N° d'ordre Année 2012

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
délivrée par
L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

ÉCOLE DOCTORALE PHYSIQUE ET ASTROPHYSIQUE DE LYON

THÈSE

DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

par

THOMAS BAROIS

Résonateurs nanomécaniques auto-oscillants

Soutenue le 27/09/2012 devant un jury composé de

M. Vincent BOUCHIAT	Rapporteur
M. Olivier THOMAS	Rapporteur
M. Emmanuel de LANGRE	Examinateur
M. Marcel CLERC	Examinateur
M. Lydéric BOCQUET	Examinateur
M. Stephen T. PURCELL	Directeur de thèse
M. Anthony AYARI	Co-encadrant

Introduction

De tout temps, les hommes ont rêvé de réaliser des systèmes nanoélectromécaniques auto-oscillants. Historiquement, on peut dire sans prendre trop de risques que ce sont les égyptiens qui furent les premiers à tenter de relever ce défi à ceci près que, d'une part il ne s'agissait pas de systèmes nanoélectromécaniques mais de gigantesques constructions de pierre et d'autre part il était question de l'(auto-) excitation de l'imaginaire des gens et non du mouvement [1]. Il a fallu attendre l'année 1959 pour que le célèbre savant Richard Feynman produise son fameux discours *"There's Plenty of Room at the Bottom"* marquant le lancement du domaine des micro- et nanotechnologies. Malheureusement, les dernières dynasties égyptiennes étaient éteintes depuis longtemps et ne virent jamais leurs rêves se réaliser.

En regardant autour de vous, vous pourrez constater qu'un grand nombre de systèmes en mouvement sont en oscillation périodique. S'il y a un peu de vent et que vous regardez par la fenêtre, vous verrez les feuilles des arbres en mouvement de va-et-vient à un certain rythme. Si la machine à coudre électrique de votre grand mère se trouve pas loin, vous n'aurez pas de peine à imaginer qu'une fois en marche, l'aiguille décrira des mouvements d'oscillation avec quelques aller-retour par seconde. L'alimentation de la machine à coudre elle aussi est oscillante puisqu'elle provient du courant électrique du secteur qui est alternatif avec, par ailleurs, une oscillation à une fréquence différente de l'oscillation de la machine à coudre. Si vous entendez des bruits ou quelqu'un qui vous parle, là aussi il s'agit d'une oscillation correspondant à un mouvement d'aller retour des couches d'air propagenant l'onde sonore. Si c'était votre grand mère qui venait vous servir un verre d'eau, il est très certain qu'en remplissant le verre elle ait, sans le savoir et sans le vouloir, vidé la carafe par un "glou-glou" correspondant à une oscillation de l'eau au niveau du goulot. D'ailleurs, si vous vous apprétez à boire le verre d'eau, je vous mets au défi de le boire sans gorgées périodiques. Si le robinet ayant servi à remplir la carafe est mal fermé, vous entendrez le "plic-ploc" des gouttes d'eau qui tombent périodiquement dans l'évier... Ces égarements dans le monde des phénomènes périodiques pourraient s'éterniser tant les phénomènes d'oscillations sont observés dans de nombreuses situations.

1. *"De tout temps, ces gigantesques constructions de pierre ont excité l'imaginaire des gens."* (page Wikipédia *Pyramides d'Égypte*)

Le thème général de ce travail de thèse repose sur la notion d'*auto-oscillation*. Cette notion peut être introduite lorsque l'on quitte le point de vue d'un observateur qui constate un mouvement périodique comme ceux décrits précédemment et que l'on adopte la position d'un physicien qui se pose la question de *l'origine* des mouvements oscillants d'un système. De cette manière, on est amené à définir une auto-oscillation comme la capacité pour un système particulier, que l'on nommera auto-oscillateur, à *générer* un mouvement oscillant, à en être la source.

En réalite, beaucoup des systèmes oscillants présentés précédemment sont en fait des systèmes auto-oscillants c'est-à-dire que les systèmes considérés sont eux mêmes les générateurs du mouvement périodique. Ainsi, lorsque le vent souffle régulièrement sur un arbre, c'est-à-dire sans oscillation du flux d'air, les feuilles se mettent spontanément à osciller de manière régulière à une fréquence qui est une caractéristique de chaque feuille et non une propriété préexistante du vent. Pour l'exemple de la machine à coudre, c'est le moteur de la machine qui génére lui aussi son signal oscillant sans lien avec la fréquence de l'alimentation électrique puisque la fréquence de l'aiguille, c'est-à-dire du moteur, est variable selon la pression du couturier sur la pédale. Le son, même s'il se propage de proche en proche, provient lui aussi d'un générateur d'oscillation que seraient les cordes vocales lorsqu'il s'agit de la voix. Pour les "glou-glou" et les "plic-ploc", il s'agit d'instabilités hydrodynamiques traduisant la tendance de l'eau à ne pas vouloir s'écouler uniformément.

Au delà de la synthèse d'un mouvement oscillant souhaité pour une application technique ou biologique notamment, l'aspect ludique et intriguant d'un système auto-oscillant est précisement son aptitude à *générer spontanément* un signal périodique dans le temps à partir d'une situation immobile, sans mouvement. Il s'agit également d'un phénomène avec un caractère universel puisque les auto-oscillations sont observées pour des systèmes remarquablement variés.

Au début de ce travail de thèse dans l'équipe Physique des Nanostructures et Émission de Champ, le domaine lié à l'étude des mécanismes d'auto-oscillation pour les systèmes vibrants à petite échelle constituait un domaine relativement neuf puisque seuls les premiers travaux de l'équipe avaient fait l'objet d'une publication. La motivation première pour ce travail de cette thèse peut donc être présenté comme une étude d'un mécanisme universel de mise en oscillation spontanée dans un cadre original qui est celui du domaine des nanosciences.

Table des matières

Introduction **3**

Introduction générale **9**
Introduction . . . 9
Contexte et motivations . . . 12
Bibliographie . . . 19

1 Dispositif expérimental **21**
1.1 Présentation du dispositif . . . 21
1.1.1 Un système pour l'ultra haut vide . . . 21
1.1.2 Adaptation d'un microscope électronique à balayage . . . 23
1.2 Configurations du porte échantillon . . . 25
1.2.1 Testeur sous pointes . . . 25
1.2.2 Nanomanipulation . . . 27

I Résonateurs nanoélectromécaniques **29**

2 Nanoélectromécanique linéaire : résonance d'un nanofil simplement encastré **31**
2.1 Échantillons . . . 31
2.1.1 Support en tungstène . . . 31
2.1.2 Nanofil sur pointes . . . 32
2.2 Forces quasistatiques . . . 34
2.2.1 Déplacement par les blocs piézoélectriques inertiels . . . 34
2.2.2 Déflection des nanofils par force électrostatique . . . 35
2.3 Résonances mécaniques . . . 40
2.3.1 Résonance mécanique fondamentale d'un nanofil simplement encastré . . . 40
2.3.2 Mode de vibration fondamental . . . 43
2.3.3 Excitation électrostatique . . . 48
2.3.4 Modes d'ordre supérieur . . . 49
2.4 Accordage en fréquence électrostatique . . . 51
2.4.1 Accordage en fréquence par tirage électrostatique . . . 51

2.4.2 Accordage capacitif vers les basses fréquences 54
2.4.3 Vue d'ensemble des deux mécanismes d'accordage en fréquence 62
2.4.4 Polarisation 63
Conclusion du chapitre 65
Bibliographie 67

3 Nanoélectromécanique linéaire : couplage de deux résonateurs simplement encastrés 69
3.1 Couplage électrostatique de deux résonateurs simplement encastré . . 69
3.1.1 Mesures de couplage de deux nanofils 69
3.1.2 Modélisation 73
3.2 Couplage par contact de deux résonateurs 77
3.2.1 Obtention d'un couplage fort par contact 78
3.2.2 Fréquences et modes propres 79
Conclusion du chapitre 85

4 Nanoélectromécanique non linéaire des résonateurs simplement encastrés 89
4.1 Non linéarité pour un oscillateur à une dimension 89
4.1.1 Termes non linéaires pour la vibration sur une polarisation de vibration 89
4.1.2 Oscillateur de Duffing forcé 90
4.2 Couplage à deux dimensions : vibration en cercle 92
4.2.1 Observation de polarisation circulaire 92
4.2.2 Couplage non linéaire des polarisations 94
4.2.3 Solutions de polarisations rectilignes et circulaires 96
4.2.4 Tension mécanique 98
4.3 Forçage paramétrique 100
Conclusion du chapitre 102
Bibliographie 105

5 Dissipation électrostatique 107
5.1 Contexte de l'étude 107
5.2 Couplage capacitif d'un résonateur résistif 108
5.2.1 Équations électromécaniques couplées 108
5.2.2 Dissipation électrostatique 110
5.2.3 Représentation électrique équivalente 112
5.3 Validation expérimentale 112
5.3.1 Résistance des résonateurs SiC 113
5.3.2 Mesure de la capacité par mesure du temps de réponse électrique 115
5.3.3 Influence de la géométrie sur la dissipation électrostatique . . 116
5.3.4 Effet de la tension DC 120
5.3.5 Évolutions de la résistance 122
5.4 Courbe universelle de la dissipation électrostatique 124

Conclusion du chapitre . . . 125
Bibliographie . . . 129

6 Nano radio : détection de résonances de nanotubes de carbone 131
6.1 Introduction aux nanotubes de carbone comme résonateurs électromécaniques . . . 131
6.2 Les résonateurs à base de nanotubes de carbone suspendus . . . 132
6.2.1 Fabrication des échantillons . . . 132
6.2.2 Caractérisation électrique comme transistor à effet de champ . 134
6.2.3 Résonance mécanique . . . 136
6.3 Mesure de résonances par modulation de fréquence . . . 141
6.3.1 Définitions et approximation de la fréquence lentement variable 141
6.3.2 Spectre de résonance FM pour une faible déviation en fréquence 142
6.3.3 Distorsion du signal démodulé . . . 147
Conclusion du chapitre . . . 150
Bibliographie . . . 150

II Auto-oscillateurs nanoélectromécaniques 153

7 Auto-oscillation sous émission de champ 155
7.1 Introduction aux auto-oscillateurs . . . 155
7.1.1 Présentation générale . . . 155
7.1.2 Quelques notions autour des auto-oscillations . . . 157
7.1.3 Les auto-oscillateurs nanoélectromécaniques . . . 161
7.1.4 L'oscillateur de van der Pol . . . 162
7.2 Instabilité auto-oscillantes d'un résonateur sous émission de champ . 164
7.2.1 Quelques mots sur l'émission de champ . . . 164
7.2.2 Observation d'oscillations spontanées d'un résonateur SiC sous émission de champ . . . 166
7.2.3 Modélisation électromécanique de l'auto-oscillation . . . 167
7.3 Vérification du modèle électromécanique du seuil d'auto-oscillation . . 171
7.3.1 Position du résonateur . . . 171
7.3.2 Mesure des préfacteurs du modèle . . . 171
7.3.3 Seuil d'instabilité . . . 178
7.4 Comportement autour du seuil . . . 180
7.4.1 Distribution du courant autour de sa valeur moyenne . . . 180
7.4.2 Stabilité en fréquence . . . 182
7.4.3 Auto-oscillation des modes d'ordres supérieurs . . . 189
Conclusion du chapitre . . . 189
Bibliographie . . . 190

8 Synchronisation d'un nanofil auto-oscillant sous émission de champ 195
8.1 Introduction . . . 195
8.2 Synchronisation externe . . . 196
8.2.1 Définitions . . . 196
8.2.2 Synchronisation de l'auto-oscillateur de van der Pol . . . 196
8.2.3 Synchronisation d'un nanofil auto-oscillant sous émission de champ . . . 199
8.3 Dynamique de la phase lors d'une synchronisation : effets inertiels . . 202
8.3.1 La phase synchronisée : une particule comme les autres . . . 202
8.3.2 Dynamique du déphasage pour un oscillateur de van der Pol . 202
8.3.3 Valeur moyenne du déphasage pour la synchronisation d'un nanofil auto-oscillant . . . 208
8.3.4 Accrochage de la phase en présence de bruit . . . 209
8.3.5 Effets inertiels : le déphasage d'un nanofil auto-oscillant décrit comme l'angle d'un pendule . . . 211
Conclusion du chapitre . . . 223
Bibliographie . . . 223

9 Auto-oscillation de deux nanofils mis en contact 227
9.1 Introduction . . . 227
9.2 Observation d'une auto-oscillation de deux nanofils mis en contact . . 229
9.2.1 Visualisation par imagerie d'une oscillation spontanée . . . 229
9.2.2 Caractérisation électrique de l'auto-oscillation . . . 231
9.2.3 Fréquence d'auto-oscillation . . . 232
9.3 Modélisation électromécanique du seuil d'instabilité linéaire . . . 233
9.3.1 Seuil d'auto-oscillation pour le nœud de vibration au point de contact . . . 234
9.3.2 Détermination de R' par le seuil d'auto-oscillation . . . 236
9.4 Auto-oscillation et rendement énergétique . . . 237
Conclusion du chapitre . . . 239
Bibliographie . . . 240

Conclusion 243

Glossaire 245

A Conditions aux limites pour le couplage par collage 247

B Oscillateur de van der Pol : réalisation analogique et limite comme oscilateur à relaxation 249

C Couplage non linéaire pour deux résonateurs de fréquences éloignées : correction linéaire pour le résonateur de plus basse fréquence 255

Bibliographie générale **273**

Introduction générale

Introduction

De tout temps, les hommes ont rêvé de réaliser des systèmes nanoélectromécaniques auto-oscillants. Historiquement, on peut dire sans prendre trop de risques que ce sont les égyptiens qui furent les premiers à tenter de relever ce défi à ceci près que, d'une part il ne s'agissait pas de systèmes nanoélectromécaniques mais de gigantesques constructions de pierre et d'autre part il était question de l'excitation de l'imaginaire des gens et non du mouvement [2]. Il a fallu attendre l'année 1959 pour que le célèbre savant Richard Feynman produise son fameux discours *"There's Plenty of Room at the Bottom"* marquant le lancement du domaine des micro- et nanotechnologies. Malheureusement, les dernières dynasties égyptiennes étaient éteintes depuis longtemps et ne virent jamais leurs rêves se réaliser.

Avant de détailler le contexte et les motivations de mon travail de thèse dans le domaine de la nanomécanique, je donne ce qui a été ma première motivation pour l'étude des nanofils auto-oscillants.

Les phénomènes d'auto-oscillations sont observés pour des systèmes remarquablement variés. L'émergence d'une onde oscillante électromagnétique dans un laser, les oscillations d'un tuyau d'arrosage parcouru par de l'eau ou les flashes périodiques d'une luciole male d'Asie tropicale sont des exemples de systèmes auto-oscillants. Dans un contexte mécanique, une auto-oscillation correspond à l'apparition spontanée d'une vibration à partir d'une situation statique.

L'aspect qui m'intéresse plus particulièrement est l'approche d'un système dynamique autonome qui va être amené à développer une dynamique propre en l'absence d'excitation externe au sens où seules les propriétés du système auto-oscillant vont être l'origine du mouvement spontané.

À mon arrivée dans l'équipe Physique des Nanostructures et Émission de Champ, l'étude d'un système nanoélectromécanique auto-oscillant était tout à fait innovante puisqu'à ma connaissance seuls les premiers résultats de l'équipe avaient été publiés sur cette thématique. Les résultats qui avaient été obtenus m'ont amené à penser

2. *"De tout temps, ces gigantesques constructions de pierre ont excité l'imaginaire des gens."* (page Wikipédia *Pyramides d'Égypte*)

qu'une étude des mécanismes d'auto-oscillation dans un domaine des nanosciences serait un travail original du point des systèmes auto-oscillants d'une part et des systèmes nanomécaniques d'autre part.

Le premier chapitre est une description du système expérimental utilisé pour la grande majorité des expériences. Il s'agit d'un chapitre court qui n'a pas une importance centrale pour la suite de l'exposé. Il permet néanmoins d'introduire la confrontation des échantillons aux contraintes expérimentales liés à l'ultra haut vide notamment.

La suite du mémoire est constituée de 8 chapitres de longueurs variables séparés en une première partie décrivant la mécanique de résonateurs dissipatifs (chapitres 2 à 6) et une deuxième partie décrivant les résonateurs dans des régimes d'auto-oscillations (chapitres 7 à 9).

Le deuxième chapitre est relativement long et constitue une introduction à la mécanique vibratoire des nanofils simplement encastrés. La nature des échantillons y est brièvement introduite. Une approche expérimentale est utilisée pour illustrer les forces pouvant s'exercer de manière statique et dynamique sur les résonateurs. La mécanique vibratoire des milieux continus est ensuite considérée pour rendre compte des fréquences et des modes de vibration observés. La dernière partie décrit l'accordage vers les hautes et les basses fréquences sous l'influence des forces électriques statiques.

Le troisième chapitre est dédié à une étude du couplage entre deux résonateurs. Ce chapitre est plutôt court. La partie sur le couplage par la force électrostatique est indépendante du reste du rapport. La partie sur le couplage par collage de deux résonateurs a été motivée par l'observation d'un régime d'auto-oscillation pour cette configuration qui sera décrit dans le dernier chapitre.

Le quatrième chapitre introduit les premiers éléments de mécanique non linéaire. Une approche analytique pour le traitement des non linéarités est présentée pour l'oscillateur de Duffing. Cette approche est mise à profit pour décrire la vibration non linéaire circulaire de nanofils et de nanotubes de carbone dans le même chapitre, mais également la dynamique singulière de la phase d'un auto-oscillateur dans le chapitre sur la synchronisation. La dernière partie du chapitre est consacrée à un traitement analytique de l'amplification paramétrique.

Le cinquième chapitre s'intéresse aux effets dissipatifs liés au couplage entre les propriétés électriques et mécaniques des résonateurs résistifs. Une partie introductive situe le contexte de l'étude de la dissipation électrostatique.

Le sixième chapitre rend compte d'un travail que j'ai effectué au début de la thèse sur la vibration des nanotubes de carbone doublement encastrés. Ce chapitre est le dernier de la partie des résonateurs passifs et est indépendant des autres. Une introduction aux nanotubes de carbone en tant que résonateurs nanométriques pourra être trouvée. Dans la suite du chapitre, la technique de détection par un signal d'excitation modulé en fréquence est présentée.

Le septième chapitre est le premier chapitre dédié aux auto-oscillations. Il s'agit du chapitre le plus long du rapport. Il introduit la notion d'auto-oscillateur à l'aide de nombreux exemples et propose une liste aussi complète que possible des auto-oscillateurs rencontrés dans les domaines des systèmes nanoélectromécaniques. Le modèle prévoyant le seuil d'instabilité pour un résonateur soumis à un courant d'émission de champ est dérivé et les coefficients entrant en jeu dans le modèle sont mesurés indépendamment pour la validation du modèle. Quelques manifestations du résonateur auto-oscillant sont présentées dans la dernière partie.

Le huitième chapitre est dédié à la synchronisation d'un résonateur auto-oscillant par l'excitation provenant d'une force électrique alternative. Ce chapitre s'intéresse notamment à la description de la phase de l'auto-oscillateur traitée comme une variable dynamique. Les observations de la phase synchronisée d'un nanofil auto-oscillant feront état d'une propriété surprenante qui est l'existence d'une inertie de la phase.

Le dernier chapitre est une présentation d'un régime d'auto-oscillation observé lorsque deux résonateurs sont collés l'un à l'autre. La condition de mise en oscillation spontanée est utilisée pour dégager les propriétés du contact à l'échelle nanométrique entre les deux résonateurs.

Contexte et motivations

Le domaine de la nanoélectronique est une branche des nanosciences qui vise à tirer un profit technologique de la miniaturisation des composants pour l'électronique. La problématique de l'encombrement est notamment au cœur du développement des microprocesseurs où la densité en transistors connaît une augmentation quasi exponentielle depuis 40 ans (Loi de Moore, Fig. 1).

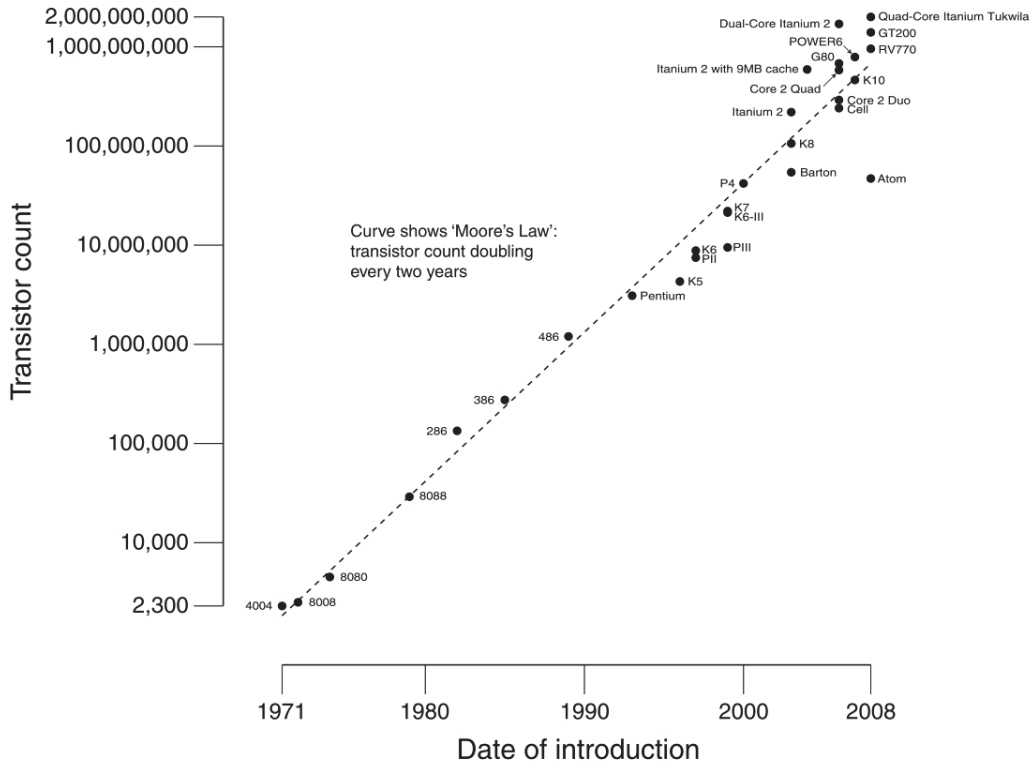
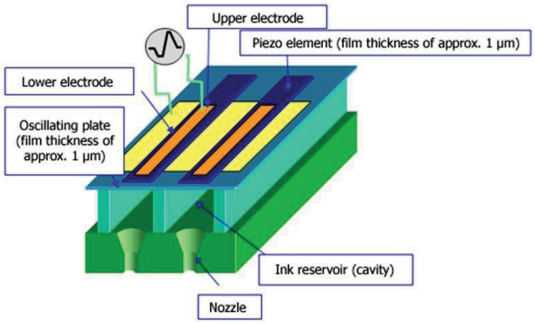


FIGURE 1 Nombre de transistors par microprocesseur en fonction de l'année d'introduction sur le marché (échelle verticale logarithmique).

La micro- et nanoélectromécanique s'intéresse à l'introduction des propriétés mécaniques et notamment des propriétés résonantes pour développer de nouveaux composants. Le développement des dispositifs nanoélectromécanique (NEMS) est relié au succès des systèmes microélectromécaniques (MEMS) dont les applications les plus souvent citées sont les dispositifs piézoélectriques à jet d'encre pour les imprimantes ou encore les accéléromètres (Fig. 2).



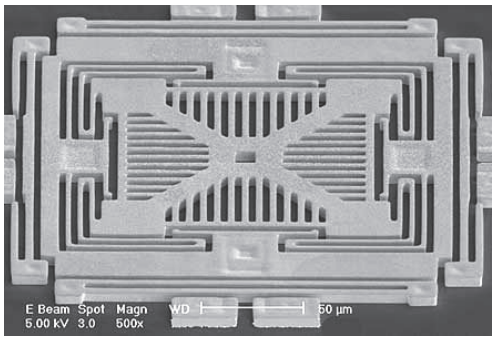


FIGURE 2 (à gauche) Schéma de fonctionnement d'une tête d'impression pour imprimante. (à droite) Imagerie par microscopie électronique d'un dispositif micromécanique inertiel 3D.

Une introduction aux NEMS peut être trouvée dans les travaux de Craighead (2000); Roukes (2001); Ekinci et Roukes (2005) (voir Fig. 3).

Si le domaine des MEMS est pleinement rentré dans le champ des applications technologiques, le passage à une technologie nano n'est pas d'actualité. Les principales utilisations de résonateurs NEMS restent dans le domaine de la recherche fondamentale avec par exemple la fabrication de dispositifs à mesure de masse (Waggoner et Craighead, 2007; Naik et al., 2009; Li et al., 2007). Le principe de tels dispositifs est de mesurer le changement de fréquence de résonance associé à un très faible dépôt de masse sur un résonateur. Le record est attribué à Chaste et al. (2012) avec un dispositif possédant une sensibilité en masse de l'ordre de celle d'un proton.

Avec la réduction aux dimensions nano, la question de la description quantique des systèmes est abordée (LaHaye et al., 2004; Schwab et Roukes, 2005; Poot et van der Zant, 2012). Un résultat marquant du domaine est la mesure de l'état de vibration quantique fondamental d'un objet mécanique par O'Connell et al. (2010); Teufel et al. (2011) et Chan et al. (2011). D'autres applications fondamentales ont été proposées comme la mesure de charge électrique (Cleland et Roukes, 1998) avec une résolution d'un électron pour Steele et al. (2009) et Lassagne et al. (2009), la mesure de masse d'un fluide dans un résonateur (Barton et al., 2010) ou des dispositifs démodulateurs radio (Jensen et al., 2007).

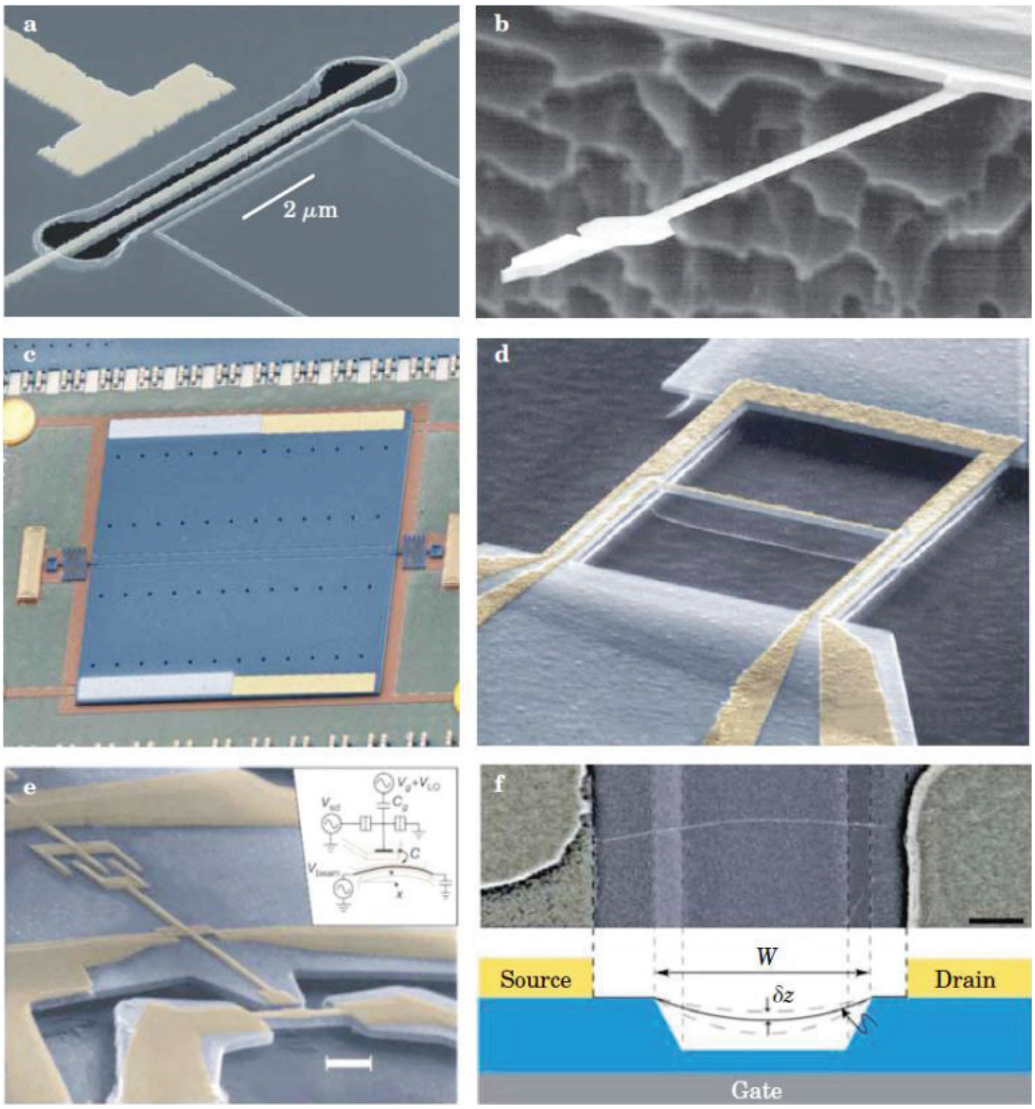


FIGURE 3 (d'après Schwab et Roukes (2005)) (a) A 20-MHz nanomechanical resonator capacitively coupled to a single-electron transistor (Keith Schwab, Laboratory for Physical Sciences). (b) An ultrasensitive magnetic force detector that has been used to detect a single electron spin (Dan Rugar, IBM). (c) A torsional resonator used to study Casimir forces and look for possible corrections to Newtonian gravitation at short length scales (Ricardo Decca, Indiana University - Purdue University Indianapolis). (d) A parametric radio-frequency mechanical amplifier that provides a thousandfold boost of signal displacements at 17 MHz (Michael Roukes, Caltech). (e) A 116-MHz nanomechanical resonator coupled to a single-electron transistor (Andrew Cleland, University of California, Santa Barbara). (f) A tunable carbon nanotube resonator operating at 3-300 MHz (Paul McEuen, Cornell University).

Dans un contexte d'application d'éléments résonants NEMS, une des problématiques est liée à l'excitation et à la détection de résonances mécaniques souvent à hautes fréquences (kHz-GHz) pour des objets nanométriques. Si des techniques d'excitation et de détection dédiées ont été proposées pour des résonateurs individuels spécifiques (Sazonova et al., 2004; Gouttenoire et al., 2010), le problème se pose lorsqu'il s'agit d'exciter un ensemble de résonateurs NEMS avec des fréquences de résonance a priori différente. Ce point est d'autant plus délicat que les fréquences de résonance NEMS sont sélectives, c'est-à-dire que la largeur de la plage d'excitation résonante d'un dispositif nanomécanique est typiquement de l'ordre du millième de la fréquence de vibration. Cela signifie que

L'utilisation de résonateurs incluant un mécanisme d'auto-oscillation est une voie prometteuse pour contourner la difficulté liée à la dispersion et la sélectivité des résonances rencontré dans les NEMS. Pour de tels dispositifs, il suffit d'appliquer une source d'alimentation stationnaire pour que la dynamique du couplage électromécanique entraîne la mise en vibration spontanée des résonateurs avec l'émergence de fréquences reliées aux propriétés physiques des résonateurs.

Ainsi, disposer d'un résonateur nanomécanique permettrait par exemple un suivi en temps direct de la fréquence de résonance. Ce point est particulièrement intéressant dans la mesure où il fournirait des informations résolues en temps sur un objet nanométrique sensible à son environnement (masse ajoutée, température, charge électrique instantanée, ...).

La première publication liée à l'observation d'une oscillation mécanique spontanée d'un dispositif NEMS [3] est à mettre à l'actif de l'équipe Physique des Nanostructures et Émission de Champ (Ayari et al., 2007) [4]. Les résonateurs utilisés étaient des nanofils de carbure de silicium (voir partie 2.1) qui avaient la propriété d'entrer en oscillation spontanée lorsqu'ils étaient parcourus par un courant électrique continu d'émission de champ (voir la partie 7.2 pour une illustration expérimentale).

Un complément d'introduction du point de vue des auto-oscillations pour des systèmes macro et nano est présentée au début de la partie du mémoire concernant les auto-oscillations (voir la partie 7.1) avec notamment une liste aussi complète que possible de références pour les systèmes expérimentaux dans le domaine des NEMS auto-oscillants.

3. Il s'agit en fait de la première observation d'une mise en mouvement spontanée d'un dispositif à l'échelle nanométrique avec un mécanisme de rétroaction lui aussi à l'échelle nanométrique.

4. L'article de Park et al. (2000) pourrait être cité comme précurseur du domaine puisqu'il traite des oscillations spontanées d'une molécule C_{60} entre deux électrodes.

Les objectifs de ce travail de thèse du point de vue des auto-oscillations peuvent être listés comme

- étude expérimentale de l'auto-oscillation d'un nanofil de carbure de silicium dans un environnement contrôlé. Les auto-oscillations de nanofils avaient été jusque là observées soit dans un microscope électronique avec un vide médiocre pour les contraintes expérimentales de l'émission de champ (cf. partie 7.2.1) soit dans un système sous ultra haut vide mais sans possibilité d'imagerie par microscopie électronique. Le travail de cette thèse repose sur l'utilisation d'un dispositif expérimental combinant microscopie électronique et ultra haut vide (voir chapitre 1).

- validation du modèle électromécanique proposé dans la première publication de l'équipe sur les auto-oscillations. Il s'agit de tenter une approche expérimentale où les coefficients physiques, électriques et mécaniques, mis en jeu dans le mécanisme d'auto-oscillation pourraient être mesurés indépendamment les uns des autres afin de prévoir le seuil de mise en oscillation.

- comportement dynamique et statistique autour du seuil d'auto-oscillation.

- étude des régimes collectifs pour deux auto-oscillateurs (synchronisation).

- recherche de nouveaux mécanismes d'auto-oscillations.

Du point de vue des objectifs listés dans la liste ci-dessus, on pourrait considérer que le mémoire de thèse pourrait commencer avec la deuxième partie et les premiers développements liés aux auto-oscillations. En réalité, une grande partie du travail de thèse a concerné l'étude des nanofils en tant que résonateurs forcés (chapitre 2 à 5). Le chapitre 6 concerne également la notion de résonateur forcé mais il peut êstre mis à part du reste du mémoire puisqu'il concerne un travail antérieur sur l'étude de nanotubes de carbone.

Ce rapport de thèse est rédigé sous une forme assez inhabituelle qui reflète ma manière d'aborder l'étude d'un système expérimental.

Si le fil directeur de la thèse est l'étude d'un auto-oscillateur nanoélectromécanique, les développements liés à cette étude commencent relativement tard dans le rapport (p. 153). Une grande partie de ce qui précède est en fait relié à un certain nombre d'aspects relativement indépendants concernant la mécanique à l'échelle nanométrique.

La grande majorité des travaux que j'ai effectué sont le résultat, que ce soit pour leurs points de départ ou leurs développements, de discussions avec les autres membres de l'équipe. Ce point rend délicat une traçabilité des avancées que contient ce rapport mais il raisonnable d'affirmer que le contenu des chapitres correspond à des développements, au moins dans leur forme, qui n'existait pas avant mon arrivée dans l'équipe.

Pour l'écriture du rapport, je me suis basé sur tous les aspects que j'ai été amené à développer. Si cette démarche permet un compte rendu assez complet de mon apport au sein de l'équipe, elle a pour inconvénient d'agglomérer une quantité de développements sans lien direct si ce n'est la description et la compréhension des systèmes nanoélectromécaniques. Pour cette raison, ce rapport de thèse peut être considéré comme une description hétéroclite en terme de nanoélectromécanique avec un grande variété de modèles *ad hoc* pour rendre compte des comportements observés.

Bibliographie

Ayari, A., P. Vincent, S. Perisanu, M. Choueib, V. Gouttenoire, M. Bechelany, D. Cornu et S. T. Purcell, 2007 : Self-oscillations in field emission nanowire mechanical resonators : A nanometric dc-ac conversion. *Nano Lett.* **7**, 2252.

Barton, R. A., B. Ilic, S. S. Verbridge, B. R. Cipriany, J. M. Parpia et H. G. Craighead, 2010 : Fabrication of a nanomechanical mass sensor containing a nanofluidic channel. *Nano Lett.* **10**, 2058.

Chan, J., T. P. M. Alegre, A. H. Safavi-Naeini, J. T. Hill, A. Krause, S. Gröblacher, M. Aspelmeyer et O. Painter, 2011 : Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state. *Nature* **478**, 89.

Chaste, J., A. Eichler, J. Moser, G. Ceballos, R. Rurali et A. Bachtold, 2012 : A mechanical mass sensor with yoctogram resolution. *Nature Nanotechnology* **7**, 301.

Cleland, A. N. et M. L. Roukes, 1998 : A nanometre-scale mechanical electrometer. *Nature* **392**, 160.

Craighead, H. G., 2000 : Nanoelectromechanical systems. *Science* **290**, 1532.

Ekinci, K. L. et M. L. Roukes, 2005 : Nanoelectromechanical systems. *Rev. Sci. Instrum.* **76**, 061101.

Gouttenoire, V., T. Barois, S. Perisanu, J.-L. Leclercq, S. T. Purcell, P. Vincent et A. Ayari, 2010 : Digital and FM demodulation of a doubly clamped single-walled carbon-nanotube oscillator : Towards a nanotube cell phone. *Small* **6**, 1060.

Jensen, K., J. Weldon, H. Garcia et A. Zettl, 2007 : Nanotube radio. *Nano Lett.* **7**, 3508.

LaHaye, M. D., O. Buu, B. Camarota et K. C. Schwab, 2004 : Approaching the quantum limit of a nanomechanical resonator. *Science* **304**, 74.

Lassagne, B., Y. Tarakanov, J. Kinaret, D. Garcia-Sanchez et A. Bachtold, 2009 : Coupling mechanics to charge transport in carbon nanotube mechanical resonators. *Science* **325**, 1107.

Li, M., H. X. Tang et M. L. Roukes, 2007 : Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications. *Nature Nanotechnology* **2**, 114.

Naik, A. K., M. S. Hanay, W. K. Hiebert, X. L. Feng et M. L. Roukes, 2009 : Towards single-molecule nanomechanical mass spectrometry. *Nature Nanotechnology* **4**, 445.

O'Connell, A. D., M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Neeley, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, J. M. Martinis et A. N. Cleland, 2010 : Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature* **464**, 697.

Park, H., J. Park, A. K. L. Lim, E. H. Anderson, A. P. Alivisatos et P. L. McEuen, 2000 : Nano-mechanical oscillations in a single-C60 transistor. *Nature* **407**, 57.

Poot, M. et H. S. J. van der Zant, 2012 : Mechanical systems in the quantum regime. *Phys. Rep.* **511**, 273.

Roukes, M. L., 2001 : Nanoelectromechanical systems face the future. *Phys. World* **14**, 25.

Sazonova, V., Y. Yaish, H. Üstünel, D. Roundy, T. A. Arias et P. L. McEuen, 2004 : A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator. *Nature* **431**, 284.

Schwab, K. C. et M. L. Roukes, 2005 : Putting mechanics into quantum mechanics. *Physics Today* **58**, 36.

Steele, G. A., A. K. Hüttel, B. Witkamp, M. Poot, H. B. Meerwaldt, L. P. Kouwenhoven et H. S. J. van der Zant, 2009 : Strong coupling between single-electron tunneling and nanomechanical motion. *Science* **325**, 1103.

Teufel, J. D., T. Donner, D. Li, J. W. Harlow, M. S. Allman, K. Cicak, A. J. Sirois, J. D. Whittaker, K. W. Lehnert et R. W. Simmonds, 2011 : Sideband cooling micromechanical motion to the quantum ground state. *Nature* **475**, 359.

Waggoner, P. S. et H. G. Craighead, 2007 : Micro- and nanomechanical sensors for environmental, chemical, and biological detection. *Lab Chip* **7**, 1238.

Chapitre 1

Dispositif expérimental

Les études des vibrations mécaniques de résonateurs aux dimensions micro- ou nanométriques ont été menées pour la plupart au sein d'un dispositif expérimental original dédié. Dans ce premier chapitre, le dispositif sera présenté en donnant un aperçu des types de mesures réalisables.

1.1 Présentation du dispositif

1.1.1 Un système pour l'ultra haut vide

Le dispositif expérimental que nous utilisons est une chambre sous Ultra Haut Vide (UHV, Fig. 1.1).

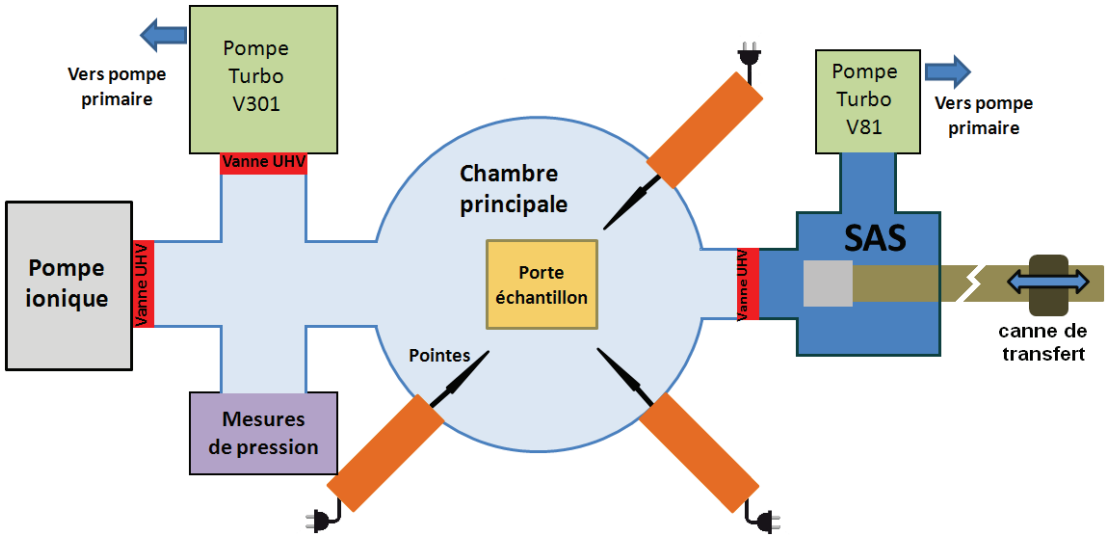


FIGURE 1.1 Schéma du testeur sous pointe UHV

L'ensemble du système est supporté par une table flottante à air comprimé. Les systèmes de pompage présents sont deux pompes turbo-moléculaires Varian (une

pour le SAS - TV81-M - et une pour la chambre principale - TV301 NAV) et une pompe ionique Varian VacIon Plus 150. Le principe de pompage d'une pompe turbo est mécanique : elle peut être vue comme un petit ventilateur de soufflerie de haute précision qui chasse les molécules par collision. Le flux de molécules est alors envoyé vers une enceinte sous un vide primaire ($\sim$ mbar). La pompe ionique opère quant à elle en ionisant et en adsorbant les molécules de gaz dans un fort champ électrique : il s'établit un courant ionique permanent de pompage de l'ordre du micro ampère pour une tension de quelques kilo Volts appliquée entre armatures proches de l'ordre du centimètre.

Les pompes turbo ne sont utilisées qu'après une mise à l'air partielle ou complète du système. Leur utilisation est associée à une étape d'étuvage des parois du système (150°C) et de la pompe ionique pendant une dizaine d'heure au minimum après une mise à l'air complète du système. Cette procédure permet d'obtenir un vide UHV dans la chambre (10^{-9} 10^{-10} Torr). Comme les pompes turbo entraînent des vibrations mécaniques parasites, il est nécessaire d'utiliser la pompe ionique. Lorsque seule la pompe ionique est en marche il est possible de maintenir le vide UHV dans la chambre pendant plusieurs mois. Cette dernière permet également un suivi du vide par un étalonnage spécifié par le constructeur entre le courant ionique et la pression dans l'enceinte (typiquement 1 μA pour 10^{-9} Torr).

Les mesures se font sur un porte échantillon dont le support se trouve au milieu de la chambre principale. Le support du porte échantillon peut être déplacé dans le plan horizontal par des moteurs pas-à-pas et dans la direction verticale par une vis micrométrique située sous et en dehors de la chambre. Une série de 6 hublots permet une visualisation directe dans la chambre principale. Le changement des échantillons se fait en utilisant le SAS. Pour cela, nous utilisons un porte échantillon amovible (Fig. 1.2) qui est déplacé dans la chambre à l'aide d'une canne de transfert. Deux rangées de 7 billes recouvertes d'or se trouvent sous le porte échantillon et permettent d'établir un contact électrique une fois que le porte échantillon est en place sur son support dans la chambre principale.

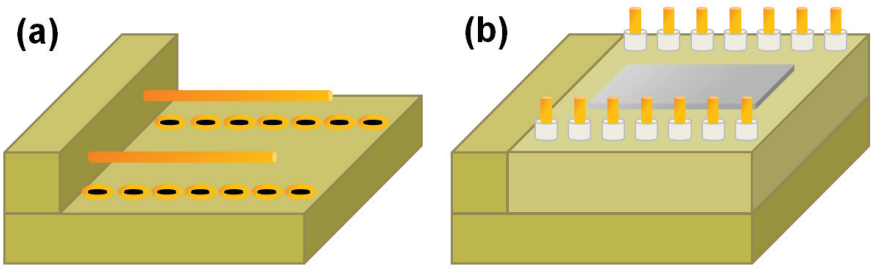


Figure 1.2 (a) Support du porte échantillon, (b) porte échantillon vide. Deux rangées de 7 billes plaquées or se trouvent sous la partie amovible du porte échantillon et viennent faire un contact électrique avec les connecteurs du support. Ces connections seront utilisées pour appliquer un signal électrique à l'échantillon ou contrôler les nanomanipulateurs.

Lorsque la chambre est sous UHV, la procédure pour un changement d'échan-

tillon est :
- étuvage du SAS (≈ 1 h, vanne SAS/Chambre fermée)
- ouverture de la vanne SAS/Chambre (pompe turbo SAS allumée)
- récupération du porte échantillon avec la canne de transfert
- fermeture de la vanne et mise à l'air du SAS
- ouverture de la porte du SAS et changement d'échantillon
- étuvage du SAS avec le nouvel échantillon (≈ 1 h)
- ouverture de la vanne SAS/chambre, transfert de l'échantillon dans la chambre

La durée effective pour un changement d'échantillon est d'une journée.

1.1.2 Adaptation d'un microscope électronique à balayage

Le système expérimental dispose d'un système d'imagerie par microscopie électronique à balayage (MEB) OrsayPhysics Eclipse (Fig. 1.3). Le faisceau d'électrons focalisé provient d'une colonne située au dessus de la chambre principale et la partie inférieure du canon pointe à quelques millimètres du haut du porte échantillon. Deux pompes ioniques sont installées sur la colonne pour assurer un vide UHV dans la chambre d'émission du courant. Un détecteur d'électron secondaire (SED) est également installé sur une des brides de la chambre et permet d'obtenir une tension électrique qui dépend du courant collecté par une électrode portée à 500 Volts et située à quelques centimètres de l'échantillon dans la chambre. Le signal électrique du SED est utilisé par l'ordinateur de contrôle du microscope pour reconstruire une image lorsque le faisceau électronique balaye une portion de l'échantillon. La relation entre le courant collecté est la tension délivrée par le SED est affine :

$$V_{\text{SED}} = GI_{\text{collecté}} + O \tag{1.1}$$

où G et O sont respectivement le gain et l'offset. Ces deux paramètres peuvent être modifiés par un contrôleur analogique. Le signal électrique du détecteur sera également utilisé pour des mesures de déplacements fins (cf. détection par focalisation du faisceau partie 2.3.1.2) ou lorsque l'échantillon lui même émet un courant électrique (cf. émission de champ). Le SED permet une résolution du courant collecté de l'ordre de la micro seconde.

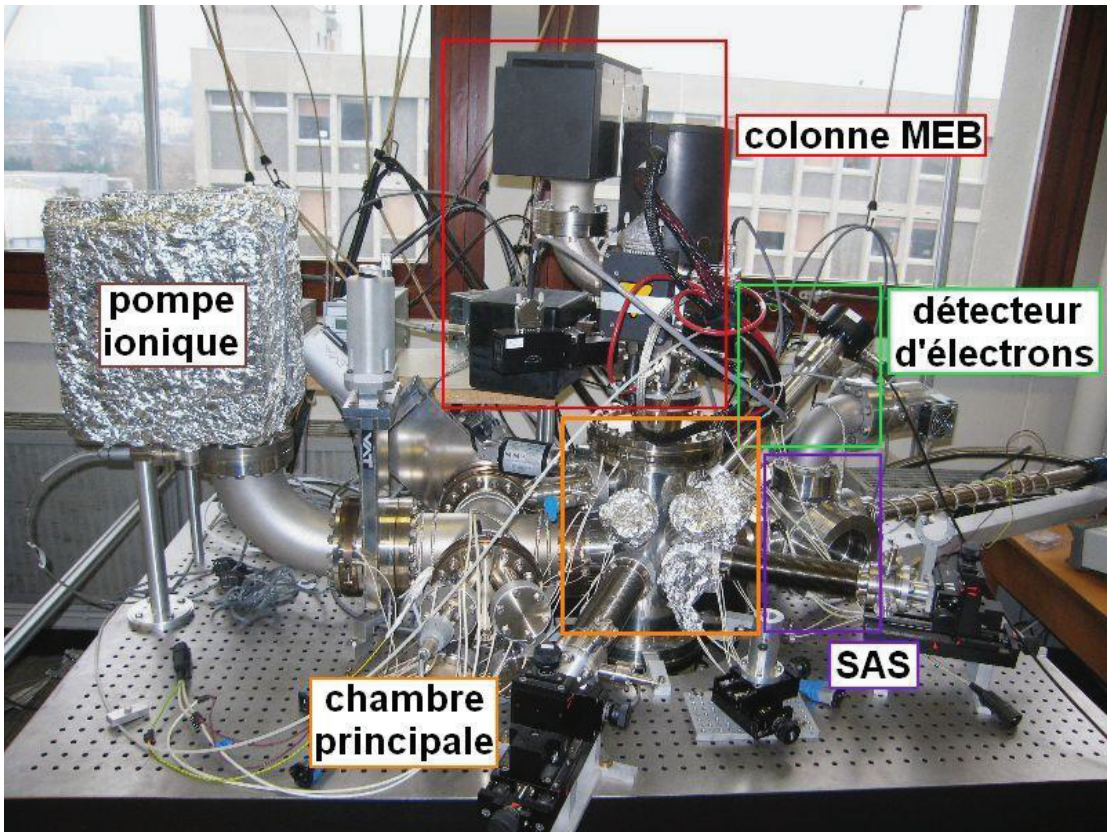


Figure 1.3 Vue d'ensemble du testeur sous pointe UHV/MEB

1.2 Configurations du porte échantillon

Le porte échantillon amovible peut être utilisé en configuration testeur sous pointes pour l'étude d'échantillon avec des contacts de microélectronique ou en configuration pour la nanomanipulation.

1.2.1 Testeur sous pointes

Trois bras mobiles sont installés sur la chambre principale et permettent d'amener des pointes connectées aux instruments de mesures. Les pointes ont des rayons de courbure de quelques microns et permettent de contacter les échantillons microélectroniques, c'est-à-dire où les contacts se font par des électrodes conductrices lithographiés d'une centaine de microns typiquement (Fig. 1.4 et 1.5). Une petite table métallique est fixée par des vis sur le porte échantillon et les échantillons ont la forme de puces de silicium lithographiées et sont maintenues par des languettes métalliques (cf. Fig 1.6). Les contacts électriques avec le support du porte échantillon ne sont pas utilisés.

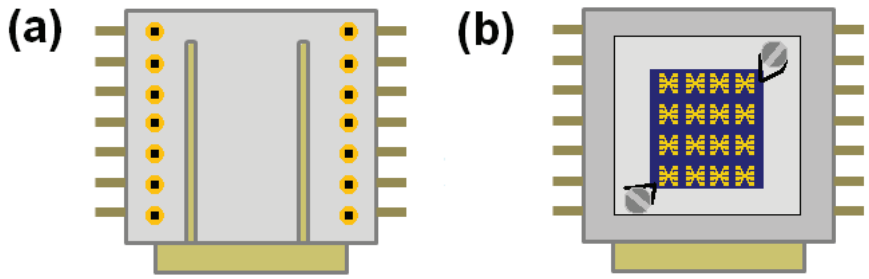


FIGURE 1.4 Schéma (a) du support du porte échantillon en vue du dessus et (b) du porte échantillon avec une puce lithographiée

Les pointes du testeur sont positionnées sur les pistes des échantillons à l'aide de vis micrométriques et en utilisant une lunette optique interfacée sur un ordinateur. Les pointes se reflètent sur le substrat en silicium. La position relative entre la pointe et son reflet est utilisée pour juger du contact de la pointe avec les pistes de conduction du substrat (Fig. 1.6).

Cette configuration sera utilisée pour l'étude des nanotubes de carbone suspendus sur des pistes lithographiées (chap. 6).

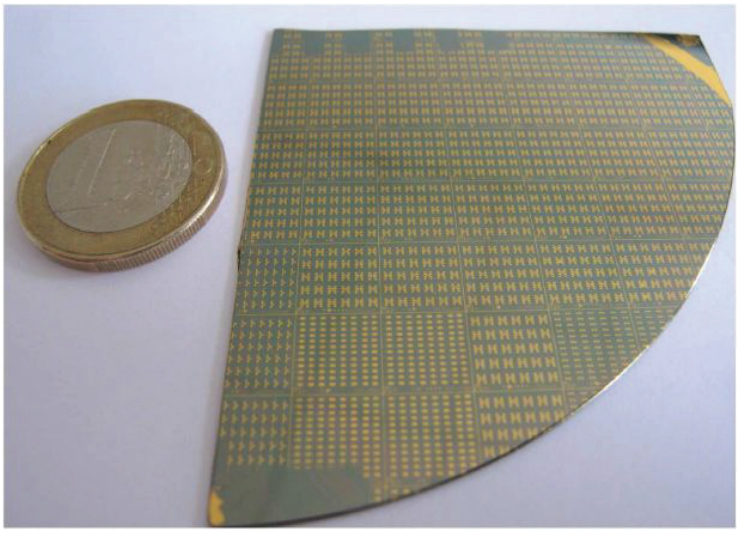


Figure 1.5 Exemple puce micro électronique lithographiée.

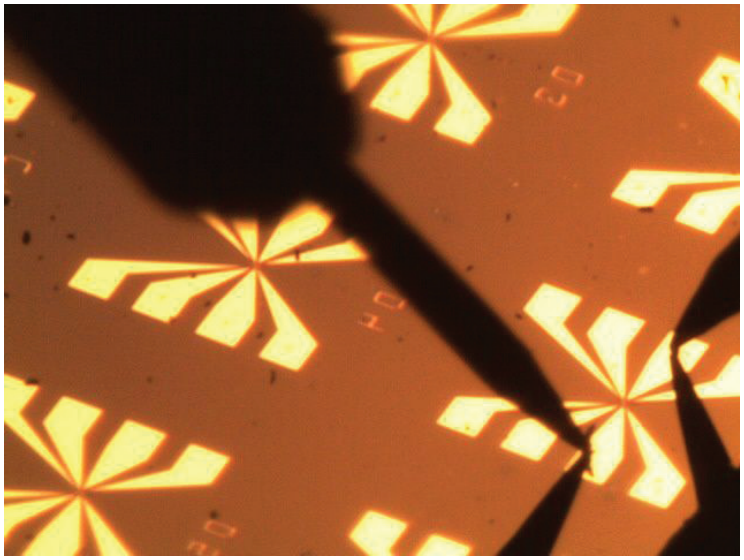


Figure 1.6 Deux pointes se trouvent en contact avec un substrat lithographié (électrode en or). Les pointes sont en contact avec leur reflet par le substrat de silicium.

1.2.2 Nanomanipulation

Un système de déplacement contrôlés nanométriques Attocube est adapté sur le porte échantillon. Il s'agit de deux blocs placés en vis-à-vis assurant un déplacement relatif selon les trois directions de l'espace. Le bloc situé en haut sur la photo (Fig. 1.8) dispose d'un déplacement bidimensionnel dans le plan horizontal. Une électrode en or se terminant par une boule de 100 μm de diamètre environ est fixée par une plaque sur le haut du bloc nanomanipulateur (Fig. 1.8).

Le contact électrique de l'électrode se fait par un des 14 connecteurs du porte échantillon (Fig. 1.7). Le bloc situé en bas dispose d'un déplacement selon l'axe vertical et porte cette fois-ci deux connecteurs reliés à deux des connecteurs de la table. Les deux connecteurs servent à contacter la boucle en tantale qui supporte un tube métallique où est inséré un fil en tungstène servant de support aux échantillons (diamètre = 125 μm). L'intérêt d'une boucle en tantale et de pouvoir chauffer la pointe en tungstène par passage d'un courant en utilisant les deux connecteurs. Pour appliquer simplement un potentiel électrique au résonateur, un seul des deux connecteurs est utilisé.

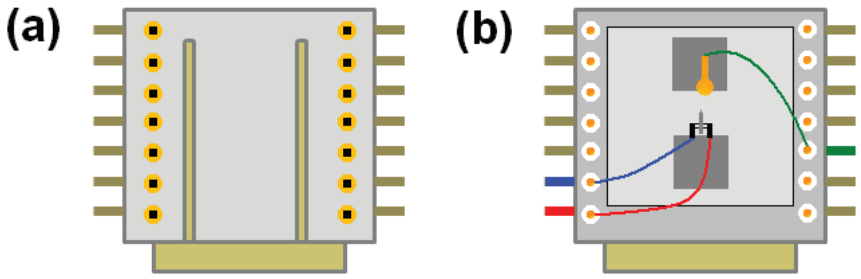


FIGURE 1.7 Schéma (a) du support du porte échantillon en vue du dessus et (b) du porte échantillon avec les deux nanomanipulateurs.

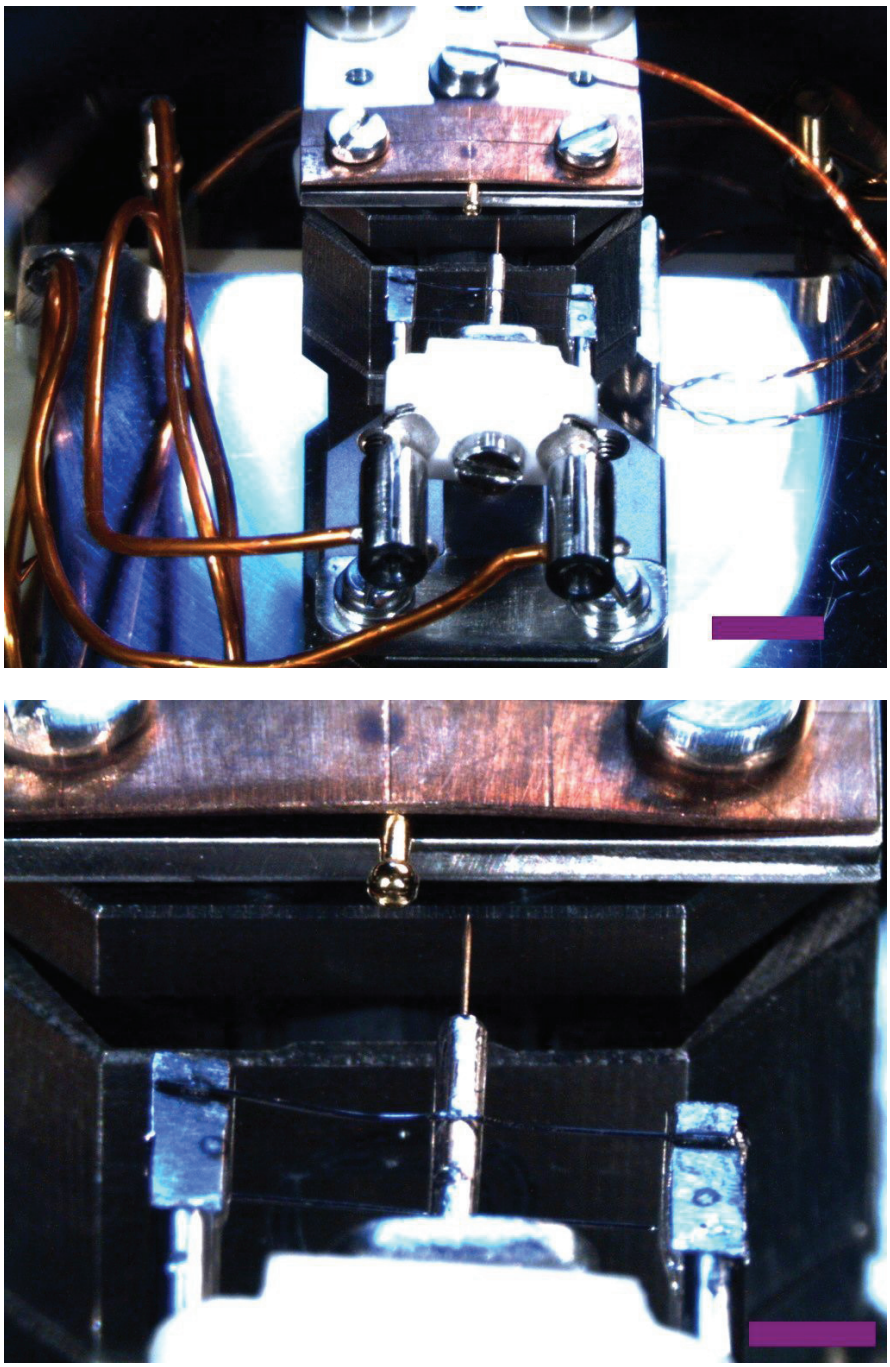


Figure 1.8 (en haut) Photographie des blocs nanomanipulateurs. Barre d'échelle 500 μm. (en bas) Photographie de la pointe en tungstène sur son support (en bas) et face à la contre électrode d'or. Barre d'échelle 200 μm.

Première partie

Résonateurs nanoélectromécaniques

Chapitre 2

Nanoélectromécanique linéaire : résonance d'un nanofil simplement encastré

Ce chapitre introduit les bases de la mécanique vibratoire. Les résonateurs étudiés y sont présentés succinctement. Les effets des forces agissant sur les résonateurs sont illustrés en statique et en dynamique. Enfin, une première approche du comportement mécanique et électrique des résonateurs est détaillée avec les propriétés d'accordage en fréquence par les forces électrostatiques.

2.1 Échantillons

Les échantillons sont des nanofils de carbure de silicium (SiC) montés individuellement sur des pointes en tungstène. Les nanofils SiC sont étudiés depuis plusieurs années dans l'équipe PNEC pour leurs propriétés mécaniques caractérisées par des facteurs de qualité élevés (cf. partie 2.3.1.3 et Perisanu et al. (2007), Perisanu et al. (2008)).

2.1.1 Support en tungstène

Le support du nanofil résonateur est une pointe en tungstène formée par l'attaque électrochimique d'un fil en tungstène de diamètre 125 μm. Le principe de la taille repose sur la réaction chimique d'oxydation du tungstène en présence de soude. Pour cela, une réaction électrolytique est mise en place où la pointe en tungstène est l'une des électrodes plongées dans une solution de soude à 2 mol.L^{-1} (Fig. 2.1).

Les réactions chimiques ayant lieu aux électrodes sont :

$$\begin{aligned} \mathrm{W} + 4\,\mathrm{H_20} + 2\,e^- &= \mathrm{WO_4^{2-}} + 4\,\mathrm{H_2} \\ 2\,\mathrm{OH^-} &= \mathrm{H_20} + \frac{1}{2}\,\mathrm{O_2} + 2\,e^- \end{aligned}$$

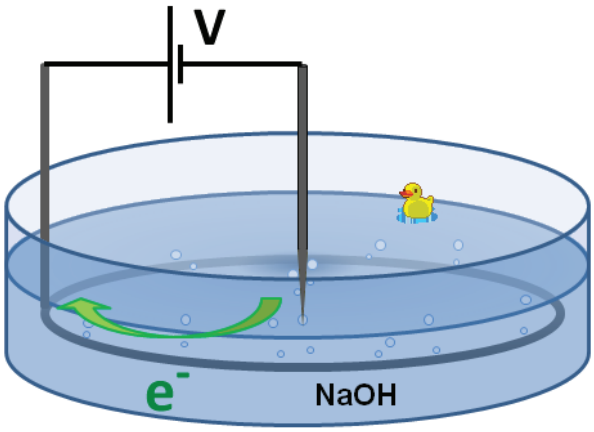


Figure 2.1

Les deux réactions s'accompagnent d'un dégagement gazeux qui peut être utilisé comme contrôle qualitatif de la vitesse de réaction. La source de tension est utilisée dans un premier temps en continu puis par impulsions brèves pour une fin de la taille précise. Les pointes obtenues ont des rayons de courbure de l'ordre de quelques centaines de nanomètres.

Le tungstène est utilisé notamment parce que sa température de fusion est élevée, proche de 3400 °C. Il peut donc être chauffé dans le vide à l'aide de la boucle support en tantale fixée sur le nanomanipulateur (cf. partie 1.2.2). Cette étape a pour but de chauffer et nettoyer par recuit les nanofils se trouvant en bout de pointes ($\approx$ 1000 °C).

2.1.2 Nanofil sur pointes

Les résonateurs utilisés sont des nanofils de carbure de silicium (SiC). Le SiC a une rigidité dans la même gamme que celle du diamant [1]. Il a l'avantage par rapport au diamant de pouvoir être obtenu par croissance chimique. Les nanofils sont produits par le Laboratoire des Multimatériaux et Interfaces et se présentent sous forme d'une mousse friable où ils sont mélangés en plus ou moins grande quantité à des résidus de composés de croissance. La poudre de nanofils est déposée sur un petit morceau de scotch carbone et les nanofils sont collés sur une pointe tungstène sous un microscope optique binoculaire à l'aide d'un bras fixé sur un manipulateur micrométrique manuel.

1. Le module de Young est de 450 GPa pour le carbure de silicium contre 1000 GPa pour le diamant.

Les nanofils proéminent sont plus facilement récupérés et les forces de contact aux échelles considérées sont suffisantes pour maintenir dans un vide UHV un nanofil de carbure de silicium collé sur une pointe de tungstène (Fig. 2.3 pour une image à l'air libre sous microscope et Fig. 2.2 pour une image MEB dans un vide UHV).

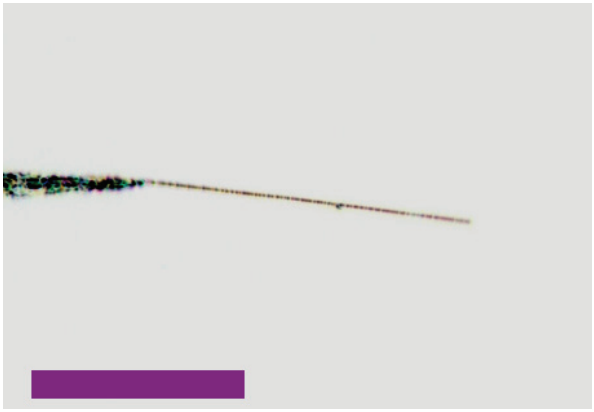


FIGURE 2.2 Image par microscopie optique d'un nanofil de carbure de silicium collé sur une pointe en tungstène. Les couleurs sont inversées. Barre d'échelle 50 μm.

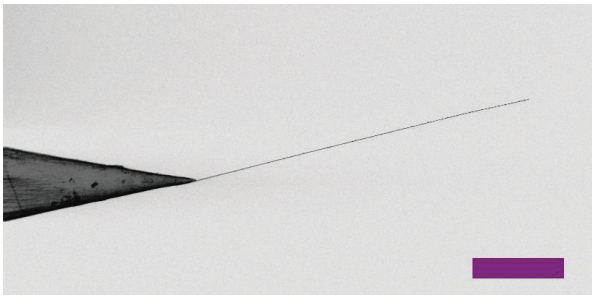


FIGURE 2.3 Image par microscopie électronique à balayage d'un nanofil de carbure de silicium collé sur une pointe en tungstène. Les couleurs sont inversées (les pixels sombres correspondent à une forte collection d'électrons rétrodiffusés). Barre d'échelle 50 μm.

Les échantillons à étudier sont alors montés sur le support d'un des deux blocs nanomanipulateurs en face de la contre électrode sur l'autre bloc.

2.2 Forces quasistatiques

Il y a deux manières pour déplacer les nanofils : l'actionnement des blocs piézoélectriques et l'action de forces électrostatiques.

2.2.1 Déplacement par les blocs piézoélectriques inertiels

Les blocs piezoélectriques inertiels permettent de déplacer finement la pointe en tungstène supportant le résonateur dans son environnement proche. Ils sont conçus pour être utilisés en régime de stick-slip, pilotés par une alimentation dédiée. Ils permettent des déplacements contrôlés nanométriques dans les 3 directions de l'espace de la pointe relativement à la contre électrode sur une plage de 3 mm. Cette liberté sera utilisée pour étudier finement les propriétés électromécaniques d'un nanofil résonant vis-à-vis de son environnement géométrique proche.

Les blocs piézoélectriques peuvent également être alimentés par un générateur basse fréquence dans un régime de déplacement, c'est-à-dire de déformation du matériau piézoélectrique, proportionnel à la tension électrique appliquée (1 V correspond à 100 nm environ). L'alimentation se fait sur une plage $\pm$ 10 V et la fréquence de coupure est estimée à quelques centaines de kilo Hertz.

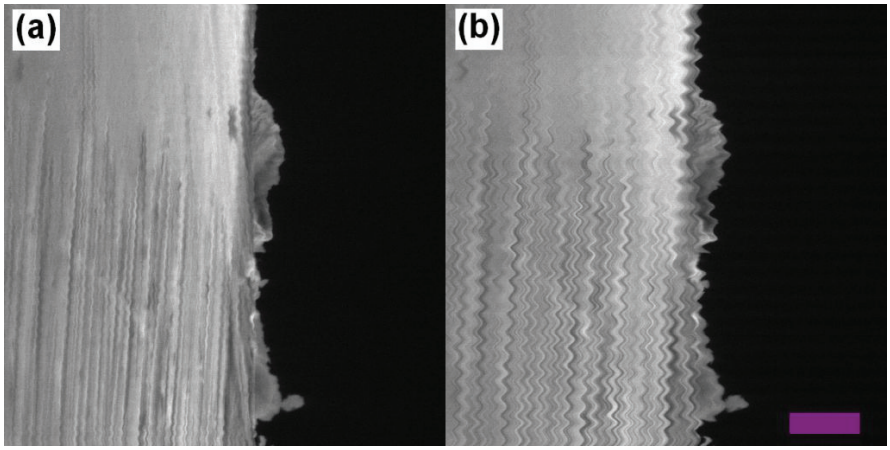


Figure 2.4 (a) contre électrode en or statique et (b) en mouvement oscillant. Le balayage de l'image se fait lignes par lignes de haut en bas et l'électrode est déplacée horizontalement par l'application au bloc piézoélectrique d'une tension sinusoïdale de 10 V pics à pics à une fréquence de 2,123 Hz. Le balayage de l'image est suffisamment lent pour résoudre le déplacement horizontal de l'électrode. Barre d'échelle 2 μm.

2.2.2 Déflection des nanofils par force électrostatique

Il est possible de défléchir le nanofil en appliquant une tension électrique DC entre le support du nanofil et la contre électrode (Fig. 2.5). Un article de référence pour la déflection d'un NEMS est l'étude de Poncharal et al. (1999) portant sur la déflection de nanotubes de carbone simplement encastrés.

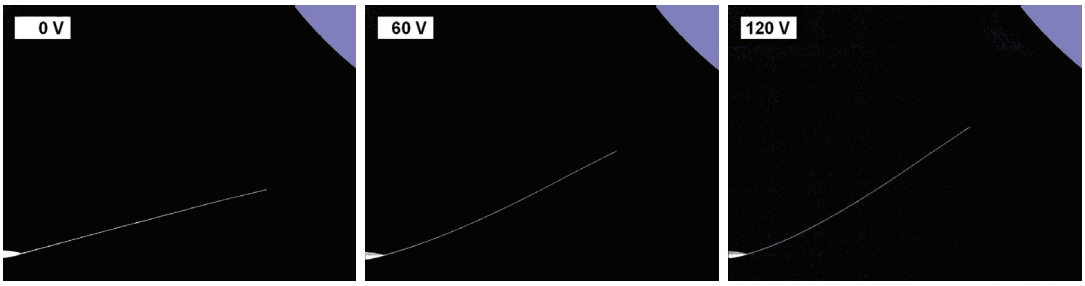


FIGURE 2.5 Déflection statique d'un nanofil de SiC pour une tension DC appliquée entre le support en tungstène et la contre électrode. La contre électrode est une boule partiellement visible en haut, à droite sur chaque image.

La position du nanofil pour ses différentes déflections (0 V à 120 V par pas de 10 V) a été relevée en appliquant un seuillage sur l'image pour extraire les pixels correspondant au nanofil des pixels du fond sombre. On peut remarquer que la

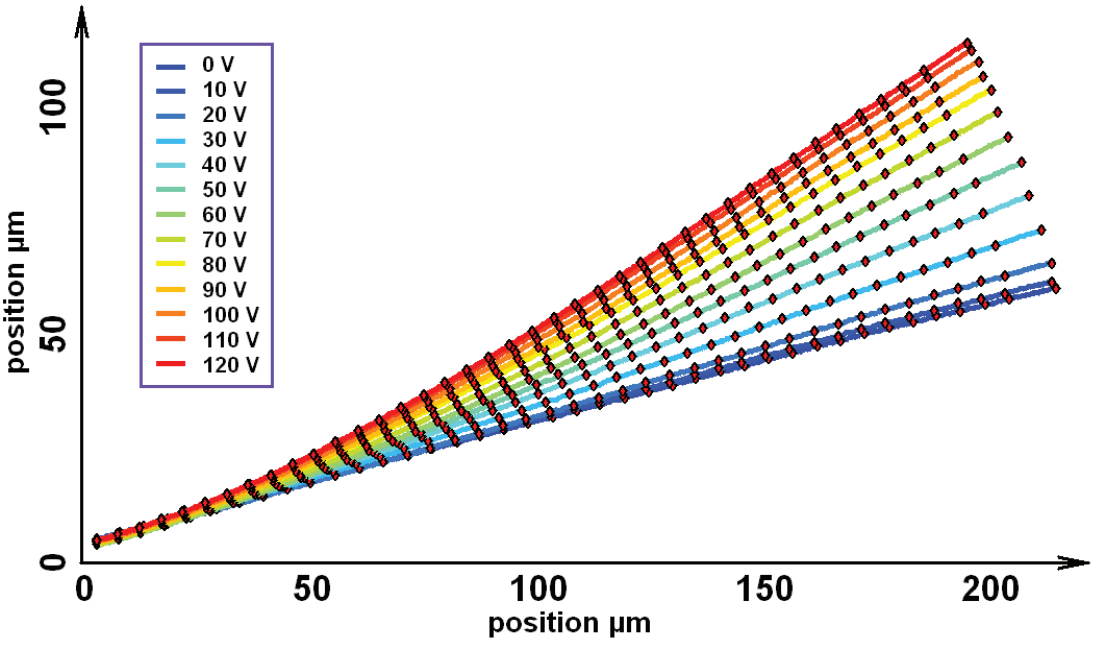


FIGURE 2.6 Déflection statique relevée par un traitement des images. Les deux axes ont la même échelle.

différence de déflection est de plus en plus importante pour les faibles valeurs de tension et que la déflection semble saturer pour les fortes tensions vers une position qui correspond géométriquement au point d'approche minimum du nanofil avec la contre électrode.

Pour analyser quantitativement la déflection en fonction de la tension appliquée, il est nécessaire de détailler la nature électrostatique des forces agissantes sur le nanofil. Les deux surfaces, du nanofil d'une part et de la contre électrode d'autre part, peuvent être vues comme les armatures d'un condensateur électrique. Lorsque les armatures de ce condensateur sont portées à une différence de potentiel, elles se chargent électrostatiquement et les surfaces ainsi chargées s'attirent.

Dans les développements qui vont suivre, $\mathcal{E}(X)$ désignera l'énergie électrostatique du condensateur ayant pour armatures le nanofil et la contre électrode où un paramètre physique X a été explicité. Pour lever toute ambiguïté, insistons sur le fait qu'il s'agit de la variable au sens physique, c'est-à-dire qui représente la quantité physique correspondant à l'énergie électrostatique. Ainsi $\mathcal{E}(X)$ n'est pas une unique fonction mathématique de X mais pourra prendre une forme mathématique différente selon que X représente la charge ou la tension électrique par exemple.

Le point de départ du raisonnement est l'écriture de l'énergie électrostatique du condensateur à charge fixée

$$\mathcal{E}(\mathcal{Q}) = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{Q}^2}{C(y(x))} \tag{2.1}$$

Il s'agirait d'une situation expérimentale où la charge $\mathcal{Q}$ serait imposée sur l'électrode positive et la charge $-\mathcal{Q}$ serait imposée sur l'électrode négative. C est la capacité électrique dépendant de *toute* la forme du nanofil $y(x)$ [2]. Pour simplifier la description, il est commode de considérer le mode de déformation statique repéré par son amplitude, la position de l'apex du nanofil y_a. Dans ce cas là, l'expression de la capacité fait apparaître une seule variable qui est la position de l'apex. La force agissant sur le mode de déformation statique est obtenue par le gradient de l'énergie potentielle :

$$F_{\text{élec}} = -\nabla\mathcal{E} = \frac{C'(y_a)}{2}\frac{\mathcal{Q}^2}{C^2} \tag{2.2}$$

Dans notre situation expérimentale, le condensateur formé par le nanofil et la contre électrode est un système ouvert au sens où il n'évolue pas avec une charge fixée mais à une différence de potentiel fixe V_{DC} [3]. Pour se ramener à un système fermé, il est donc nécessaire de considérer l'énergie potentielle du condensateur et de la source en tenant compte du travail que doit fournir la source de tension pour amener une charge au potentiel V_{DC} :

$$\mathcal{E}(\mathcal{Q})_{\{\mathrm{V}_{DC}\text{ fixé}\}} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{Q}^2}{C(y_a)} - \mathcal{Q}V_{DC} \tag{2.3}$$

où $\mathcal{Q}$ est la charge sur l'armature positive, imposée par la capacité via le potentiel fixé $\mathcal{Q} = C(y_a)V_{DC}$. L'énergie électrostatique à *potentiel imposé* V_{DC} est donc

$$\mathcal{E}(V_{DC}) = -\frac{1}{2}C(y_a){V_{DC}}^2 \tag{2.4}$$

et alors la force à V_{DC} fixé s'écrit :

$$F_{\text{élec}} = \frac{1}{2}C'(y_a){V_{DC}}^2 \tag{2.5}$$

Il est alors possible d'écrire l'équilibre statique du nanofil comme :

$$-ky_a + \frac{1}{2}C'(y_a){V_{DC}}^2 = 0 \tag{2.6}$$

où k est la constante de raideur associée à la déflection du mode statique de déformation.

2. Mathématiquement, la capacité est une fonctionnelle de la forme du nanofil et de la position de la contre électrode

3. La démarche pour établir l'expression de la force capacitive à potentiel électrique imposé peut sembler fastidieuse. Ceci est lié au fait que la force capacitive n'est pas la même selon que le condensateur est à charge imposée ou à une différence de potentiel imposée (voir le développement sur les forces capacitives à haute fréquence de la partie 5.2.2)

Une première approche consiste à considérer que la dérivée de la capacité formée par le nanofil et la contre électrode est indépendante de la position du nanofil y_a. Dans ce cas là, la position est reliée de manière quadratique à la tension V_{DC}

$$y_a = \frac{1}{2}\frac{C'(y_a)}{k}{V_{DC}}^2 \tag{2.7}$$

et il est assez clair que cette formulation rend compte de la déflection aux petites tensions mais pas sur toute la plage de mesure.

La saturation de la déflection est reliée au fait qu'une force électrostatique arbitrairement grande va entraîner une déflection asymptotique finie pour laquelle la distance entre l'apex et la contre électrode est minimale. Ceci se traduit mathématiquement par le fait que la capacité C est maximale pour la position d'approche minimale y entre le nanofil et la contre électrode. Avec un développement limité autour de cette valeur :

$$C(y_a) = C\text{max} - \frac{1}{2}C_2(y_a - y_{lim})^2 \tag{2.8}$$

où C_2 est la dérivée seconde de la capacité C au voisinage de la position d'approche minimale.

Alors l'équilibre statique du nanofil s'écrit :

$$ky_a = -\frac{1}{2}C_2(y_a - y_{lim}){V_{DC}}^2 \tag{2.9}$$

soit, en exprimant la déflection en fonction de V_{DC}

$$y_a = \frac{\frac{C_2}{2k}}{1 + \frac{C_2}{2k}{V_{DC}}^2} y_{lim}{V_{DC}}^2 \tag{2.10}$$

À partir de la modélisation de la courbe de déflection (Fig. 2.7) il est possible d'obtenir $y_{lim} = 78,5$ μm et la quantité $\sqrt{2k/C_2} = 66$ V, qui peut s'interpréter comme la tension électrique caractéristique pour passer au régime de saturation de la déflection statique.

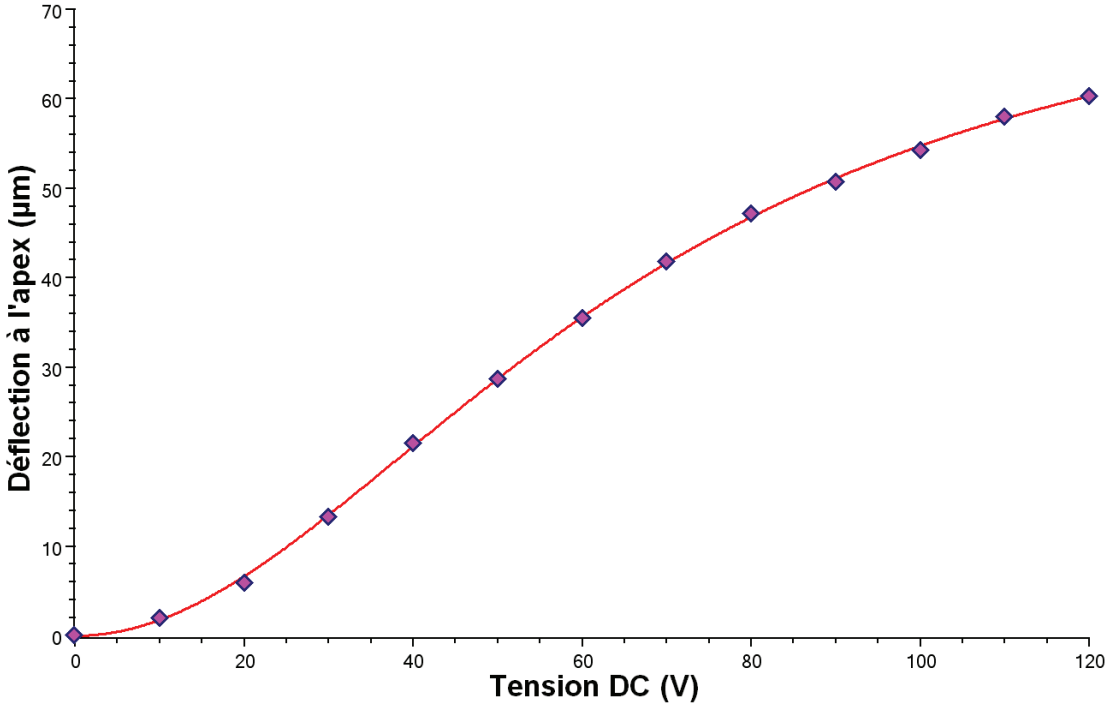


FIGURE 2.7 Déflection statique en fonction de la tension DC. La modélisation correspond à l'expression de l'équation 2.10

2.3 Résonances mécaniques

2.3.1 Résonance mécanique fondamentale d'un nanofil simplement encastré

Dans cette première partie, une approche expérimentale de la résonance d'un nanofil simplement encastré est présentée.

2.3.1.1 Visualisation MEB d'une résonance fondamentale

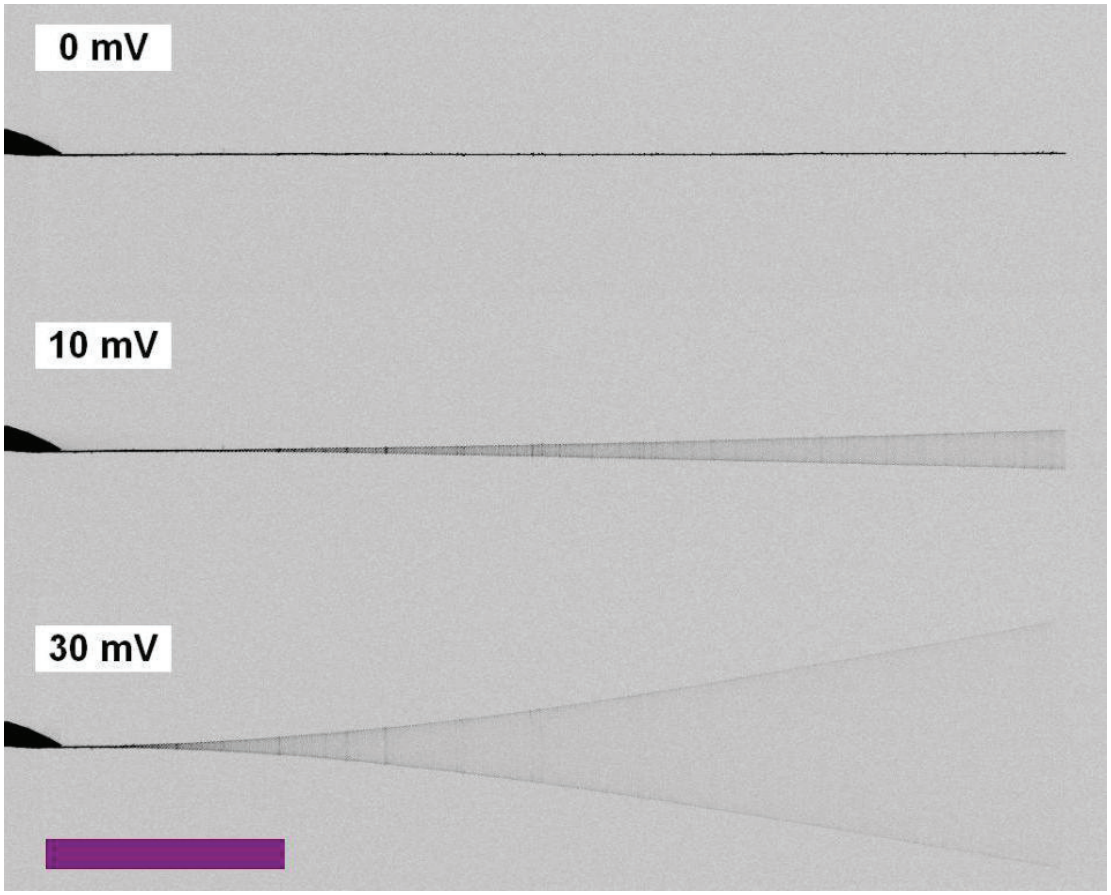


Figure 2.8 Vibration du mode fondamental d'un nanofil de SiC par imagerie MEB. La fréquence d'excitation piézoélectrique est de 7248 Hz. Barre d'échelle 50 μm.

