Université Montpellier II – Sciences et Techniques du Languedoc

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université Montpellier II

Ecole Doctorale : Information, Structures et Systèmes (I2S)

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par

Jonathan OHAYON

Quantification des sous-algèbres coisotropes

Thèse dirigée par **Gilles HALBOUT**

Soutenue publiquement le 9 juillet 2012 devant le jury composé de :

David HERNANDEZ	Professeur à l'Université Paris VII
Gilles HALBOUT	Professeur à l'Université Montpellier II
Benjamin ENRIQUEZ	Professeur à l'Université de Strasbourg
Fabio GAVARINI	Professeur à l'Université Rome II
Alain BRUGUIÈRES	Professeur à l'Université Montpellier II
Jean-Michel OUDOM	Maître de Conférences à l'Université Montpellier II

Au vu des rapports de **Pavel ETINGOF** et **David HERNANDEZ**.

Institut de Mathématiques et de Modelisation de Montpellier (I3M)

Place Eugène Bataillon, 34095 MONTPELLIER Cedex, France

⟁ Quantification des sous-algèbres coisotropes ⟁

Jonathan OHAYON

" Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir.
Autrement dit : plus ça rate, plus on a de chances que ça marche. "
Les Shadocks

Remerciements

Écrire des remerciements est un exercice dificile à réaliser, tout particulièrment parce qu'ils marquent la fin de la rédaction du manuscrit. Cette thèse n'aurait pas été possible sans l'aide que j'ai reçu tout au long de ces quatres années. Je souhaite donc ici remercier toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenu au cours de cette aventure. Je vais essayer de n'oublier personne, mais je m'excuse d'avance à toute personne que j'aurais oubliée.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Gilles Halbout, qui a accepté d'encadrer cette thèse ainsi que mon stage de master 2. Il a su me laisser une grande liberté dans mon travail tout en restant présent et disponible malgré un emploi du temps très chargé. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir guidé et fait découvrir ses mathématiques. Je le remercie de ses conseils et commentaires sur l'ensemble de mes travaux et particulièrement dans la rédaction de ce manuscrit. Je tiens enfin à le remercier pour son soutien lors de mes moments de doute tout au long de ma thèse.

Je remercie Pavel Etingof et David Hernandez d'avoir accepté de rapporter cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Leurs commentaires et corrections m'ont été très utiles. Je souhaite également remercier Benjamin Enriquez, Fabio Gavarini, Alain Bruguières et Jean-Michel Oudom d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie particulièrement Benjamin Enriquez pour son aide sur l'ensemble de mes travaux. Je le remercie du temps qu'il a passé à débloquer mes problèmes lors de mes séjours à Strasbourg. Je remercie aussi encore Jean-Michel Oudom pour ses commentaires sur la rédaction du manuscrit.

Je tiens à remercier Benoit Fresse de m'avoir confié l'organisation du groupe de travail des doctorants du GDR topologie algèbrique en 2011.

Ces années passées au sein de l'I3M que se soit en tant qu'étudiant ou doctorant ont été pour moi très agréables. Je tiens à remercier l'ensemble du personnel de l'I3M, et particulièrement, les professeurs et maîtres de conférences qui m'ont enseigné les mathématiques lors de mes études à l'université Montpellier II. Je remercie Lionel Thibault pour son aide lors mon cursus universitaire.

Ces quatres dernières années n'auraient surement pas été les mêmes sans la présence des doctorants du bâtiment 9. J'ai passé des moments inoubliables avec eux que ce soit dans le labo ou en ville. Je remercie tous les thésards, anciens comme nouveaux, pour tous ces moments. En tant que premier occupant du bureau 202b, je remercie en premier lieu mes cobureaux, Christophe, Florence, Angélina et Bastien de m'avoir supporté et pour toutes nos discussions. Je remercie aussi tous les doctorants de l'I3M que j'ai eu le plaisir de côtoyer pour leur acceuil, Guillaume, Afaf, Jean, Junior, Julien, Anthony, Mathieu C., Damien, Mathieu S., Claudia, Pierre, Bruno, Karine, Nahla, Thomas, Frédéric, ainsi que les nouveaux, Benjamin, Tutu, Elsa et Etienne et tous ceux que j'ai oublié de citer. J'ajoute une pensée à Vincent, Simon, Vanessa et Boris qui ont su nous intégrer dans la jeune équipe de l'I3M.

Je remercie également mes amis Vincent, Kevin, Audrey et les autres, sur qui j'ai toujours pu compter.

Je remercie ma famille, ma soeur Anne-Laure, mon frère David-Robert, mon père et mes grands-parents pour leur soutien. Je remercie tout particulièrement ma soeur d'avoir relu ma thèse.

Finalement, j'ai une pensée plus particulière pour ma mère et mon grand-père disparus trop tôt et à qui je dédie ce manuscrit.

À ma mère et mon grand-père

Introduction

The aim of this thesis is to study the quantization of coisotropic Lie subalgebras in Lie bialgebras. This question was first set forth by V. Drinfeld in [Dri92]. The study will be done using computational methods in the semi-simple case and homological and propic methods in the general case.

Theory of deformation by quantization arises from a physical need to express quantum mechanics as a "deformation" of classical mechanics. This analogy was imtroduced by F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer in [BFF$^+$78]. On one hand, one would see classical mechanics identified with a classical phase space M, seen as a differential manifold, and an algebra of classical observables A_0, seen as the algebra of smooth function on M,$A_0 = C^\infty(M)$ equipped with a Poisson bracket $\{,\}$. The quantum formalism on the other hand interprets observables as a non-commutative algebra. This algebra can be expressed as a deformation A of the algebra of classical observables A_0, by introducing star-products, i.e., $\Bbbk[[\hbar]]$-linear and associative maps :

$$\begin{array}{rlcl} \star: & A_0[[\hbar]] \times A_0[[\hbar]] & \to & A_0[[\hbar]] \\ & a, b & \mapsto & a \star b = ab + \hbar B_1(a,b) + \hbar^2 B_2(a,b) + \cdots , \end{array}$$

where $B_i : A_0 \times A_0 \to A_0$ are $\Bbbk[[\hbar]]$-bilinear bidifferential maps that vanish on constant functions. The star-product is a deformation of the Poisson bracket $\{,\}$ on A_0 if it satisfies for all $f, g \in A_0$, $\frac{1}{2}(B_1(f,g) - B_1(g,f)) = \{f,g\}$. In this setting, equations of quantum mechanics is seen as a non zero value of $\hbar$ whereas equation of classical mechanics corresponds to $\hbar = 0$. Starting from a deformation A of an associative commutative algebra A_0 allows one to define a Poisson bracket on the classical limit A_0. The problem of existence of such deformation was solved by M. Kontsevich in [Kon03] for $A_0 = C^\infty(M)$ the algebra of functions over a Poisson manifold M where M. Kontsevich deduced the existence of star-products from the existence of a L_∞-homomorphism between the graded Lie algebra of polyvector fields equipped with the schouten bracket and the graded Lie algebra of polydifferential operators equipped with the Gerstenhaber bracket. It is also possible to approach the construction of the star-product step by step ensuring its associativity at each step. This approach gives rise to a cohomological method of deformation. Tamarkin proposed a proof of the existence of star-product using cohomological methods in [Tam98].

In many physical problems, the classical space M is also equipped with a product, hence giving a structure of Lie group to the manifold M compatible with the Poisson structure, we usually denote such a manifold G. In this setting, the algebra of observables $\mathcal{F}(G)$, i.e. the algebra of function on G, is equipped with a Hopf algebra structure and a deformation of $\mathcal{F}(G)$ is a topological Hopf algebra which is neither commutative nor cocommutative. The term "quantum groups" was introduced by V. Drinfeld in his address to the International Congress of Mathematics in Berkeley in 1986. It refers to a certain type of Hopf algebras which are not cocommutative. It is in fact a nontrivial deformation of a Poisson Lie group G's algebra of function. In [Dri87], Drinfeld established the equivalence between this quantization problem and the quantization of universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ of Lie bialgebra $\mathfrak{g}$, which is the infinitesimal version of a Poisson Lie group G. A deformation of a universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ is also a topological Hopf algebra $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ with a $\Bbbk[[\hbar]]$-linear and associative product $\mathrm{m}_\hbar$ and also with a $\Bbbk[[\hbar]]$-linear and coassociative coproduct $\Delta_\hbar$:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{m}_\hbar : & \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \times \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] & \to & \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \\ & a, b & \mapsto & \mathrm{m}_\hbar(a,b) = \mathrm{m}_0(a,b) + \hbar\, \mathrm{m}_1(a,b) + \cdots , \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Delta_\hbar : & \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] & \to & \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \times \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \\ & a & \mapsto & \Delta_\hbar(a) = \Delta_0(a,b) + \hbar \Delta_1(a,b) + \cdots , \end{array}$$

and such that $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ is isomorphic to $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ as $\Bbbk[[\hbar]]$-module. The coproduct is a deformation of the cobracket δ on $\mathfrak{g}$ if it satisfies for all $a \in \mathfrak{g}$, $\delta(a) = \frac{1}{2}\left(\Delta_1(\tilde{a}) - \Delta_1^{op}(\tilde{a})\right)$ with $\tilde{a}$ a lift of a in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Quantum groups have close connections with physics as they provide a solution to the quantum Yang-Baxter equation and as they are also related to the theory of quantum integrable systems. Quantization of an enveloping algebra of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ gives rise to a cobracket on the classical limit $\mathfrak{g}$. V. Drinfeld developed most of the basic frameworks relative to quantum groups in [Dri87], he also gave an explicit quantization for $\mathfrak{g}$ a simple Lie algebra. The duality between the quantization of universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the quantization of the algebra of function $\mathcal{F}(G)$ on G is known as the quantum duality principle which was introduced by V. Drinfeld in [Dri87] and was after studied by F. Gavarini in [Gav02]. In [Dri92], V. Drinfeld sets forth many problems of quantization including the problem of quantization of Lie bialgebras which was proved by P. Etingof and D. Kazhdan [EK96]. They used categorical methods to construct an explicit quantization with the help of an associator. Most of the problems of V. Drinfeld related to the quantization of Lie bialgebras were answered by P. Etingof and D. Kazhdan. The other quantization problems were answered over the years, mainly the quantization of coboundary Lie bialgebras and quasi-bialgebras were settled by B. Enriquez and G. Halbout respectively in [EH10a], and in [EH10b] where they used the theory of Props and Gerstenhaber-Schack cohomology which controls the deformation of Lie bialgebras.

A last physical problem arises when the classical phase space M is invariant under a transitive action of a Poisson Lie group G compatible with the bracket. One will see M as the quotient G/H where H is a Lie subgroup of G. Such spaces are called Poisson homogeneous spaces, we will now denote M by $X = G/H$. The algebra $\mathcal{F}(X)$ of function on X is then invariant under the action of G or equivalently under the action of the universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. The theory of deformation then involves quantum Poisson homogeneous spaces, as quantum observables, which are seen as a deformation $\mathfrak{X}$ of both the algebra $\mathcal{F}(X)$ and the action of the universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. By deformation of the action of the universal enveloping algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, we mean an action of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ on the algebra $\mathfrak{X}$. This can be done either as a one-parameter deformation or as a two parameters deformation by quantizing separately the Poisson bracket and the action of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, as done by J. Donin, D. Gurevich and S. Shnider in [DGS99]. V. Drinfeld established a classification of Poisson homogeneous spaces using Lagrangian subalgebra of the double of $\mathfrak{g}$. P. Etingof and D. Kazhdan proposed, in [EK95], an explicit quantization of Poisson homogeneous spaces related to Manin quadruple by extending the proof of quantization of Lie bialgebra to this case. They also gave an example of Poisson homogeneous space which does not admit a quantization. J. Donin, D. Gurevich and S. Majid proved, in [DGM93], the existence of quantum homogeneous space $X = G/H$ for G a semisimple Lie group and H such that $\mathfrak{h}$ the lie algebra of H contains a maximal nilpotent subalgebra. They also stated that there exist homogeneous spaces which do not admit a quantization for G a semisimple Lie group.

It is possible to give more structure to the quotient by supposing that H, which we will now denote C, is a coisotropic subgroup of G, i.e., the space $I(C)$ of function on G, which vanish on C, is a Poisson subalgebra of $\mathcal{F}(G)$. In this particular case, the Poisson bracket on G descends on the Poisson homogeneous space G/C as we have a Poisson map between G and G/C, such Poisson homogeneous spaces are called group-like. The problem of quantization of group-like Poisson homogeneous spaces G/C is still open. N. Ciccoli and F. Gavarini established a duality principle for this particular quantization problem in [GC06]. They established an equivalence between the existence of quantum Poisson homogeneous space quantizing G/C and the existence of quantization of a coisotropic Lie subalgebra $\mathfrak{c}$ of $\mathfrak{g}$ i.e. $\mathfrak{c}$ is a Lie subalgebra and a Lie coideal of $\mathfrak{g}$. A deformation of a coisotropic Lie subalgebra is a deformation $\mathfrak{C}_\hbar$ of $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ inside a deformation $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ which is a subalgebra right coideal of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ and which also verifies $\mathfrak{C}_\hbar \cap \hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \hbar\mathfrak{C}_\hbar$. There exist four different approaches to the quantization of Poisson homogeneous spaces which arise from the duality principle. Recently in the simple case, a classification of subalgebras right coideals of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ was done by I. Heckenberger and S. Kolb in [HK11a]. This classification is, of course, related to the quantization of group-like Poisson homogeneous structure G/C as subalgebras right coideals are their quantum counterpart.

The thesis is organized as follows, the first two chapters and the first annex which contain the basic framework of this study are in french and the remaining parts which contain the main results are in english.

The first chapter will recall basic facts about quantum groups, thus defining the structures of a Lie bialgebra and their quantum counterparts. We will then define quasi-Lie bialgebras in order to have all the necessary tools for the quantization of Lie bialgebras.

In the second chapter, we will recall the quantization of Lie bialgebra established by P. Etingof and D. Kazhdan. We will also give a review on the question of V. Drinfeld in [Dri92]. Finally, we will recall the definition of coisotropic Lie subalgebra and its quantum counterpart and give its relation to Poisson homogeneous spaces, following the duality principle established by N. Ciccoli and F. Gavarini in [GC06].

In the third chapter, we will study the quantization of coisotropic subalgebras in the case of simple Lie bialgebras. For this purpose, we will first recall the basic theory on Kac-Moody Lie algebra and the construction of its quantum enveloping algebra $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ given by V. Drinfeld and Jimbo. We will then study some examples provided by an article written by M. Zambon where a method to construct coisotropic subalgebras of Lie bialgebras is developed and applied to the case of semi-simple complex Lie bialgebras [Zam11]. We will then construct a quantization $\mathfrak{C}_\hbar$ of all those examples by using computational methods in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.

Theorem A. *All coisotropic Lie subalgebras constructed by M. Zambon admit a quantization.*

The main obstruction in this work is the proof of the flatness of the quantization. Finally, we will link our work with the recent developments on the classification of the subalgebra right coideal of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ done by I. Heckenberger and H. J. Schneider in [HS09] and I. Heckenberger, I. and S. Kolb in [HK11a]. For this purpose, we will study coideal subalgebras $\mathcal{U}^w_+$ of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ depending on the Weyl group of $\mathfrak{g}$, constructed by G. Lusztig in [Lus92] and find their classical counterparts $\mathfrak{c}^w_+$.

Theorem B. *Let w be an element of the Weyl group and $\mathcal{U}^w_+$ be the coideal associated to w, then $\mathcal{U}^w_+$ is a flat deformation of $\mathfrak{c}^w_+$.*

In the fourth Chapter, we will look at the first orders of "universal" quantizations, using the structure constants of $\mathfrak{g}$. We will first give a review on props and the quantization of Lie bialgebra following a paper of B. Enriquez [Enr05] where he proposed a cohomological determination of the twist J in the quantization of Lie bialgebra. We will then try to construct step by step a quantization $\mathfrak{C}_\hbar$ of a coisotropic lie subalgebra $\mathfrak{c}$, by checking that $\mathfrak{C}_\hbar$ is a right coideal of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ and that $\mathfrak{C}_\hbar$ is a flat deformation of $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. For this purpose, we will use a third order universal quantization of Lie bialgebra given by V. Drinfeld in [Dri92]. This will allow us to determine the cohomology of deformation of coisotropic lie subalgebra. We will also find an obstruction to the quantization of coisotropic subalgebras. This obstruction appears when one wants to check the flatness condition for this quantization.

Theorem C. *There exists a non trivial obstruction to the quantification of coisotropic subalgebras $\mathfrak{c}$, in a Lie bialgebra $\mathfrak{g}$, up to the third order which lives in :*

$$Hom(\mathfrak{C}_\hbar, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}_\hbar) \longrightarrow Hom(\mathfrak{C}_\hbar \wedge \mathfrak{C}_\hbar, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}_\hbar) \longrightarrow Hom(\mathfrak{C}_\hbar \wedge \mathfrak{C}_\hbar \wedge \mathfrak{C}_\hbar, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}_\hbar)$$

where $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ is a quantization of $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{C}_\hbar$ is a deformation of $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$.

We will also prove that this obstruction is equal to zero in the case where $\mathfrak{c}$ is a Lie subbialgebra and in the previous examples given in chapter 3 in the settings of simple Lie bialgebras.

Finally, we will study quasi-triangular Manin pairs, following a paper written by B. Enriquez and Y. Kosmann-Schwarzbach [EKS99]. To find a quantization, we will use a recent result on the quantization of quasi-bialgebras [EH10a] found by B. Enriquez and G. Halbout.

Theorem D. *Let $\mathfrak{g}$ be a Lie bialgebra and $\mathfrak{h}$ be a Lagrangian subalgebra of $\mathfrak{g}$, then the quasitriangular Manin pair $(\mathfrak{g}, r, \langle\rangle_\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ admits a quantization.*

This result is closely related to a construction of P. Etingof and D. Kazhdan in [EK95] where they use the proof of the quantization of Lie bialgebras to give a quantization of quadruple Manin pairs. This construction will give us a quantization of the "double" of a coisotropic Lie subalgebra $\mathfrak{D}\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}^\perp$ in the double $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ of $\mathfrak{g}$. It is important to note here that this quantization is not a quantization of the quantum homogeneous space associated to $\mathfrak{D}\mathfrak{c}$ as a coisotropic subalgebra but a quantization of the one associated to $\mathfrak{D}\mathfrak{c}$ as a Lagrangian subalgebra of $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$.

Corollary E. *Every Poisson homogeneous space arising from a coisotropic double $\mathfrak{D}\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}^\perp$ seen as a Lagrangian subalgebra of $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ admits a quantization.*

We will link this quantization to the quantization of the double coisotropic subalgebra $\mathfrak{D}\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ but the existence of the twist which links those two quantizations will be left aside as an open question.

The first annex will recall the basic framework of associators and the construction of an associator arising from the Knizhnik-Zamolodchikov equation and their link with quasi-Hopf Algebra.

Finally, the second annex will continue the work done on the third chapter, on the quantization of M. Zambon example of coisotropic subalgebra for $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ and the exceptional lie algebra.

In this work, we also point out many other open questions related to the problem of quantization of coisotropic Lie subalgebras. The main remaining questions are : extension to the classical case of a conjecture on the subalgebras right coideal in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ given by V. Kharchenko and A. Sagahon in [KS08], which states that the number of right coideals of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$ which contain all the coradical is equal to the order of the Weyl group of $\mathfrak{g}$; determination of a criterion to classify the coisotropic subalgebras when the previous obstruction is equal to zero ; action of associators and of the Grothendick-Teichmuller group on the obstruction classes ; the determination of an equivalence between the third order quantization of Drinfeld and the third order quantization of Etingof-Kazhdan and finally the determination of twist which allows to quantize the double coisotropic subalgebra $\mathfrak{D}\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$.

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de la quantification des sous-algèbres de Lie coisotropes dans les bigèbres de Lie. Cette question fut posée par V. Drinfeld dans [Dri92]. L'étude sera réalisée dans un premier temps en utilisant des methodes de calcul dans le cadre des algèbres de Lie semi-simple puis en utilisant des méthodes homologiques et propiques au niveau universel.

La théorie de déformation par quantification est apparue de la volonté en physique d'exprimer la mécanique quantique comme une "déformation" de la mécanique classique. Cette analogie fut introduite par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer dans [BFF+78]. D'un coté, nous pouvons associer la mécanique classique à la donnée d'un espace d'état classique M, vue comme une varieté différentielle, et d'une algèbre d'observable classique A_0, celle-ci étant l'algèbre de fonction lisse sur M, $A_0 = C^\infty(M)$ equippée d'un crochet de Poisson $\{,\}$. D'un autre coté, le formalisme quantique peut-être interprété par une algèbre d'observables quantiques considérée comme une algèbre non commutative. Cette algèbre peut alors s'exprimer comme une déformation A de l'algèbre des observables classique A_0, en utilisant les star-produits, i.e. des applications $\Bbbk[[\hbar]]$-linéaire :

$$\begin{array}{rccl} \star : & A_0[[\hbar]] \times A_0[[\hbar]] & \to & A_0[[\hbar]] \\ & a, b & \mapsto & a \star b = ab + \hbar B_1(a,b) + \hbar^2 B_2(a,b) + \cdots , \end{array}$$

où $B_i : A_0 \times A_0 \to A_0$ sont des applications $\Bbbk[[\hbar]]$-bilinéaires bidiffèrentielles qui s'annulent sur les fonctions constantes. Le star-produit est une déformation du crochet de Poisson $\{,\}$ sur A_0 si il satisfait pour tout $f, g \in A_0$, $\frac{1}{2}(B_1(f,g) - B_1(g,f)) = \{f, g\}$. Dans cette configuration, les équations de la mécanique quantique sont celles qui contiennent des valeurs de $\hbar$, non nulles tant dis que les équations de la mécanique classique correspondent à $\hbar = 0$. En partant d'une déformation A d'une algèbre associative et commutative A_0, nous pouvons definir un crochet de Poisson sur la limite semi-classique A_0. L'existence de telle déformation fut resolue par M. Kontsevich dans [Kon03] pour $A_0 = C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions sur une variété de Poisson M. M. Kontsevich prouve l'existence d'un star-produit grâce au L_∞-homomorphisme entre l'algèbre de Lie graduée de champs de polyvecteurs equippée du crochet de Schouten et l'algèbre de Lie graduée d'opérateurs polydifférentiels equipée du crochet de Gerstenhber.

Il est aussi possible de construire une quantification étape par étape, en s'assurant de son associativité à chaque cran. Cette approche premet de faire apparaitre la cohomologie qui régit le processus de quantification par déformation. D. Tamarkin a prouvé l'existence d'un star-produit en utilisant cette cohomologie dans [Tam98].

Dans plusieurs problèmes physiques, l'espace des états classiques M est aussi équipé d'un produit lui donnant une structure de groupe de Lie compatible avec la structure de Poisson, une telle variété est un groupe de Lie-Poisson et nous la dénoterons G. Dans ce cadre, l'algère des observables $\mathcal{F}(G)$, i.e. l'algèbre des fonction sur G, est équipée d'une structure d'algèbre de Hopf et une déformation de $\mathcal{F}(G)$ est une algèbre de Hopf topologique qui n'est ni commutative ni cocommutative. Le terme "groupe quantique" fut introduit par V. Drinfeld au congrès international des mathématiques à Berkeley en 1986. Ce terme fait référence à un certain type d'algèbres de Hopf qui ne sont pas cocommutatives. Il s'agit en fait d'une déformation non triviale d'une algèbre universelle enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ d'une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$, qui est la version infinitésimale d'un groupe de Lie Poisson G. Une déformation d'une algb̀re enveloppante universelle $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ munie d'un produit associatif $\Bbbk[[\hbar]]$-linéaire $\mathrm{m}_\hbar$ et d'un coproduit coassociatif $\Bbbk[[\hbar]]$-linéaire $\Delta_\hbar$:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{m}_\hbar : & \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \times \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] & \to & \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \\ & a, b & \mapsto & \mathrm{m}_\hbar(a,b) = \mathrm{m}_0(a,b) + \hbar\, \mathrm{m}_1(a,b) + \cdots , \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Delta_\hbar : & \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] & \to & \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \times \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \\ & a & \mapsto & \Delta_\hbar(a) = \Delta_0(a,b) + \hbar \Delta_1(a,b) + \cdots , \end{array}$$

et tel que $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ soit isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ en tant que $\Bbbk[[\hbar]]$-module. Le coproduit est une déformation du cocrochet δ de $\mathfrak{g}$ si il vérifie pour tout $a \in \mathfrak{g}$, $\delta(a) = \frac{1}{2}\left(\Delta_1(\tilde{a}) - \Delta_1^{op}(\tilde{a})\right)$ où $\tilde{a}$ est un relevé de a dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Les groupes quantiques sont fortement liés à la physique par la détermination de solution à l'équation de Yang-Baxter quantique et par la théorie des systèmes quantiques intégrables. La quantification d'une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie un cocrochet sur cette dernière. V. Drinfeld a développé les concepts de base de la théorie des groupes quantiques dans [Dri87], il a aussi construit une quantification explicite pour les algèbres de Lie simple. La dualité entre la quantification des algèbres universelles enveloppantes $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et la quantification des algèbres de fonctions $\mathcal{F}(G)$ sur G est le principe de dualité quantique introduit par V. Drinfeld dans [Dri87] et étudié par la suite par F. Gavarini dans [Gav02]. V. Drinfeld a posé plusieurs problèmes de quantifiation dans [Dri92], incluant le problème d'existence d'une quantification pour les bigèbres de Lie qui fut resolue par P. Etingof and D. Kazhdan dans [EK96]. Pour construire une quantification explicite à l'aide d'un associateur, P. Etingof and D. Kazhdan ont utilisé un formalisme catégorique. Les autres problèmes de quantification ont été resolus au cours des années, principalement la quantification des bigèbres de Lie cobordées et des quasi-bigèbres de Lie qui fut résolue par B.

Enriquez et G. Halbout respectivement dans [EH10a], et dans [EH10b], en utilisant la théorie des Props et la cohomologie de Gerstenhaber-Schack qui régit la déformation quantification des bigèbres de Lie.

Un dernier problème physique apparait lorsque l'espace des états classiques M est invariante sous l'action transitive d'un groupe de Lie Poisson G compatible avec la structure de Poisson. Il est alors possible de voir M comme un quotient de G/H où H est un sous-groupe de Lie de G. Nous dirons que M est un espace de Poisson homogènes et nous le dénoterons par la suite $X = G/H$. L'algèbre $\mathcal{F}(X)$ des fonctions sur X est invariante sous l'action de G ou de façon équivalente sous l'action de l'algèbre enveloppante universelle $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. La théorie de déformation permet alors donner une structure d'espaces de Poisson homogènes quantiques à l'algèbre des observables quantiques, qui est la déformation $\mathfrak{X}$ de l'algèbre $\mathcal{F}(X)$ et de l'action de l'algèbre enveloppante universelle $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Par déformation de l'action de l'algèbre enveloppante universelle $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, nous entendons une action d'une algèbre universelle quantique $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre $\mathfrak{X}$. Il existe deux façon de construire une telle déformation en la considérant comme une déformation soit à un paramètres ou soit à deux paramètres en quantifiant séparément le crochet de Poisson et l'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ comme ennoncé par J. Donin, D. Gurevich et S. Shnider dans [DGS99]. V. Drinfeld établit une classification des espaces de Poisson homogènes en utilisant les sous-algèbres Lagrangienne du double de $\mathfrak{g}$. P. Etingof et D. Kazhdan construisent dans [EK95], une quantification explicite des espaces de Poisson homogènes liés aux quadruplés de Manin en utilisant la preuve de la quantification des bigèbres de Lie. Ils exposent aussi un exemple d'espace de Poisson homogène qui n'admet pas de quantification. J. Donin, D. Gurevich et S. Majid ont montré, dans [DGM93], l'existence d'espace de Poisson homogène quantique $\mathfrak{X}$ quantifiant $X = G/H$ pour G un groupe de Lie semi-simple et H tel que $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H contient une sous-algèbre nilpotente maximale. Ils ont aussi démontré qu'il existe des espaces de Poisson homogènes qui n'admettent pas de quantification pour un groupe de Lie semi-simple G.

Il est possible de donner plus de structure au quotient en supposant que H, que nous noterons ̀présent C, est un sous-groupe coisotrope de G, i.e., l'espace $I(C)$ des fonction sur G, qui s'annulent sur C est une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{F}(G)$. En particulier, le crochet de Poisson sur G descend sur l'espace de Poisson homogène $X = G/C$ car il existe une application de Poisson entre G et X, un tel espace de Poisson homogène est dit de groupe type. Ce problème de quantification est toujours reste, à ce jour, non résolu. N. Ciccoli et F. Gavarini ont établi un principe de dualité pour ce problème de quantification dans [GC06]. Ils ont mis en évidence une équivalence entre l'existence d'une quantification des espaces de Poisson homogènes $X = G/C$ et l'existence d'une quantification de la sous-algèbre coisotrope $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$, i.e., $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre de Lie et un coidéal de Lie de $\mathfrak{g}$. Une déformation d'une sous-algèbre de Lie coisotrope est une déformation $\mathfrak{C}_\hbar$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$, à l'intérieur d'une déformation $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, qui est une sous-algèbre coidéale à droite de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ et qui vérifie $\mathfrak{C}_\hbar \cap \hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \hbar\mathfrak{C}_\hbar$. Il existe en fait quatre approches différentes équivalentes à la quantification des espaces de Poisson homogènes qui émergent du principe de dualité. I. Heckenberger et S. Kolb dans [HK11a], trouvent une classification des sous-algèbres coidéales à droite de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. Cette classification est en lien avec la quantification des espaces de Poisson homogènes de groupe type car les sous-algèbres coidéales à droite sont leur équivalent quantique.

La thèse est organisée comme suit, les deux premiers chapitres et le première annexe concernant les bases de la théorie de groupe quantique sont rédigés en français et les autres parties contenant les résultats principaux sont en anglais.

Le premier chapitre sera un rappel des bases de la théorie des groupes quantiques, en définissant les structures de bigèbres de Lie et de leur quantification. Nous definirons aussi les quasi-bigèbres de façon à avoir tous les outils nécessaires à la quantification des bigèbres de Lie.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelerons la quantification des bigèbres de Lie établie par P. Etingof et D. Kazhdan. Puis, nous detaillerons les questions de V. Drinfeld dans [Dri92]. Finalement, nous définirons les sous-algèbres de Lie coisotropes ainsi que leur équivalent quantique et donnerons les relations avec les espaces de Poisson homogènes en suivant le principe de dualité établi par N. Ciccoli et F. Gavarini dans [GC06].

Dans le troisième chapitre, nous étudierons la quantification des sous-algèbres de Lie coisotropes dans le cadre des algèbres de Lie simples. À ce titre, nous rappelerons la théorie des algèbres de Lie de Kac-Moody et la construction de leur algèbre enveloppante quantique $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ donnée par V. Drinfeld et Jimbo. Nous étuderions ensuite quelques exemples fournis par un article de M. Zambon dans lequel une méthode une construction de sous-algèbre de Lie coisotrope est développée et appliquée au cas des algèbres de Lie simples [Zam11]. Nous construirons ensuite une quantification $\mathfrak{C}_\hbar$ de tous ces exemples en utilisant des méthodes de calcul dans $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.

Théorème A. *Toutes les sous-algèbres de Lie coisotropes construitent par M. Zambon admettent une quantification.*

L'obstruction principale dans cette étude est la preuve de la platitude de la quantification. Enfin, nous établierons un lien entre notre travail et les développements récents sur la classification des sous-algèbres coidéales à droite de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ fait par I. Heckenberger et HJ Schneider dans [HS09] et I. Heckenberger et S. Kolb dans [HK11a]. Pour ce faire, nous étudierons certaines sous-algèbres coidéales $\mathcal{U}_+^w$ de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ qui dépendent du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$, construitent par G. Lusztig dans [Lus92] et trouverons leurs limites semi-classiques $\mathfrak{c}_+^w$.

Théorème B. *Soit w un élément du groupe de Weyl et $\mathcal{U}_+^w$ le coidéal associé à w, alors $\mathcal{U}_+^w$ est une déformation plate de $\mathfrak{c}_+^w$.*

Dans le quatrième chapitre, nous regarderons les premiers ordres de la quantification universelle, en utilisant les constantes de structures de $\mathfrak{g}$. Nous allons d'abord définir les Props et la quantification de la bigèbre de Lie en suivant un article de B. Enriquez [Enr05] dans lequel il propose une détermination cohomologique du twist J dans la quantification des bigèbres de Lie. Nous essayerons ensuite de construire étape par étape une quantification $\mathfrak{C}_\hbar$ d'une sous-algèbre de Lie coisotrope $\mathfrak{c}$, en vérifiant qu'il s'agisse d'un coidéal à droite et que $\mathfrak{C}_\hbar$ soit une déformation plate de $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ dans $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. Pour ce faire, nous utiliserons une quantification universelle du troisième ordre d'une bigèbre de Lie donnée par V. Drinfeld dans [Dri92]. Cela nous permettra de trouver la cohomologie de déformation des sous-algèbres de Lie coisotropes. Nous déterminerons également une obstruction à la quantification des sous-algèbres de Lie coisotropes. Cette obstruction apparaitra lors de la vérification de la platitude de la quantification.

Théorème C. *Il existe une obstruction non triviale à la quantification d'une sous-algèbre de Lie coisotrope $\mathfrak{c}$ dans une bigèbres de Lie $\mathfrak{g}$, à l'ordre trois qui vie dans :*

$$Hom(\mathfrak{C}_\hbar,\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}_\hbar) \longrightarrow Hom(\mathfrak{C}_\hbar\wedge\mathfrak{C}_\hbar,\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}_\hbar) \longrightarrow Hom(\mathfrak{C}_\hbar\wedge\mathfrak{C}_\hbar\wedge\mathfrak{C}_\hbar,\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}_\hbar)$$

où $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ est une quantification de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{C}_\hbar$ est une quantification de $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$.

Nous montrerons que cette obstruction est égale à zero dans le cas où $\mathfrak{c}$ est une sous bigèbre de Lie et dans les exemples précédents du chapitre 3, dan le cadre des algèbres de Lie simples.

Finalement, nous étudierons les paires de Manin quasi-triangulaires, en suivant un article de B. Enriquez et Y. Kosmann-Schwarzbach [EKS99]. À fin de trouver une quantification, nous utiliserons un résultat récent sur la quantification des quasi-bigèbres [EH10a] établi par B. Enriquez et G. Halbout.

Théorème D. *Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie Lagrangienne de $\mathfrak{g}$, alors la paire de Manin quasi-triangulaire $(\mathfrak{g}, r, \langle\rangle_\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ admet une quantification.*

Ce résultat est étroitement lié à une construction de P. Etingof et D. Kazhdan dans [EK95] dans le cadre de laquelle, ils utilisent la preuve de la quantification des bigèbres Lie pour construire une quantification des quadruplés de Manin. Cette construction, nous donnera une quantification du double d'une sous-algèbre de Lie coisotrope $\mathfrak{d}\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}^\perp$ dans le double

$\mathfrak{Dg}$ de $\mathfrak{g}$. Il est important de noter ici que cette quantification n'est pas une quantification de l'espace de Poisson quantique homogène associé à $\mathfrak{Dc}$ comme sous-algèbre de Lie coisotrope mais une quantification de $\mathfrak{Dc}$ vue comme une sous-algèbre de Lie Lagrangienne de $\mathfrak{Dg}$.

Corollaire E. *Tout espace de Poisson homogène provenant d'un double coisotropique* $\mathfrak{Dc} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}^{\perp}$ *considéré comme une sous-algèbre de Lie Lagrangienne de* $\mathfrak{Dg}$ *admet une quantification.*

Nous établierons finalement un lien entre cette quantification et celle de la sous-algèbre de Lie coisotrope $\mathfrak{Dc}$ de $\mathfrak{Dg}$ à l'aide d'un twist, mais la question liée à l'existence de ce twist reste à résoudre.

La première annexe aura pour but de rappeler la notion d'associateur et l'équation Knizhnik-Zamolodchikov, ainsi que leur lien avec les quasi-algb̀res de Hopf.

Enfin, la deuxième annexe continuera le travail effectué lors du troisième chapitre, sur la quantification des exemples due à M. Zambon pour les algèbres de Lie simple $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ et les algèbres de Lie Exceptionnelles.

Dans cette étude, nous mettons aussi en avant les questions ouvertes relatives au problème de quantification des sous-algèbres de Lie coisotropes. Les questions principales, qui restent à résoudre, sont : l'extension au cas classique de la conjecture des sous-algb̀res coidéales à droite de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ donnée par V. Kharchenko and A. Sagahon dans [KS08], selon laquel le nombre de sous-algb̀res coidéales à droite de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$ qui contiennent le coradical est égale à l'ordre du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$; la détermination d'un critère pour classifier les sous-algèbres de Lie coisotropes où l'obstruction est égale à zero ; l'action des associateurs et du groupe de Grothendick-Teichmuller sur la classe d'obstruction ; La determination d'une équivalence entre la quantification à l'ordre trois de Drinfeld et celle d'Etingof-Kazhdan et finalement la détermination d'un twist qui permet de quantifier un double coisotropique $\mathfrak{Dc}$ dans $\mathfrak{Dg}$.

Table des matières

Notations

Sauf Mention du contraire, G désignera un groupe de Lie Poisson, C un sous-groupe de Poisson coisotrope de G, $\mathcal{F}(G)$ son algèbre de fonctions régulières et $X = G/C$ l'espace de Poisson homogène associé à C.
Nous dénoterons $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ la bigèbre de Lie associée à G et $\mathfrak{c}$ la sous-algèbre de Lie coisotrope associée à C. Nous noterons $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{m}, \Delta)$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ leur algèbre universelle enveloppante.
Le groupe W désignera le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ et w_0 son plus long élément.
Nous noterons aussi $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \mathrm{m}_\hbar, \Delta_\hbar)$ et $\mathfrak{C}$ les quantifications de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$, ainsi que $\mathcal{F}_\hbar(G)$ et $\mathfrak{X}$ les quantifications de $\mathcal{F}(G)$ et $\mathcal{F}(X)$. $\Bbbk$ désignera un corps de caractéristique nulle.
$\mathcal{QUEA}$ et $\mathcal{QFSHA}$ désigneront respectivement la catégorie des algèbres enveloppantes universelles quantiques et des algèbres de Hopf de séries formelles quantiques. $\mathcal{B}ialg$, $\mathcal{QB}ialg$, $\mathcal{LBA}$ et $\mathcal{QLBA}$ désigneront respectivement la catégorie des bialgebres, quasi-bialgebres, bigèbres de Lie et quasi-bigèbre de Lie.
Nous noterons LBA et QLBA les props associées respectivement aux bigèbres de Lie et quasi-bigèbre de Lie. Finalement, Bialg et QBialg désigneront les props associées respectivement aux bigèbres et quasi-bigèbres.

Chapitre I

Groupes Quantiques

L'objet de ce chapitre est de définir les notions de base relatives aux groupes quantiques. Dans un premier temps, nous étudierons les groupes de Lie-Poisson, ainsi que leur version infinitésimale qui sont appelées bigèbres de Lie. Nous définirons les différentes structures des bigèbres de Lie, pour ensuite envisager les triplets de Manin et la construction du double de Drinfeld. Nous nous intéresserons par la suite aux algèbres de Hopf et à la quantification des bigèbres de Lie. Finalement, nous aborderons le foncteur de Drinfeld qui permet d'établir un lien entre la quantification des bigèbres de Lie et celle des groupes de Lie Poisson.

1 Bigèbre de Lie et Double classique

Introduisons tout d'abord les groupes de Lie-Poisson qui ont un lien très fort avec les bigèbres de Lie comme nous le verrons par la suite.

Définition 1.1 (Variété de Poisson)**.** *Nous disons que M, une variété lisse, est une variété de Poisson si il existe un crochet de Poisson sur l'algèbre $C^\infty(M)$.*

Remarques : Pour toutes fonctions de $C^\infty(M)$, l'application $\{f,-\} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ est une dérivation, nous pouvons alors l'écrire sous la forme $\{f,g\} = \langle V_f, \mathrm{d}g\rangle$ pour un certain champ de vecteur Hamiltonian V_f. En particulier $\{f,g\}$ ne dépend que de $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g$, et il existe un champ bivectoriel de Poisson $\Pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ defini par :

$$\{f,g\} = \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g(\Pi). \tag{1.1}$$

Définition 1.2 (groupe de Lie-Poisson 1)**.** *Une variété de Poisson munie d'une structure de groupe de Lie est un groupe de Lie-Poisson si la multiplication est une application de variété de Poisson (où la variété $M \times M$ est munie de la structure de Poisson canonque issue de celle de M).*

Les morphismes seront des morphismes de groupes de Lie et de Poisson. Un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie-Poisson est un sous groupe de Lie Poisson s'il s'agit d'une sous-variété de Poisson.

En partant cette fois de la notion de groupe de Lie plutôt que de celle de variété de Poisson, une définition plus explicite d'un groupe de Lie Poisson peut être donnée :

Définition 1.3 (groupe de Lie-Poisson 2)**.** *Un groupe de Lie G muni d'une structure de crochet de Poisson est un groupe de Lie-Poisson si pour tous $x_0, y_0 \in G$ et pour tous $f, g \in C^\infty(G)$*

$$\{f, g\}(x_0, y_0) = \{f, g\}_x(x, y_0)_{|x=x_0} + \{f, g\}_y(x_0, y)_{|y=y_0}. \tag{1.2a}$$

où $\{-,-\}_x$ et $\{-,-\}_y$ désignent les structures de Poisson en les premières et deuxièmes variables. Cette condition, en termes de bivecteur de Poisson $\Pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$, s'écrit de la facon suivante :

$$\forall\ x, y \in G \quad \Pi(xy) = (\mathrm{d}_x(\rho_y \otimes \mathrm{d}_x(\rho_y)))\Pi(x) + (\mathrm{d}_y(\lambda_x \otimes \mathrm{d}_y(\lambda_x)))\Pi(y) \tag{1.2b}$$

où λ_x et ρ_y sont respectivement la multiplication à gauche par x et à droite par y. Nous pouvons remarquer en particulier que $\Pi(e) = 0$.

Remarques : Il s'en suit que l'application inverse :

$$\begin{array}{rccc} i: & G & \to & G \\ & g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

est une anti-application de Poisson i.e. $\{f \circ i, g \circ i\}(x) = -\{f, g\}(x^{-1})$.

A partir des groupes de Lie-Poisson, nous allons maintenant introduire leurs versions infinitésimales, les algèbres de Lie. Nous associons au groupe de Lie G, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \simeq T_e(G)$. Rappelons maintenant la notion d'algèbre de Lie.

Définition 1.4 (Algèbre de Lie)**.** *Soit $\Bbbk$ un corps. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\Bbbk$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel, muni d'une application bilinéaire :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

que l'on nomme le crochet de Lie et qui vérifie :

$$[x, x] = 0 \quad \forall\ x \in \mathfrak{g}, \tag{1.3a}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall\ x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{1.3b}$$

Pour faciliter les notations, $(\mathfrak{g}, \mu)$ désigne une algèbre de Lie, où μ correspond au crochet de Lie.

Remarques : Le crochet de Lie est souvent aussi appelé le commutateur de x et y. La condition 1.3b correspond à l'identité de Jacobi et la condition 1.3a avec la bilinéarité est équivalente au fait que le crochet de Lie est anti-symétrique.

Il est alors naturel de se demander quelles sont les structures supplémentaires que nous pourrons trouver lorsque nous considérons les groupes de Lie-Poisson. En effet en dimension finie, si G est un groupe de Lie-Poisson alors il existe une structure canonique d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}^*$. En prenant le dual du commutateur, nous obtenons une nouvelle application $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ qui vérifie coJacobi.

$$\forall\ x \in \mathfrak{g} \quad \mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})\delta(x) = 0, \tag{1.4}$$

où $\mathrm{Alt}(a \otimes b \otimes c) = \frac{1}{6}\left(a \otimes b \otimes c + b \otimes c \otimes a + c \otimes a \otimes b - a \otimes c \otimes b - c \otimes b \otimes a - b \otimes a \otimes\right)$.

Remarques : Par construction, si δ respecte l'identité de coJacobi, alors $\delta^* : \wedge^2\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ respecte l'identité de Jacobi.

$$\frac{1}{3}\delta^*(a \otimes \delta^*(b \otimes c)) + \frac{1}{3}\delta^*(b \otimes \delta^*(c \otimes a)) + \frac{1}{3}\delta^*(c \otimes \delta^*(a \otimes b)) = \delta^*(\mathrm{Id} \otimes \delta^*)\,\mathrm{Alt}(a \otimes b \otimes c) = 0.$$

δ^* est antisymétrique par construction. Ainsi, $\delta^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ respecte l'identité de Jacobi et définit donc un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}^*$. L'application δ est facile à décrire en termes de bivecteurs de Poisson Π : en identifiant T_eG à $\mathfrak{g}$ à l'aide des translations à gauche $\lambda_{\mathfrak{g}}$, nous pouvons considérer le bivecteur comme une application $\Pi : G \to \wedge^2\mathfrak{g}$. Alors, $\delta = \mathrm{d}\Pi : \mathfrak{g} \to \wedge^2\mathfrak{g}$. Nous obtenons le même résultat avec $\rho_{\mathfrak{g}}$ la translation à droite .

Un espace vectoriel $\mathfrak{a}$ muni d'une application linéaire $\delta : \mathfrak{a} \to \wedge^2\mathfrak{a}$ satisfaisant l'identité de coJacobi est appelé cogèbre de Lie. Ainsi, l'espace tangent $T_eG = \mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie-Poisson G est à la fois algèbre de Lie et cogèbre de Lie. De plus, ces deux structures ne sont pas indépendantes :

Lemme 1.5. *Nous avons :*

$$\forall a, b \in \mathfrak{g} \qquad \delta([a, b]) = [\delta(a), 1 \otimes b + b \otimes 1] + [a \otimes 1 + 1 \otimes a, \delta(b)]\,, \tag{1.5}$$

Démonstration : Nous identifions T_xG à $\mathfrak{g}$ à l'aide des translations à droite ρ_x , et nous considérons le bivecteur de Poisson comme une application $\tilde{\Pi} : G \to \wedge^2\mathfrak{g}$. En vertu de 1.2b, nous avons

$$\tilde{\Pi}(xy) = \tilde{\Pi}(x) + (\mathrm{ad}_{x_0} \otimes \mathrm{ad}_{x_0})\tilde{\Pi}(y).$$

De même,

$$\tilde{\Pi}(yx) = \tilde{\Pi}(y) + (\mathrm{ad}_{y_0} \otimes \mathrm{ad}_{y_0})\tilde{\Pi}(x).$$

Soit maintenant $x_0 = e^{ta}$ et $y_0 = e^{tb}$ pour $a, b \in \mathfrak{g}$. La différence des deux dernières expressions est nulle jusqu'au terme du deuxième ordre lorsque t tend vers 0. Le terme en t^2 est :

$$\mathrm{d}\tilde{\Pi}([a,b]) = \Big[a \otimes 1 + 1 \otimes a, \mathrm{d}\tilde{\Pi}(b)\Big] - \Big[1 \otimes b + b \otimes 1, \mathrm{d}\tilde{\Pi}(a)\Big]. \tag{1.6}$$

Ceci conclut la démonstration en remplacant $\mathrm{d}\tilde{\Pi}$ par δ dans l'équation 1.6. □

Cette propriété s'appelle la condition de cocycle, puisqu'elle provient du fait que δ est un 1-cocycle pour la cohomologie de $\mathfrak{g}$, à coefficients dans $\wedge^2\mathfrak{g}$ (voir la définition 1.8).

Définition 1.6 (Bigèbre de Lie)**.** *Une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ est une algèbre de Lie muni d'une application $\delta : \mathfrak{g} \to \wedge^2\mathfrak{g}$ appelée le cocommutateur, satisfaisant coJacobi et la condition de cocycle.*

Un morphisme de bigèbre de Lie est un morphisme d'algèbre de Lie préservant le cocommutateur. Une sous-bigèbre de Lie d'une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ telle que $\delta(\mathfrak{h}) \subset \wedge^2\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un idéal de Lie, l'algèbre de Lie quotient $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\ \mu)$ hérite alors de la structure de bigèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ si et seulement si $\delta(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{g}$. Dans ce cas, $\mathfrak{h}$ est un coidéal de Lie. Les résultats précédents peuvent se résumer dans la proposition suivante.

Proposition 1.7. *Soit G un groupe de Lie-Poisson, alors, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \simeq T_eG$ est une bigèbre de Lie.*

Exemple de bigèbre de Lie : Bigèbre de Lie sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices 2×2 de trace nulle. Elle a pour base :

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec les relations

$$[h,e] = 2e, \quad [h,f] = -2f, \quad [e,f] = h.$$

Les relations suivantes définissent alors une structure de bigèbre de Lie sur $sl_2(\mathbb{C})$:

$$\delta(e) = e \wedge h, \quad \delta(f) = f \wedge h, \quad \delta(h) = 0.$$

Cette structure est appelée structure standard de bigèbre de Lie. Nous noterons que les sous algèbres $\mathfrak{b}^+ = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h$ et $\mathfrak{b}^- = \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h$ sont des sous-bigèbres de Lie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie. Soit V un $\mathfrak{g}$-module, nous définissons maintenant le groupe de cohomologie $H^i(\mathfrak{g}, V)$.

Définition 1.8. *Soient les espaces vectoriels (ensembles de cochaines)* $C^n = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\wedge^n \mathfrak{g}, V)$, *avec* $n \in \mathbb{N}$, *et les applications différentielles* $\partial_n : C^n \to C^{n+1}$ *définies par*

$$\begin{aligned} \partial_n f(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) = & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i . f(x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_{n+1}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\hat{x}_i$ *signifie que la variable* x_i *est omise. Les éléments de* $Z_n = \operatorname{Ker} \partial_n \subset C^n$ *sont appelés n-cocycles et ceux de* $B_n = \operatorname{Im} \partial_{n-1} \subset C^n$ *, n-cobords. Il est possible de vérifier que* $B_n \subset Z_n$, *i.e.* $\partial_{n+1}\partial_n = 0$. *Par définition, le n-ième groupe de cohomologie est le k-espace vectoriel quotient* $H^n(\mathfrak{g}, V) = Z_n / B_n$ *.*

Le zéro-ième groupe de cohomologie est $H^0(\mathfrak{g}, V) = \{v \in V | \mathfrak{g} \cdot v = 0\}$. Nous notons par ailleurs que la condition de cocycle du cocommutateur $\delta : \mathfrak{g} \to \wedge^2 \mathfrak{g}$ de la définition 1.6 de bigèbre de Lie est bien la condition que δ soit un 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\wedge^2 \mathfrak{g}$ (voir EQ. 1.6).

Définition 1.9 (Bigèbre de Lie cobordée)**.** *Un élément* $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ *définit une structure de cobord de la bigèbre de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ *si* $\delta = \partial r$, *i.e. si pour tout* $a \in \mathfrak{g}$, $\delta(a) = \partial r(a) = [a \otimes 1 + 1 \otimes a, r]$. *Une bigèbre de Lie cobordée est un triplet* $(\mathfrak{g}, \mu, r)$, $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ *tel que* $(\mathfrak{g}, \mu, \partial r)$ *soit une bigèbre de Lie.*

Un morphisme de bigèbres de Lie cobordées $\phi : (\mathfrak{g}, \mu, r) \to (\mathfrak{g}', \mu', r')$ est un morphisme de bigèbres de Lie ϕ tel que $\phi(r) = r'$. Une sous-bigèbre de Lie cobordée de $(\mathfrak{g}, \mu, r)$ est une sous-bigèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ telle que $r \in \wedge^2 \mathfrak{h}$. Une bigèbre de Lie donnée peut avoir plusieurs structures de cobord. En fait, si r définit une structure de cobord, les structures de cobord r' sont alors en bijection avec les éléments $\alpha \in (\wedge^2 \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ via $r' = r + \alpha$. Tous les cocycles définis par $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ ne donnent pas lieu à une structure de bigèbre de Lie pour $\mathfrak{g}$, en particulier si l'identité de coJacobi n'est pas satisfaite. Il existe une caractérisation due à V. Drinfeld de tels $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$. Nous adopterons les notations suivantes : pour $x = \sum_i y_i \otimes z_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ nous noterons :

$$x^{(12)} = \sum_i y_i \otimes z_i \otimes 1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}, \qquad x^{(23)} = \sum_i 1 \otimes y_i \otimes z_i \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}, \qquad \text{etc.} \tag{1.8}$$

Définition 1.10. *L'application de Yang-Baxter classique est l'application*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{CYB}: & \mathfrak{g}^{\otimes 2} & \to & \mathfrak{g}^{\otimes 3} \\ & r & \mapsto & [r^{(12)}, r^{(13)}] + [r^{(12)}, r^{(23)}] + [r^{(13)}, r^{(23)}]. \end{array} \tag{1.9}$$

Nous remarquerons que le crochet porte respectivement sur la première, deuxième et troisième place du produit tensoriel.

Théorème 1.11. *Soit* $(\mathfrak{g},\mu)$ *une algèbre de Lie et soit* $r \in \mathfrak{g}^{\otimes 2}$*. Alors, l'application* $\delta = \partial r$ *est le cocommutateur d'une structure de bigèbre de Lie sur* $\mathfrak{g}$ *si et seulement si* $\mathrm{CYB}(r) \in \mathfrak{g}^{\otimes 3}$ *est* $\mathfrak{g}$*-invariant .*

Remarques : Il est clair que si $r \in \mathfrak{g}^{\otimes 2}$ définit une structure de bigèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ et que $r' \in \mathfrak{g}^{\otimes 2}$ diffère de r par un élément de $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, alors r' définit la même structure de bigèbre de Lie que r. Le théorème précédent implique que toute bigèbre de Lie cobordée peut être obtenue avec $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$.

Démonstration : Puisque la condition de cocycle est satisfaite par hypothèse, pour montrer que δ est un cocommutateur, il suffit de montrer que δ est anti-symétrique et que $\delta^* : \mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ est un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}^*$. La preuve que r satisfait (i) si et seulement si $\delta = \partial r$ est anti-symétrique est directe. Supposons cette condition satisfaite. Définissons un crochet $[-,-]_{\mathfrak{g}^*}$ sur $\mathfrak{g}^*$ de telle manière que

$$\forall\ \xi,\eta \in \mathfrak{g}^*, \quad [\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*} = \delta^*(\xi\otimes\eta),$$

avec $\delta^* : \mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}^*$, alors puisque

$$\forall\ \xi,\eta,\zeta \in \mathfrak{g}^* \quad \Big[[\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*},\zeta\Big]_{\mathfrak{g}^*} = \delta^*(\delta^*\otimes id)(\xi\otimes\eta\otimes\zeta),$$

il est clair que l'identité de Jacobi pour $[-,-]_{\mathfrak{g}^*}$ est équivalente à l'identité de coJacobi pour l'application δ (voir equation 1.4). En remplacant δ par $\delta(a) = \left[a^{(1)}+a^{(2)}, r^{(12)}\right]$ dans l'identité de coJacobi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(\delta\otimes\mathrm{Id})(\delta(a))) = {} & \left[\left[a^{(1)}+a^{(3)}, r^{(13)}\right] + \left[a^{(2)}+a^{(3)}, r^{(23)}\right], r^{(12)}\right] \\ & - \left[\left[a^{(2)}+a^{(1)}, r^{(12)}\right] + \left[a^{(1)}+a^{(3)}, r^{(13)}\right], r^{(23)}\right] \\ & - \left[\left[a^{(1)}+a^{(2)}, r^{(12)}\right] - \left[a^{(3)}+a^{(2)}, r^{(23)}\right], r^{(13)}\right].\end{aligned}$$

soit, en utilisant le fait que $\left[\left[a^i, r^{ij}\right], r^{ik}\right] = \left[a^i, \left[r^{ij}, r^{ik}\right]\right]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}(\delta\otimes\mathrm{Id})(\delta(a)) = {} & \left[a^{(1)}, \left[r^{(13)}, r^{(12)}\right]\right] + \left[a^{(2)}, \left[r^{(13)}, r^{(12)}\right]\right] + \left[a^{(3)}, \left[r^{(13)}, r^{(12)}\right]\right] \\ & + \left[a^{(1)}, \left[r^{(23)}, r^{(12)}\right]\right] + \left[a^{(2)}, \left[r^{(23)}, r^{(12)}\right]\right] + \left[a^{(3)}, \left[r^{(23)}, r^{(12)}\right]\right] \\ & + \left[a^{(1)}, \left[r^{(23)}, r^{(13)}\right]\right] + \left[a^{(2)}, \left[r^{(23)}, r^{(13)}\right]\right] + \left[a^{(3)}, \left[r^{(23)}, r^{(13)}\right]\right].\end{aligned}$$

et ainsi

$$\mathrm{Alt}(\delta\otimes\mathrm{Id})(\delta(a)) = \left[a^{(1)}+a^{(2)}+a^{(3)}, \left[r^{(13)}, r^{(12)}\right] + \left[r^{(23)}, r^{(12)}\right] + \left[r^{(23)}, r^{(13)}\right]\right],$$

c'est-à-dire

$$\forall\ a \in \mathfrak{g}, \quad \mathrm{Alt}(\delta\otimes\mathrm{Id})(\delta(a)) = -\left[a, \mathrm{CYB}(r)\right]. \tag{1.10}$$

d'où l'equivalence voulue. $\square$

Un cas particulier de $\mathfrak{g}$-invariance de $\mathrm{CYB}(r)$ est celui où $\mathrm{CYB}(r) = 0$. Cette condition est appelée équation de Yang-Baxter classique (CYBE) et une solution de CYBE dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ est appelée r-matrice.

Définition 1.12 (Bigèbre de Lie triangulaire)**.** *Une bigèbre de Lie cobordée $(\mathfrak{g}, \mu, r)$ est triangulaire si $\mathrm{CYB}(r) = 0$ et $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$. De même, une structure triangulaire sur une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ est la donnée d'un élément $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ verifiant $\partial r = \delta$ et $\mathrm{CYB}(r) = 0$.*

Ainsi il y a une correspondance univoque entre les bigèbres de Lie triangulaires $(\mathfrak{g}, \mu, r)$ et les solutions de CYBE dans $\wedge^2\mathfrak{g}$. Nous définissons aussi une structure plus général de bigèbres de Lie cobordées :

Définition 1.13 (bigèbre de Lie quasi-triangulaire)**.** *Un élément $\tilde{r} \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ tel que $\tilde{r}+\tilde{r}^{(21)}$ soit $\mathfrak{g}$-invariant est une structure quasi-triangulaire pour une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ si $\delta = \partial\tilde{r}$ et $\mathrm{CYB}(\tilde{r}) = 0$. Une bigèbre de Lie quasi-triangulaire est un triplet $(\mathfrak{g}, \mu, \tilde{r})$ tel que r satisfasse les conditions précédentes et que $(\mathfrak{g}, \mu, \partial\tilde{r})$ soit une bigèbre de Lie.*

En d'autres termes, le cocommutateur est donné par une r-matrice dont la partie symétrique est $\mathfrak{g}$-invariante. En particulier, une bigèbre de Lie triangulaire est quasi-triangulaire.

Remarques : Nous remarquons que toute bigèbre de Lie quasi-triangulaire possède une structure de cobord. En effet, $\delta = \partial\tilde{r} = \partial r$ où $r = \frac{\tilde{r}-\tilde{r}^{(21)}}{2}$ est la partie anti-symétrique de $\tilde{r}$. Cependant, r n'est pas, en général, une r-matrice. En fait, une bigèbre de Lie cobordée $(\mathfrak{g}, \mu, r)$ possède une structure quasi-triangulaire si et seulement si nous pouvons écrire $\tilde{r} = r + \frac{T}{2}$ avec $T \in (S^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tel que $CYB(r) = \frac{1}{4}\left[T^{(12)}, T^{(23)}\right]$.

Exemple : La structure standard sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est donnée par le cocommutateur

$$\delta(e) = e \wedge h, \quad \delta(f) = f \wedge h, \quad \delta(h) = 0.$$

Elle possède une structure quasi-triangulaire, donnée par la r-matrice $\tilde{r} = 2e \otimes f + \frac{1}{2}\, h \otimes h$ et nous avons :

$$\tilde{r} + \tilde{r}^{(21)} = 2e \otimes f + 2f \otimes e + h \otimes h = \Omega \in (\mathcal{S}^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

Cette bigèbre n'admet pas de structure triangulaire car $(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}\Omega$, et ainsi $(\wedge^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$ et $r = \frac{\tilde{r}-\tilde{r}^{(21)}}{2} = e \wedge f$ est la seule structure de cobord anti-symétrique sur la structure standard sur $sl_2(\mathbb{C})$ et n'est cependant pas une r-matrice.

Il s'agit maintenant de définir ce qu'est une algèbre enveloppante universelle. Cette définition est très importante car elle aura un rôle central pour la suite de notre étude.

Proposition 1.14. *À toute algèbre associative A, nous pouvons associer une algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A) = A$ en définissant le crochet de Lie de telle manière que*

$$\begin{array}{rccc} [\ ,\ ]: & \mathfrak{g}(A)\times\mathfrak{g}(A) & \rightarrow & \mathfrak{g}(A) \\ & (a,b) & \mapsto & ab-ba \end{array}$$

Démonstration : L'antisymétrie est vérifiée par définition. Nous avons par ailleurs l'égalité de Leibniz,

$$\begin{aligned} [a,bc] &= abc-(bac-bac)-bca \\ &= [a,b]\,c+b\,[a,c]\,. \end{aligned}$$

Dès lors, nous pouvons vérifier l'identité de Jacobi,

$$\begin{aligned} [a,[b,c]] &= [a,bc]-[a,cb] \\ &= [a,b]c+b[a,c]-[a,c]b-c[a,b] \\ &= -[b,[c,a]]-[c,[a,b]]. \end{aligned}$$

Donc le crochet ainsi défini est un crochet de Lie. □

Définition 1.15 (Algèbre enveloppante)**.** *A toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, nous pouvons associer une algèbre associative $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ que nous appellerons l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Soient $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensoriel et $I(\mathfrak{g})$ l'idéal de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme, $xy-yx-[x,y]$ où $x,y\in\mathfrak{g}$. Nous définissons alors :*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$$

Cela nous permet de définir l'application $i_{\mathfrak{g}}$ qui est la composition de l'injection de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ et de la surjection de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Par définition de $i_{\mathfrak{g}}$, nous avons $i_{\mathfrak{g}}([x,y]) = xy-yx$, ce qui montre que $i_{\mathfrak{g}}$ est un morphisme d'algèbre de Lie.

Exposons quelques propriétés de cette algèbre enveloppante.

Théorème 1.16. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Étant donnés une algèbre associative et un morphisme d'algèbre de Lie f de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}(A)$, il existe un unique morphisme d'algèbre $\phi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ tel que $\phi\circ i_{\mathfrak{g}} = f$.*

Remarques : Si nous posons $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$ l'ensemble des morphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$, alors nous pouvons reformuler le théorème par une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}),A) \tag{1.11}$$

Démonstration : Par définition de l'algèbre tensorielle, nous pouvons étendre f en un morphisme d'algèbre $\tilde{f}$ de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ dans A défini par $\tilde{f}(x_1\cdots x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n)$ avec $x_i\in\mathfrak{g}$.

Pour montrer l'existence de ϕ, il suffit alors d'avoir $\tilde{f}(I(\mathfrak{g})) = \{0\}$. Or nous avons pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(xy - yx - [x,y]) &= f(x)f(y) - f(y)f(x) - f([x,y]) \\ &= f(x)f(y) - f(y)f(x) - [f(x), f(y)]\end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'existence de ϕ. L'unicité quant à elle vient du fait que $\mathfrak{g}$ engendre en tant qu'algebre $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ et donc par la même occasion $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. □

Voyons quelques corollaires de ce théorème.

Corollaire 1.17. *Pour tout morphisme d'algèbre de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$. Il existe un unique morphisme d'algèbre $\mathcal{U}(f) : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ tel que :*

$$\mathcal{U}(f) \circ i_{\mathfrak{g}} = i_{\mathfrak{g}'} \circ f. \tag{1.12}$$

De plus, nous obtenons que $\mathcal{U}(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$. Si nous avons un second morphisme $f' : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}''$ alors :

$$\mathcal{U}(f' \circ f) = \mathcal{U}(f') \circ \mathcal{U}(f). \tag{1.13}$$

Corollaire 1.18. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie et $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ leur somme directe. Alors*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}') \tag{1.14}$$

Un résultat important sur les algèbres enveloppantes est le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt qui établit un isomorphisme entre l'algèbre graduée associée à l'algèbre enveloppante et l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$.

Propriétés 1.19. *Il existe une filtration sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ induite par celle de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$.*

Soient $\mathcal{T}^n(\mathfrak{g})$ le sous-module de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ formé des tenseurs homogènes d'ordre n. Nous pouvons alors définir une filtration sur $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, en posant $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g}) = \sum_{i \leq n} \mathcal{T}^i(\mathfrak{g})$. Nous avons $\mathcal{T}_0(\mathfrak{g}) = \Bbbk$, $\mathcal{T}_{-1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{T}_{n+1}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g})\mathcal{T}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{T}_{n+m}(\mathfrak{g})$. Cette filtration induit une filtration sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, où $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ est la projection canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g})$. Nous pouvons alors obtenir l'algèbre graduée $Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ associée à l'algèbre filtrée $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

$$Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{i \geq 0} (\mathcal{U}_i(\mathfrak{g}) / \mathcal{U}_{i-1}(\mathfrak{g}))$$

Théorème 1.20 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Soient $\mathfrak{g}$ une $\Bbbk$-algèbre de Lie et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, Alors il existe un isomorphisme entre l'algèbre graduée $Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ et l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.*

$$Gr(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cong \mathcal{S}(\mathfrak{g})$$

Nous renvoyons au livre Groupes et Algèbres de Lie : Chapitres 1 de Bourbaki [Bou81a] pour une preuve et une analyse plus détaillée de ce théorème.

Intéressons nous maintenant à la construction du double faite par V. Drinfeld. Cette construction est un des points clés de la quantification des groupes de Lie-Poisson et des bigèbres de Lie. La première étape de cette construction est la notion de triplet de Manin.

Définition 1.21 (triplet de Manin)**.** *Un triplet de Manin de dimension finie est un triplet d'algèbres de Lie de dimension finie* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ *où* $\mathfrak{g}$ *est équipé d'une forme bilinéaire invariante non dégénérée* $\langle -, - \rangle$ *telle que :*

1) $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ *sont des sous-algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$ *telles que* $\mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}$ *au sens des espaces vectoriels.*

2) $\mathfrak{g}_+$ *et* $\mathfrak{g}_-$ *sont isotropes par rapport à* $\langle -, - \rangle$*.*

En particulier comme $\langle -, - \rangle$ est non dégénérée, $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ sont des sous-algèbres isotropes maximales.

