

N° d'ordre : 4512

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par Jérôme DUBOIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mécanique et Ingénierie

Homogénéisation dynamique de milieux aléatoires en vue du dimensionnement de métamatériaux acoustiques

Soutenue le : 17 Avril 2012

Après avis de :

M.	C. Audoly, Directeur de recherche, DCNS Research/CEMIS, Toulon	Rapporteurs
M.	J.-M. Conoir, Directeur de recherche CNRS, IJLRD, Paris	

Devant la commission d'examen formée de :

M.	P. Barois, Directeur de recherche CNRS, CRPP, Pessac	Président
M.	C. Aristégui, Professeur, Université de Bordeaux	
M.	C. Audoly, Directeur de recherche, DCNS Research/CEMIS, Toulon	
M.	J.-M. Conoir, Directeur de recherche CNRS, IJLRD, Paris	
M ^{me}	A.-C. Hladky-Hennion, Directeur de recherche CNRS, IEMN, Lille	
M.	O. Poncelet, Chargé de recherche CNRS, I2M, Bordeaux	
M.	S. Beretti, Ingénieur, DGA, Toulon	Invité

Remerciements

Je remercie Marc Deschamps de m'avoir accueilli dans son laboratoire (initialement Laboratoire de Mécanique Physique, UMR..., qui a ensuite intégré l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux, UMR...). J'ai ainsi intégré le monde de la recherche qui me passionne.

Je remercie Messieurs Audoly Christian (responsable du groupe acoustique, DCNS research) et Conoir Jean-Marc (directeur de recherche CNRS) pour avoir bien voulu rapporter ce manuscrit de thèse. Je remercie également tous les membres du Jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont bien sûr également à Christophe Aristégui, directeur de thèse, et Olivier Poncelet, co-directeur de thèse. Leur rigueur et leurs attentes m'ont permis d'avancer et d'effectuer (je l'espère) un travail de qualité. Christophe régulièrement à faire des petites blagues pour égayer l'atmosphère. Olivier pour toutes ces discussions qui peuvent prendre des heures, mais passionnantes.

Je remercie également Sacha pour ces conseils, son soutien et son sens de l'humour.

Je remercie mes parents pour m'avoir soutenu et accepté ce choix. Une pensée à ma petite sœur Justine qui passe son bac et à Julien, je ne t'oublie pas.

Un grand coucou à Fiston actuellement en Chine, ensemble on a découvert la vie nocturne bordelaise en première année, j'attends ton retour. Un gros bisous à tous les anciens que je n'ai pas forcément eu forcément trop le temps de voir pendant ces années de thèses, Céline (pour tous ces moments dans ma dernière année à Nevers, on s'est bien marré), Paul (le CAU, le moulin à vent... et la suite), Claire et leur petite Louise (pour tous ces moments à st Gau), Denis (le chantier... et ta maison de campagne également, rappelle toi le road trip qu'on s'est tapé avec Momo), (re)Fiston (le chinois ou plutôt le tombeur de Canton), 3.9 (revenu de Roumanie maintenant), Émilie, Milka, Kilkenny, Bugiste, Polo, Lydia, Blandine, toph, rossi... J'ai vraiment apprécié tous ces moments passés avec vous. Vivement le prochain gala de l'ISAT!!!

Bisous également à Claude et Manue avec qui la pétanque du vendredi soir a été initiée et qui ont gardé mon petit pitchouline quand je n'étais pas là. Et pour toutes ces soirées avec Fiston et Karolina.

Bien sûr je pense à mes collègues de bureau que j'ai plus ou moins agacés avec mes insultes envers mon ordinateur, grognement ou autres bruits incongrus dus à l'énervement... Les premiers : Mihai, Mahmoud, Slah et Claude. Ensuite est arrivé Alban (le sportif... payer pour courir 42 km y a pas, moi j'appelle ça du masochisme pure et dur. Je suis sûr que ça va te manquer les petites bâches qu'on se lançait) et les trois derniers Philippe (le motard et pratiquant de Krav Maga avec qui j'ai un peu fait les 400 coups cette dernière année. Je reviendrais squatter chez toi de temps en temps), Edith (la cavalière, quand est-ce que tu va venir habiter sur Bordeaux ?) et Guillaume (le discret). Et apparemment Macha qui a repris mon bureau. Bon courage à tous pour la fin de thèse.

Et bien sure n'oublions pas les parties de pétanque du Vendredi après midi qui permettent de se détendre après une longue semaine de boulot avec un petit verre de pastis entre collègue. A tous les boulistes et autres avec qui j'ai passé du bon temps : Fred, Jérémy, Marta, Mathieu, Djoudi, Sébastien, Grégory, Samuel, Benjamin, Benoit, Mahmad, Mathieu, Damien, Tony, Jérémy. Et les autres personnes du LMP : Michel, Christine, Anissa, Thomas. On se reverra surement lors d'un congrès.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
Préambule	v
Introduction générale	1
I Homogénéisation de milieux aléatoires	5
1 Homogénéisation dynamique des milieux aléatoires	7
1.1 Historique des descriptions des phénomènes de diffusion multiple présents dans les milieux aléatoires	8
1.2 Diffusion d'une onde plane par un objet cylindrique	9
1.3 Les techniques d'homogénéisation	10
1.3.1 Les modèles de diffusion simple	11
a) Limite quasi-statique	11
b) Introduction de la fréquence dans les formules de Kuster et Toksöz (1.15)	13
1.3.2 Les modèles de diffusion multiple	13
a) Introduction à la diffusion multiple	14
b) Les modèles analytiques	16
1.4 Simulations numériques	20
1.5 Confrontation modèles-simulations : réponse acoustique d'un écran de diffuseurs	22
1.5.1 Système non résonant : diffuseurs d'eau distribués dans le matériau fictif 1	22
1.5.2 Système faiblement résonant : diffuseurs de FC72 immergés dans l'eau	25
a) Réflexion et transmission de l'écran	25
b) Nombre d'onde effectif	25
1.5.3 Système fortement résonant : cylindres de matériau fictif 2 distribués dans l'eau	28
a) Réflexion et transmission de l'écran	28
b) Nombre d'onde effectif	30
1.6 Propriétés mécaniques quasi-statiques	31
1.6.1 Module de compressibilité effectif	31
1.6.2 Masse volumique effective	31
1.6.3 Effets inertiels entre phases	32

1.7	Conclusion	32
2	Homogénéisation quasi-statique par les moyennes de champs	35
2.1	Introduction	35
2.2	Notations, paramètres, moyennes de champ	37
2.2.1	Vecteurs positions des objets et du point d'observation	37
2.2.2	Définition de la concentration	38
2.2.3	Moyennes de champ	38
	a) Moyenne spatiale	38
	b) Moyenne configurationnelle	39
	c) Théorème de Green	40
	d) Composition des moyennes	40
2.3	Définition des paramètres effectifs par les moyennes de champs	41
2.3.1	Approche configurationnelle	41
2.3.2	Approche « macroscopique »	42
2.3.3	Approche mixte	42
2.3.4	Application à un système à symétrie axiale	42
	a) Détermination du module de compressibilité effectif	43
	b) Détermination de la masse volumique effective	44
2.4	Paramètres effectifs dans le contexte de la diffusion simple	45
2.4.1	Détermination du module de compressibilité effectif	46
	a) Limite quasi-statique	48
	b) Expression dynamique, cas du diffuseur fluide	49
	c) Expression dynamique, cas du diffuseur solide	51
2.4.2	Détermination de la masse volumique effective	51
	a) Limite quasi-statique	54
	b) Expression dynamique	55
2.4.3	Critique du modèle	57
	a) Comportement dynamique des paramètres mécaniques effectifs	57
	b) Introduction de termes de couplage	57
2.5	Cas de N diffuseurs en interactions : diffusion multiple	58
2.5.1	Problématique de la troncature des champs à l'interaction ι	60
2.5.2	Formulation générale : N diffuseurs dans une configuration donnée et ι interactions entre eux	61
	a) Détermination du module de compressibilité effectif	61
	b) Détermination de la masse volumique effective	62
2.5.3	Résolution du système avec deux diffuseurs identiques ne s'interpénétrant pas	63
2.5.4	Système comportant une infinité de diffuseurs susceptibles de s'interpénétrer	65
2.5.5	Champ excitant un diffuseur à la limite quasi-statique : effet des aller-retour et des boucles de diffusion	66
	a) Aller-retour entre deux diffuseurs	66

b)	Boucles d'interactions entre N diffuseurs	66
c)	Boucles d'interactions aller-retour	67
d)	Récapitulatif	67
2.5.6	Comparaison du modèle avec des résultats de la littérature	68
2.6	Conclusion	69
II	Les métamatériaux	71
3	Propriétés acoustiques des métamatériaux	73
3.1	Les milieux parfaits et homogènes	74
3.1.1	Établissement des propriétés acoustiques	74
a)	Cas d'un matériau classique : $(\rho, \kappa) > 0$	75
b)	Cas d'un métamatériau : $(\rho, \kappa) < 0$	76
c)	Cas particulier : $\rho\kappa < 0$	76
3.1.2	Conséquences	76
a)	Réfraction d'une onde plane par une interface plane entre deux matériaux classiques	76
b)	Réfraction d'une onde plane par une interface plane entre un matériau classique et un métamatériau	77
c)	La superlentille (lentille à faces parallèles)	78
3.1.3	Problématique du choix de la définition d'une onde progressive, et conséquence sur la notion d'impédance acoustique	79
a)	Onde progressive définie par la vitesse de phase de cette onde	80
b)	Onde progressive définie par la vitesse de l'énergie de cette onde	80
3.2	Généralisation aux propriétés mécaniques à valeurs complexes	80
3.2.1	Critères de milieux atténuants ou amplifiants	81
3.2.2	Comportement des ondes homogènes en fonction des paramètres mécaniques à valeurs complexes	81
a)	Relation définissant un milieu atténuant	82
b)	Cas des matériaux classiques	82
c)	Cas des métamatériaux	83
d)	Cas particuliers	83
3.2.3	Représentation graphique des zones dites « matériau classique » et « métamatériau » (pour des ondes planes homogènes)	84
3.2.4	Commentaires sur les ondes hétérogènes	85
3.3	Analyse du phénomène d'amplification des ondes évanescentes	87
3.3.1	Réflexion et transmission d'une onde plane monochromatique à une interface séparant deux milieux semi-infinis	87
a)	Onde évanescente incidente rasante : cas du métamatériau parfait de Veselago ($\rho_1 = -\rho_0$ et $\kappa_1 = -\kappa_0$)	89

	b) Onde évanescente incidente rasante : cas du métamatériau de Veselago faiblement absorbant ($\rho_1 = -\rho_0 + i\epsilon$ et $\kappa_1 = -\kappa_0 + i\epsilon'$)	91
3.3.2	Réflexion et transmission par une plaque à faces parallèles.	93
3.3.3	Étude de la lentille idéale : $\rho_1 = -\rho_0, \kappa_1 = -\kappa_0$	94
3.3.4	Étude d'une lentille faiblement absorbante : $\rho_1 = -\rho_0 + i\epsilon, \kappa_1 = -\kappa_0 + i\epsilon'$	95
3.4	Dimensionnement d'un métamatériau	98
3.5	Conclusion	101
4	Étude du comportement de structures localement résonantes	103
4.1	Caractéristiques du milieu hétérogène	104
4.1.1	Diffusion par un diffuseur isolé	104
4.1.2	Nombre d'onde effectif	105
4.2	Réponses en réflexion et transmission du milieu hétérogène	106
4.2.1	Comparaison entre les prédictions issues des modèles analytiques et les simulations numériques	106
4.2.2	Comportement statistique en transmission de l'écran de diffuseurs	108
4.2.3	Bilan	109
4.3	Relations entre les réponses d'un écran et d'un diffuseur isolé	109
4.3.1	Fonction de forme angulaire et section efficace de diffusion	110
4.3.2	Champ de pression	111
4.4	Effet de l'arrangement sur les réponses d'un écran de diffuseurs	115
4.4.1	Définition de l'épaisseur de l'écran	115
4.4.2	Comparaison entre un MA et un CP à maille carrée	116
4.4.3	Comparaison entre un CP à maille carrée et un CP à maille triangulaire	118
4.5	Conclusion	119
	Conclusion générale	121
	Annexes	125
A	Diffusion d'une onde plane par un obstacle cylindrique	127
A.1	Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$)	127
A.2	Déplacements et contraintes en coordonnées cylindriques	129
A.2.1	Formules générales	129
A.2.2	Cas d'un milieu fluide	130
A.2.3	Cas d'un milieu solide	131
A.2.4	Conditions aux limites et équations de continuité	132
	a) Conditions aux limites	132
	b) Interface entre deux milieux fluides	132
	c) Interface entre un milieu fluide et un milieu solide	133

A.3	Coefficients d'amplitude modale d'une inclusion de type cylindre plein	133
A.3.1	Matrice fluide, diffuseur fluide	134
A.3.2	Matrice fluide, cylindre solide	134
B	Formalisme de la matrice T appliqué au champ de pression	137
C	Diffusion par deux cylindres	141
C.1	Présentation du problème	141
C.2	Résolution harmonique du système à deux diffuseurs	142
C.3	Résolution par récurrence du système à deux diffuseurs	145
D	Limites asymptotiques des séries et fonctions utilisées	147
E	Cristaux phononiques et métamatériaux acoustiques	151
E.1	Introduction à la propagation des ondes dans les cristaux phononiques	151
E.1.1	Réseau de Bravais et réseau réciproque	151
E.1.2	Les effets de type métamatériau	153
a)	Les bandes fréquentielles interdites	153
b)	La réfraction négative	154
E.2	État de l'art	155
E.2.1	Les bandes fréquentielles interdites	155
E.2.2	La réfraction négative	156
a)	Les cristaux anisotropes	156
b)	Les cristaux à vitesse de phase négative	156
	Bibliographie	158

Préambule

Ce travail de thèse s'inscrit dans le contexte de l'ANR Blanc SUPREME (SUPERlentille à REfraction négative à base de METamatériaux et de cristaux phononiques), numéro ANR-08-BLAN-0101-01 et du projet SAMM (*Self-Assembled MetaMaterials*) du GIS AMA (*Advanced Materials in Aquitaine*).



Introduction générale

Un milieu hétérogène est un milieu formé de matériaux différents. Dans un système à deux ou trois dimensions, il est généralement composé d'un milieu hôte (ou matrice) à l'intérieur duquel se trouvent des inclusions de formes plus ou moins complexes. Ces inclusions peuvent être réparties de manière périodique dans la matrice, on parle alors de cristaux phononiques. Mais généralement, la connaissance du milieu n'est que statistique : on ne connaît que le nombre n_0 de diffuseurs par unité de volume et par extension la concentration volumique ϕ des inclusions. Les diffuseurs sont alors considérés être répartis aléatoirement et de manière uniforme dans la matrice, définissant ainsi des milieux aléatoires.

Les milieux hétérogènes peuvent avoir des propriétés étonnantes que ne possèdent pas les matériaux naturels. On parle alors de métamatériaux. Il a été démontré depuis longtemps qu'un cristal phononique possède des bandes fréquentielles interdites [1] à l'intérieur desquelles les ondes ne peuvent pas se propager. Cette caractéristique a des applications pratiques telles que l'amélioration de l'isolation phonique d'un bâtiment, ou la conception de guides d'ondes parfaits (la réflexion des ondes à chaque interface étant totale). Ce principe est utilisé pour concevoir des fibres optiques à faibles pertes [2], déjà disponibles sur le marché.

Le théorème de Floquet nous dit qu'une infinité d'ondes planes (dont les nombres d'onde sont périodiques) se propagent dans un milieu périodique. La période des nombres d'onde des ondes présentes dans le cristal dépend de la périodicité spatiale des diffuseurs. C'est pourquoi on ne détermine que le nombre d'onde de Bloch, qui se situe dans la première zone de Brillouin. Il peut être déterminé en utilisant par exemple la méthode de décomposition en ondes planes [3] (méthode implicite). Cependant, une expression analytique du nombre d'onde de Bloch est accessible aux basses fréquences [4, 5].

Les cristaux phononiques peuvent présenter des bandes fréquentielles à l'intérieur desquelles la vitesse de groupe de l'onde de Bloch est négative (branches à pentes négatives dans les diagrammes de bandes), ce qui donne lieu au phénomène de réfraction négative [6]. Veselago [7] a montré, dans le cadre de l'électromagnétisme, que lorsque le rapport n_φ des vitesses de phase entre une plaque et le milieu environnant vaut $n_\varphi = -1$, cette plaque se comporte comme une lentille convexe. Pour obtenir ce type de lentille à faces parallèles (nommé depuis superlentille), il a proposé d'utiliser un métamatériau dont les propriétés électromagnétiques sont de norme égale à celle du milieu environnant et de signe opposé. Cette lentille s'avère être une lentille parfaite (nommée hyperlentille) car elle restaure les ondes évanescentes au niveau du point focal [8]. L'image d'un point source n'est plus une tâche mais un point.

Les superlentilles sont actuellement conçues uniquement à partir de cristaux phononiques soit anisotropes [9–15], soit isotropes à vitesse de phase de l'onde de Bloch négative [16–27]. Ces lentilles ont un inconvénient : l'énergie de l'onde incidente est distribuée sur plusieurs modes dans le cristal.

Ainsi, même si l'onde de Bloch satisfait la relation $n_\varphi = -1$, les autres modes générés peuvent perturber l'image créée par la lentille.

La littérature traitant des métamatériaux à structure désordonnée et présentant un indice négatif est quant à elle très limitée [28, 29]. Li et Chan [30] ont par exemple montré à l'aide de formules analytiques qu'un milieu aléatoire peut se comporter comme un métamatériau à indice négatif lorsque les diffuseurs résonnent à basses fréquences. Une seule onde se propageant dans un milieu aléatoire à matrice fluide, ces milieux semblent être plus appropriés au dimensionnement de métamatériaux.

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement et au dimensionnement de métamatériaux acoustiques à partir de milieux aléatoires. Son succès repose sur le développement d'outils prédictifs du comportement acoustique macroscopique de structures hétérogènes basés sur des techniques d'homogénéisation dynamique.

Homogénéiser un milieu hétérogène consiste à déterminer un milieu homogène équivalent, ou milieu effectif, dont le comportement est régi par les équations de la mécanique des milieux continus et dont la réponse à une sollicitation donnée est identique à celle du milieu hétérogène. Les premiers modèles, tels que ceux de Voigt [31], Reuss [32], Eshelby [33] ou Mori et Tanaka [34], ont été établis pour des sollicitations mécaniques statiques. Les propriétés mécaniques (effectives) du milieu homogène équivalent ainsi obtenues, permettent par exemple de décrire les réponses sous chargement d'un matériau composite. En définissant la masse volumique effective comme le rapport entre la masse totale du milieu hétérogène et son volume total, on montre qu'elle suit la loi des mélanges.

Lorsque la sollicitation est une onde acoustique, on parle alors d'homogénéisation dynamique. La longueur d'onde de l'onde se propageant dans la matrice est alors supposée grande devant la géométrie des inclusions. Généralement, ces modèles sont développés à la limite quasi-statique (limite lorsque la fréquence tend vers 0) [35–38]. Ce faisant, les propriétés mécaniques effectives quasi-statiques tendent vers celles des modèles statiques lorsque la matrice est solide. Cependant, lorsque la matrice est fluide, Ament [35] a montré qu'à cause d'effets inertiels entre les phases, ce n'était plus le cas. Kuster et Toksöz [36] ont, par la suite, proposé une technique d'homogénéisation généralisant les résultats obtenus par Ament pour tous types de matrice et d'inclusion (fluide ou solide). Le lecteur pourra se référer au manuscrit de thèse de Parnell [39], où l'auteur présente dans le chapitre 2 une bibliographie exhaustive sur ce sujet.

Lorsque la fréquence est quelconque, la connaissance des propriétés d'un milieu effectif est essentielle afin de simuler la propagation des ondes sismiques dans la croûte terrestre, celle des ondes ultrasonores dans un matériau composite (en vue par exemple du contrôle non destructif), celle des ondes dans l'océan (furtivité acoustique), *etc.* Les inclusions diffusant les ondes dans toutes les directions de l'espace sont également nommées diffuseurs. Il se produit alors un processus de multidiffusion qui complexifie l'étude du comportement des milieux hétérogènes. Si la position exacte de chaque diffuseur est connue, il est possible de résoudre numériquement le problème de manière déterministe, l'arrangement pouvant être périodique ou issu d'un tirage aléatoire. Cependant, ce type de méthode devient rapidement coûteux en temps de calcul lorsque le nombre de diffuseurs est important.

La caractérisation des propriétés moyennes des milieux aléatoires passe par celle de l'onde cohérente, c'est-à-dire l'onde qui résiste au désordre. Elle est obtenue en moyennant le champ siégeant dans le

milieu aléatoire sur toutes les configurations possibles de positions des diffuseurs. Lorsqu'un milieu aléatoire est insoné par une onde plane, l'onde cohérente est également plane. Du point de vue de cette onde, un milieu aléatoire est alors décrit comme un milieu homogène équivalent. Cette méthode a été proposée par Foldy [40] en 1945, qui a ainsi accédé au nombre d'onde de l'onde cohérente, que l'on nommera par la suite nombre d'onde effectif. De nombreux auteurs se sont ensuite inspirés de cette méthode afin de déterminer le nombre d'onde effectif selon deux formalismes différents : les fonctions de Green [41–43] et les décompositions modales [40, 44–54]. Les différentes modélisations disponibles diffèrent par les hypothèses de fermeture choisies pour tronquer le processus récursif de multidiffusion. Il existe également des méthodes implicites telles que la CPA [55] (*coherent potential approximation*). Le travail présenté dans ce manuscrit se focalise sur les modèles explicites, et plus spécifiquement sur le formalisme de décomposition modale. Comme l'ont noté Parnell et Abrahams [53], les nombres d'onde effectifs obtenus dans la littérature sont linéarisés en fonction du nombre n_0 de diffuseurs par unité de volume bien que ce terme puisse être grand même lorsque la concentration est faible. Or, la linéarisation d'une fonction quelconque doit être développée en fonction d'une quantité dont la norme est inférieure à un. C'est pourquoi dans ce manuscrit, nous avons choisi de développer toutes les linéarisations en fonction de la concentration $\phi \in [0; 1]$.

Dans la suite du document, nous nous sommes intéressés aux seules émulsions constituées de phases fluides non dissipatives. Mécaniquement, un fluide n'est connu dans sa globalité que lorsque sa masse volumique ρ et son module de compressibilité κ le sont. Il possède ainsi deux paramètres mécaniques distincts, qui peuvent être à valeurs réelles ou complexes. Ces quantités mécaniques sont liées aux propriétés acoustiques suivantes : le nombre d'onde et l'impédance Z . Généralement, les théories de diffusion multiple se limitant au seul nombre d'onde, ne permettent pas de connaître le milieu effectif dans sa globalité. Pour répondre à ce problème lorsque le milieu est aléatoire, des techniques d'homogénéisation dynamique ont été établies sous l'hypothèse de diffusion simple (les interactions entre les diffuseurs sont négligées) [30, 56] ou multiple [46, 47, 57–61]. Dans le cadre des milieux périodiques, d'autres méthodes d'homogénéisation dynamique ont également été développées à la limite des basses fréquences [62–64].

Ce manuscrit se décompose en deux parties. La première partie se focalise sur l'homogénéisation de milieux aléatoires et la seconde partie sur le comportement acoustique et le dimensionnement de métamatériaux. Le premier chapitre traite de la validité de différentes techniques d'homogénéisation dynamique de milieux aléatoires. Pour cela, les modules des coefficients de réflexion et de transmission d'un écran de diffuseurs ainsi que le nombre d'onde effectif prédits par des modèles analytiques seront comparés à ceux obtenus à l'aide de simulations numériques par FDTD (*finite difference time domain*). Les confrontations entre les résultats numériques et les modèles analytiques seront effectuées pour trois systèmes différents afin de vérifier la robustesse des techniques d'homogénéisation en présence de concentrations élevées et de résonances basses fréquences de diffuseurs. L'analyse des propriétés effectives quasi-statiques issues des modèles dynamiques précédents montre que les mécanismes de multidiffusion semblent négligeables dans cette limite.

Le second chapitre répond à cette interrogation en présentant une technique d'homogénéisation de milieux hétérogènes basée sur les méthodes de Willis [65] et de Nemat-Nasser [64]. Contrairement

aux techniques classiques d'homogénéisation de milieux aléatoires qui ne considèrent que les champs extérieurs aux diffuseurs, cette technique prend en compte tout le champ acoustique : celui de l'onde incidente, celui de l'onde diffusée et celui de l'onde siègeant à l'intérieur du diffuseur. L'homogénéisation est réalisée sur un volume considéré comme représentatif du milieu hétérogène. En considérant un diffuseur isolé, le champ excitant le diffuseur est réduit au champ incident, ce qui équivaut à l'hypothèse de diffusion simple. Lorsque le système est composé de deux diffuseurs, les multiples interactions entre ces diffuseurs sont prises en compte explicitement par ce modèle.

Les propriétés mécaniques effectives obtenues par les techniques d'homogénéisation présentées dans le premier chapitre sont à valeurs complexes. De plus, suivant le système considéré, les parties réelles et imaginaires de ces propriétés mécaniques peuvent être positives ou négatives. Afin de déterminer les propriétés acoustiques du milieu effectif, il est donc nécessaire d'étudier la propagation des ondes dans un milieu quelconque $(\rho, \kappa) \in \mathbb{C}^2$. C'est pourquoi l'analyse menée par Veselago [7] sera étendue aux ondes acoustiques dans le troisième chapitre. Ainsi les propriétés acoustiques d'un matériau ayant une masse volumique et un module de compressibilité à valeurs réelles négatives seront obtenues. Il apparaît que les ondes se propageant dans un métamatériau acoustique (comme dans un métamatériau électromagnétique) à indice négatif ont des vecteurs d'onde et de Poynting de sens opposés. Une fois ces relations établies, elles sont généralisées aux cas où les propriétés d'un matériau sont à valeurs complexes. Avec cette étude, nous avons extrait un critère simple permettant de caractériser un métamatériau à indice négatif. Ce critère est basé sur le nombre d'onde des ondes homogènes se propageant dans le milieu. Par ailleurs, l'étude de Pendry [8] sera reprise dans le cas d'une lentille acoustique à faces parallèles. Le phénomène physique impliquant l'amplification des ondes évanescentes sera examiné en détail. Finalement, nous étudierons le comportement acoustique du milieu homogène équivalent à un milieu aléatoire dont les diffuseurs résonnent à basses fréquences en fonction de la concentration.

Dans le quatrième chapitre, nous cherchons à obtenir des effets de type métamatériau à partir d'un milieu aléatoire réaliste. Pour cela, nous nous sommes intéressés à un milieu composé de matériaux du commerce. Comme dans le premier chapitre, nous comparons les réponses en réflexion et transmission d'un écran de diffuseurs répartis aléatoirement issues de modèles analytiques avec celles obtenues à partir de simulations numériques. Différents régimes de fonctionnement sont alors identifiés puis reliés au champ de pression lors de la diffusion d'une onde plane par un cylindre isolé. Finalement, nous comparons les réponses de cet écran avec celles d'un écran dont les diffuseurs sont répartis périodiquement.

Première partie

Homogénéisation de milieux aléatoires

Chapitre 1

Homogénéisation dynamique des milieux aléatoires

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux techniques d'homogénéisation de milieux aléatoires composés de diffuseurs cylindriques fluides répartis aléatoirement et uniformément dans une matrice fluide infinie. Ce problème est indépendant de la coordonnée \mathbf{e}_z . Les fluides sont considérés comme parfaits, donc non dissipatifs. Dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ la concentration surfacique de diffuseurs ϕ est définie comme le rapport de la surface totale occupée par les diffuseurs sur la surface du milieu aléatoire. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la validité de différentes techniques d'homogénéisation dynamique en fonction de la concentration des diffuseurs et du contraste entre les propriétés mécaniques de la matrice et des diffuseurs. Pour ce faire, nous comparons le comportement acoustique d'un écran de diffuseurs sollicité par une onde plane prédit par des modèles analytiques avec ceux obtenus par des simulations numériques réalisées à l'aide d'un code de différences finies dans le domaine temporel (**FDTD**). Ces comparaisons se feront sur les coefficients de réflexion et de transmission, ainsi que sur le nombre d'onde effectif de l'onde plane cohérente siégeant dans l'écran.

Dans un premier temps, nous exposerons un rapide historique des théories de diffusion multiple adaptées aux milieux aléatoires, puis nous présenterons le problème canonique de diffusion d'une onde plane par un cylindre isolé, mécanisme élémentaire considéré dans les modélisations analytiques reportées jusqu'ici. Les configurations des simulations numériques seront alors présentées, suivies de la comparaison des résultats issus des modèles analytiques avec les résultats numériques, pris dans ces travaux comme éléments de référence (expériences numériques). Nous montrerons ainsi que ces modèles analytiques sont naturellement en bon accord avec les simulations pour de faibles concentrations de diffuseurs. Pour de plus fortes concentrations, l'accord est toujours acceptable aux basses fréquences, et plus qualitatif que quantitatif pour des fréquences plus élevées. Finalement, nous analyserons à la limite quasi-statique les relations entre les valeurs des propriétés mécaniques effectives issues des différents modèles.

1.1 Historique des descriptions des phénomènes de diffusion multiple présents dans les milieux aléatoires

L'article fondateur de Foldy [40] concernait la multidiffusion d'une onde scalaire (onde longitudinale P dans un fluide ou transverse horizontale SH dans un solide) par des diffuseurs ponctuels et isotropes (monopoles), et par suite la détermination du nombre d'onde effectif jusqu'au premier terme en ϕ . Par la suite, Lax [44] a introduit l'approximation quasi-cristalline, notée également QCA, et a généralisé le résultat de Foldy pour des diffuseurs anisotropes (au sens de la diffusion). À l'aide de la QCA, Waterman et Truell [45] ont introduit sans l'utiliser la notion de distance d'exclusion b afin d'interdire l'interpénétration (ou recouvrement) des diffuseurs. En considérant des diffuseurs ponctuels, ils accèdent au second ordre en ϕ du nombre d'onde effectif. À la même période, Twersky [46, 47] a étudié un écran de diffuseurs (diffuseurs de dimensions 1, 2 ou 3) sous incidence quelconque. Il a ainsi obtenu un nombre d'onde effectif dépendant de l'angle d'incidence. Dans le cas de l'incidence normale, il obtient le même résultat que Waterman et Truell. Ensuite, Fikioris et Waterman [48] ont développé un formalisme permettant de prendre en compte une distance d'exclusion quelconque (nommée *hole correction*). Leur nombre d'onde effectif est alors solution d'une équation de dispersion transcendante. Notons que pour des diffuseurs ponctuels, ils ont déterminé l'expression exacte du nombre d'onde effectif à la limite quasi-statique, identique à celle définie à partir des résultats de Kuster et Toksöz. Par la suite, Lloyd et Berry [49], en utilisant ce formalisme pour des diffuseurs ponctuels, ont obtenu une linéarisation du nombre d'onde effectif dont le terme au second ordre en ϕ est différent de celui de Waterman et Truell. Récemment, Linton et Martin [52], dans le cadre du travail de Fikioris et Waterman, ont accédé, pour une distance d'exclusion b quelconque, à une expression explicite du nombre d'onde effectif (éq. (4.32) dans [52]), dont la limite lorsque $k_0 b \rightarrow 0$ (éq. (4.33) dans [52]) est identique à celle établie par Lloyd et Berry (k_0 est le nombre d'onde dans la matrice). Dans un second article, Linton et Martin [51] se sont intéressés à des diffuseurs cylindriques et ont déterminé, pour une distance d'exclusion b quelconque, une expression explicite du nombre d'onde effectif (éq. (81) dans [51]), dont la limite lorsque $k_0 b \rightarrow 0$ (éq. (82) dans [51]) est différente de celle fournie par Waterman et Truell au second ordre en ϕ . Luppé et Conoir [61] ont montré que cette formule (éq. (82) dans [51]) est équivalente à celle obtenue avec le formalisme de Fikioris et Waterman lorsque les diffuseurs sont linéiques ($b \rightarrow 0$). Parnell et Abrahams [53], en remaniant les formulations de Linton et Martin [51], ont déterminé l'expression exacte du nombre d'onde effectif à la limite quasi-statique pour des diffuseurs linéiques. Elle est identique à celle définie à partir des formules de Kuster et Toksöz. Finalement, Norris et Conoir [54] ont développé les équations (81) et (82) de Linton et Martin [51] respectivement jusqu'au troisième ordre (éqs. (39) et (40) dans [54]) et quatrième ordre (éqs. (41) et (46) dans [54]) en ϕ .

Lorsque les ondes sont vectorielles (ondes longitudinales P et transversales dans le plan SV dans un solide) la détermination du nombre d'onde effectif est plus complexe du fait des conversions de modes lors de la diffusion d'une onde par un diffuseur. Effectivement, lorsqu'un diffuseur est insoné par une onde P ou SV, il diffuse en même temps des ondes P et SV. Les premiers résultats [66, 67] ont été développés uniquement à basses fréquences, soit en négligeant les conversions de modes, soit

en considérant que les ondes cohérentes longitudinale et transverse sont découplées, c'est-à-dire que le nombre d'onde effectif de l'onde P (respectivement SV) ne dépend pas des ondes SV (respectivement P). Récemment, Conoir *et al.* [68] ont montré qu'en utilisant le formalisme de Waterman et Truell, les ondes cohérentes longitudinale et transverse sont couplées uniquement lorsque les diffuseurs sont à section non circulaire. Par contre, dans le cadre de la description de Linton et Martin, ce découplage ne peut être considéré [69].

1.2 Diffusion d'une onde plane par un objet cylindrique

Considérons une matrice fluide 0 infinie contenant un cylindre à section circulaire fluide 1 de rayon a (fig. 1.1). Les deux fluides en présence sont isotropes, homogènes et non visqueux. Les indices 0 et 1 seront respectivement associés aux propriétés mécaniques et acoustiques de la matrice et du diffuseur. La convention $e^{-i\omega t}$ est considérée dans l'ensemble de ce document. Finalement, la relation de dispersion déduite de l'équation de la dynamique :

$$k_i^2 = \omega^2 \frac{\rho_i}{\kappa_i}, \quad (1.1)$$

relie pour une pulsation ω donnée la masse volumique ρ_i , le module de compressibilité κ_i et le nombre d'onde k_i du i^e ($i = 0, 1$) fluide en question.

Le cylindre est centré sur l'origine du repère cylindrique $(O; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. La position d'un point M quelconque est ainsi définie par le vecteur $\mathbf{r}_M = r_M \mathbf{e}_r(\theta_M)$ ou encore par le couple (r_M, θ_M) . Une onde incidente longitudinale, plane et monochromatique, se propageant suivant les x positifs, insone ce système. Ce problème peut être résolu à l'aide du potentiel de déplacement longitudinal $\phi(\mathbf{r})$ [70] défini par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \phi(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

et satisfaisant l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta + k^2) \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.3)$$

où k est le nombre d'onde de l'onde considérée. La résolution de cette équation en coordonnées cylindriques est présentée dans l'Annexe A.1.

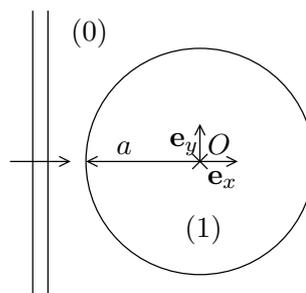


Figure 1.1 – Diffusion d'une onde plane par un cylindre 1 de rayon a , immergé dans un fluide 0.

Le potentiel de déplacement longitudinal $\phi_{\text{inc}}(\mathbf{r})$ de l'onde incidente de vecteur d'onde \mathbf{k}_0 s'écrit

sous la forme :

$$\phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = A e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} = A \sum_n i^n J_n(k_0 r) e^{in\theta}, \quad (1.4)$$

où A est l'amplitude du potentiel de déplacement (exprimée en m^2), $J_n(x)$ est la fonction de Bessel cylindrique de première espèce et \sum_n est la notation abrégée pour $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Lorsque l'onde incidente excite le cylindre, une partie de cette onde est diffusée dans toutes les directions de l'espace, on parle alors de l'onde diffusée décrite par le potentiel $\phi_{\text{diff}}(\mathbf{r})$. La partie restante de l'onde se propage à l'intérieur du cylindre, on parle alors de l'onde interne décrite par le potentiel $\phi_{\text{int}}(\mathbf{r})$. Ces potentiels respectant l'équation de Helmholtz, ils s'écrivent sous la forme générale présentée dans l'équation (A.16). Les conditions aux limites du problème conduisent, en considérant un potentiel incident normé ($A = 1$), aux expressions (annexe A.2) :

$$\Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}) = \sum_n T_n i^n H_n^{(1)}(k_0 r) e^{in\theta}, \quad (1.5)$$

$$\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \sum_n C_n i^n J_n(k_1 r) e^{in\theta}, \quad (1.6)$$

où $H_n^{(1)}(x)$ est la fonction de Hankel cylindrique de première espèce, T_n et C_n sont respectivement les coefficients d'amplitude modale des potentiels de déplacement des ondes diffusée et interne. Ces coefficients sont déterminés à partir des conditions de continuité à l'interface $\|\mathbf{r}\| = a$ (éq. (A.40)) qui permettent d'obtenir le système (A.46).

1.3 Les techniques d'homogénéisation

Afin de déterminer les propriétés mécaniques effectives d'un milieu aléatoire, considérons une distribution aléatoire et uniforme de N diffuseurs fluides 1 immergés dans une matrice fluide 0. Pour de faibles concentrations, ou encore à la limite quasi-statique, les interactions entre diffuseurs peuvent être négligées en première approche. On parle alors de diffusion simple car les diffuseurs ne sont excités que par l'onde incidente. Nous commencerons par présenter, sous cette hypothèse, la méthode de Kuster et Toksöz [36] à la limite quasi-statique, puis de quelle manière Li et Chan [30] (**KT**) ont intégré la fréquence dans ces premiers résultats. Dans un second temps, des modèles analytiques établis en prenant en compte les interactions entre les diffuseurs et donc des mécanismes de multidiffusion [45, 51, 58, 61], seront présentés.

Dans la suite, le centre du j^{e} diffuseur est localisé dans le repère cylindrique global par le vecteur \mathbf{b}_j . Lorsque les propriétés mécaniques et acoustiques varient d'un diffuseur à l'autre, elles seront notées avec l'indice j correspondant, et lorsque les cylindres sont identiques et de rayon a , elles seront repérées par l'indice 1. Par ailleurs, les phases en présence étant fluides, nous introduisons dans cette section, par soucis de généralité, le champ acoustique $\psi(\mathbf{r})$ solution de l'équation de Helmholtz qui représente indifféremment le champ de potentiel de déplacement ($\psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})$) et le champ de pression ($\psi(\mathbf{r}) = -k^2 \Phi(\mathbf{r})$).

1.3.1 Les modèles de diffusion simple

a) Limite quasi-statique

Un grand nombre de modèles de comportements homogénéisés ne considérant que des mécanismes de diffusion simple est établi à la limite quasi-statique. Un des plus célèbres est celui de Kuster et Toksöz [36]. Dans leur article, ils appliquent une technique simple et intuitive à des diffuseurs sphériques. Les résultats qu'ils obtiennent dépendent uniquement de la nature (fluide ou solide) de la matrice. Nous présentons ici le cas de N diffuseurs cylindriques (fluides ou solides) répartis aléatoirement dans une région Ω cylindrique, de rayon a_0 et dont le centre est localisé par \mathbf{b}_0 (fig. 1.2 a). Lorsque tous les diffuseurs sont identiques et de rayon a , leur concentration est alors définie par :

$$\phi = N \frac{a^2}{a_0^2}. \quad (1.7)$$

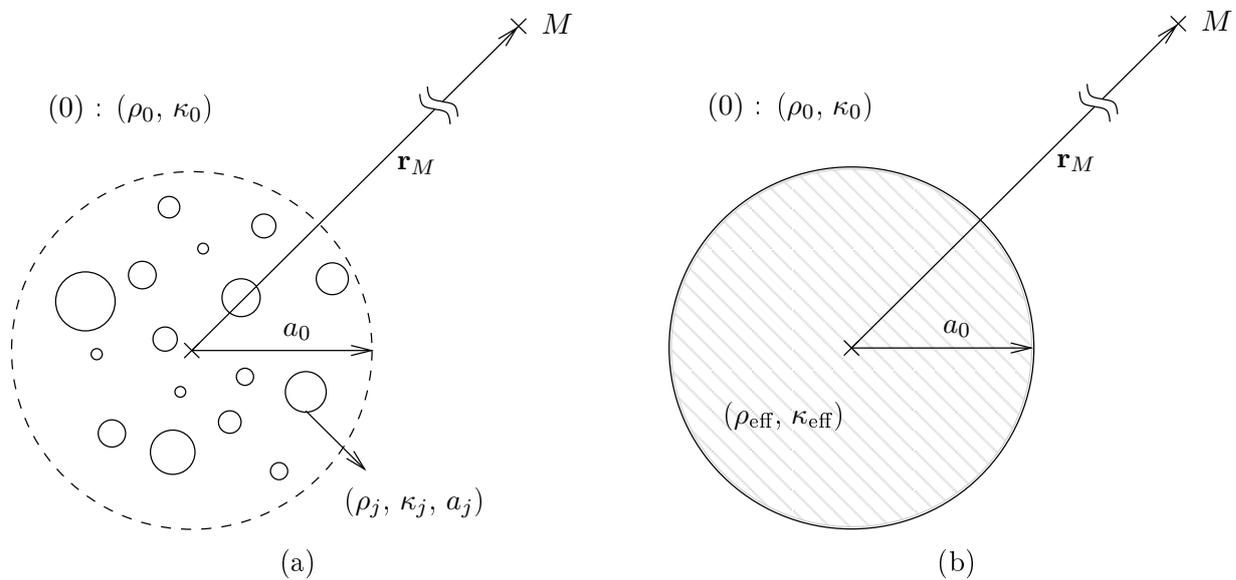


Figure 1.2 – Homogénéisation locale : a) milieu hétérogène constitué de N cylindres distribués aléatoirement dans la matrice 0, b) milieu homogène équivalent inséré dans la matrice 0.

Lorsque ce système est insoné par une onde plane incidente, l'hypothèse de diffusion simple définie le champ acoustique total, évalué au point M , $\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}_M)$, comme la superposition du champ incident $\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_M)$ et de tous les champs diffusés par chaque cylindre :

$$\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}_M) = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_M) + \sum_{j=1}^N \psi_{\text{diff}}^{(j)}(\mathbf{r}_M), \quad (1.8)$$

où $\psi_{\text{diff}}^{(j)}(\mathbf{r}_M)$ est le champ diffusé par le diffuseur j , évalué au point M . Lorsque le point M est dans le champ lointain, l'approximation :

$$\|\mathbf{r}_M - \mathbf{b}_j\| \approx \|\mathbf{r}_M\|, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad (1.9)$$

équivaut à considérer que tous les diffuseurs sont centrés sur l'origine. L'équation (1.8) se réécrit alors

sous la forme :

$$\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}_M) = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_M) + \sum_{j=1}^N \sum_n i^n T_n^{(j)} H_n^{(1)}(k_0 r_M) e^{i n \theta_M}, \quad (1.10)$$

où les coefficients d'amplitude modale $T_n^{(j)}$ du champ diffusé est associé au j^{e} diffuseur.

Remplaçons maintenant le milieu hétérogène contenu dans la région Ω par un milieu homogène équivalent à symétrie cylindrique, de masse volumique et de module de compressibilité effectifs respectivement notés ρ_{eff} et κ_{eff} (fig. 1.2 b). Le champ acoustique total au point M s'écrit alors comme la superposition du champ incident et du champ diffusé par la région Ω considérée comme homogène :

$$\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}_M) = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_M) + \sum_n i^n T_n^{(\text{eff})} H_n^{(1)}(k_0 r_M) e^{i n \theta_M}, \quad (1.11)$$

$T_n^{(\text{eff})}$ désignant les coefficients d'amplitude modale du champ diffusé par le cylindre homogène équivalent. Finalement, en supposant que les champs acoustiques (1.10) et (1.11) sont égaux et en tenant compte de l'orthogonalité des harmoniques cylindriques entre elles, nous établissons l'égalité suivante :

$$T_n^{(\text{eff})} = \sum_{j=1}^N T_n^{(j)}. \quad (1.12)$$

La linéarisation des amplitudes modales de diffusion $T_n^{(j)}$ et $T_n^{(\text{eff})}$ pour de faibles valeurs du nombre d'onde k_0 présentée dans les annexes A.3.1 et A.3.2 conduit à :

$$\begin{aligned} T_n &\propto k_0^2, & n \in \{-1, 0, 1\}, \\ T_n &= o(k_0^2), & |n| > 1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ainsi, les expressions quasi-statiques des coefficients T_0 et $T_1 = T_{-1}$ (éqs. (A.47) et (A.49)), appliquées à la relation (1.12), conduisent aux deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{\text{eff}} - \kappa_0}{\kappa_{\text{eff}}} a_0^2 &= \sum_{j=1}^N \frac{\kappa_j - \kappa_0}{\kappa_j} a_j^2 + o(1), \\ \frac{\rho_0 - \rho_{\text{eff}}}{\rho_0 + \rho_{\text{eff}}} a_0^2 &= \sum_{j=1}^N \frac{\rho_0 - \rho_j}{\rho_0 + \rho_j} a_j^2 + o(1), \end{aligned} \quad (1.14)$$

qui deviennent après avoir introduit la concentration ϕ (éq. (1.7)) :

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{eff}}} &= 1 - \phi \left(1 - \frac{\kappa_0}{\kappa_1} \right) + o(1), \\ \frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0} &= \frac{\rho_0 (1 - \phi) + \rho_1 (1 + \phi)}{\rho_0 (1 + \phi) + \rho_1 (1 - \phi)} + o(1). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Le module de compressibilité effectif κ_{eff} ainsi obtenu est identique au résultat de Reuss [32] (loi des mélanges appliquée au coefficient de compressibilité $\chi = \frac{1}{\kappa}$). Récemment, ces expressions quasi-statiques ont été retrouvées par Sheng *et al.* [71] pour un cristal phononique, et Parnell et Abrahams [53] pour un milieu aléatoire.

b) Introduction de la fréquence dans les formules de Kuster et Toksöz (1.15)

Li et Chan [30] ont proposé des expressions analytiques des propriétés mécaniques effectives dépendant de la fréquence, qui correspondent à la limite quasi-statique à celles de Kuster et Toksöz (éq. (1.15)). Elles s'obtiennent en gardant dans l'expression quasi-statique de la relation (1.12), les formes dynamiques des coefficients d'amplitude modale de diffusion d'un cylindre ($T_0^{(1)}$ et $T_1^{(1)}$). Seuls les coefficients du milieu effectif $T_0^{(\text{eff})}$ et $T_1^{(\text{eff})}$ sont pris sous leur forme linéarisée. Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{-i\pi}{4} \frac{\kappa_{\text{eff}} - \kappa_0}{\kappa_{\text{eff}}} k_0^2 a_0^2 + o(k_0^2 a_0^2) &= NT_0^{(1)}, \\ \frac{-i\pi}{4} \frac{\rho_0 - \rho_{\text{eff}}}{\rho_0 + \rho_{\text{eff}}} k_0^2 a_0^2 + o(k_0^2 a_0^2) &= NT_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

qui, en considérant la concentration ϕ , équation (1.7), se réduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{eff}}} &= 1 - \frac{4i\phi T_0^{(1)}}{\pi k_0^2 a^2} + o(1), \\ \frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0} &= \frac{\pi k_0^2 a^2 - 4i\phi T_1^{(1)}}{\pi k_0^2 a^2 + 4i\phi T_1^{(1)}} + o(1). \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.3.2 Les modèles de diffusion multiple

Nous allons présenter dans cette section des techniques d'homogénéisation dynamique permettant de déterminer les paramètres effectifs en considérant les mécanismes de multidiffusion entre des diffuseurs identiques (de rayon a), répartis uniformément et aléatoirement. La distribution des diffuseurs étant uniforme, le nombre de diffuseurs par unité de surface n_0 et leur concentration ($\phi = n_0 \pi a^2$) sont constants dans le milieu.

Deux types de régimes peuvent apparaître dans un milieu aléatoire : un régime dit propagatif et un régime dit diffusif. En régime propagatif, l'onde subit peu de phénomènes de diffusion et garde alors la mémoire de la direction de propagation de l'onde incidente. Cette onde, appelée moyenne ou cohérente, résiste au désordre. Elle est modélisée à partir d'une moyenne sur toutes les configurations possibles de positions des diffuseurs, appelée moyenne configurationnelle. Lorsque le milieu aléatoire est insoné par une onde plane, l'onde cohérente est plane elle aussi. Suivant le modèle considéré, cette condition est supposée *a priori* ou montrée *a posteriori*. Les propriétés mécaniques du milieu aléatoire sont alors vues comme homogènes par l'onde cohérente. Cette démarche a été initiée par Foldy [40] qui a alors établi une première expression du nombre d'onde effectif k_{eff} de l'onde cohérente. En régime diffusif, le champ est diffus (l'intensité est la même en tout point de l'espace) et l'onde cohérente a perdu la mémoire de la direction de propagation de l'onde incidente. On considère alors la progression d'un halo d'énergie.

Le régime devient diffusif lorsque le trajet parcouru par l'onde cohérente et très supérieur au libre parcours moyen élastique défini par :

$$l_e = \frac{1}{2\Im(k_{\text{eff}})}, \quad (1.18)$$

où $\Im(x)$ désigne la partie imaginaire du nombre à valeurs complexes x . Cette quantité est représentative

de la distance moyenne entre deux processus de diffusion. Lorsque l'onde cohérente a parcouru une distance égale à l_e , son amplitude est divisée par \sqrt{e} .

Dans la suite du manuscrit, nous nous intéresserons au seul régime propagatif. Dans un premier temps, seront présentés les principes de la modélisation de l'onde cohérente dans un milieu infini. Puis seront reportés des résultats en présence d'interfaces, conduisant en particulier à l'identification de l'impédance acoustique effective Z_{eff} du milieu aléatoire et par suite à celles des propriétés mécaniques associées, ρ_{eff} et κ_{eff} .

a) Introduction à la diffusion multiple

Équations de la diffusion multiple

Dans un milieu hétérogène, le champ acoustique total $\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r})$ en un point du plan s'écrit :

$$\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N T^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_j) \psi_{\text{ex}}^{(j)}(\mathbf{b}_j), \quad (1.19)$$

où $T^{(j)}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_j)$ est un opérateur exprimant le champ diffusé par le cylindre j dans le repère général à partir des amplitudes modales $T_n^{(j)}$ et :

$$\psi_{\text{ex}}^{(j)}(\mathbf{b}_j) = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{b}_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N T^{(i)}(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i) \psi_{\text{ex}}^{(i)}(\mathbf{b}_i), \quad (1.20)$$

représente le champ excitant le j^{e} diffuseur. L'équation (1.19) peut être résolue de manière récursive lorsque la position de tous les diffuseurs est connue (description déterministe), mais cette méthode, lourde à mettre en place, ne se résout que de manière numérique. Pour une description stochastique, la résolution de ce problème nécessite d'introduire une hypothèse de fermeture.

Probabilité de présence

La modélisation de l'onde cohérente repose sur le calcul d'une moyenne configurationnelle du champ acoustique. Pour ce faire, Foldy [40] a introduit les fonctions de probabilité de présence des diffuseurs. Ainsi, la moyenne configurationnelle d'un champ acoustique $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, notée $\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle$, est définie par :

$$\langle \psi(\mathbf{r}) \rangle = \int \dots \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N) p(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N) d\mathbf{b}_1 \dots d\mathbf{b}_N. \quad (1.21)$$

Les différentes intégrations se font sur le volume V contenant les N cylindres. La densité de probabilité $p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ est la probabilité de trouver le premier diffuseur en \mathbf{r}_1 , le second diffuseur en \mathbf{r}_2 , *etc.* Cette fonction est normée :

$$\int \dots \int p(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N) d\mathbf{b}_1 \dots d\mathbf{b}_N = 1. \quad (1.22)$$

Ainsi, l'application de la moyenne configurationnelle définie par la relation (1.19) conduit à :

$$\langle \psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \rangle = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \frac{N}{S} \int_V T^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_1) \langle \psi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1) \rangle d\mathbf{b}_1, \quad (1.23)$$

où apparaît la moyenne configurationnelle de champ acoustique lorsqu'un diffuseur est fixé en \mathbf{b}_1 :

$$\langle \psi(\mathbf{r} | \mathbf{b}_1) \rangle = \int \dots \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N) p(\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N | \mathbf{b}_1) d\mathbf{b}_2 \dots d\mathbf{b}_N, \quad (1.24)$$

avec :

$$p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = p(\mathbf{r}_1) p(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1) \quad \text{et} \quad p(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{S}. \quad (1.25)$$

En suivant une démarche similaire, la moyenne configurationnelle de la relation (1.20) se réduit à :

$$\langle \psi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1) \rangle = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{b}_1) + \frac{N-1}{S} \int_V g(r_{21}) T^{(2)}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \langle \psi_{\text{ex}}^{(2)}(\mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \rangle d\mathbf{b}_2, \quad (1.26)$$

où :

$$\langle \psi(\mathbf{r} | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \rangle = \int \dots \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N) p(\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_N | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) d\mathbf{b}_3 \dots d\mathbf{b}_N, \quad (1.27)$$

représente la moyenne configurationnelle de champ acoustique lorsque les diffuseurs sont fixés en \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 , avec :

$$p(\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N | \mathbf{b}_1) = p(\mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_1) p(\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_N | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2). \quad (1.28)$$

Dans cette dernière relation, apparaît la probabilité conditionnelle $p(\mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_1)$ définie par :

$$p(\mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_1) = \frac{g(r_{21})}{S}, \quad (1.29)$$

où la fonction de corrélation de paire $g(r_{21})$ dépend de la distance r_{21} entre les diffuseurs fixés en \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 , et est associée à la probabilité de trouver un diffuseur en \mathbf{b}_2 sachant qu'un premier est en \mathbf{b}_1 .

Hypothèse de Foldy

Afin de résoudre l'équation (1.23) indépendamment de l'équation (1.26), Foldy a supposé l'existence d'une onde plane cohérente de nombre d'onde effectif k_{eff} se propageant selon la direction de l'onde plane incidente et considéré que le champ excitant chaque diffuseur est identique au champ total :

$$\langle \psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \rangle \approx \langle \psi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) \rangle. \quad (1.30)$$

Cette description ne considère explicitement que la diffusion du diffuseur 1 lorsqu'il est insoné par le champ cohérent (éq. (1.23)). Twesky [72] a néanmoins montré que la condition (1.30) associée à l'équation (1.23) conduit à prendre en compte implicitement une succession de diffusions au sein d'une chaîne de diffuseurs où les interactions aller-retour entre deux diffuseurs ne sont pas considérées. Par ailleurs, la densité de probabilité de présence (1.25) considère des diffuseurs linéiques et autorise donc l'interpénétration des diffuseurs.

L'approximation quasi-cristalline

Lax [44] s'est concentré sur le champ d'excitation moyen $\langle \psi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1) \rangle$ évaluée sur diffuseur 1 (éq. (1.26)), afin d'évaluer le champ cohérent. En considérant un nombre N de diffuseurs élevé :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-1}{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{S} = n_0, \quad (1.31)$$

et en intégrant l'équation (1.26) sur une surface suffisamment importante, la densité surfacique n_0 de

diffuseurs apparaît alors dans cette équation. En supposant que le champ d'excitation cohérent lorsque deux diffuseurs sont fixés est le même que lorsqu'un seul l'est, Lax a proposé l'approximation :

$$\langle \psi_{\text{ex}}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle \approx \langle \psi_{\text{ex}}^{(2)}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1) \rangle, \quad (1.32)$$

connue sous le nom d'approximation quasi-cristalline (**QCA**). Seule la diffusion du diffuseur 2 lorsqu'il est insoné par le champ cohérent est prise en compte explicitement dans la relation (1.26). Le cylindre 1 ne diffusant pas, on pourrait supposer que le raisonnement de Twersky s'applique également à la QCA, ce qui signifierait que les interactions aller-retour ne sont pas prises en compte dans cette approximation.

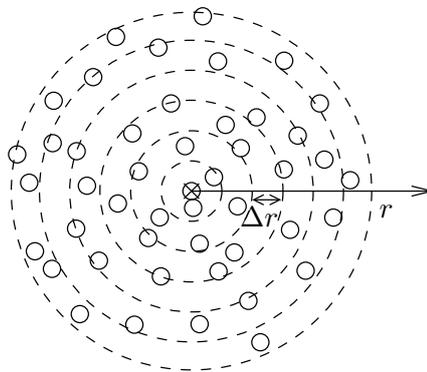


Figure 1.3 – Détermination de la fonction de corrélation de paire.

Un des intérêts de la formulation (1.26) est de considérer la position relative des deux diffuseurs et potentiellement d'interdire leur interpénétration grâce à la fonction de corrélation de paire $g(r_{21})$. Tout en étant normée par la densité n_0 de diffuseurs, elle est géométriquement définie par le nombre de cylindres par unité de surface présent dans des anneaux de rayon interne r et d'épaisseur Δr , entourant un cylindre centré sur l'origine du repère (fig. 1.3). Dans le cas de sphères indéformables [73], la résolution de l'équation intégrale de Percus-Yevick [74] permet le calcul de la fonction de corrélation de paire. En présence de cylindres indéformables, seules des solutions numériques ont été mises en œuvre actuellement [75, 76]. Dans ce cas, la distance minimale entre les centres des deux cylindres étant de $2a$, nous avons :

$$g(r_{21}) = 0, \quad \forall r_{21} < 2a. \quad (1.33)$$

Lorsque la concentration est faible, la fonction de corrélation de paire s'apparente à la fonction de Heaviside (fig. 1.4.a) : $H(r_{21} - 2a)$. Pour des concentrations plus élevées, elle tend vers la représentation de la figure 1.4.b.

Une première fonction de corrélation de paire, adaptée aux faibles concentrations, a été introduite par Fikioris et Waterman [48], qui avec la *hole correction* n'autorise pas l'interpénétration des diffuseurs. La notion de distance d'exclusion avait néanmoins déjà été introduite par Waterman et Truell [45], avant de l'abandonner au profit de diffuseurs linéiques (distance d'exclusion nulle).

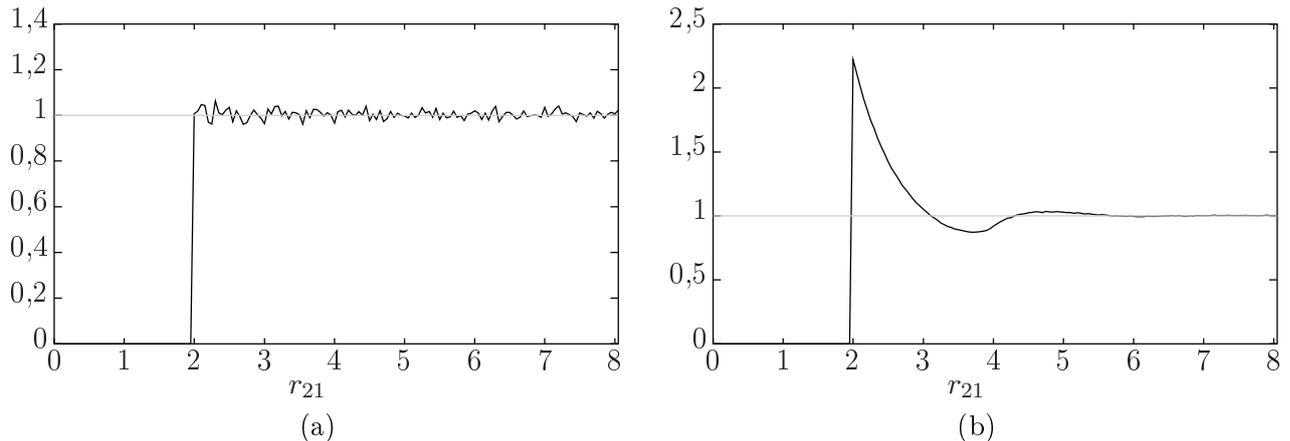


Figure 1.4 – Fonction de corrélation de paire $g(r_{21})$ obtenue par simulations numériques pour une distribution aléatoire de cylindres : (a) $\phi = 0,5\%$, (b) $\phi = 44\%$.

b) Les modèles analytiques

Nous présenterons dans cette section les résultats obtenus par Aristégui et Angel [57,58,60] (**AA**) dans le cadre des travaux de Waterman et Truell [45] et ceux établis par Luppé et Conoir [61] (**LC**) qui se rapprochent de ceux de Linton et Martin [51] en imposant la non-interpénétration des diffuseurs.

L'étude de la réponse acoustique de diffuseurs linéiques situés dans une région bornée ou semi-infinie de l'espace et immergés dans une matrice fluide occupant tout l'espace, entraîne l'apparition d'interfaces fictives. La continuité des champs cohérents plans, à ces interfaces, conduit à la définition d'une impédance acoustique effective Z_{eff} , qui, associée au nombre d'onde effectif k_{eff} , conduisent à l'identification de la masse volumique effective ρ_{eff} et du module de compressibilité effectif κ_{eff} :

$$Z_{\text{eff}} = \frac{\rho_{\text{eff}}\omega}{k_{\text{eff}}} = \frac{k_{\text{eff}}\kappa_{\text{eff}}}{\omega}. \quad (1.34)$$

Observons que le fluide homogène équivalent est naturellement dissipatif car représentatif d'une structure réelle, siège de mécanisme de multidiffusion. Par suite, les paramètres effectifs (Z_{eff} , k_{eff} , ρ_{eff} , κ_{eff}) sont nécessairement à valeurs complexes.

L'introduction d'une interface soulève la question de « l'existence » de l'onde cohérente en présence de cette « frontière ». Chekroun *et al.* [77] ont par exemple montré que dans un demi-espace, elle ne s'établit qu'après avoir parcouru une distance supérieure à $\frac{2}{\sqrt{n_0}}$. Cependant, pour les structures de dimension finie envisagée (écran de diffuseurs), nous supposons que le champ cohérent apparaît dès la première interface à cause de la superposition des ondes planes progressive et régressive.

Le modèle d'Aristégui et Angel [58]

Ce modèle porte sur les réponses acoustiques d'un écran de diffuseurs d'épaisseur e et d'extension infinie suivant \mathbf{e}_y (fig. 1.5), lorsqu'il est insoné par une onde incidente plane de direction de propagation normale à ses interfaces. À partir de l'analyse des champs cohérents réfléchis et transmis, les coefficients de réflexion et de transmission de l'écran de diffuseurs ont été identifiés :

$$R = -\frac{Q e^{-i k_0 e}}{1 - Q^2 e^{2i k_{\text{eff}} e}} \left(1 - e^{2i k_{\text{eff}} e} \right), \quad (1.35)$$

$$T = \frac{1 - Q^2}{1 - Q^2 e^{2i k_{\text{eff}} e}} e^{i(k_{\text{eff}} - k_0)e}, \quad (1.36)$$

avec :

$$Q = \frac{Z_0 - Z_{\text{eff}}}{Z_0 + Z_{\text{eff}}}. \quad (1.37)$$

Par suite, l'étude des ondes cohérentes à l'intérieur de l'écran, a permis de déterminer le nombre d'onde effectif, identique à celui obtenu précédemment par Waterman et Truell [45] :

$$\frac{k_{\text{eff}}^2}{k_0^2} = 1 - 4i \frac{\phi}{\pi k_0^2 a^2} f(0) - 4 \left(\frac{\phi}{\pi k_0^2 a^2} \right)^2 [f^2(0) - f^2(\pi)], \quad (1.38)$$

où $f(\theta)$ est la fonction de forme angulaire définie par :

$$f(\theta) = \sum_n T_n e^{in\theta}. \quad (1.39)$$

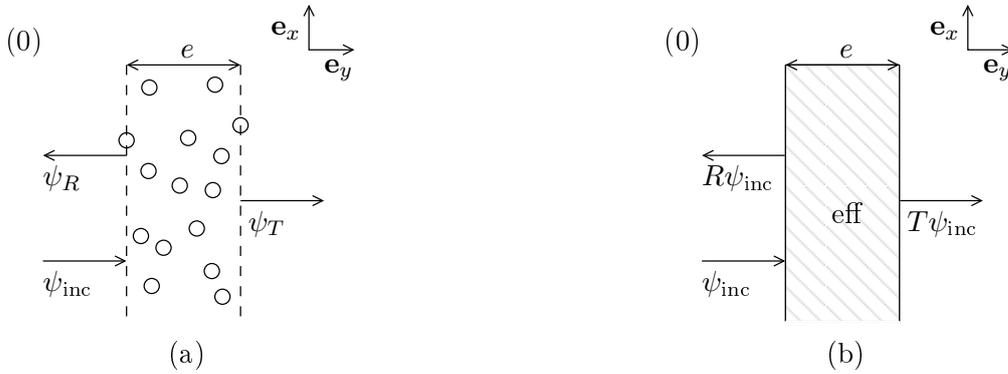


Figure 1.5 – Réflexion et transmission d'un écran de diffuseurs : a) système hétérogène, b) milieu homogène équivalent.

