraction reflète l'impact de l'occurence de deux risques simultanément sur la perte de la NAV. Il faut donc déterminer pour chaque paire de risque, la constante $\frac{(f(x+y)-f(x)-f(y))}{(x\ y)}$. Ce facteur permet de modifier la fonction de perte pour tenir compte du principe de non séparabilité.

Distribution du capital économique

Les fonctions de perte et les termes croisés permettent de traduire les réalisations des facteurs de risque en perte de la NAV. Il suffit donc de sommer toutes les pertes pour avoir une distribution du capital économique.

2.6.2 Avantages et limites

L'approche que nous avons proposée dans cette section présente de multiples avantages :

- Possibilité de lancer un grand nombre de simulations,
- Facilité de mise en oeuvre,
- Possibilité d'automatisation des calculs,
- Prise en compte une large gamme de distribution de risque,
- Conversion du niveau de risque en Profits & Losses en utilisant les loss function,
- Flexibilité au niveau des dépendances entre les risques.

Cependant cette approche n'est pas sans limite :

- Difficulté de calibration des risques techniques (rachat, pandémie,. . .)
- Nécessité de détermination de plusieurs points pour calibrer la loss function.

2.6.3 Application

Nous avons appliqué cette approche sur le portefeuille d'épargne le plus gros sur le marché français en terme d'encours. En parallèle, nous avons réalisé les calculs du SCR selon la cinquième étude d'impact (QIS5 [24]) dont les résultats figurent dans le tableau suivant (en millions d'euros) :

SCR	Brut de PB	Net de PB
SCR marché	2 616.21	1 162.33
Taux d'intérêt	187.70	187.70
Actions	786.10	438.99
Immobilier	357.95	280.76
Spread	1 693.10	472.35
Taux de change	24.10	13.95
Concentration	0	0
Prime d'illiquidité	281.60	114.58
SCR Souscription	1 187.46	702.57
Mortalité	258.95	141.05
Longévité	0	0
Rachat	1 086.43	617.06
Incap/Inval	0	0
Coûts	118.15	113.69
Révision	0	0
Catastrophe	6.86	4.17
SCR Opérationnel	20	20
SCR Défaut	34	23
SCR santé	0	0
SCR non vie	0	0
SCR Actif intangible	0	0
BSCR	3 142.26	1 508.29
Ajustement PB	1 633.98	
Ajustement Impôt	526.18	
SCR	1 002.09	
NAV centrale	2 234.14	
Ratio de couverture	222.95%	

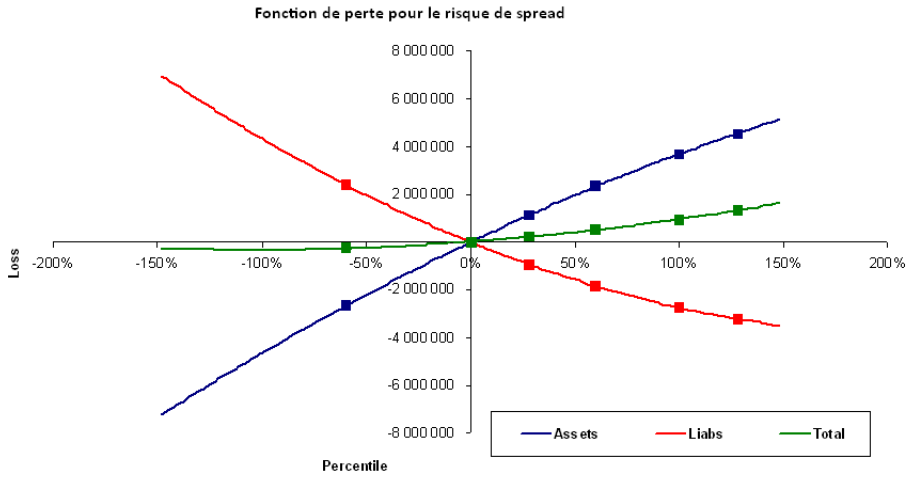
On détermine alors un ensemble de facteurs de risques plus large que celui spécifié par le QIS5. Les risques actions et spread ont été modélisés à l'aide de la loi de Student en se basant sur des données historiques alors que les autres risques de marché ont été modélisés à l'aide de la loi normale. Tous les risques techniques étaient modélisés selon la loi normale (uniquement les risques mortalité / longévité étaient calibrés en fonction d'observations d'expérience. Le

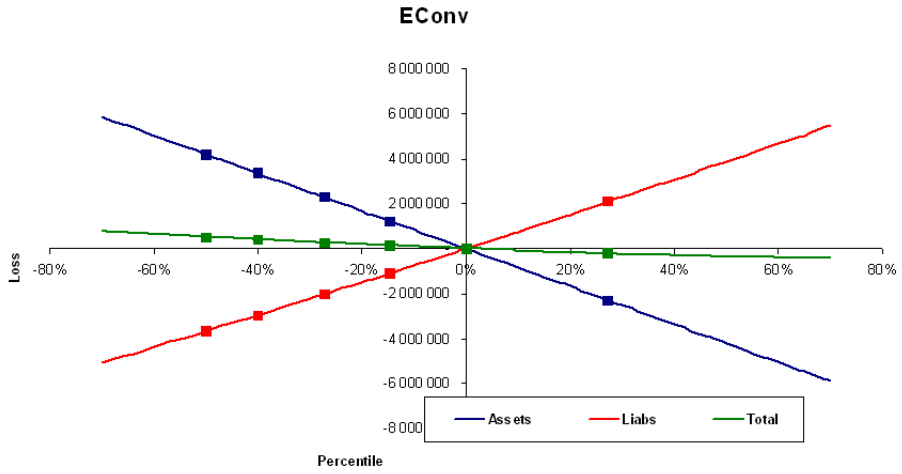
24. Les spécifications QIS5 sont disponibles en ligne sur le site du EIOPA

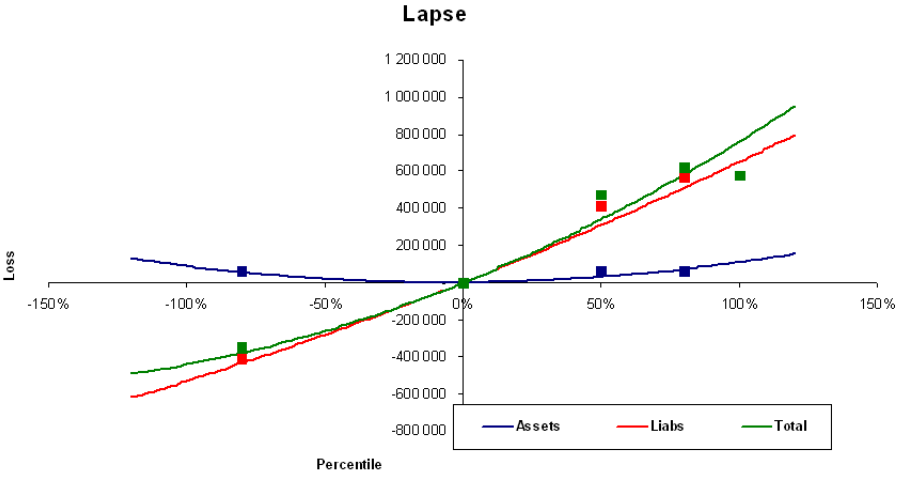
risque de rachat / transfert était fixé arbitrairement en fonction des chocs du QIS5).

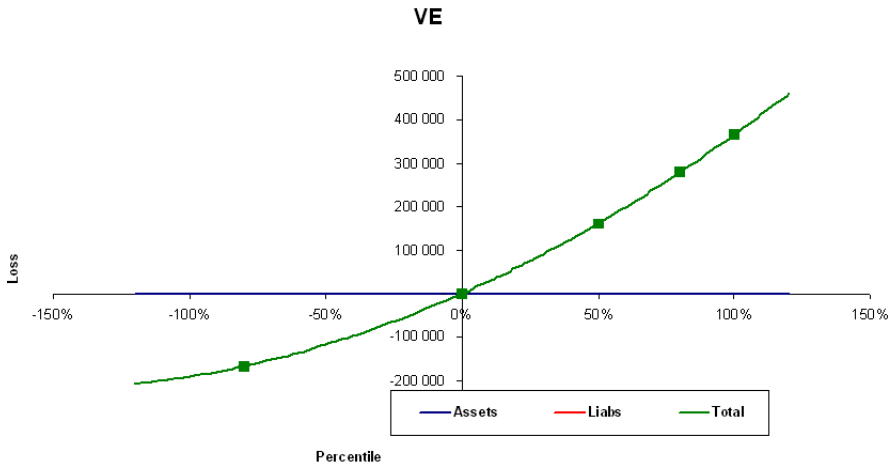
La structure de dépendance se matérialise par une matrice de corrélation semi-définie positive (pour des fins de simulation) dont la plupart des composantes étaient estimées à l'aide des données historiques. Il faut aussi signaler que les intéractions étaient calculées uniquement entre les principaux risques.

Les fonctions de perte sont calibrées à l'aide des 5 quantiles différents pour la majorité des facteurs de risque. Les figures suivantes illustrent les fonctions de perte pour les quatres principaux risques à savoir le spread de crédit (calibré en tenant compte du risque de défaut), le risque de rachat, le risque action et le risque de volatilité action.




EConv
8 000 000
6 000 000
4 000 000
2 000 000
-2 000 000
-4 000 000
-6 000 000
-8 000
Loss
-80%
-60%
-40%
-20%
0%
20%
40%
60%
80%
Assets
Liabs
Total
Percentile


Lapse
1 200 000
1 000 000
800 000
600 000
400 000
200 000
-200 000
-400 000
-600 000
-800 000
Loss
-150%
-100%
-50%
0%
50%
100%
150%
Assets
Liabs
Total
Percentile



En lançant le prototype de notre approche, nous obtiendrons après agrégation la distribution du capital économique.

Le capital économique est donc le quantile d'ordre 99,5%. Les résultats ainsi obtenus figurent dans le tableau suivant :

	Valeur en million d'euro
NAV central	2 234,4
Capital économique	2 223,8
Capital non diversifié	4 011,85
Effet diversification	1 777,71
Ratio de couverture	100,49%
SCR Formule standard (SIQ5)	1 002,09
Ratio de couverture (QIS5)	22295%

Ceci montre bien que la formule standard n'est pas appropriée dans la mesure où le ratio de couverture passe de 223% à 100,5%. L'assureur doit recourir à un modèle interne pour mieux apréhender les risques qu'il encourt.

2.7 Conclusion

Dans cette première partie de la thèse, nous avons proposé les différentes approches de modélisation de capital économique dans le cadre de Solvabilité. Cependant, peu importe l'approche adoptée, l'assureur doit alimenter son modèle interne par des hypothèses réa-

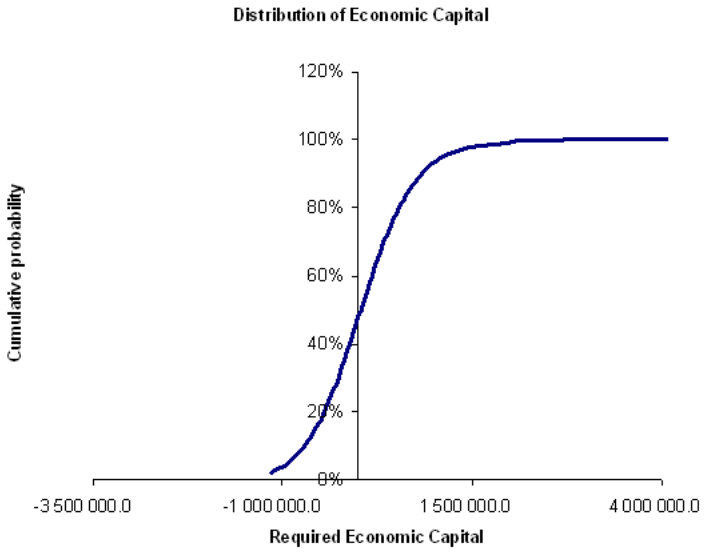


FIGURE 2.20 – Distribution des fonds propres économiques selon l'approche par fonction de perte

listes sur les différents risques qu'il encourt. La calibration de ces risques doit être issues des données d'expérience issues des observations historiques. Cependant, cet exercice même s'il savère relativement simple lorsqu'il s'agit des risques de marché (risque action, taux, immobilier,. . .) grâce à la disponibilité des données historiques, il est beaucoup plus compliqué lorsqu'il s'agit de calibration des risques d'assurance liés au comportement des assurés (risque de rachat, mortalité, longévité, incapacité et invalidité, coûts,. . .).

Dans la prochaine partie de la thèse, nous nous intéressons à la calibration des risques techniques. Nous proposons des approches de détermination des lois d'expérience pour les risques de mortalité, longévité, catastrophe ainsi que le risque dépendance.

Deuxième partie

Modélisation des risques techniques

Chapitre 3

Modélisation stochastique de la mortalité

Ces dernières années, une augmentation de l'espérance de vie à la naissance a été constatée dans de nombreux pays. Cette évolution est généralement attribuée aux progrès de la médecine, à l'amélioration des conditions sanitaires et à l'augmentation du niveau de vie. En France par exemple, sur les trente dernières années, l'espérance de vie à la naissance a augmenté d'un trimestre par an en moyenne. Afin de prévoir comment vont évoluer les taux de mortalité futurs, plusieurs approches ont été développées et des modèles de projection ont été proposés. Cependant, cette tâche demeure un exercice délicat dans la mesure où plusieurs facteurs interviennent conjointement, en particulier des facteurs économiques, sociaux, culturels difficiles à mesurer et affectant les individus de manière différenciée. Les approches de projection de la mortalité citées dans la littérature actuarielle comportent plusieurs types de modèles tels que ceux basés sur l'évolution des taux de mortalité en fonction de l'âge seul et d'autres, plus élaborés, basés sur l'évolution des taux de mortalité, non seulement en fonction de l'âge, mais aussi du temps.

Parmi ces approches, une première technique, courante en Statistique inférentielle, consiste à ajuster les observations de chaque année à l'aide d'un modèle paramétrique (Makeham, Gompertz, Weibull...). Cela permet de condenser l'information annuelle dans un petit nombre

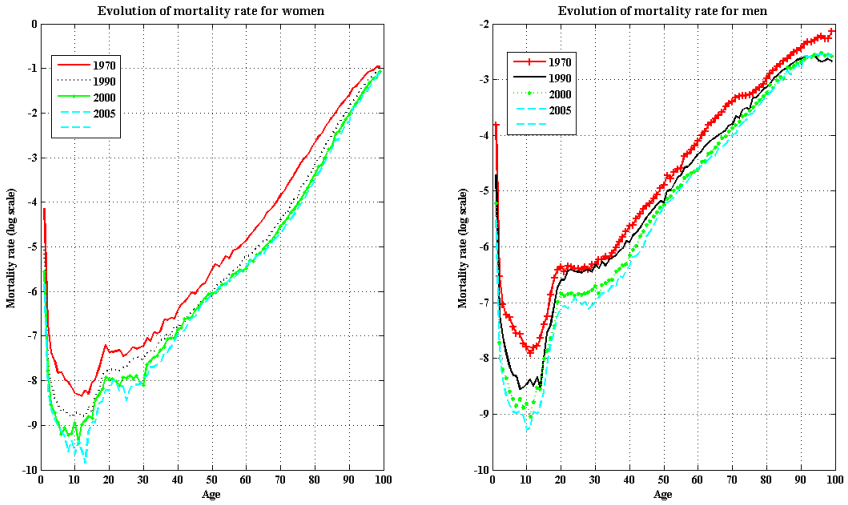


FIGURE 3.1 – Evolution de l'intensité de mortalité de la population française

de paramètres. Compte tenu de l'évolution de la mortalité dans le temps, l'évolution de ces paramètres est à son tour modélisée. En assurance vie, par exemple, les actuaires procèdent traditionnellement en calculant les primes et les provisions mathématiques et se fondant sur des taux de mortalité déterministes fonction de l'âge de l'assuré, en utilisant un taux d'intérêt technique constant. Toutefois, les hypothèses sous-jacentes à cette manière de procéder sont nécessairement simplificatrices. En fait, ni le taux d'intérêt, ni l'intensité de mortalité ne sont véritablement déterministes, ce qui induit trois types de risques :

– le risque financier,

– le risque systématique de mortalité,

– le risque non systématique de la mortalité.

Ici on distingue entre le risque de mortalité systématique, lié au développement futur de la mortalité instantanée de l'assuré, et le risque non systématique lié au développement futur de la mortalité pour l'ensemble du portefeuille. La modélisation stochastique de la mortalité permet donc de mieux prendre en compte l'incertitude sur les variations futures des taux de mortalité. Les provisions constituées incorporent, certes, le risque supporté par la compagnie d'assurance. Mais, la construction des tables de mortalité se heurte fréquemment à un problème de taille d'échantillon car, en pratique, la taille des portefeuilles disponibles

rend impossible la mise en œuvre des modèles de mortalité bidimensionnels tels que *Lee-Carter (1992)* ou *Poisson Log-Bilinéaire* (2001).

3.1 Modèles de mortalité stochastique

Afin de modéliser la mortalité, plusieurs approches ont été développées. **Marocco & Pitacco(1998)** [77] ont modélisé le taux annuel de décès via une distribution beta avec les paramètres âge et temps calendaire. Ils ont pu quantifier le risque de mortalité inhérent à un portefeuille d'assurance, sous l'hypothèse que le nombre des survivants suit une distribution binomiale-beta. **Olivieri (2001)** [85] a montré qu'en estimant l'intensité de la mortalité en fonction de l'âge et du temps calendaire, on obtient des primes et des provisions plus réalistes qu'en se limitant à l'âge. Quant à l'approche de **Olivieri & Pitacco (2002)** [86] est différente des deux approches précitées ci-dessus. Ils décrivent l'évolution future de la fonction de survie par une famille de paramètres aléatoires, et pour pouvoir tarifier et provisionner, ils font appel aux méthodes baysiennes pour décrire la fonction de distribution des paramètres proposés. Leur modèle permet de distinguer entre le risque de mortalité non systématique révélé du caractère aléatoire des paramètres et le risque systématique révélé de l'incertitude associée à ces mêmes paramètres. Cependant, déjà prouvé son efficacité, le modèle de Lee Carter a été appliqué sur plusieurs populations dont les Etats-Unis d'Amérique avec Lee & Carter (1992) [69], le Canada avec Lee & Nault (1993) [70], le Chili avec Lee & Kaufman (1994) [70], le Japon avec Wilmoth (1996) [125], la Belgique avec Louis (2001) [71]. Cette méthode présente une composante propre à l'âge et une autre tendancielle. Néanmoins, cette approche présente des inconvénients dans la mesure où elle n'incorpore pas l'avis de l'expert sur le progrès de la médecine, sur l'évolution de la mortalité, l'apparition des nouvelles maladies voir même l'évolution du style de vie ainsi que d'autres critiques de dimension technique.

3.2 Les modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges

Les estimateurs des paramètres des modèles de mortalité qu'on vient de les présenter dans le précédent chapitre ne sont pas de bonne qualité lorsqu'on les applique sur les âges élevés. Il est souvent recommandé d'occuper un intérêt particulier à la mortalité à ces âges. Cependant, l'allure de la courbe de mortalité présente généralement les caractéristiques suivantes :

- La forte mortalité postnatale.
- Le creux de la mortalité de 5 à 15 ans.
- La bosse de mortalité, appelée aussi ***bosse accidents*** vers 20 à 30 ans. Cette bosse reflète la mort violente (accidents et suicides) dans cette tranche d'âge, ceci est nettement remarqué chez les hommes que chez les femmes.
- L'allure générale quasi-linéaire à partir de 40 ans.
- Une légère allure concave en fin de table.

Horuichi et Wilmoth (1998) [58] ont montré que l'allure de la courbe de mortalité est concave sur les grands âges. Denuit et Goderniaux (2005) [33], Thatcher (1999) [115], Coale et Guo (1989) [23] et Coale et Kisker (1989)coa89 ont proposé des modèles d'extrapolation de la mortalité sur les grands âges à partir de 75 ans. Dans ce qui suit, nous présentons ces différents modèles ainsi que les hypothèses de leurs constructions.

3.2.1 Le modèle de Denuit et Goderniaux (2005)

Denuit et Goderniaux (2005) [33] partent d'un modèle log-quadratique, en introduisant une constante pour la fermeture de la table de mortalité. Ils imposent que $q_{130} = 1$ et $q'_{130} = 0$ avec un ajustement par moindres carrés du modèle suivant :

$$ln\,(q_x) = a + b\,x + c\,x^2 + \epsilon_x$$

Avec x l'âge et $\epsilon_x \rightsquigarrow N\left(0, \sigma^2\right)$ et sont i.i.d, q'_{130} est la dérivée de q_x par rapport à x avec $x = 130$. Denuit et Goderniaux (2005) [33] se donnent comme hypothèse la constance du taux de hasard dans la mesure où $\mu_{x+u} = \mu_x$ avec $0 \leq u \leq 1$, ce qui fait que $\mu_x = -ln\,(p_x)$. Partant de ces contraintes, Denuit et al retrouvent l'équation suivante :

$$a + b\,x + c\,x^2 = c\,130^2 - 260\,x + x^2$$

Les mêmes contraintes imposent à la courbe de mortalité une concavité au grands âges en plus de l'existence d'une tangente au point $x = 130$ ans.

Or, pour déterminer l'âge à partir duquel l'ajustement en utilisant ce modèle sera utilisé, Denuit et Goderniaux (2005) [33] ont proposé le critère de maximisation du coefficient d'ajustement R^2 en faisant varier l'âge de raccord entre 50 et 85 ans.

3.2.2 Le modèle de Coale et Guo (1989)

La technique d'extrapolation de la mortalité aux grands âges par le modèle de Coale et Guo (1989) [23] se basent sur des données relatives à 6 pays à savoir Autriche, France, Japon, Norvège, Pays bas et Suède. Cette technique consiste à remplacer les taux de mortalité observés aux grands âges par une séquence de taux de mortalité extrapolés aux âges 85-89, 90-94, . . ., 105-109 ans. Le modèle est le suivant :
Posons $k' = ln\left(\frac{\widehat{\mu_{75}}}{\widehat{\mu_{74}}}\right)$
avec :

$$\widehat{\mu_{75+i}} = \widehat{\mu_{75}}\; exp\left(i\,k' - \frac{i\,(i+1)}{2}\,R\right),\ \forall\, i = 1, \ldots, 34$$

Sous la contrainte :

$$\widehat{{}_5\mu_{105}} - \widehat{{}_5\mu_{75}} = 0.66$$

$$\widehat{{}_5\mu_x} = \prod_{i=0}^{4} \left(\widehat{\mu_{x+i}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Avec :

$$R = \left(30\,k' - ln\left(\frac{0.66 + \widehat{{}_5\mu_{75}}}{\widehat{{}_5\mu_{75}}}\right)\right)\,\frac{1}{525}$$

3.2.3 Le modèle de Coale et Kisker (1990)

Coale et kisler (1990) [24] partent de l'hypothèse suivante :

$$\widehat{\mu_x} = \widehat{\mu_{65}}\ exp\left(k_x\left(x-65\right)\right)\ \forall\ x \geq 65\ ans$$

Avec k_x défini comme étant le taux de croissance de la mortalité à l'âge x. Partant des données relatives à l'Autriche, l'Allemagne de l'ouest, la France, le Japon, le Pays Bas, la Norvège et le Suède, les auteurs ont remarqué que le taux de croissance k_x possède en général un pic au voisinage de 80 ans avant de décroître linéairement. Donc, ils ont proposé :

$$k_x = k_{80} + s\left(x-80\right)$$

Ils ont fixé arbitrairement $\widehat{\mu_{110}}$ à 1 pour les hommes et 0.8 pour les femmes. Or on a :

$$\widehat{\mu_{110}} = \widehat{\mu_{79}}\ exp\left(\sum_{x=80}^{110} k_x\right) = \widehat{\mu_{79}}\ exp\left(\sum_{x=80}^{110} k_{80} + s\left(x-80\right)\right)$$

Ce qui fait que :

$$s = -\frac{ln\left(\frac{\widehat{\mu_{79}}}{\widehat{\mu_{110}}}\right) + 31\ k_{80}}{465}$$

Au delà de 80 ans, le taux du hasard sera donné par :

$$\widehat{\mu_x} = \widehat{\mu_{79}} exp\left(\sum_{i=80}^{x}\left(k_{80} + s\left(i-80\right)\right)\right)\ \forall\ x = 80,\ldots,109$$

Ou encore :

$$\widehat{\mu_x} = \widehat{\mu_{x-1}} exp\left(k_{80} + s\left(x-80\right)\right)\ \forall\ x = 80,\ldots,109$$

On a en plus $k_{80} = \frac{ln\left(\frac{\widehat{\mu_{80}}}{\widehat{\mu_{65}}}\right)}{15}$

3.2.4 Le modèle de Lundberg (2001)

Lundberg (2001) [73] a proposé de modifier la formule de Makeham en remplaçant la croissance exponentielle par une droite aux âges élevés de la manière suivante :

$$\widehat{\mu_x}\,(a,b,c,k) = a + b\,exp\,(c\,x) \;\text{ si } x \leq \omega$$

$$\widehat{\mu_x}\,(a,b,c,k) = a + b\,exp\,(c\,x) + k\,(x-\omega) \;\text{ si } x > \omega$$

Partant des données suédoises de mortalité relatives aux périodes s'étalant entre 1988 et 1992 et de 1993 à 1997, Lundberg a défini ω comme étant l'âge à partir duquel la mortalité tend à se stabiliser. Il s'agit donc de retrouver la valeur de x qui minimisent la quantité :

$$Q^2 = \sum_x \frac{\left(\widehat{\mu_x} - \mu_x\,(a,b,c,k)\right)^2}{\frac{\widehat{\mu_x}}{\widehat{L_x}}}$$

Avec $\widehat{\mu_x}$ et $\widehat{L_x}$ sont respectivement le taux de hasard et l'exposition au risque, et cela en conservant la notation de Lundberg.

3.2.5 Le modèle logistique

Le modèle logistique est défini comme suit :

$$\widehat{\mu_x} = c + \frac{a\,e^{bx}}{1 + \sigma^2 \frac{a}{b}\left(e^{bx} - 1\right)}$$

3.2.6 Le modèle de Kanisto

Ce modèle est un cas particulier du modèle logistique, il définit le taux de hasard de la manière suivante :

$$\widehat{\mu_x} = \frac{ae^{bx}}{1 + a\left(e^{bx} - 1\right)}$$

3.3 Les modèles de mortalité prospective

3.3.1 Lee & Carter (1992)

Dans ce modèle l'estimateur du taux de hasard $\widehat{\mu}$ est analysé en composantes qui dépendent de l'âge et du temps, avec introduction de contraintes qui entraînent l'identifiabilité Ce

modèle inclut aussi une hypothèse d'homoscédasticité des erreurs ϵ_{xt} considérées comme bruit blanc gaussien.

$$ln(\widehat{\mu_x}(t)) = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{xt} \tag{3.1}$$

$$\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \beta_x = 1 \quad \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} k_t = 0 \tag{3.2}$$

Le taux de mortalité à l'âge x est donc la somme d'une composantes spécifique à l'âge α_x illustrant le comportement moyen des taux de hasard au cours du temps relativement à l'âge x et d'un terme égal au produit de deux paramètres k_t et β_x, le premier décrivant l'évolution générale de la mortalité et le second, propre à l'âge, décrivant l'évolution du taux de hasard par rapport à ceux relatifs aux autres âges. Pour l'estimation de ces paramètres, Lee & Carter [69] ont proposé la méthode de moindres carrés ordinaires en résolvant (3) dont la solution unique est donnée par la décomposition en valeurs singulières :

$$(\widehat{\alpha_x}, \widehat{\beta_x}, \widehat{k_t}) = arg\ min_{\alpha_x, \beta_x, k_t} \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} (ln(\widehat{\mu_x}(t) - \alpha_x - \beta_x\, k_t)^2 \tag{3.3}$$

Or α_x est relativement simple à estimer par l'annulation de la dérivée première de (3) :

$$\widehat{\alpha_x} = \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} ln(\widehat{\mu_x}(t)) \tag{3.4}$$

Pour estimer β_x et κ_t, la méthode proposée est la décomposition en valeur singulière de la matrice Z, si elle est rectangulaire, de terme général $z_{xt} = ln(\widehat{\mu_x}\,(t) - \widehat{\alpha_x})$, alors que si Z n'est pas rectangulaires, on utilisera l'algorithme itératif de Goodman. En utilisant la première méthode, soit u_1 (respectivement v_1) le vecteur propre normalisé de $Z'Z$ (respectivement de ZZ') correspondant à la valeur propre la plus élevée λ_1. Typiquement, la loi de mortalité $Z \approx \sqrt{\lambda_1} v_1 u_1'$ explique environ 90% de la variance de $ln\,(mu_x\,(t))$. Il suffit donc de prendre :

$$\widehat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_j v_{1j}} \ , \ \widehat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_j v_{1j} \right) u_1 \tag{3.5}$$

Afin d'être en mesure de construire des prévisions sur les indices de mortalité des années à venir, il convient d'extrapoler la tendance temporelle de mortalité $\widehat{k_t}$ dans le futur via l'utili-

sation les techniques de prévisions des séries chronologiques.

Malgré le succès remporté par la méthodologie de **Lee & Carter**, plusieurs critiques lui ont été adressées dans la mesure où elle n'est pas capable de prévoir des variations subites de la mortalité (évolution de la médecine, la découverte d'un nouveau traitement,...). Donc, des extensions de ce modèle ont été élaborées par Renshaw & Haberman (2001) [110] qui, en analysant les résidus que pourait présenter une certaine structure, ont remarqué que le modèle de Lee & Carter n'est pas toujours capable de décrire fidèlement les taux de mortalité instantanés. En revanche, ils ont décomposé la tendance de mortalité en deux séries chronologiques $\kappa_{t,1}$ et $\kappa_{t,2}$. Alho (2000) [3] a montré que le critère de moindres carrés ordinaires ainsi que celui de moindres carrés pondérés, n'étaient pas optimaux et que le modèle de Lee Carter souffre du principal défaut qui est l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs requises par l'estimation de moindres carrés ordinaires.

3.3.2 La méthode de Poisson Log-bilinéaire

Denuit et al (2002) suggèrent que le logarithme des taux instantanés de mortalité observés est généralement bien plus variable aux grands âges que chez les jeunes, étant donné le faible nombre d'observations. Cela les a conduit à supposer que le nombre de décès $D_{x,t}$ constaté à l'âge x et à l'année t suit une loi de Poisson de paramètre $E_{x,t}\ \mu_x(t)$ représentant l'exposition au risque à l'âge x durant l'année t multipliée par la force de mortalité $\mu_x(t) = exp\,(\alpha_x + \beta_x\ k_t)$. Il s'agit donc de laisser inchangée la forme log-bilinéaire du taux de mortalité instantané proposée par Lee & Carter (1992) [69] et de modifier la structure de l'erreur. On peut noter que la signification des paramètres α_x, β_x, k_t est la même que dans le modèle initial de Lee Carter. D'un autre côté, ce modèle reconnaît le caractère entier du nombre de décès $D_{x,t}$, ce qui n'est pas le cas avec le modèle de Lee et Carter. Pour estimer les paramètres de leur modèle, Denuit & al (2002) [18] ont proposé la méthode de maximum de vraisemblance et la fonction de log-vraisemblance à maximiser est définie par :

$$l\,(\alpha, \beta, k) = \sum_{x,t} \left[d_{xt}\,(\alpha_x + \beta_x\ k_t) - ETR_{xt} exp\,(\alpha_x + \beta_x\ k_t)\right] + cte \tag{3.6}$$

La présence du terme bilinéaire $\beta_x\ k_t$ rend impossible l'estimation de ce modèle à l'aide des

logiciels courants de statistique utilisées pour l'implémentation des régressions de Poisson. Vermunt (1997) [118] a proposé un programme connu sous la dénomination LEM pour résoudre ce problème. Cet algorithme permet de résoudre le problème en se basant sur la méthode unidimensionnelle de Newton. Goodman (1979) a été le premier à proposer une méthode itérative pour l'estimation des modèles log-bilinéaire avec un terme bilinéaire. Dans l'itération $(n+1)$, on a, pour $L^{(n)} = L^{(n)}\left(\widehat{\theta}^{(n)}\right)$ et L étant la fonction de vraissemblance :

$$\widehat{\theta}^{(n+1)} = \widehat{\theta}^{(n)} - \frac{\frac{\partial L^{(n)}}{\partial \theta}}{\frac{\partial^2 L^{(n)}}{\partial \theta^2}} \tag{3.7}$$

Dans notre cas de figure, trois paramètres α_x, β_x et κ_t sont à estimer. On fixe $\widehat{\alpha}_x^{(0)}$, $\widehat{\beta}_x^{(0)}$, et $\widehat{\kappa}_t^{(0)}$, puis on procède aux itérations suivantes pour $\widehat{d_{x,t}}^{(n)} = ETR_{x,t}\ exp\left(\widehat{\alpha_x}^{(n)} + \widehat{\beta_x}^{(n)}\ \widehat{k_t}^{(n)}\right)$ qui représente le nombre de décès estimé aprés la n^{eme} itération :

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha_x}^{(n+1)} &= \widehat{\alpha_x}^{(n)} - \frac{\sum_t \left(d_{x,t} - \widehat{d_{x,t}}^{(n)}\right)}{-\sum_t \widehat{d_{x,t}}^{(n)}} \\ \widehat{\beta_x}^{(n+1)} &= \widehat{\beta_x}^{(n)} \\ \widehat{k_t}^{(n+1)} &= \widehat{k_t}^{(n)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \widehat{k_t}^{(n+2)} &= \widehat{k_t}^{(n+1)} - \frac{\sum_x \left(d_{x,t} - \widehat{d_{x,t}}^{(n+1)}\right) \widehat{\beta_x}^{(n+1)}}{-\sum_x \widehat{d_{x,t}}^{(n+1)} \left(\widehat{\beta_x}^{(n+1)}\right)^2} \\ \widehat{\alpha_x}^{(n+2)} &= \widehat{\alpha_x}^{(n+1)} \\ \widehat{\beta_x}^{(n+2)} &= \widehat{\beta_x}^{(n+1)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\beta_x}^{(n+3)} &= \widehat{\beta_x}^{(n+2)} - \frac{\sum_t \left(d_{x,t} - \widehat{d_{x,t}}^{(n+2)}\right) \widehat{k_t}^{(n+2)}}{-\sum_t \widehat{d_{x,t}}^{(n+2)} \left(\widehat{k_t}^{(n+2)}\right)^2} \\ \widehat{\alpha_x}^{(n+3)} &= \widehat{\alpha_x}^{(n+2)} \\ \widehat{k_t}^{(n+3)} &= \widehat{k_t}^{(n+2)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Le critère utilisé pour sortir de la procédure itérative est la stabilité de la fonction de log-vraisemblance, c'est à dire jusqu'à la constatation d'une très faible croissance (par défaut 10^{-6}, mais il est recommandé de continuer jusqu'à un ordre de 10^{-10}). Dans cette approche, contrairement au modèle classique de Lee-Carter, l'erreur d'estimation incombe directement sur le nombre des décès.

3.3.3 Modéle âge-période-cohorte & autres extensions

L'effet cohorte est observé lorsque les individus nés dans une période spécifique ont connu une amélioration plus rapide de la mortalité que les autres générations. Cependant, cet effet doit être pris en compte dans la projection de la mortalité.

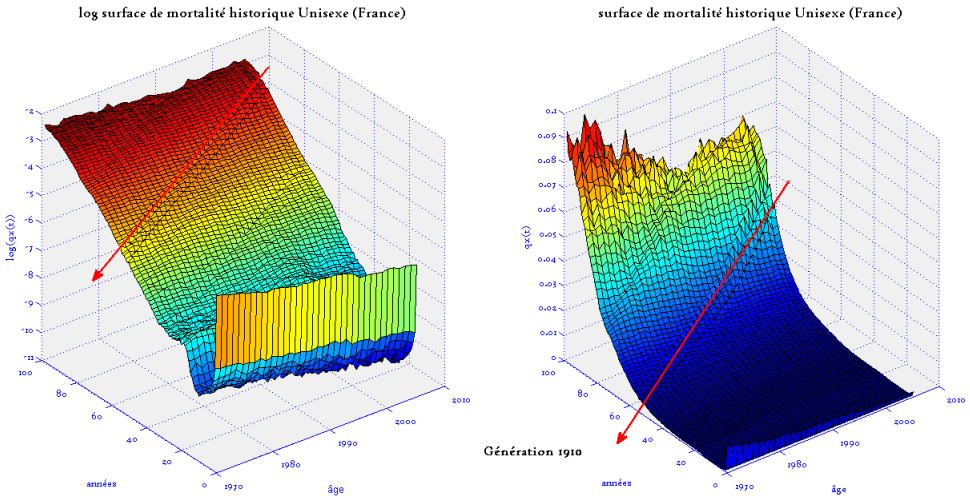


FIGURE 3.2 – Illustration effet génération (population française)

Soit l'année de naissance $c = t - x$ donc $c = c_{min}, \ldots, c_{max} = t_{min} - x_{min}, \ldots, t_{max} - x_{max}$. On partage la force de mortalité $\mu_x(t)$ de la manière suivante :

$$\mu_x(t) = exp(\alpha_x) RF(x,t) \tag{3.11}$$

avec α_x correspond à une table de mortalité statique et $RF(x,t)$ est un facteur de réduction de la mortalité qui incorpore les effets de l'âge, la période et la cohorte. Donc, dans le cadre du modéle de Lee & Carter le facteur de réduction est $RF(x,t) = exp(\beta_x \kappa_t)$. On peut généraliser ce facteur en l'écrivant sous la forme :

$$RF(x,t) = exp(\beta_x \kappa_t + \gamma_x \lambda_c) \tag{3.12}$$

On impose les contraintes suivantes pour le modéle reste toujours identifiable :

$$\sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \beta_x = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} \gamma_x = 1 \tag{3.13}$$

$$\lambda_{t_{min}-x_{max}} = 0 \ \ or \ \ \kappa_{t_{min}} = 0 \tag{3.14}$$

Or, pour assurer l'unicité des paramètres estimés, α_x est estimé en premier lieux comme dans le modéle de Lee & Carter :

$$\widehat{\alpha_x} = \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} ln\left(\widehat{\mu}_x(t)\right) \tag{3.15}$$

Les autres paramètres sont estimés par un algorithme itératif proposé par Denuit (2007) dont les valeurs initiales sont :

$$\widehat{\beta}_x^{(0)} = \widehat{\gamma}_x^{(0)} = 1 \tag{3.16}$$

En plus, un modéle d'ajustement additif pour retrouver les valeurs de κ_t et λ_c est mis en oeuvre :

$$ln\widehat{\mu}_x(t) = \kappa_t + \lambda_c + \epsilon_{xt} \tag{3.17}$$

Quant à l'algorithme, il est donné par les itérations suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_c^{(k+1)} = \widehat{\lambda}_c^{(k)} + \frac{\sum_{x,t|t-x=c}\left(ln\left(\widehat{\mu}_{xt}\right)-\widehat{\alpha}_x-\widehat{\beta}_x^{(k)}\widehat{\kappa}_t^{(k)}-\widehat{\gamma}_x^{(k)}\widehat{\lambda}_c^{(k)}\right)\widehat{\gamma}_x^{(k)}}{\sum_{x,t|t-x=c}\left(\widehat{\gamma}_x^{(k)}\right)^2} \\ \widehat{\gamma}_x^{(k+1)} = \widehat{\gamma}_x^{(k)} + \frac{\sum_t\left(ln\left(\widehat{\mu}_{xt}\right)-\widehat{\alpha}_x-\widehat{\beta}_x^{(k)}\widehat{\kappa}_t^{(k)}-\widehat{\gamma}_x^{(k)}\widehat{\lambda}_c^{(k+1)}\right)\widehat{\lambda}_c^{(k+1)}}{\sum_t\left(\widehat{\lambda}_c^{(k+1)}\right)^2} \\ \widehat{\kappa}_t^{(k+1)} = \widehat{\kappa}_t^{(k)} + \frac{\sum_t\left(ln\left(\widehat{\mu}_{xt}\right)-\widehat{\alpha}_x-\widehat{\beta}_x^{(k)}\widehat{\kappa}_t^{(k)}-\widehat{\gamma}_x^{(k+1)}\widehat{\lambda}_c^{(k+1)}\right)\widehat{\beta}_x^{(k)}}{\sum_x\left(\widehat{\beta}_x^{(k)}\right)^2} \\ \widehat{\beta}_x^{(k+1)} = \widehat{\beta}_x^{(k)} + \frac{\sum_t\left(ln\left(\widehat{\mu}_{xt}\right)-\widehat{\alpha}_x-\widehat{\beta}_x^{(k)}\widehat{\kappa}_t^{(k+1)}-\widehat{\gamma}_x^{(k+1)}\widehat{\lambda}_c^{(k+1)}\right)\widehat{\kappa}_t^{(k)}}{\sum_t\left(\widehat{\kappa}_t^{(k+1)}\right)^2} \end{cases} \tag{3.18}$$

3.4 Modèles d'intensité de mortalité

Les modèles de Lee Carter et de Poisson Log-Bilinéaire ont prouvé leur force d'application vu leurs succès sur plusieurs populations étudiées. Une autre approche de modélisation proposée par Dahl (2004) [26] présente la force de mortalité comme un processus stochastique

adapté à une filtration $(\mathcal{F}_r)_{t\geq 0}$ dans une espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$. avec $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité démographique.

La théorie d'intensité stochastique, des processus doublement stochastiques ainsi que les processus à structure affine occupe un intérêt particulier dans les sciences actuarielles. Cette théorie des processus stochastiques a été le centre d'intérêt de plusieurs chercheurs dont on cite Duffie (2001) [37]. On peut aussi se referer aux travaux de Biffis (2004) [8] et Schrarger (2004).

3.5 Modélisation des décès comme un processus de comptage

Un processus de comptage N est défini en utilisant une séquence de variables aléatoires $T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \infty$ tel que :

$$N_t = n \text{ pour } t \in [T_n, T_{n+1})$$

Avec $N_t = \infty$ si $t \geq T_\infty = lim_{n\to\infty} T_n$. Planchet (2007) [91] procède à modéliser les décès via un processus de comptage. Pour le faire, il se donne l'espace de probabilité filtré $(\Omega, F, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, il introduit le processus ponctuel noté par $N(t)$ et défini par :

$$N(t) = \mathbb{I}_{(T\leq t)} \tag{3.19}$$

T représente la durée de vie. Autrement, si l'événement de décès aurait lieu avant T le processus vaut 1 sinon 0. Pour généraliser cette approche, il a considéré un processus de comptage $N(t)$ adapté et non explosif [1] et le décès est défini comme étant le premier instant de saut T de N.