Proposition 1.22. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de dimension finie. Alors il existe une correspondance univoque entre les structures de bigèbres de Lie sur* $\mathfrak{g}$ *et les triplets de Manin* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_+, \mathfrak{a}_-)$ *tel que* $\mathfrak{a}_+ = \mathfrak{g}$*.*

Démonstration : Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ un triplet de Manin. Alors la forme non dégénérée $\langle -, - \rangle$ induit une association non dégénérée $\mathfrak{g}_+ \otimes \mathfrak{g}_- \longrightarrow \Bbbk$ et, par conséquent, nous avons une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}_+^* \cong \mathfrak{g}_-$. Nous avons ainsi une structure de cogèbre induite sur $\mathfrak{g}_+$ que l'on caractérisera par δ. Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une bigèbre de Lie, il faut regarder la condition du cocycle 1.5.

$$\delta([a, b]) = \left[a^{(1)} + a^{(2)}, \delta(b)\right] + \left[\delta(a), b^{(1)} + b^{(2)}\right]$$

Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\mathfrak{g}_+$ et (e^i) une base duale de $\mathfrak{g}_+^* \cong \mathfrak{g}_-$. Posons $[e_i, e_j] = \sum_s c_{ij}^s e_s$ et $[e^i, e^j] = \sum_s f_s^{ij} e^s$ alors par définition de δ comme dual du commutateur, nous aurons : $\delta(e_i) = \sum_{s,t} f_i^{st} e_s \otimes e_t$. Nous cherchons à démontrer notre égalité en utilisant la forme bilinéaire non dégénérée $\langle -, - \rangle$. Dans un premier temps, regardons ce que l'on obtient avec le premier terme.

$$\begin{aligned}
\langle e^r \otimes e^s, \delta([e_k, e_i]) \rangle &= \langle [e^r, e^s], [e_k, e_i] \rangle && \delta \text{ est le dual du crochet,} \\
&= \langle [[e^r, e^s], e_k], e_i \rangle && \text{par invariance de } \langle -, - \rangle, \\
&= \langle [[e^r, e_k], e^s] + [e^r, [e^s, e_k]], e_i \rangle && \text{en utilisant Jacobi.}
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés d'invariance de $\langle -, - \rangle$, nous montrons que :

$$[e_k, e^r] = \sum_t f_k^{rt} e_t - c_{kt}^r e^t.$$

Par conséquent, nous obtenons le résultat suivant :

$$\langle e^r \otimes e^s, \delta([e_k, e_i])\rangle = \sum_t c^r_{kt} f^{ts}_i + \sum_t c^s_{ti} f^{rt}_k + \sum_t c^s_{kt} f^{rt}_i + \sum_t c^i_{rt} f^{st}_k.$$

Finalement, nous répétons la même démarche de l'autre coté de l'égalité

$$\begin{aligned}
\langle e^r \otimes e^s, [1 \otimes e_k + e_k \otimes 1, \delta(e_i)]\rangle &= \langle [e^r, e_k] \otimes e^s + e^r \otimes [e^s, e_k], \delta(e_i)\rangle \\
&= \sum_t c^r_{kt} f^{ts}_i + \sum_t c^s_{kt} f^{rt}_i, \\
\langle e^r \otimes e^s, [\delta(e_k), 1 \otimes e_i + e_i \otimes 1]\rangle &= -\langle [e^r, e_i] \otimes e^s + e^r \otimes [e^s, e_i], \delta(e_k)\rangle \\
&= \sum_t c^s_{ti} f^{rt}_k + \sum_t c^i_{rt} f^{st}_k,
\end{aligned}$$

d'où nous obtenons l'égalité souhaitée. Par conséquent, $\mathfrak{g}_+$ est une bigèbre de Lie et $\mathfrak{g}_-$ sa duale.

Réciproquement, si $\mathfrak{a}$ est une bigèbre de Lie, nous pouvons construire un triplet de Manin dans le sens suivant, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*$, avec comme forme non dégénérée $\langle -, - \rangle$ donnée par :

$$\forall\ x, y \in \mathfrak{a} \ \text{ et } \ \forall\ x', y' \in \mathfrak{a}^*, \quad \langle x + y, x' + y'\rangle = y(x') + y'(x).$$

Il nous faut ensuite étendre le crochet de Lie à $\mathfrak{g}$, de façon à ce que notre forme reste invariante, c'est a dire que :

$$\begin{aligned}
\forall\ x, y \in \mathfrak{a} \ \text{ et } \ \forall\ x', y' \in \mathfrak{a}^* \quad \langle [y, x], x'\rangle &= \langle y, [x, x']\rangle \\
\langle [x, y], y'\rangle &= \langle x, [y, y']\rangle,
\end{aligned}$$

nous devons forcément poser :

$$[y, x] = \mathrm{ad}^*(x)(y) - \mathrm{ad}^*(y)(x), \tag{1.15}$$

où ad^* est l'action coadjointe de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{a}^*$ et de $\mathfrak{a}^*$ sur $\mathfrak{a}$. Un calcul réalisé comme précédemment nous permet de le montrer. Nous utiliserons fortement la propriété suivante de l'action coadjointe dans le but de démontrer l'identité de Jacobi.

$$\langle \mathrm{ad}^*(x)(y), x\rangle = -\langle y, [x, y]\rangle$$

□

Soit $\mathfrak{a}$ un bigèbre de Lie. Nous lui associons le triple de Manin $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^*)$. Nous définissons une structure de bigèbre de Lie sur l'algèbre de Lie a en posant $\delta = \delta_{\mathfrak{a}} - \delta_{\mathfrak{a}^*}$. Nous pouvons alors montrer que cela defini une structure de cogèbre sur $\mathfrak{g}$. Nous renvoyons au livre de P.

Etingof et O. Schiffman [ES02] chapitre 4 pour une démonstration. Cette bigèbre est une bigèbre de Lie quasi-triangulaire. La r-matrice est donnée par

$$\tilde{r} = \sum_i e_i \otimes e^i \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}^*, \tag{1.16}$$

correspondant à l'identité dans $\mathrm{End}(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}^*$.

Définition 1.23. *Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie de dimension finie. Nous appellerons $\mathfrak{d}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ le double de Drinfeld de $\mathfrak{g}$ où $\mathfrak{d}\mathfrak{g}$ désigne la bigèbre de Lie quasi-triangulaire construite précédemment.*

Une des propriétés importantes du double de Drinfeld concerne la structure de bigèbre de Lie quasi-triangulaire.

Proposition 1.24. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $r \in \mathfrak{g}^{\otimes 2}$ une r-matrice. Alors il existe une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}_+, \mu, \delta)$ et un morphisme d'algèbre de Lie $\phi : \mathfrak{d}\mathfrak{g}_+ \to \mathfrak{g}$ tel que $\phi_{|\mathfrak{g}_+}$ est injectif et $\phi \otimes \phi(\tilde{r}) = r$ ou $\tilde{r}$ est la structure quasi-triangulaire usuelle sur $\mathfrak{d}\mathfrak{g}_+$ définie par l'EQ. 1.16.*

Remarques : En d'autre termes, nous avons une correspondance univoque entre les solutions de l'equation classique de Yang-Baxter et les paires $(\mathfrak{g}_+, \phi)$, ou $\mathfrak{g}_+$ est une sous-algèbre de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et $\phi : \mathfrak{d}\mathfrak{g}_+ \to g$ est telle que $\phi_{|\mathfrak{g}_+}$ est une injection canonique.

2 Algèbre de Hopf et Quantification

Cette section est consacreée à la définition de la quantification des bigèbres de Lie. Dans un premier temps, nous définirons les structures "quantiques" analogues aux bigèbres de lie, plus précisement, les algèbres de Hopf. Nous étudierons ensuite les différentes structures associées à ces algèbres pour finalement donner la définition de quantification.

Définition 2.1 (Algèbre)**.** *Une $\Bbbk$-algèbre (ou algèbre, nous ne donnerons pas le corps de base s'il n'y a pas de risque de confusion) A est un $\Bbbk$-espace vectoriel muni de deux applications linéaires* $\mathrm{m} : A \otimes A \to A$ *(multiplication) et* $\eta : \Bbbk \to A$ *(unité), vérifiant :*

i) l'associativité de la multiplication, qui se traduit a l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{m}\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\mathrm{m}"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{m}"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{m}"] & A \end{tikzcd} \tag{2.1a}$$

ii) l'unité,

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{m}"] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "\mathrm{Id}\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{2.1b}$$

L'algèbre sera dite commutative si nous avons de plus :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mathrm{m}"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mathrm{m}"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{2.1c}$$

où τ est la permutation de la première er deuxième composante, i.e. $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Nous noterons l'algèbre comme le triplet (A, m, η).

Nous définissons ensuite la structure duale aux algèbres, en inversant les flèches des diagrammes précédents.

Définition 2.2 (Cogèbre)**.** *Une $\Bbbk$-cogèbre est la donnée (C, Δ, ε) d'un espace vectoriel C et de deux applications linéaires, le coproduit (aussi appelé comultiplication) $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ et la counité $\varepsilon : C \longrightarrow \Bbbk$ vérifiant :*

i) la coassociativité de la comultiplication, qui se traduit par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{Id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \tag{2.2a}$$

ii) la counité, représentée par ce diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon \otimes Id"'] \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \varepsilon"] & C \otimes \Bbbk \\ & C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2b}$$

Nous dirons, de plus, que la cogèbre est cocommutative si de plus nous avons :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\tau"] & & C \otimes C \end{tikzcd} \tag{2.2c}$$

Soit (C, Δ, ε) et $(C', \Delta', \varepsilon')$ deux cogèbres . Un morphisme de cogèbre est alors une application linéaire $f : C \longrightarrow C'$ vérifiant :

$$(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon' \circ f. \tag{2.3}$$

Soit (C, Δ, ε) une cogèbre. Un sous-espace I de C est un coidéal si $\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I$.

Notation : Nous utiliserons par la suite la notation de Sweedler pour Δ.

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x''. \tag{2.4}$$

Nous renvoyons au livre de Kassel [Kas95] pour plus de détail sur l'utilisation et l'origine de cette notation.

Proposition 2.3. *Le dual d'une cogèbre est une algèbre.*

Soit B un espace vectoriel muni à la fois d'une structure d'algèbre (B, m, η) et d'une structure de cogèbre (H, Δ, ε). Les conditions de compatibilité entre les deux structures coexistantes se définissent comme suit :

Théorème 2.4. *Avec les notations précédentes, nous avons une équivalence entre les deux énoncés suivants dans lesquels nous munissons $B \otimes B$ des deux structures induites d'algèbre et de cogèbre.*

(i) Les applications m et η sont des morphismes de cogèbres.

(ii) Les applications Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.

Démonstration : Le principe de cette preuve réside dans les diagrammes commutatifs suivants exprimant nos affirmations. Le fait que m est un morphisme de cogèbre est illustré par :

$$
\begin{tikzcd}
& B\otimes B \arrow[dl, "\Delta\otimes\Delta"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\
(B\otimes B)\otimes(B\otimes B) \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id}"] & & B \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\
(B\otimes B)\otimes(B\otimes B) \arrow[rr, "\mathrm{m}\otimes\mathrm{m}"] & & B\otimes B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B\otimes B \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \Bbbk\otimes\Bbbk \arrow[d, "\cong"] \\
B \arrow[r, "\varepsilon"] & \Bbbk
\end{tikzcd}
\tag{2.5a}
$$

tandis que le fait que η est un morphisme de cogèbre est illustré par :

$$
\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\cong"'] & B \arrow[d, "\Delta"] \\
\Bbbk\otimes\Bbbk \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] & B\otimes B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] & & B \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& \Bbbk &
\end{tikzcd}
\tag{2.5b}
$$

Pour démontrer que Δ et ε sont des morphismes d'algèbres, il suffit d'inverser les flèches. $\square$

Définition 2.5 (Bigèbre)**.** *Une bigèbre est un quintuplet $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ où (B, m, η) est une algèbre et (B, Δ, ε) est une cogèbre vérifiant la condition de compatibilité 2.5a du théorème 2.4.*

$$\Delta(\mathrm{m}(a \otimes b)) = (\mathrm{m} \otimes \mathrm{m}) \left(\Delta^{(13)}(a)\Delta^{(24)}(b)\right), \tag{2.6}$$

où $\Delta^{(13)}(a) = (\Delta(a))^{(13)} = \sum_{(a)} a' \otimes 1 \otimes a'' \otimes 1$.

Un morphisme entre deux bigèbres sera un morphisme pour les deux structures existantes.

Proposition 2.6. *Soit* $B = (B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *une bigèbre, alors* $B^{op} = (B, \mathrm{m}^{op}, \eta, \Delta, \varepsilon)$, $B^{cop} = (B, \mathrm{m}, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon)$, $B^{opcop} = (B, \mathrm{m}^{op}, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon)$ *sont des bigèbres, où* $\mathrm{m}^{op} = \mathrm{m} \circ \tau$ *et* $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$. *Si* B *est de dimension finie alors* $B^* = (B^*, \mathrm{m}^*, \eta^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ *est aussi une bigèbre.*

Exemple : La bigèbre $M_n(\Bbbk)$ est isomorphe à $\Bbbk[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$, l'algèbre des polynômes en n^2 variables $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour tous i, j, nous posons :

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj} \quad \text{et} \quad \varepsilon(x_{ij})\delta_{ij}.$$

Ces formules définissent des morphismes d'algèbres $\Delta : M_n(\Bbbk) \to M_n(\Bbbk) \otimes M_n(\Bbbk)$ et $\varepsilon : M_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ équipant ainsi $M_n(\Bbbk)$ d'une structure de bigèbre.

Intéressons nous maintenant à l'algèbre tensorielle, que l'on munit d'une structure de bigèbre.

Théorème 2.7. *Etant donné un espace vectoriel* V, *il existe une unique structure de bigèbre sur l'algèbre tensorielle* $\mathcal{T}(V)$ *telle que* $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$ *et* $\varepsilon(v) = 0$ *pour tout élément* v *de* V. *Cette bigèbre est cocommutative et pour tous* $v_1, \ldots, v_n \in V$, *nous avons :*

$$\varepsilon(v_1 \cdots v_n) = 0,$$

et

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = 1 \otimes v_1 \cdots v_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in R(n,p)} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n)} + v_1 \cdots v_n \otimes 1, \tag{2.7}$$

où $R(n,p)$ *est l'ensemble des permutations du groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ *telles que :*

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(n).$$

Définition 2.8. *Soit* (C, Δ, ε) *une cogèbre. Un élément* $x \in C$ *est dit primitif si :*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

Nous notons $\mathrm{prim}(C)$ *l'ensemble des éléments primitifs de* C.

Proposition 2.9. *Si* x *est un élément primitif d'une bigèbre, alors nous avons* $\varepsilon(x) = 0$. *Si* y *est un autre élément primitif, alors le commutateur* $\left[x, y\right] = xy - yx$ *est aussi primitif.*

Démonstration : Par définition de la counité et d'un élément primitif, nous avons pour x un élément primitif :

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{m} \circ (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) \\ &= \varepsilon(x) * 1 + \varepsilon(1) * x \\ &= x + \varepsilon(x) * 1. \end{aligned}$$

D'ou $\varepsilon(x) = 0$. Pour la deuxième proposition, nous avons pour tous x et y primitifs :

$$\begin{aligned}\Delta(xy) &= \Delta(x)\Delta(y)\\ &= (1\otimes x + x\otimes 1)(1\otimes y + y\otimes 1)\\ &= 1\otimes xy + y\otimes x + x\otimes y + xy\otimes 1.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\Delta([x,y]) &= \Delta(xy - yx)\\ &= 1\otimes [x,y] + [x,y]\otimes 1.\end{aligned}$$

Donc $[x,y]$ est un é'lément primitif. □

Définition 2.10 (algèbre de Hopf)**.** *Soit $H = (H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. Nous dirons que H est un algèbre de Hopf si elle est munie de plus, d'un isomorphisme linéaire $S : H \to H$ satisfaisant :*

$$\mathrm{m}(1\otimes S)\Delta(x) = \mathrm{m}(S\otimes 1)\Delta(x) = \eta(\varepsilon(x)). \tag{2.8}$$

Nous dirons que H est commutative (resp. cocommutative) si $\mathrm{m}(x,y) = \mathrm{m}(y,x)$ pour tous $x, y \in H$ (resp. $\Delta(x) = \tau\Delta(x)$ pour tout $x \in H$). Une sous-algèbre de Hopf K est une sous-algèbre de H vérifiant $\Delta(K) \subset K\otimes K$ et $S(K) \subset K$. Un idéal d'algèbre de Hopf est un idéal I tel que $\Delta(I) \subset A\otimes I + I\otimes A$ et $S(I) \subset I$.

Remarques : En utilisant les conventions de Sweedler, l'antipode vérifie :

$$\sum_{(x)} x' S(x'') = \eta(\varepsilon)(x) = \sum_{(x)} S(x')x''.$$

Définition 2.11 (morphisme d'algèbre de Hopf)**.** *Un morphisme d'algèbre de Hopf est un morphisme qui préserve toutes les structures de l'algèbre.*

Exemple : Algèbre enveloppante universelle :

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Nous pouvons définir un coproduit sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ exactement de la même façon que sur $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, en posant

$$\forall\, x \in \mathfrak{g} \quad \Delta(x) = 1\otimes x + x\otimes 1.$$

Nous l'étendons alors grâce à $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$. De la même façon nous définissons l'antipode :

$$\forall\, x \in \mathfrak{g} \quad S(x) = -x,$$

que nous étendons à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ par $S(xy) = S(y)S(x)$. Nous posons finalement $\varepsilon(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et ainsi $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ devient une algèbre de Hopf cocommutative.

Exemple : Fonction d'un groupe :

Soit G un groupe et $\mathcal{F}(G)$ l'algèbre des fonctions sur G. $\mathcal{F}(G)$ est commutative. Nous identifions $\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$ avec $\mathcal{F}(G \times G)$

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y).$$

Nous pouvons définir comme suit

i) Un coproduit : $\Delta f(x, y) = f(xy)$.

ii) Une counité : $\varepsilon(f) = f(1)$.

iii) Une antipode : $S(f)(x) = f(x^{-1})$.

Et nous avons, pour tout $x \in G$, $f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = f(1)$. Donc $\mathcal{F}(G)$ est une algèbre de Hopf.

Proposition 2.12. *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative engendrée par ses éléments primitifs. Alors $H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (avec la structure de Hopf que nous avons défini dans l'exemple précédent) pour une certaine algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{g} = \text{prim}(H) \subset H$, l'ensemble des éléments primitifs de H. Pour x et y primitifs, nous posons $\big[x, y\big] = xy - yx$. Alors nous avons :

$$\Delta([x, y]) = 1 \otimes [x, y] + [x, y] \otimes 1.$$

Donc $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie. Comme $\mathfrak{g}$ engendre H, nous avons un morphisme d'algèbres de Hopf $\phi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to H$ surjectif. Notons $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} \phi$. Il s'agit d'un idéal de Hopf de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Nous pouvons écrire $\mathcal{K} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{K}_n$ où ($\mathcal{K}_i = \oplus_{k \leq i} \mathcal{K} \cap \mathcal{T}^k \mathfrak{g}$) est la filtration de $\mathcal{K}$ induite par celle de $\mathcal{T}\mathfrak{g}$:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{U}(\mathfrak{g})_n \quad \text{où} \quad \mathcal{U}(\mathfrak{g})_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{T}^k(\mathfrak{g})/(\mathcal{I} \cap \mathcal{T}^k(\mathfrak{g})),$$

où $\mathcal{I}$ est l'idéal engendré par $xy - yx - \big[x, y\big]$. Nous avons alors $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 = 0$. Supposons que $\mathcal{K} \neq \{0\}$, alors soit $x \in \mathcal{K}_m$, un élément non nul de degré minimal m. Il est alors facile de voir que :

$$\Delta(x) - (1 \otimes x + x \otimes 1) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{m-1} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{m-1},$$

or comme ϕ est un morphisme d'algèbre de Hopf,

$$\phi \otimes \phi(\Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1) = \Delta(\phi(x)) - \phi(1) \otimes \phi(x) - \phi(x) \otimes \phi(1) = 0,$$

par minimalité du degré m, nous avons que $\Delta(x) - (1 \otimes x + x \otimes 1) = 0$, donc x est primitif. Par conséquent, x est nul car il appartient à $\mathcal{K}_1 = 0$. Ceci est une contradiction. D'ou $\mathcal{K} = \{0\}$ et $H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. □

Tout comme pour la notion de bigèbre de Lie, celle d'algèbre de Hopf est autoduale.

Proposition 2.13. *Soit $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors $(H^*, \mathrm{m}^*, \eta^*, \Delta^*, \varepsilon^*, S^*)$ est une algèbre de Hopf.*

Démonstration : Comme nous l'avons exposé précédement dans la proposition 2.6 si H une bigèbre finie alors $(H^*, \mu^*, \eta^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ est aussi un bigèbre. Il reste donc uniquement à vérifier que S^* est une antipode pour H^*. En reprenant les conventions de Sweedler, nous avons pour tous $\alpha \in H^*$ et $x \in H$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{(\alpha)} \alpha' S^*(\alpha'')\right)(x) &= \sum_{(\alpha)(x)} \alpha'(x') S^*(\alpha'')(x'') \\ &= \sum_{(\alpha)(x)} \alpha'(x')\alpha''(S(x'')) \\ &= \alpha\left(\sum_{(x)} x' S(x'')\right) \\ &= \alpha(\eta\varepsilon(x)) \\ &= \varepsilon^*\eta^*(\alpha)(x).\end{aligned}$$

Nous pouvons démontrer la même chose avec $\left(\sum_{(\alpha)} S^*(\alpha')\alpha''\right)(x)$. □

Étudions finalement les déformations des algèbres de Hopf.

Définition 2.14 (Déformation d'algèbre de Hopf)**.** *Une déformation d'une algèbre de Hopf $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est une algèbre de Hopf $(H_\hbar, \mathrm{m}_\hbar, \eta_\hbar, \Delta_\hbar, \varepsilon_\hbar, S_\hbar)$ sur un anneau $\Bbbk[[\hbar]]$ de série formelle en une indéterminée $\hbar$ sur $\Bbbk$ telle que :*

1. *$H_\hbar$ est isomorphe à $H[[\hbar]]$ comme $\Bbbk[[\hbar]]$-module.*
2. *$\mathrm{m} \equiv \mathrm{m}_\hbar \mod \hbar$, $\Delta \equiv \Delta_\hbar \mod \hbar$.*

Deux déformations sont équivalentes si il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre elles qui est l'identité modulo $\hbar$.

Étant donné que $\mathrm{m}_\hbar$ et $\Delta_\hbar$ sont des morphismes de $\Bbbk[[\hbar]]$-modules, ils sont déterminé en donnant leurs valeurs par rapport aux éléments $a_\hbar = a_0 + a_1\hbar + a_2\hbar^2 + \cdots$ avec $a_1 = a_2 = \cdots = 0$. ce qui nous donne, pour tous a, a' dans H,

$$\mathrm{m}_\hbar(a \otimes a') = \mathrm{m}(a \otimes a') + \mathrm{m}_1(a \otimes a')\hbar + \cdots$$

$$\Delta_\hbar(a) = \Delta(a) + \Delta_1(a)\hbar + \cdots$$

où $\mathrm{m}_i : H \otimes H \to H$ et $\Delta_i : H \to H \otimes H$.
La condition d'associativité de $\mathrm{m}_\hbar$ devient à l'ordre 1 en $\hbar$:

$$\mathrm{m}_1(\mathrm{m}(a \otimes b) \otimes c) + \mathrm{m}(\mathrm{m}_1(a \otimes b) \otimes c) = \mathrm{m}_1(a \otimes \mathrm{m}(b \otimes c)) + \mathrm{m}(a \otimes \mathrm{m}_1(b \otimes c)). \tag{2.9a}$$

De même, la condition de coassociativité de $\Delta_\hbar$ devient à l'ordre 1 en $\hbar$:

$$(\Delta_1 \otimes \mathrm{Id})\Delta + (\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta_1 = (\mathrm{Id} \otimes \Delta_1)\Delta + (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta_1. \tag{2.9b}$$

La condition d'homomorphisme d'algèbre pour $\Delta_\hbar$ et $\mathrm{m}_\hbar$, quand 'a elle devient à l'ordre 1 en $\hbar$:

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{m}_1(a_1 \otimes a_2)) + \Delta_1(\mathrm{m}(a_1 \otimes a_2)) &= (\mathrm{m} \otimes \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_1 \otimes \mathrm{m})\Delta^{(13)}(a_1)\Delta^{(24)}(a_2) \\ &\quad + \Delta_1(a_1)\Delta(a_2) + \Delta(a_1)\Delta_1(a_2). \end{aligned} \tag{2.9c}$$

Nous introduisons, dans un premier temps, les algèbres enveloppantes universelles quantiques qui sont les quantifications des bigèbres de Lie, puis nous nous intéresserons à l'analogue pour les algèbres de Hopf, des structures que nous avons définies sur les bigèbres de Lie.

Définition 2.15. *Une algèbre de déformation de Hopf est une algèbre enveloppante universelle quantique si $H/\hbar H \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pour une certaine algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, où nous considérons $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ avec la structure usuelle d'algèbre de Hopf. Nous noterons $\mathcal{QUEA}$ la sous-catégorie de $\mathcal{HA}$ (algèbre de Hopf) qui est composée des algèbres enveloppantes universelles quantiques.*

Si nous avons A une déformation d'une algèbre commutative alors A_0 hérite d'une structure de Poisson. Un résultat similaire existe pour les algèbres enveloppantes universelles quantiques.

Proposition 2.16. *Soit H une algèbre enveloppante universelle quantique, $H/\hbar H \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est naturellement équipée d'une structure de bigèbre de Lie définie par :*

$$\delta(x) = \frac{\Delta(\tilde{x}) - \Delta^{op}(\tilde{x})}{\hbar} \mod \hbar, \tag{2.10}$$

où $\tilde{x}$ est un relèvement de x dans H.

Démonstration : Notons que l'EQ. 2.10 a un sens car H est cocommutative au premier rang. Vérifions alors que δ est bien défini : prenons deux relèvements de x dans H. Soient $\tilde{x}$ et $\tilde{x} + \hbar u$ deux tels relèvements, alors :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(\tilde{x} + \hbar u) - \Delta^{op}(\tilde{x} + \hbar u)}{\hbar} &\equiv \frac{\Delta(\tilde{x}) - \Delta^{op}(\tilde{x})}{\hbar} + (\Delta(u) - \Delta^{op}(u)) && \mod \hbar \\ &\equiv \frac{\Delta(\tilde{x}) - \Delta^{op}(\tilde{x})}{\hbar} && \mod \hbar.\end{aligned}$$

Nous cherchons alors à montrer que $\delta(x) \in \wedge^2\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Comme $\delta(x)$ est antisymétrique, il suffit de prouver que ces deux composantes sont des éléments primitifs de

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Ceci est une conséquence de l'identité de Leibniz : Soit Δ_0 le coproduit défini sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = H/\hbar H$. Alors :

$$\begin{aligned}(\Delta_0 \otimes 1)\delta(x) &\equiv \frac{1}{h}(\Delta \otimes 1)(\Delta(\tilde{X}) - \Delta^{op}(\tilde{x}) && \mod \hbar \\ &\equiv \frac{1}{h}\big(((1 \otimes \Delta) - (1 \otimes \Delta^{op}))\Delta(\tilde{x}) + \tau^{(23)}((\Delta \otimes 1) - (\Delta^{op} \otimes 1))\Delta(\tilde{x})\big) && \mod \hbar \\ &= (1 \otimes \delta)\Delta_0(x) + \tau^{(23)}(\delta \otimes 1)\Delta_0(x).\end{aligned}$$

où $\tau^{(23)}$ est le morphisme qui echange la deuxième et la troisième composante. L'identité de coJacobi et la condition du cocycle sont respectivement induite par la coassociativité et la propriété d'homomorphisme de Δ. □

Définition 2.17. *Soit $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf. Nous dirons qu'il s'agit d'une algèbre de Hopf-coPoisson si de plus H est muni d'un cocrochet δ tel que pour tous $a, b \in H$:*

$$\delta(ab) = \delta(a)\Delta(b) + \Delta(a)\delta(b). \tag{2.11}$$

Proposition 2.18. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf-coPoisson cocommutative si et seulement si $\mathfrak{g}$ est une bigèbre de Lie.*

Démonstration : Si $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf-CoPoisson, alors la structure de cogèbre de Lie est donnée par l'EQ. 2.10. Réciproquement, la condition du cocycle nous permet d'étendre $\delta : \mathfrak{g} \to \wedge^2\mathfrak{g}$ à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \wedge^2\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. □

Nous pouvons alors donner une définition la quantification des algèbres de Hopf-coPoisson cocommutative.

Définition 2.19. *Soit $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf-coPoisson cocommutative et soit δ son cocrochet. Une quantification de H est une algèbre de déformation de Hopf $H_\hbar$ de H telle que*

$$\delta(x) = \frac{\Delta(\tilde{x}) - \Delta^{op}(\tilde{x})}{\hbar} \mod \hbar, \tag{2.10}$$

où $\tilde{x}$ est un relèvement de x dans $H_\hbar$.

Nous arrivons alors à la définition suivante :

Définition 2.20. *La limite semi-classique d'une algèbre enveloppante quantique universelle H est une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g} = \mathrm{prim}(H/\hbar H), \mu, \delta)$ ou $\mathrm{prim}(H/\hbar H)$ est l'ensemble des éléments primitifs de $H/\hbar H$ et où δ est défini comme précédemment. Réciproquement, H est la quantification de la bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$.*

Remarques : Comme cela est le cas pour les algèbres de Poisson, la limite semi-classique est bien définie, tandis qu'il existe, en général, un nombre infini de quantification, d'une algèbre de Lie.

Théorème 2.21 (Milnor-Moore)**.** *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ *une algèbre de Hopf cocommutative telle que :*

$$H = \cup_{n\geq 0} \operatorname{Ker}((\operatorname{Id} - \varepsilon)^{\otimes n} \circ \Delta^{(n)}), \tag{2.12}$$

où $\Delta^{(1)} = \operatorname{Id}$, $\Delta^{(2)} = \Delta \ \ldots \ \Delta^{(n+1)} = (\operatorname{Id}^{\otimes n-1} \otimes \Delta)\Delta^{(n)}$.
Alors si nous posons $\mathfrak{g} = \operatorname{prim}(H)$ *alors* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie et* H *est isomorphe à* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *en tant qu'algèbre de Hopf.*

Nous avons un lien entre les notions de bigèbre de Lie et d'algèbres de Hopf. Il est donc naturel de vouloir transporter sur les algèbres de Hopf, les structures que nous avons définies sur les bigèbres de Lie.

Définition 2.22 (Algèbre de Hopf cobordée)**.** *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ *une algèbre de Hopf. Un élément inversible* $R \in H \otimes H$ *définit une structure cobordée sur* H *si :*

i) $\Delta^{op} = R\Delta R^{-1}$.

ii) $RR^{(21)} = 1$.

iii) $R^{(12)}(\Delta \otimes 1)R = R^{(23)}(1 \otimes \Delta)R$.

Nous appelons la donnée $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$ *une algèbre de Hopf cobordée.*

Remarques : le défaut de cocommutativité n'est pas quelconque. Il est mesuré par l'élément inversible R.

Donnons maintenant le lien avec les bigèbres de Lie cobordées.

Proposition 2.23. *Soient* H *une algèbre enveloppante universelle quantique de la bigèbre de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ *et* R *un cobord sur* H, *alors l'élément* $r \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *définit par*

$$R \equiv 1 + \hbar r \mod \hbar^2, \tag{2.13}$$

est un cobord dans la bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Démonstration : Soit $a \in \mathfrak{g}$ et $\tilde{a}$ un relevé de a dans H. Nous avons

$$\begin{aligned}
\delta(a) &\equiv \frac{\Delta(\tilde{a}) - \Delta^{op}(\tilde{a})}{\hbar} && \mod \hbar \\
&\equiv \frac{\Delta(\tilde{a}) - R\Delta(\tilde{a})R^{-1}}{\hbar} && \mod \hbar \\
&\equiv \frac{\Delta(\tilde{a}) - (1+\hbar r)\Delta(\tilde{a})(1+\hbar r^{(21)})}{\hbar} && \mod \hbar \\
&\equiv \frac{\hbar r\Delta(\tilde{a}) + \Delta(\tilde{a})\hbar r^{(21)}}{\hbar} && \mod \hbar \\
&\equiv [a_1 + a_2, r]
\end{aligned}$$

Comme $\Delta(\tilde{a}) \equiv a \otimes 1 + 1 \otimes a \mod \hbar$. De plus $RR^{(21)} = 1$ d'ou $r + r^{(21)} = 0$. La seule chose qu'il reste à vérifier est que $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$. En utilisant l'axiome 3 de la définition 2.22 du cobord r, nous avons alors :

$$r^{(12)} + (\Delta_0 \otimes \mathrm{Id})r = r^{(23)} + (\mathrm{Id} \otimes \Delta_0)r, \tag{2.14}$$

où Δ_0 est le coproduit usuel dans les algèbres enveloppantes universelles.
Posons $Q = (\Delta_0 \otimes 1)r - r^{(23)} - r^{(13)}$, alors

$$\begin{aligned} Q^{(123)} &= (\Delta_0 \otimes \mathrm{Id})r - r^{(23)} - r^{(13)} \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta_0)r - r^{(12)} - r^{(13)}, \\ Q^{(312)} &= (\Delta_0 \otimes \mathrm{Id})r^{(21)} - r^{(31)} - r^{(32)} \\ &= -(\Delta_0 \otimes \mathrm{Id})r + r^{(13)} + r^{(23)} \\ &= -Q^{(123)}. \end{aligned}$$

Donc $Q = 0$ car il s'agit d'une permutation 3-cycle (132). Par conséquent, la première composante de r est primitive et $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$. □

Il existe aussi une version quantique pour les bigèbres de Lie quasi-triangulaires.

Définition 2.24 (Algèbre de Hopf (quasi-)triangulaire)**.** *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ *une algèbre de Hopf. Un élément inversible* $R \in H \otimes H$ *définit une structure quasi-triangulaire sur* H *si :*

i) $\Delta^{op} = R \Delta R^{-1}$,

ii) Les relations hexagonales sont vérifiée :

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)R = R^{(13)}R^{(12)}, \qquad (\Delta \otimes \mathrm{Id})R = R^{(13)}R^{(23)}. \tag{2.15}$$

L'élément R *definit une structure triangualire si il vérifie en plus* $RR^{(21)} = 1$. *Nous noterons* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$ *une algèbre de Hopf (quasi-)triangulaire où* R *sera la R-Matrice universelle de* H.

La R-matrice satisfait alors une certaine relation dans $H^{\otimes 3}$ qui sera la version quantique de l'équation de Yang-Baxter classique.

Définition 2.25 (Equation Quantique de Yang Baxter)**.** *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ *une algèbre de Hopf. L'equation quantique de Yang-Baxter (QYBE) est l'equation suivante pour* $R \in H \otimes H$ *:*

$$R^{(12)}R^{(13)}R^{(23)} = R^{(23)}R^{(13)}R^{(12)}. \tag{2.16}$$

Dans le groupe des tresses B_3 engendré par σ_1 et σ_2, nous pouvons illustrer l'EQ. 2.16 de Yang Baxter par une des relations fondamentales du groupe des tresses :

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2.$$

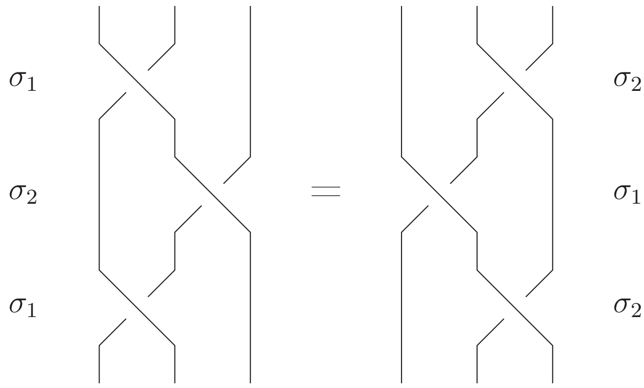


FIGURE I.1 – CYBE vue comme une relation de tresse

Proposition 2.26. *Soit $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf et $R \in H \otimes H$ une structure quasi-triangulaire sur H. Alors R est solution de l'equation de Yang-Baxter quantique.*

Démonstration : Remarquons dans un premier temps que les relations de la structure quasi-triangulaire que nous avons avec Δ, peuvent être reformulées avec Δ^{op}.

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} \otimes \tau)(\mathrm{Id} \otimes \Delta)R &= (\mathrm{Id} \otimes \tau)(R^{(13)}R^{(12)})\\ (\mathrm{Id} \otimes \Delta^{op})(R) &= R^{(12)}R^{(13)},\\ (\tau \otimes \mathrm{Id})(\Delta \otimes \mathrm{Id})R &= R^{(13)}R^{(23)}\\ (\Delta^{op} \otimes \mathrm{Id})R &= R^{(23)}R^{(13)}.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}R^{(12)}R^{(13)}R^{(23)} &= R^{(12)}(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R)\\ &= R^{(12)}(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R)(R^{(12)})^{-1}R^{(12)}\\ &= (\Delta^{op} \otimes 1)(R)R^{(12)}\\ &= R^{(23)}R^{(13)}R^{(12)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, R est une solution de l'équation de Yang-Baxter quantique. □

Proposition 2.27. *Soit $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$ une algèbre enveloppante universelle quantique quasi-triangulaire et $H/\hbar H \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Nous définissons alors $r \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ par $R \equiv 1 + \hbar r \mod \hbar$. Alors $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ définit une structure quasi-triangulaire sur la bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Démonstration : Nous avons déjà montrer lors de la démonstration de la proposition 2.23 que $\delta(a) = [a \otimes 1 + 1 \otimes a, r]$ pour $a \in \mathfrak{g}$. De plus, en utilisant les relations hexagonales, nous obtenons :

$$(\Delta_0 \otimes \mathrm{Id})r = r^{(13)} + r^{(23)} \quad \text{et} \quad (\mathrm{Id} \otimes \Delta_0)r = r^{(12)} + r^{(13)},$$

donc $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. L'antisymetrie de δ, nous permet de montrer que $r + r^{(21)}$ est $\mathfrak{g}$-invariant. Finalement, en développant l'équation de Yang-Baxter quantique modulo $\hbar^3$, nous avons :

$$R^{(12)}R^{(13)}R^{(23)} - R^{(23)}R^{(13)}R^{(12)} \equiv \hbar^2 \left(\left[r^{(12)}, r^{(13)}\right] + \left[r^{(12)}, r^{(23)}\right] + \left[r^{(13)}, r^{(23)}\right]\right), \quad (2.17)$$

donc r vérifie équation de Yang-Baxter classique. □

Remarques : Nous pouvons énoncer un résultat similaire pour la structure triangulaire, la preuve étant essentiellement la même, en rajoutant le fait que $RR^{(21)} = 1$ implique que $r + r^{(21)} = 0$.

Finalement, nous cherchons une version quantique au double de Drinfeld. Nous obtenons alors la notion de double quantique. Rappelons rapidement la notion du double de Drinfeld. $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie , sur $\mathfrak{dg} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ nous définissons une structure de bigèbre de Lie en posant $\delta_{\mathfrak{dg}} = \delta_{\mathfrak{g}} - \delta_{\mathfrak{g}^*}$. Le double $\mathfrak{dg}$ est quasi-triangulaire $r = \sum_i e_i \otimes e^i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{dg} \otimes \mathfrak{dg}^*$. En nous basant sur ce résultat, nous énonçons la proposition suivante :

Proposition 2.28. *Soit H un algèbre de Hopf et H^{*op} son dual muni de la comultiplication opposée, et $R = \sum_i E_i \otimes E^i \in H \otimes H^{*op}$ l'identité sur* $\mathrm{End}(H) = H \otimes H^{*op}$ *(où E_i est une base de H et E^i est une base duale de H^{*op}). Alors il existe une unique structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{D}(H) = H \otimes H^{*op}$ telle que*

1. *H et H^{*op} sont des sous algèbres de Hopf de $\mathcal{D}(H)$ (en utilisant les injections naturelles).*
2. *La multiplication $H \otimes H^{*op} \to \mathcal{D}(H)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.*
3. *$R \in \mathcal{D}(H) \otimes \mathcal{D}(H)$ est une structure quasi-triangulaire pour $\mathcal{D}(H)$*

Nous renvoyons au chapitre 12 section 2 de [ES02] pour la preuve de cette proposition.

Définition 2.29 (Double quantique)**.** *L'algèbre de Hopf quasi-triangulaire $\mathcal{D}(H)$ est appelée le double quantique de H.*

Pour voir apparaître le lien entre le double quantique et le double de Drinfeld, il faut s'intéresser non pas au double quantique de n'importe quelle algèbre de Hopf, mais plus particulièrement au double quantique des algèbres enveloppantes universelles quantiques. Nous pouvons très bien étendre la construction à ces objets. De plus, si H est une algèbre enveloppante universelle quantique alors son double $\mathcal{D}(H)$ le sera aussi. En effet :

Proposition 2.30. *Soit H une algèbre enveloppante universelle quantique et $\mathfrak{g}$ la limite semi-classique de H. Alors $\mathcal{D}(H)$ est une quantification de $\mathfrak{dg}$.*

Remarques : Cela montre bien que $\mathcal{D}(H)$ est l'analogue quantique à la construction du double de Drinfeld.

3 Foncteur de Drinfeld

Nous verrons dans cette section le foncteur de Drinfeld entre la catégorie $\mathcal{QUEA}$ (Algèbre Enveloppante Universelle Quantique) et la catégorie $\mathcal{QFSHA}$ (Algèbre de Hopf de Séries Formelles Quantiques). Dans un premier temps, nous introduirons la notion de $\mathcal{QFSHA}$ puis nous montrerons qu'il existe un lien entre ces deux structures. L'essentiel de cette partie reprendra les résultats de V. Drinfeld dans son article "Quantum groups" [Dri87] et de F. Gavarini dans "The quantum duality principle" [Gav02]. Nous nous limiterons ici au cas où $\Bbbk$ est un corps de caractéristique 0. Nous avons déjà introduit dans la section précédente les algèbres enveloppantes universelles quantiques. Définissons maintenant les algèbres de Hopf de séries formelles quantiques.

Définition 3.1. *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ *une algèbre de Hopf. Nous dirons qu'il s'agit d'une algèbre de Hopf-Poisson si de plus* H *est muni d'un crochet de Poisson* $\{-,-\}$ *telle que :*

$$\{\Delta(a), \Delta(b)\} = \Delta(\{a, b\}), \tag{3.1a}$$

où le crochet dans $H \otimes H$ *est défini comme suit :*

$$\{a \otimes a', b \otimes b'\} = \{a, b\} \otimes a'b' + ab \otimes \{a', b'\}. \tag{3.1b}$$

Nous pouvons alors donner une nouvelle définition de quantification se basant sur celle des algèbres de Poisson et des groupe de Lie-Poisson.

Définition 3.2. *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \{-,-\})$ *une algèbre de Hopf-Poisson commutative. Une quantification de* H *est une algèbre de Hopf déformée* $H_\hbar$ *de* H *tel que :*

$$\{x_1, x_2\} = \frac{a_1 a_2 - a_2 a_1}{\hbar} \mod \hbar, \tag{3.2}$$

où $x_1, x_2 \in H$ *et* a_1, a_2 *des relèvements de* x_1, x_2 *dans* $H_\hbar$*.*
Une quantification d'un groupe de Lie-Poisson $(G, \{-,-\})$ *est une quantification* $\mathcal{F}_\hbar(G)$ *de l'algèbre des fonctions régulières* $\mathcal{F}(G)$*, et* $(G, \{-,-\})$ *est la limite semi classique de* $\mathcal{F}_\hbar(G)$

Remarques : Nous notons $\mathcal{F}[[\mathfrak{g}]]$ l'algèbre des fonctions régulières sur le groupe formel associé à $\mathfrak{g}$ (il s'agit d'un groupe de Lie-Poisson G). Nous avons aussi que $\mathcal{F}[[\mathfrak{g}]] := \mathcal{U}(\mathfrak{g})^*$ le dual de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ avec la topologie faible. De même, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est le dual topologique de $\mathcal{F}[[\mathfrak{g}]]$. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf-coPoisson et $\mathcal{F}[[\mathfrak{g}]]$ est une algèbre de Hopf Poisson. Nous avons donc deux quantifications d'algèbre de Hopf et deux façons de quantifier les bigèbres de Lie.

Définition 3.3. *Une algèbre de déformation de Hopf* K *est une algèbre de Hopf de séries formelles si* $K_0 = K/\hbar K$ *est un algèbre de Hopf-Poisson topologique isomorphe à* $\mathcal{F}[[\mathfrak{g}]]$ *pour une certaine bigèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de dimension finie. Nous écrirons alors* $K = \mathcal{F}_\hbar[[\mathfrak{g}]]$ *et dirons qu'il s'agit d'un quantification de* $\mathcal{F}[[\mathfrak{g}]]$ *(*$\mathcal{F}[[\mathfrak{g}]] = \Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$ *pour un certain* $n \in \mathbb{N}$*).*

Nous allons maintenant définir les applications qui nous permettront de passer de $\mathcal{QUEA}$ à $\mathcal{QFSHA}$ et inversement. Ces constructions seront définies sur n'importe quelle algèbre de Hopf.

Définition 3.4. *Soient H une algèbre de Hopf et $E = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \{1, \ldots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$ alors nous posons :*

$$\delta_E = \sum_{E' \in E} (-1)^{n-|E'|} \Delta_{E'}, \quad \text{et} \quad \Delta_E = j_E \circ \Delta^{(k)}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Delta^{(0)} = \varepsilon \\ \Delta^{(1)} = \mathrm{Id} \\ \Delta^{(2)} = \Delta \\ \vdots \\ \Delta^{(n+1)} = (\mathrm{Id}^{\otimes n-1} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n)} \end{cases},$$

$$\begin{array}{cccc} j_E : & H^{\otimes k} & \longrightarrow & H^{\otimes n} \\ & a_1 \otimes \cdots \otimes a_k & \mapsto & b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \end{array} \quad \text{où} \quad b_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in E \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous retiendrons la formule suivante qui se prouve en développant le terme de gauche.

$$\delta_n = \delta_E = (\mathrm{Id} - \varepsilon)^{\otimes n} \circ \Delta^{(n)}. \tag{3.4}$$

Nous allons donc pouvoir passer d'une structure à l'autre par la construction suivante.

$$H' = \{a \in H | \delta_n(a) \in \hbar^n H^{\otimes n}\}. \tag{3.5}$$

Cette construction permet de passer de la catégorie $\mathcal{QUEA}$ à $\mathcal{QFSHA}$, nous avons donc besoin d'une deuxième construction nous permettant de faire le passage inverse. Notons $\mathcal{K}_H := \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Nous pouvons alors définir :

$$H^{\times} := \sum_{n \geq 0} \hbar^{-n} \mathcal{K}_H^n, \tag{3.6a}$$

et finalement nous définissons :

$$H^{\vee} := \text{la completion } \hbar\text{-adique du } \Bbbk[[\hbar]]\text{-module } H^{\times} := \sum_{n \geq 0} \hbar^{-n} \mathcal{K}_H^n. \tag{3.6b}$$

Voyons dans un premier temps les relations de dualité qui existent entre ces deux constructions.

Définition 3.5 (Couplement de Hopf)**.** *Soient H et K deux algèbres de Hopf. Un couplement de Hopf est la donnée d'un pairing $\langle -, - \rangle : H \otimes K \to R$ (R un anneau sur $\Bbbk[[\hbar]]$) tel que :*

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle,$$
$$\langle \Delta_H(x), y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x, \mathrm{m}_K(y_1, y_2) \rangle, \quad \langle \mathrm{m}_H(x_1, x_2), y \rangle = \langle x_1 \otimes x_2, \Delta_K(y) \rangle,$$
$$\langle S_H(x), y \rangle = \langle x, S_K(y) \rangle, \quad \langle x, 1 \rangle = \varepsilon_H(x), \quad \langle 1, y \rangle = \varepsilon_K(y).$$

Le couplement de Hopf est dit parfait si il est non-dégénéré.

Proposition 3.6. *Soient H une algèbre enveloppante universelle quantique et K une algèbre de Hopf de séries formelles, alors nous avons :*

$$(H')^\star = (H^*)^\vee \quad \text{et} \quad (K^\vee)^* = (K^\star)'.$$

Remarques : Ce résultat est une conséquence de la relation de dualité entre les algèbres de Hopf de séries formelles et algèbres enveloppantes universelles quantiques. En effet, nous avons que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^* = \mathcal{F}[[\mathfrak{g}]]$ et $\mathcal{F}[[\mathfrak{g}]]^\star = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ où $*$ dénote le dual usuel linéaire et $\star$ le dual topologique. Cette proposition illustre le fait que les foncteurs $\vee$ et $'$ sont "duaux" l'un de l'autre.

Démontrons tout d'abord que H' est une sous algèbre de Hopf de H.

Proposition 3.7. *Soit H une algèbre enveloppante universelle quantique, alors H' est une sous-algèbre de Hopf de H et de plus H'_0 est commutatif.*

Nous aurons besoin de deux lemmes pour la démonstration de cette proposition.

Lemme 3.8. *Pour tout $x \in H'$*

$$\Delta_n(x) = \sum_{E' \subset E} \delta_{E'}(x). \tag{3.7}$$

Démonstration : En effet, si nous développons, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{E'\subset E} \delta_{E'}(x) &= \sum_{E'\subset E} \sum_{E''\subset E'} (-1)^{|E'|-|E''|} \Delta_{E''}(x) \\
&= \sum_{E''\subset E} \Delta_{E''}(x) \sum_{E''\subset E'\subset E} (-1)^{|E'|-|E''|} \\
&= \sum_{E''\subset E} \Delta_{E''}(x) \sum_{k=0}^{n-|E''|} (-1)^k C^k_{n-|E''|}.
\end{aligned}$$

Il suffit de le vérifier pour $E = \{1, ..., n\}$. Nous utiliserons le résultat général suivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul :

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C^k_n = 0.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{E'\subset E} \delta_{E'}(x) &= \sum_{E''\subsetneq . E} \Delta_{E''}(x) \sum_{k=0}^{n-|E''|} (-1)^k C^k_{n-|E''|} + \Delta_E(x) \\
&= \Delta_E(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 3.9. *Pour tous $x, y \in H'$,*

$$\delta_E(xy) = \sum_{X \cup Y = E} \delta_X(x)\delta_Y(y). \tag{3.8}$$

Démonstration : Par définition de δ et en utilisant le résultat EQ. 3.7 du lemme 3.8, nous avons :

$$\begin{aligned}
\delta_E(xy) &= \sum_{E' \subset E} (-1)^{|E|-|E'|} \Delta_{E'}(xy) \\
&= \sum_{E' \subset E} (-1)^{|E|-|E'|} \Delta_{E'}(x)\Delta_{E'}(y) \\
&= \sum_{E' \subset E} (-1)^{|E|-|E'|} \sum_{X \cup Y \subset E'} \delta_X(x)\delta_Y(y) \\
&= \sum_{E' \subset E} (-1)^{|E|-|E'|} \sum_{E'' \subset E'} \sum_{X \cup Y = E''} \delta_X(x)\delta_Y(y) \\
&= \sum_{E'' \subset E} \sum_{X \cup Y = E''} \delta_X(x)\delta_Y(y) \sum_{E'' \subset E' \subset E} (-1)^{|E|-|E'|} \\
&= \sum_{E'' \subset E} \sum_{X \cup Y = E''} \delta_X(x)\delta_Y(y) \sum_{k=0}^{n-|E''|} (-1)^{n-|E''|-k} C^k_{n-|E''|}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer en posant $K = n - |E''| - k$ que :

$$\sum_{k=0}^{n-|E''|} (-1)^{n-|E''|-k} C^k_{n-|E''|} = \sum_{K=0}^{n-|E''|} (-1)^K C^K_{n-|E''|}.$$

Alors nous avons en utilisant la même astuce que précédemment :

$$\delta_E(xy) = \sum_{X \cup Y = E} \delta_X(x)\delta_Y(y).$$

□

Démonstration : Retournons à la démonstration de la proposition 3.7. Nous avons par définition que H' est une sous-cogèbre et que pour tout x, $S(x) \in H'$. Il reste à démontrer que H' est une sous-algèbre. Il convient donc de vérifier que pour tous $x, y \in H'$, $xy \in \{a \in H | \delta_n(a) \in \hbar^n H^{\otimes n}\}$. En utilisant, les lemmes 3.8 et 3.9 et le fait que $\delta_X(x) \in \hbar^{|X|} H^{\otimes n}$ et $\delta_Y(y) \in \hbar^{|Y|} H^{\otimes n}$, nous obtenons que :

$$\delta_E(xy) = \sum_{X \cup Y = E} \delta_X(x)\delta_Y(y) \in \hbar^n H^{\otimes n}.$$

D'où H' est une sous algèbre de Hopf de H (car il s'agit d'une algèbre et que la structure de cogèbre est garantie par la dualité). De plus, nous pouvons montrer que $H'_0 = H'/\hbar H'$

est commutatif. En effet, pour x dans H, les formules que nous venons de démontrer nous donnent, $\Delta^{(1)}(x) = \delta_1(x) + \varepsilon(x)$. Par conséquence nous avons, $x = \delta_1(x) + \varepsilon(x)$. Cependant, si $x \in H'$, alors il existe x_1 tel que $\delta_1(x) = \hbar x_1$ car $\delta_1(x) \in \hbar H$. Posons alors pour $a, b \in H'$, $a = \hbar a_1 + \varepsilon(a)$ et $b = \hbar b_1 + \varepsilon(b)$. Alors nous aurons que $ab - ba = \hbar c$ avec $c = \hbar(a_1 b_1 - b_1 a_1)$. Nous voulons montrer que c est dans H'. Pour cela il faut vérifier que $\delta_n(c) = \delta_n(\frac{ab-ba}{\hbar})$ est dans $\hbar^n H$. D'après les égalités trouvées précédemment, et le fait que δ_X et δ_Y commutent lorsque X et Y sont disjoints, nous avons :

$$\delta_n(ab - ba) = \sum_{\substack{X \cup Y = \{1,\dots,n\} \\ X \cap Y \neq \emptyset}} \delta_X(a)\delta_Y(b) - \delta_X(b)\delta_Y(a).$$

Il suffit donc de montrer que pour un couple $X, Y \subset \{1, ..., n\}$ tel que $X \cup Y = \{1, ..., n\}$ et $X \cap Y \neq \emptyset$:

$$\delta_X(a)\delta_Y(b) - \delta_X(b)\delta_Y(a) \in \hbar^{n+1} H.$$

Or nous savons que $\delta_X(a)$ est dans $\hbar^{|X|} H$ et $\delta_Y(b)$ est dans $\hbar^{|Y|} H$. Par conséquent $\delta_X(a)\delta_Y(b)$ est dans $\hbar^{|X|+|Y|} H$. De plus compte tenu des conditions imposées sur X et Y, nous avons que $|X| + |Y| \geq n + 1$, donc :

$$ab - ba = \hbar c \equiv 0 \mod \hbar H'.$$

Par conséquent, H'_0 est commutatif. □

Examinons maintenant H' lorsque $H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$.

Proposition 3.10. *$H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ alors $H' = \mathcal{U}(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]]$ est une algèbre de Hopf de séries formelles.*

Démonstration : Il s'agit ici de chercher des conditions d'appartenance à H'. Nous allons les trouver à l'aide de $\delta_n(x) \in \hbar^n H^{\otimes n}$.

$$\begin{aligned} \delta_0(x) &= \varepsilon(x), \\ \delta_1(x) &= x - \varepsilon(x), \\ \delta_2(x) &= \sum_{E' \subset \{1,2\}} \Delta_{E'}(x), \\ &= \Delta(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x + \varepsilon(x) 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Rappelons que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \Bbbk \oplus_n \mathcal{T}^n(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^n$ où $\mathcal{I}^n = \mathcal{I} \cap \mathcal{T}^n(\mathfrak{g})$.

Lemme 3.11. *Si $a \in \mathcal{T}^n(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n + 1$, $\delta_k(a) = 0$.*

Démonstration : Il suffit de montrer ce lemme pour $n = 1$, car par la suite nous pourrons utiliser les formules des lemmes 3.8 et 3.9 pour se ramener au cas où $a \in \mathcal{T}^1(\mathfrak{g})$. Or, pour $a \in \mathcal{T}^1(\mathfrak{g})$ il ressort que $\delta_k(a) = 0$ pour $k > 1$ car $\Delta^{(k)}(a) = 0$. □

Si $a \in \mathcal{T}^1(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^1$, alors la condition est $a \in \hbar\mathfrak{g}$. En effet, nous voulons $\delta_1(a) \in \hbar H$. Maintenant, si $a \in \mathcal{T}^2(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^2$ alors la condition sera

$$\begin{aligned}\delta_2(a_1a_2) &= \Delta(a_1a_2) - a\otimes 1 - 1\otimes a - \varepsilon(a)1\otimes 1\\ &= a_1\otimes a_2 + a_2\otimes a_1.\end{aligned}$$

La condition est donc $a_1\otimes a_2 \in \hbar^2 H^{\otimes 2}$ d'où nous aurons : $a = \hbar^2 \frac{a_1}{\hbar}\frac{a_2}{\hbar} = \hbar^2 bb'$ avec $b, b' \in H$. Ce qui revient à $a_1, a_2 \in \hbar\mathfrak{g}$. Nous aurons alors pour $a \in \mathcal{T}_n(\mathfrak{g})/\mathcal{I}^n$:

$$\begin{aligned}\delta_n(a_1\cdots a_n) &= \sum_{X_1\cup\ldots\cup X_n = 1,\ldots,n} \delta_{X_1}(a_1)\cdots\delta_{X_n}(a_n)\\ &= \sum_{\substack{X_1\cup\ldots\cup X_n=1,\ldots,n\\ |X_i|=1}} \delta_{X_1}(a_1)\cdots\delta_{X_n}(a_n)\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes a_{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la condition suivante : $a_1\otimes\cdots\otimes a_n \in \hbar^n H^{\otimes n}$ d'où $a = \hbar^n \frac{a_1}{\hbar}\cdots\frac{a_n}{\hbar} = \hbar^n b_1\cdots b_n$ avec $b_i \in H$. Par conséquent, $a_i \in \hbar\mathfrak{g}$. Nous avons donc pour tous $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), a \in H'$ implique $a \in \mathcal{U}(\hbar\mathfrak{g})$ donc comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendre H, $\mathcal{U}(\hbar\mathfrak{g})$ engendre H' i.e. $H' \subset \mathcal{U}(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]]$. De plus, nous avons aussi $\mathcal{U}(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]] \subset H' \subset H$. Donc

$$H' = \mathcal{U}(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]]\,.$$

Nous cherchons à définir $H'_0 = H'/\hbar H'$. Pour tous $a, b \in \mathfrak{g}$, nous avons $\hbar a, \hbar b \in H'$. Alors $[\hbar a, \hbar b] = \hbar a\hbar b - \hbar b\hbar a$ ce qui en d'autres termes nous donne $\hbar a\hbar b = \hbar b\hbar a + \hbar^2[a,b]$ or $\hbar^2[a,b] \in \hbar H'$ car $\hbar[a,b] \in \hbar\mathfrak{g} \subset H'$. Nous avons donc finalement que $\hbar a\hbar b = \hbar b\hbar a$ dans H'_0. Ainsi, nous en déduisons que les éléments de H'_0 sont de la forme $x = \sum_{n\geq 0} c_n(\hbar a_{n,1})\cdots(\hbar a_{n,n})$ avec $a_{i,j} \in \mathfrak{g}$. D'où

$$H'_0 = \Bbbk\,[[\hbar\mathfrak{g}]]\,.$$

Nous définissons alors un crochet de Poisson sur H'_0, comme suit sur les générateurs :

$$\forall\ a, b \in \mathfrak{g}, \quad \{\hbar a, \hbar b\} = \frac{\hbar^2 ab - \hbar^2 ba}{\hbar} = \hbar\,[a,b]\,.$$

Si nous identifions $\mathfrak{g}$ avec les fonctions linéaires sur $\mathfrak{g}^*$ nous remarquons qu'il s'agit du même crochet de Poisson.

$$H'_0 = \mathcal{F}\,[[\mathfrak{g}^*]]\,,$$

donc $H' = \mathcal{U}(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]]$ est une algèbre de Hopf de séries formelles. □

Nous pouvons alors montrer qu'il est possible de retrouver l'algèbre enveloppante universelle quantique H à partir de H'.

Proposition 3.12. *Soit $H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ une algèbre enveloppante universelle quantique, alors $(H')^\vee = H$.*

Démonstration : Étudions $(H')^\vee = (\mathcal{U}(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]])^\vee$. Nous pouvons alors déterminer le noyau de la counité :

$$\mathcal{K} = \operatorname{Ker}\varepsilon = \oplus_n \mathcal{T}^n(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]] \,/\mathcal{I}_\hbar^n,$$

où $\mathcal{I}_\hbar$ est l'idéal engendré par $\hbar a\hbar b - \hbar b\hbar a - \left[\hbar a, \hbar b\right]$, pour tous $a, b \in \mathfrak{g}$ et $\mathcal{I}_\hbar^n = \mathcal{I}_\hbar \cap \mathcal{T}^n(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Il apparait alors que :

$$\mathcal{K}^k = \oplus_{n\geq k}\mathcal{T}^n(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]] \,/\mathcal{I}_\hbar^n.$$

De plus, nous avons alors :

$$\hbar^{-k}\mathcal{K}^k = \mathcal{T}^k(\mathfrak{g})[[\hbar]] \,/\mathcal{I}^k \oplus_{n>k} \hbar^{-k}(\mathcal{T}^n(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]] \,/\mathcal{I}_\hbar^n).$$

En utilisant le fait, que pour tout $k \leq n$, $\hbar^{-k}(\mathcal{T}^n(\hbar\mathfrak{g})[[\hbar]] \,/\mathcal{I}_\hbar^n) \subset \mathcal{T}^n(\mathfrak{g})[[\hbar]] \,/\mathcal{I}^n$

$$\sum h^{-k}\mathcal{K}^k = \mathcal{T}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \,/\mathcal{I} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]\,,$$

d'où $(H')^\vee = H$. □

Remarques : Nous généralisons le résultat à $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ une algèbre enveloppante universelle quantique en utilisant l'isomorphisme entre $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$.

Nous pouvons procédé à la même démarche avec les algèbres de hopf de serie formelle .

Proposition 3.13. *Soit K une algèbre de Hopf de séries formelles, alors $K^\vee$ est une algèbre de Hopf topologique et $K^\vee/\hbar K^\vee$ est cocommutative.*

Démonstration : Par construction $K^\vee$ est une algèbre. Il faut donc chercher à définir le coproduit, la counité et l'antipode sur $K^\vee$. $K^\vee$ est la complétion $\hbar$-adique de $K^\times = \sum_n \hbar^{-n}\mathcal{K}^n$ ou $\mathcal{K} = \operatorname{Ker}\varepsilon$. Nous montrons que nous pouvons définir Δ, S et ε sur $K^\times$. En effet, $\varepsilon(J) = 0$ nous permet d'étendre ε à $K^\times$. De plus, nous avons que $S(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, ce qui implique $S(\hbar^{-n}\mathcal{K}) = \hbar^{-n}\mathcal{K}$. D'où $S(K^\times) = K^\times$. Finalement, nous aurons $\Delta(\mathcal{K}^n) = \sum_{r+s=n}\mathcal{K}^s \otimes \mathcal{K}^r$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned}\Delta(\hbar^{-n}\mathcal{K}^n) &= \hbar^{-n}\sum_{r+s=n}\mathcal{K}^s\otimes\mathcal{K}^r \\ &= \sum_{r+s=n}\hbar^{-s}\mathcal{K}^s\otimes\hbar^{-r}\mathcal{K}^r \in K^\times\otimes K^\times.\end{aligned}$$

Nous étendons ensuite sur $K^\vee$ par continuité. Donc $K^\vee$ est une algèbre de Hopf.

Nous cherchons maintenant à montrer que $K_0^\vee$ est cocommutative. $K^\times$ est engendrée par $J^\times = \hbar^{-1}\mathcal{K}$, il en va de même pour son complété $K^\vee$. Considérons alors $j^\vee \in \mathcal{K}^\times$ et

$j := \hbar j^\vee \in \mathcal{K}$. Alors du fait que $\Delta = \delta_2 + \mathrm{Id} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{Id} + \varepsilon\ 1 \otimes 1$ et que $\mathrm{Im}(\delta_2) \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$, nous avons :

$$\Delta(j) = \delta_2(j) + j \otimes 1 + 1 \otimes j \in 1 \otimes j + j \otimes 1 + \mathcal{K} \otimes \mathcal{K},$$

ainsi

$$\Delta(j^\vee) = \delta_2(j^\vee) + j^\vee \otimes 1 + 1 \otimes j^\vee \in 1 \otimes j^\vee + j^\vee \otimes 1 + \hbar\, \mathcal{K}^\times \otimes \mathcal{K}^\times,$$

ce qui nous donne :

$$\forall\ j^\vee \in J^\times, \quad \Delta(j^\vee) \equiv j^\vee \otimes 1 + 1 \otimes j^\vee \mod \hbar\ K^\vee \otimes K^\vee.$$

Par conséquent, $\mathcal{K}^\times \mod \hbar K^\vee$ est contenu dans $\mathrm{prim}(K_0^\vee)$, l'ensemble des éléments primitifs de $K_0^\vee$. Mais comme $\mathcal{K}^\times$ engendre $K^\vee$, alors $\mathcal{K}^\times \mod \hbar K^\vee$ engendre $K_0^\vee$. Cela montre que $\mathrm{prim}(K_0^\vee)$ engendre $K_0^\vee$ et donc $K_0^\vee$ est cocommutative. □

Proposition 3.14. *Soit K une algèbre de Hopf de séries formelles, alors $K^\vee$ est une algèbre enveloppante universelle quantique.*

Démonstration : En utilisant, la proposition 3.13, nous pouvons conclure avec le théorème de Milnor-Moore (Theo. 2.21). Nous obtenons donc que $K_0^\vee = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{prim}(K_0^\vee)$. □

Proposition 3.15. *Soit $K = \mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]$ une algèbre de Hopf de séries formelles, alors il existe n tel que $K^\vee = \Bbbk\,[\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n][[\hbar]]$.*

Démonstration : Nous avons $K = \mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]$ et $K/\hbar K = \mathcal{F}\,[[\mathfrak{g}]] = \Bbbk\,[[\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n]]$. Nous pouvons alors donner une écriture explicite de $\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]$ puis en déterminer une pour $\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee$. Notons $\pi : \mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]] \to \mathcal{F}\,[[\mathfrak{g}]]$ la projection canonique. Prenons un représentant $x_j \in \pi^{-1}(\overline{x_j})$, alors $\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]$ est engendrée par les x_j en tant que $\Bbbk[[\hbar]]$-algèbre, ce qui nous donne que $\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]] = \Bbbk\,[[x_1, \ldots, x_n, \hbar]]$. Quitte à mettre $x_j := x_j - \varepsilon(x_j)$, nous pouvons supposer que $x_j \in \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathcal{K}$. Alors $\mathcal{K} = (x_1, \ldots, x_n, \hbar)$ et $\mathcal{K}^k$ s'identifie avec l'espace des séries formelles de degrés au moins k.

$$\mathcal{K}^k = \left\{ p = \sum_{d \in \mathbb{N}^{n+1}} c_d \hbar^{d_0} x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} \mid c_d \in \Bbbk,\ d \in \mathbb{N}^{n+1},\ |d| \geq k \right\},$$

où $|d| = \sum_{i=0}^n d_i$, pour tout $d = (d_0, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

$$\hbar^{-k}\mathcal{K}^k = \left\{ p = \sum_{d \in \mathbb{N}} \hbar^d P_d(\tilde{x_1}, ..., \tilde{x_n}) \mid P_d \in \Bbbk_{\leq d+k}\,[X_1, \ldots X_n] \right\},$$

où $\tilde{x_j} = h^{-1}x_j$ et $\Bbbk_{\leq d+k}\,[X_1, \ldots X_n]$ est l'ensemble des polynomes de degré total inférieur à $d + k$. Nous aurons alors :

$$\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\times = \left\{ p = \sum_{d \in \mathbb{N}} \hbar^d P_d(\tilde{x_1}, ..., \tilde{x_n}) \mid \exists\ k_p \in \mathbb{N},\ \forall\ d \in \mathbb{N},\ P_d \in \Bbbk_{\leq d+k_p}\,[X_1, \ldots X_n] \right\}.$$

En prenant alors la complexion $\hbar$-adique, nous obtenons

$$\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee = \left\{ p = \sum_{d\in\mathbb{N}} h^d P_d(\tilde{x_1}, ..., \tilde{x_n}) \;\mid\; P_d \in \Bbbk\,[X_1, \dots X_n] \right\}.$$

Ce qui nous donne $\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee = \Bbbk\,[\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n][[\hbar]]$. □

Proposition 3.16. *Soit $K = \mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]$ une algèbre de Hopf de séries formelles, alors $K^\vee = \mathcal{U}(\mathfrak{g}^*)[[\hbar]]$ est une algèbre enveloppante universelle quantique et $(\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee)' = \mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]$.*

Démonstration : Nous avons déjà montré que $\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee$ est une algèbre enveloppante universelle quantique à l'aide de la proposition 3.14 i.e. $\mathcal{F}\,[[\mathfrak{g}]]^\vee = \mathcal{U}(\mathfrak{a})$. En utilisant les propriétés de dualité, nous obtenons que $(\mathcal{F}\,[[\mathfrak{g}]]^\vee)^* = (\mathcal{F}\,[[\mathfrak{g}]]^\star)' = \mathcal{U}(\mathfrak{g})' = \mathcal{F}[[\mathfrak{g}^*]]$ d'où $\mathcal{U}(\mathfrak{a})^* = \mathcal{F}[[\mathfrak{g}^*]]$ et donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^*$. Il reste maintenant à vérifier que $(\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee)' = \mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]$, ce qui est évident compte tenu du fait que $\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee$ est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^*)[[\hbar]]$. □

Nous avons donc au final montré le théorème suivant :

Théorème 3.17 (foncteur de Drinfeld)**.** *Les opérateurs $K \to K^\vee$ et $H \to H'$ définissent respectivement un foncteur sur les catégories $\mathcal{QFSHA} \to \mathcal{QUEA}$ et $\mathcal{QUEA} \to \mathcal{QFSHA}$, ces foncteurs étant inverses l'un de l'autre. En effet, pour tous $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \in \mathcal{QUEA}$ et $\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]] \in \mathcal{QFSHA}$ nous avons :*

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})'/\hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})' = \mathcal{F}\,[[\mathfrak{g}^*]] \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee/\hbar\mathcal{F}_\hbar\,[[\mathfrak{g}]]^\vee = \mathcal{U}(\mathfrak{g}^*). \tag{3.9}$$

4 Quasi-algèbres de Hopf

Nous allons maintenant introduire la notion de quasi-bigèbre et d'associateur. L'idée principale des quasi-bigèbre est de relaxer la condition de coassociativité des bigèbres à l'aide d'un associateur. Les associateurs sont nécessaires pour prouver l'existence de la quantification universelle des bigèbres de Lie. Leur existence sera developpée dans l'annexe A à laide des équation KZ.

