

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

et

L'ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE SFAX

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Mécanique

par

Mohamed Amine BEN SOUF

Approche stochastique à base de modes d'ondes : théorie et applications en moyennes et hautes fréquences

Soutenue publiquement le 23 novembre 2012 devant le jury :

MM.	B. TROCLET , Senior expert EADS ASTRIUM, Professeur ENS Cachan	Président
	N. BOUHADDI , Professeur, Université de Franche-Comté	Rapporteur
	R. NASRI , Professeur, École Nationale d'Ingénieurs de Tunis	Rapporteur
	T. FAKHFAKH , Professeur, École Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Examineur
	M. N. ICHCHOU , Professeur, École Centrale de Lyon, Écully	Directeur de thèse
	M. HADDAR , Professeur, École Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Directeur de thèse
	O. BAREILLE , Maître de conférences, École Centrale de Lyon, Écully	Co-encadreur



ÉCOLE
CENTRALE LYON

Direction de la recherche

Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	professeur	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	professeur	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
VOLLAIRE Christian	professeur	AMPERE	ECL

Nbre Ampère 9

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
---------------	-----------------------	---------	-----

Nbre DER EEA 1

GUIRDÈNQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

Nbre DER STMS 2

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

Nbre ICJ 7

CALLARD Anne-Ségolène	professeur	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
O'CONNOR Ian	professeur	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

Nbre INL 18

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL

Nbre LIRIS 2

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	professeur	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nbre LMFA 23

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
SINOUE Jean-Jacques	professeur	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL

THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VINCENS Eric	maître de conférences	LTDS	ECL

Nbre LTDS 25

Total HdR ECL

91

Résumé

Ce travail de recherche a été réalisé au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'École Centrale de Lyon (FRANCE) en cotutelle avec l'Unité de Mécanique, Modélisation et Productique (U2MP) à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (TUNISIE) dans le cadre du projet européen "Mid-Frequency".

La prédiction du comportement dynamique des structures est une tâche importante dans la phase de conception de tout produit mécanique. Le choix de l'outil ou de la méthode utilisée dépend de plusieurs facteurs. Pour un système dynamique, la bande de fréquence d'étude est l'un des paramètres essentiels étant donné qu'il existe des approches appropriées pour chaque domaine fréquentiel. Ces derniers seront rapidement inapplicables en changeant le domaine d'application. Par exemple, les méthodes dites hautes fréquences ou globales sont très limitées dans la partie basse du spectre. De même, les méthodes dites basses fréquences deviennent, numériquement, très lourdes et peu performantes si l'on monte en fréquence. Les moyennes fréquences représentent alors les hautes fréquences pour les méthodes globales et les basses fréquences pour les méthodes locales. Comme les incertitudes jouent un rôle important dans les comportements vibratoires en moyennes fréquences, le travail présenté de ce mémoire est une contribution à la recherche d'une approche peu coûteuse en temps de calcul permettant l'extension d'une méthode locale : la méthode des éléments finis ondulatoires, à cette bande de fréquence pour les systèmes à caractère non déterministe. Cette contribution consiste à tenir compte des incertitudes présentes dans le système étudié pour évaluer la dispersion des différents paramètres (spectraux, de diffusion, dynamiques, etc.) et leurs effets sur la réponse globale (cinématique et énergétique) de la structure.

Le travail présenté peut être partagé en deux parties. La première concerne le développement des formulations explicites et directes des dispersions des différents paramètres. Cette partie se base sur l'utilisation de la méthode de perturbation à l'ordre un. La deuxième partie est une généralisation de la première. En effet, l'utilisation de la projection des variables aléatoires sur la base des polynômes de chaos permet une évaluation plus générale des effets des incertitudes sur la dynamique des structures périodiques en moyennes fréquences.

Mots Clés :

Moyennes fréquences, Méthode des éléments finis ondulatoires, cinématique, énergétique, méthode de perturbation, polynômes de chaos.

Abstract

The prediction of dynamic behavior of structures is an important task in the design step of any mechanical product. There are many factors affecting the choice of the used methods. For a dynamic system, the frequency band under study is one of the important parameters since for each frequency range exists its appropriate approach which can be quickly inapplicable in other domains. For example, the high frequency methods are very limited in the lower part of the spectrum. Similarly, the so-called low-frequency methods become numerically inefficient if it goes up in frequency range. The mid-frequencies then represent the high-frequencies for global and low frequencies for local methods. Knowing that uncertainties play an important role on the vibro-acoustics behavior in mid-frequencies, the presented work is a contribution to the research approach, with inexpensive computing time, allowing the extension of a local method, called 'the wave finite element method', in this frequency band. These contributions consist in taking into account uncertainties in the studied system to evaluate the dispersion of all parameters (spectral, diffusion, dynamics, etc.) and their effects on the global response (kinematic and energetic) of the structure.

The presented work can be divided into two main parts. The first one involves the development of an explicit and direct formulation describing the dispersion of different parameters; this part is based on the first-order perturbation method. The second part is a generalization of the first one; indeed, using the chaos polynomial projection of all random variables allows a more general assessment of the effects of uncertainties on the dynamics of periodic structure in mid-frequency range.

Keywords :

Mid-frequency, Wave Finite Element, kinematic, energetic, perturbation method, Chaos polynomial.

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'École Centrale de Lyon (France) en cotutelle avec l'Unité de Mécanique, Modélisation et Productique (U2MP) à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (Tunisie).

Tout d'abord, je voudrais remercier M. **Mohamed ICHCHOU** et M. **Mohamed HADDAR** pour m'avoir proposé, et encadré ce travail de thèse pendant ces trois années ainsi que pour leur soutien pendant les moments difficiles.

Je remercie vivement M. **Olivier BAREILLE** pour son encadrement, son encouragement et ses conseils durant toute cette période de travail.

Je remercie vivement M. **Bernard TROCLET**, Professeur à l'École Normale Supérieure de Caen, qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être le président du jury. Je remercie sincèrement M. **Noureddine BOUHADDI**, Professeur à l'Université de Franche-Comté et M. **Rachid NASRI**, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être rapporteurs de ce mémoire. Je remercie également M. **Ta-her FAKHFAKH**, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax pour son acceptation d'être un membre du jury .

Je remercie tous mes amis et collègues pour les moments qu'on a partagé ensemble.

Un grand merci à M. **Robert LAURINI** pour sa relecture du rapport ainsi que pour ses précieuses suggestions.

Enfin, un grand merci à mes parents, frères et sœurs pour leur soutien, leur patience et leur amour durant tout mon parcours éducatif et professionnel, et en particulier mon épouse, Aïcha, qui a fortement contribué à ma réussite professionnelle par son encouragement et sa bienveillance.

A mon père Salah et ma mère Rhadia

Liste des symboles

CPG	Le chaos polynomial généralisé
DMM	Modèle de matrice de diffusion
FEM	La méthode des éléments finis
MES	Méthode énergétique simplifiée
SAFE	La méthode des éléments finis semi-analytiques
SEA	Analyse statistique de l'énergie
SFEM	La méthode des éléments finis spectraux
WFE	La méthode des éléments finis ondulatoires
WIA	Méthode d'intensité ondulatoire
$\bar{r}$	Moyenne de la variable aléatoire
η_{ij}	Facteur de perte par couplage entre le système i et j
Π	Puissance active
σ_r	Écart type de la variable aléatoire
$\tau^{(i)}$	Coefficient de transmission énergétique de l'onde i
K	La matrice de la raideur dynamique de l'élément de couplage
$\tilde{r}$	Variable aléatoire
ξ	Variable aléatoire gaussienne centrée et réduite
$H_q(.)$	Le q -ième polynôme d'Hermite
$\mathbf{P}^\Phi$	Matrice de flux de puissance
$\mathbf{Z}$	Impédance mécanique
Π_{inj}	Puissance injectée
$\mathbf{A}_L^{(k)}$	Variable cinématique à gauche de la sous-structure k
$\mathbf{A}_R^{(k)}$	Variable cinématique à droite de la sous-structure k

$\mathbf{D}^*$	Matrice de raideur dynamique
$\mathbf{C}$	La matrice de diffusion cinématique
c_{gi}	Vitesse de groupe de l'onde i
$R^{(i)}$	Coefficient de réflexion énergétique de l'onde i
$E_{c,ii}^\infty$	Énergie cinétique pour un système semi-infini
$E_{p,ii}^\infty$	Énergie potentielle pour un système semi-infini

Table des matières

Liste des symboles	viii
Introduction	1
1 Les méthodes d'analyse en moyennes fréquences	4
1.1 Les méthodes à variables cinématiques	5
1.1.1 La méthode des éléments finis (FEM)	5
1.1.2 La méthode des éléments finis spectraux (SFEM)	6
1.1.3 La méthode des éléments finis semi-analytiques (SAFE)	7
1.1.4 La méthode des éléments finis ondulatoires (WFEM)	9
1.2 Les méthodes à variables quadratiques	12
1.2.1 Analyse statistique de l'énergie (SEA)	12
1.2.2 Méthode énergétique simplifiée (MES)	15
1.2.3 Méthode d'intensité ondulatoire (WIA)	17
1.3 Les méthodes hybrides et approches moyennes fréquences	18
1.3.1 Hybridation EF-SEA	18
1.3.2 Hybridation WFE-SEA	21
1.4 Modélisation des systèmes incertains	23
1.4.1 Champs aléatoires et théorie de base	23
1.4.2 La décomposition de Karhunen-Loève	25
1.4.3 Le chaos polynomial	25

1.4.4	Les simulations de Monte Carlo	26
1.4.5	La méthode quadrature de Gauss	27
1.4.6	La méthode des perturbations	27
1.4.7	Approche non-paramétrique	31
1.5	Conclusion	34
2	Les éléments finis ondulatoires stochastiques	36
2.1	Les élément finis ondulatoires (WFE)	37
2.1.1	Modèle éléments finis	37
2.1.2	Propriétés de la représentation dans l'espace d'état	41
2.1.3	Post-traitement des courbes de dispersions	43
2.2	Les élément finis ondulatoires stochastiques (SWFE)	43
2.2.1	La SWFE : Le problème spectral quadratique	44
2.2.2	La SWFE : l'utilisation des vecteurs d'états	45
2.3	Validations numériques: Cas canoniques	48
2.3.1	Poutre en traction-compression	48
2.3.2	Poutre en flexion	51
2.4	Validations numériques: Guide d'ondes multi-modales	53
2.4.1	Guide d'onde multi-modales : Sans modes de sections	54
2.4.2	Guide d'onde multi-modales : Avec modes de sections	56
2.5	Conclusion	58
3	Propagation multi-modales dans les systèmes élastiques couplés incertains	59
3.1	Réponse forcée d'une structure périodique stochastique	60
3.1.1	La variabilité de l'amplitude des ondes	61
3.1.2	Construction de la matrice $\bar{\mathbf{A}}^*$	63
3.1.3	Expressions des statistiques des variables cinématiques	64
3.2	Matrice de diffusion cinématique stochastique	65

3.2.1	Généralité sur la matrice de diffusion	66
3.2.2	Formulation de DMM déterministe	67
3.2.3	Formulation de DMM stochastique	70
3.3	Réponse forcée d'une structure couplée	73
3.4	Validation numérique	76
3.4.1	Poutre 3D avec propagation 1D en réponse forcée	76
3.4.2	Validation du formalisme de diffusion cinématique pour deux poutres creuses	78
3.4.3	Validation du problème complet : dynamique de deux guides multi- modaux interconnectés	89
3.5	Conclusion	92
4	Approche énergétique pour les systèmes périodiques stochastiques	93
4.1	Approches énergétiques pour un guide d'ondes aléatoire	94
4.1.1	Méthode énergétique simplifiée (MES)	94
4.1.2	Matrice de flux de puissance aléatoire	96
4.2	La densité d'énergie totale pour un guide périodique aléatoire	99
4.3	Matrice d'efficacité énergétique et facteur de perte par couplage	101
4.3.1	Coefficients d'efficacité énergétiques en présence d'aléas	101
4.3.2	Facteurs de perte par couplage	103
4.4	Paramètres énergétiques pour un système de propagation semi-infini	104
4.4.1	Puissance injectée	105
4.4.2	Impédance mécanique : formulation générale	106
4.4.3	Vitesse de groupe	107
4.5	Validation numérique	108
4.5.1	Poutre d'Euler Bernoulli encastrée-libre	108
4.5.2	Deux guides multi-modaux connectés par une jonction à section variable	113

4.5.3	Deux guides multi-modaux connectés par une jonction	116
4.6	Conclusion	118
5	Approche spectrale stochastique - Chaos Polynomial	120
5.1	Le chaos polynomial	121
5.1.1	Chaos polynomial généralisé	124
5.1.2	Les techniques de transformation	125
5.2	Approches intrusives / non-intrusives	127
5.2.1	Approches intrusives	127
5.2.2	Approches non-intrusives	128
5.2.3	Méthodes de plan d'expérience - Latin Hypercube Sampling	130
5.3	SWFE - Chaos polynomial	131
5.4	Validations numériques	131
5.4.1	Guide d'ondes avec caractéristiques mécaniques aléatoires	131
5.4.2	Deux guides d'ondes couplés à paramètres aléatoires	135
5.5	Conclusion	142
	Conclusions et perspectives	143
	Bibliographie	146
	Annexes	158
.1	Etude de deux poutres d'E-B	158
.2	Etude de l'effet des incertitudes d'un tube avec fissure	161
.3	Annexe 3	163

Introduction

L'analyse du comportement dynamique des structures et leur optimisation vibro-acoustique sont des sujets importants dans des nombreux domaines d'ingénierie (transport terrestre, aéronautique, énergétique). D'une part, le niveau de bruit et vibrations doivent rester dans des limites acceptables tant pour le confort de l'utilisateur que pour une nécessité de robustesse optimale. D'autre part, il y a une tendance croissante à la conception et au prototypage virtuel, pour réduire les coûts et les délais de développement. Pour ces raisons, l'amélioration des outils de modélisation est indispensable. La solution analytique, fondée sur des hypothèses simplificatrices, est l'une des méthodes utilisées pour avoir des informations en tout point du système. Cependant, ces solutions analytiques sont vite pénalisées en augmentant la fréquence d'étude ou la complexité du système étudié. Il est donc nécessaire de développer des concepts numériques basés sur des approximations de forme de la solution cherchée. La précision de ces résultats est conditionnée par le degré de l'approximation voulu ainsi que la complexité de la structure étudiée.

Dans le domaine des basses fréquences, les méthodes locales basées sur des variables cinématiques sont bien développées et validées. Ces modèles, en général déterministes, sont basés sur la discrétisation spatiale du domaine étudié ce qui permet le passage d'un système d'équations continu à un système d'équations discret. Ces méthodes, telles que la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des éléments finis de frontières (BEM), permettent l'évaluation des solutions cinématiques approchées pour des systèmes dynamiques avec une bonne précision. En augmentant la fréquence, l'obtention de la solution discrète devient de plus en plus coûteuse en temps de calcul.

En hautes fréquences (HF), une réponse globale du système est visée. Les méthodes utilisées, en général stochastiques, sont basées sur les variables quadratiques (les énergies). La SEA (Statistical Energy Analysis) est l'une des méthodes statistiques les plus utilisées et développées pour les HF. Cette méthode repose sur la sous-structuration du système en sous-systèmes et permet la description des échanges énergétiques entre eux. La SEA n'est certainement pas la seule méthode énergétique. La MES (Méthode Énergétique Simplifiée) est une autre méthode qui décrit l'évolution énergétique du systèmes en utilisant la description propagatoire.

Représentant les hautes fréquences pour les méthodes locales et les basses fréquences pour les méthodes énergétiques, les moyennes fréquences restent le domaine qui pose le

plus de problèmes. La MEF n'est plus valable car la présence des petites longueurs d'ondes présentes en moyennes fréquences impose une discrétisation fine du domaine qui permet la détection du couplage et d'échange énergétique entre les modes. De plus, la SEA n'est pas aussi applicable dans cette bande de fréquence à cause de la faible densité modale (hypothèse nécessaire pour la SEA). Donc, il est important d'avoir une solution qui permette de prévoir le comportement dynamique des systèmes mécaniques en moyennes fréquences (MF). Différentes approches ont déjà été développées pour surmonter ce problème. Certaines approches essaient d'étendre les méthodes BF aux MF. D'autres essaient d'étendre les méthodes énergétiques pour les MF. Des tentatives d'hybridation des différentes méthodes ont aussi prouvé leur efficacité et leur pertinence.

Étant donné que les performances des machines de calcul augmentent, le traitement des systèmes complexes à variables aléatoires devient plus facile et permet l'obtention de résultats les plus réalistes possibles. Sachant que ces variables incertaines jouent un rôle important dans le comportement vibratoire des structures en MF et HF, les travaux de ce manuscrit représentent une tentative de description de la réponse dynamique (en termes cinématiques et énergétiques) des systèmes mécaniques dans ces bandes de fréquences.

Le chapitre 1 de ce document est consacré aux différentes méthodes numériques de résolution des problèmes dynamiques, spectraux et vibro-acoustiques en basses et hautes fréquences. Ensuite, sont présentées quelques méthodes pour les moyennes fréquences, basées sur l'hybridation des méthodes. Dans la dernière partie de ce chapitre, les différentes approches stochastiques (paramétriques et non-paramétriques) traitant la dynamique des structures stochastiques, sont détaillées et critiquées.

Le chapitre 2 présente une méthode spectrale déterministe développée pour les basses et les moyennes fréquences. Cette méthode, appelée la méthode des éléments finis ondulatoires "Wave Finite Element (WFE)", est une approche de réduction de modèle permettant un gain considérable en temps de calcul. Cette méthode, développée pour les systèmes périodiques (photonique et phononique), est ensuite étendue pour les structures présentant des paramètres incertains (mécaniques ou géométriques) pour évaluer les effets de variabilité sur les paramètres spectraux.

Le chapitre 3 est consacré à la réponse forcée stochastique des systèmes multi-modaux périodiques. Le traitement d'un guide simple est d'abord étudié. Ensuite, on étudie la réponse dynamique d'un guide présentant une discontinuité mécanique qui est modélisée en tant que deux guides couplés par une jonction stochastique. Cette étude passe d'abord par l'évaluation de la dispersion de la matrice de diffusion ensuite par une étude cinématique de la totalité de la structure. Cette partie représente une extension de la WFE forcée pour les guides couplés permettant l'étude des systèmes mécaniques, en termes cinématiques, en moyenne et hautes fréquences.

Ces différents cas étudiés sont re-traités de point de vue énergétique dans le chapitre 4. Les résultats établis dans le chapitre 3 représentent la base qui va nous permettre de passer des variables cinématiques aux variables énergétiques. Cette étude énergétique permet

de quantifier les effets d'incertitudes sur les différents densités d'énergie. Les paramètres énergétiques sont aussi étudiés, tels que la vitesse de groupe, la puissance injectée, etc. Des expressions explicites des variabilités de ces paramètres sont établies et validées.

Enfin, le chapitre 5 traite les mêmes problématiques que les chapitres précédents mais d'un point de vue plus général. La combinaison de la WFE avec une méthode non-intrusive, basé sur l'utilisation des polynômes de chaos, nous permet d'examiner différents paramètres incertains suivant des distributions différentes et leurs impacts sur le comportement dynamique des systèmes périodiques à variables aléatoires en MF et HF.

Chapitre 1

Les méthodes d'analyse en moyennes fréquences

Sommaire

1.1	Les méthodes à variables cinématiques	5
1.1.1	La méthode des éléments finis (FEM)	5
1.1.2	La méthode des éléments finis spectraux (SFEM)	6
1.1.3	La méthode des éléments finis semi-analytiques (SAFE)	7
1.1.4	La méthode des éléments finis ondulatoires (WFEM)	9
1.2	Les méthodes à variables quadratiques	12
1.2.1	Analyse statistique de l'énergie (SEA)	12
1.2.2	Méthode énergétique simplifiée (MES)	15
1.2.3	Méthode d'intensité ondulatoire (WIA)	17
1.3	Les méthodes hybrides et approches moyennes fréquences	18
1.3.1	Hybridation EF-SEA	18
1.3.2	Hybridation WFE-SEA	21
1.4	Modélisation des systèmes incertains	23
1.4.1	Champs aléatoires et théorie de base	23
1.4.2	La décomposition de Karhunen-Loève	25
1.4.3	Le chaos polynomial	25
1.4.4	Les simulations de Monte Carlo	26
1.4.5	La méthode quadrature de Gauss	27
1.4.6	La méthode des perturbations	27
1.4.7	Approche non-paramétrique	31
1.5	Conclusion	34

L'objectif de ce chapitre est d'établir une bibliographie concernant les différentes approches numériques qui aident à la modélisation et à la prédiction des comportements vibratoire des structures. Dans les réponses fréquentielles on distingue trois principaux domaines :

- *Le domaine des basses fréquences* caractérisé par une réponse fréquentielle présentant des pics de résonances distingués.
- *Le domaine des hautes fréquences* caractérisé par un recouvrement modal important, et dans ce cas, le recours aux méthodes énergétiques est nécessaire.
- *Le domaine des moyennes fréquences* qui est la zone intermédiaire entre les deux domaines précédent.

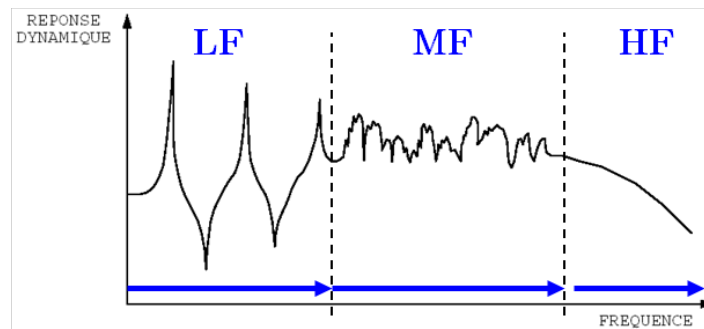


FIGURE 1.1 – Les différents domaines fréquentiels

Ce chapitre commence par une présentation détaillée des méthodes destinées aux basses-fréquences et des approches hautes fréquences. Une discussion portant sur les différents hypothèses nécessaires va nous conduire à présenter leurs limitations et leurs domaines d'applications. Quelques approches traitant le problème des moyennes fréquences sont aussi présentées pour bien positionner la présente étude. Certaines approches essaient d'élargir le domaine d'application des méthodes locales soit en injectant des variables aléatoires dans la formulation comme la méthode des éléments finis stochastique (SFEM) soit en la combinant avec des méthodes énergétiques, par exemple SEA-like, pour surmonter la problématique des MF. Enfin, quelques approches traitant la dynamique des systèmes mécaniques stochastiques vont être présentées et détaillées.

1.1 | Les méthodes à variables cinématiques

1.1.1 | La méthode des éléments finis (FEM)

La méthode des éléments finis est une méthode numérique qui permet la résolution de divers problèmes continus présentant des équations impossibles à résoudre analytiquement vu que les structures actuelles sont de plus en plus complexes. La MEF permet le passage d'un problème continu à un problème discret qui peut être résolu en tenant compte des critères énergétiques du système [1]. Le passage du système continu à un système discret nécessite des méthodes d'approximations qui ont un même but, à savoir, remplacer le problème différentiel ou intégral par un problème matriciel. La méthode des résidus pondérés est l'une des méthodes d'approximation qui utilise les équations locales (équations différentielles à l'intérieur du domaine) et les conditions aux limites (équations locales sur la frontière du

domaine) en tant que point de départ. En pratique, l'utilisation de cette approximation se limite à deux sous-méthodes:

- *Méthode de collocation par point* : qui consiste à utiliser des fonctions de Dirac en tant que fonctions de pondération, ce qui revient à annuler l'erreur d'approximation en un nombre fini de points du domaine.
- *Méthode de Galerkin* : qui consiste à utiliser les fonctions de formes comme fonctions de pondérations.

La formulation variationnelle, basée sur la formule de Green généralisée, est une autre méthode d'approximation qui introduit la notion d'erreur sur les équations locales du système. Par exemple, étant donné l'équation locale suivante:

$$\rho \ddot{\vec{u}} - \text{div} \vec{\sigma} = \vec{f} \Leftrightarrow \int_D \vec{P} \cdot (\rho \ddot{\vec{u}} - \text{div} \vec{\sigma} - \vec{f}) dV = 0; \quad \forall \vec{P} \quad (1.1)$$

L'intégration par partie nous conduit à faire apparaître les conditions aux limites sur les frontières. En utilisant des fonctions de pondération à valeur nulle sur ces frontières, on obtient une formulation variationnelle équivalente au système d'équations aux dérivées partielles initial. Si on peut résoudre l'équation intégrale précédente, on peut obtenir la solution exacte du problème, sinon l'introduction des fonctions de formes pour avoir une solution approchée est nécessaire. La formulation variationnelle peut être écrite sous la forme :

$$\delta q^T \int_D (W^T \rho W \ddot{q} + B^T D B q - W^T f) dV = \delta q^T \int_{\Gamma_\sigma} W^T T_d dS \quad (1.2)$$

Cette équation peut être écrite quel que soit δq . Donc, on obtient la fameuse équation matricielle suivante :

$$M \ddot{q} + K q = F \quad (1.3)$$

Avec : $M = \int_D W^T \rho W dV$, $K = \int_D B^T D B dV$ et $F = \int_D W^T f dV + \int_{\Gamma_\sigma} W^T T_d dS$

1.1.2 | La méthode des éléments finis spectraux (SFEM)

La méthode des éléments finis spectraux (Spectral Finite Element Method, (SFE)) est une méthode qui décrit la propagation d'ondes dans les différents milieux [2] : les tubes composites [3], les structures [4] et même la mécanique des fluides [5]. Komatitsch [6] a développé cette écriture spectrale pour les milieux élastodynamiques hétérogènes 2D et 3D. La SFE est une approche qui cherche à transformer un système d'équations en un système matriciel (comme MEF) en utilisant des fonctions d'interpolations sinusoïdales. L'exemple d'une poutre d'Euler-Bernoulli de longueur L , encastree-libre et soumise à une excitation longitudinale montre comment on peut formuler les équations de la SFE.

L'équation dynamique d'une barre peut être écrite :

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, cette équation de second ordre en temps et espace admet une solution $u(x, t)$:

$$u(x, t) = X(x)T(t) = cte_1 * \exp(ikx) \cdot cte_2 * \exp(i\omega t) \quad (1.5)$$

la substitution de l'équation (1.5) dans l'équation (1.4) nous conduit à une relation entre le nombre d'onde et la fréquence $\omega^2 = \frac{E}{\rho} k^2$. Cette relation admet deux solutions : $k_1 = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega$, $k_2 = -\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega$, donc la solution du déplacement peut être écrite:

$$u(x, t) = (A \exp(ik_1 x) + B \exp(ik_2 x)) \exp(i\omega t) \quad (1.6)$$

L'application des conditions aux limites $u_1 = X(0) = A + B$ et $u_2 = A \exp(ik_1 L) + B \exp(ik_2 L)$, nous permet de calculer les deux coefficients A et B.

Finalement, on peut exprimer les déplacements nodaux :

$$\{d\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp(ik_1 L) & \exp(ik_2 L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \exp(i\omega t) \quad (1.7)$$

D'une façon similaire, les forces nodales peuvent être écrites :

$$\{f\} = EA \begin{pmatrix} ik_1 & ik_2 \\ ik_1 \exp(ik_1 L) & ik_2 \exp(ik_2 L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \exp(i\omega t) \quad (1.8)$$

La SFE est une méthode très avantageuse pour traiter les problèmes des HF sans changement au niveau du temps de calcul, qui est invariant en fonction de la fréquence, mais elle reste toujours limitée pour des cas académiques, basée sur les théories élémentaires pour définir les fonctions d'interpolations.

1.1.3 | La méthode des éléments finis semi-analytiques (SAFE)

La méthode des éléments finis semi-analytiques (Semi-Analytical Finite Element, (SAFE)) est une méthode spectrale proposée par Dong [7] pour calculer les vibrations libres des plaques orthotropes laminées. Cette méthode est utilisée et améliorée par Gavrić [8] pour le calcul de la relation de dispersion dans les chemins de fer. Damljjanovic [9] a utilisé les équations de Lagrange pour étudier la propagation des ondes dans des guides à section quelconque. Finnveden [10] l'a aussi utilisée pour étudier les structures courbées.

La SAFE est basée sur deux types de discrétisations :

- le champ de déplacement perpendiculaire au sens de la propagation est discrétisé par la MEF (fonctions d'interpolations des EF)
- le champ de déplacement dans la direction de propagation des ondes est décrit à partir de la décomposition en ondes planes.

L'utilisation de différents types de discrétisations permet de monter en fréquence d'étude sans une augmentation pénalisante du nombre d'éléments. L'application du principe des travaux virtuels pour une structure élastodynamique s'écrit :

$$\int_V \delta \mathbf{u}^H (\rho \ddot{\mathbf{u}}) dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^H \boldsymbol{\sigma} dV = \int_\Gamma \delta \mathbf{u}^H \mathbf{t} d\Gamma \quad (1.9)$$

avec : $\mathbf{u} = \{u_x \ u_y \ u_z\}^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx}\}^T$, $\mathbf{t} = \{t_x \ t_y \ t_z\}^T$ et H est la transposée hermitienne.

Le déplacement en tout point est exprimé:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(y, z) \exp\{ikx - i\omega t\} \quad (1.10)$$

avec $i^2 = -1$ et k est le nombre d'onde selon l'axe x .

En utilisant des éléments isoparamétriques, les fonctions de formes reliant les coordonnées globales (y, z) et les coordonnées locales (ξ, η) sont exprimées :

$$y = \sum_{i=1}^m N_i^e(\xi, \eta) y_i \quad , \quad z = \sum_{i=1}^m N_i^e(\xi, \eta) z_i \quad (1.11)$$

Sans rentrer dans les détails des calculs, quelques traitements analytiques nous conduisent à écrire les différentes matrices élémentaires sur le domaine Ω^e dans le plan (y, z) :

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}^e \mathbf{B}_1 d\Omega^e, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega^e, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{E}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_2^T \mathbf{C}^e \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1^T \mathbf{C}^e \mathbf{B}_2) d\Omega^e, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{G}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_2^T \mathbf{C}^e \mathbf{B}_2 d\Omega^e, \quad (1.15)$$

avec : $\mathbf{B}_1 = \mathbf{L}_y \mathbf{N}_{,y} + \mathbf{L}_z \mathbf{N}_{,z}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_x \mathbf{N}$ sont les matrices de formes. $\mathbf{C}^e$ est la matrice des coefficients élastiques.

Et les forces extérieures sont exprimées comme suit :

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{t}^e d\Gamma^e \quad (1.16)$$

avec Γ^e représentant les frontières de l'élément.

Finalement, l'assemblage des matrices élémentaires et des vecteurs de forces conduit à écrire l'équation de mouvement du guide d'ondes:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + ik\mathbf{E} + k^2 \mathbf{G}) \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1.17)$$

où $\mathbf{q}$ est le déplacement nodal, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{G}$ sont des matrices symétriques, $\mathbf{E}$ est une matrice anti-symétrique et $\mathbf{M}$ est une matrice-définie positive. Pour un système libre, $\mathbf{F} = 0$ on obtient le problème aux valeurs propres quadratique suivant:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + ik\mathbf{E} + k^2 \mathbf{G}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

avec $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{q}$.

La linéarisation de l'équation (1.18) permet une écriture matricielle du problème spectral permettant l'obtention de la base d'ondes.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & \mathbf{jE} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{k}\boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = \mathbf{k} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{k}\boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

Zhou [11] ainsi que Zhou *et al.*[12] a examiné la relation entre la méthode SAFE et le "Wave Finite Element" (WFE). L'application de ces deux méthodes spectrales pour différents cas (ondes plane dans les plaques, ondes guidées dans les tubes, ondes dans les chemins de fer,...) a permis de comparer de plus près leurs performances et leurs limites (figure 1.2).

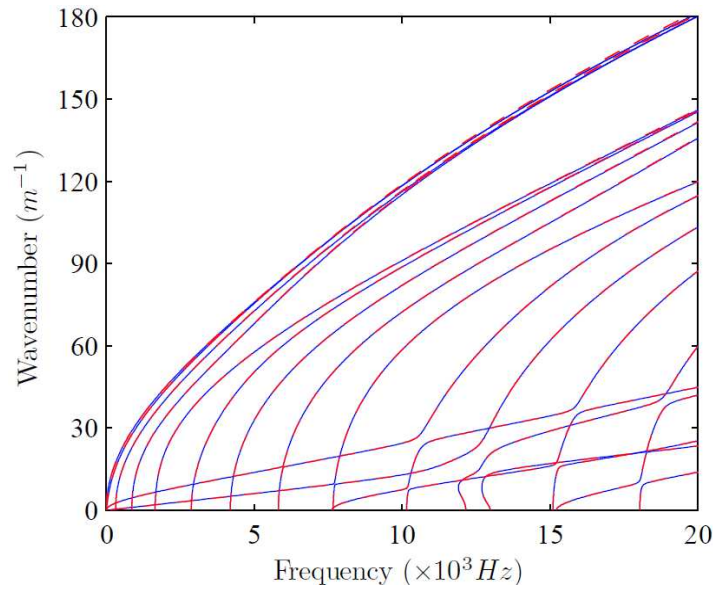


FIGURE 1.2 – Propagation d'ondes dans des panneaux raidis (- WFE, - SAFE) [11]

1.1.4 | La méthode des éléments finis ondulatoires (WFEM)

La méthode des éléments finis ondulatoires (Wave Finite Element, (WFE)) est une méthode spectrale qui traite les milieux périodiques. Cette méthode est introduite par Brillouin [13, 14] pour étudier la propagation d'ondes dans les milieux photoniques et phononiques. Khelif *et al.*[15] a utilisé la WFE pour contrôler la propagation d'ondes en changeant les rayons intérieurs des inclusions tubulaires. Un choix adéquat des rayons permet l'obtention d'une bande passante qui sépare deux fréquences spécifiques à partir d'un signal d'entrée large bande (figure 1.3).

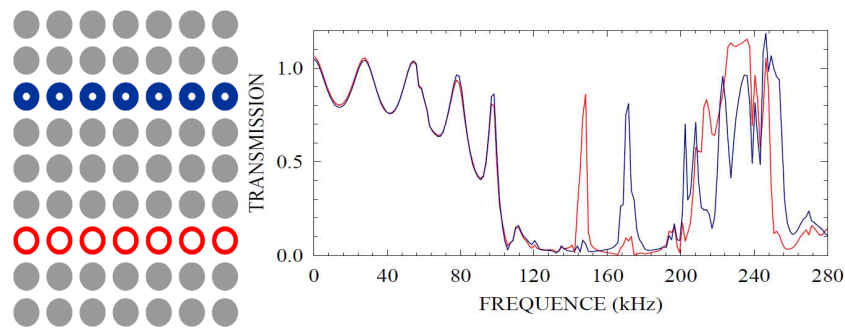


FIGURE 1.3 – Deux rangées de cylindres creux de rayons internes différents et leurs effets sur le spectre[15]

Pennec *et al.*[16] a proposé un modèle de multiplexeur et démultiplexeur basé sur un guide d'ondes en forme de Y. Ce système peut être utilisé pour la séparation ou la fusion des signaux avec différentes fréquences. La figure 1.4 représente une structure périodique constituée d'une alternance de cylindres creux de rayons intérieurs différents. Ce dispositif permet la transmission de deux ondes superposées avec différentes fréquences. Lorsque le signal large bande est envoyé depuis la droite (figure 1.4), chaque branche de la structure en forme de Y en quelque sorte "choisit" sa propre onde. En conséquence, le spectre transmis à la sortie à gauche contient deux pics correspondant à chaque onde transmise. Les mêmes résultats peuvent être obtenus en utilisant des cylindres creux de même rayon mais plongés dans des liquides différents.

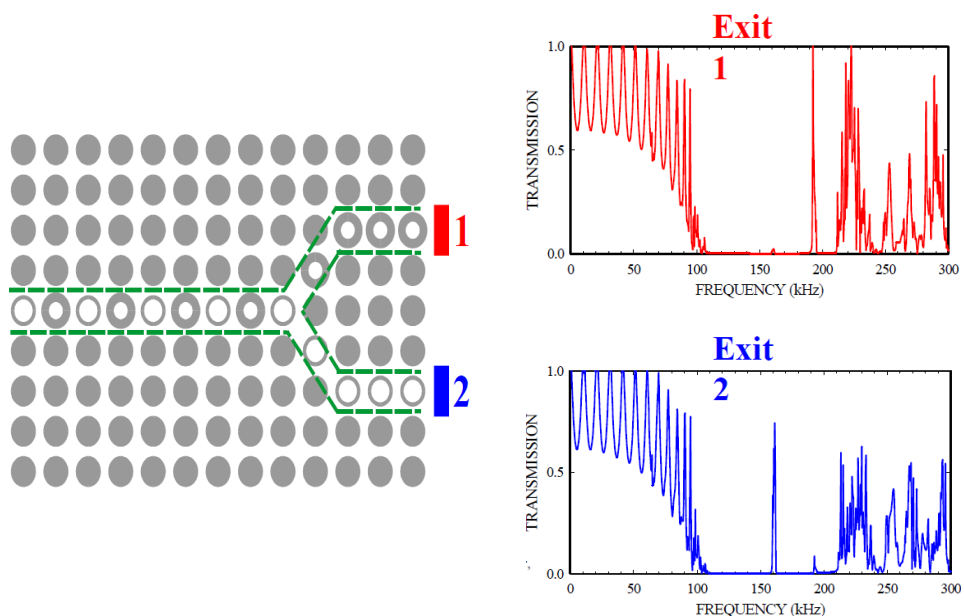


FIGURE 1.4 – Guide d'ondes en forme de Y [16]

Dans les années 70, Mead [17, 18] a proposé une formulation générale applicable pour les systèmes mécaniques périodiques afin de déterminer les caractéristiques spectrales pour

les systèmes 1D et 2D en tenant compte de l'effet d'amortissement. Cette formulation couple directement la MEF à une approche propagative pour étudier la propagation d'ondes mécaniques dans des guides d'ondes périodiques. Zhong et Williams [19] ont proposé une formulation direct pour obtenir la constante de propagation pour des structures répétitives. La matrice de raideur dynamique est utilisée pour construire un problème aux valeurs propres d'ordre un.

Ces dernières années, les études se succèdent pour améliorer la WFE. Houillon [20], Houillon *et al.* [21] et Bocquillet [22] ont appliqué la WFE à des structures complexes vu la simplicité d'application de la WFE et sa connexion directe avec la MEF. Cette méthode a été utilisée dans différents domaines : dynamique et vibration des structures [23, 24, 25, 26], propagation d'ondes des guides élastiques [27] et calcul des différentes densités d'énergie [28]. Mencik *et al.* [27] a développé le modèle de la matrice de diffusion (Diffusion matrix model, (DMM)) en utilisant la WFE. Cette formulation, facile à utiliser, représente un outil performant de calcul des coefficients de réflexion et transmission vis-à-vis d'une discontinuité mécanique ou géométrique dans la structure. La DMM est ensuite exploitée numériquement [29] et validée expérimentalement dans les tube élancés [12, 11, 30].

Ensuite, la WFE forcée a été développée. Cette formulation permet la description dynamique des systèmes soumis à une excitation harmonique [31]. Elle est basée sur l'expansion des variables cinématiques sur la base d'ondes. Mencik [32] a traité différents cas (guide simple, deux guides couplés) et il a étudié l'effet de la troncature de la base d'ondes sur la précision de la méthode surtout en moyennes fréquences où les modes de sections influent considérablement sur le comportement vibratoires des structures. Plusieurs travaux ont traité les structures 2D périodiques. Manconi [33] a développé cette approche et elle l'a appliqué pour les plaques, les cylindres et cylindres creux remplis d'un fluide. Ces études prouvent l'efficacité de la WFE 2D, avec un temps de calcul très réduit, pour prédire le comportement dynamique de tel guide d'ondes même dans les bandes de fréquences où les formules analytiques ne sont plus valables. Chronopoulos *et al.* [34] a couplé la WFE et la SEA pour prédire le comportement vibroacoustique des coques en composites de différentes géométries.

La méthode des éléments finis ondulatoires est utilisée aussi dans le domaine de la santé structurale (Structural Health Monitoring, SHM). La méthode des ondes guidées est l'une des méthodes de détection des défauts dans les structures. En analysant le coefficient de réflexion, la taille et l'emplacement du défaut est bien identifiée. Zhou [12] a traité le cas des cylindres présentant des singularités. Pour différents cas de discontinuités (fissures, coudes, corrosion,...), une formulation adéquate est bien développée. Ces formulations sont ensuite utilisées et validées par des essais expérimentaux [35]. Huang *et al.* [36] a étudié le comportement des plaques raidies et l'influence des fissures (en général des discontinuités géométriques) sur le comportement dynamique de ce type de plaque en moyennes fréquences. La WFE sera plus développée dans le chapitre 2.

1.2 | Les méthodes à variables quadratiques

1.2.1 | Analyse statistique de l'énergie (SEA)

Les approches mécaniques classiques ont pour but d'étudier les premiers modes les plus influents. L'utilisation de ces approches modales pour les hautes fréquences est quasi-impossible vu les incertitudes sur les paramètres ainsi que le temps de calcul énorme qu'elle demande à cause de la forte densité modale. En plus, l'existence des structures complexes et de grandes dimensions, représente une autre contrainte limitant ces approches, donc le recours à des approches globales est devenu obligatoire.

La méthode énergétique statistique (Statistical Energy Analysis, SEA), proposée par Lyon [37], est une méthode énergétique décrivant le comportement des systèmes mécaniques en hautes fréquences. Cette méthode consiste à décomposer un système complexe en sous-systèmes, à prédire la puissance injectée dans chaque sous-système et à écrire le bilan de puissance entre eux. Ce bilan, équivalant à l'étude de transfert de chaleur, décrit l'échange énergétique entre les sous-systèmes.

L'analyse de deux résonateurs simples couplés linéairement à travers un élément non dissipatif conduit au résultat suivant : la puissance moyenne échangée entre deux sous-systèmes dynamiques est une fonction linéaire de leurs énergies. Mathématiquement on peut écrire :

$$P_{12} = K_1 [E_1 - K_2 E_2] \quad (1.20)$$

avec K_1 et K_2 qui dépendent des paramètres relatifs aux deux sous-systèmes, P_{12} qui est la puissance moyenne échangée entre le sous-système 1 et le sous-système 2 et E_i qui est l'énergie moyenne du sous-système i . Cette écriture va être généralisée à des systèmes à plusieurs sous-systèmes [38]. Dans le cas d'un guide d'ondes multi-modales, chaque mode de propagation est modélisé par un sous-système. Pour une bonne utilisation de la SEA, les différents paramètres utilisés doivent être présentés.

1.2.1.1 | Les paramètres de la SEA

L'écriture du bilan de puissance nécessite la détermination des paramètres SEA, les facteurs de perte interne (Internal Loss Factor, (ILF)), les facteurs de pertes par couplage (Coupling Loss Factor, (CLF)) afin d'identifier les différentes puissances nécessaires pour l'établissement du bilan d'énergie.

Le facteur de perte interne

Ce facteur caractérise la puissance dissipée dans un sous-système, telle que l'amortissement structural et l'effet de friction interne. Il intervient dans l'écriture de la puissance dissipée et il peut être écrit sous la forme:

$$P_{\text{diss}} = \omega \eta_i E_i \quad (1.21)$$

où ω est la pulsation et η_i est le facteur de perte interne du sous-système i .

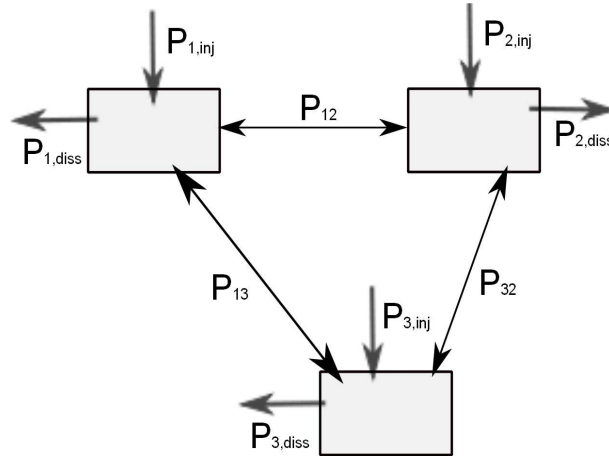


FIGURE 1.5 – Schéma présentant un exemple des sous-systèmes de la SEA

Le facteur de perte par couplage

La puissance échangée entre deux sous-systèmes i et j en fonction de l'énergie totale moyenne de chaque sous-système peut être écrite :

$$P_{ij} = \omega \eta_{ij} (E_i - n_i/n_j E_j) \quad (1.22)$$

Les termes η_{ij} et η_{ji} sont les facteurs de pertes par couplage entre les deux sous-systèmes i et j , et n_i , n_j sont les densités modales de ces sous-systèmes.

Cette écriture permet l'introduction de la relation de réciprocité liant les facteurs de pertes par couplage entre les deux sous systèmes en tenant compte de l'hypothèse nécessaire :

$$n_i \eta_{ij} = n_j \eta_{ji} \quad (1.23)$$

Dans le cas d'un système complexe, l'équation (1.23) permet de réduire le nombre des facteurs de perte par couplage à déterminer. Dans le cas de deux sous-systèmes, la modélisation énergétique peut s'écrire :

$$P_{i,inj} = P_{i,diss} + P_{ij}$$

$$P_{j,inj} = P_{j,diss} + P_{ji}$$

Donc on peut déduire le système matriciel suivant:

$$\begin{pmatrix} \eta_i + \eta_{ij} & -\eta_{ji} \\ -\eta_{ij} & \eta_j + \eta_{ji} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i,tot} \\ E_{j,tot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{i,inj}/\omega \\ P_{j,inj}/\omega \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

La démarche précédente peut être généralisée pour n sous-systèmes couplés en construisant la matrice des facteurs de perte de dimension n^2 .

$$\begin{pmatrix} \eta_1 + \sum_{i=1, i \neq 1}^n \eta_{1i} & -\eta_{21} & \dots & -\eta_{n1} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \sum_{i=1, i \neq 2}^n \eta_{2i} & \dots & -\eta_{n2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ -\eta_{1n} & \dots & \dots & \eta_n + \sum_{i=1, i \neq n}^n \eta_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1,inj}/\omega \\ P_{2,inj}/\omega \\ \vdots \\ P_{n,inj}/\omega \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

La résolution d'un système SEA nécessite la connaissance des différents facteurs de perte par couplage et par pertes internes. On peut obtenir ces facteurs grâce à différentes méthodes : méthode expérimentale, analytique et numérique. L'effet des incertitudes sur ces termes va être introduite dans le chapitre 4.

La densité modale

Pour calculer les niveaux vibratoires pour les applications hautes fréquences, les fréquences propres des modes sont supposées équiprobables dans la bande fréquence considérée. Cette hypothèse implique que l'on considère que le nombre de modes dans d'une bande est assez important et que le recouvrement modal est fort. Dans la pratique on considère qu'un nombre de modes par bande tiers d'octaves supérieur à 5 est suffisant.

Dans le cas d'une plaque rectangulaire de dimensions l_x l_y , de rigidité en flexion D et de masse surfacique ρ_s , la densité modale des mouvements en flexion s'écrit :

$$n(f) = \frac{l_x l_y}{2} \sqrt{\frac{\rho_s}{D}}$$

D'autres types de modes sont établies par Bercin [39] pour les ondes longitudinales et pour les ondes transversales:

$$n_L(f) = \frac{2\rho A (1 - \mu^2)}{E} f, \text{ et } n_T(f) = \frac{2\rho A (1 + \mu)}{E} f$$

1.2.1.2 | Limitations de la SEA

La SEA se heurte actuellement aux principales difficultés suivantes lors de l'analyse d'un réseau complexe.

- La SEA classique fait souvent appel à la notion de couplage faible, afin de simplifier les expressions des facteurs de perte par couplage et le nombre des relations énergétiques entre les sous-systèmes que l'on doit prendre en compte.
- La généralisation de la SEA aux guides comportant plusieurs modes de propagations ne répond pas à tous les aspects: par exemple, pour un guide comportant plusieurs modes, il est obligatoire de modéliser chaque mode par un sous-système SEA. Par conséquent, les interférences entre des ondes de différents types sont omises.

1.2.2 | Méthode énergétique simplifiée (MES)

La méthode énergétique simplifiée est une méthode utilisant les variables quadratiques, comme la SEA, mais elle a l'avantage de décrire le comportement local des quantités énergétiques du système. Cette méthode, introduite par Ichchou *et al.* [40, 41], est basée sur plusieurs hypothèses :

- Le système étudié doit être linéaire, isotope, élastique avec un faible facteur de perte ($\eta < 1$).
- Utilisation du modèle d'amortissement hystérétique.
- Négligence des ondes évanescences.
- Les ondes propagatives sont décorrélées.
- Si le comportement vibratoire ne présente pas un caractère diffus, alors le champ peut être considéré comme la superposition d'un champ direct et d'un champ réverbéré.

Le bilan de puissance globale peut être écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V (T + U) dV = \iint_S t_i \dot{u}_i dS + \iiint_V \rho f_i \dot{u}_i dV \quad (1.26)$$

avec $t_i = \sigma_{ij} n_j$, f_i la $i^{\text{ème}}$ composante de vecteur force volumique, T et U sont les densités des énergies cinétiques et de déformation.

En utilisant le théorème de la divergence, la loi de conservation d'énergie locale s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (T + U) dV = - \nabla I + I_{inj} \quad (1.27)$$

avec $I_{inj} = \rho f_i \dot{u}_i$.

En régime harmonique, l'évaluation temporelle des variables densité d'énergie déduit de l'équation (1.26) devient :

$$\frac{dT}{dt} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = - \nabla I + I_{inj} \quad (1.28)$$

L'expression de la densité d'énergie cinétique moyenne, en régime harmonique s'écrit alors:

$$\langle \dot{T} \rangle = \frac{1}{2} j \omega \rho \dot{u}_i \dot{u}_i^* \quad (1.29)$$

avec u_i le champs de vitesse, $j^2 = -1$.

De même pour la densité d'énergie de déformation :

$$\langle \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \rangle = -\frac{1}{2} j \omega \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* \quad (1.30)$$

Dans le cas visco-élastique, la puissance de déformation ne dérive plus d'un potentiel donc il est nécessaire d'introduire une puissance de dissipation qui correspond en régime harmonique et qui peut être écrite sous la forme :

$$\langle I_{diss} \rangle = \frac{1}{2} j \omega \text{Im}(\sigma_{ij} \epsilon_{ij}^*) \quad (1.31)$$

Finalement, la loi de conservation en régime harmonique s'exprime :

$$\frac{1}{2}j\omega\rho\dot{u}_i\dot{u}_i^* - \frac{1}{2}j\omega\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* - \frac{1}{2}\text{div}(\sigma_{ij}\dot{u}_i^*) = \frac{1}{2}f_i\dot{u}_i^* \quad (1.32)$$

ou encore:

$$\frac{1}{2}j\omega\text{Re}(\rho\dot{u}_i\dot{u}_i^*) - \frac{1}{2}j\omega(\text{Re}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*) + j\text{Im}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*)) + \text{div}(\Pi) = \langle\Pi_{inj}\rangle \quad (1.33)$$

avec $\langle\Pi_{inj}\rangle = \frac{1}{2}f_i\dot{u}_i$.

En séparant la partie réelle et imaginaire de l'équation 1.33 devient :

$$\text{div}(\langle I \rangle) + \langle I_{diss} \rangle = \langle I_{inj} \rangle \quad (1.34)$$

$$\text{div}(\langle J \rangle) + 2\omega\langle L \rangle = \langle J_{inj} \rangle \quad (1.35)$$

Cette équation représente la forme locale de la conservation de l'énergie en régime harmonique en utilisant les densités d'énergies cinétique, potentielle, active, réactive et la densité de Lagrangien.

Les paramètres énergétiques partiels (ondulatoires) sont aussi présentés par Ichchou [41]. Les grandeurs partielles représentent les paramètres cinématiques ou énergétiques associés à une forme d'onde. Les structures en vibration sont le siège de différents types d'ondes (onde longitudinale, flexion,...). Dans certains cas canoniques, les expressions explicites de la réponse dynamique du système à base d'ondes sont connues. Pour un système à une dimension, deux formes d'ondes sont présentées qu'on va les noter o_1 et o_2 . Si on procède à l'étude onde par onde, les différentes énergies pour chaque onde sont écrites:

$$\langle T^{o_1} \rangle = \frac{1}{4}\rho\dot{o}_{1i}\dot{o}_{1i}^* \quad (1.36)$$

$$\langle U^{o_1} \rangle = \frac{1}{4}\text{Re}(\sigma_{ij}^{o_1}\varepsilon_{ij}^{o_1*}) \quad (1.37)$$

$$\langle \Pi^{o_1} \rangle = -\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{o_1}\dot{o}_{1i}^* \quad (1.38)$$

Ainsi, on peut écrire les énergies partielles d'interférences dues au croisement des deux ondes différentes:

$$\langle T^{o_1 o_2} \rangle = \frac{1}{4}\rho\dot{o}_{1i}\dot{o}_{2i}^* \quad (1.39)$$

$$\langle U^{o_1 o_2} \rangle = \frac{1}{4}\text{Re}(\sigma_{ij}^{o_1}\varepsilon_{ij}^{o_2*}) \quad (1.40)$$

$$\langle \Pi^{o_1 o_2} \rangle = -\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{o_1}\dot{o}_{2i}^* \quad (1.41)$$

Donc on peut écrire les différentes énergies globales en tant qu'énergie propre + énergie de croisement. Finalement, le bilan de puissance partiel pour chaque onde peut être exprimé pour l'onde o_1 de même pour o_2 :

$$\text{div}(\langle I^{o_1} \rangle) + \langle I_{diss}^{o_1} \rangle = \langle I_{inj}^{o_1} \rangle \quad (1.42)$$

$$\text{div}(\langle J^{o_1} \rangle) + 2\omega\langle L^{o_1} \rangle = \langle J_{inj}^{o_1} \rangle \quad (1.43)$$

La MES néglige l'interférence entre les ondes. Ces interférences sont l'origine de l'aspect oscillant des grandeurs énergétiques et de la densité de Lagrangien dans les systèmes.

1.2.3 Méthode d'intensité ondulatoire (WIA)

La méthode d'intensité ondulatoire (Wave Intensity Analysis, WIA) est une extension de la SEA basée sur la description propagatoire de la dynamique des systèmes. Cette méthode proposée par Langley [42], permet de prendre en compte les directivités des énergies vibratoires. La notion des sous-systèmes est toujours présente. La WIA propose une description de la réponse dynamique de chaque système par un champ d'ondes aléatoires. Ce champ est supposé stationnaire en fréquence et non-homogène dans l'espace.

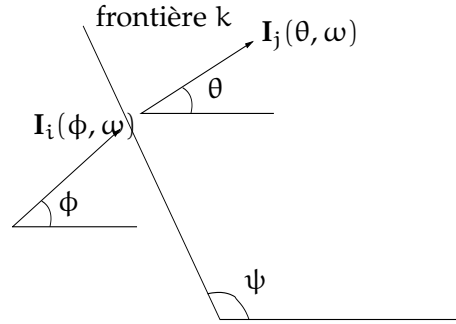


FIGURE 1.6 – Puissance entre deux types d'ondes à travers la frontière k

La densité d'un sous-système peut être écrite comme la somme des énergies portées par chaque onde se propageant dans la direction θ .

$$\langle E_{\text{tot}} \rangle = 2\langle E_c \rangle = \sum_j \int_{\Theta} \int_0^{\infty} e_j(\theta, \omega) d\theta d\omega \quad (1.44)$$

avec $e_j(\theta, \omega) = 2\rho\omega^2 S_j(\theta, \omega)$ représente la densité d'énergie de chaque onde issue de l'excitation aléatoire, et $S_j(\theta, \omega)$ la densité spectrale de l'onde d'indice j .

D'une façon analogue à SEA, la puissance injectée peut être écrite sous la forme :

$$P_{\text{inj},j}(\theta, \omega) = P_{\text{diss},j}(\theta, \omega) + \sum_i P_{\text{in},i,j}(\theta, \omega) + P_{\text{out},j}(\theta, \omega) \quad (1.45)$$

avec $P_{\text{in},j}(\theta, \omega) = \omega\eta_j E_j(\theta, \omega)$ est la puissance dissipée par le sous-système écrit en fonction de la perte η_j et de l'énergie E_j de l'onde j .

$P_{\text{in},i,j}(\theta, \omega)$ est la puissance échangée aux frontières du sous système k entre l'onde i et l'onde j et s'exprime de la manière suivante :

$$P_{\text{in},i,j}(\theta, \omega) = \sum_k P_{k,i,j}(\theta, \omega) \quad (1.46)$$

où $P_{k,i,j}(\theta, \omega)$ est la puissance transmise de l'onde i à l'onde j à travers la frontière k et s'écrit sous la forme:

$$P_{k,i,j}(\theta, \omega) = \frac{\omega L_k}{2\pi} \frac{E_i(\phi_i, \omega)}{v_i} \frac{\cos(\theta + \pi/2 - \psi_k)}{c_j} \tau_{ij}(\phi_i + \pi/2 - \psi_k) \quad (1.47)$$

et $P_{out,j}(\theta, \omega)$ la puissance sortante du sous-système portée par l'onde de type j est :

$$P_{out,j}(\theta, \omega) = \mathbf{I}(\theta, \omega) \mathbf{n} \quad (1.48)$$

avec $\mathbf{I}(\theta, \omega)$ est l'intensité associée à l'onde de type j et de direction ϕ .

Finalement, on peut résoudre le problème (1.45) qui devient :

$$P_{in,j}(\theta, \omega) = \omega \eta_j E_j(\theta, \omega) + \frac{E_j(\theta, \omega)}{v_j} \frac{\omega}{2\pi c_j} \sum_l \frac{L_l \cos(\theta + \pi/2 - \psi_l)}{c_j} \\ \frac{\omega}{2\pi c_j} \sum_{i,k} \frac{E_i(\phi_i, \omega)}{v_i} L_k \cos(\theta + \pi/2 - \psi_k) \tau_{ij}(\phi_i + \pi/2 - \psi_k) \quad (1.49)$$

en utilisant la méthode de Galerkin on obtient l'inconnue E_j qui est exprimée par une sommation des fonctions de forme suivante :

$$E_j(\theta, \omega) = \sum_p E_{jp}(\theta) N_{jp}(\omega) \quad (1.50)$$

La WIA est une méthode fiable qui donne des résultats plus précis que la SEA pour les systèmes réverbérants et faiblement amortis surtout à hautes fréquences. C'est une autre version de la SEA mais en tenant compte de la directivité basée sur l'hypothèse d'incohérence des ondes qui garantit une superposition linéaire des énergies. Cependant, la WIA reste incapable de fournir une description spatiale de l'état dynamique des systèmes.

1.3 | Les méthodes hybrides et approches moyennes fréquences

Les deux parties précédentes présentent deux différentes approches (locales et globales) basées sur différents types de variables (cinématiques et énergétiques) et applicables à des différents domaines de fréquences (basses et hautes fréquences). Certains chercheurs essaient de combiner deux méthodes différentes pour surmonter le problème des moyennes fréquences. Dans le cadre du projet "Mid-Frequency", tous les partenaires ont proposé leurs approches pour cette bande de fréquences. Cette partie va être consacrée aux différentes approches développées pour évaluer le comportement dynamique des systèmes mécaniques dans le domaine des moyennes fréquences.

1.3.1 | Hybridation EF-SEA

La méthode EF-SEA est une méthode énergétique qui calcule les énergies et les puissances injectées des sous-systèmes en utilisant les approches modales (EF) [43]. Les fonctions admissibles sont partitionner en deux parties: fonctions admissibles globales et locales. Donc le champ de déplacement s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_g} a_n^g(t) \phi_n^g(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{N_l} a_n^l(t) \phi_n^l(\mathbf{x}) \quad (1.51)$$

Le choix des fonctions de formes est conditionné par l'aptitude à représenter le comportement vibratoire d'une longueur d'onde donnée.