1. c'est à dire tel que $N_t < \infty$ p.s si $t < \infty$

3.6 Intensité stochastique

En se référant à Duffie (2001) [37], soit une filtration $(\mathfrak{G}_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles, avec $\mathfrak{G}_t \subset \mathfrak{F}_t$ et λ un processus non négatif $\mathfrak{G}_t$-prédictible c'est à dire que :

$$\int_0^t \lambda(s)\, ds < \infty \; p.s \tag{3.20}$$

Soit N un processus de comptage non explosif. N est dit à intensité λ si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale [2] :

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda(s)\ ds \tag{3.21}$$

Si $E\left(\int_0^t \lambda(s)\ ds\right) < \infty$ alors $M_t = N_t - \int_0^t \lambda(s)\ ds$ est une martingale. Donc on a :

$$E(M_{t+\Delta t} - M_t \mid \mathfrak{G}_t) = E(M_{t+\Delta t} \mid \mathfrak{G}_t) - M_t = 0 \tag{3.22}$$

On en déduit donc que :

$$E\left(N_{t+\Delta t} - \int_0^{t+\Delta t} \lambda(s)\ ds - N_t + \int_0^t \lambda(s)\ ds \mid \mathfrak{G}_t\right) = 0 \tag{3.23}$$

$$E\left(N_{t+\Delta t} - N_t - \int_t^{t+\Delta t} \lambda(s)\ ds \mid \mathfrak{G}_t\right) = 0 \tag{3.24}$$

$$E(N_{t+\Delta t} - N_t \mid \mathfrak{G}_t) = E\left(\int_t^{t+\Delta t} \lambda(s)\ ds \mid \mathfrak{G}_t\right) \tag{3.25}$$

Or, on sait que λ est un processus prévisible donc $\lambda(t)$ est $\mathfrak{G}_{t-1}$-mesurable et donc $\lambda(t)$ est $\mathfrak{G}_t$-mesurable. Ce qui fait qu'aprés quelques passages on retrouve :

$$E(N_{t+\Delta t} - N_t \mid \mathfrak{G}_t) = \lambda(t)\ \Delta t + o(\Delta t) \tag{3.26}$$

Ceci nous ramène au taux instantané de mortalité.

2. Soit $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathfrak{F}_t$-adapté. On dit que X est une $\mathfrak{F}_t$-martingale locale s'il existe une suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ de $\mathfrak{F}_t$-temps d'arrêts tel que $P(\tau_n \to \infty) = 1$ et le processus $X^n : t \to X_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale pour tout $n \geq 0$.

3.7 Les processus doublement stochastiques

En adoptant les mêmes conditions que dans le paragraphe précédent, un processus de comptage N avec une intensité λ est dit doublement stochastique si $\forall\ s < t$ et conditionnellement à la tribu $\mathfrak{F}_t \vee \mathfrak{G}_s$, le processus $N_t - N_s$ admet une distribution de poisson de paramètre $\int_s^t \lambda(u)\ du$ [3].

3.8 Intensité de mortalité et processus de diffusion

Dahl (2004) [26] propose de modéliser l'intensité de mortalité selon un processus de diffusion :

$$d\mu_{[x]+t} = \alpha^{\mu}(t,x,\mu)\,dt + \sigma^{\mu}(t,x,\mu)\ d\widetilde{B}_t \tag{3.27}$$

Avec $\widetilde{B}_t$ est un processus de Weiner standard par rapport à la filtration $\mathfrak{F}$. α^{μ}, σ^{μ} sont deux fonctions bornées. Or la dynamique de μ dépend uniquement de l'état présent, il s'agit donc d'un processus de Markov. Dans le modèle précédent, x est l'âge d'un individu à l'instant 0 qui représente un temps calendaire arbitraire et t décrit le temps écoulé à partir de l'instant 0.

Il est important à signaler qu'en adoptant cette modélisation pour l'intensité de mortalité, on a postulé deux hypothèses irréalistes. La première est le fait que tout les changements de l'intensité de mortalité sont similaires et affectent toute la cohorte et la seconde postule que cette intensité soit un processus de Markov pour chaque âge. Un modèle beaucoup plus réaliste doit supposer que l'intensité de mortalité est affectée par plusieurs facteurs de mortalité de manières différentes. Quelques facteurs affectent tous les âges et tous les individus de la cohorte et d'autres affectent une fraction spécifique d'âge. Une version multidimensionnelle du modèle de Dahl (2004) [26] consiste à supposer un brownien pour chaque âge x de la manière suivante :

$$d\mu_{[x]+t} = \alpha^{\mu}(t,x,\mu_t)\,dt + \sigma^{\mu}(t,x,\mu_t)'\ d\widetilde{B}_t \tag{3.28}$$

Avec μ_t un vecteur d'intensité de mortalité pour tout âge x et $\sigma^{\mu}(t,x,\mu_t)$, $\widetilde{B}_t$ deux vecteurs colonne. Au lieu de modéliser l'intensité de mortalité comme un processus stochastique,

3. E.Luciano & E.Vigna, ***A note on stochastic survival probabilities and their calibration***, ICER, Working Paper, 2005.

Dahl(2004) [26] propose d'adopter la loi de Gompertz Makeham et de modéliser les paramètres a, b et c comme des processus stochastiques. Dans le cas où l'intensité de mortalité est déterministe, la probabilité de survie entre t et T est donné par :

$$\left(exp\left(-\int_t^T \mu_{[x]+u}\, du\right)\right) \tag{3.29}$$

Or, on ne peut pas connaître le développement futur de la force de mortalité, on doit sans doute la remplacer par sa valeur espérée conditionnellement à l'information disponible jusqu'à l'instant t représentée par F_t. Il est à noter que la filtration $\mathfrak{F} = (F_t)_{0\leq t\leq T}$ contient en particulier, des informations quant au développement du processus $(\mu_{[x]+t})_{0\leq t\leq T}$, ce qui fait que F_t contient toutes les informations disponibles pour l'assureur jusqu'à l'instant t.

Donc, en utilisant le fait que μ est un processus de Markov, la probabilité de survie entre t et T pour une personne d'âge $x+t$ étant donné l'information jusqu'à l'instant t est donnée par :

$$S(t,x,T) = E^{\mathbb{P}}\left(exp\left(-\int_t^T \mu_{[x]+\tau}\, d\tau \mid \mu_{[x]+t}\right)\right) \tag{3.30}$$

Pour x fixé, on définit M une $\mathbb{P}$-martingale telle que :

$$M(t,x) := E^{\mathbb{P}}\left(exp\left(-\int_0^T \mu_{[x]+\tau}\, d\tau \mid F_t\right)\right)$$

$$M(t,x) := E^{\mathbb{P}}\left(exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+\tau}\, d\tau - \int_t^T \mu_{[x]+\tau}\, d\tau \mid F_t\right)\right)$$

Or on sait que $\left(-\int_0^t \mu_{[x]+\tau}\, d\tau\right)$ est F_t-mesurable, donc :

$$M(t,x) := exp\left(-\int_0^t \mu_{[x]+\tau}\, d\tau\right) S(t,x,T)$$

μ suit le processus de diffusion initial. La quantité $M(t,x)$ peut être interprétée comme étant la probabilité de survie de l'instant 0 à l'instant T d'un individu d'âge x à l'instant 0 sachant le développement de la force de mortalité jusqu'à l'instant t. Or sachant que S est différentiable en t et deux fois différentiable en μ, on peut appliquer la formule d'Itô sur la martingale M. Pour cela, on fixe x, nous obtenons donc l'équation différentielle stochastique EDS suivante

pour $S(t,x,\mu,T)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t,x,\mu,T)+\alpha^{\mu}(t,x,\mu)\frac{\partial}{\partial \mu}S(t,x,\mu,T)+\frac{1}{2}\left(\sigma^{\mu}(t,x,\mu)\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial \mu^{2}}S(t,x,\mu,T) \tag{3.31}$$
$$-\mu\, S(t,x,\mu,T)=0$$

Avec condition terminale $S(T,x,\mu,T)=1$. Il est à noter que cette dernière EDP est analogue à celle d'un zéro coupon quand il s'agit d'un taux d'intérêt stochastique.

3.9 Structure affine de mortalité

Les processus à structure affine sont fréquemment utilisés pour la modélisation de la mortalité. Ces processus conduisent dans plusieurs cas à des formules fermées. Planchet (2007) [91] montre que l'utilisation des modèles à structure affine à un facteur aboutit, en générale, à deux situations possibles ; le processus d'Ornstein Uhlenbeck (associé dans la littérature sur les taux d'intérêt au modèle de Vasicek) et le processus de Feller (associé quant à lui au modèle CIR).

Dahl (2004) [26] estime qu'il est possible de modéliser l'intensité de mortalité à l'aide des modèles de taux d'intérêt. Il procède par analogie en précisant que la positivité dans la modélisation des taux d'intérêt est une propriété désirable alors qu'elle constitue un élément primordial pour la modélisation de l'intensité de mortalité. Il précise qu'on peut imaginer un taux d'intérêt nul alors que l'intensité de mortalité doit être strictement positive pour n'importe quel intervalle de temps. Il propose d'utiliser le modèle de Cox-Ingersoll-Ross qui a été initialement considéré par Hull et White (1990) à l'étude de taux d'intérêt, pour modéliser l'intensité de mortalité.

L'application de ce dernier modèle à un âge fixé x donne :

$$d\mu_{[x]+t}=\left(\beta^{\mu}(t,x)-\gamma^{\mu}(t,x)\,\mu_{[x]+t}\right)\,dt+\sigma^{\mu}(t,x)\,\sqrt{\mu_{[x]+t}}\,d\widetilde{B}_{t} \tag{3.32}$$

$\beta^{\mu}(t,x)$, $\gamma^{\mu}(t,x)$ et $\sigma^{\mu}(t,x)$ sont des fonctions positives bornées. Cela montre bien que l'intensité de mortalité suit un modèle CIR. Or, le modèle de Cox-Ingersoll-Ross assure la positivité

de l'intensité de mortalité à âge fixé x en supposant que $2\beta^{\mu}(t,x) \geq (\sigma^{\mu}(t,x))^2$ pour tout $t \in [0,T]$.

On s'intéresse maintenant à l'étude des processus à structure affine. Il est à noter que ces processus constituent une classe des processus de Markov. Une étude détaillée de ces processus apparait dans Biffis (2004) [8].

Fixons le même espace de probabilité muni de la même filtration $(\Omega, F, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Soit X un processus de Markov adapté à $\mathfrak{F}$ défini par :

$$dX_t = \delta(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\ dB_t + dJ_t \tag{3.33}$$

Avec :

– B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ par rapport à la filtration $\mathfrak{F}$,

– J un processus de saut dans $\mathbb{R}^n$ dont les sauts arrivent avec une intensité $(k(t, X_t), t \geq 0)$,

– ν_t est la distribution des temps des sauts dans $\mathbb{R}$,

– δ est une dérive,

– $\sigma\sigma'$ est une matrice variance-covariance.

$\Leftrightarrow$ On dit que X est un processus à structure affine. Un résultat très important sortant de l'étude des processus affine est la suivante ; pour $c \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{C}^n$, $\forall\ T \geq t$, soit la fonction affine Λ définie par :

$$\Lambda(t,x) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\ x \tag{3.34}$$

$\lambda_0,\ \lambda_1$ sont deux fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et sous quelques conditions techniques, on aura :

$$E\left(e^{\left(-\int_t^T \Lambda(s,X_s)\ ds\right)} e^{(a\ X_T)}\ (b - X_T + c) \mid F_T\right) = e^{\alpha(t)+\beta(t)\ X_T}\ \left(\widehat{\alpha}(t) + \widehat{\beta}(t)\ X_T\right) \tag{3.35}$$

On a donc :

• $k(t,x) = k_0(t) + k_1(t)\ x$

• $\delta(t,x) = d_0(t) + d_1(t)\ x$

• $(\sigma(t,x)\,\sigma'(t,x))_{i,j} = (V_0(t))_{i,j} + (V_1(t))_{i,j}\ x,\ \forall\ i,j = 1,\ldots,n$

- $\alpha(t) = \lambda_0(t) - d_0(t)\,\beta(t) - \frac{1}{2}\beta(t)' V_0(t)\beta(t) - k_0(t)\,(\theta(t,\beta(t)) - 1)$
- $\theta(t,\beta(t)) = \int_{\mathbb{R}} e^{cz}\, dv_t(z)$ (Transformée de Laplace définie pour tout $t \in [0,\infty)$ et $c \in \mathbb{C}^n$).
- $\Theta(t,c)$ est le gradient de $\theta(t,\beta(t))$, c'est à dire $\Theta(t,c) = \int_{\mathbb{R}^n} c\, e^{cz}\, \nu_t(dz)$

Avec :

- $\alpha(t) = \lambda_0(t) - d_0(t)\beta(t) - \frac{1}{2}\beta(t)' V_0(t)\beta(t) - k_0(t)\,(\theta(t,\beta(t)) - 1)$
- $\beta(t) = \lambda_1(t) - d_1(t)\beta(t) - \frac{1}{2}\beta(t)' V_1(t)\beta(t) - k_1(t)\,(\theta(t,\beta(t)) - 1)$
- $\widehat{\beta}(t) = -d_1(t)\widehat{\beta}(t) - \beta(t)' V_1(t)\widehat{\beta}(t) - k_1(t)\left(\Theta(t,\beta(t)) - \widehat{\beta}(t)\right)$
- $\widehat{\alpha}(t) = -d_0(t)\widehat{\beta}(t) - \beta(t)' V_0(t)\widehat{\beta}(t) - k_0(t)\left(\Theta(t,\beta(t)) - \widehat{\beta}(t)\right)$

Les conditions limites sont $\alpha(T) = 0$, $\beta(T) = a$, $\widehat{\alpha}(T) = c$ et $\widehat{\beta}(T) = b$.

On emprunte la proposition qui suit des travaux de Dahl (2004) [26] suivante :

Proposition La probabilté de survie $S(x,t,T)$ est donnée par :

$$S(x,t,T) = e^{A^\mu(x,t,T) - B^\mu(x,t,T)\mu(x,t)}$$

Avec :

$$\frac{\partial}{\partial t} B^\mu(x,t,T) = \gamma^\mu(t,x)\, B^\mu(x,t,T) + \frac{1}{2}\left(\sigma^\mu(t,x)\right)^2 \left(B^\mu(x,t,T)\right)^2 - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A^\mu(x,t,T) = \beta^\mu(t,x)\, B^\mu(x,t,T)$$

Les conditions limites sont les suivantes :

$$B^\mu(x,T,T) = 0$$

$$A^\mu(x,T,T) = 0$$

La dynamique de la probabilité de survie est donnée par :

$$dS(x,t,T) = S(x,t,T)\left(\mu(x,t)\, dt - \sigma^\mu(x,t)\sqrt{\mu(x,t)} B^\mu(x,t,T)\; d\widetilde{B}_t\right)$$

3.10 Intensité de mortalité forward

En théorie de taux d'intérêt, on définit le taux d'intérêt forward par :

$$f(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} logB(t,T), \ \forall\ 0 \leq t \leq T \tag{3.36}$$

Avec $B(t,T)$ est le prix d'un zéro coupon à l'instant t et de maturité T, ce qui est équivaut à :

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)\ dy} \tag{3.37}$$

Par analogie au concept du taux d'intérêt forward, on peut définir l'intensité de mortalité forward à âge x et à un instant t sur la mesure de probabilité objective $\mathbb{P}$ et pour un horrizon T par :

$$f^{\mu}(x,t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} logS(x,t,T) \tag{3.38}$$

$$f^{\mu}(x,t,T) = \mu(x,t)\frac{\partial}{\partial T}B^{\mu}(x,t,T) - \frac{\partial}{\partial T}A^{\mu}(x,t,T) \tag{3.39}$$

On est par la suite, capable de présenter la relation entre l'intensité forward de mortalité et la probabilité de survie comme suit :

$$S(x,t,T) = e^{-\int_t^T f^{\mu}(x,t,u)\ du} \tag{3.40}$$

3.11 Modélisation stochastique de la mortalité d'expérience et effets de sélection adverse

La population assurée présente souvent des caractéristiques différentes de la population générale, surtout lorsqu'il s'agit des assurés ayant souscrit un contrat en cas de vie. Cela peut s'expliquer dans la mesure ou l'acheteur d'une rente viagère, par exemple, espère vivre longtemps et *battre* la table de mortalité. L'assureur supporte donc un risque d'antisélection ou sélection adverse. On voit que le risque d'antisélection s'ajoute au risque de longévité. Il peut-être considérable et est susceptible d'entraîner des situations de sous tarification et de sous provisionnement, même si l'on utilise des tables de mortalité prospectives. Cela menace

la sécurité financière de l'assureur. Dans l'optique des dispositifs Solvabilité 2 et IFRS, il apparait donc utile d'incorporer la mortalité d'expérience dans la projection de la mortalité. Ainsi, les assureurs sont motivés par la construction de tables de mortalité prospectives exploitant au mieux l'information du portefeuille. Le but de cette section est d'introduire les informations disponibles d'un portefeuille de rentiers d'un assureur dans la projection stochastique de la mortalité.

3.11.1 Données de l'étude

On se base sur les données INSEE de la mortalité féminine et masculine de la population française. On dispose donc de deux matrices de données, la première D de terme général $d_{x,t}$ contient les nombres des décès par âge et par année calendaire, et la deuxième E de terme général $ETR_{x,t}$ contient les expositions aux risques par âge et par année calendaire :

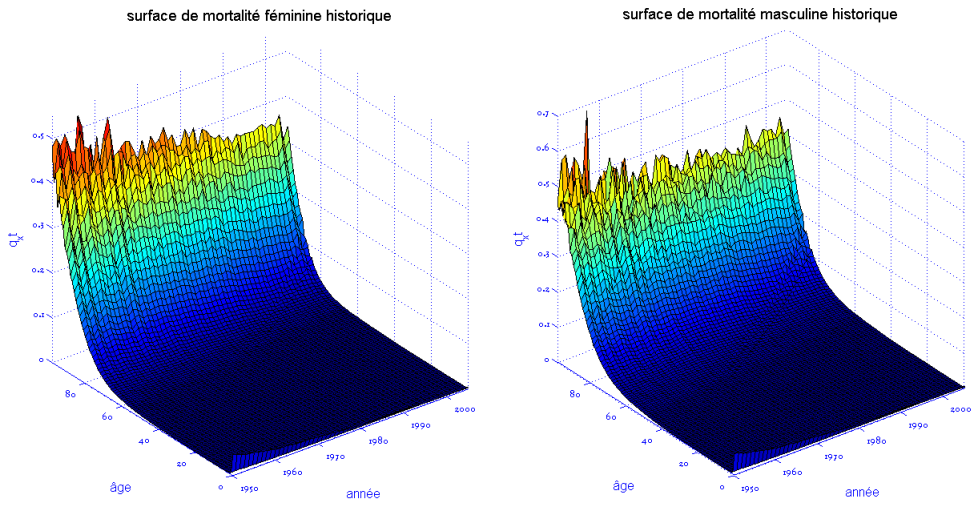


FIGURE 3.3 – Surface de mortalité $\mu_x(t)$, $t = 1950, \ldots, 2005$

$$D = \begin{pmatrix} d_{x_{min},t_{min}} & d_{x_{min},t_{min}+1} & \cdots & d_{x_{min},t_{max}} \\ d_{x_{min}+1,t_{min}} & d_{x_{min}+1,t_{min}+1} & \cdots & d_{x_{min}+1,t_{max}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{x_{max}+1,t_{min}} & d_{x_{max}+1,t_{min}+1} & \cdots & d_{x_{max}+1,t_{max}} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

$$E = \begin{pmatrix} ETR_{x_{min},t_{min}} & ETR_{x_{min},t_{min}+1} & \cdots & ETR_{x_{min},t_{max}} \\ ETR_{x_{min}+1,t_{min}} & ETR_{x_{min}+1,t_{min}+1} & \cdots & ETR_{x_{min}+1,t_{max}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ETR_{x_{max}+1,t_{min}} & ETR_{x_{max}+1,t_{min}+1} & \cdots & ETR_{x_{max}+1,t_{max}} \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

3.11.2 Choix de la période d'étude

On peut noter que la plupart des études de projections de la mortalité se basent sur des données allant de 1950 jusqu'au présent. Il existe plusieurs justifications pour ce choix de la deuxième moitié du 20^{eme} siècle dont la principale est la qualité des données de mortalité disponibles, en particulier pour les âges élevés. Cependant, il existe trois méthodes pour la sélection de la période optimale d'étude de la mortalité à savoir la procédure de Booth, Maindonald & Smith (2002) [9], ou celle du ratio de déviance ou encore la méthode ad-hoc de Denuit & Goderniaux (2005) [33]. Cette dernière est basée sur le calcul du coefficient d'ajustement R^2 de la régression de $\widehat{\mu_x}(t)$ estimé via la méthode empirique sur $exp\left(\widehat{\alpha_x} + \widehat{\beta_x}\widehat{\kappa_t}\right)$ résultats de l'estimation du modèle de projection sur chaque année d'observation et l'année à retenir est celle à partir de laquelle le R^2 devient maximal. D'après nos calcul, l'application de la méthode de Booth & al (2002) [9] dans notre cas de figure donne $t^* = 1972$, alors qu'en utilisant la méthode de Denuit & al (2005) [33], $t^* = 1974$.

3.11.3 Construction des scénarios de mortalité prospectifs d'expérience

Via les données disponibles sur la population française masculine et féminine, on peut caler l'un des modèles de mortalité stochastique à savoir *Lee & Carter, Poisson Log-bilinéaire, âge-période-cohorte,...* en estimant les paramètres $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\kappa}$ du modèle retenu parmi les modèles précédents comme illustré dans la première section (voir annexe pour les résultats). On récupère la tendance temporelle de la mortalité $\widehat{\kappa_t}$ pour $t = t^*, \ldots, t_{2005}$, qu'on projettera en utilisant les modèles des séries temporelles. C'est cette série qui décrit la mortalité future car elle servira à déterminer la trajectoire future du taux de hazard vu que les autres paramètres ne dépendent que de l'âge. L'objectif est donc de modéliser cette série temporelle afin d'être en mesure d'effectuer des prévisions sur les années futures. Or, l'une des spécifications pour l'extrapolation d'une série temporelle réside dans la modélisation *ARIMA* (*AutoRegressive Integrated Moving Average*). Donc, si l'on modélise la série $\widehat{\kappa_t}$ par un processus *ARIMA* (p, d, q),

on devra estimer le modèle suivant, avec ζ_t un bruit blanc gaussien qui suit $N(0, \sigma_\zeta)$:

$$\widehat{\kappa}_{t+1} - \sum_{k=1}^{p} \widehat{\kappa}_{t+1-k} = \theta + \zeta_{t+1} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \zeta_{t+1-j} \tag{3.43}$$

Un tel ajustement peut être réalisé à l'aide de la désormais célèbre méthodologie de *Box* et *Jenkins*. Celle-ci nous permettra d'effectuer des projections de la mortalité dans le futur. Cependant, en pratique, même si des modèles plus sophistiqués semblent parfois préférables, il est souvent fait usage d'un modèle ARIMA(0,1,0), c'est à dire une marche aléatoire avec dérive. C'est ce qui a été fait notamment dans le cas d'application de la méthode de Lee et Carter sur les populations américaine, canadienne, chilienne et japonaise. Donc, ce modèle s'écrit, avec θ le paramètre de tendance et $\zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta)$ le terme des erreurs indépendantes et identiquement distribuées :

$$\widehat{\kappa}_t = \widehat{\kappa}_{t-1} + \theta + \zeta_t \tag{3.44}$$

Il faut donc estimer les paramètres de ce modèle et construire des intervalles de confiance à seuil de risque assez faible pour projeter cette tendance temporelle. En utilisant la méthode de maximum de vraisemblance, on obtient les estimateurs suivants pour θ et σ_ζ :

$$\widehat{\theta}_{MV} = \frac{\widehat{\kappa}_{t_{max}} - \widehat{\kappa}_{t_{min}}}{t_{max} - t_{min}} \quad \& \quad \widehat{\sigma}_\zeta^2 = \frac{1}{t_{max} - t_{min}} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}-1} \left(\widehat{\kappa}_{t+1} - \widehat{\kappa}_t - \widehat{\theta}\right)^2 \tag{3.45}$$

Alors que la variance de l'estimateur $\widehat{\theta}$ est donnée par :

$$V\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{\widehat{\sigma}_\zeta^2}{t_{max} - t_{min}} \tag{3.46}$$

Comme mentionné précédemment, le comportement de la mortalité pour les années antérieures à 1970 est chaotique. Nous trouvons une variance nettement plus élevée que pour les années suivantes, ce qui montre l'importance du choix de la période d'étude. Pour cette raison, nous choisissons de ne modéliser la série qu'à partir de 1970. Or, en analysant l'autocorrélogramme de la série $\Delta\widehat{\kappa}$, on remarque une autocorrélation à l'instant 0, forcément égale à 1, alors qu'au delà les autocorrélations et autocorrélations partielles sont non significatives au niveau 5%. Nous pouvons considérer que $\zeta_{x,t}$ est un bruit blanc, et donc $\widehat{\kappa}_t$ est

un processus $ARIMA\,(0,1,0)$. De plus, des tests globaux qui éprouvent la nullité des autocorrélations fournissent des p-valeurs toutes supérieures à 5% qui ne nous permettent pas de rejeter cette hypothèse. Il est donc possible maintenant d'extrapoler la série $\widehat{\kappa_t}$. Pour cela, on construira des intervalles de confiance à 99.9% pour les prévisions $\widehat{\kappa}_{2005+k}, \forall\, k \geq 1$. On sait que $\widehat{\kappa_t} = \widehat{\kappa}_{t-1} + \theta + \zeta_t$, donc pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\widehat{\kappa}_{t_{max}+k} = \widehat{\kappa}_{t_{max}} + k\theta + \sum_{i=1}^{k} \zeta_{t_{max}+k} \tag{3.47}$$

Pour construire des intervalles de confiance, on fixe un seuil de risque $\xi \in [0,1]$. Étant donné que ζ_t est un bruit blanc gaussien, les ζ_{t+k} sont indépendantes et identiquement distribuées. D'où :

$$\widehat{\kappa}_{t_{max}+k} \sim N\left(\widehat{\kappa}_{t_{max}} + k\widehat{\theta}, k\widehat{\sigma_\zeta^2}\right) \tag{3.48}$$

Donc l'intervalle de confiance pour $\widehat{\kappa}_{t_{max}+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ sera donné par :

$$IC_{1-\epsilon}\left(\widehat{\kappa}_{t_{max}+k}\right) = \left[\widehat{\kappa}_{t_{max}} + k\widehat{\theta} - q_{1-\frac{\epsilon}{2}}\sqrt{k\widehat{\sigma}_\zeta}, \widehat{\kappa}_{t_{max}} + k\widehat{\theta} + q_{1-\frac{\epsilon}{2}}\sqrt{k\widehat{\sigma}_\zeta}\right] \tag{3.49}$$

$$q_{1-\frac{\epsilon}{2}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \tag{3.50}$$

Avec Φ^{-1} l'inverse de la fonction de répartition d'une $N\,(0,1)$. On a besoin de plusieurs trajectoires possibles de $\widehat{\kappa_t}\ \forall\, t > t_{max}$ dans un intervalle de confiance, pour récupérer plusieurs trajectoires possibles de mortalité. Pour récupérer plusieurs trendes de mortalité, on simule des trajectoires des κ, en passant de κ_t à κ_{t+1} grâce à la dynamique ARIMA(0,1,0) tout en stockant les trajectoires dont les points appartiennent à l'intervalle de confiance. Donc $\widehat{\kappa}_{t_{max}+k},\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ peut prendre la valeur de n'importe quel point de l'intervalle de confiance. Il est possible de stocker (1 000,10 000 voire 100 000). Par exemple, si l'on décide retenir 1 000 trajectoires de $\widehat{\kappa}_{t_{max}+k},\ k \in \mathbb{N}$ (voir figure(3)), on récupère donc 1 000 tables de mortalité stochastiques bidimensionnelles que l'on stocke dans un cube en 3 dimensions (âge $\times$ années de projection $\times$ nombre de trajectoires de $\widehat{\kappa}$ retenues). On doit aussi fermer ce cube de mortalité prospective en utilisant l'un des modèles de fermeture des tables de mortalité sur les âges élevés tels que le modèle de Denuit & al (2005) [33], Coale & Guo(1989) [23], Coale & Kisker

(1990) [24], Lundberg (2001) [73] ou le modèle Logistique [4]. On obtient ainsi un cube de taux de mortalité fermé. On peut donc déterminer la trajectoire de mortalité moyenne en calculant la moyenne sur la troisième dimension. On obtient une surface de mortalité moyenne sur la plage d'âge de l'étude et pour les m années de projection.

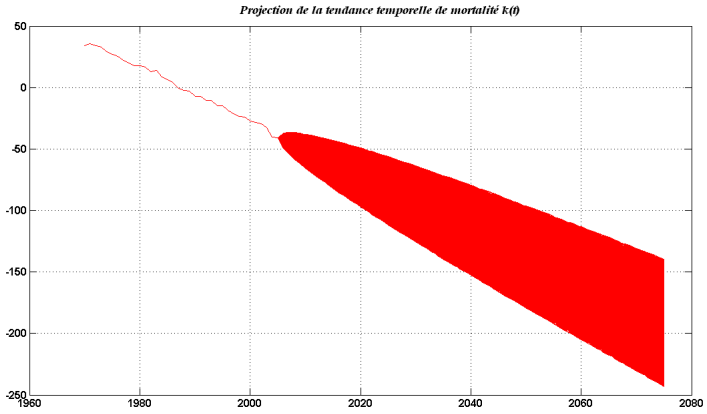


FIGURE 3.4 – Projection de la tendance temporelle $\widehat{\kappa}$ de la mortalité féminine française

Cependant, pour des raisons de taille, d'historique et de qualité d'estimation, les scénarios de mortalité qu'on a présenté dans la figure 4 sont la résultante de calibration du modèle de Poisson sur des données nationales (Population française). Ces scénarios doivent être modifiés afin de les ajuster à la mortalité d'expérience du portefeuille de l'assureur et en intégrer les informations disponibles. Par conséquent, on doit dans un premier temps, construire une table de mortalité d'expérience statique [5] sur plusieurs exercices de façon à récupérer les quotients de mortalité bruts sur la plage d'âge observable. En résumé, on obtient une matrice dont les éléments sont des q_x bruts classés par âge x et année d'observation t. Par exemple, si la plage d'âge observable est $[x_{min}, x_{max}]$ et les années d'observation $t_1, t_2, \ldots, t_n$, on aura une matrice de taux de mortalité bruts de dimension $(x_{max} - x_{min} + 1 \times t_n - t_1 + 1)$ de terme

4. Pour plus de détails sur les modèles de fermeture des tables de mortalité, voir Denuit & al(2005) [33]

5. Pour voir les méthodes de construction, le lecteur est invité à consulter les travaux de Planchet et al (2005), Ben Dbabis (2007), Terrier (2005),. . ..

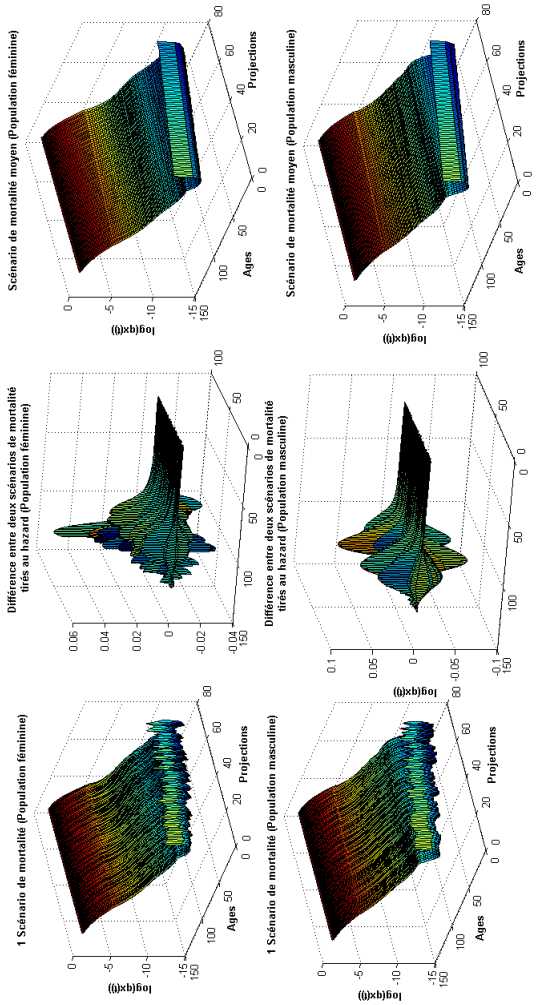


FIGURE 3.5 – Résultats des projections via le modèle Poisson-log Bilinéaire (Population française féminine et masculine)

général $\widehat{q}_x^{exp}(t)$ pour $x \in [x_{min}, x_{max}]$ et $t \in \{t_1, \ldots, t_n\}$:

$$Q^{exp} = \begin{pmatrix} \widehat{q}_{x_{min}}^{exp}(t_1) & \widehat{q}_{x_{min}}^{exp}(t_2) & \ldots & \ldots & \widehat{q}_{x_{min}}^{exp}(t_n) \\ \widehat{q}_{x_{min}+1}^{exp}(t_1) & \widehat{q}_{x_{min}+1}^{exp}(t_2) & \ldots & \ldots & \widehat{q}_{x_{min}+1}^{exp}(t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{q}_{x_{max}+1}^{exp}(t_1) & \widehat{q}_{x_{max}+1}^{exp}(t_2) & \ldots & \ldots & \widehat{q}_{x_{max}}^{exp}(t_n) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

Comme le montre la figure 5, une fois qu'on a obtenu les quotients de mortalité bruts [6] sur les âges supérieurs à 50 ans, on utilise un modèle relationnel pour déduire la mortalité d'expérience de la mortalité de référence. Cette dernière est décrite par les quotients de mortalité historiques de la population générale déterminés à partir des données INSEE. À propos des modèles relationnels, on rappelle qu'ils rapprochent les taux de mortalité bruts des taux issus d'une table connue, construite à partir des données d'une population ayant des caractéristiques similaires et de transformer cette table de référence pour aboutir à celle du groupe visé (la population assurée). Les modèles de Cox (1972), Brass(1971) et de Hannerz (2001) constituent les modèles de référence ou *benchmark*. Ils peuvent être utilisés séparément ou combinés dans le cadre de modèles additifs généralisés [7]. A titre d'illustration, le modèle de Brass (1971) qu'on a étulisé dans ce papier est défini comme suit :

$$logit\left(q_x^{exp}(t)\right) = a + b\, logit\left(q_x^{ref}(t)\right) \tag{3.52}$$

$$logit(x) = ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \tag{3.53}$$

On applique ce dernier modèle relationnel, en estimant les paramètres, pour expliquer la mortalité d'expérience féminine et masculine du portefeuille en question. Pour cela, on dispose de nos tables de mortalité d'expérience (Homme/Femme) sur les années d'observation et les âges convenus notée par Q_s^{exp} avec $s = f, m$ ainsi que des tables de référence construites à partir des données INSEE dont on doit extraire les $q_x^{ref}(t)$ (taux de mortalité de référence)

6. Une estimation des taux annuels bruts de décès consiste à évaluer les probabilités de décès q_x pour les différents âges x de la vie, à partir des données relevées au cours de la période d'observation. Pour ce faire, il faut connaître le nombre d'individus en vie à l'âge x et le nombre d'individus décédés pendant leur $x + 1^{eme}$ année. Il est de plus supposé que, sur la plage d'âge $[x, x+1]$, tous les décès sont indépendants et que la probabilité de décès est identique quel que soit l'individu. Cependant, une difficulté réside dans l'analyse des données tronquées et censurées liées à des observations partielles qui nécessitent des méthodes particulières d'estimation telle que celle de Kaplan Meier (1958).

7. Pour plus de détails sur le sujet, le lecteur est invité à consulter Delwarde(2005) [32]

pour $t = t_1, \ldots, t_n$, ce qui nous permet de constituer une matrice de taux de mortalité de référence de même dimension que notre matrice de mortalité d'expérience notée Q^{ref} afin d'appliquer l'un des modèles relationnels.

$$Q^{ref} = \begin{pmatrix} \widehat{q}^{ref}_{x_{min}}(t_1) & \widehat{q}^{ref}_{x_{min}}(t_2) & \ldots & \ldots & \widehat{q}^{ref}_{x_{min}}(t_n) \\ \widehat{q}^{ref}_{x_{min}+1}(t_1) & \widehat{q}^{ref}_{x_{min}+1}(t_2) & \ldots & \ldots & \widehat{q}^{ref}_{x_{min}+1}(t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{q}^{ref}_{x_{max}+1}(t_1) & \widehat{q}^{ref}_{x_{max}+1}(t_2) & \ldots & \ldots & \widehat{q}^{ref}_{x_{max}}(t_n) \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

Ensuite, on estime les paramètres du modèle relationnel a et b par la méthode de moindre carré ordinaire pour obtenir $\widehat{a}_f, \widehat{b}_f, \widehat{a}_m$ et $\widehat{b}_m$ avec les indices f et m respectivement pour la population féminine et celle masculine. On vérifie ensuite via des tests statistiques (test de Khi-deux, test de Kolmogorov Smirnov) l'adéquation des estimations. Les paramètres du modèle relationnel permettent de révéler l'information relatives à la mortalité du portefeuille par rapport à celle de la population générale. Donc, pour produire des scénarios de mortalité stochastique de mortalité d'expérience, on applique le même modèle relationnel avec les mêmes paramètres estimés précédemment pour déduire des scénarios de mortalité stochastiques générés par le modèle de projection (Lee & Carte, Poisson Log-Bilinéaire . . .) sur les données de la population générale de référence, des scénarios de mortalité stochastiques propres au portefeuille étudié. On obtient donc, des scénarios prospectifs de mortalité sur la plage d'âge observable $[0, x^{exp}_{max}]$. Or, vue que l'information sur les âges trop élevés est souvent indisponibles vue que la taille des échantillons que dispose l'assureur est très petite, on doit se servir d'un modèle d'extrapolation de la mortalité aux grands âges tels que décrit dans Denuit & Quachie (2005) [98].

Application sur un portefeuille de rentiers

Dans cette partie, on va appliquer la méthodologie présentée ci-dessus sur un portefeuille de rentiers du premier assureur de personnes en France. On dispose des taux de mortalité d'expérience bruts d'un portefeuille de rentes viagères par sexe (homme/femme) sur la plage d'âge $[55, 96]$ et sur les exercices 2001, 2002, 2003 et 2004. En appliquant la méthodologie présentée ci-dessus, nous arrivons à générer des scénarios de mortalité stochastique d'expérience différenciés par sexe. Dans ce qui suit, nous illustrons les résultats par sexe du

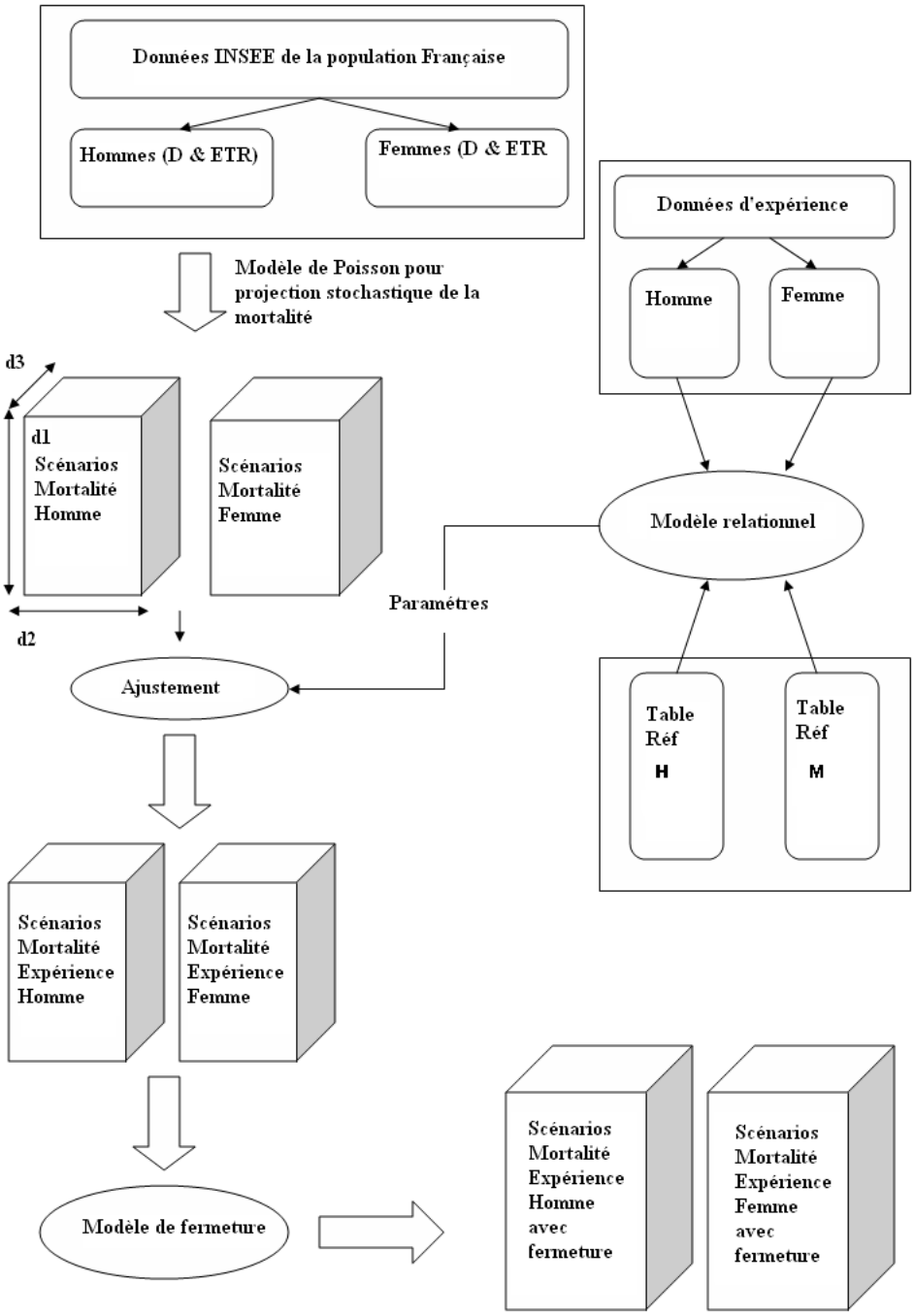


FIGURE 3.6 – Méthodologie de génération de table de mortalité stochastique d'expérience

portefeuille étudié. La figure 6 représente les résultats de projection de mortalité d'expérience (moyenne de 1 000 scénarios de mortalité tirés aléatoirement et sans remise parmi 10 000 scénarios générés, différence entre deux scénarios de mortalité tirés au hasard parmi 1 000. . .) pour la population assurées projetées répartie par sexe (masculin et féminin) via le modèle de Poisson Log-Bilinéaire (2001).

Pour visualiser le critère stochastique des scénarios de mortalité, on peut tracer la différence entre deux scénarios tirés au hasard pour chaque modèle de projection et commenter le résultat. La figure 7 illustre cette différence pour les cas de la projection avec le modèle de Lee & Carter (1992) et celui de Denuit et all (2001). En analysant la figure 7, on constate que sur les âges élevés (à partir de 60 ans) les différences entres les deux scénarios sont élevées que se soit pour les scénarios du modèle de Lee & Carter(1992) ou celui de Denuit et al(2001). Ceci est expliqué par le fait d'intégrer de l'aléa sur l'évolution future de la tendance temporelle de la mortalité $\widehat{\kappa_t}$ en tirant au hasard et sans remise 10000 trajectoires de cette dernière dans une intervalle de confiance à 99,5% [8]. Pour illustrer la différence entre la mortalité des rentiers et la mortalité de la population générale, on peut comparer les espérances de vie sur les âges élevés du scénario de mortalité moyen de la population assurée et la population générale (voir figure 8 et 9). On remarque que l'espérance de vie des femmes assurées est plus élevée que celle des femmes de la population générale, de même pour la population masculine. Cela constitue un risque de sélection adverse qui illustre l'importance de la modélisation de la mortalité d'expérience.