Définition 4.1 (Quasi-bigèbre)**.** *Une* quasi-bigèbre *est une algèbre associative (B, m, η) munie de 2 morphismes d'algèbres $\Delta : B \longrightarrow B \otimes B$, $\varepsilon : B \longrightarrow \Bbbk$ tel que :*

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta = \mathrm{Id} = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)\Delta, \tag{4.1a}$$

et d'un élément inversible Φ de $B \otimes B \otimes B$ qui vérifie les axiomes suivants :

i) Φ vérifie l'axiome du pentagone, i.e.

$$\Phi^{(1,2,34)}\Phi^{(12,3,4)} = \Phi^{(234)}\Phi^{(1,23,4)}\Phi^{(123)}, \tag{4.1b}$$

où $\Phi^{(123)} = \Phi \otimes 1$, $\Phi^{(12,3,4)} = (\Delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id})\Phi$, ...

ii) Δ *est quasi-coassociative*

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta(x) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(x) \cdot \Phi^{-1}. \tag{4.1c}$$

iii) Φ *vérifie l'axiome de la counité :*

$$(\mathrm{Id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Phi) = 1. \tag{4.1d}$$

Φ *est appelé l'associateur de Drinfeld.*

Remarques : Lorsque $\Phi = 1 \otimes 1 \otimes 1$, B est une bigèbre.

Proposition 4.2. *Soit* $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *une algèbre avec comultiplication et counité.* B *est une quasi-bigèbre si et seulement si la catégorie* $\mathrm{Rep}(B)$ *des* B*-Modules équipée du produit tensoriel des espaces vectoriels est une catégorie tensorielle.*

Démonstration : Soit $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ une quasi-bigèbre alors nous posons pour tout triplet d'objets U, V, W et pour tous $u \in U$, $v \in V$ et $w \in W$

$$\Phi'_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) = \Phi(u \otimes (v \otimes w)).$$

La contrainte d'associativité Φ' est alors un isomorphisme car Φ est inversible. De plus, Φ est B-Linéaire grâce à la relation de quasi-associativité. De plus, nous obtenons que la relation du pentagone est équivalente à l'axiome du pentagone. Il en va de même pour l'axiome du triangle avec l'axiome de la counité.
La contraposé est démontrée de la façon suivante en posant a l'aide de $\mathrm{Rep}(B)$:

$$\Phi = \Phi'_{B,B,B}(1 \otimes 1 \otimes 1).$$

Alors les mêmes considérations que précédemment nous donnent que $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ est une quasi-bigèbre □

Nous avons donc montré l'équivalence des deux définitions précédentes. La définition de quasi-bigèbre est liée aux catégories, il est naturel de définir une relation d'équivalence sur les quasi-bigèbres. Pour cela, nous avons besoin de définir les transformations de jauge.

Définition 4.3. *Soit* $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *une quasi-bigèbre. Une transformation de jauge sur* B *est un élément inversible* $J \in B \otimes B$ *tel que :*

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(J) = 1 = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(J). \tag{4.2}$$

À l'aide de la transformation de jauge sur B, nous pouvons construire une nouvelle quasi-bigèbre B^J. Pour cela, nous définissons une nouvelle comultiplication et un nouvel associateur.

$$\begin{array}{rccc} \Delta^J : & B & \to & B\otimes B \\ & x & \mapsto & \Delta^J(x) = J\Delta(x)J^{-1} \end{array}$$

$$\Phi^J = J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1},$$

où $J^{(1,23)} = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)(J)$ et $J^{(12,3)} = (\Delta\otimes\mathrm{Id})(J)$.

Proposition 4.4. *Soient* $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *une quasi-bigèbre et* J *une transformation de jauge. Alors* $B^J = (B, \mathrm{m}, \eta, \Delta^J, \varepsilon, \Phi^J)$ *est une quasi-bigèbre. Nous l'appellerons la transformation de jauge de* B.

Démonstration : Nous devons vérifier que B^J est une quasi-bigèbre. Il faut donc vérifier les relations de la définition 4.1. Il est évident par définition que Δ^J est un morphisme d'algèbre. Nous avons :

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(\Delta^J) = (\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(J)\,((\varepsilon\otimes\mathrm{Id})\Delta)\,(\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(J^{-1}) = \mathrm{Id}\,.$$

Nous obtenons de façon similaire $(\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)(\Delta^J) = \mathrm{Id}$.
Vérifions maintenant la relation de quasi-associativité.

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}\otimes\Delta^J)(\Delta^J)\Phi^J &= (\mathrm{Id}\otimes J\Delta J^{-1})(J\Delta J^{-1})\Phi^J \\ &= J^{(23)}J^{(1,23)}(\mathrm{Id}\otimes\Delta)(\Delta)(J^{(1,23)})^{-1}(J^{(23)})^{-1}\Phi^J \\ &= J^{(23)}J^{(1,23)}(\mathrm{Id}\otimes\Delta)(\Delta)\Phi(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1} \\ &= J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(\Delta\otimes\mathrm{Id})(\Delta)(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1} \\ &= \Phi^J J^{(12)}J^{(12,3)}(\Delta\otimes\mathrm{Id})(\Delta)(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1} \\ &= \Phi^J(\Delta^J\otimes\mathrm{Id})(\Delta^J). \end{aligned}$$

Nous cherchons à montrer la relation du pentagone. Nous voulons donc :

$$(\Phi^J)^{(1,2,34)}(\Phi^J)^{(12,3,4)} = (\Phi^J)^{(234)}(\Phi^J)^{(1,23,4)}(\Phi^J)^{(123)}.$$

Calculons dans un premier temps le terme de gauche, puis le terme de droite.

Calcul de $\underbrace{(\Phi^J)^{(1,2,34)}}_{(1)}\underbrace{(\Phi^J)^{(12,3,4)}}_{(2)}$:

$$\begin{aligned} (1) &= (\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\Delta^J)(\Phi^J) \\ &= J^{(34)}(\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\Delta)(J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1})(J^{(34)})^{-1} \\ &= J^{(34)}J^{(2,34)}(\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\Delta)(J^{(1,23)})\Phi^{(1,2,34)}(\Delta\otimes\Delta)(J^{-1})(J^{(12)})^{-1}(J^{(34)})^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &= (\Delta^J\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})(\Phi^J) \\ &= J^{(12)}(\Delta\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})(J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1})(J^{(12)})^{-1} \\ &= J^{(12)}J^{(34)}(\Delta\otimes\Delta)(J)\Phi^{(12,3,4)}(\Delta\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})((J^{(12,3)})^{-1})(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat de la multiplication de (1) et (2) est égale à :

$$J^{(34)}J^{(2,34)}(\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\Delta)(J^{(1,23)})\Phi^{(1,2,34)}\Phi^{(12,3,4)}(\Delta\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})((J^{(12,3)})^{-1})(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1}.$$

Calcul de $\underbrace{(\Phi^J)^{(234)}}_{(1)}\underbrace{(\Phi^J)^{(1,23,4)}}_{(2)}\underbrace{(\Phi^J)^{(123)}}_{(3)}$:

$$\begin{aligned}
(1) &= J^{(34)}J^{(2,34)}\Phi^{(234)}(J^{(23,4)})^{-1}(J^{(23)})^{-1}\\
(2) &= (\mathrm{Id}\otimes\Delta^J\otimes\mathrm{Id})(\Phi^J)\\
&= J^{(23)}(\mathrm{Id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{Id})(J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1})(J^{(23)})^{-1}\\
&= J^{(23)}J^{(23,4)}(\mathrm{Id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{Id})(J^{(1,23)})\Phi^{(1,23,4)}(\mathrm{Id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{Id})((J^{(12,3)})^{-1})(J^{(1,23)})^{-1}(J^{(23)})^{-1}.\\
(3) &= J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi^{(123)}(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat de la multiplication $(\Phi^J)^{(234)}(\Phi^J)^{(1,23,4)}(\Phi^J)^{(123)}$:

$$J^{(34)}J^{(2,34)}\Phi^{(234)}(\mathrm{Id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{Id})(J^{(1,23)})\Phi^{(1,23,4)}(\mathrm{Id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{Id})((J^{(12,3)})^{-1})\Phi^{(123)}(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1}$$
$$J^{(34)}J^{(2,34)}(\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\Delta)(J^{(1,23)})\Phi^{(234)}\Phi^{(1,23,4)}\Phi^{(123)}(\Delta\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})((J^{(12,3)})^{-1})(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1}.$$

Il ne reste donc qu'une relation :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(\Phi^J) &= (\mathrm{Id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1})\\
&= [(\mathrm{Id}\otimes(\varepsilon\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta)\,(J)][((\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta\otimes\mathrm{Id})\,(J^{-1})]\\
&= JJ^{-1}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc B^J est une quasi-bigèbre. □

Remarques : Il est donc possible de transformer une quasi-bigèbre B en une autre quasi-bigèbre B^J, où J est une transformation de jauge. Cette opération s'appelle "twisting" et nous noterons $B^J=(B,\mathrm{m},\eta,\Delta^J,\varepsilon,\Phi^J)$ le twist de B par J. Nous pouvons alors créer une équivalence entre deux quasi-bigèbres .

Définition 4.5 (équivalence, twist)**.** *Deux quasi-bigèbres $(B,\Delta,\varepsilon,\Phi)$ et $(B',\Delta',\varepsilon',\Phi)'$ sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme d'algèbres $\theta : B\to B'$ et $J\in B'\otimes B'$ une transformation de jauge sur B', vérifiant :*

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(J)=1=(\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)(J). \tag{4.3a}$$

$$\Delta'=J^{-1}((\theta\otimes\theta)\Delta)J. \tag{4.3b}$$

$$\Phi'=J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1}. \tag{4.3c}$$

Proposition 4.6. *Si deux quasi-bigèbres sont équivalentes alors leur catégorie de représentation associée sont équivalentes.*

Démonstration : Soient $(B, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ et $(B', \Delta', \varepsilon', \Phi')$ deux quasi-bigèbres équivalentes. Nous avons donc un isomorphisme d'algèbres $\theta : B \to B'$, ce qui nous donne une équivalence de catégorie $F : \mathrm{Rep}(B) \to \mathrm{Rep}(B')$ et une transformation naturelle :

$$\begin{array}{rccc} J_{U,V}: & F(U) \otimes F(V) & \to & F(U \otimes V) \\ & x \otimes y & \mapsto & J.x \otimes y \end{array}$$

De par les conditions sur Φ' et J, nous en déduisons qu'il s'agit d'un foncteur tensorielle. □

Les quasi-algèbres de Hopf sont des quasi-bigèbres munies d'une structure supplémentaire appelée quasi-antipode.

Définition 4.7. *Une quasi-algèbre de Hopf est une quasi-bigèbre* $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *munie d'une quasi-antipode* (S, α, β)*, où* $S : B \longrightarrow B$ *est un antihomomorphisme d'algèbres,* $\alpha, \beta \in B$*, qui vérifie les axiomes suivants :*

i)	$\mathrm{m}((S \otimes \mathrm{L}_\alpha) \circ \Delta) = \varepsilon\alpha$	*et*	$\mathrm{m}((\mathrm{R}_\beta \otimes S) \circ \Delta) = \varepsilon\beta.$
ii)	$\mathrm{m}^{(2)}(S \otimes \mathrm{L}_\alpha\, \mathrm{R}_\beta \otimes S)(\Phi) = 1$	*et*	$\mathrm{m}^{(2)}(\mathrm{R}_\beta \otimes S \otimes \mathrm{L}_\alpha)(\Phi^{-1}) = 1.$

Où L_α*,* R_β *et* $\mathrm{m}^{(2)}$ *sont respectivement la multiplication à gauche par* α*, la multiplication à droite par* β *et* $\mathrm{m}(\mathrm{m} \otimes \mathrm{Id})$.

Remarques : À l'instar des quasi-bigèbres, lorsque $\Phi = 1 \otimes 1 \otimes 1$ et $\alpha = \beta = 1$, B est une algèbre de Hopf.

Si u est un élément inversible d'une quasi-algèbre de Hopf B, alors $(\widetilde{S}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ où,

$$\widetilde{S} = uSu^{-1}, \qquad \widetilde{\alpha} = u\alpha, \qquad \widetilde{\beta} = \beta u^{-1}, \tag{4.4}$$

est une quasi-antipode. Inversement, si (S, α, β) et $(\widetilde{S}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ sont des quasi-antipodes de B alors il existe un unique élément inversible $u \in B$ tel que (4.4) soit vérifiée.

Comme dans le cas des quasi-bigèbres, nous pouvons *twister* les quasi-algèbres de Hopf en twistant la quasi-bigèbre sous jacente, de plus les éléments α^J et β^J correspondants sont :

$$\alpha^J = \mu(S \otimes \mathrm{L}_\alpha)(J^{-1}) \text{ et } \beta^J = \mu(\mathrm{R}_\beta \otimes S)(J). \tag{4.5}$$

La quasi-algèbre de Hopf twistée est $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta^J, \varepsilon, \Phi^J, S, \alpha^J, \beta^J)$.

On trouvera un exemple de quasi-algèbre de Hopf dans le livre de C. Kassel [Kas95], partie 4, chapitre XV, section 5 page 380.

Un morphisme de quasi-algèbres de Hopf est un morphisme de quasi-bigèbre qui commute avec les quasi-antipodes.

Définition 4.8. *Soient A et B deux quasi-algèbres Hopf, nous dirons qu'un morphisme d'algèbres $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme de quasi-algèbres de Hopf si nous avons :*

i) $\Delta_B f = (f \otimes f)\Delta_A$, $\varepsilon_B f = \varepsilon_A$.

ii) $\Phi_B = (f \otimes f \otimes f)(\Phi_A)$.

iii) $S_B f = f S_A$, $f(\alpha_A) = \alpha_B$ *et* $f(\beta_A) = \beta_B$.

Nous allons maintenant définir des structures supplémentaires sur les quasi-algèbres de Hopf. Nous amènerons ces structures grâce aux catégories tensorielles tressées et symétriques. En effet, nous allons dans un premier temps donner une caractérisation avec les catégories tensorielles des structures d'algèbres de Hopf quasi-triangulaires et triangulaires, puis nous enoncerons une définition utilisant les "R-matrices".

Proposition 4.9. *Soient H une algèbre de Hopf et $\operatorname{Rep} H$, la catégorie tensorielle de H-modules. Alors nous avons :*

i) H est quasi-triangulaire si et seulement si $\operatorname{Rep} H$ est une catégorie tensorielle tressée.

ii) H est triangulaire si et seulement si $\operatorname{Rep} H$ est une catégorie tensorielle symétrique.

Démonstration : Soit R une structure quasi-triangulaire sur H. Posons

$$\begin{array}{rccc} c_{U,V}: & U \otimes V & \to & V \otimes U \\ & x \otimes y & \mapsto & \tau(R(x \otimes y)) \end{array}$$

où $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$. Nous avons que $c_{U,V}$ est H-linéaire en prenant en compte la relation $R\Delta = \Delta^{op}R$. De plus, les axiomes des hexagones sont équivalent à :

$$R^{(1,23)} = R^{(13)}R^{(12)} \quad \text{et} \quad R^{(12,3)} = R^{(13)}R^{(23)}.$$

En appliquant $\operatorname{Id} \otimes \varepsilon \otimes \operatorname{Id}$ à la première relation ci-dessus, nous obtenons que $(\operatorname{Id} \otimes \varepsilon)R = 1$ et en l'appliquant à la deuxième, $(\varepsilon \otimes \operatorname{Id})R = 1$. Par conséquent, $\operatorname{Rep} H$ est une catégorie tensorielle tressée. La réciproque se demontre essentiellement de la même façon en posant :

$$R = \tau(c_{H,H}(1 \otimes 1)).$$

Finalement, $\operatorname{Rep} H$ est symétrique si et seulement si $R^{(12)}R^{(21)} = 1$, si et seulement si R est triangulaire. □

Remarques : Nous observons ici que Rep H est une catégorie tensorielle stricte car l'associateur et les contraintes unitaires sont des identités de Rep H.

En utilisant, le fait que lorsque H est une quasi-bigèbre alors, $\operatorname{Rep} H$ est une catégorie tensorielle non strict. Nous pouvons définir les structures triangulaire et quasi-triagulaire sur les quasi-algèbres de Hopf.

Définition 4.10 (Quasi-triangulaire)**.** *$(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ est une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire si $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ est une quasi-algèbre de Hopf et R est un élément inversible de $H \otimes H$ tel que :*

$$\Delta^{op} = R\Delta R^{-1}. \tag{4.6a}$$

$$R^{(1,23)} = (\Phi^{(231)})^{-1} R^{(13)} (\Phi^{213}) R^{(12)} (\Phi^{(123)})^{-1}. \tag{4.6b}$$

$$R^{(12,3)} = \Phi^{(312)} R^{(13)} (\Phi^{(132)})^{-1} R^{(23)} \Phi^{(123)}. \tag{4.6c}$$

Nous dirons que R est la structure quasi-triangulaire de H et que R est une R-Matrice. $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ est une quasi-algèbre de Hopf triangulaire si de plus $RR^{(21)} = 1$. Nous pouvons restreindre cette définition aux quasi-bigèbres.

Définition 4.11 (quasi-algèbre de Hopf cobordée)**.** *$(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ est une quasi-algèbre de Hopf cobordée si $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ est une quasi-algèbre de Hopf et R est un élément inversible de $H \otimes H$ tel que :*

$$\Delta^{op} = R\Delta R^{-1}. \tag{4.7a}$$

$$R^{(12)} R^{(12,3)} = \Phi^{(321)} R^{(23)} R^{(1,23)} \Phi^{(123)}. \tag{4.7b}$$

$$RR^{(21)} = 1. \tag{4.7c}$$

Nous dirons que R est une structure de cobord pour H.

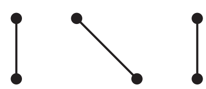
Définition 4.12 (Equation de Yang-Baxter quasi-quantique)**.** *Soit $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ une quasi-algèbre de Hopf. Nous appelons équation de Yang-Baxter quasi-quantique (qQYBE), l'équation suivante pour $R \in H \otimes H$:*

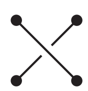
$$R^{(12)} \Phi^{(231)} R^{(13)} (\Phi^{(132)})^{-1} R^{(23)} \Phi^{(123)} = \Phi^{(321)} R^{(23)} (\Phi^{(231)})^{-1} R^{(13)} \Phi^{(213)} R^{(12)}. \tag{qQYBE}$$

Remarques : Nous remarquerons que si nous faisons abstraction de Φ, nous obtenons l'équation de Yang-Baxter Quantique. De plus, nous pouvons avoir une représentation géométrique de l'équation en associant le parenthesage à la distance entre les points i.e.

$((.\ .)\ .) \mapsto$

Nous pouvons alors voir Φ comme le mouvement des points sur une droite et comme le croisement de deux points i.e. :

$\Phi \quad \mapsto$ 

$R \quad \mapsto$ 

Nous obtenons alors une représentation graphique de (qQYBE).

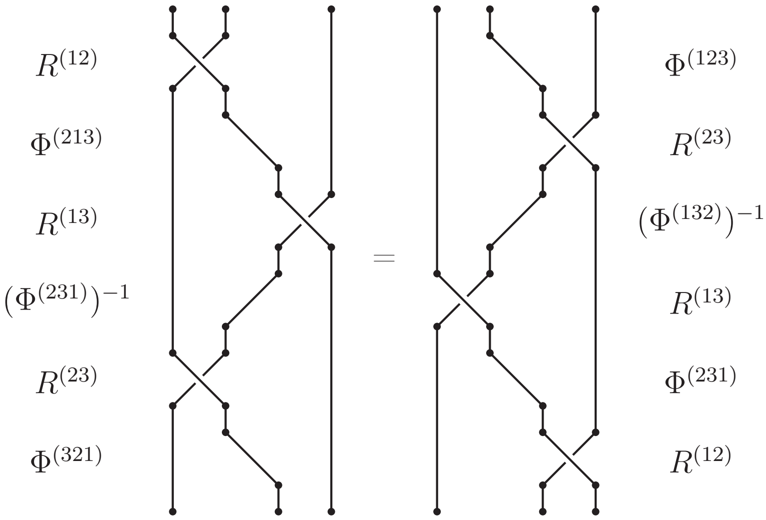


FIGURE I.2 – (qQYBE) vue comme une relation de tresse plus un parenthesage

Proposition 4.13. *Soit* $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ *une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire, alors la structure quasi-triangulaire* R *est solution de (qQYBE).*

Démonstration :

$$\begin{aligned}
R^{(12)}\Phi^{(231)}R^{(13)}(\Phi^{(132)})^{-1}R^{(23)}\Phi^{(123)} &= R^{(12)}R^{(12,3)} \\
&= R^{(12)}(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R) \\
&= R^{(12)}(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R)(R^{(12)})^{-1}R^{(12)} \\
&= (R\Delta R^{-1} \otimes \mathrm{Id})(R)R^{(12)} \\
&= (\Delta^{op} \otimes \mathrm{Id})(R)R^{(12)} \\
&= \Phi^{(321)}R^{(23)}(\Phi^{(231)})^{-1}R^{(13)}\Phi^{(213)}R^{(12)}.
\end{aligned}$$

Nous utilisons le fait que :

$$(\Delta^{op} \otimes \mathrm{Id})(R) = \Phi^{(321)}R^{(23)}(\Phi^{(231)})^{-1}R^{(13)}\Phi^{(213)}. \tag{4.8}$$

Cette relation est obtenue en appliquant $(\tau \otimes \mathrm{Id})$ aux relations que vérifient R, la structure quasi-triangulaire. □

Proposition 4.14. *Soit* $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *une quasi-bigèbre.* B *admet une structure quasi-triangulaire si et seulement si la catégorie monoidale* $\mathrm{Rep}\, B$ *est tressée.*

Démonstration : La preuve est essentiellement la même que dans le cas des algèbres de Hopf (proposition 4.9) sauf qu'il faut ici tenir compte du fait que la catégorie tensorielle $\mathrm{Rep}\, B$ n'est pas stricte et donc les associateurs apparaissent et compliquent légèrement les relations. Nous posons toujours

$$\begin{array}{rccl} c_{U,V}: & U\otimes V & \to & V\otimes U \\ & x\otimes y & \mapsto & \tau(R(x\otimes y)) \end{array}$$

□

Remarques : Le fait que R la structure quasi-triangulaire est solution de qQYBE est équivalent au fait que $c_{U,V}$ vérifie un diagramme dodécagonale. Toutes les structures précédentes peuvent être d'efinies sur les quasi-bigèbres.

Comme ce fut le cas pour les quasi-bigèbres, nous pouvons définir une équivalence entre les quasi-bigèbres quasi-triangulaires en nous aidant des transformations de jauge (des twists).

Proposition 4.15. *Soient* $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ *une quasi-bigèbre quasi-triangulaire et* J *une transformation de jauge (un twist) i.e.*

$$(\varepsilon\otimes \mathrm{Id})(J) = 1 = (\mathrm{Id}\otimes\varepsilon)(J). \tag{4.9a}$$

nous posons alors :

$$\Delta^J = J\Delta J^{-1}. \tag{4.9b}$$

$$\Phi^J = J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(J^{(12,3)})^{-1}(J^{(12)})^{-1}. \tag{4.9c}$$

$$R^J = J^{(21)}RJ^{-1}. \tag{4.9d}$$

Alors $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta^J, \varepsilon, \Phi^J, R^J)$ *est une quasi-bigèbre quasi-triangulaire.*

Démonstration : Nous avons déjà que $(B, \mathrm{m}, \eta, \Delta^J, \varepsilon, \Phi^J, R^J)$ est une quasi-bigèbre, il nous reste à obtenir $R^J = J^{(21)}RJ^{-1}$ qui découle directement du fait que R est un tressage sur Rep B. □

Énonçons l'analogue pour les quasi-algèbres de Hopf des algèbre enveloppantes quantifiées. Dans un premier temps, il faut donner un sens aux déformations pour les quasi-algèbres de Hopf puis dans un second temps, nous étudierons les stuctures supplémentaires qui apparaissent sur la limite semi-classique de ces objets.

Définition 4.16 (Déformation)**.** *Soit* $(H_0, \mathrm{m}_0, \eta_0, \Delta_0, \varepsilon_0, S_0, \Phi_0)$ *une quasi-algèbre de Hopf, une déformation de* H_0 *est une quasi-algèbre de Hopf topolologique* $(H, \mathrm{m}_\hbar, \eta_\hbar, \Delta_\hbar, \varepsilon_\hbar, S_\hbar, \Phi_\hbar)$ *vérifiant :*

i) H *est isomorphe à* $H_0[[\hbar]]$ *en tant que* $\Bbbk[[\hbar]]$*-module.*

ii) $\mathrm{m} \equiv \mathrm{m}_\hbar \mod \hbar$, $\Delta_0 \equiv \Delta_\hbar \mod \hbar$ *et* $\Phi_0 \equiv \Phi_\hbar \mod \hbar$.

Nous pouvons alors donner l'analogue de la notion des algèbres enveloppante universelle quantique pour les quasi-algèbres de Hopf.

Définition 4.17 (Quasi-QUEA)**.** *Une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique est une quasi-algèbre de Hopf déformée* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ *de* $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{m}_0, \eta_0, \Delta_0, \varepsilon_0, 1, S_0)$ *pour une certaine algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *telle que :*

$$\mathrm{Alt}(\Phi) \equiv 0 \mod \hbar^2. \tag{4.10}$$

Remarques : Nous pouvons définir alors un twist sur les quasi-algèbres enveloppantes universelles quantiques semblable au twist des quasi-algèbres de Hopf mais il faut ajouter une condition sur la transformation de jauge i.e $J \in H \otimes H$ est inversible et vérifie :

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(J) = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(J) = 1.$$

Alors nous pourrons voir en plus que comme J est inversible et $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(J) = 1$ implique que

$$J \equiv 1 \mod \hbar.$$

nous observons grâce à ce résultat supplémentaire que le twisting préserve la relation :

$$\mathrm{Alt}(\Phi) \equiv 0 \mod \hbar^2.$$

Proposition 4.18. *Toute quasi-algèbre enveloppante universelle quantique est twist équivalente à une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique où* $\Phi \equiv 1 \mod \hbar^2$.

Remarques : Cette proposition est démontrée par V. Drinfeld dans son article "Quasi-Hopf Algebras" [Dri89]. Elle fait intervenir essentiellement des considérations de cohomologie.

Proposition 4.19. *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ *une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique, nous pouvons supposer que* $\Phi \equiv 1 \mod \hbar^2$ *et* $\mathfrak{g} := \mathrm{prim}(H/\hbar H)$*. Si nous posons pour* $x \in \mathfrak{g}$ *:*

$$\delta(x) := \frac{\Delta(x) - \Delta^{\mathrm{op}}(x)}{\hbar} \mod \hbar \qquad \text{et} \qquad \varphi := \frac{\mathrm{Alt}(\Phi)}{\hbar^2} \mod \hbar \tag{4.11}$$

nous avons :

i) $\delta : \mathfrak{g} \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ est un $1-$cocycle.

ii) $\varphi \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}$.

iii) $\frac{1}{2}\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})\delta(x) = \mu(x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x, \varphi)$.

iv) $\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id})(\varphi) = 0$.

Nous renvoyons à l'article de V. Drinfeld "On quasitriangular quasi-Hopf Algebras and a group closely related to Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)" [Dri91] pour plus de détails et une preuve de cette proposition.

Nous pouvons alors maintenant donner la définition des quasi-bigèbres de Lie.

Définition 4.20 (quasi-bigèbre de Lie)**.** *Une quasi-bigèbre de Lie est la donnée de* $(\mathfrak{g}, \mu, \delta, \phi)$ *où* $(\mathfrak{g}, \mu)$ *est une algèbre de Lie,* δ *est un 1-cocycle et* $\varphi \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}$ *qui vérifie :*

$$\frac{1}{2}\operatorname{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})\delta(x) = \mu(x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x, \varphi) \tag{4.12a}$$

$$\operatorname{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id})(\varphi) = 0. \tag{4.12b}$$

Remarques : Il est clair que toute bigèbre de Lie peut être vue comme une quasi-bigèbre de Lie en posant $\varphi = 0$.

Il est naturel de se demander si l'on peut quantifier les quasi-bigèbres de Lie. Nous les avons amenées de façon à ce qu'il soit évident que nous avons bien sur un lien entre les quasi-algèbres enveloppantes universelles quantiques et les quasi-bigèbres de Lie, comme ce fut le cas entre les algèbres enveloppantes universelles quantiques H et les bigèbres de Lie.

Définition 4.21 (limite semi-classique)**.** *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ *une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique et* $H/\hbar H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$*. La quasi-bigèbre de Lie définie dans la proposition 4.19 est la limite semi-classique de* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$*. Réciproquement, nous dirons que* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S)$ *est une quantification de* $(\mathfrak{g}, \mu, \delta, \varphi)$*.*

Remarques : Le problème de quantification des quasi-bigèbres de Lie fut réslu récemment par B.Enriquez et G.Halbout dans l'article "‘quantization of quasi-Lie biagebras"’ [EH10b]. Nous nous intéresserons un peu plus à ce résultat dans le chapitre 5.

Définissons des twists classiques sur les quasi-bigèbres de Lie.

Définition 4.22 (Twist semi-classique)**.** *Soit* $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$ *une quasi-bigèbre de Lie, et* $f \in \wedge^2\mathfrak{g}$*. Posons :*

$$\delta'(x) = \delta(x) + \left[x^{(1)} + x^{(2)}, f\right] \tag{4.13a}$$

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{2}\operatorname{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})f - \mathrm{CYB}(f) \tag{4.13b}$$

Proposition 4.23. *Avec les notations précédentes, nous avons* $(\mathfrak{g}, \mu, \delta', \varphi')$ *est une quasi-bigèbre de Lie. Il s'agit du twist de* $(\mathfrak{g}, \mu, \delta, \varphi)$ *par f. De plus, faire un twist avec* f_1 *puis avec* f_2 *revient à faire un seul twist avec* $f_1 + f_2$ *.*

Démonstration : Il est clair que $\delta' : \mathfrak{g} \to \wedge^2\mathfrak{g}$ est un cocycle, car il s'agit de la somme de deux cocycles, $\delta' = \delta + \delta f$. Nous avons aussi que $\varphi' \in \wedge^3\mathfrak{g}$ par définition de CYB et de φ. Nous savons que :

$$\mathrm{Alt}(\partial f \otimes \mathrm{Id})(\partial f(x)) + [x, \mathrm{CYB}(f)] = 0$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\mathrm{Alt}(\delta' \otimes \mathrm{Id})\delta'(x) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Alt}((\delta + \partial f) \otimes \mathrm{Id})(\delta + \partial f)(x) \\
&= \frac{1}{2}\,(\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})(\delta + \partial f)(x) + \mathrm{Alt}(\partial f \otimes \mathrm{Id})(\delta + \partial f)(x)) \\
&= [x, \varphi] + \frac{1}{2}(\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})(\partial f) + \mathrm{Alt}(\partial f \otimes \mathrm{Id})(\delta)(x)) - [x, \mathrm{CYB}(f)] \\
&= [x, \varphi] + [x, \frac{1}{2}\,\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})(f)] - [x, \mathrm{CYB}(f)]
\end{aligned}$$

sachant que nous avons en développant

$$\frac{1}{2}(\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})(\partial f) + \mathrm{Alt}(\partial f \otimes \mathrm{Id})(\delta)(x)) = [x, \frac{1}{2}\,\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{Id})(f)]$$

La dernière relation se retrouve par calcul direct, de même pour la deuxième partie de la démonstration. □

Il existe un lien entre les twists des quasi-bigèbres de Lie et ceux des quasi-algèbres enveloppantes universelles quantiques.

Proposition 4.24. *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \Phi)$ *une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique,* J *un twist tel que* $J \equiv 1 \mod \hbar$. *Alors nous posons* $(H, \Delta^J, \varepsilon, S^J, \Phi^J)$ *le twist de* H *par* J. *Supposons que* $\Phi \equiv \Phi' \equiv 1 \mod \hbar$. *Si nous posons :*

$$f \equiv \frac{J - J^{21}}{\hbar} \mod \hbar \tag{4.14}$$

Alors la limite semi-classique de $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta^J, \varepsilon, S^J, \Phi^J)$ *est celle de* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \Phi)$ *twistée par* f.

Chapitre II

Problèmes de Drinfeld et Sous-algèbre coisotrope

Nous allons, dans ce chapitre, présenter certaines des questions que posa V. Drinfeld dans son article [Dri92]. A l'heure actuelle, nous avons une réponse pour la majorité de ces questions. Nous allons étudier, dans un premier temps, la question de quantification des bigèbres de Lie. Nous introduirons les outils nécessaire à la construction de la quantification universelle. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux autres problèmes de quantification qui ont été résolus, et introduirons quelques cas de quantification, non encore élucidé. Finalement, nous nous étudierons le cadre de quantification des sous-algèbre de Lie coisotrope, en étudiant le principe de dualité introduit par F. Gavarini et N. Ciccolo dans [GC06] et [Cic97].

1 Quantification des bigèbres de Lie

Dans l'article "On some unsolved problems in quantums group theory", V. Drinfeld posa plusieurs questions sur les groupes quantiques et, en particuLier, la première de ses questions fut celle de la quantification des bigèbres de Lie. Nous commencerons donc par cette question.

Question 1 :
Est-ce que toutes les bigèbres de Lie peuvent être quantifiées ?

Cette question fut résolue partiellement par V. Drinfeld dans son article "On some unsolved problems in quantums group theory". Il énonce par la suite, un certain nombre de résultats sur la quantification, par exemple, celle des algèbres de Lie semi-simple que nous détaillerons dans le chapitre 3 section 1. Il faudra cependant attendre quelques années avant qu'une réponse génerale ne soit donnée. P. Etingof et D. Kazhdan répondront à cette question dans leur article "'quantization of Lie Bialgebra I"'[EK96]. Ils répondent en même temps à une autre question démontrant que non seulement une quantification existe mais qu'en plus elle est universelle.
La démonstration se fait en deux parties, la première répond au problème dans le cas de la

dimension finie. Tandis que la deuxième est la généralisation de ce résultat à la dimension infinie.

Nous allons introduire brièvement le formalisme de Tanaka-Krein qui joue un rôle important dans la preuve de la quantification.
Dans cette partie, $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle algébriquement clos. Cette partie se base sur les travaux de D. Calaque et P. Etingof dans [CE] et ceux de P. Deligne dans [Del07].

Définition 1.1 (Catégorie Abélienne)**.** *Une catégorie $\mathcal{C}$ est additive sur $\Bbbk$ si elle vérifie :*

i) il existe un objet $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{0}, V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, \boldsymbol{0}) = 0$ pour tout $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

ii) Pour tous $U, V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}(U, V)$ sont des $\Bbbk$-espaces vectoriels et pour tous $U, V, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, les compositions

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W)$$

sont $\Bbbk$-bilineaires.

iii) les sommes finies directes existent dans $\mathcal{C}$.

Une catégorie additive $\mathcal{C}$ est dite abéLienne si elle verifie en plus :
Tout morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V)$ admet un noyau $\mathrm{Ker}\,\phi$ et un conoyau $\mathrm{coKer}\,\phi$ des morphismes de $\mathcal{C}$. Tout morphisme peut s'écrire comme la composition d'un epimorphisme suivi d'un monomorphisme, tout monomorphisme est le noyau d'un morphisme et tout epimorphisme est le conoyau d'un morphisme.

Exemple : La catégorie $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie est une catégorie abéLienne.
La catégorie $\mathrm{Rep}(A)$ des représentations d'une $\Bbbk$-algèbre A est une catégorie abéLienne.

Définition 1.2 (Catégorie monoidale tressée)**.** *Une catégorie monoidale tressée $\mathcal{C}$ est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une structure monoidale (i.e. un bifoncteur) $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ qui vérifie :*

(1) $\otimes$ est muni d'une contrainte d'associativité Φ, d'une contrainte de commutativité c et d'un objet unité $\mathbb{1}$ munie de contrainte d'unité (l et r) qui vérifie :
Φ, c, l et r sont des transformations naturelles $\Phi_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$, $c_{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$, $l_U : U \otimes \mathbb{1} \to U$ et $r_U : \mathbb{1} \otimes U \to U$

l'axiome du pentagone :

$$\begin{tikzcd}
(U\otimes(V\otimes W))\otimes X \arrow[d, "\Phi_{U,V\otimes W,X}"'] & ((U\otimes V)\otimes W)\otimes X \arrow[l, "\Phi_{U,V,W}\otimes \mathrm{Id}_X"'] \arrow[d, "\Phi_{U\otimes V,W,X}"] \\
 & (U\otimes V)\otimes(W\otimes X) \arrow[d, "\Phi_{U,V,W\otimes X}"] \\
U\otimes((V\otimes W)\otimes X) \arrow[r, "\mathrm{Id}_U\otimes\Phi_{V,W,X}"] & U\otimes(V\otimes(W\otimes X))
\end{tikzcd}$$

l'axiome du triangle :

$$\begin{tikzcd}
(V\otimes \mathbb{1})\otimes W \arrow[rr, "\Phi_{V,\mathbb{1},W}"] \arrow[dr, "r_V\otimes \mathrm{Id}_W"'] & & V\otimes(\mathbb{1}\otimes W) \arrow[dl, "\mathrm{Id}_V\otimes l_W"] \\
 & V\otimes W &
\end{tikzcd}$$

et les deux hexagones :

$$\begin{tikzcd}
 & U\otimes(V\otimes W) \arrow[r, "c_{U,V\otimes W}"] & (V\otimes W)\otimes U \arrow[dr, "\Phi_{V,W,U}"] & \\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[ur, "\Phi_{U,V,W}"] \arrow[dr, "c_{U,V}\otimes id_W"'] & & & V\otimes(W\otimes U) \\
 & (V\otimes U)\otimes W \arrow[r, "\Phi_{V,U,W}"] & V\otimes(U\otimes W) \arrow[ur, "id_V\otimes c_{U,W}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "c_{U\otimes V,W}"] & W\otimes(U\otimes V) \arrow[dr, "\Phi^{-1}_{W,U,V}"] & \\
U\otimes(V\otimes W) \arrow[ur, "\Phi^{-1}_{U,V,W}"] \arrow[dr, "id_U\otimes c_{V,W}"'] & & & (W\otimes U)\otimes V \\
 & U\otimes(W\otimes V) \arrow[r, "\Phi^{-1}_{U,W,V}"] & (U\otimes W)\otimes V \arrow[ur, "c_{U,W}\otimes id_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.3 (Catégorie tensorielle)**.** *Une catégorie tensorielle $\mathcal{C}$ sur $\Bbbk$ est la donnée d'une catégorie additive $\mathcal{C}$ munie d'une structure monoidale $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ qui vérifie :*

i) $\otimes$ *est $\Bbbk$-lineaire en chaque variable.*

ii) $\mathcal{C}$ *est rigide i.e. tout objet U de $\mathcal{C}$ est dualisable, il existe $U^\vee$, muni de* coev $\mathbb{1}\to U\otimes U^\vee$ *et* ev $: U^\vee\otimes U\to\mathbb{1}$*, tels que les composés :*

$$U \xrightarrow{\mathrm{coev}\otimes\mathrm{Id}_U} U\otimes U^\vee\otimes U \xrightarrow{\mathrm{Id}_U\otimes\mathrm{ev}} U\ , \quad U^\vee \xrightarrow{\mathrm{Id}_{U^\vee}\otimes\mathrm{coev}} U^\vee\otimes U\otimes U^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{Id}_{U^\vee}} U^\vee$$

soient l'identité.

iii) il existe un isomorphisme $\Bbbk \to \mathrm{End}(\mathbb{1})$.

Remarques : $\mathcal{C}$ une catégorie tensorielle est donc une catégorie additive rigide équipée d'une structure mondiale pour laquelle $\otimes$ est additive.
Exemple : L'exemple que nous allons voir pour cette partie est la catégorie $\mathrm{Rep}\, H$ des représentations de dimension fini d'une quasi-algèbre de Hopf H. Elle n'est en générale pas strict. La catégorie de Drinfeld construite dans le chapitre précèdent est une catégorie tensorielle.

Définition 1.4 (Foncteur tensorielle)**.** *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux catégories tensorielle, un foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *est un foncteur tensorielle si il est exact et muni d'un isomorphisme naturel* $J_{U,V} : F(U \otimes V) \to F(U) \otimes F(V)$ *et d'un isomorphisme* $u : F(\mathbb{1}) \to \mathbb{1}$*, tel que les diagrammes suivant commutent :*

$$\begin{tikzcd}
F((U \otimes V) \otimes W) \arrow[r, "J_{U\otimes V,W}"] \arrow[d, "F(\Phi_{U,V,W})"'] & F(U \otimes V) \otimes F(W) \arrow[r, "J_{U,V}\otimes \mathrm{Id}_{F(W)}"] & (F(U) \otimes F(V)) \otimes F(W) \arrow[d, "\Phi'_{F(U),F(V),F(W)}"] \\
F(U \otimes (V \otimes W)) \arrow[r, "J_{U,V\otimes W}"] & F(U) \otimes F(V \otimes W) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F(U)}\otimes J_{V,W}"] & F(U) \otimes (F(V) \otimes F(W))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbb{1} \otimes U) \arrow[r, "J_{\mathbb{1},U}"] \arrow[d, "F(l_U)"'] & F() \otimes F(U) \arrow[d, "u\otimes \mathrm{Id}_{F(U)}"] \\
F(U) & \mathbb{1} \otimes F(U) \arrow[l, "l'_{F(U)}"']
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
F(U \otimes \mathbb{1}) \arrow[r, "{U,J_{\mathbb{1}}}"] \arrow[d, "F(r_U)"'] & F(U) \otimes F(\mathbb{1}) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{F(U)\otimes u}"] \\
F(U) & F(U) \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "r'_{F(U)}"']
\end{tikzcd}$$

Définition 1.5 (Foncteur fibre)**.** *Un foncteur tensorielle exact fidèle et* $\Bbbk$*-linéaire* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$*, d'une catégorie tensorielle* $\mathcal{C}$ *vers la catégorie tensorielle symétrique* $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ *est appelé un foncteur fibre.*

Soit H une quasi-algèbre de Hopf et $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}\, H$, alors le foncteur oubli $F : \mathrm{Rep}\, H \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ est un foncteur fibre. La théorie de reconstruction de Tanaka-Krein nous permet de faire le chemin inverse et de reconstruire la quasi-algèbre de Hopf H à partir de la donnée de la catégorie $\mathcal{C}$.

Théorème 1.6 (Reconstruction)**.** *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie tensorielle définie sur* $\Bbbk$ *un corps de caractéristique nulle algébriquement clos et* F *un foncteur fibre. Supposons que* $\mathcal{C}$ *a un nombre fini d'objets indécomposable, alors :*

a) $\mathrm{End}(F) = H$ *où* H *est une quasi-algèbre de Hopf de dimension finie.*

b) Le foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Rep}\, H$ *défini par* F *est une équivalence de catégorie.*

Il existe un résultat plus général sans le besoin de la finitude de la quasi-algèbre de Hopf. Nous nous référerons à un articlede P. Deligne et J. Milne [DM81] pour une preuve dans ce cadre.

Voyons la démarche suivie pour la première partie. Nous nous donnons $\mathfrak{a}$ une bigèbre de Lie sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique nulle. Alors nous construisons le double de Drinfeld $\mathfrak{g} = \mathfrak{D}\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*$. Nous étudions le Double de Drinfeld car il possède une quantification que P. Etingof et D. Kazhdan ont construite en utilisant le théorème de reconstruction de Tanaka-Krein selon lequel nous pouvons voir les bigèbres comme des algèbres associatives A munies d'une structure tensorielle sur $\mathrm{Rep}(A)$ et un foncteur fibre $F : \mathrm{Rep}(A) \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. Donc pour utiliser ce théorème, il faut remplir, dans un premier temps, les conditions d'applications.

1. Une catégorie tensorielle : $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ la catégorie de Drinfeld :
   D'après la proposition de l'annexe A, $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\,[[h]]\,, \Delta, \epsilon, \Phi_{KZ}, R, S)$ est une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire. Nous considerons la catégorie $\mathcal{D}$ des modules sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et pour tous objets $U, V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, nous posons :

   $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(U, V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[\hbar]]\,.$$

   Cette catégorie est une catégorie monoidale tressée. Il s'agit d'une sous-catégorie de Rep A stable pour la structure monoidale.
   Nous pouvons effectuer une construction similaire sur la catégorie $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$ des $\mathfrak{g}$-modules avec pour morphismes entre deux objets $U, V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}_{\mathfrak{g}})$:

   $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}}(U, V) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, V)[[\hbar]]\,.$$

   Soit Φ_{KZ} une associateur de Lie défini sur $\Bbbk$, alors $(\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}, \Phi_{KZ}, e^{\hbar\Omega/2})$ est une catégorie tensorielle tressée.

2. L'existance d'un foncteur fibre : pour bien définir ce foncteur nous aurons besoin d'une bonne décomposition du double de Drinfeld. Cette décomposition fera intervenir les modules de Verma définis de la façon suivante :

   $$M_+ = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)} c_+ \quad \text{et} \quad M_- = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)} c_-,$$

   où $c_\pm$ est le $\mathfrak{g}_\pm$ module trivial. En utilisant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, nous avons la description suivante :

   $$M_+ = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)1_+ \quad \text{et} \quad M_- = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)1_-,$$

   où $1_\pm \in M_\pm$ est $\mathfrak{g}_\pm$ invariant. Nous appelons $M_\pm$ les modules de Verma et $1_\pm$ les vecteurs anihilateurs. Nous pouvons définir sur $M_\pm$, un coproduit $i_\pm$. Nous pouvons alors créer un isomorphisme $\phi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to M_+ \otimes M_-$ et nous aurons alors un foncteur de fibre $F : V \to V[[\hbar]]$ donné par :

   $$F(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}}(M_+ \otimes M_-, V). \tag{1.1}$$

3. Il existe une structure tensorielle sur F : elle sera donnée par une famille d'isomorphisme $(J_{X,Y})_{X,Y \in Ob(\mathcal{M}_{\mathfrak{g}})}$. Nous avons une formule explicite pour J :
$$J = (\phi^{-1} \otimes \phi^{-1}) \Big((\Phi^{(1,2,34)})^{-1} \Phi^{(234)} e^{\hbar\Omega^{(23)}/2} (\Phi^{(324)})^{-1} \Phi^{(1,3,24)} (1_+ \otimes 1_- \otimes 1_+ \otimes 1_-) \Big). \qquad (1.2)$$
$J_{V,W}$ nous permet d'identifier $V \otimes W \simeq F(V) \otimes F(W) \to F(V \otimes W) \simeq V \otimes W$. Nous ferons remarquer que la formule de J fait intervenir l'associateur de Lie Φ choisi comme contrainte d'associativité sur $\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}$.

Nous pouvons alors utiliser le formalisme de Tanaka-Krein, ce qui nous permettra d'obtenir sur $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(F) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ une structure de bigèbre définie par
$$\Delta = J^{-1}\Delta_0 J, \quad \epsilon = \epsilon_0.$$
Nous avons alors une quantification de $\mathfrak{g}$.
À partir de la formule explicite de J, nous pouvons expliciter le début de son développement formel :
$$J \equiv 1 + \frac{\hbar}{2} r \mod \hbar^2. \qquad (1.3)$$
où r est une r-matrice qui définit la structure quasi-triangulaire du double de Drinfeld $\mathfrak{g}$. Nous en déduisons que :
$$\forall x \in \mathfrak{g}, \qquad \delta(x) \equiv \frac{\Delta(x) - \Delta^{op}(x)}{\hbar} \mod \hbar.$$
Vient maintenant la construction de la structure quasi-triangulaire $R \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$
$$\begin{aligned} R &= J_{21}^{-1} exp\left(\frac{\hbar(r + r_{21})}{2}\right) J \\ &\equiv 1 + \hbar r \mod \hbar^2. \end{aligned}$$

Le but maintenant sera de trouver une quantification de $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{a}$ qui est notre bigèbre de Lie. Nous pourrons faire mieux encore car nous aurons en plus une quantification de $\mathfrak{g}_-$. Dans un premier temps, nous cherchons donc des candidats, i.e. des sous-algèbres de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ qui pourraient nous donner une quantification de $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. Le premier choix se porterait sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_+)[[\hbar]]$ mais cette sous-algèbre ne convient pas car elle n'est, en général, pas fermée pour le coproduit. En identifiant $\mathrm{End}_{\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}}(M_+ \otimes M_-)$ avec $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$, P. Etingof et D. Kazhdan ont créé deux bigèbres $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_+)$ et $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_-)$:
$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_+) = F(M_-) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{End}_{\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}}(M_+ \otimes M_-),$$
où l'injection i est définie de la façon suivante : Pour $x \in F(M_-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathfrak{g}}}(M_+ \otimes M_-, M_-)$, nous posons $i(x)$ comme étant la composition :
$$M_+ \otimes M_- \xrightarrow{i_+ \otimes \mathrm{Id}} M_+ \otimes M_+ \otimes M_- \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes x} M_+ \otimes M_-$$
$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_\pm)$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ qui possèdent les propriétés suivantes :

a. $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_\pm)$ est une déformation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\pm)$ car nous avons $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\pm)[[\hbar]] \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_\pm)$.

b. $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_\pm)$ est une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. Par conséquent, l'application $\rho_h : \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]] \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ induit l'isomorphisme suivant :

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_\pm)/\hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_\pm) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\pm)$$

c. il existe un homomorphisme $\rho_+ : \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_-)^{op})^* \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_+)$. Et un homomorphisme $\rho_- : \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_-)^* \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_+)^{op}$.

$$\rho_+(f) = (\mathrm{Id} \otimes f)(R) \quad \textit{et} \quad \rho_-(g) = (g \otimes \mathrm{Id})(R)$$

Ce qui nous donne que $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_\pm)$ est une quantification de $\mathfrak{g}_\pm$ et que $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ est le double quantique de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_+)$.

Pour le cas des bigèbres de Lie de dimension quelconque, la démarche est essentiellement la même à cela près que les définitions sont revues pour être cohérentes dans le cadre de la dimension infinie. Le point important étant bien sûr qu'une fois que la quantification est trouvée, il faut vérifier qu'elle coïncide avec celle construite auparavant.

La première obstruction dans le cas infini vient des modules de Verma. Nous ne pourrons avoir l'isomorphisme ϕ entre $M_+ \otimes M_-$ et $\mathfrak{g}$ car si $\mathfrak{g}$ est de dimension infinie, l'élément de Casimir $\Omega = \sum_i g_i^+ \otimes g_i^- + g_i^- \otimes g_i^+$ où g_i^+ et g_i^- sont des bases duales de $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ n'agit pas sur $M_+ \otimes M_-$ car il n'est pas bien défini. Le but sera alors de construire notre foncteur de fibre sans utiliser le module M_+. Nous poserons alors comme foncteur :

$$F(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_\mathfrak{g}}(M_-, M_+^* \otimes V). \tag{1.4}$$

Maintenant, en se fondant sur la démarche en dimension finie, nous allons définir la structure tensorielle de F :

$$J_{V,W}(v \otimes w) = (i_+^* \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes c_{M_+^*,V}^{-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ (v \otimes w) \circ i_-. \tag{1.5}$$

Ceci nous donne comme en dimension finie une nouvelle structure de bigèbre de Hopf sur $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(F)$. Ainsi nous avons une quantification de $\mathfrak{g}$, et nous pouvons donner le début du développement en série formelle de J.

$$J \equiv 1 + \frac{\hbar}{2} r \mod \hbar^2.$$

En suivant toujours la démarche en dimension finie, nous cherchons une quantification à $\mathfrak{g}_+$. Nous posons

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_+) = i(F(M_-))$$

où i est l'injection de $F(M_-)$ dans $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ definie comme suit :

$$\forall\ V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M}_\mathfrak{g}),\ \forall\ x \in F(M_-) \quad i(x): \begin{array}{ccc} F(V) & \to & F(V) \\ v & \mapsto & (i_+^* \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes v) \circ x \end{array}$$

Nous pouvons démontrer que $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}_+)$ ainsi définie et munie du produit et coproduit suivant :

$$\mathrm{m}(i(x), i(y)) = i(x) \circ i(y) = i((i_+^* \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes y) \circ x). \tag{1.6}$$

$$\Delta(i(x)) = (i \otimes i)(J^{-1}_{M_-,M_-}(1 \otimes i_-) \circ x). \tag{1.7}$$

est une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ et est une quantification de $\mathfrak{g}_+$.

Nous avons ici une deuxième obstruction par rapport à la construction en dimension finie. En effet, en dimension infinie, la construction du double de Drinfeld ne nous donne pas un foncteur. Il faut donc encore une fois modifier la construction pour obtenir une quantification fonctorielle. Pour cela nous avons besoin de définir un grand nombre de notions. Nous ne donnerons pas les définitions mais énoncerons uniquement le résultat final. P. Etingof et D. Kazhdan, définissent une nouvelle catégorie de Drinfeld à l'aide des modules équicontinus.

Définition 1.7 ($\mathfrak{g}$-module équicontinu)**.** *Soient M un espace vetoriel topologique sur $\Bbbk$ et $\{A_x, x \in X\}$ une famille d'éléments de $\mathrm{End}(M)$. Nous disons que la famille $\{A_x\}$ est equicontinue si pour tout voisinage de l'origine $U \subset M$, il existe un autre voisinage de l'origine U' tel que $A_x(U') = U$ pour tout $x \in X$.*
Soit M un espace vetoriel complet sur $\Bbbk$. Nous disons que M est un $\mathfrak{g}$-module équicontinu si il existe un homomorphisme continu d'algèbre de Lie topologique $\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(M)$ tel que la famille d'opérateurs $\pi(a), a \in \mathfrak{g}$ est équicontinue .

Nous reconsidérons alors tout le problème avec des $\mathfrak{g}$-module equicontinus. Cela nous permet d'obtenir la fonctorialité de la construction. P. Etingof et D. Kazhdan finissent cette construction, en vérifiant que la nouvelle construction en dimension infinie coïncide avec celle définie en dimension finie.

P. Etingof et D. Kazhdan ont démontré que leur quantification est en plus fonctorielle et universelle. Ce qui répond à la deuxième partie de la question 1 de Drinfeld.

Pour cela, il faut regarder la définition des fonctions acycliques. Soit V un espace vectoriel sur $\Bbbk$. Pour tout entier $m, n \geq 0$, soit $C_{n,m} = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V^{\otimes m})$ est l'espace de tenseur de rang n, m sur V.
Soit $C = \oplus_{n,m\geq 0} C_{n,m}$. Nous avons deux opérations binaires sur C : le produit tensorielle et la composition (si la composition n'a pas de sens, nous la posons équivalente à 0). Nous pouvons voir $C_{n,m}$ comme les fonctions à n entrées et m sorties, le produit tensoriel est la

concaténation des fonctions.
Soit X un sous-ensemble de $W = \oplus_{i=1}^{r} C_{n_i,m_i}$ et Y_X l'espace des fonctions de X dans C. Nous notons A_X le plus petit sous-espace de Y_X fermé sous la composition et le produit tensoriel satisfaisant :

(i) $(p_i)_{|X} \in A_X$, pour $i = 1 \ldots r$ où $p_i : W \to C_{n_i,m_i}$ est la projection canonique.

(ii) Si $\sigma \in Y_X$ est un opérateur permutation de $S_p \subset H_{pp}$, vu comme une fonction constante sur X alors $\sigma \in A_X$.

Nous appelons les éléments de A_X, les fonctions acycliques de X.
Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie et $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ la quantification d'Etingof-Kazhdan, il est possible de voir la multiplication $\mathrm{m} : \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ et la comultiplication $\Delta : \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ comme une somme direct d'application $\mathrm{m}_{nm}^{p} : \mathcal{S}^n(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{S}^m(\mathfrak{g}) \to \mathcal{S}^p(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ et $\Delta_p^{nm} : \mathcal{S}^p(\mathfrak{g}) \to \mathcal{S}^m(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{S}^n(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Ces application ainsi définies dependent du commutateur μ et du cocommutateur δ de $\mathfrak{g}$.
Posons, $W = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$, et $X \subset W$ l'ensemble des pairs (m, δ) tel que $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ soit une bigèbre de Lie. Il est alors possible d'identifier $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ avec $\mathcal{S}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Par consequent, m_{nm}^{p} et Δ_p^{nm} sont des fonctions de X à valeur dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes(n+m)}, \mathfrak{g}^{\otimes p})[[\hbar]]$ et $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes p}, \mathfrak{g}^{\otimes(n+m)})[[\hbar]]$.

Théorème 1.8. *Les coefficients de la série formel en $\hbar$ de m_{mn}^{p}, Δ_p^{mn} sont des fonctions acyclique.*

Ceci est en fait la caractérisation de l'universalité. P. Etingof et D. Kazhdan calcul le développement de m à l'ordre 2 en $\hbar$. En posant $\left[e_i, e_j\right] = c_{ij}^{k} e_k$ et $\delta(e_i) = f_i^{jk} e_j \otimes e_k$.

$$\mathrm{m}(e_i, e_j) = e_i e_j + \frac{\hbar^2}{24}\left(f_i^{kl} f_j^{mn} c_{lm}^{p} c_{kp}^{q} e_q e_p + f_i^{kl} f_j^{mn} c_{km}^{p} e_p e_l e_n\right) + O(\hbar^3). \tag{1.8}$$

2 Réponse aux Problèmes de Drinfeld

Nous allons maintenant faire un court état sur les questions restantes de V. Drinfeld.

Question 2 :
Existe t-il une version quantique des séries de Campbell-Hausdorff ?

Définition 2.1 (Série de Campbell Hausdorff)**.** *Considérons la série de Campbell-Hausdorff usuelle :*

$$F(x, y) = ln(e^x e^y) = x + y + \frac{[x, y]}{2} + \frac{[x, [x, y]]}{12} + \cdots \tag{2.1}$$

Supposons que nous avons une algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ avec une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Posons alors f_k^{ij} les constantes de structures de $\mathfrak{p}$ i.e. $[e_i, e_j] = \sum_k f_k^{ij} e_k$. Nous pouvons alors donner une nouvelle *écriture à F, en posant* $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. *Alors F(x,y)* $= (F_1(x,y), ..., F_n(x,y))$ *avec :*

$$F_k(x,y) = x_k + y_k + \sum_{i,j} f_k^{ij} \frac{x_i y_j}{2} + \sum_{i,j,r,s} f_k^{ij} f_j^{rs} \frac{x_i x_r y_s}{12} + ...$$

F(x,y) ayant les propriétés suivantes :

1) $F_k(x,y)$ *est exprimée en fonction de* x_i, y_j *et* f_t^{rs} *.*

2) $F_k(x,y) = x_k + y_k + \sum_{i,j} f_k^{ij} \frac{x_i y_j}{2}$ *+ Terme de degrés supérieur à 2.*

3) F satisfait la loi d'associativité :

$$F(F(x,y),z) = F(x, F(y,z))$$

V. Drinfeld à démontrer dans son article que si il existe une réponse positive à l'existence d'une quantification universelle des bigèbres de Lie, alors cette quantification nous fournit une réponse positive à l'existence de la version quantique des séries de Campbell-Hausdorff. Nous supposerons ici qu'il existe des relations entre x_i, y_j et z_k,

$$\forall\ i,j \in \{1, ..., n\} \qquad [x_i, y_j] = [x_i, z_j] = [y_i, z_j] = 0.$$

Proposition 2.2. *Dans cette situation, il existe une série formelle* $F(x,y)$ *qui satisfaisait les propriétés 1. à 3.*

Démonstration : Considérons la cogèbre de Lie $\mathfrak{a}$ avec pour constantes de structures les f_k^{ij}. Alors l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{g}$ engendrée par l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ a une structure naturelle de bigèbre de Lie. Il existe une quantification universelle de $\mathfrak{g}$ par Etingof-Kazhdan. En appliquant cette quantification à $\mathfrak{g}$, nous obtenons une algèbre de Hopf qui est une algèbre associative topologiquement libre sur $k[[\hbar]]$ avec comme générateur $(x_1, ..., x_n)$. Alors

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i + \sum_{j,k} \hbar f_i^{jk} \frac{x_j \otimes x_k}{2} + ...$$

Nous posons alors

$$\Delta(x_i) = \tilde{F}_i(x_1 \otimes 1, ..., x_n \otimes 1, 1 \otimes x_1, ..., 1 \otimes x_n)$$

pour une certaine série formelle $\tilde{F}_i(x,y)$ à coefficient dans $\mathbb{Q}[[\hbar]]$ (ceci est une conséquence directe de l'universalité de la quantification) où $x = (x_1 \otimes 1, ..., x_n \otimes 1)$ et $y = (1 \otimes x_1, ..., 1 \otimes x_n)$. Posons alors $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, ..., \tilde{F}_n)$. Alors nous remarquons :

$$\tilde{F}_i(x,y) = x_i + y_i + \hbar f_k^{ij} \frac{x_i y_j}{2} + \text{termes de degrés supérieur à 2.}$$

D'où nous aurons que $\tilde{F}$ respecte 1), 2) et 3). De plus, nous avons que $\tilde{F}$ est invariant si nous remplaçons f_k^{ij} par λf_k^{ij} et $\hbar$ par $\lambda^{-1}\hbar$ en même temps. Par conséquent, nous obtenons l'opérateur F recherché en posant $\hbar = 1$. □

Question 3 :
Étant données une algèbre associative A et une solution $r \in A \otimes A$ à l'équation de Yang-Baxter

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \tag{2.2}$$

Existe t-il une série formelle $R = R(\hbar) = 1 + \hbar r + \sum_{n=2}^{\infty} R_n \hbar^n$ vérifiant l'equation quantique de Yang Baxter ?

Cette question fut, elle aussi, répondue par P. Etingof et D. Kazhdan dans l'article "'Quantization of Lie biagebras I"' [EK96].

Théorème 2.3. *Si A est une algèbre associative unitaire, et $r \in A \otimes A$ une r-matrice classique, alors il existe une R-matrice quantique $R \in (A \otimes A)[[\hbar]]$ tel que*

$$R = R(\hbar) = 1 + \hbar r \mod \hbar^2$$

Démonstration : La preuve du théorème commence par la définition de deux sous-algèbres de Lie de A, qui est due à N. Reshetikhin et P. Semenov-Tian-Shansky :

$$\mathfrak{g}_+ = \{(\mathrm{Id} \otimes f)(r), f \in A^*\} \qquad \mathfrak{g}_- = \{(f \otimes \mathrm{Id})(r), f \in A^*\} \tag{2.3}$$

Il est clair que $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ sont des espaces vectoriels de dimension finie de A(on identifie $\Bbbk \otimes A$ avec A). Nous définissons une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ à partir de celle sur A, sachant qu'il existe un isomorphisme vectoriel entre $\mathfrak{g}_+^*$ et $\mathfrak{g}_-$. Nous constatons que le but est ici de crée un triple de Manin, c'est la raison pour laquelle nous considérons $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ et lui donnons une structure d'algèbre de Lie. Nous définissons alors le crochet de Lie de $a \in \mathfrak{g}_+$, $x \in \mathfrak{g}_-$ par

$$[a, x] = ad^*(a)(x) - ad^*(x)(a) \tag{2.4}$$

Finalement, nous montrons l'existence du produit scalaire invariant par :

$$\langle x_- + x_+, y_- + y_+ \rangle = x_-(y_+) + y_-(x_+) \tag{2.5}$$

Alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ est un triple de Manin. Nous avons donc un homomorphisme d'algèbre de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to A$ qui s'étend sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. De plus, comme $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ est un triple de Manin, la bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est quasi-triangulaire. Ceci nous donne une r-matrice $\tilde{r} = \sum_i x_+^i \otimes x_-^i$ ou x_+^i est une base de $\mathfrak{g}_+$ et x_-^i une base duale de $\mathfrak{g}_-$. Nous remarquerons que $\pi \otimes \pi(\tilde{r}) = r$ en utilisant le théorème de quantification de bigèbre de Lie en dimension finie. Nous obtenons une quantification de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ qui est un algèbre de Hopf topologique quasi-triangulaire. Nous notons $\tilde{R}$ la R-matrice définie par la structure de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.
Nous posons alors $R = (\pi \otimes \pi)(\tilde{R})$. Nous aurons alors que $R = 1 + \hbar r \mod \hbar^2$. □

Question 4 :
Soit $(\mathfrak{g}, \mu, r)$ une algèbre de Lie quasi-triangulaire, il existe une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]], \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi(t^{(12)}, t^{(23)}), e^{\hbar t/2})$ associée à $(\mathfrak{g}, t = r + r^{(21)})$. Existe t-il une quantification $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \mathrm{m}, \eta, \Delta', \varepsilon, R)$ de l'algèbre de Lie quasi-triangulaire $(\mathfrak{g}, \mu, r)$ qui soit obtenu en twistant la quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire associée à $(\mathfrak{g}, t)$?

P. Etingof et D. Kazhdan dans [EK96] "Quantification of Lie bialgebras I" ont, en plus de la quantification des bigèbres de Lie, traité le cas des bigèbres de Lie quasitriangulaires étant donné le Lien étroit qui est présent entre le double de Drinfeld et les bigèbres de Lie quasitriangulaires.

Théorème 2.4. *Toute bigèbre de Lie quasi-tirnagulaire $\mathfrak{g}$ admet une quantification $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ qui est une algèbre enveloppante universelle quantique quasi-triangulaire isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Si $\mathfrak{g}$ est triangulaire alors $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ est aussi trinagulaire.*

La preuve consiste à voir $\mathfrak{g}$ comme "le double d'une bigèbre de Lie" et de la quantifier.

Question 5 :
Existe t-il une quantification pour les objets suivant :

a) Les bigèbres de Lie cobordée.

b) Les quasi-bigèbres de Lie.

c) Les quasi-bigèbres de Lie quasitriangulaire.

d) Les quasi-bigèbres de Lie cobordée.

La question 5 de V. Drinfeld est en fait l'analogue de la question 1 pour différents problèmes de quantification. Une réponse fut apportée pour l'ensemble des structures par plusieurs mathématiciens. Citons dans un premier temps, les réponses et leur référence.

a) B. Enriquez et G. Halbout ont quantifié les bigèbres de Lie cobordées, dans l'article [EH10a] "Quantization of coboundary Lie bialgebras" en utilisant des méthodes propices pour démontrer que les obstructions à la quantification des bigèbres de Lie cobordées sont les mêmes que pour la quantification des bigèbres de Lie. L'idée de la preuve est de démontrer que le prop des bigèbres de Lie cobordée possède la mème cohomologie que celui des bigèbre de Lie.

b) Ils répondent aussi à la quantification des quasi-bigèbres de Lie dans l'article [EH10b] "Quantization of quasi-Lie bialgebras" de mainère similaire.Nous détaillerons la preuve dans le chapitre 5 section 1.

c) V. Drinfeld a lui même répondu à ce problème de quantification dans [Dri89]. Il définit les quasi-bigèbres de Lie quasi-triangulaire comme la limite semi-classique des quasi-algèbre enveloppante universelle quantique quasi-triangulaire.