Classiquement, l'écriture matricielle de cette approximation peut être exprimée comme suit :

$$\begin{pmatrix} D_{gg} & D_{gl} \\ D_{lg} & D_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n^g \\ a_n^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n^g \\ F_n^l \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

Une simple manipulation analytique nous conduit à exprimer a_n^l en fonction des autres paramètres afin de limiter le temps de calcul. De Rochambeau [44] a développé les équations de la méthode SEA-Like pour le système couplé plaque-cavité. Le couplage entre la cavité et la plaque est mis en valeur en utilisant la méthode de couplage modale avec le minimum de temps de calcul ainsi que la mémoire nécessaire. Elle consiste à calculer les différentes énergies en utilisant l'approche modale.

Énergie cinétique de la structure

L'énergie cinétique de la structure peut s'exprimer de la façon suivante :

$$E_{cs} = \frac{1}{2} h_s \rho_s \int_{A_s} \frac{|v(s)|^2}{2} ds \quad (1.53)$$

où v est la vitesse complexe de la structure. En exprimant la vitesse normale de la structure en fonction de sa décomposition modale, l'énergie cinétique devient :

$$E_{cs} = \frac{1}{4} h_s \rho_s \sum_{p,q} V_p V_q^* \int_{A_s} \Phi_p^s \Phi_q^s ds \quad (1.54)$$

Ainsi, on obtient la moyenne fréquentielle de l'énergie cinétique de la structure :

$$\langle E_{cs} \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_m M_m^s \int_{\Delta\omega} |V_m|^2 d\omega \quad (1.55)$$

avec $|V_m|$ est la vitesse modale exprimée :

$$|V_m|^2 = \frac{1}{4} \frac{\rho_s h_s}{\rho_0^2 c_0^2 A_s} S_{p_{ext}}(\omega) \sum_p \frac{|(H_{ss})_{m,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \quad (1.56)$$

Énergie potentielle de la structure

D'après la théorie de Kirchhoff, l'énergie potentielle de la structure s'écrit :

$$E_{ps} = \frac{1}{4} D \int_{A_s} [|w,xx|^2 + |w,yy|^2 + 2\nu_s(w,xx)(w,yy)^* + 2(1-\nu_s)|w,xy|^2] ds \quad (1.57)$$

En utilisant le nombre d'onde k_m^s de flexion associé au mode m , la masse modale M_m^s , l'énergie potentielle de la structure moyennée sur l'espace fréquentiel s'exprime donc :

$$\langle E_{ps} \rangle = \frac{1}{4} \frac{D}{\rho_s h_s} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \frac{1}{\omega^2} \sum_m (k_m^s)^4 M_m^s |V_m|^2 d\omega \quad (1.58)$$

Les équations (1.55) et (1.58) donnent l'énergie totale de la structure moyennée sur les fréquences :

$$\langle E_s \rangle = \langle E_{cs} \rangle + \langle E_{ps} \rangle \quad (1.59)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_m M_m^s |V_m|^2 \left(1 + \frac{D}{\rho_s h_s} \frac{(k_m^s)^4}{\omega^2} \right) d\omega \quad (1.60)$$

Dans le cas particulier d'une structure simplement appuyée, le nombre d'onde de flexion k_m^s et la masse modale M_m^s sont calculés :

$$k_m^s = \pi \sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \quad (1.61)$$

$$M_m^s = \rho_s h_s \frac{A_s}{4} \quad (1.62)$$

Ainsi, l'énergie totale s'écrit :

$$\langle E_s \rangle = \frac{A_s}{16} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_m |V_m|^2 \left(\rho_s h_s + \frac{D\pi^4}{\omega^2} \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)^2 \right) d\omega \quad (1.63)$$

Énergie cinétique de la cavité

Etant donné ϕ le potentiel acoustique dans la cavité et $\vec{v}_a$ la vitesse dans la cavité, l'énergie cinétique dans la cavité s'écrit :

$$E_{ca} = \frac{1}{4} \rho_0 \int_V |\vec{v}_a|^2 dV \quad (1.64)$$

On peut relier la vitesse particulaire et la pression au potentiel acoustique grâce aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \vec{v}_a = -\text{grad}\phi \\ p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho_0 j\omega \phi \end{cases} \quad (1.65)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\vec{v}_a = \frac{-j}{\rho_0 \omega} \text{grad}(p) \quad (1.66)$$

L'équation (1.64) devient alors :

$$E_{ca} = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \iiint_V |\text{grad}(p)|^2 dV \quad (1.67)$$

En exprimant la pression en fonction de sa décomposition modale on obtient la moyenne fréquentielle de l'énergie cinétique dans la cavité :

$$\langle E_{ca} \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0^2} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \frac{1}{\omega^2} \sum_n M_n^a (k_n^a)^2 |P_n|^2 d\omega \quad (1.68)$$

avec k_n^a qui est le nombre d'onde acoustique associé au mode n de la cavité et qui s'exprime de la façon suivante :

$$k_n^a = \pi \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2}} \quad (1.69)$$

(r, s, t) sont les indices du n -ième mode de cavité.

Énergie potentielle de la cavité

L'énergie potentielle de la cavité moyennée sur l'espace fréquentiel s'écrit [44] :

$$\langle E_{pa} \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_n M_n^a |P_n|^2 d\omega \quad (1.70)$$

Finalement, l'énergie totale de la cavité moyennée sur l'espace fréquentiel devient :

$$\langle E_a \rangle = \langle E_{ca} \rangle + \langle E_{pa} \rangle \quad (1.71)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_n \frac{M_n^a}{\rho_0^2 c_0^2} |P_n|^2 \left(\frac{c_0^2}{\omega^2} (k_n^a)^2 + 1 \right) d\omega \quad (1.72)$$

ce qui donne :

$$\langle E_a \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_n \frac{M_n^a}{\rho_0^2} |P_n|^2 \left(\frac{\pi^2}{\omega^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c_0^2} \right) d\omega \quad (1.73)$$

où la masse modale du n-ième mode de cavité est exprimée par :

$$M_n^a = \rho_0 V \left(\frac{1}{2} \right)^{3-\delta_{r,0}-\delta_{s,0}-\delta_{t,0}} \quad (1.74)$$

Finalement, les coefficients de la matrice SEA-like (1.75) sont déterminés en fonction des puissances injectées dans la structure et la cavité :

$$\begin{pmatrix} \langle E_s \rangle \\ \langle E_a \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ss} & A_{sa} \\ A_{as} & A_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle P_{inj,s} \rangle \\ \langle P_{inj,a} \rangle \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

1.3.2 | Hybridation WFE-SEA

La WFE-SEA est une autre méthode hybride équivalente à la FE-SEA. Ce couplage méthode BF-méthode HF permet la relaxation des hypothèses de la SEA qui permet la cohérence de l'approche hybride avec la bande des moyennes fréquences. Chronopoulos *et al.*[34] a proposé un modèle robuste de prédiction du comportement vibro-acoustique des structures composites via la SEA. Les caractéristiques spectrales des structures composites avec des courbures sont estimées par la méthode des éléments finis ondulatoires 2D.

La densité modale

Dans ces travaux, la densité modale d'une coque peut être exprimée en fonction du nombre d'onde pour chaque angle $\kappa(\omega, \phi)$ et de la vitesse de groupe correspondante $c_g(\omega, \phi)$:

$$n(\omega, \phi) = \frac{A \kappa(\omega, \phi)}{2\pi^2 |c_g(\omega, \phi)|} \quad (1.76)$$

avec A est la surface de la coque.

Et la vitesse de groupe est exprimée comme suit :

$$c_g(\omega, \phi) = \frac{d\omega}{dk(\omega, \phi)} \quad (1.77)$$

Ensuite, une formulation de l'efficacité de radiation $\sigma(\kappa(\omega, \phi))$ est donnée par :

$$\sigma_{rad}(\omega) = \frac{1}{n(\omega)} \int_0^\pi \sigma(\kappa(\omega, \phi)) n(\omega, \phi) d\phi \quad (1.78)$$

L'efficacité du rayonnement pour les cylindriques peut être estimée en calculant les nombres d'ondes axiaux et circonférentiels pour chaque mode du cylindre qui vérifie la relation suivante :

$$k^2 > k_c^2 + k_a^2 \quad (1.79)$$

avec k le nombre d'onde acoustique.

Ces différents paramètres font appel au calcul des nombres d'ondes qui sont calculés par la méthode WFE 2D [33]. La première étape consiste à extraire les matrices masse et raideur. Ensuite, le passage du problème structural au problème spectral permet d'obtenir le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \lambda_a^{-1}\mathbf{I} & \lambda_c^{-1}\mathbf{I} & \lambda_c^{-1}\lambda_a^{-1}\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \lambda_c\mathbf{I} \\ \lambda_a\mathbf{I} \\ \lambda_c\lambda_a\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{u}_Q = \mathbf{0} \quad (1.80)$$

avec $\mathbf{D}$ est la matrice de raideur dynamique $\mathbf{D} = (\mathbf{K}(1 + \eta i) - \omega^2 \mathbf{M})$, $\mathbf{u}_Q$ le déplacement du degré de liberté du bord de référence et λ_c, λ_a sont les longueurs d'ondes des deux directions de la coque étudiée (tout en tenant compte que les coques sont gauches) dont les matrices mass et raideur sont corrigées par des matrices de transformations. La résolution du problème aux valeurs propres (1.80) conduit à évaluer les caractéristiques spectrales des panneaux en composites.

Ces deux méthodes hybrides présentées sont parmi plusieurs méthodes développées et améliorées pour surmonter les limites des moyennes fréquences, à savoir: Le 'Wave Based Method, (WBM)' [45, 46], Le 'Variational Theory of Complex Rays, (VTCR)' [47, 48], la 'Complex Envelope Vectorization, (CEV)' [49], le 'Statistical modal Energy distribution Analysis, (SmEdA)' [50].

La plupart des méthodes locales utilisent des variables déterministes (définies et invariantes). Mais il y a toujours des différences entre ce qu'on calcule et ce qu'on mesure sur différents échantillons. Cette différence est due au fait que les paramètres utilisés ne sont pas connus (incertains). Les incertitudes peuvent être classées en différentes catégories:

- **Paramètres aléatoires** : ce sont les paramètres mécaniques des problèmes (module d'Young, la densité, ...).

- **Les paramètres mal connus** : c'est le cas des conditions aux limites et les différents types d'assemblages qui sont difficiles à modéliser.
- **Les paramètres variables** : ce sont surtout les paramètres variables dans le temps ou les paramètres qu'on maîtrise mal (dégradation dû à la durée de vie d'un assemblage ...)
- **Les incertitudes de modèle** : Ce sont par exemple les lois de comportement choisies qui représentent mal ou de façon incomplète les phénomènes physiques. D'une façon générale, ces incertitudes sont dues au passage du système réel aux systèmes simplifiés (modèle choisi).

Tout ces types d'incertitudes peuvent modifier le comportement vibratoire des systèmes mécaniques. Leur effet devient de plus en plus important en moyennes et hautes fréquences [51].

Notre contribution dans le projet est un essai de combinaison d'une méthode spectrale (WFE) et une approche stochastique paramétrique pour prédire le comportement vibratoire des systèmes mécaniques périodiques à paramètres incertains en moyenne et haute fréquences. Il est donc nécessaire d'introduire les différentes approches stochastiques traitant des systèmes mécaniques aléatoires.

1.4 | Modélisation des systèmes incertains

Depuis quelques années, les méthodes probabilistes tenant compte de l'aléa dans les problèmes mécaniques ont été développées et améliorées. Cette partie est une présentation des différentes approches probabilistes (paramétrique, non-paramétrique) ainsi que des différentes méthodes de discrétisation des champs aléatoires (La discrétisation de Karhunen-Loève, la notion de chaos polynomial...)

1.4.1 | Champs aléatoires et théorie de base

Un champ aléatoire scalaire $H(x, \theta)$ est un ensemble de variables aléatoires indexées par un paramètre continu $x \in \Omega$, avec Ω est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^d$ décrivant la géométrie du système.

Si on fixe $x = x_0$, $H(x_0, \theta)$ est une variable aléatoire, inversement, $H(x, \theta_0)$ est une réalisation du champ aléatoire. Si x est un vecteur aléatoire, le champ aléatoire $H(x, \theta)$ est dit vectoriel. La moyenne, la variance et les moments d'une variable aléatoire X sont exprimées :

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (1.81)$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \quad (1.82)$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx \quad (1.83)$$

Les moments centrés réduits d'ordre 3 et 4 portent respectivement les noms de coefficient d'asymétrie et coefficient d'aplatissement définis par :

$$\delta = \frac{E[(X - \mu_X)^3]}{\sigma^3} \quad (1.84)$$

$$\kappa = \frac{E[(X - \mu_X)^4]}{\sigma^4} \quad (1.85)$$

La covariance de deux variables aléatoires X et Y s'écrit :

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (1.86)$$

En utilisant $f_{X,Y}(x, y)$, la densité de probabilité conjointe des deux variables :

$$\text{Cov}[X, Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (1.87)$$

Si σ_X et σ_Y sont respectivement les écarts-types des variables X et Y , le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires X et Y est défini par :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (1.88)$$

Un champ aléatoire gaussien est complètement défini par sa moyenne $\mu(x)$, sa variance $\sigma^2(x)$ et sa fonction d'autocovariance $C(x, x')$ définie par :

$$C(x, x') = \text{Cov}[H(x), H(x')] \quad (1.89)$$

Un champ aléatoire est stationnaire si sa moyenne et sa variance sont constantes et ρ ne dépend que de la différence $x' - x$, avec ρ est la fonction d'autocorrélation définie par :

$$\rho(x, x') = \frac{C(x, x')}{\sigma(x)\sigma(x')} \quad (1.90)$$

La discrétisation d'un champ aléatoire est l'approximation de $H(x, \theta)$ par $\tilde{H}(x, \theta)$ définies par un nombre fini de variables aléatoires $\{\xi_i(\theta), i = 1, \dots, n\}$ qui forment un vecteur aléatoire noté χ :

$$H(x, \theta) \approx \tilde{H}(x, \theta) = \mathfrak{F}[x, \chi] \quad (1.91)$$

Il existe trois grands types de discrétisations :

- Discrétisation par valeurs ponctuelles
- Discrétisation par valeurs moyennes
- Méthodes de développement en séries, où ce champ est représenté par une série de variables aléatoires et de fonctions spatiales déterministes.

1.4.2 | La décomposition de Karhunen-Loève

La discrétisation de Karhunen-Loève [52] permet de décomposer un champ aléatoire $H(x, \theta)$ en une moyenne et une partie aléatoire projetée sur la base des valeurs et vecteurs propres de la fonction d'autocovariance $C_{HH}(x, x')$:

$$H(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(x) \quad (1.92)$$

où $\{\xi_i(\theta), i = 1, \dots\}$ sont les coordonnées de la réalisation du champ aléatoire vis-à-vis de l'ensemble des fonctions déterministes φ_i . Les φ_i forment une base complète orthogonale de l'espace de carré sommable $\mathcal{L}^2(\Omega)$. En utilisant l'équation (1.92) pour calculer la $\text{Cov}[H(x), H(x')]$ et en imposant son égalité à $C_{HH}(x, x')$, on aura :

$$E[\xi_k \xi_l] = \delta_{kl} \quad (1.93)$$

avec δ_{kl} est le symbole de Kronecker.

Cela implique que la famille $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ est un ensemble de variables orthogonales. L'équation (1.92) peut être tronquée à un ordre M .

$$\tilde{H}(x, \theta) \simeq \mu(x) + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(x) \quad (1.94)$$

L'ensemble des variables aléatoires est orthogonal si et seulement si les fonctions de bases $\varphi_i(x)$ et les constantes λ_i sont des solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\Omega} C_{HH}(x, x') \varphi_i(x') d\Omega = \lambda_i \varphi_i(x) \quad (1.95)$$

ainsi on peut obtenir une expression de chaque variable aléatoire :

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\Omega} [H(x, \theta) - \mu(x)] \varphi_i(x) d\Omega \quad (1.96)$$

donc lorsque $H(\cdot)$ est un champ gaussien, chaque variables aléatoire ξ_i est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Finalement, la variance de l'erreur obtenue après la troncature à l'ordre M s'exprime :

$$\text{Var}[H(x) - \tilde{H}(x)] = \sigma^2(x) - \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i^2(x) = \text{Var}[H(x)] - \text{Var}[\tilde{H}(x)] \quad (1.97)$$

1.4.3 | Le chaos polynomial

La méthode du chaos polynomial est une approche qui permet la projection des processus aléatoires du second ordre (processus de variance finie) sur une base de polynômes orthogonaux. Ce processus peut être modélisé par deux parties : une composante déterministe représentant les modes stochastiques pondérant les polynômes d'Hermite multidimensionnels qui sont constitués par des variables aléatoires centrées réduites. Ces polynômes représentent une base orthogonale permettant l'approximation, au sens des moindres

carrés, des processus aléatoires. Cette méthode est utilisée ensuite dans différents domaines. Ghanem et Spanos [53] ont développé la méthode des éléments finis stochastiques spectrale dans le cadre de la mécanique linéaire élastique. Cette combinaison de l'approche stochastique paramétrique avec la méthode des éléments finis permet de développer toutes les variables aléatoires d'entrées en série de polynômes de chaos et exprimer les solutions de sorties sur cette même base. Finalement, un post-traitement de coefficients des paramètres de sorties permet d'étudier la dynamique stochastique des systèmes mécaniques. Une généralisation de cette approche est ensuite proposée. Xiu et Karniadakis [54] et Soize et Ghanem [55] ont proposé une formulation du chaos polynômial généralisés pour différents types de lois de probabilités. Cette amélioration permet le traitement de différentes applications dans divers domaines : analyse de stabilité et la fiabilité des systèmes mécaniques [56], les problèmes des mécaniques des fluides [57]. Isukapalli [58] a utilisé cette approche généralisée pour étudier l'effet des incertitudes dans les milieux biologiques. Blatman [59] a proposé une approximation par les polynômes de chaos creux qui consiste à identifier les coefficients modaux négligeables en se basant sur une procédure itérative. Cette méthode est appliquée pour l'étude de fiabilité d'un treuil élastique.

Pour calculer les coefficients modaux de la réponse, deux approches sont souvent utilisées : approche intrusive et non-intrusive. L'approche intrusive utilise la projection de Galerkin pour passer d'un système incertain projeté sur la base des chaos à un système d'équations déterministes. Cette approche nécessite la modification de l'algorithme de calcul selon le problème traité. Cette approche est assez performante par rapport à la méthode Monte Carlo mais le fait qu'il faille changer le modèle pose beaucoup de problèmes surtout pour les systèmes complexes et les systèmes non-linéaires. En revanche, l'approche non-intrusive est une approche qui conduit au calcul des coefficients modaux sans aucun changement au niveau du modèle stochastique. Dans cette catégorie, il y a deux méthodes différentes :

- Méthode de projection : elle consiste à projeter la solution sur la base du chaos.
- Méthode de regression : qui consiste à approximer les modes stochastiques en minimisant, au sens des moindres carrés, la différence entre la solution aléatoire et l'approximation sur la base du chaos.

Tous ces aspects vont être détaillés dans le dernier chapitre de la thèse.

1.4.4 | Les simulations de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est une méthode intuitive qui consiste à résoudre les équations déterministes pour un grand nombre de réalisations associées aux paramètres stochastiques du problème physique pour obtenir une population correspondant aux quantités aléatoires de la réponse du système. L'analyse de cette population conduit à évaluer les différentes statistiques de la réponse. L'inconvénient de cette méthode est l'exigence d'une capacité de résolution énorme ainsi qu'un temps de calcul non négligeable.

Rappelons qu'étant donné une population $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}\}$ construite à partir d'une den-

sité de probabilité f_X , les moments statistiques de la réponse $Y = M(X)$ égales à :

$$\mu_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M(x^{(i)}) \quad (1.98)$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (M(x^{(i)}) - \mu_Y)^2 \quad (1.99)$$

1.4.5 | La méthode quadrature de Gauss

La méthode quadrature de Gauss consiste à évaluer une solution approchée d'une intégrale de la forme :

$$I = \int_{D_X} f(z)W(z)dz \quad (1.100)$$

Par définition, la moyenne et la variance d'une réponse s'écrivent :

$$\mu_Y = E[M(X)] = \int_{D_X} M(x)f_X(x)dx \quad (1.101)$$

$$\sigma_Y^2 = E[(M(X) - \mu_Y)^2] = \int_{D_X} (M(X) - \mu_Y)^2 f_X(x)dx \quad (1.102)$$

On considère une variable aléatoire X décrite par une distribution $f_X(x)$ sur le domaine D_X . Si h est une fonction $X \mapsto h(x)$ deux fois intégrable, l'approximation de la moyenne mathématique de la variable aléatoire $h(X)$ est écrite comme suit :

$$E[h(X)] = \int_{D_z} h(x)f_X(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w^{(i)}h(x^{(i)}) \quad (1.103)$$

avec $\{(x^{(i)}, w^{(i)}), i = 1, \dots, n\}$ représentent respectivement les noeuds et les poids. D'une façon générale, si on considère un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_M\}^T$ d'une densité de probabilité conjointe f_X écrite sous la forme :

$$f_X(\mathbf{x}) = f_{X_1} \times f_{X_2} \cdots \times f_{X_M} \quad (1.104)$$

l'approximation de la moyenne de la réponse peut être exprimée :

$$E[h(\mathbf{X})] = \int_{D_X} h(\mathbf{x})f_X(\mathbf{x})d\mathbf{x} \approx \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_M=1}^{n_M} w^{(i_1)} \cdots w^{(i_M)} h(w^{(i_1)}, \dots, w^{(i_M)}) \quad (1.105)$$

L'inconvénient majeur de cette méthode c'est qu'en augmentant le nombre de variables aléatoires, le calcul devient de plus en plus lourd.

1.4.6 | La méthode des perturbations

La méthode des perturbations est basée sur le développement en série de Taylor. Elle est très utilisée dans le domaine des éléments finis stochastiques [60]. La méthode consiste à

décomposer le vecteur réponse $U(\omega, \theta)$ en une partie déterministe et une partie représentant la sensibilité à l'ordre 1 du vecteur réponse peut être écrite :

$$U(\omega, \theta) = U_0(\omega) + \sum_{r=1}^p \frac{\partial U(\omega)}{\partial \xi_r}(\theta) \quad (1.106)$$

Cette méthode a été utilisée dans différents domaines : résolutions des problèmes linéaires [61, 62], des problèmes non-linéaires [63] et analyse de fiabilité [64]. Les approximations de Padé représentent une solution pour accélérer la convergence de la solution et du domaine de validité de l'approximation d'une expansion en séries de Taylor.

Pour mieux expliquer cette méthode on va présenter un cas simple d'application.

L'équation dynamique d'un système discret est connu sous la forme :

$$[K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} = \{0\} \quad (1.107)$$

On considère que la solution est de type sinusoïdal, et l'analyse modale du système nous conduit à un problème aux valeurs propres suivant :

$$([K] - \lambda_i [M])\{\Phi_i\} = \{0\} \quad i = \{1, 2, \dots, N\} \quad (1.108)$$

avec $\lambda_i = \omega_i^2$ et Φ_i sont les valeurs propres et les vecteurs propres du $i^{\text{ème}}$ mode de vibration. Si notre système contient des incertitudes (matérielles ou géométriques), les matrices masse et raideur deviennent des matrices en fonction des paramètres aléatoires.

Calcul des modes propres aléatoires

Pour le même système (1.108) à N ddl, pour chaque mode i , le problème aux valeurs propres aléatoires s'écrit sous la forme :

$$([K(\chi)] - \lambda_i(\chi) [M(\chi)])\{\Phi_i(\chi)\} = \{0\} \quad i = \{1, 2, \dots, N\} \quad (1.109)$$

où χ est le vecteur des variables aléatoires discrétisées $\xi(\theta)$. Si nous avons plusieurs paramètres aléatoires, le vecteur χ contient toutes les variables aléatoires discrétisées :

$$\chi = \{\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \dots, \xi_p(\theta)\} \quad (1.110)$$

En utilisant les notations pour une matrice A :

$$\begin{aligned} \Delta \chi_m &= (\chi_m - \chi_m^0) \\ [A]_{\chi_m}^I &= \frac{\partial A}{\partial \chi_m} \\ [A]_{\chi_m, \chi_n}^{II} &= \frac{\partial^2 A}{\partial \chi_m \partial \chi_n} \end{aligned}$$

Le développement en série de Taylor de toutes les quantités donne :

$$[K(\chi)] = [K]^0 + \sum_m [K]_{\chi_m}^I \Delta\chi_m + \frac{1}{2} \sum_{m,n} [K]_{\chi_m, \chi_n}^{II} \Delta\chi_m \Delta\chi_n \quad (1.111)$$

$$[M(\chi)] = [M]^0 + \sum_m [M]_{\chi_m}^I \Delta\chi_m + \frac{1}{2} \sum_{m,n} [M]_{\chi_m, \chi_n}^{II} \Delta\chi_m \Delta\chi_n \quad (1.112)$$

$$[\lambda(\chi)] = [\lambda]^0 + \sum_m [\lambda]_{\chi_m}^I \Delta\chi_m + \frac{1}{2} \sum_{m,n} [\lambda]_{\chi_m, \chi_n}^{II} \Delta\chi_m \Delta\chi_n \quad (1.113)$$

$$[\Phi(\chi)] = [\Phi]^0 + \sum_m [\Phi]_{\chi_m}^I \Delta\chi_m + \frac{1}{2} \sum_{m,n} [\Phi]_{\chi_m, \chi_n}^{II} \Delta\chi_m \Delta\chi_n \quad (1.114)$$

En utilisant ces équations, on peut regrouper les termes de même ordre et on obtient ces équations pour chaque mode i :

Ordre zéro :

$$([K]^0 - \lambda_i^0 [M]^0) \{\Phi\}^0 = \{0\} \quad (1.115)$$

Ordre un :

$$\sum_m ([K]^0 - \lambda_i^0 [M]^0) \{\Phi\}_{\chi_m}^I \Delta\chi_m = - \sum_m ([K]_{\chi_m}^I - (\lambda_i)_{\chi_m}^I [M]^0 - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_m}^I) \{\Phi_i\}^0 \Delta\chi_m \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.116)$$

Ordre deux :

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} ([K]^0 - (\lambda_i)^0 [M]^0) \{\Phi\}_{\chi_m, \chi_n}^{II} \Delta\chi_m \Delta\chi_n = \\ & - \sum_{m,n} (([K]_{\chi_m, \chi_n}^{II} - (\lambda_i)_{\chi_m, \chi_n}^{II} [M]^0 - 2(\lambda_i)_{\chi_m}^I [M]_{\chi_n}^I - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_m, \chi_n}^{II}) \{\Phi_i\}^0 \\ & + 2([K]_{\chi_m}^I - (\lambda_i)_{\chi_m}^I [M]^0 - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_n}^I) \{\Phi_i\}_{\chi_n}^I) \Delta\chi_m \Delta\chi_n \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1.117)$$

La résolution des équations stochastiques sera successivement de l'ordre le moins élevé au plus élevé. Donc on peut déterminer toutes les inconnues relatives aux valeurs et aux vecteurs propres [60]. Si on appelle N le nombre de variables aléatoires, la valeur propre de premier ordre peut être écrite comme suit :

$$(\lambda_i)_{\chi_m}^I = \{\Phi_i^T\}^0 ([K]_{\chi_m}^I - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_m}^I) \{\Phi_i\}^0 \quad (1.118)$$

L'équation (1.118) est obtenue en utilisant la propriété d'orthogonalité des vecteurs propres. La valeur propre de deuxième ordre est la double sommation de la deuxième dérivée partielle des valeurs propres multipliées par la covariance entre les variables aléatoires utilisées

dans le calcul de la dérivée.

$$(\lambda_i)^{(2)} = \sum_{m,n=1}^N (\lambda_i)_{\chi_m, \chi_n}^{II} \text{Cov}(\chi_m, \chi_n) = \sum_{m,n=1}^N \frac{\partial^2 (\lambda_i)^0}{\partial \chi_m \partial \chi_n} \text{Cov}(\chi_m, \chi_n) \quad (1.119)$$

Explicitement,

$$\begin{aligned} (\lambda_i)^{(2)} = & \sum_{m,n=1}^N \{ \{\Phi_i^T\}^0 ([K]_{\chi_m, \chi_n}^{II} - 2(\lambda_i)_{\chi_m}^I [M]_{\chi_m}^I - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_m \chi_n}^{II}) \{\Phi_i\}^0 + \\ & 2\{\Phi_i^T\}^0 ([K]_{\chi_m}^I - (\lambda_i)_{\chi_m}^I [M]^0 - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_m}^I) \{\Phi_i\}_{\chi_n}^I \} \text{Cov}(\chi_m, \chi_n) \end{aligned} \quad (1.120)$$

Calcul des vecteur propres aléatoires

La détermination des dérivées des vecteurs propres semble un peu plus compliquée. Plusieurs méthodes sont disponibles pour calculer le premier et le deuxième ordre [65]. Fox et Kapoor [66] proposent d'exprimer les dérivées du vecteur propre comme étant la combinaison linéaire des vecteurs propres du problème déterministe. Si on utilise les L premiers modes, la dérivée première des vecteurs propres s'écrit comme suit :

$$\{\Phi_i\}_{\chi_m}^I = \sum_{l=1}^L (C_{i_{\chi_m}})_l \{\Phi_l\}^0 \quad (1.121)$$

avec $(C_{i_{\chi_m}})_l$ est le $l^{\text{ème}}$ coefficient de la combinaison linéaire pour le calcul du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre par rapport à χ_m . Il est exprimé :

$$(C_{i_{\chi_m}})_l = \begin{cases} \frac{\{\Phi_l^T\}^0 \{F_i\}_{\chi_m}^I}{\lambda_l - \lambda_i} & l \neq i \\ -\frac{1}{2} \{\Phi_l^T\}^0 [M]_{\chi_m}^I \{\Phi_l\}^0 & l = i \end{cases} \quad (1.122)$$

avec

$$\{F_i\}_{\chi_m}^I = -([M]_{\chi_m}^I - (\lambda_i)_{\chi_m}^I [M]^0 - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_m}^I) \{\Phi_i\}^0 \quad (1.123)$$

de même façon, on peut écrire la dérivée d'ordre 2 des vecteurs propres :

$$\{\Phi_i\}^{(2)} = \sum_{m,n=1}^N \{\Phi_i\}_{\chi_m \chi_n}^{II} \text{Cov}(\chi_m, \chi_n) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.124)$$

En utilisant la méthode de Fox et Kapoor, on exprime la deuxième dérivée en utilisant les vecteurs propres d'ordre zéro :

$$\{\Phi_i\}^{(2)} = \sum_{l=1}^L (D_i^{(2)})_l \{\Phi_l\}^0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.125)$$

où $(D_i^{(2)})_l$ est le $l^{\text{ème}}$ coefficient de la combinaison linéaire pour le calcul de la deuxième dérivée partielle du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre. Il est donné par :

$$(D_i^{(2)})_l = \begin{cases} \frac{\{\Phi_l^T\}^0 \{F_i\}^{(2)}}{\lambda_i - \lambda_l} & l \neq i \\ - \sum_{m,n=1}^N \left(\frac{1}{2} \{\Phi_l^T\}^0 [M]_{\chi_m, \chi_n}^{II} \{\Phi_l\}^0 + 2 \{\Phi_l^T\} [M]_{\chi_m}^I \{\Phi_l\}_{\chi_m}^I \right. \\ \quad \left. + (C_{i_{\chi_m}})_l (C_{i_{\chi_n}})_l \text{Cov}(\chi_m, \chi_n) \right) & l = i \end{cases} \quad (1.126)$$

avec:

$$\begin{aligned} \{F_i\}^{(2)} = - \sum_{m,n=1}^N & \left(([K]_{\chi_m, \chi_n}^{II} - (\lambda_i)_{\chi_m, \chi_n}^{II} [M]^0 - 2(\lambda_i)_{\chi_m}^I [M]_{\chi_m}^I - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_m, \chi_n}^{II}) \{\Phi_i\}^0 \right. \\ & \left. + 2([K]_{\chi_m}^I - (\lambda_i)_{\chi_m}^I [M]^0 - (\lambda_i)^0 [M]_{\chi_m}^I) \{\Phi_i\}_{\chi_m}^I \text{Cov}(\chi_m, \chi_n) \right) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1.127)$$

L'inconvénient majeur c'est que la précision de cette méthode dépend de la trancature modale choisie.

1.4.7 | Approche non-paramétrique

Les différentes approches paramétriques déjà citées sont des méthodes traitant les incertitudes sur les paramètres du système : Densité, conditions aux limites, etc. Ces approches paramétriques consistent à décrire les paramètres incertains du modèle par des variables aléatoires en utilisant les informations disponibles. En revanche, ce type d'approche ne tient pas compte des incertitudes de modélisation. Ces incertitudes sont dues au passage du système réel au système modélisé. Durant la phase de la conception, les ingénieurs utilisent toujours des simplifications cinématiques pour prédire le comportement dynamique des systèmes. Par exemple on peut étudier une plaque tridimensionnelle par une théorie de Kirchhoff ou middlin, on peut aussi étudier une plaque en composite en utilisant la technique de l'homogénéisation qui permet d'avoir une équivalence entre cette plaque en composite et une plaque homogène. L'introduction de ces hypothèses engendre des incertitudes de modélisation qui sont mal quantifiées par les approches paramétriques. Une autre approche appelée "approche probabiliste non-paramétrique", basée sur la théorie des matrices aléatoires [67], consiste à remplacer les matrices du modèle moyen par des matrices aléatoires construites à partir des informations disponibles et en maximisant l'entropie [68]. Cette méthode développée par Soize [69, 70, 71, 72] est améliorée par différents chercheurs [73, 74, 75, 76].

1.4.7.1 | Le principe du maximum d'entropie

La notion d'entropie a été introduite par Shanon [77] dans le cadre de la théorie de l'information. Le principe du maximum d'entropie essaie de construire un modèle probabiliste en maximisant l'incertitude. Etant donné un vecteur réel $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ et $\mathbf{A} =$

$\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ une variable aléatoire du second ordre dont la loi de probabilité $\mathbf{a} \mapsto p_A(\mathbf{a})d\mathbf{a}$ et vérifie la condition de normalisation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^N} p_A(\mathbf{a})d\mathbf{a} = 1 \quad (1.128)$$

Si on dispose d'une seule information, l'espérance.

$$E\{g(\mathbf{A})\} = \mathbf{f} \quad (1.129)$$

avec $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ représente l'espérance mathématique et g est une fonction définie comme suit : $\mathbf{a} \mapsto g(\mathbf{a})$. Le maximum d'entropie consiste à trouver p_A qui maximise l'entropie :

$$S(p) = - \int_{\mathbb{R}^N} p(\mathbf{a}) \log(p(\mathbf{a})) d\mathbf{a} \quad (1.130)$$

En introduisant le multiplicateur de Lagrange $\lambda \in L_u$ associé à la contrainte où L_u est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^u$ de toutes les valeurs admissibles de λ , la solution du problème d'optimisation s'écrit :

$$p_A(\mathbf{a}) = c_0 \mathbf{1}_A(\mathbf{a}) \exp(-\langle \lambda, g(\mathbf{a}) \rangle), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \quad (1.131)$$

avec $\langle \cdot \rangle$ est le produit scalaire, $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A . La résolution de l'équation (1.131) permet la détermination de la constante de normalisation c_0 et le multiplicateur de Lagrange λ .

1.4.7.2 | La modélisation probabiliste non paramétrique

La modélisation probabiliste non-paramétrique passe par différentes étapes :

- Développement du modèle mathématique, encore appelé modèle moyen.
- Construction du modèle réduit à partir du modèle moyen.
- Construction du modèle stochastique à partir du modèle réduit et de l'approche non-paramétrique.
- Construction et convergence de solution stochastique.

Modèle moyen du système dynamique

L'équation dynamique discrétisée d'un système dynamique continu (modèle éléments finis) est écrite :

$$[\mathcal{M}]\ddot{\mathbf{y}}(t) + [\mathcal{D}]\dot{\mathbf{y}}(t) + [\mathcal{K}]\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.132)$$

avec $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ est le vecteur des m ddls, $\dot{\mathbf{y}}$, $\ddot{\mathbf{y}}$ sont les vitesses et accélérations respectivement, $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$ est le vecteur de forces externes appliquées et $[\mathcal{M}]$, $[\mathcal{D}]$ et $[\mathcal{K}]$ sont des matrices $(m \times m)$ symétriques définies positives de masse, d'amortissement et de raideur.

Modèle moyen réduit

Le modèle réduit est obtenu par la projection de l'équation (1.132) sur la base algébrique (matrice réelle $(m \times n)$) $[\Phi_n] = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Ainsi le vecteur des forces généralisées $\mathbf{F}^n(t) = [\Phi_n]^T \mathbf{f}(t)$. Les matrices de masse, d'amortissement et de raideur généralisées sont écrites comme suite :

$$[M_n] = [\Phi_n]^T [\mathcal{M}] [\Phi_n] \quad (1.133)$$

$$[D_n] = [\Phi_n]^T [\mathcal{D}] [\Phi_n] \quad (1.134)$$

$$[K_n] = [\Phi_n]^T [\mathcal{K}] [\Phi_n] \quad (1.135)$$

La solution du système réduit $\mathbf{y}^n(t) = [\Phi_n] \mathbf{q}^n(t)$ avec $\mathbf{q}^n$ est le vecteur de coordonnées généralisées vérifiant :

$$[M_n] \ddot{\mathbf{q}}^n(t) + [D_n] \dot{\mathbf{q}}^n(t) + [K_n] \mathbf{q}^n(t) = \mathbf{F}^n(t) \quad (1.136)$$

En utilisant l'équation (1.136), on peut construire le modèle probabiliste non paramétrique. L'idée consiste à substituer les différentes matrices dans le modèle réduit par des matrices aléatoires $[\mathbf{M}_n]$, $[\mathbf{D}_n]$ et $[\mathbf{K}_n]$ dont les lois de probabilités sont directement construites. Si on définit la réponse stochastique du système aléatoire $\mathbf{Y}^n(t) = [\Phi_n] \mathbf{Q}^n(t)$ avec $\mathbf{Q}^n(t)$ le processus stochastique doit vérifier l'équation :

$$[\mathbf{M}_n] \ddot{\mathbf{Q}}^n(t) + [\mathbf{D}_n] \dot{\mathbf{Q}}^n(t) + [\mathbf{K}_n] \mathbf{Q}^n(t) = \mathbf{F}^n(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (1.137)$$

Construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires

Le modèle probabiliste non paramétrique est construit de telle sorte que les matrices aléatoires possèdent les propriétés suivantes :

$$E\{[\mathbf{M}_n]\} = [M_n], \quad E\{[\mathbf{D}_n]\} = [D_n], \quad E\{[\mathbf{K}_n]\} = [K_n] \quad (1.138)$$

Pour que l'équation (1.137) ait un sens, les matrices aléatoires doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$E\{\|[\mathbf{M}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty, \quad E\{\|[\mathbf{D}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty, \quad E\{\|[\mathbf{K}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty.$$

La normalisation de ces matrices aléatoires est construite de manière à ce que la valeur moyenne de chaque matrice aléatoire normalisée soit la matrice identité. Cette normalisation peut être écrite comme suit :

$$[\mathbf{M}_n] = [L_{M_n}]^T [\mathbf{G}_{M_n}] [L_{M_n}] \quad (1.139)$$

$$[\mathbf{D}_n] = [L_{D_n}]^T [\mathbf{G}_{D_n}] [L_{D_n}] \quad (1.140)$$

$$[\mathbf{K}_n] = [L_{K_n}]^T [\mathbf{G}_{K_n}] [L_{K_n}] \quad (1.141)$$

avec $[L_{M_n}]$, $[L_{D_n}]$ et $[L_{K_n}]$ sont des matrices réelles triangulaires supérieur dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$[M_n] = [L_{M_n}]^T [L_{M_n}] \quad (1.142)$$

$$[D_n] = [L_{D_n}]^T [L_{D_n}] \quad (1.143)$$

$$[K_n] = [L_{K_n}]^T [L_{K_n}] \quad (1.144)$$

Les matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{M_n}]$, $[\mathbf{G}_{D_n}]$, $[\mathbf{G}_{K_n}]$ sont dans l'ensemble SG^+ [69]. La loi de probabilité de ces matrices est construite en utilisant le principe du maximum d'entropie avec les contraintes définies par les informations suivantes :

- $[\mathbf{G}_n] \in M_n^+(\mathbb{R})$
- La matrice est du second ordre : $E\{\|[\mathbf{G}_n]\|_F^2\} \leq E\{\|[\mathbf{G}_n]\|_F^2\} < +\infty$ et sa moyenne égale à : $E\{\|[\mathbf{G}_n]\|_F^2\} = [I_n] \in M_n^+(\mathbb{R})$
- $E\{\ln(\det[\mathbf{G}_n])\} = \nu$ with $|\nu| < +\infty \Rightarrow E\{\|[\mathbf{G}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$

On définit le paramètre δ qui traduit le niveau de dispersion de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_n]$. Ce paramètre est indépendant de la dimension n :

$$\delta = \left\{ \frac{E\{\|[\mathbf{G}_n] - [I_n]\|_F^2\}}{\|[\mathbf{G}_n]\|_F^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{n} E\{\|[\mathbf{G}_n] - [I_n]\|_F^2\} \right\}^{1/2}, \quad 0 < \delta < \sqrt{(n+1)(n+5)^{-1}} \quad (1.145)$$

La loi $P_{[\mathbf{G}_n]}$ de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_n]$ est définie par une densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n]) \mapsto p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n])$, telle que : $\tilde{d}G_n = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} d[G_n]_{ij}$. Alors, on aura :

$$P_{[\mathbf{G}_n]} = p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n]) \tilde{d}G_n \quad (1.146)$$

avec la condition de normalisation :

$$\int_{M_n^+(\mathbb{R})} p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n]) \tilde{d}G_n = 1 \quad (1.147)$$

La densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n])$ s'écrit alors :

$$p_{[\mathbf{G}_n]}([G_n]) = \mathbf{1}_{M_n^+(\mathbb{R})}([G_n]) \times C_{G_n} \times (\det[G_n])^{(n+1)\frac{(1-\delta^2)}{2\delta^2}} \times \exp \left\{ -\frac{(n+1)}{2\delta^2} \text{tr}[G_n] \right\} \quad (1.148)$$

où C_{G_n} est la constante positive de normalisation qui s'écrit sous la forme :

$$C_{G_n} = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \left(\frac{n+1}{2\delta^2} \right)^{n(n+1)(2\delta^2)^{-1}}}{\left\{ \prod_{j=1}^n \Gamma \left(\frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2} \right) \right\}} \quad (1.149)$$

avec $\Gamma(z)$ est la fonction gamma définie pour tout $z > 0$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

La méthode de construction de ces matrices aléatoires est bien développée. Ainsi, différents ensembles de matrices aléatoires ont été présentés pour couvrir plusieurs situations de modélisation des incertitudes [69, 78].

1.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la mise au point des différentes méthodes utilisées afin de prédire le comportement dynamique des structures. Une classification des méthodes a été évoquée vis-à-vis de leurs domaine d'applications. Les méthodes de résolutions à base de variables cinématiques (méthodes structurales ainsi que spectrales) ainsi que les méthodes à base de variables quadratiques ont été présentées. Ensuite, ce chapitre a mis en évidence

les méthodes d'hybridations et les différentes méthodes de résolutions des problèmes en moyennes fréquences. Enfin, pour faire le lien entre cette première partie et les chapitres suivants, il est nécessaire d'introduire les diverses approches probabilistes utilisées pour résoudre les problèmes mécaniques comportant des incertitudes.

Chapitre 2

Les éléments finis ondulatoires stochastiques

Sommaire

2.1	Les élément finis ondulatoires (WFE)	37
2.1.1	Modèle éléments finis	37
2.1.2	Propriétés de la représentation dans l'espace d'état	41
2.1.3	Post-traitement des courbes de dispersions	43
2.2	Les élément finis ondulatoires stochastiques (SWFE)	43
2.2.1	La SWFE : Le problème spectral quadratique	44
2.2.2	La SWFE : l'utilisation des vecteurs d'états	45
2.3	Validations numériques: Cas canoniques	48
2.3.1	Poutre en traction-compression	48
2.3.2	Poutre en flexion	51
2.4	Validations numériques: Guide d'ondes multi-modales	53
2.4.1	Guide d'onde multi-modales : Sans modes de sections	54
2.4.2	Guide d'onde multi-modales : Avec modes de sections	56
2.5	Conclusion	58

Le comportement spectral des structures peut être décrit par diverses méthodes numériques : éléments finis semi-analytiques, éléments finis spectraux, etc. Dans ce chapitre, on va présenter une autre méthode spectrale appelée méthode des éléments finis ondulatoires (WFE). C'est une méthode spectrale performante et facile à programmer vu son lien direct avec le modèle éléments finis classique. La WFE est une méthode numérique développée pour décrire la propagation d'ondes dans les systèmes élastiques [19, 17] et permettant l'obtention des propriétés spectrales des guides d'ondes à savoir les nombres d'ondes ainsi que les modes d'ondes qui forment une base de projection des variables cinématiques permettant la description de la dynamique de la structure.

Vu que les incertitudes jouent un rôle important en moyennes et hautes fréquences, une autre approche est ensuite présentée appelée : la méthode des éléments finis stochastiques ondulatoires ('Stochastic Wave Finite Element', (SWFE)). Cette approche est une extension de la méthode des éléments finis ondulatoire pour les systèmes élanés et périodiques en tenant compte des aléas qui sont décrits par une approche probabiliste paramétrique.

Ce chapitre comporte trois parties : la première partie est un rappel des démarches de la WFE déterministe. Ensuite la formulation SWFE est développée. Finalement, des simulations numériques permettant la validation de l'approche proposée sont présentées.

2.1 | Les élément finis ondulatoires (WFE)

La WFE est une approche numérique qui a pour objectif la description de la propagation d'ondes dans les milieux élanés. La structure étudiée est supposée élastique, dissipative et périodique. Ce formalisme s'appuie sur le modèle éléments finis d'un seul élément. La Wave finite element (WFE) est une approche basée sur la représentation des champs cinématiques à partir de bases de modes d'ondes, c'est-à-dire qu'on décrit la réponse vibratoire des systèmes par la projection des variables cinématiques sur la base de modes d'ondes [24, 28]. Cette méthode s'appuie essentiellement sur la méthode développée par Zhong et Williams [19]. L'hypothèse principale de la méthode WFE est la périodicité de la structure, c'est-à-dire que cette dernière doit être décrite par un ensemble de sous-structures identiques. Cette méthode a été utilisée pour décrire le comportement spectral des guides d'ondes [79], des plaques raidies [36], les problèmes structuraux [25, 26] et la propagation d'ondes à hautes fréquences dans les chemins de fer [80].

2.1.1 | Modèle éléments finis

Dans cette partie, nous nous proposons de décrire le comportement spectral des systèmes mécaniques périodiques (chaque système est périodique selon une direction spécifique d'axe x). La méthode WFE s'appuie sur le modèle éléments finis d'une sous-structure représentative, extraite du système global (figure 2.1). En supposant que les deux frontières gauche et droite contiennent les mêmes ddl, l'équation d'équilibre dynamique pour une seule sous-structure discrétisée s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{LL}^* & \mathbf{D}_{LI}^* & \mathbf{D}_{LR}^* \\ \mathbf{D}_{IL}^* & \mathbf{D}_{II}^* & \mathbf{D}_{IR}^* \\ \mathbf{D}_{RL}^* & \mathbf{D}_{RI}^* & \mathbf{D}_{RR}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{(k)} \\ \mathbf{q}_I^{(k)} \\ \mathbf{q}_R^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_L^{(k)} \\ \mathbf{F}_I^{(k)} \\ \mathbf{F}_R^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

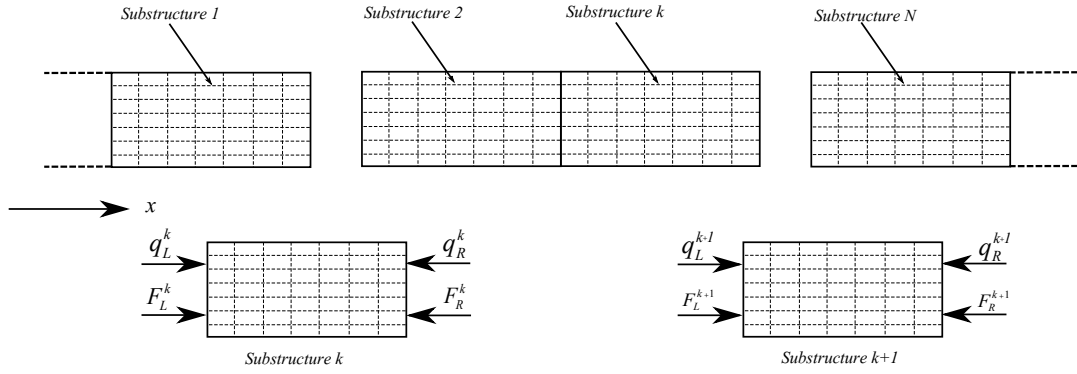


FIGURE 2.1 – Guide d'ondes périodique

Avec

- $\mathbf{D}^*$, la matrice de raideur dynamique, symétrique ($\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^{*\top}$)

$$\mathbf{D}^* = (1 + i\eta)\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$$

- η , le coefficient d'amortissement hystérétique.

- $\mathbf{q}_L^{(k)}, \mathbf{q}_I^{(k)}, \mathbf{q}_R^{(k)}$ représentent respectivement les déplacements nodaux à gauche, internes et à droite de la sous-structure.

- $\mathbf{F}_L^{(k)}, \mathbf{F}_I^{(k)}, \mathbf{F}_R^{(k)}$ représentent respectivement les forces nodales appliquées à gauche, aux noeuds internes et à droite de la sous-structure.

En supposant les forces internes égales à zéro, alors on peut condenser la matrice $\mathbf{D}^*$ en introduisant la matrice de condensation sur les degrés de liberté aux frontières définie par:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ -\mathbf{D}_{II}^{*-1}\mathbf{D}_{IL}^* & -\mathbf{D}_{II}^{*-1}\mathbf{D}_{IR}^* \\ \mathbf{o} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Ainsi, la matrice (2.1) devient:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{D}_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{(k)} \\ \mathbf{q}_R^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_L^{(k)} \\ \mathbf{F}_R^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Avec :

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}^\top \mathbf{D}^* \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{LL}^* - \mathbf{D}_{LI}^* \mathbf{D}_{II}^{*-1} \mathbf{D}_{RI}^* & \mathbf{D}_{LR}^* - \mathbf{D}_{LI}^* \mathbf{D}_{II}^{*-1} \mathbf{D}_{IR}^* \\ \mathbf{D}_{RL}^* - \mathbf{D}_{RI}^* \mathbf{D}_{II}^{*-1} \mathbf{D}_{IL}^* & \mathbf{D}_{RR}^* - \mathbf{D}_{RI}^* \mathbf{D}_{II}^{*-1} \mathbf{D}_{IR}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{D}_{RR} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

l'opérateur $\mathbf{D}$ est symétrique, alors :

$$\mathbf{D}_{LL}^\top = \mathbf{D}_{LL}, \mathbf{D}_{RL}^\top = \mathbf{D}_{LR}, \mathbf{D}_{RR}^\top = \mathbf{D}_{RR} \quad (2.5)$$

2.1.1.1 | La recherche des modes de propagations par un problème aux valeurs propres quadratique

Les méthodes de recherches des modes de propagations se différencient sur les aspects numériques. La première méthode spectrale présentée est une approche utilisant le problème aux valeurs propres quadratique proposée par Mead [17].

La relation entre les variables cinématiques à la frontière gauche et droite d'une cellule s'écrit (en tenant compte de l'hypothèse d'ondes planes harmoniques):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_R^{(k)} &= \mu \mathbf{q}_L^{(k)} \\ \mathbf{F}_R^{(k)} &= \mu \mathbf{F}_L^{(k)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Avec k est la $k^{\text{ème}}$ sous-structure, $\mu = \exp(-jkd)$ est le facteur de propagation, d est la longueur de la sous-structure (cellule) et k est le nombre d'onde. Ainsi, les équations de continuité entre la cellule k et $k+1$ s'écrivent:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_R^{(k)} &= \mathbf{q}_L^{(k+1)} \\ \mathbf{F}_R^{(k)} &= -\mathbf{F}_L^{(k+1)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

En utilisant les équations (2.6) et (2.7), le problème (2.3), devient:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{D}_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{(k)} \\ \mu_i \mathbf{q}_L^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_L^{(k)} \\ \mu_i \mathbf{F}_L^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Ainsi on peut établir le problème aux valeurs propres quadratiques suivant:

$$[\mathbf{D}_{RL} + \mu_i (\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) + \mu_i^2 \mathbf{D}_{LR}] (\mathbf{q}_L^{(k)})_i = 0 \quad (2.9)$$

Ce problème aux valeurs propres a une propriété majeure : les vecteurs propres à gauche sont les mêmes à droite. En effet : si on examine la transposée de (2.9) et en utilisant la propriété (2.5) on aura:

$$(\mathbf{q}_L^{(k)})_i^T [\mu_i^2 \mathbf{D}_{RL} + \mu_i (\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) + \mathbf{D}_{LR}] = 0 \quad (2.10)$$

En multipliant (2.10) par $\frac{1}{\mu_i^2}$ on obtient:

$$(\mathbf{q}_L^{(k)})_i^T \left[\mathbf{D}_{RL} + \frac{1}{\mu_i} (\mathbf{D}_{LL} + \frac{1}{\mu_i^2} \mathbf{D}_{RR}) + \mathbf{D}_{LR} \right] = 0 \quad (2.11)$$

On peut conclure donc que $\frac{1}{\mu_i}$ est une valeur propre à gauche associée $(\mathbf{q}_L^{(k)})_i^T$. Ainsi, les valeurs propres correspondantes à ce problème sont données en paire $(\mu_i, \frac{1}{\mu_i})$. Supposons que (μ_i, Φ_i) et (μ_j, Φ_j) sont deux paires de solutions du problème aux valeurs propres quadratique, on peut montrer que.

$$(1 - \mu_i \mu_j) (\Phi_j)^T [\mu_j \mathbf{D}_{RL} - \mu_i \mathbf{D}_{LR}] \Phi_i = 0$$

Or, $\mu_i \mu_j \neq 1$ ce qui nous donne:

$$(\Phi_j)^T [\mu_j \mathbf{D}_{RL} - \mu_i \mathbf{D}_{LR}] \Phi_i = 0$$

Etant donné que la matrice $\mathbf{D}_{LR}$ est généralement non symétrique, cette hypothèse permet d'affirmer que la quantité $[\mu_j \mathbf{D}_{RL} - \mu_i \mathbf{D}_{LR}] \neq 0$. Par conséquent on aura la propriété :

$$\frac{\mu_i}{\mu_j} = \frac{(\Phi_j)^T \mathbf{D}_{RL} \Phi_i}{(\Phi_j)^T \mathbf{D}_{LR} \Phi_i}$$

Mais à une pulsation ω donnée, ce système revient alors à un problème aux valeurs propres polynomial d'ordre 2 difficile à résoudre, pour cela on a recours à la solution proposée par Zhong et Williams [19].

2.1.1.2 Recherche des modes de propagations par les vecteurs d'états

Dans cette partie, on va présenter la formulation spectrale basée sur l'utilisation de l'espace d'état. Cette formulation a un intérêt numérique important car on peut aboutir à une formulation spectrale qui utilise une matrice symplectique permettant la classification des différents modes de propagation [79]. Pour cela, on va définir deux vecteurs d'états aux frontières de la cellule numéro k (figure 2.1) qui sont :

$$\mathbf{u}_L^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{(k)} \\ -\mathbf{F}_L^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_R^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_R^{(k)} \\ \mathbf{F}_R^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

En tenant compte de ces notations et des conditions à la frontière de deux sous-structures successives k et $k+1$: $(\mathbf{q}_L^{(k+1)} = \mathbf{q}_R^{(k)}$ et $\mathbf{F}_L^{(k+1)} = -\mathbf{F}_R^{(k)})$, on peut facilement prouver que ces deux vecteurs d'états sont reliés par cette relation:

$$\mathbf{u}_R^{(k)} = \mathbf{S} \mathbf{u}_L^{(k)} \quad (2.13)$$

Avec $\mathbf{S}$ est la matrice de transfert qui relie les vecteurs déplacements et efforts sur les deux surfaces de la cellule k . $\mathbf{S}$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{D}_{LR})^{-1} \mathbf{D}_{LL} & -(\mathbf{D}_{LR})^{-1} \\ \mathbf{D}_{RL} - \mathbf{D}_{RR}(\mathbf{D}_{LR})^{-1} \mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{RR}(\mathbf{D}_{LR})^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

En utilisant les conditions sur les frontières de deux cellules successives, on peut écrire :

$$\mathbf{u}_L^{(k+1)} = \mu_i \mathbf{u}_L^{(k)} \quad (2.15)$$

Cette forme de solution caractérise une onde se propageant selon l'axe principal de la structure à une célérité qu'on peut déterminer à partir de la valeur de μ_i [13]. En combinant (2.14) et (2.15) on aura le problème aux valeurs propre suivant :

$$\mathbf{S} \Phi_i = \mu_i \Phi_i \quad \mapsto \quad |\mathbf{S} - \mu_i \mathbf{I}_{2n}| = 0 \quad (2.16)$$

La résolution numérique du système aux valeurs propres (2.16) permet de calculer les couples $(\mu_i, \Phi_i)_{i:1\dots 2n}$ qui représentent les modes de propagations dans le guide d'ondes. Ils traduisent un ensemble de vitesses de propagation, décrites à partir des valeurs propres μ_i associées à un ensemble de formes de sections Φ_i . Pour certains cas d'applications, il peut être délicat de calculer la matrice de transfert $\mathbf{S}$ car, si l'on analyse la relation (2.14), on constate que $\mathbf{D}_{LR}$ doit être inversible. De plus, même si $\mathbf{D}_{LR}$ est inversible, des problèmes de conditionnement peuvent survenir. Donc le recours aux méthodes d'inversion des matrices mal conditionnées telles que la pseudo-inverse et la régularisation de Tikhonov est parfois indispensable. C'est pourquoi, Zhong et Williams [19] ont proposé une nouvelle formulation équivalente à l'équation de transfert afin de surmonter ce problème d'inversion.

Si on considère les matrices suivantes :

$$[\mathbf{L}] = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{RL} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{D}_{RL} & -\mathbf{D}_{RR} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

On montre facilement que les deux vecteurs d'états s'écrivent en fonction des déplacements :

$$\mathbf{u}_L^{(k+1)} = [\mathbf{L}] \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{(k+1)} \\ \mathbf{q}_R^{(k+1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_R^{(k)} = [\mathbf{N}] \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{(k)} \\ \mathbf{q}_R^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Enfin, on détermine une nouvelle équation de transfert qui s'exprime :

$$[\mathbf{N}] \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{(k)} \\ \mathbf{q}_R^{(k)} \end{pmatrix} = [\mathbf{L}] \begin{pmatrix} \mathbf{q}_L^{(k+1)} \\ \mathbf{q}_R^{(k+1)} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

on constate que les matrices $[\mathbf{L}]$ et $[\mathbf{N}]$ ne nécessitent plus l'inversion de matrice, ce qui confirme donc que cette nouvelle formulation sera plus adaptée lors de la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathbf{N}]\Phi_i = \mu_i [\mathbf{L}]\Phi_i \quad (2.20)$$

Avec : μ_i sont les valeurs propres et Φ_i les vecteurs propres du système.

