

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET
INFORMATIQUE E.D. 184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE
Spécialité : Mathématiques

par

Jonathan CABROL

sous la direction du Pr. Pascal HUBERT

Titre :

ORIGAMIS INFINIS : GROUPE DE VEECH ET FLOT LINÉAIRE

soutenue publiquement le 15 novembre 2012

JURY

M. Frank HERRLICH	Karlsruhe Institute of Technology	<i>Rapporteur</i>
M. Pascal HUBERT	Aix-Marseille Université	<i>Directeur</i>
M. Erwan LANNEAU	Institut Fourier, Grenoble	<i>Examineur</i>
M. Jérôme LOS	Aix-Marseille Université	<i>Examineur</i>
M. Jean-Christophe YOCCOZ	Collège de France	<i>Examineur</i>
M. Anton ZORICH	Université de Rennes 1	<i>Rapporteur</i>

Préface

Comme le titre de cette thèse l'indique, les objets que nous allons étudier sont les origamis infinis.

Un origami fini peut se définir de plusieurs façons différentes, des plus compliquées (point entier d'une strate de l'espace des modules des 1-formes holomorphes sur une surface de Riemann compacte) aux plus simples (des carrés collés entre eux).

Voici plus en détail cette définition.

Définition 1 *Un origami est une collection finie de carreaux unitaires euclidiens qui sont collés en respectant les règles suivantes :*

- *chaque côté droit (resp. haut) d'un carreau est identifié au côté gauche (resp. bas) d'un carreau ;*
- *la surface topologique obtenue est connexe.*

Nous pouvons donc de suite donner quelques exemples :

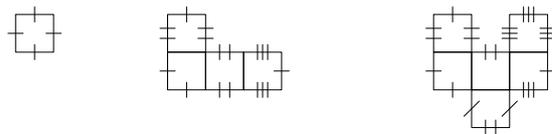


FIGURE 1 – Trois origamis.

Cette définition s'étend rapidement au cas où nous avons une infinité de carreaux : nous parlerons alors d'origamis infinis.

Si nous revenons sur le titre de cette thèse, nous allons nous poser deux questions sur ces origamis infinis : leurs groupes de Veech et la dynamique du flot linéaire sur ces surfaces.

Étant donnée la définition précédente d'un origami, il est facile de voir que nous pouvons définir une action du groupe $SL_2(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des origamis : les côtés des carreaux, qui sont parallèles et de même longueur restent parallèles et de même longueur après l'action d'une matrice de $SL_2(\mathbb{R})$.

Le groupe de Veech d'un origami va être alors le stabilisateur de cet origami sous cette action.

D'autre part, toujours d'après la définition précédente, un origami définit une surface possédant une structure supplémentaire : il s'agit d'une *surface de translation*. De ce fait, cette surface est munie d'une métrique plate, pour laquelle les segments géodésiques sont de vrais segments euclidiens.

Ainsi nous appellerons *flot linéaire* le flot géodésique sur ces surfaces.

Ces deux notions, classiques dans le cas compact, ont été déjà étudiées sur quelques exemples pour les origamis infinis. Nous pouvons par exemple citer les travaux d'Hubert et Schmithüsen ([HS10]), de Hooper et Weiss ([HW09]) ou encore d'Hubert, Lelièvre et Troubetzkoy ([HLT09]), Delecroix, Hubert et Lelièvre ([DHL11]) et Avila et Hubert ([AH12]).

Nous allons fournir d'autres résultats, généralisant ou complétant certains des travaux précédents, ou étudiant d'autres exemples.

Voici la structure de cette thèse :

Chapitre 1

Dans ce chapitre, nous rappellerons toutes les définitions et résultats que nous utiliserons sur les surfaces de translation compactes et en particulier les origamis finis.

Nous donnerons toutes les définitions d'origamis et définirons de manière plus précise les notions de groupe de Veech et de flot linéaire dont nous avons déjà parlé.

Chapitre 2

Nous définirons les objets principaux de ce travail : les origamis infinis. Nous donnerons également la définition d'un G -revêtement d'un origami, notion essentielle pour définir la plupart des exemples d'origamis infinis que nous étudierons.

Nous démontrerons le théorème principal suivant, établissant les conditions d'un résultat de récurrence du flot linéaire sur un origami infini.

Théorème *Soit O_∞ un origami infini vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- O_∞ admet un cusp T de directions complètement périodiques ;
- il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque direction $\frac{p}{q} \in T$, telle que $\frac{p}{q} \leq 1$, les cylindres de O_∞ dans cette direction sont tous de longueur $l \leq c.q$.

Alors pour presque toute direction α , le flot linéaire dans la direction α sur O_∞ est récurrent.

Chapitre 3

Ce chapitre comprend la première catégorie d'exemples d'origamis infinis, les \mathbb{Z}^d -revêtements. Nous pouvons voir cette catégorie comme une généralisation des travaux de Hooper-Weiss ([HW09]).

Cette catégorie nous permet d'obtenir rapidement une grande variété d'exemples, pouvant avoir des propriétés remarquables.

Nous démontrerons entre autres le résultat suivant.

Théorème *Il existe des origamis infinis, qui sont des \mathbb{Z}^d -revêtements d'origamis finis, sur lesquels le flot linéaire est récurrent et qui sont des surfaces de Veech.*

Chapitre 4

Nous étudions ici un exemple particulier, T_8^∞ , qui est défini comme un \mathcal{H} -revêtement, où \mathcal{H} est le groupe d'Heisenberg, donc un groupe nilpotent.

Bien que \mathcal{H} soit un groupe plus compliqué que \mathbb{Z}^d , nous obtenons quand même le théorème suivant.

Théorème *Le flot linéaire sur T_8^∞ est récurrent.*

Chapitre 5

Ce chapitre comprend les deux derniers exemples.

Nous rappelons dans un premier temps la définition du modèle de wind-tree, un exemple d'origami infini grandement étudié (voir [HLT09], [DHL11] et [AH12] par exemple).

Nous démontrerons dans ce modèle le résultat suivant.

Théorème *Pour p et r impairs, q et s pairs, le groupe de Veech du wind-tree de paramètres $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ est infiniment engendré.*

Dans un second temps, nous étudions des $B(m, n)$ -revêtements, où $B(m, n)$ est le groupe de Burnside libre de rang m et d'ordre n .

Ce groupe possède d'excellentes propriétés pour le flot linéaire sur un $B(m, n)$ -revêtement, puisque nous obtenons le résultat suivant.

Théorème *Il existe des origamis infinis, qui sont des $B(m, n)$ -revêtements d'origamis finis, sur lesquels le flot linéaire est récurrent et qui sont des surfaces de Veech.*

Remerciements

Bien évidemment, mes premiers remerciements vont à Pascal Hubert, qui m'a encadré tout au long de cette thèse, et même bien avant. C'est grâce à lui que j'ai découvert ce sujet passionnant, et grâce à lui que j'ai pu effectuer ce travail. Je le remercie grandement pour sa disponibilité, ses conseils, ses idées, mais également pour son encadrement. Il m'a laissé une totale liberté, tout en répondant présent à chacun de mes appels.

Je remercie également Frank Herrlich et Anton Zorich pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie aussi Erwan Lanneau, Jérôme Los et Jean-Christophe Yoccoz d'avoir bien voulu être membre du jury.

Les remerciements suivants sont pour tous les enseignants, devenus depuis des collègues, que j'ai pu croiser tout au long de mes études.

En particulier, merci donc à Erwan Lanneau et Samuel Lelièvre pour les échanges sur le sujet, merci à Nicolas Bédaride, Corentin Boissy, Thierry Coulbois, Peter Haissinsky, Arnaud Hilion, Lionel Nguyen Van Thé, Hamish Short, pour nos discussions sur ce sujet, ou sur les mathématiques, l'enseignement, le beau temps ou n'importe quoi d'autre. Merci également aux enseignants que j'ai pu avoir dans toutes mes études, qui m'ont fait aimé les mathématiques et qui ne liront probablement jamais cette thèse.

Merci également à tous les doctorants (ou depuis docteurs) avec qui j'ai partagé cette joyeuse galère.

Je remercie d'abord tout particulièrement l'équipage du bureau 114, qui a vogué maintenant vers le bureau 301. Merci pour l'ambiance stricte et sérieuse de travail, les boomerangs, les post-it et les chaises grinçantes. Merci donc à Lionel, Thomas et Bien.

Merci aussi à tous les autres doctorants que j'ai côtoyé. Donc dans le désordre : Clément, Matias, Ismaël, Julie, Thomas A., Flore, Sébastien, Fanny, Stella, Sébastien, Guillaume, Rima, Christoph, Mamadou, Boubakar, François, Laurent, Shanti, Majid, Chady, Benjamin, Vincent, et tous ceux que j'aurai pu oublier !

Pour finir un grand merci à mes parents, pour m'avoir laissé faire les études que je voulais, pour m'avoir fait confiance, et sans qui bien sûr je ne serai pas là, ni ne serai qui je suis.

Et un merci particulier à Céline, sans qui tout cela aurait pu être possible, mais sans qui la vie serait beaucoup moins belle.

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Surface de translation	11
1.1.1	Définitions	11
1.1.2	Espace des modules et coordonnées locales	16
1.1.3	Groupe de Veech et flot linéaire	17
1.2	Origamis	23
1.2.1	Premières définitions	23
1.2.2	Groupe de Veech	30
1.2.3	Flot linéaire sur un origami	35
2	Résultats préliminaires	41
2.1	Origamis infinis	41
2.2	G -revêtements	44
2.3	Mots sturmiens	46
2.4	Récurrence du flot linéaire	48
3	\mathbb{Z}^d-revêtements d'origamis	53
3.1	Domaine fondamental minimal	53
3.2	Homologie de l'origami de base	54
3.2.1	Une autre définition	54
3.2.2	Étude de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$	55
3.3	Équivalence des \mathbb{Z}^d -revêtements	56
3.4	Groupe de Veech d'un \mathbb{Z}^d -revêtement	59
3.5	\mathbb{Z}^d -revêtements quasi-récurrents	65
3.5.1	Définitions	65
3.5.2	Récurrence du flot linéaire	67
3.5.3	Groupe de Veech	68
3.6	Exemples	69
3.6.1	Les origamis T_n	69
3.6.2	Deux exemples quasi-récurrents maximaux	72

4	Origamis d'Heisenberg	75
4.1	Groupes d'Heisenberg	75
4.1.1	Définitions et premières propriétés	75
4.1.2	Structure du groupe \mathcal{H}	77
4.2	Origamis réguliers	78
4.2.1	Cas fini	78
4.2.2	Cas infini	80
4.3	Un \mathcal{H} -revêtement récurrent	81
4.3.1	L'origami T_8	81
4.3.2	L'origami T_8^∞	83
4.3.3	Groupe de Veech de T_8^∞	86
5	Autres exemples	91
5.1	Wind-tree	91
5.1.1	Définitions	91
5.1.2	Flot linéaire et groupe de Veech	96
5.2	Origamis de Burnside	99
5.2.1	Le problème de Burnside	99
5.2.2	Définition et propriétés d'origamis de Burnside	100

Chapitre 1

Introduction : surfaces de translation et origamis finis

1.1 Surface de translation

1.1.1 Définitions

Dans cette section, nous allons définir le cadre général dans lequel vivent nos objets principaux, les origamis.

Il s'agit des *surfaces de translation*, objets dynamiques aux propriétés intéressantes, notamment par leurs liens avec deux grands types de systèmes dynamiques : les billards et les échanges d'intervalle.

Les billards furent parmi les premiers systèmes dynamiques étudiés. Nous pouvons par exemple citer le problème de Fagnano ([Gut97]) au XVIIIème siècle, qui a une interprétation dans un billard triangulaire, ou encore les travaux de Coriolis ([Cor35]) au début du XIXème siècle, d'un point de vue mécanique et mathématique.

Les billards ont donné naissance aux surfaces de translation, dans les travaux de Katok et Zemliakov ([KZ75]) en 1975, qui utilisent ces surfaces pour déterminer des résultats dynamiques pour le flot dans un billard.

Cependant au fil du temps, les mathématiciens se sont intéressés aux surfaces de translation pour elles-mêmes et à la dynamique qui en découle.

Commençons par définir en toute généralité ces surfaces. Pour plus de détail, se reporter à Masur-Tabachnikov ([MT02]) ou encore Zorich ([Zor06]).

Définition 1.1.1 *Un atlas de translation sur une surface compacte X est un atlas défini sur $X \setminus \Sigma$, où Σ est un ensemble fini de points de X , et dont tous les changements de cartes sont des translations. Une surface de translation est une surface compacte munie d'un atlas de translation.*

Dans toute la suite, nous identifierons naturellement \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} . Puisque des translations sont holomorphes, une surface de translation est naturellement munie d'une structure de surface de Riemann.

L'exemple le plus simple de surface de translation est le tore "carré" $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, identifié à $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Il s'agit d'un carré dont les côtés sont identifiés par translation. C'est ce point de vue que nous allons adopter pour une définition plus combinatoire d'une surface de translation.

Définition 1.1.2 *Une surface de translation est une collection finie de polygones du plan, dont les côtés sont identifiés deux à deux par translation.*

Les polygones qui définissent une surface de translation doivent donc avoir des côtés identifiés par paire : les côtés d'une paire ont même longueur, sont parallèles et d'orientation contraire (si les côtés de tous les polygones sont parcourus dans le même sens fixé).

Il faut aussi remarquer, que dans cette définition, la direction verticale est également fixée.

Par exemple, nous pouvons considérer le cas de l'octogone régulier :

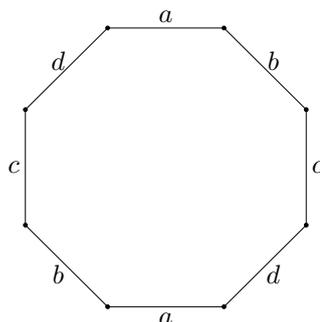


FIGURE 1.1 – Identifications des côtés de l'octogone régulier.

Dans cet exemple, les côtés opposés sont identifiés. Ainsi tous les sommets du polygone sont identifiés en un seul point P et la surface X obtenue est une surface de genre 2.

Une simple rotation de cet octogone de $\frac{\pi}{16}$ nous donne alors une autre surface de translation X' de genre 2.

Il faut remarquer également que cette représentation sous forme de polygones du plan n'est pas unique. En effet, si nous découpons un polygone en deux, puis que nous recollons ces deux morceaux selon une autre paire d'arêtes identifiées, nous obtenons de nouveaux polygones qui représentent évidemment la même surface.

Reprenons par exemple notre octogone, découpons-le suivant les pointillés puis recollons les arêtes c . Nous obtenons un nouveau polygone, différent de l'octogone du départ, mais représentant la même surface de translation.

Ainsi deux polygones définissent exactement la même surface de translation si nous pouvons passer de l'un à l'autre par découpage et recollement.

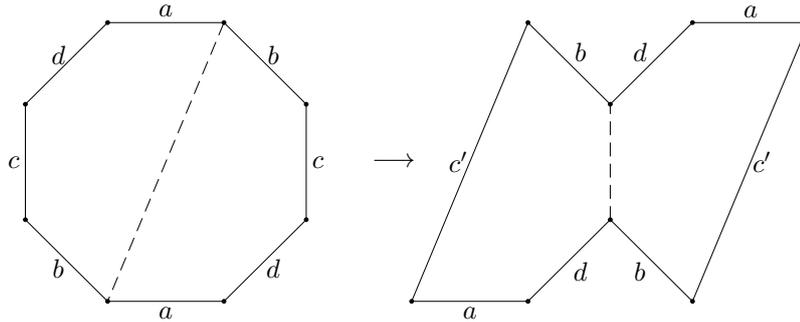


FIGURE 1.2 – Découpage et recollement de l'octogone.

Nous voyons alors qu'un problème se pose dans le cas de l'octogone, problème qui n'apparaissait pas dans le cas du carré : l'angle autour du point P vaut 6π !

Ces points apparaissent sur toute surface de translation de genre au moins 2 et sont appelés des *singularités coniques*. Ce sont les points qui forment l'ensemble Σ de la première définition d'une surface de translation. Une surface de translation est munie d'une métrique plate, provenant de celle du plan. Ainsi d'un point de vue "moral", toute la courbure de la surface a été poussée dans des points isolés de la surface : les singularités.

Une singularité a donc un degré. Il s'agit du nombre de tours supplémentaires nécessaires à faire autour de cette singularité pour revenir au point de départ. Donc si l'angle autour de la singularité vaut $2(d+1)\pi$, cette singularité est de degré d . Par exemple dans le cas de l'octogone précédent, la singularité P est d'ordre 2.

Si la surface de translation est un tore, elle est toujours munie d'une métrique plate et n'a jamais de singularité. Pourtant nous marquons toujours un point sur la surface, qui jouera le rôle de la singularité dans toutes les définitions qui suivront, pour être cohérent avec le reste de la théorie.

Ainsi une géodésique (segment de plus courte longueur joignant deux points) d'une surface de translation est la plus simple possible, il s'agit du segment qui réunit ces deux points sur la présentation en réunion de polygones, ou d'une union de segments joignant ces deux points, passant par des singularités.

Nous savons déjà qu'une surface de translation est munie naturellement d'une structure de surface de Riemann. Cela se voit sur l'atlas de translation qui est également un atlas holomorphe, mais cela peut se voir également sur la décomposition en polygones. En effet, puisque la surface se décompose en polygones du plan \mathbb{C} , elle est naturellement munie d'une structure de surfaces de Riemann. Mais nous pouvons la munir d'un outil supplémentaire.

Le plan complexe \mathbb{C} est muni d'une 1-forme holomorphe naturelle, la forme dz . Cette forme est bien évidemment invariante par translation. Ainsi si X est une surface munie d'une structure de surface de translation avec pour singularités Σ , la forme dz se relève uniquement et de manière bien définie en une 1-forme holomorphe sur $X \setminus \Sigma$, que nous noterons ω . Nous pouvons alors montrer que les éléments de Σ sont alors les zéros de la 1-forme holomorphe ω , qui est donc bien définie sur X .

Si nous nous plaçons autour d'un zéro de ω , avec comme coordonnée locale w , nous avons alors $\omega = w^d dw$, où d est le degré de ce zéro. Les deux notions de degré (degré de singularité de la structure de translation et degré du zéro de la 1-forme holomorphe) correspondent donc.

Ainsi la donnée d'une surface de translation nous donne un couple (X, ω) où X est une surface de Riemann et ω une 1-forme holomorphe sur cette dernière.

Nous allons voir qu'il y a en fait équivalence. Donnons-nous un couple (X, ω) avec X surface de Riemann compacte et ω 1-forme holomorphe sur X . Cette dernière nous permet de définir les changements de cartes. En effet, localement autour d'un point P_0 qui n'est pas un zéro de ω , les coordonnées d'un point P sont naturellement données par

$$\int_{P_0}^P \omega.$$

Si P est dans le voisinage d'un autre point régulier P_1 , nous avons alors comme changement de cartes

$$\int_{P_1}^P \omega = \int_{P_0}^P \omega + \int_{P_1}^{P_0} \omega,$$

qui est clairement une translation. Ainsi (X, ω) est naturellement munie d'une structure de surface de translation, et tout point qui n'est pas un zéro pour ω est régulier.

Si maintenant nous nous plaçons autour d'un zéro P_0 de degré d de ω , nous avons alors

$$\int_{P_0}^P \omega = \int_0^z w^d dw,$$

donc il s'agit d'un revêtement de degré $d + 1$ autour de ce point, d'angle $2(d + 1)\pi$. Ce point est alors une singularité d'ordre d .

Dans la suite, nous noterons donc (X, ω) une surface de translation, où X est une surface de Riemann munie d'une 1-forme holomorphe ω .

Nous avons vu au début de cette introduction que les surfaces de translation proviennent à l'origine des billards.

Nous allons nous intéresser en particulier aux billards polygonaux.

Définition 1.1.3 *Un billard polygonal est un système dynamique composé d'un polygone (la table de billard), dans lequel nous étudions la trajectoire d'un point partant dans une direction et rebondissant sur les parois selon les lois de l'optique géométrique, c'est-à-dire que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.*

Le billard polygonal est dit *rationnel* si les angles de la table sont des multiples rationnel de π .

L'exemple le plus simple est celui du billard carré :

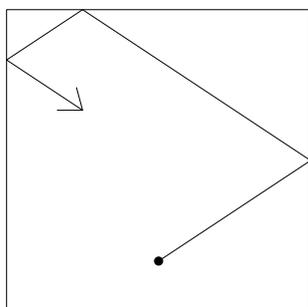


FIGURE 1.3 – Trajectoire d'un point dans le billard carré.

Ce système dynamique est très simple : si l'angle est un multiple rationnel de π , presque toute orbite est périodique, dans le cas contraire presque toute orbite est dense (et en fait bien plus, mais nous y reviendrons plus tard). Il a par exemple été étudié dans [Tab95].

Dans leur article ([KZ75]), Katok et Zemliakov ont établi un procédé permettant de passer d'un billard polygonal rationnel à une surface de translation : le dépliage.

Nous allons l'appliquer sur l'exemple précédent, se rapporter à [Zor06] pour le résultat en toute généralité.

Plutôt que de réfléchir la trajectoire du point lorsqu'il arrive contre une paroi, nous allons plutôt réfléchir la table selon cette paroi.

Voici ce que nous obtenons pour le carré :

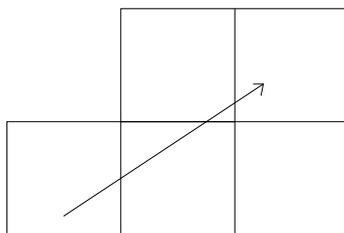


FIGURE 1.4 – Billard carré déplié.

Le nombre de copies que nous obtenons est fini. Il s'agit du nombre d'éléments dans le groupe engendré par les réflexions selon les côtés du polygone. Ce groupe est fini car les angles sont des multiples rationnels de π .

Dans notre exemple, nous obtenons 4 copies du carré, une pour chaque élément du groupe engendré par deux réflexions d'axes orthogonaux, qui est bien sûr le groupe diédral D_2 . La surface obtenue est alors un carré dont les côtés opposés sont identifiés : il s'agit d'un tore, l'exemple le plus simple de surface de translation.

1.1.2 Espace des modules et coordonnées locales

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux surfaces de translation en tant que points d'un espace : l'espace des modules. Pour plus de détails, ainsi que pour les démonstrations, se rapporter à [Zor06].

Considérons donc une surface de translation (X, ω) . Notons Σ l'ensemble des zéros de ω (donc l'ensemble des singularités de la structure de translation). Choisissons alors une base de l'homologie relative $H_1(X, \Sigma, \mathbb{C})$. Si X est une surface de genre g et Σ est un ensemble de n points, nous savons que $H_1(X, \Sigma, \mathbb{C})$ est de dimension $2g + n - 1$. Notons $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ une base symplectique de cycles absolus de $H_1(X, \mathbb{C})$ et complétons-la avec des cycles relatifs c_1, \dots, c_{n-1} .

Nous pouvons alors intégrer ω sur chacun de ces cycles. Ainsi l'élément $\left(\int_{a_i} \omega, \int_{b_i} \omega, \int_{c_i} \omega \right)$ forme les coordonnées locales de (X, ω) , appelées *coor-*

données des périodes

Puisque nous voyons les surfaces de translation comme des surfaces de Riemann munies d'une 1-forme holomorphe, nous allons nous intéresser aux espaces des modules des 1-formes holomorphes. Il faut d'abord remarquer que cet espace est *stratifié* en fonction des données combinatoires des zéros de la 1-forme (leur nombre et leurs degrés).

La manière la plus simple de le voir est la suivante. Considérons la décomposition d'une surface de translation sous la forme d'un polygone. Une légère déformation des côtés de ce polygone nous fournit un autre polygone, donc une autre surface de translation, mais de même genre, dont les singularités ont la même donnée combinatoire.

Par exemple les deux surfaces définies ci-dessous forment deux surfaces de translation, ayant deux singularités de degré 1, qui sont "proches" dans l'espace des modules.

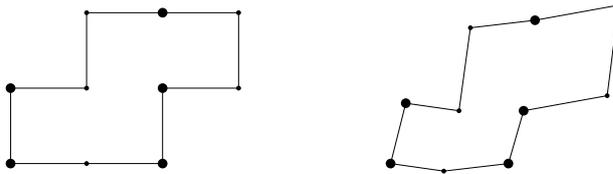


FIGURE 1.5 – Déformation d'un polygone.

Notons alors k_1, \dots, k_m les degrés des zéros de ω , avec $\sum_{i=1}^m k_i = 2g - 2$.

Définition 1.1.4 *L'ensemble des surfaces de translation de genre g ayant m singularités de degrés k_1, \dots, k_m , ou encore l'ensemble des surfaces de Riemann de genre g munies d'une 1-forme holomorphe ω admettant m zéros de degrés k_1, \dots, k_m est appelé une strate et est notée $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_m)$.*

Dans cette définition, nous rappelons que deux polygones équivalents par découpage et recollement fournissent la même surface de translation, donc le même point d'une strate.

Les deux surfaces de genre 2 définies ci-dessus sont par exemple deux éléments de $\mathcal{H}(1, 1)$, tandis que l'octogone et sa version découpée de la section précédente représentent le même élément de $\mathcal{H}(2)$.

1.1.3 Groupe de Veech et flot linéaire

Les énoncés de cette section proviennent principalement de Veech ([Vee89]).

Soit (X, ω) une surface de translation comme notée dans la section précédente. Nous allons nous intéresser aux applications sur cette surface qui conservent la structure de translation.

Définition 1.1.5 *Soit (X, ω) une surface de translation, et notons Σ l'ensemble de ses singularités. Un difféomorphisme affine est une application $f : X \rightarrow X$ telle que :*

1. f préserve Σ ;
2. f est un difféomorphisme sur $X \setminus \Sigma$;
3. f est affine : dans les cartes, elle est de la forme $z \mapsto A.z + b$ avec $A \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{C}$.

Nous remarquons que la matrice A est indépendante des cartes, puisque les changements de cartes sont des translations. Elle ne dépend donc exclusivement que de f . De plus, comme la surface X est d'aire finie, il est clair alors que $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dans les cartes, nous voyons alors que $A = df$ est exactement la dérivée au sens usuel. Nous appellerons donc A la dérivée de f , que nous noterons df ou $D(f)$.

Notons

$$\mathrm{Aff}^+(X, \omega) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ difféomorphisme affine préservant l'orientation}\}$$

Nous pourrions également noter ce groupe $\mathrm{Aff}^+(X, \Sigma)$, la donnée de Σ nécessaire à la définition étant incluse dans celle de ω .

La composition de deux difféomorphismes affines entraînent naturellement le produit des matrices correspondantes. Nous avons alors un morphisme $D : \mathrm{Aff}^+(X, \omega) \rightarrow \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, qui à un difféomorphisme affine f associe la matrice $A = df = D(f)$.

Définition 1.1.6 *Soit (X, ω) une surface de translation. Son groupe de Veech, noté $\mathrm{SL}(X, \omega)$, est l'image du morphisme $D : D(\mathrm{Aff}^+(X, \omega))$.*

Puisque nos surfaces de translation sont d'aire finie, le groupe de Veech est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(\mathbb{R})$.