Proposition 2.5. *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ *une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique quasi-triangulaire avec* $\Phi \equiv 1 \mod \hbar^2$ *et* $H/\hbar H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$*. Nous définissons alors* $\Omega \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *par*

$$\Omega = \frac{RR^{(21)} - 1}{\hbar} \mod \hbar. \tag{2.6}$$

Alors $\Omega \in (\mathcal{S}^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Démonstration : Par définition, Ω est symétrique. De plus en appliquant les propriétés de R comme structure quasi-triangulaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R^{(21)}R) &= (\Delta \otimes \mathrm{Id})(R^{(21)})(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R) \\
&= ((\mathrm{Id} \otimes \Delta)(R))^{(312)}(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R) \\
&= ((\Phi^{(231)})^{-1}R^{(13)}\Phi^{(213)}R^{(12)}(\Phi^{(123)})^{-1})^{(312)}(\Phi^{(312)}R^{(13)}(\Phi^{(132)})^{-1}R^{(23)}\Phi^{(123)}) \\
&= (\Phi^{(123)})^{-1}R^{(32)}\Phi^{(132)}R^{(31)}(\Phi^{(312)})^{-1}\Phi^{(312)}R^{(13)}(\Phi^{(132)})^{-1}R^{(23)}\Phi^{(123)}
\end{aligned}$$

en réduisant modulo $\hbar^2$, nous trouvons

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(\Omega) = \Omega^{(13)} + \Omega^{(23)} \tag{2.7}$$

Par conséquent la première composante de Ω est primitive, donc $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. La $\mathfrak{g}$-invariance vient du fait que $\Delta R^{(21)}R = R^{(21)}R\Delta$. □

Remarques : Nous pouvons montrer que Ω est invariant par un twist de H. En effet, soit J un twist de H, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar}\left(\left((J^{(21)})^{-1}RJ\right)\left((J^{(21)})^{-1}RJ\right)^{(21)} - 1\right) &= J^{(21)}\left(\frac{RR^{(21)} - 1}{\hbar}\right)J^{(21)} \\
&\equiv \frac{RR^{(21)} - 1}{\hbar} \mod \hbar
\end{aligned}$$

car $J \equiv 1 \mod \hbar$.

Nous pouvons alors symétriser R en prenant $J = \overline{R}^{1/2}$ où $\overline{R} = R(R^{(21)}R)^{-1/2}$ est l'unitarisé de R. La racine carrée à un sens ici car $R \equiv \overline{R} \equiv 1 \mod \hbar$.

Nous obtiendrons alors $R \equiv 1 + \frac{\hbar\Omega}{2} \mod \hbar$.

Proposition 2.6. $(H, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ *une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique quasi-triangulaire avec* $\Phi \equiv 1 \mod \hbar^2$*,* $H/\hbar H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *et* $\Omega \in (\mathcal{S}^2(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ *définis comme précédemment. Si*

$$R \equiv 1 + \frac{\hbar\Omega}{2} \mod \hbar,$$

alors la limite semi-classique de $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ *est* $(\mathfrak{g}, \mu, 0, \frac{1}{4}[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}])$.

Définition 2.7 (Quasi-bigèbre de Lie quasi-triangulaire)**.** *Une quasi-bigèbre de Lie quasi-triangulaire est la donnée d'une quasi-bigèbre de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu, \delta, \phi)$ *et de deux éléments* $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ *et* $\Omega \in (\mathcal{S}^2(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ *tels que :*

1) $\delta = \partial r$.

2) $\phi = \frac{1}{4}\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}\right] - \mathrm{CYB}(r)$

Remarques : Cette définition revient à dire que les quasi-bigèbre de Lie quasi-triangulaire sont les twists par $f = -r$ des quasi-bigèbres de Lie de la forme $(\mathfrak{g}, \mu, 0, \frac{1}{4}\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}\right])$.

Un exemple important qui nous permet de poser le problème de quantification est le suivant : Soit $\mathfrak{g}_\hbar$ une algèbre de Lie déformée sur $\mathbb{C}[[\hbar]]$ (i.e. $\mathfrak{g}_\hbar$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}[[\hbar]]$ qui est isomorphe à $\mathfrak{g}[[\hbar]]$ en tant que $\mathbb{C}[[\hbar]]$-module, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\hbar/\hbar\mathfrak{g}_\hbar$) et $\Omega \in (\mathcal{S}^2\mathfrak{g}_\hbar)^{\mathfrak{g}_\hbar}$. Alors la quasi-algèbre de Hopf KZ $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\hbar), \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \Phi_{KZ}, exp(\frac{\hbar\Omega}{2}))$ est une quantification de $(\mathfrak{g}, \Omega_0)$ ou $\Omega \equiv \Omega_0 \mod \hbar$.
Voir l'Annexe A pour un rappel sur la construction de l'associateur Φ_{KZ}.

Théorème 2.8 (Drinfeld)**.** *Toute quasi-algèbre enveloppante universelle quantique quasi-triangulaire est twist équivalent à une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique de la forme suivante :*

$$\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\hbar), \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \Phi, e^{\frac{\hbar\Omega}{2}}\right)$$

où $\mathfrak{g}_\hbar$ *est une déformation d'algèbre de Lie,* Δ *est le coproduit usuel,* ε *est la counité usuelle,* $\Omega \in (\mathcal{S}^2\mathfrak{g}_\hbar)^{\mathfrak{g}_\hbar}$ *et* $\Phi \equiv 1 + \hbar^2\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}\right] \mod \hbar^3$ *un associateur. De plus,* $\mathfrak{g}_\hbar$ *et* Ω *sont uniques à isomorphisme près.*

Ce théorème répond à la quantification des quasi-bigèbre de Lie quasi-triangulaire.

d) V. Drinfeld a aussi répondu au problème de quantification des quasi-bigèbres de Lie cobord dans [Dri89].

Proposition 2.9. *Soit* $(H, \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, \Phi, S, R)$ *une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique cobord tel que* $H/\hbar H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$*, alors après un twist,* $\Phi \equiv 1 \mod \hbar^2$, $R \equiv 1 \mod \hbar^2$*. Cela entraine que* $\Delta \equiv \Delta_0 \mod \hbar^2$ *et que :*

$$\varphi = \frac{\mathrm{Alt}\,\Phi}{\hbar^2} \mod \hbar \tag{2.8}$$

est un élément $\mathfrak{g}$*-invariant de* $\wedge^3\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$.

Remarques : φ est indépendant du choix du twist dans la proposition. Nous pouvons alors définir les quasi-bigèbres de Lie cobord comme la limite semi-classique à twist près des quasi-algèbres enveloppante universelle quantique cobord.

Définition 2.10. *Une quasi-bigèbre de Lie cobord est la donnée d'une quasi-bigèbre de Lie* $(\mathfrak{g}, \mu, \delta, \varphi)$ *et de deux éléments* $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ *et* $\varphi_0 \in (\wedge^3\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ *tels que :*

1) $\delta = \partial r$.

2) $\varphi = \varphi_0 - \mathrm{CYB}(r)$

Remarques : Cette définition revient à dire que les quasi-bigèbre de Lie cobord sont les twists par $f = -r$ des quasi-bigèbres de Lie de la forme $(\mathfrak{g}, \mu, 0, \varphi_0)$.

Théorème 2.11. *Toute quasi-algèbre enveloppante universelle quantique cobord est twist équivalent à une quasi-algèbre enveloppante universelle quantique de la forme suivante :*

$$(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\hbar), \mathrm{m}, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \Phi, R)$$

où $\mathfrak{g}_\hbar$ *est une déformation d'algèbre de Lie,* Δ *et* ε*, les coproduits et counité usueles,* $R \equiv 1 \mod \hbar^2$ *et* $\Phi \equiv 1 + \hbar^2\varphi \mod \hbar^3$ *un associateur où* $\varphi \in (\wedge^3\mathfrak{g}_\hbar)^{\mathfrak{g}_\hbar}$*. De plus,* $\mathfrak{g}_\hbar$ *et* φ *sont uniques à isomorphisme près.*

Question 6 : Soit $\mathfrak{p}$ l'ensemble des séries formelles $\sum_{i=-\infty}^{n} f_i D^i$ où $f_i = f_i(x)$ sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $D = \mathrm{d}/\,\mathrm{d}x$. $\mathfrak{p}$ est une algèbre associative et donc une algèbre de Lie. Soit respectivement,$\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$, l'ensemble des éléments de $\mathfrak{p}$ tel que $f_i = 0$ si $i < 0$ respectivement si $i \geq 0$. $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ possède une structure semblable à un triplet de Manin. Existe-t-il un cadre pour une quantification de $\mathfrak{p}$?

Cette question est encore ouverte.

Question 7 : Soit H un groupe fini qui agit sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}^H = \{a \in \mathfrak{g} | ha = a,\ \forall h \in H\}$ est une algèbre de Lie. Posons $\mathfrak{g}_H = \mathfrak{g}/\mathcal{H}$ où $\mathcal{H} = \{ha - a|\ a \in \mathfrak{g},\ h \in H\}$ est un coidéal de Lie. En effet pour tout $a \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\delta(ha - a) &= \delta(ha) - \delta(a) \\
&= (h \otimes h)(\delta(a)) - \delta(a) \\
&= \sum_i hg_i \otimes hg_i' - g_i \otimes g_i' \\
&= \sum_i hg_i \otimes hg_i' - hg_i \otimes g_i' + hg_i \otimes g_i' - g_i \otimes g_i' \\
&= \sum_i hg_i \otimes (hg_i' - g_i') + (hg_i - g_i) \otimes g_i'
\end{aligned}$$

De plus, il existe une bijection entre $\mathfrak{g}^H$ et $\mathfrak{g}_H$, $\psi : \mathfrak{g}^H \to \mathfrak{g}_H$ définie par $\psi(a) = \overline{a}$ et son inverse $\psi^{-1} : \mathfrak{g}_H \to \mathfrak{g}^H$ définie par $\psi^{-1}(\overline{a}) = \frac{\sum_{h\in H} ha}{|H|}$. Il est donc possible de définir une structure de bigèbre de Lie sur $\mathfrak{g}^H$ en posant :

$$\delta^H = (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1}) \circ \delta_H \circ \psi. \tag{2.9}$$

Nous notons $\mathfrak{g}_H^H$ cette nouvelle bigèbre de Lie qui n'est ni une sous-bigèbre de Lie ni un quotient de bigèbre de $\mathfrak{g}$. Il est possible de construire un analogue quantique en copiant cette construction sur les algèbres de Hopf de dimension finie. Soit H un groupe fini qui agit sur une bigèbre B de dimension finie i.e. $\mathrm{m}(h.a, h.b) = h.(\mathrm{m}(a,b))$ et $\Delta(h.a) = (h \otimes h).\Delta(a)$, alors $B^H = \{a \in B | ha = a, \ \forall h \in H\}$ est une sous-algèbre de B. De même, $B_H = B/\mathcal{H}$ où $\mathcal{H} = \{ha - a | \ a \in B, \ h \in H\}$ est un coidéal de B. Il est aussi possible de définir une bijection de B^H dans B_H. B^H possède alors une structure de bigèbre en posant :

$$\Delta^H = (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1}) \circ \Delta_H \circ \psi \tag{2.10}$$

Notons B_H^H cette bigèbre.
De par l'universalité de la quantification (l'acyclicité des fonctions Δ et m), il est possible de remonter l'action de H sur la bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en une action sur la bigèbre $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ qui respecte la structure.

Proposition 2.12. *Soit H un groupe fini qui agit sur une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ alors H agit sur la quantification $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ de Etingof-Kazhdan.*

Démonstration : L'acyclicité de la quantification d'Etingof-Kazhdan, nous donne que m et Δ sont somme direct d'application m_{nm}^p et Δ_p^{mn} qui vivent dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes(n+m)}, \mathfrak{g}^{\otimes p})[[\hbar]]$ et $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes p}, \mathfrak{g}^{\otimes(n+m)})[[\hbar]]$ avec comme générateurs μ et δ. Nous avons que $h.\mu = \mu \circ (h \otimes h)$ et que $(h \otimes h) \circ \delta = \delta \circ h$ pour tout $h \in H$, cela se traduit par la propriété suivante :

$$\forall \ h \in H, \quad \mathrm{Hom}(h^{\otimes n}\mathfrak{g}^{\otimes n}, \mathfrak{g}^m) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^n, h^{\otimes m}\mathfrak{g}^{\otimes m}) \tag{2.11}$$

Donc H respecte la structure de bigèbre de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. $\square$

Conjecture. *Soient $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie et $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ une quantification de $\mathfrak{g}$. alors $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})_H^H$ est une quantification de $\mathfrak{g}_H^H$.*

Remarques : Pour conclure, il faut donner un sens a la construction précèdente en dimension infinie.

Question 8 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody (définition au chapitre 3), il est possible de définir "deux quantifications", $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ trouvée par M. Jimbo dans [Jim85] et $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ construite par V. Drinfeld dans [Dri87]. G. Lusztig a prové dans [Lus88] que si λ est un poids dominant alors le $\mathfrak{g}$-module irreductible $L(\lambda)$ de poids maximal peut être déformé en un module sur $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. Que ce passe-t-il quand λ est quelconque ?

P. Etingof et D. Kazhdan ont répondu à cette question dans [EK08].

Théorème 2.13. *Les caractères des modules irreductibles de poids maximal sur $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie alors il existe un isomorphisme d'algèbre entre $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ tel que la restriction à la sous algèbre de Cartan est l'identité. Une conséquence de la preuve du résultat précédent nous donne une extension de ce résultat. Soit I_β (resp. $I_\beta^\hbar$) l'idéal à gauche engendré par les éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$) de poids inférieur ou egal à β.

Corollaire 2.14. *Il existe un isomorphisme d'algèbre entre $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/I_\beta^\hbar \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\beta$ tel que la restriction à l'algèbre de Cartan est l'identité.*

Question 9 : La dernière question de V. Drinfeld, n'est pas vraiment une question mais plus, un sujet d'étude. Il s'intéresse à l'étude des solutions de l'équation de Yang-Baxter quantique non pas comme un opérateur linéaire mais juste comme une application ensembliste $R : X \times X \to X \times X$. Pour toute solution ensembliste correspond une solution au sens classique en étendant R au module libre engendré par X. Il existe un nombre important d'articles qui traite sur ce sujet. A. Weinstein et P. Xu ont construit, dans [WX92], des solutions de l'équation de Yang-Baxter en étudiant les groupes de Poisson. Par la suite, P. Etingof, T. Schedler et A. Soloviev ont étudié les solutions inversibles, unitaires et non dégénérées dans [ESS99]. Finalement, J.H. Lu, M. Yan, et Y.C. Zhu proposeront une généralisation des solutions trouvées prècédemment dans [LYZ00].

Théorème 2.15. *Soient G un groupe et ζ et η respectivement une action à gauche et à droite sur G notée $(u, v) \mapsto \zeta(u).v$ et $(u, v) \mapsto u.\eta(v)$. Si les deux actions satisfont la condition suivante :*

$$uv = (\zeta(u).v)(u.\eta(v)), \tag{2.12}$$

alors

$$R(u, v) = (u.\eta(v), \zeta(u).v) \tag{2.13}$$

est une solution inversible de l'équation de Yang-Baxter sur G.

3 Espaces de Poisson homogènes et sous-algebres coisotropes

Nous allons dans cette section introduire le problème de quantification des sous-algèbre coisotropes qui sera à la base de la suite de ce manuscrit. Nous passerons par la quantification des espace de Poisson homogènes pour motiver celle des sous-algèbres coisotropes. Nous suivrons la démarche de F. Gavarini et N. Ciccoli concernant le principe de dualité pour lier ces quantifications [GC06] et [Cic97].

Définition 3.1. *Soit G un groupe de Lie-Poisson. une G-variété de Poisson X est une variété de Poisson tel que l' action de groupe de G sur X est une application de Poisson. De* *plus nous dirons que X est un espace de Poisson homogène si l'action est transitive. Il existe alors un sous-groupe de Lie H de G tel que $X = G/H$.*

Il existe un lien entre les structures de Poisson sur X et celle sur G qui vient de l'action de groupe de G sur X.

Théorème 3.2. *Soient (G, P_G) un groupe de Lie-Poisson simplement connexe et (X, P_X) une variete de Poisson. Soit $\phi : G \times X \to X$ une action de groupe de Lie alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. ϕ est une application de Poisson.

2. $P_X(g \cdot x) = \phi_{g,*}P_X(x) + \phi_{x,*}P_G(g), \quad \forall x \in M,\ g \in G$

où $\phi_g : M \to M,\ x \mapsto g \cdot x$ et $\phi_x : G \to M,\ g \mapsto g \cdot x$.

Démonstration : par définition l'action ϕ is une application de Poisson si et seulement si pour tous $f_1, f_2 \in C^\infty(X),\ g \in G,\ x \in X$:

$$\{f_1 \circ \phi, f_2 \circ \phi\}_{G\times X}(g, x) = \{f_1, f_2\}_X(g \cdot x) \tag{3.1}$$

la partie de gauche correspond à :

$$\begin{aligned}\{f_1 \circ \phi, f_2 \circ \phi\}_{G\times X}(g, x) &= \{f_1 \circ \phi_x, f_2 \circ \phi_x\}_G(g) + \{f_1 \circ \phi_g, f_2 \circ \phi_g\}_X(x) \\ &= \langle P_G(g), \phi_x^* \,\mathrm{d}_{g\cdot x}f_1 \wedge \phi_x^* \,\mathrm{d}_{g\cdot x}f_2\rangle + \langle P_X(x), \phi_g^* \,\mathrm{d}_{g\cdot x}f_1 \wedge \phi_g^* \,\mathrm{d}_{g\cdot x}f_2\rangle \\ &= \langle \phi_{x,*}P_G(g), \mathrm{d}_{g\cdot x}f_1 \wedge \mathrm{d}_{g\cdot x}f_2\rangle + \langle \phi_{g,*}P_X(x), \mathrm{d}_{g\cdot x}f_1 \wedge \mathrm{d}_{g\cdot x}f_2\rangle\end{aligned}$$

et la partie de droite à :

$$\{f_1, f_2\}_X(g \cdot x) = \langle P_X(g \cdot x), d_{g\cdot x}f_1 \wedge d_{g\cdot x}f_2\rangle$$

d'où 1 est equivalent à 2. □

V. Drinfeld a établi une correspondance entre les espaces de Poisson homogènes et les sous algèbres de Lie Lagrangiennes du double de $\mathfrak{g}$ dans [Dri93]. Nous aurons besoin de l'action de G sur $\mathfrak{d}\mathfrak{g}$ donnée par :

$$g(a + l) = Ad_g(a) + l' + (l' \otimes id)(\eta(g)), \qquad l' = (Ad_g^{-1})^*(l) \tag{3.2}$$

où $a \in \mathfrak{g},\ l,\ l' \in \mathfrak{g}'$ et η est le 1-cocycle $G \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ qui defini le crochet de Poisson sur G.

Soient X un G-espace de Poisson homogène et P_X la structure de Poisson sur X. Si nous nous donnons $x \in X$ alors $P_X(x) \in \wedge^2 T_xX = \wedge^2\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_x$ où $\mathfrak{h}_x = \mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}_x)$. où $\mathrm{Stab}_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$. Nous notons alors $L_x = \{a + l \mid a \in \mathfrak{g},\ l \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_x)^*,\ (l \otimes id)(P_X(x)) = \overline{a}\}$ où $\overline{a}$ est la classe de a dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_x$.

Théorème 3.3. *Soit X un G-espace de Poisson homogène. Il existe une bijection entre les structures de Poisson sur X compatible avec l'action de G et les applications G-équivariantes $X \to \Lambda$ tel que si nous prenons $x \in X$ et L_x sa sous-algèbres Lagrangiennes correspondante dans $\mathfrak{Dg}$ alors $L_x \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_x$.*

Exemple : Soient C un sous groupe d'un groupe de Poisson G et $\mathfrak{c}$ l'algèbre de Lie de C. Supposons que $\mathfrak{c}$ est un coidéal de $\mathfrak{g}$, i.e. $\delta(\mathfrak{c}) \subset \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{g}$. Dans ce cas particulier, nous aurons que C est coisotrope et le crochet de G descendra sur le quotient G/C. G/C sera un espace de Poisson homogène. Nous les appellerons les espaces de Poisson homogène de groupe type. Si l'on se place au niveau des sous-algèbres Lagrangiennes, cela équivaux à $L_x \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_x$ est une sous-algèbre et un coideal de Lie de $\mathfrak{g}$.

Voyons maintenant la quantification des espaces de Poisson homogènes.

Définition 3.4. *Soit (X, P_X) un espace de Poisson homogènes formel de (G, P_G) un groupe de Lie-Poisson. Un quantification de (X, P_X) est une $\mathbb{k}[[\hbar]]$-algèbre $\mathfrak{X}$, tel que :*

(i) *$\mathfrak{X}$ est une quantification de l'algèbre de Poisson $(\mathcal{F}(X), P_X)$ de fonction formel sur X.*

(ii) *$\mathfrak{X}$ est équipée d'une structure d'algèbre-module sur $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^{op}, \Delta)$ tel que la réduction modulo $\hbar$ est la structure d'algèbre module de $(\mathcal{F}(X), P_X)$ sur $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{op}, \Delta_0)$, i.e. pour tous $x, y \in \mathfrak{X}$ et $a \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$, $a(xy) = \sum a'(x)a''(y)$ où $\Delta(a) = \sum a' \otimes a''$.*

Il existe de nombreux résultat sur la quantification des espaces de Poisson homogènes. En particulier, J. Donin, D. Gurevich et S. Shnider ont construit une quantification des espaces de Poisson homogènes à deux paramètres dans [DGS99]. J. Donin, D. Gurevich et S. Majid déforment un certain type d'espaces de Poisson homogènes liés à des r-matrices dans [DGM93].

Théorème 3.5. *Soient G un groupe de Lie semi-simple et H un sous-groupe de G. Si $\mathfrak{h} =$ Lie(H) contient une sous-algèbre nilpotent maximal, alors l'espace de Poisson homogène G/H admet une quantification.*

Finalement, B. Enriquez, P. Etingof, et I. Marshall construisent une quantification d'espace de Poisson homogène G/L où L est un sous-groupe de Levi dans [EEM07].

Nous nous interesserons maintenant uniquement au espace de Poisson homogènes de groupe type.

Définition 3.6. *Soient G un groupe de Lie-Poisson et C un sous-groupe de Lie de G, nous dirons que C est coisotrope si $\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(G) | f(C) = 0\}$ est une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{F}(G)$.*

Remarques : Pas tous les espaces de Poisson homogènes sont de groupe type. En effet, $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure symplectique est un espace de Poisson homogène qui n'est pas de groupe type. En effet, nous avons differents cas d'espace de Poisson homogène X sur G :

1) Structure de Poisson invariante ($P_G = 0$).
2) Structure de Poisson affine ($X = G$).
3) Structure de Poisson non symplectique covariante ($P_G \neq 0$), qui inclus :
   (i) les structures singulieres où il existe un point x_0 de X tel que $P_X(x_0) = 0$.
   (ii) les quotients par les sous-groupes de Lie coisotrope
   (iii) les quotients par les sous-groupe de Lie Poisson.

de plus nous avons que (i) = (ii) $\supset$ (iii) grâce au théorème suivant :

Théorème 3.7. *Soit X un espace de Poisson homogènes de (G, P_G). Pour $x_0 \in X$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $P_X(x_0) = 0$.

2) $\phi_{x_0} : G \to X,\ g \mapsto g \cdot x_0$, *est une application de Poisson.*

3) $C_{x_0} = \{g \in G | g \cdot x_0 = x_0\}$, *le stabilisateur de x_0 est un sous groupe de Lie coisotrope et* $X \simeq G/C_{x_0}$.

Ce théorème nous permet de montrer que les contres-exemples de quantification des espaces de Poisson homogènes trouvés par Etingof et Kazhdan dans [EK95] et par A. Astashkevich et R. Brylinski dans [AB02] ne rentre pas dans le cadre de la deformation des espaces de Poisson homogènes de groupe type. En effet, ces espaces de Poisson homogènes sont n symplectique. La structure est donc non singuliere, i.e., il n'existe pas de point x_0 de X tel que $P_X(x_0) = 0$.

Nous définissons alors une notion de coisotrope sur les bigèbres de Lie.

Définition 3.8. *Soient $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie et $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, nous dirons que $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre de Lie coisotrope si $\mathfrak{c}$ est un coideal de Lie de $\mathfrak{g}$ i.e. $\delta(\mathfrak{c}) \subset \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{g}$.*

Le lien entre ces deux définitions vient de la dualité qui existe entre les bigèbres de Lie et les groupes de Lie-Poisson.

Proposition 3.9. *Soient G un groupe de Lie-Poisson et C un sous-groupe de Lie de G avec $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\mathfrak{c} = \mathrm{Lie}(C)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) C est une sous algèbre coisotrope de G ;

ii) $\mathfrak{c}$ est une une sous-algèbre de Lie coisotrope de $\mathfrak{g}$;

iii) $\mathfrak{c}^{\perp}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}^*$

Nous pouvons ramener l'étude de la quantification des espaces de Poisson homogènes à la deformation de certaines algèbres de Hopf.

Définition 3.10. *Soient G un groupe de Lie-Poisson et C un sous-groupe de Lie. L'ensemble des données de la paire $(C, G/C)$ est encodé par une des donndés suivantes :*

(a) l'ensemble $\mathcal{I} = \mathcal{I}(C) = \mathcal{I}(\mathfrak{c})$ des applications qui s'annulent sur C, c'est à dire $\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(G) | f(C) = 0\}$. $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf de $\mathcal{F}(G)$.

(b) l'ensemble des fonctions $\mathfrak{c}$-invariantes à gauche, noté $\mathcal{C} = \mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(\mathfrak{c}) = \mathcal{F}(G)^C$. $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre coideale à gauche de $\mathcal{F}(G)$.

(c) l'ensemble $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(C) = \mathfrak{I}(\mathfrak{c})$ des opérateurs différentiels invariants à gauche sur $\mathcal{F}(G)$ qui s'annulent sur $\mathcal{F}(G)^C$, i.e. $\mathfrak{I} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{c}$. $\mathfrak{I}$ est un idéal à gauche coideal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

(d) l'algèbre universelle de $\mathfrak{c}$, notée $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(C) = \mathcal{U}(\mathfrak{c})$. $\mathfrak{C}$ est une sous algèbre de Hopf de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Proposition 3.11. *Les objets introduit précédemment sont équivalent.*

Démonstration : Pour toute algèbre de Hopf H, et tout sous-module $M \subseteq H$, nous posons $M^+ := M \cap \mathrm{Ker}(\epsilon)$ et $H^{\,\mathrm{co}M} := \big\{y \in H \big| \, \big(\Delta(y) - y \otimes 1\big) \in H \otimes M\big\}$. Il existe une relation d'orthogonalité qui respecte le pairing naturel entre $\mathcal{F}(G)$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

$$\mathcal{I} = \mathfrak{C}^{\perp}, \quad \mathfrak{C} = \mathcal{I}^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \mathfrak{I}^{\perp}, \quad \mathfrak{I} = \mathcal{C}^{\perp}. \tag{3.3}$$

Il existe aussi une correspondance de sous-groupes.

$$\mathcal{I} = \mathcal{F}(G) \cdot \mathcal{C}^+, \quad \mathcal{C} = \mathcal{F}(G)^{\mathrm{co}\mathcal{I}}, \quad \textit{et} \quad \mathfrak{I} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{C}^+, \quad \mathfrak{C} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{co}\mathfrak{I}}. \tag{3.4}$$

□

Proposition 3.12. *Soient G un groupe de Lie-Poisson et C un sous-groupe de Lie coisotrope, alors nous avons que :*

(a) $\mathcal{I}$ est un idéal de Hopf et une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{F}(G)$.

(b) $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre coidéale à gauche et une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{F}(G)$.

(c) $\mathfrak{I}$ est un idéal à gauche coidéal et un coidéal de Poisson de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

(d) $\mathfrak{C}$ est une sous algèbre de Hopf et un coidéal de Poisson de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Passons maintenant à la version quantique de ces objets. Définissons une version quantique des espaces de Poisson homogènes.

Définition 3.13 (Espace de Poisson homogène quantique). *Soit G un groupe de Lie-Poisson et C un sous-groupe de Lie coisotrope de G. Un espace de Poisson homogène quantique est la donnée d'une quantification $\mathcal{F}_\hbar(G)$ de $\mathcal{F}(G)$ et d'une quantification $\mathcal{F}_\hbar(C)$ de $\mathcal{F}(C)$ telles que $\mathcal{F}_\hbar(C)$ soit un cogèbre et un idéal à gauche de $\mathcal{F}_\hbar(G)$, tel que :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_\hbar(C) \arrow[r, "\pi_{\mathcal{F}_\hbar(G)}"] \arrow[d] & \mathcal{F}(C) \\ \mathcal{F}_\hbar(C)/\hbar\mathcal{F}_\hbar(C) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Nous pouvons alors appliquer la dualité entre les QUEA et les QFSHA que nous avons étudié lors du chapitre précédent pour établir un principe de dualité pour les espaces de Poisson homogènes quantiques.

Exemple : Quantification des espaces de Poisson-homogènes G/H de groupe type "split" : Il s'agit ici de trouver une quantification de $\mathfrak{h}$ une sous-bigèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. la fonctorialité du foncteur de quantfication, nous avons une inclusion d'algèbre de Hopf de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ et donc de conclure pour ce cas.

Exemple : Quantification des sous-algèbres coisotropes des algèbres de Lie simple :
Nous verrons plusieurs exemple de sous-algèbres coisotropes ainsi que leur quantification dans le chapitre 3.

Proposition 3.14. *Soit G un groupe de Lie-Poisson et C un sous-groupe de Lie coisotrope de G, alors l'existence d'une quantification de C est équivalente a l'existence :*

(a) un coidéal idéal à gauche $\mathcal{I}_\hbar$ de $\mathcal{F}_\hbar(G)$ tel que $\mathcal{I}_\hbar/\hbar\mathcal{I}_\hbar \equiv \pi_{\mathcal{F}_\hbar(G)}(\mathcal{I}_\hbar) = \mathcal{I}$.

(b) une sous-algèbre coidéale à gauche $\mathcal{C}_\hbar$ de $\mathcal{F}_\hbar(G)$ tel que $\mathcal{C}_\hbar/\hbar\mathcal{C}_\hbar \equiv \pi_{\mathcal{F}_\hbar(G)}(\mathcal{C}_\hbar) = \mathcal{C}$.

(c) un idéal coidéal à gauche $\mathfrak{I}_\hbar$ de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{I}_\hbar/\hbar\mathfrak{I}_\hbar \equiv \pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{I}_\hbar) = \mathfrak{I}$.

(d) une sous-algèbre coidéale à gauche $\mathfrak{C}_\hbar$ de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar \equiv \pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_\hbar) = \mathfrak{C} = \mathcal{U}(\mathfrak{c})$.

Remarques : Toutes ces quantifications sont équivalentes. Il existe une façon de passer d'une quantification à une autre en utilisant le principe de dualité établi par F. Gavarini et N. Ciccoli. Par la suite, nous nous intéresseront plus particulièrement à la quantification de $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ en une sous-algèbre coidéale à gauche $\mathfrak{C}_\hbar$ de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.

Proposition 3.15. *Les problèmes d'existence de ces quantifications sont équivalents.*

Démonstration : En effet, en utilisant les liens qui existent au niveau classique entre ces objets, nous pouvons nous attendre a des liens similaires au niveau quantique. Nous pouvons montrer que l'existence de $\mathcal{I}_\hbar$ est équivalente à celle de $\mathfrak{C}_\hbar$ par orthogonalité.

$$\mathcal{I}_\hbar = \mathfrak{C}_\hbar^\perp, \quad \mathfrak{C}_\hbar = \mathcal{I}_\hbar^\perp. \tag{3.6}$$

Il en va de même pour l'existence de $\mathcal{C}_\hbar$ et de $\mathfrak{I}_\hbar$.

$$\mathfrak{I}_\hbar = \mathcal{C}_\hbar^\perp, \quad \mathcal{C}_\hbar = \mathfrak{I}_\hbar^\perp. \tag{3.7}$$

Il est aussi possible d'établir un Lien entre l'existence $\mathcal{I}_\hbar$ et $\mathcal{C}_\hbar$.

$$\mathcal{I}_\hbar = \mathcal{F}_\hbar(G) \cdot \mathcal{C}_\hbar^+, \quad \mathcal{C}_\hbar = \mathcal{F}_\hbar(G)^{co\mathcal{I}_\hbar}. \tag{3.8}$$

De meme, pour $\mathfrak{I}_\hbar$ et $\mathfrak{C}_\hbar$.

$$\mathfrak{I}_\hbar = \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{C}_\hbar^+, \quad \mathfrak{C}_\hbar = \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^{co\mathfrak{I}_\hbar}. \tag{3.9}$$

□

Proposition 3.16. *Soient $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie et $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Supposons qu'il existe une quantification $\mathfrak{C}_\hbar(\mathfrak{c})$ qui soit un coidéal à gauche, alors $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre coisotrope de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration : L'existence de $\mathfrak{C}_\hbar(\mathfrak{c})$ est la donnée d'un sous-algèbre coidéale à gauche $\mathfrak{C}_\hbar$ de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar \equiv \pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_\hbar) = \mathfrak{C} = \mathcal{U}(\mathfrak{h})$. La structure de cogèbre de $\mathfrak{g}$ est donnée pour tout a dans $\mathfrak{g}$ par :

$$\delta(a) = \frac{\Delta(\tilde{a}) - \Delta^{op}(\tilde{a})}{\hbar} \quad \mod \hbar \tag{3.10}$$

où $\tilde{a}$ est un relèvement de a dans $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. Cependant pour tout b dans $\mathfrak{c}$, il existe un relèvement $\tilde{b}$ dans $\mathfrak{C}_\hbar \subset \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. Par conséquent, nous avons que :

$$\frac{\Delta(\tilde{b}) - \Delta^{op}(\tilde{b})}{h} \in \mathfrak{C}_\hbar \wedge \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \tag{3.11}$$

d'où

$$\delta(b) = \pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}\left(\frac{\Delta(\tilde{b}) - \Delta^{op}(\tilde{b})}{\hbar}\right) \in \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{g} \tag{3.12}$$

Donc $\mathfrak{c}$ est un coidéal de $\mathfrak{g}$ □

Remarques : Nous pouvons remarquer qu'il est ici possible d'affaiblir les conditions sur la quantification pour que $\mathfrak{c}$ soit un coidéal. En effet, il suffit que $\mathfrak{C}_\hbar$ soit une sous-algèbre coidéale de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ pour que $\mathfrak{c}$ soit un coidéal pour la structure de cogèbre de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3.17. *Soient $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie munie d'une quantification $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, s'il existe une sous-algèbre coidéale $\mathfrak{C}_\hbar$ de $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar = \mathcal{U}(\mathfrak{c})$ et que l'inclusion de $\mathfrak{C}_\hbar$ dans $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ soit plate alors $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre coisotrope de $\mathfrak{g}$.*

Remarques : La preuve est la même que pour la proposition précèdente. Il faut cependant noter que ce cadre n'est pas adapté à l'étude de la quantification des espaces de Poisson homogènes car nous n'obtenons pas l'action de $\mathcal{F}_\hbar(G)$ sur la quantification qui est une des conditions de la quantification des espaces de Poisson homogènes.

Chapitre III

Quantization of simple coisotropic Lie subalgebras

The aim of this chapter is to give a quantization of some coisotropic subalgebras in complex semi-simple Lie bialgebras. Coisotropic subalgebras that will be quantized here are those given by Zambon in his paper "‘A Construction for coisotropic subalgebras of Lie Bialgebras"’ [Zam11]. We will also extend the construction for the exceptional complex semi-simple Lie bialgebras. Accordingly, the chapter is organized as follows. First, we will recall the construction of the quantization of the enveloping algebra of a Kac-Moody Lie algebra by Drinfeld-Jimbo. We will then give a method to construct coisotropic subalgebras in semi-simple complex Lie bialgebras, for which we will use Zambon's technics and detail the main steps to be followed in order to prove that the coisotropic subalgebras hence constructed can be quantized. In the following sections, we will construct the coisotropic subalgebras by using the Chevalley basis and Serre's relations. Then we will give their quantum counterpart and prove that they are indeed a quantization of the coisotropic subalgebras constructed, in the sense of N. Ciccoli and G. Gavarini [GC06]. Finally we will study the classification of the subalgebra right coideal of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$ [HK11b] and give a link to the previous construction.

1 Drinfeld-Jimbo quantization of simple Lie bialgebras

Let's first recall some basic definition about Kac-Moody algebras. Most of the following facts can be found in the book of V. Chari and A. Pressley [CP95] in the annex A.
We denote A a Cartan matrix, i.e. a square matrix $(a_{ij})_{i,j=1..n}$ of integers such that, for all i, j :

$$a_{ii} = 2, \quad a_{ij} \leq 0 \text{ if } i \neq j. \quad a_{ij} = 0 \text{ if and only if } a_{ji} = 0. \tag{1.1}$$

A is symmetrizable if there exists coprime positive integers $d_1, ..., d_n$ such that $(d_i a_{ij})_{ij}$ is symmetric. We will in the following suppose that A is of rank n, this will hold for simple Lie algebra. For a more general characterization of Kac-Moody Lie algebra see [CP95].

Definition 1.1. *Let's denote by $\mathfrak{g}(A)$ the Lie algebra over $\mathbb{C}$ with generators e_i, f_i and h_i, $i = 1, \dots, n$ and defining relations :*

$$\begin{aligned} &\left[h_i, h_j\right] = 0, \quad \left[h_i, e_j\right] = a_{ij} e_j, \quad \left[h_i, f_j\right] = -a_{ij} f_j, \quad \left[e_i, f_j\right] = \delta_{ij} h_i, \\ &(\mathrm{ad}_{e_i})^{1-a_{ij}}(e_j) = 0, \quad (\mathrm{ad}_{f_i})^{1-a_{ij}}(f_j) = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

The e_i, f_i are called the Chevalley generators of $\mathfrak{g}(A)$. $\mathfrak{h}'$ be the linear span of h_i is called the Cartan subspace of $\mathfrak{g}(A)$. The subspace of $\mathfrak{g}^{(i)}$ of $\mathfrak{g}(A)$ spanned by h_i, e_i and f_i is a subalgebra isomorphic to $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

There exists a unique non-degenerate invariant symmetric bilinear form (,) on $\mathfrak{g}(A)$ such that, for all i, j :

$$(h_i, h_j) = d_j^{-1} a_{ij}, \quad (h_i, e_j) = (h_i, f_j) = 0, \quad (e_i, e_j) = (f_i, f_j) = 0, \quad (e_i, f_j) = d_i^{-1} \delta_{i,j}.$$

The Dynkin diagram of $\mathfrak{g}$ can be constructed with the data of A. It is the graph with vertices labelled by $\{1, \dots, n\}$. The vertices i and j are connected by $a_{ij}a_{ji}$ edges and with an arrow pointing to the node i if $|a_{ij}| > |a_{ji}|$. A is determined by its Dynkin diagram if $a_{ij}a_{ji} \leq 4$.

(a) A_n : $\mathfrak{sl}(n+1)$ (b) B_n : $\mathfrak{so}(2n+1)$ (c) C_n : $\mathfrak{sp}(2n)$ (d) D_n : $\mathfrak{so}(2n)$

FIGURE III.1 – A_n, B_n, C_n and D_n Dynkin's diagrams

Definition 1.2. *The simple roots of $\mathfrak{g}$ are the linear functionals $\alpha_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, given by*

$$\alpha_i(h_j) = a_{ji}.$$

We will denote $\theta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ the set of simple roots of $\mathfrak{g}$, Π the roots of $\mathfrak{g}$ and Π^+ (resp. Π^-) the positive (resp. negative) roots of $\mathfrak{g}$. For $\alpha \in \Pi$, we denote $\mathfrak{g}_\alpha$ the root space defined by :

$$\mathfrak{g}_\alpha = \left\{x \in \mathfrak{g} \middle| \left[h, x\right] = \alpha(h)x \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\right\}.$$

We then define the borel subalgebra of $\mathfrak{g}$. Let $\mathfrak{n}_\pm$ be the subalgebra of $\mathfrak{g}$ generated by e_i (resp. f_i). Then we have :

$$\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Pi^\pm} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

The subalgebras $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{n}_\pm \oplus \mathfrak{h}$ are the positive (resp. negative) Borel subalgebra of $\mathfrak{g}$.

Definition 1.3. *Define linear maps $s_i : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, called the simple reflections, by*

$$s_i(h) = h - \alpha_i(h)h_i, \qquad (h \in \mathfrak{h}). \tag{1.3}$$

The Weyl group W *of $\mathfrak{g}$ is the subgroup of $GL(\mathfrak{h})$ generated by $s_1, \ldots, s_n$. The action of* W *preserves the bilinear form on $\mathfrak{h}$.*

The group W can also be viewed as a Coxeter group with generators $s_1, \ldots, s_n$ and defining relations :

$$s_i^2 = 1, \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, \quad \text{with } m_{ij} \text{ given by } \begin{array}{|c|ccccc|}\hline a_{ij}a_{ji} & 0 & 1 & 2 & 3 & \geq 4 \\ \hline m_{ij} & 2 & 3 & 4 & 6 & \infty \\ \hline \end{array} \text{ for } i \neq j. \tag{1.4}$$

we recall that an expression $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ of an element $w \in$ W as a product of simple reflexions is called reduced if k is minimal, then k is the length of w, and is denoted by $l(w)$. We assume that $\mathfrak{g}$ is finite. There is a unique element $w_0 \in$ W of maximal length $N = |\Pi^+|$ such that $w_0^2 = 1$. Take $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ a reduced expression, then :

$$\Pi^+ = \{\alpha_{i_1}, s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \ldots, s_{i_1} \cdots s_{i_{n-1}}(\alpha_{i_N})\}, \tag{1.5}$$

each positive root occurring exactly once on the right-hand side. There are automorphisms $t_1, \ldots, t_N$ of $\mathfrak{g}$ such that

$$\begin{aligned} &t_i(e_i) = -f_i, \quad t_i(f_i) = -e_i, \quad t_i(h_j) = h_j - a_{ij}h_i, \\ &t_i(e_j) = \frac{1}{-a_{ij}!}(\mathrm{ad}_{e_i})^{-a_{ij}} e_j, \quad \text{if } i \neq j, \\ &t_i(f_j) = \frac{(-1)^{a_i j}}{-a_{ij}!}(\mathrm{ad}_{f_i})^{-a_{ij}} f_j, \quad \text{if } i \neq j, \end{aligned}$$

They satisfy the defining relations of the Braid group $\mathcal{B}_\mathfrak{g}$ depending on the value of $a_{ij}a_{ji}$.

$a_{ij}a_{ji}$	0	1	2	3
	$t_it_j = t_jt_i$	$t_it_jt_i = t_jt_it_j$	$(t_it_j)^2 = (t_jt_i)^2$	$(t_it_j)^3 = (t_jt_i)^3$

One can then define a new vectorial basis for $\mathfrak{g}$. For $\beta = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) \in \Pi^+$, where $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ is a reduced expression, define :

$$e_\beta = t_{i_1}t_{i_2} \cdots t_{i_{k-1}}(e_{i_k}), \quad f_\beta = t_{i_1}t_{i_2} \cdots t_{i_{k-1}}(f_{i_k}), \tag{1.6}$$

Proposition 1.4. *The family $\{e_\beta\}_{\beta\in\Pi^+}$ (resp. $\{f_\beta\}_{\beta\in\Pi^+}$) defined in (1.6) is a basis of $\mathfrak{n}_+$ (resp of $\mathfrak{n}_-$).*

Proposition 1.5. *There exist a standard structure of Lie bialgebra in $\mathfrak{g}$, defined by $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ verifying :*

$$\delta(h_i) = 0, \quad \delta(e_i) = d_ie_i \wedge h_i, \quad \delta(f_i) = d_if_i \wedge h_i. \tag{1.7}$$

The proof will mainly use the following lemma which will be of use in the last section of this chapter. This lemma uses Weyl groups combinatorics and can be found in [Hum92] and [BB05].

Lemma 1.6. *Let $w \in \mathrm{W}$ and $\alpha \in \theta$, then the following hold :*

i) $l(ws_\alpha) = l(w) + 1$ implies $w(s_\alpha) \in \Pi^+$.

ii) $l(ws_\alpha) = l(w) - 1$ implies $w(s_\alpha) \in \Pi^+$.

Remark This lemma will justify the fact that all the roots created from the reduced decomposition of w_0 falls in Π^+.

To work in the simple complex Lie bialgebra, we need to consider the quantization of Jimbo and V. Drinfeld, which gives rise to the $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. This object was also studied by Lusztig in [Lus92].

Definition 1.7. *Let $\mathfrak{g}$ be a finite-dimensional complex semi-simple Lie algebra with Cartan matrix (a_{ij}). Then $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ is the associative algebra over $\mathbb{C}[[\hbar]]$ with generators E_i, F_i, H_i, $1 \leq i \leq n$, and the following relations :*

$$\big[H_i, H_j\big] = 0, \quad \big[H_i, E_j\big] = a_{ij}E_j, \quad \big[H_i, F_j\big] = -a_{ij}F_j, \tag{1.8a}$$

$$\big[E_i, F_j\big] = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \tag{1.8b}$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} (E_i)^{1-a_{ij}-r} E_j (E_i)^r = 0 \quad \text{if } i \neq j, \tag{1.8c}$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} (F_i)^{1-a_{ij}-r} F_j (F_i)^r = 0 \quad \text{if } i \neq j. \tag{1.8d}$$

Where $K_i = e^{hd_iH_i}$ and $q = e^h$.

The comultiplication is defined as follows :

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes K_i + 1 \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes 1 + K_i^{-1} \otimes F_i, \tag{1.9a}$$

$$\Delta(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i. \tag{1.9b}$$

notations :

– We will denote the q^k-bracket of two elements X, Y by

$$\big[X, Y\big]_{q^k} = XY - q^kYX.$$

– We will say that two elements X and Y q^k-commute if $\big[X, Y\big]_{q^k} = 0$.

Theorem 1.8. *$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ is a quantization of $\mathfrak{g}$.*

The proof can be found in [CP95].

Remark We can define subalgebras of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$, namely $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+$, $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^0$ and $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^-$ the subalgebra defined respectively by the generators E_i, H_i and F_i. As in the case of $\mathfrak{g}$ we have a "decomposition" of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$:

Proposition 1.9. *Multiplication defines an isomorphism of $\mathbb{C}[[\hbar]]$-modues :*

$$\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^- \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^0 \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+ \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \tag{1.10}$$

2 Coisotropic construction and Quantization method

In his paper [Zam11], M. Zambon gives a construction for coisotropic subalgebras of Lie bialgebras and studies some examples in the case of the usual semi-simple complex algebras $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ et $\mathfrak{so}(2n)$. First let us recall some of the main theorems that will give rise to those examples. In the general, we will have the following :

Theorem 2.1. *Let $(\mathfrak{g}, r)$ be a quasi-triangular Lie bialgebra. Suppose $X \in \mathfrak{g}$ satisfies*

$$\big[[r, X], X\big] = \lambda\big[r, X\big] = \lambda\delta(X). \quad \text{for some } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Then the image of the map $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ given by contraction with $\big[r, X\big] \in \wedge^2\mathfrak{g}$ is a coisotropic subalgebbra of $\mathfrak{g}$. We will denote it $\mathfrak{c}_X = \big[r, X\big]^{\#}\mathfrak{g}^*$.

This theorem works for every Lie bialgebra and allows us to construct coisotropic subalgebras of even dimension, but this construction those not allow us to find them all. One can wonder wether there is a less restrictive condition that will give rise to all the coisotropic subalgebras.

Let's now, focus on to the case where $\mathfrak{g}$ is a semi-simple complex Lie bialgebra. By using the roots system Π of $\mathfrak{g}$, we can construct families of coisotropic subalgebras. For $\alpha \in \Pi^+$, the positive roots we have are $\alpha = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r}$ where $\alpha_{i_j} \in \theta = \{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$. We can associate to α a non-zero element [FH91],

$$e_\alpha = \big[\big[e_{\alpha_{i_1}}, e_{\alpha_{i_2}}\big], \ldots, e_{\alpha_{i_r}}\big] \in \mathfrak{g}_\alpha, \tag{2.2}$$

and in the same way we associate a non zero element to $-\alpha$:

$$f_\alpha = \big[\big[f_{\alpha_{i_1}}, f_{\alpha_{i_2}}\big], \ldots, f_{\alpha_{i_r}}\big] \in \mathfrak{g}_{-\alpha}. \tag{2.3}$$

From those elements a r-matrix can be constructed as follows :

$$r := \sum_{\alpha \in R^+} \lambda_\alpha e_\alpha \wedge f_\alpha, \tag{2.4}$$

where $\lambda_\alpha = \frac{1}{(e_\alpha, f_\alpha)}$ and (,) is the Killing form (a non degenerative definite positive bilinear form) associated to the Lie bialgebra.

Lemma 2.2. *Let $X \in \mathfrak{g}$ and assume that for all $\alpha \in R^+$, we have :*

1. $\big[X, [X, e_\alpha]\big] \wedge f_\alpha = 0.$
2. $[X, e_\alpha] \wedge [X, f_\alpha] = 0.$
3. $e_\alpha \wedge \big[X, [X, f_\alpha]\big] = 0.$

Then X satisfies the condition of theorem 2.1 with $\lambda = 0$.

Proof : by a simple computation, we have :

$$\begin{aligned} \delta(X) = [r, X] &= \sum_{\alpha \in R^+} \lambda_\alpha \left([e_\alpha, X] \wedge f_\alpha + e_\alpha \wedge [f_\alpha, X]\right) \\ \big[[r, X], X\big] &= \sum_{\alpha \in R^+} \left(\big[[e_\alpha, X], X\big] \wedge f_\alpha + 2[e_\alpha, X] \wedge [f_\alpha, X] + e_\alpha \wedge \big[[f_\alpha, X], X\big]\right). \end{aligned}$$

Therefore if X satisfies the condition in the lemma, then we have that $\big[[r, X], X\big] = 0$. □

Proposition 2.3. *Let $\beta \in \Pi^+$ satisfying the following condition :*
For all $\alpha \in \Pi$: $(\alpha + \mathbb{Z}\beta) \cap \Pi$ does not contain a string of three consecutive elements.
Then e_β et f_β satisfy lemma 2.2 and by consequence theorem 2.1.

Proof : We suppose that e_β does not satisfy the lemma 2.2. Therefore, one of the three conditions is not satisfied.
If $\big[e_\beta, [e_\beta, e_\alpha]\big] \wedge f_\alpha \neq 0$ then we have that α, $\alpha + \beta$ and $\alpha + 2\beta$ is in Π. This implies that β does not verify the assumptions.
If $\big[e_\beta, [e_\beta, f_\alpha]\big] \wedge e_\alpha \neq 0$ then we have that $-\alpha$, $-\alpha + \beta$ and $-\alpha + 2\beta$ is in Π. This implies that β does not satisfy the assumptions.
If $[e_\beta, e_\alpha] \wedge [e_\beta, f_\alpha] \neq 0$ then we have that $-\alpha + \beta$, α and $\alpha + \beta$ is in Π which can be rewritten as $\alpha - \beta$, α and $\alpha + \beta$ is in Π. This implies that β does not verify the assumptions. □

Corollary 2.4. *Assume that $\beta \in \Pi^+$ satisfies the condition in the proposition 2.3. Let $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ denote $\mathfrak{g}$ viewed as a real Lie algebra. Then $[e_\beta, r]^{\#}\mathfrak{g}_\mathbb{R}^*$ and $[f_\beta, r]^{\#}\mathfrak{g}_\mathbb{R}^*$;*

- *are coisotropic subalgebras of $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.*
- *their complexifications are coisotropic subalgebras of the complex Lie bialgebra $\mathfrak{g}$*

We want to quantize coisotropic subalgebras corresponding to this construction. First, let's recall what we mean by quantization in this case. As we said in the introduction, the problem of quantization of such objects was studied by N. Ciccoli and F. Gavarini. In their paper [GC06], they gave a characterization of the quantization of the coisotropic subalgebras.

Definition 2.5. *A quantization of a coisotropic subalgebras $\mathfrak{c}$ of $\mathfrak{g}$ is a subalgebra, left (or right) coideal $\mathfrak{C}_\hbar$ of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ such that :*

$$\pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_\hbar) = \mathcal{U}(\mathfrak{c}), \tag{2.5}$$

$$\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar \cong \pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_\hbar), \tag{2.6}$$

where $\pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})} : \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ is the specialization map at $h = 0$.

The constraint $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar \cong \pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_\hbar) = \mathcal{U}(\mathfrak{c})$ means the following. We have a map $\mathfrak{C}_\hbar \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the composed map $\mathfrak{C}_\hbar \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ can be factored through $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}_\hbar \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{C}_\hbar}"'] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Then we want the factored map $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ to be a bijection in $\pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_\hbar)$ which should coincide with $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$.
They also demonstrated that this constraint can be replaced by $\mathfrak{C}_\hbar \cap \hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \hbar\mathfrak{C}_\hbar$. Indeed we have that $\pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_\hbar) = \mathfrak{C}_\hbar/(\mathfrak{C}_\hbar \cap \hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}))$ and therefore $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar \cong \pi_{\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathfrak{C}_\hbar)$.

Remark It is easy to see that if we have a subalgebra left coideal $\mathfrak{C}_\hbar$ of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ such that $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar = \mathcal{U}(\mathfrak{c})$ then $\mathfrak{c}$ is a coisotropic subalgebra of $\mathfrak{g}$. Meaning that the semi-classical limit is still well defined in this context.

We will now detail the steps that we will take in the following section. We will give a quantization of the different coisotropic subalgebra that we can construct using the preceding theorems and definitions. To do so, we first need to determine the roots β that will satisfy the condition of proposition 2.3. Then, we need to fix a cartan in order to construct the r-matrix given by

$$r := \sum_{\alpha\in\Pi^+} \lambda_\alpha e_\alpha \wedge f_\alpha, \tag{2.4}$$

and finally we need to compute $\left[e_\beta, r\right]$ in order to determine the elements that will generate the coisotropic subalgebra $\mathfrak{h}$ according the corollary 2.4.

Then, in a second steps, we will choose a candidate $\mathfrak{C}_\hbar$ to be the quantization, which will be the algebra spanned by a lift up of the generators of the coisotropic subalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. We will then verify that it is a subalgebra, left (or right) coideal of the bialgebra $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.

Finally, we will need to verify if it is indeed a flat quantization of $\mathfrak{c}$. In other words, we have to verify if $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar$ is isomorphic to $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. We will use a proof similar to the one of Poincare-Birkhoff-Witt theorem in order to prove that the deformation is flat.
We will prove that $\mathcal{S}(\mathfrak{c})$ is isomorphic as a vectorial space to $\mathfrak{C}$ which will give us the wanted isomorphism by using the Poincare-Birkhoff-Witt theorem. By construction we have that $\mathcal{U}(\mathfrak{c}) \subset \mathfrak{C}$ therefore we directly have the injection of $\mathcal{S}(\mathfrak{c})$ in $\mathfrak{C}$.
Therefore, only the surjectivity of the application remains ; to prove it we will use the following proposition, for which we need to chose an order in $\mathfrak{C}_\hbar$.

Proposition 2.6. *All elements Z in $\mathfrak{C}_\hbar$,can be written in the form*

$$Z = \sum_k \sum_n \hbar^n X_{n1} \cdots X_{nk},$$

where X_{ni} are elements of $\mathfrak{C}_\hbar$ of degree 1 and without $\hbar$. If all monomials $X = X_{n1} \cdots X_{nk}$ can be written in the form :

$$X = Y + X' + \hbar * X'',$$

where $Y = X_{n\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(k)}$ is well ordered when considering the order chosen, X' is an element of degree inferior to k and X'' is an element in $\mathfrak{C}_\hbar$. Then $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar$ is isomorphic to $\mathcal{S}(\mathfrak{c})$.

Remark Following the proof of Poincare-Birkhoff-Witt theorem, this proposition will prove the surjectivity of $\mathcal{S}(\mathfrak{c})$ in $\mathfrak{C}$. One can see that we only need to prove this proposition for elements of degree 2, as by induction, we can extend it for elements of higher degrees. This can be done by permuting the elements two by two.

Therefore we will use the following lemma, in which we fix a set of generators in $\mathfrak{C}_\hbar$.

Lemma 2.7. *If for all X_1,X_2 generators of $\mathfrak{C}_\hbar$, we have :*

$$X_1X_2 - X_2X_1 = X' + \hbar X'',$$

where X' is either a generator or 0 and X'' is in $\mathfrak{C}_\hbar$. Then $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar$ is isomorphic to $\mathcal{S}(\mathfrak{c})$.

We now have everything we need in order to prove that the candidat $\mathfrak{C}_\hbar$ is a left coideal of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ and that $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar$ is isomorphic to $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ by using the lemma 2.7 and Poincare-Birkhoff-Witt theorem. Meaning that $\mathfrak{C}$ is isomorphic to $\mathcal{S}(\mathfrak{c})$ therefore $\mathfrak{C}$ is isomorphic as a vector space to $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ and also that $\mathfrak{C}_\hbar \cap \hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \hbar\mathfrak{C}_\hbar$, so we have proved that $\mathfrak{C}_\hbar/\hbar\mathfrak{C}_\hbar = (\mathfrak{C}, \Delta, \mu, S) = (\mathcal{U}(\mathfrak{c}), \Delta, \mu, S)$ and that it is flat.

Remark In the following section, we will only consider the coisotropic subalgebras $\left[e_\beta, r\right]^{\#}\mathfrak{g}^*$ as the demonstration for $\left[f_\beta, r\right]^{\#}\mathfrak{g}^*$ is identical. The only change is that the candidate $\mathfrak{C}_\hbar$ will no longer be a left coideal like in the previous case but a right coideal.

3 Quantization of Zambon's coisotropic subalgebras in $\mathfrak{sl}(n+1)$ and $\mathfrak{so}(2n)$

1 $\mathfrak{sl}(n+1)$

Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$ with Cartan subalgebra given by the diagonal matrices. The roots set of $\mathfrak{g}$ is $\Pi = \{L_i - L_j\}_{(i \neq j)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Following the protocol of Zambon, we have to check wich roots satisfy the assumption of proposition 2.3. It is easy to check that all the roots do satisfy it. We then have to determine the r-matrix, because it is needed in the construction.

$$r = \sum_{\alpha \in R^+} \lambda_\alpha e_\alpha \wedge f_\alpha,$$

for the root $\alpha = L_i - L_j$ we have the vector $e_\alpha = e_{i,j}$ and $f_\alpha = e_{j,i}$. Therefore we can compute the r-matrix r :

$$r = \lambda \sum_{i<j} e_{i,j} \wedge e_{j,i},$$

where λ is a non-zero real number. Let's fix a root $\beta = L_i - L_j$ which satisfy the assumption, a computation shows that :

$$\left[e_\beta, r\right] = \lambda \left(2 \sum_{i<k<j} e_{i,k} \wedge e_{k,j} - e_{i,j} \wedge (h_i + h_{i+1} + \cdots + h_n) \right),$$

where $\{h_i = e_{i,i} - e_{i+1,i+1}\}_{1 \leq i \leq n}$ is the basis of the cartan subalgebra. The coisotropic subalgebra thus obtained in $\mathfrak{g}$ is spanned by

$$h_i + h_{i+1} + \cdots + h_n, \;\; e_{ij}, \;\; \{e_{kj}, e_{ik}\}_{i<k<j}.$$

We will now restrict ourself without loose of generality in the case $i = 1$ and $j = n$, and taking the chevalley generators, we obtain the coisotropic subalgebra $\mathfrak{h}$ spanned by :

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + \cdots + h_n, \quad & \left\{u(1,k) = \left[u(1,k-1), e_k\right]\right\}_{1 \leq k \leq n}, \quad \text{where } u(1,1) = e_1, \\ & \left\{v(n,k) = \left[v(n,k+1), e_k\right]\right\}_{2 \leq k \leq n-1}, \quad \text{where } v(n,n) = e_n. \end{aligned}$$

We need to find a suitable candidate for the quantization. One way to proceed is to first take the subalgebra generated by

$$\begin{aligned} H(1,n) = H_1 + \cdots + H_n, \quad & \left\{U(1,k) = \left[U(1,k-1), E_k\right]\right\}_{1 \leq k \leq n}, \quad \text{where } U(1,1) = E_1, \\ & \left\{V(n,k) = \left[V(n,k+1), E_k\right]\right\}_{2 \leq k \leq n-1}, \quad \text{where } V(n,n) = E_n. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n\text{-}1} & a_n \\ & 0 & \cdots & 0 & b_{n\text{-}1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & b_1 \\ & & & & \text{-}a_0 \end{pmatrix}$$

FIGURE III.2 – Matricial representation of Zambon Coisotrope in $\mathfrak{sl}(n+1)$

This subalgebra is not a coideal of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{sl}(n+1))$ therefore we need to change a little the generators. In fact we only need to change the power of the bracket to make it a coideal. We mean by that to take $\left[E_1, E_2\right]_q$. Let's proceed element by element. It is easy to see that

$$\Delta(H(1,n)) = \Delta(H_1) + \Delta(H_2) + \cdots + \Delta(H_n) = H(1,n) \otimes 1 + 1 \otimes H(1,n) \in \mathfrak{C}_\hbar \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}).$$
$$\Delta(E_1) = E_1 \otimes K_1 + 1 \otimes E_1 \in \mathfrak{C}_\hbar \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}).$$

Therefore we do not need to change the generators in order to have a left coideal, but we can see that :

$$\Delta(\left[E_1, E_2\right]) = \left[E_1, E_2\right] \otimes K_1K_2 + E_1 \otimes \left[K_1, E_2\right] + E_2 \otimes \left[E_1, K_2\right] + 1 \otimes \left[E_1, E_2\right], \tag{3.1}$$

there is one term that do not satisfy the condition here. In order for this term to disappear, we need to take the q-bracket, as $\left[E_1, K_2\right]_q = 0$.

Proposition 3.1. *For all $i \leq n$ with $a_{k,k+1} = -1$ for all $k \in \{1, \ldots, i\}$, let's denote $U_q(1,i) = \left[U_q(1,i-1), E_i\right]_q$ with $U_q(1,1) = E_1$. Then we have :*

$$\begin{aligned}\Delta(U_q(1,i)) = 1 \otimes U_q(1,i) &+ E_1 \otimes \left[K_1, U_q(2,i)\right]_q + U_q(1,2) \otimes \left[K_1K_2, U_q(3,i)\right]_q \\ &+ \cdots + U_q(1,i) \otimes K_1 \cdots K_i.\end{aligned} \tag{3.2}$$

We can do the same reasoning for the element $V(n,k)$.

Proposition 3.2. *For all $i \leq n$ with $a_{k,k-1} = -1$ for all $k \in \{n, \ldots, i\}$, let's denote $V_q(n,i) = \left[U_q(n,i+1), E_i\right]_q$ with $V_q(n,n) = E_n$. Then we have :*

$$\begin{aligned}\Delta(V_q(n,i)) =& 1 \otimes V_q(n,i) + E_n \otimes \left[K_n, V_q(n-1,i)\right]_q + V_q(n,n-1) \otimes \left[K_nK_{n-1}, V_q(n-2,i)\right]_q \\ &+ \cdots + V_q(n,i) \otimes K_n \cdots K_i.\end{aligned} \tag{3.3}$$

The proofs are done with an easy induction. By using those propositions, we have a suitable candidate for the quantization of $\mathfrak{c}$. We note $\mathfrak{C}_\hbar$ the subalgebra of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ generated by

(a) $H(1,n)$, $\left\{U_q(1,k) = \left[U_q(1,k-1), E_k\right]_q\right\}_{1\leq k\leq n}$, where $U_q(1,1) = E_1$,

(b) $\left\{V_q(n,k) = \left[V_q(n,k+1), E_k\right]_q\right\}_{2\leq k\leq n-1}$, where $V_q(n,n) = E_n$.

Theorem 3.3. *The subalgebra* $\mathfrak{C}_\hbar$ *is a left coideal of the bialgebra* $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.

We construct $\mathfrak{C}_\hbar$ to fullfill this condition. We now need to verify that $\mathfrak{C}_\hbar$ is a flat deformation of $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ in order to prove that it is indeed a quantization of $\mathfrak{c}$. This is done using computational methods.

Theorem 3.4. $\mathfrak{C}_\hbar$ *is a quantization of* $\mathfrak{c}$.

We will detail part of the computations as it will also be used for the following cases. Using corollary 2.7, we need to prove that for all generators A_1, A_2 we have $A_1A_2 - A_2A_1 = A' + hB$ where A' is either a generator or 0 and B is in $\mathfrak{C}_\hbar$.
We will prove that this assertion is true by computation but we will only develop the non trivial ones. Let's begin with some shortcuts :

Lemma 3.5. *If* $\big[A,B\big]_{q^a} = \big[A,C\big]_{q^b} = 0$ *then* $\big[A,\big[B,C\big]_{q^c}\big]_{q^{a+b}} = 0$ *for all* $a,b,c \in \mathbb{Z}$.
If $\big[A,C\big]_{q^a} = \big[B,C\big]_{q^b} = 0$ *then* $\big[\big[A,B\big]_{q^c},C\big]_{q^{a+b}} = 0$ *for all* $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

• For $\big[(a),(a)\big]$: we can set $A_1 = U_q(1,j)$ and $A_2 = U_q(1,k)$, $j,k \in \mathbb{N}$, $\ j \leq k \leq n$. We then show that $\big[U_q(1,j),U_q(1,k)\big]_{q^{-1}} = 0$ by induction on j.
$\big[E_1,\big[E_1,E_2\big]_q\big]_{q^{-1}} = 0$ as it is the Quantum Serre relation. By using the fact that $\big[E_1,E_3\big] = 0$ and the lemma 3.5, we have that

$$\big[E_1,\big[\big[E_1,E_2\big]_q,E_3\big]_q\big]_{q^{-1}} = 0.$$

This can be extended to prove that $\big[E_1,U_q(1,j)\big]_{q^{-1}} = 0$. If it holds for j, let's prove that it still holds for $j+1$.

$$\big[U_q(1,j),U_q(1,j+1)\big]_{q^{-1}} = \big[\big[U_q(1,j-1),E_j\big]_q,U_q(1,j+1)\big]_{q^{-1}}.$$

We have that $\big[U_q(1,j-1),U_q(1,j+1)\big]_{q^{-1}} = 0$, by using the induction hypothesis.
Furthermore, we can prove that $\big[E_j,U_q(1,j+1)\big] = 0$.

$$\big[E_j,U_q(1,j+1)\big] = \big[E_j,\big[U_q(1,j-2),\big[\big[E_{j-1},E_j\big]_q,E_{j+1}\big]_q\big]_q\big].$$

We only need to prove that $\big[E_j,\big[\big[E_{j-1},E_j\big]_q,E_{j+1}\big]_q\big] = 0$ because the rest is a consequence of lemma 3.5.

Lemma 3.6. E_j *commutes with* $\big[\big[E_i,E_j\big]_q,E_k\big]_q$ *if we have* $a_{ij} = a_{jk} = -1$ *and* $a_{ik} = 0$.

Proof : In order to prove this result, we will use the following Serre relations :

$$E_iE_jE_j - (q+q^{-1})E_jE_iE_j + E_jE_jE_i = 0. \tag{3.4}$$

$$E_kE_jE_j - (q+q^{-1})E_jE_kE_j + E_jE_jE_k = 0. \tag{3.5}$$

With those relations (2.5) and (3.5), we have $\big[\big[\big[E_i,E_j\big]_q,E_k\big]_q,E_j\big] = 0.$ □

Then, by using the lemmas 3.6 and 3.5, we have that $\big[U_q(1,j),U_q(1,j+1)\big]_{q^{-1}}=0$. And we can extend this results to $\big[U_q(1,j),U_q(1,j+k)\big]_{q^{-1}}=0$.