2.1.2 | Propriétés de la représentation dans l'espace d'état

La matrice $\mathbf{S}$ de transfert possède des propriétés intéressantes permettant le post-traitement des solutions. Elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\det(\mathbf{S})=1$,
- $\mathbf{S}^T \mathbf{J}_n \mathbf{S} = \mathbf{J}_n$, avec $\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{J}_n^T = -\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n^{-1}$
- Si, $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{D}$

Étant donné (μ_i, Φ_i) une solution du problème aux valeurs propres (2.16), alors on peut écrire $\mathbf{S}\Phi_i = \mu_i \Phi_i$. En multipliant cette équation par $\mathbf{S}^T \mathbf{J}_n$ on obtient :

$$\mathbf{S}^T \mathbf{J}_n \mathbf{S} \Phi_i = \mu_i \mathbf{S}^T \mathbf{J}_n \Phi_i \quad (2.21)$$

En tenant compte du fait que la matrice $\mathbf{S}$ est une matrice symplectique et des propriétés de la matrice $\mathbf{J}_n$ on aura :

$$(\Phi_i^T \mathbf{J}_n) \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_i} (\Phi_i^T \mathbf{J}_n) \quad (2.22)$$

Donc $\Phi_i^T \mathbf{J}_n$ est le vecteur propre à gauche. D'autre part, on a la condition suivante : si μ_i est une valeur propre de $\mathbf{S}$, alors $1/\mu_i$ est également une valeur propre de $\mathbf{S}$. De cette façon, les valeurs propres peuvent être définies telles que :

$$\mu_{n+i} = 1/\mu_i, \quad \forall \quad i \in 1 \dots n$$

Ainsi, si les valeurs propres $(\mu_i)_{i=1 \dots n}$ sont associées aux vecteurs propres $(\Phi_i)_{i=1 \dots n}$ qui se propagent dans la direction positive, les valeurs propres $(\mu_i)_{i=i+1 \dots 2n}$ sont associées aux vecteurs propres $(\Phi_i)_{i=i+1 \dots 2n}$ qui se propagent dans la direction négative. D'autre part, on peut écrire les propriétés suivantes :

$$\Phi_j^T \mathbf{J}_n \Phi_i = 0, \quad \forall \mu_j \neq 1/\mu_i$$

et

$$\Phi_j^T \mathbf{J}_n \mathbf{S} \Phi_i = 0, \quad \forall \mu_j \neq 1/\mu_i$$

Ainsi, on montre les propriétés d'orthogonalité du vecteur propre Φ_i vis-à-vis de la matrice $\mathbf{J}_n$ et de $\mathbf{J}_n \mathbf{S}$. Finalement, on définit la matrice Φ des vecteurs propres qui peut être décrite de cette façon :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_q^{\text{inc}} & \Phi_q^{\text{ref}} \\ \Phi_F^{\text{inc}} & \Phi_F^{\text{ref}} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

où les indices inférieurs q et F sont liés respectivement aux déplacements et aux forces nodales. Les vecteurs $\begin{pmatrix} \Phi_q^{\text{inc}} \\ \Phi_F^{\text{inc}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \Phi_q^{\text{ref}} \\ \Phi_F^{\text{ref}} \end{pmatrix}$ représentent les modes d'ondes incidentes et réfléchies par les deux frontières (gauche et droite) de la cellule du guide d'ondes, les sous-matrices de la matrice Φ sont de taille $n \times n$. D'autre part, physiquement, une valeur propre μ_i représente la constante de propagation, et un vecteur propre Φ_i représente la déformée de la section. Pour calculer le nombre d'onde du mode i de déformée Φ_i , il suffit simplement d'appliquer la relation suivante : $\mu_i = e^{-jk_i d}$.

$$\text{Ainsi,} \quad k_i = \frac{\log(\mu_i)}{-jd}, \quad j^2 = -1 \quad (2.24)$$

2.1.3 | Post-traitement des courbes de dispersions

En utilisant la méthode déjà présentée (WFE), on peut afficher, pour une fréquence donnée ω_k l'évolution du nombre d'onde ainsi que la déformée de la section sur une bande de fréquence $[\omega_1, \dots, \omega_n]$. Sachant que pour chaque pas de fréquence, on a $2n$ paires de solutions, alors il faut avoir des critères pour arranger ces modes pour chaque fréquence $\omega_k \in [\omega_1, \dots, \omega_n]$. Houillon [20] propose un premier critère en utilisant le 'Modal Assurance Criterion' (MAC). Pour correspondre à un mode Φ_i calculée à une fréquence ω_k l'un des autres modes Φ_j calculée à une fréquence ω_{k+1} il faut que le MAC défini comme :

$$\text{MAC} = \frac{(\Phi_i^T \Phi_j^*)(\Phi_j^T \Phi_i^*)}{(\Phi_i^T \Phi_i^*)(\Phi_j^T \Phi_j^*)} \quad (2.25)$$

soit supérieur à une valeur donnée entre 0 et 1.

La deuxième méthode, proposée par Zhong [19], s'appuie sur la propriété suivante qui vérifie les vecteurs Φ_i à une fréquence ω_k :

$$\Phi_j^T [J_n] \Phi_i = 0 \quad (2.26)$$

Zhong propose de faire correspondre à un vecteur propre $\Phi_i(\omega_k)$ le vecteur propre $\Phi_j(\omega_{k+1})$, si ce dernier maximise la quantité suivante:

$$\Phi_i^T(\omega_k) [J_n] \Phi_j(\omega_{k+1}) = 0 \quad (2.27)$$

La validité de ce critère est fondée sur l'hypothèse que le pas de fréquence $\omega_{k+1} - \omega_k$ demeure assez petit, donc le vecteur propre Φ_i se différencie peu entre ω_k et ω_{k+1} .

2.2 | Les élément finis ondulatoires stochastiques (SWFE)

Dans cette partie, on va présenter la méthode des éléments finis ondulatoires stochastique (SWFE). C'est une combinaison entre la WFE et l'approche probabiliste paramétrique. Étant donné que la variabilité joue un rôle important sur le comportement vibratoire et vibro-acoustique en moyennes et hautes fréquences, l'approche SWFE tient en compte les effets des incertitudes sur les propriétés mécaniques et géométriques. L'idée est d'utiliser le champ aléatoire en tant qu'une dimension de plus dans le problème spectral. L'extension de la méthode WFE nous conduit à obtenir différentes formulations stochastiques [81].

Dans la suite, toutes les équations développées contiennent des variables aléatoires de la forme $\tilde{r} = \bar{r} + \sigma_r \xi$ avec $\bar{r}$ la moyenne, σ_r l'écart type et ξ une variable aléatoire gaussienne centrée ($\bar{\xi} = 0$) et réduite ($\sigma_\xi = 1$). En utilisant la même procédure que la méthode des éléments finis stochastique [53], l'équation dynamique stochastique du $k^{\text{ème}}$ élément s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{D}}^* \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LL}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{LI}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{LR}^* \\ \tilde{\mathbf{D}}_{IL}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{II}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{IR}^* \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RL}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{RI}^* & \tilde{\mathbf{D}}_{RR}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{q}}_I^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_L^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_I^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_R^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Cette équation représente l'extension de l'équation (2.1) pour le cas non déterministe. Le développement au premier ordre permet d'écrire explicitement :

$$(\bar{\mathbf{D}}^* + \sigma_{\mathbf{D}}^* \xi) (\bar{\mathbf{q}} + \sigma_{\mathbf{q}} \xi) = (\bar{\mathbf{F}} + \sigma_{\mathbf{F}} \xi) \quad (2.29)$$

Avec $\bar{\mathbf{D}}^*$, $\bar{\mathbf{q}}$ et $\bar{\mathbf{F}}$ sont respectivement les moyennes et $\sigma_{\mathbf{D}}^*$, $\sigma_{\mathbf{q}}$ et $\sigma_{\mathbf{F}}$ sont les écarts types de la matrice dynamique, déplacements nodaux et des forces nodales. En supposant que les forces internes sont nulles ($\tilde{\mathbf{F}}_I^{(k)} = 0$) donc on peut écrire $\tilde{\mathbf{q}}_I^{(k)} = -\bar{\mathbf{D}}_{II}^{-1} (\bar{\mathbf{D}}_{II} \tilde{\mathbf{q}}_L^{(k)} + \bar{\mathbf{D}}_{IR} \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)})$. Finalement, on peut déduire la forme condensée de la moyenne de la matrice $\bar{\mathbf{D}}^*$ comme suit :

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{D}}_{LL}^* - \bar{\mathbf{D}}_{LI}^* \bar{\mathbf{D}}_{II}^{*-1} \bar{\mathbf{D}}_{IL}^* & \bar{\mathbf{D}}_{LR}^* - \bar{\mathbf{D}}_{LI}^* \bar{\mathbf{D}}_{II}^{*-1} \bar{\mathbf{D}}_{IR}^* \\ \bar{\mathbf{D}}_{RL}^* - \bar{\mathbf{D}}_{RI}^* \bar{\mathbf{D}}_{II}^{*-1} \bar{\mathbf{D}}_{IL}^* & \bar{\mathbf{D}}_{RR}^* - \bar{\mathbf{D}}_{RI}^* \bar{\mathbf{D}}_{II}^{*-1} \bar{\mathbf{D}}_{IR}^* \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

et l'écart type peut être condensé et écrit :

$$\sigma_{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{D}_{LL}}^* & \sigma_{\mathbf{D}_{LR}}^* \\ \sigma_{\mathbf{D}_{RL}}^* & \sigma_{\mathbf{D}_{RR}}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{D}}_{LI}^* & \sigma_{\mathbf{D}_{LI}}^* \\ \bar{\mathbf{D}}_{RI}^* & \sigma_{\mathbf{D}_{RI}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{D}}_{II}^{*-1} & -\bar{\mathbf{D}}_{II}^{*-1} \sigma_{\mathbf{D}_{II}}^* \bar{\mathbf{D}}_{II}^{*-1} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}}_{II}^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{D}_{IL}}^* & \sigma_{\mathbf{D}_{IR}}^* \\ \bar{\mathbf{D}}_{IL}^* & \bar{\mathbf{D}}_{IR}^* \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

2.2.1 | La SWFE : Le problème spectral quadratique

Dans cette section, on va essayer de présenter la formulation quadratique aléatoire permettant de calculer d'une façon directe les écarts types des caractéristiques spectrales du guide d'ondes contenant des incertitudes.

L'équation dynamique aléatoire condensée s'exprime :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{D}}_{LL} & \bar{\mathbf{D}}_{LR} \\ \bar{\mathbf{D}}_{RL} & \bar{\mathbf{D}}_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_L^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_R^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Explicitement,

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{D}}_{LL} + \sigma_{\mathbf{D}_{LL}} \xi & \bar{\mathbf{D}}_{LR} + \sigma_{\mathbf{D}_{LR}} \xi \\ \bar{\mathbf{D}}_{RL} + \sigma_{\mathbf{D}_{RL}} \xi & \bar{\mathbf{D}}_{RR} + \sigma_{\mathbf{D}_{RR}} \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L^{(k)} + \sigma_{\mathbf{q}_L} \xi \\ \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)} + \sigma_{\mathbf{q}_R} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_L^{(k)} + \sigma_{\mathbf{F}_L} \xi \\ \tilde{\mathbf{F}}_R^{(k)} + \sigma_{\mathbf{F}_R} \xi \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

En utilisant le théorème de Bloch, qui nous permet d'écrire les relations entre les variables cinématiques en utilisant la constante de propagation [13], l'équation (3.45) nous permet d'établir le problème aux valeurs propres stochastique suivant :

$$(\bar{\mathbf{D}}_{RL} + \tilde{\mu}_i (\bar{\mathbf{D}}_{LL} + \bar{\mathbf{D}}_{RR}) + \tilde{\mu}_i^2 \bar{\mathbf{D}}_{LR}) (\tilde{\Phi}_q)_i = 0 \quad (2.34)$$

avec $\tilde{\Phi}$ est le vecteur propre stochastique associé la valeur propre $\tilde{\mu}_i$. Cette formulation nous permet l'obtention de $2n$ valeurs propres et uniquement n vecteurs propres. Ainsi une opération de plus est nécessaire pour avoir les autres n vecteurs propres.

$$(\tilde{\Phi}_F)_i = (\bar{\mathbf{D}}_{LL} + \tilde{\mu}_i \bar{\mathbf{D}}_{LR}) (\tilde{\Phi}_q)_i \quad (2.35)$$

Le développement de l'équation (3.45) nous conduit à obtenir l'ordre zéro :

$$(\bar{\mathbf{D}}_{RL} + \bar{\mu}_i(\bar{\mathbf{D}}_{LL} + \bar{\mathbf{D}}_{RR}) + \bar{\mu}_i^2 \bar{\mathbf{D}}_{LR}) (\bar{\Phi}_q)_i = 0 \quad (2.36)$$

qui représente exactement le problème spectral déterministe déjà obtenu dans la section précédente. L'ordre un est alors représenté de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{D}}_{RL} + \bar{\mu}_i(\bar{\mathbf{D}}_{LL} + \bar{\mathbf{D}}_{RR}) + \bar{\mu}_i^2 \bar{\mathbf{D}}_{LR}) \sigma_{(\Phi_q)_i} + \\ & (\sigma_{\mathbf{D}_{RL}} + \bar{\mu}_i(\sigma_{\mathbf{D}_{RR}} + \sigma_{\mathbf{D}_{LL}}) + \sigma_{\mu_i}(\bar{\mathbf{D}}_{RR} + \bar{\mathbf{D}}_{LL}) + \bar{\mu}_i^2 \sigma_{\mathbf{D}_{LR}} + 2\bar{\mu}_i \sigma_{\mu_i} \bar{\mathbf{D}}_{LR}) (\bar{\Phi}_q)_i = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

La résolution de cette équation permet d'identifier les expressions analytiques des écarts types des valeurs et des vecteurs propres. L'idée consiste à utiliser la propriété (2.11), donc on multiplie l'équation (3.46) par $(\bar{\Phi}_q)_i^T$ pour annuler le premier terme et on aura :

$$\sigma_{\mu_i} = - \frac{(\bar{\Phi}_q)_i^H (\sigma_{\mathbf{D}_{RL}} + \bar{\mu}_i(\sigma_{\mathbf{D}_{RR}} + \sigma_{\mathbf{D}_{LL}}) + \bar{\mu}_i^2 \sigma_{\mathbf{D}_{LR}}) (\bar{\Phi}_q)_i}{(\bar{\Phi}_q)_i^H (\bar{\mathbf{D}}_{RR} + \bar{\mathbf{D}}_{LL} + 2\bar{\mu}_i \bar{\mathbf{D}}_{LR}) (\bar{\Phi}_q)_i} \quad (2.38)$$

avec H est la transposée hermitienne.

En connaissant σ_{μ_i} l'équation (2.38) nous permet d'écrire l'écart type des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \sigma_{(\Phi_q)_i} = & - (\bar{\mathbf{D}}_{RL} + \bar{\mu}_i(\bar{\mathbf{D}}_{RR} + \bar{\mathbf{D}}_{LL}) + \bar{\mu}_i^2 \bar{\mathbf{D}}_{LR})^+ \times \\ & (\sigma_{\mathbf{D}_{RL}} + \bar{\mu}_i(\sigma_{\mathbf{D}_{RR}} + \sigma_{\mathbf{D}_{LL}}) + \sigma_{\mu_i}(\bar{\mathbf{D}}_{RR} + \bar{\mathbf{D}}_{LL}) + \bar{\mu}_i^2 \sigma_{\mathbf{D}_{LR}} + 2\bar{\mu}_i \sigma_{\mu_i} \bar{\mathbf{D}}_{LR}) (\bar{\Phi}_q)_i \end{aligned} \quad (2.39)$$

Cette équation constitue les n écarts types des vecteurs propres qui seront utilisées lors du calcul de la réponse forcée aléatoire. Une autre opération mathématique de plus est nécessaire pour avoir la totalité de la base de modes stochastique.

2.2.2 | La SWFE : l'utilisation des vecteurs d'états

Comme il est déjà expliqué dans la section 2.1.2, de point de vue numérique, l'utilisation de l'espace d'état est la préférable. En utilisant la même procédure que la formulation déterministe, on va définir deux vecteurs d'états stochastiques des deux côtés gauche et droit notés respectivement par L et R de la sous-structure k :

$$\tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L^{(k)} \\ -\tilde{\mathbf{F}}_L^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_R^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_R^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

avec $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$ et $\tilde{\mathbf{F}}^{(k)}$ représentent respectivement les déplacements nodaux et les forces nodales stochastiques. La relation de transformation entre ces deux vecteurs d'état s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)} = \tilde{\mathbf{u}}_R^{(k)} \quad (2.41)$$

Explicitement :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{LL} + \sigma_{\mathbf{S}_{LL}} \xi & \bar{\mathbf{S}}_{LR} + \sigma_{\mathbf{S}_{LR}} \xi \\ \bar{\mathbf{S}}_{RL} + \sigma_{\mathbf{S}_{RL}} \xi & \bar{\mathbf{S}}_{RR} + \sigma_{\mathbf{S}_{RR}} \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_L + \sigma_{\mathbf{q}_L} \xi \\ -\bar{\mathbf{F}}_L - \sigma_{\mathbf{F}_L} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_R + \sigma_{\mathbf{q}_R} \xi \\ \bar{\mathbf{F}}_R + \sigma_{\mathbf{F}_R} \xi \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Avec $\tilde{\mathbf{S}}$ est la matrice de transfert stochastique qui relie les vecteurs déplacements et efforts sur les deux surfaces de la cellule k . La valorisation des statistiques de la matrice de transformation nécessite le développement de l'équation (2.32) et l'identification avec l'équation spectrale stochastique (2.42) pour obtenir l'ordre zéro :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} -(\tilde{\mathbf{D}}_{LR})^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{LL} & -(\tilde{\mathbf{D}}_{LR})^{-1} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RL} - \tilde{\mathbf{D}}_{RR}(\tilde{\mathbf{D}}_{LR})^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{LL} & -\tilde{\mathbf{D}}_{RR}(\tilde{\mathbf{D}}_{LR})^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

et l'ordre un qui représente l'écart type de la matrice de transfert :

$$\sigma_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{D}}_{LR} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{D}}_{RR} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{D}_{LL}} & \sigma_{\mathbf{D}_{LR}} \\ \sigma_{\mathbf{D}_{RL}} & \sigma_{\mathbf{D}_{RR}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{D}}_{LR}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{LL} & -\tilde{\mathbf{D}}_{LR}^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Ainsi, le problème aux valeurs propres stochastique du guide d'ondes s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\Phi}_i = \tilde{\mu}_i\tilde{\Phi}_i \\ |\tilde{\mathbf{S}} - \tilde{\mu}_i\mathbf{I}_{2n}| = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

avec $\tilde{\Phi}_i$ et $\tilde{\mu}_i$ sont des solutions aléatoires du problème spectral (2.45) et s'écrivent sous la forme :

$$\tilde{\Phi}_i = \bar{\Phi}_i + \sigma_{\Phi_i}\xi \quad (2.46)$$

$$\tilde{\mu}_i = \bar{\mu}_i + \sigma_{\mu_i}\xi \quad (2.47)$$

Le développement du problème aux valeurs propres précédent nous conduit à écrire :

l'ordre zéro :

$$(\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mu}_i\mathbf{I}_{2n})\bar{\Phi}_i = 0 \quad (2.48)$$

l'ordre un :

$$(\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mu}_i\mathbf{I}_{2n})\sigma_{\Phi_i} + (\sigma_{\mathbf{S}} - \sigma_{\mu_i}\mathbf{I}_{2n})\bar{\Phi}_i = 0 \quad (2.49)$$

L'obtention des écarts types des solutions uniquement avec cette équation est impossible puisqu'on a deux inconnues pour une seule équation. D'autre part, on n'a pas la propriété (2.11) que possède le problème spectral quadratique, donc il est impératif d'utiliser le problème aux valeurs propres à gauche (2.22) pour obtenir une deuxième équation.

$$(\tilde{\Phi}_i^T \mathbf{J}_n)\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{\tilde{\mu}_i}(\tilde{\Phi}_i^T \mathbf{J}_n) \quad (2.50)$$

La projection de cette équation nous conduit à écrire l'ordre un comme suit :

$$(\sigma_{\Phi_i})^T \mathbf{J}_n(\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mu}_i^{-1}\mathbf{I}_{2n}) + \bar{\Phi}_i^T \mathbf{J}_n(\sigma_{\mathbf{S}} + \bar{\mu}_i^{-2}\sigma_{\mu_i}\mathbf{I}_{2n}) = 0 \quad (2.51)$$

Après la résolution des deux équations (2.49) et (2.51), on peut exprimer les inconnues (σ_{μ_i}) et σ_{Φ_i} :

$$\sigma_{\mu_i} = \left((\bar{\Phi}_i)^T \sigma_S^T (\bar{S}^T - \bar{\mu}_i \mathbf{I}_{2n})^{-1} J_n (\bar{S} - (\bar{\mu}_i)^{-1} \mathbf{I}_{2n}) - (\bar{\Phi}_i)^T J_n \sigma_S \right) \times \left((\bar{\Phi}_i)^T (\bar{S}^T - \bar{\mu}_i \mathbf{I}_{2n})^{-1} J_n (\bar{S} - (\bar{\mu}_i)^{-1} \mathbf{I}_{2n}) + (\bar{\mu}_i)^{-2} (\bar{\Phi}_i)^T J_n \right)^{-1} \quad (2.52)$$

et

$$\sigma_{\Phi_i} = -(\bar{S} - \bar{\mu}_i \mathbf{I}_{2n})^+ (\sigma_S - \sigma_{\mu_i} \mathbf{I}_{2n}) \bar{\Phi}_i \quad (2.53)$$

avec $^+$ est la pseudo-inverse.

Les écarts types des vecteurs et des valeurs propres sont généraux et sont exprimés en fonction des solutions moyennes (solutions du problème aux valeurs propres déterministe). L'utilisation des vecteurs d'états est beaucoup plus avantageux que l'utilisation de la formulation quadratique car cette dernière nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres quadratique qui est en général mal conditionné et coûteux en temps de calcul. En plus, l'utilisation des équations (2.52) et (2.53) permet d'obtenir directement les $2n$ solutions du problème.

Ces formulations souffrent du problème de mauvais conditionnement des matrices à inverser pour des problèmes de grande dimension, donc on a recours à des méthodes de conditionnement de matrices. D'autre part, la propriété de l'orthogonalité symplectique de la matrice $\mathbf{S}$ est perdu lors du passage du problème déterministe au problème stochastique. La classification des modes aléatoires sera discutée dans la section 2.4.

Comme la constante de propagation $\bar{\mu}$ est directement liée aux nombres d'ondes, il est intéressant d'évaluer les effets des incertitudes sur les différentes vitesses de propagation qui caractérisent chaque onde. Si on considère que le nombre d'onde stochastique peut être écrit à l'ordre un, $\tilde{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{k}} + \sigma_{\mathbf{k}} \xi$, donc on peut déduire facilement les ordre zéro et l'ordre un comme suit :

L'ordre zéro :

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{j}{d} \text{Log}(\bar{\mu}) \quad (2.54)$$

L'ordre un :

$$\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{j}{d} \frac{\sigma_{\mu}}{\bar{\mu}} \quad (2.55)$$

L'obtention de l'écart type du nombre d'onde nous conduit directement à exprimer la variabilité de la vitesse de groupe, qui peut être exprimée analytiquement :

$$\sigma_{c_g} = \bar{c}_g \frac{\partial \sigma_{\mathbf{k}}}{\partial \bar{\mathbf{k}}} \quad (2.56)$$

2.3 | Validations numériques: Cas canoniques

Dans cette partie on va essayer de valider la formulation spectrale stochastique pour des cas canoniques (poutre en traction et en flexion). Différents chercheurs ont déjà traité ce problème en utilisant la méthode des éléments finis stochastique [82, 83]. On a choisi de commencer avec des cas simples vu la connaissance de toutes les expressions spectrales analytiques de ces deux problèmes.

2.3.1 | Poutre en traction-compression

Si on considère une poutre à deux noeuds en traction-compression, les propriétés structurales sont les suivantes : le module de Young $E = 2 \times 10^{11}$ Pa, la surface de la section droite $S = 10^{-4}$ m², la densité $\rho = 7800$ Kg/m³ et $d = 10^{-2}$ m la longueur de l'élément considéré (figure 2.2).

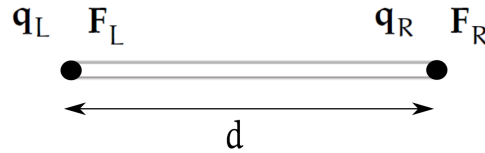


FIGURE 2.2 – Poutre à deux noeuds en traction-compression

L'équation dynamique d'une poutre en traction-compression s'écrit :

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t) \quad (2.57)$$

En utilisant la démarche classique d'EF, on obtient les matrices de masse et de raideur :

$$\mathbf{K} = \frac{ES}{d} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho S d}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Donc, la matrice de raideur dynamique analytique d'une poutre à un seul mode de propagation $\mathbf{D} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ s'écrit :

$$\mathbf{D} = \frac{ES}{d} \begin{pmatrix} 1 - \frac{(k_L d)^2}{3} & -1 - \frac{(k_L d)^2}{6} \\ \text{sym} & 1 - \frac{(k_L d)^2}{3} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

avec, $k_L = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega$ le nombre d'onde longitudinale 'exacte' et la matrice de transfert $\mathbf{S}$ peut être déduite aussi de l'équation (2.59) :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{1 + \frac{(k_L d)^2}{6}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{(k_L d)^2}{3} & \frac{d}{ES} \\ -\frac{ES}{d} \left((k_L d)^2 - \frac{(k_L d)^4}{12} \right) & 1 - \frac{(k_L d)^2}{3} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Le nombre d'onde analytique

Ainsi, la résolution du problème aux valeurs propres (2.48) nous permet l'obtention des solutions analytiques des valeurs propres (la constante de propagation) et les vecteurs propres (modes d'ondes).

$$\bar{\mu}_{1,2} = \frac{1}{1 + \frac{(k_L d)^2}{6}} \left[1 - \frac{(k_L d)^2}{3} \mp j(k_L d) \sqrt{1 - \frac{(k_L d)^2}{12}} \right] \quad (2.61)$$

Si on assume que le terme $k_L d$ est faible, l'équation (2.61) peut être simplifiée comme suit :

$$\bar{\mu}_{1,2} = 1 \pm j k_L d - \frac{(k_L d)^2}{2} \mp j \frac{5(k_L d)^3}{24} + \dots \quad (2.62)$$

Il est à noter que le nombre d'onde associé à cette constante de propagation est approximativement égal à la valeur 'exacte' k_L . En effet, il peut être démontré que le nombre d'onde $\bar{k}_{1,2}$ peut être approximé à :

$$\bar{k}_{1,2} = k_L \left[\pm 1 \pm \frac{7(k_L d)^2}{24} - \frac{j(k_L d)^3}{3} \pm \frac{5(k_L d)^4}{48} \dots \right] \quad (2.63)$$

Les vecteurs propres

En outre, les vecteurs propres à droite associés aux valeurs propres prévues dans l'expression (2.61) peuvent être écrits :

$$\bar{\Phi}_{1,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm j E S k_L \sqrt{1 - \frac{(k_L d)^2}{12}} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Par conséquent, le problème déterministe est complètement résolu analytiquement à travers les expressions (2.61) and (2.64).

Considérons maintenant un milieu aléatoire. Afin de simplifier le traitement analytique nous supposons que le module de Young est un paramètre incertain avec une dispersion de σ_E . A partir de l'expression de l'opérateur dynamique, le σ_D peut être facilement établi comme suit :

$$\sigma_D = \frac{\sigma_E S}{d} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

En utilisant les expressions (2.52) et (2.53), l'écart type des valeurs propres peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\sigma_{\mu_1} = -\frac{\sigma_E}{E} \frac{(k_L d) \left[1 + j(k_L d) - j \frac{5}{24}(k_L d)^3 - \frac{2}{3}(k_L d)^2 + \frac{25}{576}(k_L d)^4 \right]}{\left[-2j + j \frac{1}{12}(k_L d)^2 + \frac{1}{6}(k_L d)^3 + j \frac{5}{72}(k_L d)^4 \right]} \quad (2.66)$$

et l'écart type des vecteurs propres :

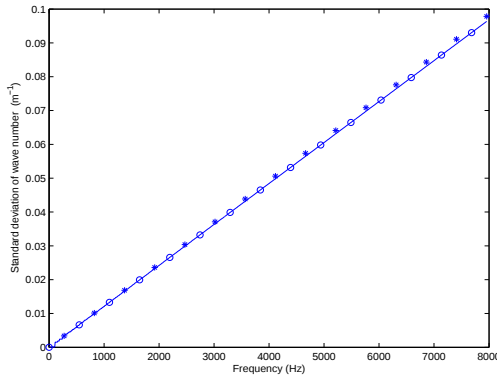
$$\sigma_{\Phi_1} = -\frac{(k_L d - \sigma_E S k_L) \left(-2j + 2(k_L d) + j \frac{17}{12}(k_L d)^2 - \frac{1}{3}(k_L d)^3 + j \frac{3}{32}(k_L d)^4 \right)}{E S k_L (k_L d)^3 \left(\frac{1}{3} + j \frac{13}{96}(k_L d) - \frac{1}{12}(k_L d)^2 + j \frac{53}{6912}(k_L d)^3 \right)} \|\bar{\Phi}_1\| \quad (2.67)$$

L'équation (2.66) peut être comparée à une formule analytique 'exacte' de l'écart type de la constante de propagation estimée du nombre d'onde ($k_L = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega$).

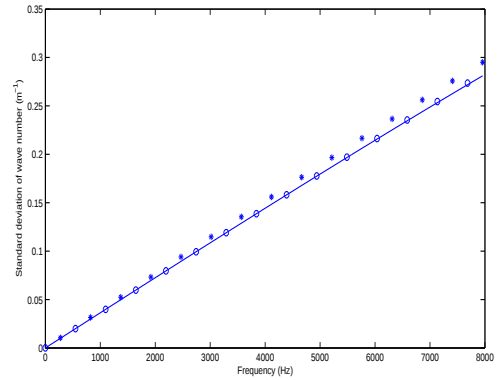
$$\sigma_{\mu_1} = -\bar{k}_L \sigma_{k_L} d^2 + j d \sigma_{k_L}, \quad \text{avec} \quad \sigma_{k_L} = \frac{k_L}{2} \frac{\sigma_E}{E} \quad (2.68)$$

Finalement, pour ce cas étudié, le lien entre le nombre d'onde et les différentes vitesses de propagation nous permet d'écrire la variabilité de la vitesse de groupe analytiquement :

$$\sigma_{c_g} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_E}{\sqrt{E\rho}} \quad (2.69)$$

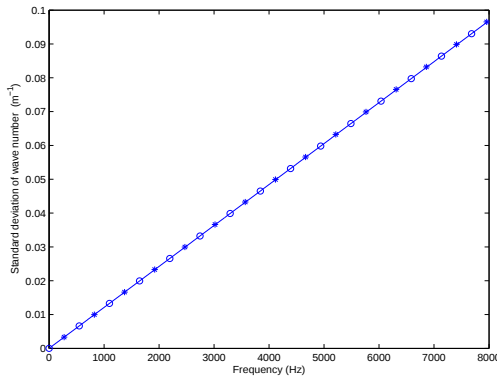


(a)

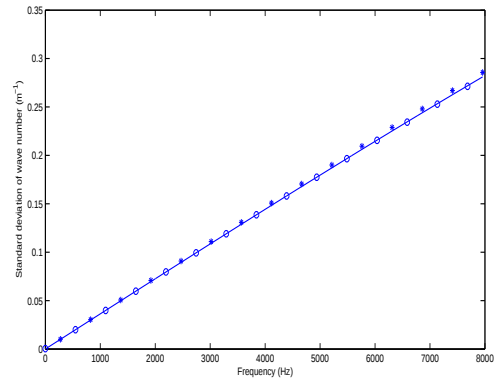


(b)

FIGURE 2.3 – Écart type du nombre d'onde longitudinal (E Stochastique); (a) : 2% , (b) : 5% : (—) : SWFE, (o) : Solution analytique, (*) : Monte Carlo (2000 itérations)



(a)



(b)

FIGURE 2.4 – Écart type du nombre d'onde longitudinal (ρ Stochastique); (a) : 2% , (b) : 5% : (—) : SWFE, (o) : Solution analytique, (*) : Monte Carlo (2000 itérations)

Les figures (2.3) et (2.4) représentent l'évolution de l'écart type du nombre d'onde respectivement pour le module d'Young et la densité stochastique . Pour ces deux configurations,

différentes valeurs d'écart types sont testés (2% et 5% de variabilité). Les résultats de la méthode présentée (SWFE) sont validés par deux résultats de références : la solution analytique et les simulations de Monte Carlo en utilisant 2000 itérations. On remarque que la SWFE prédit correctement l'évolution de l'écart type du nombre d'onde sauf pour le cas où la variabilité est assez élevée (5%) puisqu'on remarque une légère divergence entre la solution proposée et les résultats de référence. Cette différence est due principalement à l'utilisation du développement à l'autre un qui ne permet pas la bonne estimation de dispersion pour un aléa important.

2.3.2 | Poutre en flexion

Si on considère une poutre à deux noeuds en flexion, les propriétés structurales sont les mêmes que le cas de la traction-compression. L'équation dynamique d'une poutre en flexion est donné par :

$$ES \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t) \quad (2.70)$$

Ainsi, les matrices de masse et de raideur du système discret s'écrivent :

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{d^3} \begin{pmatrix} 12 & 6d & -12 & 6d \\ & 4d^2 & -6d & 2d^2 \\ \text{sym} & & 12 & -6d \\ & & & 4d^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho S d}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22d & 54 & -13d \\ & 4d^2 & 13d & -3d^2 \\ \text{sym} & & 156 & -22d \\ & & & 4d^2 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

avec : EI la rigidité en flexion, ρ la densité et S la section de la poutre.

D'une façon analogue au cas de la traction, la matrice de raideur dynamique $\mathbf{D} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ s'exprime analytiquement :

$$\mathbf{D} = \frac{EI}{d^3} \begin{pmatrix} (12 - \frac{156}{420}(k_B d)^4) & d(6 - \frac{22}{420}(k_B d)^4) & (-12 - \frac{54}{420}(k_B d)^4) & d(6 + \frac{13}{420}(k_B d)^4) \\ & d^2(4 - \frac{4}{420}(k_B d)^4) & d(-6 - \frac{13}{420}(k_B d)^4) & d^2(2 + \frac{3}{420}(k_B d)^4) \\ & \text{sym} & (12 - \frac{156}{420}(k_B d)^4) & d(-6 + \frac{22}{420}(k_B d)^4) \\ & & & d^2(4 - \frac{4}{420}(k_B d)^4) \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

avec, $k_B = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$ le nombre d'onde de flexion 'exacte'. En utilisant l'équation (2.43) la matrice de transfert peut être exprimée en fonction du nombre d'onde de flexion :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{302400 + 720(k_B d)^4 + (k_B d)^8} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{LL} & \mathbf{S}_{LR} \\ \mathbf{S}_{RL} & \mathbf{S}_{RR} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

$\mathbf{S}_{LL}$, $\mathbf{S}_{LR}$, $\mathbf{S}_{RL}$ and $\mathbf{S}_{RR}$ sont des matrices 2×2 [84]. La résolution du problème aux valeurs propres permet d'évaluer les solutions approximatives des constantes de propagations dans

le cas d'une poutre en flexion :

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} &= 1 \mp j(k_B d) - \frac{1}{2}(k_B d)^2 \pm \frac{j}{6}(k_B d)^3 + \frac{1}{24}(k_B d)^4 \mp \frac{23}{2880}(k_B d)^5 - \frac{1}{960}(k_B d)^6 \dots \\ \mu_{3,4} &= 1 \mp (k_B d) + \frac{1}{2}(k_B d)^2 \pm \frac{1}{6}(k_B d)^3 + \frac{1}{24}(k_B d)^4 \mp \frac{23}{2880}(k_B d)^5 + \frac{1}{960}(k_B d)^6 \dots\end{aligned}$$

avec $\mu_{1,2}$ et $\mu_{3,4}$ représentent les constantes de propagation respectivement pour les ondes propagatives et évanescentes .

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\mu_{1,2}$ sont analytiquement exprimés :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ \theta_{1,2} \\ f_{1,2} \\ m_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp j k_B \left(1 \mp (k_B d)^4 / 2880 \pm (k_B d)^6 / 10800 \dots \right) \\ \mp j E I k_B^3 \left(1 \mp (k_B d)^4 / 960 \mp (k_B d)^6 / 302400 \dots \right) \\ - E I k_B^2 \left(1 - (k_B d)^4 / 1440 - (k_B d)^6 / 18900 \dots \right) \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

avec $w_{1,2}$, $\theta_{1,2}$, $f_{1,2}$, $m_{1,2}$ qui représentent respectivement les ddls de la translation, de la rotation, de la force de cisaillement et moment de flexion. Si on considère que le module d'Young est un paramètre incertain de dispersion σ_E , l'écart type de la matrice de rigidité dynamique s'écrit en fonction de la variabilité du module d'Young :

$$\sigma_D = \frac{\sigma_E I}{d^3} \begin{pmatrix} 12 & 6d & -12 & 6d \\ 4d^2 & -6d & 2d^2 & \\ \text{sym} & 12 & -6d & \\ & & & 4d^2 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

L'équation (2.52) nous permet d'exprimer l'écart type analytique de la valeur propre :

$$\sigma_{\mu_1} = -\frac{\sigma_E}{E} \frac{(k_B d) \left[1 + j(k_B d) - \frac{1}{2}(k_B d)^2 - j\frac{5}{30}(k_B d)^3 + \frac{7}{180}(k_B d)^4 \right]}{\left[-4j + \frac{j}{60}(k_B d)^2 - \frac{j}{700}(k_B d)^4 - \frac{(k_B d)^5}{720} \right]} \quad (2.76)$$

Ainsi que la variabilité du nombre d'onde de flexion :

$$\sigma_{k_B} = \frac{k_B}{4} \frac{\sigma_E}{E} \quad (2.77)$$

Les figures (2.5) et (2.6) représentent respectivement l'écart type du nombre d'onde vis-à-vis des variabilités (module d'Young et densité). La SWFE prouve son efficacité dans toute la bande de fréquence en la comparant par rapport à deux méthodes de référence (analytique et Monte Carlo (2000 itérations)). Pour une grande variabilité (5%) la SWFE prédit mal la dispersion à hautes fréquences.

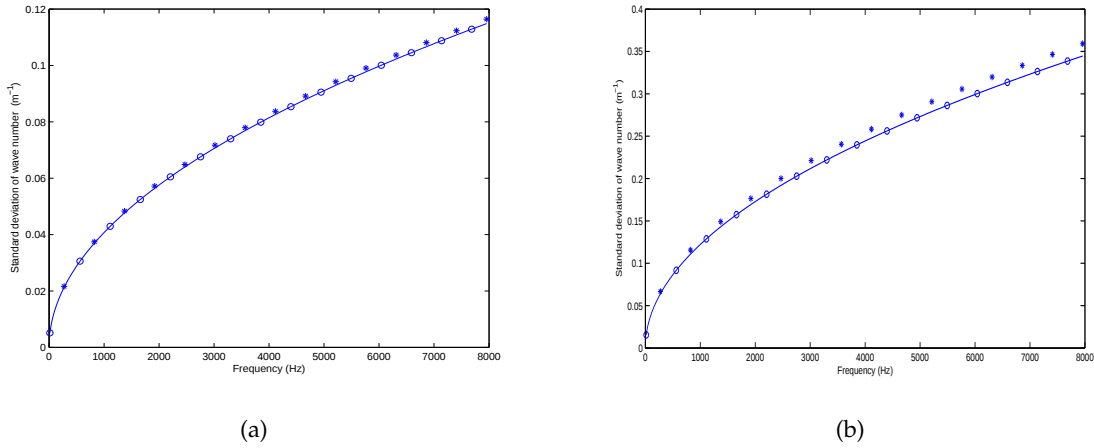


FIGURE 2.5 – Écart type du nombre d'onde de flexion (E Stochastique); (a) : 2% , (b) : 5% : (—) : SWFE, (o) : Solution analytique, (*) : Monte Carlo (2000 itérations).

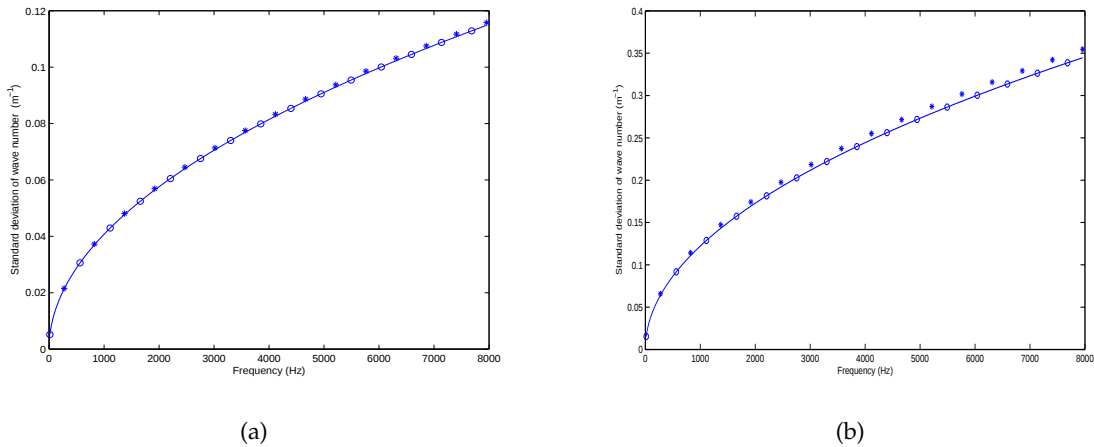


FIGURE 2.6 – Écart type du nombre d'onde de flexion (ρ Stochastique); (a) : 2% , (b) : 5% : (—) : SWFE, (o) : Solution analytique, (*) : Monte Carlo (2000 itérations)

Finalement, l'écart type de la vitesse de groupe est déduite de la façon suivante :

$$\sigma_{c_g} = \frac{1}{2} \frac{\omega I^{1/4}}{(\rho S \omega^2)^{1/4}} \frac{\sigma_E}{E^{3/4}} \quad (2.78)$$

2.4 | Validations numériques: Guide d'ondes multi-modales

Dans cette partie, la SWFE sera validée pour des cas plus généraux. Deux cas différents seront validés: un guide d'ondes multi-modal, le premier sans modes de sections et le second avec modes de sections. La différence, c'est qu'avec le premier cas, les différentes courbes de dispersions peuvent être obtenues avec les formules théoriques. Tandis que le deuxième cas

comporte des modes de sections caractérisés par le changement de la forme de la section droite, qui ne sont pas prédictibles par les solutions analytiques. On étudie leurs effets et leurs comportement énergétiques.

2.4.1 | Guide d'onde multi-modales : Sans modes de sections

Le premier cas consiste à étudier un guide d'ondes 3D avec une direction de propagation. Ce guide élancé est composé de N sous-structures identiques à section constante (figure 2.7). La totalité de l'étude s'effectue pour un seul élément (figure 2.7, (b)). Vu la périodicité de la structure étudiée, les propriétés spectrales seront les mêmes pour tout les éléments. Donc un premier gain en temps de calcul vient du fait qu'on passe d'une étude spectrale de la totalité du guide (14400 ddls) à une étude réduite d'un seul composant (144 ddls).

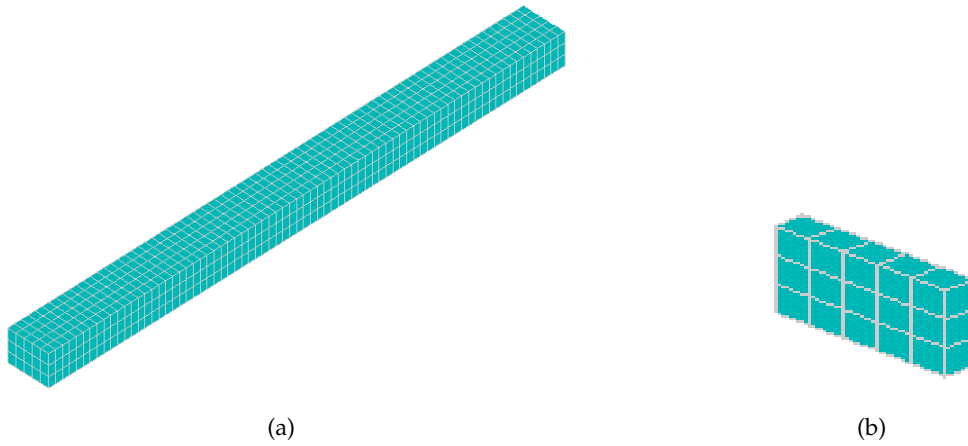


FIGURE 2.7 – Guide d'onde élancé; (a): structure périodique , (b): une sous-structure

La sous-structure est discrétisée en utilisant le programme Ansys. L'utilisation d'un élément cubique à interpolation linéaire (3 ddls par noeud) nous permet l'extraction des matrices masse et raideur numériquement. Ensuite, une étude spectrale déterministe (2.48) est effectuée pour obtenir les différents modes d'ondes propres au système étudié. La propriété de l'orthogonalité symplectique de la matrice de transfert nous permet la classification des différentes ondes pour chaque fréquence. Pour un guide d'ondes dissipatif $\|\mu_i\| \neq 1$, les solutions spectrales $\{\mu_i, \Phi\}_i$ sont classées de façon que les modes $\{\Phi\}_{i=1,\dots,n}$ se propageant dans une direction bien spécifique sont associés aux constantes de propagations $\{\mu_i\}_{i=1,\dots,n}$ ($\|\mu_1\| < \|\mu_2\| < \dots < \|\mu_n\| < 1$), tandis que les modes $\{\Phi\}_{i=n+1,\dots,2n}$ se propageant dans la direction opposée soient associés aux constantes de propagations $\{\mu_i\}_{i=n+1,\dots,2n}$ telle que $1 < \|\mu_{n+1}\| < \|\mu_{n+2}\| < \dots < \|\mu_{2n}\|$.

Les caractéristiques du guide d'ondes étudié sont les suivantes : la densité $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$, le module d'Young $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, l'amortissement structural $\eta = 1\%$, la surface de la section droite $5 \cdot 10^{-2} \times 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ et la longueur de chaque élément $d = 5 \cdot 10^{-3}$. Chaque sous structure est discrétisée en 15 éléments (fi-

gure 2.7).

La figure 2.8 traduit la présence de 4 types d'ondes se propageant dans le sens positif (selon le choix du repère). Ces modes classiques ((1): Traction, (2): Torsion, (3): Flexion 1, (4): Flexion 2) peuvent être prédis par des méthodes analytiques (Théories d'Euler-Bernoulli, Théorie de Timoshenko) qui sont représentées par des pointillés.

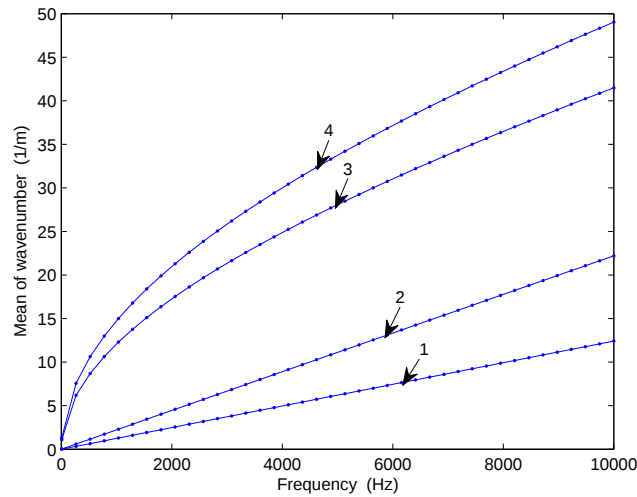


FIGURE 2.8 – La moyenne des nombres d'ondes: (—) WFE, (.): Analytique

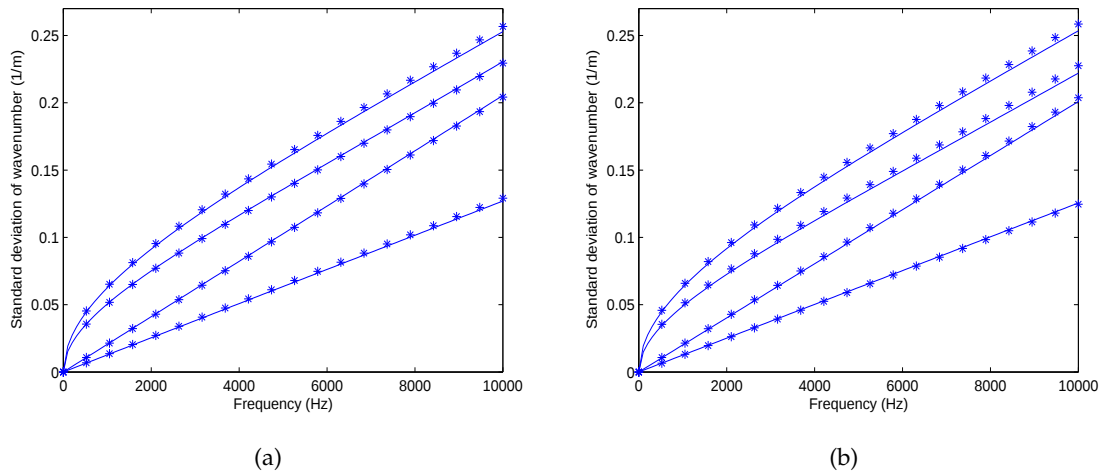


FIGURE 2.9 – Écart type du nombre d'onde pour un guide d'ondes sans les modes de sections: (a): (E Stochastique) 2% , (b): (ρ Stochastique) 2% , (—): SWFE, (*): Monte Carlo (2000 itérations)

Si on considère que cette structure contient des incertitudes dans l'une de ses propriétés mécaniques avec 2% de variabilité, l'étude SWFE nous permet l'obtention des différentes dispersions. Les figures (2.9 (a) et (b)) représentent les écarts types des nombres d'ondes

vis-a-vis d'une perturbation affectant le module d'Young et la densité respectivement. On remarque dans les deux cas que la méthode SWFE prévoit bien l'évolution de l'écart type si on compare par rapport à la méthode de Monte Carlo. On remarque aussi que l'écart type suit la même allure que la moyenne et cela est dû au fait que ces modes classiques n'échangent pas de l'énergie entre eux en cours de la propagation. D'autre part, l'utilisation de l'expansion à l'ordre 1 (dans ce cas) permet l'écriture des expressions analytiques de l'écart type en fonction de la moyenne du nombre d'onde (exemple l'équation 2.68).

2.4.2 | Guide d'onde multi-modales : Avec modes de sections

Dans cette section, un guide d'onde tridimensionnel est étudié composé par N sous-éléments. On procède de la même façon pour étudier l'effet des incertitudes sur le comportement spectral : extraction des matrices masse et raideur, problème spectral moyen, problème spectral aléatoire.

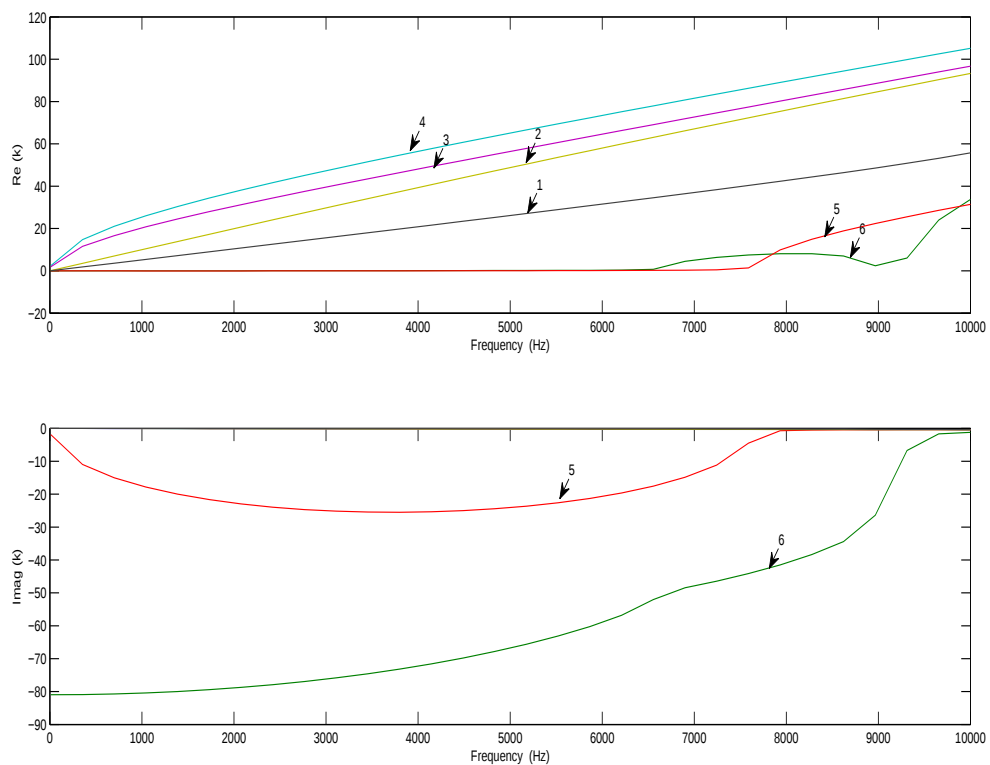


FIGURE 2.10 – La moyenne des nombres d'ondes

La seule différence c'est que les propriétés géométriques sont choisies de façon à ce que les fréquences de coupures des modes de sections soient dans la bande de fréquence étudiée. L'effet de ces modes sera discuté plus loin. Les caractéristiques du guide d'ondes étudié sont :

la densité $\rho = 6800 \text{ Kg/m}^3$, le module d'Young $E = 2 \times 10^{10} \text{ Pa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, l'amortissement structural $\eta = 1\%$, la surface de la section droite $5 \cdot 10^{-2} \times 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ et la longueur de chaque élément $d = 3 \cdot 10^{-3}$.

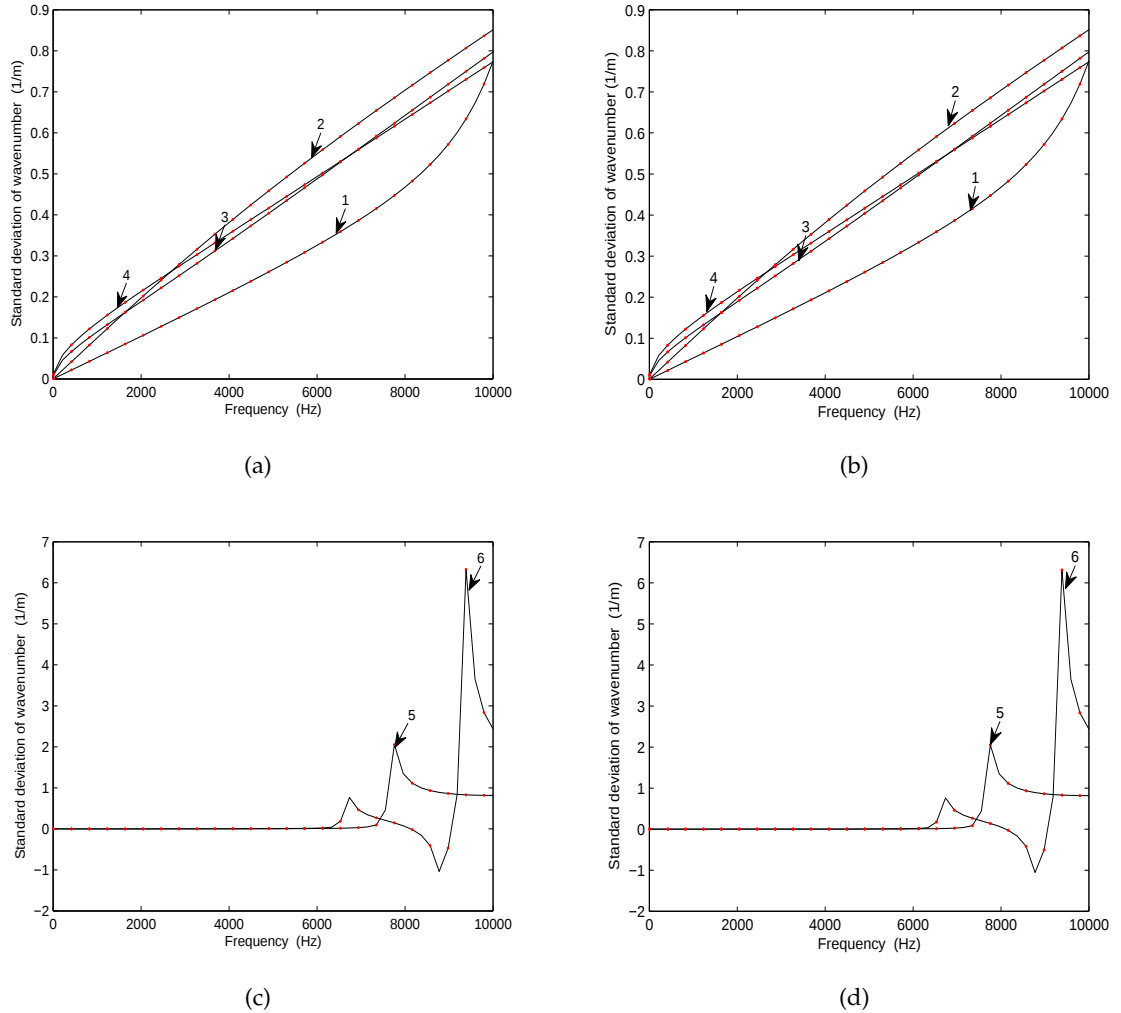


FIGURE 2.11 – Écart type du nombre d'onde pour un guide d'ondes avec modes de sections: (a): (E Stochastique, modes classiques) 2% , (b): (ρ Stochastique, modes classiques) 2%, (c): (E Stochastique, modes de sections) 2% , (d): (ρ Stochastique, modes de sections) 2% : (—): SWFE, (.) : Monte Carlo (3000 itérations)

La figure 2.10 représente l'évolution de la partie réelle et imaginaire des nombres d'ondes. Au dessous de la fréquence 7650 Hz, le spectre contient uniquement les quatre modes classiques (définis dans le cas 2.4.1). Au delà de cette fréquence, le mode de cisaillement (5) apparaît ainsi qu'un premier mode de section (6). Ce mode de section, qui traduit le changement de forme de la section droite est non détectable par les approches analytiques. Il influe l'évolution des courbes de dispersion des autres modes. Ce phénomène est dû aux

échanges énergétiques entre des différents modes propagatives.

D'une façon similaire à la section précédente, on va considérer que le guide contient des incertitudes. On assimile que ces incertitudes suivent une gaussienne avec 2% de variabilité. Ces différentes figures traduisent l'évolution des courbes de dispersion pour différents cas et modes : les figures (2.11 (a) et (c)) sont les écarts types des nombres d'ondes pour les modes classiques et les modes de sections respectivement pour une variabilité de module d'Young de 2%. De même, les figures (2.11 (b) et (d)) sont les écarts types des nombres d'ondes pour une variabilité de la densité de 2%. Ces différents résultats coïncident avec la solution Monte Carlo (3000 itérations) dans la bande de fréquence [10Hz, 10000Hz]. On remarque, pour les modes de sections, qu'il y a un pic pour les deux cas de variabilité. Ces pics correspondent aux fréquences de coupures des modes de section là où la vitesse de groupe tend vers l'infini.

2.5 | Conclusion

Ce chapitre présente une méthode spectrale numérique (WFE) permettant la description spectrale des structures élancées et périodiques. L'extension de la (WFE) pour des guides contenant des incertitudes géométriques et matérielles est aussi présentée. Cette nouvelle formulation (SWFE) a été validée pour différents cas en commençant par le cas les plus simples. La SWFE a prouvé son efficacité, vis-à-vis des variabilités faibles, pour les guides multi-modaux contenant des modes non-classiques. Cette première partie de la thèse sera la base de développement pour tout le reste en utilisant les différents paramètres déjà exprimés explicitement.

Chapitre 3

Propagation multi-modales dans les systèmes élastiques couplés incertains

Sommaire

3.1	Réponse forcée d'une structure périodique stochastique	60
3.1.1	La variabilité de l'amplitude des ondes	61
3.1.2	Construction de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}^*$	63
3.1.3	Expressions des statistiques des variables cinématiques	64
3.2	Matrice de diffusion cinématique stochastique	65
3.2.1	Généralité sur la matrice de diffusion	66
3.2.2	Formulation de DMM déterministe	67
3.2.3	Formulation de DMM stochastique	70
3.3	Réponse forcée d'une structure couplée	73
3.4	Validation numérique	76
3.4.1	Poutre 3D avec propagation 1D en réponse forcée	76
3.4.2	Validation du formalisme de diffusion cinématique pour deux poutres creuses	78
3.4.3	Validation du problème complet : dynamique de deux guides multi-modaux interconnectés	89
3.5	Conclusion	92

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement dynamique des structures périodiques soumises à des excitations sinusoïdales en moyennes et hautes fréquences. Cette partie de la thèse représente une extension d'une approche spectrale forcée pour les structures aléatoires en utilisant les variables cinématiques.

La première partie de ce chapitre concerne la description de la dynamique d'un guide d'ondes soumis à des conditions aux limites spatiales et contenant des incertitudes matérielles ou géométriques. La formulation développée traite les différents cas possibles des conditions aux limites incertaines. Cette formulation forcée utilise les solutions spectrales

stochastiques développées dans le chapitre 1. Le comportement mécanique aléatoire sera étudié en utilisant la SWFE forcée qui est basée sur la projection des variables cinématiques aléatoires sur la base d'ondes stochastiques.