Il existe cependant une autre façon de voir ce groupe. Considérons une matrice $A \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Si (X, ω) est une surface de translation, nous obtenons une autre surface de translation en composant les cartes de (X, ω) par A . Nous remarquons facilement qu'une telle composition ne modifie pas les données combinatoires de (X, ω) .

Nous avons donc une action du groupe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ sur les strates de l'espace des modules des surfaces de translation.

Définition 1.1.7 *Le groupe de Veech d'une surface de translation est son stabilisateur sous l'action précédente.*

Bien évidemment, comme X est d'aire finie, son groupe de Veech est un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$: puisque une matrice doit conserver X , elle conserve en particulier son aire.

Cette action a une traduction bien plus visuelle. Par définition, une surface de translation se décompose en un nombre fini de polygones dans le plan. $SL_2(\mathbb{R})$ agit alors naturellement sur ces polygones, en conservant de plus les structures affines : deux côtés parallèles de même longueur restent deux côtés parallèles de même longueur après l'action d'une matrice de $SL_2(\mathbb{R})$.

Si les polygones obtenus représentent la même surface de translation, c'est-à-dire s'ils peuvent se découper pour reformer les polygones de départ avec les identifications, alors la matrice est un élément du groupe de Veech.

Par exemple, l'action de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{2}-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sur l'octogone précédent nous donne le polygone suivant, où les côtés opposés sont identifiés :

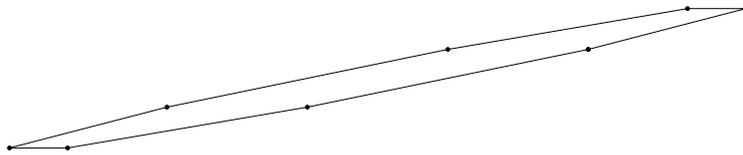


FIGURE 1.6 – Action de M sur l'octogone.

En découpant ce polygone comme dans la figure suivante, nous obtenons notre octogone de départ :

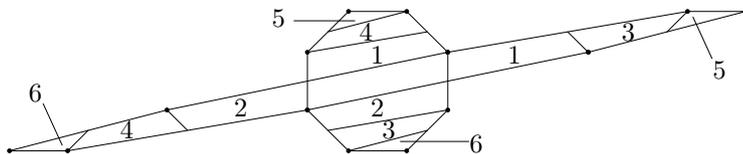


FIGURE 1.7 – Découpage et recollement pour retrouver l'octogone.

Ainsi, la matrice M est dans le groupe de Veech de la surface X définie

par l'octogone.

Le groupe de Veech d'une surface de translation finie est donc un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Nous pouvons cependant en dire plus.

Proposition 1.1.8 *Le groupe de Veech d'une surface de translation est un groupe fuchsien non cocompact.*

La démonstration d'un tel résultat peut se trouver dans [Vee89].

Nous rappelons qu'un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ainsi pour une surface de translation (X, ω) , son groupe de Veech $\mathrm{SL}(X, \omega)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}(X, \omega)$ soit non compact.

Nous finirons ces énumérations des propriétés du groupe de Veech par une classe spéciale de surfaces de translation.

Définition 1.1.9 *Une surface de translation est une surface de Veech si $\mathrm{SL}(X, \omega)$ est un réseau de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}(X, \omega)$ est de volume fini.*

La mesure sur les quotients de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est la mesure hyperbolique classique de \mathbb{H} . En effet, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit par isométries sur le demi-plan supérieur \mathbb{H} . Puisque $\mathrm{SL}(X, \omega)$ est un groupe fuchsien, il agit proprement discontinument sur \mathbb{H} et admet au moins un domaine fondamental. Le volume de $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(X, \omega)$ est alors l'aire hyperbolique de n'importe lequel de ses domaines fondamentaux. Puisque $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est le fibré unitaire tangent de \mathbb{H} , nous obtenons que le volume de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}(X, \omega)$ est celui de $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(X, \omega)$, multiplié par un facteur π .

Cette classe de surface aura son importance dans la suite, grâce à ses propriétés dynamiques particulières.

Nous allons maintenant nous intéresser aux surfaces de translation comme système dynamique. Nous savons déjà que les surfaces de translation sont munies d'une métrique plate, provenant de la métrique dz de \mathbb{C} . Nous nous intéressons donc au flot géodésique sur ces surfaces, que nous appellerons *flot linéaire*.

Définition 1.1.10 *Le flot linéaire sur une surface de translation (X, ω) dans la direction θ associée à un point x et à un réel positif t le point $x' = \Phi_\theta(x, t)$, situé à distance t du point x sur la géodésique passant par x d'angle θ par rapport à la direction horizontale.*

Nous remarquons encore dans cette définition l'importance de fixer une direction verticale (ou horizontale) sur les polygones définissant la surface

de translation. Nous étendrons cette définition dans le cas où t est négatif de manière intuitive : dans ce cas il s'agira du point à distance $-t$ de x dans la direction $\theta + \pi$.

Revenons maintenant sur les surfaces de translation obtenues par dépliage d'un billard. Nous voyons clairement sur l'exemple de la section précédente ce que devient la trajectoire d'un point du billard par le dépliage : il s'agit d'une orbite sous l'action du flot linéaire.

Ainsi toute la dynamique d'un billard polygonal admet une traduction dans le langage du flot linéaire sur une surface de translation.

La présence de singularités fait que ce point x' de la définition n'est pas toujours défini. Il se peut par exemple que la géodésique passant par x dans une direction θ ne se prolonge pas à l'infini : c'est le cas si elle rencontre une singularité.

Il se peut même que cette géodésique ne se prolonge pas dans les deux directions.

Définition 1.1.11 *Un lien de selles est un segment géodésique reliant deux singularités (distinctes ou non).*

Dans l'exemple précédent de la surface de genre 2 obtenue à partir d'un octogone régulier, chaque côté de l'octogone est un lien de selles de la surface.

Définition 1.1.12 *Un cylindre sur une surface de translation est une union de cercles géodésiques homotopes, maximal pour l'inclusion.*

Un cylindre est toujours bordé par des liens de selles (qui peuvent être identiques). Cette notion est en fait présente sur toute surface de translation ([Mas82]).

Théorème 1.1.13 *Toute surface de translation admet des directions dans lesquelles elle admet un cylindre.*

Nous pouvons déjà citer quelques résultats sur ces notions.

Proposition 1.1.14 *L'ensemble des directions dans laquelle une surface de translation (X, ω) admet des liens de selles est dénombrable.*

Si ρ est un lien de selles, l'élément de $\int_{\rho} \omega \in \mathbb{C}$ est appelé une *période* de ω . Nous notons $\Lambda(\omega)$ l'ensemble des périodes de ω .

Il se peut que la surface se décompose en un nombre fini de cylindres dans une direction. Nous dirons alors que le flot linéaire est *complètement périodique* dans cette direction.

Remarque 1.1.15 *La notion de périodicité signifie simplement que la surface se décompose en cylindres. Ces derniers peuvent avoir des longueurs rationnellement indépendantes, donc il n'existe pas forcément de période au sens classique pour le flot linéaire.*

Théorème 1.1.16 *L'ensemble des surfaces de translation admettant une direction complètement périodique est de mesure nulle.*

Nous rappelons que les strates de surfaces de translation sont naturellement munies d'une mesure, la mesure de Masur-Veech. Les démonstrations de ces résultats peuvent se trouver dans [Mas82] ou [Vee82].

La notion de complète périodicité est donc très rare.

Intéressons-nous maintenant à une autre propriété naturelle d'un système dynamique, la minimalité. Nous rappelons qu'un système dynamique est minimal si chaque orbite est dense.

Le résultat suivant est dû à Katok et Zemliakov, voir [KZ75] pour une démonstration.

Théorème 1.1.17 *Si une surface de translation n'admet pas de liens de selles dans une direction θ , le flot linéaire est minimal dans cette direction.*

D'après la proposition 1.1.14, il est clair que le flot linéaire est minimal dans presque toute direction.

Il est en fait bien plus. C'est ce que nous dit le théorème suivant, dû à Kerckhoff-Masur-Smillie ([KMS86]).

Théorème 1.1.18 *Soit (X, ω) une surface de translation. Alors dans presque toute direction θ , le flot linéaire Φ_θ est uniquement ergodique.*

Nous rappelons qu'un système dynamique est ergodique pour une mesure si les ensembles invariants sont de mesure nulle, ou de complémentaire de mesure nulle. Il est uniquement ergodique si une telle mesure est unique.

Ces deux notions (périodicité et unique ergodicité) sont bien évidemment disjointes. Il existe cependant une classe de surfaces pour lesquels ce sont les deux seuls cas possibles. Il s'agit des surfaces de Veech, déjà vues plus haut.

Théorème 1.1.19 (Alternative de Veech) *Soit X une surface de Veech. Alors pour chaque direction θ , le flot linéaire Φ_θ dans cette direction est soit complètement périodique, soit uniquement ergodique.*

Nous pouvons voir cette alternative comme une généralisation du théorème de Weyl ([Wey16]) concernant les rotations du cercle : la rotation est périodique si et seulement si l'angle est rationnel ; elle est uniquement ergodique si et seulement si l'angle est irrationnel.

Cependant ce n'est pas aussi simple dans le cadre des surfaces de Veech. En effet, pour une surface de Veech quelconque, l'ensemble des directions complètement périodiques est en général inconnu.

C'est par contre connu dans le cas du tore carré, exemple le plus simple de surface de Veech. Dans ce cas, si l'angle est un multiple rationnel de π alors le flot linéaire est complètement périodique, dans le cas contraire il est uniquement ergodique.

D'après le lien entre le flot linéaire et la dynamique d'un billard, nous retrouvons le résultat énoncé pour le billard carré, dans une version améliorée.

Dans la suite, quand nous parlerons de direction d'un flot, nous ne parlerons plus d'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$, mais de direction $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, α correspondant à la pente de la droite d'angle θ .

Ainsi, si $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, nous avons la relation $\alpha = \tan(\theta)$, avec la convention $\tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$. Pour les autres directions, étudier le flot linéaire Φ_θ^t dans la direction θ revient à étudier le flot linéaire $\Phi_{\theta+\pi}^{-t}$ dans la direction $\theta + \pi$, en inversant le sens du temps. Nous pouvons donc nous restreindre à l'étude des directions $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Tous les résultats vus jusqu'ici se traduisent bien évidemment avec cette nouvelle définition.

1.2 Origamis

1.2.1 Premières définitions

Nous allons maintenant définir les objets principaux de cette thèse : les surfaces à petits carreaux, ou origamis.

Les définitions qui suivent sont classiques et peuvent se trouver dans Hubert-Lelièvre ([HL06]), Yoccoz ([Yoc11]) ou encore Zmiaikou ([Zmi11]).

Définition 1.2.1 *Un origami O est un revêtement $\pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ fini, connexe, non ramifié sauf éventuellement au-dessus de $0 \in \mathbb{T}^2$.*

D'un point de vue topologique, la surface X est alors obtenue en recollant des carrés, préimages de \mathbb{T}^2 .

Nous pouvons alors donner une autre définition d'un origami.

Définition 1.2.2 *Un origami est une collection finie de carreaux unitaires euclidiens qui sont collés en respectant les règles suivantes :*

- chaque côté droit (resp. haut) d'un carreau est identifié au côté gauche (resp. bas) d'un carreau ;
- la surface topologique obtenue est connexe.

Ces deux définitions sont clairement équivalentes.

Un carreau de O est une composante connexe de $\pi^{-1}((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^2/\mathbb{Z}^2)$, le nombre de carreaux correspondant alors au degré du revêtement, et le recollement étant indiqué par la monodromie de π .

Réciproquement, si nous donnons l'origami sous la forme de carreaux collés entre eux, le revêtement est naturellement défini en projetant chaque carreau sur le tore \mathbb{T}^2 , le revêtement étant alors ramifié en les sommets des carreaux.

Il s'agit d'un cas particulier de surfaces de translation : en effet, nous savons déjà que \mathbb{T}^2 est l'exemple le plus basique de surface de translation. Il est donc muni d'une 1-forme holomorphe, la forme dz qui provient de \mathbb{C} . Cette 1-forme holomorphe remonte alors sur X via le revêtement π , et en fait donc une surface de translation.

Sauf indication contraire, les origamis dessinés à partir de maintenant auront leurs côtés opposés identifiés.

Nous noterons généralement un origami O quand nous parlons de l'objet combinatoire (les carreaux et leurs recollements), tandis que nous noterons X ou (X, ω) si nous parlons de la surface à petits carreaux, vue comme surface de translation.

Pour distinguer une surface à petits carreaux dans l'ensemble des surfaces de translation, nous utilisons la proposition suivante, démontrée dans [HL06].

Proposition 1.2.3 *Une surface de translation (X, ω) est une surface à petits carreaux si et seulement si son ensemble des périodes $\Lambda(\omega)$ est un sous-réseau de \mathbb{Z}^2 de rang 2. Nous l'appellerons alors réseau des périodes.*

Cette proposition nous donne alors une autre définition d'un origami comme surface de translation.

Dans toute la suite, nous noterons T_1 l'origami trivial à un carreau, qui correspond à un tore. Voyons maintenant la notion de morphisme qui peut exister entre ces objets.

Définition 1.2.4 *Soient O ($\pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2$) et O' ($\pi' : X' \rightarrow \mathbb{T}^2$) deux origamis. Un morphisme de O vers O' est une application $p : X \rightarrow X'$ continue telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Nous noterons un morphisme comme une application $p : O \rightarrow O'$, les surfaces X et X' étant sous-entendues.

Proposition 1.2.5 *Soit $p : O \rightarrow O'$ un morphisme avec les notations précédentes.*

Alors p est un revêtement fini, non ramifié en dehors de $\pi'^{-1}(\{0\})$.

DÉMONSTRATION : Notons dans un premier temps que puisque $\pi' \circ p = \pi$, les sommets des carreaux de O sont exactement les pré-images des sommets des carreaux de O' . Montrons que p est un revêtement en dehors de ces points.

Soit $x' \in X'$ tel que $\pi'(x') \neq 0$. Ainsi il existe un voisinage connexe V de $\pi'(x')$ tel que $\pi^{-1}(V)$ soit homéomorphe à $V \times F$ et $\pi'^{-1}(V)$ soit homéomorphe à $V \times F'$, avec F et F' finis. Dans ce cas, nous avons

$$p^{-1}(\pi'^{-1}(V)) \subset \pi^{-1}(V).$$

Notons $f' \in F'$ la fibre contenant x' , c'est-à-dire l'élément de F' tel que $x' \in V \times \{f'\}$. Par continuité de p , il existe une application $\bar{p} : F \rightarrow F'$ telle que

$$p^{-1}(V \times \{f'\}) = V \times \bar{p}^{-1}(\{f'\})$$

donc p est un bien un revêtement. □

Définition 1.2.6 *Un origami O est primitif s'il n'existe de morphismes que de O vers lui-même ou T_1 .*

En clair, un origami est primitif s'il n'est le revêtement que de lui-même ou de l'origami trivial.

C'est par exemple obligatoirement le cas pour un origami O à p carreaux, avec p premier. En effet, s'il est le revêtement d'un origami O' à n carreaux, n divise p , donc $n = 1$ (et $O' = T_1$) ou $n = p$ (et $O' = O$).

Définition 1.2.7 *Un origami O est réduit si pour tout morphisme $p : O \rightarrow O'$ où X' est un tore, alors $O = O'$ ou $O' = T_1$.*

Cette notion est légèrement différente de la première. Un origami primitif est réduit, le contraire n'est pas toujours vrai.

C'est le cas par exemple sur l'origami de la figure 1.8. Comme le dessin nous le montre, cet origami n'est pas primitif. Cependant il est réduit, le seul tore qu'il revêt est l'origami trivial T_1 .

La notion d'origami réduit peut aussi se voir sur la surface de translation, en utilisant la notion de réseau des périodes. Nous savons déjà qu'un origami admet pour réseau des périodes un sous-réseau de rang 2 de \mathbb{Z}^2 .

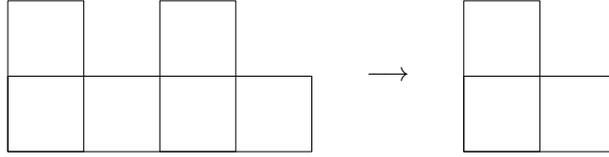


FIGURE 1.8 – Un origami réduit non primitif.

Proposition 1.2.8 Soient O un origami et (X, ω) la surface à petits carreaux associées, avec $g(X) \geq 2$. O est réduit si et seulement si $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}^2$.

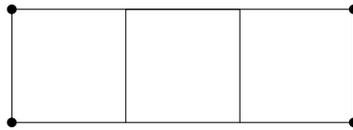
DÉMONSTRATION : Supposons que O ne soit pas réduit. Ainsi il existe un revêtement $p : O \rightarrow T$ où T est un tore avec $T \neq T_1$. Notons $\Lambda(\omega)$ le réseau des périodes de O et $\Lambda(\omega_T)$ celui de T . Étant donné le revêtement p , nous avons $\Lambda(\omega) \subset \Lambda(\omega_T)$. Puisque T est un tore, nous avons $\Lambda(\omega_T) \subsetneq \mathbb{Z}^2$.

Ainsi $\Lambda(\omega) \neq \mathbb{Z}^2$.

Supposons maintenant que $\Lambda(\omega) \neq \mathbb{Z}^2$. Considérons alors la surface $\mathbb{R}^2/\Lambda(\omega)$. Ce tore est une surface de translation, de réseaux des périodes $\Lambda(\omega)$ par définition, il s'agit donc bien d'un origami, noté T , différent de T_1 .

Si P est un point de O , notons $p(P) = \int_0^P \omega \bmod \Lambda(\omega)$, qui est un point de T . Les singularités de O s'envoient par définition sur le point 0 de T , l'application p est clairement continue : il s'agit d'un morphisme et O n'est pas réduit. \square

Le cas des tores n'est pas plus compliqué, cependant l'absence de singularités rend l'énoncé plus subtil. Nous savons déjà que nous marquons toujours un point sur le tore (pour définir le groupe de Veech ou encore les liens de selles par exemple) généralement un sommet de carreau dans le cas d'un origami.

FIGURE 1.9 – Un origami réduit avec $\Lambda(\omega) \neq \mathbb{Z}^2$.

Il existe alors des origamis réduits, de réseaux des périodes différents de \mathbb{Z}^2 mais qui sont des tores. C'est le cas par exemple de l'origami de la figure 1.9, qui est primitif donc réduit (car il a 3 carreaux) mais dont le réseau des périodes est $3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Un origami est donc un revêtement ramifié au-dessus du tore \mathbb{T}^2 . Dans toute la suite, nous allons noter $\mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ le groupe libre à deux générateurs x et y , que nous allons identifier au groupe fondamental de la surface connexe $\mathbb{T}^2 \setminus \{0\}$, où x et y sont les lacets définis sur le dessin suivant :

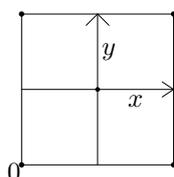


FIGURE 1.10 – Générateurs de \mathbb{F}_2 , le groupe fondamental du tore époincé.

Par la théorie des revêtements, en choisissant un point base sur la surface $X \setminus \pi^{-1}(\{0\})$, le groupe fondamental de cette surface en ce point base est un sous-groupe d'indice fini de \mathbb{F}_2 , l'indice étant le degré du revêtement. Nous voyons alors facilement que ce groupe ne dépend que du carreau où l'on choisit le point base.

Définition 1.2.9 *Un groupe fondamental d'un origami O est un groupe fondamental de $X \setminus \pi^{-1}(\{0\})$ basé en un carreau.*

Généralement, nous numérotions 1 le carreau qui servira de base.

Ainsi un groupe fondamental H d'un origami O à n carreaux est un sous-groupe d'indice n de \mathbb{F}_2 . Or puisque \mathbb{F}_2 est un groupe libre à deux générateurs, le théorème de Nielsen-Schreier nous affirme que H est un groupe libre à $n + 1$ générateurs (ou de rang $n + 1$).

Le changement de carreau de base revient alors à conjuguer le groupe fondamental, comme c'est le cas pour les espaces topologiques.

Considérons par exemple l'origami de la figure 1.11.

Dans le premier cas, une présentation du groupe fondamental est

$$H_1 = \langle x^3, xyx^{-1}, x^2yx^{-2}, y^2, yxy^{-1} \rangle.$$

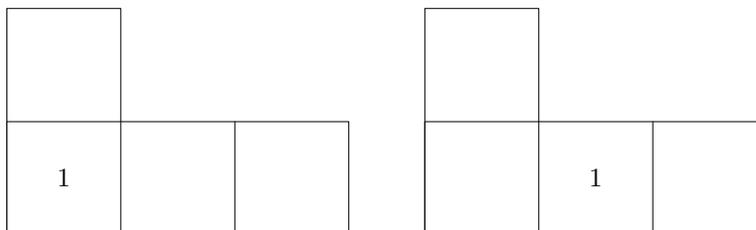


FIGURE 1.11 – Deux carreaux de base différents pour le groupe fondamental.

Dans le second cas, nous avons

$$H_2 = \langle x^3, xyx^{-1}, y, x^{-1}y^2x, x^{-1}yxy^{-1}x \rangle.$$

Nous obtenons $H_2 = xH_1x^{-1}$, où x est l'élément permettant de passer du carreau de base du premier exemple à celui du second.

Nous verrons plus loin une méthode permettant de déterminer une présentation du groupe fondamental d'un origami donné.

Ainsi à un origami à n carreaux correspond une classe de conjugaison de sous-groupes d'indice n de \mathbb{F}_2 .

Réciproquement, considérons un sous-groupe H de \mathbb{F}_2 d'indice n . En notant \mathcal{T} un revêtement universel du tore épointé $\mathbb{T}^2 \setminus \{0\}$, nous avons alors que $\pi_H : \mathcal{T}/H \rightarrow \mathbb{T}^2 \setminus \{0\}$ est un revêtement d'ordre n . En complétant \mathcal{T}/H par un nombre fini de points, nous obtenons alors un revêtement ramifié du tore, ou encore un origami. Un conjugué de H donne un revêtement isomorphe, donc le même origami.

Nous pouvons donner ainsi une définition algébrique d'un origami. Cette définition est celle utilisée dans la thèse de Schmithüsen ([Sch05]).

Définition 1.2.10 *Un origami est une classe de conjugaison de sous-groupes d'indice fini de \mathbb{F}_2 .*

Voyons maintenant une dernière façon de définir un origami. Cette définition a été très utilisée dans les travaux de Zmiaikou ([Zmi11]).

Prenons un origami O à n carreaux et numérotions arbitrairement ses carreaux. Nous considérons alors les deux permutations σ et τ de \mathcal{S}_n définies de la manière suivante : le carreau $\sigma(i)$ (respectivement $\tau(i)$) est collé au côté droit (respectivement haut) du carreau i .

Définition 1.2.11 *Un couple de permutation (σ, τ) de \mathcal{S}_n est dit transitif si pour tout couple (i, j) , avec $1 \leq i, j \leq n$, il existe une permutation $\delta \in \langle \sigma, \tau \rangle$ tel que $\delta(i) = j$.*

Un origami étant connexe, un couple (σ, τ) obtenu comme au-dessus est nécessairement transitif.

La numérotation choisie au départ étant arbitraire, choisir une autre numérotation donne un couple transitif conjugué. Un couple transitif code alors de manière combinatoire comment sont recollés entre eux les carreaux d'un origami.

Considérons par exemple l'origami suivant, avec deux numérotations différentes :

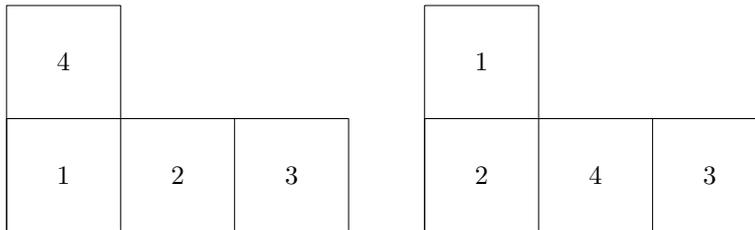


FIGURE 1.12 – Deux numérotations du même origami.

Dans le premier cas, nous obtenons (σ_1, τ_1) comme couple transitif, avec $\sigma_1 = (1\ 2\ 3)$ et $\tau_1 = (1\ 4)$, et dans le second cas nous avons le couple transitif (σ_2, τ_2) avec $\sigma_2 = (2\ 4\ 3)$ et $\tau_2 = (1\ 2)$.

En notant $\alpha = (1\ 2\ 4)$, nous avons alors $\alpha\sigma_1\alpha^{-1} = \sigma_2$ et $\alpha\tau_1\alpha^{-1} = \tau_2$.

Une autre manière de le définir est par l'action de monodromie. Puisque O est un revêtement ramifié de T_1 , il existe une action de \mathbb{F}_2 sur les carreaux de O : l'action de monodromie. Cette action code le revêtement, donc la manière dont sont recoller les carreaux. Il existe ainsi un morphisme de groupe μ de \mathbb{F}_2 vers \mathcal{S}_n , le groupe de permutation des n carreaux de O . Il suffit de poser $\sigma = \mu(x)$ et $\tau = \mu(y)$ pour obtenir la définition précédente, le couple (σ, τ) étant transitif. Un changement de numérotation entraîne une modification de l'action de monodromie, traduite par une conjugaison de μ .

Nous pouvons ainsi nous en servir comme une définition combinatoire d'un origami.

Définition 1.2.12 *Un origami à n carreaux est une classe de conjugaison d'un couple transitif de \mathcal{S}_n .*

Cette définition est la plus pratique pour donner un origami.

Finalement, nous allons énoncer une dernière définition d'un origami, qui est la définition originelle. Pour plus de détails, se reporter à Zorich ([Zor06]).

Considérons une strate $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ de l'espace des modules d'une surface de translation. Nous rappelons que cette variété est localement isomorphe à l'espace $H_1(X, \Sigma, \mathbb{C})$, où X est une surface compacte de genre g , Σ est un ensemble de n points de X , les singularités, chacune de degré d_i , avec $\sum d_i = 2g - 2$. Un point de cette variété est une surface de translation (X, ω) .

Un *point entier* de cette variété est un élément dont les coordonnées locales sont dans

$$H_1(X, \Sigma, \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \subset H_1(X, \Sigma, \mathbb{C}).$$

Il s'agit alors d'une surface à petits carreaux.

Nous voyons ici que les surfaces à petits carreaux jouent un rôle important dans les strates. Elles permettent par exemple de calculer des volumes de sous-ensembles de strates, ou de strates normalisées (voir Eskin-Okounkov ([EO01])).

Pour résumer, voici les différentes définitions d'un origami, chacune étant utile selon la situation.

Un origami est :

- un revêtement connexe fini du tore \mathbb{T}^2 , ramifié au plus au-dessus de 0 ;
- une collection finie de carreaux identiques collés entre eux ;
- une surface de translation dont le réseau des périodes est un sous-réseau de rang 2 de \mathbb{Z}^2 ;
- une classe de conjugaison de sous-groupes d'indice fini de \mathbb{F}_2 ;
- une classe de conjugaison d'un couple transitif d'un groupe de permutations ;
- un point entier d'une strate.

1.2.2 Groupe de Veech

Nous avons déjà vu qu'une surface à petits carreaux est un exemple particulier de surface de translation. De ce fait, elle admet elle aussi, entre autres, un groupe de Veech, comme défini dans la section précédente.