Ces coefficients de réflexion et de transmission s'écrivent exactement comme ceux d'une plaque homogène isotrope *via* l'impédance effective :

$$Z_{\text{eff}} = Z_0 \frac{k_0}{k_{\text{eff}}} \left(1 - \frac{2i\phi}{\pi k_0^2 a^2} [f(0) - f(\pi)] \right). \quad (1.40)$$

Les paramètres mécaniques effectifs sont ensuite obtenus grâce aux équations (1.34) et (1.38), en considérant le milieu effectif comme homogène et isotrope [58] :

$$\frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0} = 1 - \frac{2i\phi}{\pi k_0^2 a^2} [f(0) - f(\pi)]. \quad (1.41)$$

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{eff}}} = 1 - \frac{2i\phi}{\pi k_0^2 a^2} [f(0) + f(\pi)]. \quad (1.42)$$

Ces expressions sont garantes de la continuité aux interfaces de la pression et du vecteur déplacement cohérents [60].

Le modèle de Luppé et Conoir [61]

Ce modèle est un développement du modèle proposé par Le Bas *et al.* [78] qui avaient obtenu, dans le cadre des travaux de Fikioris et Waterman [48], les expressions implicites des coefficients de réflexion

et de transmission d'un demi-espace en fonction de l'angle d'incidence α de l'onde incidente (fig. 1.6). Luppé et Conoir ont ainsi exprimé ces résultats pour des diffuseurs linéiques en suivant la méthode proposée par Linton et Martin [51]. Le coefficient de réflexion $R_{0\text{eff}}$ de l'onde cohérente s'écrit alors de manière explicite :

$$R_{0\text{eff}} = \frac{Z_0 \cos(\alpha_r) - Z_{\text{eff}} \cos(\alpha)}{Z_0 \cos(\alpha_r) + Z_{\text{eff}} \cos(\alpha)}, \quad (1.43)$$

où α_r est l'angle de réfraction de l'onde cohérente, dont l'expression du nombre d'onde effectif est identique à celle obtenue par Linton et Martin [51] :

$$\frac{k_{\text{eff}}^2}{k_0^2} = 1 - 4i \frac{\phi}{\pi k_0^2 a^2} f(0) - 8J(0) \left(\frac{\phi}{\pi k_0^2 a^2} \right)^2, \quad (1.44)$$

où :

$$J(\alpha) = \sum_n \sum_m |m - n| T_n T_m e^{in\alpha}, \quad (1.45)$$

l'expression de l'impédance acoustique effective étant donnée dans [61].

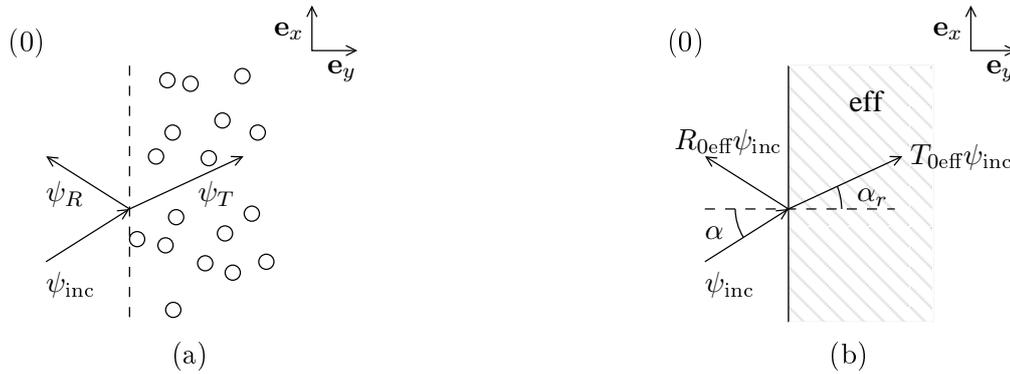


Figure 1.6 – Réflexion et transmission d'un demi-espace contenant des diffuseurs : a) système hétérogène, b) milieu homogène équivalent.

Dans le cas de l'incidence normale ($\alpha = 0$), les propriétés mécaniques effectives sont définies par les relations suivantes :

$$\frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0} = 1 - 2i \frac{\phi}{\pi k_0^2 a^2} [f(0) - f(\pi)] + 4C \left(\frac{\phi}{\pi k_0^2 a^2} \right)^2, \quad (1.46)$$

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{eff}}} = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{eff}}} \left[1 - 4i \frac{\phi}{\pi k_0^2 a^2} f(0) - 8J(0) \left(\frac{\phi}{\pi k_0^2 a^2} \right)^2 \right], \quad (1.47)$$

avec :

$$C = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} (f(0)^2 - f(\pi)^2) + \frac{f(\pi) - T_0 - f(0)}{f(0)} J(0) + \frac{T_0}{f(0)} J(\pi) \\ + T_0 \frac{f(0) - T_0}{f(0)} I(\pi) - T_0 \frac{2f(\pi) - f(0) - T_0}{f(0)} I(0) \end{array} \right], \quad (1.48)$$

et :

$$I(\alpha) = \sum_n |n| T_n e^{in\alpha}. \quad (1.49)$$

Observons que lorsque le diffuseur est un tube d'aluminium vide, Le Bas *et al.* [78] ont montré de

manière surprenante que deux ondes cohérentes étaient susceptibles de se propager, le milieu effectif se comportant dès lors comme un solide dissipatif.

1.4 Simulations numériques

Afin d'accéder à l'onde cohérente à partir de simulations numériques, l'onde est moyennée en un point donné de l'espace sur un nombre suffisant de configurations de diffuseurs. Lors de cette opération, l'onde incohérente disparaît et seule subsiste « l'onde moyenne » supposée correspondre à l'onde cohérente [77] (fig. 1.7).

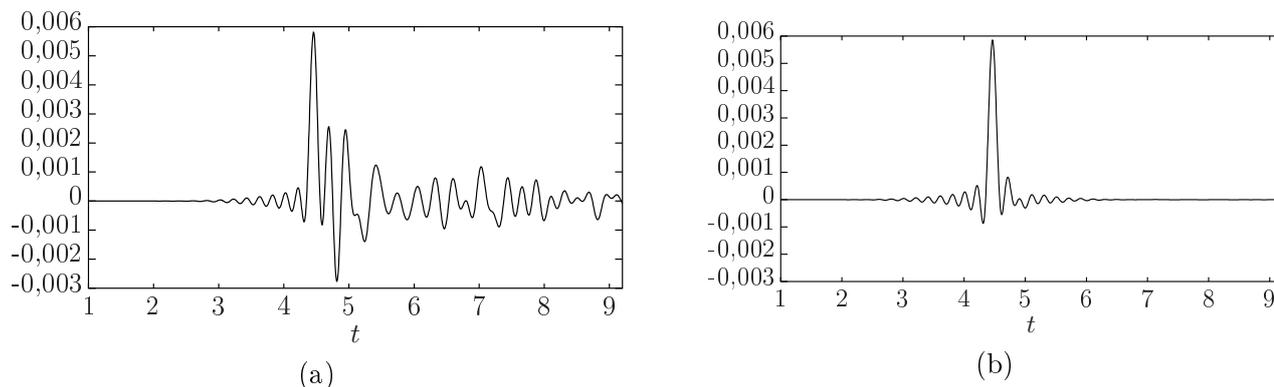


Figure 1.7 – Signal transmis au travers un écran de diffuseurs : a) pour une configuration donnée, b) moyenne sur 90 simulations.

L'intérêt de la mise en œuvre des simulations numériques réside dans le contrôle total de la géométrie du problème, et en particulier de la polydispersité des tailles des diffuseurs. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers les simulations de la propagation d'ondes dans un milieu inclusionnaire à l'aide d'un code FDTD [79–81]. Ayant été développé au sein du département Acoustique Physique de l'I2M, ce code offre la possibilité de mener des campagnes de simulations aisément. La figure 1.8 présente les configurations géométriques utilisées dans nos simulations. Nous imposons qu'un diffuseur soit tangent à chacune des interfaces horizontales de l'écran. Le format de l'écran de diffuseurs est toujours le même dans chaque simulation : l'épaisseur et la largeur de l'écran sont respectivement égales à $18a$ et $200a$. Des conditions périodiques ont été imposées sur les côtés perpendiculaires à l'écran de diffuseurs afin de simuler un écran d'extension latérale infinie. Nous avons vérifié que la largeur de l'écran est suffisamment grande pour que les effets de périodicité soient négligeables. Des PMLs [82, 83] (*perfect match layer*) sont placés au dessus et en dessous de l'écran afin qu'il n'y ait pas de réflexion des ondes sur les bords du domaine d'étude.

Deux lignes de récepteurs, placées de chaque côté de l'écran de diffuseurs, relèvent les champs réfléchis et transmis. Ces lignes sont composées de récepteurs ponctuels qui relèvent la pression au nœud du maillage où ils se trouvent. Effectuer la moyenne de la pression sur une ligne revient à simuler un transducteur, car un transducteur intègre la pression agissant sur sa surface. Nous effectuons plusieurs simulations où seule la configuration de positions des diffuseurs change, puis la moyenne sur ces configurations des ondes réfléchies et transmises est calculée. On suppose que les ondes cohérentes réfléchies et transmises sont obtenues lorsque ce processus de prises de moyenne a convergé. Notons qu'avec les

simulations que nous avons effectuées, nous avons observé que plus la concentration est élevée et plus la convergence de la moyenne est rapide (elle converge un nombre moindre de configurations). De même plus le rapport entre la vitesse de phase des ondes se propageant dans les diffuseurs et dans la matrice est faible, plus la convergence est rapide. De plus, plus la fréquence augmente, plus la convergence de la moyenne est lente.

Outre la réponse cohérente de l'écran de diffuseurs, le nombre d'onde cohérent k_{eff} (et par suite la vitesse de phase c_{eff} et l'atténuation α_{eff} effectives de l'onde cohérente) est déterminé à partir d'une ligne de récepteurs placée parallèlement à la direction de propagation de l'onde incidente dans toute l'épaisseur de l'écran. La pression $p(x)$ de l'onde cohérente le long de sa direction de propagation est alors recherchée sous la forme suivante :

$$p(\mathbf{r}) = P_0 e^{i\left(\frac{\omega}{c_{\text{eff}}} + i\alpha_{\text{eff}}\right)x}, \quad (1.50)$$

où l'inconnue P_0 est l'amplitude à valeurs complexes de la pression. L'expression (1.50) suppose la présence d'une seule onde cohérente (progressive) à l'intérieur de l'écran, cette hypothèse ayant été justifiée dans le contexte de cette étude [84]. Le nombre d'onde effectif est obtenu en minimisant l'écart quadratique entre l'équation (1.50) et l'onde cohérente progressive obtenue après filtrage dans le domaine des nombres d'onde [85].

L'onde source générée est sous forme d'un sinus cardinal pondéré par une fonction gaussienne (fig. 1.7). Ainsi, le spectre fréquentiel de cette onde tend vers une fonction porte commençant à fréquence nulle et finissant à la fréquence centrale du sinus cardinal. Les coefficients de réflexion et de transmission sont déterminés en divisant respectivement le spectre des ondes cohérentes réfléchi et transmise par celui de l'onde source.

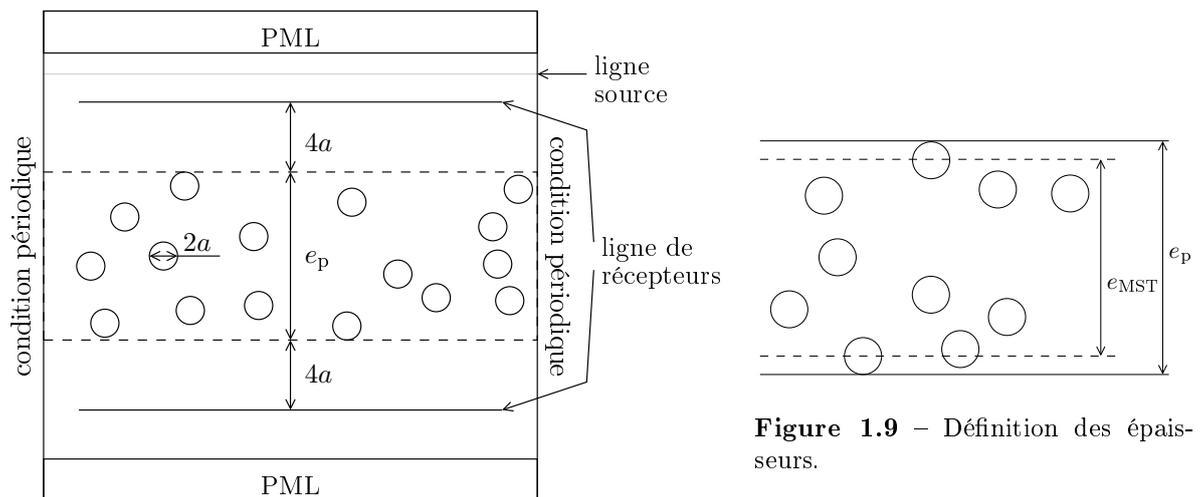


Figure 1.9 – Définition des épaisseurs.

Figure 1.8 – Géométrie d'une simulation pour l'évaluation des champs cohérents réfléchi et transmis.

Dans la section suivante, nous comparerons les résultats numériques ainsi obtenus, avec les techniques d'homogénéisation présentées précédemment pour des diffuseurs linéiques : KT, AA et LC. Comme le montre la figure 1.9, l'épaisseur « théorique » e_{MST} est donnée par la distance entre les centres des cylindres les plus éloignés suivant la normale à l'interface, et l'épaisseur « physique » e_p est

définie par la tangente à ces cylindres. Les concentrations correspondant à ces deux épaisseurs satisfont les relations :

$$\phi_{\text{MST}} = \frac{N\pi a^2}{S_{\text{MST}}}, \quad (1.51)$$

$$\phi_{\text{P}} = \frac{N\pi a^2}{S_{\text{P}}}, \quad (1.52)$$

où N est le nombre de diffuseurs dans l'écran, S_{MST} et S_{P} sont respectivement l'aire de l'écran définie avec l'épaisseur « théorique » et l'épaisseur « physique ».

1.5 Confrontation modèles-simulations : réponse acoustique d'un écran de diffuseurs

Dans cette partie, les coefficients de réflexion et de transmission, et le nombre d'onde effectif sont calculés respectivement à partir des équations (1.35), (1.36) et (1.1) dans lesquels les paramètres effectifs sont ceux de KT (éqs. (1.17)), d'AA (éqs. (1.41) et (1.42)) et de LC (éqs. (1.46) et (1.47)). La convergence du processus de prise de moyenne des ondes a été vérifiée pour chacun des systèmes afin d'accéder aux ondes cohérentes. Nous avons observé que la convergence de la moyenne de l'onde transmise est beaucoup plus rapide que celle de l'onde cohérente réfléchie : une soixantaine de simulations au maximum est nécessaire pour obtenir l'onde cohérente transmise, alors que pour certaines configurations, le calcul de l'onde cohérente réfléchie demande trois cents simulations. L'amplitude de l'onde réfléchie étant parfois inférieure à l'amplitude de la partie incohérente du signal, l'extraction de la partie cohérente nécessite alors un grand nombre de simulations.

Nom	Masse volumique en g.cm^{-3}	Module de compressibilité en GPa
Eau	$\rho = 1$	$\kappa = 2,25$
Fictif 1	$\rho = 0,8$	$\kappa = 2,152$
FC72 (perfluorohexane)	$\rho = 1,68$	$\kappa = 440.10^{-3}$
Fictif 2	$\rho = 1,3$	$\kappa = 13.10^{-3}$

Tableau 1.1 – Propriétés mécaniques des matériaux utilisés dans les simulations.

Les comparaisons sont réalisées pour trois systèmes dont le contraste entre les vitesses de phase de la matrice et des diffuseurs diffère, afin de faire apparaître des phénomènes de résonance des diffuseurs de plus en plus marqués et vérifier la robustesse des modèles au voisinage de ces résonances. Ces résonances correspondent à l'apparition d'un pic marqué des modules des coefficients d'amplitude modale T_n de l'onde diffusée. Dans la suite, nous étudions les propriétés acoustiques effectives des trois systèmes suivants :

1. un système non résonant, constitué de diffuseurs d'eau distribués dans le matériau fictif 1,
2. un système faiblement résonant, constitué de diffuseurs de FC72 immergés dans l'eau,
3. un système fortement résonant, constitué de cylindres de matériau fictif 2 distribués dans l'eau.

Les propriétés mécaniques des milieux choisis sont données dans le tableau 1.1.

1.5.1 Système non résonant : diffuseurs d'eau distribués dans le matériau fictif 1

Les modules des coefficients d'amplitude modale de l'onde diffusée T_n sont présentés sur la figure 1.10 en fonction de la fréquence réduite k_0a . Lorsque $k_0a = 3$, la longueur d'onde de l'onde incidente est de l'ordre de la taille des diffuseurs. Cette figure montre qu'il n'y a pas de résonance sur la plage fréquentielle d'étude.

La figure 1.11 présente les coefficients de réflexion et de transmission pour les concentrations suivantes : $\phi_{\text{MST}} = 4,42\%$, $13,2\%$ et $34,4\%$. À faible concentration (fig. 1.11.a), les modèles analytiques sont en bon accord avec les résultats numériques sur toute la plage d'étude, tout en sous-estimant légèrement les coefficients de réflexion et de transmission numériques. À forte concentration (fig. 1.11.c), le coefficient de réflexion prédit par les modèles décroît avec la fréquence, alors que le résultat numérique croît jusqu'à $k_0a = 1$, avant de décroître. Les modèles analytiques sont en bon accord avec les simulations jusqu'à $k_0a = 0,5$, au delà l'accord est qualitatif. Enfin, plus la concentration est élevée, plus la gamme fréquentielle de validité des modèles est étroite.

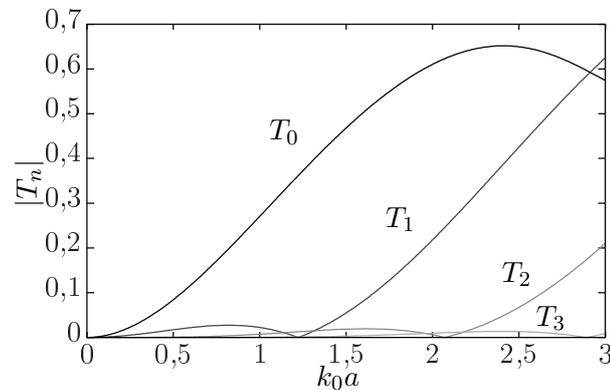


Figure 1.10 – Module des coefficients d'amplitude modale diffusée d'un système composé de diffuseurs d'eau distribués dans le matériau fictif 1.

Par ailleurs, le modèle de KT, bien que provenant de l'hypothèse de diffusion simple prédit des résultats très proches de ceux de AA et LC. Cela s'explique par le fait que les modes monopolaire T_0 et dipolaire T_1 sont prédominants (fig. 1.10). À partir de $k_0a = 2,5$, le mode quadripolaire T_2 devient non négligeable et le modèle de KT s'écarte des autres modèles (fig. 1.11). Observons, néanmoins, aux très basses fréquences [85], que la réflexion prédite par le modèle de LC est plus proche de celle simulée par FDTD.

Les réponses en réflexion de l'écran de diffuseurs présentent des résonances d'épaisseur différentes lorsque les épaisseurs théorique et physique, et leurs concentrations respectives (éqs. (1.51) et (1.52)), sont insérées dans les modèles analytiques. Les fréquences de la première résonance d'épaisseur correspondant à chaque définition encadrent la résonance d'épaisseur des résultats numériques. Cette résonance d'épaisseur numérique peut être alors atteinte à l'aide des modèles analytiques en définissant une épaisseur effective, et sa concentration associée, qui satisfait l'inégalité $e_{\text{MST}} < e_{\text{eff}} < e_p$ [85].

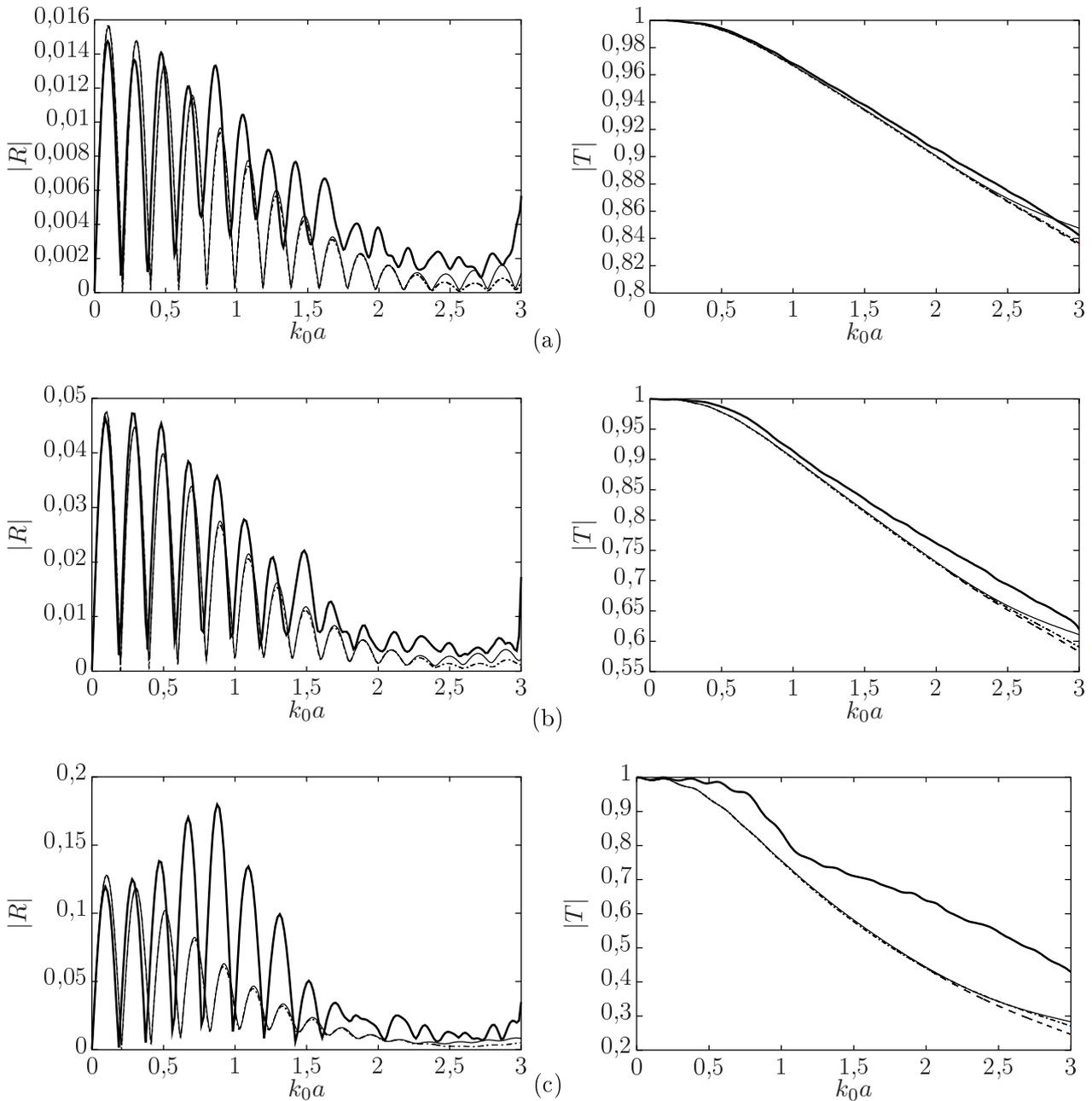


Figure 1.11 – Coefficients de réflexion et de transmission d'un système composé de diffuseurs d'eau distribués dans le matériau fictif 1 pour différentes concentrations ϕ_{MST} : a) 4,42%, b) 13,2% et c) 34,4%. Comparaison entre les résultats numériques (trait plein épais) et ceux issus des modèles de KT (trait plein), de AA (tirets) et de LC (trait mixte).

1.5.2 Système faiblement résonant : diffuseurs de FC72 immergés dans l'eau

La figure 1.12 représente les modules des coefficients d'amplitude modale de l'onde diffusée T_n en fonction de la fréquence réduite k_0a . Le mode monopolaire T_0 ne présente pas de résonance marquée contrairement aux modes dipolaire T_1 et quadripolaire T_2 qui, eux, résonnent respectivement aux fréquences $k_0a = 0,903$ et $1,33$, ces fréquences seront repérées par des pointillés verticaux sur les figures 1.12, 1.13 et 1.14.

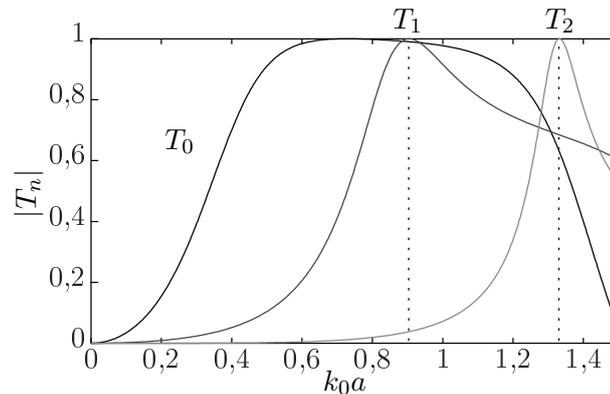


Figure 1.12 – Module des coefficients d'amplitude modale diffusée d'un système composé de diffuseurs de FC72 immergés dans l'eau. Dans la suite du document, les pointillés verticaux correspondent aux fréquences de résonances des diffuseurs.

a) Réflexion et transmission de l'écran

Les coefficients de réflexion et de transmission de l'écran de diffuseurs sont présentés sur la figure 1.13 pour les concentrations suivantes : $\phi_{\text{MST}} = 4,42\%$, $13,2\%$ et $31,4\%$. Lorsque la concentration est faible (fig. 1.13.a), les modèles analytiques et les résultats numériques sont en bon accord. Seul le modèle de KT diffère lorsque $k_0a > 1$ (pour les trois concentrations), car l'amplitude du mode quadripolaire devient non négligeable par rapport aux modes monopolaire et dipolaire (fig. 1.12).

Aux concentrations intermédiaires (figs. 1.13.b), il y a toujours un bon accord entre les modèles analytiques (AA et LC) et les résultats numériques, le pic du coefficient de réflexion autour de $k_0a = 0,5$ n'étant néanmoins pas prédit. Comme pour le premier système, les coefficients de réflexion et de transmission calculés à l'aide du modèle de LC sont plus proches des résultats numériques respectivement aux basses et hautes fréquences. Pour les fortes concentrations (fig. 1.13.c), les modèles analytiques ne sont valides qu'aux très basses fréquences : $k_0a < 0,2$.

b) Nombre d'onde effectif

Les nombres d'onde effectifs prédits par les modèles classiques de la diffusion multiple ont été comparés à des résultats expérimentaux ou numériques dans des configurations où les diffuseurs ne résonnent pas [67,77,84,86–94]. Les formules explicites établies par Foldy [40], Waterman et Truell [45], *etc.*, sont valides lorsque la concentration est faible et à basses fréquences. Lorsque la concentration est élevée, les techniques implicites basées sur la CPA [55] (*coherent potential approximation*) se sont avérées être plus adaptées [89]. L'impact des résonances de diffuseurs sur la validité des prédictions du

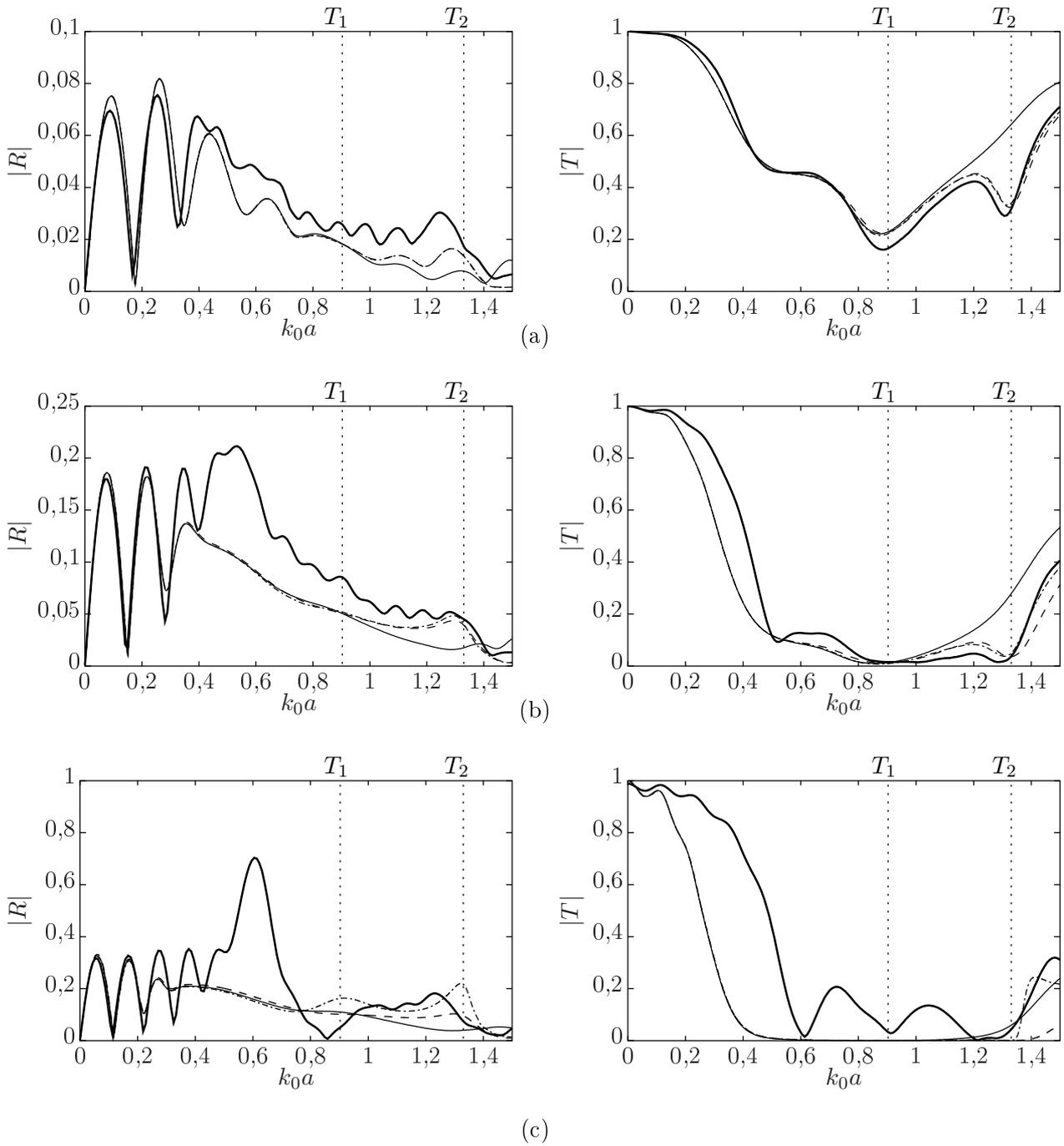


Figure 1.13 – Coefficients de réflexion et de transmission d'un système composé de diffuseurs de FC72 immergés dans l'eau pour différentes concentrations ϕ_{MST} : a) 4,42%, b) 13,2% et c) 31,4%. Comparaison entre les résultats numériques (trait plein épais) et ceux issus des modèles de KT (trait plein), de AA (tirets) et de LC (trait mixte). Les résonances sont repérées par les pointillés verticaux.

nombre d'onde effectif k_{eff} par les modèles analytiques est ici étudiée au travers de la vitesse de phase effective c_{eff} et de l'atténuation effective α_{eff} (fig. 1.14).

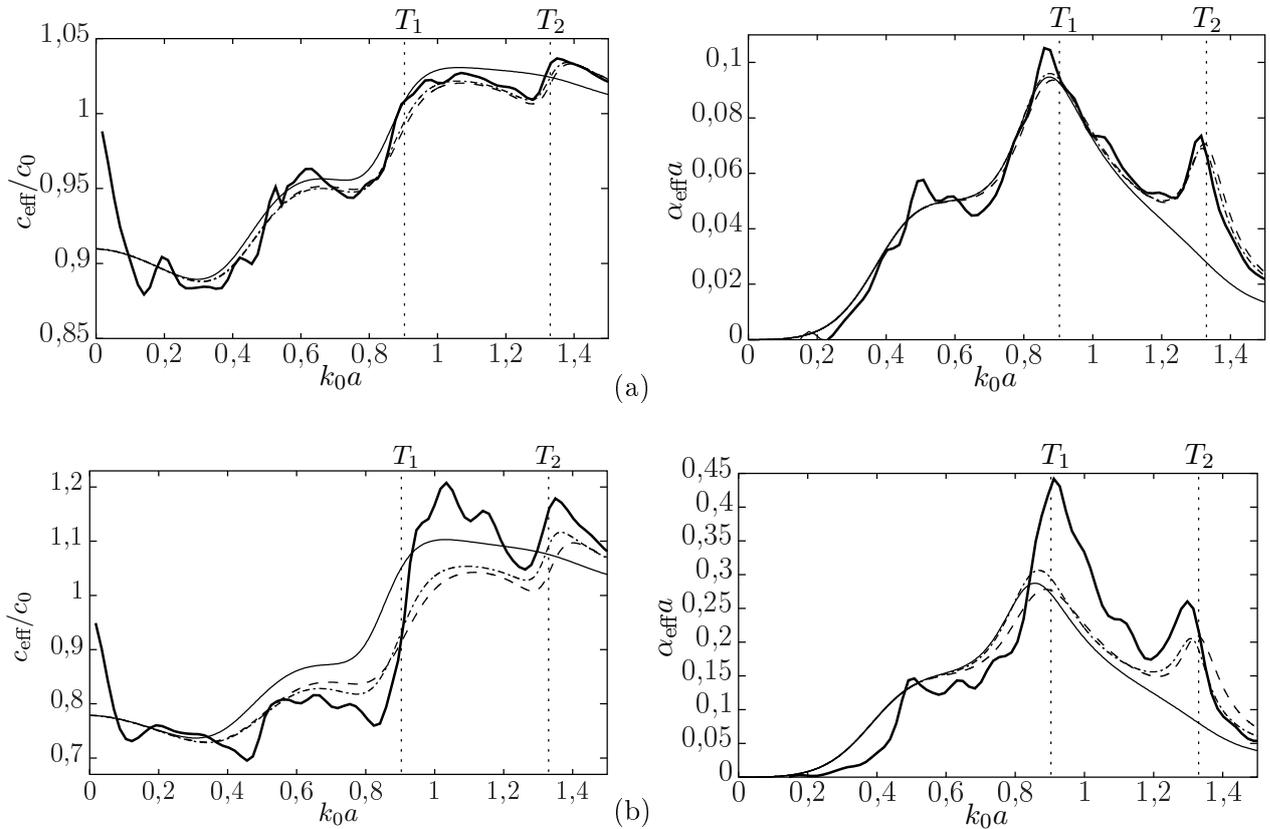


Figure 1.14 – Vitesse de phase et atténuation effectives d'un système composé de diffuseurs de FC72 immergés dans l'eau pour différentes concentrations ϕ_{MST} : a) 4,42%, b) 13,2%. Comparaison entre les résultats numériques (trait plein épais) et les théories de KT (trait plein), de AA (tirets) et de LC (trait mixte).

Les vitesses de phase effectives sont présentées sur la figure 1.14, courbes de gauche. On remarque que le modèle de KT se démarque des deux autres modèles sur toute la plage d'étude, les modèles de AA et de LC restant proches l'un de l'autre. À basses fréquences, les résultats numériques ne correspondent pas aux prédictions théoriques. En effet, à ces fréquences, les longueurs d'onde sont beaucoup plus grandes que l'épaisseur de l'écran, il est donc difficile d'évaluer précisément la vitesse de phase effective à l'aide de la FDTD. En dehors de ce domaine fréquentiel, les modèles sont en bon accord avec les simulations numériques à basse concentration (fig. 1.14.a). Pour une concentration intermédiaire (fig. 1.14.b), le modèle de KT n'est plus adapté, ceux de AA et de LC étant, quant à eux, toujours en bon accord avec le résultat numérique, hormis au voisinage de la résonance dipolaire. Or, sur cette gamme fréquentielle, les forts niveaux d'atténuation effective peuvent entraîner une plus grande incertitude dans la détermination de la vitesse de phase effective.

Les courbes de droite de la figure 1.14 représentent l'atténuation effective adimensionnée par le rayon des diffuseurs, $\alpha_{\text{eff}}a$. L'augmentation de l'atténuation effective aux voisinages des résonances explique les chutes du coefficient de transmission sur ces mêmes plages fréquentielles (fig. 1.13). De plus, contrairement à la vitesse de phase effective, l'atténuation effective prédite par le modèle de KT est proche de celle prédite par les autres modèles tant que les modes monopolaire et dipolaire sont

dominants. À faible concentration (fig. 1.14.a), les modèles sont en bon accord avec les simulations, seul le premier pic numérique n'est pas prédit par les modèles. Pour la concentration intermédiaire (fig. 1.14.b), l'atténuation effective est qualitativement bien décrite, excepté au voisinage de la résonance dipolaire où elle est sous-estimée.

Ces simulations montrent par ailleurs que nous décelons l'onde cohérente même lorsque le régime diffusif est prépondérant. En effet, au voisinage de la fréquence de résonance dipolaire, le libre parcours moyen correspond à 14% de l'épaisseur de l'écran lorsque $\phi_{\text{MST}} = 13,2\%$. Ce résultat avait déjà été obtenu par Tourin [42] qui observait expérimentalement des traces de l'onde cohérente après qu'elle ait parcouru 15 fois le libre parcours moyen élastique.

1.5.3 Système fortement résonant : cylindres de matériau fictif 2 distribués dans l'eau

La figure 1.15 représente les modules des coefficients d'amplitude modale de l'onde diffusée T_n en fonction de la fréquence réduite k_0a . Le mode monopolaire T_0 possède deux fréquences de résonance sur la plage d'étude lorsque $k_0a = 6.10^{-2}$ et 0,272, ainsi qu'une fréquence d'antirésonance à $k_0a = 0,257$ ($|T_0| = 0$). Les modes dipolaire T_1 et quadripolaire T_2 possèdent chacun une fréquence de résonance respectivement lorsque $k_0a = 0,166$ et 0,264. Dans la suite, les fréquences de résonance et d'antirésonance seront repérées respectivement par des pointillés verticaux et un trait mixte vertical.

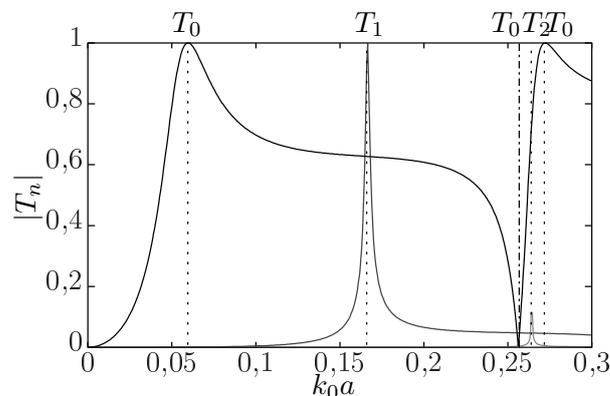


Figure 1.15 – Module des coefficients d'amplitude modale diffusée d'un système composé de cylindres de matériau fictif 2 distribués dans l'eau.

a) Réflexion et transmission de l'écran

Les coefficients de réflexion et de transmission de l'écran de diffuseurs sont présentés sur la figure 1.16 pour les concentrations suivantes : $\phi_{\text{MST}} = 4,7\%$ et 14,14%. Il apparaît que le modèle de LC devient inapproprié pour certaines fréquences, car, au voisinage des résonances dipolaire et quadripolaire, les modules des coefficients de réflexion et de transmission sont supérieurs à 1 (le matériau effectif semble devenir amplifiant).

Pour les faibles concentrations (fig. 1.16.a), il y a toujours un bon accord, principalement qualitatif, entre les modèles analytiques et les simulations numériques. Contrairement au cas faiblement résonant, les résonances monopolaire et dipolaire entraînent une baisse des coefficients de transmission et de

réflexion. Des réponses atypiques apparaissent avec ce système tels des pièges à ondes au voisinage de la résonance monopolaire. À cette fréquence, les modules des coefficients de réflexion et de transmission tendent tous les deux vers 0. L'onde rentre donc dans l'écran de diffuseurs sans réflexion, puis s'atténue totalement à l'intérieur. Au voisinage de l'antirésonance monopolaire, l'écran de diffuseurs devient transparent à l'onde cohérente. La réflexion est nulle et la transmission est totale. La figure 1.15 montre qu'à cette fréquence, seul le coefficient d'amplitude du mode dipolaire est non nul, mais d'amplitude faible : $|T_1| \approx 0,05$. L'onde incidente n'est donc pas perturbée par la présence des diffuseurs. Par ailleurs, lorsque la concentration est suffisamment élevée (fig 1.16.b), la transmission est quasiment nulle sur une large bande fréquentielle : $k_0a \in [0,09 ; 0,23]$.

Lorsque la concentration augmente, les modèles analytiques sont toujours en accord avec les simulations aux très basses fréquences : $k_0a < 0,03$. Les modules des coefficients de réflexion prédits par les modèles de AA et de KT sont en accord qualitatif avec les résultats numériques. Concernant le coefficient de transmission, cette concordance n'est atteinte qu'aux très basses fréquences et au voisinage de l'antirésonance monopolaire.

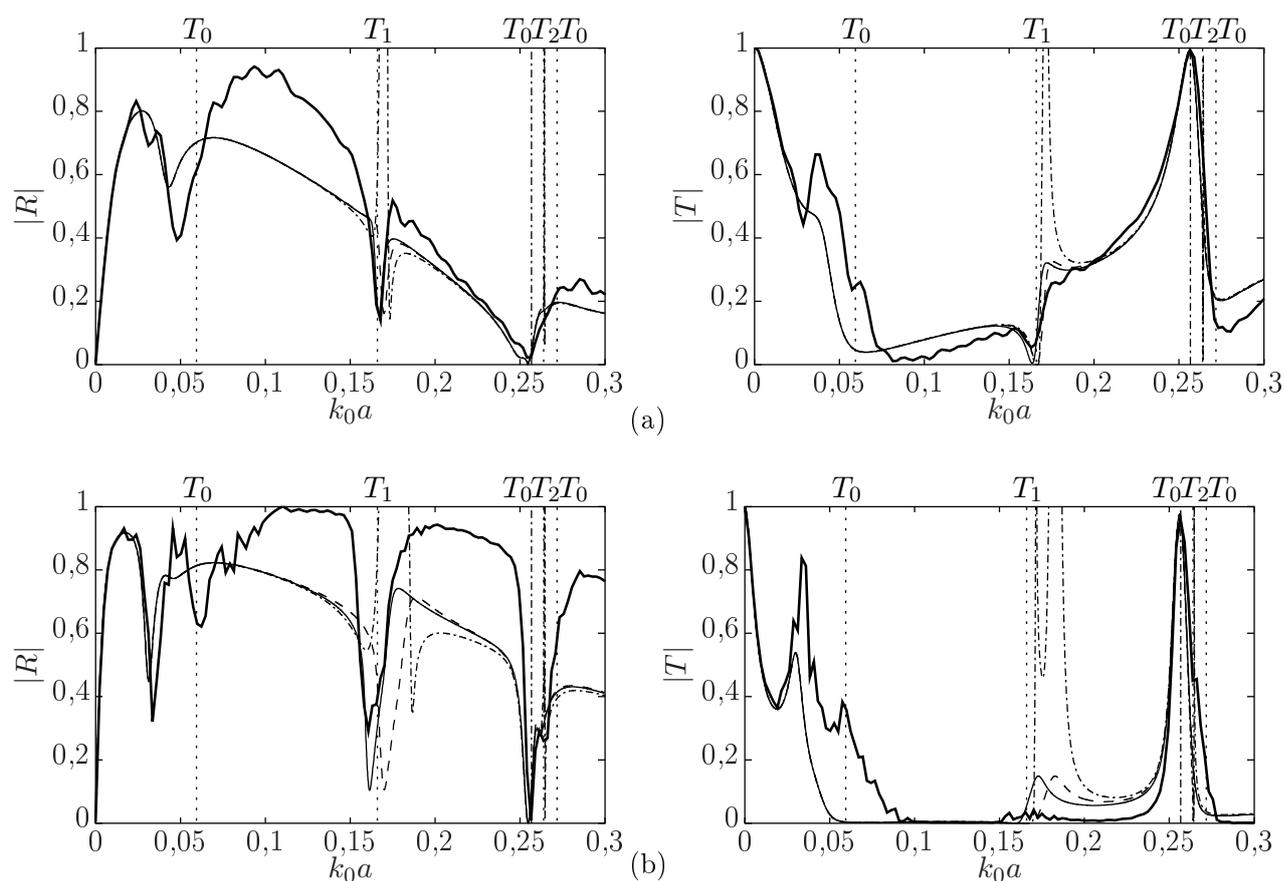


Figure 1.16 – Coefficients de réflexion et de transmission d'un système composé de cylindres de matériau fictif 2 distribués dans l'eau pour différentes concentrations ϕ_{MST} : a) 4,7% et b) 14,14%. Comparaison entre les résultats numériques (trait plein épais) et ceux issus des modèles de KT (trait plein), de AA (tirets) et de LC (trait mixte). Les résonances sont repérées par les pointillés verticaux et l'antirésonance par le trait mixte vertical.

On observe que, contrairement au modèle de AA, celui de KT prédit correctement la chute du coefficient de réflexion au voisinage de la résonance dipolaire et sa dépendance à la concentration. Cette

chute se retrouve toujours à la même fréquence avec le modèle de AA, alors que selon le modèle de KT, la fréquence centrale de cette bande fréquentielle diminue avec la concentration, ce que l'on retrouve sur les simulations. Cette diminution de la fréquence centrale peut provenir de l'augmentation des interactions entre les diffuseurs lorsque la concentration augmente, qui modifie la fréquence de résonance dipolaire de chaque diffuseur [95]. Dans le cas présent, elle semble diminuer lorsque la concentration augmente.

b) Nombre d'onde effectif

La méthode d'identification du nombre d'onde effectif k_{eff} présentée dans la partie 1.4 nous a permis de déterminer la seule atténuation effective représentée sur la figure 1.17. Il apparaît que l'épaisseur de la plaque est très supérieure au libre parcours moyen élastique sur une majeure partie de la plage d'étude, le régime est alors sensé être diffusif. Cependant, numériquement, les moyennes des ondes réfléchie et transmise de part et d'autre de l'écran de diffuseurs convergent, et conduisent aux ondes cohérentes, qui, à certaines fréquences, ont parcouru 19 fois le libre parcours moyen élastique.

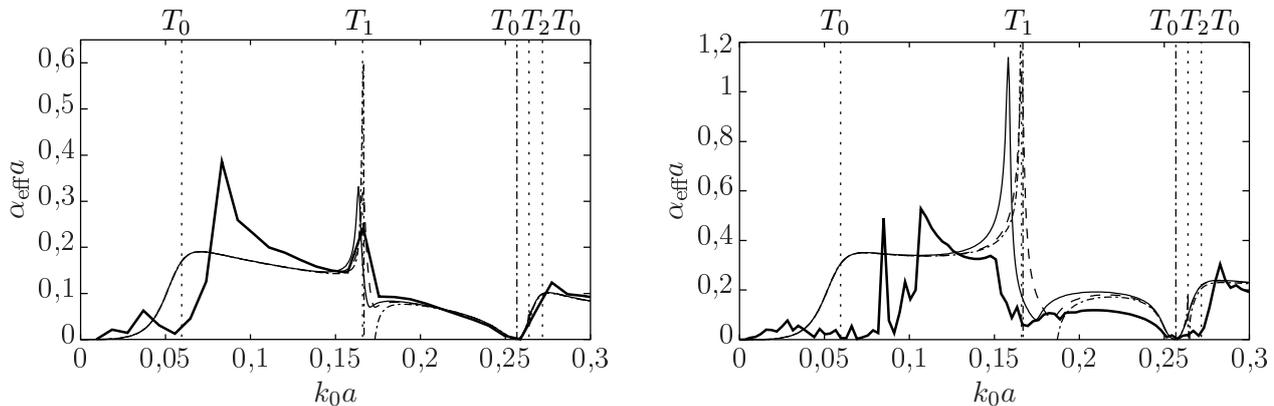


Figure 1.17 – Atténuation effective adimensionnée par le rayon d'un diffuseur d'un système composé de cylindres de matériau fictif 2 distribués dans l'eau pour différentes concentrations ϕ_{MST} : a) 4, 7% et b) 14, 14%. Comparaison entre les résultats numériques (trait plein épais) et ceux issus des modèles de KT (trait plein), de AA (tirets) et de LC (trait mixte). Les résonances sont repérées par les pointillés verticaux et l'antirésonance par le trait mixte vertical.

On remarque qu'aux fréquences où les modules des coefficients de réflexion et de transmission prédits par le modèle de LC sont supérieurs à 1, le matériau est amplifiant et le nombre d'onde effectif vérifie l'inégalité *inattendue* suivante :

$$\Re(k_{\text{eff}}) \Im(k_{\text{eff}}) < 0, \quad (1.53)$$

où $\Re(x)$ désigne la partie réelle du nombre à valeurs complexes x . Le sens de cette inégalité sera discuté plus en détail dans le chapitre 3.

À faible concentration ($\phi_{\text{MST}} = 4, 7\%$), les modèles de KT et de AA sont en bon accord avec les simulations numériques hormis au voisinage de la résonance monopolaire. Les modèles prévoient un pic d'atténuation à la fréquence de résonance, pic que les simulations numériques prédisent à des fréquences plus élevées. Aux concentrations intermédiaires, les résultats issus des modèles ne correspondent plus à ceux obtenus avec la FDTD.

1.6 Propriétés mécaniques quasi-statiques

Nous comparerons dans cette section les limites quasi-statiques des modèles introduits précédemment aux résultats disponibles dans la littérature.

1.6.1 Module de compressibilité effectif

Tous les modèles actuellement disponibles (aussi bien ceux issus de la diffusion simple que ceux issus de la diffusion multiple) possèdent la même limite quasi-statique du module de compressibilité effectif :

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{eff}}} = \frac{1 - \phi}{\kappa_0} + \frac{\phi}{\kappa_1}, \quad (1.54)$$

qui est connu sous le nom de « loi de Reuss ». Cette propriété effective n'est donc pas affectée par les interactions entre les diffuseurs.

1.6.2 Masse volumique effective

La masse volumique effective, quand à elle, diffère selon les modèles utilisés. Ainsi les limites quasi-statiques des modèles de AA (éq. (1.41)) et de LC (éq. (1.46)) sont :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \rho_{\text{eff}}^{\text{AA}} = 1 - 2\phi\tilde{\rho} + o(1), \quad (1.55)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \rho_{\text{eff}}^{\text{LC}} = 1 - 2\phi\tilde{\rho} + 2\phi^2\tilde{\rho}^2 + o(1), \quad (1.56)$$

où :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1}. \quad (1.57)$$

Observons que l'expression (1.56) est identique à celle déterminée par Martin *et al.* [96]. La démarche suivie repose sur l'analyse de l'expression quasi-statique du nombre d'onde effectif identifié pour une distribution aléatoire de diffuseurs linéiques non autorisés à s'interpénétrer. En supposant que la masse volumique effective dépend uniquement de la masse volumique des différents milieux en présence, et que le module de compressibilité effectif ne dépend que des modules de compressibilité des différents milieux, ces auteurs ont établi les relations (1.54) et (1.56).

En suivant cette démarche et en l'appliquant à l'expression dynamique du nombre d'onde effectif établie par Norris et Conoir [54] pour des concentrations plus importantes de diffuseurs linéiques non autorisés à s'interpénétrer, nous avons :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \rho_{\text{eff}}^{\text{NC}} = 1 - 2\phi\tilde{\rho} + 2\phi^2\tilde{\rho}^2 - 2\phi^3\tilde{\rho}^3 + 2\phi^4\tilde{\rho}^4 + o(1). \quad (1.58)$$

Enfin, plus récemment, pour ces mêmes distributions de diffuseurs linéiques, dans le cadre de la diffusion multiple et à l'aide de la QCA, Parnell et Abrahams [53] ont déterminé le nombre d'onde effectif quasi-statique exact, avant d'en extraire la masse volumique effective, identique à celle obtenue

par Kuster et Toksöz (éq. (1.15)) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \rho_{\text{eff}}^{\text{PA}} = \frac{1 - \phi \tilde{\rho}}{1 + \phi \tilde{\rho}} + o(1). \quad (1.59)$$

Contrairement aux travaux de Norris et Conoir, la dépendance à la concentration du nombre d'onde effectif n'est maintenant plus polynomiale.

La linéarisation pour de faibles concentrations ($\phi < 1$) de l'expression quasi-statique (1.59) :

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \rho_{\text{eff}}^{\text{KT}} = 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (-\phi \tilde{\rho})^q, \quad (1.60)$$

montre que les masses volumiques effectives obtenues avec les différents modèles basés sur la QCA (éqs. (1.55), (1.56) et (1.58)) correspondent à une linéarisation en ϕ de celle établie par Kuster et Toksöz (éq. (1.15)) dans le cadre de la diffusion simple : AA, LC et Norris et Conoir accèdent respectivement aux ordres $q = 1, 2$ et 4 . La masse volumique effective quasi-statique n'est donc pas affectée par les multiples interactions entre les diffuseurs représentatives des mécanismes de multidiffusion.

1.6.3 Effets inertiels entre phases

Dans la section précédente, nous avons observé que la masse volumique effective (éqs. (1.55), (1.56), (1.58) et (1.59)) ne satisfait pas la loi des mélanges ($\rho_{\text{eff}} = (1 - \phi) \rho_0 + \phi \rho_1$). Ce résultat inhérent aux systèmes à matrice fluide avait déjà été montré par Ament [35]. Cela est dû à des effets inertiels entre les deux phases : lorsque la matrice est solide le déplacement quasi-statique est identique en tout point du système (fig. 1.18.a), alors que lorsque la matrice est fluide, l'amplitude du déplacement quasi-statique de la matrice est différent de celle du cylindre, ceci induisant un écoulement de la matrice autour du cylindre (fig. 1.18.b).

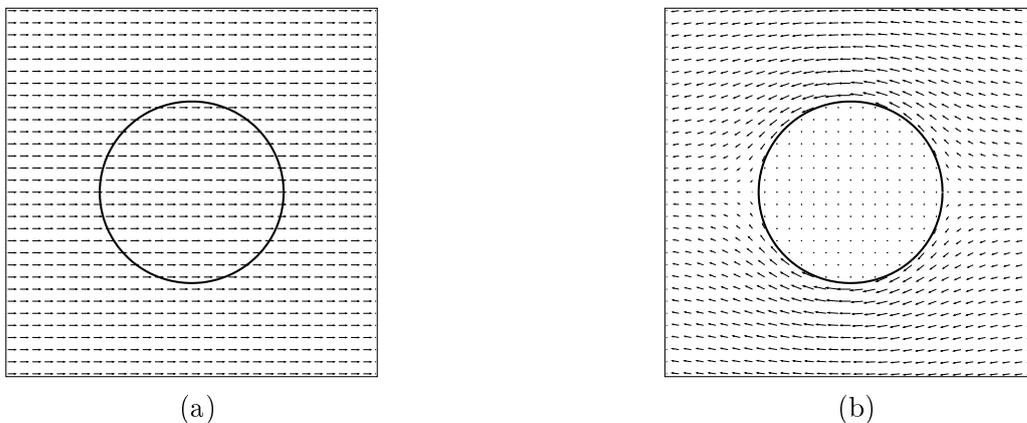


Figure 1.18 – Vecteur déplacement particulière quasi-statique : a) matrice solide et diffuseur quelconque (fluide ou solide), b) matrice fluide et diffuseur quelconque (fluide ou solide), pour plus de clarté, le vecteur déplacement $\mathbf{u}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}_{\text{int}}(\mathbf{r})$ est représenté.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le domaine de validité d'une technique d'homogénéisation dynamique basée sur l'hypothèse de la diffusion simple, et de deux autres basées sur les modèles de diffusion multiple. Pour cela nous avons calculé les modules des coefficients de réflexion et de transmission d'un écran de diffuseurs à partir des modèles analytiques de Li et Chan [30], Aristégui et Angel [58], et Luppé et Conoir [61] et nous les avons comparés à ceux obtenus à l'aide d'un code de simulations numériques par FDTD. Ces modèles sont en accord avec les simulations sur une large bande fréquentielle lorsque la concentration est faible. La largeur de cette bande fréquentielle diminue lorsque la concentration augmente. Pour une concentration donnée, elle diminue également lorsque le contraste entre les propriétés mécaniques de la matrice et des diffuseurs augmente.

Le modèle proposé par Li et Chan [30] est valide tant que les coefficients d'amplitude des modes monopolaire et dipolaire de l'onde diffusée sont prédominants (à basses fréquences). Ce modèle est le plus simple des trois car il a été établi sous l'hypothèse de diffusion simple. Malgré cela, lorsque les diffuseurs résonnent fortement, il semble le mieux adapté car il traduit la diminution de la fréquence de résonance dipolaire lorsque la concentration augmente.

Les modèles de Aristégui et Angel [58] et de Luppé et Conoir [61] sont équivalents pour toutes les configurations testées. Celui de Luppé et Conoir tendant néanmoins à être plus proche des simulations numériques. Toutefois, le modèle de Luppé et Conoir devient inapproprié lorsque les diffuseurs résonnent fortement car le milieu effectif prédit est non physique.

Le modèle de Aristégui et Angel (et par extension celui de Luppé et Conoir tant qu'il est valide) est en très bon accord avec les simulations lorsque la concentration de diffuseurs est faible, même en présence de résonances des diffuseurs. Lorsque le contraste entre les propriétés mécaniques de la matrice et des diffuseurs est faible (fig. 1.11.a), ce modèle reste satisfaisant jusqu'à $k_0 a = 3$, *i.e.* pour des longueurs d'onde de l'onde incidente du même ordre de grandeur que le diamètre des diffuseurs.

Nous avons également observé que les modèles pouvaient s'avérer satisfaisants dans des régimes considérés comme diffusifs : le milieu effectif est alors fortement atténuant et la majeure partie de l'onde incidente est réfléchie. On accède cependant à une onde cohérente transmise s'étant propagée sur des distances supérieures à dix fois le libre parcours moyen élastique.

Pour certaines configurations, nous avons comparé les nombres d'onde effectifs prédits par ces modèles avec ceux déterminés numériquement. Les résultats numériques montrent que l'atténuation effective augmente au voisinage des résonances des diffuseurs. Pour de faibles concentrations, la vitesse de phase effective et l'atténuation effective prédites par les modèles analytiques sont en bon accord avec les simulations, mais lorsque la concentration augmente, ils ne sont plus conformes.

Les propriétés mécaniques effectives à la limite quasi-statique obtenues par Parnell et Abrahams [53] à partir du nombre d'onde effectif exact, en utilisant le formalisme de la diffusion multiple et la QCA, sont identiques à celles obtenues par Kuster et Toksöz [36] sous l'hypothèse de diffusion simple. Dans cette limite, la QCA ne semble donc pas considérer les interactions entre diffuseurs. Dans le chapitre 2, nous étudierons en quoi la prise en compte de ces interactions affecte l'expression des propriétés mécaniques effectives du milieu homogène équivalent ρ_{eff} et κ_{eff} .

Chapitre 2

Homogénéisation quasi-statique par les moyennes de champs

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les propriétés mécaniques effectives quasi-statiques d'une distribution uniforme et aléatoire de diffuseurs obtenues avec l'approximation quasi-cristalline (QCA) en considérant les mécanismes de multidiffusion entre objets sont identiques à celles déterminées sous l'hypothèse de diffusion simple. Ceci semble indiquer que les interactions aller-retour ne sont pas prises en compte avec cette approximation, ce qui montrerait que les modèles l'utilisant ne sont pas adaptés aux fortes concentrations dans le régime quasi-statique. Rappelons que dans ce manuscrit nous cherchons à obtenir des propriétés acoustiques atypiques à partir d'un milieu aléatoire, telles que des bandes fréquentielles interdites ou de la transparence acoustique. Ces comportements non conventionnels n'apparaissent qu'à forte concentration dans un milieu où les diffuseurs résonnent à basses fréquences (*cf.* section 1.5.3). Dans ces milieux, il y a de nombreuses interactions, c'est pourquoi nous avons cherché à développer une technique d'homogénéisation prenant en compte toutes les interactions afin de prédire correctement les propriétés acoustiques du milieu effectif. Ainsi, nous accédons aux propriétés mécaniques quasi-statiques effectives, généralisant les formules de Kuster et Toksöz [36] à un nombre d'interactions quelconque entre deux diffuseurs. Nous obtenons également les propriétés mécaniques quasi-statiques effectives d'un milieu constitué de N diffuseurs. Cependant ce dernier modèle est incomplet car il autorise l'interpénétration des diffuseurs et ne prend pas en compte les interactions au sein d'une chaîne de diffuseurs. Contrairement aux techniques classiques d'homogénéisation, cette méthode utilise l'ensemble des champs acoustiques (incident, diffusé et interne) et considère explicitement les interactions entre diffuseurs.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une technique d'homogénéisation de milieux aléatoires qui est une hybridation de la méthode de Nemat-Nasser *et al.* [64] reliant les propriétés mécaniques effectives à la moyenne surfacique des champs acoustiques et de la méthode de Willis [65] reliant les propriétés mécaniques effectives à la moyenne configurationnelle de ces mêmes champs. Ainsi, en suivant l'approche de Nemat-Nasser *et al.*, le milieu est homogénéisé à l'intérieur d'un volume V_p qu'on considère

comme représentatif. La statistique du milieu aléatoire est prise en compte à travers la moyenne configurationnelle. On suppose que les caractéristiques mécaniques du milieu effectif ne dépendent ni de la forme, ni de la taille de ce volume. Cette hypothèse nous autorise à lui imposer une forme géométrique permettant de simplifier les calculs.

Considérons un milieu aléatoire composé d'une matrice fluide et de diffuseurs cylindriques fluides ou solides. Les différents milieux sont homogènes, isotropes et non dissipatifs. La concentration volumique de diffuseurs est notée ϕ . Dans ce milieu, tous les diffuseurs sont susceptibles d'interagir entre eux. On peut sélectionner à l'intérieur de ce milieu, le volume représentatif V_p dont la concentration est identique à celle du milieu étudié. Les diffuseurs en dehors du volume V_p n'interagissent pas avec ceux appartenant audit volume. Ceci revenant à considérer qu'il baigne dans la matrice homogène (fig. 2.1). Ainsi, lorsqu'un seul diffuseur est présent dans le volume d'homogénéisation V_p , il est uniquement excité par l'onde incidente, configuration associée à l'hypothèse de diffusion simple. Les multiples interactions sont prises en compte explicitement lorsque plusieurs diffuseurs sont présents dans le volume représentatif V_p .

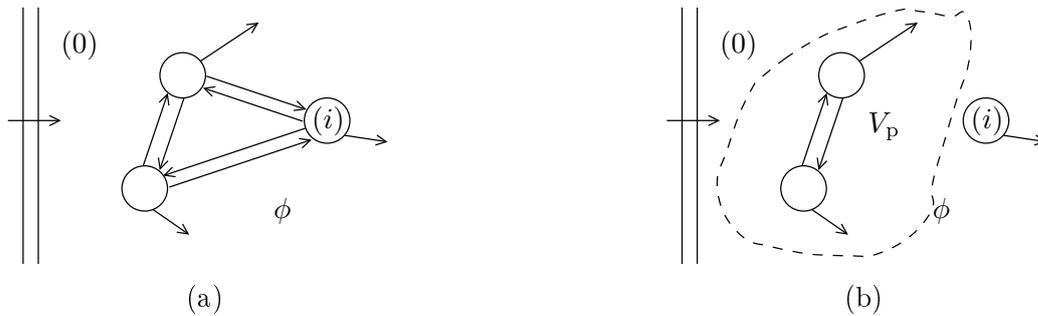


Figure 2.1 – Homogénéisation d'un volume représentatif contenant une concentration ϕ de diffuseurs distribués dans une matrice fluide 0 : a) système infini dans une configuration donnée : toutes les interactions sont présentes ; b) volume représentatif : seules les interactions entre les diffuseurs inclus dans le volume sont prises en compte.