La deuxième partie du chapitre met l'accent sur l'effet d'une discontinuité mécanique dans une structure élastique. La présence d'une telle discontinuité, modélisée en tant que jonction, va être une source des ondes réfléchies ainsi que transmises (traitement d'une structure semi-infinie). L'hybridation de deux méthodes numériques (Wave Finite Element/Stochastic Finite Element Method) permettra la quantification des effets des paramètres mal connus dans la jonction sur le comportement des coefficients de diffusions cinématiques. Finalement, une étude cinématique de deux guides d'ondes stochastiques de dimensions finies connectés à une jonction est développée.

La dernière partie du chapitre présente différents cas de validations des formulations proposées (Calcul forcé d'un seul guide, diffusion cinématique et problème couplé).

3.1 | Réponse forcée d'une structure périodique stochastique

Cette partie présente une étude dynamique stochastique forcée d'une structure périodique. C'est une extension de la WFE forcée pour les guides aléatoires, appelée la SWFE forcée basé sur l'approche probabiliste paramétrique.

Étant donné un guide d'ondes élastiques encastré-libre contenant des aléas uniformément répartis (figure 3.1). Ce guide est composé de N sous-éléments identiques et soumis à une force sinusoïdale aléatoire en $x = 0$.

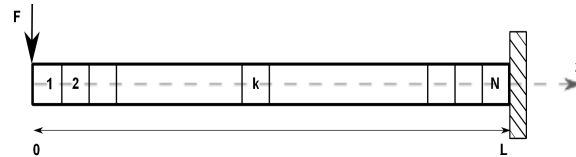


FIGURE 3.1 – Guide d'onde encastré-libre

On définit pour chaque cellule k les vecteurs d'état stochastiques suivants :

$$\tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L^{(k)} \\ -\tilde{\mathbf{f}}_L^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_R^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_R^{(k)} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

La description de comportement dynamique par la méthode multimodale nous permet de projeter les variables cinématiques aléatoires sur la base d'ondes. Si on suppose que les vecteurs propres $\tilde{\Phi}_i$ sont linéairement indépendants, les vecteur d'états $\tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_R^{(k)}$ peuvent être écrits :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)} &= \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{Q}}^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{u}}_R^{(k)} &= \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{Q}}^{(k+1)} \quad \forall \quad k \in \{1 \dots N\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Où $\tilde{\mathbf{Q}}^{(k)}$ représente le vecteur des amplitudes aléatoires des ondes évaluées pour la cellule k . Ces vecteurs sont écrits sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

avec $\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}}$ et $\tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}}$ sont des coordonnées généralisées aléatoires qui sont associées aux modes incidents et réfléchis par les frontières du guide. Autrement, l'équation (3.2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L^{(k)} \\ -\tilde{\mathbf{f}}_L^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_q^{\text{ref}} \\ \tilde{\Phi}_F^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_F^{\text{ref}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(k)} \quad (3.4)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_R^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_R^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_q^{\text{ref}} \\ \tilde{\Phi}_F^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_F^{\text{ref}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(k+1)}$$

avec $\tilde{\Phi}_q^{\text{inc}}$, $\tilde{\Phi}_q^{\text{ref}}$, $\tilde{\Phi}_F^{\text{inc}}$, $\tilde{\Phi}_F^{\text{ref}}$ sont les composantes respectivement des déplacements incidents, des déplacements réfléchis, des forces incidentes et des forces réfléchies de la base d'ondes stochastiques.

3.1.1 | La variabilité de l'amplitude des ondes

La première étape consiste à évaluer les amplitudes des ondes au $k^{\text{ème}}$ élément qu'on peut exprimer directement en utilisant les amplitudes des ondes au premier élément. En effet : les vecteurs d'états déterministes $\tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_L^{(k-1)}$ sont reliés par la matrice de transfert comme suit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)} = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{u}}_L^{(k-1)} \quad (3.5)$$

En multipliant cette équation par $\Phi_i^T J_n$, $\forall i = \{1, \dots, 2n\}$, on aura :

$$\Phi_i^T J_n \tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)} = \Phi_i^T J_n \mathbf{S} \tilde{\mathbf{u}}_L^{(k-1)} \quad (3.6)$$

En utilisant l'équation (3.2), l'équation (3.6) devient :

$$\Phi_i^T J_n \Phi \mathbf{Q}^{(k)} = \Phi_i^T J_n \mathbf{S} \Phi \mathbf{Q}^{(k-1)} \quad (3.7)$$

Vu la propriétés d'orthogonalité du vecteur propre $\{\Phi\}_i$, l'équation (3.7) devient :

$$\Phi_i^T J_n \Phi_l \mathbf{Q}_l^{(k)} = \Phi_i^T J_n \mathbf{S} \Phi_l \mathbf{Q}_l^{(k-1)} \quad (3.8)$$

avec $\mu_i = \mu_l^{-1}$. Puisque $\mathbf{S} \Phi_l = \mu_l \Phi_l$, on déduit finalement :

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}^{\text{inc}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \bar{\mu}^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(k-1)} \bar{\mathbf{Q}}^{(1)} \quad (3.9)$$

En assimilant que les incertitudes sont uniformément réparties tout au long la structure, cette relation de récurrence peut être extrapolée dans le cas stochastique et elle s'écrit de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}^{\text{inc}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mu}^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(k-1)} \tilde{\mathbf{Q}}^{(1)} \quad (3.10)$$

la projection de cette équation nous conduit à écrire la sensibilité d'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{Q}^{\text{inc}}} \\ \sigma_{\mathbf{Q}^{\text{ref}}} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}^{\text{inc}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(k-1)} \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{Q}^{\text{inc}}} \\ \sigma_{\mathbf{Q}^{\text{ref}}} \end{pmatrix}^{(1)} + (k-1) \begin{pmatrix} (\tilde{\mu}^{\text{inc}})^{(k-2)} \sigma_{\mu^{\text{inc}}} & 0 \\ 0 & (\tilde{\mu}^{\text{ref}})^{(k-2)} \sigma_{\mu^{\text{ref}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3.11)$$

avec $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mu_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(1)}$ et $\begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{Q}^{\text{inc}}} \\ \sigma_{\mathbf{Q}^{\text{ref}}} \end{pmatrix}^{(1)}$ représentent respective-

ment la moyenne et l'écart type des amplitudes des modes au premier élément qui peuvent être obtenues en écrivant les équations des conditions aux limites.

L'équation (3.4) est valable pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, en particulier aux conditions aux limites. Si on suppose que notre poutre est encastree-libre, excitée par une force sinusoïdale suivant l'axe y , on va projeter ces variables cinématiques (liée aux conditions aux limites) sur la base d'ondes.

Conditions aux limite en $x = 0$

$$-\tilde{\mathbf{F}}_L^{(1)} = \tilde{\Phi}_F^{\text{inc}} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(1)} + \tilde{\Phi}_F^{\text{ref}} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(1)} \quad (3.12)$$

Conditions aux limite en $x = L$

$$\tilde{\mathbf{q}}_R^{(N)} = \tilde{\Phi}_q^{\text{inc}} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(N+1)} + \tilde{\Phi}_q^{\text{ref}} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(N+1)} \quad (3.13)$$

En utilisant la relation de récurrence (3.10), la deuxième condition aux limites devient :

$$\tilde{\mathbf{q}}_R^{(N)} = \tilde{\Phi}_q^{\text{inc}} \tilde{\mu}^N \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(1)} + \tilde{\Phi}_q^{\text{ref}} \tilde{\mu}^{-N} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(1)} \quad (3.14)$$

Sous la forme matricielle, les conditions aux limites s'expriment :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_F^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_F^{\text{ref}} \\ \tilde{\Phi}_q^{\text{inc}} \tilde{\mu}^{(\text{inc})N} & \tilde{\Phi}_q^{\text{ref}} \tilde{\mu}^{(\text{ref})N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{F}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Donc la projection de cette équation (3.15) nous permet d'identifier l'ordre zéro :

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{inc} & \bar{\Phi}_F^{ref} \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^{(inc)N} & \bar{\Phi}_q^{ref} \bar{\mu}^{(ref)N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q}^{inc(1)} \\ \bar{Q}^{ref(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{F} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

qui représente le problème déterministe. Vu la présence des ondes évanescentes et le choix de classification des modes incidents et réfléchis ($(\|\mu_i^{inc}\| < 1, \|\mu_i\| > 1) \Rightarrow (\min\{\|\mu_i^{inc}\|\})^N \rightarrow 0, (\min\{\|\mu_i^{ref}\|\})^N \rightarrow \infty$), l'inversion directe de cette matrice est presque impossible. Pour mieux conditionner le problème, l'équation (3.16) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{inc} & \bar{\Phi}_F^{ref} \bar{\mu}^{(inc)N} \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^{(inc)N} & \bar{\Phi}_q^{ref} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mu}^{(ref)N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q}^{inc(1)} \\ \bar{Q}^{ref(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{F} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

de la forme $\bar{A}^* \bar{L} \bar{Q} = \bar{B}$ où $\bar{B}$ est un vecteur de taille $2n$ et $\bar{A}^*$ une matrice de dimension $2n \times 2n$ qui dépend des conditions aux limites et $\bar{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mu}^{(ref)N} \end{pmatrix}$.

On aura donc une première matrice mieux conditionnée et une deuxième matrice diagonale qui ne pose pas de problème d'inversion. Ainsi on peut calculer les moyennes des amplitudes des ondes comme suit :

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}^{inc(1)} \\ \bar{Q}^{ref(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mu}^{(inc)N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{inc} & \bar{\Phi}_F^{ref} \bar{\mu}^{(inc)N} \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^{(inc)N} & \bar{\Phi}_q^{ref} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} -\bar{F} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

avec $^+$ désigne la pseudo-inverse.

D'autre part, la sensibilité des amplitudes découle de l'ordre un de l'équation (3.15) comme suit :

$$(\sigma_Q)^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mu}^{(inc)N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{inc} & \bar{\Phi}_F^{ref} \bar{\mu}^N \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^N & \bar{\Phi}_q^{ref} \end{pmatrix}^+ \left[\begin{pmatrix} -\sigma_F \\ \sigma_q \end{pmatrix} - \sigma_A \begin{pmatrix} \bar{Q}^{inc(1)} \\ \bar{Q}^{ref(1)} \end{pmatrix} \right] \quad (3.19)$$

avec $\sigma_A = \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_F^{inc}} & \sigma_{\Phi_F^{ref}} \\ \sigma_{\Phi_q^{inc}} (\bar{\mu}^{inc})^N + N \bar{\Phi}_q^{inc} (\bar{\mu}^{inc})^{(N-1)} \sigma_{\mu^{inc}} & \sigma_{\Phi_q^{ref}} (\bar{\mu}^{ref})^N + N \bar{\Phi}_q^{ref} (\bar{\mu}^{ref})^{(N-1)} \sigma_{\mu^{ref}} \end{pmatrix}$

Dans cette équation on a tenu compte des incertitudes qui peuvent être présentes même dans les conditions aux limites. Pour le cas d'une force aléatoire cela ne signifie pas que c'est un bruit blanc ou autre excitation aléatoire, cela signifie que la force sinusoïdale a une dispersion par rapport à la moyenne et suivant une loi normale.

3.1.2 | Construction de la matrice $\bar{A}^*$

La matrice $\bar{A}^*$ est exprimée en fonction des conditions aux limites. Dans cette partie on va différencier les différents cas possibles :

– **Déplacement-Déplacement**

Les déplacements aux extrémités du guide d'ondes sont explicitement définis, dans ce

cas $\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_L^{(1)} \\ \bar{\mathbf{q}}_R^{(N)} \end{pmatrix}$ donc la matrice $\bar{\mathbf{A}}^*$ s'écrit :

$$\bar{\mathbf{A}}^* = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{\text{inc}} & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}}(\bar{\mu}^{\text{inc}})^N \\ \bar{\Phi}_q^{\text{inc}}(\bar{\mu}^{\text{inc}})^N & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

– **Déplacement-Force**

Les déplacements et les forces aux extrémités du guide d'ondes sont explicitement

définis, dans ce cas $\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_L^{(1)} \\ \bar{\mathbf{F}}_R^{(N)} \end{pmatrix}$ donc la matrice $\bar{\mathbf{A}}^*$ s'écrit :

$$\bar{\mathbf{A}}^* = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{\text{inc}} & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}}(\bar{\mu}^{\text{inc}})^N \\ \bar{\Phi}_F^{\text{inc}}(\bar{\mu}^{\text{inc}})^N & \bar{\Phi}_F^{\text{ref}} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

– **Force-Déplacement**

Les déplacements et les forces aux extrémités du guide d'ondes sont explicitement

définis, dans ce cas $\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{F}}_L^{(1)} \\ \bar{\mathbf{q}}_R^{(N)} \end{pmatrix}$ donc la matrice $\bar{\mathbf{A}}^*$ s'écrit :

$$\bar{\mathbf{A}}^* = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{\text{inc}} & \bar{\Phi}_F^{\text{ref}}(\bar{\mu}^{\text{inc}})^N \\ \bar{\Phi}_q^{\text{inc}}(\bar{\mu}^{\text{inc}})^N & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

– **Force-Force**

Les forces aux extrémités du guide d'ondes sont explicitement définis, dans ce cas

$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{F}}_L^{(1)} \\ \bar{\mathbf{F}}_R^{(N)} \end{pmatrix}$ donc la matrice $\bar{\mathbf{A}}^*$ s'écrit :

$$\bar{\mathbf{A}}^* = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{\text{inc}} & \bar{\Phi}_F^{\text{ref}}(\bar{\mu}^{\text{inc}})^N \\ \bar{\Phi}_F^{\text{inc}}(\bar{\mu}^{\text{inc}})^N & \bar{\Phi}_F^{\text{ref}} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

3.1.3 | Expressions des statistiques des variables cinématiques

Les variables aléatoires cinématiques (déplacements et forces) découlent directement de l'équation reliant les vecteurs d'états aux amplitudes des modes (3.4) qui peut être exprimée :

$$(\tilde{\mathbf{q}})^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_q^{\text{ref}} \\ \tilde{\Phi}_q^{\text{inc}} \tilde{\mu}^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_q^{\text{ref}} \tilde{\mu}^{\text{ref}} \end{pmatrix} (\tilde{\mathbf{Q}})^{(k)} \quad (3.24)$$

La projection de cette équation permet d'obtenir les déplacements nodaux moyens des deux côtés de l'élément k à gauche et à droite :

$$(\bar{\mathbf{q}})^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{\text{inc}} & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}} \\ \bar{\Phi}_q^{\text{inc}} \bar{\mu}^{\text{inc}} & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}} \bar{\mu}^{\text{ref}} \end{pmatrix} (\bar{\mathbf{Q}})^{(k)} \quad (3.25)$$

Ainsi que leurs écarts types :

$$(\sigma_q)^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{\text{inc}} & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}} \\ \bar{\Phi}_q^{\text{inc}} \bar{\mu}^{\text{inc}} & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}} \bar{\mu}^{\text{ref}} \end{pmatrix} (\sigma_Q)^{(k)} + \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_q^{\text{inc}}} & \sigma_{\Phi_q^{\text{ref}}} \\ \sigma_{\Phi_q^{\text{inc}} \bar{\mu}^{\text{inc}} + \bar{\Phi}_q^{\text{inc}} \sigma_{\mu^{\text{inc}}} & \sigma_{\Phi_q^{\text{ref}} \bar{\mu}^{\text{ref}} + \bar{\Phi}_q^{\text{ref}} \sigma_{\mu^{\text{ref}}}} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \quad (3.26)$$

D'une façon analogue, les forces nodales stochastiques pour le sous-élément k s'écrivent :

$$(\tilde{\mathbf{F}})^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_F^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_F^{\text{ref}} \\ \tilde{\Phi}_F^{\text{inc}} \tilde{\mu}^{\text{inc}} & \tilde{\Phi}_F^{\text{ref}} \tilde{\mu}^{\text{ref}} \end{pmatrix} (\tilde{\mathbf{Q}})^{(k)} \quad (3.27)$$

Finalement, l'évaluation des statistiques des paramètres cinématiques commence par la connaissance des amplitudes des modes aléatoires pour le premier élément en utilisant les conditions aux limites cinématiques (équations 3.18 et 3.19). Ensuite, les équations de récurrence (3.10) permettent d'exprimer les amplitudes des ondes aux $k^{\text{ème}}$ élément en fonction des amplitudes du premier. Finalement, la cinématique du système est complètement décrite par les équations (3.24 et 3.27).

3.2 | Matrice de diffusion cinématique stochastique

L'évaluation de la matrice de diffusion cinématique est une tâche importante dans le domaine de la mécanique et de la détection des défauts. La présence d'une discontinuité dans la structure étudiée crée un phénomène de diffusion ou diffraction selon la dimension de la jonction par rapport aux longueurs d'ondes. Mace [85] a développé les équations des coefficients de diffusions pour une poutre en flexion. Mei *et al.* [86] a décrit le comportement dynamique de deux poutres de Timoshenko précontraintes et contenant une discontinuité, et a présenté les expressions analytiques des matrices de réflexion et transmission. Plus concrètement, la jonction peut être une fissure, la rouille, un coude, un élément de raccord, etc. Il est important de détecter les emplacements de ces jonctions ainsi que leurs effets sur le comportement vibratoire de la totalité de la structure. Différentes approches ont été développées. Chondros *et al.* [87] a utilisé la formulation variationnelle pour développer une équation différentielle pour des poutres contenant des fissures. Toutes ces formulations analytiques déjà présentées sont limitées pour les basses fréquences. En montant en fréquences d'excitation, les modes de sections apparaissent et deviennent de plus en plus influents sur le comportement global. Ainsi, le recours à des méthodes numériques décrivant ces modes non-classiques est obligatoire. Mencik *et al.* [79] a développé une formulation de prédiction

de la matrice de diffusion (Diffusion Matrix Model,(DMM)) pour deux guides multimodaux connectés par une raideur en utilisant la WFE. Ichchou *et al.*[29] a appliqué cette formulation pour différents configuration de jonction. Cette méthode est ensuite validée expérimentalement par Zhou *et al.*[30] et Bareille *et al.*[35] pour détecter les différents défauts dans les tubes en utilisant des excitations de type torsion générée par des matériaux piézoélectriques.

3.2.1 | Généralité sur la matrice de diffusion

Considérons un modèle général d'une jonction couplée aux éléments monomodaux (onde de traction-compression, torsion,...). Au niveau de la jonction, il existe différents types d'ondes, selon l'hypothèse qu'on retient. Si on suppose que les structures couplées à la jonction sont finies (figure 3.2 (a)), alors, en respectant la convention de signe adoptée (signe + pour l'onde incidente et se propageant dans le sens positif), les vecteurs d'ondes incidentes et sortantes à la jonction s'écrivent sous la forme :

$$[E] = [o_k^+ \ o_1^- \ \dots \ o_m^-]^T \quad [S] = [o_k^- \ o_1^+ \ \dots \ o_m^+]^T \quad (3.28)$$

Les dimensions de ces deux vecteurs dépendent directement du nombre de guides connectés et du nombre de modes considérés dans chaque guide.

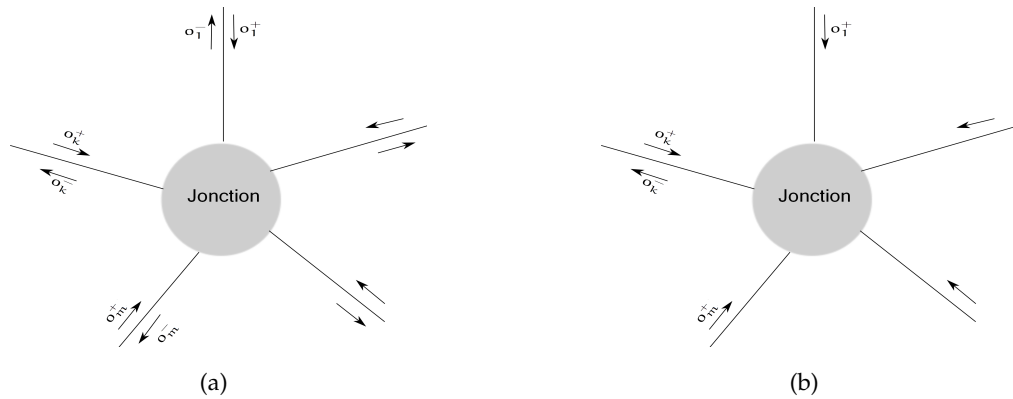


FIGURE 3.2 – Des guides monomodaux connectés à une jonction

Dans le deuxième cas où on considère que les guides comme semi-infinis excepté le guide d'indice k (figure 3.2 (b)), le vecteur des ondes incidentes se réduit à :

$$[E] = [o_k^+ \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T \quad (3.29)$$

Ans pour une onde incidente o_k^+ à la jonction, elle va engendrer une onde réfléchie o_k^- et des ondes transmises. Ces ondes engendrées sont reliées à l'onde incidente par l'intermédiaire d'une matrice de réflexion $[r]_k$ et d'une matrice de transmission $[t]_k$ qui s'écrivent sous la forme :

$$[o_k^-] = [r]_k[o_k^+] \quad , \quad [o_1^+ \ \dots \ o_m^+]^T = [t]_k[o_k^+] \quad (3.30)$$

Ces équations sont déduites des équations de compatibilité des déplacements et des efforts au niveau de la jonction.

3.2.2 | Formulation de DMM déterministe

Dans cette partie, on va développer la formulation déterministe de la matrice de diffusion cinématique de deux structures périodiques interconnectées en utilisant une méthode hybride (WFE/FE). Les conditions de couplage sont exprimées en termes d'ondes. On considère deux guides d'ondes semi-infinis couplés par une structure élastique. Cet élément de couplage est de longueur supposée inférieure à la longueur d'onde pour assurer le phénomène de la diffusion. Les deux sous-structures (1 and 2) de chaque guide d'ondes sont connectées à l'élément de couplage par les surface Γ_1 et Γ_2 et connectées au guides d'onde par les surface S_1 et S_2 .

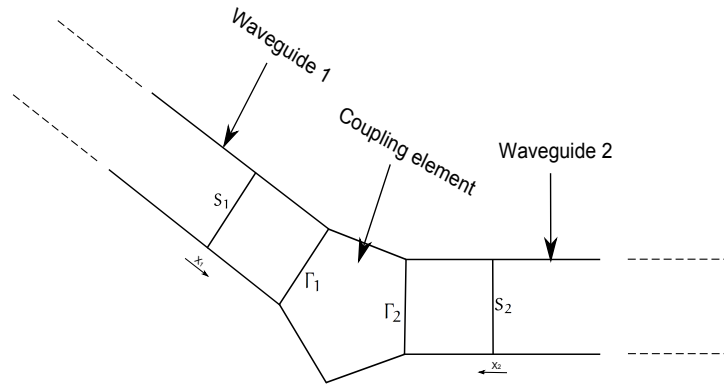


FIGURE 3.3 – Des guides monomodales connectés à une jonction.

On suppose que l'élément de couplage ne subit pas de forces internes alors :

$$K \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_2^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^c \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{F}_2^c \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

avec K est la matrice de la raideur dynamique de l'élément de couplage, $(\mathbf{q}_1^c, \mathbf{F}_1^c)$ et $(\mathbf{q}_2^c, \mathbf{F}_2^c)$ représentent les déplacements et les forces appliqués aux ddls de l'élément de couplage respectivement sur les surfaces Γ_1 et Γ_2 . D'une façon générale, on suppose que la surface Γ_i contient un nombre de ddls (n_c^i) différent du dds de la sous-structure directement connectée (n_i) donc la continuité de déplacement sur les surfaces Γ_1 et Γ_2 de contact est assurée par les multiplicateurs de Lagranges λ_1 et λ_2 . La formulation variationnelle des deux sous-

structures et l'élément de couplage s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1,2} \left(-\omega^2 \int_{\Omega_i} \rho (\delta \mathbf{w}^{(i)})^T \mathbf{w}^{(i)} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_i} (\boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{w}^{(i)}))^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^{(i)}) d\mathbf{x} \right) \\
& + \left(-\omega^2 \int_{\Omega_c} \rho (\delta \mathbf{w}^c)^T \mathbf{w}^c d\mathbf{x} + \int_{\Omega_c} (\boldsymbol{\epsilon}(\delta \mathbf{w}^c))^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}^c) d\mathbf{x} \right) + \int_{\Gamma_1} (\delta \lambda_1)^T (\mathbf{w}^c - \mathbf{w}^{(1)}) ds(\mathbf{x}) \\
& + \int_{\Gamma_2} (\delta \lambda_2)^T (\mathbf{w}^c - \mathbf{w}^{(2)}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_1} (\delta \mathbf{w}^c - \delta \mathbf{w}^{(1)}) \lambda_1 ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_2} (\delta \mathbf{w}^c - \delta \mathbf{w}^{(2)}) \lambda_2 ds(\mathbf{x}) \\
& = \int_{S_1} (\delta \mathbf{w}^{(1)})^T \mathbf{f}^{(1)} ds(\mathbf{x}) + \int_{S_2} (\delta \mathbf{w}^{(2)})^T \mathbf{f}^{(2)} ds(\mathbf{x}), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{w}^{(i)}$ et $\mathbf{w}^c$ sont les déplacements des sous-structures i ($i = 1, 2$) et les déplacements liés à l'élément de couplage sur les surfaces Ω_i et Ω_c resp. $\mathbf{f}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) sont les forces appliquées à la structure i sur la surface S_i . En utilisant la méthode des éléments finis, la discrétisation des différents paramètres sur un domaine élémentaire $\{\Omega_e^{(1)}\}_{e=1,\dots,m_1}$, $\{\Omega_e^{(2)}\}_{e=1,\dots,m_2}$ et $\{\Omega_e^c\}_{e=1,\dots,m_c}$ s'écrit :

$$\mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{N}_e^{(i)} \mathbf{q}_e^{(i)} \quad \text{sur } \Omega_e^{(i)} \quad (i = 1, 2) \tag{3.33}$$

$$\mathbf{w}^c = \mathbf{N}_e^c \mathbf{q}_e^c \quad \text{sur } \Omega_e^c \tag{3.34}$$

$$\lambda_1 = \xi_1 \mathbf{p}_1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \tag{3.35}$$

$$\lambda_2 = \xi_2 \mathbf{p}_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \tag{3.36}$$

En utilisant les équations (3.36) à (3.55), l'équation (3.52) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1,2} \left((\delta \mathbf{q}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} \right) + (\delta \mathbf{q}^c)^T \mathbf{K} \mathbf{q}^c \\
& + (\delta \mathbf{p}_1)^T \left(\sum_{e=1}^{m_c} \int_{\Gamma_1} (\xi_1)^T \mathbf{N}_e^c ds(\mathbf{x}) \mathbf{q}_e^c - \sum_{e=1}^{m_1} \int_{\Gamma_1} (\xi_1)^T \mathbf{N}_e^{(1)} ds(\mathbf{x}) \mathbf{q}_e^{(1)} \right) \\
& + (\delta \mathbf{p}_2)^T \left(\sum_{e=1}^{m_c} \int_{\Gamma_2} (\xi_2)^T \mathbf{N}_e^c ds(\mathbf{x}) \mathbf{q}_e^c - \sum_{e=1}^{m_2} \int_{\Gamma_2} (\xi_2)^T \mathbf{N}_e^{(2)} ds(\mathbf{x}) \mathbf{q}_e^{(2)} \right) \\
& + \left(\sum_{e=1}^{m_c} (\delta \mathbf{q}_e^c)^T \int_{\Gamma_1} (\mathbf{N}_e^c)^T (\xi_1) ds(\mathbf{x}) - \sum_{e=1}^{m_1} (\delta \mathbf{q}_e^{(1)})^T \int_{\Gamma_1} (\mathbf{N}_e^{(1)})^T (\xi_1) ds(\mathbf{x}) \right) \mathbf{p}_1 \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{e=1}^{m_c} (\delta \mathbf{q}_e^c)^T \int_{\Gamma_2} (\mathbf{N}_e^c)^T (\xi_2) ds(\mathbf{x}) - \sum_{e=1}^{m_2} (\delta \mathbf{q}_e^{(2)})^T \int_{\Gamma_2} (\mathbf{N}_e^{(2)})^T (\xi_2) ds(\mathbf{x}) \right) \mathbf{p}_2 \\
& \sum_{e=1}^{m_1} (\delta \mathbf{q}_e^{(1)})^T \int_{\Gamma_1} (\mathbf{N}_e^{(1)})^T \mathbf{f}_1 ds(\mathbf{x}) + \sum_{e=1}^{m_2} (\delta \mathbf{q}_e^{(2)})^T \int_{\Gamma_2} (\mathbf{N}_e^{(2)})^T \mathbf{f}_2 ds(\mathbf{x}). \tag{3.38}
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{N}_e^{(i)}$ et $\mathbf{N}_e^c$ sont les matrices des fonctions d'interpolations sur l'élément $\Omega_e^{(i)}$ ($i = 1, 2$) et Ω_e^c , resp. définis :

$$\mathbf{N}_e^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{for } \mathbf{x} \notin \Omega_e^{(i)} \quad (i = 1, 2) \quad , \quad \mathbf{N}_e^c(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{for } \mathbf{x} \notin \Omega_e^c. \tag{3.39}$$

et $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ sont des vecteurs de dimension $(s_1 \times 1)$ et $(s_2 \times 1)$.

En exprimant le déplacement $\mathbf{q}_e^{(i)}$ d'un élément $\Omega_e^{(i)}$ ($i = 1, 2$) et le déplacement $\mathbf{q}_e^c$ d'un élément Ω_e^c à partir des déplacements $\mathbf{q}^{(i)}$ de la sous-structure i et les déplacements de l'élément de couplage $\mathbf{q}^c$:

$$\mathbf{q}_e^{(i)} = \mathbf{L}_e^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} \quad \text{and} \quad \mathbf{q}_e^c = \mathbf{L}_e^c \mathbf{q}^c, \quad (3.40)$$

Cela permet de reformuler l'équation (3.37) comme suit :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,2} \left((\delta \mathbf{q}^{(i)})^T \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{q}^{(i)} \right) + (\delta \mathbf{q}^c)^T \mathbf{K} \mathbf{q}^c \\ & + (\delta \mathbf{p}_1)^T \left(\mathbf{B}_1^c \mathbf{q}^c - \mathbf{B}_1^{(1)} \mathbf{q}^{(1)} \right) + (\delta \mathbf{p}_2)^T \left(\mathbf{B}_2^c \mathbf{q}^c - \mathbf{B}_2^{(2)} \mathbf{q}^{(2)} \right) \\ & + \left((\delta \mathbf{q}^c)^T (\mathbf{B}_1^c)^T - (\delta \mathbf{q}^{(1)})^T (\mathbf{B}_1^{(1)})^T \right) \mathbf{p}_1 + \left((\delta \mathbf{q}^c)^T (\mathbf{B}_2^c)^T - (\delta \mathbf{q}^{(2)})^T (\mathbf{B}_2^{(2)})^T \right) \mathbf{p}_2 \quad (3.41) \\ & = (\delta \mathbf{q}^{(1)})^T \mathbf{F}^{(1)} + (\delta \mathbf{q}^{(2)})^T \mathbf{F}^{(2)}, \quad (3.42) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1^c &= \sum_{e=1}^{m_c} \int_{\Gamma_1} (\xi_1)^T \mathbf{N}_e^c ds(\mathbf{x}) \mathbf{L}_e^c, \quad \mathbf{B}_2^c = \sum_{e=1}^{m_c} \int_{\Gamma_2} (\xi_2)^T \mathbf{N}_e^c ds(\mathbf{x}) \mathbf{L}_e^c, \quad (3.43) \\ \mathbf{B}_1^{(1)} &= \sum_{e=1}^{m_1} \int_{\Gamma_1} (\xi_1)^T \mathbf{N}_e^{(1)} ds(\mathbf{x}) \mathbf{L}_e^{(1)}, \quad \mathbf{B}_2^{(2)} = \sum_{e=1}^{m_2} \int_{\Gamma_2} (\xi_2)^T \mathbf{N}_e^{(2)} ds(\mathbf{x}) \mathbf{L}_e^{(2)}. \end{aligned}$$

avec :

$$\mathbf{B}_1^c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{*c} & \mathbf{o} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2^c = \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{B}_2^{*c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{B}_1^{*(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2^{*(2)} & \mathbf{o} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

avec $\mathbf{B}_1^{*c}$, $\mathbf{B}_2^{*c}$, $\mathbf{B}_1^{*(1)}$ et $\mathbf{B}_2^{*(2)}$ sont des matrices de dimension $(s_1 \times n_c^1)$, $(s_2 \times n_c^2)$, $(s_1 \times n_1)$ resp.

Avec l'utilisation des équations de mouvements de chaque sous-structure, on peut exprimer les variables cinématiques liées aux sous-structures en fonction de la matrice de raideur dynamique de l'élément de couplage :

$$-\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_R^{(1)} \\ \mathbf{q}_L^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_R^{(1)} \\ \mathbf{F}_L^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

avec $\mathbf{T}$ est la matrice assurant la continuité de déplacements et des forces $\begin{pmatrix} \mathbf{F}_R^{(1)} \\ \mathbf{F}_L^{(2)} \end{pmatrix} =$

$-\mathbf{T}^T \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^c \\ \mathbf{F}_2^c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^c \\ \mathbf{q}_2^c \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_R^{(1)} \\ \mathbf{q}_L^{(2)} \end{pmatrix}$. Cette matrice est exprimée :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_1^{*c})^{-1} \mathbf{B}_1^{*(1)} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & (\mathbf{B}_2^{*c})^{-1} \mathbf{B}_2^{*(2)} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

En projetant les variables cinématiques sur la base d'ondes, on aboutit à une relation entre les amplitudes des ondes incidentes à l'élément de couplage ($\mathbf{Q}^{\text{inc}(1)}, \mathbf{Q}^{\text{inc}(2)}$) et réfléchies ($\mathbf{Q}^{\text{ref}(1)}, \mathbf{Q}^{\text{ref}(2)}$) dans les guides écrite de cette manière :

$$-\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \begin{pmatrix} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}} & \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{inc}(1)} \\ \mathbf{Q}^{\text{inc}(2)} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}(1)} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}} & \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{inc}(1)} \\ \mathbf{Q}^{\text{inc}(2)} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}(1)} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

avec les matrices $\Psi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}}, \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}}, \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}}$ et $\Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}}$ en fonctions des vecteurs d'ondes. Finalement, l'équation (3.47) s'écrit,

$$\left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}} \mid \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{inc}(1)} \\ \mathbf{Q}^{\text{inc}(2)} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}(1)} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

Si on assimile que la matrice $\left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}} + \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} \right]$ est inversible, la matrice de diffusion cinématique peut être exprimée :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{ref}(1)} \\ \mathbf{Q}^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{\text{inc}(1)} \\ \mathbf{Q}^{\text{inc}(2)} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

avec :

$$\mathbf{C} = - \left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{ref}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{ref}} \right]^+ \left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \Psi_{\mathbf{q}}^{\text{inc}} + \Psi_{\mathbf{F}}^{\text{inc}} \right] \quad (3.50)$$

avec $^+$ représente la pseudo-inverse.

3.2.3 | Formulation de DMM stochastique

La "Diffusion Matrix model (DMM)" a été utilisée pour valider des résultats expérimentaux de détection de défauts dans les tubes [35]. L'analyse des coefficients expérimentaux permet la quantification et la localisation ainsi que les dimensions des défauts. Une différence entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux est toujours présente. Cette différence est due certainement à la modélisation de la fissure ainsi qu'au manque d'informations sur les propriétés mécaniques locales de la structure à cause de la flexibilité locale que provoque la fissure. Dans cette partie on va présenter une formulation qui décrit la diffusion des ondes se propageant dans des guides déterministes connectés à un élément de couplage contenant des incertitudes mécaniques. Cette formulation découle d'une hybridation ('Wave finite elements/Stochastic finite element method', (WFE/SFEM)).

Si on considère deux guides d'ondes semi-infinis interconnectés par un élément de couplage contenant des incertitudes, l'équation dynamique stochastique de l'élément de couplage s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^c \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_1}^c \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_2}^c \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

avec $\tilde{\mathbf{K}}$ la matrice de raideur dynamique condensée aux noeuds gauche et droite sur la section Γ_1 et Γ_2 , $\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^c$ et $\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^c$ (resp. $\tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_1}^c$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_2}^c$) qui représentent respectivement les déplacements nodaux et les forces nodales stochastiques. Pour simplifier la tâche, on suppose que le nombre de ddls sur la section gauche et droite de l'élément de couplage est égale aux nombre de ddls liées aux guides. Les matrices représentant les conditions des continuités des déplacements et forces stochastiques s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^c \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_1}^c \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_2}^c \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_1}^c \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_2}^c \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

avec $\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^{(1)}$ et $\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^{(2)}$ (resp. $\tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_1}^{(1)}$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_2}^{(2)}$) sont les déplacements et les forces évaluées sur la surface Γ_1 et Γ_2 pour chaque guide. Les équations (3.51) et (3.52) permettent une relation entre les variables cinématiques liées aux guides d'ondes et la matrice de raideur dynamique de l'élément de couplage comme suit :

$$-\tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_1}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_2}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

En utilisant les projections des variables cinématiques sur la base d'ondes, on écrit :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_i}^{(i)} = \left(\tilde{\Phi}_q^{\text{inc}(i)} \tilde{\Phi}_q^{\text{ref}(i)} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(i)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(i)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{F}}_{\Gamma_i}^{(i)} = \left(\tilde{\Phi}_F^{\text{inc}(i)} \tilde{\Phi}_F^{\text{ref}(i)} \right) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(i)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (3.54)$$

Si les deux guides d'ondes sont identiques, la condition $(\Phi_q)_j^{(1)} = (\Phi_q)_j^{(2)}$, $(\Phi_F)_j^{(1)} = -(\Phi_F)_j^{(2)}$ et $\tilde{\mathbf{S}}^{(1)} \neq \tilde{\mathbf{S}}^{(2)}$ doit être vérifiée.

Si on substitue l'équation (3.54) dans (3.53), on aura une expression reliant les amplitudes des modes réfléchis dans les guides en fonction des amplitudes des ondes incidentes sur l'élément de couplage comme suit :

$$\underbrace{\left(\tilde{\mathbf{K}} \Psi_q^{\text{inc}} + \Psi_F^{\text{inc}} \right)}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(2)} \end{pmatrix} = - \underbrace{\left(\tilde{\mathbf{K}} \Psi_q^{\text{ref}} + \Psi_F^{\text{ref}} \right)}_{\tilde{\mathbf{B}}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{\text{inc}(2)} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

avec Ψ_q^{inc} , Ψ_q^{ref} , Ψ_F^{inc} et Ψ_F^{ref} sont définies :

$$\begin{aligned}\Psi_q^{\text{inc}} &= \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{\text{inc}(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Phi}_q^{\text{inc}(2)} \end{pmatrix}, & \Psi_q^{\text{ref}} &= \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{\text{ref}(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Phi}_q^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix} \\ \Psi_F^{\text{inc}} &= \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{\text{inc}(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Phi}_F^{\text{inc}(2)} \end{pmatrix}, & \Psi_F^{\text{ref}} &= \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{\text{ref}(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Phi}_F^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.57)$$

En projetant la relation (3.55) on obtient l'ordre zéro :

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}^{\text{ref}(1)} \\ \bar{Q}^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix} = \bar{C} \begin{pmatrix} \bar{Q}^{\text{inc}(1)} \\ \bar{Q}^{\text{inc}(2)} \end{pmatrix}\quad (3.58)$$

avec :

$$\bar{C} = - \left[\bar{K} \Psi_q^{\text{ref}} + \Psi_F^{\text{ref}} \right]^+ \left[\bar{K} \Psi_q^{\text{inc}} + \Psi_F^{\text{inc}} \right] = -\bar{B}^+ \times \bar{A}\quad (3.59)$$

$\bar{C}$ représente la matrice de diffusion cinématique déterministe. Cette relation nous permet l'évaluation des coefficients de réflexion et de transmission cinématiques pour tous les modes possibles présents dans la structure (propagatifs et évanescents) contrairement aux approches analytiques qui traitent uniquement les ondes classiques. De plus, les termes extra-diagonaux de matrice $\bar{C}$ quantifient les conversions des modes causés par de la discontinuité. De plus, le premier ordre de l'équation (3.55) s'écrit :

$$\bar{A} \begin{pmatrix} \sigma_{Q^{\text{inc}(1)}} \\ \sigma_{Q^{\text{inc}(2)}} \end{pmatrix} + \sigma_A \begin{pmatrix} \bar{Q}^{\text{inc}(1)} \\ \bar{Q}^{\text{inc}(2)} \end{pmatrix} = -\bar{B} \begin{pmatrix} \sigma_{Q^{\text{ref}(1)}} \\ \sigma_{Q^{\text{ref}(2)}} \end{pmatrix} - \sigma_B \begin{pmatrix} \bar{Q}^{\text{ref}(1)} \\ \bar{Q}^{\text{ref}(2)} \end{pmatrix}\quad (3.60)$$

La combinaison de l'équation (3.59) et (3.60) permet d'exprimer les écarts types des amplitudes des modes réfléchies et transmises :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{Q^{\text{ref}(1)}} \\ \sigma_{Q^{\text{ref}(2)}} \end{pmatrix} = \bar{C} \begin{pmatrix} \sigma_{Q^{\text{inc}(1)}} \\ \sigma_{Q^{\text{inc}(2)}} \end{pmatrix} + \left(-\bar{B}^{-1} [\sigma_A + \sigma_B \bar{C}] \right) \begin{pmatrix} \bar{Q}^{\text{inc}(1)} \\ \bar{Q}^{\text{inc}(2)} \end{pmatrix}\quad (3.61)$$

avec σ_A et σ_B sont les écarts types des matrices déjà définis dans l'équation (3.55). Elles sont définies en fonction de la dispersion de la matrice de raideur dynamique de l'élément de couplage σ_K (selon le type de l'incertitude) et sont exprimées :

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sigma_K \Psi_q^{\text{inc}} \\ \sigma_B &= \sigma_K \Psi_q^{\text{ref}}\end{aligned}\quad (3.62)$$

Finalement, l'écart type de la matrice de diffusion peut être identifié comme suit :

$$\sigma_C = -\bar{B}^{-1} [\sigma_A + \sigma_B \bar{C}]\quad (3.63)$$

3.3 | Réponse forcée d'une structure couplée

La dynamique d'une structure composée par deux guides d'ondes finis connectés par une jonction est traité dans cette partie. Une formulation permettant l'évaluation des paramètres cinématiques vis-a-vis des incertitudes présentes dans la totalité de la structure est exprimée. Cette étude est basée sur l'aspect propagation dans les guides et l'aspect diffusion près de la jonction (déjà présenté). Pour cela, on considère deux structures couplées avec un élément de couplage contenant des incertitudes mécaniques. Les deux guides sont supposés périodiques et composés de N_1 and N_2 sous-éléments (figure 3.18). On définit deux repères différents avec des origines placées aux extrémités de la structure. Les deux conditions aux limites sont définies en ($x_1 = 0$) (force sinusoïdale) et en $x_2 = 0$ (encastrée).

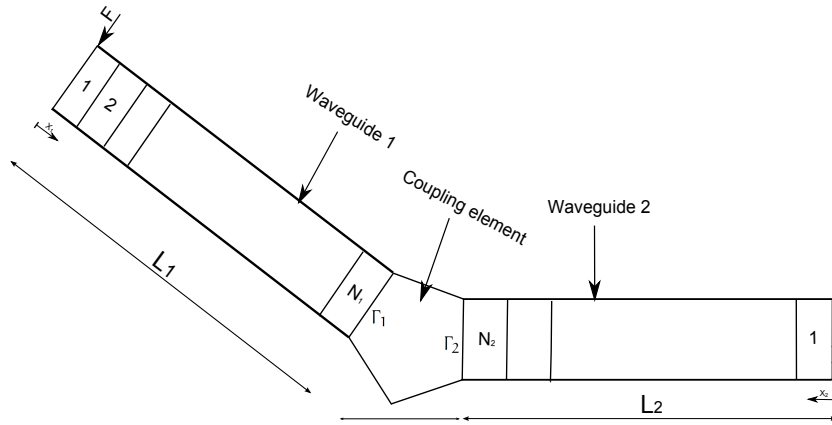


FIGURE 3.4 – Deux guides multi-modaux connectés par une jonction

On suppose que les incertitudes sont homogènes spatialement pour chaque guide d'ondes. En présence d'une discontinuité mécanique, les coefficients de diffusion sont quantifiables facilement en utilisant la formulation présentée dans la section 3.2. Donc les amplitudes des modes incidents et réfléchis (dans les deux guides) sont définis par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_I^{ref} \\ \tilde{Q}_{II}^{ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_I^{inc} \\ \tilde{Q}_{II}^{inc} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

avec I et II désignent les guides d'ondes 1 et 2.

D'une façon analogue au cas d'une poutre simple déjà décrit dans la section 3.1, on doit chercher les amplitudes des ondes aux premiers éléments de chaque côté. Pour cela, on doit écrire les équations des conditions aux limites pour les deux guides.

Pour le guide d'ondes 1

Le guide d'onde 1 est soumis à une force sinusoïdale (supposée déterministe) en $x_1 = 0$ qui peut être écrite comme suit :

$$(\tilde{\Phi}_F^{inc})_I \tilde{Q}_I^{inc(1)} + (\tilde{\Phi}_F^{ref})_I \tilde{Q}_I^{ref(1)} = -F_0 \quad (3.65)$$

et à une condition de conversion d'ondes au niveau de l'élément de couplage (au niveau de l'élément numéro N1) qui peut être déduite de l'équation (3.64) :

$$\tilde{\mathbf{Q}}_I^{\text{ref}(N_1+1)} = \tilde{\mathbf{C}}_{11}\tilde{\mathbf{Q}}_I^{\text{inc}(N_1+1)} + \tilde{\mathbf{C}}_{12}\tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{inc}(N_2+1)} \quad (3.66)$$

Pour le guide d'ondes 2

Le guide d'onde 2 est encastré en $x_2 = 0$, donc cette condition cinématique peut être écrite :

$$(\tilde{\Phi}_q^{\text{inc}})_{II} \tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{inc}(1)} + (\tilde{\Phi}_q^{\text{inc}})_{II} \tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{ref}(1)} = \mathbf{q}_0 \quad (3.67)$$

et la deuxième condition de couplage qui exprime les amplitudes des ondes réfléchies dans le guide 2 en fonction des ondes incidentes :

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{ref}(N_2+1)} = \tilde{\mathbf{C}}_{21}\tilde{\mathbf{Q}}_I^{\text{inc}(N_1+1)} + \tilde{\mathbf{C}}_{22}\tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{inc}(N_2+1)} \quad (3.68)$$

et si on applique la même formule de transfert (3.10) pour les deux guides on écrit :

$$\tilde{\mathbf{Q}}_I^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_I^{\text{inc}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \tilde{\mu}_I^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(k-1)} \tilde{\mathbf{Q}}_I^{(1)} \quad (3.69)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_{II}^{\text{inc}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \tilde{\mu}_{II}^{\text{ref}} \end{pmatrix}^{(k-1)} \tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{(1)} \quad (3.70)$$

Ainsi les conditions aux limites peuvent être exprimées uniquement en fonction des amplitudes des ondes au niveau des premiers éléments sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} (\tilde{\Phi}_F^{\text{inc}})_I & (\tilde{\Phi}_F^{\text{ref}})_I & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ -\tilde{\mathbf{C}}_{11}(\tilde{\mu}_I^{\text{inc}})^{N1} & (\tilde{\mu}_I^{\text{ref}})^{N1} & \mathbf{o} & -\tilde{\mathbf{C}}_{12}(\tilde{\mu}_{II}^{\text{inc}})^{N2} \\ -\tilde{\mathbf{C}}_{21}(\tilde{\mu}_I^{\text{inc}})^{N1} & \mathbf{o} & (\tilde{\mu}_I^{\text{ref}})^{N2} & -\tilde{\mathbf{C}}_{22}(\tilde{\mu}_{II}^{\text{inc}})^{N2} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & (\tilde{\Phi}_q^{\text{ref}})_{II} & (\tilde{\Phi}_q^{\text{inc}})_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_I^{\text{inc}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_I^{\text{ref}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{ref}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{inc}(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{q}_0 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

En projetant cette équation on peut écrire l'ordre zéro :

$$\begin{pmatrix} (\tilde{\Phi}_F^{\text{inc}})_I & (\tilde{\Phi}_F^{\text{ref}})_I & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ -\tilde{\mathbf{C}}_{11}(\tilde{\mu}_I^{\text{inc}})^{N1} & (\tilde{\mu}_I^{\text{ref}})^{N1} & \mathbf{o} & -\tilde{\mathbf{C}}_{12}(\tilde{\mu}_{II}^{\text{inc}})^{N2} \\ -\tilde{\mathbf{C}}_{21}(\tilde{\mu}_I^{\text{inc}})^{N1} & \mathbf{o} & (\tilde{\mu}_I^{\text{ref}})^{N2} & -\tilde{\mathbf{C}}_{22}(\tilde{\mu}_{II}^{\text{inc}})^{N2} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & (\tilde{\Phi}_q^{\text{ref}})_{II} & (\tilde{\Phi}_q^{\text{inc}})_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_I^{\text{inc}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_I^{\text{ref}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{ref}(1)} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{II}^{\text{inc}(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F}_0 \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{q}_0 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

La résolution de cette équation nécessite l'inversion directe de la matrice qui est impossible vu la présence des modes évanescents qui provoquent une dispersion énorme entre les termes de la diagonale $(\tilde{\mu}_I^{\text{ref}})^{N1}$ et $(\tilde{\mu}_I^{\text{ref}})^{N2}$ et les termes extra-diagonaux. Mencik [32] a proposé un réarrangement de cette matrice pour être mieux conditionnée et par la suite

on obtient les moyennes des amplitudes d'ondes. Cette méthode est ensuite utilisée pour exprimer les écarts types des amplitudes comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{Q}_I^{inc(1)}} \\ \sigma_{\mathbf{Q}_I^{ref(1)}} \\ \sigma_{\mathbf{Q}_{II}^{ref(1)}} \\ \sigma_{\mathbf{Q}_{II}^{inc(1)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\bar{\mu}_I^{inc})^{N1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\bar{\mu}_{II}^{inc})^{N2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & (\Phi_F^{inc})_I^+ (\Phi_F^{ref})_I (\bar{\mu}_I^{inc})^{N1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\bar{C}_{11} (\bar{\mu}_I^{inc})^{N1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\bar{C}_{12} (\bar{\mu}_{II}^{inc})^{N2} \\ -\bar{C}_{21} (\bar{\mu}_I^{inc})^{N1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\bar{C}_{22} (\bar{\mu}_{II}^{inc})^{N2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\bar{\Phi}_q^{inc})_{II}^+ (\bar{\Phi}_q^{ref})_{II} (\bar{\mu}_{II}^{inc})^{N2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^+$$

$$\begin{pmatrix} -(\Phi_F^{inc})_I^+ \sigma_{(\Phi_F^{inc})_I} & -(\Phi_F^{inc})_I^+ \sigma_{(\Phi_F^{ref})_I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21} & -N_1 (\bar{\mu}_I^{ref})^{N1-1} \sigma_{\mu_I} & \mathbf{0} & a_{24} \\ a_{31} & \mathbf{0} & -N_2 (\bar{\mu}_{II}^{ref})^{N2-1} \sigma_{\mu_{II}} & a_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\bar{\Phi}_q^{inc})_{II}^+ \sigma_{(\bar{\Phi}_q^{ref})_I} & -(\bar{\Phi}_q^{inc})_{II}^+ \sigma_{(\bar{\Phi}_q^{inc})_I} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_I^{inc(1)} \\ \bar{Q}_I^{ref(1)} \\ \bar{Q}_{II}^{ref(1)} \\ \bar{Q}_{II}^{inc(1)} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_{21} &= \sigma_{C_{11}} (\bar{\mu}_I^{inc})^{N1} + N_1 \bar{C}_{11} (\bar{\mu}_I^{inc})^{N1-1} \sigma_{\mu_I} \\ a_{24} &= \sigma_{C_{12}} (\bar{\mu}_{II}^{inc})^{N2} + N_2 \bar{C}_{12} (\bar{\mu}_{II}^{inc})^{N2-1} \sigma_{\mu_{II}} \\ a_{31} &= \sigma_{C_{21}} (\bar{\mu}_I^{inc})^{N1} + N_1 \bar{C}_{21} (\bar{\mu}_I^{inc})^{N1-1} \sigma_{\mu_I} \\ a_{34} &= \sigma_{C_{22}} (\bar{\mu}_{II}^{inc})^{N2} + N_2 \bar{C}_{22} (\bar{\mu}_{II}^{inc})^{N2-1} \sigma_{\mu_{II}} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Finalement, en exprimant les statistiques des amplitudes des ondes aux niveau des premiers éléments, l'expression de la moyenne du déplacement $\bar{\mathbf{q}}$ pour l'élément 1 est équivalente à l'équation (3.25) alors que son écart type s'écrit :

$$(\sigma_{\mathbf{q}})_i^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{inc} & \bar{\Phi}_q^{ref} \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^{inc} & \bar{\Phi}_q^{ref} \bar{\mu}^{ref} \end{pmatrix}_i (\sigma_{\mathbf{Q}})_i^{(1)} + \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_q^{inc}} & \sigma_{\Phi_q^{ref}} \\ \sigma_{\Phi_q^{inc} \bar{\mu}^{inc} + \bar{\Phi}_q^{inc} \sigma_{\mu^{inc}}} & \sigma_{\Phi_q^{ref} \bar{\mu}^{ref} + \bar{\Phi}_q^{ref} \sigma_{\mu^{ref}}} \end{pmatrix}_i \bar{Q}_i^{(1)} \quad (3.75)$$

avec $i = \{I, II\}$, $\bar{\Phi}$ et $\bar{Q}$ sont les solutions du problème déterministe.

En utilisant les équations de transfert, l'écart type des amplitudes exprimées pour le $k^{\text{ème}}$ élément

pour le guide 1 et 2 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{Q}^{inc}} \\ \sigma_{\mathbf{Q}^{ref}} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}^{inc} & 0 \\ 0 & \bar{\mu}^{ref} \end{pmatrix}^{(k-1)} \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{Q}^{inc}} \\ \sigma_{\mathbf{Q}^{ref}} \end{pmatrix}^{(1)} + \\ (k-1) \begin{pmatrix} (\bar{\mu}^{inc})^{(k-2)} \sigma_{\mu^{inc}} & 0 \\ 0 & (\bar{\mu}^{ref})^{(k-2)} \sigma_{\mu^{ref}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{Q}}^{inc} \\ \bar{\mathbf{Q}}^{ref} \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3.76)$$

Ainsi, l'effet des incertitudes dans les guides couplés sont totalement décrits, en termes cinématiques, en tout point de la structure par la formule suivante :

$$(\sigma_q)^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{inc} & \bar{\Phi}_q^{ref} \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^{inc} & \bar{\Phi}_q^{ref} \bar{\mu}^{ref} \end{pmatrix} (\sigma_Q)^{(k)} + \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_q^{inc}} & \sigma_{\Phi_q^{ref}} \\ \sigma_{\Phi_q^{inc} \bar{\mu}^{inc} + \bar{\Phi}_q^{inc} \sigma_{\mu^{inc}}} & \sigma_{\Phi_q^{ref} \bar{\mu}^{ref} + \bar{\Phi}_q^{ref} \sigma_{\mu^{ref}}} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{Q}}^{(k)} \quad (3.77)$$

qui représente l'écart type de déplacement pour le $k^{\text{ème}}$ éléments pour le guide 1 ou 2.

3.4 | Validation numérique

Dans cette partie on va essayer de valider les formulations déjà proposées pour différents cas. On va d'abord valider le cas de vibration forcée d'une seule poutre. Ensuite, on étudiera quelques exemples de validation du formalisme de la diffusion cinématique. Enfin, une étude complète d'une structure couplée incertaines sera présentée.

3.4.1 | Poutre 3D avec propagation 1D en réponse forcée

On considère une structure périodique tridimensionnelle à une seule direction de propagation encastrée-libre. Cette structure, de section rectangulaire (figure 3.5), est supposée soumise à une excitation sinusoïdale de flexion suivant l'axe y .

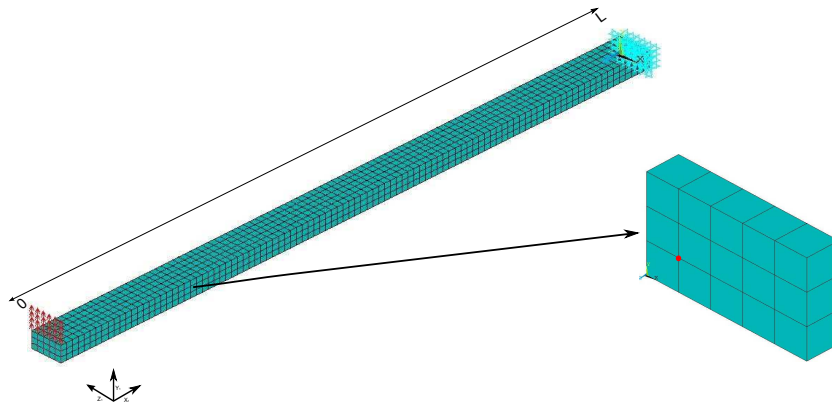


FIGURE 3.5 – Guide d'ondes multi-modales encastré-libre

Dans ce cas, la force est supposée incertaine et sera décrite suivant une loi gaussienne de la forme $\tilde{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}} + \sigma_{\mathbf{F}}\xi$.

Les propriétés structurales de la barre sont : Module d'Young $E = 2 \times 10^{10}$ Pa, la densité $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, amortissement structural $\eta = 3\%$, la longueur de la poutre $L = 1 \text{ m}$, la surface de la section droite $S = 0.06 \text{ m} \times 0.04 \text{ m}$. La sous-structure étudiée est composée par 210 dds et de longueur $d = 0.01 \text{ m}$. Cette structure est étudiée dans la bande de fréquence [20 Hz, 10 kHz].

La figure 3.6 représente la moyenne du déplacement en $x = L/4$ calculé par la moyenne de la SWFE (ou la WFE). La base d'ondes est constituée par les modes classiques ainsi les modes de moyennes et hautes fréquences. Cette approche permet la réduction du modèle par le passage d'un problème structural contenant 10500 ddls à un problème spectral contenant 2010 ddls.

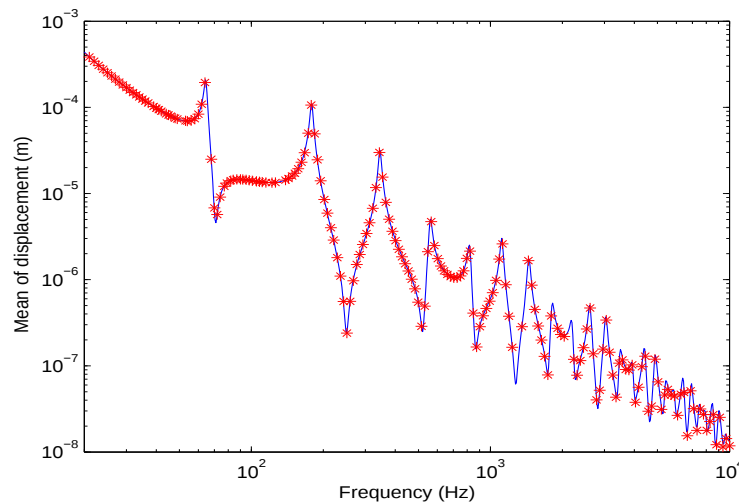


FIGURE 3.6 – Moyenne de déplacement en $x = L/4$: (*) Ansys, (—) SWFE

On remarque que la SWFE prédit correctement le comportement dynamique de la poutre même en HF avec un temps de calcul 6 fois plus rapide de la MEF.