Cependant, les groupes de Veech des surfaces à petits carreaux ont une propriété supplémentaire, qui permet même de caractériser ces surfaces. Il s'agit du théorème de Gutkin-Judge ([GJ00]).

Théorème 1.2.13 *Une surface de translation est une surface à petits carreaux si et seulement si son groupe de Veech est arithmétique. En particulier, une surface à petits carreaux est toujours une surface de Veech*

Nous rappelons qu'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est dit arithmétique s'il partage un sous-groupe d'indice fini avec $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Cependant, pour un origami, nous allons prendre une définition légèrement différente, qui nous permettra de lier la définition algébrique d'un origami à ce nouveau groupe de Veech par la caractérisation de Schmithüsen ([Sch05]).

Dans la section précédente, pour définir le groupe de Veech $\mathrm{SL}(X, \omega)$ d'une surface de translation (X, ω) , nous regardions les difféomorphismes affines de X qui stabilisaient l'ensemble Σ des singularités.

Pour le groupe de Veech d'un origami O ($\pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2$), l'idée consiste à garder la même définition en remplaçant Σ par $\pi^{-1}(\{0\})$, l'ensemble des sommets des carreaux, qui contient bien l'ensemble des singularités.

Définition 1.2.14 (Groupe de Veech d'un origami) *Soit un origami O ($\pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2$). Son groupe de Veech est*

$$\Gamma(O) = \mathrm{der}(\mathrm{Aff}^+(X, \omega, \pi^{-1}(\{0\}))).$$

Le groupe de Veech d'un origami est donc toujours un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: il s'agit d'un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ qui doit conserver \mathbb{Z}^2 , le réseau des périodes engendré par les liens de selles reliant tous les points de $\pi^{-1}(\{0\})$.

Nous pouvons alors le voir comme le stabilisateur de l'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur les origamis. De plus, un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ne modifiant pas l'aire, il transforme un origami en un origami ayant le même nombre de carreaux.

Nous en déduisons alors la proposition suivante.

Proposition 1.2.15 *Le groupe de Veech $\Gamma(O)$ d'un origami O est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Le groupe de Veech d'un origami est toujours un groupe fuchsien. Le groupe de Veech d'un origami est bien évidemment lié au groupe de Veech de la surface à petits carreaux.

Proposition 1.2.16 *Soit O ($\pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2$) un origami. Alors $\Gamma(O)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(X, \omega)$.*

DÉMONSTRATION : Considérons un difféomorphisme affine de X qui préserve l'ensemble des sommets $\pi^{-1}(\{0\})$. Il doit alors conserver les degrés des points. Ainsi les points réguliers sont envoyés sur des points réguliers, et les singularités sont envoyées sur des singularités de même degré.

Il est alors clair que $\Gamma(O) \subset \mathrm{SL}(X, \omega)$.

Puisque $\mathrm{SL}(X, \omega)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont commensurables, il existe un sous-groupe commun G tel que $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : G] < +\infty$ et $[\mathrm{SL}(X, \omega) : G] < +\infty$. Nous savons aussi que $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(O)] < +\infty$. Dans ce cas, $\Gamma(O) \cap G$ est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, donc dans G et par conséquent dans $\mathrm{SL}(X, \omega)$.

Finalement $\Gamma(O) \cap G \subset \Gamma(O) \subset \mathrm{SL}(X, \omega)$ avec $\Gamma(O) \cap G$ d'indice fini dans $\mathrm{SL}(X, \omega)$, donc $[\mathrm{SL}(X, \omega) : \Gamma(O)] < +\infty$. \square

Il arrive cependant assez souvent que ces deux groupes soient identiques.

Proposition 1.2.17 *Soit O ($\pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2$) un origami. Si O est réduit, alors $\Gamma(O) = \mathrm{SL}(X, \omega)$.*

DÉMONSTRATION : Soit $A \in \mathrm{SL}(X, \omega)$. Alors A préserve O et ses singularités, mais également $\Lambda(\omega)$. Puisque O est réduit, $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}^2$, et ainsi A préserve tous les sommets des carreaux de O , donc $A \in \Gamma(O)$. \square

Nous allons maintenant rappeler les résultats établis par Schmithüsen ([Sch05]), liant le groupe de Veech d'un origami O au stabilisateur d'un groupe fondamental H de O .

Commençons par un résultat classique de théorie des groupes.

Théorème 1.2.18 *Pour $w \in \mathbb{F}_2$, $|w|_x$ et $|w|_y$ désignent la somme algébrique des puissances de x et de y respectivement dans w . Alors l'application*

$$\begin{aligned} \beta : \mathrm{Out}(\mathbb{F}_2) &\rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \\ \bar{\gamma} &\mapsto \begin{pmatrix} |\gamma(x)|_x & |\gamma(y)|_x \\ |\gamma(x)|_y & |\gamma(y)|_y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où γ est un représentant de $\bar{\gamma}$, est un isomorphisme.

On notera $\hat{\beta} = \beta \circ p$, où $p : \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_2) \rightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{F}_2)$ est la projection canonique.

On notera $\mathrm{Aut}^+(\mathbb{F}_2) = \hat{\beta}^{-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ et $\mathrm{Out}^+(\mathbb{F}_2) = \mathrm{Aut}^+(\mathbb{F}_2) / \mathrm{Inn}(\mathbb{F}_2)$, car $\mathrm{Inn}(\mathbb{F}_2) \triangleleft \mathrm{Aut}^+(\mathbb{F}_2)$ de manière évidente.

On remarque alors que $\hat{\beta}(\mathrm{Inn}(\mathbb{F}_2)) = \{I\}$.

Posons donc

$$\begin{aligned} \gamma_S : \mathbb{F}_2 &\rightarrow \mathbb{F}_2 \\ x &\mapsto y \quad , \quad y \mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_T : \mathbb{F}_2 &\rightarrow \mathbb{F}_2 \\ x &\mapsto x \quad , \quad y \mapsto xy,\end{aligned}$$

alors γ_S et $\gamma_T \in \text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)$, $\hat{\beta}(\gamma_S) = S$ et $\hat{\beta}(\gamma_T) = T$.

Ainsi, si $A = W(S, T) \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors en posant $\gamma_A = W(\gamma_S, \gamma_T)$ nous obtenons

$$\gamma_A \in \hat{\beta}^{-1}(\{A\}).$$

Le résultat suivant permet de relier le groupe de Veech d'un origami au stabilisateur d'un de ses groupes fondamentaux. La démonstration se trouve dans [Sch05].

Théorème 1.2.19 (Caractérisation de Schmithüsen) *Soient O un origami et H un groupe fondamental de O . Alors*

$$\Gamma(O) = \hat{\beta}(\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H)).$$

Nous en déduisons rapidement le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.20 *Soient O_1 et O_2 deux origamis, et H_1, H_2 deux groupes fondamentaux de O_1 et O_2 respectivement.*

Si $H_1 = \text{Norm}(H_2)$, alors $\Gamma(O_2) \subset \Gamma(O_1)$.

DÉMONSTRATION :

Soit $\gamma \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_2)$, donc $\gamma(H_2) = H_2$. Ainsi pour $w \in H_1$,

$$H_2 = \gamma(H_2) = \gamma(wH_2w^{-1}) = \gamma(w)\gamma(H_2)\gamma(w)^{-1} = \gamma(w)H_2\gamma(w)^{-1},$$

donc $\gamma(w) \in H_1 = \text{Norm}(H_2)$, ou encore $\gamma \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_1)$.

Ainsi

$$\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_2) \subset \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_1)$$

et d'après le théorème précédent, $\Gamma(O_2) \subset \Gamma(O_1)$. □

Schmithüsen utilise son résultat pour produire un algorithme qui permet de calculer des générateurs du groupe de Veech d'un origami donné. En effet, puisque $\Gamma(O)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, c'est un groupe fuchsien de première espèce, donc il est de type fini.

Il est donc nécessaire d'avoir un groupe fondamental de l'origami dont nous voulons le groupe de Veech. Présentons donc ici une méthode pour déterminer un groupe fondamental d'un origami.

Pour cela, nous allons donner une nouvelle définition d'un origami, sous la forme d'un graphe.

Définition 1.2.21 *Un graphe d'origami est un graphe fini orienté connexe, dont les arêtes sont étiquetées x et y et tel que de chaque sommet part et arrive une seule arête x et une seule arête y .*

Ce graphe représente effectivement un origami numéroté : chaque sommet du graphe représente un carreau, et les recollements sont donnés par les arêtes (x pour les recollements horizontaux et y pour les verticaux). Si O est un origami à n carreaux, alors son graphe associé a n sommets, n arêtes x et n arêtes y .

Par exemple, voici un origami numéroté et son graphe associé :

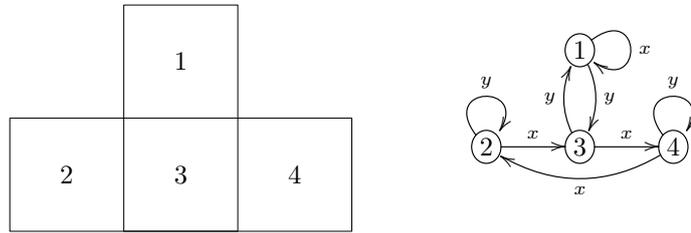


FIGURE 1.13 – Un origami numéroté et son graphe.

Considérons donc un origami O et notons \mathcal{G} un graphe associé. Le groupe fondamental de O basé en le carreau 1 est alors l'ensemble des lacets de \mathcal{G} basés en 1.

Nous pouvons extraire de \mathcal{G} un arbre maximal \mathcal{T} . Par définition, \mathcal{T} a n sommets et $n - 1$ arêtes. Chacune des $n + 1$ arêtes de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ va nous fournir un générateur du groupe fondamental de manière classique. Il s'agira de l'unique lacet passant une seule fois par cette arête orientée et par aucune autre de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$.

Reprenons l'exemple de la figure 1.14. Dans ce cas, le groupe fondamental est alors

$$H = \langle x, y^2, y^{-1}xyx^{-1}y, y^{-1}x^3y, y^{-1}x^{-1}yxy \rangle.$$

Le même raisonnement peut s'appliquer directement sur l'origami une fois qu'il a été numéroté. Il suffit de choisir $n + 1$ arêtes qui "ne déconnectent pas" l'origami : il s'agit d'un ensemble S d'arêtes telles que $O \setminus S$ reste connexe.

Il faut alors prendre les $n + 1$ mots de \mathbb{F}_2 qui passent une unique fois par chaque arête et aucune fois par les autres. Ces $n + 1$ mots vont engendrer le groupe fondamental de O .

Ainsi sur le même exemple que précédemment, nous enlevons les arêtes en pointillé pour obtenir les générateurs de H .

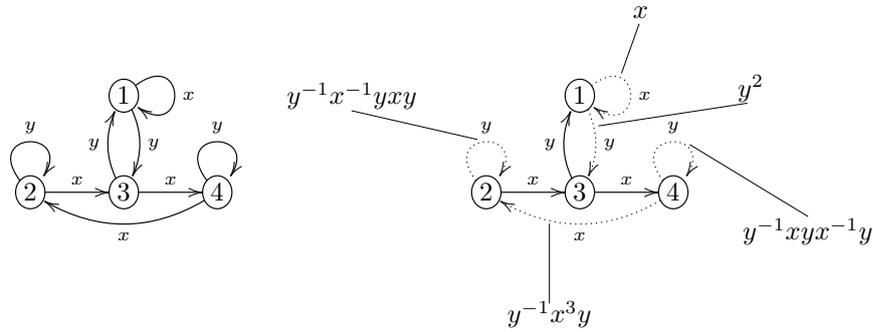


FIGURE 1.14 – Calcul du groupe fondamental à partir du graphe.

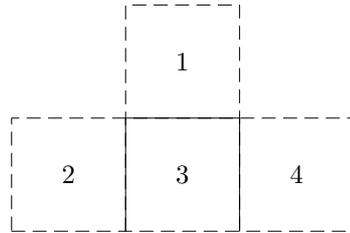


FIGURE 1.15 – Calcul du groupe fondamental à partir de l'origami.

1.2.3 Flot linéaire sur un origami

Nous parlerons de flot linéaire sur un origami, alors que nous parlons évidemment du flot linéaire sur la surface de translation associée.

Puisqu'un origami est une surface de translation, les notions de liens de selles et de cylindres vues dans la section précédente s'appliquent toujours ici. Cependant, comme pour le groupe de Veech, il existe une notion très légèrement différente dans le cas des origamis. Ainsi, nous considérerons tous les sommets des carreaux d'un origami quand nous parlerons de liens de selles ou encore de cylindres. Par exemple, l'origami de la figure 1.16 admet un cylindre dans la direction horizontale mais trois dans la direction verticale.

Le groupe de Veech d'un origami va également conserver ces décompositions en cylindres.

Définition 1.2.22 *Un cusp d'un groupe fuchsien est une classe d'équivalence d'un élément parabolique sous l'action de ce groupe.*

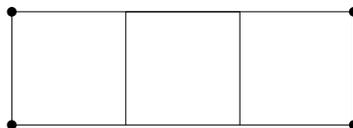


FIGURE 1.16 – Un origami avec trois cylindres dans la direction verticale.

Nous pouvons nous reporter à [Kat92] pour plus de renseignements sur les groupes fuchsien.

Nous rappelons qu'un élément de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est dit parabolique pour un groupe fuchsien s'il est stabilisé par un élément parabolique, c'est-à-dire un élément de trace ± 2 .

Ainsi dans le cas des groupes de Veech d'un origami, les éléments paraboliques sont des rationnels (et même tout l'ensemble $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$).

Cette notion a un aspect bien plus géométrique qui lui vaut son nom.

Il est connu que $SL_2(\mathbb{R})$ agit de manière naturelle sur le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} par homographie.

Cette action a de bonnes propriétés, permettant de dessiner des domaines fondamentaux. Il est par exemple bien connu que le groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$ a pour domaine fondamental la figure suivante, qui nous donne alors la surface modulaire $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$, homéomorphe à une sphère épointée.

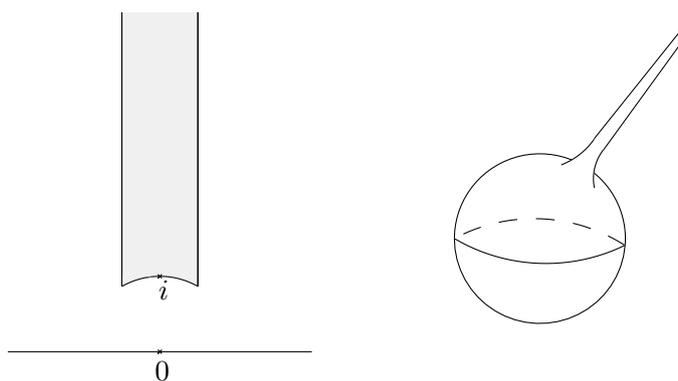


FIGURE 1.17 – Domaine fondamental de $SL_2(\mathbb{Z})$ et surface modulaire.

Le cusp apparaît clairement : il s'agit de cette pointe infinie, mais qui n'empêche pas la surface d'être de volume finie, son volume étant par définition l'aire hyperbolique d'un de ses domaines fondamentaux.

Un groupe de Veech d'un origami étant un sous-groupe d'indice fini de $SL_2(\mathbb{Z})$, nous pouvons obtenir un domaine fondamental en prenant un nombre fini d'images du domaine fondamental précédent de $SL_2(\mathbb{Z})$. La surface obtenue est encore de volume finie, résultat que nous connaissions déjà, un origami étant une surface de Veech.

Par exemple, l'origami suivant

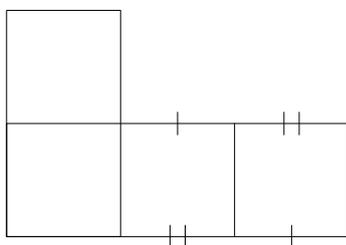


FIGURE 1.18 – Un origami O .

admet pour domaine fondamental le domaine suivant, avec la surface associée :

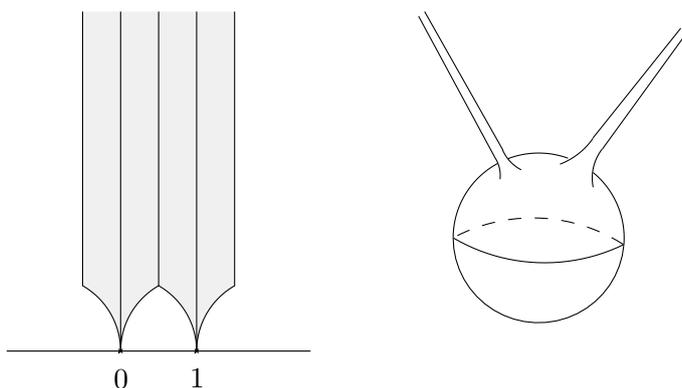


FIGURE 1.19 – Domaine fondamental de $\Gamma(O)$ et la surface associée.

Nous voyons donc que cet origami admet deux cusps.

Considérons une direction $\frac{p}{q}$ sur un origami O . Cette direction peut aussi être vue comme un vecteur $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$. O se décompose naturellement en cylindres dans cette direction. Puisque O est inchangé par un élément $A \in \Gamma(O)$, il est alors clair que dans la direction $\frac{p'}{q'}$, où

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

O se décompose en le même nombre de cylindres.

Ainsi tous les éléments d'un cusp d'un groupe de Veech d'un origami nous donnent une décomposition de cet origami en le même nombre de cylindres. Nous parlerons alors d'un *cusps à d cylindres*.

Il faut cependant noter que la réciproque est fautive : un origami peut avoir deux cusps distincts, dans lesquels l'origami se décompose en le même nombre de cylindre.

C'est le cas de l'exemple de la figure 1.18. En effet, nous voyons clairement qu'il admet deux cusps, l'un contenant la direction 0 et l'autre la direction ∞ . Nous remarquons sur la figure 1.18 que dans la direction horizontale, l'origami se décompose en deux cylindres de tailles différentes, tandis que dans la direction verticale, l'origami se décompose en deux cylindres de même taille.

Cet origami admet donc deux cusps à deux cylindres.

Puisqu'un origami est une surface de Veech, il vérifie l'alternative de Veech 1.1.19. Cependant nous pouvons dans ce cas déterminer directement les directions périodiques.

Proposition 1.2.23 *Soit O un origami et considérons le flot linéaire dans une direction α . Nous avons alors la dichotomie suivante :*

- si α est rationnel, alors le flot linéaire est périodique et l'origami se décompose en cylindres dans cette direction ;
- si α est irrationnel, alors le flot linéaire est uniquement ergodique dans cette direction.

Nous finissons cette partie sur un lemme permettant d'estimer les longueurs des cylindres sur un origami dans une direction rationnelle donnée.

Lemme 1.2.24 *Soit O un origami à n carreaux. Pour chaque direction $\frac{p}{q} \leq 1$, les cylindres dans cette direction sont de longueur $l \leq n \cdot q \cdot \sqrt{2}$ et de hauteur $h \geq \frac{1}{q \cdot \sqrt{2}}$.*

DÉMONSTRATION : Sur le tore, le cylindre dans la direction $\frac{p}{q}$ est de longueur $\sqrt{p^2 + q^2} \leq q \cdot \sqrt{2}$, car $p \leq q$, et de hauteur $\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \geq \frac{1}{q \cdot \sqrt{2}}$.

Ainsi sur l'origami O , puisque ce dernier a n carreaux, un cylindre dans la direction $\frac{p}{q}$ est de longueur au plus $n \cdot q \cdot \sqrt{2}$ et de hauteur au moins $\frac{1}{q \cdot \sqrt{2}}$.

□

Chapitre 2

Résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons énoncer les résultats classiques qui nous seront utiles, et nous allons définir les objets que nous étudierons.

2.1 Origamis infinis

Dans ce travail, nous allons nous intéresser à des origamis infinis, qui seront des revêtements galoisiens d'origamis finis.

Pour clarifier les choses, voici la définition d'origami infini adaptée pour ce travail.

Définition 2.1.1 *Un origami infini O est un revêtement $\pi : X \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ infini dénombrable, connexe, non ramifié sauf éventuellement au-dessus de $0 \in \mathbb{T}^2$.*

Comme dans le cas des origamis finis, il est facile de voir que cette définition est équivalente à la suivante :

Définition 2.1.2 *Un origami infini est une collection dénombrable de carreaux unitaires euclidiens qui sont collés en respectant les règles suivantes :*

- chaque côté droit (resp. haut) d'un carreau est identifié au côté gauche (resp. bas) d'un carreau ;
- la surface topologique obtenue en enlevant les sommets des carreaux est connexe.

Remarquons dans cette définition que nous enlevons les sommets des carreaux. En effet, un tel origami pourra avoir des singularités coniques finies, mais également des singularités coniques infinies. C'est ce qui arrive si après identifications un sommet appartient à une infinité de carreaux. Bien évidemment un tel objet n'est plus une surface topologique : autour d'une

singularité infinie, elle n'est plus isomorphe à \mathbb{R}^2 . Il suffit juste d'omettre ces points lors de la définition.

De la même manière, nous pouvons définir les surfaces de translation d'aire infinie, comme une famille dénombrable de polygones dont les côtés sont identifiés deux à deux par translation.

De manière analogue au cas fini, nous pouvons voir un origami infini comme une classe de conjugaison de couples transitifs (σ, τ) de bijections de \mathbb{Z} , ou encore comme une classe de conjugaison de sous-groupes d'indice infini de \mathbb{F}_2 .

Nous avons donc les différentes définitions suivantes pour un origami infini. Il s'agit :

- d'un revêtement connexe dénombrable du tore \mathbb{T}^2 , ramifié au plus au-dessus de 0 ;
- d'une collection dénombrable de carreaux identiques collés entre eux ;
- d'une surface de translation d'aire infinie dont le réseau des périodes est un sous-réseau de rang 2 de \mathbb{Z}^2 ;
- d'une classe de conjugaison de sous-groupes d'indice infini de \mathbb{F}_2 ;
- d'une classe de conjugaison d'un couple transitif du groupe $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Les notions d'origamis primitifs et réduits restent toujours valables dans le cas des origamis infinis, ainsi que les liens entre les groupes de Veech (du point de vue surface de translation ou origami). De plus, la caractérisation de Schmithüsen reste également vraie, puisque la démonstration n'utilise pas le fait que les sous-groupes sont d'indices finis.

Ces objets sont étudiés attentivement depuis quelques années. Un des premiers exemples étudiés est l'exemple de l'escalier infini, que nous reverrons plus tard, étudié entre autre par Hubert et Weiss ([HW10]), motivé par l'étude de la dynamique sur une surface de translation infinie par Hooper ([Hoo10]).

Cet origami peut se définir par exemple par le couple transitif (σ, τ) de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ suivant :

$$\begin{aligned} \sigma(2n) &= 2n + 1 \quad , \quad \sigma(2n + 1) = 2n \quad \forall n \in \mathbb{Z} ; \\ \tau(2n) &= 2n - 1 \quad , \quad \tau(2n + 1) = 2n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dans un origami infini quelconque, une direction rationnelle peut être d'un des trois types suivants : l'origami infini se décompose en cylindres (on dit alors que cette direction est *complètement périodique*), en bandes, ou alors cette direction est mixte, c'est-à-dire qu'il existe des cylindres et des bandes dans cette direction.

Hubert et Weiss ont alors classifié la dynamique du flot linéaire selon la pente, et ont obtenu entre autres le résultat suivant :

Théorème 2.1.3 *Soit O_∞ l'escalier infini. Alors sur O_∞ :*

- les directions rationnelles $\frac{p}{q}$ avec p ou q pair sont des directions complètement périodiques ;
- les directions rationnelles $\frac{p}{q}$ avec p et q impairs sont des directions à bandes.

Ils ont également déterminé la dynamique dans des directions irrationnelles.

Cet exemple a été généralisé pour les \mathbb{Z} -revêtements d'origamis finis par Hooper et Weiss ([HW09]). Nous redéfinirons la notion de \mathbb{Z} -revêtement qui nous sera utile dans la section suivante.

L'autre question qui nous intéresse est celle des groupes de Veech. Nous pouvons citer les travaux d'Hubert et Schmithüsen ([HS10]), qui étudient les groupes de Veech d'une famille d'origamis infinis, qui sont également des \mathbb{Z} -revêtements d'origamis finis, et qui sont tous infiniment engendrés.

Ils utilisent notamment le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.1.4 *Soient O un origami fini et O_∞ un \mathbb{Z} -revêtement de O . Si O admet une direction à un cylindre, alors le groupe de Veech $\Gamma(O_\infty)$ est soit un réseau, soit il est infiniment engendré.*

Nous finissons cette section sur un autre résultat utilisé pour déterminer des éléments du groupe de Veech d'un origami infini, liant le groupe de Veech aux propriétés dynamiques du flot linéaire.

Lemme 2.1.5 *Soit O un origami infini et soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. S'il existe une direction $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ telle que les directions α et $A.\alpha$ ne sont pas du même type, alors $A \notin \Gamma(O)$.*

Nous utiliserons ce lemme pour déterminer plus loin les groupes de Veech d'un troisième exemple : le modèle du wind-tree. Ce modèle, provenant de la physique des gaz et introduit par le Ehrenfest-Ehrenfest ([EE12, EE59]), nous fournit, pour de bons paramètres, un origami infini obtenu en dépliant une table de billard d'aire infinie. Il fut étudié premièrement par Hubert-Lelièvre-Troubetzkoy ([HLT09]), puis par Delecroix-Hubert-Lelièvre ([DHL11]) et Avila-Hubert ([AH12]), qui fournissent le résultat suivant.

Théorème 2.1.6 *Le flot linéaire est récurrent sur tout origami infini dans le modèle du wind-tree.*

Par contre, le flot linéaire n'est pas ergodique sur un tel modèle, comme nous le prouvent les résultats de Fraczek et Ulcigrai ([FU11]).

2.2 G -revêtements

Voici les objets essentiels qui seront étudiés dans la suite.

Considérons deux origamis O et \tilde{O} et un groupe G . Nous dirons de manière naturelle que \tilde{O} est un G -revêtement de O s'il existe une application $\pi : \tilde{O} \rightarrow O$ qui est un revêtement, ramifié au plus au-dessus des sommets de O , et dont le groupe de revêtement est G .

Par la théorie des revêtements, il existe un lien entre les groupes fondamentaux de O et \tilde{O} . C'est ce point qui nous servira de définition.

Définition 2.2.1 *Soient O un origami et G un groupe. Un origami \tilde{O} est un G -revêtement de O si pour un groupe fondamental H de O , il existe un groupe fondamental \tilde{H} de \tilde{O} tel que \tilde{H} est distingué dans H et $H/\tilde{H} \sim G$.*

Réciproquement, nous pouvons alors définir un G -revêtement comme un morphisme surjectif $\varphi : H \rightarrow G$, de noyau \tilde{H} .

Si G est un groupe fini et O un origami fini, alors \tilde{O} est un origami fini ayant $n \mid |G| \mid$ carreaux, où n est le nombre de carreaux de O . Dans le cas où G est infini, \tilde{O} est alors un origami infini.

Si l'origami de base O est l'origami trivial à un carreau, c'est ce que Zmiaikou appelle un *origami régulier* ([Zmi11]). Nous étendons naturellement cette définition au cas où G est infini.

Nous savons qu'un groupe fondamental H d'un origami O correspond à un carreau de base et qu'un changement de carreau de base va mener à un groupe fondamental conjugué à H .