3.12 Risque d'antisélection

Au vu des résultats sur les espérances de vie illustrés par les figures(8-9) ci-dessous, le portefeuille de rentiers en question présente un *risque d'antisélection*, appelé aussi *risque de sélection adverse.* Cette dernière expression a vu le jour dans les travaux d'Akerloff(1970) pour qui l'incertitude sur la qualité d'un contractant induit la possibilité de fraudes ou de dissimulations. Pouvant être anticipées, celles-ci débouchent sur des stratégies complexes visant

8. Un Package Matlab a été développé et est disponible sur le site de M.ben Dbabis

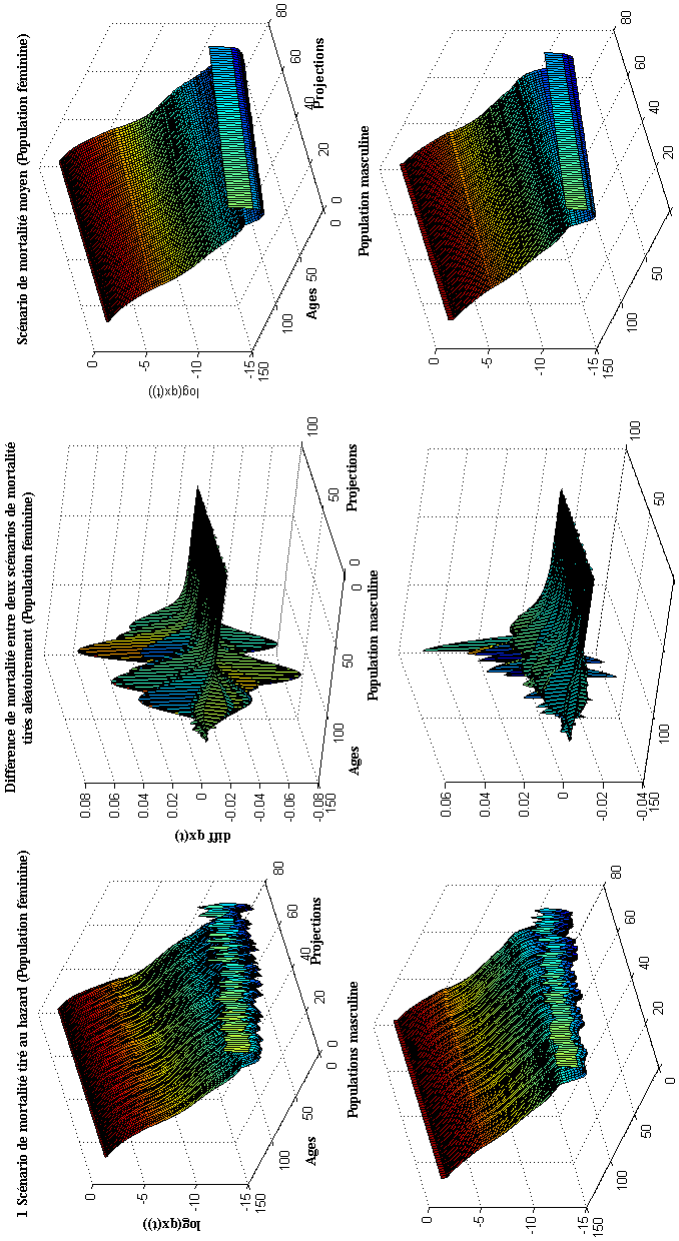


FIGURE 3.7 – Résultats des projections via le modèle Poisson-log Bilinéaire (Populations féminine et masculine assurées)

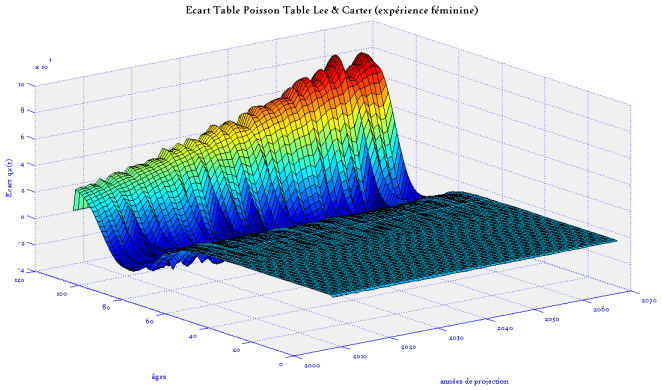


FIGURE 3.8 – Ecart entre les scénarios moyens du modèle de Denuit et all et celui de Lee & Carter

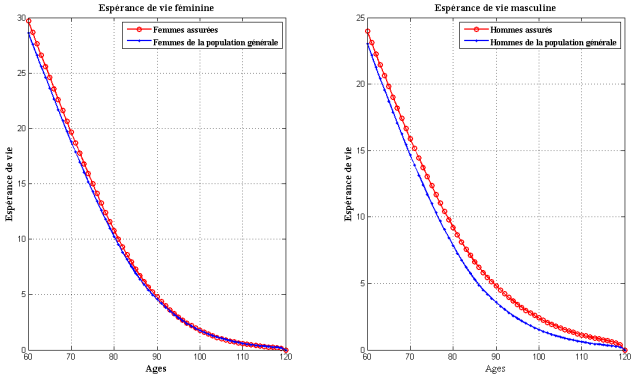


FIGURE 3.9 – Comparaison des espérances de vie du scénarios moyen

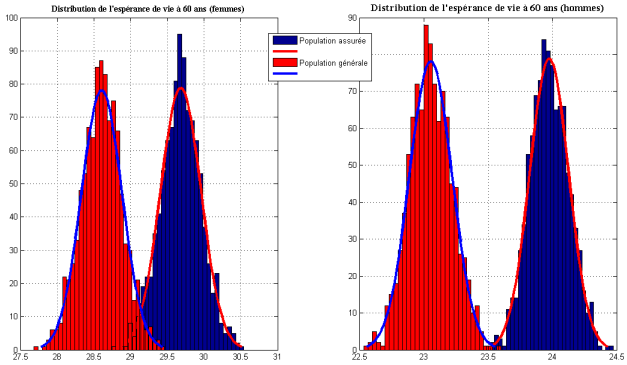


FIGURE 3.10 – Histogrammes des espérances de vie à 60 ans

à s'en protéger. Dans ce contexte, la sélection adverse implique l'incapacité d'obtenir une information exhaustive sur les caractéristiques de biens ou agents économiques apparemment identiques. Il s'agit d'un problème d'opportunisme précontractuel venant de ce que les agents économiques détiennent des informations privées non accessibles au cocontractant. C'est pourquoi on dit que le risque d'antisélection découle de l'asymétrie d'information entre l'assuré et l'assureur. En particulier, le second n'est pas en mesure de connaître complètement l'état de santé du premier. Pour les contrats prévoyant une garantie en cas de vie les assureurs ne peuvent exiger d'examen médical afin de déterminer si le demandeur d'assurance présente des prédispositions à vivre plus longtemps. D'un autre côté, il est vrai les assureurs n'octroient pas des arrérages plus élevés aux assurés fumeurs, alors que le fait de fumer est reconnu aggraver la mortalité. Quoiqu'il en soit, il a été observé que la population assurée (féminine ou masculine) en rentes viagères jouit en moyenne une longévité plus grande que celle de la population générale. Dans une large mesure, cette population est composée d'assurés provenant des couches sociales les plus élevées, mieux à même d'analysé la possibilité de transformer un capital en rente viagère. Le choix d'une rente plutôt qu'un capital, peut signifier qu'ils espèrent vivre plus longtemps que la moyenne.

Cependant, ce risque d'antisélection dépend clairement du marché. Or, comme le précisent Denuit & Wahlin(2005), *l'antisélection présente sur le marché des rentes changerait . . .si la sortie en rentes était largement favorisée fiscalement par exemple.* Dans ce cas, la majorité de la population opterait pour la rente, de sorte que les caractéristiques de la population assurée se

rapprocheraient de celles de la population générale, ce qui ferait diminuer sensiblement l'antisélection. On va examiner le cas d'une rente viagère immédiate à 60 ans de montant annuel d'un euro. La valeur actuelle probable de cette rente sera évaluée selon les 1 000 scénarios de mortalité qu'on a construit précédemment pour l'expérience masculine, féminine ainsi que la population générale masculine et féminine. Cela permettra de mettre en évidence l'effet d'antisélection (voir figure 10)

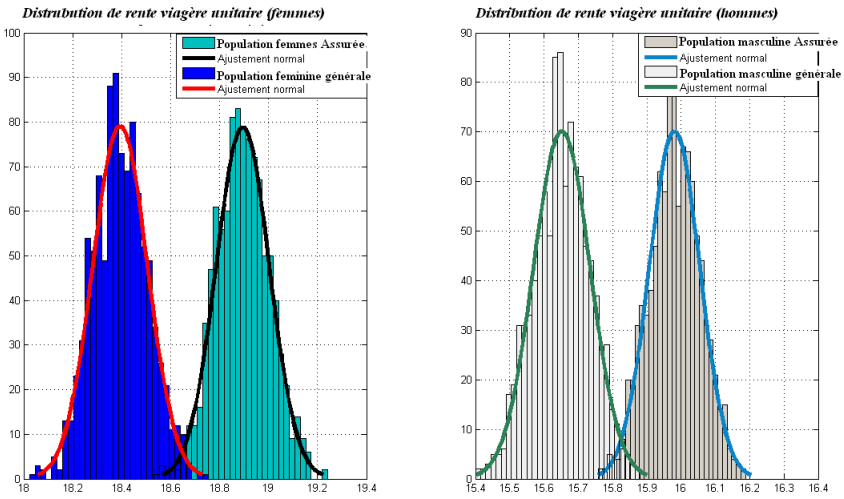


FIGURE 3.11 – Effets antisélection sur les rentes viagères à 60 ans

	moyenne	écart type	$VaR_{99,5\%}$	$TVaR_{99,5\%}$
Hommes assurés	15,9807	0,0740	16,1788	16,1831
Hommes population générale	15,6519	0,0827	15,8779	15,8791
Femmes assurées	18,8945	0,1086	19,2216	19,2309
Femmes population générale	18,3935	0,1114	18,7282	18,7404

Tableau 1 : Mesures des risques d'une rente stochastique viagère à 60 ans

L'analyse de ce dernier tableau montre que plus les mesures de risque calculées pour une rente viagère unitaire à 60 ans sont élevées, plus la sélection adverse est importante. Par exemple, on peut noter pour les hommes du portefeuille assuré et les hommes de la population générale, les relations suivantes :

$$VaR_{99,5\%}\left(a_{60}^{exp}\right) > VaR_{99,5\%}\left(a_{60}^{gen}\right) \tag{3.55}$$

$$TVaR_{99.9\%}\left(a_{60}^{exp}\right) > TVaR_{99.9\%}\left(a_{60}^{gen}\right) \tag{3.56}$$

3.12.1 Projection stochastique de provisions mathématique d'un portefeuille de rentes réversibles ou non réversibles

On dispose d'un portefeuille de rentiers composé de rentes sur une tête et de rentes sur plusieurs têtes [9], comportant 296 contrats avec des annuités différentes et des pourcentages de réversion différents. On envisage de projeter les provisions mathématiques ligne par ligne et en globalité en utilisant les scénarios de mortalité stochastiques qu'on a construit dans la section précédente. L'objectif est de comparer le niveau de provision moyen ainsi que les niveaux de *Value at Risk* et d'autres mesures de risque projetées des provisions mathématiques en utilisant les scénarios de mortalité de la population générale et ceux de la population assurée, pour voir l'impact de l'antisélection sur le provisionnement. Lorsqu'il s'agit d'une rente sur une tête annuelle sans revalorisation, les provisions mathématiques futures sont déterminées par la formule suivante :

$$PM^{(1)}(t) = \left({}_tp_x \sum_{k\geq 1} v^k \, {}_kp_{x+t} \right) \times a \tag{3.57}$$

Avec a le montant de l'annuité, $v = \frac{1}{1+r}$ le facteur d'actualisation où r est le taux technique alors que les probabilité de survie sont déterminées au moyen des cubes de mortalité construits précédemment et peuvent varier selon le sexe de l'assuré. Pour le cas des rentes réversibles sur deux têtes dont la première est d'âge x, la deuxième d'âge y et de pourcentages de réversion au décès de la première tête $\alpha_1 \geq 0$ et au décès de la deuxième tête $\alpha_2 \geq 0$ et sans revalorisation, les provisions mathématiques sont déterminées comme suit :

$$\begin{aligned} PM^{(2)}(t) = a \; {}_tp_x \;\; {}_tp_y \sum_{k\geq 1} v^k \left({}_kp_{x+t} + \alpha_1 \left(1 - {}_kp_{x+t}\right) \; {}_kp_{y+t} \right) \\ + a \; {}_tp_x \;\; {}_tp_y \sum_{k\geq 1} v^k \left({}_kp_{y+t} + \alpha_2 \left(1 - {}_kp_{y+t}\right) \; {}_kp_{x+t} \right) \end{aligned} \tag{3.58}$$

9. Dans les applications numériques, il s'agit des rentes sur deux têtes avec pourcentage de réversion différent selon que le décès survient au premier lieu, sur la première ou sur la deuxième tête.

$$+a_{\ t}q_{x\ t}p_y\alpha_1\sum_{k\geq 1}{}_kp_{y+t}+a_{\ t}p_{x\ t}q_y\alpha_2\sum_{k\geq 1}{}_kp_{x+t}$$

Supposons qu'on veuille projeter les provisions mathématiques du portefeuille en question sur 50 ans en utilisant la mortalité de la population générale et celle de la population assurée afin d'analyser l'écart de provisionnement et l'impact de l'antisélection, s'il existe. Le portefeuille en question est composé de 291 rentes (réversibles et non réversibles) avec des caractéristiques différentes (Annuités, Ages,. . .). La projection des provisions mathématiques est faite sans revalorisation et avec un taux technique constant. Or, étant donné qu'on a généré des cubes de mortalité, on dispose de plusieurs scénarios possible pour chaque population (population des assurés et population générale et par sexe). On est donc capable de calculer les distributions et d'en déduire des moyennes et des mesures de risque pour les provisions projetées, ce qui permet de les comparer. Les résultats suivants illustrent l'écart de provisionnement entre la mortalité d'expérience et la mortalité de la population générale, écart dû au risque d'antisélection [10].

t	1	2	3	4	5	10	25	50
$VaR_{99,5\%}\left(PM^{Exp}(t)\right)$	6,17	5,64	5,18	4,77	4,40	3,00	0,87	0,052
$VaR_{99,5\%}\left(PM^{Gen}(t)\right)$	5,69	5,19	4,76	4,39	4,05	2,77	0,79	0,045
Ecart	7,7	7,95	8,01	7,98	7,94	7,86	9,57	14,27

La remarque la plus importante qu'on peut retirer de l'analyse du tableau ci-dessus est le fait que l'écart de provisions augmente lorsque on avance dans le temps. Il passe de 7% la première année à 14% à la 50^{me} année de projection des provisions mathématiques. Cela s'explique par le fait que les individus assurés ont davantage de chance de vivre plus longtemps que les individus de la population générale. Il s'agit d'un risque d'antisélection que les tables de mortalité construites sur la base des données générales ne peuvent révéler. On conclut que la non prise en compte du risque d'antisélection aggrave la probabilité de ruine. Cependant, en pratique, la projection des provisions mathématiques d'un assureur est effectuée en prenant compte de la totalité des cantons/portefeuilles assurés quel que soit le type de la garantie. Or, s'il s'agit d'une garantie en cas de décès, l'utilisation des cubes de mortalité obtenus via les modèles de trend (Lee Carter & Poisson. . .) a tendance à

10. Les chiffre du suivant tableau sont en Million d'euro

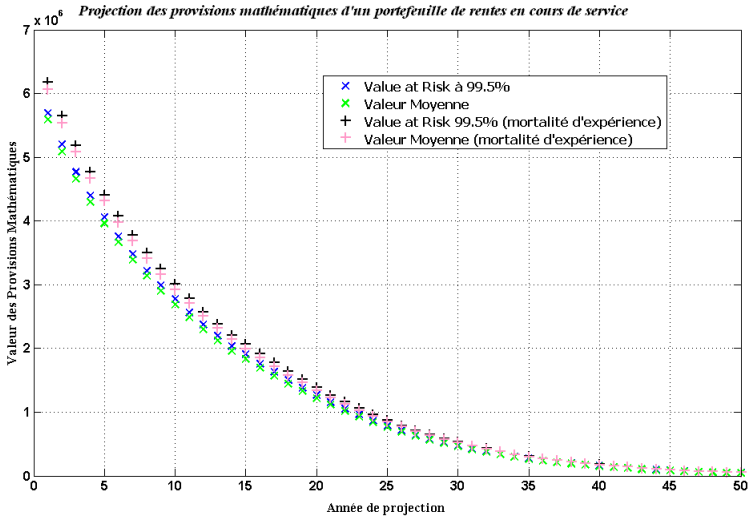


FIGURE 3.12 – Projection des Provisions mathématiques d'un portefeuille de rentiers en cours de service

diminuer les provisions mathématiques. Dans ce cas, l'introduction des chocs sur la mortalité durant un court intervalle de temps permettrait de prendre en compte l'effet de mortalité catastrophique. En appliquant un tel choc sur nos cubes de mortalité, on bénéficierait d'un effet de diversification en projetant simultanément tous les engagements de l'assureur en utilisant les mêmes données.

3.13 Prise en compte de mortalité catastrophique

Un modèle interne dans un référentiel Solvabilité 2 doit prendre en compte, en plus de l'incertetude quant à la tendance centrale de la mortalité, les chocs extrêmes de mortalité dus, par exemple, aux épidémies. Étant donné que ces risques sont difficiles à modéliser à l'aide d'un modèle unique, il serait utile de calibrer un modèle de risque catastrophe, à savoir un processus de Poisson composé, sur les résultats des projections centrales de la mortalité.

L'étude des cinq grandes pandémies du vingtième ciècle montrent qu'elles ont impacté de manière additive et non pas multiplicative la mortalité. Donc, plusieurs auteurs ont

développé une variante avec saut du modèle de Lee-Carter, permettant de rendre compte des catastrophes en ajoutant un processus à saut à un modèles de projection de la mortalité parmi ceux détaillés ci-dessus, on serait capable de calculer les chocs de longévité, de mortalité et de catastrophe des contrats d'assurance vie à garanties pluriannuelles.

3.14 Conclusion

Comme le montre notre étude, la modélisation stochastique de la mortalité d'expérience est un outil précieux pour les compagnies d'assurance et les fonds de pension dans la mesure où elle permet de prendre en compte, à la fois le risque de longévité et le risque de sélection adverse. La prise en compte de l'allongement de la durée de vie humaine par la construction des tables de mortalité prospectives rend plus prudente la tarification des produits d'assurance en cas de vie tels que les rentes viagères. On a là une différence importante avec le traitement des garanties décès puisque, pour ces dernières, le recours aux méthodes unidimensionnelles simples et la sans anticipation de l'évolution de la mortalité est suffisant. Cela restera vrai tant que la mortalité aura tendance à diminuer. Cependant, il est toujours possible d'associer à un modèle de trend de mortalité une composante prenant en compte une éventuelle mortalité catastrophique. Il en résulte ainsi un cube de scénarios de mortalité constituant l'unique entrée pour la projection de tous les portefeuilles. Cela permettrait à l'assureur de bénéficier de l'effet de diversification.

Ainsi il semble que les assureurs aient intérêt à employer les tables prospectives, car ils pourront mieux cerner le risque de mortalité inhérent à leur portefeuille et appréhender notamment le phénomène d'antisélection. La connaissance précise du portefeuille constitue évidemment un point clé dans le processus de gestion et dans la maîtrise des risques d'entreprise ; un pilotage performant va de pair avec une bonne perception du profil de risque, comme le suggèrent les évolutions actuelles du monde de l'assurance.

Chapitre 4

Pilotage du risque dépendance en environnement Solvabilité II

4.1 Introduction

Le vieillissement de la population illustré par le double phénomène d'allongement de l'espérance de vie et de diminution ou stabilisation des naissances entraîne une surreprésentation des personnes âgées au sein de la population totale. Ce constat est généralement attribuée aux progrès de la médecine, à l'amélioration des conditions sanitaires et à l'augmentation du niveau de vie. Ce phénomène de vieillissement peut non seulement menacer directement le financement des retraites mais aussi faire apparaître des nouveaux risques, au premier rang desquels la dépendance des personnes âgées. Cependant, la gestion du risque que représentent les dépenses de dépendance apparaissait jusqu'il y a peu comme le parent pauvre de la réflexion économique sur le vieillissement, notamment en France. Ce risque s'est également accru avec la diminution du nombre d'enfants par famille et aussi l'autonomisation des membres de la famille ainsi que leur dispersion géographique. La dépendance, qui était auparavant couverte par une auto assurance d'origine familiale, s'est peu à peu détachée de ce cadre pour devenir un risque assurable à part entière. Pour pallier à ce futur accroissement, le gouvernement a mis en place des dispositifs d'aides aux personnes atteintes, et montre une réelle volonté d'appréhender le risque par la création du cinquième risque de la Sécurité

Sociale. Cependant, ces ressources demeurent insuffisantes aux yeux de ses bénéficiaires. Une solution serait donc de souscrire une assurance dépendance permettant d'assurer les coûts liés à la survenance de la maladie. Ce risque reste pourtant complexe à modéliser : c'est un risque de long terme et le peu de statistiques disponibles engendre de nombreuses difficultés dans son estimation.

Au niveau microéconomique, pour une personne âgée, tomber en situation de dépendance représente une réelle perte de bien-être mais également un risque financier majeur. A l'inquiétude de voir sa santé se détériorer s'ajoute la peur de ne pas pouvoir faire face à ce risque financier. Pour la dépendance en établissement, le coût mensuel varie entre 1 800 euros et 3 500 euros avec une moyenne autour de 2 500 euros. Le coût peut même être supérieur en région parisienne. Pour les personnes à domicile, la dépendance représente un coût moyen de 1 500 euros mais il oscille entre 340 euros par mois pour la dépendance légère et 5 300 euros par mois en cas de dépendance physique et psychique maximale (Ennuyer 2006). Le coût peut même être supérieur en région parisienne. Si l'on rapporte ce coût moyen à la solvabilisation moyenne apportée par l'Allocation Personnalisée d'Autonomie versée par les Conseils Généraux qui est de 409 euros (Perben 2006), on se rend compte que la prise en charge publique ne représente que 30% du coût moyen (Ennuyer 2006). D'autres estimations ont évalué la prise en charge publique à 50% du coût moyen (CdC 2005). Des études plus récentes estiment que le reste à charge est en moyenne de 1 600 euros par individu. A noter que ce reste à charge dépend également de l'aide informelle apportée par les proches. Une part importante des personnes dépendantes ne peuvent donc faire face à ce risque financier à l'aide de leur revenu mensuel. Elles sont donc contraintes de puiser dans leur épargne si elles en ont, de faire appel à leurs enfants ou encore de vendre leur maison afin de financer leur dépendance (Breuil-Genier 1996). Il reste donc un complément de financement qui reste à la charge de la personne dépendante.

Au niveau macroéconomique, les dépenses de dépendance représentent aux USA 1.2% du PIB (CBO 2004), atteignent même 2.89% du PIB du Suède (OECD 2005) alors qu'en France elles atteignent environ 19 milliards d'euro par an (CdC 2005) c'est à dire environ 1% du PIB. En ce qui concerne le financement de ces dépenses liées à la dépendance, la part du secteur publique (Etats) est toujours plus importante que la part du secteur privé (assurance) sauf en Espagne. En France, les dépenses publiques destinées à la couverture du risque

dépendance se répartissent de la manière suivante : 63.1% par l'assurance maladie, 20.5% par les collectivités locales, 1.9% par l'Etat et le reste par la Caisse Nationale de Solidarité pour l'Autonomie (CdC 2005).

Malgré l'importance du risque dépendance et son coût qui ne cesse d'augmenter, le marché d'assurance se tarde à se développer dans la mesure où il représente un taux d'équipement du marché de 8% (HCAAM 2005). Il est aussi important de signaler que les primes et les indemnités prévues dans le cadre des contrats collectifs, auxquels adhère environ la moitié de la population couverte, sont souvent trop faibles face au coût de la dépendance. Si, on rajoute à ceci, le devoir d'indemnisation d'un nombre de plus en plus important de dépendants, le risque de dépendance sera très compliqué à s'appréhender surtout après l'introduction des nouveaux référentiels comptables et prudentiels Solvabilité II qui oblige les acteurs du secteur d'assurance à repenser à l'évaluation de leurs engagements d'une manière économique en mettant en place un contrôle prudentiel tant au niveau des provisions techniques qu'au niveau des fonds propres afin de limiter la probabilité de ruine de l'assureur et de garantir sa solvabilité à l'égard de ses assurés. L'objectif de ce papier est dans un premier lieu de traduire le plus fidèlement possible le risque de dépendance dans un portefeuille d'expérience du premier assureur des personnes en France. A l'issue de cette étape, nous réalisons des calculs classiques de tarification et de provisionnement applicables aux tables d'expérience construites. En second lieu, nous introduisons, dans un contexte Solvabilité II, un modèle stochastique pour mieux piloter le risque dépendance.

4.2 Le risque dépendance, risque long difficile à appréhender

4.2.1 Définition

La dépendance vient du latin *dependere* qui signifie dépendre de. Elle se définit généralement par la nécessité de recourir à une aide extérieure pour accomplir les actes essentiels de la vie. La dépendance peut être partielle ou totale. Mais, le problème est de définir le niveau de dépendance d'une personne lors de la survenance du risque. A cet effet, on prend en compte les dimensions physiologique et psychiques de la dépendance en observant si la personne est capable ou non de réaliser les certains actes de la vie quotidienne. Des classes peuvent être

alors définies et mettent en avant le degré de dépendance de la personne concernée : totale pour les personnes les plus touchées et partielle pour une dépendance moins importante. Un système d'évaluation paraît nécessaire pour mesurer l'état de dépendance du sujet atteint. De nombreuses grilles d'évaluation sont utilisées pour mesurer la dépendance :

- La grille COLVEZ : établie par le docteur COLVEZ, elle mesure la perte de mobilité. Elle définit 4 niveaux, grâce auxquels on pourra juger si la personne est dépendante partielle ou totale.
- La grille EHPA : cette grille croise les niveaux de la grille COLVEZ avec deux groupes définis selon l'existence ou non de troubles du comportement ou de désorientation dans l'espace et dans le temps. Elle regroupe ainsi les notions de dépendance physique et psychique, ce qui a pour but une détermination plus fine du niveau de dépendance de la personne atteinte.
- La grille AVQ : cette grille proposée par KATZ décrit 6 actes de la vie quotidienne. Pour chaque acte, on affectera un niveau de dépendance de 1 à 8. Ce dernier définira la dépendance résiduelle du patient.
- La grille AGGIR : elle a pour but d'évaluer les besoins financiers liés à la survenance de la dépendance chez un individu. Elle comporte 10 variables discriminantes relatives à la perte d'autonomie physique et psychique, et sept variables illustratives indiquant le degré d'autonomie domestique et sociale. Chacune des variables est affectée d'une modalité visant à mesurer le degré de dépendance du patient. Après analyse statistique, six groupes dits " ISO-Ressources " ou GIR sont créés, noté de 1 à 6, allant de l'état le plus grave au plus modéré.

4.2.2 Les contrats d'assurance dépendance

Deux types de contrat d'assurance dépendance existent :

- **Contrat Prévoyance** : ce type de contrat couvre le risque pur, c'est-à-dire uniquement la dépendance. L'assuré paiera des primes périodiques, et si le risque se réalise, il touchera des primes sous forme, par exemple, de rente viagère prédéfinie au moment de la souscription.
- **Contrat Epargne** : c'est un contrat d'épargne classique, incluant des garanties complémentaires, ici la dépendance, où les primes sont payées librement, capitalisées, et si le risque survient, le montant épargné est versé sous forme de rente viagère ou de capital. Ce type

de contrat est flexible avec la possibilité de retirer l'argent placé.

Les contrats prévoient en général le versement d'une rente viagère ou d'un capital lors de la survenance du sinistre et après avoir définir le niveau de dépendance. Puisque le risque dépendance est difficile à apprécier, certains éléments précisés dans le contrat permettent de mieux cerner le risque, et d'éviter l'anti sélection. Une limite d'âge à la souscription est imposée pour éviter notamment des primes trop élevées et un questionnaire trop lourd. Les probabilités de survenance du risque sont bien trop importantes ce qui impacte fortement la tarification. Une sélection médicale est réalisée sous forme de déclaration d'état de santé faite par l'individu appuyé d'un rapport du médecin traitant. Selon le montant de garantie, des questionnaires médicaux viennent en supplément dans le but de déterminer les antériorités médicales favorisant un futur état de dépendance. Cette pratique est très développée, notamment en Angleterre. Un délai de carence est souvent imposé et permet à l'assureur de verser des prestations uniquement si l'entrée en dépendance a lieu au-delà de ce même délai. Lors de la survenance du risque, l'application d'un délai de franchise permet de constater d'un éventuel retour à la normal de la personne dépendante. Durant cet intervalle de temps, aucune prestation n'est versée par l'assureur, mais la personne sinistrée perçoit tout de même l'APA. Ce type de sélection est assez fine pour les contrats collectifs à adhésion individuelle, mais en ce qui concerne ceux à adhésion obligatoire, ils présentent des tarifs plus mutualisées et donc inférieurs pour les assurés âgés et évite aussi l'anti-sélection. On peut même voir certains cas où les délais de carence, les franchises ou questionnaires médicaux sont allégés voire supprimés.

4.2.3 Risque long

L'assurance dépendance est marqué par un décalage temporel entre le moment où l'on souscrit le contrat et le moment où l'occurrence du risque. Ce long décalage fait que la probabilité de sinistre peut évoluer dans le temps. Le long de cette durée contractuelle, plusieurs événements peuvent considérablement modifier la probabilité de sinistre et son coût. Pour l'assuré, un risque long se matérialise par le risque de dépense de soins et également le risque que l'assureur résilie unilatéralement le contrat alors que pour l'assureur, plus l'assuré avance en âge, plus il devient un mauvais risque. Donc, aux yeux de l'assureur, le risque long se matérialise par l'évolution de la probabilité utilisée pour calculer la prime ainsi que l'évaluation

monétaire du sinistre. Il est à rappeler qu'en présence d'un risque classique d'assurance, une éventuelle asymétrie d'information entre assureur et assuré peut exister. Cette dernière est susceptible d'augmenter dans le cas d'un risque long dans la mesure où plusieurs information peuvent modifier sensiblement les probabilités et les coûts des sinistres.

4.3 Modélisation d'expérience du risque dépendance

De manière générale, l'assuré peut avoir trois statuts : valide, dépendant ou décédé. Pour quantifier le risque dépendance, il faut donc au minimum considérer les lois suivantes :

- La loi d'incidence ou d'entrée en dépendance : cette loi présente les probabilités à chaque âge de passer de l'état valide à l'état de dépendance,
- La loi de maintien en dépendance : ce sont les probabilités de rester dépendant en fonction de l'âge à partir du moment où on est entré dans l'état,
- La loi de mortalité des valides : les diverses probabilités de décès des assurés valides en fonction de l'âge.

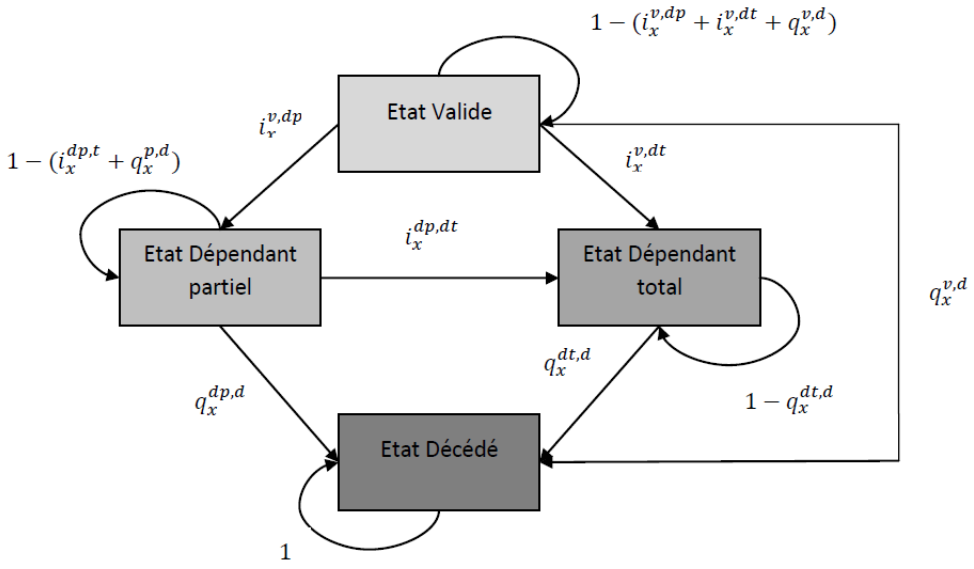


FIGURE 4.1 – Les différents états de l'assuré

Nous pouvons alors affiner le développement de la modélisation, en intégrant les différents degrés de dépendance4.1 : partielle ou totale. Nous pourrons segmenter le risque, tenir compte des lois de passage entre les différents états et de la mortalité relative à chacun d'eux. Nous pourrons également différencier notre étude par sexe et voir si ce critère est pertinent. Dans ce qui suit, nous adoptons la notation suivante :

- $q_x^{i,d}$ probabilité de décéder dans l'état i entre l'âge x et $x+1$
- $i_x^{i,j}$ probabilité de passage d'un état i à un état j à l'âge x
- v état valide
- dp état de dépendance partielle
- dt état de dépendance totale
- d état de décès

Nous remarquons qu'aucune rémission dans un état antérieur n'a été proposée sur le schéma ; ceci est une hypothèse couramment admise et notamment vérifiée sur notre portefeuille étudié. Le Code des Assurances ne propose pas de tables règlementaires en ce qui concerne la dépendance. Le but sera de modéliser la loi d'entrée et de maintien en dépendance à partir de nos données. Les tables de mortalité des valides sont définies grâce à des tables de référence. Les résultats pourront ensuite être comparés à ceux de l'enquête HID effectuée par l'INSEE de 1998 à 2001. Cette enquête HID vise à recenser les personnes touchées par un handicap ou une déficience, décrire leur situation sociale ainsi que les aides dont elles bénéficient ou dont elles auraient besoin. Plus de 50 000 entretiens se sont succédés lors de cette enquête. La première phase, fin 1998, a porté sur les personnes en institution. Le même auto-questionnaire a été passé fin 1999 auprès de personnes vivant à domicile sur un échantillon constitué lors du recensement général de la population de mars 1999. En 2000/2001, les mêmes personnes ont été interrogées, ceci permettant de repérer une trajectoire et ne figeant pas les résultats sur un instantané. Les résultats issus de cette enquête permettront de réaliser un comparatif par rapport à nos estimations. Nous allons à présent introduire les méthodes d'estimation de la loi d'entrée et de maintien en dépendance.

4.3.1 Données de l'étude

Les études réalisées par les assureurs concernant la dépendance sont encore relativement rares, ceci étant dû au peu de données recueillies jusqu'à présent. Une étude approfondie

du portefeuille du premier assureur de personnes en France, en ce qui concerne les assurés et les sinistrés en dépendance, permettra d'estimer au mieux le risque réel pour la compagnie engendré par cette garantie. La présente étude s'appuie sur des données relatives à 5 produits couvrant le risque de dépendance, regroupant chacun des contrats prévoyance collectifs à adhésion facultative ou obligatoire. Cette mixtion implique que l'étude ne pourra être utilisable que pour ce type de contrat. Cependant, bon nombre de contrats à adhésion obligatoire propose l'adhésion facultative des conjoints, ce qui permet de recouper avec la notion de souscription facultative. La sélection médicale à la souscription est beaucoup plus stricte pour ce type de contrat, et l'adhésion est alors le plus souvent subordonnée à un questionnaire de santé beaucoup plus pointu qu'une simple déclaration. La définition de la garantie est identique pour tous les contrats considérés : *"Est considéré en état de dépendance, l'assuré qui se trouve dans l'impossibilité permanente, physique ou psychique, d'effectuer seul les actes de la vie quotidienne : se déplacer, s'alimenter, s'habiller, et se laver"*. A partir des actes de la vie quotidienne, une grille à points est réalisée pour déterminer le degré de dépendance psychique du dépendant. A partir de là, le niveau de dépendance de la personne est définie : partielle ou totale. Dans la plupart des contrats, seule la dépendance totale garantit la prise en charge de l'assureur, et une faible partie assure une indemnisation pour les deux niveaux de la maladie. La garantie principale est le service d'une rente forfaitaire en cas de dépendance pour tous les contrats. Le délai de carence est en général d'un an à compter de l'affiliation, trois ans en cas de dépendance due à l'état mental, et nul si la dépendance résulte d'un accident. La franchise applicable à partir de la reconnaissance de la dépendance est de 180 jours, et réduite à 90 jours dans le cas d'un accident. L'agrégation en une seule base d'assurés tous produits confondus semble cohérente. Nous obtenons ainsi une base conséquente et exhaustive [1] pour mener à bien notre étude sur les dépendants.

Produits	Age Moyen
1	67
2	67
3	65
4	59
5	65
Age moyen pondéré	65

1. Données arrêtées au 31/12/2009

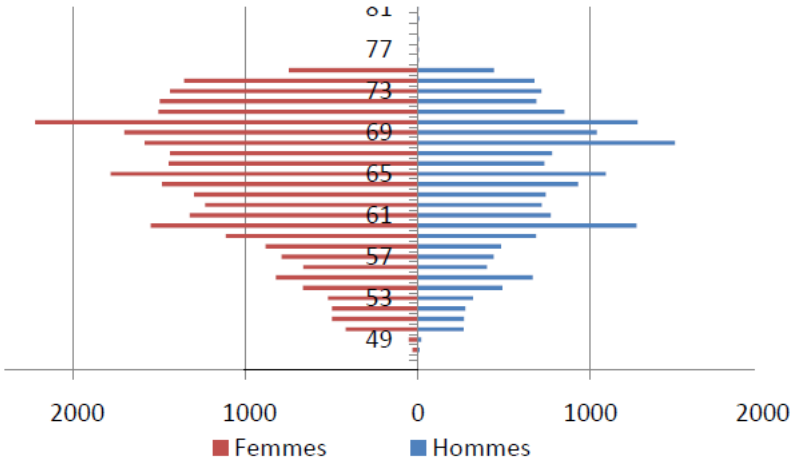


FIGURE 4.2 – Pyramide des âges à la souscription

Sur la pyramide des âges, nous constatons que les adhésions sont quasiment inexistantes pour les âges inférieurs à 50 ans et qu'elles se font en moyenne à l'âge de 65 ans qui est égale à l'âge moyen de retraite. Les individus ayant moins de 50 ans ne veulent pas considérer ce risque, et surtout éviter de payer toute leur vie des primes alors qu'un état de dépendance peut ne jamais survenir. De plus, avant la retraite, une perte d'autonomie est considérée comme de l'incapacité de travail, et fait intervenir en général un autre type d'indemnisation. La dépendance viendrait seulement en complément. Les personnes qui adhérent aujourd'hui à ce type de contrats, sont plus âgées et donc prennent plus en considération le risque de dépendance. Il est aussi important de signaler que le nombre d'assuré s'élève à 49 251 réparti entre hommes et femmes respectivement à hauteur de 38% et 62% donc à adhésion majoritairement féminine.

Pour avoir un aperçu sur l'historique des dépendants, le tableau suivant illustre le nombre des sinistrés en fonction du niveau de dépendance ainsi que le passage d'un niveau à un autre :

	Répartition des dépendants		Amélioration, Aggravation de sinistralité
Partielle	292	Total	62
Totale	2 158	Partielle	1
Non dépendants	46 801	-	-
Total	49 251	-	-

Une rapide analyse du précédent tableau nous montre que le nombre d'occurrence de passage d'un niveau de dépendance à un autre est très faible. Ceci rend délicat la modélisation de passage entre les niveaux de dépendance. Nous considérons donc marginale l'amélioration ou l'aggravation de la sinistralité. En plus, l'état de dépendance totale représente 88% de l'ensemble des dépendants.

Produits	Age moyen d'entrée en dépendance	Age moyen des valides
1	82	78
2	82	82
3	77	73
4	77	69
5	80	71
Total	79	73

Nous relevons ici que l'âge moyen d'entrée en dépendance se situe autour de 79 ans pour tout notre historique de sinistralité. Or, si nous mettons en parallèle le vieillissement de notre population sous risque, nous pouvons supposer que dans le futur le nombre d'entrées en dépendance devrait devenir de plus en plus important, sachant que le nombre de nouvelles souscriptions restent relativement peu élevé sur les produits étudiés.

4.3.2 Loi d'entrée en dépendance

Après avoir synthétisé les données, et en avoir fait une analyse statistique, nous allons pouvoir modéliser la loi d'entrée en dépendance. A ce titre, nous avons besoin de plusieurs éléments de la base de données :

- la date de naissance du souscripteur
- la date de souscription au contrat dépendance
- la date de sortie des comptes
- la date d'entrée en dépendance

Estimateur empirique d'entrée en dépendance

Nous adoptons les notations et les hypothèses suivantes :

- n_x le nombre d'individu sous risque entre les âges x et $x+1$
- D_x la variable aléatoire représentant le nombre d'entrée en dépendance sur $]\,x, x+1\,[$
- d_x la réalisation de D_x

– i_x la probabilité d'entrée en dépendance à l'âge x
– Les entrées en dépendance sont indépendante les unes des autres
– Le nombre d'entrées en dépendance à l'âge x suit une loi binomiale $B(n_x; i_x)$

Les taux empiriques d'entrée en dépendance sont déterminés par maximum de vraisemblance. En effet, on a :

$$P(D_x = d_x) = C_{n_x}^{d_x} i_x^{d_x} (1 - i_x)^{n_x - d_x}. \tag{4.1}$$

Pour chaque observation, la vraisemblance s'écrit en fonction d'une constante K indépendante de i_x de la manière suivante :

$$L(i_x) = K\, i_x^{d_x} (1 - i_x)^{n_x - d_x}. \tag{4.2}$$

Après passage au logarithme, dérivation l'expression, et égalisation à 0, on trouve l'estimateur empirique sans biais, convergent et asymptotiquement normal de i_x :

$$\widehat{i_x} = \frac{d_x}{n_x}. \tag{4.3}$$

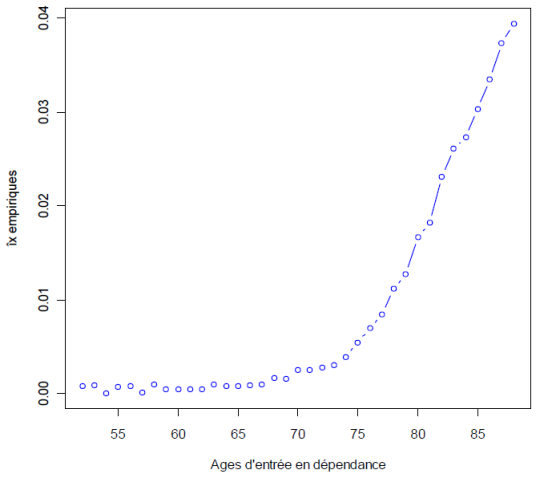


FIGURE 4.3 – Taux empirique d'entrée en dépendance en fonction de l'âge

Nous constatons une nette croissance de la probabilité d'entrée en dépendance en fonction de l'âge. Cette courbe a par ailleurs la forme d'une exponentielle, ce qui peut laisser présager

aussi un ajustement paramétrique de type exponentiel.

Segmentation par niveau de dépendance

Nous avons réalisé les courbes d'entrée en dépendance partielle et totale 4.4. Comme nous avons pu le constater lors de l'analyse du portefeuille visé par l'étude, 88% des entrées en dépendance se font à un niveau total. Cependant, compte tenu de la faible proportion d'entrée en dépendance partielle dans l'historique de nos produits, la modélisation d'une loi d'entrée en dépendance partielle ne semble pas pertinente. Dans la partie concernant la loi de maintien en dépendance, nous réaliserons tout de même cette segmentation par niveau de dépendance, mais pour rester cohérent nous garderons également uniquement celle concernant la dépendance totale.