Si on suppose que la structure étudiée comporte de l'incertitude dans ces propriétés mécaniques, en utilisant le développement décrit dans la section 3.1, on peut quantifier l'effet des variabilités comme suit :

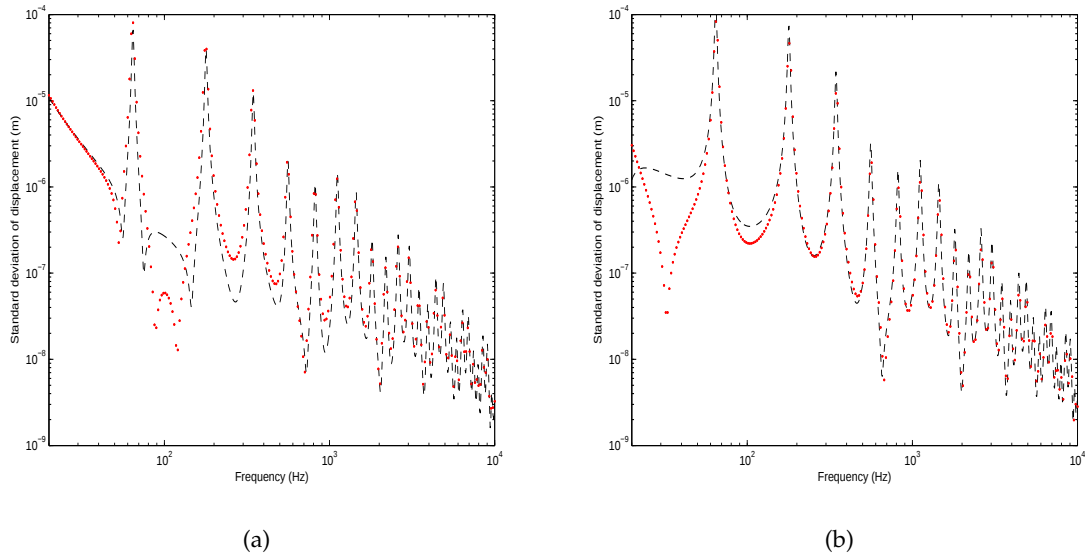


FIGURE 3.7 – Écart type de déplacement en $x = L/4$, (a) Module d'Young stochastique, (b) Densité stochastique : (—) SWFE , (.) Monte Carlo

Les figures (3.7 (a)) et (3.7 (b)) représentent la dispersion du déplacement, calculée au même noeud que la moyenne, suite à la dispersion du module d'Young et la densité respectivement égale à 2%. Ces deux résultats sont calculés avec la SWFE et les simulations de Monte Carlo (3000 itérations). A basses fréquences, les résultats de la SWFE sont légèrement différentes des simulations de MC au niveau des fréquences d'anti-résonance et cette différence est due, *a priori*, à des problèmes purement numériques. Pour les moyennes et hautes fréquences, on a une bonne estimation de l'écart type avec la méthode SWFE avec un temps de calcul 20 fois plus rapide que les simulations de MC.

3.4.2 | Validation du formalisme de diffusion cinématique pour deux poutres creuses

La formulation de la diffusion stochastique est appliquée pour deux poutres à section rectangulaires creuses identiques connectées par un élément de couplage modélisé comme étant une raideur de jonction. Le choix d'un tel exemple repose sur le fait que ce type de structure pose un problème de modélisation surtout en moyenne et haute fréquence par la présence de plusieurs modes de sections influant le comportement global de la structure. Premièrement, une analyse spectrale est nécessaire pour identifier les différents modes de propagation dans les deux guides d'ondes. Une telle géométrie peut être modélisée à basses

fréquences comme étant une poutre d'Euler-Bernoulli avec les équations usuelles suivantes :

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{pour la flexion} \quad (3.78)$$

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{pour la traction-compression} \quad (3.79)$$

avec $I = \frac{4}{3}(ba^3 - (b-h)(a-h)^3)$ est l'inertie de flexion et $A = 4h(a+b)$ est l'aire de la section droite. Donc, les expressions des nombres d'ondes s'écrivent : $k_f = \left(\frac{\omega^2 \rho A}{EI}\right)^{1/4}$ et $k_{tc} = \omega \left(\frac{\rho}{E}\right)^{1/2}$.

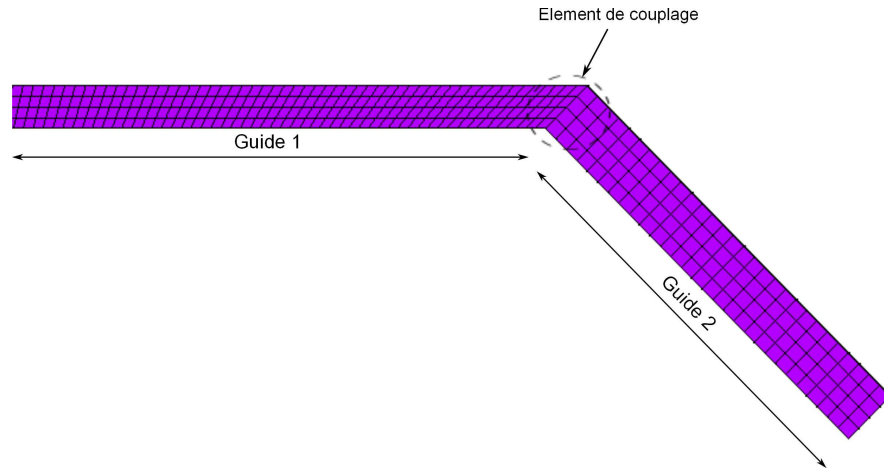


FIGURE 3.8 – Deux carrés creux connectés par une jonction stochastique

En montant en fréquences, les formules d'Euler-Bernoulli ne sont plus valables car elles ne tiennent pas compte des phénomènes moyennes et hautes fréquences (déclenchement successif des modes de sections). Donc, une autre approche analytique permettant l'obtention des nombres d'ondes est présentée. Cette approche consiste à modéliser ce tube à section rectangulaire en tant qu'assemblage de 4 plaques, en utilisant le principe de Hamilton. Cette analyse s'est limitée pour un mode particulier qui est la combinaison d'un mode de flexion suivant l'axe principal et d'un mode de section explicite.

3.4.2.1 | Energies cinétiques et potentielles des plaques

Si on suppose que ce type de structure peut être modélisé par 4 plaques en moyennes et hautes fréquences, le champ de déplacement de chaque plaque s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_i(y, z) \\ v_i(y, z) \\ w_i(y, z) \end{pmatrix} e^{jk_x x} e^{-j\omega t} \quad (3.80)$$

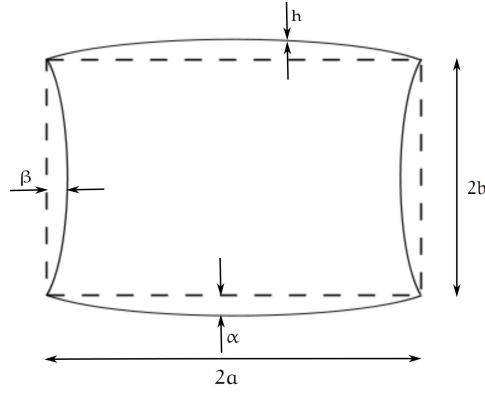


FIGURE 3.9 – Paramètres du tube creux à section rectangulaire.

L'énergie cinétique se traduit directement par la relation :

$$E_c = L \sum_i \int_{S_i} \frac{\rho \omega^2}{2} (u_i^* u_i + v_i^* v_i + w_i^* w_i) dy_i dz_i \quad (3.81)$$

avec u_i^* est le conjugué de u_i et S_i est l'aire de chaque paroi. En tenant compte des expressions respectives de u_i, v_i et w_i , on peut exprimer :

$$E_c = L \sum_i \int_{S_i} \frac{\rho \omega^2}{2} (U_i^* U_i + V_i^* V_i + W_i^* W_i) dy_i dz_i \quad (3.82)$$

L'énergie potentielle est calculée par la relation :

$$E_p = \sum_i \int_{S_i} [\sigma_i^*]^T [\epsilon_i] dS_i \quad (3.83)$$

avec $[\sigma_i]$ et $[\epsilon_i]$ sont les matrices de déformation et de contrainte pour chaque plaque. En utilisant l'hypothèse de Kirchhoff pour les plaques minces, ces deux matrices s'écrivent :

$$[\epsilon_i]^T = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} \quad \frac{\partial v_i}{\partial y} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (3.84)$$

et

$$[\sigma_i] = \frac{E}{1-\nu} \begin{pmatrix} h[D_0] & [0] \\ [0] & \frac{h^3}{12}[D_0] \end{pmatrix} [\epsilon_i] \quad \text{avec} \quad [D_0] = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

L'énergie potentielle pour chaque plaque i s'exprime donc :

$$\begin{aligned}
 E_{p_i} = & \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} L \int_{-a}^a k^2 U_i U_i^* + \frac{\partial V_i}{\partial y} \frac{\partial V_i^*}{\partial y} + \nu \left(-jk U_i^* \frac{\partial V_i}{\partial y} + jk U_i \frac{\partial V_i^*}{\partial y} \right) + \\
 & \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial U_i^*}{\partial y} - jk V_i \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + jk V_i \right) dy + \\
 & \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} L \int_{-a}^a k^4 W_i^* W_i - \nu k^2 \left(W_i^* \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + W_i \frac{\partial^2 W_i^*}{\partial y^2} \right) + \\
 & \frac{\partial^2 W_i^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} + 2(1-\nu) k^2 \frac{\partial W_i^*}{\partial y} \frac{\partial W_i}{\partial y} dy
 \end{aligned} \quad (3.86)$$

avec $i = \{1, 2, 3, 4\}$ signifie le nombre de plaques.

Ces différentes expressions d'énergies sont générales mais ne tiennent pas compte des modes de sections particulières. Houillon [20] a proposé une méthode d'évaluation des énergies pour les modes de sections. Cette méthode consiste à évaluer les déplacements des différentes plaques (pour un mode bien défini) en utilisant un programme commercial et à réécrire les équations des différentes énergies.

Le principe de Hamilton appliqué au Lagrangien d'un carré creux s'écrit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \sum_i (E c_i - E p_i) d\Omega = 0 \quad (3.87)$$

Le Lagrangien est différencié par rapport à chaque variable U , α , γ , et V et les intégrales sont calculées. Après simplifications, on obtient ce système d'équations à 4 inconnues :

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{Ek^2}{1-\nu^2} - \rho\omega^2 \right) U = 0 \\
 & \left(\frac{2}{15} k^4 (a^3 + b^3) + \frac{2}{3} k^2 (a + b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{8}{5} \rho\omega^2 \frac{1-\nu^2}{Eh^2} (a^3 + b^3) \right) \alpha = 0 \\
 & \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(k^2 \left(\frac{a}{3} + b \right) + \frac{1-\nu}{2a} \right) - \rho\omega^2 \left(\frac{a}{3} + b \right) \right) \gamma + \frac{Ek}{2(1+\nu)} V = 0 \\
 & \frac{Ek}{2(1-\nu)} \gamma + \left(\frac{Eh^2 b k^4}{12(1-\nu^2)} + \frac{E a k^2}{2(1-\nu)} - \rho\omega^2 (a + b) \right) V = 0
 \end{aligned} \quad (3.88)$$

Le système d'équations (3.88) s'écrit plus simplement comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \alpha \\ \gamma \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

Les différentes solutions obtenues pour un déterminant de la matrice nulle sont :

- un mode de traction-compression (correspondant à $a_{11} = 0$) :

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \quad (3.90)$$

- un mode de flexion (correspondant à $a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43} = 0$) :

$$\begin{aligned} & \frac{E^2 h^2}{12(1-\nu^2)^2} b \left(\frac{a}{3} + b \right) k^6 + \rho^2 \omega^4 (a+b) \left(\frac{a}{3} + b \right) - \frac{E}{2(1-\nu)} \rho \omega^2 \frac{a+b}{a} \\ & \left(\frac{E^2}{2(1-\nu)(1+\nu)^2} a \left(\frac{a}{3} + b \right) + \frac{E^2 h^2}{24(1-\nu)(1+\nu)^2} \frac{a}{b} - \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)} \rho \omega^2 b \left(\frac{a}{3} + b \right) \right) k^4 \\ & - \frac{E}{1+\nu} \rho \omega^2 \left(\frac{a}{3} + b \right) \left(\frac{a}{2} + \frac{a+b}{1-\nu} \right) k^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

- un mode de section (correspondant à $a_{22} = 0$) :

Si $\omega > \omega_c$, $k = \sqrt{\frac{-2}{3}(a+b) + \sqrt{\Delta} \frac{4}{15}(a^3+b^3)}$ avec $\omega_c = \frac{5}{8} \frac{E h^2}{\rho(1-\nu^2)} \frac{1}{a^3+b^3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ et $\Delta = \frac{4}{9}(a+b)^2 - \frac{8}{15}(a^3+b^3) \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{5}{8} \rho \omega^2 \frac{1-\nu^2}{E h^2} (a^3+b^3) \right)$

Cette méthode est efficace pour obtenir les nombres d'ondes analytiques ainsi que les vitesses de phases, mais elle apparaît relativement lourde pour déterminer toutes les branches de propagations. Donc l'approche numérique (WFE) représente une alternative rapide, facile à programmer et surtout elle permet de présenter tout les types d'ondes possibles se propageant dans la structure.

La poutre creuse à section rectangulaire étudiée a les propriétés mécaniques suivantes : la densité $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$, le module d'Young $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, l'amortissement structural $\eta = 1\%$, les dimensions de la section droite $6 \cdot 10^{-2} \text{ m} \times 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, la longueur de chaque élément $d = 2 \cdot 10^{-2}$ et l'épaisseur $h = 1 \text{ (mm)}$.

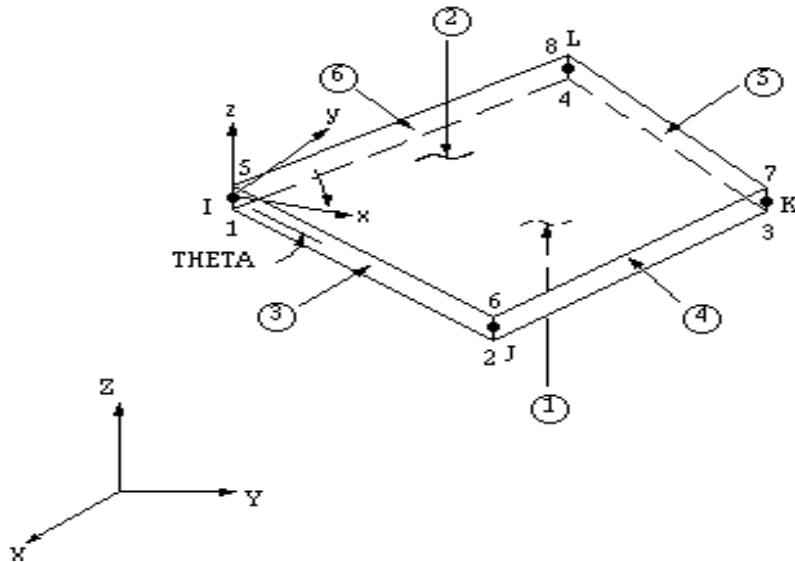


FIGURE 3.10 – Élément de référence : Shell63

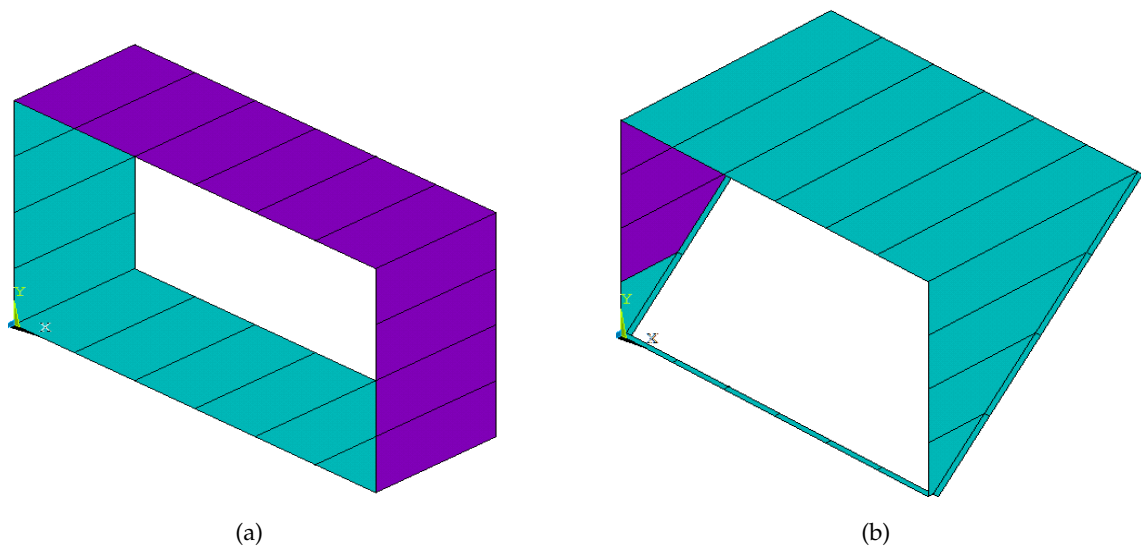


FIGURE 3.11 – La discrétisation des éléments étudiés : (a) : Sous-structure; (b) : Element de couplage

Les sous-structures (figure 3.11 (a)) de chaque guide d'ondes et l'élément de couplage (figure 3.11 (b)) sont discrétisées en utilisant l'élément de référence "SHELL63" (figure 3.10) qui est l'élément le plus adapté pour ce type de structure. L'utilisation du "SHELL63" est plus avantageuse que les éléments de référence type solide. En effet, le SHELL63 permet l'obtention des modes particuliers avec un nombre d'éléments minimales par épaisseur. L'application de la WFE nous conduit à identifier, directement et d'une façon simple, les différentes ondes se propageant dans la structure. L'identification de ces modes nous aide à expliquer l'évolution des différentes courbes de réflexion et transmission. La figure 3.12 traduit les courbes de dispersions, ce qui peut aussi nous donner une idée sur les différentes vitesses de propagation. Ces courbes sont attribuées à leurs modes de vibrations en examinant leurs déformées (figure 3.14 et figure 3.15). Ces déformées représentent la composante déplacement du vecteur d'état Φ_i (solution du problème aux valeurs propres). Le tableau 3.1 récapitule et différencie tous les modes propagatifs, leurs fréquences de coupures et leurs déformées. A basses fréquences (< 700 Hz), on peut identifier que les modes classiques (traction, torsion, flexion 1 et flexion 2). En montant en fréquence, les modes de sections et cisaillements apparaissent et changent le comportement des modes propagatifs. Par exemple, le mode de flexion (numéro 9) possède un comportement normal (parabolique) jusqu'à la fréquence 1848 Hz où un mode de section se déclenche et modifie le comportement du mode de flexion, cela est bien clair dans la déformée (figure 3.14 (c)) à 5000 Hz qui montre que la section ne reste plus droite. Cette influence sur le comportement vibratoire du mode de flexion s'explique du fait que lors du déclenchement du mode (4), un échange énergétique s'effectue entre ce dernier et le mode 9. Cet échange énergétique est bien identifié sur les courbes de réflexion et de transmission des différents modes (figure 3.13).

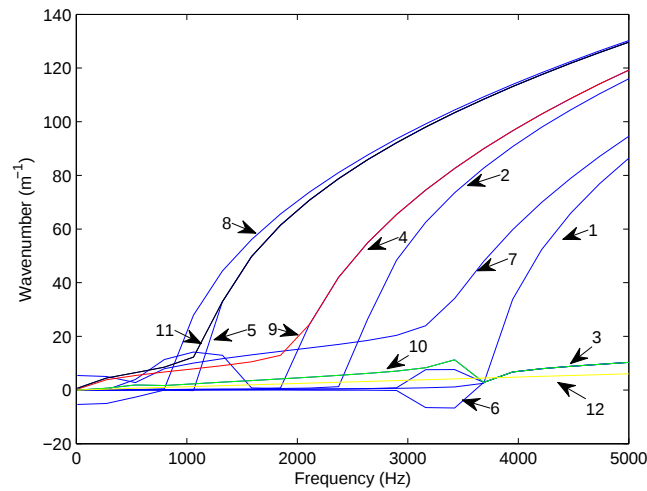


FIGURE 3.12 – Nombre d'ondes pour la poutre creuse.

Indice du mode	Nature du mode	Numéro de la courbe	Fréquence de coupure (Hz)
Figure 3.14 (a)	Traction-compression	(Figure 3.12) 12	0
Figure 3.14 (b)	Flexion 1	(Figure 3.12) 11	0
Figure 3.14 (c)	Flexion 2	(Figure 3.12) 9	0
Figure 3.14 (d)	Torsion	(Figure 3.12) 10	0
Figure 3.14 (e)	Mode de section	(Figure 3.12) 8	798
Figure 3.14 (f)	Mode de section	(Figure 3.12) 7	536
Figure 3.15 (a)	Mode de section	(Figure 3.12) 6	3687
Figure 3.15 (b)	Cisaillement 1	(Figure 3.12) 5	1061
Figure 3.15 (c)	Mode de section	(Figure 3.12) 4	1848
Figure 3.15 (d)	Mode de section	(Figure 3.12) 3	3687
Figure 3.15 (e)	Cisaillement 2	(Figure 3.12) 2	2374
Figure 3.15 (f)	Mode de section	(Figure 3.12) 1	3687

TABLE 3.1 – Caractéristiques des différents types d'ondes

En effet, en présence d'une discontinuité conservative, le phénomène de conversion de modes excite toujours tout en conservant les bilans énergétiques pour chaque onde c'est-à-dire que la somme des coefficients égale 1. Par contre, en présence des modes gauches ce bilan énergétique n'est plus valable car l'échange énergétique ne s'effectue pas qu'au niveau de la singularité mais aussi bien au moment de propagation. Par exemple, pour les modes

(a), (b) et (c), la conservation d'énergie est bien vérifiée jusqu'à une certaine fréquence qui représente la fréquence de coupure d'un mode de cisaillement ou de section. Après cette fréquence de coupure, la conservation d'énergie n'est plus valable.

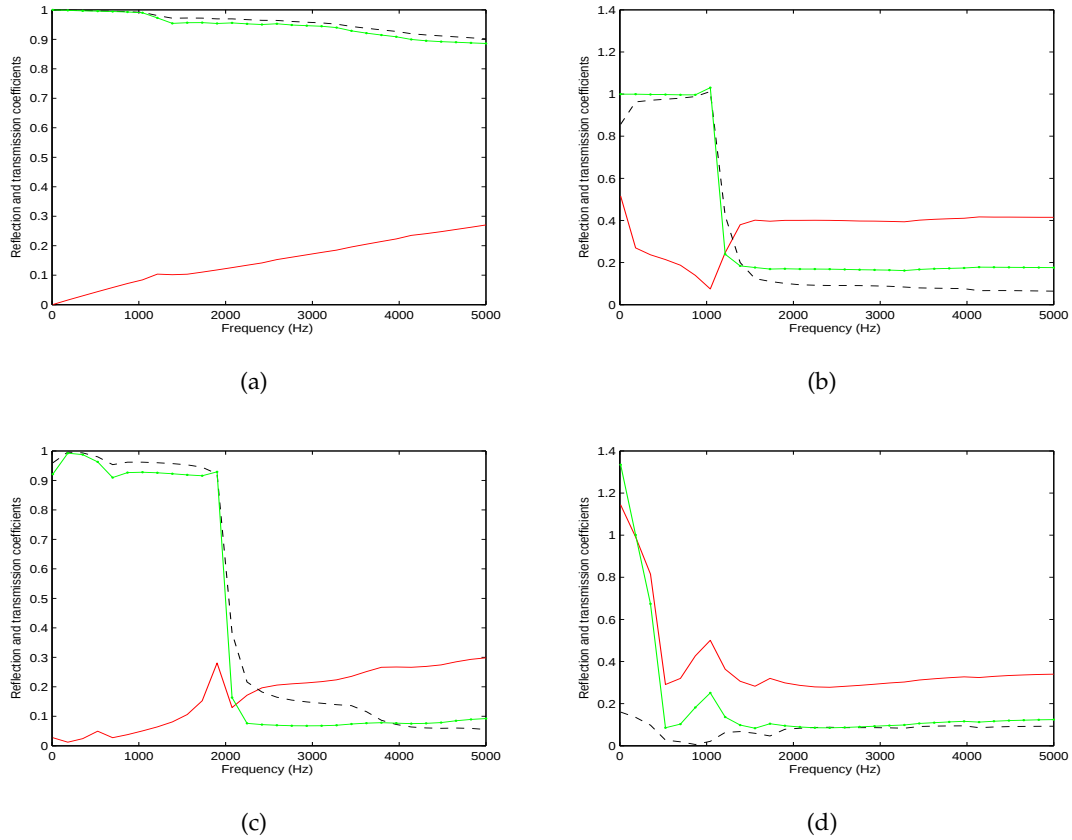
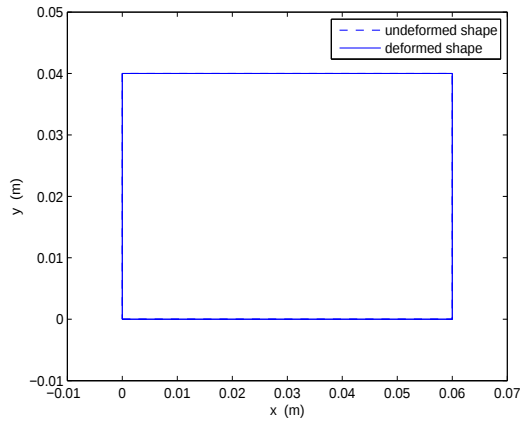
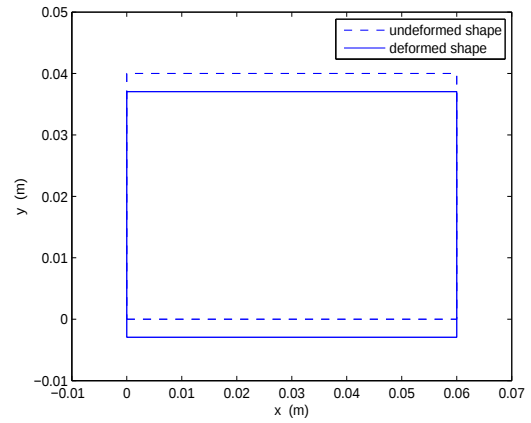


FIGURE 3.13 – La moyenne des coefficients de diffusion : — Coefficient de transmission, — Coefficient de réflexion, - - : $|R|^2 + |T|^2$, (a) : traction, (b) : flexion 1, (c) : flexion 2 et (d) : mode de section

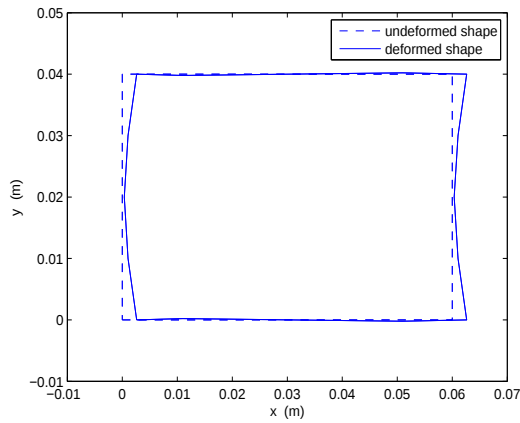
Dans cette partie on assimile que l'élément de couplage, en plus de sa forme complexe, contient des paramètres mécaniques incertains. Si on suppose que cette jonction possède un module d'Young aléatoire et qui suit une distribution gaussienne avec 2% de dispersion, l'application du formalisme de DMM aléatoires nous permet de trouver (figure 3.16) :



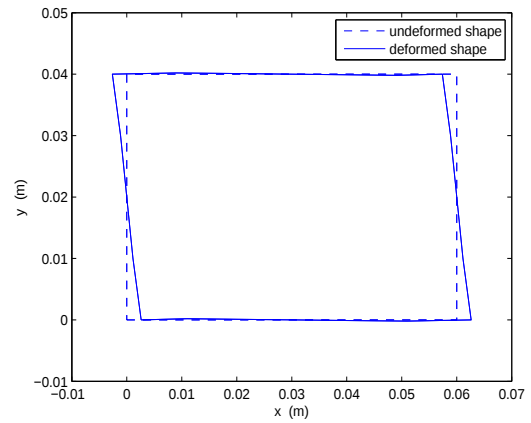
(a)



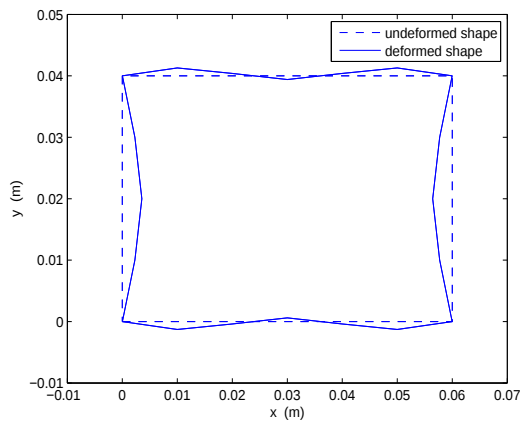
(b)



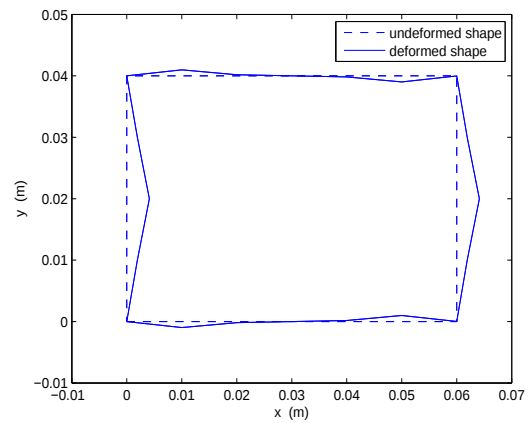
(c)



(d)

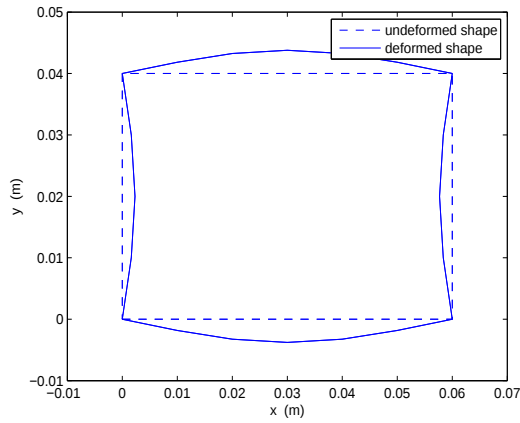


(e)

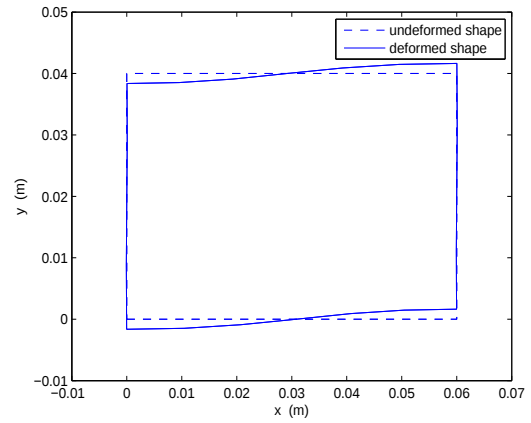


(f)

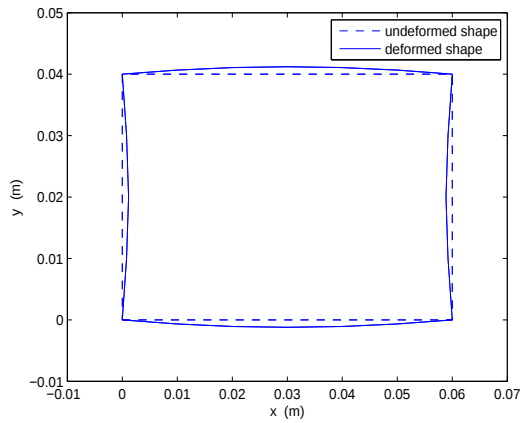
FIGURE 3.14 – Déformée modale 1 (5000 Hz)



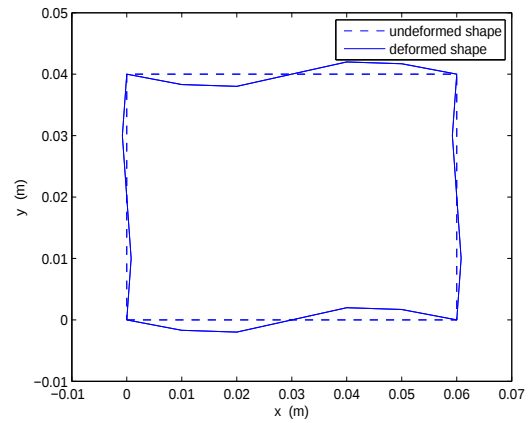
(a)



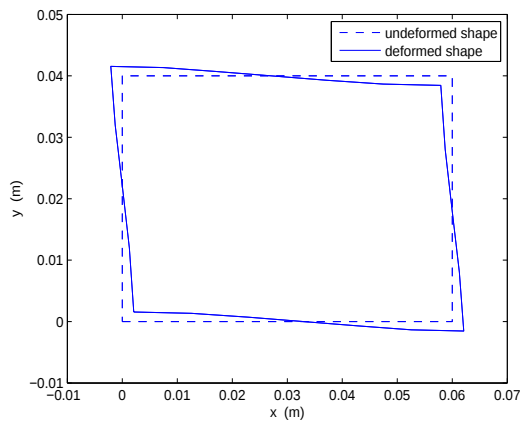
(b)



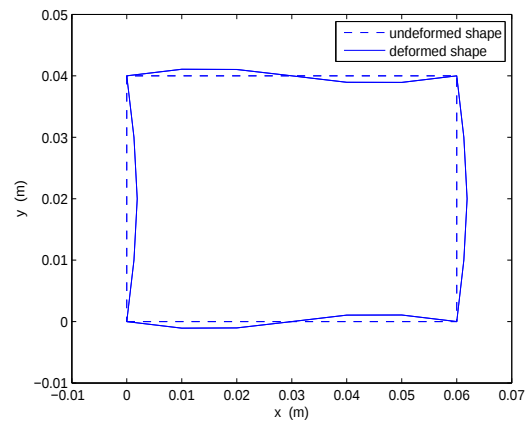
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURE 3.15 – Déformée modale 2 (5000 Hz)

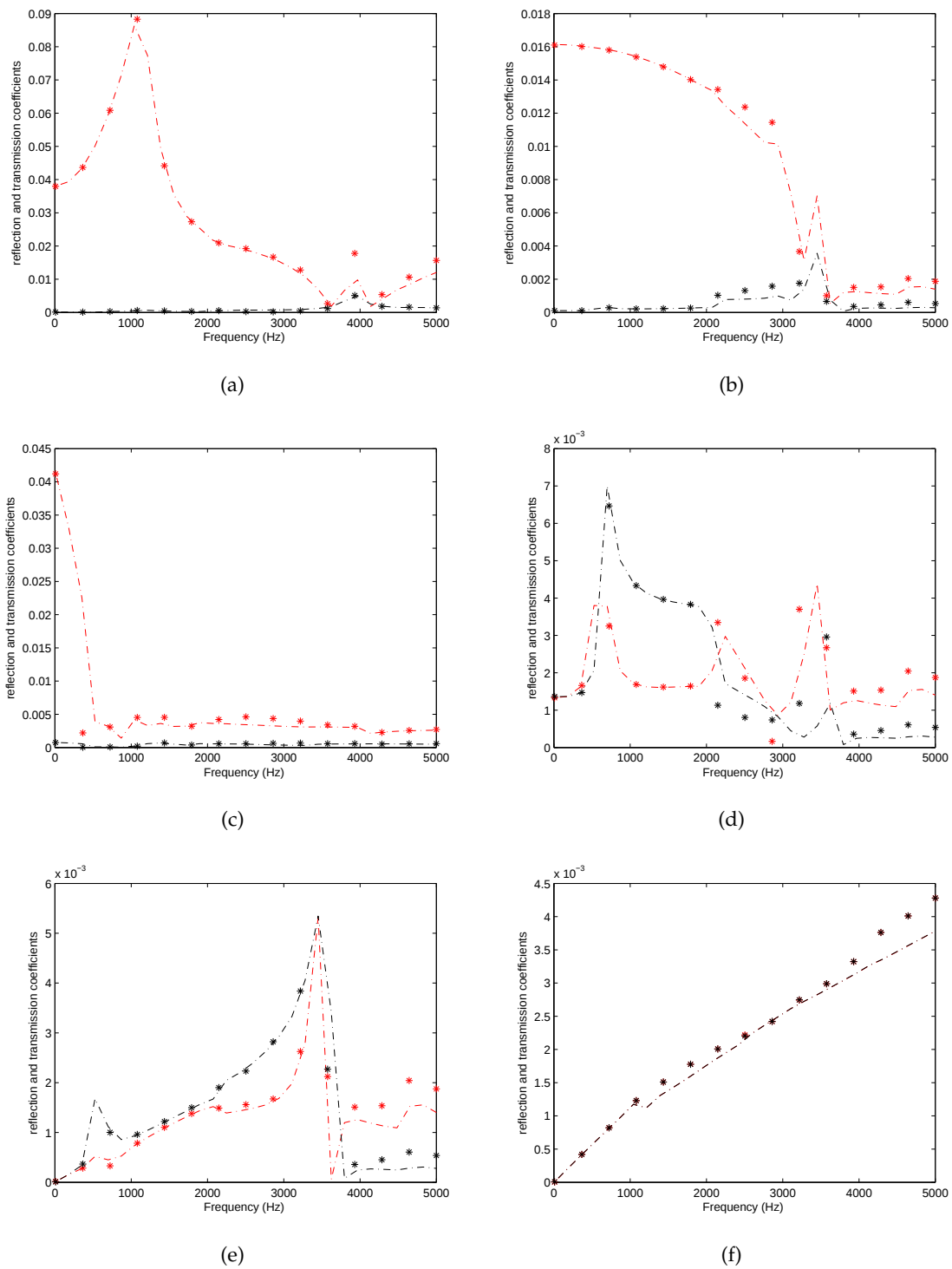


FIGURE 3.16 – Écart type des coefficients de réflexion et de transmission

La figure 3.16 représente l'écart type des coefficients de réflexion et de transmission cinématiques. Ces dispersions sont représentées pour différents modes : (a), (b) et (c) : modes

de sections, (d) et (e) : mode de flexion et (f) : mode de traction-compression. On remarque que le coefficient de réflexion est plus sensible à la dispersion pour les modes de sections. Les valeurs des écarts types représentent l'effet de variabilité dans l'élément de couplage. Les solutions de la SWFE sont validées par la méthode de Monte Carlo (3000 itérations) avec une faible erreur à hautes fréquences.

3.4.3 | Validation du problème complet : dynamique de deux guides multi-modaux interconnectés

Cette partie sera consacrée à la validation de la formulation cinématique stochastique pour un système de deux barres finies interconnectées par une jonction.

Étant donné deux guides d'ondes identiques de caractéristiques mécaniques suivantes : la densité $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$, le module d'Young $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, l'amortissement structural $\eta = 1\%$, les dimensions de la section droite $5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \times 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, la longueur de chaque élément $d = 10^{-2} \text{ m}$. Le modèle éléments finis (problème structural) est présenté dans la figure 3.17 (a) qui est constitué de deux guides d'ondes de différentes longueurs : $L_1 = 0.4 \text{ m}$ et $L_2 = 0.2 \text{ m}$ et N_1 et N_2 le nombre d'éléments. Ces deux guides sont connectés par un élément de couplage incertain qui est modélisé par une raideur de couplage. Ce système couplé possède deux origines en $z_1 = 0$ et en $z_2 = 0$ pour faciliter la mise en équation du problème spectral (figure 3.17(b)). Le module d'Young est supposé le paramètre incertain dans les deux guides et l'élément de couplage avec 2% de variabilité.

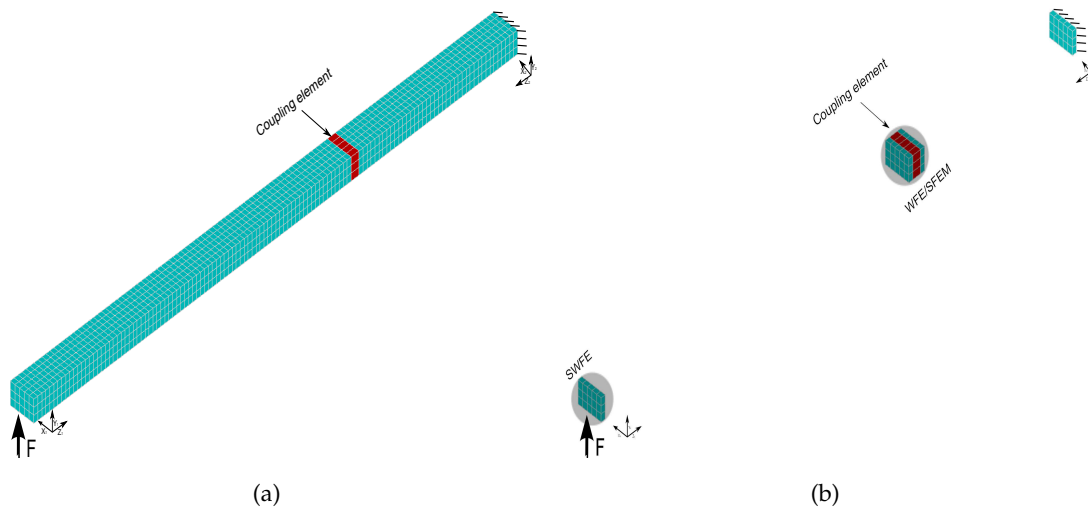


FIGURE 3.17 – Le modèle éléments finis du système couplé : (a) : problème structural, (b) : problème spectral

L'étude d'une telle structure passe par trois étapes. La première est une étude spectrale d'un sous-élément de chaque guide d'ondes et l'identification des différents ondes propa-

geant dans les deux guides ainsi que l'effet des incertitudes sur le comportement spectral (déjà présenté dans la validation du chapitre 2). La deuxième étape consiste à évaluer l'effet de la variabilité du paramètre incertain de l'élément de couplage sur les amplitudes en utilisant la formulation hybride (WFE/SFEM) qui permet l'obtention des figures 3.18 qui représentent les écarts types des coefficients de diffusions cinématiques pour les ondes classiques ((a) : traction, (b) : compression, (c) : flexion 1 et (d) : flexion 2). Ces écarts types, bien que faibles, influent considérablement le comportement local (près de la jonction) ainsi que global (vibration des deux structures). L'évolution des écarts types montre que le coefficient de transmission est plus sensible aux variabilités en moyenne et haute fréquence que le coefficient de réflexion.

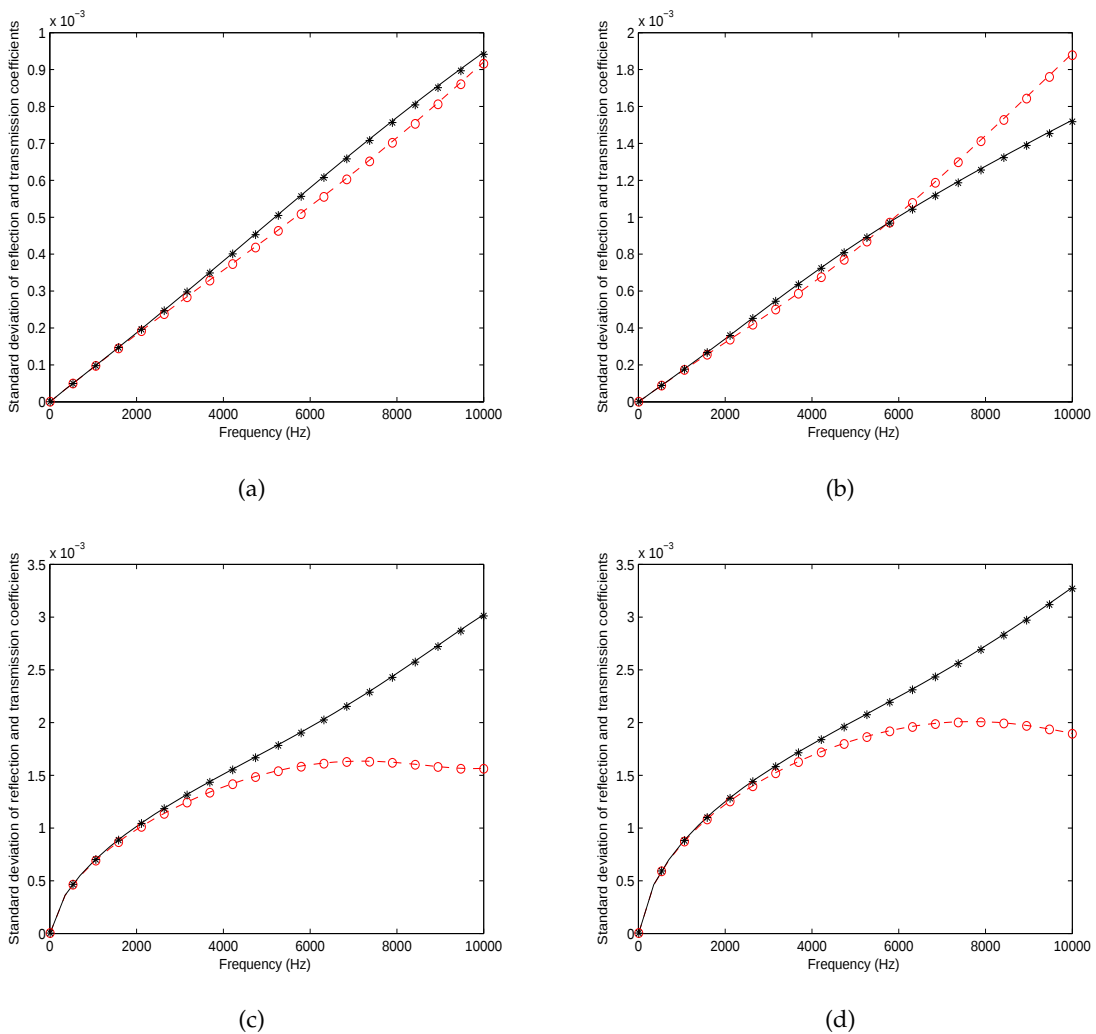


FIGURE 3.18 – Écart type des coefficients de réflexion et transmission cinématiques : (—), réflexion : (—), transmission : (o), réflexion MC : (*), transmission MC.

La troisième étape de cette analyse consiste à évaluer les déplacements et les forces

nodales dans les deux structures. Pour cela, une projection des conditions aux limites sur la base d'ondes stochastiques permet l'évaluation des amplitudes des ondes pour les premiers éléments pour les deux guides. Finalement, la solution globale du système est obtenue en utilisant les matrices de transfert stochastiques pour chaque guide à part. L'utilisation de cette procédure permet l'obtention de la solution cinématique suivante.

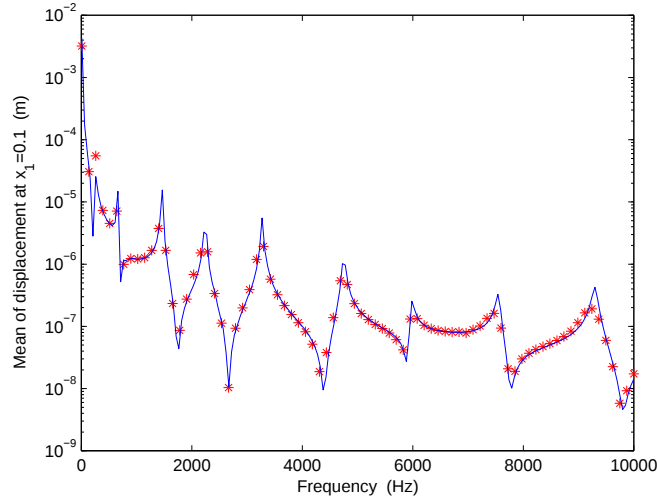


FIGURE 3.19 – Moyenne de déplacement en $z_1 = 0.1\text{ m}$: – WFE, * Monte Carlo.

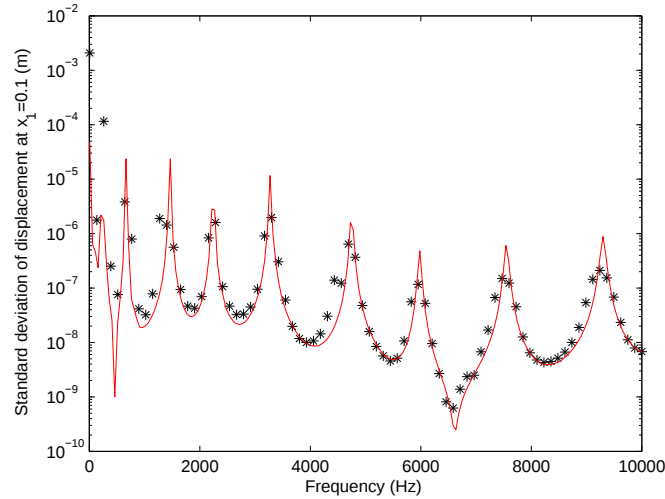


FIGURE 3.20 – Écart type de déplacement en $z_1 = 0.1\text{ m}$: – SWFE, * Monte Carlo.

Les figures (3.19 et 3.20) représentent respectivement la moyenne et l'écart type du déplacement en $z_1 = 0.1\text{ m}$. La moyenne est calculée par deux méthodes différentes : SWFE

forcée et solution Monte carlo (3000 itérations). L'évolution de l'écart type montre l'effet de la variabilité dans les guides et l'élément de couplage sur le comportement global de la structure. L'effet de ces variabilités augmente en fonction de la fréquence contrairement à la moyenne. Le résultat de l'approche présentée est validé par la méthode de Monte Carlo avec un temps de calcul très réduit.

3.5 | Conclusion

Ce chapitre présente trois approches différentes. La première est consacrée à l'étude cinématique d'un guide d'ondes stochastique soumis à des conditions aux limites aléatoires. La deuxième approche consiste à décrire le comportement des ondes vis-à-vis une discontinuité mécanique et comportant des paramètres mal connus (Partie 2). Enfin, une approche cinématique basée sur l'étude spectrale et permettant l'identification de l'effet des incertitudes sur le comportement dynamique des structures couplées est présentée. Les formulations présentées dans ce chapitre représentent une extension des approches basses fréquences pour prédire la dynamique des systèmes périodiques en moyennes fréquences en étudiant la dispersion des variables cinématiques. Dans le chapitre suivant, nous aborderons une étude énergétique des systèmes périodiques stochastique.

Chapitre 4

Approche énergétique pour les systèmes périodiques stochastiques

Sommaire

4.1	Approches énergétiques pour un guide d'ondes aléatoire	94
4.1.1	Méthode énergétique simplifiée (MES)	94
4.1.2	Matrice de flux de puissance aléatoire	96
4.2	La densité d'énergie totale pour un guide périodique aléatoire	99
4.3	Matrice d'efficacité énergétique et facteur de perte par couplage	101
4.3.1	Coefficients d'efficacité énergétiques en présence d'aléas	101
4.3.2	Facteurs de perte par couplage	103
4.4	Paramètres énergétiques pour un système de propagation semi-infini . . .	104
4.4.1	Puissance injectée	105
4.4.2	Impédance mécanique : formulation générale	106
4.4.3	Vitesse de groupe	107
4.5	Validation numérique	108
4.5.1	Poutre d'Euler Bernoulli encastrée-libre	108
4.5.2	Deux guides multi-modaux connectés par une jonction à section variable	113
4.5.3	Deux guides multi-modaux connectés par une jonction	116
4.6	Conclusion	118

La description du comportement dynamique des structures basées sur les variables énergétiques est présentée dans ce chapitre. Comme présenté dans le chapitre 1, plusieurs chercheurs ont essayé d'étendre la validité des méthodes énergétiques pour les moyennes fréquences en les combinant avec des méthodes basses fréquences pour relaxer leurs hypothèses d'utilisation. La SEA-like est l'une des méthodes développées pour les MF en combinant les éléments finis classiques et la méthode SEA.

En s'appuyant sur la description cinématique des systèmes périodiques (chapitre 3), une formulation énergétique permettant d'étudier l'effet des incertitudes sur la réponse globale du système est d'abord présentée. Ensuite, on définit la matrice d'efficacité énergétique (décrivant les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques) stochastique pour des jonctions présentant des caractéristiques aléatoires. Cette matrice découle de l'étude cinématique d'un guide en présence de discontinuités et de ruptures d'impédances. Cette étude nous permet d'établir une relation entre les coefficients de transmission énergétiques et la perte de transmission par couplage (Coupling Loss Factors, (CLF)) qui représente l'un des paramètres importants dans la méthode SEA. Ensuite, les différents paramètres énergétiques; la vitesse de groupe, la puissance injectée sont aussi présentés en utilisant la méthode SWFE. Finalement, la validation numérique consiste à appliquer les formulations présentées et les vérifier par rapport aux méthodes de références.

4.1 | Approches énergétiques pour un guide d'ondes aléatoire

Dans cette partie on va présenter une formulation numérique pour évaluer les quantités énergétiques. Mais il est intéressant de présenter une approche présentant les différentes densités d'énergie pour les structures simples, déterministes et à une direction de propagation.

4.1.1 | Méthode énergétique simplifiée (MES)

La MES est une méthode énergétique permettant la prédiction de la moyenne de la densité d'énergie. Cette méthode est basée sur deux hypothèses importantes : (1) hypothèse de champ lointain et (2) hypothèse de non corrélation entre les ondes.

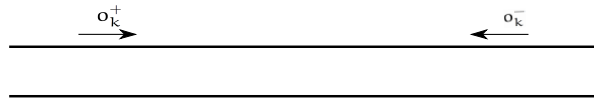


FIGURE 4.1 – Guide d'onde à un seul mode de propagation.

Si on considère un guide d'ondes à une seule direction de propagation, le bilan de puissance complexe s'écrit dans le système curviligne s :

$$\frac{d\langle I \rangle}{ds} + \langle p_{\text{diss}} \rangle = \langle p_{\text{inj}} \rangle \quad (4.1)$$

avec $\langle I \rangle$, $\langle p_{\text{diss}} \rangle$, $\langle p_{\text{inj}} \rangle$ respectivement l'intensité active, la puissance dissipée et la puissance injectée moyennée dans le temps. Dans le cas visqueux, la densité de puissance dissipée est donnée par l'expression $\langle p_{\text{inj}} \rangle = 2\eta\omega\langle U \rangle$. Si on suppose la densité d'énergie de déformation moyenne $\langle U \rangle$ égale à la densité d'énergie cinétique $\langle T \rangle$ le bilan de puissance globale (4.1)

devient :

$$\frac{d\langle I \rangle}{ds} + \eta\omega\langle W \rangle = \langle p_{inj} \rangle \quad (4.2)$$

avec $\langle W \rangle$ la densité d'énergie totale du système. Si on veut analyser les grandeurs énergétiques onde par onde, on peut associer à chaque onde propagative les différentes grandeurs énergétiques partielles (densité d'énergie cinétique, potentielle, intensité active, etc.). La loi de conservation d'énergie partielle s'écrit pour chaque onde i (en assimilant le même type de amortissement qu'auparavant) :

$$\frac{d\langle I_i \rangle}{ds} + \eta\omega\langle W_i \rangle = \langle p_{i,inj} \rangle \quad (4.3)$$

où $\langle I_i \rangle = c_{gi}\langle W_i \rangle$ et c_{gi} désigne la vitesse de groupe de l'onde i .

En utilisant les hypothèses de la MES, la loi de superposition énergétique peut être appliquée, c'est-à-dire les grandeurs énergétiques globales peuvent être décrites sous la forme d'une combinaison linéaire des grandeurs énergétiques partielles qui peut être exprimée mathématiquement comme suit :

$$\langle I_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle I_i \rangle, \quad \langle W_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle W_i \rangle \quad (4.4)$$

Exemple d'application de la MES

Soit un guide d'onde à une dimension de propagation qui représente le siège d'une onde incidente et d'une onde réfléchi (désignées respectivement par o^+ et o^-), qui ont le même nombre d'onde $k_1 = -k_2 = k$ et la même vitesse de propagation $c_{g1} = -c_{g2} = c_g$.

Ces deux ondes propagatives sont à l'origine des intensités actives partielles s'écrivant sous la forme :

$$\langle I^+ \rangle = -\frac{1}{2}\omega^2 Z^+ o^+ o^{+*} \quad \langle I^- \rangle = -\frac{1}{2}\omega^2 Z^- o^- o^{-*} \quad (4.5)$$

avec $Z^- = -Z^+$, où Z^+ et Z^- représentent les impédances caractéristiques des guides d'ondes. En utilisant la loi de conservation partielle (4.3), la relation reliant l'intensité partielle à la densité d'énergie totale, on peut écrire pour chaque onde la relation :

$$c_g \frac{d\langle W^+ \rangle}{ds} + \eta\omega \frac{\langle I^+ \rangle}{c_g} = 0 \quad -c_g \frac{d\langle W^- \rangle}{ds} - \eta\omega \frac{\langle I^- \rangle}{c_g} = 0 \quad (4.6)$$

ou bien, $\langle I^\pm \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \frac{d\langle W^\pm \rangle}{ds}$. La loi de la superpositions énergétique et les hypothèses de la MES (absence de champ proche et corrélations entre les ondes) permettent d'écrire :

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \frac{d^2\langle W \rangle}{ds^2} + \eta\omega\langle W \rangle = \langle p_{inj} \rangle \quad (4.7)$$

La résolution de cette équation nous conduit à exprimer la densité d'énergie totale et l'intensité active :

$$\langle W \rangle = A e^{-\eta \omega x / c_g} + B e^{\eta \omega x / c_g} \quad (4.8)$$

$$\langle I \rangle = c_g (A e^{-\eta \omega x / c_g} - B e^{\eta \omega x / c_g}) \quad (4.9)$$

avec A et B, coefficients à déterminer à partir des conditions aux limites énergétiques. Pour un guide encastré-libre, excité par une force sinusoïdale, les conditions aux limites énergétiques s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \langle p_0 \rangle && \text{force} \\ \langle I \rangle &= 0 && \text{encastrement} \end{aligned}$$

avec $\langle p_0 \rangle$ désigne la puissance injectée exprimée $\langle p_0 \rangle = \langle p_{inf} \rangle = \frac{1}{2} |F_{ex}|^2 \text{Re}(1/Z)$ où Z est l'impédance caractéristique écrite $Z = \rho S c_g$. Cette formulation est appliquée et détaillée pour différents cas possédant des solutions spectrales analytiques [41]. Ce que l'on va présenter après est une approche numérique applicable pour toute forme de guides d'ondes.

4.1.2 | Matrice de flux de puissance aléatoire

Dans le reste du chapitre, on essaiera de présenter une formulation énergétique générale applicable pour les guides périodiques contenant de l'aléa. Le premier paramètre à présenter est le flux de puissance active. Cette quantité peut être exprimée pour un guide d'ondes périodique et stochastique de façon suivante (pour la section gauche) :

$$\tilde{\Pi}(\omega) = \frac{1}{2} \text{Re}\{-i\omega \tilde{\mathbf{q}}_L^H \tilde{\mathbf{F}}_L\} = -\frac{1}{4} i\omega \tilde{\mathbf{u}}_L^H \mathbf{J}_n \tilde{\mathbf{u}}_L \quad (4.10)$$

où H est la transposée hermitienne.

D'un façon explicite, l'équation (4.10) s'écrit :

$$\tilde{\Pi}(\omega) = \frac{-i\omega}{4} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L \\ -\tilde{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix}^H \mathbf{J}_n \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L \\ -\tilde{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

si on projette les variables cinématiques sur la base d'ondes aléatoire (3.4) :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L \\ -\tilde{\mathbf{F}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}^{inc} & \tilde{\Phi}^{ref} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_L^{inc} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_L^{ref} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

on peut donc réécrire la relation (4.10) en fonction des amplitudes des modes aléatoires :

$$\tilde{\Pi}(\omega) = \tilde{\mathbf{Q}}_L^H \tilde{\mathbf{P}}^\Phi \tilde{\mathbf{Q}}_L \quad (4.13)$$

avec $\tilde{\mathbf{P}}^\Phi$ la matrice de flux de puissance aléatoire. Pour identifier les statistiques de la matrice flux de puissance active, la projection de l'équation stochastique (4.13) est nécessaire pour quantifier la moyenne :

$$\bar{\Pi}(\omega) = \bar{\mathbf{Q}}_L^H \tilde{\mathbf{P}}^\Phi \bar{\mathbf{Q}}_L \quad (4.14)$$

et l'écart type :

$$\sigma_\Pi(\omega) = \sigma_{\mathbf{Q}_L}^H \tilde{\mathbf{P}}^\Phi \bar{\mathbf{Q}}_L + \bar{\mathbf{Q}}_L^H \tilde{\mathbf{P}}^\Phi \sigma_{\mathbf{Q}_L} + \bar{\mathbf{Q}}_L^H \sigma_{\mathbf{P}^\Phi} \bar{\mathbf{Q}}_L \quad (4.15)$$

avec $\bar{\mathbf{Q}}_L^H$ et $\sigma_{\mathbf{P}^\Phi}$ représentent la moyenne et la sensibilité d'ordre 1 des amplitudes des modes d'ondes évaluées pour la section gauche.