Ici, si H correspond à un carreau s de O , \tilde{H} correspondra à un relevé de s sur \tilde{O} . Il correspondra même à n'importe quel relevé de s , étant donné que \tilde{H} est distingué dans H . Donc l'origami \tilde{O} correspond à la classe d'équivalence de \tilde{H} , classe finie (autant d'éléments que la classe d'équivalence de H) composée de sous-groupes d'indice fini, si G est fini, d'indice infini sinon.

Si O est un origami à n carreaux, nous savons que ses groupes fondamentaux sont des groupes libres de rang $n + 1$. D'après la définition précédente, il existe un morphisme surjectif de H dans G . Il faut donc que $n + 1$ soit supérieur au nombre minimal de générateurs de G .

D'un point de vue plus combinatoire, pour construire un G -revêtement d'un origami O , il faut d'abord choisir d générateurs $(g_i)_{1 \leq i \leq d}$ de G ainsi que d arêtes $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$ de O , chaque arête correspondant à un générateur. Ensuite il faut prendre une copie de O pour chaque point de G , puis recoller ces copies le long des arêtes choisies : nous collons la copie x à la copie y le long de leurs arêtes a_i si $x.g_i = y$. Il faut donc que les arêtes choisies soient telles que l'origami privé de ces d arêtes reste connexe. Il est clair dans ce

point de vue que si O a n carreaux, il faut clairement que $d \leq n + 1$, sous peine de perdre la connexité de O privé de d arêtes.

Considérons un origami O à n carreaux, et un ensemble $S = (a_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de $n + 1$ arêtes telles que $O \setminus S$ soit connexe. Nous savons déjà qu'à chaque arête a_i nous pouvons associer un unique élément $h_i \in \mathbb{F}_2$, comme défini dans le chapitre précédent. La famille $(h_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ ainsi obtenue est génératrice du groupe fondamental H . Si l'arête a_i est associée à un générateur g_i d'un groupe G , le morphisme $\varphi : H \rightarrow G$ qui définit le G -revêtement est donné par $\varphi(h_i) = g_i$.

Par exemple, prenons pour O l'origami trivial à un carreau T_1 , de groupe fondamental \mathbb{F}_2 , et $G = Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions. Choisissons les générateurs i et j , respectivement associés à l'arête verticale et à l'arête horizontale de T_1 . Alors le revêtement $\tilde{T}_1 = W$ ainsi obtenu est un Q -revêtement de T_1 et il s'agit de l'origami extraordinaire, ou *eierlegende Wollmilchsau*, étudié par Herrlich et Schmithüsen dans ([HS08]) :

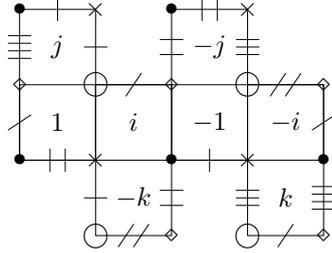


FIGURE 2.1 – L'*eierlegende Wollmilchsau*.

Le groupe fondamental de W est donc obtenu comme noyau du morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{F}_2 &\rightarrow Q \\ x &\mapsto i \\ y &\mapsto j \end{aligned}$$

Si \tilde{O} est un G -revêtement de O , nous pouvons déterminer les couples transitifs de \tilde{O} à partir de ceux de O de la manière suivante. Considérons (σ, τ) couple transitif de O , origami à n carreaux, ainsi que les arêtes $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$ correspondant à des générateurs $(g_i)_{1 \leq i \leq d}$ de G .

Définissons alors les permutations $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ de $\{1, \dots, n\} \times G$ par $\tilde{\sigma}((j, g)) = (\sigma(j), g.g_i)$ (respectivement $\tilde{\tau}((j, g)) = (\tau(j), g.g_i)$) si l'arête a_i correspon-

gant à g_i est l'arête $(j, \sigma(j))$ (respectivement $(j, \tau(j))$), $\tilde{\sigma}((j, g)) = (\sigma(j), g)$ (respectivement $\tilde{\tau}((j, g)) = (\tau(j), g)$) sinon.

2.3 Mots sturmiens

Nous rappelons que lorsque nous parlons de direction d'un flot linéaire, nous parlons de la pente de la droite. Ainsi une direction est un nombre $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Dans cette section, nous voulons coder de manière uniforme une trajectoire du flot linéaire dans une direction rationnelle dans un origami quelconque. Nous allons définir ce codage en nous appuyant sur les travaux effectués pour le codage des trajectoires dans les billards, notamment sur les travaux d'Arnoux ([Arn96]).

Nous rappelons que $\mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ est le groupe libre à deux générateurs, vu comme groupe fondamental du tore épointé, où x est le lacet horizontal et y le lacet vertical. Ainsi \mathbb{F}_2 agit sur chaque origami, où x fait avancer d'un carreau vers la droite et y fait monter d'un carreau vers le haut.

Nous allons associer à chaque rationnel $\frac{p}{q}$ un élément de \mathbb{F}_2 qui code le cylindre dans la direction $\frac{p}{q}$ sur l'origami trivial T_1 . Plus précisément, nous voulons une application injective $\mu : \mathbb{P}^1\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{F}_2$, où $\mathbb{P}^1\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Nous noterons chaque élément de $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ par une fraction $\frac{p}{q}$, avec les conventions $p \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, $0 = \frac{0}{1}$ et $\infty = \frac{1}{0}$.

Prenons donc $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$ rationnel et considérons le cylindre de direction $\frac{p}{q}$ sur T_1 .

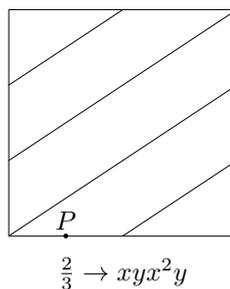


FIGURE 2.2 – Mot associé à la direction $\frac{2}{3}$.

Notons alors w la classe d'équivalence dans \mathbb{F}_2 de l'âme de ce cylindre,

basée en le point P , point de l'arête inférieure du carré représentant T_1 le plus proche du coin inférieur gauche. Nous définissons alors $\mu\left(\frac{p}{q}\right) = w$.

Si maintenant $\frac{p}{q} > 1$ ou $\frac{p}{q} = \infty$, alors bien sûr $0 \leq \frac{q}{p} < 1$. Notons $\gamma_1 \in \text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ défini par $\gamma_1(x) = y$ et $\gamma_1(y) = x$. Nous définissons alors $\mu\left(\frac{p}{q}\right) = \gamma_1\left(\mu\left(\frac{q}{p}\right)\right)$: le mot associé à $\frac{p}{q}$ est obtenu en permutant les x et les y dans le mot associé à $\frac{q}{p}$. Le point P correspondant est sur l'arête gauche, c'est le point de l'âme du cylindre le plus proche du coin inférieur gauche.

Finalement, si $\frac{p}{q} < 0$, $-\frac{p}{q} > 0$, donc en notant $\gamma_2 \in \text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ défini par $\gamma_2(x) = x$ et $\gamma_2(y) = y^{-1}$, nous définissons $\mu\left(\frac{p}{q}\right) = \gamma_2\left(\mu\left(-\frac{p}{q}\right)\right)$: le mot associé à $-\frac{p}{q}$ est obtenu en remplaçant y par y^{-1} dans le mot associé à $\frac{p}{q}$. Le point P correspondant est sur l'arête supérieure, c'est le point de l'âme du cylindre le plus proche du coin supérieur gauche.

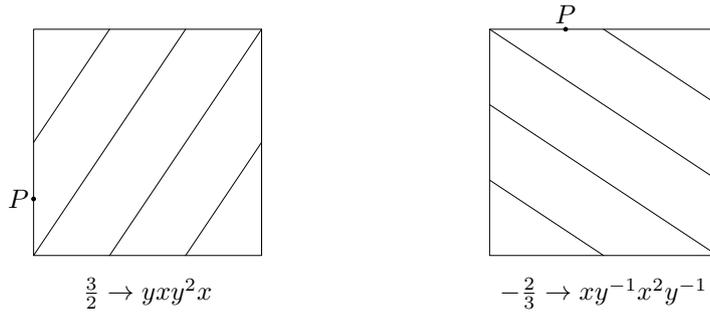


FIGURE 2.3 – Mots associés aux directions $\frac{3}{2}$ et $-\frac{2}{3}$.

Nous obtenons ainsi une application injective $\mu : \mathbb{P}^1\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{F}_2$, et nous associons de plus à chaque $\mu\left(\frac{p}{q}\right)$ un point P de T_1 .

Définition 2.3.1 Si $\frac{p}{q} \in \bar{\mathbb{Q}}$, $\mu\left(\frac{p}{q}\right)$ est appelé mot sturmien associé à $\frac{p}{q}$.

Remarquons que nous avons $\left|\mu\left(\frac{p}{q}\right)\right| = p+q$, $\left|\mu\left(\frac{p}{q}\right)\right|_x = q$, $\left|\mu\left(\frac{p}{q}\right)\right|_y = p$.

Nous pouvons utiliser ces mots sturmiens pour déterminer les longueurs des cylindres, le cas échéant.

Soit par exemple O un origami fini, et notons H un groupe fondamental de O . Prenons une direction $\frac{p}{q}$ et notons w le mot sturmien associé. Puisque H est un sous-groupe d'indice fini de \mathbb{F}_2 , il existe un $k > 0$ minimal tel que $w^k \in H$.

Proposition 2.3.2 *Soient O un origami fini et H un groupe fondamental de O . Sous les notations précédentes, le cylindre dans la direction $\frac{p}{q}$, dont l'âme passe par le point \tilde{P} , qui est le relevé du point P permettant de définir w dans le carreau de base pour H , est d'aire n .*

DÉMONSTRATION : Nous notons l la longueur du cylindre dans la direction $\frac{p}{q}$ sur T_1 , en suivant la direction $\frac{p}{q}$ sur O en partant du point \tilde{P} , nous arrivons sur le point de la même fibre, dans le carreau obtenu en suivant le mot w . En répétant ce processus jusqu'à revenir sur \tilde{P} , ce qui signifie que $w^n \in H$, nous avons parcouru une longueur nl . Puisque le cylindre est d'aire 1 et de même hauteur sur T_1 , le cylindre est d'aire n sur O . \square

Nous en déduisons immédiatement un corollaire nous permettant de déterminer les directions à un cylindre.

Proposition 2.3.3 *Soient O un origami à n carreaux et H un groupe fondamental de O . En notant $w = \mu\left(\frac{p}{q}\right)$, si $w^k \notin H$ pour $1 \leq k < n$ et $w^n \in H$, alors $\frac{p}{q}$ est une direction à un cylindre pour O .*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition précédente, le cylindre dans la direction $\frac{p}{q}$ est d'aire n . Puisque O est un origami à n carreaux, il est également d'aire n . Le cylindre dans la direction $\frac{p}{q}$ recouvre donc intégralement O , et $\frac{p}{q}$ est une direction à un cylindre pour O . \square

Ce résultat reste vrai pour les directions complètement périodiques d'un origami infini, et nous permettent donc de déterminer les aires des cylindres, et donc les longueurs de ces derniers.

2.4 Récurrence du flot linéaire sur un origami infini

Dans leur article ([HLT09]), Hubert, Lelièvre et Troubetzkoy ont étudié un des premiers modèles d'origamis infinis, le modèle du wind-tree. Ils ont en particulier étudié le flot linéaire sur ce modèle, et ont démontré la récurrence de ce dernier dans certains cas, en utilisant le théorème de Patterson-Sullivan ([Sul82]), dont voici une version plus faible qui nous sera utile :

Théorème 2.4.1 (Patterson-Sullivan) *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sous-groupe d'indice fini et soit T un cusp de Γ . Alors pour tout $k > 0$, il existe un sous-ensemble Θ_k de \mathbb{R} de mesure pleine tel que : si $\alpha \in \Theta_k$, alors il existe une suite infinie de rationnels $\frac{p_n}{q_n} \in T$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{k}{q_n^2}.$$

Nous reformulons alors le théorème de Patterson-Sullivan de la manière suivante, adaptée à notre cas : soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels tendant vers 0, il existe $\Theta \subset [0, 1]$ de mesure 1 tel que si $\alpha \in \Theta$, alors il existe une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ dans T tels que pour tout n dans \mathbb{N}

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{q_n^2}.$$

Mais avant cela, nous pouvons nous limiter aux directions comprises entre 0 et 1.

En effet, étudier la direction $\alpha < 0$ sur un origami défini par un couple transitif (σ, τ) revient à étudier la direction $-\alpha$ sur l'origami défini par le couple transitif (σ, τ^{-1}) .

D'autre part, étudier la direction $\alpha > 1$ sur un origami défini par un couple transitif (σ, τ) revient à étudier la direction $\frac{1}{\alpha}$ sur l'origami défini par le couple transitif (τ, σ) .

À partir de maintenant, les directions étudiées seront comprises entre 0 et 1. Nous pouvons alors énoncer le théorème principal.

Théorème 2.4.2 *Soit O_∞ un origami infini vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- O_∞ admet un cusp T de directions complètement périodiques ;
- il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque direction $\frac{p}{q} \in T$, telle que $\frac{p}{q} \leq 1$, les cylindres de O_∞ dans cette direction sont tous de longueur $l \leq c.q$.

Alors pour presque toute direction α , le flot linéaire dans la direction α sur O_∞ est récurrent.

DÉMONSTRATION :

Soient donc O_∞ un origami infini et T un cusp de directions complètement périodiques pour O_∞ . Prenons une suite $(\varepsilon_n)_n$ de réels qui tend vers 0, et considérons l'ensemble Θ obtenu par le théorème de Patterson-Sullivan.

Choisissons une direction $\alpha \in \Theta$ et montrons que presque tout point de O_∞ est récurrent pour le flot linéaire dans la direction α . Pour cela, choisissons une arête verticale I sur O_∞ .

Montrons dans un premier temps que l'application de premier retour du flot linéaire dans la direction α sur I est bien définie pour presque tout point de I , et que de plus cette application est récurrente.

Considérons donc le flot linéaire dans la direction α à partir de l'arête I . D'après le théorème de Sullivan, nous avons une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ dans T vérifiant l'approximation

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{q_n^2}.$$

Pour chaque entier n , nous pouvons découper I en q_n sous-intervalle, correspondant chacun à un cylindre dans la direction $\frac{p_n}{q_n}$ intersectant I , puisque par hypothèse O_∞ se décompose en cylindres dans chaque direction de T . Considérons un de ces sous-intervalles J .

La trajectoire d'un point x de J par le flot linéaire dans la direction α va donc de nouveau couper l'intervalle J , sauf si cette trajectoire sort du cylindre dans la direction $\frac{p_n}{q_n}$ passant par J . Notons C le sous-ensemble de J des points ne revenant pas sur J .

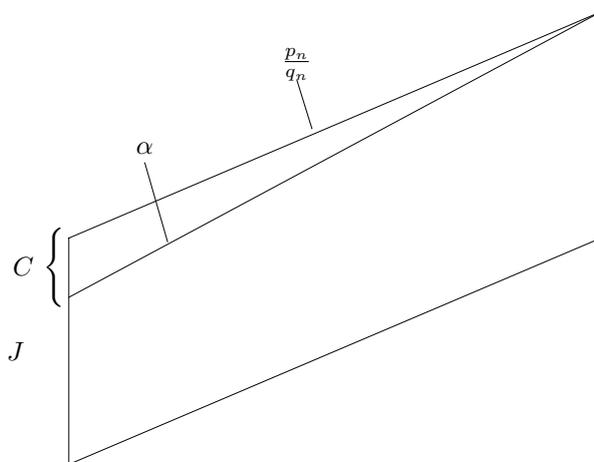


FIGURE 2.4 – Les points de C ne reviennent pas sur J par l'action du flot linéaire dans la direction α .

La mesure de C est donc majorée par $\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right|$ multiplié par la longueur d'un cylindre, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} |C| &\leq \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \cdot c \cdot q_n \\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{q_n^2} \cdot c q_n \\ &\leq c \frac{\varepsilon_n}{q_n} \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse sur la borne de la longueur des cylindres.

Ainsi, puisque nous avons q_n sous-intervalles comme J , la mesure du sous-ensemble B de I des points de revenant pas sur I est majorée par $c \frac{\varepsilon_n}{q_n} \cdot q_n = c \varepsilon_n$. Ceci étant vrai pour tout n , l'ensemble B est de mesure nulle et presque tout point de I revient sur I par l'action du flot linéaire dans la direction α .

Ainsi l'action de premier retour du flot linéaire sur I est bien définie pour presque tout point de I , mais cette application est de plus récurrente. En effet, un point de I revient sur I si sa trajectoire reste dans des cylindres dans la direction $\frac{p_n}{q_n}$, cylindres dont la hauteur est $\frac{1}{\sqrt{p_n^2+q_n^2}}$: presque tout point de I revient arbitrairement proche de lui-même, car il est clair que $p_n \rightarrow +\infty$ et $q_n \rightarrow +\infty$.

Posons maintenant A , ensemble des points de O_∞ dont l'orbite positive sous l'action du flot linéaire dans la direction α rencontre I .

Il est alors clair que presque tout point de A est récurrent pour l'action du flot linéaire dans la direction α , ces points arrivant sur l'arête I . Ceci étant vrai pour n'importe quelle arête verticale, les différents ensembles A recouvrent l'origami O_∞ par minimalité du flot linéaire.

Nous obtenons alors que presque tout point est récurrent sous l'action du flot linéaire dans la direction α , puisqu'il y a un ensemble dénombrable d'arêtes I , donc un ensemble au plus dénombrable d'ensembles A .

□

Chapitre 3

\mathbb{Z}^d -revêtements d'origamis

Nous allons plus particulièrement nous intéresser aux cas où $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ ou $G = \mathbb{Z}^d$. Nous allons ainsi, pour un origami O , créer un \mathbb{Z}^d -revêtement et des $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ -revêtements intermédiaires.

3.1 Domaine fondamental minimal

Il se peut que deux origamis différents aient un revêtement infini commun. Pour différencier ces cas, nous allons définir une "minimalité" de l'origami qui sert de base.

Définition 3.1.1 Soient O un origami et O_∞ un \mathbb{Z}^d - revêtement de O . O est appelé domaine fondamental minimal pour O_∞ s'il n'existe pas d'origami \widehat{O} tel que O est un revêtement de degré au moins 2 de \widehat{O} et O_∞ est revêtement galoisien de \widehat{O} .

Ainsi, si O est un domaine fondamental pour O_∞ , il n'existe pas d'origami \widehat{O} tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & O_\infty & \\ & \swarrow r_\infty & \downarrow \widehat{r}_\infty \\ O & & \widehat{O} \\ & \searrow \widehat{r} & \end{array}$$

où \widehat{r}_∞ est un revêtement galoisien.

Proposition 3.1.2 Soient O un origami et O_∞ un \mathbb{Z}^d - revêtement de O . Il existe un unique domaine fondamental minimal pour O_∞ .

DÉMONSTRATION : Soit O_∞ un \mathbb{Z}^d -revêtement d'un origami O et soient O_1 et O_2 deux domaines fondamentaux minimaux pour O_∞ .

Nous pouvons alors construire une application continue p de O_1 vers O_2 , les fibres des deux revêtements étant identiques. Nous avons donc un revêtement entre O_1 et O_2 d'après la proposition 1.2.5. Or O_1 étant un domaine fondamental minimal pour O_∞ , ce revêtement p est de degré 1 et O_1 et O_2 sont identiques. \square

Il est donc clair que si O est un origami primitif, c'est-à-dire si O n'est pas un revêtement d'un autre origami non trivial, alors O est un domaine fondamental minimal de n'importe lequel de ses revêtements.

3.2 Homologie de l'origami de base

3.2.1 Une autre définition

Soient O un origami et H un groupe fondamental de O . La donnée d'un \mathbb{Z}^d -revêtement de O est donc la donnée du noyau d'un morphisme de rang d $\varphi : H \rightarrow \mathbb{Z}^d$.

Puisque \mathbb{Z}^d est un groupe abélien, nous pouvons de manière équivalente nous intéresser aux morphismes surjectifs $\rho : H_1(O \setminus \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$, où ici $H_1(O \setminus \Sigma, \mathbb{Z})$ est le premier groupe d'homologie de O privé de Σ , l'ensemble des sommets des carreaux. En effet, ce groupe est isomorphe à l'abélianisé de H , groupe fondamental de $O \setminus \Sigma$ basé en un point d'un carreau de O . En se fixant un morphisme $\psi : H \rightarrow H_1(O \setminus \Sigma, \mathbb{Z})$, nous obtenons de manière unique le noyau de φ à partir du noyau de ρ .

Cependant, nous allons plutôt nous intéresser à $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$, premier groupe d'homologie relative. En effet, considérons la forme d'intersection $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(O \setminus \Sigma, \mathbb{Z}) \times H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$, qui est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée calculant l'intersection algébrique (donc en fonction de l'orientation) entre la classe d'homologie absolue d'un lacet dans $O \setminus \Sigma$ et la classe d'homologie d'un lacet de O relativement à Σ .

Grâce à cette forme d'intersection, nous obtenons alors que $H^1(O \setminus \Sigma, \mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe à $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$, donc nous pouvons fixer un isomorphisme entre $H_1(O \setminus \Sigma, \mathbb{Z})$ et $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

Nous sommes donc ramenés à l'étude de morphismes surjectifs

$$\rho : H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^d.$$

Nous pouvons alors étudier les d morphismes coordonnées

$$\rho_i : H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z},$$

qui sont indépendants.

La théorie de l'homologie nous indique alors que pour chaque i , ρ_i est un élément de $H^1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$, premier groupe de cohomologie relative de O par rapport à Σ . Maintenant, grâce à la dualité de Poincaré, nous avons $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ et $H^1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ isomorphes, puisque O est une surface. Nous pouvons donc voir les ρ_i comme des éléments de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

Ainsi la donnée d'un \mathbb{Z}^d -revêtement de O nous amène à la donnée de d éléments indépendants de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

La réciproque est alors vraie. En effet, la donnée de d morphismes de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ dans \mathbb{Z} indépendants nous fournit un morphisme

$$\rho : H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda$$

avec $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ réseau de rang d . Le noyau de ρ nous donnera donc bien un \mathbb{Z}^d -revêtement de O .

Nous utiliserons alors la définition suivante :

Définition 3.2.1 *Un \mathbb{Z}^d -revêtement d'un origami O est la donnée de d éléments indépendants de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.*

Remarque 3.2.2 *Si les d éléments de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ ne forment pas une famille libre, nous obtenons alors un $\mathbb{Z}^{d'}$ -revêtements, avec $d' < d$ le rang de la famille.*

3.2.2 Étude de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$

Considérons donc un origami O et notons Σ l'ensemble de ses sommets. Nous nous intéressons au groupe $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$. Si O est un origami à k carreaux, nous savons déjà que $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de rang $k + 1$. Il nous suffit donc de trouver $k + 1$ générateurs de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

Chaque arête de O va maintenant nous fournir un élément de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$: en effet, chaque arête rejoint deux éléments de Σ et définit donc un élément de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$. Il nous suffit donc de choisir $k + 1$ arêtes qui donneront des éléments indépendants pour obtenir une famille génératrice de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

Les relations dans $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ sont données par la figure suivante :

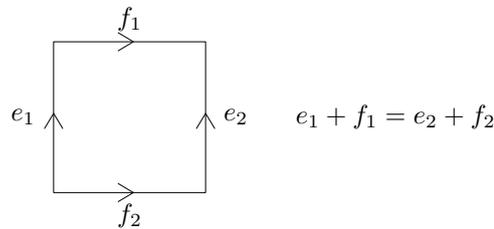


FIGURE 3.1 – Relations de l'homologie.

Considérons par exemple l'origami O de la figure 3.2. Nous choisissons les arêtes en gras, et nous nommons e_1, e_2, f_1, f_2 les éléments de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ correspondants.

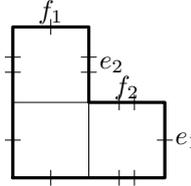


FIGURE 3.2 – Choix des générateurs de l'homologie.

Ces quatre éléments sont indépendants dans $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$, ils engendrent donc le groupe dans son intégralité.

Dans la suite, e_i désignera un élément de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ correspondant à une arête verticale de O et f_j un élément de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ correspondant à une arête horizontale.

3.3 Équivalence des \mathbb{Z}^d -revêtements

Considérons un \mathbb{Z}^d -revêtement d'un origami O , c'est-à-dire d éléments indépendants de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

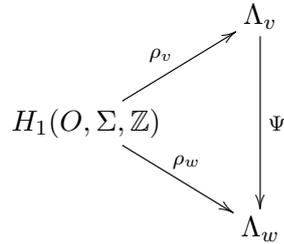
À partir de maintenant, nous fixons une famille génératrice de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$, sous la forme $(e_1, \dots, e_j, f_1, \dots, f_{k-j})$. En écrivant les d éléments indépendants dans cette famille et sous la forme d'une matrice, nous obtenons alors une définition purement algébrique d'un \mathbb{Z}^d -revêtement de O .

Définition 3.3.1 *Un \mathbb{Z}^d -revêtement d'un origami O à k carreaux, $d \leq k+1$, est la donnée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{d, k+1}(\mathbb{Z})$ de rang d .*

Cette matrice peut être vue comme la matrice du morphisme de groupes abéliens (donc morphisme de \mathbb{Z} -modules) de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ dans un réseau Λ de rang d . Nous devons maintenant voir quand deux matrices déterminent le même \mathbb{Z}^d -revêtement.

Considérons M_v et M_w deux matrices de revêtement d'un origami O . Nous avons donc deux réseaux Λ_v et Λ_w de rang d et deux applications ρ_v et ρ_w de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ à valeurs dans Λ_v et Λ_w respectivement.

Ces deux \mathbb{Z}^d -revêtements sont identiques si et seulement si $\ker \rho_v = \ker \rho_w$. Alors dans ce cas il est clair qu'il existe un isomorphisme Ψ tel que le diagramme suivant soit commutatif :



En nous plaçant d'un point de vue matriciel, nous obtenons alors la proposition suivante :

Proposition 3.3.2 *Deux matrices M_v et M_w de \mathbb{Z}^d - revêtement d'un origami définissent le même revêtement si et seulement si il existe une matrice $U \in \text{GL}_d(\mathbb{Q})$ telle que*

$$U.M_v = M_w.$$

Remarque 3.3.3 *Nous pouvons préciser les coefficients de U à partir des réseaux Λ_v et Λ_w .*

Considérons par exemple l'origami O ci-dessous

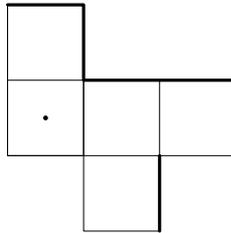


FIGURE 3.3 – Un origami O et un carreau de base.

où les côtés opposés sont identifiés. En se basant en le carreau pointé, nous avons comme groupe fondamental

$$H = \langle x^3, y^2, yxy^{-1}, xy^2x^{-1}, xy^{-1}xyx^{-1}, x^2yx^{-2} \rangle.$$

Cette présentation du groupe fondamental provient de la méthode vue au chapitre 1 : nous choisissons six arêtes de O qui ne le déconnectent pas (car O a cinq carreaux) et pour chacune de ces arêtes, nous prenons le mot de \mathbb{F}_2 qui passe une unique fois par cette arête et aucune fois par les cinq

autres. Ces arêtes sont en gras sur la figure.