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter les différentes notations et moyennes utilisées, puis le principe de la méthode. Ensuite, nous développons cette technique d'homogénéisation en ne considérant qu'un seul diffuseur afin de se placer sous l'hypothèse de diffusion simple. La masse volumique effective et le module de compressibilité effectif ainsi obtenus sont identiques à ceux déterminés par Kuster et Toksöz [36], ceci validant notre approche à la limite quasi-statique. Finalement, afin d'introduire un processus de multidiffusion, nous écrivons le problème à N diffuseurs en interactions, que nous expliciterons pour deux. La géométrie du problème est identique à celle considérée par la QCA : un diffuseur est fixe et un deuxième diffuseur est mobile relativement au premier. La probabilité de présence du deuxième diffuseur est uniforme sur la surface d'homogénéisation tout en interdisant l'interpénétration des diffuseurs. Le système est insoné par une onde source connue et toutes les interactions possibles peuvent être prises en compte explicitement. Cette dernière description n'est pas autorisée par la QCA où seul un processus de diffusion est explicite. Nous montrons que la masse volumique effective ainsi obtenue dépend du nombre d'interactions aller-retour entre diffuseurs et que, lorsqu'il y a moins de deux interactions, elle est identique à celle établie dans le cadre de la diffusion simple. Le module de compressibilité effectif, quant à lui, ne dépend pas des interactions entre diffuseurs et est toujours identique à celui déterminé dans le cadre de la diffusion simple. Finalement, à l'aide des

résultats obtenus avec deux diffuseurs, nous avons pu étendre cette approche à N diffuseurs, où chaque diffuseur n'interagit qu'avec le diffuseur fixe.

2.2 Notations, paramètres, moyennes de champ

Dans ce chapitre, les tenseurs d'ordre supérieur ou égal à un seront notés en gras, le produit scalaire \cdot et le produit vectoriel \times . L'opérateur nabla (∇) étant tensoriel, la divergence d'un tenseur est notée $\nabla \cdot$, son gradient ∇ et son rotationnel $\nabla \times$. On appelle V le volume de l'objet et S la surface qui entoure ce volume. Observons que le problème de diffusion acoustique traité étant un problème à deux dimensions, la quantité V s'apparentera à l'aire de la section de l'objet et S à son périmètre.

2.2.1 Vecteurs positions des objets et du point d'observation

Le système étudié dans ce chapitre comporte un repère global ($O_0; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$) et des repères locaux attachés aux centres des N diffuseurs en présence. Le repère local associé au diffuseur i de centre O_i , est noté ($O_i; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$). Le vecteur position d'un point M sera noté $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r(\theta)$ dans le repère global et $\mathbf{r}_i = r_i\mathbf{e}_r(\theta_i)$ dans le repère local associé au diffuseur i . La position du centre du diffuseur i dans le repère local associé au diffuseur j est définie par $\mathbf{b}_{ij} = r_{ij}\mathbf{e}_r(\theta_{ij})$, avec $\theta_{ji} = \theta_{ij} + \pi$. \mathbf{b}_{0i} et \mathbf{b}_{i0} désignent alors respectivement la position du centre du repère global dans le repère local associé au point O_i et la position du centre du diffuseur i dans le repère global. Ces notations sont synthétisées sur la figure 2.2.

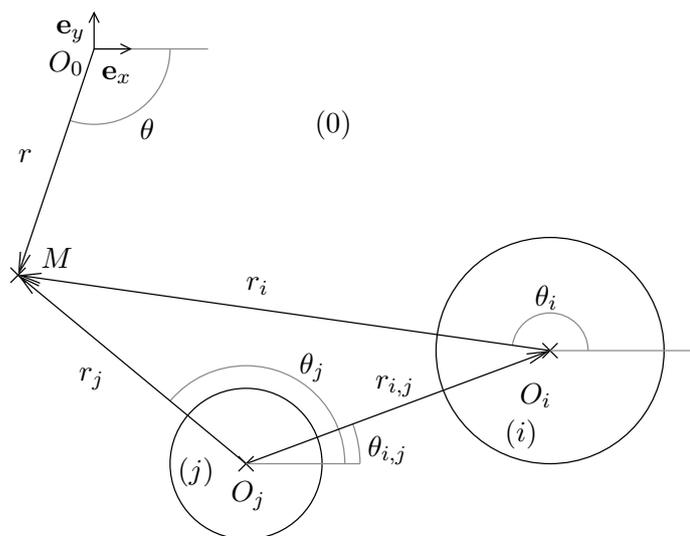


Figure 2.2 – Vecteurs positions dans les repères locaux attachés aux diffuseurs et dans le repère global.

On appellera $f(\mathbf{r})$ et $f(\mathbf{r}_i)$ deux expressions d'un même champ évaluées en un même point géométrique. Dans la première et la seconde fonctions, les coordonnées du point d'observation sont exprimées respectivement dans le repère global et dans le repère local associé au diffuseur i .

2.2.2 Définition de la concentration

Afin de simplifier le calcul des différentes moyennes de la section 2.2.3, nous avons choisi d'utiliser un volume d'homogénéisation cylindrique (figs. 2.3 et 2.8). Lorsque N diffuseurs de rayon a sont intégralement présents dans le volume représentatif, la concentration est définie par :

$$\phi = \frac{Na^2}{R_p^2}, \quad (2.1)$$

où R_p est le rayon du volume représentatif V_p . Cette définition considère qu'aucun diffuseur n'intersecte la surface S_p entourant le volume V_p . Le volume V_{MST} , de rayon $R_{\text{MST}} = R_p - a$, est le plus petit volume englobant tous les centres de diffuseur. Ce volume est relié au nombre n_0 de centres de diffuseur par unité de volume utilisé dans les modèles de diffusion multiple :

$$n_0 = \frac{N}{\pi R_{\text{MST}}^2}.$$

Ce volume est lié à la définition « théorique » de la concentration ϕ_{MST} :

$$\phi_{\text{MST}} = n_0 \pi a^2 = \frac{Na^2}{R_{\text{MST}}^2}. \quad (2.2)$$

Les deux définitions de la concentration satisfont les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_{\text{MST}}} &= \frac{1}{\phi} + \frac{1}{N} - \frac{2}{\sqrt{N\phi}}, \\ \frac{1}{\phi} &= \frac{1}{\phi_{\text{MST}}} + \frac{1}{N} + \frac{2}{\sqrt{N\phi_{\text{MST}}}}. \end{aligned}$$

D'après les équations (2.1) et (2.2), pour de faibles concentrations ou pour un nombre de diffuseurs suffisamment grand, on a :

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} R_p \approx \lim_{\phi \rightarrow 0} R_{\text{MST}} \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} R_p \approx \lim_{N \rightarrow \infty} R_{\text{MST}},$$

R_p et R_{MST} tendant vers l'infini. Sous ces conditions, les deux concentrations sont donc identiques.

2.2.3 Moyennes de champ

Soit un milieu hétérogène composé de N diffuseurs. Le champ acoustique $f(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$ évalué au point d'observation \mathbf{r} dépend de la position de tous les diffuseurs \mathbf{b}_{i0} . Définissons dans cette section les différentes moyennes que nous allons appliquer à ce champ.

a) Moyenne spatiale

On appelle ici moyenne spatiale de $f(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$, notée $\bar{f}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$, la moyenne du champ sur l'espace des points d'observation \mathbf{r} contenus dans le volume représentatif V_p :

$$\bar{f}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = \frac{1}{\pi R_p^2} \int_{V_p} f(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) d\mathbf{r}. \quad (2.3)$$

Cette dernière quantité ne dépend plus que des positions des diffuseurs \mathbf{b}_{i0} .

b) Moyenne configurationnelle

D'une manière générale, les propriétés d'un milieu aléatoire ne sont connues que d'une manière statistique, c'est-à-dire qu'on ne connaît que la concentration des diffuseurs et non leur emplacement exact. On s'affranchit alors de la connaissance exacte des positions des diffuseurs grâce à une moyenne configurationnelle.

Nous considérons dans la suite un nombre restreint de diffuseurs (un ou deux) répartis dans un volume fini (ce volume dépendra du nombre de diffuseurs et de la concentration). Nous calculerons la moyenne configurationnelle en tenant compte d'une probabilité de présence des diffuseurs, uniforme sur le volume représentatif et interdisant l'interpénétration des diffuseurs. Nous présentons ici la définition des moyennes configurationnelles mises en œuvre.

Système à un diffuseur

La méthode proposée utilise la totalité des champs de contrainte et de déplacement : elle s'appuie sur les champs dans la matrice et à l'intérieur du diffuseur. Nous avons ainsi choisi que le diffuseur n'intersecte pas la surface entourant le volume d'homogénéisation. La moyenne configurationnelle $\langle f(\mathbf{r}) \rangle$ d'une fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10})$ est alors calculée sur le volume V_{MST} (fig. 2.3) :

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\pi R_{\text{MST}}^2} \int_{V_{\text{MST}}} f(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}) d\mathbf{b}_{10}. \quad (2.4)$$

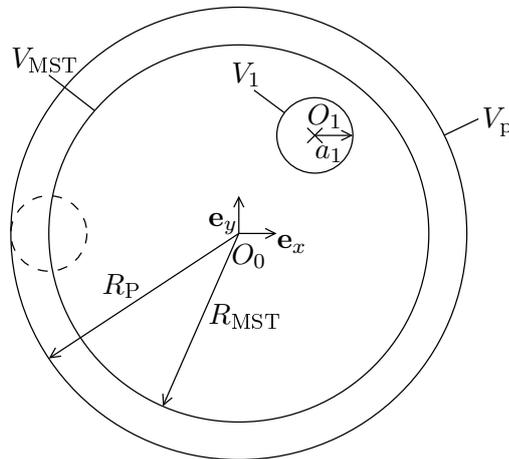


Figure 2.3 – Géométrie du système à un diffuseur. Le cercle en tirets représente une position extrême du diffuseur.

Système à deux diffuseurs

En vue d'homogénéiser un système multidiffusant, nous avons également considéré le cas de deux diffuseurs. Leur distribution spatiale étant considérée uniforme, les positions absolues importent peu. Seule leur position relative affecte la moyenne configurationnelle. Ainsi, nous avons fixé le diffuseur 1 de rayon a_1 , au centre du volume d'intégration ($\mathbf{b}_{10} = \mathbf{0}$). Le diffuseur 2 de rayon a_2 , peut être situé n'importe où dans ce volume. La moyenne configurationnelle $\langle f(\mathbf{r}) \rangle$ d'une fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{20})$ est

alors définie par :

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\pi R_{\text{MST}}^2} \int_{V_{\text{MST}} - V_{12}} f(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{20}) d\mathbf{b}_{20}, \quad (2.5)$$

où V_{12} est le volume d'interpénétration. Dans le cas présent, V_{12} est un cercle de rayon $a_1 + a_2$, centré sur le volume d'intégration. Ainsi, les bornes d'intégration interdisent le recouvrement des diffuseurs et confinent les diffuseurs à l'intérieur du volume d'homogénéisation, comme le montre la figure 2.8. Lorsque $\|\mathbf{b}_{20}\| = a_1 + a_2$, le contact entre diffuseurs est négligé.

c) Théorème de Green

Soit un volume V , de frontière S , le théorème de Green s'écrit :

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.6)$$

où $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ est une fonction vectorielle dont les composantes doivent être C^1 sur le domaine d'intégration et $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ est l'élément de surface élémentaire, où dS est la mesure de l'élément de surface et \mathbf{n} ($\|\mathbf{n}\| = 1$) est la normale sortante (du volume).

Par la suite, toutes les surfaces sont des cercles. Lorsque le milieu considéré entoure un cercle, la normale au domaine est dirigée vers le centre du cercle, alors que lorsqu'il est à l'intérieur, la normale est dirigée vers l'extérieur du cercle. Ainsi, pour éviter toutes confusions sur le sens du vecteur normal, l'élément $d\mathbf{S}$ sera défini dans la suite de ce chapitre par :

$$d\mathbf{S} = r d\theta \mathbf{e}_r,$$

dans le repère associé au centre du cercle considéré. Par conséquent, on exprimera toujours la fonction vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ dans le repère associé au centre du volume considéré. Ainsi, l'intégrale sur un volume cylindrique V_i de rayon a_i , s'exprime d'après (2.6) :

$$\int_{V_i} \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{S_i} \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} r_i \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{e}_r d\theta_i \Big|_{\|\mathbf{r}_i\|=a_i}. \quad (2.7)$$

Cette égalité permet de simplifier grandement les calculs d'intégrales volumiques, qui se réduisent alors à des intégrales sur la seule variable angulaire. Lorsque le volume considéré entoure le volume V_i , la normale est inversée, cela revenant à multiplier les intégrales de surface par -1 dans l'équation (2.7).

d) Composition des moyennes

Le champ $f_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10})$ à l'intérieur du diffuseur et le champ $f_{\text{tot}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10})$ dans la matrice étant deux fonctions différentes, la moyenne configurationnelle (2.4) est définie par :

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int_{V_{\text{MST}} - V_1} f_{\text{tot}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}) d\mathbf{b}_{10} + \int_{V_1} f_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}) d\mathbf{b}_{10}.$$

La figure 2.4 montre que lorsque $\|\mathbf{r}\| \leq R_{\text{MST}} - a$ les contours d'intégration sont composés de deux cercles. Par contre lorsque $\|\mathbf{r}\| > R_{\text{MST}} - a$, la forme du contour d'intégration n'est plus aussi simple,

ceci complexifiant le calcul de la moyenne. Les contours d'intégration lors du calcul de la moyenne spatiale sont toujours composés de deux cercles (fig. 2.3) qui, pour les positions extrêmes des diffuseurs, sont tangents. C'est pourquoi nous commencerons par calculer la moyenne spatiale des champs, puis la moyenne configurationnelle dont le contour du domaine d'intégration se réduit alors simplement à S_{MST} . Rappelons par ailleurs que les fonctions définissant le champ étant continues et bornées sur les domaines d'intégration, l'ordre d'intégration n'a pas d'importance.

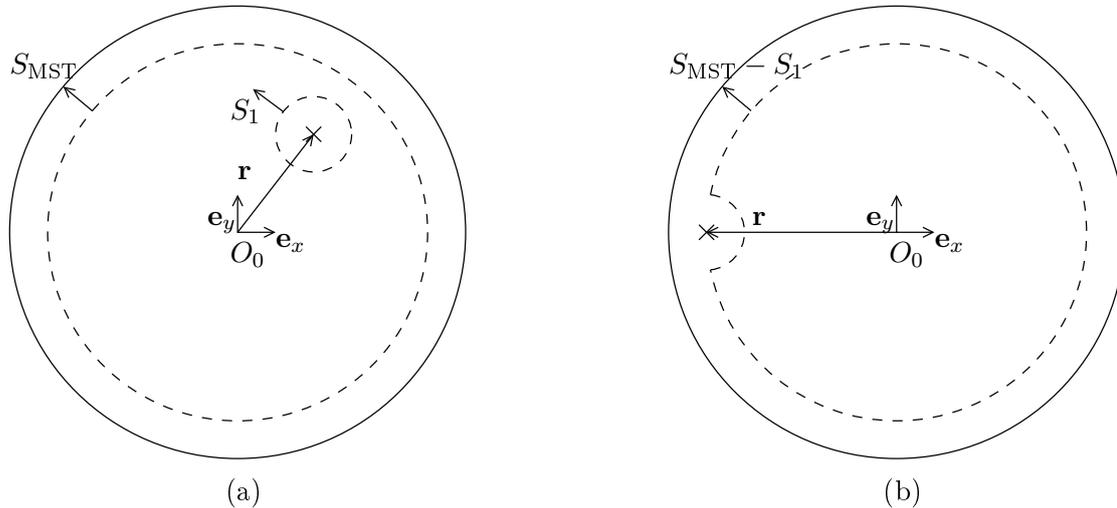


Figure 2.4 – Moyenne configurationnelle : a) $\|\mathbf{r}\| \leq R_{\text{MST}} - a$; b) $\|\mathbf{r}\| > R_{\text{MST}} - a$. Les contours d'intégration sont repérés par les tirets.

2.3 Définition des paramètres effectifs par les moyennes de champs

2.3.1 Approche configurationnelle

La méthode de Willis [65] relie les paramètres mécaniques du milieu effectif aux champs moyens d'un système donné :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}(\mathbf{r}) \rangle &= \boldsymbol{\rho}_{\text{eff}} \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle &= \mathbf{C}_{\text{eff}} : \langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \rangle, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ est le champ des quantités de mouvement, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ est le vecteur vitesse particulière, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ et $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})$ sont respectivement les tenseurs d'ordre deux des contraintes et des déformations. Les moyennes considérées dans les équations (2.8) sont prises au sens configurationnel (éqs. (2.4) et (2.5)), définissant dès lors des champs cohérents (éq. (1.23)). Les relations (2.8) sont valables uniquement à fréquence nulle (régime quasi-statique) comme nous le vérifierons plus tard. Lorsque la fréquence est quelconque, Willis [97] a proposé d'inclure des termes de couplage : la quantité de mouvement moyenne $\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}) \rangle$ et les contraintes moyennes $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle$ dépendent alors simultanément de la vitesse particulière moyenne $\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle$ et de la déformation moyenne $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \rangle$. Dans ce manuscrit, nous négligeons ces termes de couplage. À la lecture des relations (2.8), la masse volumique effective $\boldsymbol{\rho}_{\text{eff}}$ est de façon générale un tenseur d'ordre 2 et le tenseur des rigidités effectives \mathbf{C}_{eff} un tenseur d'ordre 4. N'ayant aucune information *a priori* sur le tenseur \mathbf{C}_{eff} , le matériau peut être à symétrie triclinique. Avec cette définition, le milieu effectif est un milieu anisotrope dont le comportement est régi par 24 constantes à déterminer dans le cas

d'un système tridimensionnel (21 constantes pour le tenseur des rigidités effectives et 3 pour le tenseur des masses volumiques effectives). Pour un système à deux dimensions, le nombre de constantes est réduit à 8. À partir des équations constitutives (2.8), l'enjeu de la méthode est de calculer les champs moyens $\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}) \rangle$, $\langle \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rangle$, $\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle$ et $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \rangle$, puis d'identifier dans un second temps les tenseurs $\boldsymbol{\rho}_{\text{eff}}$ et \mathbf{C}_{eff} , définissant le milieu homogène équivalent.

2.3.2 Approche « macroscopique »

Nemat-Nasser [64] a quant à lui proposé une approche portant sur le comportement global d'un milieu. Dans cette version, les équations constitutives relient les propriétés mécaniques effectives aux moyennes spatiales des champs (éq. (2.3)) :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) &= \boldsymbol{\rho}_{\text{eff}} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}), \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) &= \mathbf{C}_{\text{eff}} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Cette méthode d'homogénéisation a été appliquée aux milieux périodiques. Les paramètres mécaniques effectifs dépendant alors directement de la configuration considérée, cette méthode n'est pas adaptée aux milieux aléatoires.

2.3.3 Approche mixte

La méthode de Willis est dédiée à la description de milieux aléatoires. Cependant, comme nous l'avons vu dans la section 2.2.3, l'évaluation de la moyenne configurationnelle des champs en certains points du domaine d'intégration peut s'avérer délicate (fig. 2.4). De plus, il faudrait s'assurer que les paramètres mécaniques effectifs soient indépendants du point d'observation. La méthode de Nemat-Nasser s'attache au comportement global d'un volume représentatif et ne dépend donc pas du point d'observation. Nous proposons l'approche mixte suivante :

$$\begin{aligned}\langle \bar{\mathbf{q}} \rangle &= \boldsymbol{\rho}_{\text{eff}} \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle, \\ \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle &= \mathbf{C}_{\text{eff}} : \langle \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Le problème posé par chacune des méthodes est résolu par l'emploi simultané des deux. Comme nous le verrons dans la section 2.4.3, cette méthode n'est cependant rigoureusement valide qu'à fréquence nulle.

2.3.4 Application à un système à symétrie axiale

Considérons un volume représentatif cylindrique composé d'un seul cylindre ayant le même centre que le volume représentatif, $\mathbf{b}_{10} = \mathbf{0}$. Ce système est indépendant de l'angle d'incidence de l'onde incidente. Lorsque le cylindre n'est plus centré, ce n'est plus le cas. Cependant, lorsque l'on fait une moyenne configurationnelle sur toutes les positions possibles du centre du diffuseur au sein du volume représentatif, le système est indépendant de l'angle d'incidence (la distribution étant uniforme, la probabilité de présence est identique en tout point du volume). Il en est de même lors de l'étude de deux cylindres dont un est fixé au centre du volume représentatif et l'autre a une probabilité de

présence uniforme. Les deux systèmes que nous allons étudier possèdent une symétrie macroscopique axiale par rapport à l'axe de révolution du volume V_p , ce qui signifie que la masse volumique effective :

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{eff}} = \rho_{\text{eff}} \mathbf{I},$$

dépend du scalaire ρ_{eff} , \mathbf{I} désignant le tenseur identité d'ordre deux. Cette symétrie nous informe également que le milieu effectif est isotrope transverse et plus précisément isotrope dans le plan perpendiculaire à l'axe de révolution du volume V_p :

$$\mathbf{C}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(\text{eff})} & C_{12}^{(\text{eff})} & 0 \\ C_{12}^{(\text{eff})} & C_{11}^{(\text{eff})} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^{(\text{eff})} \end{pmatrix},$$

$$\text{où } C_{66}^{(\text{eff})} = \frac{C_{11}^{(\text{eff})} - C_{12}^{(\text{eff})}}{2}.$$

a) Détermination du module de compressibilité effectif

La matrice étant fluide, seules les ondes longitudinales se propagent en son sein. Le milieu effectif se comporte alors comme un fluide, quelle que soit la nature des diffuseurs (fluides ou solides) : $C_{66}^{(\text{eff})} = 0$, soit $C_{11}^{(\text{eff})} = C_{12}^{(\text{eff})} = \kappa_{\text{eff}}$. Cette hypothèse est justifiée lorsque tous les milieux sont fluides. Elle sera vérifiée *a posteriori* à la limite quasi-statique, lorsque les diffuseurs sont solides.

Dans un milieu homogène isotrope i , le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations *via* la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \lambda_i \text{tr}[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})] \mathbf{I} + 2\mu_i \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}).$$

On a ainsi :

$$\frac{1}{2} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})] = \kappa_i \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad (2.11)$$

où le terme de gauche de cette équation représente la pression isostatique et :

$$\kappa_i = \frac{C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}}{2} = \lambda_i + \mu_i.$$

λ_i et μ_i sont respectivement le premier et le second coefficients de Lamé. Dans le cas d'un fluide parfait, le coefficient de cisaillement est nul ($\mu_i = 0$).

Soient V_0 le volume occupé par la matrice et V_i le volume occupé par le diffuseur i . La moyenne spatiale (2.3) de la pression isostatique dans un système donné s'exprime, à l'aide de la propriété (2.11) :

$$\frac{1}{2} \overline{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \overline{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = \sum_{i=0}^N \kappa_i \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}), \quad (2.12)$$

où :

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = \frac{1}{V_p} \int_{V_i} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) \, d\mathbf{r}, \quad (2.13)$$

est la contribution de la divergence du déplacement dans le milieu i à la moyenne totale de la divergence

du déplacement.

Le milieu effectif étant supposé fluide, l'expression (2.10) reliant les déformations moyennes aux contraintes moyennes se réduit, grâce à l'équation (2.11), à :

$$\frac{1}{2} \langle \overline{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})} \rangle = \kappa_{\text{eff}} \langle \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}} \rangle, \quad (2.14)$$

qui, à l'aide des équations (2.12) et (2.14), conduit à l'expression suivante du module de compressibilité effectif :

$$\kappa_{\text{eff}} = \frac{\left\langle \sum_{i=0}^N \kappa_i \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}^{(i)} \right\rangle}{\left\langle \sum_{i=0}^N \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}^{(i)} \right\rangle}. \quad (2.15)$$

Notons que la détermination de ce module ne nécessite finalement que le calcul de la moyenne spatiale de la divergence du déplacement dans chacun des volumes, $\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$.

b) Détermination de la masse volumique effective

La quantité de mouvement dans un milieu homogène i est définie par :

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \rho_i \mathbf{v}(\mathbf{r}).$$

La moyenne spatiale (2.3) de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = \sum_{i=0}^N \rho_i \bar{\mathbf{v}}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}), \quad (2.16)$$

où :

$$\bar{\mathbf{v}}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = \frac{1}{V_P} \int_{V_i} \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) \, d\mathbf{r},$$

est la contribution de la vitesse particulière dans le milieu i à la moyenne totale de la vitesse particulière.

D'après (2.10), la masse volumique effective ρ_{eff} étant un scalaire :

$$\langle \overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{d}} \rangle = \rho_{\text{eff}} \langle \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}} \rangle, \quad (2.17)$$

elle relie la quantité de mouvement moyenne suivant la direction de propagation de l'onde incidente \mathbf{d} à la vitesse moyenne suivant cette même direction. L'équation (2.17), à l'aide de l'équation (2.16), conduit à l'expression suivante de la masse volumique effective :

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{\left\langle \sum_{i=0}^N \rho_i \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}}^{(i)} \right\rangle}{\left\langle \sum_{i=0}^N \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}}^{(i)} \right\rangle}. \quad (2.18)$$

Notons que la détermination de cette masse volumique ne nécessite que le calcul de la moyenne spatiale

de la vitesse particulière suivant la direction de propagation de l'onde incidente dans chaque volume, $\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$.

2.4 Paramètres effectifs dans le contexte de la diffusion simple

L'objectif de cette section est de calculer le module de compressibilité effectif κ_{eff} et la masse volumique effective ρ_{eff} à l'aide des relations (2.15) et (2.18). Ces expressions sont évaluées analytiquement en considérant des géométries cylindriques du volume représentatif et du diffuseur.

Soit une onde incidente plane harmonique se propageant suivant la direction \mathbf{e}_x . L'origine des phases de cette onde est fixée en $x = 0$. Un seul diffuseur cylindrique de rayon a_1 est présent dans le volume représentatif. La position quelconque du centre de ce diffuseur est définie par le vecteur position \mathbf{b}_{10} . Les caractéristiques se rapportant à la matrice sont notées avec l'indice 0 et celles du diffuseur avec l'indice 1. Les champs de déplacement acoustiques :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \Psi(\mathbf{r}),$$

s'expriment en fonction des potentiels de déplacement $\phi(\mathbf{r})$ et $\Psi(\mathbf{r})$ associés respectivement aux ondes longitudinales et transversales [70].

L'onde source est définie par son potentiel de déplacement :

$$\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} = \sum_n A_{\text{inc}}(n) J_n(k_0 r) e^{in\theta}, \quad (2.19)$$

où $A_{\text{inc}}(n) = i^n$ est l'amplitude modale du potentiel de déplacement de l'onde incidente longitudinale, k_0 est le nombre d'onde longitudinal dans la matrice et \sum_n représente la somme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$. La relation (2.19) devient, dans le repère local du diffuseur :

$$\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{b}_{10} + \mathbf{r}_1)} = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n A_{\text{inc}}(n) J_n(k_0 r_1) e^{in\theta_1}.$$

Le potentiel de déplacement de l'onde diffusée par le cylindre et celui de l'onde longitudinale siégeant à l'intérieur du diffuseur s'écrivent respectivement :

$$\Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n T_n A_{\text{inc}}(n) H_n^{(1)}(k_0 r_1) e^{in\theta_1},$$

$$\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n C_n A_{\text{inc}}(n) J_n(k_{L1} r_1) e^{in\theta_1},$$

où k_{L1} est le nombre d'onde longitudinal dans le diffuseur. Le potentiel de déplacement $\Psi_{\text{int}}(\mathbf{r}_1) = \psi_{\text{int}}(\mathbf{r}_1) \mathbf{e}_{z_1}$ de l'onde transversale est tel que :

$$\psi_{\text{int}}(\mathbf{r}_1) = -i e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n D_n A_{\text{inc}}(n) J_n(k_{T1} r_1) e^{in\theta_1},$$

où k_{T1} est le nombre d'onde transversal dans le diffuseur. La détermination des coefficients d'amplitude

modale T_n , C_n et D_n est présentée dans les annexes A.3.1 (pour un diffuseur fluide) et A.3.2 (pour un diffuseur solide).

2.4.1 Détermination du module de compressibilité effectif

Afin d'évaluer le coefficient de compressibilité effectif κ_{eff} (éq. (2.15)) considérons la divergence du champ de déplacement :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot [\nabla \Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \Psi(\mathbf{r})] = \Delta \Phi(\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

qui s'exprime en fonction du laplacien du potentiel des ondes longitudinales. Quelle que soit la nature du milieu (fluide ou solide), la connaissance seule du champ $\Phi(\mathbf{r})$ suffit pour déterminer le module de compressibilité effectif. Le champ de contrainte relatif aux ondes source et diffusée ne s'exprime que dans le volume $V_0 = V_p - V_1$ délimité par la surface $S_0 = S_p \cup S_1$ (fig. 2.3). Celui relatif à l'onde au sein du diffuseur est défini à l'intérieur du volume V_1 de frontière S_1 (fig. 2.3). À l'aide de l'égalité (2.20), la moyenne spatiale (2.3) de la divergence du déplacement sur la surface V_p s'exprime alors :

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{1}{\pi R_p^2} \left(\int_{V_0} \Delta [\phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \phi_{\text{diff}}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} + \int_{V_1} \Delta \phi_{\text{int}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right). \quad (2.21)$$

Le champ de contrainte étant continu dans V_0 , l'application du théorème de Green (2.6) à la première intégrale de l'expression (2.21) conduit à :

$$\int_{V_0} \Delta [\phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \phi_{\text{diff}}(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = \int_{S_p} \nabla [\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_1} \nabla [\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) + \Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}_1)] \cdot d\mathbf{S}.$$

Le signe moins apparaît car le volume V_0 entoure le volume V_1 (cf. section 2.2.3.c). Le champ de contrainte étant également continu à l'intérieur du volume V_1 , on peut appliquer le théorème de Green (2.6) à la seconde intégrale de l'expression (2.21) qui se met alors sous la forme suivante :

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{1}{\pi R_p^2} \left(\int_{S_0} \nabla [\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S}_0 + \int_{S_1} \nabla [\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}_1) - \Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) - \Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}_1)] \cdot d\mathbf{S}_1 \right). \quad (2.22)$$

En tenant compte de la géométrie cylindrique des surfaces, l'expression (2.22) devient :

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{1}{\pi R_p^2} \left(\int_0^{2\pi} R_p \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r})] \Big|_{r=R_p} d\theta + \int_0^{2\pi} a_1 \frac{\partial}{\partial r_1} [\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}_1) - \Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) - \Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}_1)] \Big|_{r_1=a_1} d\theta_1 \right). \quad (2.23)$$

Notons que dans le cas où la matrice et le diffuseur sont fluides, la continuité du déplacement radial sur la paroi du diffuseur entraîne :

$$\frac{\partial}{\partial r_1} [\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}_1) - \Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) - \Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}_1)] \Big|_{r_1=a_1} = 0. \quad (2.24)$$

Cette égalité n'est plus vraie lorsque le diffuseur est solide.

Observons que la première et seconde intégrales de l'équation (2.23) sont respectivement exprimées dans le repère global de V_p et dans le repère local attaché au diffuseur. L'évaluation de $\Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r})$ sur le contour S_p (première intégrale de l'équation (2.23)) nécessite l'application du théorème d'addition de Graf [98] :

$$H_n^{(1)}(kr_i) e^{in\theta_i} = \begin{cases} \sum_m H_{n-m}^{(1)}(kr_{ji}) e^{i(n-m)\theta_{ji}} J_m(kr_j) e^{im\theta_j}, & \|\mathbf{r}_j\| < \|\mathbf{b}_{ij}\|, \\ \sum_m J_{n-m}(kr_{ji}) e^{i(n-m)\theta_{ji}} H_m^{(1)}(kr_j) e^{im\theta_j}, & \|\mathbf{r}_j\| > \|\mathbf{b}_{ij}\|, \end{cases} \quad (2.25)$$

avec, comme on peut le voir sur la figure 2.2, $\mathbf{r}_i = \mathbf{b}_{ji} + \mathbf{r}_j$. Le potentiel de déplacement de l'onde diffusée s'exprime donc dans le repère global :

$$\Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n T_n A_{\text{inc}}(n) \sum_m J_{n-m}(k_0 r_{01}) e^{i(n-m)\theta_{01}} H_m^{(1)}(k_0 r) e^{im\theta}.$$

Nous utilisons ici la seconde forme du théorème d'addition de Graf (2.25), car le champ diffusé sera évalué sur la frontière S_p , sur laquelle $\|\mathbf{r}\| > \|\mathbf{b}_{01}\|$. La moyenne spatiale de la divergence du déplacement (2.23) s'exprime en fonction des contributions (2.13) de l'onde diffusée $\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10})$ et de l'onde incidente $\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{inc}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10})$ dans la matrice et de celle de l'onde au sein du diffuseur $\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{int}}^{(1)}}(\mathbf{b}_{10})$:

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}(\mathbf{b}_{10}) = \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10}) + \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{inc}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10}) + \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{int}}^{(1)}}(\mathbf{b}_{10}). \quad (2.26)$$

Sachant que :

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta \begin{cases} = 2\pi & , n = 0, \\ = 0 & , \forall n \in \mathbb{Z}^*, \end{cases} \quad (2.27)$$

et [99] :

$$\frac{\partial J_n(kr)}{\partial r} = -kJ_{n+1}(kr) + \frac{n}{r} J_n(kr), \quad (2.28)$$

on montre que :

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10}) &= \frac{-2k_0}{R_p^2} \left[R_p e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} H_1^{(1)}(k_0 R_p) \sum_n T_n A_{\text{inc}}(n) J_n(k_0 r_{01}) e^{in\theta_{01}} \right. \\ &\quad \left. - a_1 A_{\text{inc}}(0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} T_0 H_1^{(1)}(k_0 a_1) \right], \\ \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{inc}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10}) &= \frac{-2k_0}{R_p^2} A_{\text{inc}}(0) \left[R_p J_1(k_0 R_p) - a_1 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} J_1(k_0 a_1) \right], \\ \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{int}}^{(1)}}(\mathbf{b}_{10}) &= \frac{-2k_{L1}}{R_p^2} A_{\text{inc}}(0) a_1 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} C_0 J_1(k_{L1} a_1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

a) Limite quasi-statique

À la limite quasi-statique, en considérant que $k_0 R_p$, $k_0 a_1$, $k_0 r_{10}$ et $k_{L1} a_1$ tendent tous vers zéro, les développements asymptotiques des fonctions de Bessel et de Hankel (éqs. (D.16) et (D.18)) conduisent

à :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R_p k_0 T_n J_n(k_0 r_{10}) H_1^{(1)}(k_0 R_p) = \begin{cases} \frac{2T_0}{\pi} + o(k_0^2), & n = 0, \\ o(k_0^2), & \forall n \in \mathbb{Z}^*, \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} a_1 k_0 T_0 H_1^{(1)}(k_0 a_1) = \frac{2T_0}{\pi} + o(k_0^2), \quad (2.31)$$

où $T_0 \propto k_0^2 + o(k_0^2)$. La valeur quasi-statique de $\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10})$ dans la relation (2.29) satisfait donc :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10}) = o(k_0^2). \quad (2.32)$$

En substituant maintenant le développement asymptotique de $J_1(x)$ (éq. (D.11)) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_1(x) = \frac{x}{2} + o(x), \quad (2.33)$$

dans les relations (2.29), nous obtenons :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{inc}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{-A_{\text{inc}}(0)}{R_p^2} k_0^2 (1 - \phi) + o(k_0^2), \quad (2.34)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{int}}^{(1)}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{-A_{\text{inc}}(0)}{R_p^2} k_{L1}^2 C_0 + o(k_0^2). \quad (2.35)$$

En considérant les expressions quasi-statiques (2.32), (2.34) et (2.35) des contributions (2.29), nous déduisons de la relation (2.26) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{-A_{\text{inc}}(0)}{R_p^2} [k_0^2 + \phi (k_{L1}^2 C_0 - k_0^2)] + o(k_0^2). \quad (2.36)$$

Observons que même si les expressions générales (2.29) sont fonctions de toutes les ondes (incidente, diffusée et interne) et de tous les modes n du cylindre, elles sont indépendantes de l'onde diffusée (éq. (2.32)). De plus, cette limite quasi-statique (2.36) ne dépend plus que du mode monopolaire du cylindre ($A_{\text{inc}}(0)$ et C_0).

Les développements asymptotiques (A.47) et (A.49) des coefficients d'amplitude modale de l'onde à l'intérieur du cylindre montrent que, quelle que soit la nature du diffuseur (fluide ou solide), lorsqu'il est insoné par une onde plane incidente ($A_{\text{inc}}(0) = 1$) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} C_0 = \frac{\rho_0 \kappa_1 + \mu_1}{\rho_1 \kappa_1} + o(1). \quad (2.37)$$

En substituant l'équation (2.37) dans l'équation (2.36), on obtient :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{-k_0^2}{R_p^2} \left[1 + \phi \left(\frac{\kappa_0}{\kappa_1} - 1 \right) \right] + o(k_0^2), \quad (2.38)$$

qui, d'après l'équation (2.12), conduit à :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2} \overline{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{-\kappa_0 k_0^2}{R_p^2} + o(k_0^2). \quad (2.39)$$

Finalement, en considérant les relations (2.38) et (2.39), l'expression quasi-statique du module de compressibilité effectif κ_{eff} (2.15) donne :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\kappa_0}{\kappa_{\text{eff}}} = 1 - \phi \left(1 - \frac{\kappa_0}{\kappa_1} \right) + o(1), \quad (2.40)$$

égalité connue sous le nom de loi de Reuss, préalablement identifiée par Kuster et Toksöz [36] (éq. (1.15)). Le module de compressibilité effectif (2.40) ne dépendant pas de la position du diffuseur \mathbf{b}_{10} dans la surface d'homogénéisation, sa valeur ne sera pas affectée par le calcul de la moyenne configurationnelle (2.4).

Afin de montrer que le milieu effectif se comporte comme un fluide à la limite quasi-statique, lorsque le diffuseur est solide ($C_{66}^{(\text{eff})} = 0$), vérifions que $\langle \overline{\sigma_{r\theta}} \rangle = 0$ et $\langle \overline{\epsilon_{r\theta}} \rangle \neq 0$. La moyenne spatiale de la contrainte de cisaillement est définie par :

$$\overline{\sigma_{r\theta}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{1}{\pi R_p^2} \int_{V_1} \sigma_{r\theta}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}) d\mathbf{r} = \frac{1}{\pi R_p^2} \int_0^{a_1} \int_0^{2\pi} r_1 \sigma_{r\theta}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{b}_{10}) d\theta_1 dr_1.$$

À l'aide de l'expression de $\epsilon_{r\theta}$ (A.36) et de l'équation (2.27), cette intégrale se réduit à :

$$\overline{\sigma_{r\theta}}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{2\pi}{\pi R_p^2} D_0 \mu_1 A_{\text{inc}}(0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \int_0^{a_1} [k_{T1}^2 r_1 J_0(k_{T1} r_1) - 2k_{T1} J_1(k_{T1} r_1)] dr_1,$$

or :

$$\frac{\partial}{\partial r_1} [2J_0(k_{T1} r_1) + k_{T1} r_1 J_1(k_{T1} r_1)] = k_{T1}^2 r_1 J_0(k_{T1} r_1) - 2k_{T1} J_1(k_{T1} r_1),$$

donc :

$$\overline{\sigma_{r\theta}}(\mathbf{b}_{10}) = -\frac{2\pi}{\pi R_p^2} D_0 \mu_1 A_{\text{inc}}(0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} [2 - 2J_0(k_{T1} a_1) - k_{T1} a_1 J_1(k_{T1} a_1)]. \quad (2.41)$$

La substitution du développement asymptotique de la fonction $J_n(x)$ (éq. (D.11)) dans l'expression dynamique (2.41) de la moyenne spatiale de la contrainte de cisaillement, conduit à :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\sigma_{r\theta}}(\mathbf{b}_{10}) = o(k_0^2). \quad (2.42)$$

À la limite quasi-statique, le milieu effectif se comporte ainsi comme un fluide lorsque le diffuseur est solide, car la contrainte de cisaillement est négligeable devant la pression isostatique $\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \right) (\mathbf{b}_{10}) \propto k_0^2$.

b) Expression dynamique, cas du diffuseur fluide

La moyenne configurationnelle d'une fonction $f(\mathbf{b}_{10}) = f_1(\mathbf{b}_{10}) + f_2(\mathbf{b}_{10}) + f_3(\mathbf{b}_{10})$ est égale à la somme des moyennes configurationnelles de chacune des fonctions $f_i(\mathbf{b}_{10})$, $\langle f \rangle = \langle f_1 \rangle + \langle f_2 \rangle + \langle f_3 \rangle$, car les intégrales sont distributives par rapport à l'addition. On peut donc calculer séparément la moyenne configurationnelle (2.4) de chacun des termes des équations (2.29) dépendant de \mathbf{b}_{10} .

Soit la composante de $\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10})$ dépendant de R_p , notée :

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(R_p, \mathbf{b}_{10}) = C(R_p) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n T_n A_{\text{inc}}(n) J_n(k_0 r_{01}) e^{in\theta_{01}}, \quad (2.43)$$

où $C(R_p) = \frac{-2k_0}{R_p} H_1^{(1)}(k_0 R_p)$ ne dépend pas de \mathbf{b}_{10} et n'intervient donc pas dans le calcul de la moyenne configurationnelle. Sachant que $A_{\text{inc}}(n) = i^n$ pour une onde incidente plane dont le potentiel de déplacement est normé et que $\theta_{ij} = \theta_{ji} + \pi$, l'équation (2.43) se réécrit sous la forme suivante, après avoir décomposé la fonction exponentielle (2.19) en somme de fonctions de Bessel :

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(R_p, \mathbf{b}_{10}) = C(R_p) \sum_{n,m} i^{n+m} (-1)^m T_n J_n(k_0 r_{10}) J_m(k_0 r_{10}) e^{i(n+m)\theta_{01}}, \quad (2.44)$$

où $\sum_{n,m}$ est la notation abrégée pour $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty}$. La moyenne configurationnelle (2.4) de l'équation (2.44) s'écrit alors comme une intégrale volumique :

$$\left\langle \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(R_p) \right\rangle = \frac{1}{\pi R_{\text{MST}}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{\text{MST}}} r_{10} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(R_p, \mathbf{b}_{10}) \, d r_{10} \, d \theta_{10}. \quad (2.45)$$

D'après la propriété (2.27), l'égalité (2.45) devient :

$$\left\langle \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(R_p) \right\rangle = \frac{2}{R_{\text{MST}}^2} C(R_p) \int_0^{R_{\text{MST}}} r_{10} \sum_n (-1)^n T_n J_n(k_0 r_{10}) J_{-n}(k_0 r_{10}) \, d r_{10}.$$

On montre que :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{2} [J_n^2(kr) - J_{n-1}(kr) J_{n+1}(kr)] \right) = (-1)^n r J_n(kr) J_{-n}(kr), \quad (2.46)$$

et donc finalement :

$$\left\langle \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(R_p) \right\rangle = C(R_p) \sum_n T_n [J_n^2(k_0 R_{\text{MST}}) - J_{n+1}(k_0 R_{\text{MST}}) J_{n-1}(k_0 R_{\text{MST}})]. \quad (2.47)$$

Après avoir établi dans l'équation (2.47) la moyenne configurationnelle de l'expression (2.43), considérons maintenant celles des trois autres termes de (2.29) dépendant de la position du centre du diffuseur *via* la seule fonction $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}}$. Sachant que $\Delta [e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}}] = -k_0^2 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}}$, la moyenne configurationnelle de cette fonction *via* le théorème de Green (2.6) s'écrit :

$$\int_{V_{\text{MST}}} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \, d \mathbf{b}_{10} = \frac{-1}{k_0^2} \int_{S_{\text{MST}}} \nabla e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \cdot d \mathbf{S}.$$

En décomposant la fonction exponentielle en somme de fonctions de Bessel, nous obtenons :

$$\int_{V_{\text{MST}}} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \, d \mathbf{b}_{10} = \frac{-1}{k_0^2} \int_0^{2\pi} R_{\text{MST}} \frac{\partial}{\partial r_{10}} \left[\sum_n i^n J_n(k_0 r_{10}) e^{in\theta_{10}} \right] \Big|_{r_{10}=R_{\text{MST}}} \, d \theta_{10},$$

qui se réduit à l'aide des équations (2.27) et (2.28) sous la forme suivante :

$$\int_{V_{\text{MST}}} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \, d \mathbf{b}_{10} = \frac{2\pi}{k_0} R_{\text{MST}} J_1(k_0 R_{\text{MST}}). \quad (2.48)$$

À l'aide des équations (2.47) et (2.48), les moyennes configurationnelles des relations (2.29), sachant

que $A_{\text{inc}}(0) = 1$, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}}^{(0)} \rangle &= \frac{-2}{R_p^2 R_{\text{MST}}^2} \left(R_p R_{\text{MST}}^2 k_0 H_1^{(1)}(k_0 R_p) \sum_n T_n [J_n^2(k_0 R_{\text{MST}}) - J_{n+1}(k_0 R_{\text{MST}}) J_{n-1}(k_0 R_{\text{MST}})] \right. \\ &\quad \left. - 2a_1 R_{\text{MST}} T_0 H_1^{(1)}(k_0 a_1) J_1(k_0 R_{\text{MST}}) \right), \\ \langle \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{inc}}}^{(0)} \rangle &= \frac{-2}{R_p^2 R_{\text{MST}}^2} [R_p R_{\text{MST}}^2 k_0 J_1(k_0 R_p) - 2a_1 R_{\text{MST}} J_1(k_0 a_1) J_1(k_0 R_{\text{MST}})], \\ \langle \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{int}}}^{(1)} \rangle &= \frac{-2}{R_p^2 R_{\text{MST}}^2} 2a_1 R_{\text{MST}} \frac{k_{L1}}{k_0} C_0 J_1(k_{L1} a_1) J_1(k_0 R_{\text{MST}}). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Enfin, le rapport entre la somme des moyennes configurationnelles (2.49) pondérées par le module de compressibilité des phases associées et la somme de ces trois mêmes moyennes conduit au module de compressibilité effectif κ_{eff} (éq. (2.15)).

c) Expression dynamique, cas du diffuseur solide

Comme nous l'avons vu avec l'équation (2.42), lorsque le diffuseur est solide, la contrainte de cisaillement moyenne est non nulle. On peut montrer que, dans le cas d'un diffuseur solide dans une matrice fluide, quelle que soit la fréquence, $\langle \overline{\epsilon_{r\theta}}^{(0)} \rangle = 0$, sachant que naturellement $\langle \overline{\sigma_{r\theta}}^{(0)} \rangle = 0$. La relation définissant le module de cisaillement effectif, déduite de (2.10), se réduit alors à $\langle \overline{\sigma_{r\theta}}^{(1)} \rangle = C_{66}^{(\text{eff})} \langle \overline{\epsilon_{r\theta}}^{(1)} \rangle$ et par identification, nous obtenons $C_{66}^{(\text{eff})} = \mu_1$. Cette quantité effective ne dépendant pas des propriétés de la matrice, la technique d'homogénéisation proposée (2.10), n'est pas adaptée aux diffuseurs solides en dehors de la limite quasi-statique. En effet, à cette limite, nous avons établi que le milieu effectif se comporte comme un fluide parfait de module de cisaillement $C_{66}^{(\text{eff})}$ nul.

2.4.2 Détermination de la masse volumique effective

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.3, la masse volumique effective ρ_{eff} a été définie comme le rapport de la quantité de mouvement moyenne sur la vitesse moyenne selon la direction de propagation de l'onde incidente. Pour une onde harmonique de pulsation ω , la vitesse particulière $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{r})}{dt}$ et le déplacement particulier $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, satisfont :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{u}(\mathbf{r}). \tag{2.50}$$

Dans la suite, l'étude du champ de vitesse se fera à travers celle du champ de déplacement.

Les composantes du vecteur déplacement des ondes incidente, diffusée et interne, ont été déterminées dans l'annexe A dans le cadre de la diffusion d'une onde incidente plane par un cylindre. Sans perte de généralité, considérons que l'onde incidente se propage suivant les x positifs. Déterminons la composante cartésienne x du déplacement particulier $\mathbf{u}(\mathbf{r})$:

$$u_x(\mathbf{r}) = u_r(\mathbf{r}) \cos(\theta) - u_\theta(\mathbf{r}) \sin(\theta), \tag{2.51}$$

où les éléments $u_r(\mathbf{r})$ et $u_\theta(\mathbf{r})$ sont développés dans l'équation (A.32). Comme nous l'avons présenté dans la section 2.3.4, nous calculons séparément la contribution des différentes ondes à la moyenne

totale. Ainsi :

$$\overline{u_x}(\mathbf{b}_{10}) = \overline{u_{\text{int},x}}^{(1)}(\mathbf{b}_{10}) + \overline{u_{\text{diff},x}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}) + \overline{u_{\text{inc},x}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}),$$

où \mathbf{b}_{10} est le vecteur position du centre du diffuseur 1. Afin de présenter la méthode permettant de déterminer la contribution de chaque onde à la moyenne totale, on développe les calculs à partir du déplacement à l'intérieur d'un diffuseur solide qui est le cas le plus général ici. En introduisant les expressions (A.36) dans l'équation (2.51) et en notant $J'_n(kr) \equiv \frac{\partial J_n(kr)}{\partial r}$, on obtient :

$$u_{\text{int},x}(\mathbf{r}_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n A_{\text{inc}}(n) \begin{pmatrix} C_n \left[J'_n(k_{L1}r_1) \cos(\theta_1) - \frac{i n}{r_1} J_n(k_{L1}r_1) \sin(\theta_1) \right] \\ + D_n \left[\frac{n}{r_1} J_n(k_{T1}r_1) \cos(\theta_1) - i J'_n(k_{T1}r_1) \sin(\theta_1) \right] \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Ce déplacement se décompose en une composante associée à l'onde longitudinale $\mathbf{u}_{\text{int}}^L(\mathbf{r}_1)$ et une composante associée à l'onde transversale $\mathbf{u}_{\text{int}}^T(\mathbf{r}_1)$:

$$u_{\text{int},x}(\mathbf{r}_1) = u_{\text{int},x}^L(\mathbf{r}_1) + u_{\text{int},x}^T(\mathbf{r}_1). \quad (2.53)$$

Sachant que les déplacements associés aux ondes longitudinale et transversale respectent l'équation de Helmholtz :

$$\Delta u_{\text{int},x}^L(\mathbf{r}_1) = -k_{L1}^2 u_{\text{int},x}^L(\mathbf{r}_1) \text{ et } \Delta u_{\text{int},x}^T(\mathbf{r}_1) = -k_{T1}^2 u_{\text{int},x}^T(\mathbf{r}_1), \quad (2.54)$$

et en rappelant que $\nabla \cdot \nabla = \Delta$, nous déduisons des relations (2.54), l'expression suivante du déplacement (2.53) :

$$u_{\text{int},x}(\mathbf{r}_1) = -\nabla \cdot \left[\frac{\nabla u_{\text{int},x}^L(\mathbf{r}_1)}{k_{L1}^2} + \frac{\nabla u_{\text{int},x}^T(\mathbf{r}_1)}{k_{T1}^2} \right].$$

De la même manière, on obtient pour les champs incident et diffusé :

$$u_{\text{inc},x}(\mathbf{r}) = -\frac{\nabla \cdot \nabla u_{\text{inc},x}(\mathbf{r})}{k_0^2},$$

$$u_{\text{diff},x}(\mathbf{r}) = -\frac{\nabla \cdot \nabla u_{\text{diff},x}(\mathbf{r})}{k_0^2}.$$

L'application du théorème de Green (2.6) au calcul de la moyenne spatiale (2.3) du déplacement conduit à :

$$\overline{u_{\text{int},x}}^{(1)}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{a_1}{\pi R_p^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_1} \left[\frac{u_{\text{int},x}^L(\mathbf{r}_1)}{k_{L1}^2} + \frac{u_{\text{int},x}^T(\mathbf{r}_1)}{k_{T1}^2} \right] \Bigg|_{r_1=a_1} d\theta_1. \quad (2.55)$$

À partir des expressions (2.52) et (2.55), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{int},x}^L(\mathbf{r}_1)}{\partial r_1} &= e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n A_{\text{inc}}(n) C_n \begin{pmatrix} J''_n(k_{L1}r_1) \cos(\theta_1) \\ + \left[\frac{i n}{r_1^2} J_n(k_{L1}r_1) - \frac{i n}{r_1} J'_n(k_{L1}r_1) \right] \sin(\theta_1) \end{pmatrix} e^{in\theta_1}, \\ \frac{\partial u_{\text{int},x}^T(\mathbf{r}_1)}{\partial r_1} &= e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n A_{\text{inc}}(n) D_n \begin{pmatrix} -i J''_n(k_{T1}r_1) \sin(\theta_1) \\ + \left[\frac{n}{r_1} J'_n(k_{T1}r_1) - \frac{n}{r_1^2} J_n(k_{T1}r_1) \right] \cos(\theta_1) \end{pmatrix} e^{in\theta_1}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Sachant que :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta) e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} \pi, & n = \pm 1, \\ 0, & n \in \mathbb{Z} / \{-1, 1\}, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\theta) e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} \pm i\pi, & n = \pm 1, \\ 0, & n \in \mathbb{Z} / \{-1, 1\}, \end{cases}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

les intégrales des équations (2.56), pour $\theta_1 \in [0, 2\pi]$, se réduisent à :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_{\text{int},x}^L(\mathbf{r}_1)}{\partial r_1} d\theta_1 &= \pi e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} [A_{\text{inc}}(1)C_1 - A_{\text{inc}}(-1)C_{-1}] \\ &\quad * \left[J_1''(k_{L1}r_1) + \frac{1}{r_1} J_1'(k_{L1}r_1) - \frac{1}{r_1^2} J_1(k_{L1}r_1) \right], \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_{\text{int},x}^T(\mathbf{r}_1)}{\partial r_1} d\theta_1 &= \pi e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} [A_{\text{inc}}(1)D_1 + A_{\text{inc}}(-1)D_{-1}] \\ &\quad * \left[J_1''(k_{T1}r_1) + \frac{1}{r_1} J_1'(k_{T1}r_1) - \frac{1}{r_1^2} J_1(k_{T1}r_1) \right], \end{aligned} \quad (2.57)$$

où * représente le produit de deux scalaires.

À l'aide de l'équation de Bessel suivante [99] :

$$J_1''(kr) + \frac{1}{r} J_1'(kr) - \frac{1}{r^2} J_1(kr) = -k^2 J_1(kr),$$

et des égalité $C_{-1} = C_1$ et $D_{-1} = -D_1$ (sections A.3.1 et A.3.2), la substitution des expressions (2.57) dans l'équation (2.55) conduit à :

$$\overline{u_{\text{int},x}}^{(1)}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{a_1 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}}}{R_p^2} [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] [C_1 J_1(k_{L1}a_1) + D_1 J_1(k_{T1}a_1)]. \quad (2.58)$$

En appliquant la même méthode à l'onde diffusée et sachant que $T_{-n} = T_n$, on obtient :

$$\overline{u_{\text{diff},x}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}}}{R_p^2} \begin{pmatrix} R_p H_1^{(1)}(k_0 R_p) \sum_n A_{\text{inc}}(n) T_n \\ \times [J_{n-1}(k_0 r_{01}) e^{i(n-1)\theta_{01}} - J_{n+1}(k_0 r_{01}) e^{i(n+1)\theta_{01}}] \\ - a_1 [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] T_1 H_1^{(1)}(k_0 a_1) \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

La somme sur n provient de l'utilisation du théorème d'addition de Graf (2.25). Le même raisonnement, appliqué à l'onde incidente, conduit à :

$$\overline{u_{\text{inc},x}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{1}{R_p^2} [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] [R_p J_1(k_0 R_p) - e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} a_1 J_1(k_0 a_1)]. \quad (2.60)$$

a) Limite quasi-statique

À la limite quasi-statique, on considère que $k_{L1}a_1$, $k_{T1}a_1$, k_0r_{01} , k_0a_1 et k_0R_p tendent tous vers zéro. D'après les expressions (A.47) et (A.49), nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} C_1 &= \frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\kappa_1 + \mu_1}{\kappa_1} \sqrt{\frac{\rho_0(\kappa_1 + \mu_1)}{\kappa_0\rho_1}} + o(1), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} D_1 &= -\frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\mu_1}{\kappa_1} \sqrt{\frac{\rho_0\mu_1}{\kappa_0\rho_1}} + o(1).\end{aligned}\tag{2.61}$$

Lorsque le diffuseur est fluide, il suffit de prendre $\mu_1 = 0$ dans les relations (2.61). En considérant le comportement asymptotique (2.33), la valeur quasi-statique de la moyenne du champ (2.58) siégeant à l'intérieur du diffuseur est telle que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{u_{\text{int},x}}^{(1)}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{1}{R_p^2} [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} k_0 a_1^2 + o(k_0).\tag{2.62}$$

Par ailleurs, les développements asymptotiques (D.11), (D.16) et (D.18) permettent de montrer que :

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} T_1 H_1^{(1)}(kr) &\propto k + o(k), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} T_n J_{n-1}(kr) H_1^{(1)}(kr) &\begin{cases} \propto k + o(k), & n = 1, \\ = o(k), & \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}, \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} T_n J_{n+1}(kr) H_1^{(1)}(kr) &\begin{cases} \propto k + o(k), & n = -1, \\ = o(k), & \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \end{cases}\end{aligned}$$

le champ (2.59) se réduit alors à :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{u_{\text{diff},x}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}) = \frac{1}{R_p^2} [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] T_1 \left[R_p H_1^{(1)}(k_0 R_p) - a_1 H_1^{(1)}(k_0 a_1) \right] + o(k_0).$$

Or le développement asymptotique (D.16) montre que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R_p H_1^{(1)}(k_0 R_p) = \lim_{\omega \rightarrow 0} a_1 H_1^{(1)}(k_0 a_1) = \frac{-2}{\pi k_0} + o(k_0^{-1}).$$

Ainsi, à la limite quasi-statique, le déplacement dû à l'onde diffusée est nul en moyenne au premier ordre en k_0 :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{u_{\text{diff},x}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}) = o(k_0).\tag{2.63}$$

Déterminons la limite quasi-statique de l'équation (2.60) après y avoir substitué la relation (2.33). Nous obtenons :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{u_{\text{inc},x}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}) = k_0 \frac{1}{2R_p^2} [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] (R_p^2 - a_1^2) + o(k_0).\tag{2.64}$$

Déduisons maintenant des expressions quasi-statiques des moyennes des déplacements (2.62), (2.63) et (2.64), celles des champs de vitesse associés, à l'aide de l'égalité (2.50). Leur somme constitue la

vitesse particulaire moyenne suivant la direction \mathbf{e}_x :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{v_x}(\mathbf{b}_{10}) = -\frac{i}{2} \omega k_0 [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] \left(1 - \phi + 2\phi \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} \right) + o(k_0). \quad (2.65)$$

Observons que l'expression (2.65) ne dépend pas de la position du diffuseur. Elle ne sera donc pas affectée par le calcul de la moyenne configurationnelle (2.4).

D'après la définition (2.16) de la moyenne spatiale de la quantité de mouvement, nous déduisons de l'expression (2.65) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{q_x}(\mathbf{b}_{10}) = -\frac{i}{2} \omega k_0 [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] \left[\rho_0 (1 - \phi) + 2\phi \frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} \right] + o(k_0). \quad (2.66)$$

Finalement, la masse volumique effective ρ_{eff} étant définie par la relation (2.18) comme le rapport des moyennes (2.65) et (2.66), satisfait à la limite quasi-statique la relation suivante :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\rho_{\text{eff}}}{\rho_0} = \frac{\rho_0 (1 - \phi) + \rho_1 (1 + \phi)}{\rho_0 (1 + \phi) + \rho_1 (1 - \phi)} + o(1). \quad (2.67)$$

Ce résultat est identique à celui de Kuster et Toksöz [36], bien que ces derniers ne considèrent que l'onde diffusée par un diffuseur. La démarche proposée ici dépend également des champs de déplacement dus à l'onde source et à l'onde à l'intérieur du diffuseur. Observons d'après l'équation (2.59), comme pour la compressibilité effective, que même si la masse volumique effective (2.18) dépend de tous les modes du cylindre par la contribution de l'onde diffusée, à la limite quasi-statique elle ne dépend que des modes $n = \pm 1$ ($A_{\text{inc}}(\pm 1)$ dans les équations (2.65) et (2.66)).

b) Expression dynamique

La formule (2.18) reliant la masse volumique effective au déplacement moyen est indépendante de la nature (fluide ou solide) de la matrice et des diffuseurs. Si le diffuseur est fluide, la contribution (2.58) du déplacement à l'intérieur du diffuseur sera obtenue en prenant $D_1 = 0$ et la valeur de C_1 définie dans l'équation (A.46). Si le diffuseur est solide, on utilisera les valeurs de C_1 et de D_1 définies dans l'équation (A.48).

Comme dans le cas de la compressibilité effective, pour déterminer l'expression dynamique du tenseur des masses volumiques effectives, nous effectuons une moyenne configurationnelle au cours de laquelle la dépendance en \mathbf{b}_{10} disparaît. Soit $\overline{u_{\text{diff},x}}^{(0)}(R_p, \mathbf{b}_{10})$, la contribution du déplacement particulaire moyen (2.59), due à l'onde diffusée par le diffuseur, dépendant de R_p :

$$\overline{u_{\text{diff},x}}^{(0)}(R_p, \mathbf{b}_{10}) = C(R_p) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_n A_{\text{inc}}(n) T_n \left[J_{n-1}(k_0 r_{01}) e^{i(n-1)\theta_{01}} - J_{n+1}(k_0 r_{01}) e^{i(n+1)\theta_{01}} \right], \quad (2.68)$$

où $C(R_p) = \frac{H_1^{(1)}(k_0 R_p)}{R_p}$ est indépendant de \mathbf{b}_{10} et n'interviendra donc pas dans le calcul de la moyenne configurationnelle (2.4). En développant la fonction $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}}$ en somme de fonctions de Bessel

et sachant que $\theta_{ij} = \theta_{ji} + \pi$, l'équation (2.68) prend la forme :

$$\overline{u_{\text{diff},x}^{(0)}}(R_p, \mathbf{b}_{10}) = C(R_p) \sum_{n,m} i^{n+m} T_n J_m(k_0 r_{10}) \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} J_{n-1}(k_0 r_{10}) e^{i(m+n-1)\theta_{10}} \\ - (-1)^{n+1} J_{n+1}(k_0 r_{10}) e^{i(m+n+1)\theta_{10}} \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Ainsi, en considérant la propriété (2.27), la moyenne configurationnelle de (2.69) devient :

$$\left\langle \overline{u_{\text{diff},x}^{(0)}}(R_p) \right\rangle = \frac{2i}{R_{\text{MST}}^2} C(R_p) \sum_n T_n \int_0^{R_{\text{MST}}} r_{10} \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} J_{n-1}(k_0 r_{10}) J_{1-n}(k_0 r_{10}) \\ + (-1)^{n+1} J_{n+1}(k_0 r_{10}) J_{-n-1}(k_0 r_{10}) \end{bmatrix} d r_{10}.$$

qui se simplifie en utilisant l'égalité (2.46) :

$$\left\langle \overline{u_{\text{diff},x}^{(0)}}(R_p) \right\rangle = i C(R_p) \sum_n T_n \begin{pmatrix} J_{n-1}^2(k_0 R_{\text{MST}}) + J_{n+1}^2(k_0 R_{\text{MST}}) \\ - J_n(k_0 R_{\text{MST}}) [J_{n-2}(k_0 R_{\text{MST}}) + J_{n+2}(k_0 R_{\text{MST}})] \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Après avoir évalué la moyenne configurationnelle (2.70) du champ moyen (2.68), l'égalité (2.48) nous permet de calculer celles des champs moyens (2.58) et (2.60) et de la partie du champ moyen (2.59) indépendante de R_p . Finalement nous obtenons :

$$\left\langle \overline{v_{\text{diff},x}^{(0)}} \right\rangle = \frac{-i\omega}{R_p^2 R_{\text{MST}}^2} \begin{bmatrix} i R_p R_{\text{MST}}^2 H_1^{(1)}(k_0 R_p) \\ * \sum_n T_n \begin{pmatrix} J_{n-1}^2(k_0 R_{\text{MST}}) + J_{n+1}^2(k_0 R_{\text{MST}}) \\ - J_n(k_0 R_{\text{MST}}) [J_{n-2}(k_0 R_{\text{MST}}) + J_{n+2}(k_0 R_{\text{MST}})] \end{pmatrix} \\ - \frac{4}{k_0} a_1 R_{\text{MST}} J_1(k_0 R_{\text{MST}}) T_1 H_1^{(1)}(k_0 a_1) \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\left\langle \overline{v_{\text{inc},x}^{(0)}} \right\rangle = \frac{-i\omega}{R_p^2 R_{\text{MST}}^2} \left[4 R_p R_{\text{MST}}^2 J_1(k_0 R_p) - \frac{4}{k_0} a_1 R_{\text{MST}} J_1(k_0 R_{\text{MST}}) J_1(k_0 a_1) \right],$$

$$\left\langle \overline{v_{\text{int},x}^{(1)}} \right\rangle = \frac{-i\omega}{R_p^2 R_{\text{MST}}^2} \frac{4}{k_0} a_1 R_{\text{MST}} J_1(k_0 R_{\text{MST}}) [C_1 J_1(k_{L1} a_1) + D_1 J_1(k_{T1} a_1)].$$

Enfin, le rapport entre la somme de ces champs (2.71) pondérés par la masse volumique des phases associées et la somme de ces trois mêmes champs conduit à la masse volumique effective ρ_{eff} (éq. (2.18)).