Matrice de flux de puissance

La matrice de flux de puissance est une matrice traduisant la quantité de puissance calculée à partir des puissances partielles des différents modes de propagations ainsi que la puissance due à leurs corrélations. Bocquillet [22] a prouvé que la représentation différentielle d'état et l'approche par élément finis conduisent à la même forme de la matrice de flux de puissance en utilisant la matrice des modes de propagations Φ . Cette matrice peut être écrite dans le cas d'un guide périodique stochastique comme suit :

$$\tilde{\mathbf{P}}^\Phi = \frac{-i\omega}{4} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q \\ \tilde{\Phi}_f \end{pmatrix}^H J_n \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q \\ \tilde{\Phi}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_I & \tilde{\mathbf{P}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{RI} & \tilde{\mathbf{P}}_R \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

avec $i^2 = -1$. Cette matrice traduit la contribution des modes dans le flux de puissance. Elle est composée par 4 matrices $\tilde{\mathbf{P}}_I$, $\tilde{\mathbf{P}}_{IR}$, $\tilde{\mathbf{P}}_{RI}$ et $\tilde{\mathbf{P}}_R$ qui représentent respectivement les puissances des ondes incidentes, réfléchies, incidentes-réfléchies et réfléchies-incident. La moyenne et l'écart type de la matrice peuvent être exprimés comme suit :

$$\bar{\mathbf{P}}^\Phi = \frac{-i\omega}{4} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q \\ \bar{\Phi}_f \end{pmatrix}^H J_n \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q \\ \bar{\Phi}_f \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

et

$$\sigma_{\mathbf{P}^\Phi} = \frac{-i\omega}{4} \left[\begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q \\ \bar{\Phi}_f \end{pmatrix}^H J_n \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_q} \\ \sigma_{\Phi_f} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_q} \\ \sigma_{\Phi_f} \end{pmatrix}^H J_n \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q \\ \bar{\Phi}_f \end{pmatrix} \right] \quad (4.18)$$

Bocquillet a discuté la forme de la matrice de flux de puissance selon la nature du guide étudié (guides non-amortis et guides dissipatifs), mais en général cette matrice est pleine et les termes extra-diagonaux représentent les termes d'interférences entre les modes. Ces termes sont en général très petits mais jouent un rôle important dans le bilan de puissance auprès des discontinuités.

Signe du flux de puissance

D'une façon générale, le flux de puissance locale Π autour d'un point du guide est relié à la puissance dissipée locale par le bilan suivant :

$$\text{div}(\Pi) + \Pi_{\text{diss}} = 0 \quad (4.19)$$

Pour un guide à une seule direction z , cette équation s'écrit $\frac{d\Pi}{dz}(z) + \Pi_{\text{diss}}(z) = 0$. Pour l'approche des éléments finis ondulatoires (WFE), le bilan énergétique pour une cellule (j) devient :

$$\Pi_L(j) - \Pi_R(j) = \Pi_{\text{diss}}(j) \quad (4.20)$$

où $\Pi_{\text{diss}}(j)$ est la puissance dissipée par la sous-structure j.

Le signe du flux de puissance est une autre solution pour classer les différents modes propagatifs dans la structure. Le premier critère de sélection avait été présenté dans la section 2.4 en utilisant les constantes de propagations. Pour un guide non-conservatif, si la puissance dissipée est positive ce qui impose que le terme $P_{j,j}$ est positif, alors le mode j se propage dans le sens positif ($|\lambda_j| < 1$). Sinon, le mode j se propage dans le sens inverse et la constante de propagation ($|\lambda_j| > 1$).

Définition des puissances

On propose de définir les différentes puissances incidentes et réfléchies à une section $S(z)$. Ces définitions seront utilisées par la suite.

Soit un guide d'ondes fini avec deux extrémités définies par leurs caractères de réflexion.

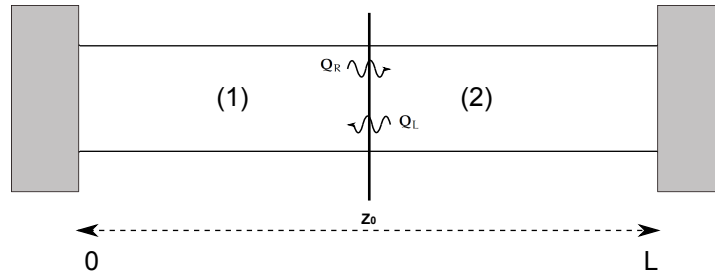


FIGURE 4.2 – Échange énergétique entre deux tronçons d'un guide d'ondes

La matrice de flux de puissance peut être fractionnée comme définie dans l'équation (4.16). En utilisant cette décomposition, on peut définir les puissances incidente sur et réfléchie par le tronçon (2) comme suit :

$$\Pi_I^{(2)}(z_0) = \mathbf{Q}(z_0)^H \mathbf{P}_I^{(2)} \mathbf{Q}(z_0), \quad \Pi_R^{(2)}(z_0) = \mathbf{Q}(z_0)^H \mathbf{P}_R^{(2)} \mathbf{Q}(z_0) \quad (4.21)$$

avec les matrices de flux de puissance incidente et réfléchie définies par :

$$\mathbf{P}_I^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I & \mathbf{P}_{IR} \\ \mathbf{P}_{RI} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_S^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{P}_R \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Par analogie avec le bilan énergétique du tronçon (1), on définit les flux de puissances incidentes et réfléchies qui s'écrivent :

$$\Pi_I^{(1)}(z_0) = \mathbf{Q}(z_0)^H \mathbf{P}_I^{(1)} \mathbf{Q}(z_0), \quad \Pi_R^{(1)}(z_0) = \mathbf{Q}(z_0)^H \mathbf{P}_R^{(1)} \mathbf{Q}(z_0) \quad (4.23)$$

avec les deux matrices de flux de puissance $\mathbf{P}_I^{(1)}$ et $\mathbf{P}_R^{(1)}$ définies de la façon suivante :

$$\mathbf{P}_I^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{P}_{RI} \\ -\mathbf{P}_{IR} & -\mathbf{P}_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_R^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Toutes ces définitions de puissances et ces classifications des signes du flux restent valables pour le cas aléatoire.

4.2 | La densité d'énergie totale pour un guide périodique aléatoire

Dans cette partie, on va évaluer les différentes densités d'énergies dans un système élané. Ces paramètres quadratiques sont déjà traités par différents chercheurs en utilisant la WFE [43, 28]. Si on assimile que chaque élément de la structure périodique est très petit par rapport aux longueurs d'ondes propagatives, la densité d'énergie cinétique ne varie *quasiment* pas tout au long de l'élément. Ainsi, la densité d'énergie stochastique stockée à gauche ou à droite du système est assimilée comme étant la densité d'énergie stockée par le sous-système. Mathématiquement, cette quantité d'énergie peut être écrite pour une sous-structure k :

$$\tilde{E}_c^{(k)} = \frac{\omega^2}{4d} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}^{(k)H} \tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}^{(k)} \quad (4.25)$$

La projection de cette équation sur la base stochastique nous conduit à écrire l'ordre zéro :

$$\bar{E}_c^{(k)} = \frac{\omega^2}{4d} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_L \\ \bar{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}^{(k)H} \bar{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_L \\ \bar{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}^{(k)} \quad (4.26)$$

qui représente la moyenne de la densité d'énergie cinétique et l'ordre un :

$$\sigma_{E_c}^{(k)} = \frac{\omega^2}{4d} \left((\sigma_q)^{(k)H} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{q}}^{(k)} + \bar{\mathbf{q}}^{(k)H} \bar{\mathbf{M}} (\sigma_q)^{(k)} + \bar{\mathbf{q}}^{(k)H} \sigma_M \bar{\mathbf{q}}^{(k)} \right) \quad (4.27)$$

qui représente l'écart type de densité d'énergie cinétique. σ_M est la dispersion de la matrice masse si par exemple la densité est aléatoire. Si on procède de la même façon, on peut exprimer la densité d'énergie potentielle comme suit :

$$\tilde{E}_p^{(k)} = \frac{1}{4d} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}^{(k)H} \tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}^{(k)} \quad (4.28)$$

L'expansion à l'ordre un nous permet d'écrire la moyenne $\bar{E}_p^{(k)} = \frac{1}{4d} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_L \\ \bar{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}^{(k)H} \bar{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_L \\ \bar{\mathbf{q}}_R \end{pmatrix}^{(k)}$ et l'écart type comme suit :

$$\sigma_{E_p}^{(k)} = \frac{1}{4d} \left((\sigma_q)^{(k)H} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}}^{(k)} + \bar{\mathbf{q}}^{(k)H} \bar{\mathbf{K}} (\sigma_q)^{(k)} + \bar{\mathbf{q}}^{(k)H} \sigma_K \bar{\mathbf{q}}^{(k)} \right) \quad (4.29)$$

Finalement, suite à l'utilisation de la méthode de perturbation d'ordre un, la dispersion de la densité d'énergie totale n'est que la somme des écarts types de la densité d'énergie cinétique et potentielle. Ainsi :

$$\sigma_E^{(k)} = \sigma_{E_c}^{(k)} + \sigma_{E_p}^{(k)} \quad (4.30)$$

Les équations développées sont générales et peuvent être appliquées pour tous les cas possibles (cas monomodal, multi-modal) ainsi qu'indépendamment de l'emplacement de la cellule étudiée (loin ou près des discontinuités). D'autre part, toutes ces équations peuvent être exprimées directement en fonction des amplitudes des ondes. En effet, si on utilise l'équation (4.12) du fait que les amplitudes des ondes à gauche sont reliées aux amplitudes à droite de chaque élément par la constante de propagation $\tilde{\mu}$, l'équation (4.25) devient :

$$\bar{E}_c^{(k)} = \frac{\omega^2}{4d} \tilde{\mathbf{Q}}_L^{(k)} \tilde{\mathbf{M}}^\Phi \tilde{\mathbf{Q}}_L^{(k)} \quad (4.31)$$

où $\tilde{\mathbf{M}}^\Phi$ la matrice masse d'onde exprimé par :

$$\tilde{\mathbf{M}}^\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}^{-1} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_q \end{pmatrix}^H \tilde{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

et $\tilde{\mathbf{Q}}_L^{(k)}$ est l'amplitude aléatoire à gauche du $k^{\text{ème}}$ élément.

D'une façon similaire la densité d'énergie potentielle s'exprime :

$$\bar{E}_p^{(k)} = \frac{1}{4d} \tilde{\mathbf{Q}}_L^{(k)} \tilde{\mathbf{K}}^\Phi \tilde{\mathbf{Q}}_L^{(k)} \quad (4.33)$$

avec $\tilde{\mathbf{K}}^\Phi$ la matrice de rigidité d'onde exprimé par :

$$\tilde{\mathbf{K}}^\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}^{-1} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_q \end{pmatrix}^H \tilde{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_q & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

4.3 | Matrice d'efficacité énergétique et facteur de perte par couplage

4.3.1 | Coefficients d'efficacité énergétiques en présence d'aléas

Dans cette section on va établir la matrice de diffusion énergétique pour deux guides connectés par une jonction aléatoire. Les coefficients énergétiques permettent le traitement du problème des barres couplées en utilisant les variables quadratiques.

Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti : Le travail fait par un système de n charges P_i (système I) à la suite des déplacements $(\delta i)_Q$ causés par un second système de m charges Q_j (système II) est égal au travail fait par un système de m charges Q_j à la suite des déplacements $(\delta j)_P$ causés par le premier système de n charges P_i [88]. En utilisant ce théorème pour un élément de couplage non-amorti ou faiblement amorti, on va utiliser uniquement les ondes propagatives d'une seule direction.

Considérons deux guides d'ondes semi-infinis déterministes connectés par une jonction avec des paramètres mal connus. On définit les matrices de flux de puissances pour les deux éléments (1 et 2) directement connectés à la jonction comme suit :

$$\mathbf{P}_1 = \frac{-i\omega}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I^{(1)} & \mathbf{P}_{IR}^{(1)} \\ \mathbf{P}_{RI}^{(1)} & \mathbf{P}_R^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{-i\omega}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_I^{(2)} & \mathbf{P}_{IR}^{(2)} \\ \mathbf{P}_{RI}^{(2)} & \mathbf{P}_R^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Si on suppose une puissance incidente à l'élément de couplage (du côté guide 1) portée par des ondes propagatives, une certaine puissance sera réfléchiée et une autre partie sera transmise au guide 2 (sous forme d'ondes propagatives + évanescences). Ces différentes puissances dans le cas déterministe peuvent être écrites pour chaque onde i sous la forme [88] :

$$\bar{\Pi}_I^{(i)} = |\bar{Q}^{inc(i)}|^2 \mathbf{P}_I^{(1)(i,i)} \quad (4.36)$$

$$\bar{\Pi}_R^{(i)} = -|\bar{Q}^{ref(i)}|^2 \mathbf{P}_R^{(1)(i,i)} \quad (4.37)$$

$$\bar{\Pi}_T^{(i)} = |\bar{Q}^{tran(i)}|^2 \mathbf{P}_T^{(1)(i,i)} \quad (4.38)$$

où $\mathbf{P}_T^{(1)(i,i)}$ est la matrice de flux de puissance déterministe transmise dans le guide d'ondes 2. Cette dernière matrice n'est autre que la matrice $\mathbf{P}_I^{(2)}$. Les équations de la puissance font apparaître les amplitudes de chaque onde i . Puisqu'on utilise uniquement les modes propagatifs, la matrice de diffusion cinématique doit être mise à jour pour chaque fréquence

par les modes de sections en moyennes et hautes fréquences. Donc l'équation (3.59) devient :

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}^{\text{ref}(1)} \\ \vdots \\ \bar{Q}^{\text{ref}(n)} \\ \bar{Q}^{\text{tran}(1)} \\ \vdots \\ \bar{Q}^{\text{tran}(n)} \end{pmatrix} = \bar{C} \begin{pmatrix} \bar{Q}^{\text{inc}(1)} \\ \vdots \\ \bar{Q}^{\text{inc}(p)} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

$$\text{avec } \bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1,1} & \dots & \bar{C}_{1,p} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \bar{C}_{n,1} & \dots & \bar{C}_{n,p} \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'équation (4.39), l'amplitude de l'onde réfléchie i s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des amplitudes des ondes incidentes :

$$\bar{Q}^{\text{ref}(i)} = \sum_{j=1..p} \bar{C}_{i,j} \bar{Q}^{\text{inc}(j)} \quad (4.40)$$

La multiplication de cette équation par le conjugué de $(Q^{\text{ref}(i)})$, l'équation (4.40) nous conduit à :

$$|\bar{Q}^{\text{ref}(i)}|^2 = \sum_{j=1..p} |\bar{C}_{i,j}|^2 |\bar{Q}^{\text{inc}(j)}|^2 + \underbrace{\sum_{j=1..p} \sum_{l=1..p} \bar{C}_{i,l} \bar{C}_{i,j}^* \bar{Q}^{\text{inc}(j)} \bar{Q}^{\text{inc}(l)*}}_{\text{Terme de corrélation entre les ondes incidentes}} \quad (4.41)$$

L'énergie associée à l'onde réfléchie est une combinaison linéaire des énergies associées à toutes les ondes entrantes à l'interface et des termes d'interférences entre les ondes entrantes. En supposant que les ondes entrantes sont décorrélées [89], on peut exprimer la puissance réfléchie d'une onde comme étant la combinaison linéaire des contributions de toutes les ondes propagatives :

$$\frac{\bar{\Pi}_R^{(i)}}{P_R^{(i,i)}} = - \sum_{j=1..p} |\bar{C}_{i,j}|^2 \frac{\bar{\Pi}_I^{(j)}}{P_R^{(j,j)}} \quad (4.42)$$

De ce fait, le coefficient de réflexion énergétique de l'onde i égal à $\sum_{j=1..p} |\bar{C}_{i,j}|^2 \frac{P_R^{(i,i)}}{P_I^{(j,j)}}$. Donc, si l'élément de couplage contient des incertitudes, le coefficient de réflexion énergétique dans le cas stochastique est déduit :

$$\tilde{R}^{(i)} = \sum_{j=1..p} |\bar{C}_{i,j}|^2 \frac{P_R^{(i,i)}}{P_I^{(j,j)}} \quad (4.43)$$

La projection de cette équation nous permet l'obtention de l'ordre zéro (le cas déterministe du coefficient de réflexion) $\bar{R}^{(i)} = \sum_{j=1..p} |\bar{c}_{i,j}|^2 \frac{P_R^{(i,i)}}{P_I^{(j,j)}}$ et :

$$\sigma_{R^{(i)}} = \sum_{j=1..p} \left[\frac{P_R^{(i,i)}}{P_I^{(j,j)}} \left(\bar{c}_{i,j} \sigma_{c_{i,j}^*} + \bar{c}_{i,j}^* \sigma_{c_{i,j}} \right) \right] \quad (4.44)$$

qui représente la sensibilité d'ordre un du coefficient de réflexion énergétique.

Si on procède de la même façon pour le coefficient de transmission, on écrit la moyenne :

$$\bar{\tau}^{(i)} = \sum_{j=1..p} |\bar{c}_{i,j}|^2 \frac{P_T^{(i,i)}}{P_I^{(j,j)}} \quad (4.45)$$

et l'écart type :

$$\sigma_{\tau^{(i)}} = \sum_{j=1..p} \left[\frac{P_T^{(i,i)}}{P_I^{(j,j)}} \left(\bar{c}_{i,j} \sigma_{c_{i,j}^*} + \bar{c}_{i,j}^* \sigma_{c_{i,j}} \right) \right] \quad (4.46)$$

Ainsi, on peut évaluer les statistiques des coefficients d'efficacité énergétiques pour deux guides déterministes couplés par une jonction aléatoire. Cette formulation, basée sur la matrice de diffusion cinématique, est une écriture générale quelque soit le type et la forme de la jonction. Ce formalisme permet aussi la description de conversion d'énergie entre les modes suite à la présence de l'élément de couplage.

4.3.2 | Facteurs de perte par couplage

Dans cette partie, on va étudier le comportement des facteurs de perte par couplage (Coupling Loss Factors, (CLF)) vis-à-vis d'une incertitude présente dans l'élément de couplage.

L'équation (1.25) présentée dans le chapitre 1 représente le bilan énergétique (SEA). Il apparaît que les facteurs de perte par couplage sont les éléments les plus intéressants et les plus influents dans ce bilan. Mais une difficulté réside dans l'évaluation de ce terme. Fahy [90, 91] a utilisée une approche modale pour calculer les CLF pour une boîte parallélépipède couplée avec une paroi non rigide et le fluide intérieur. La méthode la plus utilisé repose sur l'utilisation de l'approche des ondes pour calculer les coefficients de diffusions suivant les différentes configurations (ponctuelle, de surface ...). Cette approche est utilisée par différents chercheurs [37]. Ces différentes approches sont ensuite améliorées. Finnveden [92] et Manconi *et al.* [93] ont utilisé la méthode des éléments finis pour calculer les CLFs pour un guide complexe. Langley *et al.* [94] a exprimé les CLF pour deux poutres semi-infinies et pour des plaques infinies. Thite *et al.* [95] a étudié l'effet de l'amortissement additionnel dans un ou plusieurs sous-systèmes sur les CLF apparents. Notre contribution repose sur l'utilisation de la méthode WFEM et surtout les statistiques des coefficients de transmission énergétiques pour évaluer l'effet des incertitudes dans la jonction sur les CLF.

Comme déjà présenté pour les hautes fréquences, la description de la dynamique des systèmes est évoquée par les termes énergétiques comme la méthode SEA [37]. Le flux

d'énergie entre deux systèmes couplés i et j s'écrit :

$$P_{ij} = \omega \eta_{ij} n_j (E_i/n_i - E_j/n_j) \quad (4.47)$$

avec $E_{(i,j)}$ l'énergie du sous-système i ou j , n la densité modale, η_{ij} le facteur de perte par couplage entre les sous-système i et j . Pour deux guides multi-modaux, les différentes ondes représentent des sous-systèmes et ils sont caractérisés par leurs CLF.

Si on assimile que la jonction est conservative, on peut écrire :

$$\text{Puissance incidente} = \text{puissance réfléchie} + \text{puissance transmise}$$

et le coefficient de transmission énergétique :

$$\tau_{ij} = \frac{\text{Puissance transmise dans le système } j}{\text{Puissance incidente du système } i}$$

Donc, on définit le facteur de perte par couplage stochastique de deux structures connectées par un point physique :

$$\tilde{\eta}_{ij} = \frac{\tilde{\tau}_{ij}}{2\pi\omega n_i(\omega)} \quad (4.48)$$

avec $\tilde{\tau}_{ij}$ le coefficient de transmission énergétique entre l'onde i et l'onde j et $n_i(\omega)$ la densité modale qui peut être calculée pour la branche i pour des fréquences discrètes comme suit :

$$n_i(\omega) = \frac{L}{\pi c_{g,i}} \quad (4.49)$$

En revanche, en moyennes et hautes fréquences le calcul de la densité modale devient difficile pour les modes de sections. En effet, pour les fréquences de coupure de ces modes non classiques, la densité modale devient infinie [92]. Donc, il est plus adéquat de calculer la densité modale pour chaque branche i comme suit :

$$n_i = \frac{L}{\pi} \frac{k(\omega_u) - k(\omega_l)}{\omega_u - \omega_l} \quad (4.50)$$

où k le nombre d'onde et L la longueur du guide d'ondes. Finalement, on peut exprimer l'écart type du CLF :

$$\sigma_{\eta_{ij}} = \frac{\sigma_{\tau_{ij}}}{2\pi\omega n_i(\omega)} \quad (4.51)$$

avec $\sigma_{\tau_{ij}}$ représente la sensibilité d'ordre un des coefficients de transmission énergétique de l'onde i vers l'onde j .

4.4 | Paramètres énergétiques pour un système de propagation semi-infini

Dans cette partie, on va traiter les systèmes stochastiques semi-infinis. Les dispersions des différents paramètres énergétiques sont traitées et validées dans cette section. On va étudier l'effet des incertitudes des paramètres mécaniques sur les paramètres énergétiques (puissance injectée, vitesse de groupe et la mobilité).

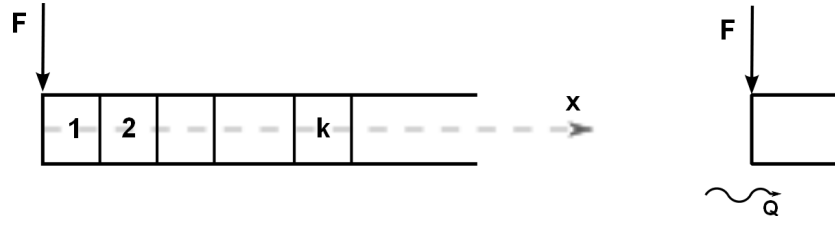


FIGURE 4.3 – Guide d'ondes semi-infini.

4.4.1 | Puissance injectée

Pour calculer la puissance injectée, on considère un guide d'ondes semi-infini, composé par des sous-systèmes interconnectés et soumis à une excitation sinusoïdale stochastique. Pour modéliser ce guide semi-infini par la méthode WFE, il suffit d'étudier un seul sous-élément en éliminant les ondes réfléchies (figure 4.3).

La matrice de flux de puissance est définie comme suit :

$$\tilde{\mathbf{P}}^\Phi = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_I & \tilde{\mathbf{P}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{RI} & \tilde{\mathbf{P}}_R \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Soit une section z très proche du point d'excitation. On va définir la puissance injectée comme étant la puissance réfléchie par la source et incidente dans le guide d'ondes. Alors on écrit :

$$\tilde{\Pi}(z) \simeq \tilde{\Pi}_{inj} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{ex} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\mathbf{P}}_R^\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{Q}}^{ex} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Par simple traitement analytique on peut identifier la moyenne de puissance injectée, $\bar{\Pi}(z) \simeq$

$$\bar{\Pi}_{inj} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\mathbf{P}}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \end{pmatrix} \text{ qui représente la formulation déterministe.}$$

L'écart type s'écrit aussi :

$$\sigma_{\Pi_{inj}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{\mathbf{Q}^{ex}} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\mathbf{P}}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{\mathbf{P}_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\mathbf{P}}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{\mathbf{Q}^{ex}} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$\bar{\mathbf{Q}}^{ex}$ et $\sigma_{\mathbf{Q}}^{ex}$ représentent les statistiques des amplitudes des ondes au point d'excitation sans réflexion. Pour une excitation aléatoire sinusoïdale $\tilde{\mathbf{F}}$, on utilise l'équation (3.4) et en annulant les termes de la réflexion on peut exprimer l'amplitude des ondes d'excitation dans le cas semi-infini :

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{ex} = (\tilde{\Phi}_F^{inc})^+ \tilde{\mathbf{F}}_L \quad (4.55)$$

Si on projette l'équation (4.55) on déduit la moyenne de l'amplitude de l'excitation : $\bar{\mathbf{Q}}^{ex} = (\bar{\Phi}_F^{inc})^{-1} \bar{\mathbf{F}}_L$ et l'écart type comme suit :

$$\sigma_{\mathbf{Q}^{ex}} = (\bar{\Phi}_F^{inc})^+ \left(\sigma_{\mathbf{F}_L} - \sigma_{\Phi_F^{inc}} \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \right) \quad (4.56)$$

Pour plus de clarté, l'écart type des amplitudes des ondes d'excitations est exprimé :

$$\sigma_{\mathbf{Q}^{ex}} = \alpha (\bar{\mathbf{Q}}^{ex}) \quad (4.57)$$

où α est une matrice.

4.4.2 | Impédance mécanique : formulation générale

L'impédance mécanique est une fonction fréquentielle traduisant la résistance de la structure à une force donnée en reliant la force à la vitesse d'un système mécanique. En effet, l'impédance en un point se traduit comme étant le ratio de la force appliquée par la vitesse de ce point. Les parties réelles et imaginaire de l'impédance se nomment respectivement la résistance et la réactance mécanique. Rappelons que la mobilité c'est l'inverse de l'impédance mécanique.

Pour un système semi-infini, l'impédance mécanique stochastique s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\omega) = \frac{\tilde{\mathbf{F}}(\omega)}{\tilde{\mathbf{v}}(\omega)} \quad (4.58)$$

L'expansion à l'ordre un nous conduit à écrire la moyenne de l'impédance $\bar{\mathbf{Z}} = \frac{\bar{\mathbf{F}}}{\bar{\mathbf{v}}}$ ainsi que l'écart type :

$$\sigma_{\mathbf{Z}} = (i\omega)^{-1} \left(\frac{\sigma_{\mathbf{F}}}{\bar{\mathbf{q}}} - \bar{\mathbf{F}} \frac{\sigma_{\mathbf{q}}}{\bar{\mathbf{q}}^2} \right) \quad (4.59)$$

avec $\bar{\mathbf{q}}$ le déplacement aléatoire du noeud étudié pour un système semi-infini.

Si on écrit : $\bar{\mathbf{Q}}^{ref} = 0$, $\sigma_{\mathbf{Q}^{ref}} = 0$, $\bar{\mathbf{Q}}^{inc} = \bar{\mathbf{Q}}^{ex}$ et $\sigma_{\mathbf{Q}^{inc}} = \sigma_{\mathbf{Q}^{ex}}$, alors la moyenne du déplacement en terme d'ondes incidentes s'écrit :

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \quad (4.60)$$

d'une façon équivalente, la sensibilité d'ordre un s'exprime :

$$\sigma_{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{B}} \sigma_{\mathbf{Q}^{ex}} + \sigma_{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{Q}}^{ex} \quad (4.61)$$

où $\bar{\mathbf{B}}$ et $\sigma_{\mathbf{B}}$ sont définis :

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{inc} \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^{inc} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_q^{inc}} \\ \sigma_{\Phi_q^{inc}} \bar{\mu}^{inc} + \bar{\Phi}_q^{inc} \sigma_{\mu^{inc}} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

4.4.3 | Vitesse de groupe

Cette partie est consacrée au calcul des statistiques de la vitesse de groupe. Elle correspond à la vitesse de propagation d'un paquet d'ondes, c'est-à-dire à la vitesse de propagation de l'information. La vitesse de groupe correspond aussi à la vitesse de propagation de l'énergie (pour un système faiblement amorti). La vitesse de groupe est définie comme la dérivée de la pulsation par rapport au nombre d'onde associé à cette pulsation. L'écart type de la vitesse de groupe analytique est déjà montré dans le chapitre 2 comme étant :

$$\sigma_{c_g} = \bar{c}_g \frac{\partial \sigma_k}{\partial k} \quad (4.63)$$

avec $\bar{c}_g$ la moyenne de la vitesse de groupe.

Pour un guide multi-modales, les expressions analytiques des modes non-classiques sont, en général, non connues. Donc, on a recours à une autre définition de la vitesse de groupe comme étant le ratio entre le flux d'énergie et la densité d'énergie totale (densité d'énergie cinétique et potentielle). Mathématiquement, la vitesse de groupe d'un mode propagatif i s'écrit dans le cas stochastique comme suit :

$$\tilde{c}_{gi}(\omega) = \frac{\tilde{P}_i}{\tilde{E}_{ci}^\infty + \tilde{E}_{pi}^\infty} \quad (4.64)$$

La densité d'énergie cinétique est déjà développée pour un système fini (4.25) en utilisant les déplacements de chaque côté du sous-élément. Dans le cas semi-infini on va éliminer les composantes de réflexion et ainsi on utilise les amplitudes des ondes d'excitations (4.34). En utilisant la matrice $\tilde{\mathbf{B}}$ définie dans l'équation (4.62), la moyenne de la densité d'énergie cinétique pour un guide multi-modal semi-infini s'exprime sous la forme suivante :

$$\tilde{E}_c^\infty = \frac{\omega^2}{4d} (\bar{\mathbf{Q}}^{ex})^H \mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{B} (\bar{\mathbf{Q}}^{ex}) \quad (4.65)$$

et l'écart type :

$$\sigma_{E_c^\infty} = \frac{\omega^2}{4d} (\bar{\mathbf{Q}}^{ex})^H [\mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{M}} (\sigma_{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\alpha) + \mathbf{B}^H \sigma_{\mathbf{M}} \mathbf{B} + (\sigma_{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\alpha)^H \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{B}] (\bar{\mathbf{Q}}^{ex}) \quad (4.66)$$

D'une façon analogue, les statistiques de la densité d'énergie potentielle peuvent être écrites :

$$\tilde{E}_p^\infty = \frac{1}{4d} (\bar{\mathbf{Q}}^{ex})^H \mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{B} (\bar{\mathbf{Q}}^{ex}) \quad (4.67)$$

$$\sigma_{E_p^\infty} = \frac{1}{4d} (\bar{\mathbf{Q}}^{ex})^H [\mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{K}} (\sigma_{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\alpha) + \mathbf{B}^H \sigma_{\mathbf{K}} \mathbf{B} + (\sigma_{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\alpha)^H \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{B}] (\bar{\mathbf{Q}}^{ex}) \quad (4.68)$$

D'autre part, le flux d'énergie stochastique pour le système semi-infini s'exprime :

$$\tilde{P} = (\bar{\mathbf{Q}}^{ex})^H \tilde{\mathbf{P}}^\Phi (\bar{\mathbf{Q}}^{ex}) \quad (4.69)$$

Finalement, on peut exprimer l'écart type de la vitesse de groupe par la projection de l'équation (4.64) :

$$\sigma_{c_{gi}} = \frac{\sigma_{P_{ii}} - \bar{c}_{gi} \left(\sigma_{E_{c,ii}^\infty} + \sigma_{E_{p,ii}^\infty} \right)}{\tilde{E}_{c,ii}^\infty + \tilde{E}_{p,ii}^\infty} \quad (4.70)$$

où $\sigma_P = (\bar{Q}^{ex})^H [\alpha^H \bar{P}^\Phi + \bar{P}^\Phi \alpha + \sigma_P^\Phi] (\bar{Q}^{ex})$ est l'écart type du flux d'énergie calculé uniquement en fonction des modes incidents.

Dès lors, l'équation (4.70) est une estimation numérique de la variabilité de la vitesse de groupe pour un système périodique semi-infini contenant des caractéristiques mal connues.

4.5 | Validation numérique

La validation numérique va être décomposée en trois parties. La première partie est une étude énergétique d'une poutre d'Euler-Bernoulli. La deuxième partie est consacrée à la validation du formalisme de la matrice de l'efficacité énergétique. Finalement un cas de couplage de deux barres multi-modales est étudié.

4.5.1 | Poutre d'Euler Bernoulli encastrée-libre

Dans un premier cas, une poutre E-B encastrée libre avec des caractéristiques à caractère aléatoire est traitée. L'évolution des différents paramètres énergétiques pour ce système vis-à-vis de l'incertitude matérielle est présentée.

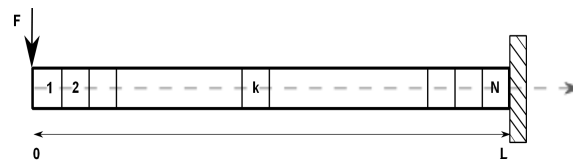


FIGURE 4.4 – Poutre E-B encastrée-libre.

$\bar{E}$ (Pa)	$\bar{\rho}$ (kg/m ³)	d (m)	η (%)	$\sigma_{E,\rho,F}$ (%)	$\bar{F}$ (N)	S (m ²)	I (m ⁴)
$2 \cdot 10^{11}$	7800	$7 \cdot 10^{-4}$	2	2	1	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$4.166 \cdot 10^{-6}$

TABLE 4.1 – Caractéristiques de la poutre semi-infinie

Considérons une poutre encastrée-libre excitée en flexion (figure 4.4) de caractéristiques mécaniques décrites dans le tableau 4.1. D'abord, le système semi-infini est modélisé par un sous-élément qui sera le siège des ondes incidentes uniquement (figure 4.3). Ce cas cano-nique est toujours étudié en premier suite à la connaissance de tous les résultats analytiques. Par exemple les expressions analytiques de l'impédance mécanique s'écrivent :

$$\tilde{Z} = \frac{(1+i)\bar{\rho}S\omega}{2\tilde{k}} \quad (4.71)$$

et la puissance injectée s'écrit dans ce cas :

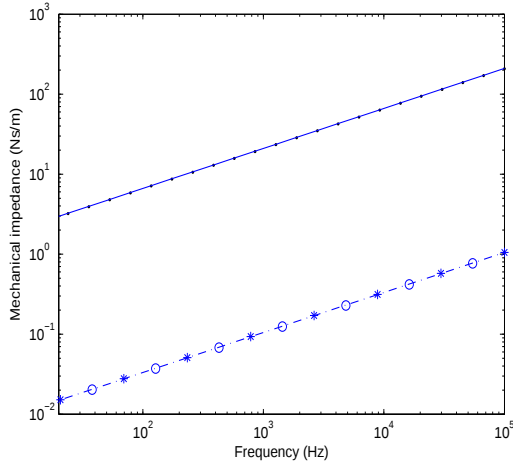
$$\tilde{\Pi}_{inj} = \frac{1}{2} |\tilde{F}|^2 \text{Real} \left(\frac{1}{\tilde{Z}} \right) \quad (4.72)$$

Les figures (figure 4.5 (a) et (b)) représentent l'évolution de l'impédance mécanique dans deux cas traités : le module d'Young et la densité stochastique à 2% de variabilité. Pour les deux cas traités, la moyenne et l'écart type sont validés par différentes méthodes. Le résultat numérique de la moyenne est comparé avec l'ordre zéro (cas déterministe de l'impédance mécanique) $\bar{Z} = \frac{(1+i)\bar{\rho}S\omega}{2\bar{k}}$. Ainsi, les résultats de la méthode proposée (SWFE) sont validés par les deux méthodes de référence : simulations de Monte Carlo (2000 itérations) et la solution analytique extraite de l'ordre un de l'équation (4.71) :

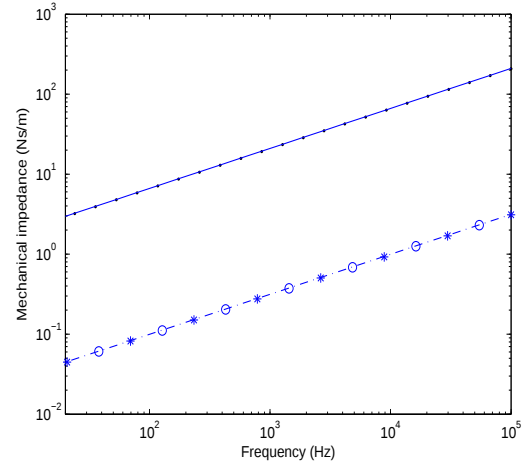
$$\sigma_Z = \frac{(1+i)\rho S\omega}{2} \frac{\sigma_k}{\bar{k}} \quad \text{E Stochastique} \quad (4.73)$$

$$\sigma_Z = \frac{(1+i)S\omega}{2} \left[\frac{\sigma_\rho}{\bar{\rho}} - \bar{\rho} \frac{\sigma_k}{\bar{k}^2} \right] \quad \rho \text{ Stochastique} \quad (4.74)$$

avec $\sigma_k = \frac{\bar{k}}{4} \frac{\sigma_E}{\bar{E}}$ et $\sigma_k = \frac{\bar{k}}{4} \frac{\sigma_\rho}{\bar{\rho}}$ sont les écarts types du nombre d'ondes respectivement pour le module d'Young et la densité stochastique :



(a)



(b)

FIGURE 4.5 – Impédance mécanique, (a) Module d'Young stochastique, (b) Densité stochastique : Moyenne analytique (—), WFE (.), SWFE (—.), Monte Carlo (*), Écart type analytique(o).

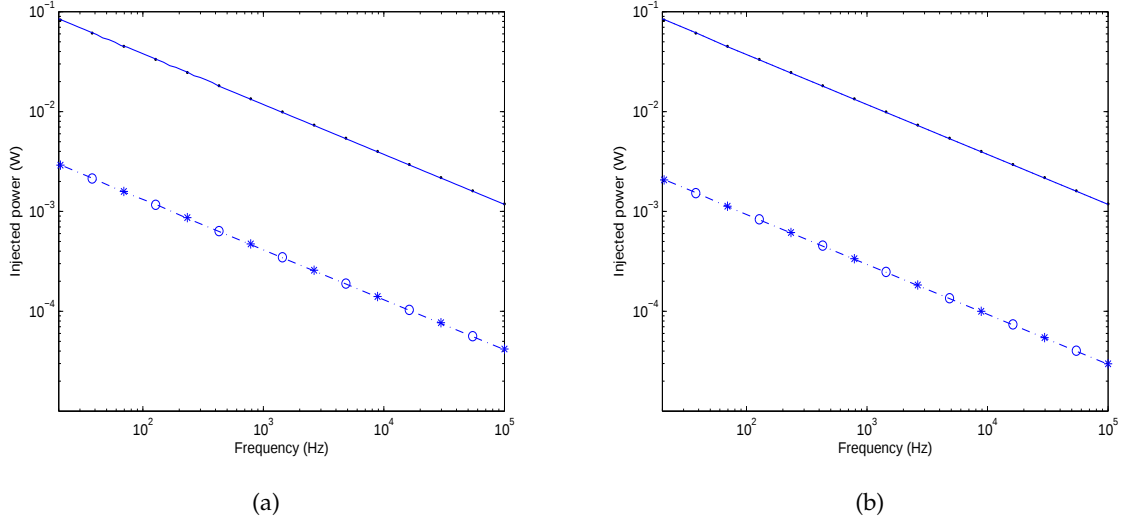


FIGURE 4.6 – Puissance injectée, (a) Module d'Young stochastique, (b) Densité stochastique : Moyenne analytique (—), WFE (.), SWFE (—.), Monte Carlo (*), Écart type analytique(o)

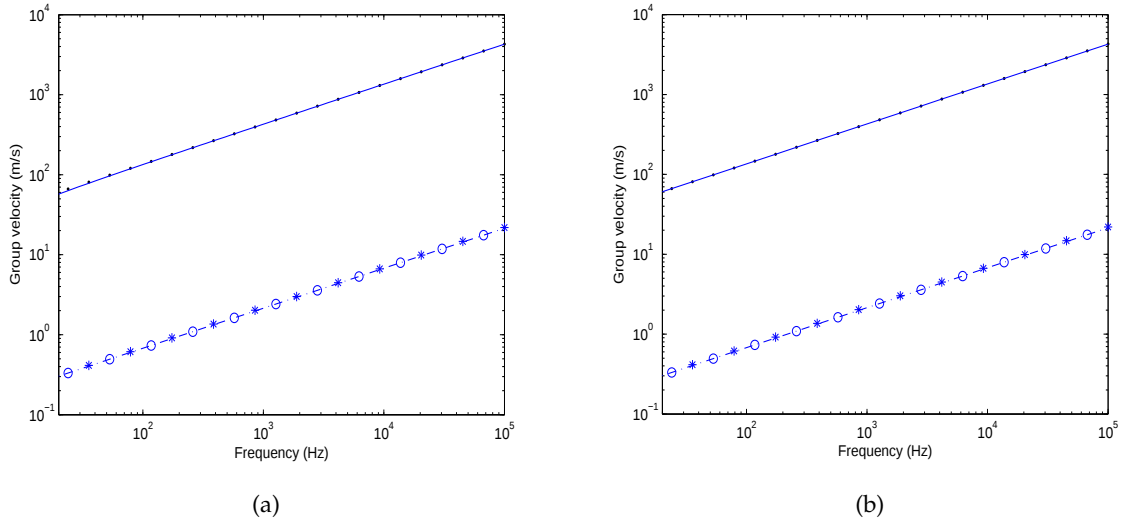


FIGURE 4.7 – Vitesse de groupe, (a) Module d'Young stochastique, (b) Densité stochastique : Moyenne analytique (—), WFE (.), SWFE (—.), Monte Carlo (*), Écart type analytique(o).

Les figures (4.6 et 4.7) représentent la moyenne et l'écart type de la puissance injectée et la vitesse de groupe pour deux cas de variabilités différentes (le module d'Young et la densité). En effet, la validation analytique de la puissance injectée est formulée à partir des expressions de l'impédance mécaniques comme suit :

$$\sigma_{\Pi_{inj}} = \frac{1}{2} \left[2\bar{\mathbf{F}}\sigma_F \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{\mathbf{Z}}}\right) - |\bar{\mathbf{F}}|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{\sigma_Z}{\bar{\mathbf{Z}}^2}\right) \right] \quad (4.75)$$

et les expressions des vitesses de groupes sont écrites :

$$\sigma_{c_g} = \frac{\omega}{2k} \frac{\sigma_E}{\bar{E}} \quad \text{E Stochastique} \quad (4.76)$$

$$\sigma_{c_g} = \frac{\omega}{2k} \frac{\sigma_\rho}{\bar{\rho}} \quad \rho \text{ Stochastique} \quad (4.77)$$

Ces résultats déjà présentés montrent que la formulation développée est bien valide et coïncide avec les solutions analytiques aussi bien qu'avec les simulations de Monte Carlo (2000 itérations) surtout en moyennes et hautes fréquences.

Maintenant, on va étudier le comportement énergétique de la poutre encasté-libre excitée en flexion (aléatoire). La démarche commence par l'étude spectrale et cinématique de la structure. Cette poutre est discrétisée en un nombre d'éléments E-B de longueur d et de matrice de masse et de raideur suivantes :

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{d^3} \begin{pmatrix} 12 & 6d & -12 & 6d \\ & 4d^2 & -6d & 2d^2 \\ \text{sym} & & 12 & -6d \\ & & & 4d^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho S d}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22d & 54 & -13d \\ & 4d^2 & 13d & -3d^2 \\ \text{sym} & & 156 & -22d \\ & & & 4d^2 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Dans ce cas, l'effet de la dispersion des deux paramètres les plus influents et la force d'excitation sont traités. Si on perturbe l'un des ces paramètres, la matrice de la raideur dynamique devient aléatoire. Ce problème peut être traité avec la méthode énergétique (MES) déjà présentée, mais on a besoin de quantifier la dispersion d'énergie due aux variabilités. La solution analytique (figure 4.8 (a) et figure 4.9 (a)) représente la moyenne de la densité d'énergie cinétique et potentielle respectivement en $x = L/2$. Ces moyennes sont évaluées par la méthode SWFE et validées par les équations analytiques établies à partir du problème spectral en projetant les variables cinématiques et énergétiques sur une base de 2 ondes incidentes et 2 réfléchies tout en connaissant leurs propriétés explicitement.

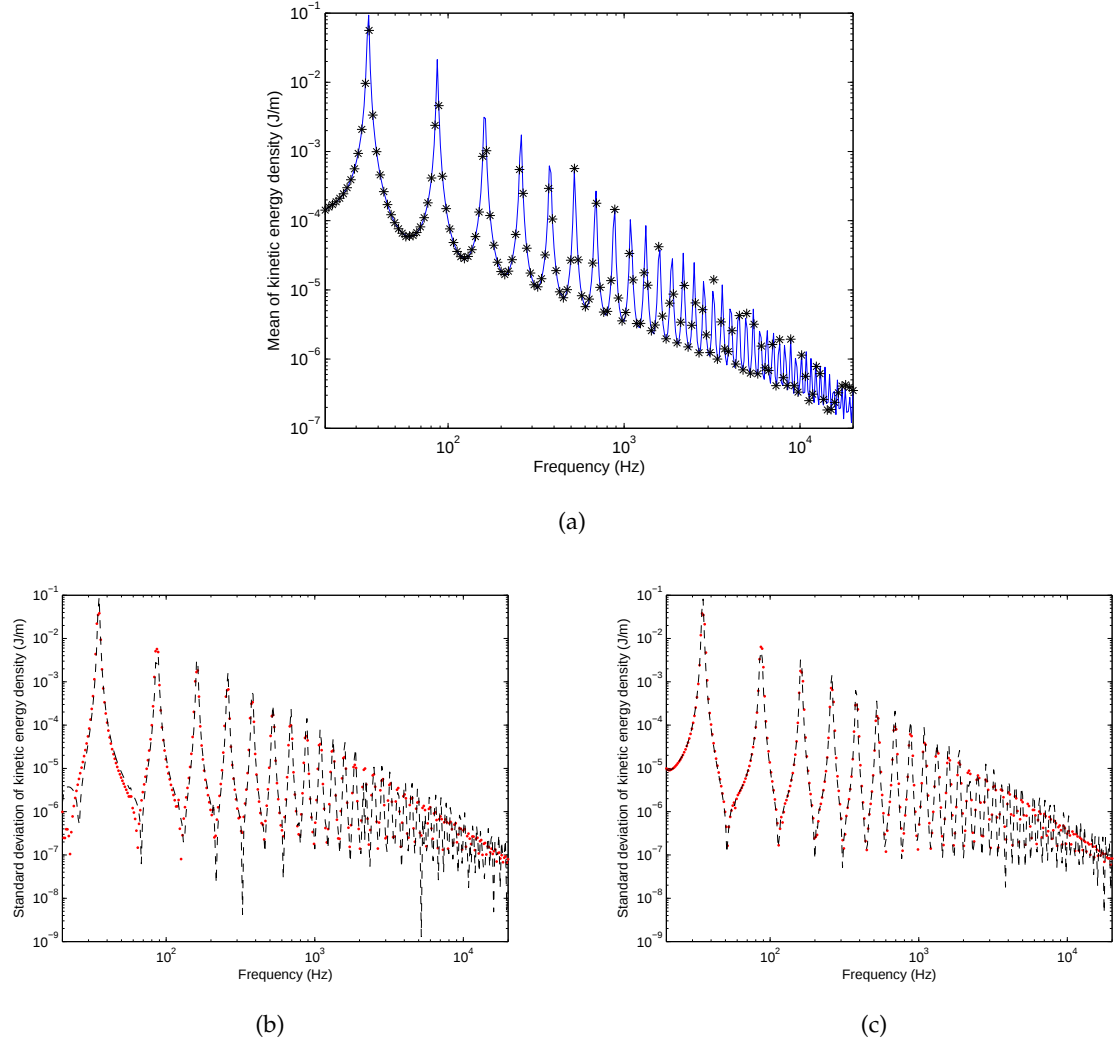


FIGURE 4.8 – Densité d'énergie cinétique en $x = L/2$, (a) La moyenne, (b) Module d'Young aléatoire, (c) Densité aléatoire : Analytique (*), WFE (—), SWFE (---), Monte Carlo (·).

D'autre part, les figures (figure 4.8 (b et c) et figure 4.9 (b et c)) représentent l'évolution des écarts types des différentes densités d'énergies calculées en $x = L/2$. Ces écarts types sont calculés par la SWFE et par les simulations de Monte Carlo. La prédiction du formalisme présenté coïncide parfaitement avec la méthode de référence tant en moyennes qu'en hautes fréquences.

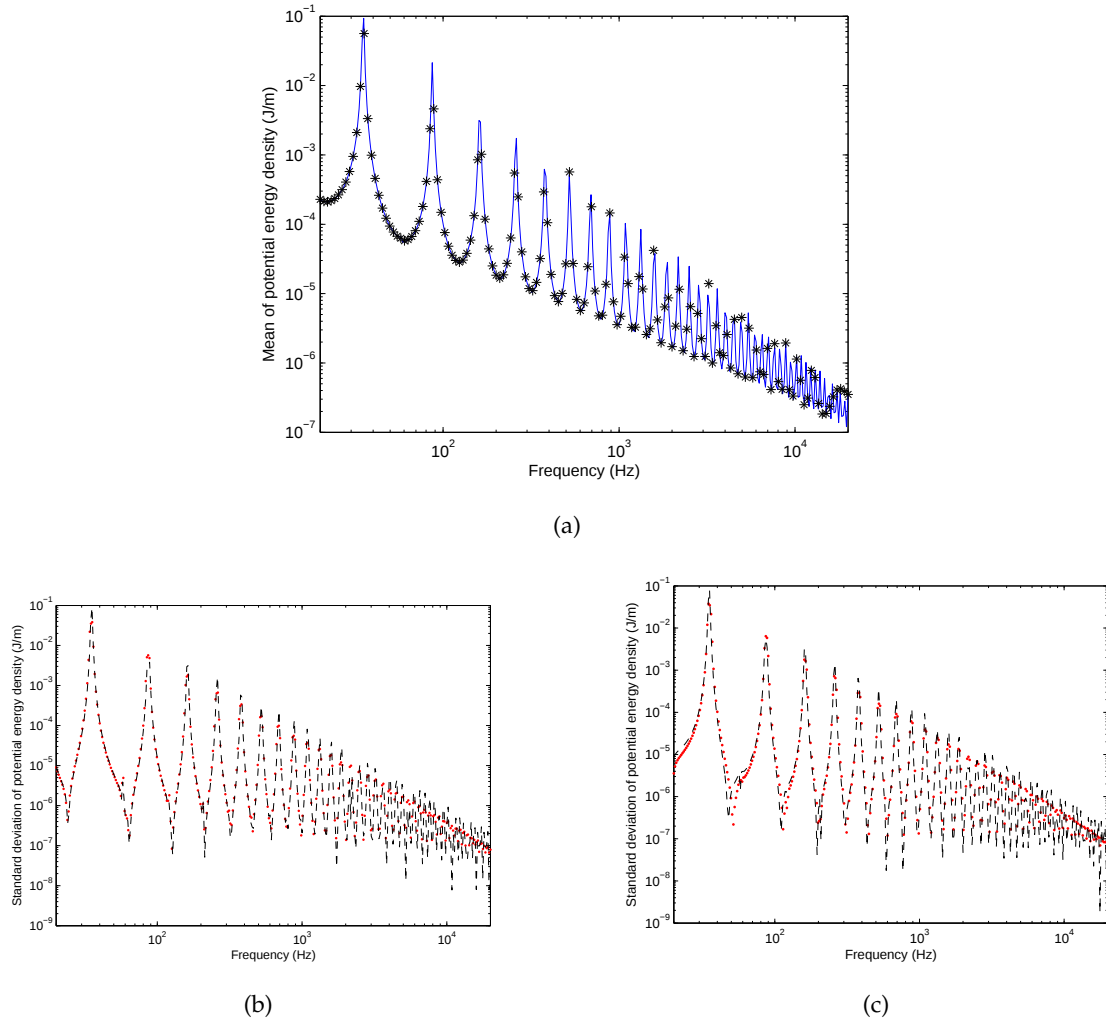


FIGURE 4.9 – Densité d'énergie potentielle en $x = L/2$, (a) La moyenne, (b) Module d'Young aléatoire, (c) Densité aléatoire : Analytique (*), WFE (—), SWFE (---), Monte Carlo (·).

4.5.2 | Deux guides multi-modaux connectés par une jonction à section variable

Cette section traite le cas de deux guides multi-modaux connectés par une jonction avec une variabilité géométrique et matérielle. Les différents coefficients d'efficacité énergétiques sont traités ainsi que leurs dispersions. Considérons deux guides d'ondes semi-infinis de différentes sections connectés par un élément de couplage à changement de section linéaire (figure 4.10). Les caractéristiques des deux guides sont données par le tableau 4.2. Les caractéristiques mécaniques de la jonction sont : Module d'Young = $2 \cdot 10^{11}$ Pa, densité = 7800 kg/m^3 et amortissement structural = 1%. Les matrices masse et raideur sont obtenues en utilisant un élément 3D à 8 noeuds (SOLID45) pour les deux sous-éléments et la jonction. La jonction est un bloc solide avec un changement de section linéaire. Ce change-

	E (Pa)	ρ (kg/m ³)	d (m)	η (%)	S (m ²)	I (m ⁴)
Waveguide1	$2 \cdot 10^{11}$	7800	10^{-3}	1	$2.5 \cdot 10^{-2} \times 2 \cdot 10^{-2}$	$2.6042 \cdot 10^{-8}$
Waveguide2	$2 \cdot 10^{11}$	7800	10^{-3}	1	$1.5 \cdot 10^{-2} \times 10^{-2}$	$2.812 \cdot 10^{-9}$

TABLE 4.2 – Caractéristiques des deux guides multi-modaux.

ment de section est à l'origine de la singularité géométrique par conséquent les différentes ondes réfléchies et transmises sont générées. Les noeuds internes sont condensés à gauche et à droite de chaque coté de la jonction. Ensuite, la méthode des éléments finis stochastiques est utilisée en injectant de l'aléa dans les caractéristiques de la jonction. Dans ce cas, le module d'Young est supposé aléatoire avec 2% de dispersion.

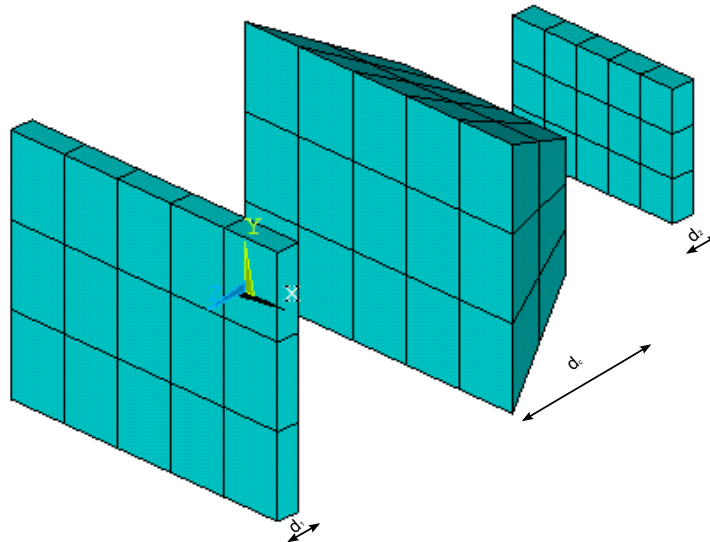


FIGURE 4.10 – Deux guides multi-modaux connectés par un élément de couplage avec changement de section.

La première étape consiste à identifier les différents modes ainsi que leurs déformées se propageant dans les deux guides d'ondes par la méthode spectrale WFE. L'utilisation de cette approche spectrale confirme d'existence uniquement des ondes classiques. Ensuite, la vérification de la continuité des paramètres cinématiques à l'interface est indispensable pour écrire la matrice de diffusion cinématique. Finalement, en exprimant les matrices de flux de puissance pour chaque sous-élément (à gauche et droite) et en utilisant le théorème de Maxwell-Betti on peut établir la matrice d'efficacité énergétique en supposant qu'on a des ondes propagatives incidentes du coté gauche.

La figure 4.11 représente la dispersion des coefficients de réflexion et transmission énergétiques pour les différents modes de propagations (longitudinal, torsion, flexion 1 et flexion

2). La faible valeur de variabilité est due à la forme de la géométrie de la jonction ainsi qu'à présence d'une seule variable aléatoire. La méthode de Monte Carlo nous permet la validation de ces résultats avec une erreur inférieure à 0.5% à hautes fréquences.

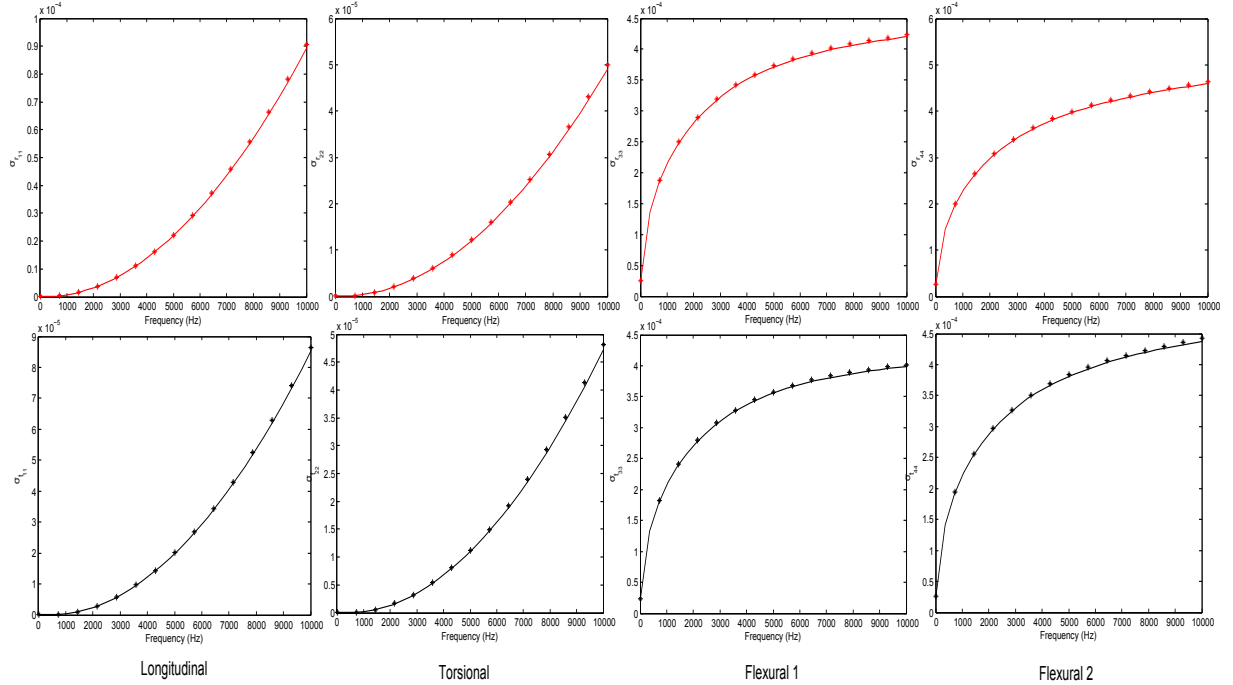


FIGURE 4.11 – Écarts types des coefficients d'efficacité énergétiques : — : (WFE/SFEM), * : MC (5000 itérations).

En utilisant les résultats des coefficients de transmission énergétiques, l'équation (4.51) nous permet d'évaluer l'effet de ces variabilités sur les CLF (pour une longueur du guide égale à 5 m). La figure 4.12 représente les CLF pour deux ondes ((a) : onde longitudinale notée par 1, (b) : onde de flexion notée par 2). Pour chaque onde, les moyennes et les écarts types sont évalués et validés par la méthode de référence (MC- 3000 itérations) tout au long de la bande de fréquence étudiée. L'évaluation d'une telle dispersion sur les CLF permettra ensuite de calculer la variabilité des différentes puissances échangées entre les sous-systèmes (bilan décrit par l'équation (1.25)).