Les blocs piézoélectriques sont utilisés pour mettre en mouvement oscillant le support en tungstène du nanofil (2.2.1). La fréquence d'excitation est augmentée continûment sur le générateur basse fréquence et sur une petite plage de fréquence la position du nanofil s'élargit, marquant la mise en oscillation du résonateur entre deux positions extrêmes (Fig. 2.8). La fréquence d'excitation peut être ajustée qualitativement pour donner la plus grande amplitude de vibration. Lorsque la fréquence

est fixée dans la plage de résonance, pour les tensions d'excitation faibles, l'amplitude de vibration est qualitativement proportionnelle à l'excitation. Il est à noter que, pour les tensions d'excitation mises en jeu, le déplacement oscillant du support en tungstène entraînant le mouvement résonant est imperceptible, même à très basse fréquence ($\approx$ Hz).

2.3.1.2 Détection fine d'une résonance : focalisation du faisceau MEB

La visualisation des résonances mécaniques sous MEB permet de déterminer la fréquence d'excitation optimale et éventuellement une plage de fréquence caractéristique de résonance mais ne permet pas une résolution quantitative de la vibration du résonateur. Pour résoudre en temps direct la position du résonateur pendant la vibration, le faisceau électronique du MEB est focalisé sur un flan du nanofil au voisinage du point d'accroche. La quantité d'électrons rétrodiffusés collectés par le SED est reliée à la portion du faisceau intercepté par le nanofil. Une détection synchrone avec un lock-in est utilisée pour corréler le signal d'excitation alternatif et le signal électrique du SED, image de la position du nanofil (Fig. 2.9).

Les capacités de résolution de la détection par focalisation sur le fil ont été estimées en focalisant le faisceau sur le bord de l'électrode d'or et pour une oscillation de tension de modulation. La relation entre le déplacement de l'électrode et la tension appliquée est établie à basse fréquence (2,123 Hz) pour une tension alternative de $\pm$10 V où le déplacement de l'électrode est observable par imagerie MEB (Fig. 2.4). La calibration obtenue est de 100 nm.V^{-1}. La mesure de déplacement de la contre électrode est alors menée pour une modulation de 170 Hz en supposant que la calibration à très basse fréquence reste valable (Fig. 2.9, en bas).

La technique de détection permet une résolution en dessous du nanomètre à 170 Hz. En pratique, la bande passante de détection est limitée par la plage de fonctionnement du lock-in utilisé (SRS830, $f < 100$ kHz). Pour un dispositif de mesure plus rapide, la détection serait limitée par la fréquence de coupure du SED ($\approx$ MHz).

Une méthode comparable a été utilisée par Buks et Roukes (2001) mais sans possibilité de mesurer la phase puisqu'un analyseur de spectre était utilisé à la place du lock-in.

La méthode de détection par focalisation du faisceau MEB permet la mesure de l'amplitude et de la phase du mouvement. Cette partie est l'occasion de signaler d'autres mécanismes de détection permettant une résolution de la phase de l'oscillation. La diffraction dans le régime de Mie est utilisée pour résoudre le mouvement d'un nanofil par Sanii et Ashby (2010). Une méthode stroboscopique est également proposée par Hessman et al. (2007). Enfin l'interférence induite par un résonateur est utilisée par Belov et al. (2008) pour un nanofil au voisinage du substrat comme paroi réfléchissante ou dans des cavités optiques résonantes pour Favero et al. (2007).

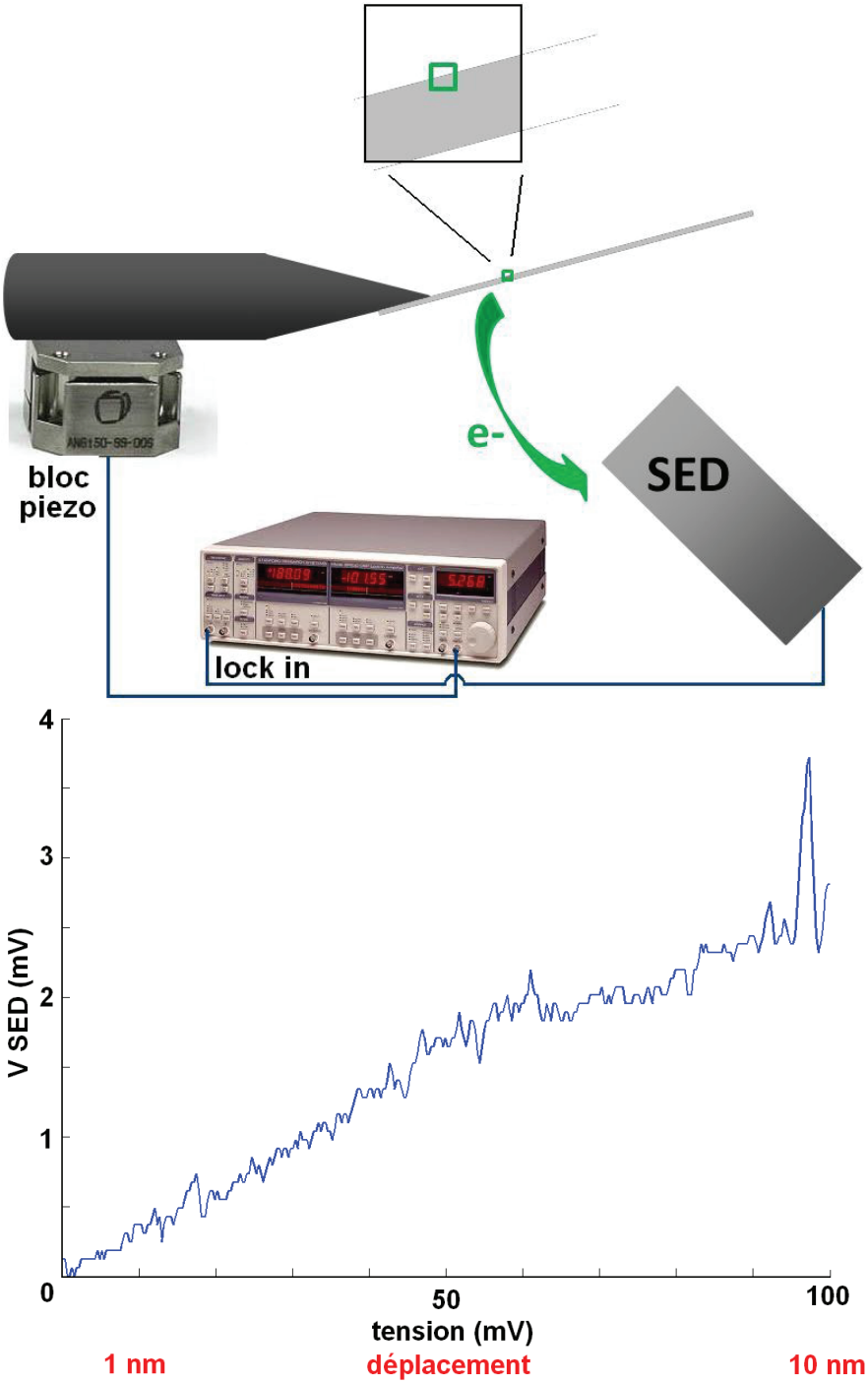


Figure 2.9 (en haut) Schéma du montage expérimental pour la mesure par focalisation du faisceau MEB. (en bas) Tension du SED en fonction de la tension de modulation des blocs piézoélectrique pour le montage de la figure 2.9. La fréquence de modulation est de 170 Hz.

2.3.1.3 Spectre d'une résonance : modélisation par un oscillateur harmonique amorti

La résonance d'un nanofil (Fig. 2.8) est mesurée à l'aide de la détection par focalisation du faisceau MEB (Fig. 2.10). Le lock-in permet à la fois d'obtenir l'amplitude du signal alternatif à la fréquence d'excitation mais également le déphasage entre le signal d'excitation et le déplacement du résonateur. Les points expérimen-

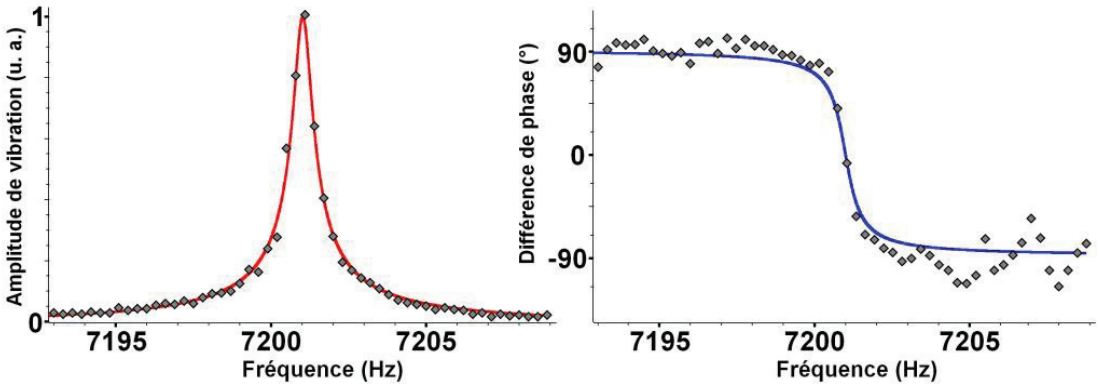


FIGURE 2.10 Amplitude de vibration et différence de phase entre l'excitation et le déplacement du nanofil autour de sa fréquence de résonance fondamentale.

taux d'amplitude et de déphasage sont modélisés en très bonne approximation par un oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{y}_{spot} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y}_{spot} + {\omega_0}^2 y_{spot} = f_{pz}\cos\omega_e t \tag{2.11}$$

où ω_0 est la pulsation propre et Q le facteur de qualité de la résonance considérée. f_{pz} représente l'amplitude du forçage d'origine piézoélectrique et y_{spot} est le déplacement du nanofil au point de focalisation du faisceau. La modélisation du déphasage ou de l'amplitude donne pour la fréquence propre $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 7201,04 \pm 0,02$ Hz et $Q = 11000 \pm 1000$. Par la suite et sauf mention explicite, le terme d'oscillateur harmonique sera utilisé pour décrire un oscillateur harmonique dissipatif.

2.3.2 Mode de vibration fondamental

Il s'agit maintenant d'aborder la description mathématique de la résonance d'un nanofil. La vibration des nanofils est décrite par la mécanique vibratoire des poutres dans le cadre de la dynamique des milieux continus. Pour ces développements formels, le déplacement transversal d'un nanofil est noté $Y(x,t)$ où $\psi(x)$ est la partie spatiale de l'onde mécanique stationnaire.

2.3.2.1 Cas libre sans dissipation

Il s'agit d'une situation permettant d'introduire rigoureusement la notion de mode de vibration. Le déplacement transversal est régi par l'équation d'onde (Landau et Lifshitz, 1986) :

$$\mu\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} + E\mathcal{I}\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4} = 0 \tag{2.12}$$

où $Y(x,t)$ est le déplacement transversal d'une poutre de longueur L, repéré par l'abscisse x en fonction du temps t. μ est la masse linéique du résonateur, E est le module de Young du matériau et $\mathcal{I}$ le moment quadratique associé au déplacement transversal. Les solutions stationnaires sont de la forme $Y(x,t) = \psi(x)\cos\omega t$:

$$\psi(x) = A\cosh kx + B\sinh kx + C\cos kx + D\sin kx \tag{2.13}$$

et la relation de dispersion obtenue est :

$$\mu\omega^2 = E\mathcal{I}k^4 \tag{2.14}$$

où ω est réel et correspond à la pulsation de vibration sans dissipation.

Dans le cas libre sans dissipation, les 5 degrés de liberté sont les constantes A, B, C et D définissant la forme de l'oscillation et ω la pulsation de résonance. Signalons au passage que la valeur de ω fixe le vecteur d'onde k exprimé dans les solutions $\psi(x)$.

Les conditions aux limites fixent 4 contraintes sur les 5 degrés de liberté laissant un paramètre libre qui est l'amplitude de vibration. Les conditions aux limites sont l'encastrement parfait du résonateur (Éqs. 2.15 et 2.16) et l'absence de force (Éq. 2.17) et de couple (Éq. 2.18) à l'extrémité libre :

$$\psi(0) = 0 \tag{2.15}$$
$$\frac{d\psi}{dx}(0) = 0 \tag{2.16}$$
$$\frac{d^2\psi}{dx^2}(L) = 0 \tag{2.17}$$
$$\frac{d^3\psi}{dx^3}(L) = 0 \tag{2.18}$$

Les conditions 2.15 et 2.16 entraînent

$$\psi(x) = A(\cosh kx - \cos kx) + B(\sinh kx - \sin kx) \tag{2.19}$$

Les conditions 2.17 et 2.18 s'écrivent alors

$$\begin{pmatrix} \cosh kL + \cos kL & \sinh kL + \sin kL \\ \sinh kL - \sin kL & \cosh kL + \cos kL \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \tag{2.20}$$

Les solutions non nulles s'obtiennent lorsque le déterminant de la matrice est nul

$$(\cosh^2 kL + 2\cos kL\cosh kL + \cos^2 kL) - (\sinh^2 kL - \sin^2 kL) = 0 \tag{2.21}$$

c'est-à-dire

$$2\cos kL\cosh kL + 2 = 0 \tag{2.22}$$

La première racine de l'équation 2.22 est déterminée numériquement et donne $k_f = 1,875/L$. Pour cette valeur du vecteur d'onde k_f, la forme du mode de vibration est

$$\psi(x) = A\left[(\cosh k_f x - \cos k_f x) + \frac{\sin k_f L - \sinh k_f L}{\cos k_f L + \cosh k_f L}(\sinh k_f x - \sin k_f x)\right] \tag{2.23}$$

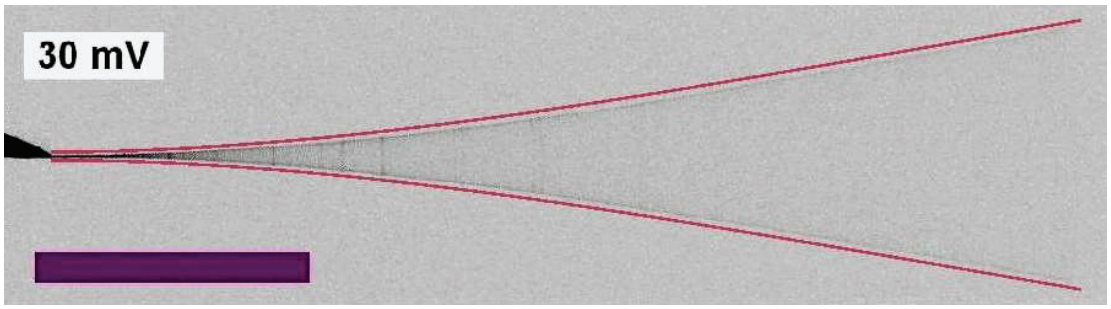


FIGURE 2.11 superposition de la vibration à 30 mV d'excitation à la fréquence d'excitation de 7248 Hz et du mode de vibration fondamental défini par l'équation 2.23.

La fréquence de résonance fondamentale f_f est donnée par la relation de dispersion pour l'expression du vecteur d'onde k_f

$$f_f = \frac{1,875^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{E\mathcal{I}}{\rho S}} \tag{2.24}$$

où $\mathcal{I} = \pi d^4/64$ est le moment quadratique de déformation transversal pour une poutre de section circulaire de diamètre d, ρ la masse volumique et S la surface de la section du résonateur.

Avec les valeurs

$$\begin{aligned} L &= 220\ \mu\text{m} \\ d &= 220\ \text{nm} \\ E &= 410\ \text{GPa} \\ \rho &= 3210\ \text{kg.m}^{-3} \end{aligned}$$

la fréquence obtenue par 2.24 est $f_f = 7,19$ kHz. Les paramètres géométriques L et d sont mesurés par l'imagerie MEB et les propriétés physiques (module de Young E et masse volumique ρ) sont tabulées. La fréquence fondamentale et la forme du mode de résonance sont correctement décrites par la modélisation d'une poutre libre sans dissipation.

2.3.2.2 Forçage par vibration du support

La description d'une poutre forcée par un déplacement ou une force alternative ne peut pas se faire rigoureusement en utilisant une approche modale puisque la pulsation est cette fois ci imposée par l'excitateur. L'approche développée pour traiter la résonance du nanofil par la vibration du support est d'introduire directement dans les conditions aux limites le forçage périodique et de considérer alors les solutions forcées à la pulsation ω_e (grandeur réelle).

Sans dissipation La relation de dispersion 2.14 s'écrit dans le cas forcé

$$\mu\omega_e^2 = E\mathcal{I}k_e^4 \tag{2.25}$$

où le vecteur d'onde k_e est maintenant imposé et les 4 degrés de liberté sont les coefficients A,B,C et D exprimés dans les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= a && (2.26)\\
\frac{d\psi}{dx}(0) &= 0 && (2.27)\\
\frac{d^2\psi}{dx^2}(L) &= 0 && (2.28)\\
\frac{d^3\psi}{dx^3}(L) &= 0 && (2.29)
\end{aligned}$$

où $Y(0,t) = a\cos\omega_e t$ est le déplacement périodique imposé par le support vibrant. Avec une solution toujours de la forme 2.13, les conditions aux limites donnent

$$\begin{aligned}
A + C &= a\\
B + D &= 0\\
A\cosh k_eL + B\sinh k_eL - C\cos k_eL - D\sin k_eL &= 0\\
A\sinh k_eL + B\cosh k_eL + C\sin k_eL - D\cos k_eL &= 0
\end{aligned}$$

en éliminant C et D par substitution, ces conditions aux limites peuvent s'écrire matriciellement

$$M\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos k_eL \\ a\sin k_eL \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

où la matrice M donne la relation entre A, B et l'amplitude a de la vibration du support

$$M = \begin{pmatrix} \cos k_eL + \cosh k_eL & \sinh k_eL + \sin k_eL \\ \sin k_eL - \sinh k_eL & -\cosh k_eL - \cos k_eL \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

À l'aide de la matrice inverse

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} -\cosh k_eL - \cos k_eL & -\sinh k_eL - \sin k_eL \\ \sinh k_eL - \sin k_eL & \cos k_eL + \cosh k_eL \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

les coefficients A et B s'écrivent

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a\cos k_e L \\ a\sin k_e L \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Les coefficients A et B s'obtiennent simplement par l'inversion d'une matrice 2×2 appliquée à un vecteur proportionnel au forçage. Il est à signaler que lorsque la fréquence d'excitation $\omega_e/(2\pi)$ correspond à la fréquence de résonance définie par l'équation 2.24, le déterminant de la matrice M est nul [4]. En l'absence de dissipation, l'amplitude des solutions forcées à la résonance diverge.

Avec dissipation Une manière d'introduire la dissipation dans la vibration de la poutre est d'introduire un terme de dissipation visqueuse local dans l'équation d'onde 2.12

$$\mu\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} + E\mathcal{I}\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4} = -\Gamma\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} \tag{2.34}$$

où Γ est un coefficient d'amortissement linéique.

La relation de dispersion devient alors

$$\mu\omega_e^2 - i\Gamma\omega_e = E\mathcal{I}k_{e,d}^4 \tag{2.35}$$

où ω_e reste une grandeur réelle imposée par l'excitateur et $k_{e,d}$ est l'un des 4 vecteurs d'onde en régime forcé en présence de dissipation.

Les 4 vecteurs d'onde s'obtiennent comme les 4 racines quatrièmes d'une grandeur réelle dépendant de ω_e

$$k_{e,d} = \left(\omega_e^2 - i\Gamma\omega_e\right)^{1/4} \tag{2.36}$$

soit en utilisant la matrice M_d avec dissipation

$$M_d = \begin{pmatrix} \cos k_{e,d}L + \cosh k_{e,d}L & \sinh k_{e,d}L + \sin k_{e,d}L \\ \sin k_{e,d}L - \sinh k_{e,d}L & -\cosh k_{e,d}L - \cos k_{e,d}L \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

La matrice inverse s'écrit alors

$${M_d}^{-1} = \frac{1}{\det M_d}\begin{pmatrix} -\cosh k_{e,d}L - \cos k_{e,d}L & -\sinh k_{e,d}L - \sin k_{e,d}L \\ \sinh k_{e,d}L - \sin k_{e,d}L & \cos k_{e,d}L + \cosh k_{e,d}L \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

et les coefficients en présence de dissipation sont

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = {M_d}^{-1} \begin{pmatrix} a\cos k_{e,d}L \\ a\sin k_{e,d}L \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

Le mode de vibration forcé écrit sous la forme $Y(x,t) = \psi_R(x)\cos\omega t + \psi_I(x)\sin\omega t$ s'exprime alors pour $k_{e,d}$ donné par la relation de dispersion avec dissipation 2.35

$$\psi_R(x) = \mathcal{R}e\{A\}\cosh k_{e,d}x + \mathcal{R}e\{B\}\sinh k_{e,d}x + (a - \mathcal{R}e\{A\})\cos k_{e,d}x - \mathcal{R}e\{B\}\sin k_{e,d}x \tag{2.40}$$

4. On pourra reparquer que M est la matrice de l'équation 2.20 pour $k = k_e$

pour la partie en phase avec l'excitation et

$$\psi_I(x) = \mathcal{I}m\{A\}\cosh k_{e,d}x + \mathcal{I}m\{B\}\sinh k_{e,d}x - \mathcal{I}m\{A\}\cos k_{e,d}x - \mathcal{I}m\{B\}\sin k_{e,d}x \tag{2.41}$$

pour le déplacement en quadrature de phase. $\mathcal{R}e.$ et $\mathcal{I}m.$ sont les opérateurs partie réelle et partie imaginaire. L'amplitude de vibration correspond au module de $\psi_R + i\psi_I$. Elle est comparée (Fig. 2.12) avec l'amplitude de vibration pour un modèle d'oscillateur harmonique utilisé pour le traitement des résonances obtenues expérimentalement dans la partie 2.3.1.3.

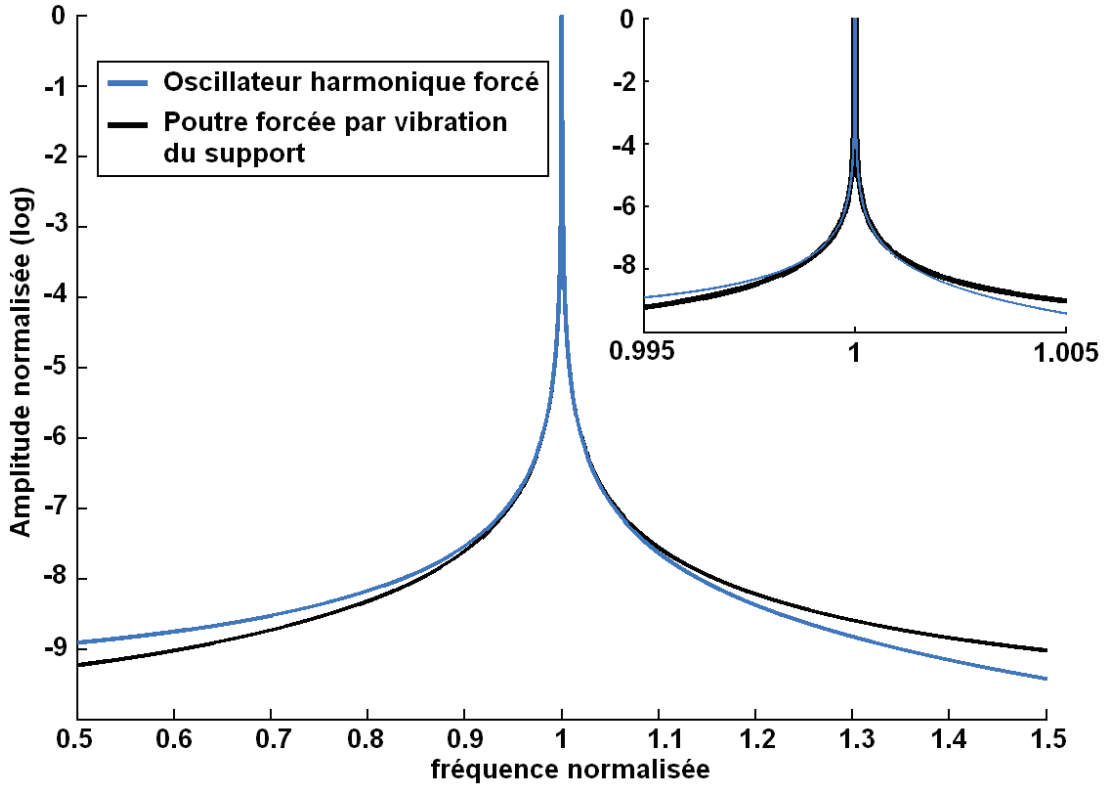


Figure 2.12 Amplitude de vibration en fonction de la fréquence d'excitation pour un oscillateur harmonique amorti forcé (Éq. 2.11) et une poutre avec dissipation forcée par vibration de son support (Éq. 2.39). L'échelle verticale est logarithmique.

2.3.3 Excitation électrostatique

Il est possible d'exercer une force électrostatique sur le résonateur en modulant la force électrostatique introduite dans la partie 2.2.2 sur la déflection statique des nanofils. Une approche rigoureuse consisterait à intégrer la force locale en chaque point du résonateur. Dans le cadre d'une approche simplifiée, on considérera un cas limite où la force électrostatique est appliquée ponctuellement à l'extrémité du nanofil y_a.

En appliquant par exemple une tension continue V_{DC} sur la contre électrode et une tension alternative $V_{AC}(t)$ ($V_{AC}(t) \ll V_{DC}$) sur le résonateur, on obtient une force électrostatique modulée dans le temps qui s'écrit

$$F_{\text{élec}} = \frac{1}{2}C'(y_a)(V_{DC} - V_{AC}(t))^2 \tag{2.42}$$

soit au premier ordre pour le terme dépendant du temps

$$F_{\text{élec}} = -C'(y_a)V_{DC}V_{AC}(t) \tag{2.43}$$

Dans ce cas là, l'excitation se traduit à nouveau au niveau des conditions aux limites mais cette fois-ci sur la condition traduisant la force transversale à l'extrémité $\psi(L)$

$$\psi(0) = 0 \tag{2.44}$$

$$\frac{d\psi}{dx}(0) = 0 \tag{2.45}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}(L) = 0 \tag{2.46}$$

$$\frac{d^3\psi}{dx^3}(L) = -\frac{\overline{F_{\text{élec}}}}{E\mathcal{I}} \tag{2.47}$$

où $\overline{F_{\text{élec}}}$ est l'amplitude de la force électrique alternative appliquée à l'apex du résonateur.

2.3.4 Modes d'ordre supérieur

Précédemment, le mode fondamental de plus basse fréquence a été introduit expérimentalement (partie 2.3.1.1) et par la modélisation mécanique des poutres (partie 2.3.2). Comme pour une corde vibrante, une poutre vibrante possède plusieurs modes de vibration. En augmentant la fréquence d'excitation au delà de la fréquence de résonance du mode fondamental, on observe des modes de vibration d'ordre supérieur possédant pour chaque nouveau mode un nœud de vibration supplémentaire (Fig. 2.13).

L'existence des modes d'ordre supérieur est prévue par la modélisation d'une poutre libre sans dissipation (partie 2.3.2.1) dans la mesure où plusieurs vecteurs d'onde annulent le déterminant de la matrice traduisant les conditions aux limites. La résolution numérique de l'équation 2.22 annulant le déterminant donne pour les modes d'ordre supérieur $k_2 = 4,694/L, k_3 = 7.855/L, k_4 = 10.996/L, ...$

Les fréquences de résonance obtenues par la modélisation mécanique de la poutre sont comparées aux trois fréquences obtenues expérimentalement en ajustant la fréquence du mode fondamental et en utilisant les rapports de fréquence $f_2 = (k_2/k_f)f_f$ et $f_3 = (k_3/k_f)f_f$.

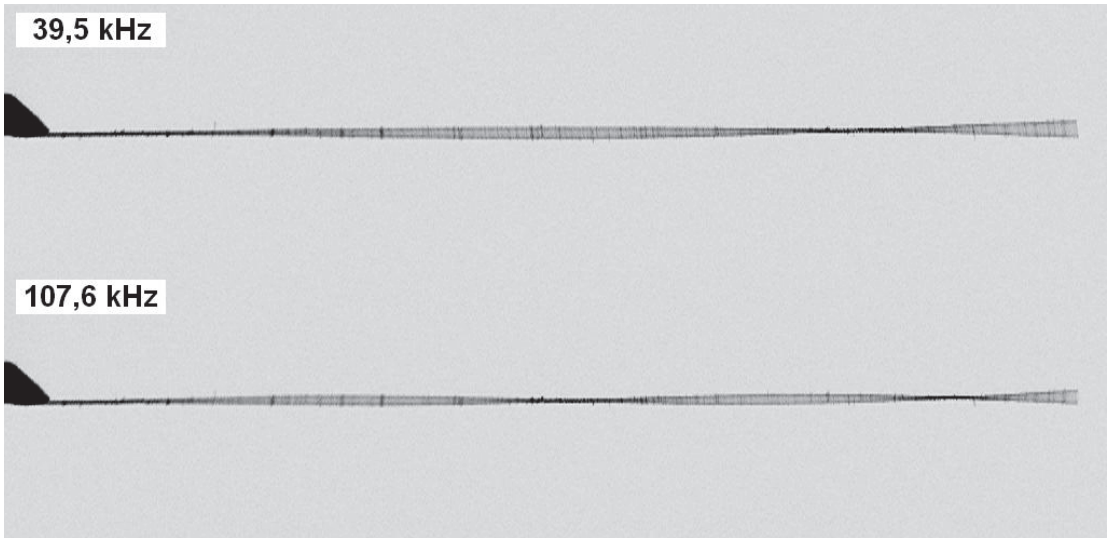


Figure 2.13 Deuxième et troisième mode de vibration obtenu par forçage électrostatique.

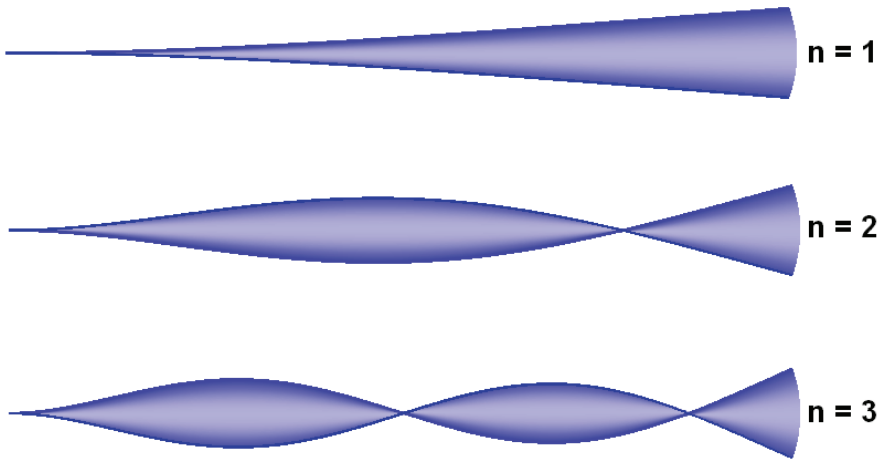


Figure 2.14 Profil des trois premiers modes de vibration obtenus pour les trois premières racines de l'équation 2.22.

mode	résonance expérimentale (kHz)	modélisation (kHz)
1	7,2	7,2
2	39,5	45,1
3	107,6	126,4

Figure 2.15 Comparaison entre les fréquences mesurées expérimentalement et les fréquences prévues par le modèle en faisant correspondre les fréquences des premiers modes.

2.4 Accordage en fréquence électrostatique

L'accordage en fréquence électrostatique désigne l'intervention du couplage électrostatique dans la vibration mécanique et particulièrement les fréquences propres de résonance.

2.4.1 Accordage en fréquence par tirage électrostatique

Cette partie concerne la variation de fréquence occasionnée par une force de tirage longitudinale de norme et de direction constante au cours du mouvement du résonateur (Purcell et al., 2002).

2.4.1.1 Mesure de la fréquence de résonance en fonction du tirage électrique

La contre électrode en or est placée à proximité du résonateur. Une tension électrique continue est appliquée à l'électrode et une faible tension alternative est appliquée au résonateur de sorte que $V_{AC} \ll V_{DC}$. Les fréquences de résonance sont déterminées par un balayage manuel de la fréquence d'excitation et une visualisation de la vibration par imagerie MEB. Une augmentation de la fréquence de résonance du mode de vibration fondamental est observée à mesure qu'on augmente en valeur absolue la tension électrique continue entre le résonateur et la contre électrode (Fig. 2.16).

Une première description avec une formulation empirique de l'accordage en fréquence est proposée.

Pour une poutre dans la limite des fortes tensions mécaniques, la raideur est proportionnelle à la tension mécanique. Cela justifie l'introduction d'une raideur due à la tension mécanique. Comme la tension mécanique est d'origine électrostatique, on peut considérer que la tension mécanique introduit un terme de raideur supplémentaire proportionnel à la tension électrique au carré. La raideur s'écrit dont comme la somme de la raideur élastique en l'absence de tension électrique k_0 et de la raideur dûe à la tension mécanique.

$$k_t = k_0 + m\alpha V^2$$

où m est une masse et α est le coefficient de tirage électrostatique.

La fréquence de résonance en fonction de la tension électrique s'écrit comme

$$f = \sqrt{{f_0}^2 + \alpha^2 (V - V_0)^2} \tag{2.48}$$

où f_0 correspond à la fréquence fondamentale du résonateur. Un terme supplémentaire V_0 est introduit pour rendre compte d'un éventuel décalage en tension électrique entre la différence de potentiel appliquée et la différence de potentiel effectivement perçue.

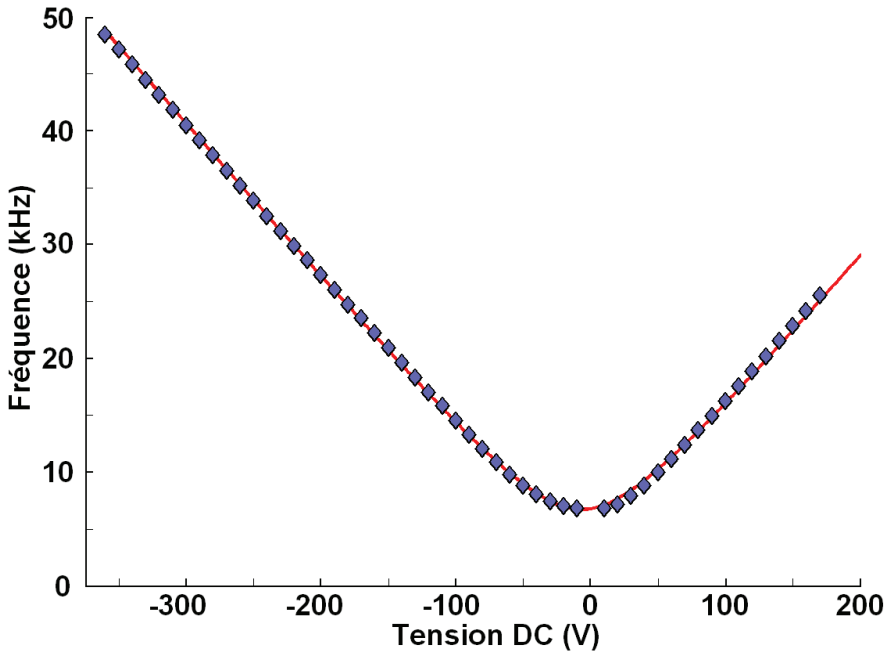


Figure 2.16 Fréquence de résonance du mode fondamental en fonction de la tension électrique appliquée à la contre électrode.

Dans la géométrie choisie pour les données de la figure 2.16, on obtient

$$\begin{aligned} f_0 &= 6,7 \text{ kHz} \\ V_0 &= -6,85 \text{ V} \\ \alpha &= 136,7 \text{ Hz.V}^{-1} \end{aligned}$$

On peut signaler que le terme de décalage en tension V_0 est particulièrement important. V_0 peut être attribué à l'influence d'un troisième potentiel comme l'electrode du SED ou encore à une troisième électrode flottante au voisinage de l'échantillon qui pourrait être chargée à cause du faisceau d'électron du MEB.

2.4.1.2 Modélisation du tirage dans la mécanique vibratoire des poutres

Cette partie a pour but de traiter rigoureusement l'introduction d'une tension mécanique de tirage électrostatique dans l'équation du mouvement d'une poutre décrivant un nanofil. Pour cela, on considère que le nanofil est parfaitement perpendiculaire à la contre électrode de sorte que la force de tirage statique soit purement longitudinale.

En présence de tension mécanique longitudinale, l'équation différentielle régissant la dynamique d'une poutre sans tirage (Éq. 2.12) s'enrichie d'un terme supplémen-

taire [5]

$$\mu\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} + E\mathcal{I}\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4} - T\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.49}$$

où T est la tension mécanique ($\mathrm{N.m^{-1}}$) introduite par la force électrostatique longitudinale. Comme pour l'expression des forces électrostatiques transversales (partie 2.2.2), la force électrostatique de tirage longitudinale peut s'écrire

$$T = F_{\parallel\text{élec}} = \frac{1}{2}C'(z){V_{DC}}^2 \tag{2.50}$$

où z est la longueur du nanofil.

En d'autres termes, l'allongement du nanofil est relié à la force de tirage. En étant capable de mesurer l'allongement longitudinal relatif du nanofil, on pourrait expérimentalement déterminer l'intensité de la force de tirage (plus précisément la contrainte de tirage) en utilisant la loi de Hooke.

La relation de dispersion devient alors pour les solutions $Y(x,t) = e^{i\omega t}e^{kx}$

$$\mu\omega^2 = E\mathcal{I}k^4 - Tk^2 \tag{2.51}$$

où ω est la pulsation qui pour l'instant un paramètre libre réel.

À partir de ω, 4 vecteurs d'onde sont solutions et s'expriment en utilisant

$$K^2 - \frac{T}{E\mathcal{I}}K - \frac{\mu}{E\mathcal{I}}\omega^2 = 0 \tag{2.52}$$

où $K = k^2$. Les 2 racines de l'équation précédente sont

$$K_+ = \frac{T}{2E\mathcal{I}} + \sqrt{\left(\frac{T}{2E\mathcal{I}}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{E\mathcal{I}}} > 0 \tag{2.53}$$

$$K_- = \frac{T}{2E\mathcal{I}} - \sqrt{\left(\frac{T}{2E\mathcal{I}}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{E\mathcal{I}}} < 0 \tag{2.54}$$

On introduit alors les 4 racines solutions de l'équation 2.51

$$k_i = \pm\sqrt{\sqrt{\left(\frac{T}{2E\mathcal{I}}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{E\mathcal{I}}} - \frac{T}{2E\mathcal{I}}} \tag{2.55}$$

$$k_r = \pm\sqrt{\frac{T}{2E\mathcal{I}} + \sqrt{\left(\frac{T}{2E\mathcal{I}}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{E\mathcal{I}}}} \tag{2.56}$$

où k_r et ik_i sont les solution réelles et imaginaires pures de 2.51. Pour les solutions libres $Y(x,t) = \psi(x)\cos\omega t$, la partie spatiale s'exprime alors

$$\psi(x) = A\cosh k_r(\omega)x + B\sinh k_r(\omega)x + C\cos k_i(\omega)x + D\sin k_i(\omega)x \tag{2.57}$$

5. Voir la partie 4.2.4 pour une justification de la forme mathématique du terme de tension mécanique

où on rappelle que les 5 degrés de liberté sont A, B, C, D et ω. Comme pour la partie sans tirage, les 4 conditions aux limites laissent un paramètre libre qui est l'amplitude du mode de vibration. Les conditions aux limites s'écrivent en tenant compte de la force de tirage à l'extrémité libre du résonateur

$$\psi(0) = 0 \tag{2.58}$$

$$\frac{d\psi}{dx}(0) = 0 \tag{2.59}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}(L) = 0 \tag{2.60}$$

$$-E\mathcal{I}\frac{d^3\psi}{dx^3}(L) = T\frac{d\psi}{dx}(L) \tag{2.61}$$

Il est important de signaler que la dernière condition (Éq. 2.61) traduit l'équilibre entre la force associée au module de flexion de la poutre (membre de gauche) avec la projection de la force de tension T sur la direction transverse du nanofil (membre de droite).

Les modes de vibration sous tension s'obtiennent par l'annulation du déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} k_r^2\, CH + k_i^2\, C & k_i k_r^2\, SH + k_r k_i^2\, S \\ \frac{E\mathcal{I}k_r^2 - T}{k_i}\, SH - \frac{E\mathcal{I}k_i^2 + T}{k_r}\, S & (E\mathcal{I}k_r^2 - T)\, CH + (E\mathcal{I}k_i^2 + T)\, C \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

avec les notations $C = \cos k_i L$, $S = \sin k_i L$, $CH = \cosh k_r L$ et $SH = \sinh k_r L$.

Les résultats numériques sont comparés au modèle empirique utilisé dans la partie 2.4.1.1 lors du traitement des mesures. Les fréquences de résonance sont tracées en fonction de la tension électrique et la tension mécanique est supposée proportionnelle au carré de la tension électrique (Éq. 2.50).

On peut remarquer que le modèle rigoureux de poutres avec tension mécanique et le modèle empirique (Éq. 2.48) sont qualitativement semblables (Fig. 2.17). Il est néanmoins surprenant de constater que le modèle empirique décrit particulièrement bien les relevés expérimentaux (Fig. 2.16).

2.4.2 Accordage capacitif vers les basses fréquences

Cette partie concerne le changement de fréquence entraîné par une force électrostatique avec une composante latérale par rapport au fil. (Seeger et Boser, 2002; Wu et Zhong, 2011).

2.4.2.1 Mesure de diminution de fréquence de résonance par force électrostatique

La résonance du premier mode de vibration est maintenant étudiée en présence d'une force électrostatique latérale en disposant le nanofil parallèlement à la contre électrode. La longueur du fil utilisée est $L = 59$ μm. Les fréquences de résonance

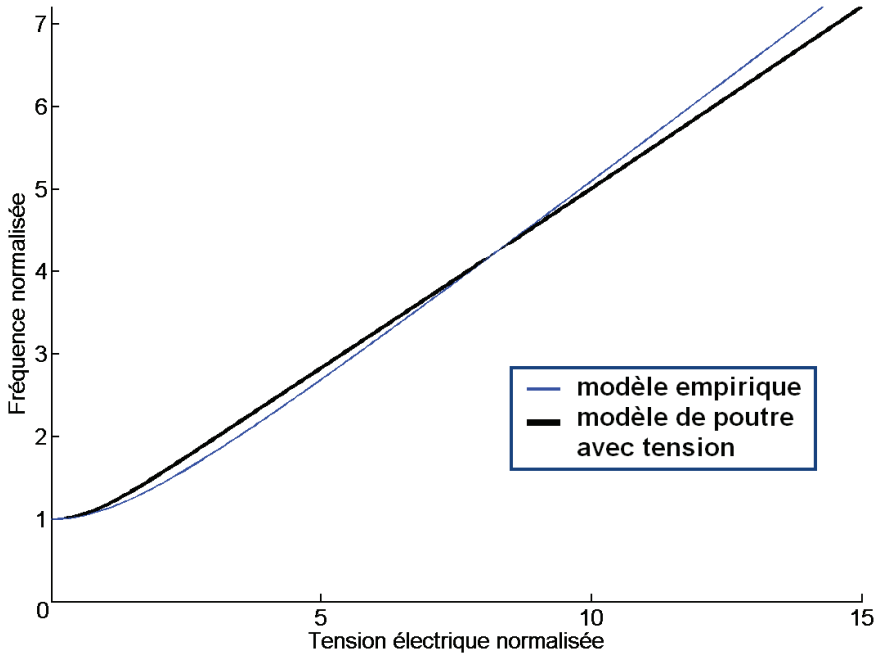


FIGURE 2.17 Fréquence de résonance normalisée du mode fondamental en fonction de la tension électrique appliquée à la contre électrode. Le modèle empirique est celui utilisé pour modéliser les données expérimentales (Éq. 2.48 et Fig. 2.16). Le modèle de poutres avec tension mécanique suppose une relation où la tension mécanique est proportionnelle au carré de la tension électrique.

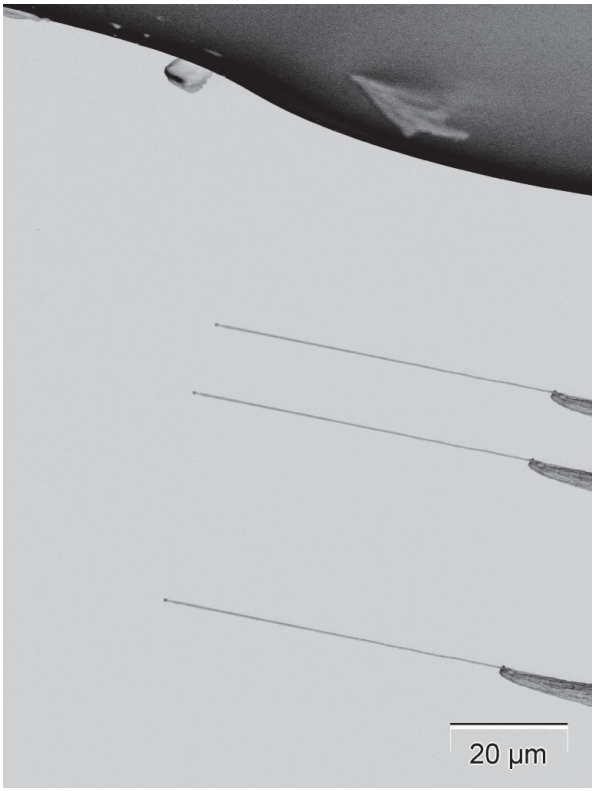


Figure 2.18 Image MEB en configuration parallèle à la contre électrode où l'image du nanofil de SiC est superposée pour 3 positions.

en fonction de la tension DC sont mesurées pour 3 positions présentées avec la figure 2.18.

Les distances sont exprimées par rapport à l'extrémité du nanofil sans déflection ($V_{DC} = 0$ V). Pour la position la plus éloignée (83 μm), la fréquence de résonance augmente avec la tension électrique. Lorsque le fil est rapproché (45 μm) en dessous d'une distance comparable à sa longueur, il voit sa fréquence de résonance diminuer avec l'application de la force électrostatique DC. En rapprochant davantage le résonateur, la fréquence de résonance diminue encore plus fortement et s'effondre vers 225 V (Fig. 2.19).

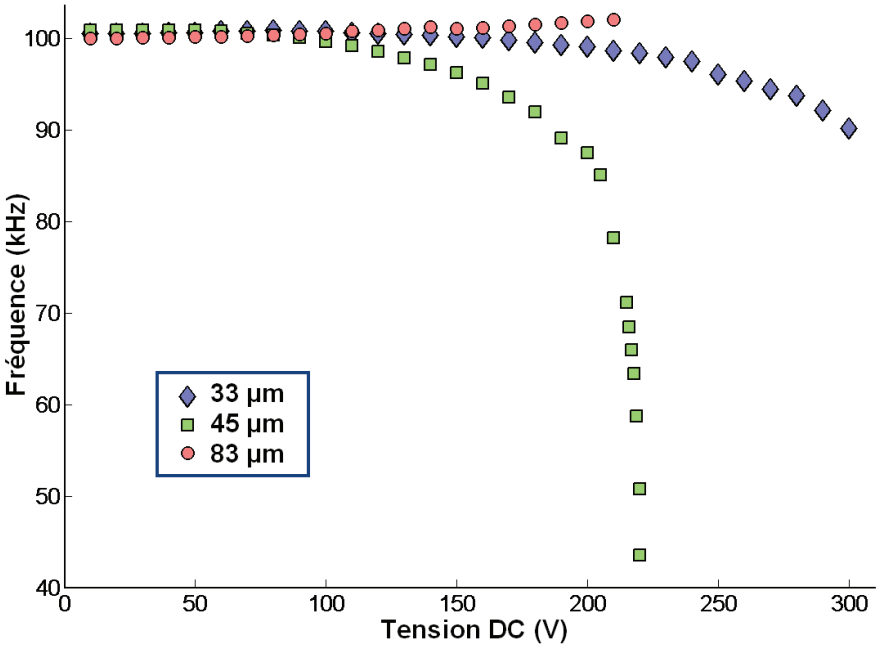


FIGURE 2.19 Fréquence de résonance du nanofil pour les 3 positions de la figure 2.19 en fonction de la tension DC appliquée au résonateur. Les résonances sont excitées par une faible tension alternative sur la contre électrode.

Pour les positions du résonateur suffisamment proches de la contre électrode, l'effondrement de la fréquence de résonance est accompagné d'une instabilité de la position d'équilibre du nanofil qui peut être amené à venir se coller sur la contre électrode (Fig. 2.20). Il s'agit de l'instabilité de "pull-in" électrostatique.

2.4.2.2 Modélisation : développement non linéaire de la capacité

Développement à partir du modèle mécanique continu Une tension mécanique par tirage dans l'axe du fil au repos ne peut entraîner qu'une augmentation de fréquence. Pour obtenir une diminution de la fréquence de résonance, il faut considérer une force électrostatique latérale dont l'intensité varie avec la position du mode du résonateur. Dans un premier temps, l'équation du mouvement du résonateur est

considérée sans force de tirage longitudinale

$$\mu\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} + E\mathcal{I}\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4} = \frac{1}{2}\frac{\delta C(Y(x,t))}{\delta Y}{V_{DC}}^2 \tag{2.63}$$

où la capacité $C(Y(x,t))$ que forme le nanofil avec la contre électrode est introduite pour un profil $Y(x,t)$. La force capacitive qui en découle s'exprime comme une dérivée fonctionnelle de $C(Y(x,t))$. L'équation peut être projetée sur le premier mode ce qui permet d'exprimer la dérivée fonctionnelle comme une dérivée scalaire pour donner

$$m\ddot{y} + ky = \frac{1}{2}C'(y){V_{DC}}^2 \tag{2.64}$$

où y est l'amplitude du mode à l'extrémité libre et $C(y)$ l'expression de la capacité en fonction de y. Le terme de flexion se traduit par une force de rappel de raideur k et une masse effective m.

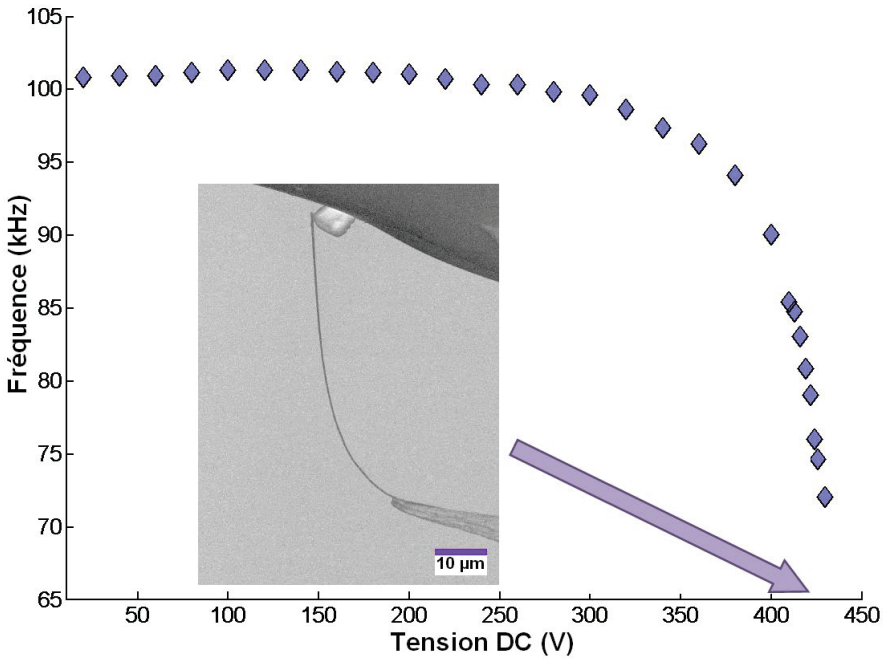


Figure 2.20 Fréquence de résonance du nanofil en fonction de la tension DC pour une distance de 46 μm. L'effondrement de la fréquence s'accompagne d'une instabilité de pull-in et le résonateur va au contact de la contre électrode.

Résolution analytique dans un cas simple On considère un système de type masse ressort où la masse ponctuelle est en interaction électrostatique avec une charge localisée (Fig. 2.21). Afin de décrire correctement l'interaction du nanofil avec la contre électrode, l'expression de la capacité formée par un fil parallèle à un plan sera utilisée pour exprimer la force entre les deux charges ponctuelles.

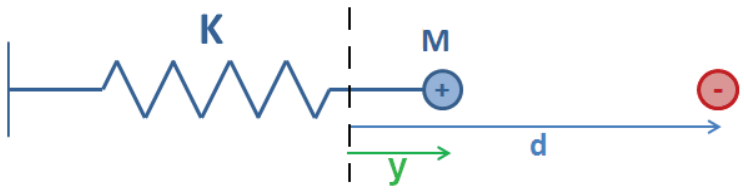


FIGURE 2.21 Schéma du résonateur masse-ressort en interaction avec une charge localisée.

L'équation du mouvement est analogue à celle décrite par l'équation 2.64

$$M\ddot{y} + Ky = \frac{1}{2}C(y)'{V_{DC}}^2 \tag{2.65}$$

La formule pour la capacité d'un fil de longueur L, de rayon a et à la distance $d - y$ d'un plan est donnée par

$$C(y) = \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln\frac{4(d-y)}{a}} \tag{2.66}$$

Les équations normalisées utilisées pour la résolution numérique sont

$$\begin{aligned} \ddot{y} + y &= \frac{1}{2}C(y)'{V_{DC}}^2 \\ C(y) &= \frac{1}{\ln 4(1-y)} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle de la masse est donnée par

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}C'{V_{DC}}^2 \tag{2.67}$$

La carte de la figure 2.22 présente l'énergie potentielle en fonction de la position y du résonateur et la tension électrique V_{DC}. En l'absence de tension électrique, le minimum de l'énergie potentielle est pour $y = 0$. Lorsque la tension est augmentée, le minimum d'énergie potentielle se déplace vers la contre charge jusqu'à la position limite $y_c = 0,254$ pour la tension normalisée $V_c = 0,673$. Au delà de cette valeur $V > 0,673$, il n'y a plus de minimum local et la masse est attirée jusqu'au contact avec la contre charge localisée (instabilité de pull-in).

À partir des positions d'équilibre données par les minima locaux de l'énergie potentielle en fonction de la position, la raideur effective est calculée comme la dérivée seconde de l'énergie autour du point d'équilibre et la fréquence prise comme la racine carrée de la raideur pour une masse normalisée est tracée sur la figure 2.23. La fonction normalisée de pull-in obtenue est notée $\mathcal{F}_{PI}$.

Les résultats expérimentaux peuvent être modélisés en utilisant la fonction normalisée $\mathcal{F}_{PI}$ donnée en figure 2.23

$$\frac{f}{f_0} = \mathcal{F}_{PI}\left(\frac{V}{V_c}\right) \tag{2.68}$$

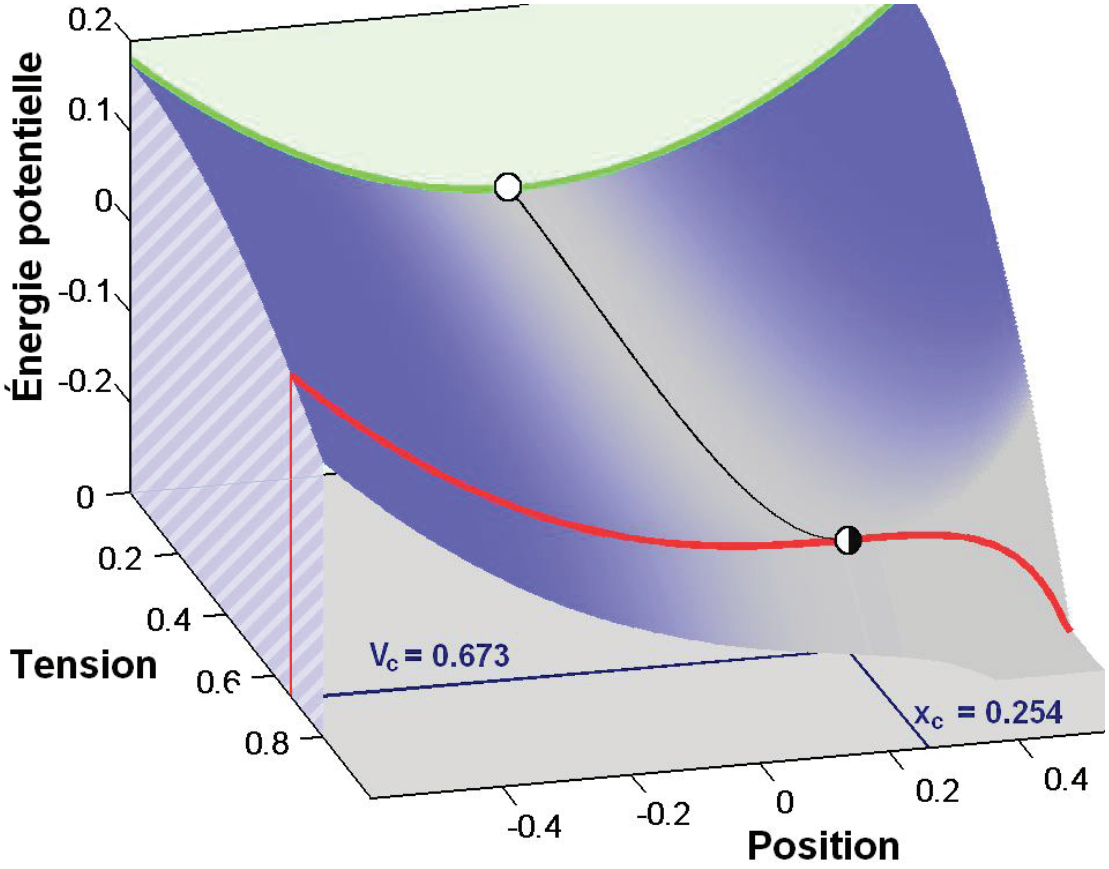


Figure 2.22 Énergie potentielle totale de la masse en fonction de la position et de la tension en unités normalisées. La courbe parabolique correspond à l'énergie potentielle du ressort ($V = 0$) et l'autre courbe insérée est l'énergie potentielle pour la tension critique $V_c = 0,673$ pour laquelle le minimum local d'équilibre disparaît. Le minimum local d'énergie potentielle est repéré par une ligne noire pour $V < V_c$. La contre électrode est à l'abscisse $y = 1$.

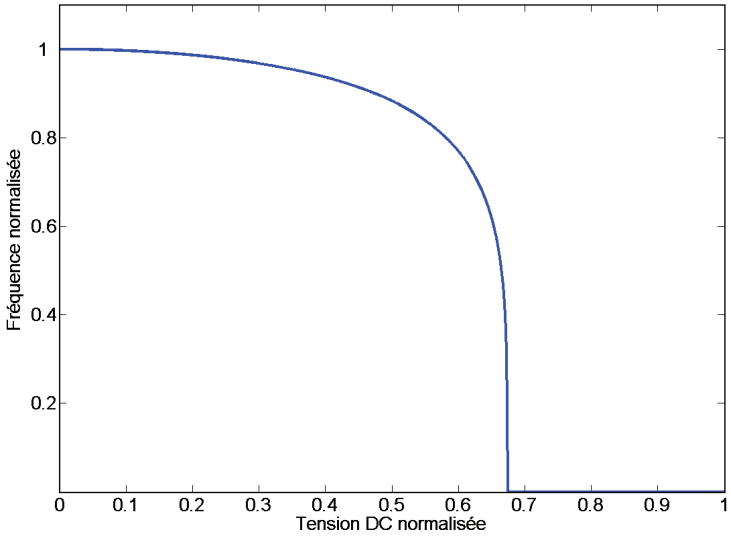


FIGURE 2.23 Fréquence de résonance en fonction de la tension DC en unités normalisées. L'effondrement de la fréquence correspond au point d'instabilité statique pour $V = 0,673$.

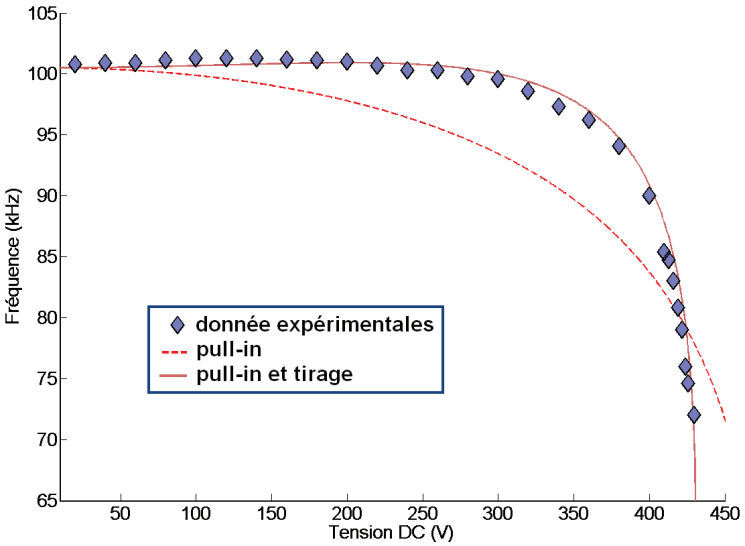


FIGURE 2.24 Modélisation de la fréquence de résonance en fonction de la tension DC pour un modèle prenant en compte le pull-in (représenté par la fonction $\mathcal{F}_{PI}$) et la forme empirique du tirage (Éq. 2.48) simultanément.

Le modèle prenant en compte le pull-in électrostatique et le tirage mécanique donne un meilleur accord avec les données expérimentales. Les paramètres de modélisation sont

$$\begin{aligned} V_c &= 431 \text{ V} \\ f_0 &= 100,5 \text{ kHz} \\ \alpha &= 89,4 \text{ Hz.V}^{-1} \end{aligned}$$

Il est intéressant de constater que la valeur du coefficient de tirage α est comparable à celle obtenue pour la contre électrode face au résonateur dans la partie 2.4.1.1 consacrée au tirage pur. Cette propriété est à rapprocher au fait que la géométrie des lignes de champ électriques autour du résonateur est fortement dominée par le rapport d'aspect longueur sur rayon du nanofil et peu par la position de la contre électrode.

2.4.3 Vue d'ensemble des deux mécanismes d'accordage en fréquence

Les deux mécanismes d'accordage en fréquence ont été traités comme provenant de

— une force de tirage longitudinale constante
— une force transversale d'amplitude dépendant du déplacement transversal pur

Un schéma du principe des deux mécanismes est proposé sur la figure 2.25.

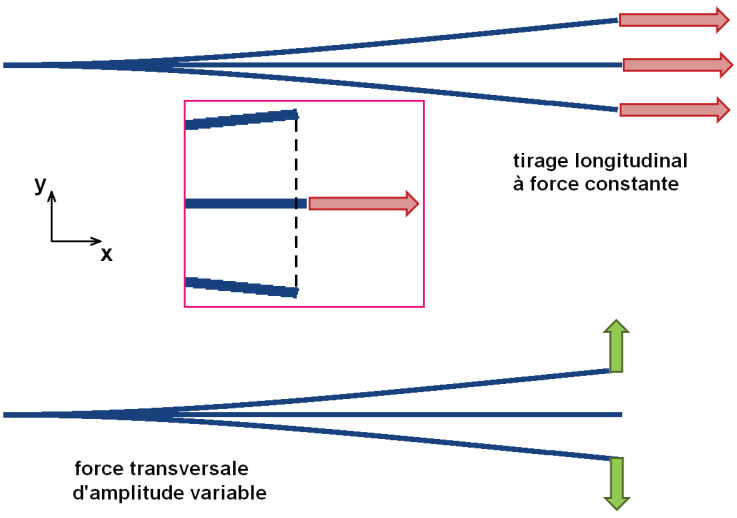


Figure 2.25 Schéma des deux mécanismes d'accordage en fréquence.

L'accordage en fréquence par la force de tirage longitudinale est un effet géométrique de projection de la force longitudinale et ne dépend donc pas de la direction de vibration considérée (voir partie 2.4.4 sur la polarisation des vibrations). Il peut

être vu comme le déplacement quadratique du nanofil selon x dans un champ de force uniforme selon cette même direction.

En revanche, l'accordage en fréquence par une force transversale est fortement lié à l'asymétrie de l'environnement électrostatique du résonateur ou de l'asymétrie du résonateur lui même. Il peut s'interpréter comme le déplacement transversal linéaire du nanofil selon la direction de polarisation. Selon cette direction, le champ de force est linéaire et entraîne donc une raideur supplémentaire, négative dans le cas d'une force qui augmente pour le rapprochement de l'extrémité libre de la contre électrode.

2.4.4 Polarisation

Lors de l'établissement du mode de vibration fondamental d'un résonateur simplement encastré (partie 2.3.2), le mouvement résonant du nanofil a été considéré selon une direction transversale arbitraire. En réalité, le résonateur dispose d'un espace à deux dimensions pour la vibration transversale. Dans un cas idéal où le fil obéi à une symétrie de révolution, on peut considérer que toutes les directions de vibration dans le plan perpendiculaire à l'axe du fil sont équivalentes. En présence d'un environnement électrostatique introduisant une asymétrie dans le mouvement du nanofil, deux fréquences de vibration transversale sont systématiquement observées. Leur existence peut être attribuée au terme d'accordage en fréquence par une force latérale. Afin d'illustrer cet effet, le nanofil résonateur est placé sur un des blocs nanomanipulateurs avec cette fois-ci un autre nanofil comme contre électrode (Fig. 2.26).



FIGURE 2.26 Le nanofil utilisé comme résonateur est celui placé à droite. Le nanofil de gauche est statique pendant la vibration du résonateur et sert de contre électrode.

La résonance fondamentale du résonateur est de 7,2 kHz et le nanofil servant de contre électrode à son premier mode à la fréquence de 95 kHz approximativement. On peut donc considérer que le nanofil en tant que contre électrode est statique pendant la vibration du résonateur.

L'excitation du résonateur se fait par vibration piézoélectrique du support du résonateur. En l'absence de tension DC, deux modes de vibration sont mesurables traduisant une asymétrie intrinsèque du résonateur. Avec l'augmentation de la tension DC en valeur absolue, les deux modes de vibrations, qu'il convient de nommer

"polarisations", se séparent clairement (Fig. 2.27). Comme le plan défini par les deux fils est proche du plan d'observation, le mouvement de vibration sera décomposé comme un déplacement parallèle au plan d'observation $y_{\parallel}$ et un déplacement perpendiculaire $y_{\perp}$. Il apparaît que la polarisation perpendiculaire voit sa fréquence augmenter avec la valeur absolue de la tension DC alors que la polarisation parallèle diminue avec la tension DC.

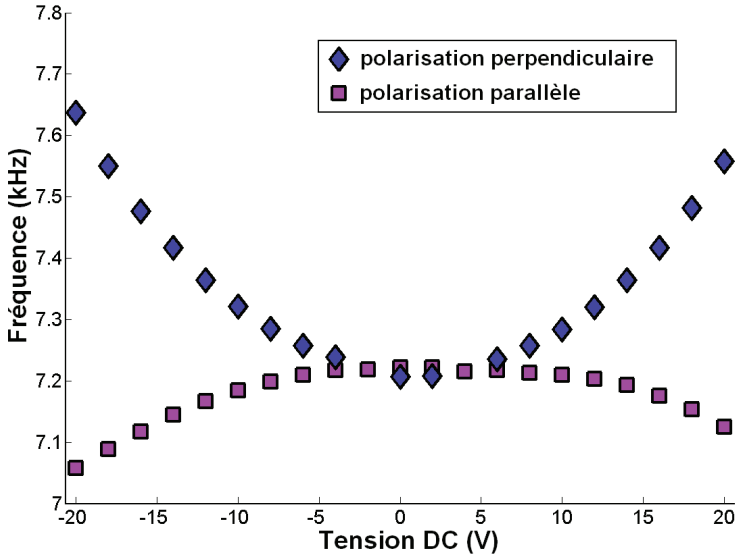


Figure 2.27 Fréquence de résonance en fonction de la tension DC pour les deux polarisations de vibration du résonateur.

La décomposition de la vibration en deux directions orthogonales est pertinente dans le cas d'un environnement électrostatique asymétrique dans la mesure où la polarisation parallèle module la distance de l'extrémité libre à la contre électrode alors que le mouvement perpendiculaire se fait à distance constante. Cela se traduit dans l'expression de la fréquence en fonction de l'environnement électrostatique

$$f_{\perp} = \sqrt{{f_{0\perp}}^2 - \frac{{V_{dc}}^2}{4\pi m}\frac{\partial^2 C}{\partial {y_{\perp}}^2}} \tag{2.69}$$

$$f_{\parallel} = \sqrt{{f_{0\parallel}}^2 - \frac{{V_{dc}}^2}{4\pi m}\frac{\partial^2 C}{\partial {y_{\parallel}}^2}} \tag{2.70}$$

où $f_{0\perp}$ et $f_{0\parallel}$ sont les fréquences des polarisations perpendiculaires et parallèles sans tirage, m la masse effective du mode fondamental, $\partial^2 C/\partial {y_{\perp}}^2$ et $\partial^2 C/\partial {y_{\parallel}}^2$ les dérivées secondes de la capacité pour des déplacements perpendiculaires et parallèles du résonateur. Pour la polarisation perpendiculaire (Éq. 2.70), le terme capacitif est à rapprocher au tirage longitudinal de la partie 2.4.1 qui entraîne une augmentation de fréquence avec la tension DC.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, il a été montré comment des nanofils de carbure de silicium pouvaient être utilisés en configuration simplement encastrée pour réaliser des résonateurs à hauts facteurs de qualité. Une technique de détection originale a été utilisée pour une mesure résolue en phase de la résonance pour laquelle une modélisation par un oscillateur harmonique amorti est pertinente. La mécanique des milieux continus est mise à profit pour la description des modes de vibration.

Les mécanismes d'accordage en fréquence ont été présentés expérimentalement et traités théoriquement en dégageant deux comportements limites d'accordage vers les hautes et les basses fréquences. La notion de polarisation dans un régime linéaire a également été abordée en lien avec l'asymétrie de l'environnement électromécanique des résonateurs.

Bibliographie

Belov, M., N. J. Quitoriano, S. Sharma, W. K. Hiebert, T. I. Kamins et S. Evoy, 2008 : Mechanical resonance of clamped silicon nanowires measured by optical interferometry. *J. Appl. Phys.* **103**, 074304.

Buks, E. et M. L. Roukes, 2001 : Stiction, adhesion energy, and the Casimir effect in micromechanical systems. *Phys. Rev. B* **63**, 033402.

Favero, I., C. Metzger, S. Camerer, D. König, H. Lorenz, J. P. Kotthaus et K. Karrai, 2007 : Optical cooling of a micromirror of wavelength size. *Appl. Phys. Lett.* **90**, 104101.

Hessman, D., M. Lexholm, K. A. Dick, S. Ghatnekar-Nilsson et L. Samuelson, 2007 : High-speed nanometer-scale imaging for studies of nanowire mechanics. *Small* **3**, 1699.

Landau, L. et E. Lifshitz, 1986 : *Theory of Elasticity*.

Perisanu, S., V. Gouttenoire, P. Vincent, A. Ayari, M. Choueib, M. Bechelany, D. Cornu et S. T. Purcell, 2008 : Mechanical properties of SiC nanowires determined by scanning electron and field emission microscopies. *Phys. Rev. B* **77**, 165434.

Perisanu, S., P. Vincent, A. Ayari, M. Choueib, S. T. Purcell, M. Bechelany et D. Cornu, 2007 : High Q factor for mechanical resonances of batch-fabricated SiC nanowires. *Appl. Phys. Lett.* **90**, 043113.

Poncharal, P., Z. L. Wang, D. Ugarte et W. A. de Heer, 1999 : Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes. *Science* **283**, 1513.

Purcell, S. T., P. Vincent, C. Journet et V. T. Binh, 2002 : Tuning of nanotube mechanical resonances by electric field pulling. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 276103.

Sanii, B. et P. D. Ashby, 2010 : High sensitivity deflection detection of nanowires. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 147203.

Seeger, J. I. et B. E. Boser, 2002 : Parallel-plate driven oscillations and resonant pull-in.

Wu, C. C. et Z. Zhong, 2011 : Capacitive spring softening in single-walled carbon nanotube nanoelectromechanical resonators. *Nano Lett.* **11**, 1448.

Chapitre 3

Nanoélectromécanique linéaire : couplage de deux résonateurs simplement encastrés

Le couplage linéaire de deux résonateurs par des forces non dissipatives va être présenté pour deux types de forces : les forces capacitives électrostatiques et les forces d'adhésion par contact.

3.1 Couplage électrostatique de deux résonateurs simplement encastré

L'origine du développement des travaux sur le couplage électrostatique provient de l'observation dans l'équipe de vibrations collectives de deux ou plusieurs nanotubes de carbone dans le cadre d'une collection de nanotubes sur une pointe support. Il avait été observé notamment que les fréquences de résonance n'avaient pas leurs valeurs attendues lorsque deux résonateurs vibraient simultanément.

3.1.1 Mesures de couplage de deux nanofils

3.1.1.1 Géométries

Les mesures de couplage entre nanorésonateurs ont été observées pour deux types d'échantillons [1] (Fig. 3.1) :

— collection de nanotubes de carbone sur une pointe observés par microscopie électronique à transmission (TEM) en face d'une contre électrode
— deux nanofils de SiC montés individuellement sur deux pointes distinctes rapprochées sous microscope électronique à balayage (MEB)

1. Perisanu, S., T. Barois, P. Poncharal, T. Gaillard, A. Ayari, S. T. Purcell et P. Vincent (2011) : The mechanical resonances of electrostatically coupled nanocantilevers.
Appl. Phys. Lett. **98**, 063110.

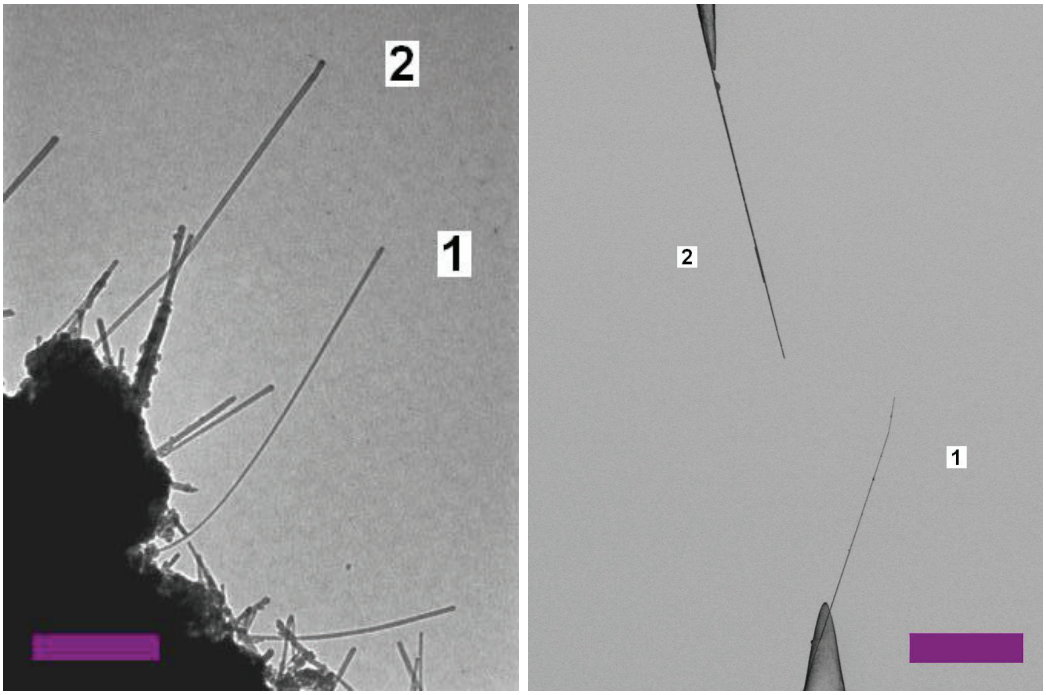


Figure 3.1 À gauche : image TEM à transmission de nanotubes de carbone sur une pointe. Barre d'échelle 500 nm. À droite : image MEB de deux fils SiC sur deux pointes. Barre d'échelle 20 μm.

3.1.1.2 Courbes fréquence en fonction de la tension électrique

Les résonances fondamentales des deux résonateurs sont relevées par observation par microscopie électronique (TEM ou MEB). Les deux résonateurs se trouvant approximativement dans le plan d'observation, la polarisation parallèle au plan d'observation est souvent la seule observée et sera la seule relevée par la suite. Les paires de résonateurs considérées correspondent à des résonateurs avec des fréquences fondamentales sans tension DC proche ($f_1 \lesssim f_2$). Les effets de couplage seront observables lorsque l'accordage en fréquence électrostatique est tel que la fréquence de résonance la plus basse augmente plus fortement avec la tension DC que la fréquence de résonance la plus haute.

Nanotubes de carbone sur une pointe Les fréquences fondamentales des deux nanotubes sans tension appliquée sont $f_1 = 2.7$ MHz pour le nanotube du bas (1) et $f_2 = 11.4$ MHz pour le nanotube du haut (2). Avec l'application de la tension DC, les fréquences des deux nanotubes augmentent. La fréquence du nanotube 1 augmente plus fortement que celle du nanotube 2. Cependant les fréquences de résonance ne se chevauchent pas et forment une structure d'anti-croisement autour de $V = 1400$ V et $f = 40$ MHz. Pendant l'anti-croisement, chacune des résonances met en jeu la vibration des deux résonateurs avec cependant une prédominance de la vibration du nanotube le plus long. Au delà de la zone d'anti-croisement, les deux résonateurs vibrent à nouveau séparément pour des fréquences bien distinctes 3.2.

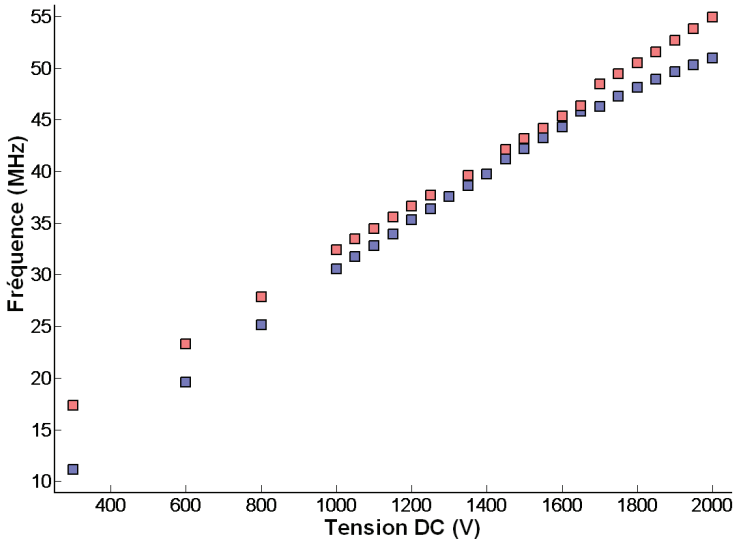


FIGURE 3.2 Fréquence de résonance en fonction de la tension DC.

Les résultats de couplage pour deux résonateurs sur le même support ne permettent pas d'affirmer si le couplage est dominé par un couplage mécanique par le support ou par un couplage électrostatique.

Nanofils SiC sur deux pointes Les mesures de couplage avec deux pointes distinctes permettent d'écarter le possible couplage mécanique par le support et surtout de modifier le positionnement relatif des deux résonateurs. Les mesures ont été fait sur un microscope électronique avec un nanomanipulateur comparable à celui utilisé dans le testeur sous pointes UHV (partie 1). Les fréquences fondamentales des nanofils utilisés sont $f_1 = 171$ kHz pour le nanofil du bas (1) et $f_2 = 231$ kHz pour le nanofil du haut (2). Les mesures présentées sur la figure 3.3 montrent un anti-croisement analogue à celui observé pour les nanotubes de carbone sur support unique. Il est clairement observé une vibration collective des deux résonateurs au voisinage de l'anti-croisement (Fig. 3.4).

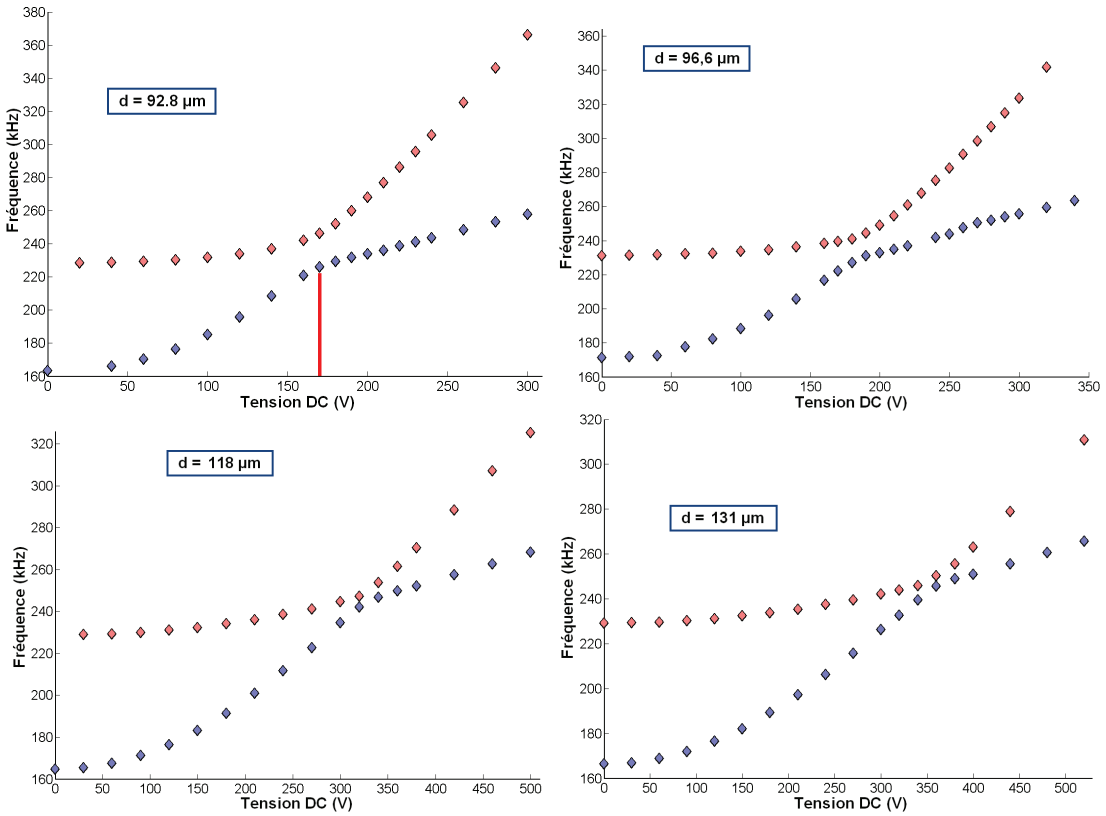


FIGURE 3.3 Fréquence de résonance en fonction de la tension DC pour deux résonateurs sur deux pointes distinctes. La marque à 170 V sur l'image en haut à gauche correspond à l'image de la figure 3.4.

La tension nécessaire pour observer l'anti-croisement augmente avec la distance entre les nanofils. À l'anti-croisement, la différence de fréquence est de plus en plus faible à mesure que les deux nanofils sont éloignés. Comme les nanofils se défléchissent avec la tension DC, les résultats sont présentés en fonction de la distance des points d'encastrement des résonateurs (Fig. 3.5).