2.4.3 Critique du modèle

a) Comportement dynamique des paramètres mécaniques effectifs

Dans cette section, nous étudions les expressions dynamiques obtenues avec notre technique d'homogénéisation dans le cas d'un système composé d'une matrice fluide constituée de FC72 et de diffuseurs fluides d'eau dont les caractéristiques mécaniques sont fournies dans le tableau 2.1. Les figures 2.5 et 2.6 présentent respectivement la masse volumique effective et le module de compressibilité effectif pour une concentration $\phi = 5\%$ en fonction de la fréquence adimensionnelle $k_0 a_1$. Les variations brusques des propriétés effectives ne sont pas dues à des résonances des diffuseurs, inexistantes sur la plage d'étude. Elles sont induites par la valeur nulle des dénominateurs des expressions (2.15) et (2.18) de κ_{eff} et ρ_{eff} , à savoir les moyennes de la divergence du déplacement et de la vitesse particulière. Quelle que soit la

forme du volume d'homogénéisation, il existe toujours des fréquences où les moyennes de la divergence du déplacement ou de la vitesse particulaire tendent vers zéro, ce problème est inhérent à la méthode.

FC72	$\rho = 1,68 \text{ g.cm}^{-3}$	$\kappa = 0,44 \text{ GPa}$	$c_0 = 512 \text{ m.s}^{-1}$
eau	$\rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}$	$\kappa = 2,25 \text{ GPa}$	$c_0 = 1500 \text{ m.s}^{-1}$

Tableau 2.1 – Caractéristiques mécaniques des fluides utilisés dans le modèle.

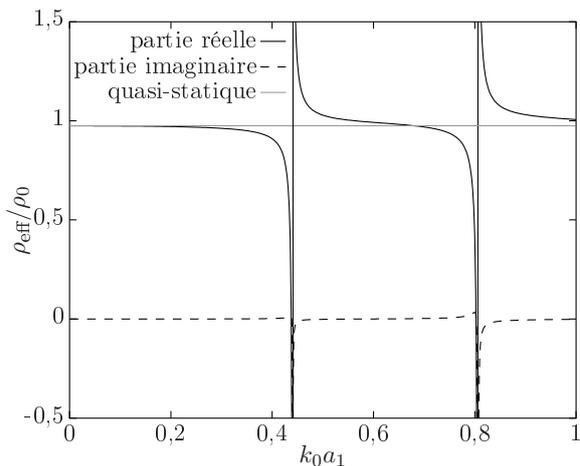


Figure 2.5 – Masse volumique effective en fonction de la fréquence adimensionnelle.

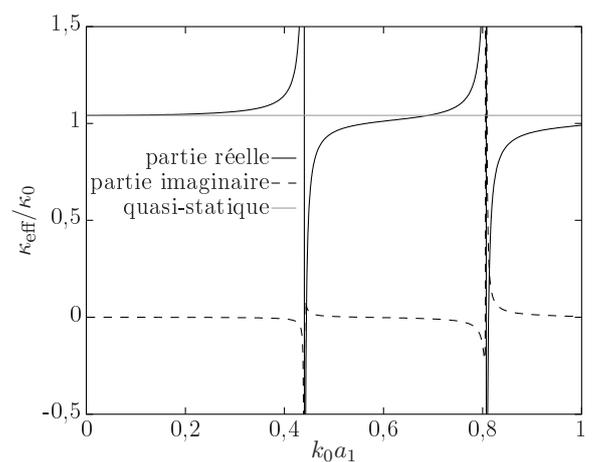


Figure 2.6 – Module de compressibilité effectif en fonction de la fréquence adimensionnelle.

b) Introduction de termes de couplage

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué au milieu effectif, s'écrit :

$$F = i k_{\text{eff}} \kappa_{\text{eff}} \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle - i \omega \rho_{\text{eff}} \langle \bar{v}_x \rangle, \quad (2.72)$$

où F est homogène à une force volumique. Étant donné qu'aucune force volumique n'est présente dans le milieu aléatoire, il devrait en être de même pour le milieu effectif. Le modèle n'est donc valide que lorsque $F = 0$, condition pour laquelle l'équation d'onde est vérifiée par l'onde moyenne. Cette quantité F est présentée sur la figure 2.7 en fonction de la fréquence adimensionnelle. On s'aperçoit que F étant nulle uniquement à la limite quasi-statique, le modèle proposé n'est valide qu'à cette limite.

Cette limitation se retrouve dans des modèles similaires utilisés aussi bien dans des problèmes d'électromagnétisme que d'acoustique [65]. Afin de répondre à ce problème, certains auteurs [97,100] ont proposé d'introduire des termes de couplage dans les lois de comportement (expression de l'impulsion et de la contrainte) :

$$\begin{pmatrix} \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{q}} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\text{eff}} & \mathbf{S}_{\text{eff}} \\ \mathbf{S}_{\text{eff}}^\dagger & \rho_{\text{eff}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \\ \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{S}_{\text{eff}}^\dagger$ est l'adjoint formel de \mathbf{S}_{eff} , c'est-à-dire le transposé du conjugué de \mathbf{S}_{eff} . On retrouve également ce type de relation en électromagnétisme [62].

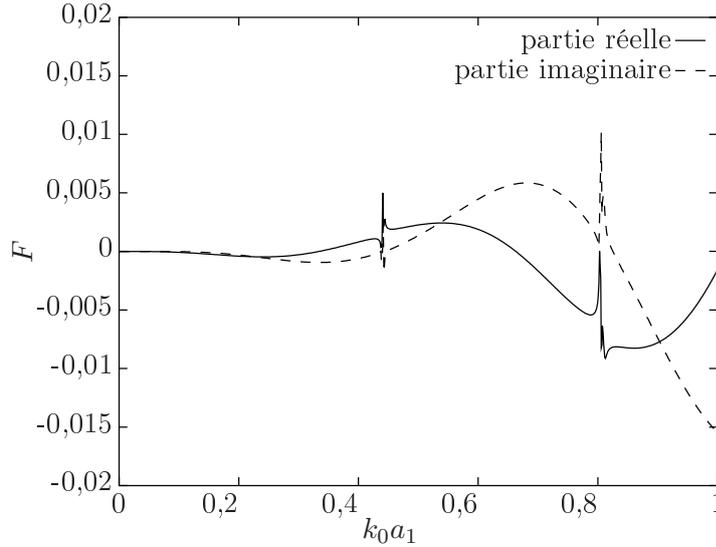


Figure 2.7 – Quantité F (éq. (2.72)) au sein du milieu effectif en fonction de la fréquence adimensionnelle.

2.5 Cas de N diffuseurs en interactions : diffusion multiple

Dans cette section, nous appliquons notre technique d'homogénéisation basses fréquences à un volume représentatif où N diffuseurs interagissent entre eux. Puis nous étudierons le cas de deux diffuseurs en interaction. Le problème de la diffusion d'une onde plane par deux cylindres est présenté dans l'annexe C. On y retrouve la résolution du problème harmonique (avec toutes les interactions), ainsi que la résolution par séries de Debye (interactions successives entre les deux diffuseurs). Le système, présenté sur la figure 2.8, se compose d'un cylindre 1 (de centre O_1 et de rayon a_1) et d'un cylindre 2 (de centre O_2 et de rayon a_2). Les points O_1 et O_2 sont respectivement repérés par \mathbf{b}_{10} et \mathbf{b}_{20} .

Soit $\Phi_{\text{ex}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota)$ le potentiel de déplacement de l'onde excitatrice sur un diffuseur i , dépendant du nombre d'interactions ι considérées et de l'onde incidente. Il s'écrit sous la forme :

$$\Phi_{\text{ex}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota) = \sum_n A_{\text{ex}}^{(i)}(n, \iota) J_n(k_0 r_i) e^{i n \theta_i}.$$

Le potentiel de déplacement de l'onde incidente, exprimé en fonction des coefficients d'amplitude modale $A_{\text{inc}}(n)$, est défini dans le repère global par :

$$\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \sum_n A_{\text{inc}}(n) J_n(k_0 r) e^{i n \theta},$$

lorsque l'origine des phases de l'onde est située en $x = 0$. Dans le repère local associé au diffuseur i , il est égal au potentiel de l'onde excitatrice sans interaction sur ce diffuseur :

$$\Phi_{\text{inc}}^{(i)}(\mathbf{r}_i) = \sum_n A_{\text{ex}}^{(i)}(n, 0) J_n(k_0 r_i) e^{i n \theta_i},$$

avec $A_{\text{ex}}^{(i)}(n, 0) = A_{\text{inc}}(n) e^{i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{i0}}$. Le potentiel de déplacement de l'onde diffusée $\Phi_{\text{diff}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota)$ par le

diffuseur i s'écrit alors :

$$\Phi_{\text{diff}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota) = \sum_n A_{\text{ex}}^{(i)}(n, \iota) T_n^{(i)} J_n(k_0 r_i) e^{in\theta_i},$$

et les potentiels des ondes longitudinales et transversales à l'intérieur du diffuseur i sont définis par :

$$\Phi_{\text{int}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota) = \sum_n A_{\text{ex}}^{(i)}(n, \iota) C_n^{(i)} J_n(k_{L_i} r_i) e^{in\theta_i},$$

$$\psi_{\text{int}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota) = -i \sum_n A_{\text{ex}}^{(i)}(n, \iota) D_n^{(i)} J_n(k_{T_i} r_i) e^{in\theta_i}.$$

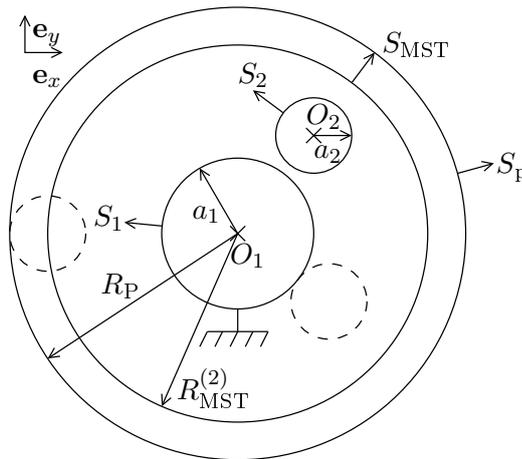


Figure 2.8 – Géométrie du système à deux diffuseurs. Le diffuseur 1 est considéré fixe et est centré sur le repère global. Les cercles représentés en tirets montrent des positions extrêmes que prend le diffuseur 2, $R_{\text{MST}}^{(2)} = R_P - a_2$.

Dans cette section, nous commençons par déterminer la moyenne spatiale (2.3) des champs de contrainte et de vitesse particulière. Dans une configuration donnée, nous connaissons exactement les frontières séparant les différents milieux, la moyenne spatiale est alors calculée à l'aide du théorème de Green (2.6). Finalement, nous introduirons la statistique du milieu à travers une moyenne configurationnelle et obtiendrons un résultat indépendant de la position des diffuseurs.

Les coefficients d'amplitude modale de l'onde excitant chaque diffuseur dans un système multidiffusant ont été définies dans l'annexe C. À la limite quasi-statique, ils ne dépendent que des éléments $T_{\pm 1 \pm 1}$ de la matrice \mathbf{T} des diffuseurs. Or comme le montre l'équation (B.18) de l'annexe B, que l'on considère les T_{nn} calculés en fonction de la pression incidente ou les T_n calculés en fonction du potentiel de déplacement incident (formalisme utilisé dans ce chapitre), les coefficients d'amplitude modale de l'onde excitatrice sont identiques car $T_{nn} = T_n$. De plus, comme établi dans l'annexe A, que le diffuseur soit fluide ou solide, les coefficients d'amplitude modale de l'onde diffusée sont équivalents à la limite quasi-statique. Le développement du raisonnement suivi dans cette section est donc issu des résultats obtenus dans l'annexe C, indépendamment de la nature (fluide ou solide) des diffuseurs.

2.5.1 Problématique de la troncature des champs à l'interaction ι

Dans cette section, nous développons la problématique de la troncature des champs à l'interaction ι dans un système multidiffusant. Cette troncature entraîne une discontinuité des champs à l'inter-

face entre diffuseurs et matrice, qui n'apparaît pas lorsqu'on considère le problème harmonique du système. Nous présentons ici les différentes manières de tronquer le champ. Pour plus de concision, nous considérons le champ de pression et non pas les potentiels de déplacement. Par soucis de clarté, les expressions seront données à la limite quasi-statique pour deux diffuseurs, mais le raisonnement présenté s'applique également pour une fréquence et un nombre de diffuseurs quelconques.

Lorsqu'on recherche à déterminer les coefficients d'amplitude modale de l'onde diffusée et de l'onde siègeant à l'intérieur d'un diffuseur i , la condition de continuité des champs n'est considérée qu'à l'interface de ce diffuseur. Soit $p(\mathbf{r}, \iota)$ la pression associée à l'onde longitudinale, l'équation de continuité à l'interaction ι s'écrit :

$$p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i, \iota) + p_{\text{diff}}^{(i)}(S_i, \iota) = p_{\text{int}}^{(i)}(S_i, \iota), \quad (2.73)$$

où S_i est l'ensemble des vecteurs positions \mathbf{r}_i définissant le contour du diffuseur i , défini par $\|\mathbf{r}_i\| = a_i$.

Dans un système à N diffuseurs, le champ de pression exciteur s'écrit :

$$p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i, \iota) = p_{\text{inc}}^{(i)}(S_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N p_{\text{diff}}^{(j)}(S_i, \iota - 1).$$

Comme on peut le voir dans l'équation (C.27), les coefficients d'amplitude modale de l'onde excitatrice peuvent être définis par une suite récurrente :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(i)}(\iota) = \sum_{q=0}^{\iota} \mathbf{P}^q \mathbf{A}_{\text{inc}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(i)}(\iota - 1) + \mathbf{P}^{\iota} \mathbf{A}_{\text{inc}},$$

où \mathbf{A}_{ex} , \mathbf{A}_{inc} et \mathbf{P} sont donnés dans l'annexe C. Chaque terme de la série $\mathbf{P}^q \mathbf{A}_{\text{inc}}$ correspond à une onde qui a suivi un trajet au cours duquel elle a été diffusée q fois par un cylindre. La pression excitatrice et la pression diffusée se décomposent alors comme une somme de pressions ayant subies chacune q processus de diffusion :

$$p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i, \iota) = \sum_{q=0}^{\iota} q p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i) \quad \text{et} \quad p_{\text{diff}}^{(i)}(S_i, \iota) = \sum_{q=0}^{\iota} q p_{\text{diff}}^{(i)}(S_i).$$

L'équation de continuité (2.73) est exprimée pour chaque diffuseur indépendamment : lorsqu'on s'intéresse à un diffuseur, on ignore le second. Lorsqu'on s'intéresse à deux diffuseurs en même temps, alors le champ exciteur sur le second diffuseur est à l'ordre $\iota + 1$ quand le premier diffuseur diffuse à l'ordre d'interaction ι . Il faut donc définir comment tronquer les champs à un ordre d'interaction donné. On peut considérer par exemple que la composante ${}^{\iota+1}p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i)$ du champ exciteur existe mais n'excite pas le diffuseur i . La pression à l'interface du diffuseur est alors discontinue car :

$$\begin{aligned} p_{\text{int}}^{(i)}(S_i, \iota) &= \sum_{q=0}^{\iota} q p_{\text{diff}}^{(i)}(S_i) + \sum_{q=0}^{\iota+1} q p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i), \\ &= p_{\text{diff}}^{(i)}(S_i, \iota) + p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i, \iota) + {}^{\iota+1}p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i). \end{aligned}$$

D'un autre point de vue, on peut supposer que l'onde excitatrice sur le diffuseur i à l'interaction ι

soit celle correspondant à l'équation de continuité (2.73) des champs. Pour cela, nous considérons que le terme en $q = \iota$ de l'onde diffusée par l'autre diffuseur est nul :

$$\begin{aligned} p_{\text{int}}^{(i)}(S_i, \iota) &= p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i, \iota) + p_{\text{diff}}^{(i)}(S_i, \iota) - {}^\iota p_{\text{diff}}^{(i)}(S_i), \\ &= p_{\text{ex}}^{(i)}(S_i, \iota) + p_{\text{diff}}^{(i)}(S_i, \iota - 1). \end{aligned}$$

Remarquons que même s'il y a discontinuité des champs à l'interface entre deux milieux, l'utilisation du théorème de Green est toujours possible, car au sein d'un milieu donné le champ reste continu.

Comme nous l'avons vu dans la section 1.3.2, dans les modèles de diffusion multiple le dernier diffuseur de la chaîne de diffusion ne diffuse pas. La deuxième méthode de troncature présentée ici étant conforme à cette définition, nous avons choisi de la privilégier. Notons que si on avait supposé que la dernière onde diffusée ${}^\iota p_{\text{diff}}^{(i)}(\mathbf{r})$ par le premier diffuseur ignore la présence du deuxième diffuseur (elle serait alors définie sur le volume $V_p - V_1$ et non sur $V_p - V_1 - V_2$), le résultat obtenu serait identique à la méthode de troncature que nous avons choisie, car comme nous l'avons vu dans les sections 2.4.1 et 2.4.2, $\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(i)}}_{V_p - V_i} = o(k_0^2)$ et $\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\mathbf{u}_{\text{diff},x}^{(i)}}_{V_p - V_i} = o(k_0)$.

2.5.2 Formulation générale : N diffuseurs dans une configuration donnée et ι interactions entre eux

a) Détermination du module de compressibilité effectif

On peut généraliser aisément l'équation (2.22) à N diffuseurs :

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = \frac{1}{\pi R_p^2} \left(\int_{S_p} \left[\nabla \Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^N \nabla \Phi_{\text{diff}}^{(i)}(\mathbf{r}, \iota - 1) \right] \cdot d\mathbf{S} + \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \left[\nabla \Phi_{\text{int}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota) - \nabla \Phi_{\text{ex}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota) - \nabla \Phi_{\text{diff}}^{(i)}(\mathbf{r}_i, \iota - 1) \right] \cdot d\mathbf{S} \right).$$

Cette équation se réécrit simplement en remplaçant les coefficients d'amplitude modale de l'onde incidente par ceux de l'onde excitatrice sur chaque diffuseur dans les formules obtenues à la section 2.4.1. Les équations (2.29) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) &= \frac{-2}{R_p^2} \left(R_p k_0 A_{\text{inc}}(0) J_1(k_0 R_p) + R_p k_0 \sum_{i=1}^N e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{i0}} \sum_n A_{\text{ex}}^{(i)}(n, \iota - 1) T_n^{(i)} J_n(k_0 r_{0i}) e^{in\theta_{0i}} H_1^{(1)}(k_0 R_p) - \sum_{i=1}^N k_0 a_i \left[A_{\text{ex}}^{(i)}(0, \iota - 1) T_0^{(i)} H_1^{(1)}(k_0 a_i) + A_{\text{ex}}^{(i)}(0, \iota) J_1(k_0 a_i) \right] \right), \\ \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) &= \frac{-2}{R_p^2} k_{Li} a_i e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{i0}} A_{\text{ex}}^{(i)}(0, \iota) C_0^{(i)} J_1(k_{Li} a_i), \end{aligned} \tag{2.74}$$

où $\overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{diff}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) + \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{inc}}^{(0)}}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$ réunit les champs incident et diffusé.

À la limite quasi-statique, selon l'annexe C nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(i)}(0, \iota) &= A_{\text{inc}}(0) + o(1), \quad \forall \iota, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(i)}(\pm 1, \iota) &\propto A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(k_0), \quad \forall \iota. \end{aligned} \quad (2.75)$$

À l'aide des équations (2.30) et (2.31), la substitution de la relation (2.75) dans les expressions (2.74) conduit à :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{\nabla \cdot \mathbf{u}}(\mathbf{b}_{10} \cdots \mathbf{b}_{N0}) = \frac{k_0^2}{R_p^2} \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{a_i^2}{R_p^2} \left(\frac{\kappa_0}{\kappa_i} - 1 \right) \right] + o(k_0^2).$$

En appliquant la relation (2.15) à N objets dans une configuration quelconque, on retrouve de nouveau la loi de Reuss (2.40) pour la compressibilité effective. Ce résultat ne dépendant pas de la position des diffuseurs, il reste inchangé après la moyenne configurationnelle (2.5).

b) Détermination de la masse volumique effective

Les équations (2.58) à (2.60) se généralisent pour N diffuseurs :

$$\begin{aligned} \overline{u_x}^{(i)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) &= \frac{a_i}{R_p^2} \left[A_{\text{ex}}^{(i)}(1, \iota) - A_{\text{ex}}^{(i)}(-1, \iota) \right] \left[C_1^{(i)} J_1(k_{Li} a_i) + D_1^{(i)} J_1(k_{Ti} a_i) \right], \\ \overline{u_x}^{(0)}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) &= \frac{1}{R_p^2} \left[\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N R_p H_1^{(1)}(k_0 R_p) \sum_n A_{\text{ex}}^{(i)}(n, \iota - 1) T_n \begin{bmatrix} J_{n-1}(k_0 r_{01}) e^{i(n-1)\theta_{01}} \\ -J_{n+1}(k_0 r_{01}) e^{i(n+1)\theta_{01}} \end{bmatrix} \\ &- \sum_{i=1}^N a_i \left[A_{\text{ex}}^{(i)}(1, \iota - 1) - A_{\text{ex}}^{(i)}(-1, \iota - 1) \right] T_1^{(i)} H_1^{(1)}(k_0 a_i) \\ &+ [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] R_p J_1(k_0 R_p) \\ &- \sum_{i=1}^N a_i \left[A_{\text{ex}}^{(i)}(1, \iota) - A_{\text{ex}}^{(i)}(-1, \iota) \right] J_1(k_0 a_i) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

À la limite quasi-statique, en reprenant les résultats établis dans la section 2.4.2, on montre que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{v_x}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = -i\omega \frac{k_0}{2} \left[[A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] + \sum_{i=1}^N \left[A_{\text{ex}}^{(i)}(1, \iota) - A_{\text{ex}}^{(i)}(-1, \iota) \right] \phi^{(i)} \tilde{\rho}_i \right] + o(k_0), \quad (2.77)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i &= \frac{\rho_0 - \rho_i}{\rho_0 + \rho_i}, \\ \phi^{(i)} &= \frac{a_i^2}{R_p^2}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

La moyenne spatiale (2.16) de la quantité de mouvement selon \mathbf{e}_x est alors évaluée en fonction de la moyenne $\overline{v_x}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$ (éq. (2.77)) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{q_x}(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0}) = -i\omega \frac{k_0}{2} \rho_0 \left[[A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] - \sum_{i=1}^N \left[A_{\text{ex}}^{(i)}(1, \iota) - A_{\text{ex}}^{(i)}(-1, \iota) \right] \phi^{(i)} \tilde{\rho}_i \right] + o(k_0). \quad (2.79)$$

$A_{\text{ex}}(\pm 1, \iota)$ est le seul terme des équations (2.77) et (2.79) dépendant de la position relative des diffuseurs (*cf.* annexe C). Calculons maintenant la moyenne configurationnelle de ce terme lorsque $N = 2$.

2.5.3 Résolution du système avec deux diffuseurs identiques ne s'interpénétrant pas

Dans cette section, nous considérons que les deux diffuseurs sont identiques. Leurs paramètres mécaniques et acoustiques seront notés avec l'indice 1. Étant donné qu'un des diffuseurs est fixé au centre de la surface d'homogénéisation, la géométrie du problème impose que le rayon minimum du volume représentatif pour deux diffuseurs identiques soit $R_p = 4a_1$. La concentration maximale atteinte avec notre méthode impliquant deux diffuseurs est donc :

$$\phi = \frac{2}{9} \approx 22,2\%.$$

L'onde excitatrice sur chaque diffuseur a été déterminée dans l'annexe C. À la limite quasi-statique, nous avons $\lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(n, \iota) = \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(2)}(n, \iota)$ et :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}(\pm 1, \iota) &= \left[\sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} (X_1 X_{-1})^q - X_{\pm 1} \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}-1} (X_1 X_{-1})^q \right] A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1), & \iota = 2\tilde{\iota}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}(\pm 1, \iota) &= \left[(1 - X_{\pm 1}) \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} (X_1 X_{-1})^q \right] A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1), & \iota = 2\tilde{\iota} + 1, \end{aligned} \quad (2.80)$$

avec $X_{\pm 1} = X e^{\mp 2i\theta_{12}}$ et $X = \tilde{\rho}_1 \frac{a_1^2}{r_{12}^2}$. Du fait que $A_{\text{inc}}(-1) = -A_{\text{inc}}(1)$, l'équation (2.80) se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} [A_{\text{ex}}(1, 2\tilde{\iota}) - A_{\text{ex}}(-1, 2\tilde{\iota})] &= A_{\text{inc}}(1) \left[2 \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} X^{2q} - \left(e^{2i\theta_{21}} + e^{-2i\theta_{21}} \right) \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} X^{2q+1} \right] + o(1), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} [A_{\text{ex}}(1, 2\tilde{\iota} + 1) - A_{\text{ex}}(-1, 2\tilde{\iota} + 1)] &= A_{\text{inc}}(1) \left[\left(2 - X \left[e^{2i\theta_{21}} + e^{-2i\theta_{21}} \right] \right) \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} X^{2q} \right] + o(1). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Comme :

$$\int_0^{2\pi} e^{\mp 2i\theta_{12}} d\theta_{12} = 0,$$

la moyenne configurationnelle des limites (2.81) dépend linéairement de $\sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} X^{2q}$. La valeur de la quantité $\langle A_{\text{ex}}(1, \iota) - A_{\text{ex}}(-1, \iota) \rangle$ change toutes les deux interactions, soit à chaque aller-retour entre les diffuseurs. Ainsi, nous avons :

$$\int_{2a_1}^{R_{\text{MST}}} \int_0^{2\pi} r_{12} X^{2q} d\theta_{12} dr_{12} = \begin{cases} \pi \left[R_{\text{MST}}^2 - (2a_1)^2 \right], & q = 0 \\ 2\pi \tilde{\rho}_1^{2q} \frac{a_1^{4q}}{4q - 2} \left[\frac{-1}{r_{12}^{4q-2}} \right]_{2a_1}^{R_{\text{MST}}}, & q > 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

La simplification de l'équation (2.82) pour $q > 0$:

$$\int_{2a_1}^{R_{\text{MST}}} \int_0^{2\pi} r_{12} X^{2q} d\theta_{12} dr_{12} = \frac{2\pi a_1^2}{(4q-2)2^{4q-2}} \tilde{\rho}_1^{2q} \left[1 - (2\phi_{\text{MST}})^{2q-1} \right],$$

conduit à :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle A_{\text{ex}}(1, 2\tilde{\iota}) - A_{\text{ex}}(-1, 2\tilde{\iota}) \rangle &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle A_{\text{ex}}(1, 2\tilde{\iota} + 1) - A_{\text{ex}}(-1, 2\tilde{\iota} + 1) \rangle, \\ &= 2A_{\text{inc}}(1) \left(1 - 2\phi_{\text{MST}} + \sum_{q=1}^{\tilde{\iota}} \frac{\phi_{\text{MST}}}{(4q-2)2^{4q-2}} \tilde{\rho}_1^{2q} \left[1 - (2\phi_{\text{MST}})^{2q-1} \right] \right) + o(1), \end{aligned} \quad (2.83)$$

qui, à l'aide de l'équation (D.1), prend la forme suivante :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\langle A_{\text{ex}}(1, 2\tilde{\iota}) - A_{\text{ex}}(-1, 2\tilde{\iota}) \rangle}{2A_{\text{inc}}(1)(1 - 2\phi_{\text{MST}})} = 1 + \sum_{q=1}^{\tilde{\iota}} \frac{\phi_{\text{MST}}}{(4q-2)2^{4q-2}} \tilde{\rho}_1^{2q} \sum_{p=0}^{2q-2} (2\phi_{\text{MST}})^p + o(1). \quad (2.84)$$

La substitution de la limite (2.84) dans les moyennes configurationnelles de $\bar{v}_x(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$ et $\bar{q}_x(\mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{N0})$ (éqs. (2.77) et (2.79)), conduit finalement, pour un nombre d'interaction donné $\iota = 2\tilde{\iota}$ ou $2\tilde{\iota} + 1$, à l'expression quasi-statique de la masse volumique effective (2.18) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\rho_{\text{eff}}(2\tilde{\iota} + 1)}{\rho_0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\rho_{\text{eff}}(2\tilde{\iota})}{\rho_0} = \frac{1 - \phi \tilde{\rho}_1 \left[1 + \sum_{q=1}^{\iota} \frac{\phi_{\text{MST}}}{(4q-2)2^{4q-2}} \tilde{\rho}_1^{2q} \sum_{p=0}^{2q-2} (2\phi_{\text{MST}})^p \right]}{1 + \phi \tilde{\rho}_1 \left[1 + \sum_{q=1}^{\iota} \frac{\phi_{\text{MST}}}{(4q-2)2^{4q-2}} \tilde{\rho}_1^{2q} \sum_{p=0}^{2q-2} (2\phi_{\text{MST}})^p \right]} + o(1). \quad (2.85)$$

Pour une infinité d'interactions, en appliquant l'équation (D.3) à l'égalité (2.83) et sachant que $\left| \frac{\tilde{\rho}_1}{4} \right| < 1$ et $\left| \frac{\tilde{\rho}_1 \phi_{\text{MST}}}{2} \right| < 1$ (éq. (2.78)), on montre que :

$$\lim_{\iota \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^{\iota} \frac{\phi_{\text{MST}}}{(4q-2)2^{4q-2}} \tilde{\rho}_1^{2q} \left[1 - (2\phi_{\text{MST}})^{2q-1} \right] = \frac{\tilde{\rho}_1 \phi_{\text{MST}}}{4} \ln \left[\frac{(4 + \tilde{\rho}_1)(2 - \tilde{\rho}_1 \phi_{\text{MST}})}{(4 - \tilde{\rho}_1)(2 + \tilde{\rho}_1 \phi_{\text{MST}})} \right].$$

On accède alors à la limite harmonique ($\iota \rightarrow \infty$) de l'expression (2.83). En suivant la même démarche que précédemment, nous obtenons :

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \iota \rightarrow \infty}} \frac{\rho_{\text{eff}}(\iota)}{\rho_0} = \frac{(1 - \phi \tilde{\rho}_1)(1 - 2\phi_{\text{MST}}) - \frac{\tilde{\rho}_1^2 \phi \phi_{\text{MST}}}{4} \ln \left[\frac{(4 + \tilde{\rho}_1)(2 - \tilde{\rho}_1 \phi_{\text{MST}})}{(4 - \tilde{\rho}_1)(2 + \tilde{\rho}_1 \phi_{\text{MST}})} \right]}{(1 + \phi \tilde{\rho}_1)(1 - 2\phi_{\text{MST}}) + \frac{\tilde{\rho}_1^2 \phi \phi_{\text{MST}}}{4} \ln \left[\frac{(4 + \tilde{\rho}_1)(2 - \tilde{\rho}_1 \phi_{\text{MST}})}{(4 - \tilde{\rho}_1)(2 + \tilde{\rho}_1 \phi_{\text{MST}})} \right]} + o(1). \quad (2.86)$$

Notons que si nous avons privilégié la première hypothèse de troncature présentée dans la sec-

tion 2.5.1 au lieu de la deuxième, l'expression de l'équation (2.77) aurait été :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \overline{v_x(\mathbf{r})} = k_0 \frac{\pi}{2} \left[\begin{aligned} & [A_{\text{inc}}(1) - A_{\text{inc}}(-1)] - \sum_{i=1}^N [A_{\text{ex}}(1, \iota) - A_{\text{ex}}(-1, \iota)] \phi^{(i)} \\ & + \sum_{i=1}^N [A_{\text{ex}}(1, \iota + 1) - A_{\text{ex}}(-1, \iota + 1)] \frac{2\phi^{(i)} \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} \end{aligned} \right] + o(k_0).$$

Après calcul, la valeur de la masse volumique effective $\rho_{\text{eff}}(\iota)$ (on ne la développe pas ici) change à chaque interaction. Lorsque le nombre d'interactions est pair, les deux méthodes de troncature conduisent à la même valeur de ρ_{eff} .

2.5.4 Système comportant une infinité de diffuseurs susceptibles de s'interpénétrer

Nous aurions pu effectuer tous nos calculs avec l'hypothèse utilisée en diffusion multiple qui postule que les interactions de $N-1$ diffuseurs sur un diffuseur fixe sont équivalentes à $N-1$ fois les interactions entre deux diffuseurs. Les diffuseurs mobiles $i > 1$ interagissent seulement avec le diffuseur 1 (fixe) et l'absence d'interaction entre ces diffuseurs mobiles, est incompatible avec le processus de diffusion dans une chaîne de diffuseurs. Par ailleurs, la description choisie est telle que le diffuseur 1 ne s'interpénètre pas avec les autres diffuseurs alors que ceux-ci sont susceptibles de s'interpénétrer.

À la limite $N \rightarrow \infty$, on a $\phi_{\text{MST}} = \phi$ et $R_p = R_{\text{MST}}$. La masse volumique effective (2.86) devient :

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \iota \rightarrow \infty}} \frac{\rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}(\iota)}{\rho_0} = \frac{(1 - \phi \tilde{\rho}_1)(1 - 2\phi) - \left(\frac{\tilde{\rho}_1 \phi}{2}\right)^2 \ln \left[\frac{(4 + \tilde{\rho}_1)(2 - \tilde{\rho}_1 \phi)}{(4 - \tilde{\rho}_1)(2 + \tilde{\rho}_1 \phi)} \right]}{(1 + \phi \tilde{\rho}_1)(1 - 2\phi) + \left(\frac{\tilde{\rho}_1 \phi}{2}\right)^2 \ln \left[\frac{(4 + \tilde{\rho}_1)(2 - \tilde{\rho}_1 \phi)}{(4 - \tilde{\rho}_1)(2 + \tilde{\rho}_1 \phi)} \right]} + o(1). \quad (2.87)$$

La superposition des diffuseurs étant autorisée, cette formule est définie pour $\phi \in [0, 1]$. Le processus de diffusion ne se faisant qu'entre deux diffuseurs entraîne un biais sur la détermination de $\rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}(\iota)$.

2.5.5 Champ excitant un diffuseur à la limite quasi-statique : effet des aller-retour et des boucles de diffusion

Afin de déterminer quelles interactions sont prises en compte avec le formalisme de la QCA, étudions comment se comporte le champ moyen (au sens configurationnel) excitant un diffuseur 1 centré sur le repère global ($\mathbf{b}_{10} = \mathbf{0}$), en fonction des différentes interactions prises en compte. Supposons dans un premier temps que la QCA prend en compte toutes les interactions possibles entre diffuseurs, comme par exemple les interactions aller-retour entre deux diffuseurs et les boucles d'interactions entre N diffuseurs. On entend par boucle le processus au cours duquel une onde est diffusée par un diffuseur i vers un diffuseur j , puis du diffuseur j vers le diffuseur k *etc.*, jusqu'à ce qu'elle soit diffusée par un diffuseur l vers le diffuseur i . L'onde revient alors à son point de départ.

a) Aller-retour entre deux diffuseurs

Lorsque le champ excitant le diffuseur 2 dépend des interactions avec tous les autres diffuseurs, les coefficients d'amplitude modale (dominants) du champ excitant le diffuseur 1 (ne prenant en compte que la participation du diffuseur 2) s'écrivent à la limite quasi-statique, d'après l'annexe C, sous la forme :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(0, \iota) &= A_{\text{inc}}(0) + o(1), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1, 2\tilde{\iota} + 1) &= \\ A_{\text{inc}}(\pm 1) + \left(\left[-1 + (1 - X_{\pm 1}) \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} (X_1 X_{-1})^q \right] A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1) \right) &A_{\text{ex}}^{(2)}(\mathbf{b}_{32}, \dots, \mathbf{b}_{N2}). \end{aligned}$$

Nous avons vu que lorsque l'ensemble des positions relatives possibles \mathbf{b}_{20} , défini par la moyenne configurationnelle est un anneau, alors seuls les coefficients d'amplitude modale associés aux ondes ayant subies un nombre pair d'interactions entre les diffuseurs 1 et 2 sont non nuls après moyenne configurationnelle (pour $n = \pm 1$) :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{V_{\text{MST}}} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1, 2\tilde{\iota} + 1) d\mathbf{b}_{02} &= \\ A_{\text{inc}}(\pm 1) + \left[\sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} \langle (X_1 X_{-1})^{2q} \rangle A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1) \right] &\int_{V_{\text{MST}}} A_{\text{ex}}^{(2)}(\mathbf{b}_{32}, \dots, \mathbf{b}_{N2}) d\mathbf{b}_{21}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Quel que soit le champ excitant le diffuseur 2, si les interactions aller-retour entre les diffuseurs 2 et 1 ne sont pas prises en compte ($\tilde{\iota} = 0$), alors la moyenne configurationnelle (2.88) du champ excitant le diffuseur 1 est égale au champ incident à la limite quasi-statique.

b) Boucles d'interactions entre N diffuseurs

Intéressons nous maintenant au cas où l'onde parcourt une boucle sans aller-retour entre deux diffuseurs (elle ne passe qu'une seule fois par chaque diffuseur présent dans la boucle). Considérons la première boucle entre trois diffuseurs : le champ incident insone le diffuseur 1 (considéré comme fixe), puis l'onde est diffusée de 1 vers 2, de 2 vers 3 et enfin de 3 vers 1. Les coefficients d'amplitude modale de l'onde excitant le diffuseur 1 s'écrivent alors, à la limite quasi-statique (en se basant sur le travail effectué dans le cas de deux diffuseurs développé dans l'annexe C) :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(0) &= A_{\text{inc}}(0) + o(1), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1) &= \left[1 + f(r_{21}, r_{32}, r_{13}) e^{i(\mp 2\theta_{21} \pm 2\theta_{32} \mp 2\theta_{13})} + o(1) \right] A_{\text{inc}}(\pm 1). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Après moyenne configurationnelle sur les diffuseurs 2 et 3, en considérant les coefficients d'amplitude modale (2.89) et en rappelant l'égalité (2.27), le champ excitant le diffuseur 1 sera différent du champ incident, $\lim_{\omega \rightarrow 0} \langle A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1) \rangle \neq A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1)$, lorsque $2\theta_{21} - 2\theta_{32} + 2\theta_{13}$ est constant pour tout triplet $(\theta_{21}, \theta_{32}, \theta_{13})$. Cette condition n'est respectée que lorsque le triangle formé par les centres des trois diffuseurs est un triangle isocèle. Elle ne peut pas être systématiquement satisfaite lors du calcul de la

moyenne configurationnelle. Finalement, le champ excitant le diffuseur 1 se réduit nécessairement au champ incident. On supposera dans la suite que cette propriété reste vraie quel que soit le nombre de diffuseurs dans la boucle.

c) Boucles d'interactions aller-retour

Lorsque l'onde parcourt une boucle aller-retour (elle parcourt la boucle dans un sens puis dans le sens inverse), alors, la deuxième ligne de la relation (2.89) devient :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \langle A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1) \rangle = [1 + f^2 (r_{21}, r_{32}, r_{13}) + o(1)] A_{\text{inc}}(\pm 1).$$

Cette expression montre que le champ moyen excitant le diffuseur (fixe) 1 est modifié à chaque boucle aller-retour. Ce résultat a été vérifié quel que soit le nombre de diffuseurs.

d) Récapitulatif

Dans un milieu infini, lorsqu'on applique la moyenne configurationnelle sur toutes les positions possibles des diffuseurs, l'ensemble des positions relatives entre deux diffuseurs est toujours un anneau dont le rayon extérieur est infini. Ainsi, en reprenant de manière récursive les trois raisonnements précédents, le champ moyen excitant le diffuseur fixe est égal au champ incident à la limite quasi-statique lorsqu'il n'y a pas de processus de diffusion aller-retour entre deux diffuseurs ou dans une boucle. Les ondes peuvent cependant parcourir des boucles de diffusion sans aller-retour, cela ne modifiera pas le champ moyen excitant le diffuseur fixe.

Nous avons vu dans le chapitre 1 qu'à la limite quasi-statique, les paramètres mécaniques effectifs obtenus par Parnell et Abrahams [53], sous les hypothèses de la diffusion multiple (QCA), sont identiques à ceux établis par Kuster et Toksöz [36] en diffusion simple, les remplaçant alors dans un contexte de diffusion simple ($\langle A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1) \rangle = A_{\text{inc}}^{(1)}(\pm 1)$). On en déduit donc que les aller-retour entre diffuseurs ne sont pas considérés avec les hypothèses utilisées par Parnell et Abrahams. Finalement, la QCA ne prendrait en compte, à la limite quasi-statique, qu'une suite de diffusions au sein d'une chaîne de diffuseurs où l'onde ne passe qu'une et une seule fois par chaque diffuseur. Elle semble donc considérer les mêmes processus de diffusion que l'hypothèse de Foldy [72] (*cf.* section 1.3.2.a).

2.5.6 Comparaison du modèle avec des résultats de la littérature

Dans cette partie, nous comparons la formule (2.86) de la masse volumique effective $\rho_{\text{eff}}(\iota = \infty)$, obtenue en prenant en compte toutes les interactions entre deux diffuseurs, à celle obtenue par Kuster et Toksöz [36], $\rho_{\text{eff}}^{\text{KT}}$, en diffusion simple (éq. (2.67)).

La figure 2.9.a montre les masses volumiques effectives $\rho_{\text{eff}}(\iota = \infty)$ et $\rho_{\text{eff}}^{\text{KT}}$ en fonction du rapport $\frac{\rho_0}{\rho_1}$ pour une concentration $\phi = 22\%$. L'écart entre les deux masses volumiques effectives étant difficilement observable, l'écart relatif est présenté sur la figure 2.9.b pour $\phi = 1, 10$ et 22% . Pour une concentration $\phi = 1\%$, il est négligeable et monte à 3% pour une concentration $\phi = 22\%$. De plus, lorsque les valeurs de ρ_0 et de ρ_1 sont proches, l'erreur est naturellement négligeable. Lorsque $\frac{\rho_0}{\rho_1}$ s'éloigne de un par valeurs croissantes ou décroissantes, l'écart relatif augmente continûment.

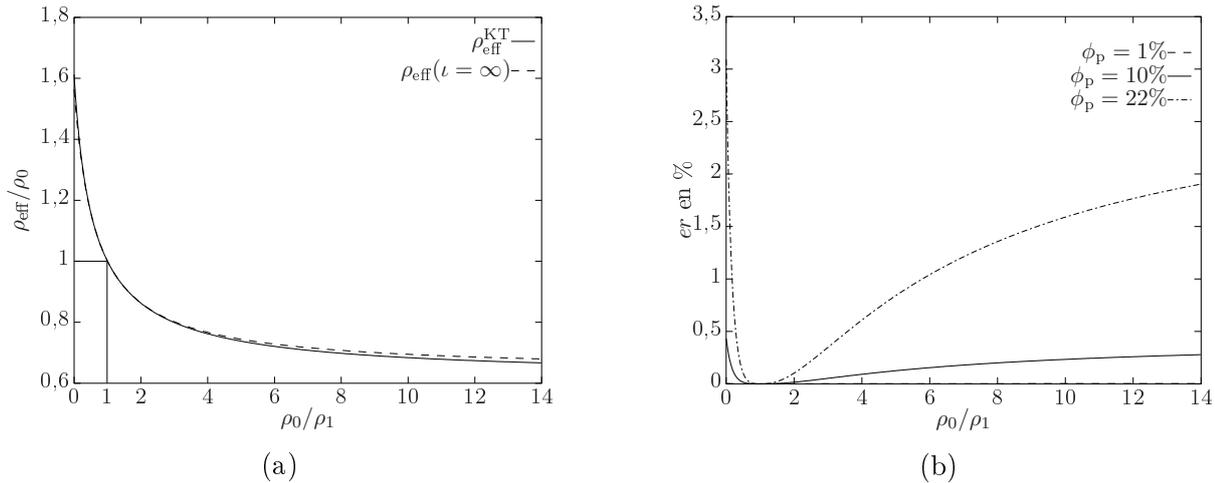


Figure 2.9 – Comparaison entre $\rho_{\text{eff}}(\iota = \infty)$ et $\rho_{\text{eff}}^{\text{KT}}$ en fonction de $\frac{\rho_0}{\rho_1}$: a) masses volumiques effectives pour une concentration $\phi = 22\%$, b) écart relatif $er = |\rho_{\text{eff}}^{\text{KT}} - \rho_{\text{eff}}(\iota = \infty)|/\rho_{\text{eff}}^{\text{KT}}$ entre les deux formules pour trois concentrations différentes : $\phi = 1, 10$ et 22% .

L'expression (2.87) de la masse volumique effective $\rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}$ étant valable pour toutes les concentrations ($\phi \in [0, 1]$), comparons la à celle établie par Parnell et Abrahams [53], $\rho_{\text{eff}}^{\text{PA}}$, dans le cadre de la diffusion multiple. Leur sensibilité au rapport $\frac{\rho_0}{\rho_1}$ est analogue à celle des paramètres $\rho_{\text{eff}}(\iota = \infty)$ et $\rho_{\text{eff}}^{\text{KT}}$, la différence entre $\rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}$ et $\rho_{\text{eff}}^{\text{PA}}$ étant néanmoins plus élevée. La figure 2.10 montre les évolutions de $\rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}$ et $\rho_{\text{eff}}^{\text{PA}}$ en fonction de la concentration ϕ , la concentration maximale $\phi_{\text{max}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,7\%$, de diffuseurs cylindriques étant atteinte pour un arrangement hexagonal compact. Cette concentration sera repérée par des pointillés verticaux sur la figure 2.10. Le rapport des masses volumiques choisi est $\frac{\rho_0}{\rho_1} = 1000$. Il correspond à des diffuseurs d'air immergés dans de l'eau. Plus la concentration augmente, plus l'écart relatif entre les deux masses volumiques effectives augmente. Il apparaît que $\rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}$ peut avoir une valeur négative lorsque la concentration est très élevée tout en étant inférieure à la concentration maximale. Ceci n'étant pas admissible, il serait nécessaire de prendre en compte dans notre modèle des mécanismes de diffusions supplémentaires.

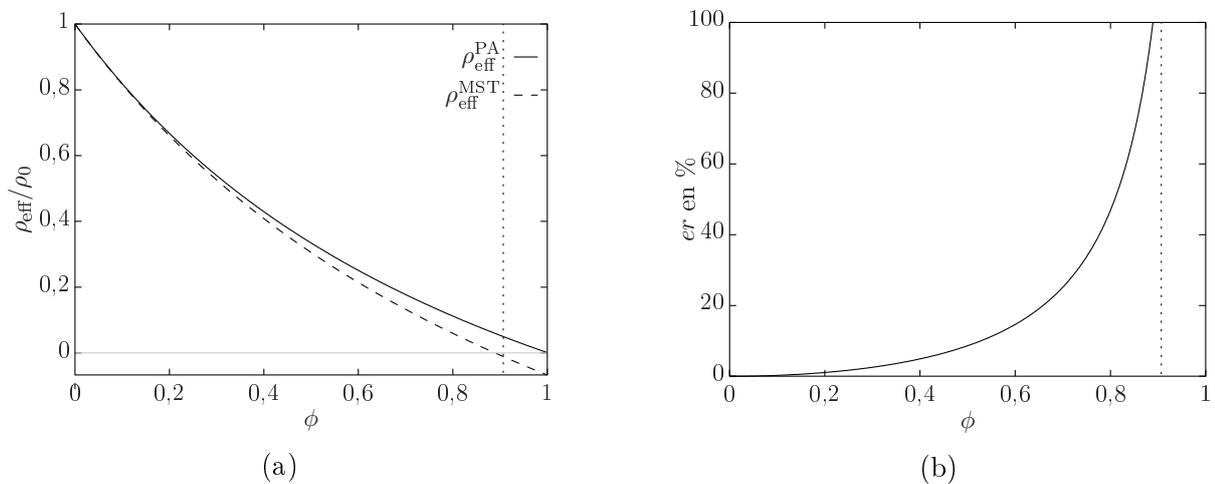


Figure 2.10 – Comparaison entre $\rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}$ et $\rho_{\text{eff}}^{\text{PA}}$ en fonction de ϕ lorsque $\frac{\rho_0}{\rho_1} = 1000$: a) masses volumiques effectives, b) écart relatif $er = |\rho_{\text{eff}}^{\text{PA}} - \rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}|/\rho_{\text{eff}}^{\text{PA}}$ entre les deux formules. La concentration maximale de diffuseurs cylindriques est repérée par les pointillés verticaux.

2.6 Conclusion

La technique d'homogénéisation que nous avons développée pour les milieux aléatoires prend en compte tous les champs acoustiques présents dans un volume considéré comme représentatif. Lorsqu'un seul diffuseur est présent dans ce volume, le seul champ excitant le diffuseur étant le champ incident, cette description est conforme à l'hypothèse de diffusion simple. En procédant ainsi, nous avons établi les propriétés mécaniques effectives à la limite quasi-statique ($\omega \rightarrow 0$) : le module de compressibilité effectif ne dépend que du mode monopolaire du cylindre ($n = 0$) alors que la masse volumique effective ne dépend que des modes dipolaires ($n = \pm 1$). Ces propriétés mécaniques effectives sont identiques à celles déterminées par Kuster et Toksöz sous l'hypothèse de diffusion simple [36]. Ceci permet de penser que ce modèle est pertinent.

Nous avons également étendu cette technique aux propriétés mécaniques effectives dynamiques ($\omega \neq 0$). Or il apparaît que, en dehors de la limite quasi-statique, le milieu effectif ne respecte plus l'équation d'onde sur les champs moyens. Finalement, afin d'étendre cette technique au cas dynamique, une solution serait d'identifier une nouvelle loi de comportement du milieu effectif.

Dans la section 2.5, nous avons étudié, à la limite quasi-statique, le cas où N diffuseurs sont présents dans le volume d'homogénéisation. Bien que prenant en compte les interactions entre diffuseurs, on montre que le champ excitant le mode monopolaire d'un diffuseur est uniquement le champ incident. Ceci implique que le module de compressibilité effectif n'est pas affecté par ces interactions. Par contre, le champ excitant les modes dipolaires d'un diffuseur dépend des multiples interactions. Afin d'accéder à une expression analytique de la masse volumique effective, nous nous sommes intéressés au cas où seuls deux diffuseurs sont présents dans le volume représentatif. Nous avons ainsi montré que l'expression de la masse volumique effective dépend du nombre d'interactions aller-retour entre les deux diffuseurs.

La concentration maximale accessible avec notre modèle est $\phi \approx 22\%$ à cause de la géométrie du système à deux diffuseurs. Afin de pouvoir prendre en compte des concentrations plus importantes à la limite quasi-statique, nous avons étendu le système à deux diffuseurs à un système composé d'une infinité de diffuseurs. Pour ce faire, nous avons supposé que les interactions de $N - 1$ diffuseurs avec un diffuseur fixe sont identiques à $N - 1$ fois les interactions d'un diffuseur avec le diffuseur fixe. La non prise en compte des interactions entre les $N - 1$ diffuseurs mobiles, propre à cette description, affecte alors l'identification de la masse volumique effective $\rho_{\text{eff}}^{\text{MST}}$.

L'illustration de la prise en compte des interactions avec le diffuseur fixe est par suite réalisée à partir de la confrontation avec le modèle de Parnell et Abrahams [53] développé dans le cadre de la QCA. Ce modèle s'apparente à l'hypothèse de diffusion simple du point de vue des propriétés mécaniques quasi-statiques. La différence entre les deux modèles montre le fort impact que peuvent avoir les interactions aller-retour à forte concentration sur les paramètres mécaniques effectifs.

Par ailleurs, nous avons montré que le champ moyen excitant un diffuseur fixe se réduit au seul champ incident (configuration conforme à l'hypothèse de diffusion simple) si les interactions aller-retour entre deux diffuseurs et au sein d'une boucle de diffusions sont négligées (seules les interactions au sein d'une chaîne de diffuseurs sont conservées). Finalement, les mécanismes quasi-statiques propres à la QCA pourraient correspondre aux phénomènes de diffusions siègeant dans une chaîne de diffuseurs.

Deuxième partie

Les métamatériaux

Chapitre 3

Propriétés acoustiques des métamatériaux

Veselago [7] a montré que si l'on attribuait à un milieu une permittivité ϵ_1 négative et une perméabilité magnétique μ_1 négative, alors les vecteurs d'onde et de Poynting d'une onde électromagnétique se propageant au sein de celui-ci auraient des sens opposés. Il a nommé les milieux possédant cette spécificité des « matériaux main gauche » car le trièdre formé par les vecteurs champ électrique, champ magnétique et d'onde est indirecte. Par la suite la dénomination « métamatériau » s'est imposée. Les métamatériaux ont des propriétés atypiques. L'effet Doppler est par exemple inversé dans ces milieux [7], ou encore la réfraction d'une onde plane entre un matériau classique et un métamatériau est négative : la composante parallèle à l'interface du flux d'énergie moyen transmis est de sens opposée à celle du flux d'énergie moyen incident. Ces propriétés très spécifiques conférées à ce type de structures, ne peuvent pas être attribuées aux milieux homogènes, même vus jusqu'à l'arrangement atomique régulier ou amorphe. Ce sont un arrangement et des propriétés particulières à l'échelle mésoscopique qui font qu'un milieu peut être dit métamatériau à l'échelle macroscopique. À cette dernière échelle, le milieu peut être considéré comme homogène (la longueur d'onde des ondes se propageant étant beaucoup plus grande que les arrangements mésoscopiques) et être décrit, on l'espère, par des théories de milieux effectifs. Les métamatériaux ne sont en aucun cas réellement homogènes, mais sont vus comme tel par les grandes longueurs d'onde des phénomènes ondulatoires s'y propageant.

Dans la suite de ce chapitre, le terme métamatériau désignera les milieux à indice négatif, c'est-à-dire lorsque les vecteurs d'onde \mathbf{k} et de Poynting \mathbf{P} des ondes se propageant en son sein sont de sens opposés (*i.e.* $\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} < 0$). Le terme matériau classique s'appliquera aux milieux à indice positif dont ces mêmes vecteurs sont de même sens (*i.e.* $\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} > 0$).

Le point de départ de l'étude menée ici est de considérer que n'importe quel couple de valeurs de la masse volumique ρ et du module de compressibilité κ est envisageable dans un milieu quelconque, qu'ils soient à valeurs réelles ou complexes. Il s'agit par la suite de déterminer les propriétés acoustiques correspondantes et d'en déduire la nature du milieu : métamatériau ou matériau classique, atténuant ou amplifiant.

Dans la première partie de ce chapitre, nous suivrons la démarche de Veselago, en reprenant les équations fondamentales de l'acoustique. Nous considérerons les propriétés acoustiques de milieux ayant une masse volumique ρ et un module de compressibilité κ à valeurs réelles positives, puis négatives. On arrive ainsi aux mêmes conclusions que Veselago quant aux propriétés des vecteurs d'onde et de

Poynting dans le cas d'une onde acoustique lorsque les propriétés mécaniques sont toutes les deux négatives. Dans une seconde partie, nous généraliserons ces résultats, au cas où les propriétés mécaniques du milieu sont à valeurs complexes tout en précisant la nature atténuante ou amplifiante du milieu associé à ces valeurs. Si, de façon générale, les milieux sont supposés passifs, alors les couples (ρ, κ) impliquant une amplification des ondes seront considérés comme non physiques. Ensuite, nous nous intéresserons au phénomène d'amplification des ondes évanescentes dans un métamatériau parfait, puis dans un métamatériau faiblement dissipatif. Ce point sera abordé à travers l'étude de la lentille idéale, puis faiblement absorbante, de Pendry [8]. Enfin, nous terminerons avec l'analyse des propriétés mécaniques et acoustiques effectives d'un milieu aléatoire dont les diffuseurs résonnent à basses fréquences, leurs résonances monopolaire et dipolaire affectant les propriétés de type métamatériau.

3.1 Les milieux parfaits et homogènes

Dans cette section, nous étudions les propriétés de structures parfaites, fluides, homogènes et isotropes. Par parfait, on entend un milieu dont les propriétés mécaniques ρ et κ sont à valeurs réelles et de même signe. Ces milieux ne sont donc pas atténuants. Nous commencerons par établir les équations régissant la propagation d'une onde dans un milieu indépendamment des signes de ρ et κ . Nous déterminerons ensuite la relation entre le vecteur d'onde \mathbf{k} et le vecteur de Poynting \mathbf{P} , dans un premier temps lorsque les propriétés mécaniques sont à valeurs positives et dans un second temps lorsqu'elles sont à valeurs négatives.

3.1.1 Établissement des propriétés acoustiques

Soit l'équation d'Euler linéarisée pour les perturbations acoustiques :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla p(\mathbf{r}, t), \quad (3.1)$$

où $p(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sont respectivement la surpression acoustique et la vitesse particulière évaluées au point d'observation défini par le vecteur position \mathbf{r} et au temps t . En injectant l'équation d'état du fluide :

$$p(\mathbf{r}, t) = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (3.2)$$

($\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ est le déplacement particulaire) dans l'équation d'Euler (3.1), on obtient l'équation d'onde :

$$\left(\Delta - \frac{\rho}{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.3)$$

qui donne l'équation de Helmholtz en régime harmonique :

$$\left(\Delta + \frac{\rho}{\kappa} \omega^2 \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.4)$$

Les solutions de cette dernière équation sous forme d'ondes planes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.5)$$

satisfont la relation de dispersion suivante :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \omega^2 \frac{\rho}{\kappa} = \frac{\omega^2}{v_\varphi^2}, \quad (3.6)$$

où \mathbf{k} (resp. k) est le vecteur d'onde (resp. nombre d'onde) de l'onde considérée, v_φ la vitesse de phase de l'onde et ω la pulsation. Finalement, on obtient :

$$k = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}. \quad (3.7)$$

Notons que le nombre d'onde peut prendre deux valeurs réelles (ρ et κ étant de même signe) à une pulsation donnée, qui correspondent à l'onde progressive et à l'onde régressive. Ces deux ondes ont une direction de propagation identique, mais sont de sens strictement opposés dans un milieu infini.

Observons que les champs de pression et de vitesse particulière relatifs aux ondes planes sont également solutions de l'équation de Helmholtz (3.4) :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= p_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le vecteur de Poynting \mathbf{P} (flux d'énergie moyen), est donné par :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \Re(p(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}^*(\mathbf{r}, t)). \quad (3.9)$$

L'équation d'Euler (3.1) pouvant se réécrire sous la forme :

$$\mathbf{k} p(\mathbf{r}, t) = \rho \omega \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (3.10)$$

en exprimant le vecteur vitesse particulière en fonction de la pression dans la relation (3.9), on obtient :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} |p(\mathbf{r}, t)|^2 \Re\left(\frac{\mathbf{k}}{\rho \omega}\right). \quad (3.11)$$

Lorsque la masse volumique est à valeurs complexes, $\rho = \rho' + i\rho''$, le vecteur de Poynting s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} |p(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{\rho' \mathbf{k}' + \rho'' \mathbf{k}''}{|\rho|^2 \omega}. \quad (3.12)$$

Toutes les expressions établies jusqu'ici sont valides pour $(\rho, \kappa) \in \mathbb{C}^2$. Nous les prenons néanmoins dans un premier temps à valeurs réelles afin d'établir les critères distinguant un matériau classique d'un métamatériau.

a) Cas d'un matériau classique : $(\rho, \kappa) > 0$

Considérons que les propriétés mécaniques respectent $\rho > 0$ et $\kappa > 0$. On déduit de l'expression (3.11) que :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} > 0. \quad (3.13)$$

Dans un matériau classique, les vecteurs d'onde et de Poynting ont toujours le même sens (éq. (3.13)).

b) Cas d'un métamatériau : $(\rho, \kappa) < 0$

Les propriétés mécaniques respectant maintenant $\rho < 0$ et $\kappa < 0$, la relation (3.11) conduit à :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} < 0. \quad (3.14)$$

Dans un métamatériau, les vecteurs d'onde et de Poynting sont de sens opposés (éq. (3.14)). Notons que la propriété (3.14) se rencontre déjà en dehors du contexte des métamatériaux, par exemple avec les ondes élastiques guidées (ondes de Lamb [101]) ou bien dans les cristaux phononiques (branches à pente négative dans les diagrammes de bandes).

c) Cas particulier : $\rho\kappa < 0$

Considérons le cas particulier où les propriétés mécaniques sont de signes opposés : $\text{sgn}(\rho) = -\text{sgn}(\kappa)$. Selon l'équation (3.7), le nombre d'onde est alors imaginaire pur. Les ondes ne se propagent pas. Ce régime de propagation est équivalent aux bandes fréquentielles interdites présentes dans un cristal phononique.

3.1.2 Conséquences

Le fait que les vecteurs d'onde et de Poynting soient de sens opposés ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} < 0$) dans un métamatériau a des conséquences étonnantes. Celle qui intéresse particulièrement les physiciens est la réfraction d'une onde plane par une interface plane séparant un matériau classique et un métamatériau. Nous présentons dans cette section quelles sont les différences lors de la réfraction d'une onde plane entre une interface séparant deux matériaux classiques, et une interface séparant un matériau classique et un métamatériau.

a) Réfraction d'une onde plane par une interface plane entre deux matériaux classiques

Soit une interface plane infinie séparant deux matériaux classiques 0 et 1 (milieux respectant la condition (3.13)). L'interface est parallèle à \mathbf{e}_x et sa normale est \mathbf{e}_y (fig. 3.1). L'onde incidente plane monochromatique, provenant du milieu 0, insone l'interface sous l'angle d'incidence θ_0 . Les quantités se référant aux ondes incidente, réfléchi et transmise sont notées respectivement avec les indices inc, R et T. La décomposition des vecteurs d'onde suivant la base orthonormée s'écrit :

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y, \quad (3.15)$$

avec :

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (3.16)$$

Les relations de Snell-Descartes (relatives à la conservation du vecteur d'onde tangentiel) imposent :

$$k_{\text{inc},x} = k_{\text{R},x} = k_{\text{T},x}. \quad (3.17)$$

Étant donné que le signe de $k_{\text{inc},y}$ est une donnée du problème et que $k_{R,y} = -k_{\text{inc},y}$, il ne reste plus maintenant qu'à déterminer le signe de $k_{T,y}$ qui peut prendre théoriquement les deux valeurs :

$$k_{T,y} = \pm \sqrt{k_T^2 - k_{T,x}^2}. \quad (3.18)$$

Si l'onde transmise est une onde de volume, alors le choix de la racine se fait sur des considérations énergétiques à l'aide du vecteur de Poynting. En effet, les ondes réfléchie et transmise doivent s'éloigner de l'interface au sens de l'énergie. Cela se traduit par $\mathbf{P}_R \cdot \mathbf{e}_y < 0$ et $\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{e}_y > 0$. Le vecteur de Poynting dans un matériau classique homogène et isotrope étant de même direction et de même sens que le vecteur d'onde (*cf.* éq. (3.13)), on montre que :

$$k_{T,y} = + \sqrt{k_T^2 - k_{T,x}^2}. \quad (3.19)$$

On construit ainsi la figure 3.1, où l'angle θ_1 est déterminé à l'aide des équations (3.6) et (3.17) :

$$\frac{\sin(\theta_0)}{v_{\varphi,0}} = \frac{\sin(\theta_1)}{v_{\varphi,1}}, \quad (3.20)$$

où la vitesse de phase $v_{\varphi,i}$ dans le milieu i est définie par :

$$v_{\varphi,i} = \frac{\omega}{k_i}. \quad (3.21)$$

$v_{\varphi,i}$ ne désigne pas ici une grandeur thermodynamique, mais une grandeur acoustique, qui peut être négative, $\text{sgn}(v_{\varphi,i}) = \text{sgn}(k_i)$. Dans le cas présent, on a $v_{\varphi,1} > 0$.