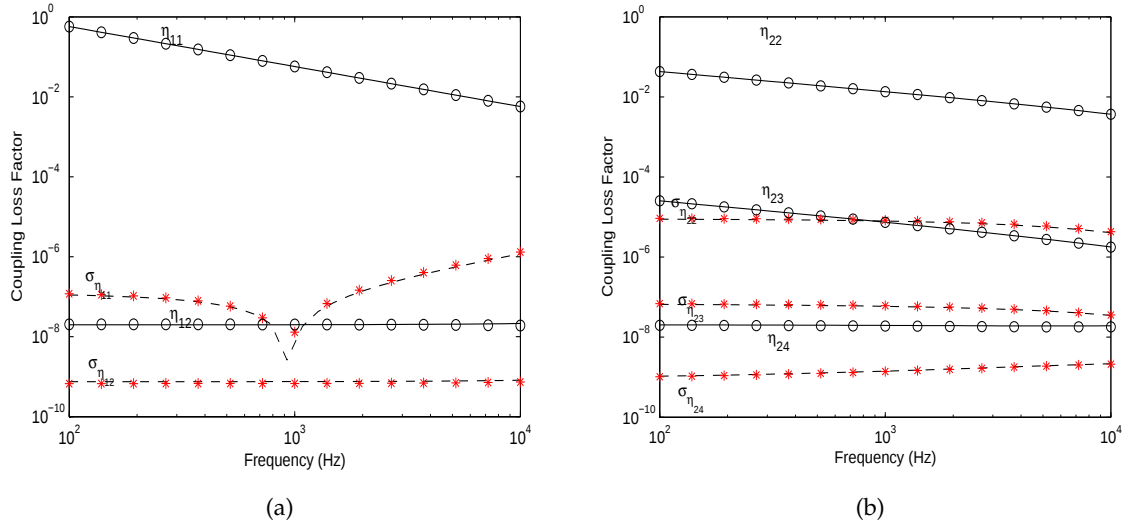


FIGURE 4.12 – Facteur de perte par couplage ($L = 5\text{m}$) : — : Moyenne, — — : Méthode hybride, o : Moyenne MC * : Écart type MC, (a) Longitudinale, (b) : Flexion .

4.5.3 | Deux guides multi-modaux connectés par une jonction

Dans cette partie on va présenter une validation numérique de l'approche énergétique déjà présentée. On va traiter le cas de deux guides d'ondes identiques multi-modaux connectés par une jonction en termes d'énergies.

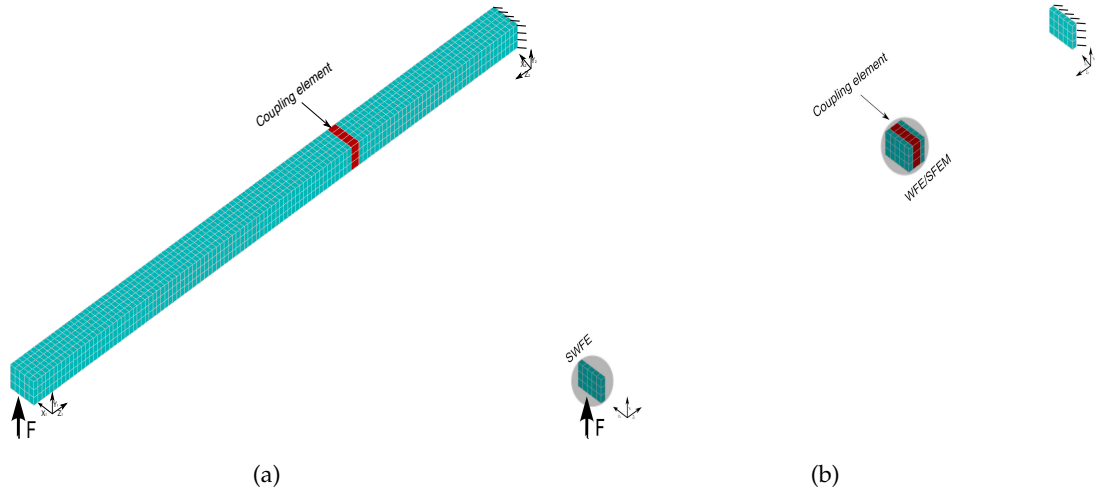


FIGURE 4.13 – Le modèle éléments finis du système couplé : (a) : problème structural, (b) : problème spectral .

Ce système est supposé contenir des incertitudes uniformément réparties. L'élément de couplage est aussi une structure avec des caractéristiques incertaines. Ce cas est déjà traité

de point de vue cinématique 3.4.3, donc on possède tous les résultats cinématiques (déplacements, forces, coefficients de diffusion, etc).

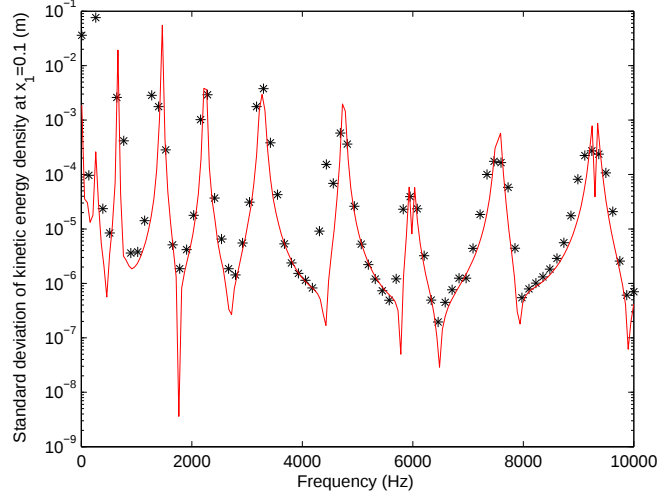


FIGURE 4.14 – Écart type de la densité d'énergie cinétique en $z_1 = 0.1\text{m}$: — SWFE, * Monte Carlo .

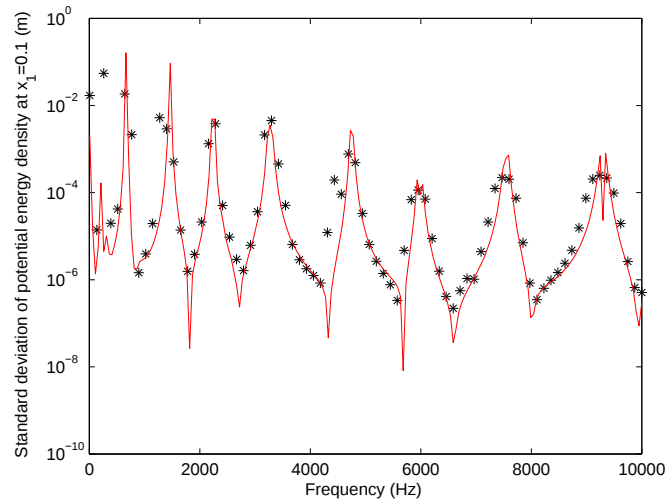


FIGURE 4.15 – Écart type de la densité d'énergie potentielle en $z_1 = 0.1\text{m}$: — SWFE, * Monte Carlo .

L'application de la DMM stochastique permet l'évaluation des coefficients d'efficacité énergétiques. Ainsi, on peut évaluer les quantités d'énergie réfléchi et transmise vis-à-vis de l'élément de couplage ainsi que leur dispersions. Les figures 4.14 et 4.15 représentent respectivement l'écart type de la densité d'énergie cinétique et potentielle en $z_1 = 0.1\text{ m}$. Cette

dispersion représente l'effet des incertitudes présentes dans les guides ainsi dans l'élément de couplage. Ces deux résultats sont comparés aux résultats de Monte Carlo (3000 itérations). Pour les deux cas les deux résultats coïncident tout au long de la bande de fréquence étudiée. Une petite différence est remarquée au niveau des fréquences d'anti-résonances et cela est dû à l'hypothèse de la non variation de l'énergie entre la section gauche et droite de chaque sous-élément. Quelle que soit la longueur de l'élément, au niveau des fréquences d'anti-résonances, cette hypothèse n'est plus valable.

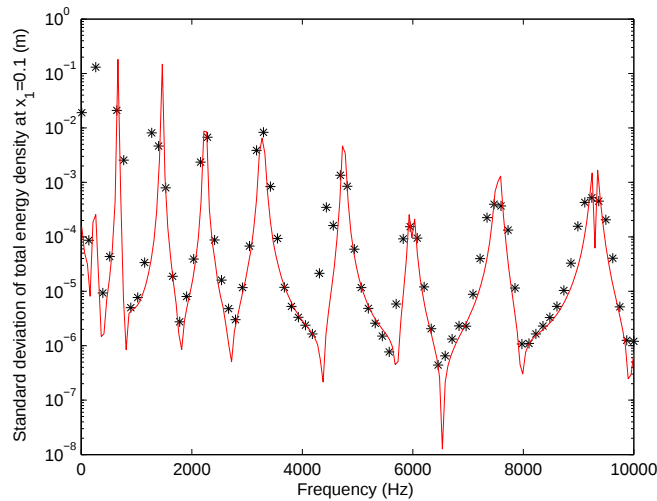


FIGURE 4.16 – Écart type de la densité d'énergie totale en $z_1 = 0.1\text{m}$: — SWFE, * Monte Carlo.

La figure 5.1 représente l'évolution de la dispersion de la densité d'énergie totale. C'est la sommation des variabilités des deux densités d'énergies (puisque'on utilise le développement à l'ordre un). C'est une information de plus, non prédictible par les méthodes déterministes, permettant la description énergétique des systèmes mécaniques couplés en termes énergétiques.

4.6 Conclusion

Ce chapitre présente une méthode énergétique permettant la description du comportement dynamique des systèmes périodiques en moyennes et hautes fréquences en utilisant les quantités quadratiques. D'une façon similaire au chapitre 3, cette partie de la thèse présente trois différentes parties. La première consiste à étudier un guide simple et à identifier les effets des incertitudes sur son bilan énergétique. L'étude d'un système semi-infini ainsi que ses différents paramètres sont explicitement définis. La deuxième partie est une évaluation du comportement énergétique des ondes propagatives en présence d'une discontinuité incertaine. La dernière partie est une étude complète d'un système couplé en présence d'un

élément de couplage. Les différents formalismes ont présenté leur efficacité en les comparant à la méthode de Monte Carlo.

Jusqu'à maintenant, on a présenté des formulations cinématiques ainsi qu'énergétiques pour étudier la dynamique des systèmes périodiques en moyenne et haute fréquences. Ces différentes approches proposées sont bien valides et permettent l'obtention des résultats à des faibles erreurs ($< 1\%$ à haute fréquence) pour un temps de calcul très avantageux par rapport aux méthodes de références. Mais ces approches posent deux problèmes :

- le développement à l'ordre un , qui limite l'étude à des variabilités très faibles.
- l'utilisation de la distribution gaussienne , ce qui pose des problèmes physiques pour des paramètres positifs.

Pour ces deux raisons, dans le chapitre suivant on va améliorer la SWFE en utilisant la projection des différentes variables aléatoires sur la base du chaos permettant ainsi de capter le maximum d'informations pour des variabilités importantes et d'utiliser des distributions adéquates pour les paramètres physiques positifs.

Chapitre 5

Approche spectrale stochastique - Chaos Polynomial

Sommaire

5.1	Le chaos polynomial	121
5.1.1	Chaos polynomial généralisé	124
5.1.2	Les techniques de transformation	125
5.2	Approches intrusives / non-intrusives	127
5.2.1	Approches intrusives	127
5.2.2	Approches non-intrusives	128
5.2.3	Méthodes de plan d'expérience - Latin Hypercube Sampling	130
5.3	SWFE - Chaos polynomial	131
5.4	Validations numériques	131
5.4.1	Guide d'ondes avec caractéristiques mécaniques aléatoires	131
5.4.2	Deux guides d'ondes couplés à paramètres aléatoires	135
5.5	Conclusion	142

Ce dernier chapitre est une généralisation des différentes formulations déjà développées dans les chapitres précédents. Puisque différents paramètres (densité, amortissement, excitation, etc) agissent d'une façon directe sur la propagation d'ondes, il est nécessaire de modéliser ces différents types d'incertitudes avec des distributions adéquates et physiques. Cette approche spectrale stochastique est une combinaison de la méthode des éléments finis ondulatoires et une approche probabiliste paramétrique non-intrusive.

La méthode des éléments finis stochastiques spectraux (MEFSS) est une méthode d'analyse du comportement dynamique ainsi que le comportement aléatoire des structures. Elle se base sur deux types de discrétisations:

- discrétisation spatiale : C'est une discrétisation physique de la structure étudiée.
- discrétisation dans l'espace de probabilité.

La MEFSS a été développée par Ghanem et Spanos en 1990 [53] décrivant la propagation des incertitudes spatiales des propriétés mécaniques pour les systèmes aléatoires. L'étude des systèmes linéaires est fondée sur la discrétisation des variables aléatoires sur la base des polynômes de chaos en séparant le caractère stochastique des variables de leur caractère déterministe. Ce type de projection est basée sur la théorie du chaos homogène de Winer [96] sous la condition que le processus stochastique est du second ordre. Cette approche permet la représentation de la réponse mécanique sur la même base de polynômes. Ainsi, un post-traitement des coefficients permet de résoudre les problèmes mécaniques aléatoires, de sensibilités ou de fiabilité des structures.

Dans ce chapitre, on va essayer de procéder de la même façon que pour la MEFSS afin d'établir une approche spectrale permettant la prédiction des effets des variabilités matérielles et géométriques sur la dynamique des guides d'ondes périodiques.

5.1 | Le chaos polynomial

La méthode du chaos polynomial est une sorte de représentation des processus aléatoires du second ordre. Cette méthode utilise le chaos homogène en développant le processus aléatoire en série de polynômes orthogonaux. Ces polynômes sont des fonctions de v.a.g.c.r indépendantes.

Le chaos polynomial de dimension M et d'ordre p [53] est défini comme étant l'ensemble des polynômes d'Hermite multidimensionnels en M variables aléatoires gaussiennes centrées et réduites (v.a.g.c.r) $\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$, dont le degré ne dépasse pas p . Chacun de ces polynômes est complètement défini par une liste de M entiers positifs $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ comme suit :

$$\Psi_{\alpha} = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}(\xi_i), \quad \alpha_i \geq 0 \quad (5.1)$$

où $H_q(\cdot)$ est le q -ième polynôme d'Hermite qu'on peut obtenir par dérivations successives comme suit :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-\frac{x^2}{2}}) = (-1)^n \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} \quad (5.2)$$

Ces polynômes vérifient la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) \varphi(x) dx = \delta_{nm} n! \quad (5.3)$$

avec δ_{nm} est le symbole de Kronecker.

Les polynômes d'Hermite vérifient la relation de récurrence :

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_n(x) = x H_{n-1}(x) - \frac{dH_{n-1}(x)}{dx} \end{cases} \quad (5.4)$$

Les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x \end{aligned}$$

Les polynômes d'Hermite possèdent les propriétés suivantes :

$$- \quad \frac{dH_n(x)}{dx} = n H_{n-1}(x) \quad (5.5)$$

$$- \quad H_i(x) H_j(x) = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} C_{ijk} H_k(x) \quad (5.6)$$

avec

$$\begin{cases} C_{ijk} = 0 & \text{si } \frac{i+j+k}{2} \notin \mathbb{N} \\ C_{ijk} = \frac{i!j!}{(\frac{i+j-k}{2})!(\frac{i-j+k}{2})!(\frac{-i+j+k}{2})!} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.7)$$

– Pour toute v.a.g.c.r., ξ , l'équation (5.3) devient :

$$\langle H_m(\xi), H_n(\xi) \rangle = \delta_{nm} n! \quad (5.8)$$

– l'espérance d'un produit de trois polynômes de gaussiennes égale à :

$D_{ijk} = E[H_i(\xi), H_j(\xi) H_k(\xi)]$ avec :

$$\begin{cases} D_{ijk} = \frac{i!j!k!}{(\frac{i+j-k}{2})!(\frac{i-j+k}{2})!(\frac{-i+j+k}{2})!} & \text{si } i+j+k \text{ pair et } k \in [|i-j|, i+j] \\ D_{ijk} = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.9)$$

Étant donné un processus aléatoire u du second ordre, on peut le projeter sur un ensemble de polynômes infini de variables aléatoires comme suit :

$$u = u_0 H_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} u_{i_1} H_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2} H_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} u_{i_1 i_2 i_3} H_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) + \dots \quad (5.10)$$

avec $H_p(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p})$ représentent les polynômes de chaos d'ordre p . D'une façon plus simple, l'équation (5.10) devient :

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i(\xi) \quad (5.11)$$

avec $\xi = [\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p}]^T$.

Dans la pratique, on utilise une projection sur des polynômes d'ordre fini constitués par un nombre fini de v.a.g.c.r $\{\xi_i\}$. Donc l'équation (5.11) sera tronquée à l'ordre p .

$$u \approx \sum_{i=0}^p u_i \Psi_i(\xi) \quad (5.12)$$

Les polynômes des chaos ont les propriétés suivantes :

$$\Psi_0 = 1, \quad \langle \Psi_i = 0 \rangle, \quad i > 0 \quad (5.13)$$

$$\langle \Psi_i \Psi_j \rangle = \delta_{ij} \langle \Psi_i^2 \rangle \quad (5.14)$$

Ainsi, ce développement permet la modélisation de la variable aléatoire en séparant le caractère déterministe u_i (appelée mode stochastique) du caractère stochastique $\Psi_i(\xi)$. Le premier mode du développement représente la moyenne de la variables aléatoire.

Le nombre de polynômes qui constitue la base de projection est calculé ainsi :

$$P = \sum_{k=0}^p C_{M+k-1}^k = \frac{(M+p)!}{M!p!} \quad (5.15)$$

où M représente la dimension du polynôme (nombre de variables aléatoires). Par exemple, pour $M=3$, $p=3$ on aura (Table 5.1) :

i	Ψ_i	$E[\Psi_i^2]$
0	1	1
1	ξ_1	1
2	ξ_2	1
3	ξ_3	1
4	$\xi_1^2 - 1$	2
5	$\xi_1 \xi_2$	1
6	$\xi_1 \xi_3$	1
7	$\xi_2^2 - 1$	2
8	$\xi_2 \xi_3$	1
9	$\xi_3^2 - 1$	2
10	$\xi_1^3 - 3\xi_1$	6
11	$(\xi_1^2 - 1)\xi_2$	2
12	$(\xi_1^2 - 1)\xi_3$	2
13	$(\xi_2^2 - 1)\xi_1$	2
14	$\xi_1 \xi_2 \xi_3$	1
15	$(\xi_3^2 - 1)\xi_1$	2
16	$\xi_2^3 - 3\xi_2$	6
17	$(\xi_2^2 - 1)\xi_3$	2
18	$(\xi_3^2 - 1)\xi_2$	2
19	$\xi_3^3 - 3\xi_3$	6

TABLE 5.1 – Exemple de chaos polynomial pour $M = 3$ et $p = 3$

5.1.1 | Chaos polynomial généralisé

Le développement du chaos polynomial (appelé de Winer-Hermite) utilise la projection du processus aléatoire sur une base de gaussiennes. Mais cette représentation perd sa précision et sa rapidité pour des variables aléatoires non-gaussiennes. Donc, il est intéressant de développer des polynômes associés aux distributions usuelles. Xiu et Karniadakis [97] ont essayé de faire correspondre à chaque loi de probabilité une famille de polynômes orthogonaux. C'est une extension de la notion du chaos polynomial pour les cas non-gaussiens : c'est "le chaos polynomial généralisé, CPG". Le tableau 5.2 présente les différentes distributions et leurs polynômes associés.

	Variable aléatoire ξ	Winer-Askey chaos $\Psi(\xi)$	Support
Distribution Continue	Gaussienne	Hermite	$(-\infty, +\infty)$
	Uniforme	Legendre	$[a, b]$
	Gamma	Laguerre	$[0, \infty]$
	Béta	Jacobi	$[a, b]$
Distribution Discrète	Poisson	Charlier	$\{0, 1, \dots, \}$
	binomiale	Krawtchouk	$\{0, 1, \dots, N\}$
	Hypergéométrique	Hahn	$\{0, 1, \dots, N\}$

TABLE 5.2 – Les différents distributions et leurs polynômes correspondant

D'autre part, on peut utiliser les polynômes d'Hermite en transformant les lois de probabilités en gaussiennes. Devroye [98] a présenté des techniques de transformation et des approximations pour une grande variété de variables aléatoires. Pour les variables aléatoires dont les transformations ne sont pas trouvées dans la littérature, elles peuvent être approchées soit par des manipulations algébriques soit par la techniques de projection soit par la méthode de Monte Carlo. Le tableau 5.3 présente quelques exemples de représentation des lois de probabilités en fonction des variables gaussiennes ξ , centrées et réduites.

Type de distribution	Transformation
Uniforme (a, b)	$a + (b - a) \left(0.5 + 0.5 \operatorname{erf}(\xi / \sqrt{2}) \right)$
Normale (μ, σ)	$\mu + \sigma \xi$
Lognormale (μ, σ)	$\exp(\mu + \sigma \xi)$
Gamma (a, b)	$ab \left(\xi \sqrt{\frac{1}{9a}} + 1 - \frac{1}{9a} \right)^3$
Exponentielle (λ)	$-\frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\xi / \sqrt{2}) \right)$

TABLE 5.3 – Variables aléatoires et leurs transformations en fonction d'une v.a.g.c.r

avec $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

5.1.2 | Les techniques de transformation

Différents chercheurs ont proposé différentes formes de transformations. L'une de ces approches permet l'approximation des différentes lois de probabilités par des polynômes d'Hermite-Wiener [97]. Berveiller [99] a détaillé cette technique en utilisant différentes approches (projection, régression, quadrature de Gauss) pour estimer les modes stochastiques.

Étant donné une variable aléatoire X , alors on peut l'exprimer de la façon suivante :

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i(\xi) \quad (5.16)$$

avec ξ est une v.a.g.c.r et les a_i , $i = \{1, \dots, \infty\}$ sont les inconnues. L'espérance de l'équation (5.16) multipliée par $H_i(\xi)$ nous conduit à écrire :

$$E[XH_i(\xi)] = a_i E[H_i^2(\xi)] \quad (5.17)$$

avec $E[H_i^2(\xi)] = i!$.

L'utilisation de la transformation isoprobabiliste $X \rightarrow \xi$ qui vérifie $F_X(x) = \Phi(\xi)$ permet d'écrire les coefficients a_i comme suite :

$$a_i = \frac{1}{i!} \int_{\mathbb{R}} F_X^{-1}(\Phi(t)) H_i(t) \varphi(t) dt \quad (5.18)$$

avec F_X la fonction de répartition de la variable X , Φ la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite.

Pour des distributions usuelles, les coefficients a_i sont exprimés immédiatement. En revanche, pour d'autres distributions, des simulations de Monte Carlo sont nécessaires.

Les coefficients a_i (5.18) peuvent être aussi évalués en utilisant l'intégration numérique par quadrature de Gauss déjà présentée dans le chapitre 1. Donc la solution numérique associée à la fonction de poids $\varphi(t)$ est écrite :

$$a_i \approx \frac{1}{i!} \sum_{j=1}^N \omega_j F_X^{-1}(\Phi(x_j)) H_i(x_j) \quad (5.19)$$

avec x_i et ω_i représentent les points et les poids respectivement.

Une troisième approche permettant l'évaluation des coefficients a_i appelée la méthode de la régression. Cette méthode permet une approximation des coefficients modaux aux sens des moindres carrés.

Si on souhaite approximer une variable aléatoire X de loi connue par une variables $\tilde{X}$ définie sur une base de chaos d'ordre p :

$$\tilde{X} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i H_i(\xi) \quad (5.20)$$

en utilisant la méthode des moindres carrés, on minimise l'écart quadratique ΔX entre X et $\tilde{X}$ comme suit :

$$\Delta X = \sum_{i=1}^n (X^{(i)} - \tilde{X}^{(i)})^2 \quad (5.21)$$

avec $i = \{1, \dots, n\}$ et n représente le nombre de réalisations de la variable ξ .

5.2 | Approches intrusives / non-intrusives

Le chaos polynômial généralisé est largement utilisé pour décrire la propagation des incertitudes dans les systèmes mécaniques. D'abord, il faut choisir la base du chaos selon les types de distributions des variables d'entrée. Ensuite, la transformation des lois de probabilités d'entrée en fonctions des variables gaussiennes centrées et réduites permet d'utiliser le Hermite-chaos. Une étude de convergence est nécessaire pour fixer l'ordre de la troncature. Finalement, il faut évaluer les modes stochastiques des variables de sortie pour calculer les différents moments de la réponse. Pour quantifier ces coefficients, deux approches sont utilisées : l'approche intrusive et l'approche non-intrusive.

5.2.1 | Approches intrusives

Cette approche consiste à remplacer les fonctions aléatoires dans un système d'équations par leurs expansions dans la base du chaos polynomial. La projection de Galerkin permet de passer d'un système stochastique à un système d'équations déterministes. Cette approche nécessite la modification de l'algorithme de résolution, par conséquent chaque problème nécessite un traitement particulier. D'autre part, cette approche devient pénible, numériquement, en augmentant la complexité du système ou le nombre de variables aléatoires. Par exemple :

Soit un système aléatoire de variables de sortie y qui dépend des variables aléatoires d'entrée notés $D(w)$ qui sont décrites par n v.a.g.c.r indépendantes $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de densité de probabilité connues $p(\xi)$. Il est clair que la fonctionnelle d'une entrée aléatoire est aussi aléatoire et s'écrit sous la forme $y(D(\xi)) = y(\xi)$.

Si on suppose que y est une variable aléatoire de deuxième ordre, elle peut être écrite dans la base des chaos à l'ordre p sous la forme :

$$y(\xi) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \Psi_i(\xi) \quad (5.22)$$

Si on définit un modèle mathématique M reliant les deux variables aléatoires y et D comme suit :

$$M(y(\xi); D(\xi)) = 0 \quad (5.23)$$

On substitue l'équation (5.22) dans l'équation (5.23), et on suppose que le résidu est orthogonal à la base d'expansion, on aura :

$$\left\langle M \left(\sum_{i=0}^p \alpha_i \Psi_i(\xi); D(\xi) \right), \Psi_k \right\rangle = 0, \quad \forall k = \{0, \dots, p\} \quad (5.24)$$

La projection de Galerkin conduit à écrire $p + 1$ équations couplées déterministes. Comme on l'a déjà mentionné, cette approche nécessite la modification de l'algorithme du problème. Une autre approche beaucoup plus avantageuse nommée : l'approche non-intrusive.

5.2.2 | Approches non-intrusives

L'approche non-intrusive, contrairement à l'approche intrusive, ne nécessite aucun changement au niveau de l'algorithme utilisé (code déterministe). Pour ce faire, différentes méthodes sont utilisées : la méthode de projection et la méthode de régression.

Dans cette partie, on considère S une variable de sortie aléatoire de second ordre. Elle est approximée dans la base des chaos d'ordre p comme suit :

$$S(\theta) \approx \tilde{S}(\theta) = \sum_{j=0}^P s_j \Psi_j(\{\xi(\theta)\}_{k=1}^M) \quad (5.25)$$

5.2.2.1 | La méthode de projection

La méthode de projection utilise l'orthogonalité de la base de projection pour exprimer les s_i :

$$s_i = \frac{E[S\Psi_j]}{E[\Psi_j^2]} \quad (5.26)$$

Le problème de l'équation (5.26) est dans le numérateur qui peut être évalué sous la forme :

$$E[S\Psi_j] = \int_{\mathbf{R}^M} S(\mathbf{x}) \Psi_j \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.27)$$

avec $\varphi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-M/2} e^{-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2}$ la densité de probabilité multinormale de dimension M .

L'évaluation de l'intégrale se fait soit en utilisant les simulations de Monte Carlo ou bien en utilisant la méthode de quadrature de Gauss. L'inconvénient majeur de cette méthode c'est son temps de calcul qui devient très lourd si on augmente le nombre de points d'intégration ou le nombre des variables aléatoires.

5.2.2.2 | La méthode de régression

La méthode de régression est une méthode d'évaluation des modes stochastiques très avantageuse car quelques simulations du modèle déterministe (comme étant une boîte noire) sur un nombre de points finis du domaine suffisent pour décrire la totalité de la réponse stochastique.

La méthode de collocation

Si on se donne n réalisations $\{\{\xi_k^{(q)}\}_{k=1}^M, q = 1, \dots, n\}$. En utilisant les transformations isoprobabilistes, on peut calculer la fonction de réponse (la variable de sortie) $S^{(i)} = S(X^{(i)})$, avec $X^{(i)}$ est le vecteur aléatoire des paramètres d'entrée. La méthode de collocation consiste à égaliser $S^{(i)}$ et $\tilde{S}^{(i)}$ pour chaque réalisation. D'une façon explicite, le problème s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \Psi_0(\{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^M) & \dots & \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(1)}\}_{k=1}^M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(\{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^M) & \dots & \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{(0)} \\ \vdots \\ S^{(P)} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

ainsi on peut approximer les coefficients s_i . Le choix des points de collocations peut se faire à partir des racines des polynômes d'Hermite ou bien d'une façon aléatoire.

La méthode de régression

La méthode de régression est une autre méthode permettant l'évaluation des coefficients du développement sur la base du chaos. Une approche avantageuse de point de vue numérique est proposée par Berveiller [99]. L'approximation de la réponse S exacte sur la base du chaos polynomial d'ordre p s'écrit :

$$S(\theta) \approx \tilde{S}(\theta) = \sum_{j=0}^P s_j \Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M) \quad (5.29)$$

L'évaluation des coefficients nécessite un certain nombre de réalisations des $\{\xi_k^{(q)}\}_{k=1}^M$ pour aboutir aux réalisations des paramètres aléatoires $X^{(i)}$ d'entrée par une transformation isoprobabiliste. L'évaluation du code déterministe nous conduit à calculer $S^{(i)} = S(X^{(i)})$. Donc la solution $S^{(i)}$ est approximée à $\tilde{S}^{(i)}$ au sens des moindres carrés en minimisant l'écart ΔS par rapport aux inconnues (modes stochastiques) $\{s_i, i = 1, \dots, P-1\}$, avec :

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n (S^{(i)} - \tilde{S}^{(i)})^2 \quad (5.30)$$

L'équation (5.30) est équivalente à :

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n \left(S^{(i)} - \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \right)^2 \quad (5.31)$$

La minimisation de ce terme par rapport aux coefficients de développement est obtenue :

$$\frac{\delta \Delta S}{\delta s_l} = 0, \quad \forall l \in \{0, \dots, P-1\} \quad (5.32)$$

Soit

$$\sum_{i=1}^n \Psi_l(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \left(S^{(i)} - \sum_{j=0}^{P-1} s_j \Psi_j(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \right) = 0, \quad \forall l \in \{0, \dots, P-1\} \quad (5.33)$$

Finalement, le problème est reformulé de la façon suivante :

$$\sum_{j=0}^{P-1} s_j \left[\sum_{i=1}^n \Psi_l(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \Psi_j(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \right] = \sum_{i=1}^n S^{(i)} \Psi_l(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M), \quad \forall l \in \{0, \dots, P-1\} \quad (5.34)$$

Sous la forme matricielle, l'équation (5.34) devient :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) & \cdots & \sum_{i=1}^n \Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) & \cdots & \sum_{i=1}^n \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n S^{(i)} \Psi_0(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \Psi_0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n S^{(i)} \Psi_{P-1}(\{\xi_k^{(i)}\}_{k=1}^M) \Psi_0 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Ainsi la résolution de cette équation permet l'obtention des différents modes stochastiques par conséquent une description totale de la variable de sortie. L'avantage de cette formulation c'est qu'elle dépend uniquement du nombre de réalisations n . Une bonne solution est obtenue lorsque la matrice à inverser est bien conditionnée, sinon une décomposition en valeurs singulières est nécessaire. La résolution de cette équation est bien conditionnée par le choix et la taille du plan d'expérience. Les points d'expériences peuvent être choisis d'une façon aléatoire en utilisant les méthodes de plan d'expériences comme la méthode 'Latin Hypercube Sampling, (LHS)'. Un autre choix consiste à utiliser les racines de polynômes d'Hermite de degré $m = p + 1$. D'autre part, le nombre de simulations doit être supérieur au nombre de coefficients modaux à calculer pour obtenir de bons résultats.

Une fois la solution de sortie exprimée sur la base de chaos, un traitement adéquat est nécessaire pour quantifier la propagation d'incertitudes dans la structure étudiée. Les moments statistiques du paramètre $S = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \Psi_j$ s'expriment comme suit :

- La moyenne : $E[S] = s_0$
- La variance : $\text{Var}[S] = \sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{P-1} E[\Psi_i^2] s_i^2$
- Le coefficient d'asymétrie : $\delta_S = \frac{1}{\sigma_S^3} \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{P-1} d_{ijk} s_i s_j s_k$

5.2.3 | Méthodes de plan d'expérience - Latin Hypercube Sampling

Le 'Latin Hypercube Sampling' est une méthode de tirages pour les petits échantillons. Elle permet d'assurer la non redondance de l'information et permet un choix adéquat des échantillons optimaux pour construire les plans d'expériences. En pratique, étant donné n tirages, la méthode de l'hypercube latin consiste à diviser chaque axe $[0, 1]$ en intervalles égaux $([0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, 1])$. Pour chaque intervalle, on choisit une valeur d'une façon aléatoire ou on prend le milieu. La méthode de l'hypercube latin consiste à tirer une seule fois chaque échantillon.

5.3 | SWFE - Chaos polynomial

Pour étudier la dynamique stochastique des systèmes périodiques, on procède par une hybridation de la méthode WFE-chaos polynomial pour prédire le comportement dynamique des structures élancées en moyennes et hautes fréquences. La combinaison de ces deux méthodes permet un gain en temps de calcul important car :

1. La WFE est une sorte de réduction de modèle permettant la réduction des ddl des systèmes étudiés.
2. Le chaos polynomial, comme déjà expliqué, est une approche permettant la description de la propagation des incertitudes avec beaucoup moins d'itérations par rapport les simulations de Monte Carlo.

La première étape consiste à définir n réalisations de $\{\{\xi_k^{(q)}\}_{k=1}^M, q = 1, \dots, n\}$ où M représente le nombre de variables aléatoires. Ces réalisations constituent un plan l'expérience (en utilisant le LHS par exemple). Une transformation isoprobabiliste (tableau 5.3) permet d'exprimer les variables d'entrée aléatoires $\{X^{(i)}, \dots, X^{(n)}\}$. Ainsi pour chaque réalisation, on évalue $S(X^{(i)})$ avec S , dans ce cas, est le résultat qui découle du calcul des éléments finis ondulatoires déterministe. Finalement, l'utilisation de la méthode de régression permet l'évaluation des statistiques des variables de sortie (spectrales, cinématiques et énergétiques).

5.4 | Validations numériques

Cette partie est consacrée pour tester et valider les approches proposées ainsi que l'hybridation WFE-chaos polynomial. Une étude d'un guide multimodale est au début traitée. Ensuite, différents cas de test seront évoqués pour les systèmes connectés.

5.4.1 | Guide d'ondes avec caractéristiques mécaniques aléatoires

Soit un guide d'ondes multimodales encastré-libre soumis à une force sinusoïdale $F = 1\text{N}$ (supposée déterministe). Les caractéristiques mécaniques de ce guide sont : la densité $\rho = 7800\text{ Kg/m}^3$, le module d'Young $E = 2 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, l'amortissement structural $\eta = 1\%$, les dimensions de la section droite : $3 \cdot 10^{-2}\text{ m} \times 2 \cdot 10^{-2}\text{ m}$, la longueur de chaque sous-élément $d = 10^{-2}\text{ m}$.

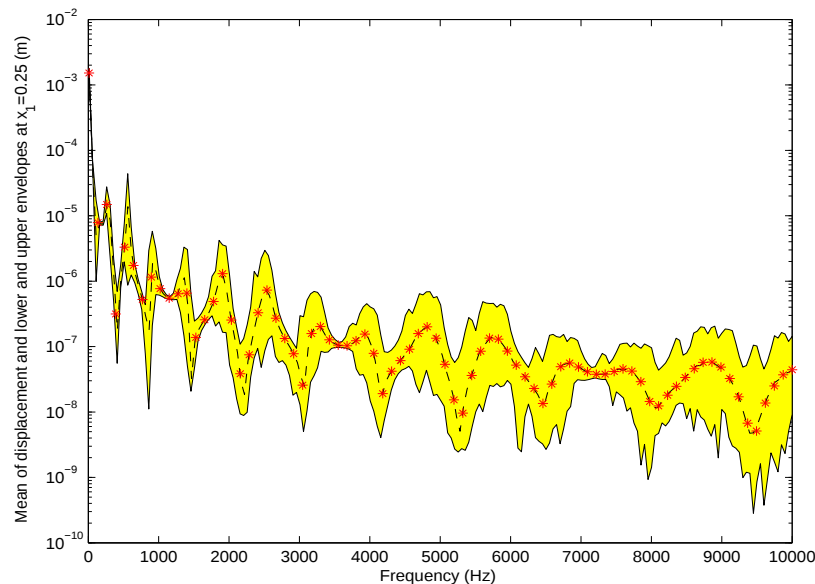
Cette structure est supposée contenir des paramètres incertains uniformément réparties et périodiques. L'hypothèse de la périodicité de la structure ainsi que l'homogénéité de l'aléas est nécessaire pour cette étude. On suppose dans cette étude que le module d'Young, la densité et l'amortissement sont les paramètres mal connus. Le tableau 5.4 résume les paramètres aléatoires utilisés ainsi que leurs distributions.

Variable aléatoire	Type de distribution	Moyenne	Écart type
Module d'Young	Lognormale	$2 \cdot 10^{11}$	2%
Densité	Lognormale	7800	3%
Amortissement	Uniforme	0.01	10%

TABLE 5.4 – Variables aléatoires, les lois et les paramètres utilisés.

La génération de n réalisations gaussiennes et l'utilisation des transformation usuelles des lois utilisées permettent l'application des polynômes de chaos généralisés. Pour chaque réalisation, le calcul déterministe permet l'obtention d'une solution de sortie $S^{(i)}$. Le post-traitement des variables de sortie permet l'obtention des différents moments statistiques.

La figure 5.1 représente la moyenne du déplacement calculée par la méthode SWFE-chaos polynomial et validé par la méthode Monte Carlo en $x = L/4$ (— noir). On remarque que l'utilisation du chaos permet la bonne estimation de la moyenne du déplacement en moyennes et hautes fréquences avec un minimum d'itérations : 200 itérations (chaos) et 5000 itérations (Monte Carlo), ce qui permet un gain considérable en temps de calcul. La surface jaune représente les limites du comportement de la structure, c-à-d pour de tels paramètres d'entrée, la dynamique du système sera limitée par l'enveloppe jaune qui représente le Max-Min de la réponse. Cette enveloppe devient de plus en plus large à hautes fréquences suite à l'effet important des incertitudes dans cette bande de fréquences.

FIGURE 5.1 – Moyenne du déplacement en $x = L/4$, (—) Moyenne SWFE, (*) Monte Carlo, Surface jaune : Enveloppe Max-Min.

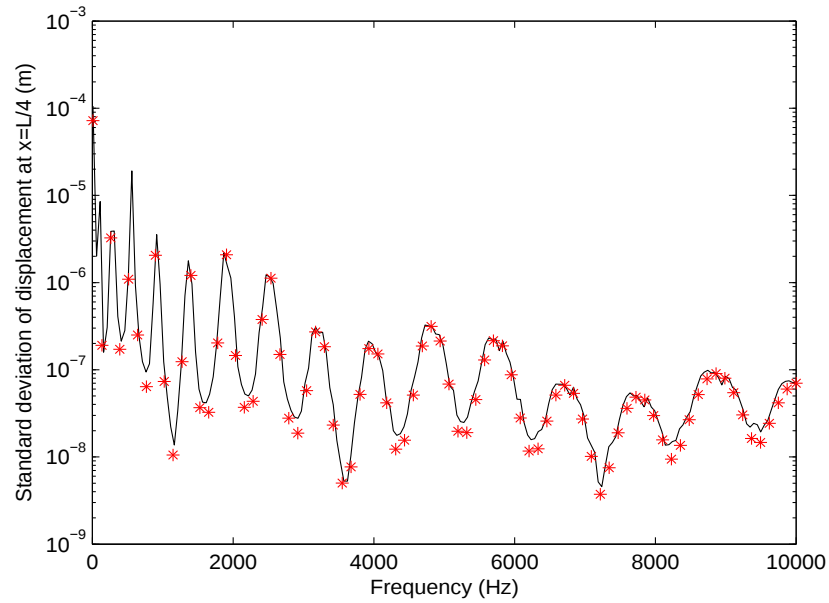


FIGURE 5.2 – Écart type du déplacement en $x = L/4$, (—) Écart type, (*) Monte Carlo.

La figure 5.2 représente l'écart type du déplacement $x = L/4$. La projection de la solution sur une base de polynômes d'ordre 4 et un post-traitement des solutions de WFE-Chaos permet une bonne prédiction de la variabilité du déplacement tout au long de la bande de fréquence étudiée en le comparant à la méthode de référence Monte Carlo pour 5000 itérations.

La deuxième étude consiste à évaluer l'effet de ces incertitudes sur les variables quadratiques. C'est une sorte d'extension d'une approche hautes fréquences en moyennes fréquences. Si on considère que la densité d'énergie varie faiblement tout au long la sous structure, on assume que la densité dans cette élément est égale à la densité d'énergie dans une section. Les figures 5.3 (a) et 5.4 (a) représentent respectivement les moyennes des densités d'énergies cinétiques et potentielles en $x = L/4$ validées par la méthode Monte Carlo. Contrairement au déplacement, on remarque que l'enveloppe (jaune) est plus large en moyennes et hautes fréquences ce qui prouve l'effet important de la dispersion des caractéristiques mécaniques sur les variables quadratiques. De même, Les figures 5.3 (b) et 5.4 (b) représentent respectivement les écarts types des densités d'énergies cinétiques et potentielles en $x = L/4$. Ces résultats coïncident parfaitement tout au long la bande de fréquence étudiée avec les simulations de Monte Carlo avec une légère fluctuation de la solution WFE-chaos.

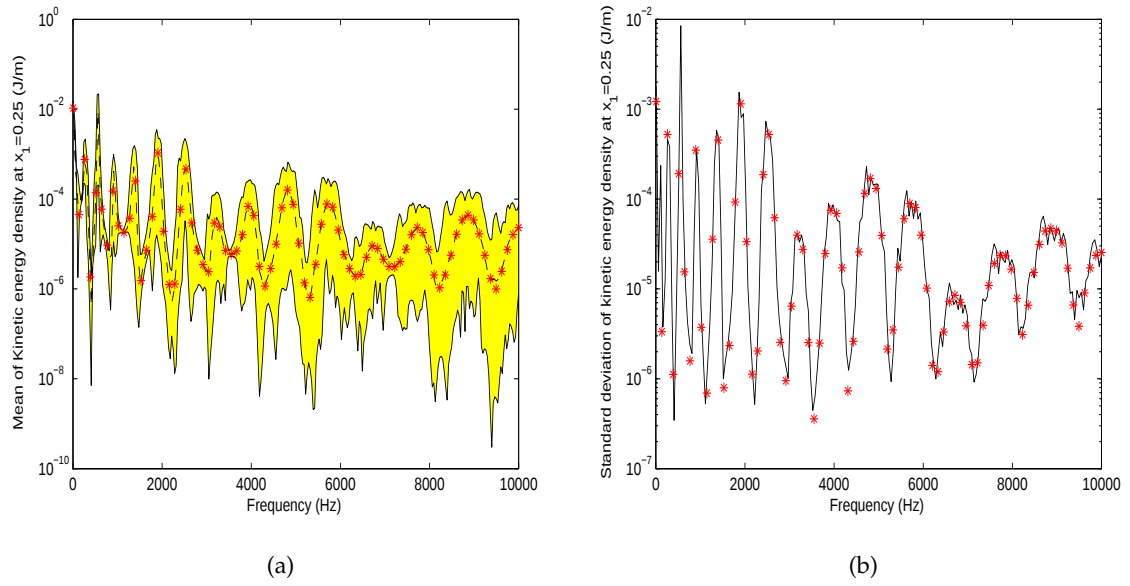


FIGURE 5.3 – Statistiques de la densité d'énergie cinétique en $x = L/4$, (a) Moyenne, (b) Écart type : (—) Moyenne WFE-chaos, (---) Écart type WFE-chaos, (*) Monte Carlo, Surface jaune : Enveloppe Max-Min.

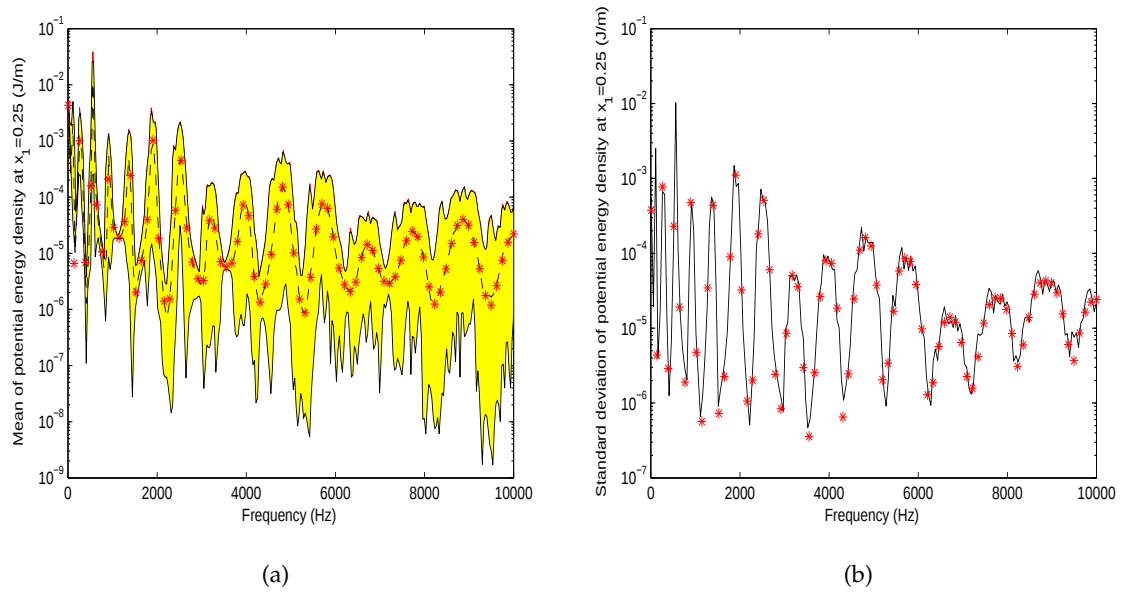


FIGURE 5.4 – Statistiques de la densité d'énergie potentielle en $x = L/4$, (a) Moyenne, (b) Écart type : (—) Moyenne WFE-chaos, (---) Écart type WFE-chaos, (*) Monte Carlo, Surface jaune : Enveloppe Max-Min.

5.4.2 | Deux guides d'ondes couplés à paramètres aléatoires

Dans cette partie, l'étude des deux guides identiques connectés par un élément de couplage est présentée. Dans ce cas, on suppose que les différents sous systèmes ainsi que les conditions aux limites comportent des incertitudes. Cette structure est encastree-libre et excitée par une force sinusoïdale F .

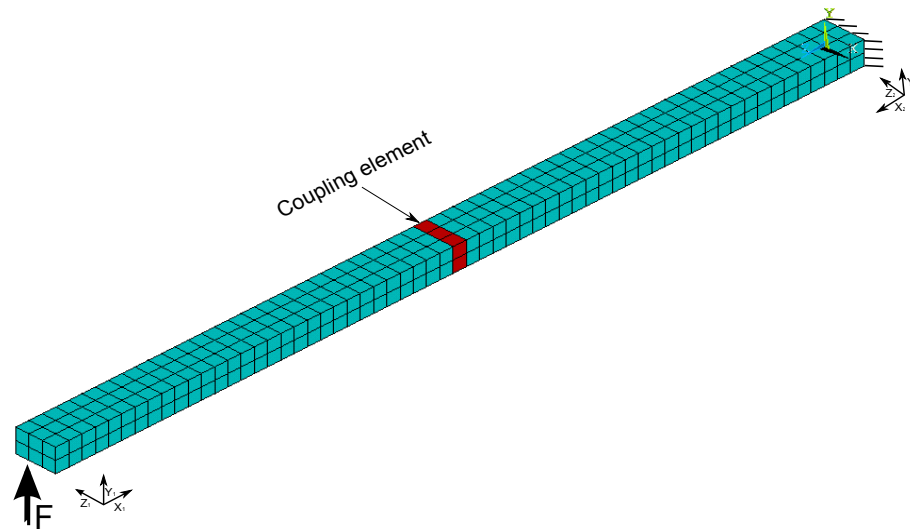


FIGURE 5.5 – 2 guides d'ondes multimodaux

Soit deux guides d'ondes identiques de longueur $L = 1$ m, de N sous-éléments identiques et de caractéristiques mécaniques suivantes : la densité $\rho = 7800$ Kg/m³, le module d'Young $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, l'amortissement structural $\eta = 1\%$, les dimensions de la section droite : $3 \cdot 10^{-2}$ m $\times$ $2 \cdot 10^{-2}$ m, la longueur de chaque élément $d = 10^{-2}$ m. Le modèle en éléments finis est présenté par la figure 5.5. Les deux guides d'ondes ainsi que l'élément de couplage sont discrétisés en utilisant l'élément de référence SOLID45.

Ces deux guides stochastiques sont connectés par un élément de couplage incertain modélisé par une raideur de couplage (condition de diffusion). On définit deux origines pour chaque extrémité en $x_1 = 0$ et en $x_2 = 0$.

Cette étude comporte une évaluation paramétrique de l'effet d'augmentation de la valeur de la dispersion et l'aptitude de la méthode chaos polynomial à reconstruire la solution stochastique avec le minimum de polynômes utilisés. Pour les deux cas étudiés, quatre paramètres mécaniques les plus influents sur la propagation d'ondes sont étudiés. La force d'excitation est aussi supposée comme étant une variable aléatoire.

Etude 1 : Une faible variabilité

La première étude concerne cinq variables aléatoires avec une faible variabilité. Le tableau 5.5 résume les différentes lois de probabilités ainsi que les valeurs des dispersions.

Variable aléatoire	Type de distribution	Moyenne	Écart type
Module d'Young	Lognormale	$2 \cdot 10^{11}$	2%
Densité	Lognormale	7800	3%
Amortissement	Uniforme	0.01	10%
Force	Normale	1	2%
La raideur de l'élément de couplage	Uniforme	$2 \cdot 10^{10}$	2%

TABLE 5.5 – Variables aléatoires utilisées : Etude 1.

La première étape consiste à étudier le comportement des ondes suite à la discontinuité physique présente ainsi que les variables mal connues modélisées suivant des lois usuelles. En analysant l'expression de la matrice de diffusion, on remarque que la déformée de chaque sous-structure connecté à l'élément de couplage intervient directement dans l'expression. Donc les variables aléatoires (force et amortissement) n'influent pas, physiquement, sur la diffusion des ondes au niveau de l'élément de couplage. La figure 5.6 présente la moyenne des coefficients de réflexion et de transmission cinématiques pour les ondes classiques (1 : flexion 1, 2 : flexion 2, 3 : torsion, 4 : traction) ainsi que l'intervalle max-min (en jaune) traduisant l'effet des variabilités sur la diffusion. Pour cette étude, on remarque que les ondes de flexions sont les plus influencées par les variabilités mécaniques étudiées. Les résultats sont obtenus en utilisant un polynôme d'ordre 4 qui assure la convergence de la solution.

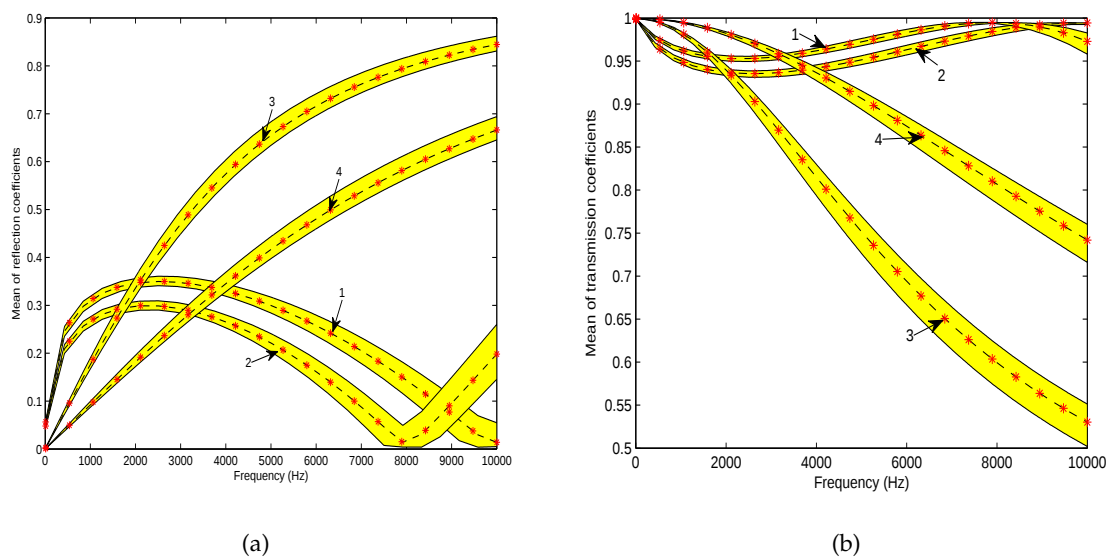


FIGURE 5.6 – Moyenne des coefficients de réflexion (a) et transmission (b) : (–) SWFE-chaos, (*) Monte Carlo, surface jaune : interval max-min.

Les figures 5.7 et 5.8 représentent respectivement les écarts types des coefficients de réflexion et transmission des ondes classiques. La solution de l'approche proposée coïncide avec la solution de références. Une légère différence est remarquée pour les ondes de traction et torsion à hautes fréquences.

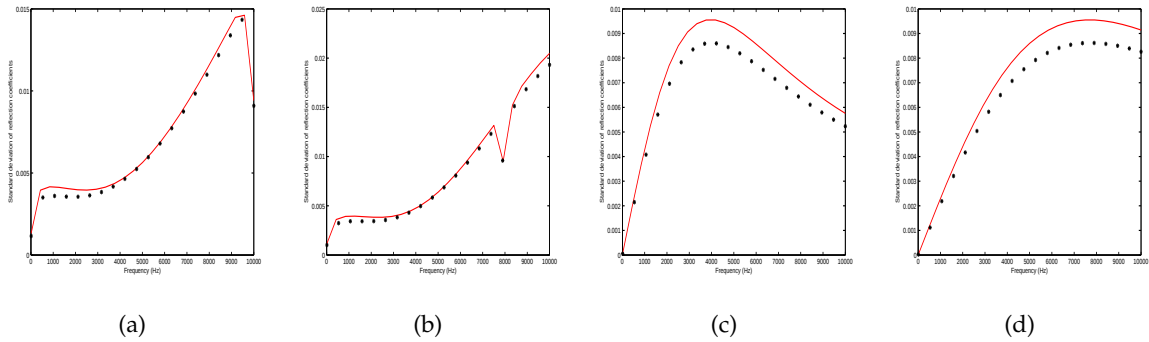


FIGURE 5.7 – Écarts-types des coefficients de réflexion : (-) SWFE-chaos, (*) Monte Carlo.

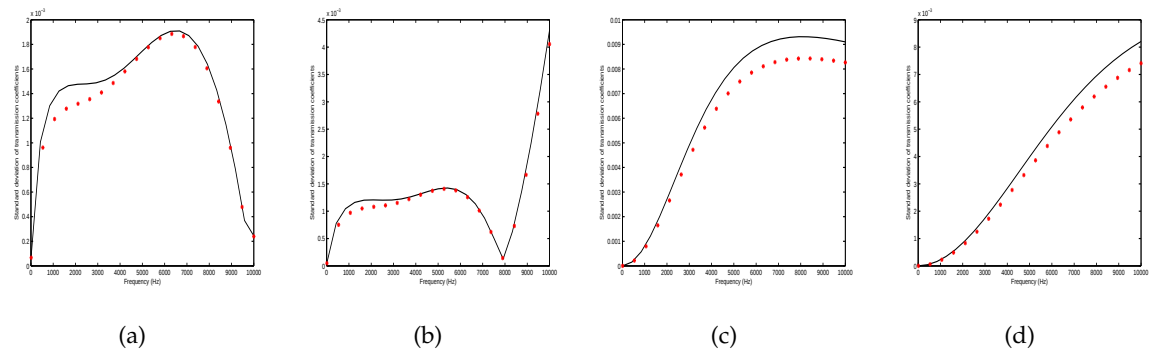


FIGURE 5.8 – Écarts-types des coefficients de transmission (b) : (-) SWFE-chaos, (*) Monte Carlo.

Connaissant le comportement des ondes vis-à-vis la discontinuité présente dans la structure et la variabilité des paramètres géométriques, l'étude cinématique est ensuite lancée. La figure 5.9 traduit la moyenne du déplacement en $x_1 = 0.25$ m et $x_2 = 0.25$ m calculée par la méthode du chaos à l'ordre 4 et validée par l'approche Monte Carlo. Les enveloppes correspondent aux statistiques des valeurs extrêmes de la réponse aléatoire calculée par la méthode du chaos.

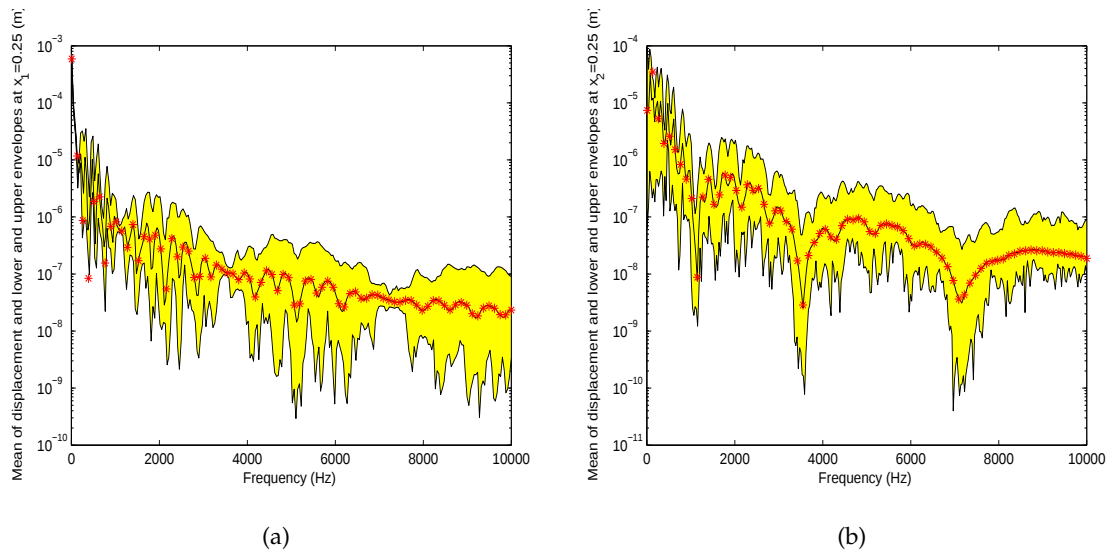


FIGURE 5.9 – Moyenne du déplacement : (a) $x_1 = 0.25$ m, (b) $x_2 = 0.25$ m, (-) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.