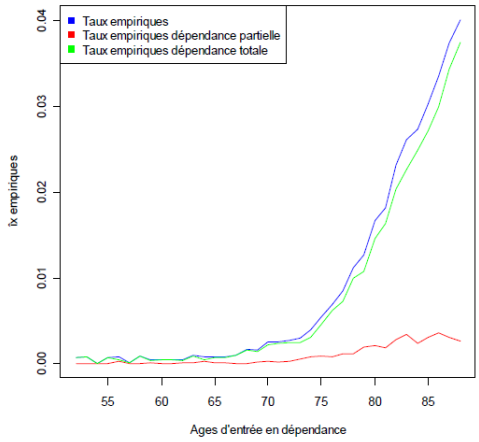


FIGURE 4.4 – Effet de segmentation par niveau de dépendance

Segmentation par sexe

Nous avons estimé les lois d'entrée en dépendance en segmentant selon le sexe des assurés. Sur la figure4.5 nous percevons que les deux courbes semblent très proches, malgré d'assez grandes oscillations à partir de l'âge de 82 ans. Ces variations brusques sont dues au fait qu'on diminue sensiblement le nombre de données observables lorsqu'on segmente par sexe, ce

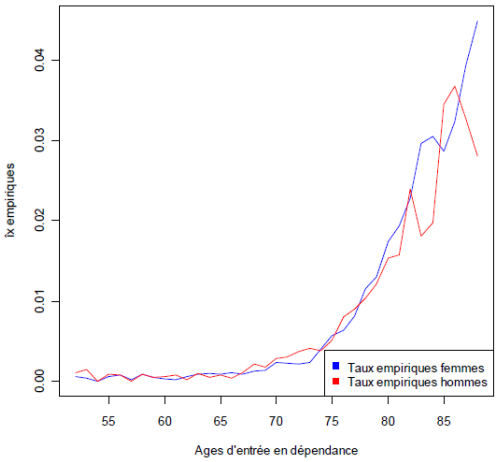


FIGURE 4.5 – Effet d'une segmentation par sexe

qui implique un manque de données pour certains âges.

La question est alors de savoir s'il est pertinent de segmenter la loi d'entrée en dépendance selon le sexe sur nos produits. Pour cela, le test de Kolmogorov-Smirnov, qui compare une fonction de répartition théorique à une fonction de répartition observée, nous indiquera si cette segmentation a lieu d'être. La fonction de répartition théorique sera donnée par l'ajustement d'un modèle de Makeham, qui permet de définir une loi pour l'entrée en dépendance à partir de données empiriques. La comparaison sera alors réalisée avec les deux fonctions de répartition empiriques d'entrée en dépendance segmentées par sexe.

Avant d'ajuster notre loi empirique, nous allons évaluer la précision de l'estimation empirique effectuée. Pour cela, nous allons réaliser dans le prochain paragraphe des intervalles de confiance pour chaque valeur obtenue.

Intervalles de confiance des taux bruts

La précision des estimations réalisées dépend de deux facteurs :

– l'effectif sous risque n_x

– le niveau du taux d'entrée en dépendance $\widehat{i_x}$

La précision sera alors mesurée par la largeur de l'intervalle de confiance. Pour cela, nous allons utiliser l'approximation gaussienne, mais nous devons alors vérifier que nous disposons

d'assez de données. Nous remarquons alors qu'une relation lie l'incertitude de l'estimation, le nombre d'observations et le niveau de confiance de l'intervalle désiré :

$$\Delta p = u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{N}}. \tag{4.4}$$

f est la valeur autour de laquelle est construit l'intervalle, $u_{\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite et N est le nombre d'observations. En application à notre étude, pour chaque valeur estimée, et pour que l'approximation gaussienne soit valide, il est nécessaire de disposer de n_x observations :

$$n_x = \frac{\widehat{i_x}\left(1-\widehat{i_x}\right)}{\Delta p^2} u^2_{\frac{\alpha}{2}} \tag{4.5}$$

Nous choisissons $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ pour une précision de 95% et $\Delta p = 0.01$. Pour toutes nos estimations, le nombre d'observations est toujours bien supérieur à celui nécessaire à la vérification de l'approximation gaussienne. Nous pouvons construire nos intervalles de confiance asymptotique. Or, d'après le théorème central limite :

$$\sqrt{n_x} \frac{i_x - \widehat{i_x}}{\sqrt{\widehat{i_x}\left(1-\widehat{i_x}\right)}} \Rightarrow N(0,1) \tag{4.6}$$

Donc, l'intervalle de confiance au niveau $\alpha = 5\%$ pour i_x est donc donné par :

$$I_\alpha = \left[\widehat{i_x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{i_x}\left(1-\widehat{i_x}\right)}{n_x}}; \widehat{i_x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{i_x}\left(1-\widehat{i_x}\right)}{n_x}}\right] \tag{4.7}$$

Nous obtenons des intervalles assez fins jusqu'à l'âge de 80 ans, mais à partir de là on note que les intervalles s'élargissent. Ceci est dû au fait que plus l'âge est élevé, plus nous nous situons à la limite du nombre d'observations requis pour la validité de l'approximation gaussienne4.9. Cette étape nous permet donc de donner une précision de l'estimation effectuée.

Lissage des taux bruts d'entrée en dépendance

Nous pouvons constater sur la courbe de nos taux empiriques des petites irrégularités, qui ne sont pas propres à l'estimation de la loi d'entrée en dépendance, mais sont dues aux données du portefeuille étudié. Pour éviter ces sauts, nous sommes amenés à lisser

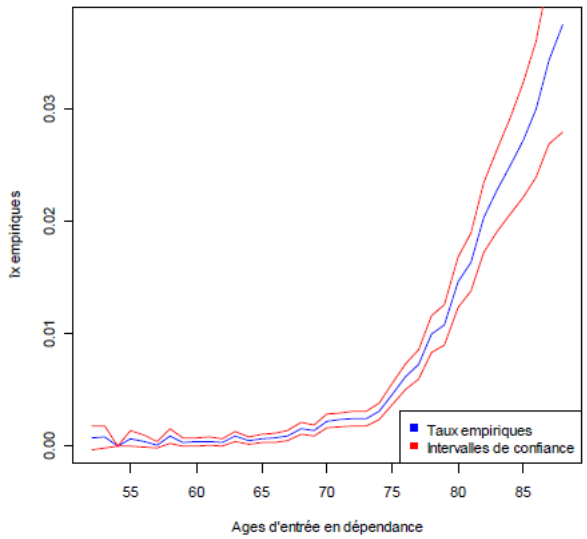


FIGURE 4.6 – Intervalle de confiance

notre courbe, de façon non paramétrique ou paramétrique. Il est important de signaler que plusieurs types de lissage peuvent être envisagés à savoir des lissages paramétriques et ceux non paramétriques. Dans ce qui nous présentons les résultats de lissage paramétrique de Makeham et non paramétriques Moyenne mobile et Whittaker Henderson.

4.3.3 Loi de maintien en dépendance

Après avoir étudié les têtes assurées entrées en dépendance dans l'historique de nos produits, nous allons pouvoir nous concentrer sur leurs durées de maintien. Ces dernières n'intègrent que la dépendance totale, étant donné la faible représentativité de la dépendance partielle. Nous notons que les données traitées sont " rarement " complètes, c'est-à-dire qu'elles sont soumises à des problèmes d'observation qui compliquent souvent l'analyse : les censures et les troncatures sont les plus connues. Dans notre cas, nous obtenons deux types de durée de survie : les durées complètes s'étalant de la date d'entrée en dépendance à la sortie de cet état, ou les durées incomplètes allant de la date d'entrée en dépendance à la date d'arrêté des données le 31/12/2009. Dans ce dernier cas, on comprend aisément qu'une partie

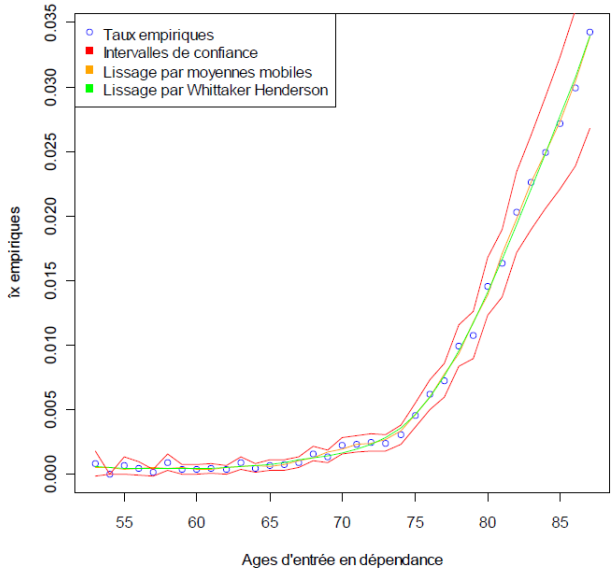


FIGURE 4.7 – Lissage non paramétrique

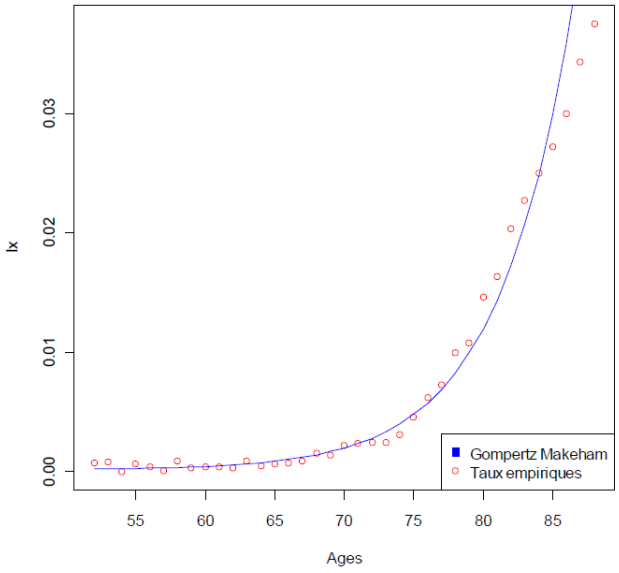


FIGURE 4.8 – Lissage paramétrique

des données seront censurées à droite. Les modèles de durées sont adaptés dès lors que le phénomène d'intérêt se modélise comme une ou des variables aléatoires positives. Il s'agit plus généralement de modéliser et d'estimer les lois décrivant le temps qui s'écoule entre deux évènements : dans notre cas, ce sera la durée de vie d'un individu à partir de son entrée dans l'état de dépendance jusqu'à la sortie de cet état (décès). Dans notre étude, nous ne pouvons pas faire d'hypothèse a priori sur la forme de la loi de survie ; on cherche alors à estimer directement cette fonction par une méthode d'estimation non paramétrique. De plus, ce type d'estimation doit intégrer la notion de données censurées à droite. Après nous être intéressés aux modèles de durée tels que Nelson-Aalen ou Harrington-Fleming, notre choix s'est porté sur l'estimateur de Kaplan-Meier qui possède de bonnes propriétés, comme nous le décrirons par la suite. Dans un premier temps, nous rappelons les outils mathématiques, puis nous présenterons l'estimateur de Kaplan-Meier.

Soit la variable aléatoire positive T représentant la durée de maintien dans l'état de dépendance. Généralement, la distribution de T est décrite par sa densité f ou sa fonction de répartition F . Etant donné que T est positive, trois fonctions doivent être définies préalablement à l'analyse des données de survie :

- la fonction de survie qui s'apparente ici à la fonction de maintien en dépendance : $S(t) = P(T > t)$
- le risque instantané ou fonction de hasard :$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$
- la fonction de hasard cumulée : $H(t) = \int_0^t h(s)\,ds = -ln(S(t))$

L'estimateur de Kaplan Meier

La construction heuristique de l'estimateur de Kaplan-Meier (cf. KAPLAN et MEIER [1958]) s'appuie sur la fait que la probabilité de survivre au delà de $t > s$ peut s'écrire :

$$S(t) = P(T > t|T > s)\ P(T > s) = P(T > t|T > s)\ \ S(s) \tag{4.8}$$

En réitérant, nous distinguons des produits d'éléments en $P(T > t|T > s)$. Le but est alors d'observer les instants où se produisent un évènement (sortie ou censure) et conditionner par rapport à ces moments. Nous définissons alors les probabilités conditionnelles suivantes :

$$p_i = P\left(T > T_{(i)}|T > T_{(i-1)}\right) \tag{4.9}$$

p_i est donc la probabilité de survivre sur l'intervalle $]T_{(i-1)}, T_{(i)}[$ sachant que l'individu était vivant et dépendant à l'instant $T_{(i-1)}$. On peut alors estimer $q_i = 1 - p_i$ avec $\widehat{q_i} = \frac{d_i}{r_i}$ par d_i défini dans lors de l'estimation de loi d'entrée en dépendance et r_i représente l'ensemble des sujets à risque juste avant l'instant T_i. L'estimateur de Kaplan Meier est défini par :

$$\widehat{S}(t) = \Pi_{T_{(i)<t}} \left(1 - \frac{d_i}{r_i}\right) \tag{4.10}$$

Les résultats suivants présentent une loi de maintien en dépendance totale tous âges confondus, ainsi qu'une segmentation de la loi par sexe. Une segmentation par âge n'a pas pu être réalisée car les données ne sont pas en quantité suffisante.

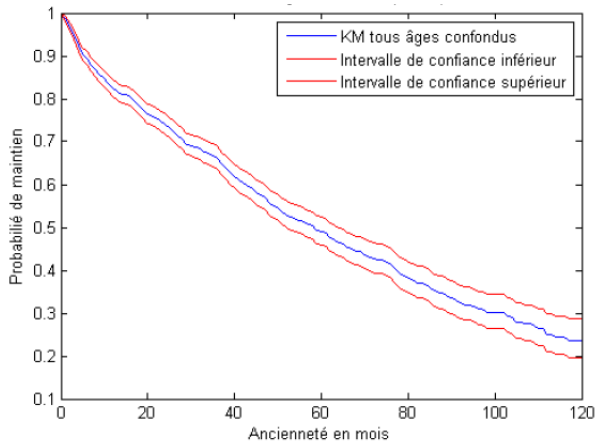


FIGURE 4.9 – Loi de maintien en dépendance

4.4 Tarification et provisionnement du risque dépendance

4.4.1 Tarification

L'objectif de cette partie est de créer un modèle simple de l'assurance dépendance à partir duquel sera calculée une tarification théorique basée sur des paramètres permettant de retracer le modèle. Nous considérons uniquement l'état de dépendance totale pour appliquer les tables d'entrée et de maintien définies auparavant. Nous n'avons pas non plus de rémissions

ou d'aggravations de la sinistralité pour bien cadrer avec nos données en portefeuille. Les sorties se font uniquement par décès. Reprenons la notation suivante :

- i_x^d la probabilité pour une personne valide d'entrée en dépendance totale
- ${}_kp_x^d$ la probabilité pour une personne dépendante de se maintenir en dépendance entre les âges x et $x+k$
- ${}_kp_x^v$ la probabilité pour une personne valide de se maintenir valide entre les âges x et $x+k$
- a_x^d rente viagère pour une personne dépendante d'âge x
- r le taux d'actualisation

L'évaluation actuelle de la rente viagère payable à terme échu à une personne en dépendance totale est donnée par :

$$a_x^d = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_jp_x^d \, (1+r)^{-j}. \tag{4.11}$$

ω étant l'âge limité de la table de mortalité. Nous pouvons émettre l'hypothèse que l'entrée en dépendance survient en moyenne en milieu d'année, d'où la formule de la rente suivante :

$$a_{x+\frac{1}{2}}^d = \frac{a_x^d + (1+r)^{-1} \, a_{x+1}^d}{2}. \tag{4.12}$$

L'engagement de l'assureur est égal à la prime pure unique correspondant au versement d'une rente annuelle en cas de survenance de la dépendance totale, et correspond pour un assuré d'âge à :

$$\pi_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_jp_x^v \; i_{x+j}^d \; (1+r)^{-j} \; a_{x+j+\frac{1}{1}}^d \tag{4.13}$$

Nous pouvons également introduire un délai de carence c à cette prime qui est propre à chaque contrat. L'assureur ne paiera la rente que si l'entrée en dépendance totale a lieu après années, et donc la prime pure unique devient :

$$c_{\pi_x} = \sum_{j=c}^{\omega-x} {}_jp_x^v \; i_{x+j}^d \; (1+r)^{-j} \; a_{x+j+\frac{1}{1}}^d \tag{4.14}$$

$$= \sum_{j=0}^{\omega-x-c} {}_{j+c}p_x^v \; i_{x+j+c}^d \; (1+r)^{-j-c} \; a_{x+j+c+\frac{1}{1}}^d \tag{4.15}$$

Dans notre cas la rente est versée mensuellement. Nous noterons la rente mensualisée par :

$$a^{d(12)}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{a^{d(12)}_{x} + (1+r)\ a^{d(12)}_{x+1}}{2} \quad avec \quad a^{d(m)}_{x} = a^{d}_{x} + \frac{m-1}{m}. \tag{4.16}$$

Nous obtenons alors pour la prime pure unique de la rente payable mensuellement :

$$\pi^{(12)}_{x} = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_{j}p^{v}_{x}\ i^{d}_{x+j}\ (1+r)^{-j}\ a^{d(12)}_{x+j+\frac{1}{2}}. \tag{4.17}$$

Or, les contrats prévoient en général un délai de franchise pouvant être appliqué au versement de la rente. Dans ce cas, l'assureur ne versera la rente qu'après un certain moment passé dans l'état de dépendance totale. Nous notons f le nombre d'année de franchise, la prime devient alors :

$${}^{FR}\pi^{(12)}_{x} = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_{j}p^{v}_{x}\ i^{d}_{x+j}\ (1+r)^{-j}\ {}_{f|}a^{d(12)}_{x+j+\frac{1}{2}}. \tag{4.18}$$

${}_{f|}a^{d(12)}_{x+j+\frac{1}{1}}$ est la rente à paiements mensuels différée de f années est défini par :

$${}_{f|}a^{d(12)}_{x+j+\frac{1}{2}} = a^{d(12)}_{x+j+\frac{1}{2}} - a^{d(12)}_{x+j+\frac{1}{2}:f|} \tag{4.19}$$

Nous pouvons définir alors la prime pure unique dans le cas de rente payable mensuellement avec délai de carence :

$${}^{c}\pi^{(12)}_{x} = \sum_{j=0}^{\omega-x-c} {}_{j+c}p^{v}_{x}\ i^{d}_{x+j+c}\ (1+r)^{-j-c}\ a^{d(12)}_{x+j+c+\frac{1}{2}}. \tag{4.20}$$

Nous pouvons également combiner le délai de carence et la franchise, ce qui est le plus souvent prévu dans les contrats prévoyance garantie dépendance :

$${}^{c+FR}\pi^{(12)}_{x} = \sum_{j=0}^{\omega-x-c} {}_{j+c}p^{v}_{x}\ i^{d}_{x+j+c}\ (1+r)^{-j-c}\ {}_{f|}a^{d(12)}_{x+j+c+\frac{1}{2}}. \tag{4.21}$$

Dans les contrats, nous n'avons pas en général de prime pure unique, mais plutôt des paiements de primes pures annuelles payables trimestriellement à terme échu. Si nous supposons que l'assuré arrête de payer ses cotisations lorsqu'il entre en dépendance totale, la prime pure

annuelle est calculée en divisant par une annuité qui tient compte de la survie de l'assuré en tant que valide :

$$ {}^{c+FR}P_x^{(12)} = \frac{{}^{c+FR}\pi_x^{(12)}}{\sum_{j=0}^{\omega-x} {}_jp_x^v (1+r)^{-j}}. \tag{4.22} $$

A cette formule, nous devons ajouter différents types de chargements pour obtenir la prime commerciale :

- chargement de sécurité : pourcentage de la prime s
- chargement de gestion : pourcentage de la prime g
- chargement d'acquisition : proportionnel à la prime commerciale d%

4.4.2 Provisionnement

Deux types de provisions sont à constituer pour faire face aux engagements de l'assureur : les provisions mathématiques (PM) pour rentes en cours de paiements, et les provisions pour risques croissants (PRC).

Les provisions mathématiques

Elles sont égales aux montants actualisés et probabilisés des rentes à payer pour une personne dépendante, sachant que le sinistre s'est réalisé. Elles tiennent compte de l'âge de l'individu à l'entrée en dépendance et du nombre d'années déjà passées en dépendance. Nous définissons alors la PM par :

$$ PM_x = a_x^d. \tag{4.23} $$

Les provisions pour risque croissant

Les provisions pour risques croissants sont éventuellement constituées pour des contrats d'assurance tarifés par le biais de primes nivelées et pour lesquels le risque de survenance des sinistres croît avec l'âge de l'assuré. Par ce postulat, l'assureur reçoit des primes supérieures par rapport au réel risque couvert dans les premières années de la vie du contrat ; par la suite, cette situation change et l'assureur doit faire face en fin de contrat à des niveaux de risque supérieurs au montant des primes encaissées. Ceci implique la nécessité de constituer

des provisions pour risques croissants : en début de vie du contrat, l'excédent entre la prime payée et le niveau du risque est mis en réserve pour alimenter la provision pour risques croissants. Cette réserve est ensuite utilisée lorsque le niveau du risque devient supérieur à la cotisation payée. Nous définissons par $PRC_t\,(x)$ la provision pour risques croissants pour un âge x à la date t. Nous différencions deux cas selon que la durée écoulée est supérieure ou non au délai de carence.

– Dans le cas où le délai de carence n'est pas écoulé, l'engagement de l'assureur sera défini par :

$$(1+r)^{c-t}\ {}_{c-t}p^{v}_{x+t}\ {}^{c+FR}\pi^{(12)}_{x+t} \tag{4.24}$$

Alors que l'engagement de l'assuré est défini par :

$$P\,(x)\ a^{v}_{x+t} \tag{4.25}$$

Nous obtenons alors la PRC par différence entre l'engagement de l'assureur et l'engagement de l'assuré :

$$PRC_t\,(x) = (1+r)^{c-t}\ {}_{c-t}p^{v}_{x+t}\ {}^{c+FR}\pi^{(12)}_{x+t} - P\,(x)\ a^{v}_{x+t} \tag{4.26}$$

– Dans le cas où le délai de carence est écoulé, la $PRC_t\,(x)$ sera donnée par :

$$PRC_t\,(x) = {}^{FR}\pi^{(12)}_{x+t} - P\,(x)\ a^{v}_{x+t} \tag{4.27}$$

Nous pourrons également noter que compte tenu des engagements de long terme liés à l'assurance dépendance, il est légitime de constituer une provision pour égalisation définie par contrat.

Nous présentons dans ce qui suit les résultats des calculs de prime, PM et PRC en utilisant les hypothèses suivantes :

– Taux d'intérêt technique égale à 2,5%
– Tables de mortalité retenues pour le calcul des taux de mortalité des valides : TH-0002 pour les hommes, TF-0002 pour les femmes, et mixte TH/TF-0002 selon les proportions d'hommes et de femmes

– Les primes, PM et PRC présentées ici sont calculées pour une rente viagère annuelle à terme échu égale à 1 euro.

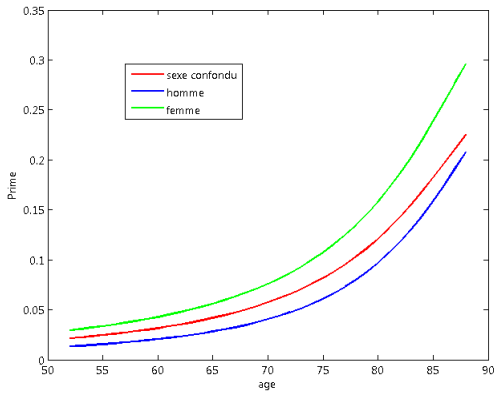


FIGURE 4.10 – Prime par âge

Nous constatons qu'une segmentation par sexe est nécessaire dans notre cas : si nous tarifons uniquement les contrats avec une prime indexée sur une loi de maintien tous sexes confondus, les primes payées par les femmes seront sous évaluées, et que les primes payées par les hommes seront surévaluées. La segmentation par sexe permet un meilleur ajustement du tarif par rapport au risque.

Nous pouvons aussi présenter les résultats obtenus pour les PM pour rentes mensuelles en cours de service. Etant donné que les PM sont uniquement calculées à partir de la mortalité des dépendants, et que nous avons établi des lois tous âges confondus, nous allons montrer ici la liquidation de la PM au cours du temps, à partir du moment où la personne est entrée en dépendance :

Comme précédemment nous pouvons noter que la segmentation par sexe reste toujours adéquate, au vu de la différence entre les courbes. Cependant, pour chacune des courbes, les tendances restent assez similaires, avec une liquidation de plus en plus forte des PM en fonction de l'ancienneté dans l'état de dépendance. En dernier lieu, nous pouvons nous intéresser aux PRC, et ainsi voir l'impact de nos différentes tables sur ce type de provisions :

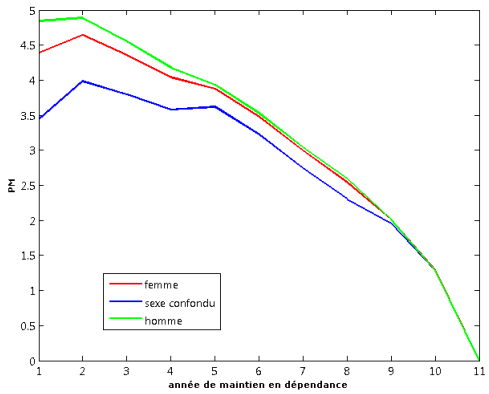


FIGURE 4.11 – Projection de PM en fonction de la table de maintien en dépendance d'expérience

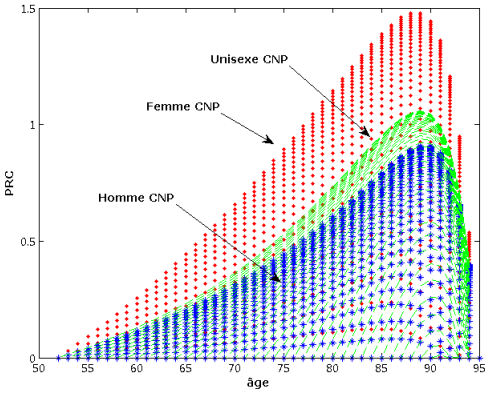


FIGURE 4.12 – Projection de PRC en fonction des tables d'expérience

Aux âges élevés, nous noterons une petite cassure sur la courbe des PRC, ceci étant du aux calculs de PRC négatives pour les contrats les plus anciens. Nous avons préféré annuler ces PRC négatives par convention. Dans l'illustration, nous ne nous intéresserons pas à la problématique de mutualisation des têtes assurées et ainsi de l'impact de PRC négatives. Nous observons à nouveau l'effet lié à la segmentation par sexe, mais nous constatons aussi que la pente de la courbe augmente d'autant plus que l'âge est élevé. Cela signifie que plus l'âge est élevé et plus la constitution de la provision pour risque croissant est rapide.

4.5 Le modèle Stochastique

4.5.1 Description

Dans cette partie, nous décrivons un modèle stochastique permettant d'évaluer les provisions techniques au sens de Solvabilité II des engagements lié au risque de dépendance véhiculé par les trois portefeuilles d'assurance P_1, P_2 et P_3 décrits précédemment. Il est important de signaler que les individus ne peuvent se trouver que sous l'un des états suivants valide, dépendant, ou décédé. La transition d'un état à un autre est préalablement initiée par un modèle d'état du type chaîne de Markov. En effet, celui-ci émet l'hypothèse que l'état d'un individu au cours de l'intervalle de temps considéré dépend uniquement de l'état dans lequel il se trouvait au début de ce même pas de temps.
Par définition, on appelle chaine de Markov une suite de variables aléatoires (X_n) telle que, pour chaque n, connaissant la valeur de X_n, X_{n+1} soit indépendante de X_k, pour k inférieur ou égal à $n-1$. Autrement dit, pour tout n et pour toutes valeurs possibles $i_0, \ldots, i_n, i_{n+1}$, la probabilité que X_{n+1} prenne la valeur i_{n+1} sachant que $X_0 = i_0$, $X_1 = i_1$,... , $X_{n-1} = i_{n-1}$ et $X_n = i_n$ ne dépend que de i_{n+1} et i_n de :

$$P\left(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \ldots X_n = i_n\right) = P\left(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\right) \tag{4.28}$$

Nous notons :

- $p_x^{val,val}$ la probabilité pour qu'un individu soit valide à l'âge $x+1$, sachant qu'il était valide à l'âge x
- $i_x^{val,dep}$ la probabilité pour qu'un individu entre en dépendance entre les âges $[x; x+1[$,

sachant qu'il était valide à l'âge x

- $q_x^{val,dec}$ la probabilité pour qu'un individu décède entre les âges $[x; x+1[$, sachant qu'il était valide à l'âge x
- $p_x^{dep,dep}$ la probabilité pour qu'un individu soit dépendant à l'âge $[x; x+1[$, sachant qu'il était dépendant à l'âge x
- $q_x^{dep,dec}$ la probabilité pour qu'un individu décède entre les âges $[x; x+1[$, sachant qu'il était dépendant à l'âge x

Schématiquement, le modèle se présente comme suit :

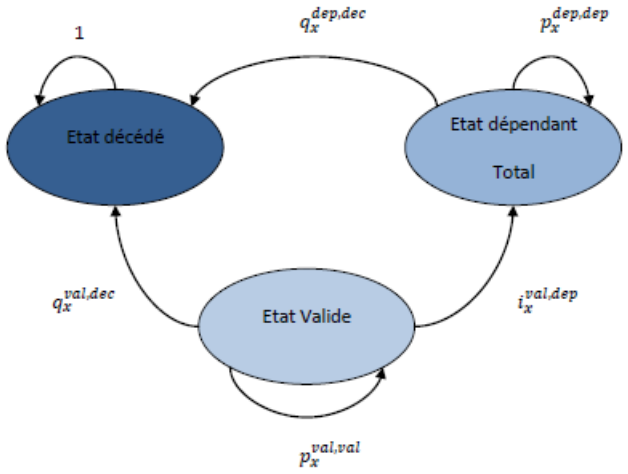


FIGURE 4.13 – Modèle de Markov

Dans notre modélisation, les rémissions ne sont pas admises conformément au portefeuille étudié. Nous percevons également que tous les états n'ont qu'un seul antécédent. Le processus sans mémoire décrit ici, entre bien dans le cadre de la définition d'une chaîne de Markov. A un âge x donné, les probabilités de passage peuvent être résumées dans une matrice $M(i,j)$ avec $(i,j) \in \{val, dep, dec\}$:

$$M(i,j) = \begin{pmatrix} p_x^{val,val} & i_x^{val,dep} & q_x^{val,dec} \\ 0 & p_x^{dep,dep} & q_x^{dep,dec} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

Etant donné que les rémissions sont impossibles dans notre cas, la matrice M est triangulaire supérieure. Les probabilités de passage sont déterminées par âge, comme suit :

- $p_x^{val,val}$ probabilité de survivre entre l'âge x et $x+1$ selon la table TH/F 0002
- $i_x^{val,dep}$ probabilité d'entrée en dépendance à l'âge x selon la table d'expérience obtenue dans la partie précédente
- $p_x^{dep,dep}$ probabilité de maintien en dépendance entre l'âge x et $x+1$ selon la table de maintien obtenue dans la partie précédente

$$q_x^{val,dec} = 1 - p_x^{val,val} - i_x^{val,dep} \tag{4.30}$$

$$q_x^{dec,dep} = 1 - p_x^{dep,ped} \tag{4.31}$$

Dans ce cas, les probabilités de décès se déduisent des autres valeurs établies en hypothèse, ce qui implique que la somme de chaque ligne de M est égale à 1.

4.5.2 L'algorithme

Nous proposons de simuler les états successifs d'un assuré d'âge x au cours de la vie de son contrat selon un algorithme de rejet se basant sur des tirages d'une loi uniforme $U_{(0,1)}$ en fonction des probabilités de passage définies dans la matrice M définissant la chaine de Markov initiée précédemment. L'évolution de l'état d'assuré d'une année à une autre s'effectue de la manière suivante ; soit u une réalisation de variable aléatoire uniforme $U_{(0,1)}$:

- si $u \leq p_x^{val,val}$, l'assuré reste valide entre l'âge x et $x+1$
- si $p_x^{val,val} < u \leq p_x^{val,val} + i_x^{val,dep}$, l'assuré entre en dépendance entre l'âge x et $x+1$
- si $u \geq p_x^{val,val} + i_x^{val,dep}$, l'assuré décède entre x et $x+1$

Si l'assuré est valide à l'âge $x+1$, nous procédons de la même façon que précédemment. Si l'assuré est décédé entre les âges x et $x+1$ l'algorithme s'arrête. En revanche, si l'assuré entre en dépendance entre l'âge x et l'âge $x+1$, un nouveau jeu de tirage aléatoire de variable uniforme $V_{(0,1)}$ indépendante de $U_{(0,1)}$. La réalisation v de $V_{(0,1)}$ est ainsi comparée à la loi de maintien en dépendance :

- si $v \leq p_x^{dep,dep}$, l'assuré reste dépendant entre les âges $x+1$ et $x+2$
- sinon, l'assuré décède entre les âges $x+1$ et $x+2$

En résumé, pour simuler l'évolution de l'état d'un assuré d'âge x à la souscription de son contrat jusqu'à un âge maximum de survie ω, nous devons construire le vecteur ${}_yp_x^{val,val}$, $y =$

$1, \ldots, \omega - x$ de probabilité de survie cumulée à l'état valide de l'âge x à l'âge ω. Ce vecteur contitue la première borne de l'algorithme de rejet décrit ci-dessus. Nous construisons une deuxième borne de cet algorithme comme étant la somme de la première borne et le vecteur $i^{vel,dep}_{x+y+1},\ y = 1, \ldots, \omega - x$. Nous générons ensuite un vecteur u de réalisation de variable aléatoire uniforme $U_{(0,1)}$ de taille $(\omega - x, 1)$ puis on applique l'algorithme à chaque âge. $\forall\ y \in \{1, \ldots, \omega - x\}$:

- si $u_y \leq\ {}_yp^{val,val}_x$ l'assuré est valide à l'âge $x + y - 1$,
- si ${}_yp^{val,val}_x < u_y \leq\ {}_yp^{val,val}_x + i^{val,dep}_{x+y-1}$ l'assuré entre en dépendance à l'âge $x + y - 1$ (l'assuré entre en dépendance dans y année),
- si $u_y >\ {}_yp^{val,val}_x + i^{val,dep}_{x+y-1}$ l'assuré décède entre l'âge $x + y - 1$ et $x + y$.

Nous sommes donc capable de déterminer l'année d'entrée en dépendance et celle de décès. Deux cas de figure peuvent se présenter :

- Si l'année de décès est inférieure à l'année d'entrée en dépendance, nous considérons que la personne est valide jusqu'à l'année de décès, puis qu'elle n'est plus sous risque au-delà. En toute logique, les entrées en dépendance postérieures aux décès ne sont pas prises en considération ;
- Si l'année d'entrée en dépendance est inférieure à l'année de décès, nouveau vecteur v de réalisation de variable aléatoire $V_{(0,1)}$ indépendant de $U_{(0,1)}$ de taille 10 est généré. Cette taille correspond au nombre d'années maximales en état de dépendance indicé dans la loi de maintien obtenue par les données d'expérience. Dans ce cas, $\forall\ z \in \{1, \ldots, 10\}$ si $v_z \leq\ {}_zp^{dep,dep}_{x+y}$, l'assuré se maintien en dépendance. Sinon, il décède entre les âges $x+y+z-1$ et $x + y + z$.

A l'issu de cette algorithme un vecteur de taille $\omega - x$ est rempli par les différents états de l'assuré d'age en question de l'âge x à la souscription jusqu'à l'âge maximal de survie ω. Pour chaque âge $x \in \{x_{min,\ldots,x_{max}}\}$ avec $x_{min},\ x_{max}$ représentent respectivement les âges minimum et maximum de souscription d'un contrat d'assurance dépendance selon les données d'expérience que nous en disposons, nous réalisons n-simulations pour obtenir donc n-vecteurs d'état sur la durée de survie de l'assuré formant donc une matrice E de dimension $(\omega - x) \times n$. Si, nous notons les états comme suit : 1 assuré valide, 2 assuré dépendant et 3 assuré décèdé, une réalisation $e_{i,j}$ de la matrice E appartient à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. A l'aide des informations de cette matrice, nous pouvons désormais calculer les estimateurs suivants :

– la probabilité d'entrée en dépendance i_{x+i} avec $i = 0, \ldots, \omega - x - 1$, notée i_{x+i} :

$$\widehat{i_{x+i}} = \frac{Card\left(E\left(i+1, j=1,\ldots,n\right)=2\right)}{n} \tag{4.32}$$

– la probabilité de maintien en dépendance entre l'âge x et l'âge $x+k$, avec $k = 1, \ldots, w - x$, notée ${}_kp_x^{dep,dep}$:

$$\widehat{{}_kp_x^{dep,dep}} = \frac{Card\left(E\left(k, j=1,\ldots,n\right)=2\right)}{Card\left(E\left(1, j=1,\ldots,n\right)=2\right)} \tag{4.33}$$

Nous faisons intervenir la méthode de Monte Carlo pour estimer les probabilités définies ci-dessus. Nous simulons donc m fois la matrice E et nous récupérons ainsi la moyenne des aggrégats définis ci-dessus.

4.5.3 Application numérique

Loi d'entrée en dépendance stochastique

A l'aide la célèbre méthode de Monte Carlo, nous avons généré 1000 courbes d'entrée en dépendance sur les âges d'expérience des portefeuilles en question de 52 ans à 85 ans. La figure4.14 illustre les résultats obtenus. Il est important de signaler que le nombre de simulation choisi permet notamment une vitesse de convergence très satisfaisante, comme on peut le constater sur le graphique 4.15 de comparaison de la courbe moyenne de Monte-Carlo et de la courbe d'entrée en dépendance d'expérience. Nous remarquons la parfaite adéquation entre la loi d'expérience et la loi moyenne obtenue par Monte-Carlo. Nous retrouvons en moyenne la loi initiale entrée en paramètre, ce qui montre la qualité de nos simulations.
Nous avons cependant simulé pour des âges allant de 52 à 85 ans. Les calculs réalisés ultérieurement nécessitent une extrapolation de ces courbes pour les âges plus élevés. Dans ce but, nous introduisons un ajustement des taux simulés sur la base des logits. Cette méthode tient du compte du fait que les taux d'entrée $i_x \in [0,1]$, nous définissons dans ce cas $logit\left(i_x\right) = ln\left(\frac{i_x}{1-i_x}\right)$. Cette transformation permet de se ramener à des valeurs comprises entre $]-\infty, +\infty[$. Un modèle permet d'ajuster les logits en constatant leur prédisposition linéaire. Nous avons par ce biais que :

$$logit\left(\widehat{i_x}\right) = a + bx + \epsilon \tag{4.34}$$

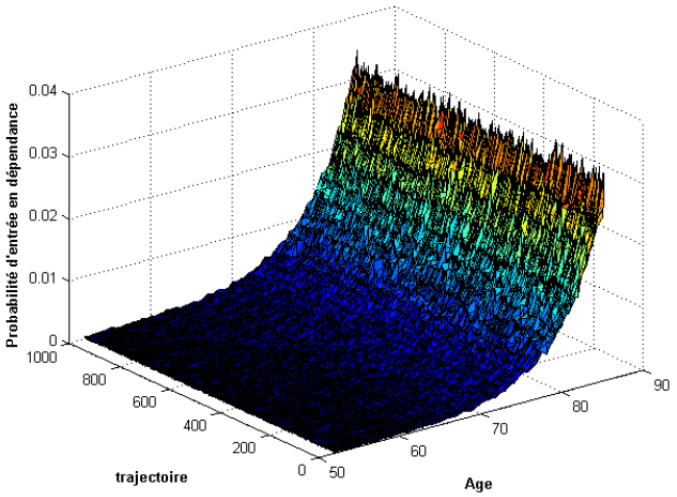


FIGURE 4.14 – Surface d'entrée en dépendance stochastique

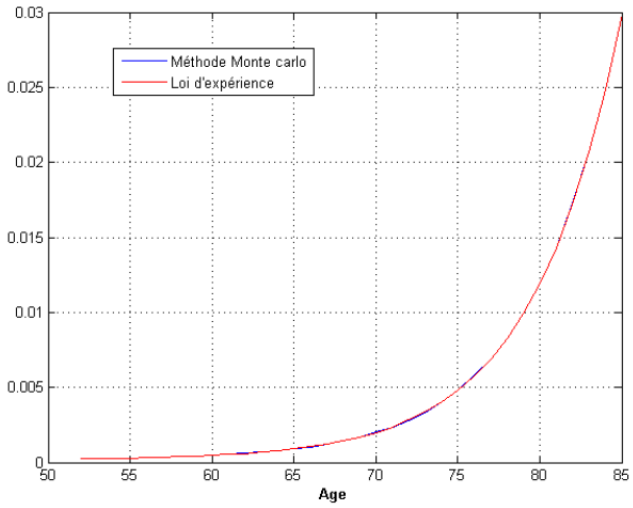


FIGURE 4.15 – trajectoire moyenne d'entrée en dépendance

ϵ étant un bruit blanc, nous effectuons une régression linéaire sur la variable des âges pour estimer les paramètres a et b. La figure 4.16 présente les résultats retenus jusqu'à un âge maximal fixé ω.

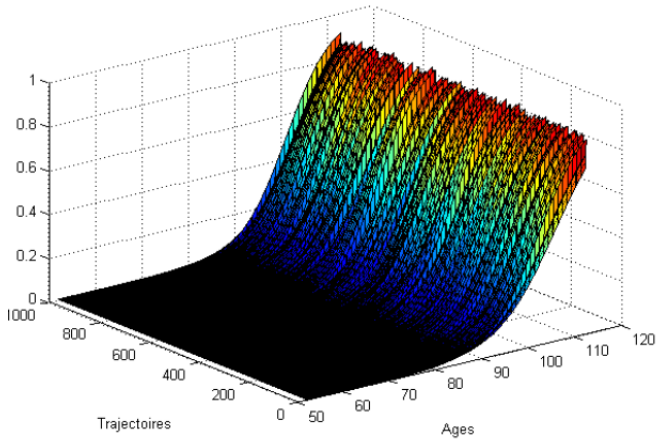


FIGURE 4.16 – Fermeture de la surface d'entrée en dépendance sur les âges élevés

Espérance de vie en état de dépendance

La figure 4.17 décrit les distributions des espérances de survie en état de dépendance obtenues pour les âges 60, 65, 70, 75, 80, 85.