Figure 3.1 – Réfraction d'une onde plane monochromatique par une interface séparant deux matériaux classiques : a) vecteurs d'onde, b) vecteurs de Poynting.

b) Réfraction d'une onde plane par une interface plane entre un matériau classique et un métamatériau

On reprend le même système que précédemment, à la différence que le milieu 1 est maintenant un métamatériau. En suivant le même raisonnement, il apparaît pour les ondes de volumes que $\mathbf{P}_R \cdot \mathbf{e}_y < 0$ et $\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{e}_y > 0$. Dans un métamatériau homogène et isotrope, le vecteur de Poynting étant de même direction et de sens opposé au vecteur nombre d'onde (*cf.* éq. (3.14)), on obtient :

$$k_{T,y} = - \sqrt{k_T^2 - k_{T,x}^2}. \quad (3.22)$$

On construit ainsi la figure 3.2. Il apparaît que le vecteur de Poynting de l'onde transmise est dirigé vers les x négatifs, alors que celui de l'onde incidente est dirigé vers les x positifs. Ce phénomène est appelé réfraction négative. La notion de réfraction négative a été introduite par Mandel'shtam [6], mais les applications possibles de ce phénomène ont été imaginées par Veselago [7].



Figure 3.2 – Réfraction d'une onde plane monochromatique par une interface séparant un matériau classique et un métamatériau : a) vecteurs d'onde, b) vecteurs de Poynting.

c) La superlentille (lentille à faces parallèles)

Considérons une plaque fluide de masse volumique ρ_1 et de compressibilité κ_1 , immergée dans un fluide de masse volumique ρ_0 et de compressibilité κ_0 , et dont les propriétés mécaniques sont définies par :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -\rho_0, \\ \kappa_1 &= -\kappa_0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Comme nous l'avons vu dans la section 3.1.2.b, l'onde transmise à l'interface séparant le milieu 0 et le milieu 1 est une onde dont l'énergie s'éloigne de l'interface ($\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{e}_y$), cela se traduisant par :

$$k_1 = -k_0,\tag{3.24}$$

et donc (cf. éq. (3.21)) :

$$v_{\varphi,1} = -v_{\varphi,0}.\tag{3.25}$$

Le rapport des vitesses de phase n_φ (équivalent à l'indice de réfraction en électromagnétisme), défini par $n_\varphi = \frac{v_{\varphi,0}}{v_{\varphi,1}}$, vaut donc $n_\varphi = -1$. À chaque interface la réfraction est négative, et d'après (3.20) :

$$|\theta_1| = |\theta_0|.\tag{3.26}$$

Comme l'a remarqué Veselago [7], la plaque se comporte comme une lentille (nommée par la suite superlentille¹) comme on peut le voir sur la figure 3.3. La rupture d'impédance étant nulle aux interfaces, les ondes sont transmises sans réflexion. Avec ce système, deux images de la source sont formées : une à l'intérieur de la plaque, et une autre derrière la plaque. La qualité de ces images dépend de la résolution de la lentille. Ces images se forment lorsque l'épaisseur de la plaque est supérieure à la distance source-plaque (d_1). La distance entre la source et la deuxième image est alors de deux fois l'épaisseur de la plaque.

1. superlentille = lentille à faces parallèles

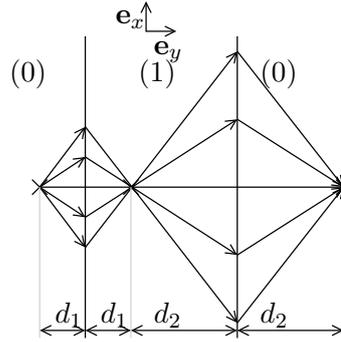


Figure 3.3 – Rayons transmis par une superlentille, les vitesses de phase dans les deux milieux étant opposées, $v_{\varphi,1} = -v_{\varphi,0}$.

3.1.3 Problématique du choix de la définition d’une onde progressive, et conséquence sur la notion d’impédance acoustique

Dans cette section, on se propose de discuter du choix de la définition du caractère progressif ou régressif d’une onde plane dans les matériaux classiques et dans les métamatériaux, ainsi que de la notion d’impédance acoustique associée. Notons que l’impédance est une quantité apparaissant systématiquement dans les problèmes de réflexion et transmission à une interface, et qu’à ce titre, il est important de se poser la question de sa définition. Dans la suite, les ondes progressives seront définies au sens de la phase (resp. de l’énergie), lorsque la phase (resp. l’énergie) se propage dans le sens des valeurs croissantes de la variable position. La vitesse de phase (resp. de l’énergie) de l’onde progressive sera dès lors positive.

Caractère progressif d’une onde plane

Dans un matériau classique, les vecteurs d’onde et de Poynting étant de même sens ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} > 0$), la question ne se pose pas de savoir si une onde progressive est définie à partir de la propagation de la phase ou de l’énergie. Cependant, dans un métamatériau, cette problématique apparaît nécessairement car ces vecteurs diffèrent en sens. Nous allons voir ici les implications du choix de la définition du caractère progressif de l’onde plane sur la valeur de l’impédance associée à ce choix.

Impédance acoustique

Classiquement, la notion d’impédance acoustique Z d’un milieu est définie à partir du rapport pression sur vitesse particulière de l’onde progressive au sens de la phase suivant la direction de propagation de l’onde ($\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ et \mathbf{k} étant colinéaires) :

$$\frac{p(\mathbf{r}, t)}{v(\mathbf{r}, t)} = Z = \frac{\rho_0 \omega}{k_0}. \quad (3.27)$$

Notons que ρ_0 et $k_0 = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{\kappa_0}}$ sont ici positifs, et considérés en tant que propriétés du milieu. Pour une onde régressive, le rapport pression sur vitesse particulière devient :

$$\frac{p(\mathbf{r}, t)}{v(\mathbf{r}, t)} = -Z. \quad (3.28)$$

L’impédance acoustique (3.27) d’un matériau classique est donc toujours positive. Qu’en est-il pour

un métamatériau, $(\rho_0, \kappa_0) < 0$?

a) Onde progressive définie par la vitesse de phase de cette onde

Si on définit le caractère progressif d'une onde plane à partir de sa vitesse de phase, alors l'impédance acoustique du métamatériau, définie à partir de (3.27), est négative ($Z < 0$) car la masse volumique est négative alors que $k_0 = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{\kappa_0}}$ est toujours une quantité positive.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, lors de la réfraction d'une onde plane par une interface, la composante du vecteur de Poynting de l'onde transmise suivant la normale à l'interface est positive ($\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{e}_y > 0$), car l'énergie de cette onde s'éloigne de l'interface. Le milieu à l'aval de l'interface étant un métamatériau (d'impédance acoustique Z négative comme on vient de le relever), l'onde transmise sera régressive suivant la normale \mathbf{e}_y à l'interface. Le rapport pression sur vitesse particulière, égal à $-Z$ pour une onde régressive d'après l'équation (3.28), est alors positif $-Z > 0$.

En conclusion, l'impédance Z associée à l'onde progressive est négative pour un métamatériau et positive pour un matériau classique. Néanmoins que le milieu soit classique ou de type métamatériau, le rapport pression sur vitesse particulière de l'onde transmise à une interface est toujours à valeurs positives.

b) Onde progressive définie par la vitesse de l'énergie de cette onde

Soit une onde progressive au sens de l'énergie, caractérisée par une vitesse de l'énergie positive. L'impédance (3.27) associée est positive car la masse volumique et le nombre d'onde du métamatériau ($\mathbf{P}_T \cdot \mathbf{k} < 0$) sont tous les deux négatifs. À l'aide de la relation de dispersion (3.6), l'impédance prend également la forme suivante :

$$Z = \sqrt{\rho_0 \kappa_0} (> 0). \quad (3.29)$$

En conclusion, l'impédance Z associée à l'onde progressive est toujours positive que le milieu soit un matériau classique ou un métamatériau. Avec la définition (3.29), on respecte toujours $p(\mathbf{r}, t) = +Zv(\mathbf{r}, t)$ pour une onde progressive, et $p(\mathbf{r}, t) = -Zv(\mathbf{r}, t)$ pour une onde régressive. De plus, la relation (3.29) étant indépendante des paramètres acoustiques (nombre d'onde, vitesse de phase), la problématique du choix de la racine (cf. équation (3.16)) ne se pose pas. Finalement, les formalismes considérant explicitement l'impédance pour décrire, par exemple, les mécanismes de réfraction aux interfaces (réflexion, transmission), sont indépendants de la nature du milieu.

Dans le cas où $(\rho_0, \kappa_0) \in \mathbb{C}^2$, l'impédance est définie par la racine carrée à partie réelle positive.

Observons que dans le cas de la définition de l'onde progressive au sens de la phase, l'impédance aurait été telle que $Z = \pm \sqrt{\rho_0 \kappa_0}$ selon que le milieu soit un matériau classique ou un métamatériau.

3.2 Généralisation aux propriétés mécaniques à valeurs complexes

Pour des couples $(\rho, \kappa) \in \mathbb{C}^2$ quelconques, la relation de dispersion (3.6) indique, avec la convention $e^{-i\omega t}$, que les vecteurs d'onde peuvent être à valeurs complexes :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'' \quad (3.30)$$

La relation (3.13) définissant un matériau classique se réécrit alors :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}' > 0, \quad (3.31)$$

et la relation (3.14) définissant un métamatériau devient :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}' < 0. \quad (3.32)$$

3.2.1 Critères de milieux atténuants ou amplifiants

Parmi tous les couples (ρ, κ) à valeurs complexes, certains correspondent à des milieux atténuants et d'autres à des milieux amplifiants, que ceux-ci soient des matériaux classiques ou des métamatériaux.

Les milieux dissipatifs sont tels que l'amplitude de l'onde diminue dans le sens du vecteur de Poynting. Ceci s'exprime par :

$$\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{P} > 0. \quad (3.33)$$

À l'inverse, un milieu amplifiant est synonyme d'une augmentation de l'amplitude dans le sens du vecteur de Poynting :

$$\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{P} < 0. \quad (3.34)$$

Cette dernière solution n'est donc pas considérée comme physique dans le contexte d'un milieu passif sans apport d'énergie. Les critères (3.33) et (3.34) constituent des principes généraux indépendants de la nature des ondes.

3.2.2 Comportement des ondes homogènes en fonction des paramètres mécaniques à valeurs complexes

Écrivons maintenant les paramètres mécaniques sous la forme module-argument :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 e^{i\theta_\rho}, \\ \kappa &= \kappa_0 e^{i\theta_\kappa}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec $(\theta_\rho, \theta_\kappa) \in]-\pi, \pi]$. Chaque type de milieu (matériaux classiques ou métamatériaux) possède deux relations : une reliant la vitesse de phase à la vitesse de l'énergie (éqs. (3.31) ou (3.32)) et une concernant l'atténuation (éq. (3.33)). On peut donc déterminer pour chaque type de milieu les couples $(\theta_\rho, \theta_\kappa)$ respectant ces conditions. L'onde considérée est une onde homogène, c'est-à-dire que les vecteurs \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' sont colinéaires.

La relation de dispersion (3.6) devient, à l'aide des relations (3.35) :

$$k^2 = \omega^2 \frac{\rho_0}{\kappa_0} e^{i(\theta_\rho - \theta_\kappa)} = \omega^2 \frac{\rho_0}{\kappa_0} [\cos(\theta_\rho - \theta_\kappa) + i \sin(\theta_\rho - \theta_\kappa)], \quad (3.36)$$

conduisant à l'expression suivante du vecteur d'onde :

$$\mathbf{k} = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{\kappa_0}} e^{i \frac{\theta_\rho - \theta_\kappa}{2}} \mathbf{d} = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{\kappa_0}} \left[\cos\left(\frac{\theta_\rho - \theta_\kappa}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_\rho - \theta_\kappa}{2}\right) \right] \mathbf{d}, \quad (3.37)$$

\mathbf{d} désignant la direction de propagation. À l'aide des relations (3.11) et (3.37), le vecteur de Poynting prend alors la forme suivante :

$$\mathbf{P} = \pm \frac{1}{2} |p(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_0}} \Re \left(e^{-i \frac{\theta_\rho + \theta_\kappa}{2}} \right) \mathbf{d} = \pm \frac{1}{2} |p(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_0}} \cos \left(\frac{\theta_\rho + \theta_\kappa}{2} \right) \mathbf{d}. \quad (3.38)$$

a) Relation définissant un milieu atténuant

Les ondes se propageant dans un milieu atténuant vérifient le critère (3.33). On voit, à l'aide des équations (3.37) et (3.38), que cette condition est respectée lorsque :

$$\frac{\omega}{2} |p(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{1}{\kappa_0} \sin \left(\frac{\theta_\rho - \theta_\kappa}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_\rho + \theta_\kappa}{2} \right) > 0. \quad (3.39)$$

Les quantités ω et κ_0 étant réelles positives, cette inéquation se réduit à :

$$\sin \left(\frac{\theta_\rho - \theta_\kappa}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_\rho + \theta_\kappa}{2} \right) > 0, \quad (3.40)$$

qui peut facilement être résolue de manière graphique (comme nous le verrons plus tard), en utilisant les relations :

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{x}{2} \right) > 0 &\Leftrightarrow x \in]0, 2\pi[, \\ \sin \left(\frac{x}{2} \right) < 0 &\Leftrightarrow x \in]-2\pi, 0[, \\ \cos \left(\frac{x}{2} \right) > 0 &\Leftrightarrow x \in]-\pi, \pi[, \\ \cos \left(\frac{x}{2} \right) < 0 &\Leftrightarrow x \in]-2\pi, -\pi[\cup]\pi, 2\pi[. \end{aligned} \quad (3.41)$$

b) Cas des matériaux classiques

En associant les équations (3.31) et (3.33), on remarque que le critère de matériau classique atténuant est, pour une onde homogène :

$$k'k'' > 0. \quad (3.42)$$

Or :

$$k^2 = k'k' - k''k'' + 2i k'k'', \quad (3.43)$$

ce qui signifie que, dans le cas d'une onde se propageant dans un matériau classique, la propriété de milieu atténuant se traduit par la relation :

$$\Im(k^2) > 0. \quad (3.44)$$

Notons que la propriété de matériau classique amplifiant serait caractérisée par $\Im(k^2) < 0$.

Avec l'équation (3.36), on montre que :

$$\text{sgn} [\Im(k^2)] = \text{sgn} [\sin(\theta_\rho - \theta_\kappa)]. \quad (3.45)$$

Ainsi l'inéquation (3.44) se réduit à :

$$\sin(\theta_\rho - \theta_\kappa) > 0. \quad (3.46)$$

Les couples $(\theta_\rho, \theta_\kappa)$ solutions de cette inéquation respectent la condition :

$$(\theta_\rho - \theta_\kappa) \in]0, \pi[. \quad (3.47)$$

c) Cas des métamatériaux

En associant les équations (3.32) et (3.33), on remarque que le critère métamatériau atténuant, pour une onde homogène, s'écrit :

$$k'k'' < 0. \quad (3.48)$$

Dans le cas d'une onde se propageant dans un métamatériau, l'équation (3.43) montre que la propriété de métamatériau atténuant se traduit par :

$$\Im(k^2) < 0. \quad (3.49)$$

Notons que la propriété de métamatériau amplifiant serait caractérisée par $\Im(k^2) > 0$.

En substituant la relation de dispersion (3.36) dans le critère (3.49), nous obtenons :

$$\sin(\theta_\rho - \theta_\kappa) < 0. \quad (3.50)$$

Les couples $(\theta_\rho, \theta_\kappa)$ solutions de cette inéquation respectent alors la condition :

$$(\theta_\rho - \theta_\kappa) \in]-\pi, 0[. \quad (3.51)$$

d) Cas particuliers

Pour compléter les analyses précédentes, il reste à étudier deux cas particuliers :

$$\Im(k^2) = 0 \quad (3.52)$$

et

$$\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (3.53)$$

La relation (3.52) est satisfaite dans les trois situations suivantes :

1. $k' = 0$. Le nombre d'onde est alors imaginaire pur, représentatif d'un phénomène non propagatif (au sens de la phase). À l'aide de l'équation (3.37), on montre que cela se produit lorsque :

$$\theta_\rho - \theta_\kappa = \pm\pi. \quad (3.54)$$

Ce type de milieu est équivalent à une bande fréquentielle interdite dans un cristal phononique.

2. $k'' = 0$. Le nombre d'onde est alors à valeurs réelles, caractéristique des milieux non dissipatifs.

D'après l'équation (3.37), cela se traduit par :

$$\theta_\rho - \theta_\kappa = 0. \quad (3.55)$$

Lorsque le milieu est un matériau classique ($\mathbf{k}' \cdot \mathbf{P} > 0$), l'expression du vecteur de Poynting (3.12) conduit alors à :

$$\Re(\rho) > 0 \Leftrightarrow \theta_\rho \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[. \quad (3.56)$$

Pour un métamatériau ($\mathbf{k}' \cdot \mathbf{P} < 0$), nous établissons :

$$\Re(\rho) < 0 \Leftrightarrow \theta_\rho \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[. \quad (3.57)$$

3. $k' = k'' = 0$. Ce cas est impossible car les critères (3.54) et (3.55) sont incompatibles lorsque $\omega \neq 0$.

Pour les ondes homogènes dont les vecteurs \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' et \mathbf{P} sont colinéaires, la relation (3.53) est satisfaite dans les trois situations suivantes :

1. $\|\mathbf{k}''\| = 0$. Le nombre d'onde est à valeurs réelles et le milieu est non dissipatif.
2. $\|\mathbf{P}\| = 0$. La norme du vecteur de Poynting est nulle (pas de flux d'énergie et donc pas de propagation d'énergie). Les ondes ne peuvent pas se propager dans ce type de milieu. L'expression (3.38) du vecteur de Poynting montre que ceci se produit lorsque :

$$\cos\left(\frac{\theta_\rho + \theta_\kappa}{2}\right) = 0, \quad (3.58)$$

soit :

$$\theta_\rho + \theta_\kappa = \pm\pi. \quad (3.59)$$

3. $\|\mathbf{k}''\| = \|\mathbf{P}\| = 0$. Cette configuration est une combinaison des deux cas précédents.

3.2.3 Représentation graphique des zones dites « matériau classique » et « métamatériau » (pour des ondes planes homogènes)

Nous avons vu que les propriétés de matériau classique ou de métamatériau dépendent directement des arguments θ_ρ et θ_κ de la masse volumique et du module de compressibilité *via* les inéquations (3.40), (3.47) et (3.51) provenant respectivement des critères :

1. $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}'' > 0$, définition d'un milieu absorbant (milieu passif) ;
2. $\Im(k^2) = 2k'k'' > 0$, critère de matériaux classiques pour une onde plane homogène ;
3. $\Im(k^2) = 2k'k'' < 0$, critère de métamatériaux pour une onde plane homogène.

On peut facilement résoudre graphiquement les inéquations (3.40), (3.46) et (3.50) à l'aide des bornes de ces inéquations. Par exemple, l'inéquation (3.46) définissant un matériau classique a comme bornes $\theta_\rho = \theta_\kappa$ et $\theta_\rho = \pi + \theta_\kappa$. Les solutions de cette inéquation sont donc tous les couples $(\theta_\rho, \theta_\kappa)$ compris entre ces deux droites. La résolution de toutes les inéquations permet d'obtenir la figure 3.4. Les différents cas particuliers sont notés par les droites (traits pleins, tirets et trait mixte). Les points

repèrent les cas de milieux parfaits présentés dans la section 3.1. On remarque que la surface occupée par les matériaux classiques est strictement égale à celle occupée par les métamatériaux. La surface restée blanche représente les solutions non physiques (correspondant à des milieux « amplificateurs »). La surface occupée par ces milieux est strictement égale à celle occupée par les milieux absorbants.

La figure 3.4 montre que la masse volumique et le module de compressibilité ne doivent pas nécessairement avoir tous les deux une partie réelle positive pour qu'un milieu soit un matériau classique. De même ils ne doivent pas nécessairement avoir tous les deux une partie réelle négative pour qu'un milieu soit un métamatériau.

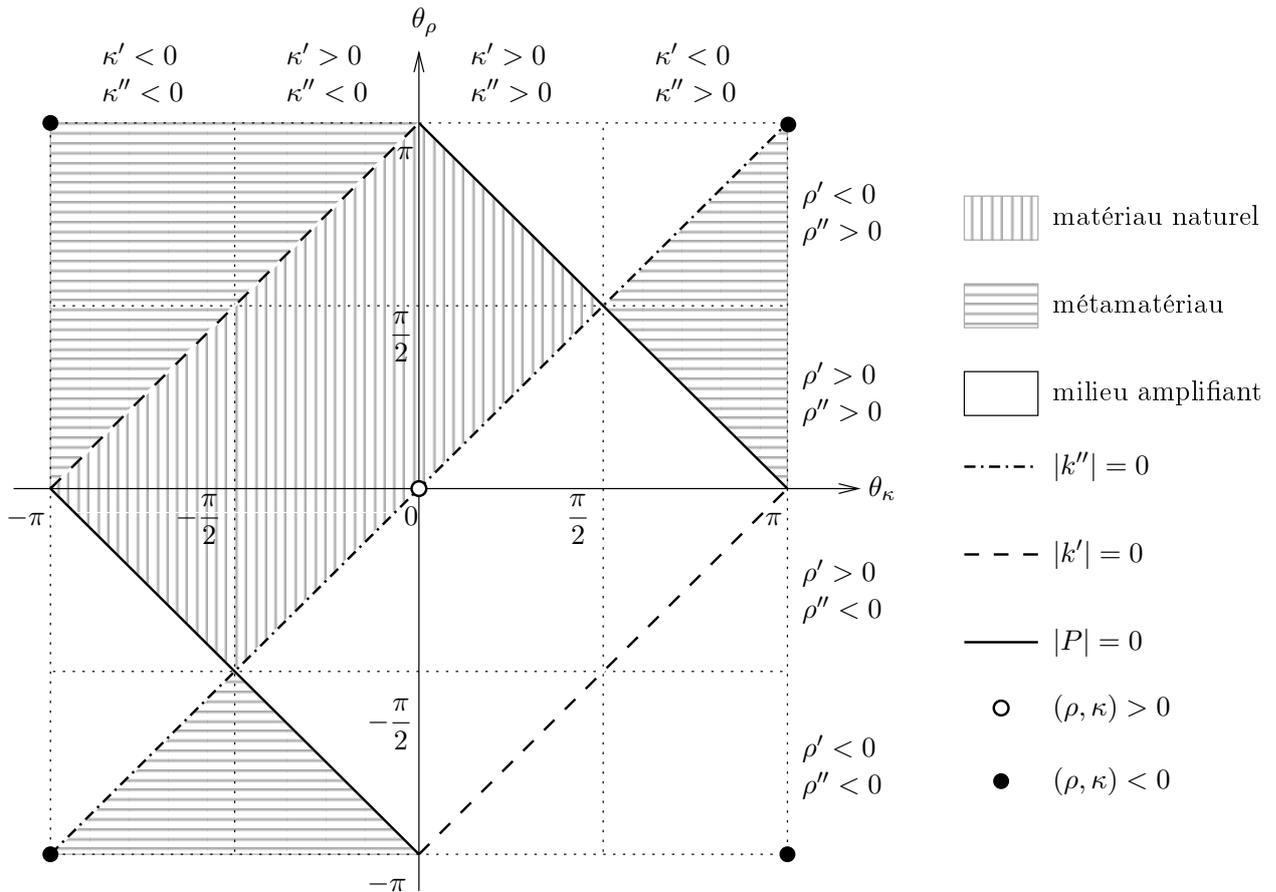


Figure 3.4 – Relation entre le type du milieu et les arguments des propriétés mécaniques (à valeurs complexes) de ce milieu. θ_ρ et θ_κ sont respectivement les arguments de la masse volumique et du module de compressibilité.

3.2.4 Commentaires sur les ondes hétérogènes

Le comportement métamatériau (ou matériau classique) d'un milieu quelconque est intimement lié à la structure des ondes se propageant en son sein. Pour les ondes homogènes, on est capable de caractériser les comportements matériau classique et métamatériau à partir de la masse volumique et du module de compressibilité (*cf.* fig. 3.4). Par contre, si la structure des ondes est hétérogène (\mathbf{k}' et \mathbf{k}'' ne sont plus colinéaires), le critère absolu permettant de discriminer un métamatériau d'un matériau classique concerne les seules propriétés acoustiques à travers le signe de $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}'$. Sa transposition en terme de propriétés mécaniques (ρ et κ) reste un problème ouvert.

Un milieu est considéré comme atténuant lorsque l'amplitude d'une onde se propageant diminue

suivant la direction de propagation de son énergie (éq. (3.33)). Les critères définissant un matériau classique et un métamatériau sont toujours respectivement définis par les relations (3.31) et (3.32). On aurait pu supposer que les relations (3.42) et (3.48) (définissant respectivement un matériau classique et un métamatériau pour les ondes homogènes) se généralisent respectivement par :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' &> 0, \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' &< 0, \end{aligned} \quad (3.60)$$

pour les ondes hétérogènes. Ces deux inégalités sont satisfaites dans la majeure partie des situations, mais nous présentons ici les deux configurations pour lesquelles ces critères sont mis en défaut. Rappelons que le vecteur de Poynting s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs $\rho'\mathbf{k}'$ et $\rho''\mathbf{k}''$ (éq. (3.12)).

Cas où $\rho' > 0$ et $\rho'' > 0$

Considérons la valeur de $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}'$ en fonction de l'orientation de \mathbf{P} , pour un vecteur d'onde \mathbf{k} donné. Sur la figure 3.5, nous présentons, conformément à l'expression (3.12), les différentes orientations du vecteur de Poynting lorsque $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' > 0$ (fig. 3.5.a) ou $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' < 0$ (fig. 3.5.b). Le vecteur de Poynting est orienté dans la partie du plan définie par les tirets. Lorsque $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' > 0$, tous les vecteurs \mathbf{P} possibles satisfont les relations (3.31) et (3.33), caractérisant les matériaux classiques atténuants. Cependant, lorsque $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' < 0$, on voit sur la figure 3.5.b que selon l'orientation du vecteur de Poynting, le milieu peut se comporter comme un matériau classique (cas de \mathbf{P}_1) ou comme un métamatériau (cas de \mathbf{P}_2).

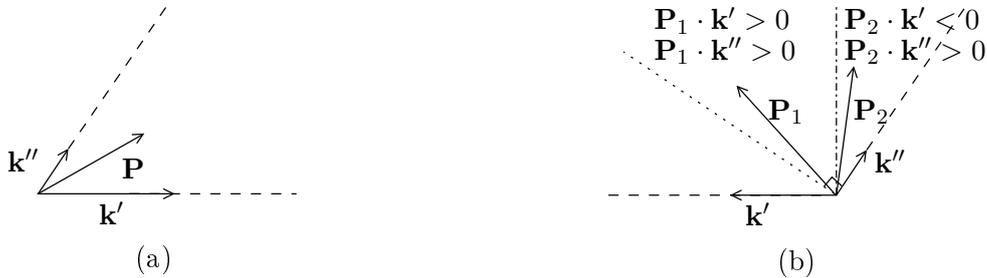


Figure 3.5 – Orientation du vecteur de Poynting en fonction du vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$ d'une onde hétérogène : a) $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' > 0$, b) $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' < 0$.

Cas où $\rho' < 0$ et $\rho'' > 0$

Considérons la valeur de $\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}'$ selon l'orientation de \mathbf{P} , pour un vecteur d'onde \mathbf{k} donné. Sur la figure 3.6, nous présentons les différentes orientations du vecteur de Poynting lorsque $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' > 0$ (fig. 3.6.a) ou $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' < 0$ (fig. 3.6.b). Comme dans le cas précédent, le vecteur de Poynting est orienté dans la partie du plan définie par les tirets. Lorsque $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' < 0$, tous les vecteurs \mathbf{P} possibles satisfont les relations (3.32) et (3.33), définissant les métamatériaux atténuants. Cependant, lorsque $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' > 0$, on voit sur la figure 3.6.a que selon l'orientation du vecteur de Poynting, le milieu peut se comporter comme un matériau classique (cas de \mathbf{P}_2) ou comme un métamatériau (cas de \mathbf{P}_1).

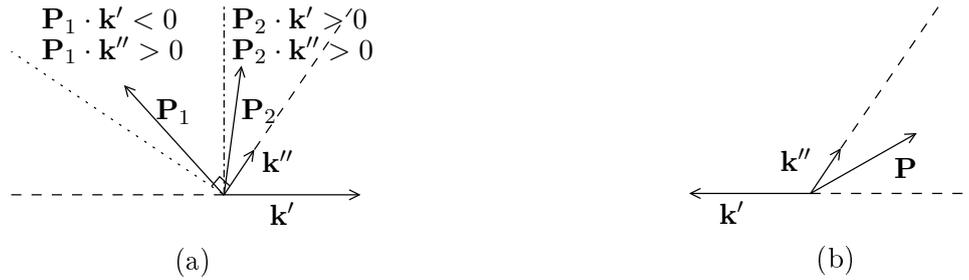


Figure 3.6 – Orientation du vecteur de Poynting en fonction du vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$ d'une onde hétérogène : a) $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' > 0$, b) $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' < 0$.

3.3 Analyse du phénomène d'amplification des ondes évanescentes dans les métamatériaux

Pendry [8] a montré qu'il est possible d'obtenir une lentille parfaite grâce à un métamatériau ayant un rapport des vitesses de phase $n_\varphi = -1$ avec le milieu extérieur. Ce système est identique à celui étudié précédemment par Veselago [7] : les propriétés électromagnétiques de la lentille (la permittivité ϵ_1 et la perméabilité magnétique μ_1) sont égales en norme à celles du milieu environnant mais opposés en signe, l'impédance restant inchangée. Le nombre d'onde, et par conséquent la vitesse de phase de l'onde (*cf.* éq. (3.21)) dans la lentille sont également de signes opposés à ceux du milieu environnant. Le métamatériau est alors susceptible d'amplifier les ondes évanescentes [8]. Bien que ce résultat ait suscité de vives réactions [102–110], il a ensuite été confirmé par des simulations [111] puis des expérimentations [112]. Par la suite, Ambati *et al.* [113] ont transcrit l'article de Pendry pour les ondes acoustiques. Ils ont également observé que les ondes acoustiques évanescentes sont amplifiées. Ils ont repris les conclusions de Pendry pour expliquer ce résultat. La justification du mécanisme d'amplification par des résonances d'ondes d'interface a été remis en cause par 't Hooft [102]. Nous confirmerons dans la suite les invraisemblances physiques relevées. Nous verrons dans cette section que la justification avancée par Pendry [8] est une conséquence du choix inapproprié du signe de la racine carrée permettant d'obtenir le nombre d'onde suivant la normale à l'interface dans le métamatériau. En fait, la solution physique (seule solution possible au problème mathématique) impose que l'amplitude de l'onde évanescente soit croissante au sein du métamatériau. Le principe d'amplification sera illustré en considérant les phénomènes de réfraction à une interface d'une onde hétérogène sous incidence oblique.

3.3.1 Réflexion et transmission d'une onde plane monochromatique à une interface séparant deux milieux semi-infinis

Considérons la réflexion et la transmission d'une onde plane monochromatique par une interface plane séparant deux milieux fluides semi-infinis notés 0 et 1. Soient \mathbf{e}_y la normale à l'interface et \mathbf{e}_x sa parallèle. Les vecteurs \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y forment une base orthonormée cartésienne. Le système est présenté sur la figure 3.7. L'interface est le plan d'équation $y = 0$. Soient $p_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$ la pression de l'onde incidente définie par :

$$p_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = P_0 e^{i(\mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.61)$$

$p_{R_{01}}(\mathbf{r}, t)$ la pression réfléchie :

$$p_{R_{01}}(\mathbf{r}, t) = R_{01} P_0 e^{i(\mathbf{k}_{R_{01}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.62)$$

et $p_{T_{01}}(\mathbf{r}, t)$ la pression transmise :

$$p_{T_{01}}(\mathbf{r}, t) = T_{01} P_0 e^{i(\mathbf{k}_{T_{01}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (3.63)$$

La vitesse particulière de chaque onde s'exprime à l'aide de l'équation (3.10) :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k}}{\rho\omega} p(\mathbf{r}, t). \quad (3.64)$$

En posant $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$, la composante de la vitesse particulière de chaque onde suivant la normale à l'interface s'écrit, à l'aide la relation (3.64) ou encore de l'impédance d'une onde progressive au sens de l'énergie (3.29) :

$$\begin{aligned} v_{\text{inc},y}(\mathbf{r}, t) &= \frac{k_{\text{inc},y}}{\rho_0\omega} p_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\cos(\theta_0)}{Z_0} p_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t), \\ v_{R_{01},y}(\mathbf{r}, t) &= \frac{k_{R_{01},y}}{\rho_0\omega} p_{R_{01}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\cos(\theta_0)}{Z_0} p_{R_{01}}(\mathbf{r}, t), \\ v_{T_{01},y}(\mathbf{r}, t) &= \frac{k_{T_{01},y}}{\rho_1\omega} p_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\cos(\theta_1)}{Z_1} p_{T_{01}}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Notons l'intérêt du choix de considérer des impédances Z_0 et Z_1 toujours positives quelle que soit la nature du milieu (matériau classique ou métamatériau). Effectivement, le troisième terme dans les expressions (3.65) ne fait pas apparaître le signe du nombre d'onde dans les deux milieux.

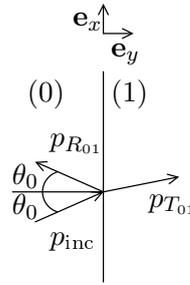


Figure 3.7 – Réflexion et transmission d'une onde plane monochromatique par une interface plane séparant deux milieux semi-infinis pour un angle d'incidence θ_0 quelconque.

Les deux milieux étant fluides, on détermine les coefficients de réflexion et transmission (en pression) du système présenté sur la figure 3.7 grâce aux conditions de continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface :

$$\begin{aligned} 1 + R_{01} &= T_{01}, \\ \frac{k_{\text{inc},y}}{\rho_0} (1 - R_{01}) &= \frac{k_{T_{01},y}}{\rho_1} T_{01}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

qui s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{01} \\ T_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.67)$$

où $\tau = \frac{k_{1,y}\rho_0}{k_{0,y}\rho_1} = \frac{Z_0 \cos(\theta_1)}{Z_1 \cos(\theta_0)}$. Ce système est du type $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ et possède une solution \mathbf{x} unique et finie si et seulement si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Dans le cas présent :

$$\det(\mathbf{A}) = -(1 + \tau). \quad (3.68)$$

Il apparaît que si $\tau = -1$, le déterminant de la matrice \mathbf{A} est nul et que, les deux lignes du système linéaire (3.67) n'étant pas linéairement dépendantes, ce système n'a pas de solution. Lorsque $\tau \neq -1$, l'unique couple de solutions est :

$$\begin{aligned} R_{01} &= \frac{1 - \tau}{1 + \tau}, \\ T_{01} &= \frac{2}{1 + \tau}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Notons que dans le cas particulier où $\tau = 1$, la réflexion est nulle et la transmission est totale ($T_{01} = 1$). Dans le cas d'une onde de volume incidente, la superlentille de Veselago [7] telle que $Z_0 = Z_1$ et $|\theta_0| = |\theta_1|$ (éqs. (3.23) et (3.26)) satisfait $\tau = 1$. La réflexion est donc nulle à chaque interface de la superlentille. Par contre, une valeur de $\tau = 1$ lorsque l'onde incidente est évanescente, rasante selon \mathbf{e}_x ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$) et d'amplitude décroissante suivant \mathbf{e}_y impliquerait la transmission d'une onde évanescente rasante ($|\theta_1| = \frac{\pi}{2}$) d'amplitude croissante suivant \mathbf{e}_y dans le métamatériau : l'explication (théorique) de ce résultat contre intuitif est donnée dans la section suivante.

a) Onde évanescente incidente rasante : cas du métamatériau parfait de Veselago ($\rho_1 = -\rho_0$ et $\kappa_1 = -\kappa_0$)

Pendry [8] a étudié la transmission d'une onde incidente évanescente rasante par la lentille de Veselago (structure à deux interfaces, avec $|\theta_0| = |\theta_1| = \frac{\pi}{2}$ et $k_1 = -k_0$) : les propriétés électromagnétiques de la plaque sont de signes opposés à celles du milieu environnant. Il s'est aperçu que ces ondes sont amplifiées par la lentille, ce qu'il explique par des résonances d'ondes d'interface impliquant des amplitudes infinies des coefficients de réflexion et de transmission à chaque interface. Ces valeurs extrêmes sont atteintes en privilégiant la solution $k_{1,y} = k_{0,y}$, représentative de la décroissance de l'amplitude de l'onde évanescente transmise dans le métamatériau. Le coefficient τ du système (3.67) associé à cette solution est égal à -1 .

Par ailleurs, pour les ondes de volume, les propriétés de la lentille de Veselago impliquent $\tau = 1$, traduisant la continuité des impédances aux interfaces. Observons dès à présent, en considérant l'onde évanescente comme un cas limite des ondes de volumes, l'incohérence entre les valeurs que prennent les rapports τ respectifs, -1 et 1 .

Considérons ici l'équivalent acoustique du problème traité par Pendry. Les propriétés mécaniques de la lentille sont alors définies par $\rho_1 = -\rho_0$ et $\kappa_1 = -\kappa_0$, les deux milieux étant non atténuants et $k_1 = -k_0$. Nous nous intéressons uniquement à la réflexion et à la transmission par une interface séparant ces deux milieux. Invoquant la relation de Snell-Descartes, $k_{1,x} = k_{0,x}$, nous avons $k_{1,y}^2 = k_{0,y}^2$ soit $k_{1,y} = \pm k_{0,y}$. L'onde incidente est une onde évanescente rasante d'amplitude décroissante ($k_{0,x} > k_0$). Les deux milieux étant non absorbants, la composante des nombres d'onde suivant la normale à l'interface $k_{0,y}$ et $k_{1,y}$ est imaginaire pure dans ces deux milieux, $k_{1,y}^2 = k_1^2 - k_{0,x}^2 < 0$.

Ceci implique, d'après l'expression (3.12), que le vecteur de Poynting de l'onde transmise dans le métamatériau est parallèle à l'interface quel que soit le signe de $k_{1,y}$ choisi. Dans cette situation précise, le critère d'une onde s'éloignant de l'interface (au sens de l'énergie) n'est donc pas pertinent. Pendry a alors basé son choix sur une décroissance « physique » de l'onde évanescente transmise, $k_{1,y} = k_{0,y}$ impliquant $\tau = -1$ et par suite des valeurs infinies des amplitudes des coefficients de réflexion et de transmission (3.69) à l'interface. Pendry a interprété ces dernières valeurs comme étant dues à des résonances d'ondes d'interface. 't Hooft [102] avait déjà critiqué ce choix, en affirmant que les coefficients de réflexion et de transmission ne pouvaient pas être infinis. En regardant de plus près le système (3.67), il apparaît qu'il n'a tout simplement pas de solution lorsque $\tau = -1$, valeur liée au choix $k_{1,y} = k_{0,y}$. Si l'on souhaite malgré tout trouver une solution à ce problème de réfraction, il ne reste plus que le choix $k_{1,y} = -k_{0,y}$, c'est-à-dire à considérer une onde évanescente rasante d'amplitude croissante. Avec ce choix, $\tau = 1$ et le système (3.67) admet alors un couple de solutions uniques et finies : $R_{01} = 0$, $T_{01} = 1$.

En conclusion, si une onde évanescente rasante d'amplitude décroissante lorsque $y \rightarrow \infty$ insone une interface séparant ces deux milieux, alors l'onde transmise est une onde évanescente rasante d'amplitude croissante lorsque $y \rightarrow \infty$ (fig. 3.8 a). Inversement, lorsque l'onde incidente est une onde évanescente rasante d'amplitude croissante lorsque $y \rightarrow \infty$, alors, comme $\tau = 1$, l'onde transmise sera une onde évanescente rasante d'amplitude décroissante lorsque $y \rightarrow \infty$ (fig. 3.8 b).

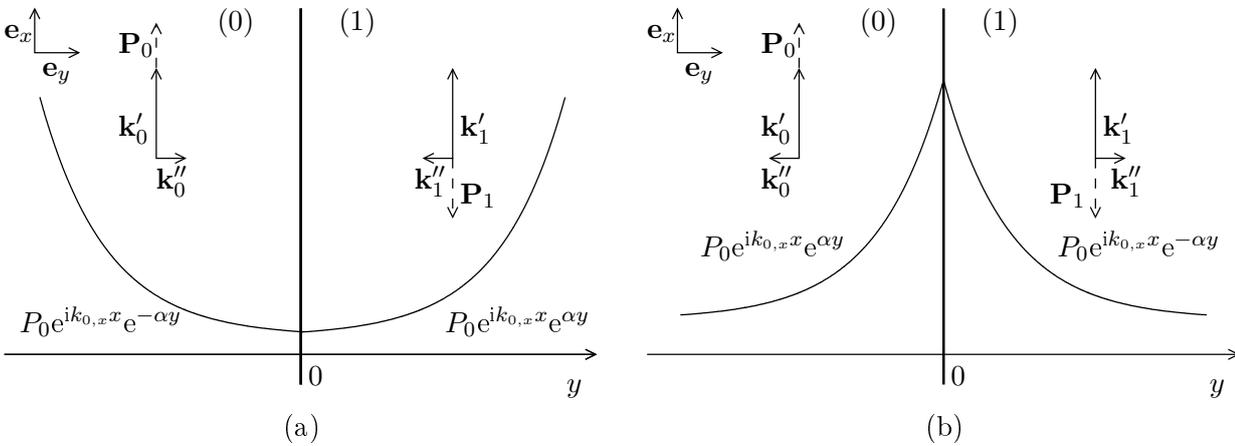


Figure 3.8 – Structure des ondes évanescentes lors de la réflexion et de la transmission d'une onde évanescente à l'interface entre un matériau classique et un métamatériau de Veselago ($\tau = 1$) : a) onde incidente d'amplitude décroissante, b) onde incidente d'amplitude croissante.

Dans le cadre d'une interface séparant deux milieux semi-infinis, lorsque l'onde incidente est une onde évanescente rasante d'amplitude décroissante, $\Im(k_{0,y}) > 0$, l'onde transmise est une onde évanescente rasante d'amplitude croissante, $\Im(k_{1,y}) < 0$. Cela signifie qu'à l'infini dans le second milieu, l'amplitude du champ acoustique sera infinie. Si le milieu a maintenant une épaisseur finie (introduction d'une seconde interface), l'onde transmise à la seconde interface sera une onde évanescente rasante d'amplitude décroissante, $\Im(k_{0,y}) > 0$. L'amplitude du champ acoustique à l'infini sera alors nulle. Le paradoxe d'un champ infini à l'infini disparaît lors de l'étude d'une structure réelle (à deux interfaces).

Nous avons vu mathématiquement que le choix d'une onde transmise évanescente rasante d'amplitude croissante s'imposait dans le problème de la réfraction d'une onde évanescente incidente d'am-

plitude décroissante à l'interface matériau classique/métamatériau de Veselago. Ce résultat est mathématiquement clair, mais la physique sous-jacente n'est pas triviale et même contre-intuitive. Nous proposons maintenant une vision du problème qui permet de clarifier pourquoi l'amplitude de l'onde évanescente transmise doit être croissante.

Reprenons le problème de la réfraction d'une onde évanescente incidente sur l'interface matériau classique/métamatériau de Veselago, mais cette fois-ci avec un angle d'incidence θ_0 (fig. 3.9). Comme précédemment, l'amplitude de l'onde incidente est décroissante suivant \mathbf{e}_y ($\mathbf{k}_0'' \cdot \mathbf{e}_y > 0$). Dans le cas où $k_{1,y} = k_{0,y}$ (fig. 3.9.a), l'amplitude de l'onde transmise est elle aussi décroissante suivant \mathbf{e}_y . Par contre, cette configuration correspond à un rapport $\tau = -1$, solution mathématiquement impossible. On le voit d'autant mieux avec un angle d'incidence différent de $\frac{\pi}{2}$, car elle correspond à une onde dont l'énergie est dirigée vers l'interface. À l'inverse, dans la configuration de la figure 3.9.b, bien que l'onde transmise soit d'amplitude croissante suivant \mathbf{e}_y , l'énergie de l'onde transmise s'éloigne de l'interface et satisfait en plus $\tau = 1$. En somme, lorsque l'onde incidente n'est pas rasante ($\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$), le critère énergétique est en accord avec l'unique solution du système mathématique.

Comme les milieux considérés sont non dissipatifs, les amplitudes des ondes restent constantes le long des directions de propagation de la phase et de l'énergie. Compte tenu du vecteur \mathbf{k}_0'' , l'amplitude du champ le long de la trajectoire $a^{(0)}$ est plus grande que celle du champ le long de la trajectoire $b^{(0)}$ pour l'onde incidente. Comme il n'y a pas de rupture d'impédance entre les deux milieux, ($R_{01} = 0$ et $T_{01} = 1$), les amplitudes du champ le long des trajectoires $a^{(1)}$ et $b^{(1)}$ sont respectivement égales à celles du champ le long des trajectoires $a^{(0)}$ et $b^{(0)}$. Il devient alors évident, sur la figure 3.9.c, que l'amplitude croît entre B' et A' , c'est-à-dire suivant les y croissants. La limite $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ de ce système est le cas présenté précédemment.

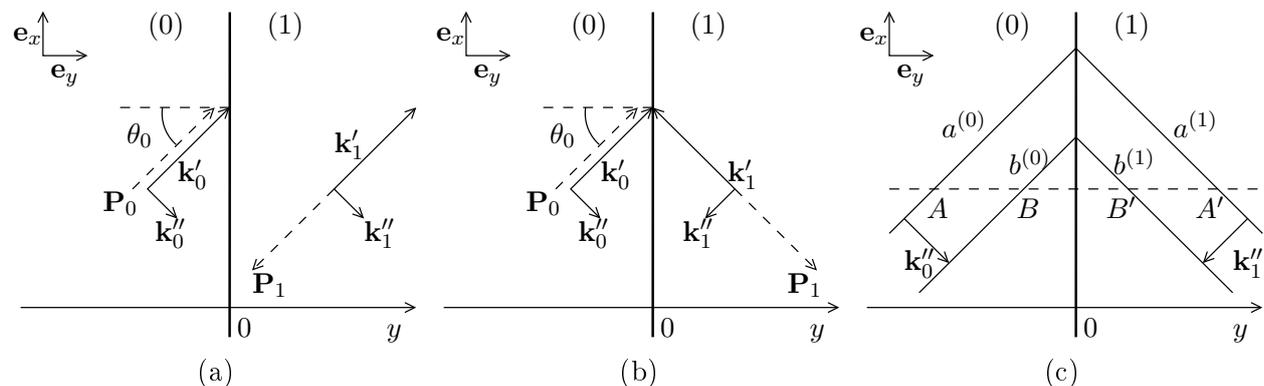


Figure 3.9 – Réfraction d'une onde hétérogène insonant une interface avec un angle d'incident θ_0 : a) $k_{1,y} = k_{0,y}$, b) $k_{1,y} = -k_{0,y}$, c) trajectoires à amplitudes constantes des ondes incidente et transmise lorsque $k_{1,y} = -k_{0,y}$.

b) Onde évanescente incidente rasante : cas du métamatériau de Veselago faiblement absorbant ($\rho_1 = -\rho_0 + i\epsilon$ et $\kappa_1 = -\kappa_0 + i\epsilon'$)

Considérons maintenant un milieu 0 non absorbant et un milieu 1 dont les propriétés mécaniques sont $\rho_1 = -\rho_0 + i\epsilon$ et $\kappa_1 = -\kappa_0 + i\epsilon'$, avec $|\epsilon| \ll 1$ et $|\epsilon'| \ll 1$. La figure 3.4 montre que pour avoir un métamatériau absorbant, sans restriction sur les normes des parties imaginaires, on doit avoir $\epsilon > 0$ et $\epsilon' < 0$. Le métamatériau est maintenant faiblement absorbant, $k_1'' \ll 1$. Ce milieu s'apparente à

la superlentille de Veselago, car la vitesse de phase $v_{\varphi,1}$ dans le milieu 1, possède une norme proche de celle dans le milieu 0 et est de signe opposé, $v_{\varphi,1} = \frac{\omega}{\Re(k_1)} \approx -v_{\varphi,0}$. Le milieu étant dissipatif, l'expression (3.12) montre que le vecteur de Poynting n'est plus colinéaire à \mathbf{k}'_1 et, étant donné que $\epsilon > 0$, il est dirigé dans le secteur formé par $-\mathbf{k}'_1$ et \mathbf{k}''_1 .

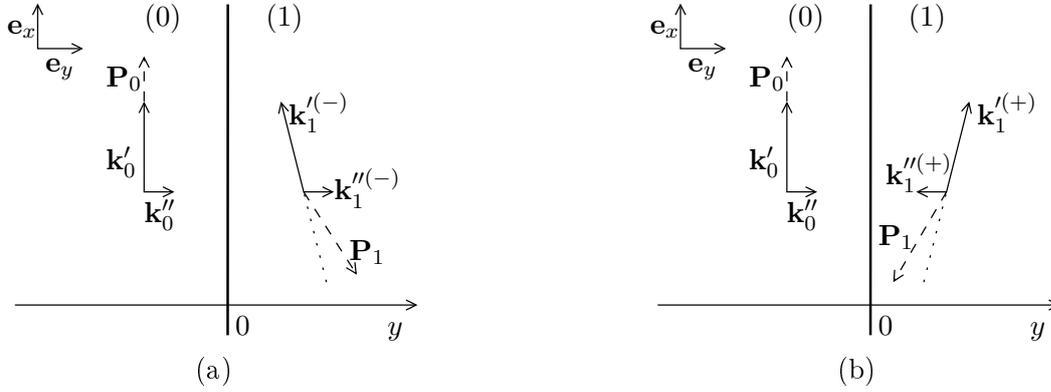


Figure 3.10 – Vecteurs d'onde et de Poynting de l'onde transmise à une interface séparant un matériau classique non absorbant et un métamatériau de Veselago faiblement absorbant selon le choix de la racine de la composante du nombre d'onde suivant la normale à l'interface $k_{1,y} = \pm\sqrt{k_1^2 - k_{0,x}^2}$: a) racine à partie réelle négative, $\mathbf{k}'_1^{(-)} \cdot \mathbf{e}_y < 0$; b) racine à partie réelle positive, $\mathbf{k}'_1^{(+)} \cdot \mathbf{e}_y > 0$.

Le milieu 1 étant un métamatériau du point de vue des ondes homogènes, le nombre d'onde k_1 respecte la relation (3.49) : $\Im(k_1^2) < 0$. De plus, \mathbf{k}''_0 étant colinéaire à \mathbf{e}_x , $k_{0,x}$ est à valeurs réelles. On en déduit donc que :

$$\Im(k_{1,y}^2) = \Im(k_1^2 - k_{0,x}^2) = \Im(k_1^2) < 0, \quad (3.70)$$

les parties réelle et imaginaire de $k_{1,y}$ sont donc de signes opposés. C'est pourquoi l'angle géométrique entre les vecteurs \mathbf{k}'_1 et \mathbf{k}''_1 est obtus.

Lorsque $k_{0,x} > \Re(k_1)$, la composante $k_{1,y} = \pm\sqrt{k_1^2 - k_{0,x}^2}$ n'est plus imaginaire pure ($k'_{1,y} \neq 0$). Comme $k_1 \neq k_0$, alors $|k_{1,y}| \neq |k_{0,y}|$ induisant $\tau \neq \pm 1$. L'argument précédent, permettant de rejeter une des deux solutions $\pm\sqrt{k_1^2 - k_{0,x}^2}$ en fonction de la valeur ± 1 du rapport τ associé, ne peut plus être avancé. Notons $k_{1,y}^{(+)}$ la racine de $k_{1,y}^2$ à partie réelle positive, et $k_{1,y}^{(-)}$ la racine à partie réelle négative. Comme on le voit sur la figure 3.10.a, l'onde définie par la racine $k_{1,y}^{(-)}$ est une onde dont l'énergie s'éloigne de l'interface, et qui décroît lorsque $y \rightarrow \infty$. À l'inverse, l'onde définie par la racine $k_{1,y}^{(+)}$ est une onde dont l'énergie est dirigée vers l'interface, et qui croît lorsque $y \rightarrow \infty$ (fig. 3.10.b). Lorsque le métamatériau est non absorbant, nous avons vu dans la section précédente que l'onde transmise est une onde croissante lorsque $y \rightarrow \infty$. Le milieu ici présent étant faiblement absorbant, on peut supposer que le milieu se comporte de la même manière, et donc que l'onde transmise est définie par $k_{1,y}^{(+)}$ (fig. 3.10.b). L'autre solution $k_{1,y}^{(-)}$ semble néanmoins acceptable d'un point de vue physique, car elle est associée à une onde dont l'énergie s'éloigne de l'interface (fig. 3.10.a). Dans la section suivante, nous identifions un critère (basé sur la convergence de la série de Debye) permettant de retenir une de ces deux solutions, $k_{1,y}^{(+)}$ ou $k_{1,y}^{(-)}$.

3.3.2 Réflexion et transmission par une plaque à faces parallèles.

Les coefficients de réflexion et de transmission d'une onde plane monochromatique par une plaque d'épaisseur d peuvent être déterminés à l'aide des conditions de continuité de la pression et de la vitesse particulaire normale à l'interface du système harmonique présenté sur la figure 3.11. Soient $p_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$ la pression incidente définie par :

$$p_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = P_0 e^{ik_{0,x}x} e^{ik_{0,y}y} e^{-i\omega t}, \quad (3.71)$$

$p_R(\mathbf{r}, t)$ la pression réfléchie :

$$p_R(\mathbf{r}, t) = RP_0 e^{ik_{0,x}x} e^{-ik_{0,y}y} e^{-i\omega t}, \quad (3.72)$$

et $p_T(\mathbf{r}, t)$ la pression transmise :

$$p_T(\mathbf{r}, t) = TP_0 e^{ik_{1,x}x} e^{ik_{1,y}(y-d)} e^{-i\omega t}. \quad (3.73)$$

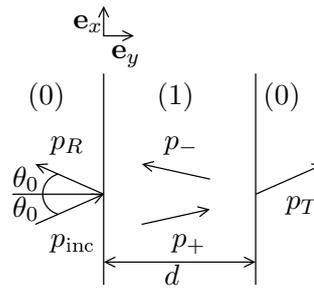


Figure 3.11 – Réflexion et transmission d'une onde plane monochromatique insonante, avec un angle d'incidence θ_0 , une plaque infinie suivant \mathbf{e}_x .

Après calcul, il s'avère qu'en utilisant la définition d'une onde progressive au sens de l'énergie, les coefficients de réflexion et de transmission sont toujours donnés par les formules bien connues d'un système composé de matériaux classiques, quelle que soit la nature des deux milieux en présence :

$$R = \frac{(\tau^2 - 1)(1 - e^{2ik_{1,y}d})}{(\tau + 1)^2 - (\tau - 1)^2 e^{2ik_{1,y}d}}, \quad (3.74)$$

$$T = \frac{4\tau e^{i(k_{1,y} - k_{0,y})d}}{(\tau + 1)^2 - (\tau - 1)^2 e^{2ik_{1,y}d}}$$

avec :

$$k_{1,y} = \pm \sqrt{k_1^2 - k_{1,x}^2}. \quad (3.75)$$

Les relations (3.74) sont indépendantes du choix du signe de $k_{1,y}$. Effectivement, elles sont identiques qu'elles soient exprimées avec la racine $k_{1,y}^{(+)}$ (racine de $k_{1,y}^2$ à partie réelle positive) et le rapport $\tau^{(+)}$ correspondant, ou avec la racine $k_{1,y}^{(-)}$ (racine de $k_{1,y}^2$ à partie réelle négative) et le rapport $\tau^{(-)}$ correspondant : $R(k_{1,y}^{(+)}) = R(k_{1,y}^{(-)})$ et $T(k_{1,y}^{(+)}) = T(k_{1,y}^{(-)})$, car $\tau^{(-)} = -\tau^{(+)}$.

Le coefficient de transmission s'exprime également sous la forme d'une série de Debye qui traduit

les multiples réflexions et transmissions à chaque interface de la plaque :

$$T = T_{01} e^{i(k_{1,y} - k_{0,y})d} T_{10} \sum_{n=0}^{\infty} R_{10}^{2n} e^{2ni k_{1,y}d}, \quad (3.76)$$

où R_{10} et T_{10} sont respectivement les coefficients de réflexion et transmission à une interface, lorsque l'onde incidente provient du milieu 1. La série (3.76) converge lorsque :

$$|C| = \left| R_{10}^2 e^{2i k_{1,y}d} \right| < 1, \quad (3.77)$$

où $k_{1,y}$ est la composante du nombre d'onde suivant \mathbf{e}_y de l'onde transmise à la première interface. Ce critère de convergence C , exprimé en fonction de la racine $k_{1,y}^{(+)}$ (noté alors $C^{(+)}$) ou de la racine $k_{1,y}^{(-)}$ (noté alors $C^{(-)}$), est tel que :

$$\begin{aligned} C^{(+)} &= \frac{(\tau^{(+)} - 1)^2}{(\tau^{(+)} + 1)^2} e^{2i k_{1,y}^{(+)}d}, \\ C^{(-)} &= \frac{1}{C^{(+)}}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

D'après (3.77), il apparaît alors que la série de Debye ne converge que pour une seule des deux racines, les critères (3.78) permettent finalement de répondre au problème présenté dans la section 3.3.1.b, en retenant la solution $k_{1,y}^{(+)}$ ou $k_{1,y}^{(-)}$. Notons que dans le cas où on a $|C^{(+)}| = |C^{(-)}| = 1$, la série de Debye diverge quel que soit le choix de la racine, sauf dans le cas où les critères respectent $C^{(+)} = C^{(-)} = -1$, la limite (infinie) de la série (3.76) étant alors indéterminée.

3.3.3 Étude de la lentille idéale : $\rho_1 = -\rho_0$, $\kappa_1 = -\kappa_0$

La résolution d'une lentille dépend de la plus petite longueur d'onde $\lambda_x \left(= \frac{2\pi}{k_{0,x}} \right)$ associée à la composante spectrale $k_{0,x}$ suivant la parallèle à l'interface que peut transmettre la lentille. Par conséquent elle dépend de la plus grande composante $k_{0,x}$ transmise, qui est telle que :

$$\max(k_{0,x}) = k_0, \quad (3.79)$$

dans le cas où les ondes évanescentes ne sont pas transmises par la lentille (classique). La résolution d'une lentille étant égale à $0,5 \min(\lambda_x)$ [114], elle vaut alors dans cette situation $0,5\lambda_0$. En considérant la transmission des ondes évanescentes, nous verrons dans la suite que cette limite de résolution peut être dépassée à l'aide de la superlentille idéale de Veselago ($\rho_1 = -\rho_0$ et $\kappa_1 = -\kappa_0$). Ce type de lentille est communément nommé hyperlentille.

Considérons une lentille de Veselago d'épaisseur d . La première interface est définie par le plan $y = 0$ et la seconde par $y = d$. Nous étudions la transmission des ondes évanescentes rasantes produites par une source ponctuelle placée en $y = -d_1$. La pression de ces ondes s'exprime par :

$$p_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = P_0 e^{i(k_{0,x}x - \omega t)} e^{-\sqrt{k_{0,x}^2 - k_0^2}(y+d_1)}, \quad (3.80)$$

où $k_{0,x} > k_0$. Comme nous l'avons vu dans la section 3.3.3.a, la réflexion est nulle à chaque interface, la

première interface supporte le système d'ondes évanescentes présenté sur la figure 3.8.a, et la seconde supporte le système d'ondes évanescentes présenté sur la figure 3.8.b (l'unique onde à l'intérieur de la plaque est donc une onde évanescente d'amplitude croissante). On montre que l'onde transmise par la plaque s'exprime alors par :

$$p_T(\mathbf{r}, t) = P_0 e^{i(k_{0,x}x - \omega t)} e^{\sqrt{k_{0,x}^2 - k_0^2}(2d - d_1 - y)}. \quad (3.81)$$

Comme on le voit sur la figure 3.3, les ondes sont focalisées à une distance de $2d$ de la source (point focal de la lentille). Ce point focal se situe ici en $y = 2d - d_1$. L'amplitude des ondes évanescentes (tout comme celle des ondes de volume) au niveau de l'image est donc égale à celle des ondes au niveau de la source : $p_T(y = 2d - d_1) = p_{\text{inc}}(y = -d_1)$. Toutes les ondes évanescentes incidentes telles que $k_{0,x} > k_0$ sont restaurées au niveau du point focal. La plus petite longueur d'onde λ_x transmise est donc théoriquement infiniment petite suivant \mathbf{e}_y . La lentille est alors dite parfaite (hyperlentille) : l'image d'un point source est également un point. La limite de résolution d'une lentille classique ($0,5\lambda_0$) est donc dépassée avec cette hyperlentille.

Contrairement à ce que prône Pendry [8], il n'y a pas de multiples réflexions au sein de la plaque, car la réflexion est nulle à chaque interface. L'amplification en sortie de lentille des ondes évanescentes est due au caractère croissant de l'unique onde évanescente dans la lentille et non à des résonances d'ondes d'interface.

3.3.4 Étude d'une lentille faiblement absorbante : $\rho_1 = -\rho_0 + i\epsilon$, $\kappa_1 = -\kappa_0 + i\epsilon'$

Nous considérons maintenant le problème d'une lentille de Veselago faiblement absorbante, c'est-à-dire d'une lentille initialement parfaite pour laquelle les propriétés mécaniques deviennent très *légèrement complexes*. En reprenant les paramètres de la section 3.3.1.b, posons : $\rho_1 = -\rho_0 + i\epsilon$ et $\kappa_1 = -\kappa_0 + i\epsilon'$, avec ϵ et ϵ' petits et respectivement positif et négatif. Étant donné que le rapport d'impédance τ est différent de ± 1 , utilisons le critère de convergence (3.77) de la série de Debye afin de déterminer si l'amplification des ondes évanescentes est due à des ondes évanescentes d'amplitude croissante au sein du métamatériau lors de la transmission à la première interface (comme dans la section 3.3.4) ou à des résonances d'ondes d'interface.

Afin de pouvoir déterminer la relation entre l'amplification des ondes évanescentes rasantes et le signe de la racine de $k_{1,y}^2$, nous avons étudié la norme du critère de convergence de la série de Debye selon le choix de la racine en fonction de $k_{0,x}$. Soient $\rho_0 = 1 \text{ g.cm}^{-3}$ et $\kappa_0 = 1 \text{ GPa}$, l'épaisseur de la plaque est $d = 5 \text{ mm}$. Nous avons considéré différentes valeurs du couple (ϵ, ϵ') :

- a : $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon' = 0$ (fig. 3.12.a), on a alors $\sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa_1}} \approx -1 + 5.10^{-3}i$,
- b : $\epsilon = 0$ et $\epsilon' = -10^{-2}$ (fig. 3.12.b), on a alors $\sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa_1}} \approx -1 + 5.10^{-3}i$,
- c : $\epsilon = 10^{-3}$ et $\epsilon' = 0$ (fig. 3.12.c), on a alors $\sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa_1}} \approx -1 + 5.10^{-4}i$,
- d : $\epsilon = 0$ et $\epsilon' = -10^{-3}$ (fig. 3.12.d), on a alors $\sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa_1}} \approx -1 + 5.10^{-4}i$.

Les cas a et b sont similaires car le rapport $\sqrt{\frac{\rho_1}{\kappa_1}}$ dans la plaque est identique dans les deux cas. Il en

est de même pour les cas c et d. Les résultats sont présentés sur la figure 3.12, sur laquelle la norme de la pression adimensionnée de l'onde transmise par la plaque au niveau de l'image $\frac{|p_T(y = 2d - d_1)|}{|p_{\text{inc}}(y = -d_1)|}$ est également reportée. La pression transmise est calculée à l'aide de la formule (3.73), dans laquelle est inséré le coefficient de transmission (3.74) déterminé à partir du système harmonique. Notons k_{lim} la valeur de $\frac{k_{0,x}}{k_0} > 1$ pour laquelle $|C^{(+)}| = |C^{(-)}| = 1$. Cette fréquence adimensionnée correspond à $\frac{|p_T(y = 2d - d_1)|}{|p_{\text{inc}}(y = -d_1)|} = 0,5$. La résolution d'une lentille étant caractérisée par la plus grande valeur spectrale k_x transmise (éq. (3.79)), elle sera d'autant plus fine que la bande spectrale sur laquelle le rapport des pressions est proche de 1 est large (figure 3.12). Il apparaît dès lors que la valeur de k_{lim} constitue un indicateur qualitatif de la résolution atteinte avec le jeu de paramètres mécaniques choisis. Plus il est élevé, meilleure est la résolution.