• For $\big[(a),(b)\big]$: we can set $A_1=U_q(1,j)$ and $A_2=V_q(n,k)=\big[\big[E_n,E_{n-1}\big]_q,\dots,E_k\big]_q$.
If $k\geq j+2$ then $U_q(1,j)$ and $V_q(n,k)$ commute.
If $k=j+1$, we will prove by induction that :

$$\begin{aligned}\big[U_q(1,n-1),E_n\big]_q =&U_q(1,n)\\ \big[U_q(1,n-2),V_q(n,n-1)\big]_q =&\big[E_n,U_q(1,n-1)\big]_q\\ =&-U_q(1,n)+2*(1-q)\{U_q(1,n-1),E_n\},\end{aligned}$$

where $\{A,B\}=1/2(AB+BA)$. We reiterate this process for $R=\big[U_q(1,k),V_q(n,k+1)\big]_q$.

$$\begin{aligned}R=&-\big[U_q(1,k+1),V_q(n,k+2)\big]_q+(1-q)\{U_q(1,k+1),V_q(n,k+2)\}\\ =&(-1)^{n-k+1}\left(U_q(1,n)-(1-q)\left(\sum_{j=k}^{n-2}(-1)^{j+1}\{U_q(1,j+1),V_q(n,j+2)\}\right)\right).\end{aligned}$$

For $k=j=n$ we have that :

$$\big[U_q(1,n),E_n\big]_{q^{-1}}=\big[U_q(1,n-2),\big[\big[E_{n-1},E_n\big]_q,E_n\big]_{q^{-1}}\big]_q=0.$$

Now for $j\leq n-1$:

$$\big[U_q(1,j),V_q(n,j)\big]=\big[\big[U_q(1,j-2),\big[E_{j-1},E_j\big]_q\big]_q,\big[V_q(n,j+2),\big[E_{j+1},E_j\big]_q\big]_q\big]=0,$$

to show that it is equal to zero, it is enough to show that $\big[\big[E_{j-1},E_j\big]_q,\big[E_{j+1},E_j\big]_q\big]=0$.

Lemma 3.7. *$\big[E_i,E_j\big]_q$ commutes with $\big[E_k,E_j\big]_q$ if we have $a_{ij}=a_{jk}=-1$ and $a_{ik}=0$.*

Proof : In order to prove this result, we will use the following Serre relations :

$$E_iE_jE_j-(q+q^{-1})E_jE_iE_j+E_jE_jE_i=0. \tag{3.6}$$

$$E_kE_jE_j-(q+q^{-1})E_jE_kE_j+E_jE_jE_k=0. \tag{3.7}$$

With those relations (3.6) and (3.7), we have $\big[\big[E_i,E_j\big]_q,\big[E_k,E_j\big]_q\big]=0$. □

for $k=j-1$ we have

$$\big[U_q(1,j),V_q(n,j-1)\big]=\big[U_q(1,j),\big[V_q(n,j),E_{j-1}\big]_q\big]=0,$$

because $\big[U_q(1,j), V_q(n,j)\big] = 0$ and $\big[U_q(1,j), E_{j-1}\big] = 0$, by using the same demonstration as in the lemma 3.6 . This can be continued by induction, by decrementing k.
Meaning that for $k < j-1$, we have

$$\big[U_q(1,j), V_q(n,k)\big] = \big[U_q(1,j), \big[V_q(n,k+1), E_k\big]_q\big] = 0,$$

because $\big[U_q(1,j), V_q(n,k+1)\big] = 0$ and $\big[U_q(1,j), E_k\big] = 0$ by using the same demonstration as in the lemma 3.6.

• For $\big[(b),(b)\big]$: it is the exact same proof as $\big[(1),(1)\big] = 0$ by reversing the indices.
Finally, we have for all generators E of $\mathfrak{C}_\hbar$ that there exists $\lambda \in \mathbb{Z}$ such that

$$[\sum_{i=1}^{n} H_i, E] = \lambda E.$$

Then by using proposition 2.6, we conclude that it is a flat deformation. □

2 $\mathfrak{so}(2n)$

Following the construction, we construct coisotropic subalgebra $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{so}(2n)$
We consider $\mathfrak{g}$ with Cartan subalgebra given by the diagonal matrices. The roots will be given by $\Pi = \{\pm L_i \pm L_j\}_{i<j}$. it is easy to see that all the roots satisfy the assumption. The root space of $\alpha = L_i - L_j$ is given by $e_\alpha = x_{i,j} = e_{i,j} - e_{n+j,n+i}$ and $f_\alpha = xj, i$, for $\alpha = L_i + L_j$ it is given by $e_\alpha = y_{i,j} = e_{i,n+j} - e_{j,n+i}$ and $f_\alpha = z_{j,i} = e_{n+j,i} - e_{n+i,j}$. We obtain the r-matrix

$$r = \lambda \sum_{i<j} (x_{ij} \wedge x_{ji} + y_{ij} \wedge z_{ij}) \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

• We fix the root $\beta = L_i - L_j$. We then compute the bracket :

$$\big[x_{ij}, r\big] = \lambda \left(\sum_{i<k<j} x_{ik} \wedge x_{kj} + x_{ij} \wedge \big[x_{ij}, x_{ji}\big] \right).$$

The coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ that we obtain, for a fixed i and j, in $\mathfrak{g}$ is generated by :

$$\{x_{ik}, x_{kj}\}_{i<k<j}, x_{ij}, \big[x_{ij}, x_{ji}\big] = h_i + h_{i+1} + \cdots + h_j,$$

where $\{h_i = e_{i,i} - e_{i+1,i+1} - e_{n+i,n+i} + e_{n+i+1,n+i+1}, h_n = e_{n,n} - e_{2n,2n}\}_{1 \le i \le n-1}$ is the basis of the Cartan subalgebra which is in terms of chevalley generators :

$$h_i + h_{i+1} + \cdots + h_{j-1},\ e_i,\ \big[e_i, e_{i+1}\big],\ \big[\big[e_i, e_{i+1}\big], e_{i+2}\big],\ \ldots\ ,\ \big[\big[e_i, e_{i+1}\big], \ldots, e_{j-1}\big],$$
$$e_{j-1},\ \big[e_{j-1}, e_{j-2}\big],\ \big[\big[e_{j-1}, e_{j-2}\big], e_{j-3}\big],\ \ldots\ ,\ \big[\big[e_{j-1}, e_{j-2}\big], \ldots, e_{i+1}\big].$$

This example is the same as the case of $\mathfrak{sl}(n)$.

• We now fix $\beta = L_i + L_j$. The coisotropic subalgebra $\mathfrak{h}$ obtained in $\mathfrak{g}$ is generated by :

$$\{x_{ik}, y_{kj}\}_{i<k\neq j}, \{x_{jk}, y_{ki}\}_{j<k}, y_{ij}, \ \big[x_{ij}, x_{ji}\big] = h_i + h_{i+1} + \cdots + h_{j-1}.$$

Without loosing any generality one can restrict the study to i=1. But we will distinct two cases. If $j = n$ the example is once again exactly the same as $\mathfrak{sl}(n+1)$.
If $j \neq n$ then it will be generated by :

(a) $h_1 + \cdots + h_{j-1}, \{u(1,k) = \big[u(1,k-1), e_k\big]\}_{2\leq k\leq j-2}$ and $u(1,1) = e_1$,
(b) $\{u(j,k) = \big[u(j,k-1), e_k\big]\}_{j+1\leq k\leq n-1}$ and $u(j,j) = e_j$,
(c) $\{\big[u(j,k), t\big]\}_{j\leq k\leq n-1}$ where $t = u(1, j-1)$,
(d) $\{w(j,k) = \big[w(j,k+1), e_k\big]\}_{j+1\leq k\leq n-1}$ and $w(j,n) = u(j,n) = \big[u(j,n-2), e_n\big]$,
(e) $\{\big[w(j,k), t\big]\}_{j+1\leq k\leq n}$,
(f) $\{w(j,k) = \big[w(j,k+1), e_k\big]\}_{1\leq k\leq j-2}$ and $w(j,j-1) = \big[w(j,j+1), \big[e_j, e_{j-1}\big]\big]$.

Note that $t = u(1,j-1) = \big[\big[e_1, e_2\big], \ldots, e_{j-1}\big]$ is not a generator.

$$\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{j\text{-}2} & 0 & c_j & \cdots & c_{n\text{-}1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \text{-}f_1 & e_j & \cdots & e_{n\text{-}1} \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & 0 & \text{-}f_2 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \text{-}f_{j\text{-}1} & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & \text{-}a_0 & b_j & \cdots & b_{n\text{-}1} & f_1 & f_2 & \cdots & f_{j\text{-}1} & 0 & d_j & \cdots & d_{n\text{-}1} \\
 & & & & & 0 & \cdots & 0 & \text{-}e_j & 0 & \cdots & 0 & \text{-}d_j & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & 0 & \text{-}e_{n\text{-}1} & 0 & \cdots & 0 & \text{-}d_{n\text{-}1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
 & & & & & & & & \text{-}a_0 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \text{-}a_1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & & & \text{-}a_{j\text{-}2} & 0 & \cdots & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & & & \\
 & & & & & & & & \text{-}c_j & 0 & \cdots & 0 & \text{-}b_j & 0 & & \\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 & & & & & & & & \text{-}c_{n\text{-}1} & 0 & \cdots & 0 & \text{-}b_{n\text{-}1} & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)$$

FIGURE III.3 – Matricial representation of Zambon's coisotrope in $\mathfrak{so}(2n)$

We now need to choose a candidate for the quantization. Following the method that we used for $\mathfrak{sl}(n+1)$, let's consider the following algebra generated by :

$$
\begin{array}{ll}
(a) & H_1+\cdots+H_{j-1}, \{U(1,k)=\big[U(1,k-1),E_k\big]\}_{2\le k\le j-2} \text{ and } U(1,1)=E_1,\\
(b) & \{U(j,k)=\big[U(j,k-1),E_k\big]\}_{j+1\le k\le n-1} \text{ and } U(j,j)=E_j,\\
(c) & \{\big[U(j,k),T\big]\}_{j\le k\le n-1} \text{ where } T=U(1,j-1),\\
(d) & \{W(j,k)=\big[W(j,k+1),E_k\big]\}_{j+1\le k\le n-1} \text{ and } W(j,n)=U(j,n)=\big[U(j,n-2),E_n\big],\\
(e) & \{\big[W(j,k),T\big]\}_{j+1\le k\le n},\\
(f) & \{W(j,k)=\big[W(j,k+1),E_k\big]\}_{1\le k\le j-2} \text{ and } W(j,j-1)=\big[W(j,j+1),\big[E_j,E_{j-1}\big]\big].
\end{array}
$$

$T=U(1,j-1)=\big[\big[E_1,E_2\big],\ldots,E_{j-1}\big]$ is not a generator. Each line corresponds to a set of generators. We then want to modify this subalgebra in order to transform it into a left coideal. Therefore, the bracket in this notation may change depending on the case studied.

$(a)+(b)$ It is easy to see that the first two sets of generators are obtained by the same computation as in $\mathfrak{sl}(n+1)$. Therefore we now consider the two first sets of generator with the q-bracket. Meaning that we take for $k<j-1$, $U_q(1,k)=\big[\big[E_1,E_2\big]_q\ldots,E_k\big]_q$ and for $j+1\le k\le n$, $U_q(j,k)=\big[\big[E_j,E_{j+1}\big]_q\ldots,E_k\big]_q$.

(c) The third set is consists in the bracket of the second set of generators with the element $T=\big[\big[E_1,E_2\big],\ldots,E_{j-1}\big]$. The element $\Delta(T)$ can be developed as in $\mathfrak{sl}(n+1)$ meaning that we use the q-brackets. Therefore we now consider $T_q=\big[\big[E_1,E_2\big]_q,\ldots,E_{j-1}\big]_q$. In $\Delta(T_q)$, the only term that fails as a coideal is $T_q\otimes K(1,j)$ Consequently, we only have to check if the bracket of the comultiplication of the second set of generators with this element is in $B\otimes\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})(\mathfrak{so}(2n))$. When computing $\Delta(\big[U_q(j,k),T_q\big])$, we see that the only term that can be an obstruction is $\big[1\otimes U_q(j,k),T_q\otimes K(1,j-1)\big]$. However, as $\big[U_q(j,k),K(1,j-1)\big]_q=0$, we only need to take the q-bracket in order to eliminate this obstruction. Therefore we take $\{\big[U_q(j,k),T_q\big]_q\}$.

(d) For the fourth set, we can find by computation that we only need to take the q-bracket. We take $W_q(j,k)=\big[\big[U_q(j,n),E_{n-1}\big]_q,\ldots,E_k\big]_q$, as we have that $\Delta(W_q(j,k))\in\mathfrak{C}_\hbar\otimes\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{so}(2n))$.

(e) The fifth set is done exactly like the third one by taking the elements $\{\big[W_q(j,k),T_q\big]_q\}$.

(f) Finally for the last set, we need to compute the different generators one by one. One can find that, $W_q(j,k)=\big[\big[W_q(j,j+1),\big[E_j,E_{j-1}\big]_q\big]_q\ldots,E_k\big]_q$, for $k<j$, we have that $\Delta(W_q(j,k))\in\mathfrak{C}_\hbar\otimes\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{so}(2n))$. The proof is done exactly like the preceding lemma.

The candidate $\mathfrak{C}_\hbar$ that we choose, will be generated by the quantum version of the preceding generators.

$$H(1,j),\ (a)=\{U_q(1,k)\}_{1\le k\le j-2},\ (b)=\{U_q(j,k)\}_{j\le k\le n-1},\ (c)=\{\big[U_q(j,k),T_q\big]_q\}_{j\le k\le n-1},$$
$$(d)=\{W_q(j,k)\}_{j+1\le k\le n},\ (e)=\{\big[W_q(j,k),T_q\big]_q\}_{j+1\le k\le n},\ (f)=\{W_q(j,k)\}_{1\le k\le j-1}.$$

where $T_q=\big[\big[E_1,E_2\big]_q\dots,E_{j-1}\big]_q$ is not a generator.

Proposition 3.8. *The subalgebra $\mathfrak{C}_\hbar$ is a left coideal of the bialgebra $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{so}(2n))$.*

We need to check if this deformation is flat in order to prove that it is indeed a quantization of $\mathfrak{c}$.

Theorem 3.9. *$\mathfrak{C}_\hbar$ is a quantization of $\mathfrak{c}$.*

Proof : By computation, we will prove that the deformation is flat.

• For $\big[(a),(a)\big]$, the demonstration is the same as in $\mathfrak{sl}(n+1)$.

• For $\big[(a),(b)\big]$ or $\big[(a),(d)\big]$, they are both zero, because the generators (a) commute with the generators (b) and (d).

• For $\big[(a),(c)\big]$ and $\big[(a),(e)\big]$, we need to check that the bracket $\big[(a),T_q\big]$ is equal to zero, where $T_q=\big[\big[E_1,E_2\big]_q,\dots,E_{j-1}\big]_q$. By using the same argument as the proof in $\mathfrak{sl}(n+1)$, we can prove it. Also, we have that the generators (a) commute with the elements in (b) and (d), therefore it commutes with (c) and (e).

• For $\big[(a),(f)\big]$, set $(a)=U_q(1,k)=\big[\big[E_1,E_2\big],\dots,E_k\big]$ for $1\le k\le j-2$ and $(f)=W_q(j,l)$ for $1\le l\le j-1$. We have to examine $\big[U_q(1,k),W_q(j,l)\big]$. If $k<l-1$, then it is easy to see that $U_q(1,k)$ and $W_q(j,l)$ commute. If $k=l-1$, we then need to consider each case ; for k=1, we have :

$$\big[W_q(j,2),E_1\big]_q=W_q(j,1),$$

for k=2, we will use the following property, $\big[A,B\big]_q=-\big[B,A\big]_q+(1-q)\{A,B\}$. Then by a simple computation, we have :

$$\big[W_q(j,3),U_q(1,2)\big]_q=-W_q(j,1)+(1-q)\{W_q(j,2),E_1\},\tag{3.8}$$

and by successive iterations of the formula (3.8), we can find that :

$$\big[W_q(j,k+1),U_q(1,k)\big]_q=(-1)^{k-1}W_q(j,1)+(1-q)\left(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{j-1-i}\{W_q(j,+1),U_q(1,i)\}\right).$$

If $j-2 \geq k \geq l$ then we have to consider :

$$\big[U_q(1,k), W_q(j,l)\big] = \big[W_q(j,j+1), \big[U_q(1,k), V_q(j,l)\big]\big],$$

where $V_q(j,l) = \big[\big[E_j, E_{j-1}\big]_q, \ldots, E_l\big]_q$.We can verify that $\big[U_q(1,k), V_q(j,l)\big] = 0$ by using the fact that :

$$U_q(1,k) = \big[\big[\big[U_q(1,l-2), \big[E_{l-1}, E_l\big]_q\big]_q, E_{l+1}\big]_q, \ldots, E_k\big]_q.$$

We have that $U_q(1,l-2)$ and $V_q(j,l) = \big[\big[E_j, E_{j-1}\big]_q, \ldots, E_l\big]_q$ commute. It is the same for $\big[E_{l-1}, E_l\big]_q$, E_{l+1} ...,E_k. Therefore $U_q(1,k)$ and $V_q(j,l)$ commute.

• For $\big[(b),(b)\big]$, the demonstration is the same as $\mathfrak{sl}(n+1)$.

• For $\big[(b),(c)\big]$, we have in fact to compute $\big[U_q(j,k), \big[U_q(j,l), T\big]\big]$ and this is done just like in $\mathfrak{sl}(n+1)$. We find that if k $<$ l then we just have to use the lemma 3.6.
If k $=$ l, then we have that $\big[U_q(j,k), \big[U_q(j,l), T\big]\big]_{q^{-1}} = 0$, by using the same proof as in $\mathfrak{sl}(n+1)$. And if $k > l$, then $\big[U_q(j,k), \big[U_q(j,l), T\big]\big] = 0$, which is done the same way as in $\mathfrak{sl}(n+1)$.

• For $\big[(b),(d)\big]$, we need to examine $\big[U_q(j,k), W_q(j,l)\big]$, for $j \leq k \leq n-1$ and $j+1 \leq l \leq n$.
If $k < l-1$, then we have that :

$$\big[U_q(j,k), W_q(j,l)\big]_{q^{-1}} = \big[\big[\big[U_q(j,k), U_q(j,n)\big]_{q^{-1}}, E_{n-1}\big]_q, \ldots, E_l\big]_q.$$

We can verify that $\big[U_q(j,k), U_q(j,n)\big]_{q^{-1}} = 0$ for $k \leq n-2$ just by using the same proof as in $\mathfrak{sl}(n+1)$. Therefore $\big[U_q(j,k), W_q(j,l)\big]_{q^{-1}} = 0$ for $k < l-1$.
Now, if $k = l-1$, then for $k = n-1$ and $l = n$, we have :

$$\big[U_q(j,n-1), U_q(j,n)\big] = \big[\big[U_q(j,n-2), E_{n-1}\big]_q, \big[U_q(j,n-2), E_n\big]_q\big].$$

Let's set $A = U_q(j,n-2)$, $B = E_{n-1}$ and $C = E_n$. We are in the same settings as the lemma in $\mathfrak{sl}(n+1)$. Therefore $\big[U_q(j,n-1), U_q(j,n)\big] = \big[\big[A,B\big]_q, \big[A,C\big]_q\big] = 0$.
For k=n-2 and l=n-1, we have :

$$\big[U_q(j,n-2), W_q(j,n-1)\big] = q^{-1}(1-q^2)(U_q(j,n-1)\ U_q(j,n)),$$

and by successive iterations, we can find that :

$$\big[U_q(j,k), W_q(j,k+1)\big] = (1-q^2)\left(\sum_{i=1}^{n-k-1} (-q)^{-i} U_q(j,k+i) W_q(j,k+i+1)\right).$$

If $k \geq l$, then we need to consider :

$$\big[U_q(j,k), W_q(j,l)\big]_{q^{-1}} = \big[\big[\big[U_q(j,k), W_q(j,k)\big]_{q^{-1}}, E_{k-1}\big], \ldots, E_l\big].$$

We will consider $\big[U_q(j,k), W_q(j,k)\big]_{q^{-1}}$. For k=n-1, we have :

$$\big[U_q(j,n-1), W_q(j,n-1)\big]_{q^{-1}} = \big[U_q(j,n-1), \big[U_q(j,n), E_{n-1}\big]\big]_{q^{-1}}.$$

But we have that $\big[U_q(j,n-1), U_q(j,n)\big] = 0$ and $\big[U_q(j,n-1), E_{n-1}\big]_{q^{-1}} = 0$.
Therefore $\big[U_q(j,n-1), W_q(j,n-1)\big]_{q^{-1}} = 0$. For $k \leq n-2$, we have :

$$\big[U_q(j,k), W_q(j,k)\big]_{q^{-1}} = q^{-1}\big[W_q(j,k+2), \big[U_q(j,k), \big[E_{k+1}, E_k\big]\big]\big]_{q^2},$$

but we have that $\big[U_q(j,k), \big[E_{k+1}, E_k\big]\big] = 0$ by using the proof of $\mathfrak{sl}(n+1)$. Therefore $\big[U_q(j,k), W_q(j,l)\big]_{q^{-1}} = 0$ for $k \geq l$.

• For $\big[(b),(e)\big]$, it is equivalent to $\big[(b), \big[(d), T\big]\big]$. Is done exactly the same way as the previous one by considering the fact that $(e) = \big[W_q(j,l), T\big] = \big[\big[\big[U_q(j,n), T\big], E_{n-1}\big], \ldots, E_l\big]$.

• For $\big[(b),(f)\big]$, this is proved by using the fact that we only need to consider this calculus for the element $W_q(j,j-1)$ for (f) because all the other calculus are done trivially using this element.
One can see that we have for $j \leq k \leq n-2$:

$$\big[U_q(j,k), W_q(j,j-1)\big]_{q^{-1}} = \big[U_q(j,k), \big[W_q(j,k+2), V_q(k+1,j-1)\big]_q\big]_{q^{-1}},$$

where $V_q(k+1,j-1) = \big[E_{k+1}, \big[E_k, \ldots \big[E_j, E_{j-1}\big]\big]\big]$. By using the same method as in $\mathfrak{sl}(n+1)$, we have that $U_q(j,k)$ commutes with $V_q(k+1,j-1)$, and by using the previous calculus, we have that $U_q(j,k)$ q^{-1}-commutes with $W_q(j,k+2)$ and therefore $\big[U_q(j,k), W_q(j,j-1)\big]_{q^{-1}} = 0$.
One last computation for k = n-1 :

$$\big[U_q(j,n-1), W_q(j,j-1)\big]_{q^{-1}} = \big[U_q(j,n-1), \big[W_q(j,n), V_q(n-1,j-1)\big]_q\big]_{q^{-1}}.$$

By using the same method as in $\mathfrak{sl}(n+1)$, we have that $U_q(j,n-1)$ q^{-1}-commutes with $V_q(n-1,j-1)$. And by using the previous calculus, we have that $U_q(j,n-1)$ commutes with $W_q(j,n)$ and therefore $\big[U_q(j,n-1), W_q(j,j-1)\big]_{q^{-1}} = 0$.

• For the remaining cases, it is either done like previously or by using some simples arguments.

By using the proposition 2.7, we can conclude our proof. □

4 Classification of right coideal subalgebra of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{b}_+)$

In this section, we will give some recent results on the classification of right coideal and how they relate to the problem of quantization of coisotropic Lie subalgebra. The basic idea lies in the study of some subalgebras of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$ which depend on the Weyl group W of $\mathfrak{g}$ constructed by G. Lusztig. It was first studied by C. De Concini, V. G. Kac and C. Procesi in [DCKP95] to define analogues of solvable Lie groups. Then M. Yakimov studied those algebras for the quantization of nilpotent Lie algebra in [Yak10]. In the same time, Kharchenko conjectured the fact that the number of right coideals in $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$ is equal to the order of the Weyl group of $\mathfrak{g}$, [KS08], [Kha11]. Finally, this problem was solved by I. Heckenberger and H. J. Schneider in [HS09]. We will give some details of the proof for $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{b}_+)$ and see the classical equivalent to this construction in order to obtain the semi-classical limit of the right coideal constructed by G. Lusztig. We will stay in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{b}_+)$ for the rest of the chapter. We will therefore translate the results of I. Heckenberger and H. J. Schneider in this setting. The two setting being almost identical, the theorem will translate directly.

In order to understand their work, we will first recall, the definition of roots vector for $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$, for $\mathfrak{g}$ a simple Lie algebra. We will follow some of the defintion of [CP95].

Theorem 4.1. *There is an action of the braid group $\mathcal{B}_\mathfrak{g}$ by algebra automorphisms of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ defined on the standard generators as follows :*

$$T_i(E_i) = -F_iK_i, \quad T_i(F_i) = -K_i^{-1}E_i, \quad T_i(H_j) = H_j - a_{ij}H_i,$$

$$T_i(E_j) = \sum_{r=0}^{-a_{ij}} (-1)^{r-a_{ij}} q^{-rd_i} (E_i)^{-(a_{ij}+r)} (E_j)(E_i)^r \quad \text{if } i \neq j,$$

$$T_i(F_j) = \sum_{r=0}^{-a_{ij}} (-1)^{r-a_{ij}} q^{rd_i} (F_i)^r (F_j)(F_i)^{-(a_{ij}-r)} \quad \text{if } i \neq j.$$

Remark The action of T_i on the H_j is the same as that of the simple reflections $s_i \in$ W on the corresponding generators of $\mathfrak{g}$.
The T_i are not Hopf algebra automorphisms of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ but they are "almost" Hopf algebra automorphisms.

Proposition 4.2. *The T_i are "almost" Hopf algebra automorphisms, in this sense :*

$$\forall\, a \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \quad \Delta(T_i(a)) = R_{i,\hbar}^{-1}(T_i \otimes T_i)\Delta(a)R_{i,\hbar}, \tag{4.1}$$

where

$$R_{i,\hbar} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q_i^{n(n+1)/2}(1-q_i^{-2})}{[n]_{q_i}!} E_i^n \otimes F_i^n, \tag{4.2}$$

where $q_i = e^{d_i\hbar}$ we will also denote $R_n(\hbar) = \frac{q_i^{n(n+1)/2}(1-q_i^{-2})}{[n]_{q_i}!}$.

Remark The element $R_{i,\hbar}$ is invertible in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ as $R_n(\hbar) \equiv 2^n \hbar^n/(n!) \mod \hbar^{n+1}$.

We refer to [CP95] for a proof of this proposition.

Proposition 4.3. *Let $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ be a reduced decomposition of $w \in \mathrm{W}$ ($l(w) = k$). Then the automorphism $T_w = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}$ depends only on the choice of w.*

It is possible to define a PBW-basis of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ with the help of the automorphism T. This construction is analogue to the construction of root vector in $\mathfrak{g}$ using a decomposition of the longest element w_0 of the Weyl group W.

$$w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N}. \tag{4.3}$$

Then every positive root occurs exactly once in the following set :

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \quad \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \quad \ldots \quad , \beta_N = s_{i_1} \cdots s_{i_{n-1}}(\alpha_{i_N}). \tag{4.4}$$

Definition 4.4. *Let $\mathfrak{g}$ be a finite-dimensional complex simple Lie algebra. Fix a reduced decomposition (4.3) of the longest element $w_0 \in \mathrm{W}$ and define $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ as in (4.4). Then we can define the elements E_{β_k} and $F_{\beta_r} \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ as follows :*

$$E_{\beta_k} = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}), \quad F_{\beta_k} = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{k-1}}(F_{i_k}), \tag{4.5}$$

The E_{β_k} (resp. F_{β_k}) are called the positive (resp. negative) root vectors of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.

Proposition 4.5.

a) Let $w \in \mathrm{W}$ be such that $w(\alpha_i) \in \Pi^+$ for a simple root α_i. Then, $T_w(E_i) \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+$. If $w(\alpha_i) = \alpha_j$ is simple, then $T_w(E_i) = E_j$.

b) For any choice of reduced decomposition of w_0, the positive (resp. the negative) root vectors lie in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+$ (resp. $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^-$).

We have the quantum analogues of the root vector. We can now construct a PBW-basis by using these vectors. We define $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{N}^N$,

$$(E)^{\mathbf{r}} = E_{\beta_N}^{r_N} E_{\beta_{N-1}}^{r_{N-1}} \cdots E_{\beta_1}^{r_1},$$
$$(F)^{\mathbf{r}} = F_{\beta_N}^{r_N} F_{\beta_{N-1}}^{r_{N-1}} \cdots F_{\beta_1}^{r_1},$$

and for $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^n$.

$$(H)^{\mathbf{s}} = H_1^{s_1} H_2^{s_2} \cdots H_n^{s_n}.$$

Theorem 4.6. *The elements $(F)^{\mathbf{r}}$, $H^{\mathbf{s}}$ and $(E)^{\mathbf{t}}$, for $\mathbf{r}, \mathbf{t} \in \mathbb{N}^N$, $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^n$, form, respectively, a basis of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^-$, $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^0$ and $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+$. Their products $(F)^{\mathbf{r}}(H)^{\mathbf{s}}(E)^{\mathbf{t}}$ form a basis of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.*

Lusztig defined subalgebra $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ by using the Weyl group. In fact, one can define for every $w \in \mathrm{W}$, a subalgebra by using the root vectors of the PBW-basis.

Definition 4.7. *Let $w \in \mathrm{W}$, and fix a reduced decomposition of $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, then the algebra $\mathcal{U}_+^w$ has the PBW basis :*

$$E_{\beta_k}^{n_k} E_{\beta_{k-1}}^{n_{k-1}} \cdots E_{\beta_1}^{n_1}, \quad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

One can also define the algebra $\mathcal{U}_-^w$.

Proposition 4.8 (De Concini, Kac, Processi)**.** *The algebra $\mathcal{U}_\pm^w$ does not depend on the choice of the reduced decomposition.*

Remark Even if the algebra $\mathcal{U}^w$ does not depend on the choice of the reduced decomposition, It is not the case for the basis. In fact, it is easy to see that two reduced decompositions will not give rise to the same basis, nor will they be proportional to each other.

Proposition 4.9. *We have the following commutation relation between two generators of the basis. If $0 \leq s < t \leq N$, we have :*

$$E_{\beta_s} E_{\beta_t} - q^{\langle \beta_s, \beta_t \rangle} E_{\beta_t} E_{\beta_s} = \sum_{r_{s+1}, \dots, r_t \in \mathbb{N}} c(r_{s+1}, \dots, r_{t-1}) E_{t-1}^{r_{t-1}} \cdots E_{s+1}^{r_{s+1}},$$

where only a finite number of $c(r_{s+1}, \dots, r_{t-1}) \in \mathbb{C}[[\hbar]]$ are non zero.

Proof : By using the Theorem 4.6, we have :

$$E_{\beta_s} E_{\beta_t} = \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{N}^N} c(\mathbf{r}) (E)^{\mathbf{r}},$$

where $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$. Suppose $p < r$ minimal such that $c(0, \dots, 0, r_p, \dots, r_N)$, with $r_p \neq 0$, is non zero. Then by applying $(T_{i_1} \cdots T_{i_p})^{-1}$ to both sides we obtain that

$$\begin{aligned}(T_{i_1} \cdots T_{i_p})^{-1}(E_{\beta_s} E_{\beta_t}) &= T_{i_{p+1}} \cdots T_{i_{s-1}}(E_s) T_{i_{p+1}} \cdots T_{i_{r-1}}(E_r) \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+ \\ &= \sum_{\mathbf{r} = (0, \dots, 0, r_p, \dots, r_N)} c(\mathbf{r}) (T_{i_1} \cdots T_{i_p})^{-1} (E)^{\mathbf{r}} \notin \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+.\end{aligned}$$

If we look a the right hand of the equation, we have a term $(T_{i_1} \cdots T_{i_p})^{-1}(E)_{\beta_p}^{r_p} = F_{\beta_p}^{r_p}$ and this term does not belong in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+$. Therefore we have that $r_{i_1} = r_{i_2} = \cdots = r_{i_{s-1}} = 0$. A similar argument can be use to prove that $r_{i_{t+1}} = r_{i_{t+2}} = \cdots = r_{i_N} = 0$. Then by using the grading of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$, for weight problem, we obtain the following equality :

$$E_{\beta_s} E_{\beta_t} - c(s,t) E_{\beta_t} E_{\beta_s} = \sum_{r_{s+1}, \dots, r_t \in \mathbb{N}} c(r_{s+1}, \dots, r_t) E_t^{r_t} \cdots E_{s+1}^{r_{s+1}},$$

It remains to check the coefficient $c(s,t)$ in front of $E_{\beta_t}E_{\beta_s}$. If we use the $T_{i_s}T_{i_{s-1}}\cdots T_{i_1}$ on the left hand of the equality, then we obtain :

$$T_{i_s}T_{i_{s-1}}\cdots T_{i_1}(E_{\beta_s}E_{\beta_t}-c(s,t)E_{\beta_t}E_{\beta_s}) = -K_{i_r}^{-1}F_{i_r}\tilde{E}+c(s,t)\tilde{E}K_{i_r}^{-1}F_{i_r}$$

where $K_{i_r}=e^{d_{i_r}hH_{i_r}}$ and $\tilde{E}=T_{i_{r+1}}\cdots T_{i_{s-1}}(E_{i_s})\in\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+$ verifies :

$$K_{i_r}\tilde{E}K_{i_r}^{-1}=q^{\langle\beta_r,s_{i_r}(\beta_s)\rangle}\tilde{E}.$$

Therefore, we obtain for the left hand side :

$$-K_{i_r}^{-1}(F_{i_r}\tilde{E}-c(s,t)q^{-\langle\beta_r,\beta_s\rangle}\tilde{E}F_{i_r})$$

By writing $\tilde{E}$ as a linear combination of the $E_k,\ k=1,\dots,n$, we see that only $F_{i_r}\tilde{E}-\tilde{E}F_{i_r}$ is in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^0.\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^+$. Hence, $c(s,t)=q^{\langle\beta_r,\beta_s\rangle}$. □

This will justify the fact that $\mathcal{U}^w$ is a subalgebra of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. It only remain to prove that it is a right coideal and that they are the only one.

Proposition 4.10. *$\mathcal{U}^w$ are right coideal in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.*

Proof : Let w be an element of the Weyl group and $w=s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ be a reduced decomposition of w. Then $\mathcal{U}^w$ is generated as an algebra by :

$$E_{i_1},T_{i_2}(E_{i_1}),\dots,T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}). \tag{4.7}$$

We will prove that $D_p=\Delta(T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}}(E_p))$ has its first component in the algebra $\mathcal{U}_p^w$ generated by $E_{i_1},T_{i_2}(E_{i_1}),\dots T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{p-1}}(E_{i_p})$ and therefore in $\mathcal{U}^w$. By using the proposition 4.2, we have :

$$\begin{aligned}D_p =&R_{i_1,\hbar}^{-1}(T_{i_1}\otimes T_{i_1})(\Delta(T_{i_2}T_{i_3}\cdots T_{i_{p-1}}(E_{i_p})))R_{i_1,\hbar}\\ =&R_{i_1,\hbar}^{-1}(T_{i_1}\otimes T_{i_1})(R_{i_2,\hbar}^{-1})(T_{i_1}T_{i_2}\otimes T_{i_1}T_{i_2})(\Delta(T_{i_3}\cdots T_{i_{p-1}}(E_{i_p})))(T_{i_1}\otimes T_{i_1})(R_{i_2,\hbar})R_{i_1,\hbar}\\ =&\tilde{R}_{1,\hbar}^{-1}\tilde{R}_{2,\hbar}^{-1}\cdots\tilde{R}_{p-1,\hbar}^{-1}(T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}}\otimes T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}})(\Delta(E_{i_p}))\tilde{R}_{p-1,\hbar}\cdots\tilde{R}_{2,\hbar}R_{1,\hbar}.\end{aligned}$$

where

$$\tilde{R}_{m,\hbar}=(T_{i_1}\cdots T_{i_{m-1}}\otimes T_{i_1}\cdots T_{i_{m-1}})(R_{i_m,\hbar}).$$

We can see that the first component of $\tilde{R}_{m,\hbar}$ and of $\tilde{R}_{m,\hbar}^{-1}$ is in the algebra $\mathcal{U}_m^w\subset\mathcal{U}_p^w$ as $m\le p$. Moreover

$$(T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}}\otimes T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}})(\Delta(E_{i_p}))=T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}}(E_p)\otimes_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}}(K_p)+1\otimes T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}}(E_p),$$

therefore $D_p\in\mathcal{U}_p^w\otimes\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})\subset\mathcal{U}^w\otimes\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. □

We have proved that $\mathcal{U}^w$ is a subalgebra right coideal of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{b}_+)$. The last result that we can add is the classification done by Heikenberger and Scheinder in [HK11a]. To follow, their construction, we need to study $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$. We also need to add the subspace $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^0$ of group like elements of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ generated by $\{K_i, K_i^{-1}\}_i$ to our subalgebra right coideal $\mathcal{U}^w$.

Remark This addition, will not influence the fact that $\mathcal{U}^w$ is a subalgebra right coideal of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ but it will give us a classification of right coideal of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$ which contains the subspace $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^0$.

Theorem 4.11 (Classification)**.** *There is a one to one correspondence between the elements Weyl group* W *and subalgebras right coideal of* $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$ *which contains* $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^0$, *taking an element* $w \in \mathrm{W}$ *to the algebra generated by* $\mathcal{U}^w$ *and* $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^0$, *which is a right coideal.*

Remark It is really important here to notice that this result is only in $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$ as it will require the fact that all coideals are non transversals (i.e. they admit a basis which is a subset of a root basis of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}_+)$. This result fails to exist in $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ if we do not have all the group like elements $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^0$ included in the right coideal. For exemple, one can take $E + KF$ in $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$ which is a right coideal that does not come from an element of the Weyl group. This classification does not translate in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. In fact, we can construct a subalgebra right which is not generated by a element of the Weyl group. Take the algebra generated by hE_1 is a trivial example and is not of the form U_q^w. Of course, this element is also not a flat deformation of the coisotropic subalgebra e_1 of $\mathfrak{g}$. A similar example in $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ is the subalgebra generated by $(1-q)E_1$, but this is in fact just the subalgebra generated by E_1 as $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ is a $\mathbb{Q}(q)$-algebra. The problem that we see here, comes from the fact that to go from $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ to $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$, we only take Laurent polynomials in $\mathbb{Q}(q)$ and $(1-q)^{-1}$ is not a Laurent polynomial. We can still try to give a classification in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{b}_+)$, by excluding these cases.

Conjecture (Classification)**.** *There is a one to one correspondance between the weyl group and non transversal right coideal of* $\mathcal{U}_h(\mathfrak{b}_+)$ *which contains* $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^0$ *by taking a element* $w \in \mathrm{W}$ *to the algebra generated by* $\mathcal{U}^w$ *and* $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^0$ *which is a right coideal.*

We can mimic this construction on the classical setting. This will give us the classical limit of the subalgebras $\mathcal{U}_\pm^w$. We will restrict ourself to the case of $\mathcal{U}_+^w$.

Theorem 4.12. *Let* $w \in \mathrm{W}$, *then* $\mathfrak{c}_+^w$ *the vector space defined for a reduced expression of* $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ *by :*

$$\mathfrak{c}_+^w = \mathrm{span}\{e_{\beta_1}, e_{\beta_2}, \dots e_{\beta_k}\} \tag{4.8}$$

is a Lie subalgebra of $\mathfrak{b}_+ \subset \mathfrak{g}$.

Proof : We take a reduced expression of $w \in \mathrm{W}$, $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ then we can find a reduced expression of w_0 such that $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_k} s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_N}$. We know that w_0 will give us a basis of $\mathfrak{b}_+$, then we can write for $1 \leq s \leq t \leq N$:

$$\big[e_{\beta_r}, e_{\beta_s}\big] = \sum_{k=1}^{N} c(k) e_{\beta_k}$$

Take $p \leq r-1$ minimal such that $c(p) \neq 0$, we then apply to each side of the equality, $t_{i_p} \cdots t_{i_1}$. We obtain by using the lemma 1.6, that :

$$\begin{aligned} t_{i_p} \cdots t_{i_1}(\big[e_{\beta_r}, e_{\beta_s}\big]) &= \big[t_{i_p} \cdots t_{i_1}(e_{\beta_r}), t_{i_p} \cdots t_{i_1}(e_{\beta_s})\big] \in \mathfrak{b}_+ \\ &= \sum_{k=1}^{N} c(k) t_{i_p} \cdots t_{i_1}(e_{\beta_k}) \notin \mathfrak{b}_+ \end{aligned}$$

In fact if we take a look at $c(p) t_{i_p} \cdots t_{i_1}(e_{\beta_p} = -c(p) f_{i_p})$. Therefore $c(k) = 0$ for all $k \leq r-1$. We can give a similar argument to show that $c(k) = 0$ for all $k \geq s+1$. Therefore $\mathfrak{c}_+^w$ is a Lie subalgebra. □

Theorem 4.13. *The space $\mathfrak{c}_+^w$ is a Lie coideal of $\mathfrak{b}_+ \subset \mathfrak{g}$ with the standard structure of Lie bialgebra.*

Proof : In order to prove that $\mathfrak{c}_+^w$ is a Lie coideal, we will use the fact that it is equivalent to prove that $(\mathfrak{c}_+^w)^\perp$ is a Lie subalgebra of $\mathfrak{g}^*$. We can see it as the lie bialgebra with generators $e^i,\ f^i$ and $h^i,\ i = 1, \ldots, n$ and defining relations :

$$\begin{aligned} &\big[h^i, h^j\big] = 0, \quad \big[h^i, e^j\big] = \delta_{ij} d_i e^i, \quad \big[h^i, f^j\big] = \delta_{ij} d_i f^i, \quad \big[e^i, f^j\big] = 0, \\ &(\mathrm{ad}_{e^i})^{1-a_{ij}}(e^j) = 0, \quad (\mathrm{ad}_{f^i})^{1-a_{ij}}(f^j) = 0. \\ &\delta(h^i) = e^i \wedge f^i, \quad \delta(e^i) = -a_{ij} e^i \wedge h^i, \quad \delta(f^i) = a_{ij} f^i \wedge h^i. \end{aligned}$$

We define $(\mathfrak{b}_+)^*$ to be the Lie subalgebra generated by the e^i and h^i. It is interesting to note that it is not a Lie subbialgebra of $\mathfrak{g}^*$. We can see that with these relations, if $\mathfrak{a}$ is a Lie subalgebra of $\mathfrak{b}_+$ then $\mathfrak{a}^*$ is still a Lie subalgebra of $(\mathfrak{b}_+)^*$. Therefore, to prove the theorem, we need to check if there exists a complementary Lie subalgebra of $\mathfrak{c}_+^w$ in $\mathfrak{b}_+$.

Lemma 4.14. *The space $t_w(\mathfrak{c}_+^{w^{-1}w_0})$ is a complementary Lie subalgebra of $\mathfrak{c}_+^w$.*

The space $t_w(\mathfrak{c}_+^{w^{-1}w_0})$ is a complementary subspace, as the basis of $t_w(\mathfrak{c}_+^{w^{-1}w_0})$ is $e_{\beta_{k+1}}, \ldots, e_{\beta_N}$. Moreover by using Theo. 4.12, we have that $\mathfrak{c}_+^{w^{-1}w_0}$ is a lie subalgebra and by the fact that t_w is an automorphism of Lie subalgebra, we obtain that $t_w(\mathfrak{c}_+^{w^{-1}w_0})$ is a complementary Lie subalgebra. Finally, by using the fact that $(\mathfrak{c}_+^w)^\perp = t_w(\mathfrak{c}_+^{w^{-1}w_0})^*$ we obtain that it is a Lie subalgebra. □

We will now consider $\mathfrak{c}^w_{\mathfrak{h}+} = \mathfrak{c}^w_+ \oplus \mathfrak{h}$, meaning that we add all the carton subspace to our coideals. This must be done in order to link the quantum result to the semi-classical case.

Conjecture (classical classification)**.** *There is a one to one correspondence between* $\mathfrak{c}^w_{\mathfrak{h}+} = \mathfrak{c}^w_+ \oplus \mathfrak{h}$ *and coisotropic subalgebra of* $\mathfrak{b}_+$ *which contains* $\mathfrak{h}$.

Remark We can see that all those coisotropic subalgebras are non transversals, in fact, this classification excludes cases like the lie algebra spanned by $e+f$ in $\mathfrak{sl}(2)$ which is a coisotropic subalgebra for the same reason as the quantum case (mainly because we ask to have all the Cartan subalgebra in our coisotropic subalgebra). The quantization of this coideal is the algebra generated by $E + KF$.

Proposition 4.15. *Every Lie subalgebra* $\mathfrak{c}$ *containing the Cartan Lie subalgebra* $\mathfrak{h}$ *is non transversal to the root basis of* $\mathfrak{b}_+$ *i.e. there exists a basis of* $\mathfrak{c}$ *which is only composed of elements of the root basis of* $\mathfrak{b}_+$.

Proof : Suppose that $x = \lambda_1 e_{\beta_1} + \lambda_2 e_{\beta_2}$ is in $\mathfrak{c}$. We want to prove that both e_{β_1} and e_{β_2} are in $\mathfrak{c}$. We have for all positive root α of $\mathfrak{g}$ that h_α is in $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{c}$, therefore $x_\alpha = \big[h_\alpha, x\big]$ is in $\mathfrak{c}$, and even more precisely in the 2-dimensionnal vector space generated by e_{β_1} and e_{β_2}. If either one of the x_α is non proportional to x then e_{β_1} and e_{β_2} are in $\mathfrak{c}$. If they are all proportional then we have :

$$\forall\ \alpha \in \Pi^+, \quad \beta_1(h_\alpha) = \beta_2(h_\alpha) \tag{4.9}$$

Therefore we have that e_{β_1} and e_{β_2} are in the same root space, meaning that they are equal. The same idea can be use for $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_{\beta_i}$. □

Remark This proposition is true for any Kac-Moody algebra, not only in the semi-simple case.

We can, now, link those construction together.

Theorem 4.16. *Let* w *be an element of the Weyl group and* $\mathcal{U}^w_+$ *be the coideal associated to* w*, then* $\mathcal{U}^w_+$ *is a flat deformation of* $\mathcal{U}(\mathfrak{c}^w_{\mathfrak{h}+})$.

Proof : By using the fact that $w_0 = w(w^{-1}w_0) = s_{i_1}\cdots s_{i_k}s_{i_{k+1}}\cdots s_{i_N}$ where $s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ is a reduced expression of w, then we have that $\mathcal{U}^w_+$ is a flat deformation of a subbialgebra of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. In fact, Prop. 4.9 give us a direct proof of the flatness as we automatically have that $\mathcal{U}^w_+ \cap \hbar\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) = \hbar\mathcal{U}^w_+$. To conclude, it is enough to see that the semi classical limit of E_{β_k} is e_{β_k} to obtain that $\mathcal{U}^w_+/\hbar\mathcal{U}^w_+ = \mathcal{U}(\mathfrak{c}^w_+)$. □

Chapitre IV

Universal Quantization of coisotropic subalgebras

In this section, it will be shown that coisotropic lie subalgebras cannot be quantized in the general case. More specifically, it will be demonstrated that they do not admit a quantization up to the third order in $\hbar$. This will be done using a universal third order quantization given by V. Drinfeld in his paper [Dri92]. It will give rise to an obstruction.

The question of quantization of coisotropic subalgebra was introduced by V. Drinfeld in his paper [Dri92]. In the said paper, he also asked the question of quantization of Lie bialgebra. The existence of an universal quantification of a Lie bialgebra was answered by P. Etingof and D. Kazhdan in their paper [EK96] (see chapter II section 1). A coisotropic lie subalgebra $\mathfrak{c}$ of $\mathfrak{g}$ is a Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$ such that $\delta(\mathfrak{c}) \subset \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{g}$ (see chapter II section 3 for more details). Numerous author studied this object and its quantum counter part the subalgebra coideal. It is known that the quantization problems can be solved in a recursive maner [Dri92], and therefore it is obvious that a first step to answer a question of deformation is to ask oneself if it works in the first orders. For the quantization problem of coisotropic Lie subalgebra, there is two steps in determining if such a quantization exists. First, to make sure that the subalgebra that we consider is a left coideal and, secondly, to verify that this quantization is flat. We will find out that there is an obstruction, in the third order of flatness, giving us the main result of this chapter

Theorem 0.17. *Let $\mathfrak{g}$ be a Lie bialgebra and $\mathfrak{c}$ a coistropic Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$. Then there exist an obstruction to the quantization of $\mathfrak{c}$.*

1 Universal Quantization and Deformation cohomology

In this section, we will present some results on the Prop Bialg but we will first recall some properties on the cohomology of deformation of Lie bialgebras. Gerstenhaber and Schack defined the deformation cohomology for the bialgebra by using the Gerstenhaber-Schack bicomplex. We will first state some quick results and definitions of the deformation theory created by Gerstenhaber and Schack. Let's first give some notations for the rest of the work. Let V be a $\Bbbk$-module, for $i,j \in \mathbb{N}$, we define :

$$C^{i,j}(V) := \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V^{\otimes j}, V^{\otimes i}).$$

Let (A, m, η) be an algebra, we denote $\mathrm{m}^{(n)} : A^{\otimes(n+1)} \to A$ and $m^{[n]} : A^{\otimes n} \otimes A^{\otimes n} \to A^{\otimes n}$:

$$\mathrm{m}^{(-1)} := \eta, \qquad \mathrm{m}^{(0)} := \mathrm{Id}, \qquad \mathrm{m}^{(1)} := \mathrm{m},$$

$$\mathrm{m}^{(n)} := \mathrm{m}(\mathrm{m}^{(n-1)} \otimes \mathrm{Id}). \tag{1.1}$$

$$\mathrm{m}^{[n]}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) := a_1 b_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_n. \tag{1.2}$$

Let (C, Δ, ϵ) be a coalgebra, we denote $\Delta^{(n)} : C \to C^{\otimes(n+1)}$ and $\Delta^{[n]} : C^{\otimes n} \to C^{\otimes n} \otimes C^{\otimes n}$:

$$\Delta^{(-1)} := \epsilon, \qquad \Delta^{(0)} := \mathrm{Id}, \qquad \Delta^{(1)} := \Delta,$$

$$\Delta^{(n)} := (\Delta^{(n-1)} \otimes \mathrm{Id})\Delta. \tag{1.3}$$

$$\Delta^{[n]}(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) := \sum a_1' \otimes a_2' \otimes \cdots \otimes a_n' \otimes a_1'' \otimes a_2'' \otimes \cdots \otimes a_n''. \tag{1.4}$$

If $(B, \mathrm{m}, \Delta, \eta, \epsilon)$ is a bialgebra then $\mathrm{m}^{(n)} \in C^{1,n+1}(B)$ and $\Delta^{(n)} \in C^{n+1,1}(B)$.
Let $f = \sum_{n \geq 0} \hbar^n f_n \in V[[\hbar]]$, for $n \geq 1$, we define $f_{(n)} \in V[[\hbar]]$ by :

$$f_{(n)} = f_0 + \hbar f_1 + \hbar^2 f_2 + \cdots + \hbar^n f_n,$$

Definition 1.1. *Let $(B, \mathrm{m}_0, \Delta_0, \eta_0, \epsilon_0)$ be a bialgebra. For $i,j \geq 0$ we define the differentials, $\mathrm{d}^{i,j} : C^{i,j}(B) \to C^{i,j+1}(B)$ et $\delta^{i,j} : C^{i,j}(B) \to C^{i+1,j}(B)$:*

$$\mathrm{d}^{i,j}\alpha = \mathrm{m}_0^{[i]}(\Delta_0^{(i-1)} \otimes \alpha) + \sum_{r=1}^{j} (-1)^r \alpha(\mathrm{Id}^{\otimes(r-1)} \otimes \mathrm{m}_0 \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(j-r)}) + (-1)^{j+1}\, \mathrm{m}_0^{[i]}(\alpha \otimes \Delta_0^{(i-1)}) \tag{1.5}$$

$$\delta^{i,j}\alpha = (\mathrm{m}_0^{(j-1)} \otimes \alpha)\Delta_0^{[j]} + \sum_{r=1}^{i} (-1)^r (\mathrm{Id}^{\otimes(r-1)} \otimes \Delta_0 \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(i-r)})\alpha + (-1)^{i+1}(\alpha \otimes \mathrm{m}_0^{(j-1)})\Delta_0^{[j]} \tag{1.6}$$

Remark we have one differential for each deformation, $\mathrm{d}^{i,j}$, the Hochschild differential for the deformation of the algebra and $\delta^{i,j}$, the Cartier differential for the deformation of coalgebra. We set $\mathrm{D}^{i,j} := d^{i,j} + (-1)^j \delta^{i,j}$ the *total differential*. If there is no ambiguity, we will forget the indices of the applications d, δ and D.

Proposition 1.2. *$(C^{i,j}(B), d^{i,j}, (-1)^j \delta^{i,j})$ is a bicomplex.*

The complex can be seen as a square lattice as in the following diagram. The entry (p,q), column p, row q is $C^{p,q}$. therefore the horizontal arrow pointing right correspond to the Cartier differential and the vertical one pointing up to the Hochschild differential.

The deformation complex for the bialgebra deformations is the subcomplex of the full Gerstenhaber-Schack complex given by deleting the botom row and the first colum and the left most column. We will denote this complex $C(B)$.

Remark In the last chapter, we will need to deform a bialgebra into a bialgebra. We will then need to consider the extended Gerstenhaber-Schack complex, which is the full one given by simply deleting the left most column $p = 0$.

We have two structures to consider, the multiplication and the comultiplication :

$$\mathrm{m} := \mathrm{m}_0 + \sum_{1\leq k} \hbar^k \, \mathrm{m}_k$$
$$\Delta := \Delta_0 + \sum_{1\leq k} \hbar^k \Delta_k$$

The structure equation to consider are :

(A) the associativity of m :

$$A_{\mathrm{m}} := \mathrm{m}(\mathrm{m} \otimes \mathrm{Id} - \mathrm{Id} \otimes \mathrm{m}) \in C^{1,3}(B) \tag{1.7a}$$

(B) the compatibility between m and Δ :

$$B_{\mathrm{m},\Delta} := \mathrm{m} \otimes \mathrm{m} \circ \tau_{2,3} \circ \Delta \otimes \Delta - \Delta \circ \mathrm{m} \in C^{2,2}(B) \tag{1.7b}$$

(C) the coassociativity of Δ :

$$C_{\Delta} := [(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta] - [(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta] \in C^{3,1}(B) \tag{1.7c}$$

If $(B, \mathrm{m}, \Delta, \eta, \epsilon)$ is a bialgebra then we have that $A_{\mathrm{m}} = B_{\mathrm{m},\Delta} = C_{\Delta} = 0$.
The first step in the Gerstenhaber program is to show that the infinitesimal deformation $(\mathrm{m}_1, \Delta_1) \in C^{1,2} \oplus C^{2,1}$ are cocycles. Meaning that we have to prove the following equation :

$$\mathrm{D}(\mathrm{m}_1, \Delta_1) = (\mathrm{dm}_1,\ \delta\, \mathrm{m}_1 + \mathrm{d}\Delta_1,\ \delta\Delta_1) = 0.$$

therefore we must have :

$$\mathrm{dm}_1 = A_{\mathrm{m}_{(1)}} = 0, \quad \delta\, \mathrm{m}_1 + \mathrm{d}\Delta_1 = B_{\mathrm{m}_{(1)},\Delta_{(1)}} = 0, \quad \delta\Delta_1 = C_{\Delta_{(1)}} = 0.$$

For a proof of this equation, we refer to chapter 9 of [SS93]. We then need to consider how to extend the deformation to the next degree. Suppose, we have a deformation to the degree n, what do we need to extend it to the degree $n+1$?
We need to find m_{n+1} and Δ_{n+1} such that :

$$A_{\mathrm{m}_{(n+1)}} \equiv 0 \mod \hbar^{n+2}, \tag{1.8a}$$
$$B_{\mathrm{m}_{(n+1)},\Delta_{(n+1)}} \equiv 0 \mod \hbar^{n+2}, \tag{1.8b}$$
$$C_{\Delta_{(n+1)}} \equiv 0 \mod \hbar^{n+2}, \tag{1.8c}$$

Proposition 1.3. *Let $B_\hbar$ be a deformation of the bialgebra B into a bialgebra of degree n. $B_\hbar$ is a deformation of degree $n+1$ if and only if :*

$$(A_{\mathrm{m}_{(n)}})_{n+1} = \mathrm{d}\mathrm{m}_{n+1}, \tag{1.9a}$$
$$(B_{\mathrm{m}_{(n)},\Delta_{(n)}})_{n+1} = \mathrm{d}\Delta_{n+1} + \delta\,\mathrm{m}_{n+1}, \tag{1.9b}$$
$$(C_{\Delta_{(n)}})_{n+1} = -\delta\Delta_{n+1}, \tag{1.9c}$$

We can now define the class of obstruction.

Definition 1.4. *The n-ith class of obstruction for a deformation of degree n is the element β_n of $C^4(B)$:*

$$\beta_n = \left(\beta_n^{1,3}, \beta_n^{2,2}, \beta_n^{3,1}\right) \in C^{1,3}(B) \oplus C^{2,2}(B) \oplus C^{3,1}(B).$$

define by :

$$\beta_n^{1,3} := (A_{\mathrm{m}_{(n)}})_{n+1},$$
$$\beta_n^{2,2} := (B_{\mathrm{m}_{(n)},\Delta_{(n)}})_{n+1},$$
$$\beta_n^{3,1} := (C_{\Delta_{(n)}})_{n+1},$$

Finally to finish the program of Gerstenhaber one has to verify a last theorem :

Theorem 1.5. *The n-ith class of obstruction β_n for a deformation of degree n is a 3-cocycle in the extended Gerstenhaber-Schack complex. If it cobounds an element $(\mathrm{m}_{n+1}, \Delta_{n+1})$ then the triple $(\mathrm{m}_{(n)} + \hbar^{n+1}\mathrm{m}_{n+1},\ \Delta_{(n)} + \hbar^{n+1}\Delta_{n+1})$ defines the $n+1$ st order deformation.*
Two extension define equivalent deformation under the composition of conjugacy by $\mathrm{Id} + \hbar^{n+1}\sigma$ and twisting by $1\otimes 1 - \hbar^{n+1}F$ if and only if $(\mathrm{m}_{n+1} - \mathrm{m}'_{n+1},\ \Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}) = \mathrm{D}(\sigma, F)$

In the case where $B = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. We can use a result of reduction :
First recall the Bar and Cobar resolution give us :

Definition 1.6. *The* Bar *and* Cobar *complex are defined as follows.*
Let A be a associative algebra, then the bar complex associate to A is :

$$\mathrm{Bar}_q(A) = A^{\otimes q+2} \quad q \geq -1$$

equipped with the differential :

$$\partial_q(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{q+1}$$

Let C be a coassociative coalgebra, then the Cobar *complex associate to C is :*

$$\mathrm{Cob}_q(C) = C^{\otimes q+2} \quad q \geq -1$$

equipped with the differential :

$$\delta_q(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes \Delta(a_i) \otimes \cdots \otimes a_{q+1}$$

Theorem 1.7. *The Gerstenhaber-Schack complex of a bialgebra B can be described as*

$$C^{p;q}_{G.S.}(B) = \mathrm{Hom}_{B-Dimod}(\mathrm{Bar}_q(B), \mathrm{Cob}_p(B))$$

with differential

$$\mathrm{D}^{p,q}\,\alpha = (-1)^q \delta_p \circ \alpha + \alpha \circ \partial_q$$

then by using the Koszul resolution

Definition 1.8. *The Koszul complex K_b and K_c are defined as follows :*

$$K_b = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \tag{1.10}$$

where $\bigwedge \mathfrak{g}$ is seen as a trivial $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-bicomodule and K_b as a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-bimodule structure given by multiplication on the left and the right.

$$K_c = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{g} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \tag{1.11}$$

where $\bigwedge \mathfrak{g}$ as a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-bimodule and K_c as a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-bicomodule structure given by comultiplication on the left and the right.

We refer to the chapter 10 of [SS93] for further details on the Koszul complex and on the following reduction theorem.

Theorem 1.9. *For any Lie algebra $\mathfrak{g}$, the Gerstenhaber-Schack complex of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ is homotipy equivalent to the Koszul double complex*

$$C_{G.S.}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})-Dimod}(K_b, K_c) \tag{1.12}$$

furthermore, there is an isomorphism of complexes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})-Dimod}(K_b, K_c) \cong Hom_k(\wedge\mathfrak{g}, \wedge\mathfrak{g}) \tag{1.13}$$

Where the complex on the right is the Chevalley-Eilenberg complex for the cohomology of the Lie algebra $\mathfrak{g}$. Therefore the Gerstenhaber-Schack cohomology in bidegree p,q is :

$$H^q(\mathfrak{g}, \wedge^p \mathfrak{g}) \tag{1.14}$$

We will now make a short introduction on props and link it with the deformation quantization of Lie bialgebra by using the previous reduction on the complex of deformation. This review is based on a article of B. Enriquez [Enr05] where the author propose a cohomological construction of the quantization functor given by P. Etingof and D. Kazhdan.

A "product and permutation category" (prop) is an algebraic object generalizing the notion of an operad. It was created by MacLane in his article "Categorical algebra" [Mac65]. It is a useful tool, in the study of quantization as if we can define props in the classical and quantum settings, then an isomorphism between those props leads to a functor between the category of classical object and the category of quantum analogs. Let's first recall, the basic definition of prop given by MacLane.

Definition 1.10. *A prop $\mathcal{P}$ over a base ring R is a collection of R-modules $\mathcal{P}(n,m)$, $n,m \geq 0$, together with the data of :*

1) R-module maps :

$$\begin{aligned} \circ : &\mathcal{P}(n,m)\otimes\mathcal{P}(m,p) \to \mathcal{P}(n,p) \quad \text{and} \quad \boxtimes : \mathcal{P}(n,m)\otimes\mathcal{P}(n',m') \to \mathcal{P}(n+n',m+m') \\ &f\otimes g \mapsto g\circ f \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f\otimes g \mapsto f\boxtimes g \end{aligned}$$

where $\circ$ correspond to the composition of graphs and $\boxtimes$ to the concatenation of graphs.

2) linear maps $i_n : \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n \to \mathcal{P}(n,n)$, $n \geq 0$, such that :

a) $\circ$ and $\boxtimes$ are associative. Moreover we have $(f\circ f')\boxtimes(g\circ g') = (f\boxtimes g)\circ(f'\boxtimes g')$,

b) i_n is an algebra morphism from $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ to $(\mathcal{P}(n,n),\circ)$,

c) for $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, and $\sigma'\in\mathfrak{S}_{n'}$, denote by $\sigma\star\sigma'$ the permutation of $\mathfrak{S}_{n+n'}$, such that :

$$\sigma\star\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i), & \text{if } i\leq n \\ \sigma'(i-n)+n, & \text{else} \end{cases}.$$

Then $i_{n+n'}(\sigma\star\sigma') = i_n(\sigma)\boxtimes i_{n'}(\sigma')$.

d) if we set $id = i_1(e)$ (where e is the only element of $\mathfrak{S}_1$), then we have for all $f\in\mathcal{P}(n,m)$ that $id^{\boxtimes m}\circ f = f\circ id^{\boxtimes n}$.

e) if $\sigma_{n,n'}$ is the permutation in $\mathfrak{S}_{n+n'}$, such that $\sigma_{n,n'}(i) = i+n'$ if $i\leq n$ and $\sigma_{n,n'}(i) = i-n$ if $i\geq n+1$. Then for $f\in\mathcal{P}(n,m)$ and $g\in\mathcal{P}(n',m')$, we have :

$$f\boxtimes g = \sigma_{m',m}\circ(g\boxtimes f)\sigma_{n,n'}$$

We can define morphism between prop.

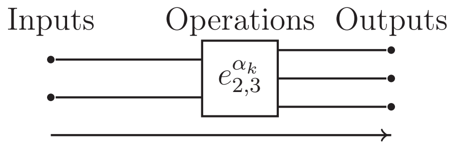
Definition 1.11. *If $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ are two props, then a morphism $\phi : \mathcal{P}\to\mathcal{Q}$ is a collection of R-module maps $\phi(n,m) : \mathcal{P}(n,m)\to\mathcal{Q}(n,m)$, such that the natural diagrams commute.*

We will also define ideal.

Definition 1.12. *Let $\mathcal{P}$ be a prop, an ideal $\mathcal{I}$ of $\mathcal{P}$ is a collection of R-submodules $\mathcal{I}(n,m) \subset \mathcal{P}(n,m)$, such that $\mathcal{I}$ is stable by the composition $\circ$ and the tensor product $\boxtimes$ with a suitable element of $\mathcal{P}$.*

Remark In quantization problems, we want to define functors from classical to quantum categories, left inverse to the semiclassical limit functor. Explicitly, let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}_q$ be respectively the classical and quantum categories and $\mathrm{SC} : \mathcal{C}_q \to \mathcal{C}$ be the semiclassical limit functor, then $\mathrm{Q} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_q$ is a quantization functor if $\mathrm{SC} \circ \mathrm{Q} = id_{\mathcal{C}}$.
Given a prop $\mathcal{P}$ and a symmetric monoidal category $\mathcal{S}$, we can define the category of $\mathcal{P}$-modules over $\mathcal{S}$, $\mathrm{Mod}_{\mathcal{S}}(\mathcal{P})$. A morphism of props $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ will provide a functor between the categories $\mathrm{Mod}_{\mathcal{S}}(\mathcal{Q}) \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{S}}(\mathcal{P})$. Therefore we want to define two props $\mathcal{P}$ and $\mathcal{P}_q$ and a symmetric monodical category $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ will often be equal to $\mathcal{V}ect$) such that $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{S}}(\mathcal{P})$ and $\mathcal{C}_q = \mathrm{Mod}_{\mathcal{S}}(\mathcal{P}_q)$. We denote the base field by R, and by $\hbar$ a formal parameter, then $\mathcal{P}_q$ is a module over $R[[\hbar]]$, whereas the base ring for $\mathcal{P}$ is R. Modules over the prop $\mathcal{P}_q/(\hbar)$ are provided by $V/(\hbar)$, where V is an object of $\mathcal{C}_q$. Such an object carries a classical structure, and is therefore a $\mathcal{P}$-module. We have a prop morphism $SC : \mathcal{P} \to \mathcal{P}_q/(\hbar)$ inducing SC. Modules over $\mathcal{P}[[\hbar]]$ are provided by $\hbar$-dependent analogues of the objects of $\mathcal{C}$; e.g., by the $V[[\hbar]]$, where $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (here the structure maps are $\hbar$-independent). Then a quantization functor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_q$ may be obtained from a prop morphism $\mathrm{Q} : \mathcal{P}_q \to \mathcal{P}[[\hbar]]$, such that $(\mathrm{Q} \bmod \hbar) \circ \mathrm{SC}$ is the identity of $\mathcal{P}$. We call such a Q a quantization morphism. (The quantization of Poisson manifolds or algebras, is not fitted for this scheme)

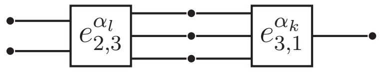
We can define Props, using generators and relations. Let $V = V(n,m)$, $n,m \geq 0$ be a collection of vector space. We fix a basis $(e_{i,j}^{\alpha_k})_{\alpha_k}$ for each $V(i,j)$. For each n,m, let $G_V(n,m)$ be the set of oriented graphs Γ (we will read them from left to right) such that ;



(a) $f \in G_V(2,3)$

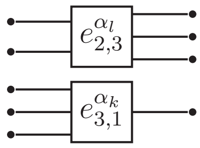
Vertices of Γ are of three types : "inputs", "outputs" and "operations". "Operations" vertices correspond to an element in the basis $(e_{i,j}^{\alpha_k})_{\alpha_k}$. A vertex is said to be of valency (p,q) if it has p inputs and q outputs. "Operations" vertices $(e_{i,j}^{\alpha_k})_{\alpha_k}$ are of valency (i,j). Each vertex carries an order from up to down of its input and output edges. Γ has no oriented cycle. Then $\mathcal{P}_V$, the free module spanned by $G_V(n,m)$. We define a map $\mathfrak{S}_n \to G_V(n,n)$, taking σ to the graph of n edges going form the input i to the output $\sigma(i)$. It extends to a linear map $\Bbbk\mathfrak{S}_n \to \mathcal{P}_V(n,n)$. There are unique maps defined as follows :

$$\circ_\Gamma : G_V(n,m) \times G_V(m,p) \to G_V(n,p)$$



(a) $e^{\alpha_k}_{3,1} \circ_\Gamma e^{\alpha_l}_{2,3} \in G_V(2,1)$

$$\otimes_\Gamma : G_V(n,m) \times G_V(n',m') \to G_V(n+n', m+m')$$



(b) $e^{\alpha_l}_{2,3} \otimes_\Gamma e^{\alpha_k}_{3,1} \in G_V(5,4)$

If Γ and Γ' are graphs, then $\circ_\Gamma(\Gamma, \Gamma')$ is obtained from Γ and Γ' by connecting the output vertex of Γ with the input vertex of Γ', and $\otimes_\Gamma(\Gamma,\Gamma')$ is obtained by adding the graph Γ' under the graph of Γ. Then $\circ$ and $\boxtimes$ are the linear maps extending $\circ_\Gamma$ and $\otimes_\Gamma$. $\mathcal{P}_V$ is the free prop generated by V.

Proposition 1.13. *$\mathcal{P}_V$ verifies the following universal property; If $(\mathcal{P}, \alpha)$ is any pair of a prop $\mathcal{P}$ and a collection of linear maps $\alpha_{n,m} : V(n,m) \to \mathcal{P}(n,m)$, then there is a unique prop morphism $\alpha_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}_V ? \mathcal{P}$, such that $\alpha_{\mathcal{P}} \circ \alpha_V = \alpha$. $\mathcal{P}_V$ is unique up to isomorphism, we call it the free prop generated by V.*

We can then add relations to this prop. Let V be given, and let $\mathcal{R}$ be a graded R-submodule of $\oplus_{n,m}\mathcal{P}_V(n,m)$. We set $\mathcal{R}(n,m) = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}_V(n,m)$, so $\mathcal{R} = \oplus_{n,m}\mathcal{R}(n,m)$. Then we can define ideal $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ generated by $\mathcal{R}$ and set the quotient $\mathcal{P}_{V,\mathcal{R}}(n,m) = \mathcal{P}_V(n,m)/\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(n,m)$. We then have a prop morphism $\pi : \mathcal{P}_V \to \mathcal{P}_{V,\mathcal{R}}$

Proposition 1.14. *$(\mathcal{P}_{V,\mathcal{R}}, \pi)$ verify the following property, if $(\mathcal{Q}, \beta)$ is a pair of a prop $\mathcal{Q}$ and a prop morphism $\beta : \mathcal{P}_V \to \mathcal{Q}$ then there is a unique prop morphism $\gamma : \mathcal{P}_{V,\mathcal{R}} \to \mathcal{Q}$, such that $\gamma \circ \pi = \beta$*

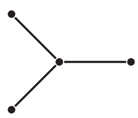
We will in the following, view prop as graphs.

Definition 1.15. *Let $\mathcal{S}$ be a symmetric monoidal category over R. Then if A is an object of $\mathcal{S}$, the morphisms in $\mathcal{S}$ define a prop $\mathcal{P}_A$, where $\mathcal{P}_A(p,q) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes p}, A^{\otimes q})$. A structure of prop-module over a prop $\mathcal{P}$ is a pair (A, ρ) of an object A of $\mathcal{S}$ and a prop morphism $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{P}_A$. A morphism between two $\mathcal{P}$-modules (A,ρ) and (B,ρ') is a morphism $\lambda : A \to B$ in $\mathcal{S}$, such that if $x \in \mathcal{P}(p,q)$ and $a \in A^{\otimes p}$, $\lambda^{\otimes q}(\rho(x)(a)) = \rho'(x)(\lambda^{\otimes p}(a))$. Then $\mathcal{P}$-modules form a category.*

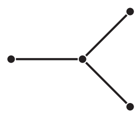
Remark in the following part, we will consider $\mathcal{S}$ to be the symmetric monoidal category of vectorial space on a field $\Bbbk$ denoted $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$

We now move to the introduction of the two props considered in the deformation theory of Lie bialgebra. First of all, the prop LBA, which will encode the structure of Lie bialgebra. We will of course, have that the category of LBA-modules on $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ is the category of Lie bialgebra on the field $\Bbbk$.

Definition 1.16. *The prop* LBA *of Lie bialgebras is defined by generators :*



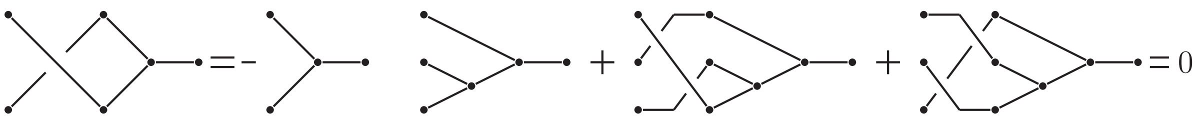
(a) $\mu \in \mathrm{LBA}(2,1)$



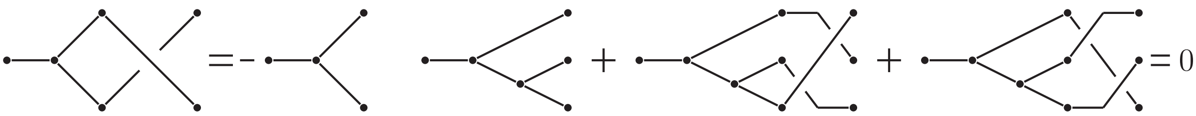
(b) $\delta \in \mathrm{LBA}(1,2)$

FIGURE IV.1 – Generators of the prop LBA

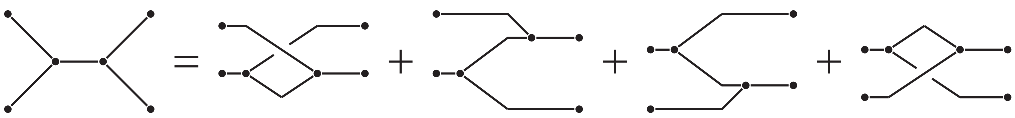
and relations given by :



(a) $\mu \circ \beta = -\mu$, (b) $\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) \circ \mathrm{Alt}_3 = 0$,



(c) $\beta \circ \delta = -\delta$, (d) $\mathrm{Alt}_3 \circ(\delta \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) \circ \delta = 0$,



(e) $\delta \circ \mu = \mathrm{Alt}_2 \circ(\mu \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{id}} \otimes\delta) \circ \mathrm{Alt}_2$.

FIGURE IV.2 – Relations of the prop LBA

where $\beta = (12)$ *and* $\mathrm{Alt}_k = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$. LBA *is graded by* $\mathbb{N}^2$, *with* μ, δ *of degrees* $(1,0)$, $(0,1)$ *; we denote by* $(\deg_\mu, \deg_\delta)$ *this grading.* LBA *is then* $\mathbb{N}$*-graded by the total degree* $\deg_\mu + \deg_\delta$. *In the rest of this chapter, we will choose the grading to be only on the degree of* δ *as we choose our universal deformation to be homogeneous.*

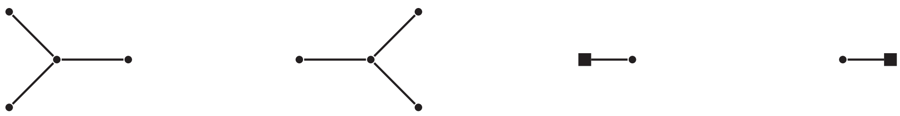
Let's give some properties on the prop LBA :

Theorem 1.17. *The map* $\oplus_{N\in\mathbb{N}}(\mathrm{LCA}(p,N) \otimes \mathrm{LA}(N,q))_{\mathfrak{S}_n} \to \mathrm{LBA}(p,q)$ *induced by composition and the prop morphisms* $\mathrm{LCA} \to \mathrm{LA}$, $\mathrm{LBA} \to \mathrm{LA}$ *is a linear isomorphism.*

Remark This results was done in [Enr01], it mainly uses the cocyle condition to prove the surjectivity of the morphism. It was also proved in [EH10b], in a more general setting by using schur functors which will be define below.

Let's now see the second prop that will play the part of the quantum version of the prop LBA, the prop Bialg. This prop will encode the structure of bialgebra and the category of Bialg-modules on $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ is the category of bialgebra on the field $\Bbbk$.

Definition 1.18. *The prop* Bialg *of associative bialgebras is defined by generators :*

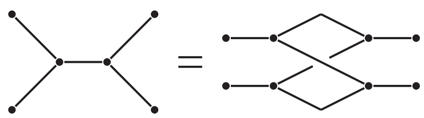


(a) $\mathrm{m} \in \mathrm{Bialg}(2,1)$ (b) $\Delta \in \mathrm{Bialg}(1,2)$ (c) $\eta \in \mathrm{Bialg}(0,1)$ (d) $\varepsilon \in \mathrm{Bialg}(1,0)$

Figure IV.3 – Generators of the prop Bialg

and relations given by :

(a) $\mathrm{m} \circ (\mathrm{m} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) = \mathrm{m} \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{id}} \otimes \mathrm{m})$, (b) $(\Delta \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) \circ \Delta = (\mathrm{Id}_{\mathbf{id}} \otimes \Delta) \circ \Delta$,



(c) $\Delta \circ \mathrm{m} = (\mathrm{m} \otimes \mathrm{m}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{id}} \otimes \beta \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$.

(d) $\mathrm{m} \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{id}} \otimes \eta) = \mathrm{m} \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) = \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}$, (e) $(\mathrm{Id}_{\mathbf{id}} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) \circ \Delta = \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}$

Figure IV.4 – Relations of the prop Bialg

Let's give some properties on the prop Bialg :

Theorem 1.19. *There exists isomorphisms between :*

$$i_{p,q} : \bigoplus_{N \geq 0} (\mathrm{Coalg}(p,N) \otimes \mathrm{Alg}(N,q))_{\mathfrak{S}_N} \longrightarrow \mathrm{Bialg}(p,q) \tag{1.15}$$

where Alg *and* Coalg *are respectively the prop of Algebra and Coalgebra.*

We refer to [EH10a] for a proof of this theorem.

Before giving the definition of a quantization functor (QF), we need to define the formalism of "Schur-props". Let's first define the Schur category.

Definition 1.20. *The Schur category* Sch *is a braided symmetric tensor category defined as follows :*

- *The objects are finitely supported families $X = (X_\rho)_\rho$ of finite-dimensional vector spaces, $\rho \in \sqcup_{n\geq 0}\widehat{\mathfrak{S}}_n$, where $\widehat{\mathfrak{S}}$ is the set of isomorphism classes of irreductible representations of $\mathfrak{S}_n$ and ρ is a pair $(n, \pi_\rho) \in (\mathbb{N}, \widehat{\mathfrak{S}})$.$n$ is called the degree of ρ and by convention, $\widehat{\mathfrak{S}}_0$ is the trivial group.*
- *The set of morphisms from X to Y is $\mathrm{Sch}(X,Y) := \oplus_\rho \mathrm{Vect}(X_\rho, Y_\rho)$.*
- *The direct sum of objects is $X \oplus Y = (X_\rho \oplus Y_\rho)_\rho$.*
- *The tensor product of object is*

$$X \otimes Y = \left(\bigoplus_{\substack{(n',\rho'),(n'',\rho'') \\ n'+n''=n}} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n'},\mathfrak{S}_{n''}}^{\mathfrak{S}_n}(\pi_{\rho'} \otimes \pi_{\rho''}) \otimes X_{\rho'} \otimes Y_{\rho''} \right)_\rho$$

We define $\mathbf{id}, S^p, \Lambda^p$ as the objects corresponding to : the element of $\widehat{\mathfrak{S}}_1$, the trivial and the signature character of $\mathfrak{S}_p$. We set $T_p := \mathbf{id}^{\otimes p}$ and $S := \oplus_{p\geq 0} S^p \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch})$. For more details on Schur category, refer to [EH10a].

We then see Props as an additive symmetric monoidal category $\mathcal{C}$ equipped with a tensor functor $\mathrm{Sch} \to \mathcal{C}$ which is the identity on objects. Then with this definition we add a functor to our previous Props LBA and Bialg. We can now define a quantization functor using this formalism.

Definition 1.21. *A quantization functor (QF) of Lie bialgebras is a bialgebra structure $(m, \Delta, \eta, \epsilon)$ on S in* **LBA**, *such that :*

a) its reduction modulo $\langle \mu, \delta\rangle$ is the standard bialgebra structure on S in $\mathbf{LBA}/\langle \mu, \delta\rangle$;

b) $(\mathbf{id}^{\otimes 2} \to S^{\otimes 2} \xrightarrow{m - m\circ\beta} S \to \mathbf{id}) = \mu$ + terms with total degree ≥ 2 ;

c) $(\mathbf{id} \to S \xrightarrow{\Delta - \beta\circ\Delta} S^{\otimes 2} \to \mathbf{id}^{\otimes 2}) = \delta$ + terms with total degree ≥ 2.

We can then see that P. Etingof and D. Kazhdan constructed a quantization functor $Q : \mathrm{Bialg} \to S(\mathbf{LBA})$, where **LBA** is a suitable completion of the prop LBA of Lie bialgebras. We also denote by $Q : \{$ Lie bialgebras over $\Bbbk\} \to \{$ Quantum universal enveloping algebras over $\Bbbk\}$ the functor induced by this prop morphism as defined previously.

There is a cohomological proof of the quantization of Lie bialgebra done by B. Enriquez in [Enr05]. This proof is based on the determination of a twist J such that can kill the associator Φ used in the quantization of Etingof-Kazhdan (i.e. $J^{(23)}J^{(1,23)}\Phi(J^{(12)}J^{(12,3)})^{-1} = 1$).

Theorem 1.22. *There exists a map* Assoc $\to (\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})^{\otimes 2})^{\times}$, $\Phi \mapsto J_{\Phi}$, *such that the identity*

$$\tilde{d}(J_{\Phi}) = \Phi$$

holds for any Φ. *Where* Assoc *is the set of associators and* $\widehat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g})$ *is a completion of* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Remark It is interesting to note that it is possible to construct this twist step by step with the cohomology. V. Drinfeld said that if a universal quantization exist then all universal quantization modulo $\hbar^n$ can be extended to a universal quantization. We do not know whether a proof exist or not.

2 2nd order deformation

This first section will be use to recall some of the main definition and also to see that even on the small order the problem is non-trivial. Let's first recal the quantization given by V. Drinfeld of the 3rd order.

Let $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ be a Lie bialgebra. We will denote $\mathcal{A}_3$ to be a quantization of $\mathfrak{g} \mod \hbar^3$. Choose a basis e_i of $\mathfrak{g}$ and denote by c_{ij}^k and f_i^{jk} the structure constants $\mathfrak{g}$, i.e., $\mu(e_i, e_j) = \left[e_i, e_j\right] = c_{ij}^k e_k$ and $\delta(e_i) = f_i^{jk} e_j \otimes e_k$. $\mathcal{A}_3$ is the algebra over $\Bbbk\left[\hbar\right]/(\hbar^3)$ with generators x_i and defining relations :

$$\left[x_i, x_j\right]^{(2)} = c_{ij}^k x_k + \hbar^2\left(f_i^{lm} f_j^{pq} c_{lp}^r \left\{x_m, x_q, x_r\right\}/12 + a\ d_i^s d_j^t c_{st}^k x_k\right) \tag{2.1}$$

Here $\{x, y, z\} = \frac{1}{6}\left(xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx\right)$, $d_i^l = f_i^{jk} c_{jk}^l$, $a \in \Bbbk$ is arbitrary.

$$\Delta(x_i)^{(2)} = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i + \frac{\hbar}{2} f_i^{jk} x_j \otimes x_k - \frac{\hbar^2}{12} f_i^{jk} f_j^{lm}\left(\{x_k, x_l\} \otimes x_m + x_m \otimes \{x_k, x_l\}\right) \tag{2.2}$$

of course, we also have the usual relations that the structure constant must verify :

$$c_{ab}^c + c_{ba}^c = 0\ ,\quad f_a^{bc} + f_a^{cb} = 0 \qquad \text{(Anti-symetry)} \tag{2.3a}$$
$$c_{bc}^d c_{ad}^e + c_{ca}^d c_{bd}^e + c_{ab}^d c_{cd}^e = 0 \qquad \text{(Jacobi)} \tag{2.3b}$$
$$f_a^{bc} f_b^{de} + f_a^{bd} f_b^{ec} + f_a^{be} f_b^{cd} = 0 \qquad \text{(CoJacobi)} \tag{2.3c}$$
$$c_{ab}^c f_c^{de} - c_{ac}^d f_b^{ce} - c_{bc}^e f_a^{cd} + c_{ac}^e f_b^{cd} + c_{bc}^d f_a^{ce} = 0 \qquad \text{(Cocycle)} \tag{2.3d}$$

for a element $F \in \mathcal{A}_3$. we will take the following notation :

$$F^{(2)} = F^0 + \hbar F^1 + \hbar^2 F^2$$

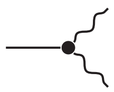
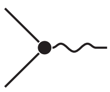
where F^0, F^1 and F^2 are in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Let's first denote e_{i_0} a basis of $\mathfrak{c}$ a coisotropic subalgebra of $\mathfrak{g}$. We can complete this basis in order to have a basis of $\mathfrak{g}$, let's denote e_{j_1} all the elements that we add to complete this basis. We also do the same thing for $\mathcal{A}_3$. We will say that a edge of a prop is perturbated if it belongs to something that is not in our subalgebra $\mathfrak{C}$ i.e.

will denote an element in $\mathfrak{C}$ will denote an element in $\mathcal{A}/\mathfrak{C}$

 will denote the symmetric of the two elements

We then have some rules for the structure constants :

 $=$  $= 0$

$$f_{i_0}^{j_1 k_1} = c_{i_0 j_0}^{k_1} = 0 \tag{2.4}$$

Those rules guarantee the fact that $\mathfrak{c}$ is a coisotropic subalgebra of $\mathfrak{g}$. Of course all the relations from (2.3a) to (2.3d) can be recompute using the rules (2.4). Let's first try to describe $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_2(\mathfrak{c})$. First, we want that $\Delta(\mathfrak{C}_2) \subset \mathfrak{C}_2 \otimes \mathcal{A}_2$.

$$\Delta(x_{i_0}) = x_{i_0} \otimes 1 + 1 \otimes x_{i_0} + \frac{\hbar}{2}\left(f_{i_0}^{j_0 k_0} x_{j_0} \otimes x_{k_0} + f_{i_0}^{j_0 k_1} x_{j_0} \otimes x_{k_1} + f_{i_0}^{j_1 k_0} x_{j_1} \otimes x_{k_0}\right) \mod \hbar^2 \tag{2.5}$$

only the last term is an obstruction to the fact that B_2 should be a left coideal. Therefore all we need to do is to modify B_2 in order for it to become a left coideal. An easy computation, give us that we should replace x_{i_0} with

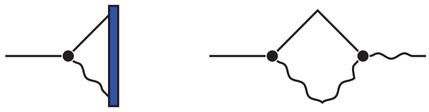
$$X_{i_0}^{(1)} = x_{i_0} - \frac{\hbar}{2}\left(f_{i_0}^{j_1 k_0}\{x_{j_1} x_{k_0}\} + a f_{i_0}^{j_1 k_0} c_{j_1 k_0}^{l_1} x_{l_1}\right). \tag{2.6}$$

One can also see a complex for this step of the deformation. In fact it is :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}) & \xrightarrow{d_1} & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C} \otimes \mathcal{A}) & \xrightarrow{d_2} & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \\ C & \mapsto & C \otimes 1 - \Delta(C) & & \\ & & D & \mapsto & D^{(1,2)} - D^{(12,3)} + D^{(1,23)}. \end{array} \tag{2.7}$$

It is in fact the quotient complex between the usual coalgebra complex of $\mathcal{A}$ and the coideal complex of $\mathfrak{C}$. We can give a degree to the complex, wich is the number of occurence of 'f' in the term which coincide with the degree of $\hbar$ as we choose the deformation to be homogeneous. We can compute this complex in low degree. In fact, for the second order we need to compute it in degree 1. An easy computation can show that the term in (2.5) is indeed a cocycle for this complex and that it is also a coboundary. In fact, we compute a basis for the subspace of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ generated by elements degree 1 :
A last computation give us the fact that :

$$d_1(f_{i_0}^{j_1 k_0}\{x_{j_1}, x_{k_0}\}) = -f_{i_0}^{j_1 k_0} x_{j_1} \otimes x_{k_0}$$
$$d_1(f_{i_0}^{j_1 k_0} c_{j_1 k_0}^{l_1} x_{l_1}) = 0$$



$$\left\{ f_{i_0}^{j_1 k_0}\{x_{j_1}, x_{k_0}\}, f_{i_0}^{j_1 k_0} c_{j_1 k_0}^{l_1} x_{l_1} \right\} \tag{2.8}$$

FIGURE IV.5 – Basis of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ in degree 1

After the completion of the first step of quantization, we then need to check the flatness of this quantization by using the formula (2.1). For that we need to compute $\left[X_{i_0}^{(1)}, X_{j_0}^{(1)}\right]$ for that we divide it in different parts :

$$\left[X_{i_0}^{(1)}, X_{j_0}^{(1)}\right] = \left[x_{i_0}, x_{j_0}\right] + \hbar\left(\left[X_{i_0}^{1}, x_{j_0}\right] + \left[x_{i_0}, X_{j_0}^{1}\right]\right)$$

We want $\mathfrak{C}$ to be a flat deformation of $\mathfrak{c}$, therefore we need to have for two elements, X, Y of $\mathfrak{C}$ that $\left[X, Y\right] \subset \mathfrak{C} + \hbar\mathfrak{C}$. This gives rise to a complex piloting the flatness of $\mathfrak{C}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\partial_1} & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\partial_2} & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}) \\ R & \mapsto & \mu_{\mathrm{m}} \circ (R \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes R) - R \circ \mu_{\mathrm{m}} & & \\ & & T & \mapsto & \mathrm{Alt}\, \mu_{\mathrm{m}}(\mathrm{Id} \otimes T) + \mathrm{Alt}\;\; T(\mathrm{Id} \otimes \mu_{\mathrm{m}}) \end{array} \tag{2.9}$$

where $\mu_{\mathrm{m}} = \mathrm{m} - \mathrm{m} \circ \beta$. The fact that we do not want to return to the previous step modifying the comultiplication mean that we will consider here only the coboundaries C that verifies $\mathrm{d}_1(C) = 0$. Just like the previous complex, we can give a notion of degree on this complex with the number of occurrence of 'f', which still coincide with the degree of $\hbar$ as our deformation is homogeneous. For the second order, we need to compute the terms of degree 1. An easy computation, give us a basis for the coboundary in $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$, which is $\left\{ f_{i_0}^{j_1 k_0} c_{j_1 k_0}^{l_1} x_{l_1} \right\}$. An easy computation, can show that

$$\begin{aligned} \partial_1(f_{-}^{j_1 k_0} c_{j_1 k_0}^{l_1} x_{l_1})(i_0, j_0) &= \left[f_{i_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 l_0}^{m_1} x_{m_1}, x_{j_0}\right] + \left[x_{i_0}, f_{j_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 l_0}^{m_1} x_{m_1}\right] - c_{i_0 j_0}^{w_0} f_{w_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 l_0}^{n_1} x_{n_1} \\ &= f_{i_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 l_0}^{m_1} c_{m_1 j_0}^{n_1} x_{n_1} + f_{j_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 l_0}^{m_1} c_{i_0 m_1}^{n_1} x_{n_1} - c_{i_0 j_0}^{w_0} f_{w_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 l_0}^{n_1} x_{n_1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

the dimension of the subspace of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ generated by the elements of degree 1 is 2. A direct computation, can show that there is no obstruction, for the flatness at this order. In fact, one as that

$$\begin{aligned} \left[X_{i_0}^{(1)}, X_{j_0}^{(1)}\right] &= c_{i_0 j_0}^{w_0} x_{w_0} + h\left(\left[X_{i_0}^{1}, x_{j_0}\right] + \left[x_{i_0}, X_{j_0}^{1}\right]\right) \\ &= c_{i_0 j_0}^{w_0} X_{w_0}^{(1)} + h\left(\left[X_{i_0}^{1}, x_{j_0}\right] + \left[x_{i_0}, X_{j_0}^{1}\right] - X_{w_0}^{1}\right) \end{aligned}$$

we can divide this calculus in two parts, one of which is exactly

$$(1) = \partial_1(f_{-}^{j_1 k_0} c_{j_1 k_0}^{l_1} x_{l_1})(i_0, j_0) + f_{i_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 l_0}^{m_1} c_{m_1 j_0}^{n_0} x_{n_0} + f_{j_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 l_0}^{m_1} c_{i_0 m_1}^{n_0} x_{n_0} \in B$$

which is not a obstruction and a second one which is

$$(2) = \left[f_{i_0}^{k_1 l_0}\{x_{k_1}, x_{l_0}\}, x_{j_0}\right] + \left[x_{i_0}, f_{j_0}^{k_1 l_0}\{x_{k_1}, x_{l_0}\}\right] - c_{i_0 j_0}^{w_0} f_{w_0}^{k_1 l_0}\{x_{k_1}, x_{l_0}\}$$

by a simple computation using the cocycle relation of

$$c_{i_0 j_0}^{w_0} f_{w_0}^{k_1 l_0} = c_{i_0 m_1}^{k_1} f_{j_0}^{m_1 l_0} + c_{j_0 m_0}^{l_0} f_{i_0}^{m_0 k_1} - c_{j_0 m_1}^{k_1} f_{i_0}^{m_1 l_0} - c_{i_0 m_0}^{l_0} f_{j_0}^{m_0 k_1} \tag{2.10}$$

we obtain that :

$$(2) = \left(f_{i_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 j_0}^{m_0} - f_{j_0}^{k_1 l_0} c_{k_1 i_0}^{m_0}\right)\{x_{m_0}, x_{l_0}\}$$

Therefore we have no obstruction to the quantization of the coisotropic subalgebra on the second order.

Theorem 2.1. *Every coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ of $\mathfrak{g}$ can be quantized modulo $\hbar^2$ by $\mathfrak{C}_2$ the subalgebra right coideal of $\mathcal{A}_2$ generated by :*

$$X_{i_0}^{(1)} = x_{i_0} - \frac{\hbar}{2}\left(f_{i_0}^{j_1 k_0}\{x_{j_1}, x_{k_0}\} + a f_{i_o}^{j_1 k_0} c_{j_1 k_0}^{l_1} x_{l_1}\right). \tag{2.11}$$

The first step of the quantization is easy but it must be done throughly as some of the computation done here will be important for the following step.

3 3rd order deformation

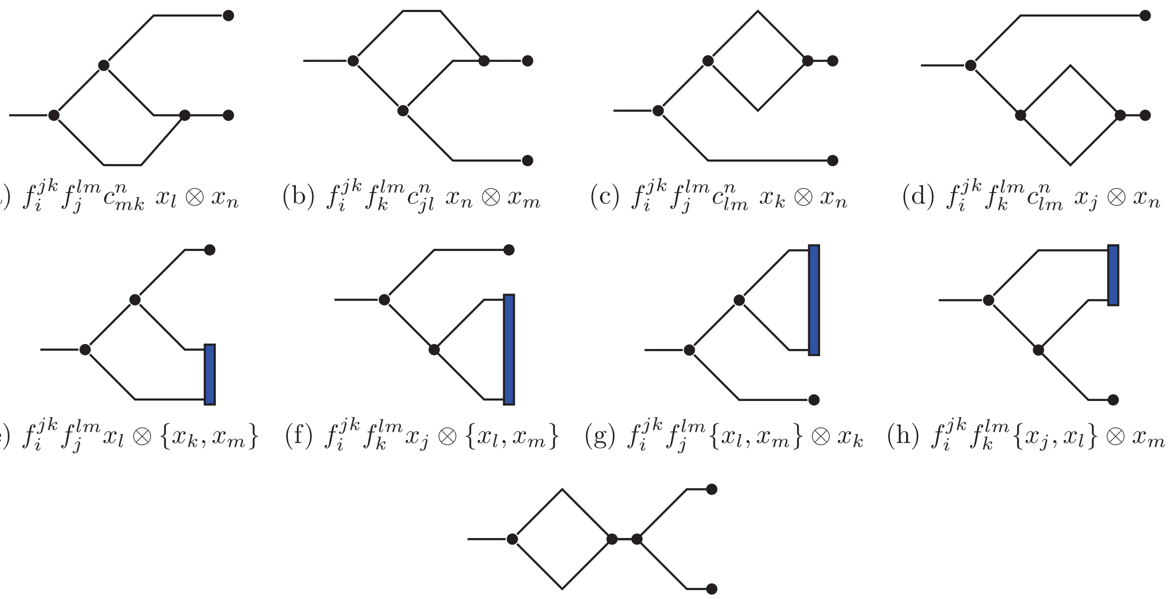
The aim is now to try extending this computation on higher orders. Using the previous formula for $X_{i_0}^{(1)}$ we are going to construction a quantization at the third order i.e. modulo $\hbar^3$. For that just like previously, we will first try to see the obstruction to make $\mathfrak{C}_3$ a left coideal and then in the next section,we will compute the obstruction for $\mathfrak{C}_3$ to be flat. We already know that it works modulo $\hbar^2$ therefore we only need to consider the term in $\hbar^2$ to make it work modulo $\hbar^3$. Let's first recall the result, that we obtain modulo $\hbar^2$ to see the correction term.

$$\begin{aligned}
\Delta(X_{i_0}^{(1)}) &= \Delta^0(X_{i_0}^{(1)}) + \hbar\left(f_{i_0}^{j_0 k_1} x_{j_0} \otimes x_{k_1} + \frac{1}{2} f_{i_0}^{j_0 k_0} x_{j_0} \otimes x_{k_0}\right) \\
&= \Delta^0(X_{i_0}^{(1)}) + \hbar\left(f_{i_0}^{j_0 k_1} X_{j_0}^{(1)} \otimes x_{k_1} + \frac{1}{2} f_{i_0}^{j_0 k_0} X_{j_0}^{(1)} \otimes x_{k_0}\right) \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{2}\left(f_{i_0}^{j_0 k_1} f_{j_0}^{l_0 m_1}\{x_{l_0}, x_{m_1}\} \otimes x_{k_1} + \frac{1}{2} f_{i_0}^{j_0 k_0} f_{j_0}^{l_0 m_1}\{x_{l_0}, x_{m_1}\} \otimes x_{k_0}\right) && (3.1) \\
&\quad + \frac{a\hbar^2}{2}\left(f_{i_0}^{j_0 k_1} f_{j_0}^{l_1 m_0} c_{l_1 m_0}^{n_1} x_{n_1} \otimes x_{k_1} + \frac{1}{2} f_{i_0}^{j_0 k_0} f_{j_0}^{l_1 m_0} c_{l_1 m_0}^{n_1} x_{n_1} \otimes x_{k_0}\right) && (3.2)
\end{aligned}$$

We will call the last two terms, the correction terms, let's denote the first one $C_{\hbar^2} = (3.1)$ and the second one $Ca_{\hbar^2} = (3.2)$. We will now make a list of all the terms in $\hbar^2$.

$$\begin{aligned}
\Delta^2(x_{i_0}) &= -\frac{\hbar^2}{12} f_{i_0}^{jk} f_j^{lm} \left(\{x_k, x_l\} \otimes x_m + x_m \otimes \{x_k, x_l\}\right) && \text{(3.3a)}\\
\Delta^1(X_{i_0}^1) &= \quad \frac{\hbar^2}{4} f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{lm} \left(\{x_{k_1}, x_l\} \otimes x_m - x_m \otimes \{x_{k_1}, x_l\}\right) && \text{(3.3b)}\\
&\quad - \frac{\hbar^2}{4} f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{lm} \left(\{x_{k_0}, x_l\} \otimes x_m - x_m \otimes \{x_{k_0}, x_l\}\right) && \text{(3.3c)}\\
&\quad + \frac{a\hbar^2}{4} f_{i_0}^{j_1k_0} c_{j_1k_0}^{l_1} f_{l_1}^{mn} x_m \otimes x_n && \text{(3.3d)}
\end{aligned}$$

We need for the previous term to develop the equalities by using the rule set for the constant structures (2.4). We will reorder the terms in the equations in order to write them in a basis of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}\otimes\mathcal{A})$. Let's find a family of generators of $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$ and then perturbate the elements to obtain a basis of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C} \otimes \mathcal{A})$.



(a) $f_i^{jk} f_j^{lm} c_{mk}^n\, x_l \otimes x_n$ (b) $f_i^{jk} f_k^{lm} c_{jl}^n\, x_n \otimes x_m$ (c) $f_i^{jk} f_j^{lm} c_{lm}^n\, x_k \otimes x_n$ (d) $f_i^{jk} f_k^{lm} c_{lm}^n\, x_j \otimes x_n$

(e) $f_i^{jk} f_j^{lm} x_l \otimes \{x_k, x_m\}$ (f) $f_i^{jk} f_k^{lm} x_j \otimes \{x_l, x_m\}$ (g) $f_i^{jk} f_j^{lm} \{x_l, x_m\} \otimes x_k$ (h) $f_i^{jk} f_k^{lm} \{x_j, x_l\} \otimes x_m$

(i) $f_i^{jk} c_{jk}^l f_l^{mn} x_m \otimes x_n$

FIGURE IV.6 – List of the generators of $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ of degree 2.

To compute a basis, one need first to explicit all the different elements in this basis by using the rule set for the constant structures (2.4). And then to compute the different relation that are present between them, i.e. the cocycle relation and the jacobi relation.The space, generated by the elements of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}\otimes\mathcal{A})$ of degree 2 in $\hbar$, is of dimension 25. We can see that the elements (f) and (g) of Figure IV.6 are zero in $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ as $f_i^{jk}\{x_j, x_k\} = 0$, but this is not the case in $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C} \otimes \mathcal{A})$. Let's first consider the terms of the form

$\{x_k, x_l\} \otimes x_m$ or its symmetric. We will divide them by the number of appearance of elements in our coisotropic subalgebra $\mathfrak{C}$. We first have the ones where there is only elements of $\mathfrak{C}$:

terms with 3 occurrences of $\mathfrak{C}$	coefficient	obstruction
$f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_0m_0} \{x_{k_0}, x_{l_0}\} \otimes x_{m_0}$	$(3.3a) = -\frac{\hbar^2}{12}$	*no*
$f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_0m_0} x_{m_0} \otimes \{x_{k_0}, x_{l_0}\}$	$(3.3a) = -\frac{\hbar^2}{12}$	*no*
$f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_0m_0} \{x_{k_0}, x_{l_0}\} \otimes x_{m_0}$	$(3.3a) + (3.3c) = -\frac{\hbar^2}{3}$	*no*
$f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_0m_0} x_{m_0} \otimes \{x_{k_0}, x_{l_0}\}$	$(3.3a) + (3.3c) = \frac{\hbar^2}{6}$	*no*

of course those will not give rise to any obstruction as we only have elements that belong to $\mathfrak{C}$. We then have to check those with 2 elements in $\mathfrak{C}$ and the other in $\mathcal{A}/\mathfrak{C}$.

terms with 2 occurrences of $\mathfrak{C}$	coefficient	obstruction
$f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_1m_0} \{x_{k_0}, x_{l_1}\} \otimes x_{m_0}$	$(3.3a) = -\frac{\hbar^2}{12}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_1m_0} x_{m_0} \otimes \{x_{k_0}, x_{l_1}\}$	$(3.3a) = -\frac{\hbar^2}{12}$	*no*
$f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_1m_0} \{x_{m_0}, x_{l_1}\} \otimes x_{k_0}$	$(3.1) = \frac{\hbar^2}{4}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_0m_1} \{x_{k_0}, x_{l_0}\} \otimes x_{m_1}$	$(3.3a) = -\frac{\hbar^2}{12}$	*no*
$f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_0m_1} x_{m_1} \otimes \{x_{k_0}, x_{l_0}\}$	$(3.3a) = -\frac{\hbar^2}{12}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_0m_0} \{x_{k_1}, x_{l_0}\} \otimes x_{m_0}$	$(3.3a) + (3.3b) = \frac{\hbar^2}{6}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_0m_0} x_{m_0} \otimes \{x_{k_1}, x_{l_0}\}$	$(3.3a) + (3.3b) = -\frac{\hbar^2}{3}$	*no*
$f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_1m_0} \{x_{k_0}, x_{l_1}\} \otimes x_{m_0}$	$(3.3a) + (3.3c) = -\frac{\hbar^2}{3}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_1m_0} x_{m_0} \otimes \{x_{k_0}, x_{l_1}\}$	$(3.3a) + (3.3c) = \frac{\hbar^2}{6}$	*no*
$f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_0m_1} \{x_{k_0}, x_{l_0}\} \otimes x_{m_1}$	$(3.3a) + (3.3c) = -\frac{\hbar^2}{3}$	*no*
$f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_0m_1} x_{m_1} \otimes \{x_{k_0}, x_{l_0}\}$	$(3.3a) + (3.3c) = \frac{\hbar^2}{6}$	*yes*

By using the cojacobi relation, a simple computation give us that D_1 the sum of all the obstruction terms with two occurences of $\mathfrak{C}$ is :

$$D_1 = \left(\frac{\hbar^2}{12} f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_1m_0} - \frac{\hbar^2}{6} f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_1m_0}\right)\left(\{x_{k_0}, x_{l_1}\} \otimes x_{m_0} + \{x_{m_0}, x_{l_1}\} \otimes x_{k_0} + x_{l_1} \otimes \{x_{k_0}, x_{m_0}\}\right)$$

Finally, we consider the term with only one occurrence of $\mathfrak{C}$.

terms with 1 occurrence of $\mathfrak{C}$	coefficient	obstruction
$f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_1m_0} \{x_{k_1}, x_{l_1}\} \otimes x_{m_0}$	$(3.3a) + (3.3b) = \frac{\hbar^2}{6}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_1m_0} x_{m_0} \otimes \{x_{k_1}, x_{l_1}\}$	$(3.3a) + (3.3b) = -\frac{\hbar^2}{3}$	*no*
$f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_1m_0} \{x_{l_1}, x_{m_0}\} \otimes x_{k_1}$	$(3.1) = \frac{\hbar^2}{2}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_0m_1} \{x_{k_1}, x_{l_0}\} \otimes x_{m_1}$	$(3.3a) + (3.3b) = \frac{\hbar^2}{6}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_0m_1} x_{m_1} \otimes \{x_{k_1}, x_{l_0}\}$	$(3.3a) + (3.3b) = -\frac{\hbar^2}{3}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_1m_1} \{x_{k_0}, x_{l_1}\} \otimes x_{m_1}$	$(3.3a) + (3.3c) = -\frac{\hbar^2}{3}$	*yes*
$f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_1m_1} x_{m_1} \otimes \{x_{k_0}, x_{l_1}\}$	$(3.3a) + (3.3c) = \frac{\hbar^2}{6}$	*yes*

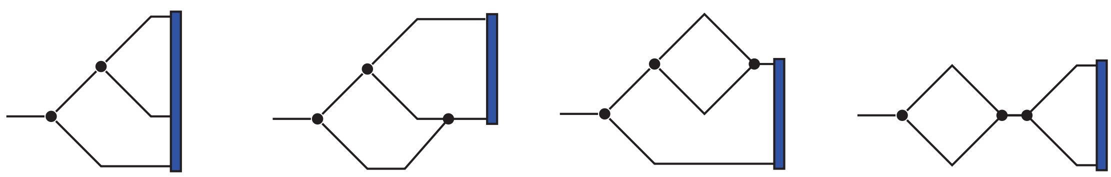
By using the cojacobi relation, a simple computation give us that D_2 the sum of all the obstruction terms with one occurence of $\mathfrak{C}$ is :

$$D_2 = \frac{\hbar^2}{6} f^{j_0 k_1}_{i_0} f^{l_1 m_0}_{j_0} \Big(\{x_{k_1}, x_{l_1}\} \otimes x_{m_0} + \{x_{l_1}, x_{m_0}\} \otimes x_{k_1} + \{x_{k_1}, x_{m_0}\} \otimes x_{l_1} + x_{k_1} \otimes \{x_{l_1}, x_{m_0}\} + x_{l_1} \otimes \{x_{k_1}, x_{m_0}\} \Big) \tag{3.4}$$

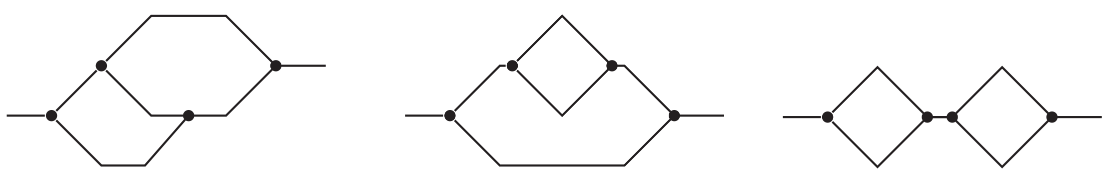
Finally we have the terms that come with the coefficient a. By using the cocyle and the cojacobi relations, and changing the indices, one can find that D_a the sum of all the obstruction terms is :

$$D_a = (3.2) + (3.3d) = \frac{a\hbar^2}{4} f^{j_0 k_1}_{i_0} f^{l_1 m_0}_{j_0} c^{n_1}_{l_1 m_0} (x_{k_1} \otimes x_{n_1} + x_{n_1} \otimes x_{k_1}) + \frac{a\hbar^2}{4} f^{j_1 k_0}_{i_0} c^{l_1}_{j_1 k_0} f^{m_1 n_0}_{l_1} x_{m_1} \otimes x_{n_0} + \frac{a\hbar^2}{4} f^{j_0 n_0}_{i_0} f^{k_1 l_0}_{j_0} c^{m_1}_{k_1 l_0} x_{m_1} \otimes x_{n_0} \tag{3.5}$$

Let's compute a basis for $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ in degree 2. This will help us to find out if D_1, D_2 and D_a are coboundaries. One can find that a such basis will be of the form



(a) $f^{jk}_i f^{lm}_j \{x_k, x_l, x_m\}$ (b) $f^{jk}_i f^{lm}_j c^n_{mk} \{x_l, x_n\}$ (c) $f^{jk}_i f^{lm}_j c^n_{lm} \{x_k, x_n\}$ (d) $f^{jk}_i c^l_{jk} f^{mn}_l \{x_m, x_n\}$



(e) $f^{jk}_i f^{lm}_j c^n_{mk} c^p_{ln} x_p$ (f) $f^{jk}_i f^{lm}_j c^n_{lm} c^p_{kn} x_p$ (g) $f^{jk}_i c^l_{jk} f^{mn}_l c^p_{mn} x_p$

Figure IV.7 – List of the generators of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ of degree 2.

In order to have a complete basis, we just need to compute the different possibilities for each branches to be perturbated or not. And by implementing the different relation, one can find that the dimension of the space generated by the elements in $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ of degree 2 in $\hbar$ is 24. We have 3 generators of the form (a), 12 of the form (b), (c), (d) and 9 of the form (e), (f), (g). An easy computation can show that D_1, D_2 and D_a are cocycles in the complex that we consider, and by using the previous basis, we can find that they are coboundary. let's denote C_1, C_2, C_3 the following elements of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ of degree 2 :

$$C_1 = \frac{\hbar^2}{12}\left[f_{i_0}^{j_0k_0} f_{j_0}^{l_1m_0} - 2f_{i_0}^{j_1k_0} f_{j_1}^{l_1m_0}\right]\{x_{k_0}, x_{l_1}, x_{m_0}\} \tag{3.6}$$

$$C_2 = \frac{\hbar^2}{6} f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_1m_0}\{x_{k_1}, x_{l_1}, x_{m_0}\} \tag{3.7}$$

$$C_a = \frac{a\hbar^2}{4}\left(f_{i_0}^{j_0k_1} f_{j_0}^{l_1m_0} c_{l_1m_0}^{n_1}\{x_{k_1}, x_{n_1}\} + \left[f_{i_0}^{j_1k_0} c_{j_1k_0}^{l_1} f_{l_1}^{m_1n_0} + f_{i_0}^{j_0n_0} f_{j_0}^{k_1l_0} c_{k_1l_0}^{m_1}\right]\{x_{m_1}, x_{n_0}\}\right) \tag{3.8}$$

$$\Delta(C_i) = D_i + 1 \otimes C_i + C_i \otimes 1 \quad i \in \{1, 2, a\}$$

Therefore it is possible to extend the coideal structure to the 3rd order. And to do that we need to take :

$$X_{i_0}^{(2)} = X_{i_0}^{(1)} - C_1 - C_2 - C_a \tag{3.9}$$

It is also possible to add all the previous primitive elements of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$, these being the elements of type (e), (f) and (g) in Figure IV.7.

Theorem 3.1. *The algebra $\mathfrak{C}_3$ generated by*

$$X_{i_0}^{(2)} = X_{i_0}^{(1)} - C_1 - C_2 - C_a \tag{3.10}$$

is a subalgebra left coideal of $\mathcal{A}$.

We now need to check the flatness of this deformation just like in the previous order, we will use the formula (2.1). We therefore need to compute $\left[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\right]$ at the order $\hbar^2$. For that we will divide it in different parts.

$$\left[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\right]^{(2)} = \left[x_{a_0}, X_{b_0}^2\right] + \left[X_{a_0}^2, x_{b_0}\right] + \left[x_{a_0}, x_{b_0}\right]^2 + D_{\hbar^2} \tag{3.11}$$

where $D_{\hbar^2}$ is the correction term that we have by using the previous step in the quantification. Let's recall that :

$$\begin{aligned}\left[X_{a_0}^{(1)}, X_{b_0}^{(1)}\right] &= c_{a_0b_0}^{w_0} X_{w_0}^{(1)} - \frac{\hbar}{2}\left(f_{a_0}^{c_1d_0} c_{c_1b_0}^{e_0} - f_{b_0}^{c_1d_0} c_{c_1a_0}^{e_0}\right)\{x_{d_0}, x_{e_0}\} && \mod \hbar^2 \\ &= c_{a_0b_0}^{w_0} X_{w_0}^{(2)} - \frac{\hbar}{2}\left(f_{a_0}^{c_1d_0} c_{c_1b_0}^{e_0} - f_{b_0}^{c_1d_0} c_{c_1a_0}^{e_0}\right)\{X_{d_0}^{(1)}, X_{e_0}^{(1)}\} + D_{\hbar^2} && \mod \hbar^3 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Therefore

$$D_{\hbar^2} = -c_{a_0b_0}^{w_0} X_{w_0}^2 + \frac{\hbar}{2}\left(f_{a_0}^{c_1d_0} c_{c_1b_0}^{e_0} - f_{b_0}^{c_1d_0} c_{c_1a_0}^{e_0}\right)\Big(\{X_{d_0}^1, x_{e_0}\} + \{x_{d_0}, X_{e_0}^1\}\Big) + \left[X_{a_0}^1, X_{b_0}^1\right] \tag{3.13}$$

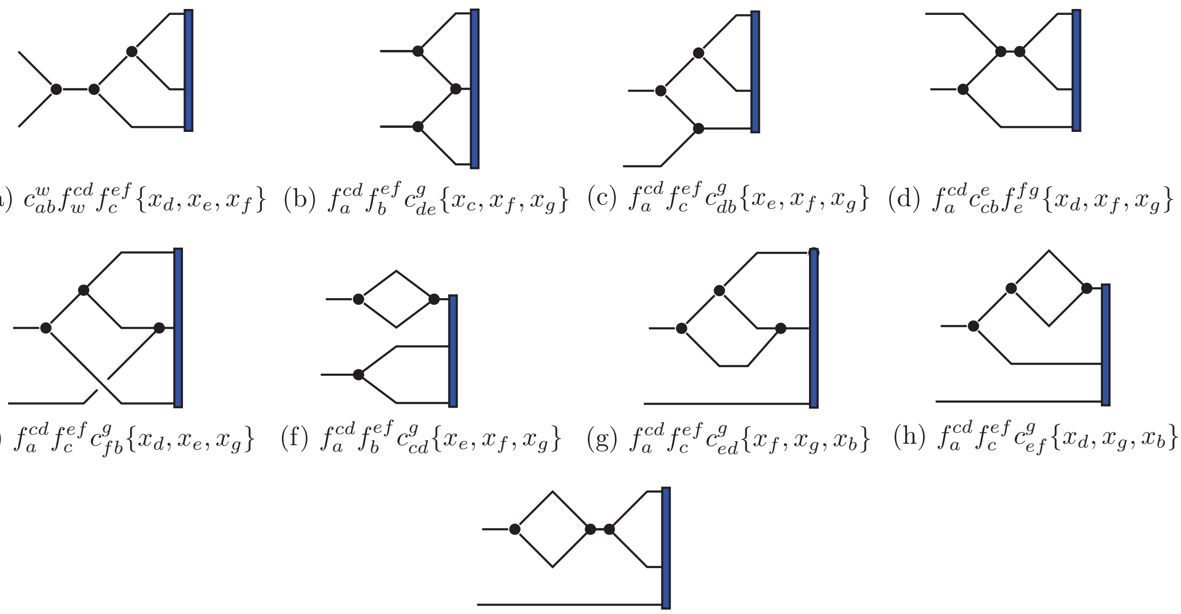
We can divide $\left[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\right]^{(2)}$ into three parts, one with the symmetric product of three elements, an another with the symmetric product of two elements and a last one with only primitive elements. To do that we use the fact that $\mathrm{T}^3(\mathfrak{g})$ is generated by :

$$\forall a, b, c \in \mathfrak{g} \quad \{a, b, c\},\ \{a, [b, c]\},\ \{b, [c, a]\},\ \{c, [a, b]\},\ [a, [b, c]],\ [b, [c, a]]. \tag{3.14}$$

And the following relation :

$$\{\{a,b\},c\} = \{a,b,c\} + \frac{1}{12}\big[a,\big[b,c\big]\big] + \frac{1}{12}\big[b,\big[a,c\big]\big] \tag{3.15}$$

The same can be done with all the other elements $\big[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\big]^{(2)}$. We will now proceed by computing a basis for the subspaces of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ generated respectively by the elements of degree 2 which are symmetric product of three elements, symmetric products of two elements and finally primitive elements. Let's begin with the symmetric product of three elements :



(a) $c_{ab}^{w} f_w^{cd} f_c^{ef}\{x_d, x_e, x_f\}$ (b) $f_a^{cd} f_b^{ef} c_{de}^{g}\{x_c, x_f, x_g\}$ (c) $f_a^{cd} f_c^{ef} c_{db}^{g}\{x_e, x_f, x_g\}$ (d) $f_a^{cd} c_{cb}^{e} f_e^{fg}\{x_d, x_f, x_g\}$

(e) $f_a^{cd} f_c^{ef} c_{fb}^{g}\{x_d, x_e, x_g\}$ (f) $f_a^{cd} f_b^{ef} c_{cd}^{g}\{x_e, x_f, x_g\}$ (g) $f_a^{cd} f_c^{ef} c_{ed}^{g}\{x_f, x_g, x_b\}$ (h) $f_a^{cd} f_c^{ef} c_{ef}^{g}\{x_d, x_g, x_b\}$

(i) $f_a^{cd} c_{cd}^{e} f_e^{fg}\{x_f, x_g, x_b\}$

FIGURE IV.8 – List of the generators of $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}, \mathcal{A}^3)$ of degree 2.

Just like before, we compute the different ways of perturbing those graphs and by using the relation of cojacobi and cocycle, we find a basis for this space, we can also note that a lot of the generator written are zero if we do not perturbate them. In fact (a), (c), (d), (f) and (i) are zero. We can find the relations :
The cocyle relations :

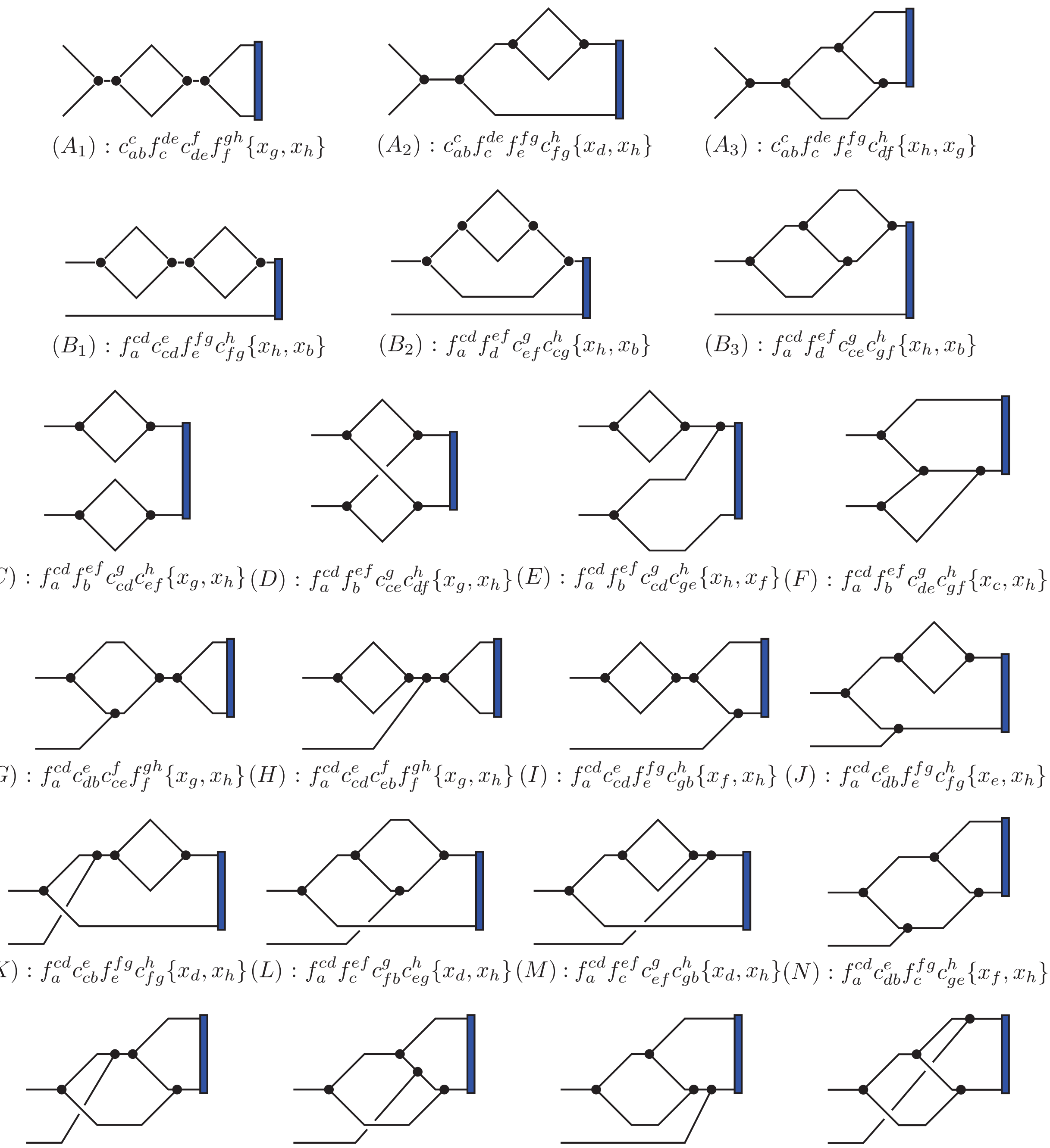
$$a = 2c + 2d; \qquad d = b - b + e - e = 0; \qquad i = 2g - 2g = 0;$$

The cojacobi relations :

$$c = e - e; \qquad h = 2g;$$

In the end we can find that the dimension of the subspace of $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C}\wedge\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$ generated by the element of degree and which are the symmetric product of 3 elements is 33 (18 of type (a), (b), (c), (d) and (e), 3 of type (f) and 12 of type (g), (h) and (i)). Then by writing all the terms from $\left[X^{(2)}_{a_0}, X^{(2)}_{b_0}\right]^{(2)}$ which are of the form $\{x_a, x_b, x_c\}$, we find that this term $\left[X^{(2)}_{a_0}, X^{(2)}_{b_0}\right]^{(2)}_{S3}$ is zero.

We then proceed with the elements composed of symmetric product of two elements.



$(A_1) : c^c_{ab} f^{de}_c c^f_{de} f^{gh}_f \{x_g, x_h\}$ $(A_2) : c^c_{ab} f^{de}_c f^{fg}_e c^h_{fg} \{x_d, x_h\}$ $(A_3) : c^c_{ab} f^{de}_c f^{fg}_e c^h_{df} \{x_h, x_g\}$

$(B_1) : f^{cd}_a c^e_{cd} f^{fg}_e c^h_{fg} \{x_h, x_b\}$ $(B_2) : f^{cd}_a f^{ef}_d c^g_{ef} c^h_{cg} \{x_h, x_b\}$ $(B_3) : f^{cd}_a f^{ef}_d c^g_{ce} c^h_{gf} \{x_h, x_b\}$

$(C) : f^{cd}_a f^{ef}_b c^g_{cd} c^h_{ef} \{x_g, x_h\}$ $(D) : f^{cd}_a f^{ef}_b c^g_{ce} c^h_{df} \{x_g, x_h\}$ $(E) : f^{cd}_a f^{ef}_b c^g_{cd} c^h_{ge} \{x_h, x_f\}$ $(F) : f^{cd}_a f^{ef}_b c^g_{de} c^h_{gf} \{x_c, x_h\}$

$(G) : f^{cd}_a c^e_{db} c^f_{ce} f^{gh}_f \{x_g, x_h\}$ $(H) : f^{cd}_a c^e_{cd} c^f_{eb} f^{gh}_f \{x_g, x_h\}$ $(I) : f^{cd}_a c^e_{cd} f^{fg}_e c^h_{gb} \{x_f, x_h\}$ $(J) : f^{cd}_a c^e_{db} f^{fg}_e c^h_{fg} \{x_e, x_h\}$

$(K) : f^{cd}_a c^e_{cb} f^{fg}_e c^h_{fg} \{x_d, x_h\}$ $(L) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{fb} c^h_{eg} \{x_d, x_h\}$ $(M) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{ef} c^h_{gb} \{x_d, x_h\}$ $(N) : f^{cd}_a c^e_{db} f^{fg}_c c^h_{ge} \{x_f, x_h\}$

$(O) : f^{cd}_a c^e_{cb} f^{fg}_e c^h_{gd} \{x_f, x_h\}$ $(P) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{fb} c^h_{gd} \{x_e, x_h\}$ $(Q) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{fd} c^h_{gb} \{x_e, x_h\}$ $(R) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{eb} c^h_{fd} \{x_g, x_h\}$

FIGURE IV.9 – List of the generators of $\mathrm{Hom}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \mathcal{A}^2)$ of degree 2.

By taking all the possible perturbations and computing all the relation, we can find a basis for this space. We can find the following relations :
The cocycle relations :

$$\begin{array}{lll} A_1 = 2A3 - 2A3 = 0 & A_1 = 4G & A_2 = 2(J+K) \\ A_3 = 2N + 2O & B_1 = 4B_3 & G = N - N + O - O = 0 \\ H = E - E + I - I = 0 & I = 2(Q-R) & K = 2(-F+L) \\ O = -D + F + P + R & & \end{array}$$

The coJacobi relations

$$\begin{array}{lll} A_2 = -2A_3 & B_2 = 2B_3 & J = -2R \\ L = -P - N & M = -2Q & \end{array}$$

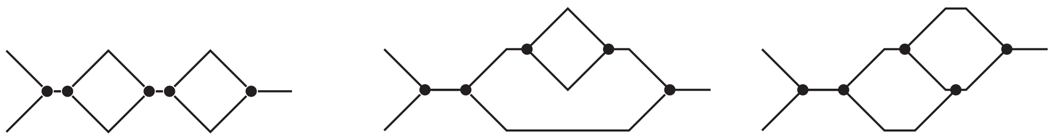
The Jacobi relations :

$$\begin{array}{lll} B_2 = 2B_3 & M = 2L & Q = N + P \\ E = 2F & H = 2G & \end{array}$$

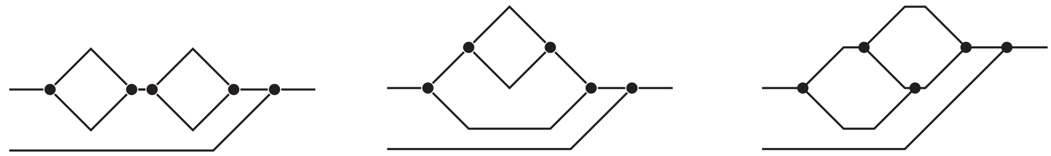
We find that the space is of dimension 76. Then by writing all the terms from $\big[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\big]^{(2)}$ which are of the form $\{x_a, x_b\}$, we find that this term $\big[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\big]_{S2}^{(2)}$ is also zero. Before computing the last part, let's first write down$\big[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\big]_{S2}^{(2)}$ and $\big[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\big]_{S3}^{(2)}$ to see what is left in the end. Recall that $X_{a_0}^2 = -C_{1,a_0} - C_{2,a_0} - C_{a,a_0}$

$$\begin{aligned} \big[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\big]_{S3}^{(2)} &= \big[C_{1,b_0} + C_{2,b_0}, x_{a_0}\big] + \big[, x_{b_0}, C_{1,a_0} + C_{2,a_0}\big] + \big[x_{a_0}, x_{b_0}\big]^2 + c_{a_0 b_0}^{w_0}\left(C_{1,w_0} + C_{2,w_0}\right) \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{4}\left(f_{a_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 b_0}^{e_0} - f_{b_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 a_0}^{e_0}\right)\Big(f_{d_0}^{f_1 g_0}\{x_{f_1}, x_{g_0}, x_{e_0}\} + f_{e_0}^{f_1 g_0}\{x_{d_0}, x_{f_1}, x_{g_0}\}\Big) \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{4} f_{a_0}^{c_1 d_0} f_{b_0}^{e_1 f_0}\Big(c_{c_1 e_1}^{g_1}\{x_{d_0}, x_{f_0}, x_{g_1}\} + c_{c_1 f_0}^{g}\{x_{d_0}, x_{e_1}, x_g\} \\ &\qquad + c_{d_0 e_1}^{g}\{x_{c_1}, x_{f_0}, x_g\} + c_{d_0 f_0}^{g_0}\{x_{c_1}, x_{e_1}, x_{g_0}\}\Big) \\ &= 0 \\ \big[X_{a_0}^{(2)}, X_{b_0}^{(2)}\big]_{S2}^{(2)} &= \big[C_{a,b_0}, x_{a_0}\big] + \big[x_{b_0}, C_{a,a_0}\big] + \big[x_{a_0}, x_{b_0}\big]^2 + c_{a_0 b_0}^{w_0}\left(C_{a,w_0}\right) \\ &\quad - \frac{a\hbar^2}{4}\left(f_{a_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 b_0}^{e_0} - f_{b_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 a_0}^{e_0}\right)\Big(f_{d_0}^{f_1 g_0} c_{f_1 g_0}^{h_1}\{x_{h_1}, x_{e_0}\} + f_{e_0}^{f_1 g_0} c_{f_1 g_0}^{h_1}\{x_{d_0}, x_{h_1}\}\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

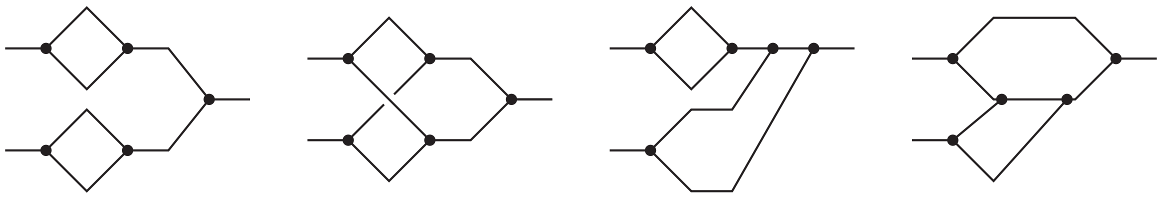
Let's now proceed with the primitives elements. We give a list of the generators, without the perturbation.



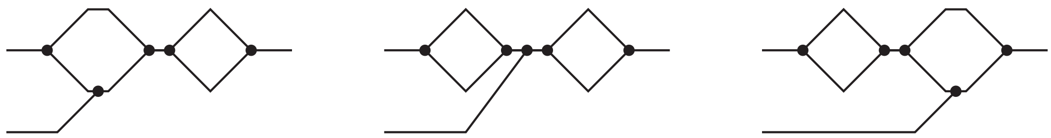
$(A_1) : c^c_{ab} f^{de}_c c^f_{de} f^{gh}_f c^i_{gh} x_i$ $(A_2) : c^c_{ab} f^{de}_c f^{fg}_e c^h_{fg} c^i_{dh} x_i$ $(A_3) : c^c_{ab} f^{de}_c f^{fg}_e c^h_{df} c^i_{hg} x_i$



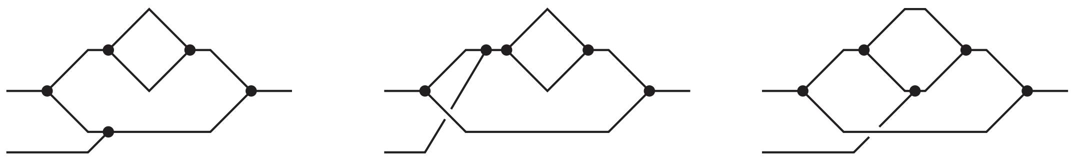
$(B_1) : f^{cd}_a c^e_{cd} f^{fg}_e c^h_{fg} c^i_{hb} x_i$ $(B_2) : f^{cd}_a f^{ef}_d c^g_{ef} c^h_{cg} c^i_{hb} x_i$ $(B_3) : f^{cd}_a f^{ef}_d c^g_{ce} c^h_{gf} c^i_{hb} x_i$



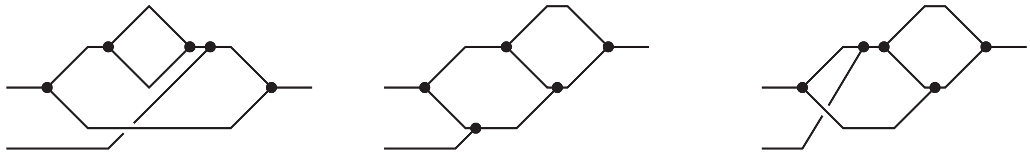
$(C) : f^{cd}_a f^{ef}_b c^g_{cd} c^h_{ef} c^i_{gh} x_i$ $(D) : f^{cd}_a f^{ef}_b c^g_{ce} c^h_{df} c^i_{gh} x_i$ $(E) : f^{cd}_a f^{ef}_b c^g_{cd} c^h_{ge} c^i_{hf} x_i$ $(F) : f^{cd}_a f^{ef}_b c^g_{de} c^h_{gf} c^i_{ch} x_i$



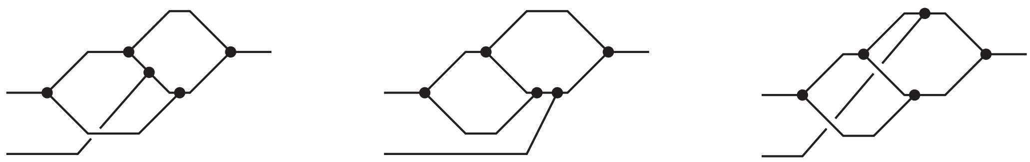
$(G) : f^{cd}_a c^e_{db} c^f_{ce} f^{gh}_f c^i_{gh} x_i$ $(H) : f^{cd}_a c^e_{cd} c^f_{eb} f^{gh}_f c^i_{gh} x_i$ $(I) : f^{cd}_a c^e_{cd} f^{fg}_e c^h_{gb} c^i_{fh} x_i$



$(J) : f^{cd}_a c^e_{db} f^{fg}_e c^h_{fg} c^i_{he} x_i$ $(K) : f^{cd}_a c^e_{cb} f^{fg}_e c^h_{fg} c^i_{hd} x_i$ $(L) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{fb} c^h_{eg} c^i_{hd} x_i$



$(M) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{ef} c^h_{gb} c^i_{hd} x_i$ $(N) : f^{cd}_a c^e_{db} f^{fg}_c c^h_{ge} c^i_{fh} x_i$ $(O) : f^{cd}_a c^e_{cb} f^{fg}_e c^h_{gd} c^i_{fh} x_i$



$(P) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{fb} c^h_{gd} c^i_{eh} x_i$ $(Q) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{fd} c^h_{gb} c^i_{eh} x_i$ $(R) : f^{cd}_a f^{ef}_c c^g_{eb} c^h_{fd} c^i_{gh} x_i$

FIGURE IV.10 – List of the generators of $\mathrm{Hom}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \mathcal{A})$ of degree 2.

We take all the generators on the previous page, with all the possible perturbation of the edges. And we inject all the relations between the generators.

The cocycle relations :

$$\begin{array}{lll} A_1 = 4A_3 & A_1 = 4G & A_2 = 2(J+K) \\ A_3 = 2N + 2O & B_1 = 4B_3 & G = 2(N+O) \\ H = 2(E+I) & I = 2(Q+R) & K = 2(F+L) \\ O = D + F + P + R & & \end{array}$$

The coJacobi relations :

$$\begin{array}{lll} A_2 = 2A_3 & B_2 = 2B_3 & J = 2R \\ L = P + N & M = 2Q & \end{array}$$

The Jacobi relations :

$$\begin{array}{lll} B_2 = 2B_3 & E = 2F & H = 2G \\ M = 2L & Q = N + P & A_2 = 2A_3 \\ B_1 = 2I & C = 2E & B_2 = J + M \\ B_3 = Q + R & D = F - F = 0 & J = 2N \\ K = 2O & L = P + R & \end{array}$$

Now that we have a basis, we can check whether the part of $\left[X_a^{(2)}, X_b^{(2)}\right]^{(2)}$ which is composed of primitive elements is a coboundary or not. We know that this term is a cocylce in $\mathrm{Hom}(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C})$, by definition, as we have that $\left[X_a^{(2)}, X_b^{(2)}\right]^{(2)}$ is a cocycle. Also by using the basis, we can prove that $\mathrm{Obs} = \left[X_a^{(2)}, X_b^{(2)}\right]_{S1}^{(2)}$ is not a coboundary. And therefore it is an obstruction to the quantification of $\mathfrak{c}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Obs} = &- \frac{\hbar^2}{48}\left(f_{a_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 b_0}^{e_0} f_{d_0}^{f_1 g_0} - f_{b_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 a_0}^{e_0} f_{d_0}^{f_1 g_0}\right)\left(c_{g_0 e_0}^{h_0} c_{f_1 h_0}^{i_1} + c_{f_1 e_0}^{h_1} c_{g_0 h_1}^{i_1}\right) x_{i_1} \\ &- \frac{\hbar^2}{48}\left(f_{a_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 b_0}^{e_0} f_{e_0}^{f_1 g_0} - f_{b_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 a_0}^{e_0} f_{e_0}^{f_1 g_0}\right)\left(c_{g_0 d_0}^{h_0} c_{f_1 h_0}^{i_1} + c_{f_1 d_0}^{h_1} c_{g_0 h_1}^{i_1}\right) x_{i_1} \\ &+ \frac{\hbar^2}{48}\left(f_{a_0}^{c_1 d_0} f_{b_0}^{e_1 f_0}\right)\left(c_{c_1 e_1}^{g_1} c_{d_0 g_1}^{h_1} c_{f_0 h_1}^{i_1} + c_{c_1 f_0}^{g} c_{d_0 g}^{h} c_{e_1 h}^{i_1} + c_{d_0 e_1}^{g} c_{c_1 g}^{h_1} c_{f_0 h_1}^{i_1} + c_{d_0 f_0}^{g_0} c_{c_1 g_0}^{h} c_{e_1 h}^{i_1}\right) x_{i_1} \\ &+ \frac{(a\hbar)^2}{4} f_{a_0}^{c_1 d_0} c_{c_0 d_1}^{e_1} f_{b_0}^{f_1 g_0} c_{f_1 g_0}^{h_1} c_{e_1 h_1}^{i_1} x_{i_1} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Theorem 3.2. *There exist a non trivial obstruction to the quantification of coisotropic subalgebra up to the third order which lives in :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}, \mathcal{A}/\mathfrak{C}) \\ R & \mapsto & \mu \circ (R \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes R) - R \circ \mu & & \\ & & T & \mapsto & \mathrm{Alt}\, \mu(\mathrm{Id} \otimes T) + \mathrm{Alt}\ T(\mathrm{Id} \otimes \mu) \end{array}$$

This obstruction is the cocyle Obs.

4 Conclusion and the simple case

In this last section, we will discuss a little the obstruction that we found and see why the semi-simple case works. First, let's see why the simple case works. We will recall some basic knowledge about semi-simple Lie algebras. This can be found in the Chapter 3. We first consider the Cartan matrix of the lie algebra $\mathfrak{g}$. For example the cartan matrix of G_2 is :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ be the simple roots of $\mathfrak{g}$. Then there exist a set $\{e_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}, f_{\alpha_i}\}_{1\leq i\leq n}$ which generate $\mathfrak{g}$ as a Lie algebra. As a matter of fact, we also have that there exist a set $\{e_\beta, h_\beta, f_\beta\}_{\beta\in R^+}$ which is a basis of $\mathfrak{g}$ where R^+ are the positive roots of $\mathfrak{g}$. From this we have the following property :

Properties 4.1. *let β and γ be two positive roots of $\mathfrak{g}$, then $\left[x_\beta, x_\gamma\right] = \lambda x_{\beta+\gamma}$. Where λ is a rational number.*

Taking this property in account when computing the previous obstruction to the general case Obs (3.16), one can find that in the case of semi-simple Lie algebra that Obs $= 0$. Therefore you have that :

Theorem 4.2. *All coisotropic subalgebras of a complex Lie semi-simple algebra admit a quantization up to the 3rd order.*

Proof : let's consider the first term of Obs :

$$\frac{\hbar^2}{48} f_{a_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 b_0}^{e_0} f_{d_0}^{f_1 g_0} c_{g_0 e_0}^{h_0} c_{f_1 h_0}^{i_1} x_{i_1}$$

but by using the fact that

$$\delta(e_\beta) = \sum_{\beta_{(1)}+\beta_{(2)}=\beta} e_{\beta_{(1)}} \wedge e_{\beta_{(2)}} + e_\beta \wedge h_\beta$$

where $\beta_{(1)}$ and $\beta_{(2)}$ are positive roots of $\mathfrak{g}$. We can suppose $x_{a_0} = x_\beta$ and $x_{b_0} = x_\gamma$, then we have :

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{48} f_{a_0}^{c_1 d_0} c_{c_1 b_0}^{e_0} f_{d_0}^{f_1 g_0} c_{g_0 e_0}^{h_0} c_{f_1 h_0}^{i_1} x_{i_1} &= \lambda x_{\beta+\gamma} \\ &= \lambda' \left[e_\beta, e_\gamma\right] \quad \in \mathfrak{c} \end{aligned}$$

Therefore this term is equal to zero. A similar computation can be done for all the other term of Obs in order to prove that they are all equal to zero. $\square$

It is also possible to see that this obstruction does not exist if we take $\mathfrak{c}$ to be a sub-Lie bialgebra.

Theorem 4.3. *All Lie subbialgebra $\mathfrak{c}$ of a Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ admits a quantization up to the 3rd order.*

Proof : This is easy to see as the fact that $\mathfrak{c}$ is a sub-Lie bialgebra means that we have a new condition on the constant structures of $\mathfrak{g}$. Mainly, we have that $f_{a_0}^{c_1 d_0} = 0$ for all $a_0, c_0 \in \mathfrak{c}$ and $c_1 \in \mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. Considering that all the terms of the obstruction Obs are composed of such a constant, we have that it is zero. □

Let's now, discus the complex of deformation, that appears in the previous sections. the complex is the following,

$$C_{RQ}^{p,q}(\mathfrak{C}) = \mathrm{Hom}(\wedge^q \mathfrak{C}, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C} \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^{\otimes p-1}) \tag{4.1}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\mathrm{d}_1} & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C} \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\mathrm{d}_2} & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C} \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})) \\ C & \mapsto & C \otimes 1 - \Delta(C) & & \\ & & D & \mapsto & D^{(1,2)} - D^{(12,3)} + D^{(1,23)}. \end{array} \tag{4.2}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\mathfrak{C}, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\partial_1} & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\partial_2} & \mathrm{Hom}(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}, \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})/\mathfrak{C}) \\ R & \mapsto & \mu_{\mathrm{m}} \circ (R \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes R) - R \circ \mu_{\mathrm{m}} & & \\ & & T & \mapsto & \mathrm{Alt}\, \mu_{\mathrm{m}}(\mathrm{Id} \otimes T) + \mathrm{Alt}\ T(\mathrm{Id} \otimes \mu_{\mathrm{m}}) \end{array} \tag{4.3}$$

This complex will compute the obstruction to find a flat morphism that take $\mathfrak{C}$ in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ to a subalgebra left coideal of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. This complex is similar to the quotient of the Gerstenhaber-Schack complex of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ by the following sub-complex :

$$C_R^{p,q}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathcal{U}(\mathfrak{c})) = \{f \in C^{p,q}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) | f_{|\mathcal{U}(\mathfrak{c})^{\otimes q}} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}(\mathfrak{c})^{\otimes q}, \mathcal{U}(\mathfrak{c}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes p-1})\}. \tag{4.4}$$

This sub-complex is the complex that compute the infinitesimal deformation of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ which take $\mathcal{U}(\mathfrak{c})$ to be a right coideal of the deformation of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. One question that we can ask is whether this two complex have the same cohomology.

Finally, a last question that remains to be answered is whether this obstruction exists or not when we take the third order deformation given by P. Etingof and D. Kazhdan and if the two deformation up to the third order are equivalent or not. It should be noted that up to the third order, the quantization of Etingof-Kazhdan is independent of the choice of the associator use in the deformation as the associator verify :

$$\Phi \equiv 1 + \frac{\hbar^2}{24}\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}\right] \mod \hbar^3 \tag{4.5}$$

Therefore, considering the fact that Drinfeld said that if a universal quantization exists (which is the case) then all universal quantization modulo $\hbar^n$ can be extended to a quantization modulo $\hbar^{n+1}$, we have that the two deformation have to be equivalent in order for the map from the associators to the quantization functor to be surjective.

Chapitre V

Quantization of double coisotropic subalgebras

We will in this section, give a proof of the deformation quantization of a "double" coisotropic Lie subalgebra of a Lie bialgebra. We wil show this results through the study of quasi-triangular Manin pair which give a description of Poisson Homogeneous spaces.

let G be a Poisson-Lie group, and let denote $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. A Poisson homogeneous G-space is a pair (X, P_X) where X is a homogeneous G-space and P_X is a Poisson structure on G such that the action of G on X is a Poisson action. V. Drinfeld describe all the homogeneous G-space in terms of Lagrangian subalgebra of the double $\mathfrak{d}\mathfrak{g}$. As it turns out Drinfeld take note that the data of a pair $(\mathfrak{p}, \mathfrak{h})$ where $\mathfrak{p}$ is a Lie algebra with a fixed invariant scalar product and $\mathfrak{h}$ is a Lagrangian subalgebra of $\mathfrak{p}$ appears as the classical limits of quasi-Hopf algebras. P. Etingof and D. Kazhdan, in their paper [EK95], proved the existence of a quantization for Manin quadruple.Hence proving the existence of a quantization of the Poisson homogeneous G-space G/H corresponding to a Lagrangian Lie subalgebra $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{d}\mathfrak{g}$ (i.e. $\mathfrak{d}\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ and $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$).
The main result of this section is the deformation quantization of a certain type of the Poisson Homogeneous G-space related to the quantization of quasi-triangular Manin pairs.

Theorem 0.4. *Any quasi-triangular Manin pair $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$ admits a quantization for any L Lagrangian complement of $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$.*

This result is obtain using the quantization of Quasi-Lie bialgebra and the compatipility of twist with the quantization functor.

First, we will recall a result of B. Enriquez and Y. Kosmann-Schwarzbach in [EKS99] on the formulation of Poisson Homogenous Spaces using quasi-triangular Manin pair. In the second section we will recall the main idea behind the quantization of quasi-Lie bialgebra. Finally we will give the proof of the main theorem of this chapter and the link between this quantization and the quantization of coisotropic subalgebras.

1 Poisson Homogeneous Space and quasitriangular Manin pair

Recall that G is a formal Poisson-Lie group, and that $\mathfrak{g}$ is it associated Lie bialgebra. We wish to study the formal Poisson homogeneous G-space wich is equivalent to the data of a Lagrangian Lie subalgebra $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$. We will recall a result of B. Enriquez and Y. Kosmann-Schwarzbach in [EKS99], wich give us a formulation of Poisson homogeneous spaces using Manin quadruples and quasi-triangular Manin pair. First lets recall the definition of some Lie-algebraic structures.

Definition 1.1. *A quasi-triangular Manin pair* $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$ *is the data of*

i) A quasi-triangular Lie bialgebra $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}})$ *where* $\langle,\rangle_{\mathfrak{g}}$ *is a non degenerate invariant symmetric bilinear form on* $\mathfrak{g}$*, and* r *is a r-matrix.*

ii) A Lagrangian Lie subalgebra $\mathfrak{h}$ *of* $\mathfrak{g}$*.*

Remark Given a coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ of a Lie bialgebra $\mathfrak{g}$, one can construct a quasi-triangular Manin pair using the double. We have that $\mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}^{\perp}$ is a Lagrangian Lie subalgebra of $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$, therefore the data of $(\mathfrak{D}\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{D}\mathfrak{g}}, \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}^{\perp})$ is a quasi-triangular Manin pair.

Definition 1.2. *A Manin quadruple is a quadruple* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{h})$ *where* $\mathfrak{g}$ *is a Lie algebra, equipped with a non degenerate invariant symmetric bilinear form* $\langle,\rangle_{\mathfrak{g}}$ *and where* $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ *and* $\mathfrak{h}$ *are three Lagrangian Lie subalgebra of* $\mathfrak{g}$*, such that* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ *.*

Remark In fact we have that $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ is a Manin triple. The data of a Manin quadruple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{h})$ gives rise to a quasi-triangular Manin pair $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$ where $r = r_{\mathfrak{g}_+,\mathfrak{g}_-} = \sum_i e^i \oplus e_i$, and (e^i), (e_i) are dual bases of $\mathfrak{g}_+$ and $\mathfrak{g}_-$.

We will now recall the link between Poisson homogeneous G-space and quasi-triangular Manin pair.

Let $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$ be a quasi-triangular Manin pair. Let H be the formal subgroup of G with Lie algebra $\mathfrak{h}$, and let $P_{G/H}$ be the 2-tensor on G/H equal to the projection of the left-invariant part of r. Let (e_i) be a basis of $\mathfrak{g}$. The bracket on the function on G right invariant under $\mathfrak{h}$ is the following :

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} r_{i,j} R_{e_i}(f) R_{e_j}(g) \tag{1.1}$$

where $r = \sum_{i,j} r_{i,j} e_i \otimes e_j$ and $R_x(f)$ is the action of the right invariant vector field corresponding to $x \in \mathfrak{g}$ on f.

Proposition 1.3. *Let $(\mathfrak{g}, \tilde{r}, \langle , \rangle_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$ be a quasi-triangular Manin pair. Then $P_{G/H}$ is a Poisson bivector on G/H and G/H is a Poisson Homogeneous space for (G, P_G).*

Démonstration : First, let's prove that the bracket defined previously is antisymmetric. We set $\tilde{r} = r + \frac{t}{2}$ where $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ and $t \in \mathcal{S}^2(\mathfrak{g})$. For every functions f, g on G right invariant under $\mathfrak{h}$, we have :

$$\begin{aligned}\{f,g\} + \{g,f\} &= \sum_{i,j} r_{i,j} + \frac{t_{i,j}}{2} R_i(f)R_j(g) + \sum_{j,i} r_{j,i} + \frac{t_{j,i}}{2} R_j(g)R_i(f) \\ &= \sum_{i,j} t_{i,j} R_i(f)R_j(g)\end{aligned}$$

but since $\mathfrak{h}$ is Lagrangian, t belongs to $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{g}+\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{h}$ and f and g are $\mathfrak{h}$-invariant therefore $\{f,g\}+\{g,f\}$ vanishes. All the others proprieties of the bracket follows from the definitions. □

Remark In the case of a Manin quadruple , this Poisson homogeneous space was quantized by P. Etingof and D. Kazhdan in [EK95] by using the same formalism as the quantization of Lie bialgebra.

Let $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{h})$ be a Manin quadruple. the inclusion $G_+ \subset G$ induces an inclusion map $i : G_+/(G_+ \cap H) \to G/H$. Using the previous remark, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{h})$ define a Poisson structure on G/H.

Proposition 1.4. *There exists a unique Poisson structure $P_{G_+/(G_+\cap H)}$ on $G_+/(G_+ \cap H)$ such that the inclusion is a Poisson map. Then $(G_+/(G_+ \cap H), P_{G_+/(G_+\cap H)})$ is a Poisson homogeneous space for (G_+, P_{G_+}).*

Remark Drinfeld proved in [Dri93], that all formal Poisson homogeneous spaces can be obtain this way.

Recall the definition of quantization of a Poisson homogenous space seen in the chapter 2 :

Definition 1.5. *Let (X, P_X) be a formal Poisson homogeneous space of (G, P_G) a Poisson Lie group. A quantization of (X, P_X) is a $\Bbbk[[\hbar]]$-algebra $\mathfrak{X}$, such that :*

(i) $\mathfrak{X}$ is a quantization of the Poisson algebra $(\mathcal{F}(X), P_X)$ of formal functions on X.

(ii) $\mathfrak{X}$ is equipped with an algebra-module structure over $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^{op}, \Delta)$ such that its reduction $\hbar$ is the algebra-module structure of $(\mathcal{F}(X), P_X)$ over $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{op}, \Delta_0)$, i.e. for all $x, y \in \mathfrak{X}$ and $a \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$, $a(xy) = \sum a'(x)a''(y)$ where $\Delta(a) = \sum a' \otimes a''$.

We will now give the definition of the quantization of a quasi-triangualr Manin pair.

Definition 1.6. *A quantization of a quasitriangular Manin pair* $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$ *is the data of :*

(i) a quasitriangular Hopf algebra $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \Delta, R)$ *quantizing* $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}})$.

(ii) a subalgebra $\mathfrak{B}_\hbar \subset \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ *and a element* J *in* $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}))^\times$*, such that*

1) $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(J) = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(J) = 1$.

2) $\mathfrak{B}_\hbar \subset \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ *is a flat deformation of the inclusion* $\mathcal{U}(\mathfrak{c}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

3) $J\Delta(\mathfrak{B}_\hbar)J^{-1} \subset \mathfrak{B}_\hbar \otimes \mathfrak{B}_\hbar$ *and* $J^{(12)}(\Delta \otimes \mathrm{Id})(J)(J^{(23)}(id \otimes \Delta)(J))^{-1} \in \mathfrak{B}_\hbar^{\otimes 3}$.

4) there exists a Lagrangian complement L *of* $\mathfrak{c}$ *in* $\mathfrak{g}$ *such that*

$$\left(\frac{1}{\hbar}(J - J^{(21)}) mod \hbar\right) = r - r_{\mathfrak{h},L}, \tag{1.2}$$

where $r_{\mathfrak{h},L} = \sum_i \epsilon^i \otimes \epsilon_i$*, and* (ϵ^i)*,* (ϵ_i) *are dual bases of* $\mathfrak{h}$ *and* L.

Remark To quantize a quasi-triangular Manin pair, we need a quantization $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \Delta, R)$ of $\mathfrak{g}$ and a twist J which is the quantum twist of the f between $(\mathfrak{g}, r)$ and $(\mathfrak{g}, r_{\mathfrak{h},L}, \varphi_{\mathfrak{h},L})$ such that we can find $\mathfrak{C}_\hbar$ in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$.

In [EKS99], B. Enriquez and Y. Kosmann-Schwarzbach proved that the quantization of quasi-triangular Manin pair gives rise to the quantization of the Poisson homogeneous space describe earlier.

Theorem 1.7. *Assume that* $((\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \Delta, R), \mathfrak{B}_\hbar, J)$ *is a quantization of the quasi-triangular Manin pair* $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$*. Let* $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{B}_\hbar}$ *be the subspace of* $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*$ *consisting of the form* l *on* $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ *such that* $l(ab) = l(a)\varepsilon(b)$ *for any* $a \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ *and* $b \in \mathfrak{B}_\hbar$.

(i) For $l, l' \in (\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{B}_\hbar}$*, then we define for any* $a \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ *:*

$$(l \star l')(a) = (l \otimes l')(\Delta(a)J^{-1}). \tag{1.3}$$

Then $\star$ *defines an associative algebra structure on* $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{B}_\hbar}$.

(ii) For $a \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ *and* $l \in (\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{B}_\hbar}$*, define* al *to be the form on* $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ *such that* $(al)(a') = l(aa')$*, for any* $a' \in \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$*. This map defines on* $((\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{B}_\hbar}, \star)$ *a structure of an algebra-module over the Hopf algebra* $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^{op}, \Delta)$.

(iii) The algebra $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{B}_\hbar}$ *is a quantization of the Poisson algebra* $(\mathcal{F}(G/H), P_{G/H})$ *with its algebra-module structure over* $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^{op}, \Delta)$*,* $((\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*)^{\mathfrak{B}_\hbar}, \star)$ *is a quantization of the Poisson homogeneous space* $(G, P_{G/H})$.

In the case where of the quasi-triangular Manin pair arising from a coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ of a Lie bialgebra $\mathfrak{g}$, it is important to note that the quantization of the quasi-triangular space does not provide a quantization of the coisotropic Lie subalgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}^\perp$ of $\mathfrak{Dg}$. Instead, it provide a quantization of $\mathfrak{h}$ as a Lagrangian Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$. We will see in the last section that it should be possible to retrieve this quantization if we put a stronger condition on the twist in the quantization of quasi-triangular Manin pair.

2 Quantization of quasi-Lie bialgebra

In this section, we will give a quick review on the quantization of quasi-Lie bialgebra done by Enriquez and Halbout in [EH10b]. The proof uses like in the previous chapter, the formalism of Prop. Let's first recall the prop QLBA and QBial the quasi version of LBA and Bialg. But first, we will let's look at the cohomology of deformation of a bialgebra to a quasi-bialgebra.

In fact, it is known that the cohomology of deformation of a bialgebra to a quasi-bialgebra is the same complex as the deformation to a bialgebra except to we need to add a row at the bottom to the complex of Gersteinhaber-Schack. So we replace :

$$\bigoplus_{1\leq p,q} C^{p,q} \to \bigoplus_{1\leq p,0\leq q} C^{p,q}$$

We have three structures to consider, the multiplication and the comultiplication and the associator :

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &:= \mathrm{m}_0 + \sum_{1\leq k} \hbar^k\, \mathrm{m}_k \\ \Delta &:= \Delta_0 + \sum_{1\leq k} \hbar^k \Delta_k \\ \Phi &:= 1\otimes 1\otimes 1 + \sum_{1\leq k} \hbar^k \Phi_k \end{aligned}$$

and four structure equations :

(A) the associativity of m :

$$A_{\mathrm{m}} := \mathrm{m}(\mathrm{m}\otimes \mathrm{Id} - \mathrm{Id}\otimes \mathrm{m}) \in C^{1,3}(B) \tag{2.1a}$$

(B) the compatibility between m and Δ :

$$B_{\mathrm{m},\Delta} := \mathrm{m}\otimes\mathrm{m}\circ\tau_{2,3}\circ\Delta\otimes\Delta - \Delta\circ\mathrm{m} \in C^{2,2}(B) \tag{2.1b}$$

(C) the quasi-coassociativity of Δ and Φ :

$$C_{\Delta,\Phi} := [(\Delta\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta] - [(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta] \in C^{3,1}(B) \tag{2.1c}$$

(D) the pentagon identity for Φ :

$$D_{\Phi_{(n+1)}} = \Phi^{234}\Phi^{1,23,4}\Phi^{123} - \Phi^{1,2,34}\Phi^{12,3,4} \in C^{4,0}(B) \tag{2.1d}$$

where $\Phi^{123} = \Phi\otimes 1$, $\Phi^{12,3,4} = (\Delta\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})\Phi$, ...

The infinitesimal deformation $(\mathrm{m}_1, \Delta_1, \Phi_1) \in C^{1,2} \oplus C^{2,1} \oplus C^{3,0}$ are cocycles. Meaning that we have to prove the following equation :

$$\mathrm{D}(\mathrm{m}_1, \Delta_1) = (\mathrm{dm}_1,\ \delta\,\mathrm{m}_1 + \mathrm{d}\Delta_1,\ \delta\Delta_1 + \mathrm{d}\Phi_1, \delta\Phi_1) = 0.$$

therefore we must have :

$$\mathrm{dm}_1 = A_{\mathrm{m}_{(1)}} = 0, \quad \delta\,\mathrm{m}_1 + \mathrm{d}\Delta_1 = B_{\mathrm{m}_{(1)},\Delta_{(1)}} = 0, \quad \delta\Delta_1 + \mathrm{d}\Phi = C_{\Delta_{(1)}} = 0, \quad \delta\Phi_1 = 0.$$

For a proof of this equation, we refer to chapter 9 of [SS93]. We then need to consider how to extend the deformation to the next degree. Suppose, we have a deformation to the degree n, what do we need to extend it to the degree n+1 ?
We need to find m_{n+1}, Δ_{n+1} and Φ_{n+1} such that :

$$A_{\mathrm{m}_{(n+1)}} \equiv 0 \bmod \hbar^{n+2}, \tag{2.2a}$$
$$B_{\mathrm{m}_{(n+1)},\Delta_{(n+1)}} \equiv 0 \bmod \hbar^{n+2}, \tag{2.2b}$$
$$C_{\Delta_{(n+1)},\Phi_{(n+1)}} \equiv 0 \bmod \hbar^{n+2}, \tag{2.2c}$$
$$D_{\Phi_{(n+1)}} \equiv 0 \bmod \hbar^{n+2}, \tag{2.2d}$$

We can now define the class of obstruction.

Definition 2.1. *The n-ith class of obstruction for a deformation of degree n is the element β_n of $C^4(B)$:*

$$\beta_n = \left(\beta_n^{1,3}, \beta_n^{2,2}, \beta_n^{3,1}, \beta_n^{4,0}\right) \in C^{1,3}(B) \oplus C^{2,2}(B) \oplus C^{3,1}(B) \oplus C^{4,0}(B).$$

define by :

$$\beta_n := D(\mathrm{m}_{n+1}, \Delta_{n+1}, \Phi_{n+1})$$

therefore we have that :

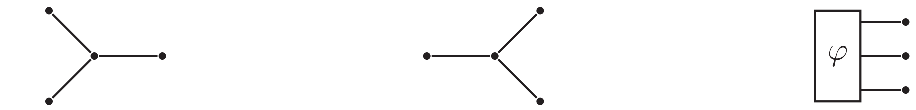
$$\beta_n^{1,3} := (A_{\mathrm{m}_{(n)}})_{n+1},$$
$$\beta_n^{2,2} := (B_{\mathrm{m}_{(n)},\Delta_{(n)}})_{n+1},$$
$$\beta_n^{3,1} := (C_{\Delta_{(n)},\Phi_{(n)}})_{n+1},$$
$$\beta_n^{4,0} := (D_{\Phi_{(n)}})_{n+1}.$$

Finally to finish the program of Gersteinhaber one has to verify a last theorem :

Theorem 2.2. *The n-ith class of obstruction β_n for a deformation of degree n is a 3-cocycle in the extended Gerstenhaber-Schack complex. If it cobounds an element $(\mathrm{m}_{n+1}, \Delta_{n+1}, -\Phi_{n+1})$ then the triple $(\mathrm{m}_{(n)} + \hbar^{n+1}\,\mathrm{m}_{n+1},\ \Delta_{(n)} + \hbar^{n+1}\Delta_{n+1},\ \Phi_{(n)} + \hbar^{n+1}\Phi_{n+1})$ defines the n+1 st order deformation.*
Two extension define equivalent deformation under the composition of conjugacy by $\mathrm{Id} + \hbar^{n+1}\sigma$ and twisting by $1 \otimes 1 - \hbar^{n+1}F$ if and only if $(\mathrm{m}_{n+1} - \mathrm{m}'_{n+1},\ \Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1},\ \Phi_{n+1} - \Phi'_{n+1}) = D(\sigma, F)$

We will now present the Props link with the deformation quantization of quasi-Lie bialgebra. Just like the previous chapter, we want to construct a quantization functor between the category of quasi-Lie bialgebra and the category of quasi-quantum universal enveloping algebra. Therefore we have to define a Prop encoding the structure of quasi-Lie bialgebra and another one encoding the structure of quasi-Hopf algebra. Let's first define the Prop of quasi-Lie bialgebra QLBA.

Definition 2.3. *The prop* QLBA *of quasi-Lie bialgebras is defined by generators :*

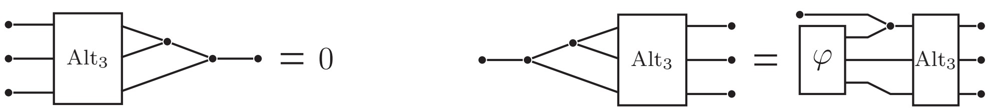


$\mu \in \mathrm{QLBA}(2,1)$ $\qquad$ $\delta \in \mathrm{QLBA}(1,2)$ $\qquad$ $\varphi \in \mathrm{QLBA}(0,3)$

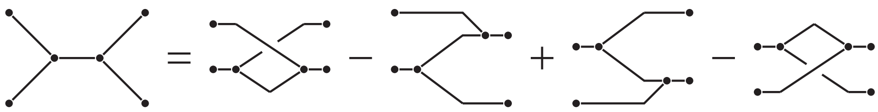
FIGURE V.1 – Generators of the prop QLBA

and relations given by :

$\mu \circ \beta = -\mu,$ $\qquad$ $\beta \circ \delta = -\delta,$



$\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{id}}) \circ \mathrm{Alt}_3 = 0,$ $\qquad$ $\mathrm{Alt}_3 \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{id}}) \circ \delta = \mathrm{Alt}_3 \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{id}}^{\otimes 2}) \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{id}} \otimes \varphi),$



$\delta \circ \mu = \mathrm{Alt}_2 \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{id}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{id}} \otimes \delta) \circ \mathrm{Alt}_2,$

$\beta_\sigma \circ \varphi = \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi \quad \sigma \in \mathfrak{S}_3,$ $\qquad$ $\mathrm{Alt}_4 \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{id}}^{\otimes 2}) \circ \varphi = 0.$

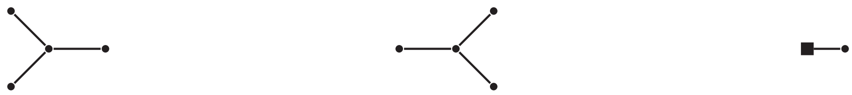
FIGURE V.2 – Relations of the prop QLBA

This prop is graded by $\{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \mid v \geq 0, 2u+v \geq 0\}$*, with* μ, δ, φ *of degrees* $(1,0)$*,* $(0,1)$*,* $(-1,2)$ *; we denote this grading by* $(\deg_\mu, \deg_\delta)$*.* QLBA *is then* $\mathbb{N}$*-graded by the total degree* $\deg_\mu + \deg_\delta$ *; the generators then have degree* 1*.*

Remark We will of course, have that the category of QLBA-modules on $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ is the category of Lie bialgebra on the field $\Bbbk$.

Let's now present the Prop QBialg encoding the structure of quasi-Hopf algebra.

Definition 2.4. *The prop* QBialg *of associative quasi-bialgebras is defined by generators :*



$\mathrm{m} \in \mathrm{QBialg}(\mathbf{id}^{\otimes 2}, \mathbf{id})$ $\quad \Delta \in \mathrm{QBialg}(\mathbf{id}, \mathbf{id}^{\otimes 2})$ $\quad \eta \in \mathrm{QBialg}(\mathbf{1}, \mathbf{id})$

$\epsilon \in \mathrm{QBialg}(\mathbf{1}, \mathbf{id})$ $\quad \Phi \in \mathrm{QBialg}(\mathbf{1}, \mathbf{id}^{\otimes 3})^{\times}$

Figure V.3 – Generators of the prop QBialg

and relations given by :

Remark the category of Qbialg-modules on $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ is the category of quasi-Hopf bialgebras over the field $\Bbbk$.

Like the previous chapter, we will use the formalism of Schur functors to define a quantization functor of quasi-Lie bialgebra.

Definition 2.5. *A QF of quasi-Lie bialgebras is a quasi-bialgebra structure* $(m, \Delta, \Phi, \eta, \epsilon)$ *on* S *in* **QLBA***, such that :*

a) reduction modulo $\langle \mu, \delta, \varphi \rangle$ *is the quasi-bialgebra structure on* S *in* $\mathbf{QLBA}/\langle \mu, \delta, \varphi \rangle$

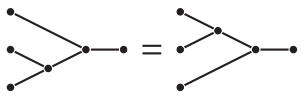
b) $(\mathbf{id}^{\otimes 2} \to S^{\otimes 2} \overset{m - m\circ\beta}{\longrightarrow} S \to \mathbf{id}) = \mu +$ *terms with* $\deg_\mu + \deg_\delta \geq 2$ *;*

c) $(\mathbf{id} \to S \overset{\Delta - \beta\circ\Delta}{\longrightarrow} S^{\otimes 2} \to \mathbf{id}^{\otimes 2}) = \delta +$ *terms with* $\deg_\mu + \deg_\delta \geq 2$ *;*

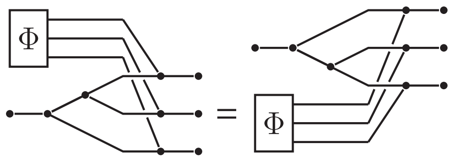
d) $(\mathbf{1} \overset{\mathrm{Alt}_3 \circ \Phi}{\longrightarrow} S^{\otimes 3} \to \mathbf{id}^{\otimes 3}) = \varphi +$ *terms with* $\deg_\mu + \deg_\delta \geq 2$.

We want to prove that this deformation always exist. We also know that it is possible to quantize Lie bialgebra. Therefore, it is interesting to compare the cohomology of deformation of Lie bialgebras and quasi-Lie bialgebras. In fact, B. Enriquez and G. Halbout, proved that the cohomology is the same in [EH10b]. Meaning, that if there is no obstruction to the quantization in the case of Lie bialgebra there will be no problem in the case of quasi-Lie bialgebra.

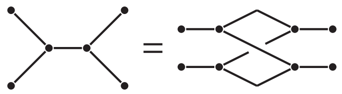
Theorem 2.6. *For any* $i \geq 0$*, the map* $H^i_{\mathrm{QLBA}} \to H^i_{\mathrm{LBA}}$ *is a graded isomorphism.*



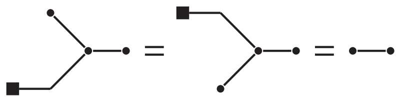
$\mathrm{m}\circ(\mathrm{Id}_{\mathbf{id}}\otimes\mathrm{m}) = \mathrm{m}\circ(\mathrm{m}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{id}})$,



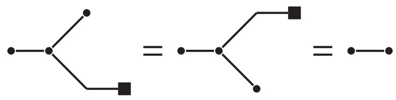
$\Phi(\Delta\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{id}})\circ\Delta = (\mathrm{Id}_{\mathbf{id}}\otimes\Delta)\circ\Delta\ \Phi$,



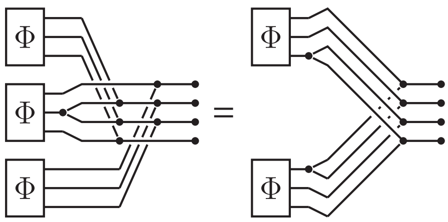
$\Delta\circ\mathrm{m} = (\mathrm{m}\otimes\mathrm{m})\circ(\mathrm{Id}_{\mathbf{id}}\otimes\beta\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{id}})\circ(\Delta\otimes\Delta)$.



$\mathrm{m}\circ(\mathrm{Id}_{\mathbf{id}}\otimes\eta) = \mathrm{m}\circ(\eta\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) = \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}$,



$(\mathrm{Id}_{\mathbf{id}}\otimes\epsilon)\circ\Delta = (\epsilon\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{id}})\circ\Delta = \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}$



$\Phi^{234}\Phi^{1,23,4}\Phi^{123} = \Phi^{1,2,34}\Phi^{12,3,4}$,

FIGURE V.4 – Relations of the prop QBialg

Remark The main idea is to see that the addition of φ as a generator in QLBA does not add anything to the cohomology of the Prop LBA. In fact, B. Enriquez and G. Halbout proved that the Prop QLBA is equivalent to a Prop LBA_α which as the same cohomology as the Prop LBA.

This result allows them to conclude

Proposition 2.7. *There exists a bijection between the set of quantization functors (QF),* $\{$*QFs of quasi-Lie bialgebras*$\}/($*twists, equivalence*$)$ *and* $\{$*QFs of Lie bialgebras*$\}/($*equivalence*$)$

We can then see that B. Enriquez and G. Halbout showed the existence of a quantization functor $Q : \mathrm{QBialg} \to S(\mathbf{QLBA})$, where **QLBA** is a suitable completion of the prop QLBA of Lie bialgebras. We also denote by Q : { quasi-Lie bialgebras over $\Bbbk$} $\to$ { Quantum universal enveloping algebras over $\Bbbk$} the functor induced by this prop morphism as defined previously.

3 Twist and Quantization of double coisotropic Lie subalgebra

We will recall the compatibility of twist with the functor of quantization from [EH10b]. We first define a new prop QLBA_f to be the prop QLBA with the additional twist $f \in \mathrm{QLBA}_f(\mathbf{1}, \mathbf{id}^{\otimes 2})$, and the same relations as QLBA with a antisymmetric relation for f.

$$f^{21} = -f^{12}$$

This prop is $\mathbb{N}^2$-graded, with the same grading as QLBA ; $(\deg_\mu, \deg_\delta)$ of the generators of QLBA by $f \mapsto (-1, 1)$. We have two prop morphisms $\kappa_i : \mathrm{QLBA} \to \mathrm{QLBA}_f$ $i = 1, 2$, defined by

$$\begin{aligned}
\kappa_1 : \;& \mu, \delta, \varphi \mapsto \mu, \delta, \varphi, \\
\kappa_2 : \;& \mu \mapsto \mu, \quad \delta \mapsto \delta + \mathrm{Alt}_2 \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{id}} \otimes \mu) \circ (f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}), \\
& \varphi \mapsto \varphi + \frac{1}{2} \mathrm{Alt}_3 \circ \big((\delta \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) \circ f + (\mathrm{Id}_{\mathbf{id}} \otimes \mu \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{id}}) \circ (f \otimes f) \big);
\end{aligned}$$

this is the universal version of the operation of twisting of a quasi-Lie bialgebra structure. We denote Q a quantization functor for a quasi-Lie bialgebra :

$$Q((\mu, \delta, \varphi)) = (\mathrm{m}, \Delta, \Phi, \eta, \epsilon) \tag{3.1}$$

Proposition 3.1. *The quasi-bialgebra structure $Q(\kappa_i(\mu, \delta, \varphi)) = (\mathrm{m}_i, \Delta_i, \eta_i, \epsilon_i)$ for $i = 1, 2$ on S in* QLBA *are related by equivalence and twist.*

This will give us the following diagram :

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{g}, \mu, \delta, \varphi) \arrow[dl, "\kappa_1"'] \arrow[dr, "\kappa_2"] & \\
(\mathfrak{g}, \mu, \delta, \varphi) \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "Q-EK"'] & & (\mathfrak{g}, \mu, \delta^f, \varphi) \arrow[d, "Q"] \\
(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \mathrm{m}_\hbar, \Delta_\hbar, \Phi) \arrow[rr, "F"] & & (\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \mathrm{m}'_\hbar, \Delta'_\hbar, \Phi')
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

We recall a version of the definition of quasi-triangular quasi-Lie bialgebra given in Chapter II :

Definition 3.2. *A quasi-Lie bialgebra $(\mathfrak{g}, \mu, \delta, \varphi)$ is quasi-triangular if there exist $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ and $\Omega \in (\mathcal{S}^2(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ such that :*

1) $\delta = \partial r$.

2) $\varphi = \frac{1}{4}\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}\right] - \mathrm{CYB}(r)$

This type of quasi-bialgebra was quantized by Drinfeld. We can give another proof by using the compatibility of twist and the quantization functor. We recall that such quasi-triangular quasi-Lie bialgebra are twist of quasi-triangular Lie bialgebra. Let $(\mathfrak{g}, \mu, \tilde{r})$ be a quasi-triangular Lie bialgebra then $\tilde{r} = r + \frac{\Omega}{2}$ where r is the skew part of $\tilde{r}$. Then by taking $f = -r$ we obtain a quasi-triangular Lie bialgebra $(\mathfrak{g}, \mu, 0, \frac{1}{4}\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}\right])$.

Corollary 3.3. *Let $(\mathfrak{g}, \mu, \tilde{r})$ be a quasi-triangular Lie bialgebra and $(\mathfrak{g}, \mu, 0, \frac{1}{4}\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}\right])$ be its twist by $f = -\frac{\tilde{r}^{(12)} - \tilde{r}^{(21)}}{2}$. Then the quantization of Etingof-Kazhdan of $(\mathfrak{g}, \mu, \tilde{r})$ gives a structure of quasi-triangular quasi-Hopf algebra on the quantization of $(\mathfrak{g}, \mu, 0, \frac{1}{4}\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(23)}\right])$.*

Proof : By using the quantization of Etingof-Kazhdan and the fact that the quantization functor are compatible with the twist, one can obtain :

$$\begin{tikzcd}
& (\mathfrak{g}, \mu, \delta, \tilde{r}) \arrow[dl, "\kappa_1"'] \arrow[dr, "\kappa_2"] & \\
(\mathfrak{g}, \mu, \delta, \tilde{r}) \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "Q-EK"'] & & (\mathfrak{g}, \mu, \delta^f, r^f, \varphi) \arrow[d, "Q"] \\
(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \mathrm{m}_\hbar, \Delta_\hbar, R_\hbar) \arrow[rr, "J"] & & (\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \mathrm{m}'_\hbar, \Delta'_\hbar, \Phi')
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

By using this compatibility we can add the R-matrix $R^J_\hbar$ to the quantization $(\mathfrak{g}, \mu, \delta^f, r^f, \varphi)$, meaning that $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{D}\mathfrak{g}), \mathrm{m}'_\hbar, \Delta'_\hbar, R^J_\hbar, \Phi')$ is a quasi-triangular quasi-Hopf algebra. □

Corollary 3.4. *Let $(\mathfrak{g}, \mu, \delta)$ be a Lie bialgebra, $(\mathfrak{D}\mathfrak{g}, \mu, \delta, r)$ be the double Lie bialgebra of $\mathfrak{g}$ and f a twist in $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$. Then the quantization $Q((\mathfrak{D}\mathfrak{g}, \mu, \delta^f, r^f, \varphi^f))$ is a quasi-triangular quasi-QUEA.*

Theorem 3.5. *Any quasi-triangular Manin pair $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ admits a quantization for any L Lagrangian complement of $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$.*

Proof : Let $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ be a quasi-triangular Manin pair, and let L be a Lagrangian complement of $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$. Let (ϵ^i), (ϵ_i) be dual bases of $\mathfrak{h}$ and L, and set $r_{\mathfrak{h},L} = \sum_i \epsilon^i \otimes \epsilon_i$. Following the way Drinfeld define the quasi-Lie bialgebra, we define a structure of quasi-Lie bialgebra on $\mathfrak{g}$ using the $\mathfrak{h}$ and L. The restriction to L of the Lie bracket of $\mathfrak{g}$ followed by the projection to the first factor in $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus L$ yields an element $\varphi_{\mathfrak{h},L}$ of $\wedge^3\mathfrak{h}$. Let us set $f_{\mathfrak{h},L} = r_{\mathfrak{h},L} - r$, then $f_{\mathfrak{h},L}$ is in $\wedge^2\mathfrak{g}$.

Then the twist of the quasi-triangular Lie biagebra $(\mathfrak{g},r)$ by $f_{\mathfrak{h},L}$ is the quasi-triangular quasi-Lie bialgebra $(\mathfrak{g},\ r_{\mathfrak{h},L},\ \varphi_{\mathfrak{h},L})$. The cocycle $\delta r_{\mathfrak{h},L}$ send $\mathfrak{h}$ on $\wedge^2\mathfrak{h}$, so $(\mathfrak{h}, \delta r_{\mathfrak{h},L}, \varphi_{\mathfrak{h},L})$ is a quasi-Lie subbialgebra of $(\mathfrak{g},\ r_{\mathfrak{h},L},\ \varphi_{\mathfrak{h},L})$.

But we can now use the fact that we have a quantization functor for the quasi-Lie bialgebra. And therefore we have a quasi-triangular quasi-Hopf algebra $(U_\hbar(\mathfrak{g}), \Delta_h, m_h, R_h, \Phi_h)$ and a sub quasi-Hopf algebra $(U_\hbar(\mathfrak{h}), \Delta_\hbar, m_\hbar, \Phi_\hbar)$ quantizing respectively $(\mathfrak{g},\ r_{\mathfrak{h},L},\ \varphi_{\mathfrak{h},L})$ and $(\mathfrak{h}, \delta r_{\mathfrak{h},L}, \varphi_{\mathfrak{h},L})$. Another result that we also obtain is the fact the twist in the classic setup will yield a quantic counterpart J satisfying the following condition ; the twist of the quasi-triangular quasi-Hopf algebra $(U_\hbar(\mathfrak{g}), \Delta_\hbar, m_\hbar, R_\hbar, \Phi_\hbar)$ by J is the quasi-triangular Hopf Algebra $(U_\hbar(\mathfrak{g}), J^{-1}\Delta_\hbar J, m_\hbar, J^{-1}R_\hbar J)$ which quantize the Lie bialgebra $(\mathfrak{g}$,$r)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[dr, hook] & & & \mathfrak{h} \arrow[lll, "f^{-1}"'] \arrow[dl, hook, "Sub-quasi"'] \arrow[ddd, "Q"] \\
& (\mathfrak{g}, \mu, \delta, r) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Q-EK"'] & (\mathfrak{g}, \mu, \delta^f, r^f, \varphi^f) \arrow[d, "Q"] & \\
& (\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \mathrm{m}_\hbar, \Delta_\hbar, R_\hbar) \arrow[r, "J"] & (\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), \mathrm{m}_\hbar, \Delta^J_\hbar, R^J_\hbar, \Phi^J) & \\
\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{h}) \arrow[ur, hook] & & & \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{h}) \arrow[lll, "J^{-1}"] \arrow[ul, hook, "Sub-quasi"']
\end{tikzcd}
$$

The data of $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}), J^{-1}\Delta_h J, m_h, J^{-1}R_h J)$ wich quantize the Lie bialgebra $(\mathfrak{g}$,$r)$, and of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{c})$ with J give us a quantization of the quasi-triangular Manin pair $(\mathfrak{g}$,r,$\langle,\rangle_{\mathfrak{g}}$,$\mathfrak{h})$. □

This proof give us the quantization of the Poisson homogeneous spaces associated to the quasi-triangular Manin pair by following the paper of B. Enriquez and Y. Kosmann-Schwarzbach. We can also retrieve the result of P. Etingof and D. Kazhdan who quantized the Poisson homogeneous space associated to the Manin quadruple pair.

Corollary 3.6. *Any Manin quadruple pair admit a quantization.*

It is direct, as the data of a Manin quadruple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-, \mathfrak{h})$ gives rise to a quasi-triangular Manin pair $(\mathfrak{g}, r, \langle,\rangle_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$.

Remark By adding some condition to the quantization of quasi-triangular Manin pair, arising from a coisotropic Lie subagebra $\mathfrak{c}$, it may be possible to retrieve the quantization of the Lagrangian subalgebra $\mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}^\perp$ as a coisotropic subalgebra of $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$. In fact the condition would be that :

$$J \in 1 + \hbar((\mathfrak{B}_\hbar)_0 \otimes (\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}))_0 + (\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}))_0 \otimes (\mathfrak{B}_\hbar)_0) \tag{3.4}$$

where $(\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g}))_0 = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ and $(\mathfrak{B}_\hbar)_0 = \mathrm{Ker}\,\varepsilon_{\mathfrak{B}_\hbar}$. When this condition is fulfilled, then the product $\star$ previously defined is just the restriction of the product on $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})^*$.

A remaining question is whether it is possible to construct such a twist by using the cohomological construction done by B. Enriquez in [Enr05].

ANNEXE

Annexe A : Equation KZ

Dans cette section, nous développerons l'étude des associateurs de Drinfeld dont l'existence est indispensable à l'existence et la création des quasi-algèbres de Hopf.

Définition A.1 (Associateur)**.** *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie définie sur* $\Bbbk$ *et* $\Omega \in (\mathcal{S}^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ *un élément inversible.* $\Phi \in (\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}[[\hbar]])^{\mathfrak{g}}$ *est un associateur si pour* $(\mathfrak{g}, \Omega)$ *:*

1) $(\mathrm{Id} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{Id})\Phi = 1$

2) Φ *satisfait la relation du pentagone :*

$$\Phi^{(1,2,34)}\Phi^{(12,3,4)} = \Phi^{(2,3,4)}\Phi^{(1,23,4)}\Phi^{(1,2,3)} \tag{0.5}$$

3) Φ *satisfait les deux relations hexagonales avec* $R = e^{\frac{\hbar\Omega}{2}}$

En d'autres termes, Φ *est un associateur si et seulement si* $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]], \Delta, \epsilon, S, \Phi, e^{\frac{\hbar\Omega}{2}})$ *est une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire.*

Un exemple constructif d'associateur est donné avec les équations Knizhnik-Zamolodchikov. L'associateur Φ_{KZ} que nous fournit cette exemple est le seul exemple explicite d'associateur. Nous aurons ici $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Définition A.2 (Equation KZ)**.** *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de lie complexe et* $\Omega \in \mathcal{S}^2(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *un élément symétrique invariant i.e.*

$$\Omega = \sum_i x_i \otimes y_i, \qquad \Omega^{(21)} = \Omega \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ [\Delta(x), \Omega] = 0.$$

Nous nous donnons aussi, $\hbar$ *un paramètre complexe,* n *un entier et* V *un* $\mathfrak{g}$*-module de dimension finie.*
Alors le système différentiel de Knizhnik-Zamolodchikov associé aux données précédentes est le système :

$$\frac{\partial u}{\partial z_i} = \frac{\hbar}{2i\pi} \sum_{j \neq i} \frac{\Omega^{(ij)}}{z_i - z_j}.u \quad (i = 1, ..., n) \tag{KZ_n}$$

où u *est une fonction,* $u : \mathbb{C}^n \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n}[[\hbar]]$ *. Posons* $\hbar = \frac{h}{2i\pi}$ *pour simplifié l'écriture.*

Remarques : si u est une solution de (KZ_n) alors nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_i} = 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial u}{\partial z_i} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Omega^{(ij)} u$$

Nous pouvons donc dire que la solution u ne dépend en fait que de $n-2$ variables.

Proposition A.3. *Le système différentiel de Knizhnik-Zamolodchikov est consistant et $\mathfrak{g}$-invariant, i.e. nous avons :*

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z_i} - \hbar \sum_{j \neq i} \frac{\Omega^{(ij)}}{z_i - z_j}, \frac{\partial u}{\partial z_k} - \hbar \sum_{l \neq k} \frac{\Omega_{kl}}{z_k - z_l} \right] = 0$$

et si u est une solution et $a \in \mathfrak{g}$, alors $\Delta^{(n)}(a)u$ est aussi une solution.

Démonstration : La première égalité se montre directement en calculant et en considérant la propriété suivante :

$$[\Omega^{(ij)}, \Omega^{(ik)} + \Omega^{(jk)}] = 0 \tag{0.6}$$

Nous faisons la preuve pour $i = 1,\ j = 2,\ k = 3$, le cas général se démontrant de la même façon.

$$\begin{aligned}
\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(13)} + \Omega^{(23)}\right] &= \sum_{r,s} [x_r \otimes y_r \otimes 1, x_s \otimes 1 \otimes y_s + 1 \otimes x_s \otimes y_s] \\
&= \sum_{s} \left[\sum_{r} x_r \otimes y_r, x_s \otimes 1 + 1 \otimes x_s \right] \otimes y_s \\
&= \sum_{s} [\Omega, \Delta(x_s)] \otimes y_s \\
&= 0
\end{aligned}$$

Passons à la deuxième assertion, si u est une solution et $a \in \mathfrak{g}$ alors, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta^{(n)}(a).u}{\partial z_i} &= \Delta^{(n)}(a) \frac{\partial u}{\partial z_i} \\
&= \hbar \sum_{j \neq i} \frac{\Delta^{(n)}(a).\Omega^{(ij)}}{z_i - z_j} u \\
&= \hbar \sum_{j \neq i} \frac{\Omega^{(ij)}}{z_i - z_j} \Delta^{(n)}(a).u
\end{aligned}$$

Nous utilisons la $\mathfrak{g}$-invariance de Ω pour montrer que $\Delta^{(n)}(a)$ et $\Omega^{(ij)}$ commutent. □

Pour transformer $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ en une quasi-algèbre de Hopf, nous devons construire un élément Φ_{KZ}. Pour cela, nous devons étudier l'équation linéaire différentielle obtenue lorsque

que l'on se restreint à $n = 3$, et $z_1 = 0, z_2 = z \quad et \quad z_3 = 1$:

$$\frac{dG}{dz} = \hbar\left(\frac{\Omega^{(12)}}{z} + \frac{\Omega^{(23)}}{z-1}\right)G \qquad (KZ'_3)$$

Remarques : L'équation (KZ'_3) présente une singularité en 0 et en 1. De plus en changeant z en $1/z$ nous avons une singularité en l'infini. Nous examinons maintenant le comportement asymptotique de l'équation aux singularités 0 et 1. Nous noterons Γ l'ensemble des solutions de (KZ'_3) sur $I =]0, 1[$.

Proposition A.4. *Il existe des uniques solutions G_0 et G_1 à l'équation (KZ'_3) tel que :*

$$G_0(z) = (1 + \sum_{n\geq 1} z^n P_n) z^{\hbar\Omega^{(12)}} \qquad G_1(z) = (1 + \sum_{n\geq 1} (1-z)^n Q_n)(1-z)^{\hbar B} \qquad (0.7)$$

où $z^{\hbar\Omega^{(12)}}$ est la série $exp(\hbar\Omega^{(12)}log(z))$.

Démonstration : en substituant notre solution G_0 dans l'équation (KZ'_3) nous obtenons :

$$\left(\left(\sum_{n\geq 1} n z^{n-1} P_n\right) + \left(1 + \sum_{n\geq 1} z^n P_n\right)\frac{\hbar\Omega^{(12)}}{z}\right) z^{\hbar\Omega^{(12)}} = \hbar\left(\frac{\Omega^{(12)}}{z} + \frac{\Omega^{(23)}}{z-1}\right)\left(1 + \sum_{n\geq 1} z^n P_n\right) z^{\hbar\Omega^{(12)}}$$

Nous pouvons réécrire la formule de la manière suivante : $P = 1 + \sum_{n\geq 1} z^n P_n$

$$\left(P'(z) + \hbar P(z)\frac{\Omega^{(12)}}{z}\right) z^{\hbar\Omega^{(12)}} = \hbar\left(\frac{\Omega^{(12)}}{z} + \frac{\Omega^{(23)}}{z-1}\right) P(z) z^{\hbar\Omega^{(12)}}$$

Ce que nous pouvons encore réécrire, en simplifiant $z^{\hbar\Omega^{(12)}}$:

$$\begin{aligned} zP'(z) - \hbar[\Omega^{(12)}, P(z)] &= \hbar\Omega^{(23)}\frac{zP(z)}{z-1} \\ &= -\hbar\Omega^{(23)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) P(z) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne en identifiant les puissances de z :

$$nP_n - \hbar[\Omega^{(12)}, P_n] = -\hbar\Omega^{(23)}(P_0 + ... + P_{n-1})$$

P_n est donc uniquement déterminé par les $P_0 + ... + P_{n-1}$ car l'opérateur $n\,\mathrm{Id} - \hbar\,\mathrm{ad}(\Omega^{(12)})$ est inversible, d'inverse :

$$\frac{1}{n}\sum_{i\geq 0}\frac{\hbar^i}{r^i}\,\mathrm{ad}(\Omega^{(12)})^i$$

La convergence de $P(z)$ résulte du principe général qu'une solution formelle d'une equation différentielle avec des singularités régulières est analytique. Nous pouvons reprendre exactement la même preuve pour G_1. □

Nous pouvons alors trouver grâce à cela des solutions à l'équation (KZ'_3). En effet, posons : w une solution de (KZ'_3) alors nous avons : que w ne dépend que d'une variable. Nous faisons le changement de variable :

$$w(z_1, z_2, z_3) = (z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(23)}+\Omega^{(13)})} G(z) \tag{0.8}$$

où $z = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$

Lemme A.5. *Avec ces notations, nous avons que w est une solution de (KZ_3) et équivalent à G est une solution de (KZ'_3)*

Démonstration : si w est solution de (KZ_3), cela implique que :

$$\frac{dw}{dz_2} = \hbar \left(\frac{\Omega^{(12)}}{z_2 - z_1} + \frac{\Omega^{(23)}}{z_2 - z_3} \right) w$$

en y injectant (0.8), nous obtenons

$$(z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(23)}+\Omega^{(13)})} \frac{G'(z)}{z_3 - z_1} = \hbar \left(\frac{\Omega^{(12)}}{z_2 - z_1} + \frac{\Omega^{(23)}}{z_2 - z_3} \right) (z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(23)}+\Omega^{(13)})} G(z)$$

mais comme $(z_2 - z_3)/(z_3 - z_1) = z - 1$, nous avons

$$(z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(23)}+\Omega^{(13)})} \left(G'(z) - \hbar \left(\frac{\Omega^{(12)}}{z} + \frac{\Omega^{(23)}}{z - 1} \right) G(z) \right) = 0$$

d'où G est solution de (KZ'_3) ; Réciproquement, si G est solution de (KZ'_3), nous calculons les dérivées partielles de w et obtenons que w est solution de (KZ_3) $\square$

Remarques : Nous avons deux solutions à l'équation (KZ_3) :

$$\begin{array}{lcll} W_0(z_1, z_2, z_3) & \sim & (z_2 - z_1)^{\hbar\Omega^{(12)}} (z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(23)}+\Omega^{(13)})} & |z_2 - z_1| << |z_3 - z_1| \\ W_1(z_1, z_2, z_3) & \sim & (z_3 - z_2)^{\hbar\Omega^{(23)}} (z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(13)}+\Omega^{(13)})} & |z_2 - z_3| << |z_1 - z_3| \end{array}$$

Nous pouvons maintenant définir l'associateur KZ.

Définition A.6. *L'associateur KZ $\Phi_{KZ} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 3}[[\hbar]]$ est donné par la formule*

$$W_0(z) = W_1(z)\Phi_{KZ}$$

$\Phi_K Z$ est $\mathfrak{g}$-invariant car (KZ_3) est $\mathfrak{g}$-invariant.

Remarques : Nous allons donner plusieurs propriétés sur Φ_{KZ}. La première étant une preuve complète du fait que Φ_{KZ} est constante.
Nous notons H l'inverse de W_1.

$$W_1 H = 1$$

Nous avons alors en dérivant que :

$$W_1'H + W_1H' = 0$$

Puis en multipliant par H,

$$HW_1'H(z) + HW_1H' = 0$$

D'où

$$H' = -HW_1'H$$

Par conséquent :

$$(W_1^{-1})' = W_1^{-1}W_1'(z)W_1^{-1}$$

Nous calculons finalement la dérivée de Φ_{KZ} :

$$\begin{aligned}
\Phi_{KZ}' &= (W_1^{-1})'W_0 + (W_1^{-1})W_0' \\
&= -W_1^{-1}W_1'(z)W_1^{-1}W_0 + (W_1^{-1})W_0' \\
&= -W_1^{-1}DW_1(z)W_1^{-1}W_0 + (W_1^{-1})DW_0 \\
&= -(W_1^{-1})DW_0 + (W_1^{-1})DW_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

où $D = \hbar\left(\frac{\Omega^{(12)}}{z} + \frac{\Omega^{(23)}}{z-1}\right)$

Nous citons maintenant un résultat sur Φ_{KZ} qui se trouve dans le livre de C. Kassel [Kas95]

Proposition A.7. *Φ_{KZ} est une série formelle en $\Omega^{(12)}$ et en $\Omega^{(23)}$*

Finalement, nous allons montrer que $\Phi^{(3,2,1)} = \Phi^{-1}$. Nous devons vérifier que Φ_{KZ} est effectivement un associateur. Ceci revient à vérifier que Φ_{KZ} nous définit une structure de quais-bigèbre de Hopf sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$. Il faut donc vérifier les relations suivantes :

1) $(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta = \Phi(\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta\Phi^{-1}$

2) $(\mathrm{Id}\otimes\epsilon\otimes\mathrm{Id})\Phi = 1$

   et la relation du pentagone :

3) $\Phi^{(1,2,34)}\Phi^{(12,3,4)} = \Phi^{(2,3,4)}\Phi^{(1,23,4)}\Phi^{(1,2,3)}$

La relation 1 est obtenu grâce à la $\mathfrak{g}$-invariance de Φ , i.e

$$[1\otimes 1\otimes a + a\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes a\otimes 1, \Phi] = 0. \tag{0.9}$$

La relation 2 est montrée en utilisant le fait que $(\mathrm{Id}\otimes\epsilon)$ et $(\epsilon\otimes\mathrm{Id})$ annule Ω. Par conséquent, lorsque l'on injecte $(\mathrm{Id}\otimes\epsilon\otimes\mathrm{Id})$ dans notre équation (KZ_3') nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id}\otimes\epsilon\otimes\mathrm{Id})\frac{dG}{dz} &= \hbar\left(\frac{(\mathrm{Id}\otimes\epsilon\otimes\mathrm{Id})\Omega^{(12)}}{z} + \frac{(\mathrm{Id}\otimes\epsilon\otimes\mathrm{Id})\Omega^{(23)}}{z-1}\right)(\mathrm{Id}\otimes\epsilon\otimes\mathrm{Id})G \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, nos solutions vérifient $(\mathrm{Id} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{Id})G_0(z) = (\mathrm{Id} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{Id})G_1(z) = 1$ et donc $(\mathrm{Id} \otimes \epsilon \otimes \mathrm{Id})\Phi = 1$. Il ne reste plus que la relation 3. Pour la vérifier, nous aurons besoin d'étudier l'équation (KZ_4). Nous admettrons les solutions de l'équation (KZ_4) trouvées par Drinfeld.

Lemme A.8. *Il existe des solutions X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 de (KZ_4) uniquement déterminées par :*

$$\begin{aligned}
X_1(z_1, z_2, z_3, z_4) &\sim (z_2 - z_1)^{\hbar\Omega^{(12)}} (z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(13)}+\Omega^{(23)})} (z_4 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})} \\
X_2(z_1, z_2, z_3, z_4) &\sim (z_3 - z_2)^{\hbar\Omega^{(23)}} (z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(13)})} (z_4 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})} \\
X_3(z_1, z_2, z_3, z_4) &\sim (z_3 - z_2)^{\hbar\Omega^{(23)}} (z_4 - z_2)^{\hbar(\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})} (z_4 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(13)}+\Omega^{(14)})} \\
X_4(z_1, z_2, z_3, z_4) &\sim (z_4 - z_3)^{\hbar\Omega^{(34)}} (z_4 - z_2)^{\hbar(\Omega^{(23)}+\Omega^{(24)})} (z_4 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(13)}+\Omega^{(14)})} \\
X_5(z_1, z_2, z_3, z_4) &\sim (z_2 - z_1)^{\hbar\Omega^{(12)}} (z_4 - z_3)^{\hbar\Omega^{(34)}} (z_4 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(13)}+\Omega^{(14)}+\Omega^{(23)}+\Omega^{(24)})}
\end{aligned}$$

Pour X_1, le signe $\sim$ signifie qu'il existe une fonction analytique $f(u, v)$ tel que $f(0, 0) = 1$ et

$$X_1(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(u, v)(z_2 - z_1)^{\hbar\Omega^{(12)}} (z_3 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(13)}+\Omega^{(23)})} (z_4 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})}$$

ou $u = (z_2 - z_1)/(z_4 - z_1)$ et $v = (z_3 - z_1)/(z_4 - z_1)$.

Lemme A.9. *Sous ces hypothèses, nous avons les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_2 \Phi^{(1,2,3)} \\
X_2 &= X_3 \Phi^{(1,23,4)} \\
X_3 &= X_4 \Phi^{(2,3,4)} \\
X_4 &= X_5 \Phi^{(1,2,34)} \\
X_5 &= X_1 \Phi^{(12,3,4)}
\end{aligned}$$

Démonstration : Démontrons donc la première égalité $X_1 = X_2\Phi^{(1,2,3)}$. Posons

$$V_1(z_1, z_2, z_3, z_4) = X_1(z_1, z_2, z_3, z_4)(z_4 - z_1)^{-\hbar(\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})}$$

et

$$V_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = X_2(z_1, z_2, z_3, z_4)\Phi^{(1,2,3)}(z_4 - z_1)^{-\hbar(\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})}$$

Nous cherchons alors à montrer que $V_1 = V_2$.

$$\begin{aligned}
\left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(14)} + \Omega^{(24)} + \Omega^{(34)}\right] &= \left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(14)} + \Omega^{(24)}\right] + \left[\Omega^{(12)}, \Omega^{(34)}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Un calcul similaire nous donne le même résultat avec $\Omega^{(23)}$. Nous avons donc que $\Omega^{(12)}$ et $\Omega^{(23)}$ commutent avec $\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)}$. Donc, par conséquence, $\Phi^{(1,2,3)}$ qui est une série formelle en $\Omega^{(12)}$ et $\Omega^{(23)}$ commute avec $\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)}$. Par conséquent, V_2 peut s'écrire :

$$V_2(z_1,z_2,z_3,z_4)=X_2(z_1,z_2,z_3,z_4)(z_4-z_1)^{-\hbar(\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})}\Phi^{(1,2,3)}$$

En dérivant en fonction de chaque variable, nous avons que V_1 et V_2 vérifient le même système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dz_1} &= \hbar\left(\sum_{j\neq 1}\frac{\Omega_{1j}}{z_i-z_j}\right)V+\hbar V\frac{\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)}}{z_4-z_1}\\
\frac{dV}{dz_i} &= \hbar\left(\sum_{j\neq i}\frac{\Omega^{(ij)}}{z_i-z_j}\right)V \qquad \text{pour } i=2,3\\
\frac{dV}{dz_4} &= \hbar\left(\sum_{j\neq 4}\frac{\Omega_{4j}}{z_i-z_j}\right)V-\hbar V\frac{\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)}}{z_4-z_1}
\end{aligned}$$

Nous posons alors $z_4=\infty$ (ce qui est possible puisque les équations sont définies sur la droite projective complexe). Alors $V_1(z_1,z_2,z_3,\infty)$ et $V_2(z_1,z_2,z_3,\infty)$ sont des solutions de (KZ_3) de plus $V_1(z_1,z_2,z_3,\infty)$ et $V_2(z_1,z_2,z_3,\infty)(\Phi^{(1,2,3)})^{-1}$ ont les mêmes comportements asymptotiques que G_0 et G_1 de (KZ_3) respectivement. Par unicité de ces solutions, nous avons :

$$V_1(z_1,z_2,z_3,\infty)=W_0(z_1,z_2,z_3)\otimes 1$$

et

$$V_2(z_1,z_2,z_3,\infty)(\Phi^{(1,2,3)})^{-1}=W_1(z_1,z_2,z_3)\otimes 1$$

ce qui implique que, par définition de Φ,

$$\begin{aligned}
V_2(z_1,z_2,z_3,\infty) &= (W_1(z_1,z_2,z_3)\Phi)\otimes 1\\
&= W_0(z_1,z_2,z_3)\otimes 1\\
&= V_1(z_1,z_2,z_3,\infty)
\end{aligned}$$

Nous avons donc que V_1 et V_2 coïncide pour tout $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ et $z_4=\infty$. Cependant, en utilisant les équations aux dérivées partielles, nous obtenons que V_1 et V_2 coùncident partout.