3.1.2 Modélisation

Les modes fondamentaux des deux résonateurs sont considérés avec la dépendance empirique pour l'accordage en fréquence de la partie 2.4.1.1. Pour l'établissement des modes de vibration, on considère une situation sans dissipation.

$$\ddot{x_1} + ({\omega_1}^2 + 4\pi^2{\alpha_1}^2V^2)x_1 = \frac{F_V(x_1 - x_2)}{m} \tag{3.1}$$

$$\ddot{x_2} + ({\omega_2}^2 + 4\pi^2{\alpha_2}^2V^2)x_2 = -\frac{F_V(x_1 - x_2)}{m} \tag{3.2}$$

où ω_1 et ω_2 sont les pulsations propres des nanofils 1 et 2 sans tension DC, α_1 et α_2 leurs coefficients de tirage électrostatique pour chaque résonateur et $F(x_1 - x_2)$ la

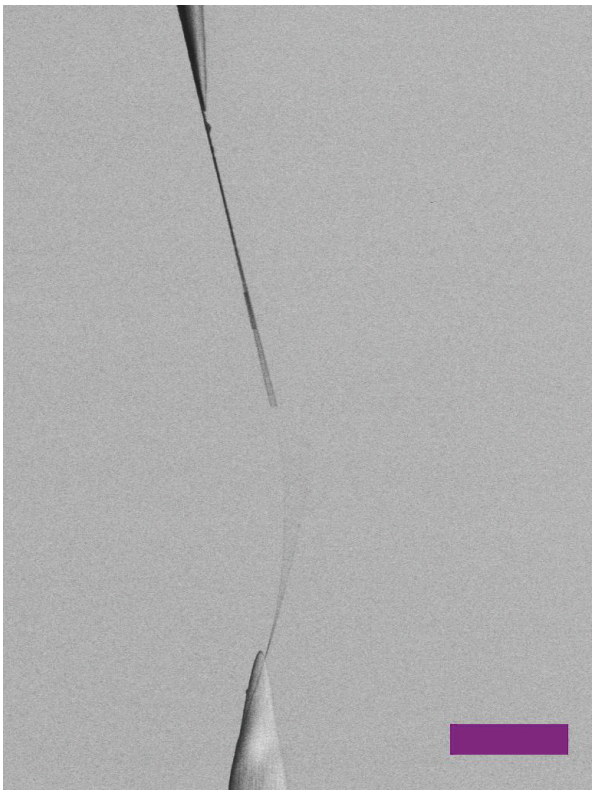


Figure 3.4 Image MEB du mode couplé à 170 V à la fréquence de 196,3 kHz. La barre d'échelle représente 20 μm.

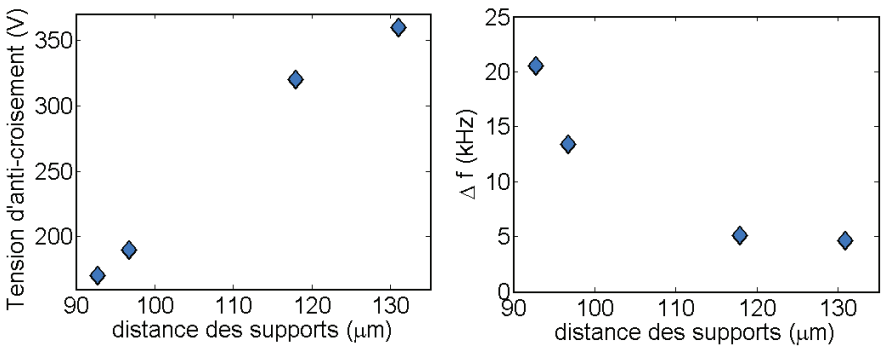


Figure 3.5 À gauche : tension d'anti-croisement en fonction de la distance entre les points d'encastrement des supports. À droite : Différence de fréquence à l'anti-croisement en fonction de la distance.

force de couplage d'origine électrostatique entre les deux fils. Cette force de couplage dérive de l'expression de la force capacitive agissant entre les deux nanofils. Si $u = x_1 - x_2$ et pour C la capacité entre les deux nanofils

$$F_V = \frac{1}{2} C_u V^2 + \frac{1}{2} C_{uu} V^2 u \tag{3.3}$$

où $C_u = \partial C / \partial u$ (resp. $C_{uu} = \partial^2 C / \partial u^2$) est la dérivée première (resp. seconde) de la capacité formée par les deux nanofils en fonction de u.

La linéarisation des équations du mouvement des résonateurs couplés prend la forme

$$\ddot{x_1} + ({\omega_1}^2 + 4\pi^2 {\alpha_1}^2 V^2) x_1 = \frac{C_{uu}}{2m} V^2 (x_1 - x_2) \tag{3.4}$$

$$\ddot{x_2} + ({\omega_2}^2 + 4\pi^2 {\alpha_2}^2 V^2) x_2 = \frac{C_{uu}}{2m} V^2 (x_2 - x_1) \tag{3.5}$$

Ce système d'équations couplées s'écrit matriciellement

$$\ddot{X} + \begin{pmatrix} {\omega_1}^2 + 4\pi^2 {\alpha_1}^2 V^2 - \frac{C_{uu}}{2m} V^2 & \frac{C_{uu}}{2m} V^2 \\ \frac{C_{uu}}{2m} V^2 & {\omega_2}^2 + 4\pi^2 {\alpha_2}^2 V^2 - \frac{C_{uu}}{2m} V^2 \end{pmatrix} X = 0 \tag{3.6}$$

où les composante de X sont x_1 et x_2. L'équation 3.6 s'écrit en notant la matrice de couplage avec les coefficients E_1, E_2, K

$$\ddot{X} + \begin{pmatrix} E_1 & K \\ K & E_2 \end{pmatrix} X = 0 \tag{3.7}$$

Étant symétrique réelle elle est diagonalisable avec les valeurs propres

$$\lambda = \frac{E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4K^2}}{2} \tag{3.8}$$

La différence entre les deux valeurs propres est

$$\lambda = \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4K^2} \tag{3.9}$$

et atteint un minimum lorsque $E_1 = E_2$ donné par $\lambda_{min} = 2K$.

Les paramètres d'accordage en fréquence et de couplage sont ajustés pour modéliser le couplage des résonances pour la distance de 96,6 μm (Fig. 3.6).

Les modes de vibrations sont obtenus pour chaque valeur de tension DC par les vecteurs propres associés aux valeurs propres (Éq. 3.8). Ils sont représentés sur la figure 3.7 pour 3 valeurs de tensions DC : une avant la zone d'anti-croisement (50 V), une à la zone d'anti-croisement (196 V) et une après la zone d'anti-croisement. Avant l'anti-croisement, l'écart en fréquence entre les deux résonateurs est important et les modes couplés sont dominés par le déplacement de l'un ou l'autre des résonateurs. Dans la zone d'anti-croisement les modes couplés correspondent à des déplacements collectifs où la distance des extrémités libres varie peu pour l'un et fortement pour

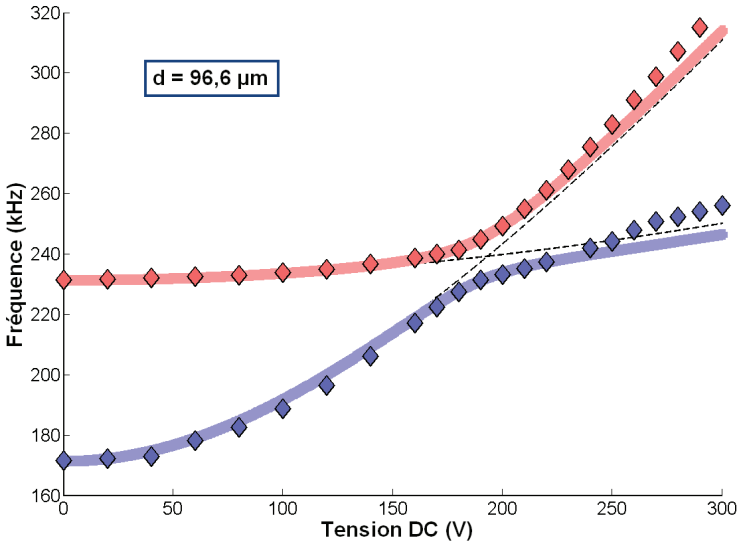


Figure 3.6 Fréquence de résonance en fonction de la tension DC et modélisation par le système d'oscillateurs couplés. Les paramètres de la modélisation sont $f_1 = 171$ kHz, $f_2 = 231$ kHz, $\alpha_1 = 810$ Hz.V^{-1}, $\alpha_2 = 100$ Hz.V^{-1} et $C_{uu}/m = -7,2$ rad^2.s^{-2}.V^{-2}.

l'autre. Comme l'accordage en fréquence est dominé par le tirage ($C_{uu} < 0$), le mode symétrique est à plus haute fréquence.

La modélisation du couplage des deux résonateurs prévoit l'existence d'un mode symétrique et d'un mode antisymétrique lors de l'anticroisement. Si l'anticroisement est observé expérimentalement, il n'a pas été possible de caractériser la nature symétrique ou anti-symétrique des modes de résonance.

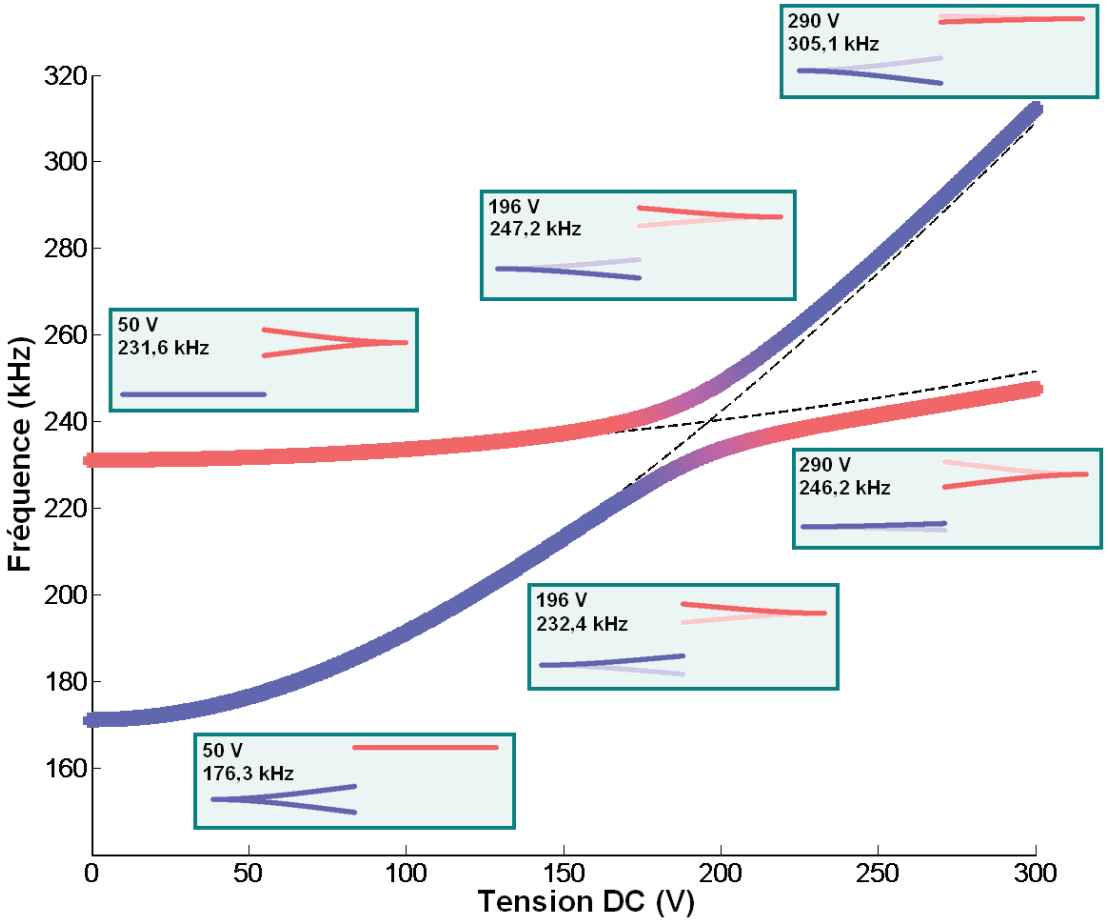


FIGURE 3.7 Mode de vibration pour le modèle de couplage des deux résonances fondamentales.

3.2 Couplage par contact de deux résonateurs

Cette partie décrit un autre mécanisme de couplage qui a été étudié suite à l'observation accidentelle d'une auto-oscillation pour deux nanofils contactés l'un avec l'autre.

Nous nous intéresserons à une situation particulière liée à l'observation d'oscillations spontanées [2] où les nanofils sont collés de telle manière à ce que seulement un des deux résonateurs collés puisse vibrer seul car ayant un nœud de vibration précisément au point de contact des deux nanofils (voir Fig. 3.9).

2. voir le chapitre 9 pour la description du régime d'auto-oscillation dans cette géométrie

3.2.1 Obtention d'un couplage fort par contact

Deux nanofils SiC simplement encastrés sont placés chacun sur un des blocs nanomanipulateurs du testeur sous pointes UHV. Le nanofil de gauche (noté 1) est le plus long ($L_1 = 220$ μm, $d = 230$ nm, $f_1 = 7,2$ kHz) et celui de droite (noté 2) est plus court ($L_2 = 56$ μm, $d = 350$ nm, $f_2 = 96$ kHz). Les deux nanofils sont parallèles au plan d'observation (xy) et leur distance verticale (z) est minimisée en utilisant la mise au point simultanée des deux résonateurs (Fig. 3.8).



Figure 3.8 Deux nanofils de SiC sur deux pointes disposées chacunes sur un des blocs nanomanipulateurs (Z pour celui de gauche, XY pour celui de droite). La mise au point est faite sur le nanofil de droite et le bloc Z est mis en mouvement pour obtenir la mise au point du nanofil de gauche. Barre d'échelle 50 μm.

Comme un léger décalage vertical peut persister, les deux nanofils sont rapprochés avec une différence de potentiel DC de l'ordre de 20 V pour favoriser leur rencontre. Une fois que les nanofils entrent en contact, ils forment une structure avec un contact non glissant et ce même en l'absence de tension DC appliquée (Fig. 3.9, en haut). La résistance électrique des nanofils en série est typiquement de l'ordre du GΩ au TΩ.

Les résonances de la structure peuvent être obtenues par excitation électrostatique. Une des pointes est portée à une tension DC et l'autre à une tension AC résonante. Les résonances sont particulièrement marquées lorsqu'un nœud du fil le plus long se trouve proche du point de contact. Pour ces résonances, deux polarisations sont observées et montrent un contact sans glissement (Fig. 3.10).

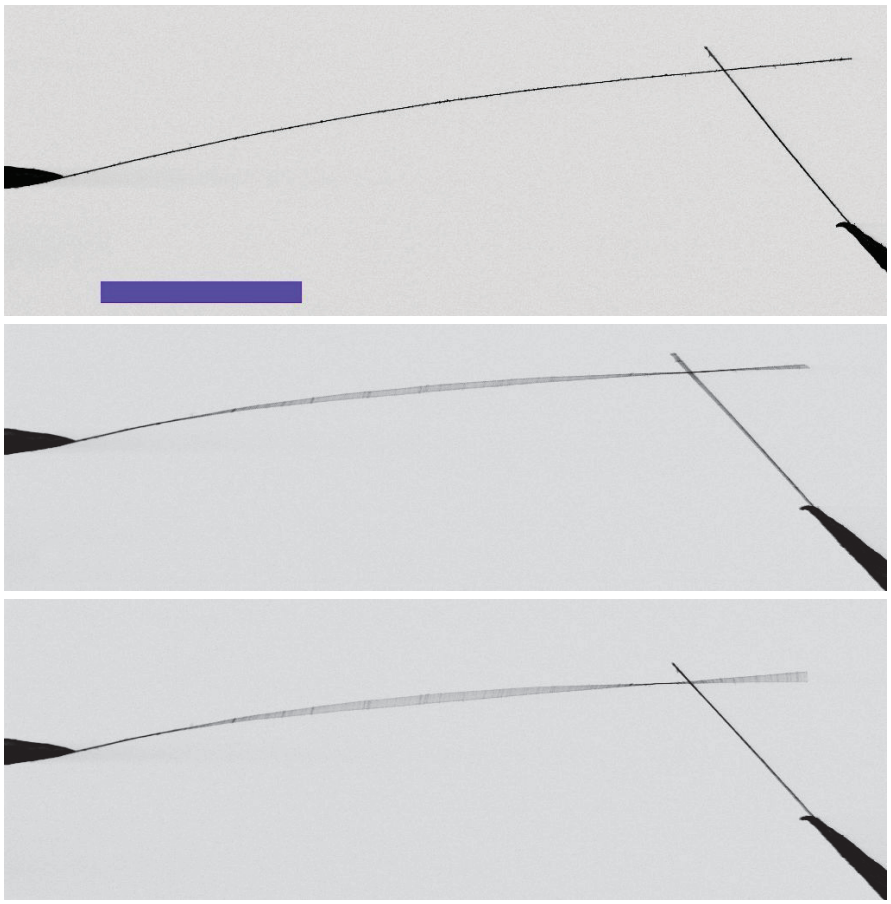


FIGURE 3.9 En haut : Deux nanofils de SiC en contact avec les pointes supports mises à la masse. Observation de résonances par excitation électrostatique ($V_{DC} = 5$ V, $V_{AC} = 10$ V) pour les fréquences de 43,11 kHz (au milieu) et 48,51 kHz (en bas). Barre d'échelle 50 μm.

3.2.2 Fréquences et modes propres

Cette partie décrit mathématiquement la vibration couplée des deux nanofils collés. La description des modes et fréquences de vibration se fait en l'absence de potentiel électrostatique et donc d'accordage en fréquence électrostatique. Il s'agit donc d'un problème de couplage purement mécanique.

3.2.2.1 Modèle simplifié du couplage

La résolution des modes de polarisation transversale au plan d'observation est proposée dans cette partie. L'hypothèse est faite que les deux fils sont contactés perpendiculairement (Fig. 3.11). Afin de simplifier l'écriture des équations du mouvement des résonateurs couplées, on modélise le résonateur court par un système à un degré de liberté masse ressort. La fréquence de résonance associée est

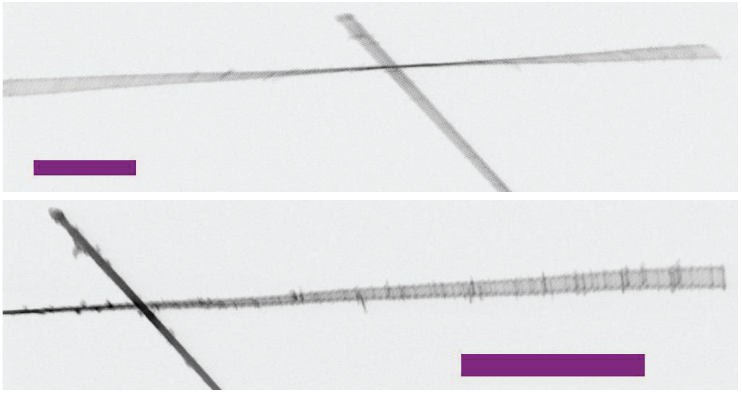


Figure 3.10 Observation des résonances par excitation électrostatique au voisinage du nœud de vibration (V_{DC} = 5 V, V_{AC} = 10 V) pour les fréquences de 43,11 kHz (en haut) et 48,51 kHz (en bas). Barre d'échelle 10 μm. Les deux fréquences de résonances observées correspondent à deux polarisations remarquablement séparées en fréquence du fait de l'asymétrie importante de la structure.

$f_2 = \sqrt{K/M}/2\pi$. Le modèle sera donc pertinent pour les fréquences considérées inférieures à la fréquence limite f_l correspondant au deuxième mode du fil court ($f_2 = 96$ kHz).

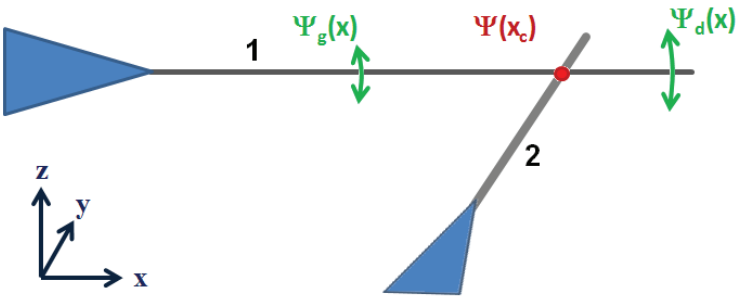


Figure 3.11 Le nanofil sur le support de gauche (1) est modélisé par une poutre où le déplacement selon Z est noté $Y_i(x,t)$ où $i = g$ ou d pour la partie gauche ou droite. Le point de contact est noté x_c, compté à partir de l'encastrement du fil de gauche. Le nanofil 2 est modélisé par un système masse ressort à un degré de liberté.

Un point important pour le système des deux nanofils contactés est la possibilité d'induire une tension mécanique transversale T dans nanofil 1 en déplaçant le support du nanofil 2 selon la direction x (cf. Fig. 3.11). Pour décrire l'équation du mouvement du nanofil 1, il est donc nécessaire de séparer l'onde mécanique en deux parties

— ψ_g à gauche du contact, c'est-à-dire entre le début du nanofil 1 et le contact *avec tension mécanique*.

— ψ_d à droite du contact, c'est-à-dire pour la portion *sans tension mécanique* du nanofil 1.

L'équation du mouvement de la poutre s'écrit en séparant la région gauche avant le contact $Y_g(x,t)$ et la région droite après $Y_d(x,t)$

$$\mu\frac{\partial^2 Y_g(x,t)}{\partial t^2} + E\mathcal{I}\frac{\partial^4 Y_g(x,t)}{\partial x^4} - T\frac{\partial^2 Y_g(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{3.10}$$

$$\mu\frac{\partial^2 Y_d(x,t)}{\partial t^2} + E\mathcal{I}\frac{\partial^4 Y_d(x,t)}{\partial x^4} = 0 \tag{3.11}$$

où μ est la masse linéique, E le module de Young, $\mathcal{I}$ le moment quadratique du fil 1. On remarque que le terme de tension mécanique T n'est que dans l'équation 3.10. En effet, lorsque le support du nanofil court 2 est déplacé dans la direction x, il n'entraîne une tension mécanique T que dans la portion de gauche du nanofil 1.

Avec des solutions de la forme $Y_i(x,t) = Y_{i0}e^{i\omega t}e^{k_i x}$, les relations de dispersion associées aux équations 3.10 et 3.11 sont

$$\mu\omega^2 = E\mathcal{I}{k_g}^4 - T{k_g}^2 \tag{3.12}$$

$$\mu\omega^2 = E\mathcal{I}{k_d}^4 \tag{3.13}$$

Les solutions de l'équation d'onde s'expriment

$$\psi_g(x) = A\cosh k_R x + Bk_I \sinh k_R x + A'\cos k_I x + B'k_R \sin k_I x \tag{3.14}$$

$$\psi_d(x) = C\cosh kx + D\sinh kx + E\cos kx + F\sin kx \tag{3.15}$$

où ψ_i est la partie spatiale des solutions de $Y_i(x,t)$ où $i = g$ ou d. k_R et k_I sont défini comme dans la partie 2.4.1 sur l'accordage en fréquence

$$k_I = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{T}{2E\mathcal{I}}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{E\mathcal{I}}} - \frac{T}{2E\mathcal{I}}} \tag{3.16}$$

$$k_R = \sqrt{\frac{T}{2E\mathcal{I}} + \sqrt{\left(\frac{T}{2E\mathcal{I}}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{E\mathcal{I}}}} \tag{3.17}$$

et pour la partie libre

$$k = \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{E\mathcal{I}}} \tag{3.18}$$

Signalons que les degrés de libertés du système couplé sont au nombre de 9 à savoir les coefficients A, A', B, B' pour le forme de l'onde à gauche, les coefficients C, D, E, F pour l'onde à droite et enfin la pulsation ω. Les conditions aux limites sont au nombre de 8 et seront explicitées par la suite

— 2 pour la condition d'encastrement du nanofil de gauche en $x = 0$,

— 4 pour le raccordement de l'onde de gauche et de l'onde de droite

— 2 pour l'absence de couple et de force à l'extrémité libre à droite en $x = L$.

Les conditions aux limites sont l'encastrement parfait en $x = 0$

$$\psi_g(0) = 0 \tag{3.19}$$
$$\psi_g{}'(0) = 0 \tag{3.20}$$
$$\tag{3.21}$$

Elles permettent d'exprimer A' et B' en fonction de A et B

$$\psi_g(x) = A(\cosh k_R x - \cos k_I x) + B(k_I \sinh k_R x - k_R \sin k_I x) \tag{3.22}$$

Au point de contact des deux fils, on suppose un contact pivot parfait qui exerce uniquement une force locale sans couple avec

$$\left|\psi_g = \psi_d\right|_{x_c} \tag{3.23}$$
$$\left|\frac{d\psi_g}{dx} = \frac{d\psi_d}{dx}\right|_{x_c} \tag{3.24}$$
$$\left|\frac{d^2\psi_g}{dx^2} = \frac{d^2\psi_d}{dx^2}\right|_{x_c} \tag{3.25}$$
$$\left| - E\mathcal{I}\frac{d^3\psi_g}{dx^3} - T\frac{d\psi_g}{dx} = -E\mathcal{I}\frac{d^3\psi_d}{dx^3} - T\frac{d\psi_d}{dx} - M\omega_n^2\psi_g + K\psi_g\right|_{x_c} \tag{3.26}$$

où toutes les fonctions ψ_i sont prises à la position du contact x_c. K et M sont la raideur et la masse effective du résonateur 2 calculées pour un déplacement à la position du contact $\psi_g(x_c) = \psi_d(x_c)$. L'équation 3.23 traduit la continuité du nanofil entre la partie gauche et la partie droite, l'équation 3.24 traduit la conservation de l'angle au contact de la partie de gauche à la partie de droite, l'équation 3.25 traduit l'équilibre du couple au point de contact et l'équation 3.26 traduit l'équilibre des forces au point de contact. Pour cette équation, on peut signaler un terme lié à la force qu'exerce la partie gauche sur le contact, un terme lié à la partie de droite et un point lié à la force de rappel et à l'inertie puisque le point de contact correspond également à la position du nanofil 2.

Il faut rajouter la condition de l'extrémité libre du résonateur à la partie droite

$$\frac{d^2\psi_d}{dx^2}(L_1) = 0 \tag{3.27}$$
$$\frac{d^3\psi_d}{dx^3}(L_1) = 0 \tag{3.28}$$
$$\tag{3.29}$$

Après avoir éliminé les variables A' et B', l'ensemble des conditions limites restante s'écrit

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = 0 \tag{3.30}$$

où $\mathcal{M}$ est une matrice 6×6 définie en annexe A provenant directement de l'expression des conditions aux limites énoncées précédemment en utilisant les fonctions ψ_g et ψ_d. La matrice $\mathcal{M}$ fait notamment apparaître les vecteurs d'onde k_R, k_I et k dépendant de ω (on notera par la suite la matrice $\mathcal{M}(\omega)$ pour souligner cette dépendance).

Pour la suite, les fréquences propres de vibration seront obtenues pour les valeurs de ω annulant le déterminant de la matrice $\mathcal{M}(\omega)$. Le vecteur propre associé à une annulation du déterminant de $\mathcal{M}$ correspond aux coefficients A, B, C, D, E, F (et donc A' et B') donnant la forme des modes de vibration du nanofil 1. Cette procédure sera mis en œuvre dans les parties qui suivent pour la résolution des modes de vibration avec en sans tension mécanique induite par le déplacement du nanofil 2.

3.2.2.2 Solutions en l'absence de tension

En l'absence de tension T induite par le déplacement du fil court, les relations de dispersion pour la partie gauche et droite 3.10 et 3.11 prennent la même forme

$$\mu\omega^2 = E\mathcal{I}k^4 \tag{3.31}$$

définissant le même vecteur d'onde à gauche et à droite du point de contact. Les solutions non nulles du système couplé vérifiant les conditions aux limites (Éq. 3.30) s'obtiennent pour l'annulation du déterminant de $\mathcal{M}(\omega)$. Les fréquences de résonance du système couplé sont présentées pour la fréquence normalisée par la fréquence fondamentale du fil 1 (Fig.3.12). La position du contact est rapportée à la longueur du fil. Lorsque le contact est à la position 0, les modes de vibration sont ceux du résonateur 1 libre.

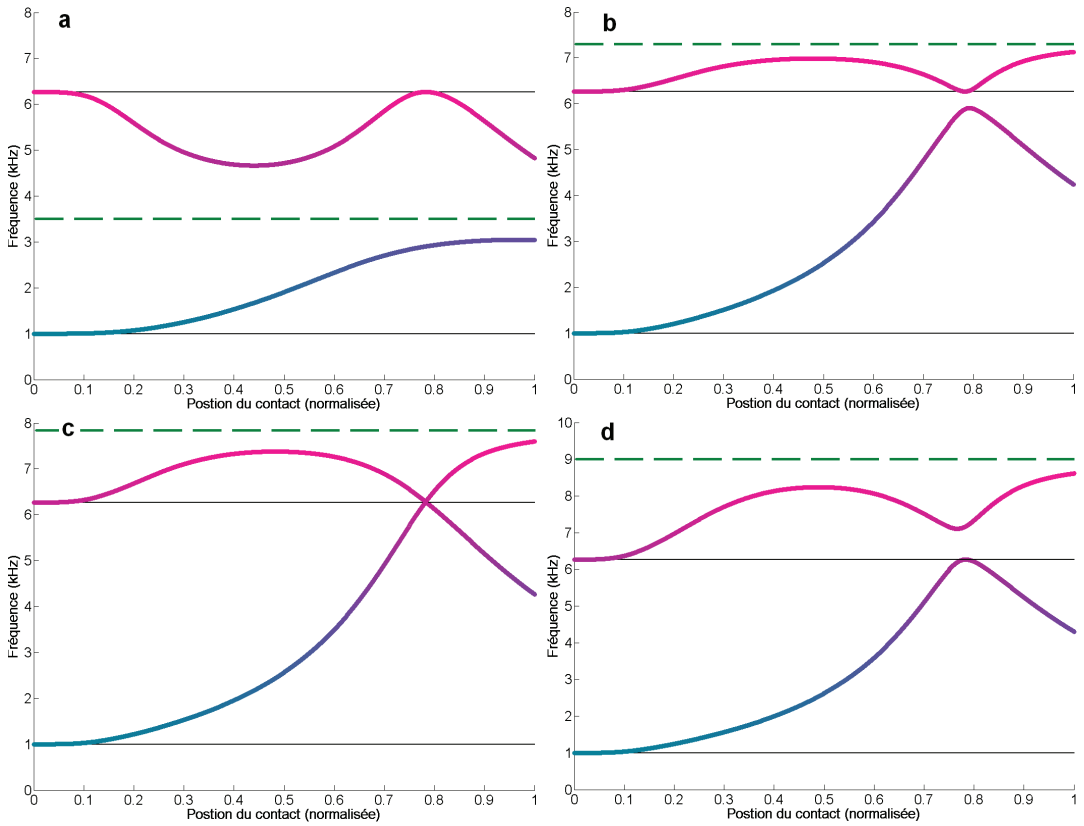


Figure 3.12 Fréquence de résonance des deux modes de plus basse fréquence en fonction de la position du contact sur le fil 1. Quatre valeurs de fréquence sont choisies. Le trait pointillé correspond à la fréquence fondamentale du fil 2 non couplé. (a) $f_2/f_1 = 3,5$. (b) $f_2/f_1 = 7,3$. (c) $f_2/f_1 = 7.841$. (d) $f_2/f_1 = 9$.

Quatre valeurs de fréquence pour le fil 2 ont été choisies pour illustrer les régimes de couplage sans tension en fonction de la position de contact

— (a) $f_2 = 3,5f_1$ en l'absence de couplage, la fréquence du résonateur 2 se trouve entre les fréquences de résonance des deux premiers modes du résonateur 1. Pour le mode de plus basse fréquence ($K > M\omega_1^2$), la raideur domine dans le couplage et entraîne une augmentation de la fréquence de résonance, pour l'autre mode dominé par l'inertie ($M > K/\omega_2^2$) la fréquence diminue. Il est intéressant de remarquer que pour une position de contact $x \approx 0,785L_1$, la fréquence haute retrouve sa valeur non couplée. Cela était attendu puisqu'il s'agit précisément de la position du nœud du deuxième mode de vibration du fil 1 libre.

— (b) $f_2 = 7,3f_1$ la fréquence du résonateur 2 est supérieure au deuxième mode du résonateur 1. En dehors du collage sur le nœud du deuxième mode, le couplage entraîne systématiquement une augmentation de fréquence. Le mode de plus basse fréquence présente un maximum pour une position de collage proche du nœud du deuxième mode libre

— (c) $f_2 = 7,841 f_1$ les fréquences des deux premiers modes couplés sont confondues en $x \approx 0,785 L_1$. Un mode possède un nœud la position du contact et pas l'autre.
— (d) $f_2/f_1 = 9$ les modes se sont "croisés", ce qui veut dire que le mode de plus basse fréquence possède un nœud alors que le suivant n'en possède pas.

3.2.2.3 Solutions avec tension mécanique

Il est possible de déplacer le fil 2 selon la direction x pour induire une tension dans la partie gauche du fil 1. Les fréquences obtenues sont représentée sur la figure 3.13.

La figure 3.14 est une représentation de l'amplitude de vibration au point de contact en fonction du point de contact et de la tension mécanique pour le mode normalisé.

À partir de la carte de la figure 3.14, on peut dire que lorsque le contact a lieu en un point $x_c > 0,78 L_1$, il existe toujours un tirage qui permet de changer la forme du mode de vibration tel qu'un mode de vibration possède un nœud au point de contact x_c.

Conclusion du chapitre

Le couplage de deux résonateurs par une force électrostatique permet d'observer la vibration collective de résonateurs de fréquences proches. Grâce aux accordages en fréquence propres à chaque résonateur, il est possible d'observer l'anticroisement des résonances en fonction de la tension électrique.

Une structure élémentaire à base de deux résonateurs collés par les forces de contact a été étudiée. Les fréquences et les modes de vibration des résonateurs couplés sont décrits par la mécanique des milieux continus en introduisant les conditions aux limites associées au collage. Il a été vu qu'il existe une continuité des positions de collage pour lesquelles seul un des deux résonateurs peut être mis en vibration. Ce phénomène est lié à la dépendance de la forme des modes de vibration avec la tension mécanique induite par la déformation statique de la structure.

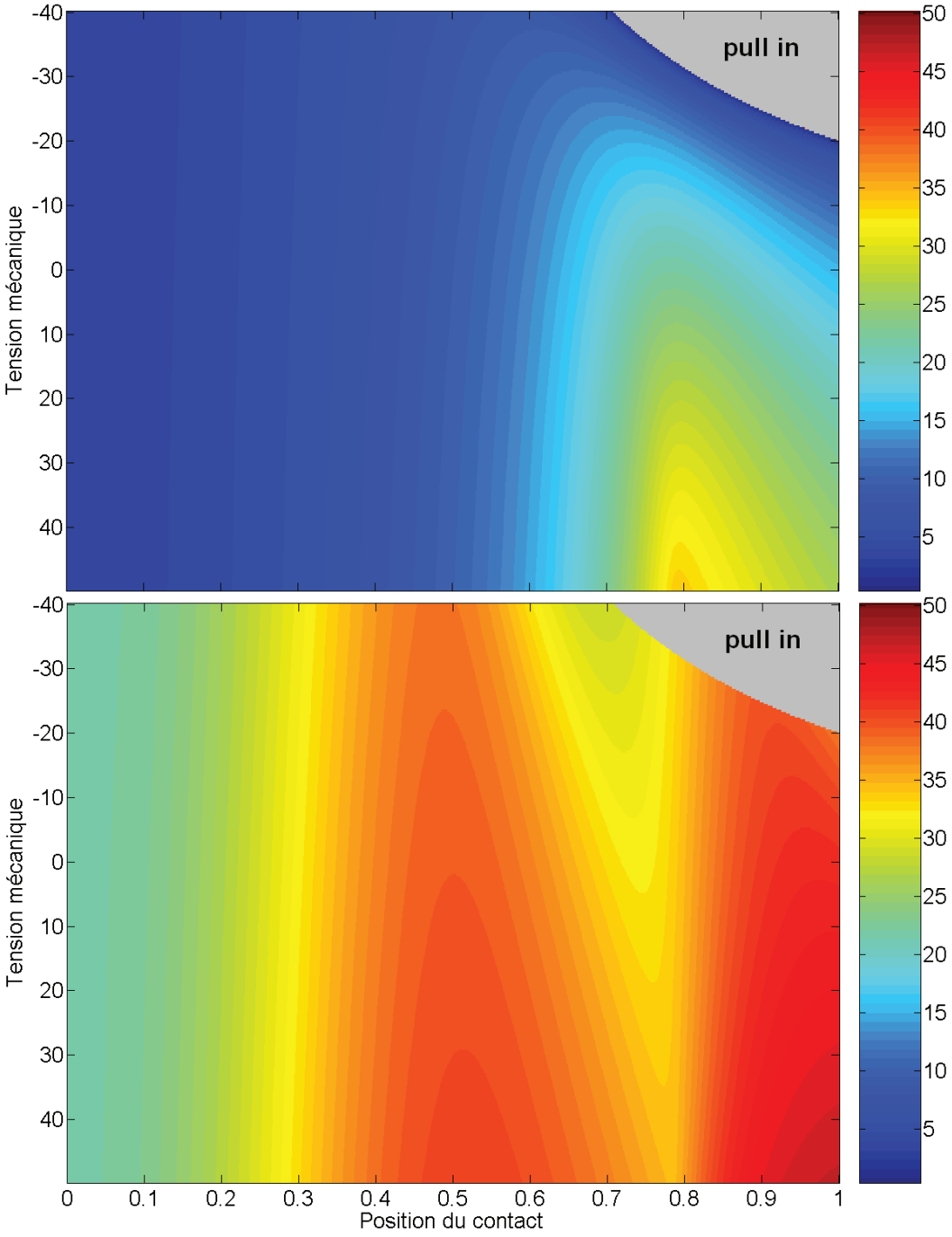


Figure 3.13 Fréquence de vibration des deux modes de plus basse fréquence (mode 1 en haut, mode 2 en bas) en fonction de la position du contact normalisée par la longueur L_1 et la tension normalisée $T_n = TL_1{}^2/E\mathcal{I}$. La zone de compression ($T < 0$) pour une position de contact proche de l'extrémité du fil 1 donne une instabilité de pull-in (la fréquence du mode fondamentale tend vers 0 à mesure qu'on s'approche de la zone de pull-in).

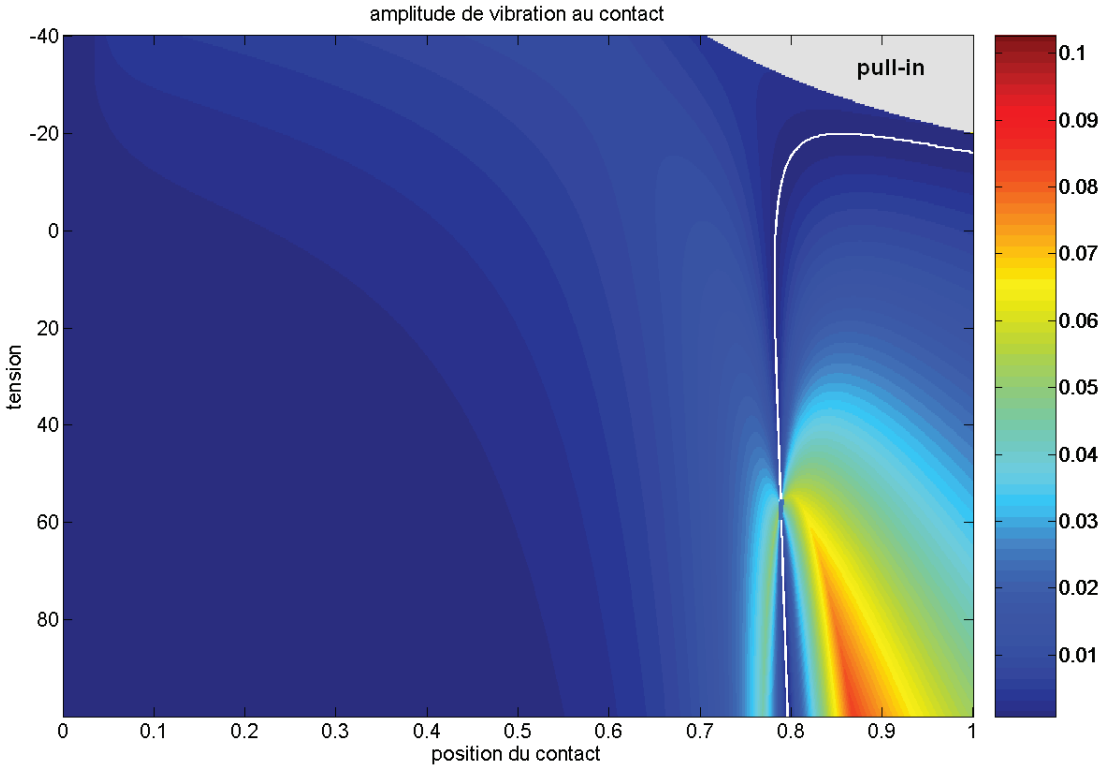


FIGURE 3.14 Amplitude de vibration au point de contact en fonction de la position du contact normalisée par la longueur L_1 et la tension normalisée $T_n = TL_1{}^2/E\mathcal{I}$. La ligne blanche marque un nœud au point de contact pour la tension associée. Pour $T = 0$, on retrouve la valeur $x = 0,785L_1$ trouvé dans la partie 3.2.2.2 sans tension.

Chapitre 4

Nanoélectromécanique non linéaire des résonateurs simplement encastrés

Les premiers travaux sur la vibration non linéaire des nanofils simplement encastrés proviennent d'une technique d'observation originale en terme de nanomécanique qui se trouve être la microscopie par émission de champ (voir la partie 4.2.1.1). Cette méthode d'observation permet d'obtenir dans *tout le plan perpendiculaire* à un nanofil la trajectoire lors de la vibration. Cette capacité expérimentale a permis la caractérisation d'une vibration non planaire pour des nanofils, plus difficilement observable par une méthode d'imagerie de type MEB avec un résonateur dans le plan d'observation.

Les effets non linéaires dans la vibration des nanofils sont abordés dans ce chapitre à dominante théorique. Un traitement générique de forces non linéaires cubiques est présenté dans la première partie avec une application dans la deuxième partie du chapitre au couplage non linéaire des polarisations en un mouvement circulaire de vibration. La fin du chapitre est un traitement analytique de l'amplification paramétrique c'est-à-dire de l'effet d'un forçage paramétrique sur la résonance d'un oscillateur harmonique amorti.

4.1 Non linéarité pour un oscillateur à une dimension

4.1.1 Termes non linéaires pour la vibration sur une polarisation de vibration

La description des résonances mécaniques des nanofils a été proposée dans un cadre linéaire dans la partie 2.3. Cette approche n'est valable que pour les faibles amplitudes de vibrations et des termes non linéaires doivent être introduits pour rendre compte des vibrations de plus large amplitude. L'origine des non linéarités peut être attribuée à deux types de mécanismes.

Non linéarités géométriques On considère la vibration transversale d'un nanofil orienté selon l'axe z. Comme le fil est supposé inextensible, le mouvement selon la direction de vibration entraîne un déplacement du nanofil selon z au deuxième ordre. La mise en équation de cet effet sera détaillée dans la partie 4.2.2 et mène, à l'ordre le plus bas, à un terme cubique inertiel et à un terme cubique dans la force de rappel.

Non linéarités par l'environnement électrostatique En présence d'une tension DC entre le résonateur et une contre électrode, la force électrostatique entraîne au premier ordre une variation de la fréquence de résonance des modes de vibration. En développant la force de rappel à des ordres supérieurs, on peut également faire apparaître des termes non linéaires d'ordres supérieurs.

4.1.2 Oscillateur de Duffing forcé

L'objet de cette partie est de présenter une méthode de traitement analytique de l'oscillateur de Duffing rendant compte d'une non linéarité cubique sur la force de rappel d'un oscillateur harmonique.

On considère le modèle de Duffing avec une non linéarité sous forme d'une force de rappel additive cubique

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x + {\omega_0}^2 \frac{\alpha_3}{3} x^3 = f \cos \omega_e t \tag{4.1}$$

où x est la variable de position, ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité du mode de vibration considéré. Le forçage est d'amplitude f à la pulsation ω_e. Le terme α_3 traduit une non linéarité sur la force de rappel qui peut s'interpréter à l'aide d'une amplitude caractéristique sous la forme

$${\omega_0}^2 \left(1 + \frac{\alpha_3}{3} x^2\right) x = {\omega_0}^2 \left(1 + \frac{x^2}{{x_c}^2}\right) x = k_{\mathcal{NL}} x \tag{4.2}$$

avec l'amplitude caractéristique $x_c = \sqrt{3/\alpha_3}$. Qualitativement, on peut dire que la pulsation associée à la raideur effective $k_{\mathcal{NL}}$ est ω_0 pourvu que x soit suffisamment petit devant x_c.

Plus précisément, le décalage en pulsation associé à une amplitude caractéristique x est $\delta\omega = \omega_0 (1/2) x^2 / {x_c}^2$. Ce décalage fait entrer le résonateur dans un régime non linéaire lorsqu'il devient comparable à la largeur de la résonance ω_0/Q. En d'autres termes, la condition de linéarité s'écrit $x^2 \ll 2{x_c}^2/Q$.

En adimensionnant le temps par $1/\omega_0$, on obtient

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + x + \frac{\alpha_3}{3} x^3 = f \cos \epsilon t \tag{4.3}$$

où $\epsilon = \omega_e/\omega \sim 1$ est la pulsation normalisée.

Les solutions forcées en régime faiblement non linéaire sont de la forme $x = A\cos(\epsilon t - \varphi)$ ou de manière équivalent de la forme $x = A \cos \epsilon t$, en translatant dans

le temps de φ/ϵ avec une excitation $f\cos(\epsilon t+\varphi)$. L'équation du mouvement 4.3 s'écrit en ne gardant que les termes à la pulsation normalisée ϵ

$$(1-\epsilon^2)A+\frac{1}{4}\alpha_3 A^3 = f\cos\varphi \tag{4.4}$$

$$\frac{\epsilon}{Q}A = f\sin\varphi \tag{4.5}$$

où sont séparés les termes en phase (Éq. 4.4) et en quadrature de phase (Éq. 4.5) avec la solution $A\cos\epsilon t$. L'expression pour l'amplitude A des solutions est obtenue en ajoutant le carré des deux lignes

$$\frac{1}{16}{\alpha_3}^2\mathcal{Y}^3+\frac{1}{2}\alpha_3(1-\epsilon^2)\mathcal{Y}^2+\left((1-\epsilon^2)^2+\frac{\epsilon^2}{Q^2}\right)\mathcal{Y}-f^2=0 \tag{4.6}$$

où $\mathcal{Y}=A^2$. Les solutions analytiques de 4.6 peuvent être obtenues par la méthode de Cardan. Une résolution numérique est utilisée pour présenter l'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation pour 3 amplitudes d'excitation (Fig. 4.1). On choisi le cas $\alpha=\pm 1$ [1] et 3 valeurs de fQ ont été choisie pour illustrer le comportement l'oscillateur de Duffing.

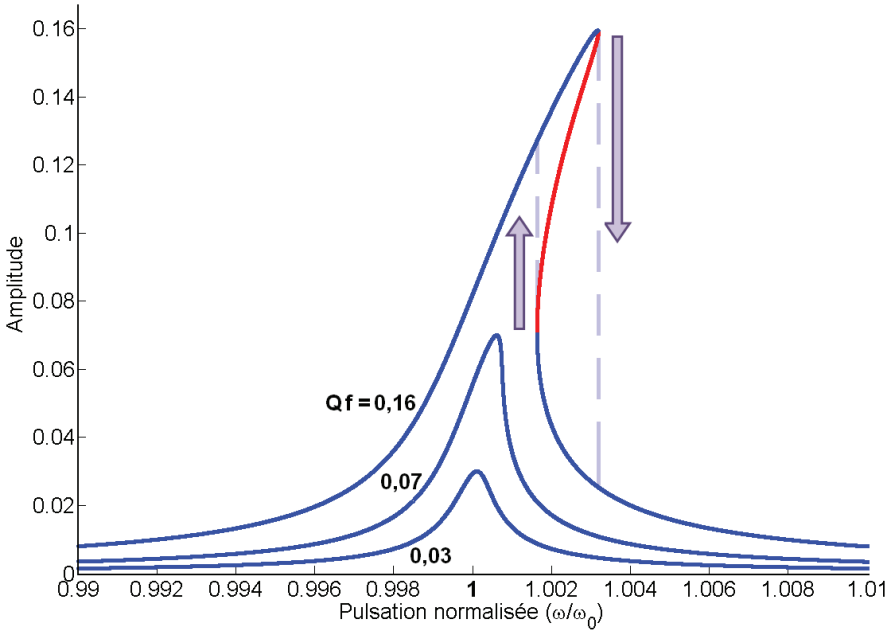


FIGURE 4.1 Amplitude de vibration pour un oscillateur de Duffing en fonction de la pulsation normalisée. $\alpha_3=1$, $Q=1000$.

— $fQ=0,03$ forçage quasi linéaire. L'amplitude à la résonance $x_{\max}$ est faible. Le terme non linéaire modifie peu la forme de la résonance lorsque le décalage

1. Dans un cas plus général, il est possible de renormaliser x et f pour se ramener à $\alpha=1$

en fréquence non linéaire est petit devant la largeur linéaire de la résonance ($x_{\max}{}^2 \ll 1/Q$ *i.e.* $x_{\max} \ll x_c/3\sqrt{Q}$).
— $fQ = 0,07$ forçage dans un régime faiblement non linéaire. La courbe de résonance devient asymétrique vers les hautes fréquences (vers les basses fréquences pour $\alpha = -1$). Cet effet s'interprète par une raideur non linéaire augmentant en moyenne avec l'amplitude de vibration et qui a pour conséquence un décalage à forte amplitude vers les hautes fréquences.
— $fQ = 0,16$ forçage en régime non linéaire. Il apparaît une plage de fréquence pour laquelle 3 solutions d'amplitude coexistent. La solution intermédiaire est instable. Les deux autres solutions stables se traduisent en un cycle d'hystérésis qui peut être observé en augmentant puis en descendant continûment la fréquence d'excitation. Pour les plus fortes excitations, la plage de vibration peut être très grande devant la largeur linéaire de résonance (Cho et al., 2010).

4.2 Couplage à deux dimensions : vibration en cercle

L'introduction de termes non linéaires dans le mouvement d'un résonateur peut entraîner l'apparition d'un mouvement non planaire (Conley et al., 2008) voire chaotique (Chen et al., 2010; Karabalin et al., 2009). Dans cette partie, l'observation d'un mouvement circulaire est considérée (Perisanu et al., 2010).

4.2.1 Observation de polarisation circulaire

4.2.1.1 Microscopie à émission de champ

La microscopie par émission de champ permet d'observer le mouvement d'un nanofil dans tout le plan de vibration. Les nanofils sont placés dans une enceinte UHV dédiée (Fig. 4.2) et la position du nanofil est observée par émission de champ électronique où les électrons émis par l'extrémité du nanofil sont observés en projection sur un écran de détection photomultiplicateur MCP (Micro-Channel Plate). L'émission d'électron par le nanofil est obtenue en appliquant une différence de potentiel entre le nanofil et une électrode extractrice placé proche. Le fort champ électrique régnant à l'apex du nanofil est suffisant pour arracher des électrons au nanofil et générer un courant électrique à travers le vide séparant le nanofil de l'écran de projection.

Les résonances mécaniques des nanofils sous émission de champ se traduisent pour les vibrations transversales par un élargissement de la tache électronique sur l'écran de projection 4.3.

4.2.1.2 Microscopie électronique à transmission

Les résonateurs à base de nanotubes de carbone ont montré des mouvements de vibration circulaire sous TEM. Une observation partielle du plan de vibration est possible pour les résonateurs qui ne sont pas dans le plan d'observation (Fig. 4.4).

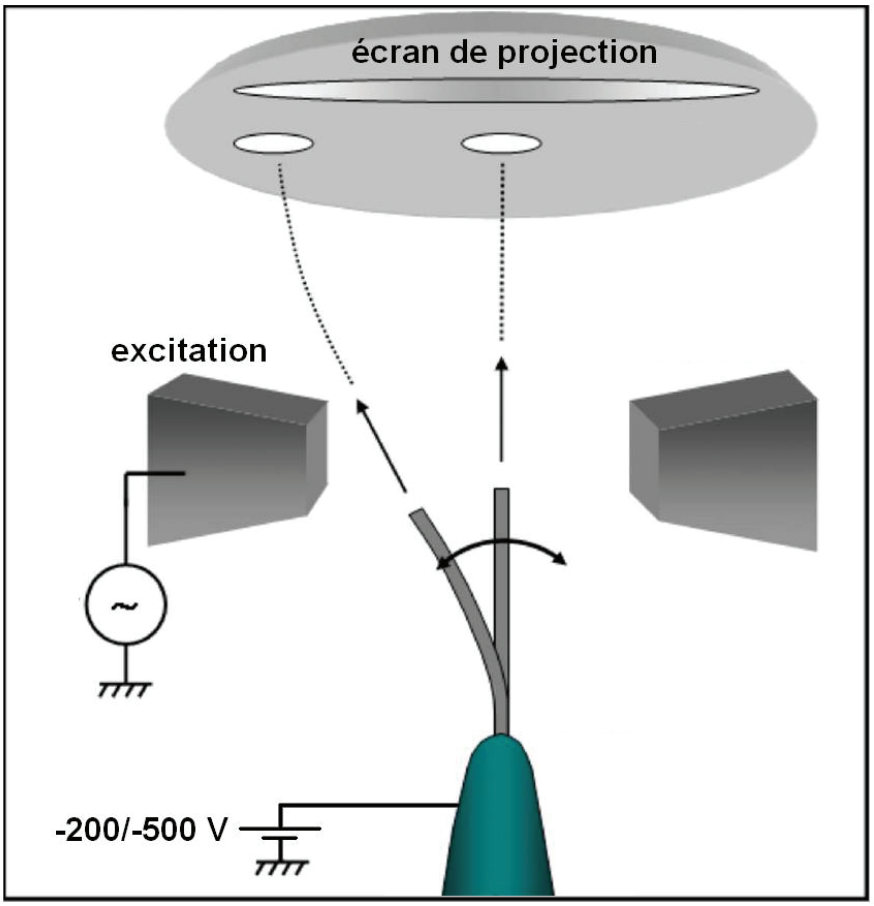


FIGURE 4.2 Le nanofil est dans une enceinte UHV. Une tension négative de quelque centaines de Volts est appliquée au support du nanofil et les électrons sont émis en projection sur un écran d'observation. Une tension alternative est ajoutée sur l'extractrice pour exciter les résonances du nanofil.

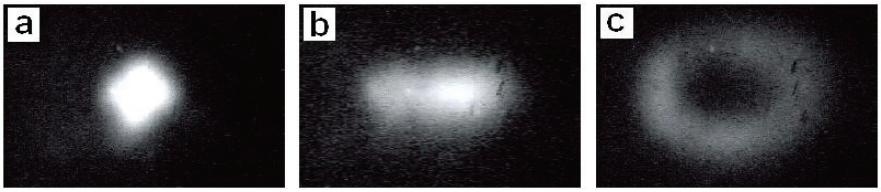


FIGURE 4.3 (a) Tache électronique d'émission de champ sur l'écran de projection. (b) Nanofil en résonance selon une polarisation rectiligne horizontale. (c) résonance avec une polarisation en cercle.

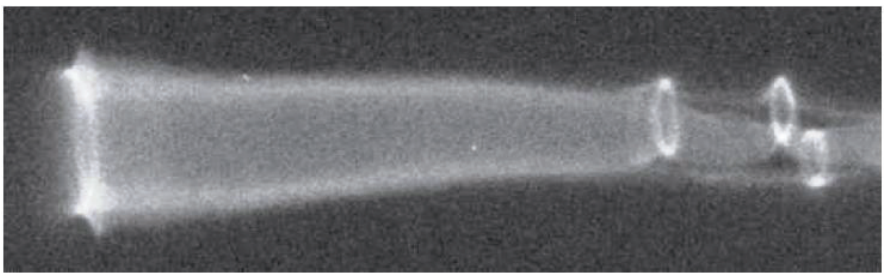


Figure 4.4 Résonance mécanique d'un nanotube de carbone.

4.2.2 Couplage non linéaire des polarisations

Cette partie théorique décrit l'établissement de l'équation du mouvement non linéaire couplant deux polarisations dans le plan de vibration. L'approche utilisée provient de la description de Nayfeh et Pai (1989); Pai et Nayfeh (1990).

Les deux polarisations d'un mode de vibration ne sont pas par définition linéairement couplées. Pour faire apparaître des termes de couplage entre polarisations, il faut faire intervenir un développement non linéaire de l'équation du mouvement. La méthode utilisée pour faire apparaître ces termes non linéaires est de considérer la densité de lagrangien du résonateur. Le résonateur de longueur L est orienté selon z et il est défini par ses coordonnées $\{x(s,t), y(s,t), z(s,t)\}$ où s est l'abscisse curviligne, $s \in [0\ 1]$. Au repos, le résonateur est rectiligne et orienté selon la direction z, ce qui s'écrit

$$L \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

La densité de lagrangien s'écrit comme l'intégrale de l'énergie cinétique linéique $E_C(s)$ et de l'énergie de courbure linéique $E_K(s)$ le long du résonateur

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^1 [E_C(s) + E_K(s)] ds \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\mu L^2}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{EIL^4}{2} \left(x''^2 + y''^2 + z''^2 \right) \right] L ds \end{aligned} \tag{4.8}$$

où $\dot{q} = \partial q / \partial t$ et $q' = \partial q / \partial s$, $q = x, y$ ou z. Si l'écriture de l'énergie cinétique d'un élément ds du nanofil dans l'équation 4.8 est évidente, l'établissement du terme de courbure est plus fastidieux. On pourra néanmoins se convaincre que l'expression donne le bon résultat lorsque $y'' = 0$ et $z'' = 0$, c'est-à-dire pour un repère x, y, z orienté de telle sorte que la courbure du nanofil est seulement dans la direction x.

Une normalisation appropriée de $\mathcal{L}$, μ et EI permet d'écrire l'équation 4.8 avec les variables d'espace normalisées

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \left[\frac{\mu}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{EI}{2} \left(x''^2 + y''^2 + z''^2 \right) \right] ds \tag{4.9}$$

L'hypothèse centrale pour l'établissement de l'équation du mouvement non linéaire est la condition d'inextensibilité du fil. Le vecteur élémentaire localement parallèle au fil est

$$\delta\vec{U} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} ds \tag{4.10}$$

La condition d'inextensibilité locale correspond à la conservation de la norme de $\delta\vec{U}/ds$

$$\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) = 1 \tag{4.11}$$

où la valeur de la constante est 1 puisque l'intégration de l'équation 4.11 de 0 à 1 donne la longueur normalisée 1 du fil.

La condition 4.11 permet d'exprimer la variable z comme

$$z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - x'(\tilde{s})^2 - y'(\tilde{s})^2} d\tilde{s} \tag{4.12}$$

Les termes non linéaires d'ordre le plus bas seront donnés pour un développement de la racine carré à l'ordre 2 en déplacement

$$z(s) = \int_0^s \left(1 - \frac{1}{2}\left(x'(\tilde{s})^2 + y'(\tilde{s})^2\right)\right) d\tilde{s} \tag{4.13}$$

La composante du lagrangien $\mathcal{L}_{NL}$ donnant les termes non linéaires dans l'équation du mouvement s'obtient en exprimant les variables $\dot{z}$ et z' dans l'expression du lagrangien (Éq. 4.9) à l'aide de l'expression 4.12 :

$$\mathcal{L}_{NL} = \int_0^1 \left[\frac{\mu}{8}\left(\int_0^s \frac{\partial}{\partial t}\left(x'(\tilde{s})^2 + y'(\tilde{s})^2\right) d\tilde{s}\right)^2 - \frac{EI}{8}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(x'(\tilde{s})^2 + y'(\tilde{s})^2\right)\right)^2\right] ds \tag{4.14}$$

où le lagrangien est $\mathcal{L} = K(\dot{x}, \dot{y}) - V(x, y) + \mathcal{L}_{NL}$ où K et V sont les énergies cinétiques et potentielles quadratiques habituelles (c'est-à-dire provenant de l'équation 4.9 où les termes non linéaires $\dot{z}^2$ et z''^2 ne sont pas pris en compte).

Pour expliciter $\mathcal{L}_{NL}$, on utilise l'hypothèse d'un mouvement faiblement non linéaire c'est-à-dire quand la forme des modes de vibration est celle du modèle linéaire. Dans la suite, n désigne l'ordre du mode de vibration considéré.

Le déplacement du nanofil est sous la forme d'une onde stationnaire, c'est-à-dire exprimé comme la forme du mode $f_n(s)$ dépendant de l'abscisse curviligne s multipliée par l'amplitude dépendant du temps $X(t)$ et $Y(t)$ pour les deux polarisations.

$$\begin{pmatrix} x_n(s,t) \\ y_n(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t)f_n(s) \\ Y(t)f_n(s) \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

où on précise que les fonctions f_n sont normalisée $f_n(1) = 1$, de sorte que l'amplitude à l'apex ($s = 1$) corresponde à $X(t)$ et $Y(t)$ pour les deux directions de vibration.

En utilisant pour x et y la forme de l'équation 4.15, le lagrangien s'obtient à partir de l'équation 4.14 en intégrant selon s

$$\mathcal{L} = \frac{m_{1,n}}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{m_{2,n}}{2}(\dot{X}X^2 + \dot{Y}Y^2)^2 - \frac{k_{1,n}}{2}\left(X^2 + Y^2\right) - \frac{k_{2,n}}{2}\left(X^2 + Y^2\right)^2 \tag{4.16}$$

avec les masses et raideurs effectives linéaires et non linéaires définies par l'intégration selon s de la partie spatiale des modes $x_n(s,t)$ et $y_n(s,t)$

$$m_{1,n} = \mu \int_0^1 f_n(s)^2 ds \tag{4.17}$$

$$k_{1,n} = EI \int_0^1 f_n(s)''^2 ds \tag{4.18}$$

$$m_{2,n} = \frac{\mu}{2}\int_0^1 \left[\int_0^s f_n{}'(\tilde{s})^2 d\tilde{s}\right] ds \tag{4.19}$$

$$k_{2,n} = \frac{EI}{2}\int_0^1 f_n'(s)^2 f_n''(s)^2 ds \tag{4.20}$$

où pour tous les modes sans tension $m_{1,n} = 0,25\mu$.

L'équation du mouvement s'obtient par

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{X}}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{X}} \tag{4.21}$$

où $\mathcal{X} = X, Y$. Avec l'expression 4.16 de $\mathcal{L}$, les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned}\left(m_1 + m_2\left(X^2 + Y^2\right)\right)\ddot{X} + \left(k_1 + 2k_2\left(X^2 + Y^2\right) + m_2\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right)\right)X &= 0\\ \left(m_1 + m_2\left(X^2 + Y^2\right)\right)\ddot{Y} + \left(k_1 + 2k_2\left(X^2 + Y^2\right) + m_2\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right)\right)Y &= 0\end{aligned}$$

4.2.3 Solutions de polarisations rectilignes et circulaires

Dans cette partie, deux types de solutions non linéaires limites sont considérées : une de polarisation rectiligne et l'autre de polarisation circulaire [2]. La dynamique de chacune des polarisations prises séparément de l'autre sera considérée et les domaines d'existence des deux solutions seront confrontés.

4.2.3.1 Solutions libres sans dissipation

À partir des équations du mouvement dans le plan XY, l'équation du mouvement pour une polarisation rectiligne s'écrit

$$\left(m_1 + m_2X^2\right)\ddot{X} + \left(k_1 + 2k_2X^2 + m_2\dot{X}^2\right)X = 0 \tag{4.22}$$

2. Le terme de polarisation sera employé dans une description non linéaire même s'il peut porter à confusion : il ne s'agit pas d'un mode linéaire au sens des polarisations d'une onde électromagnétique par exemple.

Les solutions périodiques libres $X = A_| \cos \omega t$ donnent la relation

$$\left(m_1 + \frac{3}{4} m_2 {A_|}^2\right) \omega^2 = k_1 + \frac{3}{2} k_2 {A_|}^2 + \frac{1}{4} m_2 \omega^2 {A_|}^2 \tag{4.23}$$

soit

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m_1} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3k_2}{k_1} - \frac{m_2}{m_1}\right) {A_|}^2\right) \tag{4.24}$$

Les solutions pour une polarisation circulaire s'obtiennent en introduisant les variables (R, ϕ)

$$X = R \cos \phi \tag{4.25}$$
$$Y = R \sin \phi \tag{4.26}$$

et avec la somme du carré des équations du mouvement

$$\left(m_1 + m_2 R^2\right) \left(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2\right) + \left(k_1 + 2k_2 R^2 + m_2 (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2)\right) R = 0 \tag{4.27}$$

Les solutions polarisées circulairement sont de la forme $R = A_\circ, \dot{\phi} = \omega$. On a donc

$$\left(m_1 + m_2 {A_\circ}^2\right) \omega^2 = k_1 + 2k_2 {A_\circ}^2 + m_2 {A_\circ}^2 \omega^2 \tag{4.28}$$

soit

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m_1} \left(1 + \frac{2k_2}{k_1} {A_\circ}^2\right) \tag{4.29}$$

4.2.3.2 Solutions forcées avec dissipation

On considère les équations du mouvement pour des polarisations rectilignes (Éq. 4.22) et circulaires (Éq. 4.27) avec des termes de forçage et de dissipation supplémentaires. Pour une solution polarisée rectilignement $X = A_R \cos \omega_e t$

$$-{\omega_e}^2 \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 {A_R}^2\right) A_R + \left(k_1 + \frac{3}{2} k_2 {A_R}^2\right) A_R = f \cos \varphi \tag{4.30}$$
$$\frac{\omega_0}{Q} \omega A_R = f \sin \varphi \tag{4.31}$$

où F est la force agissant sur le mode polarisé rectilignement et Q le facteur de qualité linéaire. Pour la polarisation circulaire d'amplitude A_C et de vitesse angulaire ω_e, on trouve

$$-m_1 {\omega_e}^2 A_C + \left(k_1 + 2k_2 {A_C}^2\right) A_C = f \cos \varphi \tag{4.32}$$
$$\frac{\omega_0}{Q} \omega A_C = f \sin \varphi \tag{4.33}$$

où on a supposé que la même force f agissait sur la polarisation circulaire que sur la polarisation rectiligne.

En sommant les carrés des lignes 4.30 et 4.31 pour les polarisations rectilignes et des lignes 4.32 et 4.33 pour les polarisations circulaires, on obtient une équation de degré 3 comparable à l'équation 4.6 pour le modèle de Duffing avec cette fois ci les variables $\mathcal{Y}_R = {A_R}^2$ et $\mathcal{Y}_C = {A_C}^2$. La résolution numérique de l'équation obtenue donne l'amplitude des deux modes de vibration non linéaires en fonction de la pulsation normalisée (Fig. 4.5). On considère le premier mode de vibration pour lequel $m_{2,1} = 1,1492\, m_{1,1}$ et $k_{2,1} = 0,409\, k_{1,1}$.

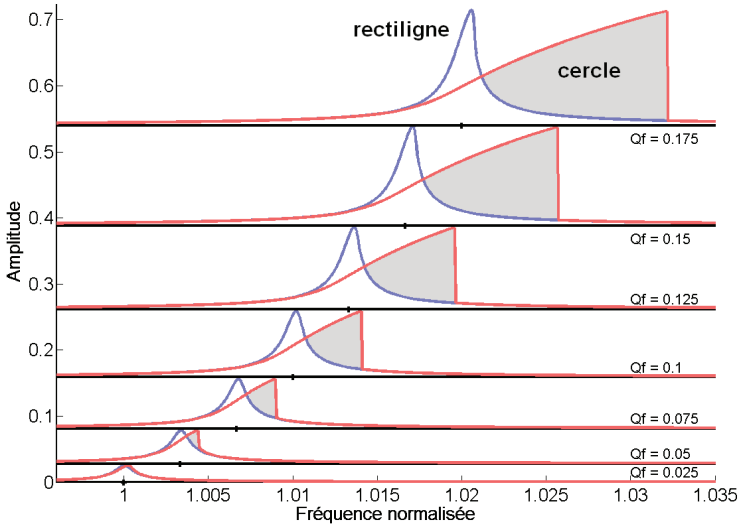


Figure 4.5 Amplitude de vibration en fonction de la fréquence normalisée pour les modes de vibration non linéaires polarisés rectilignement et circulairement. Le facteur de qualité linéaire est $Q = 1000$ et l'excitation est f. Les courbes correspondent à un balayage de la fréquence d'excitation montant.

Les solutions polarisées rectilignement et circulairement ont chacune un coefficient de raideur non linéaire positif. Ce coefficient est néanmoins beaucoup plus important dans le cas de la polarisation circulaire. Au voisinage de la fréquence naturelle, il existe une zone où les deux solutions coexistent a priori mais pour les fréquences suffisamment importantes, seules les solutions polarisées circulairement dominent.

4.2.4 Tension mécanique

Le formalisme développé précédemment permet d'établir l'équation du mouvement linéaire et non linéaire en présence de tension mécanique.

Les effets d'une tension mécanique peuvent être pris en compte en considérant un champ de force uniforme selon Z. Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \left[\frac{\mu}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - \frac{EI}{2} \left(x''^2 + y''^2 \right) \right] ds + T(z-1) \tag{4.34}$$

soit en utilisant l'expression 4.13

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \left[\frac{\mu}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - \frac{EI}{2} \left(x''^2 + y''^2 \right) ds - \frac{T}{2} \left(x'^2 + y'^2 \right) \right] ds \tag{4.35}$$

Les équations du mouvement sont

$$\mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} - T \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = 0 \tag{4.36}$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} - T \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = 0 \tag{4.37}$$

où pour les petits mouvements, la variable s se confond avec z. On peut remarquer que l'équation du mouvement obtenue pour la tension est celle utilisée sans justification dans la partie 2.4.1.2.

Les solutions linéaires de ce système sont notées

$$x = X(t) f_n(T, s) \tag{4.38}$$

$$x = Y(t) f_n(T, s) \tag{4.39}$$

et coïncident avec les solutions sans tension (Éq. 4.15) pour $T = 0$.

Le développement de la racine carré à l'ordre 4 en déplacement est

$$z(s) = \int_0^s \left(1 - \frac{1}{2} \left(x'^2 + y'^2 \right) + \frac{1}{8} \left(x'^2 + y'^2 \right)^2 \right) d\tilde{s} \tag{4.40}$$

Le lagrangien d'ordre 4 est

$$\mathcal{L} = K - V_T + \mathcal{L}_{NL}(T) \tag{4.41}$$

avec

$$\mathcal{L}_{NL}(T) = \int_0^1 \left[\frac{\mu}{8} \left(\int_0^s \frac{\partial}{\partial t} \left(x'^2 + y'^2 \right) d\tilde{s} \right)^2 - \frac{EI}{8} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(x'^2 + y'^2 \right) \right)^2 + \frac{T}{8} \left(x'^2 + y'^2 \right)^2 \right] ds \tag{4.42}$$

et K et V_T les énergies cinétiques et potentielles quadratiques avec tension.

On obtient alors pour le mode n

$$\mathcal{L} = \frac{m_{1,n}}{2} \left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \right) + \frac{m_{2,n}}{2} \left(\dot{X} X^2 + \dot{Y} Y^2 \right)^2 - \frac{k_{1,n}}{2} \left(X^2 + Y^2 \right) - \frac{k_{2,n}}{2} \left(X^2 + Y^2 \right)^2 \tag{4.43}$$

avec les masses et raideurs effectives linéaires et non linéaires définies par

$$m_{1,n} = \mu \int_0^1 f_n(T, s)^2 ds \tag{4.44}$$

$$k_{1,n} = EI \int_0^1 f_n''(T, s)^2 ds \tag{4.45}$$

$$m_{2,n} = \frac{\mu}{2} \int_0^1 \left[\int_0^s f_n'(T, \tilde{s})^2 d\tilde{s} \right] ds \tag{4.46}$$

$$k_{2,n} = \frac{EI}{2} \int_0^1 f_n'(T, s)^2 f_n''(T, s)^2 ds - \frac{T}{4} \int_0^1 f_n'(T, s)^4 ds \tag{4.47}$$

4.3 Forçage paramétrique

Le forçage paramétrique d'un oscillateur correspond à une situation où un ou plusieurs paramètres de l'oscillateur est dépendant du temps. C'est par exemple le cas pour un oscillateur dont la raideur est variable dans le temps.

Pour un résonateur forcé électrostatiquement, la dépendance en temps de la raideur peut être introduite par un développement limité de la force capacitive

$$F_{\text{élec}} = \frac{1}{2}\frac{dC}{dX}\left(V_{DC} - V_{AC}\right)^2 \tag{4.48}$$

soit autour de la position d'équilibre $X = x_0 + x$ pour les termes avec une dépendance explicite en temps

$$F_{\text{élec}} = -V_{DC}V_{AC}(t)\left(\frac{dC}{dX}(x_0) + x\frac{d^2C}{dX^2}(x_0)\right) \tag{4.49}$$

avec l'hypothèse $V_{AC} \ll V_{DC}$.

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + [k + \Delta k(t)]x = f_e \tag{4.50}$$

où on a fait apparaître les termes de raideur dépendant explicitement du temps $\Delta k(t) = V_{DC}V_{AC}d^2C/dX^2$ et $f_e = -V_{DC}V_{AC}dC/dX$.

Forçage paramétrique pur Pour une géométrie telle que $dC/dX = 0$, l'équation 4.50 s'écrit

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2(1 + \lambda(t))x = 0 \tag{4.51}$$

avec ${\omega_0}^2 = k/m$, $\omega_0/Q = \Gamma/m$ et ${\omega_0}^2\lambda(t) = \Delta k(t)$. En redimensionnant le temps par $1/\omega_0$, on obtient la forme équivalente

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + (1 + \lambda(t))x = 0 \tag{4.52}$$

La solution d'équilibre de l'équation 4.52 $x = 0$ peut être rendue instable lorsque avec $\lambda(t) = \lambda_0\cos(2\omega t + \phi)$ avec $\omega \sim \omega_0$ et λ_0 suffisamment grand [3]. Le seuil d'instabilité correspond à des solutions harmoniques $x = x_1\cos\omega t$ c'est-à-dire

$$(1 - \omega^2)\cos\omega t - \frac{\omega}{Q}\sin\omega t + \lambda_0\cos(2\omega t + \phi)\cos(\omega t) = 0 \tag{4.53}$$

soit en utilisant $\cos(2\omega t + \phi)\cos(\omega t) = (\cos(3\omega t + \phi) + \cos(\omega t + \phi))/2$

$$(1 - \omega^2) + \frac{\lambda_0}{2}\cos\phi = 0 \tag{4.54}$$

$$-\frac{\omega}{Q} + \frac{\lambda_0}{2}\sin\phi = 0 \tag{4.55}$$

3. ϕ est le déphasage entre l'excitation à 2ω et x. Il est introduit dans le terme d'excitation plutôt que dans l'amplitude du mouvement pour simplifier l'obtention des équations 4.54 et 4.55.

soit

$$\lambda_0 = 2\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{Q}\right)^2} \tag{4.56}$$

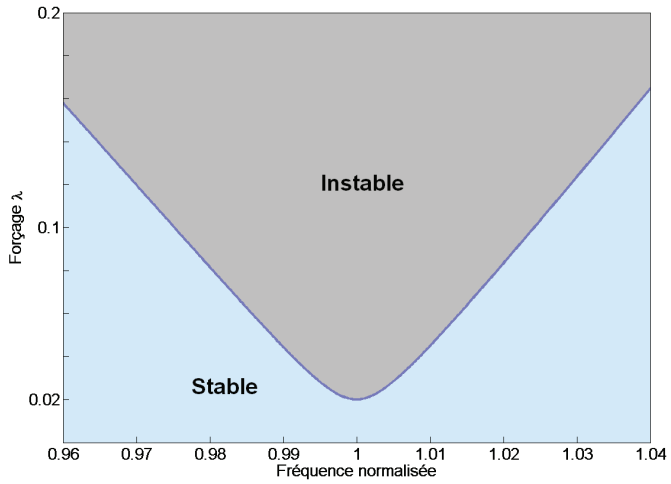


FIGURE 4.6 Carte de stabilité d'un oscillateur harmonique forcé paramétriquement ($\lambda(t) = \lambda_0 \cos(2\omega t + \phi)$). La fréquence est normalisée à la fréquence de résonance et $Q = 100$.

Dans la limite $Q \gg 1$, le seuil minimal est obtenu pour une excitation à deux fois la fréquence de résonance avec

$$\lambda_{\min} = \frac{2}{Q} \tag{4.57}$$

Forçage paramétrique et excitation résonante Cette partie concerne le traitement analytique du mécanisme d'amplification paramétrique (Karabalin et al., 2009; Eichler et al., 2011; Wu et Zhong, 2011).

Le forçage paramétrique peut être interprété comme une compensation effective de la dissipation. On doit donc s'attendre à une évolution de la dissipation effective d'un oscillateur forcé paramétriquement même pour une excitation paramétrique en dessous du seuil. Pour sonder la résonance il faut introduire une excitation à la pulsation ω et une excitation paramétrique à la pulsation 2ω

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + x = \cos(\omega t) + \lambda x \cos(2\omega t + \varphi) \tag{4.58}$$

avec les solutions de la forme $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$, les paramètres libres étant x_0 et ϕ. Le déphasage entre les deux excitations est $\delta\varphi$. En introduisant x dans l'équation du mouvement 4.58, on obtient pour $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$

$$-\omega^2 x_0 \cos\phi - \frac{\omega x_0}{Q}\sin\phi + x_0\cos\phi - \frac{\lambda x_0}{2}\cos(\varphi - \phi) = 1 \tag{4.59}$$

$$\omega^2 x_0 \sin\phi - \frac{\omega x_0}{Q}\cos\phi - x_0\sin\phi + \frac{\lambda x_0}{2}\sin(\varphi - \phi) = 0 \tag{4.60}$$

À partir de l'équation 4.60, on peut mettre en facteur $\cos\phi$ et $\sin\phi$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\sin\varphi - \frac{\omega}{Q}\right)\cos\phi + \left(\omega^2 - 1 - \frac{\lambda}{2}\cos\varphi\right)\sin\phi = 0 \tag{4.61}$$

En utilisant la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on trouve pour les phases

$$\cos\phi = \frac{1 + \frac{\lambda}{2}\cos\varphi - \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\sin\varphi - \frac{\omega}{Q}\right)^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos\varphi - \omega^2\right)^2}} \tag{4.62}$$

$$\sin\phi = \frac{\frac{\lambda}{2}\sin\varphi - \frac{\omega}{Q}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\sin\varphi - \frac{\omega}{Q}\right)^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos\varphi - \omega^2\right)^2}} \tag{4.63}$$

L'amplitude est donnée à partir de l'équation 4.59

$$x_0\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\cos\varphi - \omega^2\right)\cos\phi - (\frac{\omega}{Q} + \frac{\lambda}{2}\sin\varphi)\sin\phi\right] = 1$$

soit

$$x_0 = \frac{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\sin\varphi - \frac{\omega}{Q}\right)^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos\varphi - \omega^2\right)^2}}{(1-\omega^2)^2 - \frac{\lambda^2}{4} + (\frac{\omega}{Q})^2}$$

L'amplitude de vibration en fonction de la fréquence est représentée en unités normalisées pour plusieurs valeurs d'excitation paramétrique sur la figure 4.7

Conclusion du chapitre

La notion de non linéarité d'un oscillateur amorti a été présentée avec le traitement générique d'une non linéarité cubique appliquée au modèle de Duffing. Pour les nanofils simplement encastrés, les termes non linéaires liés à l'inextensivité des résonateurs en mouvement donnent lieu à un couplage non linéaire entre les polarisations linéaires de vibration. En lien avec les observations expérimentales, la notion de polarisation non linéaire est utilisée pour décrire une vibration en cercles des résonateurs. La dernière partie du chapitre est consacrée à la notion d'amplification paramétrique où il est montré qu'une excitation à la fréquence double de l'oscillation permet de modifier les fréquences de résonance et dissipations effectives.

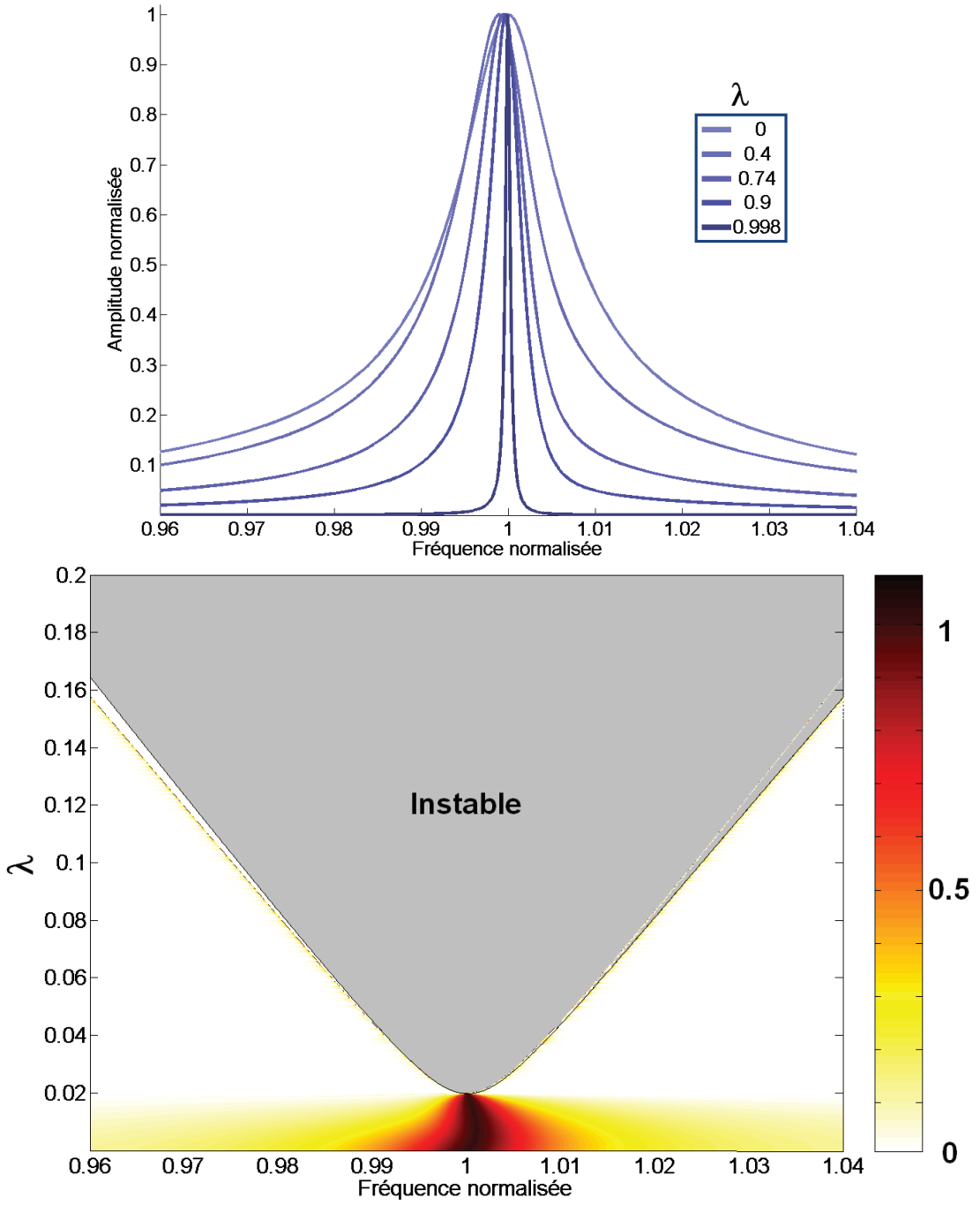


FIGURE 4.7 (en haut) Amplitude de vibration en fonction de la fréquence d'excitation ($Q = 100$) pour 5 valeurs d'excitation paramétrique (normalisées par la valeur $\lambda_{\min} = 0.02$). (en bas) Carte de stabilité avec l'amplitude de vibration dans la région stable.

Bibliographie

Chen, Q., L. Huang, Y.-C. Lai, C. Grebogi et D. Dietz, 2010 : Extensively chaotic motion in electrostatically driven nanowires and applications. *Nano Lett.* **10**, 406.

Cho, H., M.-F. Yu, A. F. Vakakis, L. A. Bergman et D. M. McFarland, 2010 : Tunable, broadband nonlinear nanomechanical resonator. *Nano Lett.* **10**, 1793.

Conley, W. G., A. Raman, C. M. Krousgrill et S. Mohammadi, 2008 : Nonlinear and nonplanar dynamics of suspended nanotube and nanowire resonators. *Nano Lett.* **8**, 1590.

Eichler, A., J. Chaste, J. Moser et A. Bachtold, 2011 : Parametric amplification and self-oscillation in a nanotube mechanical resonator. *Nano Lett.* **11**, 2699.

Karabalin, R. B., M. C. Cross et M. L. Roukes, 2009 : Nonlinear dynamics and chaos in two coupled nanomechanical resonators. *Phys. Rev. B* **79**, 165309.

Karabalin, R. B., X. L. Feng et M. L. Roukes, 2009 : Parametric nanomechanical amplification at very high frequency. *Nano Lett.* **9**, 3116.

Nayfeh, A. H. et P. F. Pai, 1989 : Non-linear non-planar parametric responses of an inextensional beam. *Int. J. Non-linear Mech.* **24**, 139.

Pai, P. F. et A. H. Nayfeh, 1990 : Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations. *Int. J. Non-linear Mech.* **25**, 455.

Perisanu, S., T. Barois, A. Ayari, P. Poncharal, M. Choueib, S. Purcell et P. Vincent, 2010 : Beyond the linear and duffing regimes in nanomechanics : Circularly polarized mechanical resonances of nanocantilevers. *Phys. Rev. B* **81**, 165440.

Wu, C.-C. et Z. Zhong, 2011 : Parametric amplification in single-walled carbon nanotube nanoelectromechanical resonators. *Appl. Phys. Lett.* **99**, 083110.

Chapitre 5

Dissipation électrostatique

Ce chapitre concerne le couplage de résonateurs résistifs avec leur environnement par une capacité chargée électriquement par une tension statique. Nous verrons notamment que ce type de couplage est universel puisqu'il traduit l'existence d'un amortissement vibratoire causé par un déplacement de charges électriques associé au mouvement d'un résonateur.

5.1 Contexte de l'étude

Ce travail a notamment été motivé par des mesures effectué dans l'équipe inspirées par le phénomène de "shear force" (Karrai et Tiemann, 2000). La shear force [1] est observée lorsqu'un résonateur vibre parallèlement à une surface pour des distances de l'ordre de quelques nanomètres dans un vide suffisamment poussé pour que la friction visqueuse soit assurément négligeable (voir Fig. 5.1).

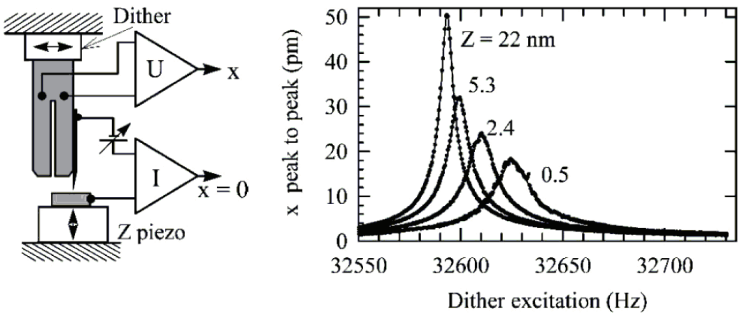


FIGURE 5.1 (d'après Karrai et Tiemann (2000)) schematic experimental setup. The microscope is operated in vacuum (810^{-7} mbar). The tip is a cut 25-μm gold wire ; the sample is atomically flat graphite or cleaved n-doped GaAs. The piezoelectric dither excites the mechanical resonance of the quartz tuning fork. The corresponding piezoelectric signal from the fork is shown in the left panel as a function of the tip-sample distance.

1. Force de cisaillement

Dans l'article de Karrai, la dissipation shear force est attribué à l'intervention d'un troisième corps, c'est-à-dire de molécules de gaz transportant de la quantité de mouvement entre l'apex du résonateur et la surface proche. Les mesures de Siria et al. (2012) sur un nanofil beaucoup plus léger que le résonateur millimétrique de Karrai ont montré que le terme de viscosité proposé est bien trop important puisqu'il aurait pour conséquence de tuer complètement la résonance du nanofil.

Une des premières pistes qui a été proposé était que la dissipation supplémentaire occasionnée par la proximité de la surface n'était un mécanisme lié à un fluide mais un effet lié au couplage entre la vibration mécanique et un courant électrique dissipatif par effet Joule. Si cette voie a été rapidement écartée en utilisant un résonateur recouvert d'or conducteur afin de limiter les pertes électriques, la notion de dissipation par un couplage mécanique électrique a été approfondie comme elle n'avait pas fait l'objet d'un travail dédié dans la littérature bien que souvent évoqué comme source de dissipation.

Ainsi, Moheimani (2003); Choi et al. (2006) considèrent le couplage occasionné par un matériau piézoélectrique pour des résonateurs MEMS, Sazonova (2006) fait intervenir le premier modèle où le couplage provient de la capacité électrique faisant intervenir le résonateur, Jourdan et al. (2007) proposent une première étude expérimentale où ce que nous désignerons par la dissipation électrostatique est utilisé pour la modélisation de la dissipation, un terme de dissipation électrostatique est également utilisé dans les informations supplémentaires des articles de Lassagne et al. (2009); Eichler et al. (2011), Gotsmann (2011) introduit la dissipation électrostatique de la charge image déjà proposée par Karrai et Tiemann (2000).

5.2 Couplage capacitif d'un résonateur résistif

5.2.1 Équations électromécaniques couplées

Dans le chapitre 2, le potentiel électrique du résonateur a été pris comme égal à la tension appliquée au support en tungstène. Cette hypothèse n'étant valide que pour des résonateurs métalliques, il est nécessaire de tenir compte dans un cas général de la résistance locale et de la capacité locale du résonateur avec son environnement sur toute sa longueur. Afin de décrire de la manière la plus simple le comportement du potentiel électrique le long du nanofil, un seul potentiel sera introduit étant le potentiel à l'apex V_{NW}. L'introduction de V_{NW} permet d'établir une représentation simplifiée du comportement électrique comme montré sur la figure 5.2. La résistance totale du nanofil est notée R et la capacité formée avec la contre électrode environnante est C, où C dépend de l'amplitude du mode de vibration considéré par une loi propre à chaque mode.

L'équation du mouvement du premier mode de vibration sans dissipation intrinsèque est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k(V_{DC})x = C'V_{DC}V_{NW} \tag{5.1}$$

où m et k sont les masses et raideurs effectives du premier mode de vibration. C'

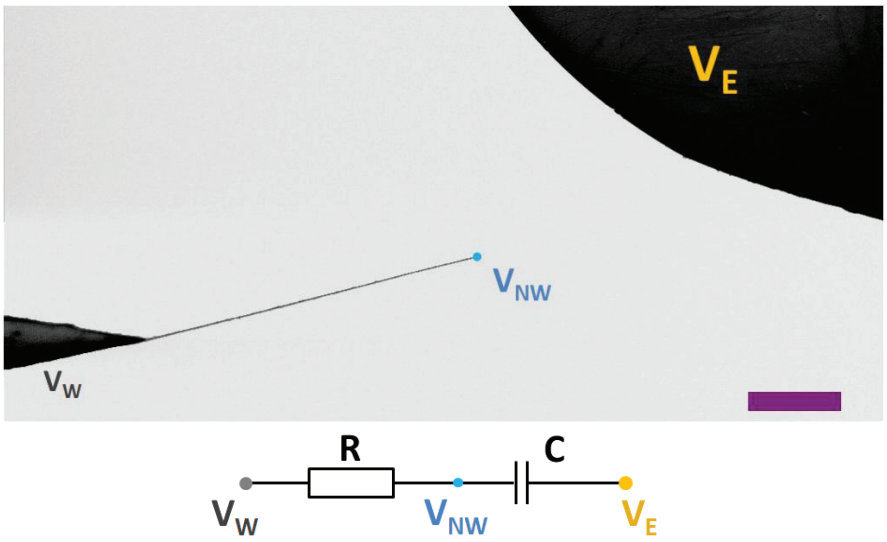


FIGURE 5.2 Représentation électrique pour l'introduction d'une dissipation électrostatique. Le potentiel électrique V_{NW} est introduit à l'extrémité libre. La résistance du nanofil est R ce qui signifie que les charges électriques peuvent s'écouler le long du nanofil en entraînant une chute de potentiel donné par la loi d'Ohm entre les potentiels V_W (pointe en tungstène) et V_{NW} (apex du nanofil). La capacité C traduit qu'un courant électrique capacitif peut s'établir entre l'apex et la contre électrode uniquement par stockage de charges sur les surfaces associées aux potentiels V_W et V_{NW}. En d'autres termes il n'y a pas de charge électrique qui traverse physiquement le vide entre l'apex du nanofil et la contre électrode.

est la dérivée de la capacité par rapport à l'amplitude du premier mode prise à l'extrémité libre.

Le résonateur est soumis à une différence de potentiel via l'application d'une tension V_{DC} sur la contre électrode et la mise à la masse du support en tungstène. De cette manière V_{NW} correspond à la chute de potentiel le long du résonateur. La loi des nœuds exprimant l'équilibre entre le courant résistif et le courant capacitif est

$$i_{NW} = \frac{dQ(x,t)}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{5.2}$$

où Q est la charge à l'extrémité libre et est donnée par $Q(x,t) = C(x)(V_{NW}(t) - V_{DC})$.

L'équation électrique qui régit la circulation du courant électrique est

$$-\frac{V_{NW}}{R} = V_{DC}C'\frac{dx}{dt} + C\frac{dV_{NW}}{dt} \tag{5.3}$$

Les équations mécaniques (Éq. 5.1) et électriques (Éq. 5.3) peuvent être combinées pour donner une équation d'ordre 3

$$\frac{T}{\omega_0}\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0 T\left(1+\beta\right)\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{5.4}$$

où deux paramètres sans dimension ont été introduits

$$\begin{aligned} T &= RC\omega_0 \\ \beta &= \frac{(C'V_{DC})^2 k^{-1}}{C} \end{aligned}$$

Le paramètre T est, à un facteur 2π près, le rapport entre le temps électrique RC du circuit électrique et la période $2\pi/\omega_0$. Le paramètre β est le rapport entre la capacité motionnelle $C_m = (C'V_{DC})^2/k$ et la capacité électrique C.

5.2.2 Dissipation électrostatique

L'équation électromécanique 5.4 s'écrit pour des solutions de la forme $x(t) = e^{zt}$

$$\frac{T}{\omega_0}z^3 + z^2 + \omega_0 T\left(1+\beta\right)z + {\omega_0}^2 = 0 \tag{5.5}$$

Dans la limite des faibles couplages ($\beta \ll 1$), les solutions sont à chercher perturbativement sous la forme $z = j\omega_0 t + \epsilon t$ où $\|\epsilon\| \ll \omega_0$. On trouve à l'ordre 1

$$\epsilon\left(2j\omega_0 - 2\omega_0 T\right) = -\beta T {\omega_0}^2 \tag{5.6}$$

soit

$$\epsilon = \omega_0 \frac{i\beta T}{2T - 2i} \tag{5.7}$$

Pour un oscillateur harmonique amorti décrit par

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\tilde{x}} + {\omega_0}^2\tilde{x} = 0 \tag{5.8}$$

ω_0/Q est le taux d'amortissement et apparaît dans les solutions libres ($Q \gg 1$) comme $\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{-\omega_0 t/2Q} \cos\omega_0 t$. D'après la forme des solutions $x(t) = e^{j\omega_0 t + \epsilon t}$ et par analogie avec les solutions pour un oscillateur harmonique, le coefficient d'amortissement peut être pris comme deux fois la partie réelle de z, soit à l'ordre le plus bas

$$\Gamma_{es} = \beta\omega_0 \frac{T}{1+T^2} \tag{5.9}$$

La variation de fréquence est donnée par la partie imaginaire de z, soit à l'ordre le plus bas

$$\Delta f = \frac{\beta\omega_0}{2\pi} \frac{T^2}{1+T^2} \tag{5.10}$$

Le comportement asymptotique peut être exprimé en fonction des grandeurs physiques pour les régimes basse fréquence et haute fréquence

— pour $T \ll 1$

$$\Gamma_{LT} = \beta\omega_0 T = \frac{R(C'V_{DC})^2}{m} \tag{5.11}$$

$$\omega_{LT} = \omega_0 + R^2 \frac{\omega_0 C (C'V_{DC})^2}{2m} \tag{5.12}$$

— pour $T \gg 1$

$$\Gamma_{HT} = \frac{\beta\omega_0}{T} = \frac{G(C'V_{DC})^2}{m{\omega_0}^2 C^2} \tag{5.13}$$

$$\omega_{HT} = \omega_0\sqrt{1+\beta} - G^2 \frac{(C'V_{DC})^2}{2m{\omega_0}^3 C^3} \tag{5.14}$$

où a été introduite la conductivité $G = 1/R$.

On peut signaler que l'expression de la fréquence est différente selon que la fréquence d'excitation est petite ou grande devant la fréquence de coupure. Insistons sur le fait que le temps RC correspond au temps caractéristique de déplacement des charges sur le nanofil.

Pour les basses fréquences ($\omega < 1/RC$), la force capacitive en fonction de la tension alternative est la même que pour une tension continue. Il s'agit de l'approximation d'une force quasi statique à *potentiel imposé*.

Pour les hautes fréquences ($\omega > 1/RC$), l'effet du filtrage par le circuit électrique RC entraîne que les charges n'ont plus le temps de se déplacer. Cela se traduit donc par une force capacitive à *charge imposée*.

L'écart de fréquence entre le régime à basse fréquence (potentiel imposé) et à haute fréquence (charge imposée) est

$$\frac{\omega_{HT} - \omega_{BT}}{2\pi} = \omega_0 \left(\sqrt{1+\beta} - 1\right) > 0 \tag{5.15}$$

5.2.3 Représentation électrique équivalente

Il est possible de donner une équivalence du système électromécanique couplé par un système purement électrique où le résonateur mécanique est représenté par une inductance, résistance et capacité mutuelle $\{L_m, R_m, C_m\}$ (Fig. 5.3 et TAB. 5.1).

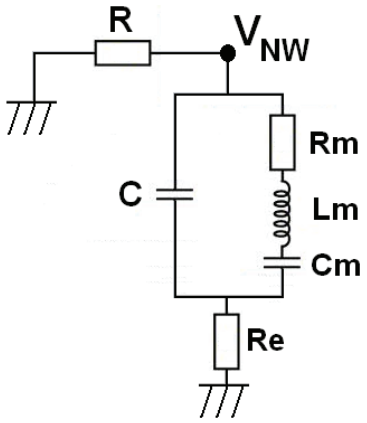


Figure 5.3 Schéma électrique équivalent pour la composante alternative d'un résonateur mécanique $\{L_m, R_m, C_m\}$, de résistance R et couplé par la capacité C à une contre électrode porté à un potentiel V_{DC}. Les valeurs des dipôles équivalents font intervenir la tension V_{DC}, la dérivée de la capacité C' par rapport au mode considéré et les propriétés mécaniques du résonateur (TAB. 5.1). Le potentiel à l'apex du résonateur est représenté par V_{NW}.

Grandeurs mécaniques	équivalent électrique
$C'V_{DC}x$	q_C
m/α^2	L_m
Γ/α^2	R_m
α^2/k	C_m

Table 5.1 Expression des dipôles équivalents en fonction des propriétés mécaniques du résonateur.

5.3 Validation expérimentale

Le résonateur utilisé est un nanofil SiC avec la fréquence du premier mode $f = 7,2$ kHz et un facteur de qualité $Q = 11000 \pm 1000$. Toutes les mesures de spectres de résonance dans cette partie sont réalisées avec la méthode de détection par focalisation du faisceau électronique pour une excitation piézomotive du support du résonateur (voir partie 2.3.1.2). À l'exception de la partie sur la dissipation anisotrope où les deux polarisations sont observées, la vibration mesurée est dans le plan d'observation.

5.3.1 Résistance des résonateurs SiC

Les nanofils SiC utilisés ont des résistances qui peuvent aller du MΩ au TΩ. Dans toute la partie expérimentale, le même résonateur est utilisé mais suite à des étapes de dégazage par chauffage du support, la valeur de sa résistance a progressivement diminué. Les valeurs de résistance électrique de l'échantillon ont été mesurées à plusieurs reprises selon deux méthodes.

Contact du résonateur avec la contre électrode Le résonateur est déplacé relativement à la contre électrode jusqu'au contact de l'extrémité libre. La résistance est estimée à l'aide de la caractéristique courant-tension. La relation courant-tension

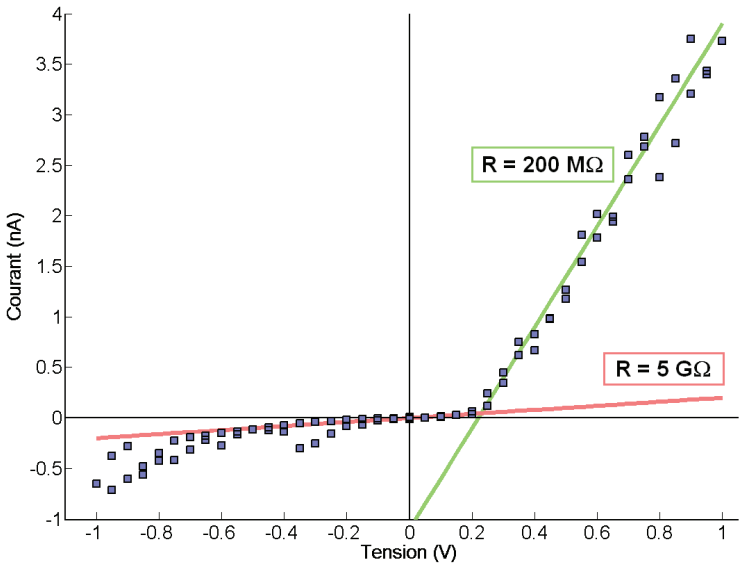


FIGURE 5.4 Caractéristique courant tension pour le résonateur en contact avec la contre électrode.

pour la mesure en contact est non linéaire et permet d'établir une fourchette pour la résistance linéaire locale 200 $M\Omega < R_{NW} < 5\ G\Omega$. On peut signaler que cette méthode est particulièrement imprécise, notamment par la nature médiocre du contact électrique entre le fil de SiC et la contre électrode en or.

Accordage en fréquence du résonateur sous émission de champ Lorsque le résonateur est porté à un potentiel négatif important avec la contre électrode mise à la masse, le fort champ électrique à l'apex du résonateur est suffisamment intense pour arracher des électrons et entraîner un courant moyen au travers de l'émetteur, c'est-à-dire le nanofil résonateur. Une présentation plus détaillée de l'émission de champ sera proposée dans le chapitre 7 consacré aux auto-oscillations (partie 7.2.1). Pour l'instant, on retiendra que l'émission de champ se traduit par un courant moyen mesurable entraînant une chute de potentiel le long de la résistance du résonateur

R (Fig. 5.5). Comme le résonateur est résistif, le courant d'émission de champ i_{EC}

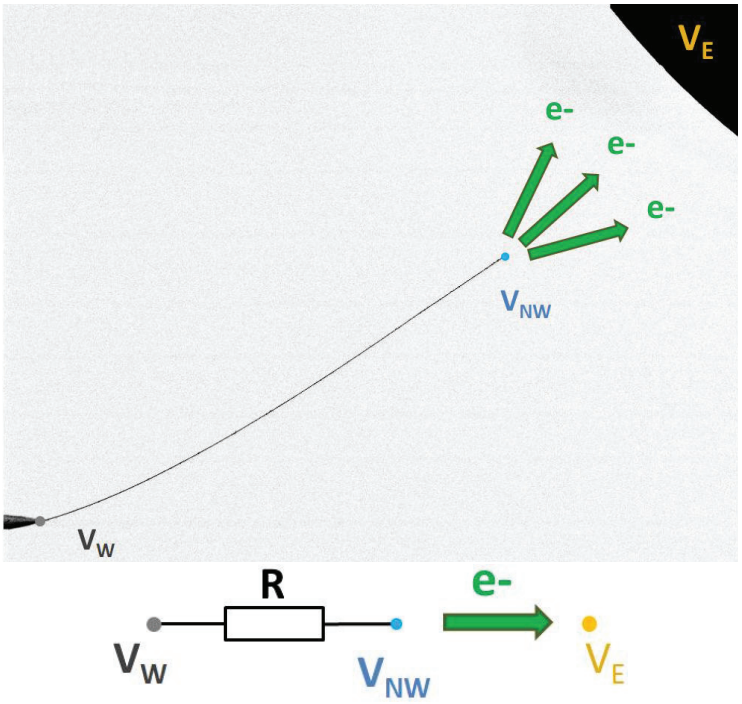


Figure 5.5 Chute de potentiel DC associée à un courant d'émission de champ.

entraîne une chute de potentiel

$$\Delta V = V_{NW} - V_W = R\, i_{EC} \tag{5.16}$$

Cette chute de potentiel peut être mesurée par le comportement en fréquence du résonateur avec la tension $V_{DC} = V_E - V_W$ dans la mesure où l'accordage en fréquence fait apparaître la différence de potentiel entre l'extrémité libre du résonateur et la contre électrode

$$f = \sqrt{{f_0}^2 + \alpha^2 (V_{DC} - \Delta V)^2} \tag{5.17}$$

La fréquence de résonance du premier mode de vibration est mesurée par imagerie MEB pour des valeurs de tension DC croissante. Le courant électrique d'émission de champ est relevé pour chaque valeur de tension appliquée. La fréquence de résonance suit deux régimes d'évolution

— $160V < V_{DC} < 200V$, il n'y a pas d'émission de champ mais la tension DC est suffisamment importante pour que la fréquence soit affine avec la tension DC ($\alpha V_{DC} \gg f_0$).

— $V_{DC} > 210V$, le courant d'émission de champ entraîne une chute de potentiel ΔV le long du fil qui se lit comme la distance horizontale (en Volts) entre les points relevés expérimentalement et l'extrapolation de la courbe d'accordage en fréquence sans émission de champ (en trait continu).

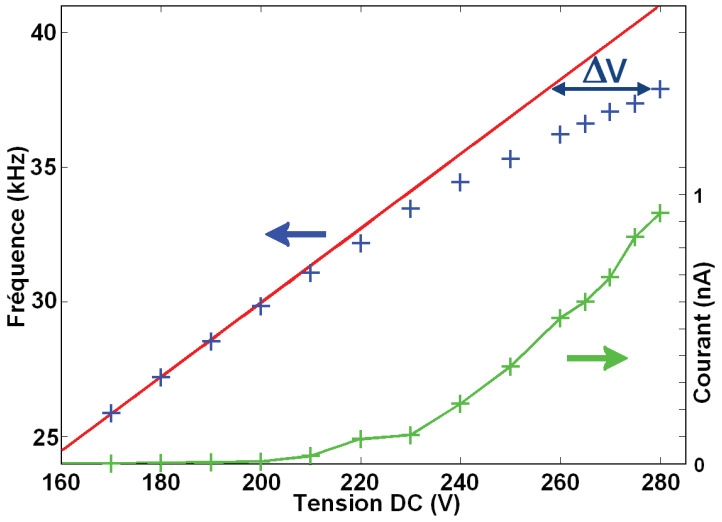


FIGURE 5.6 Fréquence de résonance et courant d'émission de champ en fonction de la tension DC appliquée.

5.3.2 Mesure de la capacité par mesure du temps de réponse électrique

Le temps de réponse électrique $\tau = RC$ du résonateur (cf. Fig. 5.2) est mesuré lorsque le résonateur est en émission de champ. Une tension d'émission de champ négative est appliquée sur le résonateur et une tension créneau (10 V pic à pic, $\sim$ Hz) est modulée sur la contre électrode. Au moment d'un créneau, le potentiel à la base du résonateur change sur un temps rapide ($\sim$ ns) et le potentiel à l'apex change lui avec le temps caractéristique RC. Le détecteur d'électron permet de résoudre en temps l'évolution du courant d'émission de champ qui est l'image du potentiel instantané à l'apex. La mesure se fait dans un régime où la résistance équivalente par l'émission de champ R_{EC} domine la résistance du nanofil R_{NW}. Les deux résistances étant en parallèle pour le chemin du courant de l'apex vers la masse, on a

$$\tau = \left({R_{NW}}^{-1} + {R_{EC}}^{-1}\right)^{-1} C \tag{5.18}$$

soit dans la limite $R_{NW} \ll R_{EC}$

$$\tau = R_{NW} C \tag{5.19}$$

La résistance du nanofil a été mesuré par analyse l'accordage en fréquences sous émission de champ (partie 5.3.1) et il a été trouvé $R = 21\ G\Omega$.

Les mesures obtenues sont pour plusieurs valeurs de tension d'émission de champ (Fig. 5.7). L'étalonnage du courant utilise le courant moyen mesuré par la source de tension. Chaque courbe est obtenue par un moyennage (N = 64) de plusieurs acquisitions synchronisées sur les sauts de créneau.

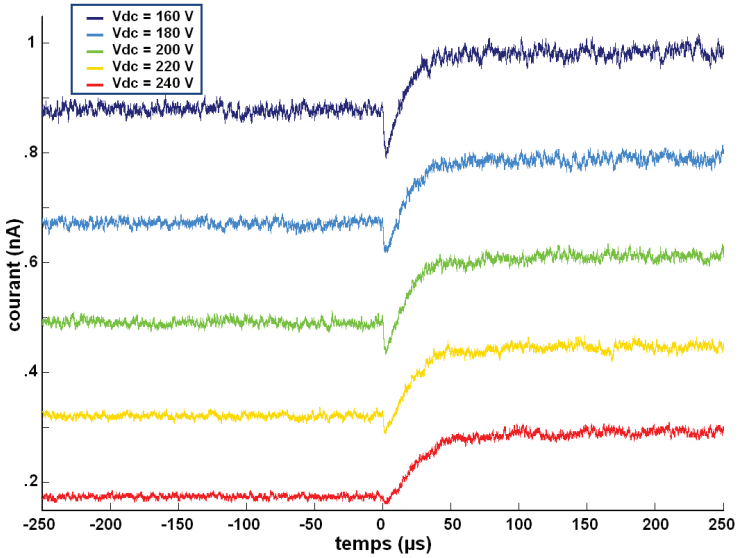


Figure 5.7 Courant d'émission de champ mesuré par le détecteur d'électron en fonction du temps. La tension DC est la tension moyenne modulée à -5 V/+5 V à basse fréquence.

On peut constater un décrochage vers le bas avant l'amortissement exponentiel du courant liée au créneau de tension sur la figure 5.7. Ce décrochage signifie que le résonateur ne se comporte pas uniquement comme un filtre RC au temps cours avec, notamment, une contribution possible des termes mécaniques dans la réponse au créneau électrique. Ce point n'a pas été étudié en détail et la modélisation du courant a été faite sur la partie correspondant à l'amortissement exponentiel seulement.

À partir de la mesure sous émission de champ, on trouve $\tau = 23$ μs, soit $C = 10^{-15}$ F. Par la suite les mesures de dissipation ont été réalisées pour des résistances inférieures à 4 GΩ. Le temps associé τ_{exp} donne $T = 0,2$ ce qui permet d'utiliser la limite de dissipation électrostatique à basse fréquence (Éq. 5.11), dans la mesure où la correction à l'ordre le plus bas (cf. Éq. 5.9) est de l'ordre $T^2 = 0,04$ raisonnablement petite devant 1.

5.3.3 Influence de la géométrie sur la dissipation électrostatique

Une première série de mesure est proposée où la tension DC est maintenue à 10 V et où la position du résonateur par rapport à la contre électrode en or est variée. Le résonateur est déplacé pour 9 positions avec des angles entre le résonateur et la surface variant de 0 à 90 degrés. Pour chaque position, la distance entre le fil et la contre électrode est ajustée autour d'une valeur de référence (Fig. 5.9). La distance moyenne est $d = 39,3$ μm avec un écart type de $0,3$ μm.

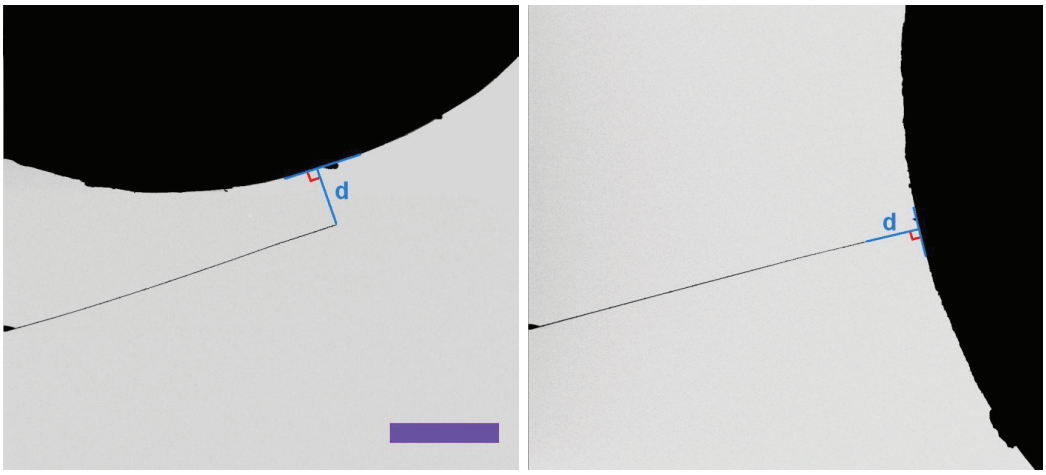


FIGURE 5.8 Le résonateur est placé à plusieurs positions avec la distance d maintenue constante. L'angle entre le résonateur et la surface défini un angle proche de 0°pour la géométrie parallèle à gauche et proche de 90°pour la géométrie perpendiculaire à droite. Barre d'échelle 50 μm.

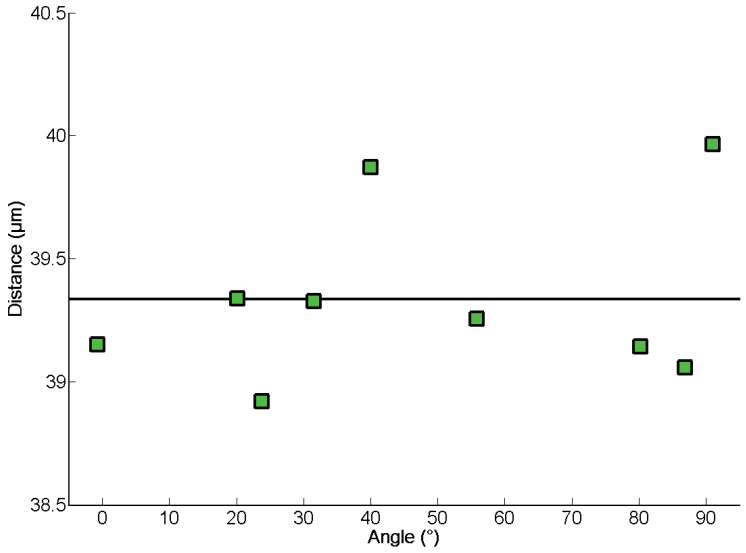


FIGURE 5.9 Distance mesurée par imagerie MEB pour les 9 positions en fonction des angles formés entre le résonateur et la surface de la contre électrode.

Le premier mode de vibration est modélisé par un oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = f_{pz} e^{i\omega_e t} \tag{5.20}$$

où ω_0/Q est le coefficient d'amortissement (résonant) du mode. Pour chaque position d'angle, la détection par focalisation du faisceau MEB est utilisée (cf. partie 2.3.1.2) et le déphasage du mouvement oscillant avec l'excitation est utilisé pour extraire la fréquence de résonance et le facteur de qualité ou de manière équivalente l'amortissement. L'expression du déphasage pour la modélisation s'obtient en introduisant la relation entre l'excitation et le déplacement autour de la résonance sous la forme

$$x = \frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}} f_{pz} e^{i\omega_e t} \tag{5.21}$$

et en mettant en facteur la norme de x

$$x = \frac{1}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}} (\cos\phi + i\sin\phi) f_{pz} e^{i\omega_e t} \tag{5.22}$$

où la tangente de ϕ s'exprime à partir du rapport des parties imaginaires et réelles normalisées

$$\phi = -\arctan\left(\frac{f f_0}{Q\left({f_0}^2 - f^2\right)}\right) \tag{5.23}$$

avec f et f_0 les fréquences d'excitation et de résonance.

La fréquence de résonance en fonction de l'angle θ est tracée sur la figure 5.10. L'accordage en fréquence électrostatique passe d'un régime de tirage longitudinal ($\theta > 50°$) avec une augmentation de la fréquence à un régime de force électrostatique transversale ($\theta < 50°$) avec diminution de la fréquence par rapport à la fréquence sans interaction électrostatique.

L'amortissement en fonction de l'angle est présenté sur la figure 5.11

Le coefficient d'amortissement est le plus faible pour une position du résonateur perpendiculaire à la surface, lorsque les vibrations du résonateur sont parallèles à la surface, et il augmente jusqu'à la position parallèle où la vibration du résonateur entraîne la plus forte modulation de la distance de l'extrémité libre avec la surface.

Les données expérimentales sont modélisées par

$$\frac{\omega_0}{Q} = \Gamma_0 + \frac{R(C'V_{DC})^2}{m} \tag{5.24}$$

où Γ_0 est la dissipation du résonateur en l'absence de tension DC. La dérivée de la capacité C' est déterminée expérimentalement à partir des images MEB de la déflection statique du résonateur et avec l'hypothèse que le mode de vibration et le mode de déformation statique sont identiques. La formule reliant la déflection statique x_b

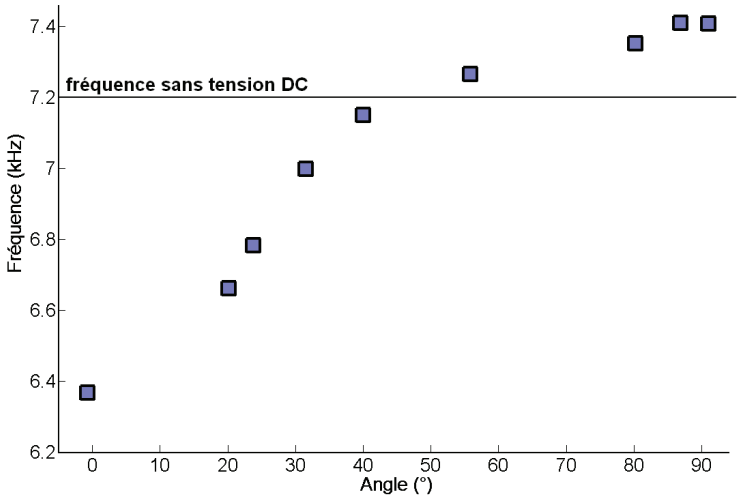


FIGURE 5.10 Fréquence de résonance du premier mode de vibration dans le plan d'observation en fonction de l'angle entre le résonateur et la contre électrode. La tension DC appliquée entre le résonateur et la contre électrode est 10 V. La ligne horizontale marque la fréquence du résonateur sans tension et pour une position éloignée de la contre électrode.

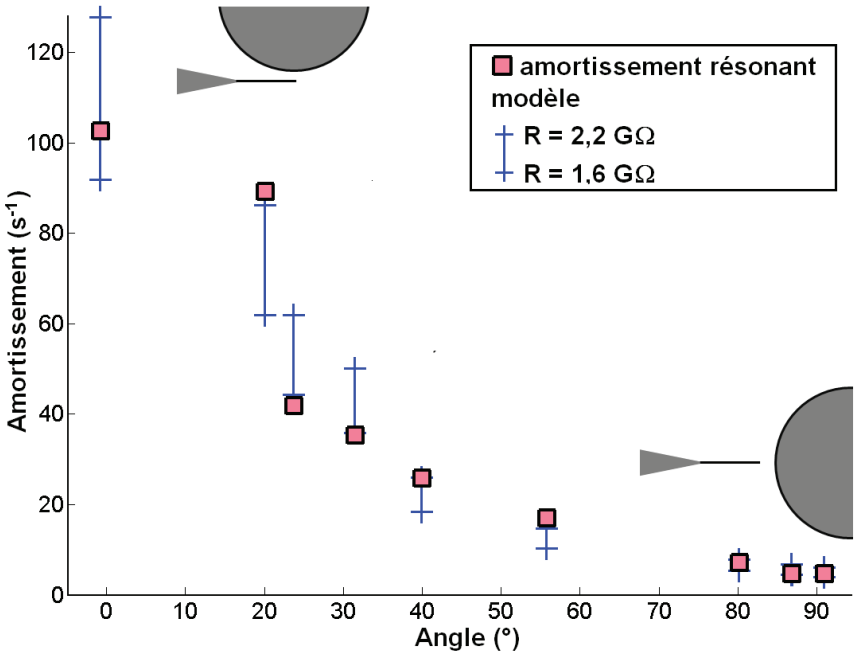


FIGURE 5.11 (carré) Amortissement mesuré par la modélisation du déphasage autour de la résonance mécanique en fonction de l'angle θ. Les barres d'erreur superposées correspondent au modèle de dissipation électrostatique avec une estimation de C' par analyse de la déflection statique.

à C' est donnée dans la partie 2.2.2 comme l'équilibre des forces électrostatiques et de raideur

$$-m{\omega_0}^2 x_b + \frac{1}{2}C'{V_{DC}}^2 = 0 \tag{5.25}$$

soit

$$\frac{\omega_0}{Q} = \Gamma_0 + 4mR\left(\frac{{\omega_0}^2 x_b}{V_{DC}}\right)^2 \tag{5.26}$$

Les données expérimentales sont ajustées pour $1,6\ \mathrm{G\Omega} < R < 2,2\ \mathrm{G\Omega}$ et un amortissement résiduel $\Gamma_0 = 5\ \mathrm{s}^{-1}$.

5.3.4 Effet de la tension DC

5.3.4.1 Cas du support du résonateur fixe

Les spectres de résonance sont mesurés pour une position du support fixe et pour une tension DC variable. La dérivée de la capacité est estimée en utilisant un développement analogue à celui de la partie 2.2.2

$$x_b = \frac{\frac{C_2}{2k}}{1+\frac{C_2}{2k}V_{DC}^2} x_{\mathrm{lim}} V_{DC}^2 \tag{5.27}$$

avec $C_2 = 2,8\ \mathrm{nF.m}^{-2}$ la dérivée seconde de la capacité et $C' = C_2(x_{lim} - x)$ avec $x_{lim} = 78,5\ \mu\mathrm{m}$.

La dissipation en fonction de la tension suit deux régimes (Fig. 5.12)

— $\mathrm{V} < 50$ V la dissipation augmente de manière quadratique avec la tension comme prévu par l'équation 5.24 dans la mesure où C' ne varie pas

— $\mathrm{V} > 50$ V la dissipation sature et diminue car malgré l'augmentation de V_{DC} dans l'équation 5.24, le terme C' tend vers 0 car x tend vers x_{lim} (cf. Éq. 5.26) où $\frac{\omega_0}{Q} \sim 1/{V_{DC}}^2$).

5.3.4.2 Géométrie capacitive constante

Une deuxième série de mesures avec V_{DC} variable a été réalisée en fixant les autres paramètres dans l'équation 5.24. Cette mesure est rendue difficile par le fait qu'un changement de V_{DC} entraîne un déplacement statique du résonateur, entraînant alors une variation de C' (une diminution en général). Pour contourner ce problème, pour chaque valeur de tension V_{DC}, le support du résonateur était déplacé par rapport à la contre électrode pour permettre de conserver une géométrie de l'extrémité du nanofil avec la contre électrode constante (Fig. 5.13, distance d et angle θ).

Les données expérimentales sont ajustées en utilisant le modèle de dissipation avec la déflection statique (Éq. 5.24) pour $1,32\ \mathrm{G\Omega} < R < 1,47\ \mathrm{G\Omega}$ et un amortissement résiduel $\Gamma_0 = 3,7\ \mathrm{s}^{-1}$.

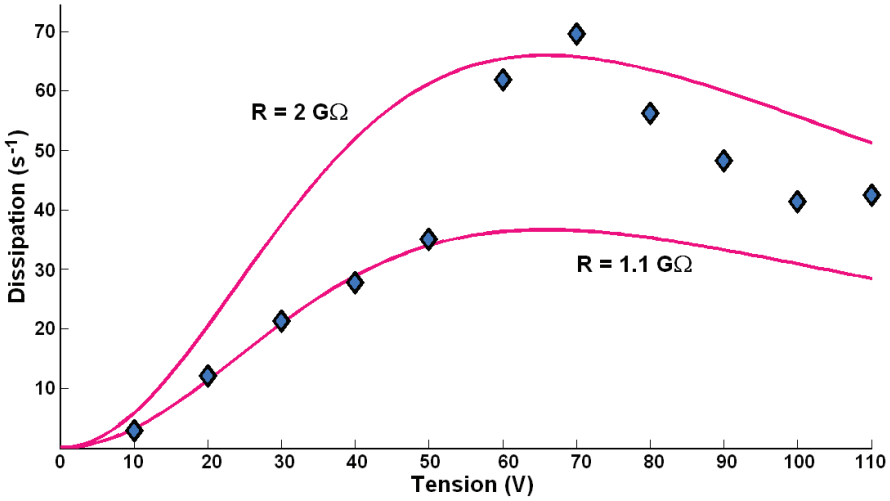


FIGURE 5.12 Amortissement mesuré par la largeur de la résonance en fonction de la tension V_{DC} pour une position du support du résonateur fixe. Les deux courbes en traits continus correspondent à deux valeurs de résistance.

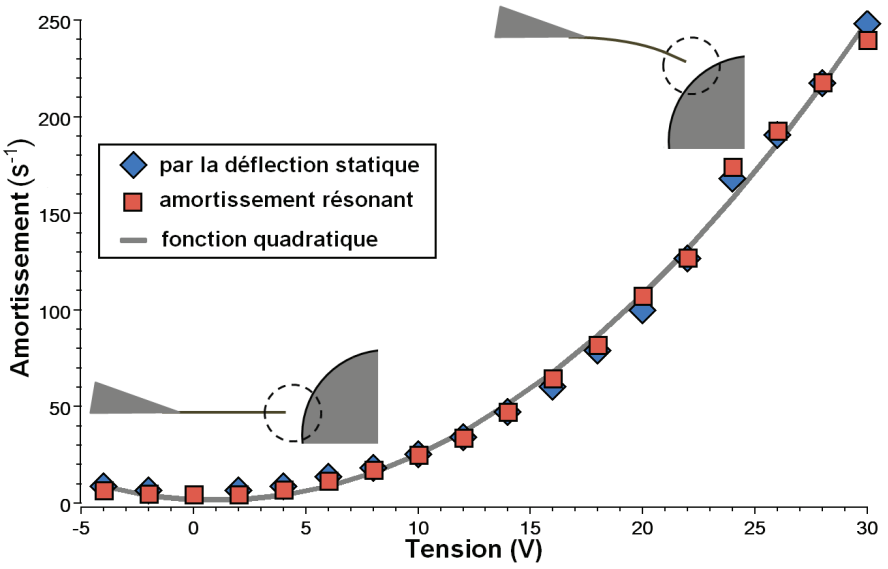


FIGURE 5.13 Amortissement en fonction de la tension DC. La géométrie locale de l'extrémité du résonateur avec la contre électrode (angle et distance) est maintenue constante en déplaçant pour chaque valeur de tension le support du résonateur par rapport à la contre électrode. Le modèle utilisé est quadratique en tension (cf. Éq. 5.24).

5.3.4.3 Dissipation anisotrope

Une dernière série de mesure est proposée avec un second nanofil SiC comme contre électrode. Les deux nanofils sont quasi parallèles au plan d'observation mais un léger décalage sur l'axe vertical permet l'observation des deux polarisations. Le comportement en fréquence de cette géométrie a déjà été présenté dans la partie 2.4.4 concernant les polarisations (Fig. 2.27). Il a été montré notamment que la polarisation parallèle $x_{\parallel}$ correspond à une modulation maximale de la distance avec la contre électrode et que la polarisation $x_{\perp}$ correspond à une vibration à distance constante de la contre électrode. Il est observé que seule la polarisation qui correspond à une modulation de la distance avec la vibration voit une dissipation liée à l'augmentation de V_{DC} (Fig. 2.27).

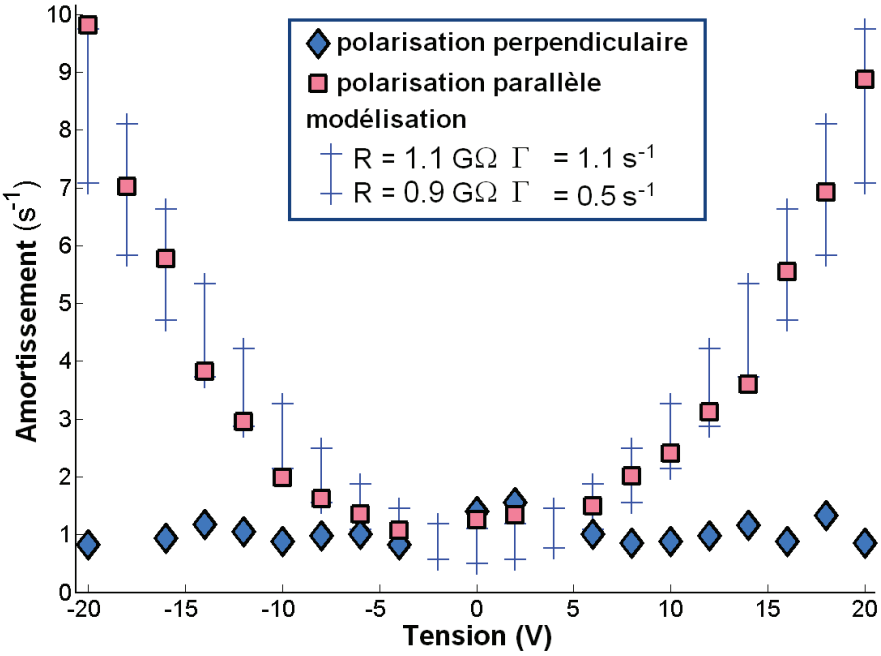


Figure 5.14 Amortissement des deux polarisations parallèles et perpendiculaires au plan d'observation en fonction de la tension DC.

L'accord avec le modèle pour C' constant (Éq. 5.24) donne $0,9\ \mathrm{G\Omega} < R < 1,1\ \mathrm{G\Omega}$ et $0{,}5\ \mathrm{s}^{-1} < \Gamma_0 < 1,1\ \mathrm{s}^{-1}$.

5.3.5 Évolutions de la résistance

Plusieurs étapes de dégazage du résonateur par chauffage de son support ont été réalisées. Ces étapes ont eu pour effet de faire progressivement diminuer la résistance de l'échantillon. Chaque chauffage dure 1 à 3 minutes. Les premiers chauffages ont eu lieu pour des températures de 600 °C et la température était graduellement augmentée à chaque chauffage pour atteindre 800 °C pour le dernier dégazage.

TABLE 5.2 Évolution de la résistance du résonateur avec les étapes de dégazage. EC : émission de champ.

# chauffage	R (GΩ)	mesure
0	22	accordage en fréquence (EC)
3	6.5	accordage en fréquence (EC)
12	1.9	dissipation dépendant de R
13	1.4	dissipation dépendant de R
14	< 1	accordage en fréquence (EC)
14	0,2-5	contact avec la contre électrode
14	1	dissipation dépendant de R (R série nanofil/électrode)

Pour les résistances les plus faibles correspondant à 14 étapes de chauffage, il est à remarquer que la mesure par accordage sous émission de champ n'est plus assez sensible pour mesurer la chute du potentiel inférieure au volt, notamment par la faute des changements de fréquence de résonance liés à l'instabilité du courant d'émission de champ. La mesure par contact est également imprécise pour donner une valeur de résistance appréciable. La mesure à deux fils permet d'évaluer une résistance en série des deux fils avec une incertitude de l'ordre de 10 %.

5.4 Courbe universelle de la dissipation électrostatique

Dans la limite $\beta \ll 1$ la dissipation électrostatique d'un résonateur peut être décrite par l'équation 5.9

$$\Gamma_{es} = \beta\omega_0 \frac{T}{1+T^2} \tag{5.28}$$

où β fixe la valeur de dissipation maximale électrostatique

$$\Gamma_{es}{}^{max} = \frac{1}{2}\beta\omega_0 \tag{5.29}$$

donnant le facteur de qualité minimal

$$Q_{min} = \frac{2}{\beta} \tag{5.30}$$

De manière générale la dissipation d'un résonateur peut être décrite par

$$\Gamma_t = \frac{\omega_0}{Q} = \Gamma_{ex} + \beta\omega_0 \frac{T}{1+T^2} \tag{5.31}$$

où Γ_{ex} représente toute les sources de dissipation autre que la dissipation électrostatique. L'équation 5.32 se traduit par

$$\frac{1}{\beta Q} = \frac{\Gamma_{ex}}{\beta\omega_0} + \frac{T}{1+T^2} \tag{5.32}$$

où l'expression des deux grandeurs adimensionnées est rappelée

$$\begin{aligned} T &= RC\omega_0 \\ \beta &= \frac{(C'V_{DC})^2 k^{-1}}{C} \end{aligned}$$

À partir de cette formulation, il existe une courbe universelle $f(T) = T/(1+T^2)$ qui représente la dissipation minimale accessible pour le résonateur. Pour les données expérimentales provenant d'études publiées par plusieurs groupes, il est possible de situer un point sur un graphe d'abscisse T et d'ordonnée $1/(\beta Q)$ afin de vérifier la validité de la limite de dissipation minimale (Fig. 5.15).

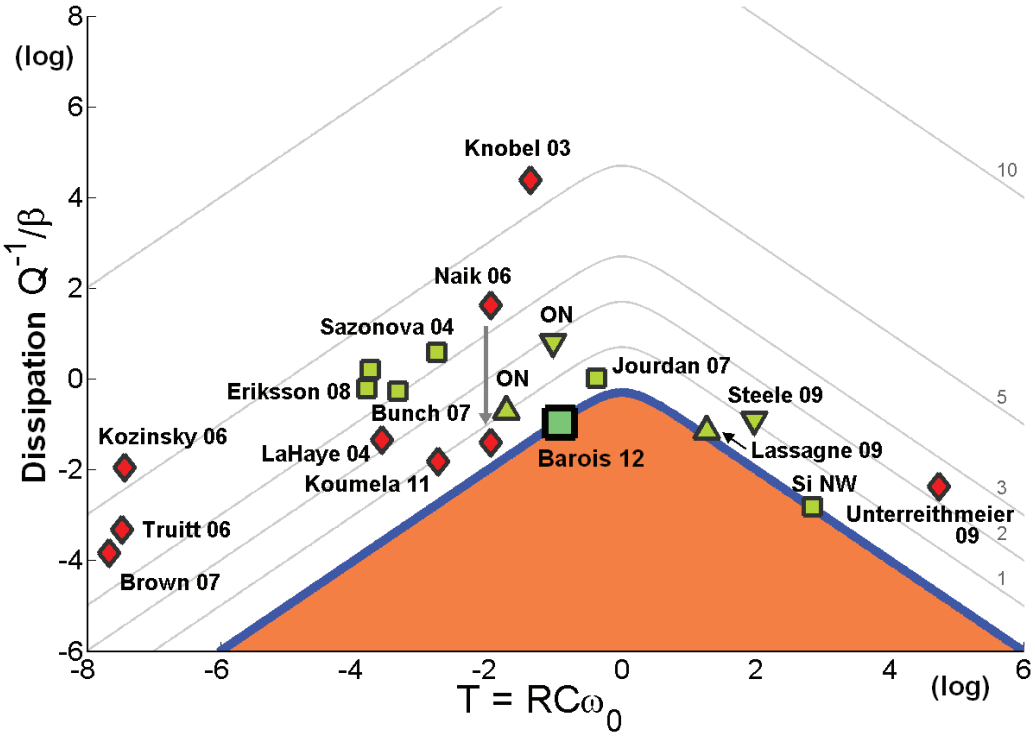


FIGURE 5.15 Dissipation normalisée Q^{-1}/β en fonction du rapport des temps électriques et mécaniques T pour plusieurs travaux publiés. Les losanges correspondent à des échantillons top-down et les carrés/triangles à des échantillons bottom-up. Les facteurs de qualité expérimentaux Q ainsi que les paramètres servant à obtenir T et β sont donnés dans le tableau 5.3. Les axes sont en échelles logarithmiques. Les deux données ON correspondent aux états passants pour les mesures de Lassagne et al. (2009) et Steele et al. (2009)

Conclusion du chapitre

Lorsqu'un résonateur est résistif, il a été montré que la vibration mécanique pouvait être associée à un courant électrique entraînant une augmentation de la dissipation mécanique. L'existence d'une capacité électrique impliquant le résonateur est le point central de la dissipation électrostatique dans la mesure où elle permet d'assurer un couplage entre variables électriques et mécaniques. En ce sens, un modèle électromécanique a été utilisé pour rendre compte des mesures pour plusieurs configurations où la dissipation peut être contrôlée par une tension électrique continue. L'établissement d'une formulation universelle permet de quantifier la contribution de la dissipation électrostatique dans une variété de situations expérimentales tirées de travaux publiés.

En faisant un retour sur la notion de shear force qui avait été l'origine de ce travail de dissipation électrostatique, on peut dire que l'effet d'un couplage capacitif pour un résonateur résistif induit un terme de dissipation qui présente une certaine

analogie avec une dissipation du type cisaillement visqueux :

- pour un cisaillement visqueux, l'intensité de la force dissipative augmente à mesure que l'on déplace un objet à proximité d'une surface.
- pour une force de dissipation électrostatique, lorsque la distance du résonateur avec la contre électrode diminue, la capacité électrique augmente, ce qui augmente la quantité de charge électrique participant au courant augmentant alors la force de dissipation.

TABLE 5.3 Paramètres électromécaniques nécessaires au calcul de la dissipation normalisée Q^{-1}/β et du rapport de temps T pour les points expérimentaux de la figure 5.15. (police normale - paramètres donnés explicitement par les auteurs ou communément acceptés(*), en italique - estimés à partir des détails des articles, † prise en compte de la résistance de la contre électrode.).

Auteur	f (MHz)	Q	m_e(kg)	$R(\Omega)$	C(fF)	C'(pF.m^{-1})	bias (V)
Barois et al. (2012)	0.007	1500	5.10^{-15}	1.4 G	1	1	10
Si NW	1	500	3.10^{-17}	1 T	0.1	1	400
Sazonova et al. (2004)	55	80	1.10^{-21}	50 k	0.01	4	2.2
Jourdan et al. (2007)	0.005	580	3.10^{-10}	30 M	440	28000	0.5
Bunch et al. (2007)	36	60	1.10^{-17}	*10* k	*0.2*	*1000*	2
Eriksson et al. (2008)	62	55	3.10^{-18}	*100* k	0.005	*20*	0.1
	54	22	3.10^{-18}	*100* k	0.005	*20*	18
Lassagne et al. (2009)	50	400	2.10^{-21}	*1* G	0.06	4*	6
Lassagne et al. (2009) (ON)	50	100	2.10^{-21}	*1* M	0.06	4*	6
Steele et al. (2009)	250	150000	2.10^{-21}	*1* G	0.06	4*	1
Steele et al. (2009) (ON)	250	2900	2.10^{-21}	*1* M	0.06	4*	1
Knobel et Cleland (2003)	117	1700	3.10^{-15}	100 k†	0.6	30	5
LaHaye et al. (2004)	19.7	50000	1.10^{-15}	70 k†	0.03	30	15
Naik et al. (2006)	21.9	120000	6.10^{-16}	200 k†	0.4	300	0.1
	21.9	13000	6.10^{-16}	200 k†	0.4	300	10
Kozinsky et al. (2006)	8.6	2500	3.10^{-16}	*10*	0.07	80	20
Brown et al. (2007)	0.007	20000	2.10^{-9}	5	100	*8000*	50
Truitt et al. (2006)	11	30000	1.10^{-15}	10	0.05	300	15
Unterreithmeier et al. (2009)	8.9	150000	2.10^{-15}	$>$ T	*1*	3000	1
Koumela et al. (2011)	1195	2000	7.10^{-17}	100 k	0.03	250	20

Bibliographie

Barois, T., A. Ayari, A. Siria, S. Perisanu, P. Vincent, P. Poncharal et S. T. Purcell, 2012 : Ohmic electromechanical dissipation in nanomechanical cantilevers. *Phys. Rev. B* **85**, 075407.

Brown, K. R., J. Britton, R. J. Epstein, J. Chiaverini, D. Leibfried et D. J. Wineland, 2007 : Passive cooling of a micromechanical oscillator with a resonant electric circuit. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 137205.

Bunch, J. S., A. M. van der Zande, S. S. Verbridge, I. W. Frank, D. M. Tanenbaum, J. M. Parpia, H. G. Craighead et P. L. McEuen, 2007 : Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science* **315**, 490.

Choi, W. J., Y. Jeon, J.-H. Jeong, R. Sood et S. G. Kim, 2006 : Energy harvesting MEMS device based on thin film piezoelectric cantilevers. *J. Electroceram* **17**, 543.

Eichler, A., J.Moser, J. Chaste, M. Zdrojek, I. Wilson-Rae et A. Bachtold, 2011 : Nonlinear damping in mechanical resonators made from carbon nanotubes and graphene. *Nature Nanotechnology* **6**, 339.

Eriksson, A., S. Lee, A. A. Sourab, A. Isacsson, R. Kaunisto, J. M. Kinaret et E. E. B. Campbell, 2008 : Direct transmission detection of tunable mechanical resonance in an individual carbon nanofiber relay. *Nano Lett.* **8**, 1224.

Gotsmann, B., 2011 : Sliding on vacuum. *Nature Mater.* **10**, 87.

Jourdan, G., G. Torricelli, J. Chevrier et F. Comin, 2007 : Tuning the effective coupling of an AFM lever to a thermal bath. *Nanotechnology* **18**, 475502.

Karrai, K. et I. Tiemann, 2000 : Interfacial shear force microscopy. *Phys. Rev. B* **62**, 174.

Knobel, R. G. et A. N. Cleland, 2003 : Nanometre-scale displacement sensing using a single electron transistor. *Nature* **424**, 291.

Koumela, A., D. Mercier, C. Dupré, G. Jourdan, C. Marcoux, E. Ollier, S. T. Purcell et L. Duraffourg, 2011 : Piezoresistance of top-down suspended Si nanowires. *Nanotechnology* **22**, 395701.

Kozinsky, I., H. W. C. Postma, I. Bargatin et M. L. Roukes, 2006 : Tuning nonlinearity, dynamic range, and frequency of nanomechanical resonators. *Appl. Phys. Lett.* **88**, 253101.

LaHaye, M. D., O. Buu, B. Camarota et K. C. Schwab, 2004 : Approaching the quantum limit of a nanomechanical resonator. *Science* **304**, 74.

Lassagne, B., Y. Tarakanov, J. Kinaret, D. Garcia-Sanchez et A. Bachtold, 2009 : Coupling mechanics to charge transport in carbon nanotube mechanical resonators. *Science* **325**, 1107.

Moheimani, S. O. R., 2003 : A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *IEEE. T. Contr. Syst. T.* **11**, 482.

Naik, A., O. Buu, M. D. LaHaye, A. D. Armour, A. A. Clerk, M. P. Blencowe et K. C. Schwab, 2006 : Cooling a nanomechanical resonator with quantum back-action. *Nature* **443**, 193.

Sazonova, V., 2006 : *A Tunable Carbon Nanotube Resonator*. PhD thesis Cornell university.

Sazonova, V., Y. Yaish, H. Üstünel, D. Roundy, T. A. Arias et P. L. McEuen, 2004 : A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator. *Nature* **431**, 284.

Siria, A., T. Barois, K. Vilella, S. Perisanu, A. Ayari, D. Guillot, S. T. Purcell et P. Poncharal, 2012 : Electron fluctuation induced resonance broadening in nano electromechanical systems : The origin of shear force in vacuum. *Nano Lett.* **12**, 3551.

Steele, G. A., A. K. Hüttel, B. Witkamp, M. Poot, H. B. Meerwaldt, L. P. Kouwenhoven et H. S. J. van der Zant, 2009 : Strong coupling between single-electron tunneling and nanomechanical motion. *Science* **325**, 1103.

Truitt, P. A., J. B. Hertzberg, C. C. Huang, K. L. Ekinci et K. C. Schwab, 2006 : Efficient and sensitive capacitive readout of nanomechanical resonator arrays. *Nano Lett.* **7**, 120.

Unterreithmeier, Q. P., E. M. Weig et J. P. Kotthaus, 2009 : Universal transduction scheme for nanomechanical systems based on dielectric forces. *Nature* **458**, 1001.

Chapitre 6

Nano radio : détection de résonances de nanotubes de carbone

Ce chapitre est le seul portant sur les résonateurs doublement encastrés à nanotubes de carbone. Il correspond à un travail effectué à mon arrivée dans l'équipe.

Une introduction des résonateurs à base de nanotubes de carbone est proposée suivie d'une présentation des échantillons avec une présentation des propriétés électriques et mécaniques. La technique de détection par modulation de fréquence et ensuite montrée dans la dernière partie du chapitre.

6.1 Introduction aux nanotubes de carbone comme résonateurs électromécaniques

L'engouement pour les nanotubes de carbone a commencé avec la publication de Iijima (1991) [1] et leur observation au microscope électronique à transmission. La première observation de nanotubes de carbone est probablement à mettre à l'actif de Radushkevich et Lukyanovich (1952), rapportée dans un article publié en russe, ce qui n'a pas aidé à une large propagation dans la communauté occidentale [2].

L'utilisation de nanotubes de carbone a notamment été suivie pour la réalisation de transistor Tans et al. (1998); Martel et al. (1998); Tarakanov et Kinaret (2007). Si les performances des transistors à nanotubes ne concurrencent pas le marché des semi-conducteurs, l'utilisation de la géométrie transistor a permis le développement et la détection de résonateur à base de nanotubes Sazonova et al. (2004); Sazonova (2006).

Les applications originales de résonateurs à base de nanotubes de carbone ont permis la mesure de masse vers l'échelle atomique Jensen et al. (2008); Chaste et al. (2012), l'observation des effets de couplage liés au blocage de Coulomb Steele et al.

1. La barre des 13 000 citations est franchie début 2012 selon Web of Knowledge
2. Walker Jr. et al. (1959) de l'université de Pennsylvania State ont sportivement cité leurs travaux en pleine guerre froide.

(2009); Lassagne et al. (2009) et la fabrication de dispositif démodulateurs radio Jensen et al. (2007); Rutherglen et Burke (2007); Vincent et al. (2011, 2012).

Dans la suite de ce chapitre, l'utilisation de nanotubes résonants en configuration transistor va être présentée en lien avec la notion de démodulation radio pour un signal d'excitation modulé en fréquence (Gouttenoire et al., 2010).

6.2 Les résonateurs à base de nanotubes de carbone suspendus

Des nanotubes de carbone mono feuillet sont utilisés comme élément résonant dans une géométrie de type encastré-encastré.

6.2.1 Fabrication des échantillons

Croissance des nanotubes La technique de synthèse des nanotubes est une croissance catalysée à partir de gaz d'hydrocarbures portés à haute température (CVD pour Chemical Vapor Deposition). La croissance se fait directement sur le substrat où sont déposées des particules catalytiques métalliques. Le substrat est composé d'une couche de silicium fortement dopé et recouverte d'une fine couche isolante de silicium oxydé. La mesure par AFM après croissance permet de contrôler la présence des nanotubes (Fig. 6.1).

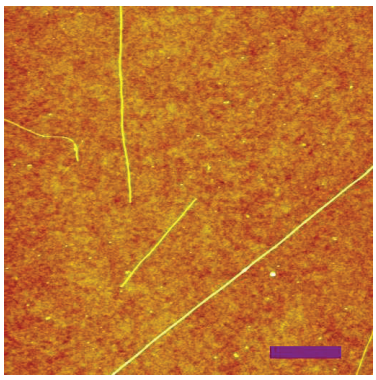


Figure 6.1 Nanotubes de carbone observés par AFM. Barre d'échelle 100 nm.

Dépôt des électrodes Les électrodes sont déposées sous forme d'un motif répétitif sur le substrat et les nanotubes forment un réseau aléatoire entre les électrodes lithographiées. Le substrat en silicium est couvert d'une couche superficielle d'oxyde de silicium suffisante pour isoler électriquement les électrodes du substrat conducteur dans le volume.

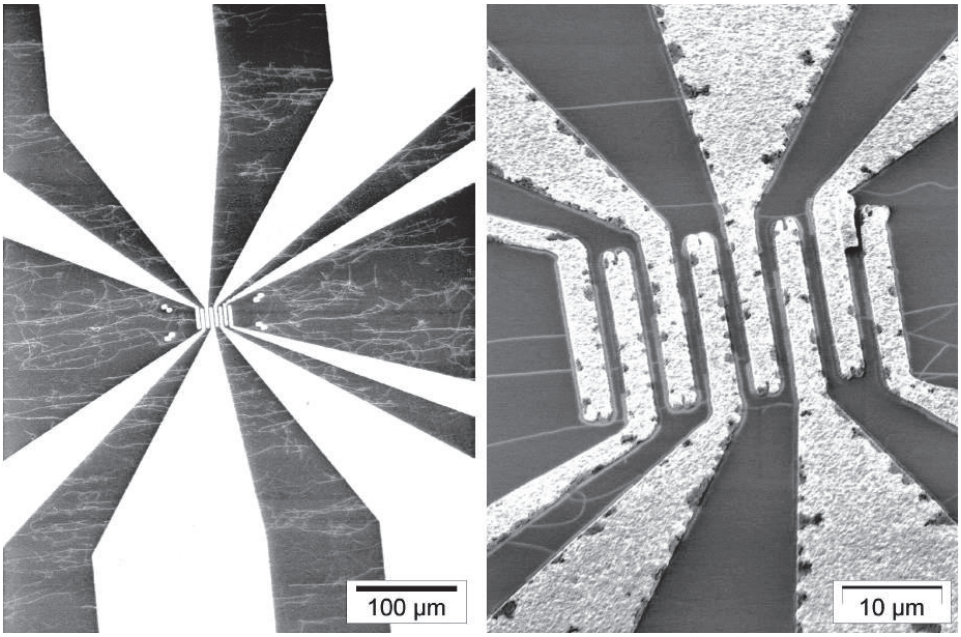


FIGURE 6.2 Image MEB. Chaque motif est constitué de huit électrodes d'or suffisamment larges pour pouvoir y déposer les pointes qui serviront de contacts électriques. Les électrodes convergent vers un réseau de pistes interdigitées avec un écart entre les pistes de l'ordre du micromètre. Certains nanotubes forment un contact entre deux pistes voisines.

Obtention de nanotubes suspendus La couche superficielle du substrat composée de silicium oxydé est gravée chimiquement pour libérer les nanotubes entre les électrodes.

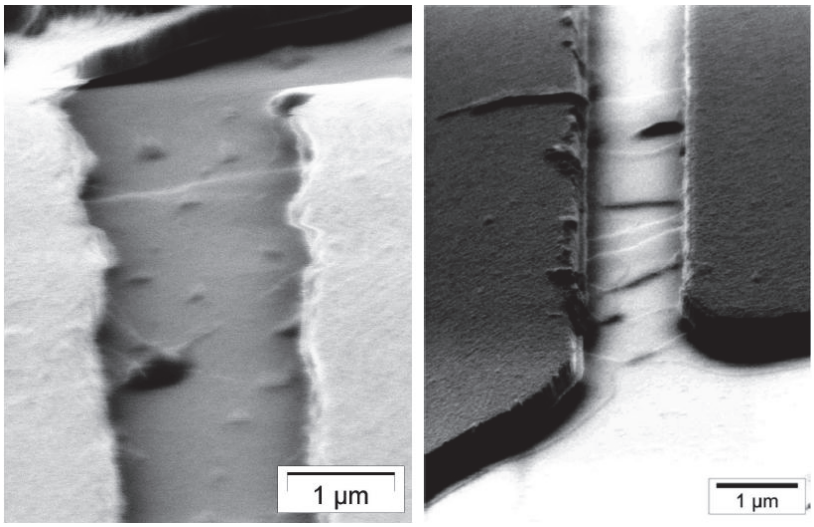


Figure 6.3 Image MEB avec des nanotubes de carbone traversant une tranchée entre deux électrodes voisines. Sur l'image de droite, certains nanotubes sont en contact avec le substrat.

Ce procédé permet de graver une vingtaine de motifs par centimètres carré avec une population de nanotubes répartis aléatoirement entre les huit électrodes de chaque motif. La distance des nanotubes au substrat conducteur est de l'ordre de 300 nm.

6.2.2 Caractérisation électrique comme transistor à effet de champ

La caractérisation des échantillons est réalisée à l'aide du testeur sous pointes UHV. Deux des pointes du testeur sont utilisées pour contacter deux pistes voisines et la troisième pointe est utilisée pour contacter le substrat (Fig. 6.4).

Le potentiel du substrat sera appelé le potentiel de grille. Une des électrodes connectée est mise à la masse et l'autre est porté à une tension source $V_s = 10$ mV. Le courant traversant les nanotubes connectant les deux électrodes est mesuré pour plusieurs valeurs de la tension de grille V_g sur une plage où $V_g \gg V_s$ (Fig. 6.5).

La conduction des nanotubes de carbone est sensible à l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel entre le nanotube et la grille ($V_g \gg V_s$). Il s'agit du comportement d'un transistor à effet de champ. Le courant électrique traversant un nanotube de carbone peut s'écrire

$$I_{NT} = G(C_g(x_i), V_g)V_s \tag{6.1}$$

où G est la transconductance du nanotube dépendant de la capacité formé par le nanotube et la grille $C_g(x_i)$ et de la tension de la grille V_g. La capacité $C_g(x_i)$

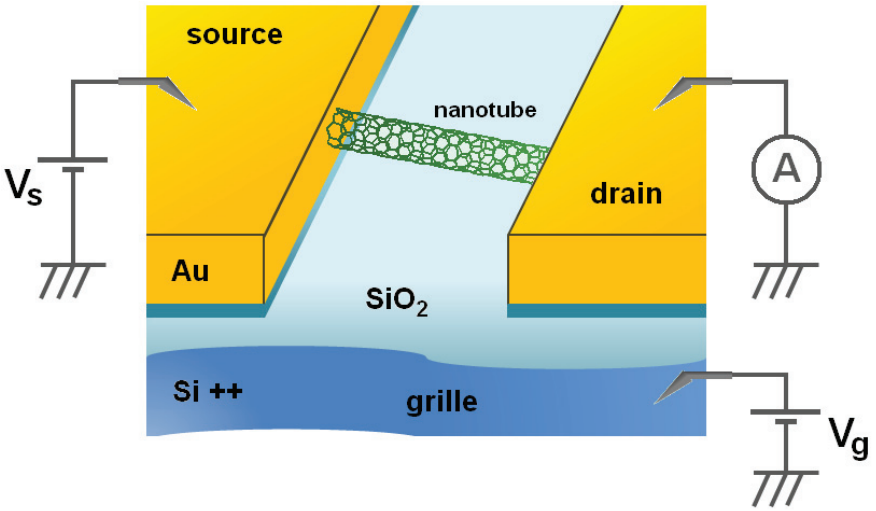


FIGURE 6.4 Les deux électrodes connectées sont appelées conventionnellement la source où la tension est appliquée et le drain pour l'électrode de mesure de courant. Un troisième potentiel est appliqué à la grille. La couche d'oxyde de silicium isole électriquement la grille des électrodes de mesure.

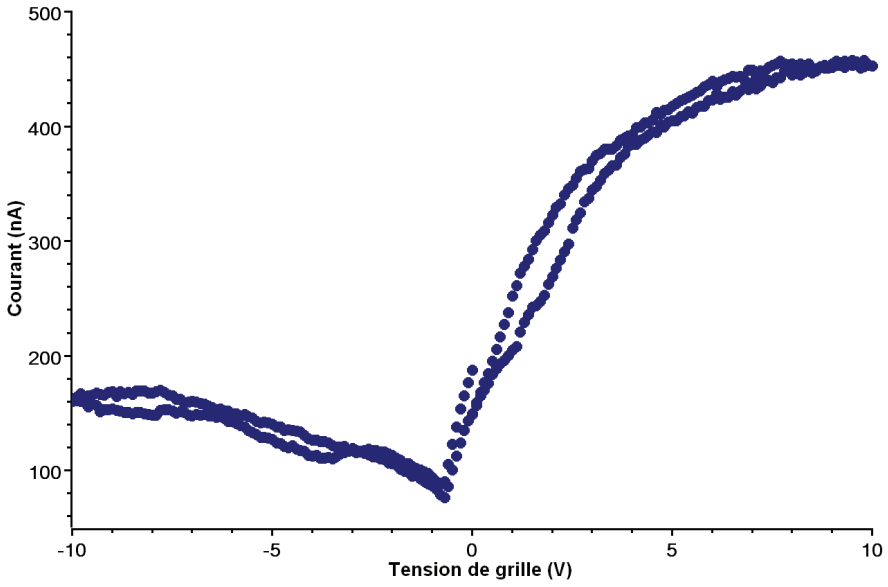


FIGURE 6.5 Mesure du courant traversant les nanotubes entre deux électrodes voisine pour une tension entre les deux électrodes de 10 mV. Le courant traversant les nanotubes est fortement dépendant de la tension de grille.

fait intervenir le profil x_i du mode de vibration puisque l'une des armatures est le nanotube.

6.2.3 Résonance mécanique

6.2.3.1 Résonances en configuration encastré-encastré

La résonance d'un nanotube de carbone encastré-encastré est décrite par l'équation d'onde définie dans le chapitre 2

$$\mu \frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} + E\mathcal{I} \frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4} = 0 \tag{6.2}$$

et la résolution diffère par l'expression des conditions aux limites d'encastrement parfait

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0 && (6.3)\\ \frac{d\psi}{dx}(0) &= 0 && (6.4)\\ \psi(L) &= 0 && (6.5)\\ \frac{d\psi}{dx}(L) &= 0 && (6.6) \end{aligned}$$

Les conditions 6.3 et 6.4 entraînent

$$\psi(x) = A(\cosh kx - \cos kx) + B(\sinh kx - \sin kx) \tag{6.7}$$

Les conditions 6.5 et 6.6 s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \cosh kL - \cos kL & \sinh kL - \sin kL \\ \sinh kL + \sin kL & \cosh kL - \cos kL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \tag{6.8}$$

Les solutions non nulles s'obtiennent lorsque le déterminant de la matrice est nul

$$(\cosh^2 kL - 2\cos kL \cosh kL + \cos^2 kL) - (\sinh^2 kL - \sin^2 kL) = 0 \tag{6.9}$$

c'est-à-dire

$$\cos kL \cosh kL - 1 = 0 \tag{6.10}$$

ce qui donne les racines $k = 4,730/L$, $k = 7,853/L$ et $k = 10,996/L$ pour les 3 premiers modes de vibration (Fig. 6.6).

Pour un nanotube de carbone monoparoi, la fréquence de vibration pour le mode fondamental encastré-encastré est $f = 32$ MHz avec

$$\begin{aligned} \mu &= 4,8\,10^{-15}\ \text{kg.m}^{-1}\\ L &= 1\ \mu\text{m}\\ D &= 2\ \text{nm}\\ E &= 1\ \text{TPa}\\ \mathcal{I} &= 7,9\,10^{-37}\text{m}^4 \end{aligned}$$

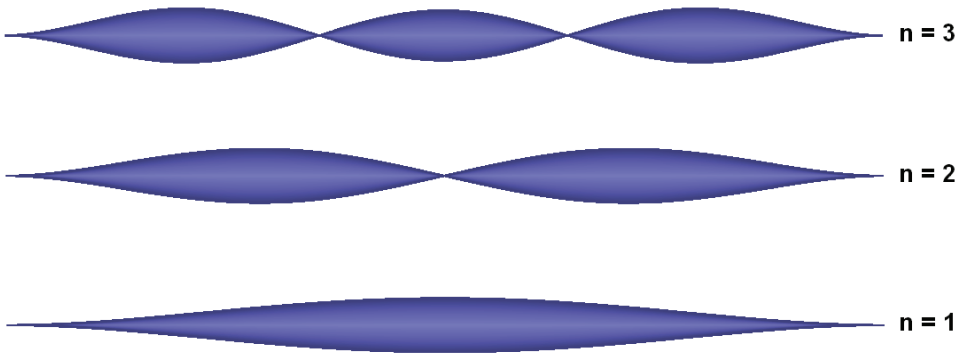


FIGURE 6.6 Modes de vibration (n = 1,2 et 3) pour un résonateur encastré-encastré.

6.2.3.2 Résonance par le redressement non linéaire du transistor

Le nanotube est soumis à un potentiel de grille V_g continu et un potentiel $V_s(t) = V_{AC}\cos\omega t$ alternatif. Le potentiel de grille vérifie $V_s(t) \ll V_g$.

La mesure des résonances des nanotubes de carbone suspendus est obtenue par la mesure de courant I_{NT} qui se développe à partir de l'équation 6.1 pour le mode i de vibration comme

$$I_{NT} = \frac{\partial G(C_g(x_i), V_g)}{\partial x_i} x_i V_s(t) \tag{6.11}$$

où la capacité C_g entre le nanotube et la grille dépendant de l'amplitude x_i du mode de vibration i. Le potentiel $V_s(t)$ est appliqué au contact de gauche du nanotube (source) et le contact de droite est à la masse (drain, voir Fig. 6.4).

La force capacitive agissant sur le mode i du nanotube est donnée via l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_i$ de la capacité $C_{g,i}$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} C_{g,i} \left(V_g - \frac{V_s(t)}{2} \right)^2 \tag{6.12}$$

où l'une des armatures de la capacité $C_{g,i}$ est la grille au potentiel V_g et l'autre est le nanotube au potentiel moyen $V_s(t)/2$.

La force capacitive s'obtient comme (voir la partie 2.2.2 pour les détails techniques)

$$F_i = \frac{1}{2} C_{g,i}{}' \left(V_g - \frac{V_s(t)}{2} \right)^2 \tag{6.13}$$

où $V_s/2$ est le potentiel moyen du nanotube et $C_{g,i}{}'$ la dérivée [3] de C_g par rapport à l'amplitude du mode i.

3. comme le montre la position du symbole $'$ de la dérivation en fin de cortège pour $C_{g,i}{}'$, il s'agit bien de la dérivée de la capacité formée avec la grille $C_{g,i}$ par rapport à x et non de la dérivée de la capacité de l'univers au sens large C' que l'on projetterait ensuite sur l'espace des grilles (que l'on noterai alors $C'_{g,i}$).

L'équation du mouvement pour le mode i est obtenue en considérant la partie dépendant du temps à l'ordre le plus bas dans l'expression de la force capacitive (Éq. 6.13)

$$\ddot{x}_i + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_i + {\omega_0}^2 x_i = -\frac{1}{2}\frac{{C_{g,i}}'}{m_i} V_g V_s(t) \tag{6.14}$$

avec ω_0 est la pulsation du mode de vibration, Q le facteur de qualité et m_i la masse équivalente du mode de vibration i. L'expression de la masse effective s'obtient par l'équation 4.17 avec la forme f_n appropriée aux conditions aux limites encastré-encastré. Dans le cas bien précis d'une configuration encastré-encastré, on peut montrer que la masse effective de tout les modes est $m/4$ où m est la masse totale du résonateur entre les deux points d'encastrement.

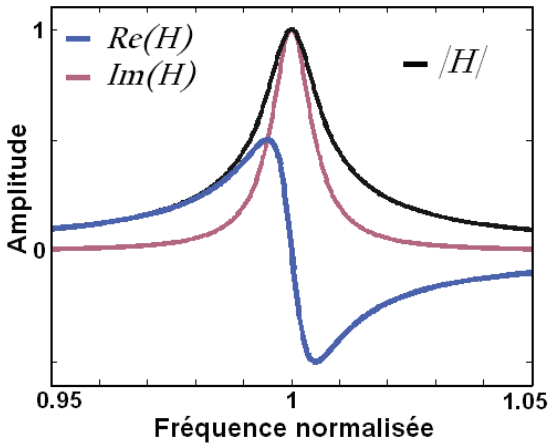


FIGURE 6.7 Fonction de réponse complexe d'un oscillateur harmonique forcé. La fréquence est normalisée par la fréquence de résonance et $Q = 100$.

En introduisant $\mathcal{H}$ la fonction de réponse mécanique de l'oscillateur harmonique à la pulsation d'excitation ω (cf. Fig. 6.7)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{({\omega_0}^2 - \omega^2) + i\frac{\omega_0 \omega}{Q}} \tag{6.15}$$

on peut écrire l'équation du mouvement 6.14 sous la forme

$$x_i = -\mathcal{H}\frac{1}{2}\frac{{C_{g,i}}'}{m_i} V_g V_s \tag{6.16}$$

Le courant traversant le nanotube s'exprime à partir de l'équation 6.11 pour une tension $V_s(t) = V_{AC}\cos\omega t$ en utilisant la relation 6.16

$$I_{NT} = I_0 {\omega_0}^2 \big(\mathcal{R}e(\mathcal{H})\cos\omega t + \mathcal{I}m(\mathcal{H})\sin\omega t\big)\cos\omega t \tag{6.17}$$

où le préfacteur de courant est $I_0 = V_g {V_{AC}}^2/2 \times \partial G(C_g(x_i), V_g)/\partial x_i \times {C_{g,i}}'/(m_i {\omega_0}^2)$.

La fréquence associée à ω est supérieure à 10 MHz puisqu'elle correspond à la fréquence de résonance caractéristique des nanotubes de carbone suspendus (voir l'application numérique dans la partie 6.2.3.1). L'ampèremètre utilisé a une fréquence de coupure bien plus petite, ce qui signifie que seul un terme à basse fréquence peut être expérimentalement observable dans l'expression du courant mesuré 6.17. Pour une excitation harmonique à ω, il provient de la valeur moyenne du produit $\cos\omega t \times \cos\omega t$:

$$I_{DC} = \frac{1}{2} I_0 {\omega_0}^2 \mathcal{R}e(\mathcal{H}) \tag{6.18}$$

On peut rappeler que la fonction $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$ est tracée sur la figure 6.7.

La mesure de la résonance s'obtient en appliquant une tension de grille DC $V_g = 7,8$ V et une tension à la source d'amplitude $V_{AC} = 15$ mV.

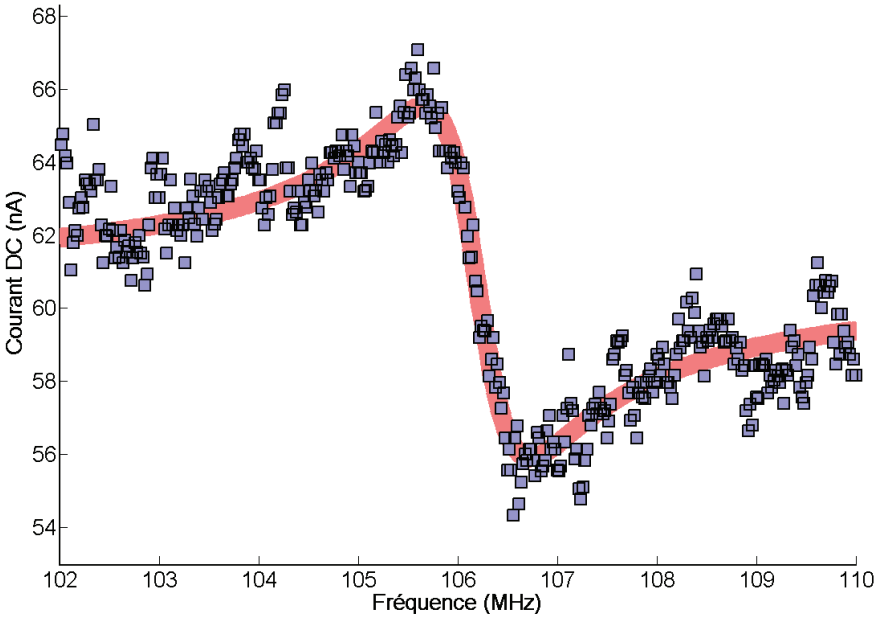


FIGURE 6.8 Courant DC traversant les deux pistes connectées en fonction de la fréquence d'excitation. $V_g = 7,2$ V, $V_{AC} = 15$ mV. Le signal de courant mesuré correspond à l'une des résonances d'un des nanotubes entre les deux pistes. Le courant DC a bien l'allure de la fonction $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$ tracée sur la figure 6.7. Cette fonction sert de modélisation et est donnée par l'équation 6.18 ($f_0 = 102.695$ et $Q = 106,6$).

Le courant DC est modélisé par l'équation 6.18 avec la fréquence de résonance $f_0 = 102.695$ MHz et le facteur de qualité $Q = 106,6$ dans l'expression $\mathcal{H}$. Il est à noter que l'amplitude du courant DC résonant (10 nA) est faible devant le courant moyen (60 nA). Cela signifie qu'il existe des mécanismes de redressement du courant non résonant comme par exemple les non linéarités d'origine purement électriques du transistor à nanotube.

On peut également remarquer que la fréquence de résonance est plus élevée que la valeur attendue (voir l'application numérique dans la partie 6.2.3.1). Cette différence provient de l'accordage en fréquence par la tension de grille qui va maintenant être discuté.

6.2.3.3 Accordage en fréquence par la tension de grille

Dans le cas des nanotubes suspendus, l'électrode de grille parallèle aux nanotubes entraîne une force électrostatique latérale. Ce type de situation a déjà été vu dans la partie sur l'accordage vers les basses fréquences par une force capacitive latérale pour un résonateur simplement encastré (partie 2.4.2). La situation est différente ici car le résonateur est en configuration encastré-encastré. En réalité, la force capacitive latérale a pour effet d'induire une tension mécanique dans le nanotube à cause des deux contraintes géométriques d'encastrement [4].

L'influence de la tension de grille sur la fréquence de résonance du mode de vibration du nanotube résonant est tracées sur la figure 6.9.

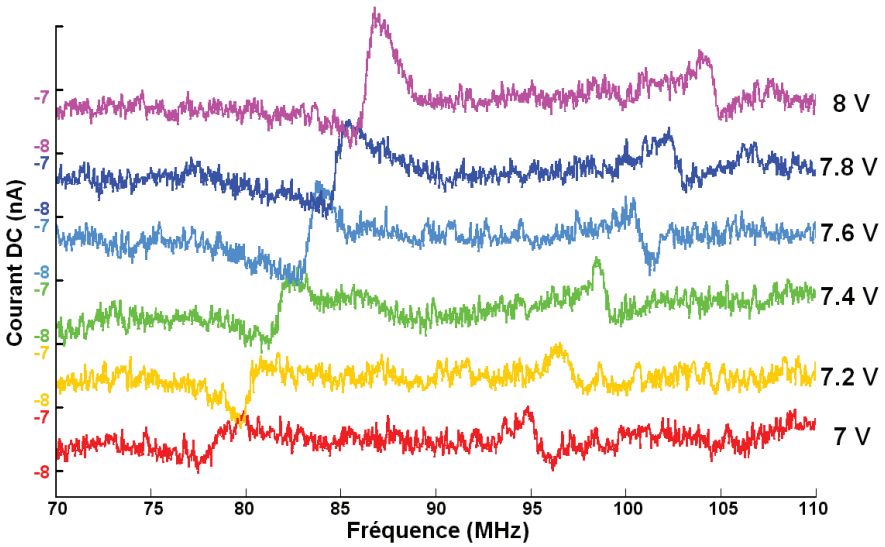


Figure 6.9 Courant DC en fonction de la fréquence d'excitation (V_{AC} = 15 mV) pour 6 valeurs de tension de grille.

Deux modes de vibration sont observés sur la figure 6.9 avec une évolution de la fréquence avec la tension de l'ordre de 8 MHz.V^{-1} pour le mode de plus basse fréquence et de 9 MHz.V^{-1} pour l'autre. Il est possible que les deux résonances

4. Cet effet est bien connu des guitaristes car il est utilisé dans de nombreux solos. Il s'agit du *bend* qui consiste à écarter une corde pincée de sa position d'équilibre pour en augmenter la tension mécanique. L'augmentation de la tension se traduit par une augmentation de la fréquence de vibration c'est-à-dire la hauteur de la note.

correspondent à deux nanotubes distincts tous les deux en contact avec les deux électrodes de mesure. Il est également possible que les deux résonances soient les deux polarisations d'un même nanotube.

— la polarisation parallèle à la grille est faiblement excitée et l'accordage en fréquence provient uniquement de l'augmentation de la tension mécanique
— la polarisation dans la direction perpendiculaire à la grille est la plus fortement excitée par la force capacitive et avec la plus basse fréquence puisqu'elle subit la même augmentation de tension mécanique avec en plus une force capacitive latérale

6.3 Mesure de résonances par modulation de fréquence

6.3.1 Définitions et approximation de la fréquence lentement variable

6.3.1.1 Définitions

Pour un signal pouvant s'écrire sous la forme $V(t) = V_0 \cos\phi(t)$, la fréquence instantanée est définie par

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi}{dt} \tag{6.19}$$

Cette définition coïncide avec la fréquence du signal pour un signal harmonique $V(t) = V_0 \cos\omega t$. La fréquence instantanée d'un signal modulé en fréquence (FM) par la fonction $f_{MOD}(t)$ est défini par

$$f_i = f_p + f_{MOD}(t) \tag{6.20}$$

où f_p est la fréquence porteuse, c'est-à-dire la fréquence du signal sans modulation.

Par la suite, le signal de modulation sera harmonique avec les notations

$$f_i(t) = f_p + f_\Delta \cos\omega_L t \tag{6.21}$$

où f_Δ est la déviation en fréquence et $\omega_L/2\pi$ la fréquence de modulation. La forme du signal s'obtient en intégrant la fréquence instantanée

$$V_{FM}(t) = V_{AC} \cos\left(2\pi f_p t + \frac{f_\Delta}{\omega_L}\sin\omega_L t\right) \tag{6.22}$$

6.3.1.2 Approximation de la fréquence lentement variable

Le spectre de Fourier d'un signal modulé en fréquence comporte une infinité de composante. Pour étudier la réponse mécanique d'un résonateur à une excitation FM, il faut considérer l'équation du mouvement dans l'espace de Fourier

$$x_\omega = \int_\omega \mathcal{H}(\omega)\frac{f_\omega e^{i\omega t}}{m_e} \tag{6.23}$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction de réponse définie dans la partie 6.2.3.2 et f l'amplitude de la composante à ω du signal FM et m_e la masse effective du résonateur.

Pour simplifier la résolution, la fréquence va être considérée comme lentement variable, c'est-à-dire que, à un instant t la réponse du résonateur à la pulsation instantanée $\omega_i(t)$ sera la même que la réponse à une pulsation indépendante du temps $\omega = \omega_i(t)$. Pour cela, il faut que le temps caractéristique de variation de la fréquence d'excitation FM ΔT_{FM} soit grand devant le temps de réponse du résonateur

$$T_{\mathcal{H}} = \frac{Q}{\omega_0} \tag{6.24}$$

où ω_0 est la pulsation de résonance et Q le facteur de qualité du résonateur. $T_{\mathcal{H}}$ représente le temps caractéristique des régimes transitoires mécaniques. Pendant le temps $T_{\mathcal{H}}$, la pulsation instantanée a varié au maximum de

$$\Delta\omega_i = \omega_\Delta \omega_L \frac{Q}{\omega_0} \tag{6.25}$$

La fréquence est considérée comme lentement variable si la variation de pulsation est petite devant la largeur ω_0/Q de la résonance soit la condition

$$\omega_\Delta \omega_L \ll \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 \tag{6.26}$$

6.3.2 Spectre de résonance FM pour une faible déviation en fréquence

Dans le cadre d'une fréquence de modulation lentement variable, la réponse mécanique à un signal FM s'écrit

$$x(t) = \mathcal{H}(f_i(t))\tilde{f} \tag{6.27}$$

avec f_i correspondant à une modulation FM harmonique (Éq. 6.21). Le courant parcourant le nanotube est alors

$$I_{NT} = G_0 {\omega_0}^2 \left(\mathcal{R}e(\mathcal{H}(\omega_i))\cos\omega_i t + \mathcal{I}m(\mathcal{H}(\omega_\rangle))\sin\omega_i t\right) V_{AC}\cos\omega_i t \tag{6.28}$$

soit pour les termes à basse fréquence avec une fréquence petite devant $\omega_i/2\pi$

$$I_{BF} = \frac{1}{2} G_0 V_{AC} {\omega_0}^2 \mathcal{R}e(\mathcal{H}(\omega_i)) \tag{6.29}$$

avec

$$\omega_i(t) = \omega_p + \omega_\Delta \cos\omega_L t \tag{6.30}$$

Un développement limité de la pulsation instantanée autour la pulsation porteuse donne

$$\mathcal{R}e(\mathcal{H}(\omega_i)) = \mathcal{R}e(\mathcal{H}(\omega_p)) + \omega_\Delta \cos\omega_L t \frac{d\mathcal{R}e(\mathcal{H})}{d\omega} \tag{6.31}$$

Lorsque la déviation en fréquence est faible, elle vérifie

$$\omega_\Delta \ll \frac{\omega_0}{Q} \tag{6.32}$$

la première harmonique du courant démodulé à basse fréquence s'obtient comme

$$I_{BF,1} = \frac{1}{2} G_0 V_{AC} {\omega_0}^2 \omega_\Delta \frac{d\mathcal{R}e(\mathcal{H})}{d\omega} \cos \omega_L t \tag{6.33}$$

cela signifie que pour une modulation FM du signal d'excitation à la pulsation ω_L avec la condition 6.32, le courant à basse fréquence est proportionnel à la modulation $\cos \omega_L t$. On parle alors de démodulation du signal par le résonateur. Les fonctions $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$ et $d\mathcal{R}e(\mathcal{H})/d\omega$ sont tracées en unité arbitraire sur la figure 6.10

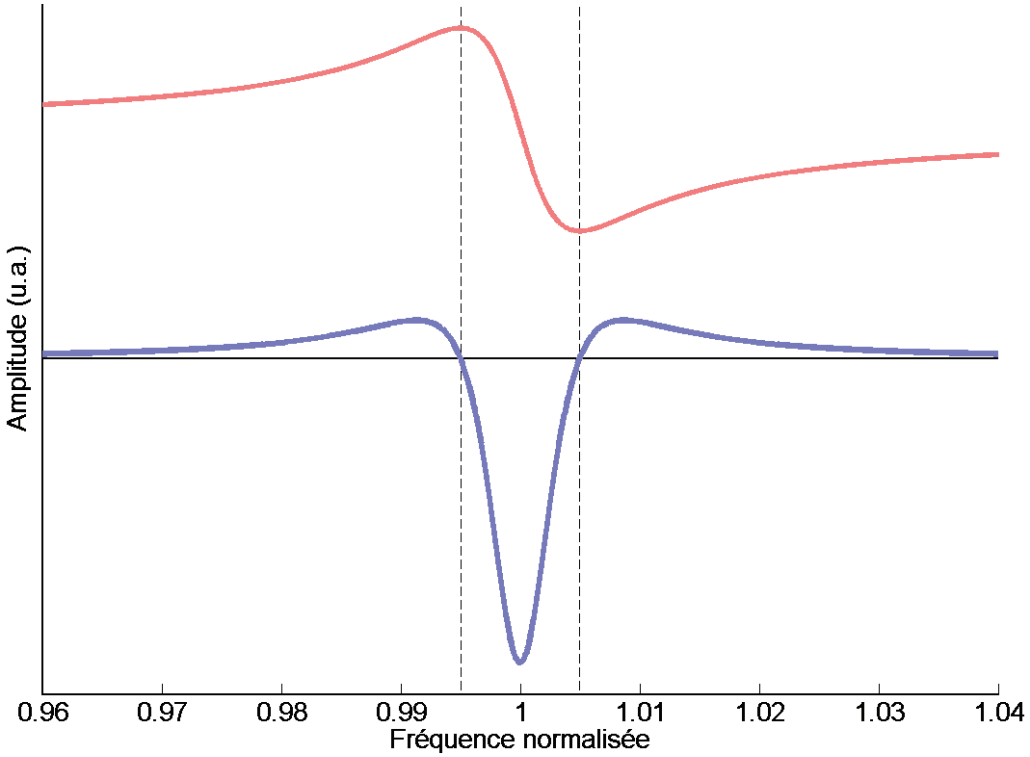


FIGURE 6.10 Partie réelle (en haut) et dérivée de la partie réelle (en bas) de la fonction de réponse mécanique $\mathcal{H}$ d'un oscillateur harmonique. La fréquence est rapportée à la fréquence de résonance et $Q = 100$.

Le courant démodulé est proportionnel à $d\mathcal{R}e(\mathcal{H})/d\omega$ et est maximal en valeur absolue à la résonance lorsque la pente de la partie réelle de la fonction de réponse mécanique est maximale. Le signe négatif provient de la pente négative de la fonction de réponse à la résonance. Deux annulations du courant démodulé sont attendues pour le maximum et le minimum de $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$. La distance en fréquence entre les deux

zéros correspond à la largeur de la résonance Δf, reliée au facteur de qualité par $Q = f/\Delta f$.

Le schéma de la mesure est donné par la figure 6.11

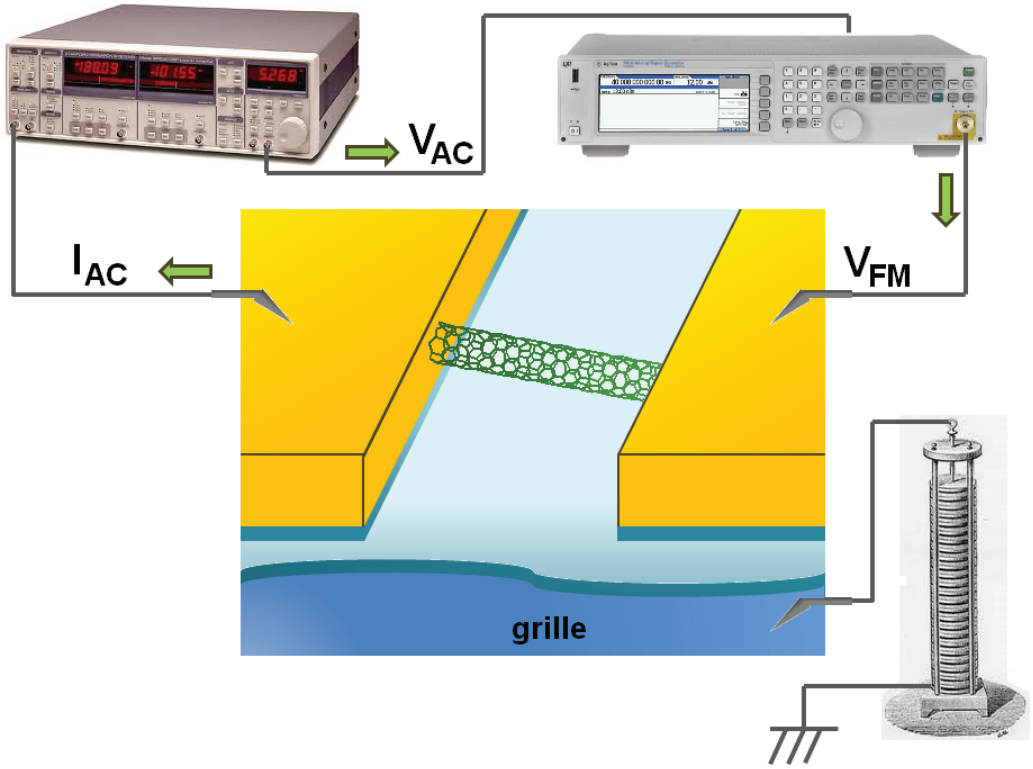


Figure 6.11 Schéma de la mesure d'excitation FM. Le signal de modulation à la pulsation ω_L est fourni par le lock-in. Un générateur RF est utilisé pour générer un signal FM qui est appliqué à la source du transistor à nanotubes. Une source délivrant une tension continue est utilisée pour polariser la grille.

Une résonance est présentée en figure 6.12 pour un balayage de la fréquence porteuse f_p autour d'une fréquence de résonance mécanique d'un nanotube de carbone.

La détection des résonances par modulation en fréquence est très sélective vis-à-vis de la nature mécanique des résonances et contrairement à la mesure du courant redressé (partie 6.2.3.2) ou la mesure en "down-mixing" il n'y a pas de courants à basse fréquence liés à une démodulation purement électrique du transistor à nanotubes.

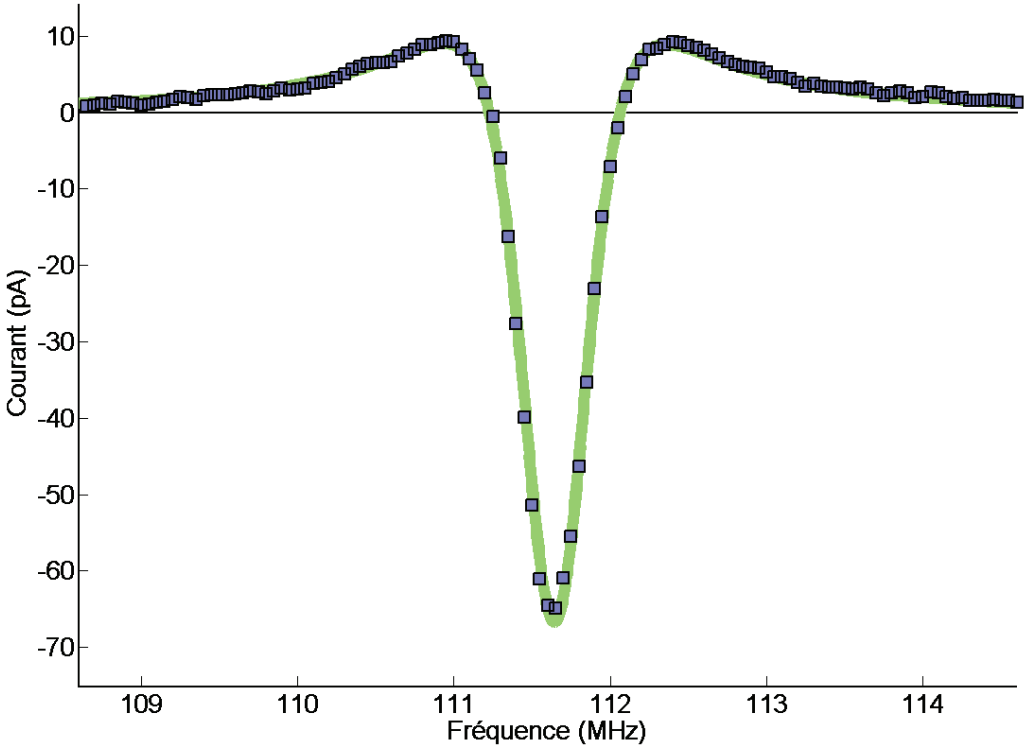


FIGURE 6.12 Spectre de résonance d'un nanotube de carbone pour un signal d'excitation FM. L'amplitude du courant à la fréquence de modulation $\omega_L/2\pi$ est tracée en fonction de la fréquence de la porteuse ($\Delta f = 150$ kHz, $f_L = 616,3$ Hz pour une excitation $V_g = -9,5$ V, $V_{AC} = 15$mV.). La modélisation utilise le courant I_{BF} (Éq. 6.29) avec $f_0 = 111.642$ MHz et $Q = 140$.

L'approximation de la fréquence lentement variable (Éq. 6.26) est validée par les valeurs

$$f_0/Q = 800 \text{ kHz} \quad (6.34)$$

$$f_\Delta = 150 \text{ kHz} \quad (6.35)$$

$$f_L = 0,6 \text{ kHz} \quad (6.36)$$

L'accordage en fréquence des nanotubes est observé en mesurant des spectres de résonance pour plusieurs valeurs de tension de grille (Fig. 6.13).

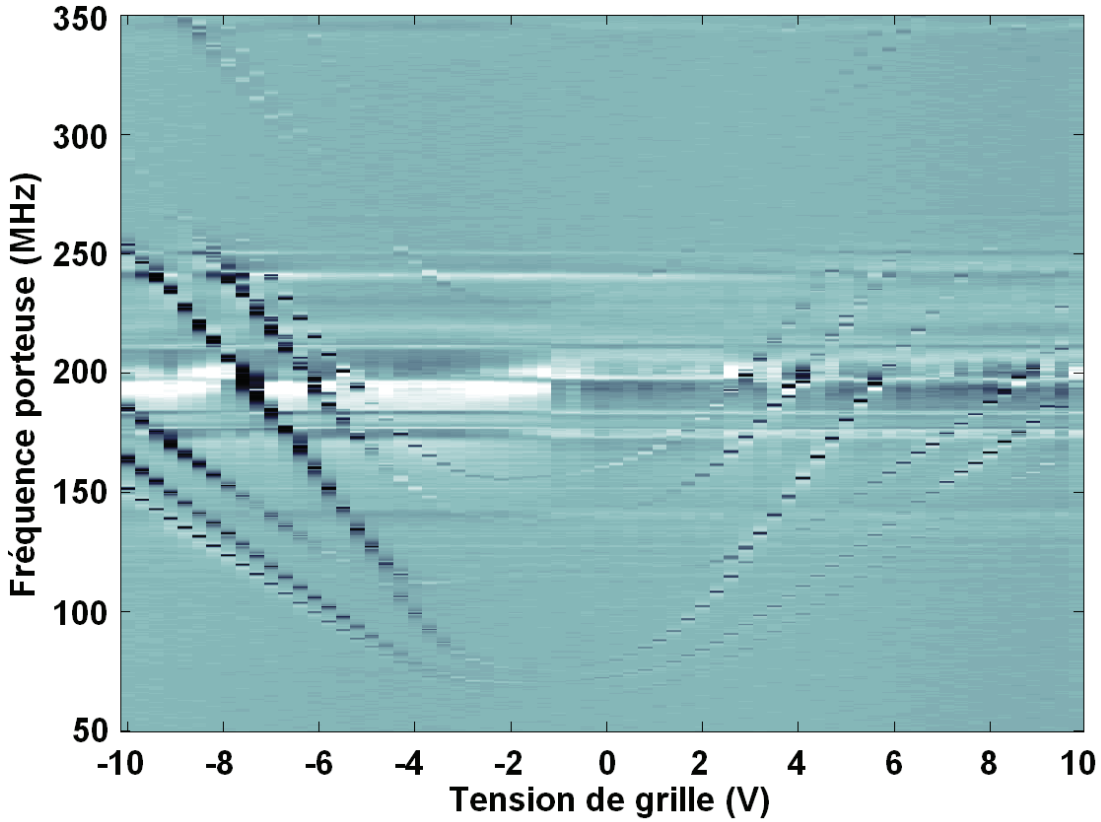


Figure 6.13 Spectre de résonance par excitation FM en fonction de la fréquence de la porteuse pour plusieurs valeurs de tension de grille DC.

Plusieurs modes de vibrations sont observés signalant la présence de plusieurs nanotubes résonants entre les deux pistes contactées. L'augmentation de la tension de grille en valeur absolue entraîne l'augmentation des fréquences de résonance. Une asymétrie de l'ordre du volt est observée et peut être la cause de charges piégées dans l'oxyde de silicium affectant le champ électrique sur les résonateurs.

6.3.3 Distorsion du signal démodulé

6.3.3.1 Distorsion avec la déviation en fréquence

Les spectres de résonances sont superposés pour plusieurs valeurs de f_Δ sur la figure 6.14.

Les graphes de la figure 6.14 permettent d'établir deux régimes

— faible déviation en fréquence $f_\Delta < f_0/Q$: le courant démodulé est décrit par l'équation 6.33 et est proportionnel à f_Δ. Dans ce régime la distance entre les annulations de courant ne dépend pas de f_Δ ($f_\Delta < 400$ kHz sur la carte).

— forte déviation en fréquence $f_\Delta > f_0/Q$: le courant démodulé subit des distorsions à cause du développement de la fréquence instantanée autour de la fréquence porteuse qui fait intervenir des non linéarités de la fonction $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$.

Lorsque la déviation en fréquence devient comparable à la largeur de la résonance, le développement limité 6.29 requiert la prise en compte des dérivées de $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$ et la dérivée d'ordre n fait apparaître un terme de la forme $\cos\omega_L t$. La résolution analytique du courant est rendue difficile par la complexité croissante des dérivées successives de $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$. Une résolution numérique a été utilisée pour obtenir le courant démodulé pour des grand f_Δ. Elle consiste à calculer la réponse du signal $f(t) = f_i + f_\Delta \cos\omega_L t$ pour la fonction $\mathcal{R}e(\mathcal{H}(f(t)))$ et à extraire par une détection synchrone numérique la composante à la pulsation ω_L en prenant la moyenne du signal obtenu multiplié par $\cos\omega_L t$. Avec cette résolution numérique, il est possible de modéliser l'amplitude maximale du courant démodulé en fonction de f_Δ (Fig. 6.15)

La figure 6.15 permet de retrouver les deux régimes $f_\Delta < f_0/Q$ et $f_\Delta > f_0/Q$ et le maximum de courant démodulé s'interprète comme un balayage de la fréquence entre le maximum et le minimum de la partie réelle de la fonction de réponse mécanique.

6.3.3.2 Enrichissement en harmonique d'ordre supérieur

Lorsque la déviation en fréquence est comparable à la largeur de la résonance, le développement limité en fonction de la pulsation instantanée 6.29 d'ordre n fait également apparaître un préfacteur de la forme $\cos^n\omega_L t$. Il y a donc une distorsion anharmonique du signal de modulation $\sim \cos\omega_L t$. Pour une déviation en fréquence de l'ordre de f_0/Q, le terme dominant dans le courant à la pulsation $n\omega_L$ provient de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$. Plus précisément si $I_{BF} = I_0 + \sum_n I_n \cos n\omega_L t$

$$I_n = \frac{1}{n!}{\omega_\Delta}^n \cos n\omega_L t \frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{R}e(\mathcal{H}) \tag{6.37}$$

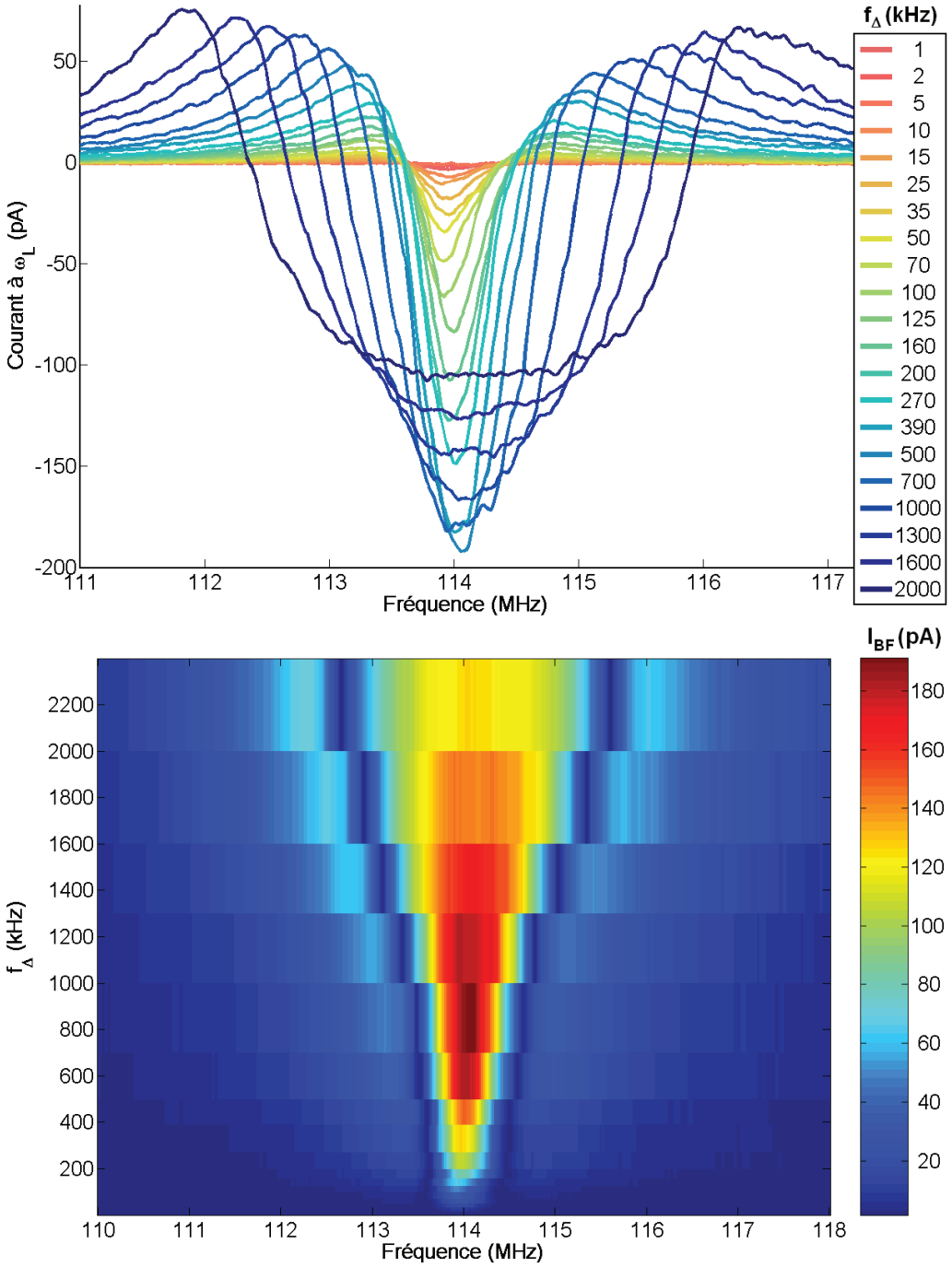


Figure 6.14 (en haut) Spectres de résonance pour un signal d'excitation FM pour plusieurs valeurs de déviation en fréquence f_Δ ($f_L = 616,3$ Hz, $V_g = -9,5$ V). (en bas) Représentation des spectres sous forme cartographique de la valeur absolue du courant en fonction de la fréquence porteuse et de la déviation en fréquence.

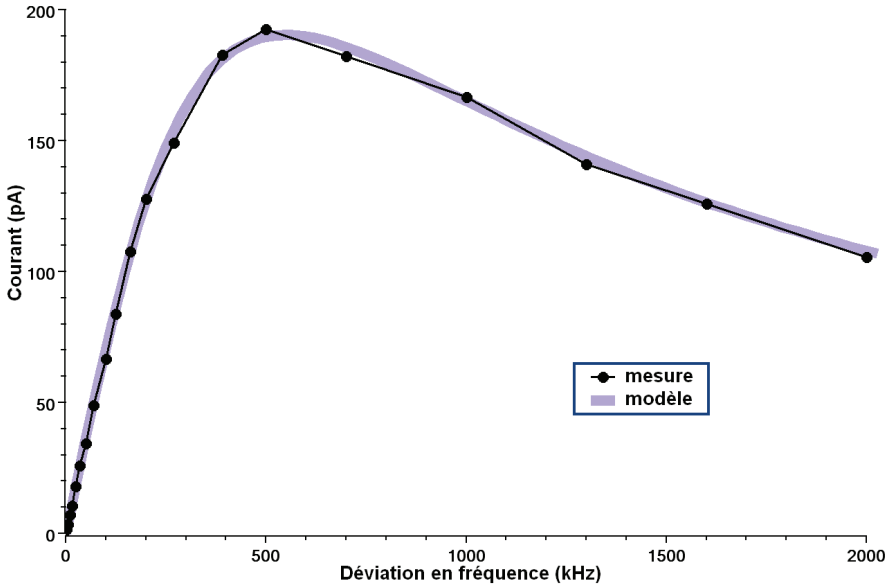


FIGURE 6.15 Amplitude maximale (*i.e.* à la résonance) du courant démodulé à ω_L en fonction de la déviation en fréquence. La résolution numérique du courant à basse fréquence (Éq. 6.29) pour une modulation FM est utilisée comme modèle.

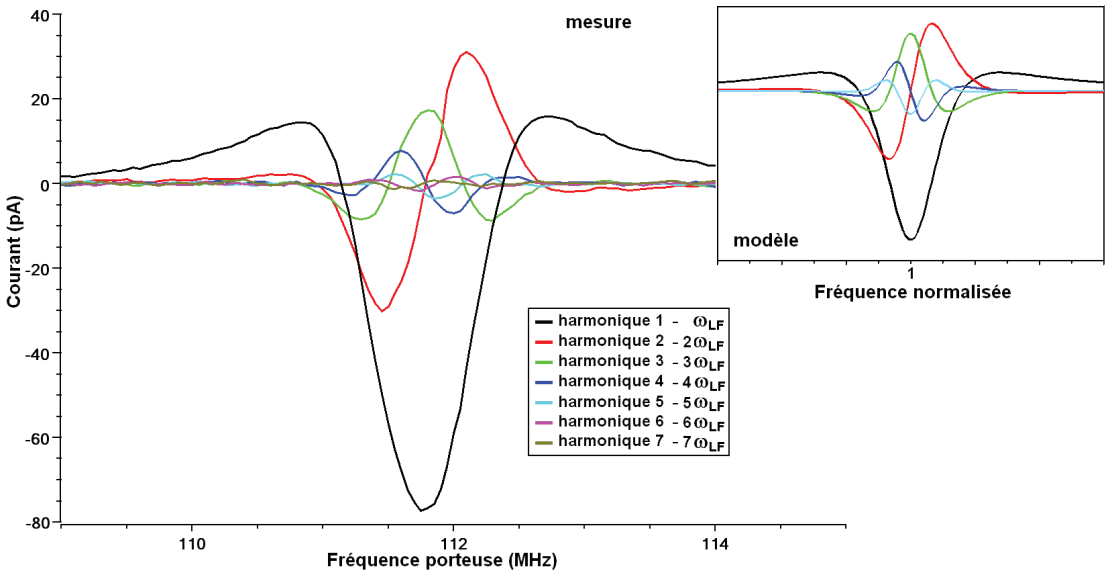


FIGURE 6.16 Spectre de résonance en fonction de f_p pour la mesure du courant démodulé aux pulsations $n\omega_L$ ($f_L = 616,3$ Hz, $V_g = -9,5$ V). Les courbes modèles insérées sont les dérivées d'ordre n de $\mathcal{R}e(\mathcal{H})$.

Conclusion du chapitre

Une technique originale d'excitation par un signal modulé en fréquence a été présentée à destination des résonateurs nanométriques. Dans ce chapitre, des nanotubes de carbone doublement encastrés sont utilisés comme résonateurs. L'excitation par modulation de fréquence permet une détection uniquement électrique et sélective du point de vue de leur nature mécanique des résonances de nanotubes de carbone.

Bibliographie

Chaste, J., A. Eichler, J. Moser, G. Ceballos, R. Rurali et A. Bachtold, 2012 : A mechanical mass sensor with yoctogram resolution. *Nature Nanotechnology* **7**, 301.

Gouttenoire, V., T. Barois, S. Perisanu, J.-L. Leclercq, S. T. Purcell, P. Vincent et A. Ayari, 2010 : Digital and FM demodulation of a doubly clamped single-walled carbon-nanotube oscillator : Towards a nanotube cell phone. *Small* **6**, 1060.

Iijima, S., 1991 : Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature* **354**, 56.

Jensen, K., K. Kim et A. Zettl, 2008 : An atomic-resolution nanomechanical mass sensor. *Nature Nanotechnology* **3**, 533.

Jensen, K., J. Weldon, H. Garcia et A. Zettl, 2007 : Nanotube radio. *Nano Lett.* **7**, 3508.

Lassagne, B., Y. Tarakanov, J. Kinaret, D. Garcia-Sanchez et A. Bachtold, 2009 : Coupling mechanics to charge transport in carbon nanotube mechanical resonators. *Science* **325**, 1107.

Martel, R., T. Schmidt, H. R. Shea, T. Hertel et P. Avouris, 1998 : Single- and multi-wall carbon nanotube field-effect transistors. *Appl. Phys. Lett.* **73**, 2447.

Radushkevich, L. et V. Lukyanovich, 1952 : (about the structure of carbon formed by thermal decomposition of carbon monoxide on iron substrate). **111**, 24.

Rutherglen, C. et P. Burke, 2007 : Carbon nanotube radio. *Nano Lett.* **7**, 3296.

Sazonova, V., 2006 : *A Tunable Carbon Nanotube Resonator*. PhD thesis Cornell university.

Sazonova, V., Y. Yaish, H. Üstünel, D. Roundy, T. A. Arias et P. L. McEuen, 2004 : A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator. *Nature* **431**, 284.

Steele, G. A., A. K. Hüttel, B. Witkamp, M. Poot, H. B. Meerwaldt, L. P. Kouwenhoven et H. S. J. van der Zant, 2009 : Strong coupling between single-electron tunneling and nanomechanical motion. *Science* **325**, 1103.

Tans, S. J., A. R. M. Verschueren et C. Dekker, 1998 : Room-temperature transistor based on a single carbon nanotube. *Nature* **393**, 49.

Tarakanov, Y. A. et J. M. Kinaret, 2007 : A carbon nanotube field effect transistor with a suspended nanotube gate. *Nano Lett.* **7**, 2291.

Vincent, P., A. Ayari, P. Poncharal, T. Barois, S. Perisanu, V. Gouttenoire et S. T. Purcell, 2012 : Carbon nanotube nanoradios : The field emission and transistor configurations. *C. R. Physique* **13**, 395.

Vincent, P., P. Poncharal, T. Barois, S. Perisanu, V. Gouttenoire, H. Frachon, A. Lazarus, E. de Langre, E. Minoux, M. Charles, A. Ziaei, D. Guillot, M. Choueib, A. Ayari et S. T. Purcell, 2011 : Performance of field-emitting resonating carbon nanotubes as radio-frequency demodulators. *Phys. Rev. B* **83**, 155446.

Walker Jr., P. L., J. F. Rakszawski et G. R. Imperial, 1959 : Carbon formation from carbon monoxide-hydrogen mixtures over iron catalysts .i. properties of carbon formed. *J. Phys. Chem.* **63**, 133.

Deuxième partie

Auto-oscillateurs nanoélectromécaniques

Chapitre 7

Auto-oscillation sous émission de champ

7.1 Introduction aux auto-oscillateurs

L'auto-oscillateur qui sera présenté en détail par la suite est un nanofil de carbure de silicium. Lorsqu'il est soumis à un courant électrique d'émission de champ, il sera montré que ce type de résonateur peut présenter une oscillation spontanée autour de sa position d'équilibre. En premier lieu, une introduction aux auto-oscillateurs est proposée en lien avec la notion d'instabilité.

7.1.1 Présentation générale

7.1.1.1 Définition

Un auto-oscillateur, ou oscillateur auto-entretenu, désigne un système qui génère par sa dynamique un signal périodique propre. Dans une situation expérimentale où il y a de la dissipation, une auto-oscillation requiert une source d'énergie : un cycle d'oscillation peut être vu comme une utilisation de l'énergie de la source pour compenser les pertes dissipatives du cycle d'oscillation.

7.1.1.2 Exemples de système auto-oscillants

Systèmes liés au développement technologique

L'intérêt pour les auto-oscillateurs a débuté avec le développement des horloges et la recherche de précision dans la mesure du temps. Les travaux de Huygens au XVIIe sur la mécanique des horloges sont souvent cités notamment car ils ont mis en évidence un comportement singulier des auto-oscillateurs couplés qui est la synchronisation (voir le chapitre 8). Au cours du XXe siècle, les travaux de van der Pol sur les oscillateurs électriques peuvent être introduits comme le début de travaux quantitatifs sur les auto-oscillateurs. Les oscillations spontanées de courant pour des composants semi-conducteurs ont été montrées par Gunn (1963). Pour ce

type d'oscillateur, la source d'énergie provient d'un courant continu traversant le matériau entraînant un régime de résistance différentielle négative, comparable à l'oscillateur électrique de van der Pol qui sera détaillé dans la suite (partie 7.1.4).

En optique, le principe de fonctionnement du laser, ou de manière équivalente du maser (Gordon et al., 1955), utilise un milieu actif pour amplifier et auto-entretenir une onde électromagnétique. Le mécanisme d'auto-oscillation est l'expression directe de l'émission stimulée où la probabilité d'ajouter un photon à la cavité est proportionnel au nombre de photons présent dans la cavité. Lorsque l'inversion de population atteint un seuil correspondant aux pertes des modes non résonants, le champ électromagnétique croît d'abord exponentiellement avant d'atteindre un régime de saturation.

En électronique, un grand nombre de systèmes auto-oscillants ont été proposés en utilisant notamment un amplificateur opérationnel (résistance négative, système à bascule). Les systèmes à résistances négatives sont alors couplés à un système résonant comme un circuit RLC ou mieux un résonateur à quartz. Ce type d'oscillateur sera détaillé dans la partie 7.1.4.1.

Mécanique des fluides

La convection de Rayleigh-Bénard (Rayleigh, 1916; Bénard, 1900) se produit lorsque une couche de fluide est confinée entre deux parois , l'une chaude en bas et l'autre froide en haut. Le moteur de l'instabilité est la poussée d'Archimède qui entraîne la mise en mouvement du fluide par recirculation.

L'instabilité décrite par von Karman (von Karman et Rubach, 1912) est un autre exemple d'auto-oscillation lorsqu'un écoulement de fluide rencontre un obstacle comme un fil par exemple. Les recirculations entraînées par le fil prennent la forme d'une succession de tourbillons de sens de rotation alternés.

L'instabilité du tuyau d'arrosage est un exemple d'auto-oscillation aux conséquences désagréables. Lorsqu'un tuyau d'arrosage est pendant ou posé sur le sol, pour un débit d'eau suffisant, le tuyau peut se mettre à osciller spontanément et projeter de l'eau dans toutes les directions. Ce type d'instabilité est décrite par une "confusion de fréquence" (Rocard, 1943). Il s'agit d'une dynamique instable à deux oscillateurs où il n'y a pas à proprement parler un terme de dissipation négative irréversible (de Langre, 2001; Vandenberghe, 2002). Un exemple célèbre attribué à une instabilité par confusion de fréquence est donné par le cas du pont de Tacoma qui s'est effondré en 1940 à cause d'un mécanisme d'auto-oscillation. Contrairement à ce qui est parfois rencontré, il ne s'agissait pas de l'effet d'une résonance mécanique, c'est-à-dire d'une excitation par une composante pré-existante du vent à la fréquence de résonance du pont, mais plutôt d'un couplage aéroélastique (Billah et Scanlan, 1991).

Acoustique

Un grand nombre d'instrument de musique à vent utilise une auto-oscillation pour générer une onde acoustique (Silva, 2009). C'est le cas par exemple du saxophone où la position de l'anche est mécaniquement instable et se met à vibrer lorsque le saxophoniste cherche à imposer un écoulement d'air dans le bec.

La voix et la mise en mouvement des cordes vocales est aussi une auto-oscillation (Titze, 1988) dont le mécanisme est à rapprocher de celui des instruments à vents.

L'effet Larsen (Larsen, 1911) peut se produire lorsqu'un récepteur, un microphone ou un instrument par exemple, est rapproché trop près d'une enceinte émettant le son du récepteur. Un son aigu tout à fait désagréable se produit à cause du passage en boucle amplifié du son entre l'enceinte et le récepteur.

L'instabilité thermoacoustique de Rijke se produit lorsqu'une conduite est soumise à une différence de température (Matveev, 2003). Sous l'effet du gradient thermique, les ondes acoustiques, qui correspondent également à un cycle thermique, sont instables le tube se met à siffler.

Systèmes biologiques

Les cycles de sommeil sont un exemple d'auto-oscillation où la période est proche de 24 heures (Czeisler et al., 1999) et où entrent en jeu des processus d'oscillations chimiques et physiologiques complexes (Dunlap, 1999).

Le principe des mécanismes d'audition est également attribué à la présence dans l'oreille interne de cellules ciliées dans des régimes d'auto-oscillations rendant la détection très sensible (Jülicher, 2001).

L'étude de systèmes proie-prédateurs a également montré des régimes d'oscillation spontanée des populations dans le modèle développé par Lotka et Volterra.

Les lucioles males d'Asie tropicale (Buck, 1988) utilisent un mécanisme d'auto-oscillation par flashes de lumière pour se faire identifier des femelles intéressées par de nouvelles rencontres.

On peut également citer le cas des réactions chimiques oscillantes (Belousov, 1959; Zhabotinsky, 1964; Nicolis et Portnow, 1973) qui ont notamment suscité l'intérêt pour leurs liens avec des processus biochimiques équivalents tels que les battements du cœur.

7.1.2 Quelques notions autour des auto-oscillations

7.1.2.1 Instabilités auto-oscillantes

Nous nous intéresserons aux auto-oscillations qui naissent d'une instabilité.

On parle d'instabilité lorsqu'un système possède une situation d'équilibre que toute infime perturbation peut amener à quitter. Pour le cas d'un pendule simple avec un fil rigide contraint à se déplacer dans un plan, il existe deux positions d'équilibre, une position stable en bas et une position instable en haut. Lorsque le pendule est placé à son position d'équilibre instable, la dynamique est face à une *indétermination* au sens où il y a deux trajectoires équivalentes d'évolution possible, une emmenant le pendule à gauche du point instable et une autre vers la droite. Dans le cas des auto-oscillations, nous verrons que l'indétermination se traduit par une liberté dans la phase de l'oscillation (partie 7.1.2.5).

Pour les systèmes qui présentent une instabilité oscillante, on définit un paramètre de contrôle qui représente l'énergie injectée pour un cycle d'oscillation : la

différence de température pour la convection de Rayleigh-Bénard, la vitesse d'un fluide pour instabilité de von Karman ou l'instabilité d'un tuyau d'arrosage, le gain d'un amplificateur pour l'effet Larsen, l'inversion de population pour l'effet maser/laser, ... L'apparition des oscillations spontanées est alors reliée pour chaque système à une valeur seuil d'un paramètre de contrôle de l'auto-oscillation. En augmentant le paramètre de contrôle de manière à traverser la valeur seuil, on obtient à partir d'une situation d'équilibre que, si une petite perturbation intervient, le système va être amené à osciller autour de sa position d'équilibre. Au delà du seuil, la dynamique du système sera telle que les oscillations vont générer une rétroaction sur le système qui va progressivement amplifier le signal perturbatif jusqu'à atteindre un régime de saturation non linéaire.

7.1.2.2 Oscillateurs à relaxation

Les oscillateurs à relaxation se comportent également comme des systèmes générant des oscillations sans qu'il soit possible d'établir un état d'équilibre qui se déstabilise vers un cycle d'oscillation. Ils sont caractérisé par une succession d'étapes cycliques avec un passage à l'étape $N+1$ lorsque l'étape N est terminée, ce qui correspondrait sur un exemple à je-remplis-mon-verre-de-bière / je-vais-devant-la-télé-dans-le-salon / je-bois-la-bière / je-vais-dans-la-cuisine / je-remplis-mon-verre-de-bière / ... Dans ce cas là, il n'existe pas vraiment d'état d'équilibre instable où je serai entre la cuisine et le salon avec un verre de bière à moitié vide et où je ferai des petits mouvements d'oscillations entre la cuisine et le salon en remplissant et en buvant de plus en plus dans mon verre.

Un exemple plus sérieux est celui du shishi odoshi dans les jardins japonais (Acco, 2003). Il s'agit d'une fontaine disposant d'un réceptacle à bascule, un bambou creux le plus souvent, qui se vide périodiquement en produisant un son ayant pour but d'effrayer les éventuels animaux sauvages qui chercheraient à déposséder le jardinier de ses salades.

Un exemple encore plus sérieux est celui de l'oscillateur de van der Pol dans la limite forte résistance négative (voir annexe B).

7.1.2.3 Auto-oscillateurs et oscillateurs harmoniques amortis

Un système auto-oscillant est parfois appelé simplement "oscillateur", en électronique notamment. Cette appellation peut porter à confusion dans la mesure où un oscillateur harmonique amorti n'est précisément pas un oscillateur. En effet, un oscillateur harmonique amorti ne génère pas spontanément un signal alternatif, il est seulement un filtre avec une réponse plus ou moins marquée selon la fréquence d'excitation. Ainsi, pour l'exemple d'un système masse-ressort déplacé faiblement autour de sa position d'équilibre, les oscillations amorties obtenues sont la superposition des réponses de la décomposition spectrale de l'excitation par une forme en marche d'escalier (Fig. 7.1).

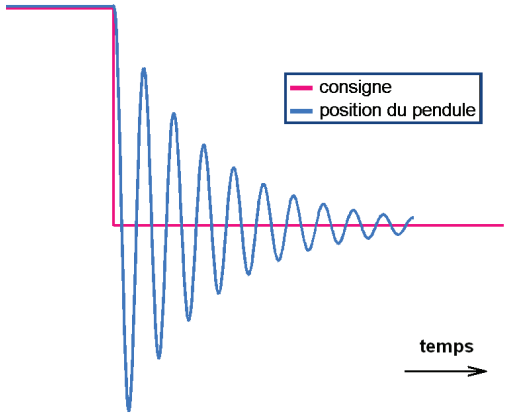


FIGURE 7.1 Réponse (numérique) d'un pendule simple amorti pour une consigne en position de type marche correspondant expérimentalement à un lâcher autour de la position d'équilibre. Le signal périodique obtenu n'est pas généré par le pendule et correspond au filtrage de la consigne.

Le cas limite de l'oscillateur rigoureusement harmonique, c'est-à-dire sans amortissement, il ne s'agit pas non plus d'un auto-oscillateur dans la mesure où il n'y a pas de cycle limite d'oscillation (Pikovsky et al., 2001).

7.1.2.4 Oscillateurs paramétriques : peut-on parler d'auto-oscillation ?

Un traitement analytique d'un oscillateur paramétrique par un forçage externe a déjà été proposé dans la partie 4.3. Il a été vu que l'oscillation paramétrique était une instabilité de la solution d'équilibre $x = 0$ pour un oscillateur harmonique de raideur dépendant du temps. Il a été vu également que les oscillations instables gardaient exactement la même fréquence que la fréquence moitié de l'excitation. En ce sens, un oscillateur harmonique forcé paramétriquement n'est pas un auto-oscillateur.

Il convient alors de préciser la définition d'un auto-oscillateur : il s'agit d'un *système qui génère spontanément un signal périodique sans contrainte sur la phase initiale d'oscillation.*

Il peut exister une confusion entre un oscillateur paramétrique et un oscillateur auto-entretenu. Cette confusion est en partie due au fait qu'il existe des systèmes auto-oscillants qui utilisent une rétroaction avec un forçage paramétrique. Le tableau 7.1 montre qu'il existe toutes les situations et illustre la différence entre oscillation paramétrique et auto-oscillation.

Détaillons les exemples tirés du tableau 7.1.

Pour les exemples d'auto-oscillations paramétriques, le mécanisme d'auto-oscillation est lié à un couplage paramétrique au sens où la position du résonateur se traduit par une modification d'un *paramètre* du système optique à savoir la longueur de la cavité résonante. Comme la cavité est forcé à la fréquence (longueur d'onde) fixée

	Auto-oscillation	oscillation amortie
paramétrique	Cavité optique (annexe C)	pendule de Mathieu
non paramétrique	oscillateur de van der Pol	pendule

Table 7.1 Exemples de systèmes liés à la notion d'oscillation paramétrique et d'auto-oscillation.

d'un laser, la modification de la longueur de la cavité entraîne une modification de la condition de résonance. Cette modification change l'intensité du champ résonant qui modifie à son tour la force optique [1] agissant sur le résonateur. Un traitement approprié au couplage optique/mécanique est proposée en annexe C et montre que la force peut être une force de dissipation négative entraînant une oscillation spontanée.

Le cas du pendule de Mathieu forcé est exemple d'excitation paramétrique *sans auto-oscillation*. L'instabilité de la position d'équilibre du pendule est décrite par l'équation d'un oscillateur harmonique forcé paramétriquement (partie 4.3).

L'oscillateur de van der Pol est un exemple d'auto-oscillateur à résistance négative au sens où la dissipation visqueuse à un coefficient négatif. On remarquera au passage que l'exemple des cavités optiques instables peut se ramener à une auto-oscillation à résistance négative (voir annexe C).

7.1.2.5 Phase d'un auto-oscillateur

Lorsqu'un système auto-oscille, il produit un signal périodique qu'il est commode de repérer par sa phase. Considérons un signal auto-oscillant quasi-sinusoïdal [2] de période T : $C(t) = A\cos 2\pi t/T$. On peut définir la fonction

$$F(t) = C(t) + iS(t) \tag{7.1}$$

avec $S(t) = A\sin 2\pi t/T$, de sorte que dans le plan complexe, le signal auto-oscillant est "complété" [3] par sa partie imaginaire et représenté par un cycle limite (Fig. 7.2).

Pour un système auto-oscillant, l'approche de Kuramoto consiste à définir la phase ϕ comme une grandeur dynamique pertinente décrivant l'évolution au cours du temps. Le cycle d'oscillation est donné à partir de la phase $\Pi(\phi(t))$. La phase de

1. Il peut s'agir d'une force de pression de radiation optique ou encore d'effets liés au chauffage par le champ optique entraînant la dilatation et le déplacement du résonateur (voir l'introduction de l'annexe C).

2. Un cycle limite d'auto-oscillation n'est jamais strictement harmonique à cause des termes non linéaires nécessaires à la saturation de la vibration (cf. partie 7.1.4.1).

3. la fonction complément s'obtient mathématiquement par la transformée de Hilbert. La transformée de Hilbert de la fonction $\cos t$ est donc $\sin t$.

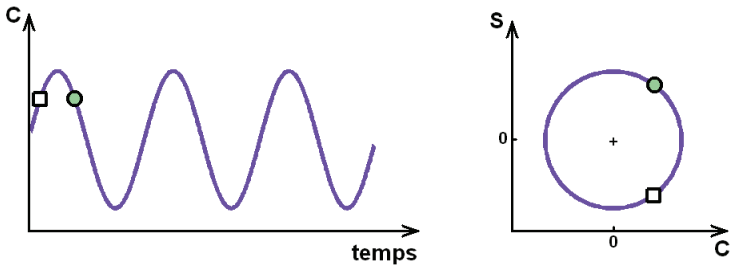


FIGURE 7.2 Cycle limite d'une auto-oscillation quasi-sinusoïdale. Le cycle d'oscillation est représenté comme une phase tournante dans le sens trigonométrique avec la période T dans le plan complexe. Dans ce cas là, la phase est $\phi = 2\pi t/T$.

l'auto-oscillateur évolue sur un intervalle périodique $[0\ 2\pi]$ et la fréquence d'auto-oscillation f_{aa} est une propriété du système qui impose une contrainte sur la dérivée de la phase

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{f_{aa}}{2\pi} \tag{7.2}$$

Pour un système déterministe, la contrainte sur la dérivée de la phase est également une contrainte sur la phase puisque elle s'obtient par intégration de la pulsation $f_{aa}/2\pi$ avec la phase initiale comme référence.

C'est dans un cadre statistique que la phase prend son sens comme degré de liberté. Si en présence de bruit la valeur moyenne de la dérivée de la phase est toujours $f_{aa}/2\pi$, la valeur moyenne de la phase est indéterminée. En effet, si une fluctuation déphase instantanément le signal de l'auto-oscillateur, il n'y a aucune force qui tend à ramener la phase à sa valeur initiale. En d'autres termes, l'auto-oscillateur a envie d'avoir une phase qui tourne à une certaine vitesse sans préoccupation sur la valeur de la phase elle-même.

7.1.3 Les auto-oscillateurs nanoélectromécaniques

Dans les années 2000, le domaine de la micro- et nanoélectromécanique a vu l'apparition et le développement de plusieurs dispositifs auto-oscillants qui vont être présentés selon le mécanisme responsable de la vibration spontanée.

Émission de champ Les résonateurs sont parcourus par un courant d'émission de champ avec une rétroaction de type résistance négative liée notamment à la dépendance du courant émis avec la position du résonateur vis-à-vis d'une contre électrode environnante (Ayari et al., 2007; Kleshch et al., 2009). Dans le cas de Weldon et al. (2010), il s'agit de nanotubes de carbone semble-t-il dans un régime d'oscillation à relaxation (cf. partie 7.1.2.2) avec néanmoins un traitement contradictoire du mécanisme d'auto-oscillation.

Rétroaction externe Un résonateur passif peut être rendu auto-oscillant (Villanueva et al., 2011; Feng et al., 2008) en utilisant un amplificateur externe électrique de manière comparable à ce qui est obtenu avec un microphone, un amplificateur et une enceinte pour l'effet Larsen. Ramos et al. (2008) utilisent une excitation photothermique pour leur système de rétroaction.

Transconductance d'un transistor résonant La transconductance relie la conductivité d'une poutre en configuration transistor en fonction d'un potentiel de grille. Dans certaines situations, la transconductance dépend significativement de la position de la poutre et peut entraîner un couplage électromécanique vers une instabilité auto-oscillante. Ainsi, Grogg et al. (2009) ont observé des auto-oscillations pour des poutres en silicium fortement dopés. Steele et al. (2009) ont également mesuré une excitation spontanée de nanotubes de carbone dans des régimes de blocage de Coulomb.

Nano cloche de Franklin La cloche utilisée par Franklin pour avertir de l'imminence d'un éclair se composait d'une paire de pendules isolés électriquement pouvant osciller et toucher deux électrodes, l'une reliée à la terre et l'autre à un paratonnerre. Lorsque le pendule se trouvait entre les deux électrodes portés à deux potentiels électriques suffisamment différents, le pendule se mettait à osciller et transporter des charges à chaque cycle entre les deux électrodes. Ce type d'expérience a été miniaturisée jusqu'à utiliser une molécule de C_{60} comme élément mécanique (Park et al., 2000) ou un nanopilier (Kim et al., 2010).

Les auto-oscillations obtenues par focalisation d'un faisceau électronique (Vincent et al., 2007) peuvent également être rapprochées des oscillations à transfert de charge.

Couplage thermique Un couplage électro-thermo-mécanique est utilisé par Steeneken et al. (2011) pour mettre en mouvement une structure piézorésistive.

Couplage optique Le couplage d'un résonateur avec une cavité optique a été utilisé par plusieurs groupes pour obtenir un amortissement supplémentaire ou une auto-oscillation (Metzger et Karrai, 2004; Pandey et al., 2006; Gigan et al., 2006; Teufel et al., 2008; Metzger et al., 2008; Favero et al., 2009; Okamoto et al., 2011). Un analogue purement mécanique du couplage optique est présenté en annexe C.

7.1.4 L'oscillateur de van der Pol

Le modèle introduit par van der Pol est le modèle dynamique le plus simple pour décrire un auto-oscillateur instable à résistance négative.

7.1.4.1 Un modèle d'auto-oscillateur instable

L'équation de van der Pol est celle d'un oscillateur harmonique avec une dissipation linéaire accordable α et une dissipation positive non linéaire αx^2

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{7.3}$$

où ω_0 est la pulsation de résonance de l'oscillateur.

Quelle que soit la valeur de α, l'équation 7.3 admet $x(t) = 0$ comme solution évidente. En revanche cette solution est instable lorsque $\alpha > 0$. En effet, les solutions linéaires sont de la forme

$$x = x_0 e^{\alpha t} \sin\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\, t\right) \tag{7.4}$$

ce qui signifie que pour la solution $x = 0$ se déstabilise lorsque $\alpha \gtrsim 0$ et donne naissance à des oscillations dans une enveloppe exponentielle croissante. Cette croissance exponentielle est interrompue par le terme de saturation non linéaire qui devient comparable à α pour $x \sim 1$ (Fig. 7.3, courbes centrales).

7.1.4.2 Limite de dissipation fortement négative : oscillation à relaxation

van der Pol et van der Mark (1928) proposèrent l'équation 7.3 non pas comme un modèle d'auto-oscillateur instable à résistance négative mais comme un exemple d'oscillateur à relaxation pour modéliser les battements cardiaques. En effet, lorsque $\alpha \gg 1$ dans l'équation 7.3, le terme $\ddot{x}$ est négligeable, sauf en quelques instants et le signal d'oscillation est alors composé de portions d'évolutions à relaxation (Fig. 7.3, courbe de droite).

Un traitement de l'auto-oscillateur de van der Pol dans la limite de relaxation est proposé en annexe B.

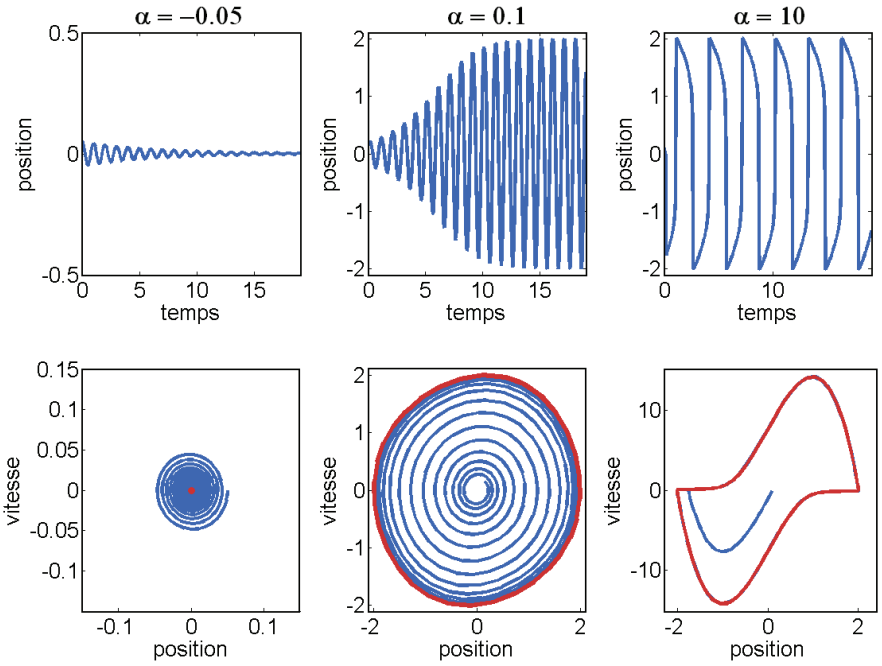


Figure 7.3 Simulation numérique par intégration de l'équation de van der Pol 7.3. La trajectoire est représentée pour 3 valeurs du coefficient de dissipation ($\alpha = -0.05$, dissipation positive, $\alpha = 0.1$, dissipation faiblement positive et $\alpha = 10$, dissipation fortement positive). Les portraits de phase sont tracés en dessous de chaque trajectoire où l'on peut voir les cycles limites faiblement ($\alpha = 0.1$) et fortement non linéaires ($\alpha = 10$).

7.2 Instabilité auto-oscillantes d'un résonateur sous émission de champ

Lorsqu'ils sont soumis à un courant d'émission de champ, les résonateurs SiC sont susceptibles de présenter des auto-oscillations mécaniques par conséquence du couplage électromécanique. Avant de proposer un modèle décrivant l'instabilité linéaire de tels systèmes, une introduction à l'émission de champ est proposée.

7.2.1 Quelques mots sur l'émission de champ

7.2.1.1 Un application de l'effet tunnel

Lorsque deux électrodes métalliques sont placées proches l'une de l'autre dans le vide, il est envisageable de pouvoir faire circuler un courant électronique entre ces deux électrodes, c'est-à-dire à travers le vide, lorsque le champ électrique autour de l'électrode négative est suffisamment intense pour permettre de lui arracher des électrons. En l'absence de champ électrique, les électrons de l'électrode négative n'auraient aucune envie de s'échapper dans le vide puisqu'ils devraient surmonter un travail de sortie correspondant à la différence d'énergie entre le niveau de Fermi dans le matériau et un niveau qui correspondrait à un électron libre dans le vide et sans vitesse. La présence du champ électrique intense permet de déformer le potentiel électrique à l'extérieur du matériau en une barrière de potentiel triangulaire (Fig. 7.4). Lorsque le champ électrique est suffisamment fort, la barrière triangulaire

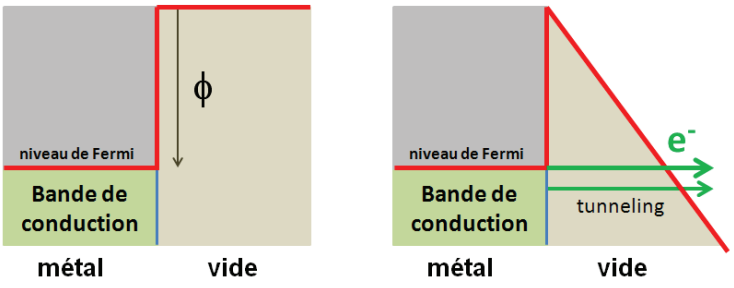


FIGURE 7.4 À gauche : profil du potentiel électrique pour un métal en l'absence de champ électrique. Le potentiel de Fermi introduit une marche Φ définissant le travail de sortie. À droite profil du potentiel électrique en présence d'un fort champ électrique. La barrière de potentielle est triangulaire et les électrons peuvent s'échapper par effet tunnel.

devient perméable aux électrons par effet tunnel. Le travail de sortie Φ est l'énergie nécessaire à fournir à un électron pour le libérer de sa bande de conduction depuis le niveau de Fermi. Le travail de sortie des matériaux se situe généralement entre 3 et 5 eV. Comme les largeurs typiques de barrière tunnel mesurables en termes de courants électriques sont de l'ordre du nanomètre, le champ électrique caractéristique

nécessaire à l'émission de champ est de l'ordre de 10^9 V.m^{-1}. Une géométrie plaque-plaque pour l'émission de champ n'est jamais utilisée en pratique car le champ électrique nécessaire correspondrait à une tension de 1000 Volts entre deux plaques distantes d'un micromètre.

7.2.1.2 Mise en pratique pour des émetteurs pointus

Le champ électrique nécessaire à l'émission d'électrons par une surface est remarquablement élevé. Expérimentalement, les émetteurs de courant d'émission de champ seront toujours des objets pointus où il existe une amplification du champ électrique localement à l'apex. L'amplification du champ électrique est causée par la modification de la géométrie des lignes de champ électrique avec notamment un resserrement des lignes équipotentielles autour de l'apex. Il s'agit de l'effet de pointe qui est notamment mis en pratique pour le fonctionnement des paratonnerres.

Les résonateurs nanomécaniques sont particulièrement propices à une utilisation en tant qu'émetteur de champ. En considérant la longueur L d'un résonateur et le rayon a, on obtient des rapports d'aspect $L/a \sim 1000$, ce qui veut dire qualitativement que l'on amplifie le champ électrique d'un facteur 1000 lorsque l'on dispose un tel émetteur entre deux électrode (Fig. 7.5). Edgcombe et Valdre (2001) proposent une formule d'amplification du champ électrique $\gamma = 1,2\,[L/a + 2.15]^{0,9}$ qui est simplifiée par Minoux (2006) sous la forme $\gamma = 0,67L/a$ pour les grand rapports d'aspects.

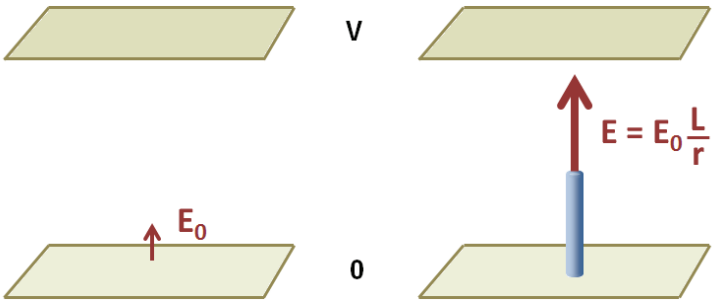


Figure 7.5 À gauche : Champ électrique entre deux plaques parallèles avec une différence de potentiel V. À droite : Champ électrique amplifié par un fil de longueur L et de rayon a.

L'utilisation d'un résonateur avec un grand rapport d'aspect permet une émission de champ pour une distance à une contre électrode de l'ordre de la centaine de micromètres pour une tension appliquée de quelques centaines de volts. Le résonateur utilisé est celui présenté au chapitre 2 pour une position correspondant aux mesures de déflections statiques (partie 2.2). Un courant d'émission de champ est mesuré pour une tension positive sur la contre électrode à partir de 200 V (Fig. 7.6).

Pour les mesures d'émission de champ, la relation entre le courant et la tension est souvent représentée avec sur l'axe des abscisses $1/V$ en et sur l'axe des ordonnées

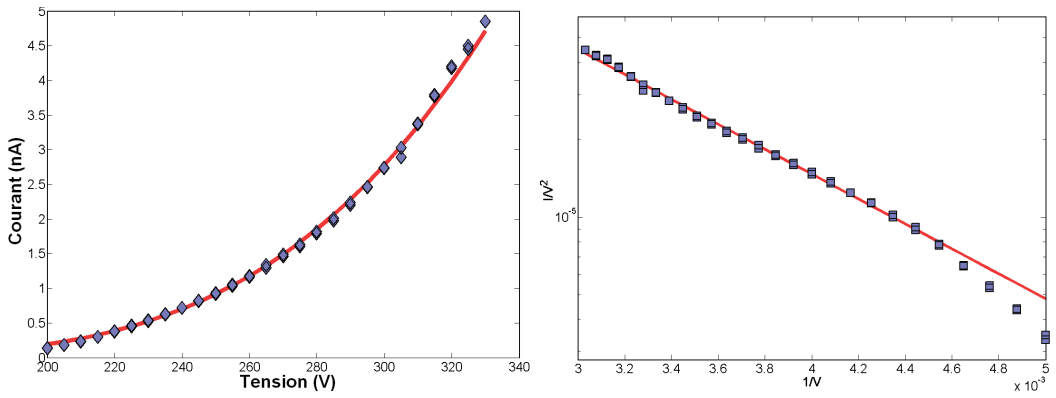


FIGURE 7.6 À gauche : Relation courant tension d'un nanofil SiC (cf. Fig 2.5) sous émission de champ. La tension positive est appliquée à la contre électrode. À droite : Représentation Fowler-Nordheim du courant d'émission de champ. Sur l'axe des abscisses, on trace $1/V$ en fonction de i/V^2 sur l'axe des ordonnées avec une échelle logarithmique.

I/V^2 en échelle logarithmique. Cette représentation provient du modèle de Fowler et Nordheim (1928) qui donne la relation entre le courant et la tension pour un émetteur métallique

$$\frac{i}{V^2} = a(\beta(x)V)^2 \exp\left(-\frac{-b\phi^{\frac{3}{2}}}{\beta(x)V}\right) \tag{7.5}$$

où ϕ est le travail de sortie, a et b sont deux constantes et $\beta(x)$ [m^{-1}] est le facteur d'amplification du champ électrique $F = \beta V$. La dépendance en x de β signale que le facteur d'amplification de champ du résonateur dépend de la position relative du résonateur par rapport à la contre électrode. Cette dépendance sera primordiale pour le couplage entre la vibration et le courant d'émission pour mener à un régime d'auto-oscillation.

Signalons que le modèle de Fowler-Nordheim n'est pas parfaitement vérifié, notamment pour les basses tensions. De manière générale, un écart au comportement prévu par la loi de Fowler-Nordheim peut être causé par

— un couplage entre la tension électrique et la déflection statique du résonateur qui se rapproche de la contre électrode et voit donc une augmentation du facteur d'amplification de champ $\beta(x)$.
— un comportement résistif et/ou semi-conducteur du résonateur SiC comme émetteur de champ (Choueib et al., 2009).

7.2.2 Observation d'oscillations spontanées d'un résonateur SiC sous émission de champ

Un nanofil de SiC est placé sur une pointe en tungstène en face d'une contre électrode en or sur le nanomanipulateur du testeur UHV/MEB. Une tension élec-

trique positive est appliquée à la contre électrode et entraîne dans un premier temps la déflection statique du nanofil (Fig. 7.7).

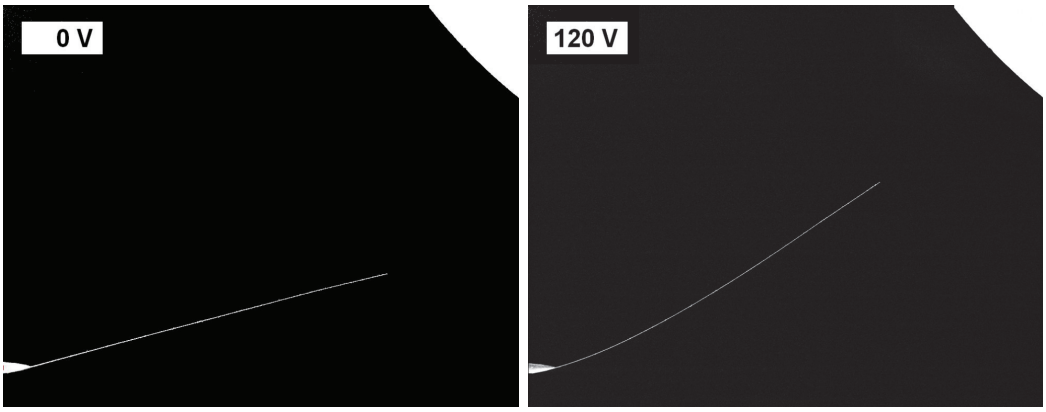


Figure 7.7 À gauche : nanofil en SiC avec une contre électrode au voisinage mise à la masse. À droite : une tension de 120 V est appliquée sur la contre électrode et le résonateur peut se défléchir en direction de la contre électrode.

Le générateur de tension DC connecté à la contre électrode dispose d'un ampèremètre en série permettant une mesure du courant moyen collecté par la contre électrode.

Lorsque la tension atteint 150 V environ, le champ électrique est suffisant pour entraîner un courant d'émission du champ émis par l'apex du résonateur. Ce courant est mesuré par l'ampèremètre et se traduit aussi par un brouillage de l'imagerie du microscope électronique car une partie des électrons émis par le résonateur est collectée par l'électrode du SED portée à un potentiel positif.

Pour une valeur de tension seuil, le résonateur SiC se met spontanément en vibration autour de sa position d'équilibre. L'auto-oscillation du résonateur se traduit par une vibration mécanique observable par imagerie MEB mais également par une oscillation spontanée du courant d'émission de champ. Selon le temps de moyennage utilisé par l'imagerie MEB, il est possible d'observer l'une ou l'autre des preuves d'auto-oscillation (Fig. 7.8).

Il est possible d'estimer la fréquence fondamentale f_{osc} du courant auto-oscillant à partir de l'image de gauche de la figure 7.8. Il y a 23 cycles d'oscillation sur une ligne de 684 pixels. On obtient donc une période de 29,7 μs ce qui donne une fréquence $f_{osc} = 47$ kHz. Cette valeur de fréquence est tout à fait compatible avec la fréquence de vibration du premier mode de vibration avec un forte tension d'accordage en fréquence par tirage. On pourra se référer à la figure 2.16 correspondant à un accordage en fréquence sur la plage de tension sans émission de champ.

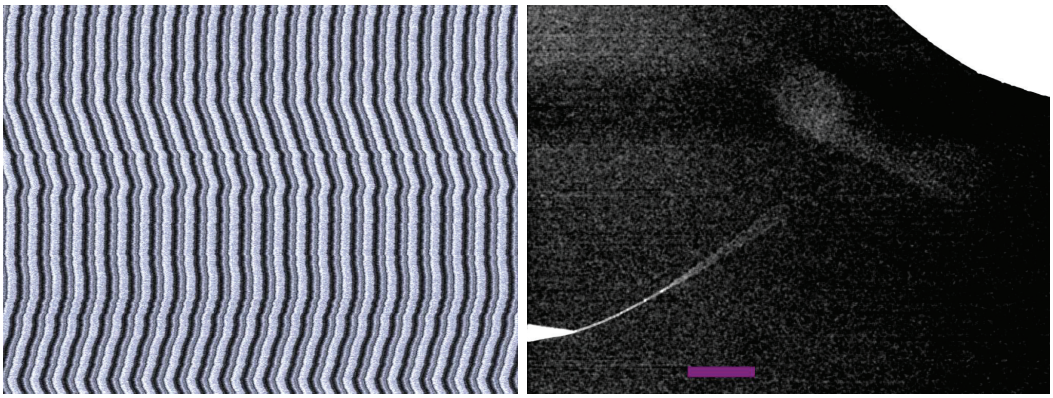


FIGURE 7.8 Les deux images sont obtenues par imagerie du logiciel du MEB à partir du courant collecté par le SED. Le balayage de l'image se fait lignes par lignes et de haut en bas. À gauche : Imagerie du MEB lors d'une auto-oscillation du résonateur SiC ($V_{DC} = 300$ V, $I_{DC} = 1,9$ nA). Le faisceau électronique du MEB est coupé de manière à observer uniquement les électrons collectés émis par le résonateur. Le temps par pixel est de 1 μs (image 684x515 pixels). À droite : Imagerie MEB avec le faisceau en marche et un temps par pixel de 60 μs. Le moyennage est suffisant pour observer le fil en vibration spontanée ($V_{DC} = 190$ DC, $I_{DC} = 0,5$ nA).

7.2.3 Modélisation électromécanique de l'auto-oscillation

La description de l'instabilité auto-oscillante d'un résonateur SiC sous émission de champ est donnée par une prise en compte d'un couplage électromécanique comparable à celle utilisée dans la chapitre 5 sur la dissipation électrostatique avec comme considération supplémentaire le courant d'émission de champ (Fig. 7.9). Cette approche est présentée dans les travaux de Lazarus et al. (2010) (article 1) et Lazarus et al. (2010) (article 2).

On considère que la différence de potentiel entre le support en tungstène du résonateur et la contre électrode est V_{DC} ($V_W = 0$ et $V_E = V_{DC}$). L'équation mécanique est considérée pour le premier mode de vibration autour de sa position d'équilibre

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = -\frac{1}{m}C' V_{DC} V \tag{7.6}$$

L'équation électrique s'obtient par la loi des nœuds pour le point correspondant au potentiel V

$$\frac{V}{R} = i_C + i_{EC} \tag{7.7}$$

où i_{EC} est le courant d'émission de champ et i_C le courant capacitif à travers la capacité C formée par le fil et la contre électrode. Ce courant s'exprime en fonction de la charge Q sur l'armature positive

$$i_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d\big[C(x)(V_{DC} - V(t))\big]}{dt} \tag{7.8}$$

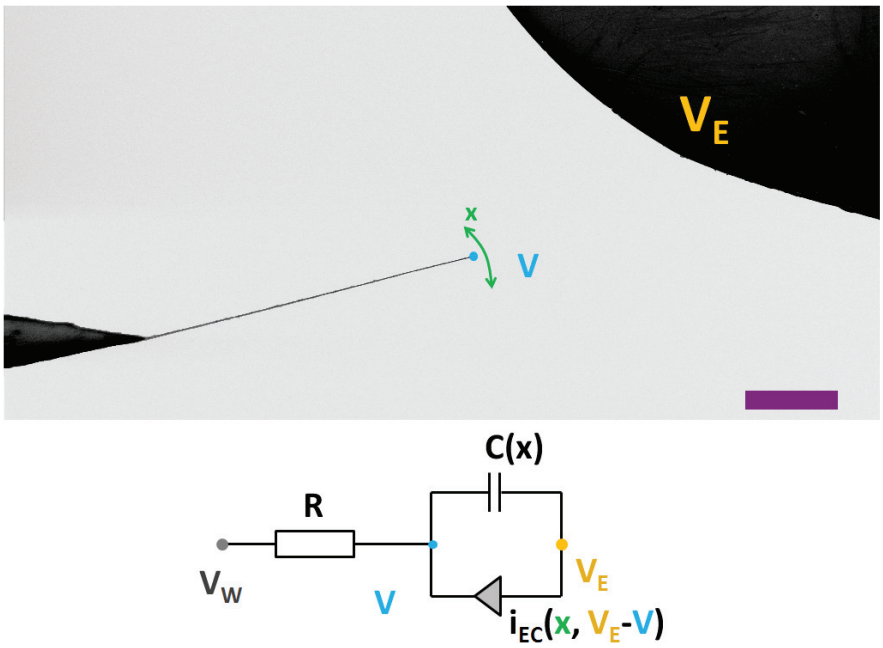


Figure 7.9 Résonateur SiC face à une contre électrode. Le support du résonateur est au potentiel V_W, la contre électrode au potentiel V_E. Le potentiel à l'apex V est introduit et le déplacement du mode de vibration est repéré par l'amplitude à l'apex x. Le courant d'émission de champ est introduit par la branche i_{EC} et dépend de la tension entre l'apex et la contre électrode et la position du résonateur.

Le courant d'émission de champ est de la forme $i_{EC}(x, V_{DC} - V)$. L'équation électrique linéarisée donne

$$\tau\dot{V} + \left(1 + R\frac{\partial i_{EC}}{\partial V}\right) V = R\frac{\partial i_{EC}(V_{DC})}{\partial x}x + RV_{DC}C'\dot{x} \tag{7.9}$$

où le point marque une dérivation par rapport au temps et le prime une dérivation par rapport à la position du mode de vibration à l'apex. En combinant les équations 7.6 et 7.9, on obtient une équation de la forme

$$A_3\frac{d^3x}{dt^3} + A_2\frac{d^2x}{dt^2} + A_1\frac{dx}{dt} + A_0x = 0 \tag{7.10}$$

avec

$$A_3 = \tau \tag{7.11}$$

$$A_2 = 1 + R\frac{\partial i_{EC}}{\partial V} + \tau\frac{\omega_0}{Q} \tag{7.12}$$

$$A_1 = \frac{\omega_0}{Q}\left(1 + R\frac{\partial i_{EC}}{\partial V}\right) + \tau{\omega_0}^2 + \frac{R}{m}(C'V_{DC})^2 \tag{7.13}$$

$$A_0 = {\omega_0}^2\left(1 + R\frac{\partial i_{EC}}{\partial V}\right) + \frac{R}{m}C'V_{DC}\frac{\partial i_{EC}}{\partial x} \tag{7.14}$$

avec $\tau = RC$. On peut remarquer qu'en l'absence d'une variation du courant d'émission de champ $\partial i_{EC}/\partial x = 0$, l'équation électromécanique se ramène à l'équation 5.4 décrivant la dissipation électrostatique pure.

Les solutions de l'équation dynamique 7.10 sont à chercher sous la forme $x = x_0 e^{zt}$ avec z complexe. Le polynôme caractéristique associé obtenu est

$$A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0 \tag{7.15}$$

Il existe toujours une solution réelle à l'équation 7.15, ce qui signifie qu'il y a toujours une solution exponentielle réelle $x_r = x_0 e^{z_r t}$. Les deux autres solutions sont complexes conjuguées marquant des solutions oscillantes avec amortissement positif ou négatif. La stabilité de ces solutions est donnée par le signe négatif de leurs parties réelles. Le critère de Routh-Hurwitz permet de prédire la stabilité des solutions oscillantes en fonction des valeurs des coefficients A_i. Ainsi les résonateurs sera stable si

$$A_2 A_1 > A_3 A_0 \tag{7.16}$$

Le seuil d'auto-oscillation $A_2 A_1 = A_3 A_0$ peut s'interpréter comme l'existence de solutions harmoniques pures $z = i\omega$

$$-i\omega^3 A_3 - \omega^2 A_2 + i\omega A_1 + A_0 = 0 \tag{7.17}$$

soit en séparant les parties réelles et imaginaires

$$\omega^2 = \frac{A_0}{A_2} \tag{7.18}$$

$$\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_1}{A_3} \tag{7.19}$$

ce qui donne la fréquence d'auto-oscillation $\omega/2\pi$ au voisinage du seuil et le cas limite pour le critère de Routh-Hurwitz en dimension 3 (Éq. 7.16).

7.3 Vérification du modèle électromécanique du seuil d'auto-oscillation

Le modèle électromécanique établi dans la partie 7.2.3 va être considéré pour confronter les résultats expérimentaux d'auto-oscillation et plus précisément la valeur de tension seuil d'instabilité.

7.3.1 Position du résonateur

Le résonateur SiC est disposé au voisinage de la contre électrode (Fig. 7.10).

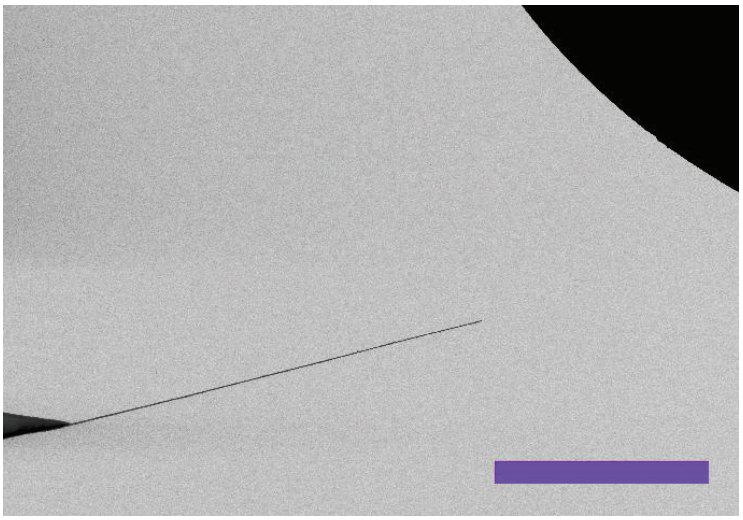


Figure 7.10 Position du résonateur SiC pour la validation du modèle du seuil d'entrée en auto-oscillation. Barre d'échelle 100 μm.

7.3.2 Mesure des préfacteurs du modèle

Une série de mesures est utilisée pour déterminer les valeurs des préfacteurs A_i (Éqs. 7.11, 7.12, 7.13, 7.14) du modèle donnant le seuil d'entrée en auto-oscillation.

La liste des préfacteurs à déterminer est présentée dans la table 7.2

Variable	définition
Q	facteur de qualité sans tension électrique
$f(\bar{V})$	accordage en fréquence
m	masse effective du premier mode
τ	temps électrique RC
$C'(V_{DC}$	dérivée de la capacité par rapport à x
$I_{EC}(\bar{V})$	relation courant tension en émission de champ
$i_{EC}{}'(\bar{V})$	dérivée du courant d'émission de champ par rapport à x

Table 7.2 Coefficients du modèle à déterminer pour la prévision du seuil d'auto-oscillation. Les termes qui varient avec la tension moyenne entre l'apex et la contre électrode sont suivis de la variable $\bar{V} = V_{DC} - < V >$.

On peut signaler que le paramètre de contrôle adapté est la tension DC entre l'apex et la contre électrode $\bar{V}$ qui n'est pas nécessairement égal à la tension DC à cause de la chute de potentiel résistive le long du résonateur parcouru par le courant d'émission de champ. On a

$$\bar{V} = V_{DC} - < V > \tag{7.20}$$

où on a pris la valeur moyenne de V correspondant à la différence de potentiel le long du résonateur (voir Fig. 7.9).

Pour la mesure des termes du tableau 7.2, on supposera que la chute de potentiel le long du résonateur est petite devant la différence de potentiel appliquée. Cette hypothèse est valide lorsque la résistance du résonateur est petite devant la résistance équivalente de l'émission de champ

$$R \ll \frac{V_{DC}}{i_{EC}} \tag{7.21}$$

On a $R \sim 2\,10^{10}$ Ω. Pour $V_{DC} \sim 300$ V, on a typiquement $i_{EC} = 1$ nA soit $V_{DC}/i_{EC} \sim 3\,10^{11}$ Ω. On pourra considérer que l'hypothèse $< V > \ll V_{DC}$ est valide pour $i_{EC} \lesssim$ nA. On rappelle que V_{DC} est appliqué à la contre électrode avec le résonateur mis à la masse.

7.3.2.1 Résonance mécanique et accordage en fréquence

La masse du résonateur est estimée par la mesure des dimensions du résonateur ($L = 220$ μm, $d = 230$ nm) et la masse volumique du SiC $\rho = 3210$ kg.m^{-3}. La masse du résonateur est de $3\,10^{-14}$ kg. La masse effective du mode de vibration est assimilée à la masse effective des modes sans tirage [4] soit $m = 7\,10^{-15}$ kg. Le facteur de qualité sans tension électrique se situe autour de $Q = 5000$.

Les tensions électriques caractéristiques de l'émission de champ sont suffisamment élevées pour pouvoir considérer que le régime d'accordage en fréquence du résonateur est dominé par la tension mécanique, ce qui signifie que la fréquence est linéaire avec la tension électrique à l'apex (Fig. 7.11).

La relation entre la fréquence de résonance et la tension V_{DC} est

$$f = f_l + \alpha {V_{DC}}^2 \tag{7.22}$$

avec les deux paramètres empiriques $f_l = 2,9$ kHz et $\alpha = 102$ Hz.V^{-1}.

L'accordage en fréquence du résonateur sous émission de champ présenté sur la figure permet d'estimer la résistance du résonateur (cf. partie 5.3.1 et Fig. 7.12).

4. La masse effective est la masse qu'il faudrait associer à une particule ponctuelle située à l'apex du résonateur pour avoir la même énergie cinétique que celle obtenue par intégration des énergies cinétiques de chaques éléments de masse sur toute la longueur du résonateur en vibration. Pour tous les modes de vibration sans tirage, la masse effective est égale au quart de la masse totale du résonateur.

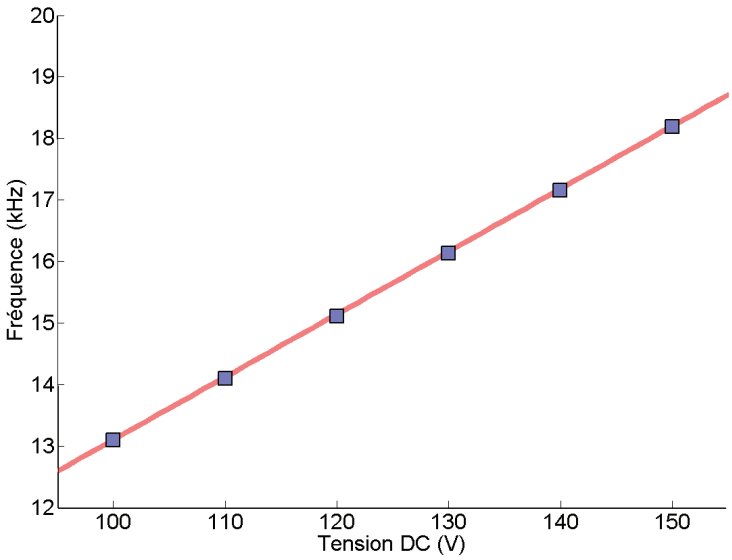


Figure 7.11 Accordage en fréquence électrostatique du premier mode de vibration du résonateur pour des tensions V_{DC} en dessous du seuil d'émission de champ.

7.3.2.2 Mesure de la capacité

La capacité formée par le résonateur peut être déterminée par la mesure du temps de réponse électrique RC (cf. partie 5.3.2). La valeur de capacité obtenue est $C = 1$ fF. Comme les valeurs typiques de C' sont de l'ordre du pF.m^{-1}, on peut raisonnablement considérer que les variations de capacité pour les déplacements considérés sont petites devant la valeur de C (il faudrait un déplacement de 100 μm pour que la variation de capacité soit égale à un dixième de la valeur de C).

La détermination de la dépendance en tension DC et en position x pour la capacité formée par un nanofil et la contre électrode a été présentée dans la partie 2.2.2 sur la déflection statique d'un résonateur. Une mesure de déflection comparable à celle de la figure 2.7 a été réalisée pour la position du nanofil de la figure 7.10. La relation entre la dérivée de la capacité et la tension V_{DC} est donnée par dérivation de l'équation 2.8 en remplaçant la position d'équilibre x_a par sa valeur (Éq. 2.10)

$$C'(V_{DC}) = \frac{C_2 x_{lim}}{1 + \frac{C_2 {V_{DC}}^2}{2k}} \tag{7.23}$$

où x_{lim} est la déflection à l'apex pour une tension V_{DC} infinie, C_2 la dérivée seconde de la capacité autour de la position x_{lim}. Les paramètres sont ajustés pour

$$C_2 = 2,2\,10^{-4}\ \text{F.m}^{-2} \tag{7.24}$$

$$x_{lim} = 60\ \mu\text{m} \tag{7.25}$$

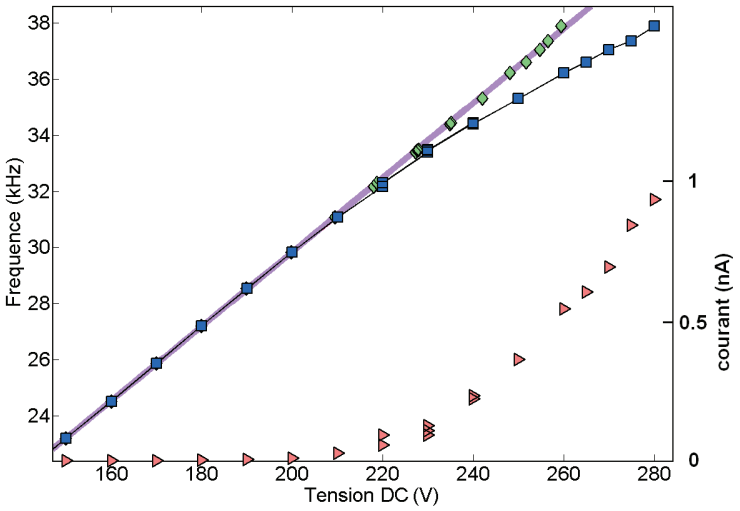


FIGURE 7.12 Accordage en fréquence électrostatique du premier mode de vibration du résonateur pour des tensions V_{DC} en dessous et au dessus du seuil d'émission de champ (carrés). Le courant d'émission de champ (triangles) introduit une chute de potentiel le long du résonateur qui diminue la tension entre l'apex et la contre électrode. Le décalage en tension est compensé (diamants) pour ajuster les portions de courbe avec et sans courant d'émission de champ. La résistance optimale est $R = 22 \pm 3$ GΩ.

7.3.2.3 Relation courant tension pour l'émission de champ

Le modèle de Fowler-Nordheim est utilisé pour modéliser la dépendance du courant avec la tension appliquée entre le résonateur et la contre électrode. La relation courant tension de la figure 7.13 est en représentation Fowler-Nordheim avec la modélisation

$$\ln\left(\frac{i}{V^2}\right) = a + bV^{-1} \tag{7.26}$$

avec

$$a = -7.0 \tag{7.27}$$
$$b = -8.8\,10^2 \text{ V} \tag{7.28}$$

7.3.2.4 Variation du courant d'émission de champ avec la position

La dépendance du courant d'émission de champ avec la position du résonateur est indispensable pour obtenir un régime d'auto-oscillation. En effet, si la position du résonateur n'a aucune influence sur le courant d'émission de champ ou plus simplement s'il n y'a pas d'émission de champ, le couplage électromécanique est celui décrit au chapitre 5 sur la dissipation électrostatique.

La mesure de la dépendance du courant d'émission de champ avec la position du résonateur est délicate.

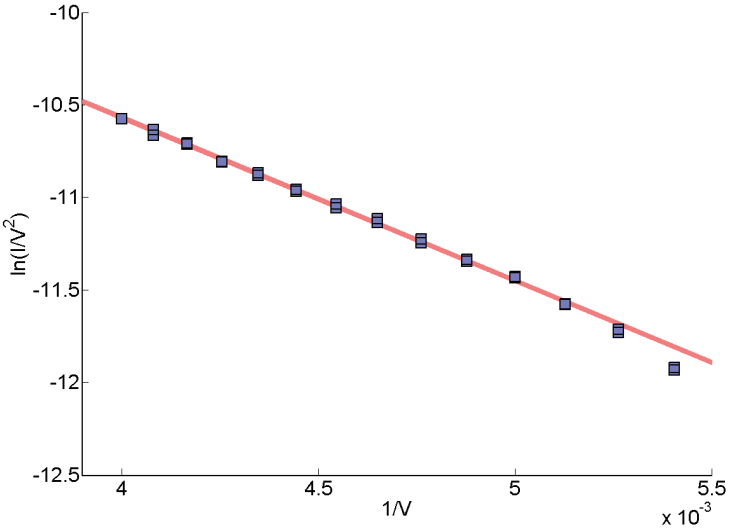


Figure 7.13 Courant d'émission de champ en fonction de la tension appliquée entre le résonateur et la contre électrode. La représentation Fowler-Nordheim utilise le logarithme du rapport entre le courant et la tension au carré en fonction de l'inverse de la tension. Le coefficient directeur de la droite modèle est $b = -8.8\,10^2$ V et l'ordonnée à l'origine $a = -7.0$.

— la mesure doit être faite à tension V_{DC} constante.
— le déplacement du résonateur ne peut pas être obtenu par un forçage électrostatique par modulation de la tension électrique. En effet, une modulation de la tension ΔV entre le résonateur et la contre électrode entraîne une variation du courant par la résistance d'émission de champ $\Delta i = \partial i_{EC}/\partial \Delta V$. Il donc est nécessaire d'utiliser les blocs nanomanipulateurs pour déplacer le résonateur sans en changer le potentiel électrique.
— la mesure du courant modulé est pertinente mais plus délicate pour une modulation de la position du résonateur selon son mode de vibration. Il sera présenté une mesure non résonante à basse fréquence ($\sim$ Hz).
— à cause des courants capacitifs, il faut mesurer le courant réellement émis par le résonateur en émission de champ à l'aide du SED.

La procédure de la mesure est illustrée sur la figure 7.14.

Une tension alternative à basse fréquence ($\sim$ Hz) d'amplitude 10 V pic à pic est appliquée aux blocs nanomanipulateurs. Le déplacement du résonateur par rapport à la contre électrode est mesuré avec l'imagerie MEB en l'absence de tension V_{DC}. Pour la même modulation de la position des blocs nanomanipulateurs, une tension DC d'émission de champ est appliquée et la modulation du courant est mesurée à basse fréquence, c'est-à-dire pour un déplacement sans déformation du résonateur.

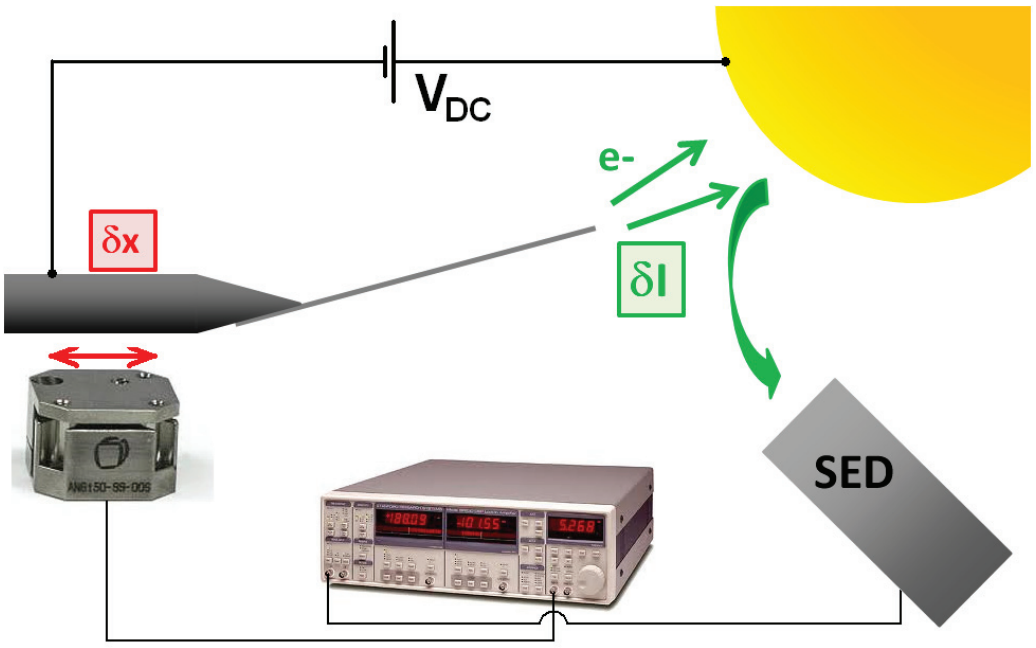


FIGURE 7.14 Principe de la mesure de la variation du courant d'émission de champ avec la position. Une tension DC est appliquée entre le résonateur et la contre électrode afin d'établir un courant d'émission de champ. La position du résonateur est modulée à l'aide des blocs nanomanipulateurs à basse fréquence ou à la fréquence de résonance du premier mode de vibration. Le courant d'émission de champ est mesuré par le SED en utilisant un étalonnage à partir de deux valeurs de courants DC pour deux tensions d'émission de champ. Une détection synchrone est utilisée pour mesurer la variation du courant d'émission de champ à la fréquence de modulation de la position.

La dérivée du courant d'émission de champ est mesurée pour deux valeurs de courant DC (table 7.3).

Courant DC (EC)	$i_{EC}{}'$
0,45 nA	1,4 pA.μm^{-1}
1,2 nA	2,1 pA.μm^{-1}

TABLE 7.3 Dérivée du courant d'émission de champ en fonction de la position pour deux valeurs de courants d'émission de champ.

Pour tenir compte de la dépendance de $i_{EC}{}'$ avec la valeur du courant moyen, on utilise une loi empirique de la forme

$$i_{EC}{}' = \kappa I_{DC} \tag{7.29}$$

où la valeur du coefficient κ [L^{-1}] est estimé à partir des résultats du tableau 7.3

soit

$$\kappa = 2,0\ 10^{-3}\ \mu\text{m}^{-1} \tag{7.30}$$

ce qui signifie que pour un courant de 1 nA, le terme $i_{EC}{}'$ vaut 2 pA.μm^{-1}.

7.3.3 Seuil d'instabilité

À partir des parties précédentes, les valeurs des termes du tableau 7.2 sont déterminées comme

Variable	définition
Q	5000
$f(\bar{V})$	Éq. 7.22
m	$7\ 10^{-15}$ kg
τ	$R = 22$ GΩ, $C = 1$ fF
$C'(V_{DC}$	Éq. 7.23
$I_{EC}(\bar{V})$	Éq. 7.26
$i_{EC}{}'(\bar{V})$	Éq. 7.29

Table 7.4 Coefficients du modèle déterminés dans la limite $\bar{V} \approx V_{DC}$.

Les termes A_i de l'équation 7.10 correspondant au modèle électromécanique de l'auto-oscillation sont définis à partir des données du tableau 7.4. Les solutions de l'équation 7.10 prennent la forme $x = x_0 e^{\sigma t} e^{i\omega t}$ où ω est la pulsation et σ le taux de croissance, négatif pour un oscillateur amorti et positif pour un auto-oscillateur. Le taux de croissance est représenté sur la figure 7.15 en fonction de la tension entre l'apex et la contre électrode $\bar{V}$ et en fonction de la tension appliquée, c'est-à-dire en tenant compte de la chute de potentiel $< V >$ le long du résonateur.

La tension seuil de mise en auto-oscillation prévue par le modèle est 198 V ($i_{EC} = 320$ pA) pour la position de la figure 7.10. La tension appliquée expérimentalement pour observer l'oscillation spontanée du courant est 240 ± 10 V ($i_{EC} \sim 1$ nA). L'incertitude sur la détermination du seuil d'auto-oscillation peut être reliée à l'instabilité du courant d'émission de champ à tension V_{DC} fixe. Cette instabilité est liée au fait que le champ électrique au bout du résonateur dépend fortement de l'état de surface au niveau atomique de la zone d'émission. Il est possible d'observer des sauts du courant moyen d'émission d'un facteur 2. Afin de limiter de telles évolutions, il est nécessaire de nettoyer par chauffage sous ultra vide la surface du résonateur. L'intensité du chauffage doit être suffisante pour nettoyer efficacement le résonateur mais pas trop importante afin d'éviter une évolution irréversible des propriétés physiques du résonateur et notamment une diminution de la résistance (tableau 5.2).

L'écart entre la tension seuil prévue par le modèle et la tension requise expérimentalement peut être expliquée par plusieurs faits :

— la mesure de $i_{EC}{}'$ utilise un déplacement uniforme du résonateur alors qu'il aurait fallu un déplacement selon le mode de vibration
— il y a eu une étape de nettoyage par chauffage entre la mesure de la résistance et la mesure du seuil d'auto-oscillation. La résistance peut donc avoir diminué.

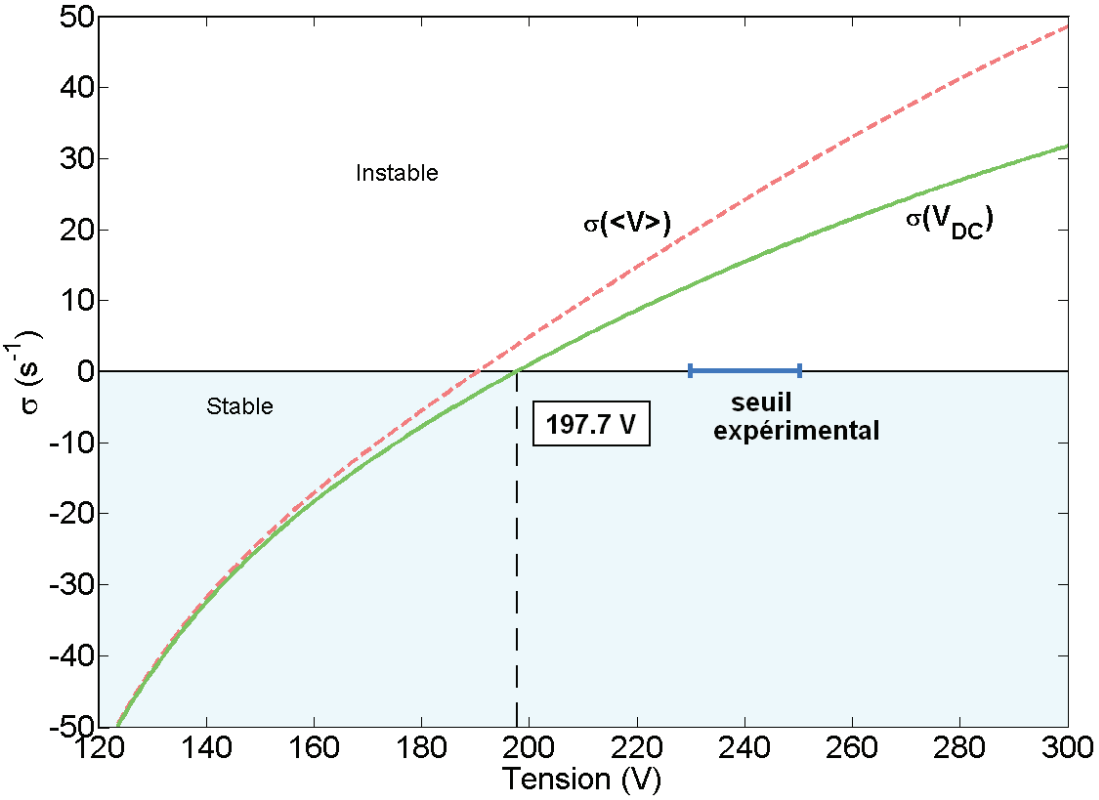


FIGURE 7.15 Taux de croissance σ des solutions du modèle électromécanique de l'auto-oscillation ($x = x_0 e^{\sigma t} e^{i\omega t}$). La courbe en pointillée est obtenue à partir des coefficients du tableau 7.4 en prenant la tension $\bar{V}$ entre l'apex et la contre électrode selon l'axe des abscisses. La courbe en trait plein est le taux de croissance en fonction de la tension V_{DC} qu'il faut appliquer entre le résonateur et la contre électrode. Le décalage horizontal entre les deux courbes est la chute de potentiel le long du résonateur $Ri_{EC}(\bar{V})$. Le seuil de l'instabilité correspond au passage de σ positif, c'est-à-dire $V_{DC} = 198$ V. La tension obtenue expérimentalement est de 240 ± 10 V.

Si on considère que la différence de tension mesurée provient de la mesure de $i_{EC}{}'$, on peut évaluer quel devrait être la valeur de κ_t dans l'équation

$$i_{EC}{}' = \kappa_t I_{DC} \tag{7.31}$$

pour avoir la bonne valeur de seuil. On trouve $\kappa_t = 0,9\,10^{-3}$ μm^{-1} ce qui correspond à un facteur 2 par rapport à la valeur mesurée $\kappa = 2,0\,10^{-3}$ μm^{-1}.

7.4 Comportement autour du seuil

Cette partie décrit la dynamique du résonateur auto-oscillant autour du seuil d'auto-oscillation. Les résultats qui vont être présentés sont pour des positions du résonateur et des valeurs de résistances différentes d'une mesure à une autre. En particulier, les seuils de mise en auto-oscillation et les fréquences d'oscillations ne coïncident pas nécessairement.

7.4.1 Distribution du courant autour de sa valeur moyenne

Le courant d'émission de champ est mesuré à l'aide du SED et enregistré par un oscilloscope numérique. La période d'échantillonnage de l'oscilloscope est de l'ordre de quelques centaines de nanoseconde, c'est-à-dire comparable au temps de coupure du détecteur SED. Le courant I_{DC} est également mesuré pendant l'acquisition du signal avec l'ampèremètre de la source de tension. Cette mesure permet un étalonnage du courant émis par le résonateur avec la tension mesurée par le SED.

La durée d'une acquisition de courant pour obtenir les histogrammes de la figure 7.17 est de 2 secondes environ. Le signal est découpé en 300 échantillonnages de 6 ms et l'histogramme est représenté sous forme d'une carte (Fig. 7.16) où l'axe horizontal est le courant et l'axe vertical le temps.

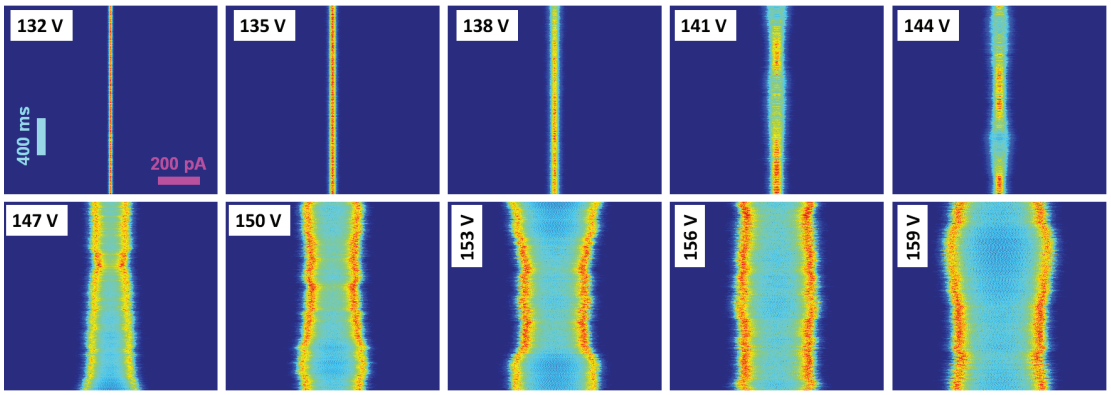


Figure 7.16 Probabilité de présence du courant pour les valeurs de tensions de la figure 7.17. Une ligne horizontale correspond à un histogramme sur une acquisition de 6 ms (150 cycles d'oscillation). L'axe vertical est le temps, du haut vers le bas.

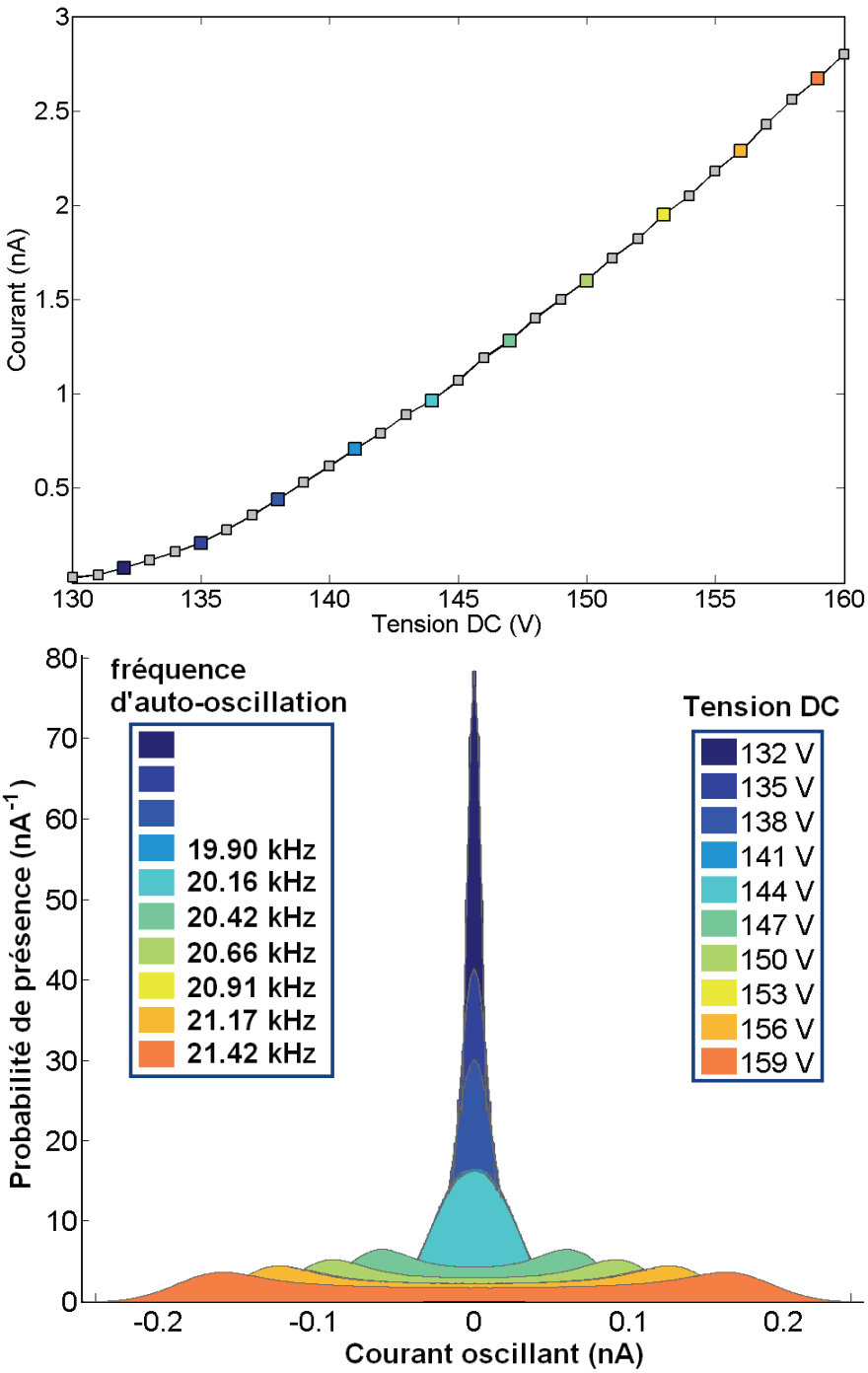


FIGURE 7.17 (en haut) Courant d'émission de champ mesuré par l'ampèremètre en fonction de la tension DC appliquée. Le résonateur est placé au voisinage de la contre électrode et le seuil d'auto-oscillation est autour de 145 V. (en bas) Probabilité de présence du courant à la fréquence de vibration du résonateur. Ce dernier est obtenu par un filtrage numérique du courant sur la plage 15-25 kHz. Lorsque le maximum du spectre se trouve dans la plage de filtrage, la fréquence associée est relevée.

Le courant d'émission de champ en fonction de la tension est tracé sur la figure 7.17. Il ne suit pas la loi habituelle de Fowler-Nordheim avec une croissance de type exponentielle. Cet écart peut être attribué notamment aux propriétés isolantes ou semi-conductrice du résonateur (Choueib et al., 2009) ou encore aux oscillations mécaniques et électriques qui peuvent conduire à une variation du courant moyen.

Le courant d'émission de champ est mesuré par le SED pour les valeurs de tension DC de la figure 7.17. Le signal est filtré autour de la fréquence d'oscillation du résonateur ($\sim$ 20 kHz) en ne conservant dans le spectre de Fourier que les composantes de fréquence de 15 kHz à 25 kHz. L'histogramme du courant est tracé pour chaque valeur de tension DC (Fig. 7.17).

7.4.2 Stabilité en fréquence

7.4.2.1 Représentation dans le référentiel tournant

Pour un auto-oscillateur sans aucunes fluctuations, la fréquence d'auto-oscillation est fixée par les paramètres physiques du système. Dans ce cas là, la phase $\phi(t)$ de l'oscillation, ou de manière équivalente le nombre de cycles $\Pi(t) = \phi(t)/2\pi$ en fonction du temps, est directement obtenu par intégration de la pulsation ω d'auto-oscillation

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_{t'=0}^{t'=t} \omega dt' \tag{7.32}$$

ou de la fréquence selon que l'on parle de la phase ou du nombre de cycles

$$\Pi(t) = \Pi(0) + \int_{t'=0}^{t'=t} f dt' \tag{7.33}$$

où $\Pi(t)$ est le nombre de cycles en fonction du temps et f la fréquence de l'auto-oscillation.

Pour un système soumis à des fluctuations d'origines diverses, la phase ou le nombre de cycles n'évolue pas exactement linéairement. Afin de visualiser ce décalage, il est commode de représenter le nombre de cycle de l'auto-oscillateur dans le *référentiel tournant*. Cette représentation revient à retrancher au nombre de cycles son évolution linéaire moyenne

$$\Pi_{RT}(t) = \Pi(t) - < f > t \tag{7.34}$$

où $\Pi(t)$ est le nombre de cycles en fonction du temps, $< f >$ désigne la fréquence d'auto-oscillation moyenne et $\Pi_{RT}(t)$ est le *nombre de cycles dans le référentiel tournant*. Cette représentation est utilisée pour les deux tracés en bas de la figure 7.18.

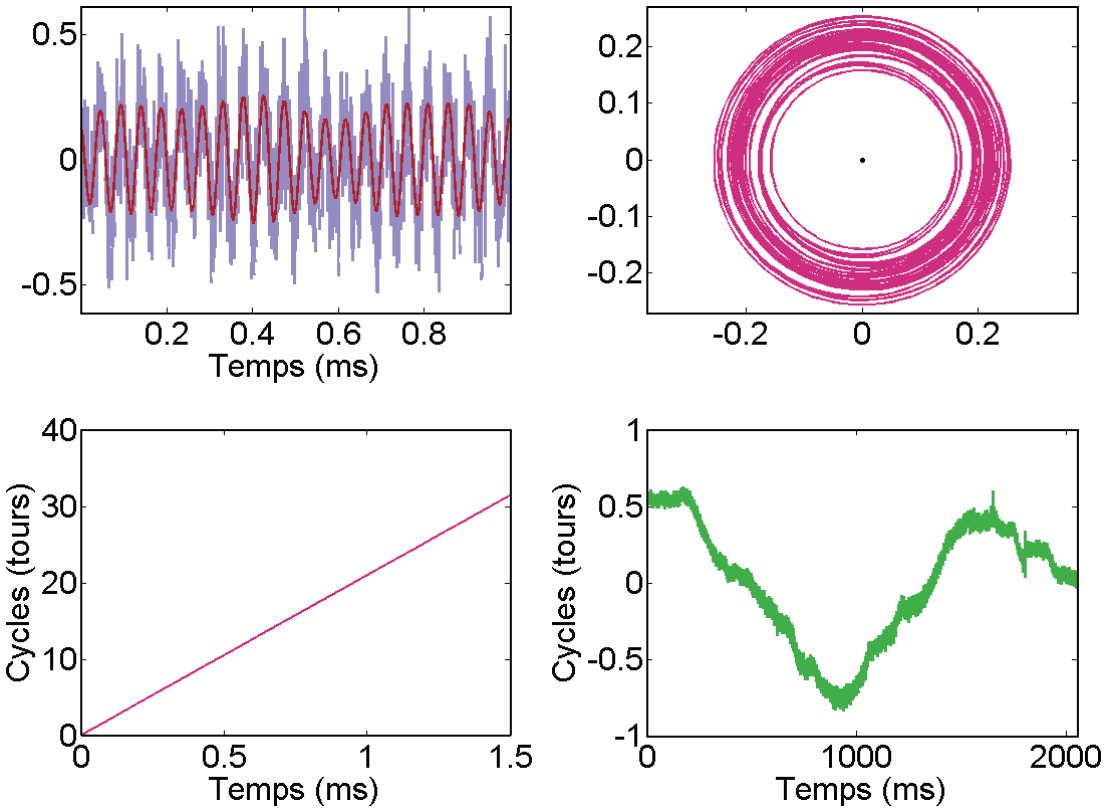


FIGURE 7.18 (en haut, à gauche) Signal du SED proportionnel au courant d'émission de champ. L'amplitude 0 correspond au courant moyen (1,95 nA, 153 V). Le signal filtré sur la fenêtre 15 kHz - 25 kHz est superposé au signal brut. (en haut, à droite) Portrait de phase du courant obtenue par la transformée de Hilbert en représentation dans le plan complexe. (en bas à gauche) Phase de l'auto-oscillateur exprimée en nombre de tours ($\Pi(t)$) en fonction du temps. (en bas, à droite) Phase obtenue en retranchant la pente moyenne, exprimée en nombre de tours ($\Pi_{RT}(t)$).

7.4.2.2 Phase de l'auto-oscillateur

Les acquisitions de la partie 7.4.1 peuvent être utilisées pour extraire la phase du signal auto-oscillant (Fig. 7.18). Pour cela, une transformation de Hilbert est appliquée au signal filtré spectralement entre 15 et 25 kHz. La fonction obtenue correspond au signal complexe $Ae^{i\phi}$. Le principe de l'extraction numérique de la phase est résumé par

$$A(t)\cos\phi(t) \overset{\text{Hilbert}}{\longrightarrow} A(t)e^{i\phi(t)} \overset{\text{Arg}}{\longrightarrow} \phi(t) \tag{7.35}$$

La transformée de Fourier de la phase exprimée en radian est représentée sur la figure 7.19 avec un signal en temps rapporté à une durée de 1 seconde de manière

à ce que l'amplitude du mode dans l'espace de Fourier corresponde à l'amplitude réelle du signal.

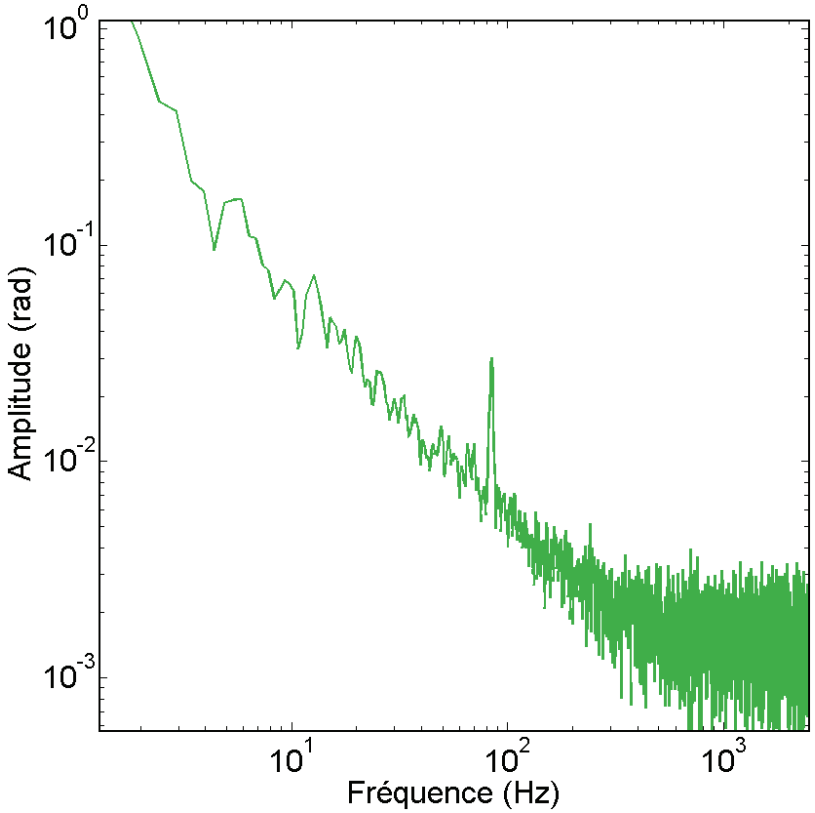


Figure 7.19 Amplitude de la transformée de Fourier de la phase (Fig. 7.18, en bas à gauche) autour de la pente moyenne (rad).

Sur la figure 7.19, la pente négative pour les fréquences inférieures à quelques centaines de hertz marque une dérive de la phase sur une échelle de temps de la dizaine de millisecondes. Sur des temps plus courts, la phase est dans un régime de bruit blanc. Un pic est également observé vers 85 Hz. Il peut être interprété comme une modulation de la phase à basse fréquence.

La phase obtenue en retranchant la pente moyenne (Fig. 7.18, en bas) correspond à la phase de l'auto-oscillateur dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire moyenne. Il est intéressant de constater que cette phase peut dériver de plus d'un tour (Fig. 7.20).

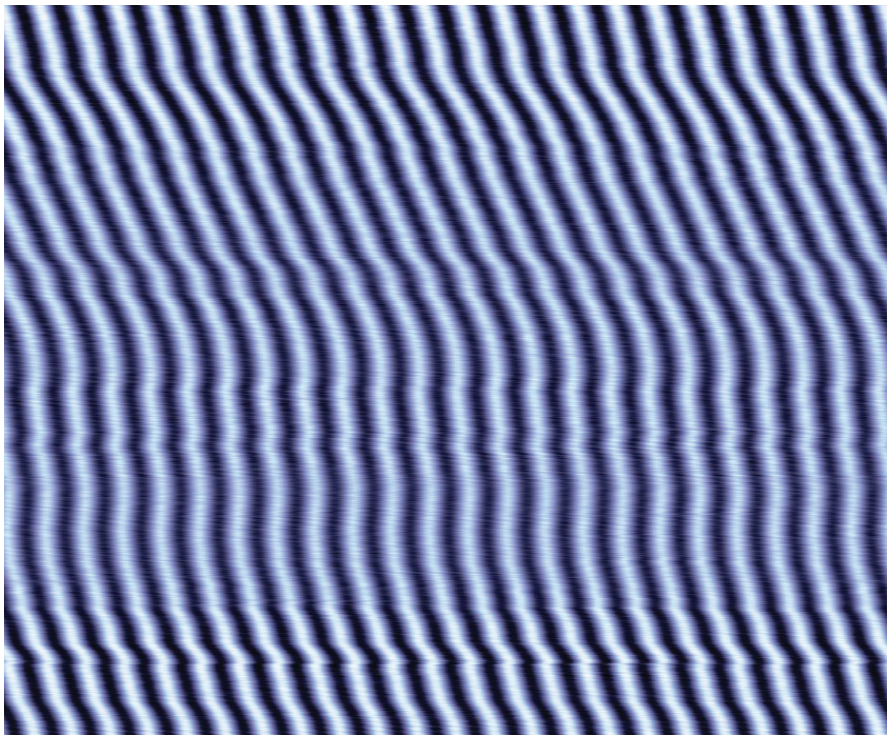


FIGURE 7.20 Carte obtenue à partir du signal de SED (courant d'émission de champ). Chacune des 2000 lignes horizontales correspond à 1 ms du signal d'acquisition de durée totale 2 s. Il est déconseillé de regarder cette carte pendant plus de 10 s.

7.4.2.3 Variance d'Allan

Lorsqu'un auto-oscillateur génère un signal périodique, le signal produit peut être considéré comme un signal d'horloge. Il est possible de quantifier la notion de stabilité d'une horloge en utilisant la variance d'Allan. Il s'agit d'une mesure comparant une variance associée à des fréquences instantanées *successives*. L'intérêt de cet outil est de pouvoir quantifier la stabilité d'horloges dérivant dans le temps, c'est-à-dire pour lesquelles la variance usuelle utilisant la valeur moyenne de la fréquence ne converge pas.

À partir d'un système fournissant une liste de temps via un événement mesurable, comme par exemple les maxima de courant pour un nanofil auto-oscillant, il est possible de former la liste de temps

$$T = [t_1\ t_2\ t_3\ t_4\ ...]$$

où t_i est le temps de l'événement périodique indicé par i. À cette liste de temps, on fait correspondre une série de fréquences instantanées

$$F = \left[\frac{1}{t_2 - t_1}\ \frac{1}{t_3 - t_2}\ \frac{1}{t_4 - t_3}\ ...\right]$$

La variance d'Allan pour un intervalle de temps est alors calculée à partir des fréquences successives

$$\sigma_{A,1}{}^2 = \frac{1}{2} < (f_{i+1} - f_i)^2 >$$

où $< . >$ est la valeur moyenne sur l'indice i. Cette définition peut s'étendre à n intervalles de temps

$$\sigma_{A,n}{}^2 = \frac{1}{2} < (f_{i+n} - f_i)^2 >$$

La représentation de la variance d'Allan est sous forme d'un graphe (Fig. 7.21) avec en abscisse le choix de la base de temps c'est-à-dire l'indice n et en ordonnée la variance d'Allan $\sigma_{A,n}$.

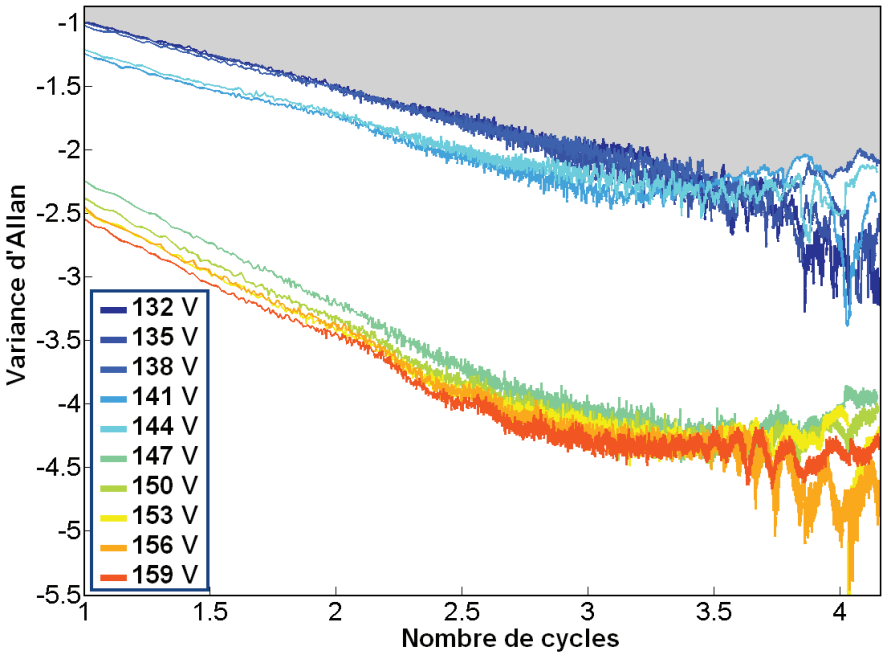


Figure 7.21 Variance d'Allan en fonction du nombre de cycles d'oscillation choisis comme base de temps pour des valeurs de tensions DC croissantes (échelles logarithmiques). Les courbes à 132 V et 135 V correspondent à un traitement du signal de bruit de fond et définissent une zone grisée de limite de détection en haut de la figure.

Lorsque le résonateur génère un courant auto-oscillant ($V_{DC} > 144$ V), la variance d'Allan décroît avec le nombre de cycles pris comme base de temps. Cette décroissance s'interprète comme le moyennage des fluctuations rapides de la fréquence. La variance d'Allan atteint un minimum de 10^{-4} pour une base de temps de 1000 cycles. Cela signifie que les fluctuations de la fréquence correspondant à 1000 cycles d'oscillations sont de l'ordre de $0,01\%$. En augmentant davantage le nombre de cycles, le moyennage des fluctuations rapides entre en compétition avec

les dérives aux temps longs de la fréquence que l'on pourrait rapprocher à un bruit en $1/f$. La nature de ces dérives aux temps longs sera discutée dans la partie suivante.

Lorsque le résonateur n'auto-oscille pas la variance d'Allan est plus importante d'un ordre de grandeur au moins. Pour les deux courbes à 132 V et 135 V, il n'y a pas de signal autour de la fréquence d'auto-oscillation attendue, ce qui veut dire que les courbes correspondent à un traitement du bruit de fond.

7.4.2.4 Corrélation entre l'amplitude et la fréquence d'auto-oscillation

La phase représentée sur la Fig. 7.18 est remarquablement stable. Il a été observé des courants auto-oscillants avec une dérive de la phase plus importante comme par exemple celle présentée sur la figure 7.22.

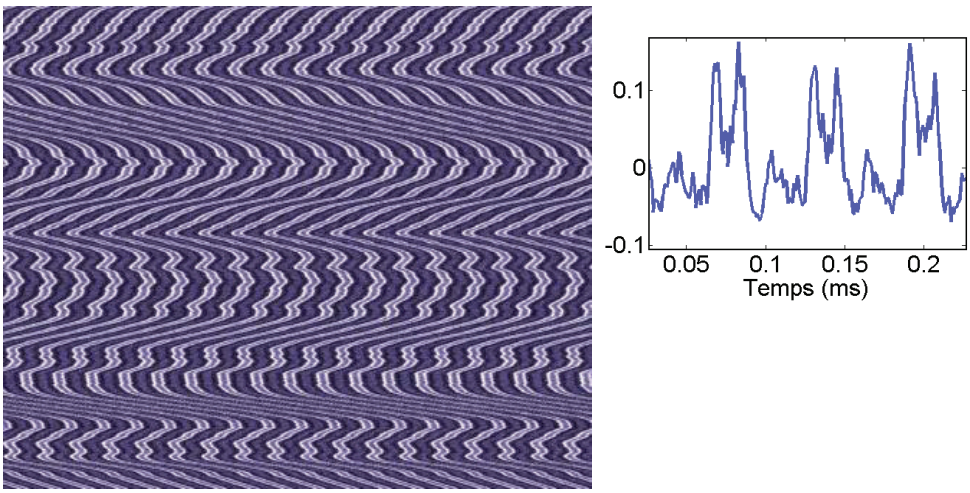


FIGURE 7.22 Carte obtenue à partir du signal de SED (courant d'émission de champ) pour V_{DC} = 310 V et I = 3,75 nA. Les dimensions de la carte sont 1100x903 pixels avec un temps de 1 μs par pixel. Le signal brut du SED pour 3 périodes d'auto-oscillations est en insert en haut à droite.

En comparaison avec la carte de la figure 7.20, la phase dérive de plusieurs tours sur un temps 2 fois plus court. Les deux acquisitions ont été réalisées à plusieurs mois d'intervalle avec 5 nettoyages de la surface du résonateur par chauffage du support. D'autre part le régime d'auto-oscillation est différent puisque le signal de la figure 7.18 est au voisinage du seuil avec un filtrage autour de la fréquence d'auto-oscillation alors que le signal de la carte 7.22 est fortement non linéaire.

Sur la figure 7.23 la fréquence instantanée obtenue par dérivation de la phase est représentée en fonction du temps avec la fréquence 0 correspondant à la fréquence moyenne d'auto-oscillation (16,3 kHz). En utilisant une mise à l'échelle, le courant moyen et l'amplitude du courant auto-oscillant sont également représentés.

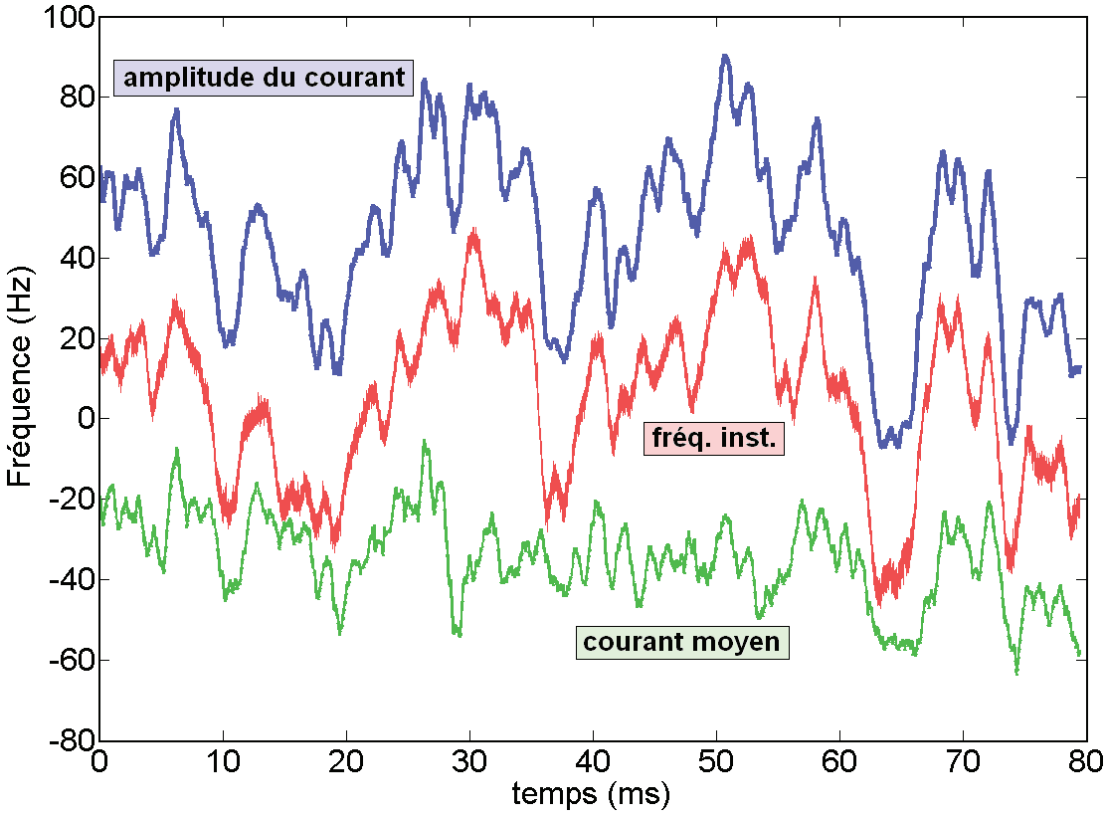


Figure 7.23 Fréquence instantanée obtenue par dérivation de la phase en fonction du temps. Le courant et l'amplitude d'auto-oscillation sont superposés après une mise à l'échelle.

La corrélation des courbes est mesurée en utilisant la formule

$$\mathcal{C} = \frac{\sum A(i)B(i) - \sum A(i) \sum B(i)}{\sqrt{\sum A(i)^2 - \left(\sum A(i)\right)^2}\sqrt{\sum B(i)^2 - \left(\sum B(i)\right)^2}}$$

où A et B sont les deux signaux à corréler et où les sommes portent sur l'indice temporel correspondant à l'échantillonnage du signal. Le résultat d'une mesure de corrélation donne un résultat entre 0 et 1. La valeur 0 correspond à deux signaux sans corrélation et la valeur 1 correspond à deux signaux égaux à une constante multiplicative ou additive près.

La corrélation est $\mathcal{C} = 52\%$ entre l'amplitude du courant alternatif et la fréquence, $\mathcal{C} = 68\%$ entre le courant moyen et l'amplitude du courant et $\mathcal{C} = 95\%$ entre la fréquence et l'amplitude. Cette corrélation des fluctuations laisse supposer que le courant, l'amplitude et la fréquence d'auto-oscillation sont tous fonctions d'une même grandeur physique qui dérive sur une échelle de temps de l'ordre de la milliseconde. Parmi les sources de dérive possible, on peut proposer le terme d'amplification de champ β qui donne l'intensité du courant, le seuil d'auto-oscillation

via le terme de dérivé du courant i'_{EC} et l'accordage en fréquence lié à la chute de potentiel le long du résonateur résistif.

7.4.3 Auto-oscillation des modes d'ordres supérieurs

Lorsque le résonateur était disposé en face et proche de la contre électrode, la mise en oscillation spontanée a été observée pour des modes de vibration d'ordres supérieurs 2 et 4 (Fig. 7.24).

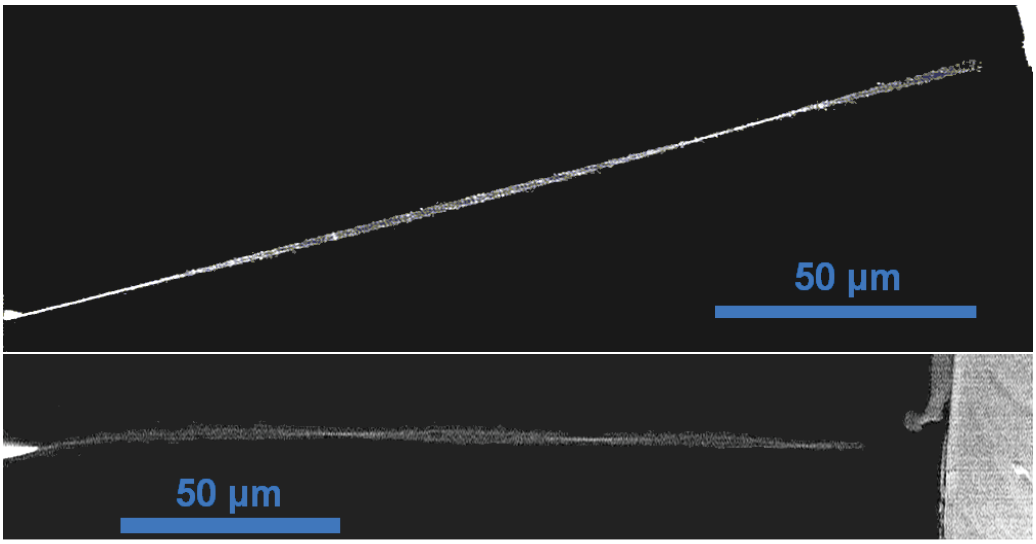


FIGURE 7.24 Mode de vibration d'ordre 2 (en haut, $V_{DC} = 170$ V, $I = 1$ nA) et 4 (en bas, $V_{DC} = 160$ V, $I = 2$ nA).

Ces observations ont été faites pour des résistances de l'ordre de 1 GΩ. Cette résistance donne une fréquence caractéristique électrique $1/2\pi RC = 160$ kHz pour $C = 1$ fF. La fréquence du mode 2 est de 67 kHz du mode 4 est de 260 kHz aux tensions DC indiquées dans la légende de la figure 7.24, ce qui justifierai que les modes d'ordres supérieurs soient plus instables (Lazarus et al., 2010).

Conclusion du chapitre

La notion d'auto-oscillateur a été présentée pour des systèmes expérimentaux très variés. Une liste aussi complète que possible de systèmes nanoélectromécaniques auto-oscillants a été proposée parmi lesquels figurent les nanofils de carbure de silicium sous émission de champ.

Un modèle électromécanique a été développé pour lequel la dépendance du courant d'émission de champ avec la position du nanofil est la condition indispensable

pour obtenir un régime de dissipation négative pouvant entraîner une oscillation spontanée. Les coefficients entrant en jeu dans le modèle ont été mesurés indépendamment et sont compatibles avec le seuil d'auto-oscillation observé expérimentalement.

Quelques aspects du comportement du résonateur auto-oscillant ont été présentés à la fin du chapitre.

Bibliographie

Acco, P., 2003 : *Étude de la boucle à verrouillage de phase par impulsions de charge*. PhD thesis Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.

Ayari, A., P. Vincent, S. Perisanu, M. Choueib, V. Gouttenoire, M. Bechelany, D. Cornu et S. T. Purcell, 2007 : Self-oscillations in field emission nanowire mechanical resonators : A nanometric dc-ac conversion. *Nano Lett.* **7**, 2252.

Belousov, B. P., 1959 : (periodically acting reaction and its mechanism). *Collection of Abstracts on Radiation Medicine* **147**, 145.

Billah, K. Y. et R. H. Scanlan, 1991 : Resonance, tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *Am. J. Phys.* **59**, 118.

Bénard, H., 1900 : Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportent de la chaleur par convection en régime permanent. *Annales de Chimie Physique* **23**, 62.

Buck, J., 1988 : Synchronous rhythmic flashing in fireflies. *Q. Rev. Biol.* **63**, 265.

Choueib, M., A. Ayari, P. Vincent, M. Bechelany, D. Cornu et S. T. Purcell, 2009 : Strong deviations from Fowler-Nordheim behavior for field emission from individual SiC nanowires due to restricted bulk carrier generation. *Phys. Rev. B* **79**, 075421.

Czeisler, C. A., J. F. Duffy, T. L. Shanahan, E. N. Brown, J. F. Mitchell, D. W. Rimmer, J. M. Ronda, E. J. Silva, J. S. Allan, J. S. Emens, D.-J. Dijk et R. E. Kronauer, 1999 : Stability, precision, and near-24-hour period of the human circadian pacemaker. *Science* **284**, 2177.

de Langre, E., 2001 : *Fluides et Solides*.

Dunlap, J. C., 1999 : Molecular bases for circadian clocks. *Cell* **96**, 271.

Edgcombe, C. J. et U. Valdre, 2001 : Microscopy and computational modelling to elucidate the enhancement factor for field electron emitters. *J. Microsc-Oxford* **203**, 188.

Favero, I., S. Stapfner, D. Hunger, P. Paulitschke, J. Reichel, H. Lorenz, E. M. Weig et K. Karrai, 2009 : Fluctuating nanomechanical system in a high finesse optical microcavity. *Opt. Express* **17**, 12813.

Feng, X. L., C. J. White, A. Hajimiri et M. L. Roukes, 2008 : A self-sustaining ultrahigh-frequency nanoelectromechanical oscillator. *Nature* **3**, 342.

Fowler, R. H. et L. Nordheim, 1928 : Electron emission in intense electric fields. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.* **119**, 173.

Gigan, S., H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. Baüerle, M. Aspelmeyer et A. Zeilinger, 2006 : Self-cooling of a micromirror by radiation pressure. *Nature* **444**, 67.

Gordon, J. P., H. J. Zeiger et C. H. Townes, 1955 : The maser new type of microwave amplifier, frequency standard, and spectrometer. *Phys. Rev.* **99**, 1264.

Grogg, D., S. Ayöz et A. M. Ionescu, 2009 : Self-sustained low power oscillator based on vibrating body field effect transistor. In *2009 IEEE International Electron Devices Meeting*.

Gunn, J. B., 1963 : Microwave oscillations of current in III-V semiconductors. *Solid State Commun.* **1**, 88.

Jülicher, F., 2001 : Mechanical oscillations at the cellular scale. *C. R. Acad. Sci.* **2**, 849.

Kim, H. S., H. Qin et R. H. Blick, 2010 : Self-excitation of single nanomechanical pillars. *New Journal of Physics* **12**, 033008.

Kleshch, V. I., A. A. Zakhidov, A. N. Obraztsov, E. D. Obraztsova et R. H. Baughman, 2009 : Self-oscillations of carbon nanotube twist-yarn during field emission. *Phys. Stat. Sol. B* **246**, 2658.

Larsen, S. A., 1911 : . *Elektrotech. Z.* **32**, 284.

Lazarus, A., T. Barois, S. Perisanu, P. Poncharal, P. Manneville, E. de Langre, S. T. Purcell, P. Vincent et A. Ayari, 2010 : Simple modeling of self-oscillations in nanoelectromechanical systems - article 1. *Appl. Phys. Lett.* **96**, 193114.

Lazarus, A., E. de Langre, P. Manneville, P. Vincent, S. Perisanu, A. Ayari et S. Purcell, 2010 : Statics and dynamics of a nanowire in field emission - article 2. *Int. J. Mech. Sci.* **52**, 1396.

Matveev, K., 2003 : *Thermoacoustic Instabilities in the Rijke Tube : Experiments and Modeling*. PhD thesis California Institute of Technology.

Metzger, C., M. Ludwig, C. Neuenhahn, A. Ortlieb, I. Favero, K. Karrai et F. Marquardt, 2008 : Self-induced oscillations in an optomechanical system driven by bolometric backaction. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 133903.

Metzger, C. H. et K. Karrai, 2004 : Cavity cooling of a microlever. *Nature* **432**, 1002.

Minoux, E., 2006 : *Étude et développement de sources électroniques à émission de champ à base de nanotubes de carbone. Application aux tubes hyperfréquences.* PhD thesis École Polytechnique.

Nicolis, G. et J. Portnow, 1973 : Chemical oscillations. *Chemical Reviews* **73**, 365.

Okamoto, H., D. Ito, K. Onomitsu, H. Sanada, H. Gotoh, T. Sogawa et H. Yamaguchi, 2011 : Vibration amplification, damping, and self-oscillations in micromechanical resonators induced by optomechanical coupling through carrier excitation. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 036801.

Pandey, M., K. Aubin, M. Zalalutdinov, R. B. Reichenbach, A. T. Zehnder, R. H. Rand et H. G. Craighead, 2006 : Analysis of frequency locking in optically driven MEMS resonators. *J. Microelectromech. S.* **15**, 1546.

Park, H., J. Park, A. K. L. Lim, E. H. Anderson, A. P. Alivisatos et P. L. McEuen, 2000 : Nano-mechanical oscillations in a single-C60 transistor. *Nature* **407**, 57.

Pikovsky, A., M. Rosenblum et J. Kurths, 2001 : *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences.* Cambridge University Press.

Ramos, D., J. Mertens, M. Calleja et J. Tamayo, 2008 : Photothermal self-excitation of nanomechanical resonators in liquids. *Appl. Phys. Lett.* **92**, 173108.

Rayleigh, L., 1916 : On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philos. Mag.* **32**, 529.

Rocard, Y., 1943 : *Dynamique générale des vibrations.*

Silva, F., 2009 : *Émergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple.* PhD thesis Université de Provence - Aix-Marseille 1.

Steele, G. A., A. K. Hüttel, B. Witkamp, M. Poot, H. B. Meerwaldt, L. P. Kouwenhoven et H. S. J. van der Zant, 2009 : Strong coupling between single-electron tunneling and nanomechanical motion. *Science* **325**, 1103.

Steeneken, P. G., K. L. Phan, M. J. Goossens, G. E. J. Koops, G. J. A. M. Brom, C. van der Avoort et J. T. M. van Beek, 2011 : Piezoresistive heat engine and refrigerator. *Nature Phys.* **7**, 354.

Teufel, J. D., J. W. Harlow, C. A. Regal et K. W. Lehnert, 2008 : Dynamical backaction of microwave fields on a nanomechanical oscillator. *Phys. Rev. Lett.* , **101**, 197203.

Titze, I. R., 1988 : The physics of small-amplitude oscillation of the vocal folds. *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 1536.

van der Pol, B. et J. van der Mark, 1928 : The heartbeat considered as a relaxation oscillation and an electrical model of the heart. *Philos. Mag.* **6**, 763.

Vandenberghe, N., 2002 : *Bifurcation de systèmes quasi-homoclines spatialement étendus et de systèmes quasi-réversibles et applications*. PhD thesis Université Nice Sophia Antipolis.

Villanueva, L. G., R. B. Karabalin, M. H. Matheny, E. Kenig, M. C. Cross et M. L. Roukes, 2011 : A nanoscale parametric feedback oscillator. *Nano Lett.* **11**, 5054.

Vincent, P., S. Perisanu, A. Ayari, M. Choueib, V. Gouttenoire, M. Bechelany, A. Brioude, D. Cornu et S. T. Purcell, 2007 : Driving self-sustained vibrations of nanowires with a constant electron beam. *Phys. Rev. B* **76**, 085435.

von Karman, T. et H. Rubach, 1912 : The mechanism of the fluid and air- resistance. *Phys. Z.* **13**, 49.

Weldon, J. A., B. Alemán, A. Sussman, W. Gannett et A. K. Zettl, 2010 : Sustained mechanical self-oscillations in carbon nanotubes. *Nano Lett.* **10**, 1728.

Zhabotinsky, A. M., 1964 : (periodical process of oxidation of malonic acid solution). *Biophysics* **9**, 306.

Chapitre 8

Synchronisation d'un nanofil auto-oscillant sous émission de champ

8.1 Introduction

La synchronisation est une propriété remarquable observée en présence de plusieurs auto-oscillateurs. La paternité de la synchronisation est attribuée à Huygens (1665) qui décrivait le mouvement à un même rythme de deux horloges sur un support commun comme "un phénomène de sympathie" entre elles.

L'intérêt pour la synchronisation a notamment été motivé par l'étude des systèmes biologiques. Les travaux de Czeisler et al. (1999) décrivent l'adaptation des cycles circadiens (environ 24 heures) sur la durée du jour (exactement 24 heures) comme un exemple de synchronisation [1]. La synchronisation des battements du cœur avec le rythme respiratoire a également été observée sur des cycles de quelques minutes durant le sommeil (Bartsch et al., 2007). Un dernier exemple tiré des systèmes biologiques est celui des lucioles de type "flashantes" qui permettent l'étude de la synchronisation pour un grand nombres d'auto-oscillateurs (Buck, 1988).

Pour ce qui est du développement des auto-oscillateurs micromécaniques, on pourra citer les travaux de Zalalutdinov et al. (2003) et Pandey et al. (2006) qui montrent la synchronisation de la fréquence pour un résonateur auto-oscillant dans le domaine du MHz et ceux de Naik et al. (2011) dans un régime de fréquence du kHz, permettant une résolution de la phase de l'auto-oscillateur.

L'article de Shim et al. (2007) portant sur le couplage synchronisé de deux oscillateurs nanomécaniques ne devrait pas être cité ici. Dans cet article, les auteurs se placent dans un contexte de synchronisation d'auto-oscillateurs et étudient un couplage non linéaire par excitation de deux poutres, décrites comme des oscillateurs,

1. Il s'agit de synchronisation "externe", au sens où l'un des oscillateurs est remplacé par une système arbitrairement stable. Ici, il s'agit du signal périodique du jour terrestre où, par ailleurs, la terre en rotation n'étant pas un auto-oscillateur.

mais qui manifestement n'auto-oscillent pas (voir partie 7.1.2.3 pour la confusion associée à la notion d'oscillateur). La mauvaise interprétation des résultats, voire la mauvaise foi des auteurs, est résumée dans un passage de l'article (p. 98) lorsqu'il est écrit que sont envisagés de futurs travaux sur un ensemble de résonateurs qui cette fois auto-oscillent [2].

8.2 Synchronisation externe

8.2.1 Définitions

La synchronisation externe désigne le forçage d'un auto-oscillateur par un signal périodique.

Dans tout ce qui suit, le terme de synchronisation désignera une synchronisation externe. Expérimentalement, la synchronisation externe d'un nanofil auto-oscillant sera étudiée en utilisant un générateur basse fréquence pouvant être vu par l'auto-oscillateur comme un auto-oscillateur arbitrairement stable.

L'étude de la synchronisation se limitera également à une excitation par un signal à une fréquence proche de la fréquence d'auto-oscillation (synchronisation 1 : 1). Signalons qu'il existe des régimes de synchronisation notés $n : m$ où il est possible de synchroniser n périodes d'un auto-oscillateur avec m périodes d'un autre auto-oscillateur ou forçage externe.

Pour un signal auto-oscillant de phase ϕ et une excitation externe de pulsation ω_e, l'étude de la synchronisation utilise la phase de l'auto-oscillateur exprimée par rapport à la phase du forçage externe

$$\phi_c = \phi - \omega_e t \tag{8.1}$$

où ϕ_c désigne la phase corrigée par la phase $\omega_e t$ du forçage externe. ϕ_c est plus communément appelé le déphasage.

8.2.2 Synchronisation de l'auto-oscillateur de van der Pol

Dans cette partie, le forçage de l'oscillateur de van der Pol va être traité partiellement pour dégager le comportement caractéristique d'un auto-oscillateur lors d'une synchronisation.

La synchronisation de l'oscillateur de van der Pol peut être étudiée analytiquement en introduisant une excitation périodique à l'équation 7.3

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + x^2\dot{x} + {\omega_0}^2 x = F\cos(\omega_e t + \varphi) \tag{8.2}$$

où la variable x dans l'équation de van der Pol 7.3 a été renormalisée par $\sqrt{\alpha}$. Les deux pulsations introduites sont ω_0, la fréquence propre de l'auto-oscillateur et ω_e,

2. "Future work would involve an array of mechanically coupled nanomechanical oscillators with the ability to self-oscillate."

la pulsation de synchronisation. On introduit une troisième pulsation ω qui est la pulsation d'auto-oscillation et qui peut prendre la valeur ω_e dans un cas synchronisé ou une valeur proche de ω_0 dans un cas non synchronisé.

Dans un cas faiblement non linéaire $\alpha \ll 1$, les solutions de la forme $x = A\cos\omega t$ peuvent être introduite dans l'équation 8.2 et donnent en négligeant les termes à $3\omega t$

$$-A\omega^2\cos\omega t + \alpha A\omega\sin\omega t - \omega\frac{A^3}{4}\sin\omega t + A\cos\omega t = F\cos(\omega_e t + \varphi) \tag{8.3}$$

À partir de l'équation 8.3 deux cas limites peuvent être envisagés

Non synchronisé le système auto-oscille à sa pulsation propre $\omega \neq \omega_e$ et le forçage est négligé car non résonant

$$-A\omega^2\cos\omega t + \alpha A\omega\sin\omega t - \omega\frac{A^3}{4}\sin\omega t + A\cos\omega t = 0$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 + 1 &= 0 \\ \alpha\omega - \omega\frac{A^2}{4} &= 0 \end{aligned}$$

soit

$$\omega = 1 \tag{8.4}$$
$$A = 2\sqrt{\alpha} \tag{8.5}$$

Synchronisé l'auto-oscillateur est à la fréquence de l'excitation avec

$$-A{\omega_e}^2\cos\omega_e t + \alpha A\omega_e\sin\omega_e t - \omega_e\frac{A^3}{4}\sin\omega_e t + A\cos\omega_e t = F\cos(\omega_e t + \phi)$$

soit

$$-A{\omega_e}^2 + A = F\cos\phi \tag{8.6}$$
$$\alpha A\omega_e - \omega_e\frac{A^3}{4} = -F\sin\phi \tag{8.7}$$

ce qui donne une équation d'ordre 3 sur la variable $\mathcal{Y} = A^2$

$${\omega_e}^2\mathcal{Y}^3 - 2\alpha{\omega_e}^2\mathcal{Y}^2 + \left[(1-{\omega_e}^2)^2 + \alpha^2{\omega_e}^2\right]\mathcal{Y} - F^2 = 0 \tag{8.8}$$

L'amplitude d'oscillation est calculée numériquement en fonction de F et ω pour les deux cas : synchronisé (Éq. 8.8) et non synchronisée (Éq. 8.5). Les amplitudes de vibration sont superposées sur la figure 8.1.

Pour chaque valeur de F et ω_e, l'amplitude de vibration maximale est choisie comme représentant l'état d'oscillation (Fig. 8.1, en bas). L'intersection des deux nappes définit une frontière d'accrochage qui est en bon accord avec celle obtenue pour le traitement de la partie 8.3.2 (voir figure 8.6 avec le même rapport d'aspect). La forme triangulaire obtenue est caractéristique d'une langue d'Arnold. Comme la zone de synchronisation correspond à une oscillation à la même pulsation ($\omega = \omega_e$), on désigne cette zone d'accroche par $(1:1)$.

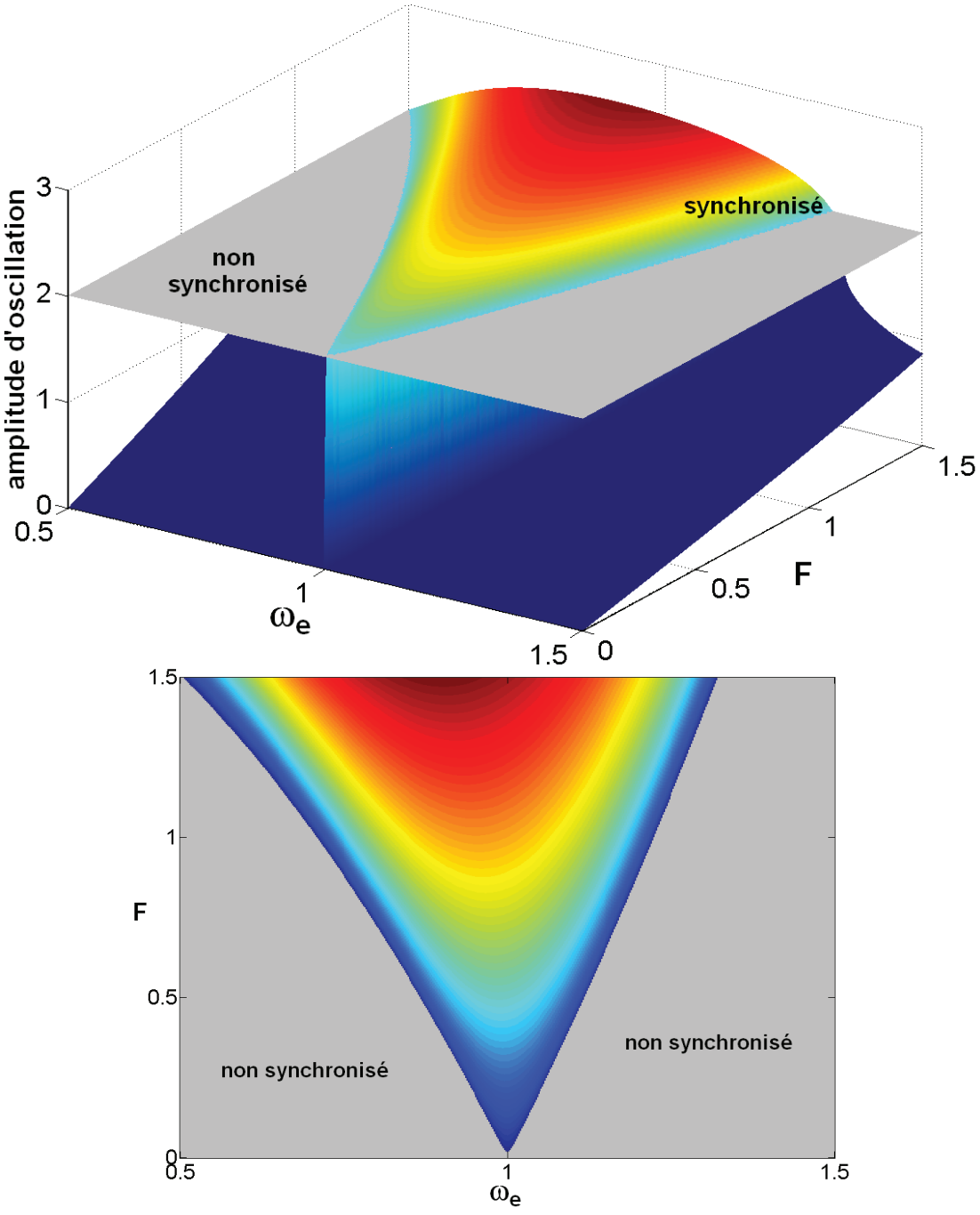


Figure 8.1 (en haut) Amplitudes de vibration pour les solutions synchronisées et non synchronisées de l'équation 8.3 en fonction de la pulsation ω_e et l'amplitude F du forçage. (en bas) Maximum d'amplitude en fonction de ω_e et F. La zone de synchronisation triangulaire est la langue d'Arnold $(1:1)$. $\alpha = 1$.

8.2.3 Synchronisation d'un nanofil auto-oscillant sous émission de champ

Le nanofil est porté en auto-oscillation en lui appliquant une tension DC négative. Une excitation électrostatique est appliquée au résonateur auto-oscillant par une tension sinusoïdale sur la contre électrode. Le terme de forçage F introduit dans la partie 8.2.2 est relié à la tension alternative par une relation de la forme

$$F = \mathcal{K} V_{AC}$$

où $\mathcal{K}$ est un paramètre qui ne sera pas évalué par la suite. Dans la suite, le désaccord de fréquence est défini par $\delta = (\omega_e - \omega_0)/2\pi = f_e - f_0$ où f_e est la fréquence d'excitation et f_0 la fréquence d'auto-oscillation sans excitation de synchronisation. Le comportement de la phase corrigée ϕ_c (Éq. 8.1) dans un cas synchronisé et non synchronisé est représenté sur la figure 8.2.

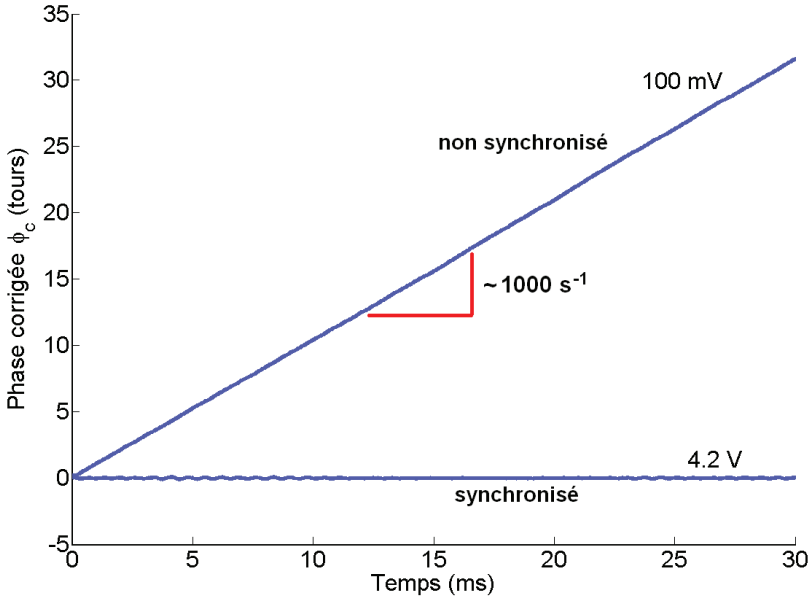
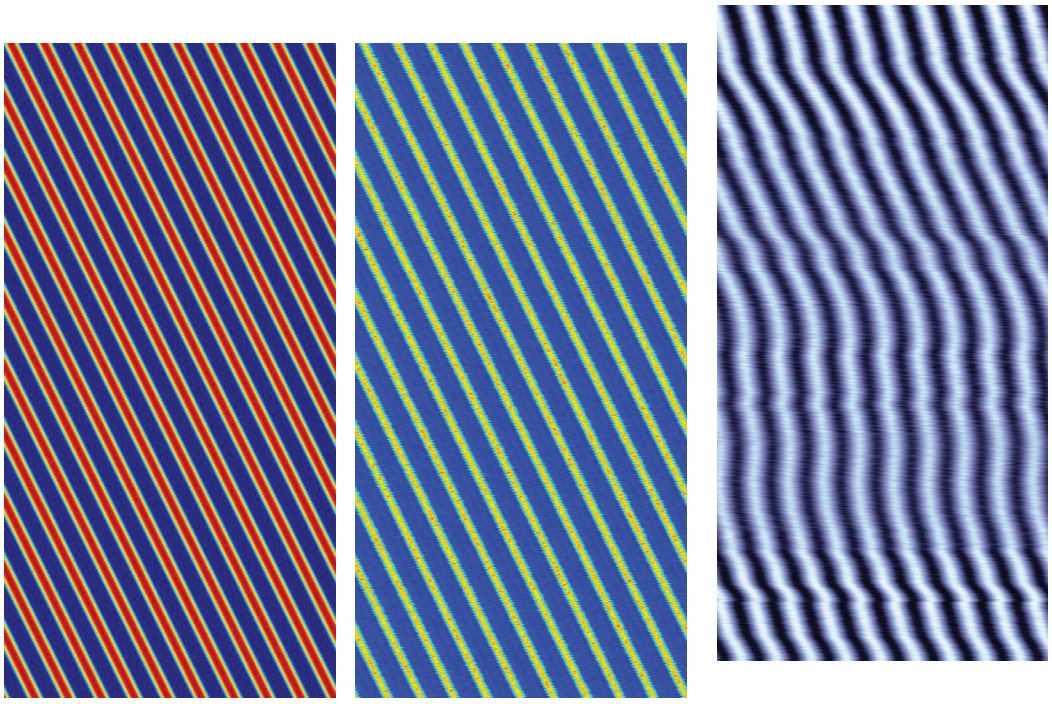


FIGURE 8.2 Phase de l'auto-oscillateur corrigée par la phase du signal de synchronisation ϕ_c en fonction du temps (~ 1500 cycles d'oscillation pendant 30 ms). Le désaccord de fréquence est $\delta = 1000$ Hz. La phase corrigée ϕ_c est exprimée en nombre de tours (facteur $1/2\pi$) de manière à ce que la pente moyenne corresponde à la différence de fréquence Δf. Pour le cas non synchronisé ($V_{AC} = 100$ mV), la pente est proche de 1 tour par milliseconde (1000 Hz) soit $\Delta f \sim \delta$. Pour le cas synchronisé ($V_{AC} = 4,2$ V), $\Delta f \sim 0$ et le déphasage ϕ_c reste proche de 0 (synchronisation de la fréquence et de la phase). Le comportement de ϕ_c sera étudié en détail dans la partie 8.3.

La figure 8.2 montre que lorsque l'excitation électrostatique est suffisamment intense, l'auto-oscillateur se synchronise en fréquence et en phase. Le courant émis par le fil visualisé sous forme d'une carte possède l'allure caractéristique d'un signal auto-oscillant avec une dérive de la fréquence à l'échelle de la milliseconde (Fig. 7.20). La synchronisation de la phase se traduit par un changement d'allure caractéristique pour la représentation du courant sous forme d'une carte où le cycle d'auto-oscillation se cale sur le signal d'excitation (Fig. 8.3).



(a) Signal d'excitation | (b) Signal synchronisé | (c) Signal sans excitation de synchronisation

Figure 8.3 (a) Signal d'excitation sinusoïdal représenté sous forme d'une carte avec 0,25 μs par pixels (608x1203 pixels). (b) Courant auto-oscillant synchronisé sur le signal d'excitation ($V_{AC} = 5$ V, $f = 65736,8$ kHz). (c) Cas d'un signal sans tension de synchronisation (extrait de la figure 7.20).

La région de synchronisation peut être déterminée expérimentalement en fonction du désaccord en fréquence δ et de l'excitation alternative F en mesurant la différence entre la fréquence moyenne d'auto-oscillation et la fréquence du forçage. La différence de fréquence est donnée par

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{d\phi_c}{dt} \right\rangle \tag{8.9}$$

où ϕ_c est la phase corrigée (Éq. 8.1).

Une carte de synchronisation expérimentale est présentée sur la figure 8.4 en fonction du désaccord de fréquence δ et de l'amplitude du forçage F. Signalons la

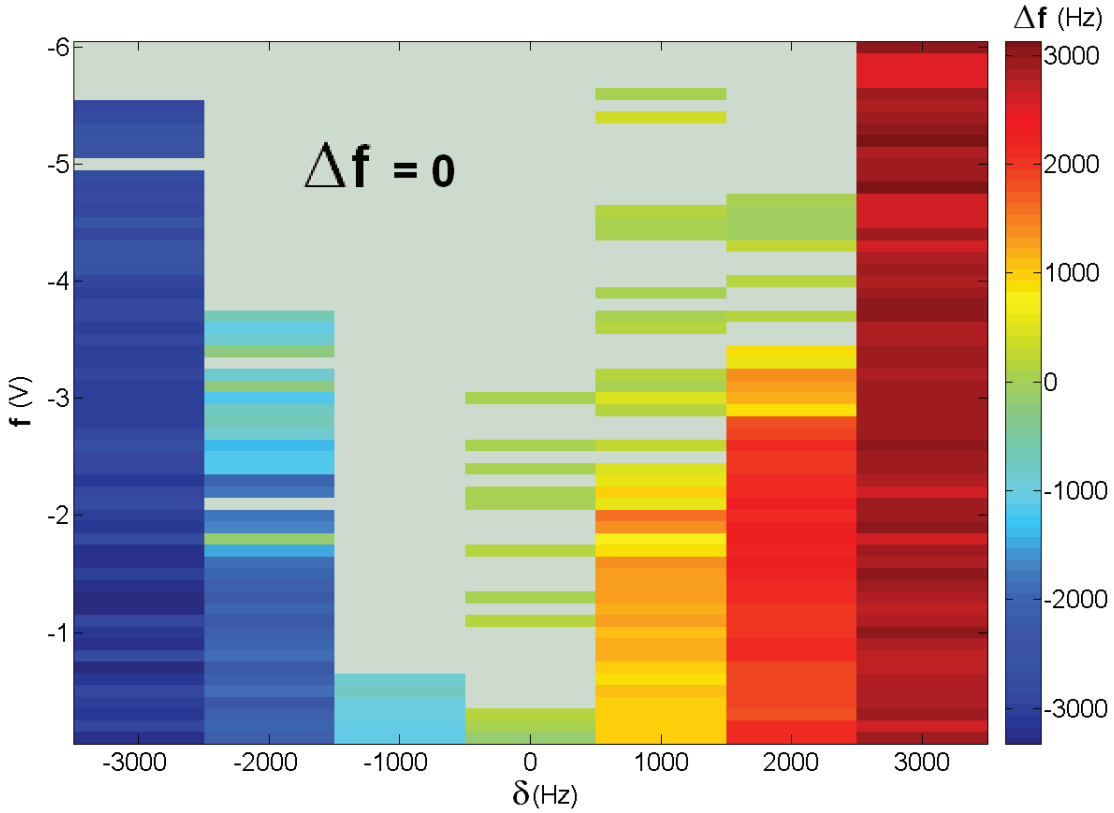


FIGURE 8.4 Différence de fréquence Δf entre le nanofil auto-oscillant et le signal de synchronisation externe en fonction du désaccord de fréquence δ et de l'amplitude du forçage F. Dans la zone de synchronisation, l'auto-oscillateur et le forçage sont à la même fréquence. La zone de synchronisation correspond à une langue d'Arnold $(1:1)$. La zone où Δf est nul est marquée par une teinte claire. L'accrochage est moins stable dans la zone $\delta > 0$ (cf. partie 8.3.5.5).

différence entre δ qui est un paramètre, défini comme la différence entre la fréquence d'auto-oscillation libre et la fréquence du signal de synchronisation et Δf qui est une grandeur expérimentale obtenue à partir des phases respectives de l'auto-oscillateur et du signal de synchronisation. Sur la carte de synchronisation (Fig. 8.4), pour les faibles F, l'auto-oscillateur et le signal de synchronisation sont découplés et leur différence de fréquence expérimentale Δf correspond exactement à leur désaccord de fréquence δ. Lorsque la force de synchronisation F augmente, la fréquence de l'auto-oscillateur accroche la fréquence de synchronisation $\Delta f = 0$.

8.3 Dynamique de la phase lors d'une synchronisation : effets inertiels

Lorsque la notion de synchronisation externe d'un auto-oscillateur a été introduite dans la partie 8.2.1, la phase corrigé ϕ_c a été introduite (Éq. 8.1) comme la différence entre la phase de l'auto-oscillateur et la phase du signal de synchronisation. Contrairement au cas d'un oscillateur forcé, ce déphasage possède une dynamique riche qui va être présentée dans cette partie.

8.3.1 La phase synchronisée : une particule comme les autres

L'approche développée par Kuramoto consiste en décrire l'évolution d'un auto-oscillateur sur son cycle limite par sa phase (Kuramoto, 1984; Acebrón et al., 2005; Dorfler et Bullo, 2011).

Dans le cadre d'un auto-oscillateur avec une synchronisation externe, le comportement du déphasage ϕ_c peut être décrit par

$$\frac{d\phi_c}{dt} = \Omega + K \sin \phi_c \tag{8.10}$$

où Ω est le désaccord en fréquence angulaire entre l'auto-oscillateur et le signal de synchronisation et K un coefficient proportionnel à l'amplitude du signal de la synchronisation. Le déphasage d'un auto-oscillateur est ici décrit comme une particule sans masse sur-amortie dans un champ de force uniforme Ω, modulé par le signal de synchronisation d'amplitude K. La particule est définie sur un intervalle périodique $[02\pi]$, correspondant à l'état instantané de l'auto-oscillateur sur son cycle limite (Fig. 7.2) dans le référentiel tournant à ω_e.