On voit apparaître trois zones différentes dans les courbes de la figure 3.12 :

1. lorsque l'onde incidente est une onde de volume, $\frac{k_{0,x}}{k_0} \in [0; 1]$, le critère représentatif de la convergence de la série de Debye est $C^{(-)}$ ($C^{(-)} \ll 1$). L'onde transmise dans le métamatériau est alors une onde de volume dont l'énergie s'éloigne de l'interface.
2. lorsque la composante spectrale parallèle à l'interface de l'onde incidente respecte $\frac{k_{0,x}}{k_0} \in [1; k_{\text{lim}}]$, la série de Debye converge avec le critère $C^{(+)}$. La partie imaginaire de $k_{1,y}$ étant de signe opposée à sa partie réelle (cf. éq. (3.70)), l'onde évanescence transmise dans le métamatériau est donc une onde d'amplitude croissante (fig. 3.10.b). Les coefficients de réflexion et de transmission valent à chaque interface, pour $\tau \rightarrow 1$: $R_{10} \approx R_{01} \approx 0$ et $T_{10} \approx T_{01} \approx 1$.
3. lorsque $\frac{k_{0,x}}{k_0} \in [k_{\text{lim}}; +\infty[$, le critère représentatif de la convergence de la série de Debye est $C^{(-)}$. L'onde évanescence transmise dans le métamatériau est donc une onde d'amplitude décroissante (fig. 3.10.a). Dans cette zone, les amplitudes des modules des coefficients de réflexion et de transmission sont très importantes (courbes non représentées ici). Cela correspond à des résonances d'ondes d'interface. Cependant, l'onde qui se propage une seule fois dans le métamatériau respecte $|T_{01} e^{i k_{1,y}^{(-)} d}| < 1$, ce qui signifie que lorsqu'elle arrive à la seconde interface, son amplitude est inférieure à celle de l'onde incidente à la première interface. Les fortes amplitudes de l'onde transmise à la première interface sont donc compensées par la décroissance de l'amplitude de l'onde évanescence.

Il apparaît que l'amplitude de la pression des ondes évanescences transmises par la plaque ($k_{0,x} > k_0$) au niveau du point focal est proche de l'amplitude des ondes incidentes au niveau de la source lorsque $|C^{(+)}| \ll 1$ (deuxième zone). Ainsi, comme dans le cas de la lentille idéale (de Veselago), si on insone la première interface avec une onde évanescence d'amplitude décroissante lorsque $y \rightarrow \infty$, alors l'onde transmise dans le métamatériau est une onde d'amplitude croissante lorsque $y \rightarrow \infty$ (cas présenté sur la figure 3.10.b). Comme dans la section précédente, il y a donc amplification des ondes évanescences car la solution à prendre en compte est la solution d'amplitude croissante, les résonances d'ondes d'interface n'intervenant pas dans le processus. Notons que Deschamps [115] a observé expérimentalement un comportement analogue lors de la réflexion et la transmission d'une onde évanescence de volume par une plaque à faces parallèles. Il a montré que l'onde transmise à la première interface est une onde plane hétérogène d'amplitude croissante ou décroissante selon l'angle d'incidence.

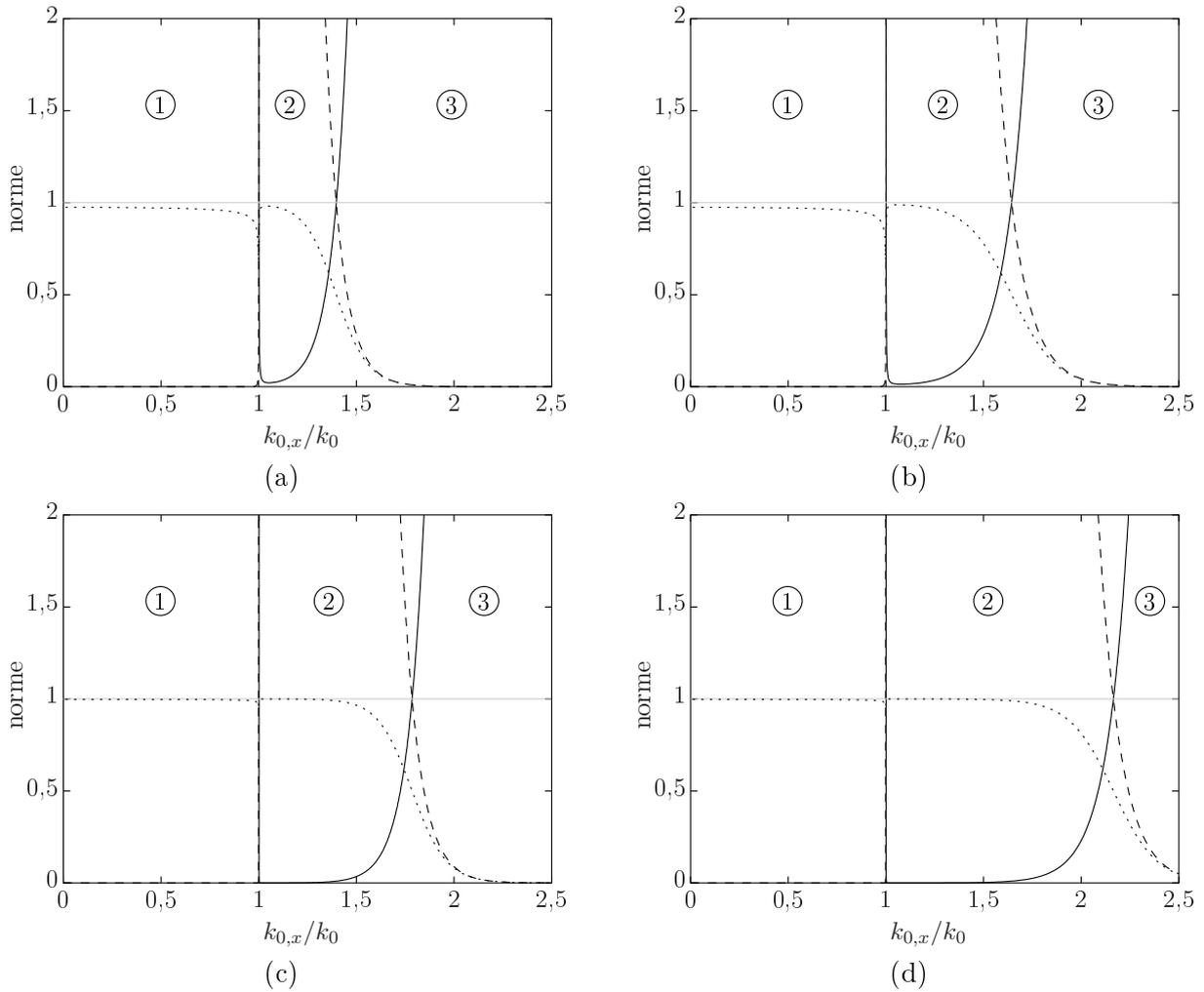


Figure 3.12 – Norme de $C^{(+)}$ (trait plein), $C^{(-)}$ (tirets) (éq. (3.78)) et de la pression transmise adimensionnée au niveau de l'image (pointillés). L'épaisseur de la plaque est $d = 5$ mm, avec : a) $\epsilon = 10^{-2}$, $\epsilon' = 0$, b) $\epsilon = 0$, $\epsilon' = -10^{-2}$, c) $\epsilon = 10^{-3}$, $\epsilon' = 0$ et d) $\epsilon = 0$, $\epsilon' = -10^{-3}$. Les zones 1, 2 et 3 sont décrites dans le texte.

On observe sur la figure 3.12 que la norme de la pression transmise adimensionnée au niveau du point focal reste proche de 1 pour de plus grandes valeurs de $k_{0,x}$ lorsque ρ_1 est à valeurs réelles ($\epsilon = 0$) (*cf.* tableau 3.1). Pour une épaisseur $d = 10$ mm (non présentée ici), le résultat est différent : la norme de la pression transmise adimensionnée au niveau de l'image reste proche de 1 pour de plus grande valeur de $k_{0,x}$ lorsque κ_1 est à valeurs réelles ($\epsilon' = 0$). Finalement, il apparaît que le critère permettant d'améliorer la résolution de la lentille (*i.e.* la valeur de k_{lim}) ne dépend linéairement ni de ϵ , ni de ϵ' .

Nous avons vu que les ondes évanescentes sont amplifiées lorsque $\left| C \left(k_{1,y}^{(+)} \right) \right| < 1$ (deuxième zone).

Le terme $\frac{(\tau^{(+)} - 1)^2}{(\tau^{(+)} + 1)^2}$ varie peu en fonction de $k_{0,x}$, car, avec $k_1 \approx -k_0$ et $\rho_1 \approx -\rho_0$, nous avons :

$$\tau^{(+)} \approx 1, \quad \forall k_{0,x} \in [1; k_{\text{lim}}]. \quad (3.82)$$

La norme de $C \left(k_{1,y}^{(+)} \right)$ (éq. (3.78)) est donc principalement pilotée par celle du terme $e^{2ik_{1,y}^{(+)}d}$. Ce qui signifie que si on diminue l'épaisseur de la plaque, alors pour obtenir une valeur de $\left| e^{2ik_{1,y}^{(+)}d} \right|$ identique au cas d'une plus grande épaisseur, la composante $k_{1,y}$, et par conséquent $k_{0,x}$, doit nécessairement

être plus élevée. La résolution d'une lentille étant donnée par la plus petite longueur d'onde λ_x (λ_x inversement proportionnelle à k_{lim}) pouvant être transmise par la lentille, la résolution de la lentille sera améliorée. Nous avons tracé sur la figure 3.13 les normes des différentes fonctions (critères de convergence de la série de Debye et norme de la pression au point focal) pour les cas a et b pour avec épaisseur de lentille plus faible : $d = 1$ mm. La valeur de k_{lim} en fonction de l'épaisseur de la plaque est donnée dans le tableau 3.1 pour les différents cas. On voit ainsi qu'en divisant l'épaisseur par 5, on multiplie la valeur de k_{lim} par 3,8 lorsque κ_1 est purement réel et par 6,5 lorsque ρ_1 est à valeurs réelles. La résolution d'une hyperlentille faiblement absorbante est donc améliorée en diminuant simplement son épaisseur.

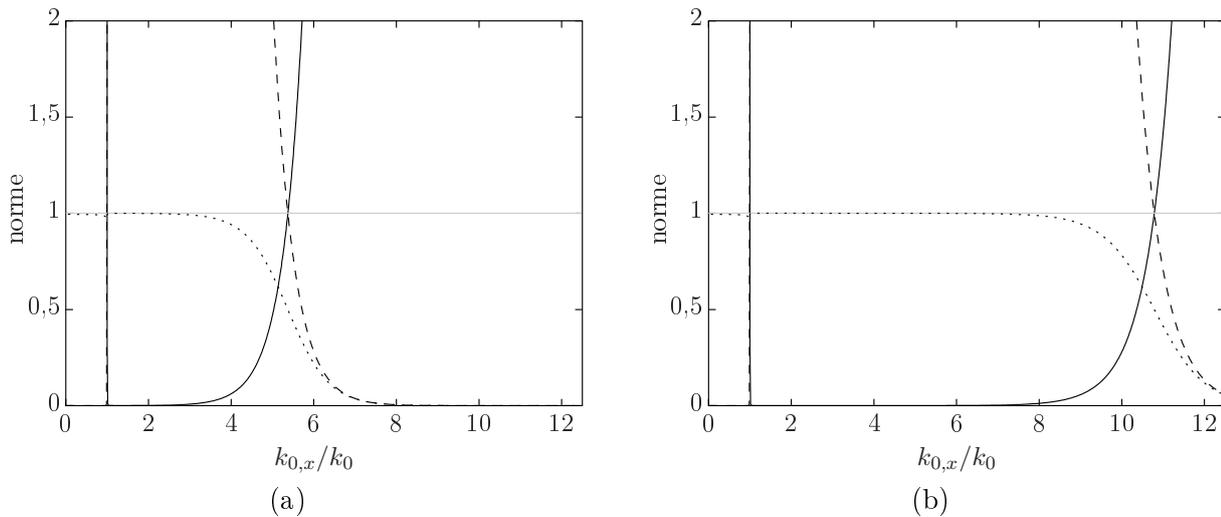


Figure 3.13 – Norme de $C^{(+)}$ (trait plein), $C^{(-)}$ (tirets) (éq. (3.77)) et de la pression transmise adimensionnée au niveau de l'image (pointillés). L'épaisseur de la plaque est $d = 1$ mm, avec : a) $\epsilon = -10^{-2}$, $\epsilon' = 0$ et b) $\epsilon = 0$, $\epsilon' = 10^{-2}$.

d en mm	ϵ	ϵ'	k_{lim}
5	-10^{-2}	0	1,4
	0	10^{-2}	1,65
5	-10^{-3}	0	1,78
	0	10^{-3}	2,16
1	-10^{-2}	0	5,37
	0	10^{-2}	10,79

Tableau 3.1 – Nombre d'onde limite en fonction des valeurs de ϵ , ϵ' et d .

3.4 Dimensionnement d'un métamatériau à partir de techniques d'homogénéisation de milieux aléatoires : potentialité

Contrairement aux milieux périodiques, une seule onde se propage au sein d'un milieu aléatoire. Les milieux aléatoires semblent donc être plus adaptés à la conception de métamatériaux, à la condition que le comportement visé (indice négatif) puisse être obtenu avec ce type de milieux. Théoriquement, ceci est possible lorsque le milieu est composé de diffuseurs résonant fortement à basses fréquences [30]. Nous donnons ici quelques exemples du comportement des paramètres mécaniques effectifs d'un milieu

homogène équivalent à un tel milieu aléatoire (dont on espère un comportement de type métamatériau), selon la technique d'homogénéisation choisie. Nous présentons les résultats obtenus avec les modèles de Li et Chan [30] et de Aristégui et Angel [58]. Le système considéré est le système fortement résonant présenté dans le chapitre 1. Il est composé de diffuseurs constitués du milieu fictif 2 ($\rho = 1,3 \text{ g.cm}^{-3}$, $\kappa = 13 \text{ kPa}$, $v_\varphi = 100 \text{ m.s}^{-1}$) immergés dans une matrice d'eau ($\rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}$, $\kappa = 2,25 \text{ GPa}$, $v_\varphi = 1500 \text{ m.s}^{-1}$). Les modules des coefficients d'amplitude modale T_n sont présentés sur la figure 1.15 du chapitre 1 en fonction de la fréquence réduite $k_0 a$. Nous considérons trois concentrations ϕ différentes : 5%, 15% et 30%.

Les parties réelles de la masse volumique effective adimensionnée $\Re(\rho_{\text{eff}}/\rho_0)$ et du module de compressibilité effectif adimensionné $\Re(\kappa_{\text{eff}}/\kappa_0)$, ainsi que la partie imaginaire du carré du nombre d'onde effectif adimensionné $\Im(k_{\text{eff}}^2/k_0^2)$ sont représentées sur la figure 3.14. Les modèles de Aristégui et Angel et de Li et Chan sont respectivement présentés sur les courbes de gauche et de droite. La largeur des bandes fréquentielles (**BFs**) sur lesquelles les parties réelles de la masse volumique et du module de compressibilité effectifs sont négatives augmente avec la concentration pour les deux modèles. De même, la largeur de la BF où le milieu effectif est un métamatériau ($\Im(k_{\text{eff}}^2/k_0^2) < 0$) augmente avec la concentration. On remarque que la partie réelle du module de compressibilité effectif est négative sur une BF plus large que la masse volumique effective.

Le module de compressibilité effectif prédit par le modèle de Li et Chan est très proche de celui prédit par le modèle de Aristégui et Angel. Il n'y a qu'au voisinage de la résonance quadripolaire (T_2) que les deux modèles se distinguent l'un de l'autre car le modèle de Li et Chan ne prend pas en compte ce mode. La BF où la partie réelle du module de compressibilité effectif est négative commence à la résonance monopolaire (T_0), et la fréquence à laquelle elle s'arrête augmente avec la concentration. Avec ce système, cette BF est toujours comprise entre la première résonance monopolaire et l'antirésonance monopolaire.

Les masses volumiques effectives prédites par les deux modèles sont quant à elles différentes. Selon le modèle de Aristégui et Angel, la BF sur laquelle sa partie réelle est négative commence toujours à la résonance dipolaire (T_1). Alors que selon le modèle de Li et Chan la fréquence à laquelle commence cette BF est inférieure à la résonance dipolaire, et cette fréquence diminue avec la concentration.

La BF sur laquelle la partie réelle de la masse volumique effective est négative est toujours comprise dans la BF où la partie réelle du module de compressibilité est négative. Nous ne le montrons pas en détail, mais la BF sur laquelle la partie imaginaire du carré du nombre d'onde effectif est négative ne coïncide pas à la BF où les parties réelles de la masse volumique et du module de compressibilité effectifs sont négatives en même temps, mais sur une BF légèrement plus large. Il est donc insuffisant de ne considérer que la partie réelle des paramètres mécaniques pour caractériser un métamatériau. Notons que la BF où le milieu effectif se comporte comme un métamatériau est tout de même principalement pilotée par la BF où la partie réelle de la masse volumique effective est négative.

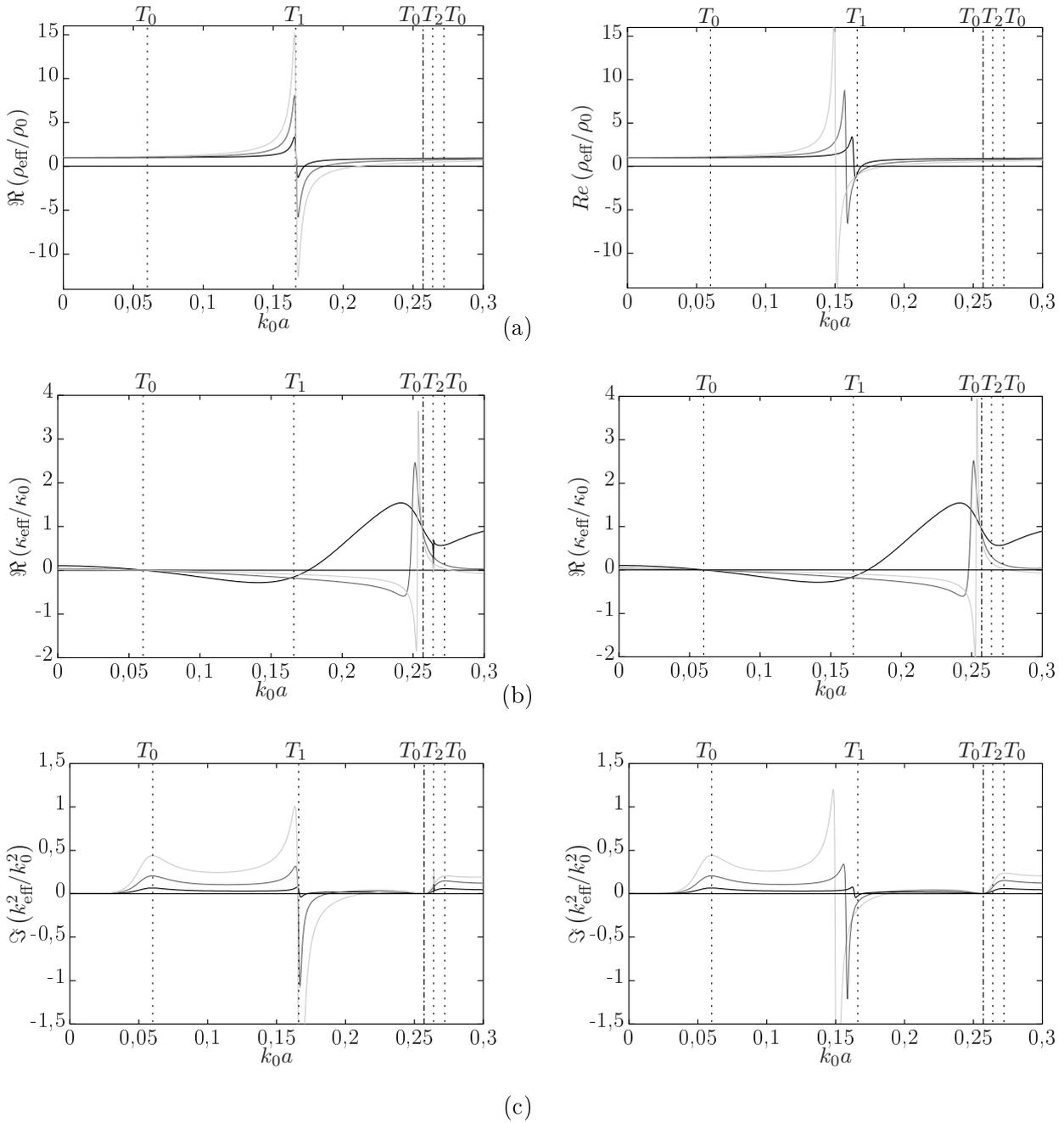


Figure 3.14 – Paramètres mécaniques du milieu effectif obtenus avec les modèles de Aristégui et Angel (gauche) et de Li et Chan (droite) : (a) partie réelle de la masse volumique effective adimensionnée par la masse volumique de la matrice, (b) partie réelle du module de compressibilité effectif adimensionné par le module de compressibilité de la matrice et (c) partie imaginaire du carré du nombre d’onde effectif adimensionné par le nombre d’onde dans la matrice. Les paramètres mécaniques sont déterminés pour trois concentrations ϕ différentes : 5% (noir), 15% (gris foncé) et 30% (gris clair). Les résonances sont repérées par les pointillés verticaux et l’antirésonance par le trait mixte vertical.

3.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que les conclusions de Veselago [7] sur les métamatériaux électromagnétiques sont transposables au cas de l'acoustique. Dans un métamatériau acoustique, les vecteurs d'onde et de Poynting sont de sens opposés. La réfraction d'une onde plane monochromatique par une interface séparant un matériau classique et un métamatériau est alors négative. En définissant une onde progressive au sens de l'énergie, l'impédance acoustique d'un milieu est toujours une quantité à partie réelle positive quelle que soit sa nature (matériau classique ou métamatériau).

La première section de ce chapitre a permis de déterminer les caractéristiques acoustiques d'un matériau classique et d'un métamatériau. Cela se traduit par une inéquation reliant la partie réelle du vecteur d'onde au vecteur de Poynting. La relation définissant un matériau classique ou un métamatériau a ensuite été étendue au cas où les propriétés mécaniques sont à valeurs complexes. Nous avons ainsi montré que les parties réelles des propriétés mécaniques d'un matériau classique ne doivent pas nécessairement être toutes les deux positives (fig. 3.4). De même, les parties réelles des propriétés mécaniques d'un métamatériau ne doivent pas nécessairement être toutes les deux négatives.

Ensuite, en reprenant l'étude menée par Pendry [8], nous avons pu montrer qu'une hyperlentille constituée d'un métamatériau acoustique peut également amplifier les ondes évanescentes, même si celui-ci est légèrement absorbant. Par contre, ce phénomène n'est pas dû à des résonances d'ondes d'interface, mais au fait que la solution physique à retenir est une onde d'amplitude croissante dans le métamatériau. On montre ainsi que la résolution d'une hyperlentille absorbante peut être améliorée simplement en diminuant son épaisseur. Bien entendu, puisqu'à l'heure actuelle les superlentilles acoustiques sont conçues uniquement à partir de cristaux phononiques [22], il est nécessaire d'avoir suffisamment de mailles dans l'épaisseur pour que les multiples interactions puissent faire apparaître la réfraction négative, limitant ainsi l'épaisseur minimale d'une superlentille.

Finalement, nous avons appliqué des techniques d'homogénéisation à un milieu aléatoire où les diffuseurs résonnent fortement à basses fréquences. Nous avons ainsi montré que la résonance monopolaire entraîne une chute de la partie réelle du module de compressibilité effectif qui devient alors négative. La partie réelle de la masse volumique effective, elle, peut devenir négative au voisinage de la résonance dipolaire. Les modèles prédisent que ce milieu aléatoire se comporte comme un métamatériau sur une bande fréquentielle dont la largeur augmente avec la concentration, et dont l'existence n'est pas strictement liée à des valeurs négatives des parties réelles des paramètres mécaniques effectifs.

Chapitre 4

Étude du comportement de structures localement résonantes, candidates aux effets de type métamatériau

À l'heure actuelle, les métamatériaux acoustiques (électromagnétiques) à indice négatif n'ont été conçus qu'à partir de milieux périodiques : les cristaux phononiques (photoniques) (CPs), *cf.* annexe E. Cependant, certains auteurs ont supposé qu'il pourrait être possible d'en concevoir à partir de milieux aléatoires (MAs) [28, 29]. Ainsi, Felbacq et Bouchitté [28], en moyennant le champ transmis par un MA sur 50 configurations n'ont pas observé de réfraction négative, contrairement à Chen *et al.* [29] dont l'étude n'étant basée que sur une seule configuration d'un MA est sujette à caution.

Dans ce chapitre, nous proposons un MA localement résonant à deux dimensions réaliste constitué de matériaux du commerce et présentant, d'après les techniques d'homogénéisation et le critère établi dans le chapitre 3, un comportement de type métamatériau à indice négatif. Ce phénomène sera induit par les résonances des diffuseurs apparaissant à basses fréquences grâce au contraste important entre les vitesses de phases des deux matériaux utilisés. Nous nous intéressons alors à la manifestation de comportements atypiques via l'analyse des champs acoustiques de part et d'autre d'un écran de diffuseurs.

Dans la suite, nous commencerons par présenter le milieu sélectionné. Nous verrons, pour une concentration donnée, que les bandes fréquentielles sur lesquelles le MA se comporte comme un métamatériau à indice négatif diffèrent selon la technique d'homogénéisation considérée. Les coefficients de réflexion et de transmission d'un écran de diffuseurs formé à partir de ce MA seront déterminés à partir de modèles analytiques et d'un code FDTD, *cf.* chapitre 1. Les simulations numériques réalisées à l'aide de ce code de calcul seront assimilées à des expériences numériques, représentatives des réponses « réelles » du système. À très forte concentration la transmission de cet écran étant non nulle sur la bande fréquentielle où l'indice négatif est attendu, on espère observer ce comportement. Par ailleurs, les différents régimes de fonctionnement de l'écran de diffuseurs ont été ensuite reliés au champ de pression diffusé par un diffuseur isolé. Finalement, afin d'améliorer les caractéristiques de l'écran, les diffuseurs ont été arrangés périodiquement. Les réponses du MA sont ensuite comparées à celles de CPs à maille carrée et triangulaire. Nous verrons que lorsque la concentration est importante, éton-

namment les réponses de l'écran sont (quasi)indépendantes de l'arrangement (aléatoire ou périodique) des diffuseurs.

4.1 Caractéristiques du milieu hétérogène, candidat aux propriétés de type indice négatif

Dans cette section, nous présentons le milieu hétérogène, candidat potentiel à l'apparition d'effets de type métamatériau. Afin de mettre en évidence un indice négatif avec un milieu aléatoire, des diffuseurs résonants à basses fréquences sont utilisés [30]. Dans l'optique d'une conception future, les caractéristiques des matériaux composant ce milieu sont basées sur celles de matériaux réels, supposés se comporter en première approche comme des fluides parfaits (non dissipatifs). Les propriétés mécaniques de ces matériaux sont données dans le tableau 4.1. Quatre concentrations sont considérées : $\phi = 3,74\%$, $11,22\%$, $22,44\%$ et $37,4\%$.

	Masse volumique	Module de compressibilité	Vitesse de phase
Matrice (eau)	$\rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}$	$\kappa = 2,25 \text{ GPa}$	$v = 1500 \text{ m.s}^{-1}$
Diffuseurs	$\rho = 0,64 \text{ g.cm}^{-3}$	$\kappa = 57,6 \text{ MPa}$	$v = 300 \text{ m.s}^{-1}$

Tableau 4.1 – Caractéristiques des constituants de la structure localement résonante.

4.1.1 Diffusion par un diffuseur isolé

Les modules des quatre premiers coefficients d'amplitude modale de diffusion T_n d'un diffuseur isolé sont présentés sur la figure 4.1 en fonction de la fréquence adimensionnée k_0a , où k_0 désigne le nombre d'onde dans la matrice et a le rayon des diffuseurs. Le mode monopolaire ($n = 0$) présente une antirésonance ($|T_0| = 0$) lorsque $k_0a = 0,777$. Les fréquences de résonances des différents modes n sont données dans le tableau 4.2.

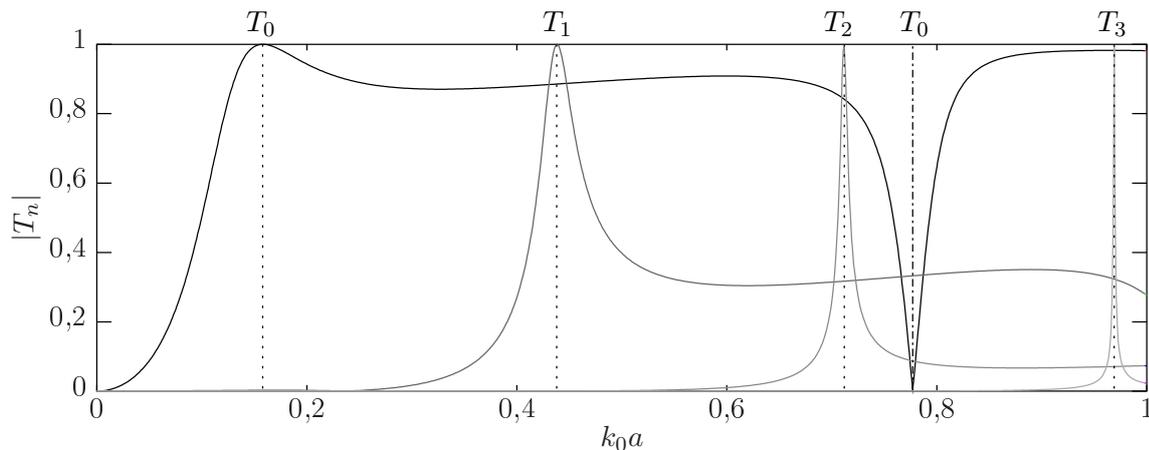


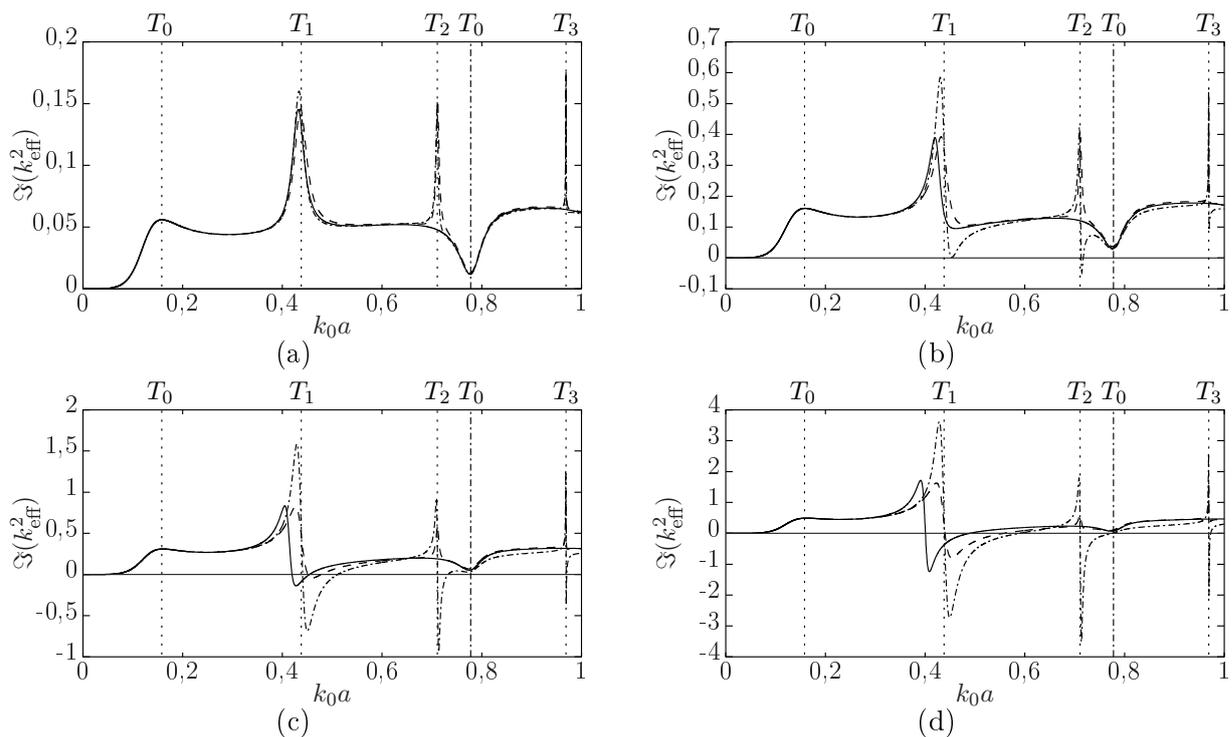
Figure 4.1 – Module des coefficients d'amplitude modale de diffusion T_n en fonction de la fréquence adimensionnée k_0a . Les résonances des modes du cylindre sont repérées, comme sur les figures suivantes, par les traits pointillés verticaux et l'antirésonance par le trait mixte.

Mode n du cylindre	0	1	2	3
Fréquence de résonance	$k_0a = 0,158$	$k_0a = 0,438$	$k_0a = 0,711$	$k_0a = 0,969$

Tableau 4.2 – Premières fréquences de résonance adimensionnées des différents modes de diffusion du cylindre.

4.1.2 Nombre d'onde effectif

Comme nous l'avons vu dans la section 3.2.2 (éq. (3.49)), un milieu atténuant se comporte comme un métamatériau à indice négatif lorsque la partie imaginaire du carré du nombre d'onde de l'onde se propageant en son sein est négative $\Im(k^2) < 0$. Ainsi, afin de déterminer les plages fréquentielles sur lesquelles l'indice négatif est attendu à travers le milieu effectif, nous avons déterminé les nombres d'onde effectif k_{eff} de l'onde cohérente à l'aide des modèles de Li et Chan [30] (**KT**), équations (1.1) et (1.17), de Waterman et Truell [45] (**WT**), équation (1.38), et de Linton et Martin [51] (**LM**), équation (1.44). Lorsque la concentration est suffisamment importante ($\phi = 22,44\%$ et $37,4\%$), une bande fréquentielle à indice négatif est identifiée pour chacun des modèles au voisinage de la résonance dipolaire T_1 (fig. 4.2). Plus la concentration augmente et plus cette bande s'élargit (tab. 4.3). Le modèle de LM prédit des bandes fréquentielles à indice négatif supplémentaires au voisinage des fréquences de résonance autres que la monopolaire.

**Figure 4.2** – Partie imaginaire du carré du nombre d'onde effectif déterminé avec les modèles de KT (trait plein), de WT (tirets) et de LM (trait mixte), pour différentes concentrations de diffuseurs : a) $\phi = 3,7\%$, b) $11,22\%$, c) $22,44\%$ et d) $37,4\%$.

Modèle	LC	WT	LM
$\phi = 22,44\%$	$k_0a \in [0,42; 0,455]$	$k_0a \in [0,45; 0,477]$	$k_0a \in [0,44; 0,51]$
$\phi = 37,4\%$	$k_0a \in [0,4; 0,49]$	$k_0a \in [0,44; 0,56]$	$k_0a \in [0,44; 0,59]$

Tableau 4.3 – Bandes fréquentielles adimensionnées sur lesquelles le milieu aléatoire présente un indice négatif, d'après les modèles utilisés et en fonction de la concentration ϕ .

4.2 Réponses en réflexion et transmission du milieu hétérogène

Dans cette section, nous comparons les coefficients de réflexion et de transmission d'un écran de diffuseurs répartis aléatoirement, déterminés à partir de simulations numériques FDTD (voir section 1.4) avec les prédictions issues des modèles analytiques présentés dans le chapitre 1. Le modèle de Luppé et Conoir [61], non adapté aux MAs dont les diffuseurs résonnent fortement (section 1.5.3), ne sera pas utilisé ici.

Différents régimes de fonctionnement seront identifiés à partir des ondes cohérentes réfléchiées et transmises. Afin d'évaluer une application industrielle de ces milieux, nous étudierons la dispersion du coefficient de transmission de l'écran sur un nombre restreint de simulations.

4.2.1 Comparaison entre les prédictions issues des modèles analytiques et les simulations numériques

Dans cette section, nous comparons les modules des coefficients de réflexion $|R|$ et de transmission $|T|$ d'un écran de diffuseurs d'épaisseur $e_{\text{MST}} = 12a$ (*cf.* section 1.4) prédits par les modèles de KT et de Aristégui et Angel [58] (**AA**), à ceux obtenus par des simulations numériques FDTD (fig. 4.3). Analytiquement, ces coefficients sont calculés à partir des relations (1.35) et (1.36), dans lesquelles sont substitués les paramètres mécaniques associés aux modèles respectifs de KT (éq. (1.17)) et AA (éqs. (1.41) et (1.42)). Les ondes cohérentes réfléchiées et transmises obtenues avec les simulations numériques sont issues de moyennes configurationnelles effectuées sur 150, 120, 90 et 60 simulations correspondant respectivement aux concentrations $\phi = 3,74\%$, $11,22\%$, $22,44\%$ et $37,4\%$. Chacune de ces concentrations correspond respectivement à un système composé de 17, 50, 100 et 167 diffuseurs dans nos simulations.

Comparons les réponses en réflexion et transmission du MA fortement résonant de la section 1.5.3 avec celles du MA présenté précédemment, figures 1.16 et 4.3. Les relations entre les fréquences de résonance (ou antirésonance) et les coefficients de réflexion et de transmission sont communes aux deux MAs. Pour ce type de structure, il semblerait que les résonances et antirésonances pilotent le comportement acoustique d'un MA.

À faible concentration ($\phi = 3,74\%$, fig. 4.3.a), les prédictions issues des modèles analytiques sont en très bonne adéquation avec les résultats numériques. Chaque résonance entraîne une diminution du module du coefficient de transmission, diminution que le modèle de KT ne prévoit que pour les deux premiers modes du cylindre. Au delà, ce modèle n'est plus adapté car il ne prend pas en compte les coefficients d'amplitude modale strictement supérieurs à un (*cf.* section 1.3.1).

Pour des concentrations plus élevées (fig. 4.3.b à d), l'accord entre les modèles analytiques et les résultats numériques devient uniquement qualitatif : la prédiction du comportement en réflexion de l'écran reste acceptable, contrairement à celle du comportement en transmission.

Sur ces dernières figures, on voit apparaître des plages fréquentielles sur lesquelles le module du coefficient de transmission tend vers zéro. On définit alors une bande passante (**BP**) comme étant une plage fréquentielle sur laquelle le module du coefficient de transmission (numérique) respecte la relation $|T| > 0,05$. Aux concentrations intermédiaires ($\phi = 11,22\%$ et $22,44\%$), l'écran de diffuseurs possède deux BPs et pour les fortes concentrations ($\phi = 37,4\%$), il en possède trois. La première BP s'arrête

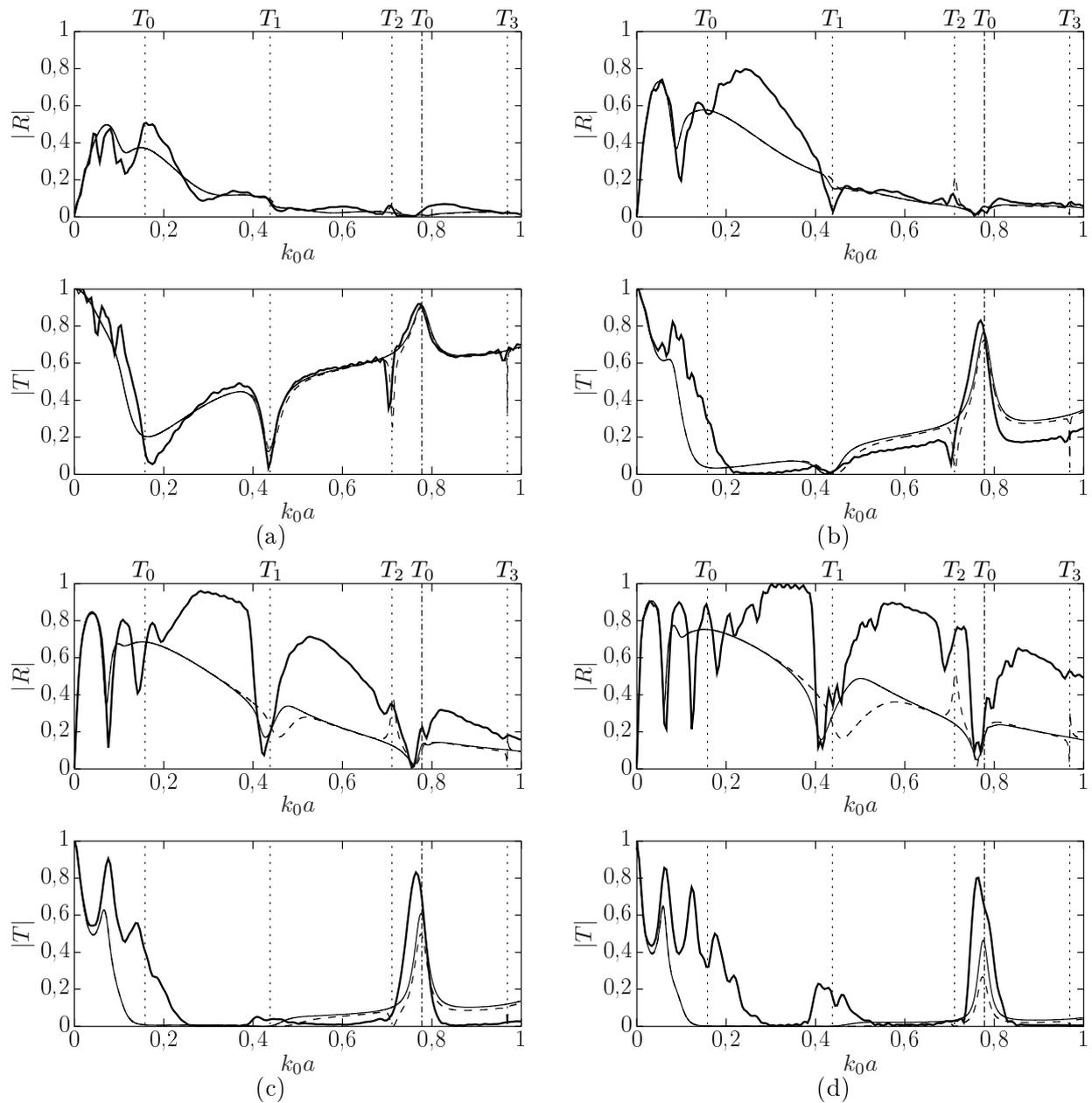


Figure 4.3 – Modules des coefficients de réflexion et de transmission. Comparaison entre les résultats numériques (trait plein épais) et ceux issus des modèles analytiques de AA (tirets) et KT (trait plein) pour des concentrations de diffuseurs de : a) $\phi = 3,74\%$, b) $11,22\%$, c) $22,44\%$ et d) $37,4\%$.

Concentration	milieu effectif (onde cohérente transmise)	milieu statistique (moyenne sur cinq simulations)
11,22%	$k_0a \in [0, 21 ; 0, 46]$	$k_0a \in [0, 24 ; 0, 37]$
22,44%	$k_0a \in [0, 25 ; 0, 7] \cup [0, 82 ; 1]$	$k_0a \in [0, 26 ; 0, 37] \cup [0, 54 ; 0, 57] \cup [0, 82 ; 1]$
37,4%	$k_0a \in [0, 28 ; 0, 39] \cup [0, 5 ; 0, 73] \cup [0, 83 ; 1]$	$k_0a \in [0, 28 ; 0, 39] \cup [0, 5 ; 0, 73] \cup [0, 83 ; 1]$

Tableau 4.4 – Bandes fréquentielles adimensionnées sur lesquelles l'écran de diffuseurs présente des pseudo-BFIs.

au voisinage de la résonance monopolaire (T_0). Plus la concentration est élevée et plus sa largeur est importante. La deuxième BP se manifeste au voisinage de l'antirésonance monopolaire (T_0) et diminue lorsque la concentration augmente. À forte concentration ($\phi = 37,4\%$), une troisième BP intermédiaire apparaît au voisinage de la résonance dipolaire (T_1), dont le domaine fréquentiel correspond à celui où le modèle de KT prédit un indice négatif (cf. tab. 4.3).

Aux concentrations $\phi = 3,74\%$, $11,22\%$ et $22,44\%$, l'écran de diffuseurs présente des pièges à ondes au voisinage de la résonance dipolaire T_1 (les modules des coefficients de réflexion et de transmission tendent tous les deux vers 0).

On définit maintenant une pseudo-bande fréquentielle interdite (pseudo-BFI) comme étant une plage fréquentielle sur laquelle le module du coefficient de transmission (numérique) est très faible ($|T| < 0,05$). Ces bandes fréquentielles sont données dans le tableau 4.4 en fonction de la concentration. Contrairement aux BFIs d'un CP, l'onde n'est pas totalement réfléchi et une partie de l'énergie est dissipée à l'intérieur de l'écran de diffuseurs. La première pseudo-BFI émerge à une concentration relativement faible ($\phi = 11,22\%$) et sa largeur augmente avec la concentration. Une BP vient scinder en deux cette pseudo-BFI au voisinage de la résonance dipolaire lorsque la concentration est suffisamment élevée (fig. 4.3.d). Aux fortes concentrations ($\phi = 22,44\%$ et $37,4\%$), une pseudo-BFI se forme après l'antirésonance monopolaire.

4.2.2 Comportement statistique en transmission de l'écran de diffuseurs

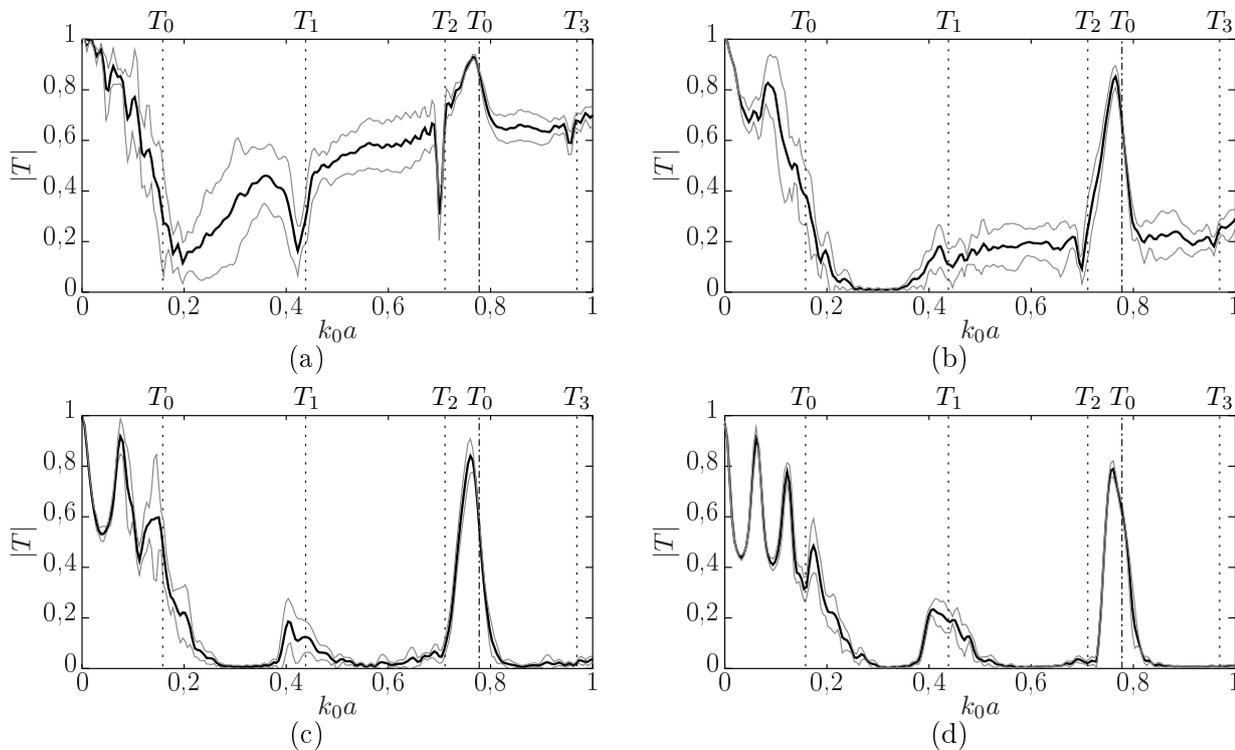


Figure 4.4 – Module du coefficient de transmission moyen sur cinq simulations (noir) et de la moyenne plus ou moins l'écart type de ces cinq simulations (gris) pour différentes concentrations de diffuseurs : a) $\phi = 3,74\%$, b) $11,22\%$, c) $22,44\%$ et d) $37,4\%$.

Les MAs peuvent exhiber des comportements de types métamatériaux tels que les pseudo-BFIs, et ceci pour de faibles épaisseurs de l'écran et pour de faibles concentrations de diffuseurs. Ces phénomènes

concernent les ondes cohérentes (moyennes) réfléchi et transmise. Dans un contexte d'ingénierie leur manifestation à partir d'une unique configuration de positions de diffuseurs est indispensable. Ainsi, en gardant les mêmes concentrations, nous avons calculé à l'aide du code FDTD le coefficient de transmission moyen sur cinq configurations, ainsi que l'écart type correspondant. La figure 4.4 montre que plus la concentration augmente, plus l'écart type diminue. De plus, au voisinage de l'antirésonance monopolaire la dispersion du coefficient de transmission est négligeable. Par ailleurs, hormis le système à 3,74%, l'écran de diffuseurs possède au moins une bande fréquentielle où le coefficient de transmission et l'écart type sont nuls. Les pseudo-BFIs se forment donc même avec une unique configuration de positions des diffuseurs.

La comparaison des figures 4.3 et 4.4 montre que, mis à part aux très fortes concentrations ($\phi = 37,4\%$), les largeurs fréquentielles des pseudo-BFIs augmentent avec le processus de moyennage (tab. 4.4). Ainsi, pour la concentration $\phi = 22,44\%$, l'onde cohérente transmise présente une pseudo-BFI très large entre la résonance et l'antirésonance monopolaire T_0 (fig. 4.3.c), alors que pour un seul échantillon il existe une BP à l'intérieur de cette pseudo-BFI au voisinage de la résonance dipolaire $T1$ (fig. 4.4.c). Notons que cette BP correspond à la bande fréquentielle à l'intérieur de laquelle le modèle de KT prédit un indice négatif.

4.2.3 Bilan

Aux faibles concentrations, les réponses de l'écran de diffuseurs sont bien prédites par les techniques d'homogénéisation.

Les MAs possèdent des pseudo-BFIs qui apparaissent même pour une unique configuration de positions de diffuseurs. Ces expériences numériques sont donc encourageantes pour l'utilisation de ce type de structure à des fins d'isolation sonores ou ultrasonores. Notons que dans le cas de la concentration $\phi = 22,44\%$, la pseudo-BFI est très large du point de vue de l'onde cohérente (fig. 4.3.c) et semble donc très prometteuse. Cependant avec une seule configuration, cette pseudo-BFI est scindée en deux par une BP (fig. 4.4.c).

De plus, aux concentrations $\phi = 22,44\%$ et $37,4\%$, la BP au voisinage de l'antirésonance monopolaire T_0 est peu dispersive et de faible largeur fréquentielle (figs. 4.4.c et d). Les MAs constituent donc des candidats potentiels au filtrage fréquentiel.

4.3 Relations entre les réponses d'un écran de diffuseurs et la diffusion d'une onde plane par un diffuseur isolé

Avant d'examiner l'effet de l'arrangement des diffuseurs sur les réponses acoustiques de l'écran, étudions dans cette section en quoi elles sont affectées par les propriétés de diffusion d'un seul objet dans la matrice adjacente.

Nous nous intéresserons successivement à la fonction de forme angulaire $f(\theta)$ et à la section efficace de diffusion d'un objet cylindrique σ_{eff} , puis au champ de pression environnant ledit cylindre (champ incident plus champ diffusé). Pour mettre en évidence les corrélations entre les réponses d'un ensemble de diffuseurs (écran) et d'un diffuseur isolé, des zones hachurées correspondant aux pseudo-BFIs du

MA, identifiées sur la figure 4.3.d ($\phi = 37,4\%$), sont reportées sur les figures de cette section. Nous verrons en particulier que l'analyse du champ de pression dans la matrice fluide permet de comprendre la formation des pseudo-BFIs.

4.3.1 Fonction de forme angulaire et section efficace de diffusion

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, le nombre d'onde effectif dans un milieu aléatoire s'exprime à travers la fonction de forme angulaire $f(\theta)$ du diffuseur, et plus particulièrement en fonction des propriétés de diffusion vers l'avant $f(0)$ et vers l'arrière $f(\pi)$. Le module et la phase de ces deux fonctions sont tracés sur la figure 4.5. On remarque que les pseudo-BFIs apparaissent à des fréquences où les normes de $f(0)$ et $f(\pi)$ n'ont pas de valeurs extrêmes. On voit également qu'à l'intérieur de la première BP ($k_0a \leq 0,28$), les phases de $f(0)$ et de $f(\pi)$ sont égales, et sont approximativement en quadrature de phase dans les deux autres BPs. Néanmoins, ces résultats ne permettent pas d'établir une corrélation manifeste entre les réponses de l'écran et les valeurs de la fonction de forme $f(\theta)$.

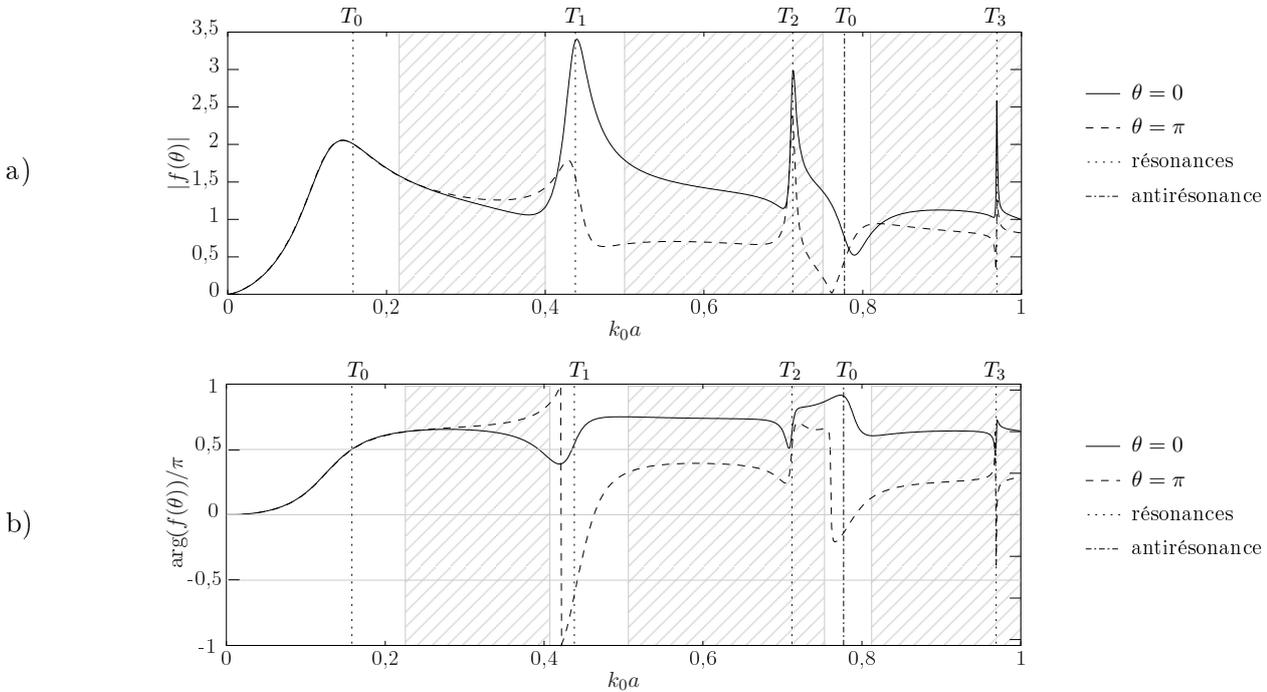


Figure 4.5 – a) Module et b) phase de la fonction de forme angulaire d'un cylindre immergé dont les propriétés sont reportées dans le tableau 4.1. Comme sur les figures suivantes, les zones hachurées correspondent aux pseudo-BFIs de l'écran, identifiées sur la figure 4.3.d pour $\phi = 37,4\%$.

Considérons maintenant la section efficace de diffusion σ_{eff} , quantité énergétique qui correspond à la moyenne sur une surface circulaire S du rapport de la puissance diffusée $p_{\text{diff}}(\mathbf{r})$ par le cylindre sur la puissance incidente $p_{\text{inc}}(\mathbf{r})$ [116] :

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{1}{S} \int_S \frac{p_{\text{diff}}(\mathbf{r})}{p_{\text{inc}}(\mathbf{r})} d\mathbf{r} = \frac{4}{k_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |T_n|^2. \quad (4.1)$$

La section efficace de diffusion, basée sur la diffusion suivant toutes les directions de l'espace, est présentée sur la figure 4.6. Comme dans le cas de la fonction de forme angulaire, les pseudo-BFIs sont

observées pour des valeurs de la section efficace de diffusion qui ne sont pas extrêmes. Cette observation est contradictoire avec celle faite par Sutter-Widmer et Steurer [117], qui reliait les BFIs d'un quasicristal phononique (cristal à symétrie circulaire) aux maxima de la section efficace de diffusion.

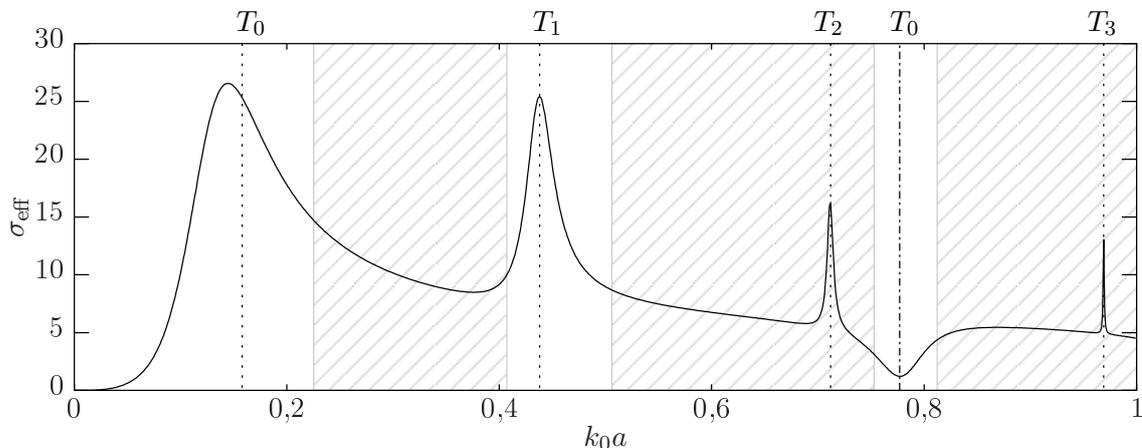


Figure 4.6 – Section efficace de diffusion du même système que celui de la figure 4.5.

4.3.2 Champ de pression

Afin d'appréhender les phénomènes mis en jeu dans la formation des pseudo-BFIs, calculons le champ de pression total lors de la diffusion d'une onde plane monochromatique par un cylindre isolé pour différentes fréquences. Ce champ est représenté sur les figures 4.7 à 4.9, où l'onde incidente va de la gauche vers la droite. Le diffuseur est placé au centre des figures et le nombre de longueurs d'onde (de l'onde incidente) sur chaque graphique étant le même, la taille du diffuseur varie relativement à la taille de la fenêtre. Ces représentations sont équivalentes à un système où la pulsation ω est fixe et pour lequel on ferait varier le rayon a du cylindre afin de modifier la fréquence adimensionnée k_0a . À saturation (rouge et bleu foncés), l'amplitude de la pression est supérieure ou égale à l'amplitude de la pression incidente. Pour une fréquence f donnée, on détermine la période $\tau = \frac{1}{f}$ de l'onde. Pour accéder à l'évolution de la pression, il suffit de la connaître sur un quart de période, c'est pourquoi nous avons choisi de la représenter à trois instants t distincts : $t = 0, \frac{1}{8}\tau$ et $\frac{1}{4}\tau$.

Soient les fréquences $k_0a \in \{0,1 ; 0,158 ; 0,46 ; 0,73 ; 0,778\}$ correspondant, d'après la figure 4.3, à des BPs du MA. Pour chacune de ces fréquences, le champ de pression en présence d'un seul diffuseur est représenté sur les figures 4.7.a et b, 4.8.a et d, et 4.9.a. L'onde incidente est très peu perturbée par l'objet pour la première, la deuxième et la dernière fréquences. Par contre, l'amplitude de la pression est faible derrière le diffuseur lorsque $k_0a = 0,46$ et $0,73$ (figs. 4.8.a et d).

D'après la figure 4.3, des pseudo-BFIs se forment lorsque la concentration est suffisamment élevée pour les fréquences $k_0a \in \{0,35 ; 0,55 ; 0,88 ; 0,911\}$. À ces fréquences, l'amplitude de la pression est faible derrière le diffuseur (figs. 4.7.c, 4.8.b, 4.9.b et c). Plus on s'éloigne du diffuseur et plus la pression augmente, jusqu'à correspondre à la pression incidente. Ainsi, à fortes concentrations, les BFIs apparaîtront d'autant plus facilement que chaque diffuseur aura tendance à être situé dans une zone d'ombre d'un diffuseur (pression faible), diminuant encore plus l'amplitude de la pression derrière lui.

Aux fréquences de résonance dipolaire $k_0a = 0,438$ et quadripolaire $k_0a = 0,711$ (figs. 4.7.d et

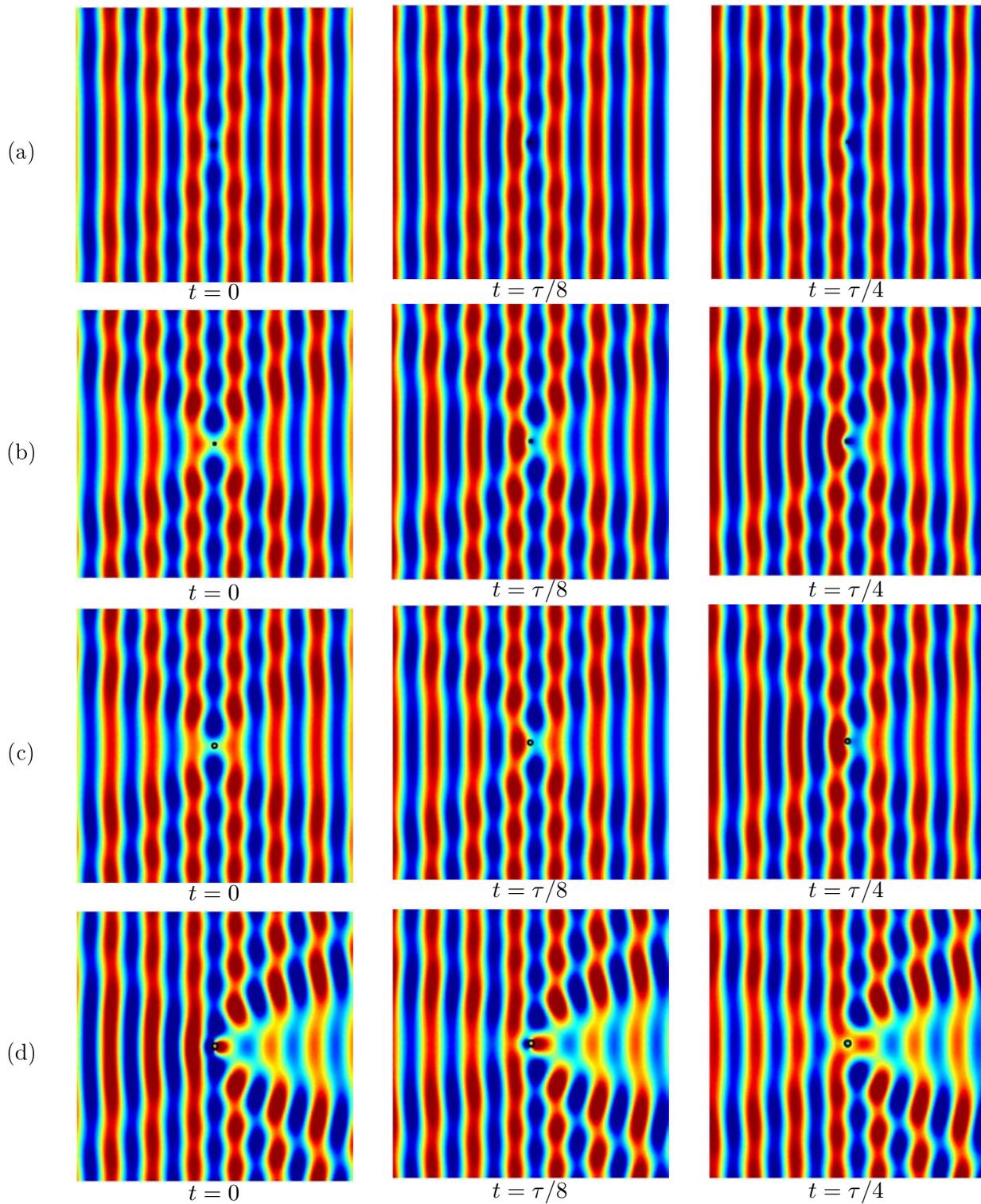


Figure 4.7 – Champ de pression à : a) $k_0a = 0,1$ (Bande Passante, $|T| > 0,05$), b) $k_0a = 0,158$ (résonance monopolaire, BP), c) $k_0a = 0,35$ (pseudo-Bande Fréquentielle Interdite, $|T| < 0,05$) et d) $k_0a = 0,438$ (résonance dipolaire, indice négatif).