Construisons par exemple un \mathbb{Z}^4 -revêtement de O , c'est-à-dire déterminons un sous-groupe distingué H_∞ de H tel que H/H_∞ soit isomorphe à \mathbb{Z}^4 .

D'après ce que nous avons fait précédemment, cela revient à choisir une matrice de $\mathcal{M}_{4,6}(\mathbb{Z})$, une fois qu'une famille génératrice de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ a été fixée.

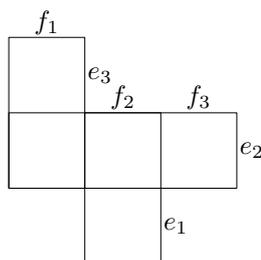


FIGURE 3.4 – Générateurs de l'homologie de O .

Fixons alors les générateurs comme sur la figure précédente, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux arêtes utilisées pour définir H . Dans ce cas, nous avons $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) = \langle e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3 \rangle$.

Nous obtenons un morphisme d'abélianisation $ab : H \rightarrow H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ défini par :

$$\begin{array}{lll} xy^{-1}xyx^{-1} & \mapsto & e_1 \quad y^2 \quad \mapsto \quad f_1 \\ x^3 & \mapsto & e_2 \quad xy^2x^{-1} \quad \mapsto \quad f_2 \\ yxy^{-1} & \mapsto & e_3 \quad x^2yx^{-2} \quad \mapsto \quad f_3 \end{array}$$

Ce morphisme est construit très simplement : chaque générateur de H et de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ est associé à une des six arêtes de O choisies, et ab relie les deux générateurs de H et $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ correspondants à la même arête.

Considérons maintenant la matrice

$$M_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice d'un morphisme $\rho : H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^4$.

Cette matrice de rang 4 nous définit donc un \mathbb{Z}^4 -revêtement O_∞^1 de O , revêtement dont nous retrouvons le groupe fondamental H_∞ (basé en un relevé du point de base servant à définir H) comme noyau du morphisme $\rho \circ ab$.

Si nous considérons maintenant la matrice

$$M_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cette matrice définit un autre \mathbb{Z}^4 -revêtement O_∞^2 . Cependant, nous avons la relation $M_v = U.M_w$, où

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi ces deux matrices définissent le même revêtement, $O_\infty^1 = O_\infty^2$, revêtement que nous pouvons voir par le recollage suivant :

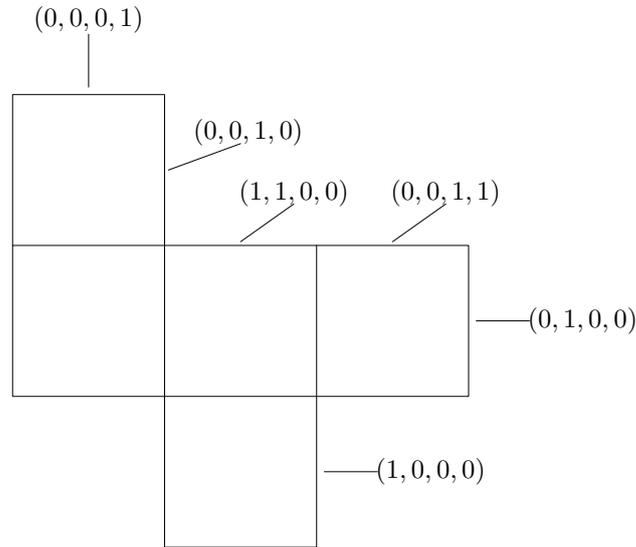


FIGURE 3.5 – Un \mathbb{Z}^4 -revêtement de O .

3.4 Groupe de Veech d'un \mathbb{Z}^d -revêtement

À partir de maintenant, notons $\bar{\mathbb{N}}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{\infty\}$.

Considérons un origami O , H un de ses groupes fondamentaux de rang k et un \mathbb{Z}^d -revêtement O_∞ (avec $d \leq k$). Nous avons donc un morphisme surjectif $\varphi_\infty : H \rightarrow \mathbb{Z}^d$, et étant données les différentes projections canoniques $\pi_n^d : \mathbb{Z}^d \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ pour $n \geq 2$, nous avons également des morphismes surjectifs $\varphi_n : H \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$.

Notons pour $n \geq 2$ $H_n = \ker(\varphi_n)$, O_n les origamis associés (qui sont donc des $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ -revêtements de O) et $H_\infty = \ker(\varphi_\infty)$. Nous notons également que $O_1 = O$ et $H_1 = H$.

Ces noyaux sont liés entre eux de la manière suivante.

Proposition 3.4.1 *Soit O un origami et soient les groupes H_n , $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$, comme ci-dessus. Alors*

$$H_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n.$$

DÉMONSTRATION : Clair en considérant, pour $n \geq 2$, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi_\infty} & \mathbb{Z}^d \\ & \searrow \varphi_n & \downarrow \pi_n^d \\ & & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d \end{array}$$

□

La notion de domaine fondamental minimal, vue précédemment, va se transmettre aux revêtements intermédiaires.

Lemme 3.4.2 *Soient O et O_n , $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$, comme précédemment. Si O est un domaine fondamental minimal pour O_∞ , alors pour $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$, $H = \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_n)$.*

DÉMONSTRATION : Nous savons déjà par définition que pour $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$, H_n est distingué dans H . Ainsi, $H \subset \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_n)$ pour $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$.

De plus, puisque O est un domaine fondamental minimal pour O_∞ , cela signifie en termes de groupes fondamentaux qu'il n'existe pas de groupes \hat{H} contenant H tel que H_∞ soit distingué dans \hat{H} . H est donc le plus grand sous-groupe de \mathbb{F}_2 dans lequel H_∞ est distingué, donc $H = \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_\infty)$.

Nous avons donc $H = \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_\infty) \subset \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_n)$, pour $n \geq 2$.

Soit $w \notin H$. Alors $wH_\infty w^{-1} \not\subset H$. En effet, en supposant le contraire, nous avons alors $\varphi_\infty(wH_\infty w^{-1}) = \varphi_\infty(H_\infty) = \{0\}$. Donc $wH_\infty w^{-1} \subset H_\infty$: absurde car $w \notin H = \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_\infty)$.

Soient donc $w \notin H$ et $h_\infty \in H_\infty \subset H_n$ tel que $wh_\infty w^{-1} \notin H$, donc $wh_\infty w^{-1} \notin H_n$, donc $w \notin \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_n)$.

Ainsi $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$, $H = \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_n)$. □

Considérons maintenant un lemme, que nous pouvons décrire comme étant une seconde caractérisation de Schmithüsen.

Soit H sous-groupe de \mathbb{F}_2 et choisissons $ab_\infty : H \rightarrow H_1(0, \Sigma, \mathbb{Z})$ un morphisme d'abélianisation.

Notons $\pi_n^k : H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ la projection canonique obtenue en changeant l'anneau des coefficients et posons, pour $n \geq 2$, $ab_n = \pi_n^k \circ ab_\infty$. Fixons une famille génératrice de l'homologie relative et notons

$$\beta_\infty : \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H) \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{Z})$$

le morphisme induit par ab_∞ , c'est-à-dire que pour $\gamma \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\gamma} & H \\ \downarrow ab_\infty & & \downarrow ab_\infty \\ H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta_\infty(\gamma)} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Un tel diagramme existe pour chaque $\gamma \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H)$ car $N_\infty = \ker(ab_\infty)$ est un sous-groupe caractéristique de H . Nous avons également $\beta_n : \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H) \rightarrow \text{Aut}(H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$, induit par ab_n .

Lemme 3.4.3 *Soit K sous-groupe de H tel que $H = \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(K)$, alors*

$$\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(K) = \beta_\infty^{-1}(\text{Stab}_{\mathcal{G}_\infty}(ab_\infty(K))),$$

où $\mathcal{G}_\infty = \beta_\infty(\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H))$.

DÉMONSTRATION :

Notons $\Gamma(H) = \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H)$. Considérons $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(H)}(K)$, c'est-à-dire $\gamma \in \Gamma(H)$ tel que $\gamma(K) = K$. Donc d'après le diagramme commutatif précédent, nous avons $\beta_\infty(\gamma)(ab_\infty(K)) = ab_\infty(\gamma(K)) = ab_\infty(K)$, donc $\beta_\infty(\gamma) \in \text{Stab}_{\mathcal{G}_\infty}(ab_\infty(K))$. Ainsi $\text{Stab}_{\Gamma(H)}(K) = \beta_\infty^{-1}(\text{Stab}_{\mathcal{G}_\infty}(ab_\infty(K)))$.

D'autre part, puisque $H = \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(K)$, nous avons

$$\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(K) \subset \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H),$$

et dans ce cas nous avons $\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(K) = \text{Stab}_{\Gamma(H)}(K)$.

Ainsi $\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(K) = \beta_\infty^{-1}(\text{Stab}_{G_\infty}(ab_\infty(K)))$.

□

Ce lemme reste clairement vrai en remplaçant ab_∞ et $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ par ab_n et $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Nous pouvons donc maintenant étudier les groupes fondamentaux H_n , $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$, de nos revêtements à travers l'abélianisation.

Il existe des morphismes surjectifs $\rho_\infty : H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ et $\rho_n : H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ pour $n \geq 1$ tels que, pour $m \mid n$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} H & \xrightarrow{ab_\infty} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_n^k} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{n,m}^k} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ & \searrow \varphi_\infty & \downarrow \rho_\infty & & \downarrow \rho_n & & \downarrow \rho_m \\ & & \mathbb{Z}^d & \xrightarrow{\pi_n^d} & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d & \xrightarrow{\pi_{n,m}^d} & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d \end{array}$$

où π_n^l et $\pi_{n,m}^l$, pour $m \mid n$, sont les projections canoniques.

Posons $\overline{H}_\infty = ab_\infty(H_\infty)$ et pour $n \geq 2$, $\overline{H}_n = ab_n(H_n)$.

Lemme 3.4.4 1. $\overline{H}_\infty = \ker(\rho_\infty)$ et pour $n \geq 1$, $\overline{H}_n = \ker(\rho_n)$.

2. Pour $n \geq 1$, $\pi_n^k(\overline{H}_\infty) = \overline{H}_n$ et si $m \mid n$, $\pi_{n,m}^k(\overline{H}_n) = \overline{H}_m$.

DÉMONSTRATION :

1. Nous avons $\overline{H}_\infty = ab_\infty(H_\infty) = ab_\infty(\ker(\varphi_\infty))$. Or $\varphi_\infty = \rho_\infty \circ ab_\infty$, d'où $\ker(\varphi_\infty) = \ker(\rho_\infty \circ ab_\infty) = ab_\infty^{-1}(\ker(\rho_\infty))$. Donc

$$\overline{H}_\infty = ab_\infty(ab_\infty^{-1}(\ker(\rho_\infty))) = \ker(\rho_\infty),$$

ab_∞ étant surjective.

L'autre résultat s'obtient de la même manière.

2. – Soit $x \in \overline{H}_\infty$.

D'après le diagramme commutatif, $\rho_n \circ \pi_n^k(x) = \pi_n^d \circ \rho_\infty(x) = 0$, car $x \in \overline{H}_\infty = \ker(\rho_\infty)$. Ainsi $\pi_n^k(x) \in \ker(\rho_n) = \overline{H}_n$, et $\pi_n^k(\overline{H}_\infty) \subset \overline{H}_n$.

– Soit $y \in \overline{H}_n$.

Soit $x \in (\pi_n^k)^{-1}(\{y\})$. Alors $\pi_n^d \circ \rho_\infty(x) = \rho_n \circ \pi_n^k(x) = \rho_n(y) = 0$, car $y \in \overline{H}_n = \ker(\rho_n)$. Ainsi $\rho_\infty(x) \in \ker(\pi_n^d) = n \cdot \mathbb{Z}^d$. Soit donc $\xi \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\rho_\infty(x) = n \cdot \xi$.

Puisque ρ_∞ est un morphisme surjectif, il existe $\zeta \in H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ tel que $\rho_\infty(\zeta) = \xi$. Ainsi $\rho_\infty(x - n \cdot \zeta) = n \cdot (\xi - \xi) = 0$, donc $x - n \cdot \zeta \in \overline{H}_\infty$.

D'autre part, $\pi_n^k(x - n \cdot \zeta) = \pi_n^k(x) = y$, donc $y \in \pi_n^k(\overline{H}_\infty)$.

– Si $m \mid n$, $\pi_{n,m}^k(\overline{H}_n) = \pi_{n,m}^k(\pi_n^k(\overline{H}_\infty)) = \pi_m^k(\overline{H}_\infty) = \overline{H}_m$.

□

Voici maintenant le théorème principal de cette section.

Théorème 3.4.5 *Soient O un origami fini de domaine fondamental H , O_∞ un \mathbb{Z}^d -revêtement de O de groupe fondamental H_∞ et O_n les $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ -revêtements intermédiaires de groupes fondamentaux H_n , $n \geq 2$.*

Supposons que O soit un domaine fondamental minimal pour O_∞ . Alors pour tout $n \geq 1$,

1. $\Gamma(O_\infty) \subset \Gamma(O_n) \subset \Gamma(O)$;
2. pour $m \in \mathbb{N}$, si $m \mid n$ alors $\Gamma(O_n) \subset \Gamma(O_m)$;
3. $\Gamma(O_\infty) = \bigcap_{n \geq 1} \Gamma(O_n)$.

DÉMONSTRATION :

Soient O , O_n , $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$ comme précédemment, avec O domaine fondamental minimal pour O_∞ .

D'après le lemme 3.4.2, nous savons que $H = \text{Norm}_{\mathbb{F}_2}(H_n)$, avec $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$. Donc $\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_n) \subset \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H)$, et ainsi, d'après la caractérisation de Schmithüsen (théorème 1.2.19), nous avons alors $\Gamma(O_n) \subset \Gamma(O)$, $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$.

Nous sommes dans les hypothèses du lemme 3.4.3, nous avons donc pour $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$

$$\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_n) = \beta_\infty^{-1}(\text{Stab}_{\mathcal{G}_\infty}(\overline{H}_n)).$$

Soit $\gamma \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H)$, nous avons d'après les diagrammes commutatifs précédents un diagramme regroupant toutes les informations nécessaires :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H & \xrightarrow{ab_\infty} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_n^k} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{n,m}^k} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\
 \uparrow \gamma & & \uparrow \beta_\infty(\gamma) & & \uparrow \beta_n(\gamma) & & \uparrow \beta_m(\gamma) \\
 H & \xrightarrow{ab_\infty} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_n^k} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_{n,m}^k} & H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\
 & \searrow \varphi_\infty & \downarrow \rho_\infty & & \downarrow \rho_n & & \downarrow \rho_m \\
 & & \mathbb{Z}^d & \xrightarrow{\pi_n^d} & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d & \xrightarrow{\pi_{n,m}^d} & (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d
 \end{array}$$

Considérons un élément $\gamma \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H)$ tel que $\gamma(H_\infty) = H_\infty$. D'après le lemme 3.4.3, nous avons alors $\beta_\infty(\gamma)(\overline{H}_\infty) = \overline{H}_\infty$.

Selon le diagramme commutatif, $\pi_n^k \circ \beta_\infty(\gamma)(\overline{H}_\infty) = \beta_n(\gamma) \circ \pi_n^k(\overline{H}_\infty)$, d'où

$$\pi_n^k(\overline{H}_\infty) = \beta_n(\gamma) \circ \pi_n^k(\overline{H}_\infty).$$

Selon le lemme 3.4.4, cette égalité devient $\beta_n(\gamma)(\overline{H}_n) = \overline{H}_n$, donc de nouveau d'après le lemme 3.4.3, $\gamma(H_n) = H_n$. Ainsi

$$\text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_\infty) \subset \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_n),$$

donc d'après la caractérisation de Schmithüsen, pour $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$, $\Gamma(O_\infty) \subset \Gamma(O_n)$.

Le second point s'obtient de manière analogue, toujours grâce au diagramme commutatif et aux lemmes 3.4.3 et 3.4.4.

Le dernier point en découle également. D'après ce que nous venons de faire, nous avons $\Gamma(O_\infty) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(O_n)$. L'inclusion réciproque s'obtient en utilisant la proposition 3.4.1, donnant $H_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$, et donc

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_n) \subset \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n\right) = \text{Stab}_{\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)}(H_\infty),$$

d'où l'inclusion réciproque selon la caractérisation de Schmithüsen. \square

À partir de maintenant, nous ne considérerons que des origamis O et des revêtements pour lesquels O est un domaine fondamental minimal. Dans le cas contraire, il suffit de choisir le bon domaine fondamental minimal.

Ainsi, pour O origami et O_∞ \mathbb{Z}^d -revêtement de O , nous avons toujours $\Gamma(O_\infty) \subset \Gamma(O)$. Nous pouvons alors voir de quel sous-groupe il s'agit grâce à l'action suivante.

Proposition 3.4.6 *Soit O un origami. Son groupe de Veech $\Gamma(O)$ agit sur l'ensemble des \mathbb{Z}^d -revêtements de O .*

DÉMONSTRATION : Soient O un origami et M une matrice de \mathbb{Z}^d -revêtement de O . Puisque $\Gamma(O)$ laisse fixe O et Σ , $\Gamma(O)$ agit naturellement sur $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$. Si une famille génératrice de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ est fixée, cette action se traduit par une matrice $V \in \text{GL}_k(\mathbb{Z})$, où k est le rang de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

Le revêtement obtenu a alors pour matrice $M.V$, qui est de rang d , et elle définit donc bien un \mathbb{Z}^d -revêtement de O . \square

Remarque 3.4.7 *Dans ce cas, le groupe de Veech d'un \mathbb{Z}^d -revêtement O_∞ peut être vu comme le stabilisateur de O_∞ sous l'action précédente de $\Gamma(O)$.*

Nous pouvons directement obtenir un premier type d'exemple.

Corollaire 3.4.8 *Soient O un origami à $k - 1$ carreaux, O_∞ un \mathbb{Z}^k -revêtement de O et, pour $n \geq 2$, O_n les revêtements intermédiaires. Alors pour $n \in \overline{\mathbb{N}}_{\geq 2}$, $\Gamma(O_n) = \Gamma(O)$.*

DÉMONSTRATION : Soit O un origami à $k - 1$ carreaux.

Si O_∞ est un revêtement de dimension maximale k , il n'existe pas d'origami plus petit que O dont O_∞ est un revêtement galoisien. En effet, pour construire un \mathbb{Z}^k -revêtement, il faut que le rang de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ soit supérieur à k , ce qu'il n'est plus vrai avec un origami plus petit. Ainsi O est un domaine fondamental minimal pour O_∞ , donc selon le théorème précédent, $\Gamma(O_\infty) \subset \Gamma(O_n) \subset \Gamma(O)$, pour $n \geq 2$.

Notons M la matrice du \mathbb{Z}^k -revêtement O_∞ . C'est donc une matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{Z})$ de rang k : elle est donc inversible dans \mathbb{Q} et le revêtement O_∞ peut être vu comme le revêtement de matrice I_k .

Ainsi il n'existe qu'un seul \mathbb{Z}^k -revêtement de O , donc son groupe de Veech $\Gamma(O_\infty)$, qui est le stabilisateur de O_∞ pour l'action précédente, est $\Gamma(O)$. \square

3.5 \mathbb{Z}^d -revêtements quasi-récurrents

3.5.1 Définitions

Nous savons déjà que les directions rationnelles peuvent être de trois types différents pour un origami infini, donc en particulier dans le cas des \mathbb{Z}^d -revêtements.

Cependant, nous ne pouvons en général rien dire de plus sur les propriétés dynamiques des directions irrationnelles. Pour cela, nous allons introduire une notion supplémentaire dans les revêtements étudiés.

Considérons par exemple l'escalier infini (figure 3.7) en page suivante.

Nous pouvons le voir comme un \mathbb{Z} -revêtement de l'origami O de la figure suivante :

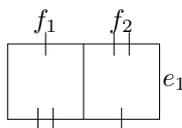


FIGURE 3.6 – Un origami servant de base à l'escalier infini.

Ici la matrice du revêtement dans la famille génératrice e_1, f_1, f_2 de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

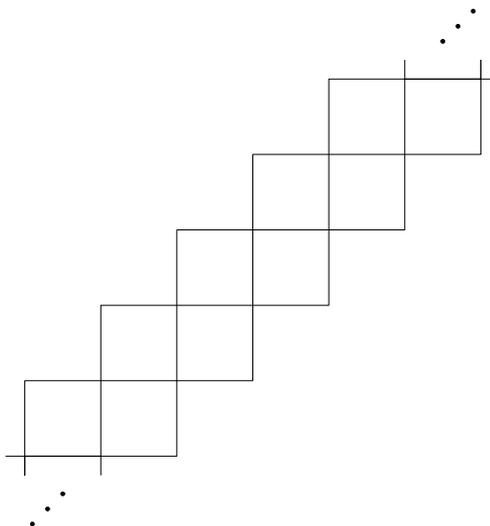


FIGURE 3.7 – Un origami infini classique : l’escalier infini.

Dans une direction non horizontale, nous avons autant de chance de traverser l’arête f_1 et donc de ”descendre d’un étage” que de traverser l’arête f_2 et de ”monter d’un étage”. Cette notion a été généralisée pour les \mathbb{Z} -revêtements par Hooper et Weiss ([HW09]), grâce notamment à l’holonomie d’un élément de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

Nous allons maintenant généraliser cette notion aux \mathbb{Z}^d -revêtements.

Définition 3.5.1 Soit O un origami et soient d éléments indépendants w_1, \dots, w_d de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ définissant un \mathbb{Z}^d -revêtement O_∞ . O_∞ est dit quasi-récurrent si $w_i \in \ker(\text{hol}), 1 \leq i \leq d$.

Définition 3.5.2 Soit O un origami à $k - 1$ carreaux et soit M la matrice d’un \mathbb{Z}^d -revêtement O_∞ de O . O_∞ est dit quasi-récurrent s’il existe $1 \leq j \leq k - 1$ tel que

$$\sum_{i=1}^j M_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=j+1}^k M_i = 0.$$

Nous rappelons que la famille génératrice de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ est fixée et est de la forme $(e_1, \dots, e_j, f_1, \dots, f_{k-j})$. La matrice M est écrite dans cette famille génératrice, donc les j premières colonnes correspondent aux arêtes verticales et les autres colonnes aux arêtes horizontales.

Ces deux définitions sont bien évidemment équivalentes. Nous avons toujours $\text{hol}(e_i) = (0, 1)$ et $\text{hol}(f_j) = (1, 0)$.

Ainsi si $w = p_1e_1 + \dots + p_je_j + q_{j+1}f_1 + \dots + q_kf_{k-j}$, alors

$$\text{hol}(w) = (q_{j+1} + \dots + q_k, p_1 + \dots + p_j).$$

$\text{hol}(w_i)$ représente donc la somme des j premiers éléments de la i -ème ligne de M et des $k - j$ derniers éléments de cette même ligne.

Puisque $\ker(\text{hol})$ est un module de rang $k - 2$ (si O a $k - 1$ carreaux), la dimension maximale d'un revêtement quasi-récurrent est $k - 2$.

3.5.2 Récurrence du flot linéaire

Voyons maintenant tout l'intérêt de ces revêtements quasi-récurrents. Nous allons montrer que ces revêtements satisfont les hypothèses du théorème 2.4.2. Ce résultat généralise le résultat obtenu par Hubert et Schmithüsen ([HS10]) sur les \mathbb{Z} -revêtements.

Théorème 3.5.3 *Soient O un origami et O_∞ un \mathbb{Z}^d -revêtement quasi-récurrent de O . Si α est une direction rationnelle dans laquelle O admet un seul cylindre, alors α est une direction complètement périodique pour O_∞ .*

DÉMONSTRATION : Notons M la matrice du \mathbb{Z}^d -revêtement quasi-récurrent dans la famille génératrice $(e_1, \dots, e_j, f_1, \dots, f_{k-j})$ de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

Notons $\alpha = \frac{p}{q}$ la direction rationnelle dans laquelle O admet un seul cylindre, de longueur l . Ce cylindre va rencontrer chaque arête verticale q fois et chaque arête horizontale p fois, donc notamment le cylindre va rencontrer q fois chaque arête e_i et p fois chaque arête f_i .

Partons d'un carré de O_∞ dans la copie 0 de O et suivons la direction α . Après avoir parcouru un chemin de longueur l , nous nous retrouvons dans la copie $q\rho(e_1 + \dots + e_j) + p\rho(f_1 + \dots + f_{k-j})$.

Or nous avons

$$q\rho(e_1 + \dots + e_j) + p\rho(f_1 + \dots + f_{k-j}) = q \cdot \sum_{i=1}^j M_i + p \cdot \sum_{i=j+1}^k M_i = 0.$$

Ainsi O_∞ se décompose en cylindres, tous de longueurs l , dans la direction α . \square

Nous savons que tout le cusp $\Gamma(O).\alpha$ va être composé de directions à un cylindre pour O et est dense dans \mathbb{S}^1 .

Ainsi dans les hypothèses de la proposition précédente, O_∞ admet un cusp de directions complètement périodiques. Nous obtenons également que tous les cylindres dans une direction complètement périodique de O_∞ sont de même longueur que ceux de O dans la même direction.

Si O est donc un origami à n carreaux possédant un cusp de directions à un cylindre, et si O_∞ est un \mathbb{Z}^d -revêtement de O , alors O_∞ admet un cusp de directions complètement périodiques, et pour ces directions $\frac{p}{q} \leq 1$, nous avons que les cylindres de O_∞ dans cette direction sont de longueur au plus $c.q$, avec $c = n\sqrt{2}$ d'après le lemme 1.2.24 et le théorème précédent.

Nous sommes donc dans les hypothèses du théorème 2.4.2, d'où :

Théorème 3.5.4 *Soit O un origami fini admettant une direction à un cylindre. Alors le flot linéaire est récurrent sur n'importe quel \mathbb{Z}^d -revêtement quasi-récurrent de O .*

3.5.3 Groupe de Veech

Les résultats de la section 3.4 restent bien évidemment vrais pour les \mathbb{Z}^d -revêtements quasi-récurrents.

Nous avons par contre un résultat supplémentaire pour ces revêtements.

Proposition 3.5.5 *Soit O un origami. Son groupe de Veech $\Gamma(O)$ agit sur l'ensemble des \mathbb{Z}^d -revêtements quasi-récurrents de O .*

DÉMONSTRATION : Soient O un origami et soient (w_1, \dots, w_d) des éléments indépendants de $\ker(\text{hol})$ définissant un \mathbb{Z}^d -revêtement quasi-récurrent O_∞ de O .

Soit $A \in \Gamma(O)$, et notons ψ_A son action sur $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$. Alors ψ_A est un isomorphisme de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ qui laisse stable $\ker(\text{hol})$. Ainsi l'origami $A.O_\infty$ est un \mathbb{Z}^d -revêtement de O , défini par d éléments indépendants $(\psi_A(w_1), \dots, \psi_A(w_d))$ de $\ker(\text{hol})$; ce revêtement est donc quasi-récurrent. \square

Nous pouvons alors construire facilement des exemples d'origamis infinis sur lesquels le flot linéaire est récurrent et dont le groupe de Veech est un réseau.

Théorème 3.5.6 *Soit O un origami à $k - 1$ carreaux et soit O_∞ un \mathbb{Z}^{k-2} -revêtement quasi-récurrent de O .*

Alors $\Gamma(O_\infty) = \Gamma(O)$.

DÉMONSTRATION : Soit M une matrice du revêtement O_∞ . Donc $M \in \mathcal{M}_{k-2, k}(\mathbb{Z})$, est de rang $k - 2$ et il existe j tel que

$$\sum_{i=1}^j M_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=j+1}^k M_i = 0.$$

Ainsi la matrice obtenue de M en supprimant la j -ème et la dernière colonne de M est une matrice U inversible. Dans ce cas, nous avons

$$U^{-1}.M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & & 0 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et chaque revêtement est équivalent à celui-ci.

Il n'existe alors qu'un seul \mathbb{Z}^{k-2} -revêtement quasi-récurrent de O , où $k-2$ est le rang du module $\ker(\text{hol})$, donc $\Gamma(O_\infty) = \Gamma(O)$ d'après la proposition précédente. \square

3.6 Exemples

3.6.1 Les origamis T_n

Nous allons construire un \mathbb{Z} -revêtement de l'origami trivial, et tous les revêtements intermédiaires. L'un d'entre eux nous sera utile plus loin.

Considérons le morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \varphi_\infty : \mathbb{F}_2 &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 1 \\ y &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Son noyau H_∞ définit un origami infini T_∞ , que nous pouvons définir également par l'élément $e + f \in H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$, où e et f sont les éléments notés sur le dessin ci-dessous :

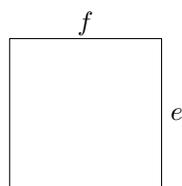


FIGURE 3.8 – Générateurs de l'homologie de T_1 .

Nous obtenons ainsi l'origami T_∞ de la figure 3.9, où les recollements sont indiqués par les nombres sur les arêtes. T_∞ est donc un cylindre infini avec des points marqués.

	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	

FIGURE 3.9 – L'origami T_∞ .

Pour $n \geq 2$, nous avons l'origami T_n , défini par le noyau H_n du morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{F}_2 &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x &\mapsto 1 \\ y &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi définir T_n par un couple transitif (σ_n, τ_n) , avec $\sigma_n = \tau_n = (12\dots n)$. Les origamis T_n sont tous des tores.

D'autre part, pour $w \in \mathbb{F}_2$, $w = \prod_{i=1}^n z_i^{\varepsilon_i}$, $z_i \in \{x, y\}$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, nous définissons la *longueur algébrique* de w par $|w| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$.

De la même manière, pour $w = \prod_{i=1}^n x_i^{\mu_i} y_i^{\nu_i}$, nous définissons la *longueur algébrique en x* (resp. en y) par $|w|_x = \sum_{i=1}^n \mu_i$ (resp. $|w|_y = \sum_{i=1}^n \nu_i$).

$|\cdot|$, $|\cdot|_x$ et $|\cdot|_y$ sont donc des morphismes de groupes de \mathbb{F}_2 vers \mathbb{Z} , et nous notons $|\cdot|_n$ (resp. $|\cdot|_{x,n}$, $|\cdot|_{y,n}$) la composée de $|\cdot|$ (resp. $|\cdot|_x$, $|\cdot|_y$) par la réduction modulo n .

Nous remarquons alors que $\varphi_\infty = |\cdot|$ et pour $n \geq 2$, $\varphi_n = |\cdot|_n$. Nous obtenons alors une autre caractérisation de H_n et H_∞ :

$$H_n = \{w \in \mathbb{F}_2 \mid |w|_n = 0\},$$

$$H_\infty = \{w \in \mathbb{F}_2 \mid |w| = 0\}.$$

Il est clair que O est un domaine fondamental minimal pour O_∞ , donc nous pouvons utiliser le théorème 3.4.5 et ainsi avoir :

$$\Gamma(T_\infty) = \bigcap_{n=2}^{\infty} \Gamma(T_n).$$

Proposition 3.6.1 $\Gamma(T_n) = U^{-1} \cdot \Gamma_0(n) \cdot U$, avec $U = ST$ et

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

DÉMONSTRATION : Posons $T_n^v = U.T_n$, l'origami régulier défini par le couple transitif (σ_n, τ_n) avec $\sigma_n = id$ et $\tau_n = (12 \dots n)$.

T_n^v est alors défini par le noyau H_n^v du morphisme

$$\begin{aligned} \varphi_n^v : \mathbb{F}_2 &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x &\mapsto 0 \\ y &\mapsto 1 \end{aligned}$$

et nous avons la caractérisation suivante pour H_n^v :

$$H_n^v = \{w \in \mathbb{F}_2 \mid |w|_{y,n} = 0\}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et notons γ_A un relevé de A dans $\mathrm{Aut}^+(\mathbb{F}_2)$.

Alors $A \in \Gamma(T_n^v)$ si et seulement si $\gamma_A(H_n^v) = H_n^v$, c'est-à-dire si pour tout $w \in H_n^v$, $\gamma_A(w) \in H_n^v$.

Or nous avons pour $w \in H_n^v$

$$\begin{aligned} |\gamma_A(w)|_{y,n} &= |w|_x \cdot |\gamma_A(x)|_{y,n} + |w|_y \cdot |\gamma_A(y)|_{y,n} \\ &= |w|_{x,n} \cdot |\gamma_A(x)|_{y,n} + |w|_{y,n} \cdot |\gamma_A(y)|_{y,n} \\ &= \bar{c} \cdot |w|_{x,n} + \bar{d} \cdot |w|_{y,n} \\ &= \bar{c} \cdot |w|_{x,n} \end{aligned}$$

où $\bar{c} = c \bmod n = |\gamma_A(x)|_{y,n}$ et $\bar{d} = d \bmod n = |\gamma_A(y)|_{y,n}$, et car $|w|_{y,n} = 0$.

Donc $A \in \Gamma(T_n^v)$ si et seulement si pour tout $w \in H_n^v$, $|\gamma_A(w)|_{y,n} = \bar{c} \cdot |w|_{x,n}$, donc si et seulement si $\bar{c} = c \bmod n = 0$.

Ainsi $\Gamma(T_n^v) = \Gamma_0(n)$ et

$$\Gamma(T_n) = \Gamma(U^{-1}.T_n^v) = U^{-1}.\Gamma(T_n^v).U = U^{-1}.\Gamma_0(n).U.$$

□

Nous obtenons alors :

Proposition 3.6.2 $\Gamma(T_\infty) = \left\langle \pm \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

DÉMONSTRATION :

D'après le résultat précédent, nous avons

$$\Gamma(T_\infty) = U^{-1} \cdot \bigcap_{n=2}^{\infty} \Gamma_0(n) \cdot U.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bigcap_{n=2}^{\infty} \Gamma_0(n)$. Ainsi $c \bmod n = 0$ pour tout $n \geq 2$, donc $c = 0$. Donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Puisque $ad = 1$, nous avons $a = d = \pm 1$, donc $\bigcap_{n=2}^{\infty} \Gamma_0(n) = \left\langle \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, d'où

$$\Gamma(T_{\infty}) = U^{-1} \cdot \left\langle \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot U = \left\langle \pm \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

□

3.6.2 Deux exemples quasi-récurrents maximaux

Revenons sur l'escalier infini :

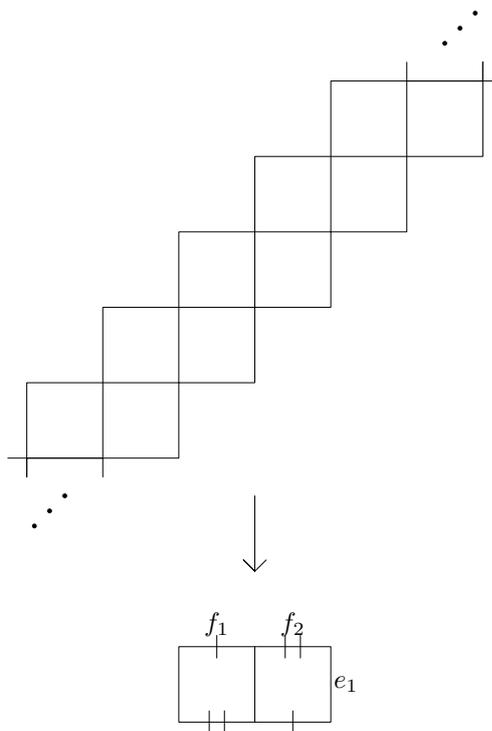


FIGURE 3.10 – L'escalier infini comme \mathbb{Z} -revêtement de l'origami T_2 .

Il s'agit d'un \mathbb{Z} -revêtement de l'origami T_2 défini dans la partie précédente. D'après ce que nous avons déjà vu, en notant encore (e_1, f_1, f_2) la famille génératrice de $H_1(T_2, \Sigma, \mathbb{Z})$ définie ci-dessus, nous avons alors que ce revêtement est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore par l'élément $f_2 - f_1$.

Il s'agit donc bien évidemment d'un \mathbb{Z} -revêtement quasi-récurrent. Mais nous sommes de plus dans les hypothèses du théorème 3.5.6. Ainsi, nous retrouvons le résultat suivant, vu dans [HW10], dont nous donnons une explication autre que calculatoire :

$$\Gamma(E_\infty) = \Gamma(T_2) = (ST)^{-1}.\Gamma_0(2).(ST) = \langle S, T^2 \rangle.$$

Considérons maintenant l'origami O suivant,

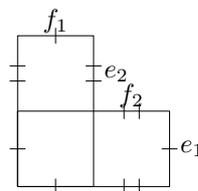


FIGURE 3.11 – Un origami O et des générateurs de son homologie.

avec (e_1, e_2, f_1, f_2) comme famille génératrice pour $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$.

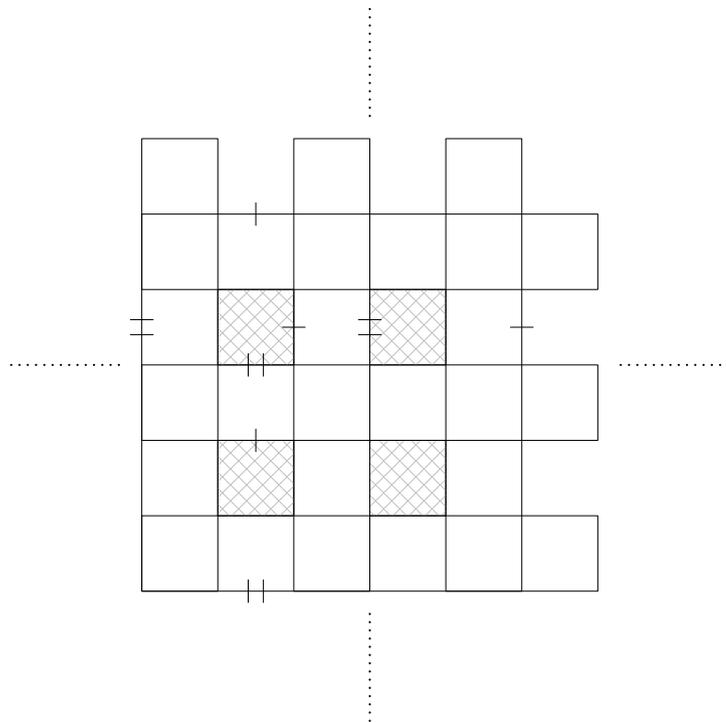
Nous allons définir un \mathbb{Z}^2 -revêtement quasi-récurrent O_∞ de O par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ou encore par les deux éléments indépendants de $H_1(O, \Sigma, \mathbb{Z})$ $w_1 = e_1 - e_2$ et $w_2 = f_1 - f_2$. Nous obtenons alors l'origami O_∞ sur la figure 3.12.

O admet clairement des directions à un cylindre (la direction 1 par exemple), donc nous sommes dans les hypothèses du théorème 3.5.4. D'autre part nous sommes aussi dans les hypothèses du théorème 3.5.6. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3.6.3 *Le flot linéaire sur O_∞ est récurrent, et $\Gamma(O_\infty) = \Gamma(O) = \langle S, T^2 \rangle$.*

FIGURE 3.12 – L'origami O_∞ , \mathbb{Z}^2 -revêtement de O .

Chapitre 4

Origamis d'Heisenberg

Dans cette section, nous allons nous intéresser à des origamis (finis ou infinis) étant des G -revêtements d'origamis finis, où G est le groupe d'Heisenberg, ou une de ses projections finies.

4.1 Groupes d'Heisenberg

4.1.1 Définitions et premières propriétés

Notons \mathcal{H} le *groupe d'Heisenberg* défini comme suit :

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = [X, Y] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

Ainsi \mathcal{H} est le groupe engendré par X et Y , avec les relations $XZ = ZX$, $YZ = ZY$.

Proposition 4.1.1 *Toute matrice M de \mathcal{H} s'écrit de manière unique sous la forme $M = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$.*

DÉMONSTRATION : Clair en écrivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X^a Y^b Z^{c-ab}.$$

□

En fait, nous avons la structure algébrique suivante pour \mathcal{H} :

Proposition 4.1.2 $\mathcal{H} \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}^2$.

DÉMONSTRATION : Par calcul matriciel, il est facile de voir que pour n'importe quels éléments A et B de \mathcal{H} , nous avons $[A, B] = Z^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

De même, nous pouvons voir que le centre de \mathcal{H} est le groupe engendré par Z .

Ainsi $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = \mathcal{Z}(\mathcal{H})$ est un groupe cyclique infini, et nous avons la suite exacte courte suivante :

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow 1.$$

□

Nous pouvons donc voir le groupe d'Heisenberg comme l'ensemble \mathbb{Z}^3 , en identifiant $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ et (α, β, γ) , muni de la loi

$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha', \beta', \gamma') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' - \alpha'\beta)$$

et engendré par les éléments $(1, 0, 0)$ (c'est-à-dire X) et $(0, 1, 0)$ (Y).

Soit $M = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$, nous noterons alors $|M|_X = \alpha$ (respectivement $|M|_Y = \beta$) le nombre algébrique de X (respectivement Y) dans M . D'après la remarque précédente, $|\cdot|_X$ et $|\cdot|_Y$ sont des morphismes de groupes de \mathcal{H} dans \mathbb{Z} .

Nous pouvons aussi voir le graphe de Cayley de \mathcal{H} engendré par X et Y de la manière suivante :

- les sommets sont les éléments (α, β, γ) de \mathbb{Z}^3 ;
- il y a une arête Y partant du sommet (α, β, γ) vers le sommet $(\alpha, \beta + 1, \gamma)$ et une arête X du sommet (α, β, γ) vers le sommet $(\alpha + 1, \beta, \gamma - \beta)$.

Nous pouvons remarquer qu'en suivant un chemin étiqueté par $Z = [X, Y]$, nous partons d'un sommet (α, β, γ) vers un sommet $(\alpha, \beta, \gamma + 1)$.

Nous allons aussi considérer les versions finies de ce groupe, grâce aux projections canoniques de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vers $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Notons ainsi

$$\forall n \geq 2, \mathcal{H}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$$

et X_n, Y_n et Z_n les images respectives de X, Y et Z dans \mathcal{H}_n . Il est clair que X_n et Y_n engendrent \mathcal{H}_n .

4.1.2 Structure du groupe \mathcal{H}

Nous allons montrer le résultat classique suivant : \mathcal{H} est le groupe nilpotent libre de classe 2 et de rang 2.

Rappelons d'abord qu'un groupe G est nilpotent de classe 2 si tout commutateur dans G est central, c'est-à-dire $[G, G] < Z(G)$.

Plus généralement, un groupe G est nilpotent de classe n si le sous-groupe $\gamma_n G$ est trivial, où $\gamma_0 G = G$ et pour $i \geq 1$, $\gamma_i G = [\gamma_{i-1} G, G]$.

La suite

$$\dots \leq \gamma_{i+1} G \leq \gamma_i G \leq \dots \leq \gamma_2 G \leq \gamma_1 G = G$$

est appelée *suite centrale inférieure* de G .

Dans le cas de \mathcal{H} , nous savons déjà que $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = Z(\mathcal{H})$, donc il est clair que \mathcal{H} est un groupe nilpotent de classe 2. Il est également sans torsion et sans autre relation, c'est-à-dire :

Proposition 4.1.3 $\mathcal{H} \simeq \frac{\mathbb{F}_2}{\gamma_2 \mathbb{F}_2}$.

DÉMONSTRATION :

Cette démonstration classique peut par exemple être trouvée dans [BP08]. Posons $G = \frac{\mathbb{F}_2}{\gamma_2 \mathbb{F}_2}$. Il est clair que $\gamma_2 G = \{1\}$, donc G est nilpotent de classe 2, de rang 2 et sans torsion. Notons \bar{x} et \bar{y} les générateurs de G , images de x et y et $\bar{z} = [\bar{x}, \bar{y}]$ qui est donc central.

Chaque élément de G s'écrit alors de manière unique sous la forme $\bar{x}^\alpha \bar{y}^\beta \bar{z}^\gamma$. En effet, raisonnons par récurrence sur la longueur des mots réduits dans G . Pour $l = 1$, la proposition est clairement vérifiée, supposons la vraie pour les mots de longueur l .

Soit w un mot de G de longueur $l + 1$, et écrivons-le $w = w_1 a^\varepsilon$, avec $a = \bar{x}$ ou $a = \bar{y}$ et $\varepsilon = \pm 1$. Par hypothèse de récurrence, $w_1 = \bar{x}^{\alpha_1} \bar{y}^{\beta_1} \bar{z}^{\gamma_1}$.

Si $a = \bar{y}$, le résultat est vrai car \bar{z} est central. Si $a = \bar{x}$, nous avons $w = \bar{x}^{\alpha_1} \bar{y}^{\beta_1} \bar{x}^\varepsilon \bar{z}^{\gamma_1}$. Remarquons alors que $\bar{y} \bar{x}^\varepsilon = \bar{x}^\varepsilon \bar{y} \bar{z}^{-\varepsilon}$. Le résultat est alors vérifié par récurrence immédiate.

Nous pouvons définir un morphisme de groupes Φ de G sur \mathcal{H} en posant $\Phi(\bar{x}) = X$ et $\Phi(\bar{y}) = Y$.

C'est un isomorphisme d'après ce que nous venons de voir, chaque élément, écrit de manière unique sous la forme $\bar{x}^\alpha \bar{y}^\beta \bar{z}^\gamma$, s'envoyant alors sur l'élément $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ de \mathcal{H} . \square

Nous avons donc la présentation suivante :

$$\mathcal{H} = \langle X, Y \mid [X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 1 \rangle .$$

Ainsi, pour chaque élément A, B de \mathcal{H} , nous avons $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = I_3$, et réciproquement, si un élément M , vu comme produit de X et Y vaut

I_3 , alors il est produit d'éléments de la forme $[A, [A, B]]$, $[B, [A, B]]$ ou leurs conjugués.

4.2 Origamis réguliers

Rappelons qu'un origami O est dit régulier s'il est un G -revêtement de l'origami trivial à un carreau. Il est équivalent de dire que le groupe fondamental H de O est distingué dans \mathbb{F}_2 (et $G = \mathbb{F}_2/H$ dans ce cas).

D'après la première partie, nous avons donc des morphismes surjectifs $\varphi : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathcal{H}$ et pour $n \geq 2$, $\varphi_n : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathcal{H}_n$. En considérant les noyaux $H = \ker(\varphi)$ et $H_n = \ker(\varphi_n)$, nous obtenons alors des origamis réguliers, que nous appellerons *origamis d'Heisenberg*.

4.2.1 Cas fini

Posons O_n l'origami régulier de groupe fondamental H_n . D'après Herrlich ([Her06]), Zmiaikou ([Zmi11]) et Yoccoz ([Yoc11]), nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 – Si n est impair, $\Gamma(O_n) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
– Si n est pair, $\Gamma(O_n) = \Gamma$, où

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a + b \text{ et } c + d \text{ impairs} \right\} = \langle S, T^2 \rangle,$$

qui est un sous-groupe d'indice 3 de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

DÉMONSTRATION :

La démonstration est basée sur une démonstration de Yoccoz ([Yoc11]). Soit $n \geq 2$ quelconque.

Considérons γ_S un relevé de S dans $\mathrm{Aut}^+(\mathbb{F}_2)$ défini par $\gamma_S(x) = y$ et $\gamma_S(y) = x^{-1}$.

Notons ψ_S l'automorphisme de \mathcal{H} défini par $\psi_S(X) = Y$ et $\psi_S(Y) = X^{-1}$, ou d'un point de vue matriciel

$$\psi_S : \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -b & c - ab \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ψ_S est clairement un automorphisme de \mathcal{H} , qui passe au quotient dans \mathcal{H}_n : si les coefficients a , b et c d'une matrice M sont nuls modulo n , il en est de même pour les coefficients $-b$, a et $c - ab$ de $\psi_S(M)$.

Il existe donc un automorphisme $\psi_{S,n}$ de \mathcal{H}_n tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \xrightarrow{\gamma_S} & \mathbb{F}_2 \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_n \\ \mathcal{H}_n & \xrightarrow{\psi_{S,n}} & \mathcal{H}_n \end{array}$$

donc $\gamma_S(H_n) = H_n$ et $S \in \Gamma(O_n)$.

Considérons maintenant γ_T un relevé de T dans $\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)$ défini par $\gamma_T(x) = x$ et $\gamma_T(y) = xy$.

Notons cette fois ψ_T l'automorphisme de \mathcal{H} défini par $\psi_T(X) = X$ et $\psi_T(Y) = XY$, ou d'un point de vue matriciel

$$\psi_T : \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a+b & c + \frac{b(b-1)}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est toujours un automorphisme de \mathcal{H} , mais cette fois-ci il ne passe au quotient dans \mathcal{H}_n que pour n impair. En effet, si n est pair et si b est nul modulo n , ce n'est pas le cas de $\frac{b(b-1)}{2}$.

Donc quand n est impair, il existe un automorphisme $\psi_{T,n}$ de \mathcal{H}_n tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \xrightarrow{\gamma_T} & \mathbb{F}_2 \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_n \\ \mathcal{H}_n & \xrightarrow{\psi_{T,n}} & \mathcal{H}_n \end{array}$$

et ainsi $\gamma_T(H_n) = H_n$ et $T \in \Gamma(O_n)$.

Donc pour n impair, S et T sont dans $\Gamma(O_n)$, d'où $\Gamma(O_n) = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Supposons maintenant n pair. Puisque $T \notin \Gamma(O_n)$, considérons γ_{T^2} un relevé de T^2 dans $\text{Aut}^+(\mathbb{F}_2)$, défini par $\gamma_{T^2}(x) = x$ et $\gamma_{T^2}(y) = x^2y$.

Notons ψ_{T^2} l'automorphisme de \mathcal{H} défini par $\psi_{T^2}(X) = X$ et $\psi_{T^2}(Y) = X^2Y$, ou d'un point de vue matriciel

$$\psi_{T^2} : \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a+2b & c + b(b-1) \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cet automorphisme de \mathcal{H} passe naturellement au quotient dans \mathcal{H}_n (et ce pour n quelconque en fait), d'où l'existence d'un automorphisme $\psi_{T^2,n}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{F}_2 & \xrightarrow{\gamma_{T^2}} & \mathbb{F}_2 \\
\downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_n \\
\mathcal{H}_n & \xrightarrow{\psi_{T^2,n}} & \mathcal{H}_n
\end{array}$$

donc $\gamma_{T^2}(H_n) = H_n$ et $T^2 \in \Gamma(O_n)$. Ainsi $\Gamma = \langle S, T^2 \rangle \subset \Gamma(O_n)$. Or Γ est un sous-groupe d'indice 3 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, et nous avons vu que $T \notin \Gamma(O_n)$, donc $\Gamma(O_n) \neq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\Gamma(O_n) = \Gamma$. \square

4.2.2 Cas infini

Notons O_∞ l'origami régulier de groupe fondamental H . Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.2.2 $\Gamma(O_\infty) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

DÉMONSTRATION :

D'après la partie précédente, nous savons déjà que $H = \gamma_3\mathbb{F}_2$, qui est clairement un sous-groupe caractéristique de \mathbb{F}_2 . Donc O_∞ est un origami caractéristique et $\Gamma(O_\infty) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. \square

Nous remarquons que dans ce cas, nous avons, pour n pair, $\Gamma(O_\infty) \not\subseteq \Gamma(O_n)$.

Ainsi, contrairement au cas où le groupe de revêtement est \mathbb{Z}^d , nous n'avons pas dans ce cas $\Gamma(O_\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma(O_n)$.

Si nous nous intéressons au flot linéaire sur O_∞ , nous voyons rapidement qu'il n'a pas de bonnes propriétés dynamiques.

Proposition 4.2.3 *Le flot linéaire sur O_∞ est divergent dans toute direction.*

DÉMONSTRATION :

O_∞ est défini comme \mathcal{H} -revêtement par l'application

$$\begin{array}{ccc}
\varphi : \mathbb{F}_2 & \rightarrow & \mathcal{H} \\
x & \mapsto & X \\
y & \mapsto & Y
\end{array}$$

Considérons une direction rationnelle $\frac{p}{q}$, et notons $w = \mu\left(\frac{p}{q}\right)$ le mot sturmien associé, P le point de T_1 définissant w et l la longueur du cylindre de T_1 dans la direction $\frac{p}{q}$.

Nous allons suivre cette direction rationnelle $\frac{p}{q}$ dans O_∞ en partant du point \tilde{P} dans la fibre de P dans la copie I_3 de O .

Après avoir parcouru une distance l , nous nous retrouvons dans la copie $A = \varphi(w)$, en un point \tilde{P}' , toujours dans la fibre de P . Si nous suivons encore cette direction sur une distance l , nous arrivons en un autre point \tilde{P}'' de la copie A^2 .

Comme \mathcal{H} est sans torsion, en parcourant une distance nl , nous nous retrouvons dans la copie $A^n \neq I_3$, sans aucun espoir de retour.

D'autre part, si nous partons d'un certain carreau dans une direction irrationnelle α et que nous y revenons au bout d'un temps t , il existe un rationnel proche de α pour lequel c'est également le cas, ce qui est absurde d'après le paragraphe précédent. □

Pour espérer obtenir un \mathcal{H} -revêtement d'un origami sur lequel le flot linéaire serait récurrent, il faut tenir compte de la relation standard définissant \mathcal{H} . C'est ce que nous allons faire dans la section suivante.

4.3 Un \mathcal{H} -revêtement récurrent

4.3.1 L'origami T_8

Soit $w \in \mathbb{F}_2$, $w = \prod_{i=1}^n z_i^{\varepsilon_i}$, $z_i \in \{x, y\}$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, nous définissons la *longueur algébrique* de w par $|w| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$.

De la même manière, pour $w = \prod_{i=1}^n x_i^{\mu_i} y_i^{\nu_i}$, nous définissons la *longueur algébrique en x* (resp. en y) par $|w|_x = \sum_{i=1}^n \mu_i$ (resp. $|w|_y = \sum_{i=1}^n \nu_i$).

$|\cdot|$ est donc un morphisme de groupes de \mathbb{F}_2 vers \mathbb{Z} . Dans la suite, nous notons H le noyau de ce morphisme, et H_n le noyau de ce morphisme composé par la réduction modulo n , noté $|\cdot|_n$.

Considérons plus en détail l'origami T_8 défini dans le chapitre précédent et représenté sur le dessin suivant, où les côtés étiquetés par la même lettre sont identifiés :

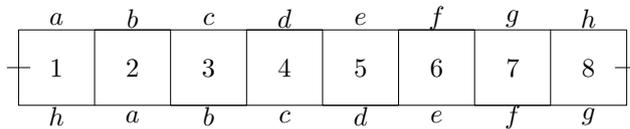


FIGURE 4.1 – L'origami T_8 .

Cet origami est donc défini par le couple transitif (σ, τ) où $\sigma = \tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$.

Notons $H_8 = \langle x^8, x^{i-1}yx^{-i}, i = 1, \dots, 8 \rangle$ le groupe fondamental de T_8 . Nous savons déjà que nous avons la caractérisation suivante de H_8 :

$$H_8 = \{w \in \mathbb{F}_2 \mid |w|_8 = 0\}.$$

Par application de l'algorithme de Schmithüsen, nous obtenons après calcul le groupe de Veech $\Gamma = \Gamma(T_8)$ de T_8 :

$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ce groupe de Veech possède quatre cusps :

- le cusp $\Gamma.\infty$ des directions à un cylindre d'aire 8 ;
- le cusp $\Gamma.1$ des directions à deux cylindres, chacun d'aire 4 ;
- le cusp $\Gamma.3$ des directions à quatre cylindres, chacun d'aire 2 ;
- le cusp $\Gamma.(-1)$ des directions à huit cylindres, chacun d'aire 1.

Nous pouvons alors caractériser les éléments de ces cusps assez facilement :

Proposition 4.3.1 *Soit $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors :*

- $a \in \Gamma.\infty$ si et seulement si $p + q$ est impair ;
- $a \in \Gamma.1$ si et seulement si $p + q = 2 \pmod{8}$ ou $p + q = 6 \pmod{8}$;
- $a \in \Gamma.3$ si et seulement si $p + q = 4 \pmod{8}$;
- $a \in \Gamma.(-1)$ si et seulement si $p + q = 0 \pmod{8}$.

DÉMONSTRATION :

Revenons maintenant à l'origami T_8 . Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, et posons $w = \mu\left(\frac{p}{q}\right)$ le mot sturmien associé.

Nous avons alors les cas suivants :

- $\frac{p}{q}$ est une direction à un cylindre si et seulement si $w^8 \in H_8$ mais $w^4 \notin H_8$;
- $\frac{p}{q}$ est une direction à deux cylindres si et seulement si $w^4 \in H_8$ mais $w^2 \notin H_8$;
- $\frac{p}{q}$ est une direction à quatre cylindres si et seulement si $w^2 \in H_8$ mais $w \notin H_8$;
- $\frac{p}{q}$ est une direction à huit cylindres si et seulement si $w \in H_8$.

Tout ceci provient des propositions de la section 2.4.

Si nous nous basons au carreau numéroté 1 de T_8 , nous remarquons qu'après l'application d'un élément w de \mathbb{F}_2 , nous nous retrouvons au carreau numéroté $k + 1 \pmod{8}$, où $k = |w| \pmod{8}$.

Dans ce cas, nous avons par exemple que $\frac{p}{q}$ est une direction à un cylindre si et seulement si $8(p+q) = 0 \pmod{8}$ mais $4(p+q) \neq 0 \pmod{8}$, ce qui signifie que $p + q$ est impair. Les autres cas s'obtiennent de la même manière. \square

4.3.2 L'origami T_8^∞

Nous voulons obtenir un \mathcal{H} -revêtement de T_8 . Pour cela, nous devons définir un morphisme de groupes surjectif de H_8 vers \mathcal{H} Posons $\varphi : H_8 \rightarrow \mathcal{H}$, morphisme de groupe surjectif, défini par :

$$\begin{aligned} \varphi(x^8) = I_3, \quad \varphi(yx^{-1}) = \varphi(x^2yx^{-3}) = X, \quad \varphi(x^4yx^{-5}) = \varphi(x^6yx^{-7}) = X^{-1}, \\ \varphi(xyx^{-2}) = \varphi(x^5yx^{-6}) = Y, \quad \varphi(x^3yx^{-4}) = \varphi(x^7y) = Y^{-1}, \end{aligned}$$

et posons $H_\infty = \ker(\varphi)$.

Nous allons considérer l'origami T_8^∞ , de groupe fondamental H_∞ , qui est un \mathcal{H} -revêtement de T_8 . D'un point de vue combinatoire, voici l'étiquetage des arêtes de T_8 utilisé pour obtenir T_8^∞ :

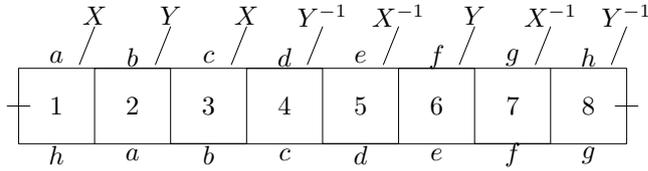


FIGURE 4.2 – Définition du \mathcal{H} -revêtement de T_8 .

Nous allons nous intéresser au flot géodésique sur T_8^∞ . Rappelons qu'une direction rationnelle donnée sur T_8^∞ peut avoir trois propriétés disjointes :

- l'origami se décompose en cylindres dans cette direction, on dit alors que cette direction est *complètement périodique* ;
- l'origami se décompose en bandes dans cette direction, on dit alors que cette direction est *divergente* ;
- l'origami se décompose en cylindres et en bandes dans cette direction, on dit que cette direction est *mixte*.

Regardons déjà le cas de la direction verticale. Puisque T_8^∞ est homogène, plaçons nous au carreau 1 de la copie de T_8 correspondant à $I_3 \in \mathcal{H}$. En parcourant alors T_8^∞ dans la direction verticale, nous arrivons au carreau 1 de la copie de T_8 correspondant à $XYXY^{-1}X^{-1}YX^{-1}Y^{-1} = I_3$: la direction verticale est donc une direction complètement périodique (en fait, T_8^∞ a été construit pour ça).

Nous avons en fait bien plus.

Théorème 4.3.2 *Les directions de Γ_∞ se relèvent en directions complètement périodiques de T_8^∞ , où tous les cylindres sont de même longueur.*

DÉMONSTRATION : Soit $\frac{p}{q} \in \Gamma_\infty$, c'est-à-dire $p + q$ impair d'après la proposition 4.3.1 Montrons donc que $\varphi \left(\mu \left(\frac{p}{q} \right)^8 \right) = I_3$.

Posons $w = \mu\left(\frac{p}{q}\right)$ et $n = p + q$. En partant du carreau 1 de la copie I_3 de T_8 , après application de w nous nous retrouvons au carreau $n + 1 \pmod 8$ de la copie M_1 de T_8 , pour un certain $M_1 \in \mathcal{H}$. Après huit itérations, nous arrivons donc à la copie $M = \prod_{i=1}^8 M_i = \varphi(w^8)$.

Supposons que $\frac{p}{q} \geq 0$ et regardons la construction de M_1 . Pour cela, posons la liste $A_1 = (X, Y, X, Y^{-1}, X^{-1}, Y, X^{-1}, Y^{-1})$. Considérons également le vecteur des positions des y dans un mot de \mathbb{F}_2 , défini de la manière suivante :

$$v_y : \quad \mathbb{F}_2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$$

$$a_1 a_2 \dots a_n \quad \mapsto \quad (j | a_j \in \{y, y^{-1}\})$$

Nous avons que $v = v_y\left(\mu\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ est un vecteur ayant $|p|$ coordonnées.

Nous avons alors

$$M_1 = \prod_{j=1}^p f_{v_j}(A_1),$$

où $f_i(A_1)$ est le i -ème élément de la liste A_1 , l'indice étant pris modulo 8.

En effet, seules les actions des y dans le mot w vont faire changer de copies de T_8 , leurs positions indiquant la copie d'arrivée, et nous savons déjà que nous sommes au carreau $n + 1 \pmod 8$.

En notant A_k les listes obtenues par permutation circulaire de la liste A_1 ($A_2 = (Y, X, Y^{-1}, X^{-1}, Y, X^{-1}, Y^{-1}, X)$, etc...), nous avons alors

$$M_k = \prod_{j=1}^p f_{v_j}(A_{1+n(k-1)}),$$

les indices étant pris modulo 8 et les fonctions f_i restant identiques.

Par exemple, nous avons $w = \mu\left(\frac{2}{3}\right) = xyx^2y$, avec $n = 5$. Ainsi $v_y(w) = (2, 5)$, d'où

$$M_1 = f_2(A_1)f_5(A_1) = YX^{-1}, \quad M_2 = f_2(A_6)f_5(A_6) = X^{-1}Y,$$

$$M_3 = f_2(A_3)f_5(A_3) = Y^{-1}X^{-1}, \quad M_4 = f_2(A_8)f_5(A_8) = XY^{-1},$$

$$M_5 = f_2(A_5)f_5(A_5) = YX, \quad M_6 = f_2(A_2)f_5(A_2) = XY,$$

$$M_7 = f_2(A_7)f_5(A_7) = Y^{-1}X, \quad M_8 = f_2(A_4)f_5(A_4) = X^{-1}Y^{-1}.$$

Posons

$$\rho : \quad \mathcal{H} \quad \rightarrow \quad \mathcal{H}$$

$$X \quad \mapsto \quad X^{-1}$$

$$Y \quad \mapsto \quad Y$$

et en étudiant les quatre cas, suivant la valeur de n modulo 8, nous obtenons

Lemme 4.3.3

$$M_{i+4} = \rho(M_i), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Remarquons d'abord les liens entre les listes A_i : pour i de 1 à 4, nous passons de la liste A_i à la liste A_{i+4} en modifiant les X en X^{-1} et inversément, sans modifier les Y et Y^{-1} .

Nous pouvons donc écrire $M = M_0 \rho(M_0)$, avec $M_0 = M_1 M_2 M_3 M_4$.

Maintenant, nous avons $M_3 = \prod_{j=1}^p f_{v_j}(A_{1+2n})$, donc $M_3 = \prod_{j=1}^p f_{v_j}(A_3)$ ou $M_3 = \prod_{j=1}^p f_{i_j}(A_7)$ selon la valeur de n . En remarquant qu'entre la liste A_1 et les listes A_3 et A_7 , les Y et Y^{-1} ont été inversés, nous obtenons dans tous les cas, $|M_1|_Y = -|M_3|_Y$.

De la même manière, nous démontrons que $|M_2|_Y = -|M_4|_Y$, d'où

$$|M_0|_Y = |M_1|_Y + |M_2|_Y + |M_3|_Y + |M_4|_Y = 0.$$

Ainsi il existe α et γ dans \mathbb{Z} tels que $M_0 = X^\alpha Z^\gamma$. En remarquant que $\rho(Z) = Z^{-1}$, nous obtenons

$$M = M_0 \rho(M_0) = X^\alpha Z^\gamma \rho(X^\alpha Z^\gamma) = X^\alpha Z^\gamma X^{-\alpha} Z^{-\gamma} = I_3.$$

Si maintenant $\frac{p}{q} < 0$, nous utilisons les mêmes listes A_i que précédemment, et en notant $f_{v_1}, \dots, f_{v_{-p}}$ les fonctions obtenues pour $-\frac{p}{q}$, nous avons

$$M_k = \prod_{j=1}^p (f_{v_{j-1}}(A_{1+n(k-1)}))^{-1},$$

et les relations précédentes s'appliquent toujours, d'où $M = I_3$.

Par homogénéité du revêtement, nous obtenons que tous les cylindres sont de même longueur, la même que celle du cylindre sur T_8 . \square

Corollaire 4.3.4 *Le groupe de Veech $\Gamma(T_8^\infty)$ est un groupe fuchsien de première espèce.*

En effet, l'ensemble limite de $\Gamma(T_8^\infty)$ contient le cusp $\Gamma(T_8) \cdot \infty$, qui est dense dans le cercle.

Nous sommes bien dans les hypothèses du théorème 2.4.2, d'où le théorème suivant.

Théorème 4.3.5 *Le flot géodésique sur T_8^∞ est récurrent*

4.3.3 Groupe de Veech de T_8^∞

Commençons par le résultat suivant :

Proposition 4.3.6 $\Gamma(T_8^\infty) \subset \Gamma(T_4)$.

DÉMONSTRATION :

Notons encore H_8 le groupe fondamental de T_8 , H_4 celui de T_4 et H_∞ un groupe fondamental de T_8^∞ .

Nous avons $H_\infty \triangleleft H_8$ et $H_8 \triangleleft H_4$, car H_8 est d'indice 2 dans H_4 . Montrons que $H_4 = \text{Norm}(H_\infty)$.

Premièrement, $H_\infty \triangleleft H_4$.

Nous avons $H_4 = H_8 \sqcup x^4 H_8$. Puisque $H_\infty \triangleleft H_8$, montrons que x^4 normalise H_∞ .

Rappelons que $H_8 = \langle w_i, i = 0, \dots, 8 \rangle$, avec $w_i = x^i y x^{-i-1}$ pour $i = 0, \dots, 6$, $w_7 = x^7 y$ et $w_8 = x^8$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} x^4 w_0 x^{-4} &= w_4, \quad x^4 w_1 x^{-4} = w_5, \quad x^4 w_2 x^{-4} = w_6, \\ x^4 w_3 x^{-4} &= w_7 w_8^{-1}, \quad x^4 w_4 x^{-4} = w_8 w_0 w_8^{-1}, \quad x^4 w_5 x^{-4} = w_8 w_1 w_8^{-1}, \\ x^4 w_6 x^{-4} &= w_8 w_2 w_8^{-1}, \quad x^4 w_7 x^{-4} = w_8 w_3 w_8^{-1}, \quad x^4 w_8 x^{-4} = w_8. \end{aligned}$$

On remarque donc, en utilisant les morphismes $\varphi : H_8 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ définis dans la partie précédente, que nous avons

$$\forall w \in H_8, \varphi(x^4 w x^{-4}) = \rho(\varphi(w)).$$

Ainsi, si $w \in H_\infty$, $\varphi(x^4 w x^{-4}) = \rho(\varphi(w)) = \rho(I_3) = I_3$, donc $x^4 H_\infty x^{-4} = H_\infty$ et $H_\infty \triangleleft H_4$, donc $H_4 \subset \text{Norm}(H_\infty)$.

Réciproquement, prenons $w \notin H_4$ et considérons le chemin associé dans T_8^∞ partant du carreau 1 de la copie I_3 de T_8 . Ce chemin se termine sur le carreau i d'une copie A de T_8 , avec $i \neq 1$ et $i \neq 5$, puisque $w \notin H_4$.

Nous avons alors plusieurs cas :

- Si $i = 2$ ou 6 , prenons $w_\infty = y x^3 y x^{-5}$, alors $w w_\infty w^{-1}$ est un chemin joignant le carreau 1 de la copie I_3 au carreau 1 de la copie $A Y^2 A^{-1} \neq I_3$;
- Si $i = 3$, prenons $w_\infty = y x^{-3} y x$, alors $w w_\infty w^{-1}$ est un chemin joignant le carreau 1 de la copie I_3 au carreau 1 de la copie $A X^2 A^{-1} \neq I_3$;
- Si $i = 6$ ou 8 , prenons $w_\infty = y x^3 y x^{-5}$, alors $w w_\infty w^{-1}$ est un chemin joignant le carreau 1 de la copie I_3 au carreau 1 de la copie $A Y^{-2} A^{-1} \neq I_3$;
- Si $i = 7$, prenons $w_\infty = y x^{-3} y x$, alors $w w_\infty w^{-1}$ est un chemin joignant le carreau 1 de la copie I_3 au carreau 1 de la copie $A X^{-2} A^{-1} \neq I_3$.

Dans tous les cas $ww_\infty w^{-1} \notin H_\infty$, donc $w \notin \text{Norm}(H_\infty)$ et $\text{Norm}(H_\infty) \subset H_4$.

Finalement nous obtenons que $H_4 = \text{Norm}(H_\infty)$, donc d'après une caractérisation de Schmithüsen, $\Gamma(T_8^\infty) \subset \Gamma(T_4)$. \square

Grâce à l'algorithme de Schmithüsen, nous obtenons :

$$\Gamma(T_4) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\Gamma(T_8^\infty)$ est donc un sous-groupe de ce sous-groupe d'indice 6 de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. En tant que groupe fuchsien de première espèce, c'est soit un réseau (et donc un sous-groupe de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ d'indice fini), soit il est infiniment engendré.

C'est le second cas qui se présente ici.

Théorème 4.3.7 $\Gamma(T_8^\infty)$ est infiniment engendré.

DÉMONSTRATION : Notons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ un des générateurs de $\Gamma(T_4)$. Nous allons montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A^n \notin \Gamma(T_8^\infty)$.

Par récurrence immédiate, nous avons $A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{pmatrix}$.

Nous considérons γ_{A^n} , un relevé de A^n dans $\text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ défini par :

$$\gamma_{A^n}(x) = (y^{-1}x)^{n+1}y, \quad \gamma_{A^n}(y) = (y^{-1}x)^{n+1}yx^{-1}y.$$

En effet, $\gamma_{A^n} \in \text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ car

$$\gamma_{A^n}((x^{-1}y)^{n+1}xy^{-1}x) = x, \quad \gamma_{A^n}((x^{-1}y)^{n+1}x) = y,$$

et nous vérifions facilement que $\hat{\beta}(\gamma_{A^n}) = A^n$.

Supposons que $A^n \in \Gamma(T_8^\infty)$. Dans ce cas, $\gamma_{A^n}(H_\infty)$ et H_∞ sont conjugués dans \mathbb{F}_2 , ou de manière équivalente $\gamma_{A^n}^{-1}(H_\infty)$ et H_∞ sont conjugués : il existe $u \in \mathbb{F}_2$ tel que $\gamma_{A^n}^{-1}(H_\infty) = uH_\infty u^{-1}$. De plus, puisque $A \in \Gamma(T_8)$, γ_{A^n} stabilise H_8 , qui est distingué dans \mathbb{F}_2 .

Ainsi, en notant ι l'automorphisme intérieur de \mathbb{F}_2 associé à u , nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_8 & \xrightarrow{\gamma_{A^n} \circ \iota} & H_8 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{H} & & \mathcal{H} \end{array}$$

avec $H_\infty = \ker(\varphi) = \ker(\varphi \circ \gamma_{A^n} \circ \iota) = (\gamma_{A^n} \circ \iota)^{-1}(H_\infty)$.

Il existe alors un automorphisme $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tel que nous ayons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_8 & \xrightarrow{\gamma_{A^n} \circ \iota} & H_8 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{H} \end{array}$$

Ainsi pour chaque générateur w_i de H_8 , nous avons

$$\varphi \circ \gamma_{A^n} \circ \iota(w_i) = \psi \circ \varphi(w_i).$$

Posons $j = |u|_8$, de sorte que ux^{-j} appartienne à H_8 . Ainsi

$$\begin{aligned} \varphi \circ \gamma_{A^n} \circ \iota(w_i) &= \varphi \circ \gamma_{A^n}(uw_i u^{-1}) \\ &= \varphi \circ \gamma_{A^n}(ux^{-j} \cdot x^j w_i x^{-j} (ux^{-j})^{-1}) \\ &= \varphi \circ \gamma_{A^n}(ux^{-j}) \cdot \varphi \circ \gamma_{A^n}(x^j w_i x^{-j}) \cdot \varphi \circ \gamma_{A^n}(ux^{-j})^{-1} \end{aligned}$$

Notons $M = \varphi \circ \gamma_{A^n}(ux^{-j}) \in \mathcal{H}$, de sorte que

$$\varphi \circ \gamma_{A^n} \circ \iota(w_i) = M \cdot \varphi \circ \gamma_{A^n}(x^j w_i x^{-j}) \cdot M^{-1}.$$

Il nous reste donc à étudier $\varphi \circ \gamma_{A^n}(x^j w_i x^{-j})$. Remarquons d'abord que la conjugaison par x^j permute de manière circulaire les générateurs w_0 à w_7 , quitte à les multiplier par w_8 ou son inverse, et qu'elle laisse fixe w_8 . Plus précisément, nous avons, pour i de 0 à 7 :

- Si $i + j \leq 6$, alors $x^j w_i x^{-j} = w_{i+j}$;
- si $i = 7$, alors $x^j w_7 x^{-j} = w_8 w_{j-1}$;
- si $i + j = 7$, alors $x^j w_i x^{-j} = w_7 w_8^{-1}$;
- si $i + j \geq 8$, alors $x^j w_i x^{-j} = w_8 w_{i+j} w_8^{-1}$;
- $x^j w_8 x^{-j} = w_8$;

tous les indices étant pris modulo 8.

Cependant, nous avons :

$$\begin{aligned} \gamma_{A^n}(w_8) &= Y.(Y^n X^{-n} Y^{-n} X^{-n} Y^n X^n Y^{-n} X^n).Y^{-1} \\ &= Y.I_3.Y^{-1} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\gamma_{A^n}(x^j w_i x^{-j}) = \gamma_{A^n}(w_{i+j})$, les indices étant pris modulo 8.

Finalement, nous obtenons que les deux listes $[\varphi \circ \gamma_{A^n} \iota(w_i), i = 0, \dots, 7]$ et $[\psi \circ \varphi(w_i)]$ doivent correspondre à permutation circulaire et à conjugaison par un élément $M \in \mathcal{H}$ près.

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma_{A^n}(w_0)) &= XZ^{-(n+1)}, \varphi(\gamma_{A^n}(w_1)) = YZ^{-n}, \varphi(\gamma_{A^n}(w_2)) = XZ^{-1}, \\ \varphi(\gamma_{A^n}(w_3)) &= Y^{-1}Z^{2n}, \varphi(\gamma_{A^n}(w_4)) = X^{-1}Z^{n+1}, \varphi(\gamma_{A^n}(w_5)) = YZ^{-n}, \\ \varphi(\gamma_{A^n}(w_6)) &= X^{-1}Z, \varphi(\gamma_{A^n}(w_7)) = Y^{-1}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi(\varphi(w_0)) &= \psi(X), \psi(\varphi(w_1)) = \psi(Y), \psi(\varphi(w_2)) = \psi(X), \\ \psi(\varphi(w_3)) &= \psi(Y^{-1}), \psi(\varphi(w_4)) = \psi(X^{-1}), \psi(\varphi(w_5)) = \psi(Y), \\ \psi(\varphi(w_6)) &= \psi(X^{-1}), \psi(\varphi(w_7)) = \psi(Y^{-1}).\end{aligned}$$

C'est absurde, car il n'existe aucune permutation circulaire ni conjugaison permettant que ces deux listes correspondent.

Donc $A^n \notin \Gamma(T_8^\infty)$ pour tout $n \geq 1$, et $\Gamma(T_8^\infty)$ est d'indice infini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et ce n'est pas un réseau. Puisqu'il est de première espèce, nous concluons qu'il est infiniment engendré. \square

Chapitre 5

Autres exemples

5.1 Wind-tree

Dans cette section, nous allons rappeler les résultats connus sur le flot linéaire sur le modèle du wind-tree, ou encore du "vent dans les arbres". Ces résultats proviennent de Hubert-Lelièvre-Troubetzkoy ([HLT09]) et nous adopterons leurs notations. Ce modèle a également été utilisé dans [DHL11], [AH12] ou encore [FU11].

Exceptionnellement dans cette section, quand nous parlons de cylindres ou de groupes de Veech d'origami, il s'agit des définitions pour les surfaces de translation. Nous rappelons que le groupe de Veech d'un origami est un sous-groupe du groupe de Veech de la surface de translation associée, et que les liens de selles d'un origami, délimitant les cylindres, passent par les sommets de tous les carrés, alors qu'ils ne passent que par les singularités de la surface de translation associée.

5.1.1 Définitions

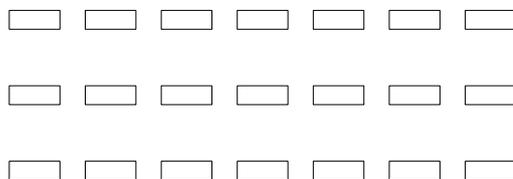


FIGURE 5.1 – Une partie de la table $R_{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}}$.

Considérons la table de billard $R_{a,b}$, avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, définie de la manière suivante : nous considérons le réseau \mathbb{Z}^2 , et enlevons un rec-

tangle de dimensions a et b , centré en le centre de chaque maille du réseau.

Par la méthode classique de dépliage, nous obtenons une surface de translation associée, notée $X_{a,b}$.

Puisque les angles de la table de billard sont des multiples de $\frac{\pi}{2}$, il faut donc 4 copies de la table, et le groupe engendré par les réflexions sur les obstacles est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (voir ([HLT09]) par exemple).

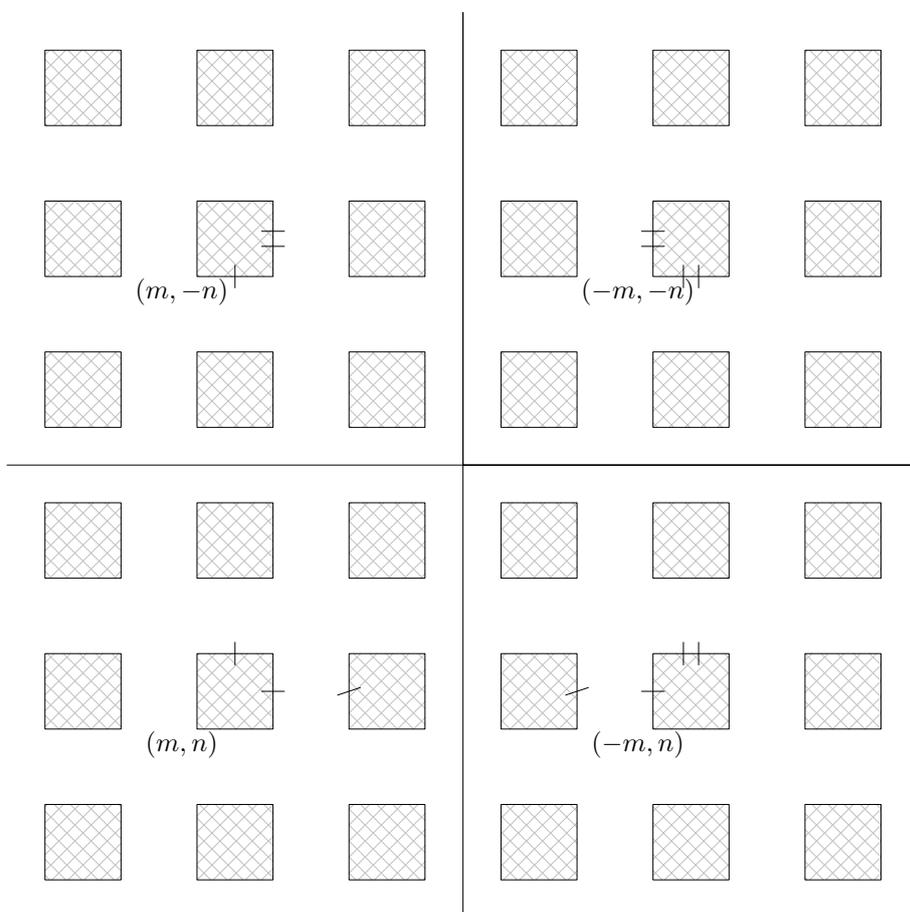


FIGURE 5.2 – L'origami $X_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$.

La figure précédente nous montre les recollements à effectuer sur les 4 copies de $R_{a,b}$ afin d'obtenir $X_{a,b}$:

- le côté droit de l'obstacle dans la maille (m, n) (qui correspond donc à un côté gauche dans $X_{a,b}$) est recollé au côté gauche de l'obstacle

- dans la maille $(-m, n)$;
- le côté haut de l'obstacle dans la maille (m, n) est recollé au côté bas de l'obstacle dans la maille $(m, -n)$.

Nous remarquons également la présence de cylindres horizontaux, ce qui est logique étant donné la table de billard.

Si nous prenons des paramètres a et b rationnels, quitte à redimensionner, $X_{a,b}$ est une surface à petits carreaux. Ce redimensionnement est tel qu'une direction α sur la table de billard $R_{a,b}$ correspondra à une direction $\frac{s\alpha}{q}$ sur la surface $X_{a,b}$. Nous noterons indifféremment $X_{a,b}$ l'origami ou la surface à petits carreaux et nous noterons $\omega_{a,b}$ la 1-forme holomorphe naturelle sur $X_{a,b}$.

À partir de maintenant, nous posons $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$. Notons $Y_{a,b}$, l'origami fini défini sur le dessin ci-dessous :

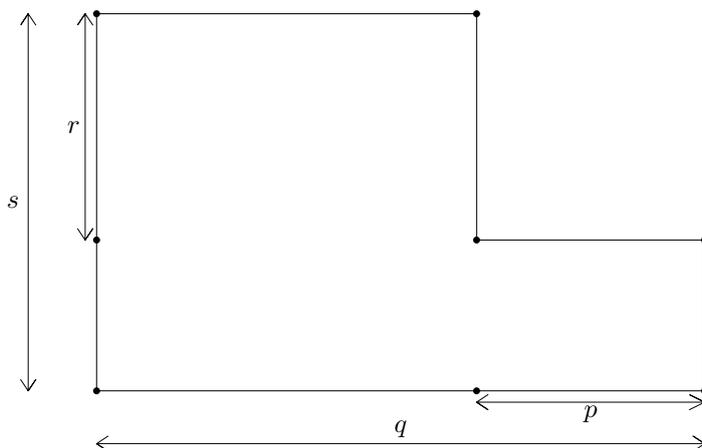
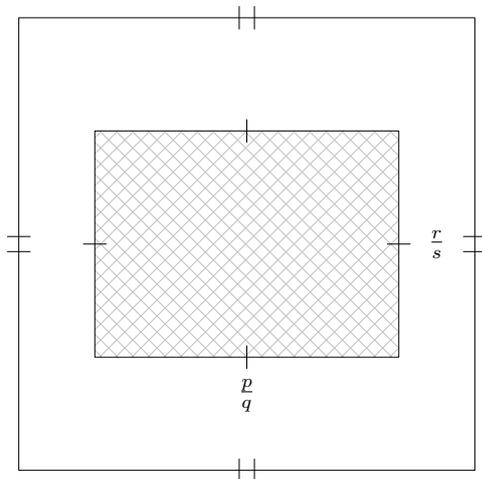


FIGURE 5.3 – L'origami $Y_{a,b}$, les longueurs représentent le nombre de carreaux.

Il s'agit de la surface obtenue en regardant une "maille" de $X_{a,b}$, comme sur la figure 5.4.

C'est une surface de la strate $\mathcal{H}(2)$: c'est une surface de genre 2 qui a une unique singularité d'ordre 2. Cet origami va servir de base pour l'origami $X_{a,b}$.

FIGURE 5.4 – Une maille de $X_{a,b}$ définit $Y_{a,b}$.

Cet origami $Y_{a,b}$ va nous servir de base pour pouvoir définir l'origami $X_{a,b}$ comme un G -revêtement.

Proposition 5.1.1 $X_{a,b}$ est un $\mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -revêtement de $Y_{a,b}$.

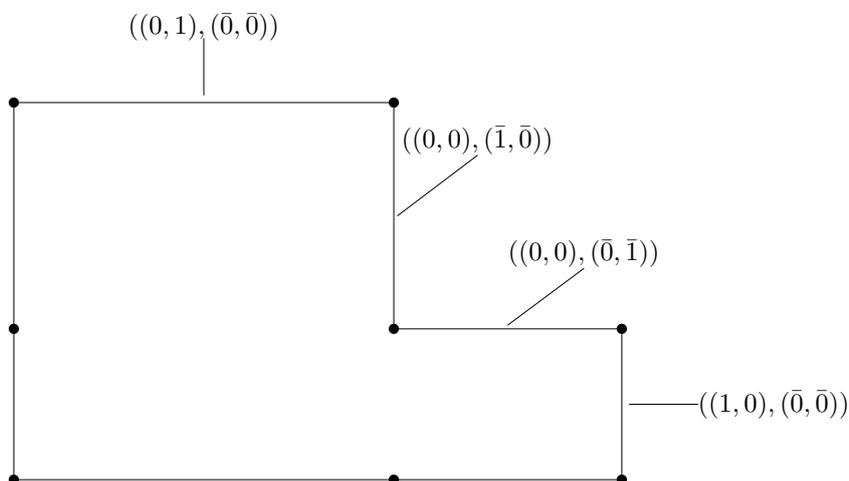
DÉMONSTRATION :

$Y_{a,b}$ est obtenue en regardant une seule maille de $X_{a,b}$ (d'où le facteur \mathbb{Z}^2) sur une seule copie de $R_{a,b}$ (d'où le facteur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$).

Le groupe $\mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est muni de la structure suivante :
 $((m, n), (\bar{a}, \bar{b}) + ((m', n'), (\bar{a}', \bar{b}')) = ((m + f(\bar{a})m', n + f(\bar{b})n'), (\bar{a} + \bar{a}', \bar{b} + \bar{b}'))$,
 où $f(\bar{0}) = 1$ et $f(\bar{1}) = -1$.

Nous regardons les recollements sur la figure 5.2. Nous voyons clairement apparaître la structure du groupe $\mathbb{Z}^2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Le revêtement est alors donné par :

FIGURE 5.5 – Définition du $\mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -revêtement.

□

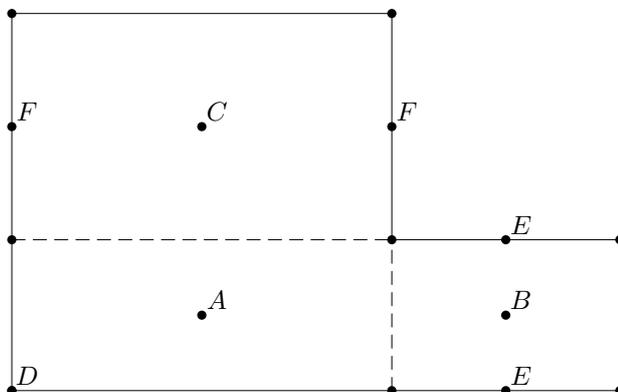
Puisque $Y_{a,b}$ est une surface de genre 2, elle est hyperelliptique : elle possède une involution qui admet 6 points fixes, appelés *points de Weierstrass*.

Les points de Weierstrass de $Y_{a,b}$ sont explicités sur la figure 5.6.

Ce sont donc les centres des 3 rectangles qui composent $Y_{a,b}$ (les points A , B et C), la singularité (le point D) et les milieux des côtés de longueurs p et r (les points E et F). L'involution est alors le demi-tour de chacun de ces trois rectangles.

Nous savons que dans chaque direction rationnelle, $Y_{a,b}$ se décompose en un ou deux cylindres, comme chaque origami de $\mathcal{H}(2)$ (voir ([HLT09]) par exemple). Si $Y_{a,b}$ se décompose en un seul cylindre dans une direction donnée, alors quatre points de Weierstrass seront sur des liens de selles, les deux autres seront dans le coeur du cylindre. Si $Y_{a,b}$ se décompose en deux cylindres, deux points de Weierstrass seront sur des liens de selles, deux seront dans le coeur d'un cylindre et les deux derniers seront dans le coeur de l'autre cylindre.

Un cylindre de $Y_{a,b}$ se relève en cylindre ou en bande dans $X_{a,b}$. Nous savons d'après [HLT09] que si un cylindre de $Y_{a,b}$ contient en son coeur deux

FIGURE 5.6 – Position des points de Weierstrass sur $Y_{a,b}$.

des points A, B ou C, alors il se relève en une bande dans $X_{a,b}$.

5.1.2 Flot linéaire et groupe de Veech

Dans l'article de Hubert-Lelièvre-Troubetzkoy ([HLT09]), nous trouvons tous les résultats concernant le flot linéaire sur $X_{a,b}$.

Posons

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \right) \in \mathbb{Q}^2, 0 < p < q, 0 < r < s, p \text{ et } r \text{ impairs, } q \text{ et } s \text{ pairs} \right\}$$

où les fractions considérées sont irréductibles.

Théorème 5.1.2 *Pour $(a,b) \in \mathcal{E}$, le flot linéaire est récurrent sur $X_{a,b}$.*

Ce résultat est démontré dans [HLT09]. C'est ici qu'a été utilisé pour la première fois le théorème de Patterson-Sullivan. Il a été ainsi démontré que les directions à un cylindre de $Y_{a,b}$ se relèvent en directions complètement périodiques pour $X_{a,b}$. Dans ce cas, nous savons alors que toutes ces directions sont dans l'ensemble limite du groupe de Veech de $X_{a,b}$, qui est donc un groupe fuchsien de première espèce.

Nous avons déjà vu que ce résultat a été amélioré par Avila et Hubert dans [AH12].

Théorème 5.1.3 *Pour $(a, b) \in (0, 1)^2$, le flot linéaire est récurrent sur $X_{a,b}$.*

Nous allons maintenant utiliser le lemme 2.1.5 pour obtenir un résultat pour le groupe de Veech de $X_{a,b}$.

Théorème 5.1.4 *Soit $(a, b) \in \mathcal{E}$, le groupe de Veech $\Gamma_{a,b} = \Gamma(X_{a,b})$ est infiniment engendré.*

DÉMONSTRATION : Remarquons d'abord que puisque p et q sont premiers entre eux, ainsi que r et s , l'origami $X_{a,b}$ est réduit. Dans ce cas, nous avons $\Gamma_{a,b} = \Gamma(X_{a,b}) = \text{SL}(X_{a,b}, \omega_{a,b})$.

Comme $(a, b) \in \mathcal{E}$, nous savons déjà que $\Gamma_{a,b}$ est un groupe fuchsien de première espèce. Ainsi c'est soit un réseau (et donc un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$), soit il est infiniment engendré.

Nous allons montrer que $\Gamma_{a,b}$ n'est pas un sous-groupe d'indice fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ en exhibant un élément de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont aucune puissance n'est dans $\Gamma_{a,b}$.

Dans $X_{a,b}$, la direction verticale est dite mixte : $X_{a,b}$ se décompose en bandes et en cylindres dans cette direction. Considérons les matrices suivantes :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}^*.$$

Si $T^n \in \Gamma_{a,b}$, $n > 0$, alors l'image de la direction verticale par T^n serait mixte. Nous allons donc nous intéresser aux directions $T^n \cdot \infty$, qui sont les pentes $\frac{1}{n}$, $n > 0$.

Considérons la famille $(\alpha_k)_{k>0}$ de pentes dans $R_{a,b}$ décrites dans la figure ci-dessous :

Nous avons donc $\alpha_k = \frac{1-b}{k}$. Ici $b = \frac{r}{s}$, donc

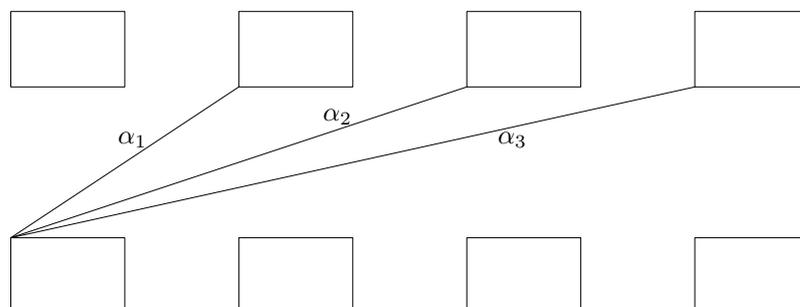
$$\alpha_k = \frac{1 - \frac{r}{s}}{k} = \frac{s-r}{sk}.$$

Étant donné le redimensionnement, nous étudions donc sur $X_{a,b}$ les directions

$$\beta_k = \frac{s\alpha_k}{q} = \frac{s-r}{qk}.$$

Puisque nous nous intéressons aux pentes de la forme $\frac{1}{n}$, nous allons étudier la sous famille $(\beta_{i(s-r)})_{i>0} = \left(\frac{1}{iq}\right)_{i>0}$.

Dans la direction $\beta_{i(s-r)} = \frac{1}{iq}$, $i > 0$, $Y_{a,b}$ se décompose en deux cylindres. En effet, nous savons déjà que $Y_{a,b}$ se décompose en un ou deux cylindres

FIGURE 5.7 – Définition des pentes α_k .

dans une direction rationnelle. Ensuite il est clair que tous les points de $X_{a,b}$, et donc de $Y_{a,b}$ par projection, ne sont pas atteints en ne considérant que les bandes de la figure suivante.

FIGURE 5.8 – Un cylindre dans les directions β_1 et β_2 .

Ces bandes se projettent toutes sur un cylindre \mathcal{C} de $Y_{a,b}$. Nous pouvons remarquer en regardant la figure précédente que ce cylindre reste dans le cylindre horizontal contenant les points A et B. Comme deux points de Weierstrass doivent être dans le coeur de \mathcal{C} et que E y appartient, l'autre point est A ou B. Supposons sans restriction qu'il s'agisse de A.

Le second cylindre doit également contenir deux points de Weierstrass en son coeur. Montrons qu'il contient les points B et C.

En effet, étant données les parités de p , q , r et s , les trois points de Weierstrass A, B et C de $Y_{a,b}$ se projettent tous sur le même point du tore

T_1 , le point M central :

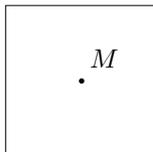


FIGURE 5.9 – Point central de T_1 sur lequel se projettent trois points de Weierstrass.

Dans le tore, le lien de selles de pente $\frac{1}{iq}$ ne passe pas par le point M. En effet, iq étant pair, si nous considérons la droite du plan passant par l'origine et de pente $\frac{1}{iq}$, aucun point à coordonnées demi-entières n'appartient à cette droite. Ainsi en relevant cette direction dans $Y_{a,b}$, les points A, B et C ne sont pas sur des liens de selles, et le point E étant évité par construction, le second cylindre contient bien les points B et C. D'après les résultats de [HLT09], ce cylindre se relève donc également en bandes dans $X_{a,b}$.

Ainsi, pour $i > 0$, $X_{a,b}$ se décompose en bandes dans la direction $\frac{1}{iq}$. Donc pour $i > 0$, $T^{iq} \notin \Gamma_{a,b}$.

Donc $\Gamma_{a,b}$ n'est pas d'indice fini dans $SL_2(\mathbb{Z})$ et il est donc infiniment engendré. \square

5.2 Origamis de Burnside

5.2.1 Le problème de Burnside

Un groupe G est dit d'exposant n si pour chaque $g \in G$, $g^n = 1$. C'est par exemple le cas de chaque groupe fini, où on peut prendre comme exposant l'ordre du groupe.

Un des problèmes de Burnside est le suivant : soit G un groupe de type fini d'exposant n , est-ce que G est fini ?

Pour répondre à cette question, une famille de groupes a été définie.

Définition 5.2.1 *Le groupe de Burnside libre de rang m et d'exposant n , noté $B(m, n)$, est le groupe engendré par m éléments x_1, \dots, x_m tel que pour chaque élément $x \in B(m, n)$, $x^n = 1$, sans aucune autre relation.*

Il s'agit simplement du groupe suivant :

$$B(m, n) = \mathbb{F}_m / \mathbb{F}_m^n,$$

où \mathbb{F}_m^n est le sous-groupe de \mathbb{F}_m engendré par les éléments de \mathbb{F}_m à la puissance n .

Il est libre dans le sens où si G est un groupe à m générateurs g_1, \dots, g_m où $\forall x \in G, x^n = 1$, alors il existe un unique morphisme φ de $B(m, n)$ vers G tel que $\varphi(x_i) = g_i$.

Nous pouvons donc reformuler le problème de Burnside de la manière suivante : pour quels entiers m et n le groupe $B(m, n)$ est fini ?

La question reste encore partiellement ouverte, avec des avancées considérables.

Par exemple, il est connu que $B(m, 2), B(m, 3)$ (Burnside ([Bur02])), $B(m, 4)$ (Sanov ([San40])) et $B(m, 6)$ (Hall ([Hal58])) sont finis. Le résultat principal provient des travaux d'Adian et Novikov ([AN68]), qui prouvent que pour $n > 4381$ impair, il existe m tel que $B(m, n)$ soit infini.

Ce résultat fut amélioré par Adian en 1975 ([Adi75]) :

Théorème 5.2.2 *Pour $n > 665$ impair, il existe m tel que $B(m, n)$ soit infini.*

5.2.2 Définition et propriétés d'origamis de Burnside

Pour m et n entiers, nous voulons construire des $B(m, n)$ -revêtements d'origamis finis. Bien évidemment, si $B(m, n)$ est fini, nous allons obtenir des origamis finis, donc les résultats que nous allons obtenir seront triviaux, l'intérêt étant pour $B(m, n)$ infini.

Soient m et n entiers, et $B(m, n)$ le groupe de Burnside libre de rang m et d'exposant n . Pour construire un $B(m, n)$ -revêtement d'un origami O , il faut donc que O ait au moins $m - 1$ carreaux.

Soient O un origami ayant au moins $m - 1$ carreaux, H un sous-groupe fondamental de O et $\varphi : H \rightarrow B(m, n)$ le morphisme définissant un origami O_∞ (qui n'est pas nécessairement infini). Puisque $B(m, n)$ est d'exposant fini, nous avons la propriété suivante.

Proposition 5.2.3 *Soit O_∞ un $B(m, n)$ -revêtement d'un origami fini. Toute direction rationnelle de O_∞ est complètement périodique.*

DÉMONSTRATION :

Soient donc O un origami fini, H un groupe fondamental de O et $\varphi : H \rightarrow B(m, n)$ définissant O_∞

Fixons une direction rationnelle $\frac{p}{q}$, et notons $w = \mu\left(\frac{p}{q}\right)$ le mot sturmien associé, P le point de T_1 définissant w et l la longueur du cylindre de T_1 dans la direction $\frac{p}{q}$.

Prenons un point \tilde{P} de O dans la fibre de P , et notons cette fois $L = kl$ la longueur du cylindre de O dans la direction $\frac{p}{q}$, dont l'âme passe par P . Donc $w^k \in H$.

Nous allons suivre maintenant le flot linéaire dans la direction $\frac{p}{q}$, en partant du point \hat{P} dans la fibre de \tilde{P} dans la copie 1 de O . Si nous suivons la direction $\frac{p}{q}$ en partant de P pendant un temps L , nous arrivons en un point \hat{P}' , de la même fibre et dans la copie $x = \varphi(w^k) \in B(m, n)$.

Ainsi en suivant cette direction pendant un temps nL , nous arrivons à la copie $x^n = 1$, donc sur notre point de départ.

Ceci étant vrai pour chaque cylindre de O , nous en déduisons que O_∞ se décompose en cylindres dans la direction $\frac{p}{q}$. □

Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 5.2.4 *Soient O un origami et $B(m, n)$ le groupe de Burnside libre de rang m et d'exposant n . Alors le flot linéaire est récurrent sur tout $B(m, n)$ -revêtement de O .*

DÉMONSTRATION :

Notons O_∞ le $B(m, n)$ -revêtement de O .

D'après la proposition précédente, O_∞ vérifie la première hypothèse du théorème 2.4.2.

Nous savons de plus que les cylindres de O_∞ sont au plus n fois plus longs que ceux de O dans la même direction. En effet, notons H et H_∞ les groupes fondamentaux de O et O_∞ respectivement. Si $w = \mu\left(\frac{p}{q}\right)$ est l'élément de \mathbb{F}_2 associé à la direction $\frac{p}{q}$, il existe $k > 0$ tel que $w^k \in H$. Par définition des groupes libres de Burnside, nous avons alors $w^{kn} \in H_\infty$. Dans ce cas, cela signifie que le cylindre dans la direction $\frac{p}{q}$ de O_∞ est d'aire au plus n celle du cylindre de O dans cette même direction. Puisque ces cylindres sont de même hauteur, nous obtenons alors que les cylindres de O_∞ sont au plus n fois plus longs que ceux de O dans la même direction. Ainsi, grâce au lemme 1.2.24, O_∞ vérifie la seconde hypothèse du théorème 2.4.2. □

Nous allons maintenant nous intéresser aux groupes de Veech de tels origamis.

En utilisant la caractérisation de Schmithuesen, nous pouvons obtenir le résultat suivant.

Proposition 5.2.5 *Soient O un origami à $m - 1$ carreaux, $B(m, n)$ le groupe de Burnside libre de rang m et d'exposant n , et O_∞ un $B(m, n)$ -revêtement de O . Alors $\Gamma(O_\infty) = \Gamma(O)$.*

DÉMONSTRATION :

Notons H un groupe fondamental de O , c'est donc un groupe libre de rang m . Le revêtement est défini par le noyau d'un morphisme surjectif $\varphi : H \rightarrow B(m, n)$, morphisme défini simplement par les générateurs de H .

Ce noyau est alors $H_\infty = H^n$, le groupe engendré par les éléments de H à la puissance n . Il s'agit clairement d'un sous-groupe caractéristique de H , donc d'après le théorème 1.2.19, nous avons $\Gamma(O_\infty) = \Gamma(O)$.

□

Ce résultat est spécial au cas maximal, c'est-à-dire pour les $B(m, n)$ -revêtements d'un origami à $m - 1$ carreaux. Il n'est sans doute plus vrai dans les autres cas.

Bibliographie

- [Adi75] S.I. ADIAN : The problem of Burnside and identities in groups, 1975.
- [AH12] A. AVILA et P. HUBERT : Recurrence for the wind-tree model. *preprint*, 2012.
- [AN68] S.I. ADIAN et P.S. NOVIKOV : Infinite periodic groups. i, ii et iii. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 2, 1968.
- [Arn96] P. ARNOUX : Sturmian sequences. *Substitution in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, 1996.
- [BP08] E. BINZ et S. PODS : *The geometry of Heisenberg groups : with applications in signal theory, optics, quantization, and field quantization*, volume 151. Amer Mathematical Society, 2008.
- [Bur02] W. BURNSIDE : On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. *Quart. J. Pure Appl. Math*, 33:230–238, 1902.
- [Cor35] G.G. CORIOLIS : *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*. Carilian-Goeury, 1835.
- [DHL11] V. DELECROIX, P. HUBERT et LELIÈVRE : Diffusion for the periodic wind-tree model. *Arxiv preprint arXiv :1107.1810v3*, 2011.
- [EE12] P. EHRENFEST et T. EHRENFEST : Begriffliche grundlagen der statistischen auffassung in der mechanik. 1912.
- [EE59] P. EHRENFEST et T. EHRENFEST : The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics. 1959.
- [EO01] A. ESKIN et A. OKOUNKOV : Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials. *Inventiones Mathematicae*, 145(1):59–103, 2001.
- [FU11] K. FRACZEK et C. ULCIGRAI : Non-ergodic \mathbb{Z} -periodic billiards and infinite translation surfaces. *Arxiv preprint arXiv :1109.4584*, 2011.
- [GJ00] E. GUTKIN et C. JUDGE : Affine mappings of translation surfaces : geometry and arithmetic. *Duke Mathematical Journal*, 103(2): 191–214, 2000.

- [Gut97] E. GUTKIN : Two applications of calculus to triangular billiards. *The American mathematical monthly*, 104(7):618–622, 1997.
- [Hal58] M. HALL : Solution of the Burnside problem for exponent six. *Illinois Journal of Mathematics*, 2(4B):764–786, 1958.
- [Her06] F. HERRLICH : Teichmüller curves defined by characteristic origamis. In *The geometry of Riemann surfaces and Abelian varieties : III Iberoamerican Congress on Geometry in honor of Professor Sevín Recillas-Pishmish's 60th birthday, June 8-12, 2004, Salamanca, Spain*, volume 397, page 133. Amer Mathematical Society, 2006.
- [HL06] P. HUBERT et S. LELIÈVRE : Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$. *Israel Journal of Mathematics*, 151(1):281–321, 2006.
- [HLT09] P. HUBERT, S. LELIÈVRE et S. TROUBETZKOY : The Ehrenfest wind-tree model : periodic directions, recurrence, diffusion. *Arxiv preprint arXiv :0912.2891*, 2009.
- [Hoo10] W.P. HOOPER : Dynamics on an infinite surface with the lattice property. *preprint*, 2010.
- [HS08] F. HERRLICH et G. SCHMITHÜSEN : An extraordinary origami curve. *Mathematische Nachrichten*, 281(2):219–237, 2008.
- [HS10] P. HUBERT et G. SCHMITHÜSEN : Infinite translation surfaces with infinitely generated Veech groups. *J. Mod. Dyn*, 4:715–732, 2010.
- [HW09] W.P. HOOPER et B. WEISS : Generalized staircases : recurrence and symmetry. *Arxiv preprint arXiv :0905.3736*, 2009.
- [HW10] P. HUBERT et B. WEISS : Dynamics on the infinite staircase. *preprint*, 2010.
- [Kat92] S. KATOK : *Fuchsian groups*. University of Chicago Press, 1992.
- [KMS86] S. KERCKHOFF, H. MASUR et J. SMILLIE : Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials. *The Annals of Mathematics*, 124(2):293–311, 1986.
- [KZ75] A. KATOK et A. ZEMLIAKOV : Topological transitivity of billiards in polygons. *Maths notes*, 18:750–765, 1975.
- [Mas82] H. MASUR : Interval exchange transformations and measured foliations. *The Annals of Mathematics*, 115(1):169–200, 1982.
- [MT02] H. MASUR et S. TABACHNIKOV : Rational billiards and flat structures. *Handbook of dynamical systems*, 1:1015–1089, 2002.
- [San40] I.N. SANOV : Solution of Burnside's problem for exponent four. *Leningrad State Univ. Ann*, 10:166–170, 1940.
- [Sch05] G. SCHMITHÜSEN : *Veech groups of origamis*. Thèse de doctorat, Universität Karlsruhe, 2005.

- [Sul82] D. SULLIVAN : Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers, and the logarithm law for geodesics. *Acta mathematica*, 149(1):215–237, 1982.
- [Tab95] S. TABACHNIKOV : *Billiards*. Société Mathématique de France, 1995.
- [Vee82] W.A. VEECH : Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *The Annals of Mathematics*, 115(2):201–242, 1982.
- [Vee89] W.A. VEECH : Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Inventiones mathematicae*, 97(3):553–583, 1989.
- [Wey16] H. WEYL : Über die gleichverteilung von zahlen mod. 1. *Mathematische Annalen*, 77:313–352, 1916.
- [Yoc11] J-C. YOCOZ : Surfaces à petits carreaux. *Cours du Collège de France*, 2010-2011.
- [Zmi11] D. ZMIAIKOU : *Origamis and permutation groups*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud 11, 2011.
- [Zor06] A. ZORICH : Flat surfaces. *Frontiers in number theory, physics, and geometry I*, pages 439–585, 2006.