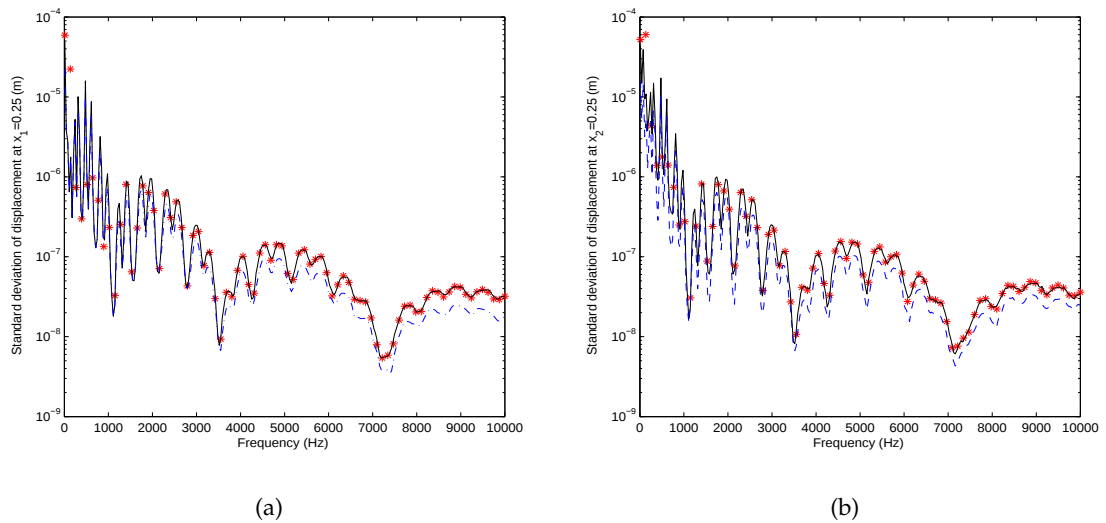


FIGURE 5.10 – Écart-types du déplacement : (a) $x_1 = 0.25$ m, (b) $x_2 = 0.25$ m, (-) WFE-Chaos ordre 3, (-) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.

La figure 5.10 représente les écarts types du déplacement calculés au même noeud traité pour la moyenne. L'effet de la troncature de la base du chaos est envisagé. On remarque, que pour les deux cas, l'utilisation du chaos d'ordre 3 permet la bonne estimation de l'écart type à basses fréquences (< 800 Hz). Au delà, les solutions de l'approche proposée et les résultats Monte Carlo divergent et la différence devient de plus en plus importante en montant en fréquence. Donc, il est nécessaire d'augmenter l'ordre du polynôme pour prédire correctement

les statistiques de la réponse cinématique. Une bonne concordance des résultats est obtenue en utilisant l'ordre 4.

D'autre part, l'effet des aléas sur les variables quadratiques est aussi traité. Puisque les longueurs des sous-structures sont suffisamment petites, les densités d'énergies (potentielle et cinétique) sont calculées en utilisant la dispersion des variables cinématiques au niveau des deux côtés de l'élément étudié. Les figures 5.11 (a) et 5.12 (a) représentent les moyennes validées par la méthode Monte Carlo. Les figures 5.11 (b) et 5.12 (b) représentent respectivement les écarts types des densités d'énergies cinétique et potentielle en $x_1 = 0.25$ (m). L'ordre 4 du polynôme de chaos permet la bonne estimation de la variabilité des deux densités d'énergies qui augmente en fonction de la fréquence.

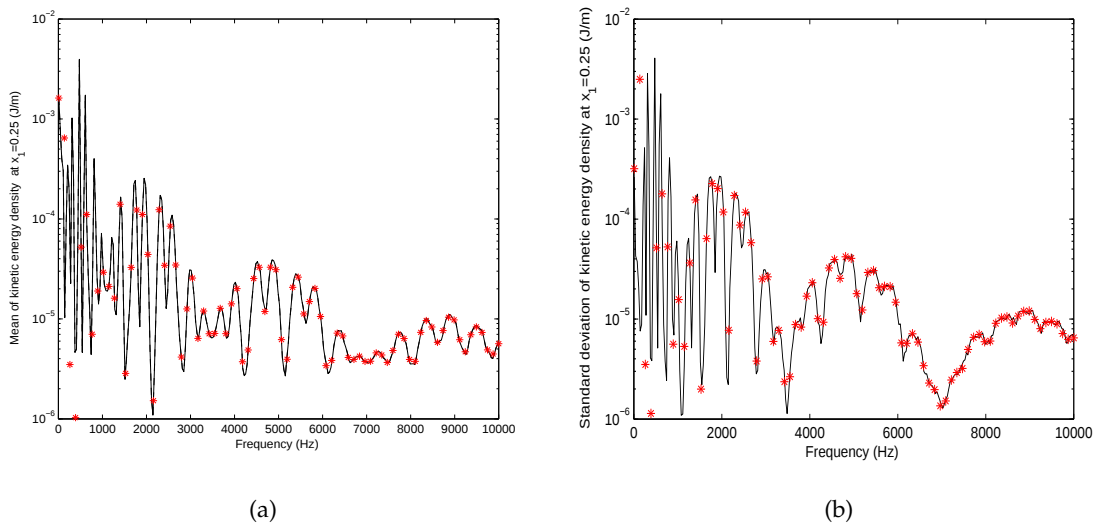


FIGURE 5.11 – Densité d'énergie cinétique en $x_1 = 0.25$ m (a) Moyenne, (b) Écart type, (-) WFE - Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.

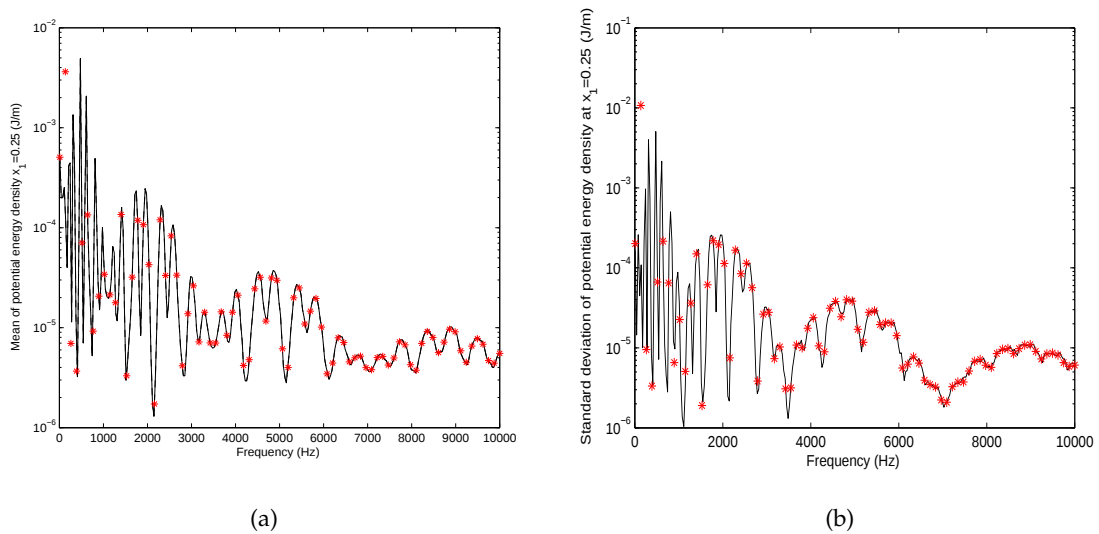


FIGURE 5.12 – Densité d'énergie potentielle en $x_1 = 0.25$ m (a) Moyenne, (b) Écart type, (-) WFE - Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.

Etude 2 : Une variabilité importante

Une deuxième étude du même système est présentée. Cette étude essaye de tester la validité de l'approche WFE-chaos polynômial pour différents cas (cinématique, diffusion, énergétique) avec des variabilités importantes des paramètres mécaniques. Le tableau 5.6 résume les nouveaux paramètres stochastiques. L'étude cinématique et énergétique de ce système passe par les mêmes étapes que l'exemple précédent. Le post-traitement du déplacement permet de prédire correctement les écarts types en $x_1 = 0.25$ m et en $x_2 = 0.25$ m (figure 5.13) en utilisant le polynôme d'ordre 4.

Variable aléatoire	Type de distribution	Moyenne	Écart type
Module d'Young	Lognormale	$2 \cdot 10^{11}$	3%
Densité	Lognormale	7800	5%
Amortissement	Uniforme	0.01	10%
Force	Normale	1	5%
La raideur de l'élément de couplage	Uniforme	$2 \cdot 10^{10}$	3%

TABLE 5.6 – Les variables aléatoires utilisées : Etude 2

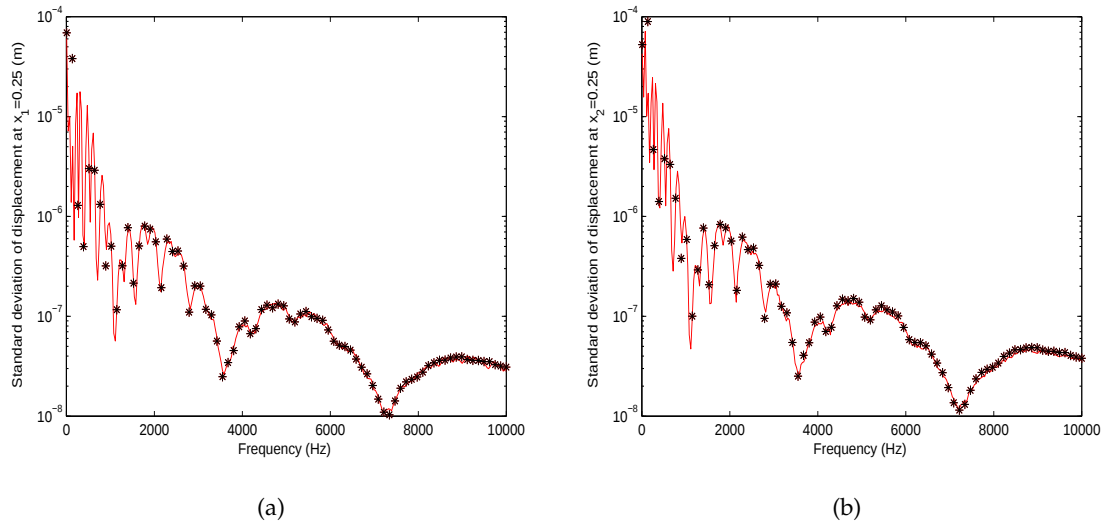


FIGURE 5.13 – Écart type du déplacement : (a) $x_1 = 0.25$ m, (b) $x_2 = 0.25$ m, (-) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.

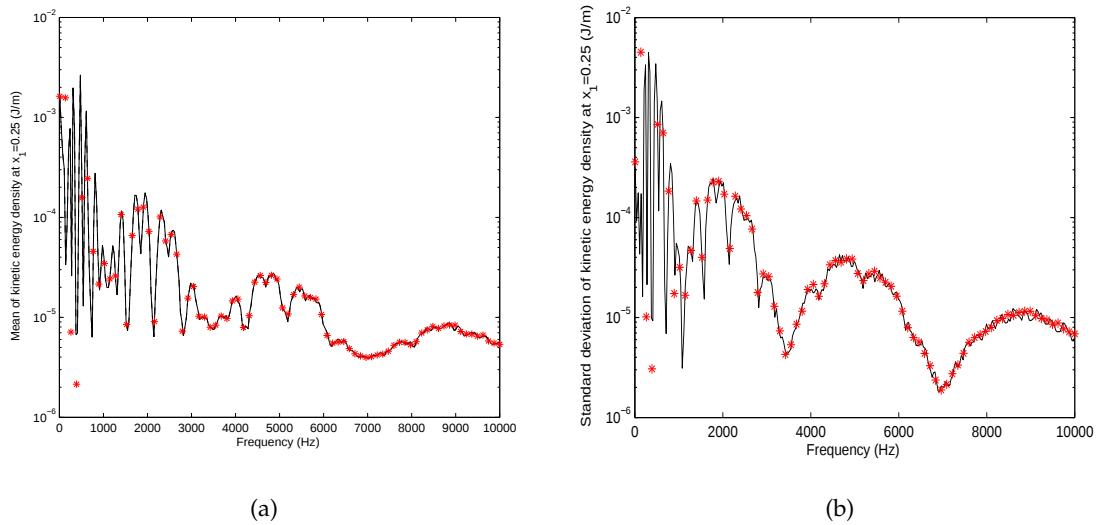


FIGURE 5.14 – Écart type de la densité d'énergie cinétique : (a) $x_1 = 0.25$ m, (b) $x_2 = 0.25$ m, (-) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.

Les figures 5.14 et 5.15 représentent respectivement les écarts types des densités d'énergies cinétiques et potentielles en $x_1 = 0.25$ m et en $x_2 = 0.25$ m. Ces résultats sont validés par la méthode Monte Carlo à basses et moyennes fréquences. En revanche, à hautes fréquences, une fluctuation du résultat de la WFE-chaos qui est due au cumul de plusieurs paramètres incertains qui influe sur la l'approximation de la réponse de sortie.

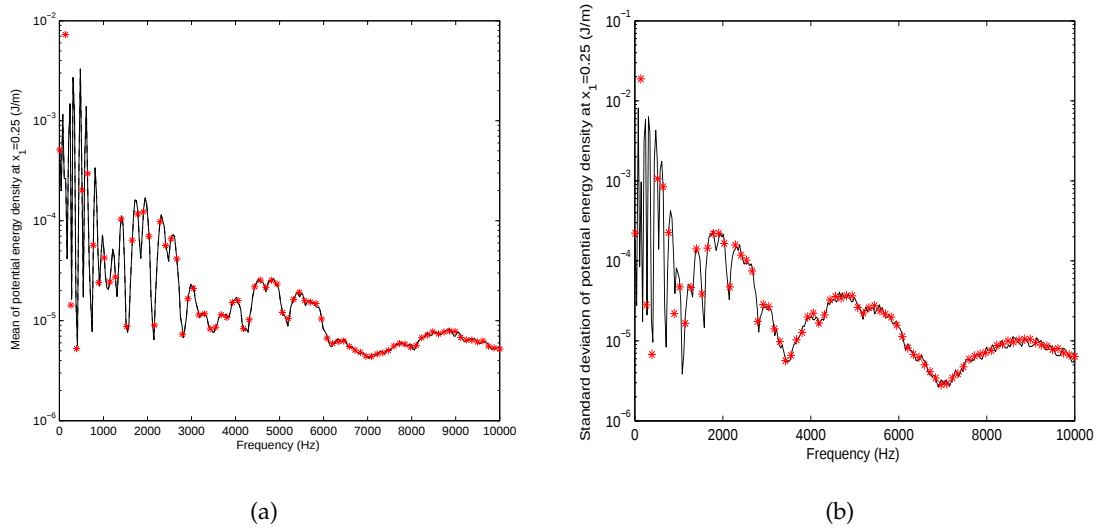


FIGURE 5.15 – Écart-types de la densité d'énergie potentielle : (a) $x_1 = 0.25$ m, (b) $x_2 = 0.25$ m, (-) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.

5.5 Conclusion

Ce chapitre présente une généralisation de la SWFE qui se base sur le développement de Taylor au premier ordre. L'effet des variabilités est étudié en utilisant la projection des paramètres aléatoires sur les polynômes de chaos qui permet la description parfaite de la dispersion des variables de sortie. La combinaison de la méthode des éléments finis ondulatoires (en tant qu'une boîte noire) avec le chaos polynomial a prouvé une bonne efficacité pour prédire le comportement vibratoire des systèmes couplés en moyennes et hautes fréquences avec un minimum de temps de calcul.

Conclusions et perspectives

Depuis quelques années, l'étude des effets des incertitudes devient de plus en plus indispensable dans divers domaines : fiabilité, durabilité des matériaux, dynamique des systèmes, etc. L'intérêt majeur de ces études est de se rapprocher au maximum de la réalité. En revanche, ces études stochastiques posent beaucoup de problèmes numériques (temps de calcul important, nécessité d'une mémoire et capacité de calcul suffisante, etc.). Dès lors, l'optimisation des approches, tout en gardant une marge d'erreurs raisonnable par rapport aux méthodes de références, devient une nécessité. Les travaux présentés dans ce manuscrit sont des tentatives de reformulation d'une approche permettant l'étude des systèmes élançés en utilisant différentes approches stochastiques avec un temps de calcul réduit.

Rappelons que notre objectif était : étudier le comportement cinématique et énergétique des systèmes périodiques. Les formulations déjà présentées constituent une extension d'une approche spectrale utilisée en basses fréquences, en moyennes et hautes fréquences. Pour bien positionner notre travail, le premier chapitre représente un état de l'art sur les outils numériques souvent utilisés afin d'étudier les phénomènes de propagation d'ondes ainsi que leurs avantages et leurs limites. Pour établir le lien entre l'état de l'art et le reste du manuscrit, les différentes approches stochastiques traitant les systèmes incertains sont détaillées. Le choix d'extension d'une telle méthode pour les systèmes aléatoires repose sur le fait qu'elle représente une sorte de réduction de modèle, ce qui permet un gain énorme en temps de calcul.

Dans un premier temps, L'extension de la WFE est faite en utilisant la méthode de perturbation à l'ordre 1 permettant ainsi l'obtention des différentes statistiques des paramètres de sortie d'une façon explicite et directe. D'abord, on a développé une approche spectrale stochastique appelée la SWFE permettant l'identification des variabilités des caractéristiques spectrales (nombres d'ondes, déformées, les vitesses, etc.) suite à une variabilité d'entrée. Cette étude permet ainsi d'évaluer la dispersion des variables cinématiques par une projection sur la base d'ondes stochastique déjà construite. Ensuite, une étude énergétique est détaillée. D'autre part, on a présenté une approche traitant un guide d'ondes périodiques aléatoires contenant une discontinuité mécanique. Cette approche essaye d'identifier le comportement cinématique ainsi qu'énergétique des ondes vis-à-vis de cette rupture d'impédance mécanique. Cette approche a prouvé son efficacité par rapport à la méthode de Monte Carlo mais elle reste limitée au niveau de la dispersion et du nombre des paramètres d'entrée. Pour

surmonter ces problèmes, l'utilisation de la projection des variables aléatoires sur la base du chaos est choisie. Cette approche repose sur le fait que la fluctuation de la variable aléatoire est décomposée sur une base formée des gaussiennes. Pour évaluer les modes stochastiques, différentes méthodes ont été évoquées. Le choix de l'approche non-intrusive repose sur le fait qu'on utilise le programme déterministe sans rien modifier. Puisque cette approche utilise des polynômes construits par des gaussiennes, l'approche du chaos polynomial généralisé est présentée. Cette méthode consiste à transformer les lois d'entrée (quelconques) à des gaussiennes. L'utilisation de l'approche non-intrusive permet d'étudier plusieurs paramètres aléatoires à la fois tout en conservant le sens physique du problème. Ces différentes approches, validées pour des cas variés, ont prouvé leur efficacité par rapport aux méthodes de références.

Ce travail de recherche représente une contribution numérique pour optimiser l'étude du comportement aléatoire des systèmes mécaniques. La confrontation modèle-réel est ensuite nécessaire. Une validation expérimentale apporte au travail numérique une validation réelle et plus de crédibilité scientifique. D'autre part, la WFE peut être étendue pour des matériaux contenant plusieurs quantités aléatoires comme les matériaux composites, matériaux sandwich, etc. Puisque ces matériaux contiennent des variabilités matérielles ainsi que géométriques (fibres, matrice), il est préférable d'utiliser l'approche probabiliste non-paramétrique qui a déjà prouvée sa validité pour prédire les incertitudes de modélisation.

Cette problématique étant actuellement l'un des sujets les plus traités dans communauté de la mécanique, ces études peuvent ensuite être couplées à un certain nombre de thématiques d'actualité :

1. Détection des défauts dans les tubes métalliques

Les ondes guidées sont l'une des méthodes de détection des défauts (CND) la plus utilisée. L'analyse des ondes réfléchies permet l'extraction des informations sur les défauts existants. Puisque ces tests se font à hautes fréquences, les ondes sont très sensibles à toute variabilité (épaisseur des tubes, caractéristiques mécaniques). L'approche développée peut être un outil d'amélioration de la méthode numérique développée.

2. Contrôle actif et semi-actif des structures

Le contrôle actif et semi-actif consiste à capter l'énergie du système (système vibrant) par des patches piézo-électriques essentiellement aux fréquences de résonance. Une étude de sensibilité peut être effectuée pour identifier les paramètres les plus influents dans la procédure de contrôle.

3. Vibro-acoustique, méthodes énergétiques et réduction de modèle

L'optimisation vibro-acoustique des cavités est l'une des thématiques les plus traitées. En tenant compte du domaine de fréquences étudié (en général les moyennes et les hautes fréquences), les méthodes énergétiques, qui estiment uniquement la moyenne d'énergie, sont les plus utilisées. L'approche présentée peut être couplée ensuite avec des méthodes énergétiques en l'alimentant par les variabilités des paramètres cinématiques ou spectrales qui permet par la suite l'identification des dispersions des énergies

dans les systèmes vibro-acoustiques.

Bibliographie

- [1] G. R. LIU et S. S. QUEK : *The finite element method: A practical course*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2003.
- [2] J. F. DOYLE : *Wave propagation in structures: spectral analysis using fast discrete Fourier transforms*. Springer,, Second édition, 1997.
- [3] D. ROY MAHAPATRA et S. GOPALAKRISHNAN : A spectral finite element for analysis of wave propagation in uniform composite tubes. *Journal of Sound and Vibration*, 268:429–463, 2003.
- [4] H. IGAWA, K. KOMATSU, I. YAMAGUCHI et T. KASAI : Wave propagation analysis of frame structures using the spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, 277:1071–1081, 2004.
- [5] K. T. YOON et T. J. CHUNG : Three-dimensional mixed explicit-implicit generalized galerkin spectral element methods for high-speed turbulent compressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 135:343–367, 1996.
- [6] D. KOMATITSCH : *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*. Thèse de doctorat, Institut de Physique de Globe de Paris, 1997.
- [7] S.B DONG et R.B. NELSON : On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 39:739–745, 1972.
- [8] L. GAVRIĆ : Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique. *Journal of Sound and Vibration*, 185:420–432, 1995.
- [9] V. DAMLJANOVIC et R.L. WEAVER : Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross section. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115:1572–1581, 2004.
- [10] S. FINNVEDEN et M. FRAGGSTEDT : Waveguide finite elements for curved structures. *Journal of Sound and Vibration*, 312:644–671, 2008.
- [11] W. ZHOU : *Multimode Wave Propagation and Structural Health Monitoring*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2009.
- [12] M. N. ICHCHOU W. J. ZHOU et O. BAREILLE : Finite element techniques for calculations of wave modes in one-dimensional structural waveguides. *Structural Control and Health Monitoring*, 18(7):737–751, 2011.

- [13] L. BRILLOUIN : *Wave Propagation in Periodic structures, Electric Filters and Crystal Lattices*. DOVER Publications, 1946.
- [14] L. BRILLOUIN : *Wave Propagation and group velocity*. Academic Press INC, 1960.
- [15] B. Djafari-Rouhani J. O. Vasseur A. KHELIF, P. A. Deymier et L. DOBRZYNSKI : Two-dimensional phononic crystal with tunable narrow pass band: Application to a waveguide with selective frequency. *Journal of applied physics*, 94(3), 2003.
- [16] J. O. Vasseur A. Khelif Y. PENNEC, B. Djafari-Rouhani et P. A. DEYMIER : Tunable filtering and demultiplexing in phononic crystals with hollow cylinders. *Physical Review E*, 69(7), 2004.
- [17] D. J. MEAD : A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27:235–260, 1973.
- [18] D. J. MEAD : Free wave propagation in periodically supported infinite beams. *Journal Sound and Vibration*, 11(2):181–197, 1970.
- [19] W. X. ZHONG et F. W. WILLIAMS : On the direct solution of wave propagation for repetitive structures. *Journal of Sound and Vibration*, 181:485–501, 1995.
- [20] L. HOUILLON : *Modélisation Vibratoire des Carrosseries Automobiles en Moyennes et hautes Fréquences*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1999.
- [21] L. HOUILLON, M. N. ICHCHOU et L. JEZEQUEL : Dispersion curves of fluid filled elastic pipes by standard fe models and eigenpath analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 281:483–507, 2005.
- [22] A. BOCQUILLET : *Méthode Énergétique de Caractérisations Vibroacoustiques des Réseaux Complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- [23] B. R. MACE, D. DUHAMEL, M. J. BRENNAN et L. HINKE : Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117:2835–2843, 2005.
- [24] D. DUHAMEL, B.R. MACE et M.J. BRENNAN : Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294:205–220, 2006.
- [25] M. N. ICHCHOU, J. BERTHAUT et M. COLLET : Multi-mode wave propagation in ribbed plates, part I : wavenumberspace characteristics. *International Journal of Solids and Structures*, 45(5):1179–1195, 2008.
- [26] M. N. ICHCHOU, J. BERTHAUT et M. COLLET : Multi-mode wave propagation in ribbed plates, part II : Predictions and comparisons. *International Journal of Solids and Structures*, 45(5):1196–1216, 2008.
- [27] J. M. MENCİK et M. N. ICHCHOU : Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid. *International Journal of Solids and Structures*, 44:2148–2167, 2007.
- [28] M. N. ICHCHOU, S. AKROUT et J.M. MENCİK : Guided waves group and energy velocities via finite elements. *Journal of Sound and Vibration*, 305:931–944, 2007.

- [29] M. N. ICHCHOU, J.-M. MENCİK et W. J. ZHOU : Wave finite elements for low and mid-frequency description of coupled structures with damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (15-16):1311–1326, 2009.
- [30] W. J. ZHOU, M. N. ICHCHOU et J.-M. MENCİK : Analysis of wave propagation in cylindrical pipes with local inhomogeneities. *Journal of Sound and Vibration*, 319 (1-2):335–354, 2009.
- [31] B. R. MACE Y. WAKI et M. J. BRENNAN : Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides. *journal of sound and vibration*, 327:92–108, 2009.
- [32] J.-M. MENCİK : On the low- and mid-frequency forced response of elastic structures using wave finite elements with one-dimensional propagation. *Computers and Structures*, 88:674–689, 2010.
- [33] E. MANCONI : *Modelling wave propagation in two-dimensional structures using a wave/finite element technique*. Thèse de doctorat, University of Parma, 2008.
- [34] D. CHRONOPOULOS, B. TROCLET, M. ICHCHOU et J.P. LAINÉ : A unified approach for the broadband vibroacoustic response of composite shells. *Composites Part B: Engineering*, 43(4):1837 – 1846, 2012.
- [35] O. BAREILLE, M. KHARRAT, W. ZHOU et M.N. ICHCHOU : Distributed piezoelectric guided-t-wave generator, design and analysis. *Mechatronics*, 22(5):544 – 551, 2012.
- [36] T. L. HUANG, M. N. ICHCHOU et O. A. BAREILLE : Multi-mode wave propagation in damaged stiffened panels. *Structural Control and Health Monitoring*, 2011.
- [37] R.H. LYON et R. G. DEJONG : *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*. Butterworth, 1995.
- [38] B.R MACE et L. JI : The statistical energy analysis of coupled sets of oscillators. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 463(2081):1359–1377, 2007.
- [39] D. CHRONOPOULOS, B. TROCLET, M. ICHCHOU et J.P. LAINÉ : An assessment of the effects of in-plane vibrations on the energy flow between coupled plates. *Journal Sound and Vibration*, 191(5):661–680, 1996.
- [40] M. N. ICHCHOU, A. LEBOT et L. JEZEQUEL : A transient local energy approach as an alternative to transient sea: Wave and telegraph equations. *Journal of Sound and Vibration*, 246:829–840, 2001.
- [41] M. ICHCHOU : *Formulations énergétiques pour l'étude moyennes et hautes frequences des systemes: Theorie et applications*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1996.
- [42] R. S. LANGLEY : A wave intensity technique for the analysis of high-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 159(3):483–502, 1992.
- [43] R. S. LANGLEY : A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems. *Acoustical Society of America*, 105(3):1657–1671, 1999.

- [44] M. de ROCHAMBEAU : *Analyse des interactions fluide-structure en moyennes fréquences sous chargement aérodynamique*. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2010.
- [45] W. DESMET : *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*. Thèse de doctorat, KULeuven, 1998.
- [46] D. Vandepitte B. PLUYMERS, W. Desmet et P. SAS : On the use of a wave based prediction technique for steady-state structural-acoustic radiation analysis. *Journal of Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 7(2):173–184, 2005.
- [47] P. LADEVÈZE : *A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range*. Thèse de doctorat, Comptes Rendus Academie des Sciences Paris, 1996.
- [48] P. Ladevèze H. RIOU et P. ROUCH : Extension of the variational theory of complex rays to shells for medium-frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 272:341–360, 2004.
- [49] A. Carcaterra O. GIANNINI et A. SESTIERI : High frequency vibration analysis by the complex envelope vectorization. *Acoustical Society of America*, 121:3472–3483, 2007.
- [50] J.-L. Guyader L. MAXIT : Estimation of the sea coupling loss factors using a dual formulation and fem modal information, part I: theory. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):907–930, 2001.
- [51] Frank J. FAHY : Statistical energy analysis: A critical overview. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, 346(1681):431–447, 1994.
- [52] M. LOEVE : *Probability theory*. Springer Verlag, New York, 1977.
- [53] R. GHANEM et P. SPANOS : *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer, New York, NY, 1991.
- [54] D. XIU et G. E. KARNIADAKIS : Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4927–4948, 2002.
- [55] C. SOIZE et R. GHANEM : Physical systems with random uncertainties: Chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2):395–410, 2004.
- [56] B. SUDRET : *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models: Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. Thèse de doctorat, Memoires HDR, Université Blaise Pascal, Clairemont II, 2007.
- [57] H. N. Najm O. P. LE MAÎTRE, O. M. Knio et R. G. GHANEM : A stochastic projection method for fluid flow. *Journal of Computational Physics*, 173:481–511, 2001.
- [58] S. ISUKAPALLI : *Uncertainty analysis of transport-transformation models*. Thèse de doctorat, New Brunswick, New Jersey, 1999.

- [59] G. BLATMAN : *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. Thèse de doctorat, Université BLAISE PASCAL - Clermont II, 2009.
- [60] M. KLEIBER et T. D. HIEN : The stochastic finite element method (basic perturbation technique and computer implementation). *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 10(4):297–297, 1994.
- [61] O. DESSOMBZ : *Extension des methodes de synthèse modale aux structures non-déterministe*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- [62] A. DINIZ : *Extension des méthodes de synthèse modale aux structures non-déterministes*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- [63] M. GUEDRI : *Synthèse modale / approches stochastiques en élastodynamique linéaire et non-linéaire*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de tunis de l'université el manar, 2006.
- [64] T. DAMOUR et B. SCHMIDT : Reliability of perturbation theory in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 31(10):2441–2453, 1990.
- [65] K. F. ALVIN : Efficient computation of eigenvector sensitivities for structural dynamics. *AIAA Journal*, 35(11):1760–1766, 1997.
- [66] R. L. FOX et M. P. KAPOOR : Rate of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, 6(12):2426–2429, 1968.
- [67] M. L. MEHTA : *Random matrices*. Elsevier,, London, 2004.
- [68] E. T. JAYNES : Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 106:620–630, 1957.
- [69] C. SOIZE : A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15 (3):277–294, 2000.
- [70] C. SOIZE : A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288 (3):623–652, 2005.
- [71] C. SOIZE, E. CAPIEZ-LERNOUT, J.-F. DURAND, C. FERNANDEZ et L. GAGLIARDINI : Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (1):150–163, 2008.
- [72] C. SOIZE : Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 (12-16):1333–1366, 2005.
- [73] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Structural partitioning of complex structures in the medium-frequency range. an application to an automotive vehicle. *Journal of Sound and Vibration*, 330(5):937 – 946, 2011.
- [74] A. BATOU, C. SOIZE et M. CORUS : Experimental identification of an uncertain computational dynamical model representing a family of structures. *Computers and Structures*, 89:1440 – 1448, 2011.

- [75] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Energy-density field approach for low- and medium-frequency vibroacoustic analysis of complex structures using a statistical computational model. *Journal of Sound and Vibration*, 323:849 – 863, 2009.
- [76] M. PELLISSETTI, E. CAPIEZ-LERNOUT, H. PRADLWARTER, C. SOIZE et G.I. SCHUÄÑLLER : Reliability analysis of a satellite structure with a parametric and a non-parametric probabilistic model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(2):344 – 357, 2008.
- [77] C.E. SHANNON : A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, 27:379–423, 1948.
- [78] C. SOIZE : Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1333 – 1366, 2005.
- [79] J. M. MENCİK et M. N. ICHCHOU : Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24(5):877–898, 2005.
- [80] D. J. THOMPSON : Wheel-rail noise generation, part III: rail vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 161:423–446, 1993.
- [81] M. N. ICHCHOU, F. BOUCHOUCHA, M. A. BEN SOUF, O. DESSOMBZ et M. HADDAR : Stochastic wave finite element for random periodic media through first-order perturbation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(41-44):2805 – 2813, 2011.
- [82] C.S. MANOHAR et Sondipon ADHIKARI : Dynamic stiffness of randomly parametered beams. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(1):39 – 51, 1998.
- [83] M. OSTOJA-STARZEWSKI et A. WOODS : Spectral finite elements for vibrating rods and beams with random field properties. *Journal of Sound and Vibration*, 268(4):779–797, 2003.
- [84] Y. WAKI : *On the application of finite element analysis to wave motion in one-dimensional waveguides*. Thèse de doctorat, Thesis of Doctor of Philosophy, University of Southampton, 2007.
- [85] B. R. MACE : Wave reflection and transmission in beams. *Journal of Sound and Vibration*, 97(2):237–246, 1984.
- [86] C. MEI, Y. KARPENKO, S. MOODY et D. ALLEN : Analytical approach to free and forced vibrations of axially loaded cracked timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 291:1041–1060, 2006.
- [87] T.G. CHONDROS, A.D. DIMAROGONAS et J. YAO : A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 104 (1):06–23, 1998.
- [88] B. R. MACE : Reciprocity, conservation of energy and some properties of reflection and transmission coefficients. *Journal of Sound and Vibration*, 155(2):375–381, 1992.

- [89] R. S. LANGLEY : A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 159(3):483–502, 1992.
- [90] Frank J. FAHY : Vibration of containing structures by sound in the contained fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 12:171–194, 1970.
- [91] Frank J. FAHY : Response of a cylinder to random sound in the contained fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 12:171–194, 1970.
- [92] S. FINNVEDEN : Evaluation of modal density and group velocity by a finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 273:51–75, 2004.
- [93] E. MANCONI et B. R. MACE : Estimation of the loss factor of viscoelastic laminated panels from finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 329:3928–3939, 2010.
- [94] R. S. LANGLEY et P. J. SHORTER : The wave transmission coefficients and coupling loss factors of point connected structures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 113:1947 – 1964, 2003.
- [95] A. N. THITE et B. R. MACE : The effects of design modifications on the apparent coupling loss factors in sea-like analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, 329:5194 – 520, 2010.
- [96] N. WINER : The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60:897–936, 1938.
- [97] D. XIU et G. E. KARNIADAKIS : The wiener-asky polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24 (2):619–644, 2002.
- [98] L. DEVROYE : *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York, NY, 1986.
- [99] M. BERVEILLER : *Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*. Thèse de doctorat, Université BLAISE PASCAL - Clermont II, 2005.
- [100] M. A. Ben SOUF, M. ICHCHOU, O. BAREILLE et M. HADDAR : Effect of uncertainties in default detection through the wave finite elements. *Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations*, Part 5:527–534, 2012.

Table des figures

1.1	Les différents domaines fréquentiels	5
1.2	Propagation d'ondes dans des panneaux raidis (- WFE, - SAFE) [11]	9
1.3	Deux rangées de cylindres creux de rayons internes différents et leurs effets sur le spectre[15]	10
1.4	Guide d'ondes en forme de Y [16]	10
1.5	Schéma présentant un exemple des sous-systèmes de la SEA	13
1.6	Puissance entre deux types d'ondes à travers la frontière k	17
2.1	Guide d'ondes périodique	38
2.2	Poutre à deux noeuds en traction-compression	48
2.3	Écart type du nombre d'onde longitudinal (E Stochastique); (a) : 2% , (b) : 5% : (-) : SWFE, (o) : Solution analytique, (*) : Monte Carlo (2000 itérations)	50
2.4	Écart type du nombre d'onde longitudinal (ρ Stochastique); (a) : 2% , (b) : 5% : (-) : SWFE, (o) : Solution analytique, (*) : Monte Carlo (2000 itérations)	50
2.5	Écart type du nombre d'onde de flexion (E Stochastique); (a) : 2% , (b) : 5% : (-) : SWFE, (o) : Solution analytique, (*) : Monte Carlo (2000 itérations).	53
2.6	Écart type du nombre d'onde de flexion (ρ Stochastique); (a) : 2% , (b) : 5% : (-) : SWFE, (o) : Solution analytique, (*) : Monte Carlo (2000 itérations)	53
2.7	Guide d'onde élancé; (a): structure périodique , (b): une sous-structure	54
2.8	La moyenne des nombres d'ondes: (-) WFE, (.) : Analytique	55
2.9	Écart type du nombre d'onde pour un guide d'ondes sans les modes de sections: (a): (E Stochastique) 2% , (b): (ρ Stochastique) 2% , (-): SWFE, (*): Monte Carlo (2000 itérations)	55
2.10	La moyenne des nombres d'ondes	56
2.11	Écart type du nombre d'onde pour un guide d'ondes avec modes de sections: (a): (E Stochastique, modes classiques) 2% , (b): (ρ Stochastique, modes classiques)2%, (c): (E Stochastique, modes de sections) 2% , (d): (ρ Stochastique, modes de sections) 2% : (-): SWFE, (.) : Monte Carlo (3000 itérations)	57
3.1	Guide d'onde encastré-libre	60
3.2	Des guides monomodaux connectés à une jonction	66

3.3	Des guides monomodales connectés à une jonction.	67
3.4	Deux guides multi-modaux connectés par une jonction	73
3.5	Guide d'ondes multi-modales encastré-libre	76
3.6	Moyenne de déplacement en $x = L/4$: (*) Ansys, (—) SWFE	77
3.7	Écart type de déplacement en $x = L/4$, (a) Module d'Young stochastique, (b) Densité stochastique : (—) SWFE, (.) Monte Carlo	78
3.8	Deux carrés creux connectés par une jonction stochastique	79
3.9	Paramètres du tube creux à section rectangulaire.	80
3.10	Élément de référence : Shell63	82
3.11	La discrétisation des éléments étudiés : (a) : Sous-structure; (b) : Element de couplage	83
3.12	Nombre d'ondes pour la poutre creuse.	84
3.13	La moyenne des coefficients de diffusion : — Coefficient de transmission, — Coefficient de réflexion, — : $ R ^2 + T ^2$, (a) : traction, (b) : flexion 1, (c) : flexion 2 et (d) : mode de section	85
3.14	Déformée modale 1 (5000 Hz)	86
3.15	Déformée modale 2 (5000 Hz)	87
3.16	Écart type des coefficients de réflexion et transmission	88
3.17	Le modèle éléments finis du système couplé : (a) : problème structural, (b) : problème spectral	89
3.18	Écart type des coefficients de réflexion et transmission cinématiques : (—), réflexion : (-), transmission : (o), réflexion MC : (*), transmission MC.	90
3.19	Moyenne de déplacement en $z_1 = 0.1\text{m}$: — WFE, * Monte Carlo.	91
3.20	Écart type de déplacement en $z_1 = 0.1\text{m}$: — SWFE, * Monte Carlo.	91
4.1	Guide d'onde à un seul mode de propagation.	94
4.2	Échange énergétique entre deux tronçons d'un guide d'ondes	98
4.3	Guide d'ondes semi-infini.	105
4.4	Poutre E-B encastrée-libre.	108
4.5	Impédance mécanique, (a) Module d'Young stochastique, (b) Densité stochastique : Moyenne analytique (—), WFE (.), SWFE (—.), Monte Carlo (*), Écart type analytique(o).	109
4.6	Puissance injectée, (a) Module d'Young stochastique, (b) Densité stochastique : Moyenne analytique (—), WFE (.), SWFE (—.), Monte Carlo (*), Écart type analytique(o)	110
4.7	Vitesse de groupe, (a) Module d'Young stochastique, (b) Densité stochastique : Moyenne analytique (—), WFE (.), SWFE (—.), Monte Carlo (*), Écart type analytique(o).	110

4.8	Densité d'énergie cinétique en $x = L/2$, (a) La moyenne, (b) Module d'Young aléatoire, (c) Densité aléatoire : Analytique (*), WFE (—), SWFE (---), Monte Carlo (.).	112
4.9	Densité d'énergie potentielle en $x = L/2$, (a) La moyenne, (b) Module d'Young aléatoire, (c) Densité aléatoire : Analytique (*), WFE (—), SWFE (---), Monte Carlo (.).	113
4.10	Deux guides multi-modaux connectés par un élément de couplage avec changement de section.	114
4.11	Écarts types des coefficients d'efficacité énergétiques : — : (WFE/SFEM), * : MC (5000 itérations).	115
4.12	Facteur de perte par couplage ($L = 5m$) : — : Moyenne, --- : Méthode hybride, o : Moyenne MC * : Écart type MC, (a) Longitudinale, (b) : Flexion.	116
4.13	Le modèle éléments finis du système couplé : (a) : problème structural, (b) : problème spectral.	116
4.14	Écart type de la densité d'énergie cinétique en $z_1 = 0.1m$: — SWFE, * Monte Carlo.	117
4.15	Écart type de la densité d'énergie potentielle en $z_1 = 0.1m$: — SWFE, * Monte Carlo.	117
4.16	Écart type de la densité d'énergie totale en $z_1 = 0.1m$: — SWFE, * Monte Carlo.	118
5.1	Moyenne du déplacement en $x = L/4$, (---) Moyenne SWFE, (*) Monte Carlo, Surface jaune : Enveloppe Max-Min.	132
5.2	Écart type du déplacement en $x = L/4$, (—) Écart type, (*) Monte Carlo.	133
5.3	Statistiques de la densité d'énergie cinétique en $x = L/4$, (a) Moyenne, (b) Écart type : (---) Moyenne WFE-chaos, (—) Écart type WFE-chaos, (*) Monte Carlo, Surface jaune : Enveloppe Max-Min.	134
5.4	Statistiques de la densité d'énergie potentielle en $x = L/4$, (a) Moyenne, (b) Écart type : (---) Moyenne WFE-chaos, (—) Écart type WFE-chaos, (*) Monte Carlo, Surface jaune : Enveloppe Max-Min.	134
5.5	2 guides d'ondes multimodaux.	135
5.6	Moyenne des coefficients de réflexion (a) et transmission (b) : (—) SWFE-chaos, (*) Monte Carlo, surface jaune : interval max-min.	136
5.7	Écarts-types des coefficients de réflexion : (—) SWFE-chaos, (*) Monte Carlo.	137
5.8	Écarts-types des coefficients de transmission (b) : (—) SWFE-chaos, (*) Monte Carlo.	137
5.9	Moyenne du déplacement : (a) $x_1 = 0.25 m$, (b) $x_2 = 0.25 m$, (—) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.	138
5.10	Écarts-types du déplacement : (a) $x_1 = 0.25 m$, (b) $x_2 = 0.25 m$, (—) WFE-Chaos ordre 3, (—) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.	138

5.11	Densité d'énergie cinétique en $x_1 = 0.25$ m (a) Moyenne, (b) Écart type, (-) WFE - Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.	139
5.12	Densité d'énergie potentielle en $x_1 = 0.25$ m (a) Moyenne, (b) Écart type, (-) WFE - Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.	140
5.13	Écart type du déplacement : (a) $x_1 = 0.25$ m, (b) $x_2 = 0.25$ m, (-) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.	141
5.14	Écart type de la densité d'énergie cinétique : (a) $x_1 = 0.25$ m, (b) $x_2 = 0.25$ m, (-) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.	141
5.15	Écarts-types de la densité d'énergie potentielle : (a) $x_1 = 0.25$ m, (b) $x_2 = 0.25$ m, (-) WFE-Chaos ordre 4, (*) Monte Carlo.	142
1	Deux poutres E-B connectées par une raideur.	158
2	Écarts-types de coefficients de diffusion cinématiques, —: (WFE/SFEM), *: MC (3000 itérations).	159
3	Écarts-types de coefficients de diffusion énergétiques, —: (WFE/SFEM), *: MC (3000 itérations).	159
4	Écarts-types du déplacement; (a): $x_1 = 0.1$ m, (b): $x_2 = 0.1$ m: — SWFE, * Monte Carlo.	160
5	Écarts-types de la densité d'énergie cinétique; (a): $x_1 = 0.1$ m, (b): $x_2 = 0.1$ m: — SWFE, * Monte Carlo.	160
6	Modèle de la sous-structure et l'élément de couplage étudiés.	161
7	Écarts-types des coefficients de réflexion et transmission pour différents ondes: (-rouge): réflexion, (- noir): transmission, (*): réflexion Monte Carlo, (o):transmission Monte Carlo.	162

Liste des tableaux

3.1	Caractéristiques des différents types d'ondes	84
4.1	Caractéristiques de la poutre semi-infinie	108
4.2	Caractéristiques des deux guides multi-modaux.	114
5.1	Exemple de chaos polynomial pour $M = 3$ et $p = 3$	124
5.2	Les différents distributions et leurs polynômes correspondant	125
5.3	Variables aléatoires et leurs transformations en fonction d'une v.a.g.c.r	125
5.4	Variables aléatoires, les lois et les paramètres utilisés.	132
5.5	Variables aléatoires utilisées : Etude 1.	136
5.6	Les variables aléatoires utilisées : Etude 2	140
7	Caractéristiques des poutres et de l'élément de couplage.	158
8	Caractéristiques des structures étudiées.	161

Annexes

.1 | Etude de deux poutres d'E-B

Cette annexe concerne l'application de la formulation complète SWFE pour un système de deux poutres E-B connectées par un élément de couplage de densité aléatoire (3% de dispersion). Les deux guides d'ondes identiques, composés par N sous-éléments, ainsi que l'élément de couplage sont modélisés par la théorie d'Euler-Bernoulli. Ce système est excité par une force harmonique F en $x_1 = 0$ et encastré en $x_2 = 0$ (Figure 1). Le module d'Young des deux poutres est supposé une variable incertaine de 2% de dispersion.

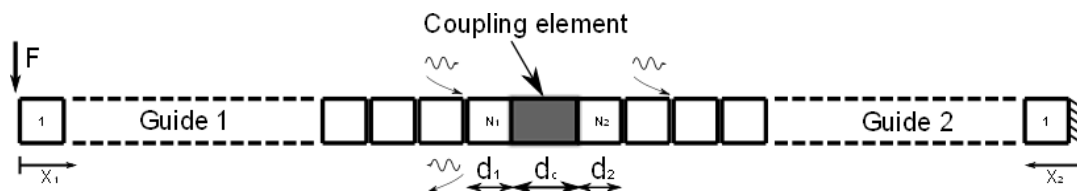


FIGURE 1 – Deux poutres E-B connectées par une raideur.

L'application directe des formulations déjà établies dans les chapitres 3 et 4 nous conduit à identifier les écarts types des coefficients de diffusion cinématiques (figure 2) et énergétiques (figure 3) ainsi que le comportement dynamique (figure 4) et énergétique en $x_1 = 0.1$ m.

	E (Pa)	ρ (kg/m ³)	d (m)	η (%)	S (m ²)	I (m ⁴)
Guides	$2 \cdot 10^{11}$	7800	$2 \cdot 10^{-3}$	1	$2 \cdot 10^{-2} \times 2 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-8}$
Element de couplage	$2 \cdot 10^7$	4500	$5 \cdot 10^{-3}$	0	$2 \cdot 10^{-2} \times 2 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-8}$

TABLE 7 – Caractéristiques des poutres et de l'élément de couplage.

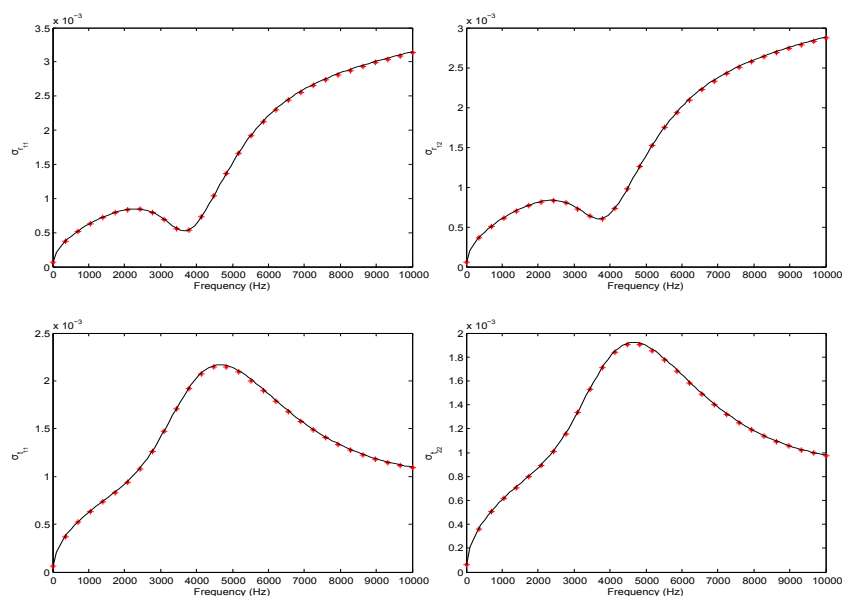


FIGURE 2 – Écart-types de coefficients de diffusion cinématiques, —: (WFE/SFEM), *: MC (3000 itérations).

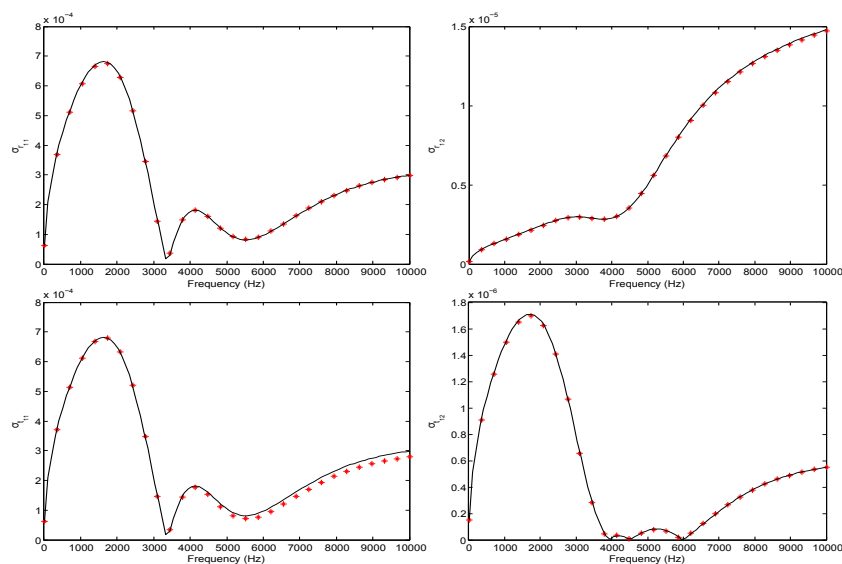


FIGURE 3 – Écart-types de coefficients de diffusion énergétiques, —: (WFE/SFEM), *: MC (3000 itérations).

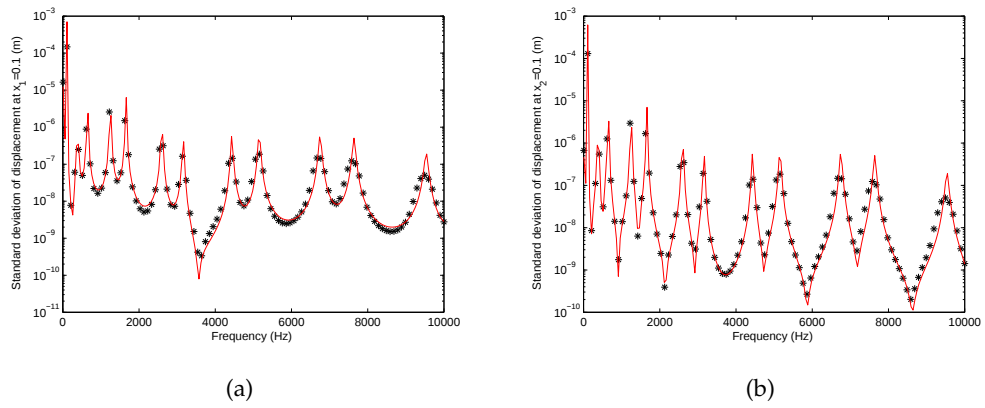


FIGURE 4 – Écart-types du déplacement; (a): $x_1 = 0.1$ m, (b): $x_2 = 0.1$ m: — SWFE, * Monte Carlo.

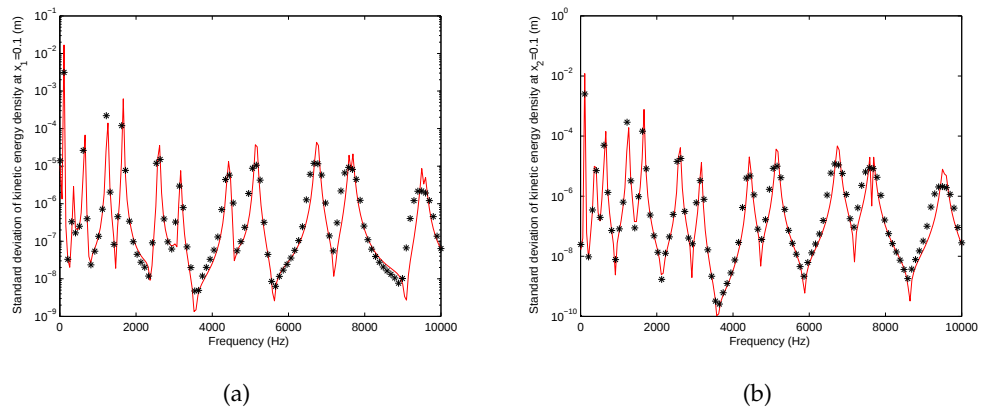


FIGURE 5 – Écart-types de la densité d'énergie cinétique; (a): $x_1 = 0.1$ m, (b): $x_2 = 0.1$ m: — SWFE, * Monte Carlo.

.2 | Etude de l'effet des incertitudes d'un tube avec fissure

Les ondes guidées constituent l'une des techniques de detection des défauts dans les structures. L'analyse des coefficients de réflexion permet la détermination des dimensions du défaut. Pour appliquer les formulations des milieux périodiques dans la domaine de détection des défauts dans les tubes, la discontinuité est modélisée comme étant un élément de couplage. La sous-structure et l'élément de couplage étudiés sont présentés dans la figure 6. L'application de la formulation de la matrice de diffusion stochastique permet d'obtenir la dispersion des coefficients de diffusions pour une variabilité de module d'Young de l'élément de couplage de 2% (figure 7)[100].

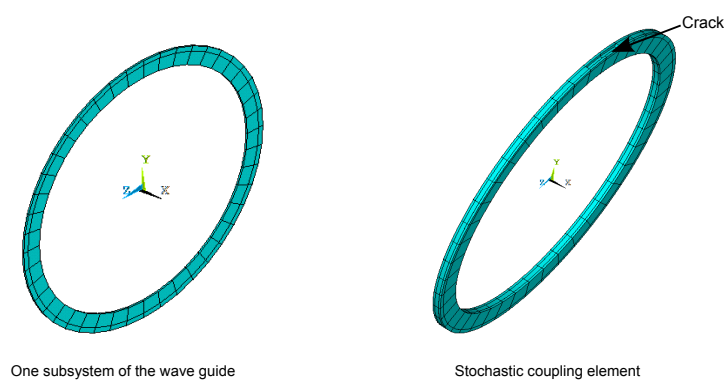


FIGURE 6 – Modèle de la sous-structure et l'élément de couplage étudiés.

	E (Pa)	ρ (kg/m ³)	d (m)	η (%)	$R_{\text{intérieur}}(\text{m})$	$R_{\text{extérieur}}(\text{m})$
Guides	$2 \cdot 10^{11}$	7800	$1 \cdot 10^{-3}$	1	0.073	0.084
Element de couplage	$2 \cdot 10^{11}$	7800	$1 \cdot 10^{-2}$	1	0.073	0.084

TABLE 8 – Caractéristiques des structures étudiées.

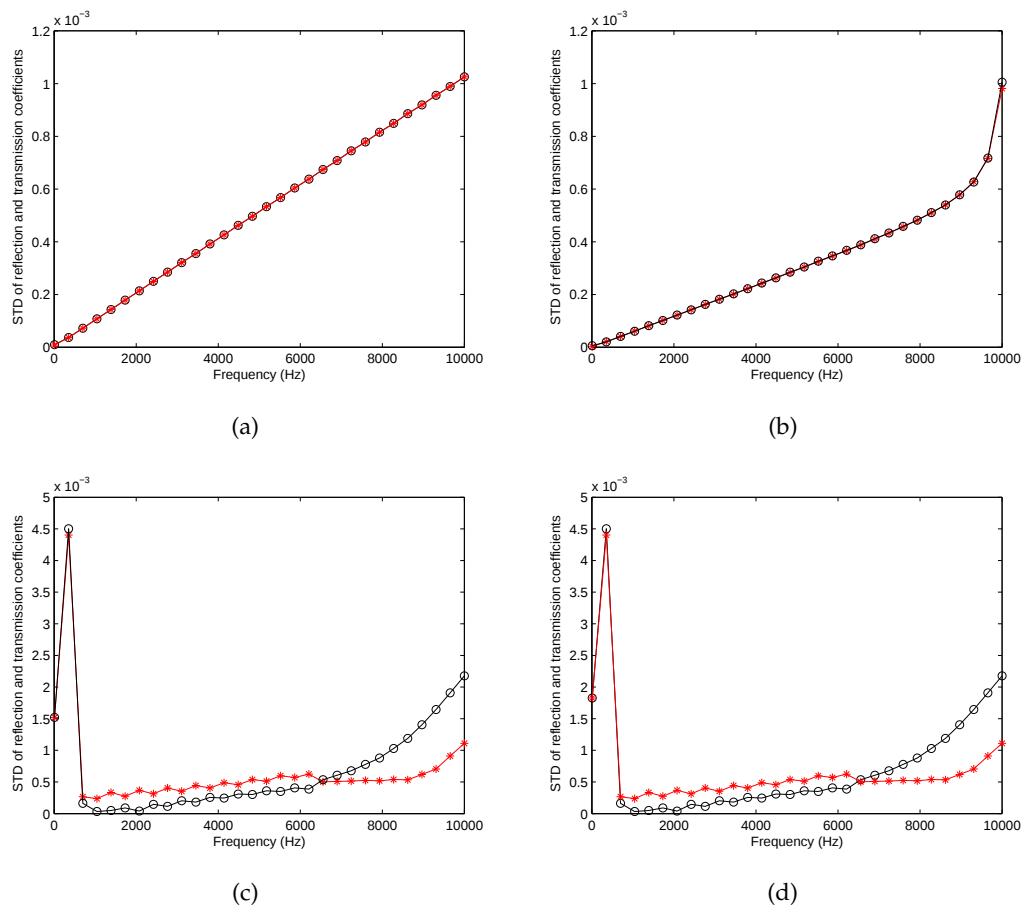


FIGURE 7 – Écart-types des coefficients de réflexion et transmission pour différents ondes: (-rouge): réflexion, (- noir): transmission, (*): réflexion Monte Carlo, (o): transmission Monte Carlo.

.3 | Annexe 3

Polynôme de Legendre

Les polynômes de Legendre d'ordre n sont définis par :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (36)$$

avec $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$

Le produit scalaire est définie :

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m} \quad (37)$$

avec $W(x) = 1$ sur $[-1, 1]$.

En utilisant la procédure de normalisation on obtient :

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{n+1}x\tilde{L}_n(x) - \frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}}\tilde{L}_{n-1}(x) \quad (38)$$

avec : $\tilde{L}_0(x) = 1$, $\tilde{L}_1(x) = \sqrt{3}x$

les polynômes $\tilde{L}_n$ vérifient la propriété suivante :

$$\int_{-1}^1 \tilde{L}_n(x)\tilde{L}_m(x)dx = 2\delta_{n,m} \quad (39)$$

Polynôme de Laguerre

Les polynômes de Laguerre d'ordre n sont définis par la relation :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (40)$$

avec $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x$

En prenant $W(x) = e^{-x}$, la fonction de poids liée aux polynômes de Laguerre définie sur $[0, +\infty]$.

Le produit scalaire correspondant est donné par :

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = \delta_{n,m} \quad (41)$$

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur M. ICHCHOU

et les rapports de

Monsieur N. BOUHADDI
Professeur - Université de Franche-Comté - FEMTO ST - 25 chemin de l'Epitaphe
25000 BESANCON cedex

Et de

Monsieur R. NASRI
Professeur - Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis - BP 37 - Le Belvédère - 1002 TUNIS - Tunisie

Monsieur BEN SOUF Mohamed

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 6 novembre 2012

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes