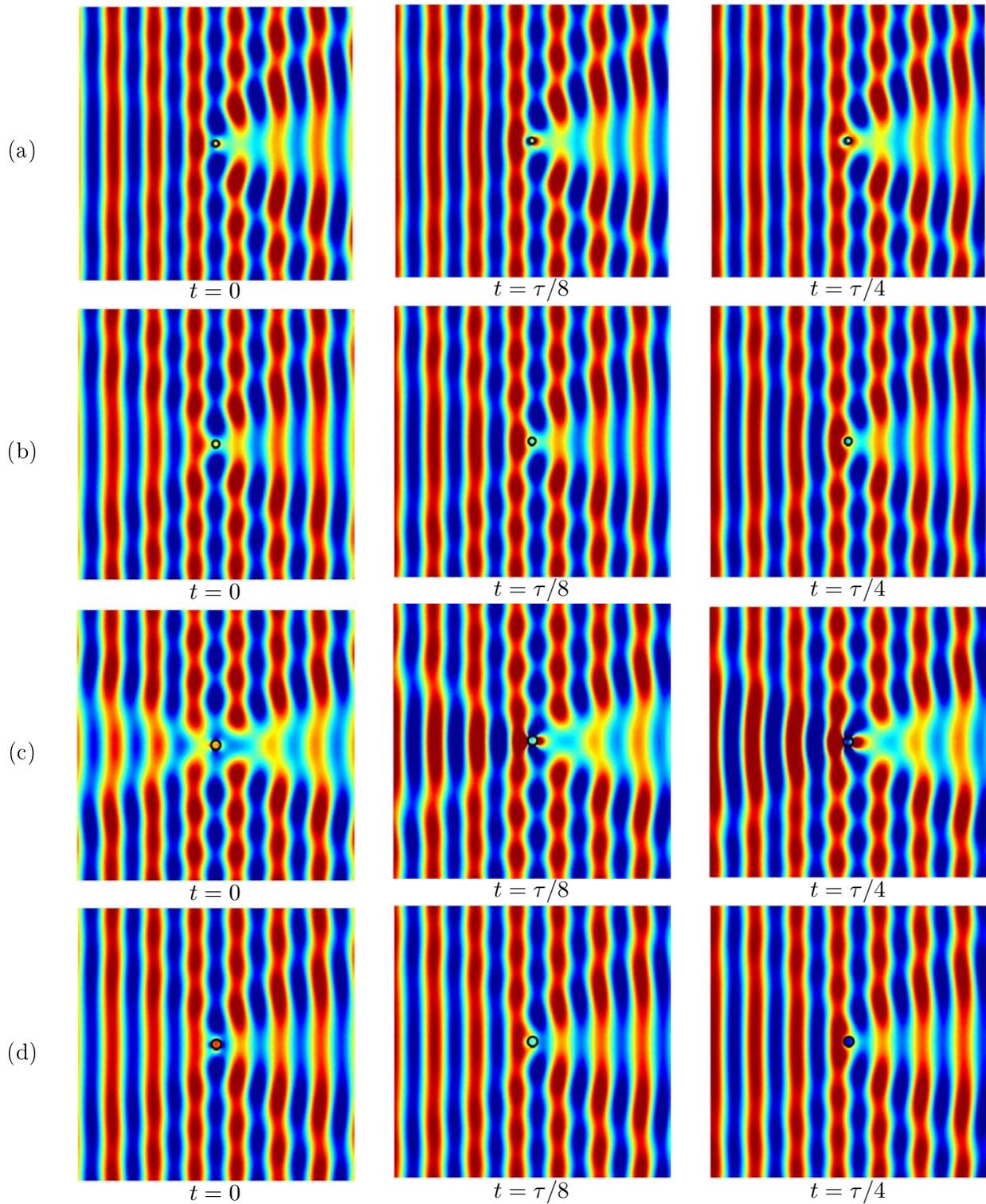


Figure 4.8 – Champ de pression à : a) $k_0a = 0,46$ (indice négatif), b) $k_0a = 0,55$ (pseudo-BFI), c) $k_0a = 0,711$ (résonance quadripolaire, pseudo-BFI) et d) $k_0a = 0,73$ (BP).

4.8 c), ou pour une fréquence proche $k_0a = 0,46$ (fig. 4.8.a), la pression derrière le diffuseur est en opposition de phase avec l'onde incidente. Ce phénomène pourrait rentrer en jeu dans le phénomène de réfraction négative. Par ailleurs, l'amplitude de la pression juste derrière le diffuseur aux fréquences de résonance est supérieure à celle de l'onde incidente. En s'éloignant du diffuseur, cette amplitude décroît et devient inférieure à celle de l'onde incidente. Ainsi, aux fortes concentrations, le coefficient de transmission de l'écran sera d'autant plus élevé que les diffuseurs auront tendance à se trouver en aval d'un autre diffuseur, zone de fortes pressions.

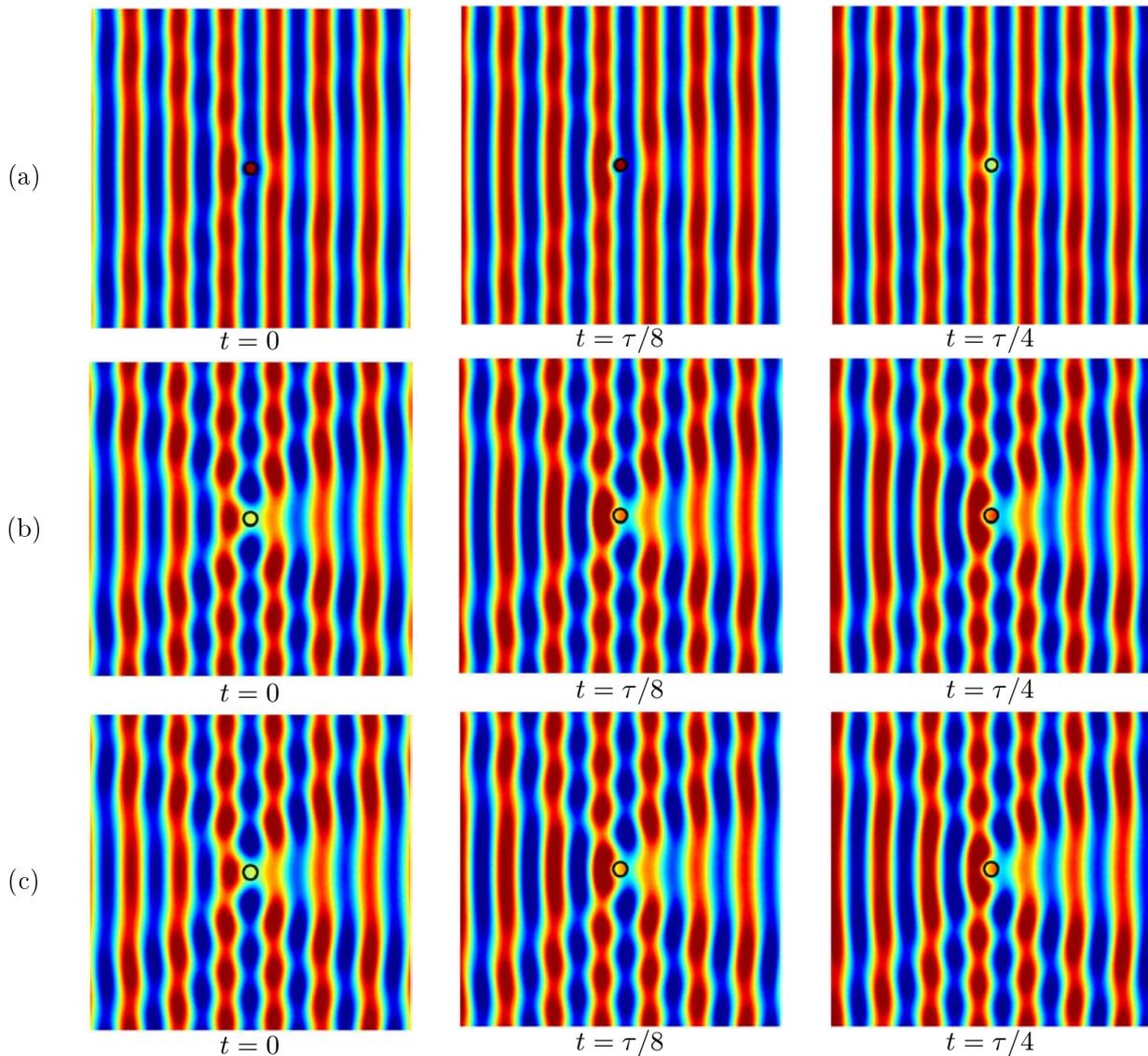


Figure 4.9 – Champ de pression à : a) $k_0a = 0,778$ (antirésonance monopolaire, BP), b) $k_0a = 0,88$ (pseudo-BFI) et c) $k_0a = 0,911$ (résonance hexapolaire, BP).

4.4 Effet de l'arrangement sur les réponses en réflexion et transmission d'un écran de diffuseurs

Nous avons vu précédemment que le module du coefficient de transmission de l'écran de diffuseurs est faible au niveau de la bande fréquentielle où l'indice négatif peut potentiellement apparaître. Ceci

provient des résonances des diffuseurs dont les effets augmentent l'atténuation au sein du milieu effectif. Afin de contrecarrer ce mécanisme naturel, nous avons décidé d'arranger périodiquement les diffuseurs arguant que la structuration du réseau peut compenser ces pertes. En effet, dans un CP infini, le nombre d'onde de Bloch est purement réel au sein d'une BP.

Nous comparons dans cette section les réponses en réflexion et transmission d'un MA et d'un CP à maille carré (de même épaisseur), puis celles de ce même CP avec un CP à maille triangulaire (les deux épaisseurs sont légèrement différentes). Les comparaisons ont été réalisées à partir de résultats sur les milieux périodiques obtenus avec le code éléments finis ATILA par Charles Croëgne et Anne-Christine Hladky-Hennion de l'Institut d'Electronique de Microélectronique et de Nanotechnologies (UMR CNRS 8520, Lille). Les résultats propres aux MAs ont été obtenus par un code FDTD, dont les réponses ont été précédemment présentées sur la figure 4.3.

Le lecteur pourra se référer à l'annexe E pour une introduction au comportement acoustique des milieux périodiques.

4.4.1 Définition de l'épaisseur de l'écran

L'épaisseur e_{CP} d'un CP est définie comme un multiple du paramètre de maille d (tirets horizontaux sur la figure 4.10.b). Afin de pouvoir comparer les réponses acoustiques d'un MA à celles d'un CP, l'épaisseur e correspondant à la distance maximale entre les bords des diffuseurs et le nombre N de diffuseurs dans la zone ainsi définie sont communs aux deux milieux (traits pleins sur la figure 4.10). La concentration ϕ d'un écran de largeur L correspondant à cette définition s'écrit alors :

$$\phi = \frac{N\pi a^2}{eL}. \quad (4.2)$$

Lors de l'étude de l'influence de la concentration sur les réponses d'un écran pour une maille donnée, son épaisseur reste identique pour toutes les concentrations. Selon la maille considérée, l'épaisseur du CP et le paramètre de maille correspondant sont présentés dans le tableau 4.5 en fonction de la concentration.

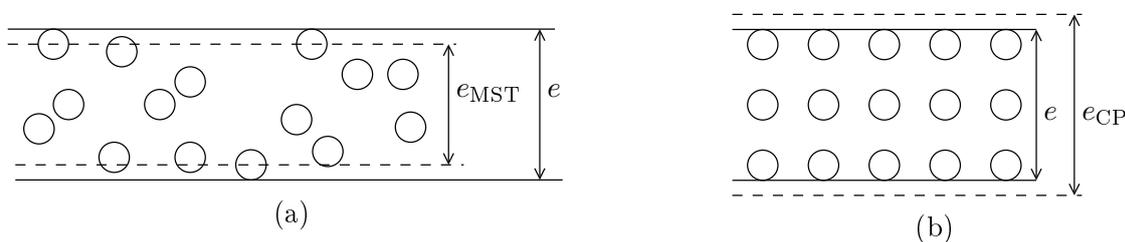


Figure 4.10 – Différentes définitions de l'épaisseur de l'écran : a) pour un MA et b) pour un CP à maille carrée.

	Épaisseur	Paramètres de maille			
Concentration ϕ		3,74%	11,22%	22,44%	37,4%
Maille carrée	$e = 14a$	$d = 12a$	$d = 6a$	$d = 4a$	$d = 3a$
Maille triangulaire	$e = 13,1a$	$d = 12,82a$	$d = 6,41a$	$d = 4,27a$	$d = 3,2a$

Tableau 4.5 – Paramètres de maille en fonction de la maille et de la concentration.

4.4.2 Comparaison entre un MA et un CP à maille carrée

La figure 4.11 représente les modules des coefficients de réflexion et de transmission d'un MA et d'un CP à maille carrée pour quatre concentrations (tab. 4.5). Aux très basses fréquences ($k_0a \in [0; 0,01]$), leurs réponses sont parfaitement superposées quelle que soit la concentration; le milieu effectif ne dépend donc pas de l'arrangement des diffuseurs.

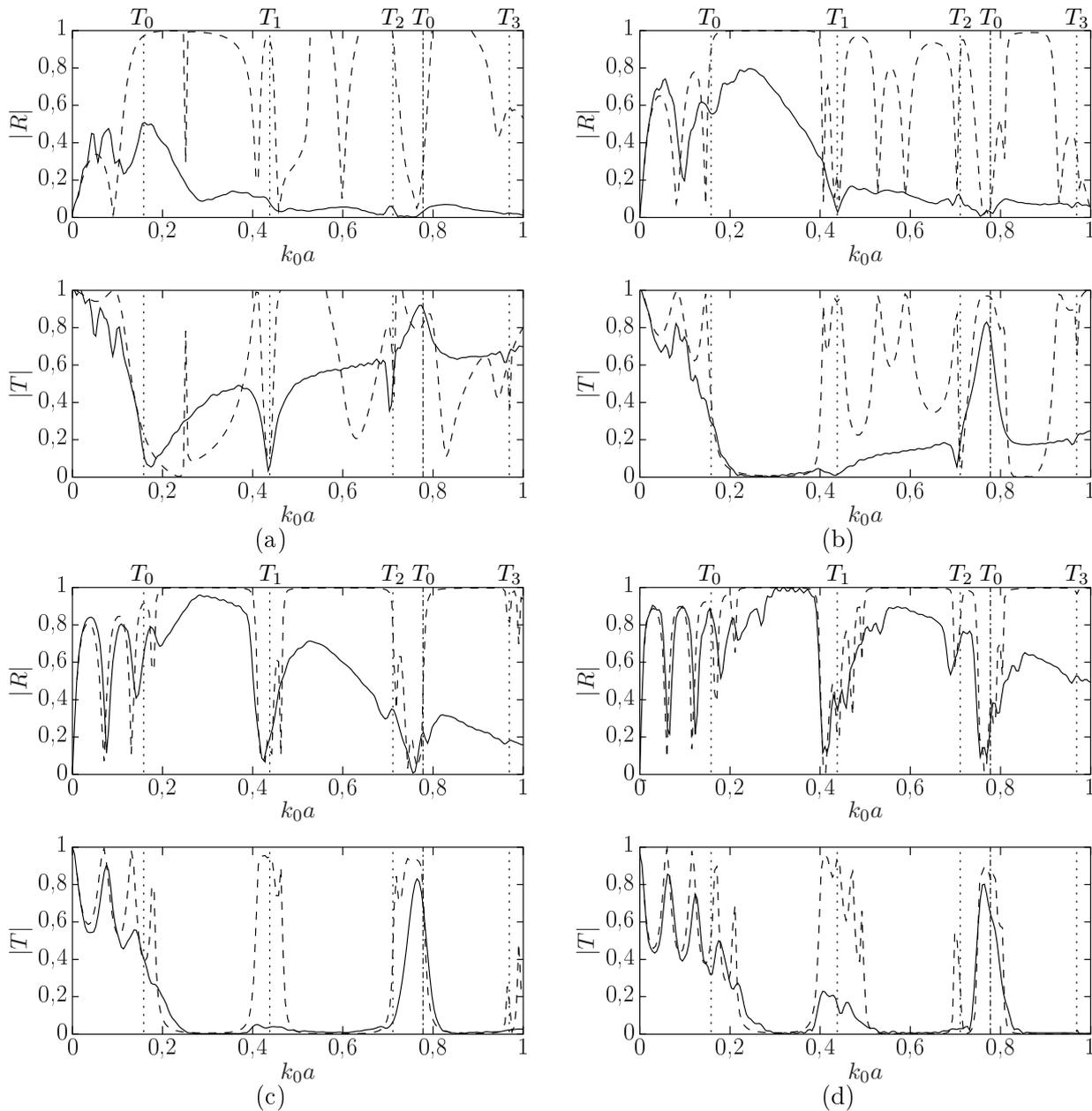


Figure 4.11 – Modules des coefficients de réflexion et de transmission : comparaison entre un CP à maille carrée (tirets) et un MA (traits pleins) pour différentes concentrations de diffuseurs : a) $\phi = 3,74\%$, b) $11,22\%$, c) $22,44\%$ et d) $37,4\%$.

À faible concentration ($\phi = 3,74\%$) et en dehors de cette limite fréquentielle, les réponses du CP et du MA sont totalement différentes. Notons qu'à partir de $k_0a = 0,45$, les modules des coefficients de réflexion et de transmission du CP peuvent être supérieurs à un. Cela doit provenir d'ondes évanescentes d'ordres supérieures car la mesure est effectuée proche des interfaces de l'écran.

Lorsque $\phi = 11,22\%$, les réponses du MA et du CP sont très proches les unes des autres aux

basses fréquences, $k_0 a \in [0 ; 0,35]$. La pseudo-BFI du MA et la première BFI du CP se retrouvent exactement sur la même bande fréquentielle. Aux concentrations plus importantes, $\phi = 22,44\%$, les réponses des deux milieux sont semblables sur la quasi-totalité du domaine d'étude. La BP au voisinage de la résonance dipolaire n'apparaît pas sur le coefficient de transmission du MA, bien que la baisse du coefficient de réflexion correspondante soit identique pour les deux milieux. Aux très fortes concentrations, $\phi = 37,4\%$, les réponses des deux milieux sont semblables sur toute la plage d'étude. Observons qu'une BP de très faible largeur est identifiée sur les réponses du CP uniquement, au voisinage de la résonance quadripolaire, lorsque $\phi = 37,4\%$.

On remarque sur les figures 4.11.c et d que les fréquences de résonances d'épaisseurs du MA sont très proches de celles du CP, montrant que les vitesses de phase effectives sont similaires dans les deux milieux.

Finalement, à la lumière de ces comparaisons, de manière surprenante on en déduit que plus la concentration augmente, plus les réponses du MA sont proches de celles du CP et sur une bande fréquentielle plus large.

4.4.3 Comparaison entre un CP à maille carrée et un CP à maille triangulaire

Dans cette section, nous comparons les modules des coefficients de réflexion et de transmission d'un CP à maille carrée à ceux d'un CP à maille triangulaire pour les quatre concentrations considérées (fig. 4.12). Même si les épaisseurs des deux écrans sont différentes, cela n'affecte en rien la mise en évidence des BPs et BFIs qui sont indépendantes de l'épaisseur.

Comme dans la section précédente, plus la concentration augmente et plus la bande fréquentielle sur laquelle les réponses des deux milieux sont superposées est large. Ainsi, lorsque la concentration est suffisamment importante, BPs et BFIs sont indépendantes du type de maille du CP. Ce résultat confirme ceux d'études antérieures [118–121], où il avait été observé que la fréquence centrale et la largeur de certaines BFIs ne dépendaient pas du type de maille d'un CP composé de diffuseurs résonants à basses fréquences.

Notons que, quel que soit le type de maille, la BP au voisinage de la résonance dipolaire (figs. 4.12.c et d) correspond exactement à la bande de fréquentielle sur laquelle le modèle de KT (*cf.* section 1.3.1) prévoit un indice négatif pour ces deux concentrations, $\phi = 22,44\%$ et $37,4\%$. Nous ne le montrons pas ici, mais la vitesse de groupe de l'onde de Bloch est négative à l'intérieur de cette BP quel que soit le type de maille. Ceci confirmant que la structure proposée est un candidat potentiel aux effets de type métamatériau. Des investigations supplémentaires mériteraient d'être menées afin de mettre en évidence les mécanismes de réfraction négative dans le champ acoustique.

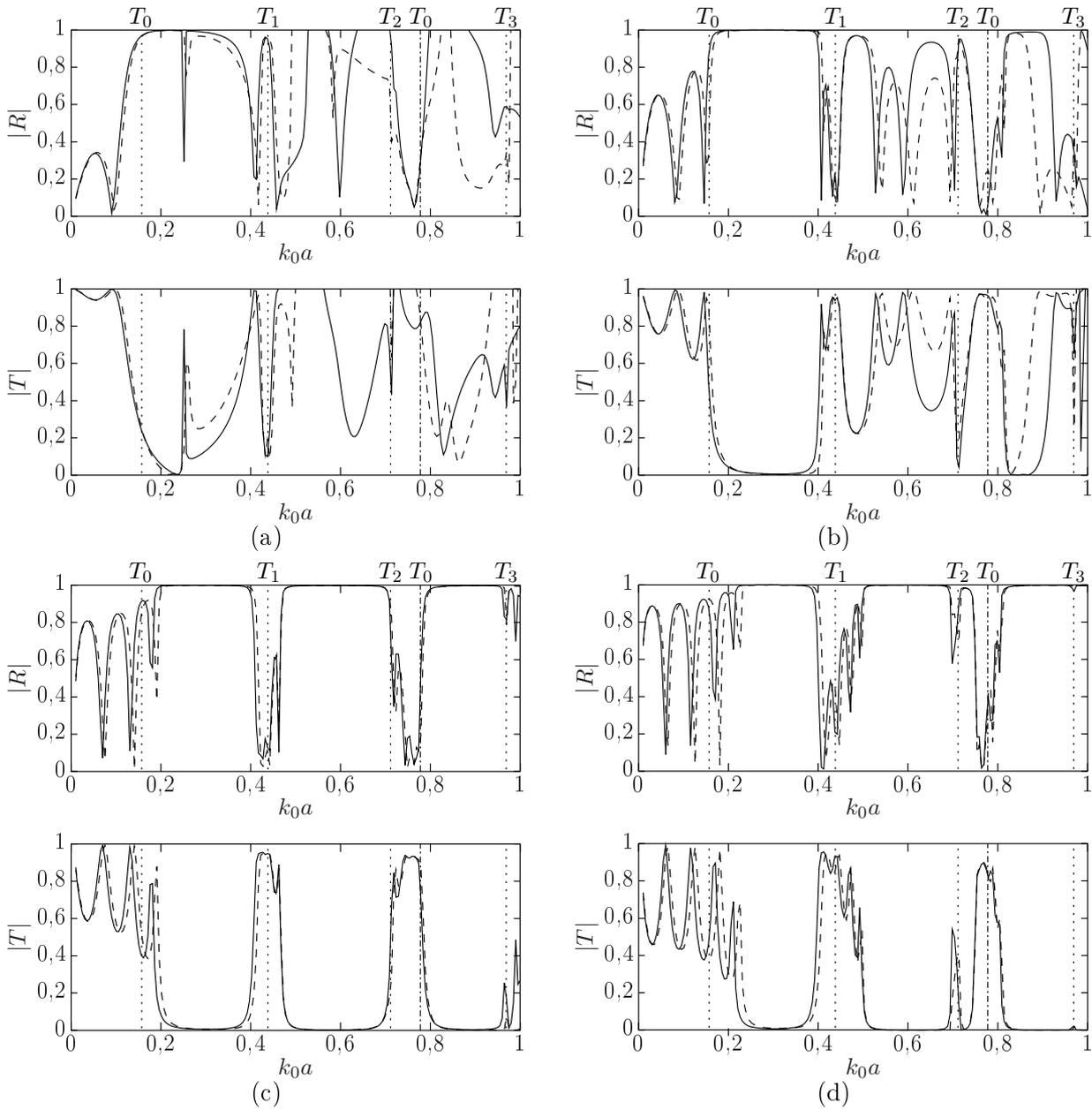


Figure 4.12 – Modules des coefficients de réflexion et de transmission entre un CP à maille carrée (traits pleins) et un CP à maille triangulaire (tirets) pour différentes concentrations de diffuseurs : a) $\phi = 3,74\%$, b) $11,22\%$, c) $22,44\%$ et d) $37,4\%$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un MA composé de matériaux du commerce qui possède, selon les modèles analytiques, une bande fréquentielle à indice négatif. Cependant, ce phénomène n'a pas pu être observé avec les études de champ que nous avons effectuées sur les simulations numériques. Ainsi, il serait utile de poursuivre ces investigations afin de confirmer ou d'infirmer que les effets de structures, dus à la périodicité de l'arrangement des diffuseurs, sont indispensables à la formation d'une bande fréquentielle à indice négatif.

Cette étude a mis en évidence la possibilité d'obtenir des pseudo-BFIs large bande avec un MA. Ces pseudo-BFIs apparaissent même dans un écran de faible épaisseur, et avec une unique configuration de diffuseurs. La présence d'une BP de faible largeur au voisinage de l'antirésonance monopolaire ($|T_0| = 0$) montre que les MAs peuvent également être utilisés en tant que filtres fréquentiels.

Les phénomènes mis en œuvre dans les différents régimes observés (pseudo-BFIs et BPs) ont été identifiés à l'aide du champ de pression lors de la diffusion d'une onde plane par un diffuseur isolé. Ainsi, dans une BP, l'onde incidente est peu perturbée par la présence du diffuseur, alors que dans une pseudo-BFI, l'amplitude du champ de pression est faible derrière le diffuseur. De plus, nous avons observé qu'aux fréquences où l'indice négatif est sensé se manifester, le champ de pression de l'onde derrière le diffuseur est en opposition de phase avec l'onde incidente.

Finalement, en comparant les réponses d'un MA et de CPs localement résonnants, nous avons montré que plus la concentration est élevée, plus les réponses de l'écran de diffuseurs sont indépendantes de leur arrangement (aléatoire ou périodique) sur une bande fréquentielle d'autant plus large. La bande fréquentielle à l'intérieur de laquelle les modèles analytiques prévoient un indice négatif correspond à une BP pour les deux CPs, à l'intérieur de laquelle la vitesse de groupe de l'onde de Bloch est négative (bande passante à indice négatif). La meilleure concordance entre les prédictions théoriques et les résultats numériques de cette bande fréquentielle étant paradoxalement obtenue avec le modèle de Li et Chan, qui est pourtant le plus simple des deux modèles pris en compte dans ce chapitre.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous nous sommes d'abord intéressés à l'homogénéisation de milieux aléatoires à deux dimensions constitués de diffuseurs cylindriques distribués aléatoirement dans une matrice fluide non dissipative. Les techniques d'homogénéisation pouvant constituer des outils de prédiction du comportement acoustique de type métamatériau, nous avons ensuite étudié la propagation des ondes dans ces milieux, puis considéré des diffuseurs résonants à basses fréquences susceptibles d'engendrer à l'échelle macroscopique un indice négatif.

Les modèles de diffusion multiple classiques ne permettent généralement d'obtenir qu'une information partielle sur le milieu effectif, à savoir le seul le nombre d'onde effectif k_{eff} . Cependant, depuis quelques années des techniques d'homogénéisation dynamique complètes ont été développées, conduisant à l'impédance acoustique effective Z_{eff} ou encore aux paramètres mécaniques effectifs : la masse volumique effective ρ_{eff} et le module de compressibilité effectif κ_{eff} . Dans ce contexte, nous avons donc cherché à valider certaines de ces techniques d'homogénéisation (Li et Chan [30], Aristégui et Angel [58], Luppé et Conoir [61]) *via* l'analyse des réponses en réflexion et transmission d'un écran de diffuseurs répartis aléatoirement. Ces modèles analytiques ont ainsi été confrontés à des simulations numériques par FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*). Pour de faibles concentrations de diffuseurs et lorsque le contraste des vitesses de phase entre les constituants est faible, il y a un très bon accord entre les trois modèles et les simulations numériques sur une large bande fréquentielle. Plus la concentration augmente ou plus le contraste entre les vitesses de phase augmente, plus cette bande fréquentielle diminue. Paradoxalement, lorsque les diffuseurs résonnent fortement à basses fréquences, le modèle de Li et Chan, bien qu'étant le plus simple des trois car basé sur l'hypothèse de diffusion simple, est en meilleur accord avec les simulations numériques que les autres modèles : il traduit en particulier la diminution de la fréquence de résonance dipolaire lorsque la concentration de diffuseurs augmente.

La mise en compétition des modèles d'homogénéisation nous a conduits à analyser plus précisément leur comportement à la limite quasi-statique. À ce titre, l'effet de la prise en compte des interactions entre diffuseurs sur les expressions des propriétés mécaniques effectives ρ_{eff} et κ_{eff} a été examiné. Les propriétés mécaniques effectives quasi-statiques, établies sous l'hypothèse de diffusion multiple dans le cadre de l'approximation quasi-cristalline [53] ont été trouvées identiques à celles de Kuster et Toksöz [36], déterminées sous l'hypothèse de diffusion simple. Il semblerait donc que les interactions entre diffuseurs sont négligées, à la limite quasi-statique, par l'approximation quasi-cristalline (QCA). Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons proposé une technique d'homogénéisation définissant les propriétés mécaniques effectives à partir des moyennes des champs acoustiques présents dans un volume considéré comme représentatif et qui permet de prendre en compte explicitement les interactions entre

diffuseurs. Sous l'hypothèse de diffusion simple (un seul diffuseur dans le volume représentatif), nous avons obtenu (logiquement) des expressions des paramètres mécaniques effectifs identiques à celles de Kuster et Toksöz. En prenant en compte les multiples interactions entre deux diffuseurs, la masse volumique effective change alors à chaque interaction aller-retour supplémentaire, tandis que le module de compressibilité effectif n'est pas affecté. Finalement, l'expression de la masse volumique effective est développée en prenant en compte l'intégralité des interactions.

Afin de proposer des structures aléatoires exhibant des comportements macroscopiques atypiques, nous avons recherché des critères pertinents, représentatif des effets ciblés. Ainsi, nous nous sommes intéressés à la propagation des ondes dans les métamatériaux acoustiques homogènes. Nous avons en particulier repris la démarche de Veselago [7] dans le cadre des ondes acoustiques, c'est-à-dire étudier le comportement acoustique d'un milieu dont les propriétés mécaniques sont à valeurs réelles négatives. Il apparaît que, comme dans le cas des ondes électromagnétiques, les vecteurs d'onde et de Poynting sont de sens opposés dans ce type de milieu ($\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}' < 0$). Cela nous a permis de généraliser ce concept à des valeurs complexes de la masse volumique et du module de compressibilité, afin de prendre en compte le caractère dissipatif des milieux, et d'établir un critère de caractérisation du comportement métamatériau (éq. (3.49)). Par la connaissance seule des propriétés mécaniques d'un milieu, il est alors possible de connaître le comportement acoustique (matériau classique ou métamatériau) du milieu associé. Ensuite, nous avons montré que l'amplification des ondes évanescentes dans une lentille plane constituée d'un métamatériau est due à une croissance de l'amplitude de l'onde évanescente au sein de ce métamatériau et non à des résonances d'ondes d'interface, comme avancé par Pendry [8].

Finalement, nous avons cherché à obtenir des comportements de type métamatériau à partir d'un milieu aléatoire composé de matériaux du commerce. D'après les valeurs des propriétés effectives prédites (chapitre 1) et les critères établis (chapitre 3), le fort contraste des propriétés mécaniques entre les phases du milieu aléatoire sélectionné (chute drastique de la célérité de phase) est susceptible de conférer à la structure proposée des comportements de type métamatériau. En particulier, ce milieu est sensé présenter des bandes fréquentielles à indice négatif. Différents régimes de fonctionnement ont été identifiés et reliés aux propriétés de diffusion d'un diffuseur isolé. En comparant les réponses de cet écran avec celles d'un cristal phononique (répartition périodique des diffuseurs), nous avons montré que plus la concentration est élevée, plus les réponses de l'écran de diffuseurs sont indépendantes de leur arrangement (aléatoire ou périodique) sur une bande fréquentielle d'autant plus large. Ces cristaux phononiques possèdent des bandes passantes à indice négatif dont les bandes fréquentielles correspondent à celles prédites par le modèle de Li et Chan.

Il restait alors à mettre en évidence la manifestation des comportements recherchés dans les réponses acoustiques d'un écran constitué du milieu aléatoire choisi. La réfraction négative n'a pu être observée. Il faudrait maintenant confirmer (ou infirmer) que les effets de structure dus à la périodicité d'un milieu sont nécessaires à l'apparition de ce phénomène. Cela pourrait peut être se faire à travers l'étude d'un milieu aléatoire dont le contraste entre la matrice et les diffuseurs est encore plus important afin de décaler le phénomène voulu à des fréquences plus basses et pour des concentrations moins importantes afin de se rapprocher des conditions où les modèles analytiques sont en bon accord avec les simulations numériques.

Enfin, l'étude menée dans le chapitre 2 mériterait d'être étendue aux matrices solides. Trois cas seront alors à considérer selon que l'onde incidente est longitudinale (P), transversale dans le plan (SV) ou transversale hors plan (SH). À la limite quasi-statique, nous avons vérifié que la masse volumique effective respecte la loi des mélanges $\rho_{\text{eff}} = (1 - \phi)\rho_0 + \phi\rho_1$, il reste à considérer les composantes du tenseur des rigidités et les interactions entre diffuseurs. Le cas des ondes SH dans un solide étant équivalent au cas des ondes P dans un fluide, on devrait obtenir des résultats similaires à ceux obtenus dans ce chapitre. Cela devrait se traduire par le remplacement de la masse volumique des fluides par l'inverse du module de cisaillement des solides et de l'inverse du module de compressibilité des fluides par la masse volumique des solides dans les expressions des paramètres mécaniques effectifs.

Annexes

Annexe A

Diffusion d'une onde plane par un obstacle cylindrique

Dans cette annexe nous présentons la méthode utilisée pour calculer le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ et le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ lors de la diffusion d'une onde plane par un obstacle cylindrique en tout point M , de coordonnées (r, θ) , d'un plan quelconque normal à l'axe du cylindre. Pour cela nous résolvons l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques, puis nous définissons les champs de déplacement et de contrainte selon que l'onde se propage dans un milieu fluide ou un milieu solide. Finalement, nous déterminons le système à résoudre dans le cas d'un cylindre plein suivant que la matrice et le diffuseur soit fluide ou solide. Dans chacun des cas, la limite quasi-statique des coefficients d'amplitude modale de l'onde diffusée est donnée.

A.1 Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$)

Soit l'équation d'onde appliquée au déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ d'une particule au temps t , dont la position est donnée par le vecteur \mathbf{r} :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{A.1})$$

où c_0 est la vitesse de phase de l'onde considérée.

Considérons une onde plane harmonique et monochromatique, en appliquant la méthode de séparation des variables, le vecteur déplacement s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)e^{-i\omega t}. \quad (\text{A.2})$$

La substitution de (A.2) dans (A.1) conduit à l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta + k_0^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\text{A.3})$$

où :

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}. \quad (\text{A.4})$$

L'opérateur Laplacien s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (\text{A.5})$$

En supposant que les solutions de (A.3) s'exprime sous la forme (A.2), on obtient :

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_0^2, \quad (\text{A.6})$$

où :

$$F'(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad (\text{A.7})$$

Les fonctions $R(r)$, $\Theta(\theta)$ et $Z(z)$ étant supposées indépendantes, on peut écrire :

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_0^2 - \left[\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \right] = -k_z^2, \quad (\text{A.8})$$

qui permet de déterminer la fonction :

$$Z(z) = A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}. \quad (\text{A.9})$$

Posons :

$$k_0^2 - k_z^2 = k_w^2, \quad (\text{A.10})$$

l'équation (A.6) prend alors la forme suivante :

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -k_w^2 r^2 - \left(r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} \right) = -\nu^2, \quad (\text{A.11})$$

qui conduit à la fonction :

$$\Theta(\theta) = A_\theta e^{i\nu\theta} + B_\theta e^{-i\nu\theta}. \quad (\text{A.12})$$

L'équation (A.6) se réduit alors à la forme :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + k_w^2 - \frac{\nu^2}{r^2} = 0. \quad (\text{A.13})$$

En posant $k_w r = s$, soit $\partial s = k_w \partial r$, l'équation (A.13) devient :

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial R(r)}{\partial s} + \left(1 - \frac{\nu^2}{s^2} \right) R(r) = 0, \quad (\text{A.14})$$

qui est une équation différentielle de Bessel, dont la solution peut s'exprimer sous les deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} R(r) &= A_r J_\nu(k_w r) + B_r Y_\nu(k_w r), \\ R(r) &= C_r H_\nu^{(1)}(k_w r) + D_r H_\nu^{(2)}(k_w r). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Les fonctions $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ et $H_\nu^{(2)}(x)$ sont respectivement les fonctions (cylindriques) de Bessel, de Neumann et de Hankel de première et deuxième espèce d'ordre ν .

Finalement, le champ harmonique solution de (A.1) s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = [A_r J_\nu(k_w r) + B_r Y_\nu(k_w r)] \left(A_\theta e^{i\nu\theta} + B_\theta e^{-i\nu\theta} \right) \left(A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z} \right) e^{-i\omega t}. \quad (\text{A.16})$$

A.2 Déplacements et contraintes en coordonnées cylindriques

A.2.1 Formules générales

Dans cette section, nous utilisons le formalisme des potentiels de déplacement, adapté à la propagation d'ondes dans un milieu solide [70]. Pour ce faire, on décompose le déplacement $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z$ en fonction du potentiel de l'onde longitudinale Φ et de celui de l'onde transverse Ψ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \Psi(\mathbf{r}), \quad (\text{A.17})$$

soit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z(\mathbf{r})}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_\theta(\mathbf{r})}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_r(\mathbf{r})}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z(\mathbf{r})}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \Psi_\theta(\mathbf{r})}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_r(\mathbf{r})}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

les potentiels respectant l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta + k_L^2) \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$(\Delta + k_T^2) \Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.20})$$

où k_L et k_T sont respectivement les nombres d'ondes des ondes longitudinale et transverse.

Dans le cas d'un milieu isotrope, le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par la relation :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \lambda \operatorname{tr}[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})] \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.21})$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité d'ordre 2, et $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}))^T]$, où T représente l'opérateur transposé, avec en coordonnées cylindriques :

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial \theta} - u_\theta(\mathbf{r}) \right) & \frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta(\mathbf{r})}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta(\mathbf{r})}{\partial \theta} + u_r(\mathbf{r}) \right) & \frac{\partial u_\theta(\mathbf{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z(\mathbf{r})}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z(\mathbf{r})}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z(\mathbf{r})}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Le tenseur des déformations s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta(\mathbf{r})}{\partial r} - \frac{u_\theta(\mathbf{r})}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial z} + \frac{\partial u_z(\mathbf{r})}{\partial r} \right) \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta(\mathbf{r})}{\partial \theta} + u_r(\mathbf{r}) \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta(\mathbf{r})}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z(\mathbf{r})}{\partial \theta} \right) \\ \operatorname{sym} & & \frac{\partial u_z(\mathbf{r})}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

On considère une onde plane longitudinale incidente de direction de propagation \mathbf{e}_x . Ce système étant indépendant de z , nous avons $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, $u_z(\mathbf{r}) = 0$, et $\Psi_r(\mathbf{r}) = \Psi_\theta(\mathbf{r}) = 0$. Finalement, on obtient :

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi(\mathbf{r})}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\theta} - \frac{\partial\Psi(\mathbf{r})}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(\mathbf{r}) &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + 2\mu \frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial r}, \\ \sigma_{\theta\theta}(\mathbf{r}) &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\theta(\mathbf{r})}{\partial\theta} + u_r(\mathbf{r}) \right), \\ \sigma_{r\theta}(\mathbf{r}) &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r(\mathbf{r})}{\partial\theta} - \frac{u_\theta(\mathbf{r})}{r} + \frac{\partial u_\theta(\mathbf{r})}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

La substitution de (A.25) dans (A.26), conduit à :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(\mathbf{r}) &= (\lambda + 2\mu) \Delta\Phi(\mathbf{r}) + 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi(\mathbf{r})}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\Phi(\mathbf{r})}{\partial\theta^2} \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta}(\mathbf{r}) &= (\lambda + 2\mu) \Delta\Phi(\mathbf{r}) - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi(\mathbf{r})}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial^2\Phi(\mathbf{r})}{\partial r^2} \right], \\ \sigma_{r\theta}(\mathbf{r}) &= \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r})}{\partial\theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi(\mathbf{r})}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

A.2.2 Cas d'un milieu fluide

Le fluide étant supposé parfait ($\mu = 0$), il n'y a pas d'onde transverse se propageant dans le milieu et la contrainte de cisaillement est nulle. Le potentiel de déplacement d'une onde longitudinale s'écrit :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n f_n(k_L r) + B_n g_n(k_L r)] e^{in\theta}, \quad (\text{A.28})$$

où $f_n(x)$ et $g_n(x)$ représentent soit le couple $J_n(x)$ et $Y_n(x)$, soit le couple $H_n^{(1)}(x)$ et $H_n^{(2)}(x)$. Dans le cas où $A_{-n} = (-1)^n A_n$ et $B_{-n} = (-1)^n B_n$, l'équation (A.28) est équivalente à :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n [A_n f_n(k_L r) + B_n g_n(k_L r)] \cos(n\theta). \quad (\text{A.29})$$

Soit la formule de dérivation :

$$\frac{\partial f_n(kr)}{\partial r} = k f_{n-1}(kr) - \frac{n}{r} f_n(kr) = -k f_{n+1}(kr) + \frac{n}{r} f_n(kr), \quad (\text{A.30})$$

satisfaite par les fonctions J_n , Y_n , $H_n^{(1)}$ ou $H_n^{(2)}$. Les harmoniques cylindriques $e^{in\theta}$ (ou $\cos(n\theta)$) étant

orthogonaux entre eux, le déplacement radial $u_r(\mathbf{r})$ et la contrainte longitudinale $\sigma_{rr}(\mathbf{r})$ s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{r}) &= \sum_n u_{r,n}(\mathbf{r}) e^{in\theta}, \\ \sigma_{rr}(\mathbf{r}) &= \sum_n \sigma_{rr,n}(\mathbf{r}) e^{in\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

où la notation compacte $\sum_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}$, valable pour la suite de l'annexe, a été introduite. On montre que :

$$\begin{pmatrix} ru_{r,n}(\mathbf{r}) \\ r^2\sigma_{rr,n}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nf_n(k_L r) - k_L r f_{n+1}(k_L r) & ng_n(k_L r) - k_L r g_{n+1}(k_L r) \\ -\lambda(k_L r)^2 f_n(k_L r) & -\lambda(k_L r)^2 g_n(k_L r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

A.2.3 Cas d'un milieu solide

Quand le milieu est solide, en plus des ondes longitudinales, des ondes transversales se propagent. Elles ont pour potentiel de déplacement :

$$\Psi(\mathbf{r}) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_n f_n(k_T r) + D_n g_n(k_T r)] e^{in\theta}, \quad (\text{A.33})$$

où $f_n(x)$ et $g_n(x)$ représentent soit le couple $J_n(x)$ et $Y_n(x)$, soit le couple $H_n^{(1)}(x)$ et $H_n^{(2)}(x)$. Lorsque $C_{-n} = (-1)^{n+1} C_n$ et $D_{-n} = (-1)^{n+1} D_n$, cette équation est équivalente à :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n [C_n f_n(k_T r) + D_n g_n(k_T r)] \sin(n\theta). \quad (\text{A.34})$$

D'après les équations (A.25) et (A.27), les déplacements et les contraintes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{r}) &= \sum_n u_{r,n}(\mathbf{r}) e^{in\theta}, \\ u_\theta(\mathbf{r}) &= \sum_n u_{\theta,n}(\mathbf{r}) e^{in\theta}, \\ \sigma_{rr}(\mathbf{r}) &= \sum_n \sigma_{rr,n}(\mathbf{r}) e^{in\theta}, \\ \sigma_{r\theta}(\mathbf{r}) &= \sum_n \sigma_{r\theta,n}(\mathbf{r}) e^{in\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

avec :

$$\begin{pmatrix} ru_{r,n} \\ ru_{\theta,n} \\ \frac{r^2\sigma_{rr,n}}{\mu} \\ \frac{r^2\sigma_{r\theta,n}}{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

où :

$$\begin{aligned}
P_{11} &= n f_n(k_L r) - k_L \rho f_{n+1}(k_L r), & P_{13} &= n f_n(k_T r), \\
P_{21} &= -n f_n(k_L r), & P_{23} &= k_T r f_{n+1}(k_T r) - n f_n(k_T r), \\
P_{31} &= [2n(n-1) - (k_T r)^2] f_n(k_L r) + 2k_L r f_{n+1}(k_L r), & P_{33} &= 2n(n-1) f_n(k_T r) - 2n k_T r f_{n+1}(k_T r), \\
P_{41} &= 2n(1-n) f_n(k_L r) + 2n k_L r f_{n+1}(k_L r), & P_{43} &= [2n(1-n) + (k_T r)^2] f_n(k_T r) - 2k_T r f_{n+1}(k_T r),
\end{aligned}$$

où les huit coefficients manquants P_{i2} et P_{i4} sont obtenus à l'aide des relations $P_{i2} = P_{i1}$ et $P_{i4} = P_{i3}$ en remplaçant $f_n(x)$ par $g_n(x)$.

A.2.4 Conditions aux limites et équations de continuité

Afin de pouvoir caractériser entièrement le système étudié, établissons les équations de continuité qui relient les champs acoustiques entre eux. Celles-ci s'expriment à l'interface entre deux milieux et diffèrent selon la nature fluide ou solide des milieux. Nous étudions les trois cas possibles en fonction de la nature des phases en présence.

a) Conditions aux limites

Le potentiel de déplacement longitudinal de l'onde diffusée $\Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r})$ par un objet (centré sur le repère) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}) = \sum_n \left[A_n H_n^{(1)}(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr) \right] e^{in\theta}. \quad (\text{A.37})$$

Cette onde diffusée doit respecter la condition de radiation de Sommerfeld en deux dimensions (avec la convention $T(t) = e^{-i\omega t}$) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \mathbf{u}(r) = 0. \quad (\text{A.38})$$

Cette condition est respectée lorsque $B_n = 0, \forall n$.

Le potentiel de déplacement longitudinal de l'onde siégeant à l'intérieur du diffuseur $\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r})$, il s'exprime sous la forme :

$$\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \sum_n \left[C_n J_n(kr) + D_n Y_n(kr) \right] e^{in\theta}. \quad (\text{A.39})$$

Le champ acoustique doit être à valeur finie dans tout le domaine. La fonction de Neumann étant infinie lorsque son argument est nul, on montre que $D_n = 0, \forall n$. Le même raisonnement s'applique aux ondes transverses.

b) Interface entre deux milieux fluides

Dans un milieu fluide non visqueux, les contraintes de cisaillement sont nulles et aucune condition de continuité sur le déplacement tangentiel n'est imposée car un fluide est susceptible de « glisser » sur

un autre milieu. Nous avons alors les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} u_r^{(0)}(L) &= u_r^{(1)}(L), \\ \sigma_{rr}^{(0)}(L) &= \sigma_{rr}^{(1)}(L), \end{aligned} \tag{A.40}$$

où L est l'ensemble des vecteurs positions définissant l'interface et les exposants 0 et 1 se réfèrent aux deux milieux en présence.

c) Interface entre un milieu fluide et un milieu solide

Soit un milieu fluide 0 et un milieu solide 1, du fait des propriétés des fluides citées précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned} u_r^{(0)}(L) &= u_r^{(1)}(L), \\ \sigma_{rr}^{(0)}(L) &= \sigma_{rr}^{(1)}(L), \\ 0 &= \sigma_{r\theta}^{(1)}(L). \end{aligned} \tag{A.41}$$

A.3 Coefficients d'amplitude modale d'une inclusion de type cylindre plein

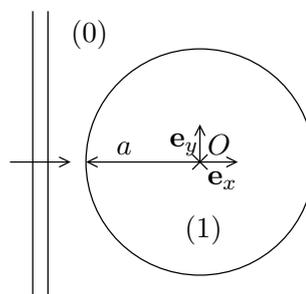


Figure A.1 – Diffusion d'une onde plane par un cylindre.

Dans cette section, nous allons étudier la diffusion d'une onde plane par un cylindre de rayon a comme présentée dans la figure A.1. Les propriétés mécaniques et acoustiques se référant à la matrice et au diffuseur seront notées respectivement avec les indices 0 et 1. Commençons par définir les différents potentiels de déplacement des ondes en présence. Le potentiel de déplacement de l'onde incidente longitudinale est défini par :

$$\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_{L0} \cdot \mathbf{r}} = \sum_n A_n J_n(k_{L0}r) e^{in\theta}, \tag{A.42}$$

celui de l'onde longitudinale diffusée par :

$$\Phi_{\text{diff}}(\mathbf{r}) = \sum_n A_n T_n H_n^{(1)}(k_{L0}r) e^{in\theta}. \tag{A.43}$$

À l'intérieur du diffuseur, le potentiel de l'onde longitudinale s'écrit :

$$\Phi_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \sum_n A_n D_n J_n(k_{L1}r) e^{in\theta}, \quad (\text{A.44})$$

et celui de l'onde transversale :

$$\psi_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \sum_n A_n E_n J_n(k_{T1}r) e^{in\theta}. \quad (\text{A.45})$$

A.3.1 Matrice fluide, diffuseur fluide

Les équations (A.32) et (A.40) conduisent au système suivant :

$$\begin{pmatrix} nH_n^{(1)}(\tilde{\omega}) - \tilde{\omega}H_{n+1}^{(1)}(\tilde{\omega}) & bJ_{n+1}(b) - nJ_n(b) \\ -\tilde{\omega}^2 H_n^{(1)}(\tilde{\omega}) & \frac{\lambda_1}{\lambda_0} b^2 J_n(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}J_{n+1}(\tilde{\omega}) - nJ_n(\tilde{\omega}) \\ \tilde{\omega}^2 J_n(\tilde{\omega}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

où $\tilde{\omega} = k_{0L}a$ est la fréquence adimensionnelle et $b = k_{1L}a$. Pour déterminer les coefficients d'amplitude modale de chacune des ondes, il suffit de résoudre ce système d'équations en utilisant par exemple la méthode de Cramer, on remarquera que $T_{-n} = T_n$ et $D_{-n} = D_n$. À la limite quasi-statique, les coefficients solutions de (A.46) se réduisent à :

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} T_0 &= \frac{-i\pi}{4} \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{\kappa_1} \tilde{\omega}^2 + (\tilde{\omega}^2), \\ \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} T_{\pm 1} &= \frac{-i\pi}{4} \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} \tilde{\omega}^2 + (\tilde{\omega}^2), \\ \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} T_n &= o(\tilde{\omega}^2), \quad |n| > 1 \\ \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} D_0 &= \frac{\rho_0}{\rho_1} + o(1), \\ \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} D_{\pm 1} &= \frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} \sqrt{\frac{\kappa_1 \rho_0}{\rho_1 \kappa_0}} + o(1), \\ \lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} D_n &= O(1). \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

A.3.2 Matrice fluide, cylindre solide

Des équations (A.32), (A.36) et (A.41), nous déduisons le système suivant :

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & \frac{\mu_1}{\lambda_0} P_{22} & \frac{\mu_1}{\lambda_0} P_{23} \\ 0 & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n \\ D_n \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.48})$$

où :

$$\begin{aligned}
P_{11} &= nH_n^{(1)}(\tilde{\omega}) - \tilde{\omega}H_{n+1}^{(1)}(\tilde{\omega}), & P_{12} &= bJ_{n+1}(b) - nJ_n(b), \\
P_{13} &= -nJ_n(c), & P_{21} &= -\tilde{\omega}^2H_n^{(1)}(\tilde{\omega}), \\
P_{22} &= [2n(1-n) + c^2] J_n(b) - 2bJ_{n+1}(b), & P_{23} &= 2n[(1-n)J_n(c) + cJ_{n+1}(c)], \\
P_{32} &= 2n[(1-n)J_n(b) + bJ_{n+1}(b)], & P_{33} &= [2n(1-n) + c^2] J_n(c) - 2cJ_{n+1}(c), \\
I_1 &= \tilde{\omega}J_{n+1}(\tilde{\omega}) - nJ_n(\tilde{\omega}), & I_2 &= \tilde{\omega}^2J_n(\tilde{\omega}),
\end{aligned}$$

avec $\tilde{\omega} = k_{L0}a$, $b = k_{L1}a$ et $c = k_{T1}a$. Remarquons que $T_{-n} = T_n$, $D_{-n} = D_n$ et $E_{-n} = -E_n$. À la limite quasi-statique, les coefficients solutions de (A.48) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} T_0 &= \frac{-i\pi}{4} \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{\kappa_1} \tilde{\omega}^2 + o(\tilde{\omega}^2), \\
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} T_{\pm 1} &= \frac{-i\pi}{4} \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} \tilde{\omega}^2 + o(\tilde{\omega}^2), \\
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} T_n &= o(\tilde{\omega}^2), \quad |n| > 1, \\
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} D_0 &= \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{\kappa_1 + \mu_1}{\kappa_1} + o(1), \\
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} D_{\pm 1} &= \frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\kappa_1 + \mu_1}{\kappa_1} \sqrt{\frac{\rho_0(\kappa_1 + \mu_1)}{\lambda_0\rho_1}} + o(1), \\
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} D_n &= O(1), \\
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} E_0 &= 0, \\
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} E_{\pm 1} &= \mp \frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\mu_1}{\kappa_1} \sqrt{\frac{\rho_0\mu_1}{\kappa_0\rho_1}} + o(1), \\
\lim_{\tilde{\omega} \rightarrow 0} E_n &= O(1).
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Remarquons qu'en posant $\mu_1 = 0$, les limites quasi-statiques (A.49) sont alors identiques à celles obtenues pour un système composé d'une matrice fluide et d'un diffuseur fluide (éq. (A.47)).

Annexe B

Formalisme de la matrice \mathbf{T} appliqué au champ de pression

Dans cette annexe, nous présentons le formalisme de la matrice \mathbf{T} [51, 69], où l'onde incidente est définie par son champ de pression et non par son potentiel de déplacement. Nous allons présenter la résolution de ce problème, puis le relier au formalisme des potentiels de déplacement. Soit la diffusion d'une onde plane par un cylindre fluide immergé (milieu 1) dans une matrice fluide (milieu 0) (fig. A.1).

Considérons une onde incidente plane monochromatique d'amplitude P_0 se propageant suivant l'axe \mathbf{e}_x et dont l'origine des phases se situe en $x = 0$. La surpression acoustique $p_{\text{inc}}(\mathbf{r})$ générée par cette onde s'écrit :

$$p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} = \sum_n a_n \tilde{\psi}_n(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (\text{B.1})$$

où le point d'observation est défini par son vecteur position \mathbf{r} , \mathbf{k}_0 est le vecteur nombre d'onde dans la matrice, a_n désigne le coefficient d'amplitude du mode n de la surpression acoustique ($n \in \mathbb{Z}$) et :

$$\tilde{\psi}_n(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) = J_n(k_0 r) e^{in\theta}. \quad (\text{B.2})$$

Notons que pour une onde plane d'amplitude de pression P_0 , nous avons :

$$a_n = P_0 i^n. \quad (\text{B.3})$$

L'équation (B.1) peut également s'écrire sous la forme d'un produit scalaire de deux vecteurs colonnes infinis :

$$p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \tilde{\Psi}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (\text{B.4})$$

où les éléments de \mathbf{a} et de $\tilde{\Psi}$ sont respectivement toutes les amplitudes a_n et les fonctions $\tilde{\psi}_n(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$. Le produit scalaire $\mathbf{a} \cdot \tilde{\Psi}$ de la relation (B.4) peut être remplacé par la multiplication d'un vecteur ligne par un vecteur colonne : $\mathbf{a}^T \tilde{\Psi}$. Dans la pratique, la série de l'équation (B.1) est tronquée à l'ordre N ($n \in [-N, N]$), de sorte que les vecteurs \mathbf{a} et $\tilde{\Psi}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$ ont $(2N + 1)$ éléments.

De même, la surpression acoustique diffusée $p_{\text{diff}}(\mathbf{r})$ par un cylindre infiniment long, de rayon a , et

celle à l'intérieur du diffuseur $p_{\text{int}}(\mathbf{r})$ s'écrivent sous forme vectorielle :

$$p_{\text{diff}}(\mathbf{r}) = \mathbf{c} \cdot \Psi(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (\text{B.5})$$

$$p_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \mathbf{d} \cdot \tilde{\Psi}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}), \quad (\text{B.6})$$

où \mathbf{c} et \mathbf{d} sont respectivement composés des amplitudes modales de l'onde diffusée et de l'onde à l'intérieur du cylindre, et les éléments de $\Psi(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})$ sont définis par :

$$\psi_n(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) = H_n^{(1)}(k_0 r) e^{in\theta}. \quad (\text{B.7})$$

Les composantes des vecteurs \mathbf{c} et \mathbf{d} (notées respectivement c_n et d_n) étant proportionnelles à l'onde incidente, dans le cas général, l'amplitude d'un mode n des ondes diffusée et « intérieure » est susceptible de dépendre de tous les modes de l'onde incidente. Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}\mathbf{a}, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{U}\mathbf{a}, \quad (\text{B.9})$$

où \mathbf{T} et \mathbf{U} sont deux matrices de taille $(2N + 1, 2N + 1)$. Les modes d'un cylindre étant orthogonaux entre eux, ces matrices sont diagonales. Par ailleurs, la continuité de la pression sur le contour du diffuseur induit la relation suivante :

$$U_{nn} = \frac{J_n(k_0 r) + T_{nn} H_n^{(1)}(k_0 r)}{J_n(k_1 r)}. \quad (\text{B.10})$$

On détermine la vitesse particulière $v_r(\mathbf{r})$ grâce à l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r})}{\partial t} = -\nabla p(\mathbf{r}). \quad (\text{B.11})$$

La continuité de la vitesse particulière permet d'obtenir :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\tilde{\psi}_n(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + T_{nn} \psi_n(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \right] \Big|_{\|\mathbf{r}\|=a} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial r} \left[U_{nn} \tilde{\psi}_n(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \right] \Big|_{\|\mathbf{r}\|=a}. \quad (\text{B.12})$$

En notant :

$$f'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial r}, \quad (\text{B.13})$$

on obtient finalement :

$$T_{nn} = \frac{\frac{\rho_1}{\rho_0} J_n(k_1 a) J'_n(k_0 a) - J_n(k_0 a) J'_n(k_1 a)}{H_n^{(1)}(k_0 a) J'_n(k_1 a) - \frac{\rho_1}{\rho_0} H_n^{(1)}(k_0 a) J_n(k_1 a)}. \quad (\text{B.14})$$

Cette expression est identique à celle obtenu par la méthode des potentiels de déplacement en résolvant

le système (A.46). On peut remarquer que certains auteurs [51] utilisent la notation :

$$kf'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\partial r}, \quad (\text{B.15})$$

ce qui fait apparaître le rapport d'impédances des deux milieux.

Sachant que :

$$p(\mathbf{r}) = -\lambda\Delta\phi(\mathbf{r}) = \lambda k^2\phi(\mathbf{r}), \quad (\text{B.16})$$

on montre :

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda_0 k_0^2 A_n, \\ c_n &= T_{nn} a_n = \lambda_0 k_0^2 T_n A_n, \\ d_n &= U_{nn} a_n = \lambda_1 k_1^2 D_n A_n, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

où les coefficients T_n et D_n sont définis dans la section A.3.1. Les termes T_{nn} et U_{nn} sont reliés aux coefficients d'amplitude modale déterminés dans l'annexe A par les relations :

$$T_{nn} = T_n, \quad (\text{B.18})$$

$$U_{nn} = \frac{\lambda_1 k_1^2}{\lambda_0 k_0^2} D_n = \frac{\rho_1}{\rho_0} D_n. \quad (\text{B.19})$$

Annexe C

Diffusion par deux cylindres

Nous avons remarqué avec notre technique d'homogénéisation que le milieu effectif à la limite quasi-statique dépend uniquement du champ incident et du champ à l'intérieur des cylindres. Plus précisément, le coefficient de compressibilité κ_{eff} et la masse volumique ρ_{eff} ne dépendent respectivement que du mode monopolaire et du mode dipolaire d'un cylindre. La question que nous nous sommes donc posée est de savoir si les propriétés mécaniques du milieu effectif sont toujours données par les formules de Kuster et Toksöz [36] si les interactions entre diffuseurs sont prises en compte.

Dans une première approche nous avons décidé de vérifier si la limite quasi-statique du champ diffusé par deux diffuseurs change par la prise en compte ou non des interactions entre ces deux diffuseurs. Nous allons donc présenter la résolution complète d'un système composé de deux diffuseurs dans une configuration quelconque, puis développer le résultat en prenant en compte au fur et à mesure chaque interaction entre les diffuseurs (décomposition en série de Debye). Le résultat final est alors obtenu lorsque le nombre d'interactions entre les diffuseurs tend vers l'infini. Nous vérifierons que les deux résultats sont identiques.

C.1 Présentation du problème

Dans cette annexe nous cherchons à déterminer le champ total dans un système à deux dimension composé d'une matrice fluide et de N diffuseurs cylindriques fluides en interactions. Pour cela, nous allons exprimer le champ excitant chaque diffuseur en fonction du champ diffusé par tous les autres diffuseurs. Cette formulation prend en compte toutes interactions entre les diffuseurs. Ensuite, nous développerons ces expressions dans le cas où seuls deux diffuseurs sont présents dans ce système. Nous considérerons que ces diffuseurs sont identiques. Cela nous permettra d'exprimer le champ excitant chaque diffuseur à la limite quasi-statique.

Le système étudié dans ce chapitre est composé d'un repère globale $(O_0 ; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ et de repères locaux attachés aux centres des N diffuseurs en présence. Le repère local associé au diffuseur i , de centre O_i , est noté $(O_i ; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. Le vecteur position d'un point M dans le repère global sera noté $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r(\theta)$, et dans le repère local associé au diffuseur i il sera noté $\mathbf{r}_i = r_i\mathbf{e}_r(\theta_i)$. La position du centre du diffuseur i dans le repère local associé au diffuseur j est noté $\mathbf{b}_{ij} = r_{ij}\mathbf{e}_r(\theta_{ij})$, avec $\theta_{ji} = \theta_{ij} + \pi$. \mathbf{b}_{0i} désigne alors la position du centre du repère global dans le repère local associé au point O_i , et \mathbf{b}_{i0} désigne la

position du centre du diffuseur i dans le repère global. Ces notations sont présentées sur la figure C.1.

On appellera $f(\mathbf{r})$ et $f(\mathbf{r}_i)$ deux expressions d'un même champ évaluées en un même point géométrique. Dans la première et la seconde fonctions, les coordonnées du point d'observation sont exprimées respectivement dans le repère global et dans le repère local associé au diffuseur i .