Nous déduisons de ce graphique que les espérances de vie diffèrent selon l'âge de la personne sinistrée. D'après les simulations de Monte-Carlo, les individus entrés en dépendance à un âge élevé se maintiennent plus longtemps en moyenne que les plus jeunes sinistrés. Nous pouvons signaler que les personnes les plus jeunes sont généralement dépendantes à la suite d'un accident et donc se maintiennent moins longtemps, tandis que les plus âgées sont atteintes du fait de leur état mental, ou à cause de la survenance de maladies. Cet effet est notamment déjà visible sur notre portefeuille, et dans les années à venir, nous pourrons confirmer cette hypothèse lorsque les bases de données seront plus étoffées. la survenance de maladies. Cet effet est notamment déjà visible sur notre portefeuille, et dans les années à venir, nous pourrons confirmer cette hypothèse lorsque les bases de données seront plus

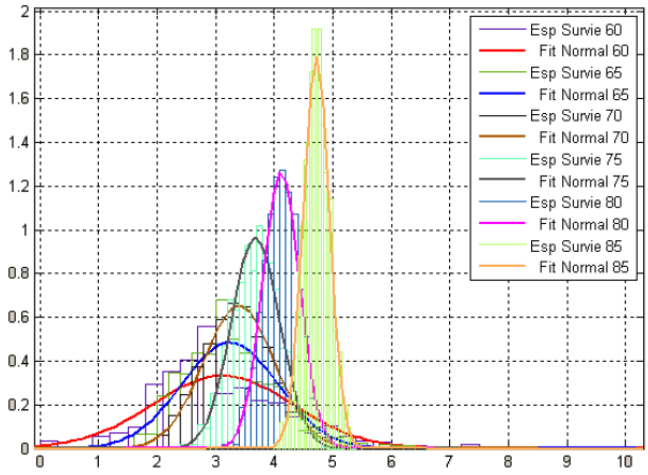


FIGURE 4.17 – Distribution des espérances de survie en état de dépendance

étoffées. Nous ajustons également à chaque distribution une loi connue. Pour choisir la loi la plus adéquate, nous testons plusieurs distributions de lois usuelles, et nous choisissons finalement celle dont la distance de Kolmogorov-Smirnov, entre les données simulées et la loi, est la plus petite. La loi la plus appropriée est la loi normale pour chaque âge, ce que nous constatons sur le graphique précédent, et plus particulièrement pour l'âge 75 ans comme l'illustre la figure suivante 4.18 :

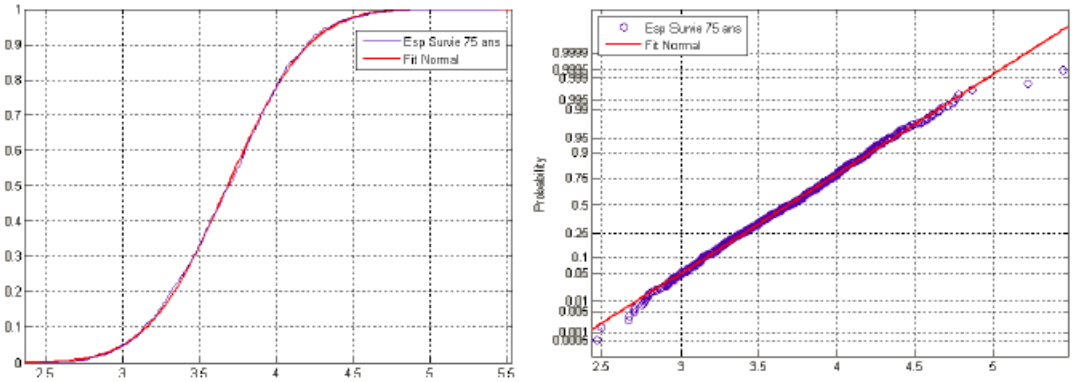


FIGURE 4.18 – Ajustement de la loi de l'espérance de survie en dépendance à l'age 75 ans par rapprot à la loi normale

Nous observons que la fonction de répartition pour l'âge 75 ans adhère avec une quasi perfection la fonction de répartition de la loi normale ajustée. De plus, le graphique " qq-plot " confirme l'hypothèse de normalité de la distribution à 75 ans, car la plupart des points sont alignés avec la première bissectrice. Cependant, pour les âges inférieurs à 65 ans, les ajustements présentent des lois normales à queues de distributions épaisses. Ce phénomène peut être expliqué par les taux faibles d'entrée en dépendance pour les âges les plus jeunes, ce qui implique des résultats plus dispersés dans les simulations. Cependant, pour les âges inférieurs à 65 ans, les ajustements présentent des lois normales à queues de distributions épaisses. Ce phénomène peut être expliqué par les taux faibles d'entrée en dépendance pour les âges les plus jeunes, ce qui implique des résultats plus dispersés dans les simulations. Le tableau suivant résume les informations essentielles sur les distributions des espérances de vie pour les âges 60, 65, 70, 75, 80, 85 :

Age	Moyenne	Ecart type	loi ajustée	VaR à 75%	VaR à 99,5%	TVaR à 75%
60	3,12	1,43	normal	3,73	7,50	4,78
65	3,24	0,67	normal	3,75	6,16	4,37
70	3,39	0,37	normal	3,80	5,00	4,22
75	3,68	0,17	normal	3,96	4,75	4,21
80	4,12	0,09	normal	4,33	5,05	4,53
85	4,72	0,05	normal	4,87	5,27	5,00

Les écart-types pour les plus jeunes sont donc plus importants, ce qui montre d'ailleurs la dispersion des résultats pour ces âges-là.

Loi de maintien en état de dépendance stochastique

Les simulations réalisées grâce à la méthode de Monte-Carlo permettent d'obtenir une loi de maintien par âge, alors que sur la base de données initiale nous obtenons seulement une loi applicable tous âges confondus. La représentation de toutes les trajectoires de la loi de maintien n'est pas réalisable, car il aurait fallu dans ce cas un graphique à 4 dimensions. Nous observons dans ce cas la loi de maintien moyenne obtenue grâce à la méthode de Monte-Carlo :

Nous constatons sur ce graphique que les personnes âgées ont des probabilités de survie plus importantes que les plus jeunes. Ce même constat a également été réalisé pour les espérances de survie stochastiques, et nous en déduisons les mêmes conclusions. Etant donné que les simulations ont pu être réalisées que pour les âges 52 à 85 ans, nous considérons pour les âges

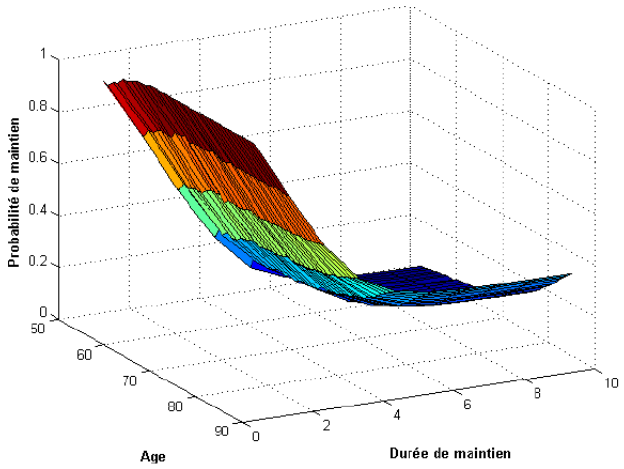


FIGURE 4.19 – Loi de maintien en dépendance moyenne

de 86 ans à , que la personne dépendante se maintient de la même façon qu'une personne de 85 ans. Au-delà, les entrées en dépendance ne peuvent plus se produire. Cette hypothèse semble surpondérer le maintien en dépendance à ces âges, or, dans ce cas, les probabilités de survie en étant valide sont faibles, ce qui implique un nombre plus faible d'entrées en dépendance et n'aura donc pas de réelles conséquences sur l'évaluation du risque.

Rentes servies en dépendance

La valeur actuelle d'une rente servie en dépendance est donnée par :

$$a_x = \sum_{k=1}^{v} {}_kp_x^{dep,dep} \ (1 + r_k)^{-k} \tag{4.35}$$

v étant l'ancienneté maximale de la loi de maintien simulée par Monte-Carlo et r_k le taux zéro-coupon de maturité k (courbe de taux utilisée est celle du CEIOPS utilisé lors des calculs du QIS5). La figure 4.20 représente la rente moyenne par âge :
La croissance de la valeur des rentes était prévisible, sachant que l'âge d'entrée en dépendance influe sur la durée de maintien dans l'état. Un individu entrant en dépendance à un âge plus élevé coûtera ainsi plus cher à la compagnie d'assurance. Conformément à l'hypothèse de constance du maintien au-delà de 85 ans, les rentes seront stabilisées à partir de cet âge.

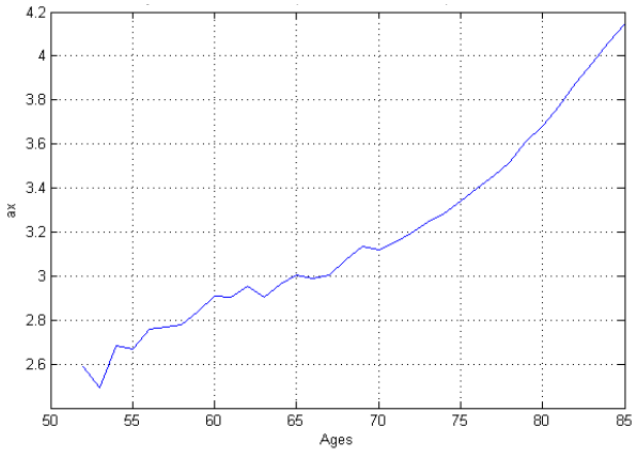


FIGURE 4.20 – Rente moyenne par âge

Evaluation stochastique des engagements à la souscription

Le but est alors d'évaluer de manière stochastique l'engagement de l'assureur lors de la souscription d'une personne à l'âge x. Pour cela, nous utilisons la loi de mortalité des valides, les lois d'entrée en dépendance stochastiques, et les rentes de dépendance stochastiques. Nous définissons ainsi l'engagement pour chaque âge :

$$Eng_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_jp_x^v \, i_{x+j} \left(1 + r_j\right)^{-j} \, a_{x+j} \tag{4.36}$$

Une croissance nette des engagements de l'assureur est visible sur ce graphique. Ce constat permet donc d'introduire une méthode de provisionnement stochastique sur le risque dépendance. Un tel type de provisionnement entre dans le cadre de Solvabilité II, grâce à un ajustement plus fin du risque à travers des méthodes de simulation. Nous pouvons également présenter les distributions des engagements pour les âges 60, 65, 70, 75, 80, 85 :
Les engagements de l'assureur croissent en moyenne d'après les distributions, et le test de Kolmogorov-Smirnov conclue à nouveau à une meilleure adéquation par la loi normale. Les queues de distributions semblent plus épaisses pour les âges élevés dans ce cas, ceci étant dû au manque de données aux âges élevés. Nous rajoutons également les statistiques issues des distributions pour les âges 60, 65, 70, 75, 80, 85, ainsi que le montant des engagements

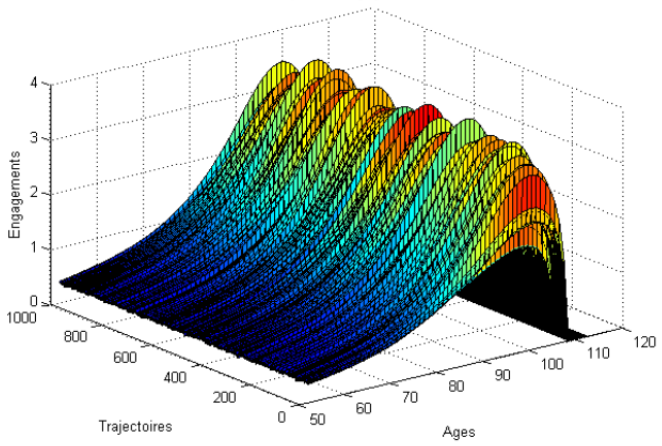


FIGURE 4.21 – Engagements économiques à la souscription

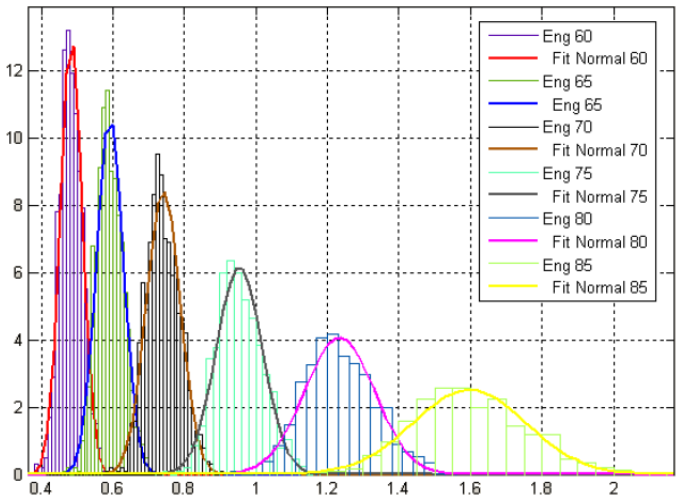


FIGURE 4.22 – Distribution des engagements économiques à la souscription

calculés en déterministe :

Age	Moyenne	Ecart type	loi ajustée	VaR à 75%	VaR à 99,5%	TVaR à 75%	Déterministe
60	0,48	9 e-4	normal	0,51	0,56	0,52	0,62
65	0,59	1,4 e-3	normal	0,61	0,69	0,64	0,72
70	0,74	2,2 e-3	normal	0,77	0,86	0,8	0,85
75	0,95	4,1 e-3	normal	0,99	1,12	1,04	1
80	1,28	9,6 e-3	normal	1,29	1,49	1,36	1,2
85	1,59	2,5 e-2	normal	1,69	2,02	1,81	1,47

Nous remarquons que l'évaluation déterministe sur-estime le risque sur les âges faibles et le sous-estime sur les âges élevés tel que l'illustre la figure 4.23.

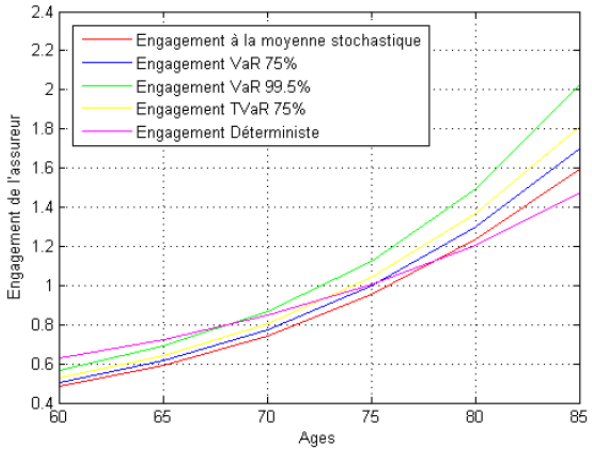


FIGURE 4.23 – Comparaison des engagements déterministes et stochastiques

Il est important de signaler que les mêmes remarques peuvent être tirées si nous calculons les primes annuelles et les comparer tel que l'illustre la figure 4.24 :

Etudes des portefeuilles d'expérience

Dans ce dernier paragraphe, l'idée est de comparer les provisions comptabilisées au titre du risque dépendance sur les produits 1, 4 et 5 avec l'évaluation des engagements que nous avons proposé précédemment. A ce titre, nous utilisons les bases de données des assurés arrêtés au 31/12/2009, concernant les produits 1, 4 et 5. Une agrégation par âge et par rente est préalablement réalisée. Ce regroupement permet de pondérer les âges par le montant total

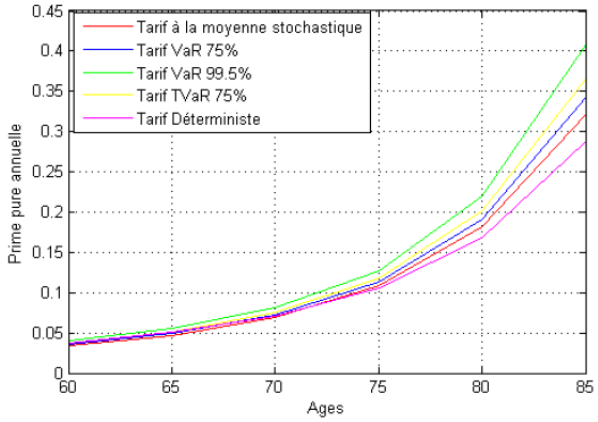


FIGURE 4.24 – Primes annuelles pûres

des rentes souscrites par les clients. L'évaluation est ensuite réalisée en faisant l'hypothèse que les assurés sont considérés sous risque à partir du 31/12/2009. L'engagement total sur tous les âges sera calculé par la méthode comptable, et par la méthode stochastique. D'un point de vue comptable, les hypothèses suivantes sont utilisées pour l'évaluation des engagements ; table d'entrée en dépendance d'expérience, loi de maintien obtenue tous âges confondus, taux technique constant égal à 2.5% et loi de mortalité des valides TD/V-8890.

Dans un premier temps, nous présentons les distributions des engagements sur les 3 portefeuilles, obtenues grâce aux trajectoires des simulations Monte Carlo :

Nous obtenons un niveau d'engagement moyen différent selon les portefeuilles, et une adéquation par loi normale la plus satisfaisante du point de vue du test de Kolmogorov-Smirnov. Le tableau ci-dessous résume les informations issues des distributions des engagements des produits 1, 4 et 5, ainsi que l'estimation des engagements comptables :

Produit	Moyenne	Ecart-type	VaR à 75%	VaR à 99.5%	TVaR à 75%	Comptable
1	3 665 161	312 242	3 869 753	4 494 304	4 079 949	3 314 270
4	2 970 246	209 013	3 109 077	3 526 686	3 246 426	2 807 367
5	5 838 503	430 116	6 125 547	6 986 452	6 407 663	5 412 531

Nous constatons sur ce tableau que les engagements comptables sont inférieurs à la moyenne, à la VaR 75%, à la VaR 99.5%, et la la TVaR 75% calculés à partir des simulations.

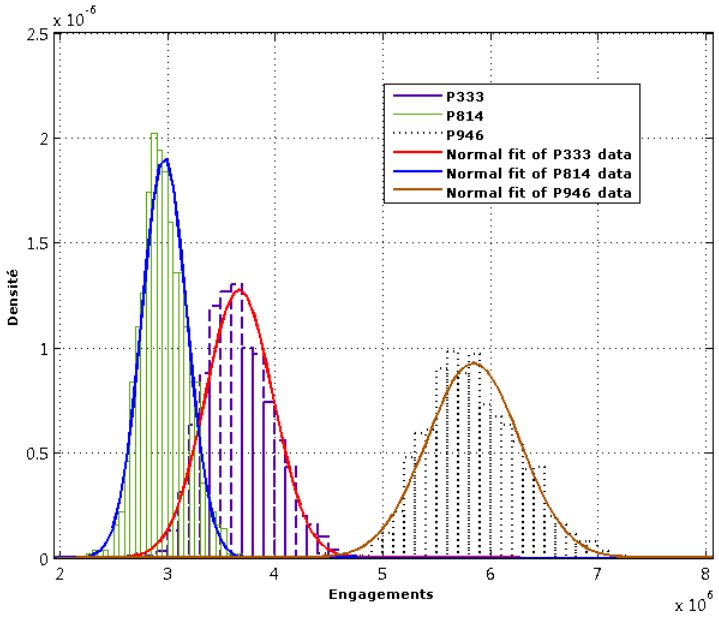


FIGURE 4.25 – Distribution des engagements stochastiques

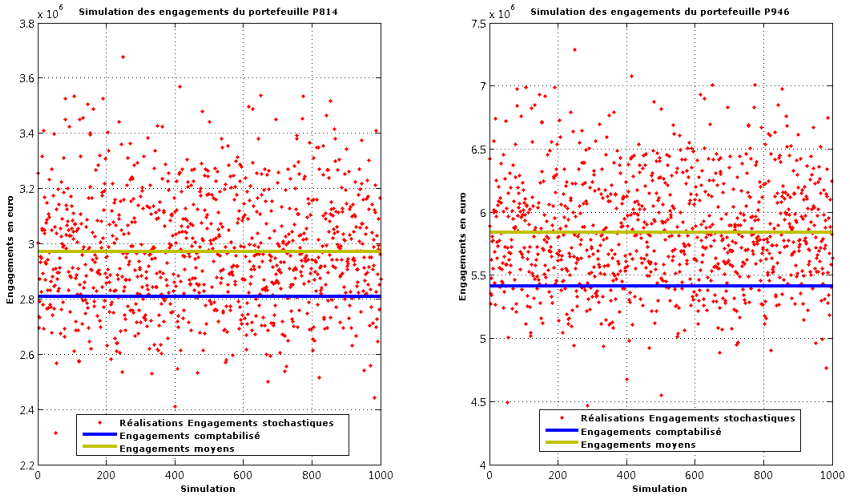


FIGURE 4.26 – Réalisation des engagements des produits 4 et 5

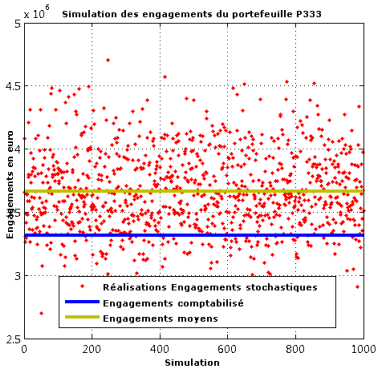


FIGURE 4.27 – Réalisation des engagements du produit 1

Les engagements comptabilisés sont inférieurs à l'engagement moyen obtenu par les simulations stochastiques. Nos estimations permettent de conclure à une sous évaluation du provisionnement calculé par la méthode comptable sur ces 3 produits. Un risque de défaut de l'assureur peut donc naître suite à une estimation inadaptée de ce risque. Cette sous-évaluation des engagements fait référence à un manque d'expertise sur le risque dépendance. Or, le calcul des engagements de l'assureur en première année de souscription permet d'évaluer la prime pure unique. Cette prime versée par l'assuré doit être capitalisée et servira ensuite au dédommagement lors de la survenance du sinistre. Nous pouvons donc estimer une probabilité de défaut comme étant le nombre des fois où l'engagement comptable est inférieur aux réalisations des engagements stochastiques divisé par le nombre total des réalisations stochastiques.

produits	Probabilité de défaut
1	87,8%
4	78%
5	83,7%

4.6 Conclusions

Dans cette partie de la thèse, nous avons proposé des approches intéressantes dans le cadre de l'évaluation des risques dans un contexte de Solvabilité II. L'assureur peut donc exploiter au mieux son expérience et donc bien calibrer les risques techniques qu'il encourt. Il est

donc capable d'alimenter son modèle interne par des lois pertinentes des facteurs de risques techniques tels que la mortalité longévité dans la mesure où les surfaces de mortalité stochastiques proposées dans le chapitre 3 de cette thèse permettent de mieux appréhender le risque de longévité ainsi que celui de mortalité ou de catastrophe. Il en est de même pour le risque de dépendance qui a été pour longtemps mal évaluer par les assureurs alors que les enjeux de ce type d'assurance sont de plus en plus importants, dans la mesure où dans la formule standard de la cinquième étude d'impact, la calibration du choc relatif à ce facteur de risque était agressive et a coûté cher pour les assureurs en questions. Le chapitre 4 de cette thèse, propose donc un algorithme permettant de construire des lois d'expérience d'entrée et de maintien en dépendance en prenant en compte l'expérience de propre de l'assureur. Les études menées dans cette partie de la thèse ont montré qu'il s'agit des risques non négligeables et souvent sous-provisionnés.

Il est donc important à signaler que les exigences en matière de solvabilité sont devenues de plus en plus coûteuses. L'assureur sera donc obligé d'allouer un capital conséquent dans un marché où la concurrence est accrue et les apporteurs de capitaux exigent de plus en plus de rémunération de leurs fonds. Face à cette situation, l'assureur doit chercher des leviers permettant d'alléger la charge de capital. Dans la prochaine partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la réassurance comme étant un outil d'optimisation de capital.

Troisième partie

Optimisation de la réassurance

Chapitre 5

Optimisation de la réassurance : Approche classique

5.1 Introduction

Le problème d'optimisation de la réassurance a suscité un intérêt particulier dans la littérature actuarielle où on retrouve une multitude de critères de choix. On rappelle, que selon le point de vue de la théorie d'agence, le but ultime d'un assureur était, sans doute, la maximisation du profit espéré sous contraintes de risque imposées par le régulateur. Or, l'idée de mesurer le risque par la variance date depuis les années 1940 avec les travaux de De Finetti (1940) [29] qui a essayé d'optimiser un traité de réassurance en quote part sous un critère de moyenne variance. La même idée a été utilisée par **Markowitz** (1959) pour la gestion de portefeuille. En utilisant ce critère, il était possible d'optimiser un traité de réassurance que se soit proportionnel ou non proportionnel selon deux approches ; la première suppose une forme de réassurance donnée pour déterminer la rétention optimale et la deuxième considère que le risque cédé comme une transformation du risque total selon une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ pour essayer de trouver cette transformation. Les travaux de de Finetti (1940) [29], Gould (1969) [49], Mossin (1968) [83], Blazenko (1985) [7] et Hess (2000) [55] s'inscrivent dans la première approche alors que ceux de Borch (1960a, 1960b, 1962, 1974, 1985) [10], [11] [12], [13], [14], Raviv (1979) [99], et Moffet (1979) [81] s'inscrivent dans la

deuxième. Krvavych (2005) [67] considère la première approche comme étant ***une approche exogène*** et la deuxième comme étant ***une approche endogène*** de réassurance optimale dans la mesure où la forme de réassurance est un facteur exogène à la cédant car cette forme est prédéterminée alors que la fonction qui permet de définir le risque à céder au réassureur en fonction de la charge totale des sinistres est un facteur endogène à la cédante. Donc en somme, il définit deux problèmes d'optimisation de la réassurance, un endogène et l'autre exogène. Cependant, l'objectif de la réassurance diffère d'un assureur à un autre dans la mesure où un assureur peut choisir la réassurance pour minimiser la variabilité de sa rétention, tel que le cas de l'approche *moyenne variance*, alors qur d'autres choisissent la réassurance qui leur permet de minimiser leurs probabilités de ruine d'où une deuxième approche d'optimisation de la réassurance étudiée par Dickson et Waters (1996) [36], Krvavych (2005) [67], Aase (2002) [1], Schmidli (2004,1994) [105] [100]. . .Or, jusqu'à maintenant, pour la recherche d'un plan optimal de réassurance, on a relevé deux approches classiques en gestion de risque en assurance à savoir la maximisation du profit sous contrainte de variance et la minimisation de la probabilité de ruine. Cai & Tan (2007) [19] ont proposé un critère basé sur la minimisation des mesures de risques telles que la Value-at-Risk et la Conditional tail Expectation en démontrant l'existence de rétention optimale explicite dans le cas des traités *stop loss*. Cependant, ces critère d'optimisation prennent en compte uniquement l'intérêt de la cédante. Récemment, différents modèles de réassurance optimale qui tiennent compte à la fois des intérêts de la cédante et du réassureur, ont été considérés par Ignatov et al (2004) [60]. Ces derniers ont introduit un critère d'optimisation de la probabilité de survie jointe de la cédante et du réassureur. Dans leur modèle, les montants des sinistres sont supposés avoir une distribution discrète avec un processus d'occurrence de Poisson. Ils ont supposé aussi que l'assureur partage le risque avec son réassureur en ayant recours à un traité de réassurance *excess of loss* sans limite avec un niveau de rétention M qui prend des valeurs entières. Donc, ils ont déterminé une expression explicite pour la probabilité de survie jointe de la cédante et du réassureur et ont ensuite vérifié son application dans le cas des distributions continues. leur modèle était généralisé ensuite par Kaichev et al (2008) [62]. Selon les approches décrites ci-dessus, l'achat de réassurance avait pour but, la stabilisation des résultats de l'assureur ou de la minimisation de la probabilité de ruine. Or, la principale faiblesse de ces critères réside dans le fait que l'adoption de l'un d'entre eux en terme de décision en matière de réassurance ne

permet pas d'aboutir seul à un choix optimal. En plus, l'idée commune de ces travaux réside dans le fait que la stratégie de réassurance est supposée être statique. On sait que les traités de réassurance sont des contrats annuels qui peuvent être révisés d'une année à une autre. Donc, l'idée de déterminer une stratégie de réassurance dynamique optimale parait logique. Un ensemble de papiers s'intéressant à une telle stratégie enrichissent la littérature actuarielle à savoir les travaux de Schmidli (1994, 2004) [100] [105], Taksar (1998,2000) [112] [111], Taksar & Markussen (2003) [113], Taksar & Loft (2007) [114], Dickson & Waters (2006) [36], Bai & Guo (2007) [5], He & Liang (2007) [54] et Hipp (2003) [56]...

5.2 Approche Moyenne Variance

5.2.1 Approche de De Finetti (1940) [29]

Soit un portefeuille composé de n risques $X_1, \ldots, X_n$ souscrits en contrepartie des primes respectives $P_1, \ldots, P_n$. De Finetti (1940) [29] suppose que les risques sont indépendants et que chaque risque peut être protégé par une réassurance proportionnelle dont le taux de cession est $\alpha_i \ \forall \ i = 1, \ldots, n$ avec $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Il suppose que le réassureur applique des chargements $\eta_i^r, \ \forall \ i = 1, \ldots, n$, ce qui fait que les primes de réassurance seront égales à

$$P_i^r = \left(1 + \eta_i^r\right) \alpha_i \ E\left(X_i\right)$$

En supposant que $P_1, \ldots, P_n$ et $\eta_1^r, \ldots, \eta_n^r$ sont donnés, il se propose de trouver un choix optimal de réassurance permettant de minimiser la variance du résultat après réassurance. Le bénéfice technique de la cédante est représenté par la variable aléatoire $Z(\alpha)$ définie par :

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left(P_i - \left(1 + \eta_i^r\right) \alpha_i \ E\left(X_i\right) - \left(1 - \alpha_i\right) X_i\right) \tag{5.1}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{5.2}$$

Donc, la variance de $Z(\alpha)$ est donnée par :

$$Var\left(Z(\alpha)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \alpha_i\right)^2 \ Var\left(X_i\right) \tag{5.3}$$

Alors que l'espérance de $Z(\alpha)$ est donnée par :

$$E(Z(\alpha)) = \sum_{i=1}^{n} \left[P_i - E(X_i) \left(\eta_i^r \alpha_i + 1 \right) \right] \tag{5.4}$$

Il définit donc le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} min_{\alpha} \{ Var(Z(\alpha)) \} \\ sc \;\; E(Z(\alpha)) = k \in \mathbb{R} \\ \alpha_i \in [0,1] \end{cases} \tag{5.5}$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation convexe dont en définit la Lagrangien :

$$L(\alpha, \lambda, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \left((1-\alpha_i)^2 Var(X_i) + y_i(\alpha_i - 1) \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^r E(X_i) \alpha_i + k - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \right) *$$

avec λ le multiplicateur de Lagrange de la contrainte égalité et z_i et y_i les multiplicateur de Lagrange pour les contraintes de types inégalités. Donc, le théorème de **Kuhn Tucker** permet de retrouver les conditions nécessaires et suffisante d'optimisation. de Finetti (1940) [29] parvient à démontrer que, dans ce cas de figure, le taux de cession optimale est de la forme :

$$\alpha_i = min\left(1, max\left(0, \phi_i\right)\right) \tag{5.6}$$

$$\phi_i = \frac{\lambda \eta_i^r E(X_i)}{2 Var(X_i)} \tag{5.7}$$

Wahlin et al (2005) [119] ont redémontré le même résultat en l'appliquant sur d'autre type de réassurance proportionnelle mais en supposant toujours que les risques qui composent le portefeuille sont indépendants.

Cas des risques corrélés :

Supposons que la dépendance entre les différents risques $X_1, \ldots, X_n$ qui composent le porte-

feuille soit décrite par une matrice variance-covariance Σ définie par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & \dots & cov\left(X_1, X_j\right) & \dots & cov\left(X_1, X_n\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov\left(S_j, S_1\right) & \dots & \sigma^2_{S_j} & \dots & cov\left(S_j, S_n\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov\left(X_n, X_1\right) & \dots, & cov\left(X_n, Xj\right) & \dots & \sigma^2_{X_n} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Dans ce cas la variance de la variable aléatoire $Z(\alpha)$ n'est plus égale à celle calculée ci-dessus en (5.3). On a :

$$Var\left(Z\left(\alpha\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(1-\alpha_i\right)^2 Var\left(X_i\right) + \sum_{i\neq j} \left(1-\alpha_i\right)\left(1-\alpha_j\right) cov\left(X_i, X_j\right) \tag{5.9}$$

Alors que l'espérance de $Z(\alpha)$ reste inchangée. On garde le même problème d'optimisation défini dans (5.5). Dans ce cas, on conserve toujours une fonction objectif convexe, donc le théorème de **Kuhn Tucker** permet de retrouver les conditions nécessaires et suffisantes. Mais, on doit écrire le lagrangien $L(\alpha, \lambda, y, z)$:

$$\begin{aligned} L\left(\alpha, \lambda, y, z\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(1-\alpha_i\right)^2 Var\left(X_i\right) + \sum_{j\neq i} \left(1-\alpha_i\right)\left(1-\alpha_j\right) cov\left(X_i, X_j\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i\left(\alpha_i - 1\right) + z_i\left(-\alpha_i\right)\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^r E\left(X_i\right)\alpha_i + k - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)\right) \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de **Kuhn Tucker**, on retrouve le système de conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} L\left(\alpha_i, \lambda, y_i, z_i\right) = 0, \ \ \forall\, i = 1, \dots, n \\ y_i\left(\alpha_i - 1\right) = 0, \ \ \forall\, i = 1, \dots, n \\ z_i \alpha_i = 0 \ \ \forall\, i = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1, \dots, n \\ z_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1, \dots, n \\ a_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1, \dots, n \\ \alpha_i \leq 1 \ \ \forall\, i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \eta_i^r E\left(X_i\right)\alpha_i = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) \end{cases} \tag{5.10}$$

Ce système se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} -2\left(1-\alpha_i\right) Var\left(X_i\right) + \sum_{j\neq i}\left(\alpha_j - 1\right) cov\left(X_i, X_j\right) + y_i - z_i + \lambda\eta_i^r E\left(X_i\right) = 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ y_i\left(\alpha_i - 1\right) = 0, \\ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ z_i\alpha_i = 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ y_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ z_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \alpha_i \geq 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \alpha_i \leq 1 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \eta_i^r E\left(X_i\right)\alpha_i = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) \end{cases}$$

Ignorant temporairement la dernière condition du système ci-dessus. On considère maintenant trois situations possibles :

- Si on suppose que $z_i > 0$, la deuxième et la troisième conditions du **KKT** implqueront que $y_i = 0$ et $\alpha_i = 0$. En effet, la première condition donnera :

$$z_i = \lambda\eta_i^r E\left(X_i\right) + \sum_{j\neq i}\left(\alpha_j - 1\right) cov\left(X_i, X_j\right) - 2Var\left(X_i\right), \ \ \forall\, j = 1, \ldots, n \mid j \neq i$$

  Or si on doit avoir aussi $z_i \geq 0$, alors cette situation ne peut avoir lieu que si :

$$\frac{\lambda\eta_i^r E\left(X_i\right) + \sum_{j\neq i}\left(\alpha_j - 1\right) cov\left(X_i, X_j\right)}{2Var\left(X_i\right)} \geq 1$$

- Si on suppose que $y_i > 0$, la deuxième et la troisième conditions du **KKT** impliqueront que $z_i = 0$ et $\alpha_i = 1$. En effet, la première condition donnera :

$$y_i = -\left\{\lambda\eta_i^r E\left(X_i\right) + \sum_{j\neq i}\left(\alpha_j - 1\right) cov\left(X_i, X_j\right)\right\} \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \mid j \neq i$$

- Or si on doit avoir aussi $y_i \geq 0$, alors cette situation ne peut avoir lieu que si :

$$\frac{\lambda\epsilon_i E\left(X_i\right) + \sum_{j\neq i}\left(X_j - 1\right) cov\left(X_i, X_j\right)}{2Var\left(X_i\right)} \leq 0$$

- Si on considère cette fois ci que $y_i = 0$ et $z_i = 0$, on aura :

$$\alpha_i = 1 - \frac{\lambda\eta_i^r E\left(X_i\right) + \sum_{j\neq i}\left(\alpha_j - 1\right) cov\left(X_i, X_j\right)}{2Var\left(X_i\right)} \ \ \forall\, j = 1, \ldots, n \mid j \neq i \ et \ i = 1, \ldots, n$$

Ceci ne peut être vrai que si et seulement si :

$$0 \leq \frac{\lambda \eta_i^r E(X_i) + \sum_{j \neq i} (\alpha_j - 1) cov(X_i, X_j)}{2Var(X_i)} \leq 1 \quad \forall\ j = 1, \ldots, n \mid j \neq i$$

On peut facilement remarquer que la quantité $\phi_i = \frac{\lambda \eta_i^r E(X_i) + \sum_{j \neq i} (\alpha_j - 1) cov(X_i, X_j)}{2Var(X_i)}$ $\forall\ j \neq i$ apparait dans tous les cas. On peut écrire $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$ sous la forme suivante :

$$a_i = min\left\{1, max\left(0, 1 - \phi_i\right)\right\} \tag{5.11}$$

Il s'agit d'un système d'équations à résoudre pour déterminer les valeurs optimales des $a_i,\ \forall\ i = 1, \ldots, n$. On constate que la valeur optimale des $a_i,\ i = 1, \ldots, n$ est une fonction de ϕ_i qui à son tour dépend du multiplicateur de Lagrange λ, de la matrice variance covariance du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$, de la variable aléatoire en question X_i et des $\alpha_j,\ \forall\ j \neq i$ et $j = 1, \ldots, n$. La résolution ne peut être faite que numériquement.

5.2.2 Approche de Krvavych (2005)

En suivant la deuxième approche telle qu'est présentée dans l'introduction, le résultat principal était celui développé par Borch (1960) [10] qui considère le problème de minimisation de la variance de la charge totale des sinistres de la cédante. Il considère la stratégie de réassurance la plus efficace comme étant celle qui minimise cette variance. Si X représente la charge totale des sinistres avec distribution F_X, il considère que la stratégie optimale est une transformation de F_X. Il a démontré sous quelques hypothèses restrictives que le *stop loss* est la stratégie optimale.

Kanh (1961) [63], reconsidère le problème de Borch (1960) [10] différemment. Il a retrouvé les mêmes résultats mais en appliquant plusieurs types de transformation plus générales que celles utilisées avec Borch (1960) [10].

Ohlin (1969) [84] a redémontré que sous les mêmes conditions, la transformation *stop loss* retrouve ses propriétés optimales lorsque la variance est remplacée par une autre mesure de

dispersion plus générale définie par :

$$W_{\Phi}(X) = inf_{\mu} E_{\Phi}(X - \mu) \tag{5.12}$$

Avec Φ est une fonction non-négative, convexe telle que $\Phi(0) = 0$. Il est à noter que le résultat de **Borch** est un résultat classique dans la littérature actuarielle [1]. Cependant, on doit mentionner que ce résultat est dû à la particularité du principe de tarification adopté qui est dans ce cas basé sur l'espérance mathématique. Kaas et al (2001) [61] ont démontré que si le principe de prime était celui de la variance, la forme de réassurance optimale sera la quote part. Gajesk et Zagrodny (2000) [45] et Kaluszka (2001) [64] ont démontré que la minimisation de la variance sous contrainte budgétaire et en utilisant le principe de l'écart type dans la détermination des primes, aboutit un traité optimal qui mélange la quote part et l'*excess of loss* connue sous l'appellation *change-loss reinsurance*. on conclue donc que le principe de tarification retenu est d'importance capitale dans la détermination d'un traité de réassurance optimal ou en d'autres termes le principe de tarification adopté par le réassureur affecte directement la décision optimale de la cédante en terme réassurance.

Donc, les études d'optimisation de la réassurance peuvent être divisées en deux groupes, d'une part les études suivant la première approche traitées par Gould (1969) [49], Arrow (1963) [4], Mossin (1968) [83], Smith (1968) [109], (1985) [7] et Hess (2000) [55]. . ., et d'autre part les études suivant la deuxième approches traitées par Borch (1960) [10], Arrow(1971) [4], Raviv (1979) [99], Moffet (1979) [81]. . .

Comme on l'a déjà indiqué, Krvavych (2005) [67] considère la première approche comme étant ***une approche exogène*** et la deuxième comme étant ***une approche endogène*** de réassurance optimale dans la mesure où la forme de réassurance est un facteur exogène à la cédant alors que la fonction qui permet de définir le risque à céder au réassureur en fonction de la charge totale des sinistres est un facteur endogène à la cédante. Donc en somme, il définit deux problèmes d'optimisation de la réassurance, un endogène et l'autre exogène. En ce qui concerne le problème d'optimisation endogène de la réassurance sous le critère moyenne variance, l'espérance de profit et la variance du risque retenu sont des fonctions

1. voir **Bowers et al** (1997)

de la transformation du risque qui sont définies par des fonctions de l'espace de Hilbert L^2 dans $\mathbb{R}$. Ces dernières sont linéaires et directement définies par la prime de réassurance. En Considérant ces dernières calculées en se basant sur le principe de la variance, de l'écart type, exponentiel ou Esscher [2], on peut constater que ces primes sont définies selon des fonctions linéaires. Pour tous ces principe de primes, les fonctions de transformation de risque correspondantes sont convexes (à l'exception de Esscher) et Gâteaux différentiables. Il considère que ce problème d'optimisation endogène de la réassurance pour la plupart des traités de réassurance, est équivalent à un problème d'optimisation non linéaire convexe. Il a utilisé les méthodes de programmation convexes pour le résoudre sous plusieurs principes de calcul des primes. Il se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire positive Y représentant le risque supporté par l'assureur. Il suppose que l'assureur achète de la réassurance pour minimiser la variance du risque retenu. Il suppose que l'assureur aura recours au réassureur pour couvrir une quantité positive aléatoire R de Y. Donc, R est une fonction mesurable positive de Y. Cette couverture de réassurance permet un partage de la charge totale des sinistres de la manière suivante :

$$X = \tilde{R}(X) + R(X) \tag{5.13}$$

Avec $\tilde{R}(X)$ est la part de l'assureur et $R(X)$ la part du réassureur. Donc, le problème d'optimisation de la réassurance doit être résolu dans un ensemble $\mathfrak{A}$ des traités admissibles vérifiant la condition suivante :

$$0 \leq R(X) \leq X \tag{5.14}$$

En d'autres termes, la charge du réassureur ne doit en aucun cas dépasser la charge totale des sinistres comme elle ne doit pas être négative.

Il suppose ensuite que la prime de réassurance est déterminée selon le principe suivant :

$$P(R(X)) = E[R(X) + C(R(X))] \tag{5.15}$$

Avec $C(.)$ est une fonction représentant les chargements associés au risque cédé. Il a étudié plusieurs principes de calcul des primes à savoir le principe de l'espérance mathématique,

2. voir Goovaerts et al (1984) [52]

le principe de la variance et celui de l'écart type, le principe mélangeant l'écart type et la variance, le principe exponentiel et le principe d'Esscher présenté par Goovarts et al (1984) [52].

Principe de la variance

$$P(R(Y)) = E(R(Y)) + \beta V(R(Y)) \tag{5.16}$$

Donc l'expression de la fonction $C(.)$ est déterminée, pour $\beta > 0$ par :

$$C(R(X)) = \beta\left(R(X) - E(R(X))^2\right) \tag{5.17}$$

Principe de l'écart type

$$P(R(X)) = E(R(X)) + \beta\sqrt{V(R(X))} \tag{5.18}$$

Donc l'expression de la fonction $C(.)$ est déterminée, pour $\gamma > 0$ par :

$$C(R(X)) = \gamma\frac{(R(X) - E(R(X)))^2}{\sqrt{V(R(X))}} \tag{5.19}$$

Principe exponentiel

$$P(R(X)) = \frac{1}{\alpha}log\left(E\left(e^{\alpha R(X)}\right)\right) \tag{5.20}$$

Donc l'expression de la fonction $C(.)$ est déterminée pour $\alpha > 0$ par :

$$C_{exp}(R(X)) = \frac{1}{\alpha}log\left(E\left(e^{\alpha R(X)}\right)\right) - R(X) \tag{5.21}$$

Principe d'Esscher

$$P(R(X)) = \frac{E\left(R(X)e^{\alpha R(X)}\right)}{E\left(e^{\alpha R(X)}\right)} \tag{5.22}$$

Donc l'expression de la fonction $C(.)$ est déterminée pour $\alpha > 0$ par :

$$C_{exp}(R(X)) = \frac{R(X)e^{\alpha R(X)}}{E\left(e^{\alpha R(X)}\right)} - R(X) \tag{5.23}$$

Krvavych (2005) [67], en adoptant les principes de primes décrits dans (12), suppose que $E\left(R^2(Y)\right) < \infty$, et $\Re$ un espace de Hilbert de norme $\| R \| = \sqrt{E(R^2(Y))}$ pour tout $R \in \Re$ et $\mathfrak{A}$

est un ensemble convexe dans $\Re$. Il suppose en plus que la fonction P satisfait la propriétés d'invariance par translation :

$$P(R+c) = P(R) + c \quad \forall\, c \in \mathbb{R} \tag{5.24}$$

$$\Rightarrow \; C(c) = 0 \tag{5.25}$$

Il démontre que la résolution du problème d'optimisation endogène de la réassurance est possible quand on applique des méthodes d'optimisation non linéaires qui se basent sur les notions de convexité et de Gâteaux différentiabilité des fonctions et sur le théorème de **Khun Tucker** de la programmation convexe et le problème d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} max_{R\in\mathfrak{A}} E\left(u + P - P\left(R\left(X\right)\right) - \left(X - R\left(X\right)\right)\right) \\ \qquad\qquad s/c \;\; V\left(X - R\left(X\right)\right) \leq \;\; cte \end{cases} \tag{5.26}$$

– u : le capital initial,

– P : la recette des primes collectées,

– $P\left(R\left(X\right)\right) = E\left(R\left(X\right) + C\left(R\left(X\right)\right)\right)$:primes de réassurance,

– $\mathfrak{A}$: l'ensemble des traités admissibles.

Or, on constate que le problème de maximisation ci-dessus 5.26 est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \qquad min_{R\in\mathfrak{A}} E\left(C\left(R\left(X\right)\right)\right) \\ s/c \;\; V\left(X - R\left(X\right)\right) \leq \;\; constante \end{cases}. \tag{5.27}$$

Revenons aux études de Borch, Kanh et Ohlin, il s'agit de résoudre le dernier problème d'optimisation sous le principe de tarification de l'espérance mathématique (c'est à dire que $C(x) = \kappa x$, avec $\kappa > 0$). Leur étude démontre que le *stop loss* est la solution optimale. Il s'agit donc d'un résultat classique en actuariat. Cependant, cela résulte de l'utilisation du principe de l'espérance mathématique alors que si on change de mode de tarification d'autres résultats sont envisageables. Pour confirmer celà, on peut considérer le résultat de Zagrodny (2000) [45] et Kaluszka(2001) [64] qui considèrent un problème d'optimisation convexe similaire au problème décrit ci-dessus avec la contrainte que $P - P\left(R\left(Y\right)\right)$ déterminé

sous le principe de dispersion généralisé pour $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ et avec D une mesure de dispersion et Φ une fonction mesurable :

$$E\left(C\left(R\left(X\right)\right)\right) = \alpha_1 E\left(R\left(X\right)\right) + \beta_1 \phi\left(D\left(R\left(X\right)\right)\right) \tag{5.28}$$

Les auteurs ont démontré que la solution optimale est une réassurance *change loss* (quote part couplée avec stop loss). Par ailleurs, Krvavych (2005) [67] a démontré que $E\left(C\left(R\left(Y\right)\right)\right)$ est Gâteaux différentiable. Donc les problèmes d'optimisation définis ci-dessus peuvent être résolus par l'intermédiaire du théorème de **Khun Tucker** quel que soit le principe de tarification adopté.

Cas du principe de prime de l'espérance mathématique

Pour redémontrer l'optimalité des traités *stop loss* en utilisant les méthodes d'optimisation convexe et le théorème de **Kuhn Tucker**, on considère le problème 5.27. On pose $F_0\left(R\right) = V\left(X - R\left(X\right)\right)$ et $F_1\left(R\right) = E\left(R\left(X\right)\right) - l$ deux fonctions convexes et gâteaux différentiables, ainsi que l'ensemble des traités admissibles $\mathfrak{A}$. On définit ainsi un problème d'optimisation convexe. En utilisant le théorème de **Kuhn Tucker**, on retrouve une condition nécessaire pour que R soit une solution optimale :

$$\nabla_R \mathcal{L}_\lambda\left(H\right) = 0 \ \ \forall\, H \in \mathfrak{A} \tag{5.29}$$

où ∇_R désigne la Gâteaux-dérivée de $\mathcal{L}_\lambda$ en R et :

$$\mathcal{L}_\lambda\left(R\right) = F_0\left(R\right) + \lambda F_1\left(R\right), \ \forall\, \lambda > 0 \tag{5.30}$$

Gâteaux différentiabilité

Soit $F : \Re \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable donc la Gâteaux-dérivée de F en $R \in \Re$ est une fonctionnelle $\nabla_R F \in \Re^*$ telle que :

$$\nabla_R F\left(H\right) = lim_{t \rightarrow 0} \frac{F\left(R + tH\right) - F\left(R\right)}{t} \ \ \forall \ \ H \in \Re \tag{5.31}$$

On dit que F est Gâteaux différentiable en $R \in \Re$ si sa Gâteaux dérivée existe. Or une autre représentation coexiste en utilisant le théorème de représentation de **Riesz** de la fonction

$\nabla_R F \in \Re^*$. Elle est donnée par un élément unique $G \in \Re$ tel que :

$$\nabla_R F(H) = E(G(Y).H(Y)), \quad H \in \Re \tag{5.32}$$

L'élément G détermine la Gâteaux dérivée de F de façon unique et est tel que et telle que $E(G(Y)) = 1$. Donc, pour $c \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$cE(G(Y)) = \nabla_R F(c) = lim_{t\to 0} \frac{F(R+ct) - F(R)}{t} = c \tag{5.33}$$

En d'autres termes, si la Gâteaux dérivée existe, elle peut être représentée par :

$$\frac{d}{dt}\{h(t,R,H)\}_{t=0} = h'(0) \tag{5.34}$$

Donc, on peut utiliser la fonction h pour calculer les Gâteaux dérivées en fonction du principe de prime retenu. Dans le cas présent, la Gâteaux dérivée du lagrangien $\mathcal{L}_\lambda$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \nabla_R \mathcal{L}_\lambda(H) &= -2\, cov(X - R(X), H(X)) + \lambda E(H(X)) \\ &= 2E\left(H(Y)\left(\frac{\lambda}{2} - (X - R(X) + E(X - R(X)))\right)\right) \\ &= 0 \quad \forall \ H \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

Donc, en choisissant $H(X) = \frac{\lambda}{2} - (X - R(X) + E(X - R(X)))$, on conclut que :

$$R^*(X) = X - \left(\frac{\lambda}{2} + E(X - R(X))\right) \equiv X - d, \quad d \leq 0 \tag{5.36}$$

Or $d = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $R^*(x) \equiv x$ ce qui est impossible parce que $E(R^*(X)) = l < E(X)$. En prenant $d > 0$, on prend en considération que $0 \leq R^*(X) \leq Y$. On conclue donc que la solution optimale doit être de la forme :

$$R^*(x) = (x - d)_+ = max(0, x - d) \tag{5.37}$$

On peut retrouver le multiplicateur de Lagrange en utilisant la condition limite du problème d'optimisation défini ci-dessus. Pour tout $l \in (0, E(X))$, il existe $d(l) > 0$ tel que :

$$E[(X - d(l)_+)] = l \tag{5.38}$$

Donc, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda(l) = 2d(l) - 2E(X - (X - d(l))_+) \\ &= 2d(l) - 2\left\{\int_0^{d(l)} xdF(x) + d(l)(1 - F(d(l)))\right\} \\ &= 2d(l)F(d(l)) - 2\int_0^{d(l)} xdF(x) \geq 0\end{aligned}$$

Par conséquent pour $\lambda(l)$ et $R^*(X) = \{(X - d(l))_+\}$ on a :

$1-\quad \lambda(l)F_1(R^*) = \lambda(l)(E(R^*(X)) - l) = 0$

$2-\quad \mathcal{L}_\lambda(R) \geq \mathcal{L}_\lambda(R^*) \quad \forall\ R \in \mathfrak{R}$ et on peut démontrer que :

$$\mathcal{L}_\lambda(R) - \mathcal{L}_\lambda(R^*) \geq \nabla_{R^*}\mathcal{L}_\lambda\{R - R^*\} \geq 0$$

Donc selon le théorème de **Kuhn Tucker** $1-$ et $2-$ sont les conditions suffisantes pour que R^* soit une solution optimale. Par symétrie le problème d'optimisation ci-dessus 5.27 admettent des solutions optimales qui sont de la forme *stop loss*.

Cas de principe de dispersion généralisé

Dans ce cas, on considère le principe de prime suivant, pour $\phi(.)$ une fonction continue non décroissante et convexe :

$$P_{\mathbb{D}}(R(X)) = E(R(X)) + \phi(\mathbb{D}(R(X))) \tag{5.39}$$

$$\mathbb{D}(R(X)) = \sqrt{Var(R(X))} \tag{5.40}$$

En Suivant ce mode de tarification, le problème 5.27 peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} min_{R\in\mathfrak{R}}\phi(\mathbb{D}(R(X))) \\ s/c\ Var(X - R(X)) \leq \nu < Var(X) \end{cases} \tag{5.41}$$

Ou par symétrie, on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} min_{R\in\mathfrak{R}} Var(X - R(X)) \\ s/c\ \phi(\mathbb{D}(R(X))) \leq \phi(l) < \phi(\mathbb{D}(X)) \end{cases} \tag{5.42}$$

Or en utilisant l'inégalité de **Cauchy Schwartz**, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(R(X)) &= \sqrt{Var(R(X))} \\
&= \sqrt{\mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(X - R(X)) - 2\,cov(X, X - R(X))} \\
\mathbb{D}^2(R(X)) &= Var(R(X)) \\
&= Var(X - X + R(X)) \\
&= Var(X - (X - R(X))) \\
&= Var(X) + V(X - R(X)) - 2\,cov(X, X - R(X)) \\
&= \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(X - R(X)) - 2\,cov(X, X - R(X)) \\
\mathbb{D}(R(X)) &\geq \sqrt{\mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(X - R(X)) - 2\mathbb{D}(X - R(X))\,\mathbb{D}(X)} \\
\mathbb{D}(R(X)) &\geq \sqrt{(\mathbb{D}(X) - \mathbb{D}(X - R(X)))^2} \\
\mathbb{D}(R(X)) &\geq \mathbb{D}(X) - \mathbb{D}(X - R(X))
\end{aligned}$$

Soit l'espace de Hilbert $\mathcal{R}$ de norme $\| R \| = < R, R > = \sqrt{E(R^2(X))}$. Donc, l'inégalité de **Cauchy Schwartz** devient une égalité si et seulement si :

$$R(X) = a\,X + b \tag{5.43}$$

Pour :

$$\begin{aligned}
T(X) &= X - E(X) \\
U_1(X) &= X - R(X) - E(X - R(X)) \\
U_2(X) &= R(X) - E(R(X)) \\
a_i &= \frac{< U_i, T >}{< T, T >} \Big|_{i=1,2}
\end{aligned}$$

on a :

$$
\begin{aligned}
\| U_i - a_i\, T \| &= < U_i - a_i\, T, U_i - a_i\, T > \\
&= < U_i, U_i > -a_i < U_i, T > -a_i < U_i, T > + a_i^2 < T, T > \geq 0 \\
&= < U_i, U_i > -2a_i < U_i, T > + a_i^2 < T, T > \\
&= < U_i, U_i > -2\frac{< U_i, T >}{< T, T >} < U_i, T > + \left\{ \frac{< U_i, T >}{< T, T >} \right\}^2 < T, T > \\
&= < U_i, U_i > -\frac{< U_i, T >}{< T, T >} < U_i, T > \\
&= < U_i, U_i > -a_i < U_i, T > \\
&= < U_i - a_i T, U_i >
\end{aligned}
$$

Or, $\| U_i - a_i\, T \| = 0$ si et seulement si $U_i - a_i\, T = 0$. Si on suppose que $R \in \mathfrak{R}$ une fonction continue, alors la solution optimale prendra la forme d'une quote part. Cependant, en utilisant la méthode de programmation convexe, présentée dans le paragraphe suivant, on peut démontrer qu'il existe une solution locale qui appartient à la classe de réassurance *change loss*.

Méthode de programmation convexe

Soit la fonction objective $F_0(R) = \mathbb{D}(R(Y))$ et la fonction contrainte $F_1(R) = Var(Y - R(Y)) - \nu$. F_0 et F_1 sont deux fonctions gâteaux différentiables sur l'ensemble des traités admissibles noté par $\dot{\mathfrak{R}} = \{R \in \mathfrak{R} \mid F_1(R) \leq 0\}$ qui est un ensemble convexe. n utilisant le théorème de **Kuhn Tucker**, R est une solution au problème 5.27 si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
\lambda\, F_1(R) &= 0 \\
\nabla_R\, (\mathcal{L}_\lambda)[H] &= 0 \; \forall\, H \in \dot{\mathfrak{R}}
\end{aligned}
$$

Avec $\mathcal{L}_\lambda(R) = F_0(R) + \lambda\, F_1(R)$, $\lambda \geq 0$. **Krvavych** (2005) démontre que la Gâteaux-dérivée

du lagrangien $\mathcal{L}_\lambda \; \forall \, H \in \dot{\mathfrak{A}}$:

$$\begin{aligned}
\nabla_R \mathcal{L}_\lambda (H) &= \frac{cov\left(R(X), H(X)\right)}{\mathbb{D}\left(R(X)\right)} \phi'\left(\mathbb{D}\left(R(X)\right)\right) - 2\lambda \, cov\left(X - R(X), H(X)\right) \\
&= c_\phi \, cov\left(R(X), H(X)\right) - 2\lambda \, cov\left(X - R(X), H(X)\right) \\
&= \left(2\lambda - c_\phi\right) E\left(H(X)\left(R(X) - \frac{2\lambda}{2\lambda - c_\phi} x + \left(\frac{2\lambda}{2\lambda - c_\phi} E(X) - E\left(R(X)\right)\right)\right)\right) \\
&= 0 \quad avec \; c_\phi = \frac{\phi'\left(\mathbb{D}\left(R(X)\right)\right)}{\mathbb{D}\left(R(X)\right)} > 0
\end{aligned}$$

On peut donc déterminer une forme générale de la rétention optimale, pour $0 < \alpha < 1$, $\lambda \geq 0$ et $c_\phi > 0$, de la manière suivante :

$$R(x) = \frac{2\lambda}{2\lambda + c_\phi} x - \left(\frac{2\lambda}{2\lambda + c_\phi} E(X) - E\left(R(X)\right)\right) := ax + b \tag{5.44}$$

Donc les solutions optimales locales du problème d'optimisation sont de la forme $R_0(x) = ax$ avec $a \in]0, 1[$, d'où pour $d_1 = \frac{|b|}{a}$

$$R_1(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < d_1 \\ \\ ax + b \; si \; x \geq 1 \end{cases} \tag{5.45}$$

En plus pour $= \frac{1}{2} \frac{a}{1-a} c_\phi > 0$ et $R_i^*(x)(ax + b) 1_{x \geq d_i} = a(x - d_i)_+$ les conditions du théorème de **Kuhn Tucker** sont vérifiées :

– $\lambda F_1\left(R_i^*(X)\right) = 0$

– $\mathcal{L}_\lambda(R) \geq \mathcal{L}_\lambda\left(R_i^*\right) \; \forall \, R \in \dot{\mathfrak{A}}$

Si on suppose que R est continue, alors la solution optimale prendra la forme d'une quote part. Sinon, la forme de réassurance optimale est celle du régime *Change Loss*. On redémontre donc les résultats de Gajeck et Zagrodiny (2000) [45] et Kaluszaka (2001) [64] relatifs au même problème d'optimisation.

Principe de prime non convexe : cas du principe d'Esscher

Dans le cas de principe de prime d'Esscher, le problème d'optimisation (23) n'est plus convexe. Donc, on ne peut pas appliquer le théorème de **Kuhn Tucker** sous la forme précédente. **Krvavych**(2005) parvient à résoudre le problème en proposant le théorème suivant :

Théorème

Soient F_0 et F_1 deux fonctions Gâteaux différentiables et soit $\mathfrak{A}_= = \{Z \in \mathfrak{A} | F_1(Z) = 0\}$. Si Z_* est une solution locale au problème d'optimisation précédent, alors il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\nabla_{Z_*} \mathcal{L}_\lambda (Z) = 0 \ \forall \ Z \in \mathfrak{A}_= \tag{5.46}$$

Donc, si on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} min_{R \in \mathfrak{A}_=} \left(\frac{E\left(R(X) e^{\alpha R(X)}\right)}{E\left(e^{\alpha R(X)}\right)} \right) - E(R(X)) \\ \\ s/c \ \ Var(X - R(X)) = \nu \end{cases} \tag{5.47}$$

La fonction objectif et la fonction des contraintes sont toutes les deux Gâteaux différentiables, donc, on peut utiliser le théorème précédent pour retrouver les conditions nécessaires d'existence d'une solution optimale locale du problème précédent. La solution optimale satisfait l'équation suivante :

$$x = \frac{1}{2\lambda} e^{\alpha R_*(x)} (a R_*(x) + b) + R_*(x) + c - \frac{1}{2\lambda} \quad \forall \ x \geq 0 \tag{5.48}$$

$$a = \frac{\alpha}{E\left(e^{\alpha R_*(x)}\right)} > 0 \tag{5.49}$$

$$b = \frac{E\left(e^{\alpha R_*(X)}\right) - \alpha E\left(R_*(X) e^{\alpha R_*(X)}\right)}{E^2\left(e^{\alpha R_*(X)}\right)} \tag{5.50}$$

$$c = E(X) - E(R_*(X)) \tag{5.51}$$

Principe de prime exponentiel

Si l'assureur adopte le principe de prime exponentiel, sa fonction d'utilité sera donnée par :

$$U(x) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x})$$

On aura :

$$E\left(C_{exp}\left(R\left(X\right)\right)\right) = \frac{1}{\alpha} log\left(E\left(e^{\alpha R(X)}\right)\right) - E\left(R\left(X\right)\right) \tag{5.52}$$

Le problème d'optimisation 5.27 est convexe car la fonction $E\left(C_{exp}\left(R\left(X\right)\right)\right)$ est convexe et correspond à une région d'acceptation convexe. En plus, on sait que les fonctions $E\left(C_{exp}\left(R\left(X\right)\right)\right)$ et $Var\left(X - R\left(X\right)\right)$ sont Gâteaux différentiables. Donc, on peut utiliser le théorème de **Kuhn Tucker**. On définit donc le Lagrangien :

$$\mathcal{L}_{\lambda}\left(R\right) = E\left(C_{exp}\left(R\left(X\right)\right)\right) + \lambda\ Var\left(X - \left(R\left(X\right)\right)\right) \tag{5.53}$$

Pour retrouver les contions nécessaires d'optimisation, on doit résoudre l'équation suivante :

$$\nabla_{R}\mathcal{L}_{\lambda}\left(H\right) = 0 \tag{5.54}$$

En résolvant cette équation, la forme optimale de réassurance va satisfaire l'équation suivante :

$$x = \frac{1}{\lambda_1}\left(e^{\alpha R(x)} - 1\right) + R\left(x\right) \quad \forall\ x \geq 0 \tag{5.55}$$

On peut démontrer qu'il existe une fonction inverse $R\left(y, \lambda\right) \in \mathfrak{A}, \quad \forall\ \lambda \in]0, 1[$ permettant de définir une forme de réassurance optimale qui satisfait l'équation (41).

5.2.3 Approche de Hess (2000)

Hess (2000) [55] considère le cas d'une compagnie d'assurance dont le portefeuille est composé de k groupes de risques (k lignes d'affaire). La charge des sinistres de chaque ligne de business est représentée par une variable aléatoire continue positive X_i, $i = 1, \ldots, k$. De plus, les variables aléatoires sont supposées indépendantes. La charge totale est donc définie par :

$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i, \quad \forall\ i = 1, \ldots, k$$

$$E\left(X\right) = \sum_{i=1}^{k} E\left(X_i\right)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i)$$

Dans son modèle, il suppose que l'assureur, ainsi que le réassureur, appliquent des chargements basés sur l'espérance mathématique, dont les taux respectifs sont η et η_r quelle que soit la branche d'activité. Il désigne par R le montant des réserves affectées aux risques et il définit :

$$R' := R + (\eta - \eta_r) E(X) \geq 0 \tag{5.56}$$

L'hypothèse sous-jacent est donc que $R \geq (\eta_r - \eta) E(X)$. De plus, il désigne par π_i le montant des primes techniques reçues par l'assureur sur chaque ligne d'affaire $i = 1, \ldots, k$.

$$\pi_i(X_i) = (1 + \eta) E(X_i) \tag{5.57}$$

$$\Pi(X) = (1 + \eta) \sum_{i=1}^{k} E(X_i) \tag{5.58}$$

Il propose de calculer le rapport de solvabilité noté par *rst* et défini par :

$$rst = \frac{R}{\Pi(X)} \tag{5.59}$$

Le profit de l'assureur est une variable aléatoire B définie par :

$$B = \Pi(X) - X \tag{5.60}$$

$$E(B) = \eta E(X) \tag{5.61}$$

$$\sigma(B) = \sigma(X) \tag{5.62}$$

Il définit un coefficient de sécurité T qui doit être au moins égal à une valeur t souhaitée par l'assureur, avec :

$$T = \frac{R + \eta E(X)}{\sigma(X)} \geq t \tag{5.63}$$

Si ce coefficient est supérieur ou égal à la valeur souhaitée t, la réassurance sera inutile. À l'inverse, l'assureur doit avoir recours à la réassurance pour céder une partie du risque et retrouver l'inégalité précédente. Il propose d'ajuster les pleins de conservation par branche d'affaire. Dans ce contexte, l'assureur fait face à la réassurance sélective ou adaptée. Soient θ_i le plein de conservation de la branche i $(0 \leq \theta_i \leq 1)$ et $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ le vecteur des pleins de conservation par ligne de business. Il définit, en considérant des traités de réassurance en quote part sur chaque ligne d'affaire :

$$B(\Theta) = \Pi(X) - \sum_{i=1}^{k} \theta_i X_i - (1+\eta_r) \sum_{i=1}^{k} (1-\theta_i) E(X_i) \tag{5.64}$$

$$E(B(\Theta)) = (\eta - \eta_r) E(X) + \eta_r \sum_{i=1}^{k} \theta_i E(X_i) \tag{5.65}$$

$$V(B(\Theta)) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i^2 V(X_i) \tag{5.66}$$

Hess (2000) [55] propose le problème d'optimisation qui consiste à déterminer le vecteur $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ permettant de maximiser le bénéfice moyen $E(B(\Theta))$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} T(\Theta) = \frac{R+E(B(\Theta))}{\sigma B(\Theta)} \geq t \\ 0 \leq \theta_i \leq 1, \ \forall\, i = 1, \ldots, k \end{cases} \tag{5.67}$$

Formellement :

$$\begin{cases} max_{\Theta=(\theta_1,\ldots,\theta_k)} \ E(B(\Theta)) \\ s/c \ \ \mathcal{K} = \left\{\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k \mid T(\Theta) \geq t, \ \forall\, i = 1, \ldots, k \ 0 \leq \theta_i \leq 1\right\} \end{cases} \tag{5.68}$$

Il parvient ensuite à démontrer l'existence d'une solution optimale à ce problème d'optimisation. De plus $\frac{1}{T}$ s'interprète comme le coefficient de variation de la richesse de l'assureur, soit $R + B$. Le coefficient de sécurité T est lié à la probabilité de ruine, dans la mesure où :

$$\begin{aligned} P(ruine) &= P(R + \Pi(X) < X) \\ &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} > \frac{R + \Pi(X) - E(X)}{\sigma(X)}\right) \\ &= P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} > T\right) \\ &= 1 - F_{\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}}(T) \end{aligned}$$

Cependant, l'écart type de la distribution de résultat de la cédante décrit la dispersion mais ne mesure pas précisément la sévérité des valeurs extrêmes de la distribution du résultat. Le choix de la cédente consiste à fixer le coefficient de sécurité à un niveau arbitraire $t > 0$. Cela pourrait faire intervenir la fonction d'utilité du décideur pour en choisir le seuil minimum t.

5.3 Maximisation de l'Utilité

La théorie de l'Utilité de **von Neumann et Morgenstern** peut être appliquée dans une problématique de choix de réassurance optimale.

Soit un portefeuille d'assurance composé de n risques $X_1, \ldots, X_n$. Supposons que l'assureur a la faculté de se réassurer en achetant une réassurance proportionnelle dont le taux de cession est $\alpha_i \in [0, 1]$, $\forall\, i : 1, \ldots, n$. Supposons que le principe de tarification adopté par l'assureur et le réassureur est celui de l'espérance mathématique. Les chargements respectifs de la cédante et du réassureur sont η et η_r. Soient p_i et p_i^r respectivement la prime de l'assureur et celle du réassureur. Donc, $\forall\ i\ :\ 1, \ldots, n$, en supposant implicitement que les chargements sont constants pour tous les risques qui composent le portefeuille, on a :

- $p_i = (1 + \eta)\, E(X_i)$
- $p_i^r = (1 + \eta_r)\, \alpha_i E(X_i)$

Le profit après réassurance est représenté par la variable aléatoire Π à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i - p_i^r - (1 - \alpha_i) X_i\right) \tag{5.69}$$

Or l'assureur, étant rationnel, n'achéte de la réassurance que si et seulement si son profit

espéré après réassurance est positif. L'espérance de profit après réassurance est donnée par :

$$E(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)(\eta - \eta_r \alpha_i) \tag{5.70}$$

$$V(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha_i)^2 V(X_i) \tag{5.71}$$

La condition d'achat de réassurance dans ce cas de figure revient à avoir $\eta > \eta_r$. Supposons que cette condition est vérifiée, l'assureur choisira les taux de cession qui lui donnent l'espérance d'utilité la plus élevée possible sous contrainte sur la variabilité de résultat ou de mesure de risque. Donc, il a tendance à résoudre un problème d'optimisation de la forme suivante :

$$\begin{cases} max_{\alpha} EU(\Pi) \\ s.c\ V(\Pi) = k > 0\ et\ \alpha_i \in [0,1]\ \forall\ i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{5.72}$$

U étant la fonction d'utilité de l'assureur. Il est à noter que plusieurs fonctions d'utilité peuvent être traité en fonction de degré d'aversion au risque de la cédante. En somme, la fonction d'utilité permet de mesurer le niveau de satisfaction de l'assureur en achetant de la réassurance. Donc, le probléme est de pouvoir déterminer les caractéristiques optimales d'un traité de réassurance permettant d'assurer l'espérance d'utilité la plus élevée. Cette fonction d'utilité doit satisfaire un certain nombre d'axiomes à savoir :

Axiome de préférence

Entre deux situations x et y risquées, l'individu peut toujours décider s'il préfére x à y, ou s'il préfére y à x ou s'il est indifférent entre x et y.

Axiome de transitivité

Si $x \succeq y$ et $y \succeq z$ alors $x \succeq z$.

Axiome de non satiété

$x \preceq x + \alpha$ avec α une richesse certaine. D'autres axiomes sont détaillés dans **Roy (1942)**.

Supposons que la fonction d'utilité de l'assureur en question est sous la forme quadratique suivante :

$$U(\Pi) = a + b\Pi - c\Pi^2$$

Donc l'espérance de l'utilit du profit sera donnée par :

$$EU(\Pi) = a + b\sum_{i=1}^{n} E(X_i)(\eta - \eta_{re}\alpha_i) - c\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)^2 V(X_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)(\eta - \eta_{re}\alpha_i)\right)^2\right)$$

Pour résoudre le problème d'optimisation défini ci-dessus, on utilise le théorème de **Kuhn Tucker** pour déterminer les conditions nécessaires et suffisante d'optimisation. Au préalable, on doit déterminer l'expression du Lagrangien :

$$L(\alpha, \lambda, y, z) = EU(\Pi) + \lambda\left(V(\Pi)) - k\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i(\alpha_i - 1) - \sum_{i=1}^{n} z_i\alpha_i$$

En Appliquant le théorème **KKT** on obtient les conditions suivantes :

$$-\eta_{re}\, b\, E(X_i) - 2\,(1-\alpha_i)\; V(X_i)\;(\lambda - c) + 2\, c\, E(X_i)\;\eta_{re}\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j\right)\left(\eta - \eta_{re}\alpha_j\right) + y_i - z_i = 0\ \forall\ i = 1, \ldots, n$$

$$y_i(\alpha_i - 1) = 0$$

$$z_i\alpha_i = 0$$

$$y_i \geq 0$$

$$z_i \geq 0$$

$$\alpha_i \geq 0$$

$$\alpha_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)^2 V(X_i) - k = 0$$

Ignorant la dernière condition, trois situations sont envisageables :

– Si on suppose que $y_i > 0$, la deuxième et la troisième conditions du **KKT** implqueront que $z_i = 0$ et $a_i = 1$. En effet, la première condition donnera :

$$y_i = \eta_{re} b\, E(X_i) - 2\, c \left(\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j\right)\left(\eta - \eta_{re}\alpha_j\right) \right) E(X_i)\, \eta_{re}$$

– Si on suppose que $z_i > 0$, la deuxième et la troisième conditions du **KKT** implqueront que $y_i = 0$ et $a_i = 0$. En effet, la première condition donnera :

$$z_i = 2\, V(X_i)\ (\lambda - c) + \eta_{re} b\, E(X_i) - 2\, c \left(\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j\right)\left(\eta - \eta_{re}\alpha_j\right) \right) E(X_i)\, \eta_{re}$$

– Si on considère cette fois ci que $y_i = 0$ et $z_i = 0$, on aura :

$$\alpha_i = 1 - \frac{\eta_{re} b\, E(X_i) - 2\, c \left(\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j\right)\left(\eta - \eta_{re}\alpha_j\right) \right) E(X_i)\, \eta_{re}}{2\, V(X_i)\ (\lambda - c)}$$

Pour que celà soit vérifier, il faut que

$$0 \leq \frac{\eta_{re} b\, E(X_i) - 2\, c \left(\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j\right)\left(\eta - \eta_{re}\alpha_j\right) \right) E(X_i)\, \eta_{re}}{2\, V(X_i)\ (\lambda - c)} \leq 1$$

On constate que le terme $\psi_i = \frac{\eta_{re} b\, E(X_i) - 2\, c \left(\sum_{j=1}^{n} E\left(X_j\right)\left(\eta - \eta_{re}\alpha_j\right) \right) E(X_i)\, \eta_{re}}{2\, V(X_i)\ (\lambda - c)}$ est toujours présent dans les trois situations présentées ci-dessus. On peut facilement démontrer qu'il s'agit d'un cas similaire au problème d'optimisation de de Finetti (1940) [29] et que :

$$\widehat{\alpha_i} = min\left\{1, \max\left(0, 1 - \psi_i\right)\right\} \tag{5.73}$$

Or cette valeur optimale dépend du multiplicateur de Lagrange λ. Donc, pour obtenir les valeurs optimales des $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$, on doit réarranger les expressions de $\widehat{\alpha_i}$ et la dernière condition du théorème **KKT**.

5.4 Minimisation de la probabilité de ruine

Il est important de signaler que l'objectif de la réassurance diffère d'un assureur à un autre dans la mesure où un assureur peut choisir la réassurance pour minimiser la variabilité de sa rétention alors qu'un autre assureur choisit la réassurance qui lui permet de minimiser sa

probabilité de ruine ou de maximiser sa probabilité de survie. Or, le but premier de la théorie de ruine est, sans doute, de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance par un parcours stochastique, d'évaluer la probabilité de ruine et d'estimer le niveau de réserve initiale permettant de réduire cette probabilité. Cependant, plus le risque est élevé, plus la possibilité de ruine est élevée. La probabilité de ruine est donc une fonction décroissante en fonction du niveau de réserve initiale et aussi en fonction du niveau des chargements des primes, mais elle est croissante en fonction du risque retenu. Donc, il est possible de baser le choix de réassurance optimale sur le critère de minimisation de la probabilité de ruine. Plusieurs papiers ont été écrits dans ce domaine à savoir Dickson et Waters (1996) [36], Krvavych (2005) [67], Aase (2002) [1], Schmidli (2004, 1994) [105] [100], Deelstra Plantin (2004) [35].

Sholomitsky et Rachkova (1998) [106] ont étudié le cas d'optimisation des traités de réassurance en quote part selon le critère de maximisation de la probabilité de survie de la cédante selon le principe de primes est celui de l'espérance mathématique ou de la variance (voir même de l'écart type). Krvavych (2005) [67] a étudié le même problème de maximisation de la probabilité de survie de la cédante en présence de réassurance en *excess of loss* de rétention r. Dans ce cas de figure, la résolution du problème d'optimisation permet de retrouver les conditions sous lesquelles la probabilité de survie de la cédante serait une fonction non monotone de la rétention r sur l'intervalle $[P_0, 1]$ avec P_0 la probabilité de survie de l'assureur avant avoir recours à la réassurance. Sous ses conditions un niveau optimal de r existe et peut être déterminé. Il justifie l'existence d'une rétention optimale en fonction des chargements de sécurité de la cédante et du réassureur, d'un traité *excess of loss* sans limite dans un modèle individuel et en se fixant le principe de l'espérance mathématique pour les calculs de primes. Il démontre que le fait que si $a = \frac{\eta - \eta_r}{\eta_r} \geq 0$ avec η les chargements de l'assureur et η_r les chargements du réassureur, alors la probabilité de survie de la cédante est décroissante en fonction de la rétention r. Si $a \in [-1, 0]$ alors la probabilité de survie de la cédante est une fonction non monotone en fonction de r et il existe une rétention optimale qui permet de maximiser sa probabilité de survie.

5.4.1 Maximisation du coefficient d'ajustement de Lundberg

Plusieurs études ont été élaborées pour déterminer l'effet de la réassurance sur la probabilité de ruine. Centeno (1997) [20] a utilisé l'algorithme de Panjer pour calculer la probabilité de ruine compte tenu de la réassurance, pour démontrer que le comportement de cette probabilité et celui du coefficient d'ajustement de Lundberg en fonction de la rétention r sont similaires en supposant que le niveau des réserves initiales n'est pas négligeable. Gerber (1979) [47] a démontré que l'inégalité de **Lundberg** peut être améliorée en proposant une autre limite supérieure de la probabilité de ruine à temps fini. D'autres auteurs ont essayé de minimiser la probabilité de ruine en utilisant sa borne supérieure proposée par Gerber [47] et en tenant compte de l'effet de la réassurance sur le processus de richesse de la cédante. Elle a démontré que si l'espérance de profit de la cédante est non négative alors une rétention optimale existe dans un cas de traité de réassurance *excess of loss*. Elle a démontré l'existence d'un optimum local permettant de minimiser la probabilité de ruine en utilisant l'approximation de Lundberg et l'approximation de Gerber pour montrer l'efficacité de la seconde par rapport à la première en terme de distance par rapport à la valeur exacte de la probabilité de ruine. Elle a aussi étudié plusieurs cas de distribution des montants des sinistres, mais elle s'est intéressée uniquement au cas de réassurance *excess of loss* avecune franchise par sinistre.

Dickson et Waters (1996) [36] ont étudié l'effet de la réassurance sur la probabilité de ruine dans le modèle classique de surplus. Ils ont considéré qu'une rétention n'est optimale que si et seulement si elle permet de minimiser la probabilité de ruine. Ils ont ensuite démontré qu'une rétention optimale peut être trouvée même si les chargements de sécurité de réassurance dépendent de niveau de la rétention.
Schmidli (2004) [105] a étudié l'impact de l'investissement de surplus de l'assureur dans un actif risqué couplé avec une possibilité de réassurance sur la probabilité de ruine en résolvant l'équation de **Hamilton-Jacobi-Bellman** après avoir démontrer l'existence d'une telle solution. Il a argumenté par des applications numériques.
Il a considéré le processus de surplus classique de **Cramér-Lundberg** avec possibilité de

réassurance :

$$X_t^{\infty} = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{5.74}$$

- $\{N_t\}$ est un processus de comptage des sinistres. Il s'agit d'un processus de poisson de paramètre λ.
- $\{Y_i\}$ des variables aléatoires positives continues indépendantes et de identiquement distribuées, indépendantes de $\{N_t\}$.
- $c > \lambda E(Y)$ condition de sécurité.

L'assureur avait la possibilité de se réassurer. Schmidli (2001) [103] a montré qu'il existe une stratégie optimale dérivée à partir de l'équation de **Hamilton-Jacobi-Bellman** correspondante. Hipp et Vogt (2003) [56] ont dérivé quelques résultats similaires pour la réassurance non proportionnelle (*excess of loss*). Dans le cas de réassurance proportionnelle, Schmidli (2004) [105] a démontré une approximation de la probabilité de ruine de type **Cramér-Lundberg** sachant que $M_Y(R) = E\left(e^{RY}\right) < \infty$ telle que :

$$C_- := inf_z \frac{1}{E\left(e^{R(Y-z)} \mid Y > z\right)} > 0 \tag{5.75}$$

La constante R est le coefficient d'ajustement maximal qui peut être obtenu en utilisant une stratégie de réassurance constante. Schmidli (2004) [105] était intéressé par le cas des distributions à queues épaisses et plus précisément au cas où $M_Y(r) = \infty \; \forall r > 0$. Dans ce cas, il n'existe pas d'approximation du type **Cramér-Lundberg** pour la probabilité de ruine même dans le cas de réassurance. Or, vu que dans le cas de réassurance en *excess of loss* les montants des sinistres sont bornés alors on peut s'attendre à ce que la probabilité de ruine décroît d'une manière exponentielle, ce qui fait qu'une approximation type **Cramér-Lundberg** est possible. Pour démontrer cela, Schmidli définit une stratégie de réassurance $\{a_t\}$ qui peut être adaptée au processus de surplus classique. En utilisant quelques propriétés qu'il a fixé pour les primes de réassurance et en se basant sur l'équation de **Hamilton-Jacobi-Bellman**, il aboutit à une approximation de la probabilité de ruine sous une stratégie de réassurance, et l'optimisation de cette approximation va lui permettre de retrouver la stratégie optimale. Pour plus de détails, on invite le lecteur à consulter Schmidli (2004) [105].

Exemple numérique

On représente la charge des sinistres par la variable aléatoire X définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, continue et positive, de fonction de répartition F_X et de fonction densité f_X.

$$X = X' + X''$$

- X' la charge de sinistres de l'assureur,
- X'' la charge de sinistres du réassureur.

Supposons que P, la prime chargée de l'assureur, est telle que $P > E(X)$ et notons P'' la prime chargée du réassureur sans tenir compte des frais administratifs et des taxes. On suppose que P et P'' sont déterminées selon le principe d'espérance mathématique, c'est à dire $P = (1 + \eta) E(X)$ et $P'' = (1 + \eta_{re}) E(X)$. Supposons aussi u le capital initial de l'assureur.

On définit la rétention par la variable aléatoire X' définie par $X' = X - X''$. La probabilité de ruine est $P(X' > u + P - P'')$. Soit U_n le processus de surplus défini par :

$$U_n = u + n\,P - S_n$$

Avec S_n la somme des montants des sinistres de n périodes et définie comme suit :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

On suppose que les X_i sont i.i.d et qie $E(X) < P$. Le coefficient d'ajustement de Lundberg est la solution positive R de l'équation suivante en r :

$$e^{P\,r} E\left(e^{rX}\right) = e^{P\,r} \Psi_X(r) = 1$$

avec Ψ_X la fonction génératrice des moments de X. On peut définir le temps de ruine T comme étant la variable aléatoire $T = min\{n, U_n \leq 0\}$. Donc la probabilité de ruine notée par $\psi(u)$ est définie par :

$$\psi(u) = P(T < \infty)$$

Lundberg a démontré que cette probabilité de ruine peut être majorée par une borne supérieur dite *borne de Lundberg* comme suit :

$$\psi(u) = \frac{e^{R\,u}}{E\left(e^{-R\,U_T} \mid T < \infty\right)} \leq e^{-R\,u}$$

Il est important de signaler que plus R est élevé, plus $\psi(u)$ est petite. Donc, il apparaît naturel de se donner le critère de maximiser du coefficient d'ajustement de Lundberg pour un choix optimal de traité de réassurance.

Soit $N \sim P(\lambda)$ avec $\lambda = 1$, $X \sim U(0,1)$, $S_n = \sum_1^N X_i$ (avec l'hypothèse d'indépendance) des variables aléatoires positives représentant respectivement, le nombre des sinistres, la charge individuelle de sinistre et la charge totale des sinistres. Supposons aussi que les primes de réassurance sont calculées en se basant sur le principe de l'espérance et en prenant un chargement $\gamma = 1$.

Cas de la réassurance proportionnelle

Supposons le cas d'un traité de réassurance en quote part tel que α est le taux de cession. Le réassureur se base sur le principe de l'espérance et son chargement est $\xi = 1$ ou $\xi = 1.4$. Déterminons donc le coefficient d'ajustement de la rétention. On a :

$$\Psi_X(r) = E\left(e^{r\,X}\right) = \int_0^1 e^{r\,X} dx = \frac{e^r - 1}{r}$$

$$\Psi_Y(r) = e^{r(1-\Psi_X(r))}$$

Dans notre cas de figure, la prime chargée par l'assureur est $P = 1$. Donc, le coefficient d'ajustement avant réassurance est déterminé comme suit :

$$1 = e^{-P\,r} e^{-\lambda(1-\Psi_X(r))} \Leftrightarrow R = 1.793$$

Supposons que l'assureur a choisi de se réassurer à l'aide d'un traité en quote part tel qu'il est décrit ci-dessus. Donc la portion de la prime et la charge de sinistres retenues sont déterminées comme suit :

$$P' = P - P'' = 1 - \alpha \times 0.5 \times (1 + \xi) = \begin{cases} 1 - \alpha \; si \; \xi = 1 \\ 1 - 1.2\alpha \; si \; \xi = 1.4 \end{cases}$$

$$F_{X'}(x) = F_{(1-\alpha)X}(x) = F_X\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)$$

$$\Psi_{X'}(r) = \Psi_{(1-\alpha)X}(r) = \Psi_X((1-\alpha)r)$$

Le coefficient d'ajustement est toujours la solution positive de l'équation suivante :

$$1 = e^{-P' \; r} e^{-\lambda(1-\Psi_X((1-\alpha)r))}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = (1 - \alpha \; 0.5 \; (1 + \xi)) \; r + \lambda \left(1 - \frac{e^{r(1-\alpha)} - 1}{r(1-\alpha)}\right)$$

Cas de la réassurance non proportionnelle

On se place dans le même cadre que ci-dessus et on suppose que l'assureur a l'option de se réassurer à travers un simple traité excess of loss de priorité b. Dans ce cas, la prime de réassurance P'' est déterminée comme suit :

$$P'' = (1 + \xi)\lambda \int_b^1 (x - b)\, dx = (1 = \xi)\frac{(b-1)^2}{2}$$

La fonction génératrice des moments de la rétention X' est donnée par :

$$\Psi_{X'}(r) = E\left(e^{-r \; X'}\right) = \int_0^b e^{rx} dx + \int_b^1 e^{rb} dx = \frac{r^{rb} - 1}{r} + e^{rb}(1 - b)$$

Le coefficient d'ajustement de Lundberg est toujours calculé par la même méthode. Les résultats relatifs au coefficient d'ajustement de Lundberg pour les deux traités sont présentés dans les deux tableaux qui suivent :

Cas $\xi = 100\%$

α	b	EG	R pour XL	R pour QP
0.00	1.0	0.500	1.793	1.793
0.01	0.9	0.495	1.832	1.811
0.04	0.8	0.480	1.940	1.868
0.09	0.7	0.455	2.116	1.970
0.16	0.6	0.420	2.378	2.134
0.25	0.5	0.375	2.768	2.391
0.36	0.4	0.320	3.372	2.802
0.49	0.3	0.255	4.400	3.516
0.64	0.2	0.180	6.477	4.981
0.81	0.1	0.095	12.745	9.438
1.00	0.0	0.000	∞	∞

Cas ξ = 140%

α	b	EG	R pour XL	R pour QP
0.00	1.0	0.500	1.793	1.793
0.01	0.9	0.493	1.828	1.807
0.04	0.8	0.472	1.919	1.848
0.09	0.7	0.437	2.061	1.921
0.16	0.6	0.388	2.258	2.030
0.25	0.5	0.325	2.518	2.181
0.36	0.4	0.248	2.840	2.372
0.49	0.3	0.157	3.138	2.535
0.64	0.2	0.052	2.525	1.992
0.81	0.1	-0.067	-	-
1.00	0.0	-0.200	-	-

En analysant les résultats ci-dessus, on vérifie que à espèrance de gain égale, la probabilité de ruine est inférieure pour les traité excess of loss à celle du traité en quote part. Il sera important à signaler que le critère de maximisation du coefficient d'ajustement de Lundberg seul ne permet pas d'aboutir à une décision rationnelle dans la mesure où dans plusieurs cas, le décideur fait également référence à sa fonction d'utilité.

5.5 Minimisation des mesures de risques

Pour la recherche d'un plan optimal de réassurance, on a relevé les plus importants dans la littérature actuarielle à savoir la maximisation du profit de la cédante après réassurance sous contrainte de risque modélisé à l'aide de la variance de la rétention, cette approche est connue sous l'appellation **Approche Moyenne Variance**, et la minimisation de la probabilité de ruine

ou en d'autres termes la maximisation de la probabilité de survie. Récemment, Cai & Tan (2007) [19] ont proposé un nouveau critère basé sur la minimisation des mesures de risque tels que la Value-at-Risk et la Conditional Tail Expectation. Ils ont déterminé deux solutions explicites pour la rétention optimale dans un traité *stop loss*. On considère les notations suivantes :

- X montant des sinistres, une variable aléatoire positive.
- $F_X(x) = P(X \leq x)$ la fonction de distribution de la variable aléatoire X.
- $S_X(x) = P(X \geq x)$ la fonction de survie de la variable aléatoire X.
- $E(X)$ l'espérance de X.
- $X^{'} = X \wedge d$ variable aléatoire, charge de sinistre pour la cédante après réassurance.
- $X^{''} = (X - d)_+$ variable aléatoire, charge de sinistre pour le réassureur.
- $X = X^{'} + X^{''}$
- d une constante qui définit le traité *stop loss*

Cai & Tan (2007) [19] ont adopté le principe de tarification selon l'espérance mathématique. Donc, en utilisant ce critère, la prime de réassurance est donnée, avec η_r les chargements de sécurité de réassureur, par :

$$\delta(d) = (1 + \eta_r)\,\pi(d) \tag{5.76}$$

$$\pi(d) = E\left(X^{''}\right) = \int_d^{\infty} S_X(x)\,dx \tag{5.77}$$

Le risque total de l'assureur est donc défini par la variable aléatoire $T = X^{'} + \delta(d)$. Donc, si d diminue, la rétention diminue mais la prime de réassurance augmente. Il faut donc bien arbitrer entre céder plus de risque ou le conserver. Les deux critères fixés par Cai & Tan (2007) [19] sont définis par :

$$VaR - Optimisation \;:\; min_d \{VaR_T(d, \alpha)\}$$

$$CTE - Optimisation \;:\; min_d \{CTE_T(d, \alpha)\}$$

5.5.1 Théorème d'optimisation

Cai & Tan (2007) [19] ont discuté l'existence et l'expression de la rétention optimale d'un traité *stop loss* en se basant sur deux critères cités précédemment.

Existence d'une solution optimale

- En se basant sur le critère *VaR-Optimisation*, la rétention optimale $d^* > 0$ existe si et seulement si :

$$\alpha < \eta_r^* < S_X(0)$$

$$S_X^{-1}(\alpha) \geq S_X^{-1}(\eta_r^*) + \delta\left(S_X^{-1}(\eta_r^*)\right)$$

- α le seuil de risque servant pour le calcul de la Value at Risk.
- $\eta_r^* = \frac{1}{1+\eta_r}$
- Lorsque la rétention optimale existe, alors d^* est donnée par :

$$d^* = S_X^{-1}(\eta_r^*)$$

- La VaR minimum de T est donc égale à :

$$VaR_T(d^*, \alpha) = d^* + \delta(d^*)$$

- Alors qu'en se basant sur le critère *CTE-Optimization*, la rétention optimale $\widehat{d} > 0$ existe si et seulement si :

$$0 < \alpha \leq \eta_r^* < S_X(0)$$

- Dans ce cas, $\widehat{d} = S_X^{-1}(\eta_r^*)$.

Cai & Tan (2007) [19] ont étudié un cas simple en se basant sur les deux critères présentés ci-dessus. L'aboutissement à des formules fermées n'a pas été généralisé dans des cas plus complexes. La minimisation des mesures de risques ne prend pas en considération l'espérance de profit de la cédante qui est primordial dans le choix de réassurance car un assureur n'est motivé par l'achat de réassurance que s'il espère avoir une espérance de gain positive après avoir recours à la réassurance.

5.6 Maximisation de la probabilité de survie jointe de la cédante et le réassureur

L'hypothèse commune dans la majorité des papiers considérés précédemment est le fait de respecter seulement l'intérêt de la cédante dans l'optimisation des traités de réassurance en minimisant sa probabilité de ruine ou en maximisant son espérance de profit dans un contexte actuariel classique.

Récément, différents modèles de réassurance optimale qui tiennent compte à la fois des intérêts de la cédante et du réassureur, ont été considérés par Ignatov et al (2004) [60]. Ces derniers ont introduit un critère d'optimisation se basant sur la probabilité de survie jointe de la cédante et du réassureur. Dans leur modèle, les montants des sinistres sont supposés avoir une distribution discrète avec un processus d'occurrence de poisson. Ils ont supposé aussi que l'assureur partage le risque avec son réassureur en ayant recours à un traité de réassurance *excess of loss* sans limite avec un niveau de rétention M qui prend des valeurs entières. Donc, ils ont déterminé une expression explicite pour la probabilité de survie jointe de la cédante et du réassureur et ont ensuite vérifié son application dans le cas des distributions continues.

Kaichev et Dimitrova (2008) [62] avaient l'idée de généraliser le modèle de réassurance optimale introduit par Ignatov et al (2004) [60]. Ils ont considéré un traité *excess of loss* de priorité M et limite L pour les sinistres individuels qui avaient des distributions continues. Les auteurs ont démontré, sous certaines hypothèses, l'existence des expressions explicites pour la probabilité de survie jointe de la cédante et du réassureur. En se basant sur ces expressions, ils ont considéré deux problèmes d'optimisation permettant de générer les valeurs optimales de M et L, ce qui permet ensuite de maximiser la probabilité de survie jointe. Ces problèmes sont à résoudre numériquement parce qu'il s'avère que la résolution analytique est impossible. Or, la probabilité de survie jointe, permet l'utilisation des copules, donc, les auteurs ont discuté l'effet de la variation du degré de la dépendance sur le choix des caractéristiques optimales du traité *excess of loss*.

5.6.1 Cas des traités excess of loss

Soit un portefeuille d'assurance dont les sinistres surviennent avec des temps inter-sinistres $\tau_1, \tau_2, \ldots$, supposés indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle de paramètre λ

$$\tau_i \sim Exp(\lambda_i) \tag{5.78}$$

Notons $T_1 = \tau_1,\ T_2 = \tau_1 + \tau_2, \ldots,\ T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$ une suite de variables aléatoires représentant les moments consécutifs d'occurence des sinistres.

- $N_t = card\{i,\ T_i \leq t\}$,
- Les montants des sinistres sont modélisés à l'aide des variables aléatoires positives continues $W_1, \ldots, W_n, \ldots$ avec une fonction densité jointe $\Psi(W_1, \ldots, W_n, \ldots)$ supposées indépendante de N_t
- On introduit les variables aléatoires $Y_1 = W_1, Y_2 = W_1 + W_2, \ldots$, les montants des sinistres cumulés,

On définit le processus de surplus R_t :

$$R_t = h(t) - Y_{N_t}$$

avec $h(t)$ est une fonction réelle dans $\mathbb{R}_+$ non négative et non décroissante représentant le montant des primes d'assurance perçu jusqu'à l'instant t (donc h peut être continue ou discontinue). Un cas particulier de la fonction h est lorsque $h(t) = u + ct$ avec c une constante représentant le taux de prime par unité de temps et u le montant des réserves initiales.

Si l'assureur n'achéte pas de réassurance, sa probabilité de ruine sur un horizon $[0, k]$ notée par $\mathbb{P}(T > k)$ avec T est définie par $T = inf\{t \mid t > 0,\ R_t \leq 0\}$. Si par contre, l'assureur décide de se réassurer à l'aide d'un traité *excess of loss* de retention M et de limite L telles que $M, L \geq 0$ et $M \geq L$, donc si, en indice, on affecte c pour la cédante et r pour le réassureur, on aura le partage suivant :

- $W_i = W_i^c + W_i^r,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots$
- $W_i^c = min(W_i, M) + max(0, W_i - L)$ charge de sinitre de la cédante

- $W_i^r = min\,(L - M, max\,(0, W_i - L))$ charge de sinitre du réassureur
- $h\,(t) = h_c\,(t) + h_r\,(t)$
- $R_t^c = h_c\,(t) - Y_{N_t}^c$ le surplus de l'assureur,
- $R_t^r = h_r\,(t) - Y_{N_t}^r$ le surplus de réassureur,
- $R_t = R_t^c + R_t^r$

Or, il existe deux alternatives au problème d'optimisation. Le premier est sachant M et L fixées, comment la recette des primes doit êtres partagée entre la cédante et le réassureur de manière optimale en minimisant la probabilité de ruine jointe et la deuxième quelles sont les valeurs optimales pour les paramétres M et L permettant de minimiser la même probabilité jointe.

On peut ainsi définir deux problèmes d'optimisation :

$$\begin{cases} max_{L,M}\mathbb{P}\,(T^c > k, T^r > k) \\ s.c\;\; h\,(t)\,,\; h_c\,(t)\,,\; h_r\,(t)\;\; fixes,\;\; h\,(t) = h_r\,(t) + h_c\,(t) \end{cases} \tag{5.79}$$

$$\begin{cases} max_{h_c(t)}\mathbb{P}\,(T^c > k, T^r > k) \\ s.c\;\; M,\; L\; fixes\; avec\; M \leq L \end{cases} \tag{5.80}$$

Kaishev & Dimitrova (2008) [62] interprètent les deux problèmes précédents comme suit :

- Pour le problème 5.79, la cédante veut retenir une part fixe $h_c\,(t)$ des revenues des primes $h\,(t)$.
- Alternativement, si les valeurs de M et L sont fixées comme dans le cas du problème 5.80, la cédante étant averse au risque, elle doit maximiser la probabilité de survie jointe en fonction de la partie des primes à retenir.

Kaishev & Dimitrova (2008) [62] ont retrouvé une expression explicite pour la probabilité de survie jointe de la cédante et du réassureur dans le cas d'un traité en excess of loss de rétention M et de limite L définie dans le théorème suivant :

Théorème de Kaishev & Dimitrove

La probabilité de survie jointe de la cédante et du réassureur à un horizon de temps x donné avec une couverture en excess of loss de rétention M et de limite L est donnée par :

$$\mathbb{P}\left(T^c > x, T^r > x\right) = e^{-\lambda k}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_0^{h(x)} \int_0^{h(x)-w_1} \right.$$
$$\left. \ldots \int_0^{h(x)-w_1-\cdots-w_n-1} A_n\left(x, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k\right) \Psi\left(w_1, \ldots, w_k\right) dw_k \ldots dw_1 \right)$$

avec $\tilde{v}_j = min\left(\tilde{z}_j, k\right)$ et $\tilde{z}_j = max\left(h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^r\right)\right)$, $y_j^c = \sum_{i=1}^{j} w_i^c$, $y_j^r = \sum_{i=1}^{j} w_i^r$, $j = 1, \ldots, n$ et $A_k\left(x, \ldots, w_k\right)$ *sont des polynômes classiques d'Appel avec* $A_0\left(x\right) = 1$, $A_k'\left(x\right) = A_{k-1}\left(x\right)$ *et* $A_k\left(\tilde{v}_k\right) = 0$ et T^c, T^r *sont les temps de ruine respectivement de l'assureur et du réassureur.*

Les polynômes d'**Appell (1880)**, $A_k\left(x\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ sont définis à partir d'une fonction génératrice :

$$f\left(y\right) e^{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(x\right)\left(\frac{y^k}{k!}\right) \tag{5.81}$$

Avec $f\left(y\right) = \sum_{k=0}^{infty} A_k\left(0\right)\left(\frac{y^k}{k!}\right)$; avec $f\left(0\right) \neq 0$.

Démonstration

L'évènement de survie joint de la cédante et du réassureur peut être écrit comme suit :

$$\left\{T^c; T^r\right\} = \cap_{j=1}^{\infty}\left(\left\{\left(h_c^{-1}\left(y_j^c\right) < T_j\right) \cup \left(h_r^{-1}\left(y_j^c\right) < T_j\right)\right\} \cup \left\{x < T_j\right\}\right) \tag{5.82}$$

$$\left\{T^c; T^r\right\} = \cap_{j=1}^{\infty}\left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\} < T_j\right\} \cup \left\{x < T_j\right\}\right) \tag{5.83}$$

Notons $\Omega = \cup_{k=0}^{\infty}\left\{N_x = k\right\}$, appliquons le théorème de partition, on aura :

$$\mathbb{P}\left(T^c > x, T^r > x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(N_x = k\right) \mathbb{P}\left(T^c > x, T^r > x \mid N_x = k\right) \tag{5.84}$$

$$\mathbb{P}\left(T^c > x, T^r > x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda x\right)^k}{k!} e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(T^c > x, T^r > x \mid \left\{T_k \leq x\right\} \cap \left\{T_{k-1} \leq x\right\}\right) \tag{5.85}$$

Si on réarrange (5.83) dans (**??**), on obtient :

$$\mathbb{P}\left(T^c > x, T^r > x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda x\right)^k}{k!} e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(\cap_{j=1}^{\infty}\left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\} < T_j\right\} \cup \left\{x < T_j\right\}\right)\right.$$
$$\left. \mid \left\{T_k \geq x\right\} \cap \left\{T_{k+1} > x\right\}\right)$$

Or, on sait que $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B \mid B)$ donc :

$$\mathbb{P}(T^c > x, T^r > x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(\cap_{j=1}^{\infty} \left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\} < T_j\right\} \cup \left\{x < T_j\right\}\right)\right.$$
$$\left. \cap \left(\{T_k \geq x\} \cap \{T_{k+1} > x\}\right) \mid \{T_k \geq x\} \cap \{T_{k+1} > x\}\right)$$

Or,

$$\left(\cap_{j=1}^{\infty} \left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\} < T_j\right\} \cup \left\{x < T_j\right\}\right) \cap \left(\{T_k \geq x\} \cap \{T_{k+1} > x\}\right)\right.$$
$$=$$
$$\left.\left(\cap_{j=1}^{\infty} \left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\} < T_j\right\}\right)\right) \cap \{T_{k+1} > x\}\right)$$

Donc, en utilisant ce dernier résultat, on obtient :

$$\mathbb{P}(T^c > x, T^r > x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(\cap_{j=1}^{\infty} \left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\} < T_j\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left. \cap \left(\{T_k \geq x\} \cap \{T_{k+1} > x\}\right) \mid \{T_k \geq x\} \cap \{T_{k+1} > x\}\right)\right.$$

D'où le résultat suivant :

$$\mathbb{P}(T^c > x, T^r > x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(\cap_{j=1}^{\infty} \left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\} < T_j\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left. \mid \{T_k \geq x\} \cap \{T_{k+1} > x\}\right)\right.$$

Or, selon **Karlin & Taylor (1981)**, on a :

$$\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, \ldots, T_k \leq t_k \mid \{T_k \leq x\} \cap \{T_{k+1} > x\}) = \mathbb{P}\left(\tilde{T_1} \leq t_1, \ldots, \tilde{T_k} \leq t_k\right)$$

avec $\tilde{T}_1 \leq \cdots \leq \tilde{T}_k$ sont des statistiques d'ordre de k variables aléatoires uniformes sur $[0, x]$. Or, $Y_j^c,\ Y_j^r,\ j = 1, \ldots$ et $T_k,\ k = 1, 2, \ldots$ sont indépendantes, on obtient donc :

$$\mathbb{P}(T^c > x, T^r > x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(\cap_{j=1}^{\infty} \left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right), h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\} < \tilde{T}_j\right\}\right)\right) \tag{5.86}$$

avec $\tilde{T}_1 \leq \cdots \leq \tilde{T}_k$ sont des variables aléatoires de densité jointe :

$$f_{T_1 \ldots T_k}(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} \frac{k!}{x^k} \; si \; 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k \\ \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

Si on note :

$$D_k = \begin{pmatrix} 0 \leq w_1, \ldots, 0 \leq w_k \\ \\ w_1 + \cdots + w_k \leq h(x) \end{pmatrix}$$

on peut exprimer (83) par :

$$\mathbb{P}\left(\cap_{j=1}^{\infty}\left(\left\{max\left\{h_c^{-1}\left(y_j^c\right),h_r^{-1}\left(y_j^c\right)\right\}<\tilde{T}_j\right\}\right)\right)=\int\ldots_{D_k}\int\Psi\left(w_1,\ldots,w_k\right)\int_{min\left(max\left(h_c^{-1}\left(y_1^c\right)h_r^{-1}\left(y_1^r\right)\right),x\right)<t_1<x}$$

$$\ldots\int_{min\left(max\left(h_c^{-1}\left(y_k^c\right)h_r^{-1}\left(y_k^r\right)\right),x\right)<t_k<x}\frac{k!}{x^k}dt_k\ldots dt_1dw_k\ldots dw_1$$

Supposons que $\tilde{v}_j=min\left(\tilde{z}_j,x\right)$, $\tilde{z}_j=max\left(h_c^{-1}\left(y_j^c\right),h_r^{-1}\left(y_j^r\right)\right)$ pour $j=1,\ldots,k$. Reprenons donc l'expression de la probabilité de survie jointe, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(T^c>x,T^r>x\right)=e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\int\ldots\int_{D_k}\Psi\left(w_1,\ldots,w_k\right)\int_{\tilde{v}_1<t_1<x}\ldots\int_{\tilde{v}_k<t_k<x}\frac{k!}{x^k}dt_k\ldots dt_1dw_k\ldots dw_1$$

$$\mathbb{P}\left(T^c>x,T^r>x\right)=e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\int\ldots\int_{D_k}\Psi\left(w_1,\ldots,w_k\right)$$

$$A_k\left(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_k\right)dw_k\ldots dw_1$$

avec

$$A_k\left(x,\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_k\right)=\int_{\tilde{v}_1<t_1<x}\ldots\int_{\tilde{v}_k<t_k<x}\frac{k!}{x^k}dt_k\ldots dt_1dw_k\ldots dw_1$$

Kaishev & Dimitrova (2006) ont donné une formule alternative de cette probabilité de survie jointe sous forme d'un théorème qu'on présente ci-dessous,

Théorème de Kaishev & Dimitrova 2

$$\mathbb{P}\left(T^c>x,T^r>x\right)=e^{-\lambda x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{h(x)}\int_0^{h(x)-w_1}\ldots\right.$$

$$\left.\int_0^{h(x)-w_1-\cdots-w_{k-2}}\int_{h(x)-w_1-\cdots-w_{k-1}-w_{k-1}}^{\infty}\beta_l\left(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{l-1},x\right)\Psi\left(w_1,\ldots,w_k\right)dw_k\ldots dw_1\right)$$

Avec :

- $\beta_l\left(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{l-1},x\right)=\sum_{j=1}^{l-1}(-\lambda)^j b_j\left(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_j\right)\left(\sum_{m=0}^{l-j-1}\frac{(x\lambda)^m}{m!}\right)$
- $\beta_0(.)=0$
- $\beta_1(.)=1$
- l est déterminée de sorte que $\tilde{z}_1\leq\cdots\leq\tilde{z}_{l-1}\leq x<\tilde{z}_l$
- $b_j\left(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_j\right)=\sum_{i=1}^{j}(-1)^{j+1}\frac{\tilde{z}_j^{j-i+1}}{(j-i+1)!}b_{i-1}\left(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_{i-1}\right)$
- $b_0=1$, $\tilde{z}_j$ et $\Psi\left(w_1,\ldots,w_k\right)$ sont définies de même que dans le théorème 1.

pour la démonstration, on invite le lecteur à consulter Kaishev & Dimitrova (2006) [**?**]. Ensuite, les auteurs ont démontré l'existence d'une solution optimale aux problèmes 5.27 et 5.79 via des méthodes numériques illustrées dans leur papier.

Chapitre 6

Réassurance optimale et contrôle stochastique

6.1 Introduction

Dans le chapitre 5, l'objectif était de pouvoir déterminer, pour un risque donné ou un ensemble de risques, la rétention optimale qui satisfait souvent à des critères que se fixaient les assureurs tels que la maximisation de l'espérance de profit sous contrainte de variance, la minimisation de probabilité de ruine, la minimisation des mesures de risque. Cependant l'optimisation sera beaucoup plus compliquée si on autorise la cédante à ajuster sa stratégie de réassurance d'une manière dynamique à chaque instant $t \geq 0$. Dans ce cas, la plupart des études font référence à la théorie du contrôle optimal. En effet, on considère que la richesse de l'assureur évolue selon des systémes dynamiques en avenir incertain et sur lesquels on peut agir en vue d'optimiser un certain critére économique. Pour les problémes de contrôle stochastique, à partir d'une donnée initiale et d'un contrôle, le systéme peut suivre différentes trajectoires. Dans le cas stochastique la trajectoire optimale dépend de l'information disponible au contrôleur à tout instant $t \geq 0$. Dans le cas de l'information compléte, auquel nous nous restreindrons ici, la méthode de la Programmation Dynamique conduit à des équations aux dérivées partielles du deuxiéme ordre non linéaires (équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman) dont la résolution permet d'obtenir la fonction valeur et des contrôles en boucle fermée. Dans

le cas de l'observation incompléte, la méthode de la Programmation Dynamique conduit à des équations de dimension infinie. Dans ce papier, on s'intéresse à un problème d'optimisation de la réassurance lorsque le surplus de la cédante est décrit à l'aide d'une diffusion stochastique comme l'on fait Taksar & al([112], [111], [114]),Schmidli [105], [100], [103], [102], Bai & Guo [5], He & Liang [54] et Hipp [56]. . .

6.2 Cadre de travail

Supposons donc, le cas d'une compagnie d'assurance dont la dynamique de réserves (surplus) est décrite par un modèle classique de Cramèr Lundberg :

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i \tag{6.1}$$

- $c = (1+\eta)\, m$: l'intensité des primes par unité de temps, $\eta > 0$ représente les chargements et $m = E(N)\, E(Z)$ l'espérance de la perte.
- x : surplus initial.
- N_t : Processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ que l'on suppose égal à 1 sans perte de généralité.
- Z_i : une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées représentant les montants des sinistres avec une fonction de distribution F_Z, et d'espérance $EZ > 0$, $E \mid Z \mid^2 < \infty$ et indépendantes de N.

Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Le processus de surplus décrit dans (6.1) peut être approximé par une diffusion stochastique si le portefeuille d'assurance en question est suffisament large, de sorte que le montant d'un sinistre individuel soit relativement petit par rapport au surplus. **Iglchart et coll** [59] ont démontré qu'une telle approximation est possible en adoptant les transformations suivantes ; supposons que $m = m_n$ et aussi $c = c_n$ dans (6.1) dependent de n et que multipliées par $\sqrt{n}$, elles convergent vers zéro c'est à dire $m' = lim_{n\to\infty} m_n \sqrt{n}$ et $c' = lim_{n\to\infty} c_n \sqrt{n}$ existent. Si on fait un changement de temps et on normalise l'espace d'état : $R_t \mapsto \frac{R_{nt}}{\sqrt{n}}$, alors la limite du processus R_t satisfera (6.2)

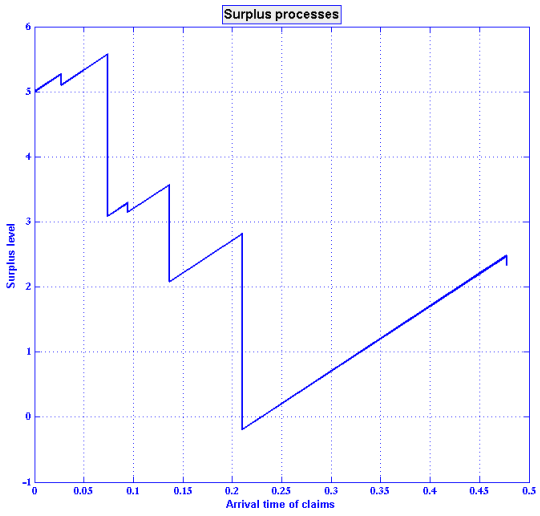


FIGURE 6.1 – Processus de réserve

avec $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, $\mu = c' - \lambda m'$ et $\sigma^2 = E\left(Z^2\right)$:

$$\begin{cases} dX_t = \mu dt + \sigma dW_t^{(1)} \\ X(0) = x \end{cases} \tag{6.2}$$

Il est important de signaler que cette approximation ne peut être appliquée que dans le cas de larges portefeuilles d'assurance dans la mesure où un sinistre est largement inférieur au montant de surplus. Dans ce qui suit, on considère le cas d'une compagnie d'assurance dont le surplus est gouverné par la diffusion stochastique (6.2). Afin de réduire son risque d'assurance, la compagnie se réassure en souscrivant un traité de réassurance proportionnel de taux de rétention $a \in [0,1]$ et qu'elle a aussi la faculté d'investir son surplus dans un marché type *Black & Scholes*. Taksar et al [114] ont étudié ce problème en adoptant le critère de minimisation de la probabilité de ruine. Taksar & Markussen [113] ont considéré le cas d'une compagnie d'assurance dont le surplus est gouverné par (6.2) et qui a la possibilité d'investir dans un actif risqué et un autre sans risques. Ils ont étudié l'optimalité des traités en quote part en minimisant la probabilité de ruine et en tenant compte des coûts de transaction. Taksar & al [111] [112] [114] ont développé la même idée que celle de Taksar & Markussen [113] mais en introduisant la possibilité de vente à découvert et de

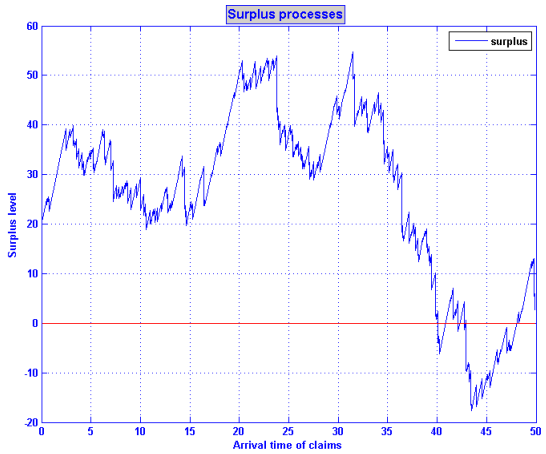


FIGURE 6.2 – Processus de réserve à 50 périodes

l'emprunt. Ils ont réussi à résoudre l'équation de *Hamilton Jaccobi Bellman* en trouvant des formules explicites pour les paramètres de contrôle ainsi que la probabilité de ruine optimale.

Dans ce papier, l'objectif est de déterminer la stratégie de réassurance et celle d'investissement optimales permettant de maximiser la valeur intrinsèque de la compagnie d'assurance dans le cas d'un traité de réassurance en *quote part*. Ce papier est donc organisé comme suit ; dans la section 6.3, on donne une formulation mathématique du problème et on discute le critère d'optimisation. Dans la section 6.4, on presente rapidement le principe de programmation dynamique de Bellman et on détermine l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman. Dans les sections 6.5, on résoud cette dernière. Finalement, dans la section 6.6, on illustre les résultats par des exemples numériques.

6.3 Formulation du problème

Reprenons la dynamique de surplus décrite dans (6.2) et supposons que l'assureur peut réajuster sa réassurance d'une manière dynamique. On suppose en premier lieu, le cas d'un traité en quote part dont le taux de rétention est égale à a. Dans ce cas, la cédante allège son exposition au risque de chaque sinistre, ce qui fait que $(1-a)\,100\%$ de la charge de sinistres

est cédée au réassureur. En contrepartie la cédante cède une partie des primes $\beta(1-a)$ avec $\beta \geq \mu$ représentant les chargements du réassureur. Cependant, elle peut ajuster son niveau de rétention $\forall\, t \geq 0$ d'où la dynamique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = (\mu - \beta(1-a_t))\,dt + a_t \sigma dW_t^{(1)} \\ X(0) = x \end{cases} \tag{6.3}$$

Supposons aussi que la cédante peut réinvestir une proportion α_t de son surplus en actif sans risque et $(1-\alpha_t)$ en actif risqué, supposé divisible, évoluant dans un marché de type *Black & Scholes* avec $W^{(2)}$ et $W^{(1)}$ deux mouvements Browniens indépendants :

$$dB_t = r_0 B_t dt \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} dS_t = r_1 S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^{(2)} \\ S(0) = S_0 \end{cases} \tag{6.5}$$

Le processus de surplus sera donc défini comme suit :

$$\begin{cases} dX_t = \left[(\mu - (1-a_t)\beta) + (r_0(1-\alpha_t) + r_1\alpha_t)X_t\right]dt \\ \qquad +\sigma a_t dW_t^{(1)} + \sigma_1 \alpha_t X_t dW_t^{(2)} \\ X(0) = x \end{cases} \tag{6.6}$$

Supposons que le but ultime de la cédante est la maximisation de sa valeur intrinsèque qui est définie par la valeur actuelle des surplus futurs. En premier lieu, soit le temps de ruine τ défini comme le premier instant où le surplus passe au dessous de 0. Donc, τ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$:

$$\tau = inf\,\{t > 0,\ X_t \leq 0\} \tag{6.7}$$

Soit la fonctionnelle J représentant la valeur de la cédante à chaque instant $t \geq 0$ sous le contrôle (a_t, α_t) appartenant à l'espace de contrôles admissibles $(a_t, \alpha_t) \in [0,1] \times [0,1]\ \forall\, t \geq 0$:

$$J(x,a,\alpha) = E\left(\int_0^\infty e^{-\gamma s} X_s^{(a_s,\alpha_s)} ds\right) \tag{6.8}$$

On note que γ est le taux technique supposé inférieur au taux sans risque r_0. L'objectif est de maximiser la performance de la cédante en choisissant d'une manière optimale à la fois la

réassurance et le réinvestissement. Ceci revient à déterminer la fonction valeur optimale :

$$V(x) = max_{(a,\alpha)\in[0,1]^2} J(x,a,\alpha) \tag{6.9}$$

On observera que la maximisation de la valeur de la cédante sous-entend l'éloignement de la ruine.

6.4 Equation d'Hamilton Jacobi Bellman

6.4.1 Principe de Bellman

Théoreme 5. *La fonction valeur satisfait :*

$$V(x) = max_{(a,\alpha)\in[0,1]^2} E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t dt + e^{-\gamma\tau} V(X_\tau)\right) \tag{6.10}$$

pour tout τ un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$.

Démonstration 2. *Etant donné un contrôle arbitraire $(a,\alpha) \in [0,1]^2$, on a par l'unicité de l'équation (6.6) :*

$$X_t^{(a_t,\alpha_t),x} = X_t^{(a_t,\alpha_t),X_\tau^x},\ t \geq \tau.$$

Or, on sait que :

$$\begin{aligned} J(x,a,\alpha) &= E\left(\int_0^\infty e^{-\gamma t} X_t dt\right) \\ &= E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t dt + \int_\tau^\infty e^{-\gamma t} X_t dt\right) \\ &= E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t dt + e^{-\gamma\tau} \int_0^\infty e^{-\gamma t} X_{t+\tau} dt\right), \end{aligned}$$

en posant $Y_t = X_{t+\tau},\ Y_0 = X_\tau$, on obtient :

$$J(x,a,\alpha) = E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t dt + e^{-\gamma\tau} \int_0^\infty e^{-\gamma t} Y_t dt\right)$$

$$V(x) \leq max_{(a,\alpha)\in[0,1]^2} E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t dt + e^{-\gamma\tau} V(Y_0)\right). \tag{6.11}$$

D'autre part, d'après Pham (2007) [87], considèrons pour tout $\epsilon > 0$ un contrôle ϵ-optimal $(a^\epsilon, \alpha^\epsilon)$ de $V(X_\tau^x)$ tel que :

$$J(X_\tau, a^\epsilon, \alpha^\epsilon) \geq e^{-\gamma\tau} V(X_\tau) + \epsilon.$$

Etant donné $(a, \alpha) \in [0,1]^2$*, on définit le contrôle comme suit :*

$$(\tilde{a}, \tilde{\alpha}) = \begin{cases} (a, \alpha) \; si \; t \in [0, \tau], \\ (a^\epsilon \alpha^\epsilon) \; si \; t \in [\, \tau, \infty [\, . \end{cases}$$

On aura donc ;

$$J(x, \tilde{a}, \tilde{\alpha}) = E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t^{(a_t, \alpha_t)} dt\right) + J(X_\tau, (a^\epsilon, \alpha^\epsilon))$$

$$J(x, \tilde{a}, \tilde{\alpha}) \geq E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t^{(a_t, \alpha_t)} dt + e^{-\gamma\tau} V(X_\tau) + \epsilon\right),$$

d'où :

$$V(x) \geq max_{(a,\alpha)\in[0,1]^2} E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t + e^{-\gamma\tau} V(X_\tau)\right). \tag{6.12}$$

Donc d'après l'inégalité (6.11) et (6.12), on obtient le résultat suivant :

$$V(x) = max_{(a,\alpha)\in[0,1]^2} E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t dt + e^{-\gamma\tau} V(X_\tau)\right).$$

La fonction valeur V est croissante et positive.

Démonstration 3. *Soient deux processus* (X_t) *et* (Y_t) *dont la dynamique est celle définie par (6.6) avec* $X_0 = x$ *et* $Y_0 = y$ *tel que* $x \geq y \geq 0$ *et un couple de contrôle arbitraire* (a, α)*. Soit le processus* (Z_t) *défini par :*

$$Z_t = X_t - Y_t$$

(Z_t) *suit donc un brownien géométrique de dérive positive donc de solution :*

$$Z_t = (x - y)\; e^{\left(r_0 + (r_1 - r_0)\alpha_t - \frac{\sigma_1^2 \alpha_t^2}{2}\right)t + \sigma_1 \alpha_t \sqrt{t} W_t^{(2)}} \geq 0$$

D'après la définition de la fonction valeur, on conclue que $V(x) \geq V(y) \quad \forall x \geq y.$

6.4.2 Dérivation formelle de l'équation d'HJB

L'équation d'Hamilton Jacobi Bellman décrit le comportement local de la fonction valeur V lorsqu'on fait tendre le temps d'arrêt vers 0. Considérons donc un contrôle arbitraite constant $(a, \alpha) \in [0,1]^2$. D'après (6.10) , on peut écrire :

$$V(x) \geq E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t dt + e^{-\gamma\tau} V(X_\tau)\right) \tag{6.13}$$

Comme on a supposé que V est suffisamment régulière, en appliquant la formule d'Ito, on obtient :

$$V(X_\tau) = V(x) + \int_0^\tau \mathcal{L}^{(a,\alpha)}.V(X_t)\, dt + M_t \tag{6.14}$$

$\mathcal{L}^{(a,\alpha)}$ est l'opérateur des dérivées partielles qui appliqué à $V(x)$ donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(a,\alpha)}.V(x) = &\left[\mu - (1-a)\beta + (r_0(1-\alpha) + r_1\alpha)\, x\right] V'(x) \\ &+\frac{1}{2}\left[\sigma^2 a^2 + \sigma_1^2\alpha^2 x^2\right] V''(x),\end{aligned}$$

$$M_t = \int_0^\tau \sigma a dW_t^{(1)} + \int_0^\tau \sigma_1 \alpha V'(X_t)\, dW_t^{(2)}.$$

En remplaçant (6.14) dans l'inégalité (6.13), vu que l'intégrale stochastique est une variable aléatoire centrée, on trouve :

$$V(x) \geq E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t + \mathcal{L}^{(a,\alpha)}.V(X_t)\, dt + e^{-\gamma\tau} V(x)\right).$$

Appliquons l'espérance mathématique de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$E\left(\left(1 - e^{-\gamma\tau}\right) V(x)\right) \geq E\left(\int_0^\tau e^{-\gamma t} X_t + \mathcal{L}^{(a,\alpha)}.V(X_t)\, dt\right),$$

Divisons par τ et faisons ensuite tendre τ vers 0, on obtient :

$$\gamma V(x) - x - \mathcal{L}^{(a,\alpha)}.V(x) \geq 0. \tag{6.15}$$

Or pour un contrôle optimal $(a^*, \alpha^*) \in [0,1]^2$, on sait que $V(x) = J(x, a^*, \alpha^*)$.

En appliquant le même raisonnement, on obtient :

$$\gamma V(x) - x - \mathcal{L}^{(a^*,\alpha^*)}.V(x) = 0 \tag{6.16}$$

D'après (6.15) et (6.16), il en résulte l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman suivante :

$$-x + \gamma V(x) + max_{(a,\alpha)\in[0,1]^2}\left\{-\mathcal{L}^{(a,\alpha)}.V(x)\right\} = 0 \tag{6.17}$$

Notons par g et h deux fonctions définies par :

$$\begin{array}{c} g\ :\ [0,1]\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^-\to\mathbb{R} \\ (a,y,z)\mapsto g(a,y,z) = -\frac{1}{2}\sigma^2a^2z - \beta ay \end{array} \tag{6.18}$$

$$\begin{array}{c} h\ :\ \mathbb{R}^{*+}\times[0,1]\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^-\to\mathbb{R} \\ (x,a,y,z)\mapsto h(x,a,y,z) = -\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2x^2z - (r_1-r_0)\alpha xy \end{array} \tag{6.19}$$

Théoreme 6. *La solution V du problème d'optimisation (6.9) satisfait l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman suivante :*

$$\begin{array}{c} -x + \gamma V(x) + (\beta - \mu - r_0x)V'(x) + max_{a\in[0,1]}g\left(a, V'(x), V''(x)\right) \\ +max_{\alpha\in[0,1]}h\left(\alpha, x, V'(x), V''(x)\right) = 0 \end{array} \tag{6.20}$$

La fonction valeur V est une fonction concave.

Démonstration 4. *Considérons deux processus de surplus $(X_t)^{(x)}_{t\geq0}$ et $(X_t)^{(y)}_{t\geq0}$, suivant la dynamique (6), de valeurs initiales respectives x et y avec π_x et π_y deux contrôles admissibles respectifs. Formellement :*

$$\pi_.(t) = (a_.(t), \alpha_.(x)) \in [0,1]^2$$

Soit $\xi \in\ ]0,1[$ et définissons le contrôle π_z par :

$$\pi_z(t) = \xi\pi_x(t) + (1-\xi)\pi_y(t) \tag{6.21}$$

D'après la linéarité de la dynamique (6.6), π_z est un contrôle admissible dans $[0,1]^2$ associé au processus de surplus $X^z_t = \xi X^x_t + (1-\xi)X^y_t$ prenant une valeur intiale égale à $z = \xi x + (1-\xi)y$ et dont le temps de ruine est égale à $\tau_z = min\left\{\tau_x, \tau_y\right\}$. Donc d'aprs (6.8), on a :

$$J(z,\pi_z) = \xi J(x,\pi_x) + (1-\xi)J\left(x,\pi_y\right) \tag{6.22}$$

Soit $\epsilon > 0$, on choisit les contrles $\pi_x,\ \pi_y$ tels que

$$J(x,\pi_x) \geq V(x) - \epsilon \ \ et\ \ J\left(y,\pi_y\right) \geq V(y) - \epsilon,$$

d'aprs (6.22), on obtient :

$$J(z,\pi) \geq \xi V(x) + (1-\xi) V(y) - \epsilon,$$

c'est-à-dire que

$$V(z) \geq \xi V(x) + (1-\xi) V(y) - \epsilon.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient la concavité de V.

□

6.5 Résolution de l'équation d'HJB

D'après le théorème 2, la fonction valeur satisfait l'équation d'HJB (6.20) suivant :

$$-x + \gamma V(x) + (\beta - \mu - r_0 x) V'(x) + max_{a\in[0,1]} g\left(a, V'(x), V''(x)\right)$$
$$+max_{\alpha\in[0,1]} h\left(\alpha, x, V'(x), V''(x)\right) = 0$$

Avec les conditions $V(0) = 0$ et $V'(0) = \frac{1}{\gamma}$. Les fonctions g et h sont définies respectivement dans (6.18) et (6.19). Noter que la solution de cette équation est prise au sens du viscosité.
On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$G''(z) + f(z)\ G'(z) - \frac{r_0}{k} G(z) + \frac{\beta - \mu}{k} = 0 \tag{6.23}$$
$$\text{Avec } k = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{\sigma^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2}{\sigma_1^2}\right) \text{ et } f(z) = \frac{\gamma e^z + r_0 - \gamma - k}{k}$$

Soit G solution de l'équation (6.23). On suppose que $lim_{x\to\infty} G(x) = \infty$ alors $G'(x) > 0\ \forall\ x > 0$.

Démonstration 5. *Pour démonstrer que G est croissante, il suffit de démontrer que $G'(x) \geq 0$ $\forall x > 0$. Supposons que G admet un maximum au point $x_i \in \omega = [x_{min}, x_{max}]$. Donc d'après le principe de maximum $G(x) = G(x_i)\ \forall\ x \in \omega$ d'où $G(x_{min}) = G(x_{max})$ ce qui est impossible. Donc G n'admet ni minimum ni maximum, G est donc croissante. Alors que pour montrer que G est strictement croissante, on suppose qu'il existe x_i tel que $G'(x_i) = 0$. Dans ce cas on obtient d'après 6.23 :*

$$G''(x_i) - \frac{r_0}{k} G(x_i) + \frac{\beta - \mu}{k} = 0$$

Soit $\epsilon > 0$, $G''(x_i) = \frac{G'(x_i+\epsilon) - G'(x_i)}{\epsilon} + \circ(\epsilon)$. Donc, on aura $G'(x_i + \epsilon) > 0$, ce qui fait que x_i soit un minimum de G. Or, on a bien montrer que G n'admet ni un minimum ni un maximum. Donc G est strictement croissante.

G est donc continue et strictement croissante donc bijective.

Théoreme 7. *La solution de l'équation d'HJB (6.20) est donnée par :*

$$V(x) = \mu \int_0^x e^{-G^{-1}(y)} dy.$$

Avec G solution de l'équation 6.23

Démonstration 6. *On sait d'après le lemme 6.4.2 que la fonction valeur V est concave. Donc, d'aprs la même idée de Taksar & Loft (2007) [114], il existe une fonction G définie par :*

$$G : [\,0, \infty\,[\to [\,0, \infty\,[\quad \textit{tel que} \quad \begin{cases} V'(G(z)) = \frac{e^{-z}}{\gamma} \\ G(0) = 0 \\ G'(0) = 1. \end{cases}$$

En remplaçant x par G (z) dans (6.20), on aura :

$$\begin{cases} -G(z) + \gamma V(G(z)) + (\beta - \mu - r_0 G(z)) V'(G(z)) + max_a g\left(a, V'(G(z)), V''(G(z))\right) \\ +max_\alpha h\left(\alpha, G(z), V'(G(z)), V''(G(z))\right) = 0 \\ \\ V(0) = 0 \\ V'(0) = \frac{1}{\gamma} \end{cases}$$

La résolution des max de g et h donne l'équation suivante :

$$-G(z) + \gamma V(G(z)) + (\beta - \mu - r_0 G(z)) V'(G(z)) + k \frac{V'(G(z))^2}{V''(G(z))} = 0 \tag{6.24}$$

Avec $G(0) = 0$, $G'(0) = 1$ et $G(\infty) = \infty$, donc :

$$-G(z) + \gamma V(G(z)) + (\beta - \mu - r_0 G(z)) \frac{e^{-z}}{\gamma} + kG(z) \frac{e^{-z}}{\gamma} = 0$$

En dérivant cette dernière équation et en multipliant par γe^z on obtient :

$$\begin{cases} kG''(z) + (\gamma e^z + r_0 - \gamma - k) G'(z) - r_0 G(z) + \beta - \mu = 0 \\ G(0) = 0 \\ G'(0) = 1. \end{cases} \tag{6.25}$$

Proposition 1. *La solution G de l'équation 6.23 s'écrit sous la forme suivante :*

$$G(y) = (c_1 + c_1(y))\theta(y) e^{f(y)}, \quad c_1 = \theta(0) e^{-\frac{\gamma}{2k}},$$

où

$$c_1(y) = \int_0^y e^{F(z)} (c_3 + \frac{\mu - \beta}{k} \int_0^z e^{-F(x)} dx) dz$$

avec

$$e^{F(z)} = \frac{e^{2f(z)+\frac{\gamma}{k}-2\int_0^z \frac{\theta'(x)f'(x)}{\theta(x)}dx}}{\theta(z)}, \quad f(y) = \frac{(\gamma+k-r_0)\,y-\gamma e^y}{2k}$$

et $\theta(.)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$k\theta''(z)+\phi(z)\,\theta(z)=0,$$

avec $\phi(z)=\frac{1}{2k}(\gamma+k-r_0-\gamma e^z)^2-\frac{e^z}{2}$.

Démonstration 7. *Rappelons que nous devons résoudre l'équation 6.23. La résolution de cette équation sans second membre revient à supposer que $\beta=\mu$, c'est -à- dire les chargements de l'assureur et du réassureur sont égaux, alors la réassurance sera dite "*a Cheap Reinsurance*". Retrouvons donc une solution particulière de l'équation dite sans second membre suivant :*

$$\begin{cases} kG''(z)+(\gamma e^z+r_0-\gamma-k)\,G'(z)-r_0G(z)=0 \\ G(0)=0 \\ G'(0)=1. \end{cases} \tag{6.26}$$

Posons $m(z)=\gamma e^z+r_0-\gamma-k$, l'équation sans second membre relative à (6.25) s'écrit donc comme suit :

$$kG''(z)+m(z)\,G'(z)-r_0G(z)=0. \tag{6.27}$$

Soit $G_s(z)=c_1\theta(z)\,e^{f(z)}$ solution de l'équation (6.27), avec $f(z)=\frac{(\gamma+k-r_0)z-\gamma e^z}{2k}$, $c_1\in\mathbb{R}$ et θ est une solution de l'équation suivante :

$$k\theta''(z)+\varphi(z)\theta(z)=0,$$

avec $\varphi(z)=\frac{1}{2k}(\gamma+k-r_0-\gamma e^z)^2-\frac{e^z}{2}$.

Pour déterminer une solution de l'équation (6.25), on applique la méthode de la variation de constante, i.e $c_1=c_1(z)$:

$$G(z)=c_1(z)\theta(z)e^{f(z)},$$

on derive cette dernire par rapport à z, on obtient :

$$G'(z)=c_1'(z)\theta(z)e^{f(z)}+c_1(z)\theta'(z)e^{f(z)}+c_1(z)\theta(z)f'(z)e^{f(z)} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned} G''(z)=[&c_1''(z)\theta(z)+c_1'(z)\theta'(z)f'(z)+c_1(z)\theta''(z)+c_1'(z)\theta'(z) \\ &+c_1'(z)\theta'(z)f'(z)+c_1(z)\theta(z)f''(z)+c_1(z)\theta(z)f'^2(z)]e^{f(z)}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

En reportant l'équation (6.28) et (6.29) dans l'équation (6.25), on obtient :

$$kc_1''(z)\theta(z) + c_1'(z)(2k\theta'(z)f'(z) + k\theta'(z) + m(z)\theta(z)) = \mu - \beta, \tag{6.30}$$

en posant $c_2(z) = c_1'(z)$ *dans cette dernire équation, on trouve :*

$$kc_2'(z)\theta(z) + c_2(z)(2k\theta'(z)f'(z) + k\theta'(z) + m(z)\theta(z)) = \mu - \beta. \tag{6.31}$$

Soit $c_2^s(z) = c_3 \frac{e^{2f(z)+\frac{\gamma}{k}-2\int_0^z \frac{\theta'(x)f'(x)}{\theta(x)}dx}}{\theta(z)}$, *(avec* c_3 *constante réelle) solution de l'équation sans second membre associée à l'équation (6.31).*

Par la méthode de variation des constantes, les solutions de l'équation (6.31) sont données par :

$$c_2(z) = e^{F(z)}(c_3 + \frac{\mu - \beta}{k}\int_0^z e^{-F(y)}dy),$$

avec $e^{F(z)} = \frac{e^{2f(z)+\frac{\gamma}{k}-2\int_0^z \frac{\theta'(x)f'(x)}{\theta(x)}dx}}{\theta(z)}$.

Une solution générale de l'équation (6.25) est donnée par $G(z) = (c_1 + c_1(z))\theta(z)e^{f(z)}$, *avec* $c_1(z) = \int_0^z c_2(y)dy$, $c_1 = \theta(0)e^{-\frac{\gamma}{2k}}$.

Or, on sait que $V'(G(z)) = \frac{1}{\gamma}e^{-z}$. *Comme* $G(z)$ *est une fonction inversible solution de l'équation (6.25), alors :*

$$V'(x) = \mu e^{-G^{-1}(x)}.$$

On en conclut donc la solution de l'équation (6.17) :

$$V(x) = \mu\int_0^x e^{-G^{-1}(y)}dy \tag{6.32}$$

Les contrôles optimaux a et alpha sont obtenus pa :

$$a(x) = \frac{-\beta V'(x)}{\sigma^2 V''(x)} \tag{6.33}$$

$$alpha(x) = \frac{-(r_1 - r_0)V'(x)}{\sigma_1^2 V''(x)} \tag{6.34}$$

□

Corollaire 1. *La solution de l'équation d'HJB 6.20 est donc donnée par :*

$$V(x) = \mu\int_0^x e^{-G^{-1}(y)}dy.$$

avec G définie dans la proposition 1.

6.6 Algorithme de résolution

Il clair que la résolution de l'équation d'HJB (6.20) passe par la résolution de l'équation (6.23). Pour approximer numériqument la solution de l'équation (6.23), nous utilisons la méthode des différences finies. Reprenons l'équation (6.26) et construisons un maillage de point sur le segment $[0, z_{max}]$ avec X_{max} grand (car G tend vers ∞). Donc, soient :

$$0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_i < \cdots < z_{n-1} < z_n = z_{max} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

On définit :

$$G^{'}(z_i) = \frac{G(z_i) - G(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} \tag{6.35}$$

Supposons ensuite que $\Delta_z = z_i - z_{i-1} = z_{i+k+1} - z_{i+k} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$ et $k = 1, \ldots, n - i$.

$$G^{''}(z_i) = \frac{G(z_{i+1}) - 2G(z_i) + G(z_{i-1})}{(\Delta_z)^2} \tag{6.36}$$

En remplaçant (6.35) et (6.36) dans (6.23), on obtient $\forall\, i = 1, \ldots, n-1$:

$$G(z_{i+1})\left(\frac{k}{\Delta_z} + m(z_i)\right) - G(z_i)\left(\frac{2k}{\Delta_z} + m(z_i) - \Delta_z r_0\right) + kG(z_{i-1}) + \Delta_z(\beta - \mu) = 0 \tag{6.37}$$

Ce système d'équation peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$G^{(z)}_{(n+1\times 1)} = \begin{pmatrix} G(z_0) \\ \vdots \\ G(z_{max}) \end{pmatrix} = A^{-1}_{(n+1\times n+1)} \times B_{(n+1\times 1)} \tag{6.38}$$

Le vecteur $G^{(z)}$ est une approximation numérique de la solution G de l'équation (6.23). Le vecteur $B = \begin{pmatrix} \Delta_z(\beta - \mu) \\ \vdots \\ \Delta_z(\beta - \mu) \end{pmatrix}$ alors que la matrice A est définie comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ k & -\left(\frac{2k}{\Delta_z} + m(z_i) - \Delta_z r_0\right) & \left(\frac{k}{\Delta_z} + m(z_i)\right) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k & -\left(\frac{2k}{\Delta_z} + m(z_i) - \Delta_z r_0\right) & \left(\frac{k}{\Delta_z} + m(z_i)\right) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & k & -\left(\frac{2k}{\Delta_z} + m(z_i) - \Delta_z r_0\right) & \left(\frac{k}{\Delta_z} + m(z_i)\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.39}$$

6.7 Conclusions

Dans cette dernière partie de la thèse, nous avons présenté plusieurs critères d'optimisation de la réassurance en fonction de l'appetie pour le risque. Les développements du chapitre 5 peuvent être utilisés dans le cadre d'un modèle interne alors que le chapitre 6 est plutôt développé dans un cadre théorique. Cependant, la question de réassurance préocupe de plus en plus des assureurs dans la mesure où il faut faire face aux exigences de solvabilité et répondre aux apporteurs de capitaux dans un marché à concurrence accrue.

Conclusion générale

Cette thèse couvre trois sujets de gestion des risques en assurance. La première partie concerne la modélisation du capital économique dans le cadre de la directive Solvabilité II. En effet, à la différence d'un bilan Solvabilité 1 établi en valeur historique (actif en coût d'achat, passif estimé par une projection des engagements au taux technique, sans prise en compte des options cachées), un bilan Solvabilité II est établi en valeur économique (actif en valeur de marché si possible sinon en "mark to model ", passif en "mark to model"). Dans cette optique, le capital économique correspond à un niveau de fonds propres dont doit disposer la compagnie afin de faire face à une ruine économique à 0,5%. La ruine peut être définie comme étant l'instant où les fonds propres seront au dessous de 0 (ruine économique) ou aux exigences minimales des autorités de contrôle (insolvabilité réglementaire) ou des agences de notation (risque de réputation) suite à un sinistre exceptionnel. Cette notion de ruine économique implique une évaluation des actifs en valeur de marché et des passifs en fair value. Cette dernière correspond à l'espérance de la valeur actuelle nette des cash-flows de passifs. Cette espérance doit porter sur l'ensemble des aléas du modèle. Solvabilité II définit donc un nouveau niveau de fonds propres exigible pour les différents acteurs du marché d'assurance plus adéquat à leur profile de risque. Ce capital de solvabilité est déterminé de manière à garantir leur solvabilité dans 99,5% des cas en absorbant les pertes imprévues. Pour le déterminer, ces acteurs ont le choix entre utiliser une formule standard ou un modèle interne développé par la compagnie et validé par les autorités de contrôle. C'est la deuxième option qu'on a choisi de développer dans cette thèse.

Bien que le modèle interne représente une option fastidieuse et coûteuse, ce choix implique

tout de même une meilleure maîtrise des risques et peut être une économie de capital. Dans ce cadre, une compagnie peut estimer de manière spécifique l'ensemble des risques auxquels elle estime être confrontée afin d'estimer son capital réglementaire de solvabilité ainsi que le niveau de ses provisions techniques.

Nous avons commencé par définir le capital économique dans une optique Solvabilité II en mettant l'accent sur le problème de valorisation économique des passifs d'assurance vie lié aux options cachées incluses dans les contrats d'assurance (clause de PB, rachat partiel et total,. . .). Déterminer un capital nécessite d'abord d'évaluer les actifs et les provisions techniques. Les actifs doivent être évalués à l'aide d'approches mark-to-marked alors que la valeur économique des passifs d'assurance est définie comme la somme du Best Estimate qui représente lŠespérance des cash-flows futurs et de la marge de risque. Le capital de solvabilité s'entend alors comme la Value-at-Risk de la variation de capital disponible sur un horizon d'un ans et à un niveau ce confiance de 99,5%. Cette valorisation en *"juste valeur"* impose aux (ré)assureurs de projeter leurs bilan dans le temps afin de déterminer la distribution des fonds propres économiques. La mise en IJuvre d'un modèle actif / passif dans le cadre de Solvabilité 2 conduit, si l'on retient l'utilisation de l'approche risque neutre pour l'évaluation des engagements d'assurance vie, à devoir utiliser des "simulations dans les simulations" (SdS). Cette dernière permet d'estimer la distribution de probabilité des fonds propres économiques à l'aide des simulations Monte Carlo. Une première année de projection dans un univers de probabilité historique, souvent noté dans la thèse *monde réel*, permet d'obtenir différents états de situation de l'économie en $t = 1$. Ensuite, un second jeu de simulations dans un univers risque neutre approprié, permet de déterminer le *Best Estimate* des engagements d'assurance. Cette approche purement simulatoire est très lourde à générer dans un modèle interne et sur différents aléas et portefeuille. Elle induit donc des temps de calcul ingérables. C'est sa principale faiblesse malgré sa conformité aux exigences Solvabilité II.

Pour optimiser cette approche, plusieurs algorithmes d'accélération ont été proposés. Le premier consiste à utiliser un seul jeu de scénarios économique générés dans un univers de probabilité risque-neutre pour les simulations secondaires et de l'ajusté en fonction des informations issues des simulations primaires. Cette méthode a le mérite d'éviter le recalibrage

du générateur des scénarios économiques en fonction des informations financières à la fin de la première période pour générer les scénarios économiques ncessaires pour la valorisation du passif. Cependant, il faut vérifier en fonction des modèles d'évolution des actifs, les propriétés de *market consistency* des scénarios ajustés. D'autres axes d'optimisation consistent à choisir les scénarios primaires les plus adverses en terme de solvabilité tels que l'algorithme de , l'algorithme de quantile géomètrique et l'algorithme des fonctions de profondeur.

D'autres approches alternatives celle des simulations dans les simulations ont été présentées à savoir l'approche par portefeuille répliquant et de l'approche *Least Square Monte Carlo*. La première est une extension d'une technique connue sous la dénomination anglophone *"Asset-Liability Matching"*. Elle a pour objectif de modéliser les passifs d'un assureur en référence à des actifs financiers permettant ainsi de donner une valeur de marché à ces engagements. Cependant dans une optique de détermination de la valeur de marché [1] des engagements d'un assureur. L'idée de répliquer ces engagements réside dans le fait que les produits d'assurance partagent plusieurs caractéristiques avec les dérivés financiers standards. Prenant par exemple la clause de participation aux bénéfices, celle ci n'est mis en place que si les taux de rendements financiers sont élevés, ce qui est similaire à un *Call* sur swaption. En plus, une garantie plancher sur un contrat en unité de compte n'est rien d'autre qu'un *Put* européen sur le sous-jacent du contrats. Donc, aux yeux des spécialistes financiers, plusieurs garanties des contrats d'assurance vie peuvent être traduites par des produits financiers. Donc, par définition un portefeuille répliquant est un portefeuille d'instruments financiers représentant les engagements (cash flow) futures relatifs à un contrat d'assurance permettant ainsi de capter le profile de risque. Il s'agit donc d'un ensemble d'actifs candidats générant à tout instant, des *cash flows* similaires aux engagements de l'assureur et cela sous tout état de la nature possible. La provision technique est alors égale au prix observable du portefeuille d'actif répliquant. En traduisant les engagements par un simple portefeuille d'instruments financiers pour lequel une valeur de marché est disponible ou facile à déterminer via des formules de valorisation

1. En l'absence d'un marché organisé de dettes d'assurance, la valeur de marché des engagements d'assurance ne peut être que théorique. Cette valeur comprend la valeur des prestations y compris les prélèvements sociaux (capitaux décès, rachats totaux, rachats partiaux, arrivées à échéance, participation aux bénéfices. . .), les commissions versées aux réseaux de distribution des contrats, les d'administration et gestion des contrats

analytiques, l'évaluation des engagements sera relativement simple et par la suite le capital économique sera aisément obtenu. La deuxième approche est basée sur des stress tests sur les risques jugés importants par l'assureur "main risk" en comptabilisant à chaque scénario la perte sur la situation nette. Pour mettre en IJuvre cette technique de détermination de capital de solvabilité, plusieurs étapes doivent être identifiées. La première étape est de spécifier les principaux facteurs de risque et d'en déterminer les distributions de probabilité . Cependant, ces facteurs de risque interagissent entre eux car par exemple une situation de hausse des taux n'est pas sans impact sur le rendement des actions et le comportement des épargnants en assurance vie. Il s'avère ainsi important de définir la structure de dépendance entre les différents facteurs de risque. Une fois les deux premières étapes terminées, l'assureur peut avoir recours aux techniques de simulations type Monte Carlo pour générer beaucoup de réalisations des facteurs de risque initialement définis. Cependant, chaque écartement du facteur de risque par rapport à la situation centrale se traduit en pratique par une perte ou un gain sur l'actif ou les engagements de la compagnie d'assurance et donc sur le capital disponible. Il faut donc définir une technique permettant de traduire la sévérité du risque en gain ou perte sur la situation nette de l'assureur. C'est la fonction de perte qui permet d'accomplir cette tâche. En effet, il s'agit d'une fonction permettant d'approximer la perte ou le gain au niveau du capital disponible (sur l'actif ou sur le passif) suite à un écartement du facteur de risque par rapport à sa valeur initiale. En pratique, cette fonction permet d'exprimer la perte en fonction du facteur de risque. Il s'agit en générale d'un polynôme dont les coefficients sont estimés via des techniques de régressions sur des réalisations de perte ou gain déterminées via le modèle ALM. Ces fonctions de perte sont d'importance cruciale dans la mesure où elles permettent de traduire la sévérité du risque en perte ou gain sur le niveau de capital disponible. Entre autres, ces fonctions de perte sont corrigées par les effets des stress combiné dans la mesure où pertes ainsi déterminées ne respectent pas le principe de non séparabilité car, en général, la somme de deux pertes issues de deux stress individuels est différente de la perte effective lorsque les deux stress surviennent simultanément. Il faut donc corriger les fonctions de perte pour tenir compte de cet effet et donc de l'interaction entre les facteurs de risques et de la structure de dépendance que nous avons défini auparavant. En effet, la structure de dépendance reflète la probabilité que deux ou plusieurs risques surviennent au même temps alors que l'interaction reflète l'impact de l'occurrence de deux ou plusieurs

risques simultanément sur la perte ou gain sur la situation nette. Pour déterminer le niveau de capital de solvabilité, on se base sur la technique de simulation de Monte Carlo pour générer énormément de réalisations des facteurs de risque. Ensuite, on se sert des fonctions des pertes et des effets combinés pour traduire les facteurs de risque simulés en perte en capital afin de déterminer une distribution de la perte globale. Le niveau de capital économique correspond à la VaR à 99,5% de cette distribution.

La deuxième partie de cette thèse a mis l'accent sur la modélisation des risques techniques généralement mal appréhendés par les assureurs. Nous avons développé deux approches stochastiques pour modéliser, dans le cadre d'un modèle interne, les risques de longévité, de mortalité et aussi le risque dépendance. Pour les premiers, notre étude développée au chapitre 3 de cette thèse, démontre que la modélisation stochastique de la mortalité d'expérience permet de prendre en compte, à la fois le risque de longévité et le risque de sélection adverse pour les garanties en cas de vie. La prise en compte de l'allongement de la durée de vie humaine par la construction des tables de mortalité prospectives rend plus prudente la tarification des produits d'assurance en cas de vie tels que les rentes viagères. De plus, nous avons mentrer qu'il est possible d'associer à un modèle de trend de mortalité une composante prenant en compte une éventuelle mortalité catastrophique. Il en résulte ainsi un cube de scénarios de mortalité constituant l'unique entrée pour la projection de tous les portefeuilles. Cela permettrait à l'assureur de bénéficier de l'effet de diversification. Au chapitre 4, nous avons rappelé que le vieillissement de la population illustré par le double phénomène d'allongement de l'espérance de vie et de diminution ou stabilisation des naissances entraîne une surreprésentation des personnes âgées au sein de la population totale ce qui peut non seulement menacer directement le financement des retraites mais aussi faire apparaître des nouveaux risques tel que celui de dépendance des personnes âgées. Nous avons aussi signalé que les primes et les indemnités prévues dans le cadre des contrats collectifs, auxquels adhère environ la moitié de la population couverte, sont souvent trop faibles face au coût de la dépendance. Pour répondre aux exigences de Solvabilité II, Nous avons développé un modèle stochastique pour mieux piloter le risque dépendance.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'optimisation du capital

économique en mettant en œuvre la réassurance comme outil de gain en capital économique en proposant des approches de choix optimaux en réassurance. Dans le chapitre 5, l'objectif était de pouvoir déterminer, pour un risque donné ou un ensemble de risques, la rétention optimale qui satisfait souvent à des critères que se fixaient les assureurs tels que la maximisation de l'espérance de profit sous contrainte de variance, la minimisation de probabilité de ruine, la minimisation des mesures de risque. Cependant l'optimisation sera beaucoup plus compliquée si on autorise la cédante à ajuster sa stratégie de réassurance d'une manière dynamique à chaque instant $t \geq 0$. Dans ce cas, la plupart des études font référence à la théorie du contrôle optimal. En effet, on considère que la richesse de l'assureur évolue selon des systémes dynamiques en avenir incertain et sur lesquels on peut agir en vue d'optimiser un certain critére économique. Pour les problémes de contrôle stochastique, à partir d'une donnée initiale et d'un contrôle, le systéme peut suivre différentes trajectoires. Dans le cas stochastique la trajectoire optimale dépend de l'information disponible au contrôleur à tout instant $t \geq 0$. Dans le cas de l'information compléte, auquel nous nous restreindrons ici, la méthode de la Programmation Dynamique conduit à des équations aux dérivées partielles du deuxiéme ordre non linéaires (équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman) dont la résolution permet d'obtenir la fonction valeur et des contrôles en boucle fermée. Dans le cas de l'observation incompléte, la méthode de la Programmation Dynamique conduit à des équations de dimension infinie. Dans le chaître 6, nous avons proposé une stratégie de réassurance dynamique optimale permettant de maximiser la valeur intrinséque de la cédante.

Au total, notre thèse offre des outils et modèles actuariels pour l'évaluation quantitative des risques d'assurance et répond en conséquence aux exigences des futures normes Solvabilité II. En effet, il apparaît au terme de nos recherches que :

- plusieurs approche de modèlisation peuvent être utilisées dans le cadre d'un modèle interne. Chacune ayant ses avantages et ses inconvénients,
- l'assureur pourrait mieux appréhender les risques techniques s'il optait par exemple pour l'une des modèlisations proposées pour les risques de mortalité, longévité ou dépendance,
- une politique de réassurance bien déterminée permet à l'assureur d'épargner du capital,

Notre étude laisse cependant ouvertes diverses questions qui feront l'objet de recherches futures. Par exemple, il serait ainsi intéressant, dans le cadre d'une première extension possible,

d'étudier l'impact de la dépendance les lignes d'affaire sur le capital économique.

Bibliographie

[1] Aase (2002), *Perspectives of risk sharing*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol 2, 2002.

[2] Ahmed & Wilmott (2006), *The Market Price of Interest-rate Risk : Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets*, Wilmott magazine.

[3] Alho (2000), *Discussion of Lee (2000)*, North American Actuarial Journal 4, 91-93.

[4] Arrow (1963), *Uncertainty and the welfare economics of medical care*, American Economic Review, 1963.

[5] Bai, & Guo (2007), *Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint*, Insurance : Mathematics and Economics (2007).

[6] Ben Dbabis M. (2007), *Mortalité d'expérience et impactes sur le solde technique d'un assureur*, Mémoire Master2 ISFA Lyon 1.

[7] Blarenko (1985), Optimal insurance policies, Insurance : Mathematics and Economics, Vol. 4, 1985.

[8] Biffis (2004), *Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations*, Working Paper.

[9] Booth, Maindonald & Smith (2002), Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline, Population Studies, 56

[10] Borch (1960), An attempt to determine the optimum amount of stop-loss reinsurance, Transactions of the XVI International Congress of Actuaries, Vol. 1, 1960.

[11] Borch (1960), Reciprocal reinsurance treaties, The ASTIN Bulletin, Vol. 1, 1960.

[12] Borch (1962), Equilibrium in a reinsurance market, Econometrica, Vol 30, 1962.

[13] Borch (1974), The mathematical theory of insurance, Lexington Books, 1974.

[14] Borch (1985), A theory of insurance premiums, The Geneva Papers on Risk and Insurance, Vol 10, 1985.

[15] Browne (2007), *Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint*, Insurance : Mathematics and Economics (2007).

[16] Brigo & Mercurio (2007), *Interest Rate Models - Theory and Practise*, Springer (Second Edition).

[17] Brouhins & Denuit (2001), *Risque de longévité et rentes viagères*, Belgian Actuarial Bulletin 2.

[18] Brouhins, Denuit & Vermunt (2002), *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*, Insurance : Mathematics and Economics 31 (2002).

[19] Cai & Tan (2007), *Optimal Retention for a Stop-Loss Reinsurance Under the VaR and CTE Risk Measures*, ASTIN Bulletin 2007.

[20] Centino (1997), *Excess of loss reinsurance and the probability of ruin in finite horizon*, ASTIN Bulletin, 1997.

[21] Chakraborty (2010), *Emergent Scenario in Anisotropic Universe*, Springer Science+Business Media, LLC 2010.

[22] Chaouch, Gannoun & Saracco (2008), *Estimation de quantiles géométriques conditionnels et non conditionnels*, Société Française.

[23] Coale & Guo (1989), *Revised regional model life tables at very low levels of mortality*, Population Index 55.

[24] Coale & Kisker (1990), *Defects in data on old age mortality in the United States : New procedures for calculating approximatively accurate mortality schedules and life tables at the highest ages*, Asian and Pacific Population Forum 4.

[25] Commission d'agrément des tables de mortalité (2006), *Ligne Directrice Mortalité*, Institut des actuaires comission d'agrément.

[26] Dahl (2004), *Stochastic mortality in life insurance : market reserves and mortality-linked insurance contracts*, Insurance : Mathematics and Economics.

[27] Deleglise, Hess & Nouet (2009), *Tarification, Provisionnement et Pilotage d'un contrat dépendance*, Bulletin Français d'Actuariat Vol 18, 2009.

[28] Dastarac & Sauveplane (2010), *Les Déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ?*, ENSAE.

[29] De Finetti (1940, *Il problema dei pieni*, Giorn. Ist. Ital. Attuari, Vol.1, 1940.

[30] De Finetti (1957, *Su un'impostacione alternativa dell teoria collectiva del rischio*, Transaction of the XV International Congress of Actuaries, New York, Vol. 2 :pp. 433443, 1957.

[31] Denuit (2008), *Tables de mortalité prospectives : Construction et enjeux actuariels*, CREST, Paris, January 2008.

[32] Delwarde (2004), *Modèle log-bilinéaire pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives*, mémoire pour l'obtention d'un diplome spécialisé en actuariat, Université Catholique de Louvain.

[33] Denuit & Goderniaux (2005), *Closing and projecting lifetables using log-linear models*, Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires.

[34] Devineaux & Loisel (2009), *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des simulations dans les simulations pour le calcul du capital économique solvabilité II*, Bulletin français d'actuariat (2009).

[35] Deestra & Plantin (2004), *La réassurance*, Economica, 2004.

[36] Dickson & Waters (1996), *Reinsurance and Ruin*, Insurance : Mathematics and Economics, Vol 19, 1996.

[37] Duffie (2001), *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, New Jersey, 2001.

[38] Duffie & Stanton(2004), *Estimation of Dynamic Term Structure Models*, PHaas School of Business working paper, 2004.

[39] Drevillon (2005), *Modélisation du risque dépendance à partir des données HID*, CCahiers Techniques Nř02, FFSA, Mars 2005.

[40] Droesbeke, Fichet & Tassi (1989), *Analyse statistique des durées de vie*, Economica 1989.

[41] Eilers & Marx (1996), *Flexible smoothing with B-splines and penalties*, Statistical Sciences 11.

[42] Emanuel, Harrison & Taylor (1975), *A diffusion approximation for the ruin probability with compounded assets*, Scandinavian Actuarial Journal, 1, 37 – 45 (1975).

[43] Fleming & Rishel (1975), *Deterministic and stochastic optimal control*, Berlin Heidelberg New York : Springer (1975).

[44] Fleming & Soner (1993), *Controlled Markov Processes and viscosity solutions*, Berlin Heidelberg New York : Springer (1993).

[45] Gajeck & Zagrodny (2000), *Insurer's optimal reinsurance strategies*, Insurance : Mathematics and Economics, Vol. 27,2000.

[46] Garrido (1989), *Stochastic differential equations for compounded risk reserves*, Insurance : Mathematics Economics (1989).

[47] Gerber (1979), *An introduction to mathematical risk theory*, Huebner Foundation, Philadelphia, PA, 1979.

[48] Gerber & aShiu (2004), *Optimal dividends : analysis with brownian motion*, North American Actuarial Journal, Vol. 8, No 1, 2004.

[49] Gould (1969), *The expected utility hypothesis and the selection of optimal deductibles for a given insurance policy*, Journal of Business, Vol. 42 :pp. 143151, 1969.

[50] Gutterman & Vanderhoof (1999), *Forecasting changes in mortality : a search for a law of causes and effects*, North American Actuarial Journal 2.

[51] Goodman (1979), *models for the analysis of association in crossclassifications having ordered categories*, Journal of the American Statistical Association 74, 1979.

[52] Goovaerts, De Vylder & Haezendonck(1984), *Insurance Premium*, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[53] Gordy & Juneja (2008), *Nested Simulation in Portfolio Risk Measurement*, Financial and Economics Discussion Series.

[54] He & Liang (2007), *Optimal financing and dividend control of the insurance company with proportional reinsurance policy*, Insurance : Mathematics and Economics (2007).

[55] Hess (2000), *Méthodes actuarielles de l'assurance vie*, Economica.

[56] Hipp & Vogt (2003), *Optimal dynamic XL reinsurance*, Astin Bulletin (2003).

[57] Hϕjgaard & Taksar (1998), *Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models* Scandinavian Actuarial Journal (1998).

[58] Horiushi & Wilmoth (1998), *Deceleration in the age pattern of mortality at older ages*, Demography 35.

[59] Iglehart (1969), *Diffusion approximations in collective risk theory*, J. Appl. Prob. 6, 285 à 292 (1969).

[60] Ignatove, Kaishev & Krachunov (2004), *Optimal retention levels, given the joint survival of cedent and reinsurer*, Scandinavian Actuarial Journal 6, 2004.

[61] Kaas, Goovaerts, Dhaene & Denuit (2001), *Modern actuarial risk theory*, Kluwer AP, Boston, 2001.

[62] Kaishev, Dimitrova & Shreve (2008), *Operational risk and insurance : a ruin-probabilistic reserving approach*, The Journal of Operational Risk vol 3, 2008.

[63] Kann (1969), *Some remarks on a recent paper by borch*, The ASTIN Bulletin, Vol 1, 1961.

[64] Kaluszka (2001), *Optimal reinsurance under mean-variance premium principles*, Insurance : Mathematics and Economics, Vol. 28, 2001.

[65] Karatzas & Shreve (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer (Second Edition).

[66] Khalaf Allah, Haberman & Verrall (2006), *Measuring the effect of mortality improvements on the cost of annuities*, Insurance : Mathematics and Economics 39.

[67] Krvavych (2005), *Insurer Risk Management and Optimal Reinsurance*, PhD Thesis, THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES.

[68] Lee (2000), *The Lee-Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications*, North American Actuarial Journal 4.

[69] Lee & Carter (1992), *Modelling and forecasting the time series of US mortality*, Journal of the American Statistical Association 87.

[70] Lee & Nault (1993), *Modeling and forecasting provincial mortality in Canada*, Paper presented at theWorld Congress of International Union for the Scientific Study of Population, Montréal.

[71] Louis (2001), *Etablissement de Tables de Mortalité Prospectives*, l'Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

[72] Luciano & Vigna (2005), *A note on stochastic survival probabilities and their calibration*, ICER, Working Paper.

[73] Lundberg (2001), *Mortality among the elderly in Sweden 1988-1997*, Scandinavian Actuarial Journal.

[74] Magis, Denuit & Walhin (2001), *Une proposition de table prospective pour le marché belge des rentes*, Université Catholique de Louvain, Duscussion papaer.

[75] Luo, Taksar & Tsoi (2007), *Ruin probability minimization through investment and proportional reinsurance*, Working paper.

[76] Luo, Taksarb & Tsoi (2008), *On reinsurance and investment for large insurance portfolios*, Insurance : Mathematics and economics (2008).

[77] Marocco & Pitacco (1998), *Longevity risk and life annuity reinsurance*, Proceedings of the Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, vol. 6, Birmingham, England.

[78] Merton (1976), *The Impact on Option Pricing of Specification Error in the Underlying Stock Price Returns*, Journal of Finance 31, no. 2 (May 1976) : 333-350.

[79] Merton (1976), *Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous*, Journal of Financial Economics 3 (January-February 1976) : 125-144. (Chapter 9 in Continuous-Time Finance.

[80] Milevsky & Promislow (2001), *Mortality derivatives and the option to annuitise*, Insurance : Mathematics and Economics 29.

[81] Moffet (1979), *The risk sharing problem*, Geneva Papers on Risk and Insurance, Vol 5, 1979.

[82] Moeglin (1999), *Mathématiques de l'assurance sur la vie*, Economica 1999.

[83] Mossin (1968), *Aspects of rational insurance purchasing*, Journal of Political Economy, Vol 79, 1968.

[84] Ohlin (1969), *A generalization of a result by Borch and Kahn on the optimal properties of stop-loss reinsurance*, The ASTIN Bulletin, Vol 5, 1969.

[85] Olivieri (2001), *Uncertainty in mortality projections : an actuarial perspective*, Insurance : Mathematics and Economics 29.

[86] Olivieri & Pitacco (2002), *Inference about mortality improvements in life annuity portfolios*, Proceedings of the Transactions of the 27th International Congress of Actuaries, Cancun, Mexico.

[87] Pham (2007), *Optimisation et contrôle stochastique appliqué à la finance*, Collection : Mathématiques et Applications, 2007, XVI, 188 p., Broché SpringerLink

[88] Planchet et al (2012), *Calculs de best estimate de contrats d'épargne par des formules fermées Application à l'ORSA*, cahiers de recherche de l'ISFA nř2012.5.

[89] Planchet & Nteukam (2010), *Evaluation stochastique des contrats d'épargne : agrégation des trajectoires de l'actif et mesure de l'erreur liée à l'agrégation*, Les cahiers de recherche de l'ISFA, WP2118.

[90] Planchet, Faleh & Rullier (2011), *Scénarios économiques et techniques d'allocation d'actifs*, Economica 2011.

[91] Planchet (2007), *Modèles stochastiques de mortalité*, Support de cours, ISFA, Université Claude Bernard Lyon 1.

[92] Planchet & Therrond (2006), *Modèles de durée, Applications actuarielles*, Economica, 2006.

[93] Planchet & Casa (2010), *La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?*, Cahier de recherche de l'ISFA nř2127 et Assurances et gestion des risques Vol.78 (3/4) .

[94] Planchet & Lelieur (2005), *Utilisation des méthodes de Lee-Carter et Log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillons*.

[95] Planchet & Therrond (2006), *L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance*, www.ressources-actuarielles.net.

[96] Planchet & Winter (2006), *Les provisions techniques des contrats de prévoyance collective*, Economica, 2006.

[97] Planchet & Winter (2005), *L'utilisation des splines bidimentionels pour l'estimation de lois de maintien en arrêt de travail*, Bulletin français d'actuariat, vol 6.

[98] Quashi & Denuit (2005), *Modèles d'extrapolation de la mortalité sur les grands âges* , Working paper, Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique Université Catholique de Louvain Louvain-la-Neuve.

[99] Raviv (1979), *The design of an optimal insurance policy*, American Economic Review, Vol 69, 1979.

[100] Schmidli (1994), *Diffusion Approximations for a risk process with the possibility of borrowing and interest*, Comm. Statist. Stochastic Models 10, 365 à 388 (1994).

[101] Schmidli (2004), *Asymptotics of Ruin Probabilities for Risk Processes under Optimal Reinsurance and Investment Policies : the Large Claim Case*, Scand. Actuarial J. (2004).

[102] Schmidli (1993), *Discusion approximation for a risk process with posiibility of borrowing and interest*, Stochastic Models, Vol. 10, 1993.

[103] Schmidli (2001), *Optimal proportinal reinsurance policies in a dynamic setting*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 1, 2001.

[104] Schmidli (2002), *On minimising the ruin probability by investment and reinsurance*, Ann. Appl. Probab., Vol. 12, 2002.

[105] Schrarger (2004), *Affine Stochastic Mortality*, working paper.

[106] Sholomitsky & Rachkova (1998), On some reinsurance model, Economics and Mathematical Methods, v. 34, 1998.

[107] Sithol, Haberman & Verrall (2000), *An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners' data*, Insurance : Mathematics Economics 27.

[108] Soininen (1995), *Stochastic variation of interest and mortality*, AFIR.

[109] Smith (1968), *Optimal insurance coverage*, Journal of Political Economy, Vol 76, 1968.

[110] Renshaw & Haberman (2001), *On the forecasting of mortality reduction factors*, Actuarial Research Paper 135.

[111] Taksar (1998), *Optimal risk and divident control for a company with a debt liability*, Insurance : Mathematics and Economics, Vol 22, 1998.

[112] Taksar (2000), *Optimal risk and divident distribution control models for an insurance company*, Math.Meth.Oper.Res., Vol 1, 2000.

[113] Taksar & Markussen (2003), *Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolio*, Finance and Stochastics 7, 97 à 121.

[114] Taksar & Loft (2007), *The influence of bankruptcy value on optimal risk control for diffusion models with proportional reinsurance*, Insurance Mathematics & Economics 2007, 311 à 321.

[115] Tatcher (1999), *The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age*, Journal of the Royal Statistical Society 162.

[116] Terrier (2001), *Les rentes viagères : Mortalité d'expérience et réassurance*, mémoire pour l'obtention de diplome d'économiste CNAM.

[117] Tukey (1975), *Mathematics and the picturing of data*, Proc. Int. Congress Math Vancouver 2, 523-531.

[118] Vermunt (1997), *Log-linear event history analysis : a general approach with missing data, unobserved heterogenity, and latent variables*, Dissertation abstracts international, 58(1, spring).

[119] Walhin & Lampaert (2005), *On the Optimality of Proportional Reinsurance*, Scandinavian Actuarial Journal, vol 3, 2005.

[120] Wilkie (1985), *Portfolio Selection in the presence of fixed liabilities : A comment on the Matching of assets to liabilities*, J.I.A

[121] Wise (1984a), *A Theoretical Analysis of the Matching of Assets to Liabilities*, J.I.A

[122] Wise (1984b), *The Matching of Assets to Liabilities*, J.I.A

[123] Wise (1987a), *Matching and Portfolio Selection : Part 1*, J.I.A

[124] Wise (1987b), *Matching and Portfolio Selection : Part 2*, J.I.A

[125] Wilmoth (1996), *Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change*, Technical Report, Department of Demography, University of California, Berkeley.

[126] Whittle (1983), *Optimization over time - dynamic programming and stochastic control*, II. New York : Wiley (1983).

Table des figures

1 Du bilan Solvabilté I au bilan Solvabilité II 2

1.1 Bilan Solvabilité 1 vs Solvabilité II 10
1.2 Zoom sur la structure des fonds propres 10

2.1 Méthode des simulations dans les simulations 20
2.2 Rappel de l'approche SdS 30
2.3 Distribution de Situation nette à 1 an 30
2.4 Couple de facteur de risque et frontière d'exécution 35
2.5 Modélisation de l'actif risqué 38
2.6 Ajustement Normal du facteur de risque action modélisé avec un processus à saut 38
2.7 Ajustement Normal du facteur de risque action modélisé avec un brownien géométrique 39
2.8 Détection des scénarii adverses par quantiles géomètriques sans TR 42
2.9 Détection des scénarii adverses par quantiles géomètriques avec TR 42
2.10 Détection des scénarii adverses par quantiles géomètriques dans R^3 avec TR . 43
2.11 Détection des scénarii adverses par fonction de profondeur 44
2.12 Détection des scénarii adverses par fonction de profondeur 44
2.13 Détection des scénarii adverses par fonction de profondeur 45
2.14 Optimisation du calcul des options et garanties 47
2.15 Rapport BE par rapport aux PM 48
2.16 Comparaison Sds et portefeuille répliquant 51

2.17 Détermination du capital de solvabilité par fonctions des pertes 53
2.18 Niveau de capital requis pour chaque scénario de stress 56
2.19 Relation entre le risque action et la perte de NAV 56
2.20 Distribution des fonds propres économiques selon l'approche par fonction de perte 63

3.1 Evolution de l'intensité de mortalité de la population française 68
3.2 Illustration effet génération (population française) 77
3.3 Surface de mortalité $\mu_x(t)$, $t = 1950, \ldots, 2005$ 87
3.4 Projection de la tendance temporelle $\widehat{\kappa}$ de la mortalité féminine française . . . 91
3.5 Résultats des projections via le modèle Poisson-log Bilinéaire (Population française féminine et masculine) 92
3.6 Méthodologie de génération de table de mortalité stochastique d'expérience . 95
3.7 Résultats des projections via le modèle Poisson-log Bilinéaire (Populations féminine et masculine assurées) 97
3.8 Ecart entre les scénarios moyens du modèle de Denuit et all et celui de Lee & Carter 98
3.9 Comparaison des espérances de vie du scénarios moyen 98
3.10 Histogrammes des espérances de vie à 60 ans 99
3.11 Effets antisélection sur les rentes viagères à 60 ans 100
3.12 Projection des Provisions mathématiques d'un portefeuille de rentiers en cours de service 103

4.1 Les différents états de l'assuré 110
4.2 Pyramide des âges à la souscription 113
4.3 Taux empirique d'entrée en dépendance en fonction de l'âge 115
4.4 Effet de segmentation par niveau de dépendance 116
4.5 Effet d'une segmentation par sexe 117
4.6 Intervalle de confiance 119
4.7 Lissage non paramétrique 120
4.8 Lissage paramétrique 120
4.9 Loi de maintien en dépendance 122

4.10 Prime par âge 127
4.11 Projection de PM en fonction de la table de maintien en dépendance d'expérience 128
4.12 Projection de PRC en fonction des tables d'expérience 128
4.13 Modèle de Markov 130
4.14 Surface d'entrée en dépendance stochastique 134
4.15 trajectoire moyenne d'entrée en dépendance 134
4.16 Fermeture de la surface d'entrée en dépendance sur les âges élevés 135
4.17 Distribution des espérances de survie en état de dépendance 136
4.18 Ajustement de la loi de l'espérance de survie en dépendance à l'age 75 ans par rapprot à la loi normale 136
4.19 Loi de maintien en dépendance moyenne 138
4.20 Rente moyenne par âge 139
4.21 Engagements économiques à la souscription 140
4.22 Distribution des engagements économiques à la souscription 140
4.23 Comparaison des engagements déterministes et stochastiques 141
4.24 Primes annuelles pûres 142
4.25 Distribution des engagements stochastiques 143
4.26 Réalisation des engagements des produits 4 et 5 143
4.27 Réalisation des engagements du produit 1 144

6.1 Processus de réserve 191
6.2 Processus de réserve à 50 périodes 192