Lorsque $K = 0$ le comportement d'un auto-oscillateur libre est vérifié. La loi pour le déphasage est donnée par

$$\phi_c = \Omega t + \phi_0 \tag{8.11}$$

où t est le temps et ϕ_0 le déphasage à $t = 0$. Cette évolution de la phase est celle qui a été observée pour les états non synchronisés (Fig. 8.2 où $\delta = \Omega/2\pi$) et correspond effectivement à une particule sur-amortie à la vitesse limite Ω traduisant la dérive propre des deux fréquences angulaires de l'auto-oscillateur et du signal de synchronisation (Fig. 8.5, à gauche).

Lorsque le signal de synchronisation est suffisamment intense pour faire apparaître des minima dans le paysage énergétique de la particule ($K > \Omega$), le déphasage relaxe vers un minimum local (Fig. 8.5, à droite).

8.3.2 Dynamique du déphasage pour un oscillateur de van der Pol

Cette partie poursuit le développement de l'oscillateur de van der Pol et permet d'introduire analytiquement la dynamique de la phase (Éq. 8.10) à partir d'une

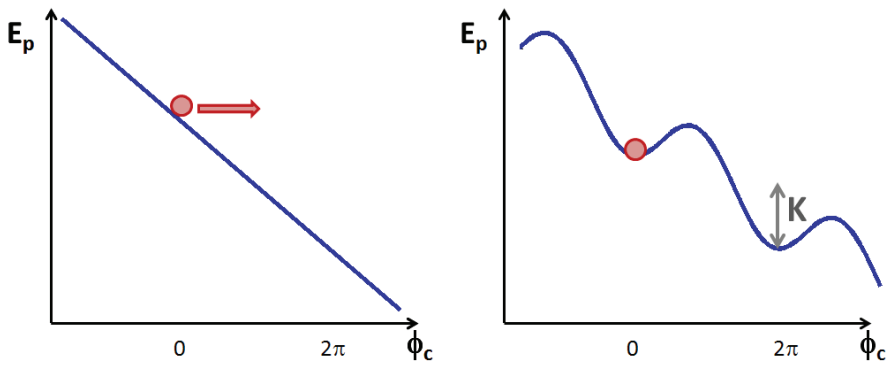


FIGURE 8.5 (à gauche) Paysage énergétique pour la particule représentant le déphasage ϕ_c d'un auto-oscillateur en l'absence de synchronisation ($K = 0$) avec désaccord de fréquence ($\delta \neq 0$). La vitesse limite de la particule est Ω ce qui correspond à la dérive en phase de l'auto-oscillateur et du signal de synchronisation. (à droite) Paysage énergétique pour la particule avec synchronisation ($K > \delta$) et avec un désaccord de fréquence ($\delta \neq 0$).

approche multi-échelle.

L'équation du van der Pol avec synchronisation a été introduite dans la partie 8.2.2. En adimensionnant le temps par ω_0 et avec une notation "multi-échelle", l'équation de van der Pol avec synchronisation s'écrit

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \epsilon \mathcal{F} \cos(\tilde{\omega}_e t) \tag{8.12}$$

où $\epsilon = \alpha/\omega_0$ et $\mathcal{F} = F/\epsilon{\omega_0}^2$ et $\tilde{\omega}_e = \omega_e/\omega_0 = 1 + \epsilon\Omega$. Le développement qui suit suppose $\epsilon \ll 1$ où $T = \epsilon t$ définit une nouvelle échelle de temps longue où ϵ joue le rôle d'une pulsation adimensionnée lente. La description perturbative sur les deux échelles de temps s'écrit $x(t) = x_0(t, T) + \epsilon x_1(t, T) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ et les dérivées par rapport au temps s'expriment comme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial}{\partial T} \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial}{\partial T} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\epsilon\frac{\partial^2}{\partial T \partial t} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

À l'ordre 0 en ϵ les solutions de l'équation 8.12 sont

$$x_0 = A(T)e^{it} + c.c. \tag{8.13}$$

où *c.c.* désigne la forme complexe conjuguée.

À l'ordre 1 en ϵ, on obtient une équation pour l'amplitude $A(T)$

$$2i\frac{dA}{dT} - i(A - |A|^2 A) = \frac{\mathcal{F}}{2}e^{i(\tilde{\omega}_e - 1)t} \tag{8.14}$$

soit

$$2i\frac{dA}{dT} - i(1-|A|^2)A = \frac{\mathcal{F}}{2}e^{i\Omega T} \tag{8.15}$$

où Ω est le désaccord de fréquence angulaire adimensionné par ω_0.

En utilisant la notation module-angle $A(T) = R(T)e^{i\Theta(T)}$, l'équation 8.15 prend la forme

$$\begin{aligned} 2\dot{R} - (1-R^2)R &= \frac{\mathcal{F}}{2}\sin(\Omega T - \Theta) \\ -2\dot{\Theta}R &= \frac{\mathcal{F}}{2}\cos(\Omega T - \Theta) \end{aligned}$$

soit après la transformation $\Phi_c = \Omega T - \Theta$

$$2\dot{R} = (1-R^2)R + \frac{\mathcal{F}}{2}\sin\Phi_c \tag{8.16}$$

$$2R\dot{\Phi}_c = 2R\Omega + \frac{\mathcal{F}}{2}\cos\Phi_c \tag{8.17}$$

À priori, les variables R et Φ_c sont couplées. Dans l'hypothèse où $R = R_0$, il est intéressant de constater que l'équation 8.17 correspond à l'équation 8.10 décrivant la dynamique de la phase comme une particule sur-amortie

$$\dot{\Phi}_c = \Omega + \frac{\mathcal{F}}{4R_0}\cos\Phi_c \tag{8.18}$$

Une approche plus rigoureuse consiste à considérer le système d'équations 8.16 et 8.17. Les solutions d'équilibre, lorsqu'elles existent, sont de la forme

$$-(1-R_0^2)R_0 = \frac{\mathcal{F}}{2}\sin\Phi_0 \tag{8.19}$$

$$-2R_0\Omega = \frac{\mathcal{F}}{2}\cos\Phi_0 \tag{8.20}$$

Le comportement de l'amplitude et de la phase autour des positions d'équilibre est défini par

$$\begin{aligned} R &= R_0 + \tilde{R} \\ \Phi &= \Phi_0 + \tilde{\Phi} \end{aligned}$$

À partir des équations 8.16 et 8.17, on obtient en introduisant R et Φ définis précédemment

$$\begin{aligned} 2\frac{d\tilde{R}}{dt} &= (1-3R_0^2)\tilde{R} + \frac{\mathcal{F}}{2}\cos\Phi_0\tilde{\Phi} \\ 2R_0\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} &= 2\tilde{R} - \frac{\mathcal{F}}{2}\sin\Phi_0\tilde{\Phi} \end{aligned}$$

soit en utilisant les relations pour les positions d'équilibres (Éqs. 8.19 et 8.20)

$$2\frac{d\tilde{R}}{dt} = (1-3R_0^2)\tilde{R} - 2R_0\Omega\tilde{\Phi} \tag{8.21}$$

$$2R_0\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} = 2\Omega\tilde{R} + (1-R_0^2)R_0\tilde{\Phi} \tag{8.22}$$

En utilisant la notation

$$Y = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ R_0\tilde{\Phi} \end{pmatrix} \tag{8.23}$$

le système d'équation 8.21 et 8.22 se met sous la forme

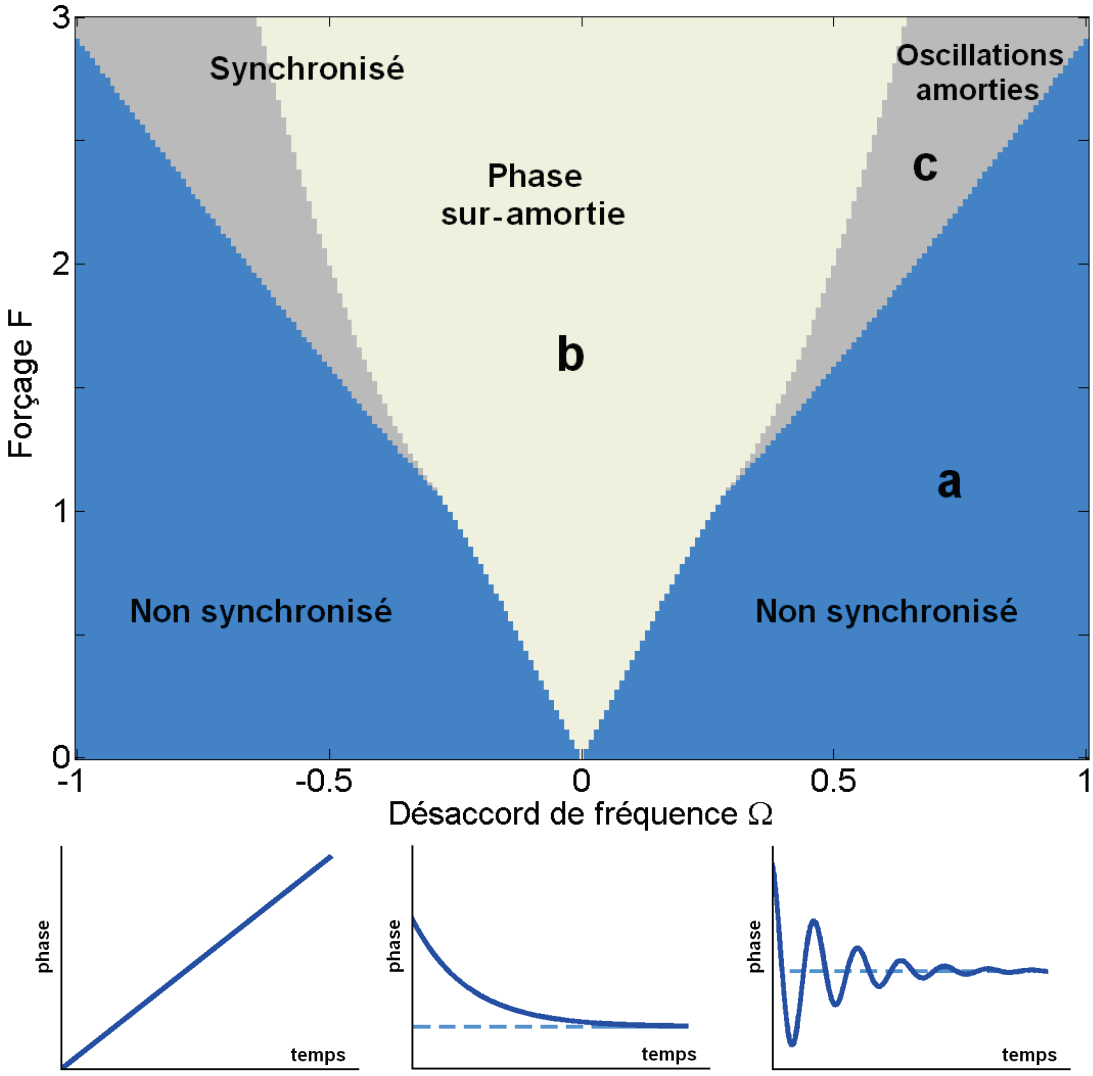
$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1-3R_0^2}{2} & -\Omega \\ \Omega & \frac{1-R_0^2}{2} \end{pmatrix} Y \tag{8.24}$$

où R_0 peut être obtenu en élevant au carré les équations 8.19 et 8.20 puis par sommation

$$(1-R_0^2)^2{R_0}^2 + 4{R_0}^2\Omega^2 - \frac{\mathcal{F}^2}{4} = 0 \tag{8.25}$$

La résolution numérique de l'équation 8.25 d'ordre 3 en ${R_0}^2$ permet d'obtenir une solution réelle R_0 pour chaque valeur de Δ et F. La condition de validité des solutions est établie en vérifiant si les valeurs absolues de $\cos\Phi_0$ (Éq. 8.20) et $\sin\Phi_0$ (Éq. 8.19) sont inférieures à 1. La région de synchronisation est représentée sur la figure 8.6.

Les résultats de la figure 8.6 montrent que le régime de synchronisation dominant pour un oscillateur de van der Pol est celui où le déphasage est décrit par une équation de type relaxation (Éq. 8.10). En revanche, il existe une zone de synchronisation marginale où la dynamique couplée de la phase et de l'amplitude d'oscillation donne lieu à une relaxation oscillante amortie (Pikovsky et al., 2000). La fréquence d'oscillation des états relaxant par une oscillation amortie est représentée sur la figure 8.7. La description d'une telle dynamique peut être interprétée comme l'introduction d'une *inertie du déphasage* pour justifier d'une oscillation amortie de la phase autour de sa position d'équilibre.



(a) Dérive de la phase (état non synchronisé)

(b) Phase sur-amortie (état synchronisé)

(c) Phase relaxant par une oscillation amortie (état synchronisé)

FIGURE 8.6 Région de synchronisation de l'auto-oscillateur de van der Pol faiblement non linéaire en fonction du désaccord en fréquence angulaire Ω et de l'amplitude du forçage F. La région de synchronisation comporte deux types de zones. La partie où Ω est proche de 1 correspond à une amplitude R et une phase Φ qui relaxe de manière sur-amortie vers les valeurs d'équilibre R_0 et Φ_0. Le deuxième type de zone de synchronisation correspond à un forçage et à un désaccord en fréquence plus important pour lequel l'amplitude et la phase de l'oscillateur relaxent avec une oscillation amortie vers leurs valeurs d'équilibre R_0 et Φ_0.

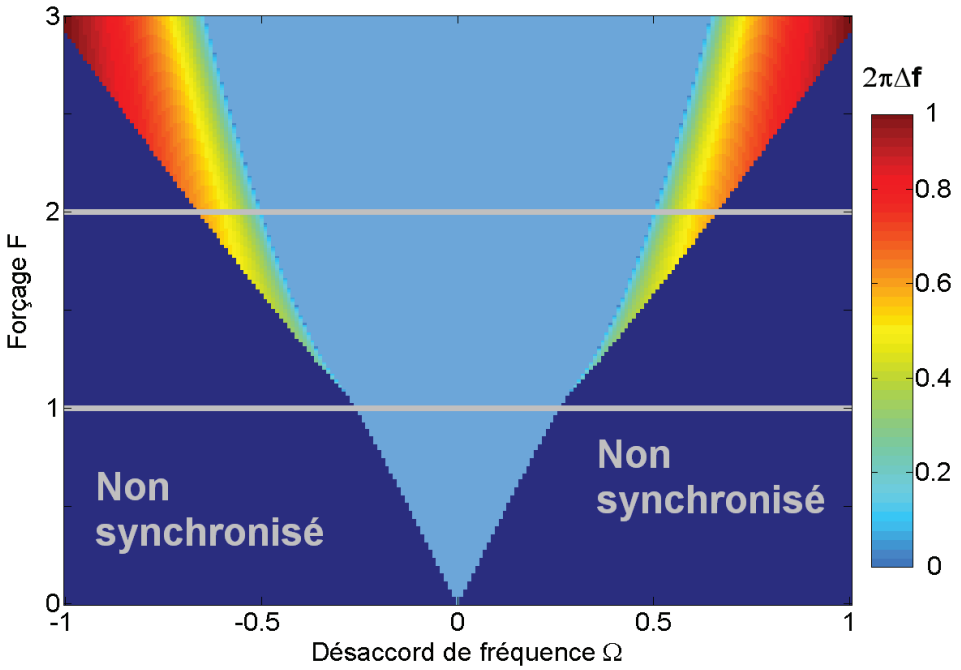


FIGURE 8.7 Région de synchronisation de l'auto-oscillateur de van der Pol faiblement non linéaire en fonction du désaccord de fréquence angulaire Ω et de l'amplitude du forçage $\mathcal{F}$. La fréquence d'oscillation du déphasage est représentée dans la région de synchronisation avec relaxation par oscillation amortie. Les lignes horizontales marquent le tracé de le figure 8.8.

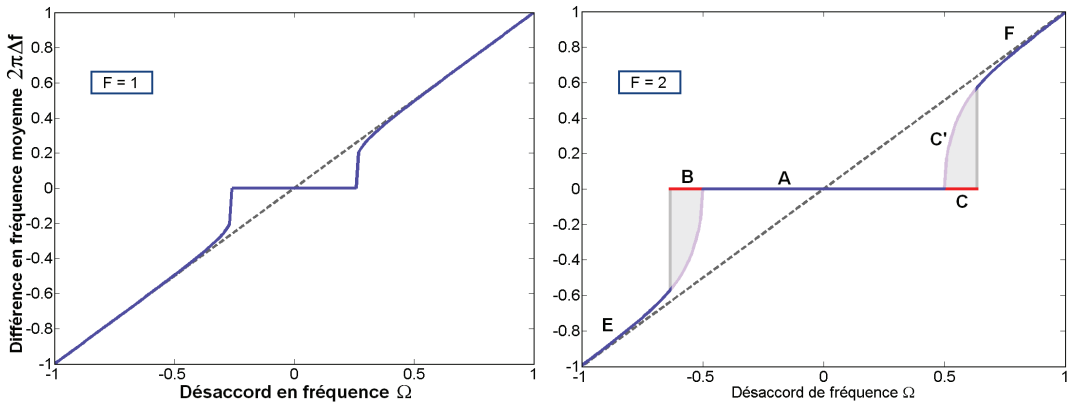


FIGURE 8.8 $F = 1$ et $F = 2$ correspondent aux lignes sur la carte 8.7. La courbe à $F = 2$ correspond à une coupe comprenant les deux régions de synchronisation. La partie A est la zone où la phase est synchronisée avec une relaxation sur-amortie. Les parties entre B et C correspondent à une phase synchronisée avec cette fois-ci une relaxation oscillante amortie. Les fréquences d'oscillation de la relaxation amortie peuvent être lues sur les branches B' et C'. Les branches E et F ne sont pas synchronisées.

8.3.3 Valeur moyenne du déphasage pour la synchronisation d'un nanofil auto-oscillant

Le comportement du déphasage moyen est étudié pour un nanofil auto-oscillant en fonction de la tension V_{AC} de synchronisation par forçage électrostatique. Les phases instantanées du courant auto-oscillant et du signal de synchronisation sont extraits par filtrage et transformée de Hilbert. La moyenne de la différence de phase ϕ_c est représentée sur la figure 8.9 en fonction de la tension V_{AC}. Pour chaque mesure, la fréquence d'auto-oscillation f_{aa} est mesurée en l'absence de synchronisation. La tension de synchronisation est appliquée avec un désaccord en fréquence $\delta = f_e - f_0$.

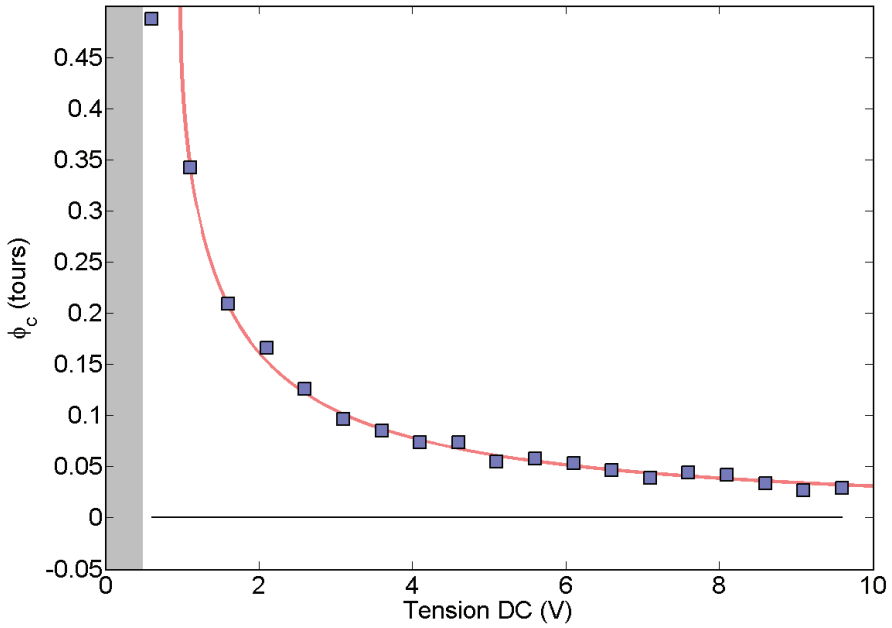


Figure 8.9 Déphasage moyen exprimé en cycles d'oscillation entre l'auto-oscillateur et le signal de synchronisation en fonction de la tension de synchronisation V_{AC}. Le désaccord en fréquence est $\delta = -200$ Hz.

Le déphasage moyen est modélisé sur la figure 8.9 en utilisant la relation d'équilibre de la phase (Éq. 8.10)

$$\Omega = -K \sin \phi_c \tag{8.26}$$

Hormis pour la première valeur ($V_{AC} = 600$ mV), l'accord avec les données expérimentales est remarquable.

8.3.4 Accrochage de la phase en présence de bruit

Dans cette partie, une étude expérimentale de la frontière d'accrochage en fréquence va être présentée. Lorsque le nanofil auto-oscille sous émission de champ, une tension de synchronisation d'amplitude V_{AC} croissante est appliquée avec un désaccord en fréquence $\delta = 600$ Hz établi en fonction de la mesure de la fréquence moyenne d'auto-oscillation. Pour chaque acquisition, le déphasage ϕ_c est déterminé expérimentalement par traitement du signal (cf. partie 8.3.3). Le déphasage en fonction du temps est représenté sur la figure 8.10

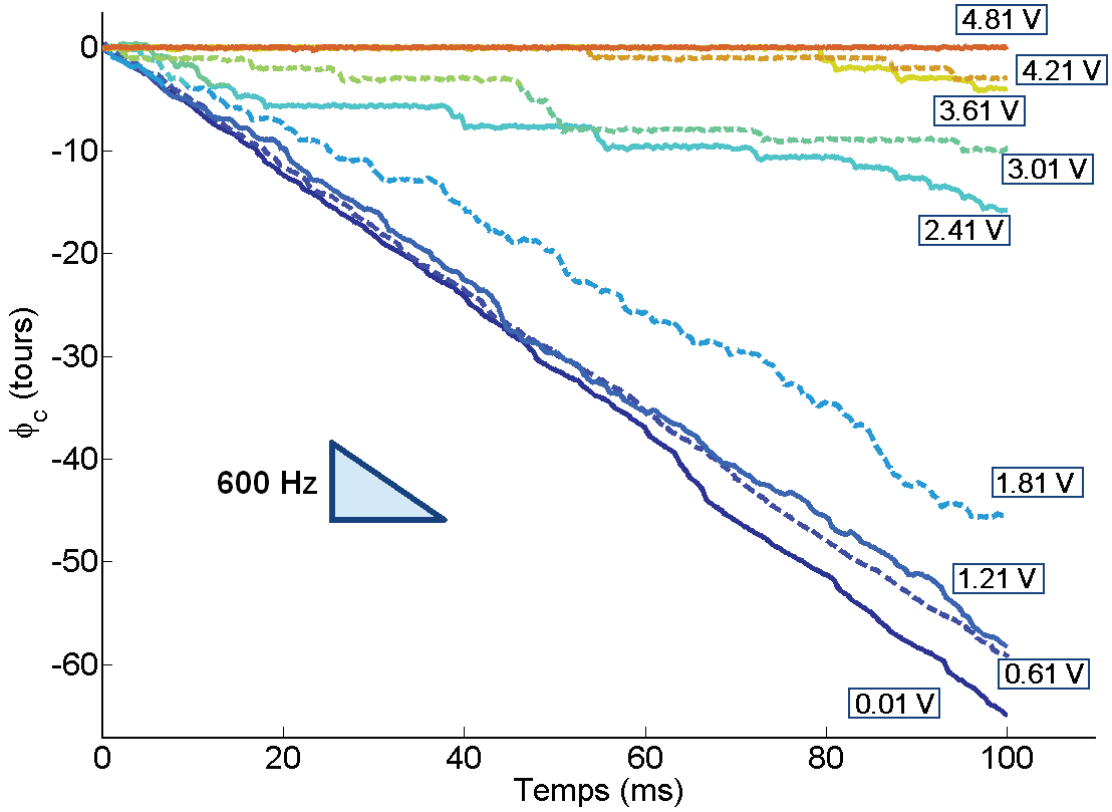


FIGURE 8.10 Déphasage ϕ_c en fonction du temps pour plusieurs tensions de synchronisation V_{AC}. Le désaccord en fréquence est fixé à 600 Hz. La dérive de 600 tours par seconde est représentée sur la figure et correspond à la dérive observée pour une très faible tension de synchronisation $V_{AC} = 10$ mV. L'acquisition correspond à 5000 cycles d'oscillation.

Lorsque la tension de synchronisation V_{AC} augmente, la phase exprimée en tours se stabilise sur des paliers entiers. Pour les valeurs de tensions intermédiaires 1.81 V$< V_{AC} <$ 4.21 V, la phase décroche entre les paliers et traduit le fait que l'auto-oscillateur prend un nombre entier de tour de décalage avec la consigne de synchronisation. Plus la tension de synchronisation est importante plus les décrochages de phase sont rares et les paliers longs (Fig. 8.11).

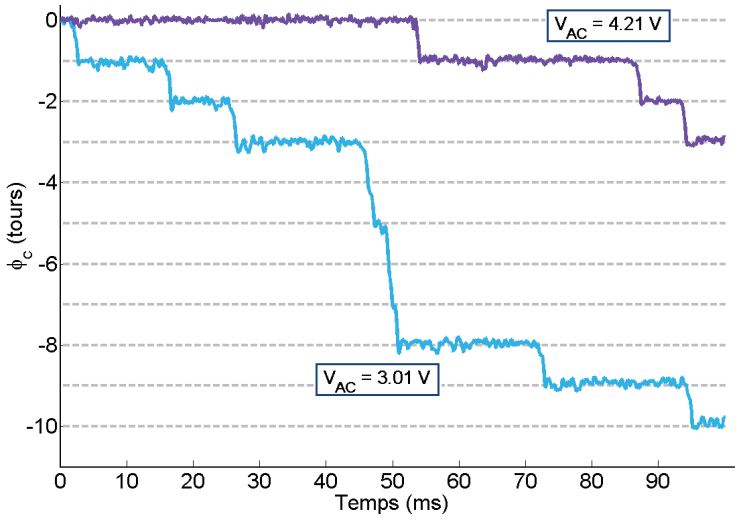


Figure 8.11 Déphasage pour deux valeurs de tensions de la figure 8.10.

Le saut entre paliers entiers est expliqué par l'existence de fluctuations qui font glisser la phase (phase slips) d'un nombre entier de tours (Fig. 8.12).

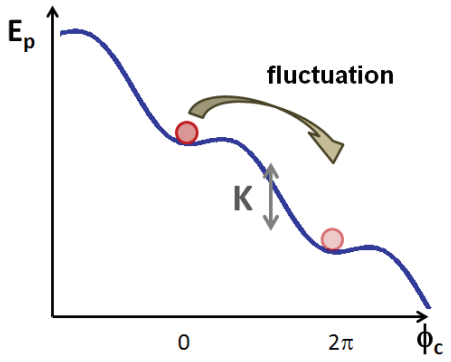


Figure 8.12 Paysage énergétique pour la particule associée au déphasage ϕ_c. Lorsque l'amplitude de la synchronisation devient comparable au désaccord en fréquence ($K \sim \delta$), une fluctuation peut suffire à faire décrocher la phase d'un tour vers le minimum local suivant.

8.3.5 Effets inertiels : le déphasage d'un nanofil auto-oscillant décrit comme l'angle d'un pendule

Dans cette partie, nous allons montrer comment le déphasage d'un nanofil auto-oscillant sous émission avec une synchronisation externe peut se comporter comme l'angle d'un pendule simple. La première sous partie est une introduction bibliographique à la notion d'inertie pour la phase d'un auto-oscillateur synchronisé.

8.3.5.1 Introduction

Pour de nombreux systèmes auto-oscillants, la description de la dynamique du déphasage est donnée par une relaxation sur-amortie (Éq. 8.10). Néanmoins, certains travaux font état d'une dynamique du déphasage avec des effets inertiels c'est-à-dire une masse associée à la relaxation du déphasage ϕ_c vers sa valeur d'équilibre (voir l'introduction de Acebrón et al. (2005) ou Dorfler et Bullo (2011)). Dans le cadre d'un auto-oscillateur avec une inertie du déphasage et un forçage de synchronisation, la dynamique du déphasage est décrite par

$$m\ddot{\phi}_c + \Gamma\dot{\phi}_c + K\sin\phi_c = \Omega \tag{8.27}$$

où m désigne l'inertie du déphasage (ou inertie de la phase), Γ le coefficient d'amortissement, K la constance de couplage avec le signal de synchronisation et Ω le désaccord en fréquence entre l'auto-oscillateur et le signal de synchronisation.

La notion d'inertie du déphasage est utilisée notamment pour des systèmes biologiques d'ensemble d'auto-oscillateurs comme par exemple pour la synchronisation des lucioles (Ermentrout, 1991). Un modèle de fréquence "adaptative" y est introduit (voir aussi Acebrón et Spigler (1998)) pour lequel un temps de relaxation de la fréquence instantanée amène un terme d'inertie de la phase. Un autre exemple est celui des systèmes de neurones (Dolan et al., 2005; Majtanik et al., 2006; Sakyte et Ragulskis, 2011) où là encore il s'agit d'un grand nombre d'auto-oscillateurs couplés.

Les effets de l'introduction d'une inertie du déphasage ont été étudiés par Tanaka et al. (1997) et Hong et al. (1999). Ces auteurs ont montré un comportement plus complexe des mécanismes de synchronisation avec inertie et notamment l'existence d'oscillations spontanées du déphasage (Hong et al., 2002).

Enfin citons les systèmes qui présentent une analogie avec les auto-oscillateurs synchronisés pour lesquels la dynamique d'une phase est décrite par une équation avec inertie analogue à l'équation 8.27. De tels systèmes sont par exemple les jonctions Josephson couplées (Watanabe et Strogatz, 1994; Trees et al., 2005) ou les machines tournantes (Leonov, 2006).

8.3.5.2 Mise en évidence de l'inertie du déphasage : réponse à un saut de phase

Un nanofil est mis en auto-oscillation sous émission de champ et synchronisé à l'aide d'une tension alternative de la forme

$$V = V_{AC}\cos(\omega_e t + \phi_0) \tag{8.28}$$

où ω_e est la pulsation de synchronisation et ϕ_0 l'origine de la phase à $t = 0$ du signal de synchronisation. Jusqu'à présent ce terme n'avait pas été considéré dans la mesure où le choix de ϕ_0 est une définition de l'origine des phases. Dans cette partie, le signal de synchronisation est généré par un générateur basse fréquence qui permet de réaliser un saut de phase au temps t_0

$$\begin{aligned} \phi_0(t<0) &= 0 \\ \phi_0(t>0) &= \delta\phi \end{aligned}$$

où $\delta\phi$ est l'amplitude du saut de phase. Le résultat d'un changement de phase du signal de synchronisation sur le courant auto-oscillant est présenté sur la figure 8.13

Les résultats de la figure 8.13 permettent d'observer les oscillations amorties du déphasage de l'auto-oscillateur autour du déphasage d'équilibre. Le saut de phase du signal de synchronisation se traduit dans l'équation dynamique du déphasage par

$$m\ddot{\phi}_c + \Gamma\dot{\phi}_c + K\sin(\phi_c - \phi_0(t)) = \Omega \tag{8.29}$$

où l'équation 8.27 a été modifiée pour tenir compte d'un changement de l'origine des phases $\phi_0(t)$.

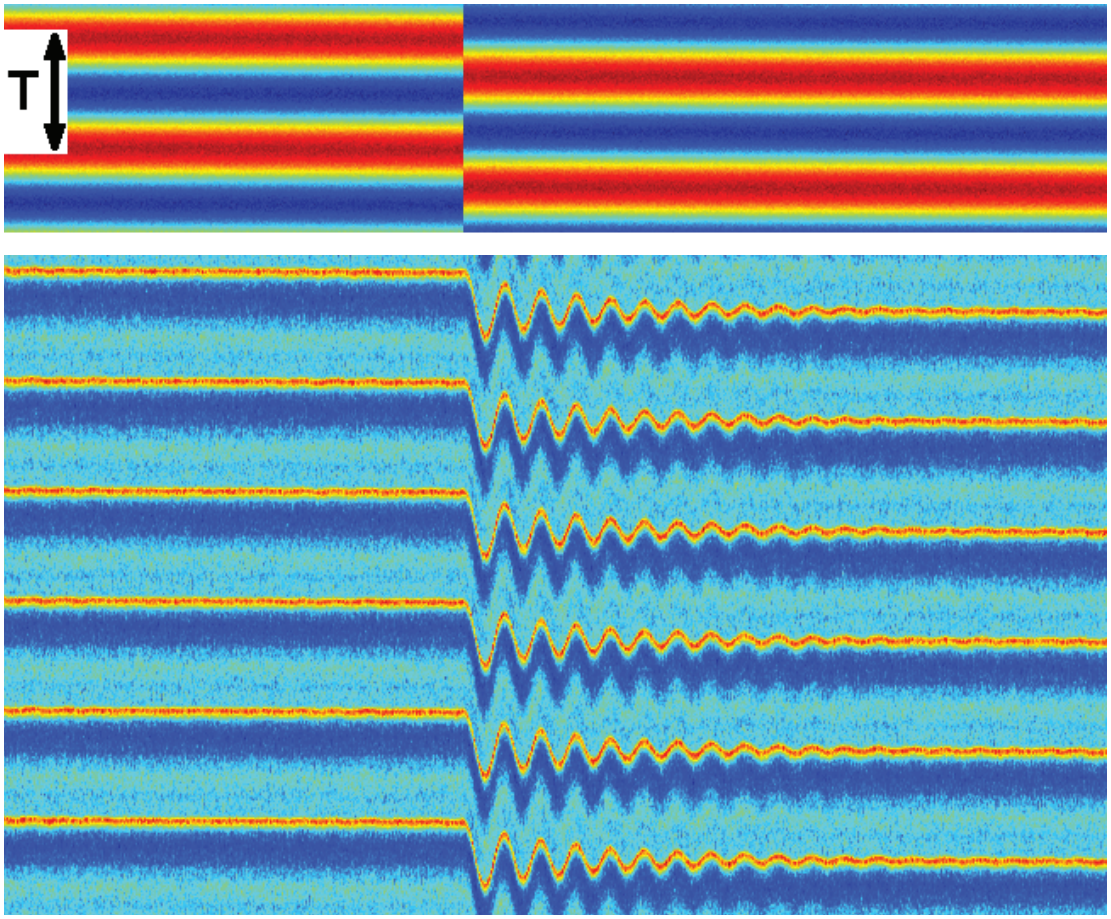


FIGURE 8.13 (en haut) Signal de synchronisation avec un saut de phase correspondant à un tiers de la période T ($\delta\phi = 2\pi/3$). Le signal est représenté par colonnes de haut en bas puis de gauche à droite. (en bas) Courant auto-oscillant pour un saut de phase $\delta\phi = 2\pi/3$. Le signal représenté correspond à 135 ms (3600 cycles : 6 cycles d'oscillation par colonnes pour 600 colonnes).

8.3.5.3 Résonance du déphasage lors d'une synchronisation

Dans la partie qui précède, il a été vu que le déphasage ϕ_c se comportait qualitativement comme un résonateur amorti. Une étude quantitative peut être menée en utilisant une excitation harmonique du déphasage, c'est-à-dire à l'aide d'un signal d'excitation modulé en phase sinusoïdalement

$$V = V_{AC} \cos(\omega_e t + \phi_{PM} \cos \omega_{PM} t) \tag{8.30}$$

où ϕ_{PM} est la déviation en phase et ω_{PM} la fréquence angulaire de la modulation de la phase. Ce signal a pour effet de synchroniser l'auto-oscillateur et d'exercer un forçage périodique sur le déphasage ϕ_c. Cette excitation périodique se traduit sur l'équation du déphasage par

$$m\ddot{\phi}_c + \Gamma\dot{\phi}_c + K \sin(\phi_c - \phi_{PM}) = \Omega \tag{8.31}$$

Dans la limite $\Omega \ll K$, on a une équation d'un pendule forcé

$$m\ddot{\phi}_c + \Gamma\dot{\phi}_c + K \sin(\phi_c) = K\phi_{PM} \sin \omega_{PM} t \tag{8.32}$$

Cette équation indique qu'une synchronisation par un signal modulé en phase peut amener à une résonance de la phase. Cette résonance est représentée sur la figure 8.14

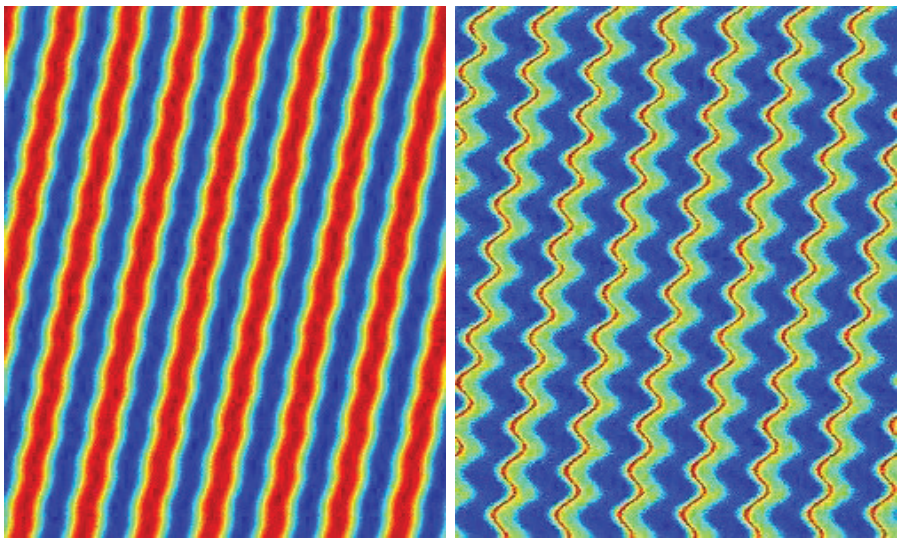


Figure 8.14 (à gauche) Signal de synchronisation avec modulation de phase sinusoïdale. (à droite) Signal auto-oscillant synchronisé avec résonance du déphasage à la fréquence de modulation.

La figure 8.15 montre une mesure de résonance du déphasage en fonction de la fréquence de modulation $\omega_{PM}/2\pi$ pour plusieurs valeurs d'amplitude de modulation de phase ϕ_{PM}

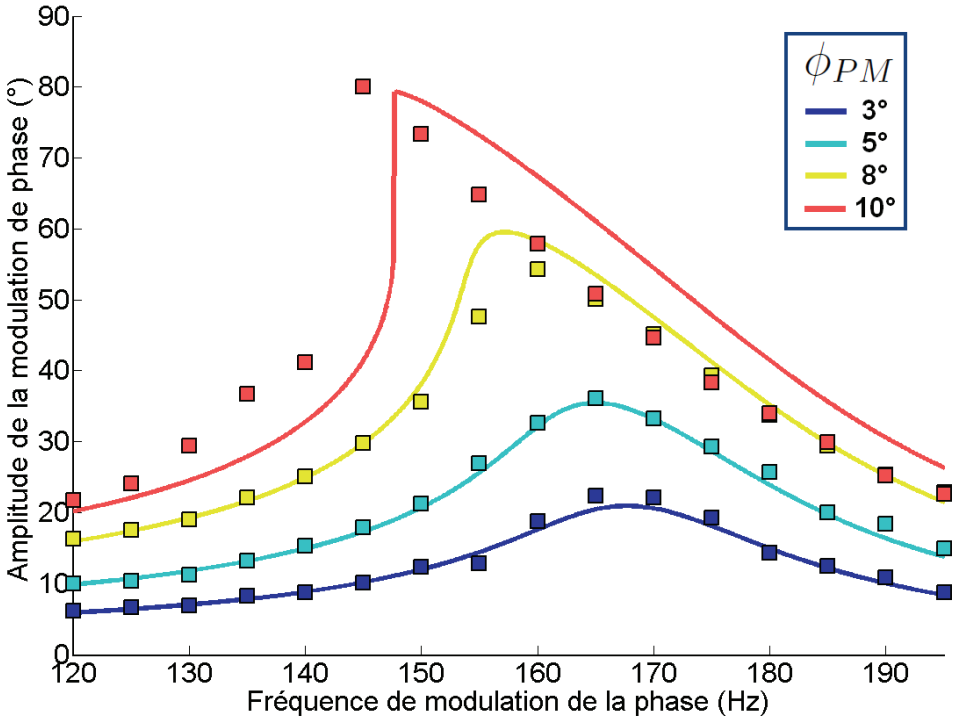


FIGURE 8.15 Amplitude de modulation du déphasage ϕ_c (en degrés) en fonction de la fréquence de modulation en phase (cf. Éq. 8.30). La modélisation utilise un oscillateur de Duffing avec un coefficient non linéaire négatif correspondant au développement à l'ordre 3 de $\sin(\phi_c)$. Les paramètres libres de la modélisation sont $f_\phi = 170$ Hz et $Q = 6.9$ (cf. texte pour plus de détails).

Lorsque le signal est synchronisé par un signal modulé en phase sinusoïdalement (Éq. 8.30), le déphasage de l'auto-oscillateur oscille à la fréquence de modulation et présente une résonance autour de $f_\phi = 170$ Hz. Cette résonance est linéaire pour les faibles excitations lorsque les valeurs d'angle ϕ_c sont petites devant 90 °. Lorsque l'amplitude de la modulation de phase est plus importante, la résonance devient non linéaire et présente le comportement d'un oscillateur de Duffing avec un terme non linéaire négatif (partie 4.1.2).

Les courbes de résonance sont modélisées en utilisant un développement au premier ordre non linéaire de l'équation 8.32

$$\frac{m}{K}\ddot{\phi}_c + \frac{\Gamma}{K}\dot{\phi}_c + \phi_c - \frac{1}{6}{\phi_c}^3 = \phi_{PM}\sin(\omega_{PM}t) \tag{8.33}$$

où les deux paramètres libres sont $f_\phi = \sqrt{K/m}/2\pi$, la fréquence résonance du

déphasage et le facteur de qualité Q, défini par $\sqrt{K/m}/Q = \Gamma/m$. La modélisation donne les valeurs $f_\phi = 170$ Hz et $Q = 6,9$.

8.3.5.4 Excitation du déphasage par le bruit

En poursuivant la description du déphasage ϕ_c comme l'angle d'un pendule, la dynamique du déphasage peut s'écrire en présence de bruit sous la forme

$$m\ddot{\phi}_c + \Gamma\dot{\phi}_c + K\sin(\phi_c) = \eta(t) \tag{8.34}$$

où le terme $\eta(t)$ rend compte d'une force fluctuante agissant sur le déphasage de l'auto-oscillateur synchronisé. En supposant que le spectre du bruit η est uniforme sur la plage de fréquence, la mesure du spectre de ϕ_c permet de déterminer la valeur de la fréquence de résonance de la phase

$$f_\phi = \sqrt{K/m}/2\pi \tag{8.35}$$

Deux acquisitions de déphasage ϕ_c pour des tensions de synchronisation de 1,6 et 2,6 V sont représentées sur la figure 8.16. L'amplitude de la transformée de Fourier est représentée en utilisant une normalisation afin que l'amplitude du signal réel (en tours) corresponde à l'amplitude du mode (en tours).

La mesure de la fréquence de résonance de la phase montre une dépendance avec la tension de synchronisation. Une mesure plus complète sous forme d'une carte est présentée sur la figure 8.17.

Une fréquence de résonance de la phase est observée sur la figure 8.17 sur toute la zone de synchronisation. Cette observation traduit un comportement inertiel du déphasage (Éq. 8.35). Dans la représentation de la figure 8.17 (en bas), la dépendance pour la fréquence de résonance de la phase est dominée par la variation de tension de synchronisation et montre un comportement de la forme $f_\phi \sim \sqrt{V_{AC}}$. Une formulation empirique est établie à partir de la modélisation des courbes de la figure 8.17. Les courbes de modélisation sont représentées pour 3 valeurs de désaccord en fréquence sur la figure 8.18.

La modélisation des courbes de la figure 8.18 est faite à l'aide de la fonction

$$f_{mod} = \sqrt{{f_0}^2 + {\alpha_K}^2(V - V_c)} \tag{8.36}$$

où est $f_0 = 810$ Hz est une fréquence de résonance asymptotique à tension de synchronisation nulle, α_K un coefficient de couplage pour la synchronisation et V_c une tension qui peut être interprétée comme une tension seuil de synchronisation à δ fixé.

La modélisation des courbes des figures 8.18 et 8.19 permet d'établir une formulation empirique

$$f_\phi(\delta, V) = \sqrt{810 + (703 - 0.092\,\delta)^2(V_{AC} - V_c(\delta))} \tag{8.37}$$

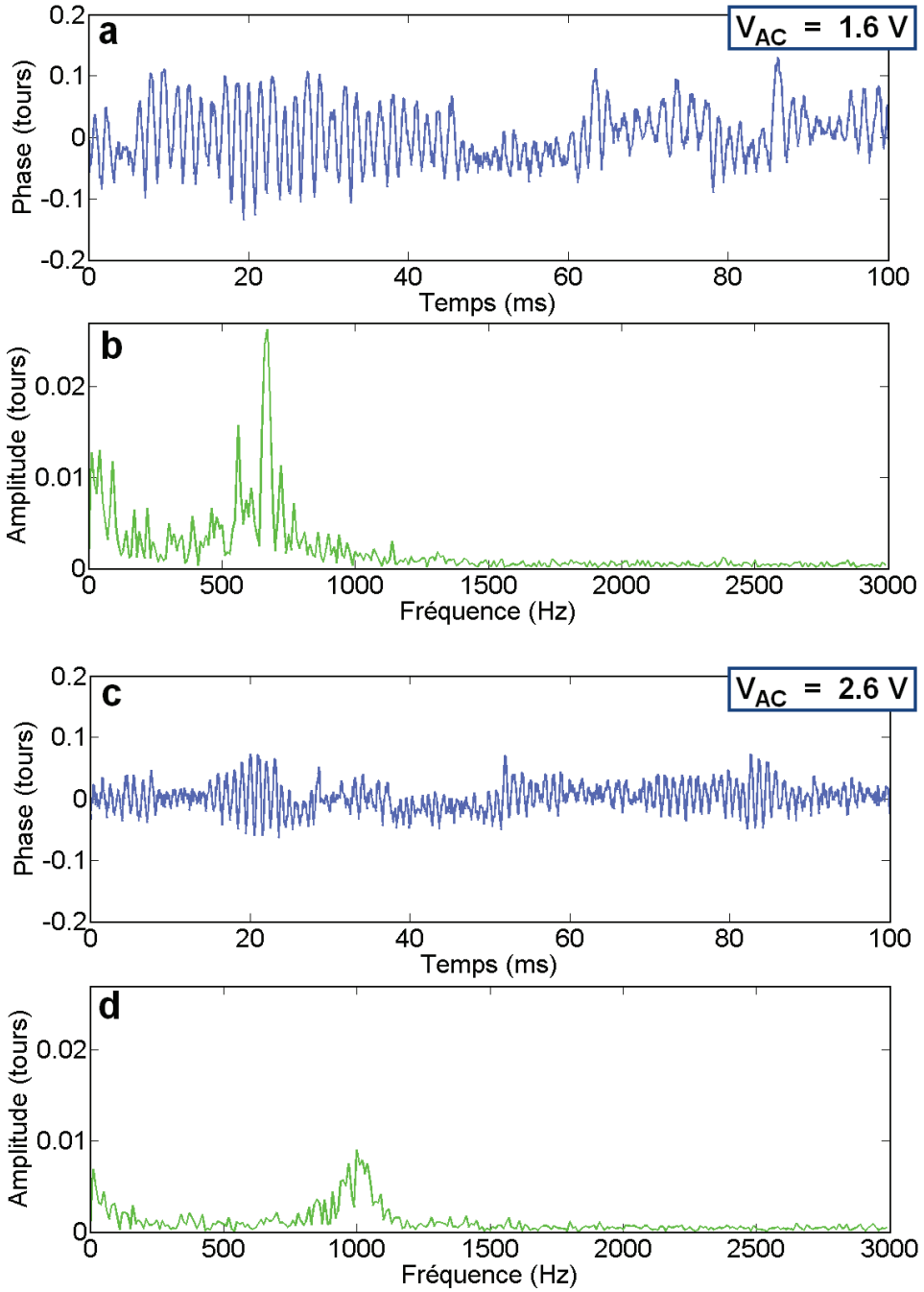


FIGURE 8.16 (a, c) Déphasage ϕ_c entre l'auto-oscillateur et le signal de synchronisation. Le désaccord en fréquence est $\delta = -400$ Hz et la tension de synchronisation est $V_{AC} = 1.6$ V (a) et $V_{AC} = 2.6$ V (c). (b, d) Amplitude des modes dans l'espace de Fourier rapportés à un temps d'acquisition de 1 s. Les maxima d'amplitude sont à 670 Hz (b) et 1000 Hz (d) et correspondent aux oscillations de ϕ_c dans les tracés a et c respectivement.

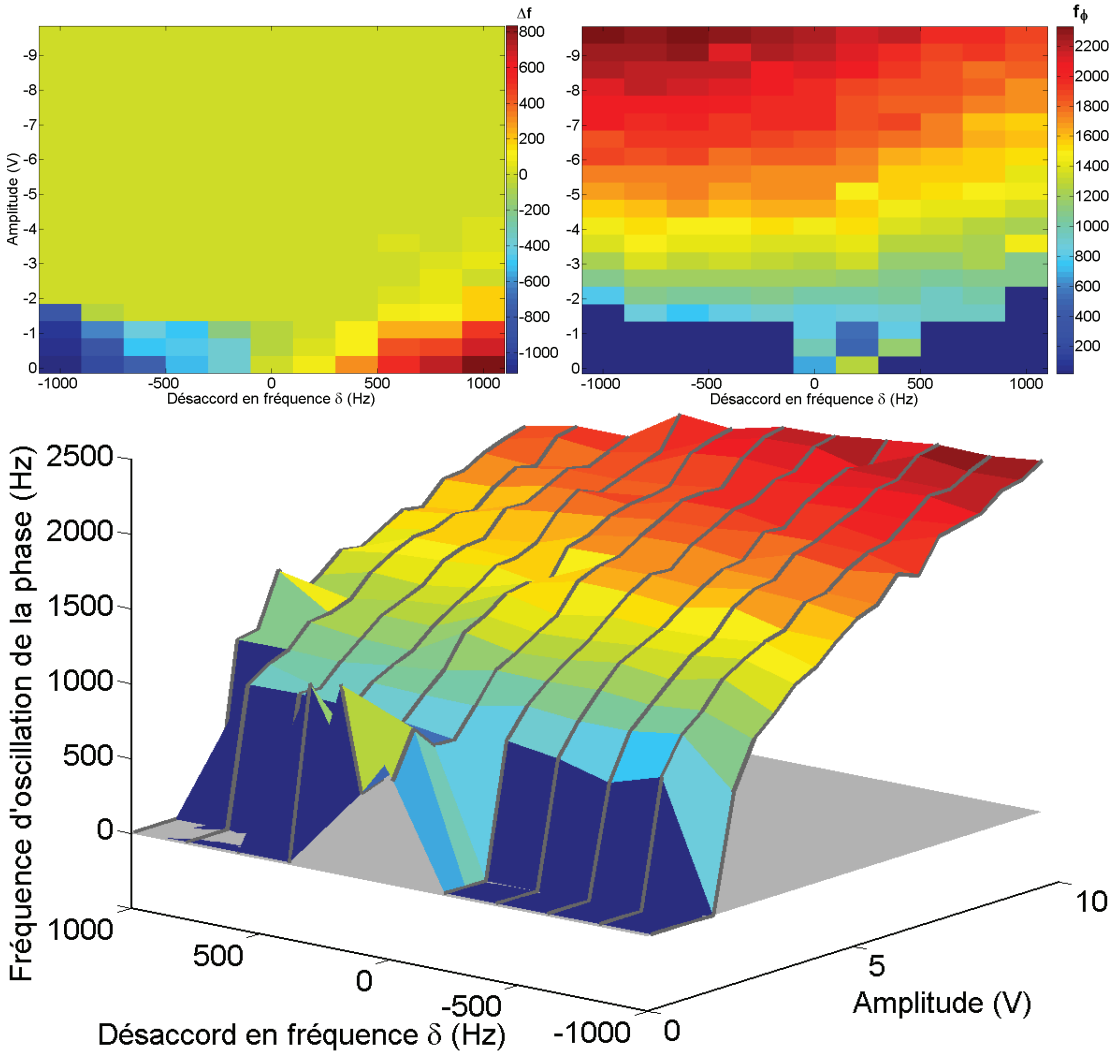


Figure 8.17 (en haut, à gauche) Différence de fréquence Δf entre le nanofil auto-oscillant et le signal de synchronisation en fonction du désaccord de fréquence δ et de l'amplitude du signal de synchronisation V_{AC}. (en haut, à droite et en bas) Fréquence de résonance f_ϕ du déphasage ϕ_c en fonction de δ et V_{AC}. Lorsque la phase est synchronisée, la fréquence de résonance f_ϕ est définie comme le maximum du spectre de ϕ_c. En dehors de la zone de synchronisation, $f_\phi = 0$.

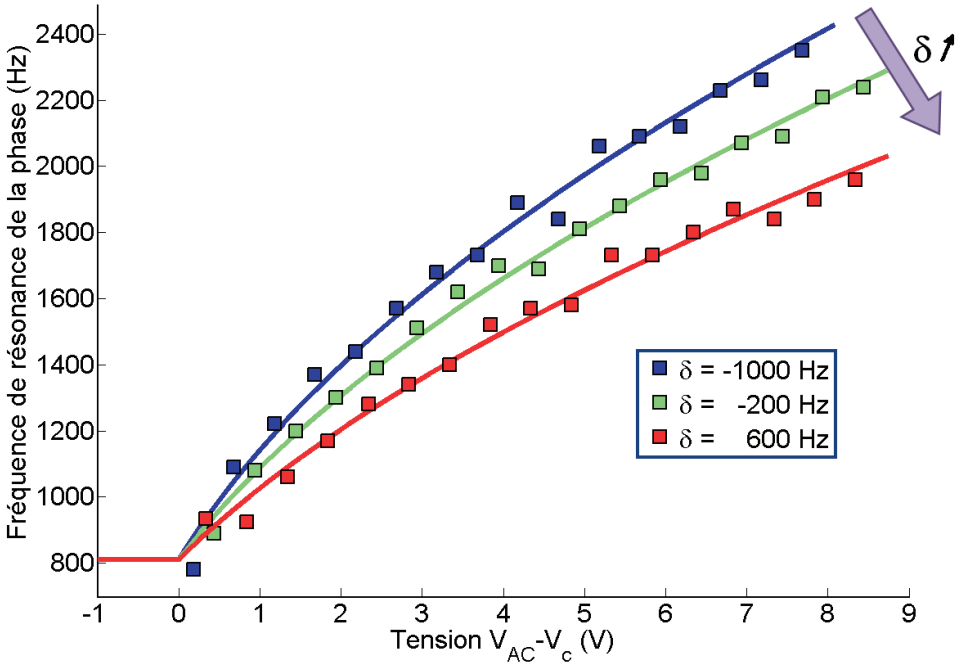


FIGURE 8.18 Fréquence de résonance du déphasage en fonction de la tension de synchronisation corrigée par V_c (cf. texte). Les courbes de modélisation sont une fonction racine carrée (cf. texte également).

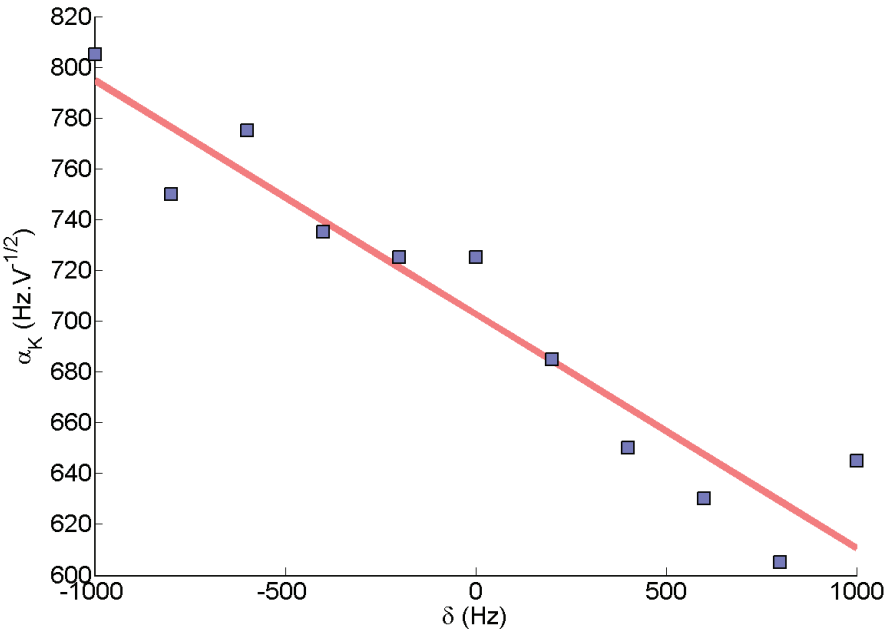


FIGURE 8.19 Coefficient de couplage pour la synchronisation en fonction (Éq. 8.36) en fonction du désaccord en fréquence δ. La relation affine est $\alpha_K = 703 + -0.092\,\delta$.

où V_{AC} et V_c sont exprimées en Volts. Le résultat f_ϕ est en Hertz.

La dépendance de la fréquence de résonance du déphasage en racine de la tension de synchronisation provient de la relation $f_\phi = \sqrt{K/m}/2\pi$, ce qui signifie que le terme de couplage K est proportionnel l'amplitude de la tension de synchronisation V_{AC}.

$$K = 4m\pi^2 \left({f_0}^2 + {\alpha_K}^2(V - V_c(\delta))\right) \tag{8.38}$$

où $\alpha_K = 703 - 0.092\,\delta$ et $f_0 = 810$ Hz.

8.3.5.5 Entraînement de phase : observation d'une auto-oscillation du déphasage

L'entraînement de phase désigne un régime de synchronisation où la différence de phase entre l'auto-oscillateur et le signal de synchronisation n'est pas constante mais néanmoins bornée. Ce régime signifie que la fréquence moyenne des deux oscillations est la même mais qu'il n'y a pas de verrouillage en phase. Ce type de régime à été prédit par Chakraborty et Rand (1988) pour deux oscillateurs de van der Pol couplés et observé récemment par Thévenin et al. (2011) pour deux lasers couplés.

D'autre part Hong et al. (2002) ont prédit un régime d'oscillation spontanée du déphasage pour deux auto-oscillateurs synchronisés dans le cas d'un couplage retardé avec une inertie du déphasage. Dans cet article, il est notamment mentionné que l'oscillation spontanée de la phase peut être responsable d'une désynchronisation.

Les résultats qui vont être présentés sont extraits de la carte de synchronisation de la figure 8.4. Sur cette carte, on peut signaler que la plage de synchronisation pour les désaccords en fréquence positifs est moins stable que pour les négatifs. Une acquisition du déphasage dans la zone de désaccord en fréquence positif est donnée sur la figure 8.20.

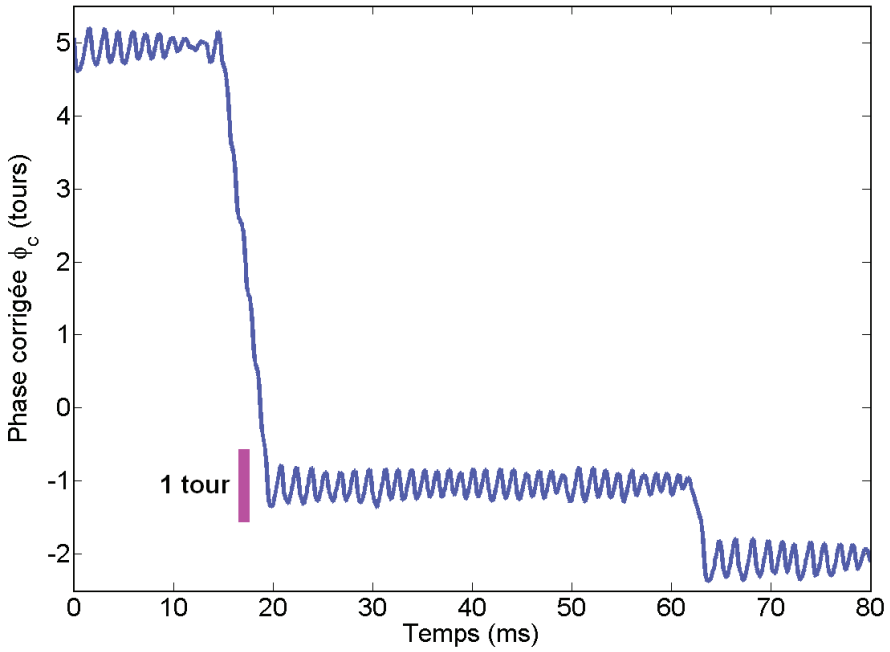


FIGURE 8.20 Déphasage en fonction du temps pour un désaccord en fréquence $\delta = 2000$ Hz et une tension de synchronisation $V_{AC} = 3,7$ V. L'acquisition correspond à 4500 cycles d'auto-oscillation. Lorsque le déphasage se stabilise autour d'une valeur entière, celui-ci auto-oscille avec une amplitude inférieure à un tour autour de sa position d'équilibre à une fréquence $f_\phi = 730$ Hz.

Dans la plage d'accrochage pour des désaccords en fréquence positifs, la phase auto-oscille autour d'une valeur d'équilibre. Cette auto-oscillation rend la synchronisation plus sensible aux fluctuations et peut amener l'auto-oscillateur à décrocher du signal de synchronisation. Ces décrochages se traduisent par une zone d'accroche pour $\delta > 0$ moins prononcée sur la figure 8.4. Lorsque la tension de synchronisation est plus importante, la force de synchronisation est suffisante pour empêcher le décrochage et permet d'observer le signal d'entraînement de phase (Fig. 8.21)

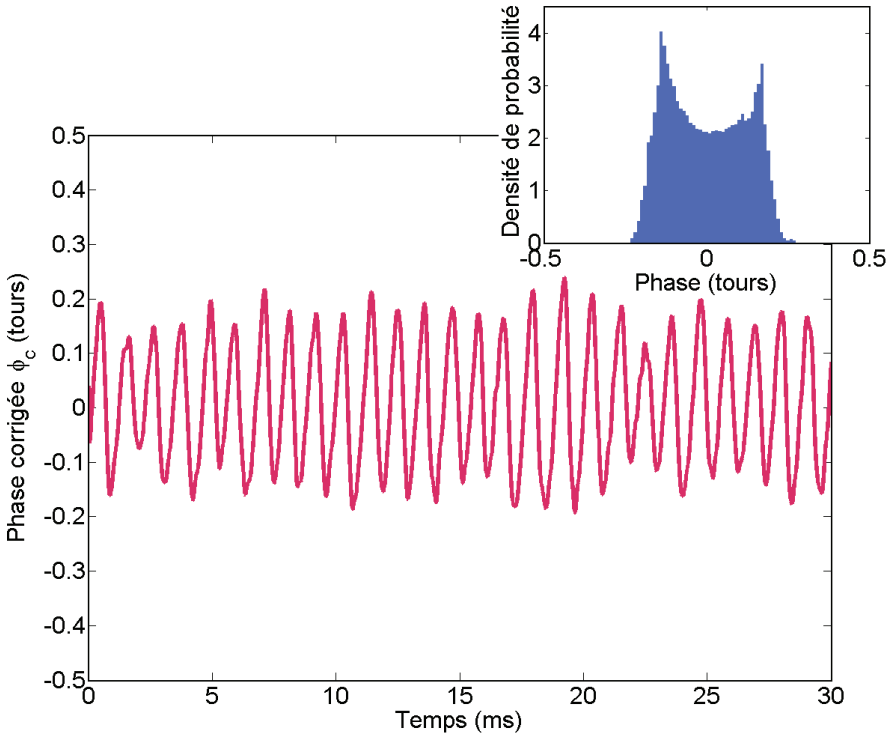


Figure 8.21 Déphasage en fonction du temps pour un désaccord en fréquence $\delta = 2000$ Hz et une tension de synchronisation $V_{AC} = 5,2$ V. L'acquisition correspond à 1700 cycles d'auto-oscillation. Lorsque le déphasage se stabilise autour d'une valeur entière, les oscillations spontanées du déphasage ont une amplitude inférieure à un tour. La fréquence de modulation spontanée de la phase est à une fréquence $f_\phi = 857$ Hz. La probabilité de présence normalisée du déphasage est représentée en insert.

Conclusion du chapitre

L'observation d'un régime de synchronisation d'un résonateur auto-oscillant a été présentée dans ce chapitre. La synchronisation a été obtenue par une excitation externe à une fréquence proche de la fréquence d'auto-oscillation. De nombreuses propriétés liées à la synchronisation on été observées telles que la région de synchronisation associée à la première langue d'Arnold ou le glissement de la phase synchronisé d'un nombre entier de cycles.

Une propriété remarquable d'inertie de la phase a été observée permettant de considérer que lors de la synchronisation, le déphasage avec la consigne externe se comporte comme l'angle d'un pendule simple. L'existence d'une inertie de la phase a permit l'observation d'une oscillation spontanée du déphasage traduisant un régime de synchronisation sans synchronisation de la phase ou pouvant entraîner une désynchronisation dans la langue d'Arnold.

Bibliographie

Acebrón, J. A., L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort et R. Spigler, 2005 : The kuramoto model : A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137.

Acebrón, J. A. et R. Spigler, 1998 : Adaptive frequency model for phase-frequency synchronization in large populations of globally coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2229.

Bartsch, R., J. W. Kantelhardt, T. Penzel et S. Havlin, 2007 : Experimental evidence for phase synchronization transitions in the human cardiorespiratory system. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 054102.

Buck, J., 1988 : Synchronous rhythmic flashing in fireflies. *Q. Rev. Biol.* **63**, 265.

Chakraborty, T. et R. H. Rand, 1988 : The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled Van Der Pol oscillators. *Int. J. Nonlinear Mech.* **23**, 369.

Czeisler, C. A., J. F. Duffy, T. L. Shanahan, E. N. Brown, J. F. Mitchell, D. W. Rimmer, J. M. Ronda, E. J. Silva, J. S. Allan, J. S. Emens, D.-J. Dijk et R. E. Kronauer, 1999 : Stability, precision, and near-24-hour period of the human circadian pacemaker. *Science* **284**, 2177.

Dolan, K., M. Majtanik et P. A. Tass, 2005 : Phase resetting and transient desynchronization in networks of globally coupled phase oscillators with inertia. *Physica D* **211**, 128.

Dorfler, F. et F. Bullo, 2011 : On the critical coupling for Kuramoto oscillators. *Dynamical Systems* **21**, 1.

Ermentrout, B., 1991 : An adaptive model for synchrony in the firefly Pteroptyx malaccae. *J. Math. Biol.* **29**, 571.

Hong, H., M. Y. Choi, J. Yi et K.-S. Soh, 1999 : Inertia effects on periodic synchronization in a system of coupled oscillators. *Phys. Rev. E* **59**, 353.

Hong, H., G. S. Jeon et M. Y. Choi, 2002 : Spontaneous phase oscillation induced by inertia and time delay. *Phys. Rev. E* **65**, 026208.

Kuramoto, Y., 1984 : *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Springer.

Leonov, G. A., 2006 : Phase synchronization : Theory and applications. *Automat. Rem. Contr+* **67**, 1573.

Majtanik, M., K. Dolan et P. A. Tass, 2006 : Desynchronization in networks of globally coupled neurons with dendritic dynamics. *J. Biol. Phys.* **32**, 307.

Naik, S., T. Hikihara, A. Palacios, V. In, H. Vu et P. Longhini, 2011 : Characterization of synchronization in a unidirectionally coupled system of nonlinear micromechanical resonators. *Sensor Actuator A* **171**, 361.

Pandey, M., K. Aubin, M. Zalalutdinov, R. B. Reichenbach, A. T. Zehnder, R. H. Rand et H. G. Craighead, 2006 : Analysis of frequency locking in optically driven MEMS resonators. *J. Microelectromech. S.* **15**, 1546.

Pikovsky, A., M. Rosenblum et J. Kurths, 2000 : Phase synchronization in regular and chaotic systems. *Int. J. Bifurcat. Chaos* **10**, 2291.

Sakyte, E. et M. Ragulskis, 2011 : Self-calming of a random network of dendritic neurons. *Neurocomputing* **74**, 3912.

Shim, S.-B., M. Imboden et P. Mohanty, 2007 : Synchronized oscillation in coupled nanomechanical oscillators. *Science* **316**, 95.

Tanaka, H.-A., A. J. Lichtenberg et S. Oishi, 1997 : First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2104.

Thévenin, J., M. Romanelli, M. Vallet et M. Brunel, 2011 : Resonance assisted synchronization of coupled oscillators : Frequency locking without phase locking. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 104101.

Trees, B. R., V. Saranathan et D. Stroud, 2005 : Synchronization in disordered josephson junction arrays small-world connections and the Kuramoto model. *Phys. Rev. E* **71**, 016215.

Watanabe, S. et S. H. Strogatz, 1994 : Constants of motion for superconducting josephson arrays. *Physica D* **74**, 197.

Zalalutdinov, M., K. L. Aubin, M. Pandey, A. T. Zehnder, R. H. Rand, H. G. Craighead et J. M. Parpia, 2003 : Frequency entrainment for micromechanical oscillator. *Appl. Phys. Lett.* **83**, 3281.

Chapitre 9

Auto-oscillation de deux nanofils mis en contact

Ce chapitre porte sur un mécanisme d'auto-oscillation observé accidentellement lors de la manipulation de deux nanofils.

Deux résonateurs électromécaniques en carbure de silicium sont mis en contact pour former une structure avec un point de contact rigide. Le couplage des deux résonateurs entraîne une modification des fréquences et des modes de vibration qui a déjà été présentée dans la partie 3.2. Dans cette partie, le comportement auto-oscillant d'une telle structure va être présenté.

9.1 Introduction

Dans l'introduction du chapitre 7 sur les auto-oscillations, une liste de système nanoélectromécanique (NEMS) auto-oscillants a été proposée dans la partie 7.1.3. Il a été vu notamment qu'un auto-oscillateur était un système actif (partie 7.1.1.1). Ainsi, les NEMS auto-oscillants peuvent être classés en deux catégories selon que le mécanisme actif de rétroaction responsable de l'oscillation spontanée est à une échelle macroscopique ou nano.

Parmi les NEMS auto-oscillants avec une rétroaction externe, on peut citer les systèmes

- avec une détection électrique associée à une amplification du signal bouclé sur l'excitation (Feng et al., 2008; Villanueva et al., 2011; Ramos et al., 2008)
- avec un couplage optique, c'est-à-dire en pratique pour un couplage avec le champ électromagnétique d'une cavité résonante pompé par un laser (Metzger et Karrai, 2004; Gigan et al., 2006; Teufel et al., 2008; Metzger et al., 2008; Favero et al., 2009)

La deuxième catégorie de NEMS auto-oscillants est celle des systèmes avec un mécanisme de rétroaction à l'échelle du résonateur mécanique. La première observation d'une auto-oscillation avec une rétroaction à l'échelle nano est celle de l'équipe (Ayari et al., 2007) pour les nanofils de SiC sous émission de champ. Les nanotubes

de carbone ont également été utilisés comme émetteurs de champ pour obtenir des auto-oscillations d'un résonateur millimétrique pour Kleshch et al. (2010) ou dans une situation où un nanotube de carbone lui même est la partie résonante pour Weldon et al. (2010). L'exploitation du mécanisme de la navette de charge a donné lieu à des auto-oscillations pour des molécules (Park et al., 2000) et pour des nano-piliers (Kim et al., 2010). Certains transistors comme ceux de Grogg et al. (2009); Steele et al. (2009) ont montré une dynamique d'auto-oscillation tout comme des systèmes avec un couplage thermo-électromécanique Steeneken et al. (2011) ou une excitation optique des porteurs de charge Okamoto et al. (2011).

Une des problématiques quant à l'utilisation d'un mécanisme auto-oscillant en vue d'une application est l'aptitude à pouvoir transfert efficacement l'énergie provenant de la source stationnaire vers le résonateur de manière à compenser les pertes dissipatives et entretenir le mouvement. Dans cette optique, les systèmes avec une rétroaction à l'échelle macroscopique sont très peu efficaces du point de vue énergétique. Pour de tels systèmes, on s'attend à ce que la puissance nécessaire à l'alimentation de la rétroaction externe macroscopique soit de plusieurs ordres de grandeurs supérieure à celle consommé par le résonateur nanométrique. Si le rendement énergétique optimal est donc à rechercher parmi les systèmes à rétroaction, nous verrons dans ce chapitre que le mécanisme d'auto-oscillation utilisant deux nanofils mis en contact a montré la meilleure efficacité énergétique comparée aux autres NEMS auto-oscillants cités précédemment.

9.2 Observation d'une auto-oscillation de deux nanofils mis en contact

La procédure de mise en contact de deux résonateurs SiC a été décrite dans la partie 3.2.1.

9.2.1 Visualisation par imagerie d'une oscillation spontanée

Les deux blocs nanomanipulateurs sont utilisés pour contacter les deux nanofils supportés par les pointes en tungstène (voir Fig. 9.1). Une tension DC peut être appliquée entre les deux supports des nanofils et le courant peut être mesuré par un ampèremètre en série.

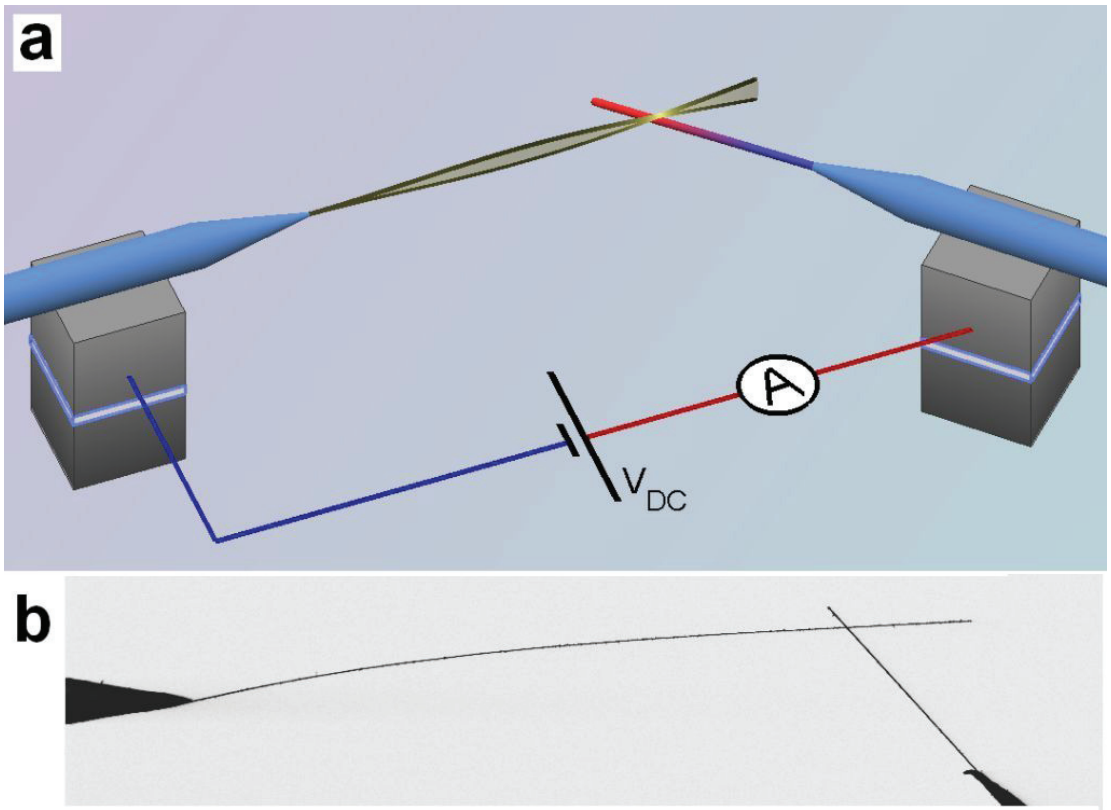


FIGURE 9.1 (a) Schéma représentant les deux nanofils sur leurs pointes supports avec les deux blocs nanomanipulateurs. Une source de tension incluant un ampèremètre en série est disposée entre les deux supports des nanofils. Le nanofil le plus long (à gauche sur le schéma) a été représenté en vibration puisque nous verrons que c'est lui qui est susceptible d'auto-osciller. (b) Imagerie MEB des deux nanofils collés en l'absence de tension électrique appliquée.

Les deux nanofils sont contactés avec un point de contact proche du nœud du deuxième mode de vibration du fil le plus long (Fig. 3.9). Lorsqu'une tension électrique continue est appliquée entre les deux pointes supports des deux nanofils contactés, un courant électrique parcourt les deux résonateurs. À partir d'une tension électrique suffisante, le nanofil le plus long se met en vibration (Fig. 9.2).

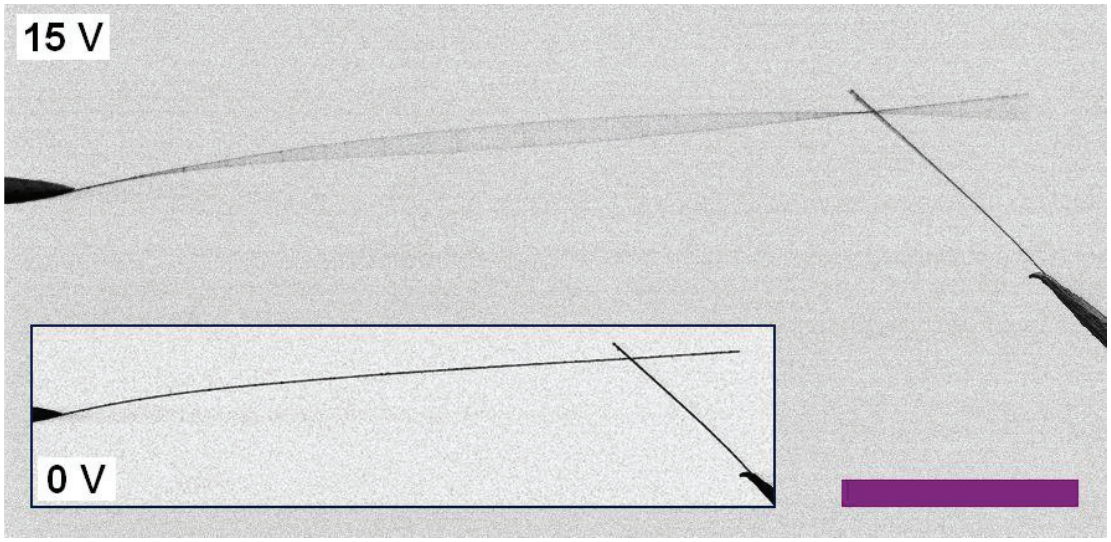


Figure 9.2 Imagerie MEB d'une oscillation spontanée de deux nanofils SiC collés par contact. Une tension de 15 V est appliquée et le courant DC est de l'ordre 15 pA. L'image en insert correspond aux deux nanofils à la masse. Échelle 50 μm.

Lorsque la tension est augmentée davantage, un régime d'auto-oscillation plus complexe avec un couplage avec le résonateur court peut être observé (Fig. 9.3).

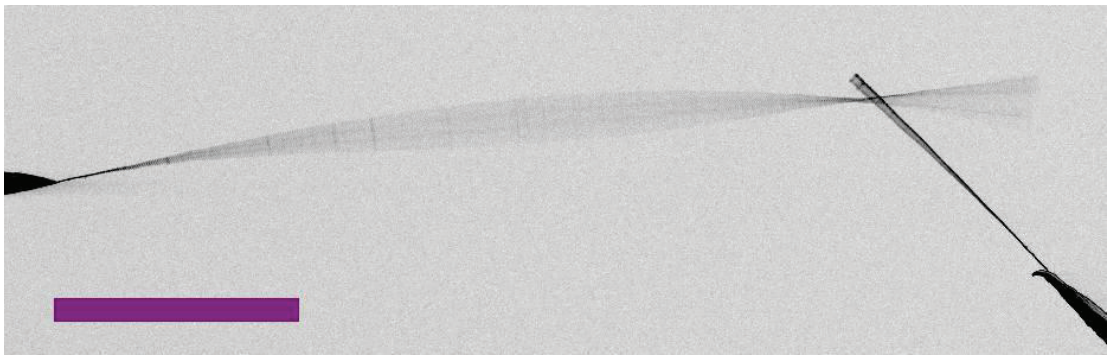


Figure 9.3 Oscillation spontanée de deux nanofils SiC collés par contact. $V_{DC} = 40$ V et $I_{DC} = 60$ pA. Barre d'échelle 50 μm.

9.2.2 Caractérisation électrique de l'auto-oscillation

La mise en auto-oscillation des résonateurs couplés s'accompagne d'une variation parfois marquée du courant DC mesurable sur une courbe courant-tension (Fig. 9.4)

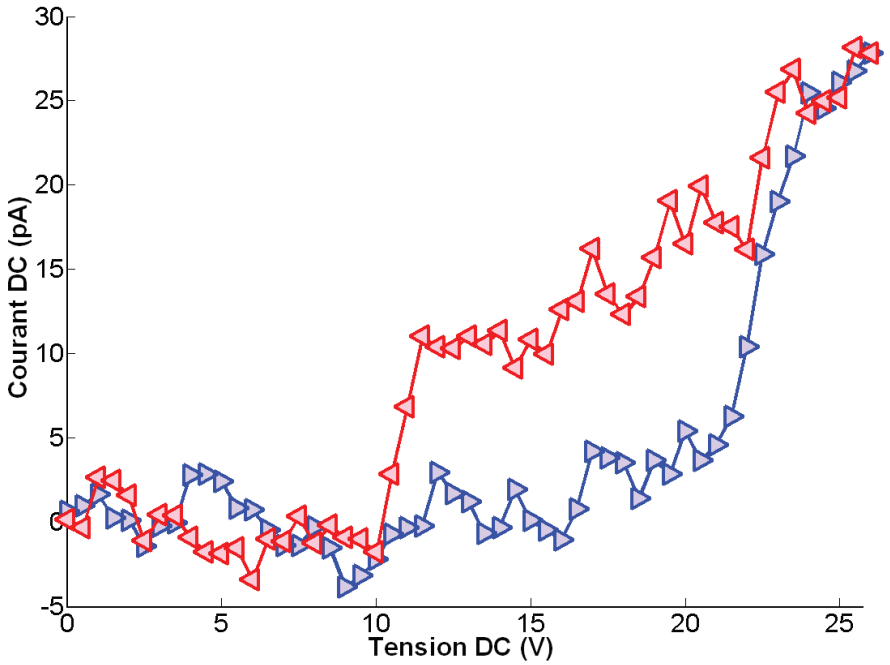


FIGURE 9.4 Courant DC parcourant les deux nanofils contactés en fonction de la tension DC appliquée entre les pointes supports. Une zone d'hystérésis est observée et est associée à l'auto-oscillation (imagerie MEB pendant le cycle de tension).

Sur la figure 9.4, un cycle d'hystérésis est observé. Les résonateurs sont visualisés pendant le cycle de tension à l'aide du MEB et il est observé que le saut de courant vers le haut (resp. vers le bas) correspond à la mise en oscillation spontanée (resp la fin de l'oscillation). Afin d'écarter l'influence du faisceau d'électron sur le mécanisme d'auto-oscillation, la courbe courant-tension est également mesurée sans le faisceau du MEB et présente le même cycle d'hystérésis.

9.2.3 Fréquence d'auto-oscillation

La détection du courant auto-oscillant est plus difficile que dans le cas de l'auto-oscillation sous émission de champ. Pour obtenir un signal avec une résolution en temps de l'auto-oscillation, la détection par focalisation du faisceau du MEB est utilisée (cf. partie 2.3.1.2).

Le faisceau d'électron est focalisé sur le résonateur long au voisinage du point d'accroche sur la pointe support. Le signal détecté permet d'obtenir un signal relié au déplacement auto-oscillant du résonateur (Fig. 9.5).

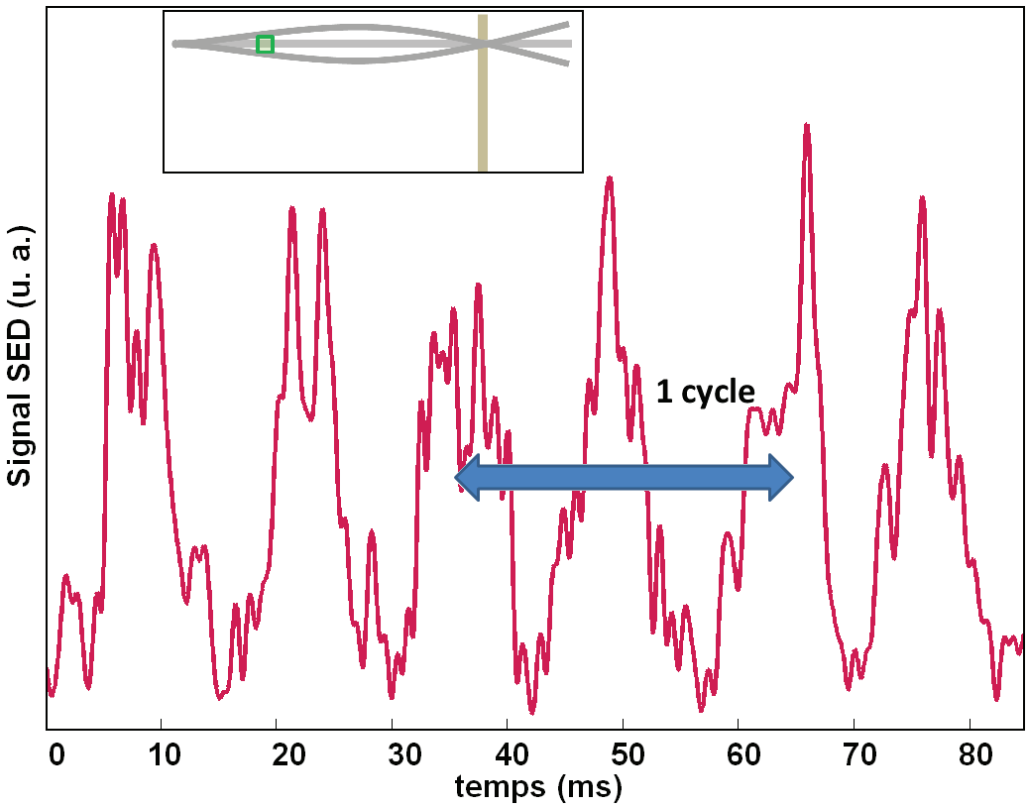


Figure 9.5 Signal du SED lorsque le faisceau d'électrons est focalisé sur le nanofil en auto-oscillation. $V_{DC} = 33$ V, $I_{DC} = 15$ pA.

La procédure pour l'extraction de la phase [1] lors de l'auto-oscillation revient à compter le nombre de paires d'impulsions en fonction du temps. En effet, comme le nanofil intercepte deux fois la position de focalisation du faisceau pendant l'oscillation, un cycle d'oscillation correspond à 2 impulsions dans le signal de la figure 9.5. Le nombre de cycle en fonction du temps est tracé en insert dans la figure 9.6. Le nombre de cycles par seconde, c'est-à-dire la pente dans la représentation de la figure

1. Revenir à la partie 7.4.2.2 pour plus de détails.

insérée, correspond à la fréquence de l'oscillation spontanée. En retranchant la pente moyenne (la fréquence moyenne) à la courbe insérée, on obtient la courbe principale de la figure 9.6 qui correspond au nombre de cycles dans le référentiel tournant de la partie 7.4.2.1.

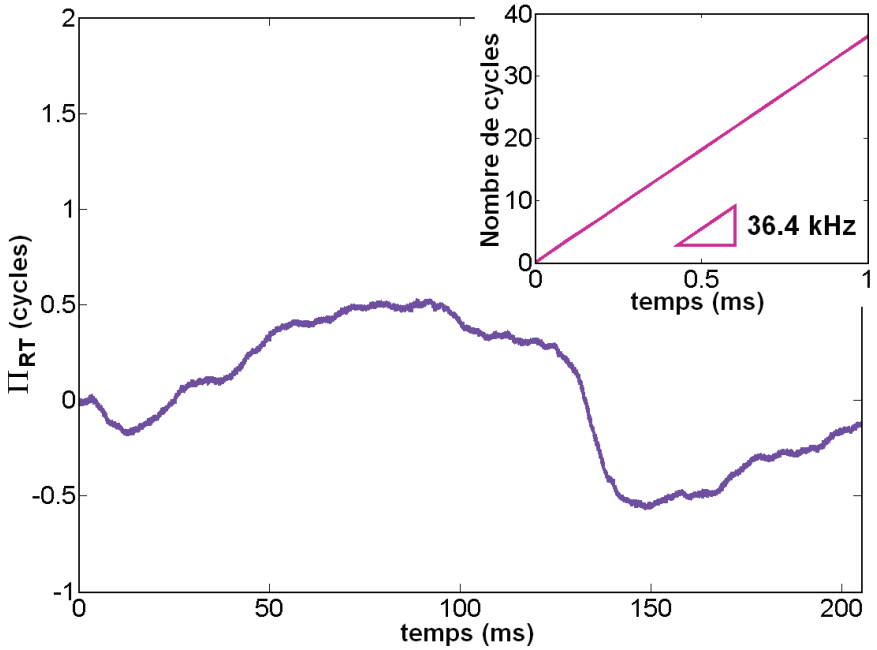


FIGURE 9.6 (en insert) Nombre de cycles d'oscillation spontanée en fonction du temps. La pente moyenne correspond au nombre de cycles par seconde c'est-à-dire à la fréquence. Le tracé principal correspond au nombre de cycles dans le référentiel tournant Π_{RT} (cf. partie 9.6) exprimé en nombre de cycles.

La valeur de la fréquence moyenne d'auto-oscillation est mesurée à partir du calcul numérique de la transformée de Fourier du signal 9.5. La fréquence moyenne d'auto-oscillation est représentée sur la figure 9.7 en fonction de la tension DC.

Une prédiction de la fréquence d'auto-oscillation de la figure 9.7 est difficile. L'intérêt de la mesure présentée est de confirmer que le résonateur est à l'origine de la génération spontanée d'un signal alternatif et qu'il ne s'agit pas d'une excitation d'un résonateur par un signal parasite.

9.3 Modélisation électromécanique du seuil d'instabilité linéaire

Dans cette partie, un modèle électromécanique analogue à celui décrivant les auto-oscillations sous émission de champ est proposé. Il permettra notamment d'éva-

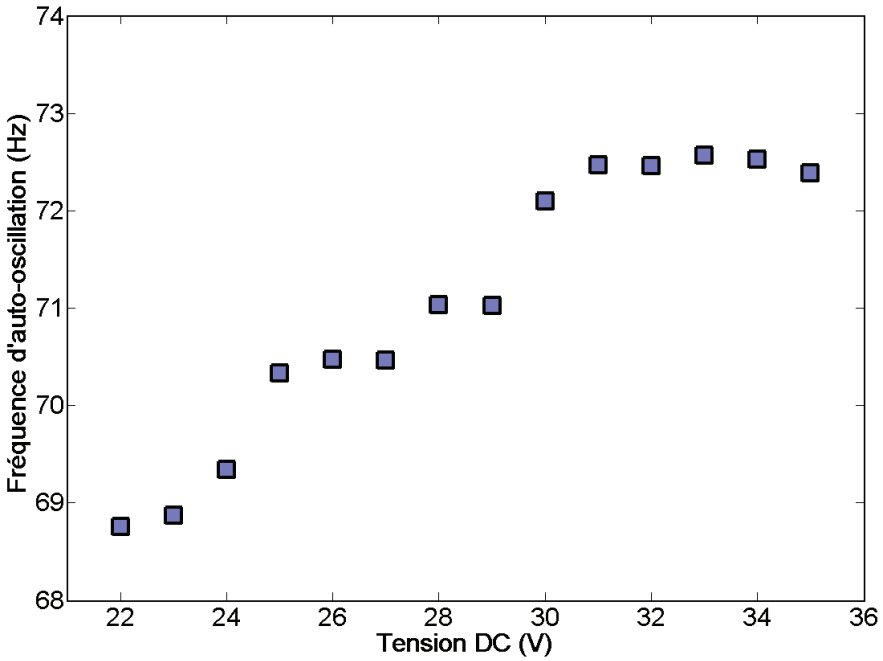


Figure 9.7 Fréquence moyenne d'auto-oscillation en fonction de la tension DC entre les deux résonateurs.

luer la valeur de la dépendance de la résistance vis-à-vis de la position du nanofil long en mouvement lors de l'auto-oscillation.

9.3.1 Seuil d'auto-oscillation pour le nœud de vibration au point de contact

9.3.1.1 Équation mécanique

Lorsque le nœud de vibration du deuxième mode du fil long correspond au point d'accroche, la partie dynamique mécanique ne fait intervenir que le déplacement du résonateur long et l'équation du mouvement est

$$\ddot{x_1} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x_1} + {\omega_0}^2 x_1 = \mathcal{F}_{\text{élec}} \tag{9.1}$$

où x_1 est l'amplitude de l'extrémité libre du résonateur long, ω_0 la pulsation propre du deuxième mode de vibration, Q le facteur de qualité du mode de vibration et $\mathcal{F}_{\text{élec}}$ une force électrostatique provenant de l'intégration des forces capacitives élémentaires entre les deux fils soumis à une chute de potentiel V_{DC}.

9.3.1.2 Équation électrique

Il est à noter que la résistance du fil court est dominante devant celle du fil long. Cette différence est due aux nombreuses étapes de chauffage subies par le fil long. Pour une approche simplifiée, un seul potentiel électrique intermédiaire $\mathcal{V}$ est introduit à la moitié de la résistance R_t du fil court. Ce potentiel intermédiaire se décompose en

$$\mathcal{V}_I = \bar{V}_I + V_I$$

où $\bar{V}_I$ est la composante continue du potentiel intermédiaire et V_I sa composante alternative. Comme le potentiel se trouve à la moitié de la résistance totale, on a $\bar{V}_I = V_{DC}/2$. Cette tension DC moyenne entre en jeu dans l'expression de la force électrique

$$\mathcal{F}_{\text{élec}} = \frac{C_I{}'}{m} V_{DC} V_I$$

où $C_I{}'$ est la dérivée de la capacité par rapport au déplacement du résonateur au potentiel intermédiaire V_I. m est la masse effective du mode de vibration sans tirage.

Le schéma électrique pour la composante alternative du résonateur est représenté sur la figure 9.8.

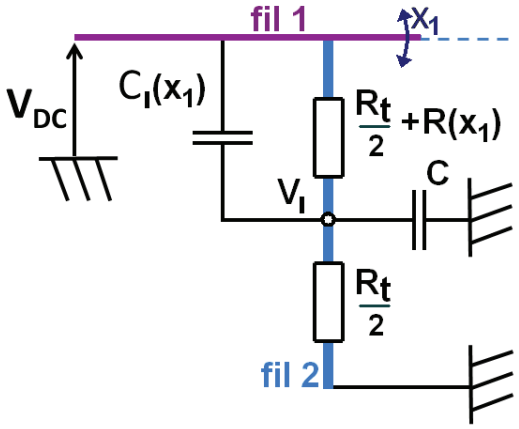


FIGURE 9.8 Schéma électrique des deux résonateurs en contact. La résistance du fil R_t du fil 2 est dominante devant la résistance du fil 1. Le potentiel intermédiaire V_I est introduit au milieu de la résistance R_t.

L'équation électrique pour le potentiel V_I est

$$\frac{V_{DC} - \mathcal{V}}{\frac{R_t}{2} + R(x_1)} + \frac{d}{dt}\left[C_I(x_1)(V_{DC} - \mathcal{V})\right] = C\frac{d\mathcal{V}}{dt} + \frac{2\mathcal{V}}{R_t} \tag{9.2}$$

où R_t est la résistance totale du fil court, $\mathcal{V}$ le potentiel intermédiaire, C la capacité

avec l'environnement. À l'ordre 0 et 1, on obtient

$$\bar{V_I} = \frac{V_{DC}}{2} \tag{9.3}$$

$$C\dot{V_I} + 4\frac{V_I}{R_t} = 2\frac{V_{DC}}{{R_t}^2}R'x_1 + \frac{1}{2}{C_I}'V_{DC}\dot{x_1} \tag{9.4}$$

soit pour l'équation 9.4

$$\tau\dot{V_I} + V_I = Ax_1 + B\dot{x_1} \tag{9.5}$$

avec

$$\tau = \frac{R_t C}{4} \tag{9.6}$$

$$A = \frac{V_{DC}}{2R_t}R' \tag{9.7}$$

$$B = \frac{R_t}{8}{C_I}'V_{DC} \tag{9.8}$$

9.3.1.3 Équations couplées

Les équations 9.1 et 9.5 sont les mêmes que celles pour la modélisation de l'auto-oscillation sous émission de champ (Éqs. 7.6 et 7.9). L'équation obtenue est

$$A_3\frac{d^3x}{dt^3} + A_2\frac{d^2x}{dt^2} + A_1\frac{dx}{dt} + A_0x = 0 \tag{9.9}$$

avec

$$A_3 = \tau \tag{9.10}$$

$$A_2 = 1 + \tau\frac{\omega_0}{Q} \tag{9.11}$$

$$A_1 = \frac{\omega_0}{Q} + \tau{\omega_0}^2 - B\frac{{C_I}'}{m}V_{DC} \tag{9.12}$$

$$A_0 = {\omega_0}^2 - A\frac{{C_I}'}{m}V_{DC} \tag{9.13}$$

9.3.2 Détermination de R' par le seuil d'auto-oscillation

Le paramètre le plus difficile à évaluer pour la prévision du seuil d'auto-oscillation est R' et sera déterminé à partir du seuil de mise en oscillation spontanée. Les autres paramètres mesurés sont

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = 45 \text{ kHz} \tag{9.14}$$

$$m = 6\,10^{-15} \text{ kg} \tag{9.15}$$

$$R_t = 1 \text{ T}\Omega \tag{9.16}$$

$$\tag{9.17}$$

Les paramètres estimés sont

$$Q = 5000 \tag{9.18}$$
$$C_I{}' = 1 \text{ pF.m}^{-1} \tag{9.19}$$
$$C = 1 \text{ fF} \tag{9.20}$$

où le facteur de qualité Q est celui du résonateur non contacté. $C_I{}'$ est un invariant d'échelle et correspond à la valeur estimée pour le cas non contacté avec une contre électrode proche. La valeur de C est également la même que pour le cas non contacté.

Le seuil de mise en oscillation pour le collage de la figure 9.2 est $V_{DC} = 20$ V. À partir des équations 9.6 à 9.13, on obtient

$$R' = 3,3\,10^{16} \ \Omega.\text{m}^{-1} \tag{9.21}$$

La valeur de R' rapportée à une amplitude de vibration de $\delta x = 5$ μm donne une variation relative de résistance $\Delta R = R'\delta x/R_t = 16$ %.

9.4 Auto-oscillation et rendement énergétique

La mise en auto-oscillation du système de nanofils contactés a été observée pour plusieurs valeur de tension DC et notamment pour un seuil de 2 V pour un courant moyen mesuré de 450 fA. Ces valeurs permettent de calculer une puissance injectée $P_{in} = 0,9pW$. Du fait de celle valeur vraisemblablement faible, la question de la puissance injectée et de la puissance consommée pour un auto-oscillateur NEMS se pose.

Pour un résonateur mécanique passif, entretenir un cycle d'oscillation revient à fournir une puissance moyenne P_{diss} égale à la puissance dissipée en moyenne sur un cycle par l'oscillation mécanique.

Dans le cadre d'une auto-oscillation avec l'alimentation d'un système de rétroaction, la puissance P_{in} nécessaire pour entretenir un cycle d'oscillation spontanée doit être au moins égale à la puissance P_{diss} dissipée mécaniquement pendant le cycle d'oscillation.

$$P_{in} \leq P_{diss} \tag{9.22}$$

où la situation $P_{in} = P_{diss}$ correspond au cas optimal où le système d'alimentation consomme exactement l'énergie nécessaire au maintient du cycle d'oscillation spontanée.

Afin d'évaluer les performances du mécanisme d'auto-oscillation par contact de deux nanofils SiC, nous proposons une étude comparative utilisant les systèmes auto-oscillants NEMS existants (Fig. 9.9 et Tab. 9.1).

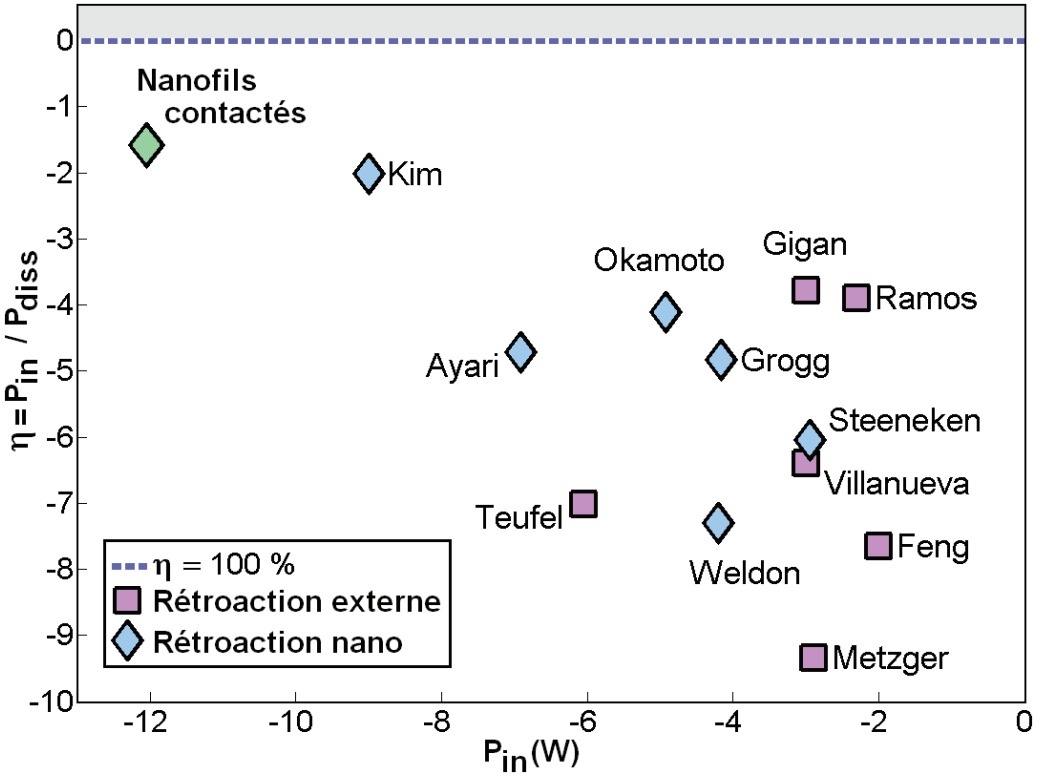


Figure 9.9 Cartographie de la puissance injectée (P_{in}) et du rendement énergétique (P_{diss}/P_{in}) où P_{diss} est la puissance dissipée mécaniquement par l'auto-oscillateur (échelles logarithmiques). Les données expérimentales sont calculées à partir du tableau 9.1. La ligne en pointillés horizontale correspond à un rendement optimal de 1 (0 en échelle logarithmique).

Le terme de puissance injectée P_{in} est calculé en fonction du type de mécanisme de rétroaction en utilisant la consommation énergétique pour l'alimentation des dispositifs

— pour les systèmes avec une cavité laser/micro-ondes, la puissance du laser/source ou éventuellement la puissance arrivant à la cavité est utilisée (Gigan et al., 2006; Teufel et al., 2008; Metzger et al., 2008; Ramos et al., 2008; Okamoto et al., 2011)

— pour les systèmes avec alimentation électrique, le courant et la tension DC sont utilisées (Feng et al., 2008; Villanueva et al., 2011; Ayari et al., 2007; Weldon et al., 2010; Kim et al., 2010; Grogg et al., 2009; Steeneken et al., 2011)

La puissance dissipée mécaniquement P_{diss} est calculé à partir du terme d'amortissement

$$P_\Gamma(t) = \Gamma \dot{x}^2 \tag{9.23}$$

où P_Γ est la puissance dissipée instantanée avec Γ le coefficient de dissipation et $\dot{x}$

la vitesse instantanée. Le coefficient d'amortissement s'exprime

$$\Gamma = m\frac{\omega_0}{Q} \tag{9.24}$$

où m est la masse effective, ω_0 la pulsation de résonance et Q le facteur de qualité. Ces trois termes sont tirés des informations données dans les articles.

Le terme correspondant à la vitesse est explicité en faisant l'approximation d'un cycle d'oscillation quasi-harmonique où

$$x = A\cos\omega t \tag{9.25}$$

où A est l'amplitude d'auto-oscillation et ω la pulsation d'auto-oscillation. Pour les données tirées des articles, on considère que la pulsation de l'auto-oscillation est la pulsation de résonance $\omega = \omega_0$. On trouve alors pour la puissance moyenne dissipée mécaniquement

$$P_{diss} =< P_\Gamma(t) >_{\text{cycle}} = \frac{1}{2}m\frac{{\omega_0}^3}{Q}A^2 \tag{9.26}$$

La représentation de la figure 9.9 montre que les auto-oscillateurs NEMS à rétroaction externe sont les plus gourmands en énergie injectée avec des puissances de l'ordre du mW au μW. Les auto-oscillateurs à rétroaction nano occupent un domaine sub-mW avec la plus petite puissance injectée (pW) pour les nanofils contactés qui sont, parmi les auto-oscillateurs considérés, les plus petits consommateurs en termes de puissances d'alimentation.

Du point de vue du rendement $\eta = P_{diss}/P_{in}$, on constate que la grande majorité des dispositifs consomme plus de 10^3 fois la puissance nécessaire à la compensation des pertes mécaniques. En plus d'avoir la plus basse consommation, les nanofils contactés ont également le meilleur rendement puisque 2,5 % de l'énergie d'alimentation est utilisée pour compenser effectivement les pertes mécaniques associées à la vibration auto-oscillante du nanofil.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, il a été montré que deux résonateurs dissipatifs peuvent être utilisés pour former une structure auto-oscillante lors du passage d'un courant électrique. Le collage des nanofils est obtenu lors du contact par nanomanipulation sous microscope électronique.

Un modèle électromécanique de l'auto-oscillation est développé permettant de déterminer les propriétés piézoélectriques du contact nanométrique entre les deux nanofils.

f	Q	m	A	P_{in}	P_{diss}	Référence
39 kHz	5000	$5\ 10^{-15}$	3 μm	0.9 pW	23 fW	
428 MHz	2500	$5.8\ 10^{-17}$	1 nm	10 mW	225 pW	Feng et al. (2008)
14.3 MHz	1220	$1.3\ 10^{-14}$	10 nm	1 mW	396 pW	Villanueva et al. (2011)
280 kHz	9000	$2.2\ 10^{-9}$	500 nm	1 mW	166 nW	Gigan et al. (2006)
1.5 MHz	300000	$6.2\ 10^{-15}$	100 nm	900 nW	87 fW	Teufel et al. (2008)
8.7 kHz	1822	$3.3\ 10^{-12}$	2 μm	1.3 mW	600 fW	Metzger et al. (2008)
39.4 kHz	2.5	$5.8\ 10^{-11}$	2 μm	5 mW	640 nW	Ramos et al. (2008)
42 kHz	4000	$1\ 10^{-14}$	10 μm	128 nW	2.3 pW	Ayari et al. (2007)
4 MHz	1260	$5\ 10^{-19}$	1 μm	64 μW	3.2 pW	Weldon et al. (2010)
10.5 MHz	2.5	$4.1\ 10^{-19}$	20 nm	1 nW	9.5 pW	Kim et al. (2010)
3.6 MHz	6500	$3.1\ 10^{-13}$	60 nm	70 μW	1 pW	Grogg et al. (2009)
1.26 MHz	10000	$4.1\ 10^{-12}$	100 nm	1.1 mW	1 nW	Steeneken et al. (2011)
239 kHz	6500	$3.6\ 10^{-12}$	1 μm	12 μW	924 pW	Okamoto et al. (2011)

TABLE 9.1 Puissance mécanique dissipée (P_{diss}) et puissance injectée (P_{in}) pour une liste de NEMS auto-oscillants. L'expression de la puissance dissipée est $P_{diss} = m\frac{{\omega_0}^3}{Q}A^2/2$.

Bibliographie

Ayari, A., P. Vincent, S. Perisanu, M. Choueib, V. Gouttenoire, M. Bechelany, D. Cornu et S. T. Purcell, 2007 : Self-oscillations in field emission nanowire mechanical resonators : A nanometric dc-ac conversion. *Nano Lett.* **7**, 2252.

Favero, I., S. Stapfner, D. Hunger, P. Paulitschke, J. Reichel, H. Lorenz, E. M. Weig et K. Karrai, 2009 : Fluctuating nanomechanical system in a high finesse optical microcavity. *Opt. Express* **17**, 12813.

Feng, X. L., C. J. White, A. Hajimiri et M. L. Roukes, 2008 : A self-sustaining ultrahigh-frequency nanoelectromechanical oscillator. *Nature* **3**, 342.

Gigan, S., H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. Baüerle, M. Aspelmeyer et A. Zeilinger, 2006 : Self-cooling of a micromirror by radiation pressure. *Nature* **444**, 67.

Grogg, D., S. Ayöz et A. M. Ionescu, 2009 : Self-sustained low power oscillator based on vibrating body field effect transistor. In *2009 IEEE International Electron Devices Meeting*.

Kim, H. S., H. Qin et R. H. Blick, 2010 : Self-excitation of single nanomechanical pillars. *New Journal of Physics* **12**, 033008.

Kleshch, V. I., A. N. Obraztsov et E. D. Obraztsova, 2010 : Electromechanical self-oscillations of carbon nanotube field emitter. *Carbon* **48**, 3895.

Metzger, C., M. Ludwig, C. Neuenhahn, A. Ortlieb, I. Favero, K. Karrai et F. Marquardt, 2008 : Self-induced oscillations in an optomechanical system driven by bolometric backaction. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 133903.

Metzger, C. H. et K. Karrai, 2004 : Cavity cooling of a microlever. *Nature* **432**, 1002.

Okamoto, H., D. Ito, K. Onomitsu, H. Sanada, H. Gotoh, T. Sogawa et H. Yamaguchi, 2011 : Vibration amplification, damping, and self-oscillations in micromechanical resonators induced by optomechanical coupling through carrier excitation. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 036801.

Park, H., J. Park, A. K. L. Lim, E. H. Anderson, A. P. Alivisatos et P. L. McEuen, 2000 : Nano-mechanical oscillations in a single-C60 transistor. *Nature* **407**, 57.

Ramos, D., J. Mertens, M. Calleja et J. Tamayo, 2008 : Photothermal self-excitation of nanomechanical resonators in liquids. *Appl. Phys. Lett.* **92**, 173108.

Steele, G. A., A. K. Hüttel, B. Witkamp, M. Poot, H. B. Meerwaldt, L. P. Kouwenhoven et H. S. J. van der Zant, 2009 : Strong coupling between single-electron tunneling and nanomechanical motion. *Science* **325**, 1103.

Steeneken, P. G., K. L. Phan, M. J. Goossens, G. E. J. Koops, G. J. A. M. Brom, C. van der Avoort et J. T. M. van Beek, 2011 : Piezoresistive heat engine and refrigerator. *Nature Phys.* **7**, 354.

Teufel, J. D., J. W. Harlow, C. A. Regal et K. W. Lehnert, 2008 : Dynamical backaction of microwave fields on a nanomechanical oscillator. *Phys. Rev. Lett.* , **101**, 197203.

Villanueva, L. G., R. B. Karabalin, M. H. Matheny, E. Kenig, M. C. Cross et M. L. Roukes, 2011 : A nanoscale parametric feedback oscillator. *Nano Lett.* **11**, 5054.

Weldon, J. A., B. Alemán, A. Sussman, W. Gannett et A. K. Zettl, 2010 : Sustained mechanical self-oscillations in carbon nanotubes. *Nano Lett.* **10**, 1728.

Conclusion

Les systèmes nanoélectromécaniques, et principalement les nanofils de carbure de silicium, ont été utilisés dans deux situations à savoir comme résonateurs et comme auto-oscillateurs.

L'idée générale que je retiendrai des nanofils que j'ai étudié est la diversité et la richesse des expériences pouvant être menée en n'utilisant seulement que deux types de contrôles expérimentaux que sont les tensions électriques et les positions. En agissant sur la position du nanofil dans son environnement et sur les potentiels électriques il a été possible d'observer des effets aussi variées que les modes et les résonances mécaniques, l'accordage en fréquence, le couplage linéaire, les vibrations non linéaires circulaires, la dissipation électrostatique, les auto-oscillations ou la synchronisation.

Les résultats que je trouve les plus marquants sont ceux sur la synchronisation où les auto-oscillateurs à base de nanofils de carbure de silicium ont montré une grande variété de comportements propres à la synchronisation. En ce sens, l'observation d'une inertie de la phase synchronisée pourrait être mis en avant pour son originalité.

Glossaire

accordage en fréquence modification d'une fréquence de résonance mécanique par une forcé d'origine mécanique ou électrique. 58, 59, 65, 67, 69, 70

Duffing (Oscillateur de) Modèle d'un oscillateur amorti avec une force de rappel non linéaire d'ordre le plus bas respectant une symétrie autour de la position d'équilibre. 84, 85, 92, 199

émission de champ Mécanisme d'émission d'électron par effet tunnel via l'application d'un fort champ électrique. 105, 107, 108, 114, 115

facteur de qualité Nombre, noté Q, caractérisant les pertes dissipatives d'un oscillateur harmonique. Lorsqu'il est grand devant 1, il peut s'interpréter comme le rapport entre un temps d'amortissement et la période d'oscillation. 39, 91, 92, 115, 128, 129, 132, 134, 160

FM Modulation de Fréquence, signal utilisé en radiotélécommunication pour le stockage d'information autour d'une fréquence porteuse. 131–136, 138, 139

MEB Microscope Électronique à Balayage. 19, 20, 29, 36–39, 41, 47, 48, 52, 64, 65, 68, 83, 106, 123, 124, 154–156, 164, 211–214

pull-in Instabilité mécanique causée par une force électrostatique latérale. 53–55, 57, 58, 80

SED Détecteur d'Électrons Secondaires. Électrode portée à un potentiel positif destinée à collecter les électrons issus de la diffusion inélastique du faisceau MEB par l'échantillon ou éventuellement une partie du courant d'émission de champ. 19, 37, 38, 48, 155, 156, 164, 165, 168, 170, 171, 173, 175, 214

SiC Carbure de Silicium. 27, 28, 72, 73, 104, 105, 113, 211, 212

synchronisation Comportement entre auto-oscillateurs correspondant à une fréquence d'oscillation commune et une phase relative bornée et le plus souvent constante. 179–182, 184–187, 189–198, 200–206

TEM Microscope Électronique à Transmission. 64, 65

UHV Ultra Haut Vide, désigne un environnement où la pression est de l'ordre de 10^{-9} torr. 17–20, 66, 72, 154

Annexe A

Conditions aux limites pour le couplage par collage

Le couplage des deux fils est modélisé par le contact parfait entre le fil 1 décrit comme une poutre et le fil 2 décrit comme un oscillateur harmonique à une dimension (Fig. A.1).

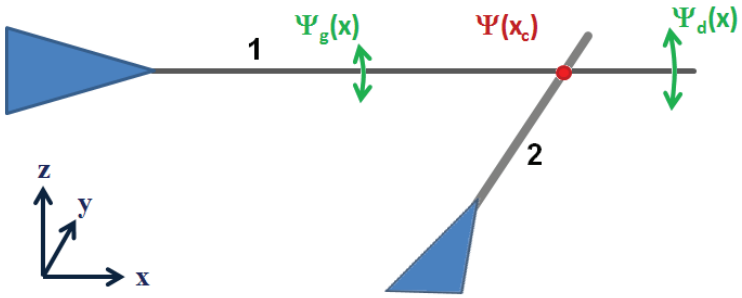


FIGURE A.1 Le nanofil de gauche est modélisée par une poutre où le déplacement selon Z est noté $Y_i(x,t)$ où $i = g$ ou d pour la partie gauche ou droite. Le point de contact est x_c compté à partir de l'encastrement du fil de gauche.

Les conditions aux limites sont proposées pour les solutions

$$\psi_g(x) = A(\cosh k_r x - \cos k_i x) + B(k_i \sinh k_r x - k_r \sin k_i x) \quad (A.1)$$

$$\psi_d(x) = C\cosh kx + D\sinh kx + E\cos kx + F\sin kx \quad (A.2)$$

où x est la position normalisée par la longueur du fil. Les conditions d'encastrement

en $x = 0$, de contact en $x = x_c$ et d'extrémité libre en $x = 1$ s'écrivent

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = 0 \tag{A.3}$$

où

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}h - \mathcal{C} & k_i\mathcal{S}h - k_r\mathcal{S} & -\mathcal{C}h_0 & -\mathcal{S}h_0 & -\mathcal{C}_0 & -\mathcal{S}_0 \\ k_r\mathcal{S}h + k_i\mathcal{S} & k_rk_i\mathcal{C}h - k_rk_i\mathcal{C} & -k\mathcal{S}h_0 & -k\mathcal{C}h_0 & k\mathcal{S}_0 & -k\mathcal{C}_0 \\ k_i^2\mathcal{C} + k_r^2\mathcal{C}h & k_rk_i^2\mathcal{S} + k_ik_r^2\mathcal{S}h & -k^2\mathcal{C}h_0 & -k^2\mathcal{S}h_0 & k^2\mathcal{C}_0 & k^2\mathcal{S}_0 \\ \mathcal{M}_{41} & \mathcal{M}_{42} & \mathcal{M}_{43} & \mathcal{M}_{44} & \mathcal{M}_{45} & \mathcal{M}_{46} \\ & & \cosh k & \sinh k & -\cos k & -\sin k \\ & & \sinh k & \cosh k & \sin k & -\cos k \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{C}h &= \cosh k_r x_c \\ \mathcal{S}h &= \sinh k_r x_c \\ \mathcal{C} &= \cos k_i x_c \\ \mathcal{S} &= \sin k_i x_c \\ \mathcal{C}h_0 &= \cosh k x_c \\ \mathcal{S}h_0 &= \sinh k x_c \\ \mathcal{C}_0 &= \cos k x_c \\ \mathcal{S}_0 &= \sin k x_c \end{aligned}$$

où la ligne 4 prend quand même vachement de place

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{41} &= EI(k_r^3\mathcal{S}h - k_i^3\mathcal{S}) - T(k_i\mathcal{S} + k_r\mathcal{S}h) - \delta(\mathcal{C}h - \mathcal{C}) \\ \mathcal{M}_{42} &= EI(k_rk_i^3\mathcal{C} + k_r^3k_i\mathcal{C}h) + T(k_rk_i\mathcal{C} - k_rk_i\mathcal{C}h) - \delta(k_i\mathcal{S}h - k_r\mathcal{S}) \\ \mathcal{M}_{43} &= -EIk^3\mathcal{S}h_0 + Tk\mathcal{S}h_0 \\ \mathcal{M}_{44} &= -EIk^3\mathcal{C}h_0 + Tk\mathcal{C}h_0 \\ \mathcal{M}_{45} &= -EIk^3\mathcal{S}_0 - Tk\mathcal{S}_0 \\ \mathcal{M}_{46} &= EIk^3\mathcal{C}_0 + Tk\mathcal{C}_0 \end{aligned}$$

avec $\delta = K - M\omega^2$. Les fréquences de résonance s'obtiennent lorsque ω est tel que $\det \mathcal{M}(\omega) = 0$. Les modes de vibrations de coefficients A, B, C, D, E et F sont donnés pour les vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles.

Annexe B

Oscillateur de van der Pol : réalisation analogique et limite comme oscilateur à relaxation

L'équation de van der Pol introduite dans la partie 7.1.4 est

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{B.1}$$

B.1 Circuit électrique équivalent

Il est possible de réaliser un circuit électrique analogique dont un des potentiels est décrit par l'équation de van der Pol. van der Pol et van der Mark (1928) [1] proposèrent un circuit utilisant une triode. Le circuit sur la figure qui est présenté utilise une résistance négative comme composant actif

La relation entre le courant et la tension pour le dipôle à résistance négative s'obtient à partir des équations

$$V_+ - V_s = R_n i \tag{B.2}$$

$$V_- = V_+ = \frac{V_s}{2} \tag{B.3}$$

qui sont respectivement la loi d'ohm pour la résistance R_n et la conservation du courant entre les deux résistances R_0. En remplaçant V_s dans l'équation B.2, on obtient la relation

$$V_+ = -R_n i \tag{B.4}$$

On peut alors écrire la tension aux bornes de la résistance négative comme la somme des tensions aux bornes des dipôles de l'oscillateur dissipatif RLC

$$V_+ = V_L + V_R + V_C \tag{B.5}$$

1. van der Pol, B. et J. van der Mark, 1928 : The heartbeat considered as a relaxation oscillation and an electrical model of the heart. Philos. Mag., **6**, 763.

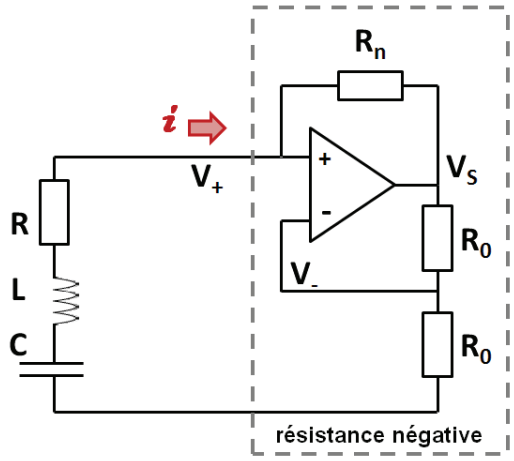


Figure B.1 Circuit électrique oscillateur à résistance négative. Le dipôle encadré en traits discontinus se comporte comme une résistance négative $V_+ = -R_n i$.

soit pour les diôles du RLC en convention générateur

$$V_+ = -L\frac{di}{dt} - Ri + V_C \tag{B.6}$$

La relation aux bornes du condensateur est $i = -CdV_C/dt$, ce qui permet d'exprimer l'équation B.6 après dérivation comme

$$LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + (R - R_n)C\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \tag{B.7}$$

En posant $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\alpha = (R_n - R)/L$, l'équation B.7 prend la forme de l'équation de van der Pol linéaire pour la variable V_C

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} - \alpha\frac{dV_C}{dt} + {\omega_0}^2 V_C = 0 \tag{B.8}$$

Le circuit électrique permet de simuler analogiquement l'instabilité linéaire autour de la tension d'équilibre $V_C = 0$. Pour $\alpha \gtrsim 0$, les oscillations à la pulsation ω_0 voient leur amplitude augmenter exponentiellement avec un taux de croissance $\sigma = \alpha$. Cette croissance est interrompue par la saturation de l'amplificateur opérationnel, par exemple la tension d'alimentation ou le courant de sortie limite.

Une modélisation de l'équation de van der Pol non linéaire plus adaptée est obtenue en utilisant deux diodes pour remplacer la résistance R (Fig. B.2). Cette modification va permettre d'introduire dans une limite faiblement non linéaire un terme de saturation quadratique.

En supposant une relation courant-tension pour les diodes D_i de la forme

$$i = i_0\left(\exp\frac{V}{V_s} - 1\right) \tag{B.9}$$



FIGURE B.2 La non linéarité de l'oscillateur de van der Pol est obtenue en remplaçant la résistance R par deux diodes identiques en série et en sens contraire.

Dans la limite faiblement non linéaire $i \ll i_0$, pour imposer un courant à travers les deux diodes, il faut une tension V_D donnée par

$$V_D = V_s \left[\ln\left(1 + \frac{i}{i_0}\right) - \ln\left(1 - \frac{i}{i_0}\right) \right] \tag{B.10}$$

soit à l'ordre non linéaire le plus bas

$$V_D = 2\frac{V_s}{i_0} i + \frac{V_s}{3}\left(\frac{i}{i_0}\right)^3 \tag{B.11}$$

L'équation B.6 s'écrit dans la limite faiblement non linéaire

$$-R_n i = -L\frac{di}{dt} - 2\frac{V_s}{i_0} i + \frac{V_s}{3}\left(\frac{i}{i_0}\right)^3 + V_C \tag{B.12}$$

soit après dérivation par rapport au temps

$$LC\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(2C\frac{V_s}{i_0} - R_n C\right)\frac{di}{dt} + CV_s \frac{i^2}{{i_0}^3}\frac{^d i}{dt} + i = 0 \tag{B.13}$$

que l'on peut mettre sous la forme de l'équation de van der Pol non linéaire B.1 avec

$$\alpha = \frac{R_n}{L} - 2\frac{CV_s}{L} \tag{B.14}$$

et en redimensionnant le courant i par I avec

$$I^2 = \alpha \frac{{i_0}^3}{CV_s} \tag{B.15}$$

de manière à faire apparaître le coefficient α devant $i^2 di/dt$.

B.2 Limite comme oscillateur à relaxation

Dans la limite $\alpha \gg 1$, l'oscillateur de van der Pol se comporte comme un oscillateur à relaxation. Ce changement de comportement peut s'interpréter comme le passage du régime linéairement oscillant avec amortissement négatif ($0 < \alpha < 1$) au régime sur-amorti "négativement" ($\alpha > 1$). Le cycle d'oscillation peut être traité analytiquement en considérant une condition initiale $y(0) = -2$ pour une équation de van der Pol dans la limite de relaxation et adimensionnée en temps par $1/\omega_0$

$$-\alpha(1-x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{B.16}$$

lorsque le terme $\ddot{x}$ est négligeable. L'équation du mouvement s'obtient par intégration de l'équation différentielle B.16

$$\int_{-2}^{x(t)} \alpha(\frac{1}{x} - x)dx = \int_0^t d\tilde{t} \tag{B.17}$$

soit en exprimant le temps en fonction de la position

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2-4}{2}\right)$$

lorsque x atteint la valeur -1, la vitesse de l'oscillateur devient infinie (Éq. B.16 et Fig. B.3). Cela signifie que les termes inertiels doivent être pris en compte lorsque $x \sim 1$. Le temps que met l'oscillateur pour parcourir $x = -1$ à $x = 2$ pouvant être négligé, la demi-période s'exprime dans la limite de relaxation

$$T_{1/2} = \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right)$$

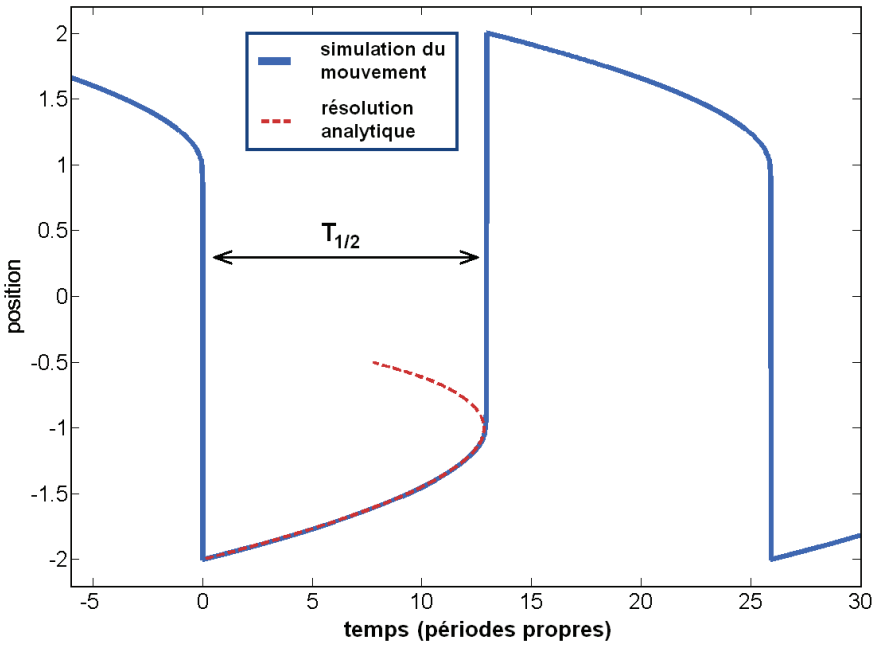


FIGURE B.3 Cycle limite d'oscillation de l'oscillateur de van der Pol avec $\alpha = 100$. L'équation du mouvement en traits plein est obtenue par intégration numérique de l'équation de van der Pol B.1 et représenté en fonction du temps exprimé en périodes propres $T = 1/2\pi$ pour $\omega_0 = 1$. La solution analytique de l'équation de van der Pol dans la limite de relaxation B.16 est tracée comme une expression du temps en fonction de la position en pointillés. Le point de rebroussement en temps correspond à une accélération infinie, nécessitant la prise en compte de l'inertie.

Annexe C

Couplage non linéaire pour deux résonateurs de fréquences éloignées : correction linéaire pour le résonateur de plus basse fréquence

L'étude du couplage de deux résonateurs de fréquences de résonance distantes provient de l'étude de système couplés optique (haute fréquence) et mécanique (basse fréquence). Pour ce type de système, des régimes d'auto-oscillation ont été observé.

Le couplage optique/mécanique a été observé dans une situation ou une cavité optique est couplée à la position d'un de ses miroirs [1] [2] ou à la position d'un résonateur placé dans la cavité [3]. Pour ce type de système, le résonateur à haute fréquence correspond au champ électromagnétique dans la cavité optique et la largeur de la résonance est associée à la finesse de la cavité. Le résonateur à basse fréquence, un miroir mobile par exemple, subit une force radiative moyenne de la part du champ électromagnétique et agit par sa position sur ce dernier en changeant la condition de résonance de la cavité optique.

Ce type de systèmes est étudié par les communautés des basses températures car le couplage peut entraîner une composante dans la force de rappel du miroir mobile mais également une force dissipative pouvant s'interpréter comme un refroidissement du mode de vibration mécanique. La raison pour laquelle nous nous sommes intéressé à ces systèmes est qu'il peuvent également être le siège d'une oscillation spontanée [4].

1. C. Metzger et K. Karrai : Cavity cooling of a microlever, Nature **432**, 1002 (2004)
2. S. Gigan, H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. Baüerle, M. Aspelmeyer et A. Zeilinger : Self-cooling of a micromirror by radiation pressure, Nature **444**, 67 (2006)
3. I. Favero, C. Metzger, S. Camerer, D. König, H. Lorenz, J. P. Kotthaus et K. Karrai : Optical cooling of a micromirror of wavelength size, Appl. Phys. Lett. **90**, 104101 (2007)
4. C. Metzger, M. Ludwig, C. Neuenhahn, A. Ortlieb, I. Favero, Khaled Karrai et Florian Marquardt : Self-induced oscillations in an optomechanical system driven by bolometric backaction, Phys. Rev. Lett. **101**, 133903 (2008)

Avec un principe assez proche du couplage optique/mécanique, l'observation d'une dissipation supplémentaire a également été rapportée par [5] dans le cas d'un résonateur couplé à une cavité électrique, c'est-à-dire un circuit résonant.

De manière générale, l'origine de la nature *dissipative*, positive ou négative, de la force de couplage est attribuée à un temps de réponse retardé de la cavité mais n'a pas l'objet d'une dérivation rigoureuse.

C.1 Modèle de couplage non linéaire entre deux résonateurs simplement encastrés

Dans ce qui va suivre, un développement du couplage de deux oscillateurs classique est proposé. Pour cela, le résonateur haute fréquence est excité harmoniquement au voisinage de sa fréquence de résonance. Le comportement linéaire du résonateur basse fréquence couplé au résonateur haute fréquence va être dérivé par une approche perturbative. Une dérivation des équations couplées est proposée à partir des termes de couplage électrostatique entre deux nanofils simplement encastrés.

Lorsque deux résonateurs 1 et 2 ont des fréquences de résonance qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeurs, les termes de couplage linéaires n'ont aucun effet sur leur comportement collectif et les deux résonances peuvent être traitées indépendamment. Afin d'obtenir des effets de couplage, il est nécessaire de faire intervenir des termes de couplage non linéaire. Le régime de couplage étudié suppose que le résonateur 2 de plus haute fréquence est constamment excité autour de sa fréquence de résonance. Le comportement linéaire de l'autre résonateur est alors modifié par l'environnement du fil résonant.

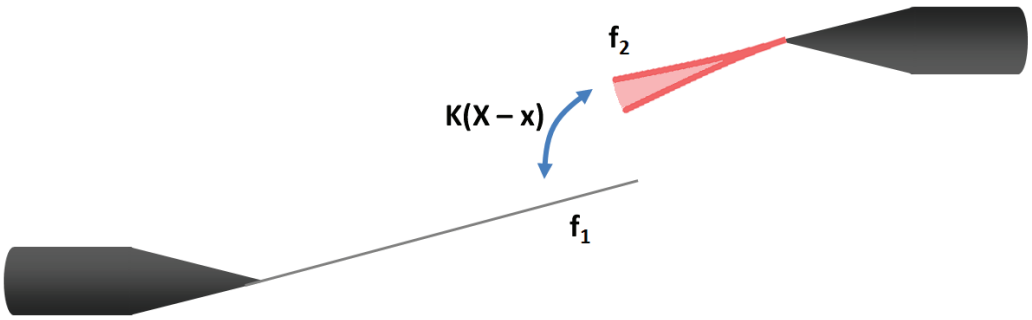


Figure C.1 Deux résonateurs avec les fréquences de résonance $f_1 \ll f_2$ et un terme de couplage d'origine électrostatique K qui dépend de la différence $X - x$.

Le déplacement du résonateur 1 basse fréquence autour de sa position d'équilibre est x. Le déplacement du résonateur 2 haute fréquence est X. Les équations du

5. K. R. Brown, J. Britton, R. J. Epstein, J. Chiaverini, D. Leibfried et D. J. Wineland : Passive cooling of a micromechanical oscillator with a resonant electric circuit, Phys. Rev. Lett. **99**, 137205 (2007)

mouvement pour les deux résonateurs couplés sont

$$M\ddot{X} + \Gamma\dot{X} + KX = F_e + F_{NL}(x \to X) \quad \text{(C.1)}$$
$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_{NL}(X \to x) \quad \text{(C.2)}$$

où m (resp. M) est la masse, γ (resp. Γ) le coefficient d'amortissement et k (resp. K) la raideur pour le résonateur 1 (resp. 2). La force d'excitation d'origine électrostatique ou piezomotive est F_e. F_{NL} est la force de couplage qui dérive de l'énergie potentielle K.

Le développement limité de la force d'interaction va laisser apparaître un ensemble de termes non linéaires de couplage. Nous nous restreindrons à un modèle minimal de couplage non linéaire qui n'étudie que l'influence de deux termes dans le développement limité

$$F_{NL}(x \to X) = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 K}{\partial x \partial X^2} xX \quad \text{(C.3)}$$
$$F_{NL}(X \to x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 K}{\partial x \partial X^2} X^2 \quad \text{(C.4)}$$

ce qui donne après dimensionnement du temps par $\sqrt{M/K}$ et pour une excitation à haute fréquence harmonique

$$\ddot{X} + \frac{1}{Q_{HF}}\dot{X} + X = -f_{ac}\cos\omega_{HF}t + \beta Xx \quad \text{(C.5)}$$
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \mu X^2 \quad \text{(C.6)}$$

où Q est le facteur de qualité du résonateur à basse fréquence, Q_{HF} celui du résonateur à haute fréquence, $\omega_0 = \sqrt{kM/mK}$ la pulsation normalisée pour le résonateur à basse fréquence, $\omega_{HF} \sim 1$ la pulsation normalisée de l'excitation, f_{AC} l'amplitude de la force d'excitation, α est le coefficient de transduction de la force utilisée et β et μ deux paramètres définis par

$$\beta = \frac{1}{2K}\frac{\partial^3 K}{\partial x \partial X^2}$$
$$\mu = \frac{M}{2mK}\frac{\partial^3 K}{\partial x \partial X^2}$$

Signalons que les équations C.5 et C.6 pourraient être prises comme un point de départ des développements qui vont suivre. La raison des développements précédents est qu'ils donnent un système physique permettant d'établir la forme des équations de couplage.

Avant de proposer une résolution analytique perturbative du système d'équations couplées C.5 et C.6, une approche qualitative est présentée.

On se place dans un cas où le résonateur à haute fréquence est forcé au voisinage de sa fréquence de résonance ($1/2\pi$ en unité normalisée). Le résonateur haute

fréquence a donc une vibration de référence $X_r(t)$, harmonique, qui exerce une force de référence moyenne $\mu < {X_r}^2 >$ sur le résonateur basse fréquence repéré par la variable x.

Lorsque la position x du résonateur à basse fréquence change de δx, la pulsation de résonance effective correspondant à ${\omega_{HF}}^2 = 1+\beta x$ est modifiée de $\delta\omega_{HF} = \beta\delta x/2$.

Cette modification de fréquence de résonance se traduit par un changement dans l'amplitude de réponse $X_r + \delta X$ puisque l'excitation par $V_{ac}\cos\omega_{HF}t$ n'est pas modifiée. La force dans l'équation C.6 devient alors $\mu(X_r+\delta X)^2$, ce qui modifie la force moyenne ressentie par le résonateur à basse fréquence.

En résumé, un déplacement δx du résonateur à basse fréquence entraîne une force proportionnelle à δx via le couplage avec le résonateur haute fréquence forcé. Cela signifie que le couplage non linéaire introduit une raideur supplémentaire dans l'équation du mouvement du résonateur à basse fréquence.

Le raisonnement couramment utilisé est ensuite qualitatif : la force de raideur supplémentaire subit un retard à cause du temps de réponse du résonateur à haute fréquence. Ce retard entraîne donc un déphasage de la force de rappel élastique se traduisant par une composante dissipative dans la force.

Si ce raisonnement permet une approche qualitative du mécanisme introduisant une raideur et une dissipation dans l'équation du mouvement C.6, l'objet de la partie qui suit est l'établissement des termes de raideur et de dissipation par un traitement perturbatif des équations couplées C.5 et C.6.

C.2 Modification de la raideur et de la dissipation linéaire

Le système d'équation non linéairement couplés C.5 et C.6 peut donner lieu à une modification de la raideur ${\omega_0}^2$ et de la dissipation ω_0/Q du résonateur à basse fréquence. Pour montrer cet effet, on mène un développement des solutions X de l'équation C.5 en réponse à la perturbation introduite par le déplacement x du résonateur à basse fréquence.

Les solution de l'équation C.5 sont cherchées sous la forme $X = X_0+\epsilon X_1+\mathcal{O}(\epsilon^2)$ où ϵ est l'amplitude de la perturbation $x = \epsilon\cos\omega t$ correspondant à une oscillation "test" du résonateur à basse fréquence.

C.2.1 Ordre 0

On considère que l'état non perturbé correspond au résonateur à basse fréquence à son état d'équilibre ($\epsilon = 0$) et le résonateur à haute fréquence forcé au voisinage de sa fréquence de résonance

$$\ddot{X_0} + \frac{1}{Q_{HF}}\dot{X_0} + X_0 = -\alpha V_{ac}\cos\omega_{HF}t$$

En introduisant la fonction de réponse $\mathcal{H}$ de l'oscillateur à haute fréquence

$$\mathcal{H} = \frac{1}{1 - {\omega_{HF}}^2 + i\frac{\omega_{HF}}{Q_{HF}}}$$

la réponse X_0 s'écrit en régime harmonique forcé

$$X_0 = -\alpha V_{ac}(Re(\mathcal{H})\cos\omega_{HF}t + Im(\mathcal{H})\sin\omega_{HF}t) \tag{C.7}$$

soit

$$X_0 = X_{0R}\cos\omega_{HF}t + X_{0I}\sin\omega_{HF}t$$

avec les notations $X_{0R} = -\alpha V_{ac} Re(\mathcal{H})$ et $X_{0I} = -\alpha V_{ac} Im(\mathcal{H})$.

C.2.2 Ordre 1

On introduit une perturbation sous forme d'un déplacement du résonateur 1 de la forme $x = \epsilon\cos\omega t$.

À l'ordre 1 en ϵ, l'équation C.5 donne

$$\ddot{X_1} + \frac{1}{Q_{HF}}\dot{X_1} + X_1 = \beta X_0\cos\omega t$$

soit en introduisant X_0 (Éq. C.7)

$$\ddot{X_1} + \frac{1}{Q_{HF}}\dot{X_1} + X_1 = \beta X_{0R}\cos\omega_{HF}t\cos\omega t + \beta X_{0I}\sin\omega_{HF}t\cos\omega t$$

En développant les produits de sinus et cosinus comme sommes de fonctions harmoniques, on obtient

$$\ddot{X_1} + \frac{1}{Q_{HF}}\dot{X_1} + X_1 = A(\cos\omega_+ + \cos\omega_-) + B(\sin\omega_+ + \sin\omega_-)$$

où les notations $\omega_\pm = \omega_{HF}t \pm \omega t$ et $A = \beta X_{0R}/2$ et $B = \beta X_{0I}/2$ ont été utilisées.

En utilisant à nouveau la fonction de réponse $\mathcal{H}$ pour chaque composante d'excitation harmonique

$$\begin{aligned} X_1 = \quad & A(Re\big[\mathcal{H}(\omega_+)\big]\cos\omega_+ + Re\big[\mathcal{H}(\omega_-)\big]\cos\omega_- + Im\big[\mathcal{H}(\omega_+)\big]\sin\omega_+ + Im\big[\mathcal{H}(\omega_-)\big]\sin\omega_-) \\ & + B(Re\big[\mathcal{H}(\omega_+)\big]\sin\omega_+ + Re\big[\mathcal{H}(\omega_-)\big]\sin\omega_- - Im\big[\mathcal{H}(\omega_+)\big]\cos\omega_+ - Im\big[\mathcal{H}(\omega_-)\big]\cos\omega_-) \end{aligned}$$

soit en regroupant les fonctions sinus et cosinus

$$\begin{aligned} X_1 = \quad & \big(ARe\big[\mathcal{H}(\omega_+)\big] - BIm\big[\mathcal{H}(\omega_+)\big]\big)\cos\omega_+ + \big((ARe\big[\mathcal{H}(\omega_-)\big] - BIm\big[\mathcal{H}(\omega_-)\big]\big)\cos\omega_- \\ & + \big(AIm\big[\mathcal{H}(\omega_+)\big] + BRe\big[\mathcal{H}(\omega_+)\big]\big)\sin\omega_+ + \big(AIm\big[\mathcal{H}(\omega_-)\big] + BRe\big[\mathcal{H}(\omega_-)\big]\big)\sin\omega_- \end{aligned}$$

On va poser

$$\begin{aligned} F(\omega_\pm) &= ARe\big[\mathcal{H}(\omega_\pm)\big] - BIm\big[\mathcal{H}(\omega_\pm)\big] \\ G(\omega_\pm) &= AIm\big[\mathcal{H}(\omega_\pm)\big] + BRe\big[\mathcal{H}(\omega_\pm)\big] \end{aligned}$$

de manière à ce que l'on puisse écrire

$$X_1 = F(\omega_+)\cos\omega_+ + F(\omega_-)\cos\omega_- + G(\omega_+)\sin\omega_+ + G(\omega_-)\sin\omega_-$$

En développant les sinus et cosinus, on obtient

$$\begin{aligned} X_1 = \;& (F(\omega_+) + F(\omega_-))\cos\omega_{HF}\cos\omega + (F(\omega_-) - F(\omega_+))\sin\omega_{HF}\sin\omega \\ + \;& (G(\omega_+) + G(\omega_-))\sin\omega_{HF}\cos\omega + (G(\omega_+) - G(\omega_-))\cos\omega_{HF}\sin\omega \end{aligned}$$

Le terme de force dans l'équation C.6 s'écrit

$$X^2 = X_0^2 + 2\epsilon X_0 X_1 + ...$$

avec la solution non perturbée

$$X_0 = X_{0R}\cos\omega_{HF}t + X_{0I}\sin\omega_{HF}t$$

on obtient les termes à basse fréquence :

$$\begin{aligned} X^2 = \;& \epsilon X_{0R}\big[(F(\omega_+) + F(\omega_-))\cos\omega t + (G(\omega_+) - G(\omega_-))\sin\omega t\big] \\ + \;& \epsilon X_{0I}\big[(F(\omega_-) - F(\omega_+))\sin\omega t + (G(\omega_+) + G(\omega_-))\cos\omega t\big] \end{aligned}$$

soit en regroupant sinus et cosinus

$$\begin{aligned} X^2 = \;& \epsilon\big[X_{0R}(F(\omega_+) + F(\omega_-)) + X_{0I}(G(\omega_+) + G(\omega_-))\big]\cos\omega t \\ + \;& \epsilon\big[X_{0R}(G(\omega_+) - G(\omega_-)) + X_{0I}((F(\omega_-) - F(\omega_+))\big]\sin\omega t \end{aligned}$$

En utilisant la limite $\omega \ll \omega_{HF}$

$$\begin{aligned} X^2 = \;& \epsilon\big[2X_{0R}F(\omega_{HF}) + 2X_{0I}G(\omega_{HF})\big]\cos\omega t \\ + \;& 2\epsilon\left[X_{0I}\frac{\partial F}{\partial\omega} - X_{0R}\frac{\partial G}{\partial\omega}\right](-\omega\sin\omega t) \end{aligned}$$

le terme de force prend la forme

$$\mu X^2 = \mathcal{K}x + \Gamma_e\dot{x}$$

puisque $x = \epsilon\cos\omega t$ et $\dot{x} = -\omega\sin\omega t$. Les préfacteurs sont définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= 2\mu\big[X_{0R}F + X_{0I}G\big] \\ \Gamma_e &= 2\mu\left[X_{0I}\frac{\partial F}{\partial\omega} - X_{0R}\frac{\partial G}{\partial\omega}\right] \end{aligned}$$

En résumé, si on considère le couple d'équations de départ

$$\ddot{X} + \frac{1}{Q_{HF}}\dot{X} + X = -f_{ac}\cos\omega_{HF}t + \beta X x \tag{C.8}$$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \mu X^2 \tag{C.9}$$

le comportement du résonateur à basse fréquence est décrit par l'équation

$$\ddot{x} + \left(\frac{\omega_0}{Q} + \Gamma_e\right)\dot{x} + \left({\omega_0}^2 + \mathcal{K}\right)x = 0 \tag{C.10}$$

où $\mathcal{K}$ est une raideur additionnelle linéaire et Γ_e un terme de dissipation additionnelle linéaire, tous deux une conséquence du couplage non linéaire.

Bibliographie

Acco, P., 2003 : *Étude de la boucle à verrouillage de phase par impulsions de charge*. PhD thesis Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.

Acebrón, J. A., L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort et R. Spigler, 2005 : The kuramoto model : A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137.

Acebrón, J. A. et R. Spigler, 1998 : Adaptive frequency model for phase-frequency synchronization in large populations of globally coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2229.

Ayari, A., P. Vincent, S. Perisanu, M. Choueib, V. Gouttenoire, M. Bechelany, D. Cornu et S. T. Purcell, 2007 : Self-oscillations in field emission nanowire mechanical resonators : A nanometric dc-ac conversion. *Nano Lett.* **7**, 2252.

Barois, T., A. Ayari, A. Siria, S. Perisanu, P. Vincent, P. Poncharal et S. T. Purcell, 2012 : Ohmic electromechanical dissipation in nanomechanical cantilevers. *Phys. Rev. B* **85**, 075407.

Barton, R. A., B. Ilic, S. S. Verbridge, B. R. Cipriany, J. M. Parpia et H. G. Craighead, 2010 : Fabrication of a nanomechanical mass sensor containing a nanofluidic channel. *Nano Lett.* **10**, 2058.

Bartsch, R., J. W. Kantelhardt, T. Penzel et S. Havlin, 2007 : Experimental evidence for phase synchronization transitions in the human cardiorespiratory system. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 054102.

Belousov, B. P., 1959 : (periodically acting reaction and its mechanism). *Collection of Abstracts on Radiation Medicine* **147**, 145.

Belov, M., N. J. Quitoriano, S. Sharma, W. K. Hiebert, T. I. Kamins et S. Evoy, 2008 : Mechanical resonance of clamped silicon nanowires measured by optical interferometry. *J. Appl. Phys.* **103**, 074304.

Billah, K. Y. et R. H. Scanlan, 1991 : Resonance, tacoma narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *Am. J. Phys.* **59**, 118.

Bénard, H., 1900 : Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportent de la chaleur par convection en régime permanent. *Annales de Chimie Physique* **23**, 62.

Brown, K. R., J. Britton, R. J. Epstein, J. Chiaverini, D. Leibfried et D. J. Wineland, 2007 : Passive cooling of a micromechanical oscillator with a resonant electric circuit. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 137205.

Buck, J., 1988 : Synchronous rhythmic flashing in fireflies. *Q. Rev. Biol.* **63**, 265.

Buks, E. et M. L. Roukes, 2001 : Stiction, adhesion energy, and the Casimir effect in micromechanical systems. *Phys. Rev. B* **63**, 033402.

Bunch, J. S., A. M. van der Zande, S. S. Verbridge, I. W. Frank, D. M. Tanenbaum, J. M. Parpia, H. G. Craighead et P. L. McEuen, 2007 : Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science* **315**, 490.

Chakraborty, T. et R. H. Rand, 1988 : The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled Van Der Pol oscillators. *Int. J. Nonlinear Mech.* **23**, 369.

Chan, J., T. P. M. Alegre, A. H. Safavi-Naeini, J. T. Hill, A. Krause, S. Gröblacher, M. Aspelmeyer et O. Painter, 2011 : Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state. *Nature* **478**, 89.

Chaste, J., A. Eichler, J. Moser, G. Ceballos, R. Rurali et A. Bachtold, 2012 : A mechanical mass sensor with yoctogram resolution. *Nature Nanotechnology* **7**, 301.

Chen, Q., L. Huang, Y.-C. Lai, C. Grebogi et D. Dietz, 2010 : Extensively chaotic motion in electrostatically driven nanowires and applications. *Nano Lett.* **10**, 406.

Cho, H., M.-F. Yu, A. F. Vakakis, L. A. Bergman et D. M. McFarland, 2010 : Tunable, broadband nonlinear nanomechanical resonator. *Nano Lett.* **10**, 1793.

Choi, W. J., Y. Jeon, J.-H. Jeong, R. Sood et S. G. Kim, 2006 : Energy harvesting MEMS device based on thin film piezoelectric cantilevers. *J. Electroceram* **17**, 543.

Choueib, M., A. Ayari, P. Vincent, M. Bechelany, D. Cornu et S. T. Purcell, 2009 : Strong deviations from Fowler-Nordheim behavior for field emission from individual SiC nanowires due to restricted bulk carrier generation. *Phys. Rev. B* **79**, 075421.

Cleland, A. N. et M. L. Roukes, 1998 : A nanometre-scale mechanical electrometer. *Nature* **392**, 160.

Conley, W. G., A. Raman, C. M. Krousgrill et S. Mohammadi, 2008 : Nonlinear and nonplanar dynamics of suspended nanotube and nanowire resonators. *Nano Lett.* **8**, 1590.

Craighead, H. G., 2000 : Nanoelectromechanical systems. *Science* **290**, 1532.

Czeisler, C. A., J. F. Duffy, T. L. Shanahan, E. N. Brown, J. F. Mitchell, D. W. Rimmer, J. M. Ronda, E. J. Silva, J. S. Allan, J. S. Emens, D.-J. Dijk et R. E. Kronauer, 1999 : Stability, precision, and near-24-hour period of the human circadian pacemaker. *Science* **284**, 2177.

de Langre, E., 2001 : *Fluides et Solides.*

Dolan, K., M. Majtanik et P. A. Tass, 2005 : Phase resetting and transient desynchronization in networks of globally coupled phase oscillators with inertia. *Physica D* **211**, 128.

Dorfler, F. et F. Bullo, 2011 : On the critical coupling for Kuramoto oscillators. *Dynamical Systems* **21**, 1.

Dunlap, J. C., 1999 : Molecular bases for circadian clocks. *Cell* **96**, 271.

Edgcombe, C. J. et U. Valdre, 2001 : Microscopy and computational modelling to elucidate the enhancement factor for field electron emitters. *J. Microsc-Oxford* **203**, 188.

Eichler, A., J. Chaste, J. Moser et A. Bachtold, 2011 : Parametric amplification and self-oscillation in a nanotube mechanical resonator. *Nano Lett.* **11**, 2699.

Eichler, A., J.Moser, J. Chaste, M. Zdrojek, I. Wilson-Rae et A. Bachtold, 2011 : Nonlinear damping in mechanical resonators made from carbon nanotubes and graphene. *Nature Nanotechnology* **6**, 339.

Ekinci, K. L. et M. L. Roukes, 2005 : Nanoelectromechanical systems. *Rev. Sci. Instrum.* **76**, 061101.

Eriksson, A., S. Lee, A. A. Sourab, A. Isacsson, R. Kaunisto, J. M. Kinaret et E. E. B. Campbell, 2008 : Direct transmission detection of tunable mechanical resonance in an individual carbon nanofiber relay. *Nano Lett.* **8**, 1224.

Ermentrout, B., 1991 : An adaptive model for synchrony in the firefly Pteroptyx malaccae. *J. Math. Biol.* **29**, 571.

Favero, I., C. Metzger, S. Camerer, D. König, H. Lorenz, J. P. Kotthaus et K. Karrai, 2007 : Optical cooling of a micromirror of wavelength size. *Appl. Phys. Lett.* **90**, 104101.

Favero, I., S. Stapfner, D. Hunger, P. Paulitschke, J. Reichel, H. Lorenz, E. M. Weig et K. Karrai, 2009 : Fluctuating nanomechanical system in a high finesse optical microcavity. *Opt. Express* **17**, 12813.

Feng, X. L., C. J. White, A. Hajimiri et M. L. Roukes, 2008 : A self-sustaining ultrahigh-frequency nanoelectromechanical oscillator. *Nature* **3**, 342.

Fowler, R. H. et L. Nordheim, 1928 : Electron emission in intense electric fields. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.* **119**, 173.

Gigan, S., H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. Baüerle, M. Aspelmeyer et A. Zeilinger, 2006 : Self-cooling of a micromirror by radiation pressure. *Nature* **444**, 67.

Gordon, J. P., H. J. Zeiger et C. H. Townes, 1955 : The maser new type of microwave amplifier, frequency standard, and spectrometer. *Phys. Rev.* **99**, 1264.

Gotsmann, B., 2011 : Sliding on vacuum. *Nature Mater.* **10**, 87.

Gouttenoire, V., T. Barois, S. Perisanu, J.-L. Leclercq, S. T. Purcell, P. Vincent et A. Ayari, 2010 : Digital and FM demodulation of a doubly clamped single-walled carbon-nanotube oscillator : Towards a nanotube cell phone. *Small* **6**, 1060.

Grogg, D., S. Ayöz et A. M. Ionescu, 2009 : Self-sustained low power oscillator based on vibrating body field effect transistor. In *2009 IEEE International Electron Devices Meeting*.

Gunn, J. B., 1963 : Microwave oscillations of current in III-V semiconductors. *Solid State Commun.* **1**, 88.

Hessman, D., M. Lexholm, K. A. Dick, S. Ghatnekar-Nilsson et L. Samuelson, 2007 : High-speed nanometer-scale imaging for studies of nanowire mechanics. *Small* **3**, 1699.

Hong, H., M. Y. Choi, J. Yi et K.-S. Soh, 1999 : Inertia effects on periodic synchronization in a system of coupled oscillators. *Phys. Rev. E* **59**, 353.

Hong, H., G. S. Jeon et M. Y. Choi, 2002 : Spontaneous phase oscillation induced by inertia and time delay. *Phys. Rev. E* **65**, 026208.

Iijima, S., 1991 : Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature* **354**, 56.

Jensen, K., K. Kim et A. Zettl, 2008 : An atomic-resolution nanomechanical mass sensor. *Nature Nanotechnology* **3**, 533.

Jensen, K., J. Weldon, H. Garcia et A. Zettl, 2007 : Nanotube radio. *Nano Lett.* **7**, 3508.

Jülicher, F., 2001 : Mechanical oscillations at the cellular scale. *C. R. Acad. Sci.* **2**, 849.

Jourdan, G., G. Torricelli, J. Chevrier et F. Comin, 2007 : Tuning the effective coupling of an AFM lever to a thermal bath. *Nanotechnology* **18**, 475502.

Karabalin, R. B., M. C. Cross et M. L. Roukes, 2009 : Nonlinear dynamics and chaos in two coupled nanomechanical resonators. *Phys. Rev. B* **79**, 165309.

Karabalin, R. B., X. L. Feng et M. L. Roukes, 2009 : Parametric nanomechanical amplification at very high frequency. *Nano Lett.* **9**, 3116.

Karrai, K. et I. Tiemann, 2000 : Interfacial shear force microscopy. *Phys. Rev. B* **62**, 174.

Kim, H. S., H. Qin et R. H. Blick, 2010 : Self-excitation of single nanomechanical pillars. *New Journal of Physics* **12**, 033008.

Kleshch, V. I., A. N. Obraztsov et E. D. Obraztsova, 2010 : Electromechanical self-oscillations of carbon nanotube field emitter. *Carbon* **48**, 3895.

Kleshch, V. I., A. A. Zakhidov, A. N. Obraztsov, E. D. Obraztsova et R. H. Baughman, 2009 : Self-oscillations of carbon nanotube twist-yarn during field emission. *Phys. Stat. Sol. B* **246**, 2658.

Knobel, R. G. et A. N. Cleland, 2003 : Nanometre-scale displacement sensing using a single electron transistor. *Nature* **424**, 291.

Koumela, A., D. Mercier, C. Dupré, G. Jourdan, C. Marcoux, E. Ollier, S. T. Purcell et L. Duraffourg, 2011 : Piezoresistance of top-down suspended Si nanowires. *Nanotechnology* **22**, 395701.

Kozinsky, I., H. W. C. Postma, I. Bargatin et M. L. Roukes, 2006 : Tuning nonlinearity, dynamic range, and frequency of nanomechanical resonators. *Appl. Phys. Lett.* **88**, 253101.

Kuramoto, Y., 1984 : *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Springer.

LaHaye, M. D., O. Buu, B. Camarota et K. C. Schwab, 2004 : Approaching the quantum limit of a nanomechanical resonator. *Science* **304**, 74.

Landau, L. et E. Lifshitz, 1986 : *Theory of Elasticity*.

Larsen, S. A., 1911 : . *Elektrotech. Z.* **32**, 284.

Lassagne, B., Y. Tarakanov, J. Kinaret, D. Garcia-Sanchez et A. Bachtold, 2009 : Coupling mechanics to charge transport in carbon nanotube mechanical resonators. *Science* **325**, 1107.

Lazarus, A., T. Barois, S. Perisanu, P. Poncharal, P. Manneville, E. de Langre, S. T. Purcell, P. Vincent et A. Ayari, 2010 : Simple modeling of self-oscillations in nanoelectromechanical systems - article 1. *Appl. Phys. Lett.* **96**, 193114.

Lazarus, A., E. de Langre, P. Manneville, P. Vincent, S. Perisanu, A. Ayari et S. Purcell, 2010 : Statics and dynamics of a nanowire in field emission - article 2. *Int. J. Mech. Sci.* **52**, 1396.

Leonov, G. A., 2006 : Phase synchronization : Theory and applications. *Automat. Rem. Contr+* **67**, 1573.

Li, M., H. X. Tang et M. L. Roukes, 2007 : Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications. *Nature Nanotechnology* **2**, 114.

Majtanik, M., K. Dolan et P. A. Tass, 2006 : Desynchronization in networks of globally coupled neurons with dendritic dynamics. *J. Biol. Phys.* **32**, 307.

Martel, R., T. Schmidt, H. R. Shea, T. Hertel et P. Avouris, 1998 : Single- and multi-wall carbon nanotube field-effect transistors. *Appl. Phys. Lett.* **73**, 2447.

Matveev, K., 2003 : *Thermoacoustic Instabilities in the Rijke Tube : Experiments and Modeling.* PhD thesis California Institute of Technology.

Metzger, C., M. Ludwig, C. Neuenhahn, A. Ortlieb, I. Favero, K. Karrai et F. Marquardt, 2008 : Self-induced oscillations in an optomechanical system driven by bolometric backaction. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 133903.

Metzger, C. H. et K. Karrai, 2004 : Cavity cooling of a microlever. *Nature* **432**, 1002.

Minoux, E., 2006 : *Étude et développement de sources électroniques à émission de champ à base de nanotubes de carbone. Application aux tubes hyperfréquences.* PhD thesis École Polytechnique.

Moheimani, S. O. R., 2003 : A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *IEEE. T. Contr. Syst. T.* **11**, 482.

Naik, A., O. Buu, M. D. LaHaye, A. D. Armour, A. A. Clerk, M. P. Blencowe et K. C. Schwab, 2006 : Cooling a nanomechanical resonator with quantum back-action. *Nature* **443**, 193.

Naik, A. K., M. S. Hanay, W. K. Hiebert, X. L. Feng et M. L. Roukes, 2009 : Towards single-molecule nanomechanical mass spectrometry. *Nature Nanotechnology* **4**, 445.

Naik, S., T. Hikihara, A. Palacios, V. In, H. Vu et P. Longhini, 2011 : Characterization of synchronization in a unidirectionally coupled system of nonlinear micromechanical resonators. *Sensor Actuator A* **171**, 361.

Nayfeh, A. H. et P. F. Pai, 1989 : Non-linear non-planar parametric responses of an inextensional beam. *Int. J. Non-linear Mech.* **24**, 139.

Nicolis, G. et J. Portnow, 1973 : Chemical oscillations. *Chemical Reviews* **73**, 365.

O'Connell, A. D., M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Neeley, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, J. M. Martinis et A. N. Cleland, 2010 : Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature* **464**, 697.

Okamoto, H., D. Ito, K. Onomitsu, H. Sanada, H. Gotoh, T. Sogawa et H. Yamaguchi, 2011 : Vibration amplification, damping, and self-oscillations in micromechanical resonators induced by optomechanical coupling through carrier excitation. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 036801.

Pai, P. F. et A. H. Nayfeh, 1990 : Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations. *Int. J. Non-linear Mech.* **25**, 455.

Pandey, M., K. Aubin, M. Zalalutdinov, R. B. Reichenbach, A. T. Zehnder, R. H. Rand et H. G. Craighead, 2006 : Analysis of frequency locking in optically driven MEMS resonators. *J. Microelectromech. S.* **15**, 1546.

Park, H., J. Park, A. K. L. Lim, E. H. Anderson, A. P. Alivisatos et P. L. McEuen, 2000 : Nano-mechanical oscillations in a single-C60 transistor. *Nature* **407**, 57.

Perisanu, S., T. Barois, A. Ayari, P. Poncharal, M. Choueib, S. Purcell et P. Vincent, 2010 : Beyond the linear and duffing regimes in nanomechanics : Circularly polarized mechanical resonances of nanocantilevers. *Phys. Rev. B* **81**, 165440.

Perisanu, S., V. Gouttenoire, P. Vincent, A. Ayari, M. Choueib, M. Bechelany, D. Cornu et S. T. Purcell, 2008 : Mechanical properties of SiC nanowires determined by scanning electron and field emission microscopies. *Phys. Rev. B* **77**, 165434.

Perisanu, S., P. Vincent, A. Ayari, M. Choueib, S. T. Purcell, M. Bechelany et D. Cornu, 2007 : High Q factor for mechanical resonances of batch-fabricated SiC nanowires. *Appl. Phys. Lett.* **90**, 043113.

Pikovsky, A., M. Rosenblum et J. Kurths, 2000 : Phase synchronization in regular and chaotic systems. *Int. J. Bifurcat. Chaos* **10**, 2291.

Pikovsky, A., M. Rosenblum et J. Kurths, 2001 : *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences.* Cambridge University Press.

Poncharal, P., Z. L. Wang, D. Ugarte et W. A. de Heer, 1999 : Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes. *Science* **283**, 1513.

Poot, M. et H. S. J. van der Zant, 2012 : Mechanical systems in the quantum regime. *Phys. Rep.* **511**, 273.

Purcell, S. T., P. Vincent, C. Journet et V. T. Binh, 2002 : Tuning of nanotube mechanical resonances by electric field pulling. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 276103.

Radushkevich, L. et V. Lukyanovich, 1952 : (about the structure of carbon formed by thermal decomposition of carbon monoxide on iron substrate). **111**, 24.

Ramos, D., J. Mertens, M. Calleja et J. Tamayo, 2008 : Photothermal self-excitation of nanomechanical resonators in liquids. *Appl. Phys. Lett.* **92**, 173108.

Rayleigh, L., 1916 : On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philos. Mag.* **32**, 529.

Rocard, Y., 1943 : *Dynamique générale des vibrations.*

Roukes, M. L., 2001 : Nanoelectromechanical systems face the future. *Phys. World* **14**, 25.

Rutherglen, C. et P. Burke, 2007 : Carbon nanotube radio. *Nano Lett.* **7**, 3296.

Sakyte, E. et M. Ragulskis, 2011 : Self-calming of a random network of dendritic neurons. *Neurocomputing* **74**, 3912.

Sanii, B. et P. D. Ashby, 2010 : High sensitivity deflection detection of nanowires. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 147203.

Sazonova, V., 2006 : *A Tunable Carbon Nanotube Resonator*. PhD thesis Cornell university.

Sazonova, V., Y. Yaish, H. Üstünel, D. Roundy, T. A. Arias et P. L. McEuen, 2004 : A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator. *Nature* **431**, 284.

Schwab, K. C. et M. L. Roukes, 2005 : Putting mechanics into quantum mechanics. *Physics Today* **58**, 36.

Seeger, J. I. et B. E. Boser, 2002 : Parallel-plate driven oscillations and resonant pull-in.

Shim, S.-B., M. Imboden et P. Mohanty, 2007 : Synchronized oscillation in coupled nanomechanical oscillators. *Science* **316**, 95.

Silva, F., 2009 : *Émergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple*. PhD thesis Université de Provence - Aix-Marseille 1.

Siria, A., T. Barois, K. Vilella, S. Perisanu, A. Ayari, D. Guillot, S. T. Purcell et P. Poncharal, 2012 : Electron fluctuation induced resonance broadening in nano electromechanical systems : The origin of shear force in vacuum. *Nano Lett.* **12**, 3551.

Steele, G. A., A. K. Hüttel, B. Witkamp, M. Poot, H. B. Meerwaldt, L. P. Kouwenhoven et H. S. J. van der Zant, 2009 : Strong coupling between single-electron tunneling and nanomechanical motion. *Science* **325**, 1103.

Steeneken, P. G., K. L. Phan, M. J. Goossens, G. E. J. Koops, G. J. A. M. Brom, C. van der Avoort et J. T. M. van Beek, 2011 : Piezoresistive heat engine and refrigerator. *Nature Phys.* **7**, 354.

Tanaka, H.-A., A. J. Lichtenberg et S. Oishi, 1997 : First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2104.

Tans, S. J., A. R. M. Verschueren et C. Dekker, 1998 : Room-temperature transistor based on a single carbon nanotube. *Nature* **393**, 49.

Tarakanov, Y. A. et J. M. Kinaret, 2007 : A carbon nanotube field effect transistor with a suspended nanotube gate. *Nano Lett.* **7**, 2291.

Teufel, J. D., T. Donner, D. Li, J. W. Harlow, M. S. Allman, K. Cicak, A. J. Sirois, J. D. Whittaker, K. W. Lehnert et R. W. Simmonds, 2011 : Sideband cooling micromechanical motion to the quantum ground state. *Nature* **475**, 359.

Teufel, J. D., J. W. Harlow, C. A. Regal et K. W. Lehnert, 2008 : Dynamical backaction of microwave fields on a nanomechanical oscillator. *Phys. Rev. Lett.* , **101**, 197203.

Thévenin, J., M. Romanelli, M. Vallet et M. Brunel, 2011 : Resonance assisted synchronization of coupled oscillators : Frequency locking without phase locking. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 104101.

Titze, I. R., 1988 : The physics of small-amplitude oscillation of the vocal folds. *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 1536.

Trees, B. R., V. Saranathan et D. Stroud, 2005 : Synchronization in disordered josephson junction arrays small-world connections and the Kuramoto model. *Phys. Rev. E* **71**, 016215.

Truitt, P. A., J. B. Hertzberg, C. C. Huang, K. L. Ekinci et K. C. Schwab, 2006 : Efficient and sensitive capacitive readout of nanomechanical resonator arrays. *Nano Lett.* **7**, 120.

Unterreithmeier, Q. P., E. M. Weig et J. P. Kotthaus, 2009 : Universal transduction scheme for nanomechanical systems based on dielectric forces. *Nature* **458**, 1001.

van der Pol, B. et J. van der Mark, 1928 : The heartbeat considered as a relaxation oscillation and an electrical model of the heart. *Philos. Mag.* **6**, 763.

Vandenberghe, N., 2002 : *Bifurcation de systèmes quasi-homoclines spatialement étendus et de systèmes quasi-réversibles et applications*. PhD thesis Université Nice Sophia Antipolis.

Villanueva, L. G., R. B. Karabalin, M. H. Matheny, E. Kenig, M. C. Cross et M. L. Roukes, 2011 : A nanoscale parametric feedback oscillator. *Nano Lett.* **11**, 5054.

Vincent, P., A. Ayari, P. Poncharal, T. Barois, S. Perisanu, V. Gouttenoire et S. T. Purcell, 2012 : Carbon nanotube nanoradios : The field emission and transistor configurations. *C. R. Physique* **13**, 395.

Vincent, P., S. Perisanu, A. Ayari, M. Choueib, V. Gouttenoire, M. Bechelany, A. Brioude, D. Cornu et S. T. Purcell, 2007 : Driving self-sustained vibrations of nanowires with a constant electron beam. *Phys. Rev. B* **76**, 085435.

Vincent, P., P. Poncharal, T. Barois, S. Perisanu, V. Gouttenoire, H. Frachon, A. Lazarus, E. de Langre, E. Minoux, M. Charles, A. Ziaei, D. Guillot, M. Choueib, A. Ayari et S. T. Purcell, 2011 : Performance of field-emitting resonating carbon nanotubes as radio-frequency demodulators. *Phys. Rev. B* **83**, 155446.

von Karman, T. et H. Rubach, 1912 : The mechanism of the fluid and air- resistance. *Phys. Z.* **13**, 49.

Waggoner, P. S. et H. G. Craighead, 2007 : Micro- and nanomechanical sensors for environmental, chemical, and biological detection. *Lab Chip* **7**, 1238.

Walker Jr., P. L., J. F. Rakszawski et G. R. Imperial, 1959 : Carbon formation from carbon monoxide-hydrogen mixtures over iron catalysts .i. properties of carbon formed. *J. Phys. Chem.* **63**, 133.

Watanabe, S. et S. H. Strogatz, 1994 : Constants of motion for superconducting josephson arrays. *Physica D* **74**, 197.

Weldon, J. A., B. Alemán, A. Sussman, W. Gannett et A. K. Zettl, 2010 : Sustained mechanical self-oscillations in carbon nanotubes. *Nano Lett.* **10**, 1728.

Wu, C. C. et Z. Zhong, 2011a : Capacitive spring softening in single-walled carbon nanotube nanoelectromechanical resonators. *Nano Lett.* **11**, 1448.

Wu, C.-C. et Z. Zhong, 2011b : Parametric amplification in single-walled carbon nanotube nanoelectromechanical resonators. *Appl. Phys. Lett.* **99**, 083110.

Zalalutdinov, M., K. L. Aubin, M. Pandey, A. T. Zehnder, R. H. Rand, H. G. Craighead et J. M. Parpia, 2003 : Frequency entrainment for micromechanical oscillator. *Appl. Phys. Lett.* **83**, 3281.

Zhabotinsky, A. M., 1964 : (periodical process of oxidation of malonic acid solution). *Biophysics* **9**, 306.