C.2 Résolution harmonique du système à deux diffuseurs

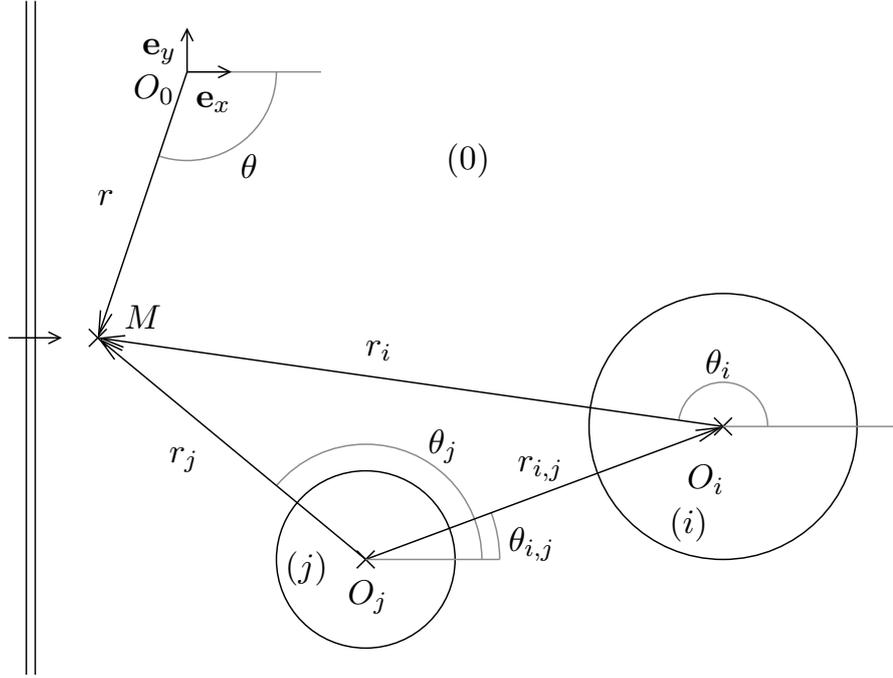


Figure C.1 – Diffusion d'une onde plane par deux cylindres.

Une onde plane monochromatique d'amplitude P_0 , se propageant suivant l'axe \mathbf{e}_x et dont l'origine des phases se situe en $x = 0$ excite ce système. La surpression acoustique $p_{\text{inc}}(\mathbf{r})$ générée par l'onde incidente s'exprime dans le repère général :

$$p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = P_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} = \sum_n A_{\text{inc}}(n) \tilde{\psi}_n(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{A}_{\text{inc}} \cdot \tilde{\Psi}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad (\text{C.1})$$

Dans le repère associé au $j^{\text{ième}}$ diffuseur, elle s'écrit :

$$p_{\text{inc}}^{(j)}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(j)} \cdot \tilde{\Psi}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j), \quad (\text{C.2})$$

où :

$$\mathbf{A}_{\text{inc}}^{(j)} = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{j0}} \mathbf{A}_{\text{inc}}. \quad (\text{C.3})$$

Les éléments du vecteur $\tilde{\Psi}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)$ sont définis dans l'équation (B.2).

La surpression acoustique $p_{\text{diff}}^{(j)}(\mathbf{r}_j)$ de l'onde diffusée par le diffuseur j s'exprime quant à elle :

$$p_{\text{diff}}^{(j)}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{c}^{(j)} \cdot \Psi(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j), \quad (\text{C.4})$$

où les éléments de $\Psi(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j)$ sont définis par l'équation (B.7), et $\mathbf{c}^{(j)}$ dépend des coefficients d'amplitude modale $A_{\text{ex}}^{(j)}(n)$ de la pression $p_{\text{ex}}^{(j)}(\mathbf{r})$ excitant le diffuseur j (*cf.* annexe B) :

$$\mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{T}^{(j)} \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(j)}, \quad (\text{C.5})$$

où $\mathbf{T}^{(i)}$ (matrice \mathbf{T} du diffuseur i) est connue.

L'onde incidente totale excitant le diffuseur j est constituée de l'onde source et de toutes les ondes diffusées par tous les diffuseurs en présence. L'onde diffusée par un diffuseur i s'exprime dans le repère local associé au diffuseur j grâce au théorème d'addition de Graf :

$$\psi_n(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i) = \sum_m \psi_{n-m}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji}) \tilde{\psi}_m(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j), \quad \|\mathbf{r}_j\| < \|\mathbf{b}_{ji}\|. \quad (\text{C.6})$$

Le champ excitant un diffuseur est composé du champ incident et des champs diffusés par tous les autres diffuseurs. La surpression acoustique $p_{\text{ex}}^{(j)}(\mathbf{r}_j)$ de l'onde totale excitant le diffuseur j d'un système composé de N diffuseurs, s'exprime alors, grâce à l'équation (C.6) :

$$\begin{aligned} p_{\text{ex}}^{(j)}(\mathbf{r}_j) &= p_{\text{inc}}^{(j)}(\mathbf{r}_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sum_n \sum_m c_n^{(i)} \psi_{n-m}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji}) \tilde{\psi}_m(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j), \\ &= \sum_m \left(e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{j0}} A_{\text{inc}}(m) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \sum_n c_n^{(i)} \psi_{n-m}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji}) \right) \tilde{\psi}_m(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j), \\ &= \sum_m A_{\text{ex}}^{(j)}(m) \tilde{\psi}_m(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Elle peut s'écrire sous forme vectorielle :

$$p_{\text{ex}}^{(j)}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(j)} \cdot \tilde{\Psi}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j), \quad (\text{C.8})$$

avec :

$$\mathbf{A}_{\text{ex}}^{(j)} = \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(j)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji}) \mathbf{c}^{(i)}, \quad (\text{C.9})$$

où $\mathbf{A}_{\text{ex}}^{(j)}$, $\mathbf{A}_{\text{inc}}^{(j)}$ et $\mathbf{c}^{(i)}$ sont trois vecteurs de dimension infinie et $\mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji})$ est une matrice carrée infinie. Considérons que $(n, m) \in [-N, N]$, l'élément de $c^{\text{ième}}$ ligne d'un des trois vecteurs correspond alors à $n = c - N - 1$, et la matrice $\mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji})$ est de dimension $(2N + 1, 2N + 1)$ dont l'élément $\mathbf{P}_{cd}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji})$ de la $c^{\text{ième}}$ ligne et de la $d^{\text{ième}}$ colonne est défini par :

$$\mathbf{P}_{cd}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji}) = \psi_{d-c}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji}). \quad (\text{C.10})$$

Dans le cas d'un système a deux diffuseurs 1 et 2 de rayons respectifs a_1 et a_2 , le problème se réduit

à deux systèmes couplés de $4N + 2$ équations à $4N + 2$ inconnues :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)} &= \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(1)} + \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{12}) \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(2)}, \\ \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(2)} &= \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(2)} + \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{21}) \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)}.\end{aligned}\quad (\text{C.11})$$

Le système (C.11) permet de réécrire les coefficients d'amplitude modale de la pression excitant le diffuseur 1 sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)} &= \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{12}) \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{21}) \mathbf{T}^{(1)} \right]^{-1} \left[\mathbf{A}_{\text{inc}}^{(1)} + \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{12}) \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(2)} \right], \\ \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)} &= \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{12}) \mathbf{T}^{(2)} \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{21}) \mathbf{T}^{(1)} \right]^{-1} \left[e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{10}} \mathbf{I} + e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{20}} \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_{12}) \mathbf{T}^{(2)} \right] \mathbf{A}_{\text{inc}},\end{aligned}\quad (\text{C.12})$$

où \mathbf{I} est la matrice identité de dimension $(2N + 1, 2N + 1)$. Ce système est maintenant indépendant de la pression excitant le diffuseur 2.

La limite asymptotique (D.16) montre que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \psi_{d-c}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ji}) \propto k^{-|d-c|} + o\left(k^{-|d-c|}\right).\quad (\text{C.13})$$

En substituant les équations (A.47) et (C.13) dans l'équation (C.10), on obtient :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{T}^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\rho_0 - \rho_j}{\rho_0 + \rho_j} \frac{a_j^2}{r_{ij}^2} e^{2i\theta_{ij}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_0 - \rho_j}{\rho_0 + \rho_j} \frac{a_j^2}{r_{ij}^2} e^{-2i\theta_{ij}} & 0 & 0 \end{pmatrix} + o(1).\quad (\text{C.14})$$

Lorsque les deux diffuseurs sont identiques et de rayon a , en notant les propriétés des diffuseurs avec l'indice 1 et sachant que $A_{-n} = (-1)^n A_n$, la substitution de (C.14) dans (C.12) donne :

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(0) &= A_{\text{inc}}(0) + o(1), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1) &= \frac{r_{12}^2 (\rho_0 + \rho_1) [r_{12}^2 (\rho_0 + \rho_1) + a^2 (\rho_0 - \rho_1) e^{\mp 2i\theta_{12}}]}{r_{12}^4 (\rho_0 + \rho_1)^2 - a^4 (\rho_0 - \rho_1)^2} A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1).\end{aligned}\quad (\text{C.15})$$

En prenant en compte les multiples interactions entre les diffuseurs, l'amplitude de la pression excitant le mode n est différente de celle diffusée par le mode $-n$ ($A_{\text{ex}}(-1) \neq A_{\text{ex}}(1)$). On notera également que :

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ r_{12} \rightarrow \infty}} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1) = A_{\text{inc}}(\pm 1),\quad (\text{C.16})$$

ce qui signifie que lorsque la distance entre les deux diffuseurs est importante, les interactions sont négligeables. La pression excitant chaque diffuseur se réduit à la pression incidente, ce qui explique l'hypothèse de diffusion simple au sein d'un milieu hétérogène où la concentration est très faible.

Sachant que $\theta_{ij} = \pi + \theta_{ji}$, il apparaît que :

$$e^{\mp 2i\theta_{12}} = e^{\mp 2i\theta_{21}},\quad (\text{C.17})$$

ce qui permet de montrer que :

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(2)}(0), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(2)}(\pm 1).\end{aligned}\tag{C.18}$$

C.3 Résolution par récurrence du système à deux diffuseurs

Nous allons maintenant nous intéresser aux interactions successives entre les diffuseurs : dans un premier temps l'onde source excite le diffuseur 1, à l'étape suivante le diffuseur 2 est excité par l'onde source et par l'onde diffusée par le diffuseur 1 à l'étape précédente, *etc.* et on répète l'opération une infinité de fois. Le système étudié ici est celui présenté sur la figure C.1. En se référant à l'équation (C.9), on peut exprimer l'amplitude modale de la pression excitatrice $A_{\text{ex}}^{(1)}(m, \iota)$ du mode m du diffuseur 1 lors de la $\iota^{\text{ième}}$ interaction par :

$$A_{\text{ex}}^{(1)}(m, \iota) = A_{\text{inc}}(m) + \sum_m \psi_{n-m}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{21}) T_{nn}^{(2)} A_{\text{ex}}^{(2)}(n, \iota - 1),\tag{C.19}$$

où $A_{\text{ex}}^{(2)}(n, \iota - 1)$ est la pression excitant le mode n du diffuseur 2 lors de l'interaction précédente. Notons :

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{12}) \mathbf{T}^{(2)},\tag{C.20}$$

alors on peut montrer de manière récursive que l'amplitude de la pression excitatrice sur le diffuseur 1 s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)}(\iota) = \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(1)} + \mathbf{P}_{12} \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(2)} + \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{21} \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(1)} + \mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{21} \mathbf{P}_{12} \mathbf{A}_{\text{inc}}^{(2)} + \dots\tag{C.21}$$

On remarque que la pression excitant le diffuseur 1 contient tous les processus de diffusion des interactions précédentes, c'est-à-dire qu'elle est composée de l'onde incidente, de l'onde diffusée par le diffuseur 2 excité par l'onde incidente, de l'onde ayant fait un aller-retour, *etc.* La pression excitatrice sur le diffuseur 2 est obtenue en inversant les 1 et les 2 dans l'équation (C.21). Substituons l'équation (C.3) dans l'équation (C.21) :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)}(2\tilde{\iota}) &= \left[e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} (\mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{21})^q + e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{20}} \mathbf{P}_{12} \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}-1} (\mathbf{P}_{21} \mathbf{P}_{12})^q \right] \mathbf{A}_{\text{inc}}, \\ \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)}(2\tilde{\iota} + 1) &= \left[e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{10}} \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} (\mathbf{P}_{12} \mathbf{P}_{21})^q + e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{b}_{20}} \mathbf{P}_{12} \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} (\mathbf{P}_{21} \mathbf{P}_{12})^q \right] \mathbf{A}_{\text{inc}},\end{aligned}\tag{C.22}$$

à la vue de l'équation (C.14), il apparaît qu'à la limite quasi-statique :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(0, \iota) = \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(2)}(0, \iota) = A_{\text{inc}}(0) + o(1).\tag{C.23}$$

Le mode monopolaire de l'onde excitatrice n'est donc pas affecté par les interactions entre les diffuseurs, comme nous l'avons vu dans la section C.2.

Intéressons nous à la première interaction, à la limite quasi-statique elle s'exprime :

$$\mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)}(1) = \left[\mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_{\text{inc}}(-1) \\ A_{\text{inc}}(0) \\ A_{\text{inc}}(1) \end{pmatrix} + o(1), \quad (\text{C.24})$$

où :

$$X_{\pm 1} = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} \frac{a_1^2}{r_{12}^2} e^{\mp 2i\theta_{12}}, \quad (\text{C.25})$$

les propriétés mécaniques des diffuseurs sont notées avec un indice 1 car les deux diffuseurs sont identiques. L'équation (C.24) nous montre qu'à la limite quasi-statique, le mode 1 d'un diffuseur est excité par l'onde diffusée par le mode -1 de l'autre diffuseur et inversement.

On a (éq. (C.17)) :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{P}_{12} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{P}_{21} = \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + o(1), \quad (\text{C.26})$$

ce qui se traduit par :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(1)}(\iota) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{A}_{\text{ex}}^{(2)}(\iota) = \sum_{q=0}^{\iota} \mathbf{P}^q \mathbf{A}_{\text{inc}}. \quad (\text{C.27})$$

Sachant que $A_{\text{inc}}(-1) = -A_{\text{inc}}(1)$, il apparaît que :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1, 2\tilde{\iota}) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(2)}(\pm 1, 2\tilde{\iota}) = \left[\sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} (X_1 X_{-1})^q - X_{\pm 1} \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}-1} (X_1 X_{-1})^q \right] A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1, 2\tilde{\iota} + 1) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{\text{ex}}^{(2)}(\pm 1, 2\tilde{\iota} + 1) = \left[(1 - X_{\pm 1}) \sum_{q=0}^{\tilde{\iota}} (X_1 X_{-1})^q \right] A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1). \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Sachant que $|X_{\pm 1}| < 1$, après une infinité d'interactions l'onde incidente s'exprime (éq. (D.2)) :

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \tilde{\iota} \rightarrow \infty}} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1, 2\tilde{\iota}) = \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \tilde{\iota} \rightarrow \infty}} A_{\text{ex}}^{(1)}(\pm 1, 2\tilde{\iota} + 1) = \frac{1 - X_{\pm 1}}{1 - X_{-1} X_1} A_{\text{inc}}(\pm 1) + o(1). \quad (\text{C.29})$$

En insérant l'équation (C.25) dans l'équation (C.29), on retrouve l'équation (C.15). Cette approche permet donc de retrouver le résultat que la résolution harmonique. Contrairement à la résolution harmonique, cette méthode ne nécessite pas le calcul d'une matrice inverse, cependant il faut déterminer le résultat d'une somme infinie.

Annexe D

Limites asymptotiques des séries et fonctions utilisées

Dans cette annexe, nous donnons les limites infinies des séries utilisées dans ce document, ainsi que les développements asymptotiques de différentes fonctions qui nous ont aidées à déterminer les différentes limites quasi-statiques dont nous avons besoin.

Pour déterminer les coefficients d'amplitudes modaux (C.28), on rappelle que :

$$\sum_{p=0}^{n-1} x^p = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad (\text{D.1})$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n x^p = \begin{cases} +\infty, & |x| \geq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & |x| < 1. \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

On a également :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{x^{2q}}{(4q-2)} = \frac{x}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \quad (\text{D.3})$$

Les développements en séries de Taylor-Maclaurin permettent d'obtenir une approximation d'une fonction $f(x)$ donnée, dérivable n fois au voisinage de la valeur 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p f(x)|_{x=0} + o(x^n), \quad (\text{D.4})$$

où $o(x^n)$ est le reste de Young de la série qui est négligeable devant x^n , et $a!$ est la fonction factorielle de $a \in \mathbb{N}^*$ définie par :

$$a! = \prod_{k=1}^a k, \quad (\text{D.5})$$

par convention :

$$0! = 1. \quad (\text{D.6})$$

L'équation (D.4) permet de développer la fonction exponentielle en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\text{D.7})$$

et donc au premier ordre :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 + o(1). \quad (\text{D.8})$$

On a également :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x). \quad (\text{D.9})$$

D'une manière générale la fonction de Bessel s'exprime [122] lorsque $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n} k! (k+n)!} x^{2k+n}, \quad (\text{D.10})$$

et donc au premier ordre non nul :

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} + o(x^n). \quad (\text{D.11})$$

La fonction de Neumann se développe [123] :

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [\ln(x) - \ln(2) + \gamma] + o(\ln(x)), \quad (\text{D.12})$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni [124] :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \approx 0,57721, \quad (\text{D.13})$$

et pour n strictement supérieur à 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_n(x) = -\frac{2^n (n-1)!}{\pi} x^{-n} + o(x^{-n}). \quad (\text{D.14})$$

Or la fonction de Hankel de première espèce est déterminée par :

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i Y_n(x), \quad (\text{D.15})$$

ce qui amène à :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} H_0^{(1)}(x) &= 1 + \frac{2i}{\pi} [\ln(x) - \ln(2) + \gamma] + o(\ln(x)) \\ \lim_{x \rightarrow 0} H_n^{(1)}(x) &= -\frac{2^n (n-1)!}{\pi} x^{-n} i + o(x^{-n}). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Sachant que :

$$f_{-n} = (-1)^n f_n, \quad (\text{D.17})$$

où f_n représente soit la fonction de Bessel cylindrique, soit la fonction de Neumann cylindrique, soit les fonctions de Hankel de première ou deuxième espèce.

Les équations (A.30), (D.11) et (D.16) permettent de déterminer la limite quasi-statique de l'équation (B.14) :

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} T_{00} &= \frac{-i\pi}{4} \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{\kappa_1} (k_0 a)^2 + ((k_0 a)^2), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} T_{nn} &= \frac{-i\pi n}{4^n (n!)^2} \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} (k_0 a)^{|2n|} + \left((k_0 a)^{|2n|} \right), \quad n \neq 0,\end{aligned}\tag{D.18}$$

de même en utilisant l'équation (B.10), on voit que :

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} U_{00} &= 1 + o(1), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} U_{nn} &= \left(\frac{\rho_0 \kappa_1}{\rho_1 \kappa_0} \right)^{\frac{|n|}{2}} \frac{2\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} + o(1), \quad n \neq 0.\end{aligned}\tag{D.19}$$

Elles permettent également de montrer que les solutions du système (A.48) respectent :

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} T_0 &\propto (k_0 a)^2 + o((k_0 a)^2), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} T_n &\propto (k_0 a)^{|2n|} + o((k_0 a)^{|2n|}), \quad n \neq 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} D_n &\propto 1 + o(1), \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} E_n &\propto 1 + o(1).\end{aligned}\tag{D.20}$$

Annexe E

Cristaux phononiques et métamatériaux acoustiques

La notion de métamatériau n'est pas récente, elle a été initiée par Veselago [7] en 1968, mais il a fallu attendre le début du XXI^e siècle avant que les premiers échantillons n'apparaissent. Le développement des métamatériaux a commencé en électromagnétisme, où il a d'abord été montré qu'on pouvait obtenir une permittivité effective ϵ_{eff} négative [125, 126] et une perméabilité magnétique effective μ_{eff} négative [127] à l'aide de milieux périodiques. Puis en 2000, en constituant un système hybride conçu pour avoir ces deux paramètres négatifs sur une même bande fréquentielle, le premier métamatériau électromagnétique a été étudié en laboratoire [128].

L'émergence des métamatériaux acoustiques ne se fera qu'à partir de 2004. Dans un premier temps, ils ont été obtenus avec des cristaux phononiques (CPs) 2D [9, 10], puis 3D [11]. Il a été montré par la suite qu'avec des matériaux anisotropes naturels, de la réfraction négative pouvait se manifester [129].

À l'heure actuelle, les métamatériaux acoustiques n'ont été conçus qu'à partir de CPs. La majorité d'entre eux sont à matrice fluide [9–23, 25, 30, 130], mais depuis peu, des études se concentrent sur les cristaux à matrice solide [20, 24, 26, 27, 131], structures plus faciles à manipuler.

Dans cette annexe, nous commencerons par rappeler les principes de la propagation des ondes dans les milieux périodiques. Ensuite, nous présenterons les façons d'obtenir de la réfraction négative avec un CP. Finalement nous feront un état de l'art des métamatériaux acoustiques à réfraction négative.

E.1 Introduction à la propagation des ondes dans les cristaux phononiques

E.1.1 Réseau de Bravais et réseau réciproque

Dans les milieux périodiques à deux dimensions, on s'intéresse principalement à deux types de mailles : la maille carrée et la maille triangulaire (triangle équilatéral). Un schéma de ces deux types de CPs, où la maille élémentaire est repérée par des tirets, est présenté sur la figure E.1.

Ces réseaux périodiques sont caractérisés par deux vecteurs élémentaires \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 , tels que la structure reste invariante par translation d'une combinaison linéaire de ces deux vecteurs ([132] annexe

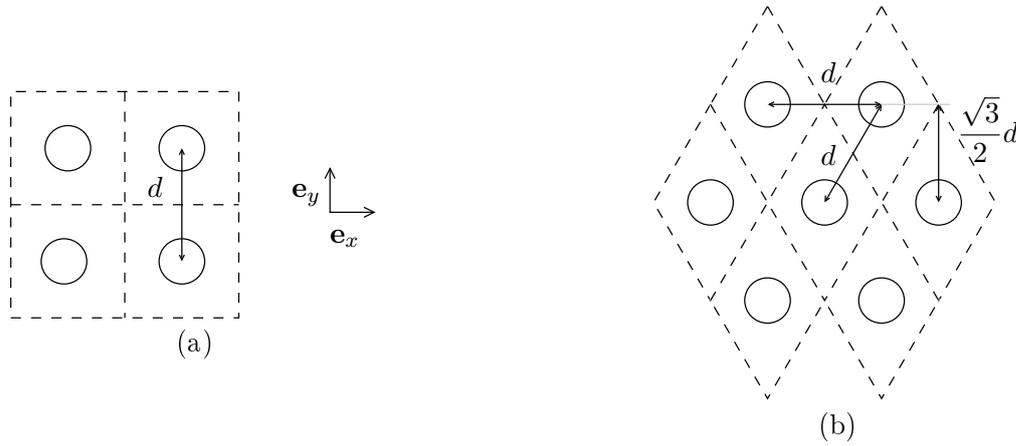


Figure E.1 – Réseau de Bravais d’une maille carrée a) et triangulaire b).

A ou [3] chapitre 1). Ces vecteurs sont les vecteurs de base du réseau dit de Bravais et dépendent du paramètre de maille d . Ainsi, pour une maille carrée, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= d\mathbf{e}_x, \\ \mathbf{a}_2 &= d\mathbf{e}_y,\end{aligned}\tag{E.1}$$

et pour une maille triangulaire (triangle équilatéral) :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= d\mathbf{e}_x, \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{1}{2}d\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}d\mathbf{e}_y.\end{aligned}\tag{E.2}$$

On définit les vecteurs de base du réseau réciproque \mathbf{b}_1 et \mathbf{b}_2 tels que :

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij},\tag{E.3}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Ainsi, pour une maille carrée, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \frac{2\pi}{d}\mathbf{e}_x, \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{2\pi}{d}\mathbf{e}_y,\end{aligned}\tag{E.4}$$

et pour une maille triangulaire (triangle équilatéral) :

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \frac{2\pi}{d}\mathbf{e}_x - \frac{2\pi}{d\sqrt{3}}\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{4\pi}{d\sqrt{3}}\mathbf{e}_y.\end{aligned}\tag{E.5}$$

Ces vecteurs définissent le vecteur réciproque général \mathbf{G} qui est une combinaison linéaire des vecteurs de base du réseau réciproque :

$$\mathbf{G} = p\mathbf{b}_1 + q\mathbf{b}_2, \quad (p, q) \in \mathbb{Z}^2.\tag{E.6}$$

Le théorème de Floquet nous dit que le champ à l'intérieur d'un CP (mais également les champs réfléchis et transmis) est composé de la superposition d'une infinité d'ondes planes dont les vecteurs nombre d'onde \mathbf{k} valent :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_B + \mathbf{G}, \quad (\text{E.7})$$

où $\mathbf{k}_B = k_{B,x}\mathbf{e}_x + k_{B,y}\mathbf{e}_y$ est le vecteur d'onde de Bloch. Le nombre d'onde de Bloch est défini dans la première zone de Brillouin qui est l'équivalent de la cellule Wigner-Seitz (du réseau direct) dans le réseau réciproque (*cf.* [132], annexe A). Les symétries du réseau peuvent permettre de réduire la première zone de Brillouin à une zone de Brillouin irréductible (fig. E.2). Finalement, la connaissance de la relation de dispersion du nombre d'onde de Bloch (dans la zone de Brillouin irréductible) suffit pour caractériser complètement la relation de dispersion d'un CP. Ce nombre d'onde peut être déterminé, par exemple, grâce à la méthode de décomposition en ondes planes ([3] chapitre 1).

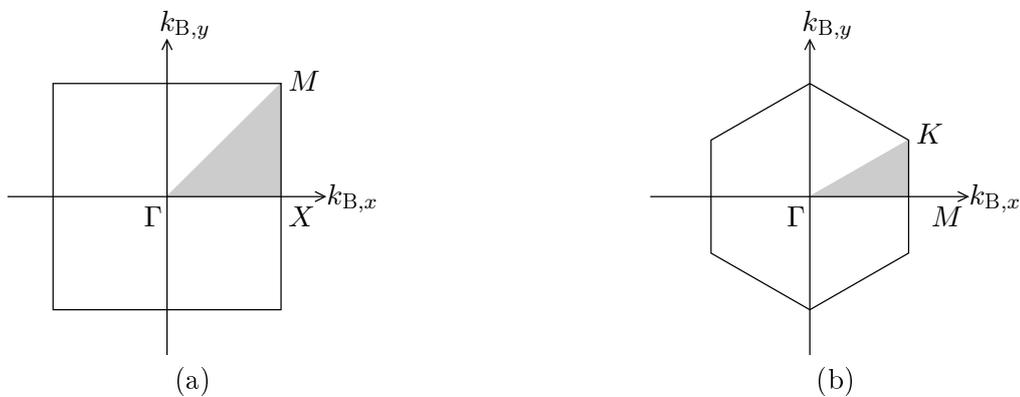


Figure E.2 – Première zone de Brillouin et zone de Brillouin irréductible (en gris) pour une maille a) carrée et b) triangulaire.

Dans un CP, la vitesse de l'énergie v_e , définie par le vecteur de Poynting \mathbf{P} de l'onde Bloch, est strictement égale à la vitesse de groupe v_g de cette onde :

$$v_e = v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \Re(k_B)}. \quad (\text{E.8})$$

E.1.2 Les effets de type métamatériau

Nous allons présenter ici certains effets de type métamatériau qui peuvent être obtenus avec un CP : les bandes fréquentielles interdites (**BFI**) et la réfraction négative.

a) Les bandes fréquentielles interdites

Quand un CP est insoné par une onde dont la fréquence est comprise dans une BFI, l'onde est totalement réfléchi par le CP. À l'intérieur de ces bandes fréquentielles, la longueur d'onde de l'onde de Bloch est égale à deux fois la période du cristal suivant la direction de propagation. Ainsi avec un CP à maille carrée, dans une BFI suivant la direction ΓX on a :

$$\Re(k_B) = \frac{\pi}{d}. \quad (\text{E.9})$$

b) La réfraction négative

Les effets de réfraction négative sont obtenus de deux manières différentes avec les CPs, soit à l'aide de l'anisotropie (la vitesse de phase de l'onde de Bloch est positive), soit lorsque la vitesse de phase de l'onde de Bloch est négative dans un CP isotrope.

Les cristaux anisotropes

Pour induire de la réfraction négative, certains auteurs se servent de l'anisotropie d'un CP. Pour cela, ils utilisent l'équivalent des surfaces des lenteurs, appelé **EFS** pour *equifrequency surfaces*. Une EFS est la courbe de dispersion de l'onde de Bloch dans le plan (k_x, k_y) du domaine de Fourier spatial, dans un cristal d'extension infinie et pour une pulsation ω donnée. La normale à une EFS donne donc la direction du vecteur de Poynting dont le sens est défini en choisissant l'onde progressive ou régressive. À certaines fréquences, ces EFSs peuvent avoir une forme telle que de la réfraction négative à lieu même si la vitesse de phase de l'onde de Bloch est positive.

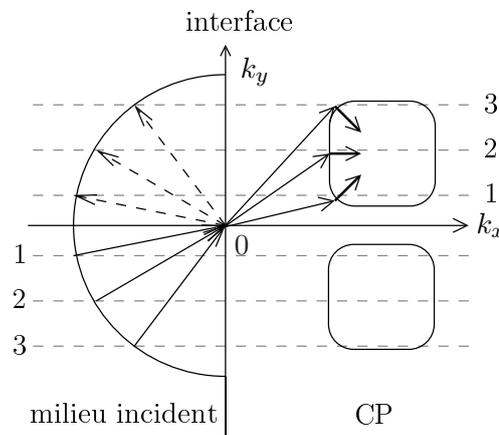


Figure E.3 – EFS du CP étudié par Bucay *et al.* [15], à gauche le milieu incident, à droite le cristal anisotrope. Les vecteurs de Poynting sont repérés par les flèches en gras, et les vecteurs d'onde par les autres flèches. Les vecteurs d'onde de l'onde réfléchie sont repérés en tirets.

Considérons un CP dont la normale à l'interface est \mathbf{e}_x , il est insoné par une onde plane se propageant suivant les x positifs. On note \mathbf{k}_0 le vecteur d'onde de l'onde incidente. Les vecteurs d'onde et de Poynting (vecteurs gras) de l'onde incidente et de l'onde de Bloch sont présentés sur la figure E.3 suivant l'angle d'incidence grâce aux EFSs des deux milieux. Ces EFSs sont similaires à celles de Bucay *et al.* [15] mais sont tracées de manière arbitraire afin d'illustrer le principe des EFSs. Le milieu incident étant isotrope, son EFS est circulaire, et les vecteurs d'onde et de Poynting sont colinéaires. Dans cette configuration, une onde progressive (au sens de l'énergie) est une onde dont le vecteur de Poynting est dirigé vers les k_x positifs. Dans le CP, si le vecteur de Poynting est dirigé vers les k_y positifs, la réfraction sera positive et inversement, s'il est dirigé vers les k_y négatifs, la réfraction sera négative. Ainsi, sur la figure E.3, trois cas de figure sont représentés, dans le cas 1 la réfraction est positive, dans le cas 2 la réfraction est nulle et dans le cas 3 la réfraction est négative (bien que la vitesse de phase au sein du CP soit positive, $\Re(k_{B,x}) > 0$ et $\Re(k_{B,y}) > 0$). On peut noter que si l'angle d'incidence est nul, alors la transmission à l'interface sera nulle. Effectivement l'EFS du CP ne croise pas l'axe $k_y = 0$, ce qui signifie que suivant cette direction de propagation le CP présente une BFI.

Les cristaux isotropes dont la vitesse de phase de l'onde de Bloch est négative

Dans un CP, une vitesse de phase négative est due à des effets de réseau. Effectivement, les interférences constructives et destructives peuvent former des BFIs, mais également des bandes fréquentielles où la vitesse de phase de l'onde de Bloch est négative.

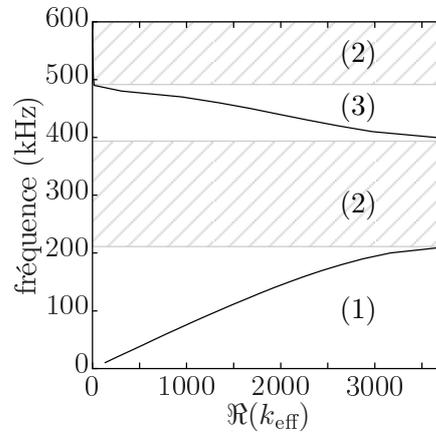


Figure E.4 – Courbe de dispersion suivant la direction ΓX d'un CP à maille carrée dont les propriétés sont données dans le tableau E.1 pour une concentration de 25,7%, dans la première zone de Brillouin.

La courbe de dispersion de la partie réelle du nombre d'onde de Bloch dans la première zone de Brillouin permet de définir les différents régimes de fonctionnement d'un CP. La courbe représentée sur la figure E.4 (courbe fournie par Charles Croënne et Anne-Christine Hladky-Hennion de l'IEMN de Lille) a été déterminée à partir de la réflexion et de la transmission d'un CP dont les propriétés de la matrice et des diffuseurs sont données dans le tableau E.1. Ce CP, de concentration 25,7%, est à maille carrée. Les zones hachurées numérotées (2) représentent les BFIs. La zone numérotée (1) représente une zone où les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g de l'onde de Bloch sont positives. Dans la zone numérotée (3), la fréquence décroît lorsque la partie réelle du nombre d'onde croît. L'onde de Bloch est donc régressive (au sens de l'énergie) car la vitesse de groupe est négative. La courbe de dispersion de l'onde progressive correspondante s'obtient alors en faisant la symétrie de cette partie de la courbe par rapport à l'axe $\Re(k_B) = 0$. La vitesse de phase de cette onde est de signe opposée à sa vitesse de groupe, on est donc sur une bande fréquentielle à réfraction négative.

	Masse volumique	Module de compressibilité	Vitesse de phase
Matrice (eau)	$\rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}$	$\kappa = 2,25 \text{ GPa}$	$v_\varphi = 1500 \text{ m.s}^{-1}$
Diffuseurs	$\rho = 0,64 \text{ g.cm}^{-3}$	$\kappa = 57,6 \text{ kPa}$	$v_\varphi = 300 \text{ m.s}^{-1}$

Tableau E.1 – Caractéristiques des matériaux composants le CP.

E.2 État de l'art

E.2.1 Les bandes fréquentielles interdites

Les premiers effets de type métamatériau ayant été mis en évidence sont les BFIs. Elles ont d'abord été démontrées pour les ondes transversales hors plan (SH) [1], puis pour les ondes longitudinales (P) dans un CP fluide [133], et enfin pour les ondes longitudinales et transversales dans le plan (P et SV) [134]. Plus récemment, il a été montré que les résonances de diffuseurs peuvent induire des

BFI [118–121, 135–138]. Ces BFIs apparaissent à des fréquences beaucoup plus basses que les BFIs classiques dites de Bragg. Pour certaines configurations [118–121], ces BFIs sont indépendantes du type de maille. Pour plus d'informations sur les CPs à deux dimensions, le lecteur pourra se référer à l'article de synthèse [139].

E.2.2 La réfraction négative

Depuis 2004, les travaux portant sur les métamatériaux se sont beaucoup développés, l'enjeu étant de pouvoir faire des superlentilles et des hyperlentilles afin de pouvoir améliorer les systèmes d'imagerie acoustique.

La majorité des études faites sur les CPs à réfraction négative utilisent un système à deux dimensions. Mais afin d'obtenir une gamme d'applications plus grande, il est préférable d'avoir un CP à trois dimensions. Lorsque la matrice est solide, la réfraction négative n'a été observée qu'à partir des courbes de dispersions de l'onde de Bloch [20]. Une superlentille a été obtenue expérimentalement avec un CP à trois dimension dont la matrice est fluide [11].

La réfraction négative a été constatée à l'aide de deux méthodes différentes (*cf.* section E.1.2) : la première consistant à se servir de l'anisotropie du cristal [9–15], la deuxième étant basée sur l'obtention d'un cristal dont la partie réelle du nombre d'onde de Bloch est négative [16–27].

a) Les cristaux anisotropes

Les premiers CPs à avoir mis en évidence la réfraction négative utilisaient l'anisotropie d'un cristal. À cause de l'anisotropie, l'angle de réfraction dépend de l'angle d'incidence de l'onde incidente. Il n'existe donc pas de point focal unique derrière une lentille à faces parallèles constituée d'un tel CP. Cependant, il a été montré à l'aide de simulations [10, 14] et d'expériences [11–13] que des superlentilles pouvaient être ainsi obtenues. La majorité de ces CPs sont à maille carrée.

He *et al.* [14] ont réussi à dépasser la limite de résolution d'une lentille conventionnelle égale à $0,5 \lambda_0$ (λ_0 étant la longueur d'onde de l'onde incidente) avec un CP anisotrope grâce à ce qu'ils appellent un phénomène de canalisation. Pour cela, ils utilisent un CP dont l'EFS tend vers une forme carrée, ainsi quel que soit l'angle d'incidence, toutes les ondes de Bloch ont un vecteur de Poynting dont la direction est normale à l'interface. Ceci est également vrai pour les ondes incidentes évanescentes. En concevant le CP de telle manière que la fréquence d'étude corresponde à une fréquence de résonance d'épaisseur du CP, une résolution de $0,16 \lambda_0$ a été atteinte numériquement en imageant un point source.

b) Les cristaux à vitesse de phase négative

Les cristaux isotropes (leur EFS est circulaire) sont plus performants que les cristaux anisotropes, car un point focal unique peut être formé derrière une superlentille constituée de tels CPs. Cette focalisation a été mise en évidence à l'aide de simulations [17, 27] et d'expériences [16, 19, 21, 22, 25]. Un rapport des vitesses de phase $n_\varphi = -1$ entre la lentille et le milieu extérieur a même été obtenu avec un CP à matrice fluide [17, 21, 22]. Ainsi, une résolution de $0,37 \lambda_0$ a été mesurée expérimentalement [22].

À la connaissance de l'auteur, c'est le seul CP (acoustique) ayant à ce jour affiché expérimentalement une résolution inférieure à $0,5 \lambda_0$.

Pour améliorer la résolution d'une superlentille, il faut que la source soit proche de l'interface [22]. La propriété de super-résolution disparaît lorsque la distance entre la source et l'interface du CP est supérieur à la moitié de la période du réseau de Bravais suivant la direction parallèle à l'interface [22]. Une étude récente a également montré que la résolution d'une superlentille est meilleure lorsque la source est placée devant un diffuseur que lorsqu'elle est placée entre deux diffuseurs [25].

À l'heure actuelle, lorsque la matrice est solide, seule la réfraction négative a été mise en évidence expérimentalement [26, 27]. De plus, les CPs à matrice solide ont pour l'instant le désavantage d'avoir un coefficient de transmission faible [24].

En résumé, les CPs sont efficaces pour fabriquer des superlentilles et des hyperlentilles. Cependant, des ordres de diffractions supérieurs peuvent apparaître (p et/ou q différent de 0 dans (E.6)) [15, 18] et perturber une potentielle superlentille. De même lorsque la dispersion de la position des diffuseurs dans un CP est trop importante, un CP peut perdre sa propriété de focalisation [22].

La réfraction négative a également été obtenue expérimentalement avec des quasi-cristaux [130], ainsi qu'avec des CPs constitués de résonateurs de Helmholtz [23]. Elle a également été observée expérimentalement pour des ondes de surface dans un liquide [12], pour des ondes de Rayleigh [140] et pour des ondes de Lamb [141].

Bibliographie

- [1] **R. Camley, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski et A. Maradudin.** Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media. *Phys. Rev. B*, **27** (12), 7318–7329 (1983).
- [2] **P. Russell.** Photonic crystal fibers. *Science*, **299** (5605), 358–362 (2003).
- [3] **A. Duclos.** *Diffusion multiple en fluide visco-thermique, cas du cristal phononique à deux dimensions.* Thèse de doctorat, Université du Maine (2007).
- [4] **A. N. Norris.** Dispersive plane wave propagation in periodically layered anisotropic media. *Proc. R. Irish Acad.*, **92A** (1), 49–67 (1992).
- [5] **I. V. Andrianov, V. I. Bolshakov, V. V. Danishevs'kyi et D. Weichert.** Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials. *Proc. R. Soc. A*, **464** (2093), 1181–1201 (2008).
- [6] **L. I. Mandel'shtam.** Group velocity in a crystal lattice. *Zhurn. Eksp. Teor. Fiz.*, **15**, 475–478 (1945).
- [7] **V. G. Veselago.** The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov. Phys. Uspekhi*, **10** (4), 509–514 (1968).
- [8] **J. B. Pendry.** Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, **85** (18), 3966 (2000).
- [9] **M. Torres et F. R. Montero de Espinosa.** Ultrasonic band gaps and negative refraction. *Ultrasonics*, **42**, 787–790 (2004).
- [10] **X. Zhang et Z. Liu.** Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals. *Appl. Phys. Lett.*, **85** (2), 341–343 (2004).
- [11] **S. Yang, J. H. Page, Z. Liu, M. L. Cowan, C. T. Chan et P. Sheng.** Focusing of sound in a 3D phononic crystal. *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2), 024301 (2004).
- [12] **X. Hu, Y. Shen, X. Liu, R. Fu et J. Zi.** Superlensing effect in liquid surface waves. *Phys. Rev. E*, **69** (3), 030201 (2004).
- [13] **Z. Feng, X. Zhang, Y. Wang, Z. Y. Li, B. Cheng et D. Z. Zhang.** Negative refraction and imaging using 12-fold-symmetry quasicrystals. *Phys. Rev. Lett.*, **94** (24), 247402 (2005).
- [14] **Z. He, F. Cai, Y. Ding et Z. Liu.** Subwavelength imaging of acoustic waves by a canalization mechanism in a two-dimensional phononic crystal. *Appl. Phys. Lett.*, **93** (23), 233503 (2008).
- [15] **J. Bucay, E. Roussel, J. O. Vasseur, P. A. Deymier, A.-C. Hladky-Hennion, Y. Pennec, K. Muralidharan, B. Djafari-Rouhani et B. Dubus.** Positive, negative, zero refrac-

- tion, and beam splitting in a solid/air phononic crystal: Theoretical and experimental study. *Phys. Rev. B*, **79** (21), 214305 (2009).
- [16] **M. Ke, Z. Liu, C. Qiu, W. Wang, J. Shi, W. Wen et P. Sheng.** Negative-refraction imaging with two-dimensional phononic crystals. *Phys. Rev. B*, **72** (6), 064306 (2005).
- [17] **C. Qiu, X. Zhang et Z. Liu.** Far-field imaging of acoustic waves by a two-dimensional sonic crystal. *Phys. Rev. B*, **71** (5), 054302 (2005).
- [18] **M. H. Lu, C. Zhang, L. Feng, J. Zhao, Y. F. Chen, Y. W. Mao, J. Zi, Y. Y. Zhu, S. N. Zhu et N. B. Ming.** Negative birefracton of acoustic waves in a sonic crystal. *Nat. Mater.*, **6** (10), 744–748 (2007).
- [19] **M. Ke, Z. Liu, Z. Cheng, J. Li, P. Peng et J. Shi.** Flat superlens by using negative refraction in two-dimensional phononic crystals. *Solid State Commun.*, **142** (3), 177–180 (2007).
- [20] **Y. Ding, Z. Liu, C. Qiu et J. Shi.** Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density. *Phys. Rev. Lett.*, **99** (9), 093904 (2007).
- [21] **A. Sukhovich, L. Jing et J. H. Page.** Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals. *Phys. Rev. B*, **77** (1), 014301 (2008).
- [22] **A. Sukhovich, B. Merheb, K. Muralidharan, J. O. Vasseur, Y. Pennec, P. A. Deymier et J. H. Page.** Experimental and theoretical evidence for subwavelength imaging in phononic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, **102** (15), 154301 (2009).
- [23] **S. Zhang, L. Yin et N. Fang.** Focusing ultrasound with an acoustic metamaterial network. *Phys. Rev. Lett.*, **102** (19), 194301 (2009).
- [24] **A.-C. Hladky-Hennion, J. O. Vasseur, B. Dubus, B. Djafari-Rouhani, D. Ekeom et B. Morvan.** Numerical analysis of negative refraction of transverse waves in an elastic material. *J. Appl. Phys.*, **104** (6), 064906 (2008).
- [25] **E. D. Manga, L. Haumesser, F. Vander Meulen, C. Croëenne, A. C. Hladky-Hennion, J. O. Vasseur, B. Morvan et E. Le Clezio.** Application de la réfraction négative à la focalisation de deux sources acoustiques. hal-00539662. 10e Congrès Français d’Acoustique, Lyon, France, 13-16 Avril 2010.
- [26] **B. Morvan, A. Tinel, A.-C. Hladky-Hennion, J. O. Vasseur et B. Dubus.** Experimental demonstration of the negative refraction of a transverse elastic wave in a two-dimensional solid phononic crystal. *Appl. Phys. Lett.*, **96** (10), 101905 (2010).
- [27] **C. Croëenne, E. D. Manga, B. Morvan, A. Tinel, B. Dubus, J. O. Vasseur et A.-C. Hladky-Hennion.** Negative refraction of longitudinal waves in a two-dimensional solid-solid phononic crystal. *Phys. Rev. B*, **83** (5), 054301 (2011).
- [28] **D. Felbacq et G. Bouchitté.** Negative refraction in periodic and random photonic crystals. *New J. Phys.*, **7**, 159 (2005).
- [29] **H. Chen, L. Ran, D. Wang, J. Huangfu, Q. Jiang et J. A. Kong.** Metamaterial with randomized patterns for negative refraction of electromagnetic waves. *Appl. Phys. Lett.*, **88** (3), 031908 (2006).

- [30] **J. Li et C. T. Chan.** Double-negative acoustic metamaterial. *Phys. Rev. E*, **70** (5), 055602 (2004).
- [31] **W. Voigt.** Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitatsconstanten isotroper korper. *Ann. Phys.*, **274** (12), 573–587 (1889).
- [32] **A. Reuss.** Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitatsbedingung fur einkristalle. *Z. Angew. Math. Mech.*, **9** (1), 49–58 (1929).
- [33] **J. D. Eshelby.** The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **241** (1226), 376–396 (1957).
- [34] **T. Mori et K. Tanaka.** Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, **21** (5), 571–574 (1973).
- [35] **W. S. Ament.** Sound propagation in gross mixtures. *J. Acoust. Soc. Am.*, **25** (4), 638–641 (1953).
- [36] **G. T. Kuster et M. N. Toksöz.** Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: part I. Theoretical formulations. *Geophysics*, **39** (5), 587–606 (1974).
- [37] **J. G. Berryman.** Long-wavelength propagation in composite elastic media I. Spherical inclusions. *J. Acoust. Soc. Am.*, **68** (6), 1809–1819 (1980).
- [38] **J. G. Berryman.** Long-wavelength propagation in composite elastic media II. Ellipsoidal inclusions. *J. Acoust. Soc. Am.*, **68** (6), 1820–1831 (1980).
- [39] **W. J. Parnell.** *Homogenization techniques for wave propagation in composite materials.* Thèse de doctorat, University of Manchester (2006).
- [40] **L. L. Foldy.** The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.*, **67** (3-4), 107–119 (1945).
- [41] **U. Frisch.** Wave propagation in random media. Dans *Probabilistic methods in applied mathematics*, tome 1 (Bharucha-Reid, A. T., New York-London, 1968), academic press édition.
- [42] **A. Tourin.** *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores.* Thèse de doctorat, Université de Paris VII (1999). Numéro d'ordre : 99 PA077238.
- [43] **V. Mamou.** *Caractérisation ultrasonore d'échantillons hétérogènes multiplement diffuseurs.* Thèse de doctorat, Université Paris VII (2005).
- [44] **M. Lax.** Multiple scattering of waves. *Rev. Mod. Phys.*, **23** (4), 287–310 (1951).
- [45] **P. C. Waterman et R. Truell.** Multiple scattering of waves. *J. Math. Phys.*, **2** (4), 512–537 (1961).
- [46] **V. Twersky.** On scattering of waves by random distributions. I. Free-space scatterer formalism. *J. Math. Phys.*, **3** (4), 700–723 (1962).
- [47] **V. Twersky.** On scattering of waves by random distributions. II. Two-space scatterer formalism. *J. Math. Phys.*, **3** (4), 724–734 (1962).
- [48] **J. G. Fikioris et P. C. Waterman.** Multiple scattering of waves. II. “Hole Corrections” in the scalar case. *J. Math. Phys.*, **5** (10), 1413–1420 (1964).

- [49] **P. Lloyd et M. V. Berry.** Wave propagation through an assembly of spheres: IV. Relations between different multiple scattering theories. *Proc. Phys. Soc.*, **91** (3), 678–688 (1967).
- [50] **C. Aristégui et Y. Angel.** New results for isotropic point scatterers: Foldy revisited. *Wave Motion*, **36** (4), 383–399 (2002).
- [51] **C. M. Linton et P. A. Martin.** Multiple scattering by random configurations of circular cylinders: Second-order corrections for the effective wavenumber. *J. Acoust. Soc. Am.*, **117** (6), 3413–3423 (2005).
- [52] **C. M. Linton et P. A. Martin.** Multiple scattering by multiple spheres: A new proof of the Lloyd and Berry formula for the effective wavenumber. *SIAM J. Appl. Math.*, **66** (5), 1649–1668 (2006).
- [53] **W. J. Parnell et I. D. Abrahams.** Multiple point scattering to determine the effective wavenumber and effective material properties of an inhomogeneous slab. *Waves in Random and Complex Media*, **20** (4), 678–701 (2010).
- [54] **A. N. Norris et J.-M. Conoir.** Multiple scattering by cylinders immersed in fluid: High order approximations for the effective wavenumbers. *J. Acoust. Soc. Am.*, **129** (1), 104–113 (2011).
- [55] **J. G. Berryman.** Single-scattering approximations for coefficients in Biot’s equations of poroelasticity. *J. Acoust. Soc. Am.*, **91** (2), 551–557 (1992).
- [56] **G. C. Gaunard et H. Überall.** Resonance theory of the effective properties of perforated solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, **71** (2), 282–295 (1982).
- [57] **Y. C. Angel et C. Aristégui.** Analysis of sound propagation in a fluid through a screen of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, **118** (1), 72–82 (2005).
- [58] **C. Aristégui et Y. C. Angel.** Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering. *Wave Motion*, **44** (3), 153–164 (2007).
- [59] **C. Aristégui et Y. C. Angel.** Effective material properties for shear-horizontal acoustic waves in fiber composites. *Phys. Rev. E*, **75** (5), 056607 (2007).
- [60] **C. Aristégui et Y. C. Angel.** Coherent sound propagation across the effective interfaces of an immersed screen. *Wave Motion*, **47** (4), 199–204 (2010).
- [61] **F. Luppé et J.-M. Conoir.** Multiple scattering by cylinders randomly located in a fluid: Effective properties. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **269**, 012015 (2011).
- [62] **D. R. Smith et J. B. Pendry.** Homogenization of metamaterials by field averaging. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23** (3), 391–403 (2006).
- [63] **A. L. Shuvalov, A. A. Kutsenko, A. N. Norris et O. Poncelet.** Effective Willis constitutive equations for periodically stratified anisotropic elastic media. *Proc. R. Soc. A*, **467** (2130), 1749–1769 (2011).
- [64] **S. Nemat-Nasser, J. R. Willis, A. Srivastava et A. V. Amirkhizi.** Homogenization of periodic elastic composites and locally resonant sonic materials. *Phys. Rev. B*, **83** (10), 104103 (2011).

- [65] **J. R. Willis**. The nonlocal influence of density variations in a composite. *Int. J. Solids Struct.*, **21** (7), 805–817 (1985).
- [66] **V. K. Varadan**. Multiple scattering of compressional and shear waves by fiber-reinforced composite materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, **80** (1), 333–339 (1986).
- [67] **V. K. Varadan, Y. Ma et V. V. Varadan**. Scattering and attenuation of elastic waves in random media. *Pure Appl. Geophys.*, **131** (4), 577–603 (1989).
- [68] **J.-M. Conoir, A. N. Norris et F. Luppé**. Generalization of the Waterman and Truell formula for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers. hal-00533160. 10e Congrès Français d’Acoustique, Lyon, France, 13-16 Avril 2010.
- [69] **J.-M. Conoir et A. N. Norris**. Effective wavenumbers and reflection coefficients for an elastic medium containing random configurations of cylindrical scatterers. *Wave Motion*, **47** (3), 183–197 (2010).
- [70] **C. Potel et M. Bruneau**. *Acoustique générale. Équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluides et solides, applications*. Technosup (Ellipses Marketing, 2006).
- [71] **P. Sheng, J. Mei, Z. Liu et W. Wen**. Dynamic mass density and acoustic metamaterials. *Physica B*, **394** (2), 256–261 (2007).
- [72] **V. Twersky**. In propagation in random media of discrete scatterers. Dans *Stochastic processes in mathematical physics and engineering*, tome XVI de *Proceeding of symposia in applied mathematics*, p. 84–116 (American Mathematical Soc., 1964).
- [73] **M. S. Wertheim**. Exact solution of the Percus-Yevick integral equation for hard spheres. *Phys. Rev. Lett.*, **10** (8), 321–323 (1963).
- [74] **J. K. Percus et G. J. Yevick**. Analysis of classical statistical mechanics by means of collective coordinates. *Phys. Rev.*, **110** (1), 1–13 (1958).
- [75] **F. Lado**. Equation of state of the hard-disk fluid from approximate integral equations. *J. Chem. Phys.*, **49**, 3092 (1968).
- [76] **M. Adda-Bedia, E. Katzav et D. Vella**. Solution of the Percus-Yevick equation for hard disks. *J. Chem. Phys.*, **128** (18), 184508 (2008).
- [77] **M. Chekroun, L. L. Marrec, B. Lombard, J. Piraux et O. Abraham**. Comparison between a multiple scattering method and direct numerical simulations for elastic wave propagation in concrete. Dans *Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media*, tome 128, p. 317–327 (Springer Berlin Heidelberg, 2009).
- [78] **P. Y. Le Bas, F. Luppé et J.-M. Conoir**. Reflection and transmission by randomly spaced elastic cylinders in a fluid slab-like region. *J. Acoust. Soc. Am.*, **117** (3), 1088–1097 (2005).
- [79] **K. S. Yee**. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **14** (3), 302–307 (1966).
- [80] **J. Virieux**. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, **51** (4), 889–901 (1986).

- [81] **A. Taflove et S. C. Hagness.** *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method, Third Edition* (Artech House, 2005).
- [82] **J. P. Berenger.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, **114** (2), 185–200 (1994).
- [83] **W. C. Chew et Q. H. Liu.** Perfectly matched layer for elastodynamics: A new absorbing boundary condition. *J. Comput. Acoust.*, **4**, 341–359 (1996).
- [84] **J. Dubois, C. Aristégui et O. Poncelet.** Réponse d'une structure chargée aléatoirement d'inclusions résonantes : application aux effets de type métamatériaux. hal-00554445. 10e Congrès Français d'Acoustique, Lyon, France, 13-16 Avril 2010.
- [85] **J. Dubois, C. Aristégui, O. Poncelet et A. L. Shuvalov.** Coherent acoustic response of a screen containing a random distribution of scatterers: Comparison between different approaches. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **269**, 012004 (2011).
- [86] **C. M. Sayers et R. L. Smith.** Ultrasonic velocity and attenuation in an epoxy matrix containing lead inclusions. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **16**, 1189–1194 (1983).
- [87] **C. Audoly.** Acoustics analysis of panels made with viscoelastic materials containing resonant cavities. *Acta Acustica*, **2** (5), 393–402 (1994).
- [88] **M. F. Poujol-Pfefer.** Application of an homogenization model to the acoustical propagation in inhomogeneous media. *J. Sound Vib.*, **184** (4), 665–679 (1995).
- [89] **M. L. Cowan, K. Beaty, J. H. Page, Z. Liu et P. Sheng.** Group velocity of acoustic waves in strongly scattering media: Dependence on the volume fraction of scatterers. *Phys. Rev. E*, **58** (5), 6626–6636 (1998).
- [90] **J. T. Verbis, S. E. Kattis, S. V. Tsinopoulos et D. Polyzos.** Wave dispersion and attenuation in fiber composites. *Computational Mech.*, **27**, 244–252 (2001).
- [91] **S. K. Kanaun, V. M. Levin et F. J. Sabina.** Propagation of elastic waves in composites with random set of spherical inclusions (effective medium approach). *Wave Motion*, **40** (1), 69–88 (2004).
- [92] **D. Aggelis, D. Polyzos et T. Philippidis.** Wave dispersion and attenuation in fresh mortar: Theoretical predictions vs. experimental results. *J. Mech. Phys. Solids*, **53** (4), 857–883 (2005).
- [93] **A. Derode, V. Mamou et A. Tourin.** Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium. *Phys. Rev. E*, **74** (3), 036606 (2006).
- [94] **J. Chaix, V. Garnier et G. Corneloup.** Ultrasonic wave propagation in heterogeneous solid media: Theoretical analysis and experimental validation. *Ultrasonics*, **44** (2), 200–210 (2006).
- [95] **P. Y. Le Bas.** *Diffusion multiple par des cibles élastiques immergées. Propagation d'ondes cohérentes et interactions résonantes.* Thèse de doctorat, Université du Havre (2004).
- [96] **P. A. Martin, A. Maurel et W. J. Parnell.** Estimating the dynamic effective mass density of random composites. *J. Acoust. Soc. Am.*, **128** (2), 571–577 (2010).
- [97] **J. R. Willis.** Exact effective relations for dynamics of a laminated body. *Mech. Mater.*, **41** (4), 385–393 (2009).

- [98] **P. A. Martin**. *Multiple Scattering*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications (Cambridge University Press, 2006).
- [99] **M. Abramowitz et I. A. Stegun**. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (Courier Dover Publications, 1964).
- [100] **G. W. Milton et J. R. Willis**. On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics. *Proc. R. Soc. A*, **463** (2079), 855–880 (2007).
- [101] **H. Lamb**. On group-velocity. *Proc. London Math. Soc.*, **1**, 473–479 (1904).
- [102] **G. W. 't Hooft**. Comment on "Negative refraction makes a perfect lens". *Phys. Rev. Lett.*, **87** (24), 249701 (2001).
- [103] **J. B. Pendry**. A reply to the comment by G. W. 't Hooft. *Phys. Rev. Lett.*, **87** (24), 249702 (2001).
- [104] **J. M. Williams**. Some problems with negative refraction. *Phys. Rev. Lett.*, **87** (24), 249703 (2001).
- [105] **J. B. Pendry**. A reply to the comment by J. M. Williams. *Phys. Rev. Lett.*, **87** (24), 249704 (2001).
- [106] **N. Garcia et M. Nieto-Vesperinas**. Left-handed materials do not make a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, **88** (20), 207403 (2002).
- [107] **M. Nieto-Vesperinas et N. Garcia**. A reply to the comment by Pendry. *Phys. Rev. Lett.*, **91** (9), 099702 (2003).
- [108] **J. B. Pendry**. Comment on "Left-handed materials do not make a perfect lens". *Phys. Rev. Lett.*, **91** (9), 099701 (2003).
- [109] **D. Maystre et S. Enoch**. Perfect lenses made with left-handed materials: Alice's mirror? *J. Opt. Soc. Am. A*, **21** (1), 122–131 (2004).
- [110] **A. G. Ramm**. Does negative refraction make a perfect lens? *Phys. Lett. A*, **372** (43), 6518–6520 (2008).
- [111] **S. A. Cummer**. Simulated causal subwavelength focusing by a negative refractive index slab. *Appl. Phys. Lett.*, **82** (10), 1503–1505 (2003).
- [112] **Z. Lu, J. A. Murakowski, C. A. Schuetz, S. Shi, G. J. Schneider et D. W. Prather**. Three-dimensional subwavelength imaging by a photonic-crystal flat lens using negative refraction at microwave frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, **95** (15), 153901 (2005).
- [113] **M. Ambati, N. Fang, C. Sun et X. Zhang**. Surface resonant states and superlensing in acoustic metamaterials. *Phys. Rev. B*, **75** (19), 195447 (2007).
- [114] **D. R. Smith, D. Schurig, M. Rosenbluth, S. Schultz, S. A. Ramakrishna et J. B. Pendry**. Limitations on subdiffraction imaging with a negative refractive index slab. *Appl. Phys. Lett.*, **82**, 1506 (2003).
- [115] **M. Deschamps**. Reflection and refraction of the evanescent plane wave on plane interfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, **96**, 2841 (1994).

- [116] **M. Eude**. *Étude expérimentale de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu atténuant en présence d'hétérogénéités*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 (2004). Numéro d'ordre : 07-2004.
- [117] **D. Sutter-Widmer et W. Steurer**. Prediction of band gaps in phononic quasicrystals based on single-rod resonances. *Phys. Rev. B*, **75** (13), 134303 (2007).
- [118] **Z. Liu, C. T. Chan et P. Sheng**. Three-component elastic wave band-gap material. *Phys. Rev. B*, **65** (16), 165116 (2002).
- [119] **C. Goffaux et J. Sánchez-Dehesa**. Two-dimensional phononic crystals studied using a variational method: Application to lattices of locally resonant materials. *Phys. Rev. B*, **67** (14), 144301 (2003).
- [120] **G. Wang, X. Wen, J. Wen, L. Shao et Y. Liu**. Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures. *Phys. Rev. Lett.*, **93** (15), 154302 (2004).
- [121] **H. Zhao, Y. Liu, G. Wang, J. Wen, D. Yu, X. Han et X. Wen**. Resonance modes and gap formation in a two-dimensional solid phononic crystal. *Phys. Rev. B*, **72** (1), 012301 (2005).
- [122] **E. W. Weisstein**. Bessel function of the first kind. <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>.
- [123] **E. W. Weisstein**. Bessel function of the second kind. <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheSecondKind.html>.
- [124] **E. W. Weisstein**. Euler-Mascheroni constant. <http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html>.
- [125] **J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart et I. Youngs**. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys. Rev. Lett.*, **76** (25), 4773–4776 (1996).
- [126] **J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins et W. J. Stewart**. Low frequency plasmons in thin-wire structures. *J. Phys.: Condens. Matter*, **10** (22), 4785–4809 (1998).
- [127] **J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins et W. J. Stewart**. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **47** (11), 2075–2084 (1999).
- [128] **D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser et S. Schultz**. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, **84** (18), 4184–4187 (2000).
- [129] **K. Imamura et S. Tamura**. Negative refraction of phonons and acoustic lensing effect of a crystalline slab. *Phys. Rev. B*, **70** (17), 174308 (2004).
- [130] **S. Peng, X. Mei, P. Pang, M. Ke et Z. Liu**. Experimental investigation of negative refraction and imaging of 8-fold-symmetry phononic quasicrystals. *Solid State Commun.*, **149** (17-18), 667–669 (2009).
- [131] **K. Deng, Y. Ding, Z. He, H. Zhao, J. Shi et Z. Liu**. Theoretical study of subwavelength imaging by acoustic metamaterial slabs. *J. Appl. Phys.*, **105** (12), 124909 (2009).

- [132] **S. Benchabane**. *Guidage et filtrage des ondes dans les cristaux phononiques*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon (2006).
- [133] **J. P. Dowling**. Sonic band structure in fluids with periodic density variations. *J. Acoust. Soc. Am.*, **91** (5), 2539–2543 (1992).
- [134] **R. Esquivel-Sirvent**. Band structure for the propagation of elastic waves in superlattices. *J. Acoust. Soc. Am.*, **95** (1), 86–90 (1994).
- [135] **A. D. Klironomos et E. N. Economou**. Elastic wave band gaps and single scattering. *Solid State Commun.*, **105** (5), 327–332 (1998).
- [136] **Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan et P. Sheng**. Locally resonant sonic materials. *Science*, **289**, 1734–1736 (2000).
- [137] **Z. Hong-Gang, W. Ji-Hong, L. Yao-Zong, Y. Dian-Long, W. Gang et W. Xi-Sen**. Comparison of the mechanism of gap formation for tri- and bi-component phononic crystal. *Chinese Phys. B*, **17** (4), 1305–1311 (2008).
- [138] **J. C. Hsu**. Local resonances-induced low-frequency band gaps in two-dimensional phononic crystal slabs with periodic stepped resonators. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **44** (5), 055401 (2011).
- [139] **Y. Pennec, J. O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzinski et P. A. Deymier**. Two dimensional phononic crystals: Examples and applications. *Surf. Sci. Rep.*, **65** (8), 229–291 (2010).
- [140] **B. Bonello, L. Belliard, J. Pierre, J. O. Vasseur, B. Perrin et O. Boyko**. Negative refraction of surface acoustic waves in the subgigahertz range. *Phys. Rev. B*, **82** (10), 104109 (2010).
- [141] **J. Pierre, O. Boyko, L. Belliard, J. O. Vasseur et B. Bonello**. Negative refraction of zero order flexural Lamb waves through a two-dimensional phononic crystal. *Appl. Phys. Lett.*, **97** (12), 121919 (2010).