Prouvons maintenant la deuxième égalité. Il suffit de vérifier que U_2 et U_3 coùncide quand nous posons :

$$U_2(z_1,z_2,z_3,z_4)=X_2(z_1,z_2,z_3,z_4)(z_3-z_2)^{-\hbar\Omega^{(23)}}$$

et

$$U_3(z_1,z_2,z_3,z_4)=X_3(z_1,z_2,z_3,z_4)\Phi^{(1,23,4)}(z_3-z_2)^{-\hbar\Omega^{(23)}}$$

$\Phi^{(1,23,4)} = \mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}(\Phi)$ est une série formelle en les variables :

$$\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}(\Omega^{(12)}) = \Omega^{(12)} + \Omega^{(13)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}(\Omega^{(23)}) = \Omega^{(24)} + \Omega^{(34)}$$

en utilisant la même démarche que par l'égalité précédente, nous pouvons montrer que $\Omega^{(12)} + \Omega^{(13)} = \Omega^{(21)} + \Omega^{(31)}$ et $\Omega^{(24)} + \Omega^{(34)}$ commutent avec $\Omega^{(23)}$. Par conséquent, U_3 peut s'écrire :

$$U_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = X_3(z_1, z_2, z_3, z_4)(z_3 - z_2)^{-\hbar\Omega^{(23)}}\Phi^{(1,23,4)}$$

En dérivant, nous avons alors que U_2 et U_3 sont solutions du système des équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dz_1} &= \hbar\left(\sum_{j\neq i}\frac{\Omega^{(ij)}}{z_i - z_j}\right)U \qquad \text{pour } i = 1, 4\\
\frac{dU}{dz_2} &= \hbar\left(\sum_{j\neq 2,3}\frac{\Omega^{(2j)}}{z_i - z_j}\right)U + \hbar\frac{[\Omega^{(23)}, U]}{z_2 - z_3},\\
\frac{dU}{dz_3} &= \hbar\left(\sum_{j\neq 2,3}\frac{\Omega^{(3j)}}{z_i - z_j}\right)U - \hbar\frac{[\Omega^{(23)}, U]}{z_2 - z_3}.
\end{aligned}$$

Quand $z_2 = z_3$, nous cherchons à montrer que :

$$U_2(z_1, z_2, z_2, z_4) = U_3(z_1, z_2, z_2, z_4),$$

pour tout z_1, z_2, z_4. Nous définissons $T_i(z_1, z_2, z_4) = U_i(z_1, z_2, z_2, z_4)$ pour $i = 2, 3$. Nous refaisons alors les dérivées partielles pour obtenir ce nouveau système :

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dz_1} &= \hbar\left(\frac{\Omega^{(12)} + \Omega^{(13)}}{z_1 - z_2} + \frac{\Omega^{(14)}}{z_1 - z_4}\right)T\\
\frac{dT}{dz_2} &= \hbar\left(\frac{\Omega^{(12)} + \Omega^{(13)}}{z_2 - z_1} + \frac{\Omega^{(24)} + \Omega^{(34)}}{z_2 - z_4}\right)T\\
\frac{dT}{dz_1} &= \hbar\left(\frac{\Omega^{(24)} + \Omega^{(34)}}{z_4 - z_2} + \frac{\Omega^{(14)}}{z_4 - z_1}\right)T.
\end{aligned}$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id})(\Omega^{(12)}) = \Omega^{(12)} + \Omega^{(13)},\ (\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id})(\Omega^{(23)}) = \Omega^{(24)} + \Omega^{(34)},\\
&(\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id})(\Omega^{(13)}) = \Omega^{(14)}
\end{aligned}$$

Par conséquent les équations impliquent que T_2 et T_3 sont solutions de l'equation (KZ_3) dans laquelle les coefficients $\Omega^{(ij)}$ sont remplacés par les coefficients $(\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id})(\Omega^{(ij)})$. Comme précédemment avec W_0 et W_1, nous obtenons des solutions H_0 et H_1 de cette équation (KZ_3) modifiée tel que :

$$H_0 = H_1(\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id})(\Phi)$$

avec les comportements asymptotiques suivants :

$$H_0(z_1, z_2, z_4) \sim (z_2 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(13)})}(z_4 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(14)}+\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})}$$

quand $|z_2 - z_1| << |z_4 - z_1|$ et

$$H_1(z_1, z_2, z_4) \sim (z_4 - z_2)^{\hbar(\Omega^{(24)}+\Omega^{(34)})}(z_4 - z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(13)}+\Omega^{(14)})}$$

quand $|z_2 - z_4| << |z_1 - z_4|$. Il s'en suit que comme T_2 et $T_3(\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id})(\Phi)^{-1}$ ont les mêmes comportements asymptotiques que H_0 et H_1 respectivement, $T_2 = H_0$ et $T_3(\mathrm{Id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id})(\Phi)^{-1} = H_1$. Nous avons donc que T_2 et T_3 coïncide. Par conséquent :

$$U_2(z_1, z_2, z_2, z_4) = U_3(z_1, z_2, z_2, z_4)$$

Comme précédemment nous pouvons étendre cette égalité.
Toutes les autres égalités se démontrent de la même façon. □

Remarques : Nous pouvons voir la démonstration d'une façon non formelle :

Nous voyons ici les différents systèmes asymptotiques. Nous pouvons interpréter cela comme les différents arrangements de parenthèses. En effet, nous considérons deux points voisins comme étant dans une même parenthèse. En effectuant cela nous obtenons le système suivant :

$$\begin{array}{ll} X_1 : & ((z_1\ z_2)\ z_3)\ z_4 \\ X_2 : & (z_1\ (z_2\ z_3))\ z_4 \\ X_3 : & z_1\ ((z_2\ z_3)\ z_4) \\ X_4 : & z_1\ (z_2\ (z_3\ z_4)) \\ X_5 : & (z_1\ z_2)\ (z_3\ z_4) \end{array}$$

Ce que nous venons de démontrer peut se résumer dans le théorème suivant :

Théorème A.10. $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]], \Delta, \epsilon, \Phi_{KZ})$ *est une quasi-bigèbre sur* $\mathbb{C}[[\hbar]]$.

Il ne reste plus qu'à définir une structure quasi-triangulaire. Sans rentrer dans les détails, nous avons que le choix de la R-Matrice est fixé par les équations KZ. Pour plus de détails, nous regarderons le livre de C. Kassel [KA95].

$$R = e^{\frac{\hbar\Omega}{2}} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}[[\hbar]]$$

Théorème A.11. $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]], \Delta, \epsilon, \Phi_{KZ}, R)$ *est une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire sur* $\mathbb{C}[[\hbar]]$.

Démonstration : Compte tenu du fait que R est $\mathfrak{g}$-invariant et que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ est cocommutative, nous avons que $\Delta^{op}R = R\Delta$. Il suffit alors de montrer que R vérifie les équation hexagonales i.e. :

$$\begin{aligned} R^{(1,23)} &= (\Phi^{(2,3,1)})^{-1}R^{(13)}\Phi^{(2,1,3)}R^{(12)}(\Phi^{(1,2,3)})^{-1} \\ R^{(12,3)} &= \Phi^{(3,1,2)}R^{(13)}(\Phi^{(1,3,2)})^{-1}R^{(23)}\Phi^{(1,2,3)} \end{aligned}$$

En utilisant les solutions de (KZ_3) W_0 et W_1 et en permutant les z_1, z_2, z_3, nous obtenons 4 solutions supplémentaires :

$$\begin{aligned} W_0(z_1,z_2,z_3) &\sim (z_2-z_1)^{\hbar\Omega^{(12)}}(z_3-z_1)^{\hbar(\Omega^{(23)}+\Omega^{(13)})} && |z_2-z_1| << |z_3-z_1| \\ W_1(z_1,z_2,z_3) &\sim (z_3-z_2)^{\hbar\Omega^{(23)}}(z_3-z_1)^{\hbar(\Omega^{(13)}+\Omega^{(13)})} && |z_2-z_3| << |z_1-z_3| \\ W_2(z_1,z_2,z_3) &\sim (z_2-z_3)^{\hbar\Omega^{(23)}}(z_2-z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(13)})} && |z_3-z_2| << |z_2-z_1| \\ W_3(z_1,z_2,z_3) &\sim (z_3-z_1)^{\hbar\Omega^{(13)}}(z_2-z_1)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(23)})} && |z_3-z_1| << |z_2-z_1| \\ W_4(z_1,z_2,z_3) &\sim (z_1-z_3)^{\hbar\Omega^{(13)}}(z_2-z_3)^{\hbar(\Omega^{(12)}+\Omega^{(23)})} && |z_3-z_1| << |z_2-z_3| \\ W_5(z_1,z_2,z_3) &\sim (z_2-z_1)^{\hbar\Omega^{(12)}}(z_2-z_3)^{\hbar(\Omega^{(13)}+\Omega^{(23)})} && |z_1-z_2| << |z_2-z_3| \end{aligned}$$

Nous remarquons que W_2 est obtenu à partir de W_1 en échangeant z_2 et z_3 en faisant passer z_3 au dessus de z_2. Nous avons donc $W_1 = W_2 e^{\frac{\hbar\Omega^{(23)}}{2}} = W_2 R^{(23)}$. Nous faisons de même avec les autres cas et obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} W_0 &= W_1\Phi \\ W_1 &= W_2 R^{(23)} \\ W_2 &= W_3(\Phi^{(1,3,2)})^{-1} \\ W_3 &= W_4 e^{\frac{\hbar\Omega^{(13)}}{2}} = W_4 R^{(13)} \\ W_4 &= W_5\Phi^{(3,1,2)} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne que

$$W_0 = W_5\Phi^{(3,1,2)}R^{(13)}(\Phi^{(1,3,2)})^{-1}R^{(23)}\Phi^{(123)}$$

De plus, comme nous avons que W_5 est obtenu de W_0 en faisant passer z_3 devant z_2 et z_1. Nous avons que

$$W_0 = W_5 e^{\frac{\hbar(\Omega^{(13)}+\Omega^{(23)})}{2}} = W_5 R_{12,3}$$

Finalement, par unicité de la solution pour le système asymptotique W_0, nous avons que

$$R^{(12,3)} = \Phi^{(3,1,2)}R^{(13)}(\Phi^{(1,3,2)})^{-1}R^{(23)}\Phi^{(1,2,3)}$$

La preuve pour la deuxième relation est similaire. $\square$

Nous avons donc un exemple de quasi-bigèbre quasi-triangulaire. Mais nous pouvons lui donner une antipode car $H = (\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]], \Delta, \epsilon, \Phi_{KZ}, R)$ est une déformation d'une algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. D'ou nous avons le résultat suivant.

Proposition A.12 (Drinfeld)**.** $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})[[\hbar]], \Delta, \epsilon, \Phi_{KZ}, R, S)$ *est une quasi-algèbre de Hopf quasi-triangulaire.*

Annexe B : Other quantization examples

This annex is the following of the quantization of zambon's coisotropic Lie subalgebras.

1 $\mathfrak{sp}(2n)$

Following Zambon's technics, we construct coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{sp}(2n)$.
We consider $\mathfrak{g}$ with Cartan subalgebra given by the diagonal matrices. The roots will be given by $R = \{\pm L_i \pm L_j\}$. The roots satisfying the assumption are of the form $\pm 2L_i$. The root space of $\alpha = L_i - L_j$ is given by $e_\alpha = x_{i,j} = e_{i,j} - e_{n+j,n+i}$ and $f_\alpha = xj, i$, for $\alpha = L_i + L_j$ it is given by $e_\alpha = y_{i,j} = e_{i,n+j} + e_{j,n+i}$ and $f_\alpha = z_{i,j} = e_{n+i,j} + e_{n+j,i}$ and finally for $\alpha = 2L_i$ it is given by $e_\alpha = u_i = E_{i,n+i}$ and $f_\alpha = v_i = e_{n+i,i}$. We obtain the r-matrix

$$\pi = \lambda \left(\frac{1}{2} \sum_{i<j} (x_{i,j} \wedge x_{j,i} + y_{i,j} \wedge z_{i,j}) + \sum_i u_i \wedge v_i \right)$$

where $\lambda \in \mathbb{R}^*$. We fix the root $\beta = 2L_i$. We then compute the bracket :

$$\left[u_i, \pi\right] = \lambda \left(\sum_{i<j} y_{i,j} \wedge x_{i,j} + u_i \wedge h_i \right)$$

Where $\{h_i = e_i i - e_{i+1,i+1} - e_{n+i,n+i} + e_{n+i+1,n+i+1}, h_n = e_{n,n} - e_{2n,2n}\}_{1 \le i \le n-1}$ is the basis of the Cartan subalgebra. The coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ that we obtain, in $\mathfrak{g}$ is generated by :

$$\{y_{i,k}, x_{i,k}\}_{i<k},\ u_i,\ h_i + h_{i+1} \cdots + h_n$$

Without loss of generality, one can restrict the study to i=1, the other case being equivalent to the first one in lower dimension. Then, the coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ that we hence obtain, is generated by :

(a) $h_1 + \cdots + h_n, \{u(1, k+1) = \left[u(1, k), e_{k+1}\right]\}_{1 \le k \le n-2}$ where $u(1, 1) = e_1$

(b) $u(1, n) = \left[u(1, n-1), e_n\right],\ w(1, n-1) = \left[u(1, n), e_{n-1}\right],\ \ldots\ , w(1, 1) = \left[w(1, 2), e_1\right]$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n\text{-}1} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\
 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
 & & & & \text{-}a_0 & & & \\
 & & & & \text{-}a_1 & 0 & & \\
 & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 & & & & \text{-}a_{n\text{-}1} & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
$$

FIGURE B.1 – Matricial representation of Zambon's coisotropric subalgebra in $\mathfrak{sp}(2n)$

The candidate $\mathfrak{C}_\hbar$ that we choose to be the quantization of $\mathfrak{c}$ in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{sp}(2n))$, will be generated by :

(a) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$, $\{U_q(1,k) = \big[U_q(1,k-1), E_k\big]_q\}_{2\leq k\leq n-1}$ where $U_q(1,1) = E_1$,
$(b)\{W_q(1,k) = \big[W_q(1,k+1), E_k\big]_q\}_{1\leq k\leq n-1}$, where $W_q(1,n) = U_q(1,n) = \big[U_q(1,n-1), E_n\big]_{q^2}$.

We now have to check if $\Delta(\mathfrak{C}_\hbar) \subset \mathfrak{C}_\hbar \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{sp}(2n))$.

Proposition B.1. *The subalgebra $\mathfrak{C}_\hbar$ is a left coideal in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{sp}(2n))$.*

Proof : We will consider the different set of generators :

(a) It is easy to see that the first set of generators will satisfy this property by taking the q-brackets as in $\mathfrak{sl}(n+1)$. Meaning that we take $U_q(1,k) = \big[\big[E_1, E_2\big]_q, \ldots, E_k\big]_q$.

(b) We need to verify if the second set of generators satify the property. One can check that :

$$\big[E_{n-1}, E_n\big]_{q^2} = 1 \otimes \big[E_{n-1}, E_n\big]_{q^2} + E_{n-1} \otimes \big[K_{n-1}, E_n\big]_{q^2} + \big[E_{n-1}, E_n\big]_{q^2} \otimes K_n K_{n-1}. \quad (1.1)$$

Therefore, we will consider $U_q(1,n) = \big[\big[\big[E_1, E_2\big]_q, \ldots, E_{n-1}\big]_q, E_n\big]_{q^2}$. For the generators $W_q(1,k)$, we do an induction.

Lemma B.2. *In $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{sp}(2n))$, we have to take $W_q(1,k) = \big[\big[U_q(1,n), E_{n-1}\big]_q \ldots, E_k\big]_q$, for $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, to have $\Delta(W_q(1,k)) \in \mathfrak{C}_\hbar \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{sp}(2n))$*

the proof is done by computation. □

Then again as what we did in the Chapter III, we need to check if this quantization is flat. And we will follow the same demonstration.

Theorem B.3. *$\mathfrak{C}_\hbar$ is a quantization of $\mathfrak{c}$.*

Proof : Using the lemma 2.7, we need to prove that for all generators A_1, A_2. By computation, we will prove that this assertion is true.

• For $\big[(a),(a)\big]$, it is done the same way as in the previous example $\mathfrak{sl}(n+1)$.

• For $\big[(a),(b)\big]$. We can set $A_1 = U_q(1,j)$ and $A_2 = W_q(1,k)$ with $1 \leq k,j \leq n$.
If $k \geq j+2$. We have :

$$\big[U_q(1,j),W_q(1,k)\big]_{q^{-1}} = \big[U_q(1,j),\big[\big[\big[U_q(1,n-1),E_n\big]_{q^2},E_{n-1}\big]_q,\dots,E_k\big]_q\big]_{q^{-1}} = 0.$$

By using the fact that $\big[U_q(1,j),U_q(1,n-1)\big]_{q^{-1}} = 0$ (given by the previous example) and that $U_q(1,j)$ commutes with E_k for $k \geq j+2$.
If $k = j+1$. First for j=1, we have :

$$\big[W_q(1,2),E_1\big]_q = W_q(1,1).$$

For j=2, we will use the following properties :
If $\big[B,A\big]_{q^{-1}} = 0$, then $\big[A,\big[B,C\big]_q\big]_{q^2} = q\big[B,\big[C,A\big]_q\big]$, and for every A, B and $a \in \mathbb{Z}$, we have that $\big[A,B\big] = -\big[B,A\big]_a + (1-q^a)(AB)$. Therefore we have :

$$\big[W_q(1,3),U_q(1,2)\big]_{q^2} = -qW_q(1,1) + hq(E_1W_q(1,2))$$

And by successive iteration we can find that :

$$\begin{aligned}\big[W_q(1,j+1),U_q(1,j)\big]_{q^2} =& (-q)^{j-1}\left(W_q(1,1)+hE_1W_q(1,2)\right)\\ &-\left((1-q^2)\sum_{i=2}^{j-1}(-q)^{j-i}U_q(1,i)W_q(1,i+1)\right)\end{aligned}$$

If $k = j$, we have for $j = n$, $\big[U_q(1,n),U_q(1,n)\big] = 0$. If $j = n-1$, we have that :

$$\big[U_q(1,n{-}1),W_q(1,n{-}1)\big]_{q^{-1}} = \big[\big[U_q(1,n{-}2),E_{n-1}\big]_q,\big[\big[\big[U_q(1,n{-}2),E_{n-1}\big]_q,E_n\big]_{q^2},E_{n-1}\big]_q\big]_{q^{-1}}$$

by using the following relations

$$\big[U_q(1,n-2),\big[U_q(1,n-2),E_{n-1}\big]_q\big]_{q^{-1}} = 0 \tag{1.2}$$

$$\big[E_{n-1},\big[E_{n-1},U_q(1,n-2)\big]_q\big]_{q^{-1}} = 0 \tag{1.3}$$

$$\big[E_{n-1},\big[E_{n-1},\big[E_{n-1},E_n\big]_{q^2}\big]\big]_{q^{-2}} = 0 \tag{1.4}$$

We can prove that $\big[U_q(1,n-1),W_q(1,n-1)\big]_{q^{-1}} = 0$.
For $j \leq n-2$, we have that :

$$\big[U_q(1,j),W_q(1,j)\big]_{q^{-1}} = q^{-1}\big[W_q(1,j+2),\big[U_q(1,j),\big[E_{j+1},E_j\big]_q\big]\big]_{q^2}$$

which is equal to zero by using the same proof as in $\mathfrak{sl}(n+1)$. i.e. $\big[U_q(1,j),\big[E_{j+1},E_j\big]_q\big]=0$. Finally if $n\neq k>j$, we have to consider :

$$\big[U_q(1,k),W_q(1,j)\big]_{q^{-1}}=\big[\big[U_q(1,k),W_q(1,k)\big]_{q^{-1}},\big[E_{k-1},\dots,E_j\big]_q\big]_q\;=0$$

Because $\big[E_{k-1},\dots,E_j\big]_q$ commutes with $U_q(1,k)$ by using the same proof as in $\mathfrak{sl}(n+1)$ and $\big[U_q(1,k),W_q(1,k)\big]_{q^{-1}}=0$. For k=n, we have to consider the special case of

$$\big[U_q(1,n),W_q(1,n-1)\big]_{q^{-1}}=\big[\big[U_q(1,n-1),E_n\big]_{q^2},W_q(1,n-1)\big]_{q^{-1}}=0$$

which is solved by using the fact that $\big[U_q(1,n-1),W_q(1,n-1)\big]_{q^{-1}}=\big[E_n,W_q(1,n-1)\big]=0$. Then we extend this to $W_q(1,j)$ by using the fact E_j commutes with $U_q(1,n)$ for $j\leq n-2$.

- For $\big[(b),(b)\big]$, we need to compute $\big[W_q(1,k),W_q(1,k-1)\big]_{q^{-1}}$ with $k\geq j$. We can see that :

$$\big[W_q(1,k),W_q(1,k-1)\big]_{q^{-1}}=\big[\big[W_q(1,k),W_q(1,k+1)\big]_{q^{-1}},\big[E_k,E_{k-1}\big]_q\big]_q$$

Because $\big[E_k,E_{k-1}\big]_q$ commutes with $U_q(1,n)$ and ${}_{n-1}V_q(n,k)$ therefore it commutes with Y_k. By using this, we only need to consider the final case $\big[W_q(1,n-1),W_q(1,n-2)\big]_{q^{-1}}$ which is equal to zero by using the same relation as the previous case.

- For all E generators in $\mathfrak{C}_\hbar$, there exists $\lambda\in\Bbbk$ such that :

$$\big[\sum_i H_i,E\big]=\lambda E.$$

By using the proposition 2.7, we conclude our proof. □

2 $\mathfrak{so}(2n+1)$

We now construct coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{so}(2n+1)$. We consider $\mathfrak{g}$ with Cartan subalgebra given by the diagonal matrices. The roots are R=$\{\pm L_i\pm L_j\}_{i<j}\cup\{\pm L_i\}$. The roots that satisfy the assumption are those of the form $\{\pm L_i\pm L_j\}_{i<j}$.
The root space of $\alpha=L_i-L_j$ is spanned by $e_\alpha=x_{i,j}=e_{i,j}-e_{n+j,n+i}$ and $f(\alpha)=x_{j,i}$. For $\alpha=L_i+L_j$ it is given by $e_\alpha=y_{i,j}=e_{i,n+j}-e_{j,n+i}$ and $f_\alpha=z_{i,j}=y^t_{i,j}$. And finally for $\alpha=L_i$ it is given by $e_\alpha=u_i=e_{i,2n+1}-e_{2n+1,n+i}$ and $f(\alpha)=v_i=u_i^t$. We obtain the r-matrix

$$\pi=\lambda\left(\sum_{i<j}(x_{i,j}\wedge x_{j,i}-y_{i,j}\wedge z_{i,j})-\sum_i u_i\wedge v_i\right)$$

where $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

$\beta = L_i - L_j$. The coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ that we obtain, for a fixed i and j, in $\mathfrak{g}$ is generated by :

$$\{x_{i,k}, x_{k,j}\}_{i<k<j}, x_{i,j}, \left[x_{i,j}, x_{j,i}\right] = h_i + h_{i+1} + \cdots + h_j$$

Where $\{h_i = e_i i - e_{i+1,i+1} - e_{n+i,n+i} + e_{n+i+1,n+i+1}, h_n = e_{n,n} - e_{2n,2n}\}_{1\leq i\leq n-1}$ is the basis of the Cartan subalgebra which is in terms of chevalley generators :

$$h_i + h_{i+1} + \cdots + h_{j-1},\ e_i,\ \left[e_i, e_{i+1}\right],\ \left[\left[e_i, e_{i+1}\right], e_{i+2}\right],\ \ldots\ ,\ \left[\left[e_i, e_{i+1}\right], \ldots, e_{j-1}\right]$$

$$e_{j-1},\ \left[e_{j-1}, e_{j-2}\right],\ \left[\left[e_{j-1}, e_{j-2}\right], e_{j-3}\right],\ \ldots\ ,\ \left[\left[e_{j-1}, e_{j-2}\right], \ldots, e_{i+1}\right]$$

This example is the same as the case of $\mathfrak{sl}(n)$.

$\beta = L_i + L_j$. The coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ that we obtain, for a fixed i and j, in $\mathfrak{g}$ is generated by :

$$\{X_{ik}, Y_{kj}\}_{i<k\neq j}, \{X_{jk}, Y_{ki}\}_{j<k}, Y_{ij},\ H_i - H_j$$

without loss of generality, we can restrict the study to i=1. But we will distinct two cases.

The first coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ is obtained by setting $j = n$:

(a) $h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1},\ e_1,\ u(1,2) = \left[e_1, e_2\right],\ \ldots\ u(1, n-2) = \left[u(1, n-3), e_{n-2}\right],$
(b) $e_n, u(1,n) = \left[\left[\left[e_1, e_2\right] \ldots, e_{n-1}\right], e_n\right],$
(c) $v(n, n-1) = \left[e_n, \left[e_n, e_{n-1}\right]\right],\ v(n, n-2) = \left[v(n, n-1), e_{n-2}\right], \ldots, v(n, 1) = \left[v(n, 2), e_1\right]$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n\text{-}2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 & b_2 \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & 0 & -c_2 & 0 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{n\text{-}1} & 0 \\
 & & & & -a_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n\text{-}1} & 0 & b_1 \\
\hline
 & & & & & -a_0 & & & & & \\
 & & & & & -a_1 & 0 & & & & \\
 & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
 & & & & & -a_{n\text{-}2} & 0 & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \\
\hline
 & & & & & -b_2 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 & 0
\end{array}\right)$$

FIGURE B.2 – Matricial representation of Zambon's coisotrope of $\mathfrak{so}(2n+1)$

it's counterpart $\mathfrak{C}_\hbar$ in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{so}(2n+1))$ is generated by :

(a) $\sum_{i=1}^{n} H_i, \{U_q(1,k) = \big[U_q(1,k-1), E_k\big]_{q^2}\}_{2\le k\le n-2}$ where $U_q(1,1) = E_1$,

(b) $E_n,\ U_q(1,n) = \big[E_n, \big[U_q(1,n-2), E_{n-1}\big]_{q^2}\big]_{q^2}$

(c) $\{V_q(n,k) = \big[V_q(n,k+1), E_k\big]_{q^2}\}_{1\le k\le n-2}$ where $V_q(n,n-1) = \big[E_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big]$

Proposition B.4. *the subalgebra $\mathfrak{C}_\hbar$ is a left coideal in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{so}(2n+1))$*

Proof : For the first set of generators, it is done the same way as in the previous cases. The second set of generators is trivial by considering the fact that :

$$\Delta(\big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}) = 1\otimes \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2} + E_n \otimes \big[K_n, E_{n-1}\big]_{q^2} + \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2} \otimes K_n K_{n-1}$$

Now for the third set of generators, we will compute $\Delta(\big[E_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big])$, only the term $\big[1\otimes E_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\otimes K_n K_{n-1}\big]$ will be an obstruction. But we can see that $\big[E_n, K_n K_{n-1}\big] = 0$ implying that $\big[1\otimes E_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\otimes K_n K_{n-1}\big] = 0$. This means that that :

$$\begin{aligned}\Delta(V_q(n,n-1)) =& 1\otimes V_q(n,n-1)\\ &+\ E_n \otimes \big[E_n, \big[K_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big] + \big[K_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big]\\ &+\ E_n^2 \otimes \big[K_n, \big[K_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big]\\ &+\ V_q(n,n-1)\otimes K_n^2 K_{n-1}\end{aligned}$$

The last set of generators is done by computing the generators one by one.
one can check by computation that for $V_q(n,j)$

$$\begin{aligned}\Delta(V_q(n,j)) =& 1\otimes V_q(n,j) + \ E_n \otimes \Big([[[K_n, [E_n, E_{n-1}]_{q^2}], E_{n-2}]_{q^2} \ldots, E_j]_{q^2}\\ &\qquad + [[[E_n, [K_n, E_{n-1}]_{q^2}], E_{n-2}]_{q^2} \ldots, E_j]_{q^2}\Big)\\ &+\ E_n^2 \otimes [[[K_n, [K_n, E_{n-1}]_{q^2}], E_{n-2}]_{q^2} \ldots, E_j]_{q^2}\\ &+\ V_q(n,n-1)\otimes [[K_n^2 K_{n-1}, E_{n-2}]_{q^2} \ldots, E_j]_{q^2}\\ &+\ V_q(n,n-2)\otimes [[K_n K(n-2,n), E_{n-3}]_{q^2} \ldots, E_j]_{q^2}\\ &+\ \cdots + V_q(n,j)\otimes K_n K(j,n)\end{aligned}$$

□

Theorem B.5. *$\mathfrak{C}_\hbar$ is a quantization of $\mathfrak{c}$.*

Proof : we will prove that $\mathfrak{C}_\hbar$ is a flat deformation, by computation.

- $A_1, A_2 \in ((a),(a))$, the demonstration is the same as in $\mathfrak{sl}(n+1)$ replacing q by q^2.

• $A_1, A_2 \in ((a),(b))$ is direct, as $\big[U_q(1,k), E_n\big] = 0$ and that $\big[U_q(1,k), U_q(1,n-1)\big]_{q^{-2}} = 0$.

• $A_1, A_2 \in ((a),(c))$, it is done exactly the same as in $\mathfrak{so}(2n)$.

• $A_1, A_2 \in ((b),(b))$, we only need to consider $\big[E_n, \big[E_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big]\big]_{q^{-2}}$ which is equals to zero by using the Serre relations.

• $A_1, A_2 \in ((b),(c))$ is direct as $\big[E_n, V_q(n,j)\big]_{q^{-2}} = 0$. Therefore, we need to verify that

$$\big[\big[E_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big], \big[\big[E_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big], E_{n-2}\big]_{q^2}\big]_{q^{-2}} = 0$$

To prove this, we will use the following relations

$$\big[E_n, \big[E_n, \big[E_n, E_{n-1}\big]_{q^2}\big]\big]_{q^{-2}} = 0 \tag{2.1}$$

$$\big[E_n, \big[E_n, \big[E_n, \big[E_{n-1}, E_{n-2}\big]_{q^2}\big]_{q^2}\big]\big]_{q^{-2}} = 0 \tag{2.2}$$

$$\big[E_{n-1}, \big[E_n, \big[E_{n-1}, E_{n-2}\big]_{q^2}\big]_{q^2}\big] = 0 \tag{2.3}$$

• $A_1, A_2 \in ((c),(c))$, we need here to compute $\big[V_q(n,k), V_q(n,l)\big]_{q^{-2}}$ with k < l. But by using the proof in $\mathfrak{sl}(n+1)$, we can see that for $n-2 \geq i \geq k$, we have that E_i commutes with $V_q(n,l)$ and therefore we have :

$$\big[V_q(n,k), V_q(n,l)\big]_{q^{-2}} = \big[\big[\big[V_q(n,n-1), V_q(n,l)\big]_{q^{-2}}, E_{n-2}\big]_{q^2}, \dots, E_k\big]_{q^2}$$

which is equal to zero considering the last proof.

• Of course like the preceding proof, we have that for all E generators in $\mathfrak{C}_\hbar$, there exists $l \in \mathbb{N}$ such that :

$$\big[\sum_{i=1}^{j-1} H_i, E\big] = (1-q^l)\sum_{i=1}^{j-1} H_i E.$$

By using the proposition 2.7, we conclude our proof. □

Let's now proceed with the second coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ obtained for $j \neq n$. This case is more complicated. We will directly give the candidate $\mathfrak{C}_\hbar$, it will be generated by :

(a) $\sum i = 1^{j-1} H_i$, $\{U_q(1,k) = \big[U_q(1,k-1), E_k\big]_{q^2}\}_{2\leq k\leq j-2}$ where $U_q(1,1) = E_1$,

(b) $\{U_q(j,k) = \big[U_q(j,k-1), E_k\big]_{q^2}\}_{j+1\leq k\leq n-1}$ where $U_q(j,j) = E_j$

(c) $\{\big[U_q(j,k), T\big]_{q^2}\}_{j\leq k\leq n-1}$ where $T = U_q(1,j-1) = \big[\big[E_1, E_2\big]_{q^2} \dots, E_{j-1}\big]_{q^2}$,

(d) $U_q(j,n)$, $\{W_q(j,k) = \big[W_q(j,k+1), E_k\big]_{q^2}\}_{j+2\leq k\leq n-2}$ where $W_q(j,n-1) = \big[U_q(j,n), E_n\big]$,

(e) $\big[U_q(j,n), T\big]_{q^2}$, $\{\big[W_q(j,k), T\big]_{q^2}\}_{j+1\leq k\leq n-1}$

(f) $\{W_q(j,k) = \big[W_q(j,k+1), E_k\big]_{q^2}\}_{1\leq k\leq j-2}$ where $W_q(j,j-1) = \big[W_q(j,j+1), \big[E_j, E_{j-1}\big]_{q^2}\big]_{q^2}$.

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc|c}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{j-2} & 0 & c_j & \cdots & c_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_1 & e_j & \cdots & e_{n-1} & e_n \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & 0 & -f_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_{j-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & -a_0 & b_j & \cdots & b_{n-1} & f_1 & f_2 & \cdots & f_{j-1} & 0 & d_j & \cdots & d_{n-1} & d_n \\
 & & & & & 0 & \cdots & 0 & -e_j & 0 & \cdots & 0 & -d_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & 0 & -e_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & -d_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
 & & & & & & & & -a_0 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & -a_1 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & & -a_{j-2} & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & & & & \\
 & & & & & & & & -c_j & 0 & \cdots & 0 & -b_j & 0 & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
 & & & & & & & & -c_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & \\
\hline
 & & & & & & & & -e_n & 0 & \cdots & 0 & -d_n & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right)
$$

FIGURE B.3 – Matricial representation of Zambon's coisotrope of $\mathfrak{so}(2n+1)$

Proposition B.6. *The subalgebra $\mathfrak{C}_\hbar$ is a left coideal in $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{so}(2n+1))$*

Proof : The proof for the first three sets of generators is exactly the same as in $\mathfrak{so}(2n)$. For the fourth set of generators, it is exactly like the previous example in $\mathfrak{so}(2n+1)$. Let's set $W_q(j,k) = \big[\big[\big[U_q(j,n), E_n\big], E_{n-1}\big] \ldots, E_k\big]$ for $k \geq j+1$

$$
\begin{aligned}
\Delta(U_q(j,n)) = & 1 \otimes U_q(j,n) + E_j \otimes \big[\big[\big[K_j, E_{j+1}\big]_{q^2}, \ldots, E_{n-1}\big]_{q^2}, E_n\big]_{q^2} \\
& + U_q(j,j+1) \otimes \big[\big[\big[K_j K_{j+1}, E_{j+2}\big]_{q^2}, \ldots, E_{n-1}\big]_{q^2}, E_n\big]_{q^2} \\
& + \ \cdots \ + U_q(j,n-1) \otimes \big[K(j,n-1), E_n\big]_{q^2} + U_q(j,n) \otimes {}_j K_n
\end{aligned}
$$

for $W_q(j,n)$

$$
\Delta(W_q(j,n)) = \big[\Delta(U_q(j,n)), 1 \otimes E_n + E_n \otimes K_n\big]
$$

We only need to look at $\big[\Delta(U_q(j,n)), E_n \otimes K_n\big]$. It is easy to see that for $j \leq k \leq n-2$, we have that E_n commutes with $U_q(j,k)$ and that $\big[\big[\big[K(j,k), E_{k+1}\big]_{q^2}, E_n\big]_{q^2}, K_n\big] = 0$. Also the last term $\big[U_q(j,n) \otimes K(j,n), E_n \otimes K_n\big]$ is not an obstruction. We need to consider the term :

$$
\big[U_q(j,n-1) \otimes \big[K(j,n-1), E_n\big]_{q^2}, E_n \otimes K_n\big] = U_q(j,n) \otimes \big[K(j,n-1), E_n\big]_{q^2} K_n
$$

In the end, we find for $W_q(j,n)$,

$$\begin{aligned}\Delta(W_q(j,n)) =&1\otimes W_q(j,n) + E_j \otimes \big[\big[\big[\big[K_j, E_{j+1}\big]_{q^2}, \ldots, E_{n-1}\big]_{q^2}, E_n\big]_{q^2}, E_n\big]\\ &+ U_q(j,j+1)\otimes \big[\big[\big[\big[K_jK_{j+1}, E_{j+2}\big]_{q^2}, \ldots, E_{n-1}\big]_{q^2}, E_n\big]_{q^2}, E_n\big]\\ &+ \ \cdots \ + U_q(j,n-1)\otimes \big[\big[K(j,n-1), E_n\big]_{q^2}, E_n\big]\\ &+ U_q(j,n)\otimes \big(\big[K(j,n), E_n\big] + \big[K(j,n-1), E_n\big]K_n\big)\\ &+ W_q(j,n)\otimes K(j,n)K_n\end{aligned}$$

The rest of the proof consists in the same demonstration as in $\mathfrak{so}(2n)$. □

Theorem B.7. $\mathfrak{C}_\hbar$ *is a quantization of* $\mathfrak{c}$.

Proof : The proof here is done like the previous one (a mix between the last one and the one of $\mathfrak{so}(2n)$). □

3 Exceptional Simple Lie Algebra

We will here construct the example on the Lie bialgebras of type G_2. The case of F_4 is trivial because we have that none of the positive roots verifies the property. Therefore, we cannot construct an example.
Now let's focus on the case of G_2. The roots are given by $R = \{\pm L_1, \pm\sqrt{3}L_2, \pm\frac{1}{2}L_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}L_2, \pm\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}L_2\}$, the simple roots are $\alpha_1 = L_1$ and $\alpha_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2$.The roots that satisfy the assumption are $\pm\sqrt{3}L_2$ and $\pm\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}L_2$. The root space of L_1 is given by $x_1 = e_1$ and $y_1 = f_1$, for $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2$ it is given by $x_2 = e_2$ and $y_2 = f_2$, for $-\frac{1}{2}L_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ it is given by $x_3 = \big[e_1, e_2\big]$ and $y_3 = \big[f_1, f_2\big]$, for $\frac{1}{2}L_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2 = \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2$ it is given by $x_4 = \big[e_1, x_3\big]$ and $y_4 = \big[f_1, y_3\big]$, for $\frac{3}{2}L_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2 = \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2$ it is given by $x_5 = \big[e_1, x_4\big]$ and $y_5 = \big[f_1, y_4\big]$, and finally for $\sqrt{3}L_2 = \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2$ it is given by $x_6 = \big[e_2, x_5\big]$ and $y_6 = \big[f_2, y_5\big]$. But for the computation to be easier, we will apply the changes that were done by Fulton and Harris in [FH91]. We need to compute the r-matrix :

$$\pi = \frac{1}{24}\left(x_1\wedge y_1 + x_3\wedge y_3 + x_4\wedge y_4\right)\frac{1}{8}\left(x_2\wedge y_2 + x_5\wedge y_5 + x_6\wedge y_6\right)$$

we fix $\beta = \alpha_2$ therefore we compute the bracket :

$$\big[e_2, \pi\big] = \lambda(e_2\wedge h_2)$$

The coisotropic subalgebra is spanned by : e_2 and $h_1 + h_2$. This example is trivial. We fix $\beta = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}L_2$ therefore the bracket gives :

$$\big[x_5, \pi\big] = 2x_1\wedge x_4 + x_5\wedge h_1 + h_2$$

Therefore, the coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ is spanned by

$$h_1 + h_2,\ x_1,\ x_4,\ x_5$$

and its quantum counterpart $\mathfrak{C}_\hbar$

$$K_1K_2,\ E_1,\ X = \big[\big[E_1, E_2\big]_{q^3}, E_1\big]_{q^{-1}},\ Y = \big[\big[\big[E_1, E_2\big]_{q^3}, E_1\big]_{q^{-1}}, E_1\big]_q$$

Proposition B.8. *$\mathfrak{C}_\hbar$ is a left coideal of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$*

Proof : We have to check that $\Delta(\mathfrak{C}_\hbar) \subset \mathfrak{C}_\hbar \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. It is direct for K_1K_2 and E_1. We have to check it for $\big[\big[E_1, E_2\big], E_1\big]$

$$\Delta(\big[E_1, E_2\big]) = 1 \otimes \big[E_1, E_2\big]_{q^3} + E_1 \otimes \big[K_1, E_2\big]_{q^3} + \big[E_1, E_2\big]_{q^3} \otimes K_1K_2$$

and therefore

$$\begin{aligned}\Delta(X) =& 1 \otimes X + \big[E_1, E_2\big]_{q^3} \otimes \big[K_1K_2, E_1\big]_{q^{-1}} \\ &+\ E_1 \Big(\otimes \big[\big[K_1, E_2\big]_{q^3}, E_1\big]_{q^{-1}} + \big[\big[E_1, E_2\big]_{q^3}, K_1\big]_{q^{-1}}\Big) \\ &+\ E_1^2 \otimes \big[\big[K_1, E_2\big]_{q^3}, K_1\big]_{q^{-1}} + X \otimes K_1^2K_2\end{aligned}$$

The only term that we need to eliminate is $\big[E_1, E_2\big]_{q^3}$, but as $\big[K_1K_2, E_1\big]_{q^{-1}} = 0$, we will use the q^{-1} bracket. The last one is given directly by the fact that both $\Delta(X)$ and $\Delta(E_1)$ are in $\mathfrak{C}_\hbar \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. □

Theorem B.9. *$\mathfrak{C}_\hbar$ is a quantization of $\mathfrak{c}$.*

Proof : Using the lemma 2.7, we need to prove that for all generators A_1, A_2 we have that $\big[A_1, A_2\big]$ is composed of elements either well ordered, of degree 1 (the same as well ordered here) or of valuation on h greater than A_1A_2.
For $A_1 = E_1$, we have that the bracket with X gives us a generator and the one with Y is zero by using the Serre relations. Therefore only one bracket remains, that is $\big[X, Y\big]$ which is also equal to zero by using the two Serre relations and solving a linear system using those equations. Of course like the preceding proof, we have that for all A generators in $\mathfrak{C}_\hbar$, there exists $l \in \mathbb{N}$ such that $\big[K_1K_2, A\big] = (1 - q^l)K_1K_2A$. Therefore, by using the proposition 2.6, we conclude the demonstration. □

Finally, for $\beta = \sqrt{3}L_2$, we have :

$$\big[x_6, \pi\big] = 2x_2 \wedge x_5 + 2x_3 \wedge x_4 + x_6 \wedge h_1 + 2h_2$$

Therefore, the coisotropic subalgebra $\mathfrak{c}$ is spanned by

$$h_1 + 2h_2,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$$

and its quantum counterpart is :

$$K_1K_2^2,\ E_2,\ X = \big[E_2, E_1\big]_{q^3},\ Y = \big[X, E_1\big]_q,\ Z = \big[Y, E_1\big]_{q^{-1}}, T = \big[Z, E_2\big]$$

Proposition B.10. *$\mathfrak{C}_\hbar$ is a left coideal of $\mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$*

Proof : We have to check that $\Delta(\mathfrak{C}_\hbar) \subset \mathfrak{C}_\hbar \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$. It is directly verified for $K_1K_2^2$ and E_2. After we chose the generator so that E_1 vanishes on the left side of the tensor.

$$\Delta(\big[E_2, E_1\big]_{q^3}) = 1 \otimes \big[E_2, E_1\big]_{q^3} + E_1 \otimes \big[E_2, K_1\big]_{q^3} + E_2 \otimes \big[K_2, E_1\big]_{q^3} + \big[E_1, E_2\big]_{q^3} \otimes K_1K_2$$

we have that $\big[E_2, K_1\big]_{q^3} = 0$. Therefore for $X = \big[E_2, E_1\big]_{q^3}$

$$\Delta(X) = 1 \otimes X + E_2 \otimes \big[K_2, E_1\big] + X \otimes K_1K_2$$

for the next generator a simple computation can show that we need to use q bracket to eliminate the term $E_1 \otimes \big[X, K_1\big]_q$ as $\big[X, K_1\big]_q = 0$.

$$\begin{aligned}\Delta(Y) =& 1 \otimes Y + E_2 \otimes \big[\big[K_2, E_1\big]_{q^3}, E_1\big]_q + E_1 \otimes \big[X, K_1\big]_q \\ &+ \ X \otimes \Big(\big[K_1K_2, E_1\big]_q + \big[K_2, E_1\big]_{q^3}K_1\Big) + Y \otimes K_1^2K_2\end{aligned}$$

For Z as for Y, a simple computation and reordering of terms shows that we need to take the q^{-1} bracket. For T as $\Delta(E_2)$ and $\Delta(Z)$ are in $\mathfrak{C}_\hbar \otimes \mathcal{U}_\hbar(\mathfrak{g})$ we do not have any constraints. $\square$

Theorem B.11. *$\mathfrak{C}_\hbar$ is a quantization of $\mathfrak{c}$.*

Proof : Using the lemma 2.7, we need to prove that for all generators a_1, a_2 we have that $\big[a_1, a_2\big]$ is composed of elements either well ordered, of degree 1 (the same as well ordered here) or of valuation on h greater than a_1a_2.

- For $A_1 = E_2$, we have to compute $\big[E_2, \big[E_2, E_1\big]_{q^3}\big]_{q^{-3}}$ which is equal to zero as it is the Serre relation between E_2 and E_1.

$$\big[E_2, Y\big]_0 = q^{-3}\big[\big[E_2, E_1\big]_{q^3}, \big[E_2, E_1\big]_{q^3}\big]_4 = q^{-3}(1 - q^4)\big[E_2, E_1\big]_{q^3}^2.$$

then we have to compute :

$$\big[E_2, Z\big]_0 = -T$$

and finally :

$$\big[E_2, T\big] = 0 + h * C$$

this is done by using the Serre relations $\big[E_2, \big[E_2, E_1\big]_{q^3}\big]_{q^{-3}} = 0$ and elements in $\mathfrak{C}_\hbar$ in order to obtain a linear system.
- For $A_1 = X$, we have to compute $\big[X, Y\big]$ by using the same demonstration as $\big[E_2, Z\big] = -T$ and $\big[X, Z\big]$ and $\big[X, T\big]$ by using the same demonstration as $\big[E_2, T\big]$.
- For $A_1 = Y$, we have to compute $\big[Y, Z\big]$ and $\big[Y, T\big]$ which are still the same as $\big[E_2, T\big]$.
- For $A_1 = Z$, we finally have to compute $\big[Z, T\big]$. Of course like the preceding proof, we have that for all E generators in $\mathfrak{C}_\hbar$, there exists $l \in \mathbb{N}$ such that $\big[K_1K_2^2, E\big] = (1 - q^l)K_1K_2^2E$. Therefore, by using the proposition 2.6, we conclude the demonstration. $\square$

Remarques : The same method can be used for E_7 and E_8, because all the roots are of the same length. For more information and a demonstration of this method we refer to [Bou81b] and [Bou81c]. With those two tables, we have 36 examples of coisotropic subalgebras (by using the fact that for each * we can construct a symmetric coisotropic subalgebra by replacing E_1 by E_6 and E_3 by E_5). The proofs are similar to the one done in the case of $\mathfrak{so}(2n)$.

Roots	Generators of $\mathfrak{C}_q$ in $\mathcal{U}_q(E_6)$
α_i	$E_i,\ K_i.$
$\alpha_1+\alpha_3$ *	$K_1K_3,\ E_1,\ E_3,$ $\big[E_1,E_3\big]_q.$
$\alpha_3+\alpha_4$ *	$K_3K_4,\ E_3,\ E_4,$ $\big[E_3,E_4\big]_q$
$\alpha_2+\alpha_4$ *	$K_2K_4,\ E_2,\ E_4,$ $\big[E_2,E_4\big]_q$
$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$ *	$K_1K_3K_4,\ E_1,\ E_4,$ $\big[E_1,E_3\big]_q,\ \big[E_4,E_3\big]_q,$ $\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q.$
$\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$	$K_3K_4K_5,\ E_3,\ E_5,$ $\big[E_3,E_4\big]_q,\ \big[E_5,E_4\big]_q,$ $\big[\big[E_3,E_4\big]_q,E_5\big]_q.$
$\alpha_3+\alpha_4+\alpha_2$ *	$K_3K_4K_2,\ E_3,\ E_2,$ $\big[E_3,E_4\big]_q\ ,\ \big[E_2,E_4\big]_q\ ,$ $\big[\big[E_3,E_4\big]_q,E_2\big]_q\ .$
$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$ $+\ \alpha_5$*	$K_1K_3K_4K_5\ ,\ E_1\ ,\ E_5,$ $\big[E_1,E_3\big]_q,\ \big[E_5,E_4\big]_q,$ $\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q,\ \big[\big[E_5,E_4\big]_q,E_3\big]_q,$ $\big[\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q,E_5\big]_q.$
$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$ $+\ \alpha_2$ *	$K_1K_3K_4K_2\ ,\ E_1\ ,\ E_2\ ,$ $\big[E_1,E_3\big]_q,\ \big[E_2,E_4\big]_q,$ $\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q,\ \big[\big[E_2,E_4\big]_q,E_3\big]_q,$ $\big[\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q,E_2\big]_q\ .$
$\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$ $+\ \alpha_2$	$K_3K_4K_5K_2\ ,\ E_3,\ E_2,\ E_5,$ $\big[E_5,\big[E_2,E_4\big]_q\big]_q,\ \big[E_5,\big[E_3,E_4\big]_q\big]_q,\ \big[E_2,\big[E_3,E_4\big]_q\big]_q,$ $\big[E_5,\big[E_2,\big[E_3,E_4\big]_q\big]_q\big]_q\ .$
$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$ $+\ \alpha_5+\alpha_6$	$K_1K_3K_4K_5K_6\ ,\ E_1,\ E_6,$ $\big[E_1,E_3\big]_q,\ \big[E_6,E_5\big]_q,$ $\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q\ ,\ \big[\big[E_6,E_5\big]_q,E_4\big]_q,$ $\big[\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q,E_5\big]_q,\ \big[\big[\big[E_6,E_5\big]_q,E_4\big]_q,E_3\big]_q,$ $\big[\big[\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q,E_5\big]_q,E_6\big]_q\ .$
$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$ $+\alpha_5+\alpha_2$ *	$K_1K_3K_4K_5K_2\ ,\ E_1,\ E_2,\ E_5,$ $\big[E_1,E_3\big]_q,\ \big[E_5,\big[E_2,E_4\big]_q\big]_q,$ $\big[E_5,\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q\big]_q\ ,\ \big[E_2,\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q\big]_q\ ,$ $\big[E_5,\big[E_2,\big[\big[E_1,E_3\big]_q,E_4\big]_q\big]_q\big]_q\ .$

Roots	Generators of $\mathfrak{C}_q$ in $\mathcal{U}_q(E_6)$
$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$ $+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_2$	$K_1K_3K_4K_5K_6K_2,\ E_1,\ E_2,\ E_6,$ $[E_1,E_3],\ [E_6,E_5],$ $[E_2,[[E_1,E_3],E_4]],\ [E_2,[[E_6,E_5],E_4]],$ $[E_2,[[[E_1,E_3],E_4],E_5]],\ [E_6,[[[E_1,E_3],E_4],E_5]],$ $[E_2,[[[E_6,E_5],E_4],E_3]]\ ,\ [E_2,[E_6,[[[E_1,E_3],E_4],E_5]]]\ .$
$\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5$ $+\alpha_2$	$K_3K_4^2K_5K_2\ ,\ E_4,$ $[E_4,E_2],\ [E_4,E_5],\ [E_4,E_3],$ $[[E_4,E_3],E_5],\ [[E_4,E_5],E_2],\ [[E_4,E_3],E_2],$ $[[[E_4,E_3],E_5],E_2]\ ,\ [E_4,[[[E_4,E_3],E_5],E_2]]\ .$
$\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_4$ $+\alpha_5+\alpha_2$ *	$K_1K_3K_4^2K_5K_2\ ,\ E_1\ ,\ E_4,$ $[E_4,E_2],\ [E_4,E_5],$ $[[E_4,E_5],E_2],\ [E_4,[E_1,E_3]],$ $[[E_4,E_2],[E_1,E_3]],\ [[E_4,E_5],[E_1,E_3]],$ $[[[E_4,E_5],E_2],[E_1,E_3]],\ [[[E_4,E_5],E_2],[E_4,E_3]],$ $[E_1,[[[E_4,E_5],E_2],[E_4,E_3]]]\ .$
$\alpha_1+2\alpha_3+2\alpha_4$ $+\alpha_5+\alpha_2$ *	$K_1K_3^2K_4^2K_5K_2\ ,\ E_3\ ,$ $[E_3,E_4],\ [E_3,E_1],$ $[[E_3,E_4],E_5],\ [[E_3,E_4],E_2],[[E_3,E_1],E_4],$ $[[[E_3,E_1],E_4],E_5],\ [[[E_3,E_1],E_4],E_2],\ [[[E_3,E_4],E_5],E_2],$ $[[[[E_3,E_1],E_4],E_5],E_2],\ [[[[E_3,E_4],E_5],E_2],E_4],$ $[[[[[E_3,E_1],E_4],E_5],E_2],E_4],$ $[[[[[[E_3,E_1],E_4],E_5],E_2],E_4],E_3],$
$\alpha_1+\alpha_3+2\alpha_4$ $+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_2$	$K_1K_3K_4^2K_5K_6K_2,\ E_1\ ,\ E_4,\ E_6,$ $[E_4,E_2],\ [E_4,[E_1,E_3]],\ [E_4,[E_6,E_5]],$ $[[E_4,E_2],[E_1,E_3]],\ [[E_4,E_2],[E_6,E_5]],$ $[[E_4,[E_1,E_3]],[E_6,E_5]],\ [[[E_4,E_2],[E_1,E_3]],[E_6,E_5]],$ $[[[E_4,E_2],[E_1,E_3]],[E_4,E_5]],\ [[[E_4,E_2],[E_6,E_5]],[E_4,E_3]],$ $[E_4,[[[E_4,E_2],[E_1,E_3]],[E_6,E_5]]]\ .$
$\alpha_1+2\alpha_3+2\alpha_4$ $\alpha_5+\alpha_6+\alpha_2$ *	$K_1K_3^2K_4^2K_5K_6K_2\ ,\ E_6,\ E_3,$ $[E_3,E_1],\ [E_3,E_4],$ $[[E_3,E_4],E_1],\ [[E_3,E_4],E_2],$ $[[E_3,E_4],[E_6,E_5]],\ [[[E_3,E_4],E_2],E_1],$ $[[[E_3,E_4],E_1],[E_6,E_5]],\ [[[E_3,E_4],E_2],[E_6,E_5]],$ $[[[[E_3,E_4],E_2],E_1],[E_6,E_5]],[[[[E_3,E_4],E_2],[E_6,E_5]],E_4],$ $[[[[[E_3,E_4],E_2],E_1],[E_6,E_5]],E_4],$ $[[[[E_3,E_4],E_2],E_1],[[E_3,E_4],E_5]],$ $[E_3,[[[[[E_3,E_4],E_2],E_1],[E_6,E_5]],E_4]],$

Roots	Generators of $\mathfrak{C}_q$ in $\mathcal{U}_q(E_6)$
$\alpha_1+2\alpha_3+2\alpha_4$ $+2\alpha_5+\alpha_6+\alpha_2$	$K_1K_3^2K_4^2K_5^2K_6K_2\ ,\ E_3,\ E_5,$ $[E_3,E_1],\ [E_5,E_6],\ [E_3,[E_5,E_4]],$ $[E_3,[[E_5,E_6],E_4]],\ [[E_3,E_1],[E_5,E_4]],\ [[E_3,[E_5,E_4]],E_2],$ $[[E_3,E_1],[[E_5,E_6],E_4]],\ [[E_3,[[E_5,E_6],E_4]],E_2],$ $[[[E_3,E_1],[E_5,E_4]],E_2],\ [[[E_3,E_1],[[E_5,E_6],E_4]],E_2],$ $[[[[E_3,E_1],[E_5,E_4]],E_2],[E_3,E_4]],$ $[[[E_3,[[E_5,E_6],E_4]],E_2],[E_5,E_4]],$ $[[[[E_3,E_1],[[E_5,E_6],E_4]],E_2],[E_3,E_4]],$ $[[[[E_3,E_1],[[E_5,E_6],E_4]],E_2],[E_5,E_4]],$ $[E_5,[[[[E_3,E_1],[[E_5,E_6],E_4]],E_2],[E_3,E_4]]]\ .$
$\alpha_1+2\alpha_3+3\alpha_4$ $+2\alpha_5+\alpha_6+\alpha_2$	$K_1K_3^2K_4^3K_5^2K_6K_2\ ,\ E_4,$ $[E_4,E_3],\ [E_4,E_5],$ $[[E_4,E_5],E_6],\ [[E_4,E_3],E_1],\ [[E_4,E_3],E_5],$ $[[[E_4,E_3],E_5],E_1],\ [[[E_4,E_3],E_5],E_6],$ $[[[[E_4,E_3],E_5],E_1],E_6],\ [[[E_4,E_3],E_5],[E_4,E_2]],$ $[[[[E_4,E_3],E_5],E_1],[E_4,E_2]],\ [[[[E_4,E_3],E_5],E_6],[E_4,E_2]],$ $[[[[[E_4,E_3],E_5],E_1],E_6],[E_4,E_2]],$ $[[[[[E_4,E_3],E_5],E_1],[E_4,E_2]],E_3],$ $[[[[[E_4,E_3],E_5],E_6],[E_4,E_2]],E_5],$ $[[[[[[E_4,E_3],E_5],E_1],E_6],[E_4,E_2]],E_3],$ $[[[[[[E_4,E_3],E_5],E_1],E_6],[E_4,E_2]],E_5],$ $[[[[[[[E_4,E_3],E_5],E_1],E_6],[E_4,E_2]],E_5],E_3],$ $[E_4,[[[[[[[E_4,E_3],E_5],E_1],E_6],[E_4,E_2]],E_5],E_3]]\ .$
$\alpha_1+2\alpha_3+3\alpha_4$ $+2\alpha_5+\alpha_6+2\alpha_2$	$K_1K_3^2K_4^3K_5^2K_6K_2\ ,\ E_2,$ $[E_2,E_4],\ [[E_2,E_4],E_5],\ [[E_2,E_4],E_3],$ $[[[E_2,E_4],E_3],E_5]\ ,\ [[[E_2,E_4],E_3],E_1],\ [[[E_2,E_4],E_5],E_6],$ $[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5]\ ,\ [[[[E_2,E_4],E_5],E_6],E_3],$ $[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_6],\ [[[[E_2,E_4],E_3],E_5],E_4],$ $[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_4],\ [[[[[E_2,E_4],E_5],E_6],E_3],E_4],$ $[[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_6],E_4],$ $[[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_4],E_3],$ $[[[[[[E_2,E_4],E_5],E_6],E_3],E_4],E_5],$ $[[[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_6],E_4],E_3],$ $[[[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_6],E_4],E_5],$ $[[[[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_6],E_4],E_3],E_5],$ $[[[[[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_6],E_4],E_3],E_5],E_4],$ $[E_2,[[[[[[[[[E_2,E_4],E_3],E_1],E_5],E_6],E_4],E_3],E_5],E_4]],$

Table des figures

Bibliographie

[AB02] A. Astashkevich and R. Brylinski. Non-local equivariant star product on the minimal nilpotent orbit. *Advances in Mathematics*, 171(1) :86–102, 2002.

[BB05] A. Björner and F. Brenti. *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231. Springer-Verlag New York Inc, 2005.

[BFF+78] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. i. deformations of symplectic structures. *Annals of Physics*, 111(1) :61–110, 1978.

[Bou81a] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie : Chapitres 1*. Masson, 1981.

[Bou81b] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie : Chapitres 4,5 et 6*. Masson, 1981.

[Bou81c] N. Bourbaki. *Groupes et Algèbres de Lie : Chapitres 7 et 8*. Masson, 1981.

[CE] D. Calaque and P. Etingof. Lectures on tensor categories in quantum groups. *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, 12.

[Cic97] N. Ciccolo. Quantization of co-isotropic subgroups. *Letters in Mathematical Physics*, 42, 1997.

[CP95] V. Chari and A.N. Pressley. *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1995.

[DCKP95] C. De Concini, V. G. Kac, and C. Procesi. Some quantum analogues of solvable Lie groups. *Geometry and analysis (Bombay, 1992)*, pages 41–65, 1995.

[Del07] P. Deligne. Catégories tannakiennes. *The Grothendieck Festschrift*, pages 111–195, 2007.

[DGM93] J. Donin, D. Gurevich, and S. Majid. R-matrix brackets and their quantization. In *Annales de l'IHP Physique théorique*, volume 58, pages 235–246. Elsevier, 1993.

[DGS99] J. Donin, D. Gurevich, and S. Shnider. Double quantization on some orbits in the coadjoint representations of simple lie groups. *Communications in mathematical physics*, 204(1) :39–60, 1999.

[DM81] P. Deligne and J. Milne. Tannakian categories. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, pages 101–228, 1981.

[Dri87] V.G. Drinfeld. Quantum groups. *Proc. ICM-86*, 1 :798–820, 1987.

[Dri89] V.G. Drinfeld. Quasi-hopf algebras. *Leningrand Math. J*, 1 :6 :1419–1457, 1989.

[Dri91] V.G. Drinfeld. On quasi-triangular quasi-hopf algebras and a group closely connected with Gal($\bar{\shortparallel}/\mathbb{Q}$). *Leningrand Math. J*, 2 :829–860, 1991.

[Dri92] V.G. Drinfeld. On some unsolved problems in quantum group theory. *Lect. Note. Math*, 1510 :1–8, 1992.

[Dri93] V.G. Drinfeld. On poisson homogeneous spaces of poisson-lie groups. *Theoretical and Mathematical Physics*, 95(2) :524–525, 1993.

[EEM07] B. Enriquez, P. Etingof, and I. Marshall. Quantization of some poisson-lie dynamical r-matrices and poisson homogeneous spaces. *Contemporary Mathematics*, 433 :135, 2007.

[EH10a] B. Enriquez and G. Halbout. Quantization of coboundary lie bialgebras. *Annals of Mathematics*, 171 :1267–1345, 2010.

[EH10b] B. Enriquez and G. Halbout. Quantization of quasi-lie bialgebras. *American Mathematical Society*, 23(3) :611–653, 2010.

[EK95] P. Etingof and D. Kazhdan. Quantization of poisson algebraic groups and poisson homogeneous spaces. *arXiv :q-alg/9510020v2*, 1995.

[EK96] P. Etingof and D. Kazhdan. Quantization of lie bialgebras i. *Selecta Math.*, 2 :1–41, 1996.

[EK08] P. Etingof and D. Kazhdan. Quantization of lie bialgebras vi. *arXiv preprint : math.QA/0004042v3*, 2008.

[EKS99] B. Enriquez and Y. Kosmann-Schwarzbach. Quantum homogeneous spaces and quasi-hopf algebras. *arXiv :math/9912243v3*, 1999.

[Enr01] B. Enriquez. On some universal algebras associated to the category of lie bialgebras. *Advances in Mathematics*, 164(1) :1–23, 2001.

[Enr05] Benjamin Enriquez. A cohomological construction of quantization functors of lie bialgebras. *Advances in Mathematics*, 197, num. 2, 2005.

[ES02] P. Etingof and O. Schiffmann. *Lectures on quantum groups*. International Press, 2002.

[ESS99] P. Etingof, T. Schedler, and A. Soloviev. Set-theoretical solutions to the quantum yang-baxter equation. *Duke mathematical journal*, 100(2) :169–210, 1999.

[FH91] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory, A first course*. Springer-Verlag, 1991.

[Gav02] F. Gavarini. The quantum duality principle. *Annales de l'institut Fourier*, 3, 2002.

[GC06] F. Gavarini and N. Ciccolo. Quantum duality principle for coisotropic subgroups and poisson quotients. *Contemporary Geometry and Related Topic*, 2006.

[HK11a] I. Heckenberger and S. Kolb. Homogeneous right coideal subalgebras of quantized enveloping algebras. *arXiv :1109.3986v1*, 2011.

[HK11b] I. Heckenberger and S. Kolb. Right coideal subalgebras of the borel part of a quantized enveloping algebra. *International Mathematics Research Notices*, 2011(2) :419, 2011.

[HS09] I. Heckenberger and H.J. Schneider. Right coideal subalgebras of nichols algebras and the duflo order on the weyl groupoid. *Arxiv preprint arXiv :0909.0293*, 2009.

[Hum92] J.E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29. Cambridge Univ Pr, 1992.

[Jim85] M. Jimbo. Aq-difference analogue of u (g) and the yang-baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 10(1) :63–69, 1985.

[Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*. Springer-Verlag, 1995.

[Kha11] V. K. Kharchenko. Right coideal subalgebras in $\mathcal{U}_q(\mathfrak{so}_{2n+1}^+)$. *J. Eur. Math. Soc.*, 13 :1675–1733, 2011.

[Kon03] M. Kontsevich. Deformation quantization of poisson manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 66(3) :157–216, 2003.

[KS08] V. K. Kharchenko and A. V. Lara Sagahon. Right coideal subalgebras in $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$. *J. Algebra*, 319(6) :2571–2625, 2008.

[Lus88] G. Lusztig. Quantum deformations of certain simple modules over enveloping. *Advances in mathematics*, 70(2) :237–249, 1988.

[Lus92] G. Lusztig. *Introduction to quantum groups*. Birkhauser, 1992.

[LYZ00] J.H. Lu, M. Yan, and Y.C. Zhu. On the set-theoretical yang-baxter equation. *Duke Mathematical Journal*, 104(1) :1–18, 2000.

[Mac65] S. MacLane. Categorical algebra. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 71(1) :40–106, 1965.

[SS93] S. Shnider and S. Sternberg. *Quantum groups : from coalgebras to Drinfeld algebras : a guided tour*. International Press, 1993.

[Tam98] D.E. Tamarkin. Another proof of m. kontsevich formality theorem. *Arxiv preprint math/9803025*, 1998.

[WX92] A. Weinstein and P. Xu. Classical solutions of the quantum yang-baxter equation. *Communications in mathematical physics*, 148(2) :309–343, 1992.

[Yak10] M. Yakimov. Invariant prime ideals in quantizations of nilpotent lie algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 101(2) :454, 2010.

[Zam11] M. Zambon. A construction for coisotropic subalgebras of lie bialgebras. *J. of Pure and Applied Algebra*, 215, 2011.

Index

RÉSUMÉ

L'objet de cette thèse est l'étude de l'existence d'une quantification pour les sous-algèbres de Lie coisotropes d'une bigèbre de Lie.

Une sous-algèbre de Lie coisotrope $\mathfrak{c}$ d'une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie qui est aussi un coidèal. Le problème de quantifications d'une sous-algèbre de Lie coisotrope fut posée par V. Drinfeld, lors de son étude de la quantification des espaces de Poisson homogènes G/C. Ces deux problèmes sont liés par le principe de dualité établi par N. Ciccoli et F. Gavarini.

Dans cette thèse, nous cherchons à resoudre ce problème de quantification dans différents cadres. Premierement, nous montrons qu'une quantification existe dans le cadre des bigèbres de Lie simples en utilisant des exemples donnés par M. Zambon, ainsi qu'un résultat de classification établi par I. Heckenberger et S. Kolb. Deuxièmement, nous trouvons une obstruction à la quantification dans le cadre universel en utilisant la theorie des Props. Finalement, nous généralisons un résultat établi par P. Etingof et D. Kazhdan sur la quantification d'espaces de Poisson homogènes, liés aux sous-algèbres Lagrangiennes coisotropes du double de Drinfeld.

MOTS-CLÈS

Quantification universelle, déformation, groupes quantiques, bigèbre de Lie, sous-algèbres de Lie coisotropes, algèbres de Lie simples, espaces de Poisson homogènes, Props.

ABSTRACT

The aim of this thesis is the study of quantization of coisotropic Lie subalgebra of a Lie bialgebra.

A coisotropic Lie subalgebra $\mathfrak{c}$ of a Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ is a Lie subalgebra which is also a Lie coideal. The problem of quantization of coisotropic Lie subalgebra was set forth by V. Drinfeld, in his study of quantization of Poisson homogeneous spaces G/C. These problems are closely related by the duality principle established by N. Ciccoli et F. Gavarini.

In this thesis, we search an answer to this quantization problem in different settings. Firstly, we show that a quantization exists in the setting of simple Lie algebra by using examples provided by M. Zambon, and a classification result established by I. Heckenberger and S. Kolb. Secondly, we find an obstruction to the quantization in the universal setting by using the theory of Props. Finally, we generalize a results of P. Etingof and D. Kazhdan on the quantization of poisson homogeneous spaces, linked to coisotropic Lagrangian subalgebras of Drinfeld's double.

KEY WORDS

Universal quantization, deformation, quantum groups, Lie bialgebras, coisotropic Lie subalgebras, simple Lie algebras, Poisson homogeneous spaces, Props.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUES

17B37, 17B62, 17B63, 18D10, 18D50, 20G42, 81R50